



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES**

**Configuraciones de equilibrio de los gases ideales con  
constante cosmológica en Relatividad General**

**TESIS**

Que para optar por el grado de:

**Maestra en Ciencias (Física)**

Presenta:

**Rocío Belén Lucero**

Tutor principal:

**Dr. Roberto Allan Sussman Livovsky**  
Instituto de Ciencias Nucleares

Instituto de Ciencias Nucleares, Ciudad de México , Junio  
2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Lo mejor de nuestra piel,  
es que no nos deja huir.*

Patricio Rey

# Resumen

Estudiamos los efectos de la constante cosmológica  $\Lambda > 0$  en un gas ideal no-degenerado en equilibrio hidrostático, en el contexto de la Relatividad General. Específicamente, examinamos las modificaciones que introduce  $\Lambda$  en la dinámica y termodinámica en un sistema físico idealizado estático y esféricamente simétrico, analizando el gas no-relativista de Maxwell-Boltzmann, y el gas relativista de Maxwell-Jüttner.

Para esto, resolvimos las ecuaciones de Einstein considerando cada gas como fuente de campo gravitacional, sumado a  $\Lambda$ . Observamos que la constante cosmológica modifica las ecuaciones de equilibrio, lo cual sugiere que también estas modificaciones sucederían en un sistema en equilibrio hidrostático en presencia de energía oscura en un contexto cosmológico, ya que esta exhibe un comportamiento dinámico análogo a  $\Lambda$ .

De los dos gases analizados, nos enfocamos en el gas no-relativista de Maxwell-Boltzmann, por presentar ecuaciones más accesibles. Obtuvimos las soluciones numéricas de las funciones densidad de masa-energía en reposo  $\rho$  del sistema; su masa  $M$ ; y la dispersión de velocidad  $\sigma$ , la que se vincula de manera directa con la temperatura que pudiera tener el gas no colisional (por ejemplo, podría ser aplicable a un gas de estrellas de un sistema galáctico).

Encontramos que la presencia de la constante  $\Lambda$  funciona como un *reservorio térmico* ubicado en la región espacial asintótica del sistema. Si se tiene una  $\Lambda$  no nula, tanto la densidad de masa-energía en reposo como la dispersión de velocidad comienzan a oscilar a partir de un radio mínimo alrededor de un valor asintótico, lo que equivale a afirmar que en radios lo suficientemente grandes, sus valores se estabilizan. Esto contrasta con el caso de  $\Lambda$  nula, donde el comportamiento de las variables dinámicas son puramente decrecientes a medida que nos alejamos del centro del sistema esférico, y se recupera en el límite asintótico el espacio-tiempo de Minkowski.

Mientras más grande el valor de la constante cosmológica, el radio mínimo se acerca al centro, lo que indica que a mayor  $\Lambda$ , su influencia es más relevante en radios más cortos. La función de masa del sistema siempre es creciente, teniendo una tasa mayor de crecimiento mientras más constante cosmológica, la cual puede relacionarse con el aumento de energía oscura.

El efecto de la densidad central del sistema  $\rho_c$  en las soluciones, indica que a mayor densidad central, más se “aplaza” en el espacio la presencia de la constante cosmológica  $\Lambda$ , indicando que ambas densidades de energía predominan en diferentes regiones del

sistema. Cercano al centro del gas ideal de estrellas, se observa una clara superioridad de  $\rho_c$ , indicando que en esas regiones, la intervención de la constante cosmológica en la dinámica es despreciable. Al alejarnos del centro, la influencia de  $\Lambda$  se hace notoria, teniendo una zona de transición. Valores mayores de la densidad  $\rho_c$ , implican que el radio mínimo donde comienza las oscilaciones de las variables dinámicas, se aleje del centro del sistema, teniendo una preponderancia en regiones más apartadas.

Para analizar la estabilidad del gas ideal de Maxwell-Boltzmann, analizamos las zonas de inestabilidad geodésicas dadas por el potencial efectivo del sistema, al suponer órbitas circulares en el plano ecuatorial. Por medio de este enfoque, observamos que el radio de inestabilidad mínimo, que podemos interpretar como un radio de corte, es sensible al valor de  $\Lambda$  y a la dispersión de velocidad del sistema; sin embargo, el valor que tome  $\rho_c$  no influye en su posición.

A medida que  $\Lambda$  aumenta, el radio de inestabilidad se acerca al centro del sistema esférico. Esto es coherente con la idea de que la constante cosmológica gana predominio frente a otras densidades de energía presentes, y hace tender  $\rho_c$  y  $\sigma_c$  a valores asintóticos desde radios más cortos. Asimismo, si la dispersión de velocidades es mayor, el radio mínimo se aleja del centro.

También estudiamos la estabilidad del gas ideal por medio del calor específico, hallando que esta cantidad termodinámica, en presencia de una constante cosmológica no nula, también muestra un comportamiento oscilatorio a partir de un valor mínimo de masa del sistema (que es equivalente a tener un radio mínimo). El  $C_e$  se alterna de positivo a negativo, siendo el negativo una zona de inestabilidad. Si bien la masa aumenta, encontramos que la temperatura oscila alrededor de un valor asintótico. Esto acuerda con la idea de que la constante cosmológica cumple la función de ser un reservorio de térmico en la región asintótica del sistema galáctico.

La inestabilidad producida por el calor específico negativo, es análoga a la inestabilidad de Antonov, que se produce al analizar un gas encerrado en un recipiente en el marco de Relatividad. Esto nos da un punto de comparación en cuanto a la predicción de radios de cortes y lo que se espera observar en un sistema físico de escalas cósmicas, para tener un grado de coherencia con los estudios teóricos, y que de esta manera sea relevante y acorde con lo que se espera hallar en la Naturaleza.

# Tabla de Contenidos

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Resumen</b>  | <b>2</b>  |
| <b>1 Tensor de energía-momento de un fluido perfecto</b>                    | <b>5</b>  |
| 1.1 Descripción relativista de un fluido “polvo” . . . . .                  | 5         |
| 1.2 Fluido perfecto . . . . .   | 6         |
| 1.2.1 Leyes de conservación . . . . .                                       | 7         |
| 1.2.2 Límite newtoniano . . . . .   | 9         |
| <b>2 Teoría cinética relativista</b>  | <b>11</b> |
| 2.1 Ecuación de Boltzmann relativista . . . . .                             | 11        |
| 2.2 Función de distribución de Maxwell-Jüttner . . . . .                    | 14        |
| 2.3 Cantidades termodinámicas . . . . .                                     | 18        |
| 2.4 Límites no-relativista y ultra-relativista . . . . .                    | 20        |
| <b>3 Fundamentos de Relatividad General</b>                                 | <b>23</b> |
| 3.1 Tensor de curvatura y ecuaciones de Einstein . . . . .                  | 24        |
| 3.2 Corrimiento al rojo gravitacional y Principio de equivalencia . . . . . | 26        |
| 3.3 Límite newtoniano de las ecuaciones de Einstein . . . . .               | 27        |
| <b>4 Equilibrio hidrostático en simetría esférica</b>                       | <b>30</b> |
| 4.1 Simetría esférica . . . . .   | 30        |
| 4.1.1 Soluciones esféricas y estáticas . . . . .                            | 31        |
| 4.1.2 Ecuaciones de campo . . . . .   | 32        |
| 4.2 Solución de Schwarzschild . . . . .                                     | 33        |
| 4.2.1 Equilibrio hidrostático . . . . .                                     | 33        |
| 4.2.2 Solución “interior” de Schwarzschild . . . . .                        | 34        |
| <b>5 El Gas de Maxwell-Jüttner en equilibrio hidrostático</b>               | <b>36</b> |
| 5.1 El Gas de Maxwell-Jüttner en Relatividad General . . . . .              | 36        |
| 5.2 Variables termodinámicas . . . . .                                      | 37        |
| 5.3 Límites asintóticos . . . . .   | 39        |
| 5.3.1 Límite ultra-relativista . . . . .                                    | 40        |
| 5.3.2 Límite no-relativista . . . . .                                       | 40        |
| 5.3.3 Límite newtoniano: esfera isotérmica . . . . .                        | 41        |
| 5.4 Regímenes de transición relativistas . . . . .                          | 41        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 5.5      | Nociones de Termodinámica irreversible y Ley de Tolman . . . . .                                     | 45        |
| <b>6</b> | <b>Efectos dinámicos de la constante cosmológica</b>   | <b>47</b> |
| 6.1      | Ecuaciones de campo con constante cosmológica . . . . .  | 48        |
| 6.1.1    | Introducción de la constante cosmológica $\Lambda$ . . . . .   | 48        |
| 6.1.2    | Dinámica de la energía oscura . . . . .  | 49        |
| 6.2      | Interpretación de la constante cosmológica . . . . .   | 51        |
| 6.3      | Evidencia observacional de la energía oscura . . . . .   | 53        |
| 6.3.1    | Supernova tipo Ia . . . . .  | 53        |
| 6.3.2    | La edad del Universo . . . . .   | 56        |
| 6.3.3    | Fondo de Radiación Cósmica (CMB) . . . . .   | 57        |
| <b>7</b> | <b>Equilibrio hidrostático de los gases y la constante cosmológica</b>                               | <b>60</b> |
| 7.1      | Ecuaciones de campo . . . . .  | 60        |
| 7.1.1    | Gas de Maxwell-Boltzmann no relativista . . . . .  | 61        |
| 7.1.2    | Gas relativista de Maxwell-Jüttner . . . . .   | 61        |
| 7.1.3    | Escalas de longitud y masa . . . . .   | 62        |
| 7.2      | Gases relativistas y constante cosmológica: existencia y estabilidad de órbitas circulares . . . . . | 63        |
| 7.2.1    | Definición de variables adimensionales . . . . .   | 65        |
| 7.2.2    | Gas de Maxwell-Boltzmann . . . . .   | 66        |
| 7.2.3    | Temperatura asintótica del gas de MB . . . . .   | 67        |
| <b>8</b> | <b>Resultados</b>  | <b>69</b> |
| 8.1      | Dependencia en la constante cosmológica $\Lambda$ . . . . .  | 70        |
| 8.2      | Dependencia en la densidad central $\rho_c$ . . . . .  | 72        |
| 8.3      | Estabilidad . . . . .  | 75        |
| 8.3.1    | Radio mínimo de inestabilidad . . . . .  | 76        |
| 8.3.2    | Calor específico . . . . .   | 79        |
| 8.4      | Temperatura asintótica . . . . .   | 83        |
| 8.4.1    | Temperatura asintótica en función de $\Lambda$ . . . . .   | 84        |
| 8.4.2    | Temperatura asintótica en función de $\rho_c$ . . . . .  | 84        |
| <b>9</b> | <b>Conclusiones</b>  | <b>87</b> |

# Capítulo 1

## Tensor de energía-momento de un fluido perfecto

### 1.1 Descripción relativista de un fluido “polvo”

Un sistema se puede considerar como un continuo cuando el número de elementos que lo constituye es tan grande, que sus propiedades principales pueden ser descritas a través de cantidades promedios, por ejemplo la densidad de energía, presión y temperatura. Un fluido se define como un continuo. En este sentido, el comportamiento individual de cada partícula deja de ser importante, y se estudia al sistema como una colección de partículas que conforman un elemento lo suficientemente pequeño, al que se le asigna en cada punto un valor promedio [1].

Para la descripción de un fluido, consideramos un campo de cuadri-velocidades asociadas a cada elemento de volumen de partículas, sin considerar la dinámica que las gobierna. Además, se asume que cada porción es aproximadamente homogénea. Así, las cantidades promedio que lo describen son las mismas en cualquier parte del elemento, y varían suavemente de punto a punto.

El fluido más simple que podemos modelar es el “polvo”. Este, es un conjunto de partículas que se encuentran en reposo en un sistema de referencia de Lorentz [2]. Dichas partículas tienen una masa  $m$ , y en un sistema de referencia momentáneamente comóvil (SRMC), equivale a la energía (aquí tomaremos  $c = 1$ ). Así, la densidad de energía es dada por  $\rho = mn$ , donde  $n$  es la densidad de número de partículas por unidad de volumen. En un sistema de referencia no comóvil (SRNC), la densidad de número de partículas es igual a  $n/(1 - v^2)^{1/2}$ , y la energía de cada partícula en movimiento es igual a  $m/(1 - v^2)^{1/2}$ . En este caso, la densidad de energía  $\rho_{nc}$  es

$$\rho_{nc} = \frac{mn}{1 - v^2}.$$

En el SRMC la única componente de la cuadri-velocidad diferente de cero es  $u_{com}^\alpha = (1, \vec{0})$ , mientras que el cuadri-vector de flujo de número  $N^\alpha$ , definido como el número de partículas que cruzan un área por unidad de tiempo  $N^\alpha = nu^\alpha$ , toma la forma  $N_{com}^\alpha = (n, \vec{0})$ .



## 6 CAPÍTULO 1. TENSOR DE ENERGÍA-MOMENTO DE UN FLUIDO PERFECTO

Si tenemos un SRNC, en el que la 4-velocidad es  $u^\alpha = \gamma(1, \vec{v})$ , el flujo de partículas toma la forma  $N^\alpha = \gamma(n, n\vec{v})$ , donde  $\gamma$  es el factor de Lorentz y  $\vec{v}$  es la velocidad de las partículas. Las distintas expresiones de  $N^\alpha$  en los dos marcos de referencia, SRMC y SRNC, se relacionan mediante  $N^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta N^\beta$ , donde  $\Lambda^\alpha_\beta$  es la matriz de transformación de Lorentz.

El vector  $N^\alpha$  satisface la conservación del número de partículas

$$N^\alpha_{,\alpha} = 0, \quad (1.1)$$

que implica la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t}(\gamma n) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma n v^i) = 0. \quad (1.2)$$

En el límite no relativista,  $n \approx \rho_{nc}/m$  y  $\gamma \approx 1$ , se recupera la ecuación de continuidad de la densidad de energía:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.3)$$

Por otra parte, definimos el tensor de energía-momento  $T^{\alpha\beta}$  como el flujo de cuadrimomento  $p^\alpha$  que cruza una superficie constante  $x^\beta$  [1]. Para un fluido modelado como polvo, las componentes de  $T^{\alpha\beta}$  en un SRMC son las siguientes:

$$T^{\alpha\beta}_{com} = \rho u^\alpha u^\beta, \quad (1.4)$$

por lo que

$$T^{00}_{com} = \rho = mn, \quad \text{y} \quad T^{0i} = T^{i0} = T^{ij} = 0. \quad (1.5)$$

Las últimas expresiones indican que las partículas de polvo en este sistema se encuentran en reposo, a causa de que el 3-vector de momento es nulo. Como consecuencia, se tiene que tanto las componentes de densidad de energía, como de flujo de momento en la dirección  $i$ , se anulan. Tampoco existe flujo de energía ( $T^{0i} = 0$ ).

En las ecuaciones (1.4), tenemos que  $u^\alpha$  es un cuadri-vector, lo que da su validez en cualquier sistema de referencia, y satisface la ecuación de conservación:

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0, \quad (1.6)$$

la cual incluye la ecuación (1.1). Por otra parte, de la ecuación (1.5) vemos que  $T^{\alpha\beta}$  es simétrico, y está dado por la ecuación tensorial:

$$T^{\alpha\beta} = nm u^\alpha u^\beta = \rho u^\alpha u^\beta. \quad (1.7)$$

### 1.2 Fluido perfecto

En la Relatividad, un fluido perfecto se define como aquel que no tiene viscosidad ni conducción de calor en su SRMC, lo que implica que  $T^{0i}_{com} = T^{i0}_{com} = 0$  [2]. Lo primero, significa que no existe conducción de calor en ninguna dirección; lo segundo,

que la densidad de momento en la dirección  $i$  es igual a cero, ya que las partículas están en reposo. Por otra parte, tenemos que la viscosidad –que entendemos como una fuerza paralela a las interfases que existen entre los elementos de volumen del fluido– es cero. La ausencia de viscosidad indica que las únicas fuerzas presentes deben ser perpendiculares a las interfases, esto implica que  $T^{ij} = 0$  al menos que  $i = j$ . Dichas fuerzas las identificamos con la presión  $P$ , de manera que el tensor de energía-momento para un fluido perfecto está dado, en su SRMC, por:

$$T^{\alpha\beta}_{com} = \text{diag}(\rho, P, P, P), \quad (1.8)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía medida en el marco de reposo. La ecuación (1.8) se puede reescribir como

$$T^{\alpha\beta}_{com} = \rho u^\alpha u^\beta + P h^{\alpha\beta}, \quad (1.9)$$

donde  $h^{\alpha\beta} = u^\alpha u^\beta + \eta^{\alpha\beta}$  es el tensor de proyección, con  $\eta^{\alpha\beta}$  el tensor métrico. La forma de (1.8) es covariante, válida en todo sistema de referencia, y cumple con (1.6). La expresión (1.9) corresponde al tensor de energía-momento de un flujo que se encuentra en equilibrio térmico, y cumple con la primera ley de la termodinámica.

Si bien la definición de  $T^{\alpha\beta}$  es general, en el caso particular de SRMC tenemos que

$T^{00}$  densidad de energía;

$T^{0i}$  flujo de energía. Aunque en este sistema no hay movimiento de las partículas, puede haber flujo de energía a causa de la conducción de calor;

$T^{i0}$  densidad de momento  $i$ . Nuevamente, si bien no hay movimiento, a la energía en movimiento se le puede asociar un momento;

$T^{ij}$  flujo de momento  $i$ .

Las componentes espaciales  $T^{ij}$  representan a las fuerzas entre dos elementos de fluidos, y sólo consideramos fuerzas perpendiculares a las interfaces –sin viscosidad–. Como consecuencia,  $T^{ij}$  es una matriz diagonal. La condición de viscosidad nula, es independiente del marco de referencia, por esto  $T^{ij} = P\delta^{ij}$ , ya que la única matriz diagonal en todos los sistemas de referencia es la identidad [2].

Otra característica que se desprende de la forma de  $T^{ij}$  –que representa la presión en las distintas direcciones–, es su carácter isotrópico. Aquí, la presión  $P$  es la fuerza que un elemento de fluido ejerce en su entorno, y tenemos que no hay dirección predilecta.

### 1.2.1 Leyes de conservación

La primera ley de la Termodinámica establece la conservación de la energía de un sistema. Esta, expresa que la variación de la energía interna, debe ser igual a la suma de las cantidades de calor y trabajo que el sistema intercambia con sus alrededores, de manera que  $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$ . Si el trabajo que intercambia el sistema es de la forma  $\Delta W = P\Delta V$ , entonces la primera ley se escribe como  $\Delta Q = \Delta U + P\Delta V$ , donde  $V$  es el 3-volumen de un elemento de fluido.

Si consideramos que un elemento de volumen intercambia energía con sus alrededores mediante conducción de calor y trabajo por medio de incrementos infinitesimales, la energía que gana (o pierde) ese elemento está dada por:

$$dQ = dU \pm dW, \quad (1.10)$$

## 8 CAPÍTULO 1. TENSOR DE ENERGÍA-MOMENTO DE UN FLUIDO PERFECTO

donde  $U = \mu V = \mu N/n$ , y es la energía interna del sistema.

Además, suponemos que el número de partículas de este elemento de volumen no varía, es decir:

$$dV = -\frac{N}{n^2}dn. \quad (1.11)$$

Con esto en mente, podemos reescribir (1.10) de la siguiente manera

$$dQ = \frac{N}{n}d\mu - N(\mu + P)\frac{dn}{n^2}. \quad (1.12)$$

Si definimos  $q \equiv Q/N$ , la ecuación (1.12) toma la forma

$$ndq = d\mu - \frac{\mu + P}{n}dn. \quad (1.13)$$

Por otra parte, sabemos que el estado de un fluido puede quedar determinado únicamente por  $\mu$  y  $n$ , por lo que definimos A y B como funciones que sólo dependen de  $\mu$  y  $n$ , de manera que:

$$d\mu - \frac{\mu + P}{n}dn \equiv AdB, \quad (1.14)$$

donde identificamos estas funciones como  $A/n = T$  y  $B = S$ , donde  $T$  se refiere a la temperatura del sistema y  $S$  a la entropía específica. Por lo que reescribimos (1.13) como

$$nTdS = d\mu - \frac{(\mu + P)dn}{n}. \quad (1.15)$$

En esta ecuación  $dS$  es una uno-forma, de modo que si  $S = S(x^\alpha)$ , sus componentes están dadas como  $dS = S_{,\alpha}dx^\alpha$ , por lo que escribimos (1.10) como

$$nTS_{,\alpha} = \mu_{,\alpha} - (\mu + P)\frac{n_{,\alpha}}{n}, \quad (1.16)$$

con  $S_{,\alpha} \equiv \partial S / \partial x^\alpha$ . Por otro lado, si el tensor (1.9) cumple con la ley de conservación (1.6), tenemos que:

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = [(\mu + P)u^\alpha u^\beta + P\eta^{\alpha\beta}]_{,\beta} = 0. \quad (1.17)$$

De modo que el primer término de (1.17) lo reescribimos como

$$[(\mu + P)u^\alpha u^\beta]_{,\beta} = nu^\beta \left( \frac{\mu + P}{n} u^\alpha \right)_{,\beta}. \quad (1.18)$$

Si sustituimos esta última en (1.17) y recordando que  $\eta^{\alpha\beta}$  es constante, se sigue que

$$nu^\beta \left( \frac{\mu + P}{n} u^\alpha \right)_{,\beta} + P_{,\beta} \eta^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.19)$$

de manera que, si contraemos con  $u_\alpha$  tenemos que:

$$nu^\beta u_\alpha \left( \frac{\mu + P}{n} u^\alpha \right)_{,\beta} + P_{,\beta} \eta^{\alpha\beta} u_\alpha = 0, \quad (1.20)$$

y recordando que  $u^\alpha{}_{,\beta}u_\alpha = 0$  y que  $u^\alpha u_\alpha = -1$ , se sigue que

$$-u^\beta \left[ \mu_{,\beta} - \frac{(\mu + P)}{n} n_{,\beta} \right] = 0. \quad (1.21)$$

Por definición  $u^\beta \mu_{,\beta} = (\partial\mu/\partial x^\beta)(dx^\beta/d\tau) = d\mu/d\tau$ , por lo que tenemos que

$$\frac{d\mu}{d\tau} - \frac{(\mu + P)}{n} \frac{dn}{d\tau} = 0. \quad (1.22)$$

De manera que, comparando con (1.16), llegamos a que

$$\frac{dS}{d\tau} = 0, \quad (1.23)$$

lo que significa que la conservación de partículas en el fluido perfecto implica que se conserve la entropía específica.

Si ahora identificamos el vector  $J^\alpha = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$ , la ley de conservación se expresa como:

$$J^\alpha = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0, \quad (1.24)$$

de modo que podemos descomponer este vector en su componente paralela y perpendicular a la 4-velocidad, por lo que:

$$\begin{aligned} \text{si } u_\alpha J^\alpha = 0 &\rightarrow \dot{\mu} + (\mu + P)u^\alpha{}_{,\alpha} = 0, \\ \text{si } h_{\alpha\beta} J^\beta = 0 &\rightarrow \bar{\nabla}P + (\mu + P)u^\alpha{}_{,\beta}u^\beta = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que

$$u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = u_0 T^{00}{}_{,0} + u_i T^{ij}{}_{,j} = 0, \quad (1.25)$$

donde  $u_\alpha = \gamma(1, v^i)$ , por lo que de (1.8), (1.24) y (1.25) se sigue

$$\gamma\mu_{,0} + \gamma v^i P_{,i} = 0, \quad (1.26)$$

pero en el límite newtoniano, donde  $\gamma \approx 1$ , podemos reescribir (1.26) como

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \bar{v}\bar{\nabla}P = 0, \quad (1.27)$$

donde el primer término se refiere a la derivada temporal de la densidad de energía en reposo y el segundo es la potencia, de manera que (1.27) es la ecuación de balance de energía.

### 1.2.2 Límite newtoniano

Para analizar el caso newtoniano, comenzamos manipulando la componente perpendicular de la corriente que involucra las velocidades, de la siguiente manera:

$$u^\alpha{}_{,\beta}u^\beta = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{du^\alpha}{d\tau}, \quad (1.28)$$

10CAPÍTULO 1. TENSOR DE ENERGÍA-MOMENTO DE UN FLUIDO PERFECTO

pero en el límite newtoniano  $du^\alpha/d\tau \approx du^\alpha/dt$ , y la cuadri-velocidad  $u^\alpha = \gamma(1, \bar{v})$ , toma la forma  $u^\alpha \approx (1, \bar{v})$ , de manera que

$$\frac{du^0}{d\tau} \approx \frac{du^0}{dt} = 0 \quad \text{mientras que} \quad \frac{du^i}{d\tau} \approx \frac{du^i}{dt}. \quad (1.29)$$

Además, del primer término de la corriente perpendicular, tenemos que

$$\bar{\nabla}^\alpha = h^{\alpha\beta} P_{,\beta}, \quad \text{pero} \quad h^{00}_{com} u^0 u^0 + \eta^{00} = 0, \quad h^{ij} = \delta^{ij},$$

por lo que

$$\bar{\nabla}^i P = \delta^{ij} P_{,j}. \quad (1.30)$$

En el límite newtoniano  $P \ll \rho$  y  $\rho \approx \mu$ . Con esto en mente, y de las expresiones (1.29) y (1.30), obtenemos que la ecuación proyección perpendicular de la corriente queda como

$$\nabla P + \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = 0, \quad (1.31)$$

donde el primer término es el gradiente de fuerzas, mientras que el segundo es el producto de la densidad de masa-energía de las partículas multiplicadas por la aceleración, por lo que (1.31) es la ecuación de fuerzas de un fluido. Las ecuaciones (1.27) y (1.31) son consistentes con un fluido newtoniano que se encuentran en equilibrio térmico.

Así, hemos encontrado las propiedades del tensor  $T^{\alpha\beta}$  de un fluido perfecto, que consideraremos como la fuente del campo gravitacional. La generalización de las ecuaciones newtonianas, son las ecuaciones de campo de Einstein, que analizaremos en los capítulos subsiguientes.

## Capítulo 2

# Teoría cinética relativista

### 2.1 Ecuación de Boltzmann relativista

En este capítulo, presentaremos los conceptos básicos de la teoría cinética relativista (TCR), y las ecuaciones de estado que describen a un gas ideal relativista no-degenerado. Esta teoría está construida de manera similar que la teoría cinética clásica, con una ecuación de Boltzmann que determina la evolución temporal de la función de distribución. La descripción macroscópica del sistema la podemos obtener a través de sus momentos, y es conocida como distribución de Maxwell-Jüttner.

Al igual que en el caso clásico, cuando la función de distribución tiende al equilibrio, se obtiene el *teorema H*. Partiendo de la ecuación de Maxwell-Jüttner, derivamos la ecuación de estado y las cantidades termodinámicas más relevantes del sistema. Sin embargo, en el caso de TCR, es necesario obtener estas expresiones en términos de escalares invariantes.

En la teoría cinética relativista, un gas cuyas partículas poseen masa  $m$  en reposo, se caracteriza a través de sus coordenadas de espacio-tiempo ( $x^\alpha$ ) y de momento ( $p^\alpha$ ), de manera que su función de distribución queda definida en términos de dichas coordenadas como

$$f(x^\alpha, p^\alpha) d^3x d^3p. \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) se refiere al número de partículas que se encuentran en un elemento de volumen  $d^3x$  alrededor de  $x$  y posee un momento en un rango  $d^3p$  alrededor de  $p$ , a un tiempo dado [3]. Para hallar la ecuación de transporte, de la cual es solución (2.1), escribimos el 4-flujo de partículas  $N^\alpha$  en función de (2.1) como

$$N^\alpha(x) = c \int \frac{d^3p}{p^0} p^\alpha f(x, p). \quad (2.2)$$

Cada una de estas partículas describe una línea universo en el espacio-tiempo de Minkowski, de manera que si consideramos una porción  $\Delta^4x$  de este espacio, encerrada por los elementos de superficie  $\Delta^3\sigma$  y  $\Delta^3\sigma'$ , y por la superficie de un tubo que contiene estas trayectorias (Fig. 2.1), entonces podemos escribir el número de líneas universo

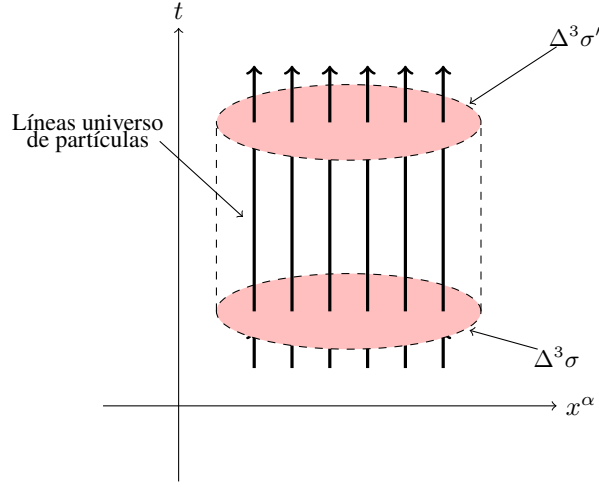


Fig. 2.1: Líneas universo de partículas que cruzan a través de las superficies  $\Delta^3\sigma$  y  $\Delta^3\sigma'$ , encerradas en una porción del espacio-tiempo de Minkowski.

que cruzan segmentos  $\Delta^3\sigma$  y  $\Delta^3\sigma'$  con momento en el rango  $\Delta^3p$  como

$$\Delta N(x, p) = \int_{\Delta^3\sigma'} \int_{\Delta^3p} d^3\sigma_\alpha N^\alpha(x) - \int_{\Delta^3\sigma} \int_{\Delta^3p} d^3\sigma_\alpha N^\alpha(x) = 0, \quad (2.3)$$

donde  $d^3\sigma_\alpha$  es un 4-vector tipo tiempo cuyas componentes son  $(d^3x^0, 0, 0, 0)$  [4].

Cuando no existen colisiones entre partículas, las líneas universo no cruzan la superficie del tubo, de manera que a partir de (2.3), podemos ver que el flujo total de líneas universo que atraviesan la superficie  $\Delta^3\sigma$  del elemento  $\Delta^4x$ , está dado por

$$\Delta N(x, p) = \int_{\Delta^3\sigma} \int_{\Delta^3p} d^3\sigma_\alpha N^\alpha(x) = 0. \quad (2.4)$$

Si sustituimos (2.2) en (2.4), y utilizando el teorema de Gauss, obtenemos que

$$\int_{\Delta^4x} \int_{\Delta^3p} d^4x \frac{d^3p}{p^0} p^\alpha \frac{\partial f(x, p)}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (2.5)$$

Como los intervalos  $\Delta^4x$  y  $\Delta^3p$  son arbitrarios, se tiene que

$$p^\alpha \frac{\partial f(x, p)}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (2.6)$$

que en su forma vectorial se escribe como

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \right) f(x, p) = 0, \quad (2.7)$$

donde la 3-velocidad es  $\bar{u} = c\bar{p}/p^0$ . La expresión (2.7) se conoce como la ecuación Boltzmann relativista para un gas sin colisiones entre sus partículas, y esta rige la evolución en el tiempo de la función de distribución (2.1).

Si consideramos que las partículas del gas sí colisionan, y en ausencia de fuerzas externas, la ecuación de Boltzmann relativista (2.7) toma la forma

$$p^\alpha \frac{\partial f(x, p)}{\partial x^\alpha} = C(x, p) \quad \text{o bien} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \right) f(x, p) = C(x, p), \quad (2.8)$$

donde  $C(x, p)$  es una función invariante que corresponde al término colisional [4]. Para hallar esta función debemos tener en cuenta que:

- i) Entre las partículas, sólo se tienen colisiones binarias, lo cual es adecuado para el gas diluido.
- ii) Es válida la hipótesis de caos molecular, la cual implica que la distribución de velocidades de una partícula y de otra son estadísticamente independientes, de manera que la probabilidad de que ocurra una colisión está dada por el producto de las funciones de distribución de cada una de ellas [3].
- iii) La función de distribución varía suavemente en el espacio-tiempo, esto indica que su cambio es despreciable al variar el espacio en los tiempos característicos de interacción.

Hechas estas aclaraciones, podemos afirmar que el número de partículas en los rangos  $\Delta^4 x$  y  $\Delta^3 p$  cambia debido a las colisiones con un promedio de

$$\Delta^4 x \frac{\Delta^3 p}{p^0} C(x, p). \quad (2.9)$$

Gracias al supuesto de colisiones binarias, podemos afirmar que los momentos antes y después de la colisión están dados por  $p_1^a$ ,  $p_2^a$  y  $p_{1'}^a$  y  $p_{2'}^a$  respectivamente. Gracias al supuesto de estadísticas independientes, se tiene que el término colisional es proporcional al producto de las funciones de distribución de cada una  $-f(x, p_1) \times f(x, p_2)$ , siendo  $W(p_1, p_2 | p_{1'}, p_{2'}) / p_1^0 p_2^0 p_{1'}^0 p_{2'}^0$  el factor de proporcionalidad. El término  $W(p_1, p_2 | p_{1'}, p_{2'})$  es la razón de transición, que depende sólo del 4-momento antes y después de la colisión y es un escalar de Lorentz. De la tercera hipótesis, tenemos que las coordenadas del espacio-tiempo antes y después de la colisión no cambian significativamente. De esto deducimos que el cambio del número de partículas promedio (2.9), en un intervalo  $(\bar{p}, \bar{p} + \Delta\bar{p})$ , lo encontramos de integrar  $C(x, p)$  sobre todos los valores  $\bar{p}$  involucrados

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta^4 x \frac{\Delta^3 p}{p^0} \int \frac{d^3 p_2}{p_2^0} \frac{d^3 p_{1'}}{p_{1'}^0} \frac{d^3 p_{2'}}{p_{2'}^0} f(x, p_{1'}) f(x, p_{2'}) W(p_{1'}, p_{2'} | p_1, p_2) - \\ & \frac{1}{2} \Delta^4 x \frac{\Delta^3 p}{p^0} \int \frac{d^3 p_2}{p_2^0} \frac{d^3 p_{1'}}{p_{1'}^0} \frac{d^3 p_{2'}}{p_{2'}^0} f(x, p_1) f(x, p_2) W(p_1, p_2 | p_{1'}, p_{2'}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde el factor 1/2 viene de la indistinguibilidad entre  $(p_{1'}, p_{2'})$  y  $(p_1, p_2)$ .



De las ecuaciones (2.9) y (2.10), llegamos a que el término colisional viene dado por

$$C(x, p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_2}{p_2^0} \frac{d^3 p_{1'}}{p_{1'}^0} \frac{d^3 p_{2'}}{p_{2'}^0} [f(x, p_{1'}) f(x, p_{2'}) \times W(p_{1'}, p_{2'} | p_1, p_2) - f(x, p_1) f(x, p_2) W(p_1, p_2 | p_{1'}, p_{2'})]. \quad (2.11)$$

Si igualamos (2.8) y (2.11), hallamos que

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \right) f(x, p) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p_2}{p_2^0} \frac{d^3 p_{1'}}{p_{1'}^0} \frac{d^3 p_{2'}}{p_{2'}^0} [f(x, p_{1'}) f(x, p_{2'}) \times w(p_{1'}, p_{2'} | p_1, p_2) - f(x, p_1) f(x, p_2) w(p_1, p_2 | p_{1'}, p_{2'})], \quad (2.12)$$

con una razón de transición

$$w(p_1, p_2 | p_{1'}, p_{2'}) = \frac{c}{p_1^0 p_2^0 p_{1'}^0 p_{2'}^0} W(p_1, p_2 | p_{1'}, p_{2'}). \quad (2.13)$$

La cantidad  $w(p_1, p_2 | p_{1'}, p_{2'}) \Delta^3 p_{1'} \Delta^3 p_{2'}$ , se refiere a la probabilidad de transición por unidad de volumen y tiempo, de que dos partículas con momentos  $p_1$  y  $p_2$  sean lanzadas con momentos en los intervalos  $(p_{1'}, p_{1'} + \Delta p_{1'})$  y  $(p_{2'}, p_{2'} + \Delta p_{2'})$ . La forma explícita de  $w(p_1, p_2 | p_{1'}, p_{2'})$  se halla en la literatura de referencia [4].

La ecuación (2.12) es la ecuación de Boltzmann relativista para un gas con colisiones. Si se hace la distinción entre los momentos previos y posteriores a la colisión, (2.12) describe procesos que son irreversibles en el tiempo, lo que indica que la producción de entropía en cualquier punto del espacio-tiempo nunca es negativa, resultado que analizaremos luego.

## 2.2 Función de distribución de Maxwell-Jüttner

A continuación, nos ocuparemos de hallar la forma explícita de la función de distribución Boltzmann relativista (2.12). Para esto utilizaremos el *teorema H*, lo que nos llevará de forma natural a dicha función.

En principio, consideremos una mezcla de gases diluida de  $N$  componentes, en la que las partículas colisionan de manera elástica e inelástica, de modo que las funciones de distribución satisfacen

$$p_k^\alpha \frac{\partial f_k}{\partial x^\alpha}(x, p_k) = \sum_{l=1}^N C_{kl}(x, p_k), \quad (2.14)$$

donde el término colisional toma la forma

$$C_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{k', l'=1}^n \int \frac{d^3 p_l}{p_l^0} \frac{d^3 p_{k'}}{p_{k'}^0} \frac{d^3 p_{l'}}{p_{l'}^0} (f_{k'} f_{l'} W_{k'l'|kl} - f_k f_l W_{kl|k'l'}), \quad (2.15)$$

con  $k, l = 1, 2, \dots, N$ , y donde  $f_{k'} \equiv f(x, p_{k'})$ ,  $f_{l'} \equiv f(x, p_{l'})$ ,  $f_l \equiv f(x, p_l)$  y  $f_k \equiv f(x, p_k)$  [4] [5].

A nivel microscópico, en el marco de teoría cinética, se cumplen las conservaciones del número de partículas y de energía-momento. Por esto, los términos colisionales en (2.15) cumplen que

$$\Upsilon[\Psi] = \sum_{k,l=1}^N \int \frac{d^3 p_k}{p_k^0} \Psi_k(x, p_k) C_{kl}(x, p_k) = 0, \quad (2.16)$$

donde  $\Psi_k$  es una combinación lineal de una constante y un 4-vector  $p_k^\alpha$ , de manera que

$$\Psi_k(x, p_k) = A_k(x) + B_\alpha(x) p_k^\alpha, \quad (2.17)$$

con  $B_\alpha(x)$  una función arbitraria, mientras que  $A_k(x)$  se debe conservar aditivamente de manera que

$$A_k(x) + A_l(x) = A_{k'}(x) + A_{l'}(x). \quad (2.18)$$

Después de sustituir (2.15) en (2.16), reescribimos  $\Upsilon[\Psi]$  como se sugiere en [4],

$$\Upsilon[\Psi] = \frac{1}{4} \sum_{k',l',k,l} \int \frac{d^3 p_{k'}}{p_{k'}^0} \frac{d^3 p_{l'}}{p_{l'}^0} \frac{d^3 p_k}{p_k^0} \frac{d^3 p_l}{p_l^0} (\Psi_k + \Psi_l - \Psi_{k'} - \Psi_{l'}) f_{k'} f_{l'} W_{k'l'|kl}. \quad (2.19)$$

Por otro lado el flujo de entropía se define como

$$S^\alpha(x) = -kc \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha f(x, p) [\log h^3 f(x, p) - 1], \quad (2.20)$$

donde  $h$  es la constante de Planck y  $k$  la de Boltzmann. La producción de entropía local se define como

$$\sigma(x) := \frac{\partial S^\alpha(x)}{\partial x^\alpha}, \quad (2.21)$$

y usando (2.20) se sigue que la producción de entropía para una mezcla es

$$\sigma(x) = -kc \frac{d^3 p}{p^0} [\log h^3 f(x, p)] p^\alpha \frac{\partial f(x, p)}{\partial x^\alpha}. \quad (2.22)$$

Si sustituimos la expresión (2.1) en (2.22) obtenemos que

$$\sigma(x) = -kc \sum_{k,l} \int \frac{d^3 p_k}{p_k^0} (\log h^3 f_k) C_{kl}, \quad (2.23)$$

donde los subíndices  $k, l$  toman valores desde 1 a  $N$ . Por medio de la ecuación (2.16), podemos reescribir la producción de entropía (2.23) como

$$\sigma(x) = -kc \Upsilon[(\log h^3 f)], \quad (2.24)$$

de modo que utilizando (2.19) llegamos a

$$\sigma = -\frac{1}{4} kc \sum_{k',l',k,l} \int \frac{d^3 p_{k'}}{p_{k'}^0} \frac{d^3 p_{l'}}{p_{l'}^0} \frac{d^3 p_k}{p_k^0} \frac{d^3 p_l}{p_l^0} \left( \log \frac{f_k f_l}{f_{k'} f_{l'}} \right) f_{k'} f_{l'} W_{k'l'|kl}. \quad (2.25)$$

Tomaremos en cuenta que la razón de transición satisface la propiedad de normalización bilateral dada por

$$\sum_{k',l'} \int \frac{d^3 p_{k'}}{p_{k'}^0} \frac{d^3 p_{l'}}{p_{l'}^0} W_{kl|k'l'} = \sum_{k',l'} \int \frac{d^3 p_{k'}}{p_{k'}^0} \frac{d^3 p_{l'}}{p_{l'}^0} W_{k'l'|kl}. \quad (2.26)$$

Si además multiplicamos (2.26) por  $f_k f_l / p_k^0 p_l^0$ , y luego integramos sobre  $p_k$  y  $p_l$ , sumamos sobre  $k$  y  $l$ , y por último intercambiamos los pares  $k, l$  con  $k', l'$ , en el lado izquierdo de la ecuación, obtenemos que [4]

$$\sum_{k',l',k,l} \int \frac{d^3 p_{k'}}{p_{k'}^0} \frac{d^3 p_{l'}}{p_{l'}^0} \frac{d^3 p_k}{p_k^0} \frac{d^3 p_l}{p_l^0} (f_k f_l - f_{k'} f_{l'}) W_{k'l'|kl} = 0. \quad (2.27)$$

Sumando este resultado, previo a multiplicar por  $1/4kc$  del lado derecho en (2.25), llegamos a

$$\sigma = \frac{1}{4} kc \sum_{k',l',k,l} \int \frac{d^3 p_{k'}}{p_{k'}^0} \frac{d^3 p_{l'}}{p_{l'}^0} \frac{d^3 p_k}{p_k^0} \frac{d^3 p_l}{p_l^0} \left( \frac{f_k f_l}{f_{k'} f_{l'}} - \log \frac{f_k f_l}{f_{k'} f_{l'}} - 1 \right) f_{k'} f_{l'} W_{k'l'|kl}. \quad (2.28)$$

Debido a que la función  $x - \log x - 1$  es positiva para  $x$  positiva y se hace cero si o sólo si  $x = 1$ , entonces la producción de entropía nunca es negativa

$$\sigma(x) \geq 0. \quad (2.29)$$

Este resultado corresponde a la formulación local del *teorema H* relativista [4], el cual representa la segunda ley de la termodinámica, y enuncia que la entropía en un sistema termodinámico no decrece [6]. En este contexto, un estado en equilibrio local se define como aquel que está caracterizado por

$$\sigma(x) = 0. \quad (2.30)$$

Lo anterior sólo se cumple si la función satisface

$$f(x, p_1) f(x, p_2) = f(x, p_{1'}) f(x, p_{2'}), \quad (2.31)$$

donde los momentos de las partículas 1 y 2 antes y después de la colisión, cumplen con la ley de conservación de energía y momento

$$p_1^\alpha + p_2^\alpha = p_{1'}^\alpha + p_{2'}^\alpha. \quad (2.32)$$

La función de distribución que satisface (2.31) corresponde a la función de distribución en equilibrio local  $f^{(0)}(x, p)$ . Si multiplicamos esta por  $h^3$ , y tomamos el logaritmo a ambos lados de la igualdad, llegamos a que

$$\log h^3 f^{(0)}(x, p_1) + \log h^3 f^{(0)}(x, p_2) = \log h^3 f^{(0)}(x, p_{1'}) + \log h^3 f^{(0)}(x, p_{2'}), \quad (2.33)$$

de modo que  $\Psi(p^\alpha) = \log h^3 f^{(0)}$  es un invariante dentro de la suma, ya que cumple con la relación

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi_{1'} + \Psi_{2'} \quad (2.34)$$

donde  $\Psi_1, \Psi_1', \Psi_2, \Psi_2'$  representan las funciones de distribución de las partículas 1 y 2 antes y después de la colisión respectivamente. Además, sabemos que  $\Psi(p^\alpha)$  sólo es un invariante sumacional si está dado por

$$\Psi(p^\alpha) = A + B_\alpha p^\alpha, \quad (2.35)$$

donde  $A$  es un escalar arbitrario y  $B_\alpha$  es un cuadri-vector que no depende de  $p^\alpha$ . Por lo que la función de distribución en equilibrio local  $f^{(0)}(x, p)$  toma la forma

$$f^{(0)}(x, p) = h^{-3} \exp[A(x) + B_\alpha(x)p^\alpha]. \quad (2.36)$$

Esta función cumple con la ecuación de Boltzmann relativista (2.8), de manera que

$$p^\alpha \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x^\alpha} = C(x, p), \quad (2.37)$$

incluso si el término colisional  $C(x, p) = 0$ , en tal caso los parámetros  $A(x)$  y  $B_\alpha(x)$  deben obedecer

$$p^\alpha \frac{\partial A}{\partial x^\alpha} + p^\alpha p^\beta \frac{\partial B_\beta}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (2.38)$$

La función de distribución  $f^{(0)}$  cuyos parámetros satisfacen (2.38), describe el estado de equilibrio local y a identificamos como  $f^{eq}$ . A partir del primer término de (2.38) vemos que para toda  $p^\alpha$  tenemos que  $\partial A / \partial x^\alpha = 0$ , por lo que  $A = \text{constante}$ . Mientras que del segundo término de (2.38) tenemos que

$$p^\alpha p^\beta B_{\beta, \alpha} = \frac{1}{2} (p^\alpha p^\beta B_{\beta, \alpha} + p^\alpha p^\beta B_{\alpha, \beta}) = p^\alpha p^\beta B_{(\alpha, \beta)} = 0, \quad (2.39)$$

lo que nos indica que  $B_{(\alpha, \beta)} = 0$ , es decir que  $B_\alpha$  es un vector de Killing. Al escalar  $A$ , y al 4-vector  $B_\alpha$  los identificamos con los siguientes valores

$$B_\alpha = \frac{u^\alpha}{kT} = \frac{\beta u^\alpha}{mc^2}, \quad A = \frac{\mu_E}{kT}, \quad (2.40)$$

donde  $u^\alpha$  es la 4-velocidad,  $T$  es la temperatura del sistema,  $k$  es la constante de Boltzmann y  $\beta$  es la "frialdad relativista", la cual nos servirá más adelante para trabajar con los límites ultra-relativistas y no-relativistas [4]. De (2.40) se sigue que

$$\beta = \frac{mc^2}{kT}. \quad (2.41)$$

Además tenemos que  $\mu_E$  es el potencial químico en equilibrio, el cual identificamos a través de la función de Gibbs por partícula, de modo que

$$\mu_E = e - T s_E + \frac{P}{n}. \quad (2.42)$$

En esta ecuación  $e$  es la energía interna por partícula y  $s_E$  es la entropía por partícula en equilibrio. Además,  $P$  es la presión isotrópica y  $n$  la densidad del número de partículas,

que obtendremos en las siguientes secciones. A partir de (2.42) la ecuación para  $A$  toma la forma

$$A = \frac{1}{kT} \left( e - T s_E + \frac{P}{n} \right) = \frac{\mu_E}{kT}, \quad (2.43)$$

por lo que  $A$  la identificamos como la razón entre el potencial químico en equilibrio y  $kT$ , lo cual nos indica el orden de magnitud de la energía térmica del gas [2].

Por otra parte, de  $B^\alpha = u^\alpha/kT$  se sigue que

$$u^\alpha T_{,\alpha} = \dot{T} = 0, \quad (2.44)$$

$$h_\alpha^\beta T_\beta + T \dot{u}_\alpha = 0, \quad (2.45)$$

donde  $\dot{u}_\alpha$  es la 4-aceleración, dada por  $\dot{u}_\alpha = u_{\alpha,\beta} u^\beta$ , asociada a la 4-velocidad  $u^\alpha$ ; y  $h_\alpha^\beta$  es el vector de proyección. La ecuación (2.45) es conocida como la *Ley de Tolman* cuyas implicaciones físicas se discursarán posteriormente. Es importante mencionar que esta ecuación viene de la condición de equilibrio en el contexto de TCR.

Si sustituimos (2.40) en (2.36), se sigue que la función de distribución en equilibrio está dada por

$$f^{eq} = \frac{1}{h^3} \exp \left( \frac{\mu_E}{kT} - \frac{u^\alpha p_\alpha}{kT} \right). \quad (2.46)$$

Esta expresión fue obtenida por primera vez en 1911 por Jüttner [7, 8] y es conocida como la distribución de Maxwell-Jüttner. Además satisface la ecuación de Boltzmann relativista (2.8), aún cuando el término colisional es cero, de modo que también es solución en ausencia de colisiones. A esta última solución se la conoce como ecuación de Vlassov, y es relevante ya que los sistemas astrofísicos son no colisionales, y se acerca más a la descripción de un “gas de estrellas”. Para nuestro interés, sólo nos basta modelar un gas libre de colisiones, que será la suposición de ahora en adelante.

## 2.3 Cantidades termodinámicas

La descripción macroscópica de un gas la podemos obtener a través de los momentos de la función de distribución de una partícula [3, 5]. El primer momento es el 4-flujo de partículas

$$N^\alpha = c \int p^\alpha f \frac{d^3 p}{p_0}; \quad (2.47)$$

el segundo, el tensor de energía-momento

$$T^{\alpha\beta} = c \int p^\alpha p^\beta f \frac{d^3 p}{p_0}. \quad (2.48)$$

Si utilizamos la función de distribución (2.46) en estas definiciones, llegamos a que el flujo de partículas para un gas no degenerado se expresa como

$$N_E^\alpha = c \int p^\alpha \frac{g_s/h^3}{\exp(-a + B^\alpha p_\alpha)} \frac{d^3 p}{p_0}, \quad (2.49)$$

donde el subíndice  $E$  indica el valor de  $N^\alpha$  en el equilibrio. Pero  $N_E^\alpha = nu^\alpha$ , por lo que la densidad de número de partículas  $n$  en términos de la integral

$$J_{nm}(\beta, a) = \int_0^\infty \frac{\sinh^n \vartheta \cosh^m \vartheta}{\exp(\beta \cosh \vartheta - a)} d\vartheta, \quad (2.50)$$

queda como

$$n = 4\pi(mc)^3 \frac{g_s}{h^3} J_{21}. \quad (2.51)$$

Si ahora sustituimos (2.46) en la expresión del tensor de energía-momento (2.48), obtenemos la densidad de energía interna por partícula y la presión en términos de (2.50) como

$$ne = 4\pi m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} J_{22}, \quad (2.52)$$

$$P = \frac{4\pi}{3} m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} J_{40}. \quad (2.53)$$

Reescribiendo (2.50) en función de  $\beta$  y el potencial químico  $\mu_E$ , tenemos que

$$J_{nm}(\beta, \mu_E) = \int_0^\infty \frac{\sinh^n \vartheta \cosh^m \vartheta}{\exp(\beta \cosh \vartheta) \exp(-\mu_E/kT)} d\vartheta. \quad (2.54)$$

Si además introducimos la integral  $I_n(\beta, \mu_E)$  definida por

$$I_n(\beta, \mu_E) = \int_0^\infty \frac{\cosh(n\vartheta)}{\exp(\beta \cosh \vartheta) \exp(-\mu_E/kT)} d\vartheta, \quad (2.55)$$

podemos llegar a las siguientes relaciones entre  $J_{mn}$  y  $I_n$

$$J_{21} = \frac{1}{4}(I_3 - I_1), \quad J_{22} = \frac{1}{8}(I_4 - I_0), \quad J_{40} = \frac{1}{8}(I_4 - 4I_2 + 3I_0).$$

Por lo que, las ecuaciones (2.51)-(2.53) las reescribimos en términos de (2.55) como [3, 9]:

$$n = \pi(mn)^3 \frac{g_s}{h^3} (I_3 - I_1), \quad (2.56)$$

$$e = \frac{1}{2} mc^2 \left( \frac{I_4 - I_0}{I_3 - I_1} \right), \quad (2.57)$$

$$P = \frac{\pi}{6} m^4 c^5 \frac{g_s}{h^3} (I_4 - 4I_2 + 3I_0). \quad (2.58)$$

La integral (2.55) tiende a una función de Bessel modificada de segunda especie  $K_n(\beta)$  en el límite  $\exp(\mu_E/kT) \gg 1$ , así que podemos reescribirla como

$$I_n(\beta, \mu_E) \rightarrow \exp(\mu_E/kT) K_n(\beta),$$

donde la función de Bessel modificada  $K_n(\beta)$  tiene la forma

$$K_n(\beta) = \int_0^\infty \exp(-\beta \cosh \vartheta) \cosh(n\vartheta) d\vartheta.$$

La ecuación (2.56) queda expresada en términos de  $K_n(\beta)$  como

$$n = \frac{4\pi m^3 c^3 g_s}{h^3} \frac{K_2(\beta)}{\beta} \exp(\mu_E/kT), \quad (2.59)$$

y el potencial químico se escribe como

$$\frac{\mu_E}{kT} = \ln \left[ \frac{nh^3}{4\pi g_s m^2 ckT K_2(\beta)} \right]. \quad (2.60)$$

Por otra parte, la masa-energía interna por partícula (2.57) y la presión (2.58) toman la forma

$$e = mc^2 \left[ \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)} - \frac{1}{\beta} \right], \quad (2.61)$$

$$P = 4\pi m^2 ck^2 T^2 \frac{g_s}{h^3} K_2(\beta) \exp(\mu_E/kT) = nkT, \quad (2.62)$$

donde hemos utilizado (2.60) para obtener (2.62). Las ecuaciones (2.59)-(2.62) son de gran importancia, pues con ellas calculamos otras cantidades termodinámicas relevantes del sistema.

A partir de (2.42), (2.43), (2.60), (2.61) y (2.62) la entropía por partícula en equilibrio es igual a

$$\frac{s_E}{k} = -\ln \left[ \frac{nh^3 \beta}{4(mc)^3 K_2(\beta)} \right] - \beta \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)}. \quad (2.63)$$

Además, obtenemos la entalpía

$$h_E = e + \frac{P}{n}, \quad (2.64)$$

que escrita en términos de (2.61) y (2.62) toma la forma

$$h_E = mc^2 F(\beta), \quad (2.65)$$

donde  $F(\beta) = K_3(\beta)/K_2(\beta)$ . Por otra parte, las capacidades caloríficas por partícula a volumen  $V$  y presión  $P$  constantes, definidas como

$$c_v = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v, \quad c_p = \left( \frac{\partial h_E}{\partial T} \right)_p, \quad (2.66)$$

las obtenemos de sustituir (2.61), (2.62) y (2.64) en (2.66), de manera que

$$c_v = k(\beta^2 + 5F\beta - F^2\beta^2 - 1), \quad c_p = k(\beta^2 + 5F\beta - F^2\beta^2). \quad (2.67)$$

## 2.4 Límites no-relativista y ultra-relativista

Los resultados hallados hasta ahora son válidos para todo valor de la “frialdad relativista”  $\beta = mc^2/kT$ . Aquí, analizaremos dos límites:

- el no-relativistas, es decir de bajas temperaturas, cuando  $\beta \gg 1$  ó bien cuando  $mc^2 \gg kT$ ;
- y el ultra-relativista, a altas temperaturas, cuando  $\beta \ll 1$  ó  $mc^2 \ll kT$ .

Si sustituimos la función de Bessel modificada de segundo orden que aparece en (2.61), por la siguiente aproximación

$$K_n(\beta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}} \frac{1}{\exp(\beta)} \left[ 1 + \frac{4n^2 - 1}{b\beta} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(8\beta)^2} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)}{3!(8\beta)^3} + \dots \right] \quad (2.68)$$

obtenemos que en el límite no-relativista ( $\beta \gg 1$ ), la masa-energía por partícula está dada por

$$e = mc^2 + \frac{3}{2}kT \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{kT}{mc^2} + \dots \right). \quad (2.69)$$

Aquí, el segundo término de la suma se refiere al valor no-relativista de la energía por partícula. El primer término es la energía en reposo relativista, y la corrección a la energía viene dado por el tercer término.

Además la presión está dada por

$$P = nkT, \quad (2.70)$$

de modo que si tomamos la diferencia entre la energía por partícula (2.69) y la energía en reposo, se sigue que la densidad de energía interna es

$$n(e - mc^2) \approx \frac{3}{2}nkT \approx \frac{3}{2}P. \quad (2.71)$$

Usando la misma aproximación (2.68), la entropía por partícula (2.63) queda como

$$s_E = k \left[ \ln \frac{T^{3/2}}{n} - \ln \left( \frac{h^3}{g_s(2\pi mk)^{3/2}} \right) + \frac{5}{2} \right] + k \left[ \frac{15}{4\beta} + \dots \right], \quad (2.72)$$

donde los primeros términos corresponden a la ecuación clásica de Sackur-Tetrode, mientras que los términos restantes son correcciones relativistas. Asimismo la entalpía (2.65) y las capacidades caloríficas (2.67), en este límite, están dadas por

$$h_E = mc^2 + \frac{5}{2}kT \left( 1 + \frac{3}{4\beta} + \dots \right), \quad (2.73)$$

$$c_v = \frac{3}{2}k \left( 1 + \frac{5}{2\beta} + \dots \right), \quad (2.74)$$

$$c_p = \frac{5}{2}k \left( 1 + \frac{3}{2\beta} + \dots \right). \quad (2.75)$$

Un gas no degenerado está caracterizado por  $\exp(-\mu_E/kT) \gg 1$ , mientras que un gas no-relativista se caracteriza a través de término  $\beta \gg 1$ , por lo que para un gas no



degenerado y no-relativista tenemos que  $\exp(\mu_E/kT + \beta) \gg 1$ . Después de sustituir (2.60) en esta última expresión y de aproximar la función de Bessel como

$$K_2(\beta) \approx \frac{\sqrt{\pi/2\beta}}{\exp(\beta)},$$

obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{n}{g_s} \left( \frac{h^2}{2\pi m k T} \right)^{3/2} \ll 1,$$

indicando que para un gas no degenerado, la longitud de onda térmica es mucho menor que el promedio de las distancias interparticulares, es decir

$$\lambda = \frac{h}{(2\pi m k T)^{1/2}} \ll 1.$$

Por otra parte, el límite ultra-relativista de altas temperaturas en el que las masas tienden a cero, está caracterizado por el parámetro  $\beta$ , de modo que  $\beta \ll 1$ . Si usamos la siguiente expresión de la función de Bessel

$$K_N(\beta) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} x \left[ \ln \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \Psi(k+1) - \frac{1}{2} \Psi(n+k+1) \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(\beta/2)^{n-2k}}, \quad (2.76)$$

y aproximamos  $K_2(\beta)$  y  $K_3(\beta)$  como sigue

$$K_2(\beta) \approx \frac{2}{\beta^2}, \quad K_3(\beta) \approx \frac{8}{\beta^3},$$

las cantidades termodinámicas correspondientes al sistema son las siguientes:

$$n = 8\pi \frac{g_s}{h^3} \left( \frac{kT}{c} \right)^3 \exp(\mu_E/kT), \quad (2.77)$$

$$\mu_E = kT \ln \left[ \frac{n}{8\pi g_s} \left( \frac{hc}{kT} \right)^3 \right], \quad (2.78)$$

$$e = 3kT, \quad h_E = 4kT, \quad P = \frac{1}{3} n e = nkT, \quad (2.79)$$

$$c_v = 3k, \quad c_p = 4k. \quad (2.80)$$

En los próximos capítulos retomaremos estos resultados, y teniendo a un gas de Maxwell-Jüttner como fuente de campo gravitacional, profundizaremos en el contexto de Relatividad General.

## Capítulo 3

# Fundamentos de Relatividad General

La teoría de la Relatividad General (RG) fue postulada por Albert Einstein en 1915, y describe la curvatura del espacio-tiempo según la distribución de masa. La presencia de un objeto masivo distorsiona y modifica al espacio-tiempo, y este determina la dinámica de los objetos físicos. La RG se introduce como modificación a la gravedad de Newton que, entre otras cosas, se basa en que la interacción entre dos objetos masivos es *inmediata*, es decir la velocidad de interacción es infinita, contradiciendo uno de los postulados de la Relatividad Especial (RE), que indica que nada, ni siquiera las interacciones gravitatorias, viaja más rápido que la velocidad de la luz  $c$ .

Los principios sobre los que se asienta esta teoría se podrían resumir en [2, 1]

- El espacio-tiempo es una variedad 4-dimensional, que posee una métrica.
- Principio de covarianza: las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores.
- Principio de equivalencia de Einstein: en regiones del espacio-tiempo lo suficientemente pequeñas, las leyes de la física serán las mismas que las de Relatividad Especial, es decir que es imposible de detectar la existencia de un campo gravitacional por medio de experimentos *locales*.

Uno de los conceptos matemáticos fundamentales es el de *métrica*, que especifica las características geométricas del espacio-tiempo. A cada evento le asignaremos una coordenada de este espacio-tiempo  $x^\alpha$ , donde  $\alpha$  puede tomar valores  $(0, 1, 2, 3)$ , representando el tiempo y la posición en el espacio en que ocurre el evento.

La relación entre dos eventos cercanos separados por un infinitesimal  $dx^\alpha$  se define a través de su *intervalo*, y se expresa como

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.1)$$

Aquí, la métrica es representada por  $g_{\alpha\beta}$  e indica los elementos de una matriz  $4 \times 4$ . La convención de signo utilizada es  $(-, +, +, +)$ . Para cada métrica  $g_{\alpha\beta}$  existen coeficientes  $g^{\alpha\beta}$  tal que  $g^{\alpha\mu}g_{\beta\mu} = \delta_{\beta}^{\alpha}$ .

Uno de los teoremas fundamentales que se obtiene a partir de la RE, y que puede ser generalizado a RG, es el que indica que *el intervalo entre dos eventos será el mismo para cada observador inercial*. Esto significa que el intervalo es una cantidad invariante, independiente del movimiento relativo o las coordenadas que esté utilizando el observador.

En el caso de RE, la métrica utilizada es la de Minkowski, que describe el espacio-tiempo plano

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (3.2)$$

Del signo que tome el intervalo, se puede clasificar la relación entre dos eventos de la siguiente manera:

|    |            |                       |
|----|------------|-----------------------|
| si | $ds^2 > 0$ | intervalo espacial;   |
| si | $ds^2 < 0$ | intervalo temporal; y |
| si | $ds^2 = 0$ | intervalo nulo.       |

Si dos eventos son separados por un intervalo espacial no se podría ir de uno a otro, ya que para alcanzarlo se debería viajar más rápido que la velocidad de la luz. Si dos eventos son separados por un intervalo temporal, uno puede alcanzar a otro por medio de una línea mundo tipo tiempo. Estos intervalos caracterizan los eventos físicos, y se puede ir de uno a otro viajando a una velocidad menor que  $c$ . Por último, si el intervalo que separa dos eventos es nulo, se puede viajar de uno a otro por medio de un rayo de luz, es decir a una velocidad  $c$ .

### 3.1 Tensor de curvatura y ecuaciones de Einstein

Gracias a la métrica podemos definir diferentes cantidades invariantes como el producto escalar entre dos vectores. Si se tiene dos vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ , definimos el *producto escalar* de la siguiente forma:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}. \quad (3.3)$$

La *magnitud* de un vector también es un invariante, definida como:

$$\vec{x}^2 := \vec{x} \cdot \vec{x} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}. \quad (3.4)$$

Este escalar no tiene que ser necesariamente positivo. Al igual que con los intervalos, dependiendo del signo de su magnitud, es como se clasifica los vectores: si  $\vec{x}^2 < 0$ ,  $\vec{x}$  es un vector tipo tiempo; si  $\vec{x}^2 = 0$ , se trata de un vector nulo; y si es positivo,  $\vec{x}$  se le llama tipo espacio.

Por otra parte tenemos las *geodésicas*, definidas como las trayectorias que siguen las partículas en caída libre en un espacio-tiempo curvo. Localmente estas son líneas rectas, pero globalmente no se mantienen paralelas. Una forma de parametrizar estas

trayectorias, es por medio del *tiempo propio*  $d\tau^2 = -ds^2$ , que es el tiempo que mide el observador en su marco inercial. La ecuación de una geodésica es la siguiente:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (3.5)$$

donde hemos introducido los *símbolos de Christoffel* definidos como:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} := \frac{g^{\alpha\beta}}{2} \left[ \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right]. \quad (3.6)$$

Un vector relevante en esto es la *cuadrivelocidad*, cuya definición es:

$$\vec{u} := d\vec{x}/d\tau. \quad (3.7)$$

Pedimos que la magnitud de la cuadrivelocidad sea igual a  $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$ . Este vector es tipo tiempo y es tangente a la línea mundo (geodésica) de una partícula.

Con esta cantidad en mente, podemos reescribir la ecuación geodésica de manera equivalente

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0, \quad (3.8)$$

El *tensor de Riemann* se define como

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} := \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}. \quad (3.9)$$

Este tensor tiene 256 componentes (al definirlo en 4 dimensiones), aunque por la gran cantidad de simetrías sólo 20 de ellas son independientes. Si se trata del espacio plano el tensor de Riemann se anula.

A partir de este tensor podemos definir el *tensor de Ricci*, al contraer dos de sus índices,

$$R_{\mu\nu} := \sum_\lambda R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}. \quad (3.10)$$

El tensor de Ricci es simétrico en los dos índices, esto indica que sólo tiene 10 componentes independientes.

La *derivada covariante* de un vector se define como

$$v^\alpha_{;\beta} \equiv \nabla_\beta v^\alpha := \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + v^\mu \Gamma^\alpha_{\beta\mu}, \quad (3.11)$$

e indica cómo cambian las componentes de un vector en el espacio, tomando en cuenta las variaciones de la bases. Si se tratara del espacio plano cartesiano, los símbolos de Christoffel se hacen cero y la derivada covariante es la derivada parcial usual.

La derivada de un covector es de la forma

$$v_{\alpha;\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v_\mu. \quad (3.12)$$

También se puede extender la derivada covariante a tensores de más órdenes. Aquí, por cada índice libre del tensor, se debe agregar un término que contenga un Christoffel con el signo correcto. Los más usuales son:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{,\alpha} &= \partial_\alpha T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} T^{\beta\nu} + \Gamma^\nu{}_{\alpha\beta} T^{\mu\beta}, \\ T_{\mu\nu,\alpha} &= \partial_\alpha T_{\mu\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} T_{\beta\nu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu} T_{\mu\beta}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

De aquí podemos ver que la derivada covariante de la métrica es cero

$$g^{\mu\nu}{}_{,\alpha} = 0, \quad g_{\mu\nu,\alpha} = 0. \quad (3.14)$$

Las *ecuaciones de Einstein* relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de la masa-energía. La expresión que indica esta relación se escribe como

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el *tensor de Einstein*,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de masa-energía y  $\kappa \equiv 8\pi G/c^2$ . La parte derecha de (3.15) se escribe como

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (3.16)$$

donde  $R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  es la traza del tensor de Ricci, o escalar de curvatura. La forma de  $T_{\mu\nu}$  depende del sistema que se esté analizando, e indica cuál es la distribución de masa-energía en ese ET. En nuestro caso, será el tensor de un fluido ideal.

## 3.2 Corrimiento al rojo gravitacional y Principio de equivalencia

El Principio de Equivalencia de Einstein, conocido como *principio de equivalencia débil*, postula que cualquier experimento que se realiza en un campo gravitacional uniforme, brinda los mismos resultados si se realizara en un marco sin influencia gravitatoria alguna, pero que está uniformemente acelerado respecto a un marco inercial. Esto es considerando una región de espacio-tiempo suficientemente pequeña [10, 1].

Este principio, se vincula de manera directa con el corrimiento al rojo gravitacional, uno de los primeros experimentos pensados de Einstein. Para su desarrollo, seguimos el procedimiento propuesto en [2], abonado de comentarios tomados de [1] y [11].

Supongamos que tenemos una partícula de masa  $m$  que se encuentra inicialmente en reposo en la parte superior de una torre de altura  $h$ , la cual yace sobre la superficie de la Tierra. La partícula se deja caer en caída libre, por lo que experimenta una aceleración  $g$ , de modo que llega a la Tierra con una velocidad  $v = (2gh)^{1/2}$ . La energía de esta, medida por un detector en la Tierra, está dada por

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mc^2 + mgh + \vartheta(v^4).$$

Imaginemos que se cuenta con un mecanismo tal que, sin violar la conservación de la energía, la energía de la partícula es transformada en un fotón que regresa a la parte superior de la torre, con una  $E' = mc^2$ . En la cima de la torre, se vuelve a tener una partícula de masa  $m'c^2 = E'$ , es decir  $m' = m$ , sino se iría en contra de las leyes de la termodinámica. Así, llegamos que la relación entre las energías de los fotones debe ser

$$\frac{E'}{E} = \frac{\hbar\nu'}{\hbar\nu} = \frac{mc^2}{mc^2 + mgh + \vartheta(v^4)} = 1 - gh + \vartheta(v^4).$$

de donde se sigue que

$$\nu' = \nu(1 - gh + \vartheta(v^4)), \quad \frac{\nu'}{\nu} = 1 + z = 1 - gh + \vartheta(v^4),$$

donde los términos son

$$gh = \left[ -\frac{GM_T}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \quad \text{con} \quad r_1 = r_T, \quad r_2 = r_T + h,$$

$$g = -\frac{GM_T}{r_T^2}, \quad h = r_2 - r_1.$$

En esta ecuación vemos que  $\nu' < \nu$ , es decir que se tiene un corrimiento al rojo: el fotón perderá energía al ir contra el potencial terrestre.

El corrimiento al rojo que produce el potencial gravitatorio de la Tierra, fue medido por primera vez en 1960 [12, 13], y ha sido puesto a prueba una y otra vez en diversos contextos [14]. Allí [12], hallaron la pérdida de energía en un fotón  $\nu' - \nu$ , al escalar una altura de  $h = 22.5\text{m}$  con una precisión del 1%.

A partir de la idealización del experimento de corrimiento al rojo gravitacional, y después de proponer el principio de equivalencia, Einstein desarrolló la Relatividad General, con la que es posible estudiar los efectos de una aceleración provocada por un campo gravitacional no uniforme, en el cual las líneas universo de las partículas – a diferencia del espacio plano de Minkowski–, no cumplen el axioma euclidiano del paralelismo.

Cuando se elimina este axioma de la geometría euclidiana, obtenemos un espacio curvo que es localmente plano. Aquí se hace necesario plantear la RG en espacios de Riemann, los cuales son curvos y localmente planos.

### 3.3 Límite newtoniano de las ecuaciones de Einstein

El límite newtoniano de las ecuaciones de Einstein que mostramos en (3.15), puede ser hallado en las siguientes suposiciones:

- existe un sistema en el cual la densidad de energía en reposo es la fuente de campo gravitacional y todas las otras componentes del tensor de energía-momento son despreciables;
- los campos varían lentamente, por lo que las derivadas con respecto a  $t$  son despreciables en comparación con las derivadas espaciales;

- la métrica  $g_{\mu\nu}$  se desvía poco de la métrica del espacio-tiempo de Minkowski, de manera que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}, \text{ con } \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \text{ y } |f_{\mu\nu}| \ll \eta_{\mu\nu}.$$

Los términos cuadráticos en  $f_{\mu\nu}$  y de orden superior son despreciables. Así, las ecuaciones de campos de Einstein (3.15) resultan lineales, y al contraerlas con  $g_{\mu\nu}$  llegamos a

$$-R = \frac{\kappa}{c^2} T^\mu{}_\mu = \frac{\kappa}{c^2} T. \quad (3.17)$$

Así, las ecuaciones de Einstein se escriben como:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T), \quad (3.18)$$

de la que sólo nos interesa la componente

$$R_{00} = 8\pi(T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}T) = 8\pi(\rho c^2 - \frac{1}{2}\rho c^2) = 8\pi\frac{\rho}{2}c^2. \quad (3.19)$$

Para calcular  $R_{00}$ , a partir de la métrica supuesta más arriba, retomamos la definición del tensor de curvatura e ignoramos los términos cuadráticos en los símbolos de Christoffel. De manera que:

$$R_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} f_{00,\mu\nu} = -\frac{1}{2}\eta^{ij} f_{00,ij} = \frac{1}{2}f_{00}, \quad (3.20)$$

que en su forma simplificada queda

$$f_{00} = -8\pi\rho c^2. \quad (3.21)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación de Poisson, que satisface el potencial newtoniano. Si consideramos una partícula de prueba, podemos obtener la ecuación geodésica

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}. \quad (3.22)$$

Para partículas de movimiento lento, el tiempo propio coincide aproximadamente con el tiempo coordenado  $t = x^0/c$ , y la cuadrivelocidad en (3.22) puede ser reemplazada por  $u^0 = 1$ ,  $u^i = 0$ , de manera que

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma^\alpha{}_{00} c^2 = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} g_{00,\beta} c^2 = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} f_{00,\beta} c^2. \quad (3.23)$$

Si comparamos este resultado con la ecuación de movimiento de una partícula bajo un potencial gravitacional  $\Phi$ :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\nabla\Phi, \quad (3.24)$$

vemos que el potencial gravitacional newtoniano  $\Phi$  está relacionado con la métrica a través de la siguiente expresión

$$\Phi = -c^2 \frac{f_{00}}{2} \quad \text{entonces} \quad g_{00} = -(1 + \frac{2\Phi}{c^2}), \quad (3.25)$$

y recordando la ecuación de Poisson para el potencial newtoniano,  $\nabla\Phi = 4\pi G\rho$ , así como las ecuaciones (3.21) y (3.24), recuperamos el valor de la constante que aparece en las ecuaciones expresadas en el sistema internacional:  $8\pi G/c^4 = 2.07 \times 10^{-48} \text{g}^{-1} \text{cm}^{-1} \text{s}^2$ , donde  $G$  es la constante gravitacional de Newton y vale  $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{g}^{-1} \text{cm}^3 \text{s}^{-2}$ .



## Capítulo 4

# Equilibrio hidrostático en simetría esférica

### 4.1 Simetría esférica

Aquí haremos foco en sistemas esféricamente simétricos, los cuales son de gran interés en Astrofísica ya que muchos objetos celestes presentan una simetría similar. Para esto, trabajaremos con coordenadas que permitan una expresión sencilla. En un espacio plano –como el de Minkowski–, el elemento de línea en coordenadas esféricas, se escribe como

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.1)$$

Cada superficie con  $r$  y  $t$  constante, es una superficie esférica de dos dimensiones, una 2-esfera. El elemento de línea de una curva que se encuentra dentro de dicha esfera es igual a

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \equiv r^2 d\Omega^2. \quad (4.2)$$

De manera que cualquier superficie bidimensional representada por medio del elemento de línea (4.2), con  $r^2$  independiente de  $\theta$  y  $\phi$ , posee una geometría de 2-esfera. El asumir que el espacio-tiempo es esféricamente simétrico, implica que cualquier punto en el espacio-tiempo es una 2-esfera con elemento de línea

$$dl^2 = f(r, t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.3)$$

con  $f(r, t)$  una función de las coordenadas  $r$  y  $t$ . La coordenada radial  $r$  se define como  $f(r, t) \equiv r^2$ , la cual se conoce como coordenada de curvatura o coordenada de área, y representa el radio de curvatura y del área de las esferas.

Ahora consideramos dos esferas en un espacio 3-dimensional a un tiempo constante, con coordenadas  $\theta$  y  $\phi$ , de radio  $r$  y  $r + dr$  respectivamente. Bajo estos supuestos, se puede encontrar una línea con  $\theta$  y  $\phi$  constantes, que resulta ser ortogonal a ambas superficies. Cada línea tiene por definición una tangente  $\bar{e}_r$ , de manera que  $\bar{e}_r \cdot \bar{e}_\theta =$

$\bar{e}_r \cdot \bar{e}_\phi = 0$ , es decir que  $g_{r\theta} = g_{r\phi} = 0$ . Así, la métrica toma la forma

$$ds^2 = g_{tt}c^2dt^2 + 2g_{tr}cdrdt + 2g_{t\theta}cd\theta dt + 2g_{t\phi}cd\phi dt + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (4.4)$$

Si tomamos dos esferas en un espacio-tiempo nuevamente a  $t$  constante, podemos definir una línea con  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  constantes que sea ortogonal a ellas. De modo que  $\bar{e}_t$  es ortogonal a  $\bar{e}_\theta$  y  $\bar{e}_\phi$ , es decir que  $g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0$ , por lo que la métrica se escribe como:

$$ds^2 = -g_{tt}c^2dt^2 + 2g_{tr}cdrdt + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (4.5)$$

Además, siempre es posible hacer una transformación de coordenadas  $t = t(\bar{t}, \bar{r})$ ,  $r = r(\bar{t}, \bar{r})$ , tal que podemos reescribir (4.5) como

$$ds^2 = -A^2c^2dt^2 + B^2dr^2 + Y^2d\Omega^2, \quad \text{con} \quad d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (4.6)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $Y$  son funciones de  $x^0 = ct$  y  $r$  (se omiten las barras en las coordenadas).

A continuación, estudiaremos la solución de Schwarzschild, la cual es la única solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío con simetría esférica [2, 1]. De igual manera analizaremos las soluciones estática de fluido perfecto sujeto a equilibrio hidrostático.

#### 4.1.1 Soluciones esféricas y estáticas

Un espacio-tiempo con simetría esférica es estático si admite un vector de Killing  $\xi^\alpha$  temporal, es decir  $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta < 0$ . Si consideramos coordenadas comóviles para la métrica esférica general (4.6), sin perder generalidad, tenemos que  $\xi = \delta_0^\alpha$ . La condición para que este vector sea un vector de Killing es que  $\xi_{(\alpha,\beta)} = 0$ , la cual implica que  $A_{,0} = B_{,0} = Y_{,0} = 0$ , por lo que estas funciones deben depender sólo de la coordenada  $r$ . En particular, podemos escoger la coordenada radial de modo que esta denote el radio de las 2-esferas parametrizadas por  $(\theta, \phi)$ . Entonces, la métrica correspondiente con una simetría esférica y estática está dada por

$$ds^2 = -A^2(r)c^2dt^2 + B^2(r)dr^2 + Y^2d\Omega^2. \quad (4.7)$$

En un espacio-tiempo cuyas fuentes corresponden a un campo débil, cuya evolución es lenta (cuasi-newtoniano) la relación  $g_{tt}$  y el potencial newtoniano  $\Phi_N$  es

$$g_{tt} = -\left(1 + \frac{2\Phi_N}{c^2}\right), \quad (4.8)$$

donde  $2\Phi_N/c^2 \ll 1$  y  $\Phi$  es independiente de  $x^0 = ct$ . Por lo que para un espacio-tiempo esférico y estático general, expresamos  $g_{tt} = -A^2$  en (4.7) como

$$A(r) = \exp\left(\frac{\Phi(r)}{c^2}\right), \quad (4.9)$$

de modo que recuperamos el caso cuasi-newtoniano ( $\Phi \approx \Phi_N$ ) si la función métrica  $\Phi$  satisface  $2\Phi/c \ll 1$  [2, 15].

### 4.1.2 Ecuaciones de campo

Consideramos ahora como fuente de 3.15 del capítulo anterior (3), a un tensor de energía-momento de un fluido perfecto

$$T^{\alpha\beta} = (\mu + P)u^\alpha u^\beta + g^{\alpha\beta}, \quad (4.10)$$

donde  $u^\alpha = \exp(-\Phi/c^2)$ ,  $\mu$  la consideraremos como la densidad de masa-energía y  $P$  la presión. Las ecuaciones de Einstein  $G^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta}$ , con  $\kappa = 8\pi G/c^2$ , toman una forma más sencilla si redefinimos  $g_{rr} = B^2$  como

$$B^2 = \left[ 1 - \frac{\kappa M(r)}{r} \right]^{-1}, \quad (4.11)$$

a partir de lo cual obtenemos las ecuaciones  $G_t^t = \kappa\mu$  y  $G_r^r = \kappa P$

$$M' = \frac{\mu}{c^2} r^2, \quad (4.12)$$

$$\Phi' = \frac{\kappa}{2} \frac{[M + (P/c^2)r^3]}{r[r - \kappa M]}. \quad (4.13)$$

Por otra parte, la ecuación de balance  $T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$  queda dada por

$$P' = -(\mu + P) \frac{\Phi'}{c^2}. \quad (4.14)$$

Mientras que la ecuación  $G_\theta^\theta = G_\phi^\phi = \kappa P$  se satisface si se cumple (4.10)-(4.14), por lo que ya no es necesaria.

En el caso particular de (4.12) y (4.13) con  $\mu = P = 0$  (vacío) tenemos que

$$M' = 0 \Rightarrow M = M_0, \quad (4.15)$$

$$\Phi' = \frac{\kappa}{2} \frac{M_0}{r[r - \kappa M_0]}, \quad (4.16)$$

es precisamente la solución de Schwarzschild, lo cual nos lleva a considerar a la función  $M(r)c^2$  como la masa-energía acumulada en un radio  $r$  a través de

$$\frac{M(r)}{c^2} = \int_0^r \mu \bar{r}^2 d\bar{r}, \quad (4.17)$$

de manera que para una masa puntual en  $r = 0$ , (4.17) corresponde a la distribución singular  $\mu = \mu\delta(r)$ , por lo que obtenemos que  $M = M(0) = M_0$ . En este caso, toda la masa contenida en una esfera de radio  $r > 0$  es igual a  $M_0$ , sin embargo, para una distribución no singular  $\mu = \mu(r)$ , esta integral lleva a  $M = M(r)$  la cual está contenida en una esfera de radio  $r$ , bajo la condición de regularidad  $M(0) = 0$ . Si tenemos una esfera de fluido de radio  $r = r_b$ , con  $\mu = P = 0$  para  $r > r_b$ , entonces tenemos que  $M(r)$  está dada por (4.17) para  $0 < r < r_b$ , mientras que para  $r > r_b$  tenemos  $M = M_0 = M(r_b)$ . Esto es consistente con la unicidad de la solución de Schwarzschild, ya que para  $r > r_b$  tenemos que  $T^{\alpha\beta} = 0$ , por lo que la métrica para este rango de  $r$  es de nuevo (4.18) con  $M_0 = M(r_b)$  [2].

## 4.2 Solución de Schwarzschild

La única solución a las ecuaciones de Einstein con simetría esférica en el vacío ( $T^{\alpha\beta} = 0$ ), es la solución de Schwarzschild dada por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.18)$$

siendo  $r_S$  una constante con unidades de longitud [2, 1]. Esta fue la primer solución exacta a las ecuaciones de Einstein, obtenidas por Karl Schwarzschild en 1917. El potencial newtoniano asociado al campo débil de (4.18) es

$$\frac{\Phi_N}{c^2} \approx \frac{r_S}{r}. \quad (4.19)$$

Si comparamos (4.19) con el potencial newtoniano asociado a una masa puntual  $M_0$ , dado por  $\Phi_N = -GM_0/r$ , podemos identificar  $r_S$  con la longitud

$$r_S = \frac{2GM_0}{c^2}, \quad (4.20)$$

donde  $G$  y  $c$  son constantes fundamentales. Dicha longitud se conoce como el “radio de Schwarzschild” asociado a la masa puntual  $M_0$ . Dado que para una masa puntual tenemos  $T^{\alpha\beta} = 0$ , la solución de Schwarzschild corresponde a dicha configuración [11, 16].

### 4.2.1 Equilibrio hidrostático

Combinando (4.13) con (4.14), y considerando (4.12) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$M' = \frac{\mu}{c^2} r^2, \quad (4.21)$$

$$P' = -\frac{\kappa/2(\mu + P)[M + Pr^3/c^2]}{r[r - \kappa M]}, \quad (4.22)$$

el cual es el sistema de ecuaciones de equilibrio hidrostático. La ecuación (4.22) es conocida como “ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff” (TOV) [2, 3, 17].

En el límite newtoniano de las ecuaciones (4.21) y (4.22) tenemos

$$P \ll \mu \approx \rho c^2, \quad M \approx \rho r^3, \quad 4\pi Pr^3 \ll Mc^2, \quad \frac{2GM}{c^2} \ll r. \quad (4.23)$$

De modo que las ecuaciones del equilibrio hidrostático toman las siguientes formas

$$M' = \rho r^2, \quad (4.24)$$

$$P' = -\frac{G\rho M}{r^2}. \quad (4.25)$$

Dichas ecuaciones caracterizan el equilibrio termodinámico para fuentes newtonianas con simetría esférica.

El sistema (4.21)-(4.22) consta de dos ecuaciones para tres incógnitas:  $\mu$ ,  $P$  y  $M$ , de manera que para que pueda ser integrado necesitamos una expresión que relacione  $\mu$  y  $P$ , ya que son funciones que determinan las características físicas de la fuente. Esta expresión es la ecuación de estado. En particular, para un fluido termodinámico, la ecuación de estado tiene la forma

$$\mu = \mu(n, T), \quad P = P(n, T), \quad (4.26)$$

donde  $n$  y  $T$  son la densidad de número de partículas y la temperatura. En este trabajo, pretendemos aplicar las ecuaciones TOV al gas de Boltzmann y de Jüttner, para el cual es posible expresar  $\mu$  y  $P$  de manera similar a (4.26). Para ilustrar cómo se puede usar el sistema (4.21)-(4.22), consideramos primero el caso idealizado de la solución interior de Schwarzschild que ahora presentamos.

### 4.2.2 Solución “interior” de Schwarzschild

El caso más sencillo, es el que se fija alguna de las tres funciones  $M$ ,  $\mu$  o  $P$  de manera arbitraria, como por ejemplo

$$\mu = \mu_0 = \text{constante}. \quad (4.27)$$

La solución exacta del sistema (4.21)-(4.22) bajo la condición (4.27) es conocida como “solución interior de Schwarzschild” [2].

La condición (4.27) en (4.21) implica inmediatamente que

$$M = \frac{\kappa}{6} \mu_0 r^3 \quad (4.28)$$

donde hemos supuesto que  $M(0) = 0$ . Mientras que (4.22) toma la forma

$$P' = -\frac{(\kappa r/6)(\mu_0 + P)(\mu_0 + 3P)}{1 - (\kappa\mu_0/3)r^2}. \quad (4.29)$$

Si ahora integramos (4.29) obtenemos

$$\frac{\mu_0 + 3P}{\mu_0 + P} = \frac{\mu_0 + 3P_c}{\mu_0 + P_c} \left[ 1 - (\kappa/3)\mu_0 r^2 \right]^{1/2}, \quad (4.30)$$

donde  $P_c = P(0)$  se refiere al valor central de  $P$ , notación que se utilizará de ahora en más.

Por otra parte, de (4.14) con  $\mu$  constante obtenemos que  $P$  y  $\Phi$  están relacionados como

$$P + \mu_0 = C \exp(-\Phi/c^2), \quad (4.31)$$

donde  $C$  es una constante arbitraria. Las ecuaciones (4.28), (4.29) y (4.31) determinan completamente la solución de equilibrio hidrostático para una configuración esférica de fluido perfecto con densidad de masa-energía constante  $\mu_0$ .

Si tenemos una esfera de radio  $r = r_b$  con  $\mu = \mu_0$ , el campo externo para  $r > r_b$  está dado por la métrica de Schwarzschild, con

$$M_0 = M(r_b) = \frac{\kappa}{6} \mu_0 r_b^3. \quad (4.32)$$

En  $r = r_b$  se deben cumplir la continuidad de las soluciones que describen al sistema en el interior y en el exterior, tanto de la métrica en la dirección tangente a la interfase, como de su curvatura extrínseca. Para Schwarzschild, los coeficientes métricos  $g_{\theta\theta}$  y  $g_{\phi\phi}$  son iguales, por lo que, en estas condiciones, la continuidad están dada por [18]

- Continuidad de  $g_{00}$

$$\exp\left(\frac{2\Phi(r_b)}{c^2}\right) = 1 - \frac{2GM_0}{c^2 r_b} = 1 - \frac{\kappa}{3}\mu_0 r_b^2. \quad (4.33)$$

- Continuidad de  $P(r)$

$$P(r_b) = 0 \quad (4.34)$$

Usando (4.27), (4.32), (4.29) y (4.31), y las condiciones (4.33) y (4.34), entonces,  $\Phi$  y  $P$  en el intervalo  $0 \leq r \leq r_b$  toman la forma

$$\exp\left(\frac{\Phi}{c^2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2GM_0}{c^2 r_b}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2GM_0 r^2}{c^2 r_b^3}}, \quad (4.35)$$

$$P = \mu_0 \frac{\sqrt{1 - 2GM_0 r^2/(c^2 r_b^3)} - \sqrt{1 - 2GM_0/(c^2 r_b)}}{3\sqrt{1 - 2GM_0/(c^2 r_b)} - \sqrt{1 - 2GM_0 r^2/(c^2 r_b^3)}}, \quad (4.36)$$

de manera que para  $r = 0$  obtenemos la siguiente relación entre  $P_c$  y  $r_b$

$$P_c = \mu_0 \frac{1 - \sqrt{1 - 2GM_0/(c^2 r_b)}}{3\sqrt{1 - 2GM_0/(c^2 r_b)} - 1} \quad (4.37)$$

de donde se ve que una esfera de densidad constante y radio  $r_b$  finito puede tener una presión central  $P_c$  finita, solamente si  $r_b$  y  $M_0$  satisfacen la condición

$$\frac{2GM_0}{c^2 r_b} < \frac{8}{9}, \quad (4.38)$$

la cual es conocida como el “límite de Chandrasekhar” [18]. Esta es una restricción sobre los radios y masas que puede tener un objeto esférico de densidad constante en equilibrio hidrostático, característica de las configuraciones relativistas. Mientras que en el caso newtoniano, la solución a las ecuaciones de equilibrio (4.12) y (4.14) es el caso equivalente en el cual  $\rho = \rho_0$ , con  $\rho_0$  constante, por lo que se sigue que la expresión correspondiente para  $P(r)$  que satisface  $P(r_b) = 0$  es

$$P = \frac{2\pi G \rho^2}{3}(r_b^2 - r^2), \quad (4.39)$$

de modo que para una masa  $M_0 = M(r_b) = (4/3)\pi\rho_0 r_b^3$  la presión central  $P_c = G\rho_0 M_0/(2r_b)$  no presenta restricción alguna sobre  $M_0$  y  $r_b > 0$  [2, 15, 11].

## Capítulo 5

# El Gas de Maxwell-Jüttner en equilibrio hidrostático

### 5.1 El Gas de Maxwell-Jüttner en Relatividad General

Anteriormente –en el capítulo 2–, obtuvimos la ecuación de estado y las cantidades termodinámicas más importantes en el espacio-tiempo plano de Minkowski, utilizando Relatividad Especial. Por otra parte, la Teoría Cinética Relativista considera las partículas del gas como partículas libres, y sus ecuaciones de movimiento son

$$\frac{dx_A^\alpha}{d\lambda} = p_A^\alpha, \quad \frac{dp_A^\alpha}{d\lambda} = 0, \quad (5.1)$$

y la ecuación de Boltzmann esta dada por

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = C(x, p), \quad (5.2)$$

donde  $C(x, p)$  es el término de colisiones. La función de distribución en equilibrio  $f = f^{(eq)}$  que satisface (5.2) para el gas de Jüttner es [3, 4, 19]

$$f^{(eq)}(x, p) = \frac{g_s}{h^3} \exp(\alpha + \beta_\mu p^\mu), \quad (5.3)$$

$$\alpha = \frac{\mu E}{kT}, \quad \beta_\mu = \frac{u_\mu}{kT} = \frac{\beta u_\mu}{mc^2}, \quad (5.4)$$

donde  $\beta = mc^2/(kT)$ , de manera que

$$\alpha_{,\mu} = 0, \quad \beta_{(\mu,\nu)} = 0. \quad (5.5)$$

En Relatividad General, el gas de Jüttner es un sistema autogravitante, esto significa que se considera una fuente de campo gravitacional, y se caracteriza por una métrica que satisface las ecuaciones de Einstein con un tensor de energía-momento con  $\mu$  y  $P$  dadas por 2.61 y 2.62, vistas anteriormente.

El objetivo ahora, es ampliar los resultados considerando un espacio-tiempo curvo. Para esto, nos valdremos del principio de equivalencia y de las ecuaciones en su forma tensorial halladas para Minkowski, ya que localmente siguen siendo válidas. Bajo estas consideraciones, las partículas de gas pueden ser tomadas como partículas libres, y sus trayectorias entre colisión y colisión responden a las líneas universo determinadas por las geodésicas, que serán continuas a trozos. Las ecuaciones de movimiento (5.1) y las de Boltzmann (5.2) en un espacio-tiempo curvo, pueden ser generalizadas a

$$\frac{dx_A^\alpha}{d\lambda} = p_A^\alpha, \quad \frac{dp_A^\alpha}{d\lambda} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p_A^\beta p_A^\gamma, \quad (5.6)$$

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p_A^\beta p_A^\gamma \frac{\partial f}{\partial p^\alpha} = C(x, p), \quad (5.7)$$

Los supuestos referidos al gas de Jüttner (capítulo 2) en el espacio-tiempo curvo, siguen siendo válidos. Así, la función de distribución de equilibrio (5.3) y (5.4) son las que caracterizan al gas. Por otro lado, la primer ecuación de (5.5) es igual, e indica que  $\alpha$  es una constante para cualquier observador. La segunda ecuación de (5.5) toma la forma

$$\beta_{(\mu,\nu)} = 0, \quad (5.8)$$

lo que indica que  $\beta^\mu$  es un vector de Killing. Este vector es temporal y paralelo a  $u^\mu$ , lo que indica que se trata de un espacio-tiempo que al ser de simetría esférica debe ser estático. Esto nos muestra que el gas de Jüttner es una fuente de curvatura de un espacio-tiempo estático con simetría esférica.

## 5.2 Variables termodinámicas

En el capítulo 2, mostramos que la ecuación de estado del gas de Jüttner está dada por la densidad de masa-energía  $\mu$  y la presión  $P$  en términos de las variables  $T$  y  $n$ . Si usamos la variable  $\beta = mc^2/kT$  concida como “frialdad relativista”, y la densidad de masa en reposo  $\rho = mn$ , las ecuaciones de estado pueden ser reescritas como

$$\mu = \rho c^2 \left[ \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)} - \frac{1}{\beta} \right], \quad (5.9)$$

$$P = \frac{\rho c^2}{\beta}. \quad (5.10)$$

Aquí, las  $K_s$  son las funciones de Bessel modificadas de segundo orden, las mismas que aparecieron en el capítulo 2. Así, podemos llegar a la densidad de número de partículas

$$n = \frac{4\pi g_s (mc)^3 K_2(\beta)}{h^3 \beta} \exp(\mu_E/kT), \quad (5.11)$$

donde  $g_s$  es el parámetro de spin y  $\mu_E$  es el potencial químico en equilibrio. La condición de equilibrio de la distribución de Maxwell-Jüttner precisa que  $\mu_E/kT$  sea constante. Si usamos  $\rho = mn$ , la ecuación (5.11) puede ser reescrita como

$$\rho = \rho_c \frac{\beta_c K_2(\beta)}{\beta K_2(\beta_c)}. \quad (5.12)$$



Por otra parte, si trabajamos sobre la ecuación (5.8) obtenemos que

$$u^\alpha T_{,\alpha} = \dot{T} = 0, \quad (5.13)$$

$$h^\beta_{\alpha} T_{,\beta} + T \dot{u}_\alpha = 0, \quad (5.14)$$

donde  $\dot{u}_\alpha = u_{\alpha,\beta} u^\beta$  es la cuadri-aceleración asociada a la cuadri-velocidad  $u^\alpha$ .

Hemos visto (Capítulo 4) que para un espacio-tiempo esférico y estático tenemos que

$$ds^2 = - \exp\left(\frac{2\Phi(r)}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left[1 - \frac{\kappa M(r)}{r}\right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5.15)$$

y la cuadri-velocidad comóvil es

$$u^\alpha = \exp\left(-\frac{\Phi}{c^2}\right) \delta_0^\alpha. \quad (5.16)$$

Con estos dos resultados en mente, obtenemos que la ecuación (5.13) implica que  $T = T(r)$ , lo cual es consistente con el carácter estático de (5.15). La ecuación (5.14) indica que el estado de equilibrio de un gas ideal en la formulación relativista, no está asociado con la ausencias de gradientes de temperatura, como sí sucede en termodinámica clásica, en la que el gas no-degenerado en equilibrio es isotérmico. En el marco de RG, cuando es gas de Jüttner es autogravitante, se requiere un gradiente de temperatura  $T$  proporcional a la 4-aceleración, necesario para mantener al gas en un sistema de referencia estático. Esto fue estudiado por primera vez por Tolman en 1930, por lo que la ecuación (5.14) se conoce como “ley de Tolman” [20, 21].

En el caso de la métrica (5.15), y la velocidad (5.16), con la aceleración expresada como  $\dot{u}_\alpha = (\Phi'/c^2) \delta_\alpha^r$ , podemos expresar la ley de Tolman como

$$\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{T'}{T} = \frac{\Phi'}{c^2}, \quad (5.17)$$

de donde obtenemos que la relación entre  $\beta$  y  $\Phi$  es

$$\beta = \beta_c \exp\left(\frac{\Phi - \Phi_c}{c^2}\right), \quad (5.18)$$

y el subíndice  $_c$  indica la evaluación de  $\Phi$  en  $r = 0$ .

Con las ecuaciones (5.17) y (5.18), podemos encontrar una relación con el corrimiento al rojo de la forma

$$\frac{T}{T_c} \exp\left(\frac{\Phi_c - \Phi}{c^2}\right) = \frac{1}{1+z}, \quad (5.19)$$

donde vemos que la temperatura de equilibrio es inversamente proporcional al corrimiento al rojo entre observadores estáticos (el emisor está ubicado en la línea de

universo central  $r = 0$ ). Como ya se mostró en 2, la entropía por partícula del gas de Jüttner es

$$\frac{S}{k} = \ln \left[ \frac{4\pi g_s (mc)^3 K_2(\beta)}{nh^3 \beta} \right] + \beta \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)}. \quad (5.20)$$

Si sustituímos (5.11) en (5.20), podemos notar que el primer término de la suma del lado derecho es constante e igual a  $\mu_E/kT$ . Así, podemos escribir (5.20) como

$$\frac{S - S_c}{k} = \beta \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)} - \beta_c \frac{K_3(\beta_c)}{K_2(\beta_c)}. \quad (5.21)$$

Otra variable termodinámica importante es la entalpía, la cual se escribe como

$$h = \frac{\mu + P}{n} = mc^2 \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)}, \quad (5.22)$$

y las capacidades caloríficas por partícula  $c_V$  y  $c_P$ , a volumen y presión constantes son

$$c_V = \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_V = k \left[ \beta^2 + 5\beta F(\beta) - \beta^2 F^2(\beta) - 1 \right], \quad (5.23)$$

$$c_P = \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = k \left[ \beta^2 + 5\beta F(\beta) - \beta^2 F^2(\beta) \right], \quad (5.24)$$

donde  $F(\beta) \equiv K_3(\beta)/K_2(\beta)$ . A diferencia del gas ideal clásico (gas de Maxwell-Boltzmann), el coeficiente  $c_P/c_V$  no es constante [3, 4, 19, 9].

### 5.3 Límites asintóticos

En el capítulo 2, el valor del parámetro  $\beta = mc^2/kT$  determina si el gas de Jüttner se encuentra en un régimen ultra-relativista  $\beta \ll 1$ , o no-relativista  $\beta \gg 1$ . Las funciones de Bessel modificadas que aparecen en las expresiones (5.9)-(5.12) se reducen a funciones elementales en estos límites asintóticos. A continuación, analizaremos los límites de las cantidades termodinámicas más relevantes

- Masa-energía por partícula

$$\frac{\mu}{\rho c^2} = \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)} - \frac{1}{\beta}. \quad (5.25)$$

- Cociente entre presión y densidad de masa-energía

$$\frac{P}{\mu} = \frac{K_2(\beta)}{\beta K_3(\beta) - K_2(\beta)}. \quad (5.26)$$

- Entropía por partícula (menos la fugacidad  $\alpha = \mu_E/(kT) = \text{constante}$ )

$$\frac{S}{k} - \alpha = \beta \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)}. \quad (5.27)$$

- Cociente de capacidades caloríficas  $c_P/c_V$

$$\frac{c_P}{c_V} = \frac{\beta^2 + 5\beta F(\beta) - \beta^2 F^2(\beta)}{\beta^2 + 5\beta F(\beta) - \beta^2 F^2(\beta) - 1}, \quad F(\beta) \equiv \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)}. \quad (5.28)$$

### 5.3.1 Límite ultra-relativista

En la aproximación  $\beta \ll 1$  y  $\beta_c \ll 1$ , las expresiones de las cantidades (5.25)-(5.28) alrededor de  $\beta = 0$  son las siguientes

$$\frac{\mu}{\rho c^2} \approx \frac{3}{\beta} + O(\beta), \quad (5.29)$$

$$\frac{P}{\mu} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{18}\beta + O(\beta^2), \quad (5.30)$$

$$\frac{S}{k} - \alpha \approx 4 + \frac{\beta^2}{2} + O(\beta^4), \quad (5.31)$$

$$\frac{c_P}{c_V} \approx \frac{4}{3} + \frac{\beta^2}{18} + \left[ \gamma + \frac{12}{27} + \ln \frac{\beta}{2} \right] \frac{\beta^4}{12} + O(\beta^6). \quad (5.32)$$

Por último, en este límite la expresión correspondiente a la densidad de masa en reposo (densidad de número de partículas) está dada por

$$\frac{n}{n_c} = \frac{\rho}{\rho_c} \approx \left( \frac{\beta_c}{\beta} \right)^3 + O(\beta). \quad (5.33)$$

Además, las cantidades termodinámicas (5.25)-(5.28) toman la forma aproximada a las ecuaciones correspondientes de un gas de fotones –radiación–, donde  $P = \mu/3$ ,  $n \propto \beta^{-3} \propto T^3$  y  $\mu \gg \rho c^2$ .

### 5.3.2 Límite no-relativista

En la aproximación  $\beta \gg 1$  y  $\beta_c \gg 1$ , las expresiones asintóticas de las cantidades (5.25)-(5.28) son las siguientes

$$\frac{\mu}{\rho c^2} \approx 1 + \frac{3}{2\beta} + O(\beta^{-2}), \quad (5.34)$$

$$\frac{P}{\mu} \approx \frac{1}{\beta} - \frac{3}{2\beta^2} + O(\beta^{-3}), \quad (5.35)$$

$$\frac{S}{k} - \alpha \approx \frac{5}{2} + \beta + O(\beta^{-1}), \quad (5.36)$$

$$\frac{c_P}{c_V} \approx \frac{5}{3} \left[ 1 - \frac{1}{\beta} + \frac{5}{2\beta^2} \right] + O(\beta^{-3}). \quad (5.37)$$

Por otra parte la expresión de la masa en reposo (5.11) es

$$\frac{n}{n_c} = \frac{\rho}{\rho_c} \approx \left( \frac{\beta_c}{\beta} \right)^{3/2} \exp(\beta_c - \beta) + O(\beta^{-5/2}). \quad (5.38)$$

Las cantidades (5.34)-(5.38) toman las formas correspondientes a la configuración no relativistas, en la cual la masa-energía está dada en su mayor parte por la masa en reposo, de manera que  $P/\mu \approx 1/\beta \ll 1$ ,  $n \propto T^{3/2}$  y  $\mu \approx \rho c^2$ .

### 5.3.3 Límite newtoniano: esfera isotérmica

Cuando  $\beta \rightarrow \infty$  (equivalente a una configuración newtoniana), donde  $\kappa M_0/r \ll r$ , la condición que especifica dicha configuración pasa a ser  $2M/\beta_c \ll r$ .

Para obtener el límite newtoniano tomamos en cuenta la aproximación de campo débil en la que hacemos  $\Phi/c^2 \ll 1$  para todo  $r$ , y si expandimos (5.17) y (5.18), entonces tenemos

$$\left(\frac{\beta_c}{\beta}\right)^{3/2} \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{\Phi - \Phi_c}{c^2} \approx 1, \quad \beta_c - \beta \approx -\beta_c \frac{\Phi - \Phi_c}{c^2}. \quad (5.39)$$

Con esto en mente, si sustituimos (5.39) en las ecuaciones características de Newton 4.24 y 4.25, y tomando en cuenta que (5.17) implica que

$$\frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dr} = \frac{d}{r} \left( \frac{\Phi}{c^2} \right), \quad (5.40)$$

las ecuaciones resultantes toman la forma característica del gas de Maxwell-Boltzmann newtoniano, también conocido como “esfera isotérmica”

$$\frac{dM}{dr} = e^{-\Psi} r^2, \quad (5.41)$$

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{M}{r^2}, \quad (5.42)$$

en la cual hemos definido  $\Psi$  como

$$\Psi \equiv \frac{\beta_c(\Phi - \Phi_c)}{c^2} = \frac{\Phi - \Phi_c}{\sigma^2}, \quad (5.43)$$

donde  $\sigma^2 = kT/m = c^2/\beta_c$  es la dispersión cuadrática de las velocidades asociadas a la esfera isotérmica. En el contexto newtoniano, únicamente la densidad de masa en reposo  $\rho/\rho_c = e^{-\Psi}$  contribuye a la masa  $M$  contenida en un radio  $r$ , mientras que el potencial newtoniano  $\Phi$  es del orden de magnitud de velocidades de dispersión newtonianas  $\sigma_c^2/c^2 \sim 1/\beta_c \ll 1$ .

Si bien la esfera isotérmica nos permite acercarnos a la dinámica del sistema, entendemos que se trata de un modelo limitado y no realista. En este sentido, la Teoría cinética ofrece modelos más adecuados para una descripción más cercana a lo que esperaríamos de la Naturaleza. Por ejemplo, los modelos de King proponen una esfera isotérmica válida solamente para un rango de velocidades acotadas por un valor límite, tal que para valores mayores, la función de distribución se anula; o podemos encontrar también modelos de poltropos estelares. Se pueden encontrar modelos de gases de galaxias más realistas y complejos, que no abordaremos aquí, pero pueden consultar en [22].

## 5.4 Regímenes de transición relativistas

En esta sección mostraremos las gráficas de las distintas cantidades termodinámicas correspondientes al gas de Jüttner en los límites ultra-relativistas (UR) y no-relativista (NR).

42CAPÍTULO 5. EL GAS DE MAXWELL-JÜTTNER EN EQUILIBRIO HIDROSTÁTICO

A continuación, condensaremos las expresiones más importantes junto a sus límites UR y NR.

- Masa-energía por partícula

$$\frac{\mu}{\rho c^2} = \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)} - \frac{1}{\beta}, \quad (5.44)$$

$$\approx \frac{3}{\beta}, \quad \text{UR} \quad (5.45)$$

$$\approx 1 + \frac{3}{2\beta}. \quad \text{NR} \quad (5.46)$$

- Cociente entre presión y densidad de masa-energía

$$\frac{P}{\mu} = \frac{K_2(\beta)}{\beta K_3(\beta) - K_2(\beta)}, \quad (5.47)$$

$$\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{18}\beta, \quad \text{UR} \quad (5.48)$$

$$\approx \frac{1}{\beta} - \frac{3}{2\beta^2}. \quad \text{NR} \quad (5.49)$$

- Entropía por partícula menos la fugacidad

$$\frac{S}{k} - \alpha = \beta \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)}, \quad (5.50)$$

$$\approx 4 + \frac{\beta^2}{2}, \quad \text{UR} \quad (5.51)$$

$$\approx \frac{5}{2} + \beta. \quad \text{NR} \quad (5.52)$$

- Cociente de capacidades caloríficas  $c_P/c_V$

$$\frac{c_P}{c_V} = \frac{\beta^2 + 5\beta F(\beta) - \beta^2 F^2(\beta)}{\beta^2 + 5\beta F(\beta) - \beta^2 F^2(\beta) - 1}, \quad F(\beta) \equiv \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)}, \quad (5.53)$$

$$\approx \frac{4}{3} + \frac{\beta^2}{18} + \left[ \gamma + \frac{12}{27} + \ln \frac{\beta}{2} \right] \frac{\beta^4}{12}, \quad \text{UR} \quad (5.54)$$

$$\approx \frac{5}{3} \left[ 1 - \frac{1}{\beta} + \frac{5}{2\beta^2} \right]. \quad \text{NR} \quad (5.55)$$

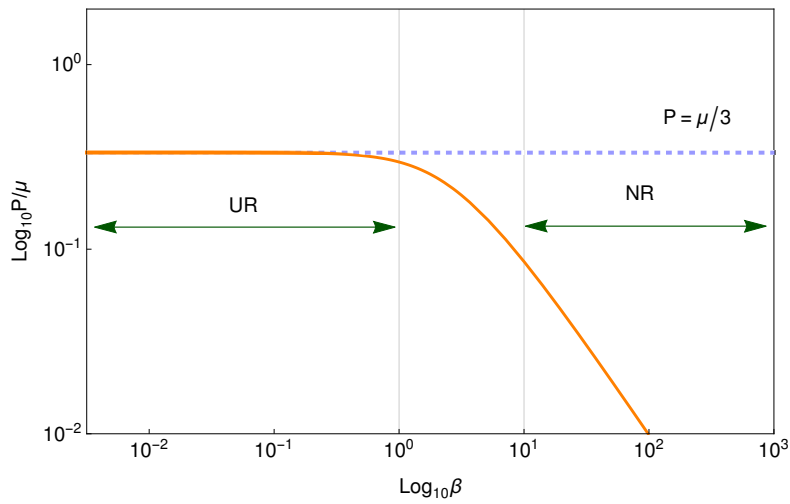


Fig. 5.1: Cociente  $P/\mu$ . Se muestra graficada las expresiones (5.26), y los límites ultra-relativista (5.30) y no-relativista (5.35). Nótese que  $P/\mu \rightarrow 1/3$  en el caso UR, mientras que  $P/\mu \rightarrow 1/\beta \lll 1$  en el caso NR. Los casos límite no coinciden con la solución general (5.26) en el intervalo de transición  $1 < \beta < 10$ .

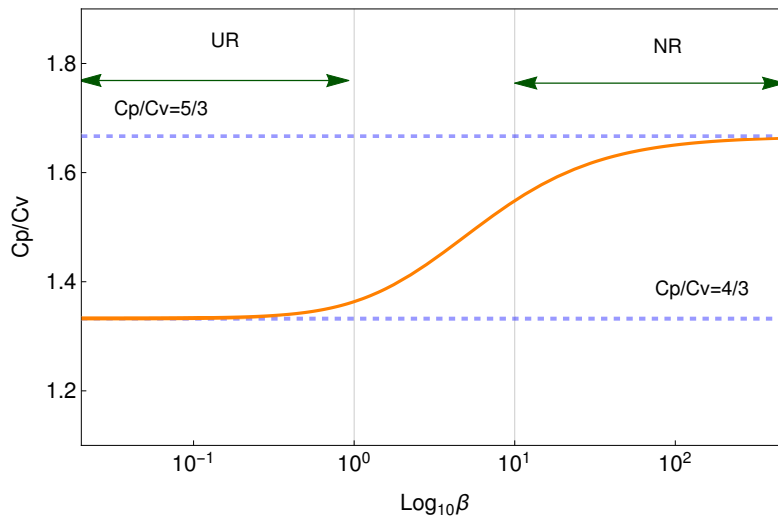


Fig. 5.2: Cociente  $C_p/C_v$ . Las funciones graficadas corresponden a la expresión (5.28), y los límites ultra-relativista (5.32) y no-relativista (5.37). Nótese que  $C_p/C_v$ , en los regímenes UR y NR, tiende a los valores constantes  $4/3$  y  $5/3$  respectivamente. En el intervalo de transición las soluciones de los límites asintóticos no coinciden con la general.

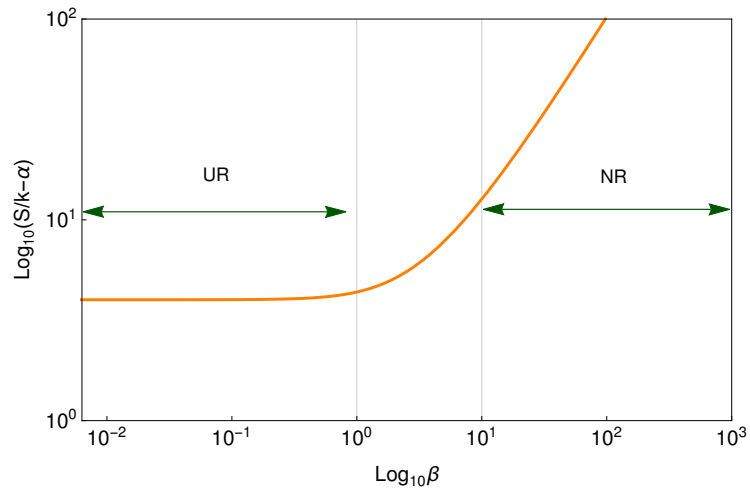


Fig. 5.3: Entropía  $S/k - \alpha$ . Se muestra graficada la expresión (5.27), y los límites ultra-relativista (5.31) y no-relativista (5.36). En el límite ultra-relativista, cuando  $\beta \rightarrow 0$ , tenemos que  $S/k \rightarrow 4 + \alpha$ , mientras que en límite no-relativista, cuando  $\beta \rightarrow \infty$ , entonces  $S/k \rightarrow \beta$ . En el intervalo  $1 < \beta < 10$  los límites asintóticos no coinciden con la solución general.

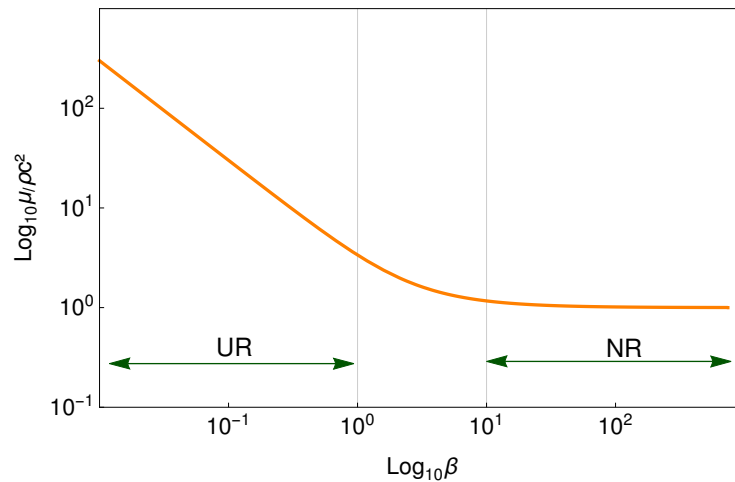


Fig. 5.4: Masa-energía por partícula. Las expresiones graficadas corresponden a la expresión (5.25), y los límites ultra-relativista (5.29) y no-relativista (5.34). En la figura podemos ver que en el límite UR ( $\beta < 1$ ), se tiene que la masa-energía interna por partícula es mucho mayor que la energía en reposo; y el límite NR ( $\beta > 10$ ) la totalidad de la masa-energía es la masa en reposo. En el intervalo  $1 < \beta < 10$  los límites asintóticos no coinciden con la solución general.

## 5.5 Nociones de Termodinámica irreversible y Ley de Tolman

A continuación mostraremos los principales resultados de la Termodinámica irreversible, que describen de manera más fiel lo que es un fluido real, es decir un fluido disipativo. La bibliografía principal de esta sección se remite a [23] y [19], y se puede consultar las fuentes ahí mencionadas, en caso de un estudio superior.

La cuadracorriente será similar a la presentada en el capítulo 2

La consideración principal que incluiremos aquí, será la redefinición de

$$p_{\text{ef}} = p + \Pi \quad (p \rightarrow p_{\text{ef}}, \quad \bar{p} \rightarrow p), \quad (5.56)$$

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + (p + \Pi)h_{\alpha\beta} + q_\alpha u_\beta + q_\beta u_\alpha + \pi_{\alpha\beta}, \quad (5.57)$$

donde

$$q_\alpha u^\alpha = 0, \quad \pi_{\alpha\beta} = \pi_{\langle\alpha\beta\rangle} \implies \pi_{\alpha\beta} u^\beta = \pi_{[\alpha\beta]} = \pi^\alpha{}_\alpha = 0. \quad (5.58)$$

En un marco comóvil, tenemos que  $q_\alpha \equiv (0, \bar{q})$  y  $\pi_{\alpha\beta} \equiv \pi_{ij} \delta_\alpha^i \delta_\beta^j$ . Así,  $\bar{q}$  representa un flujo de energía relativo al marco de la partícula, y  $\pi_{ij}$  es la tensión anisotrópica.

Aquí también deben coservarse el número de partículas y la energía-momento:

$$n^\alpha{}_{,\alpha} = 0, \quad T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0. \quad (5.59)$$

La conservación de lo anterior, al incluir los términos disipativos, quedan de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + 3H(\rho + p + \Pi) + \nabla^\alpha q_\alpha + 2\dot{u}_\alpha q^\alpha + \sigma_{\alpha\beta} \pi^{\alpha\beta} &= 0; \\ (\rho + p + \Pi)\dot{u}_\alpha + \nabla_\alpha(p + \Pi) + \nabla^\beta \pi_{\alpha\beta} + \dot{u}^\beta \pi_{\alpha\beta} & \\ + h_\alpha{}^\beta \dot{q}_\beta + (4Hh_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta})q^\beta &= 0. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Al tratarse de un caso real, no ideal, tenemos que la entropía crece (no se conserva), según indica la segunda ley de la termodinámica. Esto lo podemos escribir como

$$S^\alpha{}_{,\alpha} \geq 0, \quad (5.61)$$

donde la entropía incluye el término disipativo

$$S^\alpha = S n u^\alpha + \frac{R^\alpha}{T}, \quad (5.62)$$

y  $S$  y  $T$  se relacionan a través de la ecuación de Gibbs:

$$T dS = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + p d\left(\frac{1}{n}\right). \quad (5.63)$$

La función  $R^\alpha$  tiene información de la disipación del sistema, y no depende de derivadas, sino que tiene la forma  $R^\alpha = R^\alpha(n^\beta, T^{\nu\mu})$ , y en el equilibrio se anula



$R_{\text{eq}}^\alpha = 0$ . Trabajaremos con la teoría de Eckart, ya que propone la forma más simple, siendo  $R^\alpha = q^\alpha$ , así

$$S^\alpha = Snu^\alpha + \frac{q^\alpha}{T}. \quad (5.64)$$

Las ecuaciones 5.60, junto con 5.63 y las leyes de conservación, nos llevan a que

$$TS^\alpha_{,\alpha} = - \left[ 3H\Pi + (\nabla_\alpha \ln T + \dot{u}_\alpha)q^\alpha + \sigma_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta} \right], \quad (5.65)$$

que en el equilibrio se obtiene exactamente  $S^\alpha_{,\alpha} = 0$ , ya que  $H = 0$ ,  $\dot{u}_\alpha = -\nabla_\alpha \ln T$ ,  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$  y  $\dot{n} = \dot{\rho} = \dot{p} = \dot{T} = 0$ .

Partiendo de 5.65, si se quiere satisfacer la ecuación 5.61, se deben imponer ciertas condiciones sobre los flujos termodinámicos  $\Pi$ ,  $q_\alpha$  y  $\pi_{\alpha\beta}$  y las “fuerzas”  $H$ ,  $\dot{u}_\alpha + \nabla_\alpha \ln T$ , y  $\sigma_{\alpha\beta}$  de la siguiente manera

$$\Pi = -3\zeta H, \quad (5.66)$$

$$q_\alpha = -\lambda(\nabla_\alpha T + T\dot{u}_\alpha), \quad (5.67)$$

$$\pi_{\alpha\beta} = -2\eta\sigma_{\alpha\beta}. \quad (5.68)$$

Estas son las ecuaciones constitutivas en la teoría de Eckart, la cual describe la termodinámica irreversible de procesos relativistas, y representan la generalización de las leyes de Newton:

$$\Pi = -3\zeta \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

$$\vec{q} = -\lambda \vec{\nabla} T,$$

$$\pi_{\alpha\beta} = 2\eta\sigma_{\alpha\beta}.$$

En analogía con las leyes newtonianas, podemos hacer una identificación de los coeficientes termodinámicos: la viscosidad volumétrica con  $\zeta(\rho, n)$ ;  $\lambda(\rho, n)$  con la conductividad térmica; y  $\eta(\rho, n)$  sería la tensión de corte.

Especial relevancia tiene para nosotros la ecuación 5.67, ya que a partir de esta obtenemos la Ley de Tolman, la cual indica que existe una aceleración a causa de la inercia de la energía calórica, es decir que habrá un flujo de calor a causa de la materia acelerada, aunque no haya gradiente de temperatura, como mencionamos anteriormente.

Por medio de las ecuaciones constitutivas 5.66, 5.67 y 5.68, obtenemos que la producción de entropía se puede expresar como

$$S^\alpha_{,\alpha} = \frac{\Pi^2}{\zeta T} + \frac{q_\alpha q^\alpha}{\lambda T^2} + \frac{\pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta}}{2\eta T}, \quad (5.69)$$

y queda garantizado por la segunda ley que  $\zeta \geq 0$ ,  $\lambda \geq 0$  y  $\eta \geq 0$ .

## Capítulo 6

# Efectos dinámicos de la constante cosmológica

La constante cosmológica  $\Lambda$  es una energía asociada al vacío, que modifica las propiedades del espacio-tiempo y de la materia [24]. Desde hace más de cien años se intenta explicar la naturaleza de  $\Lambda$ , tanto desde un punto de vista teórico como observacional.

Fue en la década de los '90 cuando se empieza a tener observaciones más complejas del Universo –a través de las mediciones de supernovas–, y se incluye a  $\Lambda$  como tópico relevante, necesario y urgente en el campo de la Astrofísica, para dar más robustez a los modelos, y tratar de explicar qué es lo que *se ve* en el Cosmos y cómo fue esa evolución. Aún hoy, esa discusión continúa.

Si bien se han propuesto diversas teorías, que incluso comienzan o desenvocan en universos completamente distintos, el modelo más aceptado para describir el Universo actual es el Modelo Cosmológico Estándar ( $\Lambda$ CDM). Los supuestos fundamentales en los que se basa pueden enunciarse de manera sencilla. Por un lado contamos con el *principio cosmológico*, que postula que a grandes escalas el Universo es homogéneo e isotrópico. Esta suposición es razonable cuando se considera un volumen de grandes dimensiones –en una escala de varios megaparsecs (Mpc)–, donde se tiene que la distribución de radiación y materia es uniforme, y que no hay diferencia en los universos que registran los distintos observadores.

El otro supuesto indica que la interacción que domina a gran escala es la gravitacional, y se describe a través de la Relatividad General. Al asumir esto, se desprecia cualquier otra interacción fundamental. Como consecuencia, tenemos que la expansión del Universo u otros fenómenos observables en el Cosmos, deben ser explicados de manera exclusiva por RG.

Las observaciones presentes justifican en gran medida que el modelo  $\Lambda$ CDM sea el que predomine en Astrofísica. En este capítulo revisaremos cuáles son los principales resultados e interpretaciones de la constante cosmológica  $\Lambda$  al incluirla en las ecuaciones de Einstein, y cuál es la dinámica que determina el que no sea nula.

## 6.1 Ecuaciones de campo con constante cosmológica

En principio retomaremos las ecuaciones de campo de Einstein ( $c = G = 1$ ), presentadas anteriormente en el capítulo 3:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (6.1)$$

Si suponemos un Universo homogéneo e isotrópico, se obtiene el Universo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), cuya métrica se describe por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)R_0^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (6.2)$$

Aquí,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  es la 2-esfera, y  $k$  es el parámetro de curvatura que toma los valores de  $+1$ ,  $0$  o  $-1$  para una curvatura positiva, plana o negativa respectivamente.

La función  $a(t) = R(t)/R_0$  es un factor de escala normalizado, y representa la expansión o contracción de espacio en función del tiempo.  $R_0$  es la cantidad evaluada al tiempo presente [25]. La materia de fondo es un fluido perfecto tipo polvo, descrito por el tensor de energía-momento correspondiente.

Con la métrica de FRW, las ecuaciones de Einstein son

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2 R_0^2}, \quad (6.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P), \quad (6.4)$$

donde se define el parámetro de Hubble como  $H \equiv \dot{a}/a$ . A continuación, presentaremos las modificaciones que incorpora la constante  $\Lambda$ .

### 6.1.1 Introducción de la constante cosmológica $\Lambda$

El primero en postular una constante cosmológica fue Einstein [26]. En ese momento se quería describir un Universo homogéneo y estático, y para contrarrestar la atracción de la gravedad, él agregó un término constante a las ecuaciones de campo.

Einstein estaba seguro que la geometría y la distribución de la materia en el Universo eran independientes del espacio y del tiempo [27], pero la solución a sus ecuaciones no describía esa certeza.

La visión que predominaba en la comunidad científica era la de un Universo estático y finito. Por este motivo, era necesaria otra *fuerza* o *interacción*, que anulara la atracción que ejerce la gravedad. Así, Einstein introdujo un término constante a sus ecuaciones de campo, que representaba una interacción repulsiva, y permitía describir un Universo en equilibrio y estático [28].

Este modelo cosmológico, conocido como *Universo estático de Einstein*, describe un universo en reposo, finito y esféricamente simétrico, y representa el punto de partida de la cosmología moderna.

Para analizar los efectos de la constante cosmológica, debemos retomar la métrica y el tensor de energía-momento, e incluir un término constante – para no modificar la

forma de las ecuaciones, precisamos de un término cuya derivada covariante sea nula y que a su vez no dependa de la derivada de la métrica-. Así, las ecuaciones de Einstein modificadas se expresan como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (6.5)$$

La constante  $\Lambda$  representa un nuevo parámetro libre, al que conocemos como *constante cosmológica*, con unidades de  $[L]^{-2}$ . El lado izquierdo de las ecuaciones (6.5) es el tensor más general, invariante, sin divergencia y simétrico que se puede proponer. Las ecuaciones de Friedmann con este agregado quedan de la forma

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2 R_0^2}, \quad (6.6)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (6.7)$$

Estas ecuaciones admiten una solución estática con las siguientes condiciones: la curvatura espacial debe ser positiva, y los parámetros  $\rho$ ,  $P$  y  $\Lambda$  no negativos [25].

La ecuación (6.7) es conocida como *ecuación de aceleración*, e incluso puede generalizarse para distintas clases de materia que contenga el Universo que derivan en dinámicas y evoluciones distintas.

En el límite clásico, la ecuación de Poisson modificada es

$$\Delta\Phi - \Lambda = 4\pi\rho, \quad (6.8)$$

que difiere de la ecuación usual por el término de  $\Lambda$ . Aquí se hace más claro cuál es el rol de la constante cosmológica, y que no aparece en la teoría newtoniana tradicional. La ley de Newton se modifica por la presencia de  $\Lambda$ , agregando una interacción entre las partículas que resulta atractiva si  $\Lambda > 0$ , o repulsiva si  $\Lambda < 0$  [27].

## 6.1.2 Dinámica de la energía oscura

A continuación, analizaremos las consecuencias de incluir a  $\Lambda$  y su dinámica. Para esto, presentamos los parámetros más utilizados en Cosmología.

La constante de Hubble  $H_0$  es el parámetro que nos brinda una escala absoluta, la edad del Universo y su tamaño. Además, nos permite cuantificar su evolución. El valor actual que se acepta, es aproximadamente  $H_0 = 68$  km/s/Mpc. Por otra parte, definimos los siguientes parámetros  $\Omega_s$ , que representan distintas densidades de energía presentes en el Universo:

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \frac{-k}{R_0^2 H_0^2}, \\ \Omega_\rho &= \frac{8\pi}{3H_0^2} \rho_0, \\ \Omega_\Lambda &= \frac{\Lambda}{3H_0^2}, \end{aligned}$$

que corresponden a los valores de que se estiman de cada uno al día de hoy [24]. Así, podemos reescribir la ecuación (6.6) de la forma

$$1 = \Omega_k + \Omega_\rho + \Omega_\Lambda. \quad (6.9)$$

Las constantes (6.9) permiten que la ecuación (6.6) sea expresada a un tiempo general. Si fijamos el factor de escala al día de hoy como  $a(t) = 1$ , obtenemos que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2 R_0^2}, \quad (6.10)$$

donde vemos de manera explícita cuáles son los parámetros que condicionan a  $a(t)$ , siendo proporcional a la curvatura  $k$  y a  $\Lambda$ .

La densidad  $\rho$  puede representar varios *tipos* de materias, y se distribuyen distinto a través del Universo. Por ejemplo, la “materia fría” no relativista es proporcional al inverso del volumen del Universo:

$$\Omega_{NR}(a) = \Omega_{NR} a^{-3};$$

la materia relativista –radiación–, escala a

$$\Omega_R(a) = \Omega_{NR} a^{-4};$$

y así con los diferentes “tipos” de materia, que escalan a distintas potencias de  $a$ , y que aquí no profundizamos. Para un abordaje completo puede consultarse [24, 29], y las citas ahí mencionadas.

La propuesta mejor aceptada en Cosmología, es la de considerar que en una etapa temprana el Universo era dominado por radiación (la energía relativista predominaba por encima de la materia). Actualmente, nos encontraríamos en una etapa donde la materia domina. Si sólo consideramos estas formas de energía, tenemos que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left( \frac{\Omega_{NR}}{a^3} + \frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \Omega_\Lambda \right), \quad (6.11)$$

y la ecuación de aceleración escrita en función de las  $\Omega$ s,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -H_0^2 \left( \frac{\Omega_{NR}}{2} a^{-3} + \Omega_R a^{-4} - \Omega_\Lambda \right). \quad (6.12)$$

Analizando (6.11), podemos observar de manera más clara las contribuciones de cada densidad de energía en la historia del Universo. Dependiendo de la magnitud y del signo, podemos ver que la radiación domina cuando  $a$  es pequeña; luego prevalece la materia no relativista; luego la curvatura; y por último predomina la constante cosmológica (para una discusión mayor, ver [30]).

El valor de  $\Omega_k$  nos indica si el universo es espacialmente cerrado, abierto o plano. El cambio de signo de  $\dot{a}$ , indica si se trata de una expansión eterna, o si recae. Si  $\Omega_\Lambda$  predomina, el Universo se expandiría de manera acelerada indefinidamente.

### Descartando el modelo estático

Al intentar modelar un universo estático, Einstein agrega una constante a sus ecuaciones. Si no lo hubiera hecho, probablemente hubiera predicho de manera exitosa la expansión del mismo, fenómeno que se observó 11 años después [27]. Aún así, la constante cosmológica peduró, y hoy en día es la mejor explicación a varias observaciones astronómicas, que toman a  $\Lambda$  como positiva y de un valor muy pequeño (del orden de  $10^{-50} \text{cm}^{-2}$ ), y tiene un rol relevante sobre todo en la evolución del Universo [31].

El modelo cosmológico estático de Einstein finalmente se descarta porque no es estable. Ante pequeñas perturbaciones al estado de equilibrio, se observan grandes cambios que llevan a escenarios astrofísicos no reales [32].

Esto se observa de manera simple: si partimos de la primer ecuación de Friedmann (6.6), la podemos reescribir de la siguiente manera

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi}{3}\rho a^2 - \frac{\Lambda}{3}a^2 = -\frac{k}{R_0^2}, \quad (6.13)$$

con el factor de escala  $a$  como variable radial. Si consideramos  $\rho_0 = \rho a^3$ , donde  $\rho_0$  es una densidad en un  $t_0$  dado, llegamos a

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi}{3}\frac{\rho_0}{a} - \frac{\Lambda}{3}a^2 = -\frac{k}{R_0^2}. \quad (6.14)$$

De esta última expresión, podemos asociar una energía cinética al primer término del lado izquierdo; al de curvatura (lado derecho), lo podemos interpretar como la energía total del sistema. Aquí definimos un potencial formado por dos partes: una debida a la energía gravitacional atractiva ( $\rho_0/a$ ); otra a una energía cósmica repulsiva tipo “elástica” ( $1/2ka^2$ ). Esta ecuación representa la conservación de la energía de un fluido cósmico, y por analogía con el caso newtoniano, vemos que se trata de un potencial que tiene un máximo ( $V'(a_0) = 0$ ,  $V''(a_0) > 0$ ), indicando un equilibrio inestable [32]. En la figura (6.1), se muestra de manera esquemática el comportamiento de este potencial.

## 6.2 Interpretación de la constante cosmológica

El Universo estático de Einstein no sólo fue descartado por ser inestable. Algunos años después, Hubble descubrió que el Universo se expandía, evidencia empírica que eliminaba de manera total la visión estática del Cosmos.

Luego de esto, la constante  $\Lambda$  hibernó largos años, y no fue repensada sino hasta los '60. Zel'dovich la retoma y propone como una densidad de energía del vacío en términos de fluctuaciones cuánticas [33]. Desde ahí el interés fue creciendo, sobre todo en las décadas posteriores con la presencia de los modelos de Inflación.

El modelo más simple para explicar la energía oscura es pensarla como una constante cosmológica que representa la energía de un estado fundamental. La densidad energética se mantiene constante en el tiempo y se define como  $\rho_\Lambda \equiv \Lambda/8\pi G = 6.44 \times 10^{-30} \Omega_\Lambda h^2 \text{gcm}^{-3}$ , donde  $h$  es la constante de Hubble.

Este valor proviene de la Física de Partículas, que nos permite estimar a  $\Lambda$  de manera aproximada, por medio de diversas consideraciones [25].

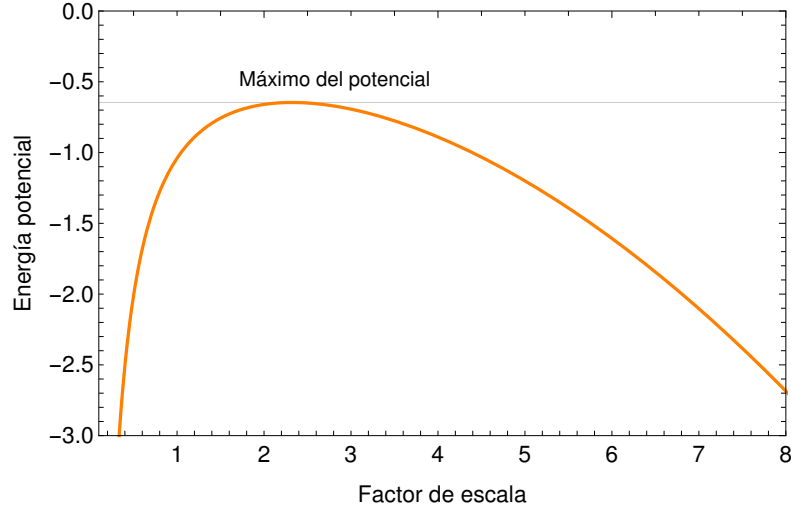


Fig. 6.1: Potencial para el modelo de Universo estático de Einstein. Aquí, se observa un potencial tipo newtoniano, donde aparece una inestabilidad a causa del término proporcional a  $\Lambda$ . Se utilizaron unidades arbitrarias. Cualquier perturbación alrededor del equilibrio, produce un colapso del Universo o una divergencia hacia  $a \rightarrow \infty$ .

Por ejemplo, si suponemos un campo escalar  $\phi$ , cuyo potencial es  $V(\phi)$ , podemos escribir su acción como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (6.15)$$

con un tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} (g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi) g_{\mu\nu} - V(\phi) g_{\mu\nu}. \quad (6.16)$$

Al estar interesados en un estado de mínima energía, no habrá aporte cinético ( $\partial_\mu \phi = 0$ ). Bajo este supuesto  $T_{\mu\nu} = -V(\phi_0) g_{\mu\nu}$ , con  $\phi_0$  minimizando el valor de  $V(\phi)$ . Así, tenemos que  $T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu}$ , y  $\rho_{vac} = V(\phi_0)$ .

Podemos imaginar que el vacío se comporta como un fluido perfecto donde  $P_{vac} = -\rho_{vac}$ , y el tensor de energía-momento equivale a tener una constante cosmológica

$$\rho_{vac} = \rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi}. \quad (6.17)$$

De esto se interpreta a la constante cosmológica como una energía del vacío (en esto último  $G = 1$ ).

También puede presentarse a  $\Lambda$  como un término constante en la acción de Einstein Hilbert. Aquí,  $\Lambda$  simboliza una parte de la densidad lagrangiana, que puede ser pensada como un término de masa. Cuando se extrema esa acción, se obtienen las mismas ecuaciones de movimiento (6.5).

Desde la mecánica cuántica, también se le puede asignar una interpretación a  $\Lambda$ , asociado a la energía mínima y a las fluctuaciones del vacío. Si se considera un campo cuántico libre formado por una colección de osciladores armónicos, se puede llegar a asociar  $\rho_\Lambda \sim \hbar k_{max}^4$ , con  $k_{max}$  un valor vinculado a la configuración del sistema.

Otra propuesta de gran peso actual para modelar la energía oscura, es el modelo de *quintaesencia*. Se trata de un campo escalar que interactúa con sí mismo, y está acoplado mínimamente a la gravedad. La evolución del campo escalar está dado por la ecuación de Klein-Gordon. En ciertas condiciones estos modelos llevan a un universo acelerado en tiempos tardíos. Esta línea de investigación se encuentra muy desarrollada y no quisiéramos detenernos en esto, pero se puede consultar en [34, 24, 25] y sus sugerencias.

La constante  $\Lambda$  podría ser esta u otras propuestas. Como conclusión hasta ahora, es que no hay una sola interpretación única y acabada; sino que podemos entender a  $\Lambda$  como una constante *neto* conformada de la suma de cada contribución mencionada.

Distintos modelos físicos han propuesto por medio de estimaciones teóricas, que el valor sugerido de  $\Lambda$  va desde el orden de  $\rho_\Lambda \sim 1.6 \times 10^{36} \text{erg/cm}^3$  (teoría QCD); a valores cercanos a  $\rho_\Lambda \sim 2 \times 10^{110} \text{erg/cm}^3$  (escala de Planck en QFT) [25].

Por otra parte, los datos observacionales de distintos fenómenos y objetos (que mostraremos a continuación), han permitido inferir distintos valores y órdenes de la “energía oscura”. Estas evidencias sugieren que el orden de  $\rho_\Lambda^{(obs)} \sim 2 \times 10^{-10} \text{erg/cm}^3$  [25, 24].

Las discrepancias entre ambas escalas –teóricas y observacionales– es de 120 órdenes de magnitud en los casos más extremos. Esto permite que se propongan desde los escenarios más curiosos y disparatados, hasta modelos complejos y bien fundamentados, para dar con una explicación y estimar un valor de  $\Lambda$  más certero. Este hecho se conoce como el “*problema de la constante cosmológica*”, y representa uno de los desafíos fundamentales de la Física hoy en día.

## 6.3 Evidencia observacional de la energía oscura

Existen diversas observaciones que ofrecen sólidos argumentos a favor de la existencia de una constante  $\Lambda > 0$ . Aquí mencionamos algunos de los grandes proyectos que estudian el Universo y sus resultados principales, que justifican fuertemente la presencia de una energía oscura en el Cosmos.

### 6.3.1 Supernova tipo Ia

Una supernova tipo Ia es una gran explosión desenlace de un sistema binario, y juega un rol fundamental en Cosmología, ya que nos permite observar de manera clara la expansión acelerada del Universo. Este tipo de supernova se usa por sus nobles características observacionales: cuentan con un espectro homogéneo y una estabilidad en los valores de luminosidad que hacen que sean excelentes candidatas estándares con las cuales medimos las distancias a las que se encuentran [35, 36].



Se cree que las supernovas tipo Ia se originan de una enana blanca y una estrella compañera cercana. La enana blanca hace decrecer la materia de la otra estrella acretaando su materia hasta que alcanza el límite de Chandrasekhar. Luego se produce una gran explosión termonuclear, que genera llamaradas muy energéticas que escapan hacia afuera desintegrando la estrella y lanzando chorros de materia a alta velocidad [36].

En su mayoría, los registros de los flujos de luz provenientes de estos eventos duran alrededor de 20 días, a lo que sigue un periodo de decaimiento. De estos se obtienen correlaciones entre los picos de luminosidad, la proporción a la que decaen y sus colores. Los parámetros cosmológicos se estiman a partir de la correlación entre la magnitud absoluta y la forma de la curva de luz. Esta curva es independiente de la distancia, es por esto que su luz intrínseca es usada como candela estándar [37].

En 1998, gracias a la observación de Supernovas tipo Ia, se descubrió que el Univeso se está expandiendo de manera acelerada [38, 39].  $\Lambda$  es la explicación que mejor describe este fenómeno y la evolución del Universo. Los principales resultados y consideraciones los presentamos ahora.

### **Distancia de luminosidad**

Una gran dificultad que se tiene en un Universo en expansión, es definir qué es una distancia. Las supernovas tipo Ia, por medio de su luminosidad, nos permite estimar de manera certera distancias cósmicas.

Para esto, consideremos un objeto estelar cuya luminosidad es  $L_s$ , ubicado en una cordenada  $r$  respecto de un observador en  $r = 0$ . La luz que emite el objeto en  $t$ , se recibe a  $t_0$  y su relación es a través del corrimiento  $(1 + z) = a_0/a(t)$ . La luminosidad absoluta  $L_s$  de una fuente, el flujo energético  $\mathcal{F}$ , y la distancia de luminosidad  $d_L$  se relacionan por medio de [40]

$$d_L^2 \equiv \frac{L_s}{4\pi\mathcal{F}}. \quad (6.18)$$

Esta luminosidad tiene dependencia en la curvatura espacial y en la expansión dinámica del Universo. Además, tenemos que

$$d_L = \frac{(1 + z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')}, \quad (6.19)$$

es decir que si medimos la distancia de luminosidad, podemos determinar la razón a la que se expande el Universo.

El parámetro de Hubble  $H_0$ , depende de la ecuación de estado y la densidad de energía presente en cada época. Si nos concentramos en una geometría plana y en sólo dos formas de energía presentes –fluido no relativista y constante cosmológica, de manera que se cumpla  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1-$ , encontramos que la distancia de luminosidad depende de la cantidad de energía oscura presente. Podemos ver esto de manera más clara en la figura (6.2). Ahí se observa que para valores pequeños de  $z$ ,  $d_L \propto z/H_0$ ; y  $d_L$  aumenta a medida que  $\Omega_\Lambda$  se hace más grande.

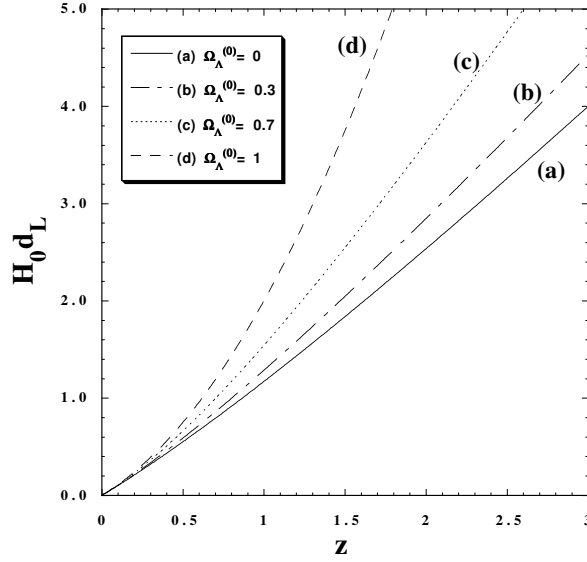


Fig. 6.2: Distancia  $d_L$  en unidades de  $H_0^{-1}$  en función del corrimiento  $z$ , para un Universo plano. Sólo se considera un fluido no-relativista y una constante cosmológica. Se grafica la distancia para varios valores de  $\Omega_\Lambda$ . Imagen obtenida de [40].

### Relación Magnitud-Redshift

La expresión que relaciona la magnitud aparente  $m$  de una fuente y su magnitud absoluta es [40]

$$m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{Mpc} \right) + 25; \quad (6.20)$$

Se considera que las supernovas SN Ia tienen igual magnitud  $M$  independiente de su corrimiento  $z$ , esto debido a que el proceso de formación es el mismo, cualquiera sea su ubicación en el Universo; y por medio de las observaciones obtenemos su magnitud aparente  $m$  y el corrimiento  $z$  que sí dependen de la fuente en estudio.

Como vimos en (6.19), la distancia  $d_L$  depende de la geometría y de la materia que llena el Universo. Así, si medimos de manera razonable  $m - M$ , podemos estimar los valores de  $\Omega_{tot}$  y de  $\Omega_m$ . Esto fue lo que se hizo en [38] y en [39]. Ambos proyectos barrieron un intervalo aproximado de  $z = 0.16 - 0.8$  datando los rastros de Supernova que llenaban el Cosmos, llegaron a las mismas conclusiones de manera independiente: asumiendo un Universo plano ( $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ ), el modelo que más se acercaba a las observaciones es el de un Universo con  $\Omega_m \approx 0.3$ , y un 70% de energía oscura presente. En la figura (6.3) mostramos los datos observacionales de la distancia de luminosidad  $d_L$  vs  $z$  que obtuvieron en [41], y la curva que mejor corresponde es la de  $\Omega_\Lambda = 0.7$ .

Desde entonces, se han realizado diversas observaciones más complejas y precisas (véase por ejemplo [42, 43, 44]), que buscan reducir los errores y hallar mayor concordancia entre los distintos modelos que nos permiten determinar los parámetros cosmológicos en juego.

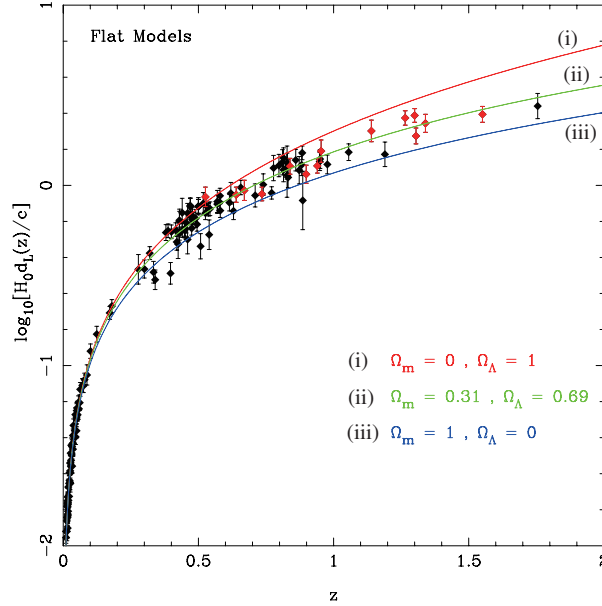


Fig. 6.3: Distancia de luminosidad  $H_0 d_L$  vs  $z$  de un modelo cosmológico plano (log plot). Los puntos negros corresponden al proyecto [39]; los rojos a los datos de [41]. Se muestra tres curvas que modelan  $H_0 d_L$ : (i)  $\Omega_m = 0$ ,  $\Omega_\Lambda = 1$ ; (ii)  $\Omega_m = 0.31$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.69$ ; (iii)  $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ . Imagen obtenida de [41].

### 6.3.2 La edad del Universo

La edad del Universo ( $t_0$ ) es un dato controversial que se debe determinar. Si bien no es una cantidad observable, es necesario estimar una edad límite que incluya todo el resto de los objetos que habitan el Cosmos. Asimismo, cualquier modelo cosmológico debe proveer una edad de Universo coherente con su evolución y con el resto de fenómenos y eventos.

Si la edad de las estrellas es  $t_s$ , se debe cumplir que  $t_0 > t_s$ . No todo modelo de Universo plano puede cumplir este requisito, es por esto que la presencia de la constante cosmológica es necesaria para poder dar con una edad más adecuada.

Por ejemplo, alguno de los objetos más longevos que han sido registrados dentro de la Vía Láctea son los cluster globulares (CG)  $t_1 = 13.5 \pm 2\text{Gyr}$  [45]; o los CG en M4, con una edad de  $t_1 = 12.7 \pm 0.7\text{Gyr}$  [46]; o la estrella CS 31082-001 de una edad de  $t_1 = 14.1 \pm 2.5\text{Gyr}$  [47]; o la estrella BD +17°3248, de  $t_1 = 13.8 \pm 4\text{Gyr}$  [48].

La edad del Universo se calcula a partir de la definición de la expansión de  $H$  [29]

$$t_0 = \int_0^{a_0} \frac{1}{aH(a)} da = \int_0^\infty \frac{1}{(1+z)H(z)} dz. \quad (6.21)$$

Si tenemos cuenta la expresión 6.11, llegamos a

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{1}{(1+z)[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_\Lambda]^{1/2}} dz. \quad (6.22)$$

El término de radiación lo despreciamos: a bajos  $z$  predomina  $\Omega_m$  y  $\Omega_\Lambda$ ; a altos  $z$ ,  $1/\Omega_r(1+z)^4 \ll 1$ . Así, nos queda que

$$t_0 \simeq \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{1}{(1+z)[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda]^{1/2}} dz. \quad (6.23)$$

En un Universo de sólo materia (con  $\Omega_m = 1$  y  $\Omega_\Lambda = 0$ , Einstein-de Sitter), tenemos que la solución es  $t_0^m = \frac{2}{3H_0}$ . Una estimación rápida, con  $H_0 \approx 68 \text{ km/s/Mpc}$ , nos brinda que la edad aproximada es  $t_0^m = 8 - 10 \text{ Gyr}$ , que no satisface  $t_0 > 11 - 12 \text{ Gyr}$ . Así, para un Universo plano sin constante cosmológica, se tiene un problema serio con su edad. Esto se arreglaría si  $H_0$  fuera menor, requisito lejano a los valores que tenemos al día de hoy [29, 40].

La presencia de constante cosmológica cambia el valor de  $t_0$ :

$$t_0^\Lambda = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_m}} \right), \quad (6.24)$$

donde se cumple que  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ . Si analizamos los valores asintóticos, tenemos que para el límite  $t_0^\Lambda \rightarrow t_0^m$ ,  $\Omega_m \rightarrow 1$ ; en cambio cuando  $t_0^\Lambda \rightarrow \infty$ ,  $\Omega_m \rightarrow 0$ . Si se grafica  $t_0$  vs  $\Omega_m$ , como en la figura (6.4). Se observa que a medida que  $\Omega_m$  crece,  $t_0$  disminuye. Cuando  $\Omega_m = 0.3$  y  $\Omega_\Lambda = 0.7$  se tiene que  $t_0 = 0.964/H_0$ , lo cual da un valor aproximado de  $t_0 = 13.1 \text{ Gyr}$ , requisito que es necesario satisfacer para incluir a las estrellas más viejas.

Así, la presencia de  $\Lambda$  resuelve el problema de la edad, además de brindar algunas cotas sobre los parámetros cosmológicos, por ejemplo  $0.3 < \Omega_m < 0.326$  según [49].

### 6.3.3 Fondo de Radiación Cósmica (CMB)

El Fondo de Radiación Cósmica, o CMB por sus siglas en inglés, es la radiación remanente del Universo en sus etapas más tempranas. Es uno de los registros cosmológicos más precisos con los que contamos. En particular, los datos que nos interesa son las anisotropías del CMB.

En 1992 estas fueron observadas por COBE, y constatadas posteriormente en 2003 por WMAP [50, 51]. Estos proyectos dataron espectros similares de las perturbaciones primordiales provenientes del CMB, en acuerdo con la predicción que hace el modelo de Inflación.

La forma del espectro de potencias, se interpreta como un rastro de lo que fue la etapa de recombinación, cuando los electrones eran capturados por los núcleos atómicos, seguido de reionización, que tuvo como escenario la expansión del Universo gracias a la presencia de energía oscura. Estos rastros se observan en los picos del espectro, y representan las perturbaciones primordiales posteriores a la Inflación en los comienzos del Universo.

Algunos de los parámetros que se han determinado a partir de estas observaciones, en colaboración con otros proyectos, son el valor de la curvatura del espacio-tiempo, muy cercana a 0; además de obtener una presencia de energía oscura cercana al  $\Omega_\Lambda = 0.7$ .

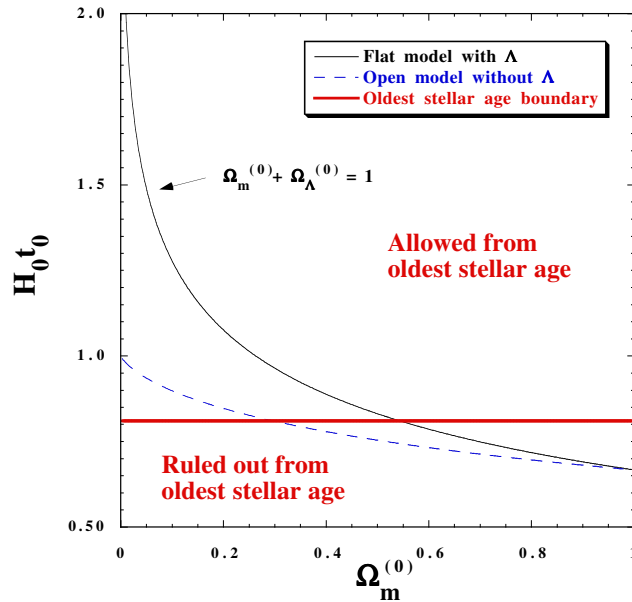


Fig. 6.4: La edad del Universo en unidades de  $1/H_0$  vs  $\Omega_m$ . En negro se tiene un Universo plano con  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ ; la línea cortada de azul es un modelo abierto sin  $\Lambda$ ; en rojo se muestra el límite de  $t_0 = 11\text{Gyr}$ . Cualquier modelo debe satisfacer estar por encima de esta línea, lo que sustenta fuertemente la existencia de energía oscura. Imagen obtenida de [40].

En todo este desarrollo hemos supuesto que el Universo es plano (la hipótesis más aceptada respecto a la curvatura), lo que implica que, a partir de los datos observacionales, el Universo debe ser dominado por una energía oscura, con una distribución de densidades aproximadas de  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$  y  $\Omega_m \simeq 0.3$ .

Concluimos esta sección mostrando las regiones de convergencia de modelos de diversos proyectos de investigación –*High-Z SN Search Team and Supernova Cosmology Project*– (6.5). Aquí se observa que la relación que se favorece es la de  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$  y  $\Omega_m \simeq 0.3$ . Además de observarse los ajustes que brindan los datos de las anisotropías del CMB, y los datos de las SNe [29].

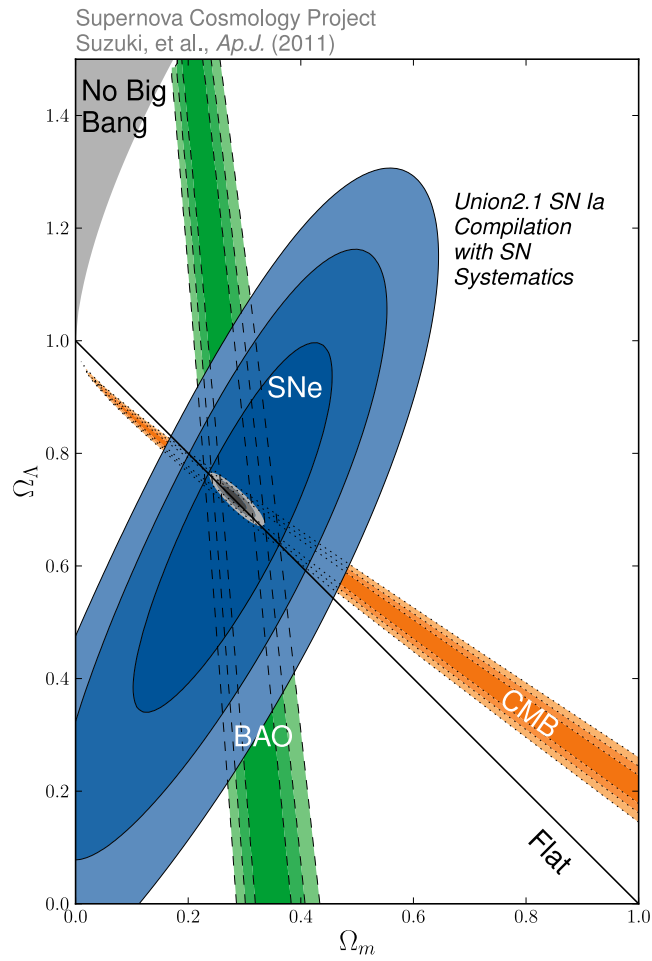


Fig. 6.5: Región de confianza de las relaciones entre  $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ . Se muestran datos de los proyectos SN Ia, CMB y cluster de galaxias, y sus elipses de confianza. Imagen obtenida de [52].

## Capítulo 7

# Equilibrio hidrostático de los gases y la constante cosmológica

Hasta ahora hemos repasado algunos tópicos de la teoría de la Relatividad General que consideramos importantes, y nos hemos enfocado en particular en un escenario estático, esféricamente simétrico, donde la fuente de materia-energía ha sido un fluido perfecto tipo polvo.

Por otra parte, hemos revisado la termodinámica y ecuación de estado de un gas en el contexto de RG. Listamos las cantidades más relevantes, y analizamos los límites ultrarrelativistas y no relativista de cada caso.

Finalmente, en el capítulo anterior, presentamos uno de los grandes interrogantes de la Astrofísica: la constante cosmológica  $\Lambda$ . De manera breve, mencionamos su historia, sus interpretaciones, los distintos valores que se estiman por medio de los modelos teóricos y de las observaciones, y los grandes desafíos que trae esta densidad de energía desconocida en el Universo, y que tomamos como constante.

Llegamos a un estadio donde podemos presentar de manera completa, cuál es el interrogante que nos atrevemos a investigar. A modo de ampliar y completar los resultados referidos a la termodinámica con los que se cuenta hasta hoy, queremos preguntar por las cantidades que hemos mostrado anteriormente, sólo que aquí incluiremos en las ecuaciones de campo a la constante  $\Lambda$ .

En este capítulo mostraremos cómo se ven modificadas las principales ecuaciones de un gas no relativista de Maxwell-Boltzmann, y algunas aproximaciones sobre un gas relativista de Maxwell-Jüttner, para ver cuáles son las implicaciones que conlleva incluir  $\Lambda$ , y cómo cambian algunas de las cantidades termodinámicas más importantes, como los calores específicos o la densidad de energía.

### 7.1 Ecuaciones de campo

En este apartado, nos detendremos en plantear las ecuaciones de campo mostradas en el capítulo 4 (4.12, 4.13, 4.14), modificadas por la presencia de  $\Lambda$ . Además, para simplicidad del análisis, supondremos dos escenarios hipotéticos relevantes para el

estudio: por un lado trabajaremos con el gas de Maxwell-Boltzmann no relativista; por otro, con el gas de Maxwell-Jüttner relativista.

En ambos casos el espacio-tiempo es estático, esféricamente simétrico, con una constante cosmológica impregnando todo, sumado a un gas de partículas disueltas. El espacio-tiempo es descrito por la métrica 5.15.

En este escenario, la fuente materia-energía se describe por medio de un fluido perfecto más  $\Lambda$ , ambas responsables de curvar el espacio-tiempo. La forma de este tensor es:

$$T^{\mu\nu} = (\mu + \Lambda)u^\mu u^\nu + (P - \Lambda)h^{\mu\nu}. \quad (7.1)$$

En el apartado siguiente mostramos las ecuaciones de campo de cada gas.

### 7.1.1 Gas de Maxwell-Boltzmann no relativista

El estudio de las ecuaciones mostradas a continuación, se detallan en [53]. Aquí retomamos los resultados más importantes para nuestros fines.

Comenzamos indicando la densidad de masa en reposo, todo en función de  $\beta$  definida anteriormente,

$$\rho = \rho_c \left( \frac{\beta_c}{\beta} \right)^{3/2} e^{\beta_c - \beta}, \quad (7.2)$$

la densidad de materia-energía

$$\mu = \rho c^2 \left( 1 + \frac{3}{2\beta} \right), \quad (7.3)$$

y la presión

$$P = \frac{\rho c^2}{\beta} \quad (7.4)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein, sumadas a la conservación de  $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$  son

$$M' = \frac{r^2}{c^2} (\mu + \Lambda), \quad (7.5)$$

$$\frac{\Phi'}{c^2} = \frac{\kappa}{2} \frac{M + (P - \Lambda)r^3/c^2}{r[r - \kappa M]}, \quad (7.6)$$

$$P' = -(\mu + P) \frac{\Phi'}{c^2}, \quad (7.7)$$

donde  $\kappa = 8\pi G/c^2$ .

### 7.1.2 Gas relativista de Maxwell-Jüttner

Las principales cantidades de este gas, fueron listadas en el capítulo 5. La densidad de energía estaba dada por

$$\mu = \rho c^2 \left[ \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)} + \frac{1}{\beta} \right], \quad (7.8)$$



la densidad de masa en reposo

$$\rho = \rho_c \frac{\beta_c}{\beta} \frac{K_2(\beta)}{K_2(\beta_c)}, \quad (7.9)$$

y la presión es similar a (7.4).

Las ecuaciones de campo en este caso quedan de la forma

$$M' = \left[ \rho c^2 \left( \frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)} + \frac{1}{\beta} \right) + \Lambda \right] \frac{r^2}{c^2}. \quad (7.10)$$

Usaremos aquí la ley de Tolman 5.17 mostrada en el capítulo 5, y con esto en mente podemos expresar la ecuación de campo como

$$\beta' = \frac{\kappa}{2} \beta \frac{M + (\frac{\rho c^2}{\beta} - \Lambda) r^3 / c^2}{r[r - \kappa M]}. \quad (7.11)$$

Además, trabajamos con la densidad de masa-energía, cuya ecuación es

$$\rho' = -\frac{\kappa}{2} \rho \beta \frac{M + (\frac{\rho c^2}{\beta} - \Lambda) r^3 / c^2}{r[r - \kappa M]} \left[ -\frac{K_3(\beta)}{K_2(\beta)} + \frac{1}{\beta} \right], \quad (7.12)$$

Este es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,  $M$ ,  $\rho$  y  $\beta$ , que depende de los parámetros libres  $\rho(0) = \rho_c$ ,  $\Lambda$  y  $\beta(0) = \beta_c$ . El desafío que se presenta aquí es integrarlas numéricamente.

### 7.1.3 Escalas de longitud y masa

Es necesaria la interpretación física de las distintas variables que intervienen en las ecuaciones. Para esto mostraremos un análisis del orden de magnitud de alguna de ellas.

Todas las ecuaciones serán expresadas en variables adimensionales para su mejor manipulación. A continuación, definimos algunas relaciones convenientes: la frialdad crítica  $\beta_c = mc^2/kT_c$  y una longitud característica como

$$r_0 = \frac{c}{\sqrt{4\pi G \rho_c \beta_c}}, \quad (7.13)$$

que en términos de  $T_c$ , la masa  $m$  y  $\rho_c$  queda como

$$r_0 = \left[ \frac{kT_c}{4\pi G \rho_c m} \right]^{1/2}. \quad (7.14)$$

Analizaremos el valor que toma  $r_0$  en las distintas escalas de longitud.

i) Si se tiene un sistema tipo galáctico, es conveniente utilizar unidades en pc, kpc o Mpc. Así, en Mpc la ecuación (7.13) toma la forma

$$r_0 = \frac{c}{\sqrt{4\pi G \rho_c \beta_c}} = \frac{1.27}{\sqrt{\beta_c}} \times \left( \frac{M_\odot \text{pc}^{-3}}{\rho_c} \right)^{1/2} \text{ Mpc, donde } M_\odot \text{pc}^{-3} = 7.40 \times 10^{-23} \text{ gm.cm}^{-3}.$$

## 7.2. GASES RELATIVISTAS Y CONSTANTE COSMOLÓGICA: EXISTENCIA Y ESTABILIDAD DE ÓRBITAS CIRCULARES 63

Si se tiene por ejemplo  $\rho_c = 0.1M_\odot\text{pc}^{-3}$  y  $\beta_c = 10^6$ , obtenemos  $r_0 = 4.02 \times 10^{-3}$  Mpc.

ii) Si se tiene un sistema tipo estelar, podemos usar (7.13) en cm de la siguiente manera

$$r_0 = 1.28 \times 10^{-5} \times \left( \frac{\text{gm} \cdot \text{cm}^{-3}}{\rho_c} \right)^{1/2} \left( \frac{T_c}{K} \right)^{1/2} \left( \frac{\text{gm}}{m} \right)^{1/2} \text{cm},$$

Aquí, si trabajamos con la masa del protón  $m_p = 1.67 \times 10^{-24}$ ,  $T_c = 10^8 K$  y  $\rho_c = 10^{10} \text{gm.cm}^{-3}$ , se sigue que  $r_0 = 9.9 \times 10^5 \text{cm} \approx 9.9 \text{km}$ .

De manera similar, podemos expresar la masa característica  $M = M_0$  en términos de  $\rho_c$  y  $r_0^3$  como

$$M_0 = 4\pi\rho_c \frac{c^3}{(4\pi\rho_c)^{1/2}(G\beta_c)^{3/2}}, \quad (7.15)$$

o en términos de  $\rho_c$ ,  $T_c$  y la masa  $m$  como

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_c}} \left( \frac{kT_c}{mG} \right)^{3/2}. \quad (7.16)$$

Así, si fijamos  $r_0$  de manera conveniente, observamos que

i) En un sistema tipo galáctico, con  $\rho_c = 1M_\odot\text{pc}^{-3}$  y  $r_0 = 4.02 \times 10^{-3} \text{Mpc} = 4020 \text{pc}$ , tenemos que

$$M_0 = 4\pi\rho_c r_0^3 = 8.2 \times 10^{10} M_\odot.$$

ii) En un sistema de tipo interior estelar, tenemos por ejemplo  $T_c = 10^8 K$  y  $\rho_c = 10^{10} \text{gm.cm}^{-3}$ , obtenemos

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho_c}} \left( \frac{kT_c}{mG} \right)^{3/2} = 1.23 \times 10^{26} \text{kg} = 6.18 \times 10^{-5} M_\odot.$$

## 7.2 Gases relativistas y constante cosmológica: existencia y estabilidad de órbitas circulares

En esta sección nos valdremos de partículas de prueba y estudiaremos la estabilidad de las geodésicas en los escenarios de MB y MJ. Trataremos los casos de órbitas circulares, donde podemos definir la velocidad de rotación con la que recorren las trayectorias determinadas por el espacio-tiempo 5.15.

Una geodésica circular tipo tiempo, puede ser descrita sin pérdida de generalidad, si suponemos al plano ecuatorial ( $\theta = \pi/2$ ); sumado a dos constantes: la energía  $E = 2e^{2\Phi/c^2} \dot{t}$  y el momento angular  $L = r^2 \dot{\varphi}$  [54]. Aquí, los puntos representan la derivada respecto al tiempo propio del observador. Así, tenemos que el movimiento radial viene dado por

$$\frac{e^{2\Phi/c^2}}{1 - \kappa M/r} \dot{r}^2 + V(r) = E^2, \quad (7.17)$$

con

$$V(r) = e^{2\Phi/c^2} \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right) \quad (7.18)$$

como potencial efectivo.

Una órbita circular se caracteriza por tener un radio constante, esto implica que  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ . Así, encontramos las siguientes cantidades conservadas

$$E^2 = \frac{e^{2\Phi/c^2}}{1 - r\Phi'/c^2}, \quad L^2 = \frac{r^3\Phi'/c^2}{1 - r\Phi'/c^2}. \quad (7.19)$$

De esto se puede deducir que

$$\Phi' > 0, \quad 1 - r\Phi'/c^2 > 0. \quad (7.20)$$

La estabilidad de las órbitas viene dada por el mínimo del potencial efectivo en el radio constante, al que llamaremos  $r = r^*$ . Esto significa que se debe cumplir que  $V'(r^*) = 0$  para que sea un extremo, y  $V(r^*)'' > 0$  para que efectivamente sea un mínimo. Así, obtenemos que

$$3\Phi' + r\Phi'' - 2r\Phi'^2/c^2 > 0. \quad (7.21)$$

La forma y comportamiento del potencial vienen dadas por la función  $\Phi$  que caracteriza el espacio-tiempo, y esto se traduce en la dependencia de la estabilidad con esa función. En este punto, nos concentraremos sólo en el escenario de MB, ya que permite un planteo más accesible que el de MJ.

La condición 7.20, en su forma más general queda como

$$\frac{M + [P - \Lambda]r^3/c^2}{r[r - \kappa M]} > 0, \quad (7.22)$$

y la condición de estabilidad 7.21 se expresa

$$\begin{aligned} & \left[ M + (P - \Lambda)\frac{r^3}{c^2} \right] \left( r - 3\kappa M + \kappa r M' - \kappa \frac{r^3}{c^2} (P - \Lambda) \right) \\ & + r(r - \kappa M) \left[ 3(P - \Lambda)\frac{r^2}{c^2} + M' + P'\frac{r^3}{c^2} \right] > 0. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Usando

$$M' = (\mu + \Lambda)\frac{r^2}{c^2}, \quad P' = -(\mu + P)\Phi'/c^2 \quad (7.24)$$

tenemos que 7.23 queda como

$$\begin{aligned} & \left[ M + (P - \Lambda)\frac{r^3}{c^2} \right] \left( r - 3\kappa M + \kappa \frac{r^3}{c^2} \left( \frac{1}{2}\mu + 2\Lambda - \frac{3}{2}P \right) \right) \\ & + \frac{r^3}{c^2} (r - \kappa M) \left( 3P - 2\Lambda + \mu \right) > 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

### 7.2.1 Definición de variables adimensionales

Para poder resolver las ecuaciones numéricamente, es necesario expresar todo de manera adimensional. Para esto definimos lo siguiente

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{r_0}, & \mathcal{M} &= \frac{M}{\rho_c r_0^3}, \\ \frac{1}{r_0^2} &= 4\pi \frac{G\rho_c \beta_c}{c^2}, & \lambda &= \frac{\Lambda}{\rho_c c^2}, \\ B &= \frac{1}{\beta} = \frac{kT}{mc^2}, & X &= \frac{\rho}{\rho_c}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Además, recordemos que

$$\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^2} = \frac{2}{r_0^2 \rho_c \beta_c}. \quad (7.27)$$

A continuación, desarrollaremos algunas cotas que servirán de referencia para los parámetros utilizados.

Si consideramos las observaciones de diversas galaxias, hay acuerdo respecto a los valores de las velocidades de dispersión centrales  $\sigma_c$  registrados [55, 56, 57]. Este dato nos interesa ya que la frialdad relativista crítica con la que estamos trabajando, se relaciona como  $\beta_c = c^2/\sigma_c^2$ . Un intervalo aproximado en el que se estima esta velocidad es  $4 \text{ km/sec} < \sigma_c < 1500 \text{ km/sec}$ , y nos permite tener algunas cotas sobre  $\beta_c$ :

$$4 \times 10^4 < \beta_c < 10^9. \quad (7.28)$$

La densidad de materia-energía a causa de  $\Lambda$ , la definimos como

$$\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_{\text{crit}} c^2, \quad (7.29)$$

donde

$$\rho_{\text{crit}} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ gm/cm}^3. \quad (7.30)$$

Además, tomaremos los valores más aceptados al presente, con  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$  y  $h \simeq 0.65$ .

En su forma adimensional, definiremos que

$$\lambda \equiv \Omega_\Lambda \frac{\rho_{\text{crit}}}{\rho_c} = 2.538 \times 10^{-7} \Omega_\Lambda h^2 \frac{M_\odot / \text{pc}^3}{\rho_c}, \quad (7.31)$$

mientras que para la escala de longitud, podemos referirnos a los valores aportados por [22]

$$r_0 = 4.2303 \times 10^{-6} \frac{c}{\beta_c^{1/2} \text{ km/sec}} \left( \frac{M_\odot / \text{pc}^3}{\rho_c} \right)^{1/2} \text{ Mpc}. \quad (7.32)$$

Algunos valores aceptados para la densidad central de los halos galácticos pueden ser [58, 59, 60]

$$0.001 M_\odot / \text{pc}^3 < \rho_c < 1 M_\odot / \text{pc}^3 \quad (7.33)$$

que permiten estimar valores de la energía oscura

$$4 \times 10^{-6} \Omega_\Lambda h^2 < \lambda < 4 \times 10^{-3} \Omega_\Lambda h^2. \quad (7.34)$$

### 7.2.2 Gas de Maxwell-Boltzmann

Aquí nos detendremos en el gas no-relativista. La densidad de energía y presión en MB son

$$\mu = \rho c^2 \left(1 + \frac{3}{2\beta}\right), \quad P = \frac{\rho c^2}{\beta}, \quad (7.35)$$

y la densidad de energía en reposo es

$$\rho = \rho_c \left(\frac{\beta_c}{\beta}\right)^{3/2} e^{\beta_c - \beta}. \quad (7.36)$$

Por una parte, la ecuación 7.22 queda como

$$\frac{M + \frac{\rho r^3}{\beta} - \Lambda \frac{r^3}{c^2}}{r(r - \kappa M)} > 0. \quad (7.37)$$

Por otro lado, la ecuación de estabilidad 7.25 queda

$$\begin{aligned} \left[ M + \frac{\rho}{\beta} r^3 - \frac{\Lambda}{c^2} r^3 \right] \left( r - 3\kappa M + \kappa \frac{\rho}{2} r^3 - \frac{3}{4} \kappa \frac{\rho}{\beta} r^3 + \kappa \frac{2\Lambda}{c^2} r^3 \right) \\ + (r - \kappa M) \left( \rho r^3 + \frac{9}{2} \frac{\rho}{\beta} r^3 - 2 \frac{\Lambda}{c^2} r^3 \right) > 0. \end{aligned} \quad (7.38)$$

En forma adimensional, la expresión 7.37 se expresa como

$$\frac{\mathcal{M} + \frac{\beta_c^{3/2}}{\beta^{5/2}} x^3 - \lambda x^3}{x(x - \mathcal{M} \frac{2}{\beta_c})} > 0, \quad (7.39)$$

y la expresión adimensional de 7.38 es

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{M} + x^3 \left( \frac{\beta_c^{3/2}}{\beta^{5/2}} e^{\beta_c - \beta} - \lambda \right) \right] \left( x - \frac{6\mathcal{M}}{\beta_c} - \frac{x^3}{\beta_c} \left( \frac{\beta_c^{3/2}}{\beta^{3/2}} e^{\beta_c - \beta} \left(1 - \frac{3}{2\beta}\right) + 4\lambda \right) \right) \\ + \left( x - \frac{2\mathcal{M}}{\beta_c} \right) x^3 \left[ \frac{\beta_c^{3/2}}{\beta^{3/2}} e^{\beta_c - \beta} \left(1 + \frac{9}{2\beta}\right) - 2\lambda \right] > 0. \end{aligned} \quad (7.40)$$

En función de la densidad  $\rho/\rho_c$  se expresa como

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{M} + x^3 \left( \frac{\rho}{\rho_c \beta} - \lambda \right) \right] \left( x - 6 \frac{\mathcal{M}}{\beta_c} - \frac{2x^3}{\beta_c} \left( \frac{\rho}{2\rho_c} \left(1 - \frac{3}{2\beta}\right) + 2\lambda \right) \right) \\ + \left( x - 2 \frac{\mathcal{M}}{\beta_c} \right) x^3 \left[ \frac{\rho}{\rho_c} \left(1 + \frac{9}{2\beta}\right) - 2\lambda \right] > 0. \end{aligned} \quad (7.41)$$

En el límite newtoniano, despreciamos los términos múltiples de  $1/\beta_c$ , y  $1/\beta$ , ya que en estas condiciones  $mc^2$  es muy superior a cualquier energía térmica. Así, los

resultados 7.39 y 7.41 que expresan las condiciones de estabilidad y existencia de una órbita circular, son

$$\mathcal{M} - \lambda x^3 > 0, \quad (7.42)$$

$$\mathcal{M} - (3\lambda - \frac{\rho}{\rho_c})x^3 > 0. \quad (7.43)$$

Estos límites acuerdan con los presentados en [53]. Es pertinente mencionar que las ecuaciones 7.37 y 7.38 no son totalmente similares al trabajo mencionado. Para el análisis de las condiciones, hemos utilizado un acercamiento diferente, y si bien acordamos en la mayoría de los términos, diferimos en algunos, sobre todo los referidos a las potencias a las que quedan las masas-energías.

### 7.2.3 Temperatura asintótica del gas de MB

En la sección 7.2.1 definimos el conjunto de variables adimensionales con las que trabajaremos. A continuación, expresaremos las ecuaciones de Maxwell-Boltzmann 7.5, 7.7 y 7.6 en función de esas variables; y manipulándolas de manera algebraica, llegaremos a una forma sencilla de obtener analíticamente las temperaturas asintóticas del gas no relativista con constante cosmológica.

Las tres ecuaciones mencionadas pueden reducirse a dos al igualar 7.7 con 7.6. Además, para mayor simpleza en la resolución de las ecuaciones, definimos la variable  $B \equiv 1/\beta$ . Así, en variables adimensionales, sólo nos quedan las siguientes expresiones

$$\mathcal{M}' = \left[ X \left( 1 + \frac{3B}{2} \right) + \lambda \right] x^2, \quad (7.44)$$

$$B' = -\frac{\sigma^2}{c^2} B \frac{[\mathcal{M} + (XB - \lambda)x^3]}{x(x - 2\frac{\sigma^2}{c^2}\mathcal{M})}. \quad (7.45)$$

Por otra parte, reescribiremos la densidad de energía 7.3 en función de las variables adimensionales y la variable  $B$

$$X = \left( \frac{c^2}{\sigma^2} B \right)^{3/2} \exp \left( \frac{c^2}{\sigma^2} - \frac{1}{B} \right) = X(B, \frac{\sigma^2}{c^2}). \quad (7.46)$$

El caso límite que aquí nos interesa, es el caso donde la temperatura oscila alrededor de un valor y tiende a una temperatura asintótica. Esto ocurre a grandes radios, y supondremos un radio al que llamaremos  $r = \infty$ . Así, la temperatura podemos considerarla *constante*, las derivadas correspondientes nulas y podemos escribir las cantidades como

$$\begin{aligned} B &\approx B_\infty \implies X = X_\infty(B_\infty), \\ B' &\rightarrow 0 \implies X' \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Con estas consideraciones, la ecuación 7.45 se reduce a

$$\begin{aligned} \mathcal{M} + (X_\infty B_\infty - \lambda)x^3 &\rightarrow 0, \\ \frac{\mathcal{M}}{x^3} &\rightarrow \lambda - X_\infty B_\infty, \end{aligned} \quad (7.48)$$

y la ecuación 7.44 se expresa como

$$\mathcal{M}' \approx \left[ X_\infty \left( 1 + \frac{3B_\infty}{2} \right) + \lambda \right] x^2, \quad (7.49)$$

que al integrarlo con la condición inicial de  $\mathcal{M}(0) = 0$ , nos queda que

$$\mathcal{M} = \frac{1}{3} \left[ X_\infty \left( 1 + \frac{3B_\infty}{2} \right) + \lambda \right] x^3. \quad (7.50)$$

Así, hemos llegado a dos expresiones equivalentes: 7.48 y 7.50, que al igualarlas obtenemos

$$\left[ X \left( 1 + \frac{3B}{2} \right) + 3XB \right]_\infty = 2\lambda. \quad (7.51)$$

Finalmente, si sustituimos la ecuación 7.46 en 7.51, obtenemos la relación entre la constante cosmológica en su forma adimensional  $\lambda$  y la temperatura de la región asintótica, que es equivalente a pensar en una temperatura del infinito  $T_\infty$

$$\left( \frac{B_\infty c^2}{\sigma^2} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{c^2}{\sigma^2} - \frac{1}{B_\infty} \right) \left( 1 + \frac{9}{2} B_\infty \right) = 2\lambda. \quad (7.52)$$

Esta ecuación es trascendental para  $B_\infty$ , y podremos hallarla una vez seleccionada  $\sigma$  y  $\lambda$ . En la siguiente sección, resolveremos la ecuación 7.52 numéricamente, para hallar de manera gráfica a  $T_\infty$ .

## Capítulo 8

# Resultados

En este capítulo mostraremos los resultados de las soluciones numéricas de las ecuaciones 7.5, 7.6 y 7.7. Para esto, utilizamos el software ©MAPLESOFT.

Sólo nos hemos enfocado en el caso de Maxwell-Boltzmann, ya que el caso de Jüttner al contener funciones de Bessel y ser de mayor complejidad, implicaba el uso de programas más sofisticados y de mayor tiempo, que excedían los objetivos de este trabajo, al menos en esta instancia.

Para la resolución consideramos ciertas condiciones de regularidad en el centro, al hacer  $\mathcal{M}_c = \mathcal{M}'_c = \rho'_c = \beta'_c = 0$ . Las ecuaciones dependen de tres parámetros libres que variaremos en diferentes rangos y daremos interpretación a los cambios que producen. Estos son:

- La densidad de masa-energía en reposo del centro  $\rho_c$ , es decir la densidad del centro del sistema. Representa cuánto denso es el gas, y las unidades en las que se expresa son ( $M_\odot/\text{pc}^3$ ).
- El valor de la constante cosmológica  $\Lambda$ , expresada a través de la “densidad de energía oscura”  $\Omega_\Lambda$ . Recordemos que se trata de un valor adimensional definido como  $\Omega_\Lambda = \Lambda/\rho_{\text{crit}}c^2$ . Los valores más realistas que se esperan de este parámetro son del intervalo (0.6 – 0.8).
- La frialdad relativista crítica  $\beta_c$  –o temperatura crítica adimensional–, que para mayor simpleza ocuparemos la dispersión de velocidades  $\sigma_c$ , ya que el sentido físico de este parámetro es más inmediato. La relación entre la dispersión de velocidad y la temperatura proviene de la Teoría cinética de los gases, presentada en 2.  $\sigma_c$  se mide en km/s y dependiendo del tipo de sistema en estudio, es el valor que toma.



## Ecuaciones diferenciales adimensionales

Aquí retomamos las ecuaciones diferenciales adimensionales con las que trabajaremos, previamente mostradas en 7:

$$\mathcal{M}' = \left[ X \left( 1 + \frac{3B}{2} \right) + \lambda \right] x^2, \quad (8.1)$$

$$X' = -\frac{\sigma^2}{c^2} \frac{X}{B} \frac{[\mathcal{M} + (XB - \lambda)x^3] \left( 1 + \frac{3B}{2} \right)}{x(x - 2\frac{\sigma^2}{c^2}\mathcal{M})}, \quad (8.2)$$

$$B' = -\frac{\sigma^2}{c^2} B \frac{[\mathcal{M} + (XB - \lambda)x^3]}{x(x - 2\frac{\sigma^2}{c^2}\mathcal{M})}. \quad (8.3)$$

En las secciones subsiguientes, mostraremos las curvas solución a estas ecuaciones en función de cada parámetro libre.

### 8.1 Dependencia en la constante cosmológica $\Lambda$

Aquí, presentamos las gráficas de la densidad de masa-energía en reposo del sistema, la masa y la dispersión de velocidades al variar los valores de la constante  $\Lambda$  (modelada por  $\Omega_\Lambda$ ). En todos los análisis se incluye el caso de  $\Omega_\Lambda = 0$ , es decir, sin presencia de constante cosmológica. Además, hemos supuesto valores extremos que no corresponden con el valor que se espera de  $\Omega_\Lambda$  (se presentan valores del orden de cien). Si bien no es de relevancia física, sirven para profundizar el estudio y hacerlo más completo.

Los parámetros que hemos fijado para este sistema son: una densidad central  $\rho_c = 0.001 M_\odot/\text{pc}^3$ , y una dispersión de velocidad  $\sigma_c = 10\text{km/s}$  para todas las curvas mostradas. Tanto la masa como la densidad están pesadas en una masa central  $M_0$  y la densidad central  $\rho_c$ , así que se trata de cantidades adimensionales.

En la figura 8.1 observamos que, mientras que en un escenario sin constante cosmológica la densidad  $\rho$  decae uniformemente a medida que nos alejamos del centro del sistema, en los casos con  $\Omega_\Lambda$  no nula, la densidad deja de disminuir, y oscila alrededor de un valor asintótico. Si se tiene valores de  $\Omega_\Lambda$  más grandes, la densidad empieza a oscilar a radios menores; además de que toma un valor límite mayor. Esto es lo que esperaríamos, ya que el término que involucra  $\Omega_\Lambda$  representa una densidad de energía constante independiente del radio, sin embargo las otras formas de energías sí dependen de esa coordenada, decayendo como una ley de potencias. A radios grandes predomina la presencia de  $\Lambda$ , y condiciona el valor límite que alcanza  $\rho$ .

En 8.2 vemos cómo aumenta la masa a medida que nos alejamos del centro del sistema. A radios pequeños las curvas convergen, indicando que a esa escala, predomina otras formas de materia o energías que no involucran a  $\Lambda$ . A medida que nos alejamos la masa crece a mayor tasa para las  $\Omega_\Lambda$  más grandes, como es de esperarse, ya que tenemos una densidad de energía constante, que se suma a medida que se toma más y más volumen del sistema.

En 8.3 tenemos la dispersión de velocidades a medida que nos alejamos del centro del sistema. En el caso de  $\Omega_\Lambda = 0$ , la dispersión de velocidad decae al alejarse del

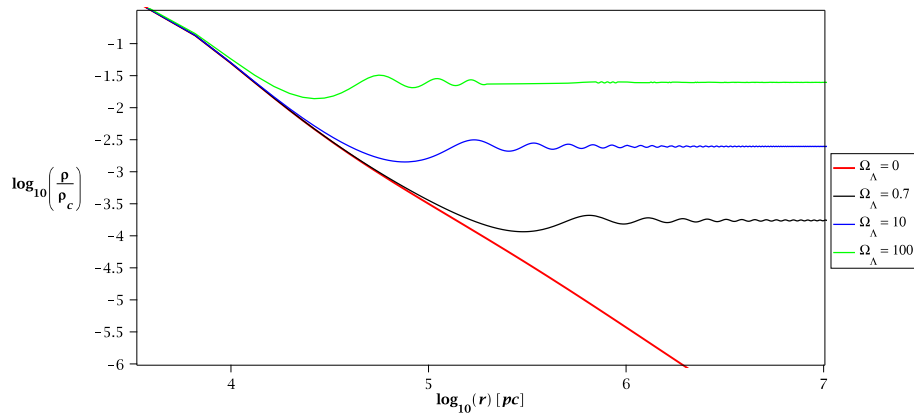


Fig. 8.1: Curvas de densidad de masa-energía en reposo vs radio (pc). La curva roja representa el caso de un escenario sin constante cosmológica, mientras que las demás corresponden a tres valores de  $\Omega_\Lambda = 0.7, 10, 100$ .

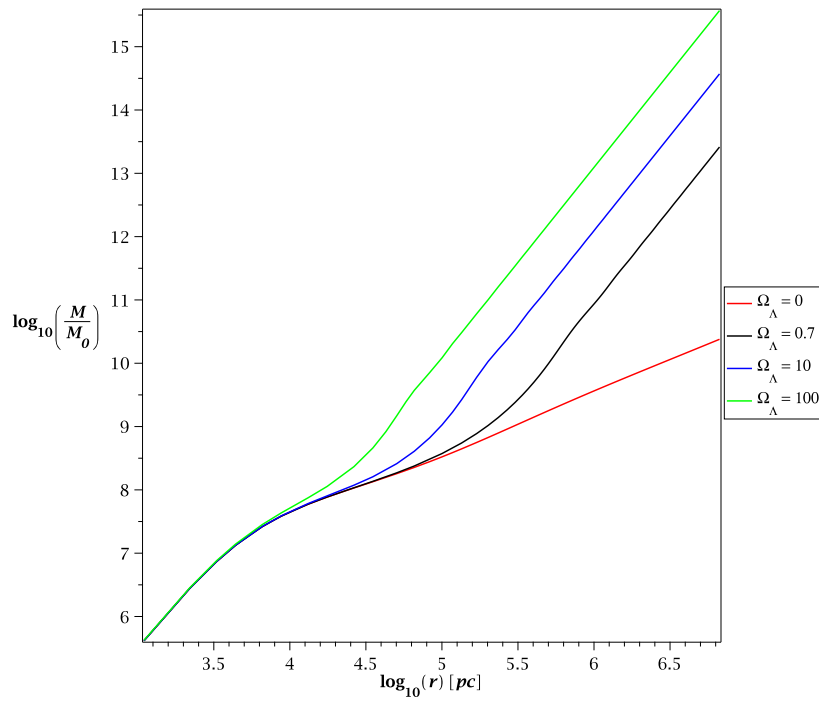


Fig. 8.2: Curvas de Masa vs radio (pc). La curva roja representa el caso de un escenario sin constante cosmológica, mientras que las demás corresponden a tres valores de  $\Omega_\Lambda = 0.7, 10, 100$ .

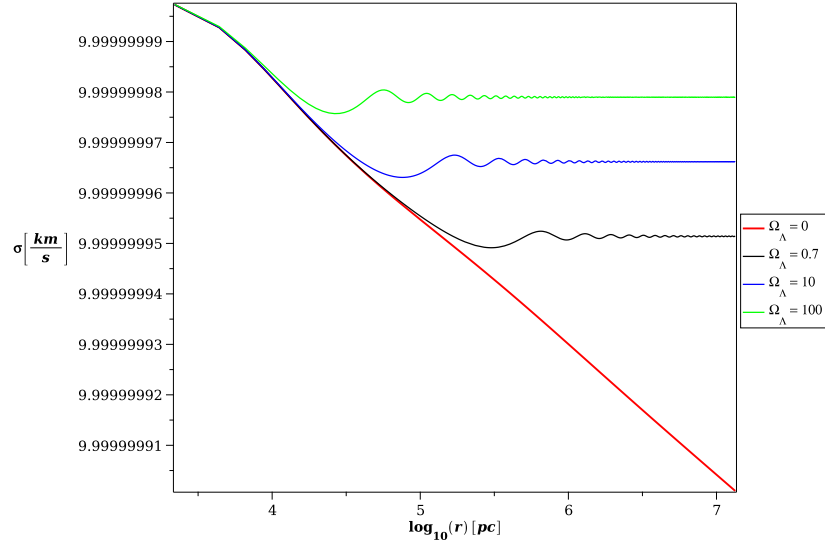


Fig. 8.3: Curvas de la dispersión de velocidad (km/s) vs radio (pc). La curva roja representa el caso de un escenario sin constante cosmológica, mientras que las demás corresponden a tres valores de  $\Omega_\Lambda = 0.7, 10, 100$ .

centro, mientras que en los casos de  $\Lambda$  presente, la velocidad  $\sigma$  oscila alrededor en un valor asintótico. Es importante notar que la variación de las velocidades para las distintas  $\Omega_\Lambda$  es ínfima. Este dato es muy interesante, ya que nos indica que la presencia de constante cosmológica implica que todas las partículas de este gas puedan conservar su dispersión de velocidad, incluso a grandes distancias desde el centro. Esto se vincula de manera directa con la temperatura del sistema. Si imaginamos que la temperatura depende de las velocidades cercanas a  $\sigma$ , tenemos un indicio de que la temperatura a causa de la presencia de  $\Lambda$ , en las regiones asintóticas tiende a una constante.

## 8.2 Dependencia en la densidad central $\rho_c$

En esta sección, nos centramos en el comportamiento de las cantidades al variar la densidad central de masa-energía  $\rho_c$ . Utilizaremos valores dentro de un intervalo de densidades  $\rho_c$  de  $(10^{-6} - 2.5)$ , todas medidas en unidades de  $M_\odot/\text{pc}^3$ .

Las dos primeras gráficas corresponden a la densidad de masa-energía vs radio, y a la masa vs radio. En las dos últimas, presentamos dos casos de la dispersión velocidad vs radio.

En 8.4 nos encontramos con la densidad de masa vs radio, medido en parsecs. El escenario de fondo presenta una constante cosmológica  $\Omega_\Lambda = 0.7$ , y una dispersión de velocidad de  $\sigma_c = 150\text{km/s}$ . Si la constante cosmológica fuera nula, la densidad decrecería de manera monótona a medida que nos alejamos del centro, pero cuando encendemos  $\Omega_\Lambda$  esto cambia. La densidad tiende a un valor asintótico, alcanzando ese

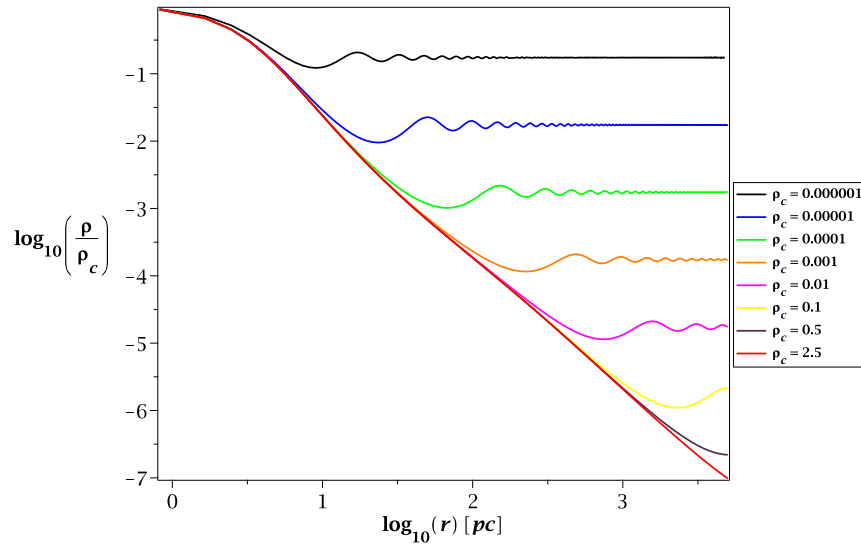


Fig. 8.4: Curvas de densidad de masa-energía en reposo vs radio (pc). Se presentan diversos valores de densidad  $\rho_c = 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 0.01, 0.1, 0.5, 2.5 M_{\odot}/\text{pc}^3$ .

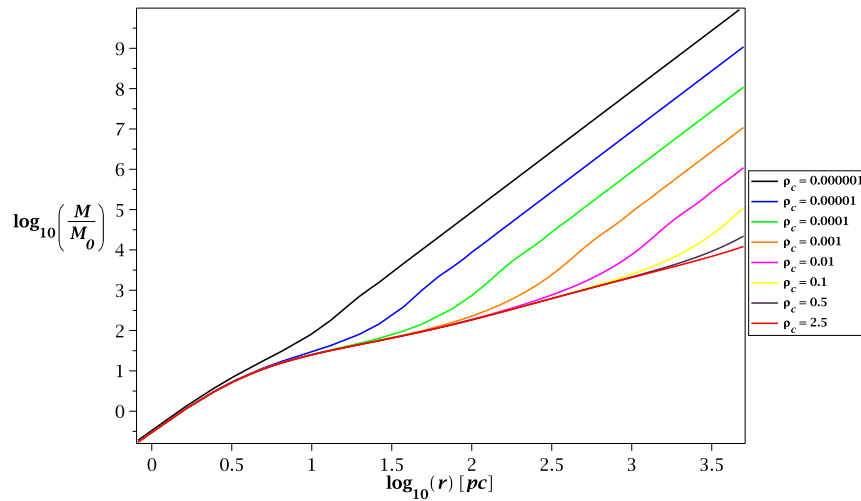


Fig. 8.5: Curvas de masa vs radio (pc). Se presentan diversos valores de densidad  $\rho_c = 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 0.01, 0.1, 0.5, 2.5 M_{\odot}/\text{pc}^3$ .

valor a radios más cortos mientras más pequeña es la densidad central. Esto lo podemos entender al comparar las densidades de energía. Mientras más grande  $\rho_c$ , el predominio de la densidad de energía oscura ocurre a distancias mayores. En cambio, si se tiene  $\rho_c$

chica, el predominio de la densidad de energía  $\Omega_\Lambda$  se presenta a radios más cercanos al centro, alcanzando el valor asintótico de la densidad del sistema.

En la figura 8.5 se presenta la masa del sistema vs el radio. Aquí también tenemos un escenario de fondo con  $\Omega_\Lambda = 0.7$  y  $\sigma_c = 150\text{km/s}$ . Las curvas muestran un comportamiento análogo a 8.4, siendo que para densidades más pequeñas, la masa crece a una tasa mayor. Esto se puede interpretar como que el predominio de la densidad de energía oscura aportada por  $\Omega_\Lambda$  aparece más cercano al centro del sistema. A medida que crece  $\rho_c$ , la relevancia de  $\Omega_\Lambda$  se “retarda”, apareciendo su aporte a radios más lejanos.

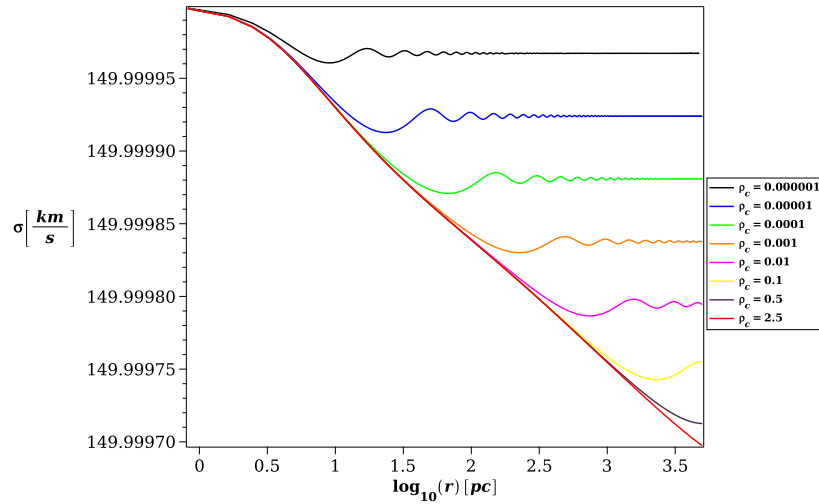


Fig. 8.6: Curvas de dispersión de velocidad (km/s) vs radio (pc). La dispersión de velocidad inicial es  $\sigma_c = 150\text{ km/s}$ . Se presentan diversos valores de densidad  $\rho_c = 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 0.01, 0.1, 0.5, 2.5\text{ M}_\odot/\text{pc}^3$ .

En 8.6 y 8.7 tenemos la dispersión de velocidades vs radio, con  $\sigma_c = 150\text{km/s}$  y  $\sigma_c = 500\text{km/s}$  respectivamente. Aquí la  $\Omega_\Lambda = 0.7$ . Si no se tuviera constante cosmológica, al alejarse del centro la velocidad decrecería. Al haber una  $\Omega_\Lambda$  no nula, su presencia hace que se alcancen valores asintóticos en las dispersiones de velocidades, más cercanas al valor inicial de  $\sigma$  mientras más pequeña es la densidad central  $\rho_c$ . La impronta de  $\Omega_\Lambda$  prevalece desde radios cortos con densidades más chicas, es por esto que la velocidad de dispersión es más cercana al valor inicial para  $\rho_c$  pequeñas.

Es importante destacar que las velocidades de dispersión asintóticas, difieren muy poco del valor inicial  $\sigma_c$ . La constante cosmológica  $\Lambda$  permite que que la dispersión oscile alrededor de un valor fijo a partir de cierto radio. Nuevamente, si interpretamos la dispersión  $\sigma$  como una forma de energía vinculada a la energía térmica, podemos entender esta dispersión de velocidades asintótica como una temperatura constante de fondo del sistema.

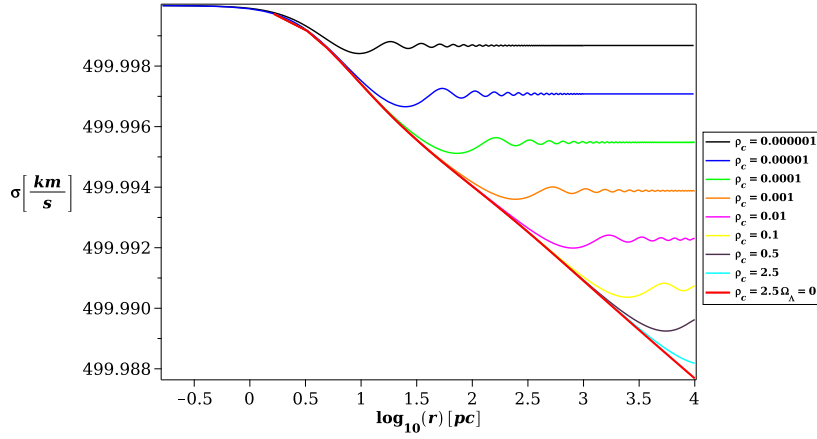


Fig. 8.7: Curvas de dispersión de velocidad (km/s) vs radio (pc). La dispersión de velocidad inicial es  $\sigma_c = 500$  km/s. Se presentan diversos valores de densidad  $\rho_c = 10^{-6}, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 0.01, 0.1, 0.5, 2.5 M_\odot/\text{pc}^3$ .

### 8.3 Estabilidad

Retomamos aquí los criterios de estabilidad mostrados en el capítulo 7, en particular nos enfocaremos en Maxwell-Boltzmann y las ecuaciones 7.39.

De las expresiones 7.20, podemos concluir que

$$0 < \frac{r\Phi'}{c^2} < 1, \quad (8.4)$$

que en las variables adimensionales que hemos fijado, se expresa como

$$0 < \frac{\mathcal{M} + (XB - \lambda)x^3}{(x - 2\mathcal{M}/\beta_c)} < 1. \quad (8.5)$$

Para mayor claridad, definimos la función

$$C = \frac{\mathcal{M} + (XB - \lambda)x^3}{(x - 2\mathcal{M}/\beta_c)}, \quad (8.6)$$

y esta será la expresión que analizaremos a continuación.

Es importante notar que el denominador de esta función debe ser positivo, ya que corresponde al término  $g_{rr}$  de la métrica, y tiene sentido físico sólo si  $x > 2\mathcal{M}/\beta_c$ .

Recordemos ahora que el criterio de estabilidad vino dado a través del *potencial efectivo*, por medio de las cantidades conservadas y de considerar partículas de prueba que seguirían órbitas circulares. Este tipo de trayectorias se dan en un mínimo del potencial cuyas condiciones son

$$V'(r^*) = 0 \quad \text{y} \quad V''(r^*) > 0, \quad (8.7)$$

donde  $r^*$  es el radio donde se anula la función. Es decir que de la segunda derivada radial del potencial, sólo nos interesa que sea positiva. Cada cambio de signo de esa pendiente nos indica cuando tenemos una región estable o inestable. Haremos foco en este aspecto. No resolveremos analíticamente la expresión de la derivada segunda, dada por la ecuación 7.23, sino que veremos los cambios de pendiente de la derivada primera  $V'$  (8.7), de manera de encontrar el radio mínimo donde empiezan a aparecer inestabilidades.

Esa condición es la 8.5, y a continuación mostramos la gráfica correspondiente a 8.6. Al eje de las ordenadas lo hemos modelado a través del  $\arctan(C)$ , ya que al ser una función que toma valores positivos y negativos, es más conveniente que el logaritmo. Los parámetros escogidos en este caso son  $\sigma_c = 10$  km/s y  $\rho_c = 0.001M_\odot/\text{pc}^3$ .

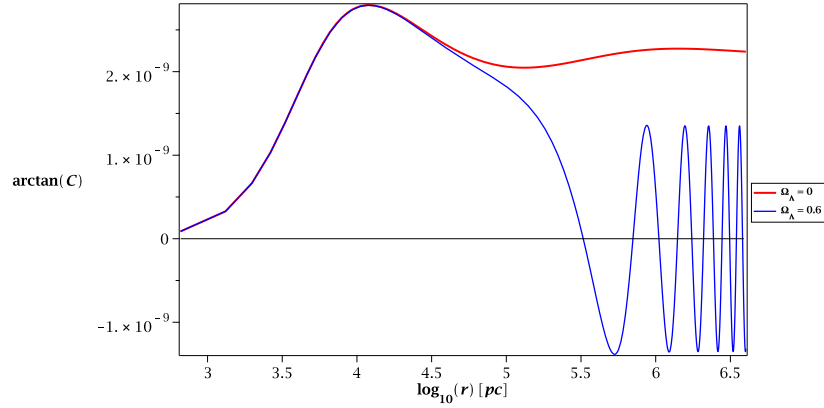


Fig. 8.8:  $\arctan(C)$  vs radio (pc). La curva roja representa el caso de  $\Omega_\Lambda = 0$ , y la azul  $\Omega_\Lambda = 0.6$ . El mínimo radio de inestabilidad es el primer cero de esta función, y se observa un comportamiento oscilatorio que indica variación entre las regiones de estabilidad e inestabilidad.

Como vemos en la gráfica 8.8, si tenemos un el gas de Maxwell-Boltzmann sin constante cosmológica (curva roja), no se presentan zonas de inestabilidad geodésica. En cambio, cuando encendemos  $\Omega_\Lambda$  (curva azul), se observa un comportamiento oscilatorio alrededor del cero, y cada cambio de pendiente nos indica que el gas pasa de ser estable a inestable, o viceversa. El radio que nos interesa es el primer cero de la función, ya que representa el mínimo radio ( $r_{min}$ ) de inestabilidad, dándonos un límite físico para ese sistema. En ese cero la curva presenta pendiente negativa, así que se trata de un máximo del potencial, y no es estable.

### 8.3.1 Radio mínimo de inestabilidad

Ahora nos enfocaremos en las posiciones de los radios mínimos de inestabilidad, y cómo cambian al variar los tres parámetros libres trabajados:  $\Omega_\Lambda$ ,  $\rho_c$  y  $\sigma_c$ . Para esto, registramos en cada caso el primer cero que presenta la curva al modificar los valores de

$\Omega_\Lambda$ , dejando fijos  $\rho_c$  y  $\sigma_c$ . Presentamos a continuación tres combinaciones pertinentes para el análisis.

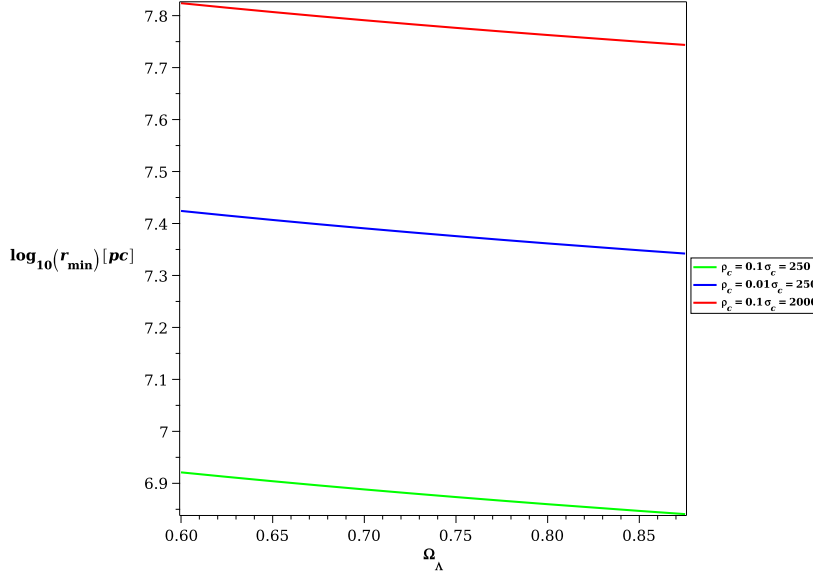


Fig. 8.9: Radio mínimo (pc) vs  $\Omega_\Lambda$ . Se presentan tres casos: la curva verde corresponde a un escenario de  $\rho_c = 0.1 M_\odot/\text{pc}^3$  y  $\sigma_c = 250 \text{ km/s}$ , la azul a  $\rho_c = 0.01 M_\odot/\text{pc}^3$  y  $\sigma_c = 250 \text{ km/s}$  y la roja a  $\rho_c = 0.1 M_\odot/\text{pc}^3$  y  $\sigma_c = 2000 \text{ km/s}$ . Los valores de  $\Omega_\Lambda$  son fieles a los que se esperan.

Lo que observamos en este gráfico es que para los tres escenarios, a medida que aumenta la constante cosmológica  $\Omega_\Lambda$ , el radio de inestabilidad se acerca al centro, dado por el comportamiento decreciente de cada curva. Esto nos indica que mientras más densidad de energía oscura, la región de estabilidad disminuye. Además, vemos que mientras más alta la dispersión de velocidad, el radio mínimo se aleja del centro; en cambio, al aumentar la densidad central  $\rho_c$ , el radio de inestabilidad se acerca al centro del sistema.

Para ampliar el análisis, mostramos a continuación una extensión del intervalo considerado de la constante cosmológica, tomando los valores de (0.1 – 1000). Si bien sólo una franja mínima corresponde a las estimaciones actuales que se esperan de  $\Omega_\Lambda$ , el comportamiento se esclarece al barrer un rango mayor de valores, tal como lo hemos representado. En líneas negras verticales mostramos la pequeña franja de valores de  $\Omega_\Lambda$  que fueron tomados en la gráfica 8.9.

La pendiente de cada una de estas rectas es aproximadamente  $m = 0.5$ , con algunas milésimas de diferencia producto del error numérico. Esto es consistente con el comportamiento esperado del radio al variar  $\Omega_\Lambda$ , siguiendo una relación de potencias de  $-1/2$  (en la figura se observa ejes log – log). En cada caso realizamos un ajuste con los datos que arrojaba la curva.



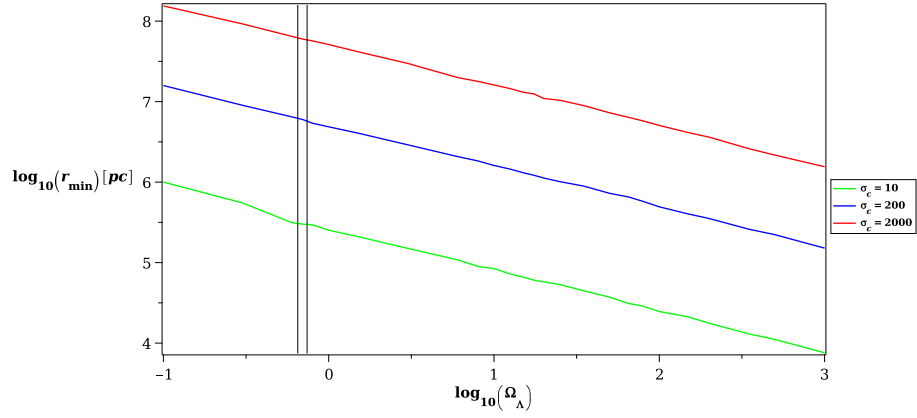


Fig. 8.10: Radio mínimo (pc) vs  $\Omega_\Lambda$ . Se presentan tres escenarios con  $\sigma_c = 10, 200, 2000$  km/s con una densidad central  $\rho_c = 0.5M_\odot/\text{pc}^3$ .

Para ejemplificar uno de los casos, escogeremos el escenario de  $\sigma_c = 200$  km/s y  $\rho_c = 0.5M_\odot/\text{pc}^3$ . Con los puntos obtenidos de manera numérica, calculamos la curva que ajusta ese conjunto de valores, obteniendo lo siguiente:

$$r_{\text{ajuste}} = \frac{4.864072 \times 10^6}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \text{pc}. \quad (8.8)$$

Finalmente, dibujamos esta función para ver el nivel de acuerdo con los datos numéricos. Este resultado, se muestra en la gráfica 8.11.

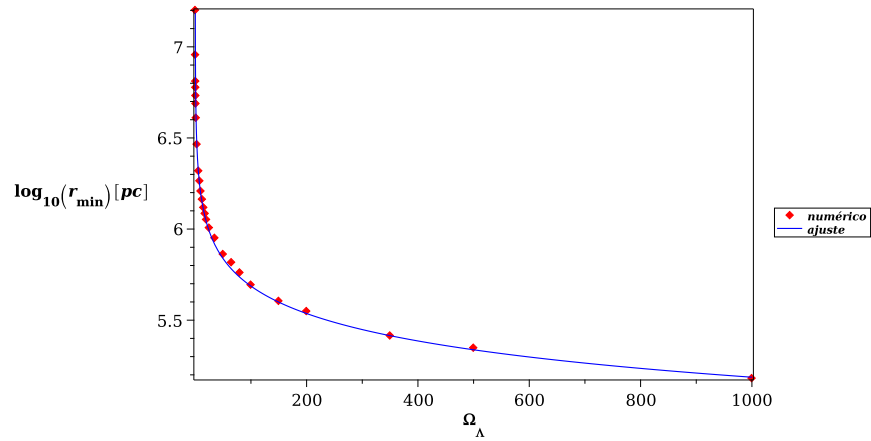


Fig. 8.11: Radio mínimo (pc) vs  $\Omega_\Lambda$ . En azul se muestra la curva del ajuste 8.8, y los puntos rojos corresponden a los radios que son solución numérica.

Se observa un alto acuerdo entre los datos y la curva ajustada, lo que nos permite

afirmar que el radio depende del inverso de la raíz de  $\Omega_\Lambda$ , en concordancia con lo afirmado en [61] en el contexto de entropía gravitacional asociada a la evolución de voids cósmicos en el fondo de  $\Lambda$ CDM.

Por otro lado, estudiamos cómo varía la posición de los radios de inestabilidad con la densidad de masa central del sistema  $\rho_c$ . Para esto, fijamos los parámetros  $\Omega_\Lambda$  y  $\sigma_c$ , tomamos algunos valores representativos de  $\rho_c$ , y registramos y graficamos los ceros de las curvas de interés.

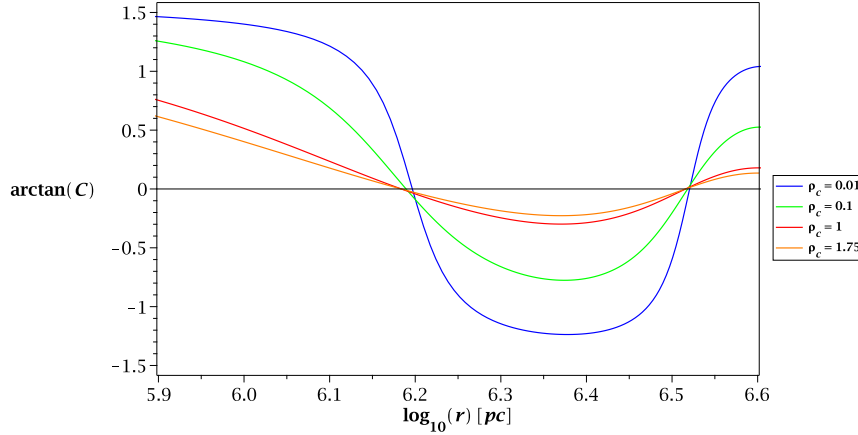


Fig. 8.12:  $\arctan(C)$  vs radio (pc). Posición de los primeros radios de inestabilidad para las densidades  $\rho_c = 0.01, 0.1, 1, 1.75 M_\odot/\text{pc}^3$ , con un escenario de fondo de  $\Omega_\Lambda = 0.7$  y  $\sigma_c = 50$  km/s fijos. El primer cero ocurre en  $\log_{10}(r_0) = 6.2$ , es decir en  $r_0 = 1.58 \times 10^6 \text{pc}$ . El eje vertical fue reescalado por un factor de  $c^2$  para lograr mayor claridad.

En las figuras 8.12 y 8.13, podemos ver que la ubicación de los radios no se modifica al variar la densidad  $\rho_c$ . Barriendo un rango que va dentro del intervalo (0.01 – 1.75), el cero se mantiene en la misma posición (las pequeñas separaciones observadas dependen del error numérico más que a un comportamiento físico). Las curvas se hacen menos suaves a medida que aumenta la dispersión de velocidad  $\sigma_c$ , por eso la diferencia en las curvas de un caso y otro. En ambos casos  $V'(r_0) = 0$  y  $V''(r_0) < 0$ , entonces tenemos un máximo del potencial y no es estable.

### 8.3.2 Calor específico

A continuación, nos enfocaremos en la relación entre la energía y la temperatura, dándonos información sobre el calor específico del sistema. Para esto, definimos el calor específico como

$$C_e = \frac{\Delta E}{\Delta T}, \quad (8.9)$$

donde la energía  $E = Mc^2$ , o  $E = \rho c^2 r^3$ .

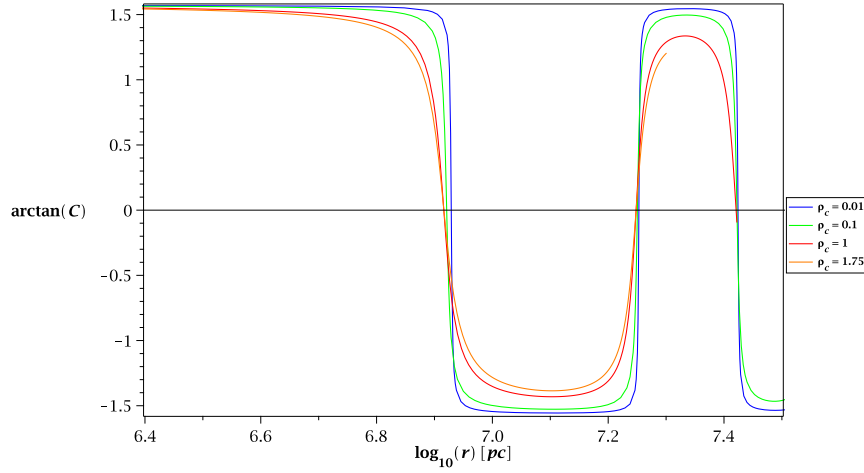


Fig. 8.13:  $\arctan(C)$  vs radio (pc). Posición de los primeros radios de inestabilidad para las densidades  $\rho_c = 0.01, 0.1, 1, 1.75 M_\odot/\text{pc}^3$ , con un escenario de fondo de  $\Omega_\Lambda = 0.6$  y  $\sigma_c = 250$  km/s fijos. El primer cero ocurre en  $\log_{10}(r_0) = 6.92$ , es decir en  $r_0 = 8.31 \times 10^6$  pc. El eje vertical fue reescalado por un factor de  $c^2$  para lograr mayor claridad.

Tenemos la solución de las funciones  $M$ ,  $\rho$  y  $\beta$ , así que las enfrentaremos en una gráfica  $\log - \log$  para ver el comportamiento del calor específico. Recordemos que en estas representaciones, el calor específico viene dado por la pendiente de la curva, y en particular queremos ver los cambios de signos de ella, ya que indican regiones de estabilidad e inestabilidad. En el eje vertical omitimos producto de  $c^2$ , mientras que en el eje horizontal reescalamos el inverso de la temperatura por un factor de  $c^2$  para que los valores sean más accesibles, de lo contrario son muy pequeños.

Es importante mencionar el comportamiento de la temperatura en este sistema. Como hemos observado, al alejarnos de su centro la temperatura comienza a decrecer (vinculada a  $\sigma_c$ ), y si se tiene una constante  $\Lambda$  no nula, podemos interpretar que la temperatura “se estabiliza”, oscilando alrededor de un valor terminal. En relación al calor específico, este detalle es importante, ya que nos interesa la relación entre el aumento de temperatura y los cambios en la energía (modelada por  $M$ ). Para un análisis más claro de la pendiente del  $C_e$ , trabajaremos con el inverso de la temperatura, ya que de esta forma obtendremos valores crecientes en función de  $T$ . Para esto, usaremos la frialdad relativista  $\beta = mc^2/kT$ .

En las siguientes gráficas, mostramos los calores específicos en diversos escenarios de fondo. En todos, la densidad central tiene un valor de  $\rho_c = 0.001 M_\odot/\text{pc}^3$  y una dispersión de velocidad  $\sigma_c = 10$  km/s, pero la densidad dada por  $\Lambda$  varía tomando cuatro valores representativos, incluyendo el caso de  $\Omega_\Lambda$  nula.

En la primera figura 8.14, mostramos la masa vs la frialdad relativista; en la figura 8.15 la función densidad  $\rho$  multiplicada por  $r^3$  vs  $\beta$ , y en 8.16 un acercamiento a una de

las curvas que aparece en 8.15, para observar de manera clara el cambio de pendiente que experimenta la curva.

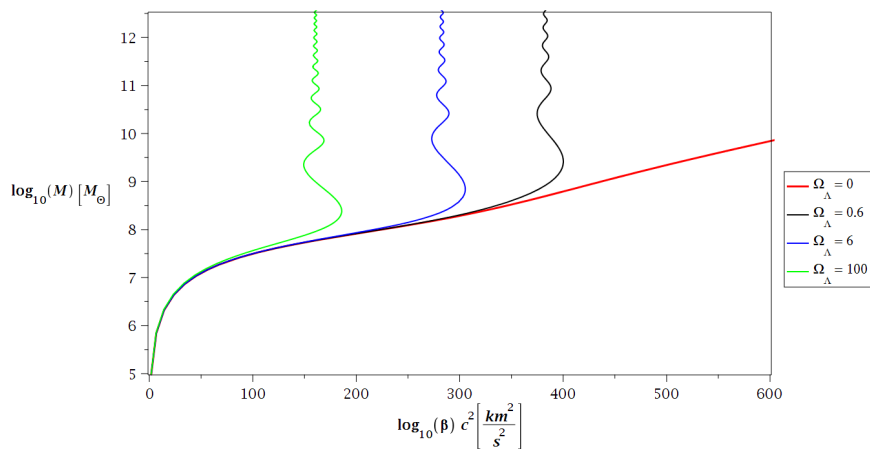


Fig. 8.14: La curva roja representa el caso de un escenario sin constante cosmológica, mientras que las demás corresponden a tres valores de  $\Omega_{\Lambda} = 0.6, 6, 100$ .

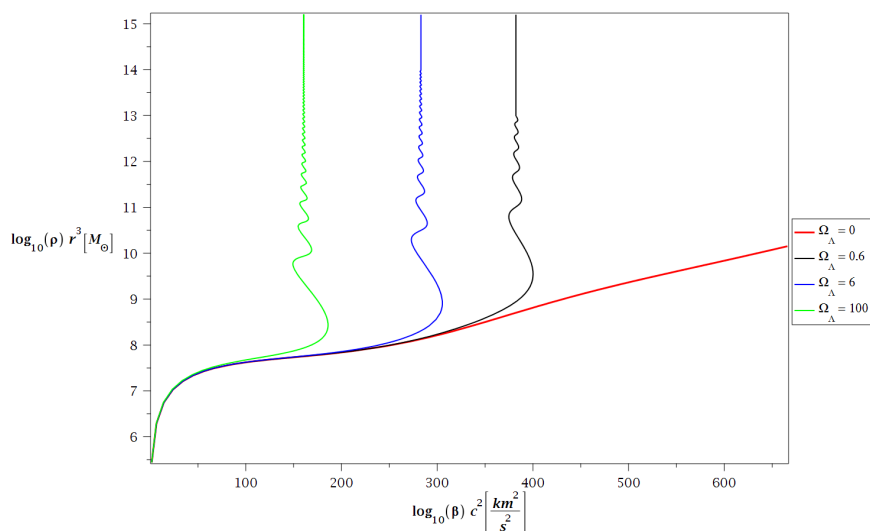


Fig. 8.15: . La curva roja representa el caso de un escenario sin constante cosmológica, mientras que las demás corresponden a tres valores de  $\Omega_{\Lambda} = 0.6, 6, 100$ .

Lo que se observa en todas las gráficas de calor, es que el sistema tiende a una temperatura asintótica. Al llegar a un valor crítico de masa-energía, la curva empieza a oscilar alrededor de un valor de temperatura a medida que aumenta la masa. Esta

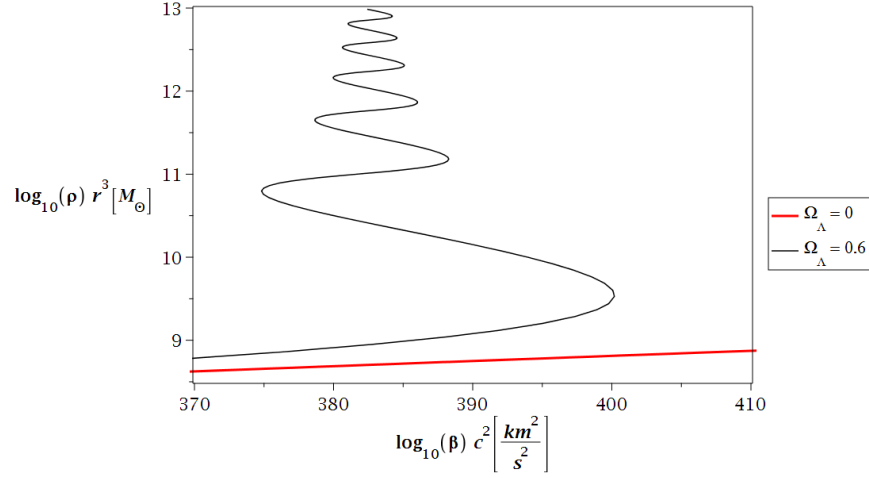


Fig. 8.16: Ampliación de la curva de  $\Omega_\Lambda = 0.6$  para observar mejor la variación de la pendiente, lo que indica un cambio de signo del  $C_e$ . También se incluye el caso sin constante cosmológica.

temperatura, en acuerdo a los resultados que hemos mostrado anteriormente, es un valor límite que podemos interpretar como un *baño térmico propio* caracterizado por una  $T_\infty$ , a la que tiende el sistema al incorporar más masa y más volumen.

El punto en que la pendiente comienza a oscilar, es un valor crítico que se relaciona con el radio de corte que aparece en las gráficas anteriores, y es el que nos da el límite de estabilidad. Esta característica no se presenta si tenemos  $\Lambda = 0$ , ya que en ese caso, la pendiente de la curva roja nunca cambia de signo, indicando que el calor específico siempre es positivo.

Lo que nos indica el comportamiento oscilatorio del  $C_e$  cuando la constante cosmológica es distinta de cero, es sinónimo de inestabilidad. Nos encontramos con zonas de pendiente positivas y negativas que se intercalan, mostrando un sistema estable e inestable respectivamente. La pendiente negativa significa que un aumento de temperatura se da con una disminución de energía, comportamiento anómalo en sistemas físicos. Este resultado se ha observado en sistemas equivalentes. A continuación, mostraremos brevemente un caso que nos permite comparar y entender mejor qué es lo que sucede con el gas de Maxwell-Boltzmann bajo estas condiciones.

### Inestabilidad de Antonov

En aras de profundizar el análisis sobre la estabilidad del gas ideal, es pertinente realizar una analogía con la inestabilidad de Antonov y la *catástrofe gravotérmica*. Desde este enfoque, se estudian las esferas isotérmicas contenidas en fronteras rígidas, y se obtiene un radio crítico donde comienza la inestabilidad.

A este resultado se llega de modelar un cluster esférico de estrellas [62]. El sistema más sencillo para trabajar, es un cluster aislado, cuyas masa, energía y volumen estén

fijos (ensamble microcanónico). La estabilidad de este sistema lo da su termodinámica global. De manera local, se puede analizar por medio de la ecuación de estado del gas ideal, suponiendo que el equilibrio se mantiene localmente en cada punto.

Al considerar la interacción gravitatoria en el equilibrio del gas, se obtiene que los gradientes de densidad de masa, en la ecuación de estado global, juega un rol determinante: el comportamiento difiere significativamente del gas ideal usual (que ignora la gravedad), y el calor específico puede tomar valores negativos, dando origen a inestabilidades.

Las variables presión, volumen, densidad y temperatura nos permiten entender qué sucede. En un volumen grande, las interacciones entre partículas a causa de la gravedad no es tan fuerte, teniendo una esfera isotérmica estable. Si se conserva el mismo número de partículas y el volumen disminuye, la energía gravitacional empieza a ser importante, y deviene en una inestabilidad: es decir que la gravedad empieza a ser más importante que la energía térmica generada por la presión hidrostática.

En esta condición existe un radio crítico donde comienza la inestabilidad de Antonov, e indica el comienzo de la catástrofe gravotérmica. El radio depende de la masa  $M$  y energía del sistema, y una vez alcanzada la inestabilidad, la catástrofe es inminente.

Desde este enfoque, podemos encontrar algunas semejanzas con el caso que nos interesa. En ambas situaciones, tenemos que a partir de un radio crítico se tiene un desenlace inestable, condicionando las configuraciones que tengan sentido físico.

En [63] podemos encontrar el desarrollo que permite obtener este radio. Allí se demuestra la relación que deben cumplir los parámetros que intervienen en la estabilidad de la esfera isotérmica, por medio de la segunda variación de una entropía funcional que describe el caso.

En sintonía con esa idea, se puede expresar las funciones  $M$ ,  $E$  y la entropía  $S$  en función de un radio  $R$  para cualquier configuración de equilibrio isotérmico [62, 63]. Con esas relaciones, se encuentra que la entropía no tiene un máximo para una energía dada, si el radio es de la forma  $R > -0.335GM^2/E$ . Además, la densidad crítica debe satisfacer que  $\rho_c < 709\rho(R)$ . De otra manera se tiene equilibrios metaestables.

La breve descripción anterior, fue para resaltar los aspectos más importantes de la inestabilidad de Antonov. Inestabilidad que comienza a partir de un radio crítico, similar al que hemos obtenido en el análisis de nuestro sistema. Un propósito para un trabajo posterior, es comparar los radios de corte para sistemas de distintos tamaños y escalas de longitud, como por ejemplo en galaxias enanas, grandes o clusters de gran magnitud. Esos resultados son de gran interés, ya que hemos observado que en nuestro caso, el radio mínimo de inestabilidad no depende de la densidad central, dato que podría ser relevante en el cálculo de las dimensiones de los sistemas físicos.

## 8.4 Temperatura asintótica

Retomamos aquí la ecuación 7.52 del capítulo anterior, y las resolveremos numéricamente. Posteriormente, mostraremos las gráficas obtenidas.

Recordemos que esa ecuación depende de tres parámetros: la dispersión de velocidad en el centro del sistema la dejaremos fija en  $\sigma_c = 250$  km/s. A los parámetros  $\Omega_\Lambda$  y  $\rho_c$  los variaremos, uno a la vez, para ver el comportamiento de la temperatura asintótica.

La ecuación 7.52 está bien definida desde el comienzo, esto significa que las variables consideradas fueron adimensionales, y desde la definición de cada una se trabajó de manera algebraica para llegar a la expresión final. Las gráficas que mostraremos a continuación, son de ejes adimensionales, y se dejaron los parámetros explícitos (en particular el de  $\rho_c$ ) para mayor claridad.

#### 8.4.1 Temperatura asintótica en función de $\Lambda$

En este caso, resolvimos 7.52 con las condiciones de  $\sigma_c = 250$  km/s y  $\rho_c = 0.1 M_\odot/\text{pc}^3$ . La dependencia entre la temperatura del sistema en la región asintótica y la constante cosmológica, es una relación de potencias correspondiente a la expresión

$$B_\infty = B_c \Omega_\Lambda^{1.4937 \times 10^{-12}}, \quad (8.10)$$

con  $B_c = \sigma_c^2/c^2$  (la temperatura adimensional del centro del sistema). El exponente es muy pequeño, siendo casi cero, así que el aporte de la constante es muy cercano a la unidad. Así, podemos interpretar que la dependencia que tiene la temperatura asintótica  $B_\infty$  con la constante  $\Omega_\Lambda$  es despreciable. De esta manera, encontramos que la temperatura adimensional en el infinito, difiere en muy poco a la que tiene el sistema en su centro  $B_c$ , que a su vez se define en función de la dispersión de velocidades  $\sigma_c$ .

A continuación, mostramos la dependencia de  $B_\infty$  en  $\Omega_\Lambda$ , y posteriormente la gráfica  $\log - \log$ , donde observamos de manera clara la pendiente creciente.

Como hemos observado en gráficas anteriores (8.3, 8.6, 8.7), a mayor valor de la constante cosmológica  $\Lambda$ , la temperatura asintótica es mayor. La pendiente positiva de 8.18 es más clara en este resultado. Al ser una gráfica logarítmica, podemos encontrar la relación de potencias que vincula las dos variables. Este resultado es el mostrado en 8.10, a partir del cual concluimos que la dependencia es ínfima.

#### 8.4.2 Temperatura asintótica en función de $\rho_c$

Aquí, las condiciones de fondo fueron  $\sigma_c = 250$  km/s y  $\Omega_\Lambda = 0.7$ . Al igual que la dependencia con la constante cosmológica, la variación con  $\rho_c$  es muy poca, es por esto que nos detendremos en expresión numérica.

Lo que sí queremos hacer notar, es que para densidades centrales crecientes, la temperatura  $B_\infty$  decrece, tal como lo muestran las gráficas 8.1 y 8.4 de secciones anteriores. Habíamos discutido que esto se debe a que a  $\rho_c$  más grandes, la relevancia de la constante  $\Lambda$  se aleja a radios mayores y el alcance de una temperatura asintótica se retarda a regiones más alejadas. Esto implica un alejamiento respecto al valor inicial de la dispersión de velocidad  $\sigma_c$ , lo que hace decrecer  $B_c$ .

Por último, mostramos las dos gráficas de la temperatura en las regiones del infinito  $B_\infty$  vs la densidad central  $\rho_c$ . En 8.20 se observa la pendiente negativa que indica que a mayor densidad de masa-energía en reposo del centro del sistema, la temperatura decrece.

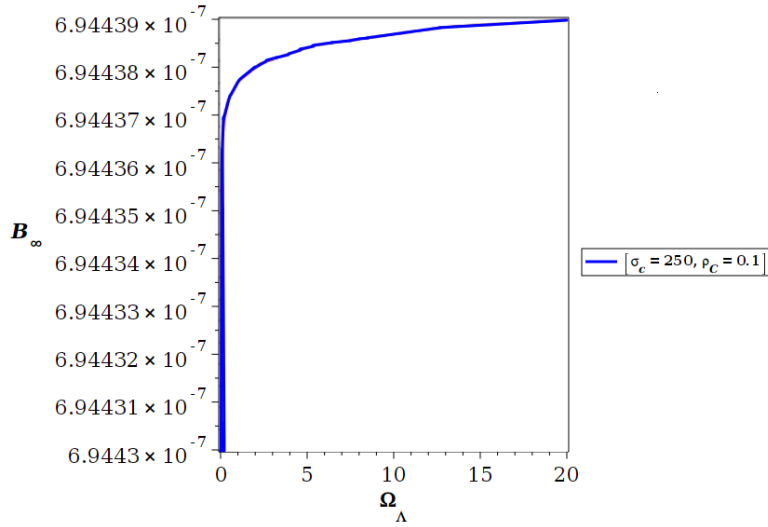


Fig. 8.17: Temperatura asintótica adimensional vs  $\Omega_\Lambda$ . Las condiciones de fondo fueron  $\sigma_c = 250$  km/s, y  $\rho_c = 0.1 M_\odot/\text{pc}^3$

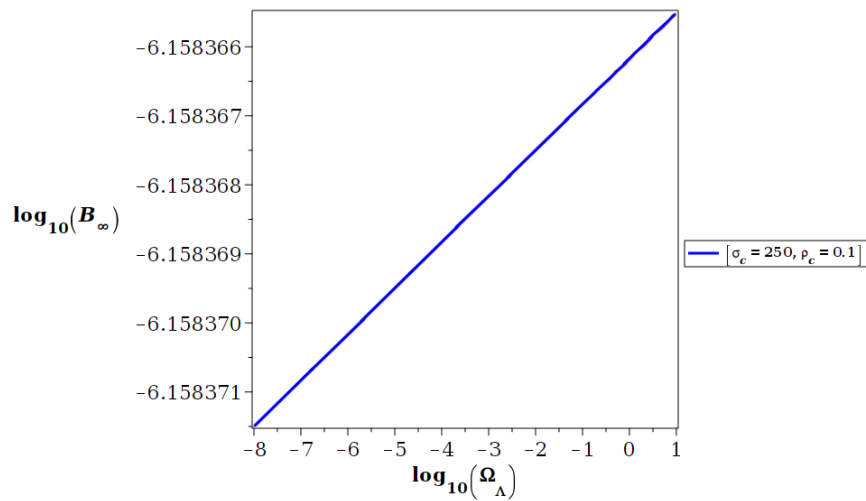


Fig. 8.18: Temperatura asintótica adimensional vs  $\Omega_\Lambda$ , en escala logarítmica. Las condiciones de fondo fueron  $\sigma_c = 250$  km/s, y  $\rho_c = 0.1 M_\odot/\text{pc}^3$



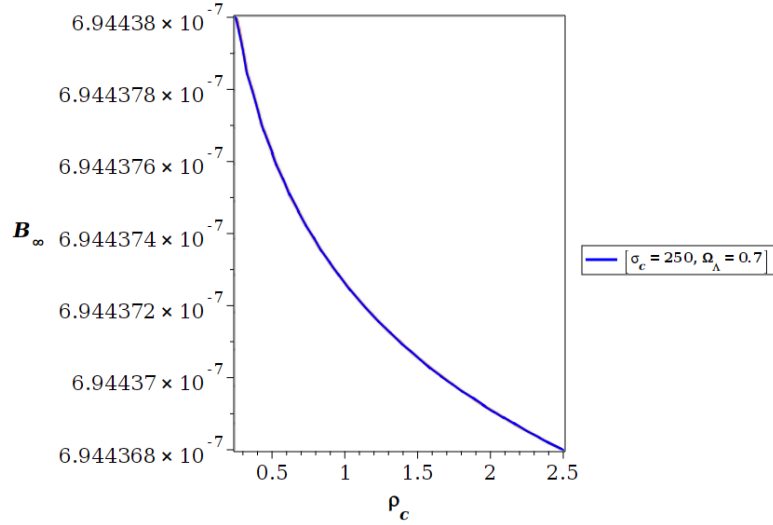


Fig. 8.19: Temperatura asintótica adimensional vs  $\rho_c$  (adimensional). Las condiciones de fondo fueron  $\sigma_c = 250$  km/s, y  $\Omega_\Lambda = 0.7$

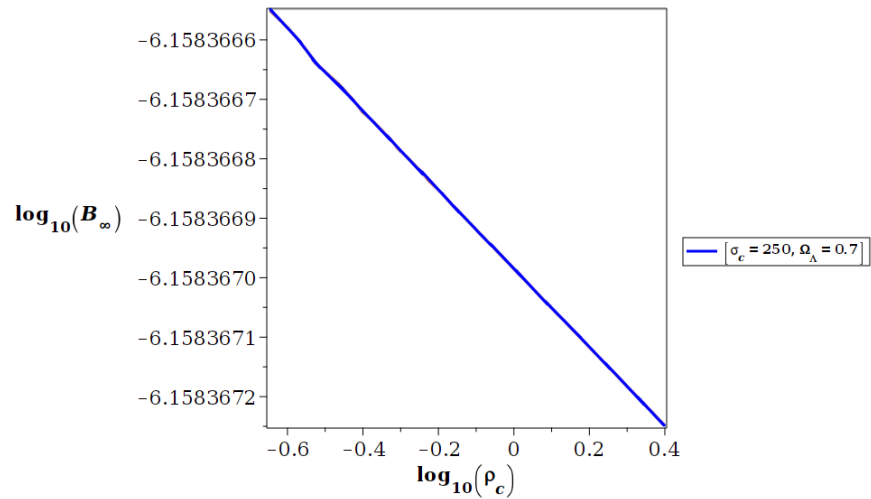


Fig. 8.20: Temperatura asintótica adimensional vs  $\rho_c$  (adimensional), en escala logarítmica. Las condiciones de fondo fueron  $\sigma_c = 250$  km/s, y  $\Omega_\Lambda = 0.7$

## Capítulo 9

# Conclusiones

En este trabajo nos hemos enfocado en el estudio de dos gases ideales no degenerados en equilibrio: el gas de Maxwell-Boltzmann no relativista, y el gas de Maxwell-Jüttner relativista, en un escenario con constante cosmológica  $\Lambda$ . Analizamos cómo se modifica el comportamiento de algunas cantidades termodinámicas al variar el valor de esta constante.

Comenzamos con las ecuaciones relativistas más generales, trabajando en un espacio-tiempo esférico y estático, y así obtuvimos las ecuaciones de equilibrio expresadas de manera sencilla para el gas de Maxwell-Boltzmann, para luego resolverlas numéricamente. Con esos datos pudimos observar algunas características novedosas e interesantes que se presenta en el gas ideal de MB con un campo dado por la constante  $\Lambda$ .

La pregunta de investigación guió el desarrollo y métodos utilizados. En principio, repasamos las principales características de un fluido perfecto, ya que era la primera aproximación a los sistemas que queríamos estudiar. Continuamos la pesquisa con la Teoría cinética de los gases en su versión relativista. Pudimos entender cómo se llega a la función de distribución y a las principales cantidades termodinámicas en un espacio-tiempo plano. Así, presentamos la formulación de la termodinámica relativista sin curvatura.

Allí fue pertinente presentar algunos de los fundamentos de la Relatividad General, los resultados y ecuaciones que eran necesarias para nuestra investigación. Siguió el estudio de la solución a las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo esférico, estático y vacío, ya que era un acercamiento al sistema de nuestro interés. Con esta base, pudimos estudiar las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo también esférico y estático, donde el gas de Maxwell-Jüttner fuera la fuente de masa-energía del sistema. Aquí vimos nuevamente las cantidades termodinámicas más relevantes, pero ahora incluyendo curvatura.

Posteriormente, revisamos los aspectos más relevantes de la constante cosmológica  $\Lambda$  y su interpretación como densidad de energía oscura en el Universo. Era necesario este paso, ya que la investigación se preguntaba de manera específica qué cambios introduce a la termodinámica de un gas de estrellas la presencia de esta constante.

Por último, regresamos a las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo

esféricamente simétrico y con un tensor de masa-energía modelado por un gas ideal, el detalle es que aquí incluimos a  $\Lambda$ . Pudimos obtener las ecuaciones diferenciales de cada gas: MB y MJ. Además, presentamos un análisis de geodésicas circulares, que nos permitió obtener criterios de estabilidad geodésica y así delimitar regiones estables, sumado a los comportamientos asintóticos de algunas variables. Todo este desarrollo culminó en la resolución numérica de esas ecuaciones, y los resultados pudimos mostrarlos a través de gráficas.

Nos propusimos un proyecto ambicioso: quisimos estudiar las propiedades termodinámicas más relevantes presentes en los sistemas: calor específico, entropía, energía, etc. Los gases ideales sobre los que nos preguntábamos era por una parte el gas ideal de Maxwell-Boltzmann, un gas no relativista; y el gas de Maxwell-Jüttner, la extensión del gas ideal en el contexto de Relatividad General, que se ha estudiado en cantidad, pero aún presenta muchos interrogantes.

Este último, presenta una complejidad significativa comparado al gas ideal de MB. Las variables termodinámicas se escriben en función de las funciones de Bessel, que si bien se conocen y son bien definidas, aportan un grado de complejidad mayor en las ecuaciones diferenciales que se deben resolver. Esto representó una dificultad en el camino, que para los fines de este trabajo dejamos afuera, pero en un futuro cercano la tarea es poder resolverlas, y comparar esas soluciones con los resultados que hemos hallado aquí.

Más allá de este detalle, sí logramos aprender bastante de ambos sistemas, sobre todo del gas ideal de Maxwell-Boltzmann y de las soluciones a sus ecuaciones diferenciales. De manera numérica hallamos las funciones de la masa  $M$ , la densidad de masa-energía en reposo  $\rho$  y la inversa de la frialdad relativista  $\beta$ . Los tres parámetros libres con los que jugamos fueron la densidad central  $\rho_c$ , la dispersión de velocidades  $\sigma_c$  y la constante cosmológica  $\Lambda$ , expresada a través de la densidad  $\Omega_\Lambda$  (que podría ser un modelo de energía oscura). Asimismo, las funciones nos permitieron encontrar el calor específico  $C_e$  y definir las regiones de estabilidad del sistema.

El primer resultado importante que notamos es que la constante cosmológica  $\Lambda$  cumple la función de ser un *baño térmico* para el gas no colisional –por ejemplo, un gas de estrellas de una galaxia, o sistemas mayores–. Esto lo notamos en las tendencias a un solo valor asintótico de la dispersión de velocidades  $\sigma_c$ , y de la frialdad relativista en el análisis del calor específico. Si bien el comportamiento es oscilante, podemos imaginarnos que en el infinito, sí se llega a una temperatura estable  $T_\infty$ .

No sólo obtuvimos este valor de manera gráfica, sino que haciendo las consideraciones pertinentes, llegamos de manera analítica al valor final de esa temperatura, que a la vez depende de la dispersión de velocidades, la constante cosmológica y la densidad central  $\rho_c$ , donde nos enfocamos en la dependencia en las últimas dos. Este detalle nos permite entender a la constante  $\Lambda$  como un gran reservorio térmico que en interacción con la *temperatura propia* del gas de estrellas, a grandes distancias, a radios infinitos, convergen en una temperatura asintótica que caracteriza el sistema.

El segundo hallazgo importante, son las zonas de inestabilidad geodésicas a causa del calor específico negativo. Encontramos de manera gráfica que la cantidad  $C_e$ , al igual que todas las variables analizadas, a partir de cierto radio adquiere un

comportamiento oscilatorio. El calor específico se alterna de positivo a negativo, siendo su valor negativo un motivo de inestabilidad. Este radio lo entendemos como un radio de corte, que nos delimita el sistema y condiciona la combinación de los parámetros en juego para que tenga relevancia física. La inestabilidad geodésica del calor específico negativo, es análoga a la inestabilidad de Antonov sobre la misma clase de sistemas. Es sorprendente ver las similitudes de ambos resultados, aunque se traten de distintos enfoques.

El punto de partida de este trabajo fueron los resultados del análisis que se hizo en [53], donde se estudió los radios de corte de sistemas de halos de materia oscura isotérmicos, en presencia de una constante cosmológica. La investigación aquí presentada, es una extensión de ese trabajo, y profundiza ese estudio con nuevos resultados y alcances. Complementamos el análisis de la estabilidad del sistema por medio de la inestabilidad a causa del calor específico negativo, además de obtener evidencia sólida de que el sistema, en sus regiones asintóticas, presenta una temperatura que puede ser considerada constante y que hemos llamado  $T_\infty$ . De manera gráfica y analítica pudimos llegar a ese resultado.

Nuestra intención es continuar el estudio de este sistema. Aún nos queda estudiar en profundidad la inestabilidad de  $C_e$  y compararla con la de Antonov. Además, deseamos resolver y estudiar el caso del gas reativista de Maxwell-Jüttner, para tener una visión más robusta y cercana a lo que esperaríamos de la Termodinámica de sistemas galácticos y relativistas. Un proyecto que nos desafía y entusiasma.

La Termodinámica es quizás el área de la Física más rica y desafiante. Desde hace más de cuatro siglos se estudia de manera rigurosa, y es de las disciplinas que más se ha ramificado y dialogado con otras ciencias, dando a la humanidad un entendimiento de fenómenos diversos, que se han materializado en la mejora de la calidad de la vida. A escalas terrestre nos ha dado infinitas respuestas y cada vez se constata más con nuevas pruebas.

El desafío que nos toca ahora, al menos a los físicos y físicas que nos interesa el Cosmos y el Universo, es dar con una teoría termodinámica sólida que nos permita entender y describir los sistemas a grandes escalas y que sea coherente con Relatividad General, la principal teoría con que hacemos física en este tipo de sistemas. Este trabajo se dirige en esa dirección. Si bien lo sabemos limitado, es un paso necesario para el entendimiento completo de una termodinámica que incluya tanto Relatividad General, como la constante cosmológica  $\Lambda$ , que aún hoy intentamos comprender de qué se trata.

# Referencias

- [1] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.
- [2] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2 ed., 2009.
- [3] C. Cercignani and G. M. Kremer, *The relativistic Boltzmann equation: theory and applications*. Springer Basel AG, 2002.
- [4] S. De Groot, W. Van Leeuwen, and C. Van Weert, *Relativistic Kinetic Theory. Principles and Applications*. North-Holland, Elsevier NH, 1980.
- [5] B. C. Eu, *Kinetic Theory of Nonequilibrium Ensembles, Irreversible Thermodynamics, and Generalized Hydrodynamics*. Springer, 2016.
- [6] P. D. Pathria, R. K.; Beale, *Statistical mechanics. 3rd ed.* Elsevier Ltd, 2011.
- [7] F. Jüttner, “Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie,” *Annalen der Physik*, vol. 339, pp. 856–882, Jan. 1911.
- [8] F. Jüttner, “Die dynamik eines bewegten gases in der relativtheorie,” *Annalen der Physik*, vol. 340, no. 6, pp. 145–161, 1911.
- [9] I. Müller and T. Ruggeri, *Extended Thermodynamics*. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [10] J. Norton, “What was Einstein’s principle of equivalence?,” *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, vol. 16, no. 3, p. 203, 1985.
- [11] R. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [12] R. V. Pound and G. A. Rebka, “Apparent weight of photons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 4, pp. 337–341, Apr 1960.
- [13] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment: An update,” *Physics Reports*, vol. 113, no. 6, pp. 345 – 422, 1984.
- [14] C. Will, “Theory and experiment in gravitational physics,” *American Journal of Physics*, vol. 62, 03 1993.

- [15] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2 ed., 2003.
- [16] J. B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Pearson, 2003.
- [17] A. Zee, *Einstein Gravity in a Nutshell*. Princeton University Press, 2013.
- [18] S. Hans, *RELATIVITY. An Introduction to Special and General Relativity*. Cambridge University Press, 3 ed., 2004.
- [19] R. Maartens, *Causal Thermodynamics in Relativity*. South Africa: Lectures given at the Hanno Rund Workshop on Relativity and Thermodynamics, June, 1996.
- [20] R. C. Tolman, "On the weight of heat and thermal equilibrium in general relativity," *Phys. Rev.*, vol. 35, pp. 904–924, Apr 1930.
- [21] R. C. Tolman and P. Ehrenfest, "Temperature equilibrium in a static gravitational field," *Phys. Rev.*, vol. 36, pp. 1791–1798, Dec 1930.
- [22] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic dynamics*. Princeton University Press, 1987.
- [23] D. Jou, J. Casas-Vázquez, and G. Lebon, *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer, second ed., 1996.
- [24] J. Cohn, "Living with lambda," *Astrophysics and Space Science*, vol. 259, no. 3, p. 213–234, 1998.
- [25] S. M. Carroll, "The cosmological constant," *Living Reviews in Relativity*, vol. 4, no. 1, 2001.
- [26] H. Nussbaumer, "Einstein's conversion from his static to an expanding universe," *The European Physical Journal*, vol. 39, 2014.
- [27] J. Plebanski and A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press, 2006.
- [28] A. Einstein, "Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity," *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )*, vol. 1917, pp. 142–152, 1917.
- [29] T.-P. Cheng, *Relativity, Gravitation and Cosmology: A Basic Introduction*. Oxford university press, 2 ed., 2009.
- [30] J. E. Felten and R. Isaacman, "Scale factors  $r(t)$  and critical values of the cosmological constant  $\Lambda$  in friedmann universes," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 58, pp. 689–698, Jul 1986.
- [31] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, and D. Kaiser, *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.

- [32] D. Soares, “Einstein’s static universe,” *arXiv e-prints*, p. arXiv:1203.4513, Mar. 2012.
- [33] Y. B. Zeldovich, “The cosmological constant and the theory of elementary particles,” *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 11, pp. 381–393, mar 1968.
- [34] S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner, “The cosmological constant,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 30, no. 1, pp. 499–542, 1992.
- [35] M. Livio, “The progenitors of type ia supernovae,” *arXiv*, 3 1999.
- [36] P. Ruiz-Lapuente, “Progenitors of type Ia supernovae,” *Nature*, vol. 481, pp. 149–150, 2012.
- [37] M. Livio and P. Mazzali, “On the Progenitors of Type Ia Supernovae,” *Phys. Rept.*, vol. 736, pp. 1–23, 2018.
- [38] S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high redshift supernovae,” *Astrophys. J.*, vol. 517, pp. 565–586, 1999.
- [39] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, pp. 1009–1038, sep 1998.
- [40] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, “Dynamics of dark energy,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 15, pp. 1753–1936, 2006.
- [41] T. Choudhury and T. Padmanabhan, “Cosmological parameters from supernova observations: A Critical comparison of three data sets,” *Astron. Astrophys.*, vol. 429, p. 807, 2005.
- [42] P. Astier *et al.*, “The Supernova Legacy Survey: Measurement of  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  and  $w$  from the first year data set,” *Astron. Astrophys.*, vol. 447, pp. 31–48, 2006.
- [43] H. K. Jassal, J. Bagla, and T. Padmanabhan, “Understanding the origin of CMB constraints on Dark Energy,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 405, pp. 2639–2650, 2010.
- [44] D. Hooper and S. Dodelson, “What can gamma ray bursts teach us about dark energy?,” *Astropart. Phys.*, vol. 27, pp. 113–118, 2007.
- [45] R. Jimenez, P. Thejll, U. Jorgensen, J. MacDonald, and B. Pagel, “Ages of globular clusters: a new approach,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 282, pp. 926–942, 1996.
- [46] H. B. Richer *et al.*, “The Lower main sequence and mass function of the globular cluster Messier 4,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 574, pp. L151–L154, 2002.

- [47] S. Wanajo, M. Tamamura, N. Itoh, K. Nomoto, Y. Ishimaru, T. C. Beers, and S. Nozawa, “Ther-process in supernova explosions from the collapse of o-ne-mg cores,” *The Astrophysical Journal*, vol. 593, pp. 968–979, aug 2003.
- [48] J. J. Cowan *et al.*, “The chemical composition and age of the metal-poor halo star  $\text{bd} +17^\circ \text{circ} 3248$ ,” *Astrophys. J.*, vol. 572, pp. 861–879, 2002.
- [49] P. Ade *et al.*, “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.*, vol. 594, p. A13, 2016.
- [50] D. Spergel *et al.*, “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: implications for cosmology,” *Astrophys. J. Suppl.*, vol. 170, p. 377, 2007.
- [51] M. Tegmark *et al.*, “Cosmological parameters from sdss and wmap,” *Phys. Rev. D*, vol. 69, p. 103501, May 2004.
- [52] M. Kowalski, D. Rubin, G. Aldering, R. J. Agostinho, A. Amadon, R. Amanullah, C. Bolland, K. Barbary, G. Blanc, P. J. Challis, and *et al.*, “Improved cosmological constraints from new, old, and combined supernova data sets,” *The Astrophysical Journal*, vol. 686, p. 749–778, Oct 2008.
- [53] R. A. Sussman and X. Hernandez, “On the Newtonian limit and cut-off scales of isothermal dark matter haloes with cosmological constant,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 345, pp. 871–882, 11 2003.
- [54] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*. 1983.
- [55] J. Kleyna, M. I. Wilkinson, N. W. Evans, G. Gilmore, and C. Frayn, “Dark matter in dwarf spheroidals - II. Observations and modelling of Draco,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 330, pp. 792–806, Mar. 2002.
- [56] M. I. Wilkinson, J. Kleyna, N. W. Evans, and G. Gilmore, “Dark matter in dwarf spheroidals — I. Models,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 330, pp. 778–791, 03 2002.
- [57] P. Salucci and A. Burkert, “Dark matter scaling relations,” *The Astrophysical Journal*, vol. 537, pp. L9–L12, jul 2000.
- [58] C. Firmani, E. D’Onghia, G. Chincarini, X. Hernández, and V. Avila-Reese, “Constraints on dark matter physics from dwarf galaxies through galaxy cluster haloes,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 321, pp. 713–722, 03 2001.
- [59] P. R. Shapiro and I. T. Iliev, “The central mass and phase-space densities of dark matter halos: Cosmological implications,” *The Astrophysical Journal*, vol. 565, pp. L1–L4, jan 2002.
- [60] J. J. Dalcanton and C. J. Hogan, “Halo cores and phase-space densities: Observational constraints on dark matter physics and structure formation,” *The Astrophysical Journal*, vol. 561, pp. 35–45, nov 2001.



- [61] R. A. Sussman and J. Larena, “Gravitational entropy of local cosmic voids,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 32, p. 165012, jul 2015.
- [62] W. C. Saslaw, *Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1985.
- [63] T. Padmanabhan, “Statistical mechanics of gravitating systems,” *Physics Reports*, vol. 188, no. 5, pp. 285–362, 1990.