



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

INSTITUTO DE FÍSICA, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**FAMILIAS DE SOLUCIONES MULTIPOLARES ELECTRODINÁMICAS
PARA CORRIENTES CONFINADAS ARMÓNICAMENTE EN
SUPERFICIES TOROIDALES.**

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JOSÉ HUMBERTO TORRES BUSTAMANTE

TUTOR PRINCIPAL:

DR. EUGENIO LEY KOO (IF-UNAM)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. REMIGIO CABRERA TRUJILLO (ICF-UNAM)

DR. EDUARDO NAHMAD ACHAR (ICN-UNAM)

Ciudad de México, Junio de 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a mis Padres y a mi Hermana.

Agradecimientos

Este es el producto de un esfuerzo compartido con el Dr. Eugenio ley Koo, a lo largo de más de 4 años. Un agradecimiento enorme, Eugenio, por las sesiones de trabajo, los consejos y anécdotas invaluable; pero, sobre todo, por el privilegio de tu amistad.

Para Arizbé Córdova, mi pilar fundamental a lo largo de la maestría. Gracias por mostrarme con tu ejemplo a jamás poner menos que el máximo esfuerzo.

Un agradecimiento para los colegas y amigos del posgrado: Sheila, Luis, Enrique, Miguel, Omar, Rodrigo, Alejandro y todes con quienes tuve el honor de compartir clases. Gracias por hacer más ameno el proceso, y por todo lo que aprendí de ustedes.

Finalmente, a mi familia un agradecimiento que no basta para todo el amor que me dan. En nuestra dinámica particular, me han dado la serenidad y fuerza para seguir adelante.

Resumen

La existencia de los momentos toroidales es un tema debatido en el contexto de la completez del desarrollo multipolar electromagnético, a pesar de las observaciones de excitaciones dipolares toroidales en nano y metamateriales con geometrías de toroides, así como de la existencia del fenómeno de ferrotoroidicidad en la materia. En este trabajo se construyen fuentes armónicas de momentos eléctricos, magnéticos y toroidales, distribuidas en la superficie de un toroide cilíndrico a partir de un potencial de Debye común. Se obtienen expresiones exactas para los campos electromagnéticos y se presentan sus líneas de campo en todo el espacio para modos de cavidad resonante y de antena de eficiencia óptima. Las diferencias y conexiones entre los campos de los tres momentos, especialmente en la región cercana a las fuentes, permiten identificar que los momentos toroidales forman la tercer familia independiente de fuentes y excitaciones electromagnéticas.

En el Capítulo 2 se presentan las bases de la teoría electromagnética para fuentes armónicas distribuidas en la superficie de un toroide, incluyendo las soluciones de la ecuación de Helmholtz escalar con condiciones de frontera de Dirichlet ó de Neumann en dicha superficie. Además, se presentan las funciones de Green de onda saliente construidas como una superposición de estas soluciones, incorporando tanto las condiciones de frontera sobre el toroide como la condición de radiación al infinito. En el Capítulo 3, se desarrolla el método de Debye adaptado para obtener fuentes de momentos eléctricos, magnéticos y toroidales, sucesivamente, a través de operadores de vectorización aplicados a un potencial de Debye común, el cual es una solución escalar a la ec. de Helmholtz como las encontradas en el capítulo anterior. El Capítulo 4 contiene los campos electromagnéticos de las fuentes de los tres momentos, obtenidos vía la integración de las fuentes con la función de Green de onda saliente. Se encuentran expresiones exactas y analíticas para las líneas de los campos poloidales para cada momento, que servirán de base para los resultados ilustrativos del Capítulo 5. En este capítulo se presentan gráficas de las líneas de los campos poloidales para los modos más bajos de cavidades resonantes y antenas de eficiencia óptima, mostrando sus conexiones y diferencias, con énfasis en la región cercana a las fuentes. En el Capítulo 6 presentamos un resumen de los resultados, concluyendo la existencia de los momentos toroidales como una tercera familia de excitaciones multipolares.

Abstract

The existence of toroidal moments has been a controverted subject on the context of the completeness of the electromagnetic multipole expansion, despite the recent observation of dipole toroidal response of nano and meta materials with toroidal geometry, as well as the existence of ferrotoroidic materials. In this contribution, time-harmonic electromagnetic sources for electric, magnetic and toroidal moments are constructed by means of a common Debye Potential and distributed on the surface of a cylindrical toroid. We obtain exact and complete solutions for the electromagnetic fields for every point in space, presenting its field lines for the lowest modes of resonant cavity and optimum-efficiency antennas. The differences and connections between the field of these three moments, especially on the near region, allow us to identify that the toroidal moments form an independent family of electromagnetic sources and excitations.

In Chapter 2 we present the foundations of electromagnetic theory for sources harmonically distributed on the surface of a toroid, including the solutions of the scalar Helmholtz equation with Dirichlet or Neumann boundary conditions defined on said surface. The outgoing-wave Green functions are also constructed as a superposition of these solutions, satisfying both the boundary conditions and the radiation condition at infinity. In Chapter 3 we use the Debye method adapted for obtaining sources of electric, magnetic and toroidal moments, successively, by means of vectorization operators acting on a common scalar Debye potential, which is a solution for the Helmholtz equation like those found on the previous chapter. In turn, Chapter 4 contains the electromagnetic field expressions for the sources of the three moments, obtained via the integration of the sources with its corresponding outgoing-wave Green function. Exact and analytical expressions for the poloidal field lines for the first modes of resonant cavities and optimum efficiency antennas are found, exhibiting its differences and connections specially in the region near the location of the sources. In Chapter 6 we present an overview of the results, concluding the existence of toroidal moments as the third independent family of multipolar excitations.

Índice general

Resumen	v
Abstract	vi
1. Introducción	1
2. Electrodinámica con Fuentes Superficiales en Toroides	4
2.1. Ecuaciones de Maxwell y Ecuación de Onda	4
2.2. Soluciones para Fuentes Confinadas en Superficies Toroidales Cilíndricas	7
2.2.1. Condiciones de Frontera de Dirichlet	9
2.2.2. Condiciones de Frontera de Neumann	12
2.3. Funciones de Green para Fronteras Toroidales Cilíndricas	14
3. Densidades de Carga y Corriente para Momentos: Magnéticos, Eléctricos y Toroidales	19
3.1. Potenciales de Debye	19
3.1.1. Fuentes de Momentos Eléctricos	21
3.1.2. Fuentes de Momentos Magnéticos	22
3.1.3. Fuentes de Momentos Toroidales	22
4. Campos Electromagnéticos por Integración de las Fuentes con la Función de Green	24
4.1. Líneas de campo	27
5. Líneas de Campo para Antenas y Cavidades de Resonancia	30
5.1. Momentos Magnéticos	33
5.1.1. Cavidades de Resonancia	33
5.1.2. Antenas de Radiación Óptima	33
5.2. Momentos Eléctricos	37
5.2.1. Cavidades de Resonancia	37

5.2.2. Antenas de Radiación Óptima	37
5.3. Momentos Toroidales	42
5.3.1. Cavidades de Resonancia	42
5.3.2. Antenas de Radiación Óptima	42
5.4. Discusión comparativa	46
6. Conclusiones	48
Bibliografía	52

Índice de figuras

1.1. Paridad de los momentos dipolares eléctrico \mathbf{p} , magnético \mathbf{m} y Toroidal \mathbf{t} ante las transformaciones de simetría de Paridad , Conjugación de Carga e Inversión Temporal . Figuras reproducidas de Phys. Rev. B 89, 205112 [1].	2
2.1. Superficie de Frontera representado en el espacio. El sistema de Coordenadas se dispone de tal forma que el plano $z = 0$ corta al toroide por la mitad.	10
5.1. Determinante $\Delta_\rho(k_\rho)$ de la condición de frontera de Dirichlet en la superficie del toroide, Ec. (2.17). Se calculan las primeras raíces $k_{\rho,n_\rho} = 1.112, 2.134, 3.170, 4.21, 5.253, 6.298$, en unidades de a^{-1}	31
5.2. Determinante $\Delta_\rho(k_\rho)$ de condición de frontera de Neumann, Ec. (2.22) con $m = 1$. Las primeras raíces son $k_{\rho,s_\rho} = 0.411, 1.251, 2.202, 3.213, 4.242, 5.278$ en unidades de a^{-1}	32
5.3. Determinante $\Delta_\rho(k_\rho)$ para la condición de frontera de Neumann para $k_\rho \rho R_1$, Ec. (2.27). Las primeras soluciones son $k_{\rho,n_\rho} = 2.081, 3.132, 4.152, 5.23$, en unidades de a^{-1}	32
5.4. Líneas de \mathbf{B}^{Mp} para modos de cavidad de momentos magnéticos. Las etiquetas (n_z, n_ρ) corresponden a los valores de (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 1.112/a)$, (b) $(\pi/h, 2.134/a)$, and (c) $(2\pi/h, 1.112/a)$	34
5.5. Funciones radiales $R_1(k_\rho \rho)$, soluciones de la ecuación de Helmholtz con condiciones de Frontera de Neumann, (2.22), así como sus extrapolaciones hacia afuera del toroide, en las regiones interior $\rho \in [0, a]$ y exterior $\rho \in [0, \infty]$. Se muestran los primeros dos multipolos (a) $k_{\rho,1} = 0.411/a$, (b) $k_{\rho,2} = 1.251/a$	35
5.6. Líneas de \mathbf{B}^{Mp} para antenas de radiación óptima de momentos magnéticos. Los modos (s_z, s_ρ) corresponden a los valores (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 0.411/a)$, (b) $(2\pi/h, 0.411/a)$, and (c) $(2\pi/h, 1.251/a)$	36

5.7. Líneas poloidales de \mathbf{E}^{El} y \mathbf{E}^{Ep} para los modos más bajos de cavidades resonantes de momentos eléctricos. Estos modos (n_z, n_ρ) corresponden a los valores (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 2.081/a)$, (b) $(2\pi/h, 2.081/a)$, (c) $(\pi/h, 3.132/a)$ y (d) $(2\pi/h, 3.132/a)$ 39

5.8. Gráfica de $k_\rho \rho R_1$, soluciones de la ecuación de Helmholtz con condiciones de Frontera dadas por la Ec. (2.17), así como sus extrapolaciones al exterior del toroide, para los multipolos: (a) $k_{\rho,1} = 1.112/a$, (b) $k_{\rho,2} = 2.134/a$. Su valor en cada posición ρ determina la dependencia radial del campo eléctrico en la Figura 5.9: sus raíces corresponden a las separatrices de las líneas, mientras que los extremos indican las regiones de amplitud máxima del campo. 40

5.9. Líneas de \mathbf{E}^{El} y \mathbf{E}^{Ep} para antenas de radiación óptima de momentos eléctricos. Los modos (s_z, s_ρ) corresponden a valores (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 1.112/a)$, (b) $(2\pi/h, 1.112/a)$, and (c) $(2\pi/h, 2.134/a)$ 41

5.10. Líneas de \mathbf{E}^{Tp} para cavidades resonantes de momentos toroidales. Modos de cavidad (n_z, n_ρ) corresponden a (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 1.024/a)$, (b) $(2\pi/h, 1.024/a)$, (c) $(\pi/h, 2.081/a)$ y (d) $(2\pi/h, 2.081/a)$ 43

5.11. Gráfica de $k_\rho \rho R_1$, soluciones radiales a la ecuación de Helmholtz que satisfacen las condiciones de Frontera dadas por la Ec. (2.17), así como sus extrapolaciones que determinan la dependencia radial del campo \mathbf{E}^{Tp} en la Figura 5.12: las raíces determinan las separatrices de las líneas, mientras que los puntos extremos indican las regiones de máxima amplitud. 44

5.12. Líneas de \mathbf{E}^{Tp} para antenas de radiación óptima de momentos toroidales. Modos de antena (s_z, s_ρ) corresponden a los valores (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 1.112/a)$, (b) $(2\pi/h, 1.112/a)$, y (c) $(2\pi/h, 2.134/a)$ 45

Capítulo 1

Introducción

El estudio de las propiedades electromagnéticas de la materia tiene como base al desarrollo multipolar de las fuentes de radiación electromagnética y los campos que producen. El principio de superposición permite entender un fenómeno electromagnético en términos de momentos multipolares, interacciones producidas por fuentes cuyas propiedades de simetría, dependencia espacial del campo producido, espectro de radiación electromagnética, entre otros, nos permiten caracterizarlos de forma completa en distintas familias. Históricamente, las más estudiadas han sido las familias de momentos eléctricos y momentos magnéticos, conformadas por distribuciones oscilantes de cargas puntuales y por arreglos de espiras con corriente alterna, respectivamente.

Sin embargo, interacciones nuevas en meta y nano materiales han revelado la existencia de una tercera familia de *momentos toroidales*, cuyas fuentes están conformadas por distribuciones de corrientes poloidales distribuidas en la superficie de un toroide. Los correspondientes fuentes multipolares toroidales se diferencian de las dos familias usuales por sus propiedades de simetría: **C** conjugación de Carga, de paridad **P**, y de inversión temporal **T** (véase Figura 1.1). La primera propuesta de una interacción asociada a momentos toroidales [2] ocurrió en conexión con la violación de paridad encontrada en experimentos de decaimientos β nucleares, recibiendo el nombre de momento anapolar por ser una interacción no radiativa, la cual consiste en el momento de los momentos magnéticos presentes en un arreglo de espiras meridianas con corriente estacionaria, distribuidas alrededor de un toroide.

La extensión natural del anapolo estático es el dipolo toroidal dinámico, sustituyendo las corrientes estacionarias en el toroide por corrientes alternas [3, 4], y constituye el multipolo toroidal de orden menor. Al incluir a los momentos toroidales en el desarrollo multipolar de fuentes electromagnéticas, se ha encontrado que la potencia radiada por fuentes dipolares toroidales es proporcional a ω^6 , en contraste con la dependencia en ω^4


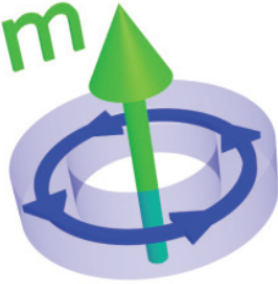
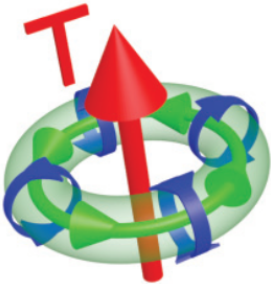
			
P	-	+	-
C	-	-	+
T	+	-	-

Figura 1.1: Paridad de los momentos dipolares eléctrico \mathbf{p} , magnético \mathbf{m} y Toroidal \mathbf{t} ante las transformaciones de simetría de **Paridad**, **Conjugación de Carga** e **Inversión Temporal**. Figuras reproducidas de *Phys. Rev. B* 89, 205112 [1].

de los momentos dipolares eléctricos y magnéticos [5, 6]. Además, el perfil espacial de radiación de un dipolo toroidal coincide con el de un dipolo eléctrico dinámico [6, 7], lo cual presenta una dificultad para observar excitaciones de momentos dipolares toroidales aislados de otras excitaciones dominantes, especialmente de tipo eléctrico.

La primera observación de una excitación toroidal se dió al medir la radiación inducida por un metamaterial construido ex profeso para suprimir otras contribuciones dipolares, formado por un arreglo periódico de cuasiespiras metálicas aproximando un toroide, que tienen al centro como punto de inversión, y sobre el cual se inducen corrientes alternas por acción de un campo externo polarizado linealmente [8, 9]. La geometría de cada celda unitaria asegura que el sistema tiene las propiedades de simetría adecuadas para favorecer una excitación dipolar toroidal dominante, acompañada de excitaciones cuadrupolares magnéticas y eléctricas, según la polarización del campo externo. Recientemente, se ha estudiado la conexión del momento dipolar toroidal en fenómenos de actividad óptica en moléculas y meta-moléculas [10, 11]; así como de transparencia electromagnética no-trivialmente inducida [12–15], a partir de la interferencia destructiva con el espectro de radiación de un dipolo toroidal con un dipolo eléctrico. Además, se han observado

excitaciones dipolares toroidales en nano estructuras metálicas inducidas por el campo electromagnético de un haz de electrones incidente [16].

Sumado a la existencia de momentos toroidales, se descubrió la presencia de dominios ferrotoroidales en una muestra de $LiCoPO_4$ [17]. La propiedad de *Toroidización*, o densidad de dipolos toroidales, en la materia ha despertado el interés de estudiar cómo la violación conjunta de las simetrías \mathbf{P} y \mathbf{T} en estos materiales favorece que se presente el efecto Magnetoeléctrico [18], además del papel que juega en la presencia de texturas de spines, llamados *skyrmiones*, en diversos materiales topológicos. Además, los skyrmiones son los responsables del efecto Spin-Hall Magnético en materiales antiferromagnéticos [19, 20], además de que su manipulación constituye la base para desarrollar aplicaciones en spintrónica [21].

A pesar de tantas manifestaciones de la existencia de los momentos toroidales como una tercera familia de interacciones multipolares electromagnéticas, se ha debatido que los momentos toroidales no son independientes de las otras dos familias, ya que en el espacio libre de fuentes su espectro de radiación es el mismo que el de los momentos eléctricos [22]. De aquí la importancia de exhibir el papel de las fuentes en la presencia de momentos Toroidales de las tres familias, así como las diferencias de los campos producidos en todo el espacio, conectando la región de radiación con la cercana a las fuentes, donde se pueden determinar las diferencias que caractericen a los momentos toroidales de manera clara.

En el presente trabajo se construyen fuentes armónicamente distribuidas en la superficie de un toroide rectangular, de los tres tipos de momentos: Eléctricos, Magnéticos y Toroidales; tomando como base al formalismo de Debye [23]. Estas fuentes constituyen la contraparte a fuentes dipolares eléctricas y magnéticas distribuidas en la superficie de una esfera [24], con la geometría de toroides cilíndricos que sustenta la existencia de fuentes de momentos toroidales. Se obtienen expresiones exactas para los campos adentro y afuera del toroide de fuentes, permitiendo reconocer que los momentos Toroidales constituyen una tercera familia independiente, a través de las diferencias y conexiones entre los campos producidos para las fuentes de cada momento, para el caso de cavidades de resonancia toroidales y antenas de eficiencia óptima.

Capítulo 2

Electrodinámica con Fuentes Superficiales en Toroides

2.1. Ecuaciones de Maxwell y Ecuación de Onda

Los fenómenos electromagnéticos de la materia y la luz están descritos a nivel macroscópico por las Ecuaciones de Maxwell. En ausencia de materia dieléctrica o con respuesta magnética, y en unidades Gaussianas, las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial son:

$$\text{(Ley de Gauss Eléctrica)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.1a)$$

$$\text{(Ausencia de Monopolos Magnéticos)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1b)$$

$$\text{(Ley de Faraday-Lenz)} \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1c)$$

$$\text{(Ley de Ampere-Maxwell)} \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.1d)$$

La Primera de ellas, la Ley de Gauss (2.1a), establece que la presencia de cargas eléctricas, con densidad volumétrica $\rho(\mathbf{r}, t)$, dan origen al campo de Intensidad Eléctrica $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$; además, el flujo de este campo \mathbf{E} a través de cualquier superficie cerrada en el espacio es proporcional a la carga total encerrada por esta. La segunda (2.1b), en cambio, nos dice que no existe una fuente de cargas magnéticas (monopolos) que sean fuente del campo de Inducción Magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$; por tanto, las líneas de este campo, son siempre cerradas.

La Ley de Faraday-Lenz (2.1c), por su parte, explica que el cambio en el tiempo del flujo del campo de inducción magnética en una superficie es fuente de circulación de campo

Eléctrico. Por último, la Ley de Ampere-Maxwell (2.1d) establece que las corrientes de carga, con densidad superficial $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, son fuentes de circulación de $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$; además, con la inclusión del segundo término del lado derecho, permite a este conjunto de ecuaciones ser consistentes con la *Ecuación de Continuidad*, que conecta a las fuentes de carga y corriente:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.2)$$

Para desvelar la naturaleza ondulatoria del campo electromagnético se deben desacoplar las ecuaciones para \mathbf{E} y \mathbf{B} . Para ello aplicamos el operador rotacional en (2.1c) y (2.1d), respectivamente, y usamos (2.1a) ó (2.1b) después de reconocer la siguiente identidad vectorial para el lado izquierdo:

$$\nabla \times \nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = (\nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2) \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Para el lado derecho se reconoce la independencia entre la derivada parcial de los campos respecto al tiempo con sus derivadas parciales respecto a las coordenadas, permitiendo aplicar la derivada temporal después del rotacional de cada campo, sustituyendo el valor del segundo según las Ecs. (2.1d) ó (2.1c). El resultado es que ambos campos satisfacen una *Ecuación de Onda* no homogénea con velocidad (en el vacío) constante c ; siendo las derivadas de distribuciones de carga y corriente sus correspondientes inhomogeneidades:

$$\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} -\nabla \rho(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \\ \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Para distribuciones de fuente con variación armónica en el tiempo a una frecuencia ω , los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} heredan la misma dependencia temporal:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \implies \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}. \quad (2.5)$$

Así, al realizar explícitamente las derivadas temporales en la ecuación (2.4), podemos obtener la ecuación diferencial que satisface la componente espacial de campos electromagnéticos con variación temporal armónica: la *Ecuación de Helmholtz*, nuevamente con -la parte espacial de- las derivadas de fuentes de carga y corriente como su inhomogeneidad:

$$\left\{ \nabla^2 + k^2 \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = -4\pi \begin{pmatrix} -\nabla\rho(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{c^2}\mathbf{J}(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{c}\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad k = \omega/c. \quad (2.6)$$

Para encontrar la solución a la Ec. (2.6) hacemos uso del método de las *Funciones de Green*[25]. Este método consiste en encontrar la solución a la ecuación diferencial en cuestión, en este caso la ecuación de Helmholtz, con una fuente asociada a una partícula puntual:

$$\left\{ \nabla^2 + k^2 \right\} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.7)$$

Donde $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la *función delta de Dirac* en tres dimensiones, la cual tiene las siguientes propiedades[26]:

1. $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ si $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$.
2. Para $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función continua (puntualmente en \mathbf{r}):

$$\int_V d^3r' \mathbf{F}(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{r}) & \text{si } \mathbf{r} \in V \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{r} \notin V \end{cases}. \quad (2.8)$$

Así, podemos verificar que una solución a la ecuación de Helmholtz no homogénea consiste simplemente en la integral en todo el espacio del producto de la inhomogeneidad con $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$; que para el caso particular de los campos electromagnéticos (2.6) será:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \left(-\nabla' \rho(\mathbf{r}') + \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right) \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \left(\frac{1}{c} \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right) \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d^3r' \left(\frac{1}{c} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \right) \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.10)$$

Donde ∇' indica que las derivadas parciales se realicen sobre las variables primadas \mathbf{r}' . Esto se verifica rápidamente si aplicamos el operador diferencial de la ecuación de Helmholtz, $\nabla^2 + k^2$, a la expresión del lado derecho. Dado que las derivadas sobre \mathbf{r} y sobre \mathbf{r}' son independientes entre sí, lo único que es derivado respecto a \mathbf{r} es la función de Green misma, la cual satisface (2.7) y por lo tanto, usando la propiedad 2 de la función delta de Dirac lo que nos queda es que el lado derecho satisface la misma ecuación diferencial, Ec. (2.6), que los campos electromagnéticos. Para la Ec. (2.10) por ejemplo:

$$\begin{aligned} \{\nabla^2 + k^2\} \int d^3r' \left(\frac{1}{c} \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right) \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -4\pi \int d^3r' \left(\frac{1}{c} \nabla' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -4\pi \left(\frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

y lo mismo ocurre para el lado derecho de la Ec. (2.9).

Ya establecida la importancia de encontrar dicha función de Green, repasemos las propiedades básicas que debe satisfacer $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$:

Propiedades de las Funciones de Green

1. **Simetría.** $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ como función de \mathbf{r} es continua en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ y viceversa. Además,

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}).$$

2. **Discontinuidad de su derivada.** Dada la superficie que define $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ en el espacio, la derivada direccional de $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ en dirección normal a esta superficie es discontinua en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. El valor de esta discontinuidad depende de la forma de la ecuación diferencial para la cual \mathcal{G} es solución[26].

Debemos remarcar que existen diferentes representaciones de la función de Green \mathcal{G} para una misma ecuación diferencial, ya que esta se encuentra de tal forma que satisfaga las Condiciones de Frontera específicas del problema a resolver. En la siguiente sección se presenta la construcción de las funciones de Green de onda saliente para las condiciones de Frontera que definen cavidades de resonancia y antenas de eficiencia óptima con geometrías Toroidales Cilíndricas; esta construcción se basa en la completez del conjunto de soluciones de la ecuación de Helmholtz homogénea en coordenadas polares cilíndricas, sujeta a condiciones de Frontera de tipo Dirichlet o Neumann, según sea el caso.

2.2. Soluciones para Fuentes Confinadas en Superficies Toroidales Cilíndricas

El sistema de coordenadas polares cilíndricas queda descrito en términos de la siguiente transformación de coordenadas:

$$\begin{array}{l|l|l} x = \rho \cos \varphi & & \\ y = \rho \sin \varphi & \mathbf{r} = \hat{\rho}\rho + \hat{z}z & h_\rho = 1, h_z = 1, h_\varphi = \rho \\ z = z & & \end{array}$$

Donde $h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1$ son los factores de escala de la transformación de coordenadas. Estos son importantes a la hora de identificar a los operadores de gradiente, divergencia y, en consecuencia, laplaciano; que para cualquier sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales se escriben como[27]:

$$\begin{aligned} \nabla \Psi &= \frac{1}{h_1} \hat{e}_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2} \hat{e}_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \frac{1}{h_3} \hat{e}_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3}, \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \mathbf{F}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 \mathbf{F}_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \mathbf{F}_3) \right), \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) \right).$$

Por lo cual la ecuación diferencial de Helmholtz homogénea en coordenadas cilíndricas es:

$$0 = \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right\} \Psi(\rho, z, \varphi). \quad (2.12)$$

Esta ecuación diferencial admite soluciones separables en estas coordenadas: $\Psi(\rho, z, \varphi) = R(\rho)Z(z)\Phi(\varphi)$, dando lugar al siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, primero para φ y z :

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi(\varphi) = -\mu^2 \Phi(\varphi) \quad (2.13a)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} Z(z) = -k_z^2 Z(z) \quad (2.13b)$$

Donde se reconoce la descomposición del vector de onda $\mathbf{k} = k_\rho \hat{\rho} + k_z \hat{z}$, con magnitud $k^2 = k_\rho^2 + k_z^2$. Para obtener soluciones físicamente aceptables, se impone la periodicidad en la variable azimutal: $\varphi + 2\pi = \varphi$; esto discretiza al dominio de la constante de separación $\mu = m \in \mathbb{Z}$ dando lugar a soluciones de la forma:

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m \in \mathbb{Z};$$

esto no ocurre para la variable axial z , cuyo dominio es la recta real y por ende ningún

par de valores z_0, z_1 distintos (aún para los mismos valores de ρ y φ) describen al mismo punto en el espacio. Las soluciones son por tanto:

$$Z(k_z z) = C(k_z) \cos k_z z + D(k_z) \sin k_z z, \quad k_z \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo las anteriores soluciones para las Ecuaciones (2.13a) y (2.13b) en (2.12) obtenemos una tercera ecuación diferencial ordinaria, ahora para ρ :

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) + \left(-\frac{m^2}{\rho^2} + k_\rho^2 \right) R(\rho).$$

Esta es la ecuación diferencial ordinaria de Bessel de segundo orden, salvo por un factor de ρ^{-2} , cuyas soluciones son las funciones de Bessel de primera y segunda especie $J_m(k_\rho \rho)$, $N_m(k_\rho \rho)$ respectivamente [28, Eq. 10.2.1]. La primera de ellas es regular en el origen, y absolutamente convergente en $\rho \rightarrow \infty$. Por el contrario, la segunda solución es divergente en $\rho = 0$ pero convergente en el límite $\rho \rightarrow \infty$. Así, para cada m la solución general puede escribirse como:

$$R_m(k_\rho \rho) = A(k_\rho) J_m(k_\rho \rho) + B(k_\rho) N_m(k_\rho \rho), \quad k_\rho \in \mathbb{R}.$$

Lo que nos queda es que la solución general de la ecuación de Helmholtz para coordenadas cilíndricas es una superposición de soluciones $\Psi_{m,\mathbf{k}}$ con etiquetas (m, k_ρ, k_z) , donde:

$$\Psi_{m,\mathbf{k}}(\rho, z, \varphi) = [A(k_\rho) J_m(k_\rho \rho) + B(k_\rho) N_m(k_\rho \rho)] [C(k_z) \cos k_z z + D(k_z) \sin k_z z] e^{im\varphi}. \quad (2.14)$$

Los coeficientes A, B, C, D se determinan por las condiciones de Frontera que se impongan. A continuación presentamos la construcción de soluciones para condiciones de Frontera de Tipo Dirichlet ó Neumann en la superficie de un Toroide cilíndrico; caracterizado por dos cilindros de radios interno a y externo b , y de altura h , como lo describe la Figura 2.1.

2.2.1. Condiciones de Frontera de Dirichlet

Las Condiciones de Frontera de Tipo Dirichlet (*CF-D*) requieren la anulación de la solución (2.14) en cada punto de la superficie del toroide. Dado que la parte azimutal no se anula, al menos no simultáneamente su parte real e imaginaria, buscamos anular las funciones radiales ó axiales en las caras cilíndricas ó en las tapas. Comenzando con la parte axial:

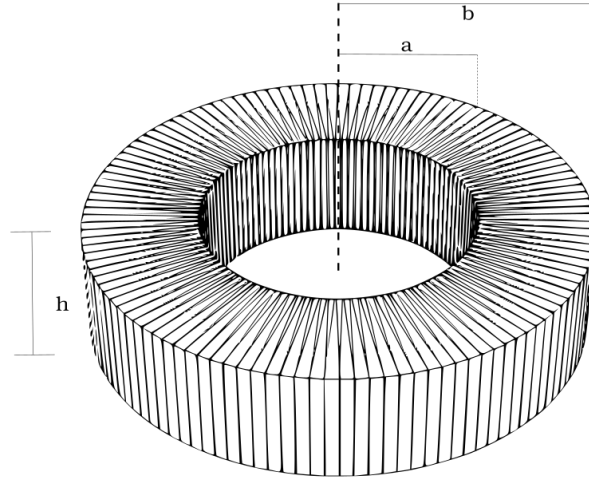


Figura 2.1: Superficie de Frontera representado en el espacio. El sistema de Coordenadas se dispone de tal forma que el plano $z = 0$ corta al toroide por la mitad.

$$0 = Z(k_z z) \Big|_{z=\pm h/2} \implies \begin{cases} 0 = C \cos(k_z \frac{h}{2}) + D \sin(k_z \frac{h}{2}) \\ 0 = C \cos(-k_z \frac{h}{2}) + D \sin(-k_z \frac{h}{2}) \end{cases} \quad (2.15)$$

Dadas las dos fronteras axiales que conforman el toroide, obtenemos un sistema de dos ecuaciones con incógnitas C, D que, para dar lugar a soluciones no trivialmente nulas requerimos que dicho sistema se degenera a uno de rango 1, lo cual sucede si su determinante es cero:

$$\Delta_z(a, b; k_z) = \cos(k_z h/2) \sin(-k_z h/2) - \cos(-k_z h/2) \sin(k_z h/2) = -\sin(k_z h) = 0$$

$$\implies k_z = \frac{n_z \pi}{h}, \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$$

Como era de esperarse, la CF-D discretiza el dominio de la componente axial del número de onda en múltiplos de π/h . Naturalmente hemos excluido el caso $n_z = 0$, pues para todo problema de Condiciones de Frontera de Dirichlet la solución de la ecuación de Laplace asociada al eigenvalor $\lambda = 0$ es la solución idénticamente cero.

Una vez aseguradas las soluciones con C, D no nulas, escogemos estas constantes de tal forma que se satisfaga alguna de las ecuaciones en (2.15), obteniendo la siguiente

expresión:

$$Z^D(k_z z) = \sin(k_z h/2) \cos(k_z z) + \cos(k_z h/2) \sin(k_z z) = \sin(k_z(z - h/2)) .$$

Es importante resaltar el papel que juega la simetría de la superficie de frontera respecto a una inversión en torno al plano $z = 0$. Al sustituir los distintos valores de k_z podemos notar que la anterior expresión alterna entre soluciones de distinta paridad respecto a esta simetría:

n_z	$Z^D(n_z \pi z/h)$
impar	$\cos(n_z \pi z/h)$
par	$\sin(n_z \pi z/h)$

Por otro lado, para anular $R_m(k_\rho \rho)$ en las caras cilíndricas se debe satisfacer lo siguiente:

$$0 = R_m(k_\rho \rho) \Big|_{\rho=a,b} \implies \begin{cases} 0 = AJ_m(k_\rho a) + BN_m(k_\rho a) \\ 0 = AJ_m(k_\rho b) + AN_m(k_\rho b) \end{cases} . \quad (2.16)$$

Nuevamente, para obtener soluciones no trivialmente nulas pedimos que el determinante del anterior sistema de ecuaciones se anule:

$$\Delta_\rho(a, b; k_\rho) = J_m(k_\rho a) N_m(k_\rho b) - J_m(k_\rho b) N_m(k_\rho a) = 0 . \quad (2.17)$$

Aunque no es tan inmediato, la solución de la anterior ecuación es un conjunto numerable de modos $\{k_{\rho, n_\rho} | n_\rho \in \mathbb{N}\}$. Por tanto ocurre también una discretización para el dominio de la parte radial del número de onda. Para hallar los valores precisos de k_{ρ, n_ρ} basta con resolver numéricamente, para un valor dado de la razón de b/a , la anterior ecuación $\Delta_\rho = 0$. En este caso particular el determinante tiene la forma de un *Producto Cruzado de Funciones Bessel*, cuyas raíces son ampliamente conocidas (véase [29, pp. 374],[30]).

Con lo anterior aseguramos que los coeficientes $A(k_\rho)$, $B(k_\rho)$ sean no nulos y los elegimos de tal forma que se cumpla alguna de las ecuaciones (2.16), obteniendo la siguiente expresión para $R^D(k_\rho \rho)$ si, por ejemplo, se busca satisfacer la primera de ellas:

$$R_m^D(k_\rho \rho) = N_m(k_\rho a) J_m(k_\rho \rho) - J_m(k_\rho a) N_m(k_\rho \rho) , \quad (2.18)$$

$$R_m^D(k_\rho a) = 0 , \quad R_m^D(k_\rho b) = \Delta_\rho(a, b; k_\rho) = 0 \text{ si } k_\rho = \chi_{m, n} .$$

2.2.2. Condiciones de Frontera de Neumann

En este caso las condiciones de Frontera de tipo Neumann (*CF-N*) establecen que la derivada de la solución (2.14) en dirección normal a la frontera se anule. De nuevo nos concentramos en las funciones radiales y axiales, pero esta vez la razón es que la componente normal al toroide de frontera es siempre ortogonal a $\hat{\varphi}$. Para la parte axial tenemos:

$$0 = \left[\frac{d}{dz} Z(k_z z) \right] \Big|_{z=\pm h/2} \implies \begin{cases} 0 = -k_z C \sin(k_z \frac{h}{2}) + k_z D \cos(k_z \frac{h}{2}) \\ 0 = -k_z C \sin(-k_z \frac{h}{2}) + k_z D \cos(-k_z \frac{h}{2}) \end{cases} . \quad (2.19)$$

Con solución no trivialmente cero si su determinante se anula:

$$\begin{aligned} \Delta_z(a, b; k_z) &= -k_z^2 [2 \sin(k_z h/2) \cos(k_z h/2)] = -k_z \sin(k_z h) = 0 \\ \implies k_z &= \frac{s_z \pi}{h}, \quad s_z = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

donde esta vez el eigenvalor $s_z = 0$ sí da lugar a una solución no idénticamente nula. Así, las soluciones para estas CF son:

$$Z^N(k_z z) = \cos(k_z h/2) \cos(k_z z) - \sin(k_z h/2) \sin(k_z z) = \cos(k_z(z + h/2)) . \quad (2.20)$$

Si observamos el papel que juega la simetría $z \rightarrow -z$ podemos notar que, al igual que en el caso de Dirichlet, se tienen conjuntos de soluciones separados por paridad. Sin embargo, las soluciones Z^N intercalan paridad con las de Z^D debido a la inclusión del eigenvalor $s_z = 0$ como el primero para el caso de Neumann. A diferencia del caso de Dirichlet donde el primero de los eigenvalores es $n_z = 1$.

En las caras cilíndricas, la condición de frontera de Neumann se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = \left[\frac{d}{d\rho} R_m(k_\rho \rho) \right] \Big|_{\rho=a,b} \implies \begin{cases} 0 = k_\rho [AJ'_m(k_\rho a) + BN'_m(k_\rho a)] \\ 0 = k_\rho [AJ'_m(k_\rho b) + BN'_m(k_\rho b)] \end{cases} , \quad (2.21)$$

donde el símbolo de prima indica la derivada de cada función de Bessel respecto a su argumento. El determinante del sistema de ecuaciones se anula, dando los eigenvalores que satisfacen esta CF-N:

$$\Delta_\rho(a, b; k_\rho) = k_\rho^2 [J'_m(k_\rho a)N'_m(k_\rho b) - J'_m(k_\rho b)N'_m(k_\rho a)] = 0. \quad (2.22)$$

Una vez establecido un valor para la razón b/a , la anterior condición se resuelve numéricamente para encontrar dicho conjunto de eigenvalores $\{k_{\rho, s_\rho} | s_\rho \in \mathbb{N}\}$, aunque tablas para algunas raíces se pueden encontrar en la literatura [31]. La correspondiente función radial que satisface la condición de Frontera de Neumann se encuentra, nuevamente, de alguna de las dos ecuaciones en (2.21):

$$\begin{aligned} R_m^N(k_\rho \rho) &= N'_m(k_\rho a)J_m(k_\rho \rho) - J'_m(k_\rho a)N_m(k_\rho \rho), \\ \frac{d}{d\rho} R_m^N(k_\rho a) &= 0, \quad \frac{d}{d\rho} R_m^N(k_\rho b) = k_\rho^{-1} \Delta_\rho(a, b; k_\rho) = 0 \text{ si } k_\rho = \xi_{m, s}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Existe otra condición de Frontera de tipo Neumann que es de interés. Consiste en pedir que se anule en las caras cilíndricas del toroide la derivada, pero esta vez de la función radial multiplicada por la potencia m de su argumento $x = k_\rho \rho$, $x^m R_m(x)$:

$$0 = \left[\frac{d}{dx} (x^m R_m(x)) \right] \Big|_{x=k_\rho a, k_\rho b} \implies \begin{aligned} 0 &= [x^m R_{m-1}(x)] \Big|_{x=k_\rho a, k_\rho b}, & m \geq 1 \\ 0 &= -R_1(x) \Big|_{x=k_\rho a, k_\rho b}, & m = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Donde hemos utilizado la relación de recurrencia de la derivada de las funciones de Bessel para derivar las correspondientes relaciones para su combinación lineal [28, Ec. 10.6.2]

$$\begin{aligned} R'_0(x) &= -R_1(x), & m = 0 \\ R'_m(x) &= R_{m-1}(x) - \frac{m}{x} R_m(x), & m \geq 1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

así como la regla de la cadena. Por lo tanto, la condición de Neumann en las dos caras cilíndricas se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0 &= A [(k_\rho a)^m J_{m-1}(k_\rho a)] + B [(k_\rho a)^m N_{m-1}(k_\rho a)] \\ 0 &= A [(k_\rho b)^m J_{m-1}(k_\rho b)] + B [(k_\rho b)^m N_{m-1}(k_\rho b)] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Que es un sistema con soluciones no triviales si:

$$\Delta_\rho(a, b; k_\rho) = (k_\rho a)^m (k_\rho b)^m [J_{m-1}(k_\rho a)N_{m-1}(k_\rho b) - J_{m-1}(k_\rho b)N_{m-1}(k_\rho a)] = 0, \quad (2.27)$$

Condición que se cumple para los eigenvalores k_{ρ, n_ρ} que reconocimos en la sección anterior para condiciones de Frontera de Dirichlet, haciendo la importante distinción que los ei-

genvalores asociados a funciones de orden m , $R_m^N(k_\rho\rho)$, son las de un orden menor $m - 1$. Para el caso $m = 0$ la condición de Neumann para este caso coincide con el anterior, descrito por la Ec. (2.21).

A partir de (2.26) elegimos los valores de A, B para satisfacer alguna de las ecuaciones y obtenemos las eigenfunciones para este segundo tipo de condiciones de Frontera:

$$R_m^N(k_\rho\rho) = N_{m-1}(k_\rho a)J_m(k_\rho\rho) - J_{m-1}(k_\rho\rho)N_m(k_\rho\rho) \quad (2.28)$$

$$\left. \frac{d}{dk_\rho\rho} ((k_\rho)^m R_m(k_\rho\rho)) \right|_{\rho=a} = 0,$$

$$\left. \frac{d}{dk_\rho\rho} ((k_\rho)^m R_m(k_\rho\rho)) \right|_{\rho=b} = (k_\rho a)^{-m} (k_\rho b)^{-m} \Delta_\rho(a, b; k_\rho) = 0$$

2.3. Funciones de Green para Fronteras Toroidales Cilíndricas

En la sección pasada construimos las soluciones para la ecuación de Helmholtz con condiciones de frontera especificadas en la superficie de un toroide cilíndrico. Estas familias de soluciones $\Psi_{m,\mathbf{k}}$ forman un conjunto completo y ortogonal del espacio de soluciones que satisfacen las condiciones de frontera impuestas, lo que nos permite escribir esta relación de completéz en términos de la delta de Dirac:

$$\sum_{m,\mathbf{k}} |a_m(\mathbf{k})|^2 \Psi_{m,\mathbf{k}}^*(\rho', z', \varphi') \Psi_{m,\mathbf{k}}(\rho, z, \varphi) = \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

donde $a_m(\mathbf{k})$ es la constante de normalización de $\Psi_{m,\mathbf{k}}$ (que puede ser absorbida por R_m). Por lo tanto, la función de Green $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, vista como una función de \mathbf{r} , admite una expansión en términos de la base $\{\Psi_{m,\mathbf{k}}\}$ en la región interior del Toroide de Frontera:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{m,\mathbf{k}} g_{m,\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \Psi_{m,\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

donde $g_{m,\mathbf{k}}(\mathbf{r}')$ son los coeficientes de dicha expansión y, a su vez, cargan la dependencia en el punto \mathbf{r}' fuera del toroide. Además, la suma sobre \mathbf{k} indica en realidad una doble suma sobre los valores de k_ρ y k_z para los cuales se satisfaga una de las condiciones de frontera descritas en la sección anterior 2.2.

Para obtener una expresión válida tanto dentro como fuera de dicha superficie se debe imponer la condición al infinito. En general, en problemas de electrodinámica se tienen: una para ondas entrantes y otra para ondas salientes. La primera condición es más apropiada para el estudio de un sistema sujeto a campos electromagnéticos externos

que provienen de una fuente lejana, supuesta en infinito. La segunda condición, por el contrario, es la apropiada para el estudio de la radiación electromagnética emitida por una fuente localizada en una región finita del espacio.

Dada la naturaleza del presente trabajo, adoptamos la segunda de las anteriores condiciones para construir las funciones de Green de onda saliente, denotadas como $\mathcal{G}^{(+)}$:

$$\mathcal{G}^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_{\rho}^2 c(k_z) d_m(k_{\rho}) e^{ik_z(z_{>} - z_{<})} R_m(k_{\rho} \rho_{\text{int}}) H_m^{(+)}(k_{\rho} \rho_{\text{ext}}) \frac{e^{im(\varphi - \varphi')}}{2\pi}. \quad (2.29)$$

donde $c(k_z) d_m(k_{\rho})$ son constantes (en lo que respecta a las posiciones \mathbf{r}, \mathbf{r}' , más no respecto a \mathbf{k}) por determinar. Además, $H_m^{(+)}$ es la función de Hankel de onda saliente, construida a partir de las funciones de Bessel como:

$$H_m^{(\pm)}(k_{\rho} \rho) = J_m(k_{\rho} \rho) \pm i N_m(k_{\rho} \rho),$$

y cuyo límite asintótico corresponde al de la onda radial cilíndrica[32],[33]:

$$H_m^{(\pm)}(k_{\rho} \rho) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_{\rho} \rho}} \exp \left[\pm \left(ik_{\rho} \rho - \frac{2m+1}{4} \pi \right) \right].$$

A continuación describimos cada término de la Ec. (2.29) a detalle con el fin de verificar que se cumplen las condiciones de **simetría** de las funciones de Green y de **discontinuidad en sus derivadas**, descritas al inicio de este capítulo.

En primer lugar, notamos los subíndices en las funciones radiales de (2.29): ρ_{int} y ρ_{ext} . Estos denotan a ρ si el punto \mathbf{r} se encuentra en el interior o el exterior del toroide de frontera, respectivamente; asignando ρ' a la función complementaria. Ante el intercambio $\rho \leftrightarrow \rho'$ ahora ρ_{int} (ρ_{ext}) denota a ρ' si \mathbf{r}' se encuentra en el interior (exterior) del toroide, asignando ρ con la función opuesta $\rho = \rho_{\text{ext}}$ ($\rho = \rho_{\text{int}}$).

Además, los subíndices en la exponencial axial: $z_{>} - z_{<}$ denotan al mayor o menor, respectivamente entre z y z' . Bajo el intercambio $z \leftrightarrow z'$ ahora denotan al mayor o menor entre z' y z pero el resultado es el mismo. En ambos casos se asegura un comportamiento de onda saliente en su componente axial, así como continuidad en $z = z'$.

Por último, es sencillo reconocer la continuidad de la expresión (2.29) ante el intercambio $\varphi \leftrightarrow \varphi'$ ya que, al hacer la suma sobre m positivas y negativas, se puede reagrupar términos bajo el nuevo índice $m \rightarrow -m$ para regresar a la expresión original.

De las observaciones del anterior párrafo podemos concluir que la función de Green satisface la propiedad de simetría ante el intercambio $\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}'$. Ahora observamos que las

constantes $d_m(\mathbf{k})$ se determinan precisamente al buscar satisfacer la segunda condición de la función de Green: la discontinuidad en su derivada. Partiendo de la Ecuación de Helmholtz aplicada a la función de Green (2.7), integramos en una vecindad ϵ en torno a la posición \mathbf{r}' , haciendo tender $\epsilon \rightarrow 0$. Primero para la parte radial:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\rho' - \epsilon}^{\rho' + \epsilon} \rho d\rho \left(-4\pi \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \right) = \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\rho' - \epsilon}^{\rho' + \epsilon} \rho d\rho \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} + k_\rho^2 \right\} d_m(k_\rho) R_m(k_\rho \rho_{int}) H_m^{(+)}(k_\rho \rho_{ext}) \end{aligned}$$

El lado izquierdo corresponde a la integral de la función delta de Dirac en una vecindad en torno a ρ' , esta integral corresponde a la constante -4π . Para el lado derecho, podemos notar que los términos asociados al segundo y tercer sumando en la expresión entre corchetes son continuos en $\rho = \rho'$, por lo cual integran a cero en el límite en que $\epsilon \rightarrow 0$. Así, el coeficiente $d_m(k_\rho)$ puede determinarse encontrando la discontinuidad del primer sumando:

$$\begin{aligned} -4\pi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(d_m(k_\rho) \rho \frac{d}{d\rho} [R_m(k_\rho \rho_{int}) H_m^{(+)}(k_\rho \rho_{ext})] \right) \Big|_{\rho' - \epsilon}^{\rho' + \epsilon} = d_m(k_\rho) k_\rho \rho \mathcal{W} \{ R_m, H_m^{(+)} \} (k_\rho \rho') \\ \implies d_m(k_\rho) = -4\pi [k_\rho \rho \mathcal{W} \{ R_m, H_m^{(+)} \} (k_\rho \rho')]^{-1}, \end{aligned}$$

donde \mathcal{W} es el *Wronskiano* del conjunto de funciones $\{R_m, H_m^{(+)}\}$, el cual está dado por la siguiente expresión:

$$\mathcal{W} \{ R_m, H_m^{(+)} \} (x) = \begin{vmatrix} R_m(x) & H_m^{(+)}(x) \\ R_m'(x) & H_m^{(+)\prime}(x) \end{vmatrix} = R_m(x) H_m^{(+)\prime}(x) - R_m'(x) H_m^{(+)}(x).$$

El operador Wronskiano determina la independencia lineal del conjunto de funciones en cuestión. Si el Wronskiano se anula en algún punto del dominio de dicho conjunto, entonces las funciones no son linealmente independientes en tal dominio. Para asegurar efectivamente la independencia de las funciones radiales, y que por ende el coeficiente $d_m(k_\rho)$ está bien definido, calculamos su valor explícitamente en términos del Wronskiano de $\{J_m, N_m\}$ [28, Ec. 10.5.2]:

$$\mathcal{W} \{ J_m, N_m \} (x) = \frac{2}{\pi x}.$$

Aprovechando que \mathcal{W} es una forma bilineal tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}\{R_m, H_m^+\}(x) &= \mathcal{W}\{AJ_m + BN_m, J_m + iN_m\}(x) = A\mathcal{W}\{J_m, iN_m\}(x) + B\mathcal{W}\{N_m, J_m\}(x) \\ &= \frac{2i}{\pi x}(A + iB) \neq 0.\end{aligned}$$

Para cualquier tipo de Condiciones de Frontera tipo Dirichlet o Neumann estudiadas en la sección 2, los coeficientes A, B en (2.14) son funciones de Bessel complementarias de primera ó segunda especie, o bien sus derivadas, evaluadas en $k_\rho a$ (ó $k_\rho b$); dado que ambas especies constituyen un conjunto linealmente independiente de funciones no tienen raíces comunes, por lo cual los coeficientes $A(k_\rho), B(k_\rho)$ no tienen raíces comunes en el dominio de k_ρ , asegurando que el Wronskiano de R_m con $H_m^{(+)}$ es no nulo. Así, el coeficiente $d_m(k_\rho)$ es el siguiente:

$$d_m(k_\rho) = 2\pi^2 i (A(k_\rho) + iB(k_\rho))^{-1}.$$

De forma similar, podemos encontrar el valor del coeficiente $c_m(k_\rho)$ integrando la Ecuación (2.7) en una vecindad ϵ en torno a \mathbf{r}' para la parte axial:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{z'-\epsilon}^{z'+\epsilon} dz \delta(z - z') &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{z'-\epsilon}^{z'+\epsilon} dz \left\{ -k_z^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right\} c(k_z) e^{ik_z(z > -z <)} \\ \implies 1 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} c(k_z) \left[\frac{d}{dz} e^{ik_z(z > -z <)} \right] \Big|_{z'-\epsilon}^{z'+\epsilon} = c(k_z) \mathcal{W}\{e^{ik_z z'}, e^{-ik_z z'}\}(k_z z').\end{aligned}$$

De forma análoga a las funciones radiales, aparece el Wronskiano de las funciones $\{e^{ik_z z'}, e^{-ik_z z'}\}$, cuyo valor es:

$$\mathcal{W}\{e^{ik_z z'}, e^{-ik_z z'}\}(k_z z') = \begin{vmatrix} e^{ik_z z'} & e^{-ik_z z'} \\ ik_z e^{ik_z z'} & -ik_z e^{-ik_z z'} \end{vmatrix} = -2ik_z.$$

De esta forma encontramos el valor del coeficiente $c(k_z)$ que junto a $d_m(k_\rho)$ aseguran una discontinuidad en la derivada de la función de Green en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$:

$$c(k_z) = \frac{i}{2k_z}.$$

Esto concluye la construcción de la función de Green de onda saliente, $\mathcal{G}^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, para todo el espacio y para cada conjunto de condiciones de Frontera dadas en la superficie de un toroide de sección meridiana rectangular. En el siguiente capítulo caracterizamos las fuentes de carga y corriente confinados en dicha superficie y que dan origen a cam-

pos electromagnéticos de los tres tipos identificados: Momentos Magnéticos, Eléctricos y Toroidales.

Capítulo 3

Densidades de Carga y Corriente para Momentos: Magnéticos, Eléctricos y Toroidales

3.1. Potenciales de Debye

Es conocido que cualquier vector \mathbf{F} puede escribirse como la suma de una componente *longitudinal* \mathbf{F}^L y una componente *Transversal* \mathbf{F}^T , las cuales a su vez se construyen a partir de un potencial escalar ϕ y uno vectorial \mathbf{A} , respectivamente. Esta descomposición se conoce como el Teorema de Helmholtz[25, pp. 222]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^L + \mathbf{F}^T = \nabla\phi + \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.1)$$

Las componentes longitudinal y Transversal, al estar constituidas por un gradiente y un rotacional respectivamente, satisfacen trivialmente las siguientes relaciones:

$$\nabla \times \mathbf{F}^L = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{F}^T = 0. \quad (3.2)$$

Sin embargo, para un vector en el espacio de 3 dimensiones existen dos componentes Transversales: una **Transversal Poloidal** y la otra **Transversal Toroidal**, que la descomposición de Helmholtz no distingue.

En nuestro caso, buscamos encontrar soluciones vectoriales a la ecuación de Helmholtz que constituyan fuentes de corriente alterna, distribuidas sobre la superficie de un toroide cilíndrico. El método de los *Potenciales de Debye* nos permite efectivamente construir dichas soluciones vectoriales a partir de una solución escalar ψ , distinguiendo tres componentes que son individualmente soluciones a la ecuación -vectorial- de Helmholtz [23].

Este método consiste en aplicación de los siguientes operadores vectoriales:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^l &= \nabla \psi^l && \text{(componente Longitudinal),} \\ \mathbf{J}^t &= \mathbf{L}\psi^t = -i(\mathbf{r} \times \nabla) \psi^t && \text{(componente Toroidal),} \\ \mathbf{J}^p &= \nabla \times \mathbf{L}\psi^p = -i(\nabla \times \mathbf{r} \times \nabla) \psi^p && \text{(componente Poloidal).} \end{aligned}$$

Los escalares ψ^l , ψ^t , ψ^p constituyen los Potenciales de Debye: longitudinal, toroidal y poloidal, respectivamente. Es importante reconocer la relación que guardan los tres operadores de vectorización ∇ , \mathbf{L} , $\nabla \times \mathbf{L}$: partiendo del operador gradiente, el operador de momento angular \mathbf{L} consiste en cruzar a ∇ y a \mathbf{r} ; a su vez, el tercer operador constituye la aplicación sucesiva del rotacional.

La aplicación del método de los potenciales de Debye en Electrodinámica ha sido limitada en dos aspectos. El primero de ellos es que se ha usado para identificar campos electromagnéticos multipolares únicamente en la región libre de fuentes, dónde los campos electromagnéticos se pueden construir a partir de solamente dos funciones vectoriales, en correspondencia con el formalismo de los *Potenciales de Hertz*; esta limitación no permite estudiar los campos electromagnéticos en la región cercana a sus fuentes, de las cuales heredan tanto multipolaridad como direccionalidad, así como la conexión a la región lejana.

Por otro lado, el uso de los operadores de vectorización antes descritos asume que los campos electromagnéticos pueden reconstruirse a partir de únicamente su componente radial: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$; sin embargo, la prueba de esta afirmación, dada por Bouwkamp y Casimir en [34], indica explícitamente que su validez es sólo en la región libre de fuentes. Además, aprovecha que en coordenadas esféricas las soluciones de las ecuaciones de Helmholtz homogéneas y el operador \mathbf{L} comparten la base común de eigensoluciones dada por los Armónicos Esféricos, permitiendo conectar a las componentes radiales $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$ de los campos con los potenciales de Debye. Para sistemas descritos en otras coordenadas, como las coordenadas cilíndricas, un conjunto distinto de operadores de vectorización debe usarse para incorporar adecuadamente las simetrías de dichos sistemas.

Ambas limitaciones hacen necesaria una extensión del método de los potenciales de Debye en la descripción de los campos electromagnéticos producidos por fuentes con geometría toroidal cilíndrica. A continuación se presenta dicha generalización para fuentes con simetría de rotación axial, incorporando la posibilidad de describir los campos electromagnéticos producidos por las fuentes en todo el espacio, incluida la región cercana al toroide por dentro y por fuera. Además, permite construir sucesivamente todas las fuentes de momentos: eléctricos, magnéticos y toroidales a partir de un potencial escalar de Debye común.

3.1.1. Fuentes de Momentos Eléctricos

Partimos con la densidad de corriente longitudinal del campo Eléctrico para momentos eléctricos, \mathbf{J}^{El} , construida como el gradiente de un potencial escalar de Debye confinado en la superficie de un toroide cilíndrico. Dicho potencial escalar está dado por una solución de la ecuación de Helmholtz homogénea con simetría axial, $\Psi_{m,\mathbf{k}}(\rho, z)$, como las descritas en el capítulo anterior:

$$\mathbf{J}^{El}(\rho, z) = K_\rho \hat{\rho} \frac{d}{d\rho} R_m(k_\rho \rho) \left[\delta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \delta\left(z + \frac{h}{2}\right) \right] + K_z \hat{z} \frac{d}{dz} Z(k_z z) [\delta(\rho - a) + \delta(\rho - b)]. \quad (3.3)$$

La divergencia de \mathbf{J}^{El} corresponde a la densidad de carga, según la ecuación de continuidad:

$$i\omega\rho(\mathbf{r}) = K_\rho \left[\delta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \delta\left(z + \frac{h}{2}\right) \right] \left(k_\rho^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R_m(k_\rho \rho) + K_z [\delta(\rho - a) + \delta(\rho - b)] (-k_z^2) Z(k_z z). \quad (3.4)$$

Por su parte, los productos vectoriales de \mathbf{r} y $\rho\hat{\phi}$ con la densidad de corriente longitudinal nos llevan a la densidad de corriente transversal poloidal \mathbf{J}^{Ep} y a la densidad de fuente de campo de Inducción Magnética \mathbf{F}^{Et} ; ambas en dirección de círculos meridianos $\hat{\phi}$, la cual la heredan a los respectivos campos:

$$\mathbf{F}^{Et}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \mathbf{J}^{El}(\mathbf{r}) = \hat{\phi} \left\{ -K_\rho z \left[\delta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \delta\left(z + \frac{h}{2}\right) \right] \frac{d}{d\rho} R_m(k_\rho \rho) + K_z \rho [\delta(\rho - a) - \delta(\rho - b)] \frac{d}{dz} Z(k_z z) \right\}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{J}^{Ep}(\mathbf{r}) = \rho\hat{\phi} \times \mathbf{J}^{El}(\mathbf{r}) = -\hat{z} \rho K_z [\delta(\rho - a) - \delta(\rho - b)] \frac{d}{dz} Z(k_z z) + \hat{\rho} \rho K_\rho \left[\delta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \delta\left(z + \frac{h}{2}\right) \right] \frac{d}{d\rho} R_m(k_\rho \rho). \quad (3.6)$$

En este punto es pertinente enfatizar el significado de los superíndices para las densidades de fuente para campos electromagnéticos: el primer superíndice E sirve para identificarlas como fuentes de campos electromagnéticos de momentos Eléctricos; por otro

lado, el superíndice l, p, t indica dirección: longitudinal, transversal poloidal ó transversal toroidal, respectivamente. Esta notación nos permitirá identificar claramente a las fuentes para momentos magnéticos y toroidales, así como sus direccionalidades. A continuación se presenta la construcción sucesiva de las fuentes de momentos magnéticos.

3.1.2. Fuentes de Momentos Magnéticos

Tomamos como base a la densidad de corriente \mathbf{J}^{Ep} para construir a las distintas fuentes de momentos Magnéticos. El rotacional de \mathbf{J}^{Ep} corresponde a la fuente de campo de intensidad eléctrica, \mathbf{J}^{Mt} ; dicha fuente hereda al campo eléctrico la direccionalidad en círculos meridianos:

$$\mathbf{J}^{Mt}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}^{Ep}(\mathbf{r}) = \hat{\varphi} \left\{ \rho K_z [\delta(\rho - a) - \delta(\rho - b)] \left(\frac{d^2}{dz^2} Z(k_z z) \right) + K_\rho \left[\delta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \delta\left(z + \frac{h}{2}\right) \right] \left(\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R_m(k_\rho \rho) \right) \right) \right\}. \quad (3.7)$$

A su vez, el rotacional de \mathbf{J}^{Mt} nos da la fuente para el campo de inducción magnética, \mathbf{F}^{Mp} , cuya dirección es poloidal con componentes $\hat{\rho}$ y \hat{z} :

$$\mathbf{F}^{Mp}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}^{Mt}(\mathbf{r}) = +\hat{z} \rho K_z [\delta(\rho - a) - \delta(\rho - b)] \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2}{dz^2} Z(k_z z) \right) - \hat{\rho} K_\rho \left[\delta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \delta\left(z + \frac{h}{2}\right) \right] \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} R_m(k_\rho \rho) \right). \quad (3.8)$$

Para cada componente, el término entre paréntesis se identifica con la componente radial ó axial del laplaciano en coordenadas cilíndricas. Dado que el potencial de Debye común corresponde a una solución de dicha ecuación, ambos términos son proporcionales al cuadrado de las respectivas componentes del vector de onda: k_ρ^2 y k_z^2 .

Ambas fuentes para los campos de inducción magnética y de intensidad Eléctrica derivan de \mathbf{J}^{Ep} , Ec. (3.6), aplicando el operador rotacional de manera sucesiva; las fuentes de dichos campos en momentos Toroidales seguirán la misma estructura, pero tomando como base a \mathbf{F}^{Et} , Ec. (3.5), la fuente para el campo magnético en momentos eléctricos.

3.1.3. Fuentes de Momentos Toroidales

A partir de la fuente del campo magnético en momentos eléctricos de dirección toroidal, \mathbf{F}^{Et} , su rotacional da lugar a la densidad de corriente \mathbf{J}^{Tp} fuente de campo eléctrico

poloidal:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{Tp}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F}^{Et}(\mathbf{r}) = \hat{z}\rho K_z [\delta(\rho - a) - \delta(\rho - b)] \left(\frac{d^2}{dz^2} Z(k_z z) \right) \\ + \hat{\rho} z K_\rho \left[\delta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \delta\left(z + \frac{h}{2}\right) \right] \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} R_m(k_\rho \rho) \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

A partir de \mathbf{J}^{Tp} , aplicando nuevamente el operador rotacional obtenemos la fuente \mathbf{F}^{Tt} para el campo de inducción magnética, que resulta en dirección toroidal $\hat{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{Tt}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{J}^{Tp}(\mathbf{r}) = \hat{\varphi} \left\{ -\rho K_z [\delta(\rho - a) - \delta(\rho - b)] \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2}{dz^2} Z(k_z z) \right) \right. \\ \left. - z K_\rho \left[\delta\left(z - \frac{h}{2}\right) - \delta\left(z + \frac{h}{2}\right) \right] \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} R_m(k_\rho \rho) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De manera similar a la fuente del campo magnético en momentos magnéticos, podemos identificar de los términos entre paréntesis en \mathbf{F}^{Tt} a las respectivas componentes del laplaciano en coordenadas cilíndricas; que son proporcionales al cuadrado de las correspondientes componentes radiales y axiales del vector de onda.

Al comparar ambas fuentes, \mathbf{J}^{Tp} y \mathbf{F}^{Tt} , con sus contrapartes de momentos eléctricos \mathbf{J}^{Ep} y \mathbf{F}^{Et} , podemos reconocer que los campos eléctricos y magnéticos tienen direcciones comunes para ambos momentos: el campo eléctrico hereda la dirección poloidal de la respectiva fuente, mientras que el campo magnético, a su vez, hereda la dirección toroidal de su fuente en ambos casos. Además, en ambos casos aparece la primera derivada, ya sea en ρ o en z , del potencial de Debye común; esto una vez identificadas las componentes del laplaciano explicadas en el párrafo anterior.

La diferencia entre los campos electromagnéticos de momentos eléctricos y toroidales consiste, justamente, en la dependencia extra de k_ρ^2 y k_z^2 . Este factor se traslada a los campos electromagnéticos mismos, y es la responsable de una dependencia en k^6 para radiación de campos electromagnéticos de momentos dipolares toroidales, que coincide con lo reportado en la literatura [3, 5], a diferencia de la dependencia en k^4 que se espera de fuentes de momentos dipolares eléctricos o magnéticos.

En el siguiente capítulo se construyen los campos electromagnéticos a partir de la integración de la función de Green, Ec. (2.29), con las fuentes de las Eqs. (3.3)-(3.10). Estas últimas heredan a los respectivos campos su direccionalidad: longitudinal, poloidal o toroidal, así como su multipolaridad.

Capítulo 4

Campos Electromagnéticos por Integración de las Fuentes con la Función de Green

Los campos electromagnéticos producidos por las fuentes descritas en el capítulo anterior se calculan a partir del resultado derivado en las Eqs. (2.9)-(2.10): integrando la función de Green de onda saliente con la correspondiente fuente vectorial. Tomando en cuenta la localización de dichas fuentes en el toroide cilíndrico, las integraciones que involucran a las deltas son inmediatas y resultan en la evaluación de las funciones radiales y axiales en las respectivas caras cilíndricas o tapas del toroide. A su vez, las integrales en la variable φ manifiestan la invariancia ante rotaciones alrededor del eje z .

Partimos de las fuentes de momentos eléctricos, \mathbf{J}^{El} , \mathbf{F}^{Et} , \mathbf{J}^{Ep} , cuyas direccionalidades están determinadas al estar conformadas por los operadores de gradiente, operador de momento angular y $\rho\hat{\varphi} \times \nabla$.

Para calcular el campo eléctrico \mathbf{E}^{El} integramos a su fuente \mathbf{J}^{El} haciendo una integral por partes en la variable primada, lo que nos deja con una integral del potencial de Debye con el gradiente aplicado a la función de Green. Por la propiedad de invarianza de \mathcal{G} ante el intercambio del punto campo \mathbf{r} y el punto fuente \mathbf{r}' podemos intercambiar al gradiente aplicado sobre las variables primadas por las no primadas:

$$\nabla' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\nabla \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Esto nos permite factorizar el operador gradiente fuera de la integral de \mathcal{G} con el Potencial de Debye Ψ , asegurando que el campo \mathbf{E}^{El} tendrá la misma direccionalidad que su fuente, al ser también un campo gradiente. Además, de la integral se observa que el potencial de Debye proyecta para el punto campo \mathbf{r} , tanto dentro como fuera del toroide,

únicamente las funciones radiales y axiales de la misma multipolaridad en la función de Green, que fue construida como una superposición de todas las componentes multipolares sujetas a las condiciones de frontera que se impongan. La integración restante para el punto fuente \mathbf{r}' constituye una integral de traslape, I^{El} , de las funciones radiales y axiales adentro con sus compañeras de afuera, y viceversa, en las cuatro caras de la superficie del toroide. Concluimos así que el campo Eléctrico \mathbf{E}^{El} comparte, además de la dirección, la misma multipolaridad de su fuente, como lo indica la Ec. (4.2).

Los operadores restantes de momentos eléctricos \mathbf{F}^{Et} y \mathbf{J}^{Ep} parten de la base del gradiente aplicado al Potencial de Debye común de la fuente longitudinal, por lo cual también heredan sus respectivas direccionalidades a los campos \mathbf{B}^{Et} y \mathbf{E}^{Ep} , respectivamente. Para estos, las integrales en la variable angular φ proyectan a los campos la misma dirección de las fuentes, así como su correspondiente multipolaridad:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{im(\varphi-\varphi')}}{2\pi} \hat{\varphi}' &= \frac{1}{2} [\hat{\varphi} (\delta_{m1} + \delta_{m,-1}) - i\hat{\rho} (\delta_{m1} - \delta_{m,-1})] \rightarrow \hat{\varphi}\delta_{m1}, \\ \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{im(\varphi-\varphi')}}{2\pi} \hat{\rho}' &= \frac{1}{2} [\hat{\rho} (\delta_{m1} + \delta_{m,-1}) + i\hat{\varphi} (\delta_{m1} - \delta_{m,-1})] \rightarrow \hat{\rho}\delta_{m1}, \\ \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{im(\varphi-\varphi')}}{2\pi} \hat{z}' &= \hat{z}\delta_{m0}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Lo anterior tomando en cuenta la suma sobre los términos con $m = 1$, $m = -1$, así como la siguiente relación entre las funciones de Bessel radiales[28, ec. 10.4.1]:

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= (-1)^m J_m(x), \quad N_{-m}(x) = (-1)^m N_m(x), \\ \implies R_{-m}(x)H_{-m}^{(+)}(x) &= R_m(x)H_m^{(+)}(x). \end{aligned}$$

Para los momentos magnéticos y toroidales, los operadores sucesivamente aplicados al operador de Debye exhiben las direccionalidades y multipolaridades de los campos eléctricos y magnéticos, común con la de sus respectivas fuentes. Las integrales de traslape respectivas $I^{\alpha,\beta}$ con $\alpha = E, M, T$ and $\beta = l, p, t$ corresponden a los momentos multipolares: eléctrico, magnético y Toroidal en cada caso.

En las siguientes expresiones, Ecs. (4.2)-(4.8) presentamos los resultados de los cálculos antes mencionados, distinguiendo las expresiones para los campos tanto afuera como adentro del toroide: dependencia radial $R_m(k_\rho\rho)$ para el interior y $H_m^{(+)}(k_\rho\rho)$ para afuera; y dependencia axial ($\cos k_z z + i \sin k_z z$) para adentro y $\exp(ik_z z)$ para afuera. Para la parte axial, la imposición de las condiciones de frontera de Dirichlet ó Neumann sobre los

valores de k_z dan lugar a que los campos tengan paridad definida sin $k_z z$ ó $\cos k_z z$, por dentro y por fuera.

$$\mathbf{E}^{El} = \frac{i\omega}{c^2} \nabla \left[\int d^3 r' \Psi(\mathbf{r}') \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] = \frac{i\omega}{c^2} I^{El} \left\{ \hat{\rho} \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} R_0(k_\rho \rho) \\ H_0^{(+)}(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \hat{z} \begin{pmatrix} R_0(k_\rho \rho) \\ H_0^{(+)}(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{B}^{Et} = \frac{1}{c} I^{Et} \hat{\varphi} \left\{ z \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} R_1(k_\rho \rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right. \\ \left. - \rho \begin{pmatrix} R_1(k_\rho \rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.3)$$

$$\mathbf{E}^{Ep} = \frac{i\omega}{c^2} I^{Ep} \left\{ \hat{\rho} \rho \begin{pmatrix} R_0(k_\rho \rho) \\ H_0^{(+)}(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right. \\ \left. - \hat{z} \rho \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} R_0(k_\rho \rho) \\ H_0^{(+)}(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{E}^{Mt} = \frac{i\omega}{c^2} I^{Mt} \hat{\varphi} \left\{ \rho \begin{pmatrix} R_1(k_\rho \rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} R_1(k_\rho \rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B}^{Mp} = \frac{1}{c} I^{Mp} \left\{ -\hat{\rho} \rho \begin{pmatrix} R_1(k_\rho \rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right) \right. \\ \left. + \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} R_1(k_\rho \rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho \rho) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{E}^{Tp} = \frac{i\omega}{c^2} I^{Tp} \left\{ \hat{\rho}\rho \begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix} \frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{B}^{Tt} = \frac{1}{c} I^{Tt} \hat{\varphi} \left\{ -\rho \begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix} \frac{d}{dz} \left(\frac{d^2}{dz^2} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right) \right. \\ \left. - z \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} \begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.8)$$

4.1. Líneas de campo

Las líneas de campo de los campos toroidales: \mathbf{B}^{Et} , \mathbf{E}^{Mt} , \mathbf{B}^{Tt} , Ecs. (4.3), (4.5), (4.8), corresponden a círculos paralelos cerrados, con centro en el eje z . Para el campo longitudinal \mathbf{E}^{El} y para los campos poloidales \mathbf{E}^{Ep} , \mathbf{B}^{Mp} , \mathbf{E}^{Tp} , podemos encontrar una expresión exacta de sus líneas para un plano meridiano $\varphi = \varphi_0$ cualquiera. Un desplazamiento infinitesimal de una partícula de prueba, $d\mathbf{l} = \hat{\rho}d\rho + \hat{z}dz$ en coordenadas cilíndricas, es paralelo a la dirección del campo en cada punto,

$$0 = d\mathbf{l} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{El} \\ \mathbf{E}^{Ep} \\ \mathbf{B}^{Mp} \\ \mathbf{E}^{Tp} \end{pmatrix}^\perp,$$

lo que se traduce en las siguientes ecuaciones diferenciales para \mathbf{E}^{El} , \mathbf{E}^{Ep} , \mathbf{B}^{Mp} y \mathbf{E}^{Tp} , respectivamente:

$$\frac{d\rho}{E_\rho^{El}} = \frac{dz}{E_z^{El}} \implies \frac{\begin{pmatrix} R_0(k_\rho\rho) \\ H_0^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix} d\rho}{\begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix}} = \frac{\frac{d}{dz} \left(\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} \right) dz}{\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix}}, \quad (4.9)$$

$$\frac{d\rho}{E_\rho^{Ep}} = \frac{dz}{E_z^{Ep}} \implies \frac{\frac{d}{d\rho} \left(\rho \begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix} \right) d\rho}{\rho \begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix}} = - \frac{\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} dz}{\begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix}}, \quad (4.10)$$

$$\frac{d\rho}{B_\rho^{Mp}} = \frac{dz}{B_z^{Mp}} \implies \frac{\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix} \right) d\rho}{\begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix}} = - \frac{\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} dz}{\begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix}}, \quad (4.11)$$

$$\frac{d\rho}{E_\rho^{Tp}} = \frac{dz}{E_z^{Tp}} \implies \frac{\frac{d}{d\rho} \left(\rho \begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix} \right) d\rho}{\rho \begin{pmatrix} R_1(k_\rho\rho) \\ H_1^{(+)}(k_\rho\rho) \end{pmatrix}} = - \frac{\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix} dz}{\begin{pmatrix} \cos k_z z + i \sin k_z z \\ e^{ik_z z} \end{pmatrix}}. \quad (4.12)$$

Cada ecuación de las anteriores es separable y soluble de forma exacta, lo que nos determina la ecuación de cada línea de campo que pasa por una posición (ρ_0, z_0) cualquiera, ya sea dentro como fuera del toroide de fuente, y para cualquier plano meridiano φ_0 .

Al comparar entre sí las anteriores ecuaciones podemos notar la equivalencia entre la forma de las líneas de campo de \mathbf{E}^{Ep} , \mathbf{B}^{Mp} y \mathbf{E}^{Tp} , Ecs. (4.10), (4.11), (4.12); estos campos son originados por el fenómeno de inducción electromagnética. No así sucede con el campo longitudinal \mathbf{E}^{El} cuyo origen es la distribución de carga, Ec. (3.4), presente en la superficie del toroide.

El conjunto de los primeros tres campos corresponden a vórtices cerrados de líneas, los cuales llenan la región delimitada por las respectivas separatrices de los campos: regiones del espacio donde el campo se anula; dicha región queda determinada a su vez por las raíces de las soluciones a las Ecs. (4.9)-(4.12). El hecho que estos campos formen vórtices es consistente con las leyes de Faraday y Ampere. Por el contrario, las líneas de \mathbf{E}^{El} muestran discontinuidades en la región cercana a la superficie del toroide, donde se localizan sus fuentes de carga, consistente con la ley de Gauss.

En este capítulo hemos encontrado los campos electromagnéticos originados por las fuentes de los tres momentos: eléctrico, magnético y toroidal; hemos caracterizado sus

respectivas multipolaridades y direcciones heredadas de sus fuentes; además de obtener la forma exacta de las líneas de los campos poloidales para cualquier plano meridiano, tanto por fuera como por dentro del toroide de fuente. En el siguiente capítulo se presentan de forma gráfica las líneas de campo para modos representativos de cavidades resonantes y antenas de eficiencia óptima de los tres momentos, lo que nos permite verificar el comportamiento de las líneas que hemos descrito. Esto nos permite, además, comparar y contrastar entre momentos el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos, especialmente para la región cercana al toroide de fuente.

Capítulo 5

Líneas de Campo para Antenas y Cavidades de Resonancia

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos para los campos electromagnéticos poloidales de los distintos momentos, basados en las soluciones de las líneas de campo, Ecs. (4.9)-(4.12), para cavidades de resonancia y antenas de eficiencia óptima. A continuación se bosqueja el procedimiento para generar las líneas de campo para un plano meridiano arbitrario.

Comenzamos por caracterizar los modos tanto de cavidades como de antenas retomando las soluciones escalares de la ecuación de Helmholtz descritas en la Sección 2. Elegimos los parámetros geométricos del toroide de fuente en escala del radio interior a :

$$b = 4a, \quad h = 10a. \quad (5.1)$$

Para las funciones axiales, los modos k_z en todos los casos corresponden a múltiplos enteros de π/h . Los modos radiales k_ρ , obtenidos numéricamente de las Ecs. (2.17), (2.22) ó (2.27) como describimos desde la Sección 2, se muestran en las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3, respectivamente. Esto nos permite seleccionar cada modo axial y radial (k_z, k_ρ) específico.

Se construyen las funciones radiales $R_1(k_\rho\rho)$ para $\rho \in (a, b)$, y sus extrapolaciones fuera del toroide: $J_1(k_\rho\rho)$ para $\rho \in [0, a)$ y $H_1(k_\rho\rho)$ para $\rho > b$. Identificamos en sus raíces a las separatrices de las líneas, que corresponden a cilindros con un eje común. Así como también identificamos las regiones de máxima amplitud de campo, que coinciden con los extremos de la función radial. Para la parte axial las funciones corresponden a funciones seno o coseno en el interior del toroide $|z| < h/2$ y sus extrapolaciones $e^{ik_z z}$ por fuera $|z| > h/2$, cuyas separatrices y regiones de máxima amplitud del campo se componen de planos con $z = cte$. Las separatrices radiales y axiales conforman a su vez toroides -cuya sección meridiana corresponde a pares de rectángulos- que delimitan dos regiones

con líneas de campo en direcciones opuestas entre sí.

La densidad de líneas para cada región del plano, delimitadas por las separatrices, está dada por las superficies de nivel de las soluciones a las Ecs. (4.9)-(4.12) en dicha región. El valor de la superficie de nivel en cada región del plano meridiano determina la cantidad de líneas a graficar. La dirección de las líneas respecto al eje z , horario o antihorario, se diferencia por colores rojo o azul, respectivamente, en las Figuras 5.4, 5.6, 5.7, 5.9, 5.10 y 5.12. Después de un ciclo en el tiempo, ésta dirección se invierte.

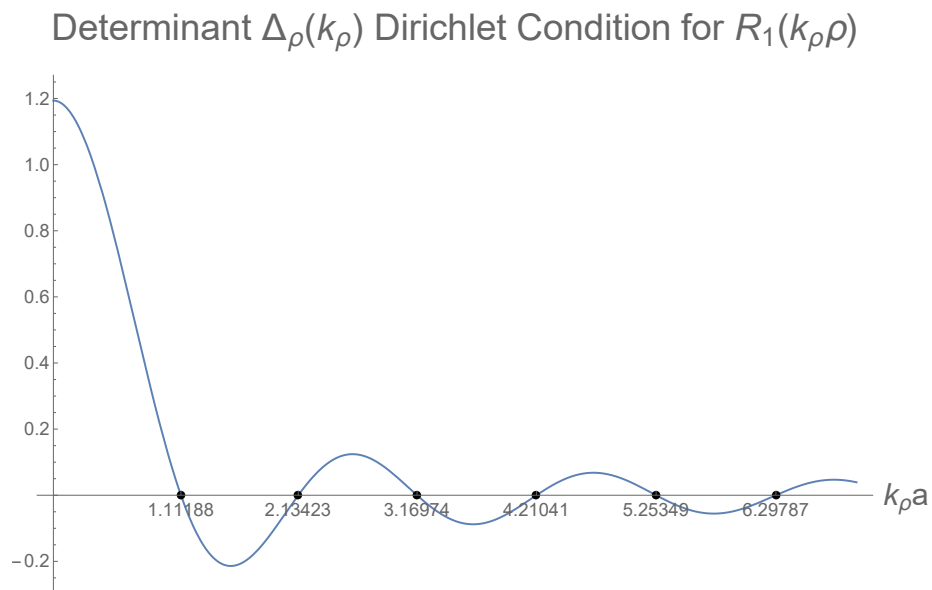


Figura 5.1: Determinante $\Delta_\rho(k_\rho)$ de la condición de frontera de Dirichlet en la superficie del toroide, Ec. (2.17). Se calculan las primeras raíces $k_{\rho,n_\rho} = 1.112, 2.134, 3.170, 4.21, 5.253, 6.298$, en unidades de a^{-1} .

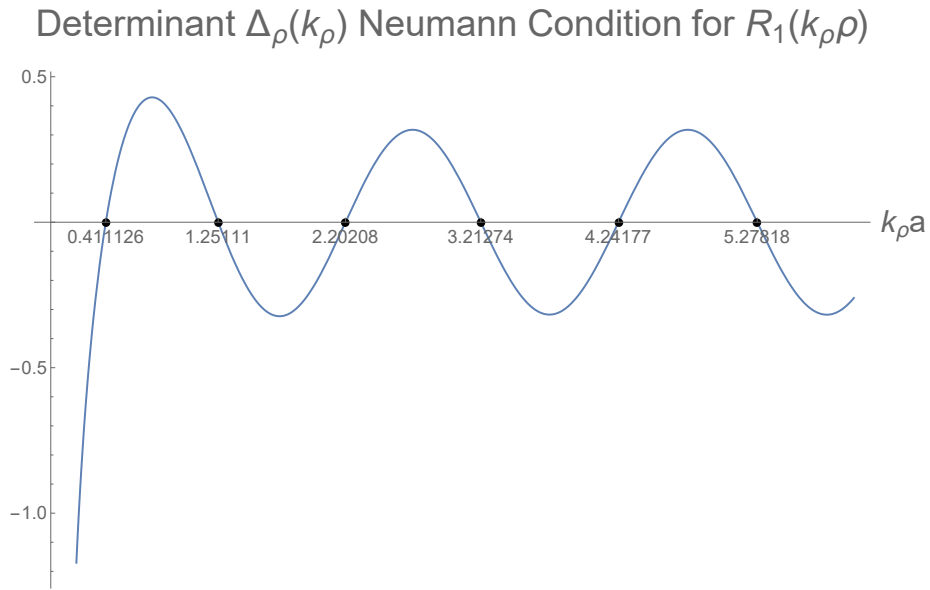


Figura 5.2: Determinante $\Delta_\rho(k_\rho)$ de condición de frontera de Neumann, Ec. (2.22) con $m = 1$. Las primeras raíces son $k_{\rho,s\rho} = 0.411, 1.251, 2.202, 3.213, 4.242, 5.278$ en unidades de a^{-1} .

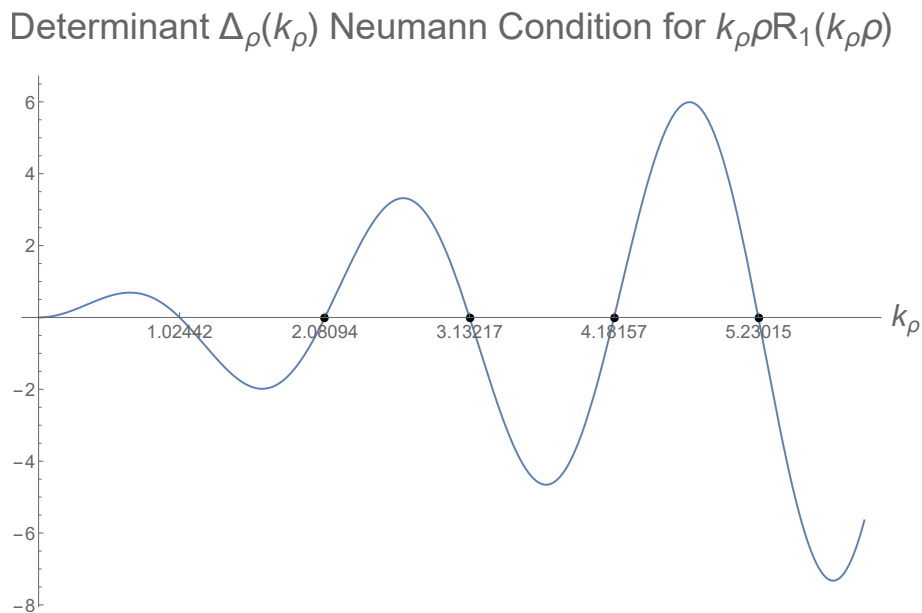


Figura 5.3: Determinante $\Delta_\rho(k_\rho)$ para la condición de frontera de Neumann para $k_\rho\rho R_1$, Ec. (2.27). Las primeras soluciones son $k_{\rho,n\rho} = 2.081, 3.132, 4.152, 5.23$, en unidades de a^{-1} .

5.1. Momentos Magnéticos

5.1.1. Cavidades de Resonancia

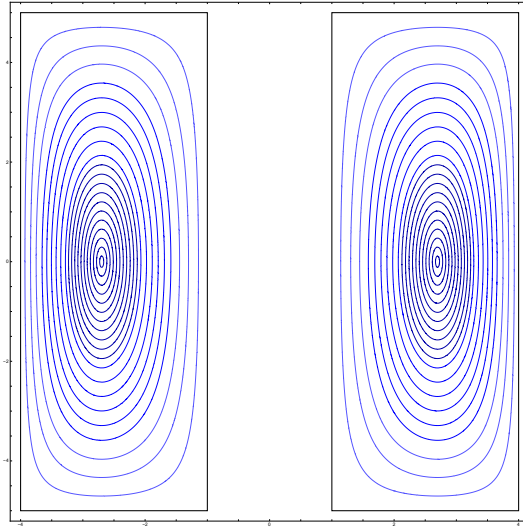
Las líneas de \mathbf{B}^{Mp} para los primeros modos de cavidad resonante (1, 1), (1, 2) y (2, 1) se muestran en la Figura 5.4. La condición de frontera de Dirichlet sobre la superficie del toroide determina los modos de cavidad con valores de k_z dados por las raíces de las funciones axiales, seno ó coseno según paridad, así como los valores de k_ρ dados por la Figura 5.1: $(\pi/h, 1.112/a)$, $(\pi/h, 2.134/a)$ y $(2\pi/h, 1.112/a)$.

El producto de los modos radiales (n_z, n_ρ) cuenta el número de vórtices presente en el interior del toroide, lo cual se generaliza para cualquier modo de cavidad sucesivo. La superficie del toroide es a su vez una separatriz de las líneas de campo, lo cual asegura que éstas lleguen tangentes a la superficie, como lo dicta la ley de Ampere ya que el campo externo es nulo.

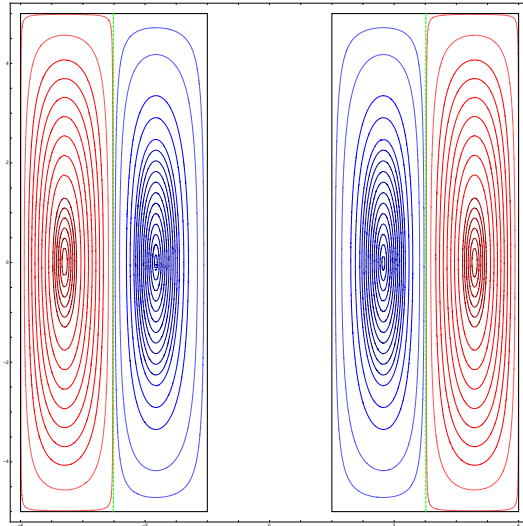
5.1.2. Antenas de Radiación Óptima

La condición de frontera de Neumann determina los modos de antena de eficiencia óptima (1, 1), (2, 1) y (1, 2), asociados con valores de: $(\pi/h, 0.411/a)$, $(2\pi/h, 0.411/a)$, y $(2\pi/h, 1.251/a)$, en conexión con la Figura 5.2 para la parte radial. Las funciones radiales asociadas a los primeros dos modos $k_{\rho, s_\rho} = 0.411/a, 1.251/a$ se muestran en la Figura 5.5, junto a sus extrapolaciones fuera del toroide. Se puede observar una discontinuidad en la derivada de la función radial en las posiciones del toroide $\rho = a, \rho = b$, esto es necesario para satisfacer la ley de Ampere en la superficie donde se encuentra distribuida la corriente. Las raíces de estas funciones radiales corresponden a las posiciones de las separatrices radiales de las líneas de \mathbf{B}^{Mp} , mostradas en línea verde punteada en la Figura 5.6. Además, los extremos corresponden con los valores de ρ con mayor amplitud del campo, donde la cantidad de líneas es mayor.

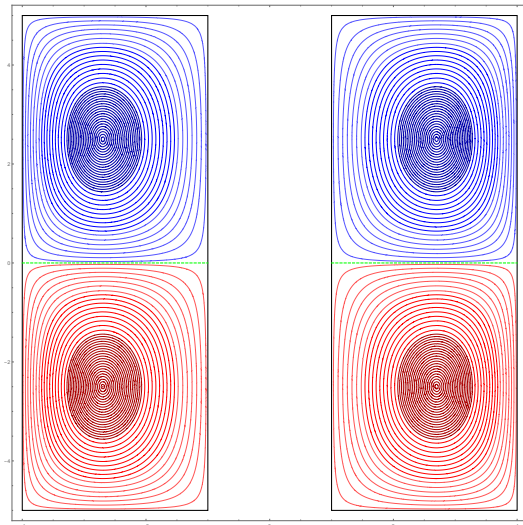
Para todos los modos, el eje z representa una separatriz de \mathbf{B}^{Mp} , consecuencia de la simetría axial del campo. Las posiciones $z = \pm h/2$ coinciden con posiciones de máxima amplitud del campo, consistente con que la densidad de corriente en la superficie es máxima en los ejes exteriores del toroide. Además, las líneas de campo que salen o entran del toroide presentan una discontinuidad en su componente transversal, consistente con la ley de Ampere. Las separatrices, radiales y axiales, que cortan al toroide de fuente van aumentando para los modos sucesivos.



(a) (1,1)



(b) (1,2)



(c) (2,1)

Figura 5.4: Líneas de \mathbf{B}^{Mp} para modos de cavidad de momentos magnéticos. Las etiquetas (n_z, n_ρ) corresponden a los valores de (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 1.112/a)$, (b) $(\pi/h, 2.134/a)$, and (c) $(2\pi/h, 1.112/a)$.

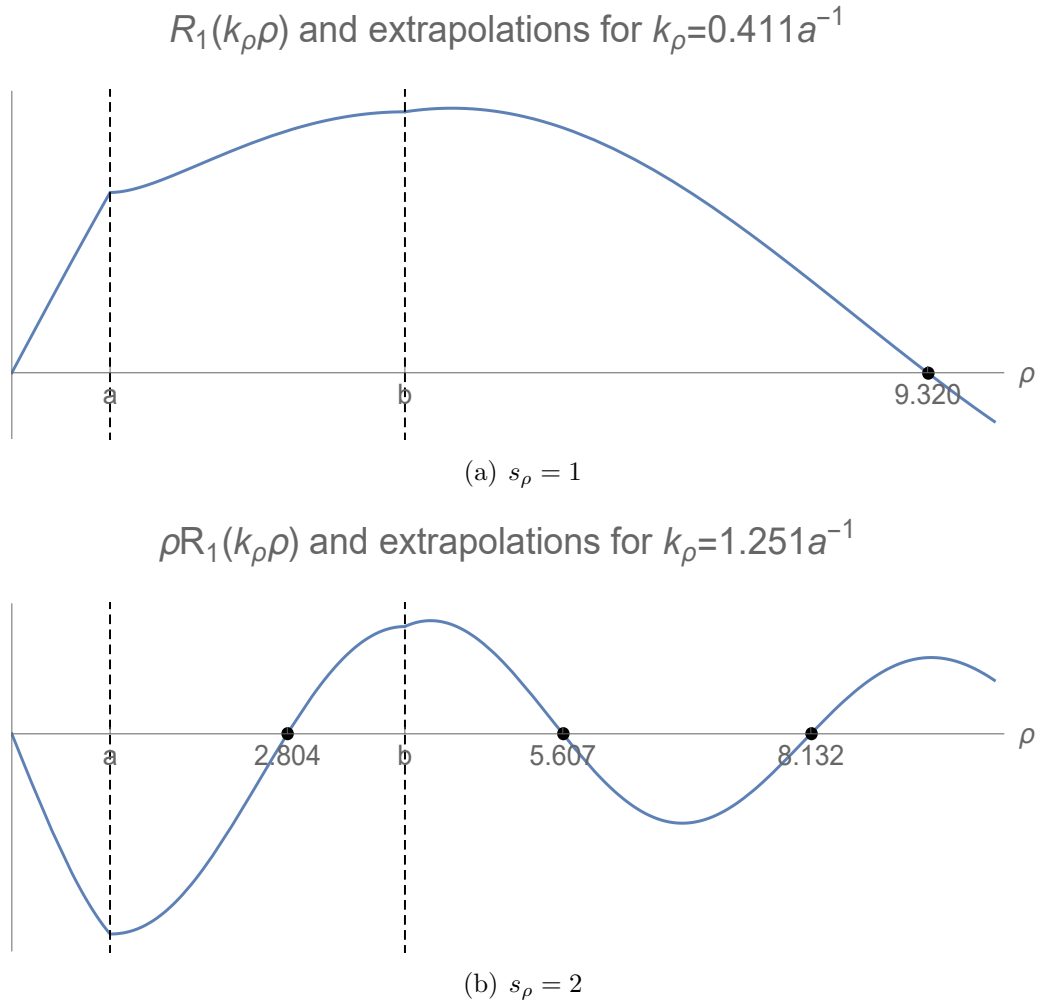
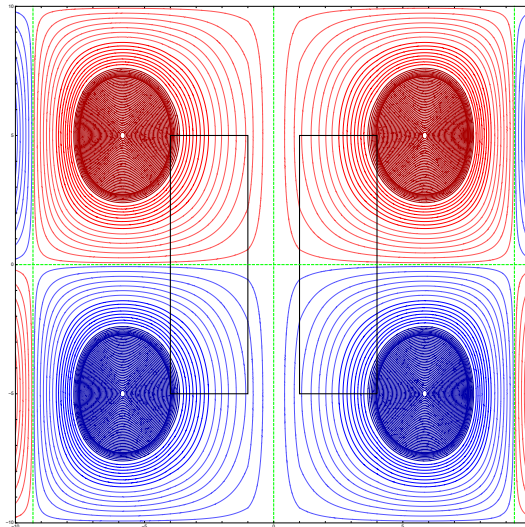
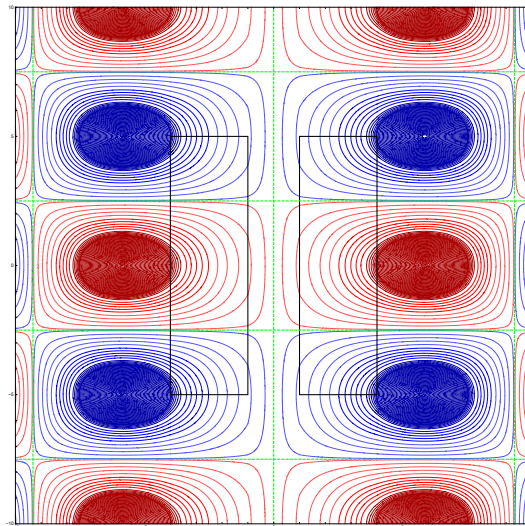


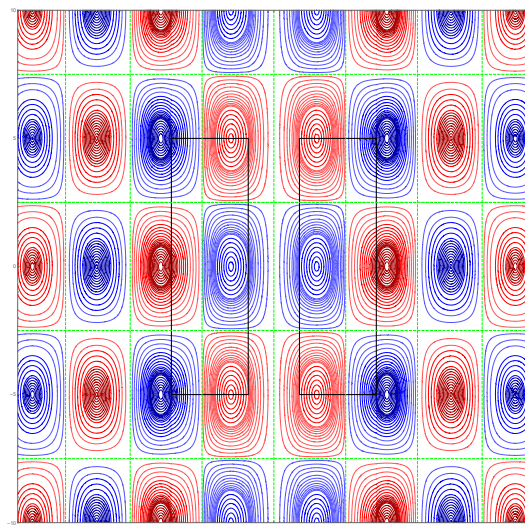
Figura 5.5: Funciones radiales $R_1(k_\rho\rho)$, soluciones de la ecuación de Helmholtz con condiciones de Frontera de Neumann, (2.22), así como sus extrapolaciones hacia afuera del toroide, en las regiones interior $\rho \in [0, a]$ y exterior $\rho \in [0, \infty]$. Se muestran los primeros dos multipolos (a) $k_{\rho,1} = 0.411/a$, (b) $k_{\rho,2} = 1.251/a$.



(a) (1,1)



(b) (2,1)



(c) (2,2)

Figura 5.6: Líneas de \mathbf{B}^{Mp} para antenas de radiación óptima de momentos magnéticos. Los modos (s_z, s_ρ) corresponden a los valores (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 0.411/a)$, (b) $(2\pi/h, 0.411/a)$, and (c) $(2\pi/h, 1.251/a)$.

5.2. Momentos Eléctricos

5.2.1. Cavidades de Resonancia

En la Figura 5.7 se muestran los modos (1, 1), (2, 1), (1, 2) y (2, 2) de cavidad resonante de momentos eléctricos. La ley de Gauss implica que las líneas de campo llegan perpendiculares a la superficie del toroide, lo que corresponde a las condiciones de frontera dadas por la Ec. (2.27) (véase Figura 5.3: $(\pi/h, 2.081/a)$, $(2\pi/h, 2.081/a)$, $(\pi/h, 3.132/a)$ y $(2\pi/h, 3.132/a)$, respectivamente).

El producto de los modos (n_z, n_ρ) cuentan ahora la cantidad de vórtices de radiación en el interior del toroide, presentes en la región encerrada por las separatrices colindantes a la superficie del toroide (verde sólido en la Figura 5.7). Las líneas que conectan con el toroide corresponden a las soluciones de la Ec. (4.9) para el campo \mathbf{E}^{El} ; mientras que los vórtices internos corresponden a las soluciones de la Ec. (4.10) para el campo \mathbf{E}^{Ep} . Se muestra de forma clara el significado físico de la diferencia de forma entre ambos conjuntos de líneas: las primeras satisfacen adecuadamente la ley de Gauss para la distribución de carga sobre el toroide, mientras que las segundas obedecen a la ley de inducción magnetoeléctrica de Faraday.

Es importante señalar que el valor de $k_\rho = 1.024/a$ (ver Figura 5.3) no es una solución físicamente aceptable. Este valor da lugar a un campo eléctrico estacionario, en que la región al interior del toroide donde la ley de Faraday domina no está presente. De ahí que los primeros dos modos radiales para cavidad resonante de momentos eléctricos son: $k_\rho = 2.081/a, 3.132/a$.

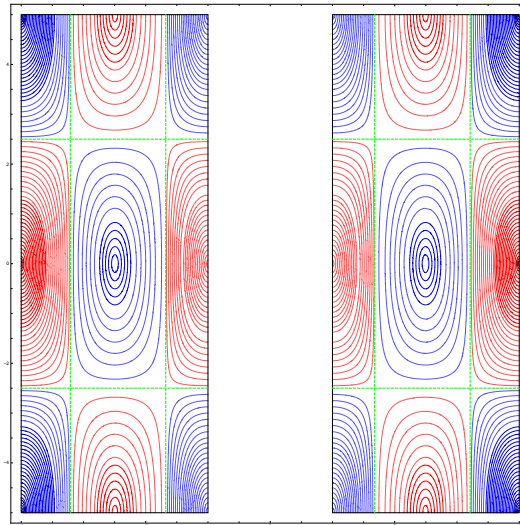
5.2.2. Antenas de Radiación Óptima

Los primeros modos de antena para momentos eléctricos (1, 1), (2, 1) y (1, 2) se muestran en la Figura 5.9. Los correspondientes valores de los modos (k_z, k_ρ) son: $(\pi/h, 1.112/a)$, $(2\pi/h, 1.112/a)$ y $(2\pi/h, 2.134/a)$. La condición de máxima eficiencia de antena implica que las líneas de campo partan de la superficie (o lleguen a la misma) con componente paralela nula, mientras que por el interior el campo sea tangente a la superficie. Ambas condiciones son consistentes con las soluciones de la Ec. (2.17), Figura 5.1.

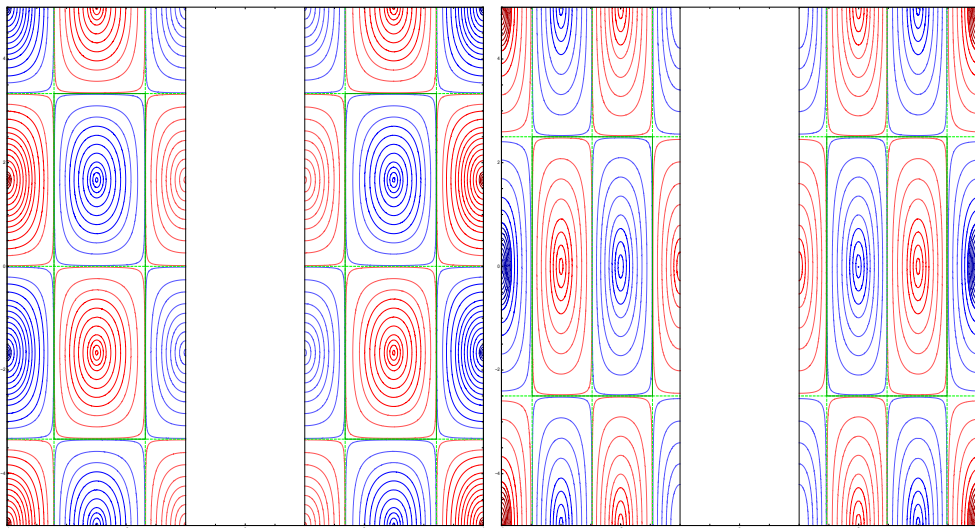
La Figura 5.8 muestra la dependencia radial para los modos $s_\rho = 1, 2$, la cual está dada por las soluciones de la Ec. (2.18) para el interior del toroide, así como sus extrapolaciones para el exterior del toroide de fuentes. Las raíces de la función radial con $s_\rho = 1$ corresponden a las posiciones de las separatrices en las Figuras 5.9 (a), (b); mientras que en la Figura 5.9 (c) las separatrices se encuentran en las raíces de la solución radial con

$s_\rho = 2$. De la misma forma se corresponden las posiciones de máxima amplitud del campo con los extremos de las soluciones radiales.

La característica que define a las antenas de momentos eléctricos se encuentra en la región cercana a la superficie toroidal, dibujada en negro sólido en la Figura 5.9. Las líneas del interior son cerradas y llegan tangenciales a la superficie, mientras que por fuera las líneas llegan, o bien salen, de la superficie de forma normal. Esto es debido a la presencia de la distribución de carga, acorde con la ley de Gauss. A su vez, la amplitud del campo en la superficie es máxima en los bordes externos del toroide donde la densidad de carga es máxima. Más allá de la región cercana, el campo presenta la estructura de vórtices con direcciones alternantes entre separatrices, lo cual es una consecuencia de la inducción electromagnética descrita por las leyes de Ampere-Maxwell y Faraday-Lenz.

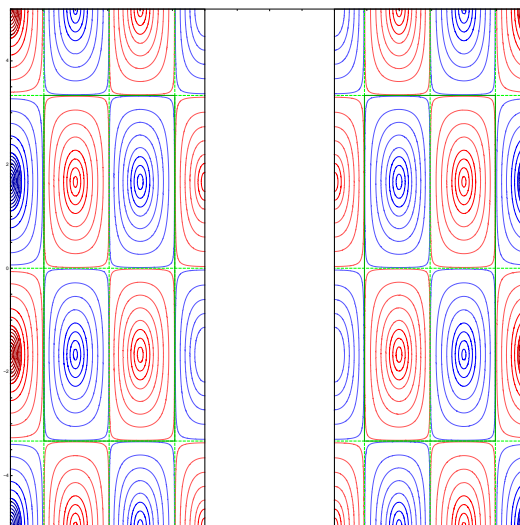


(a) (1,1)



(b) (2,1)

(c) (1,2)



(d) (2,2)

Figura 5.7: Líneas poloidales de \mathbf{E}^{El} y \mathbf{E}^{Ep} para los modos más bajos de cavidades resonantes de momentos eléctricos. Estos modos (n_z, n_ρ) corresponden a los valores (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 2.081/a)$, (b) $(2\pi/h, 2.081/a)$, (c) $(\pi/h, 3.132/a)$ y (d) $(2\pi/h, 3.132/a)$.

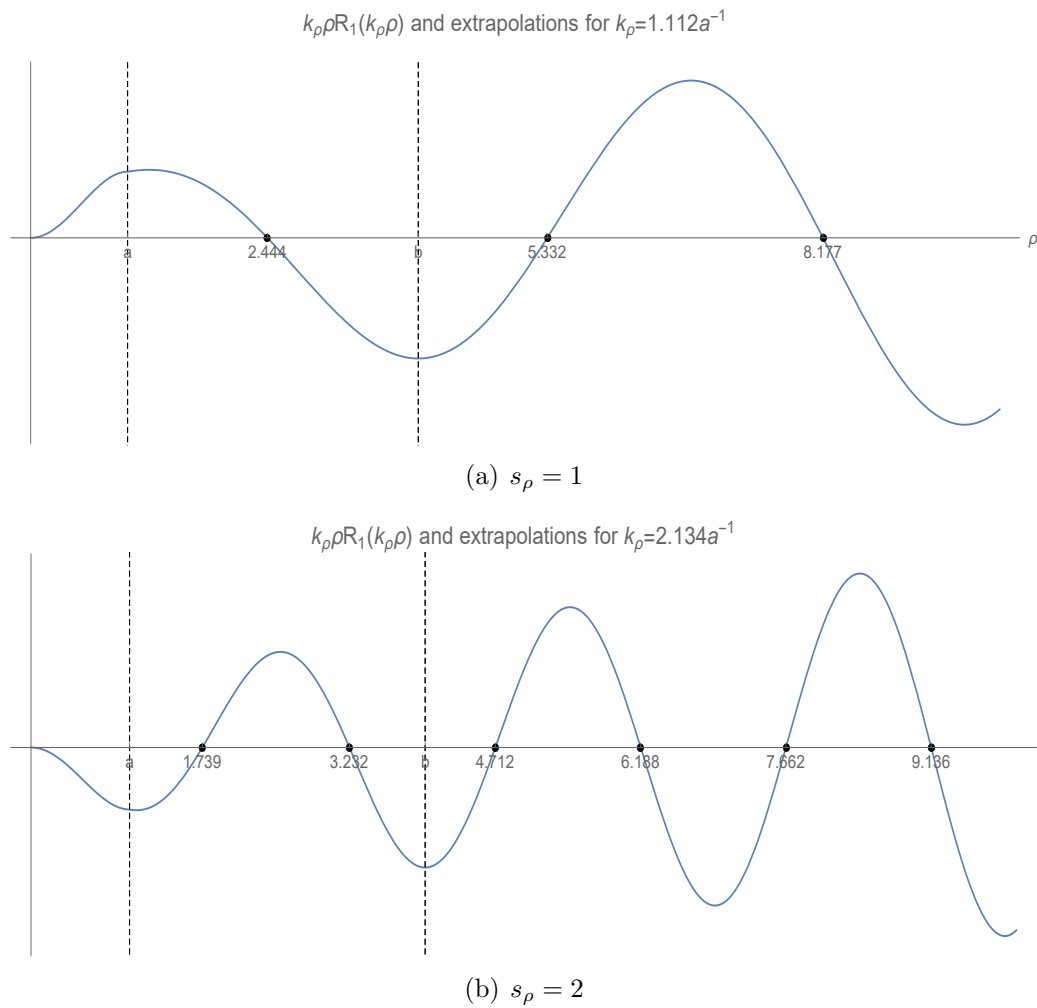
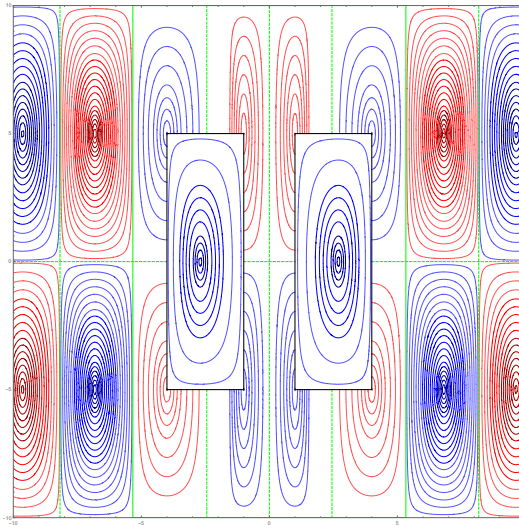
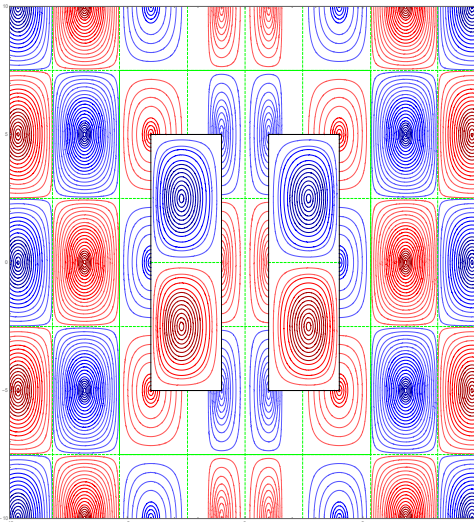


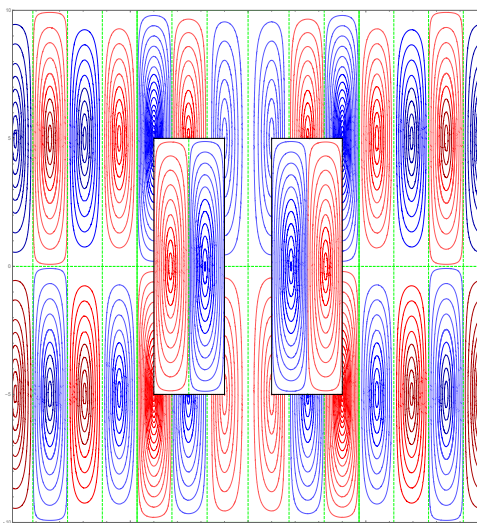
Figura 5.8: Gráfica de $k_\rho \rho R_1$, soluciones de la ecuación de Helmholtz con condiciones de Frontera dadas por la Ec. (2.17), así como sus extrapolaciones al exterior del toroide, para los multipolos: (a) $k_{\rho,1} = 1.112/a$, (b) $k_{\rho,2} = 2.134/a$. Su valor en cada posición ρ determina la dependencia radial del campo eléctrico en la Figura 5.9: sus raíces corresponden a las separatrices de las líneas, mientras que los extremos indican las regiones de amplitud máxima del campo.



(a) (1,1)



(b) (2,1)



(c) (1,2)

Figura 5.9: Líneas de \mathbf{E}^{El} y \mathbf{E}^{Ep} para antenas de radiación óptima de momentos eléctricos. Los modos (s_z, s_ρ) corresponden a valores (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 1.112/a)$, (b) $(2\pi/h, 1.112/a)$, and (c) $(2\pi/h, 2.134/a)$.

5.3. Momentos Toroidales

5.3.1. Cavidades de Resonancia

Las líneas de campo \mathbf{E}^{Tp} para los primeros modos de cavidad resonante (1, 1), (2, 1), (1, 2) y (2, 2) de momentos toroidales se muestran en la Figura 5.10. Observamos la naturaleza puramente transversal de las líneas, dada la ausencia de cargas distribuidas en la superficie.

Los valores de los correspondientes modos radiales $n_\rho = 1, 2$ corresponden a: $k_{\rho, n_\rho} = 1.024/a, 2.081/a$. A diferencia de las antenas de momentos eléctricos, el valor $k_\rho = 1.024/a$ en este caso lleva a campos físicamente aceptables para cavidades resonantes; notéese la similitud de las líneas de la Figura 5.10 con las del interior del toroide en la Figura 5.9.

5.3.2. Antenas de Radiación Óptima

La Figura 5.12 muestra las líneas de \mathbf{E}^{Tp} para los primeros modos de antena de momentos toroidales, con valores: (a) $(\pi/h, 1.112/a)$, (b) $(2\pi/h, 1.112/a)$, y (c) $(2\pi/h, 2.134/a)$.

En la Figura 5.12 se aprecia la estructura de vórtices del campo \mathbf{E}^{Tp} , incluso en las regiones que intersectan el interior y el exterior de la superficie. La amplitud del campo para la superficie del toroide es consistente con la Ley de Ampere, siendo los bordes externos del toroide puntos donde la densidad de corriente es máxima. Además, dada la ausencia de cargas superficiales, las líneas de \mathbf{E}^{Tp} son continuas incluso en la interfaz del toroide, donde salen ó llegan de forma normal a la superficie. Esto es característico de la condición de radiación óptima.

Las funciones radiales asociadas a los dos modos de antena $k_\rho = 1.112/a, 2.134/a$ se presentan en la Figura 5.11. Se puede observar que para ambos modos las funciones radiales $k_\rho \rho R_1$ extrapolan hacia fuera del toroide de forma suave, tanto en la cara cilíndrica interna $r = a$ como en la externa $r = b$.

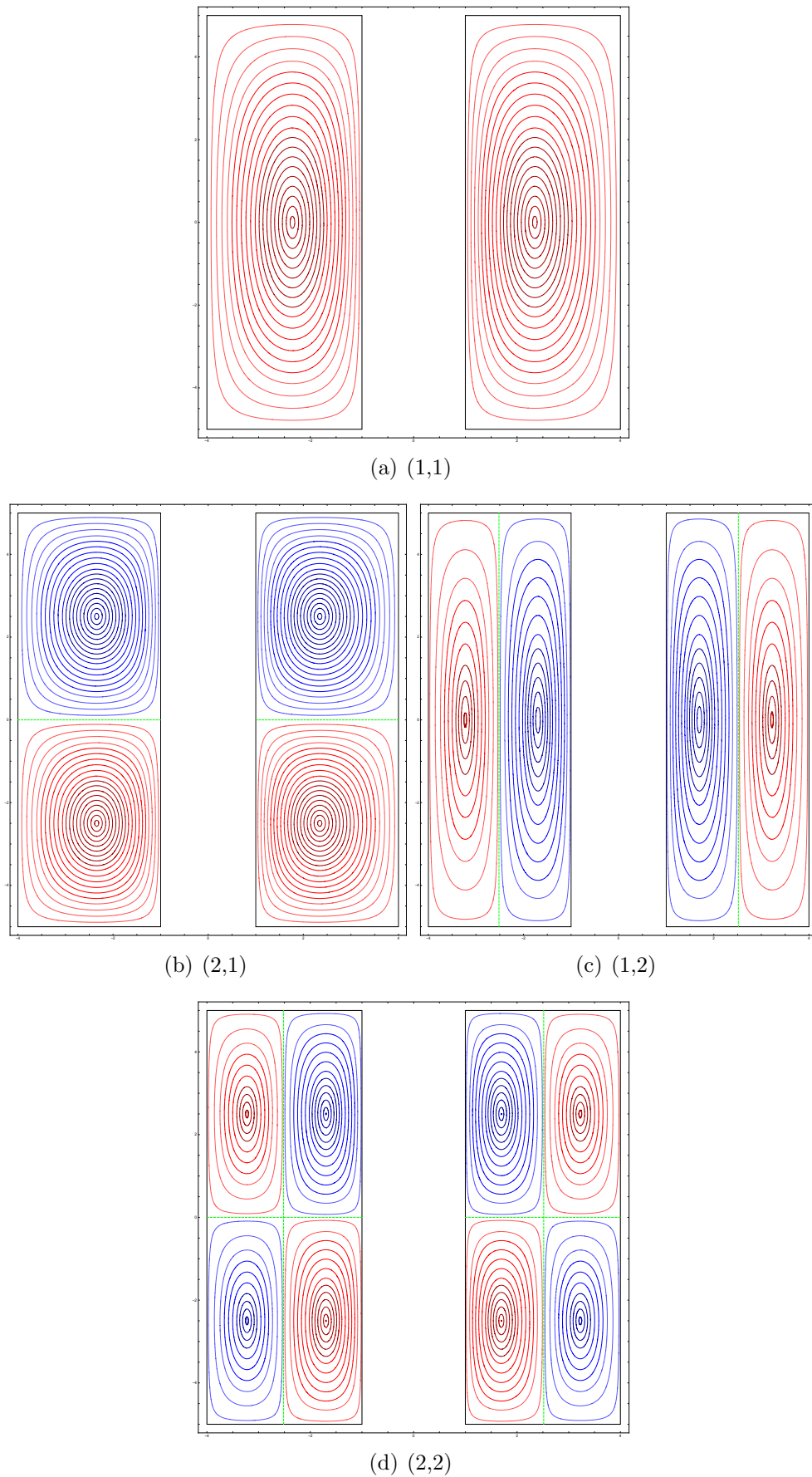


Figura 5.10: Líneas de \mathbf{E}^{Tp} para cavidades resonantes de momentos toroidales. Modos de cavidad (n_z, n_ρ) corresponden a (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 1.024/a)$, (b) $(2\pi/h, 1.024/a)$, (c) $(\pi/h, 2.081/a)$ y (d) $(2\pi/h, 2.081/a)$.

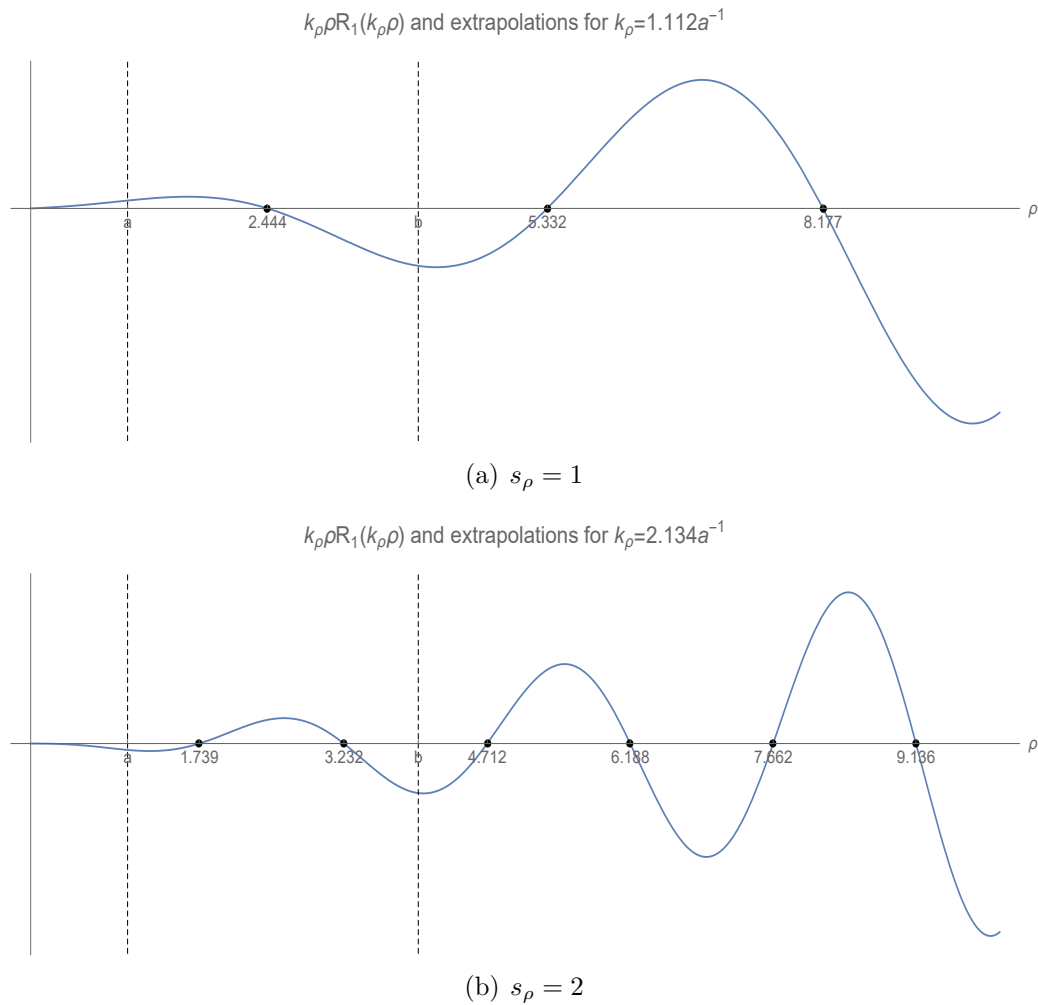
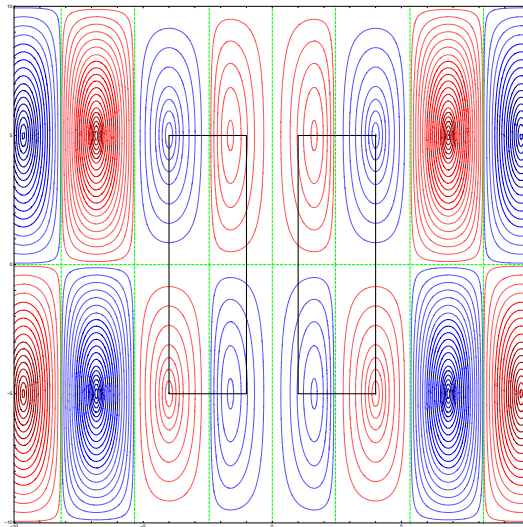
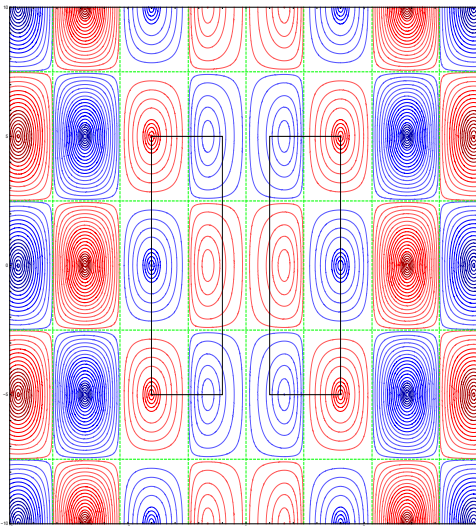


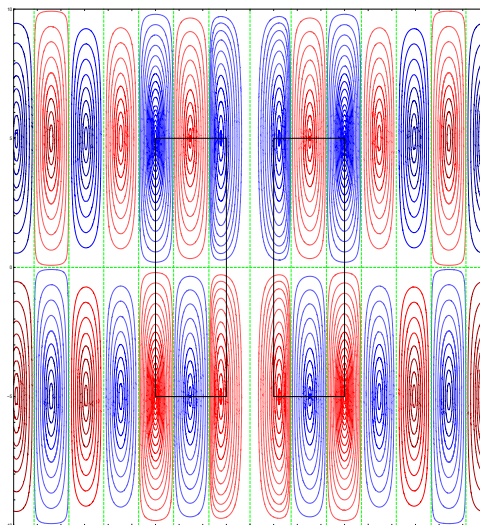
Figura 5.11: Gráfica de $k_\rho \rho R_1$, soluciones radiales a la ecuación de Helmholtz que satisfacen las condiciones de Frontera dadas por la Ec. (2.17), así como sus extrapolaciones que determinan la dependencia radial del campo \mathbf{E}^{Tp} en la Figura 5.12: las raíces determinan las separatrices de las líneas, mientras que los puntos extremos indican las regiones de máxima amplitud.



(a) (1,1)



(b) (2,1)



(c) (1,2)

Figura 5.12: Líneas de \mathbf{E}^{Tp} para antenas de radiación óptima de momentos toroidales. Modos de antena (s_z, s_ρ) corresponden a los valores (k_z, k_ρ) : (a) $(\pi/h, 1.112/a)$, (b) $(2\pi/h, 1.112/a)$, y (c) $(2\pi/h, 2.134/a)$.

5.4. Discusión comparativa

En las anteriores secciones hemos descrito las características de las líneas de los campos poloidales para cavidades y antenas de los tres momentos, así como su interpretación física. En este punto conviene identificar las diferencias y conexiones entre estos campos a través de sus líneas, a fin de esclarecer la independencia de las fuentes y campos entre distintos tipos de momentos.

Comenzando por las cavidades, Figuras 5.4, 5.7, 5.10, la estructura de los campos \mathbf{B}^{Mp} y \mathbf{E}^{Tp} es similar: forman vórtices que llenan el espacio del interior del toroide y son tangentes a cada separatriz, incluyendo la superficie del toroide mismo. Por el contrario, dada la presencia de la distribución de carga en la superficie, conectada con la fuente de corriente longitudinal \mathbf{J}^{El} , las líneas de campo en la Figura 5.7 presentan en la capa más cercana a la superficie un comportamiento distinto al de vórtices: las líneas salen y llegan de la superficie de forma normal en las cuatro caras. Entre una misma multipolaridad (n_z, n_ρ) , la paridad del campo entre los momentos toroidales y magnéticos alterna en relación al campo en la cavidad de momentos eléctricos, comparando por ejemplo Figuras 5.4(a) y 5.10(a) con 5.7(a).

Continuamos con la comparación de los campos poloidales para antenas en los tres momentos, Figuras 5.6, 5.9, 5.12. Para momentos magnéticos y toroidales, los campos \mathbf{B}^{Mp} y \mathbf{E}^{Tp} son transversales, dirección que heredan de sus correspondientes fuentes, \mathbf{F}^{Mp} y \mathbf{J}^{Tp} , respectivamente. Dada la ausencia de fuentes longitudinales, asociadas a densidades de carga como el caso de momentos eléctricos, es la forma común de las líneas entre \mathbf{B}^{Mp} y \mathbf{E}^{Tp} . Sus diferencias radican en las posiciones de las separatrices radiales.

Comparamos ahora las líneas de \mathbf{E} para momentos eléctricos y toroidales. El primero de ellos tiene fuentes longitudinal \mathbf{J}^{El} y transversal poloidal \mathbf{J}^{Ep} , mientras que el otro comparte con el primero sólo el carácter poloidal que hereda de su fuente \mathbf{J}^{Tp} . La principal diferencia en las Figuras 5.9 y 5.12 se encuentra en la región entre el toroide cilíndrico y los rectángulos nodales definidos por las separatrices más cercanas, donde la fuente longitudinal domina. Más allá de esta región, donde las fuentes poloidales dominan, ambos campos eléctricos \mathbf{E}^{Mp} y \mathbf{E}^{Tp} comparten una misma forma, pero con el factor extra de k^2 identificado para los momentos toroidales. Para ambos momentos, los modos de antena comparten los mismos valores del número de onda radial k_ρ .

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo se construyen las soluciones de los campos electromagnéticos para fuentes confinadas en superficies toroidales cilíndricas de momentos Magnéticos, Eléctricos y Toroidales, para los modos más bajos de cavidad de resonancia y de antena de óptima eficiencia. Se reconocen las diferencias y conexiones entre las soluciones de distintos momentos para sus líneas de campo en dos formas. Primero cuantitativamente, obteniendo los correspondientes valores de los números de onda k_ρ , k_z para cada modo, además de las separatrices y regiones de máxima amplitud del campo, Figuras 5.5, 5.8, 5.11. Además, se ilustran las conexiones y diferencias para los distintos momentos de forma cualitativa, a través de las gráficas de sus líneas de campo en la región cercana a la superficie, Figuras 5.4, 5.7 y 5.10 para cavidades, y Figuras 5.6, 5.9 y 5.12 para antenas.

Para cavidades, los modos radiales y axiales para momentos magnéticos y toroidales coinciden entre sí, mientras que las líneas, Figuras 5.4 y 5.10, reflejan el carácter transversal de ambos campos \mathbf{B}^{Mp} , \mathbf{E}^{Tp} , llenando el espacio entre separatrices con vórtices que alternan direccionalidades, llegando de forma tangencial a la superficie. En cambio, los modos radiales de cavidades de momentos eléctricos son diferentes, además que las líneas de campo de \mathbf{E}^{El} en la región entre la superficie del toroide y las separatrices más cercanas, exhiben la presencia de la distribución de carga, llegando de forma normal a la superficie. Para la región interior, dibujada en verde sólido en la Figura 5.7, el campo \mathbf{E}^{Ep} comparte la forma de vórtices con los campos \mathbf{B}^{Mp} y \mathbf{E}^{Tp} .

Las antenas de momentos magnéticos y toroidales difieren en sus modos radiales y axiales, a la par que las separatrices y regiones de máxima amplitud de los campos \mathbf{B}^{Mp} y \mathbf{E}^{Tp} en las Figuras (5.6) y (5.12), respectivamente. Aunque en ambos casos las líneas presentan una estructura de vórtices, en la región cercana a la superficie se exhiben las diferencias físicas asociadas a: la Ley de Ampere para el campo magnético \mathbf{B}^{Mp} , mostrándose discontinua en la componente tangencial a la superficie del toroide; y a la Ley de Faraday

para el campo eléctrico \mathbf{E}^{Tp} , el cual es continuo en las cuatro superficies del toroide. Por otro lado, las antenas de momentos eléctricos se muestran en la Figura 5.9. Los modos de antena de momentos eléctricos coinciden con los de momentos toroidales, lo que muestra que un aspecto fundamental para distinguir uno de otro momento es el campo en la región más cercana al toroide, donde se encuentran las diferencias sustanciales asociadas a la presencia de la carga superficial en el toroide, Ec. (3.4). Esto coincide con las propuestas en [16] de establecer la diferencia entre momentos eléctricos y toroidales a través de la región cercana a las fuentes.

Las expresiones para los campos electromagnéticos, Ecs. (4.2)-(4.8) se construyen a partir de la integración de la Función de Green, Ec. (2.29), con sus correspondientes fuentes: de momentos Eléctricos (3.3)-(3.6), momentos Magnéticos (3.7), (3.8), y de momentos Toroidales, Ecs. (3.9), (3.10). Las fuentes se construyen con base en un potencial escalar de Debye común, solución de la ecuación de Helmholtz homogénea con condiciones de Frontera definidas en el toroide cilíndrico al cual se le aplican sucesivamente los operadores de vectorización dados por el gradiente o componentes del operador de momento angular. Esta conexión entre fuentes constituye una propuesta novedosa que se puede extender a otros sistemas coordenados.

Por otra parte, el hecho que la superficie de frontera sea no-separable, es decir una región que no puede expresarse en términos de una sola variable para algún sistema de coordenadas, ha sido un impedimento para construir de forma analítica una función de Green para la Ec. de Helmholtz[35, 36]. En la Sección 2 del presente trabajo construimos las funciones de Green de onda saliente, (2.29), en términos de una expansión de eigen-soluciones de la ecuación de Helmholtz por dentro y por fuera de un toroide cilíndrico, una superficie no separable.

El presente trabajo presenta las bases para construir fuentes electromagnéticas de momentos: magnéticos, eléctricos y toroidales, distribuidas en la superficie de un toroide con simetría axial, y obtener expresiones analíticas para los correspondientes campos a los que dan origen. Como trabajo a futuro, se tienen las herramientas para extender las fuentes a una dependencia en φ , con la proyección del momento angular $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, a diferencia del caso $m = 1$ que aquí se presenta. Además, el presente método de Debye para construir las fuentes de los tres momentos tiene su extensión natural a otros sistemas coordenados, en particular para fuentes confinadas en toroides esféricos, formados por la intersección de superficies esféricas concéntricas con conos esféricos unidos por el vértice, donde se reconoce el rompimiento de simetría esférico, dando lugar a eigenfunciones asociadas con λ no entera y paridad definida [37].

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo para la realización de este trabajo, a través de Becas Nacionales 793451. Además, reconozco el apoyo financiero brindado por **UNAM-PAPIIT** a través del proyecto **IN111820**.

Resultados parciales de este trabajo fueron presentados en [38]. Las figuras de los Capítulos 2 y 5 han sido reproducidas con la autorización de Springer Nature.

Bibliografía

- [1] V. Savinov, V. A. Fedotov, and N. I. Zheludev, “Toroidal dipolar excitation and macroscopic electromagnetic properties of metamaterials,” *Phys. Rev. B*, vol. 89, p. 205112, May 2014.
- [2] I. B. Zel’dovich, “Electromagnetic interaction with parity violation,” *Soviet Phys. JETP*, vol. 6, 6 1958.
- [3] V. Dubovik and V. Tugushev, “Toroid moments in electrodynamics and solid-state physics,” *Physics Reports*, vol. 187, pp. 145–202, mar 1990.
- [4] G. N. Afanasiev and Y. P. Stepanovsky, “The electromagnetic field of solenoids with time-dependent currents,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 23, pp. 5755–5764, dec 1990.
- [5] G. N. Afanasiev and V. M. Dubovik, “Electromagnetic properties of a toroidal solenoid,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 25, pp. 4869–4886, sep 1992.
- [6] T. A. Gongora and E. Ley-Koo, “Complete electromagnetic multipole expansion including toroidal moments,” *Revista Mexicana de física E*, vol. 52, pp. 177 – 181, 2006.
- [7] E. E. Radescu and G. Vaman, “Exact calculation of the angular momentum loss, recoil force, and radiation intensity for an arbitrary source in terms of electric, magnetic, and toroid multipoles,” *Phys. Rev. E*, vol. 65, p. 046609, Apr 2002.
- [8] K. Marinov, A. D. Boardman, V. A. Fedotov, and N. Zheludev, “Toroidal metamaterial,” *New Journal of Physics*, vol. 9, pp. 324–324, sep 2007.
- [9] T. Kaelberer, V. A. Fedotov, N. Papasimakis, D. P. Tsai, and N. I. Zheludev, “Toroidal dipolar response in a metamaterial,” *Science*, vol. 330, pp. 1510–1512, nov 2010.

-
- [10] T. A. Raybould, V. A. Fedotov, N. Papasimakis, I. Kuprov, I. J. Youngs, W. T. Chen, D. P. Tsai, and N. I. Zheludev, “Toroidal circular dichroism,” *Phys. Rev. B*, vol. 94, p. 035119, Jul 2016.
- [11] N. Papasimakis, V. A. Fedotov, K. Marinov, and N. I. Zheludev, “Gyrotropy of a metamolecule: Wire on a torus,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 093901, Aug 2009.
- [12] V. A. Fedotov, A. V. Rogacheva, V. Savinov, D. P. Tsai, and N. I. Zheludev, “Resonant transparency and non-trivial non-radiating excitations in toroidal metamaterials,” *Scientific Reports*, vol. 3, p. 2967, oct 2013.
- [13] N. Papasimakis, V. A. Fedotov, V. Savinov, T. A. Raybould, and N. I. Zheludev, “Electromagnetic toroidal excitations in matter and free space,” *Nature Materials*, vol. 15, pp. 263–271, feb 2016.
- [14] A. E. Miroshnichenko, A. B. Evlyukhin, Y. F. Yu, R. M. Bakker, A. Chipouline, A. I. Kuznetsov, B. Luk’yanchuk, B. N. Chichkov, and Y. S. Kivshar, “Nonradiating anapole modes in dielectric nanoparticles,” *Nature Communications*, vol. 6, p. 8069, aug 2015.
- [15] S. Han, L. Cong, F. Gao, R. Singh, and H. Yang, “Observation of fano resonance and classical analog of electromagnetically induced transparency in toroidal metamaterials,” *Annalen der Physik*, vol. 528, pp. 352–357, mar 2016.
- [16] N. Talebi, *Near-Field-Mediated Photon–Electron Interactions*, ch. Toroidal Moments Probed by Electron Beams, pp. 81–118. Springer International Publishing, 2019.
- [17] B. B. V. Aken, J.-P. Rivera, H. Schmid, and M. Fiebig, “Observation of ferrotoroidic domains,” *Nature*, vol. 449, pp. 702–705, oct 2007.
- [18] N. A. Spaldin, M. Fiebig, and M. Mostovoy, “The toroidal moment in condensed-matter physics and its relation to the magnetoelectric effect,” *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 20, p. 434203, oct 2008.
- [19] M. Kimata, H. Chen, K. Kondou, S. Sugimoto, P. K. Muduli, M. Ikhlas, Y. Omori, T. Tomita, A. H. MacDonald, S. Nakatsuji, and Y. Otani, “Magnetic and magnetic inverse spin hall effects in a non-collinear antiferromagnet,” *Nature*, vol. 565, pp. 627–630, jan 2019.
- [20] A. Mook, R. R. Neumann, A. Johansson, J. Henk, and I. Mertig, “Origin of the magnetic spin hall effect: Spin current vorticity in the fermi sea,” *Phys. Rev. Research*, vol. 2, p. 023065, Apr 2020.

- [21] X. Zhang, Y. Zhou, K. M. Song, T.-E. Park, J. Xia, M. Ezawa, X. Liu, W. Zhao, G. Zhao, and S. Woo, “Skyrmion-electronics: writing, deleting, reading and processing magnetic skyrmions toward spintronic applications,” *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 32, p. 143001, jan 2020.
- [22] I. Fernandez-Corbaton, S. Nanz, and C. Rockstuhl, “On the dynamic toroidal multipoles from localized electric current distributions,” *Scientific Reports*, vol. 7, p. 7527, aug 2017.
- [23] C. G. Gray, “Multipole expansions of electromagnetic fields using debye potentials,” *American Journal of Physics*, vol. 46, pp. 169–179, feb 1978.
- [24] E. Ley-Koo, C. Esparza-López, and H. T. Bustamante, “Exact solutions for electromagnetic fields inside and outside a spherical surface with magnetic/electric dipole distributed sources,” *Revista Mexicana de Física E*, vol. 64, p. 139, jun 2018.
- [25] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics; 2nd ed.* New York, NY: Wiley, 1975.
- [26] G. B. Arfken and H.-J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. Boston: Elsevier, 6th ed., 2005.
- [27] K. M.L., K. A.I., and M. G.I., *Vector Analysis*. Mir Publishers Moscow, 1983.
- [28] “NIST Digital Library of Mathematical Functions.” <http://dlmf.nist.gov/>, Release 1.0.27 of 2020-06-15. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.
- [29] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, 1970.
- [30] J. McMahon, “On the roots of the bessel and certain related functions,” *Annals of Mathematics*, vol. 9, no. 1/6, pp. 23–30, 1894.
- [31] J. F. Bridge and S. W. Angrist, “An extended table of roots of $J'_n(x)Y'_n(\beta x) - J'_n(\beta x)Y'_n(x)$,” *Math. Comp.*, no. 16, pp. 198–204, 1962.
- [32] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*. IEEE PRESS, Piscataway, NJ: IEEE Press, 2007.
- [33] M. L. Boas, *Mathematical Methods In The Physical Sciences*. Wiley, 3 ed., 2006.

-
- [34] C. Bouwkamp and H. Casimir, “On multipole expansions in the theory of electromagnetic radiation,” *Physica*, vol. 20, no. 1-6, pp. 539–554, 1954.
- [35] J. Jean-Ming, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley, 3 ed., 2014.
- [36] T. Rother, M. Kahnert, A. Doicu, and J. Wauer, “Surface green function of the helmholtz equation in spherical coordinates,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol. 38, pp. 47–95, 2002.
- [37] E. Ley-Koo, A. Góngora, and H. Torres-Bustamante, “Spherical symmetry breaking in electric, magnetic and toroidal multipole moment radiations in spherical toroidal resonant cavities and optimum-efficiency antennas,” *Revista Mexicana de Física*, vol. 67, no. 2, pp. 174–179, 2021.
- [38] E. Ley-Koo and H. Torres-Bustamante, “Confinement in spherical and cylindrical toroids: A-electrons in quantum dots b-electromagnetic multipole sources and fields,” *Eur. Phys. J. D*, vol. 75, no. 4, p. 120, 2021.