



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEOREMAS TIPO TVERBERG EN POSICIÓN
CONVEXA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

CALEB AGUILAR CAMARGO

TUTOR

DEBORAH OLIVEROS BRANIFF



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno	
Apellido paterno	Aguilar
Apellido materno	Camargo
Nombre	Caleb
Teléfono	(55) 7075 2698
Universidad Nacional Autónoma de México	Facultad de Ciencias
Licenciatura	Matemáticas
Número de cuenta	416001475
Datos del jurado	
1. Datos de la tutora	4. Datos del sinodal 3
Dra.	Dr.
Deborah	Diego Antonio
Oliveros	González
Braniff	Moreno
2. Datos del sinodal 1	5. Datos del sinodal 4
Dr.	Dr.
Luis	Vinicio Antonio
Montejano	Gómez
Peimbert	Gutiérrez
3. Datos del sinodal 2	6. Datos del trabajo escrito
Dr.	Teoremas tipo Tverberg
Leonardo Ignacio	en posición convexa
Martínez	87 p
Sandoval	2021

Índice general

Agradecimientos	1
Introducción	3
1 Preliminares	5
1.1 Conjuntos convexos	5
1.2 Gráficas	10
1.3 El fascinante mundo de la topología combinatoria. ¡No apto para nerviosos!	18
1.3.1 Lo necesario de topología general	18
1.3.2 Complejos simpliciales	19
1.3.3 Nervios	22
1.4 Una introducción al universo puntual	25
1.4.1 Tipos de orden	25
1.4.2 Un final feliz	29
2 Teoremas sobre puntos	31
2.1 El famoso lema de Radon	31
2.2 El teoremonon de Tverberg	33
2.3 Reformulando al teorema de Tverberg	36
2.4 Los d -Tverberg complejos simpliciales	38
3 Los nervios convexos	41
3.1 Ciclos	41
3.2 Ruedas	49
4 Pegando ciclos	55
4.1 Cadenas ciclosas	55
4.2 Libros	65
5 Planilandia	73
6 Trabajo a futuro	79
Bibliografía	81

Agradecimientos

Por todo a mis padres, familia y amigos.

Agradezco a Kathia Esquivel, Ariadna Juárez, Marcos González, Iván Rasskin a Toño Torres y en especial a Déborah por el amor y esfuerzo que le pusieron al trabajo en equipo que culminó con la escritura de este trabajo.

Agradezco a Luis Montejano por enseñarme que también existen matemáticos que son bonitos seres humanos, que la frustración es un proceso natural del cual podemos aprender y que siempre hay preguntas divertidas por hacerse. A Leonardo Martínez por sus atinados comentarios, por ser una fuente de inspiración tanto a nivel pedagógico como humano. A Diego González por todo el tiempo dedicado a las matemáticas en conjunto y por las pláticas entretenidas sobre la vida y lo bonita que es la música. Finalmente (pero, como ya todo mundo sabe, no menos importante) agradezco a Vinicio por todas las clases divertidas y todas las cosas que me transmitió durante la licenciatura.

Finalmente agradezco a los proyectos PAPIIT de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA), UNAM por el apoyo económico del proyecto IN106318 que hizo posible la realización de esta tesis.

Introducción

Un día un gran amigo me preguntó “¿qué tienen de bueno los tontos puntos?”. Es a partir de ese momento que empezó mi fascinación por ellos. Tiempo atrás ya me encontraba fascinado con las matemáticas presentes en los colores, por lo que me pregunte: ¿qué pasará si combinas puntos y colores? Afortunadamente no he sido el único que ha sido capturado por la infinita diversión que ofrecen los puntos y los colores; Johann Radon, matemático austriaco, en 1921 demostró que si tomas un conjunto de puntos al cual cada punto está coloreado con azul o rojo y luego formas un convexo azul con los puntos azules y un convexo rojo con los puntos rojos entonces es muy probable que la intersección de éstos dos convexos sea no vacía. El problema anterior parecería tener más que ver con los convexos que con el conjunto de puntos en sí, pero lo sorprendente del problema es que lo único verdaderamente importante es cuántos puntos tienes, si tienes muy poquitos puntos entonces, nuevamente, es muy probable que la intersección sea vacía, pero cuando tienes muchos puntos tendrías demasiada mala suerte si no logras que los convexos se intersecten. Al resultado previo se le conoce como *Lema de Radon* y especifica que si tienes al menos $(d + 2)$ puntos en \mathbb{R}^d entonces siempre existe al menos una manera de colorear a los puntos para que la intersección de los convexos de cada color sea no vacía.

Sin embargo cuando uno compra su cajita de colores no sólo se pone a usar dos colores, ¿qué pasaría si quisiera utilizar tres colores? o ¿qué pasaría si quisiera utilizar treinta colores?

Helge Tverberg; matemático noruego, se preguntó lo mismo en 1966 y demostró que si tu quieres utilizar r colores entonces necesitas al menos $(d + 1)(r - 1) + 1$ puntos en \mathbb{R}^d para asegurarte que siempre existe una forma de colorear a esos puntos de tal forma que los r convexos resultantes de cada color se intersecten. Más aún, existe una forma de colocar $(d + 1)(r - 1)$ puntos en \mathbb{R}^d tal que no importa cómo se colorean todos los puntos con los r colores, la intersección de los r convexos resultantes sería vacía. Por lo que nuevamente lo verdaderamente importante del problema es cuántos puntos tienes (y un poco el cómo estén acomodados esos puntos).

A este tipo de problemas donde lo más importante es la cantidad de ciertos elementos (que en nuestro caso serán puntos) y donde hay que tener cierto cuidado en el acomodo de esos elementos se les conoce como *problemas tipo Tverberg*.

El presente trabajo tiene como propósito mostrar una serie de resultados nuevos en un problema tipo Tverberg particular.

El primer capítulo tiene como objetivo mostrar todos los preliminares necesarios para la comprensión de este trabajo, como son: las bases teóricas de los conjuntos convexos, de la teoría de gráficas, de la topología combinatoria y los puntos. Las partes más importantes del primer capítulo son la introducción de los *complejos simpliciales*; en particular de los *nervios*, así como lo que llamamos *complejos simpliciales d-partidos*.

Introducción

En el capítulo dos se muestran el *Lema de Radon* y el *Teorema de Tverberg* formalmente, así como algunas propiedades interesantes respecto a ellos. También se retoman los complejos simpliciales d -partidos para generalizarlos a *d -Tverberg complejos simpliciales*.

Al inicio del capítulo 3 introducimos un caso particular de los d -Tverberg complejos simpliciales, los llamados *d -Tverberg convexo complejos simpliciales* y se introducen los primeros ejemplos sencillos de estos, los cuales resultan ser las *gráficas* conocidas como *ciclos*. Además intentamos analizar si las *gráficas ruedas* también son o no son un ejemplo de d -Tverberg convexo complejos simpliciales.

En el capítulo 4 hacemos uso de lo aprendido en los capítulos previos para determinar si unas familias de gráficas más complejas llamadas *cadena* y *libros* también resultan ser d -Tverberg convexo complejos simpliciales u otro tipo de objeto matemático.

Finalmente en los capítulos 5 y 6 mostramos un ejemplo de una gráfica que *no* es un d -Tverberg convexo complejo simplicial y enlistamos una serie de problemas que servirían como trabajo a futuro.

1 Preliminares

En este capítulo se presentan las nociones básicas de conjuntos convexos, teoría de gráficas y topología combinatoria con la finalidad de sentar los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo de este trabajo.

1.1. Conjuntos convexos

La *geometría convexa* es un área muy moderna dentro de las matemáticas discretas pues fue apenas en el siglo pasado que gracias a matemáticos como *P. Kirchberger*, *C. Caratheodory*, *J. Radon*, *E. Helly*; quienes en 1902, 1907, 1921 y 1924 respectivamente, obtuvieron resultados que formarían una base fundamental de esta área. Las siguientes definiciones son básicas para entender un poquito del mundo convexo.

Definición 1.1.1 (Conjunto convexo): Decimos que un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^d$ es *convexo* si para toda pareja de puntos $a, b \in C$ y para toda $t \in [0, 1]$ se cumple que $(1 - t)a + tb \in C$; es decir C es convexo si el segmento de recta ab queda contenido en C .

Ejemplo 1.1.2: Los siguientes conjuntos son convexos:

- * Un punto, una línea recta o un hiperplano en \mathbb{R}^d
- * Una *bola abierta (cerrada)* en \mathbb{R}^d centrada en el origen.
Es decir, $B(0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\bar{x} - \bar{y}\| < r\}$ ($\overline{B(0, r)} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq r\}$)
- * Un *subespacio afín* de \mathbb{R}^d . Es decir, dados $x \in \mathbb{R}^d$ un vector y A un subespacio lineal de \mathbb{R}^d , $x + A$ es un subespacio afín de \mathbb{R}^d [MMO19]
- * Para más ejemplos se recomienda consultar el capítulo 1 de [Lay07] y el capítulo 2 de [Sol15]
- * En la *Figura 1.1 en la página siguiente* se muestran unos dibujos de conjuntos convexos y no convexos.



Se puede intuir del ejemplo anterior que existe una cantidad infinita de conjuntos no convexos, sin embargo, dado un conjunto no convexo siempre podemos obtener uno que sí sea convexo.

Definición 1.1.3 (Envoltente convexa o cerradura convexa): Sea $X \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto de puntos. Se define la *envoltente convexa de X* como el conjunto convexo más pequeño de \mathbb{R}^d que contiene a X y se denota por $C(X)$ o $conv(X)$. Además resulta ser que $conv(X)$ es la intersección de todos los convexos de \mathbb{R}^d que contienen a X . Es decir, $conv(X) = \bigcap \{C \subseteq \mathbb{R}^d \mid X \subseteq C \text{ y } C \text{ es convexo}\}$

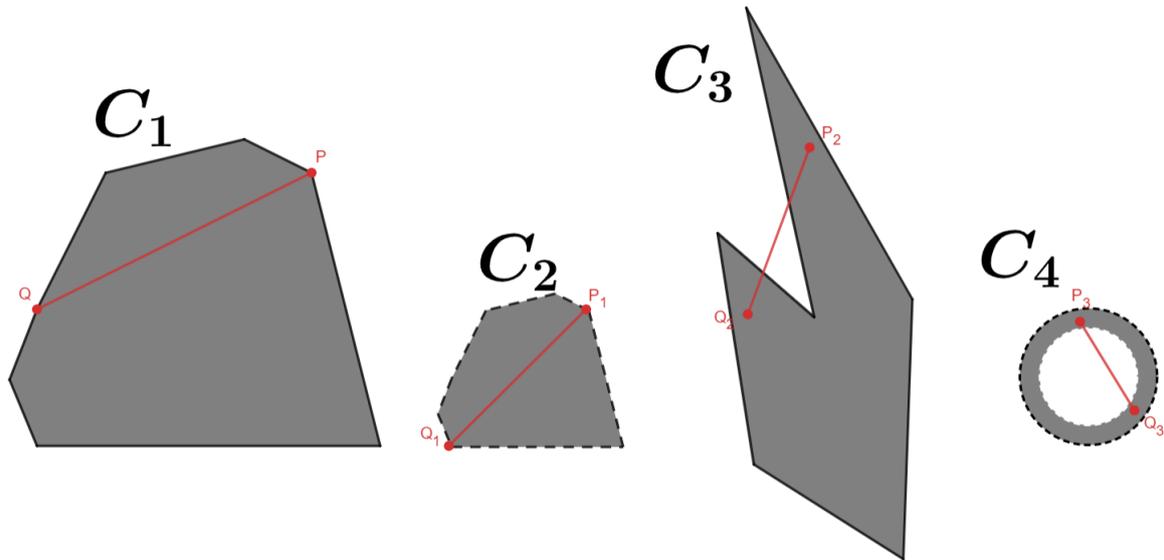


Figura 1.1: Sólo los conjuntos C_1 y C_2 son convexos a pesar de que C_2 no tiene frontera.

Ejemplo 1.1.4: Considerando los conjuntos C_3 y C_4 de la Figura 1.1, podemos obtener su envolvente convexa, como se muestra en la Figura 1.2.

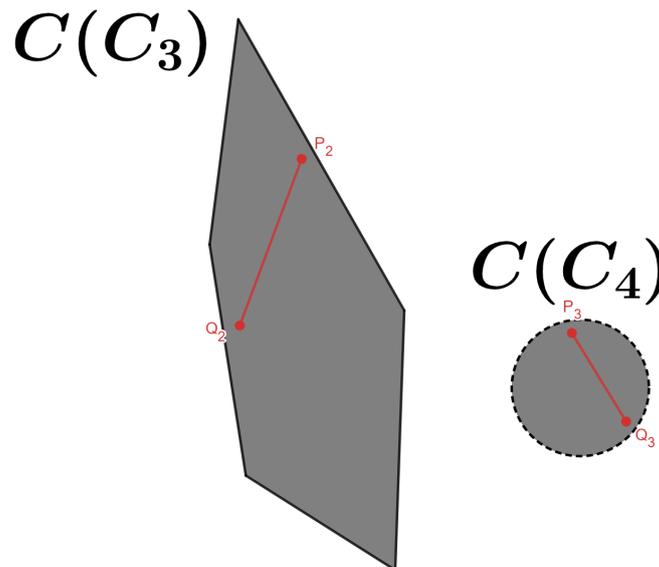


Figura 1.2: La envolvente convexa de cualquier conjunto nos da un convexo.



Observemos que en la definición previa de envolvente convexa se afirma que la intersección de convexos es un convexo; este es un resultado fácil de probar. En efecto, si la intersección es vacía, entonces se cumple por vacuidad y si no, un segmento de recta que está contenido en cada uno de ellos queda contenido en su intersección; es decir, el siguiente teorema es verdadero.

Teorema 1.1.5: La intersección (no necesariamente finita) de convexos también es un conjunto convexo.

Definición 1.1.6 (Combinación convexa / Combinación afin): Decimos que $x \in \mathbb{R}^d$ es *combinación convexa* de $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^d$ si existen a_1, \dots, a_r escalares tales que:

$$x = \sum_{i=1}^r a_i x_i \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^r a_i = 1 \tag{1.2}$$

$$a_i \geq 0 \quad \forall i \tag{1.3}$$

Si la condición (1.3) se elimina, se dice que x está en *combinación afin* de $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^d$ y se dice que x, x_1, \dots, x_r son *afinmente dependientes*.

Ejemplo 1.1.7:

- * Si $r = 2$, podemos decir que $x \in \mathbb{R}^d$ es combinación convexa de $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ si y sólo si $x \in [x_1, x_2]$, donde $[x_1, x_2]$ es el segmento de recta en \mathbb{R}^d que une los puntos x_1 y x_2 .
- * Si $r = 4$, podemos decir que dados $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^d$ afinmente independientes, entonces $x \in \mathbb{R}^d$ es combinación convexa de $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^d$ si y sólo si x está en el tetraedro sólido cerrado de \mathbb{R}^d formado por x_1, x_2, x_3, x_4 como sus vértices.
- ◆ Podría suceder también que $x \in \mathbb{R}^d$ sea combinación convexa de $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^d$. Esto pasa si y sólo si x está en la cara $x_2x_3x_4$ del tetraedro sólido.



La definición de envolvente convexa también se puede expresar en términos de combinaciones convexas, como lo afirma el siguiente teorema. La demostración se puede consultar en [Sol15, MMO19].

Teorema 1.1.8: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto de puntos, entonces

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i x_i : r \geq 1, x_1, \dots, x_r \in X, a_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq r, \sum_{i=1}^r a_i = 1 \right\}$$

La siguiente proposición muestra muchas de las propiedades que cumplen los conjuntos convexos.

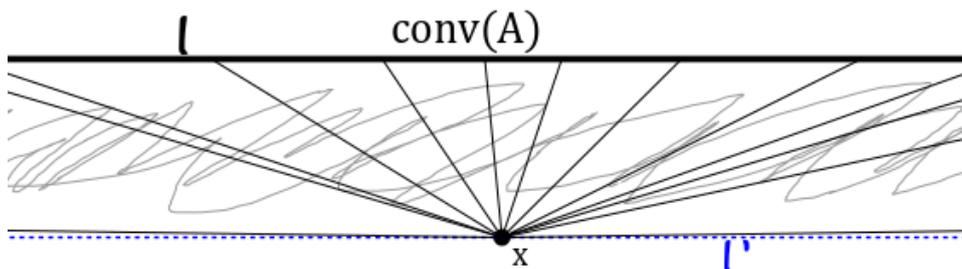


Figura 1.3: Un conjunto cerrado no necesariamente tiene una envolvente convexa cerrada.

Proposición 1.1.9: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto, entonces:

1. $A \subseteq \text{conv}(A)$
2. Si $A \subseteq B$ entonces $\text{conv}(A) \subseteq \text{conv}(B)$
3. Si A es convexo, entonces $A = \text{conv}(A)$
4. Si A es convexo, entonces $\text{int}(A)$ y \bar{A} son convexos
5. Si A es abierto, entonces $\text{conv}(A)$ es abierto
6. Si A es acotado, entonces $\text{conv}(A)$ es acotado
7. Si A es compacto, entonces $\text{conv}(A)$ es compacto
8. Existe un conjunto A cerrado, tal que $\text{conv}(A)$ no es cerrado

Donde $\text{int}(A)$ y \bar{A} denotan el interior y la cerradura del conjunto A , respectivamente.

Mientras que las propiedades 1 a 7 parecen comportarse como uno esperaría, la propiedad 8 resulta muy interesante, pues parece ir en contra de la intuición. Para mostrar que es verdadera consideremos a A como una recta l en \mathbb{R}^2 unida con un punto x fuera de la recta. Entonces $\text{conv}(A)$ es una banda semiabierto bordeada entre la recta l y una recta l' paralela a l que pasa por el punto x , unión el punto x . Véase la *Figura 1.3 en la página anterior*

Muchos problemas de geometría convexa son resultados triviales cuando consideramos puntos “acomodados de manera bonita”; para entender a qué nos referimos con ésta frase imaginemos que tenemos 10 puntos en la mano (puede pensar que son monedas) y los aventamos bruscamente en una mesa plana, sería realmente extraño que todos esos puntos cayeran exactamente en el mismo lugar (o que las monedas cayeran apiladas), también sería realmente extraño que todos los puntos en la mesa formaran una línea recta, evidentemente éstos casos tan raros podrían pasar, pero resultan ser aburridos en muchas ocasiones, es por ésto que la siguiente definición será de vital importancia en este trabajo.

Definición 1.1.10 (Posición general): Sea $X \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto de puntos. Decimos que los puntos de X están en *posición general* si todo subconjunto de a lo más $d + 1$ puntos es afinmente independiente.

Ejemplo 1.1.11:

- * Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de puntos, X está en posición general si para cualesquiera 2 puntos de X éstos no están en la misma posición.
- * Si $X \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto de puntos, X está en posición general si para cualesquiera 3 puntos de X éstos no están alineados.
 - ◆ Observemos que si hubiera 2 puntos de X en la misma posición, entonces entre ellos 2 y cualquier otro punto de X formarían una línea, por lo que también se preserva que no haya 2 puntos de X en la misma posición.
- * Si $X \subseteq \mathbb{R}^3$ es un conjunto de puntos, X está en posición general si para cualesquiera 4 puntos de X éstos no están contenidos en un plano de \mathbb{R}^3

- ◆ Observemos que si hubiera 3 puntos de X sobre una línea, con cualquier otro punto de X se tendría un plano de \mathbb{R}^3 , por lo que también se preservaría que no haya 3 puntos de X alineados; y al igual que en el caso de \mathbb{R}^2 requerimos que dos puntos no compartan el mismo espacio.



Como el nombre lo indica, la posición general es muy general. Muchos problemas de geometría convexa tienen gran relevancia aún cuando los puntos están acomodados de una forma sencilla, por ejemplo que todos estén en la frontera de la envolvente convexa que ellos mismos forman, o dicho de otra forma que todos sean vértices de su envolvente convexa. Si se requiere una definición más “rigurosa” uno puede pensar en la siguiente:

Definición 1.1.12 (Posición convexa): Sea $X \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto de puntos. Decimos que los puntos de X están en *posición convexa* si y sólo si para toda $a \in X$ se cumple que $a \notin \text{conv}(X \setminus \{a\})$

Aunque la definición parece confusa, con el siguiente ejemplo veremos que no lo es tanto.

Ejemplo 1.1.13: Sea X el conjunto de puntos como en la *Figura 1.4*. Nótese que X no está en posición convexa pues el punto central no satisface:

$$\text{punto central} \notin \text{conv}(X \setminus \{\text{punto central}\})$$

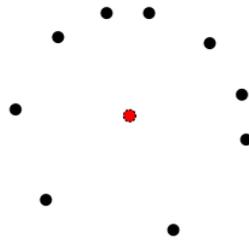


Figura 1.4: ¡Estos puntos no están en posición convexa!



Este ejemplo nos sugiere la idea de que siempre podemos pensar a los puntos en posición convexa como si fueran puntos que están sobre un círculo, esta idea se utilizará mucho más adelante.

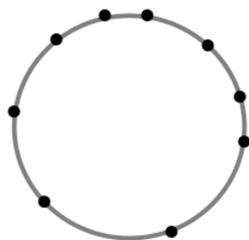


Figura 1.5: Por un millón de pumadolares: Si ponemos puntos sobre un círculo, estos están en posición...
 a) convexa b) eh, ¿no podrías darme otra pista? c) esta no es

1.2. Gráficas

La teoría de gráficas es un área muy estudiada e importante de las matemáticas discretas y que resulta ser de gran utilidad para muchos problemas, es por ello que en esta sección veremos un rápido repaso a las definiciones y resultados más importantes del área, necesarios para la comprensión de los futuros capítulos. Se recomienda consultar: [BM76, CLZ16, Die05].

Definición 1.2.1 (Gráfica): Una *gráfica* G es un par ordenado de conjuntos $G = (V(G), A(G))$, donde $V(G)$ tiene objetos que llamaremos *vértices* y $A(G)$ es un conjunto de pares **no** ordenados de elementos de $V(G)$, denominado conjunto de *aristas* de G .

Por convención y simplicidad cuando no pueda haber motivo de confusión se escribirá V y A en lugar de $V(G)$ y $A(G)$ respectivamente. Si dados dos vértices u, v de G forman una arista (u, v) , entonces por simplicidad la escribimos como uv o vu . Si decimos que $e = uv$ entonces nos referimos a que la arista e une los vértices u y v .

También por convención se dice que $u, v \in V(G)$ son *adyacentes* si existe la arista $(u, v) \in A(G)$, además decimos que dos aristas uv y wx son adyacentes si tienen un vértice en común.

A menos que se indique lo contrario, en este escrito se trabajará con *gráficas simples*; aquellas en las que sólo se permite una arista entre una pareja de vértices. Sólo por mencionar; también existen las *gráficas de lazos* (aquellas en las que se permite que un vértice tenga una arista consigo mismo) y *gráficas múltiples* (aquellas en las que se permiten varias aristas entre una pareja de vértices).

Es importante observar que la definición de gráfica es sobre un objeto combinatorio puramente abstracto, sin embargo, dada una gráfica G podemos representarla en *dibujos* donde sus vértices los podemos representar con puntos y a sus aristas como curvas (usualmente líneas) que unen esos puntos, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.2: Sea G la gráfica dada por $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{12, 13, 14, 34\}$ y sea H la gráfica dada por $V(H) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $A(H) = \{34, 56\}$. Entonces las gráficas G y H tienen como posibles dibujos los mostrados en la *Figura 1.6*.

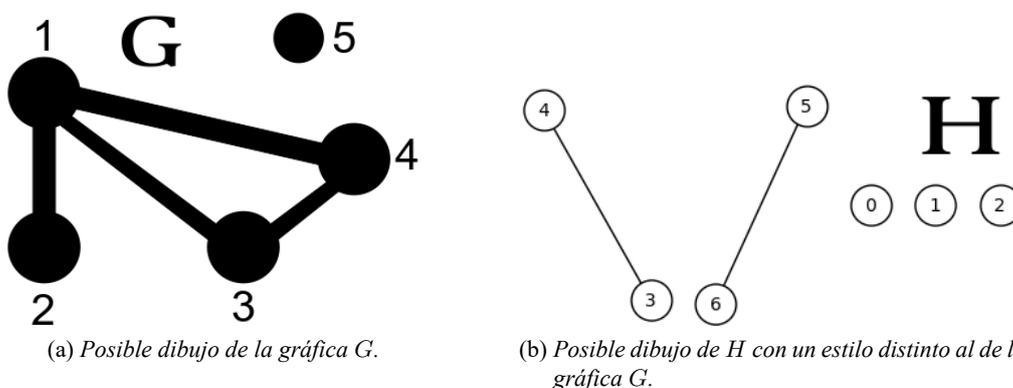


Figura 1.6: Existen infinitos dibujos para cada gráfica.

Es importante observar cómo los dibujos de las gráficas pueden ser de acuerdo al gusto del pensador. Puede usar tanto vértices gruesos y de distintos tamaños, así como aristas de distintos grosores para demostrar las adyacencias entre vértices, como lo es el dibujo de la gráfica G ; como puede ser también un dibujo más simple como el de la gráfica H .



Definición 1.2.3 (Grados): Sea G una gráfica y u un vértice de V .

- * El *grado de u* es el número de aristas que salen de ese vértice u . Se denota por $d_G(u)$.
- * El *grado máximo* es el mayor de los grados de los vértices de G . Se denota por $\Delta(G)$.
- * El *grado mínimo* es el menor de los grados de los vértices de G . Se denota por $\delta(G)$.

Ejemplo 1.2.4: Considerando la *Figura 1.6 en la página anterior*, tenemos que en G : $d(1) = 3$ y además es el vértice con mayor grado de G por lo que $\Delta(G) = 3$. Como $d(5) = 0$ entonces $\delta(G) = 0$. En la gráfica H tenemos que $d(3) = d(4) = d(5) = d(6) = 1$, que $\Delta(H) = 1$ y que $\delta(H) = 0$



A continuación se mencionan un par de resultados básicos que se deducen a partir de las definiciones previas.

Proposición 1.2.5: Para cualquier gráfica G se cumple:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 * (\#aristas)$$

Ejemplo 1.2.6: Considerando la *Figura 1.6 en la página anterior* tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 3 + 1 + 2 + 2 + 0 = 8 = 2(4), \quad \sum_{v \in V(H)} d(v) = 4 = 2(2)$$



Proposición 1.2.7: En cualquier gráfica se tiene que el número de vértices de grado impar es par.

Ejemplo 1.2.8: Considerando la *Figura 1.6 en la página anterior*, tenemos que en G hay 2 vértices de grado impar, los vértices 1 y 2. Mientras que en H hay 0 vértices de grado impar.



Existen muchas formas de clasificar a las gráficas, así que mencionaremos algunas de ellas:

Definición 1.2.9 (Caminos / Paseos / Trayectorias): Sea G una gráfica.

- * Dados dos vértices (no necesariamente distintos) u y v de $V(G)$ decimos que C es un *camino* de u a v (o un *uv-camino*) si es una secuencia de vértices que empiezan en u y terminan en v $C = (u, w_1, w_2, \dots, w_k, v)$ donde $w_i w_{i+1} \in A(G)$ para $1 \leq i \leq k - 1$. El número de aristas de C (incluyendo repeticiones) es la longitud de C . Además decimos que un camino que empieza y termina en el mismo vértice es un *camino cerrado*, de lo contrario lo llamaremos *camino abierto*.
- * Decimos que un camino que no repite aristas es un *paseo*. Al igual que en los caminos, hay paseos abiertos y cerrados.
- * Decimos que un camino P que no repite vértices es una *trayectoria*. Si P tiene n vértices entonces decimos que P es de longitud n y se puede denotar como P_n .

Definición 1.2.10 (Algunas gráficas):

- * Una gráfica es *completa* si cada pareja de vértices es adyacente. A estas gráficas las denotamos por K_n donde n es el número de vértices.
- * Una gráfica es *bipartita* si es posible dar una partición^a (no necesariamente única) de V en 2 conjuntos, de tal manera que los vértices sólo están en alguno de esos dos conjuntos y no hay aristas entre los vértices de un mismo conjunto.
- * Una gráfica es *r-partita* si es posible dar una partición (no necesariamente única) de V en r conjuntos, de tal manera que los vértices sólo estén en alguno de los r conjuntos y no hay aristas entre los vértices de un mismo conjunto.
- * A una trayectoria cerrada (es decir que repite únicamente el vértice inicial y final) se le llama *ciclo* y se le denota por C_n .
- * Dado un ciclo C_n añadimos un nuevo vértice al cuál todos los demás son adyacentes, usualmente podemos dibujar el nuevo vértice en el centro del ciclo y a esta nueva gráfica se le conoce como *rueda* W_{n+1} .
- * Consideras un vértice “central” del que le salen n aristas que llegan a n vértices, respectivamente, a esta gráfica se le llama *estrella* S_n .
- * Decimos que un *árbol* es una gráfica *acíclica* (es decir, sin ciclos) y *conexa* (es decir, que para cada 2 vértices siempre podemos encontrar una trayectoria entre ellos).

^aUna partición P de un conjunto X es una colección de subconjuntos de X que cumplen:

1. Ningún elemento de P es el conjunto vacío
2. La unión de los elementos de P es el conjunto X
3. La intersección de cualesquiera dos elementos de P es vacía.

Definición 1.2.11 (Gráficas regulares): Sea G una gráfica, decimos que G es *r-regula*r si todos los vértices de G tienen grado r .

En la *Tabla 1.1* se muestra un dibujo representativo de algunos tipos de gráficas.

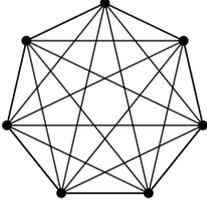
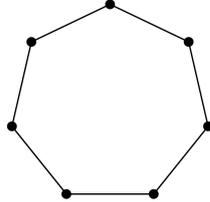
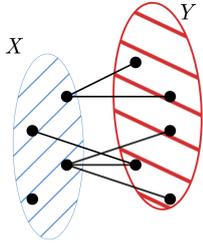
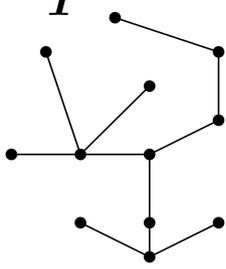
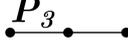
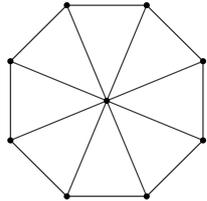
Tipo de gráfica	Dibujo	Tipo de gráfica	Dibujo
Completa	K_7 	Ciclo	C_7 
Bipartita	G 	Árbol	T 
Trayectoria	P_2  P_4  P_3 	Rueda	W_9 

Tabla 1.1: Tipos de gráficas.

Ejemplo 1.2.12: Los ciclos son 2-regulares y las gráficas K_n son $(n-1)$ -regulares, véase la *Figura 1.7*.

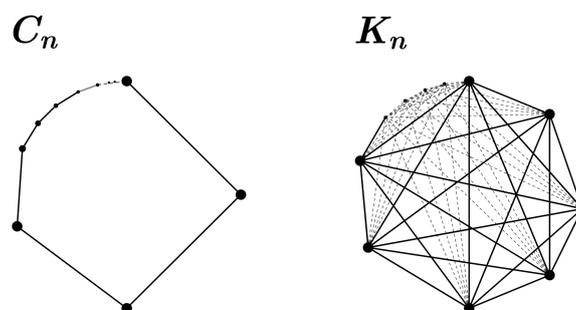


Figura 1.7: Gráficas regulares.



Definición 1.2.13 (Conjunto independiente): Decimos que un conjunto de vértices tales que no son adyacentes entre ellos es un *conjunto independiente de vértices*. Además decimos que el conjunto es *máximo* si es el de mayor cantidad de vértices sobre todos los conjuntos independientes.

Ejemplo 1.2.14:

- a) Sea S_n la gráfica estrella, hay varios conjuntos independientes, por ejemplo 3 vértices que no sean el centro forman un conjunto independiente de vértices. Pero el conjunto independiente máximo es el que tiene los n vértices que no son el centro.
- b) En una gráfica completa un conjunto independiente sólo puede tener un vértice.
- c) Nótese que en cualquier gráfica, un solo vértice es un conjunto independiente de vértices, el cual evidentemente no nos genera interés.



Como en todas las ramas de las matemáticas, cuando tenemos una estructura estudiada, nos interesa saber cómo son las subestructuras de ella. Es por ello que se estudian distintos tipos de subgráficas, a continuación algunas de ellas:

Definición 1.2.15 (Subgráficas): Sea G una gráfica con vértices V y aristas A . H es una subgráfica de G si $V(H) \subseteq V$ y $A(H) \subseteq A$

- * Decimos que V es una *subgráfica propia* si $H \neq G$.
- * Decimos que V es una *subgráfica generadora* si $V(H) = V$.
- * Sea $S \subseteq V$ no vacío, decimos que $G[S]$ es la *subgráfica inducida por S* , si $G[S]$ tiene como vértices a S y además dos vértices u, v son adyacentes en $G[S]$ si y sólo si son adyacentes en G .
- * Sea $E \subseteq A$ no vacío, decimos que $G[E]$ es la *subgráfica inducida por E* , si $G[E]$ tiene como aristas a E y además un vértice $u \in G[E]$ si y sólo si u es adyacente a una arista de E .
- * Sea $U \subseteq V$ no vacío, decimos que $G - U$ es la subgráfica resultante de *borrar los vértices* de U y sus adyacencias a G .
- * Sea $B \subseteq A$ no vacío, decimos que $G - B$ es la subgráfica resultante de *borrar las aristas* de B a G .

Ejemplo 1.2.16: En la *Figura 1.8 en la página siguiente* se muestran algunos tipos de subgráficas de la gráfica G . G_1 es una subgráfica generadora, G_2 es una subgráfica inducida por S , G_3 es una subgráfica inducida por E , $G - \{x\}$ es la gráfica resultante de borrar el vértice x y finalmente $G - \{a\}$ es la gráfica resultante de borrar la arista a .



Observación 1.2.17: Así como podemos obtener subgráficas a partir de una gráfica dada, también podemos obtener *supergráficas* de tal manera que la gráfica original sea una subgráfica de la nueva supergráfica.

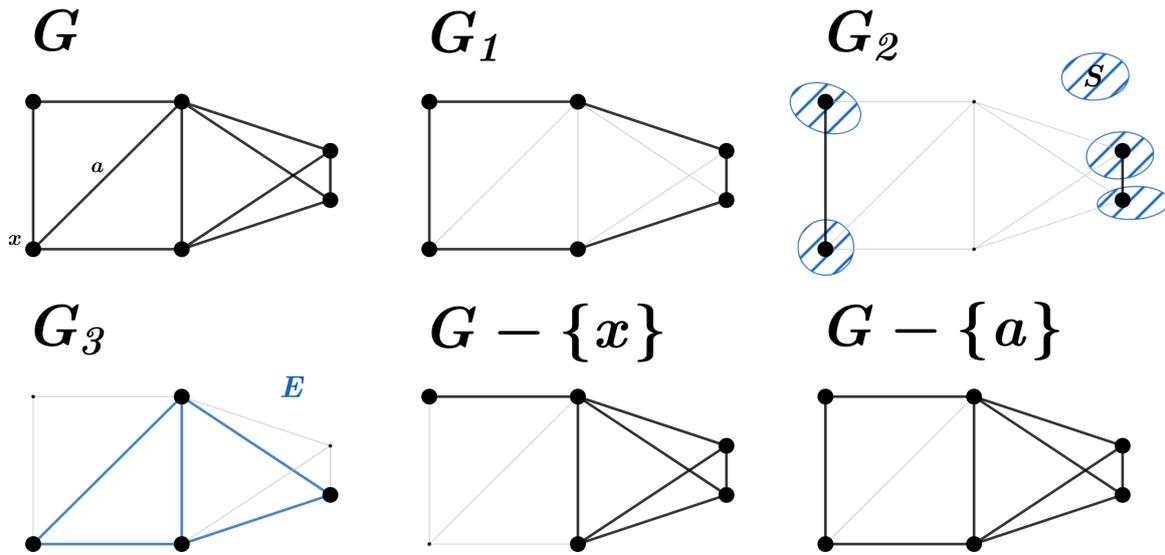


Figura 1.8: Subgráficas.

Ejemplo 1.2.18: Podemos agregar una arista a nuestra gráfica original y obtener una nueva gráfica. Véase la Figura 1.9.

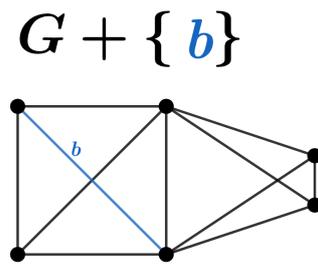


Figura 1.9: Supergráficas



Existen muchísimas formas de operar gráficas, aquí solo mencionaremos las que utilizaremos más adelante.

Definición 1.2.19 (Operaciones): Sean G y H gráficas.

- * Consideramos un vértice u de G y un vértice v de H , consideraremos *la gráfica* $G \dot{+} H$ que significa convertir los vértices u y v en uno solo y preservaremos el resto de los vértices así como las adyacencias de G y de H en la nueva gráfica.
- * Consideramos una arista a de G y una arista b de H , consideraremos *una gráfica* $G \bar{+} H$ que significa convertir las aristas a y b en una sola y preservar el resto de los vértices así como las adyacencias de G y de H en la nueva gráfica. Nótese que puede haber distintas gráficas $G \bar{+} H$ dependiendo de cómo peguemos las aristas elegidas.

Ejemplo 1.2.20: Con los ejemplos gráficos de la Figura 1.10 en la página siguiente quedan más claras estas dos operaciones que son realmente sencillas.

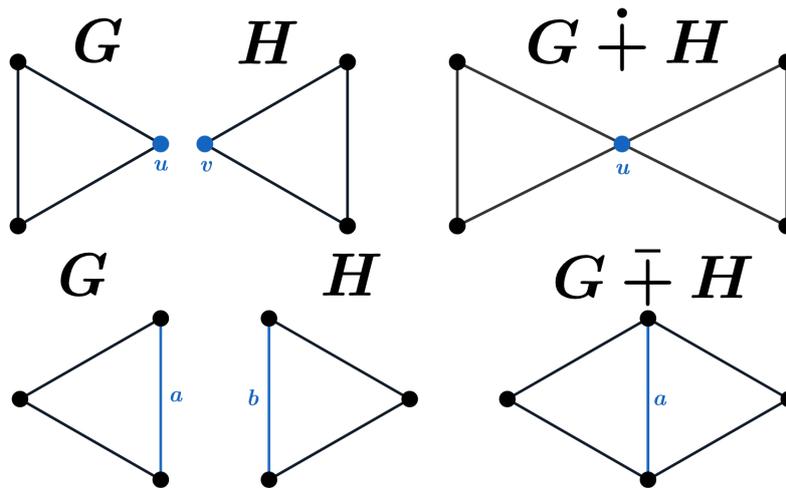


Figura 1.10: ¡Las operaciones necesarias!



Distinguir entre 2 gráficas que se parezcan puede ser sencillo, como en el ejemplo anterior, en la Figura 1.10 tanto G como H “son la misma gráfica”, ambas son C_3 , quizá sus vértices se llamen distintos y sus aristas también, pero en esencia son la misma gráfica. Sin embargo no siempre es fácil distinguir entre gráficas parecidas y es por ello que requerimos la siguiente definición.

Definición 1.2.21 (Isomorfismo): Sean G y H gráficas, decimos que son *isomorfas* si existe una función biyectiva $f : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que dos vértices u, v son adyacentes en G si y sólo si $f(u), f(v)$ son adyacentes en H .

Ejemplo 1.2.22: En la Figura 1.10 tenemos que $G \overset{\circ}{+} H$ **no** es isomorfa a $G \bar{+} H$, pues mientras que $G \overset{\circ}{+} H$ tiene 5 vértices, $G \bar{+} H$ sólo tiene 4.



Como hemos visto, existen diferentes tipos de gráficas y cada una de ellas tiene sus propiedades y razones para ser interesantes. Hay unas que en particular son sumamente importantes: las gráficas planas, pues incluso problemas sumamente famosos y complicados como el **Problema de los cuatro colores**¹ están expresados en términos de este tipo de gráficas.

Definición 1.2.23 (Gráficas planas): Sea G una gráfica, decimos que G es *plana* si tiene un dibujo en \mathbb{R}^2 en el que ninguna arista toca a otra arista (salvo en el vértice que comparten).

Ejemplo 1.2.24: Cuando uno dibuja K_4 como se acostumbra (Figura 1.11 en la página siguiente), uno podría pensar que no es una gráfica plana

Sin embargo si uno intenta encontrar otro dibujo descubrirá eventualmente que sí es una gráfica plana (Figura 1.12 en la página siguiente).

¹Todo mapa puede colorearse con a lo más 4 colores de tal forma que países adyacentes tengan distinto color.

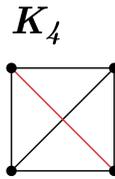


Figura 1.11: ¿ K_4 no es plana?

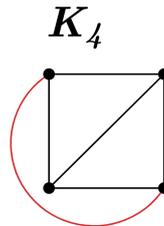


Figura 1.12: ¡Cómo de que no!



Una pregunta natural es si todas las gráficas son o no planas. Por ejemplo si uno intenta con una gráfica más compleja que K_4 como lo puede ser K_5 se encontrará en una interminable frustración y es que resulta que no todas las gráficas son planas, como lo afirma el siguiente teorema.

Teorema de Kuratowski (1930) [Kur30]: Una gráfica es plana si y sólo si no contiene ninguna subgráfica isomorfa a una *subdivisión elemental*^a de K_5 o $K_{3,3}$.

^aUna subdivisión elemental de una gráfica consiste de insertar vértices en las aristas

Ejemplo 1.2.25: Sea G la gráfica de la *Figura 1.13*, tenemos que H_1, H_2, H_3 son subdivisiones de G .

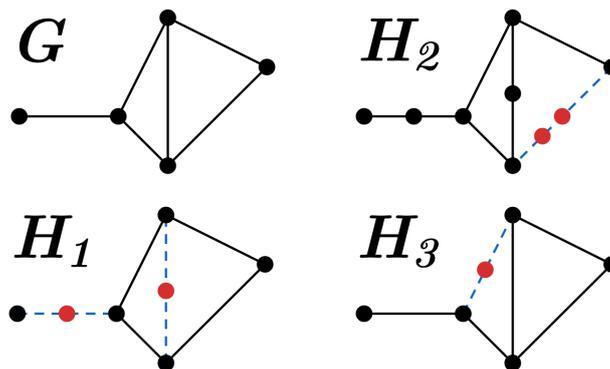


Figura 1.13: *Subdivisiones elementales.*



Algo realmente fascinante del **Teorema de Kuratowski** es que nos muestra la estrecha relación entre la topología y la teoría de gráficas, pues es gracias al famoso **Teorema de Jordan**² que puede probarse.

²Toda curva cerrada simple del plano lo divide en dos componentes conexas disjuntas que tiene a la curva como frontera común.

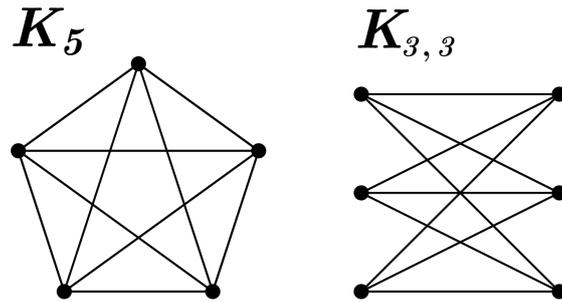


Figura 1.14: Gráficas no planas.

Finalmente algo divertido de realizar en todas las gráficas es colorearlas, existen muchísimas maneras de colorearlas, sin embargo en este trabajo nos interesan las siguientes:

Definición 1.2.26 (Coloraciones): Sea G una gráfica y $\{1, \dots, n\}$ un conjunto que llamaremos el conjunto de colores.

- * Decimos que G tiene una *coloración de vértices*, si existe una función $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, n\}$
- * Decimos que G tiene una *coloración propia de vértices*, si existe una función $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ y que además si u y v son adyacentes entonces $c(u) \neq c(v)$
- * Decimos que $\chi(G)$ es el *número cromático* de G , éste es el menor número de colores necesarios para tener una coloración propia de vértices de G .

Las definiciones previas son análogas para una *coloración por aristas* y se le denota por $\chi'(G)$ al *número cromático por aristas*.

Ejemplo 1.2.27: El número cromático de cualquier gráfica K_n es exactamente n . Mientras que $\chi'(K_n)$ es $n - 1$ si n es par y es n si n es impar.



1.3. El fascinante mundo de la topología combinatoria. ¡No apto para nerviosos!

Para introducirnos en la recientemente llamada *topología combinatoria* primero debemos tener claras las bases de la topología general, una bibliografía básica a seguir es: [Koz08, Lon13, Mat08].

1.3.1. Lo necesario de topología general

Empezamos introduciendo la noción de espacio topológico la cual es una estructura matemática que rescata las nociones ya conocidas desde cálculo de lo que es la “cercanía” o la “continuidad” de manera muy general.

Definición 1.3.1 (Espacio topológico): Sea X un conjunto y $T \subseteq 2^X$ una familia de subconjuntos de X , decimos que (X, T) es un *espacio topológico* (cuyos elementos son llamados *conjuntos abiertos*) si $\emptyset \in T$, $X \in T$, la intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto y la unión arbitraria de conjuntos abiertos es arbitraria.

Ejemplo 1.3.2: En \mathbb{R}^d , la topología estándar consiste de tener como conjuntos abiertos a uniones arbitrarias de bolas abiertas $B(y, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\bar{x} - \bar{y}\| < r\}$ e intersecciones finitas de ellas.



Si bien la topología general estudia estructuras que pueden llegar a ser sumamente abstractas y complejas, en este trabajo nos basta con entender la topología del ejemplo previo.

Definición 1.3.3 (Subespacio): Sea Y un subconjunto no vacío en un espacio topológico (X, T) . La colección $T_Y = \{O \cap Y : O \in T\}$ de subconjuntos de Y es una topología en Y llamada *subespacio topológico*. Al espacio topológico (Y, T_Y) se le conoce como subespacio topológico de (X, T) .

Ejemplo 1.3.4: Sea $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $T = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ y $Y = \{b, c, e\}$. Entonces el subespacio topológico en Y es $T_Y = \{Y, \emptyset, \{c\}\}$.



Convención 1.3.5: Por simplicidad y cuando no se preste a confusiones se escribirá X como espacio topológico en lugar de la pareja (X, T) y se llamará a X simplemente espacio.

Definición 1.3.6 (Funciones continuas): Sean (X_1, T_1) y (X_2, T_2) espacios, decimos que una función $f : X_1 \rightarrow X_2$ es *continua* si las preimágenes de conjuntos abiertos son abiertos, es decir: $f^{-1}(V) \in T_1$ para todo $V \in T_2$.

El lector recordará que en cálculo la definición de funciones continuas se daba gracias a la noción de *épsilon-deltas* o bien a través de sucesiones, estas nociones de continuidad son equivalentes y se recomienda consultar la bibliografía en caso de querer comprobar las equivalencias.

Convención 1.3.7: En este texto se asume que las funciones entre espacios topológicos serán continuas.

Al igual que en las gráficas, a veces quisiéramos saber si dos espacios son iguales o distintos, de aquí surge la noción de homeomorfismos.

Definición 1.3.8 (Homeomorfismos): Sean (X_1, T_1) y (X_2, T_2) espacios, decimos que una función biyectiva $f : X_1 \rightarrow X_2$ es un *homeomorfismo* si y sólo si f y f^{-1} son continuas. Si X y Y son espacios *homeomorfos*, es decir, que existe un homeomorfismo entre ellos, los denotamos por $X \cong Y$.

1.3.2. Complejos simpliciales

Los complejos simpliciales resultan ser un vínculo entre la topología y la combinatoria. Además de que son muy simples de imaginar geoméricamente, estos pueden ser vistos como objetos puramente combinatorios, pero también describen espacios topológicos. De manera intuitiva se puede pensar que un

1 Preliminares

0-simplejo es un punto, un *1-simplejo* es una línea entre dos puntos, un *2-simplejo* es un triángulo, un *3-simplejo* es un tetraedro y así sucesivamente.

Definición 1.3.9 (Simplejos): Sea $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto de puntos afínmente independientes. Decimos que

$$\sigma^n = \text{conv}(X) = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ t.q. } \sum_{i=0}^n x_i t_i = 1 \text{ y } \forall i : t_i \geq 0\}$$

es un *simplejo de dimensión n*.

Se dice que t_i son las *coordenadas baricéntricas* de σ^n . Para toda $k \in \{-1, \dots, n\}$ y cualquier subconjunto de $(k+1)$ elementos $Y \subseteq X$ al simplejo $\tau = \text{conv}(Y)$ se le llama *cara k-dimensional* de σ^n . Se denota a ésto por $\tau \leq \sigma^n$ y se dice que la *dimensión* de τ es k , denotado por $\dim(\tau) = k$. A las caras de dimensión $n-1$ se les llama comúnmente *facetas*.

Convención 1.3.10: Para el caso $k = -1$ se dice que el *conjunto vacío es una cara de dimensión -1* de σ^n . Y para el caso $k = 0$ un punto es una *cara de dimensión 0* de σ^n .

Se le conoce como *simplejo estándar* al simplejo producido por los vértices canónicos de \mathbb{R}^d : e_1, \dots, e_d .

Ejemplo 1.3.11: Sea $X = \{e_1, e_2, e_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces el 2-simplejo producido por X es el de la *Figura 1.15*.

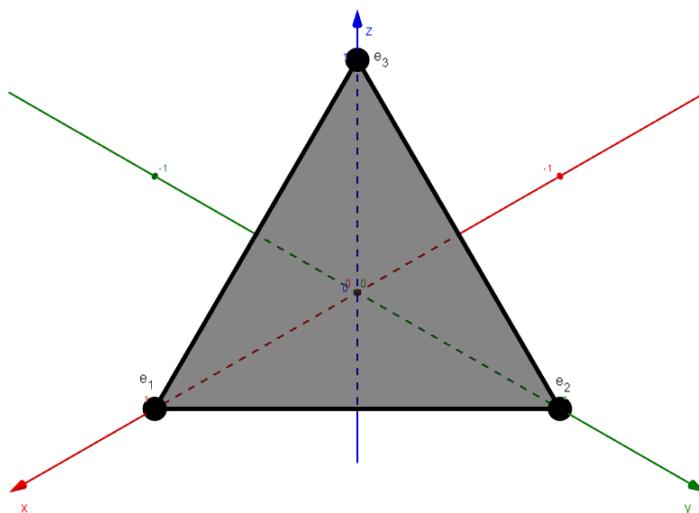


Figura 1.15: El 2-simplejo estándar.



Si bien un simplejo no parece ser demasiado interesante, lo divertido está en “juntar”, pegar, unir, o como guste decirse, varios simplejos para formar un complejo simplicial, éstos son los que describen espacios topológicos.

Definición 1.3.12 (Complejos simpliciales):

* Un *complejo simplicial geométrico* Δ es una familia finita de simplejos (afines) en algún \mathbb{R}^m tal que:

1. Si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in \Delta$
2. Si $\sigma, \tau \in \Delta$ entonces $\sigma \cap \tau$ es una cara tanto de σ como de τ .

Se dice que la *dimensión* de Δ es la dimensión más grande de sus caras.

Al espacio topológico dado por la unión de todos los simplejos del complejo simplicial se le llama *poliedro de Δ* , denotado por $|\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$. Muchas veces se refiere a $|\Delta|$ cuando se quiere hablar de las propiedades topológicas de Δ .

* Un *complejo simplicial abstracto* es un par (V, K) , donde V es un conjunto y $K \subseteq 2^V$ es un *sistema hereditario de subconjuntos de V* , esto quiere decir que: necesitamos que $F \in K$ y $G \subseteq F$ implique que $G \in K$ (en particular $\emptyset \in K$ siempre que $K \neq \emptyset$). Los conjuntos de K son llamados *simplejos abstractos*. Por simplicidad se dice que K es un complejo simplicial abstracto.

La dimensión de K está dada por: $dim(K) = \{máx\{|F| - 1 : F \in K\}$

Si bien la definición previa podría ser confusa y hacernos pensar que los complejos simpliciales pueden ser geométricos ó abstractos, para propósitos de este trabajo basta con quedarse con la idea de que son realmente lo mismo; y no lo digo yo, lo dijo Matoušek: [Mat08].

La definición previa nos dice que si queremos pegar simplejos, lo hagamos de una manera bonita, por ejemplo si queremos pegar dos triángulos en el plano, es mejor pegarlos a través de un vértice o a través de una arista, pero no pegar la mitad de una arista de un triángulo con la mitad de otra arista del otro triángulo, en cierta forma esto se parece mucho a la *Definición 1.2.19 de la página 15* para gráficas.

Ejemplo 1.3.13: La *Figura 1.16* muestra un complejo simplicial Δ resultante de unir tres 1-simplejos y un 2-simplejo σ^2 .

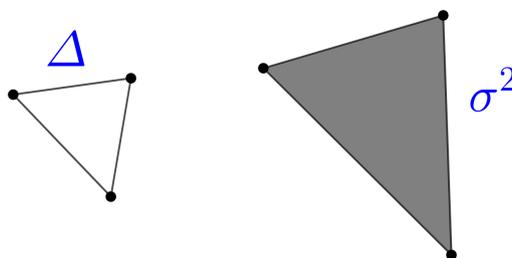


Figura 1.16: ¡Un triángulo sin relleno no es un simplejo, pero sí un complejo simplicial!



1.3.3. Nervios

Otros objetos topológicos de interés son los nervios, pues también son complejos simpliciales.

Definición 1.3.14 (Nervios): Sea $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ una familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^d . El nervio $N(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} se define como el complejo simplicial abstracto con vértices $\{1, \dots, m\}$ cuyas caras son $I \subset \{1, \dots, m\}$ tales que $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Ejemplo 1.3.15: Consideremos la familia de conjuntos convexos $C = \{C_1, \dots, C_7\}$ como en la Figura 1.17 entonces $N(C)$ es el nervio de C . Obsérvese que como los conjuntos C_3, C_6, C_7 se intersectan entre sí simultáneamente, es que se forma el 2-simplejo y no sólo las aristas, como por ejemplo la intersección entre C_2 y C_5 .

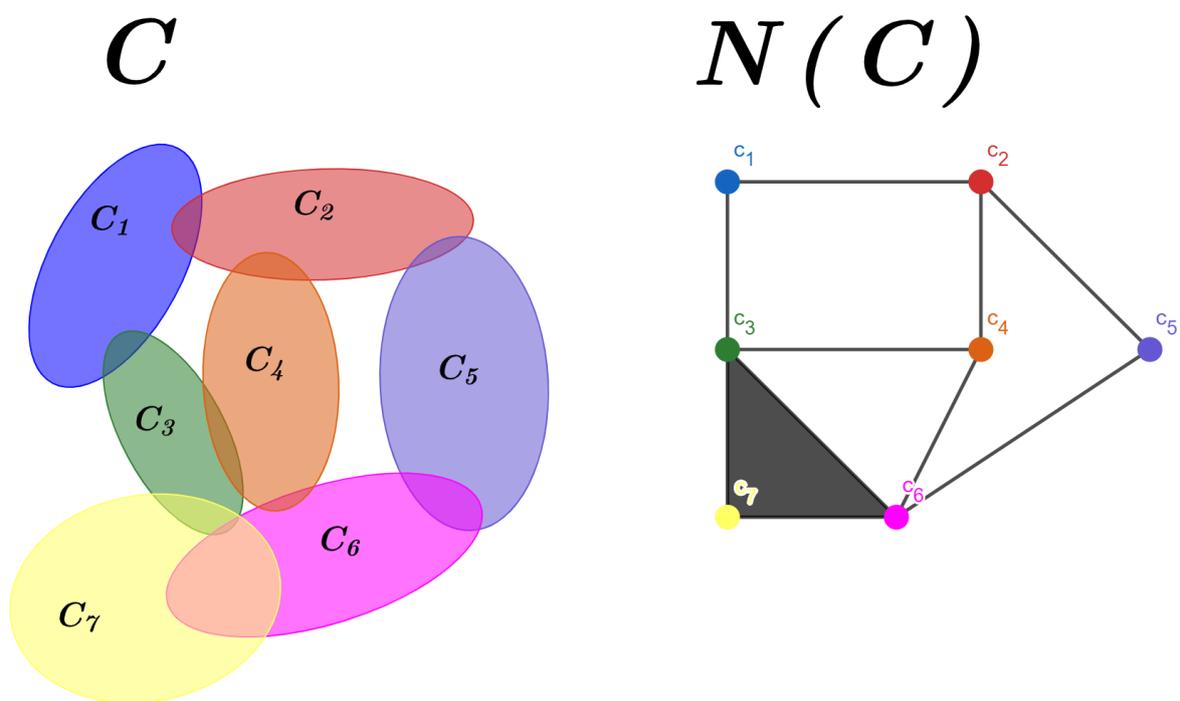


Figura 1.17: ¡Un nervio es un complejo simplicial!



Dada una colección de puntos $S \subseteq \mathbb{R}^d$ y una r -partición $\mathcal{P} = S_1, \dots, S_r$ de S , se define al *nervio de la partición* $N(\mathcal{P})$ como el nervio de las envolventes convexas de las partes: $N(\{conv(S_1), \dots, conv(S_r)\})$.

Dada una partición \mathcal{P} se define a la *gráfica de intersección de \mathcal{P}* , denotada por $N^1(\mathcal{P})$ como el 1-esqueleto del nervio de \mathcal{C} . En términos simples el 1-esqueleto se refiere justo a ser una gráfica, que si aparece un k -simplejo con $k \geq 2$ sólo se consideren las 1-caras de ese simplejo, es decir, las aristas entre los puntos.

Ejemplo 1.3.16: Considerando el ejemplo previo, tenemos que la gráfica de intersección del nervio $N(C)$ está dada por la Figura 1.18 en la página siguiente.

$N^1(C)$

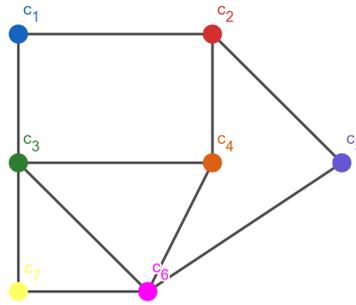


Figura 1.18: Gráfica de intersección de C .



Definición 1.3.17 (Complejo simplicial inducido): Dado un complejo simplicial K y un conjunto finito de puntos $S \subseteq \mathbb{R}^d$ decimos que K es inducido por una partición de S si existe una partición P de S tal que $N(P)$ sea homeomorfo a K .
 Decimos que un complejo simplicial K es inducido por una partición en \mathbb{R}^d si existe al menos un conjunto de puntos $S \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que K es inducido por una partición de S .

Por simplicidad decimos que K es d -partido en lugar de que K es inducido por una partición en \mathbb{R}^d , pero debe tenerse bien en cuenta la definición, pues se puede prestar a confusión y ambigüedad sobre particiones de conjuntos o sobre que K pudiese partirse en d partes, el cual no es el caso.

Ejemplo 1.3.18: Consideramos el complejo simplicial C_3 (la gráfica ciclo de 3 vértices) y consideramos un conjunto $S_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ de 6 puntos acomodados como en la Figura 1.19, en la cual ya se muestra que el conjunto S_1 tiene una 3-partición P representada por los colores rojo (círculos), violeta (cuadrados) y naranja (triángulos). Al realizar el nervio $N(S_1)$ de esa partición tenemos que este es homeomorfo a C_3 .

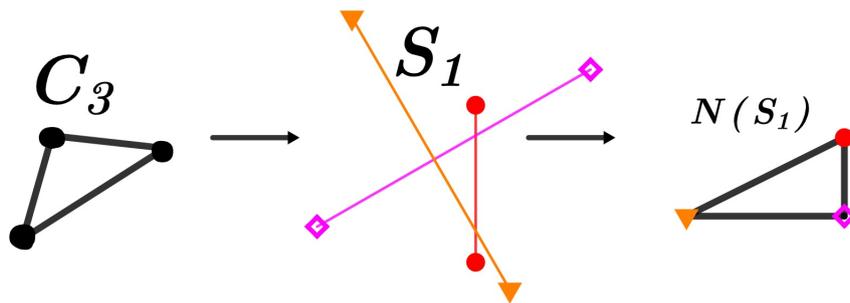


Figura 1.19: El ciclo C_3 es 2-partido.

Además observamos que el conjunto de puntos S_1 está contenido en \mathbb{R}^2 , es decir que C_3 es 2-partido.

Dado un conjunto de puntos contenido en \mathbb{R} , es fácil comprobar que no existe manera de partir los puntos de tal forma que el nervio de esa partición genere a C_3 , como se observa en la Figura 1.20 en la página siguiente, donde Z_1 y Z_2 son conjuntos de puntos con las particiones dadas por los colores (figuras).

Incluso si se tuvieran más puntos, simplemente no hay forma de generar a C_3 como nervio de la partición.

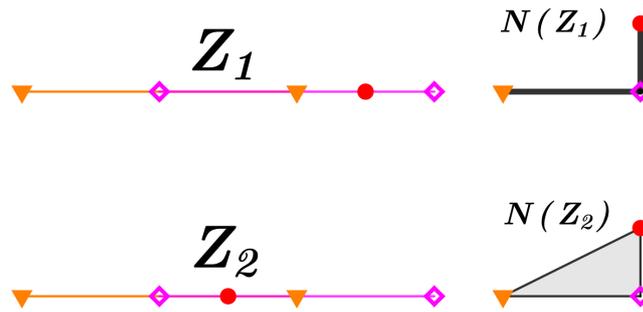


Figura 1.20: El ciclo C_3 NO es 1-partido.



Ejemplo 1.3.19: Consideramos el 2-simplejo Δ^2 y un conjunto $S_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ de 6 puntos acomodados como en la *Figura 1.21*, la cual también muestra una forma de 3-partirlos. Observamos entonces que el nervio obtenido de esa partición de puntos es homeomorfo al 2-simplejo.

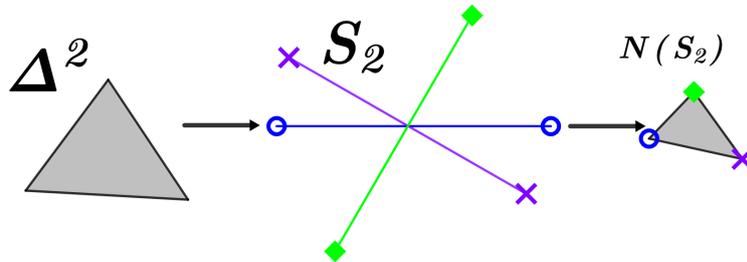


Figura 1.21: Un 2-simplejo es 2-partido.

Sin embargo no nos dejemos engañar, si bien esto nos muestra que Δ^2 es 2-partido, observe que en el ejemplo anterior encontramos un conjunto $Z_2 \subseteq \mathbb{R}$ tal que puede partirse para obtener como nervio a un homeomorfismo de Δ^2 , es decir que Δ^2 también es 1-partido.



Ejemplo 1.3.20: Tenemos que un 5-simplejo Δ^5 es 2-partido, una posible forma de convencerse es con un conjunto $S_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ de puntos y particionado como muestra la *Figura 1.22*.

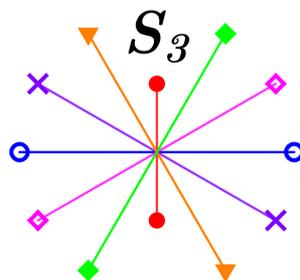


Figura 1.22: También el 5-simplejo es 2-partido.



Es importante observar que en todos los ejemplos anteriores los colores solo son un recurso visual que nos ayuda a entender las particiones, sin embargo, si por ejemplo los puntos coloreados de rojo los cambiáramos por el color azul y los de color azul por rojo tendríamos exactamente las mismas particiones.

Los ejemplos anteriores nos permiten deducir el siguiente teorema:

Teorema 1.3.21: El σ^d simplejo de dimensión d es 1-partido.

Para convencerse de que es verdadero el teorema simplemente considérese la configuración de puntos y colores que sugiere la *Figura 1.23*.



Figura 1.23: ¡Todo simplejo de cualquier dimensión es 1-partido!

Más aún, utilizando una idea análoga a la mostrada en la *Figura 1.23* y la *Figura 1.22 en la página anterior* podemos deducir el siguiente teorema:

Teorema 1.3.21 (Mejorado): El σ^d simplejo de dimensión d es d -partido para toda $d \geq 1$.

Otra cosa que podemos deducir del *Ejemplo 1.3.18 de la página 23* es el hecho de que si un complejo simplicial es k -partido no necesariamente es $k - 1$ -partido. Es decir, existe una dimensión d a partir de la cual es posible decir que tal complejo simplicial es d -partido. Un teorema importante demostrado por G. Y. Perelman en topología combinatoria se puede reformular de la siguiente forma:

Teorema 1.3.22 (El Teorema de Realización Geométrica (Reformulado)): Cualquier complejo simplicial de dimensión d es $(2d + 1)$ -partido.

Más aún, hay complejos simpliciales de dimensión d que no pueden ser $2d$ -partidos.

La demostración puede consultarse en: [Mat08].

1.4. Una introducción al universo puntual

En esta sección veremos una herramienta importante para clasificar de alguna forma los conjuntos de puntos en \mathbb{R}^d y un teorema que nos dice cuántos puntos necesitamos para satisfacer una propiedad específica: obtener un polígono convexo.

1.4.1. Tipos de orden

En combinatoria la primera (y/o la última) forma de atacar un problema puede ser utilizar la fuerza bruta de contar todas las posibilidades de que suceda equis cosa, puede ser la primera porque contar es relativamente lo más fácil que uno puede hacer, pero puede ser la última porque a veces el conteo puede ser gigantesco al grado de que ninguna computadora pueda hacer las cuentas.

1 Preliminares

Una pregunta que podría parecer muy inocente es: ¿de cuántas maneras posibles podemos poner 3 puntos en el plano? si uno analiza bien la pregunta, puede pensar primero en cuántas formas de colocar un solo punto en el plano y ya desde ese momento uno puede recordar por sus cursos de cálculo o análisis que existe una infinidad de formas de colocar ese punto en el plano, ¿entonces colocar 3 puntos tiene un total de tres infinitudes? Sin embargo en el sentido combinatorio sólo hay una manera *legal* de colocar esos 3 puntos en el plano, ésta es poner los 3 puntos formando un triángulo y si bien podemos colocar los 3 puntos de tal manera que estén sobre una línea, recordemos que éste tipo de configuraciones no están en posición general y no nos suelen interesar en la geometría combinatoria, a eso hace referencia el término *legal*.

Para poder contar las distintas maneras combinatorias de colocar puntos en el plano utilizaremos el término de tipo de orden, el cual requiere de la definición de orientación.

Definición 1.4.1 (Orientación de una tripleta de puntos): Sean u, v, w tres puntos en posición general en el plano. Éstos pueden tener una orientación positiva o negativa. Decimos que la tripleta ordenada de puntos (u, v, w) está en *sentido horario* si el punto w está a la derecha del segmento dirigido \vec{uv} . Si w está a la izquierda entonces decimos que la tripleta está en *sentido anti-horario*. Si la tripleta está en sentido horario le asignamos el valor de -1 y si está en sentido anti-horario le asignamos el valor de $+1$.

Ejemplo 1.4.2: En la *Figura 1.24* consideramos cuatro puntos en el plano y tomamos 2 tripletas posibles de puntos para obtener su orientación.

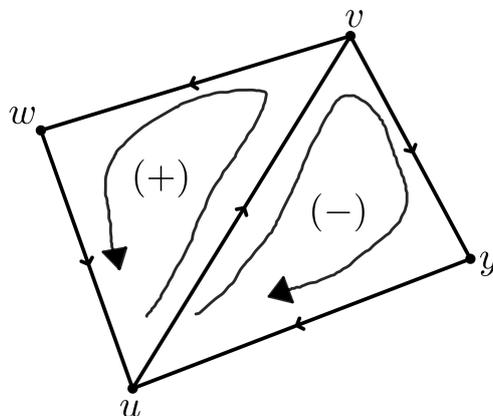


Figura 1.24: La tripleta de puntos (u, v, w) tiene orientación positiva mientras que la tripleta (u, v, y) tiene orientación negativa.



Definición 1.4.3 (Tipo de orden): Un *tipo de orden* es una relación de equivalencia de conjuntos de n puntos en posición general en el que dos conjuntos S, S' son equivalentes si y sólo si existe una biyección $F : S \rightarrow S'$ tal que para cada triángulo (tripleta de puntos ordenados) $abc \in S$ tiene la misma orientación que su imagen $F(a)F(b)F(c)$

Decimos que dos conjuntos S y S' son *combinatoriamente equivalentes* si pertenecen al mismo tipo de orden, de lo contrario decimos que los conjuntos son *combinatoriamente distintos*.

Ejemplo 1.4.4: Consideremos dos conjuntos S y S' ambos de 3 puntos en posición general en el plano (véase *Figura 1.25*), vamos a ver que ambos son combinatoriamente equivalentes.

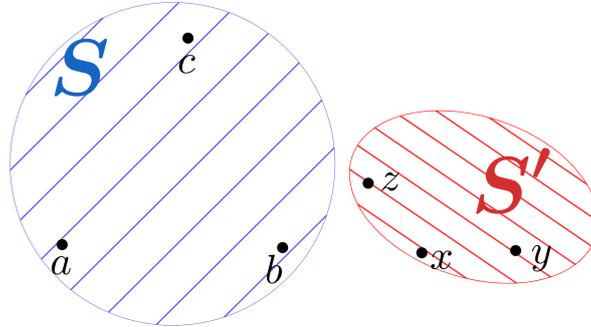


Figura 1.25: Los conjuntos S y S' son combinatoriamente equivalentes.

Vamos a obtener el tipo de orden de ambos conjuntos, como lo muestra la siguiente tabla:

Tripleta de S	Orientación	Tripleta de S'	Orientación
abc	+1	xyz	+1
acb	-1	xzy	-1
bca	+1	yzx	+1
bac	-1	yxz	-1
cab	+1	zxy	+1
cba	-1	zyx	-1

Si consideramos $x = F(a)$, $y = F(b)$ y $z = F(c)$ entonces tenemos que S y S' son combinatoriamente equivalentes.



Ejemplo 1.4.5: Vamos a exhibir dos conjuntos S y S' ambos de 4 puntos en posición general en el plano tales que no son combinatoriamente equivalentes.

Observamos que las orientaciones de las tripletas para éstos conjuntos preservan las orientaciones del ejemplo anterior, por lo que sólo falta agregar las siguientes:

Tripleta de S	Orientación	Tripleta de S'	Orientación
dab	+1	wxy	+1
dba	-1	wyx	-1
dbc	+1	wyz	+1
dcb	-1	wzy	-1
dca	+1	wzx	-1
dac	-1	wxz	+1

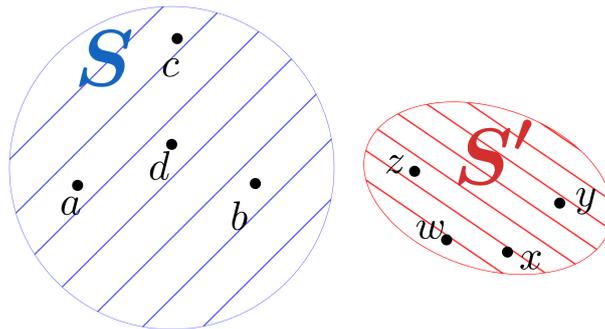


Figura 1.26: Para cuatro puntos hay 2 tipos de ordenes.

Tratando de preservar que $x = F(a)$, $y = F(b)$ y $z = F(c)$ sólo puede pasar que $w = F(d)$ pero por una parte tenemos que dca tiene orientación $+1$ y por otra parte que $F(d)F(c)F(a) = wxz$ tiene orientación -1 . Uno puede ser más exhaustivo y ver que no hay ninguna manera de que ambos conjuntos tengan todas sus tripletas con las mismas orientaciones, sin embargo puede notarse que éste trabajo puede volverse increíblemente difícil conforme más puntos existan.

El siguiente argumento nos permite mostrar más fácil que los dos conjuntos anteriores no son combinatoriamente equivalentes: Mientras que la envolvente convexa de S es un triángulo, la envolvente convexa de S' es un cuadrilátero, ya desde ahí podemos notar que son conjuntos esencialmente distintos.



Calcular el número de posibles configuraciones distintas de puntos es demasiado complicado, al grado de que actualmente sólo se conoce la cantidad de configuraciones para conjuntos de 10 puntos o menos. Un algoritmo que uno podría seguir sería el siguiente: Considerense n puntos en posición convexa, entonces tienes un tipo de orden. Ahora considere $n - 1$ puntos en posición convexa y verifique cuántas maneras distintas hay de colocar el punto restante dentro de la envolvente convexa. Luego considere $n - 2$ puntos en posición convexa y verifique cuántas maneras distintas hay de colocar los dos puntos restantes dentro de la envolvente convexa, siguiendo éste algoritmo podríamos encontrar todos los tipos de órdenes, pero es un algoritmo muy malo en términos de rapidez computacional. La siguiente tabla muestra los tipos de ordenes conocidos en la actualidad:

n	Número de tipos de orden	n	Número de tipos de orden
4	2	8	3315
5	3	9	158817
6	16	10	14309547
7	135	11	2 334 512 907

Tabla 1.2: Cantidad de tipos de ordenes de hasta 11 puntos.

Esta subsección se debe en gran parte gracias a [Mer19]. Se recomienda consultar las siguientes referencias para un mayor estudio de los tipos de ordenes: [AAK02, AK01].

1.4.2. Un final feliz

En 1933 Esther Klein, matemática húngara, propuso un interesante problema sobre conjuntos convexos a un grupo de matemáticos interesados en combinatoria entre los que destacan Paul Erdős, George Szekeres y Pál Turán. Este problema fue tan divertido para el grupo, que llevó a que Szekeres y Klein se conocieran más al grado de casarse y de ahí surgió el nombre del *Problema del final feliz*.

El problema inicial es: *Dados cinco puntos en posición general en el plano, ¿siempre podemos encontrar cuatro que son vértices de un cuadrilátero convexo?* La respuesta es afirmativa y no es muy difícil demostrarlo.

¿Qué pasaría si queremos encontrar un pentágono convexo? ¿Cuántos puntos necesitaríamos para asegurar siempre encontrar un pentágono convexo? Quizá una primer respuesta bastante obvia podría ser: Si te doy 10 millones de puntos seguro encuentras ese pentágono convexo; por lo que la pregunta puede refinarse a ¿Cuál es la mínima cantidad de puntos que se necesitan para asegurar que siempre se puede encontrar un pentágono convexo? En este caso la respuesta es, necesitas nueve puntos para asegurar que siempre encuentras el pentágono convexo y existe al menos una configuración de 8 puntos tal que nunca puedes encontrar un pentágono convexo.

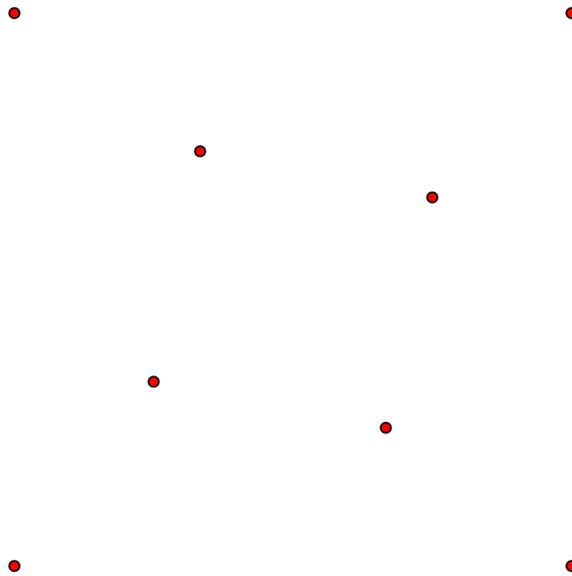


Figura 1.27: Ocho puntos sin un pentágono convexo.

¿Y si quisiéramos encontrar un hexágono convexo? Resultan necesarios 17 puntos para asegurar un hexágono convexo.

El problema está en que a partir de un hexágono convexo, ya no se sabe la mínima cantidad de puntos $N(n)$ que se necesitan para asegurar encontrar un n -ágono convexo. Afortunadamente Erdős y Szekeres probaron en 1935 [ES35] que si tienes 4^k puntos siempre puedes encontrar un k -ágono convexo. Las cotas más famosas que se tienen sobre el problema son $2^{k-2} + 1 \leq N(k) \leq \binom{2k-4}{k-2}$.

Al día de hoy sigue siendo un problema abierto el siguiente:

Problema del final feliz: ¿Existe un número k tal que un conjunto de $2^{k-2} + 1$ puntos en posición general no contiene un k -ágono convexo?



Figura 1.28: Dieciseis puntos sin un hexágono convexo. Configuración dada por: Michael J. Mossinghoff

2 Teoremas sobre puntos

Uno podría decir ¿qué tienen de bueno los tontos puntos? pero en realidad son objetos sumamente divertidos y fascinantes. Si uno se pone a jugar con puntos descubrirá que hay muchísimas preguntas divertidas que se pueden hacer sobre ellos. Una de estas (y quizá la más sencilla) es: si tengo 3 puntos en posición general en el plano ¿puedo partirlos en 2 conjuntos de tal forma que si tomo la envoltura convexa de ellos y las interseco, entonces tengan al menos un punto en común? Al ser tan poquitos puntos uno descubrirá inmediatamente que la respuesta es negativa, pero, y si tengo 4 puntos ¿se podrá? Radon es uno de los matemáticos que se pusieron a jugar con esta pregunta y nos ofreció una respuesta afirmativa... y no sólo para 4 puntos... y no sólo para el plano.

2.1. El famoso lema de Radon

Teorema de Radon (1921) [Rad21]: Cualquier conjunto S de \mathbb{R}^d con al menos $d+2$ puntos puede ser particionado en dos subconjuntos disjuntos tales que su cerradura convexa se interseca

Ejemplo 2.1.1: Si $d = 2$ quiere decir que dado un conjunto S de 4 puntos en el plano, siempre vamos a poder encontrar S_1 y S_2 subconjuntos de S de tal forma que $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$. Observemos que no sabemos nada sobre S_1 ni S_2 , uno podría tener un punto y el otro tres o ambos dos puntos.

Por el [Ejemplo 1.4.5 de la página 27](#) tenemos que las únicas dos formas de acomodar 4 puntos en posición general en el plano, son si los 4 puntos forman un convexo o bien uno de los puntos queda contenido en el convexo que forman los otros 3 puntos, por lo que la manera de particionarlos es muy sencilla, como lo muestra la [Figura 2.1](#).

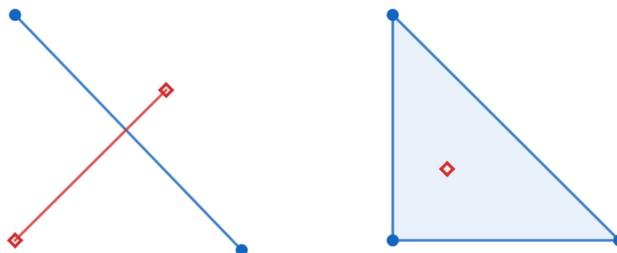


Figura 2.1: El Teorema de Radon para $d = 2$.



Demostración:

Para esta prueba se utilizarán resultados básicos de álgebra lineal, se recomienda consultar [Lay07, Mat02, Sol15].

Recordando que dados m vectores v_1, \dots, v_m en \mathbb{R}^d , estos son linealmente dependientes si $m > d$; es decir que existen escalares a_1, \dots, a_m no todos cero, de tal forma que $a_1v_1 + \dots + a_mv_m = \bar{0}$.

Consideremos $X = \{x_1, \dots, x_{d+2}\}$ cualquier subconjunto de \mathbb{R}^d de $d + 2$ puntos, por lo anterior mencionado tenemos que X es afinmente dependiente, es decir, que existen escalares a_1, \dots, a_{d+2} no todos cero tal que:

$$(1) \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{d+2} a_i = 0 \quad y \quad (2) \quad \dots \quad \sum_{i=1}^{d+2} a_i x_i = \bar{0}$$

Consideremos además $P = \{i : a_i > 0\}$ y $N = \{i : a_i \leq 0\}$. Nótese que si $P = \emptyset$ entonces la ecuación (1) no se satisface pues todos los a_i serían negativos o iguales a cero y no puede darse el caso de que todos sean iguales a cero por que por definición los a_1, \dots, a_{d+2} no todos son cero. Y si $N = \emptyset$ entonces $\sum_{i=1}^{d+2} a_i > 0$ contradiciendo (1), así $P \neq \emptyset$ y $N \neq \emptyset$.

Ahora consideramos $S_1 = \{x_i : i \in P\}$ y $S_2 = \{x_i : i \in N\}$.

Como $0 = \sum_{i=1}^{d+2} a_i = \sum_{i \in P} a_i + \sum_{i \in N} a_i$ entonces $\sum_{i \in P} a_i = -\sum_{i \in N} a_i$, llamamos a este número a , además observamos que a nunca es cero pues si fuese el caso significaría que a_1, \dots, a_{d+2} son todos cero.

Nótese que el punto $x = \sum_{i \in P} \frac{a_i}{a} x_i$ es combinación convexa de S_1 .

Además de la ecuación (2): $\sum_{i=1}^{d+2} a_i x_i = \sum_{i \in P} a_i x_i + \sum_{i \in N} a_i x_i = \bar{0}$ tenemos que $\sum_{i \in P} a_i x_i = -\sum_{i \in N} a_i x_i$ de donde obtenemos que $x = \sum_{i \in P} \frac{a_i}{a} x_i = \left(\frac{1}{a}\right) \left(\sum_{i \in P} a_i x_i\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \left(-\sum_{i \in N} a_i x_i\right) = -\sum_{i \in N} \frac{a_i}{a} x_i$, es decir que x es combinación convexa de S_2 por lo tanto x es un punto en común de la intersección $conv(S_1) \cap conv(S_2)$.

Observemos que si tenemos un conjunto X con más de $d + 2$ puntos, simplemente basta considerar $d + 2$ puntos en el y los demás se anexan a cualquiera de las particiones generadas, para convencerse agregue 1 punto (o más) en la *Figura 2.1 en la página anterior* y observe que el resultado se preserva incluyendo ese punto en cualquier partición dada.



Históricamente a este resultado se le conoce como un lema dado que Radon lo utilizó para probar el **Teorema de Helly**¹, pero es tan bonito y es un resultado base en la geometría convexa que preferimos llamarle Teorema. Además, es interesante resaltar que el Teorema de Radon es equivalente al Teorema de Helly y al **Teorema de Caratheodory**² los cuales también son base de la geometría convexa.

¹Dados n conjuntos convexos en \mathbb{R}^d tal que $n > d$ si cada $d + 1$ convexos tienen intersección no vacía, entonces los n convexos se intersectan.

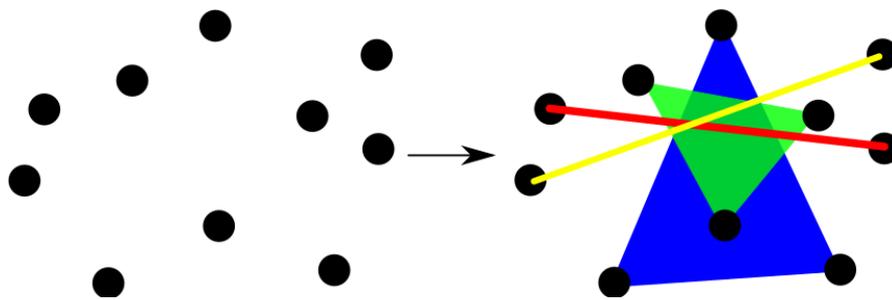
²Dado un punto $x \in \mathbb{R}^d$ que está en la envolvente convexa de un conjunto P , entonces x puede escribirse como combinación convexa de a lo más $d + 1$ puntos de P .

2.2. El teoremonon de Tverberg

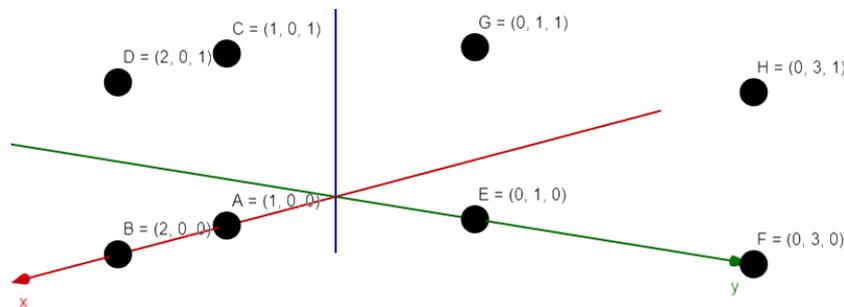
Radon se divirtió tanto con ese juego, que pasó por desapercibido un juego más divertido aún. Tverberg en 1966 lo descubrió cuando se puso a jugar no con biparticiones del conjunto de puntos, si no con particiones en general, generalizando así el Teorema de Radon.

Teorema de Tverberg (1966) [Tve66]: Cualquier conjunto S de \mathbb{R}^d con al menos $(d+1)(r-1)+1$ puntos puede ser particionado en r subconjuntos disjuntos por pares tales que su cerradura convexa se intersecta. Más aún, hay conjuntos de $(d+1)(r-1)$ puntos que no pueden ser particionados de esa forma.

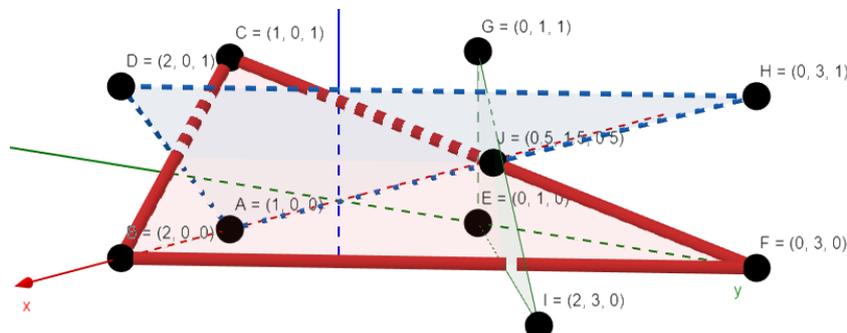
Ejemplo 2.2.1: La *Figura 2.2* muestra ejemplos de particiones para r y d dadas.



(a) Se necesitan 10 puntos cuando $d = 2$ y $r = 4$.



(b) Cuando $d = r = 3$ se necesitan 9 puntos, la configuración mostrada no tiene forma de partirse porque sólo tiene 8 puntos.



(c) Una posible partición para $d = r = 3$.

Figura 2.2: Particiones de Tverberg.



2 Teoremas sobre puntos

Es importante remarcar nuevamente que los colores sólo son una ayuda visual. Por ejemplo si en la [Figura 2.2a en la página anterior](#) permutáramos el color rojo por el amarillo seguiríamos teniendo la misma partición.

En realidad Birch fue el primer matemático en jugar con la pregunta para particiones generales de puntos y en 1959 demostró por accidente el Teorema de Tverberg para dimensión 2 [Bir59], pero no pudo demostrarlo para dimensiones superiores por lo que sólo lo conjeturo para más dimensiones. La primer demostración debido a Tverberg (¡en serio!) la realizó en 1966 [Tve66] y era demasiado técnica, otra muy brillante por parte de Sarkaria [Sar92] utiliza los tensores algebraicos y el **Teorema Coloreado de Caratheodory**³ la cual fue muy celebrada debido a la interconexión que realizó entre el álgebra de tensores y la geometría convexa, si bien en este trabajo no se presentará la prueba del teorema afortunadamente Imre Bárány y Pablo Soberón generaron un survey con algunos bosquejos de distintas pruebas del Teorema de Tverberg [BS18].

Definición 2.2.2 (Número de Tverberg): Denotamos por $t := T(d, r)$ como el mínimo entero tal que para cualquier conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$ de t puntos existen $A_1, \dots, A_r \subseteq A$ subconjuntos disjuntos por pares que cumplen $\bigcap_{i=1}^r \text{conv}(A_i) \neq \emptyset$.

En términos de la definición anterior tenemos que el Teorema de Radón demuestra la siguiente desigualdad $T(d, 2) \leq d + 2$ mientras que el Teorema de Tverberg demuestra la desigualdad $T(d, r) \leq (d + 1)(r - 1) + 1$.

Para demostrar que $T(d, r) = (d + 1)(r - 1) + 1$ necesitaríamos comprobar que existe un conjunto B de $(d + 1)(r - 1)$ puntos en \mathbb{R}^d tal que para cualquier r -partición de $B_1, \dots, B_r \subseteq B$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^r \text{conv}(B_i) = \emptyset$.

Consideramos un d -simplejo en \mathbb{R}^d no degenerado y para cada uno de sus vértices consideramos una bola de radio $\varepsilon > 0$ centrada en los vértices. Dentro de cada una de las bolas consideramos $(r - 1)$ puntos todos muy cercanos a los centros. Considerando los $(r - 1)$ puntos de cada una de las $(d + 1)$ bolas tenemos exactamente $(d + 1)(r - 1)$ puntos, llamemos a ese conjunto de puntos B . Véase la [Figura 2.3 en la página siguiente](#).

En esta configuración de puntos no hay manera de partirla en r subconjuntos disjuntos tales que la intersección de sus envolventes convexas tenga un punto en común, sin embargo probar esto sin utilizar herramientas matemáticas más avanzadas no es tan sencillo como pudiera parecer. Lo interesante de esta misma configuración es que si añadimos el baricentro del d -simplejo al conjunto de puntos entonces tenemos una configuración de $T(d, r)$ puntos que además satisface algo muy peculiar: tiene un total de $((r - 1)!)^d$ posibles particiones diferentes tal que la intersección de las envolventes convexas de cada parte sea no vacía, a este tipo de particiones las llamamos *particiones de Tverberg*.

Esto es interesante debido a la Conjetura del queso holandés de Sierksma, quien prometió regalar un queso holandés al que la probara.

³Dados P_1, \dots, P_{d+1} conjuntos de puntos en \mathbb{R}^d tal que contienen al menos $d + 1$ puntos cada uno y además existe un punto $x \in \bigcap_i \text{Conv}(P_i)$. Entonces $x \in \text{Conv}(Q)$ donde Q es un conjunto convexo de $d + 1$ puntos que contiene de cada P_i un punto.

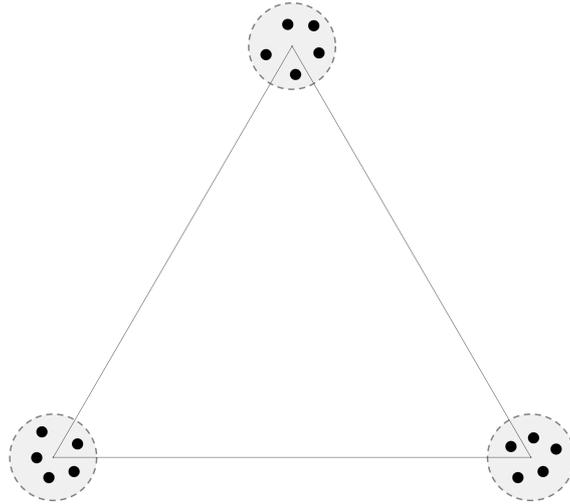


Figura 2.3: Conjunto B para $d = 2$ y $r = 6$.

Conjetura del queso holandés de Sierksma [Sie79]: Cualquier conjunto S de \mathbb{R}^d de $(d + 1)(r - 1) + 1$ puntos tiene al menos $((r - 1)!)^d$ particiones de Tverberg.

Ejemplo 2.2.3: Para $d = 2$ y $r = 3$ tenemos que si S tiene 7 puntos entonces debe tener al menos $(2)^2$ diferentes particiones de Tverberg.

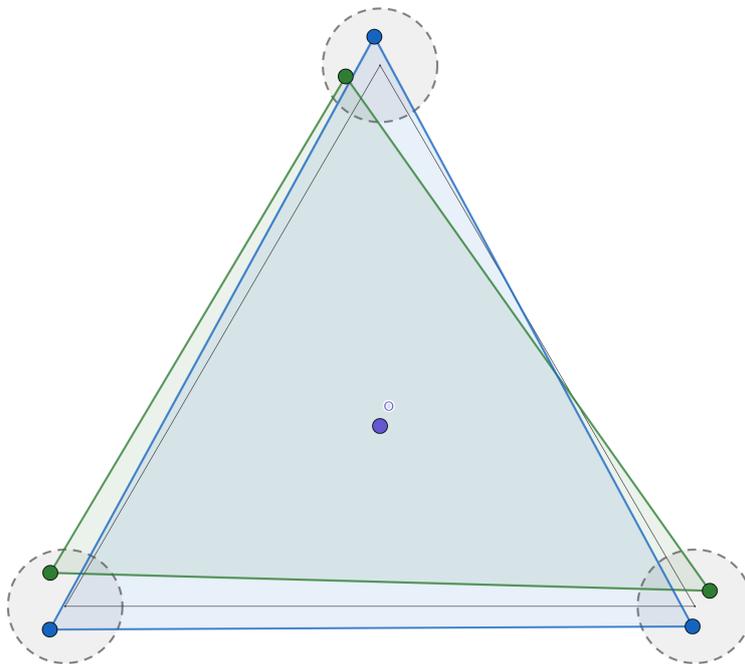


Figura 2.4: Una partición de Tverberg.

Es sencillo comprobar que sólo existen 3 particiones más además de la mostrada en la *Figura 2.4*.



White [Whi17] probó que existe una familia de ejemplos con $(d + 1)(r - 1) + 1$ puntos que tienen un total

2 Teoremas sobre puntos

de $((r - 1)!)^d$ particiones de Tverberg. Y Vrećica y Živaljević [ZV92] probaron que si r es un número primo, entonces siempre puedes encontrar $\frac{1}{(r-1)!} \binom{r}{2}^{(r-1)(d+1)/2}$ particiones de Tverberg. Sin embargo esa cantidad está muy por debajo de $((r - 1)!)^d$ y la demostración es muy complicada.

2.3. Reformulando al teorema de Tverberg

Una pregunta natural es ¿cómo sería el nervio que obtendríamos a partir de las particiones de Tverberg?

Del [Ejemplo 2.2.3 de la página 35](#) tenemos que $T(2, 3) = (2 + 1)(3 - 1) + 1 = 7$.

Por lo que al considerar 7 puntos en el plano podemos obtener algunas de sus particiones, como lo muestra la [Figura 2.5](#).

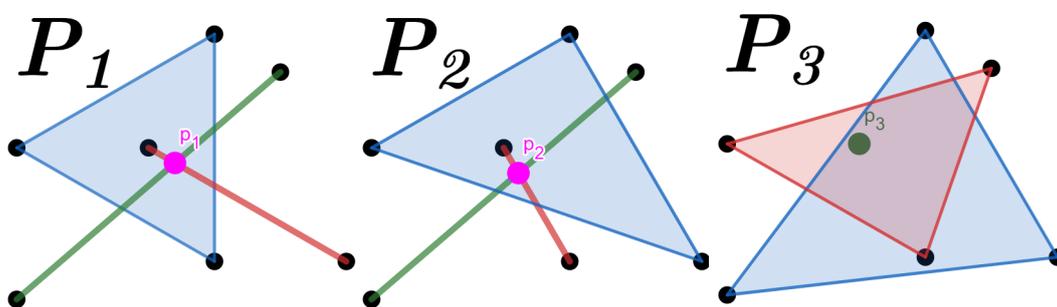


Figura 2.5: Unas particiones de Tverberg para $d = 2$ y $r = 3$.

Y podemos observar que el nervio de las 3 particiones es idéntico: un 2-simplejo. Véase la [Figura 2.6](#).

$$N(P_1) = N(P_2) = N(P_3)$$

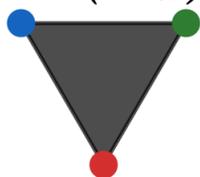


Figura 2.6: El nervio de las particiones para $d = 2$ y $r = 3$.

De ser cierta la Conjetura de Sierksma, entonces en la [Figura 2.5](#) nos faltó agregar al menos una partición de Tverberg distinta de las 3 anteriores, sin embargo, ¿será que el nervio de esa partición (o de las restantes) sea el mismo? Es fácil convencerse de que la respuesta es que sí. Por cada uno de los convexos resultantes de cada color consideramos un punto y el Teorema de Tverberg nos dice que todos los convexos se intersectan, es decir, cada punto correspondiente a cada clase cromática es adyacente a los demás, en otras palabras formamos un simplejo.

Y si observamos cuidadosamente, veremos que sin importar la dimensión que consideremos ni la cantidad de partes, siempre obtendremos un simplejo como el nervio de cualquier partición de Tverberg.

Retomando la sección 1.3.2 podemos introducir una propiedad de los complejos simpliciales más fuerte que la propiedad de ser d -partido de la [página 23](#).

Definición 2.3.1 (*d*-Tverberg complejos simpliciales): Un complejo simplicial K es *d*-Tverberg si existe una constante $Tv(K, d)$ tal que para todo conjunto de puntos $S \subset \mathbb{R}^d$ que satisfice $|S| > Tv(K, d)$ existe una partición de S que induce a K como nervio.

La mínima constante $Tv(K, d)$ descrita es llamada *número de Tverberg para K en dimensión d* .

Decimos que un conjunto de puntos *genera* al complejo simplicial K si existe una partición de los puntos cuyo nervio sea homeomorfo a K .

Finalmente decimos que un nervio N es *realizable* si existe un conjunto de puntos que generan a N .

Utilizando la definición previa podemos reformular el Teorema de Tverberg de la siguiente manera:

Teorema de Tverberg (Reformulado): El σ^{r-1} simplejo de dimensión $r - 1$ es un *d*-Tverberg complejo simplicial para toda $d \geq 1$ y su número de Tverberg es $(d + 1)(r - 1) + 1$

Para comprender mejor la definición previa retomemos el siguiente teorema, visto en la sección 1.3:

Teorema 1.3.21 (Mejorado): El σ^d simplejo de dimensión d es *d*-partido con $d \geq 1$.

Ejemplo 2.3.2: Consideremos el σ^3 simplejo de dimensión 3.

El Teorema 1.3.21 nos dice que σ^3 puede ser 1-partido y la forma de comprobarlo es con la *Figura 2.7*.

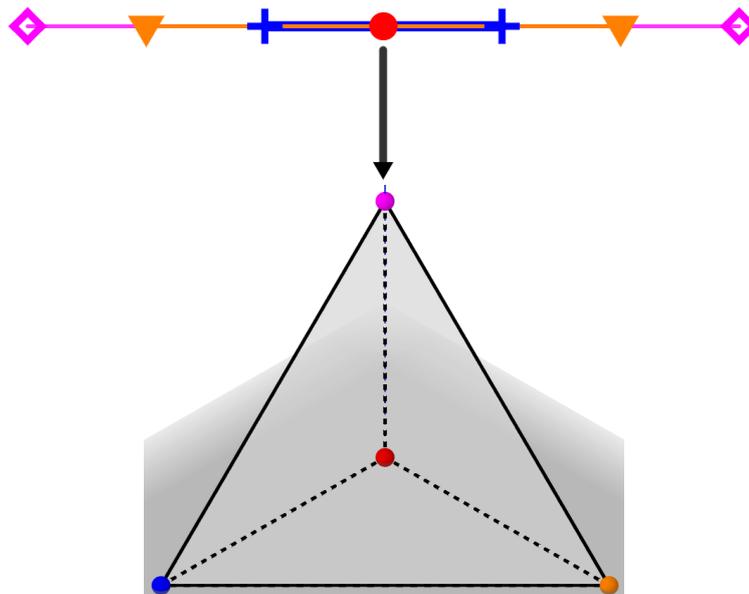


Figura 2.7: El σ^3 simplejo puede ser 1-partido.

Por otra parte, el Teorema de Tverberg nos dice que σ^3 puede ser 1-Tverberg, con número de Tverberg $(2)(3) + 1 = 7$. Es decir, cualquier conjunto de puntos $S \subseteq \mathbb{R}^3$ que tenga al menos 7 puntos tiene al menos una partición de tal forma que el nervio de esa partición sea homeomorfo a σ^3 .



¡Pareciera ser entonces que el Teorema 1.3.21 y el Teorema de Tverberg son en realidad el mismo teorema!... Sin embargo no tendría sentido haber mencionado que la definición de *d*-Tverberg era una propiedad más fuerte que ser *d*-partido.

Ejemplo 2.3.3: Consideremos el σ^3 simplejo de dimensión 3.

El Teorema 1.3.21 nos dice que σ^3 puede ser 2-partido y una posible forma de comprobarlo es considerando al conjunto S de 8 puntos con una partición como lo muestra la *Figura 2.8*.

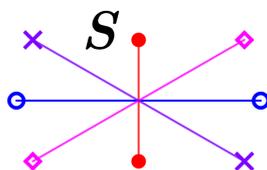


Figura 2.8: El σ^3 simplejo puede ser 2-partido.

Por otra parte, el Teorema de Tverberg nos dice que σ^3 puede ser 2-Tverberg, con número de Tverberg $(3)(3) + 1 = 10$. Es decir, cualquier conjunto de puntos $R \subseteq \mathbb{R}^2$ que tenga al menos 10 puntos tiene al menos una partición de tal forma que el nervio de esa partición sea homeomorfo a σ^3 .

Notamos que el conjunto S que tomamos en el Teorema 1.3.21 tiene 8 puntos y no 10, pero sí obtenemos a σ^3 como nervio... ¿Estará mal el Teorema de Tverberg?.. ¡Por supuesto que no!

Lo que sucede es que el conjunto S que tomamos fue muy tramposo, observemos que si S tuviera una forma distinta simplemente puede que no haya forma de partir al conjunto para obtener a σ^3 como nervio, como lo muestra la *Figura 2.9* donde un sólo punto del conjunto S se perturba un poco.

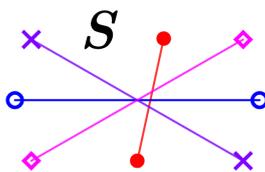


Figura 2.9: Tverberg no ha fallado.



2.4. Los d -Tverberg complejos simpliciales

Es fácil notar que si un complejo simplicial es d -Tverberg entonces es d -partido. Sin embargo la implicación inversa no es cierta, los detalles se pueden consultar en el artículo: [DHOY20].

En términos de gráficas, dada una gráfica G ¿podemos encontrar un conjunto de puntos $S \subseteq \mathbb{R}^d$ en posición general tal que exista una partición P de S de tal forma que el nervio $N(P)$ sea homeomorfo a la gráfica G ? el artículo [DHOY20] también responde parcialmente esta pregunta y nos ofrece el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1: A) Todos los árboles son d -Tverberg complejos simpliciales para toda $d \geq 2$.
B) Todos los ciclos son d -Tverberg complejos simpliciales para toda $d \geq 2$. Y además $Tv(C_n, d)$ es a lo más $nd + n + 4d$.

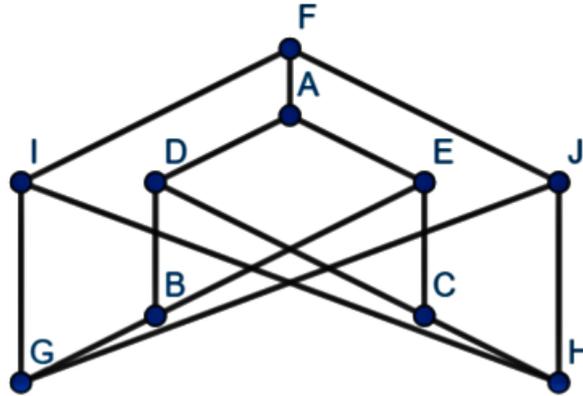


Figura 2.10: Un complejo simplicial que es 2-partido pero no 2-Tverberg.

La demostración del inciso A utiliza el hecho de que existen conjuntos $S \subseteq \mathbb{R}^2$ en posición convexa que admiten una partición para obtener como nervio a los árboles deseados. A partir de esto utilizan varias técnicas para probar que pueden “extender” esa partición a un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^d$ en posición general; una de las herramientas que juega un papel crucial en este hecho es el *Problema del Final Feliz* de la página 30, esto nos muestra como ese problema tiene una profunda relación con estos tipos de teoremas.

Por otro lado y gracias al problema del final feliz sabemos que todo conjunto de puntos suficientemente grande tiene un subconjunto de puntos en posición convexa; de modo que si un nervio es realizable con un conjunto de puntos en posición convexa, esto nos permitiría asegurar que dicho nervio es realizable con un conjunto de puntos mucho más grande en posición general (a pesar de que la cota de la cantidad de puntos resultase muy mala). Por otro lado si el nervio no es realizable en posición convexa entonces sabríamos que no es realizable en el plano. Esto nos motivó a estudiar qué otros nervios podríamos generar en posición convexa y el contenido de los siguientes capítulos es una línea de trabajo en esta dirección.

3 Los nervios convexos

La siguiente definición es una ligera modificación a la [Definición 2.3.1 de la página 37](#).

Definición 3.1 (*d*-Tverberg convexo complejos simpliciales): Un complejo simplicial K es *d*-Tverberg convexo si existe una constante $Tc(K, d)$ tal que para todo conjunto de puntos $S \subset \mathbb{R}^d$ que satisfice $|S| > Tc(K, d)$ existe una partición de S que induce a K como nervio. La mínima constante $Tc(K, d)$ descrita es llamada *número de Tverberg convexo para K en dimensión d* .

Convención: En este capítulo nos referimos a conjuntos de puntos en posición convexa en el plano \mathbb{R}^2 .

Debido a que en \mathbb{R} la noción de puntos en posición convexa pierde sentido pues sólo podría haber a lo más dos puntos, una primer pregunta podría ser qué gráficas podemos obtener como 2-Tverberg convexos.

3.1. Ciclos

Una de las gráficas más simples que podemos considerar son los ciclos. ¿Serán 2-Tverberg convexos?

Naturalmente empezamos con el ciclo C_3 .

Observación 3.1.1: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto de a lo más 5 puntos en posición convexa, entonces no es posible obtener a C_3 como nervio de ninguna partición.

Demostración:

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto de a lo más 5 puntos en posición convexa y sea $P = S_1, S_2, S_3$ una partición de los puntos de S , buscamos que $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$, $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_3) \neq \emptyset$, $\text{conv}(S_2) \cap \text{conv}(S_3) \neq \emptyset$ pero $\bigcap_{i=1}^3 \text{conv}(S_i) = \emptyset$.

Basta comprobar que un conjunto de 5 puntos no genera al nervio, ya que un conjunto con menos puntos tampoco generaría al nervio.

Utilizando una variación del principio de las casillas¹, tenemos que una de las partes debe tener un punto, sin pérdida de generalidad supongamos que $S_1 = \{x_1\}$.

Observemos además que si otro de los conjuntos también tuviera un solo punto, no podría generarse a C_3 como nervio. En efecto, sin pérdida de generalidad supongamos que $S_2 = \{x_2\}$. La única forma de que $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$ sería si ambos son el mismo punto, lo cual no sucede.

¹Dados n objetos que se quieren distribuir en m cajas, donde $2m > n \geq m$, entonces existe al menos una caja con un objeto

3 Los nervios convexos

Así, sin pérdida de generalidad supongamos que $S_2 = \{x_2, x_3\}$ y $S_3 = \{x_4, x_5\}$.

Entonces $\text{conv}(S_1) = \{x_1\}$, $\text{conv}(S_2)$ es el segmento de recta x_2x_3 y $\text{conv}(S_3)$ es el segmento de recta x_4x_5 .

La única forma de que $\text{conv}(S_1)$ intersekte a alguna de los dos segmentos de rectas, es que x_1 esté sobre las rectas, pero esto no puede suceder porque S está en posición convexa.



Si 5 puntos no pueden generar a C_3 como nervio, ¿será que con 6 puntos se pueda?

Consideremos a los conjuntos C_1 y C_2 de 6 puntos en posición convexa, como en la *Figura 3.1*.

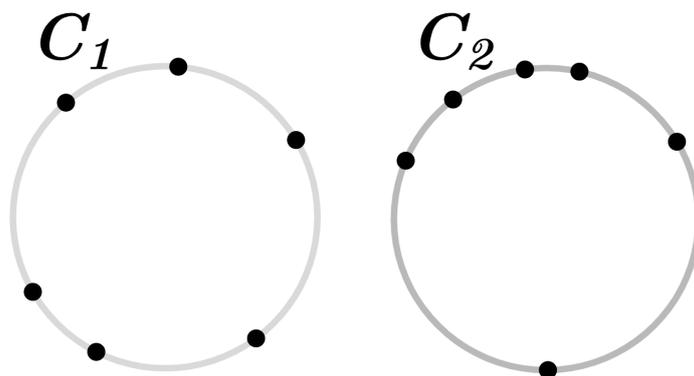


Figura 3.1: 6 puntos en posición convexa.

A pesar de que son conjuntos muy distintos entre sí, el siguiente método para generar las particiones parece funcionar perfectamente.

Consideramos un punto del conjunto y lo metemos en una partición S_i luego contamos dos puntos que se encuentren en sentido horario al punto tomado y al siguiente lo incluimos en S_i . Al ser 6 puntos las particiones quedan bien definidas, como lo muestra la *Figura 3.2*. De tal manera que el nervio generado por las particiones dadas de C_1 y C_2 son el ciclo C_3 .

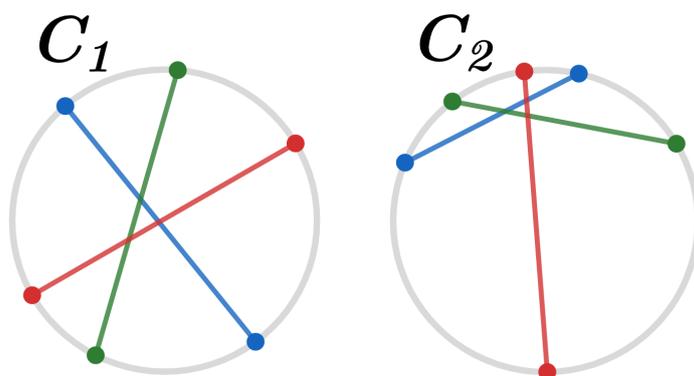


Figura 3.2: 6 puntos generando a C_3 .

Sin embargo quedan muchísimos conjuntos de 6 puntos en posición convexa que no hemos considerado, como los conjuntos C_3 y C_4 que se muestran en la *Figura 3.3 en la página siguiente*. Aplicando el método

para generar particiones descrito anteriormente nos encontramos con la *Figura 3.4* entonces generamos como nervio un 2-simplejo, por lo que nuestro algoritmo fracasó.

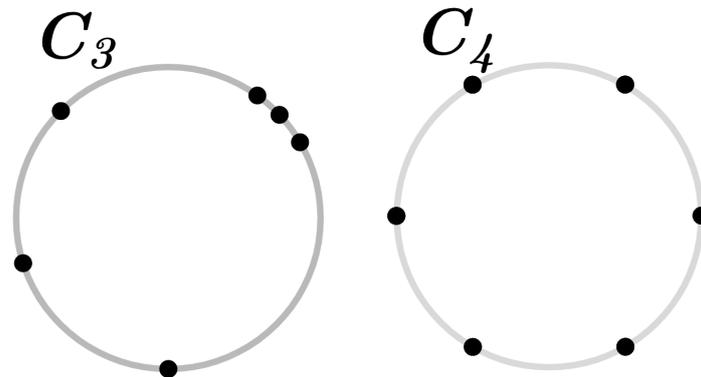


Figura 3.3: Otros 6 puntos en posición convexa.

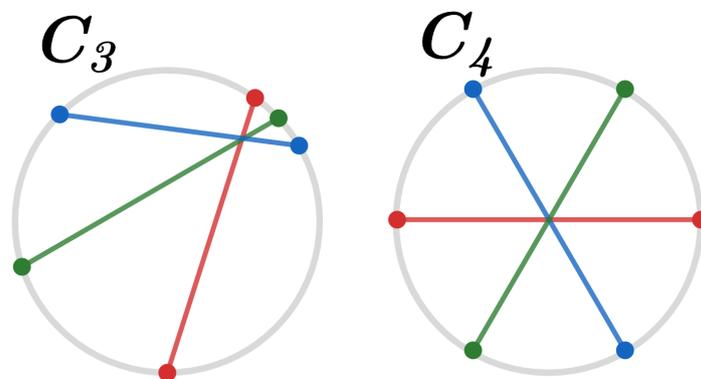


Figura 3.4: ¡Estos conjuntos de puntos generan al 2-simplejo!

Además es fácil notar que éste algoritmo es el único que funciona para generar al ciclo de 3 vértices como gráfica de intersección (Véase en la página 22) para 6 puntos en posición convexa, es decir que no hay ninguna otra posible partición de C_3 y C_4 que generen al ciclo de 3 vértices como gráfica de intersección, mucho menos como nervio.

Por lo que podemos concluir de los conjuntos C_3 y C_4 , que existen conjuntos de 6 puntos en posición convexa que no pueden generar al ciclo de 3 vértices como nervio.

¿Y si agregamos un punto más?

Teorema 3.1.2: Cualquier conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ de 7 puntos en posición convexa que puede generar al ciclo C_3 como nervio.

Demostración:

Basta encontrar una forma de arreglar la forma de la intersección que nos generaban conjuntos de 6 puntos como C_3 y C_4 .

Así nos fijamos primero en 6 puntos de S de tal forma que su partición genere al 2-simplejo como nervio.

3 Los nervios convexos

Observamos que la única forma de que se genere al 2-simplejo como nervio es si la intersección de las 3 envolventes convexas es un punto, llamémosle w a ese punto.

Consideramos un séptimo punto x_7 en S y todavía no lo agregamos a ninguna partición de las ya dadas como en la *Figura 3.5a*.

Consideramos el punto más cercano a S sin importar si está en sentido horario o antihorario, y le quitamos el color a ese punto para asignárselo a x_7 . Por lo que el punto w dejó de existir como punto de intersección a las envolventes convexas.

Entonces las 3 partes de la partición, de momento están dadas por segmentos de recta. Sin pérdida de generalidad, digamos que la partición está dada por $S_1 = \{x_1, x_2\}$, $S_2 = \{x_3, x_4\}$ y $S_3 = \{x_5, x_7\}$.

Consideremos los semiespacios H_i^+ y H_i^- determinados por el segmento de recta $conv(S_i)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que la intersección de $H_1^+ \cap H_2^+ \cap H_3^+ \neq \emptyset$ es decir, forman un triángulo. Entonces por principio de las casillas existe un semiespacio H_j^- que contiene al punto x_6 , si le asignamos el color j a ese punto, es decir, lo metemos en la partición S_j y observamos la partición de los 7 puntos tenemos que no se intersectan simultáneamente las 3 partes, pero sí por pares. Es decir, el nervio generado resulta ser el ciclo C_3 .



La demostración parece ser mucho más complicada de lo que gráficamente significa, como lo muestra la *Figura 3.5*.

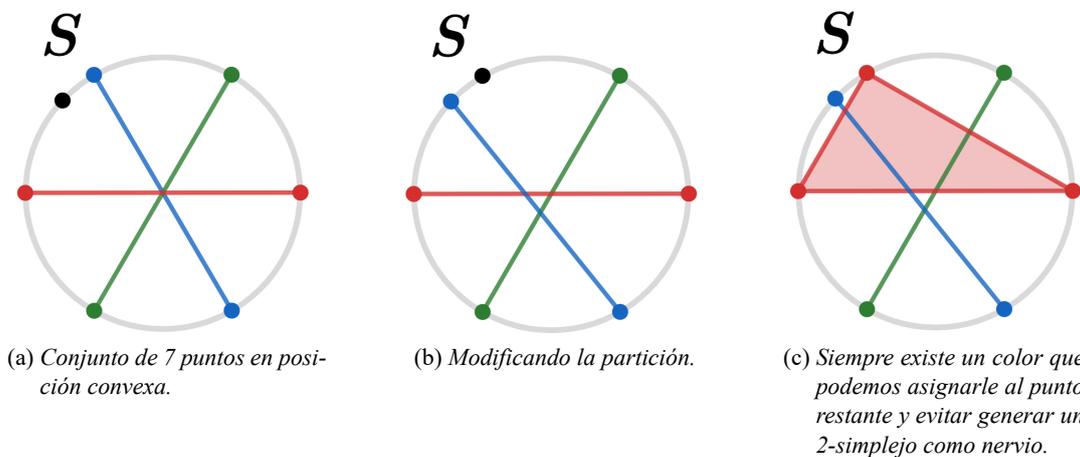


Figura 3.5: $\{7$ puntos en posición convexa generan a C_3 !

Podemos concluir que C_3 en efecto es un 2-Tverberg convexo y además tenemos que $Tc(C_3, 2)$ es igual a 7, por lo que el teorema puede ser reformulado así:

Teorema 3.1.2 (Reformulado): El ciclo C_3 de 3 vértices satisface que $Tc(C_3, 2) = 7$.

¿Y si hubiera más de 7 puntos también podemos generar a C_3 ?

Consideremos la *Figura 3.6 en la página siguiente*. Es mucho más fácil entender la idea de la figura que explicarla; simplemente consideramos la *Figura 3.5c* y vemos qué sucede si tuviéramos más puntos. Es

fácil observar que hay sectores donde podríamos colorear a los puntos de color rojo, azul o verde sin alterar el nervio generado.

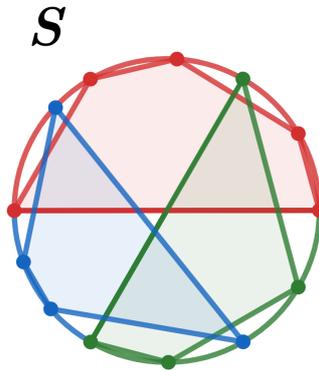


Figura 3.6: Con más de 7 puntos también podemos generar a C_3 .

A pesar de que podemos construirlo con más de 7 puntos, siempre nos interesará la mínima cantidad de puntos para los siguientes casos pero ¿qué nos asegura que el ciclo C_4 o el ciclo C_5 o cualquier ciclo más grande también pueda generarse como nervio?

Naturalmente una observación que podemos realizar es la siguiente:

Observación 3.1.3: Dado $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto de a lo más $2n - 1$ puntos en posición convexa con $n \geq 3$, entonces no es posible obtener a C_n como nervio de ninguna partición de S .

Es fácil darse cuenta que la demostración es análoga a la de la [observación 3.1.1 de la página 41](#).

Veamos el siguiente algoritmo que nos ayudaría a construir a C_4 como nervio, que por la proposición anterior, sabemos que necesitamos un conjunto de al menos 8 puntos.

Primero consideramos un cuadrado dentro de un círculo, coloreamos de distintos colores cada uno de los lados, luego prolongamos los lados del cuadrado de tal forma que toquen al círculo en 2 puntos. A los 2 puntos correspondientes a cada segmento de recta les asignamos el color que tenía el segmento de recta. Y finalmente obtenemos al nervio de esa familia de 8 puntos que en efecto es C_4 . Véase la [Figura 3.7](#).

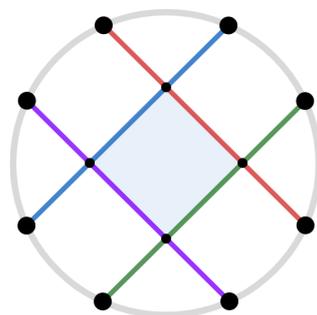


Figura 3.7: Generando a C_4 .

Sin embargo hay un problema, este algoritmo sólo sirve si tenemos cuadrados dentro (incluso puede funcionar para cuadriláteros convexos), pero puede fallar si la figura de adentro no es un cuadrilátero convexo, como en la [Figura 3.8 en la página siguiente](#). Y los cuadrados dentro del círculo sólo generarían una cantidad finita de posibles configuraciones de 8 puntos en posición convexa. Así que necesitamos

3 Los nervios convexos

una herramienta que nos permita determinar rápidamente la forma de partir 8 puntos (en caso de que fuera posible para toda configuración de 8 puntos en posición convexa).

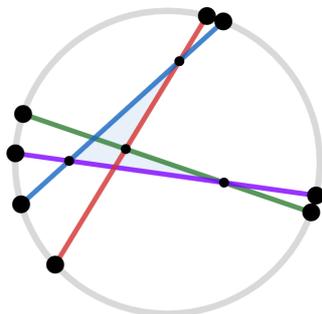
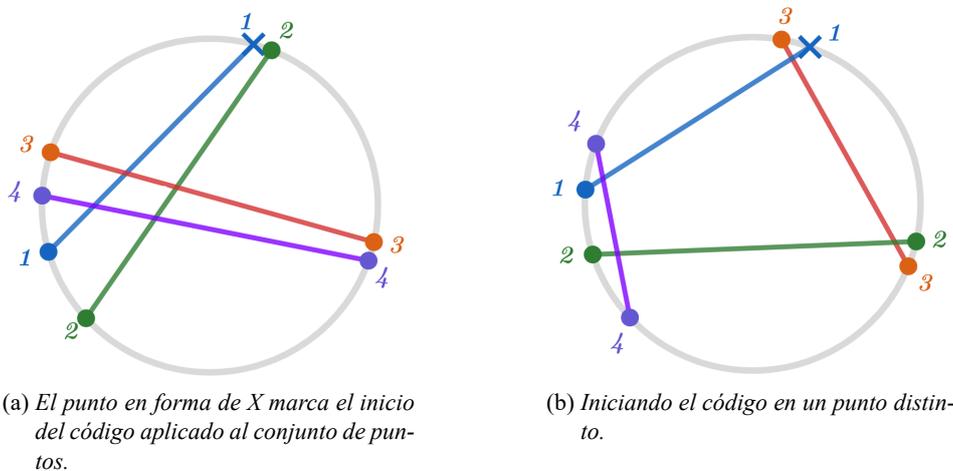


Figura 3.8: Este conjunto de puntos no genera a C_4 como nervio. ¡Genera a K_4 !

Definición 3.1.4 (Código): Sea S un conjunto de puntos en posición convexa y $P = S_1, \dots, S_m$ una m -partición de S . A cada punto que pertenece a la parte S_i le asignamos la etiqueta i , donde $i \in \{1, \dots, m\}$. A partir de un punto cualquiera tomamos su etiqueta correspondiente, consideramos el siguiente punto en sentido horario y tomamos su etiqueta. Repetimos éste proceso hasta llegar al punto inicial. Llamamos *código* a la concatenación de las etiquetas tomadas de esa forma.

Ejemplo 3.1.5: Tomamos el conjunto de puntos de la *Figura 3.8* y vamos a aplicarle el código 12342143 a ese conjunto de puntos, como se muestra en la *Figura 3.9*.



(a) El punto en forma de X marca el inicio del código aplicado al conjunto de puntos.

(b) Iniciando el código en un punto distinto.

Figura 3.9: ¡Sin importar donde inicie el código obtenemos a C_4 como nervio!



Observamos algo curioso y es que sin importar en qué punto empezemos el código obtenemos a C_4 como nervio, incluso si los puntos estuvieran colocados de una forma “extraña” como en sólo una parte de la circunferencia (observamos que seguirían estando en posición convexa) mientras el conjunto de puntos tenga ese código se obtiene el mismo nervio.

¿Qué nos asegura que para cualquier conjunto de 8 puntos le aplicamos ese código siempre obtengamos a C_4 como nervio?

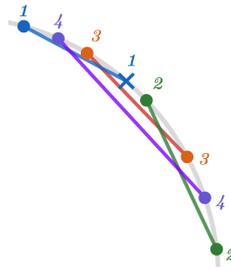


Figura 3.10: ¡El código no falla!

Para ello necesitamos recordar una cosa y es que dados S y S' conjuntos de puntos en posición convexa con la misma cardinalidad entonces S y S' tienen el mismo tipo de orden. Además necesitamos otra herramienta que es la siguiente y cuya demostración se puede consultar en el artículo citado.

Lema 3.1.6 [DHOY20]: Sean S_1 y S_2 dos conjuntos de puntos en \mathbb{R}^d con el mismo tipo de orden, sea σ una biyección de S_1 a S_2 que preserve la orientación de cualquier $(d + 1)$ -tupla en S_1 . Entonces cualquier partición $P = (P_1, \dots, P_n)$ de S_1 y su correspondiente partición en S_2 bajo σ denotada $\sigma P = \{\sigma(p_1), \dots, \sigma(p_n)\}$ tienen la misma gráfica de intersección $\mathcal{N}^1(P)$.

En nuestro caso particular en el plano podemos interpretarla de la siguiente manera:

Lema del código: Sea S_1 un conjunto de puntos en posición convexa. Si un código produce una gráfica de intersección $\mathcal{N}^1(P)$ para una partición $P = (P_1, \dots, P_n)$ de S_1 entonces ese código produce la misma gráfica de intersección $\mathcal{N}^1(P)$ para cualquier otro conjunto de puntos en posición convexa.

La razón por la que produce la misma gráfica de intersección pero no al mismo nervio se debe al ciclo C_3 que como vimos, un conjunto de 6 puntos puede generar tanto a C_3 como a un 2-simplejo, pero el 1-esqueleto del 2-simplejo es justo C_3 (Véase en la página 43). Sin embargo cuando teníamos 6 puntos veíamos que justamente por la forma en la que se debe obtener a C_3 podía generarse la intersección de las 3 partes en un punto que llamamos w . Como las gráficas que ahora buscamos de manera natural evitan una intersección triple de 3 colores, basta ver que si una partición genera al ciclo buscado como nervio entonces cualquier otro conjunto de puntos generaría al mismo ciclo bajo el mismo código.

En otras palabras, como vimos que con el código 12342143 en un conjunto de 8 puntos generábamos a C_4 , entonces cualquier otro conjunto de puntos en posición convexa generaría a C_4 como nervio si tiene el mismo código, es decir:

Teorema 3.1.7: Sea S un conjunto de 8 puntos con partición $P = S_1, S_2, S_3, S_4$, el código 12342143 siempre genera a C_4 como nervio.

O en otras palabras:

Teorema 3.1.7 (reformulado): Sea C_4 la gráfica ciclo de 4 vértices entonces $Tc(C_4, 2) = 8$.

Una cosa interesante es que el código 12342143 no es el único que genera al ciclo C_4 también el código 14213243 genera a C_4 y la respuesta es bastante sencilla, lo que queremos es que la parte S_1 intersekte

3 Los nervios convexos

a dos partes, en el caso del primer código, intersecta a las partes S_3 y S_4 mientras que en el caso del segundo código la parte S_1 intersecta a las partes S_2 y S_4 , es decir, todo se resuelve renombrando al 2 por el 3.

Observación 3.1.8: El código 14213243 es exactamente el mismo código que 34231241 pues uno simplemente iría en sentido horario y el otro en contra-horario. Además se debe notar que no importa donde “inicie” el código pues es un código circular, es decir, los códigos 34231241 y 12413423 son los mismos, un código se inicio utilizando un punto con etiqueta 3 y el otro código se inicio utilizando un punto con etiqueta 1.

El código 14213243 resulta más útil porque nos permite generalizar de forma sencilla el código para obtener a C_5 por ejemplo.

Teorema 3.1.9: Sea S un conjunto de 10 puntos con partición $P = S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$, el código 1521324354 siempre genera a C_5 como nervio.

Demostración:

Por lo mencionado anteriormente basta ver que efectivamente para alguna configuración de 10 puntos en posición convexa el código genera a C_5 . Así véase la *Figura 3.11*.

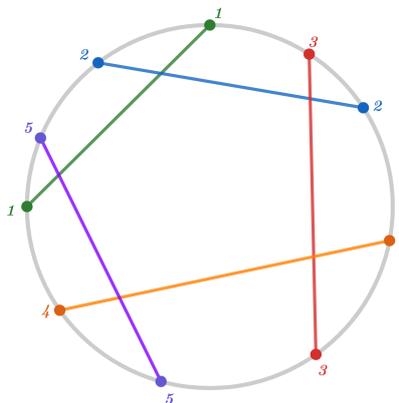


Figura 3.11: El código 1521324354.



Si aún no se alcanza a apreciar cuál es el código veamos qué sucede para obtener C_6 en la *Figura 3.12* en la página siguiente.

Por lo tanto concluimos esta sección con el siguiente teorema, cuya demostración esperamos que parezca evidente por los ejemplos anteriores.

Teorema 3.1.10: Sea S un conjunto de $2n$ puntos con partición $P = S_1, \dots, S_n$, el código $1n\ 21\ \dots\ n(n-1)$ siempre genera a C_n como nervio.

Corolario 3.1.11: Sea S un conjunto de $2n$ puntos con partición $P = S_1, \dots, S_n$, el código $1\ 21\ \dots\ n(n-1)\ n$ siempre genera a la trayectoria T_n como nervio.

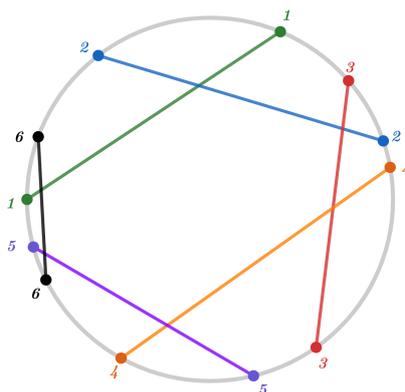


Figura 3.12: 16 21 32 43 54 65.

3.2. Ruedas

Uno podría esperar que si los ciclos pueden generarse con una cantidad bien definida de puntos en posición convexa, entonces una gráfica un poco más compleja como lo puede ser una *rueda de n vértices* (denotadas por W_n), que es un ciclo de $n - 1$ vértices con un vértice en el centro al cual todos los demás están unidos, también pudiera generarse. Sin embargo veremos a continuación que esto podría no ser cierto.

Nuevamente empezamos con el ejemplo más sencillo de ruedas: $W_4 \cong K_4$ que es un ciclo C_3 con un vértice al centro unido a los otros 3.

Del Teorema 3.1.2 (en la página 43) tenemos que si queremos generar a C_3 como nervio necesitamos al menos 7 puntos.

Lo primero que haremos será comenzar con un conjunto S de 6 puntos en posición convexa que generen un 2-simplejo como nervio, esto es porque queremos mostrar que la estructura de W_4 es muy difícil de conseguirse.

Luego agregamos un punto más a S para evitar formar al 2-simplejo y obtener así un C_3 , si bien no existe sólo una manera de cambiar las particiones para obtener a C_3 , esperamos que los ejemplos gráficos de la *Figura 3.13 en la página siguiente* nos ayuden a guiar las ideas detrás de esto.

A continuación necesitamos al menos 2 puntos más en el conjunto S que podamos meter en una cuarta parte que intersecte a las otras 3 pero no simultáneamente, esto para que se genere justamente la rueda W_4 pero sin generar simplejos entre medio. El problema es si los 2 puntos nuevos generan intersecciones que no queremos y forman simplejos de por medio, por ejemplo la *Figura 3.13c en la página siguiente*.

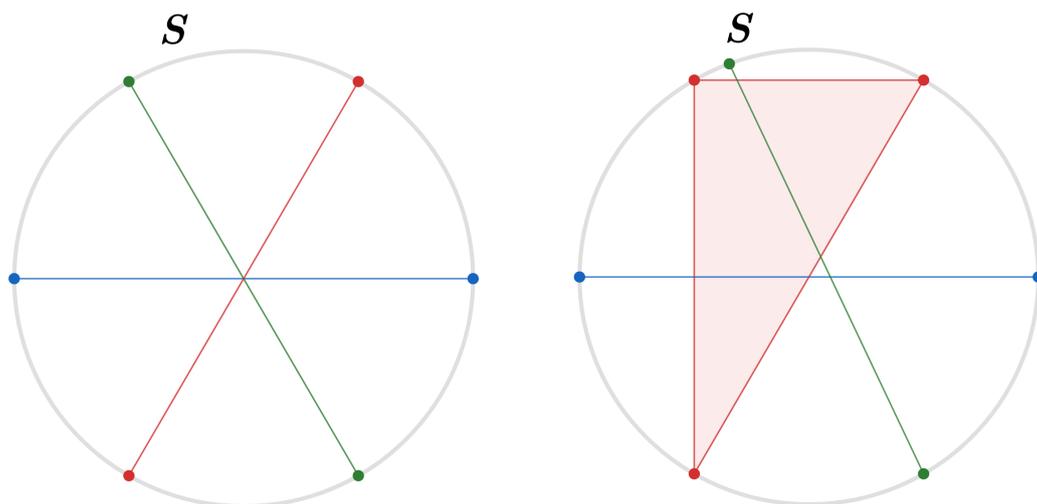
Entonces tenemos dos posibles caminos:

1. Respetar las primeras 3 particiones que ya teníamos, luego agregar al menos uno de los puntos añadidos al conjunto S a alguna de las particiones que ya teníamos y agregar aún más puntos al conjunto S esperando que ahora sí podamos generar a W_4 . Pero esto puede no servir de nada, véase la *Figura 3.13d en la página siguiente*. En este caso el conjunto S tenía más de 9 puntos, sin embargo daba la casualidad que los puntos z_1, \dots, z_i por más puntos que fueran, no servían para agregar a la partición naranja, pues seguían intersectando a las particiones rojas y azules simultáneamente, es decir, el conjunto podría tener 1 millón de puntos entre el punto x y el primer punto verde a partir

3 Los nervios convexos

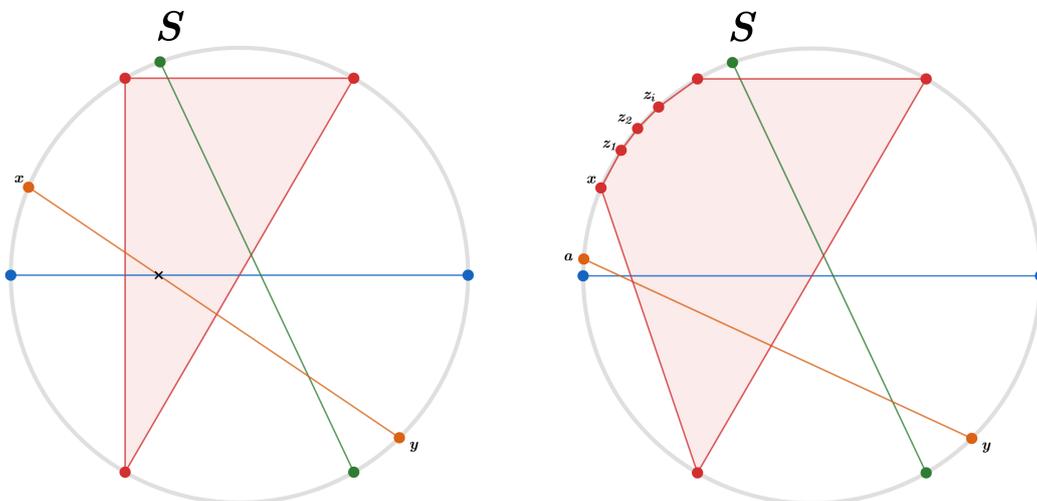
del punto x en sentido horario. Por lo que parece ser que éste camino nos llevaría a una cantidad incluso infinita de puntos en posición convexa y no podríamos generar a W_4 a no ser que tengamos la suerte de que 2 puntos sí puedan estar en la partición naranja y no generen simplejos con las otras 3 particiones.

2. Otra opción podría ser cambiar todas las particiones y tratar de encontrar una con los puntos que ya tenemos (o menos puntos) para generar la rueda W_4 sin generar primero el ciclo C_3 .



(a) Paso 1: Una configuración que genera un 2-simplejo.

(b) Paso 2: Agregamos un punto y rompemos al 2-simplejo generado, obteniendo un C_3 .



(c) Paso 3: Si respetamos las particiones que ya existían, al agregar 2 puntos a la última partición podemos tener intersecciones que no queríamos. En este caso generamos un simplejo con las particiones roja, azul y naranja.

(d) Paso 4: No importa cuántos puntos existan entre el punto x y el primer punto verde, ninguno puede ser naranja. Necesitamos un punto en un lugar distinto, por ejemplo el punto a .

Figura 3.13: Tratando de generar a W_4 .

Así, intentemos entonces generar a W_4 sin antes generar a C_3 . Como W_4 tiene 4 vértices, primero podríamos intentar generarlo como nervio de una partición de 8 puntos.

Sin embargo se vuelve más de lo mismo, supongamos que tenemos un conjunto S de 8 puntos en posición

convexa.

En particular podría suceder que esos 8 puntos sean justo los vértices de un octágono regular, por lo que sus cuatro diagonales se intersectarían y si decidieramos elegir la partición dada por cada diagonal corresponde a una parte entonces generaríamos como nervio a un 3-simplejo. Entonces esa forma de partir no nos sirve, tendríamos que elegir otra, pero cualquier otra no lograría obtener todas las intersecciones requeridas, por ejemplo la *Figura 3.14* sigue teniendo los 8 puntos del octágono regular y casi genera a W_4 , si pensamos que el color naranja formaría el vértice del centro de la rueda W_4 se tiene que las partes roja, azul y verde forman al ciclo C_3 , como la parte naranja intersecta a la verde y a la azul entonces sólo faltaría la arista que va del vértice rojo al vértice naranja para tener la rueda W_4 , así si intentamos agregar un punto más a S quizá logremos formar a W_4 .

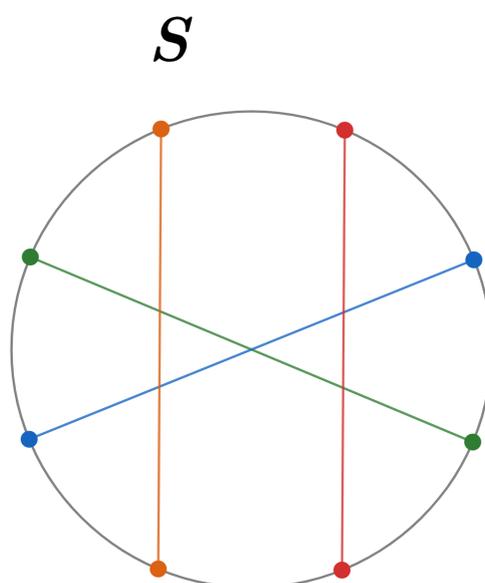


Figura 3.14: Los 8 puntos del octágono regular tratando de formar a W_4 .

Así, sin pérdida de generalidad agregamos un punto más de lado derecho en alguno de los sectores A , B o C remarcados de naranja, esto para que ese vértice pueda agregarse a la partición naranja y formar una intersección con la parte roja. En la *Figura 3.15 en la página siguiente* se aprecian mejor estas regiones.

Sin embargo agregar un punto más de los sectores A , B o C a la partición naranja genera un 2-simplejo con las partes azul, naranja y verde, así que tendríamos nuevamente que intentar recolorar, véase la *Figura 3.16 en la página 53*.

Si tenemos algo de suerte, podríamos tener un punto como el z que nos permitiría cambiar otro de los puntos en la parte naranja a alguna otra parte, como se muestra en la *Figura 3.17a en la página 53*, sin embargo seguimos atorados con el mismo problema, pues si z estuviera en una posición un poco distinta simplemente no podríamos tomar esa partición y nuevamente habría que cambiar todas las particiones o seguir agregando puntos, como lo muestra *Figura 3.17b en la página 53*.

Así que esto parece un juego de nunca acabar, arreglamos las particiones pero resulta que si un punto se moviera un poquito esa misma partición no funciona y necesitamos otra, entonces parece ser que necesitamos agregar otro punto para que podamos generar las intersecciones necesarias pero nuevamente

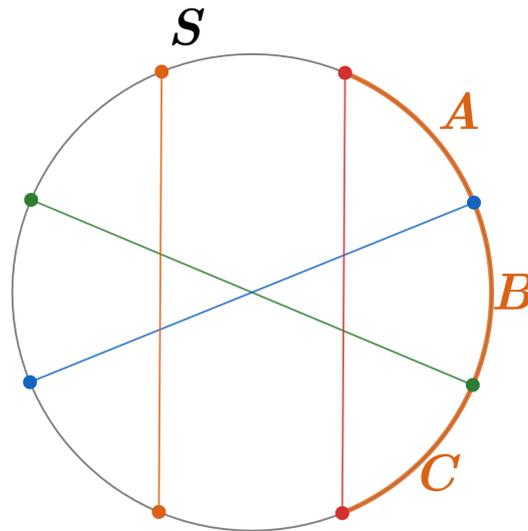


Figura 3.15: Las 3 regiones donde podríamos tener un punto extra en el conjunto S y añadirlo a la parte naranja para intersectarla con la roja.

si el punto estuviera un poquito alejado de una posición específica entonces no podemos incluirlo en ninguna partición...

Así parece ser que el problema radica justamente en lo que mencionamos sobre el ciclo C_3 , que sea tan sencillo que de C_3 pueda pasar a ser un 2-simplejo el nervio generado por una partición de puntos parece dificultar todo.

Por lo que una conjetura que proponemos es la siguiente:

Conjetura de las ruedas nerviosas: Para toda $m \geq 2n$ y $n \geq 4$ existe una configuración de m puntos en posición convexa de manera que no existe ninguna partición que genere a W_n como nervio.

Y debido a que las gráficas completas también tienen triángulos por cada tripleta de puntos, es probable que tampoco puedan generarse.

Conjetura de las gráficas completas nerviosas: Para toda $m \geq 2n$ y $n \geq 4$ existe una configuración de m puntos en posición convexa de manera que no existe ninguna partición que genere a K_n como nervio.

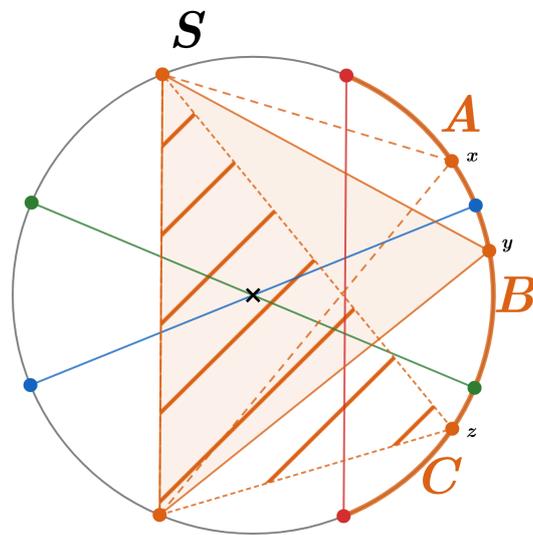
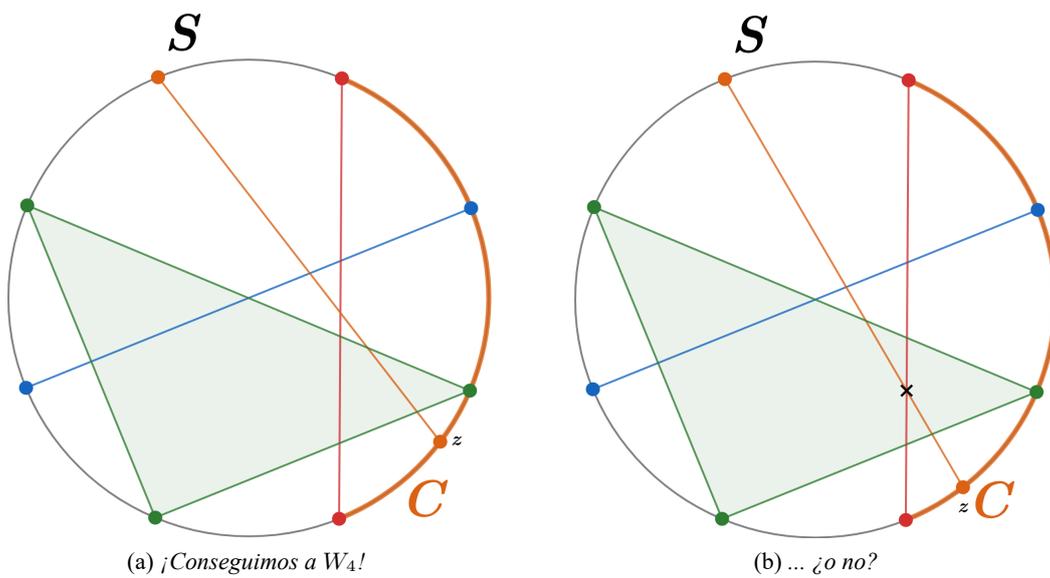


Figura 3.16: Al agregar un punto en cualquiera de las 3 regiones a la parte naranja tenemos que se genera un 2-simplejo con las partes azul, naranja y verde.



(a) ¡Conseguimos a W_4 !

(b) ... ¿o no?

Figura 3.17: Se podría obtener a W_4 ... o también podría ser que no...

4 Pegando ciclos

Utilizando la [Definición 1.2.19](#) de la [página 15](#) vamos a ver qué nervios podríamos obtener utilizando estas operaciones pues dado que ya sabemos cuántos puntos necesitamos en posición convexa para generar cualquier ciclo C_n con $n \geq 4$ (para evitar triángulos y en general intersecciones complejas) parecería natural preguntarse si es fácil obtener un código que nos permita generar pegados de ciclos tanto por aristas como por vértices.

4.1. Cadenas ciclosas

Lo primero con lo que podríamos empezar, como es de esperarse, es tratar de pegar 2 ciclos C_4 . Y como tenemos dos maneras de pegarlos, empezamos pegándolos por una arista en común.

Supongamos entonces que tenemos dos ciclos C_4 uno dado por los vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ y otro dado por los vértices $\{1, 2, 5, 6\}$. Utilizamos la misma notación de los vértices 1 y 2 para visualizar de una manera más simple cómo pegar los ciclos, como lo muestra [Figura 4.1](#). Así consideramos a la gráfica $H := C_4 \bar{+} C_4$ resultante de pegar los dos ciclos anteriores.

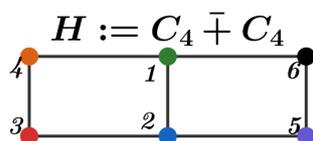


Figura 4.1: Dos ciclos C_4 pegados por una arista en común.

De la [observación 3.1.3](#) de la [página 45](#) es sencillo deducir que se puede obtener el siguiente teorema:

Teorema 4.1.1: Sea K un complejo simplicial de n vértices que puede generarse como nervio de una partición de puntos en posición convexa. Entonces $Tc(K, 2) \geq 2n$.

Por lo que para poder generar a la gráfica H necesitaríamos al menos $2 \times 6 = 12$ puntos en posición convexa. Afortunadamente, como veremos, esta cantidad de puntos logra generar a la gráfica H como nervio de una partición.

Utilizando el [Lema del código](#) de la [página 47](#) basta ver que si tenemos un código cuya partición genera a H como nervio del conjunto de 12 puntos en posición convexa, entonces cualquier otro conjunto de 12 puntos en posición convexa también genera a la gráfica H como nervio de una partición que utiliza el mismo código.

Afortunadamente la forma en la que obtuvimos el código para generar a la gráfica H fue relativamente sencilla, como se muestra a continuación.

4 Pegando ciclos

Primero, recordando el **Teorema 3.1.10** de la página 48 tenemos que el código del primer ciclo es: 12413423 y de también podemos obtener el código del segundo ciclo: 12615625.

¿Y todo esto de que nos sirve?

Si observamos un poco nos daremos cuenta que ambos códigos inician con 12 y eso tiene sentido, pues ambos ciclos comparten los vértices 1 y 2 y la arista 12.

Ahora el procedimiento es muy sencillo para generar el código de la gráfica H . Simplemente borramos las etiquetas 12 al inicio de ambos códigos y los concatenamos, es decir, el código de la gráfica H es:

413423 615625

Y si observamos la **Figura 4.2** apreciaremos que efectivamente este código nos genera a la gráfica H como nervio.

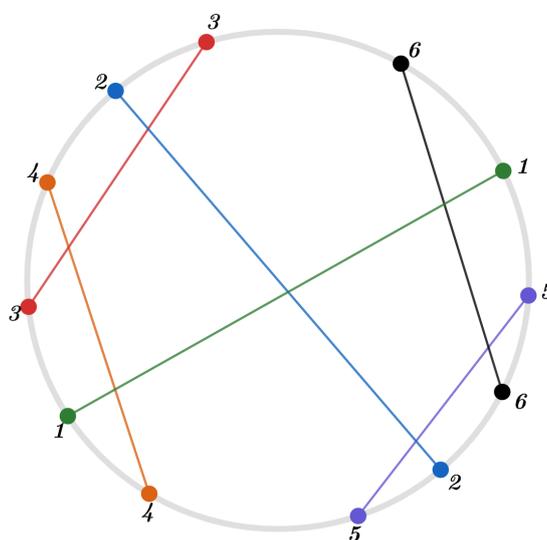


Figura 4.2: Obteniendo el código del pegado de dos ciclos por una arista en común.

Ahora veamos cómo podríamos generar a la gráfica $H_2 := C_4 \dot{+} C_4$ donde un ciclo C_4 tiene los vértices $\{1, 2, 3, 4\}$ y el otro ciclo tiene los vértices $\{1, 5, 6, 7\}$ como lo muestra **Figura 4.3**.

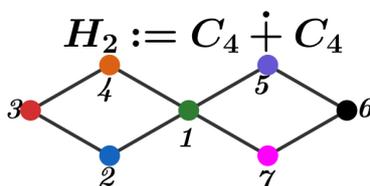


Figura 4.3: Dos ciclos C_4 pegados por un vértice en común.

Como la gráfica H_2 tiene 7 vértices entonces necesitamos al menos 14 puntos en posición convexa.

Sabemos que los códigos de ambos ciclos son: 14213243 y 17516576.

Ahora si eliminamos el primer 1 de ambos códigos y los concatenamos, obtenemos el código que genera a la gráfica H_2 :

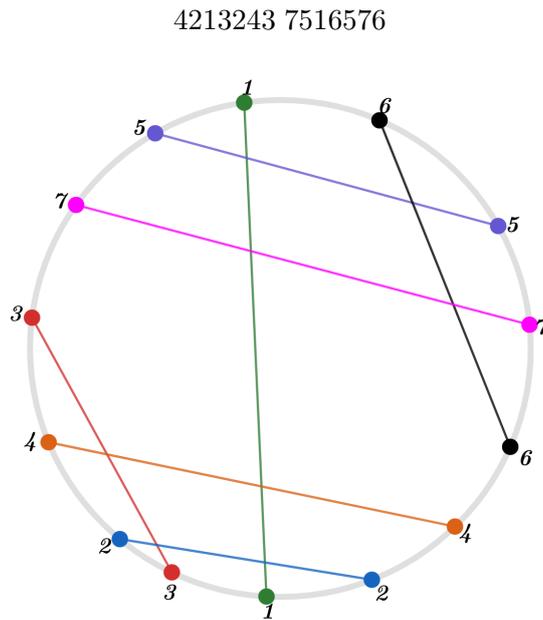


Figura 4.4: *Obteniendo el código del pegado de dos ciclos por un vértice en común.*

¿Que pasaría si ahora quisiéramos pegar 3 ciclos de tal manera que vayan formando una *cadena* como lo muestra *Figura 4.5*? ¿Será posible generar este tipo de gráficas como nervios de particiones de puntos en posición convexa?

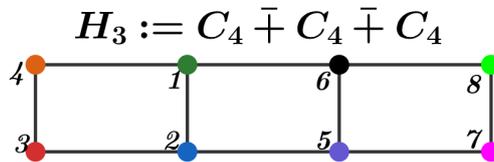


Figura 4.5: *Construyendo una cadenita de ciclos C_4 .*

Para ello tendríamos que definir claramente qué es una “cadena” de ciclos, porque podríamos pegar tres C_4 's como en la *Figura 4.7 en la página siguiente*:

Antes de definir qué es una cadena de ciclos veamos si es posible generar las *Figuras 4.5 y 4.7 en la página siguiente*, ya que si no es posible no tiene mucho sentido intentar avanzar más allá.

Supongamos que H_3 es la gráfica resultante de pegar a través de la arista 56 a la gráfica H y un ciclo C_4 dado por los vértices $\{5, 6, 8, 7\}$.

Sabemos que una forma de obtener el código del ciclo C_4 sería escribir primero un vértice con etiqueta 5 y luego otro con etiqueta 6, por lo que el código resultante sería 56758768

Y ya sabíamos que el código de la gráfica H era: 562541342361.

Si aplicamos el mismo algoritmo que cuando pegamos dos ciclos tenemos que al borrar los dígitos 56 de ambos códigos y concatenarlos obtenemos:

2541342361 758768

4 Pegando ciclos

Afortunadamente el mismo algoritmo de concatenar dos códigos genera a la gráfica H_3 deseada, como lo muestra la *Figura 4.6*

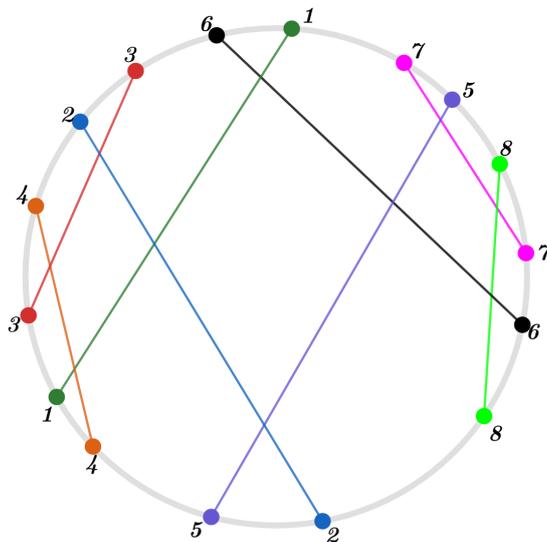


Figura 4.6: Logramos generar a la gráfica de la *Figura 4.5 en la página anterior*.

Ahora sea la gráfica H_4 la mostrada en la *Figura 4.7*.

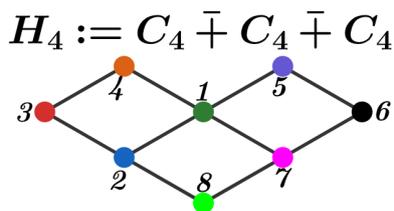


Figura 4.7: ¿Construyendo una cadenita de ciclos C_4 ?

Algo curioso es que al principio dibujamos la gráfica H_4 para mostrarla como si fuese la gráfica H_2 pegada nuevamente con un ciclo más, el ciclo $C_4 = \{1, 2, 8, 7\}$, sin embargo si uno utiliza la misma lógica de tratar de obtener el código de la gráfica H_4 concatenando el código de la gráfica H_2 y el del ciclo C_4 nos encontramos con que no se genera a la gráfica H_4 .

Esto en un principio nos asusta, afortunadamente si utilizamos el algoritmo de concatenar el código de los 3 ciclos a través de las aristas en común correspondientes sí logramos generar a la gráfica H_4 .

Esto nos genera una primer lección: A pesar de que es sencillo concatenar códigos, tienen que concatenarse de una manera específica, no podemos concatenarlos como creamos que podría funcionar.

Como sí logramos obtener estos pegados de ciclos como nervios, entonces vamos a generalizar los pegados de ciclos. Una manera de definir las cadenas sería a partir de lo siguiente: Supongamos que tenemos m ciclos pegados, ya sea por aristas o por vértices. Por cada uno de los ciclos considérese un vértice, por lo que se tendrían m vértices. Si dos ciclos están pegados por una arista o por un vértice entonces los vértices correspondientes a esos ciclos los hacemos adyacentes. A la gráfica resultante de este proceso la llamamos *gráfica dual de los ciclos*.

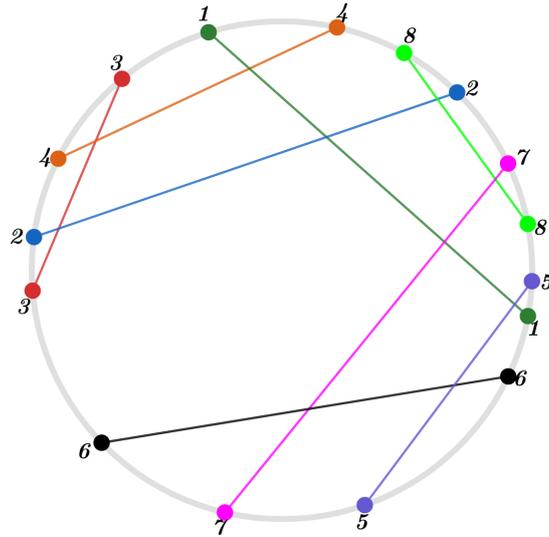


Figura 4.8: Si concatenamos los códigos pegandolos por aristas logramos generar a la gráfica de la Figura 4.7 en la página anterior.

Definición 4.1.2 (Cadena): A un pegado de m ciclos a través de aristas en común la llamamos m -cadena si y sólo si la gráfica dual de ciclos es una trayectoria.

Definición 4.1.3 (Cadenita): A un pegado de m ciclos a través de vértices en común la llamamos m -cadenita si y sólo si la gráfica dual de ciclos es una trayectoria.

Esta segunda definición se debe al hecho de que parece ser mucho más frágil una cadenita que una cadena. Además nótese que no nos está importando el tamaño de los ciclos en las cadenas o cadenitas, sólo cuántos ciclos hay en total.

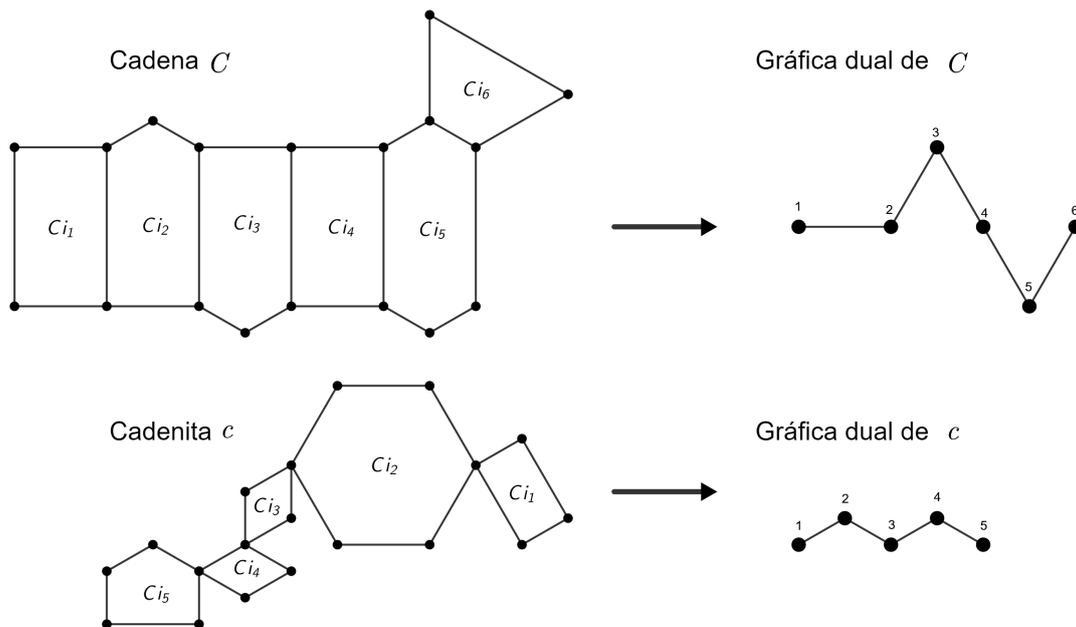


Figura 4.9: Un ejemplo de una 6-cadena y una 5-cadenita.

Una sencilla observación es que podríamos tener algo que fuese una combinación de cadenas y cadeni-

4 Pegando ciclos

tas, como lo muestra la *Figura 4.10*. Y a pesar de que parece ser que estas últimas también podríamos obtenerlas como nervios, no nos meteremos con ellas.



Figura 4.10: ¿Pseudocadenas?

Veamos un sencillo ejemplo de un pegado de ciclos que no sería una cadena ni cadenita.

Ejemplo 4.1.4: Considerando la gráfica J de la *Figura 4.11* notamos que los ciclos Ci_1 y Ci_2 están pegados a través de una arista en común, pero también el ciclo Ci_3 está pegado a través de un vértice en común al ciclo Ci_1 y al mismo tiempo pegado al ciclo Ci_2 a través de una arista por lo que en la gráfica dual aparecen las aristas 13 y 23 generando así el ciclo 123 y por lo tanto la gráfica dual de J no puede ser una trayectoria.

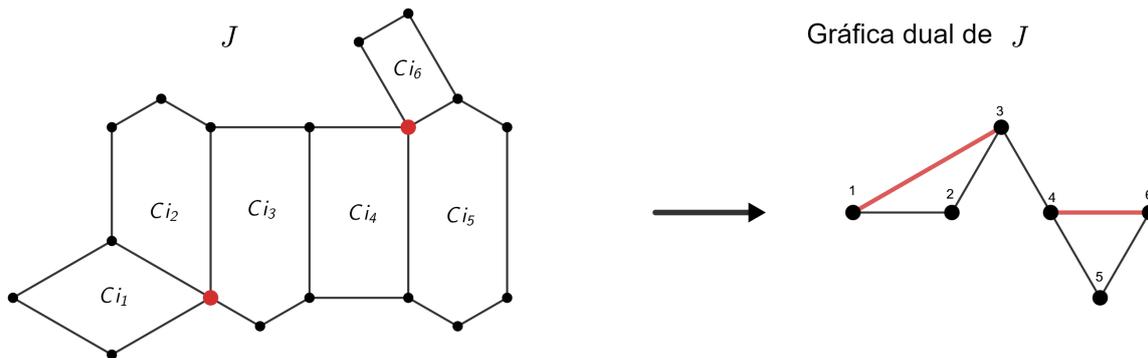


Figura 4.11: Hay que fijarse en cómo se pegan los ciclos.



Si bien no hay nada que nos parezca indicar que todas las m -cadenas y todas las m -cadenitas no pudieran realizarse, solo nos enfocaremos en demostrar que todas las m -cadenas de 4-ciclos y todas las m -cadenitas de 4-ciclos son realizables, esperando que la demostración sirva como un bosquejo a una demostración más general.

Teorema 4.1.5: Sea S un conjunto de k puntos en posición convexa y sea $m \in \mathbb{N}$.

A) Toda m -cadena de 4-ciclos se puede obtener como nervio de una partición de puntos de S siempre que $k = (2m + 2) \cdot 2$.

B) Toda m -cadenita de 4-ciclos se puede obtener como nervio de una partición de puntos de S siempre que $k = (3m + 1) \cdot 2$.

Demostraremos el inciso A, pues el inciso B es análogo.

Demostración:

Por inducción sobre m .

Base: Si $m = 1$ tenemos simplemente un C_4 , sabemos que lo podemos generar con 8 puntos en posición convexa y como $8 = (2(1) + 2) \cdot 2$ entonces se cumple.

Si $m = 2$ tenemos una 2-cadena de 4-ciclos, es decir una gráfica homeomorfa a gráfica H de la *Figura 4.1 en la página 55* que vimos que con 12 puntos en posición convexa podíamos generarla y como $12 = (2(2) + 2) \cdot 2$ entonces también se satisface.

Hipótesis de inducción: Supongamos que para m se cumple que toda m -cadena de 4-ciclos se puede generar como nervio de una partición de puntos $(2m + 2) \cdot 2$ del conjunto S .

Consideremos a la trayectoria $T = \{v_1, \dots, v_m\}$ como la gráfica dual de las m -cadenas de 4-ciclos.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $b_1 b_2 \dots b_{2(2m+2)}$ es el código de la m -cadena, que es una concatenación de las etiquetas de $(2m + 2) \cdot 2$ puntos necesarios de S .

Paso inductivo: Consideramos un 4-ciclo: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Si el ciclo A se pegase con una m -cadena en algún ciclo que corresponda a un vértice v_i con $2 \leq i \leq m - 1$, entonces la gráfica dual del pegado de los $m + 1$ ciclos sería un árbol y no una trayectoria, por lo tanto no sería una $(m + 1)$ -cadena. Entonces el ciclo A sólo puede pegarse con los ciclos que corresponden a los vértices v_1 y v_m de la gráfica dual de las m -cadenas.

Además observamos que sólo hay 2 aristas disponibles para pegar el ciclo A con las m -cadenas para obtener una $(m + 1)$ -cadena, estas dos aristas son las que contienen vértices de grado 2. Nótese que todos los otros vértices de las m -cadenas de 4-ciclos tienen grado 3.

Finalmente obsérvese que pegar el ciclo A con el ciclo que corresponde al vértice v_1 en la gráfica dual nos genera una gráfica homeomorfa a pegar el ciclo A con el ciclo que corresponde al vértice v_m en la gráfica dual. Así, sin pérdida de generalidad pegamos el ciclo A con el ciclo que corresponde al vértice v_m , a este ciclo llamémoslo A_m .

También sin pérdida de generalidad podemos asumir que los vértices de grado 2 del ciclo A_m tienen las dos últimas etiquetas $b_{2(2m+2)-1} b_{2(2m+2)} = 12$, de no ser así, podríamos renombrar todos los vértices de la m -cadena.

Sabemos entonces que el código del ciclo A es 12413423. Concatenamos los códigos de la m -cadena y del ciclo C_4 borrando las etiquetas 12 y obtenemos el código $b_1 b_2 \dots b_{2(2m+2)} 413423$.

Teníamos que la m -cadena era generada por un total de $(2m + 2) \cdot 2$ puntos, los cuales correspondían a cada una de las etiquetas de todo el código, por lo que al borrar las etiquetas 12 del código $b_1 b_2 \dots b_{2(2m+2)}$ nos quedan un total de $(2m + 2) \cdot 2 - 2$ puntos. Y al añadir las etiquetas 413423 al código $b_1 b_2 \dots b_{2(2m+2)}$ tenemos que agregamos 6 puntos.

Es decir tenemos un total de $[(2m + 2) \cdot 2 - 2] + 6 = (2m + 2) \cdot 2 + 4 = (2(m + 1) + 2) \cdot 2$ puntos y con ellos podemos generar una $(m + 1)$ -cadena de 4-ciclos.



4 Pegando ciclos

A continuación mostraremos en práctica un algoritmo más general que el descrito en esta sección para obtener como nervio una 6-cadena específica.

Ejemplo 4.1.5: Sea ξ una 6-cadena compuesta por tres 4-ciclos, dos 5-ciclos y un 6-ciclo pegados como lo muestra la *Figura 4.12*. Notamos que ξ tiene 18 vértices.

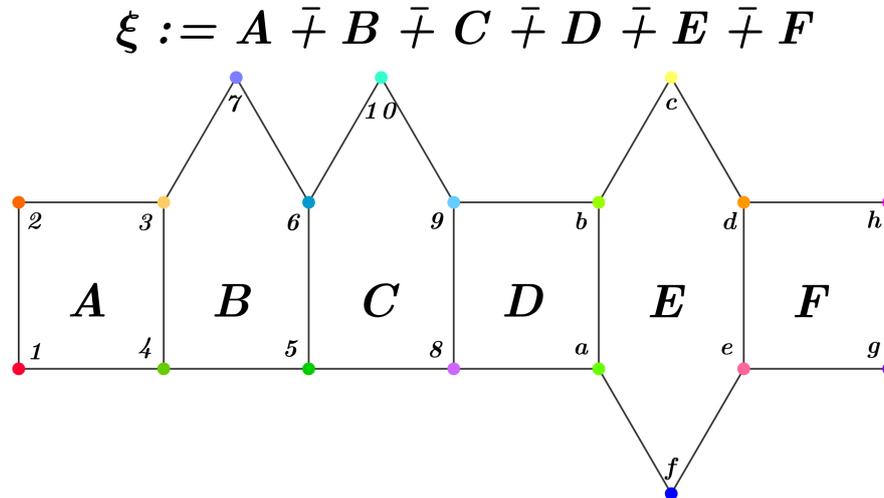


Figura 4.12: Una 6-cadena.

Como primer paso, obtendremos el código de cada uno de los ciclos, para evitar escribir todos los códigos y confundir al lector, mostraremos conjuntos de puntos en posición convexa etiquetados de tal forma que tengan el código que generen a los ciclos como nervios, como lo puede notar en la *Figura 4.13*, donde los vértices más gorditos representan el “inicio” del código, que a continuación será de utilidad.

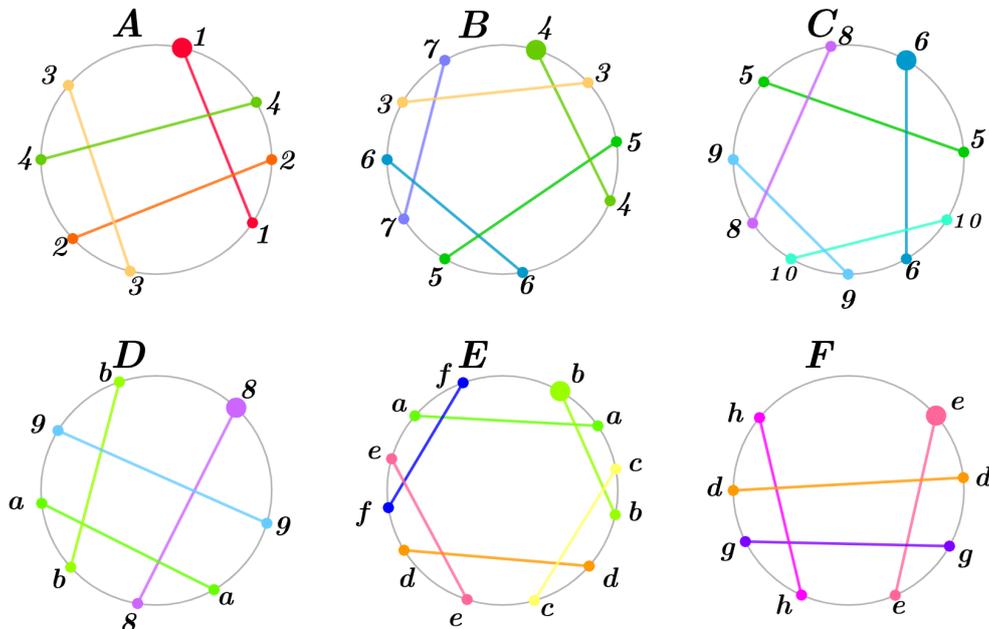


Figura 4.13: Los códigos de los ciclos A, B, \dots, F .

Ahora, sabemos que podemos obtener el código del pegado de los ciclos A y B como sigue:

El código del ciclo A es: 14213243.

El código del ciclo B es: 4354657637.

Notamos que ambos comparten las etiquetas 43 de manera consecutiva, por lo que nuestro algoritmo es concatenar el resto de las etiquetas de ambos códigos.

Así el código de $A\bar{\dagger}B$ es: 14213254657637.

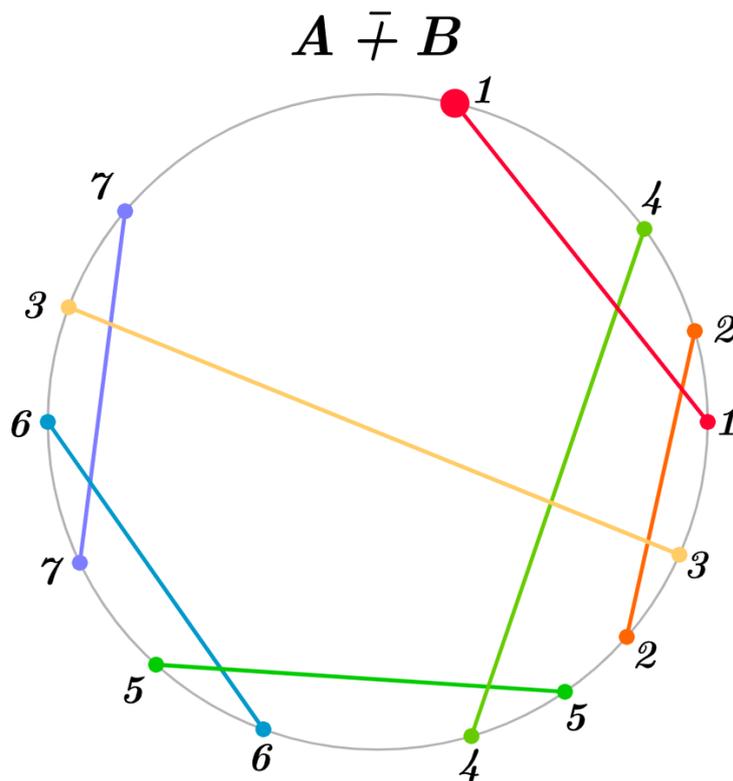


Figura 4.14: El algoritmo ha funcionado para pegar los ciclos A y B .

Notamos que el código del ciclo C comienza con **65**, por lo que podemos concatenar los códigos de $A\bar{\dagger}B$ y el ciclo C .

Primero reescribimos el código de $A\bar{\dagger}B$ de manera que empiece con 65: **65**763714213254.

Y ahora concatenamos ambos códigos eliminando las etiquetas **65** de ambos códigos.

Por lo que obtenemos el siguiente código: 763714213254(10)69(10)**89**58.

Continuamos este proceso observando que el código del ciclo D comienza con **89**, por lo que al eliminar las etiquetas 89 de ambos códigos y concatenandolos obtenemos el código de $A\bar{\dagger}B\bar{\dagger}C\bar{\dagger}D$.

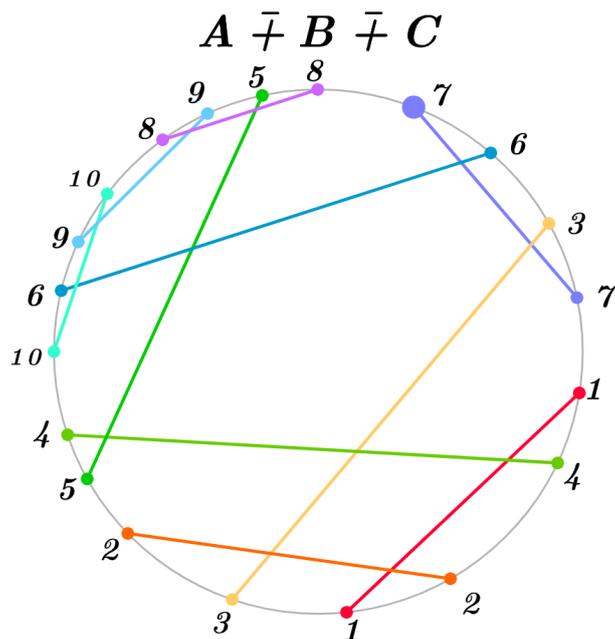


Figura 4.15: Ya pegamos los ciclos A, B y C.

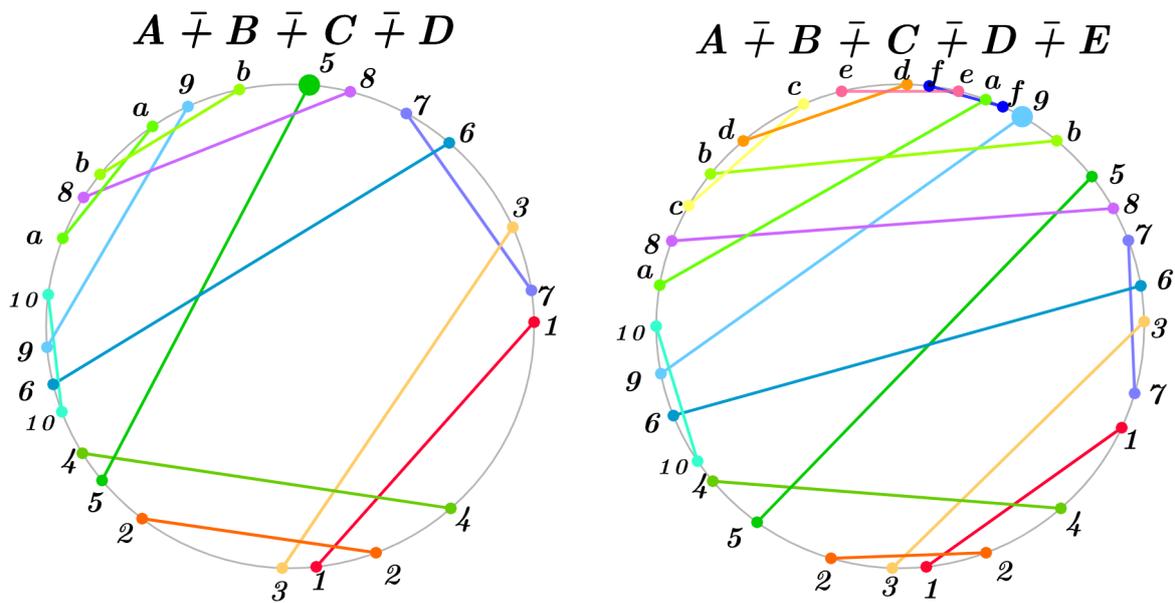


Figura 4.16: Corriendo el algoritmo hasta el ciclo E.

Seguimos este algoritmo hasta pegar los 6 ciclos, como se puede apreciar en la *Figura 4.16*.

Finalmente en la *Figura 4.17 en la página siguiente* podemos apreciar el último paso del algoritmo, donde se puede apreciar el código de ξ .

$$\xi := A \bar{+} B \bar{+} C \bar{+} D \bar{+} E \bar{+} F$$

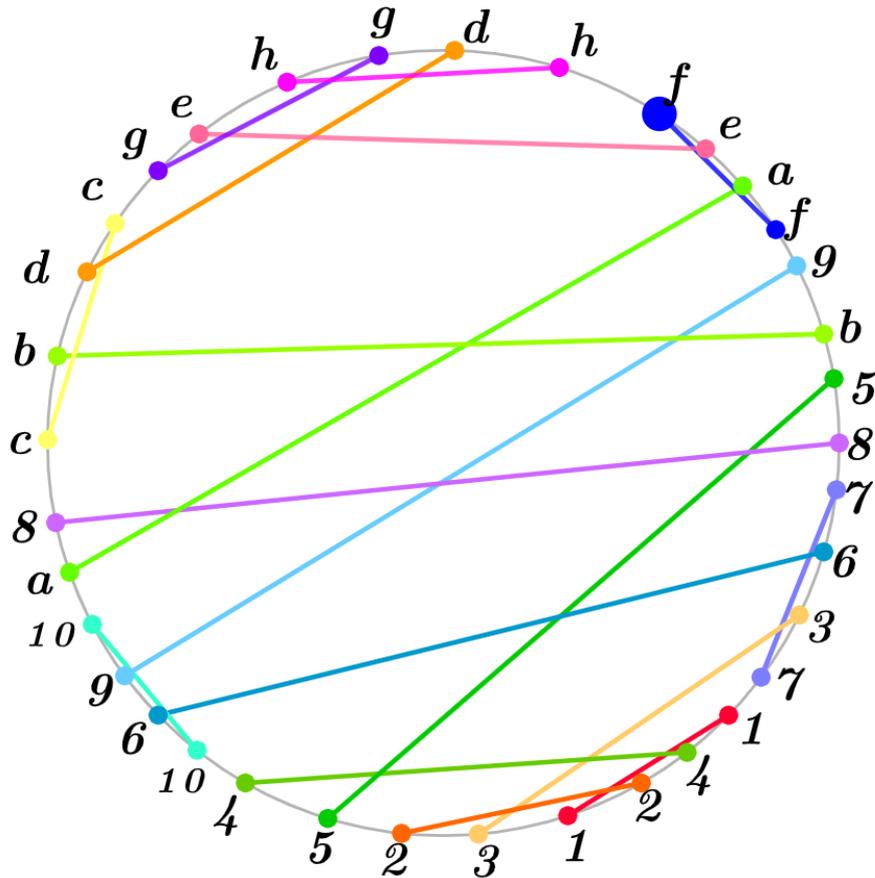


Figura 4.17: Obtuvimos una partición de un conjunto de puntos en posición convexa que genera a ξ como el nervio buscado.

Es importante señalar, que este algoritmo no sólo genera al nervio deseado, sino que además lo hace con la menor cantidad posible de puntos, pues por el **Teorema 4.1.1** de la página 55 tenemos que $Tc(\xi, 2) \geq 2 \cdot 18 = 36$ y la cantidad de puntos que utilizamos fue justo 36 puntos.



4.2. Libros

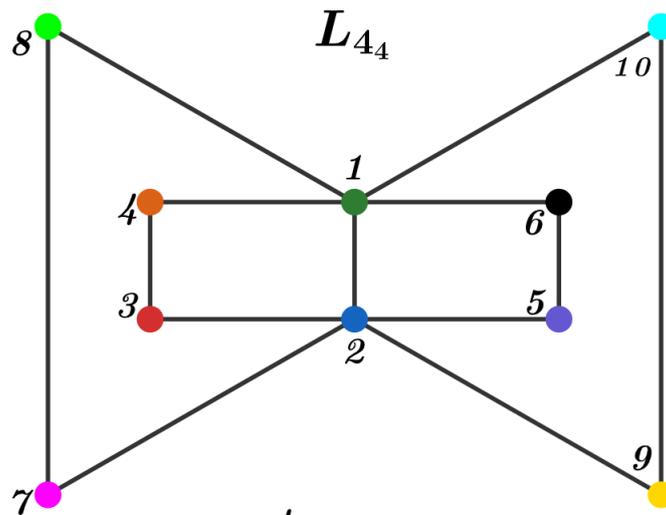
En el proceso de obtener los códigos de las cadenas de ciclos otra pregunta surgió a la par: ¿Qué pasaría si tratáramos de pegar muchos ciclos a través de una misma arista en común?

Definición 4.2.1 (Libros j -regulares): Una gráfica $L_{j,n}$ es un *libro* si tiene n ciclos de tamaño j , con $j \geq 4$ pegados todos por una arista en común.

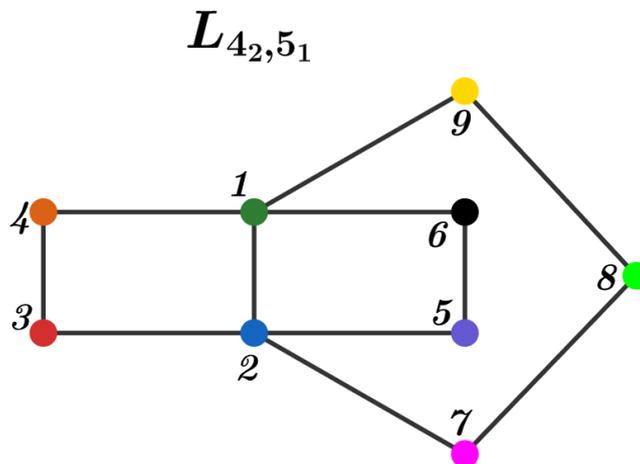
Definición 4.2.2 (Libros generales): Una gráfica $L_{4n_4, 5n_5, \dots, in_i}$ es un *libro* si tiene n_k ciclos de tamaño k , con $n_k \geq 0 \forall k \in \{4, \dots, i\}$, pegados todos por una arista en común.

Para comprender mejor las definiciones previas observe la *Figura 4.18 en la página siguiente*.

4 Pegando ciclos



(a) Un libro 4-regular de 4 hojas.



(b) Un libro general, con 2 hojas de tamaño 4 (ciclos C_4) y una hoja de tamaño 5.

Figura 4.18: Libros.

Lo primero que intentamos fue generar la *Figura 4.18a* como nervio.

Tenemos como primer requerimiento que necesitamos al menos 4 puntos en posición convexa partidos en dos conjuntos, el conjunto de puntos con etiqueta 1 y el conjunto de puntos con etiqueta 2. Estos puntos los necesitábamos para generar la arista 12 que funcionaría como el lomo del libro, es decir, donde trataríamos de pegar todos los otros ciclos. Si nos fijamos únicamente en esos 4 puntos podemos hacer una observación y es que esencialmente nos deja dos pedacitos donde podemos generar hojas, como se puede apreciar en la *Figura 4.19 en la página siguiente*

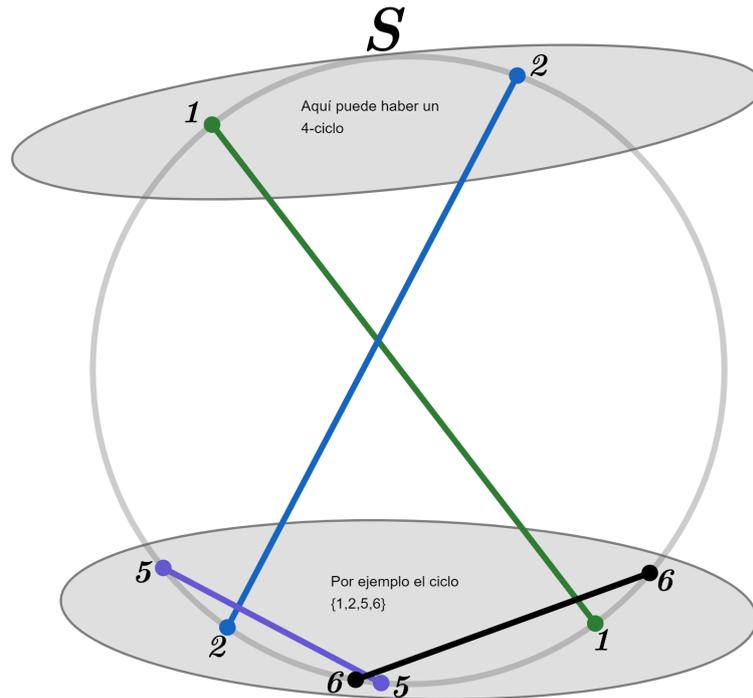


Figura 4.19: En los dos pedacitos que nos generan los 4 puntos podemos formar 4-ciclos.

Y ahora no hay manera de generar otro 4-ciclo fuera de los dos pedacitos, como lo muestra la *Figura 4.20*.

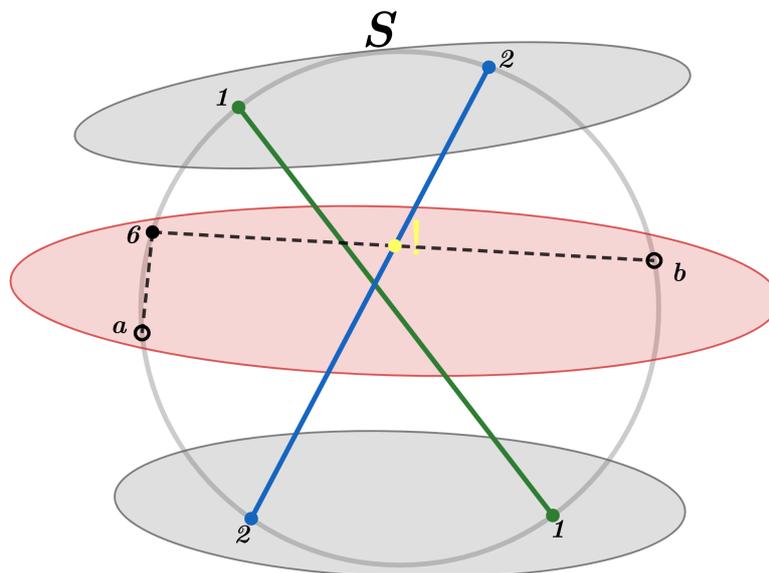
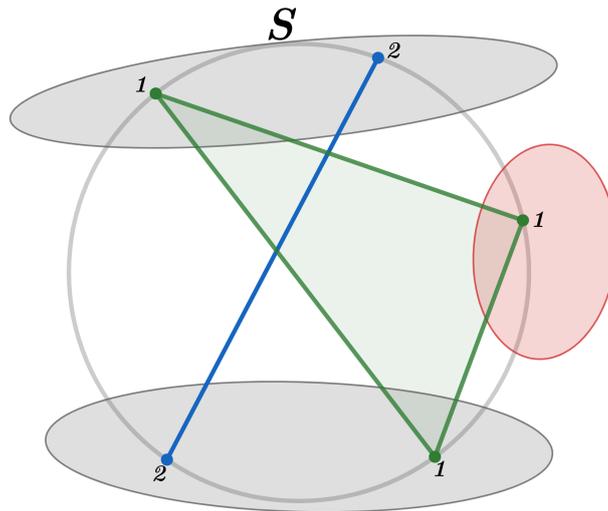


Figura 4.20: Los puntos 6 y a están fuera de los dos pedacitos donde podemos formar un 4 ciclo y si tomáramos la envolvente convexa de ellos no intersectan ni al convexo 1 ni al 2. Si existiera otro punto como el b y formáramos un convexo con los puntos 6 y b entonces en el nervio estaría presente la arista 26 que no existe en nuestro libro L_{4_4} .

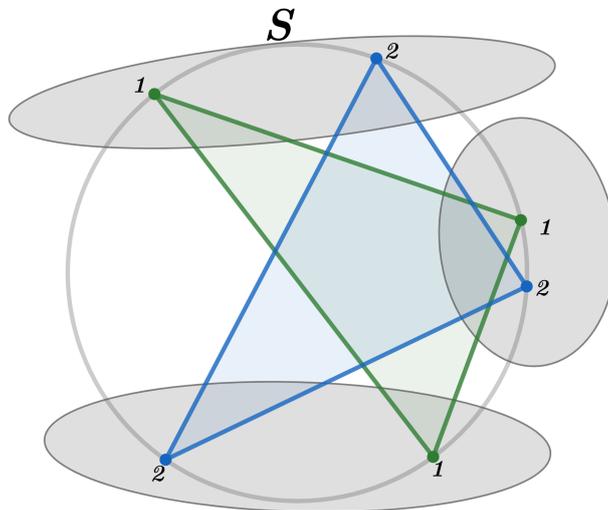
Lo anterior nos daría a entender que sólo podríamos generar libros con 2 hojas. Sin embargo, notemos que podemos “dividir” de una mejor forma si añadimos más puntos y los etiquetamos con 1 y 2.

4 Pegando ciclos

Si tuviéramos un punto más y lo etiquetáramos con 1 entonces formaríamos un triángulo como el convexo generado por las etiquetas 1, lo que nos permite dividir el conjunto de puntos en 3 partes, como lo ilustra de mejor manera la *Figura 4.21a*. Sin embargo con la tercer parte no podríamos generar un nuevo 4-ciclo, pues no habría forma de cerrarlo con el vértice 2. Pero si agregáramos otro punto más, podríamos tener 2 triángulos, uno con etiquetas 1 y otro con etiquetas 2, lo cual nos permite tener tres partes donde podríamos generar tres 4-ciclos.



(a) Aumentando la cantidad de partes para intentar formar 4-ciclos.



(b) Ahora tenemos la posibilidad de formar tres 4-ciclos..

Figura 4.21: ¡Ya podemos generar libros de 3 hojas!

Así, parece evidente cómo podríamos generar un libro de 4 hojas; si agregamos 2 puntos más al conjunto S y añadimos uno a la parte 1 y otro a la parte 2, entonces tendríamos 4 pedazos disponibles para formar 4-ciclos en esos pedazos.

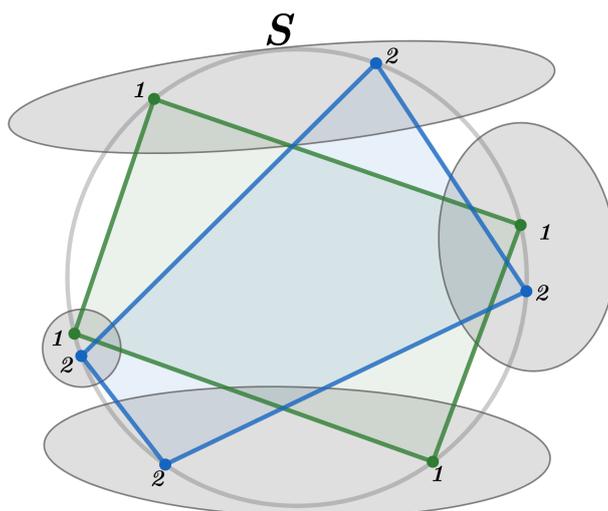


Figura 4.22: Cuatro "pedazos" donde generar 4-ciclos.

A partir de aquí ya debe ser sencillo obtener el código que nos permita generar al libro L_{44} como nervio.

Un método podría ser el siguiente.

- * Iniciamos basándonos en algún dibujo similar al anterior: 8 puntos en posición convexa, partidos en 2 conjuntos, cada uno de 4 puntos formando 2 cuadriláteros que se intersectan y generando cuatro "pedazos" en los cuales se puedan generar 4-ciclos.
- * Añadimos los puntos necesarios en cada uno de los pedazos y generamos 4-ciclos utilizando los códigos ya conocidos para generar 4-ciclos.
- * Recabar el código obtenido a través del dibujo.

Para nuestra sorpresa el algoritmo que utilizamos para generar cadenas también funcionó para generar libros, es decir:

- * Obtenemos el código de cada uno de los 4-ciclos del libro.
- * Reescribimos los códigos de tal manera que todos inicien con las mismas 2 etiquetas consecutivas, por ejemplo para la gráfica L_{44} serían:
 - ◆ 12413423
 - ◆ 12615625
 - ◆ 12(10)19(10)29
 - ◆ 12817827
- * Concatenamos los 4 códigos eliminando las primeras 2 etiquetas que se repiten en todos los códigos
- * Obtenemos el código:

615625 817827 (10)19(10)29 413423

4 Pegando ciclos

En la *Figura 4.23* se puede observar la aplicación de este segundo algoritmo y mostrar que efectivamente genera a L_{4_4} como nervio.

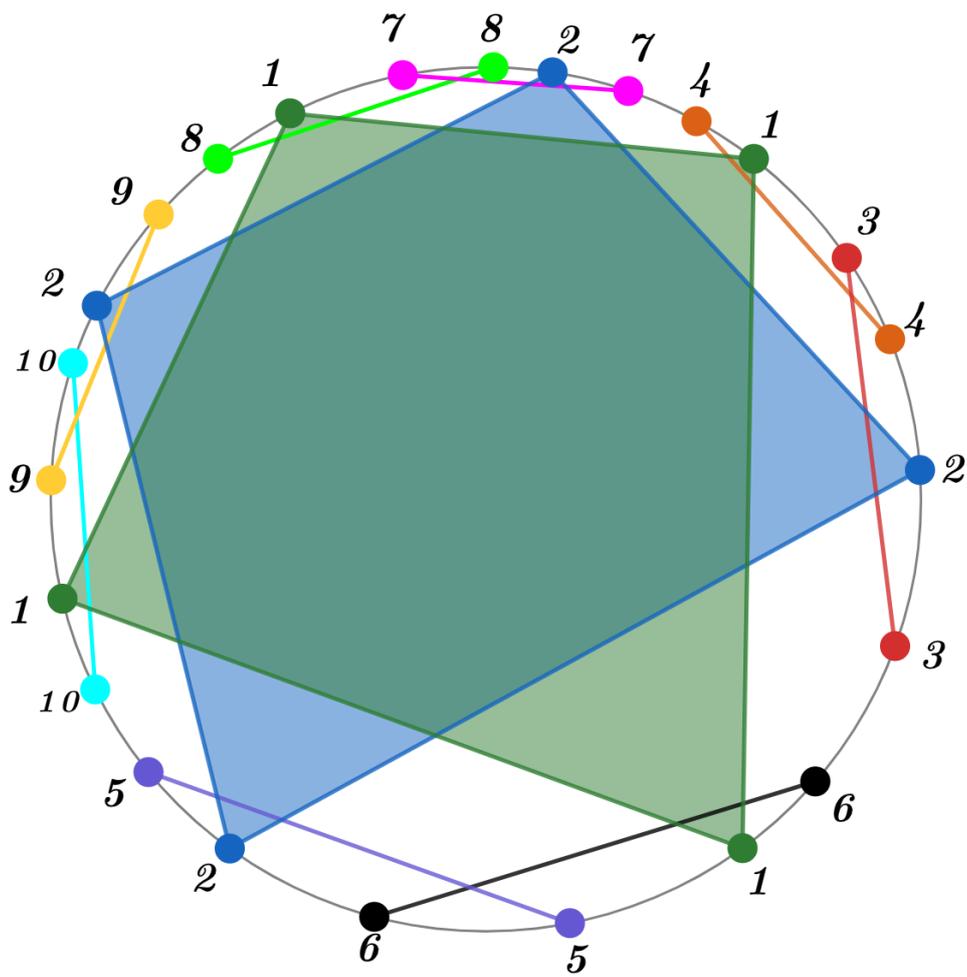


Figura 4.23: Cuatro "pedazos" donde generar 4-ciclos.

Si aplicamos el algoritmo conocido para el libro $L_{4_2,5_1}$ también logramos obtenerlo como nervio.

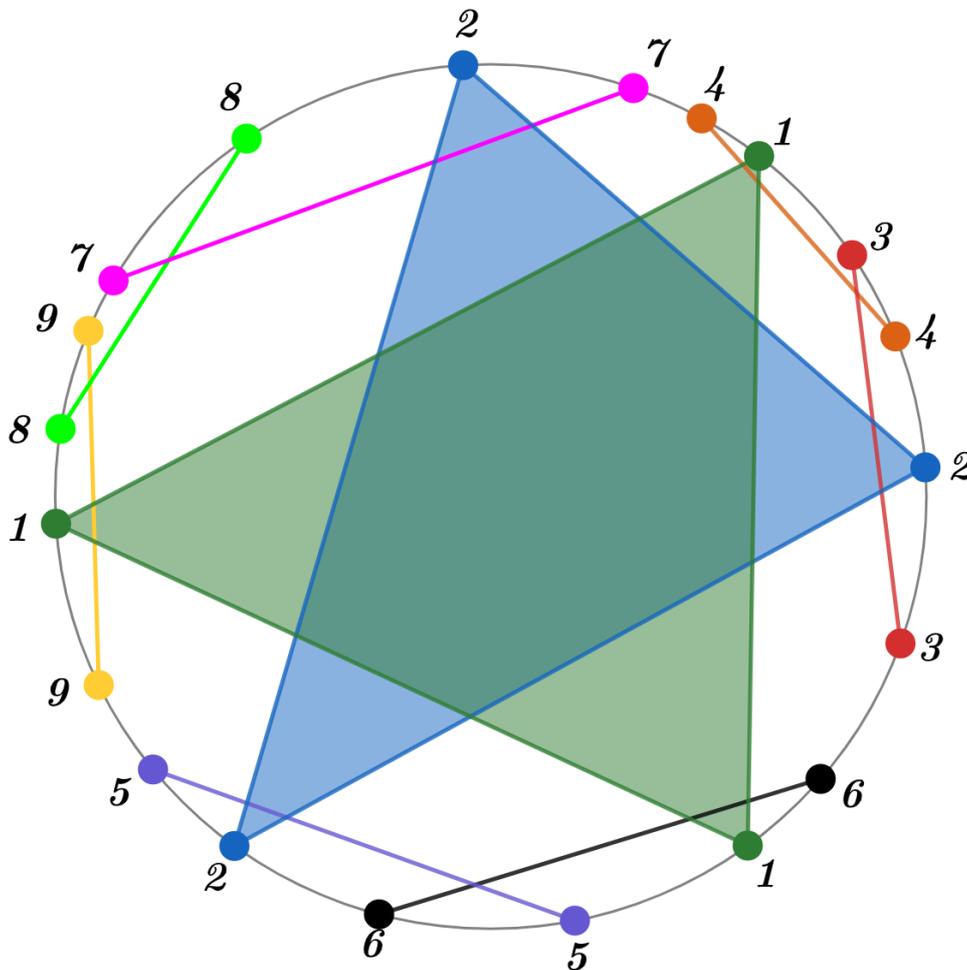


Figura 4.24: Generando el libro $L_{4_2,5_1}$.

Al igual que con las cadenas podríamos obtener un teorema como el siguiente:

Conjetura 4.2.3: Todo libro es realizable.

Para demostrar la realizabilidad de todos los libros se requieren checar algunas cosas, por ejemplo: refinar el *Lema del código* de la página 47 debido a que las intersecciones aquí se complican más, al no ser únicamente líneas rectas. También debemos dar un argumento de que dada cierta cantidad de puntos en posición convexa siempre podemos asegurar que se forman 2 polígonos que se intersectan (los cuales representarían el lomo del libro) y además debe demostrarse si el algoritmo dado tiene la cantidad de puntos óptima o podríamos generar libros con una menor cantidad de puntos. Sin embargo creemos que lo importante a resaltar en esta tesis no es la demostración de esta conjetura, sino los pasos y el algoritmo que nos llevaron a creer verdadera la conjetura, dejando como trabajo a futuro demostrar formalmente esta conjetura.

5 Planilandia

Después de haber mostrado que los ciclos podían generarse como nervios de particiones de puntos en posición convexa intentamos hacer lo mismo para las ruedas y si bien no pudimos lograrlo, tampoco logramos probar de manera sencilla que efectivamente no puedan generarse. Si nos quitamos encima los ciclos de 3 vértices entonces los pegados de ciclos y los libros resultaron que también podían generarse. Afortunadamente (o desafortunadamente) logramos encontrar un ejemplo sencillo de una gráfica; que no es ni un ciclo, ni una trayectoria, ni un pegado de ciclos y tampoco un libro y que no puede generarse sin importar cuántos puntos nos den. Además la gráfica tiene una propiedad muy interesante y es que es plana, en consecuencia tenemos que no todas las gráficas planas pueden generarse como nervio de particiones de puntos en posición convexa.

Teorema 5.1: La gráfica H de la *Figura 5.1* no puede generarse como nervio para ningún conjunto de puntos en posición convexa.

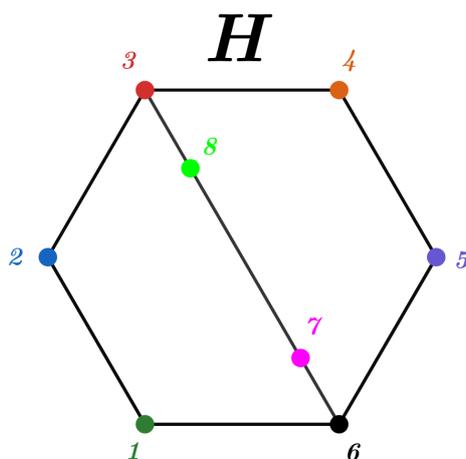


Figura 5.1: La gráfica H no puede generarse como nervio.

Demostración:

Sabemos que para obtener un 6-ciclo utilizamos el código 162132435465, por lo que de principio nuestro conjunto S debe tener al menos 12 puntos con esas etiquetas.

La primera observación que debemos hacer es que, podríamos intentar obtener a la gráfica H con la menor cantidad posible de puntos, es decir 16. Sin embargo, no hay nada que nos asegure que eso puede ser posible, entonces quizá hay muchísimos más puntos. Así supóngase que $|S| \geq 16$.

Nos vamos a fijar primero en 12 puntos del conjunto S que formen un 6-ciclo.

5 Planilandia

Observamos entonces que los puntos restantes de S obtienen prohibiciones para sus etiquetas. Para comprender mejor esta idea obsérvese la *Figura 5.2*.

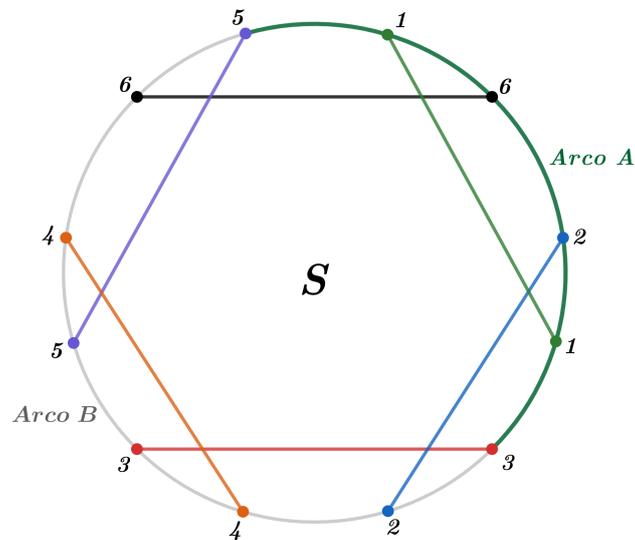


Figura 5.2: En el Arco A podría haber puntos etiquetados con 1.

En la *Figura 5.2* podemos apreciar que los puntos restantes de S que se encontraran en el Arco B NO podrían tener etiqueta 1, porque generarían intersecciones con los otros convexos además del convexo 2 y el convexo 6. Esta idea aplica para todas las demás etiquetas.

Otra cosa que podemos notar es que los puntos restantes de S que respeten las prohibiciones anteriores pueden etiquetarse con diferentes etiquetas, por ejemplo véase la figura:

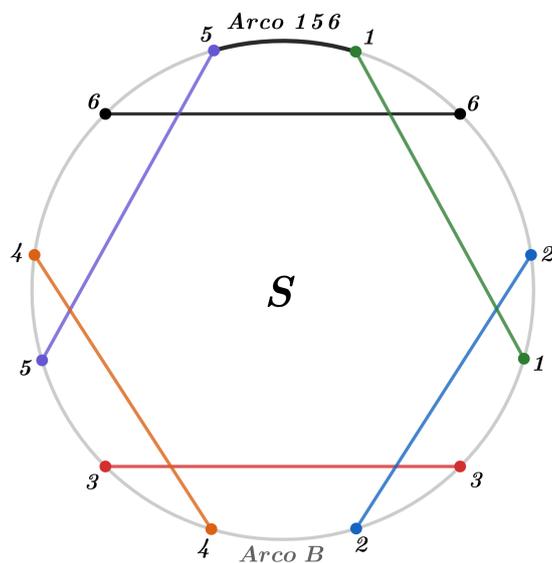


Figura 5.3: En el Arco 156 podría haber puntos etiquetados con 1, con 5 o con 6.

En la *Figura 5.3* se muestra que los puntos restantes de S que estén en el Arco 156 podrían etiquetarse con la etiqueta 6 y las intersecciones se mantienen.

También podrían etiquetarse puntos con la etiqueta 5 siempre y cuando el código general no tenga como

subcódigo la estructura 515 pues se intersectarían el convexo generado por la etiqueta 1 y el convexo generado por la etiqueta 5 y romperíamos el 6-ciclo como nervio generado.

Análogamente podrían etiquetarse puntos con la etiqueta 1 siempre y cuando el código general no tenga como subcódigo la estructura 151.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que dados los 12 puntos que tomamos del conjunto S nos generan hiperplanos H_1, \dots, H_6 tales que cada hiperplano H_i deja completamente contenido de un lado H_i^+ al convexo generado por las etiquetas i para cada $i = 1, \dots, 6$. Esto es posible ya que si no sucediera, entonces de los 12 puntos tomados originalmente simplemente vamos reemplazando un punto contenido en H_i^+ con etiqueta i por un punto contenido en H_i^- con etiqueta i .

Para apreciar esta idea de forma sencilla observemos las Figuras 5.4 y 5.5.

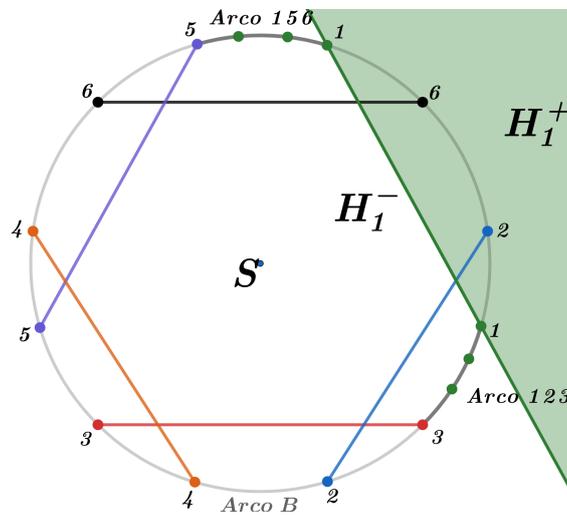


Figura 5.4: Generando el hiperplano H_1 con los 12 puntos originales dados.

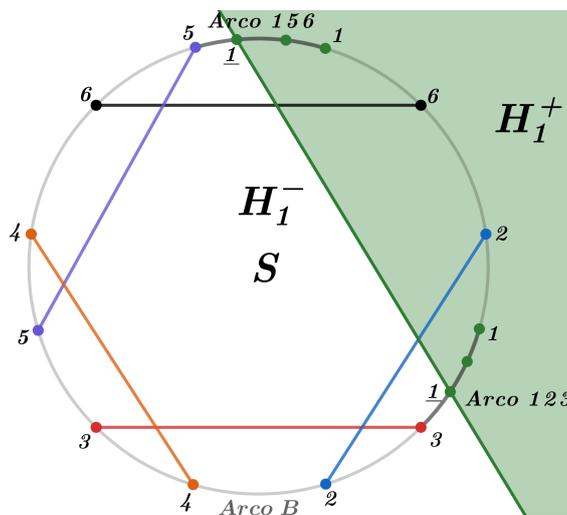


Figura 5.5: Si en el semiespacio H_1^+ no quedan todos los puntos de S con etiqueta 1 entonces podemos reemplazar algunos de los 12 puntos tomados originalmente.

5 Planilandia

Esto implica que en el Arco 156 únicamente podrían existir (de momento) puntos con etiqueta 6.

Así los puntos restantes de S quedan contenidos en los arcos que será mejor apreciarlos en la *Figura 5.6*.

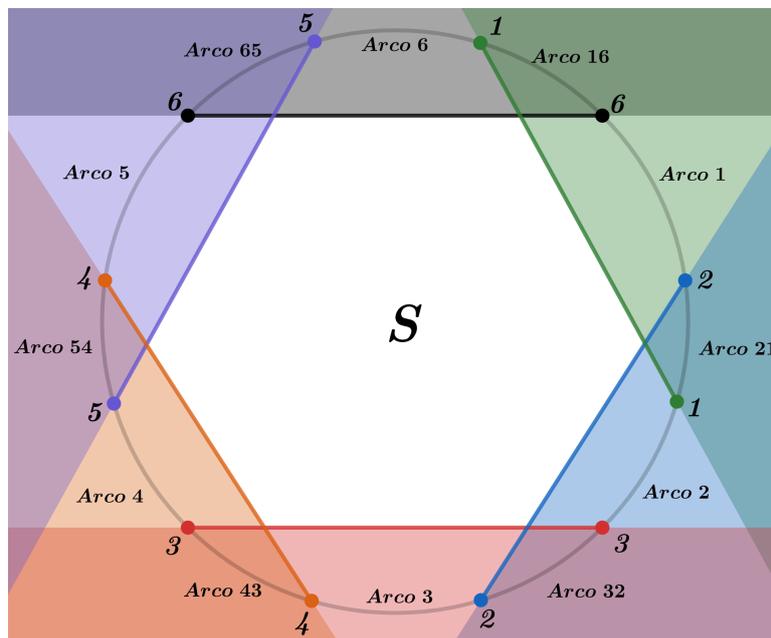


Figura 5.6: El Arco 156 en realidad sólo puede tener puntos con etiqueta 6, por lo tanto por comodidad lo llamaremos simplemente Arco 6.

Entonces los puntos que estén sobre un Arco i con $i \in \{1, \dots, 6\}$ sólo podrían tener etiqueta i .

Los puntos que estén sobre un Arco kl con $k \neq l \in \{1, \dots, 6\}$ sólo podrían tener etiqueta k o etiqueta l .

Ya que tenemos bien delimitado cómo están formados los convexos por las etiquetas 1, 2, 3, 4, 5 y 6 intentemos generar el nervio H .

Sabemos que de los puntos de S forzosamente necesitamos al menos dos de ellos con etiqueta 7 y dos de ellos con etiqueta 8.

Esto se debe a que como el conjunto de puntos S está en posición convexa entonces forzosamente se necesitan dos puntos con etiqueta 7 para intersectar al convexo generado por las etiquetas 6.

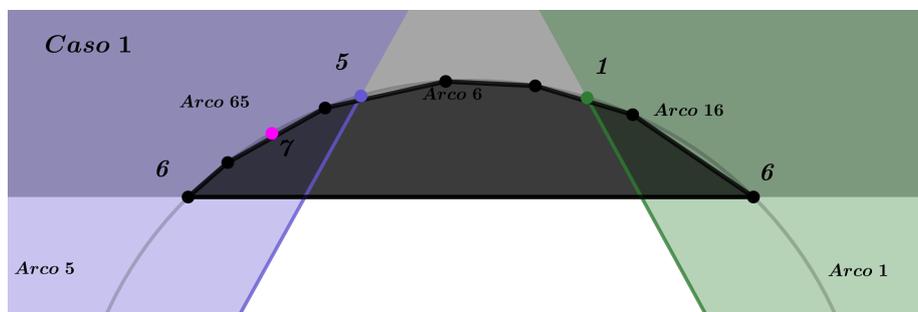


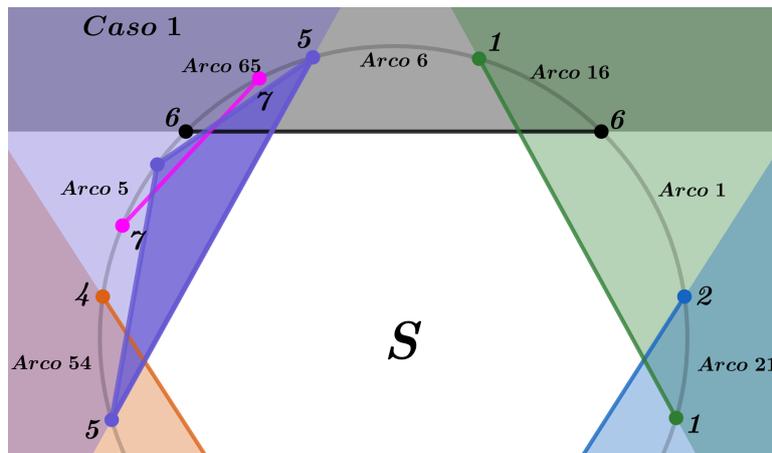
Figura 5.7: Necesitamos que al menos dos puntos de S tengan etiqueta 7.

Además sabemos que la gráfica H tiene a la arista 67 y para lograr intersectar los convexos generados por las etiquetas 6 y 7 tiene que suceder alguno de los siguientes casos:

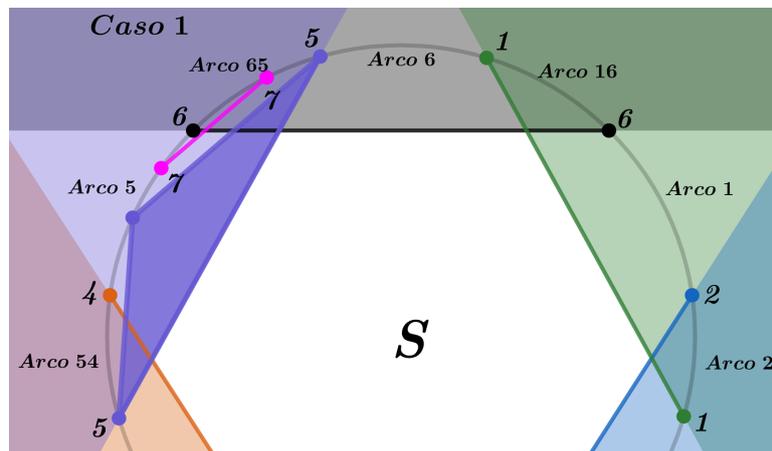
* Caso 1: Un punto del arco 65 debe tener etiqueta 7.

- ◆ Otro punto con etiqueta 7 puede estar también en el arco 65 siempre que el convexo generado por las etiquetas 7 intersecte al convexo generado por las etiquetas 6.
- ◆ O bien otro punto con etiqueta 7 puede estar en el Arco 5 siempre que el convexo generado por las etiquetas 7 intersecte al convexo generado por las etiquetas 6 y al mismo tiempo NO intersecte al convexo generado por las etiquetas 5.

Obsérvese que ambos subcasos no son exclusivos, podrían suceder ambos al mismo tiempo. Pues no necesariamente debe haber sólo 2 puntos con etiqueta 7, podría haber muchos.



(a) Si bien necesitamos dos puntos con etiqueta 7, no podemos etiquetarlos tan arbitrariamente porque podríamos generar intersecciones que no queremos.



(b) Si ponemos las etiquetas correctamente obtenemos la intersección entre el convexo 7 y el convexo 6 sin generar nuevas intersecciones.

Figura 5.8: Un ejemplo gráfico del Caso 1.

* Caso 2: Dos puntos del Arco 6 se pueden etiquetar con 7 siempre y cuando intersecte al convexo generado por las etiquetas 6.

* Caso 3: Análogamente al Caso 1, un punto del Arco 16 debe tener etiqueta 7.

5 Planilandia

- ◆ Otro punto con etiqueta 7 puede estar en el Arco 16.
- ◆ O bien otro punto con etiqueta 7 puede estar en el Arco 1.

Pero obsérvese que independientemente de cuál caso sea los puntos con etiqueta 7 sólo pueden aparecer en los Arcos: 5, 65, 6, 16 y 1. De lo contrario el convexo generado por la etiqueta 7 intersectaría a otros convexos además del convexo generado por la etiqueta 6.

Utilizando un razonamiento análogo, para generar la arista 38 podemos observar que los puntos con etiqueta 8 sólo pueden aparecer en los Arcos: 2, 32, 3, 43, 4 y 54. De lo contrario el convexo generado por la etiqueta 8 intersectaría a otros convexos además del convexo generado por la etiqueta 3.

Así notamos que no existe ningún Arco donde puedan existir puntos con etiqueta 7 y 8 simultáneamente, por lo que la arista 78 no podría ser generada.



Como curiosidad cabe mencionar que no logramos encontrar una gráfica plana más pequeña, en el sentido de que tuviera una menor cantidad de vértices, que no pudiera generarse como nervio de una partición de puntos, por lo que la siguiente pregunta permanece abierta:

Pregunta 5.2: ¿Será H la gráfica plana más pequeña que no es 2-Tverberg Convexa?

6 Trabajo a futuro

En este capítulo se muestran los puntos que quedan pendientes en esta tesis que pueden ser motivo de trabajo a futuro:

- * Como se mencionó en el capítulo 3, un problema interesante es tratar de mostrar si las ruedas NO son realizables o de lo contrario encontrar una manera de generarlas con conjuntos de puntos en posición convexa.
- * Encontrar otras familias de gráficas que puedan realizarse, por ejemplo: ¿todas las gráficas bipartitas son realizables?
- * Encontrar alguna caracterización para las gráficas que sí pueden realizarse o cuáles son gráficas prohibidas.
- * Demostrar formalmente que toda m -cadena y toda m -cadenita son realizables y obtener una fórmula que nos de la cantidad de puntos mínimos necesarios para generarlas.
- * Probar si la cantidad de puntos dada por el algoritmo para generar libros es la mínima cantidad de puntos necesaria para generarlos.
- * Demostrar formalmente que todo libro es realizable.
- * Extender los nervios generados en posición convexa a posición general.
- * Trabajar con complejos simpliciales k -Tverberg Convexos con $k \geq 3$.
- * Trabajar en la pregunta 5.2: ¿Será H la gráfica plana más pequeña que no es 2-Tverberg Convexa?
- * Generar una aplicación o software que permita producir nervios específicos con puntos en posición convexa, por ejemplo que nos de una 7-cadena específica.

Bibliografía

- [AAK02] Aichholzer, O., Aurenhammer, F., & Krasser, H. (2002). Enumerating order types for small point sets with applications. *Order*, 19(3), 265-281.
- [AK01] Aichholzer, O., & Krasser, H. (2001). The point set order type data base: A collection of applications and results. In *CCCG* (Vol. 1, pp. 17-20).
- [Bir59] Birch, B. J. (1959). On $3N$ points in a plane. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 55, No. 4, pp. 289-293). Cambridge University Press.
- [BM76] Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications* (Vol. 290). London: Macmillan.
- [BS18] Bárány, I., & Soberón, P. (2018). Tverberg's theorem is 50 years old: a survey. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55(4), 459-492.
- [CLZ16] Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2016). *Graphs & digraphs* (Vol. 39). CRC press.
- [DHOY20] De Loera, J. A., Hogan, T. A., Oliveros, D., Yang, D. Tverberg-type Theorems with Altered Intersection Patterns (Nerves). *Discrete Math.* Por aparecer, 2020.
- [Die05] Diestel, R. (2005). Graph theory 3rd ed. *Graduate texts in mathematics*, 173.
- [Epp18] Eppstein, D. (2018). *Forbidden configurations in discrete geometry*. Cambridge University Press.
- [ES35] Erdős, P., & Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry. *Compositio mathematica*, 2, 463-470.
- [Koz08] Kozlov, D. (2008). *Combinatorial algebraic topology* (Vol. 21). Springer Science & Business Media.
- [Kur30] Kuratowski, C. (1930). Sur le probleme des courbes gauches en topologie. *Fundamenta mathematicae*, 15(1), 271-283.
- [Lay07] Lay, S. R. (2007). *Convex sets and their applications*. Courier Corporation.
- [Lon13] De Longueville, M. (2013). *A course in topological combinatorics*. Springer Science & Business Media.
- [LL16] Leonard, I. E., & Lewis, J. E. (2016). *Geometry of convex sets*. John Wiley & Sons.
- [Mat02] Matoušek, J. (2002). *Lectures on discrete geometry* (Vol. 212). Springer Science & Business Media.

Bibliografía

- [Mat08] Matoušek, J., et al. (2008). *Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry*. Springer Science & Business Media.
- [Mer19] Merinos, D. (2019). *Anti-thickness geométrico de gráficas completas con hasta diez vertices*. (Tesis de maestría, CINVESTAV, México).
- [MMO19] Martini, H., Montejano, L., Oliveros, D. (2019). *Bodies of Constant Width, An Introduction to Convex Geometry with Applications*. Birkhäuser .
- [Rad21] Radon, J. (1921). Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. *Mathematische Annalen*, 83(1-2), 113-115.
- [Sar92] Sarkaria, K. S. (1992). Tverberg's theorem via number fields. *Israel J. Math*, 79(2-3), 317-320.
- [Sie79] Sierksma, G. (1979). Convexity without linearity; the Dutch cheese problem. *Mimeographed notes*.
- [Sol15] Soltan, V. (2015). *Lectures on convex sets* (Vol. 986). Hackensack, NJ: World Scientific.
- [Tve66] Tverberg, H. (1966). A generalization of Radon's theorem. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1), 123-128.
- [Whi17] White, M. J. (2017). On Tverberg partitions. *Israel Journal of Mathematics*, 219(2), 549-553.
- [ZV92] Živaljević, R. T., & Vrećica, S. T. (1992). The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 61(2), 309-318.