



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MÉTRICAS DÉBILES DE FUNK Y HILBERT
Y SU GEOMETRÍA EN SUBCONJUNTOS
CONVEXOS DEL ESPACIO PROYECTIVO
REAL DE DIMENSIÓN N .

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Humberto Morales Cortés

TUTOR

Dr. Miguel Angel Guadarrama García





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatoria

*A mi mamá
Margarita Morales Cortés.*

Agradecimientos

Al Dr. Miguel Angel Guadarrama García mi más sincero agradecimiento por aceptar la dirección de la presente tesis y por su valioso apoyo y amistad durante la realización de la misma.

Agradezco a la Dra. Adriana Ortiz Rodríguez, al Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco, al Dr. Max Neumann Coto y la Dra. Jessica Angélica Jaurez Rosas por sus valiosas observaciones y aportaciones durante la revisión de la tesis.

A todos mis profesores de la Facultad de Ciencias expreso mi agradecimiento por su valiosa enseñanza durante la realización de mis estudios.

A todos mis amigos y familiares muchas gracias por su grata compañía.

Finalmente, quiero expresar mi gratitud a la Universidad Nacional Autónoma de México a través de su Facultad de Ciencias por el apoyo económico que me brindó como becario.

Índice general

Introducción	VII
1 La métrica de Funk y su forma inversa	1
1.1 La métrica de Funk	1
1.1.1 Algunas propiedades básicas de la métrica de Funk	2
1.1.2 Otras representaciones de la métrica de Funk	5
1.2 La métrica de Funk en su forma inversa	16
1.3 Ejemplos	20
1.3.1 Politopos	20
1.3.2 La bola unitaria euclidiana	21
2 Geometría y topología de la métrica de Funk	25
2.1 La geometría de las bolas en la métrica de Funk	25
2.2 La topología de la métrica de Funk	33
2.2.1 Otras propiedades topológicas de la métrica de Funk	36
3 La desigualdad del triángulo y geodésicas	39
3.1 Preliminares de geometría convexa	39
3.1.1 Caras de un conjunto convexo cerrado	39
3.1.2 Caras propias y caras expuestas	40
3.1.3 Puntos expuestos y puntos extremos	41
3.2 Desigualdad del triángulo	43
3.3 Geodésicas y convexidad en la geometría de Funk	46
3.4 Puntos cercanos en la geometría de Funk	53
3.5 Isometrías	56
4 De la geometría de Funk a la geometría de Hilbert	61
4.1 La geometría de Funk desde el punto de vista proyectivo	61
4.2 La Geometría de Hilbert	64
4.2.1 Propiedades de la métrica de Hilbert	64
4.2.2 Otras propiedades de la métrica de Hilbert	66
4.2.3 Geodésicas de la métrica de Hilbert	70
4.3 Prueba clásica de la desigualdad del triángulo	71
Bibliografía	77

Introducción

En el año de 1900, en el segundo Congreso Internacional de Matemáticas en París, David Hilbert dió a conocer una lista de problemas cuya investigación estimuló en gran medida el desarrollo de las matemáticas durante el siglo veinte. Su problema IV, el problema de la línea recta como la trayectoria más corta entre dos puntos, está relacionado con los fundamentos de la Geometría, el Cálculo de Variaciones y la Geometría Diferencial. Este problema consiste en la investigación de espacios métricos, por ejemplo los espacios proyectivos reales y/o sus subconjuntos convexos, que admiten a los segmentos de recta o a las líneas rectas como geodésicas. Después de la formulación del problema IV de Hilbert se dieron varias interpretaciones a dicho problema, entre ellas, encontramos en [14] que G. Hamel, consideró espacios métricos (Ω, d) donde Ω es un subconjunto abierto de un espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n$ para algún $n > 1$ y d satisface la siguiente versión fuerte de los requerimientos de Hilbert;

- (1) (Ω, d) es un espacio métrico geodésico y las rectas proyectivas son geodésicas.
- (2) Las bolas cerradas son compactas.
- (3) Si x, y, z no están contenidos en una recta proyectiva entonces $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$.

Bajo estas hipótesis Hamel provó que el conjunto Ω es convexo necesariamente.

Si Ω es un subconjunto convexo de un espacio euclidiano, entonces la restricción de la métrica a Ω es una métrica euclidiana que cumple con los requerimientos de Hilbert, esto es, las líneas rectas euclidianas son geodésicas para la restricción a Ω de la métrica euclidiana. Una manera de abordar el problema IV de Hilbert en subconjuntos convexos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es mediante la caracterización de todas las métricas en Ω para las cuales los segmentos de recta euclidianos son geodésicas en Ω . Un ejemplo de dichas métricas es la de Hilbert. Por otro lado, Paul Funk encontró una manera de medir distancias en Ω , que no es simétrica, pero que también admite a los segmentos de recta como geodésicas. En este par de ejemplos, algunas curvas distintas a los segmentos de recta pueden ser geodésicas en Ω , pero bajo la condición de que Ω sea estrictamente convexo, las únicas curvas que son geodésicas en Ω son los segmentos de recta euclidianos.

La métrica de Funk asociada a un subconjunto convexo abierto Ω de un espacio euclidiano es una métrica débil y no una métrica en el sentido estricto, pues cumple que un punto en Ω está a distancia de Funk de sí mismo igual a cero, pero puede haber puntos distintos en Ω que están a distancia cero. Además satisface la desigualdad del triángulo pero no necesariamente es simétrica. Las métricas débiles frecuentemente surgen en el Cálculo de Variaciones [6] y en la geometría de Finsler [16]. Recientemente, el estudio de las métricas débiles ha sido de gran interés en la topología de dimensiones bajas, por ejemplo, para estudiar espacios de Teichmüller [10]. Otro ejemplo de métrica débil es la forma inversa de la métrica de Funk. El presente trabajo está basado en el artículo [11] de A. Papadopoulos y M. Troyanov. Siguiendo la presentación de este artículo, vamos a introducir la métrica de Hilbert por medio de la métrica de Funk y de la métrica de Funk en su forma inversa.

La métrica débil de Funk de un subconjunto convexo Ω de \mathbb{R}^n destaca por la geometría con la que provee a Ω . Entre los resultados más interesantes están, primero, que a partir de la geometría local de Ω , en cada punto, es posible recuperar la frontera de Ω y segundo, la caracterización de sus geodésicas y sus isometrías. Cabe resaltar que estos resultados dependen de la forma del conjunto convexo Ω , y esto es un aspecto interesante de la teoría al estudiar la influencia de las propiedades de la frontera de Ω en la geometría de Funk de este conjunto. A partir de los resultados de la métrica de Funk, se pueden caracterizar las geodésicas en la geometría de Hilbert.

Esta tesis está enfocada al estudio de las propiedades geométricas de la métrica débil de Funk y la métrica de Hilbert en subconjuntos convexos del espacio euclidiano n -dimensional y del espacio proyectivo real de dimensión n . En el capítulo 1 se estudian las propiedades básicas de la métrica débil de Funk y varias formas en las cuales puede ser representada. También se introduce la forma inversa de la métrica de Funk y algunas de sus propiedades. Por último, se presentan algunos ejemplos en subconjuntos convexos del espacio euclidiano, entre los cuales están los polítopos y los discos unitarios. En el capítulo 2 se estudia la topología y la geometría obtenida por medio de la métrica débil de Funk. En particular, es estudiada la topología que induce la métrica débil de Funk y la que induce la forma inversa en un subconjunto convexo del espacio euclidiano de dimensión n . En el capítulo 3 se demuestra la validez de la desigualdad del triángulo para la métrica débil de Funk. También se enuncian y se demuestran teoremas de caracterización de sus geodésicas y sus isometrías. Para lograr esto, se introducen algunos conceptos de geometría convexa. En el capítulo 4, primero se estudia la métrica débil de Funk en subconjuntos convexos del espacio proyectivo real de dimensión n . Después, son estudiadas las propiedades básicas de la métrica de Hilbert como la desigualdad del triángulo y la caracterización de sus geodésicas en subconjuntos convexos del espacio euclidiano y del espacio proyectivo de dimensión n . Por último, se presenta una prueba clásica de la desigualdad del triángulo para la métrica de Funk en el caso proyectivo.

Capítulo 1

La métrica de Funk y su forma inversa

Este capítulo está dedicado al estudio de algunas propiedades básicas de la métrica de Funk y de la métrica de Funk en su forma inversa. También estudiaremos a manera de ejemplos, las métricas de Funk de polítopos y discos unitarios.

1.1. La métrica de Funk

Vamos a considerar que Ω es un *dominio convexo propio* en \mathbb{R}^n , esto es, Ω es un subconjunto convexo, abierto, no vacío y distinto de \mathbb{R}^n . Denotemos por $\bar{\Omega}$ la cerradura de Ω en \mathbb{R}^n y por $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ la frontera topológica de Ω en \mathbb{R}^n .

Para definir la métrica de Funk será conveniente considerar puntos en el infinito. También consideraremos a $\bar{0}$ como elemento de \mathbb{R}^{n+1} . En el conjunto $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$ consideramos la relación de equivalencia $A \sim B$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A = \lambda B$. Se define entonces el espacio proyectivo de dimensión n como $\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\} / \sim$. Aquí el punto que estamos quitando, $\bar{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$, es el punto cuyas coordenadas son todas cero. Así, los puntos de \mathbb{RP}^n son clases de equivalencia de puntos $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ con alguna $x_i \neq 0$. A la clase de equivalencia de un punto (x_0, \dots, x_n) la denotamos por $[x_0, \dots, x_n]$ y decimos que las x_i son las coordenadas proyectivas u homogéneas del punto $[x_0, \dots, x_n]$. Notemos que estas coordenadas están determinadas salvo un factor escalar no cero, pues $(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n)$ si y sólo si $x_i = \lambda y_i$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Denotaremos por $H_\infty = \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{R}^n$ al hiperplano al infinito, a $\tilde{\Omega}$ como *la cerradura de Ω en \mathbb{RP}^n* y a la frontera de Ω en \mathbb{RP}^n por $\tilde{\partial}\Omega = \tilde{\Omega} \setminus \Omega$. Observamos que $\partial\Omega = \tilde{\partial}\Omega \setminus H_\infty$.

Para cualesquiera dos puntos $x \neq y$ en \mathbb{R}^n consideramos los siguientes conjuntos:

- El segmento cerrado afín que los une, denotado por $[x, y]$;
- El rayo afín que comienza en el punto x y pasa a través del punto y denotado por $R(x, y)$;
- y la cerradura en \mathbb{RP}^n de $R(x, y)$ denotada por $\tilde{R}(x, y)$.

Finalmente, consideremos el punto de intersección de la frontera $\tilde{\partial}\Omega$ con la cerradura proyectiva del rayo afín $R(x, y)$:

$$a_\Omega(x, y) = \tilde{R}(x, y) \cap \tilde{\partial}\Omega \in \mathbb{RP}^n.$$

Una consecuencia de la definición de $a_\Omega(x, y)$ es lo siguiente:

Si $a = a_\Omega(x, y) \in \mathbb{R}^n$, entonces $|x - a| > |y - a|$, donde $|x - a|$ representa la distancia entre x y a .

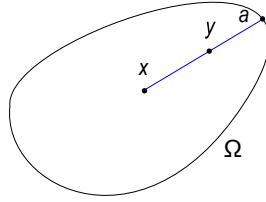
Si $a = a_\Omega(x, y) \in H_\infty$, entonces para cualesquiera dos puntos x, y en un dominio convexo propio Ω , x y y están a una distancia infinita de a . Incluso, cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$, los puntos x y y están a una distancia infinita de a . Como $\hat{a} = x + t(y - x)$ para algún $t \in \mathbb{R}$, entonces el límite

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|x - \hat{a}|}{|y - \hat{a}|} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|x - (x + t(y - x))|}{|y - (x + t(y - x))|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|-t(y - x)|}{|(1 - t)(y - x)|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|t(x - y)|}{|(t - 1)(x - y)|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esto da sentido a la convención $\frac{\infty}{\infty} = 1$ y consistencia a la siguiente definición.

Definición 1.1 (La métrica de Funk) La métrica de Funk en Ω , denotada por F_Ω , está definida de la siguiente manera:

$$F_\Omega(x, y) = \begin{cases} \log \frac{|x - a|}{|y - a|} & \text{si } a \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n \\ 0 & \text{si } a \in H_\infty \end{cases}$$



– **Figura 1.1** – La métrica de Funk en un dominio convexo

Si bien en la literatura es llamada métrica, por ejemplo, en [11], realmente es una métrica débil, como veremos en la sección 1.1.1.

1.1.1. Algunas propiedades básicas de la métrica de Funk

Definición 1.2 Sea X un conjunto no vacío y sea $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ una función que satisface los siguientes axiomas:

1. $d(x, x) = 0$ para todo x en X .
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo x, y, z en X .

A la función d se le llama métrica débil en X , y al conjunto X junto con d se le llama espacio métrico débil.

Ahora veremos que la métrica de Funk es una métrica débil.

Proposición 1.3 La métrica de Funk en un dominio convexo $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ satisface que $F_\Omega(x, y) \geq 0$.

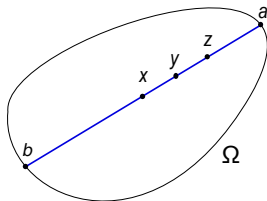
Demostración. Sean x, y dos puntos distintos en Ω . Si a es el punto de intersección de la frontera de Ω con la cerradura en $\mathbb{R}P^n$ del rayo afín $R(x, y)$, entonces $\frac{|x - a|}{|y - a|} \geq 1$. De esto se sigue que $\log \frac{|x - a|}{|y - a|} \geq 0$. Si $x = y$, entonces $\frac{|x - a|}{|y - a|} = 1$. Por lo tanto, $\log \frac{|x - a|}{|y - a|} = 0$. ■

Proposición 1.4 La métrica de Funk en un dominio convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisface la desigualdad del triángulo: $F_\Omega(x, z) \leq F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z)$ para todo $x, y, z \in \Omega$.

La demostración de esta proposición se presenta en el capítulo 3.

Definición 1.5 Sea Ω un dominio convexo propio en \mathbb{R}^n . Una métrica débil δ en Ω se dice que es una métrica proyectiva si se satisface la condición $\delta(x, y) + \delta(y, z) = \delta(x, z)$, cuando los puntos $x, y, z \in \Omega$ están alineados y $y \in [x, z]$, el segmento afín de x a z .

Proposición 1.6 La métrica de Funk es proyectiva, esto es, $F_\Omega(x, z) = F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z)$, siempre que y sea un punto en el segmento $[x, z]$.



– Figura 1.2 – La métrica de Funk es proyectiva

Demostración. Si $y \in [x, z]$, entonces $\tilde{R}(x, y) \cap \tilde{\partial}\Omega = \tilde{R}(y, z) \cap \tilde{\partial}\Omega = \tilde{R}(x, z) \cap \tilde{\partial}\Omega$. Así pues, $a_\Omega(x, y) = a_\Omega(x, z) = a_\Omega(y, z) = a$. Luego

$$\begin{aligned} F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z) &= \log \frac{|x - a|}{|y - a|} + \log \frac{|y - a|}{|z - a|} \\ &= \log \frac{|x - a|}{|z - a|} \\ &= F_\Omega(x, z). \end{aligned}$$

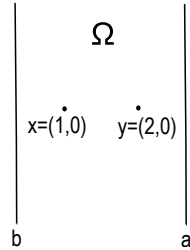
Por lo tanto, la métrica de Funk es proyectiva. ■

Proposición 1.7 La métrica débil F_Ω no es simétrica en general, esto es, existen x, y tales que $F_\Omega(x, y) \neq F_\Omega(y, x)$.

Demostración. De la definición de la métrica de Funk tenemos que $F_\Omega(x, y) = \log \frac{|x - a|}{|y - a|}$ y $F_\Omega(y, x) = \log \frac{|y - b|}{|x - b|}$, pero de las propiedades de la función logaritmo natural notamos que en general $F_\Omega(x, y) \neq F_\Omega(y, x)$. ■

Este hecho es mostrado en el siguiente ejemplo en el cual Ω es un conjunto convexo propio.

Ejemplo 1.8 Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 4, y \in \mathbb{R}\}$ (ver figura 1.3). Ahora, si $x = (1, 0)$ y $y = (2, 0)$, compararemos a $F_\Omega(x, y)$ y $F_\Omega(y, x)$. Entonces, $a = a_\Omega(x, y) = (4, 0)$ y $b = b_\Omega(y, x) = (0, 0)$. Como $|(1, 0) - (4, 0)| = \sqrt{9} = 3$ y $|(2, 0) - (4, 0)| = \sqrt{4} = 2$, entonces, $F_\Omega(x, y) = \log \frac{3}{2}$. Por otro lado, como $|(2, 0) - (0, 0)| = \sqrt{4} = 2$ y $|(1, 0) - (0, 0)| = 1$, entonces $F_\Omega(y, x) = \log 2$. Así, $F_\Omega(x, y)$ es distinto de $F_\Omega(y, x)$.



– Figura 1.3 –

En la demostración de las proposiciones 1.13 y 1.15 emplearemos las definiciones 1.9, 1.10 y las proposiciones 1.11, 1.12, las cuales enunciaremos a continuación y sus pruebas pueden ser consultadas en [13].

Definición 1.9 Una función $M : X \rightarrow [0, \infty]$ definida sobre un espacio vectorial real X es una norma débil de Minkowski si las siguientes dos condiciones se cumplen:

- i) $M(x + y) \leq M(x) + M(y)$ para todo $x, y \in X$.
- ii) $M(\lambda x) = \lambda M(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $\lambda \geq 0$.

Definición 1.10 Dada una norma débil de Minkowski M en un espacio vectorial X definimos las bolas unitarias abiertas y cerradas, centradas en el origen, como

$$\Omega_M = \{x \in X \mid M(x) < 1\} \quad \text{y} \quad \bar{\Omega}_M = \{x \in X \mid M(x) \leq 1\}$$

respectivamente. El conjunto $I_M = \{x \in X \mid M(x) = 1\}$ es llamado esfera unitaria de M .

Proposición 1.11 Sea M una norma débil de Minkowski en \mathbb{R}^n . Entonces las siguientes son equivalentes:

- (1) M es separante (esto es, $M(x) > 0$ para todo $x \neq 0$);
- (2) M es acotada inferiormente en la esfera unitaria euclidiana $S^{n-1} \subset \Omega$;
- (3) $\bar{\Omega}_M$ es acotado.

Proposición 1.12 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo que contiene al origen. Definimos la función $M : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ como el funcional de Minkowski de Ω por $M(x) = \inf \{t \geq 0 \mid x \in t \cdot \Omega\}$. Entonces M es una norma débil de Minkowski y $\bar{\Omega}_M$ coincide con la cerradura de Ω , esto es, $\bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid M(x) \leq 1\}$. Más aún, si Ω es abierto, entonces $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid M(x) < 1\}$.

Proposición 1.13 Un subconjunto convexo Ω de \mathbb{R}^n contiene un rayo afín si y sólo si Ω no es acotado.

Demostración. Primero probaremos que la condición es necesaria por reducción al absurdo. Supongamos que Ω es un conjunto acotado y por hipótesis contiene un rayo afín $R(x, y)$. Pero como un rayo afín es no acotado, tenemos que Ω no es acotado, esto es una contradicción.

Ahora probaremos que la condición es suficiente auxiliándonos de la proposición 1.11. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y no acotado. Entonces su funcional débil de Minkowski $M = \inf \{t \geq 0 \mid x \in t \cdot \Omega\}$ no es separante. Esto es, existe $a \neq 0$ en Ω tal que $M(a) = 0$; pero entonces $M(ta) = tM(a) = 0$ para todo $t > 0$. Por lo tanto, el conjunto Ω contiene al rayo \mathbb{R}_+a . ■

Definición 1.14 Decimos que la métrica de Funk $F_\Omega(x, y)$ en un dominio convexo propio Ω es separante si para cualesquiera puntos distintos x, y , $F_\Omega(x, y) > 0$.

Proposición 1.15 La métrica débil de Funk es separante si y sólo si el dominio convexo propio Ω es acotado.

Demostración. Primero probaremos que la condición es necesaria por contrapositiva. Supongamos que Ω no es un conjunto acotado y veamos que existen dos puntos x y y distintos en Ω tales que $F_\Omega(x, y) = 0$. Tenemos de la proposición 1.13, que como Ω no es acotado, contiene un rayo afín $R(x, y)$ que inicia en el punto x y pasa a través de otro punto y . Esto es, existen $x, y \in \Omega$ distintos tal que $a_\Omega(x, y)$ está en el hiperplano al infinito, entonces la métrica de Funk por definición cumple que $F_\Omega(x, y) = 0$. Por lo tanto, si Ω no es acotado entonces $F_\Omega(x, y) = 0$ para algunos puntos x y y distintos en Ω .

Recíprocamente, como Ω es un conjunto acotado, entonces para cualesquiera $x \neq y$ se tiene que $|y - a| < |x - a| < \infty$, así que

$$F_\Omega(x, y) = \log \frac{|x - a|}{|y - a|} > 0.$$

Esto se debe a que $a \in \mathbb{R}^n$ (proposición 1.13). Por tanto, un dominio Ω acotado implica que $F_\Omega(x, y) > 0$ si $x \neq y$. ■

Proposición 1.16 La métrica débil F_Ω en un dominio convexo propio Ω es una función no acotada.

Demostración. Como $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, entonces $\partial\Omega \neq \emptyset$. Así, consideremos (x, a) un segmento abierto euclidiano para el cual x está en Ω y $a \in \partial\Omega$. Consideremos una sucesión (x_k) en (x, a) que converge a a con respecto a la métrica euclidiana. Entonces, $F_\Omega(x, x_k) = \log \frac{|x - a|}{|x_k - a|}$ tiende a infinito cuando k tiende a infinito. ■

1.1.2. Otras representaciones de la métrica de Funk

Sean x, y , y z tres puntos alineados en \mathbb{R}^n con $z \neq y$. Considerando la identificación de estos tres puntos con la recta real mediante la función $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tales que, $\phi(x) = x$, $\phi(y) = y$, y $\phi(z) = z$, entonces existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = z + \lambda(y - z).$$

A este número λ lo llamaremos *la razón afín de x con respecto a y y z* y lo denotaremos de la siguiente forma

$$\lambda = \frac{x - z}{y - z}.$$

Observación 1.17 Notemos que la razón afín λ cumple que $\lambda > 1$ si y sólo si $y \in [x, z]$.

Podemos extender la noción de razón afín cuando z pertenezca al hiperplano al infinito H_∞ . Para esto, tenemos la identificación del rayo $R(x, y)$ en \mathbb{R}^n con el intervalo semi-abierto $[x, \infty)$ en \mathbb{R} . Como $z = x + t(y - x)$ para $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|x - z|}{|y - z|} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|x - (x + t(y - x))|}{|y - (x + t(y - x))|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|-t(y - x)|}{|(1 - t)(y - x)|} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|t(x - y)|}{|(t - 1)(x - y)|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así, definimos $\lambda = \frac{x - z}{y - z} = 1$, si z está en el hiperplano al infinito.

La prueba de la siguiente proposición se sigue directamente de la definición de la métrica de Funk y de la noción de la razón afín λ .

Proposición 1.18 *Si x, y y $a = a_\Omega(x, y)$ son tres puntos en un dominio convexo propio Ω tales que $x \neq y$, entonces $F_\Omega(x, y) = \log \lambda$, donde λ es la razón afín de x con respecto a y y a .*

Proposición 1.19 *Sean x, y dos puntos en un dominio convexo propio Ω y sea $a = a_\Omega(x, y)$. Consideremos $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función lineal tal que $h(y) \neq h(x)$. Entonces*

$$F_\Omega(x, y) = \log \left(\frac{h(a) - h(x)}{h(a) - h(y)} \right).$$

Demostración. Para realizar la prueba consideraremos los casos:

- (i) a no está en el hiperplano al infinito.
- (ii) a está en el hiperplano al infinito.

Caso (i). Si $a \notin H_\infty$, entonces la función lineal h está definida en a . Así, h es una función constante o inyectiva en el rayo afín $R(x, y)$, pero por hipótesis $h(x) \neq h(y)$, entonces h no puede ser constante en el rayo afín $R(x, y)$. Por lo tanto, h es inyectiva en $R(x, y)$. Se sigue de la observación 1.17 que para λ , la razón afín de x con respecto a y y a , cumple que

$$\lambda = \frac{x - a}{y - a} > 1.$$

Al evaluar $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en ambos lados de la igualdad y utilizar que h es lineal obtenemos que:

$$\lambda = \frac{h(a) - h(x)}{h(a) - h(y)}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_\Omega(x, y) &= \log(\lambda) \\ &= \log \left(\frac{h(a) - h(x)}{h(a) - h(y)} \right). \end{aligned}$$

Ahora probaremos el caso cuando a está en el hiperplano al infinito.

Caso (ii). Si $h(x) \neq h(y)$ y $a \in H_\infty$, h no está definida en a , pero podemos definir $h(a)$ notando lo siguiente:

$$\begin{aligned} h(a) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(x + \lambda(y - x)) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (h(x) + \lambda(h(y) - h(x))) \\ &= \pm\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h(a) = \pm\infty$ y la proposición es cierta porque $\log\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \log(1) = 0$. ■

Definición 1.20 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio convexo propio y $a \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un punto frontera. Un funcional de soporte en a para Ω es una función lineal $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(a) = 1$ y $h(x) < 1$ para cualquier punto $x \in \Omega$. Al hiperplano $H = \{z \in \mathbb{R}^n \mid h(z) = 1\}$ se le llama hiperplano de soporte en a para Ω . Si Ω no es acotado, entonces el hiperplano al infinito H_∞ también es considerado un hiperplano de soporte para Ω en cada punto de $\tilde{\Omega} \cup H_\infty$.

Nos conviene considerar que el origen $\bar{0}$ es un punto interior del conjunto convexo Ω , esto implica que $h(x) < h(a)$ para todo $x \in \Omega$. Si este no fuera el caso, tras realizar una traslación adecuada logramos que esto suceda.

En la prueba de la proposición 1.24 nos auxiliaremos de la definición 1.21 y las proposiciones 1.22 y 1.23.

Definición 1.21 Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Un funcional $M : V \rightarrow \mathbb{R}$ se dice sublineal si

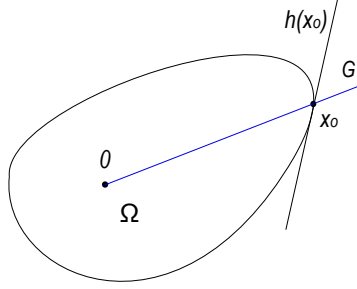
- 1) $M(x + y) \leq M(x) + M(y)$ para todo $x, y \in V$.
- 2) $M(\alpha x) = \alpha M(x)$ para todo $x \in V$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.22 Teorema de Hahn - Banach. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y sea $M : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Sea U un subespacio de V y sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f(x) \leq M(x)$ para todo $x \in U$. Entonces, existe un funcional lineal $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in U$ y $F(x) \leq M(x)$ para todo $x \in V$.

Proposición 1.23 Sea M una norma débil de Minkowski sobre un espacio vectorial de dimensión finita X . Entonces las siguientes son equivalentes

- 1) M es finita,
- 2) M es continua,
- 3) Ω_M es abierto,
- 4) 0 es un punto interior de Ω_M .

Proposición 1.24 Sea $\bar{0} \in \Omega$. Cualquier punto frontera de un dominio convexo propio Ω admite un funcional de soporte.



– **Figura 1.4** – Funcional de soporte en x_0

Demostración. Supongamos que el origen $\bar{0} \in \Omega$. Para realizar la demostración vamos a considerar la proposición 1.12, la cual nos dice que el funcional de Minkowski $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ está definido por $M(x) := \inf \{t > 0 : x \in t \cdot \Omega\}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Ahora definimos el subespacio G como el espacio generado por $x_0 \in \partial\Omega$, es decir $G := \{tx_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$, y sea $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional lineal definido por $g(tx_0) := t$. Puesto que $x_0 \notin \Omega$, se sigue de las propiedades de la norma débil de Minkowski (proposición 1.12) que $M(x_0) \geq 1$, pues $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid M(x) \leq 1\}$, ya que Ω es abierto. Entonces, para todo $t > 0$ resulta que

$$g(tx_0) = t \leq tM(x_0) = M(tx_0).$$

Similarmente, si $t \leq 0$ se obtiene que

$$g(tx_0) = t \leq 0 \leq M(tx_0),$$

y en consecuencia $g(x) \leq M(x)$ para todo $x := tx_0 \in G$. Aplicando la versión analítica del teorema de Hahn-Banach (proposición 1.22) se deduce que existe un funcional lineal $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = g(x)$ para todo $x \in G$ y $h(x) \leq M(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$; en particular se tiene que $h(x_0) = g(x_0) = 1$, lo cual confirma que $h \neq 0$. Además, de acuerdo con la proposición 1.23, como Ω es abierto, $M(x)$ es finito, entonces $0 \leq M(x) \leq C \|x\|$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, y luego $h(x) \leq C \|x\|$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. De manera similar, $-h(x) = h(-x) \leq C \|x\|$, con lo cual $h(x) \geq -C \|x\|$, y en consecuencia $|h(x)| \leq C \|x\|$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, probando así que $h \in \mathbb{R}^n$, pues el origen es un punto interior de Ω . Por último, utilizando la definición de conjunto convexo abierto (definición 1.10) en términos de la norma débil de Minkowski, se concluye que $h(x) \leq M(x) < 1 = h(x_0)$ para todo $x \in \Omega$. ■

Para la prueba del lema 1.25 haremos lo siguiente:

- Para cada par de puntos ordenados x, y en un dominio convexo propio Ω acotado y en el complemento del segmento abierto entre x y y en el rayo afín, $a \in R(x, y) \setminus (x, y)$, definimos la parametrización de a con respecto a los puntos x y y por $a = x + t(y - x)$.
- Considerando la parametrización de a , definimos la función $\psi_{x,y} : R(x, y) \setminus (x, y) \rightarrow [1, \infty)$ como aquella que identifica la parte del rayo afín $R(x, y) \setminus (x, y)$ con el intervalo $[1, \infty)$ y tal que su regla de correspondencia es

$$\psi_{x,y}(a) = \frac{|x - a|}{|y - a|}.$$

Esto es, porque:

$$|x - a| = |x - (x + t(y - x))| = t|x - y| \tag{1.1}$$

y

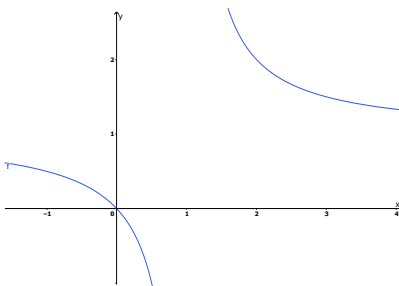
$$|y - a| = |y - (x + t(y - x))| = |(1 - t)(y - x)| = (t - 1)|x - y|. \quad (1.2)$$

Así,

$$\frac{|x - a|}{|y - a|} = \frac{t}{t - 1}. \quad (1.3)$$

- Finalmente, efectuamos la composición entre las funciones logaritmo natural y la función $\psi_{x,y}$, tal que $g : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ con regla de correspondencia $g(a) = \log \frac{|x - a|}{|y - a|}$.

En la figura 1.5 mostramos el comportamiento de la función $\psi_{x,y}(a)$.



– **Figura 1.5** – Gráfica de la función $\psi_{x,y}(a)$.

Lema 1.25 La función $g : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definida por $g(a) = \log \frac{|x - a|}{|y - a|}$ es estrictamente decreciente.

Demostración. Sea $a_t = ty + (1 - t)x$, tales que $x, y \in \Omega$ y $t \in [0, \infty)$. Si $t_0 < t_1$, entonces $a_{t_0} < a_{t_1}$ con $a_{t_0}, a_{t_1} \in \mathbb{R}$. Luego, si $t < s$, entonces $a_t < a_s$ y por lo tanto, si consideramos que $1 < t < s$, entonces $0 < t - 1 < s - 1$. Además, $st - s < st - t$ si y sólo si $\frac{s}{s-1} < \frac{t}{t-1}$. Por otro lado, de las consideraciones anteriores, esta función coincide con $\psi_{x,y}(a) = \frac{|x - a|}{|y - a|}$. Ahora, si $t < s$, $a_s = sy + (1 - s)x$ y $a_t = ty + (1 - t)x$, entonces de las ecuaciones (1.1) – (1.3) tenemos que:

$$\frac{|x - a_s|}{|y - a_s|} = \frac{s}{s - 1} \text{ y } \frac{|x - a_t|}{|y - a_t|} = \frac{t}{t - 1}.$$

En consecuencia, como $t < s$, entonces $\frac{s}{s - 1} < \frac{t}{t - 1}$. Por lo tanto,

$$\frac{|x - a_s|}{|y - a_s|} = \frac{s}{s - 1} < \frac{t}{t - 1} = \frac{|x - a_t|}{|y - a_t|}.$$

Componiendo con la función logaritmo natural

$$\log \frac{|x - a_s|}{|y - a_s|} < \log \frac{|x - a_t|}{|y - a_t|}.$$

Por lo tanto, $g(a)$ es estrictamente decreciente. ■

En los siguientes resultados, denotaremos por S_Ω al conjunto de los funcionales de soporte para un dominio convexo propio Ω y por $p_\Omega(x) = \sup\{h(x) \mid h \in S_\Omega\}$ al funcional de Minkowski de Ω . Notemos que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid p_\Omega(x) < 1\}$.

Se siguen de la proposición 1.19 los siguientes corolarios.

Corolario 1.26 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio convexo propio en \mathbb{R}^n que contiene al origen y sea h un funcional de soporte en $a \in \partial\Omega$. Entonces tenemos*

$$F_{\Omega}(x, y) \geq \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right)$$

para cualquier $x, y \in \Omega$. Más aún, tenemos la igualdad si y sólo si $a = a_{\Omega}(x, y) \in H_{\infty}$ y $h(x) = h(y)$, o bien, $a \notin H_{\infty}$ y $h(a) = 1$.

Demostración. Caso (i). Si $h(x) = h(y)$ y $a \in H_{\infty}$, no hay nada que probar, pues la desigualdad

$$F_{\Omega}(x, y) \geq \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right)$$

se satisface trivialmente.

Caso (ii). Si $h(x) \neq h(y)$ y $a \notin H_{\infty}$. Entonces $h(a) \neq h(y)$. Se sigue de la proposición 1.19 que la métrica de Funk es expresada por

$$F_{\Omega}(x, y) = \log \left(\frac{h(a) - h(x)}{h(a) - h(y)} \right),$$

luego, por el lema 1.25 y si $h(a) \leq 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) &\leq \log \left(\frac{h(a) - h(x)}{h(a) - h(y)} \right) \\ &= F_{\Omega}(x, y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $h(a) = 1$, obtenemos la igualdad.

Caso (iii). El caso tres es cuando a está en el hiperplano al infinito y $h(x) \neq h(y)$. Entonces $F_{\Omega}(x, y) = 0$ y $R(x, y) \subset \Omega$, dado que Ω no es acotado. Si $h(x) < 1$ entonces $h(x + \lambda(y - x)) < 1$ para todo $\lambda \geq 0$. Considerando que h es un funcional lineal tenemos que $\lambda h(y - x) < 1 - h(x)$. Esto es equivalente a

$$h(y - x) < \frac{1 - h(x)}{\lambda}$$

si $\lambda > 0$, luego $h(y - x) \leq 0$, de esta manera $h(y) - h(x) = h(y - x) \leq 0$ y si $h(x) \neq h(y)$, entonces $h(y) < h(x)$. Por lo tanto,

$$F_{\Omega}(x, y) = 0 > \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right).$$

■

Corolario 1.27 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio convexo propio que contiene al origen, entonces*

$$F_{\Omega}(x, y) = \max \left\{ 0, \sup_{h \in S_{\Omega}} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \right\}.$$

Demostración. (i) Primero demostraremos que la métrica de Funk satisface la siguiente desigualdad

$$F_{\Omega}(x, y) \leq \max \left\{ 0, \sup_{h \in S_{\Omega}} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \right\}. \quad (1.4)$$

Supongamos que $F_\Omega(x, y) > 0$. Entonces $a = a_\Omega(x, y) \notin H_\infty$.

$$\begin{aligned} F_\Omega(x, y) &= \log \left(\frac{h(a) - h(x)}{h(a) - h(y)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \\ &\leq \sup_{h \in S_\Omega} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \\ &= \text{máx} \left\{ 0, \sup_{h \in S_\Omega} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$F_\Omega(x, y) \leq \text{máx} \left\{ 0, \sup_{h \in S_\Omega} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \right\}.$$

(ii) Ahora veamos que la métrica de Funk satisface

$$F_\Omega(x, y) \geq \text{máx} \left\{ 0, \sup_{h \in S_\Omega} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \right\}. \quad (1.5)$$

Por el corolario 1.26 y de la definición de supremo tenemos que:

$$\begin{aligned} F_\Omega(x, y) &= \log \left(\frac{h(a) - h(x)}{h(a) - h(y)} \right) \\ &\geq \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \\ &\geq \sup_{h \in S_\Omega} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \\ &\geq \text{máx} \left\{ 0, \sup_{h \in S_\Omega} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

pues $F_\Omega(x, y)$ es cota superior del conjunto $\left\{ \log \frac{|h(a) - h(x)|}{|h(a) - h(y)|} : h \text{ es un funcional de soporte para } \Omega \right\}$.

Por lo tanto,

$$F_\Omega(x, y) \geq \text{máx} \left\{ 0, \sup_{h \in S_\Omega} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \right\}.$$

En consecuencia de las desigualdades (1.4) y (1.5) tenemos que

$$F_\Omega(x, y) = \text{máx} \left\{ 0, \sup_{h \in S_\Omega} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \right\}.$$

(iii) Ahora veamos que si la métrica de Funk se anula, entonces el rayo afín $R(x, y) \subset \Omega$. Sea $x + \lambda(y - x)$ un punto en Ω y sea h un funcional lineal, arbitrario y de soporte en algún punto b de la frontera de Ω . Como $x + \lambda(y - x)$ es un punto en Ω y como sabemos que si $h(x) < 1$ para todo $x \in \Omega$, entonces $h(x) + \lambda(h(y) - h(x)) < 1$. Esto es equivalente a

$$h(y) - h(x) < \frac{1 - h(x)}{\lambda}$$

para todo $\lambda > 0$. Luego $h(y) - h(x) \leq 0$. Así, $h(y) \leq h(x)$. Como $F_\Omega(x, y) = 0$, entonces

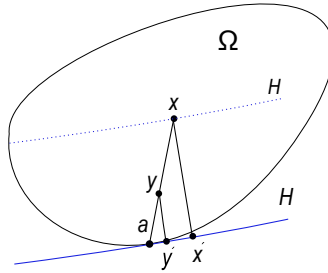
$$\text{máx} \left\{ 0, \sup_{h \in S_\Omega} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \right\} = 0.$$

■

Corolario 1.28 *La métrica de Funk en un dominio convexo acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ está dada por*

$$F_\Omega(x, y) = \sup_H \log \left(\frac{\text{dist}(x, H)}{\text{dist}(y, H)} \right)$$

donde el supremo es tomado sobre el conjunto de todos los hiperplanos soporte H para Ω y $\text{dist}(x, H)$ es la distancia euclidiana de x a H .



– **Figura 1.6** – La métrica de Funk

Demostración.

Sea H un hiperplano de soporte para Ω en a definido por un funcional lineal arbitrario $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Considerando las proyecciones ortogonales de los puntos x y y sobre el hiperplano H , obtenemos los triángulos semejantes, $\triangle ay'y$ y $\triangle ax'x$ (como se muestra en la figura 1.6) los cuales cumplen que

$$\frac{|1 - h(x)|}{|1 - h(y)|} = \frac{\text{dist}(x, H)}{\text{dist}(y, H)},$$

pues $h(z) = 1$ para todo $z \in H$ y $h(x) < 1$ para todo $x \in \Omega$. Así,

$$\log \frac{|1 - h(x)|}{|1 - h(y)|} = \log \frac{\text{dist}(x, H)}{\text{dist}(y, H)}.$$

Se sigue del corolario 1.27, que la métrica de Funk está dada por

$$F_\Omega(x, y) = \sup_H \log \left(\frac{\text{dist}(x, H)}{\text{dist}(y, H)} \right).$$

■

Corolario 1.29 *Sean x, y, z tres puntos alineados en un dominio convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $F_\Omega(x, y) > 0$ y λ , la razón afín, entonces*

$$\lambda = \frac{e^{F_\Omega(x, y)} (e^{F_\Omega(x, z)} - 1)}{e^{F_\Omega(x, z)} (e^{F_\Omega(x, y)} - 1)}$$

y

$$F_\Omega(x, z) = F_\Omega(x, y) - \log \left(e^{F_\Omega(x, y)} + \lambda(1 - e^{F_\Omega(x, y)}) \right).$$

Demostración. Elegimos un funcional h con soporte en $a = a_\Omega(x, y) = a_\Omega(x, z)$, pues x, y, z son puntos alineados en Ω y $z = x + \lambda(y - x)$ para algún $\lambda \geq 0$. De la proposición 1.19, tenemos que una expresión para la métrica de Funk es

$$F_\Omega(x, y) = \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right),$$

si $a \notin H_\infty$ y $h(a) = 1$. Componiendo con la función exponencial natural obtenemos

$$e^{F_\Omega(x, y)} = \frac{1 - h(x)}{1 - h(y)}. \quad (1.6)$$

Similarmente, tenemos que

$$F_\Omega(x, z) = \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(z)} \right),$$

si $a \notin H_\infty$ y $h(a) = 1$. Componiendo con la función exponencial natural obtenemos

$$e^{F_\Omega(x, z)} = \frac{1 - h(x)}{1 - h(z)}. \quad (1.7)$$

A partir de la igualdad (1.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{e^{F_\Omega(x, y)} - 1}{e^{F_\Omega(x, y)}} &= \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(x)} \right) \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(x)} \right) \left(\frac{h(y) - h(x)}{1 - h(y)} \right) \\ &= \left(\frac{h(y) - h(x)}{1 - h(x)} \right). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{e^{F_\Omega(x, z)} - 1}{e^{F_\Omega(x, z)}} &= \left(\frac{1 - h(z)}{1 - h(x)} \right) \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(z)} - 1 \right) \\ &= \left(\frac{1 - h(z)}{1 - h(x)} \right) \left(\frac{h(z) - h(x)}{1 - h(z)} \right) \\ &= \left(\frac{h(z) - h(x)}{1 - h(x)} \right). \end{aligned}$$

De tal manera que

$$\begin{aligned} \frac{e^{F_\Omega(x, y)} (e^{F_\Omega(x, z)} - 1)}{e^{F_\Omega(x, z)} (e^{F_\Omega(x, y)} - 1)} &= \left(\frac{1 - h(x)}{h(y) - h(x)} \right) \left(\frac{h(z) - h(x)}{1 - h(x)} \right) \\ &= \frac{h(z) - h(x)}{h(y) - h(x)} \\ &= \frac{h(z - x)}{h(y - x)} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Así, se sigue una de las conclusiones del corolario. Esto es,

$$\frac{e^{F_{\Omega}(x,y)} (e^{F_{\Omega}(x,z)} - 1)}{e^{F_{\Omega}(x,z)} (e^{F_{\Omega}(x,y)} - 1)} = \lambda. \quad (1.8)$$

Por otro lado, de la ecuación 1.8, resolviendo la ecuación

$$\frac{e^{F_{\Omega}(x,z)} - 1}{e^{F_{\Omega}(x,z)}} = \lambda \left(\frac{e^{F_{\Omega}(x,y)} - 1}{e^{F_{\Omega}(x,y)}} \right)$$

en $e^{F_{\Omega}(x,z)}$, obtenemos las siguientes igualdades:

$$e^{F_{\Omega}(x,z)} e^{F_{\Omega}(x,y)} - e^{F_{\Omega}(x,y)} = \lambda e^{F_{\Omega}(x,y)} e^{F_{\Omega}(x,z)} - \lambda e^{F_{\Omega}(x,z)}.$$

$$e^{F_{\Omega}(x,z)} e^{F_{\Omega}(x,y)} - \lambda e^{F_{\Omega}(x,z)} e^{F_{\Omega}(x,y)} + \lambda e^{F_{\Omega}(x,z)} = e^{F_{\Omega}(x,y)}.$$

$$e^{F_{\Omega}(x,z)} \left(e^{F_{\Omega}(x,y)} + \lambda \left(1 - e^{F_{\Omega}(x,y)} \right) \right) = e^{F_{\Omega}(x,y)}.$$

$$e^{F_{\Omega}(x,z)} = \frac{e^{F_{\Omega}(x,y)}}{\left(e^{F_{\Omega}(x,y)} + \lambda \left(1 - e^{F_{\Omega}(x,y)} \right) \right)}.$$

$$F_{\Omega}(x, z) = F_{\Omega}(x, y) - \log \left(e^{F_{\Omega}(x,y)} + \lambda \left(1 - e^{F_{\Omega}(x,y)} \right) \right).$$

Esto completa la prueba. ■

Ahora veremos que calcular la distancia de Funk entre dos puntos de Ω es una operación unidimensional.

Definición 1.30 Si $S = [a_1, a_2] \subset \mathbb{R}^n$ es un segmento compacto en \mathbb{R}^n conteniendo a los puntos x, y en su interior y $y \in [x, a_2]$, definimos $F_S(x, y) = \log \frac{|x - a_2|}{|y - a_2|}$, a la que llamamos la métrica de Funk unidimensional en S .

Lema 1.31 Si $S = [a_1, a_2] \subset \mathbb{R}^n$ es un segmento compacto, entonces $F_S(x, y)$ es la métrica de Funk unidimensional en el interior relativo de S .

Demostración. Por definición, el interior relativo de S denotado por $\text{int}(S)$, es el interior de S con la topología inducida en S por \mathbb{R}^n y por lo tanto, coincide con el segmento (a_1, a_2) . Identificando el segmento S con un intervalo cerrado de la recta real \mathbb{R} , entonces el segmento (a_1, a_2) se identifica con un intervalo abierto I contenido en \mathbb{R} , el cual además es convexo en \mathbb{R} . De esta manera, $F_S(x, y)$ coincide con $F_I(x, y)$ como se quiere demostrar. ■

Corolario 1.32 La distancia de Funk entre dos puntos $x, y \in \Omega$ está dada por

$$F_{\Omega}(x, y) = \inf \{ F_S(x, y) \mid S \text{ es un segmento de la cerradura topológica de } \Omega \text{ conteniendo a } x \text{ y } y \}.$$

Demostración. Primero veremos que la métrica de Funk satisface la desigualdad

$$F_{\Omega}(x, y) \leq \inf \{ F_S(x, y) \mid S \text{ es un segmento contenido en la cerradura de } \Omega \text{ y } x, y \in S \}.$$

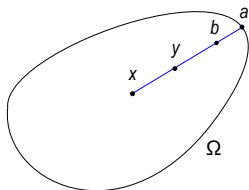
En la prueba denotamos el conjunto

$$A = \{ F_S(x, y) \mid S \text{ es un segmento de la cerradura topológica de } \Omega \text{ conteniendo a } x \text{ y } y \}.$$

Sea $S = [v, b]$ segmento en $\bar{\Omega}$ que tiene como elementos a x y a y . Notemos que $b \neq a_{\Omega}(x, y) = a$. Considerando la monotonía de la función g del lema 1.25, tenemos que

$$\log \frac{|x - a|}{|y - a|} \leq \log \frac{|x - b|}{|y - b|}.$$

Por lo tanto, $F_{\Omega}(x, y) \leq F_S(x, y) = \log \frac{|x - b|}{|y - b|}$. Como $F_{\Omega}(x, y)$ es cota inferior del conjunto A , entonces, $F_{\Omega}(x, y) \leq \inf A$.



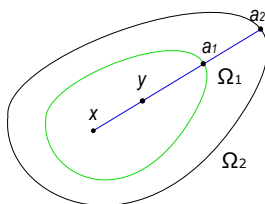
– **Figura 1.7** – La distancia de Funk entre dos puntos

Probemos ahora que la métrica de Funk cumple la desigualdad $F_{\Omega}(x, y) \geq \inf A$. Observamos que la métrica de Funk satisface que $F_{\Omega}(x, y) = F_S(x, y)$ si consideramos a S como el segmento $[x, a]$, donde $a = a_{\Omega}(x, y)$. Así, $F_{\Omega}(x, y) \in A$ y por lo tanto, $F_{\Omega}(x, y) \geq \inf A$. Por lo tanto,

$$F_{\Omega}(x, y) = \inf \{F_S(x, y) \mid S \text{ es un segmento de la cerradura topológica de } \Omega \text{ conteniendo a } x \text{ y } y\}.$$

■

Corolario 1.33 Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ son subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n , entonces $F_{\Omega_2} \leq F_{\Omega_1}$, cumpliéndose la igualdad si y sólo si $\Omega_1 = \Omega_2$.



– **Figura 1.8** – La métrica de Funk en subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n

Demostración. Demostramos en el lema 1.25 que la función $a \mapsto \log \frac{|x - a|}{|y - a|}$ es monótonamente decreciente. Sean $a_1 = a_{\Omega_1}(x, y)$ y $a_2 = a_{\Omega_2}(x, y)$ y como $\Omega_1 \subset \Omega_2$, entonces $a_1 < a_2$. En consecuencia,

$$\log \frac{|x - a_2|}{|y - a_2|} = F_{\Omega_2}(x, y) \leq \log \frac{|x - a_1|}{|y - a_1|} = F_{\Omega_1}(x, y).$$

Por lo tanto, si $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, entonces $F_{\Omega_2}(x, y) \leq F_{\Omega_1}(x, y)$. ■

Corolario 1.34 Sean Ω_1 y Ω_2 dos subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n , entonces para cada x y y en $\Omega_1 \cap \Omega_2$, tenemos

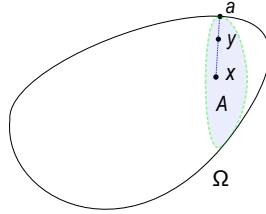
$$F_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(x, y) = \max \{F_{\Omega_1}(x, y), F_{\Omega_2}(x, y)\}.$$

Demostración. Como $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos y convexos, entonces $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es un conjunto abierto y convexo. De tal manera que, para cada par de puntos $x, y \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ se tiene que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ está contenido en Ω_i , entonces se sigue del corolario 1.33 que $F_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(x, y) \geq F_{\Omega_i}(x, y)$, $i \in \{1, 2\}$. Así, tenemos que

$$F_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(x, y) \geq \max \{F_{\Omega_1}(x, y), F_{\Omega_2}(x, y)\}.$$

Ademas, la igualdad se cumple, pues $a_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(x, y)$ coincide con $a_{\Omega_1}(x, y)$ o con $a_{\Omega_2}(x, y)$. ■

Corolario 1.35 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto convexo abierto no vacío y sea Ω' un subconjunto de Ω distinto del vacío, que se obtiene de la intersección de Ω con un subespacio afín. Entonces, $F_{\Omega'}$ es la métrica inducida por F_{Ω} en Ω' como un subespacio de (Ω, F_{Ω}) .



– Figura 1.9 – La métrica de Funk inducida

Demostración. Sea A un subespacio afín en \mathbb{R}^n que interseca a Ω . Entonces $\Omega' = A \cap \Omega \neq \emptyset$. Sean $x, y \in \Omega'$. Entonces

$$G = F_{\Omega'}(x, y) = \log \frac{|x - b|}{|y - b|}$$

con

$$b \in \tilde{R}(x, y) \cap \tilde{\partial}(\Omega') = \tilde{R}(x, y) \cap (\tilde{\partial}(\Omega) \cap A) = (\tilde{R}(x, y) \cap \tilde{\partial}(\Omega)) \cap A.$$

Sean $x, y \in \Omega$. Entonces

$$F_{\Omega}(x, y) = \log \frac{|x - a|}{|y - a|}$$

con $a \in \tilde{R}(x, y) \cap \tilde{\partial}(\Omega)$. Como $b \in \tilde{R}(x, y) \cap \tilde{\partial}(\Omega)$ y $a \in \tilde{R}(x, y) \cap \tilde{\partial}(\Omega)$, entonces el rayo afín $R(x, y)$ es el mismo en Ω y Ω' . Por tanto, $a = b$ y en consecuencia $F_{\Omega'}(x, y) = F_{\Omega}(x, y)$. ■

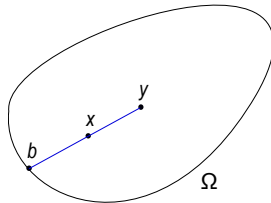
1.2. La métrica de Funk en su forma inversa

Definición 1.36 La forma inversa de la métrica de Funk en un dominio convexo propio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ está definida como

$${}^r F_{\Omega}(x, y) = F_{\Omega}(y, x) = \log \frac{|y - b|}{|x - b|}$$

donde $b = a_{\Omega}(y, x)$.

Proposición 1.37 La métrica de Funk en su forma inversa en un dominio convexo $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ es una métrica débil proyectiva, no es simétrica, no es acotada y además es separante si y sólo si el dominio Ω es acotado.



– Figura 1.10 – La métrica de Funk en su forma inversa

Demostración. (i) Si $x = y$, entonces $\log \frac{|y - b|}{|x - b|} = 0$. Por lo tanto, la métrica de Funk en su forma inversa cumple que ${}^r F_{\Omega}(x, x) = 0$.

(ii) ${}^r F_{\Omega}(x, y)$ no es simétrica.

Por definición la métrica de Funk en su forma inversa está dada por

$${}^r F_{\Omega}(x, y) = F_{\Omega}(y, x) = \log \frac{|y - b|}{|x - b|}.$$

Por otro lado,

$${}^r F_{\Omega}(y, x) = \log \frac{|x - a|}{|y - a|}.$$

Como en general la métrica de Funk no es simétrica, entonces ${}^r F_{\Omega}(x, y)$ no es simétrica.

(iii) La métrica de Funk en su forma inversa satisface la desigualdad del triángulo. En el teorema 3.17 se prueba la desigualdad del triángulo para la métrica de Funk. Entonces, de la definición de la métrica de Funk en su forma inversa, de la proposición 1.19 y del corolario 1.26 se cumple que

$$\begin{aligned} {}^r F_{\Omega}(x, z) &= F_{\Omega}(z, x) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(z)}{1 - h(x)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(z)}{1 - h(x)} \cdot \frac{1 - h(y)}{1 - h(y)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(x)} \cdot \frac{1 - h(z)}{1 - h(y)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(x)} \right) + \log \left(\frac{1 - h(z)}{1 - h(y)} \right) \\ &\leq F_{\Omega}(y, x) + F_{\Omega}(z, y) \\ &= {}^r F_{\Omega}(x, y) + {}^r F_{\Omega}(y, z). \end{aligned}$$

En consecuencia, la métrica de Funk en su forma inversa es una métrica débil.

(iv) La métrica de Funk en su forma inversa ${}^r F_{\Omega}(x, y)$ es proyectiva. Esto es, si $y \in [x, z]$ entonces

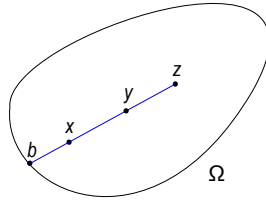
$${}^r F_{\Omega}(x, z) = {}^r F_{\Omega}(x, y) + {}^r F_{\Omega}(y, z).$$

Como $y \in [x, z]$,

$$\tilde{R}(x, y) \cap \tilde{\partial}\Omega = b = \tilde{R}(y, z) \cap \tilde{\partial}\Omega = \tilde{R}(x, z) \cap \tilde{\partial}\Omega.$$

Luego

$$\begin{aligned}
 {}^r F_{\Omega}(x, y) + {}^r F_{\Omega}(y, z) &= \log \frac{|y - b|}{|x - b|} + \log \frac{|z - b|}{|y - b|} \\
 &= \log |y - b| - \log |x - b| + \log |z - b| - \log |y - b| \\
 &= \log |z - b| - \log |x - b| \\
 &= \log \frac{|z - b|}{|x - b|} \\
 &= {}^r F_{\Omega}(x, z).
 \end{aligned}$$



– **Figura 1.11** – La métrica de Funk en su forma inversa es proyectiva

(v) ${}^r F_{\Omega}(x, y)$ no es acotada.

Sean $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ y $\partial\Omega \neq \emptyset$. Sea (x_n) una sucesión en el segmento $[x, b]$ tal que (x_n) converge a b con la métrica euclidiana. Entonces

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} {}^r F_{\Omega}(x_n, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{|y - b|}{|x_n - b|} \\
 &= \log \frac{|y - b|}{|b - b|} \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

Por tanto, ${}^r F_{\Omega}(x, y)$ no es acotada.

(vi) ${}^r F_{\Omega}(x, y)$ es separante si y sólo si Ω es acotado.

Primero probaremos la condición necesaria. Si $x \neq y$ entonces se sigue de la definición y que la métrica de Funk es separante, que

$$\begin{aligned}
 {}^r F_{\Omega}(x, y) &= F_{\Omega}(y, x) \\
 &= \log \frac{|y - b|}{|x - b|} \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la proposición 1.15, Ω es acotado.

Recíprocamente, supongamos que Ω no es acotado. Veremos que la forma inversa de la métrica de Funk no es separante. Como Ω no es acotado, sabemos que Ω contiene un rayo afín $R(y, x)$ tal que

$b = \tilde{R}(y, x) \cap \tilde{\partial}\Omega \in H_\infty$, entonces

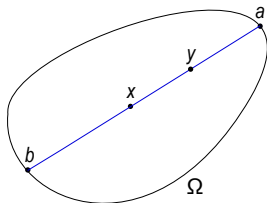
$$\begin{aligned} F_\Omega(y, x) &= \lim_{b \rightarrow \infty} \log \frac{|y - b|}{|x - b|} \\ &= \log \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{|y - b|}{|x - b|} \right) \\ &= \log \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \log(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, $F_\Omega(y, x) = 0$ para $x \neq y$. Por tanto, Ω acotado implica que $F_\Omega(y, x) > 0$ para $x \neq y$. ■

Proposición 1.38 *Sea Ω un dominio convexo acotado en \mathbb{R}^n y sea $x \in \Omega$. Entonces la función*

$$H_x : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } H_x(y) = {}^r F_\Omega(x, y)$$

es acotada.



– **Figura 1.12** – La métrica de Funk en su forma inversa en un dominio acotado

Demostración. Por definición $H_x(y) = \log \frac{|y - b|}{|x - b|}$.

(i) Como $a = a_\Omega(x, y)$ y $b = a_\Omega(y, x)$, entonces las distancias euclidianas entre y y b y entre a y b satisfacen la siguiente desigualdad $|y - b| \leq |a - b|$. Entonces $|y - b| \leq \sup_{a', b' \in \partial\Omega} |a' - b'|$.

(ii) Por otro lado, $|x - b| \geq \inf_{b' \in \partial\Omega} |x - b'| > 0$. Si

$$\frac{|y - b|}{|x - b|} \leq \frac{\sup_{a', b' \in \partial\Omega} |a' - b'|}{\inf_{b' \in \partial\Omega} |x - b'|},$$

entonces

$$\log \frac{|y - b|}{|x - b|} \leq \log \frac{\sup_{a', b' \in \partial\Omega} |a' - b'|}{\inf_{b' \in \partial\Omega} |x - b'|}.$$

Como Ω es un conjunto acotado

$$\begin{aligned} {}^r F_\Omega(x, y) &= \log \frac{|y - b|}{|x - b|} \\ &\leq \log \frac{\sup_{a', b' \in \partial\Omega} |a' - b'|}{\inf_{b' \in \partial\Omega} |x - b'|} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H_x(y)$ es una función acotada. ■

1.3. Ejemplos

1.3.1. Polítopos

Definición 1.39 Un polítopo convexo abierto Ω en \mathbb{R}^n es un conjunto determinado por la intersección de un número finito de semi-espacios; esto es,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi_j(x) < s_j, 1 \leq j \leq k\},$$

para algún $k \in \mathbb{N}$ y donde $\phi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal no trivial para todo j .

Proposición 1.40 La métrica de Funk entre dos puntos en un polítopo está dada por:

$$F_\Omega(x, y) = \max \left\{ 0, \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) \right\} \right\}.$$

Demostración. Supongamos $x \neq y$ y $a = a_\Omega(x, y) \notin H_\infty$. Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi_j(x) < s_j, 1 \leq j \leq k\}$ un polítopo tal que $h_j(x) = \frac{1}{s_j} \phi_j(x)$ es una función lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} no trivial para cada j .

(i) Probemos que la métrica de Funk en un polítopo satisface la desigualdad

$$F_\Omega(x, y) \leq \max \left\{ 0, \max_{1 \leq j \leq k} \left\{ \log \left\{ \frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right\} \right\} \right\}. \quad (1.9)$$

La desigualdad 1.6 se cumple debido a lo siguiente:

$$\begin{aligned} F_\Omega(x, y) &= \log \left(\frac{h_j(a) - h_j(x)}{h_j(a) - h_j(y)} \right) \\ &= \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq k} \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) \\ &= \max \left\{ 0, \max_{1 \leq j \leq k} \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

(ii) Probemos ahora que la métrica de Funk satisface la desigualdad

$$F_\Omega(x, y) \geq \max \left\{ 0, \max_{1 \leq j \leq k} \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) \right\}.$$

Se sigue del corolario 1.26 que

$$\begin{aligned} F_\Omega(x, y) &= \log \left(\frac{h_j(a) - h_j(x)}{h_j(a) - h_j(y)} \right) \\ &\geq \log \left(\frac{1 - h_j(x)}{1 - h_j(y)} \right) \\ &= \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right). \end{aligned}$$

Como

$$F_\Omega(x, y) \geq \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right)$$

para cada j , entonces

$$\begin{aligned} F_{\Omega}(x, y) &\geq \max_{1 \leq j \leq k} \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) \\ &= \max \left\{ 0, \max_{1 \leq j \leq k} \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_{\Omega}(x, y) \geq \max \left\{ 0, \max_{1 \leq j \leq k} \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) \right\}.$$

Por lo tanto, de los casos (i) y (ii) tenemos la igualdad

$$F_{\Omega}(x, y) = \max \left\{ 0, \max_{1 \leq j \leq k} \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) \right\}.$$

(iii) Si $x = y$, la métrica de Funk satisface $F_{\Omega}(x, y) = 0$.

(iv) Si $x \neq y$ y $a \in H_{\infty}$, entonces:

$$F_{\Omega}(x, y) = 0 = \max \left\{ 0, \max_{1 \leq j \leq k} \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) \right\},$$

pues

$$\max_{1 \leq j \leq k} \log \left(\frac{s_j - \phi_j(x)}{s_j - \phi_j(y)} \right) = 0$$

a) Si $\phi_j(x) = \phi_j(y)$, entonces $\log(1) = 0$.

b) Si $\phi_j(x) \neq \phi_j(y)$, entonces como y está más alejado del hiperplano determinado por h_j se tiene que $s_j - h_j(x)$ es menor que $s_j - h_j(y)$. Por lo tanto, el cociente de estas diferencias es menor que 1 y en consecuencia el logaritmo de este cociente es negativo y por lo tanto, el máximo es igual a cero cuando $a \in H_{\infty}$. Esto completa la prueba. ■

1.3.2. La bola unitaria euclidiana

Proposición 1.41 Si $B \subset \mathbb{R}^n$ es una bola unitaria euclidiana, entonces la métrica de Funk en B está expresada por la siguiente fórmula:

$$F_B(x, y) = \log \left(\frac{\sqrt{|y-x|^2 - |x \wedge y|^2} + |x|^2 - \langle x, y \rangle}{\sqrt{|y-x|^2 - |x \wedge y|^2} - |y|^2 + \langle x, y \rangle} \right)$$

y por $F_B(x, x) = 0$ para todo $x \in B$, donde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$ es el área del paralelogramo con lados $\vec{0x}$, $\vec{0y}$.

Demostración. (i) Si $x = y$, no hay nada que probar, pues $F_B(x, y) = \log(1) = 0$.

(ii) Si $x \neq y$, consideremos $a_B(x, y) = R(x, y) \cap \partial B$ y el funcional lineal $h(z) = \langle y - x, z \rangle$. Entonces por la proposición 1.19:

$$\begin{aligned} F_B(x, y) &= \log \left(\frac{h(a) - h(x)}{h(a) - h(y)} \right) \\ &= \log \left(\frac{\langle y - x, a \rangle - \langle y - x, x \rangle}{\langle y - x, a \rangle - \langle y - x, y \rangle} \right) \\ &= \log \left(\frac{\sqrt{|y-x|^2 - |x \wedge y|^2} + |x|^2 - \langle x, y \rangle}{\sqrt{|y-x|^2 - |x \wedge y|^2} - |y|^2 + \langle x, y \rangle} \right). \end{aligned}$$

Pues:

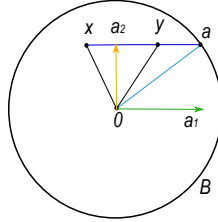
$$\begin{aligned}\langle y - x, x \rangle &= \langle y, x \rangle - \langle x, x \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - |x|^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle y - x, y \rangle &= \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \\ &= |y|^2 - \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

$$\langle y - x, a \rangle = \sqrt{|y - x|^2 - |x \wedge y|^2}.$$

Para la prueba de esta última expresión consideramos:

- (1) El vector unitario $u = \frac{y - x}{|y - x|}$.
- (2) El vector a_1 paralelo a la recta por los puntos x y y .
- (3) El vector a_2 como la proyección ortogonal de $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ a la recta por los puntos x y y .



– **Figura 1.13** – La métrica de Funk en una bola unitaria

Dado que a_2 es proyección ortogonal al vector $y - x$ y el vector a_1 es múltiplo del vector $y - x$ tal que

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{\langle u, a \rangle}{\langle u, u \rangle} u \\ &= \langle u, a \rangle u\end{aligned}$$

(al ser u un vector unitario), entonces obtenemos el vector $a = a_1 + a_2$. Así, $a_2 = a - a_1$. Como $|a_2|$ es la altura del triángulo $\triangle 0xy$, entonces su área es

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2} |a_2| |y - x| \\ &= \frac{1}{2} |x \wedge y|,\end{aligned}$$

esto es por la condición de ortogonalización.

Como $a_1 = \langle u, a \rangle u$, tenemos

$$\begin{aligned}|a_1|^2 &= a_1 \cdot a_1 \\ &= \langle u, a \rangle^2 u \cdot u \\ &= \langle u, a \rangle^2 \|u\|^2 \\ &= \langle u, a \rangle^2.\end{aligned}$$

De esta manera, por las consideraciones anteriores (y en particular por la condición de ortogonalidad entre los vectores a_1 y a_2 tenemos que $|a - a_2|^2 = |a|^2 - |a_2|^2$):

$$\begin{aligned}
 \langle y - x, a \rangle^2 &= \langle |y - x| u, a \rangle^2 \\
 &= |y - x|^2 \langle u, a \rangle^2 \\
 &= |y - x|^2 |a_1|^2 \\
 &= |y - x|^2 |a - a_2|^2 \\
 &= |y - x|^2 (|a|^2 - |a_2|^2) \\
 &= |y - x|^2 (1 - |a_2|^2) \\
 &= |y - x|^2 - |y - x|^2 |a_2|^2 \\
 &= |y - x|^2 - |x \wedge y|^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle y - x, a \rangle = \sqrt{|y - x|^2 - |x \wedge y|^2}$. ■

La demostración de la siguiente proposición para la métrica de Funk en su forma inversa ${}^r F_B(x, y)$ en la bola unitaria euclidiana es inmediata de la relación entre la métrica de Funk y la métrica inversa.

Proposición 1.42 *Si $B \subset \mathbb{R}^n$ es una bola unitaria euclidiana, entonces la métrica de Funk en su forma inversa está expresada por la siguiente fórmula:*

$${}^r F_B(x, y) = \log \left(\frac{\sqrt{|y - x|^2 - |x \wedge y|^2} + |y|^2 - \langle x, y \rangle}{\sqrt{|y - x|^2 - |x \wedge y|^2} - |x|^2 + \langle x, y \rangle} \right)$$

y ${}^r F_B(x, x) = 0$ para todo $x, y \in B$, donde $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$ es el área del paralelogramo con lados $\vec{0x}$, $\vec{0y}$.

Capítulo 2

Geometría y topología de la métrica de Funk

2.1. La geometría de las bolas en la métrica de Funk

En un espacio métrico (X, d) una bola abierta de radio $r \in \mathbb{R}$ y centro en un punto $x \in X$, denotada por $B(x, r)$, es un subconjunto de X tal que cada uno de sus elementos dista en menos que r de x , es decir,

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

Como estamos tratando con distancias no simétricas, específicamente, con métricas débiles, es necesario distinguir dos tipos de bolas abiertas (y cerradas).

Definición 2.1 *Sea Ω un dominio convexo propio en \mathbb{R}^n . Recordemos que un dominio convexo propio en \mathbb{R}^n es un subconjunto convexo, abierto, no vacío y $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Sea $x \in \Omega$ y ρ un número real positivo.*

1. Una bola avante abierta¹ es un conjunto de la forma

$$B^+(x, \rho) = \{y \in \Omega \mid F_\Omega(x, y) < \rho\}.$$

2. Una bola ciar abierta² es un conjunto de la forma

$$B^-(x, \rho) = \{y \in \Omega \mid F_\Omega(y, x) < \rho\}.$$

Las bolas avante cerradas y las bolas ciar cerradas se definen cambiando el signo $<$ por \leq en las definiciones de las bolas abiertas avante y ciar respectivamente.

En la geometría de Funk, las bolas avante y ciar tienen en general formas y propiedades totalmente diferentes.

Proposición 2.2 *Sea Ω un subconjunto convexo abierto propio de \mathbb{R}^n equipado con su métrica de Funk F_Ω , x un punto en Ω y ρ un número real positivo. Entonces la bola avante abierta $B^+(x, \rho)$ es la imagen de Ω bajo la homotecia euclidiana de centro x y factor de dilatación $(1 - e^{-\rho})$.*

¹Forward open ball.

²Backward open ball.

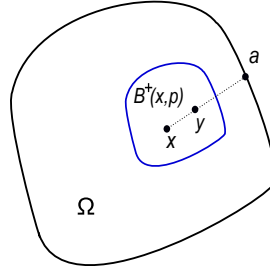
Demostración. Sean $x \neq y$ dos puntos en Ω .

(i) Si $F_\Omega(x, y) = 0$, entonces el rayo afín $R(x, y)$ está contenido en Ω y para cualquier $z \in R(x, y)$, $F_\Omega(x, z) = 0$. Por lo tanto, el rayo afín $R(x, y)$ está contenido en $B^+(x, \rho)$.

(ii) Si $F_\Omega(x, y) \neq 0$, entonces $a = a_\Omega(x, y) \notin H_\infty$. Así, para cualquier $y \in [x, a]$ tenemos:

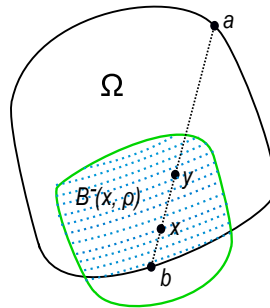
$$\begin{aligned} y \in B^+(x, \rho) &\iff \log \frac{|x - a|}{|y - a|} < \rho \\ &\iff |x - a| < e^\rho |y - a| = e^\rho (|x - a| - |y - x|) \\ &\iff |x - a| (1 - e^\rho) < -|y - x| e^\rho \\ &\iff |x - a| (e^{-\rho} - 1) < -|y - x| \\ &\iff |y - x| < (1 - e^{-\rho}) |x - a|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la bola avante $B^+(x, \rho)$ es la imagen de Ω por la homotecia euclidiana de centro x y factor de dilatación $(1 - e^{-\rho})$. ■



– **Figura 2.1** – Bola avante abierta en la geometría de Funk

Proposición 2.3 Sea Ω un dominio convexo en \mathbb{R}^n equipado con su métrica de Funk F_Ω , x un punto en Ω y ρ un número real positivo. Entonces la bola ciar abierta $B^-(x, \rho)$ es la intersección de Ω con la imagen de Ω por la homotecia euclidiana de centro x y factor de dilatación $(e^\rho - 1)$, seguida por la simetría central euclidiana en x .



– **Figura 2.2** – Bola ciar abierta en la geometría de Funk

Demostración. Sea $b = a_{\Omega}(y, x)$. Entonces, para $y \in [x, a]$ tenemos que $x \in [b, y]$. De esta manera

$$\begin{aligned} y \in B^-(x, \rho) &\iff \log \left| \frac{y-b}{x-b} \right| < \rho \\ &\iff e^{\rho} |x-b| > |y-b| = |y-x| + |x-b| \\ &\iff (e^{\rho} - 1) |x-b| > |y-x|. \end{aligned}$$

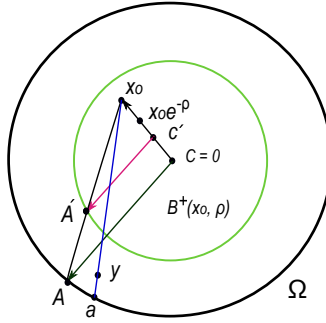
Por lo tanto, la bola ciar abierta $B^-(x, \rho)$ es la intersección de Ω con la imagen de Ω por la homotecia euclidiana de centro x y factor de dilatación $(e^{\rho} - 1)$, seguida por la simetría central centrada en x . ■

Proposición 2.4 Si Ω es la bola unitaria euclidiana, su métrica de Funk $F_{\Omega}(x, y)$ es la expresión

$$F_B(x, y) = \log \left(\frac{\sqrt{|y-x|^2 - |x \wedge y|^2} + |x|^2 - \langle x, y \rangle}{\sqrt{|y-x|^2 - |x \wedge y|^2} - |y|^2 + \langle x, y \rangle} \right)$$

dada en la proposición 1.41 y si $B^+(x_0, \rho) \subset \Omega$ es la bola avante cerrada de radio ρ con centro en $x_0 \in \Omega$, entonces $y \in B^+(x_0, \rho)$ si y sólo si $\|x_0\|^2 e^{-2\rho} - 2e^{-\rho} \langle x_0, y \rangle + \|y\|^2 \leq (1 - e^{-\rho})^2$.

Demostración. Se sigue de la proposición 2.2 que la bola avante abierta $B^+(x_0, \rho)$ es la imagen de Ω por la homotecia euclidiana de centro en x_0 con factor de dilatación $(1 - e^{-\rho})$. Ahora nos auxiliaremos de la siguiente construcción:



– Figura 2.3 – Bola unitaria euclidiana y su bola avante homotética

1. En la bola unitaria Ω con centro $C = 0$, trazamos un radio $r = \overline{CA}$ como se ilustra en la figura 2.3.

2. Consideremos el segmento que tiene por extremos a los puntos A y el centro de homotecia x_0 .

3. Ahora, considerando la bola homotética de Ω con centro en el punto C' notamos que al trazar el radio $r' = \overline{C'A'}$ paralelo al radio r , se generan los triángulos semejantes $\triangle Cx_0A$ y $\triangle C'x_0A'$ de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} &= \frac{\overline{Cx_0}}{\overline{C'x_0}} \implies \frac{1}{\overline{C'A'}} = \frac{|x_0|}{|x_0| - |x_0| e^{-\rho}} \\ &\implies \frac{1}{\overline{C'A'}} = \frac{1}{1 - e^{-\rho}} \\ &\implies \overline{C'A'} = 1 - e^{-\rho}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$r' = \overline{C'A'} = 1 - e^{-\rho}.$$

Ahora, considerando coordenadas cartesianas, tenemos que $A = (a_1, a_2)$, $A' = (\alpha, \beta)$, $x_0 = (x_1, x_2)$, $C' = (x_1 e^{-\rho}, x_2 e^{-\rho})$ y $C = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Notemos que las coordenadas de A' son desconocidas. Sean L_1 y L_2 las rectas que pasan entre los puntos C' y A' , x_0 y A respectivamente. Entonces

$$L_1 = C' + \lambda(C' - A') = C' + \lambda A,$$

pues la recta L_1 es paralela a L_3 , siendo L_3 la recta que pasa entre los puntos C y A . Y

$$L_2 = A + t(x_0 - A).$$

Para determinar las coordenadas del punto A' vamos a considerar la igualdad $L_1 = L_2$, dado que estas rectas se intersecan en dicho punto. Así pues,

$$\begin{aligned} C' + \lambda A = A + t(x_0 - A) &\implies C' - A = t(x_0 - A) - \lambda A \\ &\implies (x_1 e^{-\rho}, x_2 e^{-\rho}) - (a_1, a_2) = t((x_1, x_2) - (a_1, a_2)) - \lambda(a_1, a_2) \\ &\implies (x_1 e^{-\rho} - a_1, x_2 e^{-\rho} - a_2) = (t(x_1 - a_1) - \lambda a_1, t(x_2 - a_2) - \lambda a_2) \\ &\implies \begin{cases} x_1 e^{-\rho} - a_1 = t(x_1 - a_1) - \lambda a_1 \\ x_2 e^{-\rho} - a_2 = t(x_2 - a_2) - \lambda a_2 \end{cases} \\ &\implies \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & -a_1 \\ x_2 - a_2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 e^{-\rho} - a_1 \\ x_2 e^{-\rho} - a_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos un sistema de ecuaciones en las variables λ y t . En nuestro caso, si consideramos que las columnas de la matriz B de coeficientes del sistema de ecuaciones son distintas y diferentes de cero, entonces el determinante de B es distinto de cero. De este modo, la matriz B es invertible y está expresada por

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \text{Adj} B.$$

Así, multiplicando por la matriz inversa del sistema en ambos lados de la igualdad del sistema obtenemos los valores para λ y t :

$$\begin{aligned} B^{-1} \begin{pmatrix} x_1 e^{-\rho} - a_1 \\ x_2 e^{-\rho} - a_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{x_2 a_1 - x_1 a_2} \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ -(x_2 - a_2) & x_1 - a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 e^{-\rho} - a_1 \\ x_2 e^{-\rho} - a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_2 a_1 - x_1 a_2} \begin{pmatrix} e^{-\rho}(x_2 a_1 - x_1 a_2) \\ x_2 a_1 - x_1 a_2 - (x_2 a_1 - x_1 a_2)e^{-\rho} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\rho} \\ 1 - e^{-\rho} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$t = e^{-\rho}$$

y

$$\lambda = 1 - e^{-\rho}.$$

Así,

$$L_1 = C' + (1 - e^{-\rho})A$$

y

$$L_2 = A + e^{-\rho}(x_0 - A).$$

En consecuencia

$$A' = (1 - e^{-\rho})A + x_0 e^{-\rho}.$$

Por lo tanto,

$$H(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\rho} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + e^{-\rho} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Esta expresión es la regla de correspondencia de una homotecia seguida de una traslación para la bola avante (que usaremos en la prueba del corolario 2.7).

Por otro lado, de nuestra construcción geométrica y de la proposición 1.41 tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = \frac{1}{1 - e^{-\rho}} &\iff \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{\sqrt{(x_1 e^{-\rho} - \alpha)^2 + (x_2 e^{-\rho} - \beta)^2}} = \frac{1}{1 - e^{-\rho}} \\ &\iff \frac{1}{(x_1 e^{-\rho} - \alpha)^2 + (x_2 e^{-\rho} - \beta)^2} = \frac{1}{(1 - e^{-\rho})^2} \\ &\iff (x_1 e^{-\rho} - \alpha)^2 + (x_2 e^{-\rho} - \beta)^2 = (1 - e^{-\rho})^2 \\ &\iff x_1^2 e^{-2\rho} + x_2^2 e^{-2\rho} - 2e^{-\rho}(x_1 \alpha + x_2 \beta) + \alpha^2 + \beta^2 = (1 - e^{-\rho})^2 \\ &\iff x_0 e^{-\rho} \cdot x_0 e^{-\rho} - 2e^{-\rho} \langle x_0, A' \rangle + \|A'\|^2 = (1 - e^{-\rho})^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\log \left(\frac{\sqrt{|y-x|^2 - |x \wedge y|^2} + |x|^2 - \langle x, y \rangle}{\sqrt{|y-x|^2 - |x \wedge y|^2} - |y|^2 + \langle x, y \rangle} \right) \leq \rho$$

es equivalente a

$$\|x_0\|^2 e^{-2\rho} - 2e^{-\rho} \langle x_0, y \rangle + \|y\|^2 \leq (1 - e^{-\rho})^2.$$

Esta desigualdad describe una bola euclidiana con centro en $z_0 = e^{-\rho} x_0$ y radio euclidiano $r = (1 - e^{-\rho})$. Observemos que la construcción geométrica tiene validez para cualquier bola unitaria $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $y \in B^+(x_0, \rho)$ si y sólo si $\|x_0\|^2 e^{-2\rho} - 2e^{-\rho} \langle x_0, y \rangle + \|y\|^2 \leq (1 - e^{-\rho})^2$. ■

Proposición 2.5 *Si Ω es la bola unitaria euclidiana y $B^-(x_0, \rho) \subset \Omega$ es la bola ciar de radio ρ con centro en x_0 en Ω , entonces $y \in B^-(x_0, \rho)$ si y sólo si $\|x_0\|^2 e^{2\rho} - 2e^\rho \langle x_0, y \rangle + \|y\|^2 \leq (e^\rho - 1)^2$.*

Demostración.

Sabemos de la proposición 2.3 que la bola ciar abierta $B^-(x, \rho)$ es la intersección de Ω con la imagen de Ω por la homotecia euclidiana de centro x_0 y factor de dilatación $(e^\rho - 1)$, seguida por la simetría central centrada en x_0 . Para proceder con la prueba nos auxiliaremos de la siguiente construcción:

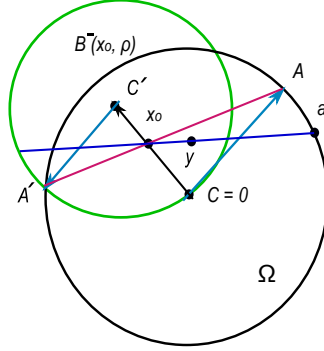
1. En la bola unitaria Ω con centro $C = 0$, trazamos un radio $r = \overline{CA}$ como se ilustra en la figura 2.4.
2. Consideremos el segmento que tiene por extremos a los puntos A y A' .

3. Ahora, considerando la bola homotética de Ω con centro en el punto C' notamos que al trazar el radio $r' = \overline{C'A'}$ antiparalelo al radio r , se generan los triángulos semejantes $\triangle A'x_0C'$ y $\triangle Ax_0C$ de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{x_0C'}}{\overline{x_0C}} &\iff \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{x_0 e^\rho - x_0}{x_0} \\ &\iff \overline{C'A'} = e^\rho - 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$r' = \overline{C'A'} = e^\rho - 1.$$



– **Figura 2.4** – Bola unitaria euclidiana y su bola ciar homotética

Considerando ahora las coordenadas cartesianas, tenemos que $A = (a_1, a_2)$, $A' = (\alpha, \beta)$, $x_0 = (x_1, x_2)$, $C' = (x_1 e^\rho, x_2 e^\rho)$, y $C = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, donde las coordenadas de A' son desconocidas. Sean L_1 y L_2 las rectas que pasan entre los puntos C' y A' , x_0 y A respectivamente. Entonces

$$L_1 = C' + \lambda(C' - A') = C' - \lambda A$$

y

$$L_2 = A + t(x_0 - A).$$

Para determinar las coordenadas del punto A' vamos a encontrar las condiciones bajo las cuáles se cumple la igualdad $L_1 = L_2$. Entonces

$$\begin{aligned} C' - \lambda A = A + t(x_0 - A) &\implies C' - A = t(x_0 - A) + \lambda A \\ &\implies (x_1 e^\rho, x_2 e^\rho) - (a_1, a_2) = t((x_1, x_2) - (a_1, a_2)) + \lambda(a_1, a_2) \\ &\implies (x_1 e^\rho - a_1, x_2 e^\rho - a_2) = (t(x_1 - a_1) + \lambda a_1, t(x_2 - a_2) + \lambda a_2) \\ &\iff \begin{cases} x_1 e^\rho - a_1 = t(x_1 - a_1) + \lambda a_1 \\ x_2 e^\rho - a_2 = t(x_2 - a_2) + \lambda a_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & a_1 \\ x_2 - a_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 e^\rho - a_1 \\ x_2 e^\rho - a_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos un sistema de ecuaciones en las variables λ y t . Si suponemos que la matriz de coeficientes D del sistema de ecuaciones es no singular, entonces su determinante es distinto de cero y la matriz inversa de la matriz D está dada por

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \text{Adj} D.$$

Así, multiplicando por la matriz inversa del sistema en ambos lados del sistema de ecuaciones obtenemos los valores para λ y t :

$$\begin{aligned} D^{-1} \begin{pmatrix} x_1 e^\rho - a_1 \\ x_2 e^\rho - a_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{x_1 a_2 - x_2 a_1} \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 \\ -(x_2 - a_2) & x_1 - a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 e^\rho - a_1 \\ x_2 e^\rho - a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1 a_2 - x_2 a_1} \begin{pmatrix} (x_1 a_2 - x_2 a_1) e^\rho \\ (x_1 a_2 - x_2 a_1) e^\rho - (x_1 a_2 - x_2 a_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^\rho \\ e^\rho - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$t = e^\rho$$

y

$$\lambda = e^\rho - 1.$$

En consecuencia,

$$L_1 = C' + (e^\rho - 1)A = x_0 e^\rho + A(e^\rho - 1)$$

y

$$L_2 = A + e^\rho(x_0 - A) = x_0 e^\rho + A(1 - e^\rho),$$

pues las rectas entre los puntos C' , A' y C , A son antiparalelas.

Por lo tanto,

$$H(a_1, a_2) = e^\rho \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^\rho - 1 & 0 \\ 0 & e^\rho - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

es la regla de correspondencia de la homotecia seguida de una simetría central para una bola ciar.

Por otro lado, de la construcción geométrica y de la proposición 1.42 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = \frac{1}{e^\rho - 1} &\iff \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{\sqrt{(x_1 e^\rho - \alpha)^2 + (x_2 e^\rho - \beta)^2}} = \frac{1}{e^\rho - 1} \\ &\iff \frac{1}{(x_1 e^\rho - \alpha)^2 + (x_2 e^\rho - \beta)^2} = \frac{1}{(e^\rho - 1)^2} \\ &\iff (x_1 e^\rho - \alpha)^2 + (x_2 e^\rho - \beta)^2 = (e^\rho - 1)^2 \\ &\iff x_1^2 e^{2\rho} + x_2^2 e^{2\rho} - 2e^\rho(x_1 \alpha + x_2 \beta) + \alpha^2 + \beta^2 = (e^\rho - 1)^2 \\ &\iff x_0 e^\rho \cdot x_0 e^\rho - 2e^\rho \langle x_0, A' \rangle + \|A'\|^2 = (e^\rho - 1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\log \left(\frac{\sqrt{|x - y|^2 - |x \wedge y|^2} + |y|^2 - \langle x, y \rangle}{\sqrt{|x - y|^2 - |x \wedge y|^2} - |x|^2 + \langle x, y \rangle} \right) \leq \rho$$

es equivalente a

$$\|x_0\|^2 e^{2\rho} - 2e^\rho \langle x_0, y \rangle + \|y\|^2 \leq (e^\rho - 1)^2.$$

Esta desigualdad describe una bola euclidiana con centro en $z_0 = e^\rho x_0$ y radio euclidiano $r = (e^\rho - 1)$. Observemos que la construcción geométrica es válida para cualquier bola unitaria $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, $y \in B^-(x_0, \rho)$ si y sólo si $\|x_0\|^2 e^{2\rho} - 2e^\rho \langle x_0, y \rangle + \|y\|^2 \leq (e^\rho - 1)^2$. ■

Corolario 2.6 *Si Ω es un dominio convexo propio en \mathbb{R}^n , entonces podemos reconstruir la frontera $\partial\Omega$ de Ω de la geometría local de cualquier punto de Ω .*

Demostración. Al considerar una bola avante en Ω con centro en x_0 sabemos, por la proposición 2.2, que su frontera es la imagen de la frontera de Ω por una homotecia euclidiana. Así, la frontera de Ω es la imagen de la frontera de la bola avante bajo una homotecia. ■

Corolario 2.7 *Para cualesquiera puntos x y x' en un dominio convexo Ω equipado con su métrica de Funk y para cualesquiera dos números reales no negativos δ y δ' , las bolas avante $B^+(x, \delta)$ y $B^+(x', \delta')$ son homotéticas o traslaciones una de la otra.*

Demostración. Como las homotecias y traslaciones forman un grupo, al que llamaremos grupo de homotecias, entonces vamos a considerar dos transformaciones H_1 y H_2 como elementos en dicho grupo. Así, H_1 y H_2 son transformaciones invertibles y la composición entre estas y con las inversas es una transformación en el grupo de homotecias. De la proposición 2.4 consideramos la ecuación 2.1 de las homotecias seguidas de una traslación para las bolas adelante $B^+(x, \delta)$ y $B^+(x', \delta')$ en Ω dadas por

$$H_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\delta} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{-\delta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

y

$$H_2(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-\delta'} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\delta'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{-\delta'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Ahora vamos a calcular la transformación que lleva a una bola en la otra. Como la homotecia seguida de una traslación $H_1 : \Omega \rightarrow \Omega$ es una transformación invertible, entonces su inversa $H_1^{-1}(x, y)$ está dada por

$$\begin{aligned} H_1^{-1}(x, y) &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta})^2} \begin{pmatrix} 1 - e^{-\delta} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{-\delta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-\delta})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{-\delta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De tal manera que al efectuar la composición

$$\begin{aligned} (H_2 \circ H_1^{-1})(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 - e^{-\delta'} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\delta'} \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{(1 - e^{-\delta})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{-\delta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} + e^{-\delta'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - e^{-\delta'}}{1 - e^{-\delta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1 - e^{-\delta'})e^{-\delta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{\delta'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

obtenemos una transformación en la que el primer sumando de su regla de correspondencia es una homotecia, cuya razón es $\frac{1 - e^{-\delta'}}{1 - e^{-\delta}}$.

En particular, si la razón cumple que

$$\frac{1 - e^{-\delta'}}{1 - e^{-\delta}} = 1,$$

entonces la composición $(H_2 \circ H_1^{-1})(x, y)$ es una traslación y esto ocurre cuando δ' y δ tienden a infinito. Análogamente, consideremos la inversa $H_2^{-1}(x, y)$ de la homotecia seguida de una traslación $H_2 : \Omega \rightarrow \Omega$ de la bola adelante $B^+(x', \delta')$ tal que

$$H_2^{-1}(x, y) = \frac{1}{1 - e^{-\delta'}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{-\delta'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Efectuando la composición

$$\begin{aligned} (H_1 \circ H_2^{-1})(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 - e^{-\delta} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\delta} \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{(1 - e^{-\delta'})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{-\delta'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \right\} + e^{-\delta} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - e^{-\delta}}{1 - e^{-\delta'}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1 - e^{-\delta})e^{-\delta'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + e^{-\delta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

obtenemos una homotecia seguida de una traslación y en ambas composiciones se tiene la misma razón.

Así,

$$\frac{1 - e^{-\delta'}}{1 - e^{-\delta}} < 1 \text{ si y sólo si } \delta' < \delta$$

y

$$\frac{1 - e^{-\delta'}}{1 - e^{-\delta}} > 1 \text{ si y sólo si } \delta' > \delta.$$

Por tanto, para cualesquiera dos bolas existe una homotecia o una traslación que mapea a una en otra. ■

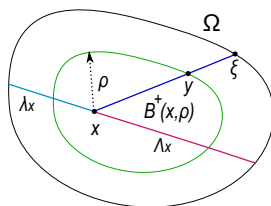
Corolario 2.8 *Para cualesquiera puntos x y x' en un dominio convexo Ω equipado con su métrica de Funk y para cualesquiera dos números reales no negativos suficientemente pequeños δ y δ' , las bolas ciar $B^-(x, \delta)$ y $B^-(x', \delta')$ son homotéticas o traslaciones una de la otra.*

Demostración. La prueba de este corolario es similar a la del corolario 2.7, al considerar la regla de correspondencia de la homotecia seguida de una simetría central de una bola ciar $B^-(x, \delta)$ obtenida en la proposición 2.5. ■

2.2. La topología de la métrica de Funk

En la presente sección consideraremos tanto la topología inducida por la métrica de Funk (y la métrica de Funk en su forma inversa) como la topología euclidiana en un dominio convexo propio Ω acotado. Veremos que las topologías coinciden. Por otro lado, notemos que si el dominio convexo Ω no es acotado, entonces la topología inducida no es la euclidiana, pues si $F_\Omega(x, y) = 0$, entonces todos los abiertos que contienen a x también contienen a y , y esto no sucede en la topología usual de \mathbb{R}^n .

Proposición 2.9 *La topología inducida por la métrica de Funk en un dominio convexo acotado Ω en \mathbb{R}^n coincide con la topología euclidiana en ese dominio.*



– Figura 2.5 –

Demostración. Como Ω es acotado en \mathbb{R}^n entonces Ω tiene frontera compacta. Fijemos un punto x en Ω . Entonces existen los números reales λ_x y Λ_x tales que $0 < \lambda_x \leq \Lambda_x$, y que adicionalmente cumplen que, para cualquier $\xi \in \partial\Omega$ se cumple que $\lambda_x \leq |\xi - x| \leq \Lambda_x$. Sea $B^+(x, \rho)$ una bola avante abierta en Ω con centro en x y radio ρ , entonces se sigue de la proposición 2.2 que para un punto

$$\begin{aligned} y \in \partial B^+(x, \rho) &\iff \log \frac{|x - \xi|}{|y - \xi|} = \rho \\ &\iff |x - \xi| = e^\rho (|y - \xi|) = e^\rho (|x - \xi| - |x - y|) \\ &\iff |x - \xi| (1 - e^\rho) = -e^\rho |y - x| \\ &\iff |x - \xi| (1 - e^{-\rho}) = |y - x|. \end{aligned}$$

De esta manera

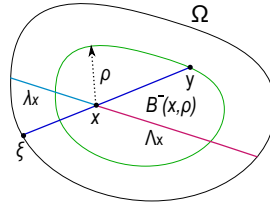
$$\begin{aligned} \lambda_x \leq |\xi - x| \leq \Lambda_x &\iff \lambda_x(1 - e^{-\rho}) \leq |\xi - x| (1 - e^{-\rho}) \leq \Lambda_x(1 - e^{-\rho}) \\ &\iff \lambda_x(1 - e^{-\rho}) \leq |y - x| \leq \Lambda_x(1 - e^{-\rho}). \end{aligned}$$

En otras palabras, si $B^\epsilon(x, \delta)$ es una bola euclidiana con centro en x y radio $\delta \in \{(1 - e^{-\rho})\lambda_x, (1 - e^{-\rho})\Lambda_x\}$, entonces

$$B^\epsilon(x, (1 - e^{-\rho})\lambda_x) \subset B^+(x, \rho) \subset B^\epsilon(x, (1 - e^{-\rho})\Lambda_x).$$

Por lo tanto, la familia de bolas avante abiertas $B^+(x, \rho)$ y las bolas euclidianas $B^\epsilon(x, \delta)$ son subbases para la misma topología. ■

Proposición 2.10 *La topología inducida por la métrica de Funk en su forma inversa en un dominio convexo acotado Ω en \mathbb{R}^n coincide con la topología euclidiana en ese dominio.*



– Figura 2.6 –

Demostración. Ahora probaremos el caso de la métrica de Funk en su forma inversa. Sea $B^-(x, \rho)$ una bola ciar abierta con centro en x . Entonces,

$$\begin{aligned} y \in \partial B^-(x, \rho) &\iff \log \frac{|y - \xi|}{|x - \xi|} = \rho \\ &\iff |y - \xi| = e^\rho |x - \xi| \\ &\iff |y - x| + |x - \xi| = e^\rho |x - \xi| \\ &\iff |y - x| = (e^\rho - 1) |x - \xi|. \end{aligned}$$

Por lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_x \leq |x - \xi| \leq \Lambda_x &\iff \lambda_x(e^\rho - 1) \leq |x - \xi| (e^\rho - 1) \leq \Lambda_x(e^\rho - 1) \\ &\iff \lambda_x(e^\rho - 1) \leq |y - \xi| \leq \Lambda_x(e^\rho - 1). \end{aligned}$$

Para que las bolas homotéticas estén contenidas en Ω pedimos que $e^\rho - 1 \leq 1$, esto es, $\rho \leq \log(2)$. Por lo tanto,

$$B^\epsilon(x, (e^\rho - 1)\lambda_x) \subset B^-(x, \rho) \subset B^\epsilon(x, (e^\rho - 1)\Lambda_x).$$

Así, las bolas ciar abiertas y las bolas euclidianas generan la misma topología. ■

Para la prueba de la proposición 2.15 y 2.22 nos auxiliaremos de los siguientes resultados que pueden consultarse en [4].

Proposición 2.11 *Sean X y Y espacios métricos. $f : X \rightarrow Y$ es continua en el punto $x \in X$ si y sólo si para cualquier sucesión (x_k) en X tal que $x_k \rightarrow x$ en X se cumple que $f(x_k) \rightarrow f(x)$ en Y .*

Definición 2.12 (Convergencia uniforme.) Sean S un conjunto y X un espacio métrico. Una sucesión de funciones $f_k : S \rightarrow X$, $k \in \mathbb{N}$ converge uniformemente en S a una función $f : S \rightarrow X$ si, dada $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_x(f_k(z), f(z)) < \epsilon$ para todo $k \geq N_0$, para todo $z \in S$.

Teorema 2.13 Si K es un subconjunto compacto de X entonces toda sucesión $(x_n) \subseteq K$ contiene una subsucesión que converge en X a un elemento de K .

Teorema 2.14 Sean Z y X espacios métricos. Si $f_k : Z \rightarrow X$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$ y (f_k) converge uniformemente a f en Z , entonces $f : Z \rightarrow X$ es continua.

Si bien no siempre se obtiene la topología euclidiana cuando Ω no es acotado, se tiene que la métrica de Funk es continua. Esto es, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.15 Para cualquier dominio convexo propio Ω en \mathbb{R}^n , la métrica de Funk F_Ω es una función continua en $\Omega \times \Omega$ bajo la topología inducida por \mathbb{R}^n .

Demostración. Para realizar la prueba, vamos a considerar dos casos:

Caso 1. Supongamos que Ω es acotado.

Sean x, y dos puntos distintos en Ω y sean (x_n) y (y_n) sucesiones en Ω que convergen a x y y respectivamente. Así, la sucesión $(a_n) = a_\Omega(x_n, y_n)$ está bien definida y converge a $a = a_\Omega(x, y)$. Como $a \neq y$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_\Omega(x_n, y_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{|x_n - a_n|}{|y_n - a_n|} \\ &= \log \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n - a_n|}{|y_n - a_n|} \right) \\ &= \log \frac{|x - a|}{|y - a|} \\ &= F_\Omega(x, y) < \infty. \end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que $x = y$ y sean $(x_n), (y_n) \in \Omega$ sucesiones que convergen a x tales que $x_n \neq y_n$ para todo n . Así,

$$\begin{aligned} F_\Omega(x_n, y_n) &= \log \frac{|x_n - a_n|}{|y_n - a_n|} \\ &= \log \frac{|(y_n - a_n) + (x_n - y_n)|}{|y_n - a_n|} \\ &\leq \log \left(1 + \frac{|x_n - y_n|}{|y_n - a_n|} \right). \end{aligned}$$

Como la sucesión $(y_n) \in \Omega$ converge a x en Ω , entonces, mediante el uso de la desigualdad anterior, el hecho de que

$$\delta = \sup_{b \in \partial\Omega} |y_n - b|^{-1} < \infty,$$

y que Ω es acotado, obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\Omega}(x_n, y_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + \delta |x_n - y_n|) \\ &= \log \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \delta |x_n - y_n|) \right) \\ &= \log(1 + \delta \cdot 0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pues $|x_n - y_n|$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Como consecuencia, se sigue de la proposición 2.11 que $F_{\Omega}(x_n, y_n)$ converge puntualmente a $F_{\Omega}(x, y)$ cuando n tiende a infinito. Por lo tanto, F_{Ω} es continua en $\Omega \times \Omega$.

Caso 2. Ahora consideremos que el conjunto Ω no es acotado.

Sea $\Omega_R = \Omega \cap B^{\epsilon}(0, R)$, donde $B^{\epsilon}(0, R)$ es una bola euclidiana de radio R centrada en el origen. Sea $\Omega'_R \subseteq \Omega_R$ un conjunto compacto. Sean (x_n) y (y_n) sucesiones en Ω'_R que convergen a x y y respectivamente. Entonces, se sigue del teorema 2.13 que las sucesiones $(x_n), (y_n) \in \Omega'_R$ contienen una subsucesión que converge puntualmente en Ω_R a $x, y \in \Omega'_R$ respectivamente. En este caso, por la proposición 2.11, la sucesión de Funk $F_{\Omega_R} : \Omega_R \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_{\Omega_R} = \log \frac{|x_n - a_n|}{|y_n - a_n|}$$

converge puntualmente a F_{Ω} para todo $x, y \in \Omega_R$ cuando n tiende a infinito. Así, F_{Ω_R} converge puntualmente a F_{Ω} . Luego $|F_{\Omega_R} - F_{\Omega}| = 0 < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, de la definición 2.12, F_{Ω_R} converge uniformemente a F_{Ω} . Por lo tanto, se sigue del teorema 2.14 que F_{Ω} es continua cuando $R \rightarrow \infty$. ■

2.2.1. Otras propiedades topológicas de la métrica de Funk

Definición 2.16 A un conjunto X junto con una métrica débil δ definida en él lo llamamos espacio métrico débil y lo denotamos con (X, δ) . Una sucesión (x_k) en X es acotada avante si su supremo de distancias (débiles) cumple que $\sup_{m \geq k} \delta(x_k, x_m) < \infty$, donde el supremo es tomado sobre todos los pares de números k y m , con $m \geq k$.

Nótese que esta definición corresponde a la noción usual de sucesión acotada en el caso de un espacio métrico (simétrico).

Recordemos que un espacio métrico es propio si toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente.

Definición 2.17 Decimos entonces que el espacio métrico débil (X, δ) es propio avante si cada sucesión acotada avante tiene una subsucesión convergente.

Definición 2.18 En un espacio métrico débil la sucesión (x_k) es Cauchy avante si $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{m \geq k} \delta(x_k, x_m) = 0$.

Definición 2.19 El espacio métrico débil (X, δ) es completo avante si toda sucesión de Cauchy avante converge.

Definición 2.20 Una sucesión (x_k) en X es acotada avante si $\sup_{k \geq m} \delta(x_m, x_k) < \infty$, donde el supremo es tomado sobre todos los pares de números k y m , con $k \geq m$.

Los conceptos de espacio métrico débil *propio ciar*, sucesión de *Cauchy ciar* y espacio métrico débil *completo ciar* los definimos de manera similar a los conceptos avante.

En la prueba de la proposición 2.22 usaremos el siguiente resultado.

Teorema 2.21 Teorema de Heine-Borel. *Sea K un subconjunto de \mathbb{R}^n . Entonces, K es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

Proposición 2.22 *Un dominio convexo propio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ junto con su métrica de Funk es propio avante (y en particular completo avante) si y sólo si Ω es acotado. Por otro lado, un dominio convexo Ω con su métrica de Funk nunca es completo ciar.*

Demostración. Iniciaremos mostrando por contrapositiva la condición necesaria de la equivalencia: Si Ω no es acotado, entonces la métrica de Funk en un dominio convexo no es propio avante.

Como Ω no es acotado entonces contiene un rayo afín. Sea (x_k) una sucesión divergente en dicho rayo. Entonces $F_\Omega(x_k, x_m) = 0$ para cualquier $k \leq m$, pues $a_\Omega(x_k, x_m)$ está en el hiperplano al infinito. Así, $\sup F_\Omega(x_k, x_m) = 0 < \infty$ por lo que la sucesión (x_k) es acotada avante, pero no contiene subsucesiones convergentes, pues las sucesiones se toman en el rayo afín. En consecuencia, si Ω no es acotado, entonces (Ω, F_Ω) no es propio avante. Por tanto, si la métrica de Funk en un dominio convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es propia avante entonces Ω es acotado.

Ahora probaremos la condición suficiente de la equivalencia. En la proposición 2.9 probamos que para un dominio convexo se tienen las siguientes contenciones

$$B^\epsilon(x, (1 - e^{-\rho})\lambda_x) \subset B^+(x, \rho) \subset B^\epsilon(x, (1 - e^{-\rho})\Lambda_x).$$

Esto nos dice que una bola avante abierta es acotada. Sea $\overline{B}^+(x, \rho)$ la cerradura de la bola avante $B^+(x, \rho)$ en Ω . Como $\overline{B}^+(x, \rho)$ es cerrada y la bola avante es acotada, por el teorema de Heine - Borel la cerradura de la bola avante es compacta. Por el teorema 2.13, para toda sucesión (x_k) existe una subsucesión convergente x_{k_j} en $\overline{B}^+(x, \rho)$. Entonces (x_k) es una sucesión avante acotada en $\overline{B}^+(x, \rho) \subset \Omega$. Así, F_Ω es propia avante.

Por último, veremos que Ω equipado con F_Ω nunca es completo ciar. Para esto, exhibiremos una sucesión de Cauchy ciar que no es convergente. Sea $[a, b]$ un segmento afín en \mathbb{R}^n con $a \neq b$ tal que $[a, b] \cap \partial\Omega = \{a, b\}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $x_k = b + \frac{1}{k}(a - b)$. Si $m \geq k$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F_\Omega(x_k, x_m) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \log \left(\frac{|x_k - a_k|}{|x_m - a_k|} \right) \\ &= \log \left(\frac{b - a}{b - a} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pues x_k tiende a b cuando k tiende a infinito. Como Ω es abierto, (x_k) no converge en Ω . Por tanto, F_Ω no es completa ciar. ■

Capítulo 3

La desigualdad del triángulo y geodésicas

En este capítulo probaremos la desigualdad del triángulo para la métrica de Funk y daremos una condición necesaria y suficiente para el caso de la igualdad. También describiremos las geodésicas de esta métrica.

3.1. Preliminares de geometría convexa

Para la prueba del teorema de la desigualdad del triángulo nos auxiliaremos de las siguientes definiciones y resultados de geometría convexa.

3.1.1. Caras de un conjunto convexo cerrado

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio convexo. Se sabe que su cerradura $\bar{\Omega}$ también es un conjunto convexo.

Definición 3.1 *Un subconjunto convexo $D \subset \bar{\Omega}$ es una cara de $\bar{\Omega}$ si para cualesquiera x, y en la cerradura de Ω y para cualquier $\lambda \in (0, 1)$ tenemos que si $(1 - \lambda)x + \lambda y \in D$, entonces $[x, y] \subset D$.*

Dado que Ω es un dominio convexo abierto, consideraremos que las caras de Ω son las caras de su cerradura $\bar{\Omega}$.

Si Ω es un polítopo¹ en \mathbb{R}^n , entonces las caras de Ω son clasificadas de acuerdo a su dimensión como sigue: Caras de dimensión cero son llamadas vértices, caras de dimensión uno son llamadas lados o aristas y todas las caras de dimensión d con $1 < d < n$ son llamadas *facetas de dimensión d* .

Ejemplos.

1. Consideremos el cuadrado unitario C en \mathbb{R}^2 tal que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Entonces, C tiene cuatro caras de dimensión cero y cuatro caras de dimensión uno. Estas caras son los vértices (x, y) con $x, y \in \{0, 1\}$ y los segmentos $[(0, 0), (1, 0)]$, $[(1, 0), (1, 1)]$, $[(1, 1), (0, 1)]$ y $[(0, 1), (0, 0)]$ respectivamente.

2. Sea $\bar{B}(x, \rho) \subset \mathbb{R}^n$ una bola euclidiana cerrada. Entonces cada punto frontera de $\bar{B}(x, \rho)$ es una cara.

3. En el caso de un tetraedro en \mathbb{R}^3 , las caras están dadas por sus 4 vértices de dimensión cero, sus 6 aristas de dimensión uno, y cuatro facetas de dimensión dos.

¹Un polítopo convexo abierto Ω en \mathbb{R}^n es un conjunto determinado por la intersección de un número finito de semi-espacios.

En un conjunto convexo Ω , el conjunto vacío y la cerradura de Ω también son considerados caras de Ω y se les denomina *caras impropias de Ω* .

3.1.2. Caras propias y caras expuestas

Definición 3.2 Una cara $D \subset \overline{\Omega}$ es llamada propia si $D \neq \overline{\Omega}$ y $D \neq \emptyset$. Una cara propia D de Ω es una cara propia de su cerradura.

Ejemplos.

1. En el caso del cuadrado unitario C tenemos como caras propias a sus vértices y los segmentos que conforman sus lados.

2. En la bola euclidiana $\overline{B}(x, \rho) \subset \mathbb{R}^n$ cada uno de sus puntos frontera es una cara propia.

Definición 3.3 Decimos que una cara $D \subset \overline{\Omega}$ es expuesta si existe un hiperplano de soporte H para Ω tal que $D = H \cap \overline{\Omega}$. Recordemos que un hiperplano de soporte de Ω es un hiperplano H que interseca $\partial\Omega$ y $H \cap \Omega = \emptyset$.

Ejemplos.

1. Nuevamente, considerando el cuadrado unitario C , sus caras expuestas son sus lados y sus vértices.

2. En el caso de una bola euclidiana cerrada $\overline{B}(x, \rho) \subset \mathbb{R}^n$ sus caras expuestas son cada uno de sus puntos frontera.

3. En el caso en que Ω es la unión de un cono con un hemisferio (en forma de helado), sus caras expuestas son cada uno de sus puntos frontera en el caso del hemisferio y para el cono las caras expuestas son cada uno de los segmentos que lo conforman.

Definición 3.4 Decimos que una cara propia maximal de Ω es aquella que no está contenida en ninguna otra cara propia de Ω .

Lema 3.5 (i) Toda cara propia está contenida en una cara expuesta.

(ii) Toda cara propia maximal es expuesta.

Demostración. (i) Sea Ω un dominio convexo de \mathbb{R}^n . Sea A una cara propia de $\overline{\Omega}$.

Caso 1. Si el interior de A es el vacío (esto es, A es un punto), consideremos un hiperplano de soporte en $A = \{p\}$, entonces la intersección del hiperplano de soporte en A con la cerradura de Ω es una cara expuesta B que contiene a p . Así, p está contenido en B , es decir, A está contenido en B .

Caso 2. Ahora supongamos que el interior de A es distinto del vacío. Sea $x \in A$ y B una cara expuesta que interseca el $\text{int}A$. Tomemos un punto $z \in B \cap \text{int}A$. Si el punto x es distinto de z , entonces existe un punto $y \in A$ tal que $z \in [x, y]$, pues $z \in \text{int}A$. Como $x, y \in \Omega$ y existe t tal que $z = (1-t)x + ty \in B$ con B cara, entonces el segmento $[x, y]$ está contenido en B , entonces los puntos x, y están en B . Para completar la prueba, si $x = z$, entonces el singulete $\{x\}$ está contenido en B . Por lo tanto, $A \subset B$.

(ii) Por otro lado, Si A es una cara propia maximal, entonces A es diferente del vacío, diferente de la cerradura de Ω y no está contenida en otra cara propia de Ω . En consecuencia, A es una cara propia de Ω .

Por el inciso (i) del lema 3.5, existe B una cara expuesta de Ω tal que A está contenida en B . Como A es una cara maximal y B es una cara expuesta, entonces $A = B$, y por lo tanto, A es una cara expuesta. ■

3.1.3. Puntos expuestos y puntos extremos

Definición 3.6 *Un punto $x \in \partial\bar{\Omega}$ es un punto expuesto de Ω si $\{x\}$ es una cara expuesta, esto es, si existe un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ tal que $H \cap \bar{\Omega} = \{x\}$.*

Ejemplos.

En el cuadrado unitario C los puntos expuestos son los vértices. En el caso de una bola euclidiana cerrada $\bar{B}(x, \rho)$ contenida en \mathbb{R}^n , sus puntos expuestos son sus puntos frontera.

En el siguiente teorema enunciamos un resultado de Straszewicz cuya prueba puede ser consultada en [17, teorema 18.6].

Teorema 3.7 (Straszewicz) *Si Ω es acotado, entonces $\bar{\Omega}$ es la cerradura de la cáscara envolvente convexa de sus puntos expuestos.*

Definición 3.8 *Un punto $x \in \bar{\Omega}$ es un punto extremo de Ω si $\bar{\Omega} \setminus \{x\}$ es aún un conjunto convexo.*

Notemos que un punto extremo pertenece a la frontera $\partial\Omega$ de Ω .

Ejemplos.

En una circunferencia cada punto frontera es un punto extremo y en el cuadrado unitario sus vértices son puntos extremos.

La demostración del teorema de Krein-Milman que se enuncia a continuación puede ser consultada en [9, teorema 3.7.13].

Teorema 3.9 (Krein-Milman) *Si Ω es acotado, entonces $\bar{\Omega}$ es la cerradura convexa de sus puntos extremos.*

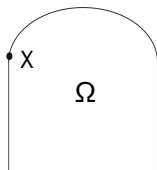
Lema 3.10 *Todo punto expuesto es un punto extremo.*

Demostración. Haremos la prueba por contradicción. Recordemos que H es un hiperplano de soporte de Ω en p entonces existe un funcional lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \alpha\}$, donde α es una constante. Notemos también que $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}$ y en particular $f(p) = \alpha$. Por hipótesis, como p es un punto expuesto de $\bar{\Omega}$ tenemos que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. Sean $x, y \in \Omega \setminus \{p\}$ tales que $p = (1 - \lambda)x + \lambda y$ para un $\lambda \in [0, 1]$, pues p no es un punto extremo. Considerando que f es un funcional lineal tenemos

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) < (1 - \lambda)\alpha + \lambda\alpha = \alpha.$$

Así, $f(p) < \alpha$. Pero esto es una contradicción. Por lo tanto, p es un punto extremo. ■

Observación 3.11 *No todo punto extremo es un punto expuesto.*



– Figura 3.1 –

Demostración. Sean x y Ω como se muestran en la figura 3.1. Entonces x es un punto extremo, pero no es un punto expuesto, pues la intersección entre el único hiperplano de soporte H en x y la cerradura de Ω es un conjunto distinto del unitario de x , a saber, la arista vertical izquierda de Ω . ■

En la demostración del lema 3.15 emplearemos el teorema 3.12 el cual puede ser consultado en [9, teorema 3.7.8]

Teorema 3.12 *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio convexo cerrado, un punto $p \in \Omega$ es un punto extremo de Ω si y sólo si p no es un punto medio de algún segmento contenido en Ω . Esto es, x es un punto extremo de Ω si x no es un punto interior de algún intervalo cerrado contenido en la frontera de Ω .*

Definición 3.13 *Un dominio convexo propio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es estrictamente convexo si cada punto frontera de Ω es un punto extremo.*

El siguiente lema nos da otras dos maneras para determinar cuándo un dominio convexo propio es estrictamente convexo. Además nos auxiliaremos de la siguiente definición para su prueba.

Definición 3.14 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convexo cerrado y S una cara de C . El interior de S es el conjunto de puntos de S que no están en la unión de las caras propias de C .*

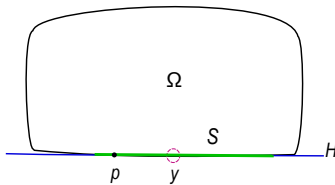
Lema 3.15 *Las siguientes condiciones son equivalentes para un dominio convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:*

- (i) *Cada punto frontera de Ω es un punto extremo.*
- (ii) *Cada punto frontera de Ω es un punto expuesto.*
- (iii) *La frontera $\partial\Omega$ no contiene ningún segmento no trivial.*

Demostración. Probaremos que (i) implica (ii) por contradicción. Como p no es un punto expuesto, entonces todo hiperplano de soporte H en p cumple que la intersección con la cerradura de Ω contiene a p y otros puntos, esto es, $H \cap \bar{\Omega} = S \neq \{p\}$ (Ver figura 3.2). Así, como H y la cerradura de Ω son convexos, entonces S es convexo. Y en particular, el interior de S es convexo. Sea $y \in \text{int}S \cap \partial\Omega$. Como y está en la frontera de Ω , por hipótesis y es un punto extremo. Entonces, $(\text{int}S \cap \partial\Omega) \setminus \{y\}$ es convexo. Pero esto es una contradicción, pues y es un punto en $\text{int}S$.

Usando el lema 3.10 tenemos que (ii) es equivalente a (i).

Así, para terminar la demostración del lema 3.15, basta que veamos ahora que cada punto frontera es un punto extremo si y sólo si la frontera $\partial\Omega$ no contiene ningún segmento no trivial.



– Figura 3.2 –

Probemos que (iii) implica (ii) por contradicción. Supongamos que el intervalo cerrado $[u, v]$ está contenido en la frontera $\partial\Omega$. En particular si p es un punto interior de $[u, v]$. Entonces, p no es un punto extremo. Pero esto es una contradicción, pues por hipótesis todos los puntos son extremos.

Ahora probemos que (ii) implica (iii). Como la frontera $\partial\Omega$ no contiene ningún segmento no trivial $[u, v]$, entonces p no es el punto medio de un segmento contenido en la frontera de Ω . Pero tampoco es el punto medio de algún segmento contenido en la cerradura de Ω , pues p está en la frontera de Ω . Se sigue del teorema 3.12 que el punto $p \in \partial\Omega$ es un punto extremo de Ω . ■

Lema 3.16 *Sea Ω un dominio convexo propio de \mathbb{R}^n y x, y, z tres puntos en Ω . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Existe una cara propia $D \subset \tilde{\Omega}$ tal que $a_\Omega(x, y), a_\Omega(y, z), a_\Omega(x, z) \in D$.*

(b) *Existe una recta L contenida en $\mathbb{R}P^n$ que no interseca a Ω y tal que $a_\Omega(x, y), a_\Omega(y, z)$ y $a_\Omega(x, z) \in L$.*

Demostración.

Consideremos que los puntos $a = a_\Omega(x, y)$, $b = a_\Omega(y, z)$ y $c = a_\Omega(x, z)$ están en una cara propia D de Ω . Si los puntos $x, y, z \in \Omega$ están alineados, entonces $a = b = c$ y se tiene que (a) implica (b) para este caso. Por otro lado, si x, y, z no son colineales, entonces los puntos a, b y c son elementos del plano Π determinados por los puntos x, y y z . Por hipótesis, a, b y c pertenecen a una cara propia D , entonces a, b y c son elementos del segmento de recta conformado por la intersección entre la cara propia D y el plano Π . Tomemos en cuenta que el plano Π es transversal a D , así, el plano Π no está contenido en D y viceversa, pues x, y, z no están en D . Por lo tanto, los puntos a, b y c están alineados en $\mathbb{R}P^n$.

Recíprocamente, supongamos que a, b y c son tres puntos alineados en $\mathbb{R}P^n$. Si a, b y c están en una línea recta L contenida en el hiperplano al infinito, entonces están en una cara propia de Ω , a saber, el hiperplano al infinito. Ahora, si a, b y c están en una línea recta L de $\mathbb{R}P^n$ que no interseca a Ω , pero al menos uno de los puntos a, b y c no está en el hiperplano al infinito, entonces L no está contenida en la recta al infinito. Sin pérdida de generalidad, supongamos que a es uno de los puntos que no están en el hiperplano al infinito, entonces L interseca al hiperplano de soporte H en a . Como L no es transversal a H dado que a, b y c están en L , entonces L está contenida en H . Por otro lado, como a, b y c están en la frontera de $\tilde{\Omega}$ entonces L está contenida en la frontera de $\tilde{\Omega}$. En consecuencia, $L \subset H \cap \tilde{\Omega}$, por lo tanto, a, b y c están en una cara expuesta y por el inciso (ii) del lema 3.5, a, b y c están en una cara propia. ■

3.2. Desigualdad del triángulo

Teorema 3.17 (Desigualdad del triángulo.) *Si x, y, z son tres puntos en un dominio convexo propio Ω , entonces se asegura la desigualdad del triángulo $F_\Omega(x, z) \leq F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z)$. Mas aún, tenemos la igualdad $F_\Omega(x, z) = F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z)$ si y sólo si los tres puntos $a_\Omega(x, y), a_\Omega(y, z)$ y $a_\Omega(x, z)$ están en una línea recta L contenida en $\mathbb{R}P^n$ que no interseca a Ω .*

Demostración. Sabemos que la métrica de Funk es no negativa, es decir, $F_\Omega(x, y) \geq 0$.

I) Supongamos que $F_\Omega(x, z) = 0$, lo cual ocurre cuando $c = a_\Omega(x, z) \in \tilde{\partial}\Omega \cap \tilde{R}(x, z)$ está en el hiperplano al infinito H_∞ . Entonces la desigualdad se cumple trivialmente, pues

$$0 = F_\Omega(x, z) \leq F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z).$$

Por otro lado, se cumple la igualdad $F_\Omega(x, z) = 0 = F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z)$ si y sólo si $F_\Omega(x, y) = 0 = F_\Omega(y, z)$, lo cual es equivalente a que $a, b \in H_\infty$ ($a = a_\Omega(x, y)$, $b = b_\Omega(y, z)$). Así, a, b, c están en la misma cara y por el lema 3.16 a, b, c están alineados en una recta L que no interseca a Ω .

II) Consideremos ahora que la métrica de Funk satisface que $F_\Omega(x, z) > 0$.

Supongamos que $c \notin H_\infty$ y sea h un funcional lineal tal que $h(c) = 1$. De la proposición 1.19 y del corolario 1.26 la métrica de Funk satisface que

$$\begin{aligned} F_\Omega(x, z) &= \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(z)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(z)} \cdot \frac{1 - h(y)}{1 - h(y)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \cdot \frac{1 - h(y)}{1 - h(z)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) + \log \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(z)} \right) \\ &\leq F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F_\Omega(x, z) \leq F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z)$.

Ahora veamos que $F_\Omega(x, z) = F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z)$ si y sólo si a, b, c están en una línea recta L contenida en $\mathbb{R}P^n$ que no interseca a Ω . Empleando nuevamente el corolario 1.26 se muestra que la igualdad

$$F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z) = \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) + \log \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(z)} \right)$$

se cumple si y sólo si las dos siguientes igualdades se cumplen:

$$F_\Omega(x, y) = \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \quad \text{y} \quad F_\Omega(y, z) = \log \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(z)} \right).$$

Probando la condición de suficiencia tenemos que si

$$F_\Omega(x, y) = \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \quad \text{y} \quad F_\Omega(y, z) = \log \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(z)} \right),$$

entonces $F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z) = \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) + \log \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(z)} \right)$ se cumple.

Ahora probemos la condición necesaria por contradicción. Si suponemos que

$$F_\Omega(x, y) < \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \quad \text{y} \quad F_\Omega(y, z) < \log \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(z)} \right),$$

entonces

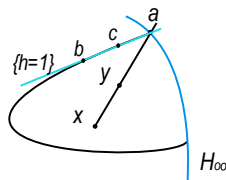
$$F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z) < \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) + \log \left(\frac{1 - h(y)}{1 - h(z)} \right),$$

pero esto es una contradicción, pues por hipótesis se cumple la igualdad. Por lo tanto,

$$F_{\Omega}(x, z) = F_{\Omega}(x, y) + F_{\Omega}(y, z).$$

De acuerdo al corolario 1.26 las igualdades $F_{\Omega}(x, y) = \log\left(\frac{1-h(x)}{1-h(y)}\right)$ y $F_{\Omega}(y, z) = \log\left(\frac{1-h(y)}{1-h(z)}\right)$ se cumplen si y sólo si uno de los siguientes casos se aseguran:

Caso (i). $a, b \notin H_{\infty}$. En este caso $h(a) = h(b) = 1 = h(c)$. Por tanto, los puntos a, b y c están en la cara expuesta $D = \partial\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 1\}$. Así, por el lema 3.16 concluimos que a, b, c están en una línea recta L contenida en $\mathbb{R}P^n$.



– Figura 3.3 –

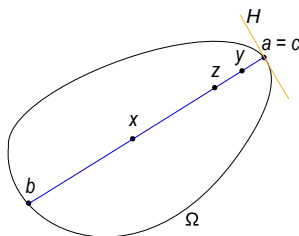
Caso (ii). Supongamos que $a \in H_{\infty}$ y $b \notin H_{\infty}$. Entonces se cumple que $h(b) = h(c) = 1$ y $h(x) = h(y)$. Sea el conjunto $\{\omega \in \mathbb{R}^n : h(\omega) = 1\}$ un hiperplano de nivel 1 determinado por h , en particular esto se cumple para los puntos b y c como se muestra en la figura 3.3. Ahora, como $h(x) = h(y)$, entonces x y y están en el mismo hiperplano determinado por h (a un nivel distinto de 1) y como es un hiperplano de nivel, es paralelo al hiperplano H que contiene a los puntos a y c . Como el hiperplano H y el hiperplano de nivel determinado por h son paralelos, entonces se intersecan en el infinito. Por lo tanto, a que está en el hiperplano al infinito, también está en el hiperplano H . Del lema 3.16 concluimos que $a, b, c \in D = \tilde{\partial}\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 1\}$ están en una línea recta L contenida en $\mathbb{R}P^n$.

Caso (iii). Supongamos ahora que $a \notin H_{\infty}$ y $b \in H_{\infty}$. Los argumentos son los mismos que en el caso (ii).

Caso (iv) Supongamos que $a \in H_{\infty}$ y $b \in H_{\infty}$. En este caso $h(x) = h(y)$ y $h(y) = h(z)$. Como $c \notin H_{\infty}$, entonces $c = x + \lambda(z - x)$. Así, $h(c) = 1 = h(x) + \lambda(h(z) - h(x))$. Luego $h(c) = 1 = h(x) < 1$. Pero esto es una contradicción. En consecuencia, este caso no es posible. Por lo tanto, en todos los casos se cumple la igualdad si y sólo si los tres puntos $a, b, c \in D$ están en una línea recta L contenida en $\mathbb{R}P^n$. ■

Corolario 3.18 Sean x y z dos puntos en un dominio convexo propio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que $a_{\Omega}(x, z) \in \partial\Omega$ es un punto expuesto. Si y es un punto que no pertenece al segmento afín $[x, z]$, entonces se cumple la desigualdad

$$F_{\Omega}(x, z) < F_{\Omega}(x, y) + F_{\Omega}(y, z).$$



– Figura 3.4 –

Demostración. Haremos la prueba por contrapositiva. Supongamos que no se cumple la desigualdad, en consecuencia tenemos la igualdad $F_\Omega(x, z) = F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z)$. Entonces por el lema 3.16 los puntos $a = a_\Omega(x, y)$, $b = a_\Omega(y, z)$ y $c = a_\Omega(x, z)$ están en una línea recta L contenida en $\mathbb{R}P^n$ que no interseca a Ω . En particular, como $c = a_\Omega(x, y)$ es un punto expuesto, existe un hiperplano de soporte H en c tal que $H \cap \partial\Omega = \{c\}$ (ver figura 3.4). Por definición, a y b están en la frontera de Ω , en consecuencia, $a = b = c$. Así, $y \in [x, z]$. ■

3.3. Geodésicas y convexidad en la geometría de Funk

Este apartado está enfocado en la descripción de las geodésicas con la geometría de Funk. Previo a esto, presentamos la definición de geodésica, entre otras, en un espacio métrico débil.

Definición 3.19 Una trayectoria en un espacio métrico débil (X, d) es una función continua $\gamma : I \rightarrow X$, donde I es un intervalo de la recta real. La longitud de la trayectoria $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ está definida como

$$\text{Longitud}(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

donde el supremo es tomado sobre todas las subdivisiones $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$.

Note que en este caso, como d es una métrica débil, entonces no es simétrica y por lo tanto el orden de los argumentos es importante.

Definición 3.20 Sea (X, d) un espacio métrico débil. La trayectoria $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es una geodésica en X si la métrica débil d cumple que $d(\gamma(a), \gamma(b)) = \text{Longitud}(\gamma)$.

Definición 3.21 Un espacio métrico débil (X, d) es geodésico, si para cualesquiera dos puntos en X hay una geodésica γ que los une.

Definición 3.22 Decimos que un espacio métrico débil geodésico (X, d) cumple con la propiedad de unicidad en geodésicas si para cualquier pareja de puntos x y y en X existe, salvo reparametrizaciones, una única geodésica en X que une x con y .

Definición 3.23 Sea (X, d) un espacio métrico débil. Un subconjunto $A \subset X$ es geodésicamente convexo si dados cualesquiera dos puntos en A , cualquier geodésica γ que los une está contenida en A .

Lema 3.24 Sea (X, d) un espacio métrico débil. Una trayectoria $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es una geodésica si y sólo si para cualesquiera $t_1, t_2, t_3 \in [a, b]$ que satisfaciendo $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ cumplen la igualdad

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_3)) = d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + d(\gamma(t_2), \gamma(t_3)).$$

Demostración. Sean P_1 y P_2 particiones de los intervalos $[t_1, t_2]$ y $[t_2, t_3]$ respectivamente. Entonces la unión de las particiones P_1 y P_2 nos da una partición del intervalo $[t_1, t_3]$. Notemos que bajo estas consideraciones estamos tomando particiones del intervalo $[t_1, t_3]$ que contienen a los puntos t_i tal que

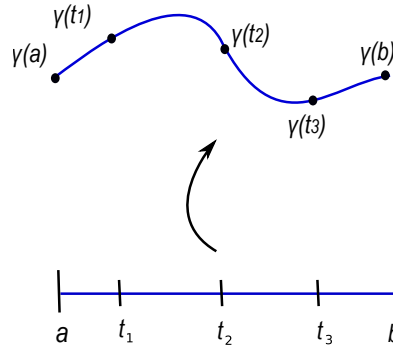
$i = 1, 2, 3$. En consecuencia, como γ es geodésica y de las propiedades del supremo, se cumple que

$$\begin{aligned}
 d(\gamma(t_1), \gamma(t_3)) &= \text{Longitud}(\gamma_{t_1}^{t_3}) \\
 &= \sup \sum_{i=1}^{N-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \\
 &= \sup \left(\sum_{i=1}^{i+1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + \sum_{i+1}^{N-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right) \\
 &= \sup \left(\sum_{i=1}^{i+1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right) + \sup \left(\sum_{i+1}^{N-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right) \\
 &= \text{Longitud}(\gamma_{t_1}^{t_2}) + \text{Longitud}(\gamma_{t_2}^{t_3}) \\
 &= d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + d(\gamma(t_2), \gamma(t_3)).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(\gamma(t_1), \gamma(t_3)) = d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) + d(\gamma(t_2), \gamma(t_3)).$$

Recíprocamente, sea $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ una partición del intervalo $[a, b]$ como se ilustra en la figura 3.5.



– Figura 3.5 –

Ahora notemos que $d(\gamma(a), \gamma(b)) = \sum_{i=0}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$. Pues por la hipótesis,

$$d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) + d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_{i+2})) = d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+2})).$$

Así, la longitud de γ cumple que:

$$\begin{aligned}
 \text{Longitud}(\gamma) &= \sup \left(\sum_{i=0}^{m-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \right) \\
 &= \sup d(\gamma(a), \gamma(b)) \\
 &= d(\gamma(a), \gamma(b)).
 \end{aligned}$$

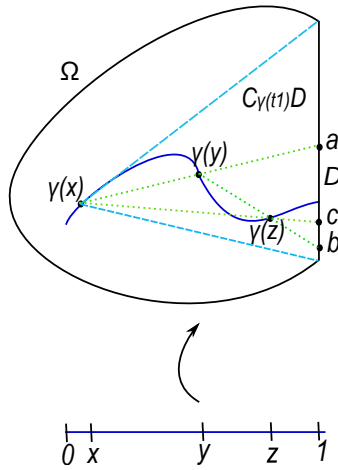
Por lo tanto $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ es geodésica. ■

Conos sobre una cara. Consideremos un dominio convexo propio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una cara propia $D \subset \tilde{\partial}\Omega$. Para cualquier punto $p \in \Omega$ definimos el conjunto

$$C_p(D) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = 0 \text{ o } \overline{R}(p, p+v) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Donde $\overline{R}(p, p+v)$ es el rayo que extiende al segmento entre p y $p+v$ en \mathbb{R}^n . Observemos que $C_p(D)$ es un cono en \mathbb{R}^n con vértice en el origen y su trasladado $p + C_p(D)$ es el cono sobre la cara D con vértice en p .

Teorema 3.25 *Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una trayectoria en un dominio convexo propio de \mathbb{R}^n . Entonces γ es una geodésica para la métrica de Funk en Ω si y sólo si existe una cara $D \subset \tilde{\partial}\Omega$ tal que para cualesquiera $t_1 < t_2 \in [0, 1]$ tenemos que $\gamma(t_2) - \gamma(t_1) \in C_{\gamma(t_1)}(D)$, es decir, el vector de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ apunta hacia la cara D .*



– **Figura 3.6** – Geodésicas para la métrica de Funk

Demostración. Por hipótesis, $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ es una geodésica para la métrica de Funk. Entonces por el lema 3.24

$$F_{\Omega}(\gamma(x), \gamma(z)) = F_{\Omega}(\gamma(x), \gamma(y)) + F_{\Omega}(\gamma(y), \gamma(z))$$

para cualesquiera $x, y, z \in [0, 1]$ tales que $x \leq y \leq z$. De esta manera, por el teorema 3.17, los puntos

$$a = a_{\Omega}(\gamma(x), \gamma(y)), \quad b = a_{\Omega}(\gamma(y), \gamma(z)), \quad c = a_{\Omega}(\gamma(x), \gamma(z))$$

están alineados en \mathbb{R}^n . Por lo tanto, se sigue del lema 3.16 la existencia de una cara $D \subset \tilde{\partial}\Omega$ tal que $a, b, c \in D = \tilde{\partial}\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 1\}$. En particular

$$\overline{R}(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \cap D = a.$$

De esta manera, $\gamma(t_2) - \gamma(t_1)$ está en el cono trasladado $\gamma(t_1) + C_{\gamma(t_1)}(D)$ (ver la figura 3.6). Por lo tanto,

$$\gamma(t_2) - \gamma(t_1) \in C_{\gamma(t_1)}(D).$$

Recíprocamente, como existe una cara $D \subset \tilde{\partial}\Omega$ tal que para cualesquiera $t_1 < t_2 \in [0, 1]$, $\gamma(t_2) - \gamma(t_1) \in C_{\gamma(t_1)}(D)$. Entonces los puntos

$$a_{\Omega}(\gamma(x), \gamma(y)), a_{\Omega}(\gamma(y), \gamma(z)), a_{\Omega}(\gamma(x), \gamma(z)) \in D.$$

Se sigue del lema 3.16 que estos puntos están alineados en $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Por lo tanto, del teorema 3.17

$$F_{\Omega}(\gamma(x), \gamma(z)) = F_{\Omega}(\gamma(x), \gamma(y)) + F_{\Omega}(\gamma(y), \gamma(z))$$

para cualesquiera $x, y, z \in [0, 1]$ tales que $x \leq y \leq z$. Por lo tanto, se sigue del lema 3.24 que $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ es una geodésica para la métrica de Funk. ■

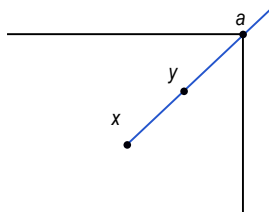
Corolario 3.26 *Si $a_{\Omega}(x, y) \in \partial\Omega$ es un punto expuesto, entonces existe una única geodésica que pasa por x y y , y esta geodésica es el segmento afín $[x, y]$.*

Demostración. Como $a_{\Omega}(x, y) \in \partial\Omega$ es un punto expuesto (ver figura 3.7), entonces $\{a_{\Omega}(x, y)\}$ es una cara expuesta D , pues existe $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano tal que

$$D = \{a_{\Omega}(x, y)\} = H \cap \bar{\Omega}.$$

De manera que la función $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow \Omega$ es una geodésica para la métrica de Funk. Luego, $\gamma \in C_{\gamma(t_1)}(D)$. Así, nuestro cono es el segmento afín $[x, y]$.

Ahora probemos que la geodésica γ es única. Supongamos que existe otra geodésica γ' , entonces la cara D a donde apunta γ' contiene a $a_{\Omega}(x, y)$ (ya que el vector de x a y apunta a D), pero $a_{\Omega}(x, y)$ es un punto expuesto. Por lo tanto, $a_{\Omega}(x, y)$ no está contenido en una cara propia D . Por lo tanto, existe una única geodésica que une a los puntos x y y . ■

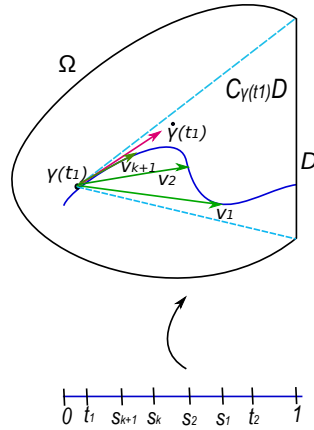


– Figura 3.7 –

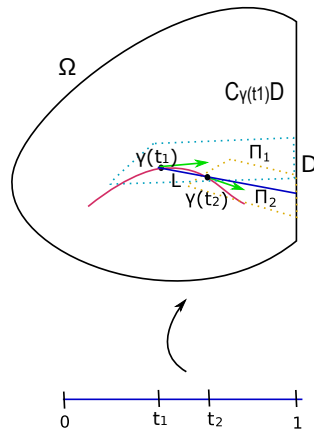
Corolario 3.27 *Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una trayectoria de clase C^1 en un dominio convexo propio de \mathbb{R}^n . Entonces γ es una geodésica de Funk si y sólo si existe una cara $D \subset \tilde{\partial}\Omega$ tal que $\dot{\gamma}(t) \in C_{\gamma(t)}(D)$ para cualquier $t \in [0, 1]$.*

Demostración. Supongamos que $\gamma(t)$ es una geodésica de Funk. Entonces, por el teorema 3.25 existe una cara propia D contenida en la frontera de $\tilde{\Omega}$ tal que para cualesquiera $t_1 < t_2 \in [0, 1]$ tenemos que el vector de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$ apunta hacia la cara D . Veamos que $\dot{\gamma}(t) \in C_{\gamma(t)}(D)$ para todo $t \in [0, 1]$. Considerando que la cara D es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, entonces el cono $C_{\gamma(t)}(D)$ con base en D es cerrado. Sean $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tales que $t_1 < t_2$. Consideremos $\{s_k\}_{k \in J}$ una sucesión decreciente que converge a t_1 y para cada $k \in J$ $V_k = \gamma(s_k) - \gamma(t_1) \in C_{\gamma(t_1)}(D)$ un vector secante de $\gamma(t)$. Entonces, la sucesión $\{V_k\}_{k \in J}$ converge a $\dot{\gamma}(t_1)$. Por lo tanto, $\dot{\gamma}(t) \in C_{\gamma(t)}(D)$.

Ahora probaremos que la condición es suficiente. Sea L una recta entre los puntos $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$. Sean Π_1 y Π_2 dos planos que contienen a la recta tangente a γ en los puntos $\gamma(t_1)$ y $\gamma(t_2)$ respectivamente y que contienen a L . Notemos de la figura 3.9 que estos planos intersecan a D , pues de la definición de un cono sobre una cara y por hipótesis, $\dot{\gamma}(t) \in C_{\gamma(t)}(D)$ para cualquier $t \in [0, 1]$. Como $L \cap \Pi_1 \neq \emptyset$ y $L \cap \Pi_2 \neq \emptyset$, pues los dos puntos de la curva γ están en L y cada punto en uno de los planos, entonces



– Figura 3.8 – Geodésicas de clase C^1 para la métrica de Funk



– Figura 3.9 –

$L \subset \Omega \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap D \neq \emptyset$. Así, existe una cara D tal que $\gamma(t_2) - \gamma(t_1) \in C_{\gamma(t_1)}(D)$. Por lo tanto, se sigue del teorema 3.25 que $\gamma(t)$ es una geodésica de Funk. ■

Para un subconjunto A de \mathbb{R}^n equipado con una métrica débil F , tenemos dos nociones de convexidad.

Definición 3.28 Convexidad afín. Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es afínmente convexo si para cada par de puntos x, y en A el segmento que los une es una geodésica en A .

Definición 3.29 Convexidad geodésica. Decimos que A es geodésicamente convexo si para cada par de puntos en A , la F -geodésica que los une está contenida en A .

Así, de estas definiciones tenemos la siguiente consecuencia en convexidad geodésica de subconjuntos para la métrica de Funk.

Corolario 3.30 Sea Ω un dominio convexo acotado de \mathbb{R}^n equipado con su métrica de Funk. Entonces son equivalentes:

- (1) Ω es estrictamente convexo.
- (2) Ω satisface la propiedad de unicidad de las geodésicas para la métrica de Funk.
- (3) Un subconjunto $A \subset \Omega$ es geodésicamente convexo para la métrica de Funk si y sólo si A es afínmente convexo.
- (4) Las bolas avante abiertas en Ω son geodésicamente convexas con respecto a la métrica de Funk F_Ω .

Demostración. Primero haremos la prueba de (1) implica (2). Como Ω es estrictamente convexo, todo punto frontera es un punto expuesto. Por lo tanto, del corolario 3.26, para cualesquiera puntos x y y en Ω existe una única geodésica que los une.

Ahora probaremos (2) implica (3). Como $A \subset \Omega$ es geodésicamente convexo para la métrica de Funk, entonces la geodésica de Funk que une a cualquier par de puntos en A se queda contenida en A . Por la hipótesis de la propiedad de unicidad en geodésicas en Ω , estas geodésicas son los segmentos usuales de rectas euclidianas. Así, A es afínmente convexo.

Recíprocamente, si A es afínmente convexo, las geodésicas afines (segmentos usuales) están contenidas en A y por la propiedad de unicidad en las geodésicas dichos segmentos usuales euclidianos son las geodésicas de Funk. Por lo tanto, las geodésicas de Funk están en A . En consecuencia, A es geodésicamente convexo.

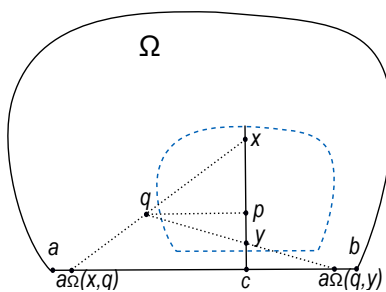
Veamos ahora que (3) implica (4). Sea A una bola avante en Ω . Entonces, por la proposición 2.2 A es una homotecia de Ω . Como Ω es convexo, la bola avante es afínmente convexa, en consecuencia A es geodésicamente convexo. Por tanto, las bolas avante son geodésicamente convexas.

Finalmente probaremos por contrapositiva que (4) implica (1). Esto es, si Ω no es estrictamente convexo, entonces las bolas avante abiertas en Ω no son geodésicamente convexas con respecto a la métrica de Funk F_Ω . Supongamos que Ω no es estrictamente convexo. Entonces existe un segmento no trivial $[a, b]$ contenido en $\partial\Omega$. Sea h un funcional lineal con soporte en Ω en a tal que $h(a) = 1 = h(b)$. Sea $[x, y] \subset \Omega$ un segmento tal que $a_\Omega(x, y) \in [a, b]$. Tomemos otro segmento $[p, q]$ en Ω paralelo al segmento $[a, b]$. Vamos a considerar que el punto p sea distinto a los puntos x, y y que $p \in [x, y]$, de donde $h(q) = h(p)$ es posible, ya que el segmento $[x, y]$ es transversal al hiperplano $h = 1$. Por construcción vamos a tomar al punto q fuera de la bola avante $B^+(p, \delta)$ (ver figura 3.10), donde δ es un número real positivo que cumple que $F_\Omega(p, q) > \delta := F_\Omega(p, x) + F_\Omega(p, y)$ (ver la prueba en el siguiente caso (a)), de esta manera, tenemos que $h(x) < h(p) = h(q) < h(y)$. Vamos a considerar dos casos:

(a) La bola avante $B^+(p, \delta)$ es homotética a Ω y los puntos $a_\Omega(x, q), a_\Omega(q, y)$ están en $[a, b]$.

(b) La bola avante $B^+(p', \delta')$ es homotética a $B^+(p, \delta)$ con respecto al punto c , cuando los puntos $a_\Omega(x, q), a_\Omega(q, y)$ no están en $[a, b]$.

Veamos la prueba del caso (a).



– Figura 3.10 –

Si $a_\Omega(x, q), a_\Omega(q, y) \in [a, b]$, (ver figura 3.10), tenemos que la métrica de Funk entre las parejas de puntos $(x, y), (x, q)$ y (q, y) toma los valores

$$F_\Omega(x, y) = \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right)$$

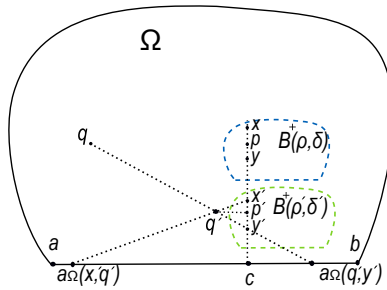
$$F_\Omega(x, q) = \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(q)} \right)$$

$$F_{\Omega}(q, y) = \log \left(\frac{1 - h(q)}{1 - h(y)} \right).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} F_{\Omega}(x, y) &= \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(q)} \frac{1 - h(q)}{1 - h(y)} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(q)} \right) + \log \left(\frac{1 - h(q)}{1 - h(y)} \right) \\ &= F_{\Omega}(x, q) + F_{\Omega}(q, y). \end{aligned}$$

De esta manera, $F_{\Omega}(x, y) = F_{\Omega}(x, q) + F_{\Omega}(q, y)$. Entonces la curva que se compone de los segmentos $[x, q]$ y $[q, y]$ es geodésica y se sale de la bola avante $B^+(p, \delta)$. Pues, aunque $x, y \in B^+(p, \delta)$, pero por construcción $q \notin B^+(p, \delta)$. Por lo tanto, $B^+(p, \delta)$ no es geodésicamente convexa.



– Figura 3.11 –

Ahora probaremos el caso (b). Supongamos ahora que $a_{\Omega}(x, q) \notin [a, b]$ o $a_{\Omega}(q, y) \notin [a, b]$. Sea $c = a_{\Omega}(x, y)$ y consideremos $f_{\lambda} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una homotecia euclidiana centrada en c con factor de dilatación $\lambda < 1$. Sean $p' = f_{\lambda}(p)$, $q' = f_{\lambda}(q)$, $x' = f_{\lambda}(x)$, $y' = f_{\lambda}(y)$ puntos homotéticos. Así, para $\lambda \ll 1$, es decir, para λ mucho menor que uno, se tiene que $a_{\Omega}(x', q')$, $a_{\Omega}(q', y') \in [a, b]$, estos puntos son mostrados en la figura 3.11. Como en el caso (a), definimos $\delta' := F_{\Omega}(p', x') + F_{\Omega}(p', y') < F_{\Omega}(p', q')$ tal que

$$F_{\Omega}(x', y') = \log \left(\frac{1 - h(x')}{1 - h(y')} \right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} F_{\Omega}(x', q') + F_{\Omega}(q', y') &= \log \left(\frac{1 - h(x')}{1 - h(q')} \right) + \log \left(\frac{1 - h(q')}{1 - h(y')} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(x')}{1 - h(q')} \frac{1 - h(q')}{1 - h(y')} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 - h(x')}{1 - h(y')} \right) \\ &= F_{\Omega}(x', y'). \end{aligned}$$

Como $x', y' \in B^+(p', \delta')$ y $q' \notin B^+(p', \delta')$ pues $q \notin B^+(p, \delta)$ entonces $[p', q'] \not\subset B^+(p', \delta')$. Por tanto, $B^+(p', \delta')$ no es geodésicamente convexa. Esto completa la prueba. ■

3.4. Puntos cercanos en la geometría de Funk

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo equipado con su métrica de Funk.

Definición 3.31 *Si x es un punto en Ω y A es un subconjunto no vacío de Ω , entonces la distancia de Funk entre x y A está definida como $F_\Omega(x, A) := \inf_{z \in A} F_\Omega(x, z)$.*

Definición 3.32 (Punto más cercano) *Sea x un punto en Ω y sea A un subconjunto en Ω . Un punto $y \in A$ que realiza la distancia de x a A le llamaremos punto más cercano en A para x si $F_\Omega(x, y) = F_\Omega(x, A)$.*

Observemos que de la continuidad de la función $y \mapsto F_\Omega(x, y)$ se cumple que para cualquier subconjunto cerrado no vacío $A \subset \Omega$ y cualquier $x \in \Omega$ existe un punto más cercano $y \in A$. Este punto en general no es único. Si A no es un conjunto cerrado en Ω , no necesariamente hay puntos en A que realicen la distancia a x .

Proposición 3.33 *Para un dominio convexo propio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) Ω es estrictamente convexo.

(b) Para cualquier subconjunto convexo cerrado $A \subset \Omega$ y para cualquier $x \in \Omega$, existe un único punto más cercano $y \in A$.

Demostración. Sea $x \in \Omega$ y A un subconjunto cerrado convexo de Ω . Consideremos que $r = F_\Omega(x, A) > 0$. Sean $y \neq z$ dos puntos más cercanos de A para x . Dado que Ω es convexo, la bola avante abierta $B^+(x, r)$ es convexa por la proposición 2.2. Consideremos que para cualquier $\omega \in [y, z] \subset A \subset \Omega$, se sigue de la proposición 2.2 que, $\omega \in \overline{B}^+(x, r)$ si y sólo si $F_\Omega(x, \omega) \leq r$. Por otro lado, como A es un conjunto convexo cerrado y $w \in A$, entonces $F_\Omega(x, w) \geq \inf_{z \in A} F_\Omega(x, z) = r$. Por lo tanto $F_\Omega(x, w) = r$. Debido a esto, tenemos que $\omega \in \partial \overline{B}^+(x, r)$. Por hipótesis, Ω es estrictamente convexo, por lo que $B^+(x, r)$ es estrictamente convexo, es decir, $\partial B^+(x, r)$ no contiene segmentos no triviales. Por tanto $y = z$. Pero esto es una contradicción, pues consideramos que eran distintos.

El recíproco será probado por contrapositiva. Sea $r = F_\Omega(x, A)$ y supongamos que Ω no es estrictamente convexo. Entonces por la proposición 2.2 la bola avante $B^+(x, r)$ no es estrictamente convexa. En particular, existe un segmento no trivial $[y, z]$ contenido en $\partial B^+(x, r)$, entonces cualquier $\omega \in [y, z]$ es un punto más cercano para x . ■

Definición 3.34 *La cerradura afín de un conjunto S contenido en \mathbb{R}^n , denotada por $\text{aff}(S)$, se define como el conjunto de todas las combinaciones afines de puntos de S . Así, $x \in \text{aff}(S)$ si y sólo si existen puntos $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tales que $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$, donde $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$.*

Definición 3.35 *Dos subconjuntos A y B de \mathbb{R}^n son separados por el hiperplano $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x \rangle = \alpha\}$ si y sólo si A está en uno de los semiespacios cerrados determinados por H y B está en el otro semiespacio. Esto es:*

(i) $\langle p, a \rangle \leq \alpha$ para todo a en A .

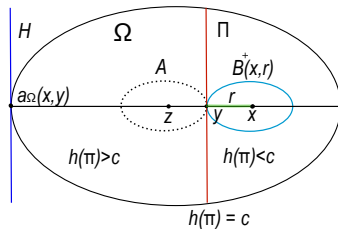
(ii) $\langle p, b \rangle \geq \alpha$ para todo b en B .

En la demostración de la proposición 3.37 utilizaremos el teorema de separación, el cual enunciaremos a continuación y puede ser consultado en [9, teorema 3.6.10].

Teorema 3.36 (Teorema de separación) Si A y B son subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n cuyos interiores son ajenos, y $\text{aff}(A \cup B) = \mathbb{R}^n$, entonces A y B son separados por algún hiperplano.

Proposición 3.37 Sea A un subconjunto cerrado y afínmente convexo de un dominio convexo propio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y sea $x \in \Omega \setminus A$. Un punto $y \in A$ es un punto más cercano en A para x si y sólo si $F_\Omega(x, y) = 0$ ó existe un hiperplano $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, el cual contiene a y , separa a A de x , y es paralelo a un hiperplano de soporte H para Ω en $a_\Omega(x, y)$.

Demostración. Supongamos que $y \in A$ es un punto más cercano para x y que $0 < r = F_\Omega(x, y) = F_\Omega(x, A)$, tal como se muestra en la figura 3.12. Por definición, la bola avante $B^+(x, r)$ y el conjunto A son disjuntos, ambos conjuntos son afínmente convexos. Entonces, por el teorema de separación (teorema 3.36) existe un hiperplano Π que los separa. Como $y \in A$ es un punto más cercano para x implica que Π es el hiperplano con soporte en y para la bola avante $B^+(x, r)$. Por la proposición 2.2, como Π es un hiperplano de soporte en y entonces Π es un hiperplano paralelo al hiperplano H con soporte en $a_\Omega(x, y)$ para Ω .



– Figura 3.12 –

Recíprocamente, si $F_\Omega(x, y) = 0$ entonces $y \in A$ es un punto más cercano, pues $F_\Omega(x, a) \geq 0$ para todo $a \in A$. De lo anterior podemos suponer que $F_\Omega(x, y) > 0$. Por hipótesis, existe un hiperplano $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a y y además separa al conjunto A de x y es paralelo al hiperplano H con soporte en $a_\Omega(x, y)$ para Ω . Entonces existe un funcional lineal h de soporte en $a_\Omega(x, y)$ tal que $h(x) < h(y) = \inf_{z \in A} h(z)$. Luego

$$\log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) \leq \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(z)} \right)$$

si y sólo si

$$\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \leq \frac{1 - h(x)}{1 - h(z)}$$

si y sólo si

$$h(z) \geq h(y).$$

De este modo

$$\log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) = \inf_{z \in A} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(z)} \right).$$

Entonces podemos expresar la métrica de Funk por

$$F_\Omega(x, y) = \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) = \inf_{z \in A} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(z)} \right).$$

y

$$F_{\Omega}(x, A) := \inf_{z \in A} F_{\Omega}(x, z) = \inf_{z \in A} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(z)} \right).$$

Así,

$$F_{\Omega}(x, y) = \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(y)} \right) = \inf_{z \in A} \log \left(\frac{1 - h(x)}{1 - h(z)} \right) = F_{\Omega}(x, A).$$

Como $F_{\Omega}(x, y) = F_{\Omega}(x, A)$, entonces y es un punto más cercano.

Si $a \in H_{\infty}$, no existe Π . Este es uno de los casos cuando $F_{\Omega}(x, y) = 0$. ■

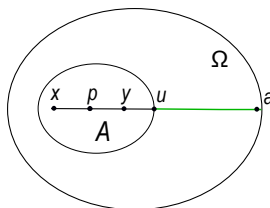
En un espacio métrico débil hay varias posibles nociones de perpendicularidad. La siguiente definición es debida a Busemann. Consultar en [2, página 103].

Definición 3.38 (Perpendicularidad.) *Sea A un subconjunto de Ω y p un punto en A . Decimos que una geodésica $\gamma : I \rightarrow \Omega$ es perpendicular a A en p si se cumplen las siguientes dos propiedades:*

- (1) $p = \gamma(t_0)$ para algún $t_0 \in I$.
- (2) Para todo $t \in I$, p es un punto de A más cercano a $\gamma(t)$.

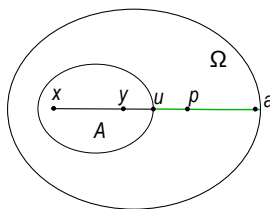
Ejemplos.

1) El segmento $[x, y]$ es geodésica en Ω pero no en un subconjunto A de Ω . (ver figura 3.14). En efecto, no ocurre la igualdad $F_{\Omega}(\gamma(t), A) := \inf_{z \in A} F_{\Omega}(\gamma(t), z) = F_{\Omega}(\gamma(t), p)$, pues el segmento $[u, a]$ es una geodésica γ de Ω y no se cumple que $p \neq \gamma(t_0)$.



– Figura 3.13 –

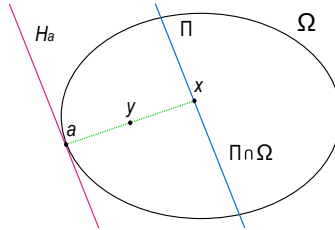
2) Sea A el conjunto acotado cuya frontera es una elipse contenida en Ω un dominio convexo propio. Sea E el eje mayor de la elipse y $[u, a]$ un segmento que prolonga a E en $\Omega - A$, como es mostrado en la figura 3.15. Consideremos un punto $p \in [u, a]$ con $u \in \partial A$ como se aprecia en la figura. Por la proposición 3.37 $[u, a]$ es perpendicular al conjunto A .



– Figura 3.14 –

De los resultados de la proposición 3.37 y de la definición de perpendicularidad tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.39 Sea x un punto en un dominio convexo Ω y $a \in \partial\Omega$ un punto frontera. Si $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ es un hiperplano que contiene a x , entonces el rayo $[x, a)$ es perpendicular a $\Pi \cap \Omega$ si y sólo si Π es paralelo a un hiperplano de soporte H_a de Ω en a .

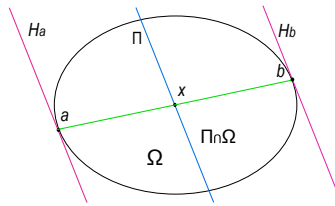


– Figura 3.15 –

Demostración. Supongamos primero que $[x, a)$ es perpendicular al conjunto $\Pi \cap \Omega$, entonces por definición de perpendicularidad x es un punto más cercano al conjunto $\Pi \cap \Omega$ para cada elemento de la curva $[x, a)$. Como $x \in \Pi \cap \Omega$, por la proposición 3.37, Π es paralelo a un hiperplano de soporte en a para Ω , pues $F_\Omega(x, y) \neq 0$ para todo $y \in (x, a)$, con $a \in \partial\Omega$, esto es, $\{a\} \subset \mathbb{R}^n$ (ver figura 3.16).

Recíprocamente, supongamos que tenemos que Π es paralelo a un hiperplano de soporte para Ω en a , se sigue de la proposición 3.37 que x es un punto más cercano para el rayo $[x, a)$ y dado que $x \in [x, a)$, (1) y (2) de la definición de perpendicularidad se cumplen. Por lo tanto $[x, a)$ es perpendicular a $\Pi \cap \Omega$. ■

Corolario 3.40 Si $a, b \in \partial\Omega$ son puntos frontera y $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ es un hiperplano que contiene a x , entonces el intervalo (a, b) es perpendicular a $\Pi \cap \Omega$ si y sólo si $\Pi \cap (a, b) \neq \emptyset$ y Π es paralelo a ambos hiperplanos de soporte H_a en a y H_b en b .



– Figura 3.16 –

Demostración. Si el intervalo (a, b) es perpendicular a $\Pi \cap \Omega$, entonces por la definición de perpendicularidad existe un punto x en (a, b) tal que $x \in \Pi \cap \Omega$ es un punto más cercano a todos los puntos de (a, b) , entonces $\Pi \cap (a, b) \neq \emptyset$ y por la proposición 3.37, Π es paralelo a los hiperplanos de soporte en a y b para Ω (ver figura 3.17).

Recíprocamente, si $\Pi \cap (a, b) \neq \emptyset$ entonces $x \in \Pi$ y $x \in (a, b)$. Además Π es paralelo a los hiperplanos con soporte en a y b para Ω . Dado que $x \in \Pi$, entonces tenemos que del corolario 3.39, los rayos $[x, a)$ y $[x, b)$ son perpendiculares a $\Pi \cap \Omega$. Por lo tanto, (a, b) es perpendicular a $\Pi \cap \Omega$. ■

3.5. Isometrías

En esta sección se estudiará el grupo de isometrías de la métrica de Funk.

Definición 3.41 Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios convexos de \mathbb{R}^n . Una función $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es una isometría de Funk si f es un homeomorfismo y para todos $x, y \in \Omega_1$ se cumple que $F_{\Omega_1}(x, y) = F_{\Omega_2}(f(x), f(y))$.

Proposición 3.42 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función afín y Ω_1, Ω_2 dos dominios convexos de \mathbb{R}^n tales que $f(\Omega_1) = \Omega_2$. Entonces la restricción $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es una isometría de Funk.

Demostración. Sean $x, y \in \Omega$.

Para la prueba verificaremos dos casos, el primero es cuando en la métrica de Funk $F_{\Omega_2}(f(x), f(y)) = 0$ y el segundo es si $F_{\Omega_2}(f(x), f(y)) \neq 0$. En el primer caso, si $f(x) = f(y)$, como f es afín, entonces $x = y$ y

$$F_{\Omega_2}(f(x), f(y)) = F_{\Omega_1}(x, y).$$

Ahora, si $f(x) \neq f(y)$, entonces $a_{\Omega_2}(f(x), f(y))$ está en el hiperplano al infinito, lo cual implica que el rayo que contiene a $f(x)$ y a $f(y)$ está contenido en Ω_2 , como f es afín entonces este rayo proviene de un rayo contenido en Ω_1 . Por lo tanto, el punto $a_{\Omega_1}(x, y)$ está en el hiperplano al infinito y se cumple que

$$F_{\Omega_2}(f(x), f(y)) = 0 = F_{\Omega_1}(x, y).$$

En el segundo caso, si $F_{\Omega_2}(f(x), f(y)) \neq 0$, entonces $a_{\Omega_2}(f(x), f(y))$ está en la frontera de Ω_2 , luego existe un escalar t tal que

$$\begin{aligned} a_{\Omega_2}(f(x), f(y)) &= f(x) + t(f(y) - f(x)) \\ &= f(x + t(y - x)) \\ &= f(a_{\Omega_1}(x, y)), \end{aligned}$$

pues f es afín. Así, el punto $a_{\Omega_1}(x, y)$ está en la frontera de Ω_1 . Por lo tanto, se cumple la definición 3.41 y

$$F_{\Omega_2}(f(x), f(y)) = F_{\Omega_1}(x, y).$$

Por lo tanto, f es una isometría de Funk. ■

La siguiente proposición es un recíproco parcial de la proposición 3.42.

Proposición 3.43 Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios convexos acotados en \mathbb{R}^n . Supongamos que existe una isometría de Funk $f : U_1 \rightarrow U_2$, donde U_i es un subconjunto convexo abierto de Ω_i , $i = 1, 2$. Si Ω_2 es estrictamente convexo, entonces f es la restricción de una transformación afín de \mathbb{R}^n que mapea Ω_1 en Ω_2 .

Demostración. Sean $x, y \in U_1$ tal que $x \neq y$. Entonces para cualquier $z \in [x, y]$ la métrica de Funk cumple que

$$\begin{aligned} F_{\Omega_1}(x, y) &= F_{\Omega_1}(x, z) + F_{\Omega_1}(z, y) \\ &= F_{\Omega_2}(f(x), f(z)) + F_{\Omega_2}(f(z), f(y)) \\ &= F_{\Omega_2}(f(x), f(y)), \end{aligned}$$

pues f es una isometría. Al ser el conjunto Ω_2 estrictamente convexo entonces $f(z) \in [f(x), f(y)]$, pues de no ser así tendríamos la conclusión del corolario 3.18, es decir, $F_{\Omega}(x, z) < F_{\Omega}(x, y) + F_{\Omega}(y, z)$, lo cual contradice las igualdades anteriores.

Tomemos $t, s \in \mathbb{R}$ tales que $z = x + t(y - x)$ y $f(z) = f(x) + s(f(y) - f(x))$. Dado que los puntos x, y y z están alineados, se sigue del corolario 1.29 que

$$\begin{aligned} t &= \frac{e^{F_{\Omega_1}(x, y)}(e^{F_{\Omega_1}(x, z)} - 1)}{e^{F_{\Omega_1}(x, z)}(e^{F_{\Omega_1}(x, y)} - 1)} \\ &= \frac{e^{F_{\Omega_2}(f(x), f(y))}(e^{F_{\Omega_2}(f(x), f(z))} - 1)}{e^{F_{\Omega_2}(f(x), f(z))}(e^{F_{\Omega_2}(f(x), f(y))} - 1)} \\ &= s \end{aligned}$$

pues f es una isometría. Así, $t = s$. Luego

$$\begin{aligned} f(x + t(y - x)) &= f(z) = f(x) + s(f(y) - f(x)) \\ &= f(x) + t(f(y) - f(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualesquiera $x, y \in U_1$ y $t \in [0, 1]$, $f(x + t(y - x)) = f(x) + t(f(y) - f(x))$. Lo cual implica que f es restricción de un mapeo afín. ■

Previo a la prueba del corolario 3.44 damos las siguientes notaciones.

Al conjunto de transformaciones afines de \mathbb{R}^n lo denotamos por

$$\text{Aff}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ es afín}\}.$$

Al conjunto de transformaciones afines de \mathbb{R}^n que dejan invariante a Ω lo denotamos mediante

$$\text{Aff}(\Omega) = \{f \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n) \mid f(\Omega) = \Omega\}.$$

Por último, al conjunto de isometrías de Funk de Ω lo denotamos por

$$\text{Iso Funk}(\Omega) = \{s : \Omega \longrightarrow \Omega \mid s \text{ es una isometría de Funk}\}.$$

Corolario 3.44 *El grupo de isometrías de Funk de un dominio estrictamente convexo acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ coincide con el subgrupo del grupo afín de \mathbb{R}^n que deja invariante a Ω .*

Demostración. Veremos que las isometrías de Funk coinciden con el subgrupo del grupo afín de \mathbb{R}^n que deja invariante a Ω , es decir, que se cumple lo siguiente: $\text{Iso Funk}(\Omega) = \text{Aff}(\Omega)$. Como f es una isometría de Funk entonces f es un homeomorfismo. Se sigue de la proposición 3.43 que si Ω es estrictamente convexo, entonces f es una restricción de una función afín. Por lo tanto,

$$\text{Iso Funk}(\Omega) \subset \text{Aff}(\Omega).$$

Recíprocamente, sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación afín tal que $f(\Omega) = \Omega$. Como la métrica de Funk es invariante bajo transformaciones afines, entonces

$$\text{Aff}(\Omega) \subset \text{Iso Funk}(\Omega).$$

Por lo tanto,

$$\text{Iso Funk}(\Omega) = \text{Aff}(\Omega).$$

Por último, veamos que $\text{Aff}(\Omega)$ es un subgrupo de $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

(i) Como $\text{Id}(\mathbb{R}^n) \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $\text{Id}(\Omega) = \Omega$ y así, $\text{Id}(\mathbb{R}^n) \in \text{Aff}(\Omega)$.

(ii) Ahora veamos que la composición de dos transformaciones afines que preservan a Ω también preserva a Ω .

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\Omega) &= g(f(\Omega)) \\ &= g(\Omega) \\ &= \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la composición de dos transformaciones afines es una transformación afín en $\text{Aff}(\Omega)$.

(iii) Como $f \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ entonces existe $f^{-1} \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Por demostrar que $f^{-1}(\Omega) = \Omega$.

Como $f \in \text{Aff}(\Omega)$ entonces

$$(f^{-1} \circ f)(\Omega) = f^{-1}(f(\Omega)) = f^{-1}(\Omega).$$

Por otro lado

$$(f^{-1} \circ f)(\Omega) = \text{Id}(\Omega) = \Omega.$$

Entonces, $f^{-1}(\Omega) = \Omega$. Así, $f^{-1} \in \text{Aff}(\Omega)$.

Por lo tanto, $\text{Aff}(\Omega)$ es un subgrupo de $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$. ■

Observación 3.45 *La conclusión del corolario 3.44 puede fallar para dominios no acotados. Por ejemplo, si $\Omega = \mathbb{R}^2$ es el semiplano superior $\{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$ en \mathbb{R}^2 , entonces*

$$F_{\Omega}(x, y) = \text{máx} \left\{ 0, \log \left(\frac{x_2}{y_2} \right) \right\}$$

y cualquier función $f : \Omega \rightarrow \Omega$ del tipo $f(x_1, x_2) = (ax_1 + b, \psi(x_2))$ donde $a \neq 0$ y $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria, es una isometría.

Demostración. Un caso especial de la proposición 1.40 ocurre cuando $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ son dos puntos en el semiplano superior \mathbb{R}_+^2 . Sea la función $(x, y) \mapsto (0, y)$ y $\rho(x, y) = y$, entonces por la proposición 1.40,

$$F_{\Omega}(x, y) = \text{máx} \left\{ 0, \log \left(\frac{x_2}{y_2} \right) \right\}.$$

Sea $f(x_1, x_2) = (ax_1 + b, \psi(x_2))$ una función tal que $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria. Como las funciones $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ con reglas de correspondencia $\phi(x_1) = ax_1 + b$ y $\psi(x_2) = e^{x_2}$ son inyectivas en \mathbb{R} , entonces tienen inversa $\phi^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, respectivamente. Así, $f(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ es un homeomorfismo y en particular $f(x_1, x_2)$ es inyectiva. Si $f(x) = f(y)$ implica que $F_{\Omega}(f(x), f(y)) = 0$, entonces, $F_{\Omega}(x, y) = 0$. En consecuencia, $x = y$. Por lo tanto, $f(x_1, x_2)$ es una isometría de Funk.

Ahora bien, como $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es arbitraria, en particular tomando $\phi(y) = e^y$, tenemos que la función $f(x, y) = (ax + b, e^y)$ no es una restricción de una transformación afín de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, $\text{Iso Funk}(\Omega)$ no está contenida en $\text{Aff}(\Omega)$. ■

Capítulo 4

De la geometría de Funk a la geometría de Hilbert

4.1. La geometría de Funk desde el punto de vista proyectivo

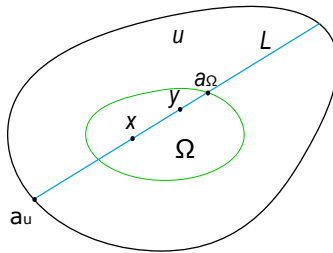
En esta sección consideramos una generalización de la geometría de Funk. Iniciaremos definiendo la noción de conjuntos convexos del espacio proyectivo de dimensión n .

Definición 4.1 Decimos que un subconjunto $U \subset \mathbb{RP}^n$ es convexo si este no contiene ninguna recta proyectiva completa y si la intersección de cada recta proyectiva $L \subset \mathbb{RP}^n$ con U es un conjunto conexo.

Proposición 4.2 Si U es un subconjunto convexo de \mathbb{RP}^n , entonces es conexo.

Demostración. Haremos la prueba por contradicción. Supongamos que U no es conexo, entonces existen abiertos ajenos no vacíos A y B en U , tales que $A \cup B = U$. Pero esto es una contradicción, pues la intersección de U con cualquier recta que pase por un punto de A y un punto de B es un subconjunto disconexo. ■

Sean U y Ω dominios convexos en \mathbb{RP}^n con $\Omega \subset U$ y x y y dos puntos distintos en Ω . Denotamos por $a = a_\Omega(x, y) \in \partial\Omega$ y $\omega = a_U(y, x) \in \partial U$ los puntos frontera sobre la recta L a través de x y y en el orden ω, x, y, a , pues recordemos que la métrica de Funk es una métrica débil.



– Figura 4.1 – Dominios convexos en \mathbb{RP}^n

Proposición 4.3 Sea Ω un dominio propio de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{RP}^n$. Entonces, Ω es convexo como subconjunto de \mathbb{R}^n si y sólo si Ω es convexo como subconjunto de \mathbb{RP}^n .

Demostración. Primero probaremos que la condición es necesaria. Por hipótesis, Ω como subconjunto de \mathbb{R}^n es un dominio propio y convexo en el sentido usual, entonces Ω no contiene ninguna recta proyectiva

completa. Más aún, la intersección del dominio Ω con una recta proyectiva L es la intersección de Ω con una recta real, que es un conjunto conexo. Por lo tanto, se sigue de la definición 4.1 que Ω es convexo como subconjunto de \mathbb{RP}^n .

Veamos ahora que la condición es suficiente por contrapositiva. Supongamos que Ω no es convexo como subconjunto de \mathbb{R}^n . Entonces, la intersección de Ω con una recta proyectiva completa L es la intersección de Ω con una recta real, que no es un conjunto conexo. Por lo tanto, Ω no es convexo como subconjunto de \mathbb{RP}^n . ■

Observación 4.4 *A diferencia de \mathbb{R}^n , que sí se considera convexo con la noción usual, con la noción proyectiva, \mathbb{RP}^n no es convexo.*

Demostración. Como \mathbb{RP}^n contiene una recta proyectiva completa, la definición 4.1 no se cumple. Por lo tanto, \mathbb{RP}^n no es convexo con la nueva noción de convexidad. ■

Proposición 4.5 *\mathbb{R}^n es un subconjunto convexo de \mathbb{RP}^n (con la noción proyectiva).*

Demostración. La prueba se sigue directamente de la definición 4.1. ■

Definición 4.6 *Sea $U \subset \mathbb{RP}^n$ un conjunto convexo. La métrica de Funk de Ω relativa a U está definida por $F_{\Omega,U}(x, x) = 0$ para todo x en Ω , y para toda pareja de puntos distintos x y y en Ω por*

$$F_{\Omega,U}(x, y) = \log \left(\frac{|y - \omega| |x - a|}{|x - \omega| |y - a|} \right),$$

con $a = a_{\Omega}(x, y)$ y $\omega = a_U(y, x)$.

Lema 4.7 *Sea $U \subseteq \mathbb{RP}^n$ un conjunto convexo. La métrica de Funk de Ω relativa a U es una métrica débil proyectiva, la cual es invariante bajo transformaciones proyectivas, es decir, si $f : \mathbb{RP}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ es una transformación proyectiva, entonces*

$$F_{\Omega,U}(x, y) = F_{f(\Omega),f(U)}(f(x), f(y)).$$

Demostración. Sea f una transformación proyectiva, $v = (x_0, \dots, x_n)$ un punto en \mathbb{R}^{n+1} y $[v]$ la clase de equivalencia de v en \mathbb{RP}^n . Entonces existe una matriz A en $GL(n+1, \mathbb{R})$ tal que $f([v]) = [Av]$. Abusando un poco de la notación identificaremos a v con su clase de equivalencia $[v]$, a $f([v])$ con $f(v)$, y a Av con $[Av]$. Así, $f([v]) = Av$. De esta manera, $f(x) = Ax$, $f(y) = Ay$, $f(\omega) = A\omega$ y $f(a) = Aa$. Como A es una matriz lineal con determinante distinto de cero, entonces preserva las proporciones sobre una misma recta y se cumple que

$$\begin{aligned} F_{f(\Omega),f(U)}(f(x), f(y)) &= \log \left(\frac{|f(y) - f(\omega)| |f(x) - f(a)|}{|f(x) - f(\omega)| |f(y) - f(a)|} \right) \\ &= \log \left(\frac{|Ay - A\omega| |Ax - Aa|}{|Ax - A\omega| |Ay - Aa|} \right) \\ &= \log \left(\frac{|A(y - \omega)| |A(x - a)|}{|A(x - \omega)| |A(y - a)|} \right) \\ &= \log \left(\frac{|y - \omega| |x - a|}{|x - \omega| |y - a|} \right) \\ &= F_{\Omega,U}(x, y). \end{aligned}$$

■

Lema 4.8 Sea $\Omega \subset U$. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio convexo propio, entonces $F_{\Omega,U}(x, y) = F_{\Omega}(x, y) + {}^rF_{\Omega}(x, y)$.

Demostración. Como U es un dominio convexo propio de $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, entonces para cada par de elementos x y y en Ω tenemos:

$$\begin{aligned} F_{\Omega,U}(x, y) &= \log \left(\frac{|y - \omega| |x - a|}{|x - \omega| |y - a|} \right) \\ &= \log \left(\frac{|y - \omega|}{|x - \omega|} \right) + \log \left(\frac{|x - a|}{|y - a|} \right) \\ &= F_{\Omega}(y, x) + F_{\Omega}(x, y) \\ &= F_{\Omega}(x, y) + {}^rF_{\Omega}(x, y). \end{aligned}$$

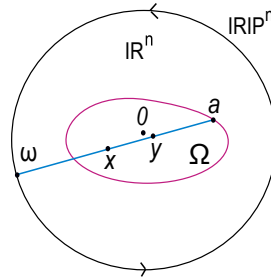
■

Lema 4.9 Si $U = \mathbb{R}^n$, entonces $F_{\Omega,U}(x, y) = F_{\Omega}(x, y)$.

Demostración. Dado que $U = \mathbb{R}^n$ y $\omega \in H_{\infty}$, la métrica de Funk relativa cumple las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} F_{\Omega,U}(x, y) &= \log \left(\frac{|y - \omega| |x - a|}{|x - \omega| |y - a|} \right) \\ &= \log \left(\frac{|y - \omega|}{|x - \omega|} \right) + \log \left(\frac{|x - a|}{|y - a|} \right) \\ &= 0 + F_{\Omega}(x, y) \\ &= F_{\Omega}(x, y). \end{aligned}$$

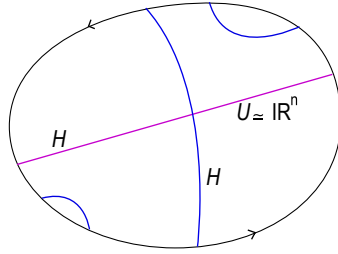
■



– **Figura 4.2** – La métrica de Funk de Ω relativa a U

Notemos que en el espacio proyectivo real no existe un hiperplano distinguido y que el complemento en $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ de todo hiperplano es difeomorfo a \mathbb{R}^n . Se sigue del lema 4.7 y del lema 4.9 que la geometría de Funk clásica es un caso particular de la geometría de Funk relativa cuando el dominio $U \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es el complemento de un hiperplano.

Definición 4.10 El complemento de un hiperplano en \mathbb{R}^n es llamado *parche afín*.



– Figura 4.3 – Parche afín

4.2. La Geometría de Hilbert

La geometría de Hilbert está estrechamente relacionada con el problema IV de Hilbert, el problema de caracterizar las métricas para las cuales la línea recta es la curva de longitud mínima entre todas las curvas que unen dos puntos. Comenzaremos esta sección definiendo la métrica de Hilbert y probaremos en la subsección 4.2.2 que (Ω, H_Ω) es un espacio métrico completo. Entre otras propiedades, estudiaremos las geodésicas de la métrica de Hilbert en dominios acotados y estrictamente convexos.

4.2.1. Propiedades de la métrica de Hilbert

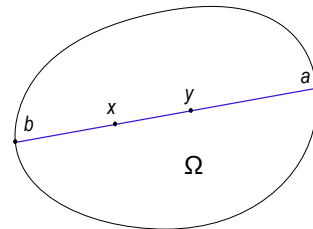
Definición 4.11 Sea $U = \mathbb{R}^n$ un parche afín y Ω un dominio convexo propio de U . La métrica de Hilbert en Ω está definida como

$$H_\Omega(x, y) = \frac{1}{2} (F_\Omega(x, y) + {}^r F_\Omega(x, y)).$$

De manera equivalente, si $x \neq y$, la métrica de Hilbert se define con la igualdad:

$$H_\Omega(x, y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|y - b| |x - a|}{|x - b| |y - a|} \right),$$

donde $a = a_\Omega(x, y)$ y $b = a_\Omega(y, x)$. Si $x = y$, la métrica de Hilbert se define con la igualdad: $H_\Omega(x, x) = 0$.

– Figura 4.4 – Dominio convexo propio de U

A continuación veremos que la métrica de Hilbert es una métrica que es invariante bajo transformaciones proyectivas, que es un caso particular de la métrica de Funk relativa y generaliza la métrica hiperbólica en el modelo de Klein.

Proposición 4.12 La métrica de Hilbert es invariante bajo transformaciones proyectivas.

Demostración. La prueba se sigue del hecho de que la expresión dentro del logaritmo es la razón cruzada de los puntos b, x, y, a . ■

Proposición 4.13 *La métrica de Hilbert coincide con la mitad de la métrica de Funk relativa del dominio Ω con respecto a sí mismo, es decir,*

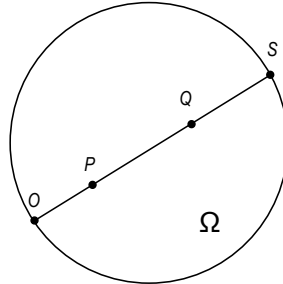
$$H_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2}F_{\Omega, \Omega}(x, y).$$

Demostración. Las siguientes igualdades se cumplen debido a la definición 4.11 y el lema 4.8, respectivamente. Así, la métrica de Hilbert está definida como:

$$\begin{aligned} H_{\Omega}(x, y) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{|y - b| |x - a|}{|x - b| |y - a|} \right) \\ &= \frac{1}{2} (F_{\Omega}(x, y) + {}^r F_{\Omega}(x, y)) \\ &= \frac{1}{2} F_{\Omega, \Omega}(x, y). \end{aligned}$$

■

Proposición 4.14 *Cuando Ω es la bola unitaria euclidiana en \mathbb{R}^n , la métrica de Hilbert $H_{\Omega}(x, y)$ coincide con la métrica hiperbólica en el modelo de Klein, también llamado el modelo de Beltrami - Cayley - Klein del espacio hiperbólico de dimensión n . En este modelo las líneas son los segmentos de recta dentro del disco y las transformaciones rígidas son las transformaciones del disco que mandan líneas en líneas, es decir, que son las transformaciones proyectivas que mandan el disco en el disco.*



– Figura 4.5 – Modelo de Klein

Demostración. Determinaremos la distancia no euclidiana en el modelo de Klein. Sabemos que la razón cruzada es invariante bajo transformaciones proyectivas, entonces vamos a considerar la razón cruzada en la que intervengan los puntos P y Q en el interior de la bola unitaria Ω y el segmento \overline{PQ} , se prolonga hasta intersectarse con la frontera $\partial\Omega$ en O y S . La razón cruzada $[O, S, Q, P]$ de estos cuatro puntos es un número real positivo que podríamos tomar como la definición de distancia entre los puntos P y Q . Pero modificaremos esta definición para poder trabajar con ella. Si los tres puntos P, Q y R están en una recta, debe cumplirse que

$$\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}.$$

Ahora, en general no se cumple la relación

$$[O, S, Q, P] + [O, S, R, Q] = [O, S, R, P].$$

En cambio, tenemos que el producto de razones cruzadas cumple que

$$[O, S, Q, P][O, S, R, Q] = [O, S, R, P], \quad (4.1)$$

pues

$$\begin{aligned} [O, S, Q, P][O, S, R, Q] &= \frac{QO/QS}{PO/PS} \cdot \frac{RO/RS}{QO/QS} \\ &= \frac{RO/RS}{PO/PS} \\ &= [O, S, R, P]. \end{aligned}$$

Como consecuencia de la ecuación 4.1, tenemos que

$$[O, S, Q, P] = \frac{PS/QS}{PO/QO}.$$

Así, podemos dar una definición aditiva satisfactoria calculando la distancia no euclidiana mediante el logaritmo de la razón cruzada. De esta manera, la longitud del segmento

$$\overline{PQ} = \log \left(\frac{PS/QS}{PO/QO} \right).$$

Si consideramos que $O = b = b_{\Omega}(y, x)$, $P = x$, $Q = y$, $S = a = a_{\Omega}(x, y)$ y la definición de norma, concluimos que

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|y - b|}{|x - b|} \cdot \frac{|x - a|}{|y - a|} \right).$$

Por lo tanto, la métrica hiperbólica del modelo de Klein coincide con el resultado de la métrica de Hilbert dado en la proposición 4.13. ■

4.2.2. Otras propiedades de la métrica de Hilbert

Aplicando los resultados de la geometría de Funk obtenemos las siguientes propiedades de la geometría de Hilbert.

Proposición 4.15 *La métrica de Hilbert en un dominio convexo $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ satisface $H_{\Omega}(x, y) \geq 0$ y $H_{\Omega}(x, x) = 0$ para todo $x, y \in \Omega$.*

Demostración.

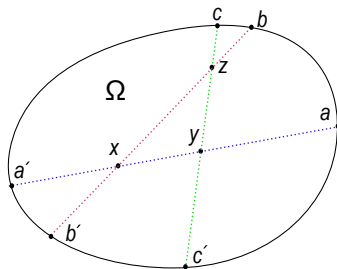
La demostración se sigue de la definición debido a las propiedades de la métrica de Funk y su forma inversa. ■

Proposición 4.16 *La métrica de Hilbert H_{Ω} es simétrica, esto es, $H_{\Omega}(x, y) = H_{\Omega}(y, x)$ para cualesquiera x y y en Ω .*

Demostración. Se sigue de la definición de la métrica de Hilbert que

$$H_{\Omega}(x, y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|y - b| |x - a|}{|x - b| |y - a|} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{|x - a| |y - b|}{|y - a| |x - b|} \right) = H_{\Omega}(y, x). \quad \blacksquare$$

Proposición 4.17 *La métrica de Hilbert en un dominio convexo $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ satisface la desigualdad del triángulo $H_{\Omega}(x, z) \leq H_{\Omega}(x, y) + H_{\Omega}(y, z)$ para todo $x, y, z \in \Omega$.*



– Figura 4.6 – Dominio convexo para la métrica de Hilbert

Demostración. Consideremos los casos siguientes:

Caso (i). Supongamos que $x = z$ o bien que $x \neq z$ con $b, b' \in H_\infty$ tales que $b = a_\Omega(x, z)$ y $b' = a_\Omega(z, x)$. En ambos casos $H_\Omega(x, z) = 0$, cumpliéndose así la desigualdad trivialmente. Por lo tanto, $0 \leq H_\Omega(x, y) + H_\Omega(y, z)$.

Caso (ii). Ahora consideraremos que $x \neq z$ con $b, b' \notin H_\infty$. Sabemos del teorema 3.17 que se cumple la desigualdad $F_\Omega(x, z) \leq F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z)$. Similarmente la desigualdad del triángulo se cumple para la métrica de Funk en su forma inversa

$${}^r F_\Omega(x, z) = F_\Omega(z, x) \leq F_\Omega(z, y) + F_\Omega(y, x) = {}^r F_\Omega(y, z) + {}^r F_\Omega(x, y).$$

De esta manera la conclusión se sigue para la métrica de Hilbert, pues:

$$\begin{aligned} H_\Omega(x, z) &= \frac{1}{2}(F_\Omega(x, z) + {}^r F_\Omega(x, z)) \\ &\leq \frac{1}{2}(F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z) + {}^r F_\Omega(y, z) + {}^r F_\Omega(x, y)) \\ &= \frac{1}{2}(F_\Omega(x, y) + {}^r F_\Omega(x, y)) + \frac{1}{2}(F_\Omega(y, z) + {}^r F_\Omega(y, z)) \\ &= H_\Omega(x, y) + H_\Omega(y, z). \end{aligned}$$

■

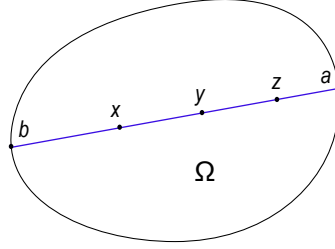
Proposición 4.18 *La métrica de Hilbert H_Ω es proyectiva, esto es, $H_\Omega(x, z) = H_\Omega(x, y) + H_\Omega(y, z)$, donde y es cualquier punto del segmento afín $[x, z]$.*

Demostración. Sea $y \in [x, z]$ como se muestra en la figura 4.7. Entonces

$$\begin{aligned} H_\Omega(x, y) + H_\Omega(y, z) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{|y-b|}{|x-b|} \frac{|x-a|}{|y-a|} \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{|z-b|}{|y-b|} \frac{|y-a|}{|z-a|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{|y-b|}{|x-b|} \frac{|x-a|}{|y-a|} \frac{|z-b|}{|y-b|} \frac{|y-a|}{|z-a|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{|z-b|}{|x-b|} \frac{|x-a|}{|z-a|} \right) \\ &= H_\Omega(x, z). \end{aligned}$$

■

Proposición 4.19 *La métrica de Hilbert H_Ω es separante, esto es, si $x \neq y$ entonces $H_\Omega(x, y) > 0$ si y sólo si el dominio Ω no contiene ninguna recta afín.*



– Figura 4.7 –

Demostración. Primero probaremos, por contrapositiva, que siempre que $x \neq y$, $H_\Omega(x, y) > 0$ implica que Ω no contiene ninguna recta afín L . Veamos entonces que si Ω contiene una recta afín entonces existen $x \neq y$ tales que $H_\Omega(x, y) = 0$. Como Ω contiene una recta afín L , entonces para cualquier pareja de puntos $x, y \in L$, $H_\Omega(x, y) = 0$, pues $a, b \in H_\infty$.

Recíprocamente, para cualesquiera puntos $x, y \in \Omega$ consideremos los puntos $a = a_\Omega(x, y)$, $b = b_\Omega(y, x)$ y el segmento afín $[a, b]$ como es mostrado en la figura 4.8. Así, tenemos los casos:

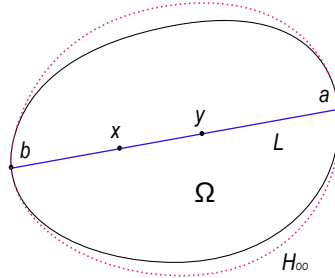
Caso (i). Si $a \in H_\infty$ y $b \notin H_\infty$ entonces $F_\Omega(x, y) = 0$ y por lo tanto,

$$H_\Omega(x, y) = \frac{1}{2} (F_\Omega(x, y) + {}^r F_\Omega(x, y)) = \frac{1}{2} (0 + {}^r F_\Omega(x, y)) = \frac{1}{2} {}^r F_\Omega(x, y) > 0.$$

Caso (ii). Si $a \notin H_\infty$ y $b \in H_\infty$ entonces ${}^r F_\Omega(x, y) = 0$ y así,

$$H_\Omega(x, y) = \frac{1}{2} (F_\Omega(x, y) + {}^r F_\Omega(x, y)) = \frac{1}{2} (F_\Omega(x, y) + 0) = \frac{1}{2} F_\Omega(x, y) > 0.$$

Caso (iii). Si $a, b \notin H_\infty$ entonces $H_\Omega(x, y) > 0$ pues $F_\Omega(x, y) > 0$ y ${}^r F_\Omega(x, y) > 0$. ■



– Figura 4.8 –

Proposición 4.20 *La métrica de Hilbert H_Ω no es acotada.*

Demostración. Sabemos de la proposición 1.16 que la métrica de Funk $F_\Omega(x, y)$ no es acotada y por la proposición 1.37 la métrica de Funk en su forma inversa ${}^r F_\Omega(x, y)$ no es acotada. Por lo tanto, la métrica de Hilbert

$$H_\Omega(x, y) = \frac{1}{2} (F_\Omega(x, y) + {}^r F_\Omega(x, y))$$

no es acotada. ■

Proposición 4.21 *Si el dominio convexo $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ no contiene ninguna recta afín, entonces (Ω, H_Ω) es un espacio métrico. Más aún, si Ω es acotado, entonces (Ω, H_Ω) es un espacio métrico completo.*

Demostración. Al cumplirse las proposiciones 4.15 - 4.17, se sigue que la métrica de Hilbert $H_\Omega(x, y)$ es una métrica en el sentido clásico. Por lo tanto, (Ω, H_Ω) es un espacio métrico. Veamos que $H_\Omega(x, y)$ es completa. Como Ω es un dominio convexo propio acotado, entonces, por la proposición 2.22, Ω junto con su métrica de Funk $F_\Omega(x, y)$ es completo adelante. Por otro lado, como la métrica de Hilbert es simétrica, entonces, por la proposición 2.22, Ω junto con su métrica de Funk en su forma inversa $F_\Omega(y, x)$, es completo adelante. Por lo tanto, la métrica de Hilbert es completa. ■

Observación 4.22 *La bola abierta de radio ϵ con centro en x con respecto a la métrica de Hilbert $B_H(x, \epsilon)$, se define como el conjunto de todos los puntos $y \in \Omega$ tales que la distancia de Hilbert $H_\Omega(x, y) < \epsilon$. De la definición 4.11, la bola adelante abierta y la bola ciar abierta pueden ser descritas por*

$$B^+(x, \epsilon) = \{y \in \Omega \mid F_\Omega(x, y) < 2\epsilon - F_\Omega(y, x) < 2\epsilon\}$$

y

$$B^-(x, \epsilon) = \{y \in \Omega \mid F_\Omega(y, x) < 2\epsilon - F_\Omega(x, y) < 2\epsilon\}$$

respectivamente, con $F_\Omega(x, y) < 2\epsilon$ y $F_\Omega(y, x) < 2\epsilon$.

Teorema 4.23 *Si x, y, z son tres puntos en un dominio convexo propio Ω , entonces*

$$H_\Omega(x, z) = H_\Omega(x, y) + H_\Omega(y, z)$$

si y sólo si cada una de las ternas de puntos $a_\Omega(x, y)$, $a_\Omega(y, z)$, $a_\Omega(x, z)$ y $a_\Omega(y, x)$, $a_\Omega(z, y)$, $a_\Omega(z, x)$ están en una recta $L \subset \mathbb{R}P^n$ que no interseca a Ω .

Demostración. Probaremos la condición de suficiencia por contradicción. Primero supongamos que la terna $a_\Omega(x, y)$, $a_\Omega(y, z)$, $a_\Omega(x, z)$ no es colineal o que está en una línea recta que interseca a Ω . Entonces, de acuerdo a la desigualdad del triángulo para la métrica de Funk se cumple que

$$F_\Omega(x, z) < F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z).$$

Como

$$F_\Omega(z, x) \leq F_\Omega(z, y) + F_\Omega(y, x),$$

entonces tenemos que

$$F_\Omega(x, z) + F_\Omega(z, x) < F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, x) + F_\Omega(y, z) + F_\Omega(z, y).$$

Lo cual implica que

$$H_\Omega(x, z) < H_\Omega(x, y) + H_\Omega(y, z),$$

pero esto es una contradicción, pues por hipótesis se da la igualdad

$$H_\Omega(x, z) = H_\Omega(x, y) + H_\Omega(y, z).$$

Por lo tanto, las ternas de puntos $a_\Omega(x, y)$, $a_\Omega(y, z)$, $a_\Omega(x, z)$ y $a_\Omega(y, x)$, $a_\Omega(z, y)$, $a_\Omega(z, x)$ están en una recta $L \subset \mathbb{R}P^n$ que no interseca a Ω .

De manera recíproca, si $a_\Omega(x, y)$, $a_\Omega(y, z)$, $a_\Omega(x, z)$ están en una línea recta L en $\mathbb{R}P^n$ que no interseca a Ω , entonces por el teorema 3.17

$$F_\Omega(x, z) = F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z).$$

Similarmente, para las ternas $a_\Omega(y, x)$, $a_\Omega(z, y)$, $a_\Omega(z, x)$ tenemos que

$$F_\Omega(z, x) = F_\Omega(y, x) + F_\Omega(z, y).$$

De esta manera, como las dos ternas $a_\Omega(x, y)$, $a_\Omega(y, z)$, $a_\Omega(x, z)$ y $a_\Omega(y, x)$, $a_\Omega(z, y)$, $a_\Omega(z, x)$ están en una línea recta que no interseca a Ω , entonces

$$\begin{aligned} H_\Omega(x, z) &= \frac{1}{2} (F_\Omega(x, z) + F_\Omega(z, x)) \\ &= \frac{1}{2} (F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, z) + F_\Omega(y, x) + F_\Omega(z, y)) \\ &= \frac{1}{2} (F_\Omega(x, y) + F_\Omega(y, x)) + \frac{1}{2} (F_\Omega(y, z) + F_\Omega(z, y)) \\ &= H_\Omega(x, y) + H_\Omega(y, z). \end{aligned}$$

■

4.2.3. Geodésicas de la métrica de Hilbert

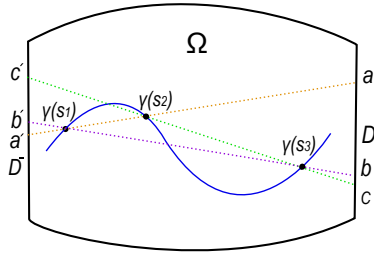
Definición 4.24 *Un dominio convexo afilado es un subconjunto convexo de \mathbb{RP}^n que no contiene ninguna recta afín.*

Teorema 4.25 *Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una trayectoria en un dominio convexo afilado de \mathbb{R}^n . Entonces γ es una geodésica para la métrica de Hilbert H_Ω en Ω si y sólo si existen dos caras $D^-, D^+ \subset \tilde{\partial}\Omega$ tales que para cualesquiera $t_1 < t_2 \in [0, 1]$ tenemos que $\gamma(t_2) - \gamma(t_1) \in C_{\gamma(t_1)}(D^+)$ y $\gamma(t_1) - \gamma(t_2) \in C_{\gamma(t_2)}(D^-)$.*

Demostración. Como γ es una geodésica para la métrica de Hilbert, entonces se satisface la siguiente igualdad

$$H_\Omega(\gamma(s_1), \gamma(s_3)) = H_\Omega(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) + H_\Omega(\gamma(s_2), \gamma(s_3)),$$

debido al lema 3.24, para cualesquiera $s_1, s_2, s_3 \in [0, 1]$ tales que $s_1 \leq s_2 \leq s_3$. Luego, del teorema 4.23, cada una de las ternas a, b, c y a', b', c' están alineadas en \mathbb{RP}^n . Entonces por el lema 3.16 existen dos caras D^+, D^- tales que $a, b, c \in D^+$ y $a', b', c' \in D^-$. Se sigue del teorema 3.25 que $\gamma(t_2) - \gamma(t_1) \in C_{\gamma(t_1)}(D^+)$ y $\gamma(t_1) - \gamma(t_2) \in C_{\gamma(t_2)}(D^-)$ si $t_1 < t_2$ y $t_1, t_2 \in [0, 1]$.



– **Figura 4.9** – Geodésicas para la métrica de Hilbert

Recíprocamente, supongamos que $\gamma(t_2) - \gamma(t_1) \in C_{\gamma(t_1)}(D^+)$ y $\gamma(t_1) - \gamma(t_2) \in C_{\gamma(t_2)}(D^-)$ con $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tal que $t_1 < t_2$. Por hipótesis, existen dos caras D^+, D^- tales que $a, b, c \in D^+$ y $a', b', c' \in D^-$. Así, por el lema 3.16 las ternas de puntos a, b, c y a', b', c' están alineadas en \mathbb{RP}^n . De esta manera, por el teorema 4.23, la igualdad en la métrica de Hilbert

$$H_\Omega(\gamma(s_1), \gamma(s_3)) = H_\Omega(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) + H_\Omega(\gamma(s_2), \gamma(s_3))$$

se cumple siempre que $s_1, s_2, s_3 \in [0, 1]$ cumplen que $s_1 \leq s_2 \leq s_3$. Por lo tanto, γ es una geodésica para la métrica de Hilbert por el lema 3.24. ■

Corolario 4.26 Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una trayectoria de clase C^1 en un dominio convexo acotado de \mathbb{R}^n . Entonces, γ es una geodésica para la métrica de Hilbert en Ω si y sólo si existen dos caras $D^-, D^+ \subset \tilde{\partial}\Omega$ tales que para cualquier $t \in [0, 1]$, la recta tangente a la curva $\gamma(t)$ interseca a la frontera $\partial\Omega$ en $D^+ \cup D^-$.

Demostración. Supongamos primero que, γ es una geodésica para la métrica de Hilbert en Ω . Así, por el teorema 4.25 existen dos caras D^-, D^+ tales que $D^-, D^+ \subset \tilde{\partial}\Omega$. Se sigue del corolario 3.27, que γ es una geodésica de la métrica de Funk. Por lo tanto, $\dot{\gamma}(t) \in C_{\gamma(t)}(D^+)$. De forma similar, por el corolario 3.27, la curva γ es una geodésica para la forma inversa de la métrica de Funk ${}^rF_{\Omega}(x, y)$. Entonces, existe una cara $D^- \subset \tilde{\partial}\Omega$ tal que $-\dot{\gamma}(t) \in C_{\gamma(t)}(D^-)$. Por lo tanto, $\dot{\gamma}(t)$ interseca a la frontera $\tilde{\partial}\Omega$ en $D^+ \cup D^-$.

Recíprocamente, supongamos que $\dot{\gamma}(t)$ interseca a la frontera $\tilde{\partial}\Omega$ en $D^+ \cup D^-$. Sin perder generalidad, suponemos que $\dot{\gamma}(t)$ interseca a D^+ , y que $-\dot{\gamma}(t)$ interseca a D^- . Por el corolario 3.27, γ es una geodésica de la métrica de Funk y γ es una geodésica de la métrica de Funk en su forma inversa. Por lo tanto, γ es una geodésica para la métrica de Hilbert, pues como Ω es acotado, entonces en particular es un dominio convexo afilado y se cumplen todas las hipótesis del teorema 4.25. ■

Corolario 4.27 Supongamos que todas, salvo posiblemente una de sus caras propias, son un punto. Entonces la geometría de Hilbert en Ω tiene la propiedad de unicidad en geodésicas.

Demostración. Primero supongamos que Ω es estrictamente convexo. Por el corolario 3.26, al ser $a_{\Omega}(x, y) \in \partial\Omega$ un punto expuesto, existe una única geodésica de Funk que pasa por los puntos x y y , a saber, el segmento afín $[x, y]$. De forma similar, como $a_{\Omega}(y, x) \in \partial\Omega$ es un punto expuesto, entonces existe una única geodésica de Funk en su forma inversa que pasa por los puntos y y x , a saber, el segmento afín $[y, x]$. Por lo tanto, las geodésicas de la métrica de Funk y de la métrica de Funk en su forma inversa, que unen dos puntos cualesquiera $x, y \in \Omega$, coinciden, más aún, cada una de estas geodésicas es una geodésica de Hilbert. En el caso más general, si Ω es un dominio convexo propio conformado por puntos expuestos en la frontera $\partial\Omega$ y una cara propia distinta de un punto, estos resultados se siguen cumpliendo, pues, si el segmento $[x, y]$ que une a dos puntos cualesquiera x y y en Ω , su prolongación interseca a un punto expuesto en la frontera $\partial\Omega$ y a una cara propia distinta de un punto, se sigue del corolario 3.26 que existe una única geodésica de Funk uniendo a dichos puntos, a saber, el segmento $[x, y]$. Por lo tanto, la geometría de la métrica de Hilbert tiene la propiedad de unicidad en geodésicas. ■

4.3. Prueba clásica de la desigualdad del triángulo

La siguiente prueba de la desigualdad del triángulo para la métrica de Funk fue dada por Zaustinsky [16]. En esta prueba, Zaustinsky utilizó el teorema clásico de Menelao. Antes de dar esta prueba, veremos una demostración del teorema de Menelao considerando que el triángulo $\triangle ABC$ es un subconjunto de un espacio euclidiano con al menos tres dimensiones. Previo al enunciado y a la demostración del teorema de Menelao, recordemos la noción de razón afín (página 6). Sean A, B, P puntos en \mathbb{R}^n con $A \neq B$. Entonces P es un elemento de la recta que pasa por A y B si y sólo si

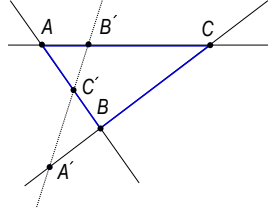
$$P = tB + (1 - t)A$$

para un único $t \in \mathbb{R}$. El número t es llamado *razón afín de P relativa a A y B* . Denotaremos esto por $t = \frac{AP}{AB}$. La razón afín es invariante bajo transformaciones afines. Además, si $A \neq B$ y $A \neq P$, entonces $\frac{AP}{AB} = t$ si y sólo si $\frac{PB}{PA} = \frac{t-1}{t}$. Notemos que el signo es un importante componente de la razón afín, y de hecho $\frac{AP}{AB} = \pm \frac{|P-A|}{|B-A|}$ con el signo más si y sólo si P está en el segmento AB .

Teorema 4.28 Sea $\triangle ABC$ un triángulo euclidiano no degenerado en \mathbb{R}^n y sean A', B', C' tres puntos arbitrarios en las rectas que contienen a los lados BC, AC, AB respectivamente. Supongamos que $A' \neq C, B' \neq A, C' \neq B$. Entonces, los puntos A', B', C' están alineados si y sólo si

$$\frac{A'B}{A'C} \frac{B'C}{B'A} \frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Demostración. Esta demostración adquiere tintes más algebraicos que puramente geométricos. Por conveniencia, supondremos que A, B y C son puntos en \mathbb{R}^n con $n \geq 3$ y supondremos que $0 \in \mathbb{R}^n$ no pertenece al plano Π que contiene a los puntos A, B, C (figura 4.10).



– Figura 4.10 –

Por hipótesis C' está en la recta que pasa por los puntos A y B . Así, existe un número real ν tal que

$$C' = \nu A + (1 - \nu)B \quad (4.2)$$

de tal manera que

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{\nu - 1}{\nu}.$$

Del mismo modo ocurre para A' y B' , es decir, existe un par de números reales λ y μ tales que

$$A' = \lambda B + (1 - \lambda)C$$

y

$$B' = \mu C + (1 - \mu)A$$

con

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{1 - \lambda}{\lambda}$$

y

$$\frac{B'B}{B'C} = \frac{1 - \mu}{\mu},$$

respectivamente. Por otro lado, el punto C' está en la recta que pasa por los puntos A' y B' si y sólo si existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$C' = \rho A' + (1 - \rho)B'. \quad (4.3)$$

De esta manera

$$\begin{aligned} C' &= \rho A' + (1 - \rho)B' \\ &= \rho(\lambda B + (1 - \lambda)C) + (1 - \rho)(\mu C + (1 - \mu)A) \\ &= \lambda\rho B + \rho(1 - \lambda)C + \mu(1 - \rho)C + (1 - \rho)(1 - \mu)A \\ &= (1 - \rho)(1 - \mu)A + \lambda\rho B + (\rho(1 - \lambda) + \mu(1 - \rho))C \end{aligned}$$

Comparando las expresiones (4.2) y (4.3) para C' se sigue la igualdad

$$\nu A + (1 - \nu)B = (1 - \rho)(1 - \mu)A + \lambda\rho + (\rho(1 - \lambda) + \mu(1 - \rho))C,$$

la cual se cumple si y sólo si se satisfacen simultáneamente las siguientes tres igualdades

$$\begin{aligned}\nu &= (1 - \rho)(1 - \mu) \\ 1 - \nu &= \lambda\rho, \text{ y} \\ \rho(1 - \lambda) + (\mu(1 - \rho)) &= 0.\end{aligned}$$

De estas igualdades conseguimos $\frac{1 - \nu}{\nu} = \frac{\lambda\rho}{(1 - \rho)(1 - \mu)}$ y $\rho = \frac{\mu(1 - \rho)}{1 - \lambda}$.

Al sustituir el valor de ρ ,

$$\frac{1 - \nu}{\nu} = -\frac{\lambda\mu(1 - \rho)}{(1 - \rho)(1 - \mu)(1 - \lambda)} = -\frac{\lambda\mu}{(1 - \mu)(1 - \lambda)}.$$

Entonces,

$$\frac{(\nu - 1)(\lambda - 1)(\mu - 1)}{\lambda\nu\mu} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{A'B B'C C'A}{A'C B'A C'B} = \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{1 - \mu}{\mu} \frac{1 - \nu}{\nu} = 1.$$

Por lo tanto, A', B', C' están alineados.

Recíprocamente, si

$$\frac{A'B B'C C'A}{A'C B'A C'B} = 1 = \frac{A'B B'C D'A}{A'C B'A D'B}$$

entonces

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{D'A}{D'B}$$

si y sólo si

$$\frac{AB - C'B}{C'B} = \frac{AB - D'B}{D'B}$$

si y sólo si

$$\frac{AB}{C'B} = \frac{AB}{D'B}$$

si y sólo si

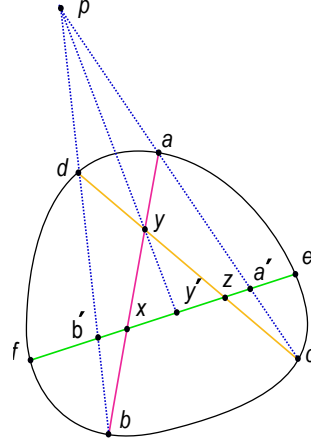
$$C'B = D'B.$$

Por lo tanto A', B', C' están alineados. ■

Ahora presentamos la prueba de la desigualdad del triángulo para la métrica de Funk que anunciamos al inicio de esta sección. Esta demostración de Zaustinsky es similar a la que fue dada por David Hilbert de la desigualdad del triángulo para la distancia de Hilbert, aunque la prueba que dio Hilbert no utilizaba el teorema de Menelao.

Demostración. Sean x, y, z tres puntos en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ no colineales usando la notación de la figura 4.11 concerniente al orden de las intersecciones. Sean a, b, c, d, e, f las intersecciones con $\partial\Omega$ de las rectas xz , yx y zy . Si denotamos la razón cruzada de los puntos a, b, c y d como

$$[a, b, c, d] = \frac{ac}{ad} \frac{bd}{bc},$$



– Figura 4.11 –

entonces, tenemos de la invarianza de la razón cruzada con p el punto de perspectiva (ver figura 4.11).

$$[a, b, x, y] = \frac{|a - x| |b - y|}{|a - y| |b - x|} = \frac{|x - a| |b - y|}{|y - a| |b - x|}$$

y

$$[a', b', x', y'] = \frac{|a' - x'| |b' - y'|}{|a' - y'| |b' - x'|} = \frac{|x - a'| |b' - y'|}{|y' - a'| |b' - x'|}.$$

Al igualar estos resultados se obtiene la identidad

$$\frac{|x - a| |b - y|}{|y - a| |b - x|} = \frac{|x - a'| |b' - y'|}{|y' - a'| |b' - x'|}. \quad (4.4)$$

De forma similar tenemos que

$$[c, d, y, z] = \frac{|c - y| |d - z|}{|c - z| |d - y|} = \frac{|y - c| |d - z|}{|z - c| |d - y|}$$

y

$$[c', d', y', z'] = \frac{|c' - y'| |d' - z'|}{|c' - z'| |d' - y'|} = \frac{|y' - c'| |d' - z'|}{|z - a'| |b' - y'|}.$$

De las cuales obtenemos la igualdad siguiente

$$\frac{|y - c| |d - z|}{|z - c| |d - y|} = \frac{|y' - c'| |d' - z'|}{|z - a'| |b' - y'|}. \quad (4.5)$$

Multiplicando ambos lados de las ecuaciones (4.4) y (4.5) que resultaron de la invarianza de la razón cruzada con la perspectiva en p , conseguimos

$$\begin{aligned} \frac{|x - a| |y - c|}{|y - a| |z - c|} &= \frac{|x - a'| |b' - y'| |y' - a'| |b' - z'| |b - x| |d - y|}{|y' - a'| |b' - x| |z - a'| |b' - y'| |b - y| |d - z|} \\ &= \frac{|x - a'| |b' - z'| |b - x| |d - y|}{|z - a'| |b' - x| |b - y| |d - z|}. \end{aligned}$$

Y dado que los puntos b, b', d están sobre los lados del triángulo $\triangle xyz$ y están alineados, por el teorema de Menelao

$$\frac{|b' - z| |b - x| |d - y|}{|b' - x| |b - y| |d - z|} = 1.$$

Así,

$$\frac{|x-a| |y-c|}{|y-a| |z-c|} = \frac{|x-a'|}{|z-a'|}.$$

De nuestra construcción consideramos la razón cruzada de los puntos x, z, a', a tal que

$$[x, z, a', a] = \frac{|x-a'|}{|x-a|} \frac{|z-a|}{|z-a'|} \geq 1$$

y así,

$$\frac{|x-a'|}{|x-a|} \geq \frac{|z-a'|}{|z-a|}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{|x-a'|}{|z-a'|} \geq \frac{|x-a|}{|z-a|}.$$

De tal forma obtenemos la desigualdad

$$\frac{|x-a| |y-c|}{|y-a| |z-c|} = \frac{|x-a'|}{|z-a'|} \geq \frac{|x-a|}{|z-a|},$$

que al aplicar el logaritmo natural, el resultado es equivalente a la desigualdad del triángulo de la métrica de Funk

$$F_{\Omega}(x, z) \leq F_{\Omega}(x, y) + F_{\Omega}(y, z).$$

Esto completa la prueba. ■

Bibliografía

- [1] A. Barvinok. A course in convexity, volume 54 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [2] H. Busemann, The geometry of geodesics. Academic Press, NewYork 1955; reprinted by Dover in 2005.
- [3] H. Busemann and P. J. Kelly, Projective geometry and projective metrics. Academic Press, NewYork 1953.
- [4] M. Clapp, Análisis Matemático. Prensas de ciencias, México 2015.
- [5] R. Courant, H. Robbins, ¿Qué son las matemáticas?. Conceptos y métodos fundamentales, Fondo de Cultura Económica, México 2002.
- [6] M. Crampon, *The geodesic flow of Finsler and Hilbert geometries*. In Handbook of Hilbert geometry (A. Papadopoulos and M. Troyanov, eds.), European Mathematical Society, Zürich 2014, 162–203.
- [7] G. Gatica. Introducción al Análisis Funcional: teoría y aplicaciones. Editorial Reverté, Barcelona 2014.
- [8] J. Baptiste, H. Urruty, C. Lemaréchal. Fundamentals of Convex Analysis, Springer-Verlang, Berlin Heidelberg, New York 2001.
- [9] I.E. Leonard, J.E. Lewis, Geometry of convex sets. John Wiley and Sons, 2016. Hoboken, New Jersey.
- [10] H. Miyachi-Kenichi and S. Yamada, *Weil-Petersson Funk metric on Teichmüller space*. In Handbook of Hilbert geometry (A. Papadopoulos and M. Troyanov, eds.), European Mathematical Society, Zürich 2014, 339-350.
- [11] A. Papadopoulos and M. Troyanov, *From Funk to Hilbert geometry*. In Handbook of Hilbert geometry (A. Papadopoulos and M. Troyanov, eds.), European Mathematical Society, Zürich 2014, 33–67.
- [12] A. Papadopoulos and M. Troyanov, *Weak metrics on Euclidean domains*, JP Journal of Geometry and Topology, Volume 7, Issue 1 (2007), 23-44.
- [13] A. Papadopoulos and M. Troyanov, *Weak Minkowski Spaces*, Handbook of Hilbert Geometry, 22, European Mathematical Society Publishing House, p 11-32.
- [14] A. Papadopoulos, *Hilbert's fourth problem*. In Handbook of Hilbert geometry (A. Papadopoulos and M. Troyanov, eds.), European Mathematical Society, Zürich 2014, 391-424.
- [15] C. Prieto de Castro, Topología Básica. Fondo de Cultura Económica, México 2013.

- [16] M. Troyanov, *Funk and Hilbert geometries from the Finslerian viewpoint*. In Handbook of Hilbert geometry (A. Papadopoulos and M. Troyanov, eds.), European Mathematical Society, Zürich 2014, 69–107.
- [17] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princenton University Press, New Jersey, 1997.
- [18] A. Vasilevich Pogorelov, *Hilbert's Fourth Problem*. John Wiley & Sons, Washinton, D.C.
- [19] R. Webster, *Convexity*, Oxford University Press, New York, 1994.
- [20] E.M Zaustinsky, *Spaces with nonsymmetric distance*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 34 1959.