



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

ANÁLISIS DE LA TENSIÓN DE LA CONSTANTE DE HUBBLE-LEMAITRE EN MODELOS

DE HORNDESKI

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

MAURICIO CRUZ REYES

TUTOR(A) PRINCIPAL

DRA. CELIA DEL CARMEN ESCAMILLA RIVERA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DR. JORGE L. CERVANTES COTA
INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES NUCLEARES

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Resumen

La constante de Hubble-Lemaître (H_0) es uno de los parámetros cosmológicos más importantes, debido a que es vital importancia para la estimación de distancias en el universo. En la actualidad existe un problema con esta constante, el cual es conocido como la *tensión*¹ de Hubble, el cual consiste en que el valor de la constante de Hubble obtenido con el ajuste del modelo Λ CDM a las observaciones del Fondo cósmico de microondas [2] no coincide con el valor obtenido utilizando las Supernovas de tipo Ia [3, 4, 5] o las observaciones de lentes gravitacionales de cuásares [6]. Las observaciones más recientes, sugieren que la diferencia entre estos valores es superior a 4σ y hasta el momento, esta discrepancia no puede ser explicada por efectos sistemáticos en ninguna de las mediciones [7], por lo que cada vez se presta más atención a la posibilidad de que esta tensión de Hubble pueda estar indicando la necesidad de física más allá del modelo estándar de la cosmología [8].

El modelo Λ CDM parte de asumir que la Relatividad General (RG) de Einstein es válida en todas las escalas. Por tanto, resulta natural investigar si cambiar esta suposición podría proporcionar los medios para solucionar la tensión en la constante de Hubble. No obstante, los modelos propuestos en la literatura que se desvían de la Relatividad General son abundantes y en principio, infinitos. Además, modificar a RG por lo general conlleva un aumento en la complejidad de la teoría que pretende describir a la gravedad, por lo que es de crucial importancia encontrar un balance entre la complejidad de la teoría propuesta y los nuevos grados de libertad que ésta nos puede proporcionar a la hora de ajustar sus ecuaciones de movimiento a las observaciones. En este trabajo de tesis asumimos que las modificaciones a RG en escalas cosmológicas se pueden describir al menos de manera efectiva mediante la adición de un grado de libertad escalar en las ecuaciones de campo, se exige que el campo

¹Al referirnos a la palabra tensión utilizaremos la definición de esta palabra dada en el artículo [1], en este artículo la palabra tensión se utiliza para referirse a toda diferencia entre dos valores de mismo parámetro mayor a dos desviaciones estándar. La interpretación dada a la tensión varia dependiendo de la diferencia entre estos valores: 2σ = curiosidad, 3σ = tensión, 4σ = discrepancia o problema, 5σ = crisis.

escalar tenga como máximo derivadas de hasta segundo orden en las ecuaciones de movimiento y como requisito adicional se le exige a la teoría satisfacer el principio de equivalencia débil, es decir, que todas las especies de materia estén acopladas mínima y universalmente a la métrica g_{ab} . Estos requisitos conducen de manera natural a la acción asociada a la teoría de *Horndeski* [9], la cual será estudiada en esta tesis.

En la primera parte de esta tesis nos enfocamos en obtener constricciones modelo-independientes sobre la expansión tardía del universo en $z < 2.5$. Para obtenerlas optamos por reconstruir la expansión tardía del universo, es decir, dado un conjunto de observaciones asociadas al flujo de Hubble, buscamos obtener la región de confianza en la cual es más probable que viva la función que describe a los datos observacionales. Es importante, dejar claro que para obtener las reconstrucciones de la expansión tardía del universo no asumimos ningún modelo cosmológico particular, sino que hacemos uso de un enfoque puramente estadístico, conocido como *Procesos Gaussianos*² [11]. Esto nos permite utilizar las reconstrucciones para descartar distintos modelos cosmológicos, ya que todo modelo que se considere candidato a describir las observaciones y simultáneamente resolver el problema de la tensión H_0 debería de estar dentro de las cotas que establecemos sobre el flujo de Hubble observacional.

En la segunda parte de esta tesis utilizamos las reconstrucciones obtenidas previamente para constreñir modelos cosmológicos dentro de la teoría Horndeski y estudiamos si uno de estos modelos es capaz de proveer una solución al problema de la tensión H_0 .

²Otros métodos de reconstrucción han sido considerados en la literatura, para más información consultar la introducción de [10].

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a mi asesora, la Dra. Celia Escamilla-Rivera, cuyos consejos fueron invaluable para la formulación de las preguntas y de la metodología de investigación de esta tesis. Además, quisiera agradecerle por su valiosa orientación lo largo de mis estudios de maestría.

También me gustaría agradecer al Dr. Miguel Aspeitia, quien me proporcionó algunas herramientas que fueron útiles para desarrollar este trabajo.

Además, quiero expresar mi agradecimiento por el apoyo técnico proporcionado por el equipo de cómputo en el ICN-UNAM, en especial quiero agradecer al Mtro. Juan Luciano Díaz González, y al proyecto DGAPA-PAPIIT-UNAM IA100220.

Me gustaría agradecer a mi familia por el apoyo brindado a lo largo de mis estudios de posgrado. Finalmente, agradezco a mis amigos Benjamín, Rosa y Flor, quienes me brindaron discusiones estimulantes y alegres distracciones fuera del ámbito académico.

Convenciones y notación

Cantidades geométricas. En este trabajo cuando se represente a un campo tensorial, se usará la notación abstracta de índices, para ello el campo tensorial \mathbf{T} (0, 2), se expresará con índices griegos $T_{\mu\nu}$ cuando lo queramos especificar en un sistema coordenado.

Los índices griegos μ, ν, α, β son índices espacio-temporales y pueden tomar los valores de $\{0, 1, 2, 3\}$, los índices latinos i, j, k , representarán índices espaciales con valores $\{1, 2, 3\}$.

La métrica del espacio-tiempo g_{ab} es de cuatro dimensiones, tiene la signatura $(+, -, -, -)$ y además cumple con las condiciones $g^{ac}g_{cb} = \delta_b^a$ y $\nabla_a g_{bc} = 0$, donde ∇_a es la derivada covariante definida sobre una variedad diferencial M . El tensor de Riemann $R_{\nu\alpha\beta}^\mu$ cuando está escrito en un sistema de coordenadas se expresa como

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\beta \Gamma_{\nu\alpha}^\mu - \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu + \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma,$$

donde los símbolos $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ son denominados como símbolos de Christoffel y están definidos mediante

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}).$$

Estadística. Para denotar que un variable x sigue una distribución Gaus-

siana, utilizaremos la siguiente notación

$$x \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \sigma^2), \quad (1)$$

donde $\vec{\mu}$ es la media de la distribución y σ^2 su varianza. Si tomamos a x, y tal que $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$, $y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$, entonces la distribución conjunta de estas dos variables está dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \right), \quad (2)$$

donde σ_{xy} y σ_{yx} son los términos que representan la covarianza entre las variables.

Si tenemos N variables aleatorias, todas distribuidas de manera Gaussiana la distribución conjunta de las variables, se conoce como distribución Gaussiana multivariante y está dada por:

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma). \quad (3)$$

donde $\vec{\mu}$ es un vector que contiene los valores medios de la distribución y Σ la matriz de covarianza.

Sistema de Unidades. Utilizaremos un sistema de unidades en el cual la velocidad de la luz es $c = 1$. Cualquier modificación a esta convención será aclarada convenientemente.

Abreviaturas

Aquí listamos (en orden alfabético) las abreviaturas de uso común a lo largo de esta tesis:

AP	Alcock-Paczynski.
CC	Cronómetros cósmicos.
CL	Clustering.
CCHP	Carnegie-Chicago Hubble Program.
CMB	Fondo cósmico de microondas.
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.
GRB	Brote de rayos gamma.
GW	Onda gravitacional.
GP	Proceso Gaussiano.
IMF	Función de masa inicial.
RG	Relatividad General.
RSD	Distorsiones en el espacio del corrimiento al rojo.
SFR	Ritmo de formación de estrellas.
SNeIa	Supernovas tipo Ia.
SH0ES	Supernova H0 for the Equation of State.
TRGB	Tip of the Red-Giant Branch.
WMAP	Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.

Constantes frecuentemente usadas

Aquí se lista el valor de distintas constantes utilizadas a lo largo de esta tesis.

Nombre de la constante	Símbolo	Valor
Constante de Hubble	H_0	67 - 74 km/s/Mpc
Constante de Newton	G	$6.674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$
Megaparsec	Mpc	$3.086 \times 10^{19} \text{ m}$
Velocidad de la luz	c	299792458 m/s

En la primera columna de esta tabla se muestra el nombre de cada constante, en la segunda la notación que se usa para representarla y en la tercera su valor.

Publicaciones

La mayoría de los resultados obtenidos en el capítulo 4 y 5 de esta tesis se encuentran disponibles en el artículo titulado:

Improving data-driven model-independent reconstructions and new constraints in Horndeski cosmology,

cuyos autores son Mauricio Reyes y Celia Escamilla-Rivera. Este artículo se encuentra como preprint en arXiv [12] y en proceso de revisión por la revista Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (JCAP).

Índice general

Índice general	11
1 Cosmología Teórica	4
1.1. Relatividad General	4
1.1.1. Teorema de Lovelock	6
1.2. Principio Cosmológico	7
1.3. Las ecuaciones de Friedmann	9
1.4. Distancias en cosmología	13
1.5. Historia térmica del universo	16
1.6. Formación de estructura	25
1.7. Distorsiones en el espacio del corrimiento al rojo	27
2 Estado del arte de la cosmología estándar	30
2.1. Éxitos de la Cosmología Estándar	30
2.2. Tensiones en el modelo Λ CDM	33
2.3. Sobre la tensión de H_0	39
2.4. La tensión S_8	43
3 La teoría de Horndeski	45
3.1. Restricciones sobre los modelos cosmológicos de Horndeski . . .	46
3.1.1. Interpretación física de los Lagrangianos en la teoría de Horndeski	47

3.1.2.	Ecuaciones de movimiento	49
4	Reconstrucciones modelo-independientes de observables cosmológicas	51
4.1.	Procesos Gaussianos	52
4.2.	Datos observacionales empleados en las reconstrucciones	56
4.2.1.	Reconstrucción de la expansión tardía	58
4.3.	Reconstrucciones de $H(z)$	62
4.4.	Análisis de las reconstrucciones	67
4.4.1.	Constricciones sobre los parámetros de densidad	68
5	Constricciones en la Teoría de Horndeski	73
5.1.	Quintaesencia	73
5.1.1.	Ecuación de Klein-Gordon	74
5.2.	Extensión a Quintaesencia	77
5.2.1.	Parámetro de desaceleración	78
5.3.	Perspectivas	81
5.4.	Reconstrucción de $f\sigma_8(z)$	82
6	Resumen y conclusiones	86
A	Las ecuaciones de Friedmann	88
B	Tensión entre dos cantidades	90
C	Perturbaciones escalares	91
	Bibliografía	96

Introducción

El Capítulo 1 de esta tesis está dedicado a describir al modelo Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter³) también conocido como el modelo estándar de la cosmología. Este modelo es la piedra angular de la cosmología moderna y ha demostrado un éxito sin precedentes en la predicción de la dinámica y evolución del universo. Es capaz de explicar observaciones como las de Supernovas Tipo Ia (SNeIa) [13], las oscilaciones acústicas de bariones (BAO) [14] y las anisotropías en la radiación cósmica de fondo (CMB) [2].

No obstante, como se verá en el Capítulo 2, la creciente precisión con que se determinan los parámetros libres que caracterizan al modelo estándar de la cosmología, trajo consigo algunos desacuerdos desde el punto de vista estadístico el más grave de ellos es la tensión H_0 . El problema consiste en que el valor estimado de la constante de Hubble con el análisis del CMB asumiendo Λ CDM y el valor obtenido a través de mediciones directas de la luminosidad de candelas estándar dan resultados distintos. En particular, estudiando al CMB y asumiendo a Λ CDM la colaboración Planck 2018 [2] encuentra $H_0 = 67.4 \pm 0.5$ km/s/Mpc, mientras que la colaboración SH0ES [3] calibrando la luminosidad de las Supernovas tipo Ia con 70 estrellas cefeidas obtiene $H_0 = 74.03 \pm 1.42$ km/s/Mpc, la diferencia (tensión) entre estos resultados es de aproximadamente 4.4σ .

Existe otra discrepancia entre los parámetros de Λ CDM, la cual es conocida como la tensión S_8 , esta discrepancia consiste en que las estimaciones para el

³Materia oscura fría.

valor de $S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\Omega_m/0.3}$ dadas por el ajuste de Λ CDM a las observaciones del CMB⁴ difieren entre dos y tres desviaciones estándar con respecto al valor obtenido para S_8 con las mediciones de *cosmic shear* [15].

Las tensiones H_0 y S_8 podrían estar indicando la existencia de errores sistemáticos en las mediciones o física más allá del modelo Λ CDM [7, 16, 17], por esta última razón, los teóricos han desarrollado modelos alternativos que pueden explicar la expansión del universo sin la necesidad de recurrir a una constante cosmológica. Algunos de ellos añaden una nueva especie de materia exótica al tensor de energía-momento [8, 18, 19] o modifican a la propia Relatividad General (RG). Algunas de las modificaciones a RG más estudiadas son: las teorías $f(R)$ [20, 21], las teorías escalar-tensor [22], o la gravedad teleparalela [23, 24].

Como se verá en los Capítulos 3 y 5, la teoría de Horndeski [25, 26, 27] representa a una alternativa interesante para estudiar la tensión H_0 , esta es la teoría escalar-tensor más general en cuatro dimensiones que se construye a partir del tensor métrico g_{ab} , de un campo escalar ϕ y que es capaz de evitar las inestabilidades de Ostrogradsky [9]. En el contexto cosmológico el campo escalar puede explicar la expansión acelerada del universo e introducir nuevos efectos observables en la formación de estructura a gran escala [28]. La teoría de Horndeski cuenta con cuatro funciones libres G_2, G_3, G_4 y G_5 las cuales dependen del campo escalar ϕ y su término cinético $2X = -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$. La elección correcta de las funciones G_i permite recuperar diversas teorías incluyendo modelos como Quintaesencia, Brans-Dicke, k-essence y otros [29]. Dada la generalidad de esta teoría, es de esperar que si la tensión H_0 puede resolverse recurriendo a una extensión de RG, entonces la teoría de Horndeski tendría la capacidad describir esa extensión al menos de manera efectiva con una elección adecuada de G_i 's.

No obstante, nos enfrentamos a un problema, el cual consiste en que a priori no tenemos ninguna información acerca de como elegir a los G_i , por esta razón es necesario buscar un enfoque que nos permita distinguir de las elecciones que son buenas candidatas para solucionar el problema de la tensión H_0 y de las que no. Por este motivo, en el Capítulo 4 hacemos uso de los Procesos Gaussianos,

⁴Tomando en cuenta el espectro de potencias de temperatura y polarización.

estos son un enfoque de estadística bayesiana que nos permiten obtener una región de confianza en la cual es más probable que viva la función que describe a un conjunto dado de datos observacionales. En nuestro caso, para realizar los Procesos Gaussianos utilizamos observaciones del universo tardío, esto nos permite reconstruir la historia de expansión tardía del universo, sin la necesidad de asumir un modelo cosmológico particular.

En el Capítulo 5 utilizamos las reconstrucciones para analizar si los modelos de Horndeski de tipo Quintaesencia (o una extensión a ellos) son candidatos a resolver el problema de la tensión H_0 , además analizamos las diferencias que hay entre estos modelos y Λ CDM. Finalmente, el Capítulo 6 concluye esta tesis, en este Capítulo se resumen los resultados más importantes y también se hace una interpretación de los resultados.

Capítulo 1

Cosmología Teórica

La Cosmología se encarga del estudio de la estructura a gran escala del universo, es decir, su campo de estudio incluye la determinación de su naturaleza, de su contenido y de la forma en que este se distribuye dentro de él. Si bien, existen diversas áreas en las cuales se divide la cosmología, en este trabajo nos centraremos en el estudio de la cosmología física, la cual parte de dos suposiciones fundamentales. La primera de ellas consiste en asumir que la Relatividad General es la teoría correcta de la gravitación [30], es decir, que a grandes escalas la teoría de la Relatividad General de Einstein describe correctamente la evolución del espacio-tiempo. La segunda suposición es conocida como el *Principio Cosmológico*, este principio afirma que existen ciertos observadores fundamentales para los cuales el universo luce homogéneo e isotrópico a grandes escalas [31].

1.1. Relatividad General

La teoría de la Relatividad General fue postulada en noviembre de 1915 por Albert Einstein como una generalización de su teoría de la Relatividad Especial. Esta teoría tiene como pilares al principio de equivalencia y al principio de covarianza general, los cuales establecen lo siguiente:

Principio de equivalencia: Para cada evento espacio-temporal, existe

una vecindad de ese evento, tal que el resultado de cualquier medición dentro de esa región con un aparato de medición en caída libre es independiente del evento y la velocidad del aparato [32].

Este principio implica que localmente es imposible, distinguir entre los efectos de un campo gravitacional y los de un sistema de referencia en aceleración uniforme en el espacio-tiempo de Minkowski.

Principio de covarianza general: Cada cantidad física debe poder describirse mediante un objeto geométrico (sin coordenadas), y las leyes de la física deben poder expresarse como relaciones geométricas entre estos objetos geométricos [33].

La Relatividad General formaliza la noción de que la gravedad es la manifestación de la geometría del espacio-tiempo mediante la construcción de una acción gravitacional a partir de invariantes de curvatura. Esta es la acción de Einstein-Hilbert [31], la cual está dada por

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal, R es el escalar de Ricci y $g = \det(g_{ab})$. Para añadir a la materia a la acción de Einstein Hilbert, añadimos un Lagrangiano (\mathcal{L}_m) a la ecuación (1.1), con ello obtenemos

$$S = S_{EH} + S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R + \mathcal{L}_m \right), \quad (1.2)$$

es posible obtener las Ecuaciones de Campo de Einstein variando la acción (1.2) con respecto a g_{ab} y tomando condiciones de frontera de tipo Dirichlet

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi G T_{ab}, \quad (1.3)$$

en ellas $R_{ab} \equiv R_{acb}{}^c$ es el tensor de Ricci, $R \equiv R_a{}^a$ es el escalar de Ricci o también conocido como escalar de curvatura y T_{ab} es el tensor de energía momento y está definido como

$$T_{ab} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}. \quad (1.4)$$

Las ecuaciones de campo de Einstein (1.3), representan un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales, no lineales, acopladas y de segundo orden con respecto a la métrica. El significado de las ecuaciones de campo de Einstein puede ser resumido brevemente mediante la famosa frase de John Wheeler

El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse. [33]

La teoría de la Relatividad General, ha demostrado ser una teoría espectacularmente exitosa [34] cuando se prueba con distintos experimentos y observaciones, es capaz de explicar la precesión del perihelio de Mercurio [33], la curvatura de la luz en campos gravitacionales, puede describir pruebas de régimen fuerte como la dinámica de púlsares binarios, el comportamiento de los agujeros negros [35], la propagación de ondas gravitacionales [36] y la formación de estructuras como estrellas y galaxias.

Sin embargo el conjunto de ecuaciones (1.3) tal y como está escrito no es capaz de reproducir la expansión acelerada del universo, razón por la cual el modelo cosmológico estándar añade una constante cosmológica Λ a las ecuaciones de campo

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi GT_{ab}, \quad (1.5)$$

la constante cosmológica en el modelo estándar además cumple con la condición $\nabla_a \Lambda = 0$ y es la responsable de provocar la expansión acelerada del universo.

1.1.1. Teorema de Lovelock

La tensión de Hubble (la cual fue discutida brevemente en la introducción de esta tesis) es una de las diversas razones¹ por las cuales recientemente ha crecido el interés en estudiar teorías que modifican a la Relatividad General, es decir, a una de las bases del modelo Λ CDM. En el contexto de modificaciones

¹En la actualidad, la materia oscura permanece sin ser detectada y la naturaleza de la constante cosmológica sigue sin ser comprendida [37].

a RG, existe un teorema muy importante el cual es conocido como el teorema de Lovelock, este fue escrito por David Lovelock en 1971 y establece lo siguiente:

En un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, el único tensor libre de divergencia de rango dos que es construido solo a partir del tensor métrico y sus derivadas hasta el segundo orden, y conserva su invariancia ante difeomorfismos, es el tensor de Einstein más una constante cosmológica. [38]

Por lo tanto, si queremos realizar una modificación a la Relatividad General debemos de cumplir al menos una de las siguientes condiciones

1. Colocar derivadas de orden superior a 2, como sucede en las teorías $f(R)$ [20, 21].
2. Añadir campos extra, como en la teoría de Quintaesencia [39].
3. Añadir dimensiones extra, como en las teorías de branas [40].
4. Violar la invarianza de Lorentz, como en las teorías de Einstein-aether [41].

En particular, diversas teorías de gravedad modificada pueden describirse al menos efectivamente mediante la adición de un grado (o grados) de libertad escalar adicional [9]. En este trabajo nos centramos en el estudio de teorías que añaden campos escalares a la acción, en concreto estudiaremos las teorías de Horndeski y su aplicación en la cosmología, no obstante, este estudio se pospone hasta el Capítulo 3, ya que para estudiar una teoría modificada de la cosmología estándar primero es necesario entender las bases que sustentan a este modelo.

1.2. Principio Cosmológico

El principio cosmológico dice establece que el universo es estadísticamente homogéneo e isotrópico a grandes escalas. La homogeneidad significa, hablando

informalmente, que el universo es el mismo en todas partes en un momento dado de tiempo. Lo que en Relatividad General nos conduce a preguntarnos ¿en un momento dado de tiempo para que observador? En la teoría Newtoniana no hay ambigüedad cuando hablamos sobre “un momento dado de tiempo”. En relatividad especial existe cierta ambigüedad debido a la no universalidad de la simultaneidad, pero una vez que se ha especificado un marco de referencia inercial, el concepto se vuelve preciso. Sin embargo, en relatividad general no hay marcos de referencia inerciales globales a menos de que estemos en un espacio-tiempo plano; entonces el concepto de “un momento dado de tiempo” es completamente ambiguo. Pero este puede ser remplazado con un concepto más general; el concepto de una hipersuperficie tipo espacio. Para definir formalmente una hipersuperficie tipo espacio, tomemos al par (M, g) , con M una variedad diferencial y g una métrica tipo Lorentz definida sobre M un espacio-tiempo. Una hipersuperficie $\Sigma \subset M$ es una subvariedad diferencial de dimensión 3 con un campo vectorial normal tipo tiempo. Así, la frase intuitiva “en un momento dado” se traduce en Relatividad General en la frase precisa “en una hipersuperficie tipo espacio dada” [42]. Podemos dividir el espacio-tiempo entero a través de una *familia de un parámetro* de ese tipo de hipersuperficies tipo espacio, usualmente se le da el nombre de *tiempo* (t) a este parámetro. Con este nuevo

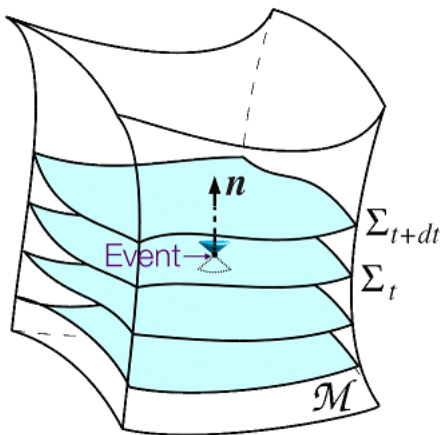


Figura 1.1: Representación esquemática de la foliación del espacio-tiempo en términos de hipersuperficies. Cada una de las divisiones de color azul representa una hipersuperficie tipo espacio para un valor concreto del parámetro t .

lenguaje, la homogeneidad significa que a través de cada evento en el universo pasa una hipersuperficie tipo espacio en donde las condiciones físicas son idénticas para cada evento perteneciente a esta hipersuperficie. Por otro lado, el concepto de isotropía también debe ser formulado de manera precisa. Claramente, el universo no puede parecer isotrópico para todos los observadores. Por ejemplo, un observador en una nave espacial que viaja a través de nuestra galaxia a la mitad de la velocidad de la luz, verá la luz de las estrellas proveniente de la dirección en que se mueve corrida hacia el azul, mientras que la luz proveniente de la dirección opuesta estará corrida hacia el rojo. Solo un observador que se mueve con el fluido cosmológico puede ver las cosas como isotrópicas. Uno considera tales observadores definiendo la isotropía. Por lo tanto, la isotropía significa que un observador que se está moviendo con el *fluido cosmológico* no podrá distinguir una de sus direcciones espaciales de las otras mediante ninguna medición local [31], en la práctica el marco de referencia que se utiliza para definir a la isotropía es el CMB.

1.3. Las ecuaciones de Friedmann

El principio cosmológico nos permite definir una familia de observadores preferenciales, los cuales ven al universo homogéneo e isótropo a grandes escalas, podemos asignarle a estos observadores las coordenadas (t, x^i) , y con ello escribir la métrica del espacio-tiempo como

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + f_{ij} dx^i dx^j,$$

sin embargo, el segundo término de la ecuación (1.3) debe de ser igual a cero o de lo contrario se podría elegir una dirección privilegiada sobre las hipersuperficies espaciales [42], lo cual rompería con el principio de isotropía. Por otro lado, la curvatura de las hipersuperficies tipo espacio tampoco puede depender de derivadas de la 3-métrica f_{ij} , o de lo contrario podríamos definir un vector privilegiado sobre las hipersuperficies, por lo tanto el tensor de Riemann sobre las hipersuperficies espaciales puede como máximo ser una constante. Se puede

demostrar [31] que la métrica más general que cumple con la condición de ser homogénea e isótropa en cada instante de tiempo t y que además describe un universo en expansión es la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.6)$$

la cual depende de dos parámetros cosmológicos k y $a(t)$. La curvatura de las hipersuperficies espaciales puede ser descrita con el parámetro k , $k = 0$ representa a un universo espacialmente plano, $k = 1$ a un universo cerrado y $k = -1$ a un universo abierto. El parámetro $a(t)$ es conocido como factor de escala, y se encarga de parametrizar la expansión del universo a medida que evoluciona en el tiempo. Cualitativamente, caracteriza el tamaño relativo de las hipersuperficies espaciales Σ_t en diferentes instantes de tiempo t .

Las observaciones astronómicas sugieren que el universo puede ser modelado con gran precisión, si se toma la curvatura como $k = 0$ [2]. Por lo que la métrica dada por la ecuación (1.6) se puede escribir como

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (1.7)$$

Por otro lado, a grandes escalas podemos describir a la materia con el tensor energía-momento de un fluido perfecto

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Una vez que se ha especificado la geometría del espacio-tiempo y el tensor energía-momento del universo, estamos en condiciones de describir su dinámica utilizando las Ecuaciones de Campo de Einstein (ver apéndice A), como resultado obtenemos que las ecuaciones que describen la dinámica a gran escala son:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.10)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.11)$$

Del conjunto de ecuaciones (1.9), (1.10) y (1.11) solo dos son independientes [43], ya que una de ellas puede ser derivada a partir de las otras². Así, el sistema de ecuaciones contiene 3 incógnitas y solo 2 ecuaciones, por lo que hace falta otra ecuación para que el sistema quede completamente determinado. La ecuación extra que asumimos es una ecuación de estado, que ha de relacionar la presión con la densidad

$$\frac{p}{\rho} \equiv \omega = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{Radiación.} \\ 0 & \text{Materia no relativista.} \\ -1 & \text{Constante cosmológica.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Por otro lado, al sustituir la ecuación de estado en la ecuación (1.11) obtenemos

$$\dot{\rho} + 3H(1 + \omega)\rho = 0, \quad (1.13)$$

la solución para la ecuación (1.13) para ω constante es $\rho(a) = \frac{C}{a^{3(1+\omega)}}$ con C una constante que depende de las condiciones iniciales para ρ . Las condiciones iniciales se pueden dar para un tiempo arbitrario, aunque usualmente se dan para el tiempo actual t_0 .

$$\rho(a) = \begin{cases} \frac{C}{a^4} & \text{Radiación.} \\ \frac{C}{a^3} & \text{Materia no relativista.} \\ C & \text{Constante cosmológica.} \end{cases} \quad (1.14)$$

En Cosmología existen diferentes parámetros cuyos valores describen, en su conjunto, diferentes etapas del universo. Uno de ellos es el parámetro de densidad, Ω , definido como el cociente entre la densidad del universo, y la densidad necesaria para que este sea plano, también conocida como densidad crítica ρ_c

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (1.15)$$

²Tomando la derivada temporal de la primera ecuación de Friedmann y usando la ecuación de continuidad es posible llegar a la ecuación (1.10).

utilizando la ecuación (1.15) podemos reescribir la ecuación (1.9) de la siguiente manera

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \equiv \Omega, \quad (1.16)$$

por otro lado, podemos escribir al parámetro de densidad como una suma de los distintos componentes que existen en el universo

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda, \quad (1.17)$$

la densidad de la materia Ω_m tiene las contribuciones de los componentes de materia bariónica y materia oscura, es decir, $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$. Los componentes relativistas están representados por Ω_r y Ω_Λ representa al parámetro de densidad de la constante cosmológica. Los valores de estos parámetros para el modelo Λ CDM basados en los datos de la colaboración Planck 2018 [2] son:

$$\Omega_m^0 = 0.3153 \pm 0.0073, \quad \Omega_r^0 = 9.23640 \times 10^{-5}, \quad \Omega_\Lambda^0 = 0.6847 \pm 0.0073.$$

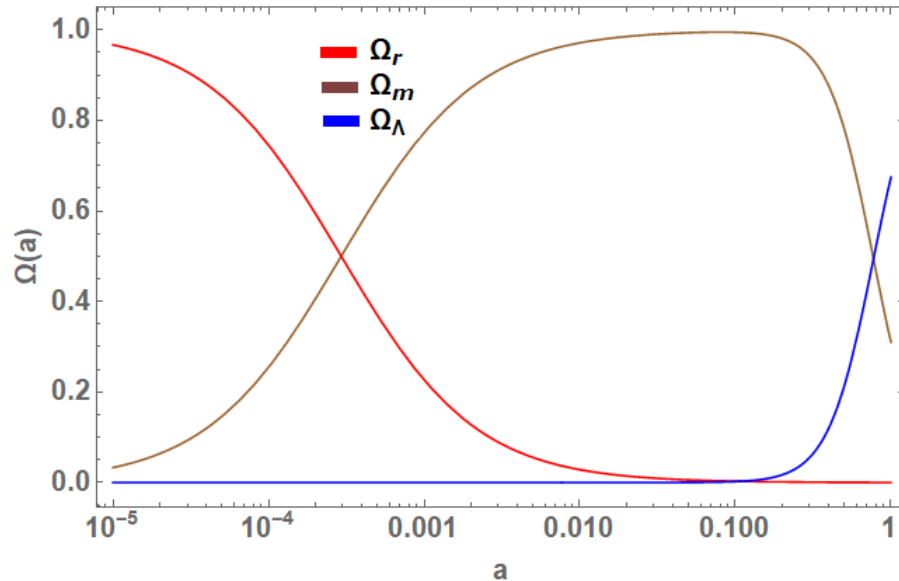


Figura 1.2: Evolución de los parámetros de densidad como función del factor de escala, para realizar la gráfica se normalizo al factor de escala como $a_0 = 1$.

En la Figura 1.2 se muestra como ha cambiado la densidad de cada uno de estos componentes como función del factor de escala. Se puede observar que

el universo ha pasado por distintas etapas, desde la etapa de dominación de radiación, posteriormente la etapa de dominación de materia y en la actualidad nos encontramos en una etapa de dominación de constante cosmológica.

1.4. Distancias en cosmología

En cosmología hay distintas formas de especificar la distancia entre dos puntos, esto es debido a que la distancia entre dos observadores que se mueven con el flujo de Hubble puede cambiar debido a la expansión del universo [44]. A continuación se describen algunas de las formas más útiles de definir distancias en cosmología asumiendo un universo espacialmente plano

- **Distancia comóvil:** Es la distancia que recorre un fotón desde su tiempo de emisión en $t \equiv t_{em}$ hasta su tiempo de detección en $t \equiv t_{obs}$, se denota como D_c y puede calcularse de la siguiente manera

$$D_c = \int_{t_{em}}^{t_{obs}} \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.18)$$

por definición la distancia comóvil entre dos regiones del espacio permanece constante para todo tiempo cósmico t .

Para un universo espacialmente curvado, es relevante introducir la definición de distancia transversal comóvil, que es la distancia comóvil entre dos objetos que se encuentran a la misma distancia comóvil con respecto a nosotros, pero que están separados en el cielo por un ángulo $\Delta\theta$. Sin embargo, dado que restringimos esta discusión a un universo espacialmente plano, la definición de distancia transversal comóvil coincide con la definición de distancia comóvil [45].

- **Distancia propia:** Es la distancia entre dos regiones del espacio en un tiempo cosmológico constante. A medida que el universo se expande, la distancia propia d entre dos observadores aumenta [44]. Esta noción de distancia es puramente teórica, ya que no podemos ver dónde está un

objeto en un instante dado de tiempo, porque la luz que emitió ese objeto tardó un tiempo en viajar hasta nosotros, y durante ese tiempo universo se expandió. No obstante, dado un modelo cosmológico, podemos derivar la distancia propia. La relación entre la distancia propia y la distancia comóvil está dada por

$$d(t) = a(t)D_c. \quad (1.19)$$

- **Distancia de diámetro angular:** La distancia del diámetro angular se basa en el conocimiento del tamaño propio de un objeto. Los objetos con un tamaño propio conocido se denominan reglas estándar. Supongamos que observamos una regla estándar de tamaño transversal propio ds que se encuentra en un corrimiento al rojo z y una distancia comóvil χ . Además, este objeto subtende un ángulo pequeño en el telescopio $d\phi$, ver Figura 1.3. En un tiempo fijo t , podemos escribir la métrica de FLRW como

$$ds^2 = a(t)^2 d\chi^2, \quad (1.20)$$

si situamos nuestro sistema de referencia en el origen del sistema de coordenadas, entonces la distancia comóvil χ también es la distancia radial. Por tanto, su distancia transversal es:

$$ds = a(t)\chi d\phi, \quad (1.21)$$

al dividir la ecuación (1.21) por el tamaño angular del objeto, obtenemos la distancia de diámetro angular:

$$d_A = a(t)\chi. \quad (1.22)$$

- **Distancia de luminosa:** Esta distancia se define por la relación entre el flujo bolométrico de una estrella F (el flujo integrado en todas las frecuencias) y su luminosidad bolométrica L , a través de la siguiente ecuación

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}, \quad (1.23)$$

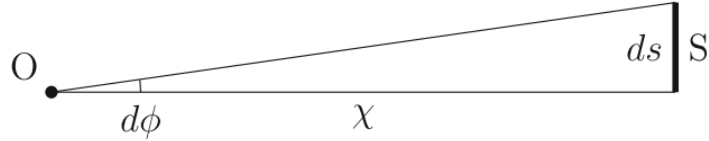


Figura 1.3: Representación gráfica de la distancia de diámetro angular. Figura tomada de [46].

si tenemos un conjunto de objetos de luminosidad bolométrica conocida L (también conocidos como candelas estándar) y además medimos F utilizando un telescopio, entonces podemos estimar d_L [45]. Debido a su importancia para el desarrollo de esta tesis, se tratará con detalle a esta definición en el Capítulo 2.

Relación entre el factor de escala y el corrimiento al rojo

Debido a que el universo se está expandiendo la longitud de onda a la que se emite una señal luminosa cambia a medida que la luz viaja a través del espacio-tiempo, normalmente la luz visible, que se emite o refleja desde un objeto distante, es desplazada hacia el color rojo del espectro electromagnético, esta es la razón por la cual a este fenómeno se le conoce como corrimiento al rojo. Es posible relacionar el corrimiento al rojo de la luz con el factor de escala, para ello consideremos una señal luminosa emitida en $t = t_1$ en la dirección radial por un observador comóvil con coordenada radial $r = r_1$ y detectada en $t = t_2$ por otro observador comóvil con coordenada radial $r = r_2$. Dado que los fotones viajan en geodésicas nulas para una métrica de FLRW, tenemos que

$$dt^2 = a^2(t) \frac{1}{1 - kr^2} dr^2, \quad (1.24)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)^{-1} dt = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr.$$

Si consideramos una segunda señal emitida en $t = t_1 + \delta_1$ y detectada en $t = t_2 + \delta_2$

$$\int_{t_1+\delta_1 t}^{t_2+\delta_2 t} a(t)^{-1} dt = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{1-kr^2}} dr, \quad (1.25)$$

con lo anterior se obtienen las siguientes igualdades

$$\int_{t_1}^{t_2} a^{-1} dt = \int_{t_1}^{t_2} a^{-1} dt + \int_{t_2}^{t_2+\delta_2 t} a^{-1} dt - \int_{t_1}^{t_1+\delta_1 t} a^{-1} dt. \quad (1.26)$$

Por lo tanto

$$\int_{t_2}^{t_2+\delta_2 t} a^{-1} dt = \int_{t_1}^{t_1+\delta_1 t} a^{-1} dt. \quad (1.27)$$

En el límite de intervalos cortos se obtiene que

$$\frac{\delta_1 t}{a(t_1)} = \frac{\delta_2 t}{a(t_2)}, \quad (1.28)$$

si consideramos a δt como el tiempo entre dos cresta de una onda

$$\frac{\lambda_1}{a(t_1)} = \frac{\lambda_2}{a(t_2)}, \quad (1.29)$$

por tanto el cambio de longitud de onda nos da información sobre el cambio del factor de escala. Si nos enfocamos en las señales recibidas hoy $a(t) = a(t_0)$

$$\frac{a_0}{a_{em}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_{em}} = 1 + \frac{\lambda_0 - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \equiv 1 + z, \quad (1.30)$$

a partir de ahora en este trabajo se normalizará al factor de escala de tal manera que $a_0 = 1$.

1.5. Historia térmica del universo

La teoría del Big Bang predice que el universo paso por una época³ en la cual su densidad de energía estuvo dominada principalmente por la radiación,

³Después del recalentamiento.

en esta época el universo estaba formado por un plasma caliente de partículas elementales, todas éstas en equilibrio térmico y cinético [30].

El equilibrio térmico requiere que las interacciones entre los constituyentes del plasma ocurran frecuentemente, esto sucede siempre que la tasa de interacción Γ de una especie perteneciente al plasma sea mayor que la tasa de expansión del universo H , si esto se cumple, podemos describir a los constituyentes del plasma a través de sus propiedades termodinámicas tales como su temperatura T , presión p , etc. Por otro lado, si la expansión es lo suficientemente rápida, se pierde esta condición y por tanto se dice que la especie se desacopla del plasma. El desacople puede ilustrarse con la siguiente formula:

$$\Gamma \ll H. \quad (1.31)$$

Un objeto fundamental en la descripción de este plasma de partículas en equilibrio térmico, es la función de distribución $f(\vec{p})$, utilizada para calcular el número de partículas por unidad de volumen en el espacio fase. De acuerdo con la física estadística para especies en equilibrio cinético, la densidad de partículas en el espacio de las fases esta dada por las distribuciones de Bose-Einstein o Fermi-Dirac, dependiendo de si estamos trabajando con bosones o fermiones:

$$f(|\vec{p}|) = \frac{1}{\exp(\frac{E-\mu}{T}) \pm 1}, \quad (1.32)$$

donde T la temperatura del plasma en equilibrio y μ el potencial químico de la especie. A partir de esta función, podemos encontrar la densidad de partículas n , la densidad de radiación ρ y la presión p correspondientes a una especie de partículas con g grados internos de libertad.

$$n = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_m^\infty f(\vec{p}) d^3p, \quad (1.33)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_m^\infty E(\vec{p}) f(\vec{p}) d^3p, \quad (1.34)$$

$$p = \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_m^\infty \frac{|\vec{p}|^2}{3E} f(\vec{p}) d^3p, \quad (1.35)$$

donde $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$. Aunque en general las integrales anteriores solo se pueden resolver numéricamente, existen 2 límites que son interesantes, el primero de ellos es conocido como el límite ultra-relativista en el cual $T \gg m$, $T \gg \mu$ y $E^2 \approx |\vec{p}|^2$, lo que nos permite obtener las siguientes formulas

$$n_i = \begin{cases} \frac{g_i \zeta(3)}{\pi^2} T^3 & \text{Bosones} \\ \frac{3g_i \zeta(3)}{4\pi^2} T^3 & \text{Fotones} \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_i T^4 & \text{Bosones} \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_i T^4 & \text{Fotones} \end{cases} \quad (1.37)$$

$$p = \frac{1}{3} \rho. \quad (1.38)$$

Con $\zeta(3) \approx 1.20206$ la función zeta de Riemann evaluada en 3. En el límite no relativista $(m - \mu) \gg T$, por lo que tenemos que la función de distribución se aproxima de la siguiente manera

$$f(|\vec{p}|) \approx \frac{1}{\exp(\frac{E-\mu}{T})}, \quad (1.39)$$

Así que la densidad de partículas, la densidad de energía y la presión sean las mismas para bosones y fermiones

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi\hbar} \right)^{3/2} e^{(m-\mu)/T}, \quad (1.40)$$

$$\rho = n \left(m + \frac{3}{2} T \right), \quad (1.41)$$

$$P = nT \ll \rho. \quad (1.42)$$

Como la densidad de energía y presión de las especies no relativistas son exponencialmente más pequeñas que las de una especie relativista, una buena aproximación de la densidad de energía total del universo cuando este está dominado por la radiación es $\rho \approx \rho_r$, así que

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (1.43)$$

$$p = \frac{\rho_r}{3} = \frac{\pi^2}{90} g_* T^4, \quad (1.44)$$

donde se ha introducido al factor g_* para simplificar la notación. El factor g_* cuenta el número total de grados de libertad relativistas efectivos, es decir, las especies con masa $m_i \ll T$

$$g_* \equiv \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermiones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4. \quad (1.45)$$

Para $T < 1$ MeV, las únicas especies relativistas son las 3 especies de neutrinos y el fotón, por lo que $g_* = 3.36$. Para $100 \text{ MeV} \geq T \geq 1 \text{ MeV}$, el electrón y el positrón son grados de libertad relativistas adicionales y $g_* = 10.75$. Y para $T \geq 300 \text{ GeV}$, todas las especies en el modelo estándar de física de la física de partículas son relativistas, por lo cual $g_* = 106.75$.

Los resultados anteriores, nos permiten encontrar una expresión que relaciona el factor de Hubble con la temperatura, para un universo dominado por radiación, válida para los periodos en los cuales g_* se mantiene constante

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_r} = \sqrt{\frac{4\pi^3 G}{45}g_*T^2}. \quad (1.46)$$

Entropía en la cosmología estándar

Para iniciar el estudio de la entropía $S(T, V)$ consideremos la segunda ley de la termodinámica⁴

$$dS(V, T) = \frac{1}{T}d(\rho(T) + p(T)dV) \quad (1.47)$$

$$= \frac{1}{T}d[(\rho + p)V] - \frac{V}{T^2}(\rho + P)dT. \quad (1.48)$$

Con $V = a^3$ el volumen comóvil al cual le aplicamos esta ley. Si derivamos la ecuación (1.35) y hacemos uso de (1.34), obtenemos

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T}(\rho + p), \quad (1.49)$$

⁴Notar que estamos trabajando en la aproximación $|\mu| \ll T$.

por lo que al sustituir esta última ecuación en (1.48), se obtiene

$$dS(V, T) = d\left(\frac{\rho + P}{T}V\right), \quad (1.50)$$

integrando esta ecuación llegamos a la siguiente expresión para la entropía en un volumen comóvil

$$S = \frac{V}{T}(\rho(T) + p(T)) + ctte, \quad (1.51)$$

más aún, podemos probar que esta entropía se conserva, para ello tomamos la ecuación de conservación del tensor energía-momento (1.11) y la reescribimos de la siguiente manera

$$a^3 \frac{dp}{dT} = \frac{d}{dT} [(\rho + p)a^3], \quad (1.52)$$

si hacemos uso de la identidad (1.49), la ecuación (1.52) se convierte en

$$d\left(\frac{a^3}{T}(\rho + p)\right) = 0. \quad (1.53)$$

Por lo que se puede ver fácilmente con ayuda de las ecuaciones (1.51) y (1.53) que la entropía se conserva. Esto implica que $s \propto a^{-3}$. Además sabemos que el número de partículas en un volumen comóvil es proporcional a la densidad numérica n_i dividida por la densidad de entropía s , $N_i \propto n_i/s$, por lo que si ninguna partícula es producida o destruida, $n_i \propto a^{-3}$.

Si usamos (1.37) y (1.38), la densidad de entropía $s = S/V$ para especies relativistas es

$$s_i = \frac{\rho_i + p_i}{T} = \begin{cases} \frac{7\pi^2}{180} g_i T_i^3 & \text{Fermiones,} \\ \frac{2\pi^2}{45} g_i T_i^3 & \text{Bosones,} \end{cases} \quad (1.54)$$

mientras que el caso de especies no relativistas no es importante para este análisis, ya que la entropía de la radiación es abrumadoramente mayor que la entropía de las especies no relativistas. Por otro lado, al igual que se hizo en (1.44), si queremos encontrar la densidad total de entropía en función de la temperatura T de los fotones, debemos sumar sobre todas las especies relativistas, así

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3, \quad (1.55)$$

$$g_{*s} = \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermiones}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3. \quad (1.56)$$

Existen diferencias importantes entre el comportamiento del factor g_* que multiplica a la ecuación (1.44) y el factor g_{*s} en (1.56). Estas diferencias pueden ser vistas en la Figura 1.4.

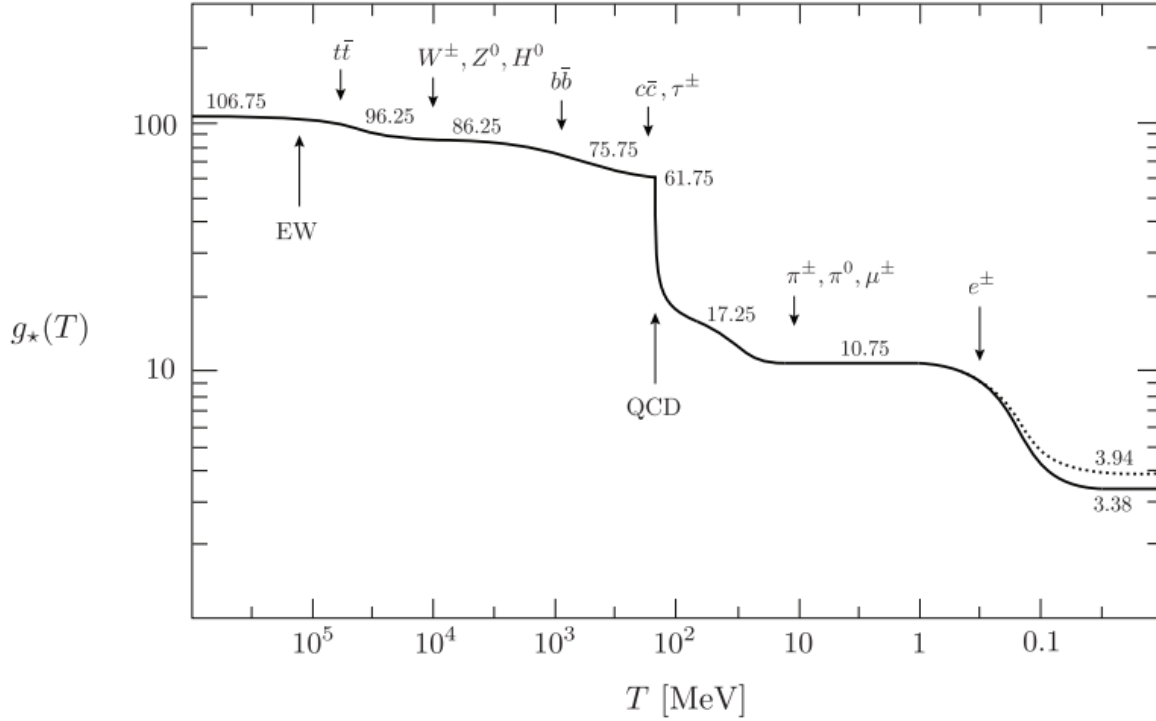


Figura 1.4: Evolución de los grados de libertad relativistas $g_*(T)$ asumiendo el modelo estándar de la física de partículas. La línea punteada representa el número efectivo de grados de libertad para la entropía $g_{*s}(T)$ [47].

Recombinación y desacople de fotones

Un evento importante en la historia del universo temprano fue la formación de los primeros átomos. A temperaturas mayores a 1 eV, el universo consistía de un plasma de electrones libres y núcleos. Durante esa época los fotones estaban acoplados con los electrones a través de la dispersión de Compton y su vez los

electrones interactuaban con los protones por medio de la dispersión de Coulomb. En el momento en que la temperatura bajo lo suficiente ($T \approx 3000K$) los electrones libres se unieron a los núcleos de hidrógeno y helio. Ocasionando que la densidad de electrones libres cayera rápidamente y que el camino libre medio de los fotones creciera hasta hacerse del orden del tamaño del universo. En este momento, los fotones se desacoplaron de la materia y el universo se hizo transparente. Ahora, esos fotones son los que conforman el Fondo Cósmico de Microondas.

Para el análisis del proceso de recombinación, iniciaremos considerando temperaturas mayores a 1 eV, en ese momento, los bariones y los fotones seguían en equilibrio a través interacciones como la dispersión de Thomson y la fotoionización/recombinación del hidrógeno

$$e^- + p^+ \leftrightarrow H + \gamma, \quad (1.57)$$

$$H + \gamma \leftrightarrow p^+ + e^-. \quad (1.58)$$

Durante esta época $T < m_i$, con $i = \{e, p, H\}$ por lo que nos encontramos en el límite no relativista para estas partículas, de manera que les corresponden las siguientes densidades de número

$$n_i^{eq} = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_i - m_i}{T} \right). \quad (1.59)$$

Con $\mu_p + \mu_e = \mu_H$. Para remover la dependencia de los potenciales químicos consideramos el siguiente cociente

$$\left(\frac{n_H}{n_e n_p} \right)_{eq} = \frac{g_H}{g_e g_p} \left(\frac{m_H}{m_e m_p} \frac{2\pi}{T} \right)^{3/2} e^{(m_p + m_e - m_H)/T}. \quad (1.60)$$

En el factor dentro del paréntesis podemos hacer la aproximación $m_H = m_p$ pero dentro de la exponencial la pequeña diferencia entre m_H y m_p es crucial, ya que $m_p + m_e - m_H$ representa la energía de enlace del hidrógeno

$$B_H \equiv m_p + m_e - m_H = 13.6 \text{ eV}. \quad (1.61)$$

Además hasta donde sabemos el universo es eléctricamente neutro, por lo cual $n_e = n_p$. Al sustituir estas aproximaciones y los grados internos de libertad $g_e = g_p = 2$, $g_H = 4$ en la ecuación (1.60) obtenemos

$$\left(\frac{n_H}{n_e^2}\right)_{eq} = \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{3/2} e^{B_H/T}. \quad (1.62)$$

Definimos la ionización fraccionaria de la siguiente forma

$$X_e \equiv \frac{n_p}{n_p + n_H}, \quad (1.63)$$

de tal manera que en los momentos en los cuales $X = 1$ el universo se encuentra completamente ionizado y cuando $X = 0$ el universo es completamente neutro. Por otro lado, $n_p + n_H$ es aproximadamente el número total de bariones n_b , que puede ser obtenido a través de la relación

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} \Rightarrow n_b = \eta \times n_\gamma \Rightarrow n_b = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \eta.$$

Con η una constante. Por tanto la ecuación (1.60) se puede reescribir como

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{n_H}{n_e^2} n_b = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta \left(\frac{2\pi T}{m_e}\right)^{3/2} e^{B_H/T}. \quad (1.64)$$

Esta ecuación varía extremadamente rápido con la temperatura, así que proporciona una caída muy rápida en la ionización fraccionaria, como se puede ver en la Figura [1.5]. Si bien la ecuación de Saha da la temperatura correcta en la cual inicia el declive de la ionización fraccionaria, esta no provee el comportamiento correcto de X_e debido a que llega un punto en el cual se pierda la condición de equilibrio térmico, es decir, $\Gamma < H$.

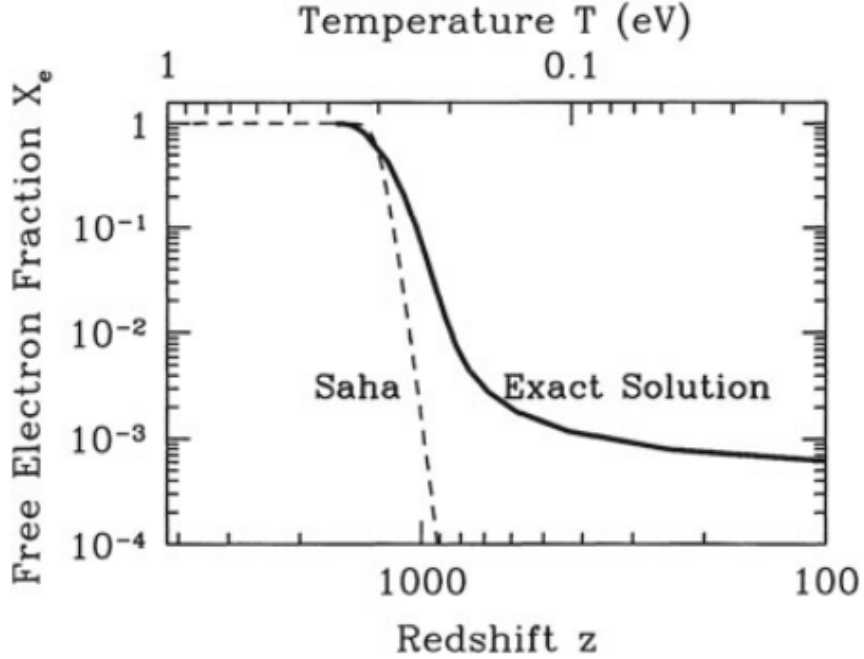


Figura 1.5: La fracción de electrones libres como función del corrimiento al rojo y temperatura. La recombinación inicia cuando X_e inicia a descender. En la imagen [48] se puede ver que la ecuación de Saha describe correctamente el inicio de la recombinación.

Desacople de fotones

Los fotones están acoplados con el plasma a través de interacciones con los electrones del tipo

$$e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma. \quad (1.65)$$

Con un ritmo de interacción dado por $\Gamma_\gamma = n_e \sigma_T$, donde $\sigma_T = 2 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-2}$ es la sección eficaz de Thomson. Ya que $\Gamma \propto n_e$, el ritmo de interacción decrece conforme la densidad de electrones libres cae. Los fotones y los electrones se desacoplan cuando el ritmo de interacción entre ellos se hace más pequeño que el ritmo de expansión del universo

$$\Gamma_\gamma(T_{de}) \approx H(T_{de}). \quad (1.66)$$

En esta época el universo se encuentra dominado por materia, por tanto

$$H(T) = H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3} = H_0 \sqrt{\Omega_m} \left(\frac{T_{de}}{T_0} \right)^{3/2}, \quad (1.67)$$

$$n_b X_e(T_{de}) \sigma_T = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta \sigma_T X_e(T) T_{de}^3,$$

así

$$X_e(T_{de}) T_{de}^{3/2} = \frac{\pi^2}{2\zeta(3)} \frac{H_0 \sqrt{\Omega_m}}{\eta \sigma_T T_0^{3/2}}. \quad (1.68)$$

Usando los valores obtenidos por medio de las observaciones del fondo cósmico de microondas $\Omega_m = 0.315$ y $\eta = 6.12 \times 10^{-10}$, podemos resolver numéricamente, la ecuación (1.68) para T_{de} , obteniendo $T_{de} \approx 0.26$ eV. Cálculos de mayor precisión [44] arrojan que $T_{de} = 3000$ K que corresponde a un corrimiento al rojo $z_{de} = 1100$.

1.6. Formación de estructura

El universo puede ser aproximado como homogéneo e isotrópico solo a escalas mayores a 100 Mpc. A escalas menores, el universo contiene fluctuaciones en la densidad de materia, dadas por la distribución de galaxias en el espacio. Por tanto, la cosmología no perturbada tiene un problema, si describimos al universo como perfectamente homogéneo e isotrópico, este permanecería de esa forma todo el tiempo y entonces nunca ocurriría la formación de la estructura que se observa hoy en día, así que es necesario introducir un enfoque perturbativo en algún punto.

Para iniciar el estudio de la formación de estructura, consideramos una esfera de radio R con una densidad media de materia $\bar{\rho}(r, t)$, además consideraremos pequeñas perturbaciones a la densidad $\delta\rho(r, t)$, de tal manera que la densidad en cada punto del espacio-tiempo es $\rho(r, t) = \bar{\rho}(1 + \delta\rho)$. Resulta conveniente trabajar con la densidad de contraste $\delta(r, t)$ ya que esta nos dará una medida

del crecimiento de las sobredensidades

$$\delta(r, t) \equiv \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}. \quad (1.69)$$

El crecimiento de las perturbaciones, que dan origen a las galaxias, está dado por la evolución de $\delta(r, t)$, así que es necesario encontrar una ecuación diferencial que determine su evolución. Para ello describiremos a la materia que compone al universo como un fluido perfecto. Las ecuaciones que describen los campos de densidades $\rho(r, t)$ y velocidades $u(r, t)$, en el régimen Newtoniano⁵ son:

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot [(1 + \delta)v] = 0. \quad (1.70)$$

Ecuación de Euler

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{a}(v + \nabla)v + \frac{\dot{a}}{a} = -a^{-1}\nabla\phi. \quad (1.71)$$

Ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho a^2\delta. \quad (1.72)$$

Debido a que las fluctuaciones de la densidad $\delta\rho$ son pequeñas con respecto a la densidad media $\bar{\rho}$ en la época de dominación de materia, se puede estudiar la evolución de las perturbaciones en el régimen lineal, es decir, podemos expandir a primer orden en $\delta\rho$ y v

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla \cdot v = 0, \quad (1.73)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} + a^{-1}\nabla\phi = 0, \quad (1.74)$$

tomando la derivada temporal de la primera ecuación y sustituyendo en (1.72), llegamos a

$$\frac{\partial^2\delta^2}{\partial t^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial\delta}{\partial t} = 4\pi G\rho\delta, \quad (1.75)$$

⁵En el apéndice C se muestra como se trabaja con estas perturbaciones en el régimen relativista para un modelo de tipo Quintaesencia, se pueden obtener las perturbaciones escalares en Λ CDM de manera análoga.

esta es la ecuación que rige la evolución de las fluctuaciones en unidades comóviles en el régimen lineal. Cuando $|\delta| \approx 1$ la aproximación lineal ya no es válida y hay que resolver las ecuaciones de movimiento completas, esto ocurre para z pequeños y a escalas muy pequeñas, donde la estructura del universo se aparta de la homogeneidad e isotropía.

1.7. Distorsiones en el espacio del corrimiento al rojo

Las distorsiones del espacio de desplazamiento al rojo (RSD por sus siglas en inglés) son un efecto en la cosmología observacional, el cual consiste en que la distribución espacial de las galaxias aparece aplastada y distorsionada cuando sus posiciones se grafican en el espacio de desplazamiento al rojo, ver Figura 1.6. Esto se debe a que la distancia medida utilizando el corrimiento al rojo difiere de la distancia radial verdadera debido a las velocidades peculiares de las galaxias en la línea de visión. Físicamente, las inhomogeneidades en la densidad a gran escala causan que de las galaxias se muevan en dirección de las sobre-densidades (Kaiser effect). Las RSD conducen a anisotropías del espectro de potencias, por lo cual las mediciones de este efecto en estudios de desplazamiento al rojo permiten inferir [50] parámetros tales como el factor de crecimiento lineal de las perturbaciones

$$f(z) \equiv \frac{d \ln \delta}{d \ln a}, \quad (1.76)$$

y la varianza de las fluctuaciones σ_R en una escala R dada. Usualmente se reporta esta varianza en $R = 8h^{-1}$ Mpc, es decir, $\sigma_8(z)$. No obstante, lo que en realidad se mide [50] es $f\sigma_8(z)$.

En la práctica medir $f\sigma_8(z)$ es sumamente complicado, ya que se requiere modelar de las escalas no lineales del espectro de potencias, además las anisotropías del espectro de potencias a grandes escalas no solo se deben a las velocidades peculiares de las galaxias, sino también al asumir una cosmología fiducial incorrecta

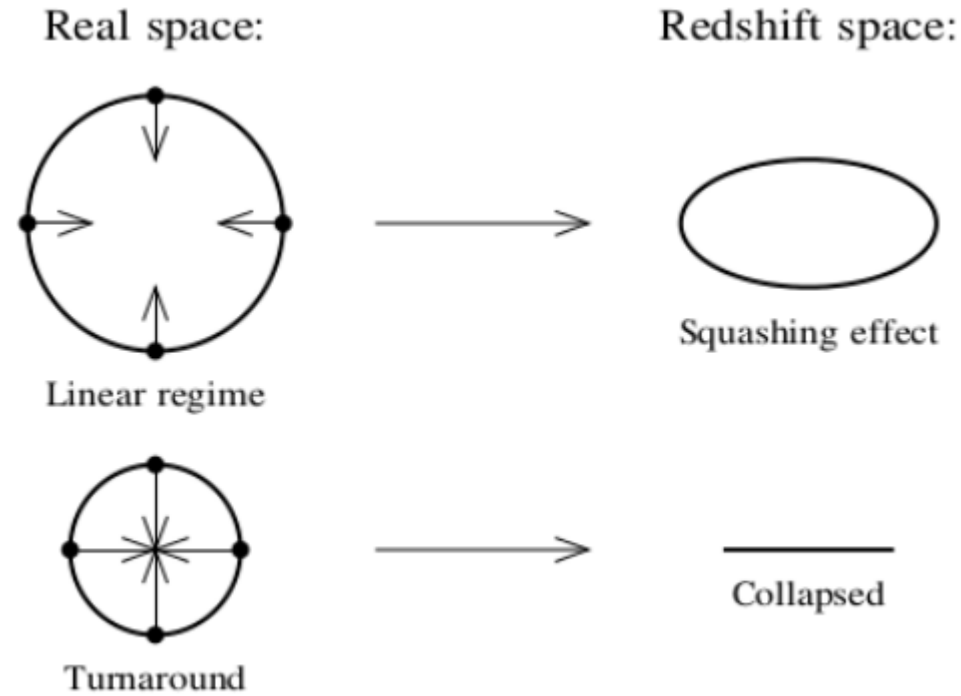


Figura 1.6: Representación de como las velocidades peculiares provocan las distorsiones del corrimiento al rojo. Los puntos representan galaxias cayendo al centro de una sobredensidad esférica y las velocidades están representadas mediante flechas. La esfera ubicada en la parte superior, corresponde a observaciones a grandes escalas, en donde las velocidades peculiares son pequeñas. En la figura inferior, el radio de la esfera disminuye y las velocidades peculiares incrementan, lo cual puede interpretarse como un colapso gravitacional. Figura tomada de [49].

para convertir corrimientos al rojo en distancias para poder construir la función de correlación de dos puntos y el correspondiente espectro de potencia. Para poder ver este efecto, tomemos la distancia comóvil entre un par de galaxias separadas por un ángulo $d\theta$ en la métrica de Friedmann Robertson Walker

$$dl_{\perp} = (1 + z)D_A(z)d\theta, \quad (1.77)$$

donde $D_A(z)$ es la distancia de diámetro angular evaluada en el corrimiento al rojo del par de galaxias. La correspondiente separación a lo largo de la línea de

visión es

$$d_{l\parallel} = \frac{cdz}{H(z)}. \quad (1.78)$$

Puede observarse que si hubiéramos asumido una cosmología fiducial distinta, por ejemplo, $H'(z)$ en lugar de $H(z)$, las correspondientes separaciones se transformarían en

$$dl'_{\perp} = (1+z)D'_A d\theta = \frac{D'_A}{D_A} dl_{\perp} \equiv \frac{dl_{\perp}}{f_{\perp}}, \quad (1.79)$$

$$dl'_{\parallel} = \frac{cdz}{H'} = \frac{H}{H'} dl_{\parallel} \equiv \frac{dl_{\parallel}}{f_{\parallel}}, \quad (1.80)$$

utilizando lo anterior, definimos la siguiente cantidad

$$F \equiv \frac{f_{\parallel}}{f_{\perp}} = \frac{H' D'_A}{H D_A}, \quad (1.81)$$

la cual representa la anisotropía inducida debido al uso de la cosmología fiducial incorrecta y es conocida como el efecto Alcock-Paczynski (AP) [51]. Desafortunadamente el efecto AP está degenerado con el efecto RSD. De tal manera que si una medición de $f\sigma_8$ ha sido obtenida asumiendo una cosmología fiducial $H'(z)$, la correspondiente $f\sigma_8$ que se obtiene utilizando la cosmología $H(z)$ puede ser aproximada [50] como

$$f\sigma_8(z) \approx \frac{H(z)D_A(z)}{H'(z)D'_A(z)} f\sigma'_8(z), \quad (1.82)$$

esto solo debe de ser tomado como una aproximación al resultado correcto, debido a que la corrección total al efecto AP, requiere reanalizar por completo todos los datos. La corrección al efecto AP es del orden de 2–3% a corrimientos al rojo de $z \approx 1$ [50], siempre y cuando la nueva cosmología fiducial tenga parámetros cosmológicos razonables⁶.

⁶Tenemos certeza de que los parámetros cosmológicos deben de vivir en un intervalo cercano a los parámetros reportados por Planck 2018, para el caso particular de Ω_m , la colaboración Planck 2018 usando los espectros de polarización y temperatura del CMB reporta a 1σ que $\Omega = 0.315 \pm 0.007$, una cosmología fiducial razonable estaría dentro del intervalo de confianza a 2σ con respecto a este valor.

Capítulo 2

Estado del arte de la cosmología estándar

2.1. Éxitos de la Cosmología Estándar

- Como se vio en el Capítulo anterior, la cosmología estándar predice que el universo temprano se encontraba en un estado de alta densidad y de elevada temperatura, debido a estas condiciones la materia y la luz estaban acopladas formando un plasma de bariones y fotones. Cuando el universo se encuentra una temperatura cercana a 1 MeV, comienza una serie de reacciones nucleares que permiten la formación de los primeros núcleos ligeros, en este proceso se producen elementos tales como ${}^3\text{He}$, D y ${}^7\text{Li}$. La abundancia de cada uno de estos ellos depende de manera crucial del ritmo de expansión del universo, de la densidad de bariones Ω_B y del número de especies de neutrinos. Como puede verse en la Figura 2.1, las predicciones del modelo estándar son compatibles con las observaciones de las abundancias de los elementos ligeros en el universo.
- La expansión del universo provocó que el plasma barión-fotón se enfriara hasta el punto en que el ritmo de interacción de los fotones con la materia se hizo menor que el ritmo de expansión del universo, en este momento

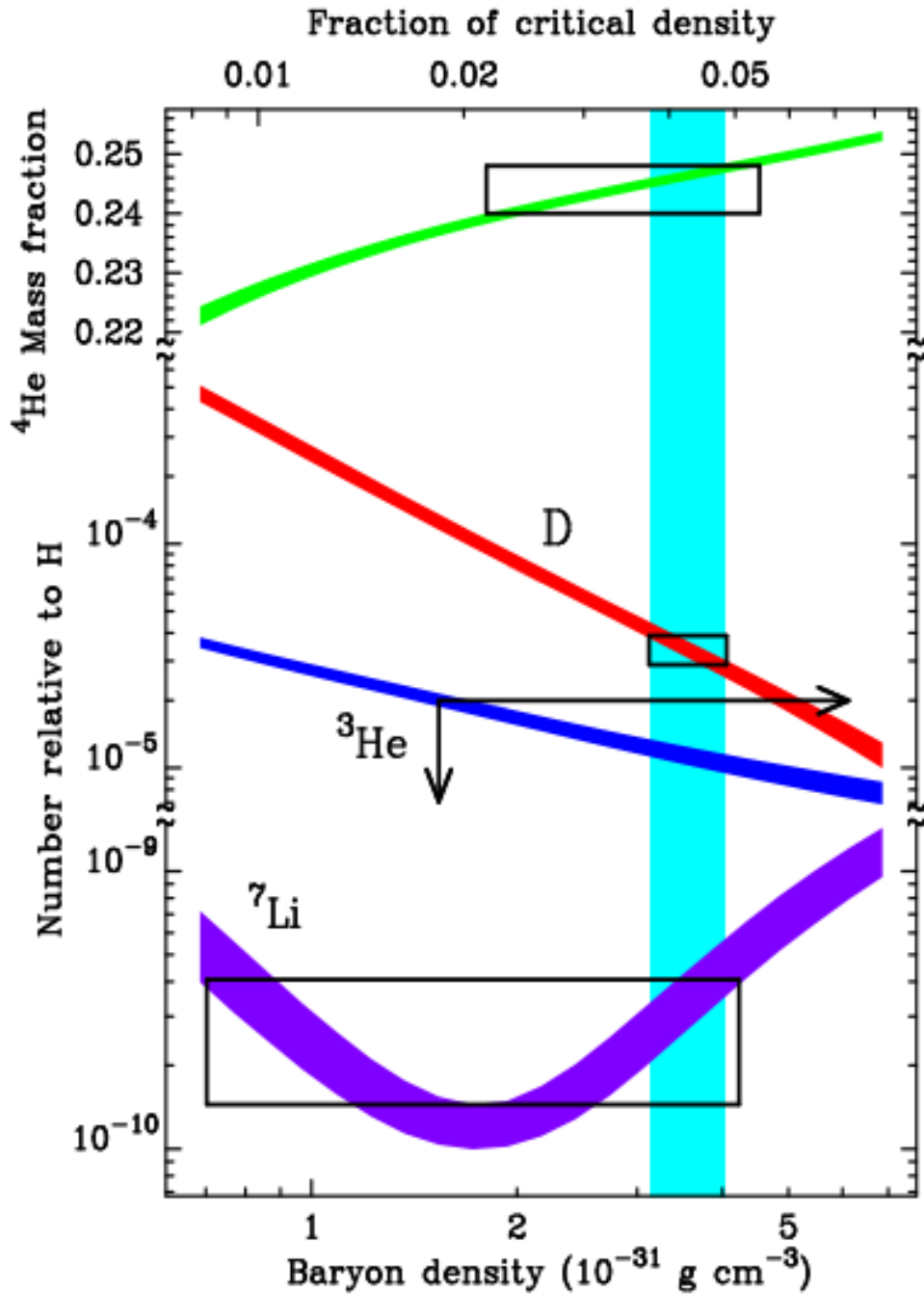


Figura 2.1: Constricciones sobre la densidad de materia bariónica obtenidas con el estudio de la nucleosíntesis. La línea de color verde muestra la predicción del modelo estándar de la abundancia de ^4He , D línea roja, ^3He línea azul y ^7Li línea morada. Las cajas de color negro muestran observaciones sobre la abundancia de de los distintos elementos. Figura tomada de S. Burles et. al. [52]

se desacoplan los fotones de la materia y esto ocasiona que a partir de ese instante los fotones viajen libremente por el universo, formando así lo que se conoce como el fondo cósmico de microondas, ver Figura 2.2. El CMB representa una fuente importante de información sobre el universo primitivo ya que es la radiación electromagnética más antigua a la que tenemos acceso.

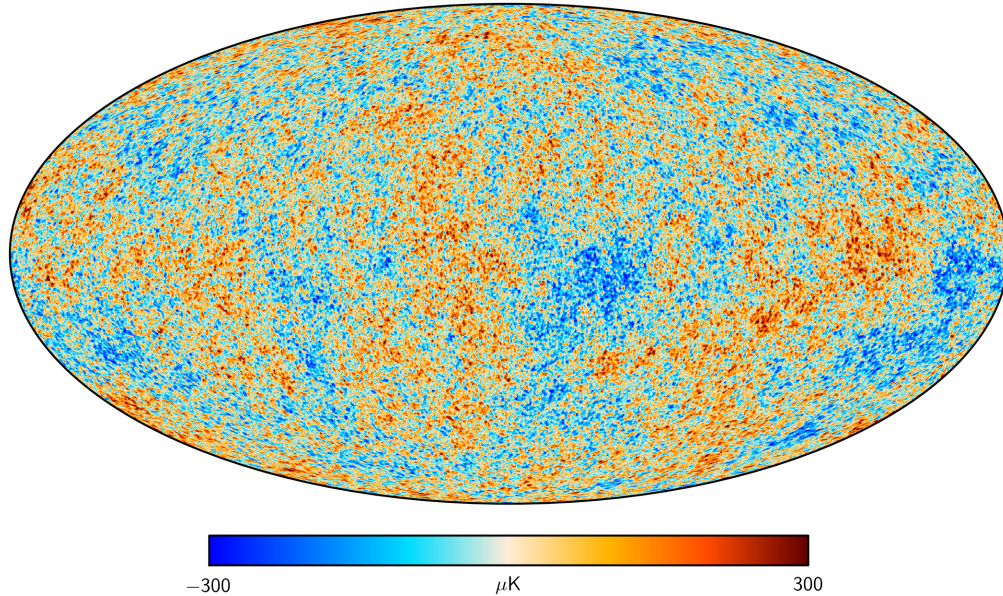


Figura 2.2: Mapa del fondo cósmico de microondas. El mapa muestra fluctuaciones en la temperatura del CMB, estas fluctuaciones son del orden de $\Delta T \approx 10^{-5} K$. Figura tomada de la página web de Planck [53].

- En 1998 se descubrió que el universo se expandía de manera acelerada, este descubrimiento fue hecho gracias a un estudio liderado por el grupo *High-Z Supernova Search Team*, el modelo estándar de la cosmología logra explicar esta expansión acelerada gracias a la presencia de una constante cosmológica positiva en sus ecuaciones de campo.

2.2. Tensiones en el modelo Λ CDM

Como se vio en la sección anterior, el modelo cosmológico estándar describe de manera satisfactoria un gran número de observaciones, de épocas muy diferentes desde la nucleosíntesis primordial hasta la expansión acelerada del universo, sin embargo, a lo largo de los últimos años nueva evidencia observacional [1] muestra que las constricciones que se obtienen en los parámetros libres de la teoría a través de *mediciones directas*¹ y de *mediciones indirectas*² difieren.

Si el modelo estándar de la cosmología representará a el modelo correcto, ambas constricciones deberían de coincidir, pero esto no sucede, existe una desviación significativa entre el valor inferido de los parámetros libres, lo cual es evidencia de que existe física más allá del modelo estándar de la cosmología o de que existen errores sistemáticos graves en las mediciones.

A lo largo de la siguiente sección se describirá brevemente la forma en que son obtenidos los parámetros de interés, también se describirán las tensiones más importantes dentro del modelo cosmología estándar, y al finalizar se hablará acerca de las posibles soluciones a estas tensiones.

- Inferencia del valor de H_0 con Supernovas tipo Ia:** El método más común para determinar distancias en cosmología se basa en la medición de la luminosidad aparente de objetos de luminosidad absoluta conocida. La luminosidad absoluta L es la energía emitida por segundo, y la luminosidad aparente l es [44] la energía recibida por segundo por centímetro cuadrado de área de recepción. Si la energía se emite isotrópicamente, entonces podemos encontrar la relación entre la luminosidad absoluta y la luminosidad aparente imaginando el objeto luminoso rodeado de una esfera cuyo radio es igual a la distancia d entre el objeto y la Tierra. La energía total por segundo que pasa a través de la esfera es $4\pi d^2$, entonces

$$l = \frac{L}{4\pi d^2}. \quad (2.1)$$

¹Independientes del modelo cosmológico.

²Ajuste de los datos observacionales a un modelo cosmológico particular.

Sin embargo, al hacer mediciones para grandes desplazamientos al rojo, donde los efectos de la expansión cosmológica en la determinación de distancias ya no pueden ser despreciados. La expresión para la luminosidad aparente l debe de ser modificada, de la siguiente manera [44]

$$l = \frac{L}{4\pi r_1^2 a^2(t_0)(1+z)^2}, \quad (2.2)$$

en esta ecuación r_1 es la distancia a la Tierra vista desde el objeto luminoso.

La definición anterior nos permite introducir la definición de distancia luminosa d_L , esta se define de tal manera que la relación entre la luminosidad aparente y la luminosidad absoluta sea la misma que en la ecuación (2.2)

$$l = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (2.3)$$

así,

$$d_L = a(t_0)r_1(1+z). \quad (2.4)$$

Partiendo del hecho de que r_1 es una función del tiempo t en que la luz fue emitida y de que los fotones satisfacen la condición $ds^2 = 0$ es posible deducir para un universo descrito por la métrica de FLRW con curvatura $k = 0$ la siguiente condición [54]:

$$r_1 = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.5)$$

Por tanto, la expresión para distancia luminosa³ tiene la siguiente forma:

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.6)$$

³Los astrónomos no reportan las distancias en términos de d_L sino en una escala logarítmica, conocida como módulo de distancia μ ,

$$\mu = 5 \log_{10}(d_L) + 25.$$

Si solo nos concentramos en valores pequeños del corrimiento al rojo, podemos hacer una expansión en serie de Taylor del factor de escala $a(t)$ como función del tiempo cósmico t y escribir⁴

$$a(t) = 1 + H_0 \Delta t - \frac{q_0}{2} H_0^2 (\Delta t)^2 + \frac{j_0}{6} H_0^3 (\Delta t)^3 + \vartheta (\Delta t)^3, \quad (2.7)$$

donde $\Delta t = t - t_0$, q_0 es el parámetro de desaceleración y j_0 es conocido como el parámetro de “Jerk”. Es posible mostrar [55] que para z pequeños la relación entre la distancia luminosa y el corrimiento al rojo es:

$$d_L(z) = \frac{z}{H_0} \left(1 + \frac{1 - q_0}{2} z - \frac{1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0}{6} z^2 + \vartheta(z^3) \right). \quad (2.8)$$

La ecuación anterior no es suficiente para conocer H_0 , aún queda un problema por resolver y es el de encontrar un número lo suficientemente grande de objetos de luminosidad absoluta conocida. Aunque esto es complicado, ya que en la práctica nosotros no podemos medir la luminosidad absoluta de las estrellas, lo que en realidad medimos es el número de fotones que recibimos en nuestro telescopio como función del tiempo, también conocido como magnitud aparente m . Por tanto, no podemos determinar la distancia luminosa a las estrellas solo con esta medición, sino que es necesario *calibrar* la luminosidad de las estrellas, es decir, obtener su luminosidad absoluta. Usualmente para calibrar las estrellas más cercanas se utiliza paralaje, para más detalles consultar [56]. Una vez que las estrellas están calibradas, podemos utilizarlas para calcular distancias.

Por otro lado, como se vio en la ecuación (2.1) el número de fotones que recibimos de una estrella decae como función de su distancia con respecto a nosotros, lo cual dificulta la medición de estrellas a distancias mayores a 50 Mpc [7]. Esto representa otro problema, ya que para medir H_0 es necesario que analicemos objetos que estén dentro del flujo de Hubble. Para resolver este problema los astrónomos utilizan a las Supernovas de Tipo Ia. Las Supernovas Tipo Ia ocurren cuando una enana blanca en un

⁴Por simplicidad se ha tomado la normalización del factor de escala de tal manera que $a(t_0) = 1$.

sistema binario acumula suficiente materia de su compañero de tal manera que su masa se acerca al límite de Chandrasekhar, es decir, cerca de la masa máxima posible que puede ser soportada por la presión de degeneración de electrones. Cuando esto sucede la enana blanca se vuelve inestable y el aumento de temperatura y densidad desencadena una explosión que puede ser vista a distancias de varios miles de megaparsecs. Ya que la estrella en explosión siempre tiene una masa cercana al límite de Chandrasekhar, hay poca variación en la luminosidad absoluta de estas explosiones, lo que las convierte en indicadores de distancia casi ideales. Cabe señalar que antes de utilizar a las SNeIa como indicadores de distancia es necesario estandarizar su pico de luminosidad, después de aplicar los procedimientos de estandarización, que a menudo se basan en la relación ancho-luminosidad (WLR) [57], cualquier diferencia restante en los picos de brillo de dos SNeIa debería deberse a una diferencia en la distancia al observador.

El mejor ajuste de la ecuación (2.8) a los datos de las supernovas tipo Ia (calibrados con cefeidas) para $z < 0.15$ otorgan [3] $H_0 = 74.03 \pm 1.42$ km/s/Mpc.

- **Inferencia del valor de H_0 con el análisis del CMB:** La determinación de H_0 , con el análisis del CMB es mucho más elaborada, requiere que seleccionemos un modelo cosmológico específico, que calculemos las ecuaciones que describen la dinámica del modelo, la evolución de sus perturbaciones y que ajustemos los parámetros libres del modelo a las observaciones de los espectros de potencias de temperatura (TT) y polarización (EE) del CMB. En particular al ajustar el modelo Λ CDM a los datos obtenidos por la Colaboración Planck se obtiene que $H_0 = 67.03 \pm 0.54$ km/s/Mpc.
- **Inferencia del valor de H_0 utilizando fuertes lentes gravitacionales de cuásares:** Las lentes gravitacionales ofrecen un método independiente de las SNeIa y del CMB para determinar H_0 . Las lentes gravi-

tacionales se forman cuando la luz procedente de objetos distantes (como cuásares) se curva alrededor de un objeto masivo (la “lente”). Los rayos de luz emitidos desde la fuente toman diferentes caminos a través del espacio-tiempo, como consecuencia los rayos de luz viajan a través de diferentes potenciales gravitacionales, esto ocasiona que los rayos de luz emitidos de la fuente al mismo tiempo lleguen a un observador en diferentes momentos. Si la fuente es variable, este tiempo de retraso entre las múltiples imágenes se puede medir mirando variaciones en el flujo de fotones de la fuente.

El retraso de tiempo está relacionado con una cantidad denominada *Distancia de tiempo de retardo*, $D_{\Delta t}$, esta cantidad depende de la distribución de masa en la lente, de la distribución de masa a lo largo de la línea de visión y de algunos parámetros cosmológicos. Aunque, $D_{\Delta t}$ es principalmente sensible a H_0 . Midiendo la distancia de tiempo de retardo de 6 cuásares, la colaboración H0LiCOW [6] obtuvo $H_0 = 73.3^{+1.7}_{-1.8}$. En la Figura 2.3 se muestra uno de los seis cuásares utilizados por la colaboración H0LiCOW para determinar H_0 .

- **Inferencia del valor de H_0 con ondas gravitacionales:**

La detección de la onda gravitacional GW170817 [58] y de su contraparte electromagnética dada por la explosión de rayos gamma GRB 170817A [59], marco el comienzo de la astronomía de múltiples mensajeros con ondas gravitacionales y permitió encontrar una nueva forma de medir H_0 .

A distancias d menores a 50 Mpc, podemos aproximar la velocidad a la cual se mueve un objeto con el flujo de Hubble como

$$v_H = H_0 d, \quad (2.9)$$

donde v_H es la velocidad del flujo de Hubble y d es la distancia a la que se encuentra el objeto de interés con respecto a nosotros. Manipulando la ecuación (2.9), notamos que si medimos a v_H y d para la misma fuente, podemos obtener un estimado de H_0 .

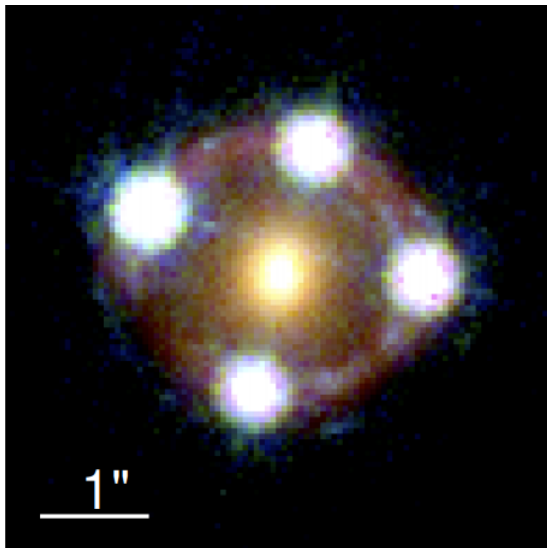


Figura 2.3: Imagen multicolor del cuásar HE 04351223. En el centro de la imagen se encuentra una galaxia que produce una lente gravitacional, como consecuencia del lente se observan cuatro imágenes del mismo cuásar. La imagen se ha creado utilizando una combinación de imágenes tomadas en el óptico y en el infrarrojo cercano. La imagen fue tomada por la colaboración H0LiCOW [6].

Podemos determinar la distancia d al lugar en el cual se produjeron un conjunto de ondas gravitacionales utilizando las sirenas estándar⁵. Las sirenas estándar son sistemas binarios compactos, que están formados por estrellas de neutrones o agujeros negros. Por otro lado, para obtener la velocidad del flujo de Hubble los astrónomos buscan una contraparte electromagnética asociada a la sirena estándar, si la encuentran, pueden obtener v_H y con ello H_0 .

La primera medición de la constante de Hubble con ondas gravitacionales [61] arrojó $H_0 = 70.0^{+12}_{-8}$ km/s/Mpc, esta estimación tiene una incertidumbre de alrededor del 15%, como resultado de una combinación de ruido instrumental en los detectores, del hecho de que no se conoce con precisión la inclinación del plano orbital⁶ del sistema binario con respecto

⁵El análogo gravitacional de una candela estándar. El nombre que reciben estos objetos se debe a cuestiones históricas [60], no tiene que ver con el hecho de que los eventos sean estandarizables.

⁶El valor de H_0 está degenerado con el ángulo de inclinación.

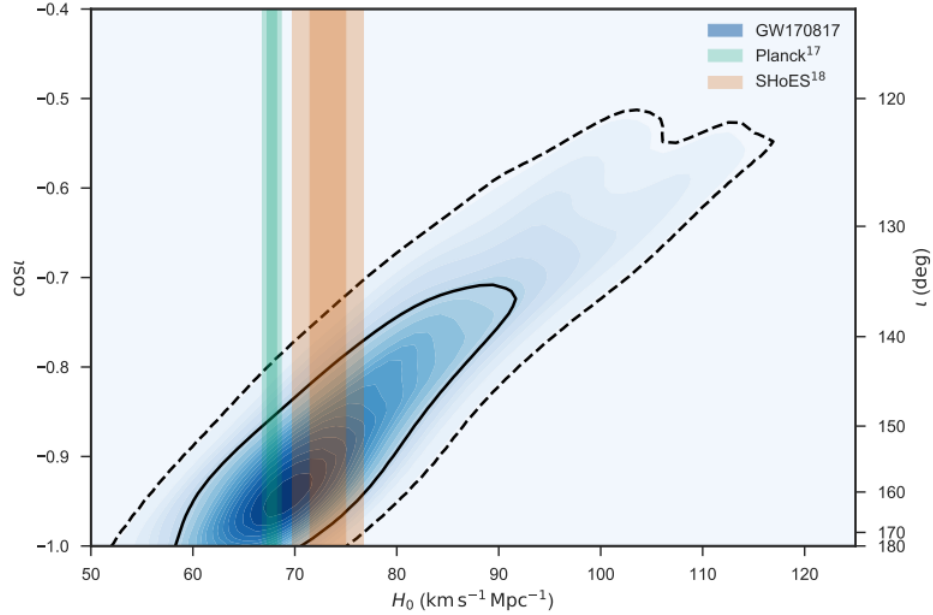


Figura 2.4: Constricciones sobre el parámetro de Hubble obtenidas con distintas mediciones. Las bandas de color verde y naranja muestran la incertidumbre a 1σ y a 2σ de las mediciones de H_0 utilizando SNeIa calibradas con cefeidas y de Planck 2018. Los contornos en azul representan la medición de H_0 con ondas gravitacionales. Como se menciona en el texto, la medición de la constante de Hubble esta degenerada con el coseno del ángulo de inclinación de la sirena estándar. El coseno del ángulo de inclinación se muestra en el eje vertical. Figura tomada de [61].

a la Tierra y de que solo existía una sirena estándar para la estimación de H_0 , en la Figura 2.4 se muestra la primera estimación de H_0 utilizando ondas gravitacionales. La estimación es consistente con los valores de H_0 encontrados usando SNeIa y el CMB. Se espera [62] que futuras observaciones de ondas gravitacionales puedan realizar mediciones más precisas de H_0 .

2.3. Sobre la tensión de H_0

El modelo Λ CDM, proporciona un ajuste notable a la mayor parte de los datos observacionales disponibles, no obstante, no podemos dejar de lado la

presencia de la tensión H_0 , ya que es de vital importancia entender de donde proviene, en caso de que provenga de errores sistemáticos en las mediciones del universo tardío, podríamos estar estimando mal la distancia a objetos lejanos, por otro lado, si la tensión es indicación de física más allá del modelo Λ CDM, entonces nos proporcionaría los medios para alcanzar una comprensión más profunda de la teoría subyacente de la gravedad. En la Figura 2.5 se muestran distintas estimaciones⁷ de H_0 , en la figura se puede observar que la tensión está presente incluso cuando se compara el valor de H_0 obtenido por distintas colaboraciones.

Las estimaciones que aparecen en la parte superior de la Figura 2.5 son obtenidas ajustando las ecuaciones de movimiento de Λ CDM a las observaciones, la primera de ellas la obtiene la colaboración Planck 2018 [2] con el estudio del CMB (TT, TE, EE+lowE+lensing), la segunda se obtiene con el estudio de la abundancia de los elementos ligeros, las oscilaciones acústicas de bariones y con el uso de los datos del Dark Energy Survey [63].

En la parte media de la gráfica se muestran las estimaciones de H_0 que son obtenidas sin utilizar las ecuaciones de movimiento de Λ CDM, la primera de ellas la obtiene la colaboración SH0ES calibrando la luminosidad de las SNeIa con las estrellas cefeidas. La segunda la obtiene la colaboración CCHP calibrando la luminosidad de las SNeIa con estrellas TRGB [6]. La tercera se obtiene calibrando la luminosidad de las SNeIa con estrellas MIRAS [64]. La cuarta estimación es independiente de las tres anteriores, esta es obtenida con el estudio de lentes gravitacionales de cuásares [6]. La quinta es obtenida por el Megamaser Cosmology Project [65] y finalmente la sexta se obtiene con el estudio de fluctuaciones en el brillo de la superficie de distintas galaxias [63].

- **¿Existen errores sistemáticos en Planck 2018?:** Los espectros angulares del CMB nos proporcionan la forma más precisa de testear modelos cosmológicos. Sin embargo, como ocurre con cualquier medición experimental, estos podrían estar sujetos a errores sistemáticos y ciertamente un

⁷No todas las mediciones son estadísticamente independientes, para más información consultar [1].

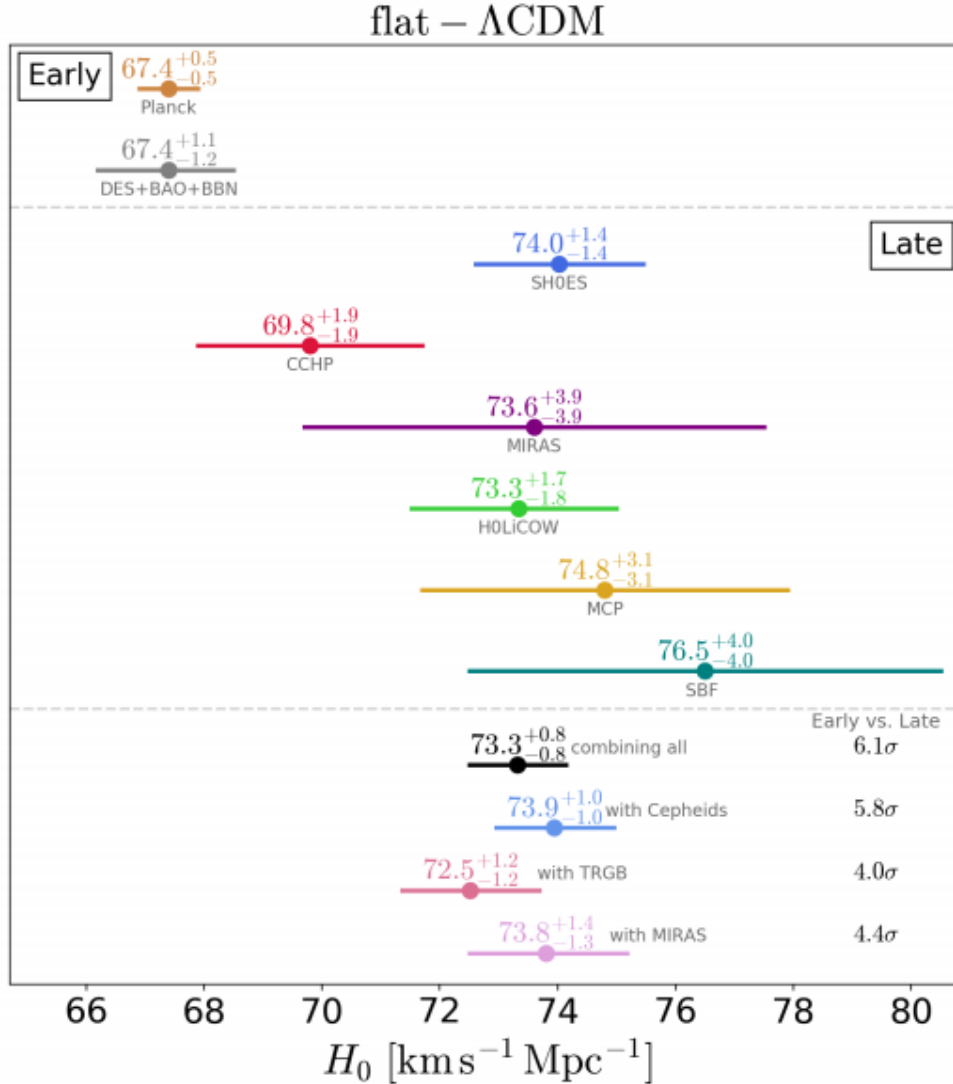


Figura 2.5: Estimaciones y mediciones de la constante de Hubble. En la parte superior izquierda se muestran dos estimaciones de H_0 obtenidas asumiendo a Λ CDM. En la parte central del gráfico se muestran mediciones de H_0 obtenidas con distintos métodos de medición. El panel inferior se muestran distintas combinaciones de las mediciones y la tensión hay entre éstas y las predicciones dadas por Λ CDM. Figura tomada de Riess et. al. [1].

error sistemático podría estar presente en las mediciones de Planck 2018 [1], esto es sugerido por lo que se conoce como la anomalía de A_{lens} . El parámetro de A_{lens} es un parámetro no físico, que fue introducido a mano [66] en las ecuaciones para modular el efecto de las lentes gravitacionales

en el espectro de potencias angular. Si se toma $A_{\text{lens}} = 0$, se estarían ignorando por completo los efectos de lensing en el espectro de potencias, mientras que si tomamos $A_{\text{lens}} = 1$ recuperamos el valor de lensing esperado por el modelo cosmológico estándar. La anomalía de A_{lens} , consiste en que los espectros de potencias obtenidos por Planck 2018 muestran una preferencia por $A_{\text{lens}} > 1$ con una confianza estadística mayor a 2σ [67]. Si la anomalía de A_{lens} es causada por un error sistemático, una corrección podría ayudar a reducir la tensión H_0 , aunque no sería suficiente para solucionarla [7].

- **¿Existen errores sistemáticos en la calibración de las Supernovas?:** De momento, no se conoce ningún error sistemático en la calibración de las Supernovas tipo Ia con estrellas cefeidas que tenga la capacidad de solucionar la tensión H_0 [7].

Aunque es importante notar que las SNeIa también pueden ser calibradas utilizando otro tipo de estrellas, por ejemplo, es posible calibrar a las SNeIa utilizando estrellas gigantes rojas variables (MIRAS), esta calibración [64] otorga $H_0 = 73.6 \pm 3.9$ km/s/Mpc y es consistente con el valor obtenido utilizando cefeidas. Por otro lado, la colaboración The Carnegie-Chicago Hubble Program (CCHP) utiliza las estrellas denominadas TRGB para calibrar a las SNeIa, ellos encuentran un valor de $H_0 = 69 \pm 1.9$ km/s/Mpc, este valor se encuentra en una tensión de 1.22σ con respecto al valor obtenido por Planck 2018 y una tensión de 1.56σ con respecto a la calibración de cefeidas, desafortunadamente aún no existe una explicación para esto [7]. En la Figura 2.6 se muestra como ha cambiado el valor estimado de la constante de Hubble a lo largo del tiempo.

Como puede observarse, la posibilidad de que tensión H_0 pueda ser explicada por errores sistemáticos en las mediciones aún no está completamente descartada [7].

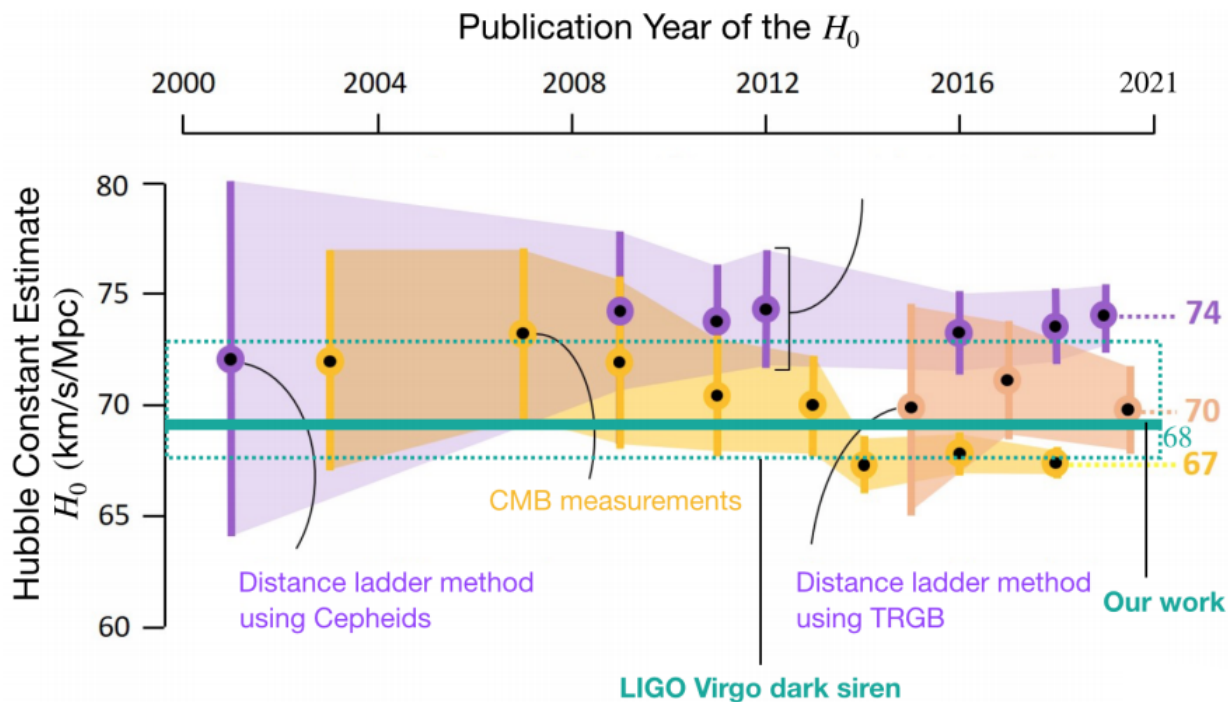


Figura 2.6: En la figura se muestra como han ido cambiando las estimaciones de la constante de Hubble como función del tiempo. En color amarillo se muestran las estimaciones de H_0 obtenidas estudiando el CMB. En color morado se muestran las estimaciones de H_0 obtenidas con mediciones de estrellas cefeidas. En color naranja, se muestra las estimaciones obtenidas utilizando las estrellas conocidas como TRGB. En color verde se muestra la estimación de H_0 utilizando ondas gravitacionales, y en color verde oscuro se muestra el valor de H_0 que se espera obtener con las nuevas mediciones de LIGO y Virgo. Figura tomada de [62].

2.4. La tensión S_8

Las *encuestas* a gran escala se han convertido en una de las herramientas más poderosas para testear distintos modelos cosmológicos, en la actualidad, la posibilidad de mapear la distribución de materia a grandes escalas en diferentes corrimientos al rojo nos permite medir la amplitud y la tasa de crecimiento de estructura σ_8 y $f\sigma_8$.

Las mediciones más recientes sugieren que existe una tensión mayor a 2σ entre el valor de la amplitud de las fluctuaciones de materia obtenido por la

colaboración Planck 2018 asumiendo el modelo Λ CDM y el valor obtenido a través de las mediciones del universo local [68]. Para observar esta tensión es conveniente definir la siguiente cantidad $S_8 \equiv \sigma_8 \sqrt{\Omega_m/0.3}$. En la Tabla 2.1 se muestra el valor de S_8 obtenido por distintas colaboraciones y la tensión con el valor de S_8 obtenido por Planck 2018.

Colaboración	S_8	Tensión con respecto a Planck 2018
Planck 2018 [2]	$S_8 = 0.834 \pm 0.016$	—
KiDS-450 [69]	$S_8 = 0.745 \pm 0.039$	2.11σ
KiDS-450+2dFLenS [70]	$S_8 = 0.742 \pm 0.035$	2.39σ
KiDS+VIKING-450 [71]	$S_8 = 0.737^{+0.040}_{-0.036}$	2.25σ
DES [72]	$S_8 = 0.783^{+0.021}_{-0.025}$	1.93σ
KiDS-1000 [73]	$S_8 = 0.766^{+0.020}_{-0.014}$	2.65σ

Tabla 2.1: En la primera columna de esta tabla se muestra la encuesta utilizada para obtener S_8 , en la segunda columna se muestra el valor obtenido de S_8 y su correspondiente incertidumbre a 1σ , en la tercera columna se muestra la tensión de cada medición con respecto a Planck 2018.

Es importante notar que esta tensión podría estar relacionada con el exceso de lensing medido por Planck [74], el cual ocasiona un S_8 más grande.

Capítulo 3

La teoría de Horndeski

La naturaleza de la expansión acelerada del universo sigue siendo uno de los mayores misterios de la física moderna. La explicación más simple para este fenómeno es que la aceleración es causada por una constante cosmológica. No obstante, las tensiones mencionadas en el Capítulo anterior han llevado a los teóricos a desarrollar modelos alternativos que pueden explicar la expansión acelerada sin la necesidad de una constante cosmológica. Algunos de estos incluyen la adición de componentes exóticos o una modificación a la Relatividad General. En particular, muchas de estas teorías introducen un campo escalar, un concepto que aparece con frecuencia en la física de partículas. Por ejemplo, la partícula de Higgs es una excitación de un campo escalar llamado campo de Higgs el cual es un componente crucial en el Modelo Estándar de física de partículas. Por otro lado, el añadir un campo escalar a la acción de Einstein-Hilbert, tampoco es algo nuevo en cosmología. En la actualidad sabemos que es necesario que el universo temprano haya pasado por un periodo de expansión exponencial (también conocido como periodo de inflación) o de lo contrario no podríamos explicar los problemas de planitud, horizontes y reliquias primordiales. El modelo estándar para la inflación resuelve todos estos problemas, recurriendo a un campo escalar, el cual provoca la expansión del universo recurriendo a la adición de un campo de escalar a la acción de Einstein-Hilbert.

En el universo tardío, añadir este campo escalar añadiría un grado de libertad dinámico adicional que podría explicar la expansión acelerada del universo

e introducir nuevos efectos en la formación de estructura.

La teoría escalar-tensor más general construida a partir de un Lagrangiano no degenerado, que tiene ecuaciones de campo de segundo orden, se conoce como teoría de Horndeski [9]. En cuatro dimensiones, la acción de la teoría de Hordenski es:

$$S[g_{ab}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\sum_{i=2}^5 \frac{1}{8\pi G} \mathcal{L}_i[g_{ab}, \phi] \right], \quad (3.1)$$

donde los cuatro lagrangianos \mathcal{L}_i , están dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= G_2(\phi, X), & \mathcal{L}_3 &= -G_3(\phi, X)\square\phi, \\ \mathcal{L}_4 &= G_4(\phi, X)R + G_{4X} [(\square\phi)^2 - \phi_{;ab}\phi^{;ab}], \\ \mathcal{L}_5 &= G_5(\phi, X)G_{ab}\phi^{;ab} - \frac{G_{5X}(\phi, X)}{6} [(\square\phi)^3 + 2\phi_{;\mu}^{\nu}\phi_{;\nu}^{\alpha}\phi_{;\alpha}^{\mu} - 3\phi_{;ab}\phi^{;ab}\square\phi], \end{aligned}$$

con G_2 , G_3 , G_4 y G_5 funciones arbitrarias del campo escalar ϕ y su término cinético $2X = -\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi$. En las ecuaciones anteriores R el escalar de Ricci, $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein y usamos los subíndices X y ϕ para denotar derivadas parciales, con respecto a X y ϕ . Las funciones G_i son completamente arbitrarias, sin embargo, en este trabajo se explicará como las hemos restringido.

3.1. Restricciones sobre los modelos cosmológicos de Horndeski

La detección casi simultánea de las ondas gravitacionales GW 170817 [58] y la explosión de rayos gamma GRB 170817A [59] impone una fuerte restricción a la velocidad a la que se propagan las ondas gravitacionales [75] para corrimientos al rojo $z \leq 0.01$

$$-3 \times 10^{-15} < c_{GW} - 1 < 7 \times 10^{-16}.$$

Esta restricción impone restricciones a las teorías de Horndeski que podrían explicar la expansión acelerada. Sin embargo, debe de quedar claro que solo

esta dada para $z < 0.01$, lo cual implica que aún es posible que en el universo temprano se haya tenido $c_{GW} \neq 1$ [76].

En esta tesis nos limitaremos a estudiar la subclase de modelos de Horndeski que cumplen la condición $c_{GW} = 1$. Utilizando esta restricción y la ecuación (3.9), es posible mostrar que estos modelos están dados por $G_{4X} = 0$ y $G_5 = 0$. Bajo esta restricción los modelos de Horndeski viables de tienen la forma

$$\mathcal{L} = G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi + G_4(\phi)R, \quad (3.2)$$

donde ϕ representa al campo escalar, R al escalar de Ricci, \square al D'Alembertiano y G_2, G_3 son funciones arbitrarias de ϕ y X . Podemos interpretar al Lagrangiano (3.2) como una extensión a la Relatividad General, ya que dependiendo de la forma en que elijamos a los G_i 's, somos capaces de recuperar diversas teorías de Gravedad, por ejemplo, podemos recuperar Relatividad General si tomamos

$$G_4 = 1/2, \quad G_i = 0, \quad i = 2, 3, \quad (3.3)$$

por otro lado, el modelo Λ CDM surge de elegir a los G_i 's de la siguiente forma

$$G_4 = 1/2, \quad G_2 = -\Lambda, \quad G_3 = 0, \quad (3.4)$$

el modelo de Quintaesencia puede ser recuperado a través de

$$G_4 = 1/2, \quad G_2 = X - V, \quad G_3 = 0. \quad (3.5)$$

y también es posible recuperar a teorías como $f(R)$, Galileones covariantes y otros [29].

3.1.1. Interpretación física de los Lagrangianos en la teoría de Horndeski

Para poder obtener una interpretación física de los G_i 's que aparecen en la teoría de Horndeski, es necesario recurrir a la teoría de perturbaciones lineales a primer orden de las ecuaciones de campo, sin embargo, dado que el objetivo

central de esta tesis no es estudiar la teoría de perturbaciones lineales, tomaremos los resultados obtenidos previamente en la literatura y los utilizaremos para poder interpretar a cada uno de los Lagrangianos que aparecen en la acción (3.1).

Es posible mostrar que la evolución de las perturbaciones lineales de la teoría de Horndeski [25, 28] sobre un fondo de FLRW están determinada por cuatro funciones independientes entre sí, adimensionales y dependientes del tiempo, α_i , estas funciones están dadas por

Fuerza cosmológica de la gravedad $M_*^2(\tau)$: Este término esta relacionado con la tasa de evolución de la masa de Planck efectiva $\alpha_M = \frac{d \ln M_*^2}{d \ln a}$, es decir, controla como varia la intensidad de los campos gravitatorios como función del tiempo y además, está relacionado directamente con el estrés anisotrópico. Recibe contribuciones de G_4, G_5 y tiene la forma

$$M_*^2 \equiv 2 \left(G_4 - 2XG_{4X} - \frac{H\phi'XG_{5X}}{a} + XG_{5\phi} \right). \quad (3.6)$$

Termino cinético α_K : Este término modula que tan fácil es perturbar al campo escalar. Valores altos de α_K suprimen la velocidad del sonido de las perturbaciones escalares. Recibe contribuciones de los cuatro G_i 's

$$\begin{aligned} H^2 M_*^2 \alpha_K \equiv & 2X(G_{2X} + 2XG_{2XX} - 2G_{3\phi} - 2XG_{3\phi X}) \\ & + \frac{12H\phi'X}{a}(G_{3X} + XG_{3XX} - 3G_{4\phi X} - 2XG_{4\phi XX}) \\ & + 12H^2 X(G_{4X} - G_{5\phi} + X[8G_{4XX} - 5G_{5\phi X}] + 2X^2(G_{4XXX} - G_{5XX})) \\ & + \frac{4H^3\phi'X}{a}(3G_{5X} + 7XG_{5XX} + 12X^2G_{5XXX}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Termino de trenzado $\alpha_B(\tau)$: Este termino mide la mezcla entre las perturbaciones de la métrica y del campo escalar. Además, conduce una modificación entre el acoplamiento de la materia y la curvatura, esto se puede aproximar como una modificación de la constante de Newton efectiva. Recibe contribuciones

de G_3 , G_4 y G_5 , tiene la forma

$$HM_*^2\alpha_B \equiv \frac{2\phi'}{a}(XG_{3X} - G_{4\phi} - 2XG_{4\phi X}) + 8HX(G_{4X} + 2XG_{4XX} - G_{5\phi} - XG_{5\phi X})\frac{2H^2\phi'X}{a}(3G_{5X} + 2XG_{5XX}). \quad (3.8)$$

Tensor de exceso de velocidad $\alpha_T(\tau)$: Este término mide la diferencia entre la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales y la velocidad de la luz, $c_{GW} = 1 + \alpha_T$. Recibe contribuciones de G_4 y G_5

$$\alpha_T \equiv 4X(G_{4X} - G_{5\phi}) - \frac{2}{a^2}(\phi'' - 2aH\phi')XG_{5X}, \quad (3.9)$$

debido a la observación de GW 170817, este término está limitado a ser igual a cero para $z < 0.01$, o de lo contrario lidiaríamos con problemas de ajuste fino en la teoría de Horndeski.

3.1.2. Ecuaciones de movimiento

Para estudiar la dinámica de la aceleración cósmica en los modelos de Horndeski, describiremos a la materia como un fluido perfecto mínimamente acoplado a la gravedad, esto nos permite escribir la acción para estos modelos como

$$S[g_{ab}, \phi] = S_H[g_{ab}, \phi] + S_m[g_{ab}], \quad (3.10)$$

donde S_H es la acción de Horndeski asociado a la ecuación (3.2) y S_m es el Lagrangiano que describe al contenido material del universo. Para derivar las ecuaciones de movimiento de la acción (3.10), utilizaremos una métrica de FLRW espacialmente plana

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2]. \quad (3.11)$$

Dado que nos enfocamos en aspectos tardíos del universo, la densidad de radiación puede despreciarse, por tanto, bajo las condiciones anteriores las ecuaciones

de Friedmann para los modelos de Horndeski que cumplen con la restricción establecida en la sección 3.1 están dadas por

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m + \varepsilon, \quad (3.12)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P) = 0, \quad (3.13)$$

con ε es la densidad efectiva asociada al campo escalar y P la presión efectiva, las cuales están dadas por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{1}{3} [-G_2 + 2X(G_{2X} - G_{3\phi})] + 2H\dot{\phi} [-G_{4\phi} + XG_{3X}] \\ + H^2 [1 - 2G_4], \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} P = \frac{2}{3}\dot{H}[1 - 2G_4] + \frac{1}{3}H^2[-3(1 - 2G_4)] + \frac{2}{3}(H\dot{\phi} + \ddot{\phi}) [G_{4\phi} - XG_{3X}] \\ + \frac{1}{3} [G_2 - 2X(G_{3\phi} - 2G_{4\phi\phi})] + \frac{2H\dot{\phi}}{3} [G_{4\phi} + XG_{3X}], \end{aligned} \quad (3.15)$$

ya que el campo escalar representa el papel de la constante cosmológica en estos modelos, resulta útil calcular su ecuación de estado efectiva a través de

$$\omega_\phi = P/\varepsilon, \quad (3.16)$$

además, ya que se espera que las desviaciones con respecto a Λ CDM sean pequeñas, es de esperar que en $z = 0$, $\omega_\phi \approx -1$, lo cual es sumamente útil, ya que nos permitirá obtener las condiciones iniciales que son necesarias para resolver la ecuación (3.13).

En el siguiente Capítulo nos dedicaremos a estudiar las observaciones y a través de ellas extraeremos información acerca de la expansión del universo, la cual nos permitirá obtener cotas sobre los G_i .

Capítulo 4

Reconstrucciones modelo-independientes de observables cosmológicas

Los métodos utilizados para estudiar las observaciones se pueden clasificar en métodos **dependientes** e **independientes** del modelo. Los métodos dependientes del modelo son útiles cuando se conoce la relación entre las variables del fenómeno en estudio y nuestro objetivo es restringir los parámetros libres del modelo. Por otro lado, cuando se quiere poner a prueba un modelo, es útil utilizar los métodos independientes, estos proporcionan información sobre la tendencia general de las variables de interés y nos permiten utilizarlos para testear la validez de distintos modelos. Entre los métodos independientes del modelo más útiles tenemos a los Procesos Gaussianos (GP), los cuales son un enfoque de estadística bayesiana que nos permite obtener una función que describe un conjunto determinado de datos sin asumir un modelo particular para su descripción.

Intuitivamente un Proceso Gaussiano necesita de una serie de puntos observacionales y dados estos puntos el proceso se encarga de encontrar la región de confianza en la cual es más probable que viva la función que describe a los datos¹.

¹Es útil (aunque no del todo correcto) pensar en GP como un método que nos permite asignar

Como se mencionó anteriormente, uno de los objetivos de este trabajo es estudiar la expansión tardía del universo de una manera independiente de cualquier modelo cosmológico, para ello haremos uso del mayor número posible de observaciones que involucren a $H(z)$ y de GP. En la Figura 4.1 se muestra una representación esquemática del resultado que se espera obtener al finalizar este Capítulo.

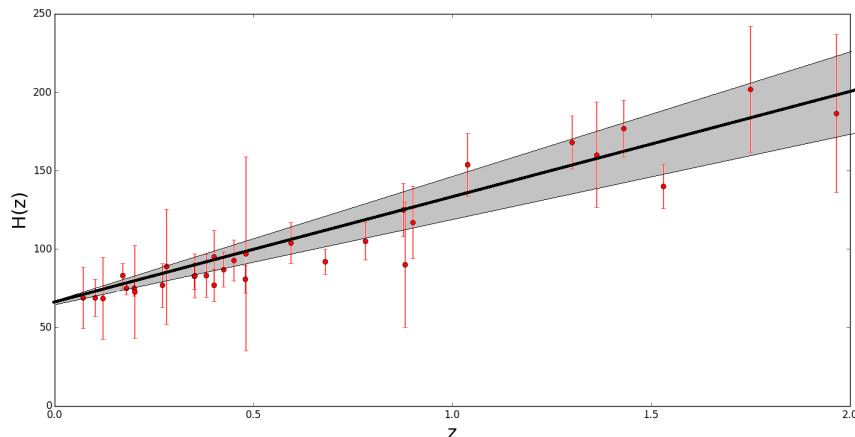


Figura 4.1: En rojo se muestran las observaciones de $H(z)$ obtenidas de [77]. La línea negra representa el valor medio de la función a reconstruir y la región en color gris representa los contornos de confianza a 1σ .

Una vez que tengamos la reconstrucción para la expansión tardía del universo, podremos utilizarla para obtener cotas sobre parámetros cosmológicos relevantes, tales como H_0 o los parámetros de densidad Ω , y en nuestro caso será de especial interés acotar la forma de los G_i que aparecen en la teoría de Horndeski.

4.1. Procesos Gaussianos

El propósito general de esta sección es explicar el formalismo que está detrás de los Procesos Gaussianos, la aplicación de este método en el contexto de una región de confianza en la cual debe de vivir el modeo que describe a las observaciones, además nos permite interpolar y extrapolar estos contornos a las regiones en las cuales no tenemos observaciones.

la cosmología es reservada para la subsección 4.2.1. En estadística, un Proceso Gaussiano (GP) es un proceso estocástico tal que toda colección finita de variables aleatorias que compone al proceso tiene una distribución Gaussiana multivariante, es decir, cada combinación lineal finita de estas variables se distribuye normalmente, y la distribución para el Proceso Gaussiano es la distribución conjunta de todas las variables aleatorias que lo componen [78].

Dadas las características anteriores, un Proceso Gaussiano para una función f definida en un conjunto de puntos \mathbf{z} está completamente especificado por el valor medio de la función $f(\mathbf{z})$, el cual denotamos por \bar{f} y por su función de covarianza (kernel) $k(\tilde{z}, z)$. Denotamos al GP para $f(\mathbf{z})$ de la siguiente manera:

$$f(\mathbf{z}) \sim \mathcal{N}(\bar{f}, K(\mathbf{z}, \mathbf{z})). \quad (4.1)$$

donde K es la matriz de covarianza para la distribución (4.1) y esta dada por

$$[K(\mathbf{z}, \mathbf{z})]_{ij} \equiv k(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j), \quad (4.2)$$

la matriz de covarianza expresa el hecho de que la función a reconstruir evaluada en un punto \tilde{z} no es independiente de la función evaluada en otro punto z . Existe una amplia gama de funciones de covarianza, se ha mostrado en diferentes artículos [78, 79, 80] que elegir dos kernels distintos para realizar las reconstrucciones lleva a un cambio en el valor medio de los parámetros a determinar por la reconstrucción, sin embargo, el valor medio de estos parámetros siempre² coincide dentro del intervalo de confianza a 1σ entre las distintas reconstrucciones. En este trabajo, solo usaremos dos distintos kernels, para ser específicos usamos los dos siguientes

$$k(z, z') = \sigma_f^2 \exp\left(\frac{-(z - z')^2}{2l^2}\right), \quad \rightarrow \quad \text{Cuadrático exponencial} \quad (4.3)$$

$$k(z, z') = \sigma_f^2 \left(\frac{l_f}{(z - z')^2 + l_f^2}\right), \quad \rightarrow \quad \text{Kernel de Cauchy} \quad (4.4)$$

²Siempre y cuando se elija una función de covarianza razonable para el problema que se está tratando, en nuestro caso necesitamos que esta función sea continua y diferenciable al menos una ocasión, además es de esperar que la correlación para la función evaluada en dos puntos decaiga con la distancia.

donde σ_f y l son dos parámetros libres conocidos con el nombre de hiperparámetros. Físicamente σ_f determina el ancho de la función reconstruida y l determina cómo cambia la correlación entre dos puntos, un l grande (con respecto a la unidad) da como resultado una función reconstruida suave, mientras que un l pequeño otorga una función oscilante [81].

El kernel cuadrático exponencial describe de manera efectiva a la familia de kernels conocidos como *Matérn*³ evitando los problemas de convergencia asociados con los hiperparámetros de estos. Como desventaja, se ha mostrado que el kernel cuadrático exponencial puede llevar a subestimar los contornos de confianza asociados con las reconstrucciones [81]. Por otro lado, el kernel de Cauchy no pertenece a la familia de *Matérn* y no puede ser descrito por el kernel cuadrático exponencial, por esta razón es interesante analizarlo como una alternativa para describir la covarianza de los datos.

Par analizar como reconstruir una función utilizando GP, tomemos un conjunto de datos observacionales (z, y) , asumiremos que las observaciones están dispersadas alrededor de la función que queremos reconstruir, esto es, $y_i = f(z_i) + \epsilon_i$, donde $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$, esto nos permite asociar una distribución de probabilidad a las observaciones, la cual toma la siguiente forma

$$y \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}, K(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + C), \quad (4.5)$$

donde $\bar{\mu}$ es el valor medio de las observaciones, C es su matriz de covarianza y K , está dado por la ecuación (4.2). Los hiperparámetros σ_f y l se obtienen maximizando el logaritmo⁴ de la distribución de probabilidad asociada a las observaciones

$$\begin{aligned} \ln L = \ln p(y|\mathbf{z}, \sigma_f, l) = \\ -\frac{1}{2}(y - \mu)^T [K(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + C]^{-1} (y - \mu) - \frac{1}{2} \ln |K(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + C| + \text{cte.} \end{aligned} \quad (4.6)$$

³Estos kernels pueden ser interpretados como expansiones en serie de Taylor del kernel Cuadrático exponencial.

⁴Dado que se asume que las distribución de las observaciones es Gaussiana, tomar el logaritmo de la distribución de probabilidad simplifica la maximización, aunque no es necesario hacerlo.

Por otro lado, podemos generar una función aleatoria $f(z)$ a través de un proceso Gaussiano, para ello, generamos un vector f^* que contiene el valor de la función evaluada en los puntos \mathbf{z}^* donde queremos reconstruir nuestra función y le asociamos una distribución de probabilidad

$$f^* \sim \mathcal{N}(\bar{\mu}^*, K(\mathbf{z}^*, \mathbf{z}^*)), \quad (4.7)$$

donde $\bar{\mu}^*$ es el valor medio asumido a priori para f^* y K se obtiene a través de las funciones de covarianza (kernels). Podemos calcular la distribución de probabilidad conjunta entre las distribuciones (4.5) y (4.7), con lo cual obtenemos

$$\begin{bmatrix} y \\ f^* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\mu}^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + C & K(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) \\ K(\mathbf{z}^*, \mathbf{z}) & K(\mathbf{z}^*, \mathbf{z}^*) \end{bmatrix} \right), \quad (4.8)$$

en la ecuación anterior “ y ” es conocido a través de las observaciones y nuestro objetivo central es acotar el valor de la función f^* en la región en la cual no tenemos datos, esto se puede hacer calculando la distribución de probabilidad condicional para la función f^*

$$f^* | \mathbf{z}, \mathbf{z}^*, y \sim \mathcal{N}(\bar{f}^*, \text{cov}(f^*)), \quad (4.9)$$

con

$$\bar{f}^* = \bar{\mu}^* + K(\mathbf{z}^*, \mathbf{z}) [K(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + C]^{-1} (y - \bar{\mu}), \quad (4.10)$$

$$\text{cov}(f^*) = K(\mathbf{z}^*, \mathbf{z}^*) - K(\mathbf{z}^*, \mathbf{z}) [K(\mathbf{z}, \mathbf{z}) + C]^{-1} K(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*), \quad (4.11)$$

donde \bar{f}^* es la media de f^* y $\text{cov}(f^*)$ su matriz de covarianza. La ecuación (4.9) es la distribución posterior de la ecuación (4.7) dado un conjunto de datos y el prior asumido para f^* . Las ecuaciones (4.10) y (4.11) pueden parecer complejas, no obstante, en esas ecuaciones

$\bar{\mu}$: Es el valor medio de las observaciones.

\mathbf{z} : Son los puntos en los cuales están las observaciones.

C : Es la matriz de covarianza de los datos

$\bar{\mu}^*$: Es el valor medio asumido a priori para la reconstrucción⁵.

\mathbf{z}^* : Es el conjunto de puntos en donde queremos reconstruir f^* .

K : El elemento ij de la matriz de covarianza se calcula evaluando las funciones de covarianza (4.3) y (4.4) en los puntos z_i y z_j .

por tanto, lo único que tenemos que hacer para reconstruir a f^* es calcular K , el valor de los hiperparámetros σ_f , l y sustituir el resultado en las ecuaciones (4.10) y (4.11). Para obtener más información sobre los Procesos Gaussianos, remitimos al lector a [11, 81].

4.2. Datos observacionales empleados en las reconstrucciones

- **Pantheon SNeIa**: Utilizamos los datos de Pantheon [82], esta muestra contiene 1048 supernovas de tipo Ia en un rango de corrimiento al rojo $0.01 < z < 2.26$, la calibración de los datos se realiza con los siguientes priors sobre H_0
 - Planck [2]: $H_0^{Planck} = 67.4 \pm 0.5$ km/s/Mpc.
 - Riess [3]: $H_0^R = 73.24 \pm 1.74$ km/s/Mpc.
 - TRGB [5]: $H_0^{TRGB} = 69.8 \pm 1.9$ km/s/Mpc.
 - H0LiCOW [6]: $H_0^{HW} = 73.3_{-1.8}^{+1.7}$ km/s/Mpc.
- **Cronómetros cósmicos (CC)**: Los datos de Cronómetros cósmicos proporcionan estimaciones para el valor de $H(z)$, las cuales no dependen de un modelo cosmológico particular. Estas estimaciones se obtienen [83] comparando la edad de galaxias con baja formación de estrellas, con una metalicidad similar y separadas por un pequeño intervalo de corrimiento

⁵En la subsección 4.2.1 se explica como elegimos el prior para realizar las reconstrucciones de la expansión tardía.

al rojo. Para obtener estas estimaciones los astrónomos miden la diferencia Δz de corrimiento al rojo entre un par de galaxias con las características anteriores, además miden el espectro de cada una de ellas y utilizando el modelo de evolución estelar [84] BC03 (Bruzual & Charlot 2003) ellos analizan el espectro y con ello obtienen una estimación para la edad t de cada una de las galaxias. En el modelo BC03, los parámetros ajustables son la función de masa estelar inicial⁶ (IMF) y el ritmo de formación de estrellas (SFR), este modelo adopta la parametrización de Chabrier [85] para la IMF y diversas funciones para el ritmo de formación de estrellas. Una vez que se ha medido Δz y se ha estimado Δt (con ayuda del modelo BC03), entonces, a través de la determinación del cociente $\Delta z/\Delta t$ es posible inferir la derivada dz/dt y con ello obtener $H(z)$ a través de la siguiente ecuación

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}.$$

En la actualidad hay 31 estimaciones [77] para $H(z)$ obtenidas mediante los cronómetros cósmicos.

- **Clustering de galaxias:** Los astrónomos analizan las oscilaciones acústicas de bariones con funciones de correlación de dos puntos, este análisis les permite obtener medidas [86] del producto $H(z)r_d$, donde r_d es el horizonte de sonido en la época del arrastre⁷. Para romper la degeneración entre estos dos parámetros es necesario asumir una cosmología fiducial esto les permite estimar r_d y posteriormente obtener $H(z)$, la cosmología fiducial que asumen es Λ CDM.

Actualmente hay 20 estimaciones [77] de $H(z)$ obtenidas con este método. En el artículo [77] para calibrar a los datos se asume como valor común $r_d = 147.33 \pm 0.49$ Mpc el cual es obtenido por la colaboración Planck 2015 [87]. Sin embargo, antes de realizar la calibración es necesario tomar

⁶La IMF es una función que describe la distribución inicial de masas para una población de estrellas.

⁷En inglés la época de arrastre es conocida como *drag epoch*.

en cuenta el efecto sistemático asociado con el hecho de algunos datos fueron obtenidos considerando cosmologías fiduciales distintas, después de realizar la corrección a este efecto se llega finalmente a $r_d = 147.33 \pm 5.08 \text{Mpc}$. Cabe señalar que la matriz de covarianza que se asume en el artículo es diagonal, los resultados de la calibración se presentan en la Tabla 2 de [77].

4.2.1. Reconstrucción de la expansión tardía

Para realizar las reconstrucciones de $H(z)$, es necesario transformar las mediciones, para ello recordamos que los datos de la muestra Pantheon una vez que están calibrados nos dan información sobre el módulo de distancia $\mu(z)$, el cual está relacionado con la distancia luminosa a través de la siguiente ecuación

$$d_L(z) = 10^{(\mu(z)-25)/5}, \quad (4.12)$$

para transformar los datos de Pantheon sustituimos los datos de $\mu(z)$ en la ecuación (4.12), con ello obtenemos

$$d_L(z) = \bar{d}_L(z) \pm \sigma_{d_L}(z), \quad (4.13)$$

donde \bar{d}_L es el valor medio de d_L y σ_{d_L} es la incertidumbre estadística a 1σ que resulta de la propagación de errores. La propagación de errores es realizada con el procedimiento que se muestra en el libro [88], para detallar el proceso de propagación de errores, supongamos que tenemos una cantidad $A = a \pm b$, donde a es su valor medio y b su incertidumbre estadística a 1σ , entonces al dividir A por una constante n , la incertidumbre estadística resultante de esa operación (a la cual llamaremos B) es $B = \frac{b}{n}$, por otro lado, el error E que resulta de la operación 10^A , es

$$E = \sqrt{10^{2a}b} \ln 10, \quad (4.14)$$

bajo estas reglas se puede mostrar que

$$\sigma_{d_L}(z) = \frac{\sqrt{10^{\frac{2}{5}\mu(z)}\sigma_\mu(z)} \ln 10}{5 \times 10^5}, \quad (4.15)$$

donde $\mu(z)$ es el valor medio de las observaciones de Pantheon y $\sigma_\mu(z)$ su incertidumbre a 1σ . Para realizar las reconstrucciones resulta útil definir la siguiente cantidad

$$d_p(z) \equiv \frac{d_L(z)}{(1+z)c}, \quad (4.16)$$

donde c es la velocidad de la luz. Tomamos la ecuación (4.13) y la sustituimos en la ecuación (4.16), con lo cual obtenemos

$$d_p(z) = \frac{1}{(1+z)c} (\bar{d}_L(z) \pm \sigma_{d_L}(z)), \quad (4.17)$$

por tanto hemos transformado los datos de $\mu(z)$ en información sobre la función $d_p(z)$. Si asumimos que el universo es espacialmente plano y usamos la ecuación (4.16) podemos mostrar que

$$d'_p(z) = \frac{1}{H(z)}, \quad (4.18)$$

esto es importante, ya que nos permite transformar las mediciones de CC y CL a información sobre d'_p , para ello sustituimos las mediciones de $H(z)$ en (4.18) y con ello obtenemos

$$d'_p(z) = \frac{1}{\bar{H}(z)} \pm \frac{\sigma_H(z)}{\bar{H}^2(z)} \equiv d'_p(z) \pm \sigma_{d'_p}(z), \quad (4.19)$$

donde $\bar{H}(z)$ es el valor medio de las observaciones de $H(z)$ y $\sigma_H(z)$ es su correspondiente incertidumbre a 1σ .

El proceso de transformar las mediciones nos permite observar lo siguiente: Los datos de Pantheon nos otorgan información sobre la función $d_p(z)$ y las mediciones de CC y CL nos dan información sobre la derivada con respecto a z de la función $d_p(z)$. Esto nos otorga la información necesaria para aplicar un Proceso Gaussiano y con ello reconstruir a la función $d_p(z)$, para hacerlo aplicamos el siguiente procedimiento:

1. Para iniciar la reconstrucción asignamos una distribución probabilidad Gaussiana a los datos de $d_p(z)$, los cuales son obtenidos a través de la

ecuación (4.17). El valor medio de esta distribución va a estar dado por $\bar{d}_L(z)$, mientras que su desviación estándar es $\sigma_{d_L}(z)$.

2. Asignamos una distribución de probabilidad Gaussiana al resultado de sustituir las mediciones de CC y CL en la ecuación (4.19). El valor medio de esta distribución es $\bar{d}'_p(z)$, mientras que su desviación estándar es $\sigma_{d'_p}(z)$.
3. Calculamos la distribución de probabilidad conjunta entre las distribuciones asignadas a $d_p(z)$ y $d'_p(z)$.
4. Elegimos los z en los cuales queremos reconstruir la función $d_p(z)$. En nuestro caso elegimos reconstruir la función en 100 puntos equidistantes dentro del intervalo en el cual se encuentran las observaciones, es decir, en $z \in (0, 2.37)$.
5. Los hiperparámetros σ_f y l que aparecen en las funciones de covarianza (4.3) y (4.4) son obtenidos maximizando el logaritmo de la distribución de probabilidad de las observaciones, el cual está dado por la ecuación (4.6).
6. Asignamos un prior para el valor medio de $d_p(z)$. En nuestro caso, para todas las reconstrucciones elegimos un prior plano para el valor medio de $d_p(z)$. El prior se toma de tal forma que la distribución de probabilidad que se le asigna es centrada en cero y tiene un ancho igual a 2 veces el valor del hiperparámetro σ_f , elegir este prior hace que evitemos asumir una cosmología fiducial para la reconstrucción. Es importante notar que el prior debe de ser colocado en todos los z^* en los cuales se realiza la reconstrucción. El valor de σ_f para el kernel de Gaussiano y el kernel de Cauchy es del orden de la unidad, mientras que los datos para $d_p(z)$ tienen un orden que varía desde de 10^{-3} hasta 10^{-1} , por lo que el prior resulta lo suficientemente grande como para incluir a todas las mediciones, ver Figura 4.2.

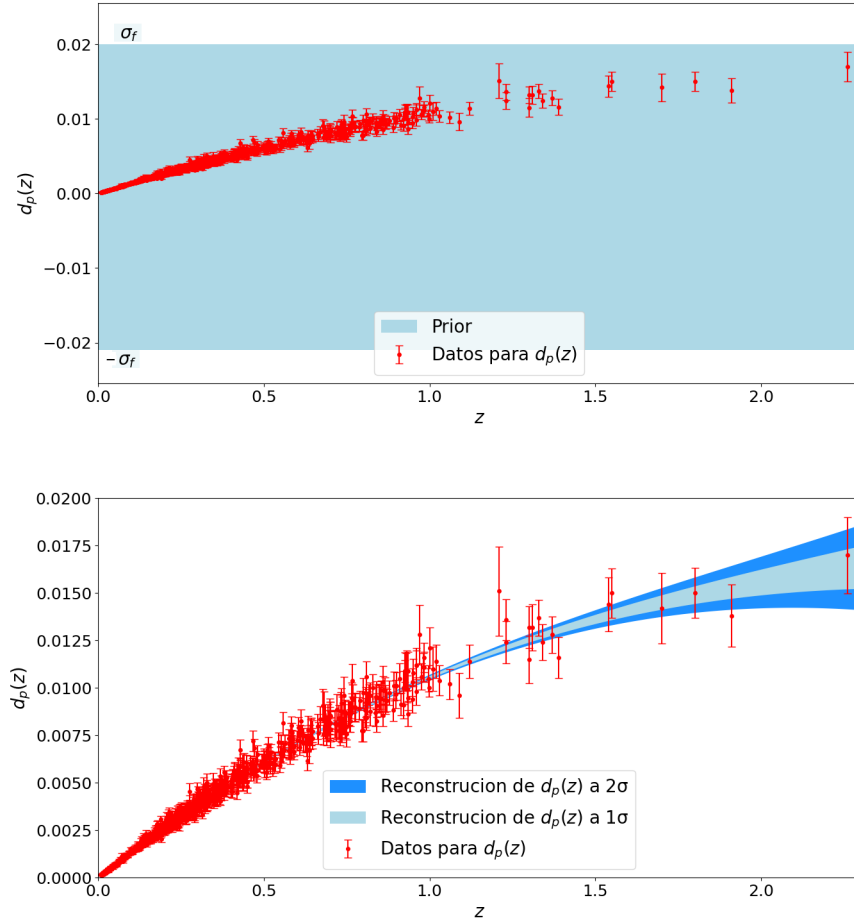


Figura 4.2: En la parte superior se muestra el prior utilizado para realizar las reconstrucciones, en la parte inferior se muestran los contornos de confianza a una y dos desviaciones estándar, los cuales son obtenidos al realizar la reconstrucción con los datos de Pantheon calibrados con H_0^R .

7. Finalmente, para realizar la reconstrucción es necesario calcular la distribución de probabilidad que le corresponde a la reconstrucción, la cual esta dada por la ecuación (4.9). Para ello hacemos uso del código que se muestra en el artículo [81], el cual tiene como principal objetivo estimar el valor medio y la varianza de la distribución asignada a la reconstrucción, los cuales están dados por las ecuaciones (4.10) y (4.11), respectivamente.

Como resultado de aplicar el procedimiento anterior obtenemos a la función $d_p(z)$ reconstruida, esto nos permite obtener $H(z)$ de la ecuación (4.16), de la

siguiente manera

$$H(z) = \frac{1}{d'_p(z)} = \frac{1}{\overline{d'_p}(z)} \pm \frac{\sigma_{d'_p}(z)}{\overline{d'^2_p}(z)}, \quad (4.20)$$

donde $\overline{d'_p}(z)$ es el valor medio de la derivada de la función reconstruida y $\sigma_{d'_p}(z)$ es su desviación estándar.

4.3. Reconstrucciones de $H(z)$

En esta sección se muestran los resultados obtenidos para la reconstrucción de la expansión tardía del universo. En las Figuras 4.3-4.4 se puede observar el resultado de realizar el proceso Gaussiano con distintos conjuntos de datos. Esto es importante, ya que como se menciona en 4.2 los datos de CL están calibrados asumiendo una cosmología de referencia, lo cual introduce un sesgo en las reconstrucciones. Se observa que incluir las mediciones de CL, en el proceso Gaussiano tiene como efecto una reducción en el ancho de los contornos de confianza principalmente para $z > 1.5$, no obstante, es importante observar que todas las reconstrucciones coinciden en el intervalo de confianza a $1-\sigma$, sin importar si incluimos o excluimos los datos de CL.

En las Tablas 4.1-4.2 se muestra el valor de H_0 obtenido con cada una de las reconstrucciones, en la siguiente sección se analizarán los resultados.

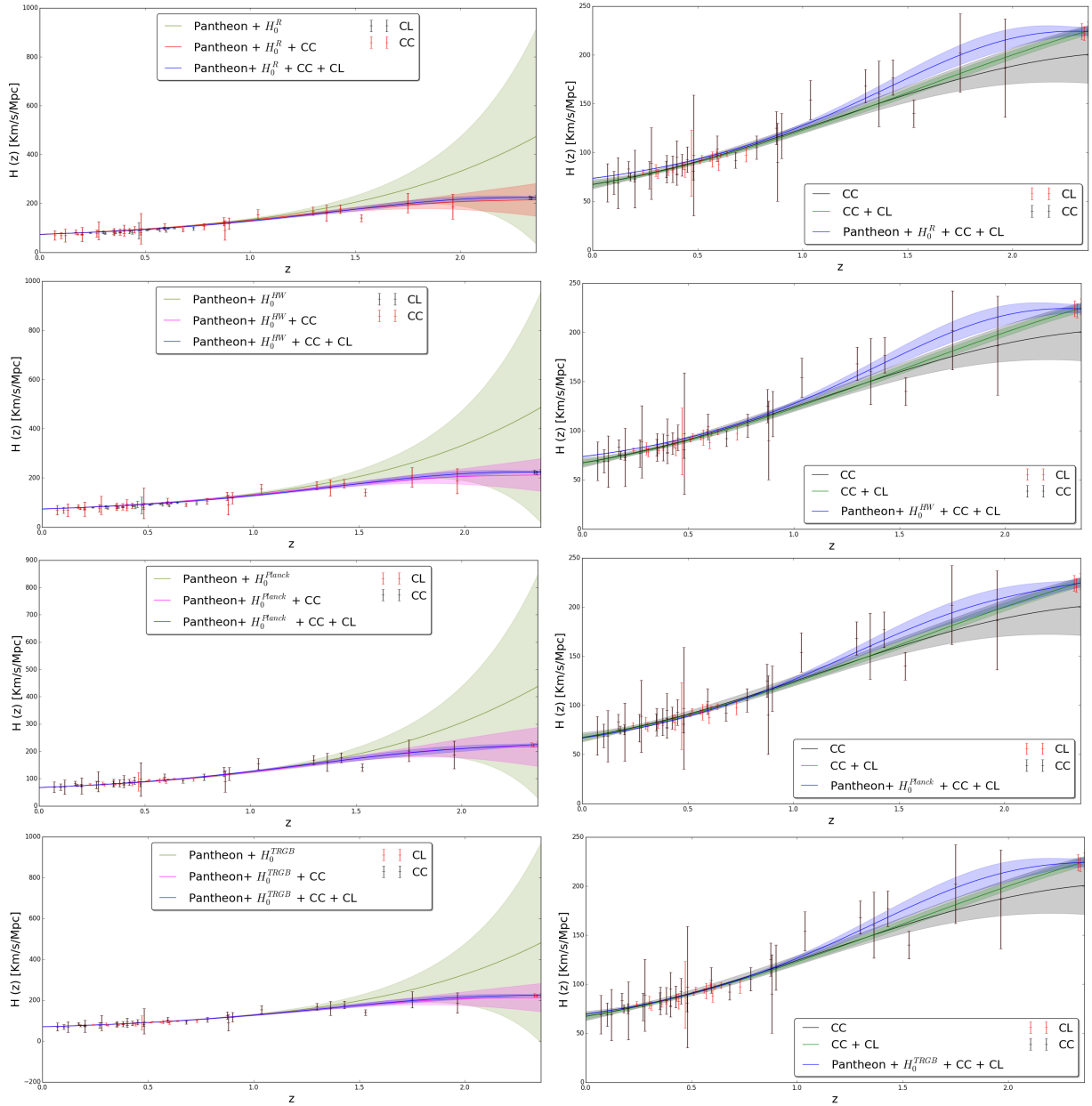


Figura 4.3: Reconstrucciones de $H(z)$ con el kernel cuadrático exponencial (4.3) y sus incertidumbres correspondientes a $1-\sigma$ con los cuatro priors para H_0 . De arriba a abajo: Usando H_0^R , usando H_0^{HW} , usando H_0^{Planck} y usando H_0^{TRGB} . Denotamos: (1) Pantheon + H_0^{prior} (color verde oliva), (2) Pantheon + H_0^{prior} + CC (color rojo) y (3) Pantheon + H_0^{prior} + CC + CL (color azul). También incluimos los datos observacionales en color verde oliva y color rojo, los cuales describen las mediciones de CL y CC respectivamente.

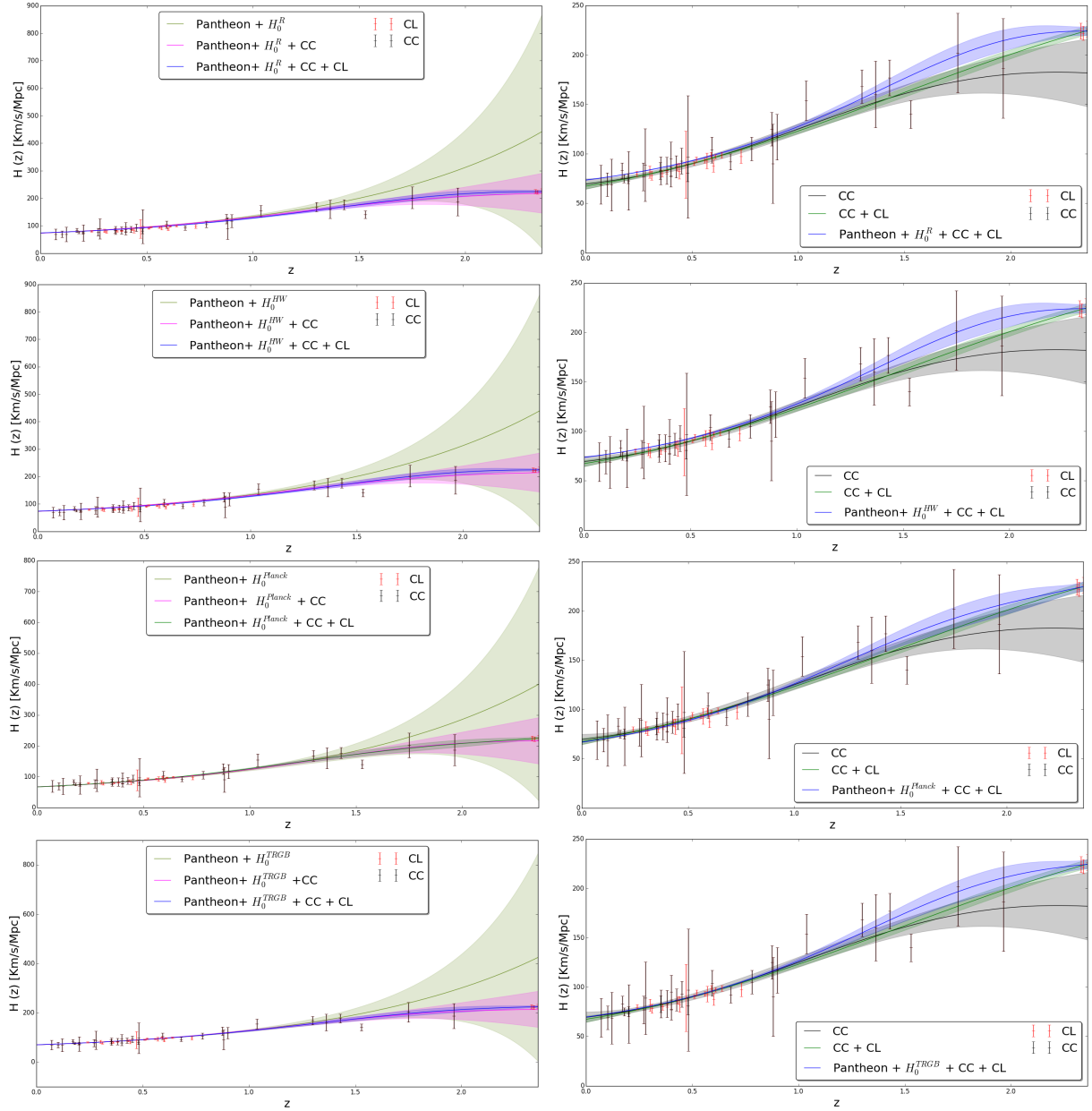


Figura 4.4: Reconstrucciones de $H(z)$ con el kernel de Cauchy (4.4) y sus incertidumbres correspondientes a $1\text{-}\sigma$ con los cuatro priors para H_0 . De arriba a abajo: Usando H_0^R , usando H_0^{HW} , usando H_0^{Planck} y usando H_0^{TRGB} . Denotamos: (1) Pantheon + H_0^{prior} (color verde oliva), (2) Pantheon + H_0^{prior} + CC (color rojo) y (3) Pantheon + H_0^{prior} + CC + CL (color azul). También incluimos los datos observacionales en color verde oliva y color rojo, los cuales describen las mediciones de CL y CC respectivamente.

Resultados para la función de covarianza cuadrática exponencial	
Conjunto de datos	H_0 [km/s/Mpc]
CC	67.32 ± 4.74
CC + CL	67.08 ± 3.01
Pantheon+ H_0^R	72.94 ± 0.40
Pantheon+ H_0^R + CC	72.83 ± 0.41
Pantheon+ H_0^R + CC+ CL	73.48 ± 0.36
Pantheon+ H_0^{HW}	73.00 ± 0.41
Pantheon+ H_0^{HW} + CC	72.97 ± 0.42
Pantheon+ H_0^{HW} + CC+ CL	73.63 ± 0.38
Pantheon+ H_0^{Planck}	67.11 ± 0.37
Pantheon+ H_0^{Planck} + CC	67.10 ± 0.38
Pantheon+ H_0^{Planck} +CC+ CL	66.77 ± 0.33
Pantheon+ H_0^{TRGB}	69.53 ± 0.41
Pantheon+ H_0^{TRGB} + CC	69.51 ± 0.42
Pantheon+ H_0^{TRGB} +CC + CL	69.53 ± 0.37

Tabla 4.1: En la primera columna de esta tabla se muestra el conjunto de datos utilizados para realizar cada reconstrucción, en la segunda columna se muestra el valor de H_0 obtenido con cada reconstrucción y su correspondiente incertidumbre a 1σ en unidades de km/s/Mpc.

Resultados para la función de covarianza de Cauchy	
Conjunto de datos	H_0 [km/s/Mpc]
CC	69.43 ± 5.23
CC + CL	67.41 ± 3.17
Pantheon+ H_0^R	72.92 ± 0.42
Pantheon+ H_0^R + CC	72.86 ± 0.42
Pantheon+ H_0^R + CC+ CL	73.51 ± 0.37
Pantheon+ H_0^{HW}	72.98 ± 0.43
Pantheon+ H_0^{HW} + CC	73.00 ± 0.44
Pantheon+ H_0^{HW} + CC+ CL	73.67 ± 0.39
Pantheon+ H_0^{Planck}	67.10 ± 0.39
Pantheon+ H_0^{Planck} + CC	67.13 ± 0.39
Pantheon+ H_0^{Planck} + CC+ CL	66.81 ± 0.35
Pantheon+ H_0^{TRGB}	69.52 ± 0.43
Pantheon+ H_0^{TRGB} + CC	69.55 ± 0.44
Pantheon+ H_0^{TRGB} + CC+ CL	69.58 ± 0.38

Tabla 4.2: En la primera columna de esta tabla se muestra el conjunto de datos utilizados para realizar cada reconstrucción, en la segunda columna se muestra el valor de H_0 obtenido con cada reconstrucción y su correspondiente incertidumbre a 1σ en unidades de km/s/Mpc.

4.4. Análisis de las reconstrucciones

Como se ve en las Figs. 4.3 - 4.4 la reconstrucción depende del prior que usemos para calibrar los datos, por lo tanto procedemos a calcular la estadística de χ^2 para cada reconstrucción, lo cual nos permitirá determinar cual es la que mejor se ajusta a las observaciones, para ello definimos

$$\chi_{\text{Pantheon}}^2 = \sum_i^{N_{\text{Pantheon}}} \frac{(\mu(z_i)_{\text{obs}} - \mu(z_i)_{\text{recons}})^2}{\sigma(z_i)_{\text{obs,Pantheon}}^2}, \quad (4.21)$$

$$\chi_{\text{CC}}^2 = \sum_i^{N_{\text{CC}}} \frac{(H(z_i)_{\text{obs}} - H(z_i)_{\text{recons}})^2}{\sigma(z_i)_{\text{obs,CL}}^2}, \quad (4.22)$$

$$\chi_{\text{CL}}^2 = \sum_i^{N_{\text{CL}}} \frac{(H(z_i)_{\text{obs}} - H(z_i)_{\text{recons}})^2}{\sigma(z_i)_{\text{obs,CL}}^2}, \quad (4.23)$$

$$\chi_{H_0}^2 = \frac{(H_{0,\text{obs}} - H_{0,\text{recons}})^2}{\sigma(z_i)_{\text{obs},H_0}^2}, \quad (4.24)$$

donde N es el número de observaciones para el conjunto de datos D , $D_{\text{obs}}(z_i)$ es el punto observado con corrimiento al rojo z_i , σ_i es el error asociado con cada medición, $D_{\text{recons}}(z_i)$ es el valor predicho por la reconstrucción y

$$\chi_{\text{Total}}^2 = \chi_{\text{Pantheon}}^2 + \chi_{\text{CC}}^2 + \chi_{\text{CL}}^2 + \chi_{H_0}^2. \quad (4.25)$$

Datos utilizados	Kernel exponencial	Kernel de Cauchy
Pantheon+ H_0^{R} + CC+ CL	1151.88	1150.53
Pantheon+ H_0^{HW} + CC+ CL	1065.38	1063.97
Pantheon+ H_0^{Planck} + CC+ CL	1138.33	1137.24
Pantheon + H_0^{TRGB} + CC+ CL	952.90	952.04

Tabla 4.3: Estadística de χ^2 para las reconstrucciones. En la primera columna se muestran los datos utilizados para obtener cada reconstrucción, en la segunda columna se muestra el χ_{Tot}^2 obtenido para la reconstrucción realizada con el kernel cuadrático exponencial y en la tercera columna el χ_{Total}^2 obtenido usando el kernel de Cauchy.

La Tabla 4.3 nos permite ver que la reconstrucción que mejor describe el conjunto total de datos es la que esta calibrada con H_0^{TRGB} , ya que es la que minimiza la estadística de χ^2 . Es importante notar que el H_0 obtenido con esta reconstrucción está a 3.4σ del H_0 de la colaboración Planck 2018. Esto aporta evidencia, de que la tensión no solo se encuentra presente en $z = 0$, sino que es algo que existe incluso en $z > 0$.

4.4.1. Constricciones sobre los parámetros de densidad

Dado que los parámetros cosmológicos H_0 y Ω_m^0 están degenerados entre sí, es de esperar que la tensión H_0 se traduzca en una nueva tensión entre el Ω_m^0 determinado por Planck 2018 y las determinaciones modelo independientes para Ω_m^0 . Para analizar si este es el caso, usaremos las reconstrucciones $H(z)$ para obtener cotas sobre el valor de los parámetros de densidad en la actualidad y analizaremos si están en tensión con los parámetros de densidad de Λ CDM determinados por la colaboración de Planck 2018.

Para obtener información sobre los parámetros de densidad asumiremos lo siguiente: El universo a gran escala puede ser descrito por la métrica de FLRW, es espacialmente plano, la materia dentro del universo puede ser descrita por un fluido perfecto, además el universo contiene un fluido efectivo, y la materia y el fluido efectivo solo interactúan gravitacionalmente. Bajo estos supuestos la ecuación de Friedmann tiene la siguiente forma

$$H^2 = H_0^2[\Omega_m^0(1+z)^3 + \Omega_{eff}^0 f(z)], \quad (4.26)$$

donde por definición Ω_{eff}^0 es el parámetro de densidad que corresponde al fluido efectivo y $f(z)$ es una función a determinar que depende de z , en particular para Λ CDM, $f(z) = 1$ para todo z . Para un universo espacialmente plano tenemos la constricción cosmológica $\Omega_m + \Omega_{eff} = 1$, podemos sustituir esto en la ecuación (4.26), entonces obtenemos

$$H^2 = H_0^2[(1 - \Omega_{eff}^0)(1+z)^3 + \Omega_{eff}^0 f(z)], \quad (4.27)$$

evaluando en $z = 0$, tenemos que la reconstrucción debe obedecer $f(z = 0) = 1$, esta es la primera condición inicial para $f(z)$, ahora podemos reescribir la ecuación (4.26) de la siguiente manera

$$H^2 - H_0^2(1 + z)^3 = H_0^2 \Omega_{eff}^0 [f(z) - (1 + z)^3], \quad (4.28)$$

observamos que si $z = 0$, ambos lados de la ecuación anterior son 0 y, por tanto, no podemos obtener ninguna información de Ω_{eff}^0 . Sin embargo, esperamos que $H(z)$ sea una función suave (diferenciable), por lo tanto $f(z)$ no tiene cambios abruptos, es decir $f(z \approx 0) \approx 1$. De tal forma que si $z \rightarrow 0$, ambos lados de la ecuación (4.28) no son 0, lo cual nos permite despejar Ω_{eff}^0 . En el límite donde $z \rightarrow 0$ es cierto que

$$H^2 - H_0^2(1 + z)^3 \approx H_0^2 \Omega_{eff}^0 [1 - (1 + z)^3], \quad (4.29)$$

así,

$$\Omega_{eff}^0 \approx \frac{H^2 - H_0^2(1 + z)^3}{H_0^2[1 - (1 + z)^3]}. \quad (4.30)$$

Procedemos a definir a Δz como

$$\Delta z = \frac{z_f - z_i}{N}, \quad (4.31)$$

donde N es el número de puntos colocados en la reconstrucción, y los subíndices f, i denotan el valor final e inicial de z , respectivamente. Tomando $z_i = 0$, vemos que el z más pequeño al que tenemos acceso con la reconstrucción es Δz , por lo tanto

$$\Omega_{eff}^0 = \frac{H^2 - H_0^2(1 + \Delta z)^3}{H_0^2[1 - (1 + \Delta z)^3]}, \quad (4.32)$$

para hacer la propagación del error de la ecuación anterior procedemos a escribir H_0 y $H(\Delta z)$ como

$$H_0 = \bar{H}_0 \pm \sigma_{H_0}, \quad (4.33)$$

$$H(\Delta z) = \bar{H}_1 \pm \sigma_{H_1}, \quad (4.34)$$

donde el primer término (con una barra encima) es el valor medio y el segundo es el error 1σ de H_0 y $H(\Delta z)$ respectivamente. Con estas definiciones hacemos la propagación de errores

$$\Omega_{\text{effe}}^0 \approx \frac{\sqrt{2}}{(1 + \Delta z)^3 - 1} \left(\frac{\overline{H}_1^2}{\overline{H}_0^4} \sigma_{H_1}^2 + \frac{\overline{H}_1^4}{\overline{H}_0^6} \sigma_{H_0}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.35)$$

donde por definición, Ω_{effe}^0 es el error 1σ para Ω_{eff}^0 . Podemos reescribir el error en términos del número de puntos en la reconstrucción

$$\Omega_{\text{effe}}^0 \approx \frac{\sqrt{2}N^3}{(N + z_f)^3 - N^3} \left(\frac{\overline{H}_1^2}{\overline{H}_0^4} \sigma_{H_1}^2 + \frac{\overline{H}_1^4}{\overline{H}_0^6} \sigma_{H_0}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.36)$$

analizando la ecuación (4.36) es claro que el error depende del número N de puntos que se colocan en la reconstrucción, lo que nos lleva a un problema, no podemos aumentar el número de puntos en la reconstrucción de forma arbitraria ya que esto aumentaría el error estadístico en el cálculo de Ω_{eff}^0 , pero tampoco podemos hacer que N sea demasiado pequeño o la ecuación (4.30) no seguiría siendo válida. Para solucionar este problema definimos la siguiente cantidad

$$E_2 \equiv \frac{H_{\text{approx}}(\Delta z)}{H_{\text{recons}}(\Delta z)}, \quad (4.37)$$

donde H_{approx} es el $H(z)$ dado por la ecuación (4.29) y H_{recons} es el $H(z)$ dado por la reconstrucción. Si $E_2 = 1$ la ecuación (4.30) es completamente válida, si $E_2 < 1$ estamos cometiendo un error adicional al estimar Ω_{effe}^0 dado que la igualdad presentada en la ecuación (4.30) ya no es exacta, por tanto, E_2 nos da una medida de cuán buena es nuestra estimación para Ω_{eff}^0 . Presentamos los resultados del cálculo de Ω_{eff}^0 tienen la siguiente forma

$$\Omega_{\text{eff}}^0 = \overline{\Omega}_{\text{eff}}^0 \pm \Omega_{\text{effs}}^0 \pm \Omega_{\text{effn}}^0, \quad (4.38)$$

donde $\overline{\Omega}_{\text{eff}}^0$ es el valor medio Ω_{eff}^0 , Ω_{effs}^0 es el error a 1σ y Ω_{effn}^0 es el error debido a la aproximación dada por la ecuación (4.30), este error se puede obtener mediante la ecuación (4.37). En la Tabla 4.4 se muestran los resultados de

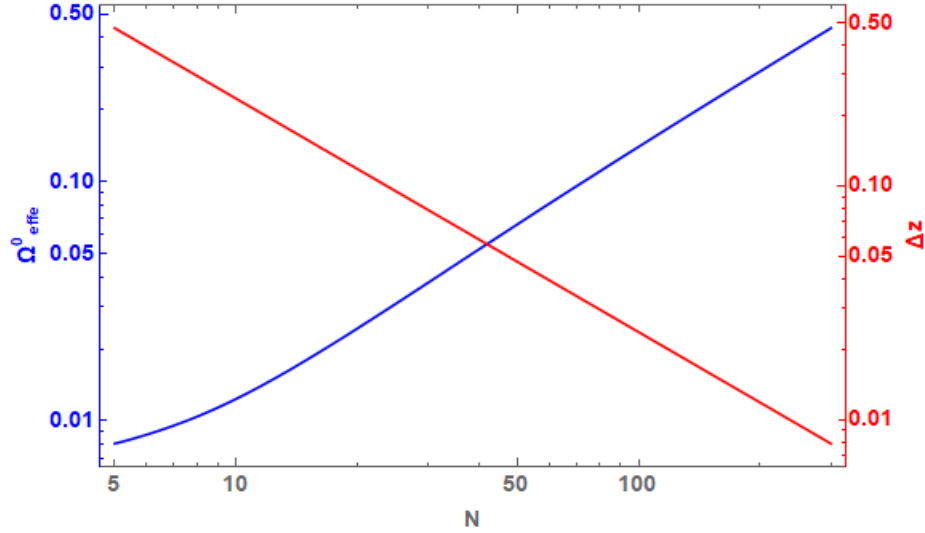


Figura 4.5: En color azul se muestra como varia Ω_{eff}^0 como función del número de puntos N colocados en la reconstrucción, en color rojo se muestra como varia $\Delta z(N)$. La intersección entre ambas curvas nos ayuda a encontrar el N que minimiza los errores y simultáneamente nos da un Δz lo suficientemente pequeño como para tener una aproximación decente a la ecuación (4.28). Obtenemos que $N_{\text{optimo}} \equiv N_0 \approx 43$ que corresponde a $\Delta z = 2.37/N_0$. La gráfica fue realizada utilizando los datos de Pantheon + H_0^{TRGB} + CC+CL con el kernel cuadrático exponencial.

Datos utilizados	Kernel exponencial	Kernel de Cauchy
CC	$0.651 \pm 0.194 \pm 8.29 \%$	$0.641 \pm 0.191 \pm 8.30 \%$
CC+ CL	$0.654 \pm 0.156 \pm 6.90 \%$	$0.660 \pm 0.161 \pm 7.45 \%$
Pantheon+ H_0^R +CC+CL	$0.708 \pm 0.052 \pm 3.40 \%$	$0.705 \pm 0.054 \pm 3.34 \%$
Pantheon+ H_0^{HW} +CC+CL	$0.712 \pm 0.054 \pm 3.46 \%$	$0.709 \pm 0.055 \pm 3.41 \%$
Pantheon+ H_0^{Planck} +CC+CL	$0.663 \pm 0.053 \pm 2.15 \%$	$0.644 \pm 0.054 \pm 2.33 \%$
Pantheon+ H_0^{TRGB} +CC+CL	$0.664 \pm 0.056 \pm 2.67 \%$	$0.668 \pm 0.059 \pm 2.73 \%$

Tabla 4.4: Resultados del cálculo del parámetro de densidad Ω_{eff}^0 en el intervalo de confianza a 1σ . En la primera columna se muestran los datos utilizados para realizar cada reconstrucción. En la segunda columna se muestra el resultado para Ω_{eff}^0 utilizando el kernel cuadrático exponencial, en la tercera columna el resultado obtenido para Ω_{eff}^0 utilizando el kernel de Cauchy.

calcular (4.38) con las reconstrucciones. Utilizando la ecuación de constricción $\Omega_m^0 + \Omega_\Lambda^0 = 1$, y la reconstrucción que minimiza la estadística de χ^2 con respecto al conjunto total de datos (Pantheon+ H_0^{TRGB} +CC+CL), se puede mostrar que

$$\Omega_m^0 = 0.336 \pm 0.0563 \pm 2.67 \%, \quad \rightarrow \quad \text{Kernel exponencial}, \quad (4.39)$$

$$\Omega_m^0 = 0.332 \pm 0.0594 \pm 2.73 \%, \quad \rightarrow \quad \text{Kernel de Cauchy}, \quad (4.40)$$

ambos valores coinciden con el Ω_m^0 reportado por la colaboración Planck 2018, por lo cual no encontramos tensión en este parámetro. Aunque esto puede deberse al tamaño de nuestras incertidumbres a 1σ .

Capítulo 5

Constricciones en la Teoría de Horndeski

El objetivo de este Capítulo es utilizar las reconstrucciones obtenidas en el Capítulo 4 para obtener cotas sobre los modelos de Horndeski presentados en la sección 3.1. Como se vio en el sección 4.4, la reconstrucción que mejor describe a las observaciones de Cronómetros cósmicos, Clustering de Galaxias y Supernovas tipo Ia, es la realizada con los siguientes datos: Pantheon+ H_0^{TRGB} +CC + CL. Por tanto, utilizaremos a esta reconstrucción para obtener las cotas sobre los G_i que aparecen en las ecuaciones (3.13)-(3.15).

5.1. Quintaesencia

En esta sección se analizará el modelo

$$G_2(\phi, X) = X - V(\phi), \quad G_3 = 0, \quad G_4 = 1/2, \quad (5.1)$$

con $V(\phi)$ un potencial escalar. El cual representa un modelo del tipo Quintaesencia [39]. Utilizando las ecuaciones (3.12)-(3.15) y los G_i 's definidos en (5.1) podemos obtener las ecuaciones de campo asociadas a este modelo

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m + \varepsilon, \quad (5.2)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P) = 0, \quad (5.3)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3}[-G_2 + 2XG_{2X}], \quad (5.4)$$

$$P = \frac{1}{3}[G_2], \quad (5.5)$$

usando las ecuaciones anteriores se puede mostrar que

$$H^2 = \left[H_0^2 \Omega_m^0 (1+z)^3 + \frac{V(\phi)}{3} \right] \left[1 - \frac{1}{6} (1+z)^2 \dot{\phi}^2 \right]^{-1}. \quad (5.6)$$

Podemos calcular la ecuación de estado efectiva para el campo escalar, para ello recordamos que $\omega = P/\varepsilon$, por lo tanto

$$\omega_\phi = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (5.7)$$

ya que necesitamos que nuestro modelo se reduzca a Λ CDM al menos para $z = 0$, es necesario que $\dot{\phi}(z = 0) = 0$, esto nos otorga una condición inicial para el campo escalar. Podemos obtener la condición inicial para el potencial, si evaluamos la ecuación (5.6) en $z = 0$, con lo cual obtenemos:

$$V(\phi(z = 0)) = 3H_0^2[1 - \Omega_m^0], \quad (5.8)$$

definimos $C \equiv 3H_0^2[1 - \Omega_m^0]$.

5.1.1. Ecuación de Klein-Gordon

Manipulando la ecuación de conservación (5.3), es posible mostrar que el campo escalar debe de cumplir con la siguiente ecuación

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0, \quad (5.9)$$

la cual es conocida como ecuación de Klein Gordon (KG). Resulta útil cambiar del tiempo cósmico t al corrimiento al rojo z , para ello procedemos a hacer los siguientes cálculos:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dz}{da} \frac{da}{dt} \frac{d}{dz} = -H(1+z) \frac{d}{dz}, \quad (5.10)$$

$$\therefore \dot{\phi} = -H(1+z)\phi'. \quad (5.11)$$

Procedemos a calcular el término $\ddot{\phi}$:

$$\ddot{\phi} = \frac{d}{dt}[-H(1+z)\phi'] = H(1+z)\frac{d}{dz}[H(1+z)\phi'] \quad (5.12)$$

$$= H(1+z)[\phi''H(1+z) + \phi'(H'(1+z) + H)]. \quad (5.13)$$

Sustituyendo todo, en la ecuación de KG, se obtiene que

$$\phi''[H(1+z)]^2 + \phi'[H'(1+z) + H](1+z)H - 3H^2(1+z)\phi' + V_\phi = 0, \quad (5.14)$$

está ecuación diferencial necesita de dos condiciones iniciales, la primera fue obtenida en la sección anterior, i.e $\dot{\phi}(z=0) = 0$ y la segunda cambia dependiendo del potencial que elijamos, en este trabajo elegimos analizar los dos siguientes potenciales

$$V = C\phi^n, \quad (5.15)$$

$$V = C \exp(n\phi), \quad (5.16)$$

con n una constante a determinar. Evaluando en (5.2) $z = 0$, utilizando (5.8) y el potencial (5.15), obtenemos que $\phi(z=0) = 1$, de manera análoga se puede obtener la condición inicial para el potencial (5.16). Para obtener el valor de n que mejor se ajusta a las reconstrucciones, minimizamos la siguiente cantidad

$$\chi^2 = \sum_i^{N_{\text{recons}}} \frac{[(H_{\text{recons}}(z_i) - H_Q(z_i; n))]^2}{\sigma_{\text{recons}}(z_i)^2}, \quad (5.17)$$

donde N representa el número de puntos en la reconstrucción, $H_{\text{recons}}(z_i)$ es el parámetro de Hubble de la reconstrucción evaluada en el corrimiento al rojo z_i , $\sigma_{\text{recons}}(z_i)$ es la incertidumbre 1σ de la reconstrucción y $H_Q(z_i; n)$ es el parámetro de Hubble para Quintaesencia.

En las Figuras 5.1 y 5.2 se muestra el resultado de calcular $H(z)$ resolviendo la ecuación (5.14) para los potenciales (5.15) y (5.16) con el H_0 y Ω_m obtenidos de la reconstrucción Pantheon+ H_0^{TRGB} +CC + CL, se compara este resultado con el $H(z)$ que se obtiene de la reconstrucción Pantheon+ H_0^{TRGB} +CC + CL

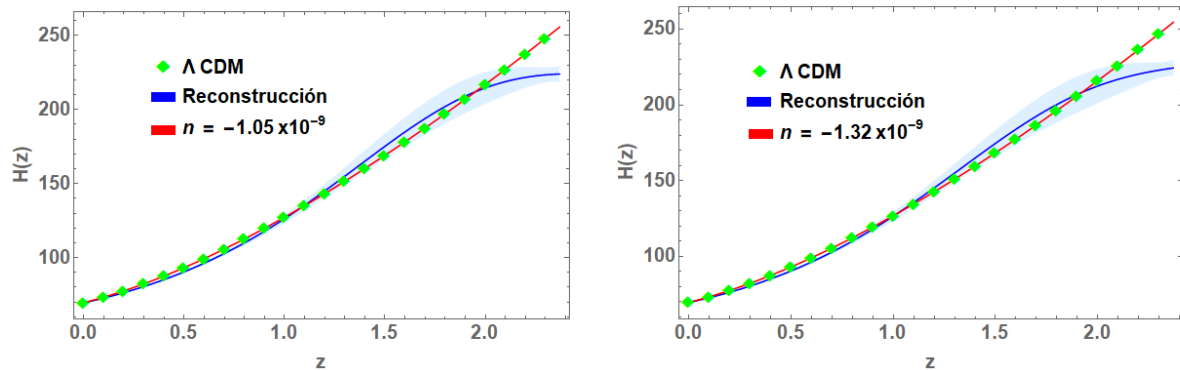


Figura 5.1: Factor de Hubble obtenido de resolver (5.14) con el potencial (5.15). En la imagen se muestra el n que minimiza la ecuación (5.17), comparado con el $H(z)$ obtenido de la reconstrucción realizada con el kernel de Gaussiano (izquierda) y con el kernel de Cauchy (derecha).

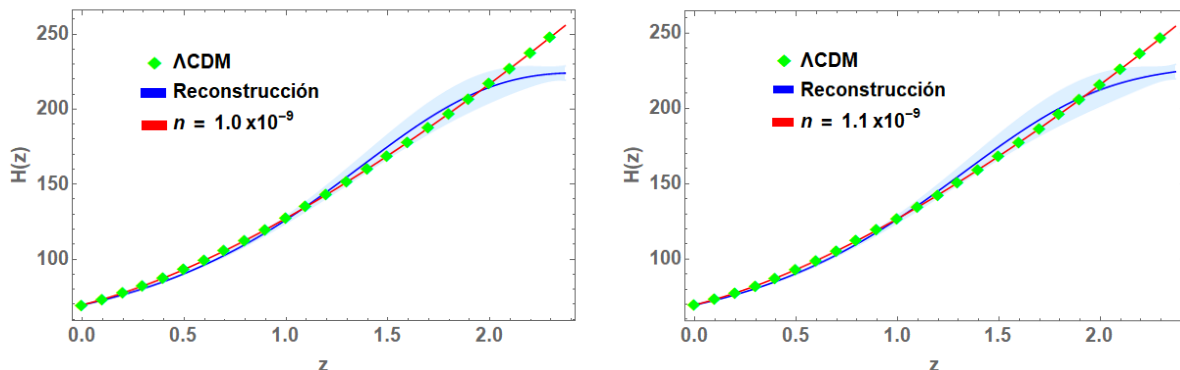


Figura 5.2: Factor de Hubble obtenido de resolver (5.14) con el potencial (5.16). En la imagen se muestra el n que minimiza la ecuación (5.17), comparado con el $H(z)$ obtenido de la reconstrucción realizada con el kernel de Gaussiano (izquierda) y con el kernel de Cauchy (derecha).

en el intervalo de confianza a 1σ . Además, se incluye en color verde a Λ CDM con los parámetros obtenidos de la reconstrucción

En las Figuras 5.1 y 5.2 se observa que el factor de Hubble asociado a este modelo de Horndeski no es capaz de describir a la reconstrucción en el intervalo de confianza a 1σ o incluso 2σ . Además, se observa que para los potenciales analizados este modelo no representa ninguna ventaja con respecto a Λ CDM

para describir a las reconstrucciones.

5.2. Extensión a Quintaesencia

En esta sección analizamos el modelo

$$G_2 = X - V, \quad G_3 = -c_1 V, \quad G_4 = 1/2, \quad (5.18)$$

donde es c_1 una constante positiva con unidades de segundo al cuadrado (s^2), esta constante es introducida para mantener consistentes las unidades en todas las ecuaciones, en particular, en esta tesis se elige $c_1 = 1 s^2$. Como puede verse, el modelo dado por la ecuación (5.18) representa una extensión a Quintaesencia, en la cual se ha añadido el Lagrangiano G_3 de la teoría de Horndeski. Es posible obtener las ecuaciones de campo¹ asociadas al modelo manipulando las ecuaciones (3.12)-(3.15) y sustituyendo el valor de los G_i 's de la ecuación (5.18)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m + \varepsilon, \quad (5.19)$$

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P) = 0, \quad (5.20)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3}[V + X - 2XV_\phi c_1], \quad (5.21)$$

$$P = \frac{1}{3}[X - V - 2XV_\phi c_1], \quad (5.22)$$

observamos que la ecuación de estado para el campo escalar tiene la forma

$$\omega_\phi = \frac{X - V - 2XV_\phi c_1}{V + X - 2XV_\phi c_1}, \quad (5.23)$$

si $\dot{\phi}(z=0) = 0$, la ecuación (5.23) se reduce a

$$\omega_\phi(z=0) = -1, \quad (5.24)$$

podemos usar esto como condición inicial como el campo escalar. Por otro lado, podemos obtener la condición inicial para $\phi(z=0)$ si evaluamos en $z=0$ la

¹Notar que ya se ha sustituido el valor elegido de c_1 en las ecuaciones.

ecuación (5.19). En particular un potencial del tipo $V = C \exp(n\phi)$, es necesario que se cumpla que $\phi(z=0) = 0$, con $C = 3H_0^2[1 - \Omega_m^0]$. Además, para obtener la evolución de $\phi(z)$, resulta útil reescribir la ecuación (5.20) como

$$-\frac{1}{3} \frac{d}{dz} \left[V + H^2(1+z)^2 \phi'^2 \left(\frac{1}{2} - V_\phi c_1 \right) \right] + (1+z) [1 - 2V_\phi c_1] H^2 \phi'^2 = 0. \quad (5.25)$$

Para obtener el valor de n que mejor se ajusta a las reconstrucciones, minimizamos la siguiente cantidad

$$\chi^2 = \sum_i^{N_{\text{recons}}} \frac{[(H_{\text{recons}}(z_i) - H_{\text{EQ}}(z_i; n))^2]}{\sigma_{\text{recons}}(z_i)^2}, \quad (5.26)$$

donde N representa el número de puntos en la reconstrucción, $H_{\text{recons}}(z_i)$ es el parámetro de Hubble de la reconstrucción evaluada en el corrimiento al rojo z_i , $\sigma_{\text{recons}}(z_i)$ es la incertidumbre 1σ de la reconstrucción y $H_{\text{EQ}}(z_i; n)$ es el parámetro de Hubble para la extensión a Quintaesencia.

En las Figuras 5.3 y 5.4 se muestra el resultado de calcular $H(z)$ resolviendo la ecuación (5.25) para los potenciales (5.15) y (5.16) con el H_0 y Ω_m obtenidos de la reconstrucción nombrada Pantheon+ H_0^{TRGB} +CC+CL, en color azul se muestra a la reconstrucción en el intervalo de confianza a 1σ realizada con los datos de Pantheon+ H_0^{TRGB} +CC+CL y en color verde a Λ CDM con los parámetros obtenidos de las reconstrucciones. Para todo z en el cual hemos reconstruido la expansión, el modelo se encuentra dentro del intervalo de confianza a 2σ .

5.2.1. Parámetro de desaceleración

Dado que el modelo analizado en la sección 5.2 presenta desviaciones significativas con respecto a Λ CDM es interesante analizar lo que sucede con el parámetro de desaceleración, para ello recordamos la definición de $q(z)$

$$q(z) \equiv (1+z) \frac{H'}{H} - 1, \quad (5.27)$$

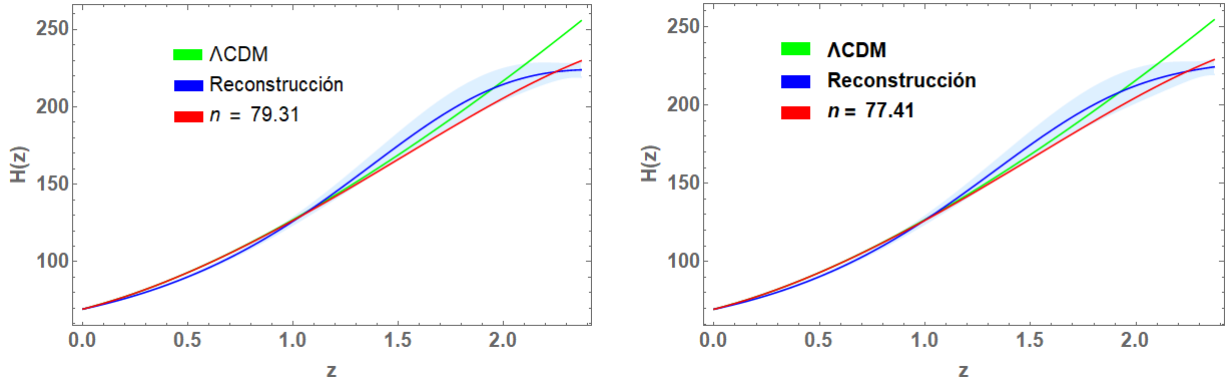


Figura 5.3: Factor de Hubble obtenido de resolver (5.25) con el potencial (5.15). En la imagen se muestra el n que minimiza la ecuación (5.26), comparado con el $H(z)$ obtenido de la reconstrucción realizada con el kernel de Gaussiano (izquierda) y con el kernel de Cauchy (derecha).

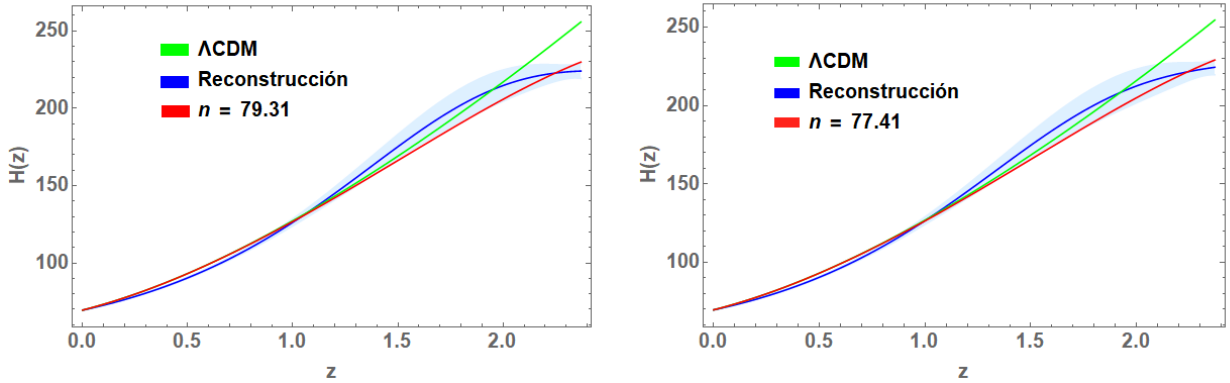


Figura 5.4: Factor de Hubble obtenido de resolver (5.25) con el potencial (5.16). En la imagen se muestra el n que minimiza la ecuación (5.26), comparado con el $H(z)$ obtenido de la reconstrucción realizada con el kernel de Gaussiano (izquierda) y con el kernel de Cauchy (derecha). La diferencia entre los valores de n para los potenciales (5.15) y (5.16) aparece hasta la cuarta cifra decimal, por esta razón no es perceptible en las imágenes.

podemos manipular está ecuación para el modelo de la sección 5.2 y obtener

$$q(z) = (1 + z)T_1 (T_2 - 2(1 + z)T_3) - 1, \quad (5.28)$$

donde T_1, T_2, T_3 son funciones de z y ϕ definidas de la siguiente manera

$$T_1 \equiv \frac{A}{B}, \quad T_2 \equiv \frac{C}{AB}, \quad T_3 \equiv \frac{BE}{\sqrt{2}A^3}, \quad (5.29)$$

con

$$A = (6 + (1+z)^2(-1 + 2V_\phi)\phi'^2)^{1/2}, \quad (5.30)$$

$$B = (6H_0^2\Omega_m(1+z)^3 + 2V)^{1/2}, \quad (5.31)$$

$$C = 9H_0^2\Omega_m(1+z)^2 + V_z, \quad (5.32)$$

$$D = (-1 + 2V_\phi)(\phi' + (1+z)\phi''), \quad (5.33)$$

$$E = \phi'(D + (1+z)\phi'V_{\phi z}). \quad (5.34)$$

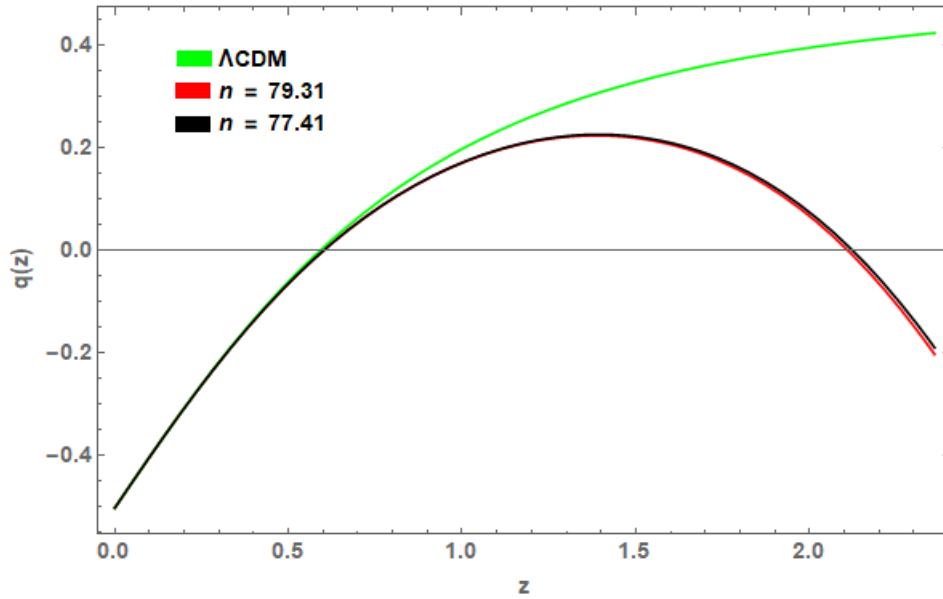


Figura 5.5: Gráfica de $q(z)$ para el modelo presentado en (5.2) bajo el potencial (5.15) para los valores de n obtenidos en la sección anterior.

Como puede verse en las gráficas 5.5-5.6 el modelo (5.2) presenta desviaciones significativas con respecto a Λ CDM en el parámetro de desaceleración para $z > 1.5$. Para determinar si esta desviación realmente es sugerida por las observaciones lo óptimo sería tener más datos sobre $H(z)$ y $\mu(z)$ en la región $z > 1.5$, si estas observaciones son igual o más precisas que las que existen

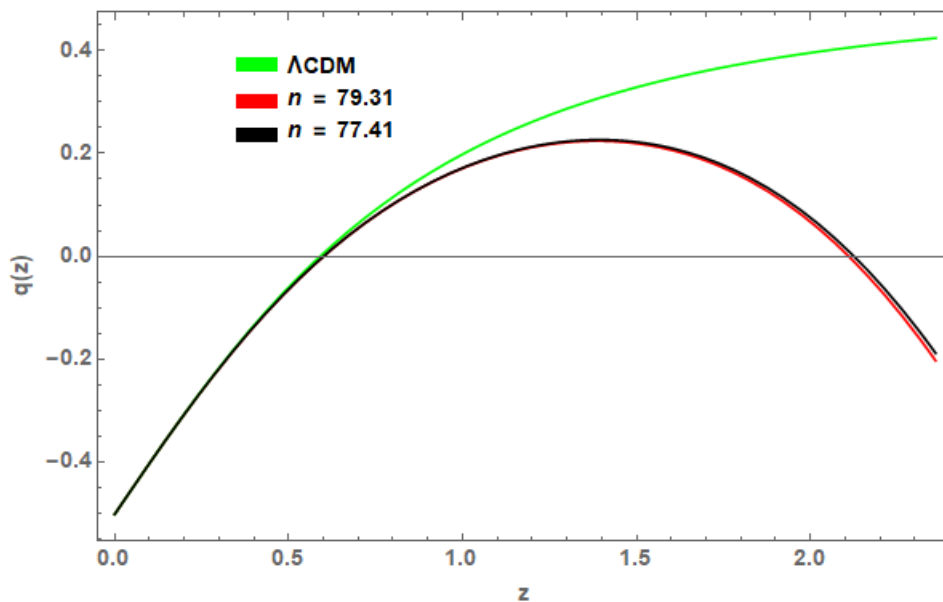


Figura 5.6: Gráfica de $q(z)$ para el modelo presentado en (5.2) bajo el potencial (5.16) para los valores de n obtenidos en la sección anterior.

en la actualidad, entonces el tamaño de los contornos de confianza de las reconstrucciones² de $H(z)$ se reduciría, lo cual podría llevar a un cambio en el n obtenido de la minimización de la ecuación (5.26) y por tanto a un cambio en el parámetro de desaceleración de la Extensión a Quintaesencia.

5.3. Perspectivas

Existen situaciones en las cuales un modelo de energía oscura y otro de gravedad modificada comparten una misma historia de expansión cosmológica [89, 90], por esta razón, no es posible distinguirlos estudiando únicamente la expansión tardía del universo, sino que es necesario considerar la historia de la formación de estructura en cada una de estas teorías. En esta sección se

²El tamaño de los contornos de confianza de las reconstrucciones depende de la matriz de covarianza de las observaciones, de la cantidad de observaciones que tenemos y del valor de los hiperparámetros de las funciones de covarianza. Reducir las incertidumbres estadísticas de las observaciones o aumentar su número se traduce en una reducción de los contornos de confianza.

describen algunos resultados del estudio de formación de estructura utilizando GP, los cuales serán útiles para un trabajo futuro.

5.4. Reconstrucción de $f\sigma_8(z)$

En esta sección nos concentramos en reconstruir la historia de la formación de estructura a través de Procesos Gaussianos, las reconstrucciones obtenidas pueden ser utilizadas para obtener cotas sobre los parámetros libres asociados a las perturbaciones a lineales de las ecuaciones de campo de teorías distintas a Λ CDM. Para hacer la reconstrucción de $f\sigma_8(z)$ usamos la compilación de datos que se muestra en la Tabla 5.1.

Como se menciona en la sección 1.6, los valores inferidos de $f\sigma_8(z)$ dependen de la cosmología fiducial que hayamos elegido, además como puede verse en la Tabla 5.1, los valores de $f\sigma_8(z)$ fueron obtenidos asumiendo distintos valores de Ω_m^0 , es decir, cosmologías fiduciales distintas. Para hacer la corrección al efecto AP, tomamos como cosmología de referencia a Λ CDM con los parámetros inferidos por Planck 2018. Como parte del análisis asumimos una matriz de correlación diagonal para los datos³. Parte del trabajo futuro consistirá en realizar las reconstrucciones tomando la matriz de covarianza completa para los datos de $f\sigma_8(z)$.

En las Figuras 5.8-5.7, se observa que las reconstrucciones con ambas funciones de covarianza están a 3σ de Λ CDM en el rango $0.2 < z < 0.6$ para los parámetros determinados por Planck 2018, mientras que Λ CDM con los parámetros de WMAP7 [115] se encuentra 2σ de las reconstrucciones.

³La matriz de correlación para todos los datos no está disponible en la literatura, consultar [50] para más información.

Encuesta	Referencia	z	$f\sigma_8(z)$	$\sigma_{f\sigma_8}(z)$	Ω_m^0
2MTF	[91]	0.001	0.505	0.085	0.31
DNM	[92]	0.02	0.314	0.048	0.266
6dFGS+SnIa	[93]	0.02	0.428	0.0465	0.3
6dFGS	[94]	0.067	0.423	0.055	0.27
SDSS DR7	[95]	0.1	0.376	0.038	0.282
SDSS-MGS	[96]	0.15	0.49	0.145	0.31
2dFGRS	[97]	0.17	0.51	0.06	0.3
GAMA	[98]	0.18	0.36	0.09	0.27
SDSS-LRG-200	[99]	0.25	0.3512	0.0583	0.25
SDSS-BOSS	[100]	0.3	0.407	0.055	0.25
BOSS DR12	[101]	0.31	0.469	0.098	0.307
BOSS LOWZ	[102]	0.32	0.427	0.056	0.31
SDSS DR10 and DR11	[103]	0.32	0.48	0.1	0.274
SDSS-DR7-LRG	[104]	0.35	0.429	0.089	0.25
BOSS DR12	[101]	0.36	0.474	0.097	0.307
SDSS-LRG-200	[99]	0.37	0.4602	0.0378	0.25
SDSS-LRG-60	[99]	0.37	0.4031	0.0586	0.25
BOSS DR12	[105]	0.38	0.497	0.045	0.31
GAMA	[98]	0.38	0.44	0.06	0.27
SDSS-BOSS	[100]	0.4	0.419	0.041	0.25
BOSS DR12	[101]	0.4	0.473	0.086	0.307
BOSS DR12	[101]	0.44	0.481	0.076	0.307
WiggleZ	[106]	0.44	0.413	0.08	0.27
BOSS DR12	[101]	0.48	0.482	0.067	0.307
SDSS-BOSS	[100]	0.5	0.427	0.043	0.25
BOSS DR12	[105]	0.51	0.458	0.038	0.31
BOSS DR12	[101]	0.52	0.488	0.065	0.307
BOSS DR12	[101]	0.56	0.482	0.067	0.307
SDSS DR10 and DR11	[103]	0.57	0.417	0.045	0.274
BOSS CMASS	[102]	0.57	0.426	0.029	0.31
SDSS-CMASS	[107]	0.59	0.488	0.06	0.30
BOSS DR12	[101]	0.59	0.481	0.066	0.307
WiggleZ	[106]	0.6	0.39	0.063	0.27
SDSS-BOSS	[100]	0.6	0.433	0.067	0.25
Vipers	[108]	0.6	0.55	0.12	0.3

BOSS DR12	[105]	0.61	0.436	0.034	0.31
BOSS DR12	[101]	0.64	0.486	0.07	0.307
Vipers	[109]	0.727	0.296	0.0765	0.31
WiggleZ	[106]	0.73	0.437	0.072	0.27
Vipers v7	[110]	0.76	0.44	0.04	0.30
VVDS	[97]	0.77	0.49	0.18	0.25
Vipers	[111]	0.8	0.47	0.08	0.25
Vipers PDR-2	[112]	0.85	0.45	0.11	0.3
Vipers	[108]	0.86	0.4	0.11	0.3
SDSS-IV	[113]	0.978	0.379	0.176	0.31
Vipers v7	[110]	1.05	0.28	0.08	0.308
SDSS-IV	[113]	1.23	0.385	0.099	0.31
FastSound	[114]	1.4	0.482	0.116	0.27
SDSS-IV	[113]	1.52	0.396	0.079	0.31
SDSS-IV	[113]	1.526	0.342	0.07	0.31

Tabla 5.1: Tabla de valores de $f\sigma_8(z)$. En la primera columna se muestra la encuesta utilizada para estimar $f\sigma_8(z)$, en la segunda el artículo del cual fue obtenido el valor de $f\sigma_8(z)$. En la tercera columna se tiene el corrimiento al rojo observado, en la cuarta columna el valor inferido de $f\sigma_8(z)$, en la quinta la incertidumbre a 1σ y en la sexta el valor de Ω_m^0 utilizado para inferir el valor de $f\sigma_8(z)$, por ejemplo, para obtener el valor de $f\sigma_8(z)$ en $z = 0.001$ con la encuesta 2MTF se asumió $\Omega_m^0 = 0.31$.

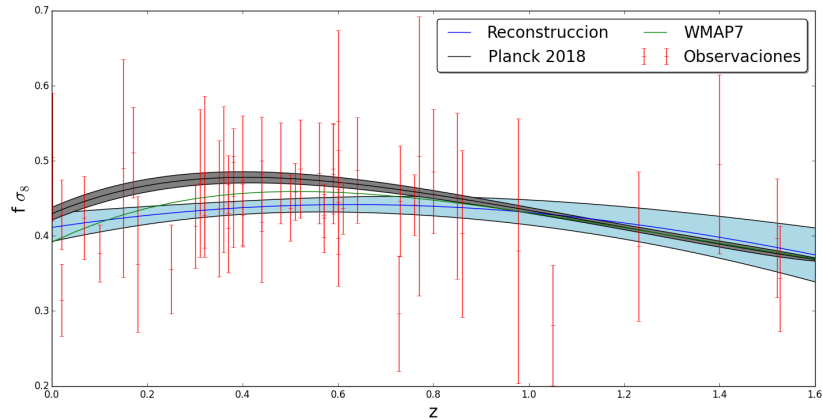


Figura 5.7: En color azul se muestra la reconstrucción de los datos de $f\sigma_8$ con la función de covarianza exponencial. En color negro se muestra a Λ CDM bajo los parámetros de Planck 2018, los contornos a 1σ fueron obtenidos de la Figura 14 del artículo [2]. En color verde se muestra a Λ CDM con los parámetros determinados por WMAP7.

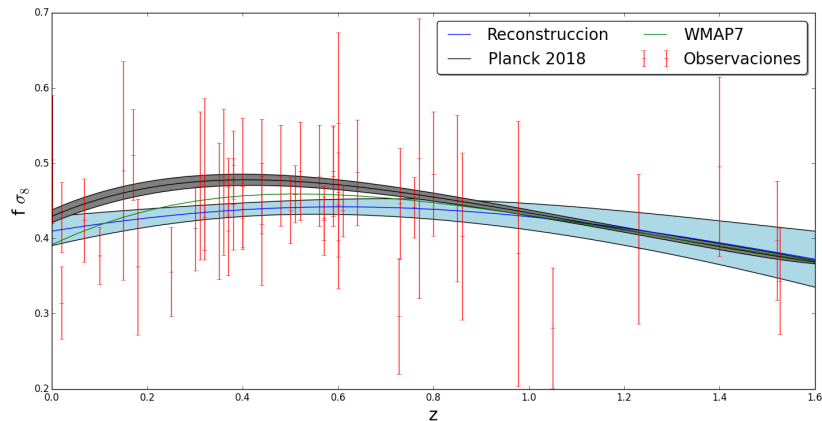


Figura 5.8: En color azul se muestra la reconstrucción de los datos de $f\sigma_8$ con la función de covarianza de Cauchy. En color negro se muestra a Λ CDM bajo los parámetros de Planck 2018, los contornos a 1σ fueron obtenidos de la Figura 14 del artículo [2]. En color verde se muestra a Λ CDM con los parámetros determinados por WMAP7.

Capítulo 6

Resumen y conclusiones

El objetivo central de esta tesis fue analizar la tensión H_0 con mediciones del universo tardío y utilizar los resultados del análisis para establecer cotas sobre modelos cosmológicos de tipo Quintaesencia dentro de la teoría de Horndeski.

En el Capítulo 1 se presentaron los aspectos fundamentales que caracterizan al modelo cosmológico estándar, además se establecieron algunas definiciones que fueron útiles para el desarrollo de este trabajo. Por otro lado, en el Capítulo 2 mostramos el estado del arte del modelo Λ CDM. También, fueron descritos los métodos más comunes para inferir el valor de la constante de Hubble. Además, se mostró que la tensión H_0 no es la única tensión presente en el modelo cosmológico estándar en la actualidad, sino que también están presentes la tensión S_8 y la anomalía de A_{lens} . En el Capítulo 3 fueron expuestas las bases de la teoría de Horndeski y se exploró el significado físico de cada una de las funciones libres de la teoría, además se presentaron algunas cotas observacionales sobre las funciones G_i .

En el Capítulo 4 haciendo uso de las observaciones de Cronómetros cósmicos, Clustering y Supernovas tipo Ia reconstruimos la expansión tardía del universo utilizando Procesos Gaussianos. Mostramos que los valores obtenidos para H_0 con cada reconstrucción alcanzaban diferencias de hasta 13σ dependiendo del prior utilizado para calibrar a los datos de SNeIa dados por Pantheon. Por lo anterior, fue necesario hacer un análisis estadístico que nos permitió determinar el valor de H_0 que mejor describía a las observaciones del universo tardío. Uti-

lizando la estadística de χ^2 , mostramos que la reconstrucción que minimiza el χ^2 con respecto al conjunto total de datos analizados en este trabajo es la que denominamos Pantheon+ H_0^{TRGB} + CC+ CL, en la cual se calibraron a los de Pantheon con el H_0 medido por la colaboración The Carnegie-Chicago Hubble Program [5]. Los resultados de este análisis, nos dicen que el H_0 que describe a las observaciones del universo tardío es $H_0 = 69.53 \pm 0.37$, este H_0 se encuentra en una tensión de 3.4σ con respecto al H_0 de Λ CDM bajo los parámetros de Planck 2018. Sin embargo, todavía es posible mejorar la calidad de las reconstrucciones presentadas en este trabajo recalibrando la muestra de Clustering de Galaxias.

Por otro lado, debido a que los parámetros H_0 y Ω_m^0 están degenerados, era de esperarse que la tensión H_0 se tradujera en una tensión sobre Ω_m^0 . Sin embargo, utilizando las reconstrucciones de $H(z)$ no encontramos tensión entre el Ω_m^0 determinado por Planck 2018 y el Ω_m^0 determinado por las reconstrucciones, esto se debió principalmente al tamaño de las incertidumbres a 1σ dadas por las reconstrucciones.

En el Capítulo 5, mostramos que los modelos de Horndeski del tipo Quintaesencia bajo los potenciales analizados en esta tesis no son capaces de describir a las reconstrucciones del flujo de Hubble dentro del intervalo de confianza a 2σ , por lo que no son buenos candidatos para resolver la tensión H_0 . Por otro lado, la extensión a Quintaesencia presentada en la sección 5.2 es un buen candidato para describir las reconstrucciones de la expansión, ya que este modelo se ajusta a las reconstrucciones en el intervalo de confianza a 2σ , además se presenta como un buen candidato para resolver la tensión H_0 con las mediciones del universo tardío. Finalmente, por la discusión presentada en el Capítulo 3 es de esperarse que este modelo modifique la historia de formación de estructura a gran escala. Por tanto, el análisis de las perturbaciones lineales a primer orden del modelo presentado en la sección 5.2 ayudará a analizar si también es candidato a resolver la tensión S_8 , aunque ese análisis corresponderá a un trabajo futuro.

Apéndice A

Las ecuaciones de Friedmann

En este apéndice se muestra como se obtienen las ecuaciones de Friedmann para un universo espacialmente plano, para iniciar tomamos la métrica:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (\text{A.1})$$

procedemos a calcular los símbolos de Christoffel asociados a esta métrica

$$\begin{aligned} \Gamma_{0i}^0 &= \Gamma_{i0}^0 = 0, & \Gamma_{00}^0 &= 0, \\ \Gamma_{ij}^0 &= a\dot{a}\delta_{ij}, & \Gamma_{0j}^i &= \Gamma_{j0}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Con esto podemos calcular las componentes del tensor de Ricci:

$$R_{0\mu} = -3\frac{\ddot{a}}{a}\delta_{0\mu}, \quad R_{ij} = (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})\delta_{ij}.$$

Y Finalmente, el escalar de Ricci:

$$R = -6 \left(\frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2} \right).$$

Para poder continuar es necesario describir el contenido material del universo en términos de un tensor de energía-momento, $T_{\mu\nu}$. Bajo las consideraciones de homogeneidad e isotropía, podemos tratar a los componentes del universo como “partículas” que forman parte de un “fluido” que llena el universo. De esta manera, caracterizamos al fluido por una 4-velocidad, por una densidad de energía ρ , y por una presión p

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (\text{A.2})$$

Si nos situamos en un sistema de referencia comóvil con el fluido, este permanecerá en reposo en este sistema de referencia, por lo que $U^t = 1$ y $U^i = 0$. Lo que nos permite calcular las componentes de las Ecuaciones de Campo. La componente temporal de (1.5) es:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R + \Lambda g_{00} = 8\pi GT_{00},$$

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}. \quad (\text{A.3})$$

Por otro lado, la segunda ecuación de Friedmann, también conocida como ecuación de ecuación de la aceleración, se obtiene después de tomar la traza de (1.5), sustituir el resultado obtenido para R en (1.5) y por último calcular la componente temporal

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (\text{A.4})$$

Por último, si queremos conocer la ecuación de continuidad del fluido en cuestión, calculamos la derivada covariante del Tensor Energía-Momento (A.2)

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{\mu\nu} &= ((\rho + p)U^\mu U^\nu)_{;\nu} + p_{,\mu}g^{\mu\nu} \\ &= (\rho + p)_{,\nu}U^\mu U^\nu + (\rho + p)[(U^\mu U^\nu)_{,\mu} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu U^\sigma U^\nu + \Gamma_{\sigma\nu}^\nu U^\sigma U^\mu] + p_{,\mu}g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

al sustituir los valores anteriormente obtenidos para los símbolos de Christoffel

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}p = 0. \quad (\text{A.5})$$

Definimos $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$. Con esto, la ecuación anterior se transforma en:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Apéndice B

Tensión entre dos cantidades

Consideremos 2 mediciones distintas de un mismo parámetro A . Sea $A_1 = a_1 \pm b_1$ la primer medición y $A_2 = a_2 \pm b_2$ la segunda medición. Con a_1, a_2 los valores medios y b_1, b_2 la desviación estándar, si asumimos que estas mediciones son independientes y que las incertidumbres tienen aproximadamente una distribución normal, entonces la tensión entre A_1 y A_2 esta dada por la siguiente ecuación

$$T = \frac{|a_1 - a_2|}{(b_1^2 + b_2^2)^{1/2}}\sigma, \quad (\text{B.1})$$

esta cantidad indica el número de desviaciones estándar por el cual difieren A_1 y A_2 . Ejemplo: Tomemos la medición de H_0 obtenida con el estudio de estrellas cefeidas, la cual corresponde a $H_0 = 74.03 \pm 1.5$, por otro lado, el H_0 obtenido del ajuste de Λ CDM a los datos del CMB es $H_0 = 67.39 \pm 0.54$, por tanto la tensión entre estas dos mediciones es

$$T = \frac{74.03 - 67.39}{\sqrt{1.5^2 + 0.54^2}}\sigma = 4.16\sigma. \quad (\text{B.2})$$

Apéndice C

Perturbaciones escalares

Este apéndice está basado en las referencias [116, 117]. Calcularemos las perturbaciones escalares de la teoría de Horndeski considerada en la sección 5.1 en la norma newtoniana conforme

$$ds^2 = a^2(\tau)[-(1 + 2\Phi)d\tau^2 + (1 - 2\psi)dx^i dx_i]. \quad (\text{C.1})$$

Para ello, escribimos las ecuaciones de campo de esta teoría como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}^{Tot}. \quad (\text{C.2})$$

donde

$$T_{\mu\nu}^{Tot} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi G} \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (\text{C.3})$$

con $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ el tensor energía-momento del campo escalar y $T_{\mu\nu}$ el tensor energía momento de la materia.

Perturbación al tensor de Einstein

El tensor de Einstein perturbado a primer orden, bajo la métrica C.2 es:

$$a^2 \delta G_0^0 = 6 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \Phi + 6 \frac{a'}{a} \psi' - 2 \nabla^2 \psi, \quad (\text{C.4})$$

$$a^2 \delta G_i^0 = -2 \frac{a'}{a} \partial_i \Phi - 2 \partial_i \psi', \quad (\text{C.5})$$

$$a^2 \delta G_j^i = \left(2 \frac{a'}{a} \Phi' + 4 \frac{a''}{a} \Phi - 2 \left(\frac{a'}{a} \right)^2 \Phi + \nabla^2 \Phi + 4 \frac{a'}{a} \psi' + 2\psi'' - \nabla^2 \psi \right) \delta_j^i - \partial^i \partial_j \Phi + \partial^i \partial_j \psi, \quad (\text{C.6})$$

donde $\partial^i \partial_i \equiv \nabla^2$

Perturbación del tensor energía-momento del campo escalar

La perturbación a primer orden del tensor energía-momento del campo escalar es:

$$a^2 \delta \mathcal{T}_0^0 = \Phi \phi'^2 - \delta \phi' \phi' - \delta \phi V_\phi a^2, \quad (\text{C.7})$$

$$a^2 \delta \mathcal{T}_0^i = \partial^i \delta \phi \phi', \quad (\text{C.8})$$

$$a^2 \delta \mathcal{T}_i^0 = -\partial^i \delta \phi \phi', \quad (\text{C.9})$$

$$a^2 \delta \mathcal{T}_j^i = (-\Phi \phi'^2 + \delta \phi' \phi' - \delta \phi V_\phi a^2) \delta_j^i. \quad (\text{C.10})$$

Ecuación de Klein Gordon perturbada

La ecuación de movimiento que gobierna la evolución del campo escalar esta dada por la ecuación de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0. \quad (\text{C.11})$$

Se puede demostrar que la perturbación a primer orden de la ecuación anterior es:

$$\delta \phi'' + 2 \frac{a'}{a} \delta \phi' - \nabla^2 \delta \phi - \Phi' \phi' - 3\psi' \phi' = -\delta \phi V_{\phi\phi} a^2 - 2a^2 \Phi V_\phi. \quad (\text{C.12})$$

Perturbación al tensor energía-momento de la materia

Consideramos el tensor energía momento de un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (\text{C.13})$$

Las perturbaciones al tensor energía momento pueden ser obtenidas de considerar perturbaciones en la densidad, presión y velocidad

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho, \quad p = \bar{p} + \delta p, \quad u^i = \bar{u}^i + \delta u^i. \quad (\text{C.14})$$

Definimos

$$u^i \equiv \frac{1}{a}v_i, \quad (\text{C.15})$$

de tal manera que

$$u^i = \bar{u}^i + \delta u^i = \delta, u^i = \frac{1}{a}v_i. \quad (\text{C.16})$$

Bajo las definiciones anteriores se puede mostrar

$$\delta T_0^0 = -\delta\rho, \quad (\text{C.17})$$

$$\delta T_i^0 = (\rho + p)v_i, \quad (\text{C.18})$$

$$\delta T_j^i = \delta p\delta_j^i. \quad (\text{C.19})$$

Ecuaciones de conservación perturbadas

Se puede mostrar [116] que la ecuación de conservación del tensor energía-momento de la materia está dada por

$$\delta' = (1 + \omega)(\nabla^2 v + 3\phi') + 3H(\omega\delta - \frac{\delta p}{\rho}), \quad (\text{C.20})$$

$$(v)' = -H(1 - 3\omega)v - \frac{\omega'}{1 + \omega}v + \frac{\delta p}{\rho + p} + \Phi. \quad (\text{C.21})$$

Ecuaciones de campo perturbadas

La componente $i - j$ de las ecuaciones de campo perturbadas otorgan que

$$\partial_i \partial_j (\psi - \Phi) = 0, \quad (\text{C.22})$$

de tal manera que

$$\psi = \Phi, \quad (\text{C.23})$$

al tomar la componente 00 de las ecuaciones de campo perturbadas obtenemos

$$3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) - \nabla^2 \Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho - \frac{1}{2}(\phi' \delta\phi' - \phi'^2 \Phi + \delta\phi V_\phi a^2), \quad (\text{C.24})$$

además, la componente $0i$ nos dice

$$\partial_i (\mathcal{H}\Phi + \Phi') = -4\pi G a^2 (\rho + p) v_i + \frac{1}{2} \partial^i \delta\phi \phi'. \quad (\text{C.25})$$

finalmente al manipular la componente ii , obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Phi &= 4\pi G a^2 \delta p \\ &+ \frac{1}{2} (-\Phi \phi'^2 + \delta\phi' \phi' - \delta\phi V_\phi a^2). \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Perturbaciones en la época de dominación de materia

Para especializarnos en la época de dominación de materia, tomamos

$$\omega = 0, \quad (\text{C.27})$$

$$p = 0, \quad (\text{C.28})$$

$$\delta p = 0, \quad (\text{C.29})$$

sustituyendo las expresiones anteriores en (C.21), obtenemos

$$\delta'_m = \nabla^2 v + 3\Phi', \quad (\text{C.30})$$

$$(v)' = -Hv + \Phi. \quad (\text{C.31})$$

Es posible mostrar [118] que en la época de dominación de materia $\Phi = cte$, de tal manera que al derivar (C.30) con respecto al tiempo conforme se obtiene

$$\delta_m'' = \nabla^2 v', \quad (\text{C.32})$$

podemos utilizar las ecuaciones (C.32) y (C.31) para obtener

$$\delta_m'' = -\mathcal{H}\nabla^2 v + \nabla^2 \Phi, \quad (\text{C.33})$$

manipulando la ecuación (C.30) y la ecuación de Poisson

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' = 4\pi G a^2 \rho_m \delta_m + \frac{1}{2} (3\mathcal{H}\phi' \delta\phi + \phi' \delta\phi' - \phi'^2 \Phi + \delta\phi V_\phi a^2). \quad (\text{C.34})$$

Ecuaciones finales

Finalmente, las ecuaciones que rigen la formación de estructura en la época de dominación de materia, en el régimen sub-horizonte, son

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m\delta_m = \frac{1}{2} (3\mathcal{H}\phi' \delta\phi + \phi' \delta\phi' - \phi'^2 \Phi + \delta\phi V_\phi a^2), \quad (\text{C.35})$$

$$\delta\phi'' + 2\mathcal{H}\delta\phi' - \nabla^2 \delta\phi = -\delta\phi V_{\phi\phi} a^2 - 2a^2 \Phi V_\phi, \quad (\text{C.36})$$

$$(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\Phi = \frac{1}{2} (-\Phi\phi'^2 + \delta\phi'\phi' - \delta\phi V_\phi a^2). \quad (\text{C.37})$$

Bibliografía

- [1] L. Verde, T. Treu, and A. G. Riess, “Tensions between the Early and the Late Universe,” Nature Astron., vol. 3, p. 891, 7 2019.
- [2] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. Banday, R. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, et al., “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” arXiv preprint arXiv:1807.06209, 2018.
- [3] A. G. Riess, L. M. Macri, S. L. Hoffmann, D. Scolnic, S. Casertano, A. V. Filippenko, B. E. Tucker, M. J. Reid, D. O. Jones, J. M. Silverman, et al., “A 2.4% determination of the local value of the Hubble constant,” The Astrophysical Journal, vol. 826, no. 1, p. 56, 2016.
- [4] A. G. Riess et al., “Milky Way Cepheid Standards for Measuring Cosmic Distances and Application to Gaia DR2: Implications for the Hubble Constant,” Astrophys. J., vol. 861, no. 2, p. 126, 2018.
- [5] W. L. Freedman, B. F. Madore, D. Hatt, T. J. Hoyt, I. S. Jang, R. L. Beaton, C. R. Burns, M. G. Lee, A. J. Monson, J. R. Neeley, et al., “The carnegie-chicago hubble program. VIII. an independent determination of the hubble constant based on the tip of the red giant branch,” The Astrophysical Journal, vol. 882, no. 1, p. 34, 2019.

-
- [6] K. C. Wong, S. H. Suyu, G. C. Chen, C. E. Rusu, M. Millon, D. Slu-se, V. Bonvin, C. D. Fassnacht, S. Taubenberger, M. W. Auger, *et al.*, “H0LiCOW–XIII. A 2.4 percent measurement of H_0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early-and late-Universe probes,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 498, no. 1, pp. 1420–1439, 2020.
- [7] E. Di Valentino, O. Mena, S. Pan, L. Visinelli, W. Yang, A. Melchiorri, D. F. Mota, A. G. Riess, and J. Silk, “In the Realm of the Hubble tension – a Review of Solutions,” arXiv preprint arXiv:2103.01183, 2021.
- [8] J. L. Bernal, L. Verde, and A. G. Riess, “The trouble with H_0 ,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2016, no. 10, p. 019, 2016.
- [9] T. Kobayashi, “Horndeski theory and beyond: a review,” Reports on Progress in Physics, vol. 82, no. 8, p. 086901, 2019.
- [10] A. Montiel, R. Lazkoz, I. Sendra, C. Escamilla-Rivera, and V. Salzano, “Nonparametric reconstruction of the cosmic expansion with local regression smoothing and simulation extrapolation,” Physical Review D, vol. 89, no. 4, p. 043007, 2014.
- [11] C. K. Williams and C. E. Rasmussen, Gaussian processes for machine learning, vol. 2. MIT press Cambridge, MA, 2006.
- [12] M. Reyes and C. Escamilla-Rivera, “Improving data-driven model-independent reconstructions and new constraints in horndeski cosmology,” arXiv preprint arXiv:2104.04484, 2021.
- [13] S. Perlmutter and *et al.*, “Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae,” The Astrophysical Journal 517, p. 565, 1999.
- [14] S. Alam and *et al.*, “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 470, p. 2617, 2017.

-
- [15] E. Di Valentino et al., “Cosmology Intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8 ,” Astropart. Phys., vol. 131, p. 102604, 2021.
- [16] E. Di Valentino, L. A. Anchordoqui, Y. Ali-Haimoud, L. Amendola, N. Arendse, M. Asgari, M. Ballardini, E. Battistelli, M. Benetti, S. Birrer, et al., “Cosmology Intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8 ,” arXiv preprint arXiv:2008.11285, 2020.
- [17] W. L. Freedman, “Cosmology at a Crossroads,” Nature Astron., vol. 1, p. 0121, 2017.
- [18] A. K. Yadav, “Dissipative future universe without big rip,” International Journal of Theoretical Physics, vol. 50, no. 5, pp. 1664–1670, 2011.
- [19] S. Gariazzo, “New Developments in Cosmology,” arXiv preprint arXiv:1603.09102, 2016.
- [20] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “ $f(R)$ theories of gravity,” Reviews of Modern Physics, vol. 82, no. 1, p. 451, 2010.
- [21] S. Nojiri, S. Odintsov, and V. Oikonomou, “Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution,” Physics Reports, vol. 692, pp. 1–104, 2017.
- [22] M. Ballardini, M. Braglia, F. Finelli, D. Paoletti, A. A. Starobinsky, and C. Umiltà, “Scalar-tensor theories of gravity, neutrino physics, and the H_0 tension,” arXiv preprint arXiv:2004.14349, 2020.
- [23] R. C. Nunes, “Structure formation in $f(T)$ gravity and a solution for H_0 tension,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2018, no. 05, p. 052, 2018.
- [24] C. Escamilla-Rivera and J. L. Said, “Cosmological viable models in $f(T, B)$ gravity as solutions to the H_0 tension,” arXiv preprint arXiv:1909.10328, 2019.

-
- [25] E. Bellini, I. Sawicki, and M. Zumalacárregui, “hi_class background evolution, initial conditions and approximation schemes,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2020, no. 02, p. 008, 2020.
- [26] G. Ballesteros, A. Notari, and F. Rompineve, “The H_0 tension: Δ GN vs. Δ Neff,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2020, no. 11, p. 024, 2020.
- [27] S. Peirone, G. Benevento, N. Frusciante, and S. Tsujikawa, “Cosmological constraints and phenomenology of a beyond-horndeski model,” Physical Review D, vol. 100, no. 6, p. 063509, 2019.
- [28] E. Bellini and I. Sawicki, “Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2014, no. 07, p. 050, 2014.
- [29] R. Kase and S. Tsujikawa, “Dark energy in Horndeski theories after GW170817: A review,” International Journal of Modern Physics D, vol. 28, no. 05, p. 1942005, 2019.
- [30] B. Ryden, Introduction to cosmology. Cambridge University Press, 2017.
- [31] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, Gravitation. Princeton University Press, 2017.
- [32] E. Okon and C. Callender, “Does quantum mechanics clash with the equivalence principle—and does it matter?,” European Journal for Philosophy of Science, vol. 1, no. 1, pp. 133–145, 2011.
- [33] K. S. Thorne, C. W. Misner, and J. A. Wheeler, Gravitation. Freeman, 2000.
- [34] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment,” Living reviews in relativity, vol. 17, no. 1, pp. 1–117, 2014.

-
- [35] E. Barausse, “Black holes in general relativity and beyond,” in Multidisciplinary Digital Publishing Institute Proceedings, vol. 17, p. 1, 2019.
- [36] B. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. X. Adhikari, V. Adya, C. Affeldt, et al., “Tests of general relativity with the binary black hole signals from the LIGO-Virgo catalog GWTC-1,” Physical Review D, vol. 100, no. 10, p. 104036, 2019.
- [37] L. Perivolaropoulos and F. Skara, “Challenges for Λ CDM: An update,” arXiv preprint arXiv:2105.05208, 2021.
- [38] E. Berti, E. Barausse, V. Cardoso, L. Gualtieri, P. Pani, U. Sperhake, L. C. Stein, N. Wex, K. Yagi, T. Baker, et al., “Testing general relativity with present and future astrophysical observations,” Classical and Quantum Gravity, vol. 32, no. 24, p. 243001, 2015.
- [39] S. Tsujikawa, “Quintessence: a review,” Classical and Quantum Gravity, vol. 30, no. 21, p. 214003, 2013.
- [40] P. Brax, C. van de Bruck, and A.-C. Davis, “Brane world cosmology,” Reports on Progress in Physics, vol. 67, no. 12, p. 2183, 2004.
- [41] Z. Haghani, T. Harko, H. R. Sepangi, and S. Shahidi, “Cosmology of a lorentz violating galileon theory,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2015, no. 05, p. 022, 2015.
- [42] R. M. Wald, General relativity. University of Chicago press, 2010.
- [43] A. De Unánue, “The quantum origins of the cosmological asymmetry,” arXiv preprint arXiv:1010.5765, 2010.
- [44] S. Weinberg, Cosmology. Oxford university press, 2008.
- [45] D. W. Hogg, “Distance measures in cosmology,” arXiv preprint astro-ph/9905116, 1999.

-
- [46] O. Piattella, Lecture notes in cosmology. Springer, 2018.
- [47] L. Canetti, M. Drewes, T. Frossard, and M. Shaposhnikov, “Dark matter, baryogenesis and neutrino oscillations from right-handed neutrinos,” Physical Review D, vol. 87, no. 9, p. 093006, 2013.
- [48] G. W. Pettinari, C. Fidler, R. Crittenden, K. Koyama, and D. Wands, “The intrinsic bispectrum of the cosmic microwave background,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2013, no. 04, p. 003, 2013.
- [49] A. Hamilton, “Linear redshift distortions: a review,” in The evolving universe, pp. 185–275, Springer, 1998.
- [50] L. Kazantzidis and L. Perivolaropoulos, “Evolution of the $f\sigma_8$ tension with the Planck 15/ Λ CDM determination and implications for modified gravity theories,” Physical Review D, vol. 97, no. 10, p. 103503, 2018.
- [51] C. Alcock and B. Paczyński, “An evolution free test for non-zero cosmological constant,” Nature, vol. 281, no. 5730, pp. 358–359, 1979.
- [52] S. Burles, K. M. Nollett, and M. S. Turner, “Big-bang nucleosynthesis: Linking inner space and outer space,” arXiv preprint astro-ph/9903300, 1999.
- [53] E. S. Agency, “Planck image gallery.” <https://www.cosmos.esa.int/web/planck/picture-gallery>, July 2018.
- [54] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, “Dynamics of dark energy,” International Journal of Modern Physics D, vol. 15, no. 11, pp. 1753–1935, 2006.
- [55] M. Visser, “Jerk, snap and the cosmological equation of state,” Classical and Quantum Gravity, vol. 21, no. 11, p. 2603, 2004.
- [56] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, J. B. Bowers, L. Macri, J. C. Zinn, and D. Scolnic, “Cosmic Distances Calibrated to 1 % Precision with Gaia

- EDR3 Parallaxes and Hubble Space Telescope Photometry of 75 Milky Way Cepheids Confirm Tension with Λ CDM,” The Astrophysical Journal Letters, vol. 908, no. 1, p. L6, 2021.
- [57] B. S. Wright and B. Li, “Type Ia supernovae, standardizable candles, and gravity,” Physical Review D, vol. 97, no. 8, p. 083505, 2018.
- [58] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, V. Adya, et al., “Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral,” Physical Review Letters, vol. 119, no. 16, p. 161101, 2017.
- [59] G. P. Lamb and S. Kobayashi, “GRB 170817A as a jet counterpart to gravitational wave trigger GW 170817,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 478, no. 1, pp. 733–740, 2018.
- [60] S. Carroll, “Standard sirens.” <https://www.preposterousuniverse.com/blog/2017/10/16/standard-sirens/>, Octubre 2017.
- [61] L. S. Collaboration, V. Collaboration, M. Collaboration, D. E. C. G.-E. Collaboration, D. Collaboration, D. Collaboration, L. C. O. Collaboration, V. Collaboration, M. Collaboration, et al., “A gravitational-wave standard siren measurement of the hubble constant,” Nature, vol. 551, no. 7678, pp. 85–88, 2017.
- [62] C. Escamilla-Rivera, “A dynamical dark energy solution to Hubble-Lemaitre tension in the light of the multimessenger era,” arXiv preprint arXiv:2103.01318, 2021.
- [63] C. Potter, J. B. Jensen, J. Blakeslee, P. Milne, P. M. Garnavich, and P. Brown, “Calibrating the type ia supernova distance scale using surface brightness fluctuations,” in American Astronomical Society Meeting Abstracts# 232, vol. 232, pp. 319–02, 2018.

-
- [64] C. D. Huang, A. G. Riess, W. Yuan, L. M. Macri, N. L. Zakamska, S. Casertano, P. A. Whitelock, S. L. Hoffmann, A. V. Filippenko, and D. Scolnic, “Hubble space telescope observations of mira variables in the sn ia host ngc 1559: An alternative candle to measure the hubble constant,” The Astrophysical Journal, vol. 889, no. 1, p. 5, 2020.
- [65] A. G. Riess, L. Macri, S. Casertano, H. Lampeitl, H. C. Ferguson, A. V. Filippenko, S. W. Jha, W. Li, and R. Chornock, “A 3% solution: determination of the Hubble constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3,” The Astrophysical Journal, vol. 730, no. 2, p. 119, 2011.
- [66] E. Calabrese, A. Slosar, A. Melchiorri, G. F. Smoot, and O. Zahn, “Cosmic microwave weak lensing data as a test for the dark universe,” Physical Review D, vol. 77, no. 12, p. 123531, 2008.
- [67] F. Renzi, E. Di Valentino, and A. Melchiorri, “Cornering the p lanck a lens tension with future cmb data,” Physical Review D, vol. 97, no. 12, p. 123534, 2018.
- [68] M. Douspis, L. Salvati, and N. Aghanim, “On the tension between large scale structures and cosmic microwave background,” arXiv preprint arXiv:1901.05289, 2019.
- [69] H. Hildebrandt, M. Viola, C. Heymans, S. Joudaki, K. Kuijken, C. Blake, T. Erben, B. Joachimi, D. Klaes, L. t. Miller, et al., “Kids-450: Cosmological parameter constraints from tomographic weak gravitational lensing,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 465, no. 2, pp. 1454–1498, 2017.
- [70] S. Joudaki, C. Blake, A. Johnson, A. Amon, M. Asgari, A. Choi, T. Erben, K. Glazebrook, J. Harnois-Déraps, C. Heymans, et al., “KiDS-450+2dFLenS: Cosmological parameter constraints from weak gravitational lensing tomography and overlapping redshift-space galaxy clustering,”

- Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 474, no. 4, pp. 4894–4924, 2018.
- [71] H. Hildebrandt, F. Köhlinger, J. Van den Busch, B. Joachimi, C. Heymans, A. Kannawadi, A. Wright, M. Asgari, C. Blake, H. Hoekstra, et al., “KiDS+ VIKING-450: Cosmic shear tomography with optical and infrared data,” Astronomy & Astrophysics, vol. 633, p. A69, 2020.
- [72] T. Abbott, F. B. Abdalla, A. Alarcon, J. Aleksić, S. Allam, S. Allen, A. Amara, J. Annis, J. Asorey, S. Avila, et al., “Dark Energy Survey year 1 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing,” Physical Review D, vol. 98, no. 4, p. 043526, 2018.
- [73] C. Heymans, T. Tröster, M. Asgari, C. Blake, H. Hildebrandt, B. Joachimi, K. Kuijken, C.-A. Lin, A. G. Sánchez, J. L. van den Busch, et al., “KiDS-1000 Cosmology: Multi-probe weak gravitational lensing and spectroscopic galaxy clustering constraints,” Astronomy & Astrophysics, vol. 646, p. A140, 2021.
- [74] E. Di Valentino and S. Bridle, “Exploring the tension between current cosmic microwave background and cosmic shear data,” Symmetry, vol. 10, no. 11, p. 585, 2018.
- [75] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, V. Adya, et al., “Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817A,” The Astrophysical Journal Letters, vol. 848, no. 2, p. L13, 2017.
- [76] J. Kennedy, “Reconstructing horndeski theories from cosmological observables,” 2019.
- [77] J. Magaña, M. H. Amante, M. A. Garcia-Aspeitia, and V. Motta, “The Cardassian expansion revisited: constraints from updated Hubble parameter measurements and type Ia supernova data,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 476, no. 1, pp. 1036–1049, 2018.

-
- [78] A. Mehrabi and S. Basilakos, “Does Λ cdm really be in tension with the hubble diagram data?,” arXiv preprint arXiv:2002.12577, 2020.
- [79] R. Briffa, S. Capozziello, J. L. Said, J. Mifsud, and E. N. Saridakis, “Constraining teleparallel gravity through gaussian processes,” arXiv preprint arXiv:2009.14582, 2020.
- [80] A. Gómez-Valent and L. Amendola, “ H_0 from cosmic chronometers and type ia supernovae, with gaussian processes and the novel weighted polynomial regression method,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2018, no. 04, p. 051, 2018.
- [81] M. Seikel, C. Clarkson, and M. Smith, “Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using gaussian processes,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2012, no. 06, p. 036, 2012.
- [82] D. M. Scolnic, D. Jones, A. Rest, Y. Pan, R. Chornock, R. Foley, M. Huber, R. Kessler, G. Narayan, A. Riess, et al., “The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample,” The Astrophysical Journal, vol. 859, no. 2, p. 101, 2018.
- [83] R. Jimenez and A. Loeb, “Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages,” The Astrophysical Journal, vol. 573, no. 1, p. 37, 2002.
- [84] G. Bruzual and S. Charlot, “Stellar population synthesis at the resolution of 2003,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 344, no. 4, pp. 1000–1028, 2003.
- [85] G. Chabrier, “Galactic stellar and substellar initial mass function,” Publications of the Astronomical Society of the Pacific, vol. 115, no. 809, p. 763, 2003.

-
- [86] Y. Wang, G.-B. Zhao, C.-H. Chuang, A. J. Ross, W. J. Percival, H. Gil-Marín, A. J. Cuesta, F.-S. Kitaura, S. Rodríguez-Torres, J. R. Brownstein, et al., “The clustering of galaxies in the completed sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: tomographic bao analysis of dr12 combined sample in configuration space,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 469, no. 3, pp. 3762–3774, 2017.
- [87] P. A. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Banday, R. Barreiro, N. Bartolo, E. Battaner, et al., “Planck 2015 results-xiv. dark energy and modified gravity,” Astronomy & Astrophysics, vol. 594, p. A14, 2016.
- [88] J. Taylor, Introduction to error analysis, the study of uncertainties in physical measurements. 1997.
- [89] E. V. Linder, “Cosmic growth history and expansion history,” Physical Review D, vol. 72, no. 4, p. 043529, 2005.
- [90] H. Wei and S. N. Zhang, “How to distinguish dark energy and modified gravity?,” Physical Review D, vol. 78, no. 2, p. 023011, 2008.
- [91] C. Howlett, L. Staveley-Smith, P. J. Elahi, T. Hong, T. H. Jarrett, D. H. Jones, B. S. Koribalski, L. M. Macri, K. L. Masters, and C. M. Springob, “2mtf–vi. measuring the velocity power spectrum,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 471, no. 3, pp. 3135–3151, 2017.
- [92] M. J. Hudson and S. J. Turnbull, “The growth rate of cosmic structure from peculiar velocities at low and high redshifts,” The Astrophysical Journal Letters, vol. 751, no. 2, p. L30, 2012.
- [93] D. Huterer, D. L. Shafer, D. M. Scolnic, and F. Schmidt, “Testing Λ CDM at the lowest redshifts with sn ia and galaxy velocities,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2017, no. 05, p. 015, 2017.

-
- [94] F. Beutler, C. Blake, M. Colless, D. H. Jones, L. Staveley-Smith, G. B. Poole, L. Campbell, Q. Parker, W. Saunders, and F. Watson, “The 6df galaxy survey: $z = 0$ measurements of the growth rate and σ_8 ,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 423, no. 4, pp. 3430–3444, 2012.
- [95] F. Shi, X. Yang, H. Wang, Y. Zhang, H. Mo, F. C. van den Bosch, W. Luo, D. Tweed, S. Li, C. Liu, et al., “Mapping the real space distributions of galaxies in SDSS DR7. II. Measuring the growth rate, clustering amplitude of matter, and biases of galaxies at redshift 0.1,” The Astrophysical Journal, vol. 861, no. 2, p. 137, 2018.
- [96] C. Howlett, A. J. Ross, L. Samushia, W. J. Percival, and M. Manera, “The clustering of the SDSS main galaxy sample—II. Mock galaxy catalogues and a measurement of the growth of structure from redshift space distortions at $z = 0.15$,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 449, no. 1, pp. 848–866, 2015.
- [97] Y.-S. Song and W. J. Percival, “Reconstructing the history of structure formation using redshift distortions,” Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2009, no. 10, p. 004, 2009.
- [98] C. Blake, I. K. Baldry, J. Bland-Hawthorn, L. Christodoulou, M. Colless, C. Conselice, S. P. Driver, A. M. Hopkins, J. Liske, J. Loveday, et al., “Galaxy And Mass Assembly (GAMA): improved cosmic growth measurements using multiple tracers of large-scale structure,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 436, no. 4, pp. 3089–3105, 2013.
- [99] L. Samushia, W. J. Percival, and A. Raccanelli, “Interpreting large-scale redshift-space distortion measurements,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 420, no. 3, pp. 2102–2119, 2012.
- [100] R. Tojeiro, W. J. Percival, J. Brinkmann, J. R. Brownstein, D. J. Eisenstein, M. Manera, C. Maraston, C. K. McBride, D. Muna, B. Reid, et al.,

- “The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measuring structure growth using passive galaxies,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 424, no. 3, pp. 2339–2344, 2012.
- [101] Y. Wang, G.-B. Zhao, C.-H. Chuang, M. Pellejero-Ibanez, C. Zhao, F.-S. Kitaura, and S. Rodriguez-Torres, “The clustering of galaxies in the completed sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: a tomographic analysis of structure growth and expansion rate from anisotropic galaxy clustering,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 481, no. 3, pp. 3160–3166, 2018.
- [102] H. Gil-Marín, W. J. Percival, L. Verde, J. R. Brownstein, C.-H. Chuang, F.-S. Kitaura, S. A. Rodríguez-Torres, and M. D. Olmstead, “The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: RSD measurement from the power spectrum and bispectrum of the DR12 BOSS galaxies,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, p. stw2679, 2016.
- [103] A. G. Sánchez, F. Montesano, E. A. Kazin, E. Aubourg, F. Beutler, J. Brinkmann, J. R. Brownstein, A. J. Cuesta, K. S. Dawson, D. J. Eisenstein, et al., “The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological implications of the full shape of the clustering wedges in the data release 10 and 11 galaxy samples,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 440, no. 3, pp. 2692–2713, 2014.
- [104] C.-H. Chuang and Y. Wang, “Modelling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and single-probe measurements of $h(z)$, $d_a(z)$ and $f(z) \sigma_8(z)$ from the sloan digital sky survey dr7 luminous red galaxies,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 435, no. 1, pp. 255–262, 2013.

- [105] S. Alam, M. Ata, S. Bailey, F. Beutler, D. Bizyaev, J. A. Blazek, A. S. Bolton, J. R. Brownstein, A. Burden, C.-H. Chuang, *et al.*, “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 470, no. 3, pp. 2617–2652, 2017.
- [106] C. Blake, S. Brough, M. Colless, C. Contreras, W. Couch, S. Croom, D. Croton, T. M. Davis, M. J. Drinkwater, K. Forster, *et al.*, “The wigglez dark energy survey: Joint measurements of the expansion and growth history at $z < 1$,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 425, no. 1, pp. 405–414, 2012.
- [107] C.-H. Chuang, F. Prada, M. Pellejero-Ibanez, F. Beutler, A. J. Cuesta, D. J. Eisenstein, S. Escoffier, S. Ho, F.-S. Kitaura, J.-P. Kneib, *et al.*, “The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: single-probe measurements from CMASS anisotropic galaxy clustering,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 461, no. 4, pp. 3781–3793, 2016.
- [108] S. De La Torre, E. Jullo, C. Giocoli, A. Pezzotta, J. Bel, B. Granett, L. Guzzo, B. Garilli, M. Scodreggio, M. Bolzonella, *et al.*, “The vimos public extragalactic redshift survey (vipers)-gravity test from the combination of redshift-space distortions and galaxy-galaxy lensing at $0.5 < z < 1.2$,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 608, p. A44, 2017.
- [109] A. Hawken, B. Granett, A. Iovino, L. Guzzo, J. Peacock, S. De La Torre, B. Garilli, M. Bolzonella, M. Scodreggio, U. Abbas, *et al.*, “The vimos public extragalactic redshift survey-measuring the growth rate of structure around cosmic voids,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 607, p. A54, 2017.
- [110] M. J. Wilson, “Geometric and growth rate tests of general relativity with recovered linear cosmological perturbations,” *arXiv preprint arXiv:1610.08362*, 2016.

- [111] S. De La Torre, L. Guzzo, J. Peacock, E. Branchini, A. Iovino, B. Granett, U. Abbas, C. Adami, S. Arnouts, J. Bel, et al., “The vimos public extragalactic redshift survey (vipers)-galaxy clustering and redshift-space distortions at z 0.8 in the first data release,” Astronomy & Astrophysics, vol. 557, p. A54, 2013.
- [112] F. Mohammad, B. R. Granett, L. Guzzo, J. Bel, E. Branchini, S. de la Torre, L. Moscardini, J. Peacock, M. Bolzonella, B. Garilli, et al., “The vimos public extragalactic redshift survey (vipers)-an unbiased estimate of the growth rate of structure at $\langle z \rangle = 0.85$ using the clustering of luminous blue galaxies,” Astronomy & Astrophysics, vol. 610, p. A59, 2018.
- [113] G.-B. Zhao, Y. Wang, S. Saito, H. Gil-Marín, W. J. Percival, D. Wang, C.-H. Chuang, R. Ruggeri, E.-M. Mueller, F. Zhu, et al., “The clustering of the SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey DR14 quasar sample: a tomographic measurement of cosmic structure growth and expansion rate based on optimal redshift weights,” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 482, no. 3, pp. 3497–3513, 2019.
- [114] T. Okumura, C. Hikage, T. Totani, M. Tonegawa, H. Okada, K. Glazebrook, C. Blake, P. G. Ferreira, S. More, A. Taruya, et al., “The subaru fmos galaxy redshift survey (fastsound). iv. new constraint on gravity theory from redshift space distortions at z 1.4,” Publications of the Astronomical Society of Japan, vol. 68, no. 3, p. 38, 2016.
- [115] N. Jarosik, C. Bennett, J. Dunkley, B. Gold, M. Greason, M. Halpern, R. Hill, G. Hinshaw, A. Kogut, E. Komatsu, et al., “Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP*) observations: sky maps, systematic errors, and basic results,” The Astrophysical Journal Supplement Series, vol. 192, no. 2, p. 14, 2011.
- [116] H. Kurki-Suonio, “Cosmological perturbation theory, part 1,” Lecture notes for a course of cosmological perturbation theory given at the University of Helsinki, vol. 2015, 2015.

- [117] A. Riotto, “Inflation and the theory of cosmological perturbations,” arXiv preprint hep-ph/0210162, 2002.
- [118] S. Dodelson and F. Schmidt, Modern Cosmology. Academic Press, 2020.