Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias
Ciudad Universitaria

Categorías y Superficies de Riemann.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Matemáticas

P R E S E N T A :

Luis Manuel Reyes de la Luz

TUTOR

Dr. Vinicio Antonio Gómez Gutiérrez

Ciudad de México, 2021

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor el Dr. Vinicio Antonio Gómez Gutierrez, quien me guió a travéz de cada una de las etapas de este proyecto y darme orientación. Tambien quiero agradecer al proyecto DGAPA-Papiit IN102918 que apoyo mediante una beca, para la realización de este trabajo. Por ultimo quiero agradecir a mi familia y compañeros, por apoyarme con los ánimos necesarios cuando los necesitaba.
Muchas gracias a todos.

Índice general

Introducción

En este trabajo se presenta material introductorio de dos grandes temas, la teoría de categorías y las superficies de Riemann. El objetivo es introducir los temas y hablar de sus conexiones, la principal conexión son las acciones de grupos, desde un punto de vista general, dado en el capítulo 3 y hablando de uno de sus usos, explicado en el capítulo 5. Las acciones de grupos, son una herramienta muy importante para varías áreas de las matemáticas, como por ejemplo las superficies y sus isometrías, que juegan un papel importante para hablar de la geometría de una superficie obtenida como el cociente de otra superficie, de hecho mostraremos el caso de la cúartica de klein, obtenido mediante una teselación hiperbólica del disco de Poincaré. Sin embargo para hablar con detalle de toda la geometría hiperbólica que hay detrás de la cuártica de Klein, se necesita el estudio de las superficies de Riemann y las acciónes de grupos. Primero, se expone un teorema importante dado por Hurwitz que dice:

Teorema de Hurwitz. Sea G un grupo finito que actúa holomórfa y efectivamente en una superficie de Riemann X de género $g \geq 2$, entonces:

$$|G| \leq 84(g-1)$$

Cuando la superficie es de género $g = 3$, entonces su grupo de isometrías $Iso(M)$ que actúa holomorfa y efectivamente en X, el teorema de Hurwitz nos asegura que $|Iso(M)| \leq 168$, entonces, la cuártica de Klein es presentado como una superficie de Riemann de género 3 donde su grupo de isometrías es de orden 168. En el capítulo 5, se presenta tambíen el porque escoger la geometría hiperbólica para obtener una superficie de Riemann de género 3.

La segunda conexión, se debe a la definición de superficie de Riemann, primero una superficie topológica se define como sigue:

Superficie topológica. Sea X un espacio de Hausdorff, segundo numerable, decimos que X tiene una estructura de superficie(sin frontera) si existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ y una familia de homeomorfismos $\{\phi_i : U_i \to V_i \subseteq \mathbb{R}^2\}_{i\in I}$. A la pareja (U_i, ϕ) se le conoce como carta de X, es decir una superficie es un espacio topológico localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. En este caso es indistinto pensar en una superficie topologica como un espacio topológico localmente homeomorfo a $\mathbb{C}$.

Las superficies topológicas pueden admitir estructuras más finas:

Superficies C^r-diferenciable. Es una superficie X donde para cada par de cartas $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ entonces $U_i \cap U_j = \emptyset$ o bien el homeomorfismo $\phi_j\phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^2 \to \phi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^2$ es diferenciable.

Superficie de Riemann. Es una superficie X con cartas complejas, donde para cada par de cartas $(U_i, \phi_i), (U_j, \phi_j)$ entonces $U_i \cap U_j = \emptyset$ o bien el homeomorfismo $\phi_j\phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C} \to \phi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}$ es holomorfa.

Como se puede ver, en esencia las definiciones de superficie C^r-diferenciable y de Riemann, son similares, sin embargo su diferencia es en su estructura si es diferenciable o holomorfa. Desde un punto de vista más «categórico», es posible dar una definición general de lo que es una superficie, introduciendo el concepto de gavilla, que sirve para generalizar los conceptos de propiedades locales de un objeto geométrico, por ejemplo los divisores o gérmenes. Dado (X, τ) un espacio topológico y consideremos al conjunto τ parcialmente ordenado por la inclusión, definimos la categoría asociada a este conjunto $\mathcal{T}$, entonces una gavilla (con valores en $\mathcal{C}$) es un funtor covariante $\mathcal{F} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}$ con ciertas propiedades de compatibilidad. El ejemplo de gavilla más ilustrativo es el siguiente, si X es una superficie topológica, para cada abierto $U \subseteq X$ se le asocia el conjunto $\mathcal{F}(U) := \{f : X \to \mathbb{R} |\ f \text{ es continua}\}$ llamada gavilla de funciones continuas, en el capítulo 4 se expone la gavilla de funciones holomorfas sobre una superficie de Riemann. Entonces la idea de definir una superficie del tipo diferenciable o de Riemann es que es una superficie topologíca X en el cual existe una subgavilla de la gavilla de las funciones continuas en donde localmente para cada $p \in X$ su tallo (espacio de gérmenes) es isomorfo a un modelo en especifico, $\mathbb{R}$-álgebras si son superficies reales ó $\mathbb{C}$-álgebras si son superficies de Riemann. Con esta perspectiva uno puede trasladar conceptos geométricos a conceptos algebraicos, el área encargada de estos estudios se llama geometría algebraica. Por esta razón, esta tesis se escribe como una introdución a los conceptos categóricos y como puede verse en el caso de una superficie de Riemann.

Capítulo 1

Teoría de Categorías

En este capítulo se dará una exposición breve de conceptos categóricos y se hablará con detalle de algunos de ellos que son importantes, por ejemplo, los productos y coproductos. La idea es presentar esos conceptos que ayudarán a relacionar objetos y definiciones en diferentes categorías. Las más usadas serán la categoría de conjuntos, la de los espacios topológicos y la de grupos. Dando así un enfoque diferente para presentar los conceptos usados en el trabajo.

En las matemáticas existen varias familias de conjuntos con ciertas propiedades y de funciones que las preservan, por ejemplo los grupos y los homomorfismos, los conjuntos y las funciones, los espacios topológicos y las funciones continuas, las variedades diferenciables y las funciones suaves. Cada uno de estos ejemplos es una categoría. En este capítulo empezamos dando la definición de lo que es una categoría y algunas construcciones importantes.

Clases y Universo Desde el descubrimiento de la paradoja de Russell, que muestra que aceptar como conjunto al conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a si mismo como miembros, se llega a una contradicción lógica, se abrió un debate que condujo a la formulación de la Teoría de conjuntos bajo los axiomas de Zermelo-Fraenkel. En nuestra situación, para la teoría de categorías, vamos a exponer los fundamentos para poder hablar de una manera formal situaciones como la colección de todos los grupos o la colección de todos los conjuntos.

Definición 1.1: Universo

Un universo es un conjunto U con las siguientes propiedades:

1. $x \in y,\ y \in U \Rightarrow\ x \in U$.
2. $I \in U$ y $\forall i \in I, x_i \in U \Rightarrow \bigcup_{i\in I} x_i \in U$.
3. $x \in U \Rightarrow P(x) \in U$.
4. $x \in U$ y $f : x \to y$ función sobreyectiva $\Rightarrow y \in U$.

Donde $P(x)$ denota el conjunto potencia de x.

Una consecuencia directa de la definición es lo siguiente:

Observación. *Las siguientes afirmaciones son válidas para un universo U:*

1. $x \in U$ *y* $y \subset x$ *entonces* $y \in U$.
2. $x, y \in U$ *entonces* $\{x, y\} \in U$.
3. $x, y \in U$ *entonces* $x \times y \in U$.
4. $x, y \in U$ *entonces* $x^y \in U$.

Donde $x^y := \{f \subset y \times x |\ f \text{ es función}\}$. Con esto, necesitaremos el axioma de la existencia de un universo.

Axioma 1.1: Existencia de un universo

Cada conjunto está dentro de algún universo.

Como convención tenemos.

Convención. *Fijaremos un universo U y denominaremos conjuntos pequeños a los elementos de U.*

De esta manera, usando el axioma (1.1) tenemos la siguiente observación.

Observación. *Existe un conjunto S con la propiedad de que $x \in S$ si y sólo si x es un conjunto pequeño.*

Por último, vamos a usar la teoría de Gödel-Bernays, introduciremos la noción de clase. Para ello introduciremos los siguientes dos axiomas.

Axioma 1.2:

Una clase es un conjunto si y sólo si está contenido en alguna otra clase

Axioma 1.3: Esquema de compresión

Si $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ es una fórmula bien formada donde la cuantificación ocurre en un conjunto de variables, entonces existe una clase A tal que $(x_1, \cdots, x_n) \in A$ si y sólo si ocurre $\phi(x_1, \cdots, x_n)$

Gracias al axioma (1.3) tenemos una manera formal para la creación de una clase a partir de una fórmula bien formada, donde se cuantifica en un conjunto de variables. Por ejemplo, podemos crear una clase GRP tal que $(G, +) \in GRP$ si y sólo si $(G, +)$ es un grupo, suponiendo que el conjunto de variables está en un universo U. Dicho de otra manera, si se supone la existencia de universos, entonces los axiomas (1.2) y (1.3) de la teoría de Gödel, establece que puede usar los elementos del universo U de la convención dada, para crear clases y son precisamente los subconjuntos de U, aquellos que serán considerado como clases, entonces tenemos un modelo de la teoría de Gödel para formar las colecciones de conjuntos grandes. Como convención adicional a los subconjuntos de U, se les denominará clases y a los conjuntos pequeños, se les denominará conjuntos. Con estas ideas desarrolladas estableceremos la teoría de categorías en la siguiente sección.

1.1. Principios de la Teoría de Categorías

Empezaremos por dar una definición de categoría, basada en [3].

Definición 1.2: Categorías

Una categoría $\mathcal{A}$ consiste en lo siguiente:

1. Una Clase $\mathcal{A}_0$. A los elementos de $\mathcal{A}_0$ les llamaremos objetos de la categoría.

2. Para cada par de objetos A, B, un conjunto $\mathcal{A}(A, B)$. A los elementos de $\mathcal{A}(A, B)$ les llamaremos morfismos o $\mathcal{A}$-morfismos de A a B

3. Una Clase $\mathcal{A}_1$ que contiene a todos los conjuntos de forma $\mathcal{A}(A, B)$, con $A, B \in \mathcal{A}_0$.

4. Para A, B, C objetos de $\mathcal{A}_0$, si $A \neq C$ ó $B \neq D$ entonces $\mathcal{A}(A, B) \cap \mathcal{A}(C, D) = \emptyset$.

5. Para A, B, C objetos de $\mathcal{A}_0$, existe una función llamada composición, definida en el conjunto de morfismos

$$\mathcal{A}(A, B) \times \mathcal{A}(B, C) \to \mathcal{A}(A, C)$$

   Para cada pareja (f, g) su composición se denota como $g \circ f$ o gf. Esta composición satisface lo siguiente:

   a) (Axioma de Identidad): Para cada objeto A, existe un morfismo $I_A \in \mathcal{A}(A, A)$ llamado identidad tal que , para cada morfismo $f \in \mathcal{A}(A, B)$ y cada morfismo $g \in \mathcal{A}(C, A)$ se satisface
$$fI_A = f, \ I_B g = g$$

   b) (Axioma de Asociatividad): Para todo morfismos $f \in \mathcal{A}(A, B), g \in \mathcal{A}(B, C), h \in \mathcal{A}(C, D)$ la siguiente igualdad se cumple:
$$h(gf) = (hg)f$$

Si no hay posibilidad de confusión podemos escribir $Hom(A, B)$ en vez de $\mathcal{A}(A, B)$. Consideremos los siguientes ejemplos:

1. La categoría de Conjuntos, denotada como Set, donde los objetos son conjuntos y los morfismos son funciones.

2. La categoría de Espacios Topológicos, denotado como Top, donde los

objetos son espacios topológicos y los morfismos son funciones continuas.

3. La categoría de Grupos, denotada como Grp, donde los objetos son grupos y los morfismos son morfismos de grupos.

4. La categoría de Espacios Vectoriales bajo un campo k, denotada como $Vect_k$, donde los objetos son k-espacios vectoriales y los morfismos son funciones k-lineales.

5. Sea $\mathcal{A}_0 = \mathbb{N}$ y los morfismos de n a m son las matrices con n filas y m columnas con coeficientes en $\mathbb{N}$, es decir $\mathcal{A}(n,m) = \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{N})$, en este caso la composición se define como el producto de matrices, es decir $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{N}) \times \mathbb{M}_{m\times q}(\mathbb{N}) \to \mathbb{M}_{n\times q}(\mathbb{N});\ (A,B) \to AB$ y la identidad es la matriz identidad $I_n \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{N}) = \mathcal{A}(n,n)$.

6. Tomemos un grupo G. G se puede ver como una categoría en la cual solo hay un objeto $\mathcal{A}_0 = \{*\}$ y el conjunto de morfismos para $\{*\}$ es $\mathcal{G}(*,*) = G$ con la ley de composición dada por la multiplicación del grupo, la identidad es el elemento identidad del grupo.

7. Un conjunto parcialmente ordenado $(X,\leq)$ se puede ver como una categoría Σ donde los objetos son los elementos de X, es decir $\Sigma_0 = X$, y los morfismos $\Sigma(x,y)$ son un conjunto con un elemento cuando $x \leq y$. Lo denotamos por $f_{x,y}$, o el conjunto vacío en otro caso. Para definir la composición de dos morfismos tomemos en cuenta que sólo existe una función $\Sigma_0(x,y) \times \Sigma_0(y,z) \to \Sigma_0(x,z)$ ya que el contradominio o es un conjunto de un elemento o es el conjunto vacío. Veamos todos los posibles casos.

Una forma visual de representar los morfismos y su composición es mediante diagramas, por ejemplo consideremos una categoría $\mathcal{C}$ y un morfismo $f \in \mathcal{C}(A,B)$ el morfismo f se puede representar como sigue: $f : A \to B$, la composición de dos morfismos se puede representar como sigue:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

De manera más general, decimos que un diagrama conmuta si coinciden las composiciones, por ejemplo consideremos el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Decimos que el triángulo conmuta si se satisface $g \circ f = h$.
Otro ejemplo. Para que el cuadrado siguiente conmute:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "i"'] & D \end{tikzcd}$$

Debe satisfacer $g \circ f = i \circ h$. Bajo esta convención, vamos a dar un ejemplo de una categoría construída a partir de otra ya existente.
Consideremos una categoría $\mathcal{C}$, la categoría de $\mathcal{C}$-morfismos se define por:

1. Objetos: Los morfismos $f : A \to A'$, donde $A, A', \mathcal{C}_0$

2. Morfismos : Un morfismo de $(f : A \to A')$ a $(g : B \to B')$ es un par de $\mathcal{C}$-morfismos $(u : A \to B, v : A' \to B')$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A' \arrow[r, "v"'] & B' \end{tikzcd}$$

.

Existe una composición definida por:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "h"] \\ A' \arrow[r, "v"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \end{tikzcd}.$$

Entonces la composición es $(u'u : A \to C, v'v : A' :\to C')$.
Uno puede verificar facilmente que se satisfacen los axiomas de asociatividad y de identidad, donde la identidad es $(I_A : A \to A, I_{A'} : A' \to A')$. Esta categoría de diagramas es un caso especial de una categoría más general

llamada categoría coma.
Veamos otro ejemplo de categoría obtenida de $\mathcal{C}$, fijemos un objeto $I \in \mathcal{C}_0$ la categoría de morfismos bajo I, es la categoría donde los objetos son morfismos de la forma $(f : A \to I)$, y un morfismo entre dos objetos dentro de esta categoría es un $\mathcal{C}$-morfismo tal que conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & I \end{tikzcd}$$

. Así como en la categoría de diagramas, la composición está dada por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Uno puede verificar que es una categoría, además observemos que el diagrama es equivalente a este diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "h"] \\ I \arrow[r, "I_I"] & I \arrow[r, "I_I"] & I \end{tikzcd}$$

. Entonces esta categoría se puede ver como una subcategoría de la categoría de diagramas. Damos una definición de subcategoría.

Definición 1.3: Subcategoría

Sea $\mathcal{C}$ una categoría, una subcategoría $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ consiste en lo siguiente:

1. Una subcolección $\mathcal{D}_0$ de objetos de $\mathcal{C}_0$.
2. Una subcolección de morfismos $\mathcal{D}_1$ de $\mathcal{C}_1$ de tal manera que:
   a) Para cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{D}_1$, se tiene que $A, B \in \mathcal{D}_0$.
   b) Para cada objeto $A \in \mathcal{D}_0$, I_A está en $\mathcal{D}_1$.
   c) Si $f : A \to B,\ g : B \to C$ son morfismos en $\mathcal{D}_1$ entonces $g \circ f$ está en $\mathcal{D}_1$.

Unos ejemplos sencillos son la categoría de grupos abelianos como subcategoría de la categoría de grupos, la categoría de espacios de Hausdorff como subcategoría de la categoría de espacios topológicos, la categoría de diagramas bajo un objeto fijo I como subcategoría de la categoría de diagramas.

Definición 1.4: Funtor

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos categorías. Un funtor $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$, denotado como $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, consiste en lo siguiente

1. Una asignación entre la clases objetos $\mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_0$ que a cada $A \in \mathcal{A}_0$ le asigna un objeto $\mathcal{F}(A) \in \mathcal{B}_0$

2. Para cada par de objetos A, A' de $\mathcal{A}$, una función de conjuntos $\mathcal{F}_1 : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(A'))$ tal que satisface las siguientes identidades:

   a) $\mathcal{F}_1(g \circ f) = \mathcal{F}_1(g) \circ \mathcal{F}_1(f)$

   b) Para cada objeto $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{F}_1(I_A) = I_{\mathcal{F}_0(A)}$

Ahora sean $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores, definimos la composición de dos funtores $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ como sigue:

1. Para cada objeto $A \in \mathcal{A}_\prime$, se le asigna un objeto $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(A) := G(F(A))$.

2. Para cada morfismo $f : A \to B$, se le asigna el morfismo $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})_1(f) = \mathcal{G}_1(\mathcal{F}_1(f))$

También, para cada categoría $\mathcal{C}$, definimos el funtor identidad $\mathcal{I} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ como sigue:

1. Para cada objeto $A \in \mathcal{A}_\prime$, se le asigna un objeto $(\mathcal{I})(A) := A$.

2. Para cada morfismo $f : A \to B$, se le asigna el morfismo $(\mathcal{I})_1(f) = f$

Definición 1.5: Categorías pequeñas

Una categoría $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña cuando su clase de objetos es un conjunto.

Proposición 1.1. *Las categorías pequeñas y los funtores entre ellas como sus morfismos, constituyen una categoría.*

Para una demostración véase [3]. Un ejemplo clásico de funtor, es el funtor representable, tomemos un objeto fijo A en una categoría $\mathcal{C}$ definimos el funtor $Hom(A, -) : \mathcal{C} \to Set$ como sigue, para cada objeto X en $\mathcal{C}$ se asigna $Hom(A, X)$, y para cada morfismo $f : X \to Y$ se asigna la función $\mathcal{F}(f) : Hom(A, X) \to Hom(A, Y)$ definido por $\mathcal{F}(f)[g] = (f \circ g : A \to Y)$.

Dualidad En la teoría categorías, existe el siguiente concepto de dualidad, dado una categoría $\mathcal{C}$ definimos su **dual** como la categoría donde los objetos son los objetos de $\mathcal{C}$ y para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}_0$, definimos su conjunto de morfismos $\mathcal{C}^{op}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$ y la composición se define como sigue; dados morfismos $f : A \to B,\ g : B \to C$ en $\mathcal{C}^{op}$, entonces $g \circ' f := f \circ g$. La definición de funtor es llamado también funtor covariante. Usando la categoría opuesta podemos definir un **funtor contravariante** como un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$. Notemos que la categoría dual de la categoría dual es $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.

Definición 1.6: Objeto inicial y terminal

En una categoría $\mathcal{C}$ un objeto I es inicial si para todo objeto X, existe un único morfismo $f : I \to X$ es decir que $\mathcal{C}(I, X)$ consta de sólo un elemento. Un objeto F es terminal si para todo objeto X, existe un único morfismo $g : X \to F$ es decir que $\mathcal{C}(X, F)$ consta de sólo un elemento. Un objeto cero es un objeto inicial que es también un objeto terminal.

Más adelante se tratará acerca de definiciones duales.

Siguiendo la idea de la categoría de diagramas, podemos crear una relación entre funtores. De hecho en las matemáticas, por ejemplo en la topología, dadas dos funciones continuas, existe una noción de homotopía entre estas funciones mediante la cual se puede transformar una función en otra, dicho concepto se estudiará más adelante. Mientras que en la teoría de categorías existe una situación similar.

Definición 1.7: Transformaciones naturales

Consideremos dos funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, una transformación natural $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ es una clase de morfismos $(\alpha_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A))_{A\in\mathcal{A}}$ de $\mathcal{B}$ indicado por $\mathcal{A}_0$ tal que cada morfismo $f : A \to A'$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\ \mathcal{F}(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & \mathcal{G}(A') \end{tikzcd}$$

Notemos que para tres funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ con transformaciones naturales $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}, \beta : \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$, podemos definir una transformación natural de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{H}$ como sigue, para cada objeto A en $\mathcal{A}$ el morfismo es definido como $(\beta\circ\alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$. Podemos construir una categoría de funtores, véase [3].

Proposición 1.2. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría pequeña y $\mathcal{B}$ una categoría. La clase de los funtores de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ y la clase de las transformaciones naturales entre ellos constituyen una categoría denotado como $Fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, más aún esta categoría es pequeña cuando B es pequeña.*

Demostración: Los objetos y los morfismos en esta categoría son:

1. $Fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})_0$ como la clase de los funtores de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

2. $Funt(\mathcal{A}, \mathcal{B})_1$ como la clase de las transformaciones naturales entre ellos.

3. Dadas $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G},\ \beta : \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$ transformaciones naturales, entonces definimos la composición como la transformación natural $\beta\circ\alpha$ definida anteriomente.

Vamos a verificar que la composición satisface los axiomas de identidad y asociatividad. Dado $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor, definimos $Id_F : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ como la familia de morfismos $\{Id_A : A \to A\}_{A\in\mathcal{A}}$, esta familia de morfismos es una transformación natural y además satisface lo siguiente:

1. Dado un objeto $A \in \mathcal{A}_0$, entonces para cada transformación natural $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$, entonces por definición tenemos:

$$(\alpha \circ Id_F)(A) = \alpha_A \circ Id_A = \alpha_A = \alpha(A)$$

$$(Id_G \circ \alpha)(A) = Id_A \circ \alpha_A = \alpha_A = \alpha(A)$$

Entonces $\alpha \circ Id_F = \alpha$ y $Id_G \circ \alpha = \alpha$

2. Dadas $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}, \beta : \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}, \gamma : \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{I}$, tenemos para cada objeto $A \in \mathcal{A}_0$ tenemos:

$$\begin{aligned}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))(A) &= \alpha_A \circ (\beta \circ \gamma)_A \\ &= \alpha_A \circ (\beta_A \circ \gamma_A) \\ &= (\alpha_A \circ \beta_A) \circ \gamma_A \\ &= (\alpha \circ \beta)_A \circ \gamma_A \\ &= ((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)(A)\end{aligned}$$

Entonces $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$, mostrando que satisface los axiomas de identidad y asociatividad. Por tanto $Fun(A, B)$ es una categoría. Además, si $\mathcal{B}$ es una categoría pequeña, entonces la clase de funtores es un conjunto, por lo tanto $Fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ es una categoría pequeña.$\square$

Dado dos funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre dos categorías decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son **naturalmente isomorfos**, si existen transformaciones naturales $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ y $\beta : \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\alpha \circ \beta = Id_G$ y $\beta \circ \alpha = Id_F$. Algunos tipos especiales de funtores son los siguientes

Definición 1.8: Funtores plenos y fieles

Sea $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor y las funciones:

$$\mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(A')),\ f \to \mathcal{F}(f)$$

para cada par de objetos A, A' en $\mathcal{A}$. Decimos que el functor $\mathcal{F}$ es:

1. Fiel, cuando las funciones mencionadas son inyectivas para cada par de objetos $A, A' \in \mathcal{A}_0$.

2. Pleno, cuando las funciones mencionadas son sobreyectivas para todos los objetos A, A'.

Existen dos nociones para hablar de isomorfismos entre funtores. Una primera definición es, el funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un isomorfismo si existe un funtor $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = Id_B$ y $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = Id_A$, pero esta noción es muy fuerte. Otra definición más débil es la siguiente, el funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un isomorfismo natural si existe un funtor $\mathcal{G}: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{GF}$ es naturalmente isomorfo a Id_A y $\mathcal{FG}$ es naturalmente isomorfo a Id_B. Para estudiar las propiedades que cumplen cada tipo de functor debemos caracterizar ciertos tipos de morfismos.

Definición 1.9: Morfismos especiales

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo, decimos que f es:

1. Monomorfismo, si satisface la siguiente propiedad; para cada par de morfismos $g, h : C \to A$ tal que $f \circ g = f \circ h$ se tiene que $g = h$.

2. Epimorfismo, si satisface la siguiente propiedad; para cada par de morfismos $g, h : B \to C$ tal que $g \circ f = h \circ f$ se tiene que $g = h$.

3. Bimorfismo, si es monomorfismo y epimorfismo.

4. Sección, si existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = I_B$, en este caso f se llama retracción.

5. Isomorfismo, si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A,\ f \circ g = I_B$.

Además, un morfismo $f : A \to A$ se denomina endomorfismo, y cuando $f : A \to A$ es un isomorfismo se denomina automorfismo.

Observemos que epimorfismo es el concepto dual de monomorfismo y retracción es el concepto dual de sección, mientras que bimorfismo es un concepto autodual, es decir que el dual de bimorfismo es bimorfismo, asímismo el concepto de isomorfismo es autodual.

Consideremos un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, sea P una propiedad que puede cumplir un objeto, decimos que $\mathcal{F}$ preserva P si para cada objeto X que satisface P se tiene que $\mathcal{F}(X)$ satisface la propiedad P, de la misma manera para propiedades de morfismos. También decimos que $\mathcal{F}$ refleja P si para cada objeto X tal que $\mathcal{F}(X)$ satisface P se tiene que X satisface P, de la misma manera para propiedades de morfismos.

A continuación daremos algunas propiedades acerca de los monomorfismos y epimorfismos.

Proposición 1.3. *En una categoría $\mathcal{C}$:*

1. *Cada morfismo identidad es un monomorfismo.*
2. *La composición de monomorfismos es un monomorfismo.*
3. *Si la composición $k \circ f$ es un monomorfismo entonces f es un monomorfismo.*
4. *Cada sección es un monomorfismo.*

Demostración: El primer inciso es obvio, para el segundo inciso consideremos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos monomorfismos, para mostrar que $g \circ f : A \to C$ es monomorfismo, consideremos $u, v : X \to A$ morfismos tal que $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$ por asociatividad tenemos $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$, como g es monomorfismo entonces $f \circ u = f \circ v$, como f es monomorfismo entonces $u = v$ completando la prueba del inciso 2.

Para el inciso 3, consideremos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ morfismos tal que $g \circ f : A \to C$ es un monomorfismo, para demostrar que f es un monomorfismo, consideremos $u, v : X \to A$ tal que $f \circ u = f \circ v$, componiendo con g tenemos $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$, por asociatividad tenemos $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v)$ usando que $g \circ f$ es un monomorfismo entonces $u = v$, por tanto f es un monomorfismo.

Sea $s : A \to B$ una sección, y sean $u, v : C \to A$ morfismos tales que $s \circ u = s \circ v$, por ser s una sección, entonces existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ s = I_A$, entonces componiendo la identidad anterior con u tenemos:

$$\begin{aligned} u &= I_A \circ u = (g \circ s) \circ u \\ &= g \circ (s \circ u) \\ &= g \circ (s \circ v) \\ &= (g \circ s) \circ v \\ &= I_A \circ v \\ &= v \end{aligned}$$

Por tanto s es un monomorfismo. □

Proposición 1.4. *Los functores fieles reflejan monomorfismos y epimorfismos.*

Demostración: Consideremos $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor fiel, y consideremos $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{F}(f)$ es monomorfismo. Consideremos $u, v : A \to X$ morfismos en $\mathcal{A}$ tal que $f \circ u = f \circ v$, aplicando el functor tenemos $\mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(v)$ como $\mathcal{F}(f)$ es un monomorfismo tenemos que $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(v)$. Como $\mathcal{F}$ es fiel, la última igualdad implica que $u = v$, por lo tanto f es un monomorfismo en $\mathcal{A}$. La demostración para epimorfismos es dual a la demostración dada. $\square$

Proposición 1.5. *En una categoría:*

1. *La identidad es un isomorfismo.*
2. *La composición de isomorfismos es un isomorfismo.*
3. *Un isomorfismo es un bimorfismo, pero en general no todo bimorfismo es un isomorfismo.*
4. *Si una sección es un epimorfismo entonces es un isomorfismo.*
5. *Todos los functores preservan isomorfismos.*
6. *Un functor fiel y completo refleja isomorfismos.*

Demostración: El inciso (1) es obvio, para el inciso (2) sea $f : A \to B$ y $g : B \to C$ isomorfismos entonces existen $f' : B \to A$ y $g' : C \to B$ tales que:

$$ff' = I_B \quad f'f = I_A \quad gg' = I_C \quad g'g = I_B \tag{1.1}$$

Por demostrar que gf es sección y retracción. Sea $h = f'g'$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}
(gf)h &= (gf)(f'g') \\
&= g(ff')g' \\
&= g(I_B g') \\
&= gg' \\
&= I_C \\
h(gf) &= (f'g')(gf) \\
&= f'(g'g)f \\
&= f'(I_B f) \\
&= f'f \\
&= I_A
\end{aligned}$$

Si $f : A \to B$ es un isomorfismo entonces existe $f' : B \to A$ tal que satisface las identidades de (1.1), entonces si se tiene las ecuaciones de morfismos:

$$uf = vf \quad fu = fv$$

En la primera ecuación componiendo f por la izquierda y en la segunda ecuación componiendo f por la derecha, al usar (1.1) obtenemos $u = v$ por tanto f es un monomorfismo y un epimorfismo, es decir es un bimorfismo.

Para el inciso (4), sea $f : A \to B$ un epimorfismo y una sección, por ser sección existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$, componiendo con f obtenemos:

$$(fg)f \quad = \quad f(gf) = fI_A = I_B f$$

Por ser f epimorfismo obtenemos $fg = I_B$ por tanto f es un isomorfismo.
Para (5). Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor y $f : A \to B$ un isomorfismo en $\mathcal{C}$, entonces existe un morfismo $f' : B \to A$ tal que satisfacen las identidades (1,1). Como $\mathcal{F}$ es funtor entonces la imagen de (1.1) bajo F satisface:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(f') &= \mathcal{F}(ff') = \mathcal{F}(I_B) = I_{F(B)} \\ \mathcal{F}(f')\mathcal{F}(f) &= \mathcal{F}(f'f) = \mathcal{F}(I_A) = I_{F(A)} \end{aligned}$$

Por tanto $F(f)$ es un isomorfismo en D.
Para (6) sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor fiel y pleno, supongamos que para un morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}(f)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$ entonces $\mathcal{F}(f)$ tiene un inverso $g : \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A)$, pero como F es pleno, entonces existe un morfismo $f' : B \to A$ tal que $\mathcal{F}(f') = g$, obteniendo las siguientes identidades:

$$F(f)F(f') = I_{FB} \Rightarrow F(ff') = F(I_B), \;\; F(f')F(f) = I_{FA} \Rightarrow F(f'f) = F(I_A)$$

Como $\mathcal{F}$ es fiel, las identidades anteriores implican $ff' = I_B$ y $f'f = I_A$ por lo tanto f es un isomorfismo en $\mathcal{C}$.$\Box$
De la proposición anterior tenemos que todo isomorfismo es bimorfismo, sin embargo, existen categorías donde los bimorfismos no son isomorfismos. Por ejemplo consideremos la categoría *Rng* donde los objetos son anillos y los morfismos son homomorfismos de anillos. Consideremos el morfismo inclusión $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, este morfismo es monomorfismo y epimorfismo, pero i no puede ser isomorfismo ya que $\mathbb{Z}$ no es un campo y $\mathbb{Q}$ si es un campo.

Definición 1.10: Categorías balanceadas

Una categoría en la que todo bimorfismo es un isomorfismo se llama categoría balanceada.

1.2. Límites

Muchos de los objetos importantes que cumplen una propiedad universal se pueden construir mediante el concepto de límite. Por ejemplo los productos, coproductos, los productos fibrados, núcleos, límites directos entre otros. Vamos a dar una definición general de límites con sus principales propiedades, después explicaremos algunos de los objetos que más nos interesan.

Definición 1.11: Conos

Consideremos un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Un cono de $\mathcal{F}$ consiste de:

1. Un objeto $C \in \mathcal{C}_0$
2. Para cada objeto $D \in \mathcal{D}$, un morfismo $p_D : C \to \mathcal{F}(D)$ en $\mathcal{C}$ de tal manera que para todo morfismo $d : D \to D'$ en $\mathcal{D}$ el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p_D"] \arrow[dr, "p_{D'}"'] & \mathcal{F}(D) \arrow[d, "\mathcal{F}(d)"] & D \arrow[d, "d"] \\ & \mathcal{F}(D') & D' \end{tikzcd}$$

Al cono lo denotaremos como $(C, (p_D)_{D\in\mathcal{D}})$.

Dados dos conos $(C, (p_D)_{D\in\mathcal{D}})$, $(C', (q_D)_{D\in\mathcal{D}})$ de $\mathcal{F}$, decimos un morfismo $f : C \to C'$ en $\mathcal{C}$ es un morfismo de conos de $\mathcal{F}$ si para cada objeto $D \in \mathcal{D}_0$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_D"'] & & C' \arrow[dl, "q_D"] \\ & \mathcal{F}(D) & \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que la composición de morfismos de conos de $\mathcal{F}$ es un morfismo de conos y que para cada cono $(C, (p_D)_{D\in\mathcal{D}})$ el morfismo identidad $I_C : C \to C$

en $\mathcal{C}$ es también el morfismo identidad del cono. Estas observaciones nos inducen una categoría $Cono(\mathcal{F})$ donde los objetos son los conos de $\mathcal{F}$ y los morfismos son morfismos de conos de $\mathcal{F}$. Además definimos un funtor olvido $U : Cono(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}$ donde a cada cono $(C, (p_D)_{D\in\mathcal{D}})$ es asignado simplemente como C y para cada morfismo de conos f como un morfismo en $\mathcal{C}$. Este es un funtor fiel.

Definición 1.12: Límite de un Funtor

Dado un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, un límite de $\mathcal{F}$ es un cono $(L, (p_D)_{D\in\mathcal{D}})$ en $\mathcal{F}$ tal que, para cada cono $(M, (q_D)_{D\in\mathcal{D}})$ en $\mathcal{F}$, existe un único morfismo $m : M \to L$ tal que, conmuta el triángulo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, dashed, "m"] \arrow[dr, "q_D"'] & & L \arrow[dl, "p_D"] \\ & \mathcal{F}(D) & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

En otras palabras, un límite es un objeto terminal en $Cono(\mathcal{F})$. Es fácil ver que un objeto terminal T en una categoría $\mathcal{C}$ si existe entonces es único salvo isomorfismo. Para ver esto, dado T, T' dos objetos terminales en $\mathcal{C}$ entonces por definición de objeto terminal, existen únicos morfismos $f : T \to T', g : T' \to T$, además como $\mathcal{C}(T,T) = \{I_T\}, \mathcal{C}(T',T') = \{I_{T'}\}$ entonces $f \circ g : T' \to T'$ es el morfismo $I_{T'}$ y $g \circ f : T \to T$ es el morfismo I_T, es decir $f \circ g = I_{T'},\ g \circ f = I_T$, mostrando que $T \cong T'$. En particular tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.6. *Cuando un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ admite un límite, entonces ese límite es único bajo isomorfismos.*

Proposición 1.7. *Si $(L, (p_D)_{D\in\mathcal{D}})$ es un límite del funtor $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, dos morfismos $f, g : M \to L$ en $\mathcal{C}$ son iguales siempre y cuando para todo objeto $D \in \mathcal{D}$ se cumple $p_D \circ f = p_D \circ g$*

Demostración: Si son iguales, entonces todo objeto $D \in \mathcal{D}$ satisface $p_D \circ f = p_D \circ g$. Ahora supongamos que se satisface la igualdad $p_D \circ f = p_D \circ g$ para cada objeto $D \in \mathcal{D}$, consideremos el cono $(M, (p_D \circ f)_{D\in\mathcal{D}})$ entonces por definición de límite la unicidad del morfismo $m : M \to L$ asegura que $f = m = g$. $\square$

De manera dual se puede definir el concepto de cocono, y colímite. Ahora mostraremos definiciones y construcciones de algunos límites importantes.

Consideremos dos functores $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y una transformación natural $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$, tomemos $(L, (p_D)_{D \in \mathcal{D}})$ un cono de $\mathcal{F}$ y $(Q, (q_D)_{D \in \mathcal{D}}))$ el límite de $\mathcal{G}$, entonces tenemos $(L, (\alpha_D \circ p_D)_{D \in \mathcal{D}}))$ un cono de $\mathcal{G}$, esto se puede ver fácilmente desde el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(D) \arrow[r, "\alpha_D"] \arrow[dd, "\mathcal{F}(d)"] & \mathcal{G}(D) \arrow[dd, "\mathcal{G}(d)"] & \\
L \arrow[ur, "p_D"] \arrow[dr, "p_{D'}"'] & & & Q \arrow[ul, "q_D"'] \arrow[dl, "q_{D'}"] \\
 & \mathcal{F}(D') \arrow[r, "\alpha_{D'}"] & \mathcal{G}(D') &
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Como Q es un límite de $\mathcal{G}$ entonces existe un único morfismo $h : L \to Q$ tal que conmuta el diagrama para todo $D \in \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_D"'] & Q \arrow[d, "q_D"] \\
\mathcal{F}(D) \arrow[r, "\alpha_D"'] & \mathcal{G}(D)
\end{tikzcd}$$

En especial cuando el cono L es el límite de $\mathcal{F}$. Dualmente dado un cocono (Q, q'_D) en $\mathcal{G}$ y un colímite (L, p'_D) de $\mathcal{F}$ entonces existe un único morfismo $h : L \to Q$ tal que conmuta el cuadrado siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(D) \arrow[r, "\alpha_D"] \arrow[d, "p'_D"'] & \mathcal{G}(D) \arrow[d, "q'_D"] \\
L \arrow[r, "h"'] & Q
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.8. *Dados tres funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ con límites existentes denotados L_1, L_2, L_3 respectivamente y dadas dos transformaciones naturales $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$, $\beta : \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$ con los morfismos inducidos $h_\alpha : L_1 \to L_2$, $h_\beta : L_2 \to L_3$ entonces el morfismo inducido por la transformación natural $\beta \circ \alpha$ definido como $h_{\beta\circ\alpha} : L_1 \to L_3$ satisface la siguiente identidad:*

$$h_{\beta\circ\alpha} = h_\beta \circ h_\alpha$$

Más aún, sea la transformación natural identidad $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ definida para todo objeto $D \in \mathcal{D}_0$ como $\alpha_D = I_{F(D)}$, entonces $h_\alpha = I_{L_1}$

Demostración: Consideremos el diagrama conmutativo para cada objeto $D \in \mathcal{D}_0$ fijo arbitrario

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[d, "p_D"] & L_2 \arrow[r, "h_\beta"] \arrow[d, "q_D"] & L_2 \arrow[d, "w_D"] \\ \mathcal{F}(D) \arrow[r, "\alpha_D"] & \mathcal{G}(D) \arrow[r, "\beta_D"] & \mathcal{H}(D) \end{tikzcd}$$

Entonces $h_\beta \circ h_\alpha$ satisface el cuadrado conmutativo de la transformación natural $\beta \circ \alpha := \{\beta_D \circ \alpha_D : \mathcal{F}(D) \to \mathcal{H}(D)\}_{D \in \mathcal{D}}$ entonces por unicidad en la propiedad universal de los límites se tiene que $h_{\beta\circ\alpha} = h_\beta \circ h_\alpha \square$.

1.2.1. Productos y coproductos.

Si X es un conjunto, podemos darle una estructura de categoría $\mathcal{X}$ de la manera siguiente: que X sea la clase de los objetos de $\mathcal{X}$ y que el conjunto de los morfismos $\mathcal{X}(x, y)$ sea $\{x\}$ cuando $x = y$ y $\emptyset$ en otro caso. A esta categoría se le llama **categoría discreta.**

Un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ en una categoría $\mathcal{C}$ define una colección de objetos en la categoría $\mathcal{C}$ indicada por elementos de X. Denotamos a estos objetos C_x con $x \in X$ y $C_x \in \mathcal{C}$, y el límite del funtor $\mathcal{F}$ en caso de existir, se describe como sigue:

El límite de $\mathcal{F}$, es un objeto P de la categoría $\mathcal{C}$, con morfismos $p_{C_x} : P \to C_x$ tal que para cada par de objetos $(Q, \{q_{C_x} : Q \to C_x\})$ existe un único morfismo $h : Q \to P$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "q_{C_x}"'] & P \arrow[d, "p_{C_x}"] \\ & C_x \end{tikzcd}$$

Esta es la definición usual de producto de la colección $(C_x)_{x\in X}$ y es denotado por $P = \prod_{x\in X} C_x$, mientras que los morfismos p_{C_x} del límite son llamados proyecciones.

De igual manera el coproducto de una colección $(C_x)_{x\in X}$, es el colímite del funtor $\mathcal{F} : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ y es denotado como $\amalg_{x\in X} C_x$. y los morfismos del colímite son llamados inyecciones.

Ahora fijemos $C_y \in (C_x)_{x \in X}$. Si construimos un cono $(C_y, s_x : C_y \to C_x)$, donde $s_y = I_{C_y}$ entonces se satisface:

$$\begin{tikzcd} & C_y \arrow[dl, "s_x"'] \arrow[dr, "s_x"] & \\ C_x \arrow[rr, "I_X"] & & C_x \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Entonces por definición de límite tenemos que existe un único morfismo $u_y : C_y \to \prod_{x \in X} C_x$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} C_y \arrow[rr, "u_y"] \arrow[dr, "I_{C_y}"] & & \prod_{x \in X} C_x \arrow[dl, "p_y"] \\ & C_y & \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Mostrando que en esa situación p_y es una retracción, esta construcción dada sirve para mostrar una pequeña relación entre productos y coproductos que frecuentemente aparece en las categorías concretas y en especial las categorías con objeto cero. Consideremos una categoría con objeto cero, para cada objeto A, B de la categoría definimos el morfismo cero $f : A \to B$, como un morfismo que se puede factorizar a través del objeto cero 0. Es decir que conmuta el siguiente triángulo;

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \\ & 0 \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

Como notación adicional, si tenemos una colección de objetos $(C_i)_{i \in I}$ de una categoría con objeto cero indicado por un conjunto I entonces definimos el morfismo $\delta_{ij} : C_i \to C_j$ de la siguiente manera, cuando $i = j$ entonces $\delta_{ij} = I_{C_i}$, en otro caso δ_{ij} es el morfismo cero.

Proposición 1.9. *En una categoría con objeto cero y dada una colección de objetos $(C_i)_{i \in I}$ indicados por un conjunto I, si existe el producto de esta colección, entonces existen morfismos únicos $u_i : C_i \to \prod_{i \in I} C_i$ tales que se satisface la siguiente identidad: $p_i u_j = \delta_{ij}$.*

Demostración: Para cada C_i fija definimos el cono $(C_i, \{\delta_{ij} : C_i \to C_j)\}$, entonces por definición de límite existe un único $u_i : C_i \to \prod_{i \in I} C_i$ tal que $p_i u_j = \delta_{ij}$, realizando el procedimiento para cada C_i se obtiene el resultado deseado. □

Esta familia de morfismos $u_i : C_i \to \prod_{i \in I} C_i$ induce un único morfismo al que denotaremos $\delta = (\delta_{ij}) : \coprod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} A_i$. Cuando δ es un isomorfismo, entonces el coproducto es llamado biproducto, y es denotado como $\bigoplus_{i \in I} A_i$.

Consideremos una colección de objetos $(C_i)_{i \in I}$ tal que existe su producto y una colección de objetos $(D_j)_{j \in J}$ tal que existe su coproducto. Cualquier morfismo $f : \amalg_{j \in J} D_j \to \prod_{i \in I} C_i$ se puede descomponer en términos de morfismos $f_{ks} : D_k \to C_s$ mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \amalg_{j \in J} D_j \arrow[r, "f"] & \prod_{i \in I} C_i \arrow[d, "p_s"] \\ D_k \arrow[u, "u_k"] \arrow[r, "f_{ks}"'] & C_s \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

En el caso de que la categoría tenga objeto cero y de que las colecciones C_i, D_i son finitas, el morfismo $f : \coprod D_i \to \prod C_i$ queda completamente determinado por los morfismos $f_{ks} : D_k \to C_s$. En esta situación los morfismos se llaman morfismos coordenadas y se pueden escribir en forma matricial, así por ejemplo para un morfismo.

$$f : A \amalg B \to A' \times B \tag{1.8}$$

Se puede describir como:

$$A \amalg B \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}} A' \times B' \tag{1.9}$$

Como el producto es el límite del funtor descrito al inicio de esta sección, entonces para dos productos finitos, en caso particular $f : A \times B \to A' \times B'$ se puede descomponer de igual manera en morfismos coordenadas, de la misma manera también se puede descomponer para coproductos, la descomposición es posible gracias a la proposición 1.8 y su dual. Dado dos productos $\prod_{i \in I} A_i, \prod_{i \in I} B_i$ y una familia de morfismos $f_i : A_i \to B_i$ este induce una transformación natural en los funtores de $\mathfrak{I}$ a $\mathcal{C}$ y sabemos que genera un único morfismo al que denotaremos como $\prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} A_i \to \prod_{i \in I} B_i$. Una consecuencia de ver a los productos como límites, es el siguiente:

Proposición 1.10. *Dado $f_i : A_i \to B_i, g_i : B_i \to C_i$ con $i \in I$ entonces se satisface:*

$$\left(\prod_{i\in I} g_i\right) \circ \left(\prod_{i\in I} f_i\right) = \prod_{i\in I}(g_i \circ f_i)$$

y además:

$$\prod_{i\in I} I_{A_i} = I_{\prod_{i\in I} A_i}$$

Cuando I es finito tenemos otra notación con respecto al producto y es descrito de la siguiente manera $\prod_{i=0}^{n} f_i = \times_{i=0}^{n} f_i$.

Proposición 1.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría que admite productos y tiene objeto cero, dados dos morfismos $f : A \to A', g : B \to B'$ entonces $f \times g : A \times B \to A' \times B'$ puede ser descrito coordenada a coordenada como:*

$$A \times B \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}} A' \times B' \tag{1.10}$$

Por último mencionaremos una propiedad importante, el producto es asociativo.

Proposición 1.12. *Dado A, B, C objetos en una categoría cartesiana, entonces se tiene:*

$$(A \times B) \times C \cong A \times B \times C \cong A \times (B \times C)$$

Más precisamente si $\delta : (A \times B) \times C \to A \times B \times C$ es el morfismo dado por la propiedad universal, entonces δ es un isomorfismo y los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[d, "s_B"] & (A \times B) \times C \arrow[l, "t_{A\times B}"'] \arrow[r, "t_{A\times B}"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & A \times B \arrow[d, "s_A"] \\
B & A \times B \times C \arrow[l, "\pi_B"] \arrow[r, "\pi_A"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \times B) \times C \arrow[r, "t_C"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & C \arrow[d, "I_C"] \\
A \times B \times C \arrow[r, "\pi_C"] & C
\end{tikzcd}$$

Demostración: Consideremos los siguientes productos $\{A\times B\times C, \pi_A, \pi_B, \pi_C\}$, $\{A\times B, s_A, s_B\}$, $\{(A\times B)\times C, t_{A\times B}, t_C\}$, construimos el único morfismo $\delta : (A\times B)\times C \to A\times B\times C$ tal que satisface la propiedad universal de producto, es decir hace conmutar los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[d, "s_B"] & (A\times B)\times C \arrow[l, "t_{A\times B}"'] \arrow[r, "t_{A\times B}"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & A\times B \arrow[d, "s_A"] \\
B & A\times B\times C \arrow[l, "\pi_B"] \arrow[r, "\pi_A"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A\times B)\times C \arrow[r, "t_C"] \arrow[d, dashed, "\delta"] & C \arrow[d, "I_C"] \\
A\times B\times C \arrow[r, "\pi_C"] & C
\end{tikzcd}$$

Vamos a mostrar que δ es un isomorfismo, para ello vamos a construir el inverso. Consideremos la terna $\{A\times B\times C, \pi_A, \pi_B\}$ por la propiedad universal del producto $A\times B$ existe un único morfismo $h : A\times B\times C \to A\times B$ tal que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & A\times B\times C \arrow[dl, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "\pi_A"] & \\
A & (A\times B)\times C \arrow[l, "s_B"] \arrow[r, "s_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

También al considerar la terna $\{A\times B\times C, h, \pi_C\}$ por la propiedad universal del producto $(A\times B)\times C$ existe un único morfismo $\delta' : A\times B\times C \to (A\times B)\times C$ tal que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & A\times B\times C \arrow[dl, "h"] \arrow[d, dashed, "\delta'"] \arrow[dr, "\pi_C"] & \\
A\times B & A\times B \arrow[l, "t_{A\times B}"] \arrow[r, "t_C"'] & C
\end{tikzcd}$$

Observemos que el morfismo $\delta\delta' : A\times B\times C \to A\times B\times C$ satisface

$$\begin{aligned}
\pi_A(\delta\delta') &= (\pi_A\delta)\delta' \\
&= (s_A t_{A\times B})\delta' = s_A(t_{A\times B}\delta') \\
&= s_A h = \pi_A \\
\pi_B(\delta\delta') &= (\pi_B\delta)\delta' \\
&= (s_B t_{A\times B})\delta' = s_B(t_{A\times B}\delta') \\
&= s_B h = \pi_B \\
\pi_C(\delta\delta') &= (\pi_C\delta)\delta' = t_C\delta' = \pi_C
\end{aligned}$$

Por la propiedad universal del producto de $A \times B \times C$, tenemos la unicidad $\delta\delta' = I_{A\times B\times C}$. Por otro lado el morfismo $\delta'\delta : (A \times B) \times C \to (A \times B) \times C$ satisface

$$\begin{aligned} t_C(\delta'\delta) &= \pi_C\delta = t_C \\ t_{A\times B}(\delta'\delta) &= (t_{A\times B}\delta')\delta = h\delta \end{aligned}$$

Pero $h\delta$ satisface

$$\begin{aligned} s_A(h\delta) &= (s_A h)\delta = \pi_A\delta = s_A(t_{A\times B}) \\ s_B(h\delta) &= (s_B h)\delta = \pi_B\delta = s_B(t_{A\times B}) \end{aligned}$$

Por la propiedad unviersal del producto de $A\times B$ se tiene la unicidad $t_{A\times B} = h\delta$, por tanto usando la propiedad universal del producto de $(A \times B) \times C$ se tiene $\delta'\delta = I_{(A\times B)\times C}$ por tanto δ es un isomorfimo. De manera análoga se tiene el isomorfismo $A \times B \times C \cong A \times (B \times C)\square$.

1.2.2. Límites directos

Consideremos $(I, \leq)$ como una categoría $\mathcal{I}$, y $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria con un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. Asimismo las imágenes de los objetos a través del funtor son denotados C_i para cada $i \in I$. Si $i \leq j$ el morfismo correspondiente en $\mathcal{I}(i, j)$ tiene su imagen bajo el funtor $\mathcal{F}$, este es un morfismo denotado $f_{ij} = C_i \to C_j$. Diremos que la colección $(\{C_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{i,j\in I})$ es un sistema dirigido sobre I. El sistema dirigido satisface:

1. $f_{ii} = I_{C_i}$
2. Si $i \leq j \leq k$ entonces $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$

Definición 1.13: Límite directo

Dado el sistema dirigido sobre I ,$(\{C_i\}_{i\in I}, \{f_{ij}\}_{i,j\in I})$ asociado al funtor $\mathcal{F}$, definimos el límite directo como el colímite del funtor $\mathcal{F} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$

En este caso, cada cocono $(M, (p_i : C_i \to M)_{i\in I})$ satisface para todo f_{ij} el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "p_i"'] & & C_j \arrow[dl, "p_j"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{1.11}$$

Y el límite directo es un cono $(L, (\phi_i : C_i \to L)_{i\in I})$ tal que para cualquier cono $(M, (p_i : C_i \to M)_{i\in I})$ existe un único morfismo $h : L \to M$ tal que conmuta el diagrama siguiente para todo f_{ij} del sistema dirigido:

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "p_i"'] & & C_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "p_j"] \\ & L \arrow[d, dashed, "h"] & \\ & M & \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

Y denotamos $L = \text{lím}_{\to} C_i$. De manera dual definimos el límite inverso, como el límite del funtor $\mathcal{F} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ y lo denotamos $\text{lím}_{\leftarrow} C_i$.

1.2.3. Igualador y producto fibrado

Empezemos a definir los igualadores de manera natural, y luego veremos su construcción en términos de límites.

Definición 1.14: Igualador

Sean $f, g : A \rightrightarrows B$ dos morfismos en una categoría $\mathcal{C}$, un igualador de f, g es una pareja (K, k) donde, K es un objeto de $\mathcal{C}$ y $k : K \to A$ un morfismo tal que $f \circ k = g \circ k$, y para cada pareja (M, m) que $f \circ m = g \circ m$, existe un único morfismo $n : M \to K$ tal que $m = k \circ n$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dashed, "n"'] \arrow[dr, "m"] & & \\ K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd} \tag{1.13}$$

Unas propiedades generales de los igualadores son:

Proposición 1.13. *En una categoría $\mathcal{C}$:*

1. *Cuando dos morfismos $f, g : A \rightrightarrows B$ tienen un igualador (K, k), el morfismo $k : K \to A$ es un monomorfismo.*

2. *El igualador de un morfismo $f : A \to B$ consigo mismo, siempre existe y es la pareja $(A, I_A : A \to A)$.*

3. *Si un morfismo $f : A \to B$ es un igualador de dos morfismos (u, v) y además es un epimorfismo entonces f es un isomorfismo.*

Demostración:

1. Sean dos morfismos $\alpha, \beta : C \to K$ tales que $k\alpha = k\beta$ entonces el morfismo $k\alpha$ es tal que $f(k\alpha) = (fk)\alpha = (gk)\alpha = g(k\alpha)$ por definición de igualador existe un único morfismo γ tal $k\gamma = k\alpha = k\beta$. Como α y β tienen la propiedad entonces $\alpha = \beta$ por tanto k es un monomorfismo.

2. Claramente tenemos $f \circ I_A = f \circ I_A$, ahora sea $m : M \to A$ un morfismo tal que $f \circ m = f \circ m$, entonces tenemos $m = I_A \circ m$ y si existe $n : M \to A$ tal que $m = I_A \circ n$ por axioma de identidad la ultima igualdad implica $m = n$, por lo tanto $(A, I_A : A \to A)$ es el igualadaor de f consigo mismo.

3. Como f iguala a u, v entonces $uf = vf$ y como f es epimorfismo entonces $u = v$, pero entonces existe un único morfismo $g : B \to A$ tal que $fg = I_B$. Además $fgf = I_B f = f = fI_A$, como f es un igualador entonces f es un monomorfismo por lo tanto $gf = I_A$.$\square$

$\square$

Ahora veamos que el igualador se puede ver como un límite. Fijemos dos objetos A, B y dos morfismos $f, g : A \to B$ consideremos la categoría $\mathcal{K}$ definida como sigue:

1. Objetos: $\{A, B\}$

2. Morfismos:

    a) $\mathcal{K}(A, A) = \{I_A\}$
    b) $\mathcal{K}(B, B) = \{I_B\}$
    c) $\mathcal{K}(A, B) = \{f, g\}$
    d) $\mathcal{K}(B, A) = \emptyset$

Entonces la categoría $\mathcal{K}$ puede ser vista como una subcategoría de $\mathcal{C}$, consideremos el funtor inclusión $i : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$, cada cono del funtor $(M, p_A : M \to A, p_B : M \to B)$ se ve como:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & \\ A \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & B \end{tikzcd} \tag{1.14}$$

Entonces se satisface $p_B = f \circ p_A$ y así mismo $p_B = g \circ p_A$ entonces $f \circ p_A = g \circ p_A$ por tanto (M, p_A) satisface las condiciones de la definición y un límite del funtor i es un igualador (K, k), de allí se deduce que el igualador es único salvo isomorfismos. Su concepto dual es llamado coigualador.

Definición 1.15: Producto fibrado

Consideremos dos morfismos $f : A \to C$ y $g : B \to C$, el producto fibrado es una terna $(P, u : P \to A, v : P \to B)$ tal que conmuta el cuadrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

. Y además satisface la siguiente propiedad, para cualquier otra terna $(Q, \alpha : P \to A, \beta : P \to B)$ tal que $g \circ \beta = f \circ \alpha$, existe un único morfismo $h : Q \to P$ tal que $uh = \alpha$ y $vh = \beta$ como se muestra en el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha"'] & & \\ & P \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd} . \tag{1.15}$$

Para verlo como un límite, consideremos la siguiente subcategoria, $\mathfrak{P}$ definido por:

1. Los objetos son $\{A, B, C\}$

2. Los morfismos son:

   a) $\mathfrak{P}(X, X) = \{I_X\}$ para $X = A, B$ *o* C
   b) $\mathfrak{P}(A, C) = \{f\}$, $\mathfrak{P}(B, C) = \{g\}$
   c) El resto de conjuntos de morfismos son vacíos

Respecto a esta subcategoría de $\mathcal{C}$, un igualador es un límite del funtor inclusión. Su concepto dual es la suma fibrada. Algunas propiedades son:

Proposición 1.14. *Sea* (P, f', g') *el producto fibrado de* (f, g)*:*

1. *Si g es monomorfismo, entonces g' es un monomorfismo.*

2. *Si g es un isomorfismo, entonces g' es un isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Demostración: Suponiendo que g es monomorfismo consideremos $u, v : Q \rightrightarrows P$ tales que $g'u = g'v$. Llamemos $g'' = g'u$ y $f'' = f'u$, uno puede observar que:

$$fg'' = fg'u = gf'u = gf''$$

Entonces (Q, f'', g'') satisface las condiciones de la definición del producto fibrado o lo que es lo mismo, es un cono del funtor inclusión y $u : Q \to P$ es un morfismso de conos. Como se cumple que $g'u = g'v$, se puede ver de la misma manera que $v : Q \to P$ es un morfismo entre los mismos conos, por definición de producto fibrado tenemos que $u = v$. La demostración del inciso (2) es de la misma manera, véase [3]. $\square$

Definición 1.16: Núcleo de un morfismo

Sea $\mathcal{C}$ una categoría, el núcleo de un morfismo $f : A \to B$ es (cuando éste exista) el producto fibrado (P, α, β) de (f, f).

Proposición 1.15. *Si existe el núcleo (P, α, β) entonces α, β son epimorfismos.*

Demostración: Considere la terna (A, I_A, I_A) que claramente completa el cuadrado con (f, f) es decir satisface las condiciones de la definición del producto fibrado, entonces existe $\delta : A \to P$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "\delta"] \arrow[drr, bend left, "I_A"] \arrow[ddr, bend right, "I_A"'] & & \\ & P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{1.16}$$

Entonces δ es un monomorfismo y α, β son epimorfismos, esto por la Proposición 1.3 inciso (4) y su dual □

Una consecuencia de estas dos últimas proposiciones son:

Proposición 1.16. *Consideremos un morfismo $f : A \to B$, son equivalentes:*

1. *f es monomorfismo.*
2. *El núcleo de f existe y es (A, I_A, I_A).*
3. *El núcleo de f existe y es de la forma (P, α, α).*

Una propiedad importante de los productos fibrados es llamado propiedad asociativa y es una herramienta útil.

Proposición 1.17. *En una categoría $\mathcal{C}$ considere el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & B \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d"'] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & C \arrow[d, "c"] \\ C \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & F \end{tikzcd} \tag{1.17}$$

1. *Si los cuadrados (I) y (II) son productos fibrados, entonces el cuadrado exterior es un producto fibrado.*
2. *Si $\mathcal{C}$ tiene todos los productos fibrados, el cuadrado (II) y el cuadrado exterior son productos fibrados entonces el cuadrado (I) es un producto fibrado.*

Para una demostración véase [3] en las páginas 54 y 55.

1.2.4. Existencia de límites y propiedades

En la definición de los límites, no se asegura que los límites existan siempre. En esta sección mostraremos condiciones necesarias y suficientes para que existan límites. Primero mostremos algunas definiciones previas importantes. Para las demostraciones véase [3] en los capítulos 2.8 y 2.9.

Definición 1.17: Categorías completas

Una categoría $\mathcal{C}$ es completa cuando cada funtor $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ con $\mathcal{D}$ una categoría pequeña, tiene límite. De la misma manera decimos que $\mathcal{C}$ es finitamente completa si cada functor a $\mathcal{C}$ desde una categoria finita tiene límite.

Teorema 1.1: Teorema de existencia de límites

Una categoría $\mathcal{C}$ es completa precisamente cuando cada familia arbitraria de objetos tiene productos y cada par de morfismos $f, g : A \rightrightarrows B$ tiene un igualador.

Proposición 1.18. *Para una categoría $\mathcal{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{C}$ es finitamente completa.*
2. *$\mathcal{C}$ tiene objeto terminal, productos finitas e igualadores.*
3. *$\mathcal{C}$ tiene objeto terminal y productos fibrados.*

Decimos que una categoría $\mathcal{D}$ es finitamente generada si tiene una cantidad finita de objetos y existe una cantidad finita de morfismos $f_1, \cdots, f_n$ tal que todo morfismo en $\mathcal{D}$ es una composición finita de los morfismos $f_1, \cdots, f_n$

Proposición 1.19. *Sea $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to\mathcal{A}$ un funtor con $\mathcal{A}$ finitamente completo y $\mathcal{D}$ finitamente generada, entonces el límite de F existe.*

Definición 1.18: Límites preservados por funtores

Un funtor $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ preserva límites cuando, para cada categoría pequeña $\mathcal{D}$ y cada funtor $\mathcal{G}:\mathcal{D}\to\mathcal{A}$, si el límite $(L,(p_D)_{D\in\mathcal{D}})$ de $\mathcal{G}$ existe, entonces $(\mathcal{F}(L),(\mathcal{F}(p_D))_{D\in\mathcal{D}})$ es el límite de $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$.

Usando los teoremas de existencia de límites tenemos la siguiente caracterización para los functores que preservan límites.

Proposición 1.20. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría (finitamente) completa y $\mathcal{B}$ una categoría arbitraria. Entonces un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preserva límites (finitos) cuando preserva productos (finitos) e igualadores.*

Proposición 1.21. *Si un funtor preserva productos fibrados, entonces tambien preserva monomorfismos.*

Demostración: Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor que preserva todos los productos fibrados existentes en C y consideremos $f : A \to B$ un C-monomorfismo, por la Proposición (1.16) esto equivale al producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{I_A} & A \\ {\scriptstyle I_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

Como F preserva productos fibrados, entonces el siguiente diagrama conmutativo es un producto fibrado.

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{I_{FA}} & FA \\ {\scriptstyle I_{FA}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ FA & \xrightarrow[Ff]{} & FB \end{array}$$

Nuevamente, por la proposición (1.16) esto equivale a que $Ff : FA \to FB$ es un monomorfismo en D. Por tanto F preserva monomorfismos. $\square$

Un caso interesante es el funtor $Hom(-,-)$ que preserva límites en categorías que no necesariamente son completas.

Proposición 1.22. *Consideremos una categoría $\mathcal{C}$ y un objeto $C \in \mathcal{C}$. Entonces son válidas las siguientes afirmaciones:*

1. *El funtor covariante $Hom(C,-) : \mathcal{C} \to Set$ preserva todos los límites existentes. En particular preserva monomorfismos.*

2. *El funtor contravariante $Hom(-,C) : \mathcal{C} \to Set$ transforma todos los colímites existentes en límites, en particular transforma los epimorfismos en monomorfismos.*

Demostración: Consideremos un funtor $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ con límite $(L,(p_D)_{D\in\mathcal{D}})$ y un cono $(q_D : M \to Hom(C,\mathcal{F}(D)))_{D\in\mathcal{D}}$ bajo el funtor $Hom(C,\mathcal{F}-)$ en la categoría de conjuntos. Ahora para cada elemento $m \in M$ la familia $(q_D(m) : C \to \mathcal{F}(D))_{D\in\mathcal{D}}$ es un cono en F y por definición de límite, tenemos que existe un único morfismo $q(m) : C \to L$ en $\mathcal{C}$ tal que para cada $D \in \mathcal{D}$ se cumple que $p_D \circ q(m) = q_D(m)$. Esto define una función $q : M \to Hom(C,L)$ con la propiedad que $Hom(C,p_D)\circ q = q_D$ para cada $D\in\mathcal{D}$, y la unicidad de q resulta de la unicidad de cada $q(m)$. Como se acabamos de demostrar $Hom(C,-)$ que preserva límites, en particular preserva productos fibrados. Entonces preserva monomorfismos. Para el inciso (2), considere el funtor $Hom(C,-) : \mathcal{C}* \to Set$. Como acabamos de demostrar que el funtor $Hom(C,-)$ preserva límites, por tanto en términos de $\mathcal{C}$ tenemos que el functor $Hom(-,C) : \mathcal{C} \to Set$ transforma colímites en límites. Con esto se completa la prueba $\square$

Unos ejemplos interesantes que son consecuencia directa de la proposición anterior, dado $\mathcal{F}:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ un funtor como los ejemplos en los capítulos anteriores, tal que tenga límite en $\mathcal{C}$, a cada objeto de la imagen de $\mathcal{F}$ lo denotamos como $\mathcal{F}(D) = X_i$, considerando que Set es completo y cocompleto(véase el capitulo 2.1), tenemos los siguientes isomorfismos.

$$
\begin{aligned}
Hom(\lim_{\rightarrow} X_i, Y) &\cong \lim_{\leftarrow} Hom(X_i, Y) && (1.18)\\
Hom(Y, \lim_{\rightarrow} X_i) &\cong \lim_{\rightarrow} Hom(Y, X_i) && (1.19)\\
Hom(\prod_{i\in I} X_i, Y) &\cong \prod_{i\in I} Hom(X_i, Y) && (1.20)\\
Hom(Y, \prod_{i\in I} X_i) &\cong \prod_{i\in I} Hom(Y, X_i) && (1.21)\\
& && (1.22)
\end{aligned}
$$

Definición 1.19: Límites reflejados por funtores

Sea $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ un funtor. $\mathcal{F}$ refleja límites cuando, para cada funtor $\mathcal{G}:\mathcal{D}\to\mathcal{A}$ con $\mathcal{D}$ una categoría pequeña y cada cono $(L,(p_D)_{D\in\mathcal{D}})$ si $(\mathcal{F}(L),(\mathcal{F}(p_D))_{D\in\mathcal{D}})$ es el límite de $\mathcal{F}\circ\mathcal{G}$ en $\mathcal{B}$ entonces el cono es el límite de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{A}$.

Proposición 1.23. *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor que preserva límites con $\mathcal{A}$ completo y $\mathcal{F}$ preserva isomorfismos, entonces $\mathcal{F}$ refleja límites.*

2. *Si $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un funtor que preserva (o refleja) límites finitos en categorías finitamente completas, entonces $\mathcal{F}$ preserva (o refleja) límites finitamente generados.*

3. *Un funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ fiel y plano refleja límites.*

Un ejemplo de funtor que preserva límites es el funtor olvido $U : Top \to Set$, mientras que $U : Ab \to Set$ preserva y refleja límites.

1.3. Acerca de los funtores adjuntos

En Matemáticas es natural tener construciones motivadas como el ejemplo siguiente. Consideremos la categoría de los grupos abelianos Ab y la categoría de los monoides abelianos, entonces existe un funtor fiel $U : Ab \to Mon$ que asigna a cada grupo abeliano consmigo mismo pensándolo como monoide, es decir ignorando la propiedad de la existencia de inverso que tiene el grupo abeliano. Ahora motivándonos en la construcción de los números enteros $\mathbb{Z}$, que es un grupo abeliano con la suma, apartir de los naturales $\mathbb{N}$, que es un monoide abeliano con la suma, tiene la propiedad de que como monoides existe una función inyectiva $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{N}$ tiene una copia isomorfa en $\mathbb{Z}$, uno puede pensar en la siguiente pregunta: Si tomo un monoide abeliano M, ¿puedo encontrar un grupo abeliano A tal que pensandolo como monoide $U(A)$ entonces M puede encajarse (es decir decir existe un submonoide de $U(A)$ que es isomorfo a M) a $U(A)$ como submonoide?. Si existe, entonces ¿puede ser único salvo isomorfismos?, a estas preguntas se puede estudiar en teoría de categorías de la siguiente manera.

Reflexión alrededor de un funtor. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor y un objeto $B \in \mathcal{B}$. Una reflexión de B alrededor de F es una pareja (R_B, η_B) donde R_B es un objeto de $\mathcal{A}$ y $\eta_B : B \to F(R_B)$ es un $\mathcal{B}$-morfismo tal que para cualquier otra pareja (A, f) con A un objeto en $\mathcal{A}$ y $f : B \to F(A)$ un $\mathcal{B}$-morfismo, existe un único $\mathcal{A}$-morfismo $h : R_B \to A$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, "f"'] & F(R_B) \arrow[d, dashed, "F(h)"] \\ & F(A) \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que si existe la reflexión de B alrededor de F, entonces R_B es único salvo isomorfismos, si para cada objeto B de $\mathcal{B}$ existe la reflexión alrededor de F, entonces se puede demostrar que existe un funtor $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ junto con una trasformación natural $\eta : Id_{\mathcal{B}} \Rightarrow F \circ R$, para una demostración veáse [3], para nuestro ejemplo de $U : Ab \to Mon$, cada monoide tiene una reflexión y es llamado grupo libremente generado, en el capítulo siguiente se hablará de esta construcción para el caso de la categoría de grupos y el funtor correspondiente.

Funtor adjunto . Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor, decimos que un funtor $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ es adjunto izquierdo de F si existe una transformación natural $\eta : Id_{\mathcal{B}} \Rightarrow F \circ R$ tal que para cada objeto B en $\mathcal{B}$ se tiene que $(R(B), \eta_B)$ es una reflexión de B alrededor de F. Esta definición equivale a que existe una biyección natural:

$$Hom_{\mathcal{B}}(B, F(A)) \cong Hom_{\mathcal{A}}(G(B), A)$$

Mencionaremos dos propiedades importantes de estos funtores adjuntos, y en las siguientes secciones se mostrarán ejemplos de los funtores adjuntos. Para las demostraciones veáse [3]

Proposición 1.24. *Si el funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tiene adjunto izquierdo, entonces F preserva todos los límites que existen en $\mathcal{A}$.*

Proposición 1.25. *Consideremos dos funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ entonces son equivalentes:*

1. *G es el adjunto izquierdo de F*
2. *Existen transformaciones naturales $\eta : I_{\mathcal{B}} \Rightarrow F \circ G$ y $\epsilon : G \circ F \Rightarrow I_{\mathcal{A}}$ tales que*

$$(F * \epsilon) \circ (\eta * F) = 1_F, \;\; (\epsilon * G) \circ (G * \eta) = 1_G$$

1.4. Categorías regulares

Unos de los objetos más usados en matemáticas son los cocientes y subconjuntos o subobjetos, de manera intuitiva se puede pensar que en una categoría un objeto es subobjeto de otro si existe un monomorfismo del subobjeto hacia otro, de ser asi entonces dentro de la categoría de conjuntos consideremos una función $f : \{\pi\} \to \mathbb{N}$ entonces claramente la pseudo-definición no extiende la definición de subconjunto y f es monomorfismo, pero $f(\{\pi\})$ es un subconjunto, así que para definir un subobjeto una condición necesaria sería tener un monomorfismo, pero también notemos lo siguiente:

$$\begin{tikzcd} f(\{\pi\}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & \mathbb{N} \\ A \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd} \tag{1.23}$$

Dada una función inyectiva (monomorfismo) f' tal que su imagen sea $f(\{\pi\})$, entonces es posible definir una función h tal que el diagrama conmuta y esta función ha de ser biyectiva, es decir dicho de otro modo el monomorfismo i no puede factorizarse en monomorfismos no-triviales. De estas ideas tenemos dos enfoques:

1. Construir subobjetos mediante una clase de monomorfismos con mismo codominio
2. Investigar cuales monomorfismos son irreducibles en sentido de que se no puede factorizar mediante otros monomorfismos que no son isomorfismos.

La primera idea nos dará una forma de construir intersecciones y uniones de objetos en una categoría, mientras que la segunda idea va a generar una noción de regularidad. En el siguiente capítulo veremos ejemplos categorías regulares.

Definición 1.20: Subobjetos y cocientes

Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un objeto $A \in \mathcal{C}_0$. Decimos que dos monomorfismos con codominio A , $f : R \to A, g : S \to A$ son equivalentes si existe un isomorfismo $\tau : R \to S$ tal que conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & A \\ S \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd} \tag{1.24}$$

Una clase de equivalencia de monomorfismos con codominio A se llama subobjeto de A. De manera dual se define la noción de cociente de A. Además decimos que una categoría C es bien potenciada cuando los subobjetos de cada objeto constituyen un conjunto.

Sea $B' = [r : B \to A], r \in Sub(A)$ un representante de la clase de equivalencia entonces B se puede pensar como un objeto en la categoría C con la propiedad de ser subobjeto de A, salvo isomorfismos, de aquí en adelante se considera esa clase B' como un objeto en C que es subobjeto de A. Cuando se tiene una categoría bien potenciada, como en la categoría de conjuntos, es posible dar una relación de orden entre los subobjetos. Dado un objeto $A \in C$ con C bien potenciada, consideremos la clase $Mono(A)$ de todos los monomorfismos de la forma $f : X \to A$ con $X \in C$. Sea $r, s \in Mono(A)$ decimos que $r \leq s$ si existe un monomorfismo $h : dom(r) \to dom(s)$ tal que $r = s \circ h$. Observemos que esta relación es reflexiva ya que $I_{dom(r)}$ es en particular un monomorfismo entonces $r \leq r$, también es transitiva, y más aún se cumple lo siguiente; si $r \leq s,\ s \leq r$ implica que existe $h : dom(r) \to dom(s), h' : dom(s) \to dom(r)$ tal que $r = s \circ h,\ s = r \circ h'$ respectivamente, entonces $r \circ Id_{dom(r)} = r = r \circ (h' \circ h)$ entonces $Id_{dom(r)} = h' \circ h$ y de la misma manera obtenemos $Id_{dom(s)} = h \circ h'$ por tanto h es un isomorfismo. Consideramos la clase cociente de $Mono(A)$ dada por la definición anterior $Sub(A)$ entonces la última propiedad implica que las clases de equivalencia $[r] = [s]$, por tanto en $Sub(A)$ tenemos una relación de orden parcial.

Intersección y unión Como $Sub(A)$ está dotado de un orden parcial, dada una colección de subobjetos $A_i, i \in I$ indicados por un conjunto I, definimos (en caso de que exista) su **unión** como el supremo de la colección en $Sub(A)$, y su **intersección** como el ínfímo de la colección en $Sub(A)$. Dado un conjunto parcialmente ordenado, son bien conocidas las siguientes identidades:

$$sup_{i \in I} s_i = \min\{s | \forall i \in I,\ s_i \leq s\} \tag{1.25}$$
$$inf_{i \in I} s_i = \max\{s | \forall i \in I,\ s \leq s_i\} \tag{1.26}$$

Teniendo una consecuencia directa:

Proposición 1.26. *Dado un objeto A en una categoría C tal que $Sub(A)$ es un conjunto. Entonces son equivalentes:*

1. *La intersección arbitraria de subobjetos de A existe.*
2. *La unión arbitraria de subobjetos de A existe.*

Una manera de construir intersección de subobjetos es mediante productos fibrados.

Proposición 1.27. *Dada una categoría con productos fibrados y A un objeto de la categoría, entonces la intersección de dos subobjetos de A siempre existe y está dada por su producto fibrado.*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{r'} & S \\ {\scriptstyle s'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ R & \xrightarrow{r} & A \end{array} \tag{1.27}$$

Demostración: Sea $[r],[s] \in Sub(A)$ construimos su producto fibrado $(P, r' : P \to S = dom(s), s' : P \to R = dom(r))$, puesto que r, s son monomorfismos implica que $s \circ r' = s' \circ r : P \to A$ es un monomorfismo y por definición de producto fibrado implica que $[s \circ r']$ es ínfimo en $Sub(A)$ por tanto es su intersección □

Teorema 1.2: Existencia de intersección y unión de subobjetos

En una categoría completa, la intersección arbitraria de subobjetos de un objeto fijo siempre existe. Más aún si la categoría es bien potenciado entonces tambien existe la unión arbitraria.

Demostración: Consideremos $A_i = [r_i]$ subobjetos indicados por un conjunto I. Formemos la categoría B donde los objetos son A_i y los morfismos son $I_X, X = A_i$ para alguna $i \in I$ y los morfismos $r_i : A_i \to A$, claramente forma una categoría y podemos inducir un funtor $F : B \to C$ con $F(X) = X$ para cada X en B y sus morfismos inducidos naturalmente, puesto que C por hipótesis es completa, existe su límite $(L, p_i)_{i \in I}$ y se satisface que $h = r_i \circ p_i : L \to A \ \forall i \in I$ es un subobjeto y por definición de límite implica que L es el ínfimo, por tanto L es la intersección de la colección A_i. Cuando C es bien potenciada por proposición 1.22 entonces existe la unión arbitraria de A_i. □

La existencia de intersección y unión dado anteriormente está estrechamente relacionada con la estructura de orden de $Sub(A)$, entonces se puede ver que cuando la categoría es finitamente completa y bien potenciada la intersección finita si existe sin embargo no necesariamente la unión finita existe, esto es porque la estructura de orden de $Sub(A)$ es una $\wedge$-semiretícula con un elemento máximo, y no siempre estas estructuras constituyen una retícula completa (que es el caso análogo a intersección arbitraria y unión arbitraria). Además todos estos resultados se pueden dualizar para una clase de epimorfismos $Epi(A)$ y la relación de equivalencia induce **objetos cocientes**. Para encontrar alternativas sobre la existencia de la unión arbitraria o finita, tenemos que estudiar algunas clases especiales de monomorfismos, dando lugar al segundo enfoque de esta sección.

1.4.1. Monomorfismos y epimorfismos especiales

Definición 1.21: Morfismos extremo, regular y fuerte

Un monomorfismo $f : A \to B$ en una categoría $\mathcal{C}$ se llama **extremo**, si para cada factorización $f = g \circ e$ con e un epimorfismo implica que e es un isomorfismo.

Un monomorfismo es **regular** si es el igualador de dos morfismos.

Un monomorfismo es **fuerte** si para cada cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{m} & D \\ \Big\downarrow{\scriptstyle g} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \tag{1.28}$$

Con m epimorfismo entonces existe un único morfismo $i : C \to B$ tal que hace comutativo el diagrama. De manera dual se puede definir epimorfismo extremo, epimorfismo regular y epimorfismo fuerte.

Por cuestiones teóricas, estudiaremos los morfismos especiales a través de los epimorfismos, las definiciones y los teoremas duales son correspondientes a monomorfismos.

Proposición 1.28. *Dado $f \circ g$ un epimorfismo extremo entonces f es un epimorfismo extremo.*

Demostración: Supongamos que f tiene una factorización $f = i \circ p$ con i monomorfismo entonces componiendo con g por la derecha tenemos $f \circ g = i \circ (p \circ g)$ pero $f \circ g$ es epimorfismo extremo entonces i es un isomorfismo , y por tanto f es un epimorfismo extremo $\square$

Consideremos una clase $H \subseteq Epi_C = \{f : A \to B | \ f \text{ es un epimorfismo } \}$ de la clase de todos los epimorfismos de la categoría, decimos que la clase es **epi-hereditaria** si satisface las siguientes condiciones

1. Para cada $f, g \in H$, si $f \circ g$ está definido entonces $f \circ g$ está en H.

2. Si $g \circ f \in H$ entonces $g \in H$.

Proposición 1.29. *Las siguientes clases son epi-hereditarias:*

1. *La clase de los epimorfismos fuertes.*

2. *La clase de las retracciones.*

Demostración: Demostraremos sólo (1), es fácil verificar (2). Dado $f : A \to B, g : B \to C$ epimorfismos fuertes y consideremos el siguiente diagrama con z monomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "s"] & C \arrow[d, "v"] \arrow[dll, dashed, "t"'] \\
X \arrow[rr, "z"] & & Y
\end{tikzcd}$$

Como f es epimorfismo fuerte entonces en el cuadrado conmutativo $(v \circ g) \circ f = z \circ u$ existe un único morfismo $s : B \to X$ tal que factoriza el diagrama, es decir satisface $u = s \circ f$ y $(v \circ g) = z \circ s$. Como g es epimorfismo fuerte y considerando el cuadrado $v \circ g = z \circ s$ se tiene que existe un único morfismo $t : C \to X$ tal que hace conmutativo el diagrama, es decir $s = t \circ g$ y $v = z \circ t$, visto desde el rectángulo mayor, se tiene: $u = t \circ (g \circ f)$ y $v = z \circ t$ por tanto $g \circ f$ es un epimorfismo fuerte. Supongamos ahora que $g \circ f$ es un epimorfismo fuerte, consideremos el diagrama conmutativo con z monomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "uf"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[d, "v"] \\
X \arrow[r, "I_X"] & X \arrow[r, "z"] & Y
\end{tikzcd}$$

Como $g \circ f$ es epimorfismo extremo entonces existe un único $s : C \to X$ tal que $u \circ f = s \circ (g \circ f)$ y $v = z \circ s$. Por unicidad de s tenemos que $u = s \circ g$. Entonces el cuadrado de la derecha se hace conmutativo con un único morfismo s. Por lo tanto g es un epimorfismo fuerte. $\square$

Proposición 1.30. *Dada una categoría $\mathcal{C}$ las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Si un morfismo es monomorfismo y epimorfismo extremo entonces es un isomorfismo.*

2. *Cada epimorfismo regular es fuerte.*

3. *Cada epimorfismo fuerte es extremo.*

Demostración: (1) Dado $f : A \to B$ monomorfismo y epimorfismo extremo, entonces considerando la factorización $f = f \circ I_A$, como f es un monomorfismo, por definición de epimorfismo extremo entonces que f es un isomorfismo. (2) Sea $f : A \to B$ un epimorfismo regular entonces $f = Coeq(u, v)$. Consideremos el cuadrado con z monomorfismo:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s_1"] & B \arrow[d, "s_2"] \\ & X \arrow[r, "z"] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces tenemos las igualdades

$$z \circ s_1 \circ u = s_2 \circ f \circ u = s_2 \circ f \circ v = z \circ s_1 \circ v$$

Como z es un monomorfismo tenemos que $s_1 \circ u = s_2 \circ v$, pero por la propiedad universal del co-igualador tenemos que existe un único morfismo $t : B \to X$ tal que hace conmutativo el cuadrado. Por lo tanto f es un epimorfismo regular. (3) Si f es un epimorfismo regular, y consideremos la factorización $f = i \circ p$ con i monomorfismo, considerando el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[d, "I_B"] \arrow[dl, dashed, "t"] \\ X \arrow[r, "i"] & B \end{tikzcd}$$

Como i es monomorfismo entonces existe un único morfismo $t : B \to X$ tal que $I_B = i \circ t$. Entonces i también es una retracción, entonces i es un isomorfismo, Por lo tanto f es un epimorfismo extremo. $\square$

Proposición 1.31. *Son equivalentes para un morfismo $f : A \to B$ en una categoría $\mathcal{C}$*

1. *f es isomorfismo.*

2. *f es un monomorfismo y un epimorfismo fuerte.*

3. *f es un epimorfismo y un monomorfismo fuerte.*

Demostración: Sólo mostraremos que las primeras dos son equivalentes. De manera dual se tiene la equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (3). Además (1) $\Rightarrow$ (2) es directo, ya que si f es un monomorfismo, para cada cuadrado $z \circ u = v \circ f$ con z monomorfismo, tenemos que el morfismo $t = u \circ f^{-1}$ hace conmutativo el cuadrado, y si otro morfismo h hace conmutativo el cuadrado entonces $z \circ h = v = z \circ t$. Por ser z monomorfismo se tiene que $h = t$, por lo tanto f es un epimorfismo fuerte. (2) $\Rightarrow$ (1) Si f es monomorfismo y epimorfismo fuerte entonces considerando el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I_A"] & B \arrow[d, "I_B"] \arrow[dl, dashed, "t"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{1.29}$$

Entonces existe $t : B \to A$ tal que $f \circ t = I_B$ y $t \circ f = I_A$ por tanto f es un isomorfismo. $\square$

Proposición 1.32. *Sea A, B categorías y $(F : A \to B, G : B \to A)$ una pareja de funtores adjuntos entonces son válidas las siguientes afirmaciones:*

1. *F preserva monomorfismos fuertes y monomorfismos regulares.*

2. *G preserva epimorfismos fuertes y epimorfismos regulares.*

Para una demostración véase [3] en las páginas 142 y 143.

Proposición 1.33. *Dada una categoría finitamente completa, los epimorfismos extremos coinciden con los epimorfismos fuertes.*

Para una demostración véase [3] en las páginas 139 y 140

1.4.2. Factorizaciones epi-mono

Definición 1.22: Factorización epi-mono

Una categoría C tiene factorizaciones fuertes epi-mono cuando cada morfismo f en C se factoriza como sigue $f = i \circ p$, donde p es un epimorfismo fuerte y i es un monomorfismo. En tal caso el monomorfismo i es llamado la imagen de f y f es denotado también como la pareja (i, p)

Sea $f : A \to B$ un morfismo, una factorización fuerte epi-mono es de la forma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B \\ & I \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \tag{1.30}$$

Decimos que esta factorización es única salvo isomorfismos si para cada factorización (i', p') existe un isomorfismo $h : I \to I'$ que completa el cuadrado conmutativamente

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & I \arrow[d, "i"] \arrow[dl, dashed, "h"] \\ I' \arrow[r, "i'"'] & B \end{tikzcd} . \tag{1.31}$$

Proposición 1.34. *Sea C una categoría con factorizaciones fuerte epi-mono, entonces son válidas las siguientes afirmaciones:*

1. *Las factorizaciones fuertes epi-mono son únicas salvo isomorfismos.*

2. *Las factorizaciones fuertes epi-mono son naturales, en sentido siguiente. Dado un diagrama conmutativo con factorizaciones $(i, p), (j, q)$:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "q"] & J \arrow[r, "j"] & D \end{tikzcd} \tag{1.32}$$

   Entonces existe un único morfismo $h : I \to J$ tal que completa el diagrama conmutativamente.

Demostración: Consideremos $f = i \circ p = i' \circ p'$ dos factorizaciones fuerte-epi-mono, entonces considerando el cuadrado $i \circ p = i' \circ p'$, como p es un epimorfismo fuerte y i' es un monomorfismo , por definición de epimorfismo fuerte, existe un único morfismo u tal que conmuta el digrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & I \arrow[d, "i"] \arrow[dl, dashed, "u"] \\ I' \arrow[r, "i'"'] & B \end{tikzcd}$$

De la misma manera, como p' es epimorfismo fuerte y i un monomorfismo, por definición de epimorfismo fuerte, entonces existe un único morfismo v

tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & I \arrow[d, "i"] \\
I' \arrow[r, "i'"'] \arrow[ur, dashed, "v"] & B
\end{tikzcd}$$

Entonces el morfismo $u \circ v$ factoriza el cuadrado $i' \circ p' = i' \circ p'$, pero como p' es epimorfismo fuerte, entonces por unicidad implica $u \circ v = I_{I'}$, de la misma manera tenemos $v \circ u = I_I$, por tanto u es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "f"'] & & I \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "k"] & & C \arrow[dd, "g"] \\
& I' \arrow[rr, dashed, "s"] \arrow[dr, "v"] & & I'' \arrow[dr, "l"] & \\
C \arrow[rr, "q"'] & & J \arrow[rr, "j"'] & & D
\end{tikzcd} \tag{1.33}$$

Para (2) , consideremos el diagrama (1.35), sea $v \circ u$ la factorización fuerte-epi-mono de $q \circ f$ y $l \circ k$ la factorización fuerte-epi-mono de $g \circ i$, entonces usando la proposición (1.29), tenemos que $k \circ p$ es un epimorfismo fuerte, así que tenemos dos factorizaciones fuertes-epi-mono $l \circ (k \circ p) = (j \circ v) \circ u$ de A hacia D. Por lo que acabamos de demostrar, existe un único isomorfismo $s : I' \to I''$ tal que factoriza el diagrama (1.35). De esta manera tenemos dos cuadrados conmutativos, para el cuadrado $k \circ p = s \circ u$ como p es un epimorfismo fuerte y s es en particular un monomorfismo por proposición (1.5) inciso 3, entonces existe un único morfismo $d : I \to I'$ tal que factoriza el cuadrado, para el cuadrado $l \circ s = j \circ v$ como s es isomorfismo, es fácil ver que s es un epimorfismo fuerte, además como j es un monomorfismo entoncs existe un único morfismo $d' : I'' \to J$ tal que factoriza al cuadrado, si definimos $h = d'sd : I \to J$ entonces satisface las condiciones de (2).$\square$

1.4.3. Categorías regulares

Consideremos el siguiente ejemplo, dentro de la categoría de conjuntos sea $f : A \to B$ una función y definamos:

$$Eq(f) = \{(x, y) \in A \times A |\ f(x) = f(y)\} \tag{1.34}$$

Notemos que este conjunto es un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} Eq(f) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"] & A \end{tikzcd} \tag{1.35}$$

Además podemos definir el cociente $\pi : A \to A/Eq(f)$ y este en Set es el coigualador de p_1, p_2, es decir existe una única función $i : A/Eq(f) \to B$ tal que $i \circ \pi = f$, tal función se construye definiendo $i([a]_{Eq(f)}) = f(a), \forall [a]_{Eq(f)} \in A/Eq(f)$. Observemos que en esta situación el morfismo f se factoriza bajo i y π donde π es un epimorfismo regular y i es un monomorfismo. Esta misma construcción se puede realizar para las categorías de grupos, grupos topológicos, anillos , grupos abelianos entre otros.

Definición 1.23: Categorías regulares

Una categoría finitamente completa $\mathcal{C}$ es regular si:

1. Los coigualadores de un núcleo existen en C.
2. Los epimorfismos regulares son estables bajo productos fibrados.

Proposición 1.35. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría regular, entonces:*

1. *Un morfismo en $\mathcal{C}$ tiene una factorización como un epimorfismo regular seguido de un monomorfismo.*
2. *Esta factorización es única salvo isomorfismos.*

Para una demostración véase [11] página 11.

Proposición 1.36. *Sea C una categoría regular, entonces:*

1. *Los epimorfismos regulares coinciden con los epimorfismos fuertes.*
2. *Si f, f' son dos epimorfismos regulares en C entonces $f \times f'$ es un epimorfismo regular.*

Para una demostración véase [11] página 12.

Capítulo 2

Ejemplos de Categorías

A continuación veremos ejemplos de categorías que utilizaremos en los siguientes capítulos.

2.1. La categoría de los conjuntos

En la categoría de conjuntos, que denotaremos Set, los objetos son los conjuntos y sus morfismos son las funciones. Investigaremos que funciones son monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos. Ahora veamos unos resultados para completar diagramas. Sean A, B, C conjuntos no vacíos, tenemos las siguientes proposiciones:

Proposición 2.1. *Para funciones $f : A \to B,\ g : A \to C$ son equivalentes:*

1. *Existe una función $h : B \to C$ tal que $hf = g$.*
2. *$\forall x, y \in A,\ f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$.*

Demostración: La implicación (1)⇒(2) es inmediata. Supongamos válida (2), fijemos $c \in C$ definamos la función $h : B \to C$ como sigue:

$$h(b) = \begin{cases} g(x) & Si\ b \in Imf,\ b = f(x) \\ c & Si\ b \notin Imf \end{cases} \tag{2.1}$$

Para ver que h está bien definida, supongamos que $x, y \in A$ son tales que $f(x) = b = f(y)$ entonces por hipótesis tenemos que $h(b) = g(x) = g(y)$ por tanto está bien definida. $\square$

Proposición 2.2. *Si $f : B \to A$ y $g : C \to A$ son funciones, entonces son equivalentes:*

1. *Existe una función $h : C \to B$ tal que $fh = g$.*
2. *$Im(g) \subset Im(f)$.*

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$(2) es inmediata. Supongamos que (2) se cumple, tomemos $x \in C$ entonces por hipótesis $g(x) \in Im(f)$ esto quiere decir que existe $b \in B$ tal que $g(x) = f(b)$, así que bajo esta asignación definamos $h(x) = b$, entonces para cada $x \in C$ por el axioma de elección podemos escoger una $b \in f^{-1}(g(x))$ formando así la función $h : C \to B$ y por construcción tenemos que $fh = g$ $\square$

Proposición 2.3. *En Set son equivalentes las siguientes afirmaciones para una función $f : X \to Y$:*

1. *f es inyectiva.*
2. *Existe una función $g : Y \to X$ tal que $gf = I_X$.*
3. *f es monomorfismo.*

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2): Sea $f : X \to Y$ inyectiva y consideremos la función $I_X : X \to X$, por definición de inyectividad se cumple la siguiente propiedad $\forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \Rightarrow I_X(x) = I_X(y)$ entonces por proposición (1.20) tenemos que existe una función $g : Y \to X$ tal que $gf = I_X$. Para (2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que existen funciones $u, v : A \rightrightarrows X$ tal que $fu = fv$ por hipótesis exite $g : Y \to X$ tal que $gf = I_X$ componiendo con la ecuación anterior tenemos

$$u = I_X u = (gf)u = g(fu) = g(fv) = (gf)v = v$$

Por tanto f es monomorfismo. Para mostrar (3) $\Rightarrow$ (1) Tomemos $x, y \in X$ tal que $f(x) = f(y)$ construimos las funciones constante $c_x : X \to X$ como sigue $c_x(a) = x, \forall a \in X$ de igual modo para $c_y : X \to X$ así que de la identidad $f(x) = f(y)$ implica la siguiente igualdad de funciones $fc_x = fc_y$ pero por hipótesis f es monomorfismo, implica que $c_x = c_y$ entonces $x = y$ por tanto f es inyectiva. $\square$

Observemos que en Set un monomorfismo es una retracción pero no necesariamente debe ser una corretracción. Por ejemplo consideremos la función $u : X \to X \times Y$ definida como sigue, para cada $a \in Y$ fija, sea $u(x) = (x, a)$, claramente esta función es inyectiva y la proyección $p : X \times Y \to X,\ p(x, y) = x$ satisface $pu = I_X$ pero $up(x, y) = u(x) = (x, a) \neq I_{X \times Y}(x, y)$.

Proposición 2.4. *En Set son equivalentes para una función $f : X \to Y$*

1. *$\exists g : Y \to X$ función tal que $fg = I_Y$.*

2. *$f : X \to Y$ es sobreyectiva.*

3. *f es epimorfismo.*

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2): Por proposición (1.21) se tiene $Y = Im(I_y) \subset Im(f)$ pero por ser f función también tenemos $Im(f) \subset Y$ por tanto $Im(f) = Y$, por tanto f es sobreyectiva.
(2) $\Rightarrow$ (3): Tenemos que f es sobre, supongamos que existen $u, v : Y \rightrightarrows B$ tales que $uf = vf$, sea $x \in Y$ entonces por ser f sobreyectiva existe $a \in X$ tal que $f(a) = x$, entonces tenemos que $\forall x \in Y$ se cumple:

$$u(x) = u(f(a)) = uf(a) = vf(a) = v(x)$$

Por tanto f es epimorfismo.
(3) $\Rightarrow$ (2): Si Y es un elemento entonces f es automáticamente sobreyectiva, entonces consideremos el caso de Y tiene al menos dos elementos $a, b \in Y$, definamos las siguientes funciones $h, k : Y \to Y$ como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} x & Si\ x \in Imf \\ a & Si\ x \notin Imf \end{cases} \tag{2.2}$$

$$k(x) = \begin{cases} x & Si\ x \in Imf \\ b & Si\ x \notin Imf \end{cases} \tag{2.3}$$

Entonces claramente por construcción se tiene $kf = hf \Rightarrow h = k \Rightarrow a = b,\ \forall a, b \in Y$ entonces Y tiene un elemento, lo cual es una contradicción esto implica que $im(f) = Y$ por tanto es sobreyectiva.
(2) $\Rightarrow$ (1) Es inmediato de la definición de sobreyectividad. □

Proposición 2.5. *Sea $f : X \to Y$, entonces son equivalentes:*

1. *f es isomorfismo.*

2. *f es biyectiva.*

3. *f es bimorfismo.*

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2) Si f es isomorfismo por proposición (1.5) f es bimorfismo entonces por la proposición (1.22) y (1.23) tenemos que f es inyectiva y sobreyectiva es decir f es biyectiva.
(2) $\Rightarrow$ (3) f es biyectiva entonces f es inyectiva y sobreyectiva por (1.22) y (1.23) f es monomorfismo y epimorfismo por tanto f es bimorfismo.
(3) $\Rightarrow$ (1) f es bimorfismo por (1.22) y (1.23) f es invertible por la derecha e izquierda. Sea g la inversa por la derecha, es decir $gf = I_X$ y h la inversa por la izquierda , es decir $fh = I_Y$ entonces:

$$g = gI_Y = g(fh) = (gf)h = I_X h = h$$

Por tanto g es una inversa por la derecha e izquierda, por lo tanto f es un isomorfismo $\square$

Proposición 2.6. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos indicados por I, entonces existe su producto y coproducto. Definidos de la siguiente manera:*

1. $\prod_{i\in I} X_i = \left\{f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i | f(i) \in X_i \ \forall i \in I\right\}$.

2. $\coprod_{i\in X} X_i = \bigcup_{i\in I}\{(x, i)|x \in X_i\}$.

Demostración: (1)Para cada $i \in I$ definimos la proyección $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ como sigue $\pi_i(f) = f(i)$, notemos que es sobreyectiva, ya que si tomamos $x \in X_i$ definimos $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ como sigue $f(i) = x$ y $f(j) = x_j$ con $x_j \in X_j, j \neq i$, esto es posible por el axioma de elección. Para mostrar que es un producto, tomemos un cono $\{Y, g_i : Y \to X_i\}_{i \in I}$ definimos $h : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ como sigue para cada $y \in Y$ sea $h(y) : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ como $h(y)[i] = g_i(y) \in X_i$ entonces por construcción se tiene que para cada $y \in Y$ y $i \in I$

$$(\pi_i \circ h)(y) = \pi_i(h(y)) = h(y)[i] = g_i(y) \Rightarrow \pi_i \circ h = g_i \qquad (2.4)$$

Para mostrar que h es único, sea $h' : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ tal que $\pi_i \circ h = g_i$ entonces por la ecuación anterior tenemos

$$\pi_i \circ h = g_i = \pi_i \circ h' \qquad (2.5)$$

Entonces dado $y \in Y$ fija arbitraria $h'(y) : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ pero por las ecuaciones $(2,4), (2,5)$ implica que $h'(y)[i] = g_i(y) = h(y)[i] \Rightarrow h'(y) = h(y)$ para toda $y \in Y$, es decir $h = h'$ $\square$

Proposición 2.7. *Consideremos dos funciones $f, g : X \rightrightarrows Y$, entonces el igualador está definido como:*

$$Eq(f, g) = \{x \in X | \ f(x) = g(x)\} \qquad (2.6)$$

Una consecuencia directa es lo siguiente.

Colorario 2.7.1. *La categoría Set es completa y cocompleta.*

Ahora vamos a describir de manera general otros objetos y límites dentro de la categoría de conjuntos.

2.2. La categoría de los Grupos

En esta categoría los grupos son los objetos y los morfismos de grupos son los morfismos de categorías, notemos que esta categoría tiene objeto cero, donde $0 = \{*\}$ es el grupo de un solo elemento y la operación trivial, claramente el elemento es el neutro del grupo, así que para cada grupo G definamos $I : 0 \to G$ como sigue $I(*) = e_G$ con esto, se puede ver que la categoría de grupos tiene un objeto cero. Para ver que objetos importantes tiene esta categoría, consideremos el funtor olvido $F : Grp \to Set$. Claramente este funtor es fiel puesto que todo morfismo de grupos es una función.

Es posible construir un funtor adjunto al funtor olvido. Para ello primero daremos la noción de lo que es un objeto libre.

Definición 2.1: Objeto Libre

Consideremos una categoría concreta (C, F), es decir una categoría junto con un funtor fiel $F : C \to Set$. Decimos que un objeto $A \in C$ es libre en un conjunto $X \in Set$ si existe una función $j : X \to F(A)$ tal que satisface la siguiente propiedad universal:

Para cada pareja $(B, s : X \to F(B))$ existe un único morfismo $g : A \to B$ tal que la función $F(g)$ factoriza s, es decir conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & F(A) \arrow[dd, dashed, "F(g)"] \\ X \arrow[ur, "j"] \arrow[dr, "s"'] & \\ & F(B) \end{tikzcd}$$

La construcción de objetos libres es ampliamente usada en álgebra para dar estructura a conjuntos, por ejemplo estructura de grupos, de módulos, incluso también se puede construir a uno de los objetos más conocidos, los polinomios, se puede dar esta construcción a través de los objetos libres de manera rápida, se toma S un semigrupo y R un anillo, visto como R-módulo, se construye el objeto libre $R^{(S)}$ visto a S como conjunto, se puede dar a este R-módulo una estructura de R-álgebra y a esta estructura conocida como anillo de semigrupos definido usualmente $R[S] := R^{(S)}$ y entonces para construir un anillo de polinomios de n variables, tomemos un conjunto X con n elementos, construímos el semigrupo libremente generado por X, $M^{(X)}$ y el anillo de polinomios es el anillo de semigrupos $R[x_1, \cdots, x_n] := R[M^{(X)}]$

Una propiedad inmediata de los objetos libres es la unicidad salvo isomorfismos:

Proposición 2.8. *Sea $(\mathcal{C}, F)$ una categoría concreta y A, B objetos libres en X, entonces $A \cong B$*

Demostración: Sean $j : X \to F(A)$ y $j' : X \to F(B)$ las funciones que definen a A y B objetos libres en X, pensando a (A, j) como objeto libre entonces existe un único morfismo $f : A \to B$ tal que

$$j' = F(f) \circ j \tag{2.7}$$

Ahora pensando a (B, j') como objeto libre, existe un único morfismo $g : B \to A$ tal que

$$j = F(g) \circ j' \tag{2.8}$$

Sustituyendo la ecuación (2.8) en (2.7) y viceversa se tiene (usando que F es un functor)

$$j' = F(f \circ g) \circ j', \ j = F(g \circ f) \circ j \tag{2.9}$$

Igualmente por definición, sabemos que $I_{F(A)}$ y $I_{F(B)}$ son los únicos morfismos tal que $j = I_{F(A)}j$ y $j' = I_{F(B)}j'$ entonces de las ecuaciones de (2.9) tenemos

$$F(f \circ g) = I_{F(B)} = F(I_B), F(g \circ f) = I_{F(A)} = F(I_A) \tag{2.10}$$

Pero F es un funtor fiel entonces $f \circ g = I_A$ y $g \circ f = I_B$ por tanto $A \cong B$ $\square$

Ahora veamos la proposición importante de esta sección.

Proposición 2.9. *Dada $(\mathcal{C}, F)$ una categoría concreta, si para cada conjunto X , existe un objeto en C libre en X, entonces F tiene un funtor adjunto izquierdo. En esta situación F, preserva todos los límites existentes.*

Demostración: Definimos $G : Set \to \mathcal{C}$ como sigue, para cada conjunto X le asignamos el objeto libre $G(X) \in \mathcal{C}_0$ con $j_X : X \to F(G(X))$ la función de la propiedad universal. Ahora para cada función en Set, $f : X \to Y$ entonces por la propiedad universal se tiene la existencia del $\mathcal{C}$-morfismo $FG(f) : FG(X) \to FG(Y)$, como se muestra en el cuadrado comutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j_X"] \arrow[d, "f"] & FG(X) \arrow[d, dashed, "FG(f)"] \\
Y \arrow[r, "j_Y"] & FG(Y)
\end{tikzcd}$$

Por unicidad y como F es fiel, se tiene que $G(f)$ es único, esto permite ver que $G(Id_X) = Id_{G(X)}$ y por conmutatividad de (2,11) se tiene que para otra función $g : Y \to Z$ entonces $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$. Por lo tanto $G : Set \to \mathcal{C}$ es un funtor. Consideremos A un objeto de la categoría $\mathcal{C}$ y B un conjunto, para cada función $h \in Hom_{Set}(B, F(A))$ lo asignamos al único $\mathcal{C}$-morfismo $G(h) : G(B) \to A$ debido a la propiedad universal de los objetos libres y además satisface $F(G(h)) \circ j_B = h$, definiendo la función $\Phi : Hom_{Set}(B, F(A)) \to Hom_{\mathcal{C}}(G(B), A)$ como $\Phi(h) = G(h)$. Por otro lado podemos definir $\Psi : Hom_C(G(B), A) \to Hom_{Set}(B, F(A))$ como $\Psi(f) = F(f) \circ j_B$. Observemos que

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(h) &= \Psi(G(h)) \\ &= F(G(h)) \circ j_B = h \\ \Phi \circ \Psi(f) &= \Phi(F(f) \circ j_B) = f \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a la unicidad de la propiedad universal. Por tanto tenemos:

$$Hom_C(G(B), A) \cong Hom_{Set}(B, F(A)),\ \forall A \in \mathcal{C}_0, B \in Set_0,$$

concluyendo la demostración $\square$

Proposición 2.10. *Para todo conjunto X, existe un grupo G_X que es libre en X.*

Demostración: Sea X un conjunto cuyos elementos son llamados letras, formemos un conjunto X^{-1} ajeno a X, denotado cada elemento en X^{-1} como x^{-1}, donde $x \in X$. Existe una biyección $X \to X^{-1}$ de la forma $x \to x^{-1}$. Ahora tomemos un conjunto de un elemento de $X \cup X^{-1}$. Al elemento de este conjunto lo nombraremos 1, sea $A = X \cup X^{-1} \cup \{1\}$. Decimos que una palabra es una sucesión de elementos de A, por ejemplo, la palabra $(1, 1, 1, \cdots)$. Cada palabra w formada con elementos de A se puede escribir como $w = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ donde $x_i \in X \cup \{1\}$ y $e_i \in \{+1, -1\}$, hagamos la convención de que $1 = 1^{-1} = 1^1$. Decimos que una palabra w distinta de 1 es reducida si $w = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ con todas las $x \in X$ y no existe x_i en la palabra tal que x_i, x_i^{-1} sean adyacentes en dicha palabra, por convención la palabra 1 también se considerará reducida. Sea F el conjunto de palabras reducidas de A. Para definir una multiplicación, dadas $w, u \in F$ palabras reducidas, definimos la siguiente operación $w * u$, llamada yuxtaposición, como sigue. Si wu es reducida, entonces $w * u := wu$, en caso de que exista una sub-palabra w' tal que $w = w'v$ y que v^{-1} es una sub-palabra de u tal que $u = v^{-1}u'$ y la nueva palabra formada $w'u'$ sea reducida, entonces $w * u := w'u'$. En el caso de que $wu = x^1x^{-1}$ o $wu = x^{-1}x^1$ definimos $w * u = 1$. Cuando $u = 1$

definimos $w * u := w$ y $u * w = w$
Vamos a demostrar que $(F, *)$ es un grupo, en el que $*$ es el producto con la palabra vacía 1 como el neutro, y para cada palabra $w = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$ su inversa es $w^{-1} := x_n^{-e_n} \cdots x_1^{-e_1}$. Salvo la asociatividad, todas las propiedades que debe cumplir un grupo se cumplen por definición. Para ver la asociatividad, definimos la función $|x^e| : F \to F$ (con $e \in \{1, -1\}$), con $x \in X$, como sigue $|x^e|(w) = x^e * w$. Observemos que $|x^e| \circ |x^{-e}| = Id_F = |x^{-e}| \circ |x^e|$, usando las proposiciones (2.3),(2.4) y (2.5), entonces $|x^e|$ es una biyección y por tanto es una permutación en F. También observemos que hay una biyección entre conjuntos $X \cong B := \{|x||\ x \in X\} \subset S_F$, consideremos $G = \langle B \rangle$ el subgrupo de S_F generado por B, entonces cada elemento $g \in G$ distinto de la identidad se puede ver como $g = |x_1^{e_1}| \circ \cdots \circ |x_n^{e_n}|$ con $|x^e|, |x^{-e}|$ nunca adyacentes, tal factorización es única y además $g(1) = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}$, entonces definimos $\Phi : G \to F$ como $\Phi(g) = g(1)$ y definimos $\Psi : F \to G$ como $\Psi(x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}) = |x_1^{e_1}| \circ \cdots \circ |x_n^{e_n}|$. Es fácil ver que como funciones, satisfacen $\Psi \circ \Phi = Id_G$ y que $\Psi \circ \Phi = Id_F$, más aún, se respetan las operaciones. Basta verificar que Ψ respeta las operaciones, notemos primero que $\Psi(1)$ satisface lo siguiente, para todo $w \in F$, tenemos $\Psi(1)[w] = 1 * w = w = Id_F[w]$ entonces $\Psi(1) = Id_F$. Por otro lado dado $w, u \in G$ con $w = x_1^{e_1}, u = y_1^{f_1}$.

$$\begin{aligned} \Psi(w * u) &= |x_1^{e_1}| \circ |y_1^{e_2}|[v] \\ &= \Psi(w) \circ \Psi(v) \end{aligned}$$

Entonces la estructura de grupo G induce en F estructura de grupo. Para mostrar que este grupo es libre en X, basta considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & H \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

Donde H es un grupo y f una función, entonces definamos el morfismo $g(x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n}) = f(x_1)^{e_1} \cdots f(x_n)^{e_n}$ la cuál satisface la propiedad universal. $\square$
Teniendo esto vemos que algunos objetos y morfismos importantes son:

1. Un homomorfismo de grupos inyectivo es un monomorfismo, dualmente un homomorfismo de grupos sobreyectivo es un epimorfismo.

2. Dados dos morfismos de grupos $f, g : G \to H$ entonces $Eq(f, g)$ es un grupo.

3. Si $X_i, i \in I$ son una familia de grupos entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es un grupo.

En esta situación se preservan los límites pero no necesariamente los colímites.

Proposición 2.11. *En GRP los coproductos son los productos libres, es decir si G, H son grupos, consideremos $X = \{g_1 h_1 g_2 h_2 \cdots g_r h_r | g_i \in G,\ h_i \in H\}$ llamado el conjunto de palabras de G y H, entonces el producto libre es el grupo libremente generado por X, y se denota $G * H$.*

Dado un subconjunto, decimos que es un subgrupo si el subconjunto junto con la operación inducida forma un grupo por si solo. Tambien consideremos la siguiente definición, decimos que un subgrupo $N \leq H$ es normal si satisface la siguiente propiedad $aN = Na,\ \forall a \in G$.

Proposición 2.12. *Un subconjunto $H \subset G$ es subgrupo si y solo si H satisface las siguientes propiedades:*

1. *$e \in H$ con e el neutro de G.*

2. *$\forall x, y \in H,\ x * y^{-1} \in H$.*

Sea G un grupo y N un subgrupo, consideremos la relación siguiente en $G,\ x \sim y \Leftrightarrow x * y^{-1} \in N$. Observemos que esta relación es de equivalencia, entonces, consideremos el conjunto cociente G/N con la proyección natural $p_N : G \to G/N$ definida como $p_N(a) = aN$, es fácil ver que está bien definida, pues si $p_N(a) = aN$ y $p_N(a) = bN$ entonces $aN = bN \Leftrightarrow a * b^{-1} \in N$.

Proposición 2.13. *Sea G un grupo y N un subgrupo, consideremos el conjunto cociente G/N, si N es normal entonces existe una estructura que hace G/N un grupo y p_N es un homomorfismo de grupos.*

> **Demostración:** Como N es normal se tiene para cualquier $a \in G$, $aN = Na$, entonces dado $aN, bN \in G/N$ tenemos que $(bN)(aN) = b(Na)N = ba(NN) = baN$ entonces se define de manera natural de multiplicación definida como $(bN) * (aN) = baN$, y observemos que $\pi(b) * \pi(a) = (bN) * (aN) = baN = \pi(ba)$, por tanto π es un homomorfismo de grupos. $\square$

Entre los teoremas más importantes dentro de la teoría de grupos están los siguientes, sólo se hará mención, para una demostración se puede consultar cualquier libro de Algebra Abstracta o de Teoría de grupos.

Teorema 2.1: Teoremas fundamentales en la teoría de grupos

Las siguientes afirmaciones son válidas:

1. (Primer teorema de isomorfismo) Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos, sea $Kerf = \{x \in G| \ f(x) = 0\}$ entonces $Kerf$ es un subgrupo normal y existe un isomorfismo de grupos $G/Kerf \cong f(G) \subset H$.

2. (Segundo teorema de isomorfismo) Si A, B son subgrupos de G con B normal entonces son isomorfos los siguientes grupos $B/(A \cap B) \cong (A * B)/B$.

3. (Tercer teorema de isomorfismo) Si A, B son subgrupos normales de G con $A \subset B$ entonces $G/B \cong \frac{G/A}{B/A}$.

4. (Teorema de la correspondencia biyectiva) Sea A un subgrupo normal de G entonces existe un isomorfismo de órdenes entre las siguientes retículas de subgrupos $[A, G]$ y $[0, G/A]$. En particular todo subgrupo del grupo cociente G/A es de la forma H/A con H subgrupo de G.

Consideremos una subcategoría especial, donde los objetos son los subgrupos abelianos y los morfismos son homomorfismos de grupos, esta subcategoría es denotada por Ab. Una de las propiedades importantes son:

1. El funtor inclusión $i : Ab \to Grp$ es pleno.

2. Todo subgrupo de un grupo es normal.

3. La función inversión $G \to G$ definida por $x \to x^{-1}$ es un morfismo de grupos.

4. El coproducto se describe como $A \coprod B = \{(a, b)|a \in A, b \in B\}$ la suma directa.

2.3. Categorías de Espacios Topológicos

Sea X un conjunto, decimos que una topología en X es un subconjunto del conjunto potencia $\tau \subset \mathfrak{P}(X)$(donde los elementos de τ son llamados abiertos) tal que satisface las siguientes condiciones:

1. La unión arbitraria de abiertos es un abierto.

2. La intersección finita de abiertos es un abierto.

3. $\emptyset, X$ son abiertos.

Existen siempre dos topologías para cada conjunto, si τ es topología de X, decimos que es trivial cuando $\tau = \{\emptyset, X\}$ y decimos que es discreta cuando $\tau = \mathfrak{P}(X)$. Dados dos topologías τ_1, τ_2 si $\tau_1 \subset \tau_2$ decimos que τ_2 es más fina que τ_1 o que τ_1 es mas gruesa que τ_1. A continuación presentaremos los conceptos más importantes de la topología. Decimos que un subconjunto $A \subset X$ es cerrado si $X - A$ es abierto, la cerradura de un conjunto $A \subset X$ es el mínimo cerrado que contiene a X, análogamente el interior es el máximo abierto que está contenido en el conjunto. Dado $p \in X$, un entorno de p es un subconjunto $V \subset X$ tal que existe un abierto $U \subset X$ que satisface $p \in U \subset V$. Además un subconjunto $D \subset X$ es denso si su cerradura es todo X, un ejemplo de subconjunto denso es $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ con la topología generada por la métrica euclidiana.

Bases Para crear una topología es conveniente usar lo que se llama bases. Una base de τ es una colección $\mathfrak{B} \subset \tau$ tal que todo abierto A se ve de la forma $A = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$. Un ejemplo común de espacio topológico con base es $\mathbb{R}$ donde la base son los intervalos abiertos de la forma (a, b) con $a < b$.

Convergencia Una sucesión x_n en un espacio topológico X converge a $x \in X$ si para cada abierto U de x existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n > n_0$ implica que $x_n \in U$. Decimos que un espacio topológico X es primero numerable si cada $x \in X$ tiene una base de entornos numerable

Proposición 2.14. *Sean X, Y espacios primero numerables entonces son válidas las siguientes afirmaciones:*

1. *Para $E \subset X, x \in \overline{X}$ si y solo si existe una sucesión $(x_n) \subset E$ tal que converge a x*

2. *$U \subset X$ es abierto si y solo si cuando $x_n \to x \in U$ entonces (x_n) está eventualmente en U, es decir existe n_0 tal que para cada $n > n_0$ se cumple que $x_n \in U$*

3. *$F \subset X$ es cerrado si y solo si cuando $(x_n) \subset F$ y $x_n \to x$ entonces $x \in F$*

Axiomas de Separación Decimos que un espacio topológico es:

1. T_0-espacio si y sólo si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un abierto que contiene a uno y no al otro.

2. T_1-espacio si y sólo si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un abierto U que contiene a x y no a y y un abierto V que contiene a y y no a x. Notemos que los abiertos no necesariamente deben satisfacer $U \cap V = \emptyset$

3. T_2-espacio o de Hausdorff si y sólo si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos U, V con $x \in U$ y $y \in V$.

4. Regular si $A \subset X$ es cerrado y $x \in X - A$, entonces existen abiertos disjuntos U, V tal que $x \in U$ y $A \subset V$. Un T_3-espacio es un T_1-espacio regular.

5. Normal si para cada par $A, B \subset X$ de cerrados disjuntos , entonces existen abiertos disjuntos U, V tal que $A \subset U$ y $B \subset V$. Un T_4-espacio es un T_1-espacio normal.

Espacios Compactos En caso general, dado un conjunto X y una familia de subconjuntos $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta si $X = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$. Por ejemplo toda partición de un conjunto X es una cubierta. Además si X es un espacio topológico $\mathcal{B}$ es una cubierta, decimos que es cubierta abierta si cada elemento de $\mathcal{B}$ es abierto, por ejemplo una base para la topología es una cubierta abierta por definición. Teniendo el concepto de cubiertas, definimos lo siguente:

1. Un espacio topológico X es compacto si para cada cubierta abierta $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ existe una subcubierta finita, es decir existen $B_{\alpha_1}, \cdots, B_{\alpha_n}$ de la cubierta tales que forman una cubierta abierta de X.

2. Un espacio topológico X es localmente compacto si cada punto en X tiene una base de vecindades que consiste en conjuntos compactos.

Espacios Conexos Decimos que un espacio X es disconexo si existen abiertos disjuntos y no vacíos U, V tales que $X = U \cup V$. En caso contrario decimos que el espacio es conexo. No todo espacio topológico es conexo pero es posible descomponerlo en una unión disjunta de subespacios conexos. Para ver esto definimos la siguiente relación de equivalencia, sea $x, y \in X$, decimos que $x \sim y$ si y sólo si existe un subconjunto conexo U tal que $x, y \in U$. A las clases de equivalencia de esta relación se les llaman componentes conexas de X y están caracterizadas por satisfacer la siguiente propiedad; para cada $x \in X$ existe un subespacio conexo que es maximal con respecto al orden en la familia de subespacios conexos, es decir si U es la componente conexa que contiene a x y V es otro subespacio conexo que contiene a x entonces $V \subset U$. Un ejemplo de conjunto conexo son los intervalos abiertos y cerrados de la forma (a, b) en $\mathbb{R}$.

Definición 2.2: Continuidad

Sea $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ decimos que es continua si y solo si $U \in \tau_Y \Rightarrow \; f^{-1}(U) \in \tau_X$

Notemos que una función es continua si las imágenes inversas de abiertos son abiertos. Por otro lado las imágenes directas de abiertos no necesariamente son abiertas, por ejemplo sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 0$, es una función continua, entonces para un intervalo (a, b) un abierto tenemos que $f(a, b)$ es un punto y en la topología euclidiana, esto no es un abierto. A las funciones que envían abiertos en abiertos se les denominan **funciones abiertas**. Una propiedad importante es la siguiente:

Proposición 2.15. *Sea $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones continuas en espacios topológicos, entonces $g \circ f$ es una función continua. Más aun los espacios topológicos y las funciones continuas forman una categoría*

Demostración: Sea $f : X \to Y, g : Y \to Z$ continuas y H abierto en Z, por continuidad de g implica que $g^{-1}(H)$ es abierto en Y pero por continuidad de f tenemos $f^{-1}(g^{-1}(H)) = (g \circ f)^{-1}(H)$ es abierto en X, por tanto $g \circ f$ es continua. Además $I_X : X \to X$ es continua por definición $\square$

Denotamos a esta categoría como Top.

Proposición 2.16. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos entonces son equivalentes:*

1. *f es continua*
2. *Si K es cerrado en Y entonces $f^{-1}(K)$ es cerrado*

Demostración: Para mostrar $(1) \Rightarrow (2)$: Sea K cerrado en Y entonces $Y - K$ es abierto, por continuidad de f, se tiene que $f^{-1}(Y - K) = X - f^{-1}(K)$ es abierto por tanto $f^{-1}(K)$ es cerrado.

Para mostrar (2) $\Rightarrow$ (1): Dado A abierto en Y entonces $Y - A$ es cerrado por (2) tenemos que $f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$ es cerrado entonces $f^{-1}(A)$ es abierto, por lo tanto f es continua. $\square$
Existen propiedades topológicas que son preservadas por las funciones continuas.

Proposición 2.17. *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos, entonces:*

Si X es T_3 y f es abierta y cerrada entonces la imagen $f(X)$ es T_2.

Si X es compacto entonces la imagen es compacta.

Si X es compacto y Y es Hausdorff con f continua biyectiva entonces f es homeomorfismo.

Si X es localmente compacto y f abierto entonces su imagen es localmente compacta.

Si X es conexo entonces su imagen es conexo.

Para una demostración véase [7]. Las funciones que son isomorfismos en esta categoría se le denomina **homeomorfismos**. Aqui no toda función continua y biyectiva induce un homeomorfismo, esto es por el hecho de que no todas las funciones son abiertas, es decir un homeomorfismo es una función continua biyectiva y abierta. Bajo el mismo razonamiento, uno puede ver que los monomorfismos son funciones continuas e inyectivas pero a diferencia con la categoria de conjuntos, no siempre se cumple que la imagen del espacio total es homeomorfo a un subespacio del codominio y más aun no todo monomorfismo es una retracción, de manera dual pasa con los epimorfismos. Decimos que un monomorfismo es un **encaje** si la imagen es un subespacio del codominio, es decir $f : X \to Y$ es encaje si $f(X) \subset_{TOP} Y$, tenemos:

Proposición 2.18. *En Top los monomorfismos extremos son justamente los encajes*

Recordemos que un monomorfismo f es extremo si para cada factorización de forma $f = g \circ e$ con e un epimorfismo entonces e es un isomorfismo.

Demostración: Consideremos la siguiente factorización:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & Y \\
& f(X) \subset Y \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde $f' : X \to f(X)$ se define como $f'(x) = f(x)$ y $f(X)$ está dotado de la topología inducida por Y. Entonces $f = i \circ f'$ con f' un epimorfismo, entonces como f es monomorfismo extremo, implica que f' es un homeomorfismo, por tanto X es homeomorfo a un subconjunto de Y. $\square$

2.3.1. Topología inicial y final. Extensión a una nueva categoría

Dada una familia de topologías $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$, un conjunto X y una familia de funciones $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$ deseamos encontrar una topología τ_0 en X tal que , la familia de funciones es una familia de funciones continuas. Más aun esta topología debe ser un objeto inicial, en sentido siguiente:

Definición 2.3: Topología inicial

Considerando la familia de funciones $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$, con X_i espacios topológicos $\forall i \in I$, decimos que una topología en X, τ_0 es inicial con respecto a la familia $\{f_i\}_{i\in I}$, si satisface las siguientes propiedades:

1. $\forall i \in I,\ f_i$ es continua con respecto a la topologia inicial.
2. Para cada función $g : A \to X$, entonces g es continua si y solo si $f_i \circ g$ es continua para toda $i \in I$.

Al concepto dual lo designamos como topología final. Es decir, dado una familia de funciones $\{f_i : X_i \to X\}_{i\in I}$, decimos que una topología en X, denotado como τ_f es final con respecto a la familia $\{f_i\}_{i\in I}$, si satisface las siguientes propiedades:

1. $\forall i \in I$, f_i es continua con respecto a la topología final.
2. Para cada función $g : X \to A$, entonces g es continua si y solo si $g \circ f_i$ es continua para toda $i \in I$.

Observemos que si p_i es una topología inicial en X y p es cualquier topología en X entonces como $I_1 : (X,p) \to (X,p)$ es continua tenemos que $I_2 : (X,p) \to (X,p_i)$ es continua si y solo si $f_i \circ I_2 : (X,p) \to (X_i)$ es continua, es decir que dadas dos topologías, implican que son las mismas y además para cada vez que I_2 es continua tenemos $p_i \subset p$. Por tanto la topología inicial es la topología más gruesa que hace continuas a las (f_i), a sí mismo por dualidad, la topología final es la topología más fina que hacen continuas a las $(f_i : X_i \to X)$.

Categorías topológicas: Se puede con argumentos categóricos mostrar que la existencia de una topología inicial equivale lógicamente a la existencia de una topología final. Sea C una categoría concreta, es decir existe un funtor fiel $F : C \to Set$. En esta sección a una categoría concreta lo podemos ver como sigue, a cada objeto de C se ve de la forma (A,τ) donde A es un conjunto y τ es una estructura del conjunto, por ejemplo una topología, topología Hausdorft Compacta , o sigma álgebra o complejo simplicial abstracto, entre otros.

Definición 2.4: Categoría topológica

Una categoría concreta es llamada **topológica** si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. (Estructura inicial.) Para cada conjunto X, una familia $\{(X_i,\eta_i)\}_{i\in I}$ de objetos en C, y una familia de funciones $f_i : X \to (X_i,\eta_i)$, existe una única C-estructura en X tal que es inicial, es decir f_i son C-morfismos $\forall i \in I$ y para cada $g : (Y,\xi) \to (X,\eta)$ es un C-morfismo si y solo si $f_i \circ g$ es un C-morfismo.

2. Para cada conjunto X , la clase de todas las C-estructuras en X es un conjunto.

3. Para cada conjunto X con cardinalidad uno tiene exactamente una C-estructura.

De igual manera para un conjunto X dadas dos C-estructuras η,δ decimos que η es mas fina que δ si $I : (X,\eta) \to (X,\delta)$ es C-morfismo, de manera dual , decimos que δ es más gruesa que η. La estructura dual de la estructura inicial es llamada estructura final y se enuncia como sigue:

Estructura final. Para cada conjunto X, una familia $\{(X_i, \eta_i)\}_{i\in I}$ de objetos en C, y una familia de funciones $f_i : (X_i, \eta_i) \to X$, existe una única C-estructura en X tal que es final, es decir f_i son C-morfismos $\forall i \in I$ y para cada $g : (X, \eta) \to (Y, \xi)$ es un C-morfismo si y solo si $g \circ f_i$ es un C-morfismo.

Proposición 2.19. *Son equivalentes para una categoría concreta C*

1. *Para toda familia de funciones $\{f_i : X \to (X_i, \eta_i)\}_{i\in I}$ con $(X_i, \eta_i) \in C$, entonces X tiene estructura inicial con respecto a $\{f_i\}_{i\in I}$.*
2. *Para toda familia de funciones $\{f_i : (X_i, \eta_i) \to X\}_{i\in I}$ con $(X_i, \eta_i) \in C$, entonces X tiene estructura final con respecto a $\{f_i\}_{i\in I}$.*

Demostración: Para mostrar (1) $\Rightarrow$ (2) : Dado $\{(X_i, \eta_i)\}_{i\in I}$ una familia de objetos en C y una familia de funciones $\{f_i : X_i \to X\}_{i\in I}$. Consideremos la familia $\mathfrak{F} = \{(R_j, \eta_j, g_j : X \to R_j)|\ g_j \circ f_i$ es C-morfismo $\forall i \in I\}$, construimos la única estructura inicial η con respecto a $\mathfrak{F}$ y por construcción para cada función $g : (X, \eta) \to (Y, \xi)$ es C-morfismo $\Leftrightarrow$ $(Y, \xi, g : X \to Y) \in \mathfrak{F}$ $\Leftrightarrow g \circ f_i$ es C-morfismo $\forall i \in I$.
Para mostrar (2) $\Rightarrow$ (1) : Bajo argumentos similares sea $\{(X_i, \eta_i)\}_{i\in I}$ una familia de objetos en C y una familia de funciones $\{f_i : X \to X_i\}_{i\in I}$, entonces al considerar la familia $\mathfrak{F} = \{(R_j, \eta_j, g_j : R_j \to X)|\ f_i \circ g_j$ es C-morfismo $\forall i \in I\}$, construimos la estructura inicial η con respecto a $\mathfrak{F}$ y por construcción para cada función $g : (Y, \xi) \to (X, \eta)$ es un C-morfismo $\Leftrightarrow$ $(Y, \xi, g : Y \to X) \in \mathfrak{F}$ $\Leftrightarrow f_i \circ g$ es C-morfismo $\forall i \in I$.$\square$
Para añadir acerca de las estructuras finales tenemos lo siguiente:

Proposición 2.20. *En una categoría topológica , la estructura final η en un conjunto X con respecto a $\{(X_i, \eta_i), f_i : X_i \to X\}_{i\in I}$ es la estructura más fina para la cual todas las funciones f_i para cada $i \in I$ son C-morfismos.*

Demostración: Sea (X, η) la estructura final con respecto a $\{(X_i, \eta_i), f_i : X_i \to X\}_{i\in I}$, y sea ξ otra estructura en X tal que $f_i : (X_i, \eta_i) \to (X, \xi)$ son C-morfismos $\forall i \in I$, notemos que satisface el siguiente diagrama conmutativo de funciones $\forall i \in I$:

$$\begin{tikzcd}
(X,\eta) \arrow[r, "Id_X"] & (X,\xi) \\
(X_i,\eta_i) \arrow[u, "f_i"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Usando la propiedad de estructura inicial como $f_i : (X_i, \eta_i) \to (X, \xi)$ son C-morfismos entonces $Id_X : (X, \eta) \to (X, \xi)$ es un C-morfismo para toda estructura ξ que hace f_i un $\mathcal{C}$-morfismo. $\square$
Como es de esperarse las categorías topológicas son completas.

Proposición 2.21. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría topológica, $\{(X_i, \eta_i)\}_{i\in I}$ una familia de $\mathcal{C}$-objetos entonces los conjuntos $\prod_{i\in I} X_i$ y $\coprod_{\in I} X_i$ tienen estructura inicial y final respectivamente. Es decir C tiene productos y coproductos arbitrarios. Más aún $\mathcal{C}$ es completa y cocompleta.*

Demostración: Solo mostraremos que $X := \prod_{i\in I} X_i$ tiene estructura inicial y en C es un producto. Considerando las funciones proyección $\{\pi_i : X \to X_i\}_{i\in I}$, sea η la estructura inicial, para mostrar ahora que es un producto, sea $\{f_i : (Y, \xi) \to (X_i, \eta_i)\}_{i\in I}$ una familia de C-morfismos, como funciones entonces existe una única función $h : Y \to X$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(Y,\xi) \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "f_i"] & \\
(X,\eta) \arrow[r, "\pi_i"'] & (X_i,\eta_i)
\end{tikzcd} \tag{2.12}$$

Como η es la estructura inicial de $\{\pi_i\}_{i\in I}$ y $\{f_i = \pi_i \circ h\}_{i\in I}$ son C-morfismos entonces h es un C-morfismo. Para ver que es completa, basta ver que tiene igualadores y co-igualadores, en Set tenemos para dos C-morfismos $f, g : (X, \eta) \to (Y, \psi)$, pensados como conjuntos su igualador es $(Eq(f, g) := \{x \in X | f(x) = g(x)\}, i : Eq(f, g) \to X)$, dándole una estructura inicial con respecto a i, se obtiene que $Eq(f, g)$ es el igualador de f, g para esta categoría. De manera dual, para los co-igualadores. $\square$

Otros objetos y morfismos interesantes dentro de esta categoría son los siguientes. Dado un conjunto X a la estructura inicial inducida por un índice I vacío lo llamamos estructura indiscreta y a la estructura final lo llamamos estructura discreta, notemos que para Top la estructura indiscreta es precisamente la topología indiscreta y la estructura discreta en la topología discreta. Dado $f : X \to Y$ un C-morfismo decimos que es **encaje** si la función inducida $f' : X \to f(X)$ (Con $f(X)$ dotado de la estructura inicial bajo la inclusión $i : f(X) \to Y$) es un isomorfismo. De la misma manera decimos que f es una **función cociente** si f es sobreyectiva y la estructura en Y, llámese η, coincide con la estructura final con respecto a la función f

Proposición 2.22. *En una categoría topológica las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Dados dos conjuntos* X, Y *y* $f : X \to Y$ *una función constante, entonces bajo cualquier* C*-estructura en los conjuntos,* f *es un* C*-morfismo.*

2. $f : (X, \eta) \to (Y, \eta')$ *es un monomorfismo si y solo si es inyectivo*

3. f *es epimorfismo si y sólo si es sobreyectivo.*

4. f *es un monomorfismo extremo si y solo si* f *es un encaje.*

5. f *es un epimorfismo extremo si y solo si* f *es una función cociente.*

Para una demostración veáse en [10]. Como pasa en los espacios topológicos no toda función biyectiva que es continua es un homeomorfismo, depende mucho de la topología en Y

Proposición 2.23. *Sea* (X, ξ) *un objeto en una categoría topológica* C *y* $f : X \to Y$ *una función biyectiva entonces existe una única* C*-estructura* η *en* Y *tal que* f *es un* C*-isomorfismo.*

Demostración: Consideremos ξ la estructura final con respecto a $f : (X, \eta) \to Y$, como f es biyectiva entonces por proposición (2.5) se tiene $f^{-1} \circ f = Id_X$ pero $Id_X : (X, \eta) \to (X, \eta)$ es un C-morfismo, usando que ξ es estructura final, por definición, implica que f^{-1} es un C-morfismo y $f \circ f^{-1} = Id_Y$ es una composición de C-morfismos por tanto f es un C-isomorfismo.$\square$

Capítulo 3

Acciones de Grupos

Los grupos han sido una herramienta para estudiar objetos matemáticos, en especial los objetos geométricos y topológicos. Consideremos por ejemplo, el conjunto de las simetrías de un cuadrado, notamos que al componer dos simetrías obtenemos una nueva simetría, de hecho este conjunto con la operación composición tiene la estructura algebraica de un grupo. En este capítulo se tratará desde un punto de vista general las acciones de grupo en un espacio y sus propiedades generales, que ayudan a describir el espacio donde actúan.

Morfismo diagonal Consideremos una familia finita de morfismos $\{f_i : X \to G\}_{i=1}^n$ entonces por la propiedad universal del producto de $\{G^n := G \times \cdots \times G, \{p_i : G^n \to G\}\}$ existe un único morfismo $h : X \to G^n$ tal que $f_i = p_i \circ h$, a este morfismo lo denotaremos como $h = (f_1, \cdots, f_n)$. Un morfismo importante de este tipo es el llamado morfismo diagonal $\triangle_G^n := (I_G, \cdots, I_G)$.

Proposición 3.1. *Sea $\{f_i : X \to G\}_{i=1}^n$ una familia de morfismos, entonces* $(f_1, \cdots, f_n) = (f_1 \times \cdots \times f_n) \circ \triangle_X^n$

Demostración: Para cada $i = 1, \cdots, n$ fija arbitraria finita, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\triangle_X^n"] \arrow[dr, "I_X"'] & X^n \arrow[r, "f_1\times\cdots\times f_n"] \arrow[d, "p_i"] & G^n \arrow[d, "p_i"] \\ & X \arrow[r, "f_i"] & G \end{tikzcd}$$

Entonces $f_i = f_i \circ I_X = p_i \circ ((f_1 \times \cdots \times f_n) \circ \triangle_X^n)$ y por unicidad de la propiedad universal del producto tenemos $(f_1, \cdots, f_n) = (f_1 \times \cdots \times f_n) \circ \triangle_X^n$ $\square$

Como el producto es asociativo , sea el isomorfismo $\delta_n := \delta_{n,1} : G^n \times G \to G^{n+1}$

Proposición 3.2. *Sea G un objeto en una categoría cartesiana, y $n > 1$ un entero, entonces $\triangle_G^{n+1} = \delta_n(\triangle_G^n \times I_G) \circ \triangle_G^2$*

Demostración: Consideremos los productos $\{G \times G, p_1, p_2\}, \{G^n \times G, \pi_1, \pi_2\}, \{G^n, \{\pi_i'\}_{i=1}^n\}, \{G^{n+1}, \{p_i'\}_{i=1}^{n+1}\}$ entonces para $i = 1, \cdots, n$ se tiene:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\triangle_G^2"] \arrow[dr, "I_G"'] & G \times G \arrow[r, "\triangle_G^n \times I_g"] \arrow[d, "p_1"] & G^n \times G \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\pi_1"] & G^{n+1} \arrow[d, "p_i'"] \\ & G \arrow[r, "\triangle_G^n"] & G^n \arrow[r, "\pi_i'"] & G \end{tikzcd}$$

Y para $i = n + 1$ se tiene:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\triangle_G^2"] \arrow[dr, "I_G"'] & G \times G \arrow[r, "\triangle_G^n \times I_g"] \arrow[d, "p_2"] & G^n \times G \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\pi_2"] & G^{n+1} \arrow[d, "p_{n+1}'"] \\ & G \arrow[r, "I_G"] & G \arrow[r, "I_G"] & G \end{tikzcd}$$

$\square$

Esto se puede generalizar, si consideramos el isomorfismo $\delta_{n,m} : G^n \times G^m \to G^{n+m}$ entonces $\triangle_G^{n+m} = \delta_{n,m} \circ (\triangle_G^n \times I_G) \circ \triangle_G^{m+1}$

Proposición 3.3. *Dado $f : G \times G \to G$ y $g : G \to G$ morfismos, entonces se satisface: $(f \times g) \circ \delta_2^{-1} \circ \triangle_G^3 = [(f \circ \triangle_G^2) \times g] \circ \triangle_G^2$*

Demostración: Por la proposición anterior se tiene:

$$\begin{aligned}(f \times g) \circ \delta_2^{-1} \circ \triangle_G^3 &= (f \times g)(\triangle_G^2 \times I_G)\, \triangle_G^2 \\ &= [(f \circ \triangle_G^2) \times g] \circ \triangle_G^2\end{aligned}$$

□

Mostraremos el siguiente lema técnico de gran utilidad

Lema 3.1. *Sean $h : Y \to X$ y $f, g : X \to G$ morfismos entonces $(f, g)h = (fh, gh)$*

Demostración: Observemos que $p_1((f, g)h) = fh$, $p_2((f, g)h) = gh$ entonces la composición se ve como $(fh, gh) : Y \to G \times G$ gracias a la propiedad universal del producto. □

Una consecuencia directa es la siguiente, sea $f : A \to B$ un morfismo entonces:

$$\triangle_B^2\, f = (f, f)$$

Cuando no exista posibilidad de confusión se puede escribir $\triangle_n := \triangle_G^n$

3.1. Los grupos de una categoría cartesiana

Por simplicidad en esta sección consideramos la categoría $\mathcal{C}$ como una categoría que tiene productos finitos y objeto terminal T. Los grupos son caracterizados por tres propiedades principales, una multiplicación asociativa, un elemento neutro y para cada elemento le corresponde un inverso, esto en términos de morfismos se ve como sigue:

Definición 3.1: Objeto grupo

Un objeto grupo o C-grupo es un objeto $G \in C_0$ con 3 C-morfismos, $u : T \to G$, $i : G \to G$, $m : G \times G \to G$ llamados función unitaria, función inversa y función multiplicación respectivamente, tal que satisface las siguientes propiedades:

1. (Asociatividad)

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "I_G \times m"] \arrow[d, "m \times I_G"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

2. (Propiedad del neutro)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e,I_G)"] \arrow[d, "(I_G,e)"'] \arrow[dr, "I_G"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

3. (Propiedad de los inversos)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(I_G,i)"] \arrow[d, "(i,I_G)"'] \arrow[dr, "e"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Donde $e : G \to G$ es la composición $e = u \circ t$ y $t : G \to T$ es el único morfismo definido por el objeto terminal

Los siguientes objetos son grupos objetos de una categoría:

1. Para la categoría Set un objeto grupo es simplemente un grupo de la manera usual, ya que por definición de grupo, los morfismos correspondientes son $u(*) = e, i(a) = a^{-1}, m(a,b) = ab$ y son funciones es decir Set-morfismos.

2. Para la categoría de grupos, sería natural que los objetos grupos son los grupos en general, sin embargo la función inversa $i(a) = a^{-1}$ no es un morfismo de grupos, pues se sabe bien que $i(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

es distinto de $i(a)i(b) = a^{-1}b^{-1}$ de manera general, para que sea i un morfismo entonces debe satisfacer que $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ es decir la conmutatividad, por lo tanto los grupos objetos dentro de la categoría de los grupos son los grupos abelianos. Denotamos a esta categoría como Ab

3. Para la categoría de los espacios topológicos un objeto grupo debe tener a las funciones como funciones continuas, por tanto debe de estar dotado de una estructura topológica tal que las funciones unidad, inversa y multiplicación sean continuas, observemos que para cualquier estructura topologica, la función unidad es automáticamente continua, sin embargo la función inversa y multiplicación no lo es, por tanto decimos que un grupo G es un grupo **topológico** si G tiene una topología tal que las funciones i y m sean continuas. En conclusión los grupos objetos de Top son los grupos topológicos.

4. Para la categoría $Diff$ los grupos objetos son grupos dotados de una estructura diferenciable tal que u automáticamente es (como en Top) función diferenciable donde su diferencial es sobreyectiva, por tanto solamente nos importa que la estructura diferenciable sea compatible con las operaciones, es decir que las funciones m, i son diferenciables, a estos grupos se les conoce como **Grupos de Lie**.

Muchas de las propiedades algebraicas que se cumplen para grupos lo satisfacen en su forma equivalente a morfismos para objetos grupos, por ejemplo:

Proposición 3.4. *El neutro multiplicativo es único.*

En GRP una demostración es como sigue

Demostración: Sea $e, f \in G$ neutros multiplicativos, usando la propiedad de que son neutros tenemos

$$e = e * f = f$$

□

Esto se puede transformar para dar una demostración en objetos grupos, esto equivale decir que si tenemos $u_2 : T \to G$ tal que satisface la propiedad del neutro entonces $u_2 = u$. Para demostrar esto y otras propiedades observemos que $e \circ u = u$ esto se puede ver fácil con el siguiente diagrama que conmuta.

Considerando que T es objeto terminal:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "I_T"'] & G \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"] & G \\ & T \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Gracias a esta propiedad la demostración para GRP de la proposición (3.1) se puede ver bajo el siguiente diagrama conmutativo (usando el lema 3.1):

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "{(u,u_2)}"] \arrow[rr, bend left, "u"] \arrow[rr, bend right, "u_2"'] & G \times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

De manera similar para los inversos tenemos:

Proposición 3.5. *Dado (G, m, u, i) un objeto grupo en la categoría C, entonces i es único*

Una demostración para GRP es la siguiente: Consideremos G un grupo y sea $a \in G$ con inversos b, c entonces

$$b = b * e = b * (a * c) = (b * a) * c = e * c = c$$

Para demostrarlo usemos la siguiente afirmación:

Proposición 3.6. *Sea $f : G \to G$ un morfismo entonces $f = m(f, e) = m(e, f)$. En particular para el morfismo inversión i, se tiene $i = m(i, e) = m(e, i)$*

Demostración: Basta mostrar que $f = m(e, f)$ la otra igualdad se sigue de un proceso muy similar. Usando la propiedad del neutro, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "{(e,I_G)}"] \arrow[dr, "I_G"] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Entonces se tiene $f = m(e, I_f)f$, usando el lema (3.1) se tiene $f = m(e \circ f, f)$ pero $e = ut$ con $t : G \to T$ el único morfismo terminal entonces $ef = uTf = uT = e$ esto implica que $f = m(e, f)$ completando la demostración $\square$

Considerando esto, la demostración de la proposición (3.5) es:

Demostración: Sea $i, j : G \to G$ dos inversos para (G, m, u) entonces:

$$\begin{aligned} i &= m(i, e) && (3.7) \\ &= m(i, m(I_G, j)) && (3.8) \\ &= m(m(i, I_G), j) && (3.9) \\ &= m(e, j) = j && (3.10) \end{aligned}$$

□

En conclusión como en grupos, m define únicos u e i en caso de existir. Las ecuaciones (3.8) y (3.9) quedan justificadas con el siguiente lema que extiende la idea de asociatividad.

Lema 3.2. *. Sea $f, h, g : G \to G$ morfismos en un objeto con multiplicación $(G, m : G \times G \to G)$ que satisface la asociatividad, entonces:*

$$m(f, m(h, g)) = m(m(f, h), g) \tag{3.11}$$

Demostración: Basta mostrar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "{(f,h,g)}"] \arrow[drr, bend left, "{(f,m(h,g))}"] \arrow[ddr, bend right, "{(m(f,h),g)}"'] & & \\
& G \times G \times G \arrow[r, "I_G \times m"] \arrow[d, "m \times I_G"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
& G \times G \arrow[r, "m"] & G
\end{tikzcd} \tag{3.12}$$

Donde $(f, h, g) = (f \times h \times g) \bigtriangleup_3$, observemos que el cuadrado es precisamente la asociatividad de la multiplicación, para el triángulo inferior del diagrama (considerando la ecuación (3.1)) se tiene:

$$\begin{aligned}
(m \times I_G)(f, h, g) &= (m \times I_G)(f \times h \times g)\delta_2^{-1} \bigtriangleup_3 \\
&= ((m(f \times h)) \times (I_G \circ g))\delta_2^{-1} \bigtriangleup_3 \\
&= ((m(f \times h)) \times g)\delta_2^{-1} \bigtriangleup_3 \\
&= ((m(f \times h) \bigtriangleup_2) \times g) \bigtriangleup_2 \\
&= ((m(f, h)) \times g) \bigtriangleup_2 \\
&= (m(f, h), g)
\end{aligned}$$

La tercera igualdad se aplicó la proposición (3.3). De la misma manera se tiene $(I_G \times m)(f, h, g) = (f, m(h, g))$, entonces el diagrama (3.13) es conmutativo. $\square$

Este lema se puede extender más, si consideramos $f, g, h : X \to G$ morfismos, con (G, m) como el lema y $X \in \mathcal{C}_0$, la identidad $m(f, m(h, g)) = m(m(f, h), g)$ sigue siendo válida. Podemos considerar una ley de cancelación como en grupos.

Proposición 3.7. *Sea $f, g : G \to G$ morfismos tal que $m(I_G, f) = m(I_G, g)$ entonces $f = g$. De manera similar si $m(f, I_G) = m(g, I_G)$ entonces $f = g$.*

Demostración: Usando la hipótesis y la ley de asociatividad 2, tenemos:

$$m(i, m(I_G, f)) = m(i, m(I_G, g)) \tag{3.13}$$
$$m(m(i, I_G), f) = m(m(i, I_G), g) \tag{3.14}$$
$$m(e, f) = m(e, g) \tag{3.15}$$
$$f = g \tag{3.16}$$

□

Homomorfismos de grupos. Así como en los grupos existe una noción de morfismo de grupos, podemos definir una noción de morfismo de objetos grupos. En la categoría GRP un morfismo es una función que preserva la estructura de multiplicación, es decir si $G, H \in GRP_0$ entonces una función $f : G \to H$ es un morfismo si y solo si $\forall x, y \in G,\ f(ab) = f(a)f(b)$ equivalentemente $f(m_G(a, b)) = m_H(f(a), f(b))$ donde m_G, m_H son las multiplicaciones de cada grupo respectivamente, esto se puede representar en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "m_G"'] & H \times H \arrow[d, "m_H"] \\ G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd} \tag{3.17}$$

Además debe respetar las funciones unitaria e inverso.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] & & H \\ & T \arrow[ul, "u_G"] \arrow[ur, "u_H"'] & \end{tikzcd} \tag{3.18}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_G"'] & H \arrow[d, "i_H"] \\ G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd} \tag{3.19}$$

Bajo estas condiciones decimos que $f : G \to H$ es un homomorfismo de grupos. Como es de rutina $I_G : G \to G$ es un homomorfismo de grupos y si $f : G \to H, g : H \to K$ son homomorfismos de grupos entonces $g \circ f : G \to K$ es un homomorfismo de grupos. Bajo esto podemos construir una categoría de grupos objetos $Grp(C)$ con morfismos los homomorfismos de grupos. Construimos el functor $Y : Grp(C) \to C$ llamado olvido, donde envia cada grupo objeto (G, m, u, i) a G como objeto de la categoría, vemos que este functor es fiel, pero no completo (como el caso de la categoría de grupos con $C = Set$), por tanto todos los epimorfismos y monomorfismos de grupos objetos son precisamente los epimorfismos y monomorfismos de C. Como dato adicional si C es una categoría concreta con functor fiel $F : C \to Set$ entonces $(Grp(C), Y \circ F)$ es concreta por tanto tiene un functor adjunto izquierdo $M : Set \to GRP(C)$.

Subgrupos. Consideremos un objeto grupo (G, m, u, i) de una categoría $\mathcal{C}$, recordemos que un subobjeto de G es una clase de equivalencia de monomorfismos con codominio G, por abuso de notación un subobjeto lo denotamos como la pareja $(H, i : H \to G)$, nosotros estamos interesados en aquellos subobjetos que son subgrupos. La manera más formal de definirlo es como sigue:

Definición 3.2: Subgrupo objeto.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría, y (G, m, u, i) un grupo objeto, definimos un subgrupo objeto de G como un subobjeto de G dentro de la categoría $Grp(\mathcal{C})$

Entonces de la definición un subgrupo es una clase de equivalencia $(H, i : H \to G)$ donde (H, m, u, i) es un grupo y i es un monomorfismo en $\mathcal{C}$ y homomorfismo en $Grp(\mathcal{C})$, asi que se tienen los diagramas.

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "i \times i"] \arrow[d, "m_H"'] & G \times G \arrow[d, "m_G"] \\ H \arrow[r, "i"] & G \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} H \arrow[rr, "i"] & & G \\ & T \arrow[ul, "u_H"] \arrow[ur, "u_G"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i_H"'] & G \arrow[d, "i_G"] \\ H \arrow[r, "i"] & G \end{tikzcd} \tag{3.20}$$

Para ver que $i \times i$ es monomorfismo, se obtiene del siguiente lema técnico.

Lema 3.3. *Sea $f_i : A_i \to B_i$ monomorfismos para $i = 1, 2$ entonces $f_1 \times f_2 : A_1 \times A_2 \to B_1 \times B_2$ es un monomorfismo.*

Demostración: Como los productos son $(A_1 \times A_2, p_1, p_2), (B_1 \times B_2, q_1, q_2)$ entonces sean $u, v : X \to A_1 \times A_2$ morfismos tales que $(f_1 \times f_2)u = (f_2 \times f_2)v$ aplicando la i-ésima proyección para $i = 1, 2$ tenemos (usando que f_i es monomorfismo):

$$\begin{aligned} q_i(f_1 \times f_2)u &= q_i(f_2 \times f_2)v \\ f_i p_i u &= f_i p_i v \\ p_i u &= p_i v \end{aligned}$$

Entonces $(X, p_i u : X \to A_i)$ es un cono, por tanto existe un único morfismo que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d] \arrow[dr, "p_i u = p_i v"] & \\ A_1 \times A_2 \arrow[r, "p_i"] & A_i \end{tikzcd}$$

Entonces $u = v$ por tanto $f_1 \times f_2$ es un monomorfismo. $\square$

Proposición 3.8. *Sea C una categoría con productos finitos y objeto terminal T, entonces $Grp(C)$ tiene objeto cero.*

Demostración: Es fácil ver que $(T, T \times T \to T, I_T, I_T)$ es un grupo objeto por ser T terminal, además implica que para cada objeto grupo G, el unico morfismo $G \to T$ es un homomorfismo de grupos. Para ver que es inicial, sea (G, m, u, i) un grupo objeto entonces $u : T \to G$ es un homomorfismo de grupos, y es único bajo m, es decir en $GRP(C)$ el homomorfismo u es único $\square$

Para hablar sobre una noción de grupo cociente, necesitamos el concepto de normalidad. Previamente si C es una categoría con objeto cero, y $f : X \to Y$ un morfimo, decimos que un morfismo $u : K \to A$ es el kernel si $K = Eq(f, 0)$ donde $0 : X \to Y$ es el morfismo cero. De manera dual el cokernel de f en caso de existir está definido por $C = Coeq(f, 0)$. Asi como en Grp no todo subgrupo $H \leq G$ genera una estructura en el conjunto cociente G/N. Cuando N es normal entonces G/N es un grupo y además satisface:

$$N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/N \tag{3.21}$$

(N, i) es el núcleo de π, y por el primer teorema de isomorfismo todo morfismo $f : G \to H$ satisface $im(f) \cong G/ker(f)$ con $ker(f) := \{x \in G | f(x) = e\}$

que es normal, es decir la imagen de un morfismo se puede ver como el cociente con un grupo normal. Motivando la siguiente definición.

Definición 3.3: Subgrupos normales.

Un homomorfismo de grupos $f : G \to K$ es normal si es el kernel de algún morfismo. Dualmente es conormal si es el cokernel de un morfismo.

Decimos que un subgrupo $(H, i : H \to G)$ es normal si i es un monomorfismo normal, además dado un epimorfismo $f : G \to K$, decimos que K es grupo cociente si f es conormal, en tal caso denotamos $K \cong G/N$ para algún N subgrupo normal.

Una categoría $\mathcal{C}$ es normal si todo monomorfismo es normal. Entonces $GRP(\mathcal{C})$ no es necesariamente normal, por ejemplo en $GRP(Set) = Grp$ no todo subgrupo es normal, por ejemplo S_3 el grupo de permutaciones de 3 elementos tiene como subgrupo $\{Id, (1\ \ 2)\}$ el cuál no es normal, por tanto su morfismo inclusión que es un monomorfismo no es normal. Mientras que para $GRP(Grp) = Ab$ la categoría de grupos abelianos, todo subgrupo es normal por tanto es una categoria normal y conormal, es decir bi-normal.

3.2. Generalidades de acciones de grupos

En Set se define una acción de grupos como sigue, sea X un conjunto y G un grupo , una acción por la izquierda es una función $\phi : G \times X \to X$ tal que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $x \in X$ y $g, h \in G$ se cumple $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$.
2. Para cada $x \in X$ se cumple $\phi(e, x) = x$.

Podemos definir una función $\phi_g : X \to X$ donde $g \in G$ es fijo, y tiene la regla de correspondencia $\phi_g(x) = \phi(g, x)$, por la propiedad (1) se tiene que $\phi_g\phi_h = \phi_{gh}$ mientras que la propiedad (2) dice que $\phi_e = Id_X$ y para cada ϕ_g tiene su inverso que es $\phi_{g^{-1}}$ esto significa que las funciones ϕ_g son biyectivas y se puede definir un homomorfismo:

$$\Phi : G \to Biy(X) := \{f : X \to X | biyectiva\}, \quad \Phi(g) = \phi_g \tag{3.22}$$

Análogamente para cada $H : G \to Biy(X)$ es posible definir una acción de grupos $h : G \times X \to X$ tal que $H(g) = h_g$. Esto es posible porque en Set se establece una biyección de conjuntos:

$$Hom_{Set}(X \times Y, Z) \cong Hom_{Set}(X, Z^Y), \ \forall X, Y, Z \in Set_0 \tag{3.23}$$

Donde $Z^Y = Hom_{Set}(Y, Z)$.

Demostración: Sea $H : Hom_{Set}(X \times Y, Z) \to Hom_{Set}(X, Z^Y)$, definido como sigue, para cada $f : X \times Y \to Z$, $H(f) := H_f : X \to Z^Y$ es la función definida para cada $x \in X$ como $H_f(x) = f(x, -) : Y \to Z$. Por otro lado, definimos $G : Hom_{Set}(X, Z^Y) \to Hom_{Set}(X \times Y, Z)$ como sigue, para cada función $\phi : X \to Z^Y$ sea $G_\phi(x, y) = \phi(x)[y]$. Estas dos funciones satisfacen lo siguiente, para $H \circ G$ dado $\phi : X \to Z^Y$, entonces $H(G_\phi)$ es la función ϕ. Mientras que para $G \circ H$, dado $f : X \times Y \to Z$ se tiene que $G \circ H(f)[x, y] = G(H_f)[x, y] = G(f(x, -)[y] = f(x, y)$ por tanto tenemos $H \circ G = Id$ y $G \circ H = Id$ por proposición 2.5, $Hom_{Set}(X \times Y, Z) \cong Hom_{Set}(X, Z^Y)$. $\square$

Dicho de otra manera, los funtores $\times Y$ y $()^Y$ son adjuntos, y llamamos al objeto Z^Y exponencial. Hasta el momento, con la definición dada de acción de grupos, definir una acción de un grupo en un conjunto es equivalente a definir un homomorfismo en $Grp(Set)$. El problema al considerarlo para una categoría cartesiana es que no todo objeto tiene objeto exponencial, como por ejemplo la categoría de variedades diferenciales.

La definición más cercana a las acciones es la siguiente. Como observación previa, es fácil ver que $T \times X \cong X$ donde T es el objeto terminal y X un objeto de C, sea $\psi : T \times X \to X$ el isomorfismo dado.

Definición 3.4: Acción de grupos

Sea G un grupo objeto y X un objeto de la categoría C, una acción es un morfismo $\lambda : G \times X \to X$ tal que satisface:

1. (Identidad)

$$\begin{tikzcd} T \times X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "u \times I_X"] & X \arrow[d, "I_X"] \\ G \times X \arrow[r, "\lambda"] & X \end{tikzcd} \tag{3.24}$$

2. (Asociatividad)

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "m \times I_X"] \arrow[d, "I_G \times \lambda"] & G \times X \arrow[d, "\lambda"] \\ G \times X \arrow[r, "\lambda"] & G \end{tikzcd} \tag{3.25}$$

Ejemplo Consideremos la categoría $\mathcal{C}$ de las variedades diferenciables, los objetos grupo son los grupos de Lie, entonces una acción es una función diferenciable $\lambda : G \times X \to X$ tal que satisface las propiedades de la definición dada, si fijamos $g \in G$ entonces la función $x \to \lambda(g, x)$ es diferenciable.

3.2.1. Exponenciales y categorías cartesianamente cerradas

Definición 3.5: Objeto exponencial

Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana (es decir existen productos finitos), una exponencial de objetos B y C consiste en un objeto C^B y un morfismo $e : C^B \times B \to C$ tal que satiface la siguiente propiedad: Para cada objeto A y morfismo $f : A \times B \to C$ existe un único morfismo $f' : A \to C^B$ tal que $e(f' \times I_B) = f$. Al morfismo e se le conoce como **evaluación** y al morfismo f' es la transpuesta de f

$$\begin{tikzcd} C^B & C^B \times B \arrow[r, "e"] & C \\ A \arrow[u, "f'"] & A \times B \arrow[u, "f' \times I_B"] \arrow[ur, "f"] & \end{tikzcd} \tag{3.26}$$

La unicidad asegura lo siguiente, dado $g : A \to C^B$ entonces $\overline{g} = e(g \times$

$I_B) : A \times B \to C$ y por tanto $\overline{g}' = g$ mientras que para un morfismo $f : A \times B \to C$ se tiene $\overline{f'} = f$, asegurando que la función $f \to f'$ de $Hom(A \times B, C) \to Hom(A, C^B)$ sea biyectiva.

Una **categoría cartesianamente cerrada** es una categoría con todos sus productos finitos y exponenciales, consideremos $\mathcal{C}$ como categoría cartesianamente cerrada, podemos interpretar la exponencial como funtor adjunto. Primero notemos que la función evaluación

$$e : B^A \times A \to B \tag{3.27}$$

Tiene una transpuesta $e' : B^A \to B^A$ tal que:

$$e(e' \times I_A) = e \tag{3.28}$$

Observemos que del siguiente diagrama conmutativo (considerando $I_{B^A} \times I_A = I_{B^A \times A}$):

$$\begin{tikzcd} B^A \times B \arrow[r, "e"] & C \\ B^A \times B \arrow[u, "I_{B^A} \times I_A"] \arrow[ur, "e"'] & \end{tikzcd} \tag{3.29}$$

Entonces por unicidad se tiene que $I_{B^A} = e'$. Considerando esto podemos mostrar que la asignación $X \to X^A$ es funtorial.

Proposición 3.9. *En una categoría cartesianamente cerrada C, la exponenciación por un objeto fijo A, es un funtor $(-)^A : C \to C$ definido por la asignación $X \to X^A$.*

Demostración: Sea $f : X \to Y$ un morfismo, consideremos el morfismo evaluación $e : X^A \times A \to X$ entonces definimos $f^A := (f \circ e)' : X^A \to Y^A$, para ver que esta asignación es funtorial, consideremos primero $f = I_X : X \to X$ entonces $(I_X)^A = (f \circ e)' = e' = I_{X^A}$ (por la observación dada). Ahora sea $f : X \to Y, g : Y \to Z$ morfismos, entonces la propiedad de los exponenciales nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\ X^A \times A \arrow[u, "e"] \arrow[r, "f^A \times I_A"'] & Y^A \times A \arrow[u, "e"] \arrow[r, "g^A \times I_A"'] & Z^A \times A \arrow[u, "e"] \end{tikzcd} \tag{3.30}$$

Y como $(g^A \times I_A) \circ (f^A \times I_A) = (g^A \circ f^A) \times I_A$ entonces por unicidad de los exponenciales tenemos que $(g \circ f)^A = g^A \circ f^A$, completando la prueba. $\square$

De la proposición se sigue que los funtores $- \times A, (-)^A : C \to C$ son adjuntos.

Relación con la acción de un grupo Consideremos G un objeto grupo y X un objeto de una categoría C cartesianamente cerrada y localmente pequeña, dada una acción.

$$\lambda : G \times X \to X$$

Le corresponde un único morfismo $\lambda' : G \to X^X$, esto considerando los casos particulares cuando $X^X \subset Hom(X, X)$ y es un grupo con respecto a la composición entonces λ' induce un homomorfismo de grupos.

3.2.2. Propiedades generales

En esta sección mostraremos propiedades acerca de la relación de acciones y homomorfismos de grupos. Por simplicidad se considera $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana y con objeto terminal (cartesianamente cerrada cuando se usen las exponenciales), y la palabra grupo y sus derivados como objetos grupos de C. La primera propiedad directa de las definiciones es la siguiente.

Proposición 3.10. *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos, entonces cada acción $\lambda : H \times X \to X$ induce una acción $\beta := \lambda \circ (f \times I_X) : G \times X \to X$*

Observemos que si C tiene igualadores entonces C es finitamente completo. Si $(G_j, m_j, u_j, i_j), j = 1, 2$ son objetos grupos de C entonces se puede demostrar de forma rutinaria que $G_1 \times G_2$ es un grupo objeto con estructura $M = m_1 \times m_2$, morfismo unitario $U : T \to G_1 \times G_2$ que está definido como el único morfismo que factoriza el cono $(u_1 : T \to G_1, u_2 : T \to G_2)$ a través del límite (producto) $(G_1 \times G_2, p_1, p_2)$ y el morfismo inverso $I = i_1 \times i_2$. Es fácil ver que para cualquier par de objetos A, B entonces $A \times B \cong B \times A$. Para demostrarlo, consideremos los productos $(A \times B, \pi_A, \pi_B), (B \times A, u_A, u_B)$, entonces:

$$
\begin{tikzcd}
 & B \times A \arrow[dl, "u_B"'] \arrow[dr, "u_A"] \arrow[d, dashed, "\tau_{B\times A}"] & \\
B & A \times B \arrow[l, "\pi_B"] \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, dashed, "\tau_{A\times B}"] & A \\
 & B \times A \arrow[ul, "u_B"] \arrow[ur, "u_A"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, "\pi_B"'] \arrow[dr, "\pi_A"] \arrow[d, dashed, "\tau_{A\times B}"] & \\
B & B \times A \arrow[l, "u_B"] \arrow[r, "u_A"] \arrow[d, dashed, "\tau_{B\times A}"] & A \\
 & A \times B \arrow[ul, "\pi_B"] \arrow[ur, "\pi_A"'] &
\end{tikzcd}
$$

Por la propiedad universal del producto, tenemos:

$$\tau_{A\times B}\tau_{B\times A} = Id_{B\times A}, \ \tau_{B\times A}\tau_{A\times B} = Id_{A\times B},$$

concluyendo la demostración. Usando la misma notación, tenemos la siguiente afirmación.

Proposición 3.11. *Si G_i actúa sobre X_i con acción λ_i para $i = 1, 2$ entonces $G_1 \times G_2$ actúa sobre $X_1 \times X_2$ con acción $\lambda := \psi \circ (\lambda_1 \times \lambda_2)$ donde $\psi : G_1 \times G_1 \times X_1 \times X_2 \to G_1 \times X_1 \times G_2 \times X_2$ está definido como $\psi := I_{G_1} \times \tau_{G_2 \times X_1} \times I_{X_2}$*

Existe una extensión de la proposición anterior para un límite arbitrario, pero para ello requerimos el concepto de función equivariante.

3.2.3. Funciones Equivariantes

Definición 3.6: Función Equivariante

Sea G un grupo que actúa en los objetos X, Y con acciones λ_X, λ_Y decimos que un morfismo $f : X \to Y$ es G-equivariante si satisface $f \circ \lambda_X = \lambda_Y \circ (I_G \times f)$.

Cuando $\mathcal{C} = Set$ esta definición se escribe como $\forall (g, x) \in G \times X$ entonces $f(\lambda_X(g, x)) = \lambda_Y(g, f(x))$, en algunos libros cuando no hay confusión sobre las acciones de grupos se usa como notación $\lambda(g, x) = gx$, entonces esta identidad se escribe como sigue $f(gx) = gf(x)$.

Proposición 3.12. *Sea $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un funtor con límite existente $(L, p_D : L \to \mathcal{F}(D))$ y G un grupo objeto donde actúa en $\mathcal{F}(D)$ para cada $D \in \mathcal{D}$ con acción λ_D tal que para cada $\mathcal{D}$-morfismo $f : D \to D'$, el $\mathcal{C}$-morfismo inducido $\mathcal{F}(f)$ es G-equivariante entonces G actúa de manera natural en L.*

$$\begin{tikzcd}
G \times L \arrow[r, dashed, "\lambda"] \arrow[d, "I_G \times p_D"'] & L \arrow[d, "p_D"] \\
G \times \mathcal{F}(D) \arrow[r, "\lambda_D"'] & \mathcal{F}(D)
\end{tikzcd} \tag{3.31}$$

Demostración: Para definir la acción en L consideremos el cono $(G \times L, \alpha_D : G \times L \to \mathcal{F}(D))$ con el morfismo definido como $\alpha_D := \lambda_D \circ (I_G \times p_D)$ para cada $D \in \mathcal{D}$, para verificar que es un cono, sea $f : D \to D'$ un $\mathcal{D}$-morfismo entonces $\mathcal{F}(f)$ es G-equivariante y considerando que (L, p_D) es un cono, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f) \circ \alpha_D &= \mathcal{F}(f) \circ \lambda_D \circ (I_G \times p_D) && (3.32)\\
&= \lambda_{D'} \circ (I_G \times \mathcal{F}(f)) \circ (I_G \times p_D) && (3.33)\\
&= \lambda_{D'} \circ (I_G \times (\mathcal{F}(f) \circ p_D)) && (3.34)\\
&= \lambda_{D'} \circ (I_G \times p_{D'}) = \alpha_{D'} && (3.35)
\end{aligned}$$

Por definición de límite entonces existe un único morfismo $\lambda : G \times L \to L$ tal que para cada $D \in \mathcal{D}$ se cumple $\alpha_D = p_D \circ \lambda$, usando esta igualdad y la proposición (1,7) se sigue que λ satisface los axiomas de una acción de grupos. $\square$

Categoría de G-objetos Las funciones equivariantes producen de manera natural una categoría donde los objetos son parejas (X, λ_X) y los morfismos son las funciones equivariantes. Para ver que efectivamente es una categoría, sea $f = I_X$ entonces como $I_G \times I_X = I_{G \times X}$ se tiene que que la identidad satisface $f \circ \lambda_X = \lambda_X = \lambda_X(I_{G \times X} = \lambda_Y(I_G \times f)$, si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones G-equivariantes entonces gf es equivariante:

$$\begin{aligned}
(gf)\lambda_X &= g(\lambda_Y(I_G \times f))\\
&= \lambda_Z(I_G \times g)(I_G \times f) = \lambda_Z(I_G \times (gf))
\end{aligned}$$

Por tanto los las parejas (X, λ_X) con λ_X una acción y las funciones G-equivariantes forman una categoría denotándolo $G - \mathcal{C}$, con su respectivo funtor olvido $F : G - \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ la cual es fiel. Otra categoría que se puede formar es la siguiente, la denotamos con $Grp - \mathcal{C}$ donde los objetos son de la forma (G, X, λ) con G un C-grupo que actúa sobre X bajo la acción λ y los morfismos dentro de esta categoría son una pareja $(\alpha, f) : (G, X, \phi) \to (H, Y, \psi)$ donde $\alpha : G \to H$ es un morfismo de grupos y $f : X \to Y$ es un $\mathcal{C}$-morfismo tal que satisface $f \circ \phi = \psi(\alpha \times f)$

3.3. Acciones de grupos

En esta sección consideremos $\mathcal{C} = Set, Top$ o una categoría topológica. Primero definimos los siguientes conjuntos, dado (X, λ_X) un G-objeto en Set:

1. $Gx := \{\lambda_X(g, x) | g \in G\}$, llamado órbita de $x \in X$.

2. X/G el conjunto de todas las órbitas de X.

3. $stab(x) := \{g \in G | \lambda_X(g, x) = x\}$, llamado el estabilizador o grupo de isotropía de x, de manera similar para un subconjunto $Y \subset X$ se define $stab(Y) = \{g \in G | \lambda_X(g, x) \in Y,\ x \in Y\}$.

4. Un subconjunto $Y \subset X$ se llama invariante si $x \in Y \Leftrightarrow \lambda_X(g, x) \in Y$ para todo $x \in Y, g \in G$.

5. Un punto se llama fijo o estacionario si $stab(x) = G$.

Algunas propiedades de estos conjuntos son los siguientes:

Proposición 3.13. *Sea (X, λ_X) un G-objeto, entonces son válidos como conjuntos:*

1. *Dos órbitas son iguales o son ajenas.*

2. *El estabilizador de cualquier subconjunto no vacío $Y \subset X$ es un subgrupo de G.*

Demostración: (1) Dado $x, y \in X$, si existe $g_0 \in G$ tal que $\lambda(g_0, y) = x$ entonces para todo $a \in G_x \Leftrightarrow \exists g \in G,\ \lambda(g, x) = a$. Notemos que $a = \lambda(g, x) = \lambda(g, \lambda(g_0, y) = \lambda(gg_0, y)$ entonces $a \in Gy$, además como $y = \lambda(g_0^{-1}, x)$ se sigue que $Gy \subset Gx$ por tanto $Gx = Gy$. Si no existe ninguna $g \in G$ tal que λ envía x a y entonces sea $a \in Gx \cap Gy$ entonces por definición, existe $g_1, g_2 \in G$ tal que $\lambda(g_1, x) = a = \lambda(g_2, y)$, esto significa que $x = \lambda(g_1^{-1}, a) = \lambda(g_1^{-1}g_2, y)$ lo cuál es una contradicción, por tanto $Gx \cap Gy = \emptyset$.
(2) Sea $x \in X$, denotemos como e el neutro de G, como $\lambda(e, x) = x$ entonces $e \in stab(x)$, dado $g, h \in stab(x)$ entonces $\lambda(g, x) = x,\ \lambda(h, x) = x \Rightarrow\ \lambda(h^{-1}, x) = x$ y por tanto $\lambda(gh^{-1}, x) = x$ es decir $gh^{-1} \in stab(x)$ por lo tanto $stab(x)$ es un subgrupo de G.
□

La primera afirmación nos dice que el conjunto de órbitas de una acción es una partición de X, por tanto esta partición induce la siguiente relación, dados $x, y \in X$ decimos que $x \sim y$ si existe una $g \in G$ tal que $\lambda_X(x, g) = y$, efectivamente esta relación es de equivalencia. Por tanto obtenemos una función cociente $\pi : X \to X/G$.
Para C una categoría topológica y G un Set-grupo, una acción de G en un C-objeto X es una acción $\lambda : G \times X \to X$ en Set tal que λ es un C-morfismo donde a G se le induce la estructura discreta (es decir, sea $T = \{*\}$, entonces G tiene la estructura inducida por $f : T \to G$). Bajo esto a X/G se le induce la estructura final por medio de $\pi : X \to X/G$

Como Set es exponencial, entonces toda acción define una representación y viceversa. Sea $\lambda : G \times X \to X$ una acción de grupos a un conjunto y $\Lambda : G \to Biy(X)$ su correspondiente representación. Entonces:

Proposición 3.14. *Dada una acción $\lambda : G \times X \to X$ entonces el kernel de $\Lambda : G \to Biy(X)$ es*
$$ker(\Lambda) = \bigcap_{x \in X} stab(x)$$

Demostración: Sea $g \in ker(\Lambda)$ entonces $\Lambda_g = Id_X$, es decir $\lambda(g, x) = x$ para toda $x \in X$, por definición, implica que $g \in stab(x)$ para toda $x \in X$, i.e. $g \in \bigcap_{x \in X} stab(x)$. Dado $h \in \bigcap_{x \in X} stab(x)$ entonces $h \in stab(x)$ para todo x, por definición, implica que $\lambda(g, x) = x$ para toda $x \in X$, en términos de Λ significa que $\Lambda_g = Id_X$ es decir $g \in ker(\Lambda)$, por tanto $ker(\Lambda) = \bigcap_{x \in X} stab(x)$. □

Observemos que por el Primer teorema de isomorfismos para grupos se tiene que $G/ker(f) \cong N \subset Biy(X)$ asi que si X es finito con n elementos entonces que el índice $[G : ker(f)]|n!$. Dos casos importantes de $ker(f)$ son cuando $ker(f) = (e)$ y cuando $ker(f) = G$. Cada caso representa una propiedad particular de la acción.

1. Si $ker(f) = G$ entonces $\cap stab(x) = G$ lo que implica que $G \subseteq stab(x)$ para cada x, por tanto $stab(x) = G$ para toda x. Decimos que una acción es **trivial** si $stab(x) = G$ para toda x.

2. Si la acción tiene una sola órbita significa que para cada $x, y \in X$ se tienen $Gx = Gy$ por tanto para todo $x \in X$ se tiene que $X = Gx$ esto significa que Λ es un homomorfismo suprayectivo. Para este caso decimos que la acción es **transitiva**.

3. Si $ker(f) = (e)$ entonces $\cap stab(x) = (e)$ bajo esta situación decimos que la acción es **fiel**. Y si $stab(x) = (e)$ para cada $x \in X$ se dice que la acción es **libre**.

Sea C una categoría topológica, consideremos el siguiente diagrama de C-morfismos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, dashed] & Z \end{tikzcd}$$

Con Y dotado de la estructura final con respecto a f. Si lo vemos como funciones y se satisface la propiedad de que $\forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$, entonces por la proposición (2,1) existe una función $h : Y \to Z$ tal que $g = hf$, pero como g es un C-morfismo, por la propiedad de estructura final con respecto a f, se tiene que h es un C-morfismo. Mas aún, si f es un C-epimorfismo, entonces en Set por la proposición (2.4) es sobreyectiva y tiene inversa derecha. Considerando lo anterior si $h' : Y \to Z$ es otra función tal que $g = h'f$, entonces $h'f = hf$ y aplicando la inversa derecha de f obtenemos que $h = h'$. Obteniendo el siguiente resultado técnico.

Proposición 3.15. *En una categoría topológica C, sea $f : X \to Y$ un C-epimorfismo donde la estructura de Y, es la final. Dado un C-morfismo $g : X \to Z$ tal que satisface la propiedad de $\forall x, y \in X,\ f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$, entonces existe un único C-morfismo $h : Y \to Z$ tal que $g = h \circ f$.*

Proposición 3.16. *Si G_i actúa en X_i para $i = 1, 2$ entonces:*

$$(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2) \cong (X_1/G_1) \times (X_2/G_2)$$

Demostración: Por la proposición (3,11), $G_1 \times G_2$ actúa sobre $X_1 \times X_2$, entonces consideremos $\pi : X_1 \times X_2 \to (X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2)$ el C-morfismo cociente de tal acción. Por otro lado sea $\pi_1 : X_1 \to X_1/G_1, \pi_2 : X_2 \to X_2/G_2$ los C-morfismos cocientes de las acciónes de G_i sobre X_i con $i = 1, 2$ respectivamente. Notemos que si $\pi(x_1, y_2) = \pi(y_1, y_2)$ entonces existe $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ tal que $\lambda_1(g_1, x_1) = y_1,\ \lambda_2(g_2, x_2) = y_2$ esto implica que están en las mismas órbitas respectivamente, es decir $\pi_1(x_1) = \pi_1(y_1),\ \pi_2(x_2) = \pi_2(y_2)$, por la proposición (3,15) y considerando que π es un epimorfismo, entonces existe un único C-morfismo $\phi : \frac{X_1 \times X_2}{G_1 \times G_2} \to \frac{X_1}{G_1} \times \frac{X_2}{G_2}$ tal que hace conmutar el diagrama (3,36). Observemos que como función, ϕ es biyectiva , con función inversa $\phi^{-1}(G_1x_1, G_2x_2) = G_1 \times G_2(x_1, x_2)$, entonces $\frac{X_1}{G_1} \times \frac{X_2}{G_2}$ se puede ver como el cociente $(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2)$ por tanto $\pi_1 \times \pi_2$ es un C-morfismo extremo, esto implica que es un C-morfismo cociente, es decir su estructura es final y considerando que $\pi = \phi^{-1}(\pi_1 \times \pi_2)$ es un C-morfismo, entonces ϕ^{-1} es un C-morfismo. $\square$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[r, "\pi_1 \times \pi_2"] \arrow[d, "\pi"] & \frac{X_1}{G_1} \times \frac{X_2}{G_2} \\
\frac{X_1 \times X_2}{G_1 \times G_2} \arrow[ur, dashed, "\phi"] &
\end{tikzcd} \tag{3.36}$$

Proposición 3.17. *Sea N un subgrupo normal de G y X un G-espacio entonces G/N actúa sobre X/N. Además se tiene el isomorfismo:*

$$(X/N)/(G/N) \cong X/G$$

Demostración : Sea $p_N : N \to G/N$ el homomorfismo de grupo cociente y por la proposición (3,10) existe una acción de N sobre X inducida por i, que se define como $\lambda_N := \lambda \circ (i \times I_X)$, sea $\pi_N : X \to X/G$ el C-morfismo cociente de tal acción. Para ver que $p_N \times \pi_N : G \times X \to (G/N) \times (X/N)$ es una función cociente, por la proposición (3,16), basta ver que p_N es una función cociente, de la acción natural de N sobre G, con acción definida por $(n, g) \to n * g$ con $(n, g) \in N \times G$. Pero esto se sigue de que p_N es el co-igualador de $i : N \to G$ y el morfismo cero, entonces es un morfismo regular y por tanto es un epimorfismo extremo y como C es una categoría topológica tenemos que p_N es una función cociente. Del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
N \times X \arrow[r, "i\times I_X"] \arrow[dr, "\lambda_N"'] & G \times X \arrow[r, "p_N\times\pi_N"] \arrow[d, "\lambda"] & (G/N)\times(X/N) \arrow[d, dashed, "\lambda''"] \\
 & X \arrow[r, "\pi_N"] & X/N
\end{tikzcd} \tag{3.37}$$

Si $p_N \times \pi_N(g_1, x_1) = p_N \times \pi_N(g_2, x_2)$, entonces existe $(n_1, n_2) \in N \times N$ tal que $g_1 * n_1 = g_2$ y $\lambda(n_2, x_1) = x_2$. Considerando lo anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
\pi_N \circ \lambda &= \pi_N \circ \lambda(g_2, \lambda(n_2, x_1)) \\
&= \pi_N \circ \lambda(g_2 n_2, x_1) \\
&= \pi_N \circ \lambda(g_1 n_1 n_2, x_1) \\
&= \pi_N \circ \lambda(g_1, x_1)
\end{aligned}$$

Por la proposición 3.15 existe un único C-morfismo $\lambda'' : (G/N) \times (X/N) \to X/N$ tal que conmuta el diagrama anterior. Gracias a la conmutatividad del diagrama se tiene que λ'' es una acción. Ahora consideremos el siguiente diagrama de proyecciones orbitales.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[d, "\pi_G"'] & X/N \arrow[d, "\pi_{G/N}"] \\
X/G \arrow[r, dashed, "\phi"'] & \frac{X/N}{G/N}
\end{tikzcd} \tag{3.38}$$

Visto simplemente como conjuntos, se observa que $\pi_G^{-1}(Gx)$ es enviado a un único punto mediante $\pi_{G/N} \circ \pi_N$, eso se ve de lo siguiente:

$$\pi_{G/N} \circ \pi_N(\lambda(g, x)) = \pi_{G/N}(N_{\lambda(g,x)}) = (G/N)x$$

De igual manera $(\pi_{G/N} \circ \pi_N)^{-1}((G/N)x)$ es mandando por un único punto mediante π_G. Tambien como $\pi_N, \pi_{G/N}$ son morfismos cocientes, es decir epimorfismo extremos, entonces $\pi_{G/N} \circ \pi_N$ es un epimorfismo extremo, es decir un morfismo cociente, entonces por la proposición (3.15) existen únicos morfismos $\phi : X/G \to \frac{X/N}{G/N}$ y $\psi : \frac{X/N}{G/N} \to X/G$ tales que conmuta el diagrama, y por unicidad se tiene que $\psi \circ \phi = I_{X/G}$ de la misma manera $\phi \circ \psi = I_{\frac{X/N}{G/N}}$ por tanto son isomorfismos en $\mathcal{C}$.$\square$

Ahora consideremos un G-objeto X, entonces se puede asignar X/G en $\mathcal{C}$ (con $\mathcal{C}$ una categoría topológica o Set), y esta asignación es funtorial, es decir existe un funtor $Grp(C) \to C$ que envia a cada G-objeto en su espacio de órbitas.

Proposición 3.18. *Sea $X, Y \in G - C$ con proyecciones orbitales π, π' respectivamente y tomemos $f : X \to Y$ un morfismo G-equivariante, entonces induce un único C-morfismo $f^G : X/G \to Y/G$ tal que conmuta el siguiente cuadrado.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\ X/G \arrow[r, "f^G"] & Y/G \end{tikzcd} \tag{3.39}$$

Entonces la asignación $f \to f^G$ es funtorial, es decir si tenemos otro morfimo G-equivariante $g : Y \to Z$ entonces $(g \circ f)^G = g^G \circ f^G$. Más aun si f es un C-isomorfismo entonces f es un $G - C$ isomorfismo con $(f^{-1})^G = (f^G)^{-1}$.

Observemos que esto se puede ver en términos de categorías, con $U : G - C \to C$ el funtor olvido y $()^G : G - C \to C$ el funtor que asigna a cada X su espacio orbital X/G, bajo esta situación las proyecciones orbitales $\pi_X : X \to X/G$ forman una transformación natural $\pi : U \Rightarrow ()^G$.

Demostración: Si $\pi(x_1) = \pi'(x_2)$ entonces existe $g \in G$ tal que $\lambda_X(g, x_1) = x_2$, usando que f es $G - equivariante$ tenemos $\lambda_Y(g, f(x_1)) = f \circ \lambda(g, x_2) = f(x_2)$ eso implica que $\pi' \circ f(x_1) = \pi' \circ f(x_2)$, por proposición (3,15) existe un único C-morfismo $f^G : X/G \to Y/G$ tal que $\pi' \circ f = f^G \circ \pi$. De igual manera si g es otro morfismo G-equivariante, entonces $(g \circ f)$ es equivariante, y del cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi'"] & Z \arrow[d, "\pi''"] \\ X/G \arrow[r, "f^G"] & Y/G \arrow[r, "g^G"] & Z/G \end{tikzcd} \tag{3.40}$$

Obtenemos por unicidad del C-morfismo $(g \circ f)^G$ que $(g \circ f)^G = g^G \circ f^G$. De la misma manera se puede ver que $(I_X)^G = I_{X/G}$, por tanto la asignación es funtorial $\square$

Mostraremos ahora propiedades topológicas ($C = Top$) de las proyecciones orbitales y de X/G que son de interés en varias áreas de las matemáticas.

De aquí en adelante λ se considerará como la acción $\lambda : G \times X \to X$, que es una función continua con G dotado de la topología discreta. En este caso tenemos que $\lambda_g : \lambda(g, -) : X \to X$ es un homeomorfismo.

Proposición 3.19. *La proyección orbital es una función abierta. Cuando G es un grupo finito entonces la proyección orbital es también cerrada.*

> **Demostración:** Sea U un abierto y $B = \pi(U)$ su imagen mediante U, por definición de π tenemos que $\pi^{-1}B = \bigcup_{g\in G} gU$, y como gU es la imagen de $\lambda_g := \lambda(g, -)$ entonces es abierta, esto implica que $\pi^{-1}B$ es abierto y por tanto $B = \pi(U)$ es abierto en X/G. Cuando G es finito entonces para cada cerrado C , se tiene que $\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g\in G} gC$ es la unión finita de cerrados, por tanto $\pi(C)$ es cerrado en X/G. $\square$

Proposición 3.20. *Si X es un espacio topológico tal que satisface algunas de las siguientes propiedades; espacio conexo, espacio localmente conexo, compacto, localmente compacto, primero numerable, segundo numerable, entonces X/G los satisface también. Si G es finito entonces las siguientes propiedades son preservadas por X/G; espacio T_1, Hausdorff, regular o normal.*

Proposición 3.21. *Dado (X, G, λ) una acción de grupos, un subconjunto $A \subset X$ es G-invariante si y sólo si $gA \subset A$.*

> **Demostración:** Si A es G-invariante , entonces para cada $g \in G$ se tiene que $gA \subset A$, por otro lado si dado $g \in G$ se tiene $gA \subset A$, entonces fijando $g \in G$, vemos que $A = (gg^{-1})A = g(g^{-1}A) \subset gA$, obteniendo que $gA = A, \forall g \in G$, y por tanto $GA = \bigcup_{g\in G} gA = A$ por tanto A es G-invariante. $\square$

Conjunto fundamental Una forma más visual de ver el espacio de órbitas es por medio de un conjunto fundamental. Sea X un G-espacio y $D \subset X$, decimos que D es un conjunto fundamental con respecto a G si $\pi|_D : D \to X/G$ es biyectiva. De entre todos los conjuntos fundamentales a escoger buscamos uno que satisface con $D \cong X/G$. Una forma de encontrarlo es tomar una sección de $\pi : X \to X/G$ es decir un morfismo $\rho : X/G \to X$ tal que $\pi\rho = I_{X/G}$, puesto que como funciones se tiene que ρ es inyectiva por tanto $D = \rho(X/G)$ es un conjunto fundamental que es isomorfo a X/G.

Conjunto mínimo Consideremos la familia de todos los conjuntos que son cerrados e invariantes $\mathfrak{I}$, un conjunto mínimo M es un elemento mínimo de $\mathfrak{I}$, es decir un conjunto cerrado e invariante tal que para cada $A \in \mathfrak{I}$ que satisface $A \subset M$ entonces $A = M$. Observemos que para cada $x \in M$ por ser invariante y cerrado entonces $\overline{Gx} \subset M$ pero por ser mínimo tenemos que $M = \overline{Gx}$ obteniendo el siguiente resultado.

Proposición 3.22. *Un conjunto cerrado e invariante es mínimo si y sólo si éste es la cerradura de la órbita de cada uno de sus puntos.*

Proposición 3.23. *Toda acción de un grupo G en un espacio compacto X tiene un conjunto mínimo.*

> **Demostración:** Consideremos la familia de todos los subespacios cerrados e invariantes $\mathfrak{I}$, claramente esta familia no está vacia, ya que $X \in \mathfrak{I}$. Observemos que $(\mathfrak{I}, \supset)$ es un conjunto parcialmente ordenado, entonces si tomamos una subfamilia $\mathfrak{I}'$ de $\mathfrak{I}$ que es totalmente ordenado, entonces por compacidad de X, aseguramos que $\bigcap \mathfrak{I}' \neq \emptyset$, y por otro lado este conjunto es un cerrado e invariante, es decir, $\bigcap \mathfrak{I}' \in \mathfrak{I}$, esto implica que la familia $\mathfrak{I}'$ tiene una cota maximal, (con el orden de $(\mathfrak{I}, \supset)$), por Lema de Zorn, se tiene la existencia de un conjunto máximal en $(\mathfrak{I}, \supset)$, es decir un conjunto cerrado e invariante que es minimal con respecto al orden $\subset$. $\square$

Teorema 3.1: Funciones equivariantes y sus propiedades

Sea G un grupo que actúa en X e Y y $f : X \to Y$ equivariante entonces tenemos.

1. La imagen directa e inversa de un conjunto invariante es invariante.

2. La imagen de un conjunto mínimo de X es un conjunto mínimo.

3. Sea $C \subset X$ y $M \subset Y$ conjuntos mínimo tal que $f(C) \cap M \neq \emptyset$ entonces $f(C) = M$.

4. Si Y es mínimo y X es compacto entonces f es sobreyectiva.

5. Si X es de Hausdorff mínimo y que $g : X \to Y$ es equivariante tal que coincide en un punto entonces $f = g$.

Demostración: Para (1), sea M un conjunto invariante, entonces dado $g \in G$ y $f(x) \in f(M)$ se tiene por definición de función equivariante $gf(x) = f(gx)$, pero $gx \in M$ por ser M un conjunto invariante, por tanto $gf(x) \in f(M)$, esto implica que $gf(M) \subset f(M)$ para todo $g \in G$ y por proposición 3,21, $f(M)$ es invariante. Para (2) sea C un conjunto mínimo de X, dado $y = f(x) \in f(C)$, por la proposición 3,22, $C = cl(Gx)$, donde cl denota la cerradura topológica. Ahora por continuidad de f, se tiene que $f(C) = f(cl(Gx)) = cl(Gy)$ y volviendo a usar la proposición 3,22 obtenemos que $f(C)$ es un conjunto mínimo. Para (3) es directo de (1) y la definición de conjunto mínimo. Para (4), por la proposición 3,23, X tiene un conjunto mínimo llámese C, y por (2) se tiene que $f(C)$ es mínimo en Y por tanto $Y = f(C)$ por tanto f es sobreyectiva. Para (5), supongamos que f, g coinciden en x_0, es decir $f(x_0) = g(x_0)$, ya que por hipótesis y por la proposición 3,22 tenemos que $X = cl(Gx_0)$, por otro lado usando que las funciones son equivariantes, tenemos que para todo $h \in G$, $g(hx_0) = hg(x_0) = hf(x_0) = f(gx_0)$, entonces f, g coinciden en el conjunto denso Gx_0, pero como X es Hausdorff, tenemos que f, g coinciden en todo punto de X, por tanto $f = g$ $\square$

A continuación mostraremos algunos ejemplos de acciones de grupos y su importancia.

Ejemplo 3.1: Consideremos X un objeto de una categoría C. Sea $Aut_C(X)$ $:= \{f \in Hom_C(X, X)|\ f$ es un isomorfismo $\}$ este subconjunto con la operación composición forman una estructura de Set-grupo. Ya que si $f \in Aut_C(X)$ entonces existe $g : X \to X$ tal que $fg = I_X,\ gf = I_X$, ademas la operación composición es asociativa y el morfismo identidad I_X forma un neutro de la operación. Definimos la acción natural $<,>: Aut_C(X) \times X \to X$ como sigue $< f, x >= f(x)$ la cual cuando C es una categoría pequeña entonces le corresponde como representación el homomorfismo identidad $Id : Aut_C(X) \to Aut_C(X)$. De manera un poco más general, dado G un grupo y X un conjunto, entonces toda representación $h : G \to Biy(X)$ le corresponde una acción natural $H : G \times X \to X$ definido como $H(g, x) = (h_g)(x)$ donde $h_g := h(g) \in Biy(X)$, además observemos que esta acción es efectiva si y solo si h es un monomorfismo.

Ejemplo 3.2: Dado un grupo G, entonces la multiplicación $m : G \times G \to G$ puede verse como una acción de grupos llamada **traslación** (Ver [1]). Este a su vez induce un homomorfismo de grupos $M : G \to Biy(G)$ donde cada $g \to l_g$ es enviado a una función biyectiva llamada traslación por la izquierda definida como $l_g(g') = gg'$. Tenemos entonces que $l_g \circ l_{g'} = lg * g,\ l_e = Id_G$ y por tanto si $gh = e$ entonces $l_g \circ l_h = Id_G$. Si $h \in kerM$ entonces $l_h = Id$ es decir $hg = g$ para todo $g \in G$, visto como acción por la derecha obtenemos $gh = g$ para todo $g \in G$ es decir h es un neutro multiplicativo, pero por unicidad de los neutros tenemos $h = e$ por tanto $KerM = (e)$ asi que esta acción es fiel, y por tanto concluimos el teorema de Cayley:

Proposición 3.24. TEOREMA DE CAYLEY. *Todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones.*

Ejemplo 3.3: La acción por **conjugación** definida como $\kappa(h, g) := hgh^{-1}$ para ver que efectivamente es una acción , notemos que $\kappa(e, g) = ege^{-1} = g$ y que $\kappa(h, \kappa(h', g)) = h(h'gh'^{-1})h^{-1} = (hh')g(hh')^{-1} = \kappa(hh', g)$, entonces $\kappa : G \times G \to G$ es una acción , y observemos que la representación inducida es de forma $\kappa' : G \to Aut_{Grp}(G)$ ya que $\kappa'_g : G \to G$ es un homomorfismo de grupos. Notemos que el estabilizador es de la forma:

$$stab(g) = \{h \in G|\ hgh^{-1} = g\} = \{h \in G|hg = gh\} = Cent(g) \tag{3.41}$$

Mientras que el estabilizador de e es G

Capítulo 4

Acercamiento a Superficies de Riemann

4.1. Definición y primeras propiedades

Definición 4.1: Superficies

Sea X un espacio topológico, segundo numerable y de Hausdorff. Decimos que X es una **superficie compleja** si existen una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de X y una familia de homeomorfismos $\phi_i : U_i \subseteq X \to V \subseteq \mathbb{C}$.

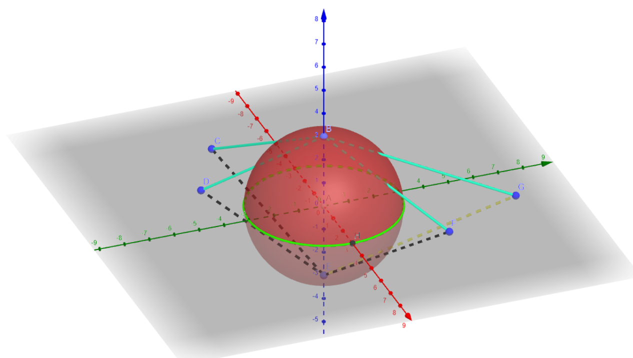
Denominaremos a la pareja (U_i, ϕ_i) como **carta compleja** y a la familia de cartas $\{U_i, \phi_i\}$ como el **atlas** de X. En esta sección estudiaremos las superficies que tienen una estructura analítica. Dados dos cartas complejas $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi : 2)$ decimos que son **compatibles** si $U_1 \cap U_2$ es vacío o bien $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$ son holomorfas.

Definición 4.2: Superficie de Riemann

Sea X un espacio topológico, segundo numerable y de Hausdorff. Decimos que X es una **superficie de Riemann** si existe un atlas de cartas complejas compatibles.

Ejemplo: La esfera de Riemann, se puede construir de la siguiente manera, consideremos $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ definido por la ecuación $|z|^2 + x^2 = 1$ con $(z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, consideramos $U_1 = \mathbb{S}^2 - \{(0,1)\}, U_2 = \mathbb{S}^2 - \{(0,-1)\}$ y los homeomorfismos $\phi_1 = U_1 \to \mathbb{C}$ la proyección estereográfica desde $(0,1)$ y $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ la proyección estereográfica desde $(0,-1)$. Observemos que la esfera de Riemann puede ser vista como la compactificación del plano complejo, $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denotado tambien como $\hat{\mathbb{C}}$.

Figura 4.1: Proyección estereográfica



Relación con las superficies reales Sabemos que $\mathbb{C}$ se puede identificar con $\mathbb{R}^2$, además si las funciones de transición son holomorfas entonces son C^∞-diferenciables como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Más aún estas funciones analíticas son tales que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por tanto son funciones conformes, asi que cada orientación local inducida, produce una única orientación global para la superficie de Riemann, es decir **las superficies de Riemann son orientables**. Si X es una superficie de Riemann compacta, sabemos de la topología de superficies que toda superficie compacta orientable es homeomorfa a una esfera o un n-toro. Por este motivo, definimos el **género** de X, como el número(denotado como $g(X)$):

- $g(X) = n$ si X es homeomorfa a un n-toro.
- $g(X) = 0$ si X es homeomorfa a la esfera.

Otro invariante topológico, conocido como **característica de Euler**, que se define como sigue, sea X una superficie compacta, se sabe que se puede triangular, llamemos V al número de vértices de una triangulación, E el número de aristas y F el número de caras, entonces la característica de Euler, denotado como $\chi(X)$ es:

$$\chi(X) = F - E + V$$

Si X es un n-toro, se tiene $\chi(X) = 2 - 2n$.

4.2. Funciones holomorfas

Definición 4.3: Función holomórfa

Sean M, N dos superficies de Riemann, decimos que una función $f : M \to N$ continua es **holomorfa** en $p \in M$ si para cada carta (U, ζ) alrededor de $p \in M$ y cada carta (V, ψ) alrededor de $f(p) \in N$ la función $\psi \circ f \circ \zeta^{-1} : \zeta(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$ es una función holomorfa. Si f es holomorfa en cada punto, decimos que f es holomorfa en M

Definición 4.4: Singularidades

Sea $f : W \subset X \to \mathbb{C}$ una función holomorfa desde una superficie Riemann. y $p \in W$, decimos que f tiene una singularidad del tipo removible, polo o esencial si existe una carta (U, ϕ) con $p \in U$ tal que la función $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad del tipo removible, polo o esencial respectivamente en $\phi(p)$.

Una consecuencia directa de la definición y de que las funciones de transición son holomorfas es la siguiente afirmación.

Proposición 4.1. *Usando la notación de la definición anterior, f tiene una singularidad del tipo removible, polo o esencial si y sólo si para cada carta (U, ϕ) con $p \in U$, la composición $f \circ \phi^{-1}$ tiene una singularidad del tipo removible, polo o esencial en $\phi(p)$.*

Otras propiedades obtenidas del análisis complejo son las siguientes.

1. Si $|f(x)|$ es acotado en una vecindad de p entonces f tiene singularidad removible, mas aún el límite en p existe.

2. Si $|f(x)|$ tiene al infinito en p entonces f tiene un polo en p.

3. Si $|f(x)|$ no tiene límite en p entonces f tiene una singularidad esencial en p.

Definición 4.5: Funciones meromorfas

Una función $f : X \to \mathbb{C}$ es meromorfa en $p \in X$ si en p satisface alguna de las siguientes situaciones:

1. f es holomorfa en una vecindad de p.

2. f tiene una singularidad removible o un polo en p.

Decimos que f es meromorfa en $W \subset X$ si es meromorfa en cada $p \in W$.

Es claro que el subconjunto de funciones meromorfas en W denotada como $M(W)$ es una $\mathbb{C}$-álgebra. Sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en una vecindad agujerada de p, dado una carta $(U, \phi : U \to V)$ con $p \in U$ entonces pensando en $z = \phi(x)$ para x cerca de p ,tenemos que $f \circ \phi^{-1}$ tiene una expansión en series de Laurent alrededor de $z_0 = \phi(p)$ como:

$$f((\phi)^{-1}(z)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - z_0)^n \tag{4.1}$$

Esta representación en series es llamado series de Laurent de f alrededor de p con respecto a ϕ. Observemos que depende de la elección de la carta, sin embargo dada dos cartas no disjuntas $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ se puede pasar de una carta a otra mediante la función de transición $\phi_2 \phi_1^{-1}$.

Definición 4.6: Orden de una función

Sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función meromorfa en p la cual tiene una serie de Laurent de forma $\sum_n c_n (z - z_0)^n$, definimos el orden $ord_p(f)$ como el mínimo exponente n_0 tal que c_{n_0} es distinto de cero

Como se habia mostrado, la serie de Laurent depende de la carta que se selecciona, pero $ord_p(f)$ no depende de la carta. Para ver esto, sean $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ cartas disjuntas tal que $p \in U_1 \cap U_2$ entonces describiremos en coordenadas locales alrededor de p como sigue $z = \phi_1$ y $w = \phi_2$, con $T(w) = \phi_1 \phi_2^{-1}$ holomorfa e invertible, entonces para $w_0 = \phi_2(p)$ tenemos $T'(w_0) \neq 0$, asi que tenemos la expansión:

$$z = T(w) = z_0 + \sum_{n \geq 1} a_n (w - w_0)^n \tag{4.2}$$

Con $a_1 \neq 0$ ya que T es invertible. Sustituyendo en la expansión dentro de

$U_1 \cap U_2$ tenemos:

$$(z - z_0)^m = (\sum_{n \geq 1} a_n (w - w_0)^n)^m = a_1^m (w - w_0)^m + \cdots \tag{4.3}$$

Donde el resto de la expansión son términos mayores a m, el mínimo exponente para la cual el coeficiente es distinto de cero es invariante bajo cambio de coordenadas, asi que está bien definido. Concluyendo con algunas propiedades directas de la definición y las series de Laurent.

Proposición 4.2. *Sea f meromorfa en p, si:*

1. *$ord_p(f) \geq 0$ si y solo si f es holomorfa en p.*
2. *$ord_p(f) < 0$ si y solo si f es una singularidad del tipo polo.*

Proposición 4.3. *Dado f, g funciones meromorfas en $p \in X$ tenemos que:*

1. *$ord_p(f + g) \geq min\{ord_p(f), ord_p(g)\}$.*
2. *$ord_p(fg) = ord_p(f) + ord_p(g)$.*
3. *$ord_p(f/g) = ord_p(f) - ord_p(g)$ En particular $ord_p(1/f) = -ord_p(f)$.*

Proposición 4.4. *Sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función la cual es meromorfa en un abierto conexo $W \subset X$ de una superficie de Riemann, Si f no es idénticamente a cero, entonces los ceros y los polos de f forman un subconjunto discreto de W. En particular, si X es una superficie de Riemann compacta, f tiene un número finito de ceros y polos.*

Teorema 4.1: Principio del módulo máximo

Sea $f : X \to \mathbb{C}$ holomorfa en una abierto conexo W de una superficie de Riemann X, si existe $p \in W$ tal que $|f(x)| \leq |f(p)|$ para todo $x \in W$ entonces f es constante en W.

Colorario 4.4.1. *Sea X una superficie de Riemann, compacta y $f : X \to \mathbb{C}$ holomorfa en X entonces f es constante.*

Demostración: Como f es holomorfa, entonces $|f|$ es una función continua, pero X es compacto entonces $|f|$ tiene un máximo en X, por el principio del Módulo Máximo implica que f es constante. $\square$

Un isomorfismo en la categoría de las superficies de Riemann y funciones holomorfas se le denomina bilohomorfismo.

Teorema 4.2: Teorema de la función abierta

Sea $F : X \to Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann, entonces f es una función abierta.

Una consecuencia directa es:

Proposición 4.5. *Sea $F : X \to Y$ una función holomorfa biyectiva, entonces F es un encaje de X en $F(X)$.*

Teorema 4.3: Teorema de identidad

Sea $F, G : X \to Y$ funciones holomorfas entre superficies de Riemann, si $F = G$ en algún subconjunto $S \subset X$ con punto limite en X entonces $F = G$ en X.

Las siguientes propiedades son más propias de las superficies de Riemann.

Proposición 4.6. *Sean M, N superficies de Riemann con M compacta. Dada una función holomorfa $f : M \to N$ entonces f es constante o sobreyectiva, en el último caso entonces N tambien es compacta. En particular $\mathcal{O}(M) := \{f : M \to \mathbb{C} | f \text{ es holomorfa } \} \cong \mathbb{C}$.*

Demostración: Si f no es constante entonces $f(M)$ es abierto ya que las funciones holomorfas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ son abiertas por el teorema del mapeo abierto, y tambien compacto por ser imagen continua de un compacto, por otro lado como N es Hausdorff entonces $f(M)$ es cerrado, pero por conexidad entonces $f(M) = N$. □

Observemos que si $F : X \to Y$ es una función holomorfa y $W \subset X$ abierto entonces la función $F^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(F^{-1}(W))$ definida como $F^*(g) = g \circ F$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-algebras que, análogo al funtor $Hom(-, X)$, tiene las propiedades funtoriales $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ y $I_X^* = I_{\mathcal{O}(W)}$.

Proposición 4.7. *Sea $F : X \to Y$ una función holomorfa no constante entre superficies de Riemann, entonces para cada $y \in Y$, la preimagen $F^{-1}(y)$ es un subconjunto discreto de X. En particular para X, Y compactos, $F^{-1}(y)$ es finito para cada $y \in Y$.*

Demostración: Tomemos una carta local z centrada en $y \in Y$ y para cada $x \in F^{-1}(y)$ tomemos una vecindad coordenada local centrada en x. Entonces la función F escrita en términos de coordenadas locales es una función holomorfa no constante $z = g(w)$, más aún g tiene un cero en el origen, ya que x (la cual es $w = 0$) va a y(la cual es $z = 0$), como los ceros de una función holomorfa no constante son discretos entonces podemos ver que para alguna vecindad de x, x es la única preimagen de y, por tanto $F^{-1}(y)$ es un suconjunto discreto de X. Para el caso de las superficies de Riemann compactas, se obtiene ya que los subconjuntos discretos de un compacto son finitos. $\square$

Dado una función meromorfa $f : X \to \mathbb{C}$, entonces para cada punto $p \in X$ tienen una vencindad holomorfa en p o es un polo , en ese caso $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, pensando en $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, definimos la función $F : X \to \hat{\mathbb{C}}$ por:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C} \ \textit{si } x \textit{ no es polo} \\ \quad \infty \ \textit{si } x \textit{ es polo} \end{cases} \tag{4.4}$$

Esta nueva función resulta ser holomorfa.

Proposición 4.8. *Existe una correspondencia* $1-1$ *entre el conjunto de las funciones meromorfas* $M(X)$ *y las funciones holomorfas* $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$.

4.3. Forma normal local de una función holomorfa

Teorema 4.4: Forma normal local

Sea $F : X \to Y$ una función holomorfa definida en $p \in X$ la cual no es constante, entonces existe un único entero $m \geq 1$ el cual satisfsace la siguiente propiedad: para cada carta $\phi : U_2 \to V_2$ en Y centrada en $F(p)$ existe una carta $\phi_1 : U_1 \to V_1$ en X centrada en p tal que $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$.

Demostración: Tomemos una carta ϕ_2 en Y, y escogemos una carta $\psi : U \to V$ en X centrada en p. Entonces la serie de Taylor para la función $T(w) = \phi_2(F(\phi_1(w)))$ debe ser $T(w) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i w^i$ con $c_m \neq 0$ y $m \geq 1$, además como $T(0) = 0$ entonces $T(w) = w^m S(w)$ donde $S(w)$ es una función holomorfa en $w = 0$ tal que $S(0) \neq 0$. Ya que S es holomorfa, podemos definir una función holomorfa R en una vecindad del 0 tal que $R(w)^m = S(w)$, entonces $T(w) = (wR(w))^m$, sea $\eta(w) = wR(w)$ entonces $\eta'(0) \neq 0$, entonces η es invertible. Por otro lado $\phi_1 = \eta \circ \psi$ es una carta en X cerca de p, podemos pensar en la nueva coordenada $z = \eta(w)$, entonces $z = wR(w)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) &= \phi_2(F(\psi^{-1}(\eta^{-1}(z)))) \\
&= T(\eta^{-1}(z)) \\
&= T(w) \\
&= (wR(w))^m \\
&= z^m
\end{aligned}$$

□

Definición 4.7: Multiplicidad y punto de ramificación

La multiplicidad de F en p, denotada por $mult_p(F)$, es el único entero m tal que existe una coordenada local cerca de p y $F(p)$ de la forma $z \to z^m$. Un punto $p \in X$ es un punto de ramificación de F si $mult_p(F) \geq 2$. Un punto $y \in Y$ se llama punto ramal de F si es la imagen de un punto de ramificación.

Notemos que siempre $mult_p(F) \geq 1$ siempre. Además podemos calcularlo sin obtener que encontrar las coordenadas locales para la cual F tiene forma normal local. Tomemos unas coordenadas locales $z = \phi$ en p y $w = \psi$ coordenadas locales en $F(p)$, consideremos su descripción en términos de sus coordenadas locales $h = \psi F \phi^{-1}$ como $w = h(z)$ donde $w_0 = h(z_0)$

Proposición 4.9. *Con la notación dada tenemos la siguiente identidad:*

$$mult_p(F) = 1 + ord_{z_0}(dh/dz) \tag{4.5}$$

La prueba se basa en que podemos cambiar las cartas coordenadas para transformar $x = T(y)$ (Con T como en la demostración) en $z = h(w)$ dado que el orden no depende de la elección de cartas obtenemos la identidad dada.

Lema 4.1. *Sea f una función meromorfa en una superficie de Riemann X, con su función holomorfa asociada $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ entonces para $p \in X$:*

1. *Si p es un cero de f, $mult_p(F) = ord_p(f)$.*
2. *Si p es un polo de f, $mult_p(F) = -ord_p(f)$.*
3. *Si p no es ni cero ni polo entonces $mult_p(F) = ord_p(f - f(p))$.*

4.4. Superficies compactas y teorema de Hurwitz

Proposición 4.10. *Sea $f : X \to Y$ una función holomorfa no constante entre dos superficies de Riemann compactas. Para cada $y \in Y$, definimos:*

$$d_y(F) := \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p(F) \tag{4.6}$$

Entonces el valor de $d_y(F)$ es constante independiente de $y \in Y$

Demostración: Consideremos la función $y \to d_y(F)$ que va desde $Y \to \mathbb{Z}$. Como Y es conexo, entonces toda función que es localmente constante debe ser constante, por tanto mostremos que es localmente constante. Dada una función $f : D \to D$ en el disco unitario, definida como $f(z) = z^m$, esta función es holomorfa y el único punto de ramificación para f es en $z = 0$ donde tiene multiplicidad m, todos los otros puntos tienen multiplicidad uno. Para algún $w \in D$, si $w \neq 0$ entonces existe m preimágenes , si $w = 0$ la única preimagen es $z = 0$ la cual tiene multiplicidad m. Por tanto, esta forma normal local f satisface la condición mencionada anteriormente. Observemos que si uno tiene una unión disjunta de funciones tales que mapean en una unión disjunta de discos a D de la forma $z \to z^{m_i}$, entonces d_y es constante. Nuestro objetivo es mostrar que F es localmente (en una vecindad de y) la unión disjunta de distintas funciones de la forma $z \to z^m$. Dado un punto $y \in Y$ y sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ su imagen inversa de y bajo F. Escojemos una coordenada local w en Y centrado en y. Por teorema de la forma normal local existen coordenadas $\{z_i\}_{i=1}^n$ en X con z_i centrado en x_i. Para cada $i = 1, \cdots, n$ en tal vecindad de x_i la función F envía z_i mediante $w = z_i^{m_i}$. Por tanto en esa vecindad de x_i tenemos exactamente la unión disjunta deseada. Falta mostrar que cerca de y, no existen preimágenes no contabilizadas para las cuales no están en las vecindades de las x_i. Supongamos lo contrario, supongamos que existen preimágenes la cual no están en ninguna vecindad de las x_i, entonces podemos encontrar una sucesión de puntos bajo F que converge a $y \in Y$. Como X es compacta entonces podemos encontrar una subsucesión , digamos $\{p_n\}$ que converge a $x \in X$ y que $F(p_n)$ converge a y, entonces por continuidad de F tenemos que $F(x) = y$ por tanto x es una de las x_i lo cual es una contradicción ya que ninguno de los p_n aparece en alguna vecindad de las x_i. Por tanto no existen otras preimágenes no contabilizadas en una vecindad de y.

A este valor $d_y(F)$ se le llama el grado de una función holomorfa $F : X \to Y$ y lo denotaremos como $Deg(G)$. Una consecuencia directa es la siguiente.

Proposición 4.11. *Una función holomorfa entre dos superficies de Riemann es un isomorfismo si y solo si su grado es* 1.

De esta manera podemos caracterizar algunas superficies compactas por medio de su grado

Colorario 4.11.1. *Si X es una superficie compacta de Riemann y existe una función $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa con un polo simple entonces X es biholomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$*

Demostración: Sea $f : X \to \mathbb{C}$ meromorfa con un polo simple en p, entonces podemos extenderla a una función $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ con $F(x) = f(x)$ si $x \neq p$ y $F(p) = \infty$, esta función es holomorfa, entonces tiene multiplicidad uno en p y p es el único punto que va al infinito, entonces F tiene grado 1 y por la proposición 4.12 es un isomorfismo de superficies de Riemann. Por tanto X es biholomorfa a $\mathbb{C}_\infty$ $\square$

Proposición 4.12. *Dada $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ una función no constante y meromorfa en una superficie de Riemann compacta X. Entonces:*

$$\sum_p ord_p(f) = 0 \tag{4.7}$$

Demostración: Sea $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ la función holomorfa asociada (Proposición 4.9). Sea $\{x_i\}$ los puntos que son enviados a 0 (los ceros de f) y $\{y_i\}$ los puntos enviados a ∞ (los polos de f) y $d := deg(F)$, entonces por definición tenemos:

$$\sum_i mult_{x_i}(F) = d = \sum_j mult_{y_i}(F)$$

Como los únicos puntos de X donde f tiene orden no cero son los ceros y los polos entonces usando el lema (4,1) tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_p ord_p(f) &= \sum_i ord_{x_i}(f) + \sum_j ord_{y_i}(f) &\quad (4.8)\\ &= \sum_i mult_{x_i}(F) - \sum_j mult_{y_i}(F) = 0 &\quad (4.9)\end{aligned}$$

□

Teorema 4.5: Fórmula de Hurwitz

Sea $F : X \to Y$ una función holomorfa entre superficies de Riemann compactas. Entonces:

$$\chi(X) = deg(G)\chi(Y) - \sum_{p\in X}[mult_p(F) - 1] \quad (4.10)$$

Demostración: Como X es compacto entonces el conjunto de puntos de ramificación es finito, por tanto la suma $\sum_{p\in X}[mult_p(F)-1]$ abarca únicamente un número finitos puntos de ramificación. Tomemos una triangulación de Y, tal que en cada punto de ramificación de F es un vértice. Asumimos que existen v vértices , e lados y t caras (triángulos), levantemos esta ramificación mediante F hacia X donde obtenemos v' vértices, e' lados y t' triángulos, observemos que cada punto de ramificación de F es un vértice de X. Como no hay puntos de ramificación en cada vertice de un triángulo, entonces cada triángulo de Y se levanta en $deg(F)$ triángulos en X, entonces $t' = deg(F)t$, similarmente $e' = deg(F)e$. Ahora fijamos un vértice $q \in Y$, el número de preimágenes $|F^{-1}(q)|$ se puede re-escribir como:

$$|F^{-1}(q)| = \sum_{p\in F^{-1}(q)} 1 = deg(F) + \sum_{p\in F^{-1}(q)} [1 - mult_p(F)]$$

Por tanto el número total de preimágenes de vértices en Y, la cual es el número v' de vértices de X, es:

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{vertices\ q\ de\ Y} \left(deg(F) + \sum_{p \in F^{-1}(q)} [1 - mult_p(F)] \right) \\ &= deg(F)v - \sum_{vertices\ q\ de\ Y} \sum_{p \in F^{-1}(q)} [mult_p(F) - 1] \\ &= deg(F)v - \sum_{vertices\ q\ de\ X} [mult_p(F) - 1] \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} -\chi(X) &= -v' + e' - t' \\ &= deg(F)v - \sum_{vertices\ q\ de\ X} [mult_p(F) - 1] + deg(F)e - deg(F)t \\ &= deg(F)(-\chi(Y)) + \sum_{vertices\ q\ de\ X} [mult_p(F) - 1] \\ &= -deg(G)\chi(Y) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1] \end{aligned}$$

Completando la prueba.$\square$

Como aplicación de interés consideremos un grupo G que actúa en una superficie de Riemann X con acción θ tal que para cada $g \in G$, la función $\theta(g, -) : X \to X$ es una función holomorfa, en esta situación diremos que G actúa holomórficamente. Unas de las propiedades de una acción holomorfa son las siguientes. Para las demostraciones ver [17]

Proposición 4.13. *Sea G un grupo que actúa holomórficamente y efectivamente en una superficie de Riemann X, entonces para cada $p \in X$, el subgrupo estabilizador $stab(p)$ es finito.*

Proposición 4.14. *Sea G un grupo finito que actúa holomórficamente y efectivamente en una superficie de Riemann X. Entonces los puntos de X con estabilizadores no triviales, son discretos.*

Proposición 4.15. *Sea G un grupo finito que actúa holomórficamente y efectivamente en una superficie de Riemann X, entonces el espacio de órbitas X/G tiene una estructura de superficie de Riemann, tal que la proyección $\pi : X \to X/G$ es holomorfa de grado G y $mult_p(\pi) = |G_p|$ para cada punto $p \in X$.*

Proposición 4.16. *Sea G un grupo finito que actúa holomórficamente y efectivamente en una superficie de Riemann compacta con mapeo cociente $\pi : X \to X/G$, para cada punto ramal $y \in Y$, entonces existe un entero $r \geq 2$ tal que $\pi^{-1}(y)$ consiste en exactamente $|G|/r$ puntos y cada uno de las preimágenes tiene multiplicidad r.*

Basándonos en esa proposición y la de la fórmula de Hurwitz obtenemos

Proposición 4.17. *Sea G un grupo finito que actúa holomórficamente y efectivamente en una superficie de Riemann compacta con mapeo cociente $\pi : X \to X/G$, supongamos que hay k puntos ramales $y_1, \cdots, y_k$ en Y con π teniendo multiplicidad r_i en y_i como en el teorema anterior, entonces:*

$$\chi(X) = \chi(X/G) - |G| \sum_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{r_i}) \tag{4.11}$$

Teorema 4.6: Hurwitz

Sea G un grupo finito que actua holomórficamente y efectivamente en una superficie de Riemann X de género $g \geq 2$ entonces $|G| \leq 84(g-1)$.

Este último resultado se debe a que, por la proposición 4.17, tenemos:

$$2g(X) - 2 = |G|(2g(X/G) - 2 + R)$$

Donde $R = \sum_i (1 - 1/r_i)$, luego se analiza por casos:

1. Si $g(X/G) \leq 1$. Entonces para el caso $R = 0$, implica que no hay ramificaciones en el mapeo cociente, obteniendo $g(X/G) \geq 2$, implicando $|G| \leq g - 1$. Si $R \neq 0$, se muestra que $R \leq 1/2$ y por tanto $|G| \leq 4(g-1)$.

2. Su $g(X/G) = 0$, entonces la relación se reduce a $2g - 2 = |G|(-2 + R)$, el cual fuerza $R \geq 2$ y se muestra que $|G| \leq 84(g-1)$.

4.5. 1-formas del tipo (1,0)

Vamos a construir las 1-formas complejas usando el concepto de gérmenes. Primero, dado (X, τ) un espacio topológico y consideremos el conjunto parcialmente ordenado por la inclusión, definimos la categoría asociada a este conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{T}$ (ver ejemplo 7, página 9). Siguiendo a Borceux en [5], se define una pre-gavilla con valores en $C =$

$Set, Grp, Rng, R-Mod, R-alg$ como un funtor contravariante $F : \mathcal{T} \to C$, usaremos la notación $\rho^a_b : F(A) \to F(B)$ para denotar el morfismo $F(i)$ donde i representa $B \subset A$ en $\mathcal{T}$. Los morfismos de dos pre-gavillas son las transformaciones naturales. A un elemento de $F(U)$ se les denomina **sección**. Definiremos algunos conceptos importantes acerca de las pre-gavillas:

Definición 4.8: Propiedades de una pre-gavilla

Sea F una pre-gavilla y $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos de X arbitraria. Entonces decimos que:

1. $\{x_i \in F(U_i)\}_{i\in F}$ es compatible cuando para toda $i, j \in I$ se satisface $\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(x_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(x_j)$
2. F es separada cuando para $U := \bigcup_{i\in I} U_i$ entonces para cada $x, y \in F(U)$ tal que $\forall i \in I,\ \rho^U_{U_i}(x) = \rho^U_{U_i}(y)$ entonces $x = y$
3. F es una gavilla cuando para cada familia compatible $\{x_i \in F(U_i)\}_{i\in F}$, sea $U := \bigcup_{i\in I} U_i$, entonces existe un único elemento $x \in F(U)$ tal que para cada $i \in I$ se cumple $\rho^U_{U_i}(x) = x_i$. El elemento x es llamado el pegado de la familia de elementos.

De la definición obtenemos directamente la siguiente equivalencia:

Proposición 4.18. *Son equivalentes para una pregavilla F:*

1. *F es una gavilla*
2. *F es separada y para cada familia compatible $\{x_i \in F(U_i)\}_{i\in F}$, se puede pegar por un elemento $x \in F(\bigcup_{i\in I} U_i)$*

Una propiedad importante de las gavillas es que F preserva algunos productos.

Lema 4.2. *Sea F una pre-gavilla entonces:*

1. *$F(\emptyset)$ tiene a lo más un elemento. Si F es una gavilla entonces $F(\emptyset)$ tiene exactamente un elemento.*
2. *Si $U := \bigcup_{i\in I} U_i$ entonces para cada $x \in F(u)$ tenemos que $\{x_i := \rho^U_{U_i}(x)\}$ es una familia compatible.*

Demostración: Para (1) observemos que $\emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset} U_i$, entonces la familia vacía $\{x_i \in F(U_i)\}_{i\in F}$ es compatible, como F es separado entonces si existe un pegado, debe ser único. Si F es una gavilla entonces se asegura la existencia del pegado. Para (2) dado $i, j \in I$ entonces tenemos $U_i \cap U_j \subset U_i \subset U$ y como F es un funtor contravariante, tenemos:

$$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(x_i) = \rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}\rho_{U_i}(x) = \rho^{U}_{U_i\cap U_j}(x)$$

$$\rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(x_j) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}\rho_{U_j}(x) = \rho^{U}_{U_i\cap U_j}(x)$$

Por tanto $\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(x_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(x_j)$. $\square$

Proposición 4.19. *Sea F una gavilla si $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ es una partición de U, entonces $F(U) \cong \prod_{i\in I} F(U_i)$*

Observemos que para C, si tenemos una familia de morfismos $(X, h_i : X \to A_i)$ entonces como conjuntos, la única función $h : X \to \prod_{i\in I} A_i$ definido como $h(x) = (h_i(x))_{i\in I}$ resulta ser el único morfismo para el producto en C. Asi que basta mostrar la biyección en $C = Set$.

Demostración: Sea $\{\prod_{i\in I} F(U_i), \pi_i : \prod_{i\in I} F(U_i) \to F(U_i)\}$ su producto , dado que tenemos la familia $\{F(U), \rho^U_{U_i} : F(U) \to F(U_i)\}$ por propiedad universal del producto, tenemos la única función $h(x) = (\rho^U_{U_i}(x))_{i\in I}$, por la parte (2) del lema 4.2, es una familia compatible, y como F es una gavilla, en particular es separable, lo cual implica la inyectividad de h. Dado $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F(U_i)$, por la parte (1) del lema 4.2, como $F(U_i \cap U_j)$ consta exactamente de un punto entonces $(x_i)_{i\in I}$ es una familia compatible, por tanto existe un único pegado $x \in F(U)$ tal que $h(x) = (x_i)_{i\in I}$ por tanto es una biyección. $\square$

Motivado a esta afirmación tenemos otra descripción de las gavillas. Sea $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ y F una pre-gavilla, entonces construimos los diagramas:

$$F(U) \xrightarrow{p_0} \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I\times I} F(U_i \cap U_j) \tag{4.12}$$

Donde p_0 es el morfismo de la propiedad universal del producto con respecto a la familia $\{F(U), \rho^U_{U_i} : F(U) \to F(U_i)\}$, mientras que p_1, p_2 son inducidos por las proyecciones $u_1, u_2 : I \times I \to I$ y los morfismos $F(U_i) \to F(U_i \cap U_j)$. Es fácil ver, usando el concepto de límite que para una pregavilla F, el morfismo p_0 es inyectiva si y solo si F es separada.

Proposición 4.20. *Sea F una pregavilla, entonces son equivalentes:*

1. *F es una gavilla*

2. *En el diagrama (4.13), $F(U)$ es un igualador*

Es momento de definir un tallo de una gavilla, sea $x \in X$ definimos $\mathfrak{U}_x := \{U \in \tau | \ x \in U\}$, nuestro conjunto de vecindades abiertas de x. Claramente visto como categorías $\mathfrak{U}_x$ es una subcategoría de $\mathcal{T}$ y sea $i_x : \mathfrak{U}_x \to \mathcal{T}$ el funtor inclusión. Bajo estas consideraciones tenemos:

Definición 4.9: Tallo de una pregavilla

Para cada $x \in X$ y F una pregavilla, definimos el tallo en x como el colímite de $F \circ i_x$ y es denotado como $F_x := colim(F \circ i_x)$. Los elementos de F_x son llámados gérmenes de x.

Como $\mathfrak{U}_x$ es una categoría de un conjunto parcialmente ordenado, entonces el colímite es entonces un límite directo. Vamos a describir al límite directo en Set.

Proposición 4.21. *Sea I un conjunto parcialmente ordenado y $F : I \to Set$ un funtor, donde denotaremos $f_i^j = F(i \leq j) : A_i \to A_j$, entonces:*

$$Lim_{\to} A_i = \sqcup_{i \in I} A_i / \sim \tag{4.13}$$

Donde la relación de equivalencia es la siguiente, para $x_i \in A_i, x_j \in A_j$ son equivalentes $x_i \sim x_j$ si y solo si existe $k \in I$ con $i \leq k, j \leq k$ tal que $f_i^k(x_i) = f_j^k(x_j)$ y los morfismos del cocono son $\phi_i : A_i \to Lim_{\to} A_i$ son la composición de los morfismos canónicos

$$A_i \to \sqcup_{i \in I} A_i \to Lim_{\to} A_i$$

Demostración: Primero mostremos que $(Lim_{\to} A_i, \phi_i)$ es un cocono. Dado $i \leq j$ entonces se tiene $f_i^j : A_i \to A_j$, para cada $x \in A_i$ definamos $x_j := f_i^j(x) \in A_j$, esto se puede escribir como $f_j^j(x_j) = x_j = f_i^j(x)$ entonces por definición de equivalencia $x \sim x_j$ es decir pertenecen a la misma clase de equivalencia, por tanto conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "f_i^j"] \arrow[d, "in_i"] & & A_j \arrow[d, "in_j"] \\
\sqcup_{i\in I} A_i \arrow[d, "p"] & & \sqcup_{i\in I} A_i \arrow[dll, "p"] \\
Lim_{\to} A_i & &
\end{tikzcd}$$

Como $\phi_i := p \circ in_i$ entonces $\phi_i = \phi_j \circ f_i^j$, por lo tanto $(Lim_{\to}A_i, \phi_i)$ es un cocono. Dado (X, g_i) un cocono, por proposición (2.6) $\sqcup_{i\in I}A_i$ es el coproducto de $\{A_i\}$ en Set entonces existe una única función $g : \sqcup_{i\in I}A_i \to X$ tal que $g_i = g \circ in_i$ para toda $i \in I$. Ahora tomemos $x_i \in A_i, x_j \in A_j$ tales que $x_i \sim x_j$ entonces por definición existe $k \in I$ tal que $i \leq k$,$j \leq k$ y $f_i^k(x_i) = f_j^k(x_k)$, componiendo con g_k tenemos $g_k f_i^k(x_i) = g_k f_j^k(x_k)$, usando la definición de cocono tenemos que la identidad anterior se ve como $g_i(x_i) = g_j(x_j)$, es decir dado $(x_i, i), (x_j, j) \in \sqcup_{i\in I}A_i$ tal que $p(x_i, i) = p(x_j, j)$ entonces $g(x_i, i) = g(x_j, j)$, por proposición (2.1) existe una función $g' : Lim_{\to}A_i \to X$ tal que $g = g' \circ p$ entonces $\forall i \in I$, se cumple $g_i = g \circ in_i = g' \circ (p \circ in_i) = g' \circ \phi_i$ y este es único por propiedad universal del coproducto y cociente en Set. Concluyendo la demostración.$\square$

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "in_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & \sqcup_{i\in I} A_i \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "g"] & Lim_{\to} A_i \arrow[dl, dashed, "g'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Un elemento $s_p \in F_p$ se puede representar por una sección $s \in F(U)$ con $p \in U$ tal que $\phi_U(s) = s_p$, decimos entonces que s_p es la restricción de s en el tallo de p. Ahora hablaremos de los gérmenes en una superficie de Riemann. Primero para cada $U \subset X$ abierto, definamos $\mathfrak{O}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} |$ es holomorfa $\}$, este espacio es una $\mathbb{C}$-álgebra pues se puede definir puntualmente $f + g, f * g$. Dado $U \subset V$ se define $\rho_U^V : \mathfrak{O}(V) \to \mathfrak{O}(U)$ como la restricción sobre U, i.e. $\rho_U^V(f) = f|_U$, esta función es un homomorfismo de $\mathfrak{C}$-álgebras, por tanto tenemos una pregavilla sobre las $\mathbb{C}$-álgebras.

Proposición 4.22. *La pregavilla de funciones holomorfas sobre una superficie de Riemann es una gavilla.*

Demostración: Vamos a mostrar que la pregavilla es separada, sea U un abierto y $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ una cubierta abierta, dado $f, g : U \to \mathbb{C}$ dos funciones holomorfas tal que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ para toda $i \in I$, entonces para cada $x \in U$ existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$ y se tiene $f(x) = f|_{U_i}(x) = g|_{U_i}(x) = g(x)$, como esto lo cumple para toda $x \in U$ entonces $f = g$, por tanto la pregavilla es separada. Ahora tomemos una famiia de funciones holomorfas compatibles (en el sentido de la definición 4.7) $\{f_i : U_i \to \mathbb{C}\}_{i\in I}$, es decir $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ para todo $i, j \in I$, definamos $f : U \to \mathbb{C}$ como $f(x) = f_i(x)$ si $x \in U_i$, está definición es independiente de la elección del abierto U_i, pues supongamos que $x \in U_j$ entonces $x \in U_i \cap U_j$, usando la compatibilidad tenemos $f_i(x) = f_i|_{U_i\cap U_j}(x) = f_j|_{U_i\cap U_j}(x) = f_j(x)$, por tanto es bien definido. Por último, dado $p \in U$ y una carta compleja $(V, \phi : V \to W \subset \mathbb{C})$ la función $f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \mathbb{C}$ es holomorfa, para ver esto dado $x \in (U_i \cap U_j) \cap V$ entonces $f(x)$ tiene dos representaciones analíticas centradas en $z = f(z)$:

$$f_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_i(x-z)^n \tag{4.14}$$

$$f_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_i(x-z)^n \tag{4.15}$$

Donde se uso que f_i, f_j son funciones holomorfas, como estas dos series coinciden por compatibilidad en $U_i \cap U_j$ entonces por unicidad de series de potencias tenemos que $a_i = b_i$ para toda $i \in I$, mostrando que la expansión de f está bien definida en todo el abierto $\phi(U \cap V)$, entonces f es holomorfa, por la proposición (4.19) tenemos que $\mathfrak{O}$ es una gavilla. $\square$

Ahora gracias a la proposición 4.22, se puede entender que el gérmen en una superficie de Riemann es una relación de equivalencia, donde la relación esta definida como sigue $(f_1, U_1) \sim (f_2, U_2)$ en p con $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}_p$ si y sólo si existe $W \subset U_1 \cap U_2$ tal que $f_1|_W = f_2|_W$, y cada relación de equivalencia se denota por $f_x \in \mathfrak{O}_x$, observemos que $\mathfrak{O}_x$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Definición 4.10: Espacio cotangente complejo

Dados dos gérmenes $f_x = [(f, U)]$ y $g_x = [(g, V)]$, entonces son cotangentes si existe una carta $\phi : W \to \mathbb{C}$ tal que $x \in W \subset U \cap V$ y:

$$(f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)) = (f \circ \phi^{-1})'(\phi(x)).$$

Por la regla de la cadena vemos que la definición no depende de la carta y por tanto está bien definida. Más aún, es una clase de equivalencia, al conjunto de las clases de equivalencia lo denotamos como $K_{X,x}$ y a una clase lo conocemos como vector cotangente.

$K_{X,x}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, mas aún es posible definir una función lineal $d : \mathfrak{O}_x \to K_{X,x}$ definido para cada f como $d(f) = [(f, U)]$. A esta función lineal la denominaremos como el **operador diferencial**.

Proposición 4.23. *$K_{X,x}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión 1.*

Demostración: Esto se puede deducir del siguiente hecho. Dada $z : U \to \mathbb{C}$ una carta compleja centrada en $x \in U$ entonces para cada función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$ existe una función holomorfa compleja F tal que $f = F \circ z$ entonces se tiene por definición de las clases de equivalencia y regla de la cadena:

$$df(x) = F'(z(x))dz(x)$$

Por tanto vemos que es múltiplo de dz. $\square$

Ahora definimos:

$$K_X := \bigcup_{x \in X} K_{X,x}$$

Y las funciones canónicas $\pi_x : K_X \to X$ tal que $\pi_X^{-1}(x) = K_{X,x}$, en donde sabemos que son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. A la estructura (K_X, π_X) se le conoce como el haz fibrado cotangente de X. Dada $z : U \subset X \to \mathbb{C}$ una carta compleja, como z es un homeomorfismo entonces la función $U \to K_X|_U$ donde a cada $x \in U$ le es asignado $dz(x)$ es inyectiva. Si tomamos otra carta $w : V \to \mathbb{C}$ con $V \cap U \neq \emptyset$ entonces por la regla de la cadena tenemos para cada $x \in U \cap V$.

$$dz(x) = d((z \circ w^{-1}) \circ w)(x) = (z \circ w^{-1})'(w(x))dw(x)$$

Del haz fibrado cotagente (K_X, π_X), a cada sección de π_X se le conoce tradicionalmente como **1-forma diferencial**. Es decir que una 1-forma es una función $w : X \to K_X$ tal que $\pi_X \circ w = Id_{K_X}$, al conjunto de formas se denota como $\Omega^1(X)$. Por la proposición 4.25 y las observaciones dadas, se sigue que:

1. Para cada carta compleja (z, U) entonces la función $dz : U \to K_X$ es una sección bajo U

2. Para cada 1-forma w y cada carta (z, U), existe una función $f : U \to \mathbb{C}$(No necesariamente holomorfa) tal que w se describe en U como $w = f \circ zdz$.

3. Para cada otra par de cartas (x, V), donde $w = h \circ xdx$, entonces se cumple $f \circ z = h \circ x * \frac{dx}{dz}$

Estas 1-formas se le consideran del tipo (0,1). Por abuso de notación cuando tenemos la descripción de una 1-forma como $w = f \circ zdz$ la denotaremos simplemente como $w = fdz$. Dada una 1-forma w, decimos que es holomorfa(resp. meromorfa) si para cada carta compleja , la función f que describe localmente a w, es decir $w = fdz$, tenemos que f es holomorfa(resp. meromorfa). Para una 1-forma meromorfa w y un punto $x \in X$, tenemos que localmente cerca de x , w se describe como $w = fdz$ entonces definimos el **Orden** de w como $ord_p(w) := ord_p(f)$

La diferencial holomorfa Dada $f : X \to \mathbb{C}$ una función holomorfa, definimos $\partial f := \frac{\partial f}{\partial z} dz$ donde (z, U) es una carta compleja. Observemos que por regla de la cadena, ∂f satisface efectivamente el punto (3) y por tanto está bien definida. Entonces es posible definir una función $\partial : \mathcal{O}(X) \to \Omega^1(O)$ que es lineal y satisface la regla de Leibniz, es decir, $\forall f, g \in \mathcal{O}(X)$ y $c \in \mathbb{C}$ se cumple:

1. $\partial(f + cg) = \partial f + c\partial g$

2. $\partial(f * g) = g * \partial(f) + f * \partial(g)$

Arrastre de una 1-forma Sea $F : X \to Y$ una función holomorfa entre superficies de Riemann. Tenemos que F induce un homomorfismo en los C-espacios vectoriales $F^* : \{f : Y \to \mathbb{C}\} \to \{f : X \to \mathbb{C}\}$ como sigue $F^*(f) = f \circ F$. Observemos que si $f : Y \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces $F^*(f)$ es holomorfa, asi que restringiendo F^* en $\mathcal{O}(Y)$ está bien definida. Podemos extender F^* a $\Omega^1(Y)$ como sigue $F^*(f \circ zdz) := F^*(f \circ z)d(F^*(z))$.

Proposición 4.24. *Sea $F : X \to Y$ una función holomorfa, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{F^*} & \mathcal{O}(X) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ \Omega^1(Y) & \xrightarrow{F^*} & \Omega^1(X) \end{array} \tag{4.16}$$

Demostración: Sea $f \in \mathcal{O}(Y)$ entonces $\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} dz$, luego aplicando F^* tenemos $F^* \partial f = \frac{\partial f}{\partial z}(z \circ F) \frac{\partial (z \circ F)}{\partial x} dx$ para cada carta (x, U) en X. Por otro lado $F^* f = f \circ F$ entonces $\partial F^* f = \frac{\partial (f \circ F)}{\partial x} dx$ para cada carta en X. Luego por regla de la cadena tenemos la igualdad. $\square$

Proposición 4.25. *Sea $F : X \to Y$ una función holomorfa y ϕ una 1-forma meromorfa en Y. Entonces para cada $p \in X$ se tiene:*

$$ord_p(F^*\phi) = (1 + ord_{F(p)}(\phi))Mult_p(F) - 1 \tag{4.17}$$

Demostración: Tomemos las cartas coordenadas z cerca de p y w cerca de $F(p)$, entonces por el teorema de la forma normal, las cartas que escogeremos tendrán la forma $w = F(z) = z^n$. Ahora como ϕ es meromorfa entonces localmente $\phi = w^k e^{f(w)} dw$ con f holomorfa y por tanto tenemos $F^*\phi = nz^{nk+n-1}e^{f(z^n)}dz$ obteniendo la identidad 4.16 $\square$

4.6. Divisores

Dado X una superficie de Riemann, consideremos $\mathbb{Z}^X := \{f : X \to \mathbb{Z}\}$ que es un grupo abeliano y definimos el soporte de f como *supp*$(f) := \{p \in X | \ f(p) \neq 0\}$.

Definición 4.11: Divisor

Una función $f : X \to \mathbb{Z}$ es un divisor si *supp*(f) es un subconjunto discreto de X. El conjunto de los divisores está denotado como $Div(X)$

Cuando X es compacta , tenemos que f es un divisor si y solo si tiene soporte finito. Para cada p definimos $\chi_p : X \to \mathbb{Z}$ como sigue $\chi_p(x) = 0$ si

$x \neq p$ y $\chi_p(p) = 1$. Por definición χ_p es un divisor, y más aun, para cada divisor D de X se puede describir como:

$$D = \sum_{p \in X} D(p)\chi_p$$

Definición 4.12: Grado de un divisor en una superficie compacta.

El grado de un divisor D en una superficie compacta es la suma de los valores de D. Es decir:

$$deg(D) = \sum_{p \in x} D(p) \tag{4.18}$$

Observemos que desde la definición tenemos:

1. $deg(D + D') = deg(D) + deg(D')$
2. $deg : Div(X) \to \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos

Dado $f : X \to \mathbb{C}$ meromorfa entonces definimos $div(f) = \sum_p ord_p(f)\chi_p$ llamado divisor principal y el conjunto de los divisores principales es denotado como $PDiv(X)$. Por la proposición 4.4 y 4.13 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.26. *Sea f, g funciones meromorfas en X entonces:*

1. $div(fg) = div(f) + div(g)$
2. $div(f/g) = div(f) - div(g)$
3. $div(1/g) = -div(f)$
4. *Si X es compacta entonces* $deg(div(f)) = 0$

Algunos de los divisores más importantes son el divisor de ceros, y el divisor de polos. Dada $f : X \to \mathbb{C}$ una función meromorfa definimos el divisor de ceros de f como:

$$div_0(f) := \sum_{p \in X| \ ord_p(f) > 0} ord_p(f)\chi_p$$

Por otro lado definimos el divisor de polos como

$$div_1(f) := \sum_{p \in X| \ ord_p(f) < 0} (-ord_p(f))\chi_p$$

De la definición tenemos que $div(f) = div_0(f) - div_1(f)$. De la misma manera, para una 1-forma w meromorfa, definimos su divisor orden como $div(w) := \sum_{p\in X} ord_p(w)\chi_p$, es fácil ver que para una función meromorfa $div(fw) = div(f) + div(w)$.

4.7. Curvas afines planas

Definición 4.13: Curvas planas afines

Una curva plana afín es el lugar de los ceros en $\mathbb{C}^2$ de un polinomio $f(z,w)$. Un polinomio $f(z,w)$ es no singular en un punto p si $\frac{\partial f}{\partial z}$ o $\frac{\partial f}{\partial w}$ es distinto de cero en p. Una curva plana afín es no singular en p si su polinomio es no singular en p. Una curva plana afín es suave si es no singular en todos sus puntos.

Consideremos $g : V \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa desde un abierto conexo V. Sea

$$X := \{(z, g(z))|z \in V\} \subset \mathbb{C}^2 \tag{4.19}$$

Entonces X es un espacio topológico conexo, segundo numerable y de Hausdorf, consideremos la proyección $p_1 : X \to V$ definida como $p_1(z,w) = z$, claramente es un homeomorfismo con función continua inversa g, entonces (X, p_1) es una carta compleja que cubre todo X y le da estructura de superficie de Riemann, a X se le considera como la gráfica de g.

La versión compleja teorema de la función implícita Vamos a mencionar la versión compleja de la función implícita basado [17], la cuál es fundamental para hablar sobre una estructura de superficie de Riemann de una curva plana.
Sea $f(z,w) \in \mathbb{C}[z,w]$ un polinomio y consideremos $X := \{(z,w) \in \mathbb{C}^2|\, f(z,w) = 0\}$, dado un punto $p = (z_0, w_0) \in X$ tal que $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$ entonces existe una vecindad V de z_0 y una función holomorfa $g : V \to \mathbb{C}$ tal que dentro de V , X coincide con la gráfica $w = g(z)$. Más aún $g' = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial w}}$ cerca de z_0.

Sea X una curva plana afín definida por el polinomio $f(z,w)$. Sea $p \in X$ donde $\frac{\partial f}{\partial w}(p) \neq 0$, por teorema de la función implícita, existe $g_p : U \to \mathbb{C}$ holomorfa con $p \in U$ una vecindad, consideremos la gráfica X_{g_p} donde $X_{g_p} \subset X$ y la proyección $\pi_p : X_g \to \mathbb{C}$ definida como $\pi_p(z, g_p(z)) = z$ donde su inversa se describe $\pi_p^{-1}(z) = (z, g_p(z))$, formando una carta compleja (X_{g_p}, π_p) alrededor p. De manera similar para $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ se puede formar una gráfica en la otra variable creando asi cartas complejas. Si X es suave entonces en todo punto existe una derivada parcial distinta de cero, por tanto tenemos una colección de cartas $\mathfrak{F} = \{(X_{g_p}, \pi_p)|\ p \in X\}$. Afirmamos que $\mathfrak{F}$ es un atlas de cartas complejas compatibles en X, dadas (X_{g_p}, π_p) y (X_{g_q}, π_q) dos cartas complejas alrededor de dos puntos $p, q \in X$ tal que $X_{g_p} \cap X_{g_q} \neq 0$ entonces consideremos la función de transición

$$\pi_q \circ (\pi_p)^{-1} : \pi_p(X_{g_p} \cap X_{g_q}) \to \pi_q(X_{g_p} \cap X_{g_q})$$

Para cada $\phi \in X_p \cap X_q$ entonces por pertenecer a ambas gráficas, se tiene $g_p(\phi) = g_q(\phi)$, entonces $\pi_q \circ \pi_p^{-1}(\phi) = \pi_q(\phi, g_p(\phi)) = \pi_q(\phi, g_q(\phi)) = \phi$ es una función holomorfa, por tanto son cartas compatibles. Hasta este momento tenemos un atlas de cartas compatibles, esto casi define una estructura de superficie de Riemann, lo último que falta es que sea conexa, Hausdorff y que tenga una base numerable X, en general no siempre se cumple todas las propiedades anteriomente mencionadas por ejemplo para el polinomio $f = (z + w)(z + w - 1)$, la curva plana afin es la unión disjunta de dos lineas complejas, entonces X no es conexo. Sin embargo para los polinomios irreducibles, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.27. *Sea $f(z, w)$ un polinomio irreducible entonces el lugar de sus ceros X es conexo, más aún si f es no singular e irreducible entonces X es una superficie de Riemann.*

La demostración de esto requiere de varios teoremas de la geometría algebraica, se puede encontrar una demostración en el volumen 2 de [16]. Un resultado importante para el próximo capítulo es el siguiente, la demostración está en [22], denotamos $M(X) := \{f : X \to \mathbb{C}|$ es meromorfa $\}$.

Proposición 4.28. *Sea X una curva algebraica, y $z, w \in M(X)$ entonces $div(z) = div(w)$ si y sólo si $z = \lambda w$ para una $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Esta proposición afirma que dado dos funciones $z, w : X \to \mathbb{C}$ son proporcionales por una constante compleja si y solo si tienen los mismos ceros y los mismos polos.

Capítulo 5

Geometría y Algebra de la cuártica de Klein

5.1. Acerca de las transformaciones de Möbius

En [17] se menciona que todas las funciones meromorfas en la esfera de Riemann $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ son funciones de la forma $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ donde $P, Q \in \mathbb{C}[z]$ entonces los automorfismos de la esfera de Riemann son de la forma $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ donde $ad - cb \neq 0$, a estas funciones las denominaremos **Transformaciones de Möbius** y el conjunto de estas será denotado como $\mathfrak{M}_2$.

Descripción Algebraica Ya que $\mathfrak{M}_2$ es el conjunto de automorfismos de la esfera de Riemann, entonces éste forma un grupo bajo la composición como operación, podemos dar una descripción en forma matricial, consideremos al grupo general lineal $GL(2, \mathbb{C})$ y definamos el homomorfismo $GL(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_2$ definido como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, este homomorfismo es suprayectivo, pero no inyectivo ya que para cualquier $k \in \mathbb{C}^*$ tenemos que $\frac{akz+bk}{ckz+dk} = \frac{az+b}{cz+d}$ es decir ambas funciones son las mismas ya que son iguales en todo punto, en especial podemos restringir el homomorfismo al subgrupo $SL(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{M}_2$ donde por la observación dada, sigue siendo suprayectiva. Es fácil ver que el núcleo de este homomorfismo es $\{I_2, -I_2\}$ por el primer teorema de isomorfismo obtenemos que:

$$\mathfrak{M}_2 \cong SL(2, \mathbb{C})/\{I_2, -I_2\} := PSL(2, \mathbb{C}) \tag{5.1}$$

Alguna de las transformaciones más importantes son, **traslaciones** definidas como $T_b(z) = z + b$, **semejanzas** definidas como $S_a(z) = az$ con $a \neq 0$, **inversión** $In(z) = \frac{1}{z}$

Proposición 5.1. *Toda transformación de Möbius es una composición de traslaciones, semejanzas e inversión.*

> **Demostración:** Sea $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius, por simplicidad consideremos que $ad - bc = 1$, entonces tenemos dos casos, si $c = 0$ entonces $f(z) = (a/d)z + (b/d) = S_{a/d}T_{b/a}(z)$, mientras que si $c \neq 0$ Entonces $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c}\frac{1}{cz+d}$ la cual es una composición de inversión, traslaciones y semejanzas. $\square$

Observemos que todo círculo en la esfera de Riemann es el resultado de intersecar un plano a la esfera de Riemann, considerando la proyección estereográfica, envia círculos a círculos siempre y cuando no pasen por ∞, pero si pasa por ∞ el círculo es enviado a una recta, desde ese punto de vista podemos denominar a un círculo generalizado como un círculo o recta. La función inversión tiene una clara descripción como automorfismo de la esfera de Riemann. De manera general toda funcion conforme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se puede extender a una función conforme (ya que la proyección estereográfica es conforme) en la esfera, de la siguiente manera, primero extendemos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a una función $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definiendo $f(\infty) := \lim_{z\to\infty} f(z)$ y después, realizamos la siguiente composición:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^2 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{S}^2 \\ \hat{\mathbb{C}} \arrow[r, "f"] & \hat{\mathbb{C}} \arrow[u, "\pi^{-1}"'] \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Donde $\pi(x, y, z) = \frac{x+iy}{1-z}$ y $\pi^{-1}(x + iy) = (\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1})$ Entonces para la función inversión $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, donde observemos que en $\hat{\mathbb{C}}$ se tiene que $f(0) = \infty, f(\infty) = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \pi^{-1} f \pi(x, y, z) \\ &= \pi^{-1} f(\frac{x}{1-z} + \frac{y}{1-z} i) \\ &= \pi^{-1}(\frac{(1-z)(x-iy)}{x^2+y^2}) \\ &= \pi^{-1}(\frac{(1-z)(x-iy)}{1-z^2}) \\ &= \pi^{-1}(\frac{x-iy}{1+z}) \end{aligned}$$

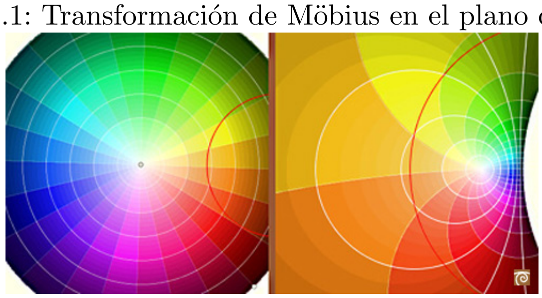
Si $\eta = \frac{x}{1+z}$ y $\zeta = \frac{-y}{1+z}$ entonces $\eta^2 + \zeta^2 + 1 = \frac{2}{1+z}$ y $\eta^2 + \zeta^2 - 1 = \frac{-2z}{1+z}$ asi que F queda como:

$$
\begin{aligned}
F(x, y, z) &= \pi^{-1}\left(\frac{x - iy}{1+z}\right) \\
&= \left(\frac{2\frac{x}{1+z}}{\frac{2}{1+z}}, \frac{-2\frac{y}{1+z}}{\frac{2}{1+z}}, \frac{\frac{-2z}{1+z}}{\frac{2}{1+z}}\right) \\
&= (x, -y, -z)
\end{aligned}
$$

Por tanto la función inversión en la esfera es una rotación alrededor del eje x y de 180 grados ya que su matriz de rotación es:

$$
F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5.3}
$$

Figura 5.1: Transformación de Möbius en el plano complejo



Proposición 5.2. *Las transformaciones de Möbius vistas en $\hat{\mathbb{C}}$, envían círculos generalizados en círculos generalizados.*

Demostración: Es fácil ver que las traslaciones y semejanzas envian círculos generalizados a círculos generalizados, en especial las rectas ya que fijan ∞. Mientras que para la inversión, sea $T(z) = 1/z$ primero consideremos una circunferencia en coordenadas locales $A(x^2+y^2)+Bx+Cy = D$ con $z = x+iy$, entonces $1/z = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}i := u + iv$ como $1/|z|^2 = u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$ entonces de la ecuación de la circunferencia tenemos $A+Bu-Cv = D(u^2+v^2)$, en donde tenemos dos casos, el primer caso, si $D \neq 0$ entonces es una circunferencia, pero si $D = 0$ entonces la ecuación pertenece a una recta. Ahora si consideramos una recta entonces, en $\mathbb{C}_\infty$ es una circunferencia que pasa por ∞, denotemoslo como c_l. Por otro lado, puesto que $1/z$ en la esfera de Riemann es una rotación de 180 con eje la recta formada desde $(1,0,0)$ a $(-1,0,0)$, entonces c_l es enviado a una circunferencia que pasa por el polo opuesto de ∞, aqui tenemos dos casos, uno que la imagen de c_l no contenga a ∞, en ese caso al enviarlo a $\mathbb{C}$ obtenemos una circunferencia. Mientras que para el otro caso, si la imagen de c_l contiene al ∞, entonces al enviarlo a $\mathbb{C}$ obtenemos una recta. $\square$

Definimos la razón cruzada como $Cr(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}{(z_3-z_2)(z_1-z_4)}$

Proposición 5.3. *La razón cruzada es invariante bajo transformaciones de Möbius.*

Demostración: Sea $T_b(z) = z + b$, $S_a(z) = az$ y $In(z) = 1/z$, entonces por un simple cálculo:

$$\begin{aligned}
Cr(T_b(z_1), T_b(z_2); T_b(z_3), T_b(z_4)) &= Cr(z_1, z_2; z_3, z_4) \\
Cr(S_a(z_1), S_a(z_2); S_a(z_3), S_a(z_4)) &= \frac{a^2}{a^2} Cr(z_1, z_2; z_3, z_4) \\
&= Cr(z_1, z_2; z_3, z_4) \\
Cr(In(z_1), In(z_2); In(z_3), In(z_4)) &= Cr(z_1, z_2; z_3, z_4)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 5.4. *Dados seis puntos $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ entonces existe una única $T \in \mathfrak{M}_2$ tal que $T(z_i) = w_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Demostración: La idea de la demostración, es considerar un caso particular: enviar z_1, z_2, z_3 a los puntos $1, 0, \infty$. Primero si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ fija $1, 0, \infty$ entonces $0 = T(0) = \frac{b}{d}$ teniendo $b = 0$, mientras que $\infty = T(\infty) = \frac{a}{c}$ entonces $c = 0$ y $1 = T(1) = a/d$ entonces $a = d$ pero como podemos identificar T con una única matriz en $PSL(2, \mathbb{C})$ entonces $a^2 = 1$ por tanto $a = 1 = d$ es decir $T = Id$. Ahora si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ son enviados a $1, 0, \infty$ mediante la transformación:

$$S_1(z) = \frac{(z_1 - z_3)(z - z_2)}{(z_1 - z_2)(z - z_3)} \tag{5.4}$$

De la misma manera podemos construir una transformación de Möbius S_2 que envia w_1, w_2, w_3 a $1, 0, \infty$. Por tanto la transformación que envia z_1, z_2, z_3 en w_1, w_2, w_3 es $S_2^{-1} S_1$.

Para demostrar la unicidad se sigue que si T_1, T_2 envian los mismos puntos entonces $S_2 T_1 S_1^{-1} = S_2 T_2 S_1^{-1}$ fijan los puntos $1, 0, \infty$ entonces es el morfismo identidad , por lo tanto $T_1 = T_2$ □

Proposición 5.5. *Cuatro puntos a, b, c, d están en una circunferencia generalizada si y sólo si su razón cruzada es real.*

Demostración: Sea T una transformación de Möbius que envia una circunferencia generalizada fija C a la recta extendida $\mathbb{R}$, como la razón cruzada es invariante bajo transformaciones de Möbis, entonces es claro que dados 4 puntos en C se tiene que la razón cruzada es real. Si 4 puntos distintos a, b, c, d tienen razón cruzada real, sea C_1 la circunferencia generada por a, b, c y C_2 la circunferencia generada por b, c, d, y T_1, T_2 las transformaciones de Möbius que envian C_i a $\mathbb{R}$ respectivamente. Si a no está en C_2 entonces $T_2(a)$ no está en $\mathbb{R}$ pero la razón cruzada $Cr(a, b; c, d)$ es real entonces $\frac{T_2(b) - T_2(a)}{T_2(a) - T_2(d)}$ debe ser real por tanto $T(a)$ es real lo cual es una contradición, concluyendo que a esta en C_2 y por tanto $C_1 = C_2$ □

Proposición 5.6. *Sea U, V transformaciones de Möbius, entonces U fija un punto w si y sólo si VUV^{-1} fija $V(w)$*

Por la proposición anterior concluimos que dos transformaciones de Möbius conjugadas tienen el mismo numero de puntos fijos. Dado $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con

$ad - bc = 1$ entonces resolviendo la ecuación

$$T(z) = z \Rightarrow z = \frac{a - d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}$$

Considerando la representación de T como matriz, tenemos que su traza es $Tr(T) = a + d$. Por tanto el número de puntos fijos depende del valor $Tr(T)^2 - 4$. Obteniendo la siguiente afirmación:

Proposición 5.7. *Son equivalentes para* $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *con* $ad - bc = 1$

1. *T fija un punto.*

2. *T es conjugada a una trasformación afín.*

> **Demostración:** Sea T con punto fijo $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $\phi(z) = \frac{1}{z - z_0}$, por la proposición anterior tenemos T fija z_0 si solo si $S = \phi T \phi^{-1}$ fija ∞ si y solo si $S(z) = az + b$ para algún $a, b \in \mathbb{C}$ $\square$

Diremos que una transformación T es **parabólica** si fija un único punto de $\mathbb{C}$.

Proposición 5.8. *Si* $T \neq Id_{\mathbb{C}}$ *no es parabólica entonces* T *es conjugada a una semejanza.*

> **Demostración:** Si T no es parabólica entonces fija 2 puntos, consideremos $\phi(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}$ con z_1, z_2 los puntos fijos, por tanto T fija z_1, z_2 si y solo si $S = \phi T \phi^{-1}$ fija $0, \infty$ si y solo si $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ satisface $b, c = 0$ si y solo si $S(z) = az$ para alguna $a \in \mathbb{C}^*$ $\square$

Dada T una transformación conjugada a una semejanza $S(z) = az$, decimos que es:

1. Elíptica, si $|a| = 1$

2. Hiperbólica, si $a \in \mathbb{R}^+$

3. Loxodrómica, si no satisface ninguna de las dos anteriores

Para concluir, consideremos $\mathbb{H}^2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ x_2 \geq 0\}$ y $D^2 := \{p \in \mathbb{R}^2 |\ |p| \leq 1\}$

Proposición 5.9. *El conjunto de las transformaciones de Möbius que preservan* $\mathbb{H}^2$ *es* $PSL(2, \mathbb{R})$.

Demostración: Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2,\mathbb{R})$, es claro que $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, mientras que para i, $Im(T(i)) = \frac{1}{c^2+d^2} \geq 0$, por conexidad preserva $\mathbb{H}^2$. $\square$

Sabemos que existe una única transformación de Möbius T que envia $-1, 0, 1$ a $i, -1, -i$, realizando cálculos se tiene que $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ y $T(\mathbb{H}^2) = D^2$. Obtenemos que:

Proposición 5.10. *El conjunto de transformaciones de Möbius que preservan D^2 son de la forma $S(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta} z+\overline{\alpha}}$ tal que $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.*

Demostración: Sea $S \in PSL(2,\mathbb{C})$ tal que $S(D^2) = D^2$ entonces $T^{-1}ST(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ por tanto $T^{-1}ST(z) = \frac{az+b}{cz+d} =: U(z)$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} S &= TUT^{-1} \\ &= 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \\ &= 1/2 \begin{pmatrix} a+d+i(b-c) & a-d-i(b+c) \\ a-d+i(b+c) & a+d+i(c-b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La cual describe una transformación de Möbius de la forma $S(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta} z+\overline{\alpha}}$ con $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ $\square$

Observemos que cada transformación de Möbius de forma $T(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\overline{\beta} z+\overline{\alpha}}$, se puede escribir de forma $T(z) = e^{i\theta}\frac{z-z_0}{-\overline{z_0}z+1}$ con $e^{i\theta} = (\frac{\alpha}{|\alpha|})^2$ y $z_0 = -\beta/\alpha$.

5.2. Modelo del Disco de Poincaré y sus teselaciones

Existen varios modelos para la geometría hiperbólica, empezemos con describir el modelo del disco de Poincaré. Consideremos D^2 y $\rho : D^2 \to \mathbb{R}^+$ una función continua. Estamos interesados en definir una métrica para medir las longitudes de las curvas. Definimos la ρ-longitud de una curva diferenciable $\gamma : I \to D^2$ como:

$$\rho(\gamma) := \int_a^b \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt \tag{5.5}$$

Y para dos puntos $p, q \in D^2$ como $\rho(p,q) = infd(\gamma)$ sobre todos los caminos que conectan p a q. Construiremos las herramientas necesarias para definir una métrica a través de una función continua ρ la cual será llamada **función de densidad**.

Proposición 5.11. *La distancia geométrica $\rho(a, b)$ es una métrica en A.*

Demostración: Por construcción se tiene que $\rho(a, b) \geq 0$ para cada $a, b \in A$. Ahora dados $x, y \in A$ tales que $\rho(x, y) = 0$ y supongamos que $x \neq y$, entonces existe una $r > 0$ tal que el disco cerrado $D(x, r) \subset A$ no contiene a y. Observemos que $D(x, r)$ es compacto y ρ es continua, entonces existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\rho(z) \geq m$ para toda $z \in D(x, r)$ (Ya que la imagen debe ser un compacto , es decir un conjunto cerrado y acotado). Asi que dado una curva $\gamma : [a, b] \to A$ que tiene punto inicial a x y punto final a y, sea $t_0 \in [a, b]$ tal que $\gamma(t_0) \in \partial D(x, r)$, obteniendo la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \rho(\gamma) &= \int_a^b \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt \\ &\geq \int_a^{t_0} \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt \\ &\geq mr \end{aligned}$$

Esto implica que $\rho(x, y) \geq mr > 0$ lo cual es una contradicción, por tanto $x = y$. Es claro que $\rho(x, x) = 0$. Para mostrar que es simétrica, dada una curva $\gamma : [a, b] \to A$ que conecta x con y, definimos en el mismo dominio, la curva $\beta(t) = \gamma(x + y - t)$, observemos que $|\beta'(t)| = |\gamma'(t)|$ para toda $t \in [a, b]$, entonces se tiene que $\rho(\beta) = \rho(\gamma)$ para cada curva que conecta x con y, y viceversa, por tanto $\rho(a, b) = \rho(b, a)$.
Ahora dados $x, y, z \in A$ consideremos las curvas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [a, b] \to A$ tal que γ_1 conecta x a y, γ_2 conecta y a z y $\gamma_3(t) = \gamma_1(t)$ si $t \in [a, t_0]$, y $\gamma_3(t) = \gamma_2(t)$ si $t \in [t_0, b]$ para un $t_0 \in (a, b)$ fijo arbitrario. Entonces γ_3 es continua y diferenciable a trozos, asi que tenemos:

$$\begin{aligned} \rho(\gamma_3) &= \rho(\gamma_1) + \rho(\gamma_2), \text{ usando la propiedad del ínfimo tenemos,} \\ &\geq \rho(x, z), \text{ como este valor es cota inferior entonces.} \\ \rho(x, z) &\leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \end{aligned}$$

□

Definimos una ρ-línea como una curva $\gamma : I \to A$ tal que para cada $p =$

$\gamma(t_1), q = \gamma(t_2), r = \gamma(t_3)$ con $t_1 < t_2 < t_3$ se cumple $\rho(p,q) = \rho(p,r) + \rho(r,q)$.

Dada una función biyectiva diferenciable $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^n$ entre abiertos, decimos que es conforme en x_0 si el jacobiano $Df(x_0) = (k(x_0)I)Q(x_0)$, donde Q es una matriz ortogonal y $k \in \mathbb{R}^+$, al número k se le llama factor de conformalidad. Ahora si A tiene una λ-densidad, podemos inducir una densidad de B de modo que f sea una isometría, más precisamente, sea $\mu(x)$ el factor de conformalidad de f, definimos

$$\alpha(y) = \alpha(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$$

Observemos que cada $\gamma : I \to A$ diferenciable satisface:

$$\begin{aligned} \alpha(f\circ\gamma) &= \int_I \alpha((f\circ\gamma)(t))|(f\circ\gamma)'(t)|dt && (5.6)\\ &= \int_I \frac{\lambda(\gamma(t))}{\mu(\gamma(t))}\mu(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt && (5.7)\\ &= \int_I \lambda(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt = \lambda(\gamma) && (5.8)\end{aligned}$$

Ahora dada $\beta : I \to B$ diferenciable entonces $\beta = ff^{-1}\beta$ donde $f^{-1}\beta : I \to A$, es decir toda curva diferenciable en B viene de una curva diferenciable en A. Por tanto $f : (A,\lambda) \to (B,\alpha)$ es una isometría

Disco de Poincaré y Semiplano superior Ahora el modelo hiperbólico de Poincaré se describe como sigue, para dos puntos x, y en el disco, definimos la línea hiperbólica que pasa por x a y como la única circunferencia ortogonal a $\mathbb{S}^1$ y que pasa por los puntos x, y. La construcción sintética se basa con métodos de la geometría inversa. Se puede verificar que las líneas hiperbólicas satisfacen los 4 primeros axiomas de Euclides y el axioma de la geometría hiperbólica: *Para cada punto P y línea m , existen varias líneas paralelas a m y que pasan por P*. Vamos a construir una métrica en este disco que sea consistente con esta construcción, en especial, requerimos que en esta métrica las isometrías, sean funciones conformes que preserven el disco, proponemos como $Iso(D^2) := \{S \in PSL(2,\mathbb{C})|\ S(z) = e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\bar{a}z},\ a \in D^2, \theta \in \mathbb{R}\}$. Dado $A \in Iso(D^2)$ entonces $\rho(t)$ debe satisfacer para cada $t \in D^2$:

$$\rho(A(t))|A'(t)| = \rho(t) \tag{5.9}$$

Como $A'(z) = e^{i\theta}(\frac{1+\bar{a}z-\bar{a}(z+a)}{(1+\bar{a}z)^2}) = e^{i\theta}(\frac{1-|a|^2}{(1+\bar{a}z)^2})$. Además observemos que A mueve el $0 \in D^2$ en el punto $a \in D^2$ rotado θ radianes. Por tanto aplicando la ecuación con $A(0) = e^{i\theta}a$ entonces:

$$\rho(ae^{i\theta})|A'(0)| = \rho(0) \Rightarrow \rho(ae^{i\theta}) = \frac{\rho(0)}{1-|a|^2} \tag{5.10}$$

Dicho de otra manera dado $C_r := \{a \in D^2 |\ |a| = r\}$ con $r \geq 0$ entonces todo $z \in C_r$ se tiene que $\rho(z) = \frac{\rho(0)}{1-r^2}$. En varios libros acerca de la geometría hiperbólica $\rho(0) = 1$ o $\rho(0) = 2$. Entonces la forma longitud se describe como $ds^2 = \frac{(\rho(0))^2|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$. Vamos a encontrar la distancia bajo esta métrica, pues bien la ventaja de tener a $Iso(D^2)$ grupo de isometrías es que basta con definirlo en un caso particular, ya que podemos pasar de una circunferencia a otra bajo una única transformación de Möbius, la cual como se ha construido, preserva la métrica, entonces hemos definido una distancia. Nuestro caso particular es considerar la distancia entre 0 y un punto fijo arbitrario $p \in D^2$, primero observemos que si definimos $\gamma_0(t) = tp$ con $t \in [0,1]$ entonces:

$$\begin{aligned}
\rho(\gamma_0) &= \int_{\gamma_0} ds = \int_0^1 \frac{\rho(0)}{1-t^2|p|^2}(|p|)dt && (5.11)\\
&= \rho(0)\int_0^1 \left(\frac{1/2}{1-t|p|} + \frac{1/2}{1+t|p|}\right)|p|dt && (5.12)\\
&= \frac{\rho(0)}{2} Ln\frac{1+|p|}{1-|p|} && (5.13)
\end{aligned}$$

Vamos a mostrar que la medida dada, realmente es el infímo de todas las longitudes de las trayectorias que conectan 0 a p, tomemos otra trayectoria $\gamma : [0,1] \to D^2$ que conecta 0 a p, tomemos una partición de $[0,1]$ para estimar $\rho(\gamma)$, llámese la partición $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$, entonces tenemos la estimación:

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(\gamma(t_i))|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \tag{5.14}$$

Ahora para poder comparar usaremos que el valor de ρ es constante en todos los puntos de una circunferencia centrada en 0 (otra forma de decirlo es que ρ es **radial**). Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ el punto $\gamma(t_i)$ pertenece en la circunferencia centrada en 0 con longitud $|\gamma(t_i)|$ podemos intersectar esta circunferencia con el segmento γ_0, es fácil ver que el punto de intersección es $\gamma_0^i := |\gamma(t_i)|\frac{p}{|p|}$, uniendo los puntos γ_0^i con γ_0^{i+1} por lineas (que son segmentos del γ_0), entonces esta proyección de forma radial de γ a γ_0 tiene la estimación:

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(\gamma_0^i)|\gamma_0^{i+1} - \gamma_0^i| \tag{5.15}$$

Pero por la invarianza radial de ρ tenemos $\rho(\gamma_0^i) = \rho(\gamma(t_i))$ mientras que por otro lado sabemos que $|\gamma_0^{i+1} - \gamma_0^i| \leq |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$ para toda i entonces tenemos que $P_0 \leq P$. entonces γ_0 es la longitud más pequeña entre todos los puntos que conectan 0 a p, por tanto tenemos:

$$\rho(0,p) = \frac{\rho(0)}{2} Ln \frac{1+|p|}{1-|p|} \tag{5.16}$$

Entonces para definirlo en general, sea a, w dos puntos del disco, consideremos $A(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ entonces esta transformación de Möbius envia los puntos a, w a $0, s := A(w)$ por tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \rho(a,w) = \rho(0,s) &= \frac{\rho(0)}{2} Ln \frac{1+|s|}{1-|s|} && (5.17) \\ &= \frac{\rho(0)}{2} Ln \frac{|1-\bar{a}w| + |w-a|}{|1-\bar{a}w| - |w-a|} && (5.18) \end{aligned}$$

Por ser las transformaciones de Möbius conformes, notemos que la recta que une 0 a p es una circunferencia generalizada que es ortogonal a $\mathbb{S}^1$, entonces la imagen del segmento que conecta 0 a p es un arco de circunferencia ortogonal a $\mathbb{S}^1$ que conecta los puntos a y w y que tiene como ρ-longitud la distancia $\rho(a,w)$

Proposición 5.12. *Para dos puntos $p, q \in D^2$ existe una única línea hiperbólica que conecta p a q y es un arco de una circunferencia ortogonal a $\mathbb{S}^1$.*

Otro modelo muy usado es el del semiplano superior, puesto que la transformación $T(z) = \frac{z-i}{z+i}$ es una transformación biconforme donde $T(\mathbb{H}^2) = D^2$ consideremos $T^{-1} : D^2 \to \mathbb{H}^2$ que es descrito como $S(w) := T^{-1}(w) = \frac{iw+i}{-w+1}$ con $\mu(w) = |S'(w)| = \frac{2}{|1-w|^2}$ entonces la densidad inducida es:

$$\sigma(z) = \frac{\lambda(T(z))}{\mu(T(z))} = \frac{\rho(0)}{2} \frac{|1-T(z)|^2}{1-|T(z)|^2} = \frac{\rho(0)}{2} \frac{1}{Im(z)} \tag{5.19}$$

De aqui por simplicidad proponemos $\rho(0) = 2$ obteniendo una isometria entre los modelos D^2 y $\mathbb{H}^2$, donde las geodésicas en el semiplano superior son arcos de circunferencias generalizadas ortogonales al eje real $\mathbb{R}$. Las siguientes propiedades muestran que estos modelos satisfacen los axiomas de una geometria hiperbólica.

Proposición 5.13. *Dado un triángulo hiperbólico entonces la suma de sus ángulos internos es menor a 180 grados. Más aún el área de un triángulo hiperbólico con ángulos interiores α, β, γ es igual $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$*

Demostración : Para la primera parte consideremos el modelo del disco de Poincaré. Basta considerar un triángulo en especial, sea $O = 0 + 0i$ y $B, C \in D^2 - \{O\}$ sea m el triángulo euclidiano formado por los vértices $0BC$ y l el triángulo formado por las geodésicas de D^2 con vértices $0BC$, observemos que los segmentos OA y OB en los dos triángulos l y m coinciden, mientras que el segmento BC en l es una circunferencia ortogonal a D^2 e intersectan las rectas OA y OB formando ángulos internos β, γ menor a los ángulos internos β', γ' formado por la intersección de las rectas OA, OB, BC respectivamente, es decir $\beta \leq \beta', \gamma \leq \gamma'$. Además sea α el angulo formado por las rectas $0A, 0B$ (ya que es el mismo ángulo para l y m en el mismo punto O) entonces como el triángulo euclidiano satisface $\pi = \alpha + \beta' + \gamma' \geq \alpha + \beta + \gamma$ entonces $\pi - (\alpha + \beta + \gamma) \geq 0$. Para la segunda parte , consideremos el modelo hiperbólico del semiplano superior, Consideremos el triángulo geodésico A, B, O donde $O = \infty$ (Se puede ver desde el disco de Poincaré que el ángulo interno del triangulo desde O es 0), a este triángulo lo denominaremos del tipo I. Sea α el ángulo interno desde A y β el ángulo interno desde B. Por simplicidad, basta considerar que el arco de circunferencia AB es un arco de $\mathbb{S}^1$ (Ya que las transformaciones de Möbius $PSL(2, \mathbb{R})$ actúan transitivamente en las circunferencias del plano ortogonal a la línea $\mathbb{R}$). Entonces el arco tiene una parametrización $(t, \sqrt{1 - t^2})$ de $t \in [cos[\pi - \alpha)], \cos\beta]$ mientras que para la parte imaginaria y varía de ∞ a $\sqrt{1 - x^2}$ Por tanto el área del triángulo es:

$$Area = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dydx}{y^2} = \pi - (\alpha + \beta) \tag{5.20}$$

Ahora, para un triángulo donde uno de sus segmentos es una recta perpendicular al eje real, se puede ver como la diferencia conjuntista de dos triángulos del tipo I, entonces si α, β, γ son los ángulos internos del triángulo entonces calculando el área a través de dos triángulos del tipo I tenemos que el área es $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Por último, usando la transitividad de $PSL(2, \mathbb{R})$ obtenemos para el caso general$\square$.

Para completar el teorema, basta ver que $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en las circunferencias ortogonales al eje real, ya que este es el conjunto de las geodésicas del modelo del semiplano superior.

Proposición 5.14. *El grupo de isometrías de $\mathbb{H}^2$, es decir $Isom(\mathbb{H}^2) = PSL(2, \mathbb{H}^2)$ actúa transitivamente en las circunferencias ortogonales al eje real.*

Demostración: Es claro que $Isom(\mathbb{H}^2)$ realmente envía círculos ortogonales al eje real en círculos ortogonales al eje real. Ahora basta ver la transitividad, para esto consideremos el caso de C una circunferencia ortogonal al eje real, entonces basta mostrar que existe $T \in Isom(\mathbb{H}^2)$ tal que $T(C) = i\mathbb{R}$ donde $i\mathbb{R}$ denota el eje imaginario. Si C es una recta paralela al eje imaginario que intersecta al eje real en $x \in \mathbb{R}$ entonces la transformación $T(z) = z - x$ satisface lo pedido, si C no es una recta paralela al eje imaginario entonces es una circunferencia ortogonal al eje real con centro en alguna $x \in \mathbb{R}$, para este caso mediante una traslación y homotecia es enviado a $\mathbb{S}^1$, luego existe una única transformación que envia los puntos $1 \to 0$ y $-1 \to \infty$, realizando los cálculos tenemos que una opción es $S(z) = \frac{z-1}{z+1}$ la cuál es equivalente a su forma matricial en $Isom(\mathbb{H}^2)$, por tanto componiendo todas estas transformaciones enviamos C a $i\mathbb{R}$ $\square$

5.3. Grupos discretos y el grupo triangular

Sea T un triángulo con ángulos interiores α, β, γ, si T es un triángulo en la geometría euclidiana entonces $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, en cambio si T es un triángulo en la geometría hiperbólica se tiene $\alpha+\beta+\gamma < \pi$. Nosotros estamos interesados en aquellos triángulos que pueden teselar el plano hiperbólico. Específicamente los ángulos de un triángulo con con angulos internos $\alpha = \pi/n,\ \beta = \pi/m,\ \gamma = \pi/l$ donde $n, m, l > 2$ son enteros positivos. Para esto tenemos que hablar acerca de los grupos discretos y como actúan en los modelos hiperbólicos.

Definición 5.1: Grupos discretos

Un grupo discreto es un grupo topológico Γ en el cual todos los puntos son abiertos.

La definición equivale a que un grupo esté dotado de la topología discreta. Usualmente, en caso general, no representa un interés estudiarlos, sin embargo, como menciona Ratcliffe en [18], los grupos discretos con más interés de estudio son aquellos subgrupos discretos de un grupo continuo como $\mathbb{R}^n$ o $GL(n, \mathbb{C})$. Vamos a mencionar algunas propiedades generales de los grupos discretos.

Proposición 5.15. *Si G es un grupo topológico, entonces G es discreto si y sólo si $\{e\}$ es abierto.*

Demostración: Si G es discreto entonces $\{e\}$ es abierto. Ahora si $\{e\}$ es abierto, fijemos $p \in G$ y consideremos la función continua $f(x) = x * p$, entonces $\{p\} = f^{-1}(e)$ es abierto, por tanto G es discreto. □

Proposición 5.16. *Un espacio métrico X es discreto si y sólo si para cada sucesión convergente en X es eventualmente constante.*

Demostración: Si X es discreto, sea $x_n \to x$ una sucesión convergente, entonces como $A = \{x\}$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) = A$ y por definición de convergencia, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $x_n \in A$ es decir $x_n = x$ por tanto la sucesión es eventualmente constante. Si en X para cada sucesión convergente en X es eventualmente constante implica que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) = \{x\}$ y por tanto, x es abierto, por tanto X es discreto. □

Proposición 5.17. *Si G es un grupo topológico con una métrica topológica, entonces cada subgrupo discreto de G es cerrado en G.*

Demostración: Sea $H \subset G$ un subgrupo discreto de G, supongamos que $G - H$ no es abierto, entonces existe $g \in G - H$ y $g_n \in B(g, 1/n) \cap H$ para cada entero $n > 0$. Entonces como $g_n \to g$ en G tenemos entonces que $g_n g_{n+1}^{-1} \to 1$ en H, pero la sucesión $g_n g_{n+1}^{-1}$ no es eventualmente constante, y contradice (5.16) por tanto $G - H$ es abierto y H es cerrado. □

Los subgrupos discretos de grupos continuos están muy relacionados con otro concepto llamado grupos discontinuos.

Definición 5.2: Grupos discontinuos

Sea G un grupo y X un espacio topológico. Decimos que:

1. G actúa discontinuamente en X, si G actúa en X y para cada compacto $K \subset X$ el conjunto $K \cap gK$ es no vacío para un número finito de elementos $g \in G$.

2. G es discontinuo si G es un grupo de homeomorfismos de X y G actúa discontinuamente en X.

Proposición 5.18. *Si un grupo G actúa discontinuamente en X entonces cada subgrupo estabilizador es finito.*

Demostración: Como $\{x\}$ es compacto por definición de acción discontinua implica que el grupo estabilizador es finito. $\square$

Proposición 5.19. *Si un grupo G actúa discontinuamente en un espacio métrico X entonces cada G-órbita es un subconjunto discreto cerrado de X.*

Demostración: Sea x un punto de X. Nosotros queremos mostrar que la colección de subconjuntos de cardinalidad uno de Gx es localemente finito, es decir que cada punto $y \in X$ tiene una vecindad que intersecta, solo un número finito de elementos de la colección. Supongamos que para un punto $y \in X$ cada vecindad Gx contiene infinitos puntos. Como X es un espacio métrico, existe una sucesión infinita g_i de elementos distintos de G tal que $g_i x \to y$. Entonces $K := \{x, y, g_1 x, g_2 x, \cdots\}$ es un subconjunto compacto de X. Como $g_i x \in K \cap g_i K$ entonces contradecimos el hecho de que G actúa discontinuamente, entonces la familia de subconjuntos de cardinalidad uno de Gx es localmente finita y cerrada. Entonces como cada subconjunto de Gx es cerrado en X. Por tanto Gx es un subconjunto cerrado discreto en X $\square$

Tenemos una caracterización muy útil de los grupos discontinuos.

Teorema 5.1: Caracterización de grupos discontinuos

Sea G un grupo de isometrías de un espacio métrico X. Entonces G es discontinuo si y solo si:

1. Cada subgrupo estabilizador de G es finito.
2. Cada G-órbita es un subconjunto discreto cerrado de X.

Demostración: Si G es discontinuo entonces por (5.18) y (5.19) se cumplen los incisos (1) y (2), ahora si la acción natural de G satisface los incisos (1) y (2), supongamos que G no es discontinuo, entonces existe un subconjunto compacto K y una sucesión infinita $\{g_i\} \subset G$ tal que $K \cap g_iK \neq \emptyset$, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $g_i \neq g_j^{-1}$. Entonces para cada i existe $x_i \in K$ tal que $g_ix \in K$. Como K es compacto, entonces la sucesión x_i tiene punto limite $x \in K$. De la misma manera, los elementos g_ix_i convergen a un punto y en K. Ahora observemos que:

$$d(g_ix, y) \leq d(g_ix, g_ix_i) + d(g_ix_i, y) = d(x, x_i) + d(g_ix_i, y) \quad (5.21)$$

Entonces g_ix converge a y, entonces por (1) para cada i existe un número finito de j tal que $g_ix = g_jx$. Entonces existe una subsucesión infinita de g_ix de elementos distintos que convergen a y, pero esto contradice (2). Entonces G es discontinuo. $\square$

Ahora veamos la conexión entre los conceptos de grupos discretos y grupos discontinuos.

Proposición 5.20. *Sea G un grupo de isometrías en un espacio métrico X. Si existe un punto x en X tal que la órbita Gx es un subconjunto discreto y el subgrupo estabilizador $stab(x)$ es finito, entonces G es discreto.*

Demostración: Supongamos que Gx es discreto y $stab(x)$ finito, definamos $f_x : G \to Gx$ como la función evaluación sobre x. Entonces f_x es continuo, como el conjunto $f_x^{-1}(x) = stab(x)$ es abierto entonces por (5.15) tenemos que G es discreto. $\square$

Proposición 5.21. *Sea X un espacio métrico en la que cada bola cerrada es compacta. Entonces un grupo G de isometrías es discreto si y sólo si G es discontinuo.*

Para una demostración veáse [18]. Un grupo kleiniano es por definición un grupo discontinuo del disco de Poincaré D^2, es fácil ver desde nuestro modelo del disco de Poincaré, las bolas cerradas son compactas. Entonces un grupo kleiniano equivale a un subgrupo discreto de $Iso(D^2) \leq PSL(2, \mathbb{C})$. Una de las consecuencias importantes de trabajar con grupos discontinuos es que es posible crear una métrica en el espacio de las órbitas X/G inducida por la métrica de X, de esta manera considerando la geometría hiperbólica construida en D^2, para cada grupo kleiniano G, el conjunto cociente induce una estructura hiperbólica en D^2/G que son conocidos como superficies hiperbólicas. El material necesario para mostrar las propiedades geométricas de una superficie hiperbólica están fuera del alcance de este documento. Sin embargo vamos a mostrar como se contruye una superficie hiperbólica. Para ello nuestros protagonistas son las reflexiones hiperbólicas.

Reflexiones hiperbólicas Las reflexiones euclideanas se caracterizan por 3 propiedades, dado L una recta euclidiana y $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la reflexión a través de L, entonces:

1. $\phi(x) = x$ si y solo si $x \in L$.
2. $\phi^2(x) = x$.
3. ϕ es una isometría.

Para construir una transformación similar en D^2, hablaremos un poco de geometria inversa, ya que nuestras rectas hiperbólicas son circunferencias ortogonales a $\mathbb{S}^1$. Primero denotaremos a una circunferencia hiperbólica centrada en $a \in D^2$ con radio r como $S(a,r) = \{x \in D^2 |\ \rho(a,x) = r\}$ y a una circunferencia euclidana como $C(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 |\ |x-a| = r\}$. Notemos que $S(0,r) = C(0,s)$ donde $r = Ln\frac{1+s}{1-s}$, es decir las circunferencias hiperbólicas centradas en el origen coinciden con las circunferencias euclidanas centradas en el origen, para el caso general, usando una transformación de Möbius que deja invariante a D^2, podemos ver que toda circunferencia hiperbolica es una circunferencia euclidana, con la diferencia que los centros no son los mismos. Para dar una construcción geométrica de esta isometría, definimos la inversión, también llamada reflexión hiperbólica.

Definición 5.3: Inversión

Dada C una circunferencia euclidiana con centro en $a \in \mathbb{R}^2$ y radio $r > 0$, definimos la inversión sobre C de un punto $x \in \mathbb{R}^2$ como un punto x' en la recta $\overline{ax}$ tal que $|x-a| * |x'-a| = r^2$. Llamamos x' al punto inverso de x sobre C.

Para dar una fórmula explícita tenemos entonces que si denotamos $x' = \phi(x)$ entonces:

$$\phi(x) = a + \lambda(x-a)$$

Para una λ, usando $|x-a| * |x'-a| = r^2$ obtenemos:

$$\phi(x) = a + \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 (x-a) \tag{5.22}$$

Se puede ver que la siguiente construcción geométrica produce el punto inverso de x sobre C.

1. Si x está dentro de C.

   a) Trazamos una recta l perpendicular a $\overline{ax}$ y que pase por x, llamemos u, v las intersecciones de l con C.

   b) Trazamos dos rectas, llámese m_1, m_2, estas rectas deben pasar por u,v respectivamente y son perpendiculares a los radios de cada uno.

   c) El punto de intersección de m_1 y m_2 es el punto inverso de x sobre C.

2. Si x está fuera de C.

   a) Sea y el punto medio de x y a.

   b) Trazamos una circunferencia C' centrado en y y con radio $\frac{1}{2}|x-a|$. Los puntos de intersección de C, C' los llamamos u, v.

   c) Trazamos el segmento $\overline{uv}$.

   d) El punto de intersección de $\overline{uv}$ y $\overline{ax}$ es el punto inverso de x sobre C.

Proposición 5.22. *Si ϕ es la reflexión sobre la circunferencia C entonces:*

1. $\phi(x) = x$ *si y sólo si* $x \in C$.
2. $\phi^2(x) = x$ *para toda* $x \neq a$
3. *Para toda* $x, y \neq a$, *se cumple:*

$$|\phi(x) - \phi(y)| = r^2 \frac{|x-y|}{|x-a||y-a|} \tag{5.23}$$

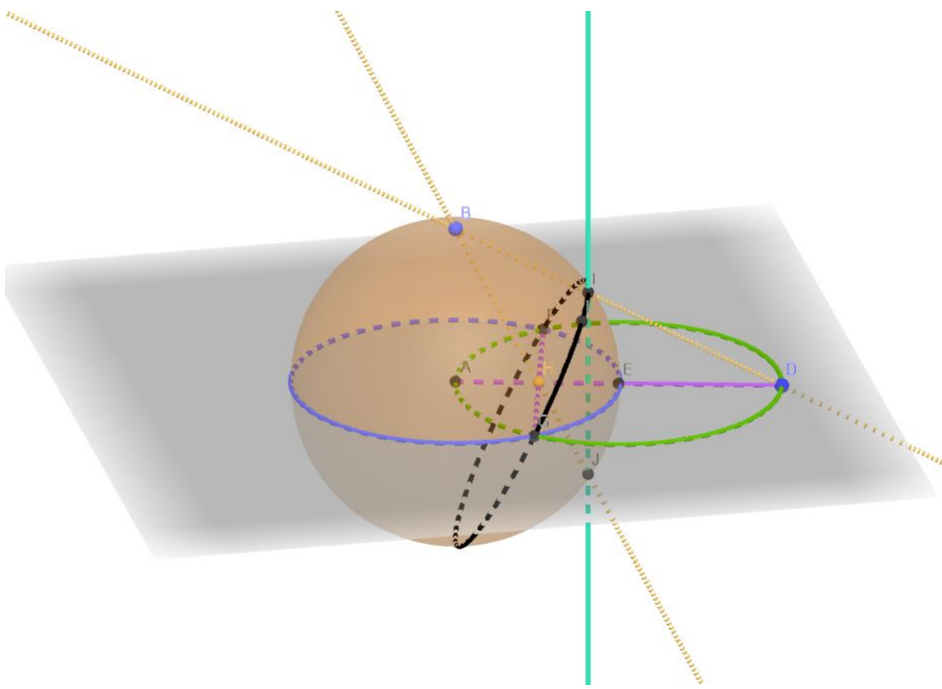
Demostración: Para (1) como $|\phi(x) - a||x-a| = r^2$ entonces $\phi(x) = x$ si y solo si $|x-a| = r$ si y solo si $x \in C$. Para (2) se tiene:

$$\begin{aligned}
\phi^2(x) &= a + \left(\frac{r}{|\phi(x)-a|}\right)^2 (\phi(x) - a) \\
&= a + \left(\frac{|x-a|}{r}\right)^2 \left(\frac{r}{|x-a|}\right)^2 (x-a) \\
&= x
\end{aligned}$$

Para (3) tenemos:

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)-\phi(y)| &= r^2 \left\| \frac{x-a}{|x-a|^2} - \frac{y-a}{|y-a|^2} \right\| \\
&= r^2 \left\| \frac{x-a}{|x-a|^2} - \frac{y-a}{|y-a|^2} \right\|^{2*(1/2))} \\
&= r^2 \left(\frac{1}{|x-a|^2} - \frac{2(x-a)*(y-a)}{|x-a|^2|y-a|^2} + \frac{1}{|y-a|^2} \right)^{1/2} \\
&= r^2 \frac{|x-y|}{|x-a||y-a|} \square
\end{aligned}
$$

Las transformaciones de Möbius pueden verse como composición de reflexiones hiperbólicas. De hecho la transformación $f(z) = \frac{1}{z}$ es la composición de dos reflexiones hiperbólicas, una es la inversión con respecto a la circunferencia $C(0,1)$, otra es la inversión con respecto al eje real. Mientras que la transformación $f(z) = kz$ con $k \in \mathbb{R}^+$ es la composición de la inversión de $S(0,1)$ seguida de la inversión sobre $S(0,\sqrt{k})$.



Observando la imagen anterior, la inversión de C (azul) fija circunferencias ortogonales (verde) y puede ser visto como el resultado de la proyección estereográfica seguida de una reflexión del plano $z = 0$. Esto es útil para poder describir geométricamente una reflexión en D^2. Dada una recta hiperbólica, es decir una circunferencia ortogonal C a $\mathbb{S}^1$, la reflexión hiperbólica en este modelo es la inversión de C restringida sobre D^2, dado que este proceso está bien definido, pues son circunferencias ortogonales, todo punto dentro de $C \cap D^2$ es enviado a un punto de $D^2 - Int(C)$ y viceversa, los puntos dentro de la línea hiperbólica, quedan fijos y por tanto es una isometría. Para construir X/G, una manera típica es a través de una teselación. Una teselación de X (donde X puede ser el plano euclidiano, plano hiperbólico o esfera), es una colección de polígonos convexos, es decir un conjunto convexo, cerrado tal que la colección de sus lados es localmente finito, tal que la colección de los interiores de los polígonos son mutuamente disjuntos, la unión de los polígonos es toda X y es localmente finito, en pocas palabras los poliedros rellenan el plano X sin traslaparse. Una propiedad importante de las teselaciones es lo siguiente.

Proposición 5.23. *Sea P un polígono convexo en X y G un grupo de isometrías de X. Entonces son equivalentes:*

1. *G es un grupo discreto y P es su conjunto fundamental de G.*

2. *La colección $\{gP|\ g \in G\}$ es una teselación.*

Para una demostración véase [18]. Resulta que, dado un polígono convexo de volumen finito, si tomamos a G como el grupo generado por las reflexiones de los lados de P, entonces la colección $\{gP|\ g \in G\}$ cubre a X aunque no necesariamente forma una teselación. Solo lo son aquellos poliedros P en la cual los ángulos interiores son submultiplos de π , es decir de la forma π/k con k entero positivo o de la forma 0. El más elemental es el grupo triangular denotado $T(a, b, c)$, donde $\pi/a + \pi/b + \pi/c < \pi$, nótese que los ángulos interiores del triángulo $\pi/a, \pi/b, \pi/c$ pueden valer cero, pues es solución de la desigualdad y existe una teselación infinita donde los vértices tocan la frontera de D^2. Para encontrar el área del triangulo fundamental, usando (5.13) tenemos que es $A(T) = \pi(1 - (\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}))$.

Cuando el grupo triangular es finito, dado que en cada arista tiene órdenes a, b, c entonces usando la proposición (4.18) tenemos que si Y es una superficie de género g y es obtenido como cociente de D^2 entonces:

$$2 - 2g = |G|(2 - (1 - \frac{1}{a}) - (1 - \frac{1}{b}) - (1 - \frac{1}{c}))$$

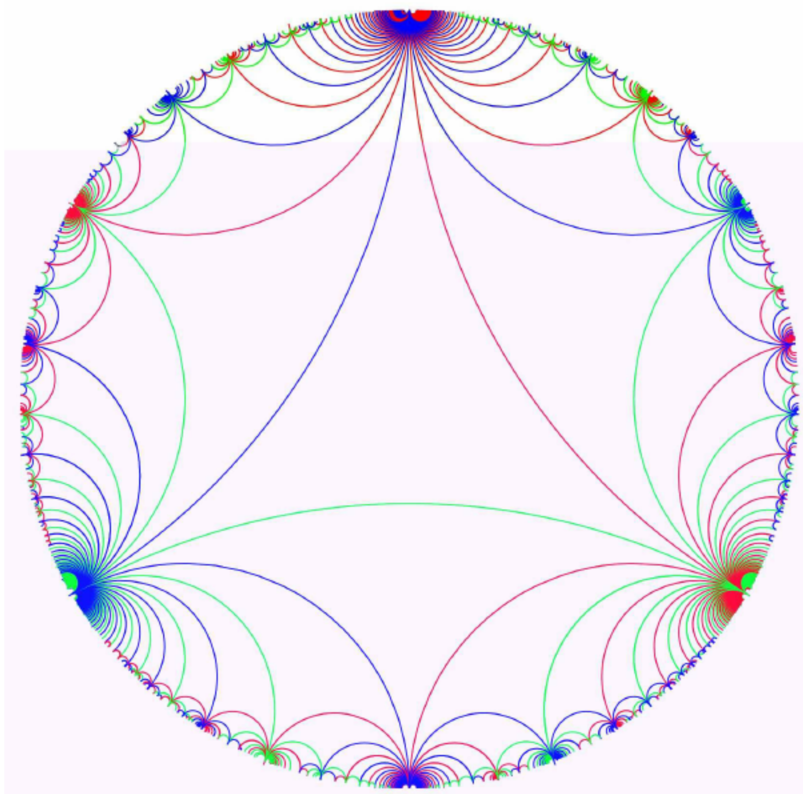


Figura 5.2: Teselación de un triángulo con grupo triangular infinito. Recuperado del artículo Wall Crossing, Discrete Attractor Flow and Borcherds Algebra. Cheng, M. (2000).

Donde $|G|$ es el orden del grupo triangular, entonces obtenemos:

$$\begin{aligned}
2-2g &= |G|(2-1+\frac{1}{a}-1+\frac{1}{b}-1+\frac{1}{c}) \\
2(1-g) &= |G|(-1+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})), \text{ multiplicando por (-1)} \\
2(g-1) &= |G|(1-(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})), \text{ despejando } g
\end{aligned}$$

$$g = 1+\frac{1}{2}|G|(1-(1/a+1/b+1/c)) \tag{5.24}$$

5.4. Cuártica de Klein y sus descripciones

Del teorema 4.6, tenemos que un grupo finito que actúa holomórficamente y efectivamente en una superficie de Riemann X de género 3 satisface la desigualdad $|G| \leq 168$, Klein presentó una superficie de Riemann compacta de género 3 tal que $|G| = 168$, a esta superficie se le denomina cuártica de Klein, y es porque originalmente la presentó como una curva algebraica proyectiva. La cuártica de Klein se puede obtener desde de una construcción hiperbólica hasta describir ecuaciones algebraicas de la cuártica. Una pregunta natural es ¿Por qué escoger la geometría hiperbólica en lugar de otra geometría?. La respuesta la da el siguiente teorema:

Teorema 5.2: Teorema de Uniformización

Sea X una superficie de Riemann conexa, entonces el cubriente universal de X es exactamente uno de las siguientes superficies de Riemann:

1. La esfera de Riemann
2. El plano complejo
3. El disco unitario.

Para una demostración véase [21]. En esta situación nos referimos como cubriente de X a una superficie de Riemann Y y una función holomorfa $p : Y \to X$ sobreyectiva con la propiedad de que para cada $x \in X$ existe un abierto U de x tal que $p^{-1}(U)$ es la unión disjunta de abiertos de Y, en la cual, cada abierto es holomorfo a U. Los cubrientes forman una subcategoría de la categoría coma, presentada en el capítulo 1 y son una herramienta muy usada en topología algebraica, geometría Riemanniana, topología diferencial, entre otras áreas, ya que permite dar clasificaciones de objetos o estudiar invariantes topológicos. Un cubriente Y es universal cuando Y es simplemente conexo, es decir conexo por caminos y para dos caminos $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ que inician y terminan en el mismo punto, es decir $\gamma_1(0) = \gamma_2(0),\ \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, se puede deformar continuamente uno en otro, es decir existe una función continua $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ (llamada homotopía), tal que satisface las siguientes propiedades, usando la notación $F_t(x) := F(x,t)$:

1. Cada F_t tienen el mismo punto inicial que γ_1, γ_2, es decir, $F(0,t) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0),\ \forall t \in [0,1]$.
2. Cada F_t tienen el mismo punto final que γ_1, γ_2, es decir, $F(1,t) =$

$\gamma_1(1) = \gamma_2(1),\ \forall t \in [0,1]$.

3. La familia de curvas $\{F_t\}_{t\in[0,1]}$ inicia en γ_1 y termina en γ_2, es decir, $F(x,0) = \gamma_1(x),\ F(x,1) = \gamma_2(x)\ \forall x \in [0,1]$.

En pocas palabras un cubriente universal es un espacio conexo sin hoyos que es un cubriente. El ejemplo de espacio cubriente que motiva todo esto es para el caso de que G actúa holomórficamente y efectivamente en la superficie de Riemann X, entonces se puede ver que la proyección canónica $\pi : X \to X/G$ le da a X la estructura de un espacio cubriente. Usando el teorema de uniformización, nos da una manera interesante de producir superficies de Riemann a partir de otra superficie, y no se necesita más que alguna de las tres superficies mencionadas en el teorema. Ahora para saber que estructura geométrica tiene la superficie de Riemann, usando el teorema de Gauss-Bonett, que relaciona la curvatura (en nuestro caso el tipo de geometría) de una superficie compacta y la característica de Euler, obtenemos que para superficies de Riemann de género $g \geq 2$, se tiene una métrica hiperbólica con curvatura constante -1.

Teselado de un g-toro. Antes de hablar de la cuártica de Klein, veremos como obtener un g-toro mediante una teselación hiperbólica. Nos basaremos en [20], de aquí en adelante supondremos $g \geq 2$, ahora consideremos un polígono regular de k lados con ángulos internos iguales a $2\pi/l$ tal que tesela D^2. El estabilizador de uno de estos polígonos contiene isometrías del grupo diédrico del polígono, consecuentemente existe un subgrupo del grupo de simetrías que tiene como dominio fundamental un triángulo hiperbólico con ángulos $\pi/2,\ \pi/k,\ \pi/l$, así que este es subgrupo del grupo $T(2,k,l)$. Si uno quiere teselar un g-toro con triángulos hiperbólicos de ángulos $\pi/p,\ \pi/q,\ \pi/r$, usando la característica de Euler tenemos:

$$V - E + F = 2 - 2g \tag{5.25}$$

Donde V es el número de vértices en la teselación, E el número de aristas y F el número de triángulos. Notemos que como cada triangulo tiene 3 aristas, en el teselado, dos caras adyacentes comparten una misma arista, entonces tenemos la relación $E = \frac{3}{2}F$. Por otro lado habrá vértices con $2p$ triángulos incidentes en un vértice, $2q$ triángulos incidentes y $2r$ triángulos incidentes. Entonces en proporción, tenemos $V = (\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q} + \frac{1}{2r})F$, usando estas dos identidades, al sustituir en 5.25 obtenemos:

$$F = \frac{4(g-1)}{1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{q}} \tag{5.26}$$

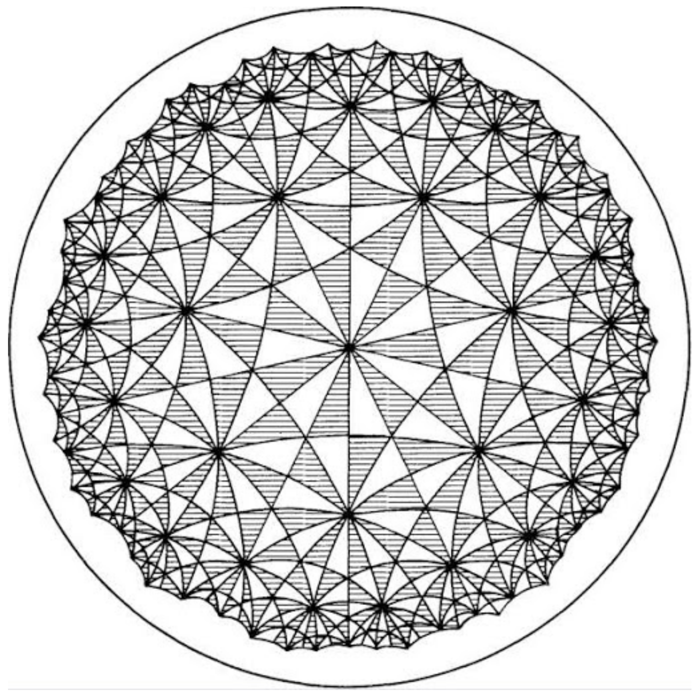


Figura 5.3: Teselado (2,3,7). Recuperado del libro Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunctionen. Klein F.(1890)

Por otro lado, en una superficie de Riemann de género 3, para obtener el mayor valor que la cota $|G| \leq 168$, se propone el teselado de triángulos de ángulos $\pi/2,\ \pi/3,\ \pi/7$, este triángulo tiene área $A(T) = \pi(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}) = \pi/42$, sustituyendo en la ecuación (5.24) obtenemos $|G| = 168$. Además se forma un teselado de heptágonos donde en cada vértice del heptágono hay otros 2 heptágonos, y por la ecuación (5.26) tenemos que hay $F = 336$ triángulos en la superficie de Riemann, como cada heptágono contiene 14 triángulos, tenemos que en la cuártica de Klein hay 24 heptágonos. La teselación es como se muestra en la Figura 5.3. Mientras que el dominio fundamental que formará la cuártica de Klein está dado por la figura 5.4.

Lo que resta es describir el subgrupo de $T(2,3,7)$ que tiene como dominio fundamental a los 24 heptágonos de la teselación, para encontrar la identificación de la frontera del dominio. En primer lugar, este subgrupo contiene un subgrupo de orden 7, puesto que deja invariante al heptágono, de esta manera de los 14 vértices que contiene este dominio fundamental ,

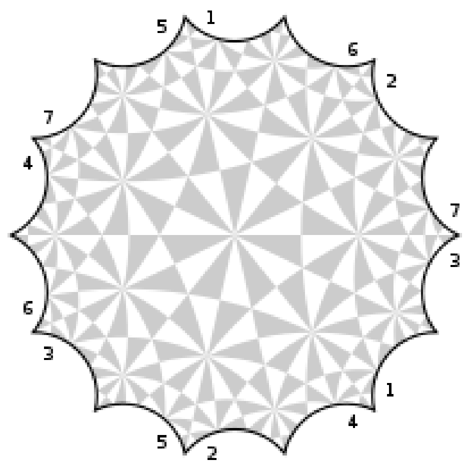


Figura 5.4: Dominio fundamental. Recuperado de *https : //en.wikipedia.org/wiki/Klein_quartic*

7 pertenecen a la misma órbita gracias a este subgrupo de orden 7, observando que en los vértices tenemos dos órbitas diferentes donde los vértices se alternan en una de estas órbitas. De esta manera obtenemos un polígono hiperbólico en la superficie de género 3, con 2 vértices y 1 cara, por la característica de Euler tiene 7 lados. Para describir la identificación consideremos lo siguiente. Sea M una superficie de Riemann de género 3 tal que contiene en su grupo de simetrías un subgrupo de orden primo p y que fija f puntos y existe una teselación en M con V vértices, F caras y E aristas, entonces la característica de Euler para la superficie cociente resultante es $\chi = \frac{1}{p}((V-p) - E + F) + f = \frac{1}{p}(-f-4) + f$ donde los únicos valores enteros que puede tomar para obtener una superficie de género menor al de M son $\{-2, 0, 2\}$. Notemos que cuando $p = 7$ y $f = 3$ obtenemos una superficie cociente holomorfa a una esfera, es decir existe una proyeccion natural $\pi : M \to \mathbb{S}^2$, identificando $\mathbb{S}^2$ con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, podemos ver a π como una función meromorfa que envia los 3 puntos fijos a los puntos $0, 1, \infty$. Como observación adicional si consideramos el caso $p = 2$ entonces tenemos $f = 0, 4$ o 8 puntos fijos, en esta situación las simetrías son llamadas involuciones pues para cada simetría σ en este grupo se cumple $\sigma^2 = Id_M$, para nuestro caso que teselamos heptágonos de ángulos internos $\frac{2\pi}{3}$, no puede tener sus puntos fijos en los vértices o centros de las caras de la teselación.

Entonces los puntos fijos están en el centro de las aristas, en tal caso el valor f debe dividir al número de aristas en la teselación, llámese E, en nuestra situación el número de lados formados por los heptágonos es $E = 84$, notemos que el único caso posible para obtener una esfera como cociente es para $f = 8$, pero f no divide a E. Por tanto, la cuártica de Klein no contiene involuciones como simetrías de la superficie.

Entonces de la identificación del dominio fundamental, de los 14 vértices, se identifican 7 vértices, debe existir una simetría de órden 7, obteniendo un subgrupo simétrico de orden 7 que actúa en el dominio fundamental. De esta manéra los vértices del dominio fundamental se unen en la superficie cociente como 2 diferentes vértices alternados uno a uno en el 14-gono, al triangular este 14-gono que están alrededor del centro del 14-gono, cada triángulo forma un ángulo de tamaño $\frac{2\pi}{7}$ en el vértice que se encuentra en el centro del 14-gono. Dado que los vértices se alternan uno a uno, los aristas de la misma manera, para encontrar la identificación, basta conocer como identificar 1 arista, enumerando las aristas consecutivamente las aristas del 1 a 14. Tomemos la arista 1, esta puede ser identificada mediante el grupo de simetrias por la arista 4,6 ó 8. Si se identifica con 8 se obtiene una involución, de la misma manera si se identifica con la arista 4. Solo resta identificar 1 con 6, obteniendo la identificación anterior. Por último si consideramos los divisores de las funciones w^7 y $z(z-1)$ que además fijan los mismos puntos $0,\ 1,\ \infty$ por la proposición (4.28) y mediante un re-escalado obtenemos la ecuación.

$$w^7 = z(z-1) \tag{5.27}$$

Para tener la descripción clásica en $P^2(\mathbb{C})$, observemos la siguiente tabla de divisores de los puntos fijos y sus órdenes.

Vértices	V_1	V_2	V_3
z	0^7	1^7	∞^7
w	0	0^2	∞^3
$v := w^2/(z-1)$	0^2	∞^3	0
$u = (z-1)/w^3$	∞^3	0	0^2

Así que si definimos $x := -v^{-1},\ y := u$, notemos que, algebraicamente, se tiene:

$$
\begin{aligned}
x^3y + y^3 + x &= \frac{(1-z)^3}{w^6} * \left(-\frac{1-z}{w^3}\right) - \frac{(1-z)^3}{w^9} + \frac{(1-z)}{w^2} \\
&= -\frac{(1-z)^3}{w^9}(1-z+1) + \frac{(1-z)}{w^2} \text{ Usando la ecuación 5.27} \\
&= -\frac{(1-z)^3}{w^2 z(z-1)}(2-z) + \frac{(1-z)}{w^2} \\
&= \frac{1-z}{w^2}((1-z)(2-z)+1) \\
&= \frac{(1-z)(z^2-3z+3)}{w^2}
\end{aligned}
$$

Ahora restringiendo en la cúartica de Klein, usando la tabla de divisores y por proposición (4.28) obtenemos:

$$x^3y + y^3 + x = 0 \tag{5.28}$$

Luego obteniendo mediante coordenadas homogéneas $x = \xi/\omega,\ y = \eta/\omega$. Sustituyendo en la ecuación anterior y multiplicando por ω^4 tenemos la ecuación de la cuártica de Klein.

$$\xi^3\eta + \eta^3\omega + \omega^3\xi = 0 \tag{5.29}$$

Bibliografía

[1] ROTMAN, Joseph J. Advanced modern algebra. American Mathematical Soc., 2015.

[2] MITCHELL, Barry. Theory of categories. Academic Press, 1965.

[3] BORCEUX, Francis. Handbook of categorical algebra: volume 1, Basic category theory. Cambridge University Press, 1994.

[4] BORCEUX, Francis. Handbook of Categorical Algebra: Volume 2, Categories and Structures. Cambridge University Press, 1994.

[5] BORCEUX, Francis. Handbook of Categorical Algebra: Volume 3, Sheaf Theory. Cambridge University Press, 1994.

[6] DE NEYMET URBINA, Sylvia. Introducción a los grupos topológicos de transformaciones. UNAM, 2005.

[7] WILLARD, Stephen. General topology. Courier Corporation, 2004.

[8] HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, Fernando. Teoría de Conjuntos: Una Introducción, Sociedad Matemática Mexicana, Tercera Edición, 2003.

[9] AWODEY, Steve. Category theory. Oxford university press, 2010.

[10] THOLEN, Walter, et al. Gerhard Preuss, Theory of topological structures. An approach to categorical topology. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 1989, vol. 21, no 1, p. 149-152.

[11] GRAN, Marino. Notes on regular, exact and additive categories. Summer School on Category Theory and Algebraic Topology, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2014, p. 11-13.

[12] CHERN, Shiing-Shen; CHEN, Wei-huan; LAM, Kai Shue. Lectures on differential geometry. World Scientific Publishing Company, 1999.

[13] CARTAN, Henri. Differential forms. Courier Corporation, 2006.

[14] DUISTERMAAT, Johannes Jisse; KOLK, Johan AC. Lie groups. Springer Science & Business Media, 2012.

[15] MARDEN, Albert. Hyperbolic manifolds: an introduction in 2 and 3 dimensions. Cambridge University Press, 2016.

[16] SHAFAREVICH, Igor Rostislavovich; REID, Miles. Basic algebraic geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[17] MIRANDA, Rick. Algebraic curves and Riemann surfaces. American Mathematical Soc., 1995.

[18] RATCLIFFE, John. Foundations of hyperbolic manifolds. Springer Science & Business Media, 2013.

[19] HERNANDEZ BARAJAS, Ricardo. Teoría de Categorías. Tesis de Licenciatura Facultad de Ciencias, UNAM

[20] LEVY, Silvio (ed.). The eightfold way: the beauty of Klein's quartic curve. Cambridge university Press, 2001.

[21] VAROLIN, Dror. Riemann surfaces by way of complex analytic geometry. American Mathematical Soc., 2011.

[22] FULTON, William. Algebraic curves. An Introduction to Algebraic Geom, 2008, p. 54.