



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MEDIDAS DE RIESGO Y REGRESIÓN CUANTÍLICA  
PARA LOS PRECIOS DE GASOLINA EN EL MERCADO  
INTERNACIONAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
ACTUARIA

PRESENTA  
CLAUDIA ISABEL GONZÁLEZ FLORES.

DIRECTOR DE TESIS:  
ACT. EDUARDO SELIM MARTÍNEZ MAYORGA.

Ciudad Universitaria, Cd. Mx, Marzo 2021





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Con todo mi amor dedico este trabajo a los tres  
pilares en mi vida: Elisa, Jaime e Isa.*

*A mi hermana.*

*A mi padre, mi mente sabe que no estás, mi alma  
sabe que estás conmigo.*



# Agradecimientos

Amado Dios, gracias por siempre estar amorosamente a mi lado y dejarme ver que soy muy amada y bendecida.

Mami, eres en la primera persona que pienso cuando al fin ha llegado el momento de agradecer.

Para tí mami, que seguramente te quite el sueño varias veces, gracias por preocuparte, gracias por animarme y por apoyarme para lograr terminar mi tesis. Gracias por ser mi compañera y amiga en este camino que se llama vida. Te amo.

Gracias a mi esposo Jaime, por su amor y apoyo y por darle alegría a mi vida.

Gracias a mi hija, Elisa por ser mi maestra de vida, y la luz de mis días.

Gracias a Eduardo, mi tutor de tesis, por su gran apoyo y por guiarme con su conocimiento para elaborar este trabajo.

Gracias a los miembros del jurado.

Gracias a la UNAM y a la Facultad de Ciencias.

*Claudia Isabel González Flores*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción a regresión cuantílica</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	3
1.2. Definiciones básicas . . . . .	4
1.3. Cuantiles y funciones cuantil . . . . .	6
1.3.1. Propiedades de los cuantiles . . . . .	8
1.3.2. Cuantiles como soluciones de un problema de optimización . . . . .	9
1.3.3. Características numéricas de variables aleatorias basadas en cuantiles	14
1.4. Modelo de regresión cuantílica . . . . .	16
1.4.1. Modelo de regresión lineal y sus desventajas . . . . .	16
1.4.2. Modelo de mediana condicional . . . . .	16
1.4.3. Regresión cuantílica . . . . .	17
1.4.4. Interpretación en el modelo de regresión cuantílica . . . . .	20
1.4.4.1. Transformaciones y equivarianza . . . . .	20
1.4.5. Interpretación de los parámetros . . . . .	24
1.5. Estimación en regresión cuantílica . . . . .	25
1.5.1. Bondad de ajuste en regresión cuantílica . . . . .	27
1.6. Inferencia en regresión cuantílica . . . . .	28
<b>2. Modelos auto-regresivos y de heterocedasticidad condicional para regresión cuantílica</b>	<b>31</b>
2.1. Introducción . . . . .	31
2.2. Modelos basados en cuantiles . . . . .	31
2.2.1. Modelo auto-regresivo clásico (AR) . . . . .	32
2.2.2. Regresiones cuantílicas para otros modelos de series de tiempo con errores i.i.d. . . . .	33
2.2.3. Modelo ARMA . . . . .	34
2.2.4. Modelo con errores correlacionados . . . . .	36
2.2.5. Modelos con errores con colas pesadas . . . . .	37



2.2.6.	Modelos para series de tiempo con tendencia . . . . .	39
2.3.	Modelos con errores GARCH/ARCH . . . . .	40
2.4.	Modelos QAR . . . . .	45
2.4.1.	El proceso QAR lineal . . . . .	46
2.4.2.	Monotonía en modelos QAR lineales . . . . .	54
2.5.	Predicción en modelos basados en regresión cuantílica . . . . .	55
<b>3.</b>	<b>Regresión cuantílica para medidas de riesgo</b>	<b>59</b>
3.1.	Introducción . . . . .	59
3.2.	Medidas de riesgo financieras . . . . .	60
3.2.1.	Referencias históricas de Valor en Riesgo y Expected-Shortfall . . . . .	60
3.2.1.1.	Definición del Valor en Riesgo . . . . .	61
3.2.2.	Valor el riesgo condicional (CVaR) . . . . .	62
3.2.2.1.	Definición del <i>expected-shortfall</i> (ES) . . . . .	63
3.2.3.	Métodos de estimación tradicionales del VaR y del ES . . . . .	64
3.2.3.1.	Estimación no-paramétrica . . . . .	64
3.2.3.2.	Estimación paramétrica . . . . .	64
3.2.3.3.	Intervalos de confianza para VaR y ES mediante Bootstrap . . . . .	66
3.3.	Regresión cuantílica en administración de riesgos . . . . .	66
3.3.1.	Modelos para el Valor en Riesgo . . . . .	67
3.3.1.1.	Regresión cuantílica en modelos de heteroscedasticidad condicional . . . . .	67
3.3.1.2.	Modelos CaViAR . . . . .	72
3.3.1.3.	Modelos QAR . . . . .	73
3.3.2.	Modelos para el <i>Expected shortfall</i> . . . . .	74
<b>4.</b>	<b>Construcción de una estrategia de ajuste para el Valor en Riesgo del cambio en el precio de la gasolina en el mercado internacional</b>	<b>79</b>
4.1.	Introducción . . . . .	79
4.2.	Administración de Riesgos en mercados de energéticos . . . . .	80
4.3.	El contrato de Futuro RBOB . . . . .	80
4.3.1.	Entendimiento del contrato de futuros y su comercialización . . . . .	81
4.4.	El precio de la Gasolina . . . . .	81
4.4.1.	Gasolina Regular (M). . . . .	83
4.5.	Metodología Histórica para la estimación del Valor en Riesgo . . . . .	83
4.6.	Metodología general de administración de riesgos . . . . .	84
4.7.	Estimación del Valor en Riesgo . . . . .	86
4.7.1.	Análisis Descriptivo de las series de precios . . . . .	89
4.7.1.1.	Futuro RBOB . . . . .	90
4.7.1.2.	Gasolina Magna . . . . .	96
4.7.2.	Modelo clásico <i>GARCH</i> (1, 1) con media constante y errores normales . . . . .	102

---

---

4.7.2.1.	GARCH para Futuro RBOB . . . . .	102
4.7.2.2.	GARCH para Gasolina M . . . . .	104
4.7.3.	Modelo $GARCH(1,1)$ con media $ARMA$ y errores $t$ asimétricos . .	107
4.7.3.1.	GARCH para Futuro RBOB . . . . .	107
4.7.3.2.	GARCH para Gasolina M . . . . .	110
4.7.4.	Modelo QAR . . . . .	112
4.7.4.1.	QAR para Futuro RBOB . . . . .	112
4.7.4.2.	QAR para Gasolina M . . . . .	117
4.7.5.	Modelo ARMA-ARCH con regresión cuantílica . . . . .	121
4.7.5.1.	GARCH cuantílico para Futuro RBOB . . . . .	121
4.7.5.2.	GARCH cuantílico para Gasolina M . . . . .	124
4.7.6.	Comparativo de VaR al 5% y conclusiones . . . . .	126
	<b>Conclusiones</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>133</b>

---



# Introducción

El tema que se desarrolla en este trabajo surge de la importancia que tienen las métricas de riesgos para una empresa. En particular, éstas son desarrolladas y calculadas dentro de su propia área de administración de riesgos. Su importancia radica en el riesgo de mercado al que esta expuesta una empresa debido a su actividad comercial, ya que este incide directamente en las pérdidas potenciales que pueda tener los ingresos del negocio.

Para este trabajo, se utiliza como contexto a una empresa comercializadora de productos petrolíferos, en particular de Gasolina, donde es de suma importancia el tener métricas como el Valor en Riesgo (Value at Risk, por sus siglas en inglés), para medir, controlar y monitorar el riesgo de mercado al que se esta expuesto en el mercado internacional de gasolinas.

El VaR es una de las métricas más antiguas en la administración de riesgos, data de 1988 con la firma del acuerdo de Basilea dirigido a la actividad bancaria donde se regula la capacidad de absorción de pérdidas y de protección ante quiebra.

El Valor en Riesgo, (VaR), es la probabilidad de se exceda una pérdida de precios de mercado, de una cartera o portafolio, para un horizonte de tiempo determinado.

Por otro lado, la regresión cuantílica, que fue introducida por Koenker y Basset (1978) se ajusta de manera adecuada a la estimación del VaR ya que esta medida de riesgo es un percentil. Koenker y Zhao (1996) extendieron la regresión cuantílica a modelos lineales ARCH y estimaron cuantiles condicionales mediante una regresión cuantílica.

En este trabajo se estudian cinco metodologías para calcular el VaR a un nivel de confianza del 95 %, es decir, se estimará el percentil al 5 % de la distribución de rendimientos para dos series de precios.

La primer serie corresponde a los precios de la Gasolina Regular y la segunda serie corresponde a los precios del Futuro RBOB Nymex.

La estrategia comercial considera la venta de gasolina regular y la compra de Instrumen-

tos Financieros Derivados como cobertura. Se utiliza para este efecto el contrato de futuro de gasolina RBOB comercializado en el New York Mercantil Exchange, (Nymex por sus siglas en inglés), el cual es el contrato más líquido de gasolina y altamente correlacionado con el producto que se esta vendiendo.

El contrato de futuro es un instrumento financiero de cobertura que sirve para mitigar el riesgo de mercado al que esta expuesto el precio de la gasolina. Los riesgos de mercado son aquellas pérdidas ocasionadas por movimientos adversos en los productos comercializados y que inciden en los resultados de pérdida y ganancias (P&L por sus siglas en inglés) de la empresa.

Para el cálculo del VaR se desarrolla a lo largo de este trabajo la metodología de regresión cuantílica. Esta metodología tiene una aplicación importante en el calculo del VaR debido a que éste se refiere a la estimación de un percentil, en este caso del 5 %, y se contrasta con el resto de las metodologías de estimación las cuales estan enfocadas en la media condicional de la distribución.

La regresion cuantílica presenta varias ventajas al estimar cuantiles en particulas para aquellas distribuciones que no tienen una distribución normal, es decir, aquellas distribuciones con colas pesadas y asimétricas.

Las series con las que se realizó este trabajo tienen asimetría negative y con alta curtosis por lo que se contrastarán los beneficios de usar modelos de estimación cuantílica contra modelos clásicos de estimación a la media condicional y que además suponen normalidad en la distribución de los rendimientos.

Con este trabajo se ofrece una vision más completa de estimación del VaR, utilizando modelos de regresión cuantílica ya que éstos nos permiten reflejar el comportamiento de las covariables en la ubicación, escala y asimetría de la distribución para la variable de respuesta.

Actualmente existe variedad de software estadísticos para la regresión cuantílica. Este trabajo se realizó con R bajo el paquete “quantreg”.

---

# Capítulo 1

## Introducción a regresión cuantílica

### 1.1. Introducción

El modelo de regresión lineal clásica ha sido una herramienta fundamental para el análisis y estudio en la sociedad científica, en las últimas décadas; siendo su objetivo principal exponer la relación entre la variable de respuesta y las variables predictivas mediante la estimación de la media.

La función que resume la relación entre la variable respuesta y las variables predictivas mediante la descripción de la media de las variables de respuesta para cada valor fijo de las variables predictivas, se le llamará *la función de la media condicional*.

La función de la media condicional, es el principio de una amplia familia de enfoques de modelos de regresión entre los cuales están el modelo de regresión lineal, modelo de regresión múltiple, modelos con heterocedasticidad en los errores usando mínimos cuadrados ponderados y modelos de regresión no lineal.

El modelo de media condicional tiene ciertas propiedades atractivas, en *condiciones ideales* es capaz de proporcionar una completa y parsimoniosa descripción de la relación entre las covariables y la distribución de respuesta. Sin embargo, en casos en los que se requiere más detalle de la distribución de la respuesta, no sólo su media condicional, se requiere de técnicas que capturen mejor dicho comportamiento.

Es bien sabido que una alternativa a la media, como medida de tendencia central es la mediana. De manera más general, los cuantiles permiten entender mejor la distribución de una variable, por ejemplo a partir de sus colas inferiores y superiores (medidas mediante el primer decil ó del noveno decil, respectivamente). Esta información que proporcionan los cuantiles, hacen que se utilice como alternativa al modelo de regresión lineal clásico, los

modelos de regresión cuantílica.

Este capítulo tiene la intención de estudiar la técnica de regresión cuantílica. Para esto, en la primera parte de este capítulo se definirá el concepto de cuantil, se presentarán algunas de sus principales propiedades así como sus usos más populares.

En la segunda parte se presentará el modelo de regresión cuantílica, el problema de estimación de parámetros, inferencia acerca de éstos (construcción de intervalos de confianza así como el planteamiento de algunas pruebas de hipótesis) y algunas ventajas en comparación con el modelo de regresión por mínimos cuadrados clásico.

## 1.2. Definiciones básicas

**Definición 1.2.1.** (*Variable aleatoria*)

Una variable  $X$  es una **variable aleatoria** si los valores que toma, corresponden a los distintos resultados posibles de un experimento, y por ello el hecho de que tome un valor particular, es un evento aleatorio.

Las variables aleatorias suelen tomar valores reales, pero también pueden tomar otro tipo de valores aleatorios como los valores lógicos, funciones ó cualquier tipo de elemento de un espacio medible.

Una variable aleatoria puede ser discreta, continua ó mixta.

**Definición 1.2.2.** (*Variable aleatoria discreta*)

Una **variable aleatoria discreta** es aquella que toma, a lo más, una cantidad numerable de valores distintos. El número de valores distintos que la variable aleatoria discreta  $X$  puede tomar, puede entonces ser finito o infinito ya que el proceso de numeración puede no terminar nunca.

**Definición 1.2.3.** (*Variable aleatoria continua*)

Una variable **aleatoria continua** es aquella que puede tomar cualquier valor de entre todos los contenidos de un intervalo de la recta.

Es importante la diferencia que se hace entre las variables aleatorias discretas y conti-

---

nuas ya que las probabilidades asociadas a cada valor posible de una variable discreta suman 1, y eso no es posible para las continuas, para esto se requiere el operador matemático de integración.

**Definición 1.2.4.** (*Función de distribución acumulada*)

La **función de distribución acumulada** ó simplemente función de distribución, asociada a una variable aleatoria  $X$  sujeta a cierta ley de distribución de probabilidad, es una función matemática que describe la probabilidad de que  $X$  tenga un valor menor o igual a  $x$ . Es decir,

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$$

La función de distribución acumulada para una variable aleatoria discreta se define como:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

La función de distribución en un punto se obtiene acumulando el valor de la función de densidad para todos los valores del recorrido menores o iguales al punto en cuestión.

La función de distribución acumulada para una variable aleatoria continua no es sino una sencilla extensión del caso discreto, todo lo que se necesita es sustituir la suma por una integral.

Las dos propiedades más importantes de la función de distribución son la monotonía.

Es decir, si  $x_1 \leq x_2$ , entonces  $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ .

La otra propiedad es su comportamiento cuando tiende a infinito:

- (i)  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F_X(y) = 0$ .
- (ii)  $\lim_{y \rightarrow \infty} F_X(y) = 1$ .

Una variable aleatoria continua, toma un número infinito de valores posibles. Una variable aleatoria discreta  $X$  que toma un número finito o infinitamente contable de valores posibles, la probabilidad de que  $X$  tome  $x$  valor se determina  $\mathbb{P}(X = x)$  para todos los

---



posibles valores de  $X$  y se llama función de masa de probabilidad (p.m.f)

Para las variables continuas, la probabilidad de que  $X$  tome un valor particular  $x$  es cero para todo  $x \in \mathbb{R}$  por lo que en su lugar se busca la probabilidad de que  $X$  caiga en un intervalo  $(a, b)$ , es decir,  $\mathbb{P}(a < X < b)$ .

**Definición 1.2.5.** (*Función de densidad de probabilidad*)

Considérese una variable aleatoria continua  $X$  con función de distribución continua  $F_X(x)$ . Se define la **función de densidad de probabilidad** (fdp) como la derivada de la función de distribución para  $X$ . Es decir,

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = F'_X(x)$$

si  $F_X(x)$  es diferenciable en  $x$ .

A continuación se enlistan algunas de las principales propiedades de  $f_X$ :

1.  $f_X(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = 1$ .
3.  $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(u)du$ .
4. En general, para un conjunto  $A$ ,  $\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(u)du$ .

### 1.3. Cuantiles y funciones cuantil

En el análisis estadístico es esencial describir y comparar los atributos de la distribución de una población. Las medidas más simples y más usadas para describir una población son la media (como medida de ubicación central) y la desviación estándar (para la dispersión) sin embargo, usar solo estas medidas para conocer el comportamiento de una distribución deja de lado conocer otras propiedades también importantes que ofrecen mayor conocimiento de ésta.

En tanto las distribuciones se vuelven menos simétricas, se requieren de medidas descriptivas más complejas. El considerar los cuantiles y funciones cuantiles lleva a una colección más rica de estas medidas.

Para caracterizar la ubicación y forma de distribuciones asimétricas, se introducirá las definiciones de cuantiles, función cuantil así como sus principales características y propiedades.

**Definición 1.3.1.** (*Función inversa generalizada*)

Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función no decreciente. Se define la inversa generalizada de  $g$ , que se denota como  $g^-$  como una función  $g^- : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  tal que

$$g^-(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : g(x) \geq y\},$$

con la convención de que  $\inf \emptyset = \infty$ .

Una vez que se tiene el concepto de inversa generalizada, se puede definir formalmente a la función cuantil.

**Definición 1.3.2.** (*Función cuantil*)

Sea  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  una función de distribución. Se define la función cuantil de  $F_X$  como su correspondiente función inversa generalizada. Es decir  $F_X^- : [0, 1] \rightarrow [-\infty, \infty]$  tal que

$$F_X^-(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq y\}$$

Ahora se dará la definición formal de cuantil, que es fundamental a lo largo del desarrollo de este trabajo.

**Definición 1.3.3.** (*Cuantil*)

Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución  $F_X$ . Para  $\tau \in (0, 1)$ , se define el  $\tau$ -cuantil de  $X$  (ó  $\tau$ -cuantil de  $F_X$ ) como  $F_X^-(\tau)$  y se denota como  $Q_X^{(\tau)}$  o como  $\pi_\tau$ , es decir

$$\pi_\tau = Q_X^{(\tau)} = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \tau\}.$$

Si  $X$  es una variable aleatoria continua, el  $\tau$ -cuantil es la única solución de la ecuación

$$F_X(\pi_\tau) = \tau.$$

Es decir, el  $\tau$ -cuantil de  $X$  es un número  $\pi_\tau$  tal que el área bajo  $f_X(x)$  y a la izquierda de

$\pi_\tau$  es  $\tau$ , esto es,  $\tau$  es la integral de  $f_X(x)$  de  $-\infty$  a  $\pi_\tau$ .

Los cuantiles suelen usarse por grupos que dividen la distribución en partes iguales; los más usados son:

- Los cuartiles que dividen a la distribución en cuatro partes corresponden a los cuantiles 0.25, 0.50 y 0.75.
- Los percentiles que dividen a la función en 100 partes
- El 50-gécimo percentil es también llamado segundo cuartil o mediana.
- Los deciles que dividen a la distribución en 10 partes corresponden a los cuantiles 0.1, 0.2, ..., 0.9.

**Definición 1.3.4.** (*Cuantil muestral*)

Dada una muestra  $x_1, \dots, x_n$  de  $F_X$ . Para  $\tau \in (0, 1)$ , se define el  $\tau$ -cuantil muestral de  $X$  como el  $\tau$ -cuantil de la correspondiente función de distribución empírica  $\hat{F}$  y se denota como  $\hat{Q}^{(\tau)}(\hat{F})$ .

Los cuantiles muestrales están muy relacionados con las estadísticas de orden. Dada una muestra  $x_1, \dots, x_n$ , se puede ordenar ascendentemente y escribir a la muestra como  $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$  donde  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ . Se dice que  $x_{(i)}$  es la  $i$ -ésima estadística de orden.

La relación entre las estadísticas de orden y los cuantiles muestrales se describe de la siguiente manera:

- Si  $[n + 1]\tau$  es entero, entonces  $\hat{\pi}_\tau = x_{([n+1]\tau)}$ , i.e.  $\hat{\pi}_\tau$  es la  $[n + 1]\tau$ -ésima estadística de orden.
- Si  $[n + 1]\tau$  no es entero, entonces  $\hat{\pi}_\tau$  es la interpolación entre dos estadísticas de orden, i.e.

$$\hat{\pi}_\tau = ((n + 1)\tau - a)x_{(a+1)} + (a + 1 - (n + 1)\tau)x_{(a)},$$

donde  $a := \lfloor (n + 1)\tau \rfloor$ .

### 1.3.1. Propiedades de los cuantiles

Los cuantiles tiene algunas propiedades que serán de utilidad en el planteamiento del modelo de regresión cuantílica, varias de estas propiedades se heredan directamente a dicho modelo.

**Proposición 1.3.1.**

Sean  $X$  una variable aleatoria,  $\tau \in (0, 1)$  y  $Q^{(\tau)}(X)$  el  $\tau$ -cuantil de  $X$ .

- (a) Si  $c \in \mathbb{R}_+$ , entonces el  $\tau$ -cuantil de  $cX$  es  $c \cdot Q^{(\tau)}(X)$ , i.e. el  $\tau$ -cuantil de  $cX$  es  $c$  veces el  $\tau$ -cuantil de  $X$
- (b) Si  $c \in \mathbb{R}$ , entonces el  $\tau$ -cuantil de  $c + X$  es  $c + Q^{(\tau)}(X)$ , i.e. el  $\tau$ -cuantil de  $c + X$  es el  $\tau$ -cuantil de  $X$  agregándole  $c$ .
- (c) Si  $g$  es una función estrictamente creciente, entonces, el  $\tau$ -cuantil de  $g(X)$  es  $g(Q^{(\tau)}(X))$ .
- (d) Si  $g$  es una función estrictamente decreciente, entonces, el  $\tau$ -cuantil de  $g(X)$  es  $g(Q^{(1-\tau)}(X))$

A la propiedad del inciso (c) se le conoce como propiedad de equivarianza monótona. Esta propiedad consiste en que si se aplica una transformación monótona  $g$  (por ejemplo, la función exponencial ó logarítmica son muy populares) a una variable aleatoria, entonces los cuantiles se obtienen aplicando la misma transformación a la función cuantil.

Una propiedad estadística importante de los cuantiles muestrales es la que está relacionada con la insensibilidad a la influencia de outliers. El ejemplo más sencillo es el de la mediana: dado un conjunto de datos  $x_1, \dots, x_n$  con mediana muestral  $m$ , se puede cambiar la muestra cambiando un valor muestral  $x_i \geq m$  por cualquier otro valor  $x'_i > m$ . Análogamente, se puede cambiar un valor debajo de la mediana por cualquier otro valor que esté por debajo de la mediana **y tales modificaciones a la muestra no tienen efecto en la mediana muestral**. En comparación con el uso de la media aritmética muestral: cambiar cualquier valor muestral  $x_i$  por algún otro valor  $x_i + \Delta$ , cambia a la media muestral en  $\frac{\Delta}{n}$ .

Esto quiere decir que la influencia de las observaciones individuales está acotada en los cuantiles muestrales pero no acotada en la media muestral.

### 1.3.2. Cuantiles como soluciones de un problema de optimización

Un cuantíl también se puede considerar como solución de cierto problema de minimización. Para poner en contexto dicho problema, considérese la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.2.**

Sea  $X$  una variable aleatoria tal que  $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ . Considérese la función

$$g(t) := \mathbb{E}[(X - t)^2].$$

La función  $g(\cdot)$  se minimiza en  $t^* = \mathbb{E}(X)$  y por tanto el valor mínimo de  $g$  es  $Var(X)$

*Demostración:*

Nótese que  $g(\cdot)$  se puede descomponer como

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbb{E}[(X - t)^2] = \mathbb{E}(X^2) - 2t\mathbb{E}(X) + t^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2t\mathbb{E}(X) + t^2 + \mathbb{E}^2(X) - \mathbb{E}^2(X) \\ &= (\mathbb{E}(X) - t)^2 + \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = (\mathbb{E}(X) - t)^2 + Var(X) \end{aligned}$$

De aquí que  $g'(t) = 2(t - \mathbb{E}(X))$  y  $g''(t) = 2 > 0$ . Por lo tanto,  $g'(t) = 0$  si y sólo si  $t = \mathbb{E}(X)$ . Es decir,  $t^* = \mathbb{E}(X)$  es mínimo y el valor mínimo de  $g(\cdot)$  correspondientes es

$$g(t^*) = g(\mathbb{E}(X)) = (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X))^2 + Var(X) = Var(X).$$

□

Este resultado también se satisface muestralmente.

**Proposición 1.3.3.**

Considérese un conjunto de números  $x_1, \dots, x_n$ , Defínase la función

$$g(t) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2.$$

La función  $g(\cdot)$  se minimiza en  $t^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$  y por tanto el valor mínimo de  $g$  es la varianza muestral de  $x_1, \dots, x_n$ ,  $s_x^2$

*Demostración:*

Nótese que  $g(\cdot)$  se puede descomponer como

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - t)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x} + \bar{x} - t)^2 \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - t)^2 + \frac{2(\bar{x} - t)}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - t)^2 + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{n}{n-1} (\bar{x} - t)^2 + s_x^2
\end{aligned}$$

Entonces  $g'(t) = \frac{2n}{n-1}(\bar{x} - t)$ . Por lo tanto,  $g'(t) = 0$  si y sólo si  $t = \bar{x}$ . Finalmente, el mínimo es  $g(\bar{x}) = \frac{n}{n-1}(\bar{x} - \bar{x})^2 + s_x^2 = s_x^2$ .  $\square$

La mediana tiene una propiedad similar, pero en vez de usar la distancia euclideana cuadrada, se mide la distancia absoluta.

**Proposición 1.3.4.**

Sea  $X$  una variable aleatoria. Considérese la función

$$h(t) := \mathbb{E}(|X - t|).$$

La función  $h(\cdot)$  se minimiza en  $t^* = \text{med}(X)$ .

*Demostración:*

La función  $h(\cdot)$  se puede descomponer como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X - t|) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x - t| dF_X(x) = \int_{-\infty}^t |x - t| dF_X(x) + \int_t^{\infty} |x - t| dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^t |x - t| dF_X(x) + \int_t^{\infty} |x - t| dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^t (t - x) dF_X(x) + \int_t^{\infty} (x - t) dF_X(x)
\end{aligned}$$

La derivada del primer término es

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t (t-x)dF_X(x) &= (t-x)f_X(x)|_{y=m} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t}(t-x)dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^t dF_X(x) = F_X(t)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^t (t-x)dF_X(x) = (t-x)f_X(x)|_{y=m} + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t}(t-x)dF_X(x)$$

La derivada del segundo término es

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_t^{\infty} (x-t)dF_X(x) = - \int_t^{\infty} dF_X(x) = -[1 - F_X(t)]$$

Entonces, incorporando ambos términos,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[|X-t|] = F_X(t) - (1 - F_X(t)) = 2F_X(t) - 1.$$

De aquí que  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[|X-t|] = 0$  si y sólo si  $F_X(t) = \frac{1}{2}$ , i.e.  $t$  es la mediana de  $X$ .  $\square$

La función  $h(t)$  es convexa, por lo tanto la solución de problema de minimización es encontrar un punto en el que la derivada con respecto a  $t$  sea 0 ó bien que las derivadas direccionales tengan diferentes signos.

Este resultado también se satisface muestralmente.

**Proposición 1.3.5.**

Considérese un conjunto de números  $x_1, \dots, x_n$ , Defínase la función

$$h(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - t|.$$

La función  $h(\cdot)$  se minimiza en la mediana muestral de  $x_1, \dots, x_n$ .

*Demostración:*

La función  $h(t)$  es la suma de funciones con forma de V,  $h_i(t) := \frac{1}{n}|x_i - t|$ . La función  $h_i$  toma el valor mínimo de 0 cuando  $x_i = t$ , i.e. tiene una derivada de  $-\frac{1}{n}$  para  $t < x_i$  y de  $\frac{1}{n}$  para  $t > x_i$ ; sin embargo, no es derivable en  $t = x_i$ .

Como  $h$  es la suma de las  $h_i$ 's, la derivada direccional de  $h$  en  $t$  es  $\frac{n_r - n_l}{n}$  en la dirección negativa, y  $\frac{n_l - n_r}{n}$  en la dirección positiva; donde  $n_l$  es el número de observaciones a la izquierda de  $t$  y  $n_r$  es el número de observaciones a la derecha de  $t$ . Por lo tanto el mínimo de  $h$  se alcanza cuando  $t$  tiene el mismo número de puntos a las izquierda y a la derecha, i.e. cuando  $t$  es la mediana muestral.  $\square$

Esta representación de la mediana se puede generalizar a otros cuantiles de la siguiente forma.

Para cualquier  $\tau \in (0, 1)$ , la distancia de  $X$  a  $q$  se medirá a partir de la distancia absoluta pero se aplicará una ponderación diferente dependiendo de si  $q$  está a la izquierda o a la derecha de  $X$ .

**Definición 1.3.5.** (*Distancia ponderada*)

Para  $\tau \in (0, 1)$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , se define la distancia  $\tau$ -ponderada entre  $X$  y  $q$  como

$$d_\tau(X, q) = \begin{cases} (1 - \tau)|X - q| & \text{si } X < q \\ \tau|X - q| & \text{si } X \geq q \end{cases} = \begin{cases} (1 - \tau)(q - X) & \text{si } X < q \\ \tau(X - q) & \text{si } X \geq q \end{cases} \quad (1.1)$$

**Proposición 1.3.6.**

Sea  $X$  una variable aleatoria. Considérese la función

$$k(t) := \mathbb{E}[d_\tau(X, t)].$$

La función  $k(\cdot)$  se minimiza en  $t^* = F_X^{-1}(\tau)$  i.e.  $k(\cdot)$  se minimiza en el  $\tau$ -cuantil de  $X$ .

*Demostración:*

Con un razonamiento análogo al que se hizo para la optimización absoluta, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[d_\tau(X, t)] = (1 - \tau)F_X(t) - \tau(1 - F_X(t)) = F_X(t) - \tau$$

De aquí que  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[d_\tau(X, t)] = 0$  si y sólo si  $F_X(t) = \tau$ , i.e.  $t$  es el  $\tau$ -cuantil de  $X$ .  $\square$

Como antes, el resultado también se satisface muestralmente, i.e. el  $p$ -cuantil muestral es el valor  $t^*$  que minimiza la distancia promedio



$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_{\tau}(x_i, t) = \frac{1-\tau}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - t| + \frac{\tau}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - t|.$$

**Definición 1.3.6.**

Para  $\tau \in (0, 1)$ , defínase la la función

$$\rho_{\tau}(u) := u[\tau - I(u < 0)] = \begin{cases} -(1-\tau)u & \text{si } u < 0 \\ \tau \cdot u & \text{si } u \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

La función  $\rho_{\tau}$  es se conoce como función de pérdida lineal por pedazos. Dicha función tiene pendiente negativa en  $(-\infty, 0)$  y positiva en  $[0, \infty)$ .

Con esta definición, obsérvese que

$$\begin{aligned} \rho_{\tau}(X - t) &= (X - t)[\tau - I(X - t < 0)] \\ &= \begin{cases} (X - t)[\tau - 1] & \text{si } X - t < 0 \\ (X - t)[\tau - 0] & \text{si } X - t \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1 - \tau)(t - X) & \text{si } X < t \\ \tau(X - t) & \text{si } X \geq t \end{cases} \\ &= d_{\tau}(X, t) \end{aligned}$$

Es decir,  $d_{\tau}(X, t) = \rho_{\tau}(X - t)$ . Entonces, la aplicación  $t \mapsto \mathbb{E}[\rho_{\tau}(X - t)]$  se minimiza en  $t^* = F_X^{-1}(\tau)$ , i.e. la pérdida esperada se minimiza en el  $\tau$ -cuantil de  $X$ .

En particular, obsérvese que  $\rho_{1/2}(u) = \frac{1}{2}|u|$ , que es simétrica con respecto a  $u = 0$ ; es decir la función de pérdida es simétrica.

Cuando la pérdida es lineal pero asimétrica, se prefiere un estimado puntual que sea más verosímil que pertenezca al lado más “horizontal” de los dos lados. Por ejemplo, si un sub-estimado es marginalmente tres veces más costoso que un sobre-estimado, se seleccionará  $\tilde{x}$  tal que  $\mathbb{P}(X \leq \tilde{x}) \geq 3\mathbb{P}(X > \tilde{x})$ ; es decir,  $\mathbb{P}(X \leq \tilde{x}) \geq \frac{3}{4}$ , i.e.  $\tilde{x}$  es el tercer cuartil de  $F_X$ .

### 1.3.3. Características numéricas de variables aleatorias basadas en cuantiles

Dos cantidades básicas que describen la forma de una distribución son la escala y la asimetría (skewness). Es común que la escala se mida a partir de la desviación estándar;

dicha medida es fácil de interpretar para una distribución simétrica pero en el caso asimétrico esta cantidad pierde sentido. En finanzas esto es muy grave ya que empíricamente se ha observado que muchas distribuciones son altamente asimétricas con colas pesadas.

Para capturar este tipo de “dispersión” se puede usar la medida de escala basada en cuantiles (QSC, por las siglas en inglés de quantile-based scale measure).

**Definición 1.3.7.** (*Rango intercuantil*)

Para  $\tau \in (0, \frac{1}{2})$ , se define la medida de escala basada en cuantiles de la distribución de una variable aleatoria  $Y$  como

$$QSC_Y(\tau) = Q^{(1-\tau)}(Y) - Q^{(\tau)}(Y).$$

También se conoce como  $\tau$ -rango intercuantil.

En particular,  $QSC_Y(\frac{1}{4}) = Q^{(\frac{3}{4})}(Y) - Q^{(\frac{1}{4})}(Y)$  se conoce como rango intercuantil.

La variación superior se refiere a la variación por arriba de la mediana y la variación inferior se refiere a la variación por debajo de la mediana. Para una distribución simétrica la variación superior debe ser igual a la variación inferior. Si la variación inferior es menor que la superior, se tiene una distribución sesgada a la derecha; en el caso contrario, se tiene una distribución sesgada a la izquierda. Esto motiva la definición de un coeficiente de asimetría basado en cuantiles.

**Definición 1.3.8.** (*Asimetría basada en cuantiles*)

Para  $\tau \in (0, \frac{1}{2})$ , se define la asimetría basada en cuantiles de la distribución de una variable aleatoria  $Y$  como

$$QSK_Y(\tau) = \frac{Q^{(1-\tau)}(Y) - Q^{(1/2)}(Y)}{Q^{(1/2)}(Y) - Q^{(\tau)}(Y)} - 1$$

En la definición de  $QSK_Y(\tau)$  se resta 1 al cociente  $\frac{Q^{(1-\tau)}(Y) - Q^{(1/2)}(Y)}{Q^{(1/2)}(Y) - Q^{(\tau)}(Y)}$  para poder compararlo directamente con el coeficiente de asimetría clásico en el que una distribución simétrica tiene asimetría 0.

## 1.4. Modelo de regresión cuantílica

### 1.4.1. Modelo de regresión lineal y sus desventajas

En tiempos recientes, ha surgido la necesidad de aplicar métodos avanzados para relajar algunos de los supuestos básicos en el marco de la media condicional ya que una de las principales limitaciones de este modelo recae en el cumplimiento de los supuestos; en particular el supuesto de heterocedasticidad y normalidad de los errores ya que suelen no cumplirse cuando se trata de datos del campo social y científico como por ejemplo:

- Datos de encuestas de opinión
- Registros de votación
- Estadísticas e índices del gobierno
- Índices de mercados bursátiles
- Distribuciones de ingresos y compensaciones anuales
- Estudio de razas y migración

Otra limitación importante del modelo de media condicional, se refiere a que resulta débil cuando se requiere contestar preguntas de investigación para medidas no centrales y se requiere conocer de las propiedades de la distribución completa; por ejemplo en estudios económicos donde el punto de interés está en conocer las colas, es decir, los pobres y los ricos o investigaciones sobre educación donde se trata de reducir la brechas grupales en niveles de logro (por ejemplo, nivel básico, medio y avanzado). También es común tener distribuciones con colas pesadas cuando se trata de fenómenos sociales y financieros.

Para este tipo de datos, es de gran utilidad **la regresión cuantílica** ya que relaja estos supuestos y adicionalmente ofrece la perspectiva de la variable explicativa sobre la ubicación (ya sea central o no central), escala y forma de la distribución, es decir, ofrece un conocimiento de la distribución completa.

Es decir, el modelo de regresión lineal es un método estadístico estándar que se enfoca en modelar la media condicional de una variable de respuesta sin tomar en cuenta las propiedades distribucionales condicionales completas.

### 1.4.2. Modelo de mediana condicional

Si se tiene una distribución asimétrica (altamente sesgada), la mediana es una medida de tendencia central más adecuada, por lo tanto el **modelo de mediana condicional** surge como una herramienta para el estudio de medidas no centrales en distribuciones asimétricas.

---

La regresión de mediana condicional fue propuesta por Boscovich a mediados del siglo XVIII y posteriormente fue investigada por Laplace y Edgeworth. Este modelo reemplaza la estimación de mínimos cuadrados, por estimación de mínimas distancias absolutas.

El modelo de regresión de mediana condicional intenta “resolver” las complicaciones del modelo de regresión lineal. La regresión de mediana condicional estima el efecto de una o más covariables sobre la mediana condicional; por lo tanto ésta representa la ubicación central aún cuando la distribución es asimétrica.

La mediana, se puede ver como un cuantil especial que describe la ubicación central de la distribución. La regresión de la mediana condicional es un caso especial de la regresión cuantílica ya que el cuantil 0.5 (50 % de los datos) es modelado como una función de covariables.

Y así, como podemos describir a la mediana mediante la regresión, también otros cuantiles pueden ser modelados y usados para describir posiciones no centrales de la distribución. De este modo, se puede elegir cualquier posición de la distribución que sea de interés de estudio para modelarla.

Para modelar location-shifts y shape-shifts, en Koenker & Basset (1978) se propuso una forma más general que el modelo de regresión mediana: la regresión cuantílica.

### 1.4.3. Regresión cuantílica

Dado que múltiples cuantiles pueden ser modelados, el modelo de regresión cuantílica nos permite alcanzar un entendimiento más completo de cómo es afectada la distribución de respuesta por los predictores, así como conocer los cambios en la forma de la distribución.

Dado un conjunto de covariables, el modelo de regresión lineal especifica la media condicional (función de media condicional) mientras que el modelo de regresión cuantílica especifica la función cuantil condicional.

La capacidad de modelar los cambios (location-shifts y shape-shifts) en la forma de la distribución proporciona un importante avance metodológico en la investigación.

El modelo de regresión cuantílica estima el efecto diferencial potencial de covariables sobre varios cuantiles en la distribución condicional; por ejemplo, un suceso de 19 cuantiles equidistante desde el 0.05-cuantil al 0.95-cuantil. Con la mediana y los otros 18 cuantiles, éstas 19 rectas de regresión ajustadas capturan el location-shift (la recta de la mediana) así como la escala y otros shape-shifts más complejos (las rectas para los cuantiles otros cuantiles que no son la mediana). De esta manera, el modelo de regresión cuantílica estima

---

el efecto diferencial de una covariable sobre la distribución completa y se adapta a heteroscedasticidad.

Según Koenker & Basset (1978), el modelo de regresión cuantílica correspondiente al modelo de regresión lineal en la ecuación

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i$$

se puede expresar como

$$y_i = \beta_0^{(\tau)} + \beta_1^{(\tau)} x_{i1} + \dots + \beta_p^{(\tau)} x_{ip} + \epsilon_i$$

donde  $\tau \in (0, 1)$  indica el nivel al que se está estableciendo la relación.

Recuérdese que para el modelo de regresión lineal, la media condicional de  $y_i$  dado  $x_i$  es  $\mathbb{E}(y_i | x_{i1}, \dots, x_{ip}) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_p x_{ip}$  y esto es equivalente a requerir que el término de error  $\epsilon_i$  tenga esperanza 0.

En el modelo de regresión cuantílica se establece una relación entre el  $\tau$ -cuantil y las covariables, i.e. se especifica que el cuantil condicional dado  $x_{i1}, \dots, x_{ip}$  es

$$Q^{(\tau)}(y_i | x_{i1}, \dots, x_{ip}) = \beta_0^{(\tau)} + \beta_1^{(\tau)} x_{i1} + \dots + \beta_p^{(\tau)} x_{ip}$$

El modelo de regresión cuantílica se puede reformular de manera equivalente haciendo algunas hipótesis con respecto a la distribución de los términos de error. Como  $\beta_0^{(\tau)} + \beta_1^{(\tau)} x_{i1} + \dots + \beta_p^{(\tau)} x_{ip}$  es no aleatorio entonces,

$$\begin{aligned} Q^{(\tau)}(y_i | x_{i1}, \dots, x_{ip}) &= \beta_0^{(\tau)} + \beta_1^{(\tau)} x_{i1} + \dots + \beta_p^{(\tau)} x_{ip} + Q^{(\tau)}(\epsilon_i) \\ &\equiv \beta_0^{(\tau)} + \beta_1^{(\tau)} x_{i1} + \dots + \beta_p^{(\tau)} x_{ip} \end{aligned}$$

es equivalente a decir que el  $\tau$ -cuantil del término de error sea 0.

#### Observación 1.4.1.

Para diferentes valores de  $\tau$ , para una observación fija  $i$ , se pueden relacionar los errores en dos niveles. Como

$$y_i = \beta_0^{(\tau_1)} + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau_1)} x_{ij} + \epsilon_i^{(\tau_1)}, \quad y_i = \beta_0^{(\tau_2)} + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau_2)} x_{ij} + \epsilon_i^{(\tau_2)},$$

entonces

---

$$\epsilon_i^{(\tau_1)} - \epsilon_i^{(\tau_2)} = (\beta_0^{(\tau_2)} - \beta_0^{(\tau_1)}) + \sum_{j=1}^p (\beta_j^{(\tau_2)} - \beta_j^{(\tau_1)}) x_{ij} \equiv c$$

Es decir,  $\epsilon_i^{(\tau_1)} = \epsilon_i^{(\tau_2)} + c$ , lo que significa que  $\epsilon_i^{(\tau_1)}, \epsilon_i^{(\tau_2)}$  son un desplazamiento uno de otro.  $\nabla$

Un caso especial importante en el modelo de regresión cuantílica es en el que para  $\tau$  fijo,  $\epsilon_1^{(\tau)}, \dots, \epsilon_n^{(\tau)}$  son independientes e idénticamente distribuidos. En este caso el  $\delta$ -cuantil de  $\epsilon_i^{(\tau)}$  es una constante que sólo depende de  $\delta$  y  $\tau$ , no de  $i$ , que se denotará como  $c_{\tau,\delta}$ .

De nuevo, a partir de la ecuación

$$y_i = \beta_0^{(\tau)} + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau)} x_{ij} + \epsilon_i^{(\tau)},$$

para  $\delta \neq \tau$  se puede expresar a la función  $\delta$ -cuantil condicional como

$$Q^{(\delta)}(y_i | x_{i1}, \dots, x_{ip}) = Q^{(\tau)}(y_i | x_{i1}, \dots, x_{ip}) + c_{\tau,\delta}.$$

Por lo tanto, se puede concluir que en el caso independiente e idénticamente distribuido, las funciones cuantiles condicionales son desplazamientos unas de otras. Esto significa que los coeficientes  $\beta_1^{(\tau)}, \dots, \beta_p^{(\tau)}$  no dependen de  $\tau$  (ni de ningún otro nivel en  $(0,1)$ ), y simplemente se denotan por  $\beta_1, \dots, \beta_p$ . Es decir, la suposición de errores independientes e idénticamente distribuidas establece que no hay desplazamientos en la variable respuesta.

La ecuación

$$y_i = \beta_0^{(\tau)} + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau)} x_{ij} + \epsilon_i^{(\tau)},$$

establece que a diferencia del modelo de regresión por mínimos cuadrados, en el que la media condicional se expresa mediante una única expresión, el modelo de regresión cuantílica establece diferentes expresiones para los cuantiles condicionales.

Por tanto, se pueden plantear varias ecuaciones de la forma

$$y_i = \beta_0^{(\tau)} + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau)} x_{ij} + \epsilon_i^{(\tau)},$$

por ejemplo, si un modelo de regresión cuantílica especifica a 19 cuantiles en los niveles 0.05, 0.1, ..., 0.95, las 19 ecuaciones llevarán a obtener  $19(p+1)$  coeficientes.

**Observación 1.4.2.**

Los cuantiles no tienen que ser equidistantes, pero en la práctica tenerlos en intervalos iguales (de longitud igual) facilita su interpretación.  $\nabla$

**1.4.4. Interpretación en el modelo de regresión cuantílica****1.4.4.1. Transformaciones y equivarianza**

Cuando se analiza una variable respuesta es común que se transforme la escala para poder interpretar fácilmente ó para obtener un “mejor ajuste” de modelo.

Las propiedades de equivarianza de modelos y estimadores se refiere a la situación en la que si se transforman los datos, los modelos y estimadores correspondientes varían de acuerdo a la misma transformación. Cuando se conocen las propiedades de equivarianza se tiene mejor entendimiento y reinterpretación de los modelos ajustados cuando se transforma la variable respuesta.

Para cualquier transformación lineal de la variable respuesta, la media condicional del modelo de regresión lineal se puede transformar exactamente por dicha transformación lineal, pues

$$\mathbb{E}(a_1 + a_2Y|X) = a_1 + a_2\mathbb{E}(Y|X).$$

Esta propiedad se conoce como equivarianza lineal.

El modelo de regresión cuantílica también satisface una propiedad parecida.

**Proposición 1.4.1.**

Para cualquier  $\tau \in (0, 1)$ .

- (i) Si  $a_2 > 0$  y  $a_1 \in \mathbb{R}$ , entonces  $Q^{(\tau)}(a_1 + a_2Y|X) = a_1 + a_2 \cdot Q^{(\tau)}(Y|X)$
- (ii) Si  $a_2 < 0$  y  $a_1 \in \mathbb{R}$ , entonces  $Q^{(\tau)}(a_1 + a_2Y|X) = a_1 + a_2 \cdot Q^{(1-\tau)}(Y|X)$

*Demostración:*

La demostración es directa de los incisos (a) y (d) de la Proposición 1.3.1.  $\square$

Algunas otras situaciones surgen cuando se aplica una transformación no lineal. Las log-transformaciones se utilizan mucho para “controlar” la asimetría hacia la derecha de la distribución. O bien, se consideran algunas otras transformaciones para “forzar” a una distribución Gaussiana o para lograr un mejor ajuste al modelo.

Las log-transformaciones también se consideran cuando se quiere modelar un efecto de covariable en términos relativos (por ejemplo, cambios porcentuales); i.e. el efecto de una covariable se ve sobre una escala multiplicativa en vez de una escala aditiva.

Sin embargo, aún cuando la log-transformación de una respuesta en el modelo de regresión permite una interpretación de los estimadores como un cambio porcentual, no se puede obtener la media condicional de la variable respuesta en términos absolutos, a partir de la media condicional en una log-escala pues

$$\mathbb{E}(\log(Y)|X) \neq \log(\mathbb{E}(Y|X)) \quad \text{y} \quad \mathbb{E}(Y|X) \neq e^{\mathbb{E}(\log(Y)|X)}$$

Sin embargo, los cuantiles condicionales sí tienen la propiedad de equivarianza monótona.

**Proposición 1.4.2.**

Para cualquier  $\tau \in (0, 1)$ . Si  $h(\cdot)$  es una función monótona creciente, entonces

$$Q^{(\tau)}(h(Y)|X) = h\left(Q^{(\tau)}(Y|X)\right)$$

*Demostración:*

La demostración es directa del inciso (d) de la Proposición 1.3.1. □

**Ejemplo 1.4.1.**

Si se considera a la función  $h(y) = \log(y)$ , entonces

$$Q^{(\tau)}(\log(Y)|X) = \log\left(Q^{(\tau)}(Y|X)\right),$$

de manera equivalente

$$Q^{(\tau)}(Y|X) = \exp\left\{Q^{(\tau)}(\log(Y)|X)\right\}$$

Por lo tanto se puede reinterpretar los modelos de regresión cuantílica ajustados para variables no-transformadas en términos de modelos de regresión cuantílica para variables

---



transformadas. Por ejemplo, si se cumple un ajuste perfecto para la función  $\tau$ -cuantil de la forma  $Q^{(\tau)}(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$ , entonces  $Q^{(\tau)}(\log(y)|x) = \log(\beta_0 + \beta_1 x)$ , i.e. se puede usar el impacto de alguna covariable expresada en términos absolutos para describir el impacto de dicha covariable en términos relativos y viceversa; estrategia que no se podía usar en el modelo de regresión clásico sin tener que pensar en modelos lineales generalizados.  $\nabla$

El Ejemplo 1.4.1 es muy importante ya que muestra uno de los casos más comunes en los que se intenta usar a la transformación logarítmica para poder trabajar con distribuciones asimétricas. En el caso de regresión clásica por mínimos cuadrados, la distribución original se modifica al aplicar la transformación inversa de los estimados en escala logarítmica; hecho que no ocurre si se utiliza regresión cuantílica.

El resultado en la Proposición 1.4.2 tiene algunas otras consecuencias importantes que son muy populares.

Es común que cuando se considera regresión clásica por mínimos cuadrados, se considere un modelo de la forma

$$h(y_i) = x_i^\top \beta + \epsilon_i,$$

donde  $h(y)$  es una transformación de la variable respuesta  $y$  que satisface:

- (i) La aplicación  $x \mapsto \mathbb{E}[h(Y_i)|X = x]$  es lineal.
- (ii)  $\text{Var}(h(Y_i)|X = x)$  no depende de  $x$  (i.e. hay homoscedasticidad).
- (iii)  $\epsilon_i = h(y_i, \lambda)|x_i - x_i^\top \beta$  es Gaussiana.

Sin embargo, no es fácil encontrar una función  $h$  que satisfaga estas tres características, incluso la transformación de Box-Cox  $h_\lambda(y) := \frac{y^\lambda - 1}{\lambda}$  no las satisface perfectamente.

Incluso si se logra encontrar una función  $h$  que satisfaga estas tres propiedades, la predicción e interpretación del modelo transformado puede no ser sencillo, ya que  $h^{-1}(x^\top \beta) \neq \mathbb{E}(Y|X = x)$ .

En el contexto de regresión cuantílica es mucho más directa la estimación y predicción ya que una vez que se estimó un modelo lineal  $x^\top \hat{\beta}$  para el  $\tau$ -cuantil condicional de  $h(Y)$  dado  $X = x$ , está perfectamente justificado interpretar  $h^{-1}(x^\top \hat{\beta})$  como el estimado del  $\tau$ -cuantil condicional de  $Y$  dado  $X = x$ .

Además hay un hecho mucho más importante, como se tiene interés en entender la estructura local de la distribución condicional más que sólo obtener una característica global

(como la media condicional), se pone más interés en el objetivo de la transformación (logrando linealidad de la función cuantil condicional).

Estas propiedades de equivarianza hacen que los estimadores de los parámetros también satisfagan ciertas propiedades de equivarianza. El siguiente resultado resume dichas propiedades

**Teorema 1.4.1.**

Sean  $\hat{\beta}(\tau; y, X)$  el estimador de la  $\tau$ -regresión cuantílica basado en las observaciones  $(y, X)$ .  $A \in M_{p \times p}(\mathbb{R})$  una matriz no-singular,  $\gamma \in \mathbb{R}^p$  y  $c \in \mathbb{R}_+$ . Entonces, para cualquier  $\tau \in [0, 1]$ ,

- (i)  $\hat{\beta}(\tau; cy, X) = c \cdot \hat{\beta}(\tau; y, X)$ , i.e. si se cambia la escala positiva de la variable respuesta, el estimador se cambia en la misma escala.
- (ii)  $\hat{\beta}(\tau; -cy, X) = -c \cdot \hat{\beta}(1 - \tau; y, X)$ .
- (iii)  $\hat{\beta}(\tau; y + X\gamma, X) = \hat{\beta}(\tau; y, X) + \gamma$ . Esta propiedad se conoce como equivarianza de regresión o equivarianza ante traslados.
- (iv)  $\hat{\beta}(\tau; y, XA) = A^{-1}\hat{\beta}(\tau; y, X)$ . Esta propiedad se conoce como equivarianza ante reparametrización de la matriz de diseño.

**Ejemplo 1.4.2.**

Supóngase que se tiene un modelo para la temperatura de un líquido  $y$ , pero se quiere cambiar la escala de grados Fahrenheit a centígrados. Si la primera columna de  $X$  incluye el término de intercepto, i.e. existe  $\gamma \in \mathbb{R}^p$  tal que  $X\gamma = 1_n$ , entonces el efecto del cambio de la escala de la temperatura simplemente hace que el nuevo estimado sea

De la fórmula de conversión de grados Fahrenheit a Centígrados se tiene:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

entonces,

$$\frac{5}{9} [\hat{\beta}(\tau; y, X) - 32\gamma]$$

▽

### 1.4.5. Interpretación de los parámetros

En el modelo de regresión clásico en el que  $\mathbb{E}(Y|X = x) = x^\top \beta$ , se interpreta a los coeficientes en  $\beta$  en términos de las derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{E}(Y|X = x) = \beta_j.$$

Entonces si se plantea un modelo lineal de la forma

$$\mathbb{E}(h(Y)|X = x) = x^\top \beta,$$

entonces se quisiera que la interpretación en el modelo no transformado fuera

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mathbb{E}(Y|X = x) = \frac{\partial}{\partial x_j} h^{-1}(x^\top \beta),$$

sin embargo esto no es cierto.

En regresión cuantílica, para  $h(\cdot)$  estrictamente creciente se satisface

$$Q^{(\tau)}(h(Y)|X = x) = h\left(Q^{(\tau)}(Y|X = x)\right).$$

Entonces si se plantea un modelo lineal de la forma

$$Q^{(\tau)}(h(Y)|X = x) = x^\top \beta^{(\tau)},$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_j} Q^{(\tau)}(Y|X = x) = \frac{\partial}{\partial x_j} h^{-1}(x^\top \beta)$$

lo que hace que sea sencilla la interpretación del modelo no transformado.

Ya que se tiene interés en cómo las variables predictoras cambian la forma de la distribución de respuesta, se utiliza regresión cuantílica para obtener estimados de diferentes cuantiles.

El análisis de los efectos en la forma de la distribución es más intrincado que en análisis de los efectos en la localización de la distribución y en general hay un trade-off entre ambos, i.e. se mejora uno pero se empeora el otro.

Por un lado, en el análisis de la forma de la distribución se puede llevar a cabo utilizando varios estimados por regresión de varios cuantiles tiene potencial de revelar más información que sólo un análisis de la localización. Por otro lado, describir esta información adicional puede ser tedioso y requiere un esfuerzo adicional. Específicamente, la revisión de

los coeficientes de regresión cuantílica para varios cuantiles (por ejemplo los cuantiles en los niveles 0.05, 0.1, ..., 0.9, 0.95) puede ser difícil de manejar.

Los coeficientes de regresión cuantílica para una covariable particular  $X_j$ , muestra el efecto de una unidad de cambio en dicha covariable sobre los cuantiles de la variable respuesta. Por lo tanto, los coeficientes  $\beta_j^{(\tau)}$ ,  $\tau \in \{0.05, 0.1, \dots, 0.9, 0.95\}$  se pueden utilizar para analizar cómo un cambio de una unidad en la covariable  $X_j$  afecta la forma de la variable respuesta. Una forma de analizar esto de manera más general es graficar la aplicación  $\tau \mapsto \beta_j^{(\tau)}$  i.e. varios niveles  $\tau$  en el eje horizontal y el correspondiente  $\beta_j^{(\tau)}$  en el eje vertical. Por supuesto, esto requerirá un esfuerzo de computo importante.

Para un  $\tau$  fijo, se puede medir el rango intercuantil para un grupo de referencia  $IQR_R = U_R - L_R$  y para un grupo de comparación  $IQR_C = U_C - L_C$ .  $IQR_C - IQR_R$  es una medida del scale-shift.

El ajuste de regresión cuantílica proporciona un método alternativo para estimar efectos del desplazamiento de escala (scale-shift). Si  $\hat{\beta}_j^{(\tau)}$  es el coeficiente ajustado, correspondiente a la covariable  $j$  en un modelo de regresión para el  $\tau$ -cuantil. Dicho coeficiente indica el incremento ó decremento en dicho cuantil por una unidad de incremento en la covariable  $j$ . Por lo tanto, cuando se incrementa  $X_j$  en una unidad, el cambio en el rango intercuantil al nivel  $\tau$  (que se denota como  $SCS^{(\tau)}$ ) es el efecto del scale-shift. En este caso, para  $\tau < \frac{1}{2}$  es

$$\begin{aligned} SCS^{(\tau)} &= IQR_C^{(\tau)} - IQR_R^{(\tau)} = (Q_C^{(1-\tau)} - Q_C^{(\tau)}) - (Q_R^{(1-\tau)} - Q_R^{(\tau)}) \\ &= (Q_C^{(1-\tau)} - Q_R^{(1-\tau)}) - (Q_C^{(\tau)} - Q_R^{(\tau)}) \\ &= \hat{\beta}_j^{(1-\tau)} - \hat{\beta}_j^{(\tau)} \end{aligned}$$

Si se ajusta un modelo de regresión cuantílica lineal en términos de interacción, el efecto de la escala no depende del grupo de referencia.

- (i) Si  $SCS^{(\tau)}$  es cero, aparentemente no hay evidencia de cambio de escala
- (ii) Si  $SCS^{(\tau)} < 0$ , indica que un incremento en la covariable resulta en un decrecimiento en la escala.
- (iii) Si  $SCS^{(\tau)} > 0$ , indica que un incremento en la covariable resulta en un crecimiento en la escala.

## 1.5. Estimación en regresión cuantílica

En estimación por mínimos cuadrados en regresión clásica, se obtienen estimados de los parámetros  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p$  considerando aquellos valores de los parámetros que minimizan la suma de los cuadrados de los residuales

---

$$\min \sum_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_p x_{ip})^2 \quad (1.3)$$

Si las suposiciones del modelo de regresión lineal son correctas entonces la función respuesta ajustada  $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \dots + \hat{\beta}_p x_p$  se aproxima a la media condicional poblacional  $\mathbb{E}(Y|X = (x_1, \dots, x_p))$  conforme el tamaño de muestra tiende a infinito.

En la ecuación (1.3), la expresión minimizada es la suma de las distancias verticales al cuadrado, entre los puntos  $(x_{i1}, \dots, x_{ip}, y_i)$  y el hiperplano ajustado  $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \dots + \hat{\beta}_p x_p$ .

Una característica importante del estimador de regresión cuantílica (a diferencia del estimador de regresión lineal) es que en regresión cuantílica la distancia de los puntos al hiperplano se mide usando una suma ponderada de las distancias verticales sin elevar al cuadrado, donde el peso es  $1 - \tau$  para los puntos debajo del hiperplano ajustado y  $\tau$  para los puntos arriba del hiperplano. Cada elección para esta proporción  $\tau$  (por ejemplo,  $\tau = 0.1, 0.25, 0.5$ ) llevará a diferentes ajustes de funciones cuantil condicional.

La tarea es encontrar un estimador con la propiedad deseada para cada  $\tau$  posible ó cada  $\tau$  en consideración.

Ya se dijo en la sección (1.3.2) que un cuantil  $Q^{(\tau)}$  se puede ver como el punto que minimiza una distancia promedio ponderada, en el que las ponderaciones dependen de si el punto está arriba ó abajo del valor  $Q^{(\tau)}$ .

Primero se considerará la estimación para el modelo de regresión mediana.

Con anterioridad se mencionó que la mediana,  $med(Y)$ , de  $Y$  se puede ver como el valor que minimiza el valor de  $\mathbb{E}(|Y - m|)$ . Por analogía, en el caso de regresión mediana, se seleccionará minimizar la suma de los residuales absolutos (la distancia absoluta de un valor observado a su valor ajustado). El estimador resuelve para los  $\beta$ 's que minimiza la ecuación

$$\sum_i |y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_p x_{ip}| \quad (1.4)$$

Bajo suposiciones adecuadas, conforme el tamaño de muestra crece (o tiende a infinito) se obtiene la mediana condicional de  $Y$  dado  $X = (x_1, \dots, x_p)$  a nivel poblacional.

Cuando se minimiza la expresión (1.4), la solución resultante se conoce como hiperplano de regresión mediano. Dicha plano debe tener aproximadamente la mitad de las observaciones abajo y la otra mitad arriba, i.e. aproximadamente la mitad de los residuales deben ser

positivos y la otra mitad negativos. Por supuesto, hay muchos planos con esta propiedad de separación, pero aquel que minimice su distancia absoluta a los puntos es la solución buscada.

### 1.5.1. Bondad de ajuste en regresión cuantílica

En modelos de regresión clásicos, una de las medidas más populares para cuantificar la bondad de ajuste es el coeficiente de determinación  $R^2$

$$R^2 = \frac{\sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$

Se puede usar una medida análoga a la  $R^2$  en los modelos de regresión cuantílica. Como los ajustes en el modelo de regresión clásico se basa en un criterio de mínimos cuadrados y el modelo de regresión cuantílica se basa en la minimización de las distancias ponderadas  $\sum_i d_\tau(y_i, \hat{y}_i)$ , con diferentes ponderaciones dependiendo si  $y_i > \hat{y}_i$  ó  $y_i < \hat{y}_i$ , se necesita medir la bondad de ajuste con una forma que sea consistente con este criterio.

**Definición 1.5.1.** (*Distancias entre estimados*)

Defínase  $V^1(\tau)$  como la suma de las distancias ponderadas para para un modelo de regresión cuantílica con  $p$  covariables y  $V^0(\tau)$  la suma de las distancias ponderadas para un modelo que sólo incluye término de intercepto, es decir

$$V^1(\tau) := \sum_{i=1}^n d_\tau(y_i, \hat{y}_i), \quad V^0(\tau) := \sum_{i=1}^n d_\tau(y_i, \hat{Q}(\tau))$$

Nótese que estas distancias se pueden escribir como

$$\begin{aligned} V^1(\tau) &= \sum_{i=1}^n d_\tau(y_i, \hat{y}_i) \\ &= \tau \sum_{y_i \geq \beta_0^{(\tau)} + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau)} x_{ij}} |y_i - \beta_0^{(\tau)} - \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau)} x_{ij}| \\ &\quad + (1 - \tau) \sum_{y_i < \beta_0^{(\tau)} + \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau)} x_{ij}} |y_i - \beta_0^{(\tau)} - \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau)} x_{ij}| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
V^0(\tau) &= \sum_{i=1}^n d_\tau(y_i, \hat{Q}^{(\tau)}) \\
&= \sum_{y_i \geq \hat{Q}^{(\tau)}} \tau |y_i - \hat{Q}^{(\tau)}| + \sum_{y_i < \hat{Q}^{(\tau)}} (1 - \tau) |y_i - \hat{Q}^{(\tau)}|
\end{aligned}$$

En este caso se define el coeficiente de bondad de ajuste ó coeficiente de determinación como

**Definición 1.5.2.** (*Coficiente de determinación en regresión cuantílica*)

Se define el coeficiente de determinación en regresión cuantílica, que compara un modelo con  $p$  covariables con uno sólo con intercepto como

$$R(\tau) := 1 - \frac{V^1(\tau)}{V^0(\tau)} \quad (1.5)$$

Como la suma de las distancias se minimiza en el modelo con  $p$  covariables, entonces  $V^1(\tau) \leq V^0(\tau)$  y por lo tanto  $1 - \frac{V^1(\tau)}{V^0(\tau)} \geq 0$ . Como  $V^1(\tau), V^0(\tau) \geq 0$ , entonces  $1 - \frac{V^1(\tau)}{V^0(\tau)} \geq 1$ . Por lo tanto,  $R(\tau) \in [0, 1]$ , como en el caso de  $R^2$ .

Además, como se quiere que  $V^1(\tau) \approx V^0(\tau)$  (i.e. se ajuste muy bien al cuantil), entonces mientras más cercano a 1 sea  $R(\tau)$ , mejor será el ajuste del modelo; como en el caso de  $R^2$ , el coeficiente de determinación en regresión clásica.

$R(p)$  es una medida local de la bondad de ajuste de la regresión cuantílica en  $\tau$ . La evaluación global de un modelo de regresión cuantílica requiere de una revisión de  $R(\tau)$  variando  $\tau \in (0, 1)$ .

## 1.6. Inferencia en regresión cuantílica

Ahora se estudiará errores estándar e intervalos de confianza para los coeficientes estimados en un modelo de regresión cuantílica.

El objetivo es estudiar los coeficientes  $\beta^{(\tau)}$  en un modelo de regresión cuantílica, es decir

$$Q^{(\tau)}(y_i|x) = \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau)} x_{ij}$$

El modelo de regresión cuantílica se puede reformular de manera equivalente haciendo algunas hipótesis con respecto a la distribución de los términos de error y escribirse de la forma

$$y_i = \sum_{j=1}^p \beta_j^{(\tau)} x_{ij} + \epsilon_i^{(\tau)},$$

donde  $\epsilon_1^{(\tau)}, \dots, \epsilon_n^{(\tau)}$  tienen la misma distribución y tienen  $\tau$ -cuantil de 0.

Una de las formas básicas de hacer inferencia para el coeficiente  $\beta_j^{(\tau)}$  es mediante la construcción de un intervalo de confianza para ó una prueba de hipótesis basada en alguna medida del error estándar  $SE(\hat{\beta}_j^{(\tau)})$  de  $\hat{\beta}_j^{(\tau)}$  como en el caso del modelo de regresión por mínimos cuadrados clásicos.

Este error estándar tendrá la propiedad de que la cantidad

$$\frac{\hat{\beta}_j^{(\tau)} - \beta_j^{(\tau)}}{SE(\hat{\beta}_j^{(\tau)})}$$

tenga una distribución normal estándar.

Bajo la suposición de que los errores son independientes e idénticamente distribuidos, los errores estándar en el modelo de regresión cuantílica tiene una forma sencilla; en este caso la matriz de covarianzas asintóticas de  $\hat{\beta}^{(\tau)}$  toma la forma

$$\Sigma_{\hat{\beta}^{(\tau)}} = \frac{\tau(1-\tau)}{n} \frac{1}{f_{\epsilon^{(\tau)}}^2(0)} (X^\top X)^{-1} \quad (1.6)$$

El término  $f_{\epsilon^{(\tau)}}(0)$  que aparece en la ecuación (1.6) es la función de densidad de  $\epsilon^{(\tau)}$  evaluada en el  $\tau$ -cuantil de la distribución del error.

Como en el caso del modelo de regresión por mínimos cuadrados clásico, la matriz de covarianza es un múltiplo escalar de la matriz  $(X^\top X)^{-1}$ . Sin embargo, en regresión cuantílica la constante multiplicativa  $\frac{\tau(1-\tau)}{n} \frac{1}{f_{\epsilon^{(\tau)}}^2(0)}$ , es la varianza asintótica de un cuantil muestral basado en la muestra  $\epsilon_1^{(\tau)}, \dots, \epsilon_n^{(\tau)}$ .



El término de densidad que aparece en esta expresión es desconocido y se tiene que estimar. La cantidad

$$\frac{1}{f_{\epsilon^{(\tau)}}(0)} = \frac{\partial}{\partial \tau} Q^{(\tau)}(\epsilon^{(\tau)})$$

se puede estimar usando una aproximación de la derivada de la forma

$$\frac{1}{2h} \left[ \widehat{Q}^{(\tau)}(\tau + h) - \widehat{Q}^{(\tau)}(\tau - h) \right],$$

donde los cuantiles muestrales  $\widehat{Q}(\tau \pm h)$  se basan en los residuales

$$\widehat{\epsilon}_i^{(\tau)} = y_i - \sum_{j=1}^p \widehat{\beta}_j^{(\tau)} x_{ij}$$

Sin embargo, en el caso en el que los errores no tienen la misma distribución, encontrar los errores estándar de los estimadores y sus correspondientes covarianzas se complica un poco. En este caso, los  $\epsilon_i^{(\tau)}$ s no tienen la misma distribución pero sí siguen teniendo  $\tau$ -cuantil de 0. Para trabajar sin la hipótesis de distribución idéntica se usará una versión ponderada de la matriz  $X^\top X$ .

Todos los métodos analíticos para obtener errores estándar aproximados en regresión cuantílica se obtienen de un resultado general que se describe en Koenker (2005) en el que se da una aproximación normal multivariada de la distribución conjunta de los coeficientes estimados  $\widehat{\beta}_j^{(\tau)}$ . Esta distribución tiene un vector de medias en la que cada entrada es igual al verdadero valor de coeficiente; y la matriz de covarianzas es de la forma

$$\Sigma_{\widehat{\beta}^{(\tau)}} = \frac{\tau(1-\tau)}{n} D_1^{-1} D_0 D_1^{-1},$$

donde

$$D_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\top x_i, \quad D_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i x_i^\top x_i,$$

donde  $x_i$  es el  $i$ -ésimo renglón de  $X$  y  $w_i = f_{\epsilon_i^{(\tau)}}(0)$ . Sin embargo, como los  $\epsilon_i^{(\tau)}$  no tienen distribución idéntica, se tienen diferentes ponderaciones. De nuevo, dicha función de densidad es desconocida y se tiene que estimar.

Un estimado del error estándar para un coeficiente estimado  $\widehat{\beta}_j^{(\tau)}$ , se obtiene considerando la raíz cuadrada del elemento de la diagonal correspondiente de la matriz de covarianzas estimada  $\widehat{\Sigma}$ .

## Capítulo 2

# Modelos auto-regresivos y de heterocedasticidad condicional para regresión cuantílica

### 2.1. Introducción

En este capítulo se hablará de algunos modelos de series de tiempo que se basan en regresiones cuantílicas. Se hará notar que los modelos clásicos de regresión se pueden considerar como estimaciones a cuantiles específicos tales como la media o la mediana condicional.

De esta manera se generaliza el plantamiento de regresión cuantílica a otros modelos tradicionales de series de tiempo.

También en este capítulo se clasifican los modelos de acuerdo a su tipo de errores.

Se definirá el proceso QAR lineal de orden  $p$  y su predicción por intervalos.

### 2.2. Modelos basados en cuantiles

Si se considera un modelo de serie de tiempo que capture la dinámica entre una variable aleatoria  $Y_t$  e información pasada contenida en  $X_t$

- La regresión ordinaria por mínimos cuadrados (que se basa en la función de pérdida cuadrática) proporciona un estimado para la media condicional  $\mathbb{E}(Y_t|X_t)$ .
- La regresión por mínima desviación absoluta (que se basa en la función de pérdida de desviación absoluta) proporciona un estimado para la mediana condicional de  $Y$  dado  $X$ .
- La regresión cuantílica (que se basa en la función de pérdida  $\rho_\tau(u) = u[\tau - I(u < 0)]$ ) proporciona un estimado para el cuantil condicional de  $Y$  dado  $X$  al nivel  $\tau$ .

Ahora se estudiarán algunos modelos de series de tiempo que se basan en regresiones cuantílicas. Se estudiarán modelos de tipo auto-regresivos (AR) y de medias móviles (ARMA).

### 2.2.1. Modelo auto-regresivo clásico (AR)

Considérese el modelo AR clásico de orden  $p$

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 Y_{t-1} + \dots + \theta_p Y_{t-p} + u_t, \quad (2.1)$$

donde  $\{u_t\}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y función de distribución  $F(\cdot)$ .

En este planteamiento es claro que la distribución condicional de  $Y_t$  dada información pasada es un *location-shift* de  $F(\cdot)$ , con media condicional  $\theta_0 + \theta_1 Y_{t-1} + \dots + \theta_p Y_{t-p}$ . Por lo tanto, la función cuantil condicional de  $Y_t$  es

$$Q^{(\tau)}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \theta_0 + \theta_1 Y_{t-1} + \dots + \theta_p Y_{t-p} + F^{-1}(\tau), \quad (2.2)$$

donde  $\mathcal{F}_{t-1}$  denota a la información hasta el tiempo  $t - 1$ .

Defínase  $\theta_0(\tau) := \theta_0 + F^{-1}(\tau)$ ,  $\theta(\tau) := (\theta_0(\tau), \theta_1, \dots, \theta_p)^\top$  y  $X_t := (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})^\top$ . Con esta notación, se puede reescribir la expresión (2.2) como

$$Q^{(\tau)}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \theta(\tau)^\top X_t. \quad (2.3)$$

Dadas observaciones de una serie de tiempo  $\{Y_t\}_{t=1}^n$ , el vector  $\theta(\tau)$  se puede estimar a través de regresión cuantílica, i.e.

$$\hat{\theta}(\tau) = \arg \min_{\theta} \sum_t \rho_\tau(Y_t - \theta^\top X_t), \quad (2.4)$$

donde para  $\tau \in (0, 1)$ ,

$$\rho_\tau(u) := u [\tau - I(u < 0)] = \begin{cases} -(1 - \tau)u & \text{si } u < 0 \\ \tau \cdot u & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$$

A la solución  $\hat{\theta}(\tau)$  se le conoce como cuantiles de auto-regresión.

Dado  $\hat{\theta}(\tau)$ , la función cuantil condicional de  $Y_t$  dado  $X_t$  al nivel  $\tau$  se puede estimar como

$$\hat{Q}^{(\tau)}(Y_t | X_t) = X_t^\top \hat{\theta}(\tau)$$

y también se puede estimar la densidad condicional de  $Y_t$  en  $y = Q^{(\tau)}(Y_t|X_t)$  como

$$\hat{f}_{Y_t}(y|X_t) = \frac{2h}{\widehat{Q}^{(\tau+h)}(Y_t|X_t) - \widehat{Q}^{(\tau-h)}(Y_t|X_t)},$$

para alguna elección adecuada de  $h \equiv h(n) \rightarrow 0$ .

Si  $\{Y_t\}_{t=1}^n$  es un proceso  $AR(p)$  definido por (2.1) y  $\{u_t\}$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 0, varianza finita  $\sigma^2$ , y función de distribución continua  $F$  y densidad  $f$  tal que  $f(u) > 0$  en el conjunto  $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : 0 < F(u) < 1\}$ , entonces los cuantiles de autoregresión  $\widehat{\theta}(\tau)$ , definidos en (2.4) satisfacen la siguiente relación asintótica

$$f(F^{-1}(\tau))\Omega_0^{1/2}\sqrt{n}(\widehat{\theta}(\tau) - \theta(\tau)) \rightarrow B_{p+1}(\tau), \quad (2.5)$$

donde

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\mu}_y^\top \\ \boldsymbol{\mu}_y & \Omega_y \end{pmatrix}, \quad \Omega_y = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y_t^2) & \dots & \mathbb{E}(Y_t Y_{t-p+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}(Y_t Y_{t-p+1}) & \dots & \mathbb{E}(Y_t^2) \end{pmatrix},$$

con  $\boldsymbol{\mu}_y = \mathbb{E}(Y_t)1_{p \times 1} = (\mathbb{E}(Y_t), \dots, \mathbb{E}(Y_t))^\top$  y  $B_{p+1}(\tau)$  representa un puente Browniano estándar  $(p+1)$ -dimensional.

Por definición, para  $\tau$  fijo,  $B_{p+1}(\tau)$  tiene una distribución normal multivariada,  $N(0, \tau(1-\tau)I_{p+1})$ ; por lo tanto,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}(\tau) - \theta(\tau)) \rightarrow N\left(0, \frac{\tau(1-\tau)}{f^2(F^{-1}(\tau))}\Omega_0^{-1}\right)$$

### 2.2.2. Regresiones cuantílicas para otros modelos de series de tiempo con errores i.i.d.

Se puede generalizar de manera sencilla el planteamiento de regresión cuantílica a otros modelos tradicionales de series de tiempo.

Considérese el modelo de regresión para series de tiempo

$$Y_t = \theta_0 + \sum_{j=1}^k \theta_j X_{jt} + u_t = \boldsymbol{\theta}^\top X_t + u_t,$$

donde  $X_t = (1, X_{1t}, \dots, X_{kt})^\top$  es un vector de regresores que puede contener valores pasados de  $Y_t$  y valores pasados de otras covariables; y  $\{u_t\}$  es una sucesión de variables

aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y función de distribución  $F$ . Entonces,

$$Q^{(\tau)}(Y_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \theta_0 + F^{-1}(\tau) + \theta_1 X_{1t} + \dots + \theta_k X_{kt} = \theta(\tau)^\top X_t,$$

y el modelo se puede estimar a partir de (2.4).

El comportamiento asintótico de la regresión cuantílica para este modelo de series de tiempo es la misma que la dada en (2.5) pero con una  $\Omega_0$  diferente; en vez de la especificada en (2.5) se usa

$$\Omega_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t X_t^\top.$$

### 2.2.3. Modelo ARMA

Considérese el modelo  $ARMA(p, q)$ ,

$$y_t = \mu_0 + \alpha_{1,0} y_{t-1} + \dots + \alpha_{p,0} y_{t-p} + u_t + \beta_{1,0} u_{t-1} + \dots + \beta_{q,0} u_{t-q},$$

donde  $\mu_0, \alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{p,0}, \beta_{1,0}, \dots, \beta_{q,0}$  son los verdaderos parámetros del modelo ARMA y  $\{u_t\}$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 0, varianza finita  $\sigma^2 < \infty$  y función de distribución  $F(\cdot)$ . Entonces, la función  $\tau$ -cuantil de  $y_t$  es

$$\begin{aligned} Q^{(\tau)}(y_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= \mu_0 + Q^{(\tau)}(u) + \alpha_{1,0} y_{t-1} + \dots + \alpha_{p,0} y_{t-p} + \beta_{1,0} u_{t-1} + \dots + \beta_{q,0} u_{t-q} \\ &= (\mu_0 + Q^{(\tau)}(u), \alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{p,0}, \beta_{1,0}, \dots, \beta_{q,0}) \begin{pmatrix} 1 \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p} \\ u_{t-1} \\ \vdots \\ u_{t-q} \end{pmatrix} \\ &= \theta_0(\tau)^\top X_t(\theta_0) \end{aligned}$$

donde

- $\theta_0(\tau)^\top := (\lambda_0(\tau), \alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{p,0}, \beta_{1,0}, \dots, \beta_{q,0})$
- $\lambda_0(\tau) := \mu_0 + Q^{(\tau)}(u)$

▪  $\theta_0^\top := (\mu_0, \alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{p,0}, \beta_{1,0}, \dots, \beta_{q,0})$

Sin embargo  $u_{t-1}, \dots, u_{t-q}$  no son observables y por lo tanto dependen de  $\theta$ , en consecuencia,  $X_t$  también depende de  $\theta$ . De aquí que se escriba al vector de regresores  $X_t$  como  $X_t(\theta_0)$ .

Si  $\gamma_0(\tau) := (\lambda_0(\tau), \alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{p,0}, \beta_{1,0}, \dots, \beta_{q,0})^\top$  y  $\gamma = (\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)^\top$  es un vector de parámetros generales, entonces

$$Q^{(\tau)}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \theta_0(\tau)^\top X_t(\theta_0) = H(X_t; \gamma_0(\tau))$$

y los estimadores por regresión cuantílica son

$$\hat{\gamma}(\tau) = \arg \min_{\gamma} \sum_{t=1}^n \rho_{\tau}(y_t - H(x_t; \gamma))$$

**Proposición 2.2.1.**

El estimador asintótico satisface

$$\sqrt{n}[\hat{\gamma}(\tau) - \gamma(\tau)] \overset{n \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} N(0, \tau(1-\tau)\Sigma_f^{-1}\Sigma_D\Sigma_f^{-1})$$

equivalentemente,

$$f^2(F^{-1}(\tau))\sqrt{n}[\hat{\gamma}(\tau) - \gamma(\tau)] \overset{n \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} N(0, \tau(1-\tau)\Sigma_D^{-1}),$$

donde

$$\Sigma_D = Cov(D_t(\gamma(\tau))) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n D_t(\gamma(\tau))D_t(\gamma(\tau))^\top$$

$$\Sigma_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f(F^{-1}(\tau))D_t(\gamma(\tau))D_t(\gamma(\tau))^\top = f(F^{-1}(\tau))\Sigma_D$$

$$D_t(\gamma)^\top = \left( \dots, -\frac{\partial}{\partial \gamma_i} u_t(\gamma), \dots \right)$$

$$\begin{aligned} u_t(\gamma) &= y_t - H(X_t; \gamma) \\ &= y_t - H(X_t; \gamma_0(\tau)) + H(X_t; \gamma_0(\tau)) - H(X_t; \gamma) \\ &= u_t - Q^{(\tau)}(u) + (\lambda_0(\tau) - \lambda) + (\alpha_{1,0} - \alpha_1)y_{t-1} + \dots + (\alpha_{p,0} - \alpha_p)y_{t-p} \\ &\quad + (\beta_{1,0} - \beta_1)u_{t-1} + \dots + (\beta_{q,0} - \beta_q)u_{t-q} \end{aligned}$$

### 2.2.4. Modelo con errores correlacionados

También se puede aplicar regresión cuantílica cuando se consideran modelos con errores serialmente correlacionados.

Considérese el modelo

$$Y_t = \alpha + \beta^\top X_t + u_t = \theta^\top Z_t + u_t,$$

donde  $X_t$  es una variable  $k$ -dimensional y  $u_t$  es una variable unidimensional, que son dependientes débilmente pero  $\{X_t\}$  y  $\{u_t\}$  son independientes entre sí con  $\mathbb{E}(u_t) = 0$ .

Con esta especificación, el  $\tau$ -cuantil de  $Y_t$  dado  $X_t$  es

$$Q^{(\tau)}(Y_t|X_t) = \alpha + \beta^\top X_t + F_u^{-1}(\tau) = \theta(\tau)^\top Z_t,$$

donde  $\theta(\tau) = (\alpha + F_u^{-1}(\tau), \beta^\top)^\top$ .

El vector de parámetros  $\theta(\tau)$  se puede estimar a partir del resolver el problema de optimización

$$\theta(\tau) = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^p} \sum_{t=1}^n \rho_\tau(Y_t - Z_t^\top \theta) \quad (2.6)$$

Sea  $u_{t\tau} = Y_t - \theta(\tau)^\top Z_t$  y  $\psi(\cdot)$  una función tal que  $\mathbb{E}(\psi_\tau(u_{t\tau})|X_t) = 0$ . Bajo suposiciones adecuadas sobre los momentos de  $X_t$  y dependencia débil de  $(X_t, u_t)$  se satisface que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t \psi_\tau(u_{t\tau}) = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \psi_\tau(u_{t\tau}), \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n X_t \psi_\tau(u_{t\tau}) \right) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} N(0, \Sigma(\tau)),$$

donde  $\Sigma(\tau)$  es la matriz de covarianzas límite de  $Z_t \psi_\tau(u_{t\tau})$ , i.e.

$$\Sigma(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t \psi_\tau(u_{t\tau}) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t \psi_\tau(u_{t\tau}) \right)^\top = \begin{pmatrix} \omega_\psi^2(\tau) & 0 \\ 0 & \Omega(\tau) \end{pmatrix}$$

Bajo suposiciones de regularidad, es estimador (2.6) tiene una representación asintótica

$$\sqrt{n}[\hat{\theta}(\tau) - \theta(\tau)] = \frac{1}{f(F^{-1}(\tau))} \Sigma_z^{-1} S_{z\psi} + o_p(1),$$

donde

$$\Sigma_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^n Z_t Z_t^\top, \quad S_{z\psi} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t \psi_\tau(u_{t\tau})$$

Entonces, para cualquier  $\tau \in (0, 1)$

$$\sqrt{n}[\widehat{\theta}(\tau) - \theta(\tau)] \overset{n \rightarrow \infty}{\rightsquigarrow} N\left(0, \frac{1}{f^2(F^{-1}(\tau))} \Sigma_z^{-1} \Sigma(\tau) \Sigma_z^{-1}\right).$$

Estos resultados se pueden generalizar al caso de datos heteroscedásticos en el que otros elementos en  $\theta(\tau)$  también sean dependientes de  $\tau$ .

Hacer inferencia basándose en  $\widehat{\theta}(\tau)$  requiere la estimación de las matrices  $\Sigma_z$  y  $\Sigma(\tau)$ . La matriz  $\Sigma_z$  se puede estimar a partir de su análogo muestral

$$\widehat{\Sigma}_z = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t Z_t^\top$$

En Andrews (1991) se propone que  $\Sigma(\tau)$  se puede estimar como

$$\widehat{\Sigma}(\tau) = \sum_{h=-M}^M k\left(\frac{h}{M}\right) \left[ \frac{1}{n} \sum_{1 \leq t, t+h \leq n} Z_t \psi_\tau(\widehat{u}_{t\tau}) Z_{t+h}^\top \psi_\tau(\widehat{u}_{(t+h)\tau}) \right],$$

donde  $k(\cdot)$  es la ventana de rezago definida en  $[-1, 1]$  con  $k(0) = 1$  y  $M$  es un parámetro de anchura tal que conforme  $n \rightarrow \infty$  entonces  $M \rightarrow \infty$  y  $\frac{M}{n} \rightarrow 0$ .

### 2.2.5. Modelos con errores con colas pesadas

El análisis de regresión cuantílica también se puede generalizar a modelos para series de tiempo en el que la varianzas no son finitas.

Esta generalización es importante ya que muchas series de tiempo financieras tienen colas pesadas y las medidas de riesgo que se construyen a partir de modelo de regresión cuantílica son muy populares.

Considérese el modelo auto-regresivo de orden  $p$

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 Y_{t-1} + \dots + \theta_p Y_{t-p} + u_t,$$

donde  $\{u_t\}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero pero con varianza infinita. En particular, supóngase que la distribución de  $Y_t$  está en el dominio de atracción de una distribución estable con índice  $\alpha < 2$  de tal forma que  $\mathbb{P}(|u_t| > u) = u^{-\alpha} L(u)$ , donde  $L(\cdot)$  es una función de variación lenta en  $\infty$ .

Como antes, la función cuantil condicional de  $Y_t$  es

$$Q^{(\tau)}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \theta_0 + \theta_1 Y_{t-1} + \dots + \theta_p Y_{t-p} + F^{-1}(\tau),$$



donde  $\theta_0(\tau) := \theta_0 + F^{-1}(\tau)$ ,  $\theta(\tau) := (\theta_0(\tau), \theta_1, \dots, \theta_p)^\top$  y  $X_t := (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})^\top$ .

El  $\tau$ -cuantil condicional de  $Y_t$  se puede estimar a partir de regresión cuantílica de  $Y_t$  sobre  $(1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})^\top$

$$\min_{\theta} \sum_{t=1}^T \rho_{\tau}(Y_t - X_t^\top \theta). \quad (2.7)$$

En este caso, las tasas de convergencia del intercepto y los coeficientes dependientes son diferentes. Cuando hay un proceso de varianza infinita, la tasa de convergencia será diferente del caso en el que la varianza es finita y es intuitivamente claro que dicha tasa de convergencia dependerá del índice  $\alpha$

$$D_n = \text{diag}(T^{1/2}, T^a, \dots, T^a), \quad a = \frac{1}{\alpha}$$

$$u_{t\tau} = Y_t - \theta(\tau)^\top X_t$$

$$\eta = \eta(\tau) = D_n(\theta - \theta(\tau)), \quad \hat{\eta}(\tau) = D_n(\hat{\theta}(\tau) - \theta(\tau))$$

Entonces  $Y_t - \theta^\top X_t = u_{t\tau} - \eta^\top [D_n^{-1} X_t]$

$$Z_n(\eta) = Z_{0n}(\eta_0) + Z_{1n}(\eta_1, \dots, \eta_p) + o_p(1),$$

donde

$$Z_{0n}(\eta_0) = \sum_t \left[ \rho_{\tau} \left( u_{t\tau} - \frac{\eta_0}{\sqrt{n}} \right) - \rho_{\tau}(u_{t\tau}) \right] \rightarrow Z_0(\eta_0)$$

$$Z_{1T}(\eta_1, \dots, \eta_p) = \sum_t \left[ \rho_{\tau} \left( u_{t\tau} - T^{-a} \sum_{j=1}^p \eta_j Y_{t-j} \right) - \rho_{\tau}(u_{t\tau}) \right] \rightarrow Z_1(\eta_1, \dots, \eta_p)$$

A partir de una argumento similar al que se presenta en Davis et al. (1992), como

$$Z_0(\eta_0) = \eta_0 W + \frac{1}{2} f(F^{-1}(\tau)) \eta_0^2,$$

con  $W \sim N(0, \tau(1 - \tau))$  se tiene que

$$T^{1/2}(\hat{\theta}_0(\tau) - \theta_0(\tau)) \sim N\left(0, \frac{\tau(1 - \tau)}{f^2(F^{-1}(\tau))}\right)$$

y el estimador por regresión cuantílica  $\hat{\theta}_x$  tiene un comportamiento límite

$$T^{1/\alpha} \left( \widehat{\theta}_x - \theta_x \right) \rightarrow \arg \min Z(v)$$

donde  $Z(v) = Z(\eta_1, \dots, \eta_p)$  es el proceso límite de

$$\sum_t \left[ \rho_\tau \left( u_{t\tau} - T^{-a} \sum_{j=1}^p \eta_j Y_{t-j} \right) - \rho_\tau(u_{t\tau}) \right]$$

### 2.2.6. Modelos para series de tiempo con tendencia

Varias series de tiempo económicas tienen algún tipo de tendencia a lo largo de tiempo. Considérese el modelo de regresión con tendencia

$$y_t = \theta^\tau d_t + u_t, \quad (2.8)$$

donde  $y_t$  es la serie de tiempo observada,  $d_t$  es un vector regresor de dimensión  $q$  de forma determinista conocida; generalmente  $d_t = (1, t, \dots, t^q)^\top$  y  $u_t$  es una componente estocástica.

Se puede llevar a cabo regresión cuantílica en (2.8) como

$$\widehat{\theta}(\theta) = \arg \min_\theta \sum_{t=1}^T \rho_\tau(y_t - \theta^\top d_t).$$

Como  $d_t$  es una función  $q$ -dimensional determinista, se requiere una estandarización adecuada.

Se supondrá que existe una matriz  $G_n$  tal que uniformemente en  $r \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n^{-1} d_{[nr]} = d(r)$$

En el caso de una tendencia lineal  $G_n = \text{diag}[1, n]$  y  $d(r) = (1, r)^\top$ . Si  $x_t$  es un polinomio de grado  $p$  de tendencia, entonces  $G_n = \text{diag}[1, n, \dots, n^p]$  y  $d(r) = (1, r, \dots, r^p)^\top$ .

Sea  $\psi_\tau(u) = \tau - I(u < 0)$ . Ahora se analizará el comportamiento asintótico del estimador de regresión cuantílica  $\widehat{\theta}$ .

Si se supone que  $u_t$  es débilmente independiente y satisface ciertas condiciones de regularidad que garantizan un Teorema de Límite Central funcional.

En particular, para  $u_{t\tau} = u_t - F_u^{-1}(\tau)$ , el proceso de sumas parciales de  $\psi_\tau(u_{t\tau})$  satisface un principio de invarianza, i.e. para  $r \in [0, 1]$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \psi_\tau(u_{t\tau}) \rightarrow B_\psi(\tau, r)$$

La función aleatoria  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \psi_\tau(u_{t\tau})$  converge a un proceso Gaussiano de dos parámetros  $B_\psi(\tau, r)$  que es parcialmente un movimiento Browniano y parcialmente un puente Browniano, en el sentido de que para  $r$  fijo,  $B_\psi(\tau, r)$  es un puente Browniano re-escalado y para cada  $\tau$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{[nr]} \psi_\tau(u_{t\tau})$  converge débilmente a un movimiento Browniano con varianza  $\tau(1 - \tau)$ . Por lo tanto, para cada pareja  $(\tau, r)$ ,  $B_\psi(\tau, r) \sim N(0, \tau(1 - \tau)r)$ .

El estimador por regresión cuantílica de los coeficientes de tendencias tiene límite.

$$\sqrt{n}G_n[\hat{\theta}(\tau) - \theta(\tau)] \rightarrow \frac{1}{f(F^{-1}(\tau))} \left[ \int d(r)d(r)^\top \right]^{-1} \int d(r)dB_\psi(\tau, r)$$

Por supuesto, se puede llevar a cabo procedimientos de inferencia basándose en los residuales de dicha regresión cuantílica. Por ejemplo, se puede evaluar una hipótesis (nula) de “tendencia estacionaria” versus la hipótesis (alternativa) de “raíz unitaria” a partir de la fluctuación en los procesos de residuales.

### 2.3. Modelos con errores GARCH/ARCH

Cuando se trata de modelos para series financieras, una clase de modelos populares y exitosos son los modelos auto-regresivos de heteroscedasticidad condicional (ARCH) y heteroscedasticidad condicional generalizados (GARCH).

En Koenker & Zhao (1996) se estudió regresión cuantílica para modelos ARCH. En particular, se considera el proceso  $ARCH(p)$  lineal

$$u_t = \sigma_t \cdot \epsilon_t, \quad \sigma_t = \gamma_0 + \gamma_1|u_{t-1}| + \dots + \gamma_p|u_{t-p}|, \quad (2.9)$$

donde  $\gamma_0 \in \mathbb{R}_+$  y  $\gamma_1, \dots, \gamma_p \in [0, \infty)$  y  $\{\epsilon_t\}$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que toman valores en el intervalo (0,1) con funciones de distribución y densidad  $f(\cdot)$  y  $F(\cdot)$ , respectivamente.

Si se define

$$\gamma(\tau) := (\gamma_0 F^{-1}(\tau), \dots, \gamma_p F^{-1}(\tau))^\top, \quad Z_t := (1, |u_{t-1}|, \dots, |u_{t-p}|)^\top,$$

entonces el cuantil condicional de  $u_t$  al nivel  $\tau$  es

$$Q^{(\tau)}(u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \gamma_0(\tau) + \gamma_1(\tau)|u_{t-1}| + \dots + \gamma_p(\tau)|u_{t-p}| = \gamma(\tau)^\top Z_t,$$

que se puede estimar a partir de regresión cuantílica lineal de  $u_t$  sobre  $Z_t$

$$\min_{\gamma} \sum_t \rho_\tau(u_t - \gamma^\top Z_t), \quad (2.10)$$

donde  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p)^\top$ .

Se puede estudiar el comportamiento asintótico del estimador por regresión cuantílica. Supóngase que  $u_t$  está dada por el modelo (2.9),  $\mathbb{E}(|u_t|^{2+\delta}) < \infty$ , que  $f$  está acotada y para todo  $\tau \in (0, 1)$  se cumple que  $f(F^{-1}(\tau)) > 0$ . Entonces, los cuantiles  $\hat{\gamma}(\tau)$  en (2.10) se pueden representar como

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}(\tau) - \gamma(\tau)) = \frac{\Sigma_1^{-1}}{f(F^{-1}(\tau))} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t^\top \psi_\tau(\epsilon_{t\tau}) + o_p(1),$$

donde  $\Sigma_1 = \mathbb{E} \left[ \frac{Z_t Z_t^\top}{\sigma_t} \right]$  y  $\epsilon_{t\tau} = \epsilon_t - F^{-1}(\tau)$ . Entonces, se satisface que asintóticamente

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}(\tau) - \gamma(\tau)) \rightarrow N \left( 0, \frac{\tau(1-\tau)}{f^2(F^{-1}(\tau))} \Sigma_1^{-1} \Sigma_0 \Sigma_1^{-1} \right),$$

donde  $\Sigma_0 = \mathbb{E}(Z_t Z_t^\top)$ .

En muchas aplicaciones, la heteroscedasticidad condicional se modela sobre los residuales de una regresión

$$Y_t = \alpha^\top X_t + u_t, \quad (2.11)$$

donde  $X_t = (1, X_{1,t}, \dots, X_{k,t})^\top$ ,  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)^\top$  y  $u_t$  es un proceso  $ARCH(p)$  lineal como en (2.9).

Una especificación muy popular es el modelo AR-ARCH en el que  $\epsilon_t = (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-k})^\top$ . Entonces, los cuantiles condicionales están dados por

$$Q^{(\tau)}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha^\top X_t + \gamma(\tau)^\top Z_t.$$

Se puede considerar un procedimiento de dos pasos que estime  $\alpha$  en el primer paso y posteriormente estime  $\gamma(\tau)$  basándose en los residuales estimados. Generalmente este proceso puede ser ineficiente teóricamente ya que la estimación preliminar de  $\alpha$  puede afectar el paso de estimación de  $\gamma(\tau)$ , sin embargo es sencillo de implementar computacionalmente.

Si  $Y_t$  está dado por (2.11) y (2.9),  $\hat{\alpha}$  es un estimador consistente y

$$\tilde{\gamma}(\tau) = \arg \min_{\gamma} \sum_t \rho_\tau(\hat{u}_t - \gamma^\top \hat{Z}_t)$$

donde  $\hat{Z}_t = (1, |\hat{u}_{t-1}|, \dots, |\hat{u}_{t-q}|)^\top$ ,  $\hat{u}_t = Y_t - \hat{\alpha}^\top X_t$ , entonces

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}(\tau) - \gamma(\tau)) = \frac{\Sigma_1^{-1}}{f(F^{-1}(\tau))} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t^\top \psi_\tau(\epsilon_{t\tau}) + \Sigma_1^{-1} G_1 \sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha) + o_p(1),$$

con

$$G_1 = \mathbb{E} \left[ \frac{Z_t(X_t - B_t \gamma(\tau))}{\sigma_t^\top} \right], \quad B_t = (0, \text{signo}(u_{t-1})X_{t-1}, \dots, \text{signo}(u_{t-p})X_{t-p})$$

Si además  $f$  es simétrica alrededor de 0 y  $\alpha_0 = 0$ , entonces  $G_1 = 0$  y

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}(\tau) - \gamma(\tau)) \rightarrow N \left( 0, \frac{\tau(1-\tau)}{f^2(F^{-1}(\tau))} \Sigma_1^{-1} \Sigma_0 \Sigma_1^{-1} \right).$$

Los modelos GARCH son más sencillos de estimar pero no pueden capturar de manera parsimoniosa la influencia de errores pasados como lo hacen los modelos GARCH. Sin embargo, la regresión cuantílica sobre modelos GARCH es altamente no-lineal y eso complica su estimación.

Considérese el modelo *GARCH*( $p, q$ ) lineal

$$\begin{aligned} u_t &= \sigma_t \cdot \epsilon_t, \\ \sigma_t &= \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1} + \dots + \beta_p \sigma_{t-p} \\ &\quad + \gamma_1 |u_{t-1}| + \dots + \gamma_q |u_{t-q}|. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Como antes, si  $\mathcal{F}_{t-1}$  representa la información hasta el tiempo  $t-1$ , entonces el cuantil condicional al nivel  $\tau$  de  $u_t$  dada la información  $\mathcal{F}_{t-1}$  está dado por

$$Q^{(\tau)}(u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \theta(\tau)^\top Z_t, \tag{2.13}$$

donde

$$\begin{aligned} Z_t^\top &:= (1, \sigma_{t-1}, \dots, \sigma_{t-p}, |u_{t-1}|, \dots, |u_{t-q}|)^\top, \\ \theta(\tau)^\top &:= (\beta_0, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q) F^{-1}(\tau). \end{aligned}$$

Como  $Z_t$  incluye  $\sigma_{t-1}, \dots, \sigma_{t-p}$ , que depende de parámetros desconocidos  $\theta = (\beta_0, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q)$  y datos pasados, se escribirá  $Z_t$  como  $Z_t(\theta)$  para enfatizar la no-linealidad y su dependencia de  $\theta$ . Si se usa estimación por regresión cuantílica no-lineal

$$\min_{\theta} \sum_t \rho_\tau(u_t - \theta^\top Z_t(\theta)) \tag{2.14}$$

para  $\tau$  fijo. Sin embargo, no se puede obtener un estimador consistente de  $\theta$  ya que éste ignora la dependencia de  $\sigma_{t-k}$  sobre la función completa  $\theta(\cdot)$ . Si la estructura de dependencia

de  $u_t$  está caracterizada por el  $GARCH(p, q)$  lineal (2.12), se puede considerar el siguiente problema de regresión cuantílica restringido en vez de (2.14):

$$\begin{aligned} (\hat{\pi}, \hat{\theta}) &= \arg \min_{\pi, \theta} \sum_i \sum_t \rho_\tau(u_t - \pi_i^\tau Z_t(\theta)) \\ \text{sujeto a } \pi_i &= \theta(\tau_i) = \theta F^{-1}(\tau_i) \end{aligned}$$

La estimación de este problema de regresión cuantílica no-lineal es complicado. En Xiao & Koenker (2009) se propone un estimador de dos etapas que incorpora las restricciones globales y se enfoca en la aproximación local alrededor de un cuantil específico.

La estimación consiste de las dos siguientes etapas:

1. El primer paso considera una estimación global para incorporar la dependencia global de  $\sigma_{t-k}$  sobre  $\theta$ .
2. El segundo paso se enfoca en el cuantil específico para encontrar el mejor estimado local del cuantil condicional.

Sean

$$A(L) := 1 - \beta_1 L - \dots - \beta_p L^p, \quad B(L) := \gamma_1 + \dots + \gamma_q L^{q-1},$$

Bajo condiciones de regularidad que garanticen que  $A(L)$  es invertible, entonces se obtiene una representación  $ARCH(\infty)$  para  $\sigma_t$  como

$$\sigma_t = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j |u_{t-j}|,$$

donde por cuestiones de identificación se normaliza  $a_0 = 1$ .

Sustituyendo en la especificación  $GARCH(p, q)$  lineal (2.12) se tiene que

$$u_t = \left( a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j |u_{t-j}| \right) \epsilon_t$$

y por lo tanto,

$$Q^{(\tau)}(u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(\tau) |u_{t-j}|,$$

donde  $\alpha_j(t) := a_j Q^{(\tau)}(\epsilon_t)$  para  $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Se puede considerar la auto-regresión cuantílica truncada

$$Q^{(\tau)}(u_t|\mathcal{F}_{t-1}) \approx \alpha_0(\tau) + \sum_{j=1}^m \alpha_j(\tau)|u_{t-j}|,$$

con  $m = m(n)$  un parámetro de truncamiento.

Si se escoge  $m$  adecuado para el tamaño muestra  $n$ , se puede evitar algunos problemas de sesgo y por lo tanto una aproximación del modelo GARCH. Se puede estimar los cuantiles condicionales usando dicha aproximación mediante

$$\hat{Q}^{(\tau)}(u_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \hat{\alpha}_0(\tau) + \sum_{j=1}^m \hat{\alpha}_j(\tau)|u_{t-j}|,$$

donde  $\hat{\alpha}_j$  son los estimados de auto-regresión cuantílica. Bajo condiciones de regularidad

$$\hat{Q}^{(\tau)}(u_t|\mathcal{F}_{t-1}) = Q^{(\tau)}(u_t|\mathcal{F}_{t-1}) + O\left(\frac{m}{\sqrt{n}}\right)$$

Sin embargo, dicha estimación aproximada no proporciona directamente un buen estimador para el modelo GARCH, no obstante, sí se puede utilizar como una estimación preliminar.

Como el primer paso de la estimación se centra en el modelo global se quiere usar información sobre varios cuantiles en la estimación. Combinar información acerca de varios cuantiles ayuda a obtener un estimador coherente globalmente de los parámetros de escala.

Supóngase que se hace estimación en la auto-regresión cuantílica truncada al término  $m$

$$\tilde{\alpha} = \arg \min_{\alpha} \sum_{t=m+1}^n \rho_{\tau} \left( u_t - \alpha_0 - \sum_{j=1}^m \alpha_j |u_{t-j}| \right)$$

en los cuarteles  $\tau_1, \dots, \tau_K$  y se obtienen los estimados  $\tilde{\alpha}(\tau_k)$  para  $k \in \{1, \dots, K\}$ .

Defínase

$$\tilde{\alpha}_0 := 1, \mathbf{a} := [a_1, \dots, a_m, q_1, \dots, q_K]^{\top}, \tilde{\boldsymbol{\pi}} := [\tilde{\alpha}(\tau_1)^{\top}, \dots, \tilde{\alpha}(\tau_K)^{\top}]^{\top},$$

donde  $q_k := Q^{(\tau_k)}(\epsilon_t)$  y  $\phi(\mathbf{a}) = q \otimes \alpha$ , con  $q = [q_1, \dots, q_K]^{\top}$  y  $\alpha = [1, a_1, \dots, a_m]^{\top}$ , i.e.  $\phi(\mathbf{a}) = (q_1, a_1 q_1, \dots, a_m q_1, q_K, a_1 q_K, \dots, a_m q_K)^{\top}$ .

En Xiao & Koenker (2009) se propone que se estime  $\mathbf{a}$  combinando la información en los  $K$  cuantiles estimados a partir del método de mínima distancia

$$\tilde{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a}} (\tilde{\boldsymbol{\pi}} - \phi(\mathbf{a}))^\top A_n (\tilde{\boldsymbol{\pi}} - \phi(\mathbf{a}))$$

con las restricciones  $\alpha_j(t) := a_j Q^{(\tau)}(\epsilon_t)$  y  $A_n \in M_{K(m+1) \times K(m+1)}(\mathbb{R})$  positivo-definida.

Si  $\tilde{\mathbf{a}}$  es  $(\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_m)$ ,  $\sigma_t$  se puede estimar basándose en  $\tilde{\mathbf{a}}$  como

$$\tilde{\sigma}_t = \tilde{a}_0 + \sum_{j=1}^m \tilde{a}_j |u_{t-j}|.$$

En el segundo paso se lleva a cabo una regresión cuantílica de  $u_t$  sobre

$$\tilde{Z}_t = (1, \tilde{\sigma}_{t-1}, \dots, \tilde{\sigma}_{t-p}, |u_{t-1}|, \dots, |u_{t-q}|)^\top$$

como

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_t \rho_\tau(u_t - \boldsymbol{\theta}^\top \tilde{Z}_t) \quad (2.15)$$

El estimador de dos pasos de  $\boldsymbol{\theta}(\tau)^\top = (\beta_0(\tau), \beta_1(\tau), \dots, \beta_p(\tau), \gamma_1(\tau), \dots, \gamma_q(\tau))$  está dado por la solución de (2.15) y por lo tanto el  $\tau$ -cuantil condicional de  $u_t$  se puede estimar como

$$\hat{Q}^{(\tau)}(u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\tau)^\top \tilde{Z}_t$$

Se puede hacer iteraciones de este procedimiento para mejorar al estimador.

## 2.4. Modelos QAR

En la modelo de auto-regresión clásico (2.1), la información pasada ( $Y_{t-j}$ ) sólo afecta la localización de la distribución condicional de  $Y_t$ . Sin embargo, se puede hacer algunas modificaciones de estos modelos con coeficientes dinámicos para incorporar algunos efectos de innovaciones heterogéneas. Uno de los factores más importantes que motivan dichas modificaciones es considerar asimetrías en la dinámica del modelo. En finanzas y economía estos comportamientos asimétricos son muy comunes.

En muchas aplicaciones, la dinámica de la serie de tiempo puede ser más complicada que la descrita por un desplazamiento de la localización o de la escala, i.e. la información pasada no sólo afecta la localización o escala de la distribución condicional de los valores futuros sino también de la forma de distribución condicional.



## 2.4.1. El proceso QAR lineal

**Definición 2.4.1.** (*Proceso QAR de orden  $p$* )

Dada una serie de tiempo  $\{Y_t\}$ , sea  $\mathcal{F}_t$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{Y_s : s \leq t\}$ . Se dice que  $\{Y_t\}$  es un proceso QAR de orden  $p$  si

$$Q^{(\tau)}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \theta_0(\tau) + \theta_1(\tau)Y_{t-1} + \dots + \theta_p(\tau)Y_{t-p} \quad (2.16)$$

**Observación 2.4.1.**

Una condición necesaria pero no suficiente para que  $\{Y_t\}$  se considere un proceso QAR de orden  $p$  es que el lado derecho de la expresión (2.16) sea estrictamente creciente con respecto a  $\tau$ .  $\nabla$

En este modelo QAR, los coeficientes auto-regresivos dependen de  $\tau$  y por lo tanto varían con respecto a los diferentes cuantiles de la distribución condicional. Por lo tanto, las variables condicionantes no sólo trasladan la ubicación/localización de la distribución de  $Y_t$  si no que también alteran la escala y la forma de la distribución condicional.

Si se hace  $\theta_j(\tau) \equiv \theta_j$  constante, se recupera el modelo  $AR(p)$  clásico. Por lo tanto, los modelos QAR generalizan en cierto sentido a los modelos AR clásicos.

El planteamiento (2.16) muestra que el modelo QAR se puede interpretar como un modelo auto-regresivo con coeficientes aleatorios

$$Y_t = \theta_0(U_t) + \theta_1(U_t)Y_{t-1} + \dots + \theta_p(U_t)Y_{t-p}, \quad (2.17)$$

donde  $\{U_t\}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución  $Unif[0, 1]$  y las  $\theta_j$ 's son funciones de  $[0, 1]$  a  $\mathbb{R}$ , desconocidas, que se quiere estimar.

Si se permite que los coeficientes auto-regresivos varíen a lo largo de diferentes cuantiles de la distribución condicional, el modelo puede mostrar diferentes formas de dinámica asimétrica.

La transición de (2.17) a (2.16) es una consecuencia inmediata del hecho de que para cualquier función monótona creciente  $g$  y variable aleatoria  $U \sim Unif[0, 1]$  se tiene que

$$Q^{(\tau)}(g(U)) = g(Q^{(\tau)}(U)) = g(\tau),$$

donde  $Q^{(\tau)}(U) = \tau$  es la función cuantil de  $U$ .

En este modelo los coeficientes auto-regresivos pueden depender de  $\tau$  y por lo tanto pueden variar a lo largo de los cuantiles. Las variables “condicionantes” no sólo son un desplazamiento de la localización de la distribución de  $y_t$  si no también pueden modificar la escala y la forma de la distribución condicional.

**Ejemplo 2.4.1.** (*Proceso QAR(1)*)

En el caso de un proceso  $QAR(1)$ ,  $y_t = \theta_0(U_t) + \theta_1(U_t)Y_{t-1}$  se tiene que

$$Q^{(\tau)}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \theta_0(\tau) + \theta_1(\tau)Y_{t-1} \tag{2.18}$$

si  $\theta_0(\tau) = \sigma\Phi^{-1}(\tau)$  y  $\theta_1(\tau) = \min\{\gamma_0, \gamma_1\tau, 1\}$  con  $\gamma_0 \in (0, 1)$  y  $\gamma_1 > 0$ . Con esta especificación, si  $U_t > \frac{1-\gamma_0}{\gamma_1}$ , el modelo genera a  $y_t$  de acuerdo a un modelo Gaussiano estándar de raíces unitarias, pero realizaciones más pequeñas de  $U_t$  tienen una tendencia de reversión a la media. Por lo tanto, este modelo muestra una forma de persistencia asimétrica en el sentido de que sucesiones con innovaciones muy positivas llevan a reforzar su comportamiento de raíces unitarias, mientras que las realizaciones negativas llevan a una reversión a la media y por lo tanto desvirtúan la persistencia del proceso.

Es importante notar que si se hace  $\theta(\tau)$  constante, entonces se obtiene el modelo AR(1) Gaussiano, clásico. ▽

El comportamiento de largo plazo de  $Y_t$  puede ser estacionario de segundo orden y satisfacer el Teorema del Límite Central; sin embargo, se puede observar algunas formas de comportamiento explosivo en periodos cortos.

Sea  $X_t = (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})^\top$  y  $\theta(\tau) = (\theta_0(\tau), \theta_1(\tau), \dots, \theta_p(\tau))^\top$ . El modelo QAR (2.16) se puede estimar a partir del problema de optimización en regresión cuantílica (2.4), pues

$$Q^{(\tau)}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = X_t^\top \theta(\tau).$$

Sea  $\mu_0 := \mathbb{E}(\theta_0(U_t))$ ,  $u_t := \theta_0(U_t) - \mu_0$  y  $\alpha_{j,t} := \theta_j(U_t)$  para  $j \in \{1, \dots, p\}$ . Se puede reformular el modelo QAR (2.17) en términos de coeficientes aleatorios como

$$Y_t = \mu_0 + \alpha_{1,t}Y_{t-1} + \dots + \alpha_{p,t}Y_{t-p} + u_t. \tag{2.19}$$

Sea  $A_{p-1,t} := [\alpha_{1,t}, \dots, \alpha_{p-1,t}]$  y  $0_{p-1}$  el vector de  $p-1$  ceros. Defínase

$$A_t = \begin{pmatrix} A_{p-1,t} & \alpha_{p,t} \\ I_{p-1} & 0_{p-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_t := \begin{pmatrix} u_t \\ 0_{p-1} \end{pmatrix}$$

entonces el proceso  $QAR(p)$  (2.19) se puede expresar como un proceso auto-regresivo vectorial de orden 1

---

$$\mathbf{Y}_t = \Gamma + A_t \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{V}_t,$$

con

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ 0_{p-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_t = \begin{pmatrix} Y_t \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} \end{pmatrix}$$

Se harán algunas suposiciones:

**Suposición 2.4.1.**

1.  $\{u_t\}$  es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 0 y varianza finita  $\sigma^2$ . Además, la función de distribución de  $u_t$  es  $F$ , que tiene densidad continua con  $f(u) > 0$  en el conjunto  $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : 0 < F(u) < 1\}$ .
2. Sea  $\Omega_A := \mathbb{E}(A_t \otimes A_t)$ . Los eigenvalores de  $\Omega_A$  tienen módulo menor que 1.
3. Denótese  $F_{t-1}(x) \equiv \mathbb{P}(y_t < x | \mathcal{F}_{t-1})$

**Proposición 2.4.1.**

El proceso  $QAR(p)$ ,  $\{Y_t\}$ , dado por (2.19) es un proceso estacionario de segundo orden y satisface el teorema de límite central

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (Y_t - \mu_y) \rightarrow N(0, w_y^2),$$

donde

$$\mu_y = \frac{\mu_0}{1 - \sum_{j=1}^p \mu_j}, \quad w_y^2 = \lim \frac{1}{n} \mathbb{E}^2 \left[ \sum_{t=1}^n (y_t - \mu_y) \right], \quad \mu_j = \mathbb{E}(\alpha_{j,t}), \quad j \in \{1, \dots, p\}$$

**Corolario 2.4.1.** (*Comportamiento asintótico del modelo QAR(1)*)

Si  $y_t$  se determina mediante

$$y_t = \alpha_t y_{t-1} + u_t$$

y  $w_\alpha^2 = \mathbb{E}^2[\alpha_t] < 1$ , entonces  $y_t$  es estacionario de segundo orden y satisface el Teorema del Límite Central,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n y_t \rightarrow N(0, w_y^2),$$

donde  $w_y^2 = \sigma^2 \frac{1+\mu_\alpha}{(1-\mu_\alpha)(1-w_\alpha^2)}$  con  $\mu_\alpha = \mathbb{E}(\alpha_t) < 1$

**Ejemplo 2.4.2.**

En el Ejemplo 2.4.1,  $\alpha_t = \theta_1(U_t) = \min\{1, \gamma_0 + \gamma_1 U_t\} \leq 1$  y  $\mathbb{P}(|\alpha_t| < 1) \neq 0$ , por lo tanto las hipótesis del Corolario 2.4.1 se satisfacen y el proceso  $y_t$  es globalmente estacionario pero sigue mostrando asimetría local en presencia de cierto tipo de “shocks”. El Corolario 2.4.1 también dice que aún si  $\alpha_t > 1$  sobre algún rango de cuantiles pero  $\mathbb{E}^2(\alpha_t) < 1$ ,  $y_t$  sigue siendo estacionario de segundo orden en el largo plazo. Por lo tanto, un proceso auto-regresivo cuantílico puede tener algunas formas transitorias de comportamiento explosivo y aún así ser estacionarios en el largo plazo.  $\nabla$

Bajo las suposiciones del Corolario 2.4.1, sustituyendo recursivamente en (2.18) se puede obtener una representación  $MA(\infty)$

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_{t,j} u_{t-j} \tag{2.20}$$

es una solución  $\mathcal{F}_t$ -medible de (2.4.1), donde  $\beta_{t,0} = 1$  y para  $j \in \mathbb{N}_+$   $\beta_{t,j} = \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_{t-i}$ . Además, si  $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_{t,j} v_{t-j}$  converge en  $L^p$ , entonces  $y_t$  tiene momento de orden  $p$  finito.

En esta representación  $MA(\infty)$ , el impulso de la respuesta  $y_t$  ante un shock  $u_{t-j}$  es estocástico y está dado por  $\beta_{t,j}$ . Por otro lado, aunque el impulso de la respuesta del proceso auto-regresivo cuantílico es estocástico, éste converge a 0 en media cuadrática cuando  $j \rightarrow \infty$ , reforzando el hecho de que  $y_t$  es estacionario.

**Proposición 2.4.2.**

Si  $\gamma_y(h)$  es la función de autocovarianza de  $y_t$ , entonces

$$\gamma_y(h) = \mu_\alpha^{|h|} \sigma_y^2,$$

donde  $\sigma_y = \frac{\sigma}{1-w_\alpha^2}$

**Observación 2.4.2.**

Si se compara un proceso  $\{y_t\}$   $QAR(1)$  y un proceso  $AR(1)$  tradicional  $\{\tilde{y}_t\}$  con coeficiente auto-regresivo  $\mu_\alpha$ , entonces se espera que la la varianza de largo plazo de  $y_t$  se mayor que la de  $\tilde{y}_t$ . La varianza adicional del proceso  $QAR(1)$  se debe a la variación de  $\alpha_t$ . De hecho  $w_y^2$  se puede descomponer en la suma de la varianza de largo plazo de  $\tilde{y}_t$  y un término adicional que se determina por la varianza de  $\alpha_t$  i.e.

$$w_y^2 = \tilde{w}_y^2 + \frac{\sigma^2}{(1-\mu_\alpha)^2(1-w_\alpha^2)} Var(\alpha_t),$$

donde  $\tilde{w}_y^2 = \frac{\sigma^2}{(1-\mu_\alpha)^2}$  es la varianza de largo plazo de  $\tilde{y}_t$ . ∇

La estimación del modelo

$$Q^{(\tau)}(y_t) = x_t^\top \theta(\tau),$$

con  $x_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})^\top$ , involucra resolver el problema

$$\min \theta \in \mathbb{R}^{p+1} \rho_\tau(y_t - x_t^\top \theta)$$

Dado  $\hat{\theta}(\tau)$ , la función  $\tau$ -cuantil condicional de  $y_t$ , condicionada a  $x_t$ , se puede estimar como

$$\hat{Q}^{(\tau)}(y_t|x_t) = x_t^\top \hat{\theta}(\tau)$$

y la densidad condicional de  $y_t$  se puede estimar mediante el cociente de diferencias

$$\hat{f}^{(\tau)}(y_t|x_{t-1}) = \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{\hat{Q}^{(\tau_i)}(y_t|x_t) - \hat{Q}^{(\tau_{i-1})}(y_t|x_t)},$$

para alguna sucesión adecuada de  $\tau$ 's.

Si se denota  $\mathbb{E}(y_t)$  como  $\mu_y$ , y  $\Omega_0 = \mathbb{E}(X_t X_t^\top) = \lim \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t X_t^\top$ , entonces

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & \mu_y^\top \\ \mu_y & \Omega_y \end{pmatrix},$$

donde  $\mu_y = \mu_y 1_{p \times 1}$  y

$$\Omega_y = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

La distribución asintótica de  $\hat{\theta}(\tau)$  se resume en el siguiente Teorema.

**Teorema 2.4.1.**

El proceso de auto-regresión cuantílica  $\hat{\theta}(\tau)$  tiene una representación límite

$$\Sigma^{-1/2} \sqrt{n}(\hat{\theta}(\tau) - \theta(\tau)) \rightarrow B_{p+1}(\tau),$$

donde  $\Sigma := \Omega_1^{-1} \Omega_0 \Omega_1^{-1}$ ,  $\Omega_1 := \lim \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f_{t-1}(F_{t-1}^{-1}(\tau)) X_t X_t^\top$ ,  $\Omega_0 = \mathbb{E}(X_t X_t^\top)$  y  $B_{p+1}(\tau)$  representa un puente Browniano estándar  $(p+1)$ -dimensional.

A partir del Teorema 2.4.1, se tiene que para  $\tau$  fijo, la distribución límite del estimador del QAR satisface

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}(\theta) - \theta(\tau)) \rightarrow N(0, \tau(1-\tau)\Omega_1^{-1}\Omega_0\Omega_1^{-1}).$$

Por definición, para cualquier  $\tau \in (0, 1)$  fijo,  $B_k \text{sim} N(0, \tau(1-\tau)I_k)$ . En el caso especial en el que se tienen coeficientes constantes, entonces  $\Omega_1 = f(F^{-1}(\tau))\Omega_0$ , donde  $f(\cdot)$  y  $F(\cdot)$  son las funciones de densidad y distribución de  $u_t$ , respectivamente. Este hecho se resume en el siguiente resultado.

**Corolario 2.4.2.**

Si se satisfacen las suposiciones 2.4.1 y los coeficientes  $\alpha_{jt}$  son constantes, entonces

$$f(F^{-1}(\tau))\Omega_0^{1/2} \sqrt{n}(\hat{\theta}(\tau) - \theta(\tau)) \rightarrow B_k(\tau)$$

Los modelos QAR pueden reconocer influencias sistemáticas de variables condicionantes sobre la localización, escala y forma de la distribución condicional de la respuesta y por lo tanto se pueden considerar como una generalización de los modelos lineales tradicionales para series de tiempo.

Dado el proceso QAR (2.17),

$$Y_t = \theta_0(U_t) + \theta_1(U_t)Y_{t-1} + \dots + \theta_p(U_t)Y_{t-p}, \quad (2.21)$$

si se define  $\theta_j := \mathbb{E}[\theta_j(U_t)]$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, p\}$  y

$$V_t = \theta_0(U_t) - \mathbb{E}[\theta_0(U_t)] + [\theta_1(U_t) - \mathbb{E}[\theta_1(U_t)]]Y_{t-1} + \dots + [\theta_p(U_t) - \mathbb{E}[\theta_p(U_t)]]Y_{t-p}.$$

Entonces el proceso QAR se puede reescribir como

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 Y_{t-1} + \dots + \theta_p Y_{t-p} + V_t, \quad (2.22)$$

donde  $\{V_t\}$  es una sucesión diferencia martingala.

Naturalmente, surge la pregunta de si hay diferencias entre un proceso QAR y un proceso AR con errores con heteroscesasticidad condicional. El modelo tipo ARCH sólo se enfoca en los primeros dos momentos, mientras que el modelo QAR va más allá del segundo momento y permite una estructura más flexible en momentos de orden superior. Tanto el proceso QAR como el modelo AR con heteroscedasticidad condicional son similares en los dos primeros momentos, sin embargo pueden ser diferentes más allá de la varianza condicional.

El análisis clásico de series de tiempo se basa en auto-correlaciones y auto-correlaciones parciales y sólo requiere que los residuales sean una sucesión de diferencias martingala. Como se estableció en (2.22), la estructura de auto-covarianza del proceso QAR (2.17) es la misma que la del proceso  $AR(p)$  con residuales como una sucesión de diferencias martingala. Por lo tanto, para dos procesos  $QAR(p)$  diferentes

$$Y_{i,t} = \theta_{i0}(U_t) + \theta_{i1}(U_t)Y_{i,t-1} + \dots + \theta_{ip}(U_t)Y_{i,t-p}, \quad i = 1, 2,$$

si  $\mathbb{E}[\theta_{1j}(U_t)] = \mathbb{E}[\theta_{2j}(U_t)]$ , sus estructuras de auto-correlación son la misma. Por lo tanto, las técnicas tradicionales de análisis de series de tiempo para identificar procesos QAR con diferentes estructuras de dependencia son las mismas que para identificar un proceso  $AR(p)$  con los mismos coeficientes fijos. En este caso, la técnica QAR ayuda a obtener información adicional que el análisis clásico de series de tiempo puede ignorar. Desde esta perspectiva, el método QAR se puede considerar como un complemento del análisis clásico.

Ya se dijo que se tiene que suponer que el lado derecho de la ecuación (2.16) debe ser monótona con respecto a  $\tau$ . La monotonía de las funciones cuantil condicional generalmente establece restricciones sobre el dominio de la variable aleatoria  $Y_t$  (a menos que  $\{Y_t\}$  sea el proceso clásico de coeficientes constantes). Esto requiere de que el dominio de las variables aleatorias (ó alguna transformación adecuada) está acotada en al menos una dirección (generalmente la no negativa).

Si la suposición de monotonía no se cumple, la estimación por regresión cuantílica (2.4) se puede seguir usando en la práctica; sin embargo, los cuantiles de regresión  $\hat{\theta}(\tau)$  se deben analizar bajo la suposición de especificación incorrecta y se requerirá modificar los resultados.

En el caso en el que no se satisface la suposición de monotonía, la función cuantil condicional  $Q^\tau(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$  no se puede escribir como una función lineal de  $x_t$ , y el estimador QAR,  $\hat{\theta}(\tau)$ , convergerá a algún pseudo-parámetro  $\bar{\theta}(\tau)$  que minimiza la distancia entre  $X_t^\top \theta$  y  $Q^\tau(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$ , que es

$$\hat{\theta}(\tau) \rightarrow \bar{\theta}(\tau) = \arg \min_{\theta} \mathbb{E}[d(X_t^\top \theta, Q^\tau(Y_t|\mathcal{F}_{t-1}))],$$

donde la distancia  $d(\cdot, \cdot)$  se define como

$$d(X_t^\top \theta, Q^\tau(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}[(\delta - |\epsilon_{t\tau}|)I(|\epsilon_{t\tau}| < \delta)|\mathcal{F}_{t-1}],$$

donde  $\delta(\theta, X_t) = |X_t^\top \theta - Q^\tau(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})|$  y  $\epsilon_{t\tau} = Y_t - Q^\tau(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$ . En este caso, el estimación por regresión cuantílica  $X_t^\top \hat{\theta}(\theta)$  se puede utilizar como una aproximación lineal de  $Q^\tau(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$ .

Una manera de analizar el criterio de la distancia  $d(x_t^\top \theta, Q^\tau(y_t|\mathcal{F}_{t-1}))$  es revisar la condición de primer orden del correspondiente problema de optimización poblacional. Sea  $F_t(\cdot)$  la función de distribución condicional de  $y_t$  dado  $x_t$ , entonces la condición de primer orden es

$$\mathbb{E} \left[ \left( F_t(x_t^\top \theta) - \tau \right) x_t \right] = 0 \quad (2.23)$$

Si la función de distribución condicional es lineal en su dominio de definición (que es el caso contrario a una distribución uniforme), entonces la estimación por regresión cuantílica es equivalente al problema de mínimos cuadrados

$$\min_{\theta} \mathbb{E} \left[ \left( F_t(x_t^\top \theta) - \tau \right)^2 \right],$$

i.e. en este caso, la función criterio es una función cuadrática.

En general, la función  $d(x_t^\top \theta, Q^\tau(y_t|\mathcal{F}_{t-1}))$  es una función no-lineal de  $(x_t^\top \theta - Q^\tau(y_t|\mathcal{F}_{t-1}))$  y puede que no pueda escribirse sólo una función cuadrática “pura” de  $(x_t^\top \theta - Q^\tau(y_t|\mathcal{F}_{t-1}))$ . Por lo tanto, una propuesta es escribir el problema como una problema de mínimos cuadrados ponderados

$$\min_{\theta} \lambda(x_t, \theta) \left( F_t(x_t^\top \theta) - \tau \right)^2,$$



donde la ponderación  $\lambda(x_t, \theta)$  es una función del parámetro desconocido  $\theta$  (y por lo tanto el criterio no es exactamente cuadrático).

Si  $f_t$  es la función de densidad condicional de  $y_t$  dado  $x_t$ , entonces la condición de primer orden (2.23) es la misma que la de un problema de mínimos cuadrados ponderados por densidad

$$\min_{\theta} \frac{(F_t(x_t^\top \theta) - \tau)^2}{f_t(x_t^\top \bar{\theta}(\tau))},$$

usando una función de ponderación  $f_t(x_t^\top \bar{\theta}(\tau))$  (que depende de  $\bar{\theta}(\tau)$ ). Sin embargo, este problema de optimización no es factible (aunque ayuda al entendimiento de la función criterio). Afortunadamente, también se puede escribir a la función criterio  $d(x_t^\top \theta, Q^\tau(y_t | \mathcal{F}_{t-1}))$  como

$$w(x, \theta) \left( x_t^\top \theta - Q^\tau(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) \right)^2$$

Por supuesto que el (psedo)parámetro  $\bar{\theta}(\tau)$  coincidirá con  $\theta(\tau)$  cuando se satisfagan las condiciones de regularidad y la monotonía. Se puede establecer normalidad asintótica de  $\hat{\theta}(\tau)$  con la misma tasa de convergencia alrededor del objetivo  $\bar{\theta}(\tau)$ .

A pesar del posible cruce de las curvas cuantil, el modelo QAR lineal proporciona una aproximación local útil de la función cuantil condicional.

#### 2.4.2. Monotonía en modelos QAR lineales

Como en otras aplicaciones que utilizan regresión cuantílica, los modelos QAR lineales se deben utilizar e interpretar con precaución cuando se usan como aproximaciones locales de modelos no-lineales más complejos.

Si se toma la forma lineal del modelo literalmente, en algunos puntos habrá “cruces” de la función cuantil condicional, a menos que estas funciones sean paralelas lo que haría que se regresara a la forma de sólo desplazamiento de la localización del modelo, hecho que se está intentando generalizar con los modelos QAR.

Este problema de cruzamiento es más serio en el caso auto-regresivo que en el caso de regresión ordinaria ya que el conjunto de las  $x_t$ 's que ocurren con probabilidad positiva se determina en el modelo. Sin embargo, se pueden considerar a los modelos lineales como aproximaciones locales válidas sobre la región de interés.

Se debe notar que las funciones cuantil condicional estimadas  $\hat{Q}^{(\tau)}(y|x) = x^\top \hat{\theta}(\tau)$  son monótonas en el punto medio  $x = \bar{x}$  en modelos de regresión cuantílicos lineales. Sin

embargo, en el modelo QAR  $y_t = x_t^\top \theta(U_t)$ , se expresa a la variable aleatoria observable  $y_t$  como una combinación lineal de los covariables condicionantes; pero en vez de suponer que las coordenadas del vector  $\theta$  son variables aleatorias independientes, se supone algo diametralmente opuesto: son funciones perfectamente dependientes, todas moduladas por una sola variable aleatoria uniforme. Si las funciones  $\theta_0, \dots, \theta_p$  son monótonas crecientes, entonces las coordenadas del vector aleatorio  $\alpha_t$  son co-monótonas. Este es un escenario común, pero se debe estudiar los casos en los que esto no pasa.

Se puede encontrar una reparametrización del modelo que muestre comonotonía en la región relevante del espacio de covariables. Nótese que para cualquier matriz invertible  $A$  se puede escribir

$$Q^{(\tau)}(y|x) = x^\top A^{-1} A \theta(\tau),$$

entonces se puede elegir  $p + 1$  puntos linealmente independientes  $x_s = \{x_1, \dots, x_{p+1}\}$  de tal forma que  $Q^{(\tau)}(y|x_1, \dots, x_{p+1})$  sea estrictamente creciente con respecto a  $\tau$ ; por lo tanto, la elección de dicha matriz  $A$  tal que  $Ax_j$  es el  $j$ -ésimo vector unitario que es base de  $\mathbb{R}^{p+1}$ , se tiene que  $Q^{(\tau)}(y|x_s) = \gamma_s(\tau)$ , donde  $\gamma = A\theta$ . Es decir, se re-parametrizó la matriz de diseño de tal forma que los  $p + 1$  coeficientes, sean las funciones cuantil condicional de  $y_t$  en los puntos seleccionados.

La interpretación de las funciones cuantil condicionales lineales como aproximaciones del comportamiento local en el rango central del espacio de covariables siempre se debe considerar como provisional, idealmente se debe esperar a que fuentes de información más ricas lleven a especificaciones no-lineales más elaboradas que tienen validez en regiones más grandes.

## 2.5. Predicción en modelos basados en regresión cuantílica

Los modelos de regresión cuantílica proporcionan una metodología natural para hacer pronóstico por intervalos.

Dada una serie de tiempo observada  $\{Y_t\}_{t=1}^T$  y un modelo de regresión cuantílica dinámica

$$Q^{(\tau)}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = g(X_t, \theta(\tau)),$$

donde  $X_t = (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})^\top$ . El objetivo es hacer predicción basándose en las observaciones disponibles.

En el caso especial en el que  $g(X_t, \theta(\tau))$ , este es un modelo QAR (ABC).

Si los parámetros  $\theta(\tau)$  se conocen, entonces el intervalo

$$\left[ g\left(X_{T+1}, \theta\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right), g\left(X_{T+1}, \theta\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \right]$$

es un intervalo de predicción exacto al nivel  $1 - \alpha$  para  $Y_{T+1}$ .

Sin embargo, en la práctica no se conoce  $\theta(\tau)$  y se tiene que usar el estimador por regresión cuantílica  $\hat{\theta}(\tau)$ .

Se puede utilizar una versión modificada de este intervalo como

$$\left[ g\left(X_{T+1}, \hat{\theta}\left(\frac{\alpha}{2} - h_T\right)\right), g\left(X_{T+1}, \hat{\theta}\left(1 - \frac{\alpha}{2} + h_T\right)\right) \right],$$

donde  $h_T \rightarrow 0$ , para considerar la incertidumbre de la estimación de regresión cuantílica preliminar  $\hat{\theta}(\tau)$ .

Un intervalo de pronóstico a  $p$ -pasos para  $Y_{T+p}$ , obsérvese que el pronóstico a un paso de la distribución condicional de  $Y_{T+1}$  se puede obtener de

$$\hat{Y}_{T+1} = g(X_{T+1}, \hat{\theta}(U)),$$

donde  $U$  es una simulación de la distribución  $Unif(0, 1)$ .

Sea  $U_1^*$  una observación de la distribución  $Unif(0, 1)$ . Entonces, una simulación de la distribución de pronóstico a un paso de  $Y_{T+1}$  está dado por

$$\hat{Y}_{T+1}^* = g(X_{T+1}, \hat{\theta}(U_1^*))$$

Después, sea  $\tilde{X}_{T+2} = (1, \hat{Y}_{T+1}^*, Y_T, \dots, Y_{T-p+2})^\top$  y  $U_2^* \sim Unif(0, 1)$ ; entonces una simulación de la distribución de pronóstico dos pasos hacia adelante de  $Y_{T+2}$  es

$$\hat{Y}_{T+2}^* = g(\tilde{X}_{T+2}, \hat{\theta}(U_2^*)).$$

Continuando con este procedimiento, en el paso  $s$  se considera  $\tilde{X}_{T+s} = (1, \hat{Y}_{T+s+1}^*, \dots, \hat{Y}_{T+s-p}^*)^\top$ , donde  $\hat{Y}_j^* = Y_j$  si  $j \leq T$  y  $U_s^* \sim Unif(0, 1)$ . Entonces, se puede obtener una simulación del pronóstico

$$\hat{Y}_{T+s}^* = g(\tilde{X}_{T+s}, \hat{\theta}(U_s^*)).$$

Aplicando este procedimiento de muestreo recursivamente, se obtiene una trayectoria muestral de pronóstico

$$\left( \hat{Y}_{T+1}^*, \hat{Y}_{T+2}^*, \dots, \hat{Y}_{T+p}^* \right)$$


---

Repitiendo este procedimiento  $R$  veces, un pronóstico de la distribución condicional de  $Y_{T+p}$  se puede aproximar basándose en las trayectorias muestras

$$\left\{ \left( \widehat{Y}_{T+1}^{(r)}, \dots, \widehat{Y}_{T+p}^{(r)} \right) \right\}_{r=1}^R$$

y un intervalo de predicción a  $p$ -pasos al nivel  $1 - \alpha$  se puede construir basándose en los cuantiles muestras  $\left\{ \widehat{Y}_{T+p}^{(r)} \right\}_{r=1}^R$

---



## Capítulo 3

# Regresión cuantílica para medidas de riesgo

### 3.1. Introducción

Información distribucional de los rendimientos y otras variables económicas tales como la varianza, asimetría, valor en riesgo, expected-shortfall son muy importantes tanto en la toma de decisiones como en la regulación financiera.

A pesar del gran número de aplicaciones financieras que usan información acerca de la media y la varianza, otra información distribucional también puede tener un papel importante, por ejemplo, los rendimientos de los precios de acciones y otras variables pueden no tener distribución normal. Además, la varianza puede no ser una métrica satisfactoria del nivel de riesgo.

Además, evidencia empírica muestra que cuando los inversionistas evalúan el riesgo de una oportunidad de una inversión, éstos pueden tener preferencias diferentes sobre instrumentos financieros con diferentes distribuciones, aún cuando dichos instrumentos tengan los mismos rendimientos medios y mismas volatilidades.

En particular, dichas medidas de cola izquierda tales como el valor en riesgo y el expected-shortfall ya son métricas muy importantes (casi estándar) en la administración de riesgos y la construcción de portafolios. Pero no sólo las medidas de cola izquierda son importantes, se centra la atención en éstas porque representan posibles pérdidas, también las medidas de cola derecha son importante pues pueden ayudar a identificar buenas oportunidades de inversión.

## 3.2. Medidas de riesgo financieras

El mundo financiero ha sido siempre “riesgoso” y las innovaciones financieras tales como el desarrollo de mercados de derivados, han hecho más importante que nunca la “administración de riesgos”, pero también más difícil.

Existen diferentes tipos de riesgo como:

- Riesgo de mercado, el que corresponde a cambio en precios.
- Riesgo de Crédito, es el peligro de que una contraparte incumpla sus obligaciones contractuales.
- Riesgo de liquidez, es el costo extra que conlleva el liquidar una posición o activo debido a que no hay compradores para colocarlo.
- Riesgo operacional, se debe a fraude, errores humanos, mala administración y problemas similares

Los primeros acercamientos para medir el riesgo eran de alguna manera primitivos y limitados en su aplicación. En contraste el Valor en Riesgo (VaR), y Pérdida Esperada (ES), son ampliamente usadas por su aplicación a todos los tipos de riesgo e instrumentos financieros, incluidos portafolios complejos de activos financieros.

Por lo anterior, la medición de riesgos de mercado se logra mediante lo que se conoce como Valor en Riesgo (ó VaR por sus iniciales en inglés del término *Value at Risk*). Este concepto fué propuesto por JP Morgan en octubre de 1994 y hoy es un estándar internacional.

El Valor en Riesgo es un intento de resumir en un solo número el riesgo total de un portafolio de activos financieros.

### 3.2.1. Referencias históricas de Valor en Riesgo y Expected-Shortfall

El Comité de Basilea de Supervisión Bancaria, por sus siglas en inglés BSBS (Basel Committee on Banking Supervision) es un comité compuesto por las autoridades de supervisión bancaria del mundo que se reúnen regularmente en Basilea, Suiza.

En 1988 publicó lo que se conoce como *El acuerdo de Capital de Basilea de 1988* o simplemente *El Acuerdo*. Este es un acuerdo entre los reguladores de cómo debe ser calculado el capital que un banco debe reservar para hacer frente al riesgo de crédito en función de los riesgos asumidos. Varios años después, el comité de Basilea publicó una *Amendment* que fue implementado en 1998 donde se requiere a los bancos reservar capital para riesgo de

---

mercado así como riesgo de crédito. Este Amendment diferencia entre el libro de negociación y el libro bancario.

El libro bancario consiste principalmente en préstamos y usualmente no se revalúa mientras que el libro de negociación consiste en los diferentes instrumentos que son comercializados por el banco (bonos, swaps, futuros, opciones, etc.) que suelen revaluarse diario.

El 1996 BIS Amendment calcula el capital para el libro de comercialización usando la medida del VaR con los parámetros de un horizonte de 10 días y confianza del 99%. Esto significa que se enfoca en la pérdida a 10 días de revaluación del portafolio la cual se espera sólo sea excedida el 1% de las veces.

#### 3.2.1.1. Definición del Valor en Riesgo

El VaR resume en un solo número la pérdida potencial máxima que se puede sufrir en una posición de riesgo dado un nivel de confianza elevado (usualmente 95% o 99%) y en un periodo de tiempo determinado.

El Valor en Riesgo utiliza dos parámetros, el horizonte de tiempo y el nivel de confianza, los cuales se denotan por  $T$  y  $1 - \alpha$ , respectivamente. Dado esto, el VaR es un límite tal que la pérdida en el horizonte es menor que este límite con probabilidad igual al coeficiente de confianza. Esto es, sólo el  $(1 - \alpha)\%$  de las veces se excederá esa pérdida.

#### Ejemplo 3.2.1.

Si el horizonte de tiempo es una semana, el coeficiente de confianza es del 99% (i.e.  $\alpha = 1\%$ ) y se obtuvo que el VaR es de \$8 millones, entonces hay sólo 1% de oportunidad de que la pérdida sea mayor de \$8 millones la siguiente semana.  $\nabla$

#### Notación 3.2.1.

Durante este capítulo se usará la notación  $VaR(\alpha)$  y  $VaR(\alpha, T)$  cuando sea claro sobre qué variable se está obteniendo el Valor en Riesgo.

Si  $L$  es la pérdida que puede ocurrir en el periodo  $T$ , entonces  $VaR(\alpha)$  es el  $\alpha$ -cuantil superior de  $L$ . Si  $R = -L$  es la ganancia que puede ocurrir durante el periodo, entonces el  $VaR(\alpha)$  es el negativo del  $\alpha$ -cuantil superior de  $R$ . De manera más precisa.

---



**Definición 3.2.1.** (*Valor en riesgo*)

Si  $L$  es la pérdida sobre el periodo  $T$ , entonces el  $VaR(\alpha)$  es el  $\alpha$ -cuantil superior de  $L$ . Es decir, para cualquier distribución, se tiene

$$VaR(\alpha) := \inf\{x : \mathbb{P}(L \geq x) \leq \alpha\}$$

En finanzas, el VaR se refiere a una medida de incertidumbre. Esta incertidumbre radica en el conocer cual será el precio de una inversión o activo en el futuro, es decir, el cambio en el precio. Por otro lado, los retornos financieros se refieren a las fluctuaciones de precio, y la volatilidad de un activo se refiere a cómo estos retornos varían a través del tiempo.

Es importante notar que cualquier medida de riesgo tiene sus limitantes, por lo que la administración de riesgo no debe solo basarse en la medida del VaR. Nuevas medidas de riesgo han surgido debido a estas limitantes.

A continuación definiremos dos conceptos basados en las limitantes del VaR:

### 3.2.2. Valor el riesgo condicional (CVaR)

Mientras que el VaR contesta la pregunta ¿qué tan mal se pueden poner las cosas? el CVaR pregunta: Si las cosas se ponen mal, ¿qué tanto la compañía espera perder? Es decir, el VaR sólo mide la probabilidad de pérdida y no el tamaño de ésta.

El CVaR se conoce con diferentes nombres: expected shortfall (ES), Shortfall, *expected loss given, tail event* ó *TailVaR*. Para este estudio nos referiremos a ella como Expected Shortfall (ES).

Dowd (1998) advierte sobre el sólo enfocarse en el uso del VaR y considera al *ES* como un estadístico útil complementario. Basak & Shapiro (2001) fueron más lejos ya que demostraron que enfocarse solamente en el VaR puede llevar a una pérdida esperada mucho más alta que la necesaria, pues el VaR ignora la magnitud de las pérdidas extremas, siempre que éstas ocurran con probabilidades suficientemente bajas.

Sin embargo es importante señalar que la pérdida de cola es muy sensible a las probabilidades de pérdidas extremas y dichas probabilidades son notoriamente difíciles de estimar, ciertamente más difícil que el VaR.

3.2.2.1. Definición del *expected-shortfall* (ES)

El VaR es una medida de riesgo muy intuitiva desde su concepción y es una medida estándar del riesgo de mercado en el mundo financiero. Sin embargo, el VaR tiene algunas deficiencias y ha sido una medida criticada por esto, en el marco de lo que se conoce como medida de riesgo coherente.

En el marco axiomático de las medidas de riesgo coherentes que se establece en Artzner et al. (1999) se identifica la siguiente definición de medida de riesgo coherente.

**Definición 3.2.2.** (*Medida de riesgo coherente*)

Se dice que una función  $g : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  es una medida de riesgo coherente si satisface las siguientes condiciones para cualesquiera  $X, Y \in \mathcal{X}$ :

- (i) Monotonía: Si  $X \leq Y$  entonces  $g(X) \geq g(Y)$ .
- (ii) Invarianza ante translaciones: Para  $c \in \mathbb{R}$ ,  $g(X + c) = g(X) - c$
- (iii) Homogeneidad positiva: Para  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $g(\lambda X) = \lambda g(X)$
- (iv) Sub-aditividad:  $g(X + Y) \leq g(X) + g(Y)$

Adicionalmente, el VaR sólo se enfoca en controlar la probabilidad de pérdida en vez de la magnitud de dicha pérdida.

El *expected shortfall* es una medida de riesgo coherente que es una alternativa para superar las debilidades de VaR. También se conoce como pérdida esperada dado un evento cola, pérdida de la cola ó *shortfall*.

**Definición 3.2.3.** (*Expected-shortfall*)

Para cualquier distribución, se define *expected shortfall* (ES) como

$$ES(\alpha) := \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR(u) du,$$

i.e.  $ES(\alpha)$  es el promedio del VaR sobre toda  $u$  que es menor o igual a  $\alpha$ . Si  $L$  tiene distribución continua, entonces

$$ES(\alpha) = \mathbb{E}(L|L > VaR(\alpha)) = \mathbb{E}(L|L \geq VaR(\alpha))$$

### 3.2.3. Métodos de estimación tradicionales del VaR y del ES

#### 3.2.3.1. Estimación no-paramétrica

La estimación no-paramétrica supone que la distribución de pérdida no está en la familia de distribuciones paramétricas tales como la distribución normal o la distribución  $t$ .

Supongase que se quiere un coeficiente de confianza  $1 - \alpha$  para las medidas de riesgo. En el método no-paramétrico, este cuantil se estima como el  $\alpha$ -cuantil de una muestra de rendimientos históricos; dicho estimado se denotará como  $\hat{q}(\alpha)$ . Si  $S$  es el tamaño de la posición actual, entonces el VaR no-paramétrico es

$$\widehat{VaR}^{np}(\alpha) = -S \times \hat{q}(\alpha),$$

donde el signo “-” es para convertir la ganancia en pérdida.

En general, de manera empírica, la estimación no-paramétrica funciona mejor cuando el tamaño de la muestra y de  $\alpha$  son razonablemente grandes.

Para estimar el expected-shortfall, considérese  $r_1, \dots, r_n$  rendimientos históricos del instrumento financiero en consideración y defínase  $L_i := -S \cdot r_i$ , entonces

$$\widehat{ES}^{np}(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^n L_i \cdot I(L_i \geq \widehat{VaR}^{np}(\alpha))}{\sum_{i=1}^n I(L_i \geq \widehat{VaR}^{np}(\alpha))} = -S \times \frac{\sum_{i=1}^n r_i \cdot I(r_i \leq \hat{q}(\alpha))}{\sum_{i=1}^n I(r_i \leq \hat{q}(\alpha))},$$

i.e. es el promedio sobre todas las  $L_i$ 's que son mayores a  $\widehat{VaR}^{np}(\alpha)$ ,  $I(L_i \geq \widehat{VaR}^{np}(\alpha))$  es una función indicadora que establece si  $L_i$  es mayor que  $\widehat{VaR}^{np}(\alpha)$  y análogamente  $I(r_i \leq \hat{q}(\alpha))$ .

En otras palabras, el ES se obtiene de promediar todos los rendimientos menores al cuantil  $\hat{q}(\alpha)$  y multiplicar dicho promedio por el monto de la posición  $-S$ .

#### 3.2.3.2. Estimación paramétrica

Para muestras pequeñas, se recomienda la estimación paramétrica pero si la muestra es lo suficientemente grande se pueden aprovechar las ventajas de la estimación no-paramétrica entre las cuales está el incorporar modelos GARCH para adaptar estas medidas de riesgo a la estimación actual de volatilidad.

Sea  $F(y|\theta)$  una familia paramétrica de distribuciones que se usan para modelar la distribución del rendimiento y supóngase que  $\hat{\theta}$  es un estimado de  $\theta$  (por ejemplo, el estimador máximo verosímil, por momentos, por mínimos cuadrados, etc.) calculado a partir de los rendimientos históricos. Entonces  $F^{-1}(\alpha|\hat{\theta})$  es un  $\alpha$ -cuantil de la distribución del rendimiento. Entonces, una estimación paramétrica del VaR es

$$\widehat{VaR}^{par}(\alpha) := S \cdot F^{-1}(\alpha|\hat{\theta}).$$

Sea  $f(y|\theta)$  la correspondiente función de densidad de  $F(y|\theta)$ . Un estimado paramétrico del expected-shortfall es

$$ES^{par}(\alpha) := -\frac{S}{\alpha} \int_{\infty}^{F^{-1}(\alpha|\hat{\theta})} x f(x|\hat{\theta}) dx$$

### Observación 3.2.1.

Calcular la integral para la estimación no-paramétrica del expected-shortfall, no siempre es sencillo. Se pueden utilizar métodos de integración numérica para aproximar ésta. En los casos populares, en los que la distribución del rendimiento es normal o  $t$  de Student, sí hay expresiones cerradas para dicha integral.  $\nabla$

### Ejemplo 3.2.2. (Estimación del ES con suposición $t$ de Student)

Supóngase que el rendimiento tiene una distribución con media  $\mu$ , parámetro de escala  $\lambda$  e índice  $\nu$ . Sean  $f_\nu$  y  $F_\nu$  las funciones de densidad y distribución de la  $t$  de Student con  $\nu$  grados de libertad, respectivamente. En este caso, al resolver la integral se tiene que

$$ES^t(\alpha) = S \left[ -\mu + \lambda \left( \frac{f_\nu(F_\nu^{-1}(\alpha))}{\alpha} \left( \frac{\nu + (F_\nu^{-1}(\alpha))^2}{\nu - 1} \right) \right) \right]$$

$\nabla$

### Ejemplo 3.2.3. (Estimación del ES con suposición normal)

Supóngase que el rendimiento tiene una distribución con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ . Al resolver la integral se tiene que

$$ES^{norm}(\alpha) = S \left[ -\mu + \frac{\sigma}{\alpha} \phi(\Phi^{-1}(\alpha)) \right]$$

$\nabla$

### 3.2.3.3. Intervalos de confianza para VaR y ES mediante Bootstrap

La estimación del VaR y del ES es precisamente eso, una estimación calculada para una muestra histórica de datos. Si se utiliza una muestra distinta de datos, la estimación de estas medidas de riesgo será diferente.

Afortunadamente, se puede obtener intervalos de confianza para la estimación del VaR así como para el ES mediante *bootstrapping*.

Supóngase que se tienen  $B$  muestras bootstrap de los datos de rendimientos. Entoces, se obtiene una estimación del VaR y del ES para cada una de dichas muestras bootstrap (ya sea paramétricamente ó no) y para la muestra original.

Se considerará un coeficiente de confianza del intervalo bootstrap de  $1 - \gamma$ .

Es importante mencionar que este coeficiente de confianza  $1 - \gamma$  es distinto al coeficiente de confianza  $\alpha$  que se utiliza en el VaR y que es denotado por  $1 - \alpha$ .

Dado que es fácil de confundir a  $\alpha$  con  $\gamma$ , se precisará la diferencia de ambos ya que es importante que sean distinguidos debido a que tienen diferente interpretación.

$VaR(\alpha)$  se define como la probabilidad de que una pérdida sea mayor a  $VaR(\alpha)$  es  $\alpha$ . Por otro lado,  $\gamma$  es el coeficiente de confianza para el intervalo de confianza del  $VaR(\alpha)$  y  $ES(\alpha)$ .

Si muchos intervalos de confianza son contruidos, entonces aproximadamente  $\gamma$  de ellos, no contienen la medida de riesgo real.

Entonces, se puede decir que  $\alpha$  habla del monto de pérdida de la inversión mientras que  $\gamma$  habla de la correcta construcción del intervalo de confianza.

Una alternativa para explicar la diferencia entre  $\alpha$  y  $\gamma$  es que el  $VaR(\alpha)$  y  $ES(\alpha)$  miden el riesgo debido a la incertidumbre sobre futuras pérdidas, asumiendo un conocimiento perfecto de la distribución de pérdidas, mientras que los intervalos de confianza nos explican la incertidumbre de estas medidas debido a un conocimiento imperfecto de la distribución de pérdidas.

## 3.3. Regresión cuantílica en administración de riesgos

Como la estimación cuantílica sólo es influenciada por el comportamiento local de la distribución condicional cerca del cuantil específico, los estimados no son sensibles a obser-

---

vaciones outlier. Dicha propiedad es especialmente atractiva en aplicaciones financieras por lo cuestionable de las suposiciones de normalidad.

La regresión cuantílica es una metodología más robusta en el análisis estadístico; ésta muestra robustez ante shocks extremos y facilita la inferencia sin hacer suposiciones distribucionales.

### 3.3.1. Modelos para el Valor en Riesgo

Ya se dijo que el valor en riesgo es una medida obligatoria en términos de regulación ya que éste representa la pérdida en el valor de mercado de un activo en un horizonte de tiempo dado que es superada, con probabilidad  $\tau$  (donde  $\tau$  generalmente es un número pequeño 0.005, 0.01 ó 0.05). Para un serie de tiempo de los rendimientos de un activo,  $\{r_t\}_{t=1}^n$ , el  $\tau$ -VaR al tiempo  $t$ , denotado como  $VaR_t$ , se define mediante

$$\mathbb{P}(r_t < -VaR_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \tau$$

donde  $\mathcal{F}_{t-1}$  denota el conjunto de información al tiempo  $t-1$ , incluyendo valores pasados de los rendimientos y posiblemente los valores de algunas covariables de  $X_t$ . Es decir, es el  $\tau$ -cuantil negativo de los rendimientos.

Si se supone que la serie de tiempo para los rendimientos se modelan como

$$r_t = \mu_t + \sigma_t \epsilon_t,$$

donde  $r_t$  es el rendimiento de un activo al tiempo  $t$  y  $\mu_t, \sigma_t \in \mathcal{F}_{t-1}$ . Las variables aleatorias  $\epsilon_t$  son sucesiones de diferencias martingala. Entonces el Valor en riesgo Condicionald e  $r_t$  dado  $\mathcal{F}_{t-1}$  es

$$VaR_t(\tau) = \mu_t + \sigma_t Q^{(\tau)}(\epsilon),$$

donde  $Q^{(\tau)}(\epsilon)$  denota el Valor en riesgo no-condicional del término de error  $\epsilon_t$ . Suponiendo normalidad condicional, el VaR al 5% al tiempo  $t$  se puede calcular como

$$VaR_t(0.05) = \mu_t + 1.65\sigma_t$$

donde  $\mu_t$  y  $\sigma_t$  son la media y volatilidad condicional para  $r_t$ .

#### 3.3.1.1. Regresión cuantílica en modelos de heteroscedasticidad condicional

De manera más general, se puede modelar la volatilidad condicional usando un proceso ARCH, en el que se supone una estructura auto-regresiva en la volatilidad

$$\sigma_t^2 = w_0 + \sum_{j=1}^p w_j \epsilon_t - j^2,$$

ó mediante un proceso GARCH

$$\sigma_t^2 = w_0 + \sum_{i=1}^q \lambda_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p w_j \epsilon_{t-j}^2,$$

Una especificación muy común es el modelo  $AR(1) - GARCH(1, 1)$  en el que la ecuación de media condicional se modela mediante un proceso  $AR(1)$  para considerar el comportamiento débilmente estacionario de los rendimientos diarios, i.e.

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= a_0 + a_1 r_t + \epsilon_{t+1}, \quad \epsilon_{t+1} \sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= w_0 + w_1 \sigma_{t-1}^2 + w_2 \epsilon_{t-1}^2 \end{aligned}$$

Sin embargo, también hay evidencia empírica en la que las series financieras y las distribuciones de los rendimientos no se aproximan bien mediante modelos Gaussianos. Además, es común que los rendimientos tengan una asimetría (skewness) negativa y kurtosis muy grandes; y también observaciones extremas de los rendimientos pueden afectar el desempeño de los mecanismos de estimación e inferencia diseñados bajo condiciones Gaussianas. Esto es particularmente cierto en modelos ARCH y GARCH cuya estimación de la varianza es muy sensible a grandes innovaciones. Es por esta razón que ahora se tiene interés en estimadores más robustos de los cuantiles condicionales.

En este sentido, la regresión cuantílica parece adecuada para para estimar el VaR. Por definición, el Valor en Riesgo es un cuantil condicional y naturalmente está relacionado con la estimación por regresión cuantílica.

Supóngase que se tiene una muestra de rendimientos  $r_1, \dots, r_n$  y que el  $\tau$ -cuantil condicional de  $r_t$  dado  $X_t \in \mathcal{F}_{t-1}$  es

$$Q^{(\tau)}(r_t | X_t) = g(X_t, \beta(\tau)),$$

donde  $g(\cdot)$  es una función conocida. Entonces, se puede considerar la estimación por regresión cuantílica

$$\hat{\beta}(\tau) = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^k} \sum_{t=1}^n \rho_\tau(r_t - g(X_t, \beta(\tau)))$$

y por lo tanto, el  $\tau$ -cuantil condicional de  $r_t$  se puede estimar como

$$\hat{Q}^{(\tau)}(r_t | X_t) = g(X_t, \hat{\beta}(\tau)).$$

Un caso particular, es en caso en el que el cautil no condicional se puede estimar haciendo  $X_t \equiv 1$  y  $g(X_t, \beta(\tau)) \equiv \beta$ .

Para la estimación se puede incorporar regresión cuantílica con diferentes tipos de modelos de volatilidad populares en finanzas tales como e ARCH y el GARCH.

### Modelos de regresión cuantílica ARCH

Considérese el siguiente proceso  $ARCH(p)$  lineal

$$u_t = \sigma_t \cdot \epsilon_t, \quad \sigma_t = \gamma_0 + \gamma_1 |u_{t-1}| + \dots + \gamma_p |u_{t-p}|, \quad (3.1)$$

donde  $\gamma_0 \in \mathbb{R}_+$  y  $\gamma_1, \dots, \gamma_p \in [0, \infty)$  y  $\{\epsilon_t\}$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que toman valores en el intervalo  $(0,1)$  con funciones de distribución y densidad  $f(\cdot)$  y  $F(\cdot)$ , respectivamente.

Si se define

$$\gamma(\tau) := (\gamma_0 F^{-1}(\tau), \dots, \gamma_p F^{-1}(\tau))^\top, \quad Z_t := (1, |u_{t-1}|, \dots, |u_{t-p}|)^\top,$$

entonces el cuantil condicional de  $u_t$  al nivel  $\tau$  es

$$Q^{(\tau)}(u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \gamma_0(\tau) + \gamma_1(\tau) |u_{t-1}| + \dots + \gamma_p(\tau) |u_{t-p}| = \gamma(\tau)^\top Z_t,$$

que se puede estimar a partir de regresión cuantílica lineal de  $u_t$  sobre  $Z_t$

$$\min_{\gamma} \sum_t \rho_{\tau}(u_t - \gamma^\top Z_t),$$

donde  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p)^\top$ .

Se puede estudiar el comportamiento asintótico del estimador por regresión cuantílica. Supóngase que  $u_t$  está dada por el modelo anterior,  $\mathbb{E}(|u_t|^{2+\delta}) < \infty$ , que  $f$  está acotada y para todo  $\tau \in (0, 1)$  se cumple que  $f(F^{-1}(\tau)) > 0$ . Entonces, los cuantiles  $\hat{\gamma}(\tau)$  se pueden representar como

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}(\tau) - \gamma(\tau)) = \frac{\Sigma_1^{-1}}{f(F^{-1}(\tau))} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n Z_t^\top \psi_{\tau}(\epsilon_{t\tau}) + o_p(1),$$

donde  $\Sigma_1 = \mathbb{E} \left[ \frac{Z_t Z_t^\top}{\sigma_t} \right]$  y  $\epsilon_{t\tau} = \epsilon_t - F^{-1}(\tau)$ . Entonces, se satisface que asintóticamente

$$\sqrt{n}(\hat{\gamma}(\tau) - \gamma(\tau)) \rightarrow N \left( 0, \frac{\tau(1-\tau)}{f^2(F^{-1}(\tau))} \Sigma_1^{-1} \Sigma_0 \Sigma_1^{-1} \right),$$



donde  $\Sigma_0 = \mathbb{E}(Z_t Z_t^\top)$ .

En varias aplicaciones, la heteroscedasticidad condicional se modela sobre los residuales de una regresión. Por ejemplo, se puede considerar un modelo AR-ARCH

$$Y_t = \alpha^\top X_t + u_t,$$

donde  $X_t = (1, X_{1,t}, \dots, X_{k,t})^\top$ ,  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)^\top$  y  $u_t$  es un proceso  $ARCH(p)$  lineal como en (3.1). Entonces, los cuantiles condicionales están dados por

$$Q^{(\tau)}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha^\top X_t + \gamma(\tau)^\top Z_t.$$

Una manera de estimar este modelo es construir una estimación conjunta de  $\alpha$  y  $\gamma(\tau)$  basándose en regresión cuantílica no-lineal, sin embargo como se mencionó en la Sección ? del Capítulo 2? esta tarea no es necesariamente sencilla. Por lo tanto, se considerará el procedimiento de dos pasos que estima  $\alpha$  en el primer paso y después  $\gamma(\tau)$  basándose en los residuales estimados. También en la Sección ? del Capítulo 2? se mencionó que este procedimiento de dos pasos tiene algunas deficiencias porque la estimación preliminar de  $\alpha$  puede afectar la estimación en el segundo paso de  $\gamma(\tau)$ , sin embargo es computacionalmente sencillo y es el estándar en algunas aplicaciones.

### Modelos de regresión cuantílica GARCH

Los modelos GARCH son más simples de estimar pero no pueden capturar de manera parsimoniosa la influencia de shocks pasados como lo hacen los modelos GARCH. Sin embargo, la regresión cuantílica sobre modelos GARCH es altamente no-lineal y eso complica su estimación.

Considérese el modelo  $GARCH(p, q)$  lineal

$$\begin{aligned} u_t &= \sigma_t \cdot \epsilon_t, \\ \sigma_t &= \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1} + \dots + \beta_p \sigma_{t-p} \\ &\quad + \gamma_1 |u_{t-1}| + \dots + \gamma_q |u_{t-q}|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Como antes, si  $\mathcal{F}_{t-1}$  representa la información hasta el tiempo  $t-1$ . Entonces el cuantil condicional al nivel  $\tau$  de  $u_t$  dada la información  $\mathcal{F}_{t-1}$  está dado por

$$Q^{(\tau)}(u_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \theta(\tau)^\top Z_t, \tag{3.3}$$

donde

$$Z_t^\top := (1, \sigma_{t-1}, \dots, \sigma_{t-p}, |u_{t-1}|, \dots, |u_{t-q}|)^\top,$$

$$\theta(\tau)^\top := (\beta_0, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q)F^{-1}(\tau).$$

Como  $Z_t$  incluye  $\sigma_{t-1}, \dots, \sigma_{t-q}$ , que depende de parámetros desconocidos  $\theta = (\beta_0, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q)$  y datos pasados, se escribirá  $Z_t$  como  $Z_t(\theta)$  para enfatizar la no-linealidad y su dependencia de  $\theta$ . Si se usa estimación por regresión cuantílica no-lineal

$$\min_{\theta} \sum_t \rho_{\tau}(u_t - \theta^\top Z_t(\theta)) \quad (3.4)$$

para  $\tau$  fijo. Sin embargo, no se puede obtener un estimador consistente de  $\theta$  ya que éste ignora la dependencia de  $\sigma_{t-k}$  sobre la función completa  $\theta(\cdot)$ . Si la estructura de dependencia de  $u_t$  está caracterizada por el  $GARCH(p, q)$  lineal (3.2), se puede considerar el siguiente problema de regresión cuantílica restringido en vez de (3.4):

$$\begin{aligned} (\hat{\pi}, \hat{\theta}) &= \arg \min_{\pi, \theta} \sum_i \sum_t \rho_{\tau}(u_t - \pi_i^\top Z_t(\theta)) \\ \text{sujeto a } \pi_i &= \theta(F^{-1}(\tau_i)) \end{aligned}$$

La estimación de este problema de regresión cuantílica no-lineal es complicado. En Xiao & Koenker (2009) se propone un estimador de dos etapas que incorpora las restricciones globales y se enfoca en la aproximación local alrededor de un cuantil específico.

En la Sección ? del Capítulo 2? se estableció un método de estimación de dos pasos que se puede resumir como (i) el primer paso considera una estimación global para incorporar la dependencia global de los  $\sigma_{t-k}$ 's latentes en la estimación de  $\theta$  y (ii) usar lo obtenido en el primer paso y se centra la atención en el cuantil específico para encontrar al mejor estimado local del cuantil condicional.

Los estimados del VaR por regresión cuantílica tienen algunas propiedades deseables. Por ejemplo, éstas se comportan muy parecido a los estimados por modelos de volatilidad GARCH tradicionales en condiciones de mercado normales pero en épocas de alta incertidumbre en el mercado en el que los precios disminuyen considerablemente, los modelos tradicionales GARCH tienden a predecir VaRs implausiblemente altos. Por supuesto, esto ocurre porque la volatilidad y el VaR no son equivalentes: mientras grandes shocks positivos ó negativos indican alta volatilidad, sólo grandes shocks negativos indican un VaR alto; y los modelos GARCH tratan tanto a los shocks negativos como positivos como indicativos de una volatilidad alta.

El VaR estimado por regresión cuantílica ARCH/GARCH, predice alta volatilidad en la componente ARCH/GARCH también asigna una ponderación más alta al shock grande negativo del rendimiento que al positivo, haciendo que se tengan estimados más realistas.

### 3.3.1.2. Modelos CaViAR

Otro modelo basado en cuantiles muy popular es el de valor en riesgo condicional auto-regresivo (CAViaR) propuesto en Engle & Manganelli (2004). Dicho modelo supone que el  $\tau$ -cuantil condicional de  $r_t$  sigue en sí mismo una auto-regresión

$$Q^{(\tau)}(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i Q^{(\tau)}(r_{t-i}|\mathcal{F}_{t-i-1}) + \sum_{j=1}^q \alpha_j \ell(X_{t-j}),$$

donde  $X_{t-j} \in \mathcal{F}_{t-j}$  y  $\mathcal{F}_{t-j}$  representa la información al tiempo  $t-j$ . Esta representación sugiere que se puede modelar la dinámica local o la correlación local basándose directamente en los cuantiles condicionales. En Engle & Manganelli (2004) también se discute acerca de varias elecciones de  $\ell(X_{t-j})$ , llevando a varias especificaciones del modelo CAViaR.

Una elección natural del  $X_{t-j}$  es el rendimiento rezagado. Si se hace  $X_{t-j} = |r_{t-j}|$ , se obtiene

$$Q^{(\tau)}(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \beta_0^* + \sum_{i=1}^p \beta_i^* Q^{(\tau)}(r_{t-i}|\mathcal{F}_{t-i-1}) + \sum_{j=1}^q \gamma_j |r_{t-j}|,$$

que es un modelo CAViaR tipo-GARCH.

Si se hace  $X_{t-j} \equiv 0$ , entonces se obtiene el siguiente modelo auto-regresivo para los VaR's

$$Q^{(\tau)}(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i Q^{(\tau)}(r_{t-i}|\mathcal{F}_{t-i-1}).$$

En general, la estimación en el modelo CAViaR no es sencilla. Sea  $\theta$  el vector de parámetros desconocidos y por simplicidad en la notación, denótese  $Q^{(\tau)}(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) \equiv Q_t(\tau, \theta)$ . Entonces se estimará  $\theta$  a partir de minimizar la función objetivo

$$RQ_n(\tau, \theta) = \sum_t \rho_\tau(Y_t - Q_t(\tau, \theta)),$$

donde

$$Q_t(\tau, \theta) = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i Q_{t-i}(\tau, \theta) + \sum_{j=1}^q \alpha_j \ell(X_{t-j}).$$

Como los cuantiles condicionales en el modelo de regresión CAViaR se consideran como regresores y éstos son latentes, no se puede aplicar directamente las técnicas de regresión cuantílica (no-lineal) convencionales.

Como el proceso GARCH lineal tiene una representación  $CAViaR(p, q)$ , el procedimiento de dos pasos que se plantea en la sección ? del Capítulo ? se puede aplicar para estimar una clase de modelos CAViaR.

### 3.3.1.3. Modelos QAR

En muchas aplicaciones financieras, las dinámicas de la serie de tiempo puede ser más complicada que la auto-regresión clásica en la que la información pasada ( $Y_{t-j}$ ) sólo influencia la localización de la distribución condicional de  $Y_t$ . Por ejemplo, un hecho empírico común es que las correlaciones tienden a ser más grandes en mercados a la baja (*bear markets*) que en mercados a la alta (*bull markets*). Entonces, reconocer la que correlación es asimétrica es importante para la administración de riesgos y otras aplicaciones financieras.

En el Capítulo 2? se estudió una generalización de los modelos de series de tiempo con coeficientes constantes: el modelo de auto-regresión cuantílica (QAR). Dichos modelos establecen lo siguiente:

Dada una serie de tiempo  $\{Y_t\}$ , sea  $\mathcal{F}_t$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\{Y_s : s \leq t\}$ .  $\{Y_t\}$  es un proceso QAR de orden  $p$  si

$$Q^{(\tau)}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \theta_0(\tau) + \theta_1(\tau)Y_{t-1} + \dots + \theta_p(\tau)Y_{t-p}$$

donde se está suponiendo que  $\theta_0(\tau) + \theta_1(\tau)Y_{t-1} + \dots + \theta_p(\tau)Y_{t-p}$  es creciente con respecto a  $\tau$ .

Lo interesante de este modelo es que los coeficientes de auto-regresión pueden depender de  $\tau$  y por lo tanto variar para cuantiles diferentes de la distribución condicional. Por lo tanto, las variables condicionantes no sólo representan un desplazamiento de la localización de la distribución de  $Y_t$  sino también pueden alterar la forma y la escala de dicha distribución.

El modelo QAR se puede estimar a partir de

$$\hat{\theta}(\tau) = \arg \min_{\theta} \sum_t \rho_{\tau}(Y_t - \theta^{\top} X_t)$$

donde  $X_t = (1, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})^{\top}$  y  $\theta(\tau) = (\theta_0(\tau), \theta_1(\tau), \dots, \theta_p(\tau))^{\top}$ . En la Sección ? del Capítulo 2? ya se dijo que bajo suposiciones de regularidad, la distribución límite del estimado QAR satisface

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}(\tau) - \theta(\tau)) \rightarrow N(0, \tau(1 - \tau)\Omega_1^{-1}\Omega_0\Omega_1^{-1}),$$

donde  $\Omega_0 = \mathbb{E}(X_t X_t^{\top})$  y  $\Omega_1 := \lim \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n f_{t-1}(F_{t-1}^{-1}(\tau)) X_t X_t^{\top}$ .

Estos modelos QAR proporcionan más alternativas para series de tiempo que presentan una dinámica asimétrica y permiten persistencia local. Dichos modelos que pueden capturar las influencias sistemáticas de las variables condicionantes sobre la localización, escala y forma de la distribución condicional de la variable respuesta son una generalización elegante de los modelos clásicos de series de tiempo lineales con coeficientes constantes.

Otra característica importante de los modelos con coeficientes variables es que muestran la existencia de heteroscedasticidad condicional. En el Capítulo 2? se mencionó que un proceso QAR se puede reescribir como

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 Y_{t-1} + \dots + \theta_p Y_{t-p} + V_t,$$

donde  $\theta_j = \mathbb{E}(\theta_j(U_t))$  para  $j \in \{0, 1, \dots, p\}$  y

$$V_t = [\theta_0(U_t) - \mathbb{E}(\theta_0(U_t))] + [\theta_1(U_t) - \mathbb{E}(\theta_1(U_t))]Y_{t-1} + \dots + [\theta_p(U_t) - \mathbb{E}(\theta_p(U_t))]Y_{t-p}$$

i.e.  $V_t$  es una sucesión diferencia martingala. Es decir, el proceso QAR en un proceso AR con heteroscedasticidad condicional.

En este sentido, los modelos QAR también son una generalización de los modelos ARCH/GARCH en el sentido de que ambos son de heteroscedasticidad condicional pero los ARCH/GARCH sólo se enfocan en los dos primeros momentos y los QAR van más allá del segundo momento y permiten una estructura más flexible en momentos de orden superior. Ambos son parecidos en los dos primeros momentos pero pueden ser muy diferentes más allá de la varianza condicional.

### 3.3.2. Modelos para el *Expected shortfall*

El expected shortfall, ES, se define como la pérdida esperada una vez que se supero al VaR.

**Definición 3.3.1.** (*Expected shortfall*)

Se define el expected shortfall de un rendimiento al nivel  $\tau \in (0, 1)$  como

$$ES_\tau = \mathbb{E}(r_t | r_t < Q^{(\tau)}(r_t)),$$

donde  $Q^{(\tau)}(r_t)$  es el  $\tau$ -cuantil de  $r_t$ .

**Definición 3.3.2.** (*Expected shortfall condicional*)

Se define el expected shortfall de un rendimiento al nivel  $\tau \in (0, 1)$  como

$$ES_\tau(x) = \mathbb{E}(r_t | r_t < Q^{(\tau)}(r_t | X_t), X_t = x),$$

donde  $Q^{(\tau)}(r_t | X_t)$  es el  $\tau$ -cuantil de  $r_t$ .

**Observación 3.3.1.**

Nótese que

$$ES_\tau(x) = \int_0^1 w_\tau(s) Q^{(s)}(r_t | X_t = x) ds,$$

donde  $w_\tau(s) = \frac{1}{s} I(s \leq \tau)$ .

Esta manera de expresar al expected-shortfall permite que se puedan definir otras medidas de riesgo al considerar a  $w_\tau(\cdot)$  como cualquier función no negativa, no decreciente, continua por la derecha e integrable, definida en el intervalo  $[0, 1]$  tal que  $\int_0^1 w_\tau(s) ds = 1$ . Dichas medidas de riesgo se conocen como medidas de riesgo espectrales y se puede demostrar que son medidas de riesgo coherentes.  $\nabla$

A diferencia de VaR..

El expected-shortfall se puede estimar a partir de regresiones cuantílicas. Como la estimación del expected-shortfall requiere conocimiento acerca del correspondiente cuantil, se puede estimar el  $\tau$ -cuantil de  $r_t$ ,  $Q^{(\tau)}(r_t)$  a partir del  $\tau$ -cuantil muestral de  $\{r_1, \dots, r_n\}$ ,  $\widehat{Q}^{(\tau)}(r)$ . Posteriormente, se puede construir un estimador no-suavizado de  $ES_\tau$  como

$$\widehat{ES}_\tau = \frac{1}{\tau n} \sum_{t=1}^n r_t 1(r_t \leq \widehat{Q}^{(\tau)}(r)).$$

También se puede construir un estimador suavizado como

$$\widetilde{ES}_\tau = \frac{1}{\tau n} \sum_{t=1}^n r_t \mathcal{K}_h(r_t - \widehat{Q}^{(\tau)}(r)),$$

donde

$\mathcal{K}_h(\cdot) = \mathcal{K}(\cdot/h)$  y  $\mathcal{K}(\cdot)$  es una función de supervivencia con segunda derivada continua, soporte compacto tal que  $\mathcal{K}(x) = 1$  para  $x \leq -1$  y  $\mathcal{K}(x) = 0$  para  $x \geq 1$  y  $h$  es un parámetro de anchura.

El expected-shortfall condicional se puede estimar de manera análoga. En este caso, se considera una regresión cuantílica adecuada para estimar el cuantil condicional  $Q^{(\tau)}(r_t|X_t)$ ,

$$\begin{aligned} ES_\tau(x) &= \mathbb{E}[r_t I(r_t < Q^{(\tau)}(r_t|X_t)) | X_t = x] \\ &= \mathbb{E}(r | X = x) - \frac{1}{\tau} \mathbb{E}[\rho_\tau(r_t - \widehat{Q}^{(\tau)}(r_t|X_t)) | X_t = x] \end{aligned}$$

Se puede estimar el expected-shortfall condicional  $ES_\tau(x)$  reemplazando las esperanzas condicionales con los correspondientes promedios locales y obtener

$$\widehat{ES}_\tau(x) = \frac{1}{\widehat{f}(x)} \frac{1}{nh^d} \sum_{t=1}^n K\left(\frac{X_t - x}{h}\right) \left[ r_t - \frac{1}{\tau} \rho_\tau\left(r_t - Q^{(\tau)}(r_t|X_t)\right) \right],$$

donde

$$\widehat{f}_X(x) = \frac{1}{nh^d} \sum_{t=1}^n K\left(\frac{X_t - x}{h}\right),$$

y  $h \equiv h(n)$  es el parámetro de anchura que se usó para estimar el ES.

Bajo ciertas condiciones de regularidad, se pueden obtener estimadores consistentes y asintóticamente normales; además se puede hacer inferencia sobre  $ES$  utilizando estimadores adecuados de la varianza.

En Linton & Xiao (2013) se estudió la estimación e inferencia con respecto a  $ES$  para series de tiempo con varianza no-finita. En particular, se considera una muestra aleatoria  $\{r_1, \dots, r_n\}$  de una serie de tiempo estacionaria y mixta con probabilidades de cola que varían regularmente e índice de variación regular para  $r_t$  de  $\theta \in (1, 2)$ , i.e. que el expected-shortfall exista pero  $r_t$  tenga varianza infinita. En Linton & Xiao (2013) se propuso que si se satisfacen las siguientes condiciones de regularidad

1. Mezcla fuerte que controle la dependencia.
2. Continuidad de la distribución.
3. Condición de equilibrio de la cola.
4. Condición de anti-clustering

Entonces tanto el estimador no-suavizado  $\widehat{ES}_\tau$  como el estimador suavizado  $\widetilde{ES}_\tau$  tienen distribuciones límites dadas por

$$n^{\frac{\theta-1}{\theta}} [\widehat{ES}_\tau - ES_\tau] \rightarrow \frac{1}{\tau} W$$

y

$$T^{\frac{\theta-1}{\theta}} [\widehat{ES}_\tau - ES_\tau] \rightarrow \frac{1}{\tau} W$$

donde  $W$  es una variable aleatoria estable. La tasa de convergencia de los estimadores se determina a partir del parámetro  $\theta$ . En Linton & Xiao (2013) se propone un mecanismo de muestreo para hacer inferencia. Primero, el parámetro  $\theta$  se estima consistentemente y dada una muestra aleatoria  $r_1, \dots, r_n$ , se consideran sub-muestras de tamaño  $M$

$$\{r_t, \dots, r_{t+M-1}\}, \quad t = 1, \dots, n - M + 1$$

y se puede estimar el expected-shortfall a partir de las submuestras como

$$\widehat{ES}_\tau(M, t) = \frac{1}{\tau M} \sum_{s=0}^{M-1} r_{t+s} I\left(r_{t+s} \leq \widehat{Q}_{r,t}^{(\tau)}\right)$$

donde  $\widehat{Q}_{r,t}^{(\tau)}$  es el correspondiente estimador basado en la submuestra  $\{r_t, \dots, r_{t+M-1}\}$

Sea  $\widehat{F}_n(y)$  la distribución de muestreo de  $n^{\frac{\theta-1}{\theta}} [\widehat{ES}_\tau - ES_\tau]$ . Se aproximará a  $\widehat{F}_n(y)$  mediante

$$\widehat{F}_{n,M}(y) = \frac{1}{n - M + 1} \sum_{t=1}^{n-M+1} I\left(M^{\frac{\theta-1}{\theta}} [\widehat{ES}_\tau(M, t) - \widehat{ES}_\tau] \leq y\right)$$

Se puede demostrar que bajo condiciones de regularidad, se satisface que

$$\widehat{F}_{n,M}(y) \xrightarrow{P} F(y), \quad \text{conforme } n \rightarrow \infty,$$

donde  $F(y)$  es la distribución límite de  $n^{\frac{\theta-1}{\theta}} [\widehat{ES}_\tau - ES_\tau]$ .

Este procedimiento de sub-muestreo es robusto en el sentido de que también es consistente incluso si se tiene varianza finita y las condiciones de normalidad se siguen satisfaciendo.

Se puede aplicar un procedimiento análogo al estimador suavizado.





## Capítulo 4

# Construcción de una estrategia de ajuste para el Valor en Riesgo del cambio en el precio de la gasolina en el mercado internacional

### 4.1. Introducción

En este capítulo se construirá una estrategia de administración de riesgos que permita tener una cobertura ante cambios abruptos en los precios de la gasolina. Dicha cobertura se construirá basándose en series históricas de dos de las principales referencias de precio de gasolina en el mercado internacional:

1. Instrumento Financiero Derivado de mayor liquidez en el mercado de *commodities de energía*, Futuro RBOB.
2. Gasolina Regular (M ó gasolina Magna mexicana).

Dicha estrategia se basará en el Valor en Riesgo, y la estimación de éste se hará utilizando las técnicas basadas en cuantiles que se estudiaron a lo largo de este trabajo y se compararán con otras dos metodologías populares en el cálculo del Valor en Riesgo.

Las metodologías que se analizarán son:

1. Metodología histórica.
2. Modelo clásico  $ARMA - GARCH(1, 1)$ .
3. Modelo  $ARMA - GARCH$  con errores  $t$  asimétricos.
4. Modelo QAR.

## 5. Modelo ARMA-ARCH con regresión cuantílica

Para dichas implementaciones se usará el lenguaje de programación R, con principal énfasis en las bibliotecas “quantreg” y “rugarch”.

## 4.2. Administración de Riesgos en mercados de energéticos

El riesgo de mercado en el que incurre una empresa comercializadora, impacta directamente en el desempeño del margen de ganancia que pueda obtener la empresa en las negociaciones que se realicen con sus contrapartes. Es por ello que es de suma importancia medirlo, monitorearlo y mitigarlo.

En una empresa comercializadora de gasolina, el riesgo de mercado se deriva debido a las fluctuaciones de precio que puedan surgir durante el periodo en que este expuesta la posición del producto a la compra o a la venta, según sea el caso. Esto es debido a que las negociaciones de precio del producto que se compra o se vende, se pacta al rededor de 15 días de antes de que ocurra su apreciación. Una vez que se concluya la ventana de precio, éste se fija y deja de estar expuesta, es decir, se convierte en una posición sin riesgo.

Es por ello que la métrica del VaR es de real importancia, ya que es una métrica que sirve para medir y monitorear dicho riesgo y así supervisar que la actividad comercial no exceda los límites de pérdida establecidos por la propia institución.

## 4.3. El contrato de Futuro RBOB

La Gasolina es un subproducto de la refinación del petróleo crudo. El principal precio de referencia y la forma más común de comercializar con gasolinas es a través del contrato de futuro RBOB, por sus siglas en inglés *Reformulated Gasoline Blendstock for Oxygenate Blending* que significa mezcla de gasolina regular reformulada la cual contiene un 10% de etanol como oxigenante.

Este contrato es de los principales vehículos para los participantes del mercado que quieran especular o cubrir en el mercado de gasolina.

Los instrumentos financieros derivados tienen como objetivo mitigar el riesgo de mercado incurrido por posiciones de compra ó venta de productos, el cual su metodología de valuación está sujeta al precio de un activo subyacente.

### **Definición 4.3.1.** *Contrato de Futuro*

Los contratos de futuros son instrumentos financieros que permiten a los participantes del mercado compensar o asumir el riesgo de un cambio de precio de un activo a lo largo

---

del tiempo.

Un contrato de futuros es un acuerdo legal para comprar o vender un activo estandarizado en una fecha específica o durante un mes específico que se facilita a través de un mercado (bolsa), de futuros.

El valor del subyacente del contrato de futuro, es el promedio del mes de la Gasolina RBOB. El volumen de esta contrato es de 42,000 galones. El volumen esta en Galones y la moneda en centavos de dolar (usd).

#### 4.3.1. Entendimiento del contrato de futuros y su comercialización

Cada contrato de futuros tiene un activo subyacente, la cantidad del activo, el lugar de entrega y la fecha de entrega.

El contrato de Futuro es un contrato estandarizado y comercializado en un mercado, (bolsa), regulado lo cual lo hace un producto indispensable para los comerciantes, productores e inversionistas. La bolsa tambien garantiza el cumplimiento del contrato por lo que elimina el riesgo de contraparte.

Todos los contratos de futuros son negociados bajo una cámara de compensación centralizada.

Esto significa que cuando se compra o se vende un contrato de futuros, la bolsa se convierte en el comprador de cada vendedor y el vendedor de cada comprador. Esto reduce en gran medida el riesgo crediticio asociado con el incumplimiento de un solo comprador o vendedor.

Un contrato estandarizado es aquel en el que las especificaciones del contrato son idénticas para todos los participantes. Dada la estandarización de las especificaciones del contrato, la única variable del contrato es el precio.

El contrato de Futuro RBOB, se negocia en el Chicago Mercantile Exchange (CME) con el símbolo RB. El precio del contrato se cotiza en centavos por galón.

La unidad de contrato es para 42, 000 galones o 1, 000 barriles. El contrato se resuelve mediante entrega física. Esto significa que la mayoría de los inversores deben liquidar sus posiciones antes de la expiración de los contratos.

## 4.4. El precio de la Gasolina

Los precios de la gasolina, lógicamente tienen un alto grado de correlación con el comportamiento del precio del petróleo crudo, ya que la gasolina se destila del crudo. Por lo tanto,

---

los factores globales de oferta y demanda de petróleo crudo también se aplican a la gasolina.

Aún así, el mercado de gasolina, en particular la gasolina RBOB, tiene sus propios factores de oferta y demanda.

Algunos de los principales factores de fluctuación en el precio de la gasolina son:

- Precio del Crudo
- Margen de Refinación
- Costos de Distribución
- Eventos Climáticos
- Demanda Global
- Evetos Geo-políticos
- nivel de inventarios

**El precio del crudo.** La gasolina se deriva del refinado del petróleo crudo, por lo que el precio del crudo tiene un gran impacto en su precio. Varios factores pueden afectar el precio del crudo, sin embargo uno de los más fuerte es la economía del país. La fortaleza de la moneda. Por ejemplo, el precio del crudo generalmente se mueve en sentido inverso al precio del dolar USA.

**Margen de refinación.** Los costos de operación de las refinerías y la productividad de esas refinerías pueden tener un efecto importante en los precios de la gasolina. El costo del petróleo crudo y su refinación representan los componentes principales del precio de la gasolina.

**Costos de distrubución.** El transporte de gasolina desde las refinerías a las estaciones de servicio. Por lo general se cuenta con una red amplia de distribución tanto en ductos como carros tanque, pipas de manera terrestre y barcos para el transporte marítimo, que encarece el precio final de la gasolina.

**Eventos Climaticos.** Los huracanes en el Golfo de México pueden causar picos en los precios de los futuros de gasolina, ya que la mayoría de las refinerías de EE. UU. se encuentran en esa área.

**Eventos Geo-polítiocs.** Los Acuerdos de la OPEC, *Organization of the Petroleum Exporting Countries*, son de gran importancia en la. Las turbulencias en importantes países productores de petróleo pueden generar picos en los precios de la gasolina. En el pasado,

---

las guerras en Oriente Medio, los embargos petroleros, los golpes políticos y los actos de terrorismo han creado temores de interrupciones del suministro y precios más altos.

**La demanda estacional de la gasolina** juega un papel muy importante en los precios del mercado. Los precios de la gasolina muestran fuertes patrones estacionales. En el período previo al verano, los precios tienden a subir antes de la temporada alta de conducción (*summer driving season*), así los precios en abril y mayo suelen ser los más altos del año. Los precios tienden a bajar en el invierno cuando las inclemencias del tiempo mantienen a los consumidores fuera de las carreteras, generalmente en diciembre se alcanza el precio más bajo.

Los patrones estacionales también surgen como resultado de los requisitos de formulación de la gasolina. Las regulaciones ambientales en los Estados Unidos, por ejemplo, requieren que la gasolina vendida en el verano sea menos susceptible a la evaporación. Esto requiere que las refinerías sustituyan componentes más costosos en la mezcla de la gasolina.

#### 4.4.1. Gasolina Regular (M).

En términos prácticos, la diferencia de tipos de gasolina es el octanaje: el octano es la cantidad de compresión que un combustible puede soportar antes de encenderse. La gasolina conocida como regular (en México ?Magna?) es de un octanaje menor de 87 octanos y la gasolina conocida como premium es de un octanaje de 93 octanos.

Gasolina Regular en el mercado internacional se le conoce como gasolina convencional de grado M, que tiene un octanaje mínimo de 87.

### 4.5. Metodología Histórica para la estimación del Valor en Riesgo

La simulación histórica es una manera muy común para estimar el VaR. Este involucra utilizar información a pasado como guía de lo que pudiera ocurrir en el futuro.

Esta metodología utiliza los rendimientos históricos los cuales se traducen en las pérdida y ganancias de un portafolio para luego obtener el VaR a partir de su histograma. Si estos rendimientos son a un día, el horizonte estimado para el VaR observado será igualmente de un día.

Para calcular el VaR Histórico, el primer paso es identificar las variables del mercado que afectan al portafolio. Estas son típicamente tasas de cambio, precios de acciones, tasas de interés entre otras. Se sugiere tener los datos históricos de 502 días de los valores de estas variables de mercado y así tener 501 escenarios alternativos de los cambios de valor que pudieran suceder entre hoy y mañana para el conjunto de las variables.

---

Esto define la distribución de probabilidad de los cambios diarios en el valor del portafolio. Es importante mencionar, que los cambio en las variables se pueden cosiderar porcentuales o logarítmicas. Lo más apropiado es usar las logarítmicas por las siguientes razones:

- Su interpretación es equivalente al rendimiento compuesto continuamente.
- De esta manera los rendimientos se vuelven estacionarios, es decir, su media y su varianza a lo largo del tiempo son constantes.
- Es fácil extender el plazo de los rendimientos, por ejemplo el rendimiento a dos días es igual a la suma de los dos rendimientos a un día.
- En un mercado de alta volatilidad, la diferencia de los rendimientos continuos es pequeña a diferencia de los rendimientos discretos (porcentuales) que puede ser significativa.
- Se permite la comparación de rendimientos entre difernetes factores de reiso.

Una vez que se obtiene la distribución de los rendimientos, se obtienen diferentes percentiles. El nivel de significancia mas común utilizado en esta metodología es del 95 %.

#### 4.6. Metodología general de administración de riesgos

Para la Administración de Riesgos de Mercado de una empresa comercializadora de Gasolias, es importante tener metodologías, procesos, políticas y lineamientos asi como acciones que se implementen para identificar, medir, monitorear, limitar, controlar, informar y revelar los Riesgos de Mercado a los que se expone una empresa de dicha actividad comercial.

Es por ello que la métrica del VaR es una métrica que sirve para medir y monitorear dicho riesgo y así supervisar que la actividad comercial no exceda los límites establecidos por la propia institución.

Es así como el área comercial establece sus estrategias comerciales, alineadas a los objetivos de rentabilidad establecidos y manteniendo los niveles de Riesgo de Mercado dentro de los niveles de tolerancia al riesgo aprobados por la misma institución.

La metodología de cálculo de VaR que se detalla, está basada en el método histórico.

Para esta metodología de cálculo es importante definir la posición en riesgo como sigue:

**Definición 4.6.1.** *Posición en Riesgo: Es la posición neta resultante de las operaciones comerciales de compra-venta de diferentes productos e Instrumentos Financieros Derivados (IFD).*

---

Esta posición se dice en riesgo, ya que su precio aun no está definido. La ventana de valuación está dada en un horizonte de tiempo en el futuro.

Para este ejemplo, la posición de riesgo será de 300,000 barriles de gasolina M que se venden. Por ser una posición de venta el signo es positivo. También se tiene una posición corta de 300 lotes del futuro RBOB, esta posición es de signo negativo ya que es de compra.

Un lote de futuro RBOB está formado por 1,000 contratos y cada contrato por 42,000 galones. Cada barril equivale a 42 galones. Haciendo la conversión, la posición del derivado es de -300,000 barriles.

De lo anterior, se tiene que la posición neta en barriles es de 0 sin embargo, los productos y por lo tanto los precios son distintos para cada producto, (aunque es importante mencionar que están altamente correlacionados).

A partir de la posición en riesgo de cada producto a la que se tiene exposición en el mercado de gasolinas, se obtienen los precios históricos para 502 observaciones. La elección de este número de observaciones se basa en un horizonte de tiempo de 2 años aproximadamente.

Los precios se homologan a una misma medida de volumen y moneda, en este caso, dólares por barril (USD/BBL).

Como resultado, se tienen dos series de precio, cada una de 502 observaciones. En este caso 502 precios para la gasolina M y 502 precios para el futuro RBOB.

Como segundo paso se calcula para cada serie de precios, los rendimientos simples a un día. Cada serie de rendimientos está formada por 501 observaciones.

El siguiente paso es calcular el percentil al 5% de cada serie de rendimientos. Este dato será el que se defina como VaR estimado a 1 día de acuerdo a esta metodología.

A continuación definiremos el valor del portafolio al tiempo  $t$  como sigue:

**Definición 4.6.2.** *Valor Portafolio al tiempo  $t$ : es el resultado de multiplicar la posición en riesgo dada en barriles por el precio al tiempo  $t$ .*

Como último paso se multiplica el Valor Portafolio de cada producto por el VaR al 5% de la respectiva serie de rendimientos.

Para efectos de este ejercicio, el último precio conocido de la Gasolina M así como del Futuro RBOB es al 30 de julio del 2020, es decir:  $t = 30/07/2020$

---



El precio de la g Gasolina M en el tiempo t es de 46.34 usd/bbl. El precio del Futuro RB al tiempo t es de 51.26 usd/bb

**El Valor Portafolio para la posición de la Gasolina es igual a:**

$$VP(\text{gasolina}) = (300,000 \text{ bls} * 46.34 \text{ usd/bls}) = 13.9 \text{ millones de dólares.}$$

**El Valor Portafolio para la posición del Futuro RBOB es igual a:**

$$VP(\text{futuro}) = (-300,000 \text{ bls} * 51.26 \text{ usd/bls}) = -15.4 \text{ millones de dólares.}$$

Ahora bien, el VaR calculado mediante la metodología historica para el rendimiento de la Gasolina M es de -4.87 %, por otro lado el VaR calculado mediante la metodología historica para el rendimiento del Futuro RBOB es de -4.55 %.

Finalmente se multiplica el Valor de Portafolio de cada producto por su VaR estimado, es decir se obtiene la pérdida estimada del portafolio como sigue:

$$\text{Pérdida Estimada del Portafolio} = (13.9)*(-4.87 \%) - (15.4)*(-4.55 \%) = 23,854 \text{ usd.}$$

## 4.7. Estimación del Valor en Riesgo

En esta sección se estimará el Valor en Riesgo de los rendimientos diarios para los precios de la gasolina a partir de diferentes metodologías clásicas y algunas basadas en cuantiles que se estudiaron a lo largo de este trabajo.

Las metodologías que se analizarán son:

1. Metodología histórica.
2. Modelo clásico *ARMA – GARCH*(1, 1).
3. Modelo *ARMA – GARCH* con errores *t* asimétricos.
4. Modelo QAR.
5. Modelo ARMA-ARCH con regresión cuantílica

Primero se llevó a cabo un breve análisis descriptivo para tener algunas primeras nociones con respecto a los rendimientos de las series de precios observadas.

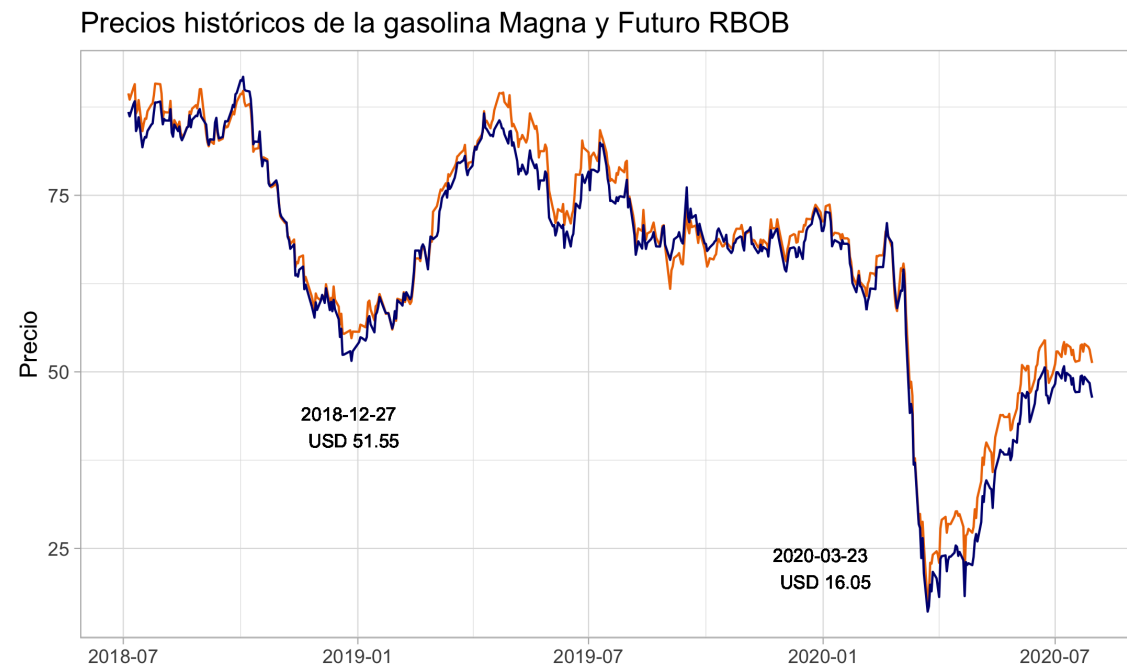
A continuación se muestra la gráfica con las series de precios de la Gasolina M y el Futuro RBOB. El periodo de tiempo que comprende la serie de precios es del 5 de Julio de 2018

---

al 30 de Julio de 2020. Los precios de ambas series estan dados en dolares por barril (usd/bl).

La gráfica anaranjada corresponde a la serie de los precios del Futuro RBOB y la azul corresponde a la serie de precios de la Gasolina M.

**A continuación se muestra la grafica de precios de julio de 2018 a julio de 2020.**



Se puede observar en la gráfica que existe una alta relación (correlación en particular) entre ambas series debido a que el Futuro RBOB es un Instrumento Financiero Derivado que se utiliza como instrumento de cobertura para minimizar los riesgos de mercado a los que está expuesta la gasolina.

Se puede observar en la gráfica, que durante el periodo de marzo a mayo del 2020 existe un importante cambio de nivel de las series e inicia un periodo de alta volatilidad, inclusive se considera como una volatilidad atípica de un mercado estresado. Se puede atribuir esta variabilidad grande a los siguientes acontecimientos de mayor reelevancia.

- En marzo del 2020, se provocó una caída en el precio de mercado por el incremento de producción de Rusia y Arabia Saudita de petróleo Crudo al no llegar a un acuerdo en la OPEP. Reunion 8 de marzo, 2020.
- el Futuro RBOB Nymex, cayó de 67 usd/bl a 17 usd/bl, lo que representa una caída del 74 % del 3 al 23 de marzo.

- El 20 de abril, ante la caída del precio del futuro del WTI a -37.63 usd/bl, los marcadores gasolina y otros productos como diésel y naftas, se vieron nuevamente afectados a la baja.
- En abril se produjo una baja demanda a nivel mundial de productos refinados por la pandemia de COVID-19.

#### 4.7.1. Análisis Descriptivo de las series de precios

Para conocer la forma de las distribuciones de las variables bajo estudio, se analizarán los gráficos y estadísticos descriptivos para ambas series.

La siguiente tabla muestra un resumen de estadísticos para los precios de la gasolina M así como del Futuro RBOB.

<i>Precios RB Nymex</i>		<i>Precios Gasolina M</i>	
Mean	66.9419909	Mean	65.23457533
Standard Error	0.71066125	Standard Error	0.746874655
Median	69.1908	Median	68.376
Mode	67.8048	Mode	86.184
Standard Deviation	16.3142811	Standard Deviation	17.14561351
Sample Variance	266.155769	Sample Variance	293.9720627
Kurtosis	0.40796781	Kurtosis	0.483926937
Skewness	-0.8890492	Skewness	-0.991279624
Range	73.521	Range	75.7302
Minimum	17.2956	Minimum	16.0524
Maximum	90.8166	Maximum	91.7826
Sum	35278.4292	Sum	34378.6212
Count	527	Count	527
Confidence Level(95.0%)	1.39608281	Confidence Level(95.0%)	1.467223479

La siguiente tabla muestra un resumen de estadísticos para los rendimientos diarios tanto de la gasolina M como del Futuro RBOB.

	Gasolina M	Futuro RBOB
Media	-0.001193	-0.001058
Mediana	0.001045	0.001240
Percentil 1 %	-0.17437	-0.11999
Percentil 5 %	-0.04886	-0.04611
Percentil 10 %	-0.03352	-0.03147
Desviación Estándar	0.04188469	0.04094902
Mínimo	-0.289642	-0.385352
Máximo	0.259418	0.223966
Asimetría	-1.189759	-2.340825
Curtosis	17.06483	26.50714
AC(1)	-0.037	-0.009
AC(2)	0.029	-0.008
AC(3)	0.047	0.051
AC(4)	0.122	0.052
AC(5)	0.064	0.1
AC(10)	0.142	0.095
AC(15)	-0.060	-0.116

Del analisis descriptivo de ambas series, se puede concluir lo siguiente:

- De acuerdo al coeficiente de curtosis, ambas series tienen una distribución leptocúrtica, es decir, es apuntada y con colas más gruesas que la normal. La mayor leptocurtosis la tiene la serie del Futuro RB.
- El coeficiente de asimetría (*skewness* en inglés) indica que ambas distribuciones son extremadamente sesgadas a la izquierda, teniendo la mayor asimetría la serie de Futuro RB.
- Ambas series tienen alta volatilidad, indicada por la desviación estándar.

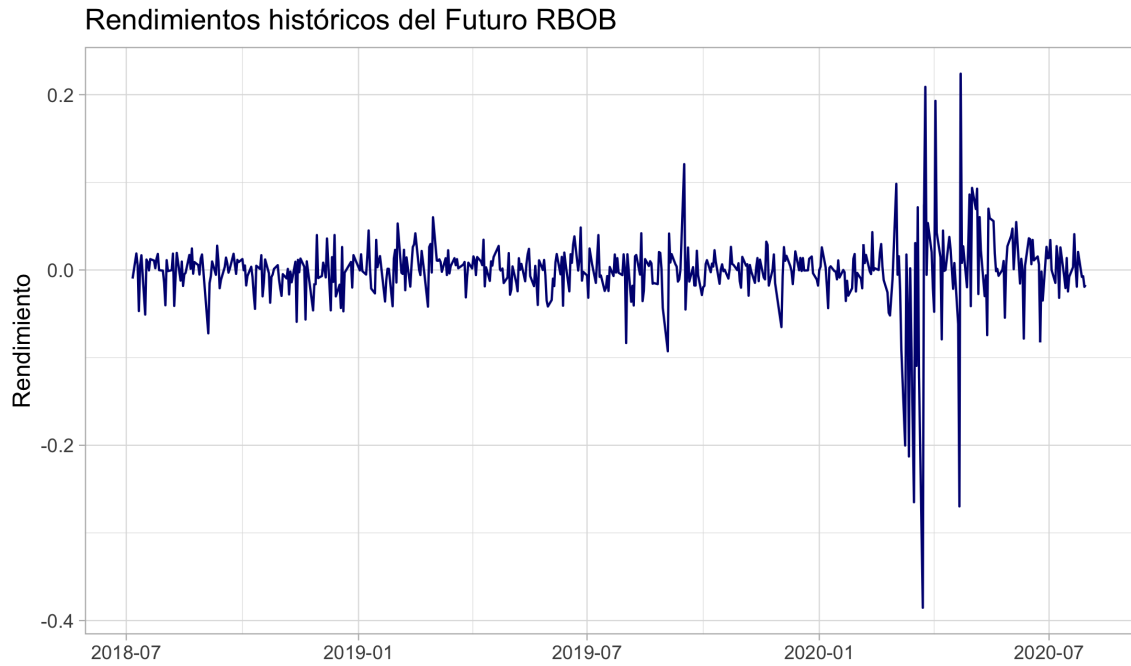
De lo anterior, se puede concluir que las series no siguen una distribución normal. Más adelante, se muestra una validación gráfica de dicha afirmación.

#### 4.7.1.1. Futuro RBOB

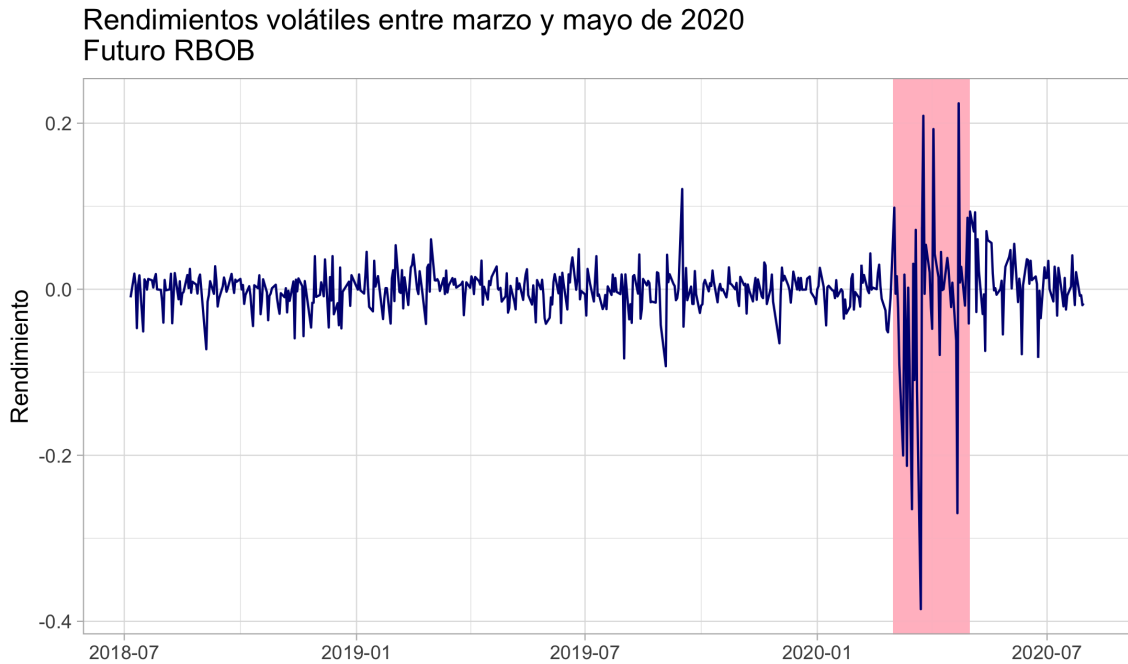
A continuación se muestran las diferentes gráficas que arroja el análisis descriptivo.

Se puede observar en la gráfica de rendimientos, una volatilidad dentro de un rango relativamente constante desde julio de 2018 hasta marzo de 2020, después entra un periodo de alta volatilidad que corresponde a un periodo atípico en el mercado.

---



Se puede observar en la gráfica de rendimientos, un mercado estresado de marzo a mayo del 2020 lo que conlleva a una volatilidad atípica de mercado. Este periodo está señalado en la gráfica con una banda roja.

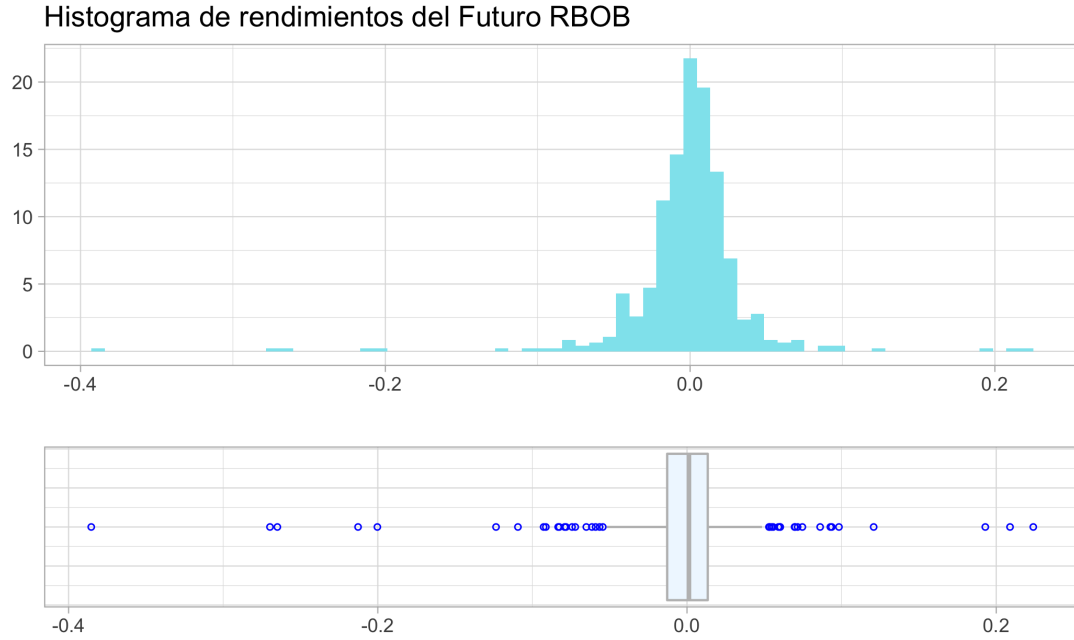


Haciendo en el histograma de datos, se puede observar una cola pesada negativa y una distribución apuntada.

De la gráfica de caja se observan varios datos atípicos, *outliers*, que exceden los límites superior e inferior, la mediana que esta muy cerca del cero y los rangos intercuantiles muy similares.

De la gráfica de cajas se puede concluir que los datos extremos son los que hacen a las colas pesadas. Esto refuerza la afirmación de que las colas de la distribución son más pesadas que las de la distribución Gaussiana.

---

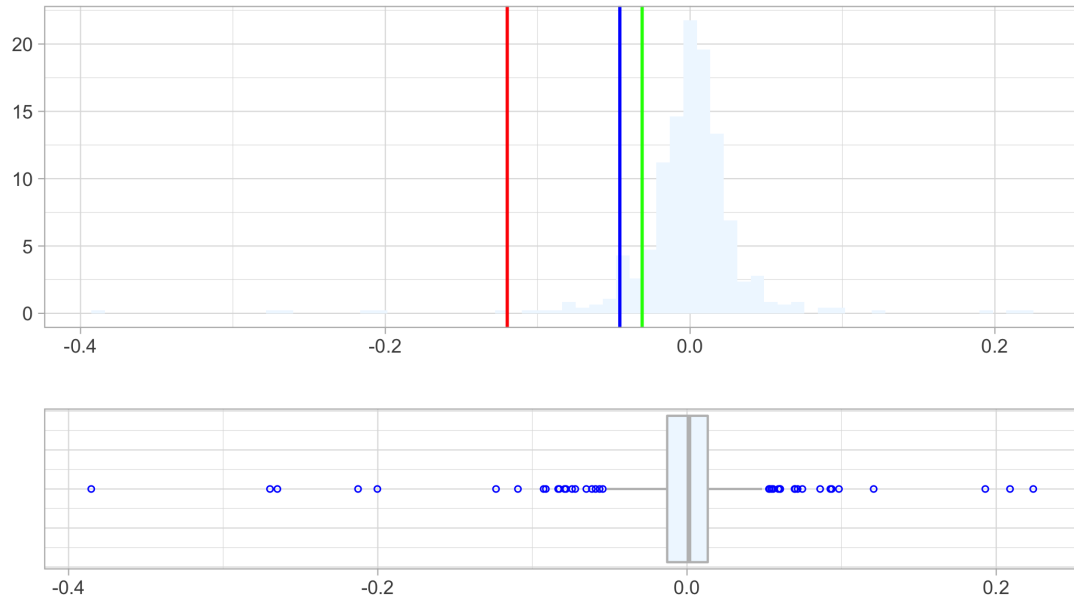


En la gráfica siguiente, donde se muestran distintos percentiles, se puede observar que el percentil al uno por ciento toma datos atípicos que corresponden al periodo de alta volatilidad antes mencionado.

El percentil al 5%, al incluir más datos, incluye las observaciones del periodo de volatilidad normalizada del mercado, por lo que éste es el que se sugiere para el cálculo del VaR.

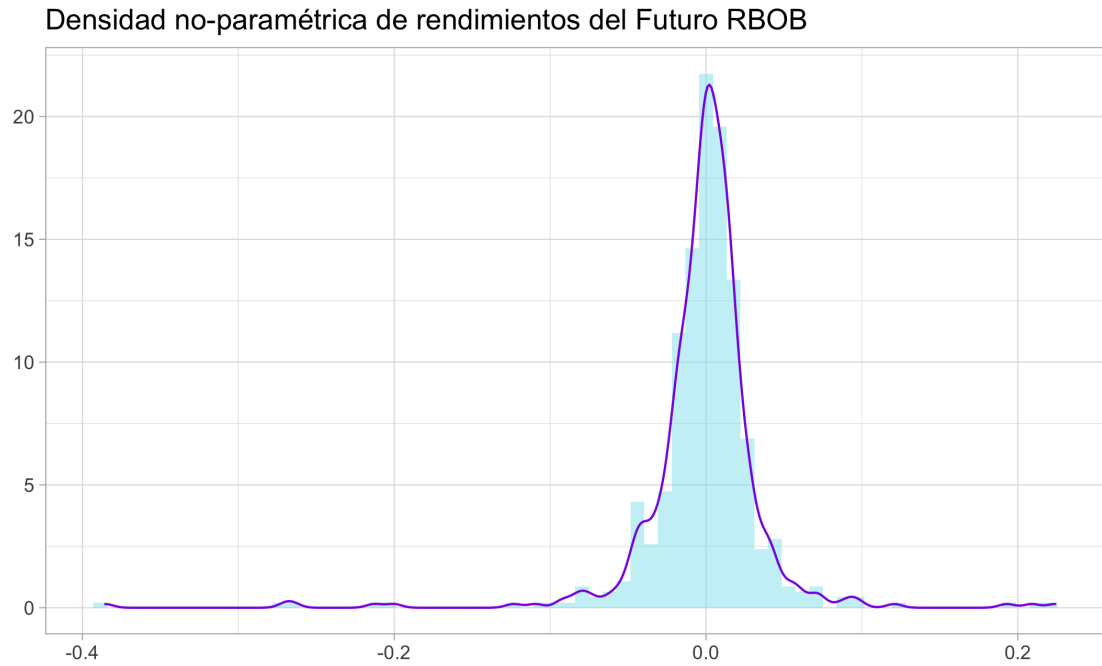


Percentiles al 1%, 5% y 10% de rendimientos del Futuro RBOB



Ajustando una función de densidad a los rendimientos del Futuro RBOB, se puede observar asimetría y una distribución leptocúrtica.

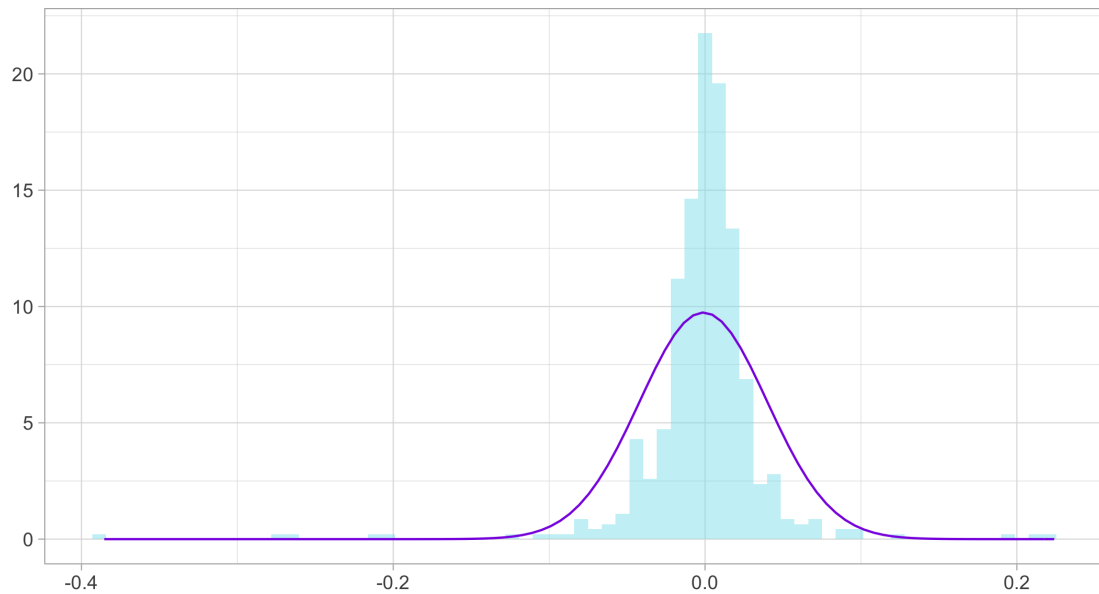
---



De la gráfica de abajo, se puede concluir que la distribución de los datos no sigue una distribución normal.

---

Densidad normal v.s. densidad de rendimientos del Futuro RBOB

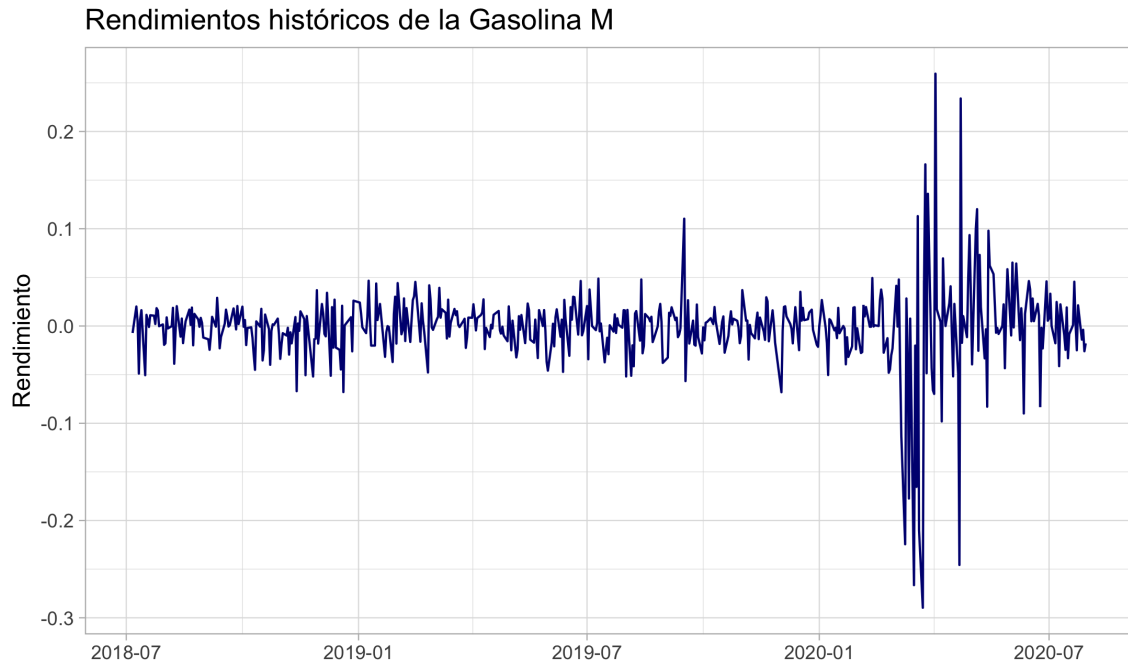


#### 4.7.1.2. Gasolina Magna

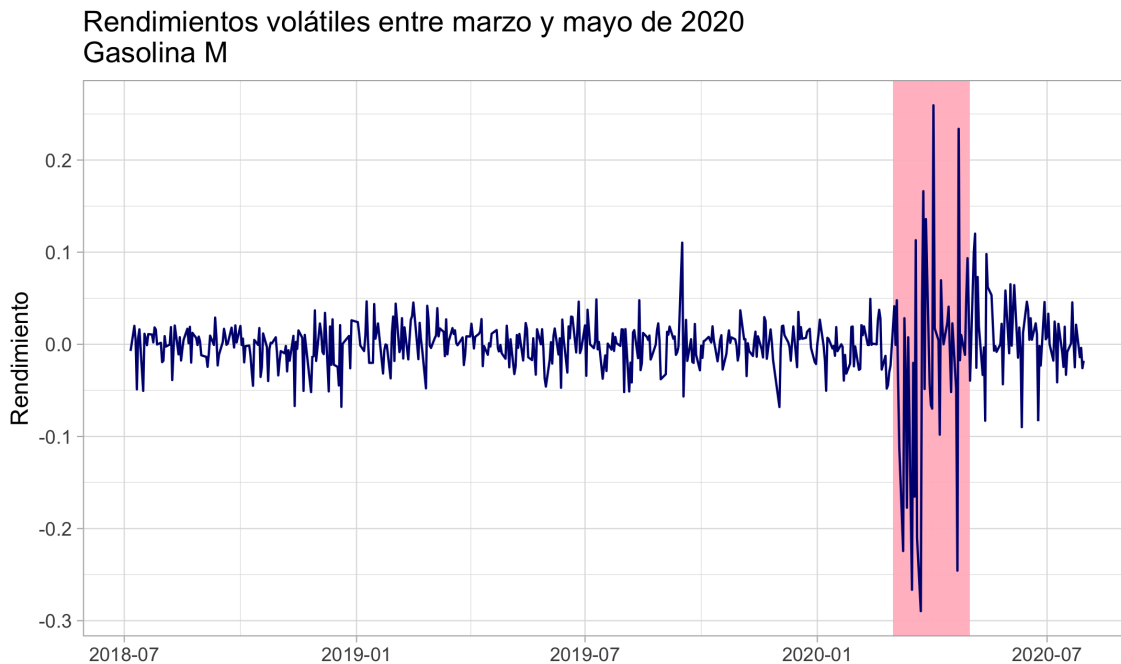
A continuación se muestran las diferentes gráficas que arroja el análisis descriptivo.

En la gráfica de los rendimientos, se pueden observar, al igual que con los datos de precios del Futuro RBOB, una volatilidad constante o normalizada antes de marzo 2020, después de este periodo la volatilidad se comporta de una manera extrema debido a que el mercado entra en un periodo de alta volatilidad hasta mayo 2020.

---



Se puede observar en la gráfica de rendimientos, un mercado estresado de marzo a mayo 2020, el cual se señala con una banda roja. Este periodo se considera con una volatilidad atípica.



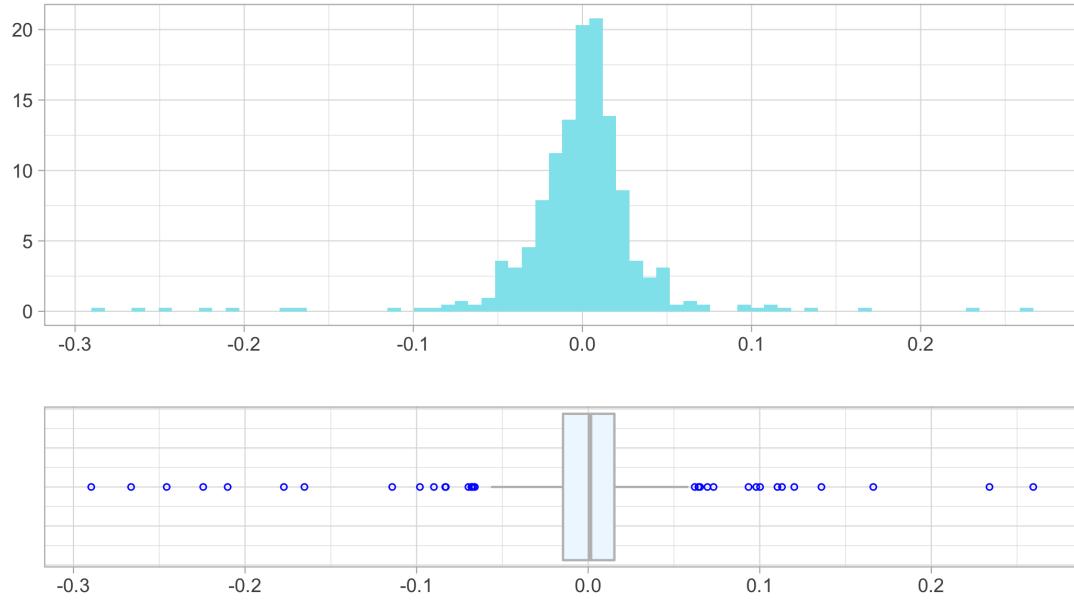
En el histograma de datos, se puede observar un comportamiento muy similar a la serie de precios del Futuro RBOB, es decir, datos con colas pesadas y una distribución apuntada.

De la gráfica de caja se observan varios datos atípicos, *outliers*, que exceden los límites superior e inferior, la mediana que esta muy cerca del cero y los rangos intercuantiles muy similares.

De la gráfica de cajas, pudieramos concluir que en gran parte las colas pesadas de la serie corresponden a los datos atípicos. Esto refuerza la afirmación de que las colas de la distribución son más pesadas que las de la distribución Gaussiana.

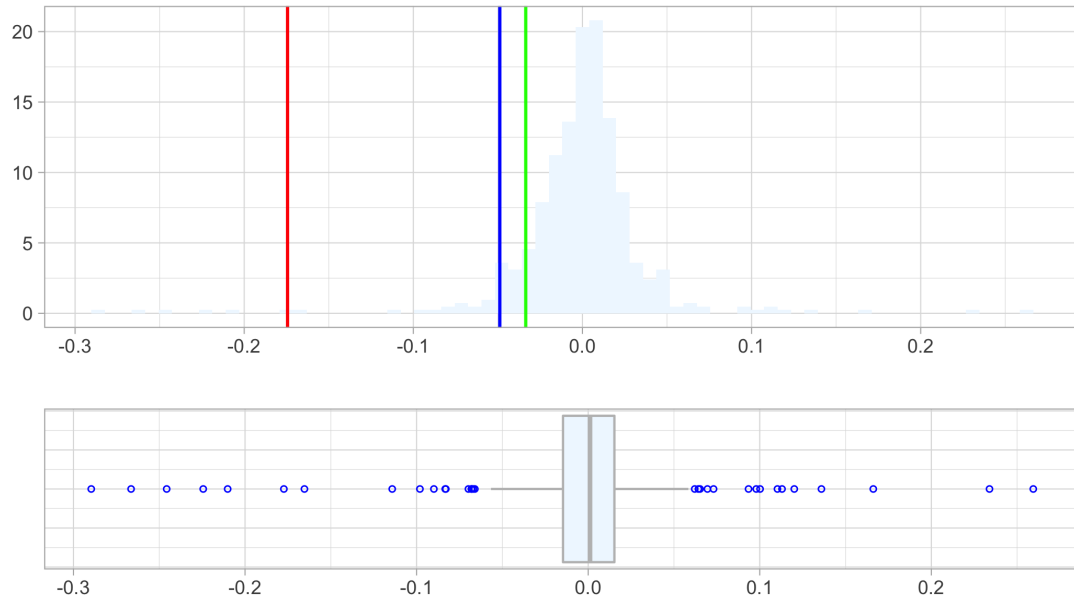
---

Histograma de rendimientos de la Gasolina M



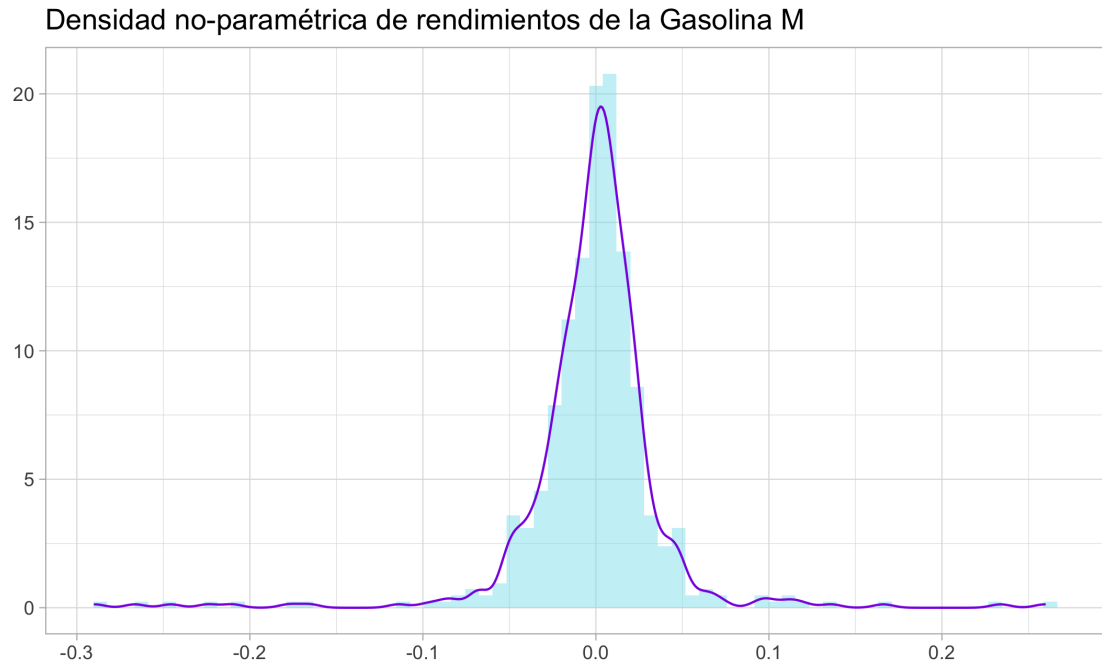
Se puede observar que el percentil al 1 % toma datos atípicos que corresponden al periodo de alta volatilidad antes mencionado. El percentil al 5 %, al incluir más observaciones, considera al periodo de una volatilidad normalizada, por lo que éste es el que se sugiere para el cálculo del VaR.

Percentiles al 1%, 5% y 10% de rendimientos de la gasolina M



Ajustando una distribución a los rendimientos de la Gasolina M, se puede observar asimetría y una distribución leptocúrtica con colas pesadas.

---

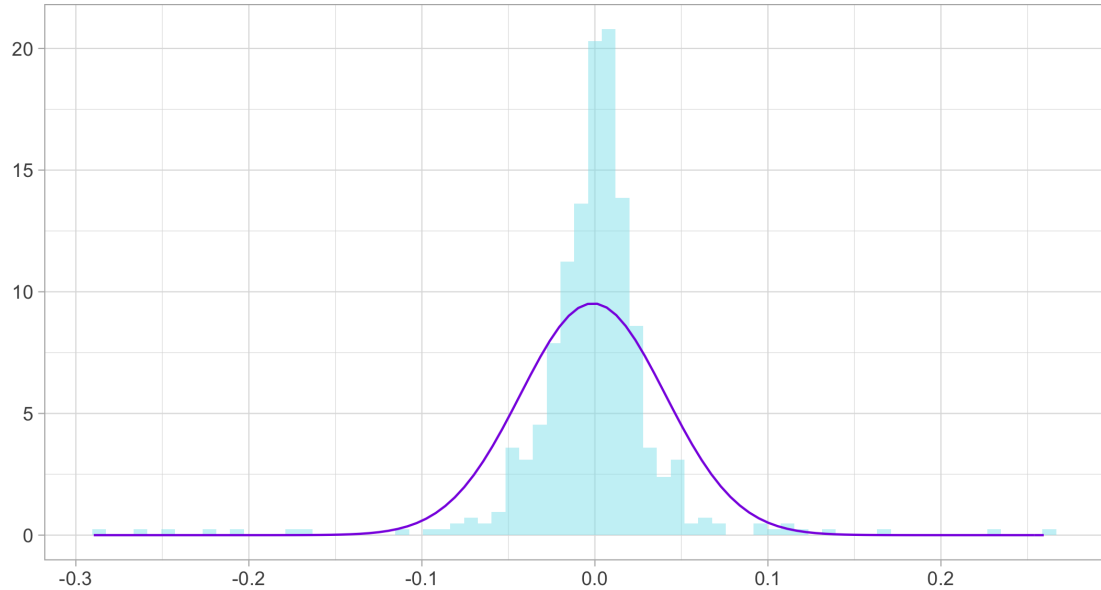


Ajustando una función de densidad normal a los datos de la Gasolina M, se puede observar claramente que no siguen una distribución normal.

---



Densidad normal v.s. densidad de rendimientos de la Gasolina M



#### 4.7.2. Modelo clásico $GARCH(1, 1)$ con media constante y errores normales

Como ya se dijo, una especificación clásica en varios softwares especializados en administración de riesgos, es un modelo clásico  $GARCH(1, 1)$  con media constante y errores Gaussianos. En esta sección se llevará a cabo un ajuste con estas características para las dos series de rendimientos en consideración.

##### 4.7.2.1. GARCH para Futuro RBOB

El modelo que se obtiene con esta especificación clásica es:

#### Modelo GARCH para serie de rendimientos Futuro RBOB

param	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	-0.000738	0.001031	-0.715863	0.474076
omega	0.000025	0.000008	3.091368	0.001992
alpha1	0.109717	0.021647	5.068486	0.000000
beta1	0.863858	0.022076	39.131109	0.000000

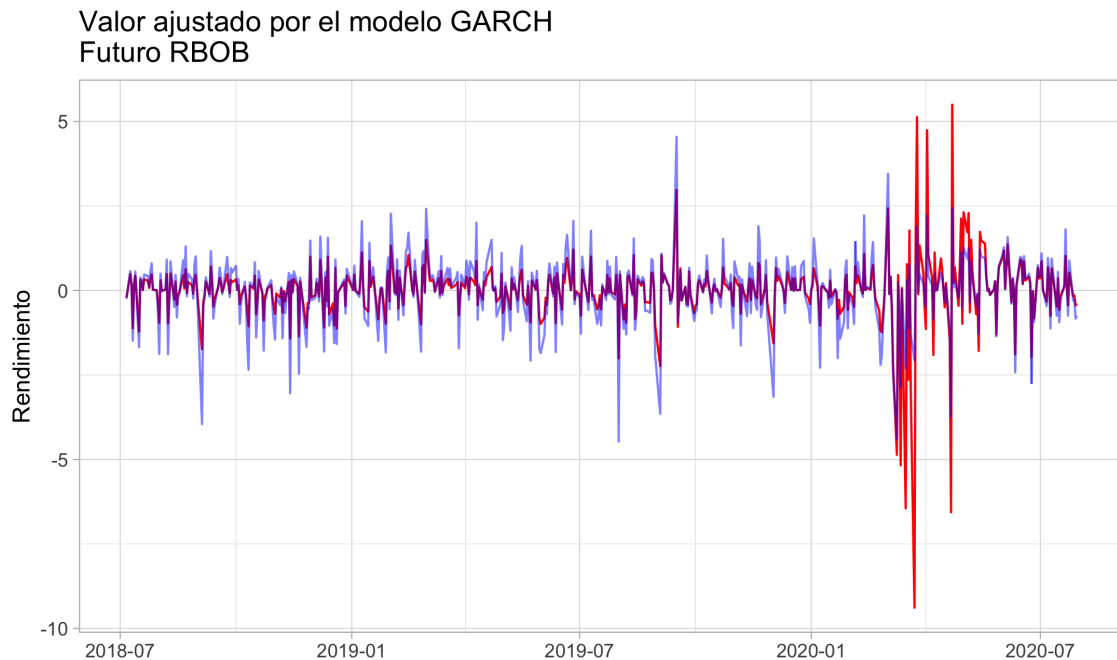
Dicho modelo tiene una verosimilitud de 1,156.873 y BIC de -4.35111. Sin embargo, para el parámetro de media constante a largo plazo ( $\mu$ ) el  $p$ -valor es de 0.47, lo cual lleva a afirmar que dicha estimación no es significativa; hecho que hace cuestionable el uso de un

---

modelo con media constante. El resto de los parámetros sí son significativos.

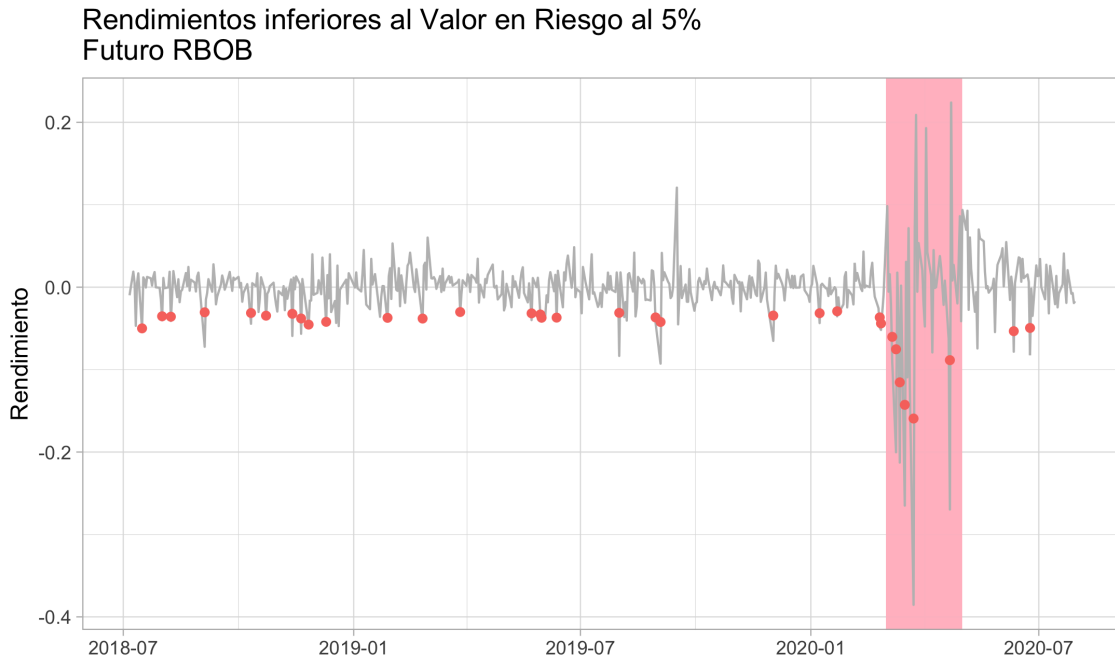
Para evaluar gráficamente dicho ajuste, se graficarán los rendimientos observados y los ajustados por el modelo.

En la gráfica, la línea roja corresponde a los valores observados y la línea azul a los valores ajustados. Se observa en general para todo el periodo un ajuste por arriba o por debajo de los valores observados y en el periodo de alta volatilidad el ajuste del modelo es muy conservador quedando muy lejos de los picos observados.



Para poder comparar con las otras metodologías estudiadas en este trabajo, se presentará el Valor en Riesgo al 5% con sus correspondiente excedancias.

*En la gráfica, los puntos rojos corresponden a los rendimientos estimados inferiores al VaR observado del 5%.*



El nivel de cobertura (ó porcentaje de excedencias) es de 6.273764 %, que es muy superior al nivel de VaR que se está calculando, i.e 5 %, esto es señal de poca robustez del modelo.

Se puede observar que a lo largo de todo el periodo de tiempo se tuvieron rendimientos inferiores al VaR observado y dentro del periodo de alta volatilidad (banda roja) se concentraron aun más estos errores de estimación.

**A manera de resumen se muestra la tabla con el Valor en Riesgo al 30 de Julio de 2020 estimado mediante esta metodología para los tres diferentes percentiles.**

1 %	5 %	10 %
-0.05205613	-0.03702268	-0.02900840

#### 4.7.2.2. GARCH para Gasolina M

El modelo que se obtiene con esta especificación clásica es:

#### Modelo GARCH para la serie de rendimientos de la Gasolina M

Dicho modelo tiene una verosimilitud de 1149.546 y BIC de -4.323251, sin embargo para el parámetro de media constante a largo plazo ( $\mu$ ) el  $p$ -valor es de 0.67, lo cual lleva a afirmar que dicha estimación no es significativa. El resto de los parámetros sí son significativos.

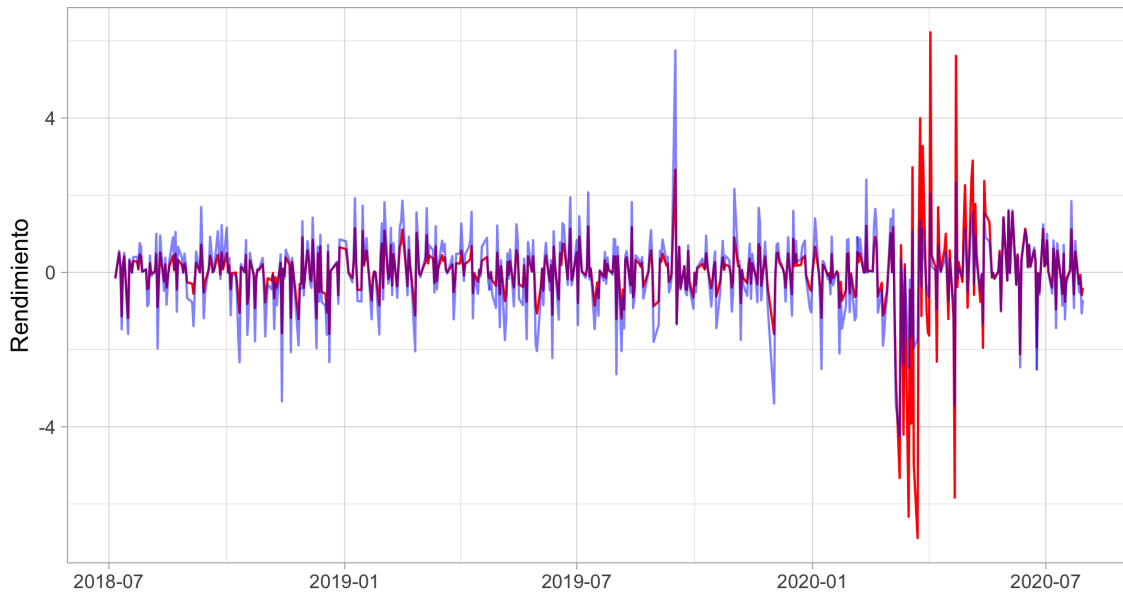
	param	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
1	mu	-0.000437	0.001036	-0.422135	0.672927
2	omega	0.000024	0.000009	2.808705	0.004974
3	alpha1	0.112973	0.021117	5.349875	0.000000
4	beta1	0.861773	0.022351	38.555625	0.000000

Para evaluar gráficamente dicho ajuste, se graficarán los rendimientos observados y los ajustados por el modelo.

*De la gráfica, la línea roja corresponde a los valores observados y la línea azul a los valores ajustados.*

En la serie ajustada por el modelo, (*azul*), se puede observar que los valores ajustados quedan por arriba o por debajo de los valores observados y que en el periodo de marzo a mayo, 2020, el ajuste no alcanza los picos de los datos observados, es decir, no alcanza a explicar este periodo de alta volatilidad.

Valor ajustado por el modelo GARCH  
Gasolina M

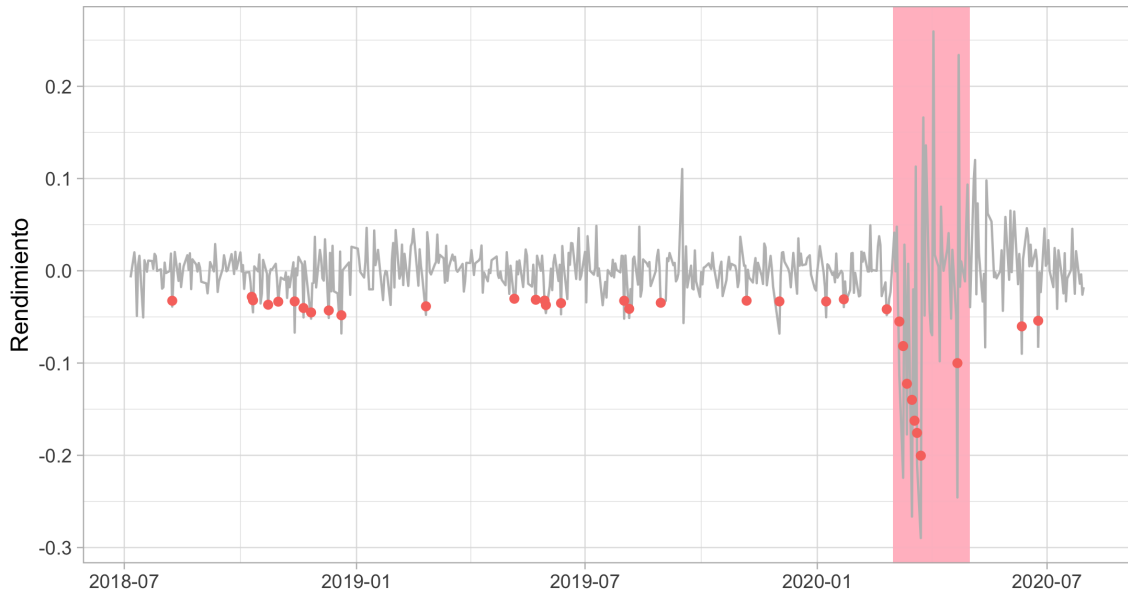


Para poder comparár con las otras metodologías estudiadas en este trabajo, se presentará el Valor en Riesgo al 5% con sus correspondientes excedancias.

*De la gráfica, los puntos rojos corresponden a los rendimientos estimados inferiores al VaR al 5%.*

De la gráfica de excedentes, se puede observar que las estimaciones inferiores al VaR del 5% se encuentran a lo largo de toda la gráfica con mayor concentración en la banda roja que corresponde al periodo de alta volatilidad, por otro lado en este periodo se puede decir que el modelo está quedando por arriba de la pérdida real, lo cual no es un bueno desde el punto de vista de riesgos.

**Rendimientos inferiores al Valor en Riesgo al 5%  
Gasolina M**



El nivel de cobertura (ó porcentaje de excedentes) es de 6.463878 %, que es muy superior al nivel de VaR que se está calculando, es decir del 5 %, esto es señal de poca robustez del modelo.

**A manera de resumen se muestra la tabla con el Valor en Riesgo al 30 de Julio de 2020 estimado mediante esta metodología para los tres diferentes percentiles.**

1 %	5 %	10 %
-0.05698955	-0.04042283	-0.03159118

#### 4.7.3. Modelo $GARCH(1, 1)$ con media $ARMA$ y errores $t$ asimétricos

Se realizó una selección de modelos y evaluación del desempeño basándose en el BIC para una variedad de especificaciones de modelo  $GARCH(1, 1)$  con media  $ARMA$  y errores  $t$  asimétricos, para los rendimientos del Futuro RBOB y Gasolina M.

##### 4.7.3.1. GARCH para Futuro RBOB

Después del procedimiento de selección de modelo, la especificación que se obtuvo es la de un  $GARCH(1, 1)$  con media  $ARMA(2, 1)$  y errores  $t$  asimétricos.

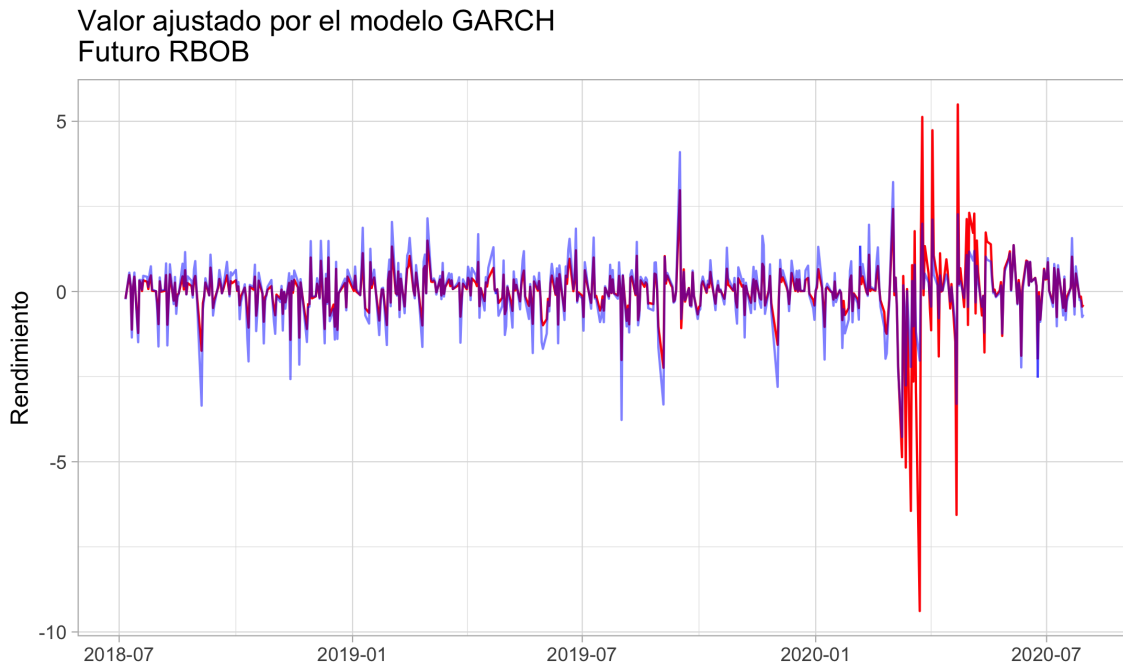
---

**Modelo GARCH(1,1) con media ARMA(2,1) para los rendimientos del Futuro RBOB**

	param	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
1	mu	-0.001493	0.001081	-1.380630	0.167393
2	ar1	0.957303	0.025481	37.568702	0.000000
3	ma1	-0.986345	0.028559	-34.537707	0.000000
4	ma2	0.039490	0.013485	2.928518	0.003406
5	omega	0.000033	0.000016	2.154494	0.031201
6	alpha1	0.105724	0.038035	2.779647	0.005442
7	beta1	0.880990	0.033002	26.695073	0.000000
8	skew	0.811571	0.046559	17.430922	0.000000
9	shape	3.180242	0.544051	5.845484	0.000000

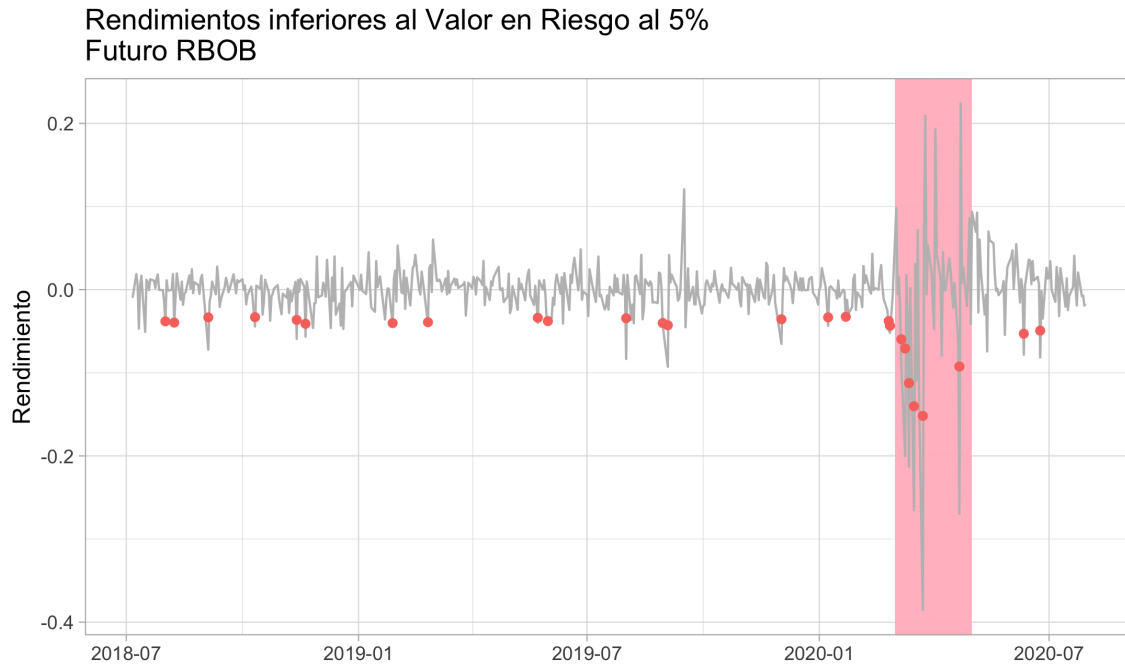
Dicho modelo tiene una verosimilitud de 1201.92 y BIC de -4.462836. Sin embargo, para el parámetro  $\mu$ , el  $p$ -valor es de 0.16 lo cual no es significativo, hecho que hace cuestionable el uso de este modelo.

Para evaluar gráficamente dicho ajuste, se graficarán los rendimientos observados y los ajustados por el modelo. En la gráfica, la línea roja corresponde a los valores observados y la azul corresponde a los valores estimados.



De la gráfica de los valores ajustados versus observados, se puede observar que para los valores observados positivos, el modelo queda por arriba de ellos y viceversa para los valores observados negativos. También, al igual que en el modelo GARCH(1,1) se tienen lo mayores errores de estimación del modelo, en el periodo de alta volatilidad.

Para poder comparar con las otras metodologías estudiadas en este trabajo, se presentará el Valor en Riesgo al 5% con sus correspondiente excedencias.



El nivel de cobertura (ó porcentaje de excedencias) es de 4.942966 %, que es muy cercano al nivel de VaR que se está calculando, es decir del 5 %. Por otro lado los puntos rojos se encuentran a lo largo de todo el periodo de tiempo. A diferencia del modelo GARCH(1,1) existe menos concentración de puntos rojos en la banda roja, que es el periodo de alta volatilidad.

**A manera de resumen se muestra la tabla con el Valor en Riesgo al 30 de Julio de 2020 estimado mediante esta metodología para los tres diferenres percentiles.**

1 %	5 %	10 %
-0.07724976	-0.03855907	-0.02574317



#### 4.7.3.2. GARCH para Gasolina M

Después del procedimiento de selección de modelo, la especificación que se obtuvo es la de un *GARCH*(1, 1) con media *ARMA*(1, 1) y errores *t* asimétricos:

#### Modelo ajustado GARCH(1,1) con media ARMA(1,1) para la serie de rendimientos de la Gasolina M.

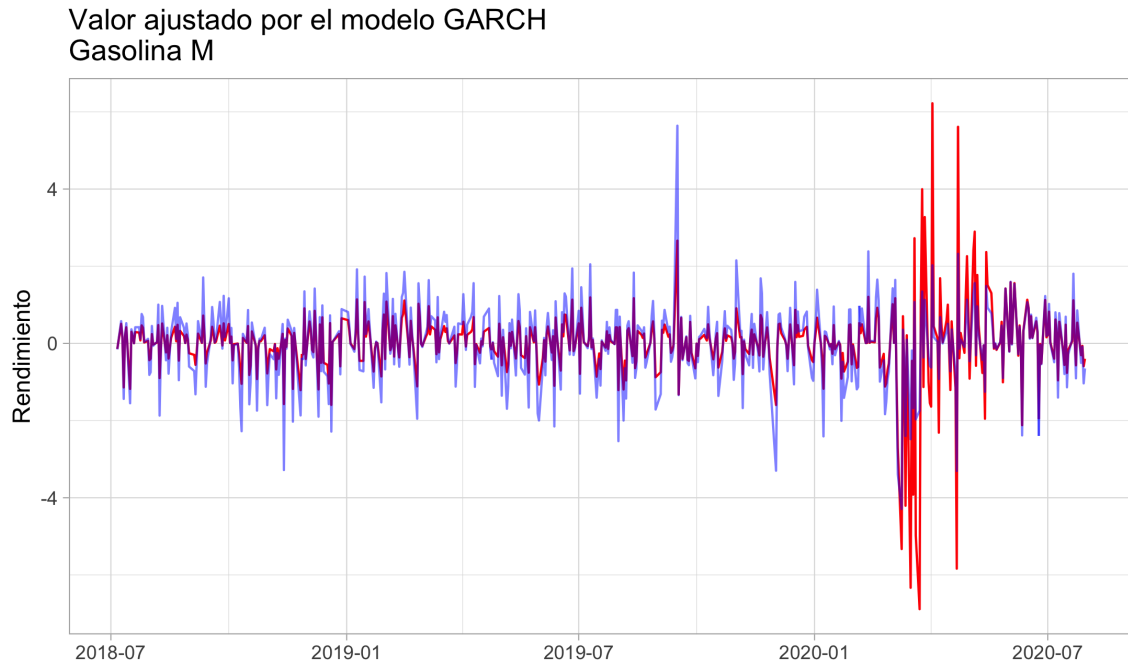
	param	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
1	mu	-0.001125	0.001034	-1.088552	0.276352
2	ar1	-0.987906	0.003767	-262.271383	0.000000
3	ma1	0.986866	0.001336	738.449500	0.000000
4	omega	0.000024	0.000011	2.202987	0.027596
5	alpha1	0.108662	0.028950	3.753474	0.000174
6	beta1	0.869478	0.029560	29.414270	0.000000
7	skew	0.821974	0.048343	17.003008	0.000000
8	shape	4.984416	1.179134	4.227185	0.000024

Dicho modelo tiene una verosimilitud de 1175.933 y BIC de -4.375937. Al igual que en los modelos anteriores, el parametro de la media  $\mu$  no es significativo, por lo que se puede cuestionar el uso de este modelo.

Para evaluar gráficamente dicho ajuste, se graficarán los rendimientos observados y los ajustados por el modelo. En la gráfica, la línea roja corresponde a los valores observados y la línea azul corresponde a los valores estimados.

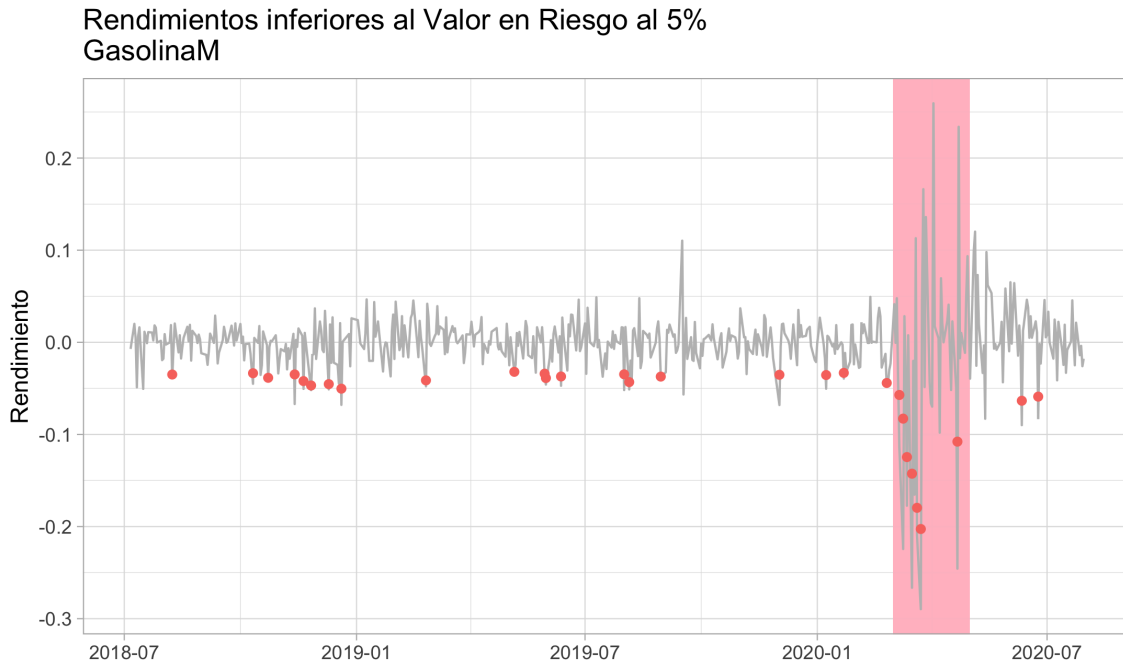
Se puede observar que también se tiene un ajuste sobre estimado para el caso de observaciones positivas y subestimado para el caso de observaciones negativos. Así mismo el ajuste en el periodo de alta volatilidad es donde se tiene el mayor error de estimación en el modelo.

---



Para poder comparár con las otras metodologías estudiadas en este trabajo, se presentará el Valor en Riesgo al 5% con sus correspondientes excedencias.

---



El nivel de cobertura (ó porcentaje de excedancias) es de 5.513308 %, que es muy cercano al nivel de VaR que se está calculando, es decir de 5 %. Se puede observar que al igual que los otros modelos, los excedancias se encuentran a lo largo de todo el periodo de tiempo y en el periodo de alta volatilidad, la estimación queda por arriba del valor observado para aquellos datos negativos.

A manera de resumen se muestra la tabla con el Valor en Riesgo al 30 de Julio de 2020 estimado mediante esta metodología para los tres diferentes percentiles.

1 %	5 %	10 %
-0.07468970	-0.04352024	-0.03126761

#### 4.7.4. Modelo QAR

Se llevó a cabo una selección de modelos y evaluación del desempeño basándose en el AIC para una variedad de especificaciones de modelo QAR, para los rendimientos del Futuro RBOB y Gasolina M.

##### 4.7.4.1. QAR para Futuro RBOB

Se ejecutó una especificación AR, sólo para determinar el nivel de dependencia del rendimiento medio para la serie del Futuro RBOB y se obtuvieron los siguientes resultados.

**Especificación AR para serie de rendimientos Futuro RBOB.**

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.000470	0.001587	-0.296082	0.767285
lag1	-0.000086	0.043733	-0.001969	0.998430

De la tabla se puede observar que tanto el intercepto como el coeficiente de regresión para el primer rezago, no son significativos.

**Para el VaR al 1 %**

Para la estimación del percentil 1 %, el orden de rezagos seleccionado es 10, es decir, un modelo  $QAR(10)$ .

**Estimacion del percentil 1 % para la serie de rendimientos del Futuro RBOB con  $QAR(10)$ .**

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.116542	0.013968	-8.343249	0.000000
lag1	0.681884	0.308493	2.210369	0.027527
lag2	0.528532	0.375139	1.408896	0.159481
lag3	0.115099	0.227975	0.504875	0.613867
lag4	0.389921	0.223270	1.746411	0.081348
lag5	-0.087465	0.296366	-0.295124	0.768020
lag6	-0.022713	0.302792	-0.075012	0.940235
lag7	0.229716	0.236003	0.973364	0.330838
lag8	-0.060831	0.268371	-0.226666	0.820775
lag9	-0.079817	0.248601	-0.321064	0.748295
lag10	0.046966	0.220926	0.212587	0.831735

En este caso el Valor en Riesgo al 1 % para el 30 de Julio de 2020 es -0.1160613 y se tiene un porcentaje de excedencias del 1.744186 %, que es ligeramente superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 1 %). De la tabla se puede observar que a partir del segundo rezago, los coeficientes no son significativos.

**Para el VaR al 5 %**

Para la estimación del percentil 5 %, el orden de rezagos seleccionado es 8, es decir, un modelo  $QAR(8)$ . Es importante recordar que el percentil al cinco porciento es el de interés para este trabajo.

**Estimacion percentil 5 % para la serie de rendimientos del Futuro RBOB con QAR(8).**

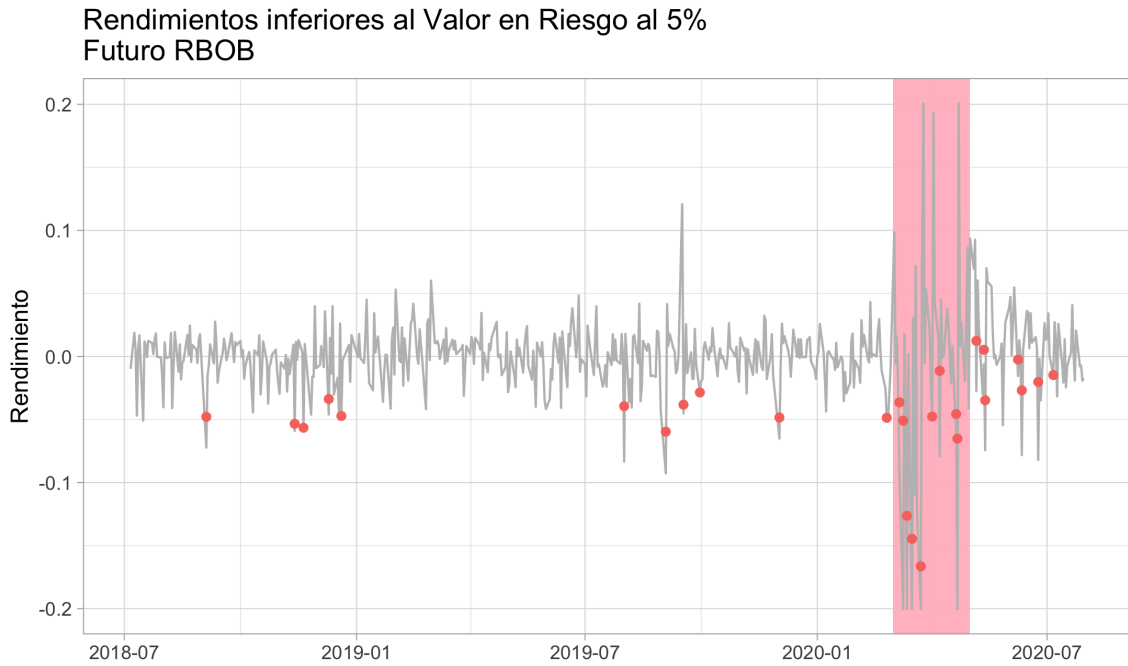
	Value	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.052770	0.007191	-7.338277	0.000000
lag1	0.075542	0.184782	0.408816	0.682847
lag2	0.264058	0.181227	1.457059	0.145717
lag3	0.132790	0.231486	0.573641	0.566464
lag4	0.218889	0.173241	1.263489	0.206992
lag5	0.104034	0.200625	0.518551	0.604299
lag6	-0.035298	0.163974	-0.215265	0.829647
lag7	0.258140	0.153302	1.683873	0.092819
lag8	-0.233708	0.156703	-1.491406	0.136474

En este caso el Valor en Riesgo al 5 % para el 30 de Julio de 2020 es -0.04494113. De la tabla se puede observar que a partir del primer rezago, los parámetros del modelo no son significativos.

Para poder comparár con las otras metodologías estudiadas en este trabajo, se presentará la gráfica del Valor en Riesgo al 5 % con sus correspondiente excedencias.

*Excedancias para el VaR al 5 % con el modelo QAR(8) para el precio del Futuro RBOB.*

---



El nivel de cobertura (ó porcentaje de excedancias) es de 5.019305 %, que es muy cercano al nivel de VaR que se está calculando,(5%). Se puede observar que los puntos rojos estan concentrados en su mayoría en el periodo de alta volatilidad y después de éste.

Es importante mencionar que en el periodo de alta volatilidad es donde se quisiera ver un buen ajuste del modelo pues es el de mayor incertidumbre para el negocio.

**Para el VaR al 10 %**

Para la estimación del percentil 10 %, el orden de rezagos seleccionado es 7, es decir, un modelo  $QAR(7)$ .

**Estimación del percentil 10 % para los rendimientos de la serie del Futuro RBOB con  $QAR(7)$ .**

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.030522	0.003815	-8.000550	0.000000
lag1	0.080467	0.141578	0.568363	0.570038
lag2	0.195202	0.111080	1.757316	0.079463
lag3	0.020797	0.156628	0.132780	0.894420
lag4	0.043957	0.101145	0.434590	0.664044
lag5	0.045097	0.154466	0.291955	0.770439
lag6	0.039103	0.114747	0.340775	0.733413
lag7	0.161117	0.099867	1.613311	0.107294

En este caso el Valor en Riesgo al 10 % para el 30 de Julio de 2020 es -0.02691151 y se tiene un porcentaje de excedencias del 10.98266 %, que es ligeramente superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 10 %). De la tabla se puede observar que excepto por el intercepto, los rezagos, desde el orden uno al siete, no son significativos.

**Para el VaR al 50 %**

Para la estimación del percentil 50 % (i.e. la mediana) el orden de rezagos seleccionado es 1, es decir, un modelo  $QAR(1)$ . Nótese que este resultado era de esperarse pues el modelo  $AR$  para la media también fue de orden 1.

De la tabla se observan que los parámetros del modelo no son significativos en su p-valor.

**Estimación del percentil 50 % para la serie de rendimientos del Futuro RBOB con  $QAR(1)$ .**

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.001200	0.000825	1.454290	0.146466
lag1	-0.033371	0.031459	-1.060768	0.289285

---

#### 4.7.4.2. QAR para Gasolina M

Se ejecutó una especificación AR, sólo para determinar el nivel de dependencia del rendimiento medio para la serie de la Gasolina M y se obtuvieron los siguientes resultados.

En la tabla se puede observar que no son significativos ninguno de los parámetros estimados bajo la prueba t.

---



**Especificación AR para serie de rendimientos Gasolina M.**

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.001010	0.001704	-0.592517	0.553761
lag1	-0.043230	0.043693	-0.989415	0.322917

**Para el VaR al 1 %**

Para la estimación del percentil 1 %, el orden de rezagos seleccionado es 10, es decir, un modelo  $QAR(10)$ .

**Estimacion percentil 1 % para la serie de rendimientos de la Gasolina M con  $QAR(10)$ .**

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.120205	0.016776	-7.165121	0.000000
lag1	0.591974	0.344681	1.717455	0.086509
lag2	0.358678	0.260581	1.376456	0.169290
lag3	0.254702	0.280743	0.907241	0.364712
lag4	0.239112	0.277916	0.860374	0.389991
lag5	-0.060010	0.335406	-0.178918	0.858074
lag6	0.339660	0.288354	1.177925	0.239381
lag7	-0.022996	0.234277	-0.098156	0.921847
lag8	0.007870	0.276409	0.028472	0.977297
lag9	-0.025292	0.292721	-0.086403	0.931180
lag10	-0.107704	0.265175	-0.406162	0.684796

En este caso el Valor en Riesgo al 1 % para el 30 de Julio de 2020 es -0.13049766 y se tiene un porcentaje de excedencias del 2.51938 %, que es muy superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 1%), lo que indica que hay poca robustez en esta estimación. Por otro lado, de la tabal se puede obsrevar que bajo la prueba estadísitica t, ninguno de los rezagos son significativos.

---

**Para el VaR al 5 %**

Para la estimación del percentil 5 % el orden de rezagos seleccionado es 8, es decir, un modelo  $QAR(8)$ .

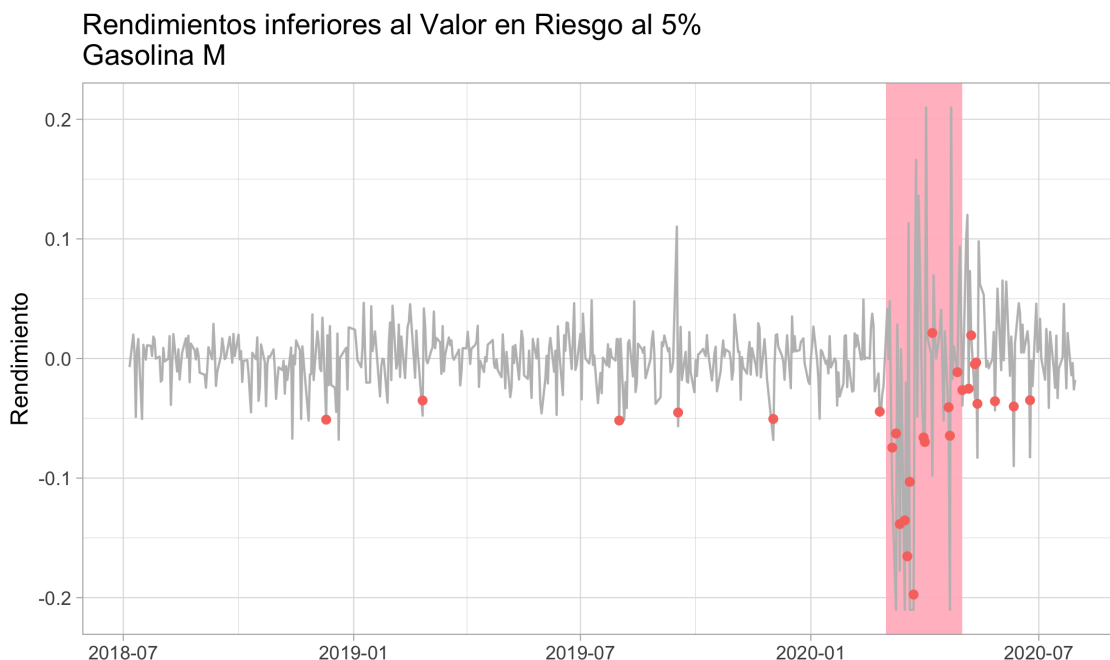
**Estimación percentil 5 % series rendimientos Gasolina M con  $QAR(8)$ .**

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.057046	0.006839	-8.341684	0.000000
lag1	0.080061	0.217443	0.368192	0.712883
lag2	0.151262	0.176938	0.854887	0.393016
lag3	0.379420	0.194775	1.947990	0.051965
lag4	0.065080	0.193353	0.336585	0.736569
lag5	0.180349	0.176263	1.023182	0.306708
lag6	0.057358	0.172515	0.332479	0.739664
lag7	0.182648	0.144129	1.267259	0.205642
lag8	0.207723	0.134632	1.542896	0.123478

En este caso el Valor en Riesgo al 5 % para el 30 de Julio de 2020 es -0.05949559 y se tiene un porcentaje de excedancias del 5.405405 %, que es ligeramente superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 5 %). De la tabla podemos ver que ningún rezago es significativo en su p-valor.

Para poder comparár con las otras metodologías estudiadas en este trabajo, se presentará la gráfica del Valor en Riesgo al 5 % con sus correspondientes excedancias.

*Excedancias para el VaR al 5 % con el modelo  $QAR(8)$  para los rendimientos del precio de la Gasolina M.*



Se puede observar de la gráfica que los puntos rojos están concentrados en la banda roja, que es el período de alta volatilidad de la serie y después de éste. También se muestra que los valores estimados en este período tratan de alcanzar los grandes picos y después regresan al nivel anterior a este período.

#### Para el VaR al 10 %

Para la estimación del percentil 10 %, el orden de rezagos seleccionado es 8, es decir, un modelo  $QAR(8)$ .

#### Estimación del percentil 10 % para los rendimientos del precio de la Gasolina M con $QAR(8)$ .

En este caso el Valor en Riesgo al 10 % para el 30 de Julio de 2020 es  $-0.02717376$  y se tiene un porcentaje de excedencias del 10.42471 %, que es ligeramente superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 10 %). De la tabla podemos observar que ninguno de los rezagos son significativos en su p-valor.

#### Para el VaR al 50 %

Para la estimación del percentil 50 % (i.e. la mediana) el orden de rezagos seleccionado es 1, es decir, un modelo  $QAR(1)$ . Nótese que este resultado era de esperarse pues el modelo

---

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	-0.034660	0.003760	-9.218788	0.000000
lag1	0.001908	0.153998	0.012391	0.990119
lag2	0.113798	0.126609	0.898814	0.369177
lag3	0.084124	0.174133	0.483100	0.629233
lag4	0.119964	0.161468	0.742959	0.457849
lag5	0.093499	0.159337	0.586803	0.557596
lag6	0.186838	0.131164	1.424465	0.154925
lag7	0.185787	0.128616	1.444506	0.149212
lag8	0.099807	0.122898	0.812109	0.417109

*AR* para la media también fue de orden 1.

#### Estimación del percentil 50 % para los rendimientos del precio de la Gasolina M con QAR(1).

	Value	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	0.001051	0.000960	1.094488	0.274245
lag1	-0.036959	0.050956	-0.725310	0.468586

De la tabla podemos ver que no son significativos los coeficientes de la regresión.

#### 4.7.5. Modelo ARMA-ARCH con regresión cuantílica

Se ejecutó una selección de modelos y evaluación del desempeño basándose en el BIC para una variedad de especificaciones de modelo con cuantil ARMA con componente GARCH con errores normales, para los rendimientos del Futuro RBOB y Gasolina M.

##### 4.7.5.1. GARCH cuantílico para Futuro RBOB

Después del procedimiento de selección de modelo, para cada uno de los cuantiles al 1 %, 5 % y 10 como resultado, en los 3 casos la especificación que se obtuvo es la de un *GARCH*(1,1) con mecanismo para el cuantil *ARMA*(2,0) y errores Gaussiano.

A continuación se establecen los parámetros estimados.

#### Estimación del percentil 1 % para la serie de los rendimientos Gasolina M con GARCH(1,1) Y ARMA(2,0)

Dicho modelo tiene una verosimilitud de 2623.389 y BIC de -10.3362. El porcentaje de excedancias es 2.579365 %, que es ligeramente superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 1 %), esto indica poca robustez para el uso de esta estimación. De la tabla se

param	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	-0.057898	0.001295	-44.722645	0.000000
ar1	0.692763	0.012496	55.440755	0.000000
ar2	0.295948	0.010595	27.933306	0.000000
alpha1	0.058561	0.005629	10.402733	0.000000
beta1	0.935374	0.003583	261.035206	0.000000

puede observar que todos los parametros son significativos.

**Estimación del percentil 5 % para la serie de los rendimientos Gasolina M con GARCH(1,1) Y ARMA(2,0)**

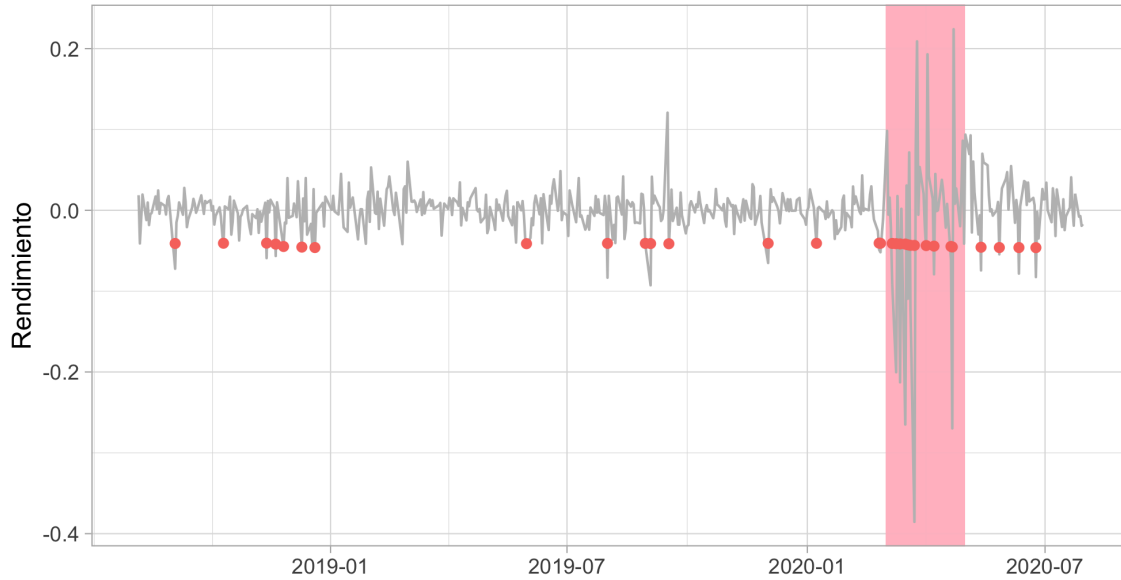
param	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	-0.042706	0.000385	-110.797501	0.000000
ar1	0.813681	0.006333	128.480482	0.000000
ar2	0.185581	0.003060	60.641793	0.000000
alpha1	0.051763	0.004448	11.636585	0.000000
beta1	0.899237	0.005282	170.242958	0.000000

Dicho modelo tiene una verosimilitud de 3571.588 y BIC de -14.09889. De la tabla se puede ver que todos los parámetros son significativos.

Para poder comparar con las otras metodologías estudiadas en este trabajo, se presentará el Valor en Riesgo al 5% con sus correspondientes excedencias.

---

Rendimientos inferiores al Valor en Riesgo al 5% con GARCH Cuantílico Futuro RBOB



El porcentaje de excedencias es 6.150794 % que es ligeramente superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 5 %), esto indica poca robustez para el uso de esta estimación. De la gráfica podemos ver que los puntos rojos están a lo largo de todo el periodo de tiempo. En la banda roja también se tienen un número importante de ellos, además éstos toman valores muy similares en todo el periodo de tiempo sin tener en cuenta los picos observados en la banda roja.

**Estimación del percentil 10 % para la serie de los rendimientos Gasolina M con GARCH(1,1) Y ARMA(2,0)**

param	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	-0.035670	0.000985	-36.208847	0.000000
ar1	0.685003	0.004527	151.306471	0.000000
ar2	0.314527	0.004591	68.508047	0.000000
alpha1	0.057711	0.008378	6.888079	0.000000
beta1	0.894351	0.014627	61.144856	0.000000

Dicho modelo tiene una verosimilitud de 3162.091 y BIC de -12.4739. El porcentaje de excedencias es 11.70635 %, que es ligeramente superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 10 %), esto indica poca robustez para el uso de esta estimación. De la tabla se

puede observar que todos los parámetros son significativos.

A manera de resumen se muestra la tabla con el Valor en Riesgo al 30 de Julio de 2020 estimado mediante esta metodología para los tres diferentes percentiles.

1 %	5 %	10 %
-0.1194698	-0.04611314	-0.03152932

#### 4.7.5.2. GARCH cuantílico para Gasolina M

Después del procedimiento de selección de modelo, para cada uno de los cuantiles al 1 %, 5 % y 10. Para el cuantil del 1 % se seleccionó un  $GARCH(1, 1)$  con mecanismo para el cuantil  $ARMA(3, 0)$ ; y en los casos del 5 % y 10 % la especificación que se obtuvo es la de un  $GARCH(1, 1)$  con mecanismo para el cuantil  $ARMA(2, 0)$  y errores Gaussiano. A continuación se establecen los parámetros estimados.

#### Estimacion del percentil 1 % para la serie de los rendimientos Gasolina M con GARCH(1,1) Y ARMA(3,0)

param	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	-0.050143	0.001266	-39.619125	0.000000
ar1	1.404854	0.000924	1520.971643	0.000000
ar2	0.302169	0.000537	563.121532	0.000000
ar3	-0.706697	0.000731	-966.787561	0.000000
alpha1	0.170725	0.017205	9.923178	0.000000
beta1	0.828272	0.006784	122.085121	0.000000

Dicho modelo tiene una verosimilitud de 2735.013 y BIC de -10.7668. El porcentaje de excedencias es 2.777778 % que es ligeramente superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 1 %), esto indica poca robustez para el uso de esta estimación. De la tabla se puede observar que todos los parámetros de la estimación son significativos

#### Estimacion del percentil 5 % para la serie de los rendimientos Gasolina M con GARCH(1,1) Y ARMA(2,0)

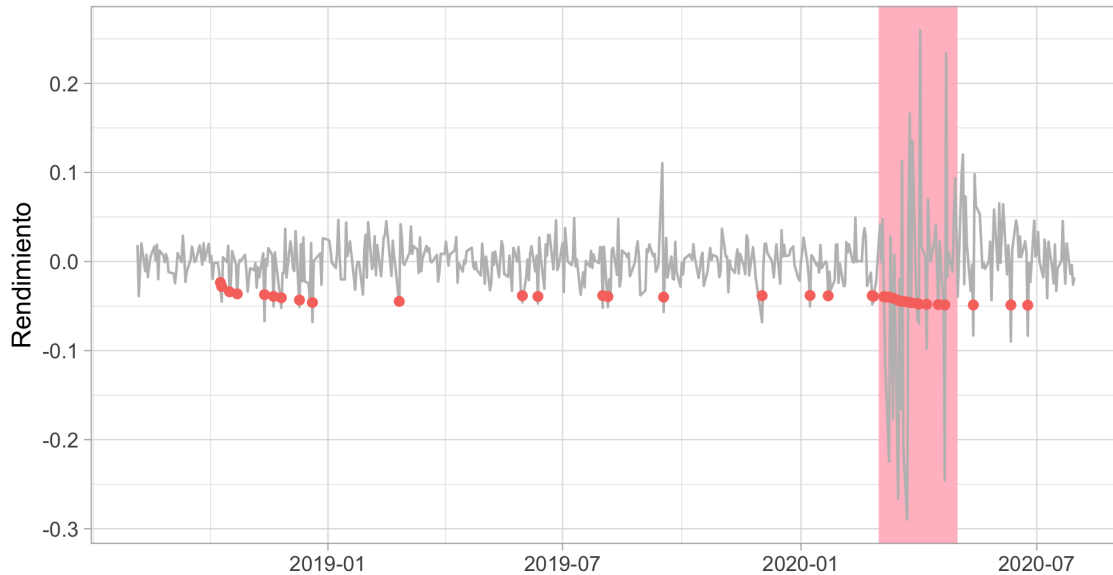
param	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	-0.045718	0.000846	-54.031037	0.000000
ar1	0.992926	0.002320	428.048838	0.000000
alpha1	0.078115	0.011234	6.953362	0.000000
beta1	0.877122	0.021568	40.667109	0.000000

---

Dicho modelo tiene una verosimilitud de 3173.595 y BIC de -12.5319. El porcentaje de excedencias es 7.34127%, que es ligeramente superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 5%), esto indica poca robustez para el uso de esta estimación. De la tabla se puede ver que todos los parametros de estimación son significativos

Para poder comparar con las otras metodologías estudiadas en este trabajo, se presentará el Valor en Riesgo al 5% con sus correspondiente excedencias.

### Rendimientos inferiores al Valor en Riesgo al 5% con GARCH Cuantílico Gasolina M



El nivel de cobertura (ó porcentaje de excedencias) es de 7.34127%, que es muy superior al nivel de VaR que se está calculando, es decir, del 5%. Se puede observar que los puntos rojos se encuentran a lo largo de todo el periodo con una mayor concentración en la banda roja. Por otro lado el valor estimado por el modelo señalado con los puntos rojos es en general muy parecido en todos los casos a lo largo de la serie.

### Estimacion del percentil 10% para la serie de los rendimientos Gasolina M con GARCH(1,1) Y ARMA(2,0)

Dicho modelo tiene una verosimilitud de 3193.071 y BIC de -12.60919. El porcentaje de excedencias es 13.88889%, que es ligeramente superior al nivel del VaR que se está calculando (i.e. 10%), esto indica poca robustez para el uso de esta estimación.



param	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
mu	-0.028289	0.001557	-18.165801	0.000000
ar1	0.978267	0.014571	67.136500	0.000000
omega	0.000000	0.000000	0.007094	0.994340
alpha1	0.057240	0.007431	7.702564	0.000000
beta1	0.890205	0.010524	84.590488	0.000000

A manera de resumen se muestra la tabla con el Valor en Riesgo al 30 de Julio de 2020 estimado mediante esta metodología para los tres diferentes percentiles.

1 %	5 %	10 %
-0.1744016	-0.04884868	-0.03345793

#### 4.7.6. Comparativo de VaR al 5 % y conclusiones

A continuación se muestra el comparativo de los valores estimados para los cinco tipos de modelos que se realizaron en este trabajo.

Modelos de Estimación	rendimientos estimados	
	Futuro RBOB	Gasolina M
<b>Modelo Histórico</b>	<b>-0.045534895</b>	<b>-0.048651896</b>
<b>Clásico Garch(1,1)</b>	<b>-0.03702268</b>	<b>-0.04042283</b>
<b>Garch (1,1,) media ARMA(2,1)</b>	<b>-0.03855907</b>	<b>-0.04352024</b>
<b>QAR(8)</b>	<b>-0.04494113</b>	<b>-0.05949559</b>
<b>Garch Cuantílico (1,1,) ARMA(2,0)</b>	<b>-0.04611314</b>	<b>-0.04884868</b>

y para la posición combinada

Modelos de Estimación	(Valor Portafolio) * VaR Estimado 5% de los Rendimientos		Pérdida estimada a un día del Portafolio (usd)
	Futuro RBOB	Gasolina M	
<b>Modelo Histórico</b>	700,192	(676,338)	<b>23,854</b>
<b>Clásico Garch(1,1)</b>	569,299	(561,941)	<b>7,358</b>
<b>Garch (1,1,) media ARMA(2,1)</b>	592,924	(605,000)	<b>(12,076)</b>
<b>QAR(8)</b>	691,062	(827,083)	<b>(136,021)</b>
<b>Garch Cuantílico (1,1,) ARMA(2,0)</b>	709,084	(679,074)	<b>30,010</b>

donde  $VP$  es el valor del Portafolio que es igual a la posición en barriles por el ultimo precio conocido.

---



# Conclusiones

Las series de tiempo que se trabajaron presentan una asimetría negativa y alta curtosis, hechos que se concluyen del análisis descriptivo que se realizó. Como es de esperarse, los modelos clásicos de estimación que se enfocan en la media condicional y en supuestos de normalidad presentan una estimación poco robusta incluso arrojan estimaciones de parámetros no significativos para estas series.

Por otro lado, también del análisis descriptivo se observaron datos extremos en ambas series que afectan de manera adversa el desempeño de estimación e inferencia diseñados para los modelos ARCH y GARCH donde la estimación de las varianzas es muy sensible a los datos atípicos.

Dichas características de las series que se trabajaron, apoyan el hecho de utilizar modelos de regresión cuantílica, los cuales basan en la estimación de percentiles y no únicamente la media condicional.

Otro dato particular de las series, es el periodo de alta volatilidad que se presenta tanto en la serie de precios y rendimientos para la Gasolina Regular, como para la serie de precios y rendimientos de el Futuro RBOB. Este periodo se observa de marzo a mayo del 2021 debido a un mercado estresado por diferentes factores, entre ellos la fuerte caída de la demanda de la gasolina que presionaron los precios a la baja por el surgimiento de la pandemia COVID-19. Desde el punto de vista de un área de riesgos, en este periodo de volatilidad atípica, es donde se prueba la robustez del modelo ya que para la dirección de una empresa y para la toma de decisiones de ella, se requiere tener herramientas robustas en un periodo de alta incertidumbre.

El primer modelo que se estimó fue el GARCH clásico. Este modelo arrojó parámetro no significativo para el estimador de la media constante. Los modelos ARCH y GARCH tienen sensibilidad a la volatilidad, es decir, suelen tener estimaciones grandes para aquellos valores atípicos tanto para valores positivos como para valores negativos, lo cual no es adecuado para la estimación del VaR ya que solamente el VaR considera los datos atípicos

negativos por ser una medida de pérdida estimada.

Gráficamente, podemos ver como estos datos atípicos influyen sobre todo en el periodo de alta volatilidad que sufre el mercado de petrolíferos, donde la estimación queda o muy por arriba o muy por debajo de los valores observados. De los modelos ARMA ? GARCH con errores  $t$  asimétricos, la estimación sufre el mismo efecto de no lograr significancia para el parámetro de la media. De igual manera la estimación se sobre estima o subestima en los valores observados para el periodo de alta volatilidad ya mencionado.

En la estimación del VaR mediante el modelo QAR suceden comportamientos similares tanto para los rendimientos de la Gasolina M como para los del Futuro RBOB. En ambos casos, solamente el parametro del intercepto es significativo y los parámetros para los rezagos obtuvieron un  $p$ -valor alto. Sin embargo es importante mencionar que tuvo un nivel de cobertura de excedances muy similar al percentil estimado, es decir, del 5 %.

Tambipen se puede observar que en la gráfica de excedance, durante el periodo de alta volatilidad, se logra una mejora en la estimación de los puntos atípicos positivos y en las observaciones negativas la estimación queda por debajo del valor observado.

Finalmente el ejercicio para la estimación mediante modelos ARMA ? GARCH cuantílico, se logra obtener todos los parámetros dentro de su niveles de significancia. Esto indica que es el modelo de mayor robustez comparado con todos los anteriores.

Sin embargo, el nivel de porcentaje de excedance es superior al percentil estimado, es decir, superior al 5 %. Por otro lado, se observa que los puntos rojos estan al mismo nivel dutante todo el periodo de tiempo de la serie, incluyendo el periodo de alta volatilidad, por lo que aquí es donde se tiene el mayor error de estimación, ya que quedan muy por arriba de los valores observados.

Con lo anterior se pude concluir que el modelo que arrojó todos los parámetros significativos fué el ARCH ? GARCH cuantílico y que funciona de manera adecuada para periodos donde el mercado de precios está normalizado. En el periodo de alta volatilidad, todos los modelos presentaron errores importantes, y dependerá del experto decidir la mejor metodología para su interés. Desde el punto de vista de un área de riesgos de mercado, es mejor estimar una pérdida mayor a la real que subestimarla pero por otro lado activar una alarma de possible pérdida implica implementar estrategias como coberturas, que incurren en costos que quizá son inecesarios y que tamoco permiten materializar los movimientos positivos que tenga el mercado ya que el instrumento de cobertura juega un papel cntrario, es decir, pérdida cuando el mercado gana.

---

# Bibliografía



# Bibliografía

Roger Koenker. *Quantile Regression* Econometric Society Monographs, Cambridge University.

Lingxing Hao & Daniel Q. Naiman. *Quantile Regression Series: Quantitative Applications in the Social Sciences*, SAGE Publications.

Cristina Davino, Marilena Furno & Domenico Vistocco *Quantile Regression, Theory and Applications* Wiley Series in probability and Statistics.

Chi Ming Wong & Lei Lam Olivia Ting *A Quantile Regression Approach to the Multiple Period Value at Risk Estimation* Journal of Economics and Management, 2016, Vol. 12, No. 1, 1-35.

Shih-Kang Chao, Wolfgang Karl Hardle & Weining Wang, *Quantile Regression in Risk Calibration* SFB 649 Discussion Paper 2012-006, Humboldt-Universität zu Berlin, Germany.

Mauro Bernardi, Ghislaine Gayraud & Lea Petrella, *Bayesian quantile regression for tail risk interdependence*

George Casella, & Roger L. Berger, *Statistical Inference* Second Edition.

Jean-Luc Prigent *Portfolio Optimization and performance Analysis* Chapman & Hall / CRC Financial Mathematics Series.

David Ruppert & David S. Matteson *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering with R examples*. Second Edition / Springer.

David Ruppert *Statistics and Finance* An Introduction Springer Texts in Statistics.

Svetlozar T. Rachev, Stoyan V. Stoyanov & Frank J. Fabozzi *A Probability Metrics Approach to Financial Risk Measures* / Wiley-Blackwell .

Zhijie Xiao, Hongtao Guo & Miranda S. Lam *Quantile Regression and Value at Risk* / Paper Studies.



Mei-Yuan Chen & Jau-Er Chen *Application of Cuantile Regression to Estimation of Value at Risk* / Academic Paper.

Oyvind Alvik *Value-at-Risk forecasting with different quantile regression models* / Master's Thesis 2016, Norwegian University of Life Sciences, Faculty of Social Sciencies, School of Economics and Business.

Roger Koenker *Some Exercises on Quantile Regression* / R-Software Vignette.

---