



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

La Característica de Euler como número característico para
la clasificación de las superficies compactas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Carlos Giovanni Ibarra Galeazzi

TUTOR

Mat. Leticia Aguilar Pascual



Ciudad de México

2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	1
1. La Característica de Euler del plano y poliedros convexos.	3
1.1. La fórmula de Euler en el plano	3
1.2. Característica de Euler de Poliedros Convexos.	11
1.2.1. La Demostración de Euler	18
1.2.2. La Demostración de Legendre	27
2. La Fórmula de Euler en un Grafo.	39
2.1. La fórmula de Euler en un Grafo conexo.	43
2.2. La Característica de Euler de un Grafo plano conexo.	46
2.3. Aplicación de la Característica de Euler de un Grafo plano conexo	49
3. La Característica de Euler en el Teorema de Clasificación de Superficies Compactas	56
3.1. Preliminares	56
3.1.1. El Teorema de la Curva de Jordan	57
3.1.2. Superficies.	58
3.1.3. Triangulación de una Superficie	66
3.1.4. Superficies Orientables y no-orientables	77
3.2. La Característica de Euler de una Superficie Compacta.	83
3.3. El Teorema de Clasificación de Superficies Compactas	86

4. Algunas Otras Aplicaciones de la Característica de Euler	91
4.1. El Teorema de Pick y las coles de Bruselas.	91
4.2. La Característica de Euler y los Sistemas Dinámicos.	101
4.3. La Fórmula de Descartes.	109
4.4. El Teorema de Gauss-Bonnet	114
Conclusiones	120
Anexos	122
A. Algunos Aspectos Históricos de los Poliedros Regulares.	123
A.1. Poliedros Regulares.	123
B. Un poco más sobre triangulación de una superficie.	128
C. Un poco de Teoría de Grafos.	131
D. Un poco de sistemas dinámicos	137
E. Un poco sobre la Fórmula de Descartes.	140
Bibliografía	145

Dedicatoria

*A la memoria de mi padre, abuelo y abuela:
Juan, Manuel y Alicia
donde quiera que estén... los amo.*

*A mi madre, con infinito amor:
Edith
que simplemente sería nada sin ti...
te estaré en deuda por siempre.*

*A mis hijos, con todo mi amor:
Sophia y Leonardo
esperando sirva de inspiración en su vida...
ustedes me completan.*

*A mi hermosa familia y hermanos:
Bruno, Jorge, Manuel, Jorge Antonio y Alicia
gracias por los buenos momentos, las risas y el apoyo...
“gens una sumus”.*

*A mis amigos:
Thomas, Alejandro y Jorge
Gracias por su apoyo todos estos años.*

Agradecimientos

Aquí los agradecimientos

Introducción

Algunos conceptos en matemáticas son familiares para cualquier persona aún si ésta no tiene estudios dirigidos hacia las matemáticas u otra disciplina relacionada con ella. Tal es el caso del Teorema de Pitágoras o la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado con una incógnita.

La característica de Euler representa, como otros resultados y fórmulas en matemáticas, una hermosa relación entre conceptos que bien podrían ser accesibles al público en general. Sin embargo, suele ignorarse, pese a su sencillez, por un estudiante promedio egresado de bachillerato, e incluso en el caso de los estudiantes de la carrera de matemáticas, es vista de manera escueta o simplemente mencionada sin más importancia que aquélla que la reduce a una propiedad de poliedros.

El trabajo de la presente tesis, se propone “revalorar” esta joya olvidada del gran matemático Leonhard Euler y mostrarla como parte de aquéllos conceptos que contribuyen a una cultura matemática básica al alcance de cualquier estudiante con conocimientos elementales de Geometría Euclidiana, que le permitan, además, apreciar otros campos de la matemática y tener acceso a comprender la aportación de Euler a lo denominado por sus contemporáneos como “*analysis situs*”, y con ello introducir e interesar a una mayor población estudiantil, incluso al público en general, en el estudio de la Topología, su historia e inicios.

Por otro lado, es importante aportar elementos que permitan apreciar las características que hacen de esta propiedad una invariante topológica, así como mostrar las diversas aplicaciones que tiene en Geometría: su potencial en demostraciones sencillas y elegantes (una prueba muy corta del porqué sólo existen cinco sólidos platónicos), en el cálculo de área de polígonos en un geoplano. Esto último permite también introducirse y apreciar el estudio de la Teoría de Gráficas. De este modo en el primer y segundo capítulos se describe esta propiedad en su forma más sencilla y se incluye la demostración dada por Euler y Legendre, para después mostrar la extensión de ésta a superficies en el capítulo 3.

De igual modo, en el capítulo 4, podrá notarse su relación con Sistemas dinámicos, con la Geometría Diferencial en conceptos como la curvatura de una superficie (Teorema de Gauss-Bonnet)

para enfocarse en una parte del escrito en la aplicación del número de Euler para el Teorema de clasificación de superficies compactas.

Finalmente, se busca que lo desarrollado sea un apoyo y motivación para que más estudiantes conozcan y valoren la importancia que tiene la característica de Euler, sus alcances, su relación con diversas e importantes ramas de la matemática, al mismo tiempo que integra sencillez, belleza y potencial.

Capítulo 1

La Característica de Euler del plano y poliedros convexos.

1.1. La fórmula de Euler en el plano

Definición 1.1.1. Consideremos una recta $\ell_1 \subset \mathbb{R}^2$, en esta situación, la recta divide el plano en dos regiones (Figura 1.1), a saber, la que se encuentra por arriba de esta y la que está por debajo.

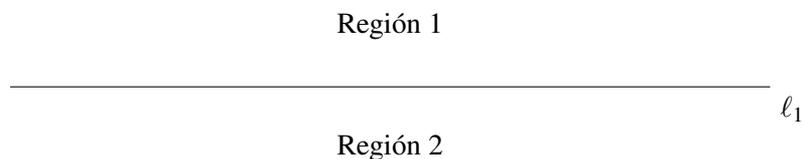


Figura 1.1

A dichas regiones les llamaremos **caras**, que denotaremos por c , el número total de caras de cierta disposición¹ lo expresaremos por C , al número total de vértices por V y al número total de aristas por A .

En el caso de la Figura 1.1, $C = 2$. Cabe señalar que en la misma, $V = 0$ y $A = 1$, de tal forma que

$$V - A + C = 1 \quad (\text{EP})$$

¹Entenderemos por disposición como un manera de colocar una cantidad finita de rectas en el plano.

Si agregamos vértices a la recta ℓ_1 , digamos x_0, x_1, x_2 y x_3 , tal cual se muestra en la Figura 1.2

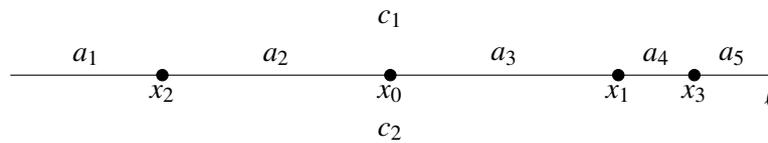


Figura 1.2

la ecuación (EP) se mantiene, pues $V = 4, A = 5$ y $C = 2$, de donde

$$V - A + C = 1$$

De hecho, podemos mostrar la siguiente

Proposición 1.1.1. Sea $\ell \subset \mathbb{R}^2$. Si V es el número de vértices de ℓ , A su número de aristas y C el número de caras, entonces

$$V - A + C = 1$$

Demostración. Como ya se dijo al principio de esta sección ℓ divide al plano en dos caras, de donde $C = 2$. Ahora bien, puesto que se tienen V vértices, se puede mostrar por inducción que $A = V + 1$

$$\begin{aligned} V - A + C &= V - (V + 1) + C \\ &= -1 + C \\ &= 1 \end{aligned}$$

Es decir, se tiene que $V - A + C = 1$. Y, por tanto, (EP) se satisface. □

Mostraremos que la ecuación (EP) es verdadera, sin importar la disposición de las rectas. Para ello necesitamos del siguiente

Lema 1.1.1. Si sobre el plano esta dado un número finito de rectas, se puede trazar una nueva recta que no sea paralela a ninguna de las dadas.

Demostración. Sean $L_1, \dots, L_m \subset \mathbb{R}^2$, rectas inmersas en el plano. Escojamos un punto O , sin pérdida de generalidad, en la recta L_1 . Tracemos por O el conjunto de todas las rectas paralelas distintas de L_1 , es decir, $L'_i \parallel L_i$, para todo $i \in \{2, \dots, m\}$ (la situación se ilustra en la Figura (1.3) para $m = 5$).

Ahora, designemos con φ_i el ángulo formado por L_1 y L'_i , suponiendo que $0 \leq \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}$. Para el caso $\varphi_i = 0$, para todo $i \in \{2, \dots, m\}$, se tiene que todas las rectas dadas son paralelas entre sí, por lo cual cualquier recta no paralela a L_1 cumple nuestro lema.

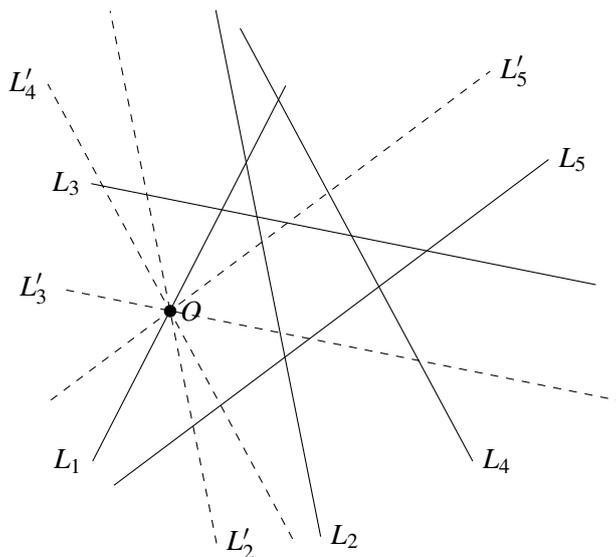


Figura 1.3

Supongamos, pues, que $0 < \varphi_i \leq \frac{\pi}{2}$. Consideremos α el menor ángulo positivo entre los ángulos φ_i , es decir,

$$\alpha = \min\{\varphi_i : i = 2, \dots, m\}$$

La recta L que pasa por O y forma un ángulo positivo menor a α con L_1 , es la recta que buscamos, esto es, L no es paralela a ninguna de las rectas L_1, \dots, L_m □

Definición 1.1.2. Definimos el **grado de un vértice** como el número de rectas que coinciden en él.

Ejemplo 1.1.1. En la Figura 1.4 el grado del vértice x_0 es 3, pues existen tres rectas que concurren en él

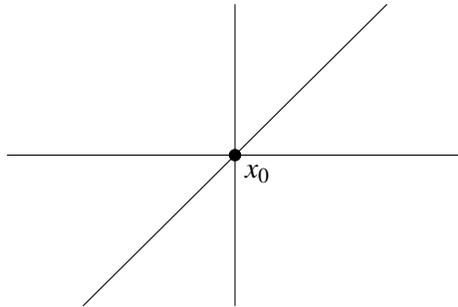


Figura 1.4

Así, el grado de un vértice será un número natural mayor o igual a 2.

Por último, usaremos el **método de la recta móvil**, para demostrar que se cumple, en cualquier caso, la fórmula (EP).

Sean L_1, \dots, L_n rectas en el plano y x_1, \dots, x_V los vértices formados por las intersecciones de dichas rectas. La Figura (1.5) ilustra la situación con $n = 5$ y $V = 7$

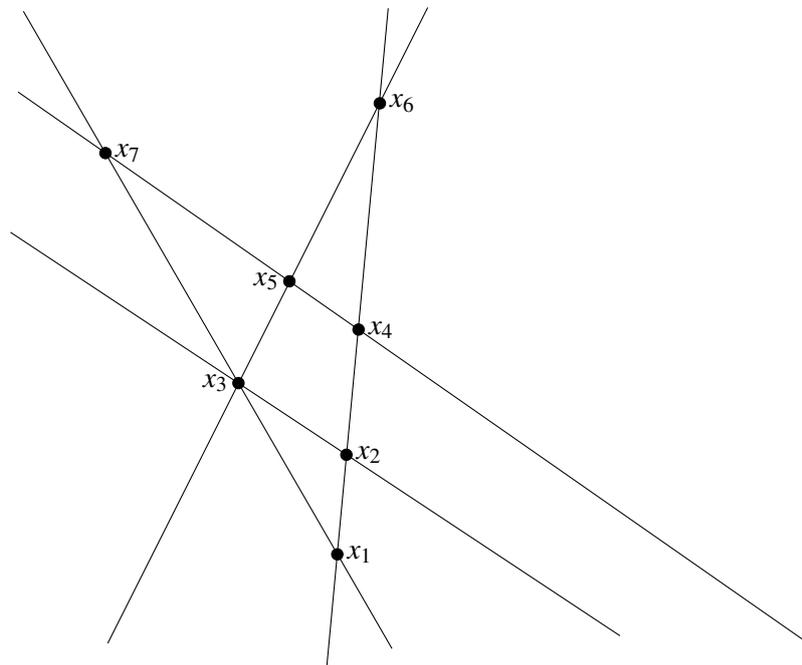


Figura 1.5

Tracemos por cada par de vértices una recta auxiliar M_1, \dots, M_h , como se muestra en la Figura 1.6

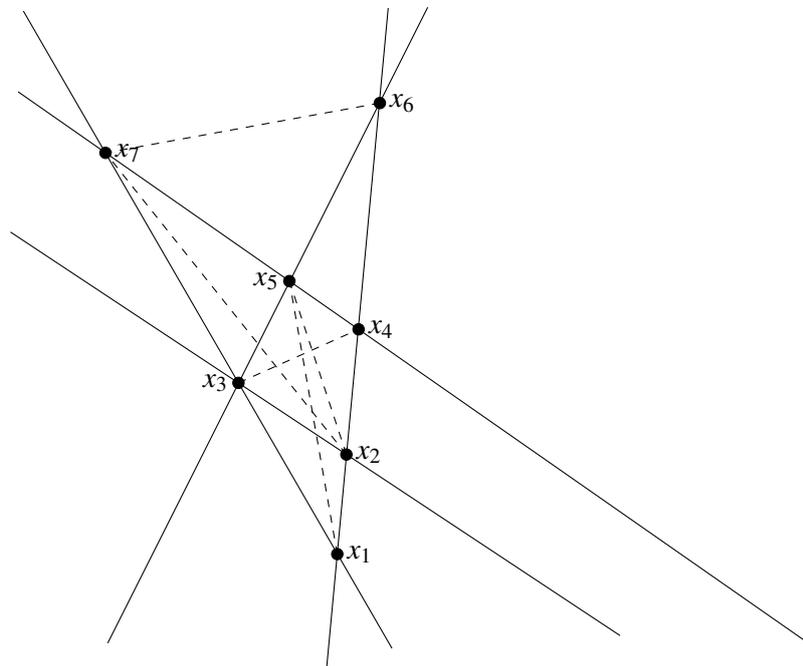


Figura 1.6

Por el Lema 1.1.1, existe una recta L_0 no paralela a las rectas M_1, \dots, M_h .

Supongamos que la recta L_0 esta situada horizontalmente y por debajo de los vértices x_1, \dots, x_7 . Así, para cada par de vértices x_i y x_j , con $i \neq j$, sus distancias a la recta L_0 son diferentes. De hecho, si x_i y x_j se hallan a igual distancia de L_0 , la recta que pasa por dichos vértices será paralela a L_0 , lo cual es una contradicción por la construcción de L_0 (véase la Figura 1.7).

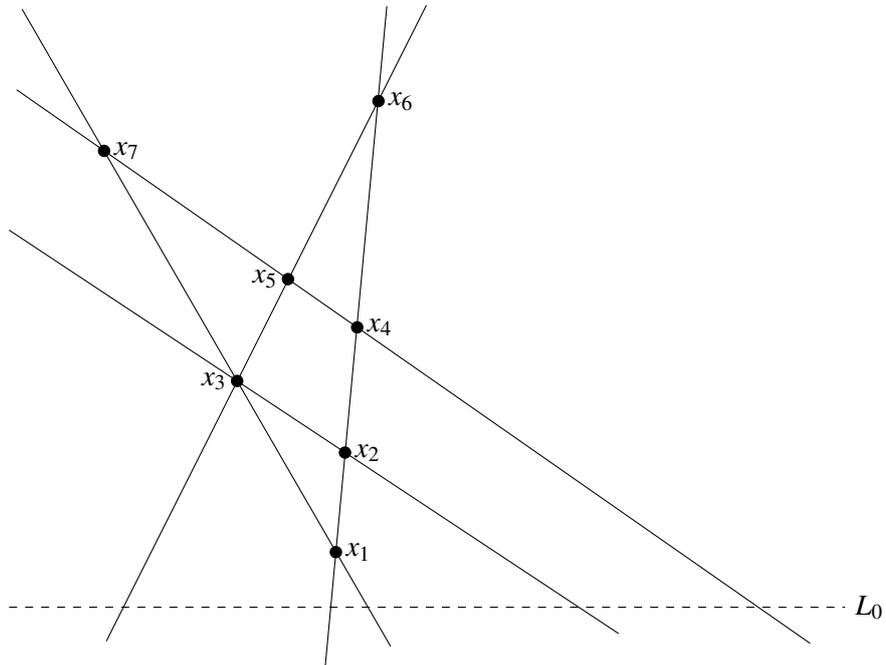


Figura 1.7

En esta situación, diremos que los vértices x_i y x_j se encuentran a diferente altura (tomando de referencia la recta L_0). Por lo tanto, podemos suponer que x_1 se encuentra a una menor altura que el vértice x_2 y, este a su vez se encuentra a una menor altura que el vértice x_3 , así, sucesivamente, hasta el vértice x_V , el cual tendrá la máxima altura. Lo anterior lo podemos escribir como

$$x_1 < x_2 < \dots < x_V$$

La recta móvil L estará situada horizontalmente, coincidiendo en su posición inicial con la recta L_0 y subiendo (paralelamente) a partir de esta por el plano (Figura 1.8).

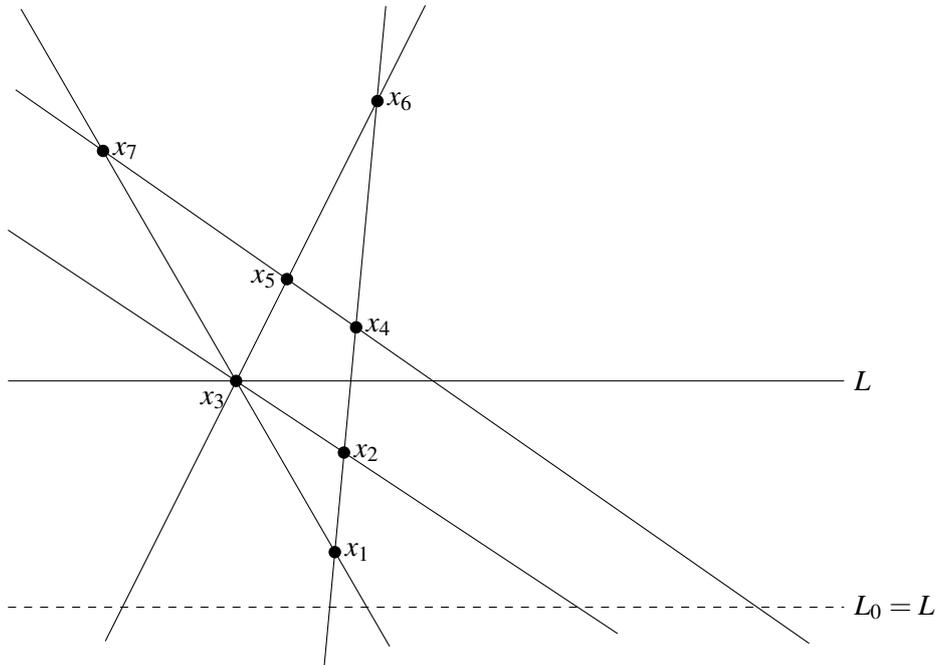


Figura 1.8

Este método de la recta móvil, nos permitirá contar el número de aristas y caras de cualquier disposición de rectas en el plano y así demostrar el siguiente:

Teorema 1.1.1. Sean $L_1, \dots, L_n \subset \mathbb{R}^2$. Entonces se cumple

$$V - A + C = 1$$

Demostración. Usando el método de la recta móvil descrito en los párrafos anteriores, observemos primero que, L nos ayuda a calcular las aristas de la configuración, puesto que se intersecta con las rectas L_1, \dots, L_n y con cada una de ellas en un punto particular, en la posición inicial ella encuentra n aristas.

Ahora, hagamos subir L , desde su posición inicial y paralelamente, hasta encontrarse con el vértice más bajo x_1 , en este punto, aparecerán nuevas aristas que coinciden con el grado del vértice x_1 , definido como α_1 . Por tanto, en el momento que L llegue a x_1 , habremos contado en total $n + \alpha_1$ aristas. Este procedimiento lo repetimos con cada uno de los vértices de la disposición, teniendo un total de aristas de

$$A = n + \sum_{i=1}^V \alpha_i$$

Por otro lado, la recta L , en su posición inicial, es dividida por las rectas L_1, \dots, L_n en $n + 1$ partes; cada una de estas partes se encuentra en la cara de la partición que le corresponde. Por lo tanto, la recta L encuentra en la posición inicial $n + 1$ caras y este número no varía hasta que L se encuentre con el vértice x_1 , en este momento, aparecen, como hemos visto, nuevas aristas cuyo número es α_1 . El número de caras nuevas encontradas será igual a $\alpha_1 - 1$, pues dichas caras están limitadas por α_1 aristas nuevas. Repitiendo este proceso con cada uno de los vértices de la configuración tendremos

$$C = n + 1 + \sum_{i=1}^V (\alpha_i - 1)$$

es decir

$$C = n + 1 + \left(\sum_{i=1}^V \alpha_i \right) - V$$

Así, concluimos que

$$\begin{aligned} V - A + C &= V - \left(n + \left(\sum_{i=1}^V \alpha_i \right) \right) + \left(n + 1 + \sum_{i=1}^V \alpha_i - V \right) \\ V - A + C &= 1 \end{aligned}$$

Como se quería demostrar. Por lo tanto la ecuación (EP), es cierta para cualquier número finito de rectas en el plano. \square

Así, la propiedad de Euler, (EP) se mantiene constante, sin importar cuántas rectas en el plano tengamos ni la disposición de las mismas, lo cual nos habla que la ecuación $V - A + C$ es una propiedad característica o esencial del plano. Es por eso que se le da el nombre de **característica de Euler del plano**.

Con los elementos descritos hasta aquí, podemos denotar por la letra χ , a la característica de Euler, es decir

$$\chi = V - A + C \tag{1.1}$$

Entonces, en el caso del plano se tiene que $\chi(\mathbb{R}^2) = 1$, es decir, la característica de Euler del plano es 1.

Veremos que la característica de Euler aporta información importante sobre las cualidades de objetos con los cuales se puede tratar. Es decir, cuando dos objetos tienen características de Euler distintas, estos serán diferentes cualitativamente. Sin embargo, puede darse el caso en el cual objetos distintos tengan característica de Euler iguales. Con esto se busca plantear la posible caracterización que podría hacerse, a partir de este concepto, de un determinado objeto.

1.2. Característica de Euler de Poliedros Convexos.

Los poliedros se pueden encontrar en construcciones arquitectónicas (cúpulas de Fuller), en la industria, en dispositivos electrónicos, video-juegos (la mayoría de sus gráficos en 3D están hechos con figuras poliedrales), incluso en la naturaleza (en compuestos como los fullerenos, minerales como la pirita, organismos llamados radiolarias, en estructuras de virus como el de la polio o el VIH. Para más ejemplos sobre los poliedros a nuestro alrededor, puede consultarse [3], [9], [13], [26]) aparecen los poliedros. De ello se observa que, posiblemente, el más conocido de todos ellos sea el cubo.

Ejemplo 1.2.1. Consideremos un cubo de lado cualquiera.

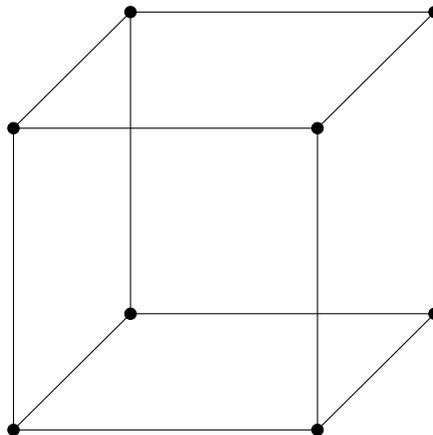


Figura 1.9

En la Figura 1.9 se observa la representación de este poliedro regular. Si miramos detenidamente, podemos darnos cuenta que tiene 6 **caras** cuadradas: una arriba, otra abajo y cuatro más en los

lados. Los segmentos de recta formados al unir las caras se llaman bordes o **aristas**. Al contarlas vemos que hay un total de 12: cuatro en la parte superior, cuatro en la parte inferior y otras cuatro en los lados. Las 8 esquinas del cubo se denominan **vértices**.

Si tomamos el número de caras C , el número de aristas A y la cantidad de vértices V del cubo y hacemos la siguiente operación:

$$V - A + C = 8 - 12 + 6$$

notamos que el resultado es 2.

Ejemplo 1.2.2. Fijémonos ahora en el tetraedro (Figura 1.10)

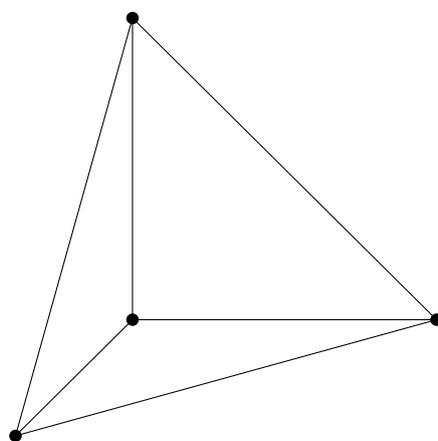


Figura 1.10

De forma similar al cubo, el tetraedro tiene 4 caras triangulares, 6 aristas y 4 vértices. Si denotamos estas cantidades por C , A y V , respectivamente, vemos que

$$V - A + C = 4 - 6 + 4$$

vuelve a ser 2. Si continuamos con este procedimiento, de contar los vértices, las aristas y las caras de dichos cuerpos geométricos, en el caso de los restantes poliedros regulares, el lector puede comprobar que se cumple el mismo resultado:

$$V - A + C = 2 \tag{E}$$

Un resultado, a primera vista, sin importancia y que podría tomarse como una simple curiosidad aritmética, en realidad, es además de básico, tan fundamental, que es parte del tejido de las matemáticas modernas. Tal cual lo deja expresado Richeson en [26]:

“...Esta observación es tan básica y vital que ahora lleva el nombre de la fórmula de Euler para el poliedro...

...El descubrimiento de Euler es sólo el comienzo de la historia. En adición a su trabajo con poliedros, Euler crea el campo del analysis situs, conocido actualmente como topología... Como hemos visto, el número de Euler, es una herramienta indispensable en el estudio de los poliedros, sin mencionar a la topología, la geometría, la teoría de grafos, y sistemas dinámicos, además tiene muchas aplicaciones elegantes e inesperadas.”

A pesar de que fueron estudiados por los matemáticos griegos, en ninguna de las obras de genialidades como Pitágoras, Platón, Euclides o Arquímedes, han podido encontrarse antecedente alguno que se relacione con el resultado de Euler. Como lo menciona Richeson en [26]:

“No lo vieron. Los antiguos griegos —luminarias matemáticas tales como Pitágoras, Teeteto, Platón, Euclides y Arquímedes, quienes estaban locamente enamorados de los poliedros— no lo vieron. Johannes Kepler, el gran astrónomo, tan admirado por la belleza de los poliedros que basó un modelo temprano del sistema solar en ellos, no lo vio. En su investigación de poliedros el matemático y filósofo René Descartes, estuvo a unos pasos lógicos de descubrirlo, pero también se lo perdió. Estos matemáticos y muchos otros no vieron una relación tan simple que puede ser explicada a cualquier alumno...”

Este resultado, tuvo que esperar miles de años para mostrarse a los ojos del gran matemático Leonhard Euler (1707-1783). Al rededor del mes de noviembre de 1750, en una carta de Euler a su amigo, el teórico de los números, Christian Goldbach (1690-1764) escribe:

“Me sorprende que estas propiedades de la estereometría (geometría sólida) no hayan sido, hasta donde yo sé, notadas por alguien más ...”[26]

Veamos ahora cómo se describe la propiedad (E) que hemos calculado en el caso del cubo y del tetraedro, a partir de la definición de estos cuerpos geométricos.

Hasta ahora, no se ha precisado aún cuál es la definición de la cual podemos partir para describirlos y exponer la prueba dada por Euler.

Partiremos de una descripción más intuitiva, para desarrollar, posteriormente, herramientas que nos permitan formalizar este concepto.

Definición 1.2.1. Entenderemos por **segmento de recta**, una porción de la recta limitada por dos puntos extremos, que llamaremos punto inicial y punto final, respectivamente.

En la Figura 1.11, x_0 es el punto inicial y x_1 es el punto final.



Figura 1.11

Definición 1.2.2. Una **sucesión de segmentos** de recta es aquella en donde el punto final de un segmento coincide con el punto inicial de otro segmento, como lo muestra la Figura 1.12. Debemos observar, que es posible tener una sucesión infinita de segmentos. También se da el caso en el que todos ellos sean colineales, es decir, se encuentren sobre una misma recta.

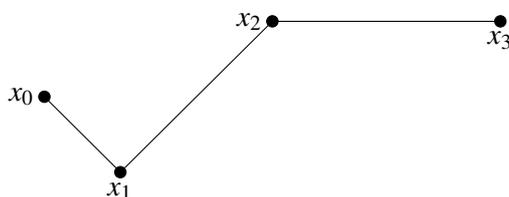


Figura 1.12

Definición 1.2.3. Convendremos en decir que un **camino o circuito cerrado**, será una sucesión de al menos tres segmentos en donde, el punto inicial del primero coincide con el punto final del último. Como se ilustra en la Figura 1.13. Un camino cerrado puede estar conformado por una sucesión infinita de segmentos.

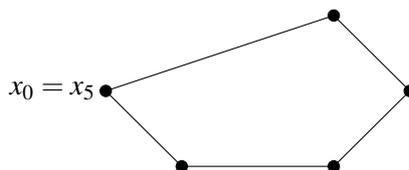


Figura 1.13

Definición 1.2.4. Un **polígono** es una sección del plano que está acotada por un camino o circuito cerrado.

Ejemplo 1.2.3. En la Figura 1.14 se muestran algunos polígonos:

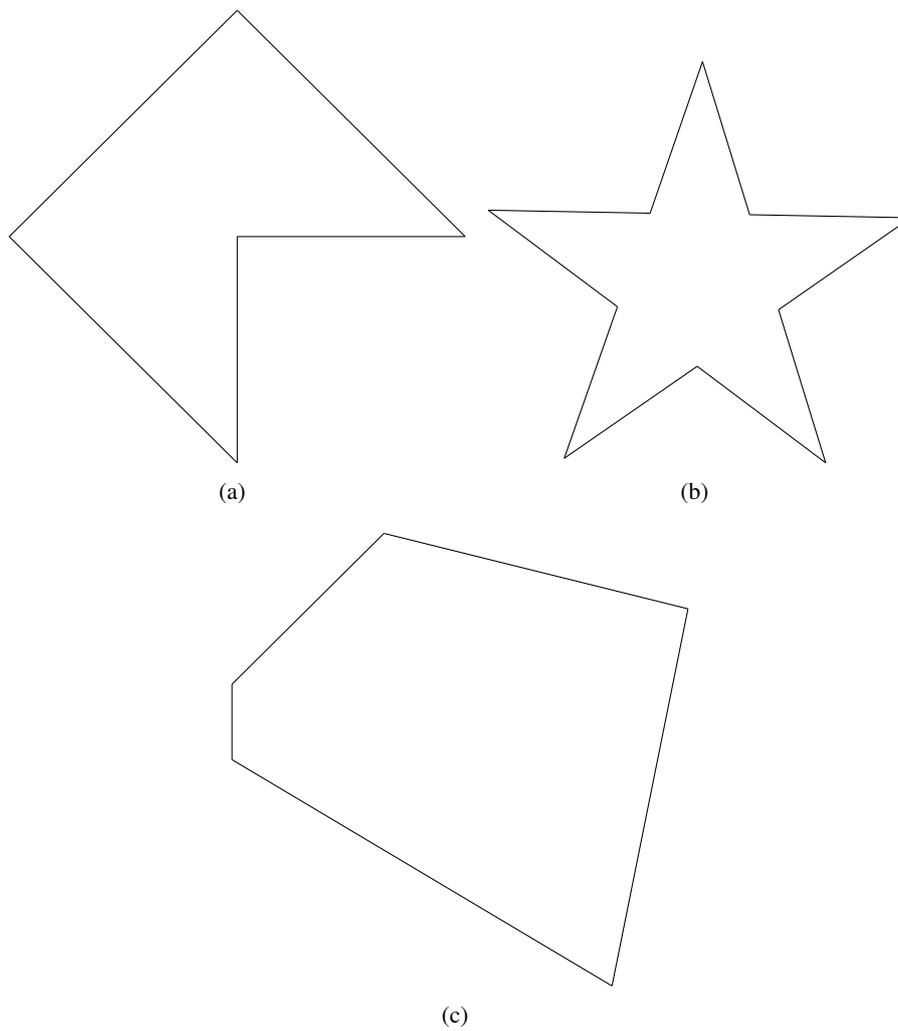


Figura 1.14

Nos centraremos en un tipo especial de polígonos que serán de nuestro interés.

Definición 1.2.5. Por un **polígono convexo**, entenderemos aquel polígono que satisfaga que cualquier par de puntos pueden ser unidos por un segmento de recta que se encuentra completamente dentro de él (Figura 1.15)

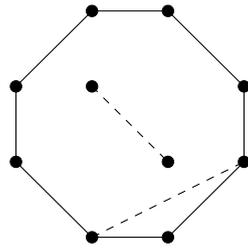


Figura 1.15

Los polígonos de la Figura 1.14 (a) y (b) no son convexos.

Definición 1.2.6. Un **polígono regular** es aquel polígono convexo en el que todos sus lados y ángulos internos son iguales.

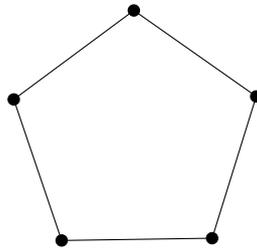


Figura 1.16

Definición 1.2.7. Un **Poliedro** es aquel objeto limitado por polígonos planos.

A dichos polígonos también los conoceremos con el nombre de **caras** del poliedro. Un segmento de línea a lo largo del cual se unen dos caras se llamará **arista**. Un punto donde varias aristas y caras se juntan se nombrará **vértice**.

Ejemplo 1.2.4. En la Figura 1.17 se muestra algunos poliedros

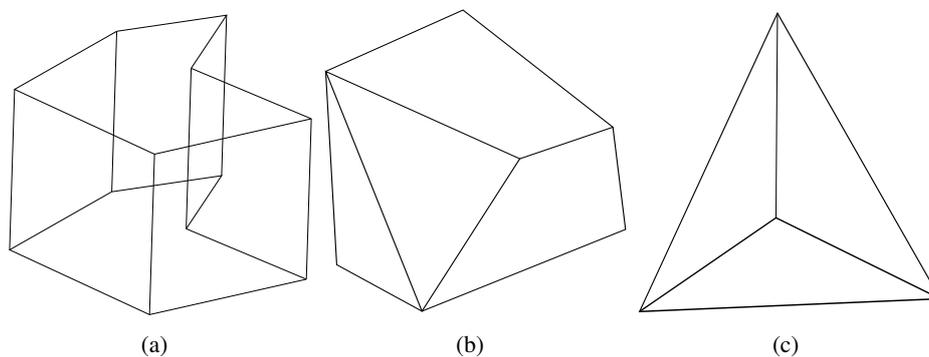


Figura 1.17

De forma análoga, podemos hablar de poliedros convexos.

Definición 1.2.8. Un **poliedro convexo** es aquel en el cual, cualquier recta secante, lo corta en, exactamente, dos puntos.

Puede comprobarse que en la Figura 1.17 (b) y (c) se muestran poliedros convexos, mientras que el poliedro de la Figura 1.17 (a) es no convexo. La Figura 1.18 es otro ejemplo de poliedro no convexo.

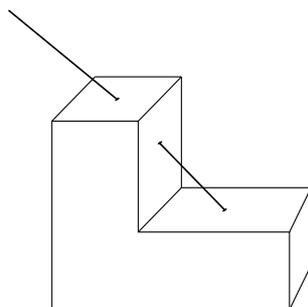


Figura 1.18

Si un poliedro no es convexo, se dice también que es cóncavo

Definición 1.2.9. Un **poliedro regular**, es un poliedro que cumple:

1. Ser convexo.
2. Cada cara es un polígono regular.

3. Todas las caras son idénticas.
4. Cada vértice está rodeado por el mismo número de caras.

Ejemplo 1.2.5. El cubo de la Figura 1.9, es un poliedro regular²

Notación: Para referirnos a un poliedro regular usaremos la letra \mathcal{P} .

Ya que V es el número de vértices de \mathcal{P} , A la cantidad de aristas y C el número de caras, la propiedad encontrada por Euler, afirma que estas cantidades están relacionadas, para todos los poliedros regulares de la siguiente forma:

$$V - A + C = 2 \quad (\text{E})$$

De hecho, esta relación es válida para poliedros convexos.

En las siguientes secciones expondremos las pruebas dadas por Euler y Legendre de este hecho, poniendo de relieve en la última el vínculo que tiene este resultado con otras áreas de la matemática.

1.2.1. La Demostración de Euler

La prueba de Euler se considera un precursor de la combinatoria moderna [26]. El método utilizado fue denominado como disección, el cual consiste en reducir un poliedro cualquiera a uno más simple por medio de cortes. La forma de hacerlo, según Euler, es ir eliminando los vértices (mediante cortes) uno por uno hasta que solo queden cuatro de ellos, dejando una pirámide triangular. El poliedro más simple es el tetraedro o pirámide triangular. Luego, en cada paso de la disección o eliminación de vértices, hacer un recuento de los vértices, aristas y caras que van quedando. Para, posteriormente, mediante propiedades conocidas³ de la pirámide triangular deducir que $V - A + C = 2$ para el poliedro original.

²A pesar de que a lo largo del trabajo se le dé a los poliedros regulares el nombre de "sólidos platónicos" o "sólidos regulares", convendremos en considerar estos objetos como "huecos", este punto de vista estará de acuerdo con el de la Topología. Puesto que en esta última se abandona la idea del cuerpo rígido geométrico, es como si tuviésemos una figura de "goma" de la cual nos interesa estudiar las propiedades invariantes bajo transformaciones continuas.

³En su artículo "*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*" (Recurso disponible en latín en la página <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/>), el cual fue traducido al inglés por Christopher Francese y David Richeson), Euler menciona textualmente

"Since a triangular pyramid is the most simple figure among solids, I perceived that on the basis of its known properties one could generalize to the properties of all solids. For in any triangular pyramid the number of solid angles is four; the number of faces is four and the number of edges is six, whose double, twelve, gives the number of plane angles, whose sum is equal to eight right angles."

"Dado que una pirámide triangular es la figura más simple entre los sólidos, percibí que, sobre la base de sus propiedades conocidas, se podría generalizar a las propiedades de todos los sólidos. Porque en cualquier pirámide triangular el número de ángulos sólidos es cuatro, el número de caras es cuatro y el número de aristas es seis, cuyo doble, doce, da el número de ángulos planos, cuya suma es igual a ocho ángulos rectos."

No obstante, la demostración que dio Euler de su descubrimiento sobre los poliedros convexos es poco conocida, debido a que no cubre con los estándares de rigurosidad actuales. Al término de esta subsección resaltaremos el porqué sucede esto. Cabe mencionar que la primera demostración rigurosa de la fórmula de Euler fue dada por Cauchy y se basa en deformaciones. La idea era quitarle una cara a la superficie del poliedro y deformar el resto de la superficie hasta formar una figura plana, hecha de las caras estiradas y puede consultarse en [20].

El trabajo de Euler sobre esta propiedad de los poliedros estuvo desarrollado a lo largo de tres importantes documentos. El primero de ellos fue su anuncio a Goldbach del descubrimiento de esta relación mediante una carta fechada el 14 de noviembre de 1750⁴. Euler escribió:

"In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum binario superat numerum acierum, seu est $H + S = A + 2$ "

"En cada sólido encerrado por caras planas, la suma del número de caras y el número de ángulos sólidos excede en dos el número de bordes, o $H + S = A + 2$ "[26]

Las letras H , A y S usadas por Euler denotan el número de caras (*hedra*. Vocablo que también puede consultarse en la correspondencia citada), bordes (*acies*) y vértices (*angulus solidus*). Euler fue uno de los primeros en nombrar a las partes del poliedro, identificar estas partes, fue probablemente lo que le ayudó a encontrar la relación que ahora lleva su nombre. Renombrando y reorganizando, llegamos a la expresión usada en el presente texto, $V - A + C = 2$

En esta carta también incluyó otras diez observaciones sobre poliedros. Tanto las observaciones como el propio descubrimiento fueron declarados sin pruebas [26].

Además de la demostración que se ha referenciado, entre 1750 y 1751, Euler escribió dos artículos sobre su fórmula para poliedros, los cuales debido al lento cambio de los artículos en aquellos años, no aparecieron impresos hasta 1758. En uno de estos artículos, el primero titulado "*Elementa doctrinae solidorum*" ("Elementos de la doctrina de los sólidos".Recurso que esta disponible en latín en la página <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/>), comenzó su estudio de la estereometría "disciplina en Geometría que se dedica al estudio de los sólidos". En las primeras treinta páginas, Euler hizo comentarios generales sobre los poliedros, posteriormente empieza una discusión acerca de la relación entre el número de vértices (V), aristas (A) y caras (C), para probar varios teoremas relativos a la relación entre estos conceptos, y de aquí, verificó que $V - A + C = 2$ se cumplía en varios casos especiales. Sin embargo, no dio una demostración de que la fórmula fuera cierta para todos los poliedros.[26]

⁴Toda la correspondencia entre Euler y Goldbach puede encontrarse en la página <http://eulerarchive.maa.org/correspondence/correspondents/Goldbach.html>

Al año siguiente publicó un segundo artículo, "*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*" ("Demostración de algunas propiedades notables con las que se dotan los sólidos encerrados por caras planas" Recurso disponible en latín e inglés en la página <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/>). En esta publicación, finalmente, pudo dar una demostración de su fórmula para poliedros.

Antes de pasar a la demostración dada por Euler, observemos un ejemplo del algoritmo usado por él durante la prueba.

Ejemplo 1.2.6. Consideremos la descomposición del cubo como se muestra en la Figura 1.19

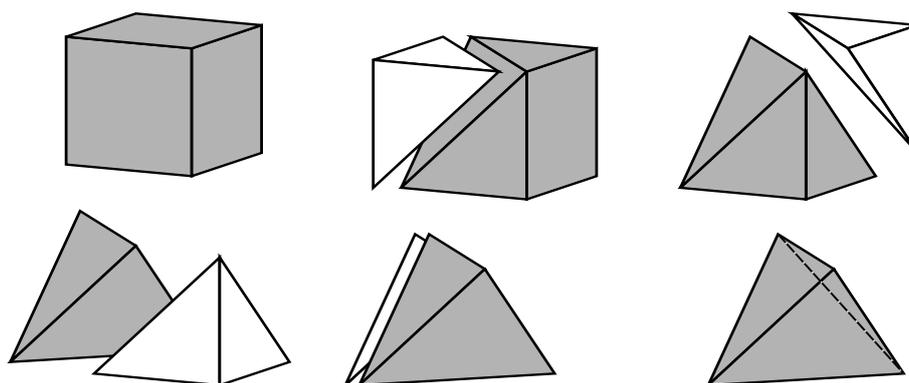


Figura 1.19

Como puede verse en cada paso eliminamos un vértice del cubo cortando pirámides triangulares, continuando hasta obtener una sola pirámide triangular. Como el cubo es un poliedro hasta cierto punto simple (por su número reducido de caras y vértices), podemos eliminar cada vértice cortando una pirámide simple. No obstante, para cualquier poliedro, es posible que se tengan que cortar varias pirámides para eliminar un solo vértice. La Tabla 1.1 muestra el número de vértices, aristas y caras que restan en cada etapa de la descomposición que hemos descrito anteriormente.

	Caras	Aristas	Vértices	Aristas – Caras
Cubo	6	12	8	6
	7	12	7	5
	7	11	6	4
	6	9	5	3
Tetraedro	4	6	4	2

Tabla 1.1

Podríamos esperar que a medida de que el número de vértices decrece, la cantidad de caras y aristas disminuirá con algún patrón predecible. La Tabla 1.1 nos hace ver que no es así. En

este ejemplo, el número de caras aumenta antes de disminuir, el poliedro comienza con 6 caras, luego, a medida de que se cortan los vértices, el poliedro tiene siete, luego siete, luego seis, luego cuatro. Este camino parece ser un callejón sin salida. La clave de la prueba de Euler se encuentra en la última columna de la tabla anterior, en ella sí es evidente un patrón, la diferencia entre el número de aristas y la cantidad de caras disminuye en uno después de que un vértice es eliminado.

Ahora, consideremos un poliedro con V vértices, A aristas y C caras. Eliminemos un vértice para que el poliedro resultante tenga un vértice menos que el original. Sea O el vértice que se va a eliminar, y supongamos que n caras (y por lo tanto n aristas) se reúnen en O . Euler vio que O puede eliminarse cortando $n - 2$ pirámides triangulares que tienen a O como vértice.

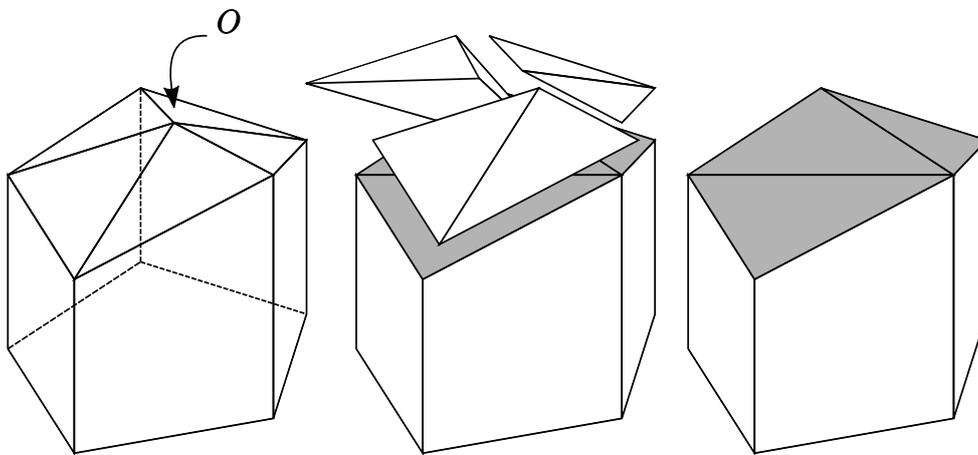


Figura 1.20

Por ejemplo, el poliedro de la Figura 1.20 tiene un vértice formado por 5 caras y se elimina cortando 3 pirámides. Nos gustaría saber la cantidad de caras y la cantidad de aristas en el poliedro reducido. Como vimos en la Tabla 1.1, no hay una respuesta simple. Debemos considerar tres casos especiales:

- *Caso 1:* Todas las caras que se encuentran en O son triangulares y las caras que resultan al eliminar el vértice O no son coplanares.

En este caso, cuando eliminamos O , también eliminamos sus n caras triangulares, pero debajo de las $n - 2$ pirámides que quitamos, encontramos $n - 2$ caras triangulares. Suponiendo que dichas caras triangulares se ubican en diferentes planos, el número de caras de nuestro nuevo poliedro será

$$C - n + (n - 2) = C - 2 \quad (1.2)$$

donde C es el número original de caras.

Durante este proceso, también removemos las n aristas que se intersectaban en el vértice O , pero añadimos las $n - 3$ aristas que se encuentran entre las $n - 2$ caras triangulares. Así, el número de aristas del nuevo poliedro es

$$A - n + (n - 3) = A - 3 \quad (1.3)$$

donde A es la cantidad original de aristas.

Observando el ejemplo de la Figura 1.20, empezamos con un polígono con 11 caras y 20 aristas. Después de remover las tres pirámides tenemos un poliedro con $11 - 2 = 9$ caras y $20 - 3 = 17$ aristas.

Ahora si restamos la ecuación (1.2) de la ecuación (1.3), obtenemos que

$$(A - 3) - (C - 2) = A - C - 1 \quad (1.4)$$

- *Caso 2:* Una de las caras que rodea a O , no es triangular (cara sombreada en la Figura 1.21)

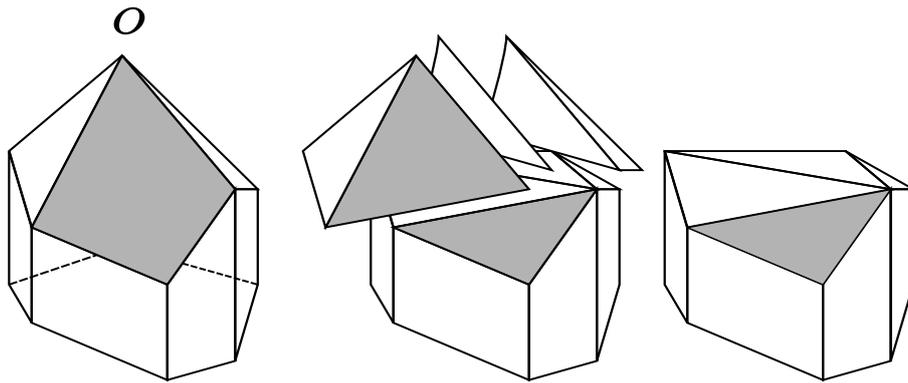


Figura 1.21

Cuando la pirámide triangular que comparte esta cara es removida, la cara no desaparece por completo del poliedro. Además, se agrega una nueva arista que divide en dos a la cara. Por lo tanto, el número de caras y aristas del poliedro generado aumentan, ambas, en uno. En el ejemplo de la Figura 1.21, comenzamos con un poliedro de 12 caras y 23 aristas. Después de retirar las tres pirámides, obtenemos un poliedro con $12 - 2 + 1 = 11$ caras y $23 - 3 + 1 = 21$ aristas. En general, si el poliedro tiene s caras no triangulares que se intersectan en O , entonces el número de caras y aristas, en el nuevo poliedro, aumenta en s . Así que el número de caras será

$$C - 2 + s \quad (1.5)$$

donde C es la cantidad de caras del poliedro original.

Y la cantidad de aristas que tendrá el poliedro generado será

$$A - 3 + s \tag{1.6}$$

Nuevamente, restando la ecuación (1.5) de la ecuación (1.6), volvemos a obtener la ecuación (1.4)

- *Caso 3:* Las caras que rodean al vértice O son triangulares, pero los triángulos generados al retirar el vértice O son coplanares (véase las caras sombreadas en la Figura 1.22).

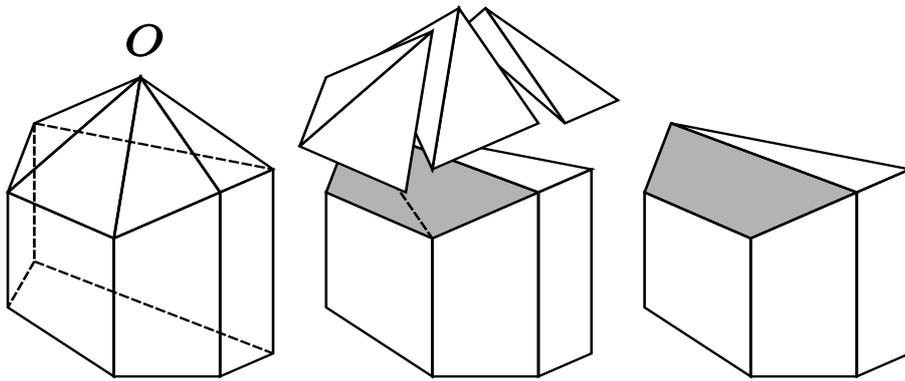


Figura 1.22

Siendo este el caso, en el poliedro resultante, no se obtendrán dos caras distintas, como en el caso 1, pero sí una sola cara cuadrilátera. Entonces, se tendría una cara menos de lo esperado. Debido a que no hay aristas entre estas dos caras, también tendríamos una arista menos. En el ejemplo de la Figura 1.22, empezamos con un poliedro de 11 caras y 20 aristas. Después de remover las pirámides, tenemos $11 - 2 - 1 = 8$ caras y $20 - 3 - 1 = 16$ aristas. Si esto sucede t veces, entonces obtenemos t caras menos y t aristas menos de lo previsto. Así, en el poliedro resultante, habrá

$$C - 2 + s - t \text{ caras}$$

donde, nuevamente, C es el número de caras del poliedro original. Entonces

$$A - 3 + s - t \text{ aristas}$$

si realizamos la diferencia entre esta última ecuación y la ecuación anterior obtenemos

$$(A - 3 + s - t) - (C - 2 + s - t) = A - C - 1 \tag{1.7}$$

En todos los casos, llegamos a la misma conclusión, la propiedad descrita en la ecuación (1.4) es una constante. Esta observación nos salva de llevar una cuenta complicada de todas las etapas de eliminar cada vértice, uno por uno, ya que en los tres casos anteriores, el análisis se efectuó retirando un sólo vértice del poliedro, sin embargo, nos damos cuenta que la diferencia entre el número de aristas y el número de caras es, exactamente una menos de lo que era antes de eliminar el vértice. Después de remover n vértices, la diferencia entre el número de aristas y la cantidad de caras será

$$A - C - n \tag{1.8}$$

Con lo observado, podemos concluir la prueba de Euler.

Teorema 1.2.1 (Fórmula de Euler). En un poliedro con V vértices, A aristas y C caras se satisface que

$$C + V = A + 2$$

Demostración. Eliminemos n vértices, uno a la vez, hasta que solo queden cuatro. Por lo tanto, $V - n = 4$, que podemos reescribir como $n = V - 4$. El único poliedro con cuatro vértices es una pirámide triangular (la cual cuenta con cuatro caras y seis aristas). Para una pirámide triangular, la diferencia entre el número de aristas y el número de caras es $6 - 4 = 2$, pero de la discusión anterior, también sabemos que $A - C - n$. Así, tenemos las ecuaciones

$$A - C - n = 2 \tag{1.9}$$

y

$$n = V - 4 \tag{1.10}$$

sustituyendo la ecuación 1.10 en la ecuación 1.9, y reordenando, obtenemos

$$C + V = A + 2$$

como se quería. □

Hemos dicho que la prueba de Euler no es completamente rigurosa, en ella se pasó por alto algunas sutilezas. De hecho, él fue muy cuidadoso en el análisis de contar el número de caras y aristas cuando un vértice era eliminado, ya que no dio instrucciones detalladas sobre los cortes realizados y se las arregló con algunos ejemplos no específicos. Euler declaró, atinadamente, que puede haber varias formas de remover un vértice determinado cortando pirámides, pero no mencionó de que algunas descomposiciones son aceptables y otras deben de evitarse. Dejó al lector con la incorrecta impresión de que cualquier descomposición serviría igual de bien. Lo cierto es que algunas dan problemas.

El primer inconveniente que encontramos es que una descomposición puede, inadvertidamente, producir un poliedro que no es convexo. Euler dio un ejemplo en el cual el vértice a eliminar, O , tiene cuatro vértices adyacentes A , B , C , y D (véase la Figura 1.23)

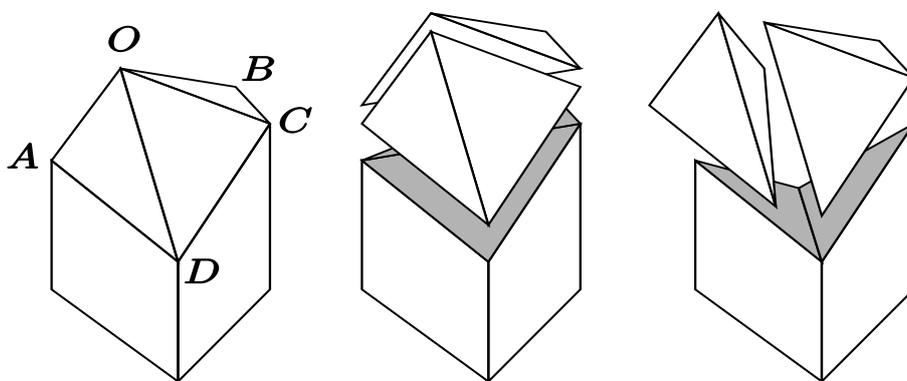


Figura 1.23

Él escribió:

“Esto puede hacerse de dos maneras ... dos pirámides podrían ser cortadas, ya sea $OABC$ y $OACD$ o bien $OABD$ y $OBCD$. Y si los puntos A , B , C , D no pertenecen al mismo plano, los sólidos resultantes tienen diferentes formas en consecuencia.”

Esto es verdad, pero faltó aclarar que uno de los poliedros resultantes tendría que ser necesariamente convexo y el otro no convexo. Para el poliedro en la Figura 1.23, removiendo las pirámides $OABD$ y $OBCD$ se produciría el poliedro no convexo.

Euler nunca mencionó el concepto de convexidad en su artículo. Hizo una declaración implícita del estilo: “supongamos que todos los poliedros son convexos”. Si observamos detenidamente el algoritmo presentado por él, nos damos cuenta de que es importante que los poliedros permanezcan convexos después de que un vértice sea cortado. Obtener un poliedro no convexo puede ocasionar problemas, porque puede ser imposible usar su técnica para remover un vértice

ubicado en un punto de no convexidad, vértice ubicado en un punto que nos lleva a obtener un poliedro no convexo en algún corte. O podemos tener situaciones peores.

De hecho, el matemático Henri Lebesgue (1875-1941) señaló, no solo que el poliedro puede ser no convexo, puede que no sea un poliedro en absoluto. En la Figura 1.24 , vemos un vértice de un poliedro que se encuentra en cuatro caras

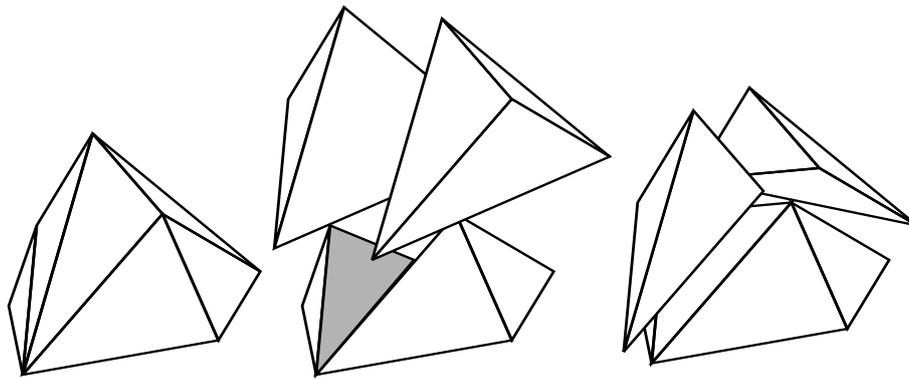


Figura 1.24

Como lo mencionado por Euler, podemos eliminar este vértice de dos formas diferentes. Uno de los métodos funciona bien, pero el otro método produce una forma que no es un poliedro, si no un objeto que se compone de dos poliedros unidos a lo largo de un borde, en este caso en la parte derecha de la Figura 1.24. Más ún, este no-poliedro, no satisface la fórmula de Euler, pues $V = 6, A = 11, C = 8$ y $V - A + C \neq 2$. Este ejemplo indica una seria deficiencia en la prueba de Euler. En la figura 1.25, podemos ver que aplicando las disecciones de Euler podemos obtener otros poliedros degenerados.

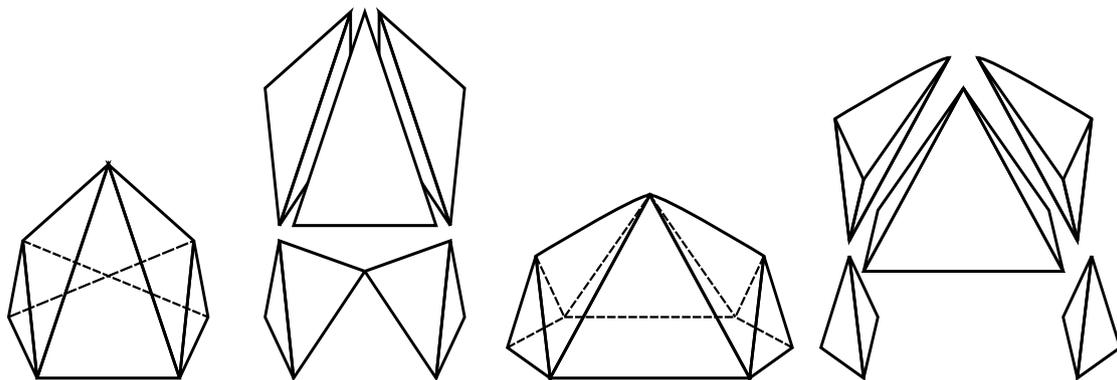


Figura 1.25

En una de las descomposiciones podemos apreciar que se obtienen dos poliedros unidos en un vértice, mientras que en la segunda, obtenemos un poliedro desconectado. Nuevamente, estos objetos no satisfacen la fórmula de Euler.

A pesar de los anteriores ejemplos, la prueba de Euler contiene elementos que no son despreciables, lo que hace de ella una argumentación no del todo perdida. Podemos adecuarla haciendo una elección correcta, y no arbitraria, de la forma de eliminar un vértice de tal manera que garantice que el objeto resultante sea un poliedro convexo. De hecho, en todos los ejemplos que dimos hay una elección aceptable que no colapsa la prueba de Euler. Después de esto, podemos afirmar, con toda seguridad, que la fórmula de Euler es cierta para todos los poliedros convexos.

Desde que Euler presentó su demostración, ha tenido muchas pruebas nuevas, la mayoría de las cuales son más directas que la suya. El inconveniente que representa la convexidad resultó ser un verdadero desafío para los matemáticos. Fue la fuente de décadas de investigación, ya que los matemáticos buscaron determinar exactamente qué propiedades debe poseer un poliedro para satisfacer la fórmula de Euler. La perspectiva desde la cual sus colegas posteriores apreciaron este problema, les permitieron buscar y determinar exactamente ciertos tipos de poliedros, no convexos, poliedros con agujeros, y otros ejemplos más patológicos. Esta línea de investigación resultó ser extremadamente fructífera.

Los matemáticos tardaron años en ver la importancia de lo que era evidente para Euler: que este teorema se refería a la dimensión y las reglas de construcción de objetos matemáticos. La fórmula de Euler y sus generalizaciones se convirtieron en la piedra angular para el campo de lo que sería la Topología.

Es probable que Euler no tuviera idea de la importancia de su teorema ya que no existe evidencia de que él haya retomado el problema para clasificar poliedros, ni de que haya aportado algo más a la fórmula. Nunca sabría que sería una de sus contribuciones más apreciadas a la matemática.

1.2.2. La Demostración de Legendre

La segunda prueba de la fórmula de Euler para los poliedros, y la primera en reunir los rigurosos estándares de nuestros días, fue dada por Andrien-Marie Legendre. Legendre fue un matemático francés que perteneció tanto a la Académie des Sciences en París como a la Royal Society de Londres. Tiene publicaciones en diversas áreas, pero sus contribuciones más importantes fueron a la teoría de números y a la teoría de las funciones elípticas. Su legado también incluye un libro de texto extremadamente popular sobre geometría elemental que escribió en 1794, *Éléments de Géométrie (Elementos de Geometría)*, en muchos sentidos, los *Elementos* de Legendre, reemplazaron a los *Elementos* de Euclides, convirtiéndose en el principal texto de geometría para los próximos cien años.

Legendre incluyó el resultado de Euler para poliedros en esta publicación y la popularidad de la misma le dio una amplia difusión. Legendre no intentó enmendar la prueba de Euler, por el

contrario dio una demostración sustancialmente diferente. El ingenioso argumento de Legendre utiliza conceptos de geometría esférica y propiedades métricas como medidas de ángulos y áreas. El éxito de su prueba es bastante inesperado puesto que estos conceptos no aparecen en la declaración del Teorema 1.2.1

La pieza clave de la prueba de Legendre se basa en una fórmula de la geometría esférica que permite obtener el área de un triángulo sobre la superficie de una esfera en términos de sus ángulos interiores. Para ello es necesario describir algunas definiciones y resultados previos los cuales denotamos como Teorema 1.2.2 y Teorema 1.2.3.

En una esfera, triángulos y otras figuras poligonales no están hechas de segmentos de rectas sino de arcos de grandes círculos. Un *gran círculo* es cualquiera que sobre una esfera tiene el mismo radio que esta, o equivalentemente, es cualquier círculo en la esfera de radio máximo. Estos tienen la propiedad de minimizar la longitud entre dos puntos sobre la esfera.

Definición 1.2.10. Definimos un **triángulo en la esfera** como una región acotada por tres grandes círculos (como lo muestra la Figura 1.26)

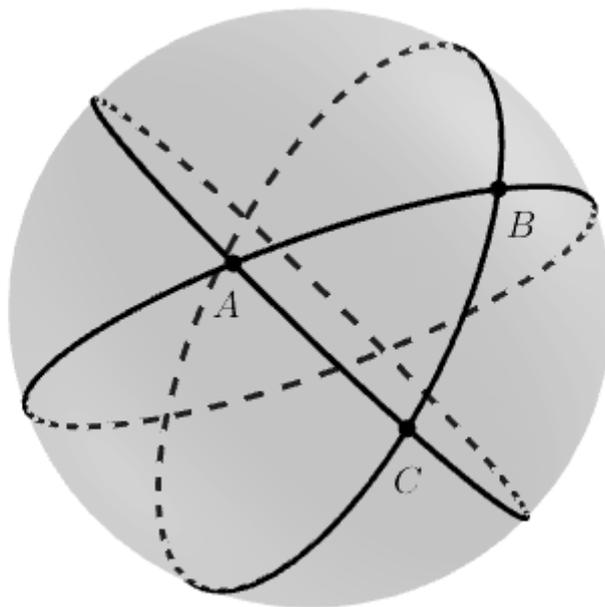


Figura 1.26

Un gran círculo también se conoce con el nombre de *geodésica*, así, un nombre más apropiado para un triángulo esférico es el de *triángulo geodésico*. Cada lado de un triángulo geodésico es menor que la mitad de la circunferencia de la esfera.

El primero en introducir los triángulos geodésicos fue el matemático griego Menelao de Alejandría (c.98) en su libro *Sphaerica*. En este libro Menelao presenta una teoría para la geometría

esférica que es análoga a la teoría Euclidiana para la geometría plana en los *Elementos*. Él mostró que muchos de los teoremas para triángulos planos también son ciertos para triángulos geodésicos. Por ejemplo, la suma de las longitudes de dos lados de un triángulo esférico siempre es mayor que la longitud del tercer lado. Probó un resultado interesante que es cierto para la esfera, pero no para el plano: dos triángulos geodésicos semejantes (tienen ángulos de igual medida) deben ser congruentes. Por otro lado, uno de los resultados mejor conocidos de la geometría plana es aquel que dice que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es 180° , o π radianes, esto no es verdadero para la esfera. Sobre una esfera, la suma de los ángulos interiores siempre es mayor que π . Por ejemplo, el triángulo grande mostrado en la Figura 1.27 tiene tres ángulos rectos; así que su suma es de $\frac{3 \cdot \pi}{2}$. El triángulo geodésico más pequeño experimenta menos curvatura que la de la esfera, por lo que la suma de los ángulos es menor a $\frac{3 \cdot \pi}{2}$, pero aún así excede a π .

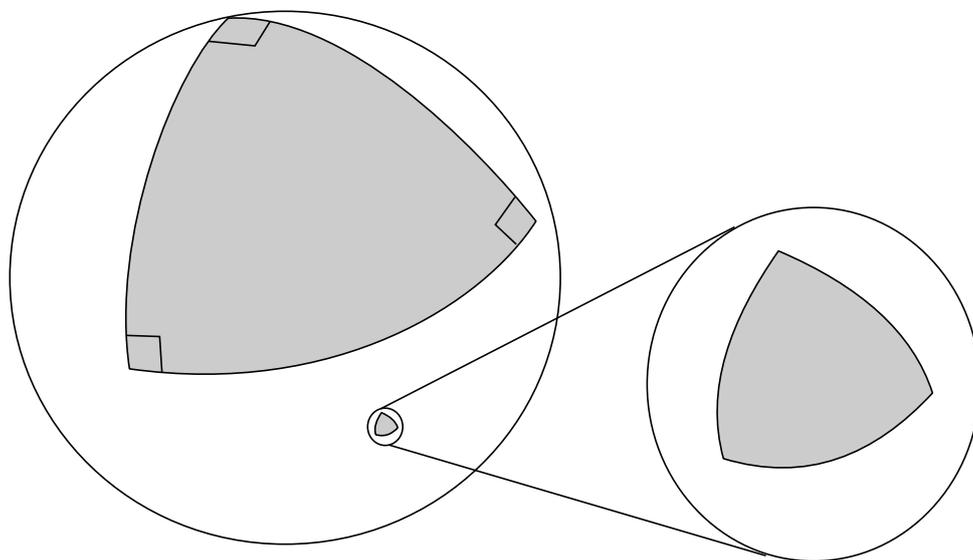


Figura 1.27

Durante casi mil quinientos años nadie refinó la declaración de Menelao sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico. Se tuvo que esperar hasta el siglo XVII para que dos hombres (de forma independiente), Thomas Harriot (c.1560-1621) y Albert Girard (1595-1632), cuantificaran el exceso en la suma de los ángulos interiores.

En la Figura 1.27 es posible vislumbrar que existe una relación directa entre el área del triángulo y la suma de sus ángulos interiores. A medida de que el triángulo crece en tamaño se va distorsionando debido a la curvatura de la esfera, lo que provoca que la suma de sus ángulos interiores también crezca.

El teorema de Harriot-Girard describe una propiedad que involucra en una fórmula la relación de tres cantidades: la suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico, el área del triángulo,

y el radio de la esfera a la cual pertenece. Por simplicidad, consideraremos el caso de triángulos que se encuentran sobre la esfera unitaria, es decir, la esfera de radio 1. La fórmula para la esfera de un radio diferente se obtiene escalando las cantidades apropiadamente.

Teorema 1.2.2 (Teorema de Harriot-Girard). El área de un triángulo geodésico sobre la esfera unitaria con ángulos interiores a , b y c es

$$a + b + c - \pi$$

En otras palabras, área del triángulo = (suma de los ángulos internos) $- \pi$

Como la suma de los ángulos internos de un triángulo plano es π , podemos escribir la fórmula como

$$\text{área del triángulo} = (\text{suma de ángulos internos}) - \pi$$

Es decir, el área del triángulo esférico es justamente la cantidad que excede la suma de los ángulos internos del triángulo geodésico a la suma de los ángulos internos de un triángulo plano. Esta fórmula se puede generalizar a polígonos esféricos de más de tres lados.

Verifiquemos que el Teorema 1.2.2 se cumple para el triángulo geodésico grande de la Figura 1.27 (en la esfera unitaria).

Podemos cubrir la esfera con 8 de estos triángulos, cuatro en el hemisferio norte, y otros cuatro en el hemisferio sur. Por lo tanto, el área de este triángulo es un octavo del área de la esfera. Puesto que el área superficial de la esfera de radio r viene dada por $4\pi \cdot r^2$, la esfera unitaria tendrá por área superficial 4π . De esta forma, el área del triángulo es $\frac{\pi}{2}$.

Por otro lado, la suma de los ángulos internos del triángulo mayor, descrito en la Figura 1.27 es de $\frac{3\pi}{2}$. Según el Teorema de Harriot-Girard, el área de este triángulo tendrá que ser

$$\frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

lo cual concuerda con nuestro anterior cálculo.

Legendre, en su demostración, usó, también, un objeto llamado lúnula (ocasionalmente nombrado biángulo en analogía con el triángulo)

Definición 1.2.11. Una **lúnula** es una región en la superficie de la esfera acotada por dos grandes círculos (ver Figura 1.28)

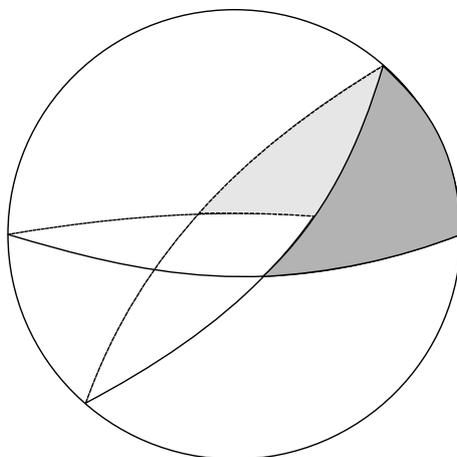


Figura 1.28

Podemos observar que un par de círculos grandes siempre se intersectan en dos puntos ubicados en lados opuestos de la esfera. Si los dos círculos se intersectan con ángulo a en un lado, entonces también se intersectarán con ángulo a del lado opuesto.

Proposición 1.2.1. Si el ángulo a se mide en radianes, entonces el área de la lúnula (sobre una esfera unitaria) es $2a$.

Demostración. Como lo muestra la Figura 1.29. El área de la lúnula es al total del área superficial de la esfera como a es a 2π , es decir,

$$\frac{\text{área lúnula}}{4\pi} = \frac{a}{2\pi}$$

resolviendo la ecuación para el área de la lúnula encontramos que

$$\text{área lúnula} = 2a$$

□

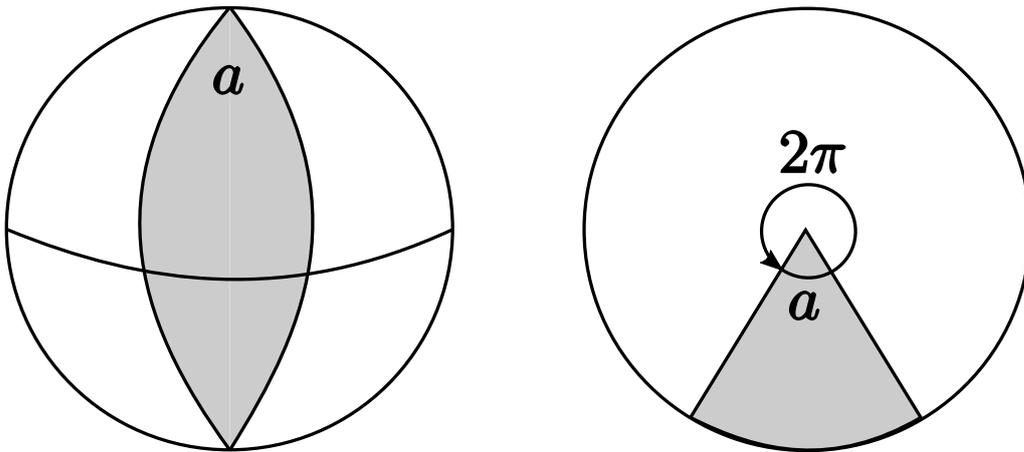


Figura 1.29

Con este resultado podemos demostrar ya el Teorema 1.2.2.

Demostración. Sea ABC un triángulo geodésico sobre la esfera unitaria con ángulos interiores a , b y c . El triángulo está contenido en algún hemisferio. Como lo muestra la Figura 1.30. Sean D, E, F, G, H, I , los puntos en donde estas líneas intersecan al borde del hemisferio.

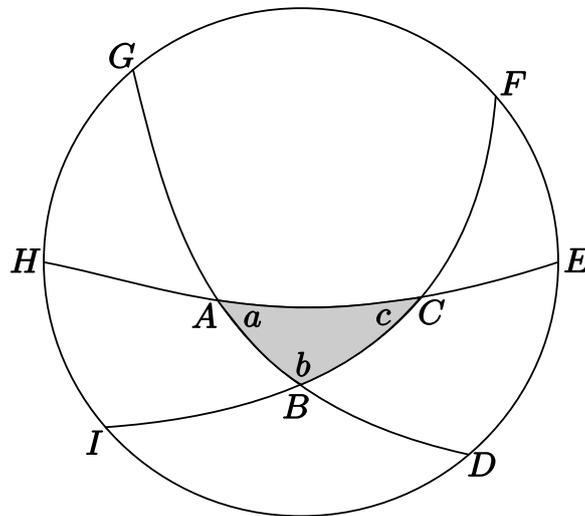


Figura 1.30

Por las simetrías de la esfera, la suma de las áreas de las regiones ADE y AGH es la misma que el área de la lúnula de ángulo a . En otras palabras, si cortamos el triángulo AGH y pegamos el

borde GH al borde ED , entonces determinaríamos una lúnula con ángulo a . De esta observación concluimos que

$$\text{área}(ADE) + \text{área}(AGH) = 2a \quad (1.11)$$

De forma similar, los triángulos BFG y BDI tienen la misma área que la lúnula con ángulo b , los triángulos CHI y CEF tienen la misma área que la lúnula con ángulo c . Por lo que tenemos

$$\text{área}(BFG) + \text{área}(BDI) = 2b \quad (1.12)$$

y

$$\text{área}(CHI) + \text{área}(CEF) = 2c \quad (1.13)$$

sumando las ecuaciones (1.11), (1.12) y (1.13) obtenemos que

$$\begin{aligned} \text{área}(ADE) + \text{área}(AGH) + \text{área}(BFG) \\ + \text{área}(BDI) + \text{área}(CHI) + \text{área}(CEF) = 2a + 2b + 2c \end{aligned}$$

Nótese que en el lado izquierdo de esta expresión, estamos agregando el área de cada región del hemisferio una vez, excepto la región triangular ABC , la cual añadimos tres veces. Por tanto

$$\text{área}(\text{hemisferio}) + \text{área}(ABC) = 2a + 2b + 2c$$

Reacomodando los términos y dividiendo por 2, concluimos que

$$\text{área}(ABC) = a + b + c - \pi$$

como deseábamos. □

El Teorema de Harriot-Girard para una esfera de radio r nos dice que el área del triángulo geodésico sobre ésta esfera es

$$\text{área del triángulo} = r^2(a + b + c - \pi)$$

Basado en el hecho de que el área de una lúnula de ángulo a (medido en radianes) sobre la esfera de radio r es

$$\text{área lúnula} = r^2(2a)$$

Necesitamos, también, la siguiente generalización del Teorema de Harriot-Girard para polígonos geodésicos de más de tres lados.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Harriot-Girard para polígonos geodésicos). El área de un polígono geodésico de n lados sobre la esfera unitaria con ángulos interiores a_1, a_2, \dots, a_n es

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\pi + 2\pi$$

Demostración. Dividamos al polígono geodésico en triángulos agregando diagonales. Tal descomposición tendrá $n - 2$ triángulos (véase la Figura 1.31).

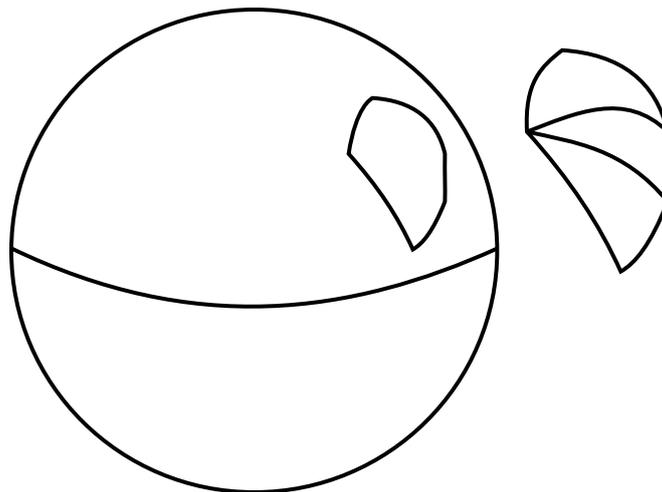


Figura 1.31

La suma de las áreas de estos triángulos es el área del polígono, y la suma de los ángulos internos de los triángulos es igual a la suma de los ángulos internos del polígono. Aplicando el Teorema 1.2.2 a todos los $n - 2$ triángulos y sumando, encontramos que el área del polígono debe ser

$$\text{área del polígono} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - (n - 2) \cdot \pi = a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n\pi + 2\pi$$

□

La suma de los ángulos internos de un polígono plano es $(n - 2) \cdot \pi$. Así, al igual que los triángulos, el área de un polígono geodésico es simplemente la cantidad que su suma de ángulos internos excede a la suma de los ángulos internos de un polígono plano con el mismo número de lados. Es decir,

$$\text{área del polígono} = (\text{suma de ángulos internos}) - (\text{suma de ángulos internos para un } n\text{-ágono plano})$$

Hay una manera fácil de recordar esta fórmula. Visualice el polígono como se muestra en la Figura 1.32

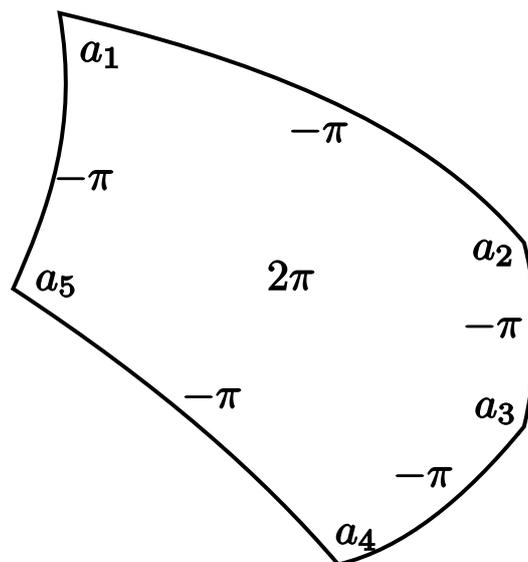


Figura 1.32

ponga la medida del ángulo en cada ángulo, $-\pi$ en cada arista, y 2π en medio de la cara. El área del polígono es simplemente la suma de estas cantidades. Esta representación visual será útil para entender la demostración de Legendre de la fórmula de Euler para poliedros.

Finalmente, estamos listos para presentar la prueba de Legendre.

Teorema 1.2.4 (Demostración de Legendre). Dado \mathcal{P} un poliedro convexo con V vértices, A aristas y C caras, se cumple que

$$V - A + C = 2$$

Demostración. Tomemos x un punto en el interior de \mathcal{P} . Como se muestra en la Figura 1.33, construyamos una esfera con centro en x que rodee completamente al poliedro. Puesto que la métrica no es de importancia, podemos elegir una esfera de radio 1.

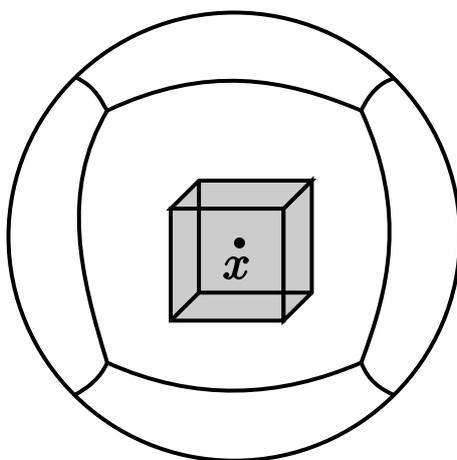


Figura 1.33

Proyectamos el poliedro sobre la esfera usando rayos que emanen de x . Una forma de imaginar la proyección es considerar al poliedro como un modelo de alambre y que x es una bombilla. La proyección es la sombra del modelo de alambre sobre la superficie que abarca la esfera. Las caras del poliedro se convierten en polígonos geodésicos (Figura 1.33).

La suma de las áreas de estos polígonos geodésicos dará el área superficial de la esfera unitaria. Por el Teorema 1.2.3 sabemos que el área de cada cara de n lados es la suma de los ángulos interiores menos $n \cdot \pi - 2\pi$. En vez de trabajar directamente con esta fórmula, echamos mano de la representación visual introducida en la Figura 1.32, produciendo una esfera como la de la Figura 1.34

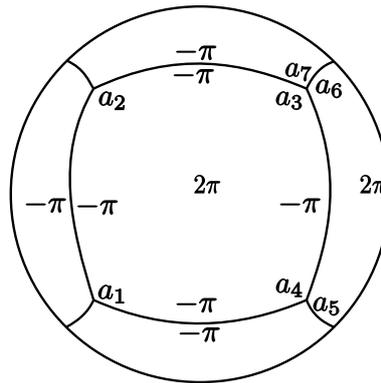


Figura 1.34

para calcular el área superficial de la esfera sumamos todas las cantidades etiquetadas.

Aunque los ángulos que se encuentren en un vértice del poliedro suman menos que 2π , estos mismos ángulos suman 2π cuando se proyectan sobre la superficie suave de la esfera. Ya que hay V vértices, estos contribuyen en $2\pi \cdot V$ a la suma. Cada arista lo hace en -2π , a saber, $-\pi$ de un lado y $-\pi$ del otro. La mitad de cada cara fue etiquetada por 2π . Puesto que hay C caras, ellas contribuyen $2\pi \cdot C$ a la suma. De esta forma, la superficie total de la esfera es

$$4\pi = 2\pi \cdot V - 2\pi \cdot A + 2\pi \cdot C$$

Dividiendo por 2π , obtenemos la fórmula de Euler

$$V - C + A = 2$$

□

Las pruebas de Euler y Legendre son muy diferentes, mientras que el primero usa argumentos completamente combinatorios, dada la naturaleza del teorema, el segundo echa mano de más conceptos, aparentemente no relacionados, como el de esfera (unitaria en este caso), ángulos y áreas para demostrar el teorema; lo que permite apreciar que en el resultado descrito por Euler, se contienen resultados y conceptos que van más allá de un teorema relativo a la combinatoria y que además nos sugieren que existe una importante relación entre la fórmula de Euler y la geometría métrica.

Por último, vale la pena comentar respecto a la prueba de Legendre, que al igual que Euler, éste asumió la hipótesis de que los poliedros eran convexos. Sin embargo, en el apéndice al artículo escrito en 1809, Louis Poincot (1777-1859) hizo la observación de que la prueba de Legendre

podría aplicarse a una clase un poco más general de poliedros convexos, los llamados poliedros *estrella-convexa*.

Lo primero que hizo Legendre fue proyectar el poliedro sobre la esfera. Como se hizo en la demostración es necesario un punto interior x del cual hacer la proyección. Este punto debe tener la propiedad de que pueda “ver” cada punto del poliedro. Para un poliedro convexo, es posible elegir un punto interior que cumpla con estas características y del cual haremos la proyección. Sin embargo, para la mayoría de los poliedros no convexos, no existe tal punto central, para los que sí, se llaman *estrella-convexa*. Ejemplos de este tipo de poliedros pueden verse en la Figura 1.35

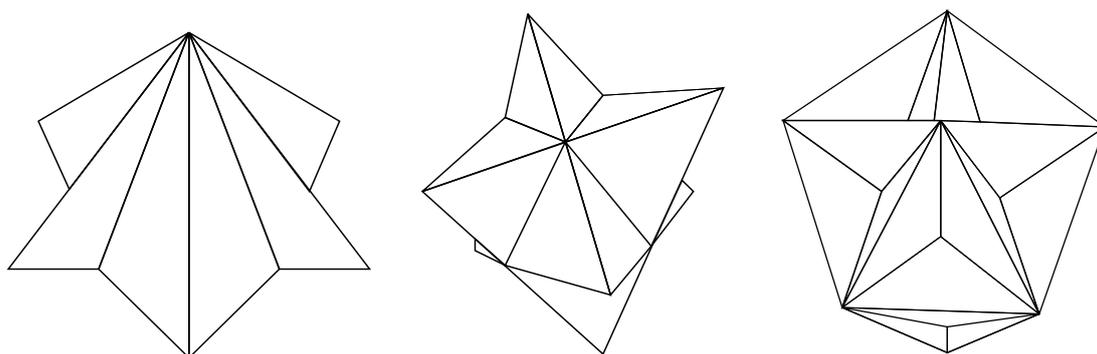


Figura 1.35

Para cada uno de ellos, existe un punto interior que “lo ve todo”, y desde el cual, por tanto, puede hacerse la proyección. Poinot lo explicó como sigue:

“[La fórmula de Euler] todavía perdura para cualquier poliedro con ángulos sólidos reentrantes, siempre que uno pueda encontrar, en el interior del sólido, un punto que sea el centro de una esfera de tal manera que cuando las caras del sólido se proyecten allí por líneas que conducen en el centro, no hay duplicación de estas proyecciones en la esfera; Quiero decir, siempre que ninguna cara, en parte o en su conjunto, se proyecte sobre la proyección de otra; que se aplica, como se ve, para un número infinito de poliedros con ángulos sólidos reentrantes. Uno reconoce fácilmente la verdad de esta proposición a partir de la prueba del Sr. Legendre, en la que no habrá nada que cambiar”[26]

Gracias a Legendre, a fines del siglo XIX, la fórmula de Euler se puso en pie para todos los poliedros convexos, y su famoso libro de texto *Éléments de Géométrie* difundió la belleza de la fórmula de Euler más allá de las comunidades a las cuales había llegado. En los años que siguieron, Poinot y otros matemáticos importantes quedaron fascinados por tan elegante resultado que muestra la relación entre diversos conceptos en matemáticas. Se convertirían en un grupo más de estudiosos atrapados en el embeleso de esta propiedad y buscaron nuevas pruebas y más generalizaciones.

Capítulo 2

La Fórmula de Euler en un Grafo.

En este capítulo expondremos cómo está vinculada la fórmula de Euler con la Teoría de Grafos, esta relación será fundamental para poder abordar con más naturalidad el Teorema de Clasificación de Superficies compactas (en el cual la Característica de Euler juega un papel crucial), pues el Lema 3.2.1 es el análogo (en el caso de superficies) al Teorema 2.1.2 que se enuncia en el presente Capítulo. Además, se pondrá de relieve la utilidad de la Característica de Euler para demostrar resultados importantes de una forma poco más que aritmética.

Definición 2.0.1. Una **gráfica o grafo** G la definiremos como el par ordenado $G = (V, A)$ donde V es un conjunto, no vacío, de puntos llamados vértices y A recibe el nombre de conjunto de aristas de la gráfica, cuyos elementos son pares no ordenados de vértices, los cuales nos indican la forma de unirlos.

Ejemplo 2.0.1. Supongamos que $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y definimos $A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_1)\}$, entonces la gráfica $G = (V, A)$ obtenida es simple (Figura 2.1)

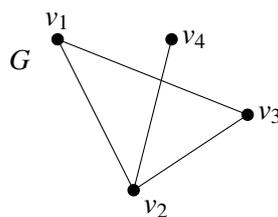


Figura 2.1

Ejemplo 2.0.2. El grafo G donde $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (Figura 2.2) muestra el caso en el cual pueden existir aristas que se denominan *múltiples*, la arista (v_2, v_3) y a la arista (v_4, v_4) se le llamará *lazo*

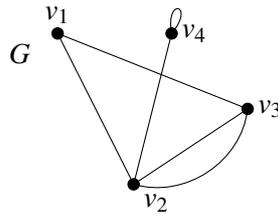


Figura 2.2

Otra notación para describir una arista es $a_1 = v_1v_2$, por otro lado, abusando de la notación, nos referiremos a un grafo simplemente con una letra mayúscula.

Definición 2.0.2. Sea G un grafo y v un vértice en el conjunto de vértices de G . El **grado** de v , denotado por $d_G(v)$, es la cantidad de aristas que inciden en v . El subíndice G en la notación $d_G(v)$ puede omitirse siempre y cuando se tenga claro cuál es el grafo G en el que se considera a v y simplemente escribir $d(v)$.

Ejemplo 2.0.3. En el grafo de la Figura 2.1, el grado de los vértices v_1 , v_2 y v_3 son, respectivamente $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$ y $d(v_3) = 2$

Un resultado importante sobre el grado de los vértices de un grafo que usaremos más adelante en el texto es

Teorema 2.0.1. Sea G un grafo simple con A aristas, entonces

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2A$$

Demostración. En la suma de los grados se cuenta el número de aristas que incide en cada vértice. Como cada arista consta de dos vértices (a los cuales une), está contada dos veces en la suma. □

Ejemplo 2.0.4. Consideremos el grafo L en donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $A = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$, como se muestra en la Figura 2.3

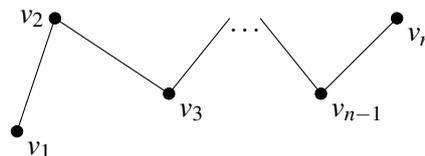


Figura 2.3

A este grafo le llamaremos *línea quebrada no cerrada*.

Si $n \geq 3$ y $v_1 = v_n$, es decir, los vértices primero y último coinciden mientras que los demás son distintos, entonces L será una *línea quebrada cerrada* a la cual también llamaremos *contorno*.

Si L es un contorno, entonces $V = A$, de donde $\chi(L) = 0$.

De aquí, tanto en el caso de un contorno como en el de una línea quebrada no cerrada, $\chi(L)$, resulta también invariante ya sea que se agregue una cantidad arbitraria m de vértices nuevos dentro de alguna arista, dividiéndola en $m + 1$ nuevas aristas, o bien, si se sustituye por una, varias aristas consecutivas.

En efecto:

Supongamos, en primer lugar, que L es una línea quebrada no cerrada con n vértices y, por tanto, $n - 1$ aristas.

Insertemos m vértices en la arista $a_i = (v_i, v_{i+1})$, de tal forma que a_i queda dividida en $m + 1$ aristas nuevas. Con este proceso obtenemos un grafo L' en donde $V' = n + m$ y $A' = (n + m) - 1$, así,

$$\begin{aligned}\chi(L') &= V' - A' \\ &= (n + m) - [(n + m) - 1] \\ &= 1\end{aligned}$$

Para el caso en que L sea un *contorno*, al agregar m vértices a la arista a_i , se sigue cumpliendo que $V = A$ para el nuevo contorno L' , por lo que $\chi(L') = 0$.

Si sustituimos por una varias aristas consecutivas en una línea quebrada no cerrada L , suprimimos los vértices que se encuentran entre dichas aristas, así, si seleccionamos m aristas consecutivas, con $1 < m \leq n - 1$, habrá que suprimir $m - 1$ vértices; de tal modo que generamos un nuevo grafo L' en donde $V' = n - (m - 1)$ y $A' = (n - 1) - m + 1$.

Calculando la característica de Euler, tenemos

$$\begin{aligned}\chi(L') &= V' - A' \\ &= n - (m - 1) - [(n - 1) - m + 1] \\ &= 1\end{aligned}$$

Si L es un *contorno*, el razonamiento es totalmente análogo, llegando a que $\chi(L) = 0$. Por lo que, en cualquier caso, $\chi(L)$ permanece invariante, concluyendo que la característica de Euler es una propiedad intrínseca (como en la recta y en el plano) del grafo en cuestión. Hemos demostrado la afirmación siguiente:

Proposición 2.0.1. Sea L un grafo. Si L es una línea quebrada no cerrada o un contorno, entonces $\chi(L)$ permanece invariante, respectivamente, ya sea que se agreguen vértices o se sustituya por una, varias aristas de L

la fórmula de Euler para cualquier grafo G se puede calcular mediante la expresión $\chi(G) = V - A$ y es invariante en el mismo sentido que la línea quebrada no cerrada o el *contorno* L .

Por ejemplo, si consideramos los grafos representadas en la Figura 2.4

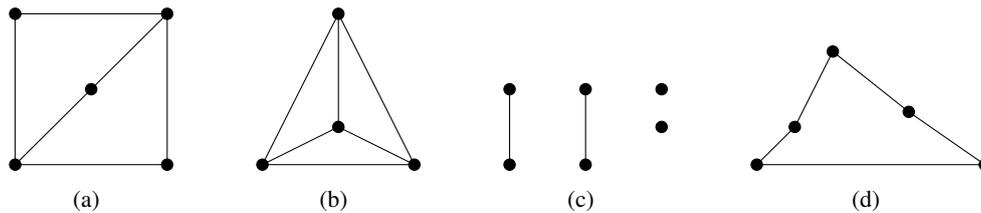


Figura 2.4

La característica de Euler es, para (a), (b), (c) y (d), respectivamente, -1 , -2 , 4 y 0 .

Definición 2.0.3. Diremos que dos grafos $G = (V, A)$ y $H = (V', A')$ son isomorfos, lo cual denotaremos por $G \cong H$, si existe una función biyectiva $f : V \rightarrow V'$ que preserve las adyacencias de sus vértices, es decir, conserva las aristas.

Una observación importante de esta definición, es que al ser V y V' conjuntos finitos, no vacíos, y f biyectiva, entonces $|V| = |V'|$; además, que se exige que la función conserve las aristas, se tiene que $|A| = |A'|$, de donde se deduce que

$$\chi(G) = \chi(H)$$

resultado que describimos como sigue:

Proposición 2.0.2. La característica de Euler de un grafo se preserva bajo isomorfismos.

□

Puesto que puede pasar que pese a que $|V| = |V'|$ y $|A| = |A'|$, y de aquí el hecho de que la característica de Euler sea la misma para ambos grafos, $\chi(G) = \chi(H)$, los grafos G y H no necesariamente son isomorfos, es decir, el que $\chi(G) = \chi(H)$ no garantiza que $G \cong H$. El recíproco de la Proposición 2.0.2 es falso. Veamos el siguiente contraejemplo; sean G y H los grafos representados en la Figura 2.5

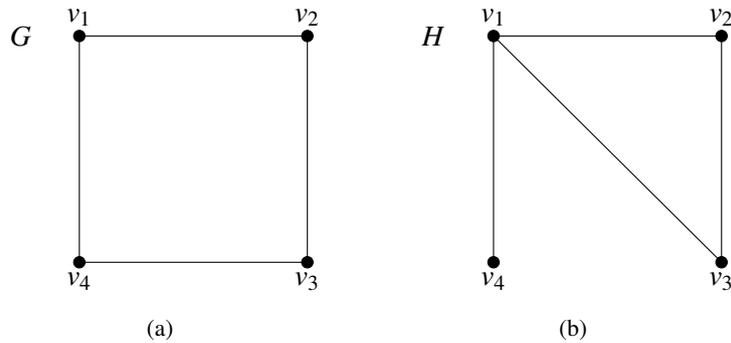


Figura 2.5

A pesar de que $\chi(G) = \chi(H) = 0$, los grafos G y H no son isomorfos.

Lo que sí podemos decir es que si $\chi(G) \neq \chi(H)$, entonces los grafos no son isomorfos.

2.1. La fórmula de Euler en un Grafo conexo.

En el caso de la Teoría de Grafos, existen objetos con una determinada característica de Euler, que permiten caracterizarlos, es decir, el concepto descrito por Euler, define ciertos grafos en forma única. Es el caso de lo que se denomina árbol y del cual trataremos en la presente sección.

Para definir adecuadamente un árbol, se requieren de algunos conceptos previos cuya definición precisa puede verse en el Apéndice C, y en el cual también podrán consultarse algunos resultados que se describen en forma breve y que son importantes para esta sección.

Uno de los resultados relevantes en la teoría de grafos que involucran a la característica de Euler es el que enunciamos como Teorema 2.1.2

Definición 2.1.1. Diremos que una grafo G es **conexo**, si y sólo si, para cualquier par de vértices de G existe una trayectoria que los une.

Definición 2.1.2. Un **árbol** T es un grafo conexo que no tiene ciclos (Figura 2.6)

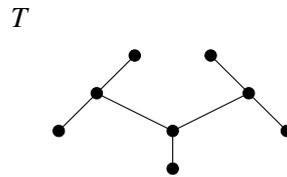


Figura 2.6

Teorema 2.1.1. Sea T un grafo conexo, con V vértices y A aristas. Entonces T es un árbol, si y sólo si $\chi(T) = 1$.

Demostración. Supongamos que T es un árbol. Haremos la demostración por inducción sobre el número de aristas en T .

Si $|A| = 0$, entonces T consta de un sólo vértice, es decir, $|V| = 1$, de donde $\chi(T) = V - A = 1 - 0 = 1$.

Supongamos ahora que el teorema es válido para todos los árboles con menos de n aristas, y sea T un árbol con n aristas. Escojamos una arista a arbitraria de T cuyos vértices son v y w como se aprecia en la Figura 2.7 (a), si removemos (poner en claro que quiere decir remover) a de T , en vista del Teorema C.0.3, T se dividirá en dos árboles T_1 y T_2 como lo muestra la Figura 2.7 (b). Tanto T_1 como T_2 tienen menos de n aristas, por lo que cumplen la hipótesis de inducción, esto es

$$\chi(T_1) = V_1 - A_1 = 1$$

$$\chi(T_2) = V_2 - A_2 = 1$$

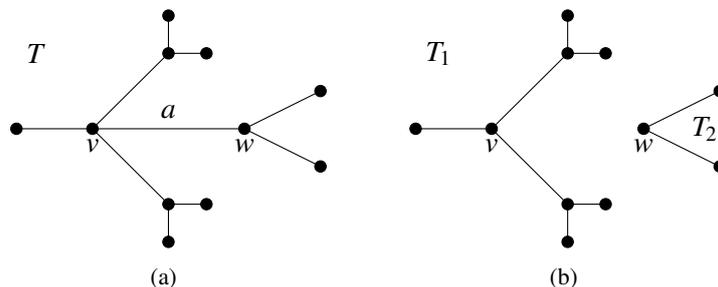


Figura 2.7

Notemos ahora que existen vértices de T que están en T_1 o en T_2 pero no en ambos, es decir, $V(T) = V(T_1) \cup V(T_2)$ y $V(T_1) \cap V(T_2) = \emptyset$, por lo que $V = V_1 + V_2$. Por otro lado, las aristas de T consisten de la arista a , de las aristas de T_1 y de las aristas de T_2 , por consiguiente $A = 1 + A_1 + A_2$, de esta forma

$$\begin{aligned}\chi(T) &= V - A \\ &= (V_1 + V_2) - (1 + A_1 + A_2) \\ &= 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, siendo T un árbol su característica de Euler es 1.

Recíprocamente, consideremos un grafo conexo T con V vértices y A aristas, que cumple que $\chi(T) = 1$. Por lo tanto, $V - A = 1$, lo cual podemos escribir como

$$A = V - 1$$

En vista del Teorema C.0.2, T es un árbol. □

Hemos mostrado además de que todos los árboles tienen la misma característica de Euler, que cualquier grafo conexo que tenga esta característica es un árbol.

De hecho, se tiene un resultado general para un grafo conexo G

Teorema 2.1.2. Para cualquier grafo conexo G , $\chi(G) \leq 1$, en donde la igualdad ocurre si y solo si G es un árbol.

Demostración. Como G es conexo, por el Teorema C.0.5, G contiene a un árbol generador T .

Por el Teorema 2.1.1, sabemos que $\chi(T) = 1$, lo cual podemos reescribir como

$$V(T) - A(T) = 1$$

Nótese ahora que $V(T) = V(G)$ y $A(G) > A(T)$, pues T es un árbol generador. De donde

$$\begin{aligned}-A(G) &< -A(T) \\ V(G) - A(G) &< V(T) - A(T) \\ \chi(G) &< \chi(T) \\ \chi(G) &< 1\end{aligned}$$

Así, para cualquier grafo conexo G , se cumple que

$$\chi(G) \leq 1$$

donde la igualdad ocurre, si y sólo si G es un árbol. □

2.2. La Característica de Euler de un Grafo plano conexo.

Definición 2.2.1. Un grafo G es **plano** si y sólo si puede dibujarse en el plano de forma que dos aristas no se crucen o que se crucen solamente en un vértice.

A parte, puede decirse que una gráfica es plana si puede “incrustarse” o embeberse en el plano. Un ejemplo de grafo plano puede verse en la Figura 2.8.

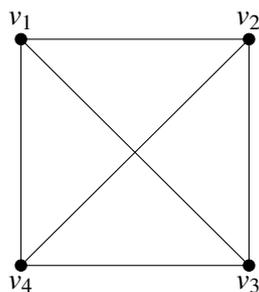


Figura 2.8

Definición 2.2.2. Un grafo es **aplanable** si es isomorfo a un grafo plano ¹.

En la Figura 2.8, a simple vista parece que las aristas v_1v_3 y v_2v_4 se intersectan, no obstante podemos encontrar un grafo isomorfo de tal manera que ninguna arista se cruce, como se representa en el Figura 2.9

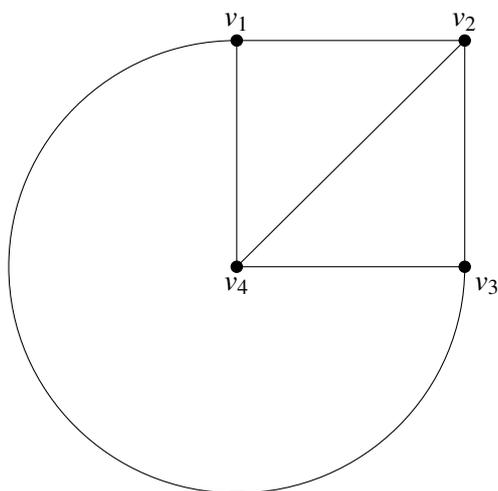


Figura 2.9

¹Nótese que si un grafo es plano, entonces, por definición, también es aplanable, puesto que un grafo G es isomorfo a sí mismo.

De hecho, otra representación del grafo de la Figura 2.8 es la que se muestra en la Figura 2.10 .

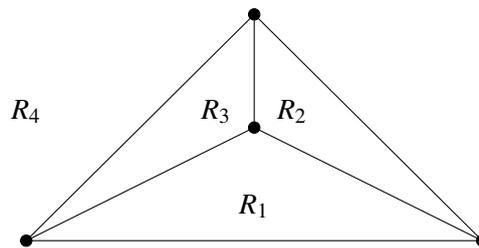


Figura 2.10

La representación que se tiene en esta figura, permite considerar el concepto de “cara” que se ha definido en el capítulo 1, pero dibujadas en el plano. Consideremos la definición de “ciclo” incluida en el Apéndice, podemos darnos cuenta que los ciclos del grafo dividen al plano en regiones, a saber, tres regiones que se encuentran por dentro del grafo (R_1 , R_2 , R_3) y una región externa (R_4), de hecho, a dichas regiones les llamaremos *caras*, que denotaremos por c . De esta forma, el grafo de nuestro ejemplo (Figura 2.10) consta de 4 caras.

Definición 2.2.3. Sea G un grafo plano conexo y c una cara de G . La **frontera** de c , la cual denotaremos por ∂c , es la unión de las aristas que bordean a c o definen una región R .

De la Definición 2.2.3, tenemos las siguientes consecuencias:

- i) Una cara de un grafo G , es una de sus regiones unida a su frontera.
- ii) Si G es un grafo conexo y c es una cara de G , entonces ∂c es un camino cerrado.
- iii) Si ∂c no contiene puentes, entonces ∂c es un ciclo de G

Si V representa el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras en la Figura 2.10, entonces

$$V - A + C = 2$$

Veremos que en realidad la relación anterior siempre es verdadera para cualquier gráfica plana.

Teorema 2.2.1. Sea G una gráfica conexa y plana. Si V es el número de vértices, A el número de aristas y C el número de caras, se cumple que

$$V - A + C = 2 \tag{EC}$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre el número de aristas A .

Si $A = 0$, como G es conexa, consta de un sólo vértice y, por tanto de una sola cara (la exterior), de esta manera

$$V - A + C = 1 - 0 + 1 = 2$$

Supongamos ahora que el resultado se mantiene para todas las gráficas conexas y planas con $n - 1$ aristas.

Sea G un grafo con exactamente n aristas, es decir, $A = n$. Tenemos dos casos:

- *Caso 1:* Si G es un árbol, entonces, por el Teorema C.0.2, $V = A + 1$. Luego, por definición, G no contiene *ciclos*, por lo que únicamente cuenta con una región (externa), esto es, una sola cara, de esta forma

$$V - A + C = A + 1 - A + 1 = 2$$

- *Caso 2:* Si G no es un árbol, dado que es conexo tiene al menos un ciclo (esto derivado de la definición de árbol), digamos F . Tomemos una arista a de F y consideremos la gráfica $G - \{a\}$ la cual sigue siendo plana y conexa. Las dos regiones que separaba la arista a se fusionan en una sola en el grafo $G - \{a\}$ el cual tiene $n - 1$ aristas y por tanto cumple la hipótesis de inducción, así

$$V(G - \{a\}) - A(G - \{a\}) + C(G - \{a\}) = 2$$

$$V(G) - (A(G) - 1) + (C(G) - 1) = 2$$

$$V(G) - A(G) + 1 + C(G) - 1 = 2$$

$$V(G) - A(G) + C(G) = 2$$

Es decir, la gráfica G de n aristas cumple con la relación $V - A + C = 2$.

□

A la relación (EC) le llamaremos **la característica de Euler de un grafo plano y conexo**. Así, hemos probado que si G es un grafo plano y conexo, entonces

$$\chi(G) = V - A + C = 2$$

2.3. Aplicación de la Característica de Euler de un Grafo plano conexo

Como una interesante aplicación del Teorema 2.2.1, mostraremos que únicamente existen cinco sólidos platónicos: cubo, tetraedro, dodecaedro, octaedro e icosaedro.

Basándonos en la Definición 1.2.9, es factible asociar un grafo a un sólido platónico (o poliedro regular). La manera de hacerlo es proyectar el poliedro en el plano desde un punto P , como se muestra (en el caso del cubo) en la Figura 2.11

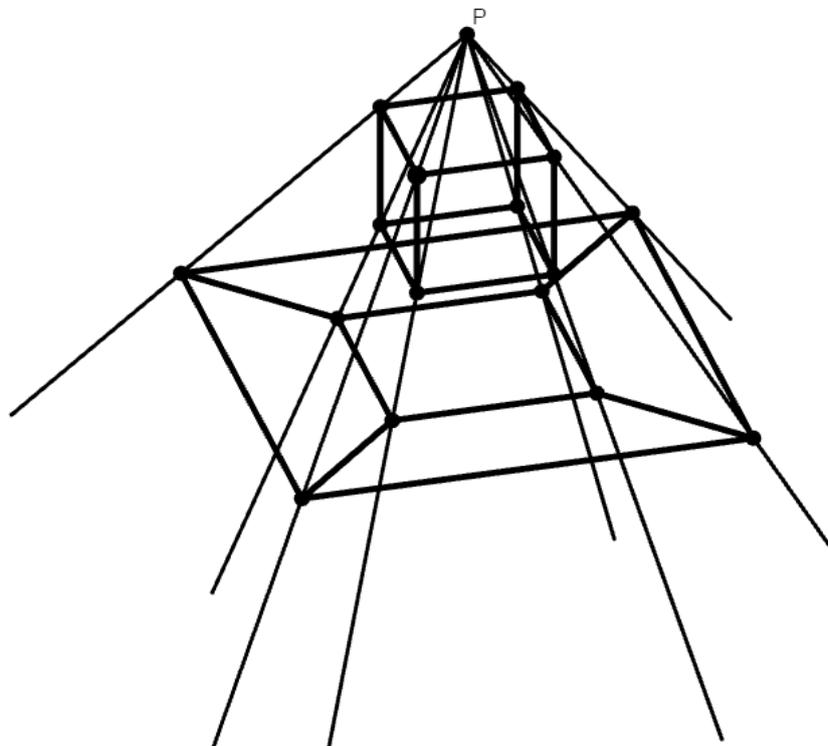


Figura 2.11

Aunque en general no es sencillo determinar si un grafo es plano o no, los grafos asociados a los poliedros cumplen con ser conexos y planos, el siguiente esquema (Figura 2.12) muestra los sólidos platónicos con sus grafos planos asociados

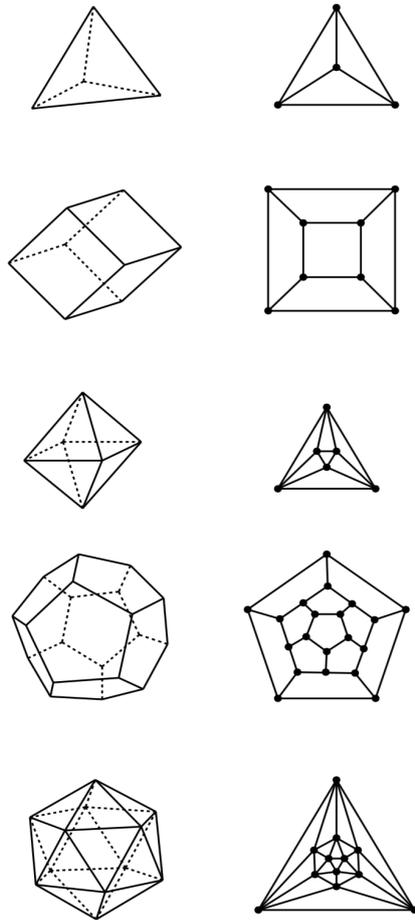


Figura 2.12

De esta manera, podemos concluir, en vista del Teorema 2.2.1, que la característica de Euler de los poliedros regulares es 2, esto es, si \mathcal{P} es un sólido platónico, entonces $\chi(\mathcal{P}) = 2$. Usaremos este hecho para demostrar que sólo existen cinco poliedros regulares.

Teorema 2.3.1. Los únicos sólidos platónicos son: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro

Demostración. Definamos las siguientes cantidades para un poliedro regular \mathcal{P} :

- $C(\mathcal{P})$:= el número de caras de \mathcal{P}
- $A(\mathcal{P})$:= el número de aristas de \mathcal{P}
- $V(\mathcal{P})$:= el número de vértices de \mathcal{P}
- $n(\mathcal{P})$:= el número de aristas que delimitan una cara de \mathcal{P}
- $d(\mathcal{P})$:= el número de aristas que son incidentes con un vértice de \mathcal{P}

Dado que \mathcal{P} es regular, el número de caras al rededor de un vértice tiene que ser el mismo para cada vértice de \mathcal{P} , lo mismo ocurre para el número de aristas incidentes con un vértice del poliedro, debe ser igual para cada vértice del mismo. Ahora bien, el número de lados de cada cara de \mathcal{P} es al menos 3 y en cada vértice inciden al menos tres aristas, se sigue que $n(\mathcal{P}) \geq 3$ y $d(\mathcal{P}) \geq 3$.

Por otra parte, puesto que en cada cara del poliedro regular convergen el mismo número de aristas, al multiplicar el número de caras por el número de aristas que delimitan cada cara, estaremos contando dos veces cada arista de \mathcal{P} , es decir

$$C(\mathcal{P}) \cdot n(\mathcal{P}) = 2A(\mathcal{P})$$

Luego, como cada arista es incidente con exactamente dos vértices, al multiplicar el número de aristas incidentes con un vértice del poliedro \mathcal{P} por el número de vértices del poliedro regular, estaremos contando, de nuevo, dos veces el número de aristas del sólido platónico, en símbolos

$$d(\mathcal{P}) \cdot V(\mathcal{P}) = 2A(\mathcal{P})$$

Del par de ecuaciones anteriores, se tiene que

$$C(\mathcal{P}) = \frac{2A(\mathcal{P})}{n(\mathcal{P})} \text{ y } V(\mathcal{P}) = \frac{2A(\mathcal{P})}{d(\mathcal{P})}$$

Sabemos que $\chi(\mathcal{P}) = 2$, esto es

$$V(\mathcal{P}) - A(\mathcal{P}) + C(\mathcal{P}) = 2$$

Al sustituir los despejes anteriores en la característica Euleriana, se obtendrá

$$\frac{2A(\mathcal{P})}{d(\mathcal{P})} - A(\mathcal{P}) + \frac{2A(\mathcal{P})}{n(\mathcal{P})} = 2$$

Factorizando $A(\mathcal{P})$ de la expresión, tenemos

$$A(\mathcal{P}) \cdot \left(\frac{2}{d(\mathcal{P})} - 1 + \frac{2}{n(\mathcal{P})} \right) = 2$$

Puesto que no tiene sentido hablar de un sólido platónico con un número negativo de aristas o con cero aristas, se concluye que $A(\mathcal{P}) > 0$, se sigue entonces que

$$\frac{2}{d(\mathcal{P})} - 1 + \frac{2}{n(\mathcal{P})} > 0$$

lo que es equivalente a

$$\frac{1}{d(\mathcal{P})} + \frac{1}{n(\mathcal{P})} > \frac{1}{2}$$

de donde

$$\frac{1}{d(\mathcal{P})} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n(\mathcal{P})}$$

recordando que $n(\mathcal{P}) \geq 3$, concluimos que

$$-\frac{1}{n(\mathcal{P})} \geq -\frac{1}{3}$$

de esta manera obtenemos la desigualdad

$$\frac{1}{d(\mathcal{P})} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n(\mathcal{P})} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

es decir

$$\frac{1}{d(\mathcal{P})} > \frac{1}{6}$$

así, $d(\mathcal{P}) < 6$, nos lleva a que los posibles valores para $d(\mathcal{P})$ se encuentran en el conjunto $\{3, 4, 5\}$.

Similarmente, de la desigualdad

$$\frac{1}{n(\mathcal{P})} > \frac{1}{2} - \frac{1}{d(\mathcal{P})} \tag{2.1}$$

obtenemos $n(\mathcal{P}) \in \{3, 4, 5\}$.

Regresando a la desigualdad (2.1), si $d(\mathcal{P}) = 3$, entonces

$$3 \leq n(\mathcal{P}) \leq 5$$

Para el caso en que $d(\mathcal{P}) = 4$, obtendremos que

$$3 \leq n(\mathcal{P}) < 4$$

es decir, $n(\mathcal{P}) = 3$.

Por último, si ocurre que $d(\mathcal{P}) = 5$, entonces

$$3 \leq n(\mathcal{P}) < \frac{10}{3} < 4$$

por tanto, $n(\mathcal{P}) = 3$.

La Tabla 2.1 muestra los posibles valores para $d(\mathcal{P})$ y $n(\mathcal{P})$ y su sólido platónico correspondiente.

$d(\mathcal{P})$	$n(\mathcal{P})$	$V(\mathcal{P})$	$A(\mathcal{P})$	$C(\mathcal{P})$	Sólido Platónico
3	3	4	6	4	Tetraedro
3	4	8	12	6	Cubo
3	5	20	12	6	Dodecaedro
4	3	6	8	12	Octaedro
5	3	12	30	20	Icosaedro

Tabla 2.1

Hemos probado que únicamente existen cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el cubo, el dodecaedro, el octaedro y el icosaedro.

□

Otra aplicación interesante de la característica de Euler es que nos ayuda a demostrar de una manera sencilla que ciertos grafos no son aplanables.

Probaremos las siguientes proposiciones.

Proposición 2.3.1. K_5 no es aplanable

Demostración. Supongamos que K_5 es un grafo conexo aplanable. Sabemos que $V(K_5) = 5$ y $A(K_5) = 10$. Por el Corolario C.0.2

$$10 \leq 3(5) - 6$$

$$10 \leq 9$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, K_5 no es aplanable.

□

Proposición 2.3.2. $K_{3,3}$ no es un grafo plano

Demostración. $K_{3,3}$ es conexo y tienen 6 vértices y 9 aristas. Como $K_{3,3}$ es un grafo bipartito no tiene ciclos de longitud impar (Teorema C.0.7), en particular no tiene ciclos de longitud 3. Por lo tanto, $d_{K_{3,3}}(c) \geq 4$, por el Teorema C.0.6 se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{c \in C(K_{3,3})} d_{K_{3,3}}(c) &\geq 4C \\ 2(9) &\geq 4C \\ 4.5 &\geq C \end{aligned}$$

Como C debe ser un número entero positivo, $C \leq 4$.

Supongamos ahora que $K_{3,3}$ es aplanable, entonces por el Teorema 2.2.1

$$\begin{aligned} V - A + C &\leq 6 - 9 + 4 \\ 2 &\leq 1 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. De esta forma, $K_{3,3}$ no es aplanable. □

Nótese cómo los resultados vistos en esta sección han sido reducidos a poco más que aritméticos gracias a la Característica de Euler.

La importancia de las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2 reside en el Teorema de Kuratowsky

Teorema 2.3.2 (Kuratowsky). Un grafo es plano si y sólo si no contiene una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$ como subgrafo.

Capítulo 3

La Característica de Euler en el Teorema de Clasificación de Superficies Compactas

Como se ha mostrado en el capítulo anterior, la característica de Euler permite caracterizar a un grafo aplanable y en los cuales es posible definir un cierto polígono, en particular, aquellos que representan a un poliedro. El resultado descrito para poliedros, se ha extendido a un grafo simple para mostrar que es invariante en éste y en aquellos isomorfos a él. Por otro lado, el término *aplanable* ilustra la posibilidad de que un cierto objeto se encuentre totalmente contenido en el plano, en este caso \mathbb{R}^2 . Al mismo tiempo, se caracteriza a un *grafo conexo* G cuya característica de Euler es menor o igual a 1, es decir, $\chi(G) \leq 1$. Estos resultados permiten mostrar que dicha característica, en el caso de un grafo plano y conexo además de invariante, determina una relación entre las caras y aristas de estos grafos.

De este modo, para extender esta idea a las propiedades de un espacio más general como lo es un espacio topológico, y mostrar la relevancia de esta propiedad en el caso de ciertos objetos y sus transformaciones continuas. Para ello, describiremos en una primera sección algunos conceptos que serán fundamentales para tal propósito.

En una segunda parte, se describe la relación de la característica de Euler con un resultado tan relevante como lo es el **Teorema de Clasificación de Superficies Compactas**.

3.1. Preliminares

Con los elementos dados en esta sección podemos observar cómo puede definirse la Característica de Euler en una superficie o variedad. Comenzaremos enunciando el importante Teorema de la Curva de Jordan, para, posteriormente, dar la definición de superficie y poner de relieve que toda superficie tiene una representación poligonal en el plano. Además, se verá que podemos triangular a este tipo de espacios topológicos, lo cual nos permitirá definir su característica de Euler.

3.1.1. El Teorema de la Curva de Jordan

Definición 3.1.1. Una **curva de Jordan** (en \mathbb{R}^2) es un subconjunto de \mathbb{R}^2 homeomorfo a \mathbb{S}^1 véase la Figura 3.1

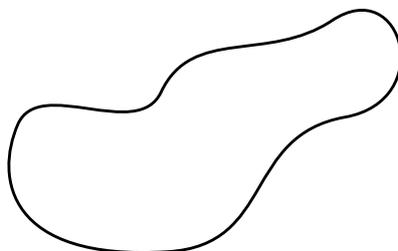


Figura 3.1

\mathbb{S}^1 denotará la circunferencia unitaria en \mathbb{R}^2 , es decir,

$$\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

También denotaremos por \mathbb{D} al disco cerrado unitario en \mathbb{R}^2 , esto es

$$\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Como se cita en [11], el teorema de la curva de Jordan es un teorema evidente y difícil, lo primero resulta de que su esencia es comprensible para cualquiera, lo segundo es que su demostración ha sido complicada desde su concepción. Sin embargo, puede consultarse una demostración bastante breve y básica (en el sentido de que no es necesario desarrollar teorías poderosas como la Topología algebraica para deducirlo) en el mismo artículo [11].

En esta subsección hablaremos un poco de este teorema sin proporcionar una prueba del mismo.

El teorema de la curva de Jordan, fue enunciado por el matemático francés Camille Jordan a finales del siglo XIX en una serie de libros denominados “*Cours d’Analyse*”. El mismo Jordan dio una demostración que resultó no ser correcta, aunque trató de enmendarla no lo consiguió. El primero en dar una demostración correcta de dicho teorema fue Oswald Veblen en 1905.

Más adelante, L.E.J. Brouwer propuso una generalización n-dimensional del teorema, la cual sería probada en 1922 por J.W. Alexander, conocida como el Teorema de separación de Jordan-Brouwer. [11]

Teorema 3.1.1. (Teorema de la curva de Jordan). El complemento en el plano de una curva de Jordan C tiene exactamente dos componentes conexas (una acotada y la otra no acotada) cada una de las cuales tiene a C por frontera.

Básicamente, lo que nos dice el Teorema 3.1.1, es que cualquier curva de Jordan C en el plano, divide a este en dos partes: el interior (componente conexa acotada) y el exterior (componente conexa no acotada) cuya frontera es la propia curva C (Figura 3.2).

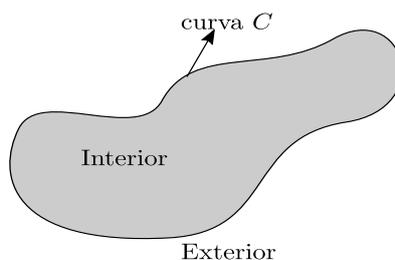


Figura 3.2

Este Teorema puede aplicarse a la Teoría de Grafos, en particular, al estudio de los grafos aplana-
bles, pues estos están estrechamente relacionados a la Topología del plano. Observemos que
si G es un grafo plano, la unión de las aristas de un ciclo, es una curva de Jordan. [4]

El Teorema de la curva de Jordan es válido también en la esfera bajo el homeomorfismo de la
proyección estereográfica.

3.1.2. Superficies.

Definición 3.1.2. Una n -variedad topológica es un espacio topológico (X, τ_X) Hausdorff, con
una base numerable, tal que cada punto $x \in X$, tiene una vecindad V homeomorfa con un sub-
conjunto abierto de \mathbb{R}^n , es decir, X es localmente Euclidiano.

Una 1-variedad se llama **curva** y una 2-variedad se denomina **superficie**.

Para el presente trabajo, consideraremos la siguiente definición de superficie.

Definición 3.1.3. Una **superficie** S es una 2-variedad conexa por trayectorias y, por tanto, conexa
y compacta (cerrada y acotada) donde para cada $x \in S$ existe una vecindad $U \subset S$ de x de tal forma
que:

(i) U es homeomorfo a un disco abierto en \mathbb{R}^2 (Figura 3.3).

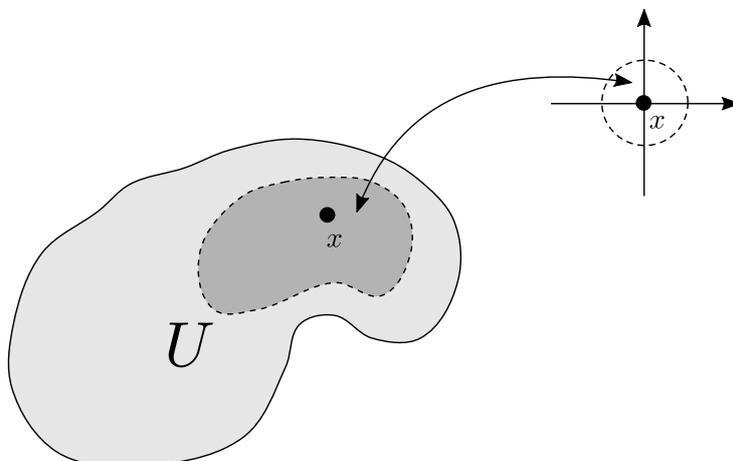


Figura 3.3

(ii) U es homeomorfo a un semidisco abierto en \mathbb{R}^2 (Figura 3.4). En este caso, x es un punto de la frontera de S , denotada por ∂S . Diremos que S es una superficie con frontera. En adelante nos referiremos únicamente a superficies sin frontera cuando hablemos de superficie.

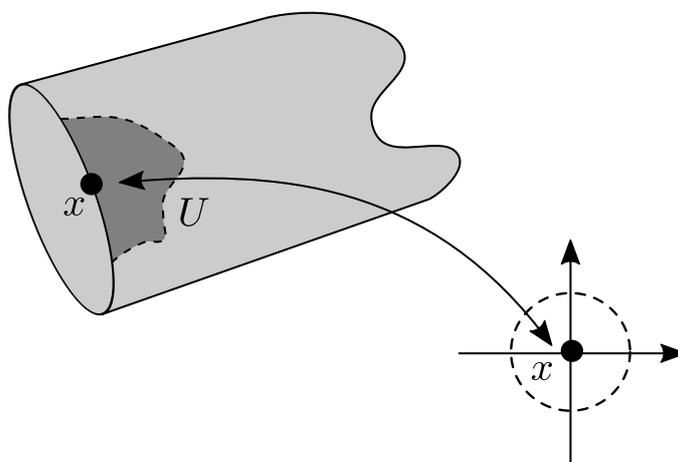


Figura 3.4

Ejemplo 3.1.1. El plano \mathbb{R}^2 es una superficie.

Ejemplo 3.1.2. El cilindro definido como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ que resulta de identificar $(0, t) \sim (1, t)$ es una superficie con frontera.

Ejemplo 3.1.3. La esfera \mathbb{S}^2 la cual definiremos como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ bajo la relación de equivalencia $(0, t) \sim (t, 0)$ y $(1, t) \sim (t, 1)$, si $t \in [0, 1]$.

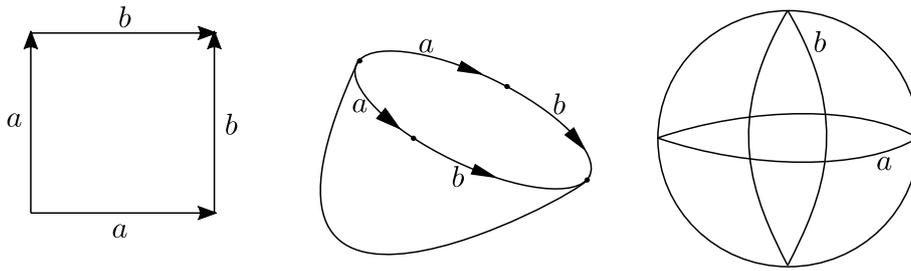


Figura 3.5: La esfera S^2

Ejemplo 3.1.4. El toro \mathbb{T}^2 visto como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$, por la relación de equivalencia $(0, t) \sim (1, t)$ y $(t, 0) \sim (t, 1)$, si $t \in [0, 1]$.

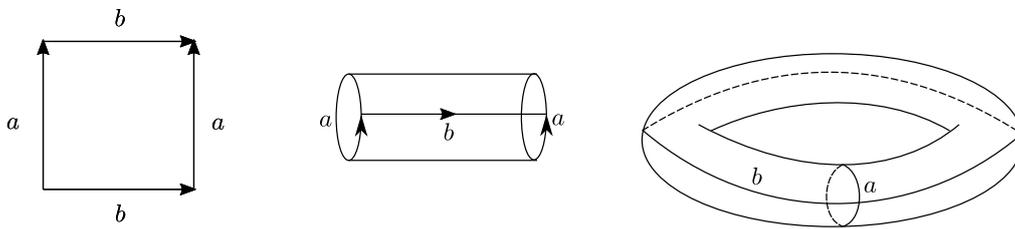


Figura 3.6: El toro \mathbb{T}^2

Ejemplo 3.1.5. La banda de Möbius \mathbb{M} definida como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$, bajo la relación de equivalencia \sim que identifica $(0, t) \sim (1, 1 - t)$, para $t \in [0, 1]$ es una superficie con frontera.

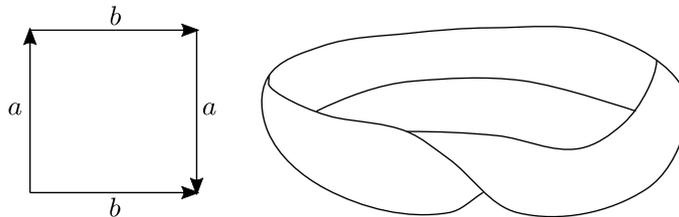


Figura 3.7: La banda de Möbius \mathbb{M}

Ejemplo 3.1.6. El plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ definido como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$, bajo la relación de equivalencia $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ y $(t, 1) \sim (1 - t, 0)$, si $t \in [0, 1]$.

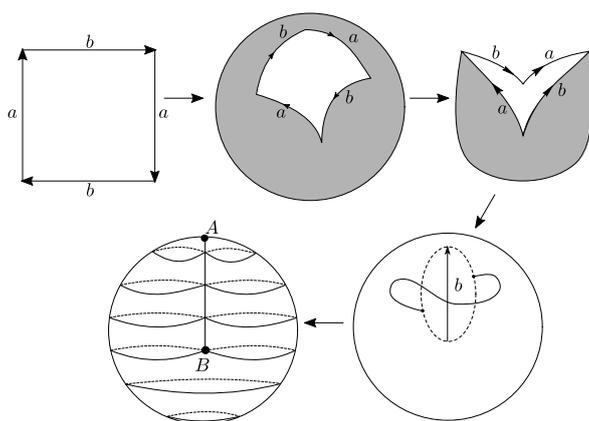


Figura 3.8: Plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 visto como “gorro cruzado”.

Ejemplo 3.1.7. La botella de Klein \mathbb{K}^2 , vista como el cociente de $[0, 1] \times [0, 1]$ por la relación de equivalencia \sim que identifica $(0, t) \sim (1, t)$ y $(t, 1) \sim (1 - t, 0)$, si $t \in [0, 1]$.

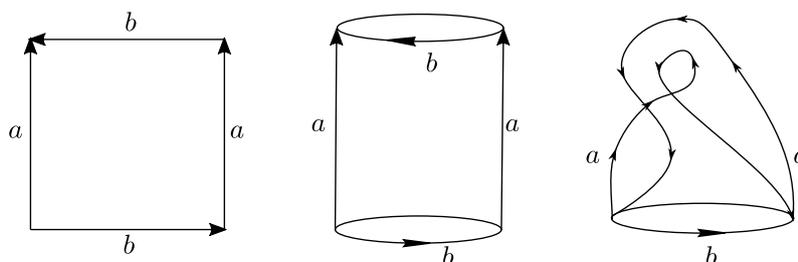


Figura 3.9: La botella de Klein \mathbb{K}^2

En todos los ejemplos anteriores, hemos dado las superficies como una identificación de una región poligonal el Teorema 3.1.2 muestra que, en efecto, esta identificación es una superficie¹.

Definición 3.1.4. Una **región poligonal** P en el plano es un conjunto compacto, cuya frontera topológica es unión de una familia finita de segmentos cerrados llamados aristas, con puntos finales denominados vértices, tales que:

- (i) Para cada punto q en una arista que no sea un vértice, existe una venedad U en \mathbb{R}^2 , tal que $P \cap U = U \cap H$, donde $H = \{(x, y) : ax + by + c \geq 0\}$ es un cierto semiplano cerrado (Figura 3.10).

¹Cabe señalar que la identificación que se hace no es la única forma de definir dichas superficies, por ejemplo, el toro puede definirse como $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, o bien, la esfera mediante la proyección estereográfica. El plano proyectivo bien puede definirse como el cociente de \mathbb{S}^2 que resulta de identificar cada par de puntos diametralmente opuestos.

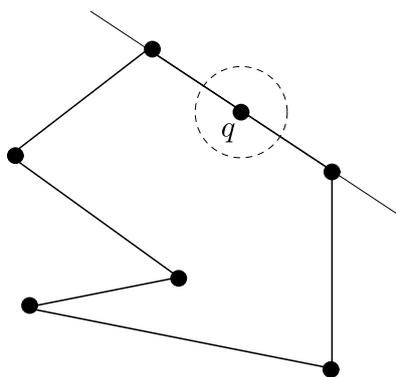


Figura 3.10

(ii) cada vértice v posee un entorno V en \mathbb{R}^2 , tal que $P \cap V = V \cap \hat{H}$, donde \hat{H} es la unión de dos semiplanos cerrados cuyas fronteras se cortan en v (Figura 3.11).

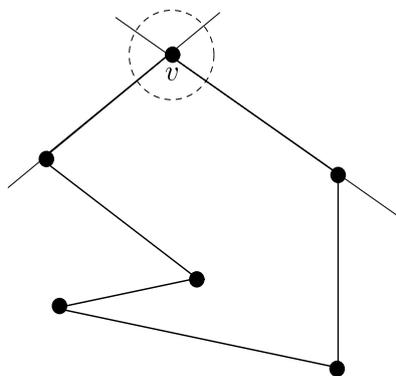


Figura 3.11

Lema 3.1.1. Supongamos que Q es un espacio cuya base es numerable. Esto se denomina también *segundo numerable*. Si se tiene la función $p : Q \rightarrow M$ es la función proyección, donde M es un espacio cociente. Si M es localmente Euclidiano, es segundo numerable (Para la demostración véase [17])

Teorema 3.1.2. Sea P una región poligonal en el plano con un número par de aristas y sea \sim una relación de equivalencia que identifica cada arista con exactamente otra, por medio de un homeomorfismo lineal que envía los puntos finales de una arista en los puntos finales de la otra. El cociente resultante es una superficie compacta. (Véase [17] para la demostración.)

Definición 3.1.5. Sean M_1 y M_2 dos n -variedades conexas. Geométricamente, la **suma conexa** se obtiene cortando pequeñas bolas abiertas de M_1 y M_2 pegando los espacios resultantes juntos a lo largo de las fronteras de estas bolas. Más precisamente, sea $B_i \subset M_i$, con $i = 1, 2$, bolas abiertas. Elegimos un homeomorfismo $\varphi : \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$ (tal homeomorfismo existe pues ambas fronteras son homeomorfas a S^{n-1}). Sea $M'_i = M_i - B_i$, con $i = 1, 2$, y definimos un espacio

cociente de la unión disjunta de M'_1 y M'_2 identificando cada $p \in \partial B_1$ con $\varphi(p) \in \partial B_2$ (Figura 3.12). El espacio cociente resultante es llamado la suma conexa de M_1 y M_2 y denotado por $M_1 \# M_2$

$$M_1 \# M_2 = (M'_1 \sqcup M'_2) / \sim$$

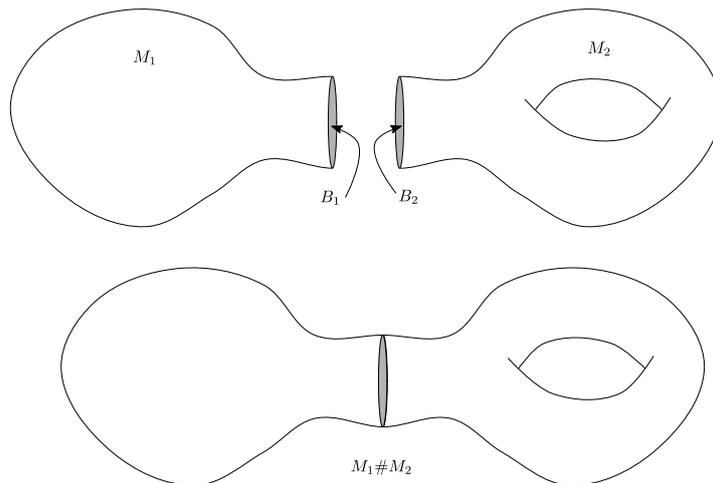


Figura 3.12

Es importante señalar que la frontera de cada bola debe ser tal que no sea una curva que desconecte a la superficie.

Algunas propiedades que cumple la suma conexa de superficies compactas se describen en el siguiente

Teorema 3.1.3. Sean M_1 , M_2 y M_3 superficies compactas. Entonces

- (i) $(M_1 \# M_2) \# M_3 \cong M_1 \# (M_2 \# M_3)$
- (ii) $M_1 \# M_2 \cong M_2 \# M_1$
- (iii) $M_1 \# \mathbb{S}^2 \cong M_1$

Ejemplo 3.1.8. La suma conexas de dos y tres toros, es decir, $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ y $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ se ilustra en la Figura 3.13

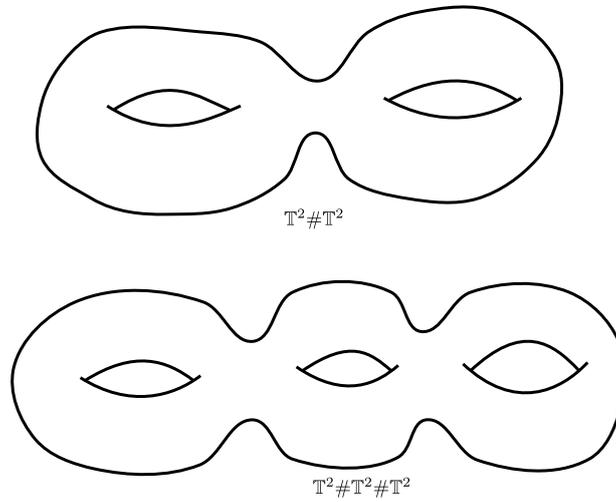


Figura 3.13

De hecho, podemos hacer la suma conexas de n toros, la cual denotaremos por $n\mathbb{T}^2$, o la suma conexas de m planos proyectivos reales, que denotamos por $m\mathbb{R}\mathbb{P}^2$

Veremos que la botella de Klein puede verse como la suma de conexas de dos planos proyectivos, es decir, $\mathbb{K}^2 \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

En efecto:

Demostración. El plano proyectivo real tiene también la siguiente representación plana (Figura 3.14)

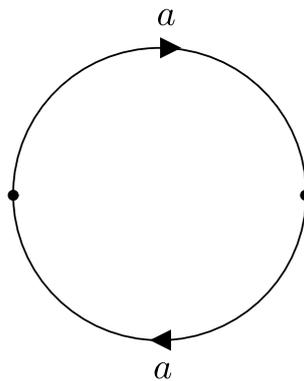


Figura 3.14

Retiramos un disco de cada uno de los planos proyectivos, según la definición de suma conexa, abrimos la representación planar y pegamos por la arista c , después hacemos un corte por la arista d , para posteriormente identificar las aristas etiquetadas con b , el polígono resultante es la representación plana de la botella de Klein (véase la Figura 3.15)

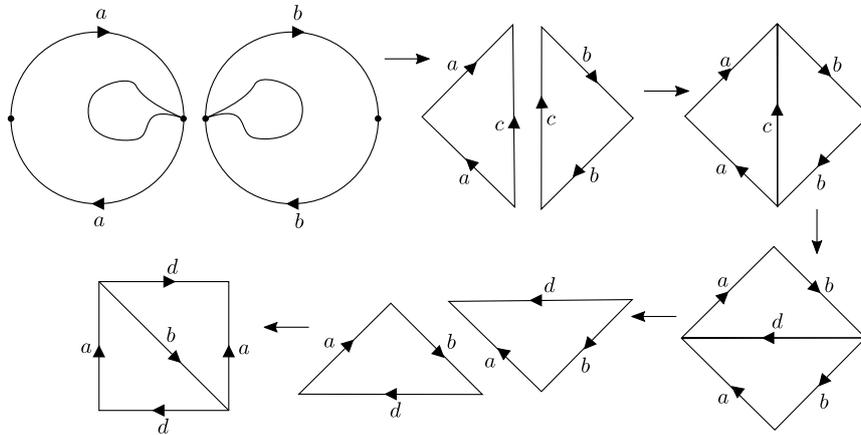


Figura 3.15

□

Ahora, mostraremos que $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$

En efecto:

Demostración. Nótese que mostrar $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ es equivalente a mostrar que $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{K}^2$, pues, en vista de la propiedad (i) del Teorema 3.1.3, $\mathbb{R}P^2 \# (\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{K}^2$.

La Figura 3.16 muestra los pasos que hay que seguir para mostrar que $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{K}^2$, de donde se deduce, $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

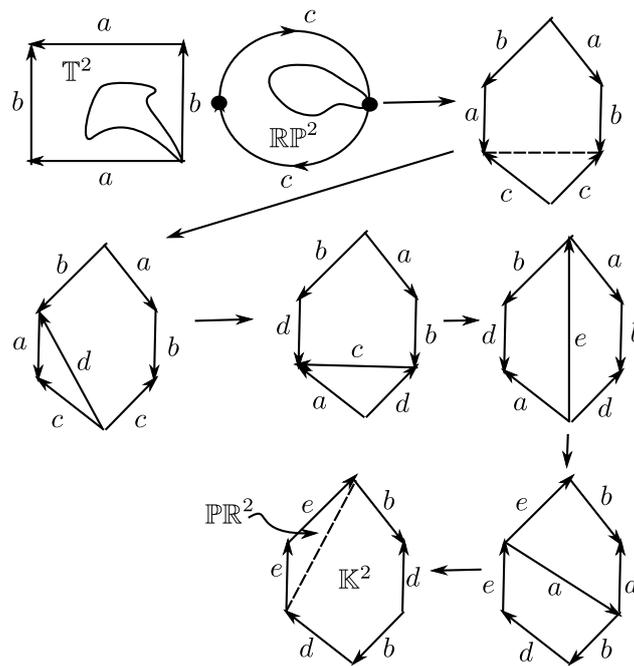


Figura 3.16

□

Por último, se cumple que

$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{K}^2 \cong (\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2) \# \mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$$

De hecho, puede verse que cualquier combinación (en el sentido de suma conexas) de estas superficies es suma conexas de n toros o bien suma conexas de m planos proyectivos.

3.1.3. Triangulación de una Superficie

Con las propiedades descritas anteriormente, podemos ahora integrar lo que se ha desarrollado en el capítulo anterior para el caso de superficies. Para “extender” estas propiedades a una superficie, uno de los conceptos fundamentales es lo que se denomina triangulación.

Definición 3.1.6. Dados $k + 1$ puntos v_0, \dots, v_k en posición general en \mathbb{R}^n , los **simplejos** (o **símplices**) de dimensión k (o k – simplejo) generados por ellos es el conjunto de todos los puntos en \mathbb{R}^n de la forma

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \quad \text{donde } 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$$

Con la topología subespacio heredada de la topología usual de \mathbb{R}^n . Cada uno de los puntos v_i son llamados **vértices** de los simplejos

Definición 3.1.7. Para cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, la **envolvente convexa** de A se define como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A . La envolvente convexa es en sí mismo un conjunto convexo, el conjunto convexo más pequeño que contiene a A .

En vista de la Definición 3.1.7, un simplejo es la envolvente convexa de sus vértices.

Ejemplo 3.1.9. Un 0 – simplejo es un punto, un 1 – simplejo es un segmento de recta (cerrado), un 2 – simplejo es un triángulo (relleno) y un 3 – simplejo es un tetraedro (sólido) como se ilustra en la Figura 3.17

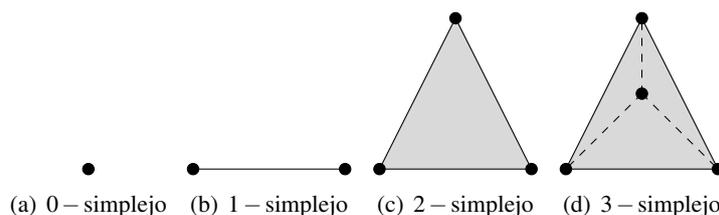


Figura 3.17

Definición 3.1.8. Consideremos σ un simplejo. Cada simplejo generado por un conjunto no vacío de vértices se llama una **cara** de σ . Las caras que no son iguales a σ se llaman **caras propias**. Las caras 0 – dimensionales son justamente los vértices, y las caras 1 – dimensionales son llamadas aristas.

Definición 3.1.9. Un **complejo simplicial Eculidiano** (o simplemente complejo) es una colección K de simplejos en algún espacio euclidiano \mathbb{R}^n que satisface las siguientes condiciones:

- i) Si $\sigma \in K$, entonces cualquier cara de σ está en K .
- ii) La intersección de cualesquiera dos simplejos en K es vacía o lo hacen según una cara común.
- iii) (Finitud local). Cualquier punto de un simplejo de K tiene una vecindad que intersecta a lo más en un número finito de simplejos de K

Ejemplo 3.1.10. Consideremos al conjunto finito $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Entonces

- $K_1 = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}$
- $K_2 = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$
- $K_3 = \{\emptyset, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$

Son complejos simpliciales. Una representación geométrica de estos se representa en la Figura 3.17

Ejemplo 3.1.11. Un grafo G es un 1 – complejo conexo.

La Figura 3.18 muestra un ejemplo de un complejo simplicial en \mathbb{R}^2 y el conjunto de simplejos mostrado a la derecha no es un complejo simplicial ya que se viola la condición (ii).

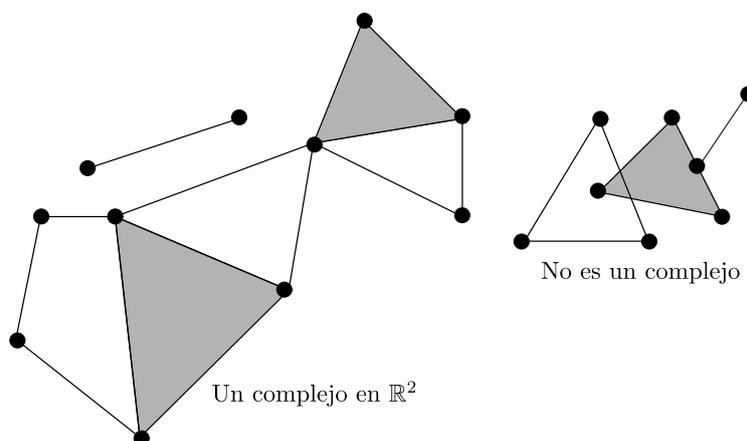


Figura 3.18

Definición 3.1.10. Dado un complejo Euclidiano K , la unión de todos los simplejos en K , con la topología subespacio heredada de \mathbb{R}^n , es un espacio topológico, denotado por $|K|$ y llamado el **poliedro (Euclidiano)**² de K .

Ejemplo 3.1.12. Algunos ejemplos de poliedros Euclidianos son:

- a) Cualquier n – simplejo junto con sus caras es un complejo simplicial cuyo poliedro es homeomorfo a $\overline{\mathbb{B}^n}$.
- b) Las caras propias de un n – simplejo constituyen un complejo $(n - 1)$ – dimensional cuyo poliedro es homeomorfo a \mathbb{S}^{n-1} .

²También llamada *realización geométrica* de K

- c) El conjunto de todos los intervalos unitarios $[n, n + 1] \subset \mathbb{R}$, para $n \in \mathbb{Z}$, junto con sus puntos finales, es un complejo simplicial cuyo poliedro es \mathbb{R} .
- d) Para cualquier entero $m \geq 3$, sea P_m un polígono de m lados en el plano. El conjunto de vértices y aristas de P_m es un complejo simplicial cuyo poliedro es homeomorfo a \mathbb{S}^1 .

Observación: La Definición 3.1.10 generaliza el concepto de poliedro dado en el Capítulo 1.

Definición 3.1.11. Una **triangulación** de una superficie S consta de un complejo simplicial K y de un homeomorfismo $h : |K| \rightarrow S$

Ejemplo 3.1.13. Supongamos que S es la esfera \mathbb{S}^2 y K la colección de simplejos que forman la superficie del tetraedro. Si el tetraedro se halla en el interior de \mathbb{S}^2 , podemos tomar como homeomorfismo h a la proyección radial. La proyección radial fue la utilizada por Legendre para demostrar el Teorema de Euler (Capítulo 1 Subsección 1.2.2)

Un complejo simplicial K se halla formado por un número finito de simplejos que pertenecen a un espacio Euclidiano, y por consiguiente su poliedro $|K|$ tiene muchas propiedades deseables: por ejemplo, será un espacio métrico y compacto.

Definición 3.1.12. Definimos la **Característica de Euler**, también llamada la característica de Euler-Poincaré, para un complejo simplicial finito K de dimensión n , denotada por $\chi(K)$, como

$$\chi(K) = \sum_{k=0}^n (-1)^k n_k$$

donde n_k es el número de simplejos k – dimensionales en K .

Ejemplo 3.1.14. Para un 2 – complejo, sea C el número de caras (2 – simplejos), A el número de aristas (1 – simplejos) y V la cantidad de vértices (0 – simplejos), entonces, de acuerdo a la Definición 3.1.12, la característica de Euler-Poincaré, en este caso (2 – complejo), es la conocida fórmula de Euler

$$\chi(K) = V - A + C$$

Ejemplo 3.1.15. Consideremos un polígono P_n de n lados, ilustrado en la Figura 3.19 (para $n = 5$). El complejo $K = P_n$ tiene 1 cara (2 – simplejo), n aristas (1 – simplejos) y n vértices (0 – simplejos). De esta forma tenemos

$$\chi(K) = 1 - n + n = 1$$

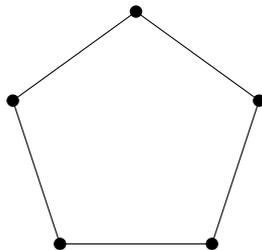


Figura 3.19

Así, puede verse que la característica de Euler de los objetos estudiados en el Capítulo 1 son casos particulares de esta definición.

Ahora, veremos que la característica de Euler es independiente de la triangulación escogida sobre la superficie. Antes de demostrar este resultado hablaremos de las subdivisiones que podemos tener en un triángulo.

Consideremos un polígono de n vértices, n aristas y 2 caras (una interior y otra exterior), la Figura muestra el caso $n = 5$. En esta situación, tenemos cuatro casos para una subdivisión:

- *Caso 1:* Unimos dos vértices no consecutivos mediante una arista (Figura 3.20)

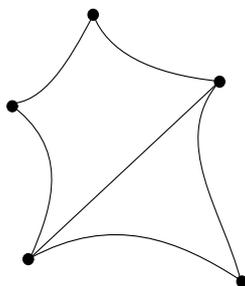


Figura 3.20

El número de vértices permanece constante, pero el número de aristas aumenta en 1 al igual que el número de caras. De donde si V' , A' y C' denotan la cantidad de vértices, aristas y caras, respectivamente, del subdividido, podemos observar que la cantidad $V' - A' + C'$, donde V , A y C designan el número de vértices, aristas y caras del polígono original, permanece inalterable, pues

$$V' - A' + C' = V - (A + 1) + (C + 1) = V - A + C$$

- *Caso 2:* Unimos (por medio de una arista) un vértice con alguna arista opuesta a él (Figura 3.21)

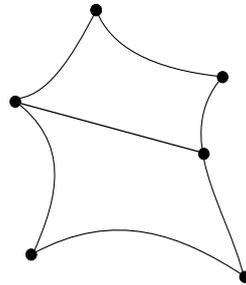


Figura 3.21

En esta situación, el número de vértices crece en 1, la cantidad de aristas aumenta en 2, mientras que en el número de caras se añade una más. Una vez más, la cantidad de signo variable $V - A + C$ permanece invariante. Si consideramos a V' , A' y C' como en el caso anterior

$$V' - A' + C' = (V + 1) - (A + 2) + (C + 1) = V - A + C$$

- *Caso 3:* Unimos mediante una arista dos vértices que se encuentran en el interior de dos aristas cualesquiera (Figura 3.22)

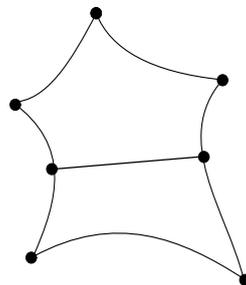


Figura 3.22

Aquí, agregamos 2 vértices nuevos, la cantidad de aristas se incrementa en 3 y el número de caras aumenta en 1. Como en los dos casos precedentes, la cantidad $V - A + C$ no se ve afectada. Sean V' , A' y C' como en los dos casos anteriores, entonces

$$V' - A' + C' = (V + 2) - (A + 3) + (C + 1) = V - A + C$$

- *Caso 4:* Si agregamos un vértice en el interior del polígono, este se une mediante aristas a todos los vértices del polígono (Figura 3.23)

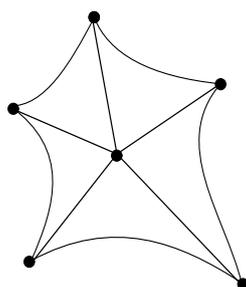


Figura 3.23

En este caso, el número de vértices se incrementa en 1, se añaden tantas aristas como vértices tenga el polígono y el número de caras aumenta en el número de vértices menos 1. Si definimos a V' , A' y C' como en los casos anteriores, se tiene que

$$V' - A' + C' = (V + 1) - (A + V) + (C + (V - 1)) = V - A + C$$

De esta forma, en cada caso de subdivisión, la cantidad $V - A + C$ permanece inalterable. Hemos mostrado el siguiente

Lema 3.1.2. La Característica de Euler es independiente de la subdivisión efectuada en un polígono.

□

Estamos en condiciones de probar el siguiente

Teorema 3.1.4. Sea S una superficie compacta. Entonces $\chi(S)$ es un invariante topológico.

Demostración. Por el Teorema B.0.1, S admite al menos una triangulación. Consideremos dos triangulaciones de S , entonces podemos deformar una de tal manera que intersecte a la otra en un número finito de puntos. Entonces la unión de estas dos triangulaciones divide a la superficie en discos poligonales y esto da una subdivisión común a las triangulaciones originales. En vista del Lema 3.1.2, concluimos que $\chi(S)$ es un invariante topológico. □

Es importante señalar la siguiente

Afirmación: La característica de Euler es, salvo múltiplos, la única combinación lineal de V , A y C que es un invariante topológico de las superficies.

Demostración. Sea S una superficie. Supongamos que $\eta(S) = \alpha V + \beta A + \gamma C$, con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ es un invariante topológico. Por el Lema 3.1.2, η es independiente de la subdivisión. Al dividir un disco por un arco que una a dos vértices, V no cambia, A aumenta en 1 y C aumenta en 1, de esta forma $\eta' = \eta + \beta + \gamma$. Ya que se supone que η es independiente de la subdivisión, entonces $\beta + \gamma = 0$. Por otro lado, si dividimos el disco con un arco que une un vértice con una arista, V aumenta en 1, A incrementa en 2 y C aumenta en 1, por lo tanto, $\eta' = \eta + \alpha + 2\beta + \gamma$, de donde $\alpha + 2\beta + \gamma = 0$.

Así, $\alpha = -\beta = \gamma$. Por lo que $\eta(s) = \alpha V - \alpha A + \alpha C$. □

Con lo anterior, es relativamente sencillo calcular la característica de Euler de las superficies descritas al inicio de la subsección 3.1.2. Así, $\chi(S^2) = 2$, $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$ y $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$.

En efecto:

Consideremos las triangulaciones mostradas en la Figura 3.24.

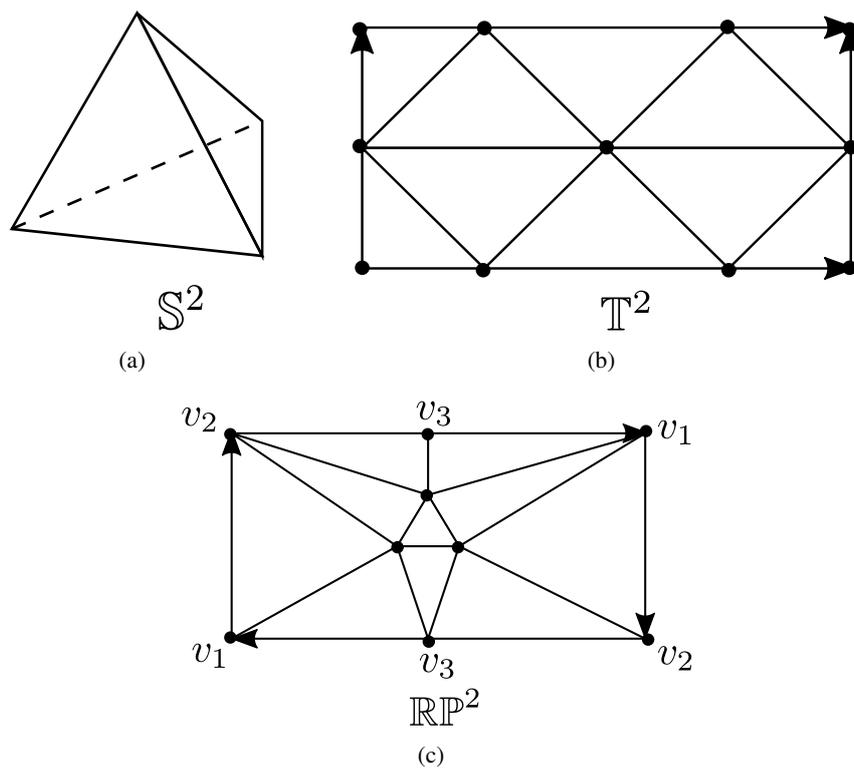


Figura 3.24

Puede verse que

$$\chi(\mathbb{S}^2) = V - A + C = 4 - 6 + 4 = 2$$

$$\chi(\mathbb{T}^2) = V - A + C = 5 - 15 + 10 = 0$$

$$\chi(\mathbb{R}\mathbb{P}^2) = V - A + C = 6 - 15 + 10 = 1$$

Veamos cómo calcular la característica de Euler para la suma conexas de dos superficies.

Teorema 3.1.5. Sean M_1 y M_2 dos superficies compactas. Entonces

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$$

Demostración. Tomemos triangulaciones \mathcal{T} y \mathcal{T}' de M_1 y M_2 , respectivamente. Elegimos un triángulo $T \in \mathcal{T}$ y un triángulo $T' \in \mathcal{T}'$. Ambos son homeomorfos a discos cerrados, así que podemos usarlos como los discos que se eliminan en la definición de suma conexas (Definición 3.1.5). El resto de triángulos en \mathcal{T} y \mathcal{T}' nos da una triangulación de $M_1 \# M_2$. Calculemos el número de vértices V , la cantidad de aristas A y el número de caras C de $M_1 \# M_2$

$$C = C(M_1) - 1 + C(M_2) - 1, \text{ ya que quitamos un triángulo a cada triangulación.}$$

$$A = A(M_1) + A(M_2) - 3, \text{ puesto que los tres lados de } T \text{ los identificamos con los tres lados de } T'.$$

$$V = V(M_1) + V(M_2) - 3, \text{ ya que los tres vértices de } T \text{ se identifican con los tres vértices de } T'.$$

De esta forma, tenemos

$$\begin{aligned} V - A + C &= (V(M_1) + V(M_2) - 3) - (A(M_1) + A(M_2) - 3) + (C(M_1) - 1 + C(M_2) - 1) \\ &= (V(M_1) - A(M_1) + C(M_1)) + (V(M_2) - A(M_2) + C(M_2)) - 3 + 3 - 1 - 1 \\ &= \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2 \end{aligned}$$

es decir,

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$$

□

Es posible generalizar el resultado del Teorema 3.1.5 a una cantidad finita n de superficies, esto es, se tiene el siguiente

Teorema 3.1.6. Sean M_1, M_2, \dots, M_n superficies. Entonces

$$\chi(M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n) = \sum_{j=1}^n \chi(M_j) - 2(n-1)$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre $n \geq 2$.

Nuestra base de inducción es justo el Teorema 3.1.5.

Supongamos ahora que la aseveración es cierta para n . Consideremos la superficie M_{n+1} , entonces (en vista de la propiedad (i) del Teorema 3.1.3 y del Teorema 3.1.5) tenemos

$$\begin{aligned} \chi((M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n) \# M_{n+1}) &= \chi(M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n) + \chi(M_{n+1}) - 2 \\ &= \sum_{j=1}^n \chi(M_j) - 2(n-1) + \chi(M_{n+1}) - 2 \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \chi(M_j) - 2n \end{aligned}$$

Lo que demuestra la afirmación. □

Corolario 3.1.1. Sean \mathbb{T}^2 y \mathbb{RP}^2 . Entonces

$$\chi(n\mathbb{T}^2) = 2 - 2n$$

$$\chi(m\mathbb{RP}^2) = 2 - m$$

Demostración. Sea \mathbb{T}^2 , por el Teorema 3.1.6

$$\chi(n\mathbb{T}^2) = \sum_{j=1}^n \chi(\mathbb{T}^2) - 2(n-1)$$

pero $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$, de esta forma

$$\chi(n\mathbb{T}^2) = -2(n-1) = 2 - 2n$$

Por otro lado, consideremos a \mathbb{RP}^2 . En vista del Teorema 3.1.6, se tiene

$$\chi(m\mathbb{RP}^2) = \sum_{j=1}^m \chi(\mathbb{RP}^2) - 2(m-1)$$

como $\chi(\mathbb{RP}^2) = 1$, entonces

$$\chi(m\mathbb{RP}^2) = m - 2(m-1) = 2 - m$$

□

Corolario 3.1.2. Las distintas sumas conexas de toros no son homeomorfas y las distintas sumas conexas de planos proyectivos no son homeomorfas.

Demostración. Sea $n \neq m$, con $n, m \in \mathbb{N}$, entonces $2 - 2n \neq 2 - 2m$, por lo tanto, $\chi(n\mathbb{T}^2) \neq \chi(m\mathbb{T}^2)$, y puesto que la característica de Euler de una superficie es un invariante topológico, se tiene $n\mathbb{T}^2 \not\cong m\mathbb{T}^2$.

Análogamente, supongamos que $r \neq s$, con $r, s \in \mathbb{N}$, entonces $2 - r \neq 2 - s$, por lo tanto, $\chi(r\mathbb{RP}^2) \neq \chi(s\mathbb{RP}^2)$, de donde $r\mathbb{RP}^2 \not\cong s\mathbb{RP}^2$ □

3.1.4. Superficies Orientables y no-orientables

Definición 3.1.13. Decimos que una superficie S es **orientable** si no contiene una banda de Möbius. Y es **no-orientable** si la contiene.

Ejemplo 3.1.16. La Figura 3.25 ilustra que \mathbb{K}^2 es una superficie no-orientable pues contiene una banda de Möbius.

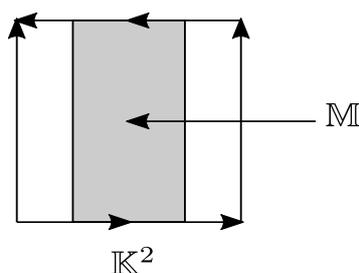


Figura 3.25

Ejemplo 3.1.17. El plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ es una superficie no-orientable (Figura 3.26).

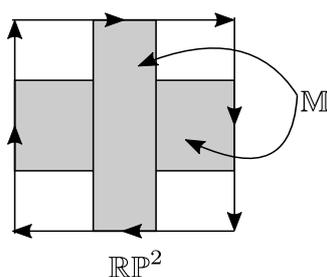


Figura 3.26

Ejemplo 3.1.18. La suma conexa de m planos proyectivos, $m\mathbb{R}P^2$, es una superficie no-orientable.

Ejemplo 3.1.19. La esfera \mathbb{S}^2 es una superficie orientable.

Ejemplo 3.1.20. El toro \mathbb{T}^2 es una superficie orientable.

Ejemplo 3.1.21. La suma conexa de n toros, $n\mathbb{T}^2$, es una superficie orientable.

Ejemplo 3.1.22. La banda de Möbius M es una superficie no-orientable.

Otra forma de ver la orientabilidad de una superficie S es por medio de una triangulación. Si \mathcal{T} es una triangulación de una superficie, cada triángulo admite dos posibles orientaciones: Bien como $v_1v_2v_3$, bien como $v_1v_3v_2$ (Figura 3.27). Podemos identificar cada una de las orientaciones del triángulo como una forma de girar en pequeñas regiones, como discos.

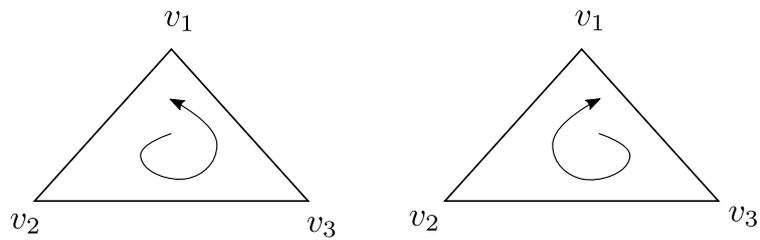


Figura 3.27

Diremos que dos triángulos adyacentes tienen una **orientación compatible** cuando ambos “giran en la misma dirección” (Figura 3.28).

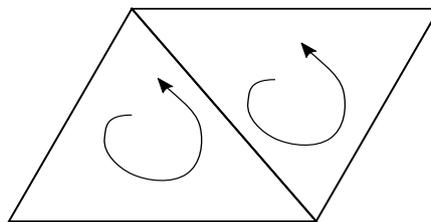


Figura 3.28

Así, una superficie S es orientable cuando tiene una triangulación en la que todos los triángulos adyacentes están orientados de forma compatible.

En base a lo dicho en el párrafo anterior, podemos deducir que la orientabilidad de una superficie es un invariante topológico.

Teorema 3.1.7. Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas homeomorfas. Si S_1 es orientable, entonces S_2 es orientable.

Demostración. Consideremos \mathcal{T} una triangulación de S_1 , puesto que $S_1 \cong S_2$, entonces $f(\mathcal{T})$, con $f : S_1 \rightarrow S_2$ homeomorfismo, es una triangulación de S_2 de tal forma que f manda los vértices de \mathcal{T} en los vértices de $f(\mathcal{T})$, las aristas de \mathcal{T} en las aristas de $f(\mathcal{T})$ y las caras de \mathcal{T} en las caras de $f(\mathcal{T})$. De esta forma, si un triángulo $T \in \mathcal{T}$ tiene orientación $v_1 v_2 v_3$, entonces el triángulo $f(T)$ tendrá la misma orientación $f(v_1) f(v_2) f(v_3)$. Así, la orientación se preserva bajo homeomorfismos. \square

El Teorema 3.1.7 nos ayuda (al igual que la característica de Euler) a identificar cuándo dos superficies no son homeomorfas. Para ello definiremos el número de orientabilidad.

Definición 3.1.14. Sea S una superficie compacta. El **número de orientabilidad** de S , denotado por $\omega(S)$ se define como

$$\omega(S) = \begin{cases} 0 & \text{si } S \text{ es orientable} \\ 1 & \text{si } S \text{ es no-orientable} \end{cases}$$

Esta definición se suma a la condición determinada por la característica de Euler. De este modo los números $\chi(S)$ y $\omega(S)$ les llamaremos **números característicos** de la superficie S . Nótese que la hipótesis de que S sea compacta obliga a los números característicos ser finitos.

Definición 3.1.15. Sea S una superficie y \mathcal{T} una triangulación en S . Una curva ³ **separa** a S si al cortar a lo largo de la curva desconecta a S en dos piezas. S es **esférica** si toda curva (en cualquier triangulación) separa a S .

Ejemplo 3.1.23. La esfera es esférica (Teorema de la curva de Jordan).

Ejemplo 3.1.24. EL toro no es esférico, la curva mostrada en la Figura 3.29 no separa al toro.

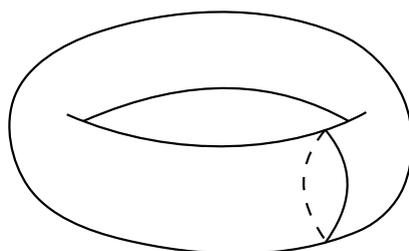


Figura 3.29

Definición 3.1.16. Sea S una superficie y \mathcal{T} una triangulación de S . Dentro de cada triángulo X , elijamos un punto interior x y llamémosle **vértice dual de X** . Si dos triángulos X y Y comparten una arista a , uniendo sus vértices duales x y y , se forma una **arista dual** xy , xy intersecciona a a una vez y no encuentra ninguna otra arista (Figura 3.30)

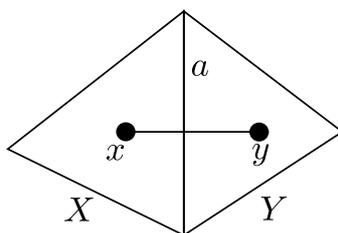


Figura 3.30

³Por una curva $C \in \mathcal{T}$ nos referimos a un camino cerrado sin auto-intersecciones que consiste de vértices y aristas en \mathcal{T}

Definición 3.1.17. Un árbol que consiste de vértices duales y aristas duales es llamado un **árbol dual**, el cual denotaremos por T^* (Figura 3.31).

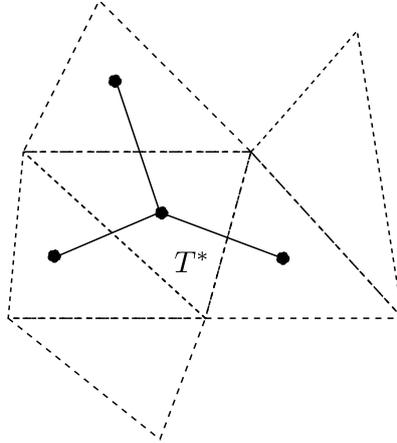


Figura 3.31

Definición 3.1.18. El **complemento** K de un árbol dual T^* es el conjunto de todos los vértices, aristas y triángulos de S que no tocan T^*

Lema 3.1.3. K contiene a todos los vértices de una triangulación de S

Demostración. Sea S una superficie y \mathcal{T} una triangulación de S . Si $v \in V(\mathcal{T})$, por definición de T^* , $v \notin V(T^*)$, esto implica que $v \in V(K)$, por definición de K . De esta forma $V(T^*) \subseteq V(K)$. \square

Lema 3.1.4. El complemento K de un árbol dual T^* es conexo.

Demostración. Consideremos S una superficie y \mathcal{T} una triangulación de S . Puesto que K contiene todos los vértices de S (Lema 3.1.3), es suficiente probar que cualesquiera dos vértices en S pueden ser conectados mediante una trayectoria en K . Usaremos inducción sobre n , el número de aristas en T^* .

Cuando $n = 0$, T^* consiste de un sólo vértice dual. Por lo que K contiene a todas las aristas de S . Puesto que S es conexa, entonces K es conexo.

Supongamos ahora que el resultado es verdadero para $n - 1$ aristas.

Sea T^* un árbol dual con n aristas. Se sabe que un árbol siempre tiene al menos un vértice final, elijamos x un vértice dual final, y sea y el vértice dual conectado a x . Por lo que xy es una arista dual de T^* que contiene a x . Sean X, Y los triángulos que contienen a los vértices duales x, y , respectivamente. Llamemos v_1, v_2 y v_3 a los vértices de X (Figura 3.32)

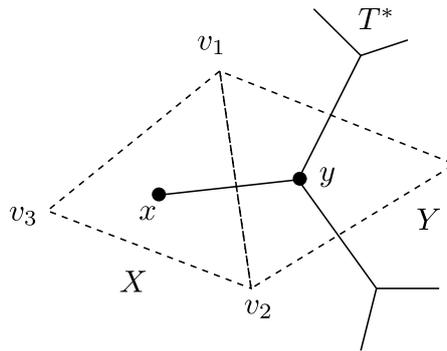


Figura 3.32

Sea T_1^* el árbol dual obtenido a partir de T^* removiendo x y xy , y sea K_1 el complemento de T_1^* . Como T_1^* tiene $n - 1$ aristas, K_1 es conexo por hipótesis de inducción. Pero K se obtiene a partir de K_1 eliminando el triángulo X y la arista v_1v_2 . Esto no desconecta a K_1 porque cualquier trayectoria en K_1 que contenga a la arista v_1v_2 puede ser reemplazada por una trayectoria en K que contenga a las aristas v_1v_3 y v_3v_2 . De esta forma K es conexo. \square

Definición 3.1.19. Un **árbol dual maximal** es un árbol dual que no puede hacerse más grande sin dejar de ser un árbol.

Lema 3.1.5. Un árbol dual maximal, contiene todos los vértices duales.

Demostración. Sea T^* un árbol dual maximal y supongamos que no contiene el vértice dual x . Sea P una trayectoria de x a cualquier punto de T^* . Cambiando ligeramente P podemos asegurar que no atraviesa ningún vértice de la triangulación (Figura 3.33).

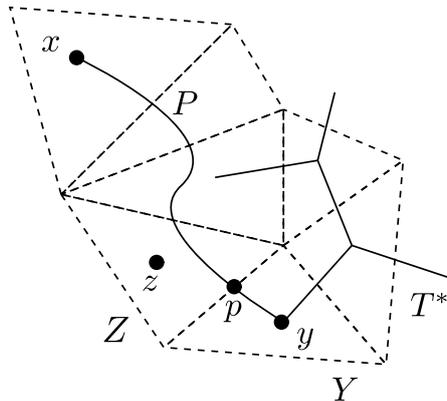


Figura 3.33

Sea Y un triángulo cuyo vértice dual y se encuentre en T^* . Y sea p el primer punto donde P se cruza con el triángulo Y . Así, p debe estar en alguna arista de Y . Sea Z el otro triángulo que

contiene dicha arista, con vértice dual z . Así, z no está en T^* , de lo contrario p no podría haber sido el primer punto.

Sea T_1^* el árbol dual obtenido al añadir z y la arista dual yz a T^* (Figura 3.34). De esta forma, T_1^* es más grande que T^* , contradiciendo el hecho de que T^* es maximal. Se concluye que T^* contiene a todos los vértices duales.

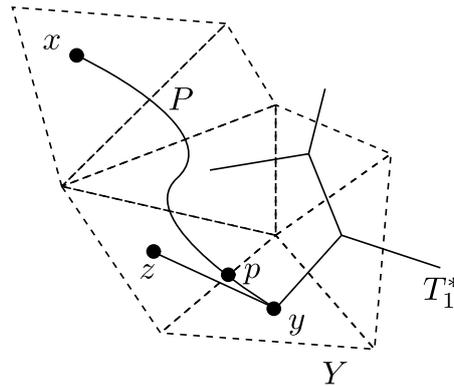


Figura 3.34

□

Lema 3.1.6. Sea T^* un árbol dual maximal y K su complemento. Entonces K no contiene triángulos.

Demostración. Sabemos por el Lema 3.1.5 que T^* contiene a todos los vértices duales, y recordemos que un vértice dual es un punto en el interior de un triángulo. Por definición de K , está formado por todos los vértices, aristas y triángulos que no tocan a T^* , por lo que K no contiene triángulos. □

Del Lema 3.1.6 deducimos que K es un grafo.

Lema 3.1.7. Sea S una superficie y \mathcal{T} una triangulación de S . Si T^* es un árbol maximal dual y K su complemento. Entonces

$$\chi(S) = \chi(K) + \chi(T^*)$$

Demostración. Por el Lema 3.1.5, las caras de \mathcal{T} corresponden exactamente a los vértices de T^* , así $C(\mathcal{T}) = V(T^*)$. Por el Lema 3.1.3, los vértices de \mathcal{T} corresponden exactamente con los vértices de K , esto es, $V(\mathcal{T}) = V(K)$. Cada arista en \mathcal{T} se cruza exactamente con una arista en T^* o bien pertenece a K . Por lo que $A(\mathcal{T}) = A(K) + A(T^*)$. De esta forma tenemos

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{T}) &= V(\mathcal{T}) - A(\mathcal{T}) + C(\mathcal{T}) \\ &= V(K) - (A(K) + A(T^*)) + V(T^*) \\ &= V(K) - A(K) + V(T^*) - A(T^*) \\ &= \chi(K) + \chi(T^*)\end{aligned}$$

Ahora bien, como \mathcal{T} es una triangulación de S , entonces $\chi(\mathcal{T}) = \chi(S)$, por lo tanto

$$\chi(S) = \chi(K) + \chi(T^*)$$

□

3.2. La Característica de Euler de una Superficie Compacta.

Dada una superficie compacta S y una triangulación \mathcal{T} en ella, podemos ver a la colección de vértices y aristas de \mathcal{T} como un grafo. Esta observación será importante para demostrar el siguiente

Lema 3.2.1. Si S es una superficie compacta, entonces

$$\chi(S) \leq 2$$

Demostración. Consideremos \mathcal{T} una triangulación de S . Si T^* es un árbol dual maximal y K su complemento, por el Lema 3.1.7, tenemos que

$$\chi(S) = \chi(K) + \chi(T^*)$$

Ahora, por los Teoremas 2.1.1 y 2.1.2 observamos que

$$\begin{aligned}\chi(K) + \chi(T^*) &\leq 1 + 1 \\ \chi(K) + \chi(T^*) &\leq 2\end{aligned}$$

Es decir,

$$\chi(S) \leq 2$$

□

Lema 3.2.2. Si S es una superficie compacta, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) S es esférica.
- (ii) $\chi(S) = 2$
- (iii) S es homeomorfa a \mathbb{S}^2 .

Demostración. Primero probaremos que (i) implica (ii).

Supongamos que S es esférica y que $\chi(S) \neq 2$. Sea T^* un árbol maximal dual y K su complemento. Entonces por el Lema 3.1.7 tenemos

$$\chi(K) = \chi(S) - \chi(T^*) = \chi(S) - 1 \neq 1$$

De esta forma, K no es un árbol, y contiene al menos un ciclo α . Dicho ciclo α corresponde a una curva sobre S . Ya que S es esférica, α desconecta a S en pedazos. Cada triangulación de cada pedazo de S debe contener al menos un triángulo, y por lo tanto, un vértice dual. Por el Lema 3.1.5 todos los vértices duales están contenidos en T^* , y cualesquiera dos vértices duales deben estar conectados por una trayectoria en T^* , ya que T^* es un árbol y por tanto conexo. Como la trayectoria se encuentra dentro de T^* , no pertenece a K , así que la trayectoria no interseca a la curva α (que es un ciclo de K). Pero esto significa que las piezas de S pueden conectarse mediante una trayectoria que no toca a α . En otras palabras, α no separa a S , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, si S es esférica, entonces $\chi(S) = 2$.

Ahora mostraremos que (ii) implica (iii).

Supongamos que $\chi(S) = 2$. Sea T^* un árbol dual maximal y K su complemento. Entonces

$$\chi(K) = \chi(S) - \chi(T^*) = 2 - 1 = 1$$

Así, por el Teorema 2.1.1, K es un árbol.

Sea $N(T^*)$ una vecindad de T^* . Afirmamos que $N(T^*)$ es homeomorfa a un disco. Para probar esto, empezamos removiendo continuamente las aristas de T^* , reduciéndolo a un sólo punto. Ahora, ponemos un disco al rededor del punto. Al invertir el proceso, expandimos el disco con cada arista que se agregue hasta regresar a T^* ⁴. Esto demuestra que $N(T^*)$ es homeomorfo a un disco. Similarmente, una vecindad $N(K)$ es homeomorfa a un disco, ya que K es un árbol. Elegimos $N(T^*)$ y $N(K)$ de tal forma que su unión sea toda la superficie S y su intersección la frontera de cada una (véase la Figura 3.35). Como $S = N(T^*) \cup N(K)$, es homeomorfa a dos discos cosidos por su frontera, en otras palabras, a una esfera.

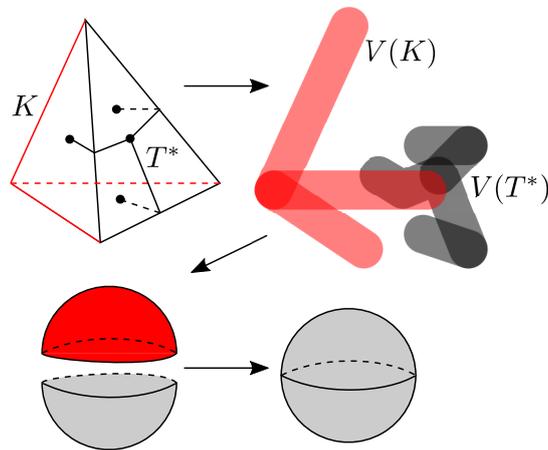


Figura 3.35

Hemos probado que si $\chi(S) = 2$, entonces S es homeomorfa a \mathbb{S}^2 .

Finalmente, para probar que (iii) implica (i) supongamos que S es homeomorfa a \mathbb{S}^2 . Puesto que el Teorema de la Curva de Jordan es válido para la esfera (como se ha mencionado al final de la subsección 3.1.1), concluimos que para S también es cierto, de aquí que S es esférica.

□

Vemos que este resultado para superficies es el análogo del Teorema 2.1.2 para grafos. Así, concluimos que, si S es una superficie compacta, $\chi(S) \leq 2$, donde la igualdad se cumple si y sólo si $S \cong \mathbb{S}^2$.

⁴El lector puede imaginarse que el resultado final de este procedimiento será muy parecido a una ameba

3.3. El Teorema de Clasificación de Superficies Compactas

Teorema 3.3.1. Cualquier superficie compacta es homeomorfa a una esfera, o a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos

Demostración. Sea S una superficie compacta y \mathcal{T} una triangulación de S . Por el Lema 3.2.1, sabemos que $\chi(S) \leq 2$. Si $\chi(S) = 2$, entonces, en vista del Lema 3.2.2, $S \cong \mathbb{S}^2$.

Supongamos que $\chi(S) < 2$, por el Lema 3.2.2, S no es esférica, por lo tanto podemos escoger una curva α que no separe a S . Tomemos una pequeña tira de S que contenga a α . Pueden ocurrir dos situaciones, o bien que la tira sea un cilindro o bien una banda de Möbius. Si es un cilindro diremos que α es una curva que **preserva orientación**, y si α es una banda de Möbius, diremos que la la curva **invierte orientación**.

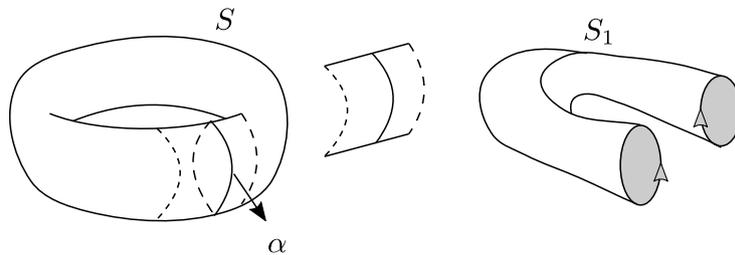


Figura 3.36

Construyamos una nueva superficie S_1 . Si α preserva orientación, cortamos a lo largo de α y llenamos cada lado del corte con un disco (Figura 3.36). Si α invierte orientación, cortamos a lo largo de α y llenamos con un disco, en vez de dos. Las flechas sobre las fronteras de los discos indican la dirección del corte. Afirmamos que

$$\chi(S) = \begin{cases} \chi(S) + 2 & \text{Si } \alpha \text{ preserva orientación.} \\ \chi(S) + 1 & \text{Si } \alpha \text{ invierte orientación.} \end{cases}$$

Para probar esto, supongamos que α tiene n vértices, y por tanto, n aristas. Entonces $\chi(\alpha) = n - n = 0$. Por lo tanto, podemos remover α de S sin que se afecte $\chi(S)$

Caso 1: α preserva orientación.

Para formar S_1 , añadimos dos discos a cada lado del corte. Cada disco se forma uniendo vértices de α a un solo punto (Figura 3.37)

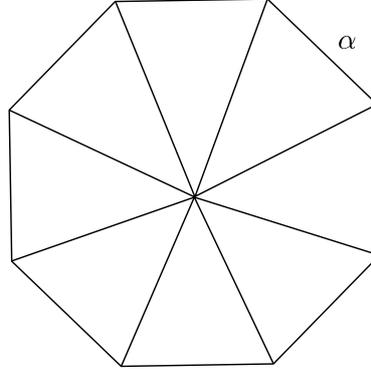


Figura 3.37

De esta forma, cada disco contiene $n + 1$ vértices, $2n$ aristas, y n triángulos. Si denotamos por D a los discos, tendremos que $\chi(D) = (n + 1) - 2n + n = 1$, por lo que

$$\chi(S_1) = \chi(S) + 2\chi(D) = \chi(S) + 2$$

Caso 2: α invierte orientación.

En este caso, solo añadimos un disco, por lo que

$$\chi(S_1) = \chi(S) + 1\chi(D) = \chi(S) + 1$$

Nótese que en cualquier caso, $\chi(S) < \chi(S_1)$.

Ahora, procederemos inductivamente. O bien $\chi(S_1) = 2$, en tal caso $S_1 \cong \mathbb{S}^2$, o bien $\chi(S_1) < 2$, en este caso podemos aplicar un procedimiento similar al aplicado con S para generar la superficie S_2 tal que $\chi(S_1) < \chi(S_2)$. Por el Lema 3.2.1 el procedimiento debe terminar después de un número finito de pasos. Obteniendo una sucesión de superficies S_1, S_2, \dots, S_r tales que

$$\chi(S_1) < \chi(S_2) < \dots < \chi(S_r) = 2$$

Así, S_r contiene varios discos disjuntos. Elegimos un homeomorfismo de S_r a la esfera, S_r^* . Ahora enfoquemos nuestra atención a los discos en S_r^* . Hay tres situaciones con las que nos podemos encontrar:

- (i) Dos discos con flechas en direcciones opuestas.
- (ii) Un disco.
- (iii) Dos discos con flechas apuntando en la misma dirección.

En (i), retiramos los discos, empujamos hacia arriba los pequeños tubos y cosemos juntos formando un asa sobre la esfera (Figura 3.38).

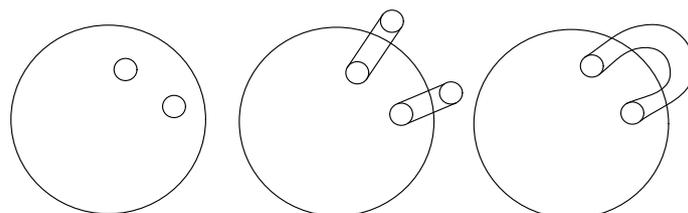


Figura 3.38

En la situación (ii), removemos el disco y cosemos la frontera del borde diametralmente, el efecto es coser una banda de Möbius en la esfera.

En el caso (iii), retiramos los discos, estiramos un cilindro desde un agujero y estiramos otro cilindro desde el otro agujero pero por dentro de la esfera. Doblar los dos cilindros hasta la superficie de la esfera hasta que se encuentren en la superficie, y coserlos juntos. Esto, esencialmente, es coser una botella de Klein a la esfera (Figura 3.39).

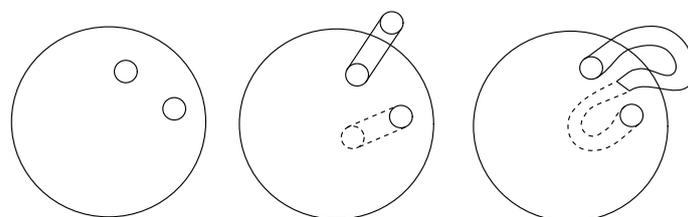


Figura 3.39

Realizando todos los procedimientos simultáneamente, obtenemos una superficie S^* homeomorfa a la original S ⁵.

Si S es orientable, entonces también lo es S^* . Por lo tanto, S no contiene bandas de Möbius y los únicos casos que pueden ocurrir son los presentados en (i). Por lo que S^* (y por tanto, S) es una superficie homeomorfa a la suma conexas de toros.

⁵El lector podría imaginarse si se estuviese “parchando” la superficie S_r^* para obtener S^* y así, $S^* \cong S$.

Si S es no-orientable, entonces las tres situaciones anteriormente descritas pudieron haber ocurrido. Si sólo ocurre (i), entonces S^* será orientable, lo cual es una contradicción, por lo tanto, ocurren las situaciones (ii) y/o (iii). De esta forma S^* (y por tanto S) es una superficie homeomorfa a sumas conexas de toros con planos proyectivos y/o botellas de Klein, no obstante, por lo dicho en el último párrafo de la subsección 3.1.2 y el corolario 3.1.2, dichas sumas conexas son homeomorfas a la suma conexa de toros o la suma conexa de planos proyectivos.

Concluimos que S es una superficie homeomorfa a \mathbb{S}^2 , o a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos. \square

De hecho, se puede concluir que dos superficies son homeomorfas si y sólo si tienen la misma característica de Euler y el mismo número de orientabilidad [19]

Con esta clasificación de superficies y su característica de Euler, podemos dar la siguiente

Definición 3.3.1. El **género de una superficie conexa orientable** es el máximo número de curvas cerradas simples ajenas que pueden dibujarse sobre una superficie sin desconectarla, es decir, sin dividirla en pedazos. Diremos también que la curva simple no separa a la superficie.

De una manera informal, podemos ver al género de una superficie como la cantidad de “agujeros” o “asas” que tiene.

Ejemplo 3.3.1. El género de las siguientes superficies es:

El género de la esfera \mathbb{S}^2 es 0.

El género del toro \mathbb{T}^2 es 1.

El género del doble toro $2\mathbb{T}^2$ es 2.

Definición 3.3.2. El **género de una superficie conexa no-orientable** es el número de “gorros cruzados” (bandas de Möbius) cosidos en una esfera.

Ejemplo 3.3.2. El género 0 se omite pues es el de la esfera, la cual es orientable.

El género 1 corresponde al plano proyectivo real, el género 2 pertenece a una botella de Klein.

De hecho, el género de una superficie (ya sea orientable o no-orientable) puede expresarse en términos de la característica de Euler de la siguiente manera.

Si S es una superficie conexa y compacta, denotemos con $g(S)$ al género de S , entonces

$$g(S) = \begin{cases} 1 - \frac{\chi(S)}{2} & \text{si } S \text{ es orientable.} \\ 2 - \chi(S) & \text{si } S \text{ es no-orientable.} \end{cases}$$

Podemos observar que estas igualdades ocurren cuando despejamos n y m , respectivamente, del resultado del Corolario 3.1.1.

Nótese que $g(\mathbb{S}^2) = 0$, esto significa que toda curva simple separa a \mathbb{S}^2 , esto es equivalente al Teorema 3.1.1 de la curva de Jordan.

También observamos que si S es una superficie orientable, necesariamente $\chi(S)$ es un número par.

Definición 3.3.3. Llamaremos a $n\mathbb{T}^2$ **superficie estándar de género n** , con $n \geq 0$.

Definición 3.3.4. Diremos que $m\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ es la **superficie estándar de género m** , con $m \geq 1$.

Podemos resumir lo visto hasta aquí en la Tabla 3.1

Superficie S	$\chi(S)$	$\omega(S)$	$g(S)$	Frontera
Esfera	2	0	0	No
$n\mathbb{T}^2$	$2 - 2g(S)$	0	$1 - \frac{\chi(S)}{2}$	No
$m\mathbb{R}\mathbb{P}^2$	$2 - g(S)$	1	$2 - \chi(S)$	No

Tabla 3.1

Nótese nuevamente, el importante papel que juega la característica de Euler.

Capítulo 4

Algunas Otras Aplicaciones de la Característica de Euler

Entre otras más de las cualidades de la característica de Euler, está la de ser una herramienta de mucha utilidad en la demostración de resultados de interés. En el presente capítulo describimos algunos que se muestran sencillos, interesantes e importantes. Para ello describimos un mínimo de conceptos que permitan apreciar el uso de este resultado de Euler sin detallar en resultados y demostraciones exhaustivas, mismos que, para el interés de aquel que lo desee, se remiten a textos más especializados. El primer caso que se describe a continuación, no requiere de muchos conceptos y es, además de un resultado muy popular, también muy accesible.

4.1. El Teorema de Pick y las coles de Bruselas.

Describimos algunas definiciones previas que son sencillas y nos servirán para introducir este resultado

Definición 4.1.1. Un punto P en el plano de coordenadas (x,y) se llama **reticular** o entero si $x,y \in \mathbb{Z}$.

Definición 4.1.2. Una **red reticular** M es aquella que está formada por puntos reticulares en el plano.

Definición 4.1.3. Un polígono es simple si los vértices no coinciden unos con otros, ninguno de los vértices cae en uno de los lados del polígono y dos lados cualesquiera no se intersectan.

Definición 4.1.4. Un **retículo poligonal** P , es un polígono simple cuyos vértices son puntos reticulares.

Definición 4.1.5. Diremos que un triángulo en una red reticular es un **triángulo primitivo** si no tiene puntos reticulares en su interior, sólo en los vértices.

Mostraremos a continuación que el área de un triángulo primitivo arbitrario es $\frac{1}{2}$ usando la fórmula para calcular el área de un triángulo dadas las coordenadas de sus vértices.

Lema 4.1.1. Sea M una red reticular en el plano y sea T un triángulo primitivo en M . Entonces el área de T , denotada por $A(T)$, es $\frac{1}{2}$.

Demostración. Sean P , Q y R los vértices de T . Dado que T está en M las coordenadas de P , Q y R deben ser números enteros. Así, sea $P = (n, m)$, entonces $Q = (n+1, m)$ y $R = (n-1, m-1)$, con $m, n \in \mathbb{Z}$.

Veamos que las coordenadas tal cual las definimos forman un triángulo primitivo entre P y Q no puede haber otro punto reticular, pues de haberlo existiría un número entero z tal que $n < z < n+1$, lo cual es imposible ya que $n \in \mathbb{Z}$. De forma similar, no existe punto reticular entre P y R , ya que de haberlo, existirían números enteros t y s tales que $n-1 < t < n$ y $m-1 < s < m$, situación imposible puesto que $n, m \in \mathbb{Z}$. Por último, tampoco es posible que exista un punto reticular entre Q y R , pues de existir alguno se tendrían números enteros a , b , c y d que cumplirían que $n-1 < a < n$ y $m-1 < c < m$ o bien $n < b < n+1$ y $m-1 < d < m$, y, en cualquier caso, no es posible.

De igual forma, y por la misma razón, T no tiene puntos reticulares en su interior. Así, T es un triángulo primitivo.

Procederemos ahora a calcular el área de T . Sabemos de la geometría analítica que

$$\begin{aligned} A(T) &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} n & m & 1 \\ n+1 & m & 1 \\ n-1 & m-1 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} |n(m - (m-1)) - m((n+1) - (n-1)) + 1((n+1)(m-1) - m(n-1))| \\ &= \frac{1}{2} |-1| \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

De esta forma, $A(T) = \frac{1}{2}$, como se quería.

□

El Teorema de Pick (que enunciamos a continuación) es una consecuencia elemental de la fórmula de Euler (E), una vez conociendo el área de un triángulo primitivo.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Pick). Sea M una red reticular y P un retículo poligonal. Si B es la cantidad de puntos reticulares en la frontera de P e I es el número de puntos reticulares en el interior de P , entonces el área de P , denotada por $\mathcal{A}(P)$, está dada por la expresión

$$\mathcal{A}(P) = I + \frac{B}{2} - 1$$

Demostración. Triangulemos a P usando una cantidad T de triángulos primitivos (como en la Figura). Si consideramos la región ilimitada por fuera de la frontera de P como una de las caras, entonces el total de caras está dado por $C = T + 1$. Por el Lema 4.1.1, cada cara triangular tiene un área de $\frac{1}{2}$. Así, el área total de P es

$$A(P) = \frac{1}{2}T$$

Ahora bien, cada cara acotada tiene tres lados, por lo que la cantidad $3T$ cuenta cada arista dos veces excepto las aristas a lo largo de la frontera de P , las cuales solo son contadas una vez. Luego, el número de aristas de la frontera de P es el mismo número de vértices de la frontera de P , ya que es un polígono simple, entonces

$$3T = 2A - B \quad \text{donde } A \text{ es el número de aristas}$$

despejando A se tiene

$$A = \frac{3T}{2} + \frac{B}{2}$$

Por otro lado, el número de vértices es $V = I + B$. Aplicando la fórmula de Euler obtenemos

$$\begin{aligned} 2 &= V - A + C \\ 2 &= (I + B) - \left(\frac{3T}{2} + \frac{B}{2} \right) + (T + 1) \\ 2 &= -\frac{T}{2} + \frac{B}{2} + I + 1 \end{aligned}$$

De lo anterior, deducimos que la cantidad de triángulos primitivos viene dada por la expresión

$$T = 2I + B - 2$$

Con esto, podemos calcular el área de P

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(P) &= \frac{1}{2}T \\ &= \frac{1}{2}(2I + B - 2) \\ &= I + \frac{B}{2} - 1\end{aligned}$$

esto es,

$$\mathcal{A}(P) = I + \frac{B}{2} - 1$$

como se quería. □

Ejemplo 4.1.1. Consideremos el retículo poligonal P de la Figura 4.1

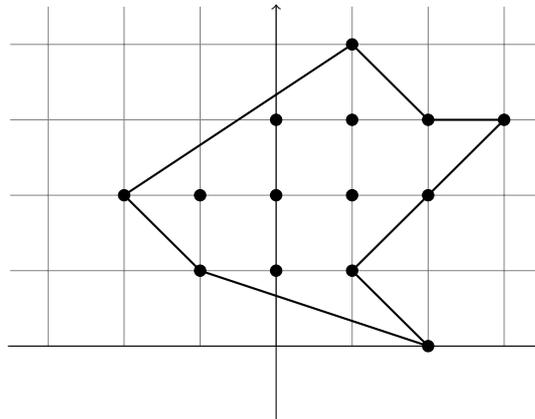


Figura 4.1

Podemos observar que $B = 8$, $I = 6$, aplicando el Teorema 4.1.1, el área de P es

$$\mathcal{A} = I + \frac{B}{2} - 1 = 6 + \frac{8}{2} - 1 = 9$$

Es importante mencionar que existe una versión del teorema de Pick cuando se tienen agujeros en la retícula, y en el cual el valor -1 puede cambiarse por $-\chi(P)$, es decir,

$$\mathcal{A}(P) = I + \frac{B}{2} - \chi(P)$$

Para demostrar este hecho, mostraremos que si P es un polígono simple con g agujeros, entonces $\chi(P) = 1 - g$.

Proposición 4.1.1. Sea P un polígono simple con g agujeros. Entonces

$$\chi(P) = 1 - g$$

Demostración. Sabemos que un polígono simple es homeomorfo a una circunferencia \mathbb{S}^1 , de igual forma, cada agujero, visto como un polígono simple, será homeomorfo a una circunferencia. De esta manera, podemos reacomodar los agujeros de P en fila y conectar cada uno de ellos con una arista, agregando dos aristas más, una conectando el primer agujero con P y otra uniendo el último agujero con P , como lo ilustra la Figura 4.2

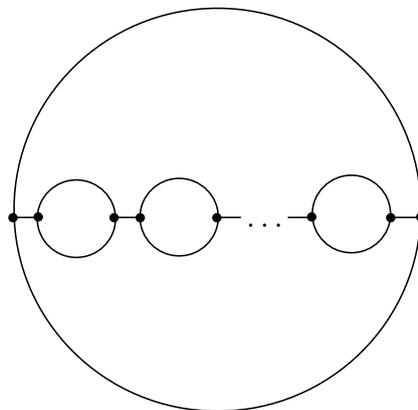


Figura 4.2

Así, se tendrá dos vértices por cada agujero y dos vértices en P , y por tanto, dos aristas por cada agujero y dos aristas en P más las $g + 1$ aristas que unen a los agujeros entre sí y al primero y último con P . Por último, el número de caras será dos. De esta forma

$$\begin{aligned}
\chi(P) &= V - A + C \\
&= (2g + 2) - ((g + 1) + 2g + 2) + 2 \\
&= 2g + 2 - g - 1 - 2g - 2 + 2 \\
&= 1 - g
\end{aligned}$$

es decir,

$$\chi(P) = 1 - g$$

como se quería. □

Ahora, podemos demostrar el Teorema de Pick para una retícula con agujeros.

Teorema 4.1.2 (Teorema de Pick para una retícula con agujeros). Sea P un retículo poligonal con g agujeros, B puntos reticulares en su frontera e I puntos reticulares en su interior. Entonces el área de P , denotada por $\mathcal{A}(P)$, está dada por la expresión

$$\mathcal{A}(P) = I + \frac{B}{2} - \chi(P)$$

Demostración. Cada agujero de P puede verse como un polígono simple que, en particular, satisface el Teorema 4.1.1. Llamemos H_1, \dots, H_g a los agujeros de P .

Consideremos a P^* el retículo poligonal de P sin agujeros. Sea I_{P^*} el número de puntos reticulares al interior de P^* y B_{P^*} la cantidad de puntos reticulares en la frontera de P^* .

Si B_{H_j} es la cantidad de puntos reticulares en la frontera del agujero H_j e I_{H_j} es el número de puntos reticulares en el interior de H_j , para todo $j \in \{1, \dots, g\}$, entonces I se ve decrementado en tantas unidades como puntos tiene cada hueco H_j , tanto en su interior como en su frontera, para todo $j \in \{1, \dots, g\}$, es decir,

$$I = I_{P^*} - \left(\sum_{j=1}^g (I_{H_j} + B_{H_j}) \right) \tag{4.1}$$

Por otro lado, la cantidad de puntos reticulares en la frontera de P^* se ve incrementada por los puntos reticulares en la frontera de cada agujero H_j , para todo $j \in \{1, \dots, g\}$, entonces

$$B = B_{P^*} + \left(\sum_{j=1}^g B_{H_j} \right) \quad (4.2)$$

Luego, el área de P será

$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P^*) - \left(\sum_{j=1}^g \mathcal{A}(H_j) \right) \quad (4.3)$$

Aplicando el Teorema 4.1.1 a P^* y a H_j , para todo $j \in \{1, \dots, g\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(P) &= \left(I_{P^*} + \frac{B_{P^*}}{2} - 1 \right) - \left(\sum_{j=1}^g \left(I_{H_j} + \frac{B_{H_j}}{2} - 1 \right) \right) \\ &= \left(I_{P^*} + \frac{B_{P^*}}{2} - 1 \right) - \left(\sum_{j=1}^g \left(I_{H_j} + \left(1 - \frac{1}{2} \right) B_{H_j} - 1 \right) \right) \\ &= \left(I_{P^*} + \frac{B_{P^*}}{2} - 1 \right) - \left(\sum_{j=1}^g \left(I_{H_j} + B_{H_j} - \frac{B_{H_j}}{2} - 1 \right) \right) \\ &= \left(I_{P^*} + \frac{B_{P^*}}{2} - 1 \right) - \sum_{j=1}^g I_{H_j} - \sum_{j=1}^g B_{H_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g B_{H_j} + g \\ &= I_{P^*} - \left(\sum_{j=1}^g (I_{H_j} + B_{H_j}) \right) + \frac{1}{2} \left(B_{P^*} + \left(\sum_{j=1}^g B_{H_j} \right) \right) - 1 + g \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.1) y (4.2), se tiene

$$\begin{aligned} &= I + \frac{B}{2} - 1 + g \\ &= I + \frac{B}{2} - (1 - g) \end{aligned}$$

Y por la Proposición 4.1.1

$$= I + \frac{B}{2} - \chi(P)$$

En conclusión,

$$\mathcal{A}(P) = I + \frac{B}{2} - \chi(P)$$

como se quería demostrar. □

Es importante hacer notar que no existe un equivalente del Teorema de Pick en \mathbb{R}^3 . El contraejemplo fue dado por John Reeve en 1957 utilizando un tetraedro (tetraedro de Reeve en su honor) cuyos vértices están ubicados en $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,r)$, donde $r \in \mathbb{Z}^+$. El tetraedro de Reeve tiene el mismo número de puntos interiores y de borde para cualquier valor de r (cuatro puntos en los bordes y ninguno en el interior), pero su volumen varía. El volumen del tetraedro de Reeve es $\frac{r}{6}$ [25].

El juego de las coles.

Finalizamos esta sección presentado dos juegos de lápiz y papel conocidos como “coles” y “coles de Bruselas”.

Las “coles”¹ es un juego para dos personas que consiste en lo siguiente: se comienza con cualquier cantidad de puntos en una hoja en blanco. El primer jugador dibuja una curva desde uno de los puntos de su elección hasta otro punto, pudiendo conectar el punto consigo mismo, y luego coloca un nuevo punto en cualquier lugar de la curva que acaba de dibujar. El segundo jugador debe hacer lo propio, conectando dos puntos con una curva y añadiendo un nuevo punto sobre la curva dibujada. Las únicas reglas son que una nueva curva no puede cruzar a otra curva o punto existente y que se pueden unir un máximo de tres líneas en cualquier punto. El ganador es el último jugador capaz de efectuar un movimiento. La Figura 4.3 ilustra una partida que comienza con solo dos puntos en la que el segundo jugador gana en el cuarto movimiento.

¹Según Martín Gardner (1914-2010), por largo tiempo columnista de *Scientific American*, el juego de las coles fue inventado durante la hora del té una tarde de febrero de 1967 por John Horton Conway (1937-2020) y Michael Paterson de la Universidad de Cambridge [26].

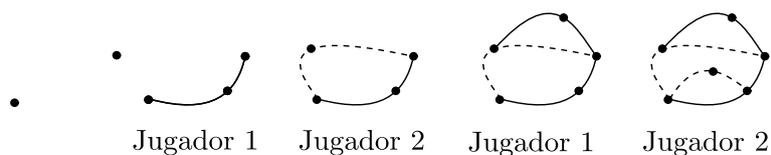


Figura 4.3

Naturalmente, el juego será más largo tanto más puntos haya al inicio de la partida, aunque siempre será finito. Al comienzo de un juego con n puntos, existen $3n$ lugares disponibles para colocar aristas. Cada vez que se dibuja una nueva arista, el número de puntos disponibles se reduce en uno (se agotan dos, se agrega uno). Así, el máximo número de movimientos de un juego de n puntos es de $3n - 1$ puede consultarse [26] para más detalles al respecto.

Si se comienzan con dos puntos, el segundo jugador siempre tendrá una estrategia ganadora. Sucede lo mismo para los valores de $n = 1, 6, 7$ y 8 . En contraparte, el primer jugador tiene ventaja cuando $n = 3, 4, 5, 9, 10$ u 11 . La mayoría de estos casos ($n > 6$) fueron verificados por computadora y no se tiene información sobre la ventaja al jugar para casos en los cuales n es más grande que 11 , esto también puede consultarse en [26]. De esta forma, el juego de coles se vuelve un juego interesante y retador.

Tiempo después, Horton Conway inventó una variante de este juego al cual llamo coles de Bruselas. La modificación que realizó consiste en empezar con n cruces en forma del signo $+$, en vez de empezar con n puntos. Al empezar el juego, de cada punto salen 4 líneas pequeñas que semejan brazos. Cada vez que un jugador une dos brazos libres por medio de una curva, coloca un nuevo signo $+$ en medio de la curva dibujada, el cual producirá 2 brazos libres (véase la Figura 4.4).

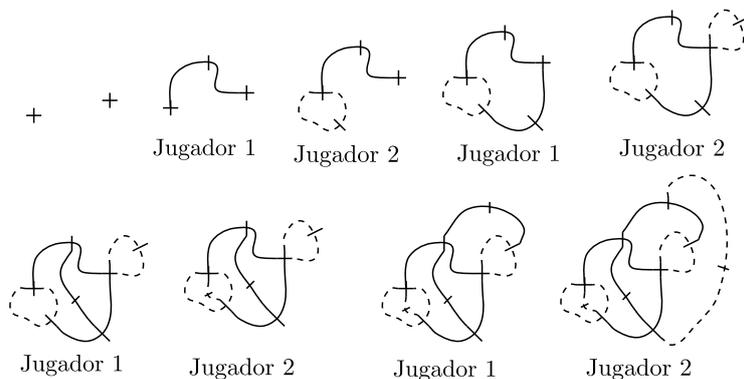


Figura 4.4

A diferencia del juego de coles, el de coles de Bruselas, permite que cuatro curvas se unan en el mismo punto. Como antes, el ganador es el jugador capaz de realizar un último movimiento.

Por otro lado, en el primero es fácil observar que necesariamente debe terminar, mientras que, en el segundo, parece ser infinito. No obstante, puede verse que cualquier juego está destinado a terminar en exactamente $5n - 2$ movimientos para n cruces dadas. De aquí que un número impar de cruces garantiza la victoria para el primer jugador, y un número par hace que el segundo jugador sea el victorioso.

Si ignoramos que los brazos parecen libres, entonces, en cada jugada, el diagrama del juego puede verse como un grafo plano (posiblemente con varias componentes conexas). Cada cruz puede considerarse como un vértice de 4 aristas, así, cada movimiento añade dos aristas y un vértice. Además, sólo que la nueva curva una dos componentes conexas, cada movimiento también agregaría una cara.

Afirmamos que el juego debe terminar cuando el grafo sea conexo y tenga exactamente $4n$ caras (contando la región exterior como una cara). Es decir, al iniciar el juego, se tienen n cruces con $4n$ brazos libres, pues cada movimiento reduce 2 brazos de los que se tienen y aumenta 2 brazos más.

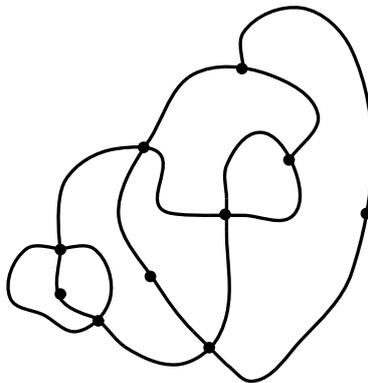


Figura 4.5

Cada cara debe tener al menos un brazo libre apuntando hacia ella. Dicho en forma más precisa, ese brazo debe estar en el medio de la curva más recientemente dibujada. Por tanto, el grafo no puede tener más de $4n$ caras.

Por otro lado, si hay menos de $4n$ caras, significa que alguna cara del grafo aún debe de contener dos brazos libres, de esta forma el juego aún no ha terminado.

Supongamos ahora que el juego termina después de m turnos, dejando un grafo conexo con V vértices, A aristas y $C = 4n$ caras. (Por ejemplo, la configuración final de la Figura 4.4 (Figura 4.5) tiene $V = 10$, $A = 16$ y $C = 8$). Como dijimos anteriormente, cada nuevo movimiento agrega nuevas aristas y un vértice nuevo. Dado que el juego inicio con n vértices y cero aristas, al final del juego habrá $A = 2m$ aristas y $V = n + m$ vértices.

Usando la Fórmula de Euler para grafos conexos planos, obtenemos

$$2 = V - A + C = (n + m) - 2m + 4n$$

Despejando m se tiene

$$2 = (n + m) - 2m + 4n$$

$$2 = 5n - m$$

$$m = 5n - 2$$

Así, queda demostrada nuestra afirmación: el juego de coles de Bruselas termina en exactamente $5n - 2$ movimientos.

A diferencia del juego de coles, el de coles de Bruselas siempre garantiza quién será el ganador. De esta forma, si quiere gastar una broma a sus amigos de confianza, pídales que jueguen el juego de coles de Bruselas con usted. Después de explicar las reglas, deles una opción a elegir, el primer turno o el número de cruces iniciales. En cualquier caso, puede garantizar que usted es el vencedor.

4.2. La Característica de Euler y los Sistemas Dinámicos.

Un modelo matemático es una herramienta que ayuda a los científicos a predecir el comportamiento de ciertos fenómenos en diversos campos de la ciencia. Entre estos, suelen utilizarse a menudo las ecuaciones diferenciales, en ellas se describen tasas de cambio de variables que dependen del tiempo. Un *sistema dinámico* es una representación de ello.

Un ejemplo muy recurrente de un sistema dinámico es el modelo de la relación depredador-presa.

La Figura 4.6 ilustra visualmente este comportamiento cíclico.

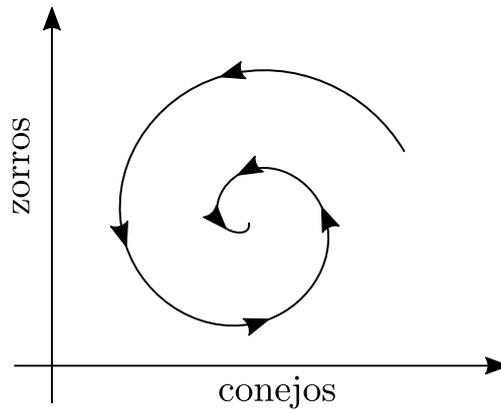


Figura 4.6

En ella se muestra el comportamiento de ambas poblaciones, y en este caso se muestra a la población de zorros que depende de la población de conejos, o viceversa. Ambas dependen además de muchos factores. En la modelación de éstas, aquéllos que se dedican al estudio de la dinámica de poblaciones, delimitan las variables o factores que intervienen en su modelos, se hace abstracción de diversos factores y delimitan con precisión las hipótesis que se consideran en las modelaciones realizadas (puede verse con detalle en [6]). En este caso se considera que una de ellas sólo se alimenta de la otra, que interactúan siempre de la misma forma, que sus condiciones de vida son iguales, sin importar sexo ni edad.

Ambas poblaciones dependen del tiempo, y la forma de medir su población es mediante muestras que se toman en determinados intervalos de tiempo, representadas por una ecuación diferencial en cada caso. En la Figura que se ha mostrado, se trata de un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales (de primer orden). Una forma de analizar las soluciones o solución de un sistema de ecuaciones diferenciales es observar el comportamiento de lo que se denomina espacio-fase, y en el cual es posible observar las trayectorias de las soluciones posibles. Este trazo puede apreciarse como un objeto topológico con determinadas características.

No se pretende dar en este trabajo las ecuaciones diferenciales que describan a algún sistema dinámico, más bien, mediante la representación del espacio fase, analizar el comportamiento cualitativo de tal o cual sistema dinámico. Entre las técnicas más comunes para hacerlo, es producir un *flujo* o un **campo vectorial** en el espacio fase. Un flujo, también conocido como sistema dinámico continuo, asocia cada punto en el espacio fase con la trayectoria del movimiento de ese punto. Esta trayectoria es la curva solución de la ecuación diferencial. Varias líneas de flujo para el modelo depredador presa se ilustran en la Figura 4.7 (a).

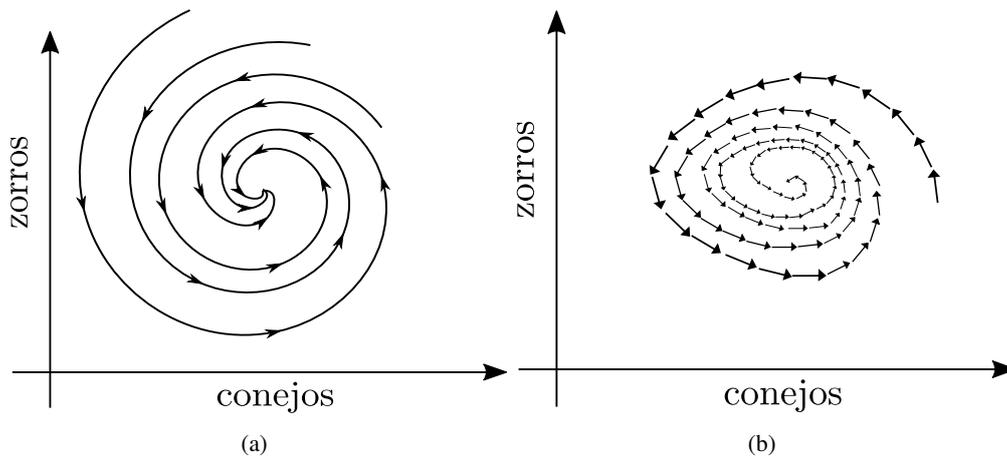


Figura 4.7

Otra manera de analizar este comportamiento es en términos de un campo vectorial. Si pensamos en un flujo como el movimiento de partículas, entonces los vectores del campo vectorial son los vectores velocidad para estas partículas en el espacio fase. La Figura 4.7 (b) muestra el campo vectorial del modelo zorro-conejo que se ha presentado.

En la Figura 4.7 se puede ver que existe un único punto en donde la población de zorros y conejos permanece sin cambios a lo largo del tiempo, a este punto le llamaremos **punto de equilibrio**. El vector en este punto de equilibrio tiene una magnitud cero, por lo que decimos que el campo vectorial tiene un *cero* en este punto. Así, los ceros de los campos vectoriales representan puntos de equilibrio en el sistema.

Enfoquémonos en la relación que hay entre los ceros de un campo vectorial y la topología de una superficie.

Una manera sencilla de obtener un campo vectorial en una superficie es embeberla en el espacio tridimensional y colocar los vectores “apuntando hacia abajo” de modo que entre más pronunciada sea la pendiente mayor será el vector. Este campo vectorial se denomina **campo vectorial gradiente**. En la Figura 4.8 se muestra el campo vectorial gradiente de una esfera y un toro. Una forma de imaginar el flujo asociado con el campo vectorial gradiente, es pensar a la superficie cubierta de miel. Las líneas de flujo es el camino que sigue la miel a medida que fluye hacia abajo sobre la superficie.

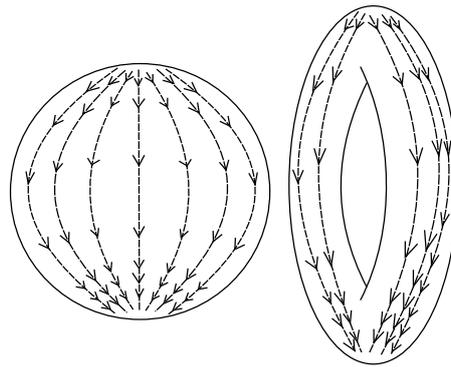


Figura 4.8

Como puede apreciarse en la Figura 4.8, el campo vectorial gradiente sobre la esfera tiene dos ceros (uno en el polo Norte y otro en el polo Sur) y en el toro existen cuatro *ceros* (dos en la parte superior e inferior del toro y otros dos en la parte superior e inferior del agujero del toro). En este momento, es pertinente hacernos las siguientes preguntas, ¿Todos los campos vectoriales sobre la esfera tienen al menos un *cero*? ¿Todos los campos vectoriales del toro tienen al menos un *cero*? Si es posible responder a estas preguntas afirmativamente para alguna superficie S , entonces se tendría un resultado muy importante. Tal resultado diría que siempre que el espacio fase de un sistema sea una superficie S , entonces deberá tener al menos un punto de equilibrio.

Como respuesta parcial a las preguntas anteriores tenemos el Teorema de Poincaré-Hopf, que establece una relación inesperada entre los ceros de un campo vectorial y el número de Euler.

No todos los *ceros* son similares. En la Figura 4.9 puede apreciarse cinco tipos de *ceros* de diferentes campos vectoriales y los puntos fijos del flujo correspondiente (esto puede consultarse con más detalle en [22]).

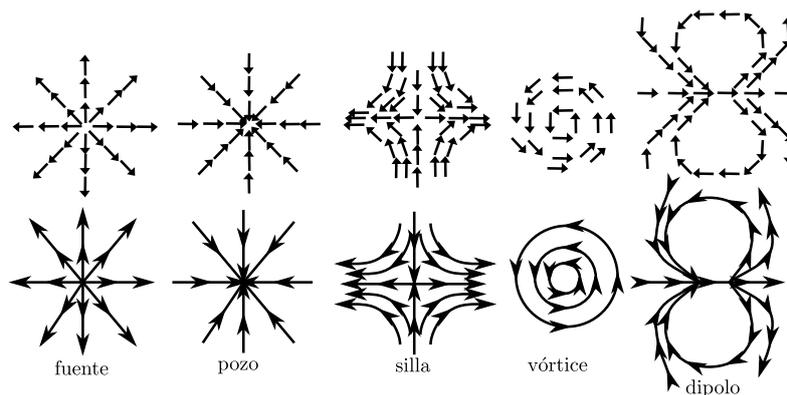


Figura 4.9

Una breve descripción de la clasificación de estos ceros puede consultarse en el Apéndice D. Describimos aquí lo relacionado con polígonos, y en este sentido, estos tipos de ceros que se observan en la figura puede asociarse a un polígono. En este caso mostramos los del pozo y la silla.

En general para esta asociación, se dibuja un círculo alrededor del cero y en el perímetro de éste se colocan pequeños círculos con una línea (uno de sus radios) que indican la dirección del vector en un cierto punto. (Las condiciones para describir este trazo pueden verse en el Apéndice D). El “movimiento” de estas pequeñas líneas, más precisamente el “giro” que dan, definirá lo que se denomina índice del cero.

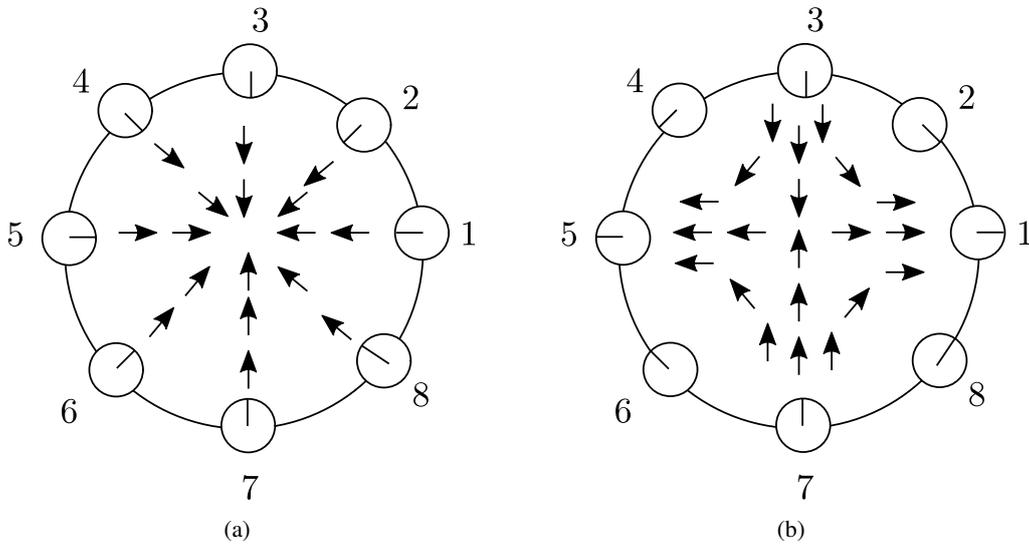


Figura 4.10

De esta forma el índice de un pozo es 1 y el de una silla es -1 como se muestra en la Figura 4.10.

Una forma de calcular el índice de un *cero* de un campo vectorial es usar un polígono (se tiene la libertad de elegir cualquier polígono de nuestra preferencia) en vez de una circunferencia, poniendo el cero en el interior de la cara del polígono (aceptamos que las aristas del polígono se puedan curvar). Los vectores en las aristas del polígono deben apuntar hacia dentro o hacia fuera, no se permite que haya un vector tangente a las aristas del polígono. En la Figura 4.11 podemos observar los casos de una *silla* en el interior de un cuadrado, y el de un *pozo* en el interior de un hexágono, donde además etiquetamos las aristas y vértices en los cuales el campo vectorial apunte hacia dentro. En cada arista en donde los vectores del campo vectorial apunten hacia dentro colocamos un -1 , y en los vértices un 1 . Finalmente, ponemos un 1 justo en medio del polígono.

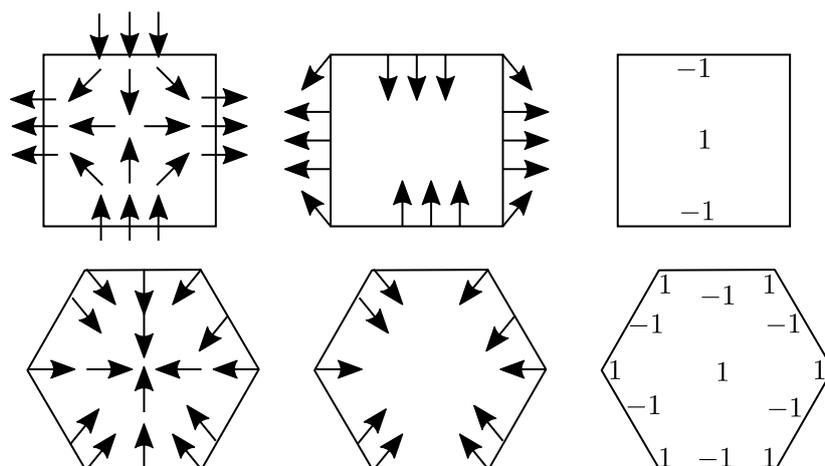


Figura 4.11

Resulta que la suma de todos estos números es el índice del cero del campo vectorial. Puede verificarse, en la Figura 4.11 que los índices para el punto silla y el pozo son los correctos siguiendo este procedimiento.

Estamos en condiciones de observar la relevancia del resultado de Euler en el Teorema de Poincaré-Hopf.

Teorema 4.2.1 (Poincaré-Hopf). Para cualquier campo vectorial sobre una superficie S con un número finito de ceros, la suma de los índices de todos los ceros es igual a la característica de Euler de S , es decir, $\chi(S)$.

La demostración de este Teorema puede verse en el Apéndice D. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.2.1. Consideremos los tres campos vectoriales sobre la esfera, ilustrados en la Figura 4.12. El primero (de izquierda a derecha), tiene un pozo y una fuente, cada uno con índice 1, el segundo tiene dos vórtices, cada uno, también, con índice 1, y el tercero tiene solo un dipolo cuyo índice es 2. En cada caso, la suma de los índices de todos los ceros es igual a 2, coincidiendo con la característica de Euler de la esfera.

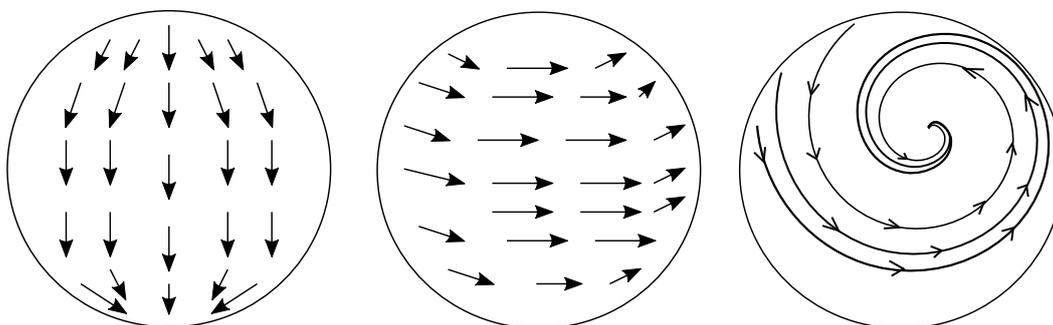


Figura 4.12

Ejemplo 4.2.2. En la Figura 4.8 observamos un campo vectorial gradiente sobre el toro con cuatro ceros: una fuente, dos puntos silla y un pozo. La suma de los índices respectivos es $1 + 2(-1) + 1 = 0$, y sabemos que la característica de Euler del Toro es $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$

Cabe señalar que los campos vectoriales nos permiten calcular la característica de Euler de una superficie sin la necesidad de una triangulación como se hizo en el capítulo 3.

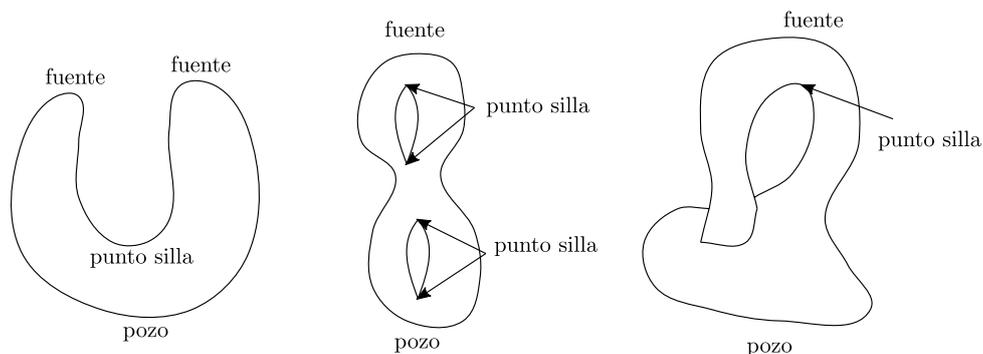


Figura 4.13

En la Figura 4.13 podemos observar una esfera deformada en forma de U. El campo vectorial respectivo tiene dos fuentes, un punto silla y un pozo, por lo que la suma de los índices es $2(1) + 1(-1) + 1(1) = 2$. También podemos observar al doble toro que tiene una fuente, cuatro puntos silla y un pozo, entonces $\chi(2\mathbb{T}^2) = 1 + 4(-1) + 1 = -2$.

La botella de Klein tiene una fuente, dos puntos silla y un pozo, por lo tanto $\chi(\mathbb{K}^2) = 1 + 2(-1) + 1 = 0$. Resumimos esta situación como sigue:

Si los ceros de un campo vectorial gradiente de una superficie S consisten de fuentes, puntos silla y pozos, entonces

$$\chi(S) = (\text{número de fuentes}) - (\text{número de puntos silla}) + (\text{número de pozos})$$

Del Teorema 4.2.1 se desprenden algunas observaciones interesantes.

Observación 1: EL Teorema 4.2.1 establece que si un campo vectorial sobre una superficie tiene un número finito de ceros, entonces la suma de los índices de los ceros es igual a la característica de Euler de la superficie. De donde, se deduce que si un campo vectorial sobre una superficie no tiene ceros, entonces la característica de Euler de la superficie debe ser cero.

Observación 2: Basándonos en la primer observación, si tenemos una superficie S , para la cual $\chi(S) \neq 0$, entonces cualquier campo vectorial en S debe tener al menos un cero. Como ejemplo

ponemos a la esfera, sabemos que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2 \neq 0$, por lo tanto, cualquier campo vectorial sobre la esfera debe tener, forzosamente, un cero. Este resultado, mejor conocido como el “*Teorema de la bola peluda*”, fue demostrado por primera vez por L.E.J. Brouwer (1881-1966) en 1911 [26]. El motivo de llamarle el Teorema de la bola peluda a este Teorema es que si imaginamos una bola con pelos, por ejemplo una bola de tenis o un puerco espín, como una esfera con un campo vectorial, es imposible peinarla sin que quede al menos un pelo de pie. A veces se dice al respecto que “no podemos peinar el pelo de un coco”².

Esto lo podemos trasladar al plantea Tierra de la siguiente forma. Si pensamos a la Tierra como una esfera, entonces las corrientes de viento sobre su superficie forman un campo vectorial, según el Teorema de la bola peluda, debe existir un punto en la Tierra donde este campo vectorial sera cero, es decir, hay un punto sin viento (por ejemplo, el ojo de un huracán). No obstante, como $\chi(S) = 2$ debería existir otro punto (en algún lugar) del otro lado de la Tierra en donde tampoco haya viento. Este es un ejemplo de un Teorema de existencia en el cual sabemos que existe algo pero no lo podemos dar de una forma explícita.

Observación 3: Puesto que $\chi(\mathbb{T}^2) = 0$, el Teorema 4.2.1 no garantiza que todos los campos vectoriales sobre el toro tengan ceros. En la Figura 4.14 se ilustra un ejemplo de un campo vectorial sobre el toro que no se anula.

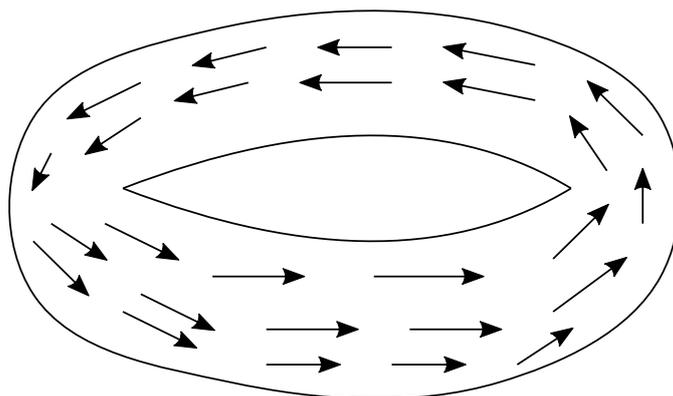


Figura 4.14

Observación 4: El Teorema de Poincaré-Hopf es un teorema sobre campos vectoriales, pero como los campos vectoriales se pueden usar para definir flujos, este resultado también puede interpretarse como un teorema de punto fijo para sistemas dinámicos continuos. Dando lugar al Teorema del punto fijo de Brouwer que afirma: “cualquier función continua de una bola n dimensional, denotada por \mathbb{B}^n , en sí misma, tiene al menos un punto fijo”.

Observación 5: La característica de Euler de una superficie es un concepto topológico (global), mientras que el índice de un campo vectorial es un concepto analítico. Entonces el Teorema de Poincaré-Hopf relaciona estas dos ramas de las matemáticas, aparentemente sin relación, y el vínculo es la característica de Euler.

²Cabe señalar que el Teorema de la bola peluda no se aplica al cabello humano, ya que la región cubierta por el cabello en nuestra cabeza no es topológicamente equivalente a una esfera, más bien es homeomorfa a un disco.

4.3. La Fórmula de Descartes.

Uno de los usos de la característica de Euler, que no podemos omitir, es el relacionado con lo que se denomina la *fórmula de Descartes*, que generaliza el *teorema del ángulo excedente*. Ambos son antecedentes relevantes para el resultado que describiremos en la siguiente sección: el *teorema de Gauss-Bonnet* para superficies. Estos tres resultados pondrán de relieve que ciertas propiedades geométricas globales (relacionadas con los ángulos y la curvatura) están determinadas, entre otras cosas, por la Topología, específicamente, por la Característica de Euler de la superficie.

El caso análogo en polígonos, a estos resultados es el teorema siguiente, que además es muy conocido en geometría elemental.

Teorema 4.3.1 (Teorema del ángulo exterior). La suma de los ángulos externos de un polígono es 2π

Una demostración corta y elegante de este resultado fue dada por George Pólya (1887-1985) y puede verse en el Apéndice E

Los ángulos determinados por el cruce de dos segmentos de recta, y cuyos puntos de cruce son vértices, se conciben también como líneas rectas “imperfectas”. Esto es, observar en cada vértice y preguntarse o analizar la situación sobre qué es aquello que le puede faltar a este cruce de segmentos, para ser una línea recta. Si el ángulo interior del polígono en un vértice es α , la línea difiere de una línea recta por $\pi - \alpha$, el ángulo exterior. Desde este punto de vista, llamaremos al ángulo exterior $\pi - \alpha$ el **déficit angular** o el *defecto angular* de la esquina. Con esto, podemos reescribir el Teorema 4.3.1 como sigue:

Teorema 4.3.2 (Teorema del ángulo exterior (reescrito)). El déficit angular total de cualquier polígono es 2π

Ahora consideremos una curva cerrada simple y suave en el plano. Elijamos una orientación sobre la curva y coloquemos vectores tangentes a la curva apuntando en la dirección de la orientación seleccionada. Nos interesa saber el comportamiento de estos vectores tangentes a medida que recorremos la curva una vez. Si la curva es una circunferencia, entonces, conforme la recorremos en sentido antihorario, los vectores también giran en la misma dirección y, al final, giran un ángulo total de 2π . Para una curva más complicada, a pesar de que los vectores se van moviendo de un lado a otro, al final giran exactamente una vuelta en la dirección de la orientación elegida (véase la Figura 4.15).

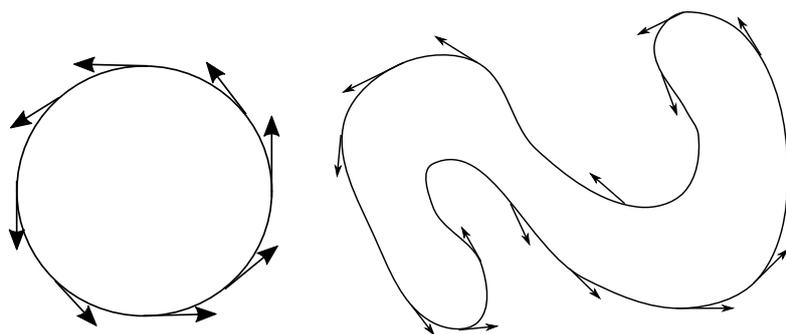


Figura 4.15

A pesar de que esta observación pueda parecer obvia (como se creyó por mucho tiempo), es difícil de probar. En 1935 Hopf demostró este resultado mismo que puede verse en [26].

Teorema 4.3.3 (Teorema de las tangentes giratorias). Los vectores tangentes de una curva cerrada simple y suave en el el plano giran un ángulo total de 2π

Por tratarse en este caso, de curvas, puede decirse que el Teorema 4.3.3 es una versión *suave* del Teorema 4.3.2. En este sentido, veamos ahora el caso en un poliedro y/o superficie.

Sea una superficie representada por una hoja de papel, en la cual se dibujan dos líneas que lo dividen en cuatro cuadrantes iguales, y usamos tijeras para eliminar uno de estos cuadrantes y unir los dos bordes del corte, el resultado de este procedimiento es un objeto que se asemeja a la esquina de un cubo, como se ilustra en la Figura 4.16

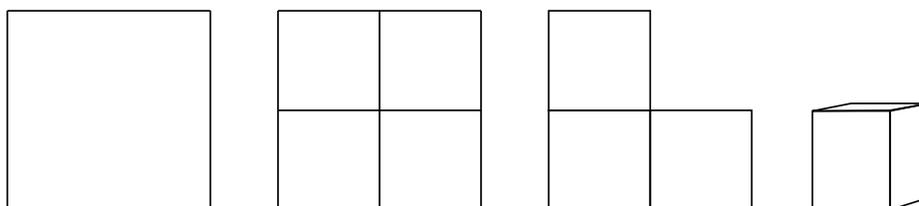


Figura 4.16

Anteriormente, se definió el déficit angular en un vértice de un polígono como el valor por el cual la curva se desvía de una línea recta. Similarmente, definamos el déficit angular de un ángulo sólido como la cantidad por la cual se diferencia de ser una superficie plana.

En nuestro ejemplo, cuatro ángulos rectos (2π) estaban en el centro de nuestro cuadrado antes de cortar, al cortar un cuadrante nos quedan tres ángulos rectos, es decir, $\frac{3\pi}{2}$. De esta forma, el déficit angular en un vértice de un cubo es $2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Ahora, si reproducimos el ejemplo anterior, pero sin eliminar el cuadrante y éste se dobla hacia atrás uno de los cuatro cuadrantes como se muestra en la Figura 4.17. El vértice central, inicialmente con un ángulo total de 2π , pasa a tener un ángulo total de $\frac{5\pi}{2}$, un exceso de $\frac{\pi}{2}$ con respecto a una superficie plana. Diremos que el vértice tiene un déficit angular de $2\pi - \frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

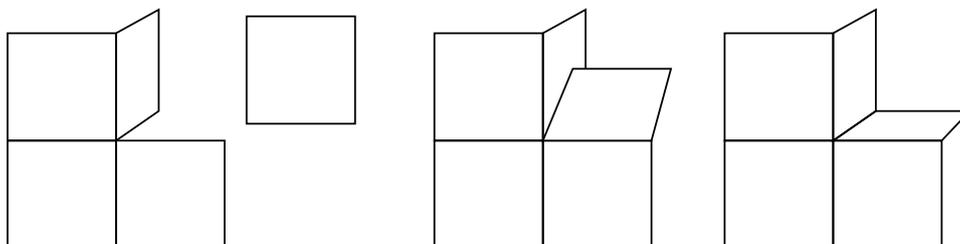


Figura 4.17

Un poliedro tiene muchos vértices, cada uno con su propio déficit angular (o exceso angular). El déficit angular total de un poliedro es la suma de todos sus defectos angulares.

Ejemplo 4.3.1. Cada una de las ocho esquinas del cubo tiene un déficit angular de $\frac{\pi}{2}$, de modo que el déficit angular total es $8 \left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi$.

Ejemplo 4.3.2. Las cuatro caras de un tetraedro son triángulos equiláteros. Como en cada vértice se intersectan tres triángulos equiláteros, el déficit angular de cada esquina es $2\pi - 3 \left(\frac{\pi}{3}\right) = \pi$. Dado que el tetraedro tiene cuatro vértices en total, el déficit angular total es 4π .

Ejemplo 4.3.3. Consideremos un poliedro no convexo como el de la Figura 4.18. Un cubo grande al que se le quito un cubo más pequeño en una de sus esquinas (puede pensarse como un cubo de Rubick con una esquina faltante). Los vértices etiquetados con los números del 1 al 10 tienen un déficit angular de $\frac{\pi}{2}$. El vértice 11 está mirando al “lado equivocado”, no obstante su déficit angular sigue siendo $2\pi - 3 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Los vértices restantes (12, 13 y 14) tienen defectos angulares de $-\frac{\pi}{2}$ como en la Figura 4.17. Por lo tanto, el déficit angular total de este poliedro no convexo es $11 \left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4\pi$

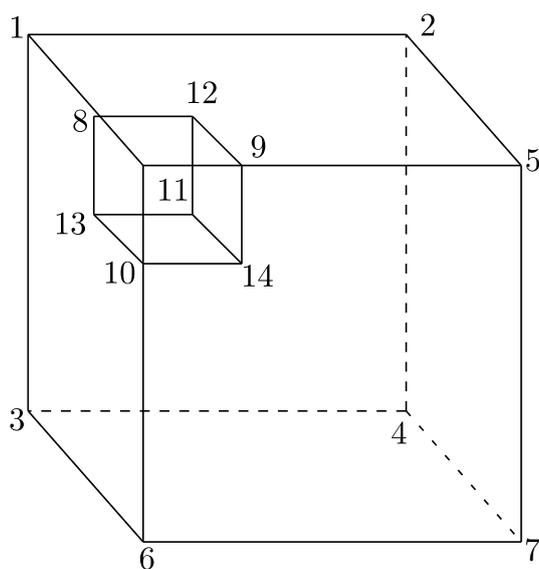


Figura 4.18

En este punto, podemos conjeturar que cualquier poliedro tiene un déficit angular total de 4π . Esta observación fue hecha por Descartes en sus notas inéditas *Sobre los Elementos de los Sólidos*. En el tercer párrafo de estas notas Descartes afirma:

“Como en la figura plana [polígonos] todos los ángulos externos, tomados juntos, forman cuatro ángulos rectos [2π], de la misma manera, en un cuerpo sólido [poliedro] todos los ángulos externos sólidos [déficit angular], tomados juntos, forman ocho ángulos rectos sólidos [4π].” [26]

Una pequeña variante de este teorema fue redescubierta por Euler y apareció en sus artículos sobre la fórmula del poliedro. Euler demostró que la suma de todos los ángulos planos en un poliedro con V vértices es igual a $2\pi(V - 2)$. Así como la fórmula de Descartes generaliza el Teorema del ángulo exterior para polígonos, la fórmula de Euler generaliza el Teorema del ángulo interior. El resultado de Euler es equivalente al de Descartes. Como lo definimos, el déficit angular total es simplemente $2\pi V$ restado de la suma de todos los ángulos planos, es decir, $2\pi V - 2\pi(V - 2) = 4\pi$.

Naturalmente, tanto Euler como Descartes consideraron poliedros convexos. Sin embargo, es suficiente una pequeña modificación para aplicar el resultado a todos los poliedros, incluso a aquellos que no son homeomorfos a una esfera. El déficit angular total es un invariante topológico.

Teorema 4.3.4 (Fórmula de Descartes). El déficit angular total de cualquier poliedro \mathcal{P} es $2\pi\chi(\mathcal{P})$.

La demostración de este teorema puede verse en el Apéndice E

Ejemplo 4.3.4. El cubo, el tetraedro y el cubo sin un cubo pequeño en una de sus esquinas (Figura 4.18), son esferas topológicas, por lo que su característica de Euler es 2; por lo tanto, el déficit angular total es, de acuerdo a la fórmula de Descartes, $2\pi\chi(\mathcal{P}) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

Ejemplo 4.3.5. Consideremos el toro poliédrico que se ilustra en la Figura 4.19. Tiene un total de 16 vértices, ocho de los cuales tienen un déficit angular de $\frac{\pi}{2}$ y los ocho restantes tienen déficit angular de $-\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, el déficit angular total es cero, la característica de Euler del toro.

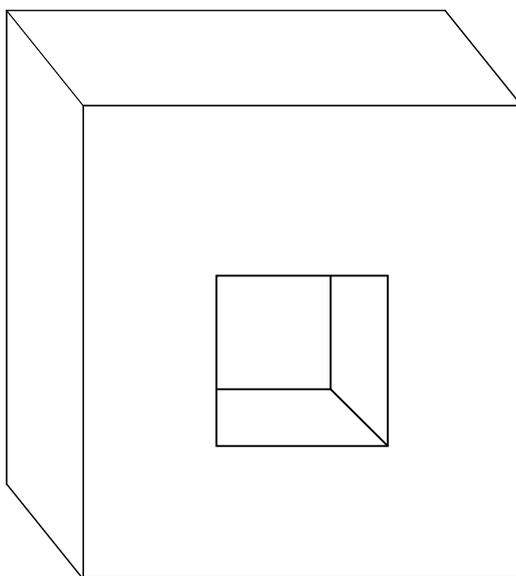


Figura 4.19

La fórmula de Descartes, al incluir la característica de Euler, muestra de algún modo una relación entre objetos en Geometría con objetos en Topología.

Podemos generalizar el Teorema 4.3.4 a superficies, para ello retomamos el concepto de geodésica presentado en el Capítulo 1, y consideraremos un segmento de un círculo máximo como geodésica. En adelante, asumiremos que las aristas sobre una superficie son curvas geodésicas, lo que hace que las caras sean polígonos geodésicos.

El Teorema de Harriot-Girard (Teorema 1.2.2) muestra que la suma de los ángulos internos de un triángulo geodésico en una esfera excede a π . Sin embargo, pueden existir superficies, como

las que tienen forma de una "silla de montar", donde la suma de los ángulos internos de ciertos triángulos geodésicos es menor que π .

De este modo, podemos definir el exceso angular y el déficit angular de un triángulo geodésico como la cantidad en que la suma de los ángulos internos de dicho triángulo difiere de la suma de los ángulos internos de un triángulo plano, es decir

Definición 4.3.1. Sea T un triángulo geodésico con ángulos internos α , β y γ . Entonces, el **exceso angular** de T es $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$. Si $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi < 0$, decimos que T tiene un **déficit angular**.

Definición 4.3.2. Para una superficie S dividida en vértices, aristas geodésicas y polígonos geodésicos, definimos el **exceso angular total** como la suma de los excesos angulares de todas las caras.

Similarmente, podemos definir el exceso angular o déficit angular de un polígono geodésico de n lados. El exceso angular de un polígono geodésico cuyos ángulos interiores son $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ es $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) - (n - 2)\pi$ (Teorema 1.2.3).

La definición de exceso y déficit angular para superficies descompuestas en polígonos geodésicos, no coincide con la del déficit angular en poliedros planos. Ya que un poliedro plano tiene su exceso o déficit angular en sus vértices, mientras que en una superficie se tendrá el exceso o déficit angular en las caras, esto es, en una superficie los vértices no tienen defecto o exceso angular, pero las caras sí. No obstante, estos conceptos están estrechamente relacionados, así como el déficit angular total de un poliedro se relaciona con su característica de Euler (fórmula de Descartes), el exceso angular total de una superficie está relacionado con su característica de Euler.

Teorema 4.3.5 (Teorema del exceso angular para Superficies). El exceso angular total de una superficie S es $2\pi\chi(S)$

La demostración de este teorema puede consultarse en el Apéndice E

4.4. El Teorema de Gauss-Bonnet

En la sección anterior, mencionamos que en cierta línea vista desde un punto fijo como lo es un vértice, el *déficit angular* indica que tanto difiere ésta de una línea recta. Al mismo tiempo hablamos de la existencia de una versión "suave" del Teorema 4.3.2, que se denomina el *Teorema de las tangentes giratorias*. Esto conduce al concepto de curvatura, definición fundamental, entre otras, para el estudio de las curvas.

Así como la fórmula de Descartes y el Teorema 4.3.5 permiten conocer el déficit y el exceso angular totales de un poliedro y de una superficie, respectivamente, para el concepto de curvatura existe un resultado análogo. Antes de describir éste recordemos el concepto de curvatura.

La **curvatura** en el punto x de una curva plana, es un número κ , que mide la rapidez con la que la curva se aleja del vector tangente en x .

Dado un vector \vec{n} , normal a una curva en el punto x , si la curva gira en la dirección de \vec{n} , entonces $\kappa > 0$, cuando gira hacia el lado opuesto $\kappa < 0$, y, por último, si la curva no gira o cambia de dirección en x , entonces $\kappa = 0$ (véase la Figura 4.20). Cuanto más pronunciada sea la curva, mayor será (en valor absoluto) la curvatura κ .

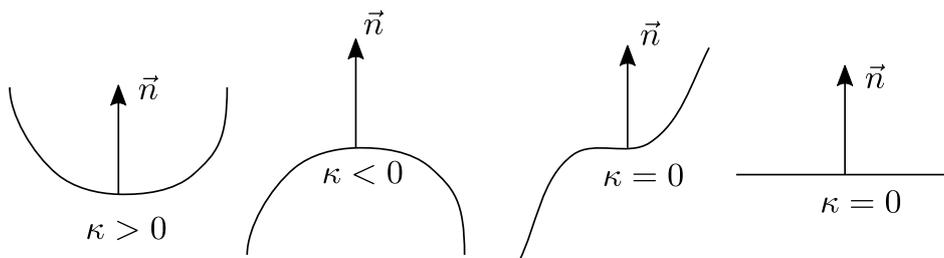


Figura 4.20

Una curva cerrada simple tiene una región interior y otra exterior (consecuencia del Teorema de Jordan, Teorema 3.1.1). Por lo tanto, en el caso de una curva cerrada simple, siempre podemos elegir vectores normales a lo largo de toda la curva que apunten hacia dentro. De esta forma, es posible calcular la curvatura en todos los puntos de la curva. La curvatura no es siempre constante en cualquier curva. Veamos el caso de la Figura 4.21. Puede apreciarse que existen regiones de curvatura positiva, negativa y cero.

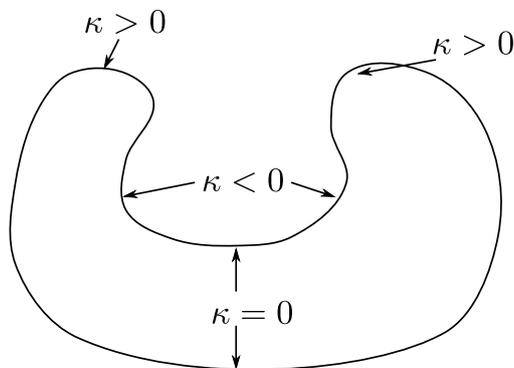


Figura 4.21

Es posible sumar la curvatura a lo largo de toda la curva para obtener la **curvatura total**. No ahondaremos en el estudio de estas propiedades, pues pueden consultarse en cualquier texto de Geometría diferencial para un mayor interés.

Si consideramos los conceptos y resultados descritos en la sección previa, es natural preguntarse si la mencionada *curvatura total* se comporta de forma análoga a todos éstos.

Así como el déficit angular total de un polígono es constante, los vectores tangentes de una curva cerrada simple giran un ángulo total constante, 2π en ambos casos (Teoremas 4.3.1 y 4.3.3 (revisar), respectivamente), la curvatura total de una curva plana cerrada simple también toma este valor.

Teorema 4.4.1 (Teorema de la Curvatura total para curvas). La curvatura total de cualquier curva plana suave simple cerrada es 2π ³

Omitimos la demostración de este y los teoremas siguientes para no distraernos de observar la analogía con los resultados de la sección anterior y la relación entre estos derivada de la característica de Euler, además de que dichas demostraciones pueden consultarse en cualquier texto de Geometría diferencial.

Ya que una curva cerrada simple es homeomorfa a una circunferencia tenemos aquí una propiedad topológica.

El concepto de curvatura de curvas planas se extiende a superficies en \mathbb{R}^3 .

Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 , que asumiremos en adelante, es suave. En un punto cualquiera x de S , elijamos un vector \vec{n} , normal a S y consideraremos un plano que pasa por x y es paralelo a \vec{n} . La intersección del plano con la superficie determina una curva a la cual puede calcularse su curvatura. La curvatura de cualquiera de estas curvas descritas por cualquier plano tomado de este modo, no es siempre la misma para cada x (Figura 4.22). Los valores de las curvaturas descritas por tales planos en un punto dado x , se denotan con la letra κ_i ($i \in \{1, 2\}$) para una curva c_i ($i \in \{1, 2\}$). El mayor y el menor de estos valores, κ_1 y κ_2 , respectivamente, se denominan **curvaturas principales** de la superficie en x . En 1760, Euler demostró que las curvaturas principales se producen en planos perpendiculares entre sí [26].

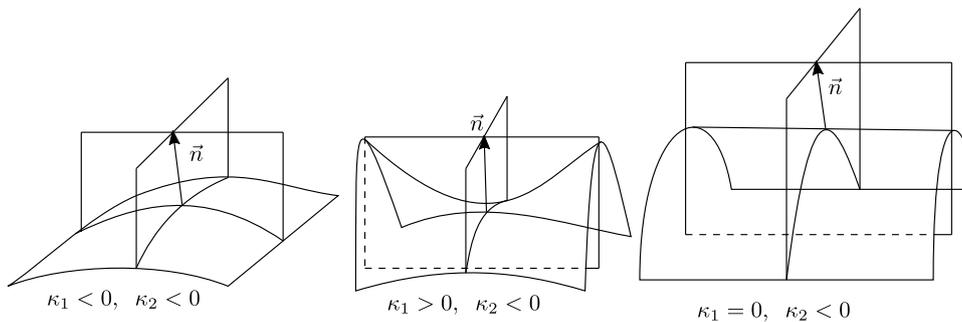


Figura 4.22

³Este teorema, generalmente, se escribe como:

$$\int_C \kappa ds = 2\pi$$

donde C es una curva plana suave simple cerrada.

Hasta antes de la aportación de Carl F. Gauss, la curvatura de una superficie se analizaba de este modo, y es después de éste, al considerar el producto de las curvaturas principales κ_1 y κ_2 , que se pensó en el concepto de curvatura total. Esta definición es la que permite establecer una analogía con los resultados de la sección anterior y se conoce como *curvatura Gaussiana*. Podemos decir que la curvatura en un punto de S es positiva, negativa o cero, dependiendo del signo de κ_1 y κ_2 , (véase la Figura 4.22). Como en el caso de las curvas planas, la curvatura de una superficie varía de un punto a otro y también existen superficies con curvatura constante, por ejemplo la esfera, con curvatura constante positiva, o la pseudoesfera, con curvatura constante negativa.

La curvatura Gaussiana, el área y el exceso angular son cantidades estrechamente relacionadas. Por ejemplo, un triángulo geodésico en una esfera tendrá exceso angular y un triángulo geodésico en una silla de montar tendrá déficit. Partiendo de una curvatura cero, una curvatura no gaussiana positiva produce un exceso angular, mientras que una curvatura no gaussiana negativa da como resultado un déficit angular.

Por otro lado, cuanto más plana es una superficie, más parecida es a un plano, esto es, sus triángulos geodésicos se parecen más a triángulos planos. También debe quedar claro que el tamaño es relevante. Puesto que las superficies son localmente homeomorfas al plano, cuanto más pequeño sea un triángulo en ella, su exceso angular estará más cerca de 0.

Usaremos ahora la relación que hay entre curvatura, área y exceso angular.

Consideremos un triángulo geodésico \triangle que contiene el punto x de una superficie S , con ángulos internos α , β y γ . El exceso angular de este triángulo, $E(\triangle) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, podría ser una buena medida de la curvatura en x , pero no queremos que dependa del tamaño de éste. Se usa entonces la proporción $\frac{E(\triangle)}{A(\triangle)}$, donde $A(\triangle)$ es el área del triángulo \triangle . Es posible demostrar que, a medida que el triángulo \triangle se contrae hacia el punto x , la cantidad $\frac{E(\triangle)}{A(\triangle)}$ se aproxima a la curvatura Gaussiana.

Ejemplo 4.4.1. Si la curvatura es constante en una superficie, en cualquier punto ésta valdrá $\frac{E(\triangle)}{A(\triangle)}$, donde \triangle es cualquier triángulo geodésico. Por ejemplo, consideremos \triangle un octante de una esfera de radio r . Este triángulo tiene tres ángulos rectos, por lo que tiene un exceso angular de $E(\triangle) = 3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \pi = \frac{\pi}{2}$, y su área es $A(\triangle) = \frac{1}{8}4\pi r^2 = \frac{\pi r^2}{2}$. De esta forma, en cualquier punto de la esfera, la curvatura Gaussiana es $\frac{E(\triangle)}{A(\triangle)} = \frac{1}{r^2}$. Esto muestra que, a medida que el radio de la esfera aumenta, su curvatura disminuye. Es fácil identificar la curvatura de una pelota de tenis, pero no así detectar la curvatura de la Tierra.

Las dos curvaturas principales κ_1 y κ_2 miden la curvatura que se conoce como extrínseca de una superficie. Una hoja de papel tiene curvaturas principales $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, pero para un cilindro,

tendremos κ_1 y κ_2 distintos de cero. En este caso, las curvaturas se denominan extrínsecas porque la superficie se observa desde fuera. Si se “habita”, o “vive” dentro de esta superficie, no puede apreciarse tal curvatura. Los detalles de estas diferencias cualitativas requieren de un estudio más detallado y delicado que puede consultarse en textos de Geometría diferencial. Dado que la curvatura Gaussiana es el producto de las dos curvaturas principales, $\kappa = \kappa_1 \cdot \kappa_2$, también κ es una medida de la curvatura extrínseca. Por otro lado, fue Gauss quien descubrió por primera vez que el producto de las dos curvaturas principales extrínsecas producía una medida de la curvatura intrínseca de la superficie. Conocedor de la belleza de su descubrimiento, le dio el pomposo nombre de *theorema egregium*, o el “excelente teorema”. [26]. En este caso, la aportación relevante hecha por Gauss e importante para este capítulo, es la relación que establece entre curvatura, área y exceso angular.

Así como podemos calcular la curvatura total de una curva cerrada simple, Gauss pretendía calcular la curvatura total de una región en una superficie. En el caso de una superficie con curvatura constante este cálculo es simple. Si la curvatura Gaussiana es κ , entonces la curvatura total de una región R es $\kappa \cdot A(R)$, donde $A(R)$ es el área de R . Cuando R es un triángulo geodésico Δ , la curvatura total es $\kappa \cdot A(\Delta) = \left(\frac{E(\Delta)}{A(\Delta)}\right)A(\Delta) = E(\Delta)$, el exceso angular del triángulo. Si se restringe a triángulos geodésicos, este hecho sigue siendo cierto.

Teorema 4.4.2 (Teorema Local de Gauss-Bonnet). La curvatura total de un triángulo geodésico sobre una superficie es, precisamente, el exceso angular del triángulo.⁴

No es difícil calcular la curvatura total de una superficie combinando el Teorema Local de Gauss-Bonnet (Teorema 4.4.2) y el Teorema del exceso angular (Teorema 4.3.5)

Primero, descomponemos una superficie en triángulos geodésicos. Según el Teorema 4.4.2, la curvatura total de cada uno de los triángulos es su exceso angular. En consecuencia, la curvatura total de una superficie cerrada S es el exceso angular total de la superficie, que sabemos que es $2\pi\chi(S)$ (Teorema 4.3.5). Esto es lo que hoy conocemos como el Teorema Global de Gauss-Bonnet.

Teorema 4.4.3 (Teorema Global de Gauss-Bonnet). La curvatura total de una superficie orientable S es $2\pi\chi(S)$ ⁵

De este modo, el Teorema Global de Gauss-Bonnet nos invita a considerar el hecho de que, si deformamos topológicamente una superficie dada, podría cambiarse su curvatura local, pero su curvatura total permanece constante.

⁴Este Teorema se puede expresar como sigue:

$$\int_{\Delta} \kappa dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

donde α , β y γ son los ángulos internos del triángulo geodésico Δ .

⁵De manera más formal, podemos escribir

$$\int_S \kappa dA = 2\pi\chi(S)$$

Hasta aquí observamos, que un concepto como la curvatura se relaciona también con la característica de Euler, lo que deriva en propiedades topológicas que permiten caracterizar a ciertas superficies.

Conclusiones

Hemos visto a lo largo del presente trabajo que la Característica de Euler describe una relación sencilla entre los vértices, aristas y caras de un poliedro regular. Esto da pie a un intercambio epistolar que enriquece a la matemática aún cuando no se tiene una demostración rigurosa de este resultado. La forma en la cual descompone los poliedros representó durante un tiempo un reto de precisión y clasificación para los estudiosos del tema, además de que entrelaza resultados relativos a otras áreas de estudio en matemáticas en el intento de demostrar esta afirmación.

Este desarrollo permitió introducir nuevos conceptos que abren una perspectiva e invitan al estudio de atractivas y nuevas ramas de la matemática.

En un principio, quizá por ser una ecuación extremadamente sencilla, la característica de Euler no fue valorada (incluso por el propio Euler) como debería. No obstante, resultó ser una relación fundamental en matemáticas, pues, como se ha pretendido en el presente escrito, se ha puesto de relieve que es un importante vínculo entre ramas, aparentemente ajenas, de la matemática. Puede observarse la relación que tienen la Teoría de Grafos, la Geometría Euclidiana, el Análisis y la Geometría Diferencial con la Topología. De hecho, este resultado puede generalizarse en Topología Algebraica. Esto último queda fuera de los límites de la presente tesis, sin embargo, el lector puede consultar los textos [16] y [19] de la bibliografía si así lo desea, para profundizar en el tema.

Por otro lado se ha podido constatar el término que suele usarse en matemáticas como demostración *elegante*, ya que nos ayuda a demostrar teoremas relevantes haciendo poco más que cálculos aritméticos. Tal es el caso de la existencia de únicamente cinco poliedros regulares, cuya demostración llevó a Euclides el Libro XIII de los Elementos. Por otro lado, probar que K_5 y $K_{3,3}$ no son grafos planos sin el uso de esta herramienta, llevaría a una demostración un tanto más complicada.

El trabajo de Euler desarrollado para esta característica, se vuelve fundamental en la demostración del Teorema de Clasificación de Superficies, así como una herramienta importante en los casos de déficit y exceso angulares para poliedros y superficies orientables que nos llevan a propiedades relevantes en la curvatura total de éstas.

Podríamos así afirmar, que la fórmula de Euler es el primer invariante topológico que se conoció en la historia de las matemáticas.

Pese a ello, la relación de Euler sigue siendo desconocida por la gran mayoría de estudiantes (con estudios dirigidos o no en matemática), y, en el mejor de los casos, reducida a un resultado curioso.

Sirva de pretexto este trabajo, para introducirse en las ramas de la matemática que la característica de Euler vincula, para reafirmar así que la característica de Euler es una relación fundamental en matemática que no debe ni puede ser olvidada, sino que, por el contrario, se aprecie la belleza y sencillez de esta “joya olvidada”.

Anexos

Apéndice A

Algunos Aspectos Históricos de los Poliedros Regulares.

A.1. Poliedros Regulares.

Los antiguos griegos fueron los primeros estudiosos de los poliedros regulares, fue Teeteto quien hace una descripción matemática de ellos, tal como lo cita [3]:

“La primera teoría de los cinco sólidos regulares se debe al gran matemático Teeteto (415 a.C.-369 a. C.). Sus principales contribuciones se centraron en los números irracionales, y fueron recogidas en los Elementos de Eculides en relación a los cinco poliedros regulares. Platón lo coloca como interlocutor principal de Sócrates en dos de sus diálogos, el Sofista y el llamado, precisamente, Teeteto...

...En los Elementos, Euclides recoge aportaciones de Teeteto, tanto en el libro IV como en el X, y también recopila de Teeteto las propiedades métricas de los poliedros en el libro XI. En el libro XII discute los volúmenes de prismas y pirámides, y en el XIII presenta lo relativo a los poliedros regulares...”

En un escolio de su proposición 18 del libro XIII de los *Elementos*, Euclides muestra (ayudado, como ya se mencionó, de los estudios de Teeteto) que únicamente existen cinco poliedros regulares¹ [8]

¹Más adelante en el texto, se mostrará este hecho como una consecuencia de la fórmula de Euler para poliedros convexos.

“PROPOSICIÓN 18: Poner los lados de las cinco figuras y compararlos entre sí.

...Digo ahora que, a parte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares iguales entre sí.

Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulos o, en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide se construye con tres triángulos, el del octaedro con cuatro, el del icosaedro con cinco; pero no se construirá un ángulo sólido mediante seis triángulos equiláteros y equiangulares (colocados) en un sólo punto; porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un recto, los seis serán iguales a dos rectos; lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es comprendido por menos de cuatro rectos (Libro XI, proposición 21). Por lo mismo, tampoco se construye un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. Y el ángulo del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque serán a su vez cuatro rectos. Y el (ángulo) del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un recto más un quinto, los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad.

Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares. Q.E.D.²”

Estos cuerpos geométricos dan cuenta también de su relevancia en la obra de Platón *“Timeo o de la Naturaleza”* (uno de sus diálogos más significativos) [24], en el cual explica la construcción del universo y asocia estos cuerpos a los elementos fundamentales de los que éste está compuesto, los cuales (según los antiguos griegos) son átomos de agua, aire, tierra y fuego.

“...Antes de la creación, por cierto, todo esto carecía de proporción y medida. Cuando dios se puso a ordenar el universo, primero dio forma y número al fuego, agua, tierra y aire, de los que, si bien había algunas huellas, se encontraban en el estado en que probablemente se halle todo cuando dios está ausente. Sea siempre esto lo que afirmamos en toda ocasión: que dios los compuso tan bellos y excelsos como era posible de aquello que no era así. Ahora, en verdad, debo intentar demostraros el orden y origen de cada uno de los elementos con un discurso poco habitual... En primer lugar, creo que para cualquiera está más allá de toda duda que fuego, tierra, agua y aire son cuerpos. Ahora bien, toda forma corporal tiene también profundidad. Y, además, es de toda necesidad que la superficie rodee la profundidad. La superficie de una cara plana está compuesta de triángulos. Todos los triángulos se desarrollan a partir de dos, cada uno con un ángulo recto y los otros agudos. Uno tiene a ambos lados una fracción de ángulo recto dividido por lados iguales, el otro partes desiguales de un ángulo recto atribuida a lados desiguales...

²Cabe señalar que los poliedros regulares a los que se refiere Euclides son convexos.

suponemos que éste es el principio del fuego y de los otros cuerpos... Ciertamente, debemos explicar cuáles serán los cuatro cuerpos más perfectos, que, aunque disímiles entre sí, podrían nacer unos de otros cuando se desintegran. En efecto, si lo logramos, tendremos la verdad acerca del origen de la tierra y el fuego y de sus medios proporcionales. Pues no coincidiremos con nadie en que hay cuerpos visibles más bellos que éstos, de los que cada uno representa un género particular. Debemos, entonces, esforzarnos por componer estos cuatro géneros de cuerpos de extraordinaria belleza y decir que hemos captado su naturaleza suficientemente...”

Por esta razón, los poliedros regulares también son conocidos como *sólidos platónicos*.

La Figura A.1 representa la idea cósmica de Platón ³

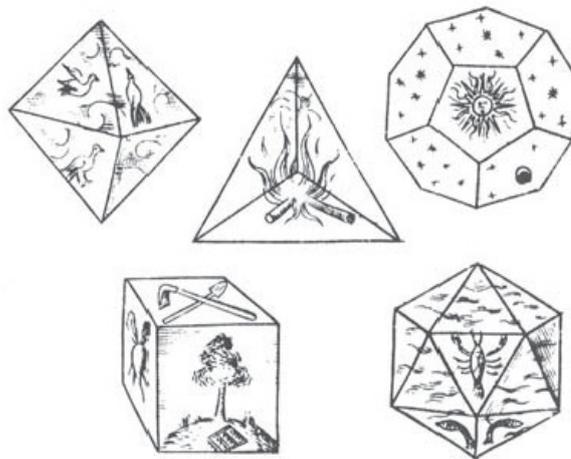


Figura A.1: Dibujos de Kepler basados en la asociación de Platón de [14]

A lo largo del desarrollo histórico de la ciencia, y la matemática en particular, los denominados sólidos platónicos han causado fascinación y han formado parte del trabajo de diversos personajes que han contribuido a dicho desarrollo. Johannes Kepler (1571-1630) basó en ellos un modelo temprano del Sistema Solar que muestra un cubo con un tetraedro inscrito en él, un dodecaedro inscrito en el tetraedro, un icosaedro inscrito en el dodecaedro, y finalmente, un octaedro inscrito en el icosaedro (Figura A.2)⁴; todos ellos separados por esferas.

³Imagen extraída de [26]

⁴Imagen extraída de [26]

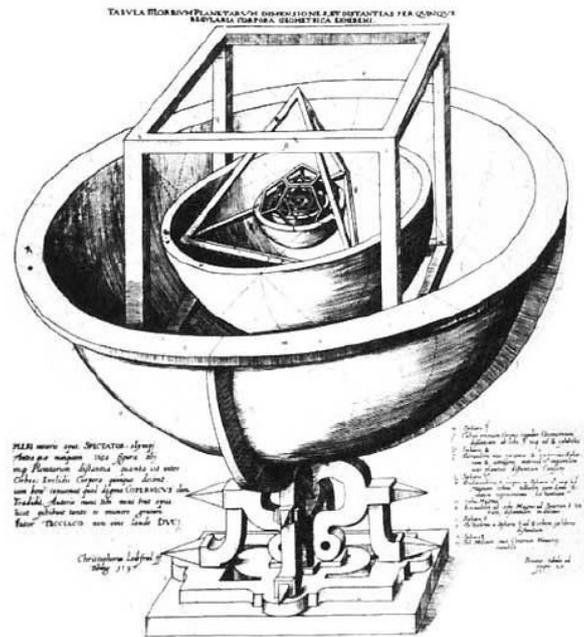


Figura A.2: Modelo temprano del Sistema Solar de Kepler de [1]

Kepler, además de enunciar las tres leyes del movimiento planetario, sistematizó y desarrolló todo lo que se conocía en su época, sobre poliedros. En un folleto de 1596 titulado "El misterio cósmico"[1], Kepler, hombre profundamente religioso, a pesar de que llegó a ser excomulgado en 1612, escribe:

"...Antes de ser creado el universo, no existían los números excepto la Trinidad que es Dios mismo... Dado que la línea y el plano no implican ningún número, entonces reina la infinidad. Consideremos por lo tanto a los sólidos. Primero debemos eliminar a los sólidos irregulares dado que sólo estamos interesados en la creación ordenada; quedan por lo tanto seis cuerpos: la esfera y los cinco poliedros regulares. A la esfera corresponde el cielo exterior, mientras que el mundo dinámico está representado por los sólidos de cara plana, de los cuales existen cinco, los cuales a la vez (cuando son vistos como límite) determinan seis cosas diferentes: los seis planetas que giran al rededor del Sol. Éste es el motivo por el cual sólo hay seis planetas..."

Más adelante asigna a cada cuerpo platónico un planeta con el siguiente argumento:

“...los sólidos se dividen en dos grupos: tres en uno y dos en otro. Al grupo mayor pertenece primero el cubo, segundo pirámide, y finalmente el dodecaedro. Al segundo grupo pertenecen primero el octaedro y segundo el icosaedro. Lo mencionado explica porqué la parte más importante del universo, que es la Tierra —donde la imagen de Dios se refleja en el hombre—, separa a los dos grupos. Por consiguiente, como posteriormente procedo a demostrar, los sólidos del primer grupo deben hallarse fuera de la órbita de la Tierra, mientras que los del segundo grupo deben encontrarse dentro... por lo tanto, asigno al cubo a Saturno, el tetraedro a Júpiter, el dodecaedro a Marte, el icosaedro a Venus y el octaedro a Mercurio.”

La trascendencia y el interés que han causado al ser humano a lo largo de milenios⁵ de su existencia (Figura A.3)⁶ es indudable.



Figura A.3: Piedras del Neolítico encontradas en Escocia.

Actualmente, los poliedros regulares, pueden encontrarse en el medio que rodea a cualquier individuo, como en esculturas y pinturas (en algunos dibujos de Da Vinci, en la obra titulada “Melancolía” de Durer).

⁵Se encontraron en Escocia piedras talladas del neolítico (aproximadamente 2000 a. C.). Y en el British Museum de Londres se conservan un par de dados icosaédricos de la época de la dinastía de Ptolomeo [13]

⁶Imagen extraída de [13]

Apéndice B

Un poco más sobre triangulación de una superficie.

Empezaremos esta subsección con un poco de álgebra lineal.

Definición B.0.1. Un **mapeo afín** entre espacios vectoriales V y W es una función $f : V \rightarrow W$ de la forma $f(x) = a(x) + b$, donde a es una transformación lineal y $b \in W$.

Definición B.0.2. Un **subespacio afín** de un espacio vectorial es el núcleo de algún mapeo afín, e decir, $\{x : a(x) + b = 0\}$. Su dimensión es la dimensión del kernel de la parte lineal del mapeo afín. El caso especial de un subespacio afín de V cuya dimensión es menor a la de V se denomina **hiperplano afín** en V .

En álgebra lineal se puede probar que si $n \geq k$, cualesquiera $k + 1$ puntos $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ están contenidos en algún subespacio afín $k -$ dimensional.

Definición B.0.3. Decimos que $k + 1$ puntos $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ están en **posición general** si no están contenidos en ningún subespacio afín $(k - 1) -$ dimensional, o, de forma equivalente, si $\{v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$ son linealmente independientes.

en donde $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$ y $\lambda_i > 0$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Observemos que sólo en el caso $k = n$ esta definición coincide con la definición topológica de interior, no en los otros casos.

Definición B.0.4. Sea A un simplejo de \mathbb{R}^n de vértices v_0, v_1, \dots, v_k . Definimos el **interior** de A como el conjunto de puntos x de A que se pueden expresar como

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i$$

Proposición B.0.1. Sea K un complejo simplicial de \mathbb{R}^n .

- a) $|K|$ es un subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^n , y por tanto $|K|$ es compacto.
- b) Cada punto de $|K|$ pertenece al interior de un solo simplejo de K .
- c) Si tomamos los simplejos de K separadamente y dotamos su unión de la topología cociente o de identificación, obtenemos exactamente $|K|$.
- d) Si $|K|$ es un espacio conexo, entonces es arco-conexo.

Demostración. Empecemos la demostración

- a) Cada simplejo de K es cerrado y acotado. Luego como K es finito la unión de los simplejos de K será también cerrada y acotada, es decir, $|K|$ es un subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^n , por tanto compacto.
- b) Supongamos que A y B son simplejos de K cuyos interiores se solapan. Al ser K un complejo, A y B deben cortarse en una cara común, pero la única cara de un simplejo que contiene puntos interiores es el simplejo entero. Por lo tanto $A = B$.
- c) Observemos que los simplejos de K son subconjuntos cerrados de $|K|$ ya que son cerrados en \mathbb{R}^n . Luego, si C es un subconjunto de $|K|$, y para un simplejo A de K , $C \cap A$ es cerrado en A , entonces $C \cap A$ debe ser cerrado en $|K|$. Por consiguiente la unión finita $\bigcup \{C \cap A : A \in K\}$ es cerrada en $|K|$. Por todo ello los subconjuntos cerrados de $|K|$ son precisamente los que cortan a cada simplejo de K según un conjunto cerrado, esto es, $|K|$ posee la topología de identificación.
- d) Ahora, supongamos que $|K|$ es conexo. Dado $x \in K$, denotemos con L al subcomplejo de K que consta de todos los simplejos de K que no contienen a x , sea ε la distancia de x a $|L|$. Entonces, si $\delta < \varepsilon$, el conjunto $B(x, \delta) \cap |K|$ es arco-conexo, pues cada uno de sus puntos se puede unir con x usando un segmento rectilíneo que pertenece a un simplejo de K . Esto significa que $|K|$ es localmente arco-conexo, y así, arco-conexo.

□

Existe un resultado fundamental demostrado por Tibor Radó en 1925 el cual nos dice a grosso modo que toda superficie compacta está equipada de una triangulación. La prueba de este resultado está fuera de los límites del presente trabajo, sin embargo, puede consultarse un esbozo de la demostración en [17], o bien en [21] (capítulo 22) para la prueba clásica

Teorema B.0.1 (Radó). Toda superficie compacta admite una triangulación con una cantidad finita de triángulos y donde cada arista es frontera de dos triángulos.

Nótese que una triangulación no es única, pues podemos elegir al complejo simplicial K y al homeomorfismo h de varias formas. Lo más importante de una triangulación es su existencia (Teorema B.0.1)

En términos más simples, una triangulación de una superficie compacta S consiste en una familia finita $\{T_i\}$ de subconjuntos de la superficie, siendo cada T_i homeomorfo a un triángulo. Se exige además que los T_i recubran la superficie, y que sean o bien dos a dos disjuntos, o en otro caso tengan en común un único vértice o una única arista¹. Cabe señalar que cuando nos referimos a que cada T_i es homeomorfo a un triángulo, estamos diciendo que la triangulación puede darse por un triángulo, un polígono de más de tres lados o bien un disco cerrado, puede verse en la Figura B.1 que estos tres objetos son homeomorfos mediante el homeomorfismo de la proyección radial.

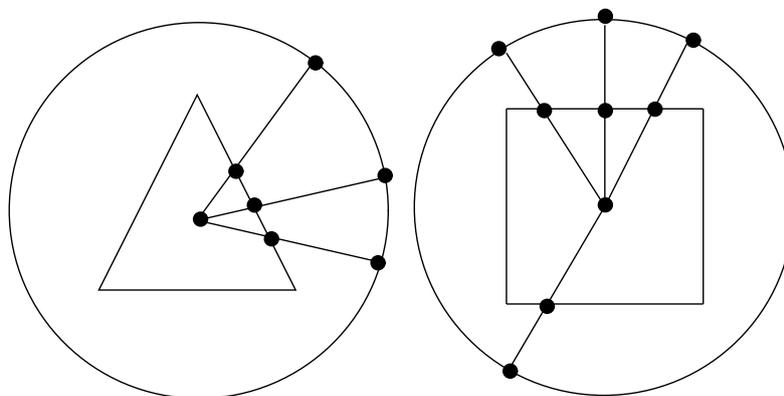


Figura B.1

Es importante observar que la característica de Euler tiene una generalización natural para un complejo simplicial finito de dimensión n .

Del Teorema 3.1.4 se concluye que la característica de Euler depende exclusivamente de la forma topológica de la superficie compacta S , en otras palabras, la característica de Euler de una superficie compacta es un invariante topológico.

¹El lector puede imaginarse a una triangulación como un rompecabezas.

Apéndice C

Un poco de Teoría de Grafos.

Definición C.0.1. Dado un grafo G , un **camino** es una sucesión de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ con $v_{i-1}v_i \in A(G)$, para todo $i \in \{2, \dots, n\}$ ¹

Si un camino comienza en un vértice $u = v_1$ y termina en un vértice $v = v_n$, nos referimos al camino como un *uv-camino*. Su $u = v$, diremos que el camino es **cerrado**.

Definición C.0.2. Una **trayectoria** en un grafo G es un camino en el cual no se repiten vértices

Teorema C.0.1. Sea G un grafo y sean u y v dos vértices de G . Entonces todo *uv-camino* contiene una *uv-trayectoria*

Definición C.0.3. Un **ciclo** en un grafo G es un camino cerrado en el cual todos los vértices son distintos.

Tres resultados importantes sobre árboles son los siguientes:

Teorema C.0.2. Sea T un grafo conexo y A y V el número de aristas y vértices, respectivamente, de T . Entonces, T es un árbol si y solo si $A = V - 1$

Teorema C.0.3. Si T es un árbol, entonces toda arista de T es un *punte*².

El resultado anterior nos dice que si extraemos una arista cualquiera de T , el grafo se desconecta en el sentido de conexidad.

Teorema C.0.4. Siendo u y v dos vértices de un árbol T , entonces existe un único camino en T de u a v .

¹Es importante hacer notar que en la definición de camino no se prohíbe repetir vértices o aristas

²Una arista a de un grafo G es un *punte* si $G - \{a\}$ es un grafo no conexo.

Definición C.0.4. Sea G un grafo simple. Un **árbol generador** de G es un subgrafo de G que es un árbol y contiene todos los vértices de G .

Teorema C.0.5. Todo grafo G conexo contiene un árbol generador.

Una cara c incide en los vértices y aristas de su frontera. Notemos que si a es un puente de G , solamente una de sus caras incide en a , ya que en caso contrario, hay dos caras de G que inciden en a , en cuyo caso decimos que a separa tales caras.

Definición C.0.5. Sea G un grafo plano conexo. El **grado de una cara** c es la cantidad de aristas en ∂c . Se denota por $d_G(c)$

Ahora, definiremos el grafo dual de un grafo dado, lo cual nos ayudará a demostrar un resultado referente al grado de una cara que será de utilidad en la siguiente sección.

Definición C.0.6. Sea G un grafo plano conexo. Definimos al **grafo dual** de G , denotado por G^* de la siguiente manera:

1. A cada cara c de G , le corresponde un vértice c^* en G^* y a cada arista a de G le corresponde una arista a^* en G^* .
2. Sean c_1 y c_2 dos caras en G y c_1^* y c_2^* los vértices que las representan en G^* . Entre c_1^* y c_2^* existen tantas aristas como en la frontera común de c_1 y c_2 .
3. Dos vértices c_1^* y c_2^* de G^* son adyacentes en G^* si y sólo si las dos caras correspondientes c_1 y c_2 están separadas en G por la arista a .

De la Definición anterior se desprenden las siguientes observaciones:

- Si G es un grafo plano, entonces G^* es un grafo plano.
- Sea $V(G^*)$ el número de vértices de G^* y $C(G)$ la cantidad de caras de G , entonces $V(G^*) = C(G)$
- $d_{G^*}(c) = d_G(c)$, para todo $c \in C(G)$

Ejemplo C.0.1. La Figura C.1 ilustra un grafo G y su dual G^*

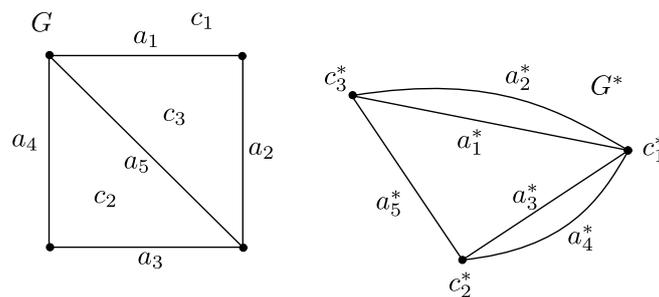


Figura C.1

procedemos a demostrar el siguiente

Teorema C.0.6. Sea G un grafo aplanable y A el número de aristas en G . Entonces

$$\sum_{c \in C(G)} d(c) = 2A$$

Demostración. Consideremos G^* el grafo dual de G . Puesto que $d_{G^*}(c) = d_G(c)$, tenemos

$$\sum_{c \in C(G)} d(c) = \sum_{c \in V(G^*)} d_{G^*}(c)$$

Por el Teorema 2.0.1

$$\sum_{c \in V(G^*)} d_{G^*}(c) = 2A(G^*)$$

pero $A(G^*) = A$. De esta forma

$$\sum_{c \in C(G)} d(c) = 2A$$

□

Como consecuencia del Teorema 2.2.1 tenemos los siguientes corolarios.

Corolario C.0.1. Si G es un grafo conexo y aplanable, entonces cualquier grafo plano isomorfo a G tiene el mismo número de caras.

Demostración. Sean G_1 y G_2 dos grafos isomorfos conexos y planos. Entonces $V(G_1) = V(G_2)$ y $A(G_1) = A(G_2)$.

Por el Teorema 2.2.1

$$C(G_1) = 2 + A(G_1) - V(G_1) = 2 + A(G_2) - V(G_2) = C(G_2)$$

De esta forma

$$C(G_1) = C(G_2)$$

□

Corolario C.0.2. Sea G un grafo simple, plano y conexo con $V \geq 3$ y A aristas, entonces

$$A \leq 3V - 6$$

Demostración. Sea G un grafo como el de la hipótesis. Toda cara de G está limitada por al menos tres aristas, de no ser así, G presentaría aristas múltiples o lazos y no sería simple. De este modo $d(c) \geq 3$, para toda cara c en G .

Si C es el número de caras de G , entonces

$$\sum_{c \in C(G)} d(c) \geq 3C \quad (\text{C.1})$$

por el Teorema C.0.6

$$\sum_{c \in C(G)} d(c) = 2A$$

Al sustituir este resultado en la ecuación (C.1), tenemos

$$2A \geq 3C \quad (\text{C.2})$$

Por otro lado, como G es un grafo simple conexo, por el Teorema 2.2.1

$$C = A - V + 2$$

Al sustituir en la ecuación (C.2)

$$2A \geq 3(A - V + 2)$$

$$2A \geq 3A - 3V + 6$$

$$3V - 6 \geq 3A - 2A$$

$$3V - 6 \geq A$$

De esta forma

$$A \leq 3V - 6$$

□

Empezaremos con algunas definiciones

Definición C.0.7. Un grafo se llama **completo** si todo par de vértices es adyacente, es decir, u es adyacente con v , para todo $u, v \in V$. Al grafo completo de n vértices lo denotaremos por K_n

Es posible mostrar que para cualquier grafo completo K_n , $A(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Ejemplo C.0.2. La Figura C.2 ilustra los grafos completos correspondientes a K_1 , K_2 , K_3 , K_4 y K_5 , respectivamente

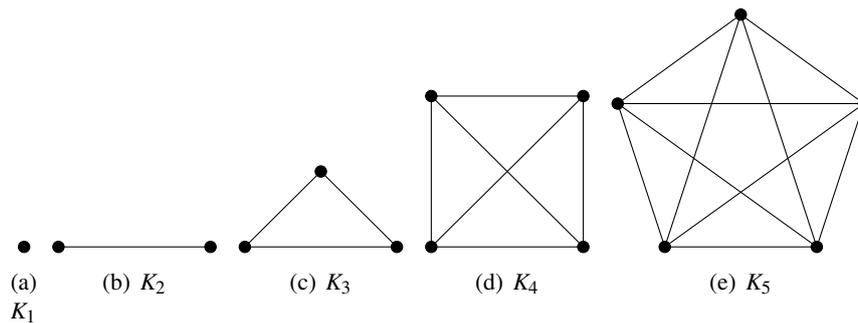


Figura C.2

Definición C.0.8. Un grafo G es **bipartito** si existen dos conjuntos A y B de los vértices de G tales que

- i) $A \cup B = V(G)$
- ii) $A \cap B = \emptyset$
- iii) Si $uv \in E(G)$, entonces $u \in A$ y $v \in B$

Es importante mencionar que la pareja de conjuntos que forma una partición del conjunto de vértices puede no ser única y que uno de los conjuntos A o B puede ser vacío.

Ejemplo C.0.3. La Figura C.3 muestra un grafo bipartito con $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $B = \{u_1, u_2, u_3\}$

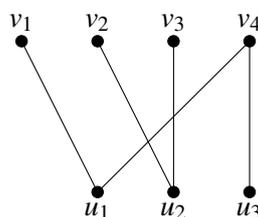


Figura C.3

Teorema C.0.7. Un grafo G es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar ³

Definición C.0.9. Decimos que un grafo es **bipartito completo** si todo vértice en A es adyacente a todo vértice en B . Si $|A| = m$ y $|B| = n$, denotamos al grafo bipartito completo por $K_{m,n}$.

De la Definición C.0.9 puede deducirse que $V(K_{m,n}) = m + n$ y $A(K_{m,n}) = mn$

Ejemplo C.0.4. La Figura C.4 ilustra a $K_{3,3}$

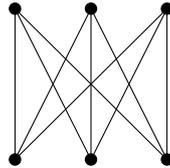


Figura C.4

³La **longitud de un ciclo** se define como el número de aristas del ciclo

Apéndice D

Un poco de sistemas dinámicos

Los comportamientos en la vecindad de los ceros, en los cinco casos son muy diferentes. Una **fuelle** repele todos los puntos cercanos, un **pozo** los atrae, un **punto silla** hace ambas cosas (en diferentes direcciones); también tenemos un **vórtice** al rededor del cual giran los puntos vecinos, y, finalmente, un **dipolo** que recuerda a las líneas de un campo magnético en donde los puntos vecinos se alejan y regresan de nuevo.

Las fuentes, pozos y sillas son los ceros más frecuentes en un campo vectorial gradiente. Por ejemplo, en la Figura 4.8 la esfera tiene una fuente (polo Norte) y un pozo (polo Sur), mientras que el toro tiene una fuente, un pozo y dos puntos silla.

Nótese que una esfera puede tener un campo vectorial gradiente con dos ceros, y es difícil imaginar un campo vectorial en la esfera que tenga sólo un pozo y un punto silla. La noción de **índice** será fundamental para distinguir los distintos tipos de cero.

Para calcular el índice de un cero dibujemos una pequeña círculo alrededor de este cero. La curva debe de satisfacer las siguientes condiciones:

- (i) El círculo debe contener sólo un cero.
- (ii) El círculo debe ser la frontera de un disco (por ejemplo, un círculo de este tipo sobre el toro no puede rodear el tubo o el orificio central.)

Imaginemos ahora que colocamos un dial en algún punto sobre el círculo. El indicador del dial debe apuntar en la misma dirección que el campo vectorial ¹. Cuando movemos el dial alrededor del círculo el indicador va cambiando de dirección. Movemos el dial alrededor del círculo una vez en sentido antihorario. Cada vez que la manecilla del dial gira una vez en sentido antihorario, añadimos 1 al índice, y cada vez que gire en sentido horario, restamos 1 del índice. El índice también es llamado “el número de vueltas” del campo vectorial alrededor del cero.

Consideremos el pozo de la Figura 4.10 (a). Podemos ver un dial en ocho posiciones alrededor del círculo. Dado que el dial recorre el círculo una vez en sentido antihorario, su manecilla gira una vez en sentido antihorario. Para un punto silla, la manecilla del dial gira una vez en sentido horario, mientras que el dial gira en dirección antihorario (Figura 4.10 (b)). Así, el índice de un punto silla es -1. De esta forma podemos calcular el índice de los otros ceros ilustrados en la Figura 4.9. Las fuentes y los vórtices tienen índice 1, mientras que los dipolos tienen índice 2.

La demostración del Teorema 4.2.1.

Demostración. Sea S una superficie dotada de un campo vectorial. Coloquemos cada cero del campo vectorial dentro de su propia cara poligonal, mediante una partición cuidadosa de S . Estas caras pueden tener cualquier forma y cualquier número de lados, pero deben de cumplir las condiciones citadas anteriormente (sólo deben contener un único cero del campo vectorial, deben delimitar un disco y ningún vector debe ser paralelo a sus aristas).

Así, tenemos caras que contienen a todos los ceros del campo vectorial. Completamos la partición triangulando el resto de S . Podemos hacer esto en la forma que queramos, aunque, al igual que con las caras anteriores, los vectores en la frontera de los triángulos deben apuntar hacia fuera o hacia dentro (véase la Figura D.1).

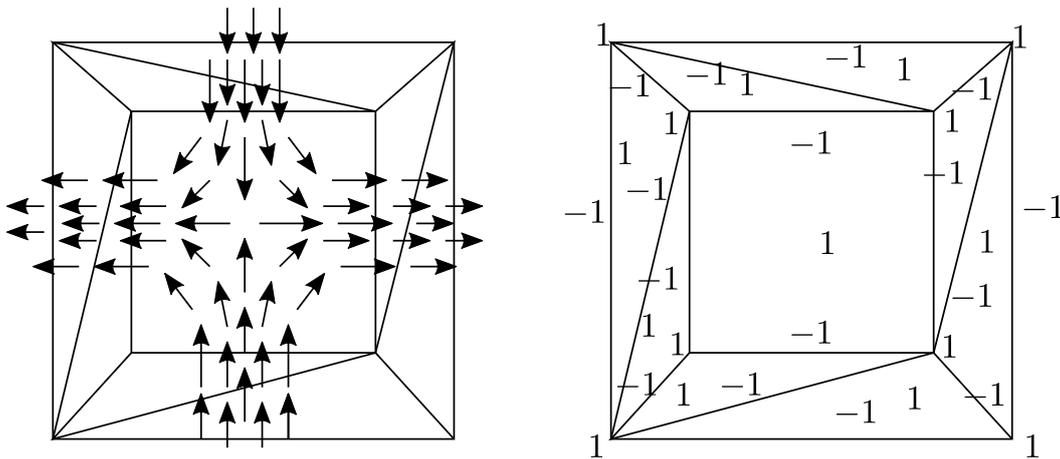


Figura D.1

¹Si el campo vectorial representa un campo magnético, podemos usar una brújula como puntero.

Luego, colocamos un 1 en cada vértice, un -1 en cada arista, y un 1 en medio de cada cara (Figura D.1). De esta forma, cuando se suman estas cantidades sobre toda la superficie S , obtenemos $V - A + C$, es decir, la característica de Euler de la superficie $\chi(S)$. De forma más precisa, puesto que cada arista delimita dos caras y los vectores del campo vectorial apuntan a una de estas dos caras, pondremos el número -1 en la arista en el lado de la cara al que apuntan los vectores. Similarmente, todos los vértices están ubicados en la conjunción de varias caras, pero solo hay una cara en la cual el vector apunta. Colocamos el 1 en esta cara.

Primero examinaremos las caras triangulares que no contienen ceros del campo vectorial. Como podemos observar en la Figura D.2, existen únicamente dos situaciones posibles. Una es que los vectores apunten hacia dentro del triángulo desde un único lado y no en los vértices. La otra es que los vectores apunten al interior del triángulo desde dos aristas de mismo y del vértice que las une. En cualquier caso, al sumar los 1 y -1 el resultado es 0. Esto quiere decir, que las caras triangulares que no contienen ceros del campo vectorial de S no contribuyen a $\chi(S)$.

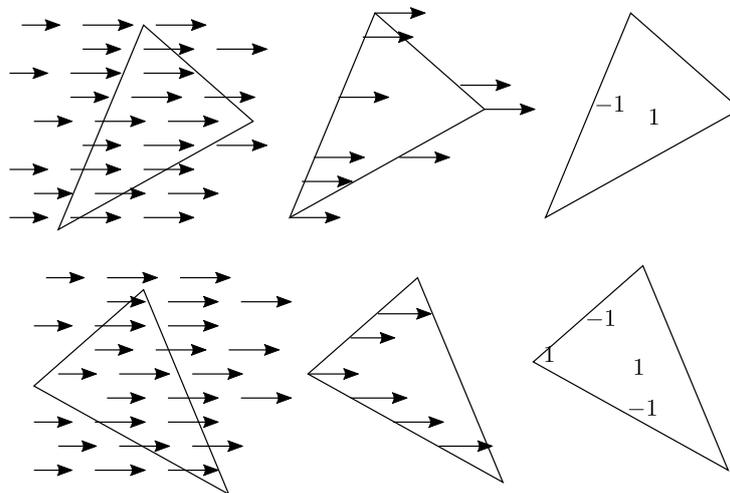


Figura D.2

Por otro lado, recordemos que para las caras que contienen un cero del campo vectorial, esta técnica de conteo nos ayuda para calcular el índice. Así, cada cara que contiene un cero contribuye a la suma con un valor igual al índice de ese cero. De esta forma, la suma que efectuamos de todos los -1 y 1 sobre S es igual tanto a $\chi(S)$ como a la suma de los índices de todos los ceros.

Por lo tanto, si S tiene un campo vectorial con n ceros, cada cero tiene como índice i_k , para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$\sum_{k=1}^n i_k = \chi(S)$$

□

Apéndice E

Un poco sobre la Fórmula de Descartes.

Demostración de George Pólya (1887-1985) del Teorema 4.3.1

En cada vértice, dibujemos dos segmentos perpendiculares a cada uno de los lados que se unen a dicho vértice, que apunten hacia fuera (véase la Figura E.1)

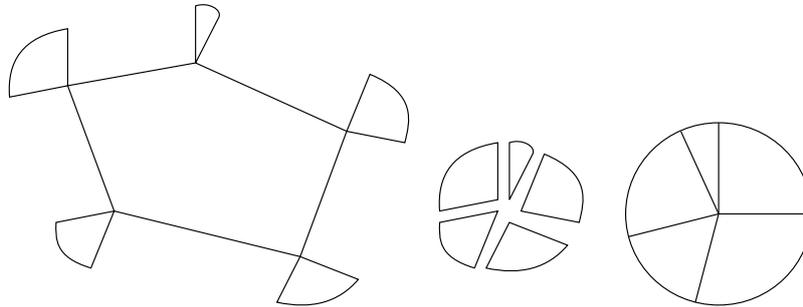


Figura E.1

Ahora, dibujemos un sector circular en cada uno de los vértices que tenga como lados los segmentos perpendiculares. El ángulo formado por estos dos segmentos es, precisamente, el ángulo exterior, pues si llamamos α_i al ángulo interno del vértice v_i , para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, de un polígono P de n lados, y x_i el ángulo formado por los segmentos perpendiculares, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces

$$\begin{aligned}
x_i + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha_i &= 2\pi \\
x_i + \pi + \alpha_i &= 2\pi \\
x_i &= 2\pi - \pi - \alpha_i \\
x_i &= \pi - \alpha_i
\end{aligned}$$

Por otro lado, los lados de cada par de sectores consecutivos son paralelos, esto nos permite formar un círculo completo (Figura E.1). Por lo tanto, la suma de los ángulos externos es 2π , es decir,

$$\sum_{i=1}^n x_i = 2\pi$$

El famoso Teorema que afirma que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo en el plano es π radianes puede verse como una consecuencia del Teorema 4.3.1. Si llamamos α , β y γ a los ángulos internos de un triángulo cualquiera ABC , entonces la medida de cada ángulo externo será $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ y $\pi - \gamma$, respectivamente. De acuerdo al Teorema 4.3.1 se tiene

$$\begin{aligned}
(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) &= 2\pi \\
\alpha + \beta + \gamma &= 3\pi - 2\pi \\
\alpha + \beta + \gamma &= \pi
\end{aligned}$$

Esta afirmación sobre triángulos puede extenderse a cualquier polígono P de $n > 3$ lados, también como Corolario del Teorema 4.3.1

Corolario E.0.1. La suma de los ángulos internos de un polígono con n lados es $(n - 2)\pi$

Demostración. Sea P un polígono de n lados. Denotemos por α_i , para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, los ángulos internos de P . Entonces, por el Teorema 4.3.1

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) = 2\pi$$

$$n\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n-2)\pi$$

Lo cual, demuestra la afirmación. □

Demostración del Teorema 4.3.4

Demostración. Sea \mathcal{P} un poliedro con V vértices, A aristas y C caras, y sea T el déficit angular total de \mathcal{P} .

Escojamos cualquier cara de \mathcal{P} . Supongamos que esta cara tiene $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ángulos planos internos. Por el Teorema de los ángulos interiores sabemos que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n-2)\pi$$

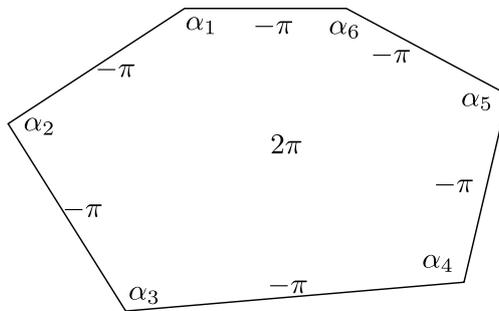


Figura E.2

Ahora, si ponemos $-\pi$ en cada arista de la cara, la medida del ángulo en cada esquina, y 2π en medio de cara (ver Figura E.2), la suma de estas cantidades es cero

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= (n-2)\pi \\ (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) - n\pi + 2\pi &= 0\end{aligned}$$

Haciendo lo mismo para todas las caras de \mathcal{P} y sumando todas las cantidades involucradas. Cada cara contribuye en 2π y cada arista lo hace en -2π ($-\pi$ en cada lado). De esta forma, si llamamos S a la suma de todos los ángulos planos en \mathcal{P}

$$S - 2\pi A + 2\pi C = 0 \quad (\text{E.1})$$

Ahora, agregamos T , el déficit angular total, de ambos lados de la ecuación (E.1),

$$(T + S) - 2\pi A + 2\pi C = T$$

Como T es el déficit angular total, $S + T = 2\pi V$, pues estamos sumando lo necesario para que la suma de los ángulos planos en cada vértice vuelva a ser 2π . Luego

$$T = 2\pi V - 2\pi A + 2\pi C = 2\pi\chi(\mathcal{P})$$

Lo cual concluye la demostración. □

Demostración del Teorema 4.3.5

Demostración. Sea S una superficie descompuesta en V vértices, A aristas geodésicas y C polígonos geodésicos (caras). Etiquetamos la superficie colocando 2π en el centro de cada cara, $-\pi$ a cada lado de cada arista geodésica y la medida de los ángulos internos en cada vértice. Si sumamos estas cantidades en una cara de n lados con ángulos internos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, obtenemos el exceso angular de la cara

$$2\pi - n\pi + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) - (n-2)\pi$$

Por lo tanto, la suma de todas estas cantidades a lo largo de la superficie da como resultado el exceso angular total de S .

Por otro lado, para esta suma, cada vértice contribuye en 2π , cada arista en -2π y cada cara en 2π . Sumando todos los valores obtenemos

$$2\pi V - 2\pi A + 2\pi C = 2\pi\chi(S)$$

teniendo el resultado deseado. □

Bibliografía

- [1] E. Aiton. Johannes kepler and the 'mysterium cosmographicum'. *Sudhoffs Archiv*, pages 173–194, 1977.
- [2] A. D. Alexandrov. *Convex polyhedra*. Springer monographs in mathematics. Springer, Berlin [u.a.], 2005. Literaturverz. S. [525] - 536.
- [3] C. Alsina. *Las mil caras de la belleza geométrica: los poliedros*. RBA Coleccionables, 2014.
- [4] M. Armenta. Caracterizaciones fundamentales en teoría de gráficas: Teorema de menger, brooks, euler, dirac, berge. Tesis, Universidad de Sonora, División de Ciencias Exactas y Naturales Departamento de Matemáticas, 1996.
- [5] M. A. Armstrong. *Basic Topology*. Springer, 1983.
- [6] M. Brin. *Introduction to Dynamical System*. Cambridge University Press, 2002.
- [7] F. Casarrubias. *Elementos de Topología de Conjuntos*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2011.
- [8] M. L. P. Castaños et al. *Elementos*, volume 3. Gredos Editorial SA, 1996.
- [9] P. R. Cromwell. *Polyhedra*. Cambridge University Press, 1999.
- [10] M. del Carmen Curcó. Introducción a la teoría de gráficas. Tesis, Facultad de Ciencias UNAM, 1989.
- [11] F. García. El teorema de la curva de jordan. *Divulgaciones Matemáticas*, 6(1):43–60, 1998.
- [12] D. González-Moreno. *Introducción a la Teoría de las Gráficas*. División de Ciencias Naturales e Ingeniería, UAM, 2017.
- [13] L. J. H. J. I. Extremiana. Poliedros. *Departamento de Matemáticas y Computación, Universidad de La Rioja*, 2004.
- [14] J. Kepler. *The harmony of the world*, volume 209. American Philosophical Society, 1997.

- [15] L. C. Kinsey. *Topology of Surfaces*. Springer-Verlag, 1993.
- [16] C. Kosniowski. *Topología Algebraica*. Reverté, 1986.
- [17] J. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, 1950.
- [18] A. K. M. Libardi. *Invariantes Topológicos*. Cultura Académica, 2012.
- [19] M. Macho. *Topología Algebraica*. Universidad del País Vasco, 2008.
- [20] C. N. Max. Euler y la geometría de la posición. *Miscelánea Matemática*, 2007.
- [21] E. Moise. *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*. Springer, 1977.
- [22] M. Morse. Singular points of vector fields under general boundary conditions. *Amer. J. Math*, 1929.
- [23] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975. Literaturangaben.
- [24] Platón. *Diálogos*, volume 6. Biblioteca Básica Gredos, Madrid, 1982.
- [25] J. E. Reeve. On the volume of lattice polyhedra. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):378–395, 1957.
- [26] D. S. Richeson. *Euler's Gem*. Princeton University, 2008.
- [27] Y. Shashkin. *Característica Euleriana*. Mir, 1989.
- [28] E.-C. Zeeman. *An introduction to topology: The classification theorem for surfaces*. Mathematics Institute, University of Warwick, 1966.