



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

ESTUDIO NUMÉRICO Y EXPERIMENTAL DE LUZ ESTRUCTURADA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
ISRAEL ALEJANDRO HERRERA HERNÁNDEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. PEDRO ANTONIO QUINTO SU
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR
DRA. ROCIO JÁUREGUI RENAUD
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR
DR. ROBERTO DE JESÚS LEÓN MONTIEL
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO, 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos.

Agradezco profundamente:

A mi asesor, Dr. Pedro Antonio Quinto Su.

A los profesores: Dra. Rocio Jáuregui Renaud y Dr. Roberto de Jesús León Montiel, miembros de mi comité de tutores.

A los profesores: Dr. Neil Charles Bruce Davidson, Dr. Juan Arnaldo Hernández Cordero, Dr. Maximino Avendaño Alejo y Dr. Rubén Ramos García, por sus comentarios a este texto.

Al proyecto PAPIIT- IN107719 y al CONACYT por la beca de maestría.

Índice general

1	Introducción	1
2	Propagación y enfoque de luz monocromática.	4
2.1	Consideraciones iniciales para modelar luz monocromática.	4
2.2	Representación angular espectral del campo.	6
2.3	Límite de campo lejano.	8
2.4	Forma integral para enfoque de haces.	12
3	Estimaciones numéricas.	17
3.1	Implementación de la función FFT.	17
3.2	Resultados numéricos.	20
4	Desarrollo experimental.	26
4.1	Generación de luz estructurada con un modulador espacial de fase.	26
4.2	Generación y medición de intensidad de haces estructurados microscópicos.	28
4.3	Medición de amplitud y fase de luz estructurada.	29
5	Resultados experimentales y discusión.	35
5.1	Interferometría por desplazamiento.	35
5.2	Análisis de franjas de interferencia.	37
5.3	Mediciones de amplitud en escalas microscópicas.	40
5.4	Mediciones de fase en escalas microscópicas.	43
6	Aportaciones y perspectivas.	45

1 Introducción

Uno de los grandes descubrimientos dentro de la física ha sido la naturaleza electromagnética de la luz y la posibilidad de describirla por medio de una función vectorial de la forma $E^j(\mathbf{r}, t; \omega) = A^j(\mathbf{r}; \omega)e^{i\phi^j(\mathbf{r}; \omega)}e^{-i\omega t}$. Donde $E^j(\mathbf{r}, t; \omega)$ es solución a las ecuaciones de Maxwell, \mathbf{r} es el vector de posición, t el tiempo, $A(\mathbf{r}; \omega)$ es la *amplitud*, $\phi(\mathbf{r}; \omega)$ es la *fase*, $j \in \{x, y, z\}$ es cualquiera de las direcciones cartesianas de polarización del campo y ω es la frecuencia angular relacionada con el color de la luz. A lo largo de este texto se hará referencia únicamente a luz monocromática, por lo que se omitirá la dependencia de ω . La invención del láser a mediados del siglo XX significó uno de los más importantes logros de la física experimental ya que permitió tener fuentes de luz aproximadamente monocromáticas y con alta coherencia. El láser ha permitido un gran número de aplicaciones y ha generado nuevos campos de investigación. Una de las áreas con más actividad y desarrollos en años recientes ha sido la ingeniería sobre el estado de haces de luz monocromáticos [23].

Luz con estructura.

La posibilidad de controlar experimentalmente la amplitud, fase y el estado de polarización de luz monocromática ha permitido acuñar el término *luz estructurada* [1]. Desde el desarrollo del láser ha sido posible estructurar luz, tanto dentro de la cavidad láser como fuera de ella. Usualmente la luz láser es descrita, en muy buena aproximación, como un haz Gaussiano, que diverge suavemente y, como su nombre lo indica, presenta un frente con amplitud gaussiana. Para estructurar haces Gaussianos se emplean elementos difractores, refractivos o adaptativos, entre los últimos destacan: el modulador espacial de luz (SLM), este dispositivo puede modular la fase de un frente de onda incidente a una pantalla conformada por un arreglo rectangular de píxeles, sobre los cuales la modulación de fase puede ir de 0 a 2π rad; el dispositivo digital de micro espejos (DMD), es una pantalla conformada por un arreglo de micro espejos que pueden controlar dinámicamente la amplitud de un haz incidente a frecuencias de hasta 40 kHz, la modulación se logra cambiando la orientación de los micro-espejos, lo que separa el haz deseado del incidente; los espejos deformables (DMs), como su nombre lo indica, son superficies reflectoras cuya forma puede ser modificada [37]. También es posible modular la amplitud de un frente de onda con el SLM, lo que muestra la versatilidad de este dispositivo y explica su popularidad en distintas áreas de la óptica como las comunicaciones ópticas, óptica cuántica, micro manipulación, microscopía, etc.

Uno de los ejemplos prototípicos de luz estructurada es el haz Bessel, que fue realizado experimentalmente por primera vez en 1987 con el uso de una abertura difractora anular [14]. La importancia del haz Bessel radica en que fue la primera demostración de los llamados haces adifraccionales, esto significa que la amplitud del haz no cambia a lo largo de la dirección de propagación. Posteriormente, con el uso del SLM fue posible generar más familias de haces adifraccionales como los Airy [38] y los Mathieu–Gauss [17] que, junto con los Bessel, son

soluciones analíticas al problema de la difracción. Los nombres de estos haces se deben a que están descritos en términos de las funciones de Bessel, Airy y Mathieu. Recientemente, también con el uso del SLM, se han podido generar haces adifraccionales con patrones arbitrarios de amplitud. [26]. Otras familias de soluciones analíticas ampliamente estudiadas son los haces Hermite-Gauss y los Laguerre-Gauss [28], éstos últimos tienen la característica fundamental de poseer momento angular orbital, de nueva cuenta, ambos tipos de haces pueden generarse fácilmente con el SLM. Alrededor de los haces mencionados existe una gran cantidad de estudios que van desde el régimen cuántico, donde se ha usado los haces Hermite-Gauss y Laguerre-Gauss como modos espaciales de fotones, para poder exhibir el entrelazamiento cuántico [15], hasta el régimen clásico, donde se han utilizado los haces Laguerre-Gauss para transmitir información a través de medios turbulentos [18], por citar un par de ejemplos.

A partir de la invención de las pinzas ópticas por Arthur Ashkin en 1986, donde se utilizó un haz Gaussiano fuertemente enfocado para atrapar partículas esféricas y material biológico [6], han surgido constantes innovaciones tecnológicas que permiten mejorar la interacción de la luz con materia en escalas microscópicas, dentro del régimen clásico. Por ejemplo, en las modernas configuraciones de pinzas ópticas holográficas (HOT), un SLM brinda estructura a un haz monocromático y permite crear, no sólo los haces enunciados anteriormente, sino arbitrarias distribuciones de intensidad del campo en la micro escala [47, 7]. Con el haz Bessel se han podido atrapar partículas en distintos planos debido a su naturaleza adifraccional [16], el haz Airy ha sido usado para transportar micro partículas a lo largo de trayectorias parabólicas [34]. Recientemente los haces Mathieu-Gauss se han utilizado para fabricar micro estructuras con dimensiones de unas cuantas longitudes de onda [13]. También en las escalas microscópicas, se ha observado la transferencia de momento angular orbital de los haces Laguerre-Gauss a micropartículas, lo que se traduce en un movimiento de rotación alrededor del eje óptico del haz [43]. Los ejemplos anteriores ilustran la importancia de la luz estructurada en escalas microscópicas.

Descripción teórica y medición de haces estructurados.

En la mayoría de las aplicaciones de haces monocromáticos estructurados no se considera su naturaleza vectorial. En escalas macroscópicas la mayor parte de la energía se concentra en una sola dirección de polarización, por lo tanto, los fenómenos de difracción y enfoque se pueden describir, con muy buena exactitud, por medio de una función escalar utilizando los modelos de Fraunhofer o Fresnel [30]. Sin embargo cuando se enfoca un haz de luz con un ángulo muy pronunciado, en la vecindad del plano focal se tienen contribuciones medibles en las tres componentes del campo. Trabajos recientes sugieren el potencial que hay en el uso de haces estructurados vectoriales para mejorar las técnicas de micromanipulación y microscopia existentes, es por ello que el estudio completo de estos haces, tanto teórico como experimental, se vuelve importante [5, 2]. Para describir haces vectoriales monocromáticos se debe resolver la ecuación de Helmholtz, que es consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell.

Además de la descripción teórica, también es fundamental desarrollar métodos para detectar estos campos. Mientras que la amplitud se puede medir directamente en el laboratorio, la medición directa de la fase en haces monocromáticos es todavía inaccesible debido a las

altas frecuencias de oscilación del campo. Por esta razón, desde finales del siglo pasado, se han desarrollado diversas técnicas interferométricas que permiten obtener la fase en escalas macroscópicas de manera rápida y con algoritmos numéricos sencillos [44, 24]. Con pequeños cambios en los esquemas de pinzas ópticas también es posible medir la amplitud del campo en escalas microscópicas, sin embargo, medir la fase en dichas escalas es una tarea complicada que no fue posible realizar hasta este siglo y, además, sólo existen un par de métodos que son difíciles de implementar porque son necesarias la caracterización de elementos de prueba nano métricos y la implementación de algoritmos computacionales complejos [11, 35].

Objetivos y contenido.

Este trabajo tiene los siguientes objetivos: estudiar los fundamentos teóricos para la simulación de difracción y enfoque de haces monocromáticos en cualquier escala espacial, considerando la naturaleza vectorial de la luz; discutir los métodos para la generación de luz estructurada con el SLM; estudiar, de manera preliminar y cualitativa, técnicas interferométricas que permiten la medición de la fase de haces con estructura y comparar con resultados experimentales.

En el [Capítulo 2](#) se hace una revisión de elementos del electromagnetismo que permiten construir modelos para la propagación y enfoque de haces monocromáticos tomando en cuenta la naturaleza vectorial de la luz. En el [Capítulo 3](#) se discute la construcción de algoritmos computacionales que resuelven de manera rápida el problema de difracción y enfoque de haces con estructura. Se muestran resultados numéricos para difracción de haces por medio de aberturas circulares y el enfoque de haces con estructura en escalas microscópicas. En el [Capítulo 4](#) se discute la generación de luz estructurada utilizando únicamente el modulador espacial de luz (SLM), se explican los esquemas experimentales para la generación y medición de haces estructurados en escalas macroscópicas y microscópicas. En el [Capítulo 5](#) se muestran resultados experimentales preliminares de medición de amplitud y fase, con técnicas interferométricas, tanto en el régimen paraxial como el no paraxial. En el [Capítulo 6](#) se discuten las aportaciones y perspectivas del proyecto.

2 Propagación y enfoque de luz monocromática.

El presente capítulo tiene como objetivos deducir las expresiones que permiten calcular: la propagación de luz monocromática en el vacío y en la vecindad del foco de una lente, considerando en ambos casos la naturaleza vectorial de la luz, que posee componentes en las tres direcciones espaciales.

Primero se discuten aspectos generales del campo electromagnético, luego se encuentra la expresión para la propagación de haces a partir del esquema de representación angular espectral del campo, después se deduce la expresión para el campo lejano de un haz utilizando la aproximación de fase estacionaria y finalmente se encuentran las expresiones para las componentes del campo eléctrico en la vecindad del foco de la lente.

El desarrollo teórico está basado en los trabajos de Richards, Bovin, Mandel y Wolf [10, 9, 46], sin embargo se sigue la notación utilizada por Novotny, Hohenester, Andrews, J. Gbur y Jones. [4, 31, 27, 29, 28].

2.1. Consideraciones iniciales para modelar luz monocromática.

La luz láser puede considerarse, en una muy buena aproximación, cuasi-monocromática con un ancho de banda $\Delta\omega$ pequeño comparado con el valor promedio de la frecuencia emitida. Esta cantidad permite definir el tiempo de coherencia $\Delta t = 2\pi/\Delta\omega$ y la longitud de coherencia $\Delta l = c\Delta t$. Estas cantidades son de suma importancia en experimentos donde se realiza interferencia, como se discutirá en el [Capítulo 4](#). El haz láser puede describirse como un campo electromagnético que se propaga y que tiene componentes en las tres direcciones cartesianas. En muchas aplicaciones, sin embargo, el carácter vectorial del campo es ignorado debido a que al difractarse no hay cambios en el estado de polarización, es por ello que los problemas de difracción y enfoque son modelados con una función escalar siguiendo las aproximaciones clásicas de Fraunhofer, Fresnel, o encontrando soluciones analíticas a la ecuación de Helmholtz, dentro de la llamada *aproximación paraxial*. Sin embargo en la nano y micro escala, cuando las longitudes características del sistema son del orden de la longitud de onda, la energía se distribuye (en proporciones detectables) en las distintas direcciones de polarización, en estas condiciones se vuelve necesario un modelo vectorial de propagación y enfoque.

Para comenzar, es necesario considerar las ecuaciones de Maxwell en medios materiales [28]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_f(\mathbf{r}, t) \quad (\text{Ley de Gauss})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{Ley de Faraday})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{Ley de Ampere-Maxwell})$$

Donde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, $\rho_f(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, son el campo eléctrico, el campo de inducción magnética, el campo de desplazamiento eléctrico, el campo magnético, la densidad de cargas libres y la densidad total de corriente, respectivamente. En medios homogéneos, isotrópicos, lineales se cumple: $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, donde ϵ es la permitividad dieléctrica y μ la permeabilidad magnética.

Para campos monocromáticos es posible suponer una dependencia armónica en el tiempo de la forma $e^{-i\omega t}$, donde ω es la frecuencia angular del campo en cuestión. Esta aproximación permite reescribir el campo eléctrico en términos de la función compleja $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, que solamente depende de las coordenadas espaciales: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, se puede hacer la misma suposición para los demás campos. Si se considera un medio libre de corrientes y cargas, con $\rho_f(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$, las ecuaciones de Maxwell se simplifican a:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Tomando el rotacional de la Ley de Faraday y sustituyendo en la expresión resultante la ley de Ampere-Maxwell se llega a la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.2)$$

Con $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$, se define el índice de refracción del medio como $n = c\sqrt{\mu\epsilon}$, c la velocidad de la luz en el vacío, se puede reescribir al número de onda en el medio $k = \omega n/c$. En el vacío $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$, con λ la longitud de onda.

Como ya se mencionó, el campo vectorial $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, en la ecuación 2.2, es complejo, por lo tanto, cada componente puede escribirse como $A_j(\mathbf{r})e^{i\phi_j(\mathbf{r})}$, donde $A_j(\mathbf{r})$ es la *amplitud*, $\phi_j(\mathbf{r})$ es la *fase*, y j es cualquiera de las componentes cartesianas. El campo físico está dado por $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}$. Sin embargo es conveniente seguir con el tratamiento complejo del campo debido a que cantidades medidas directamente en el laboratorio pueden expresarse en función del campo complejo. Por ejemplo, el promedio temporal de la densidad de energía asociada con el campo eléctrico está dada por [28]:

$$\langle u(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\epsilon}{2} \langle \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \rangle$$

Se llamará simplemente intensidad $I(\mathbf{r})$ al promedio temporal de la densidad de energía asociada con el campo eléctrico.

$$I(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{2} \langle \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) dt \quad (2.3)$$

Se debe tomar el promedio temporal, sobre un intervalo $2T'$ mucho mayor al periodo de oscilación del campo $T = 2\pi/\omega$, debido a que las frecuencias ópticas son del orden de $10^{15} Hz$ y los detectores no pueden resolver estas frecuencias. Entonces, el promedio es:

$$\langle \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \text{Re}\{ \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \} \cdot \text{Re}\{ \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \} \rangle = \frac{1}{4} \langle (\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{i\omega t})^2 \rangle \quad (2.4)$$

Luego:

$$\langle \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{4} \langle (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-2i\omega t} + 2\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{2i\omega t}) \rangle \quad (2.5)$$

Los términos oscilantes en el tiempo pueden despreciarse, porque

$$\frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} e^{\pm 2i\omega t} dt = \frac{\pm 1}{2i\omega} \frac{1}{2T'} (e^{\pm 2i\omega T} - e^{\mp 2i\omega T}) = \frac{1}{4\pi i} \frac{T}{T'} (e^{\pm 2i\omega T} - e^{\mp 2i\omega T}) = 0 \quad (2.6)$$

Esto, se debe a que el cociente $\frac{T}{T'}$ es muy pequeño. El término no oscilante en el tiempo es el único que contribuye al promedio temporal:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{4} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon}{4} \sum_j A^2(\mathbf{r})_j \quad (2.7)$$

2.2. Representación angular espectral del campo.

Si el campo eléctrico está definido en un plano $z = z_0$, se define *el espectro angular* de $\mathbf{E}(x, y, z_0)$ como:

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z_0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, z_0) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = \text{FT}(\mathbf{E}(x, y, z_0)) \quad (2.8)$$

Que no es más que la transformada de Fourier (FT), en dos dimensiones, sobre las coordenadas transversales al eje z . Entonces se puede tomar la transformada inversa y despejar $\mathbf{E}(x, y, z)$, para cualquier z :

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (2.9)$$

Si se sustituye la expresión anterior en la ecuación de Helmholtz se tiene:

$$\nabla^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y + k^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = 0 \quad (2.10)$$

Simplificando:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \{ \nabla^2 [\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)}] + k^2 \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} \} dk_x dk_y = 0 \quad (2.11)$$

Aplicando el laplaciano:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left[-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} + k^2 \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = 0 \quad (2.12)$$

Usando que $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} + k_z^2 \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} \right\} dk_x dk_y = 0 \quad (2.13)$$

Entonces, como la integral es cero para cualquier valor de x o y , el integrando debe ser cero :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} + k_z^2 \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i(k_x x + k_y y)} = 0 \quad (2.14)$$

Luego:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) + k_z^2 \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) = 0 \quad (2.15)$$

Por lo tanto se tiene una solución armónica en z , donde el espectro angular en cualquier plano está determinado enteramente por el espectro angular en el plano inicial:

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) = \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z_0) e^{\pm i k_z (z - z_0)} \quad (2.16)$$

Donde $+$ ($-$) se escoge cuando se quiere conocer el campo que se propaga hacia la dirección positiva (negativa) de z . Si se define $z_0 = 0$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) e^{i[k_x x + k_y y \pm k_z z]} dk_x dk_y \quad (2.17)$$

Vale la pena señalar que esta expresión no es más que:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \text{IFT} \left(\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) e^{\pm i k_z z} \right) \quad (2.18)$$

Con $\text{IFT}(\)$, la transformada inversa de Fourier. Esta simplificación ayuda a estimar numéricamente, y de forma rápida, la propagación de campos bien definidos sobre un plano.

También es importante señalar que, dada una longitud de onda, la componente k_z depende de las componentes transversales, explícitamente se tiene $k_z(k_x, k_y) = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$.

La expresión integral 2.17 se puede interpretar como una descomposición en ondas planas del campo $\mathbf{E}(x, y, z)$. Para regiones del espacio que cumplan $k_x^2 + k_y^2 > k^2$ la exponencial compleja en z se vuelve en una exponencial real que decae, a esas contribuciones se les llama

ondas evanescentes y a las contribuciones de las regiones $k_x^2 + k_y^2 < k^2$ se les llama *ondas viajeras*.

Estrictamente hablando, la expresión 2.17 no es una solución completa hasta que se garantice que cumple la ley de Gauss, es decir

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) e^{i[k_x x + k_y y + k_z z]} dk_x dk_y = 0 \quad (2.19)$$

Si se escribe en componentes el espectro angular $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) = (\hat{E}^x, \hat{E}^y, \hat{E}^z)$, entonces la ley de Gauss se expresa como:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} i [k_x \hat{E}^x + k_y \hat{E}^y + k_z \hat{E}^z] e^{i[k_x x + k_y y + k_z z]} dk_x dk_y = 0 \quad (2.20)$$

Por lo tanto

$$k_x \hat{E}^x + k_y \hat{E}^y + k_z \hat{E}^z = 0 \quad (2.21)$$

Las componentes del espectro angular no son independientes, de hecho:

$$\hat{E}^z = -\frac{1}{k_z} [k_x \hat{E}^x + k_y \hat{E}^y] \quad (2.22)$$

Entonces la componente longitudinal del campo eléctrico, en un plano arbitrario z es:

$$E^z(x, y, z) = \text{IFT} \left(-\frac{1}{k_z} [k_x \hat{E}^x(k_x, k_y; 0) + k_y \hat{E}^y(k_x, k_y; 0)] e^{ik_z z} \right) \quad (2.23)$$

Luego, usando que $\hat{E}^l(k_x, k_y; 0) e^{ik_z z} = \text{FT} (E^l(x, y, z))$, con l cualquiera de las componentes,

$$E^z(x, y, z) = \text{IFT} \left(-\frac{1}{k_z} [k_x \text{FT} (E^x(x, y, z)) + k_y \text{FT} (E^y(x, y, z))] \right) \quad (2.24)$$

Se ha podido expresar la componente longitudinal del campo en términos de transformadas de Fourier sobre las coordenadas transversales al eje z .

Mientras que el tratamiento anterior se realizó para el campo eléctrico, también se puede recuperar el campo de inducción magnética a partir de la ley de Faraday:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{i}{ck} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.25)$$

2.3. Límite de campo lejano.

Para construir el modelo vectorial de enfoque por una lente, es necesario calcular antes el campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en el límite $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$, cuando se conoce el campo $\mathbf{E}(x, y, 0)$. Para ello se utiliza el vector unitario auxiliar $\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z) = \mathbf{r}/|\mathbf{r}| = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$. Entonces, a partir de 2.17 se obtiene

$$\mathbf{E}_{\infty}(s_x, s_y) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{(k_x^2 + k_y^2) \leq k^2} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) e^{ir[k_x s_x + k_y s_y + k_z s_z]} dk_x dk_y \quad (2.26)$$

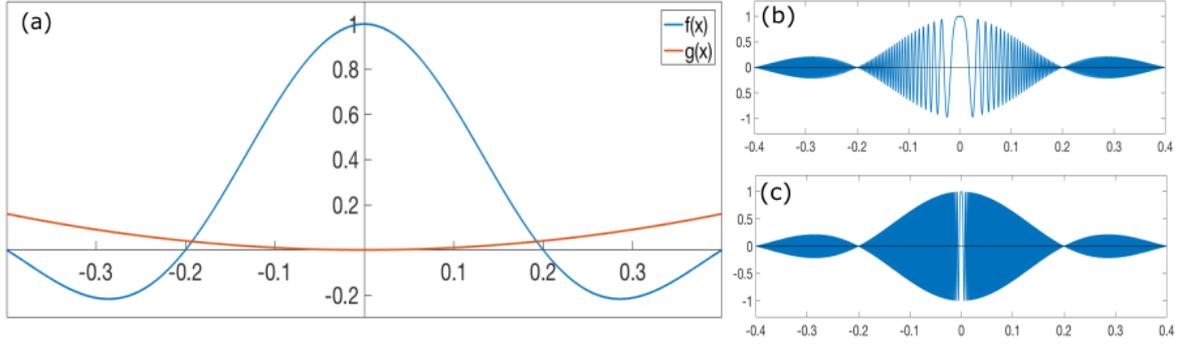


Figura 2.1: Ejemplo de función con oscilaciones rápidas a) Se muestra la función $f(x) = \text{sinc}(5x)$ que tiene el papel de amplitud y la función $g(x) = x^2$ que aparece en el argumento de la exponencial compleja, en este caso tal función solamente tiene un punto crítico en cero. En b) se muestra el factor $f(x)\cos(rg(x))$, con $r = 5000$ que correspondería al integrando en la expresión 2.27, se observa como las oscilaciones rápidas provocan que las contribuciones a la integral sean cero en casi todo el intervalo excepto en la vecindad del punto estacionario, este efecto es más notorio para el caso $r = 10^5$ mostrado en c).

Se integra sólo hasta $k_x^2 + k_y^2 = k^2$ porque las frecuencias mayores, al representar ondas evanescentes, no contribuyen al campo al infinito.

Para encontrar el límite en la ecuación anterior se necesita recurrir a la *aproximación de fase estacionaria*.

Consideremos una integral de la forma:

$$F(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{irg(x)} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f(x) \cos(rg(x)) dx + i \int_a^b f(x) \sin(rg(x)) dx \right] \quad (2.27)$$

La función $f(x)$ es un factor de amplitud variable para los términos armónicos. Cuando r tiende a infinito, se presentan oscilaciones a frecuencias muy altas que, independientemente de la forma de $f(x)$, anularán las contribuciones a la integral de casi todo el dominio $[a, b]$, excepto de las vecindades a los puntos estacionarios de $g(x)$, es decir, aquellos puntos que cumplen:

$$\left. \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x_0} = 0 \quad (2.28)$$

Esto se debe a que en la vecindad de tales puntos el valor de $e^{irg(x)}$ es casi constante. Como ejemplo se puede considerar $f(x) = \text{sinc}(5x)$, $g(x) = x^2$, con $r = 5000$ o $r = 10^5$ y el producto $f(x)\cos(rg(x))$, en el intervalo $[-0.4, 0.4]$ como se muestra en la figura 2.1, este caso ayuda a justificar, de manera heurística, las siguientes suposiciones:

Si se asume que $g(x)$ tiene un sólo punto estacionario en x_0 se puede hacer un desarrollo de Taylor alrededor de ese punto, además, como r tiende a infinito, se puede aproximar $f(x)$ como $f(x_0)$. También se pueden extender los límites de la integral 2.27 a $(-\infty, \infty)$ y reescribirla como:

$$F(r) \approx f(x_0) e^{irg(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ir \frac{1}{2} g_{xx}(x-x_0)^2} dx \quad (2.29)$$

Con $g_{xx} = \frac{d^2g(x)}{dx^2}|_{x_0}$.

En el caso de funciones de dos variables $g(x, y)$ y $f(x, y)$:

$$F(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_S f(x, y) e^{irg(x, y)} dx dy \quad (2.30)$$

Se puede generalizar el desarrollo anterior si se supone que $g(x, y)$ tiene un punto estacionario en $(x_0, y_0) \in S$:

$$F(r) \approx f(x_0, y_0) e^{ikg(x_0, y_0)} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ir}{2}(g_{xx}(x-x_0)^2 + 2g_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + g_{yy}(y-y_0)^2)} dx dy \quad (2.31)$$

Con $g_{xy} = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x \partial y}$, $g_{yy} = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial^2 y}$ y $g_{xx} = \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial^2 x}$, evaluadas en (x_0, y_0) .

Si se hace el cambio de variable $\xi = (x - x_0)$ y $\eta = (y - y_0)$, se puede reescribir la integral anterior como:

$$F(r) \approx f(x_0, y_0) e^{irg(x_0, y_0)} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ir}{2}(g_{xx}\xi^2 + 2g_{xy}\xi\eta + g_{yy}\eta^2)} d\xi d\eta \quad (2.32)$$

Es posible hacer el siguiente cambio de variables $u = \xi \cos(\theta) + \eta \sin(\theta)$, $v = -\xi \sin(\theta) + \eta \cos(\theta)$.

De tal manera que se puede escribir:

$$g_{xx}\xi^2 + 2g_{xy}\xi\eta + g_{yy}\eta^2 = Au^2 + Bv^2 \quad (2.33)$$

Para que la igualdad anterior se cumpla es necesario satisfacer $g_{xx} + g_{yy} = A + B$ y además $g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 = AB$. Como el jacobiano de la transformación de coordenadas es 1, la integral se reduce a:

$$F(r) \approx f(x_0, y_0) e^{irg(x_0, y_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ir}{2}Au^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ir}{2}Bv^2} dv \quad (2.34)$$

Al ser los integrados funciones pares:

$$F(r) \approx 4f(x_0, y_0) e^{irg(x_0, y_0)} \int_0^{\infty} e^{\frac{ir}{2}Au^2} du \int_0^{\infty} e^{\frac{ir}{2}Bv^2} dv \quad (2.35)$$

Haciendo un último cambio de variable $u' = \sqrt{\frac{rA}{2}}u$ y $v' = \sqrt{\frac{rB}{2}}v$

$$F(r) \approx 4f(x_0, y_0) e^{irg(x_0, y_0)} \frac{2}{r\sqrt{AB}} \int_0^{\infty} e^{iu'^2} du' \int_0^{\infty} e^{iv'^2} dv' \quad (2.36)$$

Finalmente se usa que:

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \quad (2.37)$$

Entonces:

$$F(r) \approx f(x_0, y_0) e^{irg(x_0, y_0)} \frac{8}{r\sqrt{AB}} \left[\frac{\pi}{8} (1+i)^2 \right] \quad (2.38)$$

Simplificando :

$$F(r) \approx \frac{2\pi i f(x_0, y_0) e^{irg(x_0, y_0)}}{r\sqrt{AB}} \quad (2.39)$$

Recordando que $AB = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2$, se debe cumplir que $g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 > 0$.

Considerando la expresión mostrada en 2.26, se identifica a la funciones $g(k_x, k_y) = k_x s_x + k_y s_y + \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} s_z$ y $f(k_x, k_y) = \hat{E}^j(k_x, k_y; 0)$, donde j es cualquiera de las componentes del espectro angular.

Para identificar el punto crítico de $g(k_x, k_y)$ se deriva parcialmente y se iguala a cero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(k_x, k_y)}{\partial k_x} &= s_x - \frac{k_x s_z}{k_z} = 0 \\ \frac{\partial g(k_x, k_y)}{\partial k_y} &= s_y - \frac{k_y s_z}{k_z} = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

A partir de estas dos ecuaciones se pueden construir las siguientes tres relaciones:

$$\begin{aligned} s_x k_z - s_z k_x &= 0 \\ s_y k_z - s_z k_y &= 0 \\ s_x k_y - s_y k_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Que no dicen otra cosa más que en el punto crítico los vectores \mathbf{s} y \mathbf{k} son paralelos, entonces se puede escribir $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$. Por lo tanto, la función $rg(k_x, k_y)|_{(k_{x0}, k_{y0})} = r [k s_x s_x + k s_y s_y + k s_z s_z] = rk$, donde (k_{x0}, k_{y0}) es punto crítico y se ha usado que $|\mathbf{s}|^2 = 1$.

Por otro lado, el término $g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2$ se puede estimar a partir de:

$$\begin{aligned} g_{xx} &= -\frac{s_z}{k_z} - \frac{k_x^2 s_z}{k_z^3} \\ g_{yy} &= -\frac{s_z}{k_z} - \frac{k_y^2 s_z}{k_z^3} \\ g_{xy} &= -\frac{k_x k_y s_z}{k_z^3} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Utilizando que $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$ las expresiones anteriores se simplifican a:

$$\begin{aligned} g_{xx} &= -\frac{s_x^2 + s_z^2}{k s_z^2} \\ g_{yy} &= -\frac{s_y^2 + s_z^2}{k s_z^2} \\ g_{xy} &= -\frac{s_x s_y}{k s_z^2} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Por lo tanto

$$\sqrt{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2} = \sqrt{\frac{(s_x^2 + s_z^2)(s_y^2 + s_z^2) - s_x^2 s_y^2}{k^2 s_z^4}} = \sqrt{\frac{s_z^2 s_y^2 + s_z^2 s_x^2 + s_z^2 s_z^2}{k^2 s_z^4}} = \frac{1}{k_z} \quad (2.44)$$

Entonces, la expresión 2.26 es:

$$\mathbf{E}_\infty(s_x, s_y) = \pm 2\pi i k_z \hat{\mathbf{E}}(k s_x, k s_y; 0) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.45)$$

El resultado anterior es de suma importancia, por un lado dice que *la naturaleza puede realizar transformadas de Fourier por sí misma* [31] debido a que el campo lejano, definido en la esfera de radio r con centro en el origen, es proporcional al espectro angular del campo en $z = 0$. Por otro lado, solamente una onda plana con vector (k_x, k_y, k_z) , del espectro angular en el origen, contribuye al campo al infinito en el punto con vector unitario $\mathbf{s} = (x/r, y/r, z/r)$, las demás contribuciones interfieren destructivamente. Se toma el signo negativo, en la expresión anterior y se hace la sustitución $\mathbf{s} = (k_x/k, k_y/k, k_z/k)$:

$$\mathbf{E}_\infty\left(\frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k}\right) = -2\pi i k_z \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.46)$$

Si se despeja el espectro angular:

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) = \frac{ir e^{-ikr}}{2\pi k_z} \mathbf{E}_\infty\left(\frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k}\right) \quad (2.47)$$

Entonces sustituyendo esta última expresión en 2.17:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{ir e^{-ikr}}{2\pi} \iint_{(k_x^2 + k_y^2) \leq k^2} \mathbf{E}_\infty\left(\frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k}\right) e^{i[k_x x + k_y y + k_z z]} \frac{1}{k_z} dk_x dk_y \quad (2.48)$$

El campo, a una distancia z del origen, está determinado por el campo lejano.

2.4. Forma integral para enfoque de haces.

El siguiente desarrollo tiene por objetivo describir el enfoque de haces por sistemas aplanáticos, es decir, configuraciones que obedecen la *regla del seno* [10] (descrita más adelante). El sistema aplanático pueden ser una lente esférica o una serie de elementos ópticos, como en el caso de los objetivos de microscopio.

Un sistema aplanático está caracterizado por la longitud focal f y un diámetro máximo de apertura D para la luz incidente, que se traduce en un ángulo máximo de apertura θ_{max} , como se muestra en la figura 2.2. A partir de estos parámetros, y el índice de refracción del medio donde se enfoca, se define la apertura numérica como $NA = n \sin \theta_{max}$. Sin embargo, para modelar la lente, ésta se idealiza como una superficie esférica de radio f , sobre tal superficie la luz incidente se refracta hacia el foco. A partir del diagrama **b)** de la figura 2.2 se puede calcular $\theta_{max} = \frac{D}{2f}$.

La superficie referencia es de gran ayuda porque permite conectar el resultado de la sección anterior con el objetivo final que es modelar el campo enfocado: se va a suponer que el campo

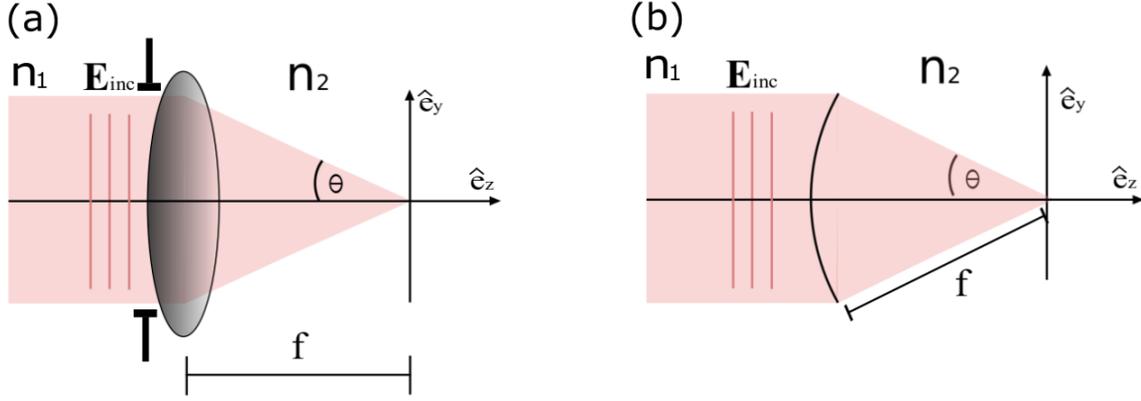


Figura 2.2: Diagrama que representa el sistema físico y el sistema de referencia. a) Un haz descrito dentro de la aproximación paraxial, incide desde un medio con índice de refracción n_1 sobre un sistema que concentra la luz a una distancia f dentro de un medio con índice de refracción n_2 . **b)** La superficie esférica de referencia con centro en el foco de la lente y radio f que refracta al haz incidente hacia el foco.

en la superficie de la esfera es el campo al infinito \mathbf{E}_∞ del campo $\mathbf{E}(x, y, 0)$ definido sobre el plano focal de la lente.

Se deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones [31]:

1) *La regla del seno:* Establece que cada rayo que converge hacia el foco intersecta al rayo incidente, que se propaga paralelo al eje óptico, a una distancia $h = f \sin(\theta)$ del eje óptico, con θ el ángulo de convergencia.

2) *La ley de la intensidad:* No es más que la conservación de energía antes y después de la superficie esférica de referencia. La potencia transportada por un rayo es $dP_1 = \frac{1}{2} Z_1^{-1} |\mathbf{E}_1|^2 dA_1$, tal potencia debe ser la misma al refractarse por la superficie esférica.

$$dP_1 = dP_2 \quad (2.49)$$

Donde $dP_2 = \frac{1}{2} Z_2^{-1} |\mathbf{E}_2|^2 dA_2$. En las expresiones anteriores $Z_i = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_i}{\epsilon_0 \epsilon_i}}$, como se consideran medios no son magnéticos $\mu_i \approx 1$ y entonces $Z_i = \frac{1}{n_i} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$. Por lo tanto:

$$|\mathbf{E}_2| = |\mathbf{E}_1| \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \sqrt{\cos(\theta)} \quad (2.50)$$

La ecuación anterior establece la regla de transformación para la amplitud del campo incidente al *refractarse* por la lente. Estas dos reglas pueden visualizarse en la figura 2.3 a). Si se hace la aproximación de que el campo de incidencia sólo tiene componentes en las direcciones \mathbf{n}_ϕ y \mathbf{n}_ρ , puede escribirse como: $\mathbf{E}_{inc} = [\mathbf{E}_{inc} \cdot \mathbf{n}_\phi] \mathbf{n}_\phi + [\mathbf{E}_{inc} \cdot \mathbf{n}_\rho] \mathbf{n}_\rho$. Al refractarse, el vector unitario \mathbf{n}_ϕ no sufre cambios, sin embargo el vector \mathbf{n}_ρ se trasforma en \mathbf{n}_θ de acuerdo al diagrama mostrado en la figura 2.3 b).

Se denota al campo sobre la superficie de la esfera de referencia como \mathbf{E}_∞ , con coordenadas $(x_\infty, y_\infty, z_\infty)$. Este campo se puede escribir en términos del campo incidente de la siguiente

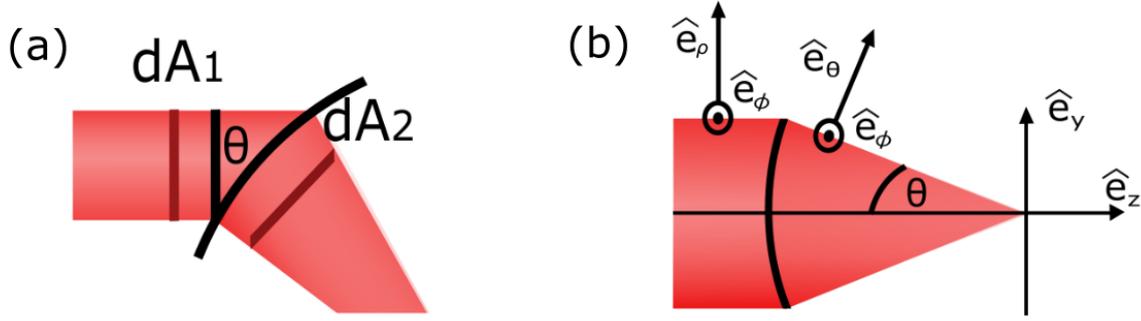


Figura 2.3: Superficie esférica de referencia.. a) ilustra las reglas 1) y 2) mientras que b) muestra las transformaciones de las componentes vectoriales del campo.

forma:

$$\mathbf{E}_\infty = [\mathbf{E}_{inc} \cdot \mathbf{n}_\phi] \mathbf{n}_\phi + [\mathbf{E}_{inc} \cdot \mathbf{n}_\rho] \mathbf{n}_\theta \quad (2.51)$$

Las expresiones de los vectores unitarios \mathbf{n}_ϕ , \mathbf{n}_ρ y \mathbf{n}_θ en términos de los vectores unitarios cartesianos son:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\phi &= -\sin(\phi) \mathbf{n}_x + \cos(\phi) \mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_\rho &= \cos(\phi) \mathbf{n}_x + \sin(\phi) \mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_\theta &= \cos(\theta) \cos(\phi) \mathbf{n}_x + \cos(\theta) \sin(\phi) \mathbf{n}_y - \sin(\theta) \mathbf{n}_z \end{aligned} \quad (2.52)$$

Si el campo incidente está polarizado linealmente, es decir, $\mathbf{E}_{inc} = E_{inc}^x \mathbf{n}_x$, entonces el término \mathbf{E}_∞^x puede escribirse como:

$$\mathbf{E}_\infty^x = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \sqrt{\cos(\theta)} E_{inc}^x \left[-\sin(\phi) \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} + \cos(\phi) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix} \right] \quad (2.53)$$

Donde se ha utilizado también la regla de transformación para la amplitud del campo. Si ahora consideramos que el campo incidente es de la forma: $\mathbf{E}_{inc} = E_{inc}^y \mathbf{n}_y$ tenemos:

$$\mathbf{E}_\infty^y = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \sqrt{\cos(\theta)} E_{inc}^y \left[\cos(\phi) \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} + \sin(\phi) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix} \right] \quad (2.54)$$

Se pueden reescribir las expresiones anteriores en coordenadas cartesianas utilizando las siguientes relaciones:

$$\frac{x_\infty}{f} = \frac{k_x}{k} = \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$\frac{y_\infty}{f} = \frac{k_y}{k} = \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$\frac{z_\infty}{f} = \frac{k_z}{k} = \cos(\theta)$$

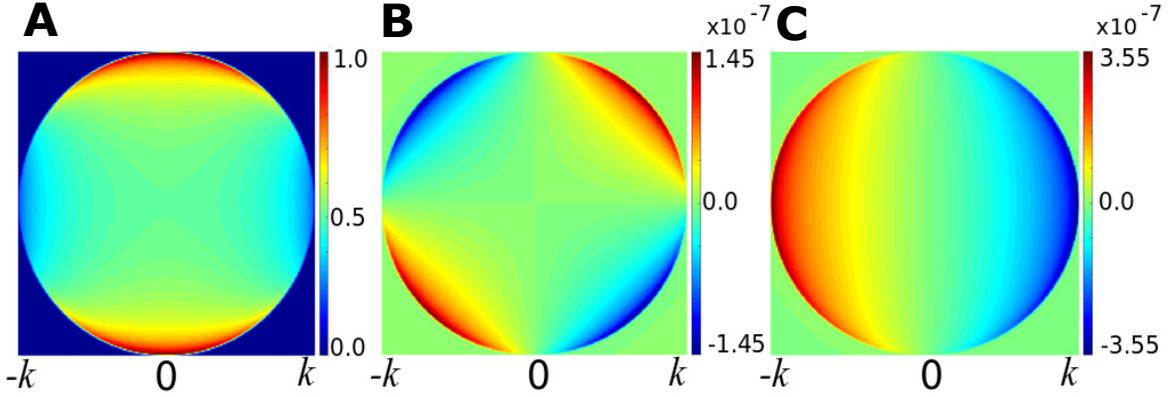


Figura 2.4: Gráficas de las funciones de transferencia definidas por la lente para un haz incidente polarizado en la dirección \mathbf{n}_x . Las expresiones fueron calculadas para un sistema con $NA = 1.0$ y $n = 1.0$, el diámetro del dominio circular es $2k$. **A)** es la función de transferencia para la polarización \mathbf{n}_x , que corresponde a la polarización de incidencia, **B)** es la función para la polarización \mathbf{n}_y y **C)** corresponde a la polarización longitudinal \mathbf{n}_z . Las funciones están normalizadas respecto al máximo de la función de transferencia para la polarización \mathbf{n}_x . Como se observa, la componente del campo dominante, en la vecindad del foco, es la que coincide con la polarización de entrada.

Donde se ha utilizado que sobre la superficie de la esfera se tiene el campo al infinito del campo en el origen y entonces $\mathbf{s} = \mathbf{r}_\infty/f = \mathbf{k}/k$. Entonces, el campo en la vecindad del foco, para un haz incidente con polarización \mathbf{n}_x , es :

$$\mathbf{E}_\infty^x = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \sqrt{\frac{k_z}{k}} E_{inc}^x \left(\frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k} \right) \cdot \begin{bmatrix} k_y^2 + k_x^2 k_z/k \\ -k_x k_y + k_x k_y k_z/k \\ -(k_x^2 + k_y^2) k_x/k \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{k_x^2 + k_y^2} \right) \quad (2.55)$$

Análogamente para la polarización incidente en la dirección \mathbf{n}_y .

$$\mathbf{E}_\infty^y = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \sqrt{\frac{k_z}{k}} E_{inc}^y \left(\frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k} \right) \cdot \begin{bmatrix} -k_x k_y + k_x k_y k_z/k \\ k_x^2 + k_y^2 k_z/k \\ -(k_x^2 + k_y^2) k_y/k \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{k_x^2 + k_y^2} \right) \quad (2.56)$$

Finalmente si se sustituyen estas últimas expresiones en 2.48 se llega a:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{if e^{-ikf}}{2\pi} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k_{max}^2} [c_x \mathbf{E}_\infty^x + c_y \mathbf{E}_\infty^y] \frac{1}{k_z} e^{i[k_x x + k_y y + k_z z]} dk_x dk_y \quad (2.57)$$

Donde c_x y c_y son en general funciones complejas que pueden llegar a depender de (k_x, k_y) , y que definen el estado de polarización incidente, sin embargo para estados de polarización lineales o elípticos son factores constantes. El dominio de integración está restringido a las frecuencias espaciales que cumplen $k_x^2 + k_y^2 \leq k_{max}^2$, donde $k_{max} = NAk_0$.

Es fácil ver que la ecuación 2.57 cumple tanto la ley de Gauss como la ecuación de Helmholtz, por lo tanto es solución física al problema de enfoque por una lente.

En la figura 2.4 se muestran las gráficas de los factores que multiplican a $E_{inc}(k_x, k_y)$ en la expresión 2.55, incluido también el factor $1/k_z$ que aparece en la integral 2.57. En el caso de la función mostrada en la figura 2.4 **A**, se observa que es positiva definida, la función mostrada en **B** es positiva en los cuadrantes I y III, y negativa en los cuadrantes II y IV. La función mostrada en **C** es positiva en los cuadrantes II y III, y negativa en los cuadrantes I y IV. En las regiones de valores negativos se puede factorizar un término $e^{i\pi}$ de las funciones de transferencia. Este rompimiento en la simetría de las funciones mostradas en la ecuación 2.55 tiene consecuencias en el patrón de intensidad de los haces enfocados, como se mostrará en el siguiente capítulo. Vale la pena señalar que en la figura 2.4 se presentan las funciones para $NA = 1.0$, sin embargo, las expresiones deducidas en este capítulo son válidas para cualquier apertura numérica.

3 Estimaciones numéricas.

En este capítulo se explica el procedimiento para resolver numéricamente las expresiones integrales de propagación y enfoque de haces monocromáticos por medio de un método *rápido* que utiliza la función *Fast Fourier Transform* (FFT). Se muestran resultados numéricos y se realiza un análisis de los errores numéricos.

3.1. Implementación de la función FFT.

Para comenzar es conveniente recordar la ecuación 2.57:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{if e^{-ikf}}{2\pi} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k_{max}^2} [c_x \mathbf{E}_\infty^x + c_y \mathbf{E}_\infty^y] \frac{1}{k_z} e^{i[k_x x + k_y y + k_z z]} dk_x dk_y \quad (3.1)$$

No es de extrañar que esta integral no tenga soluciones analíticas y que la única vía para obtener el campo en la vecindad del foco de la lente sea por medio de estimaciones numéricas.

La forma directa de resolver esta integral es construir una malla de $N \times N$ puntos que represente el espacio (k_x, k_y) , sobre esa malla evaluar el integrando para distintos valores (x, y) con z constante, dentro del dominio definido por la condición $k_x^2 + k_y^2 \leq k_{max}^2$, y proceder con algún método de integración usual. Con esta aproximación, el tiempo de cómputo, para cada plano z es del orden de decenas de minutos para mallas con N en el orden de las centenas, utilizando una computadora personal 1.8 GHz, Intel Core i5.

Sin embargo, existe otro enfoque que consiste en construir la función:

$$\Theta(k_x, k_y) = \begin{cases} 1 & \text{si } k_x^2 + k_y^2 \leq k_{max}^2 \\ 0 & \text{si } k_x^2 + k_y^2 > k_{max}^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Se multiplica entonces al integrando de la ecuación 2.57 por la función $\Theta(k_x, k_y)$, que en la literatura es comúnmente llamada función de pupila [30], y por lo tanto se pueden extender los límites a infinito, sin que el resultado de la integral se vea afectado, es decir:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{if e^{-ikf}}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \Theta(k_x, k_y) [c_x \mathbf{E}_\infty^x + c_y \mathbf{E}_\infty^y] \frac{1}{k_z} e^{i[k_x x + k_y y + k_z z]} dk_x dk_y \quad (3.3)$$

Entonces se puede reescribir la integral anterior como:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{if e^{-ikf}}{2\pi} \text{IFT} \left(\Theta(k_x, k_y) [c_x \mathbf{E}_\infty^x + c_y \mathbf{E}_\infty^y] \frac{1}{k_z} e^{ik_z z} \right) \quad (3.4)$$

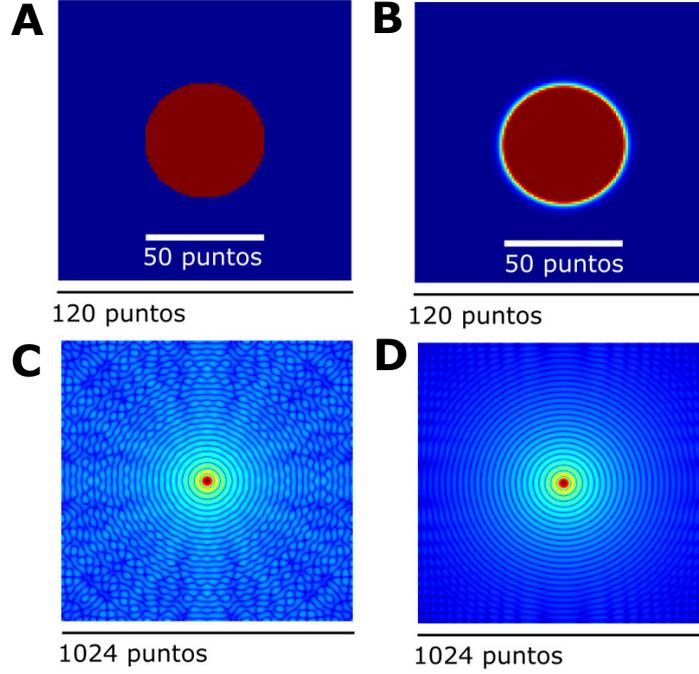


Figura 3.1: Disminución de patrones granulares. **A** Muestra la función $\Theta(k_x, k_y)$ definida en una malla de $N=1024$, con diámetro de $M=50$ puntos. **B** Muestra la raíz cuarta, para mejor visualización de los detalles, de la función $\Theta'(k_x, k_y)$ con $\Delta k = 1$ y $k_{max} = 25$. Tanto en **A** como en **B** se muestra un acercamiento a un área central de 120×120 puntos. **C** Es la raíz cuarta del valor absoluto de la FT de la versión discontinua de la función $\Theta(k_x, k_y)$ mientras que **D** es la raíz cuarta del valor absoluto de la FT de la función $\Theta'(k_x, k_y)$. Es evidente la disminución de los patrones granulares.

Este es un resultado muy relevante porque se ha podido expresar el campo en términos de la transformada inversa de Fourier, de la misma manera que la propagación de haces monocromáticos, ver ecuación 2.18.

Independientemente del método utilizado para resolver la integral 3.4, numéricamente se debe utilizar la versión discreta de la transformada de Fourier, el algoritmo más utilizado para realizar tal operación, de manera rápida, es la *transformada rápida de Fourier* (FFT, por sus siglas en inglés). La implementación numérica se realizó en Matlab con las funciones `ifft2` y `fft2` para transformadas inversas y directas, respectivamente. El número de operaciones que realizan estas funciones, para transformadas de Fourier en una dimensión, es del orden $N \log_2(N)$, a diferencia de la integración usual que va como N^2 operaciones para un conjunto de N puntos. [40]

En el caso de propagación, se construye una malla de $N \times N$ puntos, se fija el origen de coordenadas en el punto con índices $(N/2 + 1, N/2 + 1)$ y a partir de éste se construyen las coordenadas adimensionales (n_x, n_y) , las coordenadas espaciales se obtienen con la relación $(x, y) = \Delta r(n_x, n_y)$ y las coordenadas angulares son $(k_x, k_y) = \Delta k(n_x, n_y)$ donde Δr y Δk son las separaciones de los puntos en el espacio real y angular, ambos sistemas se pueden conectar mediante la expresión $\Delta k = \frac{2\pi}{\Delta r N}$, que sólo depende del número de puntos en la malla [45]. El parámetro Δr se encuentra a partir de las características específicas del sistema, por ejem-

plo, si se quiere estudiar la difracción de un haz por una abertura circular de diámetro D y ésta se define en un área circular con diámetro de M puntos en la malla, entonces $\Delta r = D/M$.

En el caso de enfoque se tienen tres sistemas de coordenadas: las coordenadas espaciales a la entrada de la lente denotadas como (x_∞, y_∞) , el sistema angular denotado por (k_x, k_y) y las coordenadas espaciales en el plano focal (x, y) . De nueva cuenta, a partir de una malla de $N \times N$ puntos se fija el origen de coordenadas en el punto con índices $(N/2 + 1, N/2 + 1)$ y a partir de éste se construyen las coordenadas adimensionales (n_x, n_y) , las coordenadas espaciales se obtienen con la relación $(x_\infty, y_\infty) = \Delta r_\infty (n_x, n_y)$ y las coordenadas angulares mediante $(k_x, k_y) = \Delta k (n_x, n_y)$, donde Δr_∞ y Δk son la separación de los puntos en el espacio real y angular, de acuerdo a los resultados de la sección anterior, ambos sistemas se pueden relacionar mediante la expresión $\Delta k = \frac{k \Delta r_\infty}{f}$. El sistema de coordenadas en el plano focal se obtiene de la expresión $(x, y) = \Delta r (n_x, n_y)$, donde $\Delta r = \frac{2\pi}{\Delta k N}$. El parámetro Δr_∞ se encuentra a partir de las características específicas del sistema, por ejemplo, si se quiere estudiar el enfoque de un haz por medio de un sistema aplanático con diámetro de apertura D y ésta se define en un área circular con diámetro de M puntos en la malla, entonces $\Delta r_\infty = D/M$.

Para minimizar errores en la implementación de la función FFT las dimensiones de la malla de $N \times N$ puntos deben ser potencia de 2. También se debe garantizar, tanto en propagación como enfoque, que el área central definida por la apertura, se encuentre rodeada de ceros, en las simulaciones que se presentan en este trabajo $M \sim N/5$ para propagación y $M \sim N/10$ para enfoque, con $N \in \{2^{11}, 2^{12}\}$

En el caso de enfoque, otro factor importante a tomar en cuenta es la aparición de patrones granulares o de moteado al momento de utilizar la FFT, estos efectos se logran minimizar al cambiar la definición de la función $\Theta(k_x, k_y)$ por la siguiente función continua [20]

$$\Theta'(k_x, k_y) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left[\frac{3}{4\Delta k} \left(k_{max} - (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \right) \right] \right) \quad (3.5)$$

Donde $k_{max} = k_0 NA$. En la figura 3.1 se muestra la disminución de los patrones granulares cuando se calcula la transformada de Fourier de las funciones $\Theta(k_x, k_y)$ y $\Theta'(k_x, k_y)$.

También es posible simular el enfoque de haces con aberturas cuadradas o anulares, siempre y cuando dichas aberturas queden dentro del dominio $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$. La definición de $\Theta'(k_x, k_y)$ para aberturas cuadradas es:

$$\Theta'(k_x, k_y) = \frac{1}{4} \left(1 + \tanh \left[\frac{3}{4\Delta k} \left(\frac{k_{max}}{\sqrt{2}} - k_x \right) \right] \right) \left(1 + \tanh \left[\frac{3}{4\Delta k} \left(\frac{k_{max}}{\sqrt{2}} - k_y \right) \right] \right) \quad (3.6)$$

Donde el término $\sqrt{2}$, que divide a k_{max} , aparece porque el diámetro máximo en una abertura cuadrada es la diagonal. Para aberturas anulares la definición de $\Theta'(k_x, k_y)$ es.

$$\Theta'(k_x, k_y) = \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{3}{4\Delta k} \left(k_{max1} - (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \right) \right] - \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{3}{4\Delta k} \left(k_{max2} - (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \right) \right] \quad (3.7)$$

Donde $k_{max} \geq k_{max1} > k_{max2}$. Y $\Delta k_t = k_{max1} - k_{max2}$ en ancho de la abertura anular.

3.2. Resultados numéricos.

En esta sección se muestran resultados numéricos para difracción de haces por medio de aberturas circulares. También se muestran resultados de haces enfocados en el régimen no paraxial.

Difracción de haces por una abertura circular.

El caso más simple de difracción es un haz polarizado linealmente en la dirección \mathbf{n}_x , de amplitud y fase constante, difractado por una abertura circular. Este sistema se estudia comúnmente con difracción de Fresnel, para el límite de campo cercano, y con difracción de Fraunhofer para el límite de campo lejano. Como se mencionó en el [Capítulo 2](#) la ecuación de Helmholtz tiene una solución integral simple y sin aproximaciones a este problema clásico dentro del esquema de representación angular del campo. En la figura 3.2 se muestra la amplitud del campo, en el plano $(x, 0, z)$, hasta una distancia de 40.0 cm y con sección transversal de 2.76 mm, para un haz con $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$. En la imagen se puede observar la transición de zona de Fresnel, donde se observan oscilaciones rápidas en la amplitud, a la zona de Fraunhofer con un máximo central. Se muestran además ocho planos representativos. Los cálculos se realizaron con una malla de $N = 2^{11}$ puntos donde el diámetro de la abertura circular es de $M = 400$ puntos. La imagen se construyó a partir del cálculo de 500 planos de observación para diferentes distancias z_0 de propagación, se toman únicamente los valores de la amplitud definidos sobre el eje $(x, 0, z_0)$, de cada plano, y se concatenan los 500 ejes para formar la imagen. Utilizando la función FFT el tiempo de computo es de aproximadamente 8 minutos, es decir alrededor de 0.96 segundos por plano, utilizando una computadora personal de 1.8 GHz, Intel Core i5.

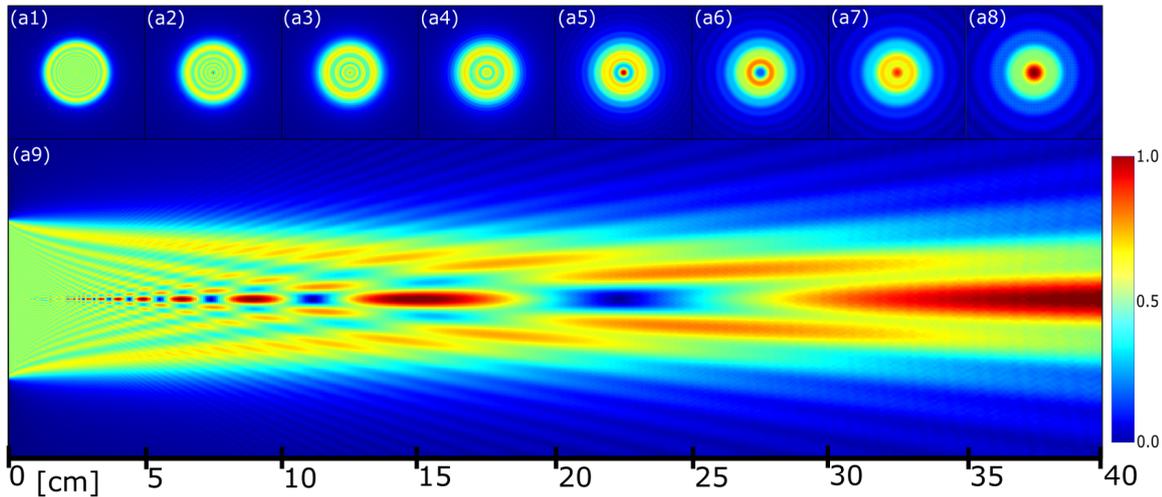


Figura 3.2: Difracción por una abertura circular de un haz con amplitud y fase constante. a1)-a8) Se muestra la amplitud del campo en el plano (x, y) para valores de $z \in \{2, 4, 6, 8, 16, 24, 32, 40\}$ centímetros, en un área de 7.62mm^2 . **a9)** Se muestra la amplitud del campo $E_x(x, 0, z)$ hasta una distancia de $z = 40$ cm.

En el siguiente caso de difracción los parámetros del sistema son los mismos excepto que la fase del haz sobre la abertura ya no es constante, si no que está dada por la siguiente

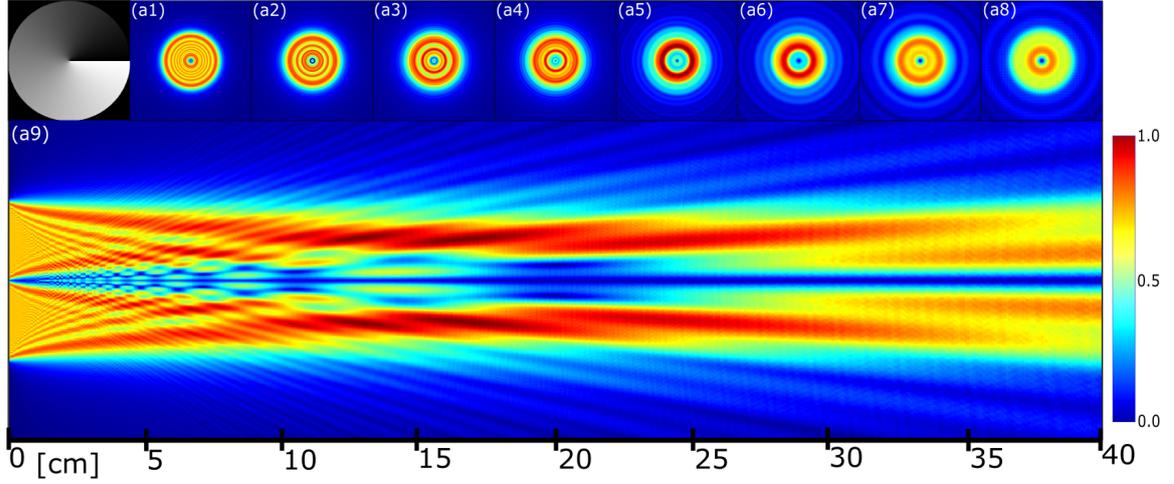


Figura 3.3: Difracción por abertura circular de un haz con fase helicoidal $m = +1$. Se muestra la fase inicial sobre la apertura, cero corresponde al color negro y 2π al color blanco, se observa que el valor de la fase incrementa su valor de 0 a 2π alrededor del origen. **a1)-a8)** Se muestra la amplitud del campo en el plano (x, y) para valores de $z \in \{2, 4, 6, 8, 16, 24, 32, 40\}$ centímetros, en un área de $7.62mm^2$. **a9)** Se muestra la amplitud del campo $E(x, 0, z)$ hasta una distancia de $z = 40$ cm.

expresión:

$$\phi(x, y) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (3.8)$$

Para calcular la fase de la expresión anterior, el origen de coordenadas se encuentra en el centro de la abertura circular. Este patrón de fase es característico de las *singularidades ópticas*, éstas son regiones del haz donde el valor de la fase incrementa en múltiplos m de 2π alrededor de un punto que es llamado *punto singular* [29]. En la figura 3.3 se muestra una gráfica de la singularidad de orden $m = +1$, donde el signo positivo implica que la fase incrementa su valor en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

En todas las imágenes de amplitud se observa que, en el origen de coordenadas, el campo es siempre cero, esto se debe a la presencia de la singularidad de fase.

En los dos casos de difracción por abertura circular solamente se ilustra la amplitud de la componente E_x debido a que en haces con polarización lineal que cumplan la condición $k_z \approx k$, la distribución de la energía se concentra mayoritariamente en una sola dirección de polarización. En los casos anteriores, los valores máximo y mínimo del cociente k_z/k son 1 y 0.988, respectivamente. El régimen donde se permiten $k_z \ll k$ se estudia en la siguiente sección.

Haz gaussiano enfocado.

El caso más simple de un haz no paraxial, es el haz Gaussiano linealmente polarizado y enfocado por una lente de $NA \gg 0.0$. Este haz ha sido utilizado para generar las pinzas ópticas [6], sin embargo pocas veces se hace mención de la presencia de las otras componentes de polarización. Para describir este sistema, el campo E_{inc} , en la expresiones 2.55 y 2.56, se

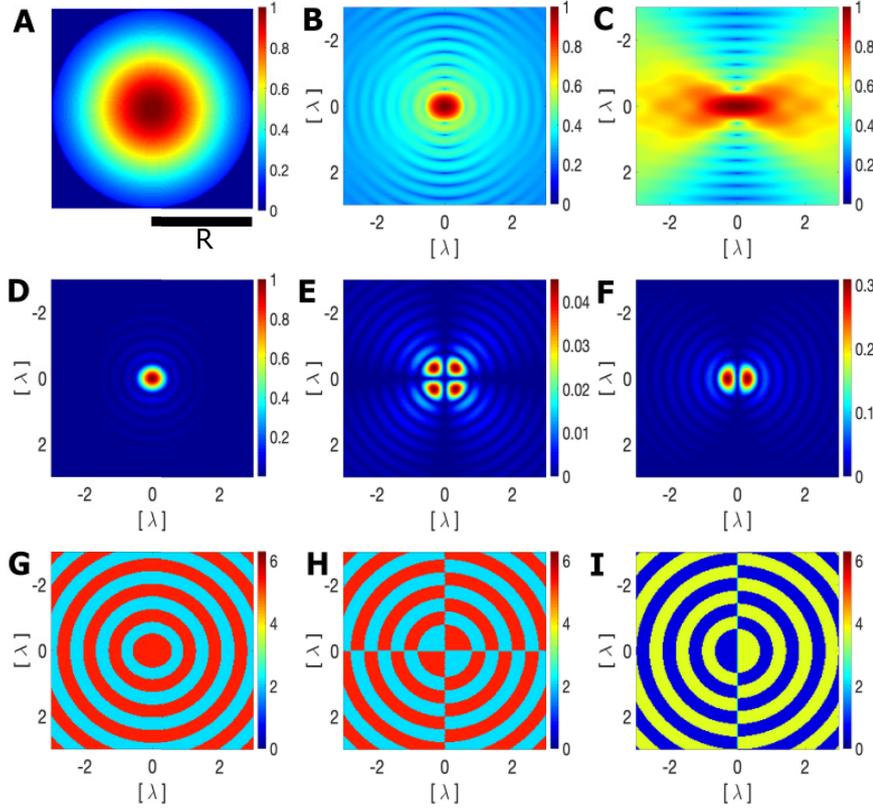


Figura 3.4: Enfoque de un haz Gaussiano. **A** Muestra la intensidad incidente a la lente. La fase en todo el haz se considero constante. **B** Muestra la raíz octava de la intensidad del campo en el plano focal $(x, y, 0)$. **C** Muestra la raíz octava de la intensidad en el plano $(0, y, z)$. Ambos casos están normalizados respecto al máximo en el origen. (Se muestra la raíz octava para mejor contraste.) **D-F** Muestran la amplitud del campo, en el plano focal $(x, y, 0)$, de las polarizaciones \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , respectivamente, normalizadas respecto al máximo de la amplitud de la polarización \mathbf{n}_x . **G-I** Muestran la fase en el plano focal para las polarizaciones \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , respectivamente. La diferencia de fase entre las zonas rojas y azules, en las componentes \mathbf{n}_x y \mathbf{n}_y , es de π , de la misma manera la diferencia de fase entre las zonas amarillas y azules, en la componente \mathbf{n}_z es de π . Sin embargo entre las zonas rojas y amarillas y las zonas azules de distintos tonos, hay una diferencia de fase de $\pi/2$. En **A** se muestra un área de $4R^2$ mientras que en **B-I** se muestra un área de $3 \times 3\lambda^2$

escribe de la forma:

$$E_{inc}(x_\infty, y_\infty) = E_0 e^{-\frac{(x_\infty^2 + y_\infty^2)}{f_0^2 R^2}} e^{i\phi(x_\infty, y_\infty)} \quad (3.9)$$

Donde E_0 es la amplitud del campo incidente, $R = D/2$ es el radio máximo de apertura de la lente y f_0 un el factor de llenado del haz Gaussiano definido como $f_0 = \omega_0/R$, con ω_0 el radio del haz Gaussiano entrante. Si $f_0 = 1.0$ significa que el diámetro del haz gaussiano incidente es igual al diámetro de apertura del sistema. Finalmente, $\phi(x_\infty, y_\infty)$ es la fase del haz incidente. Las coordenadas (x_∞, y_∞) hacen referencia a que E_{inc} se considera proporcional al campo lejano del haz en el plano focal de la lente. Para una haz gaussiano colimado es muy buena aproximación considerar la fase como constante. En la figura 3.4 se muestran resultados para un haz gaussiano, polarizado en la dirección \mathbf{n}_x , enfocado por una lente de $NA = 1.3$ con $n = 1.518$, $f = 2$ mm, $f_0 = 1.0$ y $R = 1.71$ mm.

En la figura 3.4 se hace evidente que las simetrías de los haces en el plano focal están ligadas con las simetrías presentes en la función de transferencia de la lente para cada polarización (ver figura. 2.4). Se observa, imagen **B**, que el patrón de intensidad no es simétrico como en el caso paraxial, los anillos que rodean el máximo central no son circulares y la intensidad se distribuye ligeramente a lo largo de la dirección \mathbf{n}_x , esto se debe principalmente a la presencia significativa de la componente longitudinal, en la imagen **C** se muestra la raíz octava de la intensidad del haz a lo largo del plano $(0, y, z)$ con el fin de ilustrar la estructura del haz en la vecindad del foco, que es una visión muy realista de las pinzas ópticas. También es importante notar que el máximo de amplitud para la polarización \mathbf{n}_y es poco más del 4 % del máximo en la polarización \mathbf{n}_x y el máximo de amplitud para la polarización \mathbf{n}_z es alrededor del 30 % del máximo para en la polarización \mathbf{n}_x . Por otro lado la energía se distribuye 88.4 % en la polarización \mathbf{n}_x , 11.22 % en la polarización \mathbf{n}_z y 0.33 % en la polarización \mathbf{n}_y . Otro detalle importante a señalar es que en las zonas donde la fase da saltos de π , la amplitud del campo es cero.

Haz Bessel no paraxial.

El haz Bessel fue la primera realización de los llamados haces adifractivos [14], en los cuales la amplitud no cambia a lo largo de una distancia finita de propagación. La generación del haz Bessel se logró a partir de hacer incidir un haz monocromático polarizado linealmente, digamos en la dirección \mathbf{n}_x , a través de una abertura anular delgada, de ancho d , localizada en un plano $z = -f$ respecto a una lente esférica [14].

La abertura anular se debe a que el haz Bessel se puede pensar como una superposición de ondas planas, con la misma fase, que se propagan a un mismo ángulo $\theta = \sin^{-1}(d/2f)$ respecto al eje \mathbf{n}_z , por lo tanto, si se considera cada punto sobre la abertura como una fuente puntual luz, la lente transforma cada frente de onda esférico en uno plano que se propaga con el mismo ángulo respecto del eje óptico.

En términos del espectro angular del haz Bessel, lo anterior se escribe como [32]:

$$E_x(x, y, z) = \int_0^{2\pi} e^{i[k_t x \cos(\phi) + k_t y \sin(\phi) + k_z z]} \frac{d\phi}{2\pi} = e^{ik_z z} J_0(k_t \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (3.10)$$

Donde la integral se realiza en el espacio (k_x, k_y) pero sólo sobre la circunferencia de radio k_t , con $k = k_z^2 + k_t^2$ y $k_t = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. La integral se encuentra expresada en coordenadas cilíndricas para obtener una expresión analítica en términos de J_0 , la función Bessel de orden cero del primer tipo. En la realidad, entre más pequeño sea el ancho d de la abertura anular, más se parecerá a su versión ideal. La expresión anterior solamente toma en cuenta una dirección de polarización del campo, en la figura 5.10 se observa la extensión del enfoque de abertura anular al régimen no paraxial, para un sistema de $NA = 1.3$, con $n = 1.518$, $f = 2$ mm. y $R \approx 1.71$ mm. La abertura anular tiene radios máximo y mínimo de 1.71 mm y 1.596 mm respectivamente, por tanto $d = 0.114$ mm. Se observa que el máximo de intensidad del haz Bessel no paraxial se encuentra en el plano focal y que, al menos, a lo largo de 60λ el haz permanece adifraccional. De nuevo, el máximo de la intensidad se encuentra en la componente \mathbf{n}_x . El mapa de fases tiene las mismas características generales que el mapa de

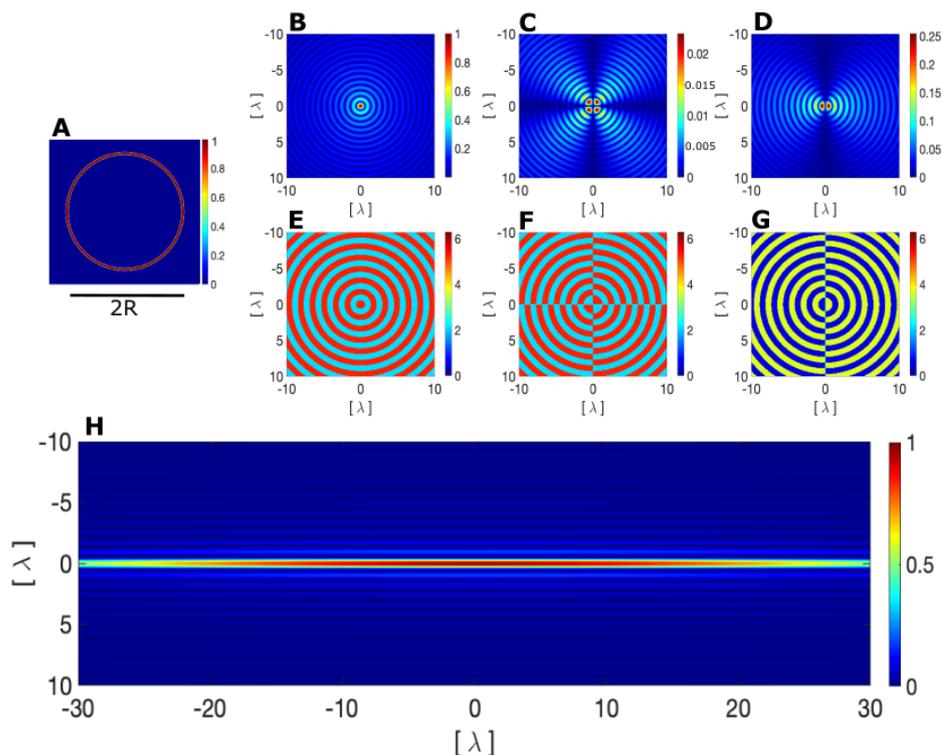


Figura 3.5: Enfoque de un haz Gaussiano cortado por una abertura anular. **A** Muestra la abertura anular. **B-D** Muestran la amplitud del campo, en el plano focal $(x, y, 0)$, de las polarizaciones \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , respectivamente, normalizadas respecto al máximo de la amplitud de la polarización \mathbf{n}_x . **E-G** Muestran la fase en el plano focal para las polarizaciones \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , respectivamente, el mapa de fase posee las mismas características que en el caso gaussiano. Mientras que las componentes \mathbf{n}_x y \mathbf{n}_y oscilan en fase, la componente \mathbf{n}_z tiene un desfase de $\pi/2$. En **H** se muestra la intensidad del campo producido por el enfoque de la abertura anular, en el plano $(0, y, z)$, a lo largo de 60λ . La intensidad está normalizada respecto al máximo en el origen. En **B-G** se muestra un área de 20×20 longitudes de onda, mientras que en **H** se muestra un área de $20 \times 60\lambda^2$

fase para el haz gaussiano, es decir, da saltos de π en los anillos circundantes y la componente longitudinal oscila con un desfase de $\pi/2$ respecto a las componentes transversales. En el régimen no paraxial este haz ha sido utilizado para micro manipulación, en trabajos donde se ha logrado generar cadenas de micro partículas alineadas a lo largo del máximo central y transportarlas sin que se rompa la estructura. [16]

Speckle.

El speckle es un patrón aleatorio de intensidad que surge cuando un haz monocromático atraviesa un medio con variaciones aleatorias del índice de refracción, o cuando se refleja en una superficie con rugosidades aleatorias. Cada punto en el medio dispersor actúa como una fuente puntual y la interferencia de los múltiples frentes de onda provoca la aparición del speckle [8].

Una forma diferente de producir speckle es mediante el enfoque de un haz con amplitud gaussiana y un mapa de fase definido por regiones como se muestra en la figura 3.6 a)-b).

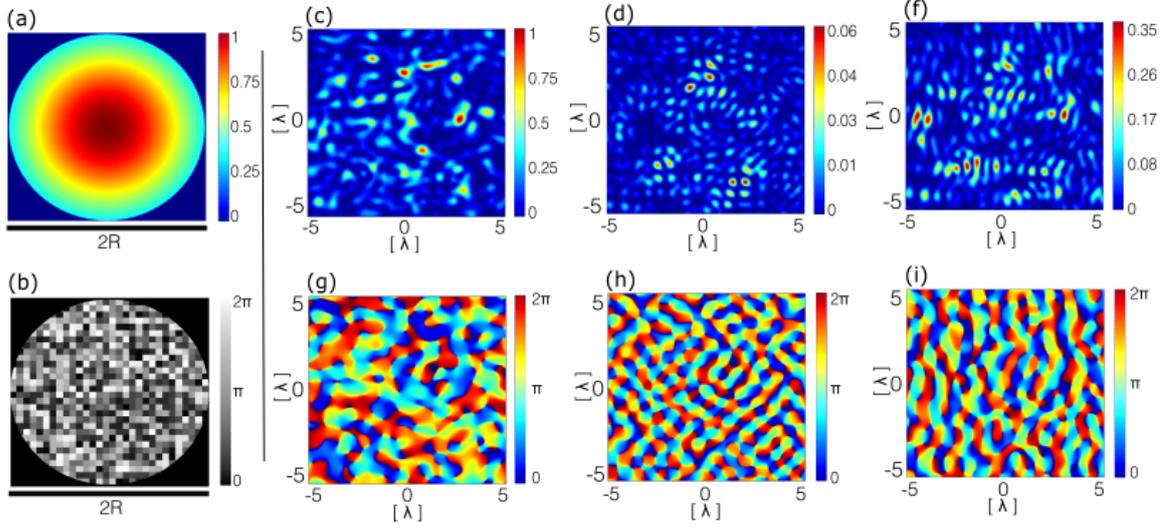


Figura 3.6: Enfoque de un haz Gaussiano con variaciones aleatorias en la fase. a) Muestra la amplitud gaussiano incidente a la lente. **b)** Muestra la fase del haz incidente con variaciones aleatorias. Los valores están distribuidos uniformemente en $[0, 2\pi]$. **c)-e)** Muestra la amplitud del campo en el plano focal $(x, y, 0)$ para las componentes \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z respectivamente, las amplitudes están normalizadas respecto al máximo de la componente \mathbf{n}_x . **f)-h)** Muestra la fase del campo en el plano focal $(x, y, 0)$ para las componentes \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z respectivamente. El área mostrada en **c)-i)** es de $10 \times 10\lambda^2$

En términos del espectro angular, esta configuración se puede interpretar como una superposición de ondas planas con vector de onda $\mathbf{k}_{n,m}$ cuya amplitud está determinada por una distribución gaussiana y la diferencia de fase entre ellas es aleatoria. Los subíndices (n, m) etiquetan a cada región de fase constante. Una de las características más importantes del speckle es la presencia de singularidades de fase. En un plano de observación es posible identificar parejas de vórtices de orden $m = \pm 1$ distribuidos aleatoriamente. Esto da lugar a una compleja estructura de fase tal y como se muestra en la figura 3.6 g)-i).

Los parámetros utilizados en la simulación del speckle son: $NA = 1.23$, $f = 2.0$ mm, $f_0 = 1$, $R = 1.62$ mm, $\lambda = 1.064\mu\text{m}$. La máscara de fase está construida con un arreglo de 30 regiones de fase constantes cortadas por una abertura circular. La distribución de la energía calculada es de 85 % en la componente \mathbf{n}_x , 0.37 % en la componente \mathbf{n}_y y 12.12 % en la componente \mathbf{n}_z .

Como se mencionó al principio de esta sección, el speckle aparece de forma natural cuando se propaga luz monocromática en medios aleatorios, complicando la formación de imágenes o la transmisión de haces con estructura, es por ello que hay trabajos recientes encaminados a minimizar la aparición de speckle [3, 21]. Sin embargo, este haz también ha sido aprovechado recientemente, en escalas microscópicas, para estudiar la dinámica de micro partículas, sujetas a movimiento Browniano, sobre las cuales el speckle actúa como un potencial óptico aleatorio. [42].

4 Desarrollo experimental.

El presente capítulo tiene por objetivos describir el esquema experimental para la generación haces estructurados por medio del modulador espacial de luz (SLM) y discutir dos propuestas para medir amplitud y fase de haces estructurados, también se discute como medir amplitud y obtener información de la fase de haces fuertemente enfocados.

4.1. Generación de luz estructurada con un modulador espacial de fase.

El término *luz estructurada* hace referencia a *haces, generalmente monocromáticos, donde los patrones de intensidad y fase, o estado de polarización han sido diseñados* [23]. Estos haces se han utilizado en diversas áreas, desde las comunicaciones ópticas [18], micromanipulación [34, 16], microscopía de súper-resolución [33] e investigaciones de dispersión en medios aleatorios [3], hasta estudios en física básica tanto en el régimen clásico [25] como el cuántico [15].

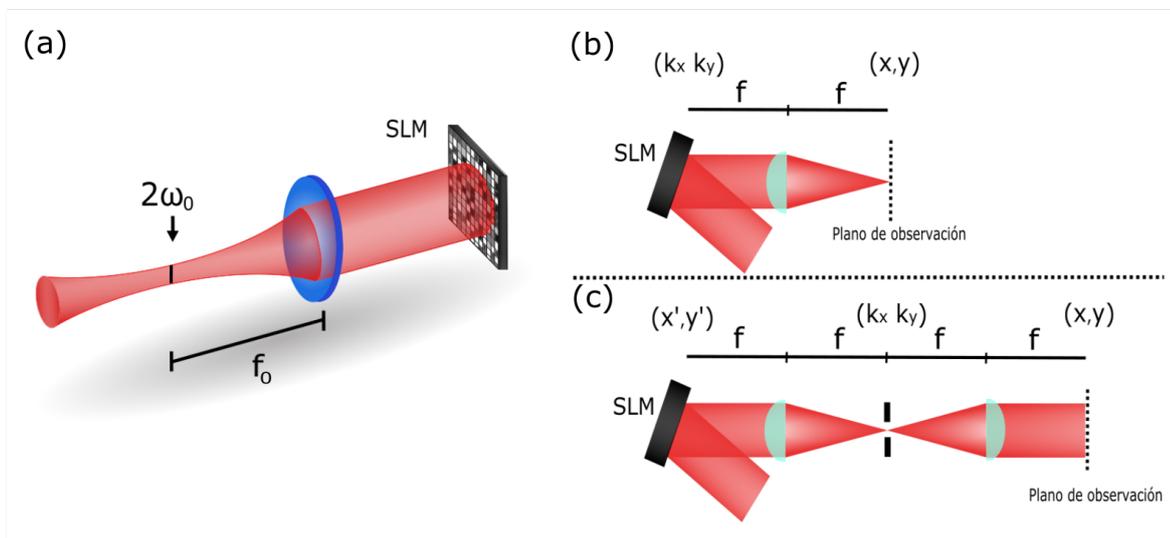


Figura 4.1: Esquemas para generar luz estructurada. a) Muestra el haz gaussiano inicial cuya cintura se coloca a una distancia $-f_0$ de una lente que colima el haz de tal manera que la fase sobre el SLM sea constante. b) Muestra el esquema para generar luz estructurada modulando la fase del espectro angular del haz de interés. c) Muestra el esquema para generar luz estructurada modulando la fase del haz de interés.

Uno de los elementos más populares para generar luz estructurada es el modulador espacial de luz (SLM), este dispositivo tiene la capacidad de modificar la fase de un frente de onda incidente en un plano conformado por un arreglo rectangular de píxeles donde la modulación es constante en cada píxel y puede cambiar entre ellos en un intervalo de 0 a 2π rad. [36]. El

SLM se utiliza como una segunda pantalla de la computadora donde una imagen de 8 bits es proyectada, la escala de grises determina el desfase por píxel. Usualmente el haz incide con un pequeño ángulo respecto al eje transversal a la pantalla del modulador para que el haz modulado sea reflejado en una dirección distinta a la de incidencia.

Típicamente se comienza con un láser polarizado linealmente con amplitud gaussiana descrita por la expresión: [28]:

$$\mathbf{E}(x, y) = E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0(z)^2}} e^{i \left[kz - \zeta(z) + k \frac{x^2+y^2}{2R(z)} \right]} \mathbf{n}_x \quad (4.1)$$

Con $\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$, $R(z) = z(1 + z_0^2/z^2)$, $\zeta(z) = \tan^{-1}(z/z_0)$, y $z_0 = k\omega_0^2/2$ el rango de Rayleigh. Al plano $z = 0$ se le llama la cintura del haz. Tal y como se muestra en la figura 4.1 una lente de longitud focal f_0 se coloca a una distancia f_0 de la cintura del haz gaussiano con el fin de expandirlo y proyectar un frente de onda con fase aproximadamente constante sobre la superficie del SLM. De esta manera la fase del haz incidente quedará totalmente definida sobre el plano del SLM, salvo un factor constante.

Se puede demostrar que en el régimen paraxial, una lente de longitud focal f realiza la transformada de Fourier del campo definido en una distancia $-f$ y la proyecta en el plano $+f$ [30]. Dos de los esquemas más comunes para generar luz estructurada con el SLM aprovechan esta propiedad, ver figura 4.1. En una configuración, figura 4.1 b), sobre el SLM se proyecta la fase del espectro angular del haz de interés, y con una lente, colocada a una distancia f del SLM, se obtiene el haz deseado en el plano focal. En principio con una lente es suficiente sin embargo, para mejorar la calidad del haz de interés, usualmente se utiliza un filtro espacial en el foco de la primera lente (no mostrado en la imagen) para limpiar las contribuciones espurias y son necesarias otras dos lentes para regresar al espacio real. Este sistema ha sido utilizado para generar los haces Airy [38], Airy simétrico [39], Pearcey [22], etc. La primera realización del haz Bessel [14] también se realizó con esta configuración, en donde se utilizó una abertura anular, en lugar de un SLM, para modular el espectro angular del haz Bessel. En una segunda configuración, figura 4.1 c), se proyecta sobre el SLM la fase del haz de interés, de nueva cuenta, una lente realiza la transformada de Fourier y la proyecta en el plano focal donde ahora se tiene el espectro angular del haz, típicamente se utiliza un filtro espacial para eliminar contribuciones espurias y con una segunda lente se regresa al espacio real, esta configuración se ha utilizado para generar los haces Mathieu–Gauss [17], y observar los nudos de vórtices de luz [19]. En este trabajo se utiliza la configuración b) donde el SLM modula el espectro angular de los haces de interés.

Es importante señalar que debido al pixelado sobre el SLM, en el campo reflejado aparecen diferentes órdenes de difracción que interfieren con el haz de interés. En el orden cero de difracción se observa tanto luz no modulada como el haz de interés. Para separarlos se utilizan mapas de fase que pueden sumarse, modulo 2π , a la fase del haz de interés. En la figura 4.2 A se ilustra la fase para desplazamientos laterales, que es calculada mediante la relación [12]:

$$\Phi_{des}(k_x, k_y) = \Delta x k_x + \Delta y k_y$$

Donde Δx y Δy son los desplazamientos, en el plano focal, en las direcciones \mathbf{n}_x y \mathbf{n}_y respectivamente. El mapa de fase para desplazamientos axiales está ilustrado en la figura 4.2 B y

está dado por [12]:

$$\Phi_{axial}(k_x, k_y) = -\Delta z k \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{k^2} \right) \right]$$

Donde Δz es el desplazamiento respecto al foco de la lente. También se puede inducir desplazamiento axial y lateral con la suma, módulo 2π , de ambas funciones. Para poder calcular los mapas de fase se debe encontrar la equivalencia de las coordenadas sobre el SLM con las coordenadas en el espacio (k_x, k_y) . Se denotan las coordenadas de los píxeles en el SLM como (n_x, n_y) , ver figura 4.2 C, si cada píxel cuadrado mide d entonces las coordenadas espaciales son $(x, y) = d(n_x, n_y)$, y se usa que $\frac{1}{f}(x, y) = \frac{1}{k}(k_x, k_y)$ [45]. Por lo tanto $(k_x, k_y) = d \frac{k}{f}(n_x, n_y)$, con esta relación es posible simular y generar, sin ambigüedades, haces estructurados con el modulador de fase.

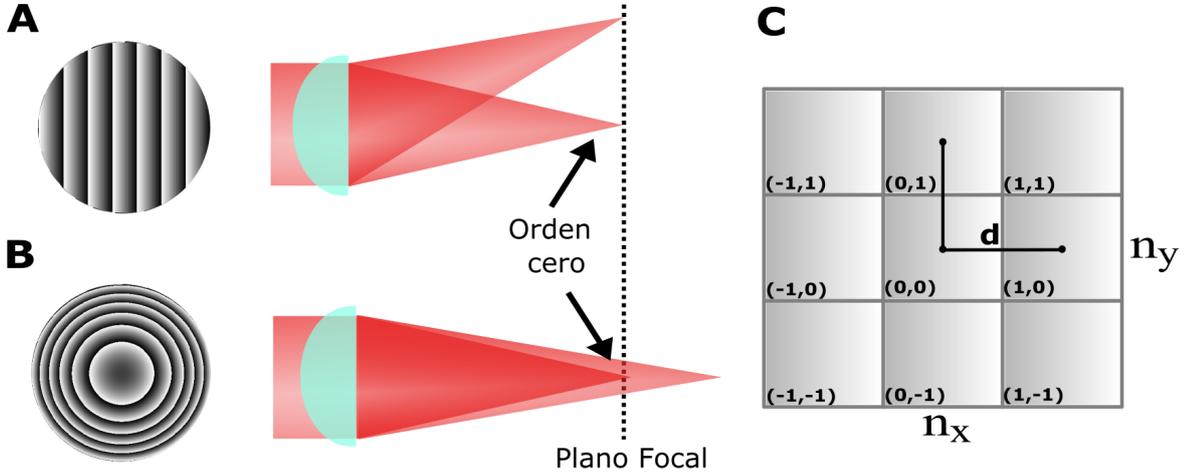


Figura 4.2: Fases de desplazamiento y coordenadas del SLM. A) Muestra un ejemplo de fase para desplazamientos laterales y B) muestra un ejemplo de fase para desplazamientos axiales. C) Muestra el sistema de coordenadas definido por los píxeles del SLM,

4.2. Generación y medición de intensidad de haces estructurados microscópicos.

El sistema óptico para modular y observar los haces microscópicos es un arreglo estándar de pinzas ópticas que se observa en la figura 4.3 a). Un haz polarizado linealmente en la dirección \mathbf{n}_x , con perfil gaussiano de intensidad y fase aproximadamente constante, incide sobre un SLM, después el haz modulado pasa por telescopio, que reduce las dimensiones transversales del haz, y proyecta el plano del SLM en la entrada de un objetivo de microscopio (MO) con $NA \sim 1.0$ ver figura 4.3 b). De esta manera el espectro angular del campo en el foco del objetivo, queda determinado por la amplitud y fase sobre el SLM. El haz de entrada es enfocado sobre un vidrio, es reflejado y después regresa al mismo objetivo. Con un divisor de haz dicróico se separa el haz incidente del reflejado y este último pasa por una tercer lente que proyecta la imagen del haz microscópico sobre una cámara, sin embargo, el haz tiene una cierta magnificación, por lo que es necesario calibrar las dimensiones de las imágenes adquiridas con la CCD. Para ello se toman fotografías de calibración y se encuentra una equivalencia

entre los píxeles de la CCD y las dimensiones reales del sistema microscópico. El vidrio se encuentra montado sobre una plataforma piezoeléctrica que permite desplazamientos en las tres direcciones espaciales, en particular los desplazamientos en la dirección \mathbf{n}_z posibilitan la observación el haz en distintos planos transversales a la dirección de propagación [41].

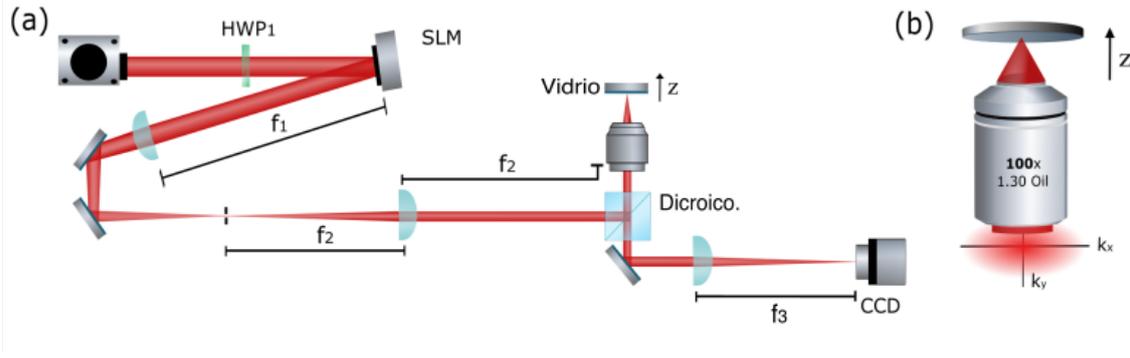


Figura 4.3: **a)** Muestra el sistema estándar de pinzas ópticas para la observación de los haces microscópicos. Una lámina de media onda HWP_1 garantiza que la polarización incidente al SLM sea la más eficiente para la modulación de fase. Las lentes con longitud focal f_1 y f_2 forman un telescopio que proyecta el plano del modulador en la entrada del objetivo de microscopio. La lente f_3 proyecta la imagen del haz microscópico sobre la cámara. **b)** Es una vista más cercana del objetivo de microscopio y la modulación del espectro angular del haz.

4.3. Medición de amplitud y fase de luz estructurada.

Como se mencionó en el [Capítulo 3](#) la fase de haces estructurados en frecuencias ópticas no puede ser medida directamente por detectores. Para obtener información de la estructura compleja del haz se debe recurrir a métodos interferométricos. La interferencia se consigue, al menos, con dos haces provenientes de la misma fuente, que en un inicio son separados para recorrer distintos caminos ópticos y volver a combinarse al final. Con el fin de observar la interferencia es necesario que la diferencia entre los caminos ópticos no sea mayor a la longitud de coherencia del haz $\Delta l = c\Delta t = 2\pi/\Delta\omega$, entre más pequeño sea el valor de $\Delta\omega$ mayor será la diferencia de camino óptico que se puede tener entre ambos frentes de luz. Dados dos haces descritos por las funciones complejas $\mathbf{E}_1(x, y, z)$ y $\mathbf{E}_2(x, y, z)$, la interferencia entre ellos está dada por la función $\mathbf{E}_{1,2}(x, y) = \mathbf{E}_1(x, y, z) + \mathbf{E}_2(x, y, z)$. La intensidad de la interferencia, en cada componente $j \in \{x, y, z\}$, está dada por:

$$\begin{aligned}
 I^j(x, y) &= (E_1^j(x, y) + E_2^j(x, y))(E_1^j(x, y) + E_2^j(x, y))^* \\
 &= E_1^j(x, y)E_1^j(x, y)^* + E_2^j(x, y)E_2^j(x, y)^* + E_1^j(x, y)E_2^j(x, y)^* + E_2^j(x, y)E_1^j(x, y)^* \\
 &= I_1^j(x, y) + I_2^j(x, y) + 2\text{Re}\{E_1^j(x, y)E_2^j(x, y)^*\} \\
 &= I_1^j(x, y) + I_2^j(x, y) + 2\text{Re}\{A_1^j(x, y)e^{i\phi_1^j(x, y)}A_2^j(x, y)e^{-i\phi_2^j(x, y)}\} \\
 &= I_1^j(x, y) + I_2^j(x, y) + 2A_1^j(x, y)A_2^j(x, y)\cos(\phi_1^j(x, y) - \phi_2^j(x, y)) \\
 &= I_1^j(x, y) + I_2^j(x, y) + 2\sqrt{I_1^j(x, y)I_2^j(x, y)}\cos(\phi_1^j(x, y) - \phi_2^j(x, y)) \\
 &= a^j(x, y) + b^j(x, y)\cos(\Delta\phi^j(x, y))
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donde se define: $a^j(x, y) = I_1^j(x, y) + I_2^j(x, y)$ es la suma de las intensidades del haz de referencia y el haz de interés, $b^j(x, y) = 2\sqrt{I_1^j(x, y)I_2^j(x, y)}$ es el término de interferencia modulado por el coseno de la diferencia de fase entre los haces $\Delta\phi^j(x, y) = \phi_1^j(x, y) - \phi_2^j(x, y)$.

A continuación se describen dos de los métodos más utilizados para medir fases en frecuencias ópticas, ambos casos tienen como punto de partida la ecuación 4.2.

Interferometría de desplazamiento de fase.

Este método fue propuesto por primera vez en 1993 [24], para realizarlo se comienza con un haz láser que es dividido en dos haces que viajan por caminos distintos, en uno de ellos se genera el haz estructurado de interés, mientras en el otro camino se expande el haz de referencia hasta garantizar que el frente de onda sea casi plano. El nombre del método se debe a que la fase de alguno de los haces se desplaza en valores constantes, específicamente en $\delta\phi \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \}$. Los haces son combinados de nuevo con un divisor de haz que dirige la interferencia a una cámara donde se observan diferentes interferogramas que, para cada valor de $\delta\phi$, pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + 0) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y)) \\ I_2(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + \pi/2) = a(x, y) - b(x, y) \sin(\Delta\phi(x, y)) \\ I_3(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + \pi) = a(x, y) - b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y)) \\ I_4(x, y) &= a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y) + 3\pi/2) = a(x, y) + b(x, y) \sin(\Delta\phi(x, y)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I_1(x, y) - I_3(x, y) &= 4b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y)) \\ I_4(x, y) - I_2(x, y) &= 4b(x, y) \sin(\Delta\phi(x, y)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Entonces:

$$\Delta\phi(x, y) = \phi_{int} - \phi_{ref} = \tan^{-1} \left(\frac{I_4(x, y) - I_2(x, y)}{I_1(x, y) - I_3(x, y)} \right) \quad (4.5)$$

Con ϕ_{int} la fase del haz estructurado de interés, y ϕ_{ref} la fase del haz de referencia. Por lo tanto es posible obtener la diferencia de la fase entre dos haces por medio de cuatro fotografías, operaciones algebraicas y la función \tan^{-1} . Si el frente de onda de referencia es casi plano, la fase puede aproximarse como $\phi_{ref}(\mathbf{r}) = q_x x + q_y y + q_z z$. Si la dirección de propagación del haz de referencia se ajusta de tal manera que $q_x = q_y = 0$, entonces en un plano de observación $z = z_0$ constante, la diferencia de fase $\Delta\phi(x, y) = \phi_{int} - k_z z_0$ será igual a la fase del haz estructurado de interés salvo un término constante. Una de las ventajas de este método es que ofrece una medición directa de la fase en cada punto (x, y) , además es fácil de implementar con SLM debido a que siempre se puede sumar al haz modulado un término global constante entre 0 y 2π . En la figura 4.4 a) se ilustra este método con un ejemplo específico.

También es importante señalar que a partir de los cuatro interferogramas se puede recuperar la amplitud del haz de interés. De la ecuación 4.4 se puede mostrar fácilmente que

$$b(x, y) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{(I_1 - I_3)^2 + (I_4 - I_2)^2} \quad (4.6)$$

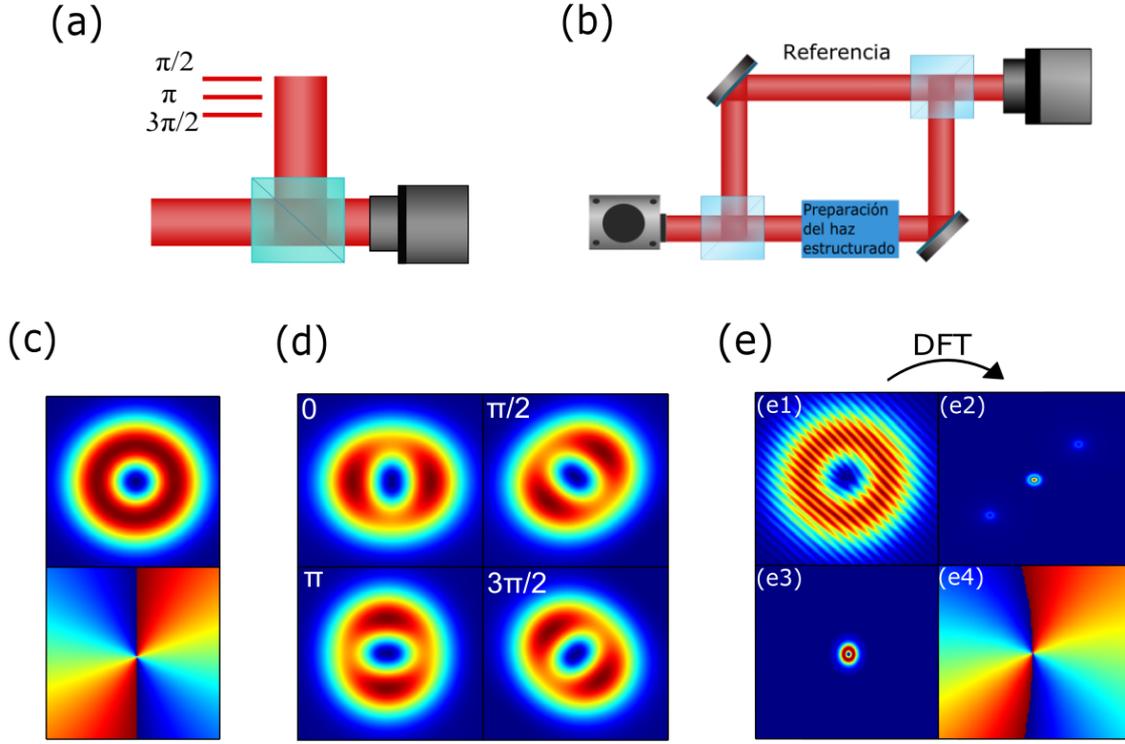


Figura 4.4: Esquemas para medir la fase de haces estructurados. En la primera fila se muestran los esquemas para realizar los métodos de medición de fase: a) muestra el esquema de interferometría por desplazamiento y b) muestra el esquema para el análisis de franjas. En la segunda fila se observan simulaciones numéricas. c) Muestra la amplitud y fase de un vórtice óptico de orden $m = 2$. d) Muestra la intensidad de la interferencia entre el vórtice y una onda plana, cuya dirección de propagación es tal que $q_x = q_y = 0$. Se muestran los casos en que la onda plana tiene desplazamientos constantes de fase de $0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. e) Ilustra el método de análisis de franjas de interferencia. En la imagen e1) se observa la interferencia entre el vórtice óptico y una onda plana con parámetros $q_x \neq q_y \neq 0$, se distingue el clásico patrón de tenedor. e2) Muestra la amplitud de la transformada de Fourier del interferograma. e3) Muestra la amplitud del término $\tilde{c}_-(q_x, q_y)$ después de trasladarlo al origen de coordenadas. e4) Muestra la fase recuperada que coincide con la simulada. En el caso del método de desplazamiento de fase no se muestran los resultados de amplitud y fase porque al ser una simulación, que sólo involucra operaciones algebraicas, los resultados coinciden plenamente con lo mostrado c).

Si la amplitud del haz de referencia es casi constante, entonces $b(x, y)$ es directamente proporcional a la amplitud del haz de interés.

Análisis de franjas de interferencia en el espacio de Fourier.

Este método fue propuesto por primera vez en 1982 [44]. De nueva cuenta, un haz láser es dividido en dos haces que viajan por caminos distintos, en uno de ellos se genera el haz estructurado de interés, mientras en el otro camino se expande el haz de referencia hasta garantizar que el frente de onda sea casi plano. Ambos haces se vuelven a combinar con ayuda de un divisor de haz y el patrón de interferencia se observa con una cámara.

El método parte del hecho que la interferencia medida en la cámara puede escribirse como:

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y)) \quad (4.7)$$

Se puede reescribir el segundo término de la ecuación anterior como:

$$b(x, y) \cos(\Delta\phi(x, y)) = \frac{1}{2}b(x, y) \left[e^{i\Delta\phi(x, y)} + e^{-i\Delta\phi(x, y)} \right] \quad (4.8)$$

Si se calcula la transformada de Fourier del interferograma:

$$\tilde{I}(k_x, k_y) = \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} a(x, y) e^{-ik_x x - ik_y y} dx dy + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} b(x, y) \left[e^{i\Delta\phi(x, y)} + e^{-i\Delta\phi(x, y)} \right] e^{-ik_x x - ik_y y} dx dy \quad (4.9)$$

Como en el método anterior, se puede aproximar la fase del haz de referencia como $\phi_{ref}(x, y) = q_x x + q_y y + q_z z_0$, donde z_0 es la coordenada del plano de observación.

$$\begin{aligned} &= \tilde{a}(k_x, k_y) + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} b(x, y) \left[e^{i\phi_{int}(x, y) - iq_x x - iq_y y - iq_z z_0} + e^{i\phi_{int}(x, y) + iq_x x + iq_y y + iq_z z_0} \right] e^{-ik_x x - ik_y y} dx dy \\ &= \tilde{a}(k_x, k_y) + \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} b(x, y) e^{i\phi_{int}(x, y) - iq_z z_0} e^{-i(k_x + q_x)x - i(k_y + q_y)y} dx dy \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} b(x, y) e^{i\phi_{int}(x, y) + iq_z z_0} e^{-i(k_x - q_x)x - i(k_y - q_y)y} dx dy \\ &= \tilde{a}(k_x, k_y) + \tilde{c}_+(k_x + q_x, k_y + q_y) + \tilde{c}_-(k_x - q_x, k_y - q_y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

La amplitud del espectro angular del interferograma se puede visualizar en la figura 4.4. Se observan tres contribuciones: una centrada en el origen que corresponde al término $\tilde{a}(\mathbf{k})$ y dos centradas en los puntos (q_x, q_y) y $(-q_x, -q_y)$ que corresponden a los términos $\tilde{c}_-(k_x - q_x, k_y - q_y)$ y $\tilde{c}_+(k_x + q_x, k_y + q_y)$. Se filtran los términos $\tilde{a}(k_x, k_y)$ y $\tilde{c}_+(k_x + q_x, k_y + q_y)$ y el término $\tilde{c}_-(k_x - q_x, k_y - q_y)$ se traslada al origen. Se realiza la transformada inversa de Fourier y se obtiene

$$\text{IFT}(\tilde{c}_-(k_x, k_y)) = \frac{1}{2}b(x, y) e^{i\phi(x, y) + iq_z z_0} \quad (4.11)$$

Recordando que $\log(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta$, se aplica la función logaritmo a la expresión anterior y se obtiene:

$$\log(\text{IFT}(\tilde{c}_-(k_x, k_y))) = \frac{1}{2}b(x, y) + i(\phi(x, y) + q_z z_0) \quad (4.12)$$

Por lo tanto, tomando la parte imaginaria de la expresión anterior se recupera la fase del haz de interés, salvo un término constante.

En la figura 4.4 se encuentra descrito el método. La ventaja más importante de esta técnica es que sólo es necesaria una imagen del patrón de interferencia para obtener la fase, sin embargo, no es claro cómo debe ser la función que filtre las contribuciones no deseadas en el espacio de Fourier, por lo que un error en la construcción de dicha función se traduce en un error en la fase estimada.

De nueva cuenta, si la amplitud del haz de referencia es casi constante, se puede extraer la amplitud del haz de interés a partir de la parte real de la expresión anterior.

Interferometría por desplazamiento en escalas microscópicas.

Como se puede inferir a partir del esquema experimental para la generación de haces fuertemente enfocados medir la fase, en regiones espaciales de apenas unas cuantas longitudes de onda, representa un reto experimental debido a que no se pueden construir interferómetros del tipo Mach-Zender o de Michelson en tales escalas, además, los píxeles de las cámaras CCD tienen dimensiones de unas cuantas micras, por lo que sería imposible obtener buena resolución, incluso si se pudiera enfocar un haz no paraxial sobre la pantalla de la CCD. En esta sección se discute el uso de un interferómetro donde el haz de referencia y el haz estructurado viajan por el mismo camino.

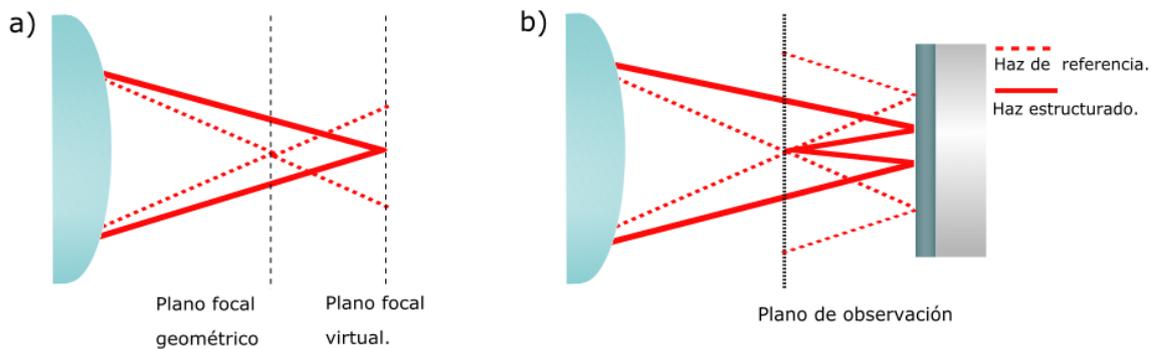


Figura 4.5: Interferometría en escalas microscópicas. a) Muestra los planos focales geométrico y virtual, el primero corresponde al haz de referencia y el segundo al haz estructurado. b) Muestra el efecto de colocar una superficie reflectora en un plano posterior al plano focal: si la posición es correcta, el foco del haz modulado coincide con el plano imagen de la lente y la interferencia entre la referencia con fase esférica y el haz estructurado se puede proyectar sobre la CCD.

De acuerdo al sistema experimental mostrado en la figura 4.3, un láser linealmente polarizado incide sobre el SLM que solamente modula la dirección de polarización \mathbf{n}_x , típicamente una lámina de media onda, previa al SLM, rota la polarización incidente hacia la dirección más eficiente. En la configuración propuesta en este trabajo, una lámina de media onda gira la polarización de tal manera que el haz incidente sea una superposición de polarización \mathbf{n}_x y \mathbf{n}_y , la componente \mathbf{n}_x será modulada y la componente \mathbf{n}_y será reflejada como si el SLM fuese un espejo, aunque ambas componentes viajan por el mismo camino, al ser ortogonales entre sí no pueden interferir. Se propone utilizar una segunda lámina de media onda que gira la polarización de los dos haces 45 grados, entonces, ambos tendrán componentes en \mathbf{n}_x y \mathbf{n}_y . Si con un polarizador se filtra la dirección \mathbf{n}_x , ambos haces podrán interferir y el haz sin modular será la referencia.

Como se mencionó al inicio del capítulo, es posible añadir fases esféricas al haz modulado, de tal manera que el haz sin modular se enfoque en el foco geométrico de la lente y el haz modulado se enfoque en un plano posterior, tal y como se muestra en la figura 4.5 a). Es posible colocar frente a la lente una superficie reflectora de tal manera que el foco virtual del haz estructurado coincida con el foco geométrico de la lente, ver figura 4.5 b), de esta manera, sobre la cámara CCD se puede observar la interferencia entre el haz estructurado y la referencia. Hay que señalar que la fase del haz de referencia es aproximadamente esférica y no plana, esto se debe que el haz de referencia está divergiendo. Por lo tanto, si se desplaza

la fase del haz estructurado en valores de $\delta\phi \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ la cantidad que se puede recuperar es $\Delta\phi(x, y) = \phi_{int}(x, y) - \phi_{ref}(x, y)$, con $\phi_{ref}(x, y)$, una función cuadrática en las coordenadas.

5 Resultados experimentales y discusión.

En este capítulo se muestran mediciones de amplitud y fase de haces estructurados con los métodos descritos en el [Capítulo 4](#), tanto en escalas macroscópicas como microscópicas. En ambos casos se muestran comparaciones con resultados numéricos basados en los algoritmos propuestos en el [Capítulo 3](#).

5.1. Interferometría por desplazamiento.

Difracción de vórtices ópticos.

Se implementó el método de interferometría por desplazamiento en los casos de difracción de vórtices ópticos y en los patrones de speckle, generados por el enfoque de un haz gaussiano con patrón aleatorio de fase. A continuación se muestra una imagen que contiene los cuatro interferogramas, las mediciones de amplitud y fase, y las simulaciones para el caso de difracción de un haz con fase de vórtice delimitado por una abertura circular.

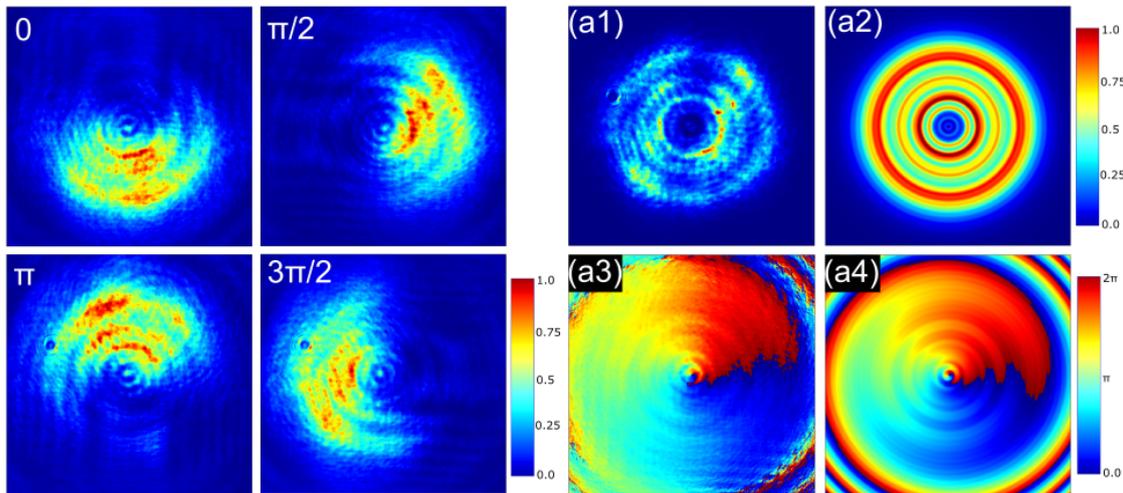


Figura 5.1: Resultados experimentales de interferometría por desplazamiento de fase. El grupo de imágenes de la derecha muestra los patrones de interferencia del haz de interés, con $m = -1$, y la onda de referencia para los distintos desplazamientos de fase, en este caso se garantizó que la fase del haz de referencia fuera constante, es decir $q_x = q_y = 0$, por eso se observa cómo el máximo de la intensidad de la interferencia gira alrededor del centro. **a1** Es la amplitud recuperada a partir de las cuatro mediciones. **a2** Es la amplitud simulada. **a3** Es la fase recuperada a partir de las cuatro mediciones y **a4** es la fase simulada. Tanto las imágenes de las mediciones como de simulaciones miden 1.86 mm de lado. La escala de colores en todas las imágenes de intensidad va de 0 a 1, y en las de fase de 0 a 2π . El haz fue difractado aproximadamente 5.5 cm respecto al plano del SLM.

En la figura 5.2 se ilustran resultados para vórtices de orden $m \in \{-2, -3, -4, -5\}$. Tanto en simulaciones como en resultados experimentales se observa que la energía se distribuye en regiones más alejadas del centro conforme incrementa el valor de m , sin embargo la zona central no es completamente oscura, existe una muy tenue estructura cuya fase se observa tanto en las simulaciones como en las mediciones. En la parte exterior del vórtice, la fase comienza a adquirir una estructura espiral que es identificable en ambos casos.

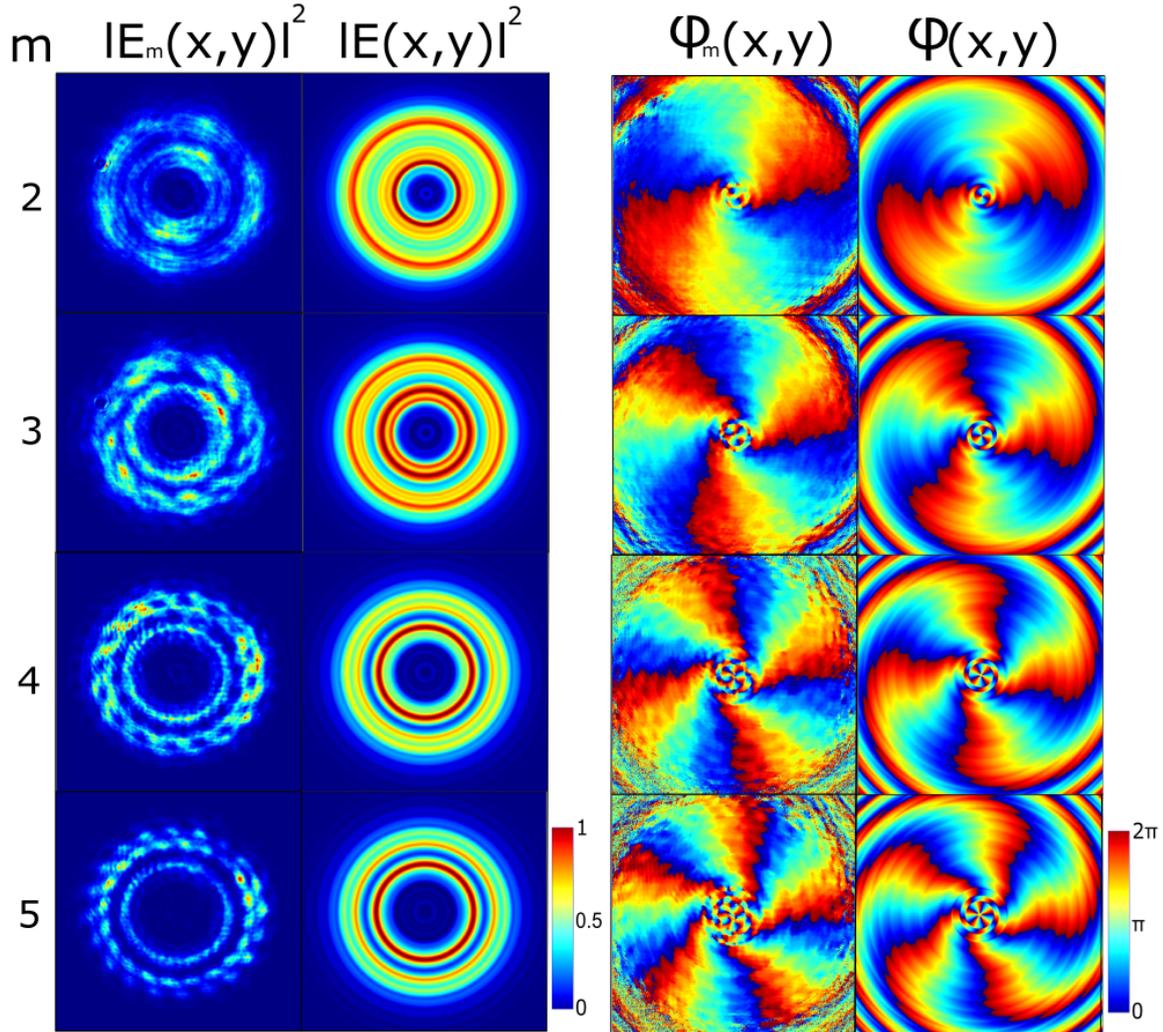


Figura 5.2: Resultados experimentales de interferometría por desplazamiento de fase. Cada fila en la imagen corresponde a un valor distinto de m . La primera columna es la amplitud recuperada a partir de los interferogramas. La segunda columna corresponde a la amplitud simulada. La tercer columna corresponde a la fase medida y la cuarta columna a la fase simulada. Tanto las imágenes de las mediciones como de simulaciones miden 1.86 mm de lado. La escala de colores en todas las imágenes de intensidad va de 0 a 1, y en las de fase de 0 a 2π . El haz fue difractado aproximadamente 5.5 cm respecto al plano del SLM.

Cabe señalar que en las imágenes de intensidad parece que hay zonas donde el campo eléctrico es cero y, sin embargo, la fase está bien definida en esas regiones, esto se debe a que el campo no es estrictamente cero, sino muy débil y la interferencia con el haz de referencia

incrementa la señal en esas regiones. Por lo tanto el método permite medir la fase de haces, incluso en zonas donde la amplitud es casi cero.

Speckle

El segundo caso a estudiar con el método de interferometría de desplazamiento es el caso de speckle. En la imagen 5.3 se muestran los resultados:

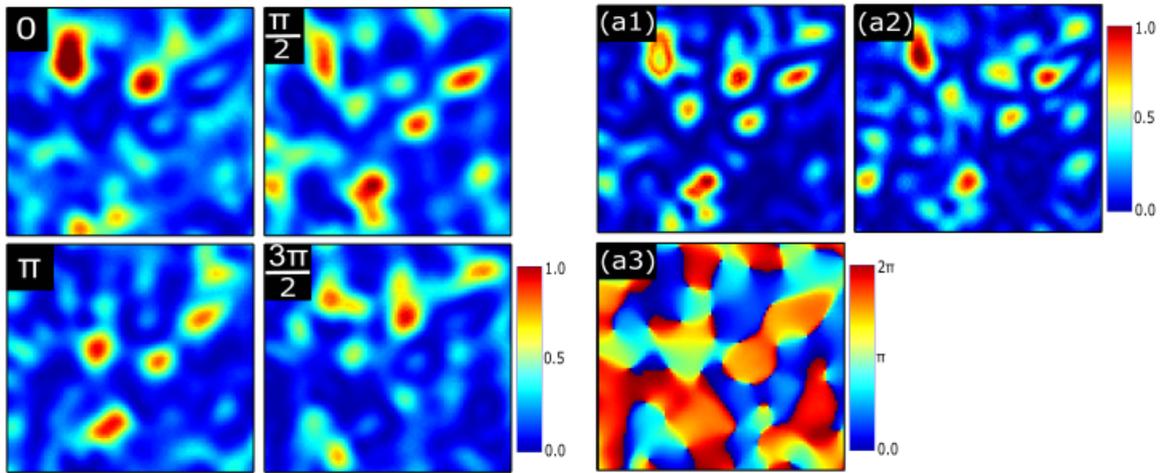


Figura 5.3: Resultados experimentales de interferometría por desplazamiento de fase. El grupo de imágenes de la derecha muestra los patrones de interferencia del speckle y la onda de referencia para los casos en que la fase del speckle es desplazada en valores constantes de 0 , $\pi/2$, π y $3\pi/2$. **a1)** Es la intensidad recuperada a partir de las cuatro mediciones. **a2)** Es la intensidad medida directamente con la cámara CCD **a3)** Es la fase recuperada a partir de las cuatro mediciones. Las imágenes miden 0.4 mm de lado. La escala de colores en todas las imágenes de intensidad va de 0 a 1 , y en las de fase de 0 a 2π .

El speckle se generó a partir de un mapa de fase como el que se discutió en el [Capítulo 3](#), en este caso no se presentan simulaciones debido a que la estructura compleja del speckle varía rápidamente de un plano de observación a otro, muy posiblemente las observaciones se realizaron en un plano distinto al plano focal de la lente. Sin embargo se tienen mediciones directas de la intensidad del speckle y el patrón mostrado coincide con la intensidad extraída a partir de los cuatro interferogramas. El mapa de fase contiene arreglos aleatorios de parejas de singularidades ópticas de signos opuestos, característica que coincide con las simulaciones del [Capítulo 3](#).

5.2. Análisis de franjas de interferencia.

Vórtices enfocados.

Para poner a prueba el método de análisis de franjas de interferencia se utilizan haces enfocados, con amplitud inicial gaussiana, y con fase de vórtice $m \in \{-4, -3, -2, -1, 0\}$. El plano de observación se encuentra ligeramente desplazado del plano focal de la lente, por lo que los haces estructurados se encuentran divergiendo y su fase presenta una estructura espiral, sin

embargo esto no impide identificar de manera visual el orden del vórtice. En la figura 5.4 se muestra una ejemplificación del método con el haz de orden $m = 0$.

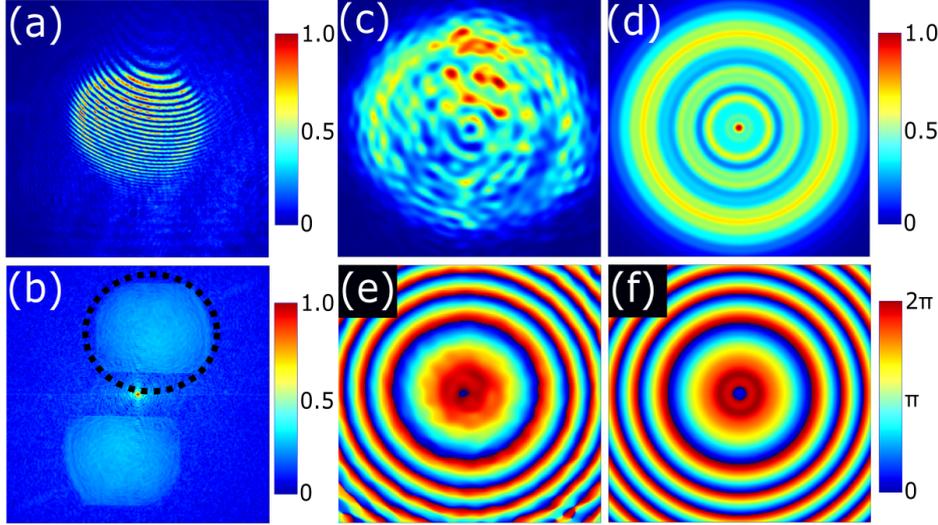


Figura 5.4: Análisis de franjas de interferencia y resultados para $m = 0$. **a)** Muestra el patrón de interferencia entre un haz de $m = 0$ y una referencia plana. **b)** Muestra la amplitud de la transformada de Fourier del patrón de interferencia, se observan claramente las tres contribuciones, sin embargo, no es muy claro donde se encuentra el centro de $\tilde{c}_-(k_x, k_y)$ y cuál debe ser el diámetro de la función que filtre la transformada. **c)** Muestra la amplitud reconstruida y **d)** la amplitud simulada. **e)** Muestra la fase reconstruida y **f)** la fase simulada. El tamaño de las imágenes **c)**-**f)** es de 1.13 mm de lado.

Se observa que existe una buena correspondencia entre la fase reconstruida y la fase simulada, sin embargo esto no ocurre con los resultados para la amplitud. La fase recuperada (figura 5.4 **c)**) tiene las características de una simulación y no de una medición directa, es decir, carece del ruido natural que aparece en las fotografías, esto se debe a los múltiples pasos para aislar el término $\tilde{c}_-(k_x, k_y)$ que causan la pérdida del ruido característico. En la figura 5.5 se muestran los resultados para los haces de orden $m \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

De nueva cuenta, se observa que la energía se distribuye en regiones más alejadas del origen en la medida que m aumenta y que en el centro de los haces existen estructuras tenues de anillos concéntricos. Se puede concluir que las simulaciones y las observaciones coinciden en los aspectos generales de los vórtices, sin embargo, los detalles de las zonas centrales no se pueden recuperar completamente, contrario al método de desplazamiento de fase. También cerca de las esquinas de las imágenes se observan errores en la fase. Todos estos errores sutiles en la medición se deben a que se filtra la transformada de Fourier de la interferencia de una manera arbitraria, además la medición está basada en una sola fotografía, aunque esto es una ventaja en el tiempo de adquisición de datos, también puede ser fuente de errores, especialmente si las franjas de interferencia no son lo suficientemente finas como para distinguir los detalles del haz.

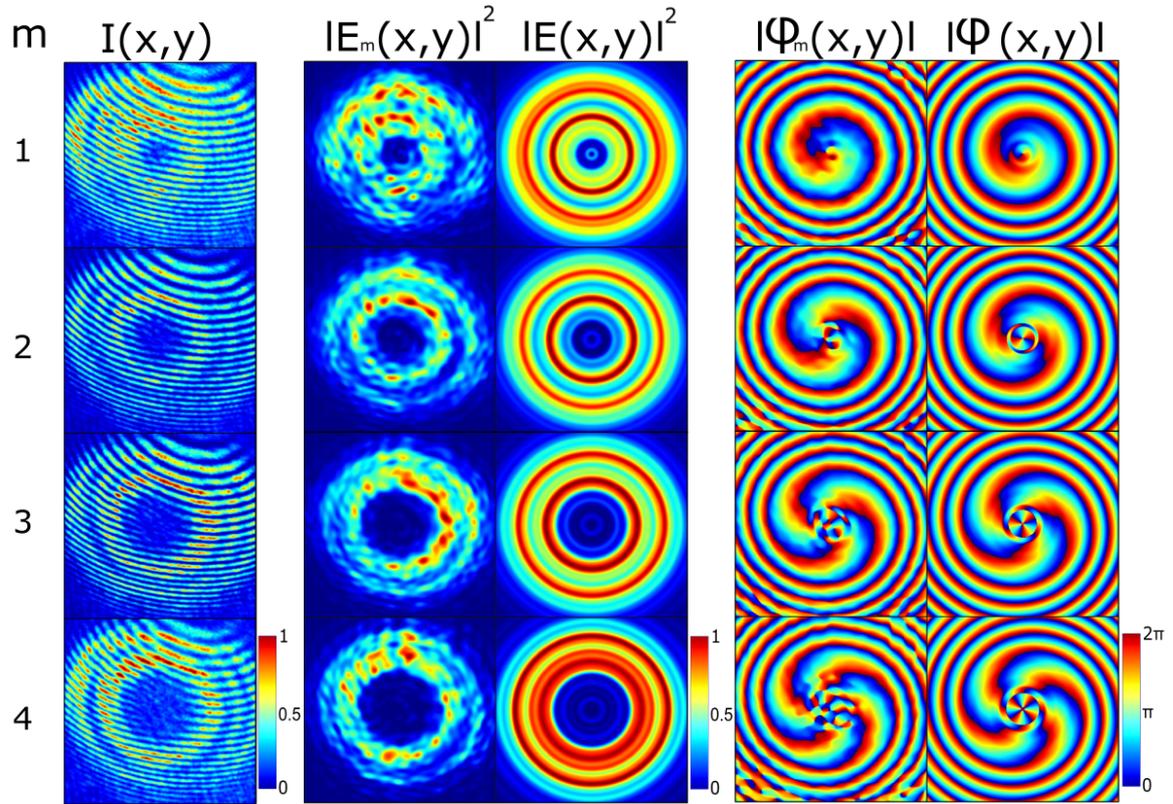


Figura 5.5: Resultados experimentales del análisis de franjas de interferencia. Cada fila en la imagen corresponde a un valor distinto de m . La primera columna es la interferencia entre el vórtice y el haz de referencia. Las segunda y tercer columna corresponden a la intensidad medida y simulada, respectivamente. Las cuarta y quinta columna corresponden a la fase medida y la fase simulada, respectivamente. El tamaño de las imágenes es de 1.13 mm de lado.

Speckle.

A continuación se muestran las mediciones para speckle con el método de análisis de franjas. De nueva cuenta, no se presentan simulaciones debido a que la estructura compleja del speckle cambia entre planos de observación, posiblemente el plano en el que se realizaron las mediciones no corresponde al plano focal de la lente. Sin embargo cuando se compara la intensidad medida directamente con la CCD y la extraída a partir del análisis de franjas, se observa una muy buena correspondencia. La fase extraída presenta las características esperadas para este tipo de patrones.

Sin embargo, como se puede observar en la imagen **a3** no es muy claro el diámetro para el cual la función $\tilde{c}_-(k_x, k_y)$ decae a cero, debido a que transformada de Fourier de la interferencia presenta mucho ruido. En este caso el método es suficiente para reconstruir la intensidad del haz, pero no se puede asegurar que la fase se extraiga correctamente.

Con base en las mediciones de speckle y de vórtices, se puede afirmar que el método que ofrece menos fuentes de error es el de interferometría por desplazamiento, sobre todo, para caracterizar bien la fase en zonas de baja intensidad.

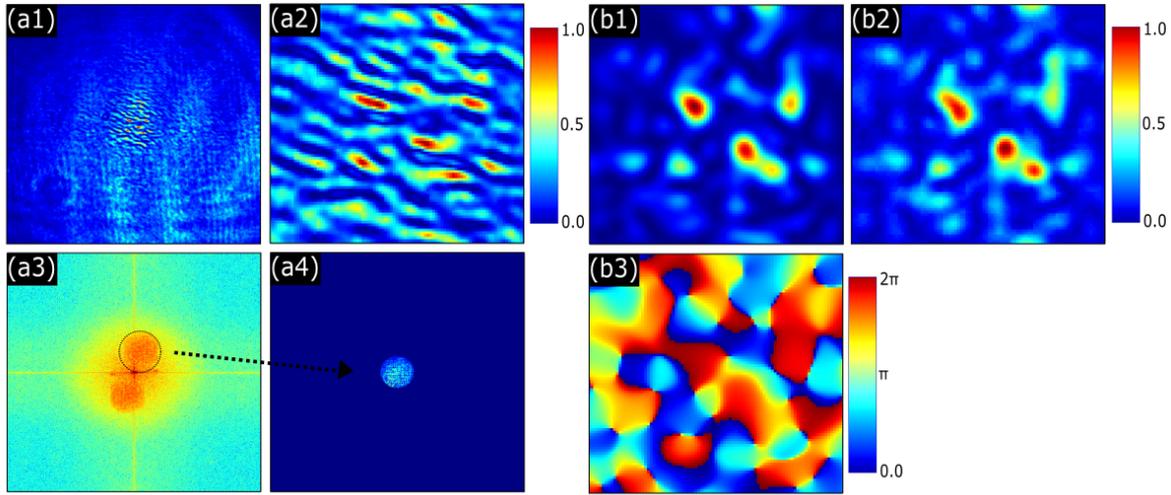


Figura 5.6: Análisis de franjas de interferencia para Speckle.. **a1)** Muestra el patrón de interferencia entre el speckle y una referencia plana. Se muestra un área mayor a la zona de interés, se observa que la amplitud de la referencia es casi constante. **a2)** Muestra un acercamiento a la zona de interés en el patrón de interferencia, donde se observan múltiples dislocaciones en las líneas de interferencia. **a3)** Muestra la amplitud de la transformada de Fourier del patrón de interferencia, se observan tres contribuciones sin que sea muy claro donde se encuentra el centro de $\tilde{c}_-(k_x, k_y)$ y cuál debe ser el diámetro de la función que filtre la transformada. Además, la escala es logarítmica, de otra manera los detalles no se pueden apreciar. **a4)** Muestra el término $\tilde{c}_-(k_x, k_y)$ en el origen. **b1)** Muestra la intensidad recuperada con el método. **b2)** Muestra la intensidad medida directamente **b3)** Muestra la fase recuperada. Las imágenes **b1)**-**b3)** miden 0.42 mm de lado. La escala de colores en todas las imágenes de intensidad va de 0 a 1, y en las de fase de 0 a 2π .

5.3. Mediciones de amplitud en escalas microscópicas.

El caso más simple de luz estructurada no paraxial es un haz enfocado, con perfil inicial de intensidad gaussiano, fase constante y polarización lineal \mathbf{n}_x , limitado por una abertura circular. Usualmente el diámetro de la abertura está dado por el objetivo de microscopio, sin embargo es posible reducir el diámetro del haz de entrada con el SLM si se utiliza como modulador de intensidad. La forma de hacerlo es empleando hologramas como los mostrados en la figura 5.7 a) donde en una sección circular se define una fase de desplazamiento, por lo tanto el haz dentro de esa región es difractado lateralmente respecto del orden cero. También es posible hacerlo con aberturas cuadradas y anulares 5.7 b)-c).

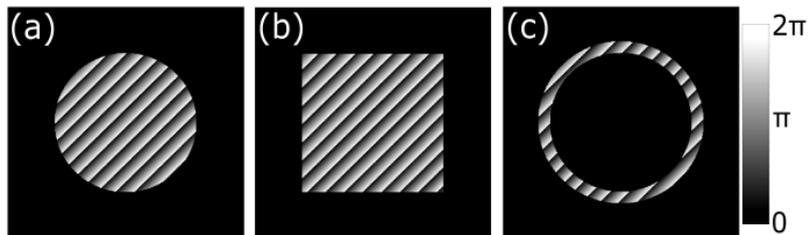


Figura 5.7: Hologramas para modular la abertura, con fase de desplazamiento lateral. a) Abertura circular. b) Abertura cuadrada. c) Abertura anular.

En la figura 5.8 se muestran resultados numéricos y experimentales para la amplitud de la

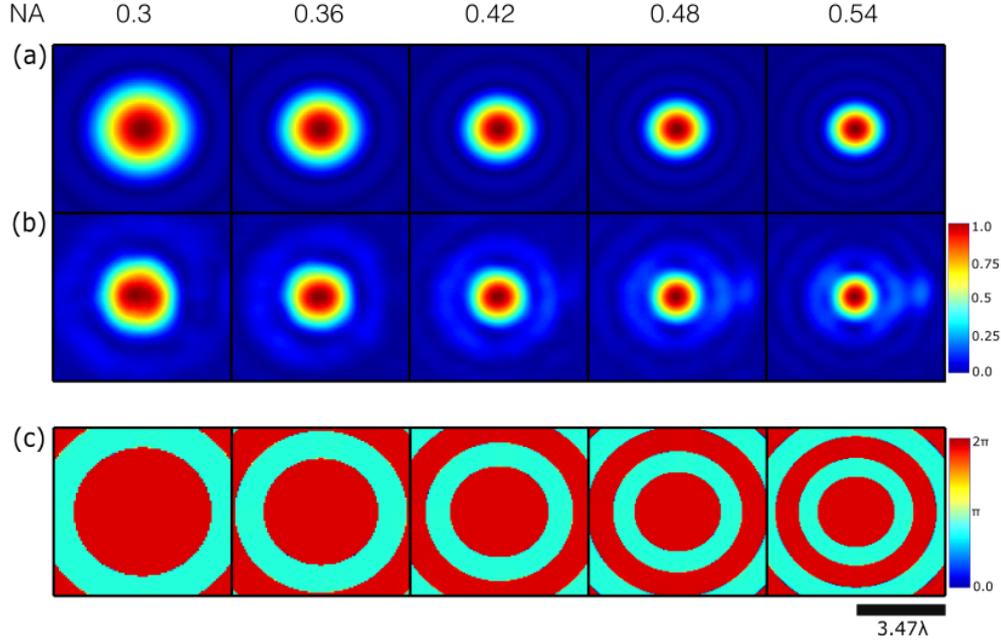


Figura 5.8: Patrón de enfoque de aperturas circulares. De izquierda a derecha el diámetro de la abertura incrementa. **a)** Simulaciones de amplitud para la componente \mathbf{n}_x . **b)** Mediciones de amplitud para las diferentes aperturas. **c)** Simulación de la fase en el plano focal para las distintas aperturas. Las imágenes tienen dimensiones de $6.94 \times 6.94 \lambda^2$

componente \mathbf{n}_x cuando se varía el diámetro de la abertura utilizando el SLM. De manera efectiva se puede decir que se está disminuyendo el valor de apertura numérica del objetivo al reducir el diámetro del haz. Los parámetros utilizados son: $f = 2 \text{ mm}$, $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$, $n = 1.518$, y $NA \in \{0.3, 0.36, 0.42, 0.48, 0.54\}$

Se observa que el patrón de enfoque posee un máximo central rodeado de anillos, que es consistente con el patrón clásico de Airy, cuyas características están determinadas por la función Bessel de orden 1, en coordenadas cilíndricas. Las simulaciones y las observaciones coinciden en dimensiones, se observan el mismo número de anillos circundantes dentro de la misma área cuadrada. El diámetro del máximo central disminuye de la manera conforme la abertura incrementa.

En la figura 5.9 se muestran resultados numéricos y experimentales para la amplitud de la componente \mathbf{n}_x cuando se varía el diámetro de la abertura cuadrada utilizando el SLM. Los parámetros utilizados son: $f = 2 \text{ mm}$, $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$, $n = 1.518$, y $NA \in \{0.33, 0.50, 0.53, 0.60, 0.67\}$ Como es de esperarse se sigue observando que el diámetro del máximo central disminuye conforme la abertura incrementa, pero ya no hay anillos concéntricos, sino regiones de máximos de intensidad alineados con los ejes cartesianos. Esto es consistente con la forma esperada para enfoque de haces paraxiales con aberturas cuadradas, donde el patrón está determinado por un producto de funciones Sinc, en coordenadas cartesianas. Las simulaciones y las observaciones son consistentes en las dimensiones, se observan el mismo número de máximos de intensidad dentro de la misma área.

En la figura 5.10 se muestran resultados numéricos y experimentales para la intensidad de la

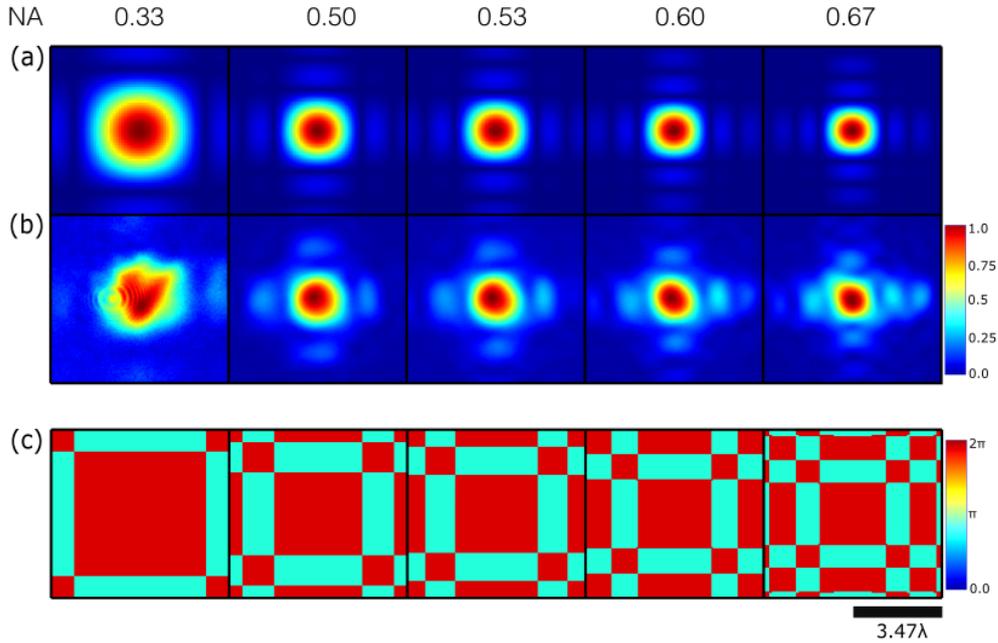


Figura 5.9: Patrón de enfoque de aperturas cuadradas. De izquierda a derecha el diámetro máximo de la apertura incrementa. **a)** Simulaciones de amplitud para la componente n_x . **b)** Mediciones de amplitud para las diferentes aperturas. **c)** Simulación de la fase en el plano focal para las distintas aperturas. Las imágenes tienen dimensiones de $6.94 \times 6.94 \lambda^2$

componente n_x cuando se varía el diámetro de la apertura anular delgada utilizando el SLM. Los parámetros utilizados son: $f = 2 \text{ mm}$, $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$, $n = 1.518$, y $NA \in \{0.38, 0.48\}$. El patrón de enfoque y de fase es similar al caso gaussiano, pero con la diferencia que las dimensiones del máximo central son aproximadamente las mismas que las dimensiones de los anillos circundantes. Se observa una muy buena correspondencia entre las simulaciones y el experimento donde el número de anillos dentro de las imágenes mostradas coinciden en ambos casos.

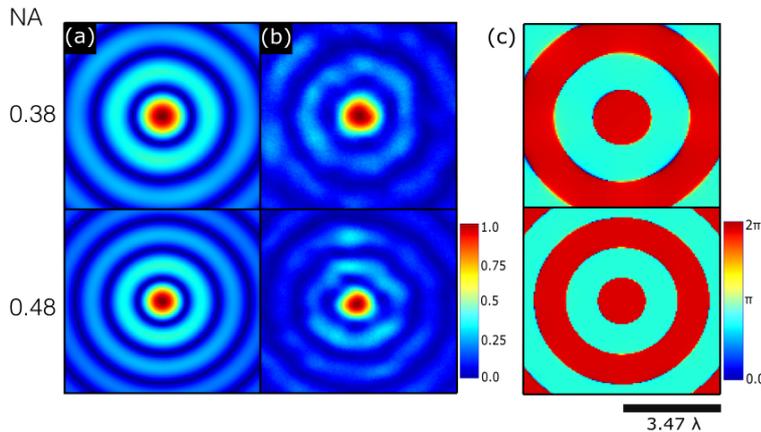


Figura 5.10: Patrón de enfoque de un haz con amplitud anular. La primera columna **a)** corresponde a simulaciones de intensidad para la componente n_x . La columna **b)** corresponde a mediciones de intensidad para las diferentes aperturas. **c)** Simulación de la fase en el plano focal para las distintas aperturas. Las imágenes tienen dimensiones de $6.94 \times 6.94 \lambda^2$

5.4. Mediciones de fase en escalas microscópicas.

La medición de fase en el régimen no paraxial se realizó con el sistema descrito en el [Capítulo 4](#), en el cual la referencia y el haz de interés viajan por el mismo camino y, además, el haz estructurado es desplazado sobre el eje axial. El caso específico de estudio es el patrón de enfoque de un haz modulado por cuatro pequeñas aberturas cuadradas, como se puede ver en la figura 5.11. Se muestran dos realizaciones, **b)** y **c)**, en ambos casos se tiene la misma abertura pero la fase en cada región cuadrada está definida aleatoriamente entre 0 y 2π . Aunque la amplitud del haz incidente al objetivo de microscopio es la misma, existen sutiles diferencias en el patrón observado que se deben a la diferencia de fase.

Los resultados mostrados son para la polarización \mathbf{n}_x . Los parámetros utilizados, tanto en la simulación como en el experimento son: $f = 2$ mm, $\lambda = 1.064\mu\text{m}$, $n = 1.518$, y NA de 1.3.

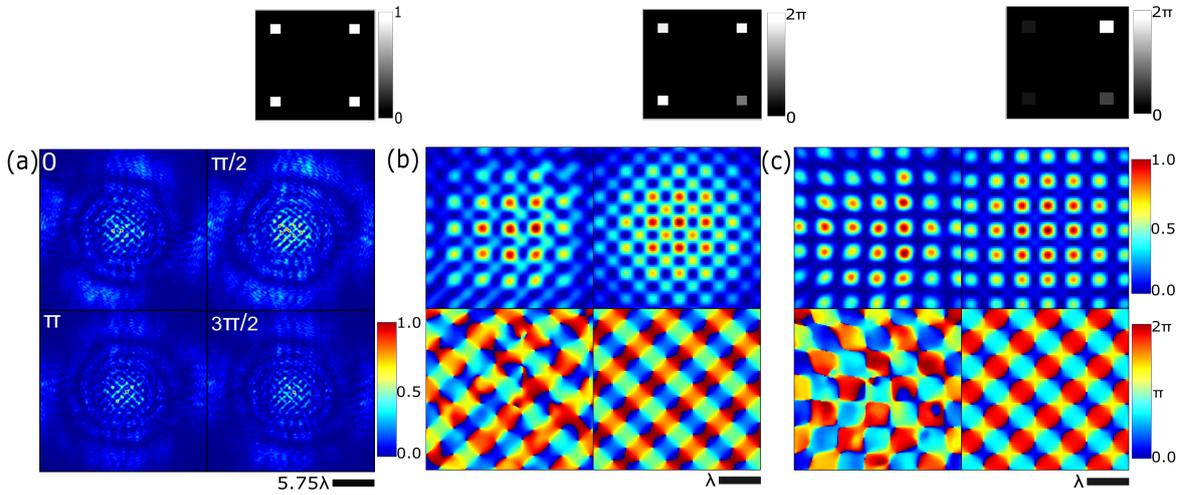


Figura 5.11: Medición de fase de haces fuertemente enfocados. La fila superior muestra la amplitud del haz incidente modulada por un arreglo de cuatro aberturas cuadradas. Las siguientes imágenes corresponden al mapa fase para cada caso. **a)** Muestra los cuatro interferogramas (correspondientes al caso mostrado en **b)**) en un área de $23 \times 23\lambda^2$. **b)** Resultados experimentales y numéricos. La columna de la izquierda son las mediciones y la columna de la derecha las simulaciones, el área mostrada es de $4 \times 4\lambda^2$. **c)** Resultados experimentales y numéricos. La columna de la izquierda son las mediciones y la columna de la derecha las simulaciones, el área mostrada es de $4 \times 4\lambda^2$.

Las imágenes mostradas en 5.11 **a)** tienen por objetivo ilustrar que el área sobre la cual se puede observar la interferencia es muy grande (en términos de longitudes de onda), debido a que el haz de referencia diverge con un ángulo muy pronunciado, la zona central corresponde a la región de interés, donde se observa muy buena visibilidad del patrón de interferencia.

Como se puede observar en la figura 5.11 **b)-c)** los resultados numéricos y experimentales tienen muy buena correspondencia. En el caso **b)** se observa un arreglo de columnas y filas de máximos y mínimos de intensidad, ordenados de tal manera que alternan sus posiciones dependiendo de la fila o columna que se observe. Los puntos donde la fase está indeterminada, es decir, las singularidades, son perfectamente identificables, tanto en las simulaciones como en las mediciones. El haz mostrado en **c)** presenta un ordenamiento distinto, en este caso la posición de los máximos y mínimos de intensidad es independiente de la columna o fila que

se observe. De nueva cuenta, el patrón de intensidad medido y simulado se corresponden muy bien, tanto en estructura como en dimensiones. Sin embargo la fase medida presenta ruido.

Es importante señalar que en ambos casos las estructuras que conforman las zonas de máximos de intensidad tienen dimensiones características menores a la longitud de onda, aproximadamente $\lambda/2$. Esto es posible debido a que se está enfocando en un medio de $n = 1.518$ con una lente de $NA = 1.3$, lo que permite mayores frecuencias espaciales, en el espectro angular, de las que se pueden tener en el vacío, esto se traduce en estructuras más pequeñas a la longitud de onda.

6 Aportaciones y perspectivas.

-Se construyeron algoritmos computacionales para difracción y enfoque de haces monocromáticos en escalas macroscópicas y microscópicas. Los algoritmos operan basados en la función *Fast Fourier Transform* lo que permite una estimación rápida de los campos de interés.

-Tanto los algoritmos computacionales, como los programas para generar los hologramas proyectados en el SLM, están escritos de tal manera que no existen ambigüedades ni parámetros libres entre las simulaciones y el experimento, esto se traduce en una buena correspondencia entre lo que se simula y lo que se mide.

-Los algoritmos para enfoque de luz estructurada y propagación se están utilizando en varios proyectos del laboratorio como en la generación y medición de haces estructurados no paraxiales, pinzas ópticas holográficas, y simulaciones para identificar singularidades ópticas y sus trayectorias.

-Se realizaron mediciones de amplitud en escalas macroscópicas y microscópicas, al contrastar con las simulaciones, se obtuvo una muy buena correspondencia entre las predicciones y las observaciones.

-Se logró medir la fase de haces en escalas macroscópicas y al contrastar con las simulaciones se encontró una muy buena correspondencia. Se pudo concluir que el método que ofrece mejores resultados es el de interferometría por desplazamiento.

-Se propuso e implementó un tipo de interferómetro que permite obtener información sobre la fase de haces en escalas microscópicas. Sin embargo no se puede afirmar que la fase del haz se haya medido con exactitud debido a la presencia de la fase esférica del haz de referencia.

-Una posible extensión de este trabajo es realizar el análisis de polarización antes de la cámara para observar las diferentes componentes de los haces en escalas microscópicas.

Bibliografía

- [1] Forbes, A. Structured light from lasers. *Laser Photonics Reviews*, **13**:1900140, (2019).
- [2] Rosales-Guzmán, C. Ndagano, B. & Forbes, A. A review of complex vector light fields and their applications. *J. Opt.*, **20**:123001, (2018).
- [3] Vellekoop, I. Lagendijk, A. & Mosk, A. Exploiting disorder for perfect focusing. *Nature Photon*, **4**:320–322, (2010).
- [4] Novotny, L. & Hecht, B. *Principles of Nano-Optics*. Cambridge University Press, USA, 2nd edition, (2012).
- [5] Otte, E & Denz, C. Optical trapping gets structure: Structured light for advanced optical manipulation. *Appl. Phys. Rev.*, **7**:041308, (2020).
- [6] Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, & Steven Chu. Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles. *Opt. Lett.*, **11**:288–290, (1986).
- [7] Grier, D. A revolution in optical manipulation. *Nature*, **424**:810–816, (2003).
- [8] J.C. Dainty. *Laser Speckle and Related Phenomena*. Springer, Germany, 1st edition, (1975).
- [9] Boivin, A. & Wolf, E. Electromagnetic field in the neighborhood of the focus of a coherent beam. *Phys. Rev.*, **138**:B1561, (1965).
- [10] Richards, B. & Wolf, E. Electromagnetic diffraction in optical systems, II. Structure of the image field in an aplanatic system. *Proc. R. Soc. Lond.*, **253**:358–379, (1959).
- [11] Bauer, T. et al. Nanointerferometric amplitude and phase reconstruction of tightly focused vector beams. *Nature Photon*, **8**:23–27, (2014).
- [12] Botcherby, E. J. et al. An optical technique for remote focusing in microscopy. *Optics Communications*, **281**(4):880–887, (2007).
- [13] Chaowei Wang, et al. Femtosecond mathieu beams for rapid controllable fabrication of complex microcages and application in trapping microobjects. *ACS Nano*, **13**:4667–4676, (2003).
- [14] Durnin, J. et al. Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.*, **58**:1499, (1987).
- [15] Fickler, R. Krenn, M. Lapkiewicz, R. et al. Real-time imaging of quantum entanglement. *Sci. Rep.*, **3**:1914, (2013).
- [16] Garcés-Chávez, V. et al. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam. *Nature Photon*, **4**:145–147, (2002).

-
- [17] Hernández-Hernández, R. J. et al. Experimental generation of mathieu–gauss beams with a phase-only spatial light modulator. *Appl. Opt.*, **49**:6903–6909, (2010).
- [18] Krenn, M. et al. Communication with spatially modulated light through turbulent air across vienna. *New J. Phys*, **16**:113028, (2014).
- [19] Leach, J. et al. Vortex knots in light. *New J. Phys*, **7**:55, (2005).
- [20] Leutenegger, M. et al. Fast focus field calculations. *Opt. Express*, **14**:11277–11291, (2006).
- [21] Popoff, S. Lerosey, G. Fink, M. et al. Image transmission through an opaque material. *Nat Commun*, **1**:81, (2010).
- [22] Ring, J. et al. Auto-focusing and self-healing of pearcey beams. *Opt. Express*, **20**:18955–18966, (2012).
- [23] Rubinsztein-Dunlop, H. et al. Roadmap on structured light. *J. Opt.*, **19**:013001, (2016).
- [24] Schwider, J. et al. New compensating four-phase algorithm for phase-shift interferometry. *Opt. Eng.*, **32**(8), (1993).
- [25] Yiqiong Zhao. et al. Spin-to-orbital angular momentum conversion in a strongly focused optical beam. *Phys. Rev. Lett.*, **99**:073901, (2007).
- [26] Zannotti, A. Denz, C. Alonso, M.A. et al. Shaping caustics into propagation-invariant light. *Nat Commun.*, **11**:3597, (2020).
- [27] Andrew Forbes. *Laser Beam Propagation. Generation and Propagation of Customized Light*. CRC Press Taylor & Francis Group., USA, 1st edition, (2014).
- [28] Jones, P. Maragò, O. Volpe, G. *Optical Tweezers: Principles and Applications*. Cambridge University Press, (2015).
- [29] Gregory J. Gbur. *Singular Optics*. CRC Press Taylor & Francis Group., USA, 1st edition, (2016).
- [30] Joseph W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, USA, 2nd edition, (1996).
- [31] Ulrich Hohenester. *Nano and Quantum Optics*. Springer Nature Switzerland, Switzerland, 1st edition, (2020).
- [32] Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. the scalar theory. *J. Opt. Soc. Am. A.*, **4**:651–654, (1987).
- [33] Hell, S. & Wichmann, J. Breaking the diffraction resolution limit by stimulated emission: stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy. *Opt. Lett*, **19**:780–782, (1994).
- [34] Baumgartl, J. Mazilu, M. & Dholakia, K. Optically mediated particle clearing using airy wavepackets. *Nature Photon*, **2**:675–678, (2008).
- [35] Rotenberg, N. & Kuipers, L. Mapping nanoscale light fields. *Nature Photon*, **8**:919–926, (2014).

-
- [36] Hamamatsu Manual. Phase spatial light modulator lcos-slm. *Opt. Express*, **Chapter 12**, (2014).
- [37] Salter, P.S., Booth, M.J. Adaptive optics in laser processing. *Light Sci Appl*, **8**:110, (2019).
- [38] Siviloglou, G. A. Broky, J. Dogariu, A. & Christodoulides, D. N. Observation of accelerating airy beams. *Phys. Rev. Lett.*, **99**:213901, (2007).
- [39] Vaveliuk, P. Lencina, A. Rodrigo, J. & Martinez-Matos, O. Symmetric airy beams. *Opt. Lett.*, **39**:2370–2373, (2014).
- [40] William H. Press. *Numerical Recipes. The art of scientific computing*. Cambridge University Press, USA, 3rd edition, (2007).
- [41] Quinto-Su, Pedro A. & Jáuregui, Rocío. Optical stacking of microparticles in a pyramidal structure created with a symmetric cubic phase. *Opt. Express*, **22**:12283–12288, (2014).
- [42] Volpe, G. Volpe, G. & Gigan, S. Brownian motion in a speckle light field: Tunable anomalous diffusion and selective optical manipulation. *Sci Rep*, **44**:3936, (2014).
- [43] O’Neil, A. T. Intrinsic and extrinsic nature of the orbital angular momentum of a light beam. *Phys. Rev. Lett.*, **88**:053601, (2002).
- [44] volume=**72** number= pages=156-160-year=(1982) publisher= Takeda, M. et al., journal=J. Opt. Soc. Am. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry.
- [45] David Voelz. *Computational Fourier Optics. A MATLAB tutorial*. SPIE Press, USA, 1st edition, (2011).
- [46] Leonard Mandel & Emil Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, USA, 1st edition, (1995).
- [47] Grier, D. & Roichman, Y. Holographic optical trapping. *Appl. Opt.*, **45**:880–887, (2006).