



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**TEORIA DE ESTABILIDAD Y BIFURCACIONES:  
APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE UN MODELO  
ELECTRÓNICO DE NEURONA**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**MATEMÁTICO**

**P R E S E N T A:**

**CARLOS CARRILLO TORRES**



**DIRECTOR DE TESIS:  
HUMBERTO ANDRES CARRILLO CALVET  
2021**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice

<b>I</b>	<b>Prefacio</b>	<b>2</b>
<b>1.</b>	<b>Modelos de Neuronas y Osciladores no Lineales</b>	<b>2</b>
1.1.	Oscilador Neuronal Controlado por Voltaje: Modelo VCON . . . .	5
1.1.1.	Ecuaciones del Circuito VCON . . . . .	8
<b>2.</b>	<b>Estabilidad</b>	<b>10</b>
2.1.	Estabilidad de los Equilibrios . . . . .	10
2.2.	Estabilidad de Soluciones Caso Autónomo . . . . .	11
2.3.	Estabilidad Caso no Autónomo . . . . .	14
2.4.	Estabilidad de Sistemas Lineales . . . . .	15
2.4.1.	Sistemas Lineales en el Plano . . . . .	15
2.4.2.	Sistemas No Lineales . . . . .	19
2.5.	Estabilidad de Sistemas No Lineales . . . . .	21
2.5.1.	Primer Método de Lyapunov . . . . .	22
2.5.2.	Segundo Método de Lyapunov . . . . .	23
2.5.3.	Funciones y Teoremas de Lyapunov . . . . .	25
<b>3.</b>	<b>Osciladores no Lineales del VCON</b>	<b>30</b>
3.1.	Oscilaciones Pendulares . . . . .	30
3.1.1.	Oscilaciones Amortiguadas . . . . .	30
3.1.2.	Bifurcación Silla-Nodo en el Péndulo con Forzamiento Constante . . . . .	32
3.2.	Oscilaciones de Relajación . . . . .	38
3.2.1.	Oscilación en van der Pol . . . . .	38
3.2.2.	Bifurcación de Hopf en van der Pol . . . . .	39
3.2.3.	Oscilador de Rayleigh . . . . .	42
<b>4.</b>	<b>Análisis del VCON</b>	<b>43</b>
4.1.	Análisis de Equilibrios . . . . .	43
4.2.	Bifurcaciones del VCON en el Plano . . . . .	47
4.2.1.	Bifurcación de Andronov-Hopf . . . . .	49
4.2.2.	Bifurcación Homoclínica . . . . .	52
4.2.3.	Bifurcación Silla-Nodo . . . . .	56
4.2.4.	Bifurcación Bogdanov-Takens . . . . .	58
4.3.	Oscilaciones del VCON en el Cilindro. . . . .	62
4.3.1.	Coexistencia de dos oscilaciones. . . . .	62
4.3.2.	Bifurcación Silla-Nodo en una Curva Invariante . . . . .	62
<b>5.</b>	<b>Conclusiones.</b>	<b>67</b>

# Parte I

## Prefacio

Una propiedad fundamental de la fisiología de las células nerviosas es su actividad eléctrica. A partir de la formulación del modelo de Hodgkin y Huxley (HH), se han desarrollado diversos modelos matemáticos inspirados en circuitos electrónicos, los cuales mimetizan las oscilaciones que producen las células nerviosas. En esta tesis se hace una breve revisión de varios osciladores eléctricos que han sido usados para simular la actividad eléctrica de estas células y se analiza un modelo electrónico propuesto por Frank Hoppensteadt, profesor emérito del Courant Institute, cuyo ingrediente novedoso es un oscilador controlado por voltaje. El modelo es referido en la literatura como VCON (Voltage Controlled Oscillator Neuron).

El modelo VCON, además de constituir una analogía del comportamiento neuronal, tiene una dinámica rica en bifurcaciones, lo cual lo hace también matemáticamente interesante. Aparte de exhibir la bifurcación homoclínica, comprende como casos particulares la dinámica de dos osciladores no lineales clásicos: el oscilador de Rayleigh y el péndulo forzado con una torca constante.

Para entender la dinámica del modelo VCON, es necesario utilizar una combinación de resultados de la teoría de la estabilidad y de las bifurcaciones, junto con simulaciones computacionales. Por lo tanto, se dedica un capítulo a exponer los resultados básicos de la teoría de estabilidad y otro capítulo a describir las bifurcaciones que aparecen, tanto en los casos particulares (péndulo con torca y oscilador de Rayleigh) como en la dinámica más compleja del VCON. Los resultados computacionales se llevaron a cabo utilizando el software INTEGRA.

## 1. Modelos de Neuronas y Osciladores no Lineales

Las células nerviosas, también conocidas como neuronas, son unidades funcionales que constituyen redes, cuya actividad es fundamental en toda la fisiología del sistema nervioso, éste constituye un sistema de muy alta complejidad; para darse una idea, el cerebro humano tiene del orden de  $10^{10}$  neuronas, número comparable al número de estrellas que existen en nuestra galaxia.

La fisiología de estas células se distingue por su actividad eléctrica, debido a una serie de procesos físico-químicos y biológicos que han podido ser modelados matemáticamente con mucho éxito. Estos modelos han permitido entender las causas inherentes a la producción y transmisión de impulsos eléctricos (potenciales de acción), así como describir y representar gráficamente los procesos concomitantes al fenómeno de excitabilidad. Así pues, es natural que se usen

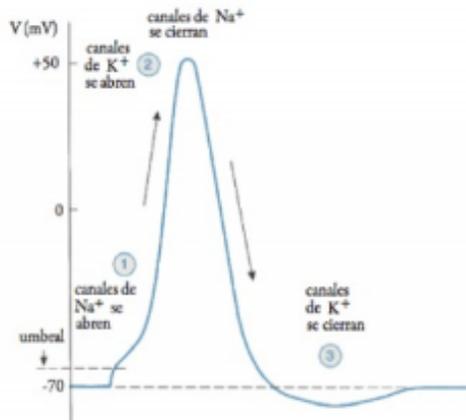


Figura 1: Gráfica de voltaje contra tiempo en un punto del axón cuando se ha hecho una estimulación supraumbrales. Primero se observa una despolarización hasta alcanzar los  $50mV$  debido a un aumento en la permeabilidad de sodio. Posteriormente la permeabilidad de sodio regresa a la normalidad y la permeabilidad de potasio aumenta, lo cual resulta en una corriente entrante de potasio que hace el potencial de membrana más negativo que el reposo, posteriormente la permeabilidad de potasio regresa a su valor de reposo y se restablece el potencial de equilibrio denominado potencial de reposo.

modelos matemáticos de circuitos electrónicos para comprender la fisiología de las neuronas.

Toda una variedad de modelos matemáticos han sido usados para entender diferentes aspectos del comportamiento de la células nerviosas. Un ejemplo son las cuatro ecuaciones diferenciales del modelo propuesto por los fisiólogos ingleses Hodgkin y Huxley, las cuales modelan, con apego a la realidad biofísica subyacente, la dinámica no lineal de las corrientes iónicas (principalmente corrientes de sodio y potasio) a través de la membrana celular. En cambio, las dos ecuaciones diferenciales del modelo de FitzHugh-Nagumo capturan matemáticamente la “esencia dinámica” del fenómeno de excitabilidad. Finalmente, dando un paso más de simplificación, los modelos de neuronas de integración y disparo (Integrate and Fire Neurons), también conocidos como spiking neurons en la literatura, mediante una sola ecuación diferencial sujeta a una condición de salto modelan el comportamiento de una neurona y, a pesar de su simplicidad, son de mucha utilidad para comprender la interacción entre este tipo de células.

Como consecuencia de estas investigaciones se ha podido observar que las neuronas se comportan como osciladores no lineales. Es decir, importantes aspectos de su fisiología están correlacionados con fenómenos que se observan típicamente en osciladores no lineales. Consecuentemente, algunos aspectos del

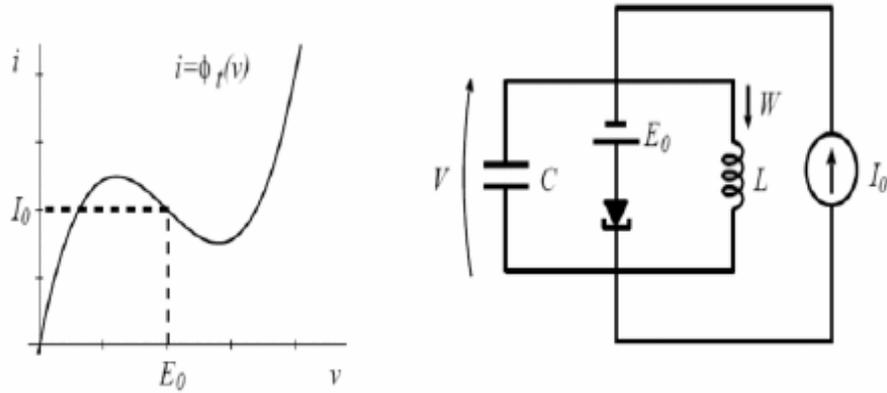
comportamiento neuronal pueden ser mimetizados en circuitos electrónicos u otros sistemas físicos. Esto trae como consecuencia que tanto una neurona, como varios otros sistemas físicos estén modelados por las mismas ecuaciones diferenciales e incluso que puedan concebirse modelos matemáticos de neurona que no correspondan con ningún sistema físico. Estos osciladores (de integración y disparo) se caracterizan porque en ellos se producen procesos de acumulación y descarga, asociados a fenómenos caracterizados por la presencia de una clase genérica de resistencia negativa.

Debido a estas analogías matemáticas se ha podido entender mejor la fenomenología que exhiben las neuronas y que es típica de los osciladores no lineales: oscilaciones de relajación, excitabilidad, histéresis, multiestabilidad, etc. Como se verá a continuación, las analogías matemáticas han permitido reconocer que una característica genérica en todos estos modelos es la presencia de resistencia negativa como causa fundamental de algunos aspectos de la fenomenología observada.

En esta tesis se presentan ejemplos paradigmáticos de circuitos electrónicos no lineales que han sido asociados a la modelación de neuronas y se hace un análisis a profundidad del modelo VCON de Hoppensteadt. Algunos de estos circuitos tienen valor porque mimetizan los comportamientos (no lineales) que se producen en las células nerviosas. Otros, como el modelo VCON, son además interesantes matemáticamente por la riqueza de sus bifurcaciones y comportamientos.

Simplificando el modelo de Hodgkin y Huxley, en 1961 Richard Fitzhugh produjo un modelo matemático de oscilador no lineal bidimensional, que tiene la propiedad de excitarse en respuesta a un estímulo externo y que produce una ráfaga continua de potenciales de acción, cuando el estímulo es sostenido. Este modelo se inspiró en el trabajo de van der Pol y Bonhoeffer. Históricamente, Balthasar van der Pol fue uno de los pioneros en investigar y poner de relieve la importancia de algunas ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un circuito; usando un bulbo triodo demostró que había oscilaciones autosostenidas (ciclos límite) a las que él llamó oscilaciones de relajación. Bonhoeffer fue el primero en relacionar la ecuación de van der Pol con el impulso nervioso, en el contexto químico del fenómeno de la corrosión.

Independientemente en 1962, usando un elemento no lineal más moderno que el bulbo de vacío del circuito de Bonhoeffer van der Pol (un diodo túnel, basado en el efecto túnel descubierto por el físico Esaki en 1952), Jin-Ichi Nagumo junto con Arimoto y Yoshizawa, propusieron un circuito electrónico como análogo neuronal. Resultó que las ecuaciones que gobiernan la dinámica del circuito de Nagumo son las mismas propuestas por FitzHugh. Así, a pesar de que FitzHugh llamaba su a modelo como el modelo de van der Pol-Bonhoeffer, hoy el modelo es referido en la literatura como el modelo de FitzHugh-Nagumo (FHN). Este modelo es mucho más tratable matemáticamente que el modelo



original de Hodgkin y Huxley, y gracias a él hoy se entienden los mecanismos dinámicos responsables del fenómeno de excitabilidad (resistencia negativa) y de la producción de trenes periódicos de potenciales de acción (mediante la bifurcación de Andronov-Hopf). Otro circuito biológicamente inspirado es el modelo de Carrillo Hoppensteadt, en el que un elemento no lineal diferente (Bulbo de Neón) es el encargado de proveer la resistencia negativa.

A continuación se muestran algunos ejemplos hasta ahora mencionados.

Ecuaciones del modelo de Carrillo Hoppensteadt.

$$\begin{aligned} V' &= S - V - Rf(V) - RI + RI_{ap} \\ \varepsilon I' &= V - g(I) \end{aligned}$$

Ecuaciones del sistema de FitzHugh

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= I - v(v - a)(v - 1) - w \\ \frac{dw}{dt} &= b(v - gw) \end{aligned}$$

### 1.1. Oscilador Neuronal Controlado por Voltaje: Modelo VCON

El profesor emérito de Matemáticas del Courant Institute of Mathematical Sciences, de la Universidad de Nueva York, Frank Hoppensteadt, en el año 2006 ([19]) propone el modelo VCON con el objeto de modelar la dinámica de la membrana neuronal, en específico, la relación entre el voltaje y la frecuencia.

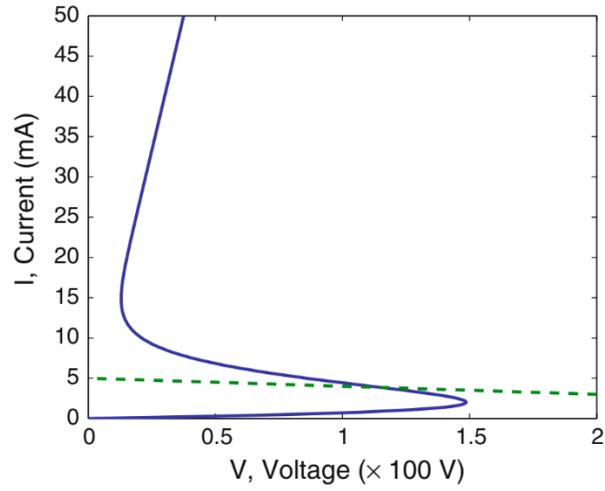


Figura 2: Característica  $IV$  de un foco de neón; donde  $V = g(I)$

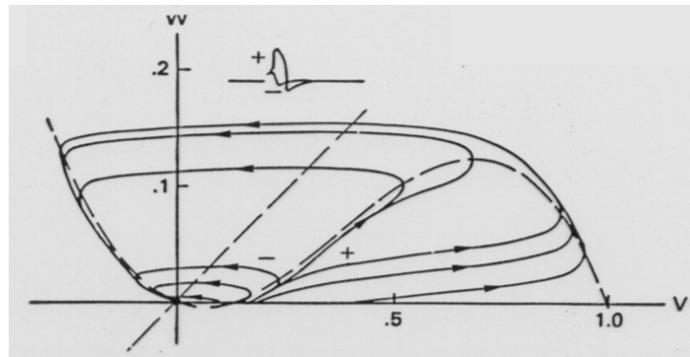


Figura 3: Espacio de fase del modelo de FHN.

Este modelo consiste en un circuito eléctrico que se encuentra modelado por la siguiente ecuación diferencial no lineal de segundo orden:

$$\tau\ddot{\theta} + F\left(\dot{\theta}\right) + A \sin(\theta) = \omega.$$

Donde  $\theta$  corresponde al potencial de la membrana.

En la presente investigación se utilizará la función  $F\left(\dot{\theta}\right) = \left[\left(\dot{\theta}\right)^2 - \alpha\right]\dot{\theta}$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\tau = 1$  y  $A = 1$ , con el propósito de combinar en un solo modelo las dinámicas de la ecuación del péndulo, oscilador de van der Pol y oscilador de Rayleigh. La dinámica de esta ecuación se analizará en dos tipos de espacios de fases, uno en el plano y otro en el cilindro.

Los modelos de Hodgkin-Huxley y el de FitzHugh-Nagumo son ejemplos de modelos matemáticos de la membrana neuronal, los cuales son muy complejos para realizar un análisis matemático. Por otro lado, existen modelos en los que se observan características específicas del comportamiento de una neurona, los cuales están modelados por ecuaciones con bajo nivel de complejidad y al mismo tiempo pueden ser analizadas con menos dificultad, como el modelo VCON. Éste modelo reproduce el potencial de acción, y al mismo tiempo es capaz de modelar directamente la relación entre el voltaje y la frecuencia.

El modelo del VCON se compone de un oscilador controlado por voltaje, este es un circuito eléctrico que produce una salida de voltaje oscilatoria con la propiedad de que la frecuencia de salida es proporcional al voltaje de entrada. El circuito VCO (Oscilador Controlado por Voltaje) se conforma de un circuito LC junto con uno o dos transistores acompañados de un amplificador. A continuación se presentan las características principales de los componentes del circuito VCON:

1. Para la separación de carga, un capacitor.
2. Para el potencial de reposo, una batería y una resistencia.
3. Para el mecanismo homeostático (comparable con el papel que desempeñan los canales de potasio en el modelo Hodgkin-Huxley), un VCO.
4. Para los escapes, comparables con el papel que desempeñan los canales de sodio en el modelo Hodgkin-Huxley, un dispositivo con resistencia negativa (NDR), estos dispositivos tienen la propiedad de que la gráfica de la relación entre la corriente  $I$  y el voltaje  $V$  tiene forma de N o forma de S,

Los arreglos de estos elementos se muestran en la figura (4).

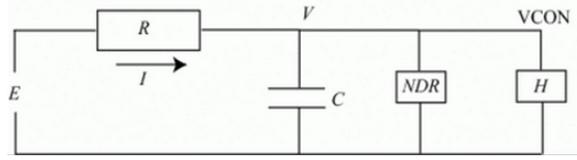


Figura 4: Arreglo de los componentes electrónicos para el circuito VCON.

### 1.1.1. Ecuaciones del Circuito VCON

Para deducir las ecuaciones del modelo, se analiza como va distribuyéndose la corriente en el circuito y se usa la relación que existe entre la corriente y el voltaje en cada uno de los componentes del circuito como se explica a continuación:

1. La corriente  $I_C$  a través del capacitor es  $C\dot{V}$ .
2. La corriente a través del mecanismo homeostático  $H$  es:

$$I_H = \alpha \sin \left( \gamma \int_0^t V(t') dt' \right).$$

Como  $\int V$  aparece dentro de una función periódica nombramos una nueva variable

$$\theta = \gamma \int_0^t V(t') dt'.$$

Derivando a  $\theta$  con respecto del tiempo se tiene que

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma V(t).$$

En la última ecuación podemos ver que la frecuencia instantánea de la corriente, a través del mecanismo homeostático, es proporcional al voltaje.

3. La corriente a través del dispositivo NDR es  $I_N = f(V)$ , donde  $f$  es una función en forma de N.

Teniendo en cuenta estas consideraciones y usando las leyes de Kirchhoff, se deriva la ecuación diferencial que rige el comportamiento del circuito descrito de la figura 4, de la siguiente manera:

$$I = I_C + I_H + I_N \tag{1}$$

y usando la ley de Ohm se tiene que:

$$IR = E - V$$

sustituyendo la ecuación (1) en la última ecuación obtenemos:

$$(I_C + I_H + I_N)R = E - V$$

$$\left[ C\dot{V} + \alpha \sin\left(\gamma \int_0^t V(t')dt'\right) + f(V) \right] R = E - V$$

usando que  $\theta = \gamma \int_0^t V(t')dt'$ ,  $\frac{\dot{\theta}}{\gamma} = V$  y  $\frac{\ddot{\theta}}{\gamma} = \dot{V}$  se tiene:

$$\left[ C\frac{\ddot{\theta}}{\gamma} + \alpha \sin(\theta) + f\left(\frac{\dot{\theta}}{\gamma}\right) \right] R = E - \frac{\dot{\theta}}{\gamma}$$

$$RC\frac{\ddot{\theta}}{\gamma} + R\alpha \sin(\theta) + Rf\left(\frac{\dot{\theta}}{\gamma}\right) = E - \frac{\dot{\theta}}{\gamma}$$

nombramos  $\tau = RC$  (la constante de tiempo del circuito) y multiplicando por  $\gamma$ .

$$\tau\frac{\ddot{\theta}}{\gamma} = E - \frac{\dot{\theta}}{\gamma} - Rf\left(\frac{\dot{\theta}}{\gamma}\right) - R\alpha \sin(\theta)$$

$$\tau\ddot{\theta} = \gamma E - \dot{\theta} - \gamma Rf\left(\frac{\dot{\theta}}{\gamma}\right) - \gamma R\alpha \sin(\theta)$$

$$\tau\ddot{\theta} = \gamma E - \left[ \gamma Rf\left(\frac{\dot{\theta}}{\gamma}\right) + \dot{\theta} \right] - \gamma R\alpha \sin(\theta)$$

Nombrando a  $\omega = \gamma E$ ,  $A = \gamma R\alpha$  y  $F(\dot{\theta}) = \gamma Rf\left(\frac{\dot{\theta}}{\gamma}\right) + \dot{\theta}$  se obtiene:

$$\tau\ddot{\theta} = \omega - F\left(\dot{\theta}\right) - A \sin(\theta).$$

Así la ecuación que modela el circuito VCON es:

$$\tau\ddot{\theta} + F\left(\dot{\theta}\right) + A \sin(\theta) = \omega. \quad (2)$$

una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, donde  $\dot{\theta}$  corresponde al potencial de la membrana en un potencial de acción. El espacio fase natural del sistema VCON es el cilindro  $C = \{(\theta, V) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < V < \infty\}$ .

A continuación se hace un estudio de la teoría necesaria para poder hacer el análisis matemático del VCON.

## 2. Estabilidad

El concepto de estabilidad de sistemas dinámicos es fundamental en la ciencia y la ingeniería. A continuación se dará el formalismo matemático, que permite definir este concepto y la teoría que permite delucidar bajo que condiciones los comportamientos de un sistema dinámico son estables o inestables. Se presentan las definiciones dadas por Lyapunov<sup>1</sup> y dos métodos para determinar la estabilidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales.

### 2.1. Estabilidad de los Equilibrios

Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = f(x), \quad (3)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continuamente diferenciable y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es una región abierta y conexa. Los ceros de la función  $f$  dan lugar a las soluciones constantes, o equilibrios, de la ecuación (3). Una solución de equilibrio es aquella que cumple que  $\dot{x} = f(x) = 0$ .

Se denota  $B_\rho$  a la bola de  $\mathbb{R}^n$  con centro en el origen, es decir,  $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \rho, \rho > 0\}$  con  $\|x\|$  la norma euclídeana de  $x$ . También se supone que  $f(0) = 0$  y que  $f$  es una función de clase  $C^1$  en  $B_\rho$ . La primera suposición implica que la función idénticamente cero es solución de (3) la cual llamaremos “el equilibrio” o “el origen”, y la segunda suposición garantiza la existencia y unicidad de las soluciones de (3).

Se denota con  $\varphi(t, x_0)$  a la solución de (3) que en  $t = 0$  pasa por  $x_0 \in B_\rho$ , es decir, esta solución es tal que  $\varphi(0, x_0) = x_0$ . Ver la figura 5 para el caso  $n = 2$ .

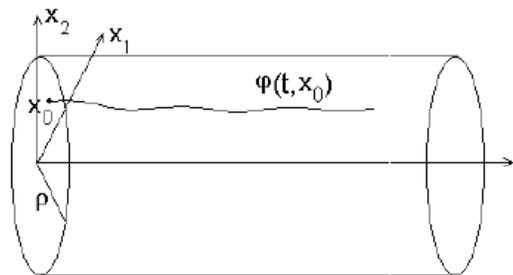


Figura 5: Gráfica de la solución  $\varphi(t, x_0)$ ,  $n = 2$

<sup>1</sup>En 1892, Lyapunov defendió su tesis doctoral titulada “The general problem of the stability of motion” en la Universidad de Moscú.

**Definición 1** El equilibrio de (3) se dice que es:

- i) **Estable.** Si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tal que si  $\|x_0\| < \eta$  entonces  $\|\varphi(t, x_0)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$ . Ver figura 6
- ii) **Atractivo.** Si existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tal que si  $\|x_0\| < \eta$  entonces el  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, x_0)\| = 0$ .
- iii) **Asintóticamente Estable.** Si
  - a) es estable
  - b) es atractivo
 Ver figura 8
- iv) **Inestable** Si no es estable. Ver figura 9

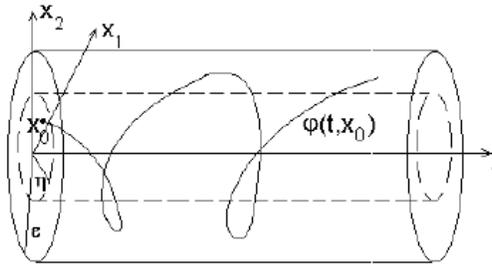


Figura 6: Estabilidad del origen. Cualquier solución que en  $t = 0$  comience en el cilindro de base de radio  $\eta$  no puede abandonar el cilindro de base con radio  $\varepsilon$ .

## 2.2. Estabilidad de Soluciones Caso Autónomo

En esta sección se define la estabilidad para una solución (fija) arbitraria de (3). Los restantes tres conceptos para este caso son análogos de modo que se omiten.

**Definición 2** Sean  $\varphi(t, x_0)$  y  $\psi(t, y_0)$  soluciones de (3). La solución  $\varphi(t, x_0)$  es estable si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tal que si  $\|x_0 - y_0\| < \eta$  entonces  $\|\psi(t, y_0) - \varphi(t, x_0)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$ . En la figura 10 se ilustra esta definición para el caso  $n = 2$ .

Hay que mencionar que por un tiempo se pensaba que si una solución es atractiva entonces también es estable. Sin embargo en el siguiente ejemplo se muestra que la inestabilidad y la atractividad son perfectamente compatibles:

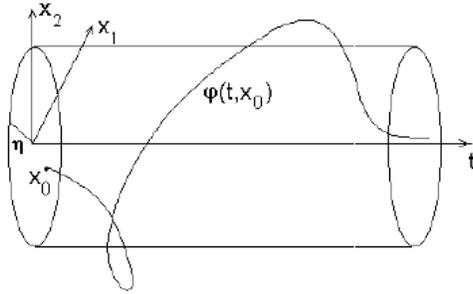


Figura 7: Atractividad del origen. Cualquier solución que en  $t = 0$  comience en el cilindro de base con radio  $\eta$ , eventualmente puede abandonarlo, pero "finalmente" permanece dentro del mismo.

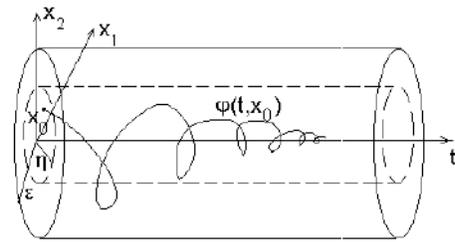


Figura 8: Estabilidad asintótica del origen.

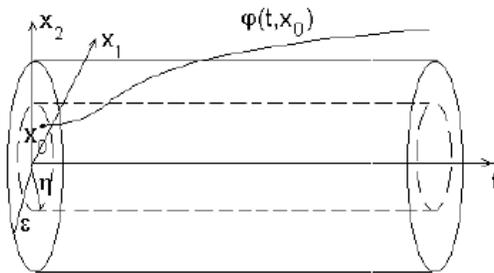


Figura 9: Inestabilidad del origen.

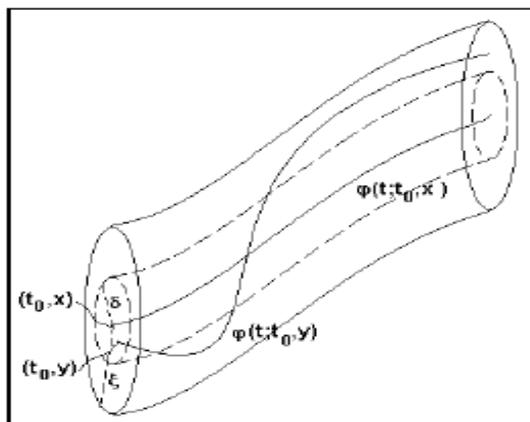


Figura 10: Estabilidad de la solución  $\varphi_1(t, x_0)$

Considérese el siguiente sistema en coordenadas polares ( $n = 2$ )

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \dot{\rho} &= \rho(1 - \rho)\end{aligned}\tag{4}$$

en la figura 11 aparecen las imágenes de las soluciones de (4), dichas imágenes son llamadas trayectorias u órbitas del sistema. Se observan tres trayectorias notables: Los equilibrios  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$  y el círculo unitario sin incluir el punto  $(1, 0)$ . Las flechas indican el recorrido de las mismas cuando  $t$  crece. El equilibrio  $B(1, 0)$  es atractivo pero inestable.

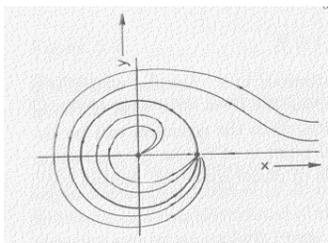


Figura 11: La inestabilidad y la atractividad son compatibles.

### 2.3. Estabilidad Caso no Autónomo

En este trabajo no se presentarán ecuaciones diferenciales no autónomas, pero por completez de la investigación en esta sección definimos el concepto de estabilidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales no autónomo.

**Definición 3** Sean  $\varphi(t, t_0, x_0)$  y  $\psi(t, t_0, y_0)$  soluciones de  $\dot{x} = f(t, x)$  que comienzan en  $(t_0, x_0)$  y en  $(t_0, y_0)$  respectivamente, se dice que  $\varphi(t, t_0, x_0)$  es estable si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tal que si  $\|(t_0, x_0) - (t_0, y_0)\| < \eta$  entonces  $\|\varphi(t, t_0, x_0) - \psi(t, t_0, y_0)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$ .

En general el estudio de la estabilidad de una solución arbitraria siempre se reduce al estudio de la estabilidad del origen haciendo un cambio de variable adecuado de la siguiente manera:

Para verificar la estabilidad de la solución  $\varphi(t, x_0)$  de (3) se hace el cambio de variable

$$y = x - \varphi(t, x_0), \quad (5)$$

derivando esta expresión con respecto a  $t$  y sustituyendo en la ecuación (3) se tiene:

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\varphi}(t, x_0) = f(y + \varphi(t, x_0)) - f(\varphi(t, x_0)).$$

La expresión de la derecha es una función de  $(t, y)$  de modo que se ha obtenido una ecuación de la forma

$$\dot{y} = g(t, y) \quad (6)$$

en donde  $g(t, y) = f(y + \varphi(t, x_0)) - f(\varphi(t, x_0))$ . Se observa inmediatamente que la función  $y \equiv 0$  es una solución de (6).

Con lo anterior se sigue la siguiente afirmación: la solución  $\varphi(t, x_0)$  de (3) es estable si y sólo si la solución  $y \equiv 0$  de (6) es estable. Resultados análogos se obtienen para los tres conceptos restantes.

**Ejemplo 4** Considérese  $n = 1$  y la ecuación

$$\dot{x} = x - x^2. \quad (7)$$

Sea la solución  $\varphi(t, 1) \equiv 1$ . Se realiza el cambio de variable

$$y = x - \varphi(t, 1) = x - 1 \quad (8)$$

derivando (8) y sustituyendo en (7) se llega a

$$\dot{y} = (1 + y) - (1 + y)^2 \quad (9)$$

de modo que el estudio de la estabilidad de la solución  $\varphi(t, 1) \equiv 1$  equivale al estudio de la estabilidad del origen de la ecuación equivalente.

## 2.4. Estabilidad de Sistemas Lineales

### 2.4.1. Sistemas Lineales en el Plano

El sistema lineal cumple con el principio de superposición el cual permite descomponer un problema lineal en dos o más subproblemas sencillos de tal manera que el problema original se obtiene como “superposición” o “suma” de estos subproblemas más sencillos; es decir, que el todo es la suma de sus partes [8]. La linealidad del sistema se refleja en el modelo, o bien, en las ecuaciones diferenciales que lo rigen.

Las ecuaciones diferenciales lineales cumplen con la siguiente propiedad: el conjunto de todas las soluciones posibles tiene estructura de espacio vectorial con dimensión finita. Esto resulta de gran importancia para determinar el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales utilizando resultados del álgebra lineal, como se explica a continuación. Se limitarán los resultados a  $n = 2$ , pues es la dimensión del sistema VCON.

Se analizarán las posibles formas de soluciones para el espacio de estados (retrato fase) de un sistema lineal planar de la forma:

$$\dot{x} = Ax \quad (10)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

Por la teoría del álgebra lineal se sabe que existe un cambio de base que permite ver a la matriz  $A$  en alguna forma canónica de Jordan. Los espacios fase del sistema (10) se caracterizan usando el espacio fase del sistema lineal

$$\dot{x} = Bx$$

donde  $B$  es un bloque de Jordan, el cual cumple que  $B = P^{-1}AP$ , para alguna matriz  $P$ .

El espacio fase de (10) se obtiene bajo la transformación  $x = Py$ , como se muestra en la figura 12. Las formas que puede tener  $B$  y sus exponencial son las siguientes:

$$\begin{aligned} B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} & \quad e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & \quad e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \quad e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A continuación se describe cualitativamente el retrato fase para cada tipo de bloque.

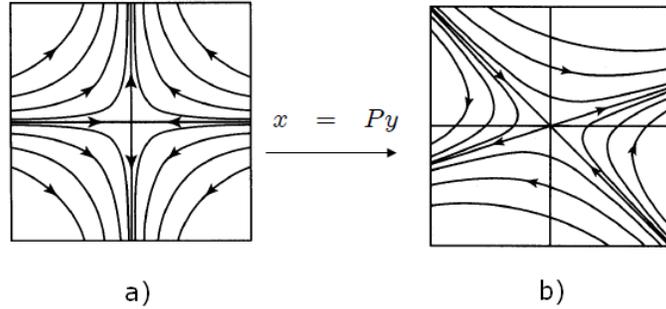


Figura 12: Transformación  $x = Py$

Si el bloque de Jordan es de la forma  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  con  $\lambda < 0 < \mu$ , el retrato fase para este caso es el de la figura 13, donde el origen es inestable de tipo silla. Si  $\mu < 0 < \lambda$ , las flechas cambian de dirección.

Cuando  $A$  tiene dos valores propios reales de signo opuesto, el retrato fase para el sistema lineal (10) es linealmente equivalente al retrato fase de  $B$ . Los subespacios estables e inestables de (10) están determinados por los vectores propios de  $A$ . Las cuatro soluciones que convergen al equilibrio cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  son llamadas separatrices del sistema.

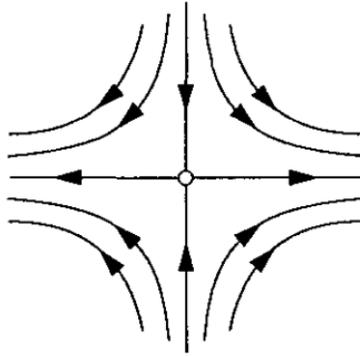


Figura 13: Punto silla

Para los bloques de la forma  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  con  $\lambda \leq \mu < 0$  ó  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  con  $\lambda < 0$ , el retrato fase para el sistema (10) es equivalente al

mostrado en la figura 14, las soluciones tienden al equilibrio, por lo que el equilibrio es asintóticamente estable. Cuando se tiene  $\lambda \geq \mu > 0$  ó  $\lambda > 0$ , las flechas cambian de sentido y las soluciones se alejan del equilibrio, por lo que el equilibrio es inestable.

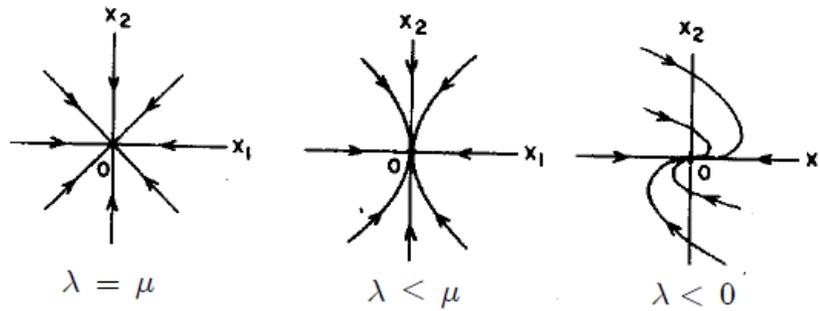


Figura 14: Nodos.

Para los bloques de la forma  $B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  con  $a < 0$ . El retrato fase para el sistema (10) es equivalente al de la figura 15. El origen se denomina foco estable y en este caso las soluciones son espirales que, convergen al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si  $a > 0$  las flechas cambian de dirección y las soluciones se alejan del origen, por lo que el equilibrio sería inestable.

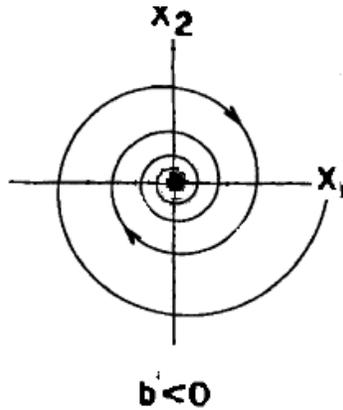


Figura 15: Foco estable. Si  $b > 0$  el espacio fase sería la reflexión con en el eje  $x_2$ .

Para los bloques de la forma  $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$  el retrato fase del sistema

(10) es equivalente al de la figura 16. En este caso las soluciones son curvas cerradas que oscilan alrededor del origen, por lo que el equilibrio es estable pero no asintóticamente estable.

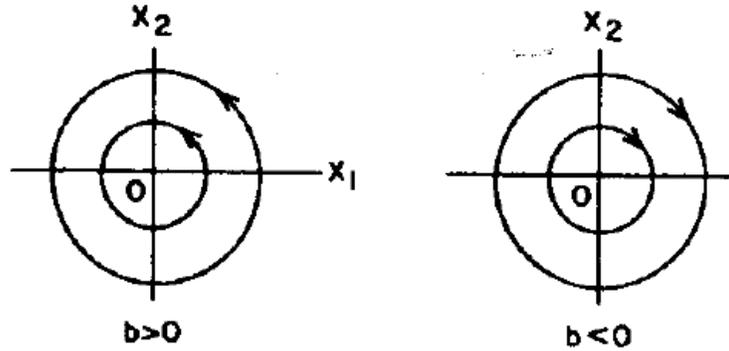


Figura 16: Centros.

**Ejemplo 5** *El oscilador armónico.*

*Este sistema consiste de una partícula de masa  $m$  que reposa sobre un resorte elástico. Se designa a  $x$  como la desviación de la masa de su posición de equilibrio. Se considera la desviación hacia abajo como positiva y la desviación hacia arriba como negativa. En la posición de equilibrio la fuerza del peso es compensada por la elasticidad del resorte. Por lo cual la fuerza elástica que hace que la partícula tienda a la posición de equilibrio es proporcional a la desviación, es decir, la fuerza elástica es igual a  $kx$ , donde  $k > 0$  y es una magnitud constante para el resorte llamado rigidez del resorte.*

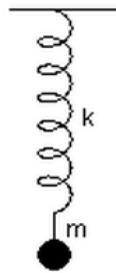


Figura 17: Oscilador Armónico.

Supongase que al movimiento de la partícula se opone una fuerza proporcional a la velocidad de la partícula, es decir,  $-bv = -b\dot{x}$ , donde  $b > 0$ .

De la segunda ley de Newton se tiene que:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}.$$

Si se supone que el sistema está libre de fricción,  $b = 0$ , la ecuación que gobierna el comportamiento del oscilador armónico es:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

haciendo  $\dot{x} = v$  se obtiene el sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{k}{m}x\end{aligned}$$

en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}$ .

Los valores propios de  $A$  son  $\lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}$ . Dado que los valores de la masa y la rigidez del resorte son positivos se sigue que  $\frac{k}{m} > 0$ , por lo tanto los valores propios son complejos con parte real cero. La solución analítica es:

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{k}{m}t & \sin \frac{k}{m}t \\ -\sin \frac{k}{m}t & \cos \frac{k}{m}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

En la figura 18 se muestran algunas trayectorias del espacio de fases.

#### 2.4.2. Sistemas No Lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales es no lineal cuando las ecuaciones que gobiernan sus comportamientos están determinadas por funciones no lineales. Para su estudio se requieren del uso de otras técnicas a las vistas. La dinámica no lineal es muy rica y su análisis ha llevado al descubrimiento de comportamientos complejos (e.g. dinámica caótica) y al nacimiento de nuevas teorías (e.g. bifurcaciones). Dada la dificultad para encontrar soluciones analíticas, estas teorías recurren al análisis cualitativo y/o geométrico, combinado con simulaciones computacionales.

A continuación se presentan cuatro ejemplos que constituyen modelos clásicos de osciladores no lineales.

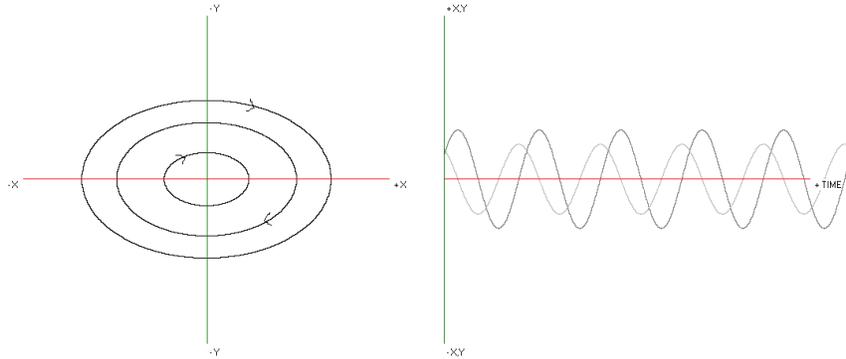


Figura 18: A la izquierda se muestra el espacio de fases, a la derecha los cursos temporales de la posición y la velocidad; La gráfica más clara representa la velocidad y las más oscura la posición. Los parámetros usados en las dos gráficas son  $m = 1$  y  $k = 0,5$ .

**Ejemplo 6** *El péndulo es el ejemplo más simple, clásico y paradigmático, de un sistema no lineal.*

$$m\ddot{\theta} + \frac{b}{l}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \quad (12)$$

donde  $b > 0$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $g$  la gravedad,  $m$  la masa y  $\theta$  su posición.

**Ejemplo 7** *Oscilador de Van der Pol<sup>2</sup>.*

$$\ddot{x} - (\alpha - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

*Este tipo de ecuación es relevante en múltiples escenarios de aplicación. Por ejemplo, en física van der Pol y Nagumo la usaron para modelar un circuito electrónico, en biología Fitzhugh la utilizó para modelar el potencial de acción de las células nerviosas.*

**Ejemplo 8** *Sistema de FitzHugh-Nagumo.*

$$\begin{aligned} \dot{V} &= F(V) - W + I \\ \dot{W} &= b(V - cW) \end{aligned}$$

*FitzHugh, inspirado en el trabajo de Bonhoeffer y van der Pol propuso este sistema de ecuaciones para modelar el fenómeno de excitabilidad de las células nerviosas. La variable  $V$  es el voltaje, la otra variable,  $W$ , es considerada una variable de recuperación y carece de significado físico. La función  $F(V)$  tiene una forma de  $N$  y generalmente se representa por un polinomio cúbico.*

<sup>2</sup>El oscilador de van der Pol fue descrito por el ingeniero y físico Balthasar van der Pol. Encontró oscilaciones estables, que llamó oscilaciones de relajación, conocidas en la actualidad como ciclos límite.

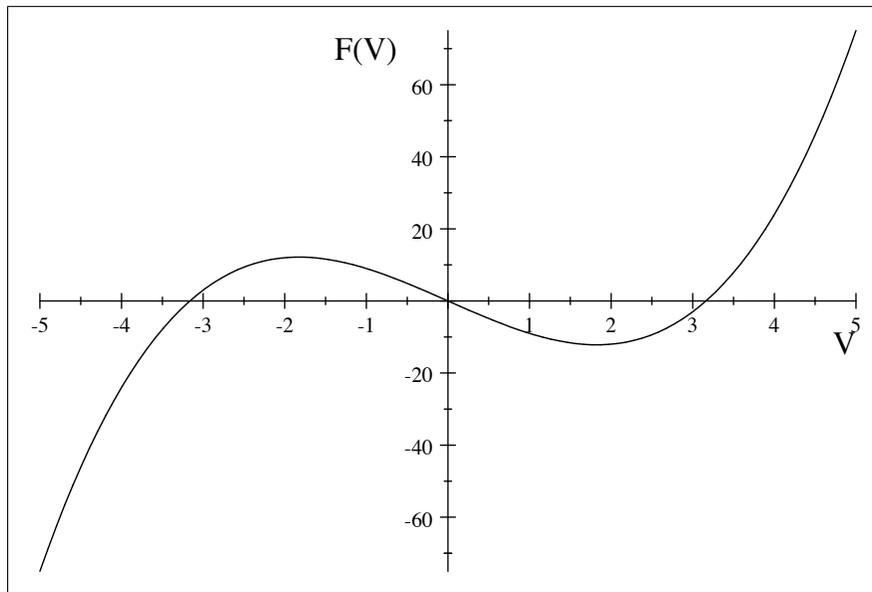


Figura 19: Funcion  $F(V) = V^3 - 10V$ .

**Ejemplo 9** *Circuito electrónico de Carrillo-Hoppensteadt.*

$$\begin{aligned} V' &= S - V - Rf(V) - RI + RI_{ap} \\ \varepsilon I' &= \frac{V - g(I)}{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{dV}{dt} &= S - V - RI \\ \frac{dI}{dt} &= V - g(I) \end{aligned}$$

donde  $\tau = RC$  es una constante de tiempo y  $g(I)$  describe la curva característica  $IV$  del foco de neón;  $V = g(I)$  es una función en forma de N dada por  $y^3 - y = x$ .

## 2.5. Estabilidad de Sistemas No Lineales

Cabe mencionar que una de las formas para determinar la estabilidad de una solución es emplear las definiciones dadas anteriormente. Pero para ello es necesario encontrar la expresión analítica de la solución. Cuando el sistema es lineal en algunos casos es posible encontrar dicha solución; pero cuando el sistema es no lineal es casi imposible encontrar una solución analítica, salvo en los casos cuando sean equilibrios. Aún cuando se determinan las soluciones de

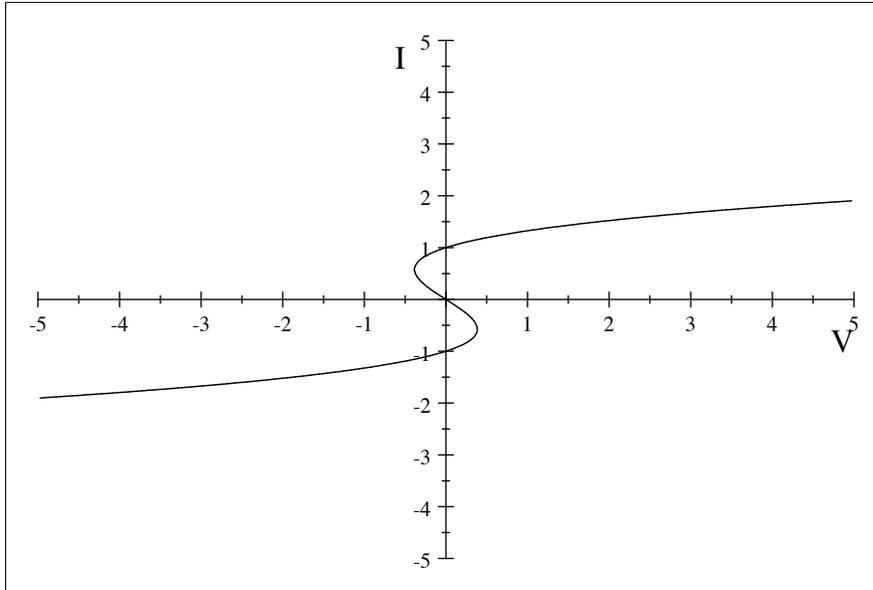


Figura 20: Característica  $IV$  en forma de S.

equilibrio de un sistema no lineal es muy difícil determinar su estabilidad porque se tienen que determinar  $\varepsilon$  y  $\eta$ . Existen dos métodos clásicos para resolver este problema: el primer y segundo método de Lyapunov. Ambos ayudan en muchas ocasiones a determinar el tipo de estabilidad de los equilibrios de un sistema lineal y no lineal, sin tener que encontrar  $\varepsilon$  y  $\eta$ . A continuación se presentan estos dos métodos.

### 2.5.1. Primer Método de Lyapunov

El primer método de Lyapunov consiste en realizar la linealización en torno a un punto de equilibrio y analizar el comportamiento del modelo lineal resultante. Esto requiere calcular los valores propios de la aproximación lineal alrededor de un equilibrio del sistema para determinar cuando una solución de equilibrio es estable, asintóticamente estable o inestable. Lyapunov estableció las condiciones bajo las que es posible extraer conclusiones sobre la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema no lineal a partir del análisis de la estabilidad del equilibrio del modelo linealizado.

**Teorema 10** [12] Si  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $x_0$  un equilibrio, donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continuamente diferenciable y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es una vecindad del equilibrio. Sea

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x_0}$$

Entonces

1. El equilibrio es asintóticamente estable si todos los valores propios de  $A$  tienen parte real negativa.
2. El equilibrio es inestable si uno o más valores propios de  $A$  tienen parte real positiva.
3. Si los valores propios de  $A$  son cero o tienen parte real cero no se puede afirmar nada.

Para sistemas lineales el origen es el único equilibrio, y las soluciones convergen al origen si los valores propios tienen parte real negativa; divergen si la parte real de algún valor propio es positiva y oscilan si la parte real de los valores propios es cero. Usando el teorema anterior se concluye que en un sistema lineal el equilibrio es estable y asintóticamente si los valores propios tienen parte real negativa, es estable si los valores propios tienen parte real no positiva e inestables si alguno de los valores propios tiene parte real positiva. Así pues, aplicando este teorema, se puede concluir que el origen es un punto de equilibrio estable para el oscilador armónico y un equilibrio asintóticamente estable para el oscilador armónico con fricción.

En el caso no lineal la existencia de valores propios imaginarios no implica que el equilibrio sea estable, como es el caso del siguiente sistema.

**Ejemplo 11** Para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - y^3\end{aligned}\tag{13}$$

el origen es asintóticamente estable aunque los valores propios son imaginarios. Esto se puede verificar aplicando los resultados que se ofrecen a continuación.

### 2.5.2. Segundo Método de Lyapunov

El primer método de Lyapunov es útil para determinar la estabilidad local, esto es la dinámica alrededor de un equilibrio, siempre y cuando el equilibrio, bajo la linealización, no sea un centro. El segundo método de Lyapunov es otra herramienta para determinar la estabilidad de una solución. Este método resulta de la teoría clásica de la mecánica pues un sistema es estable si su energía es una función positiva y continuamente decreciente hasta que el sistema alcanza su estado de equilibrio [13]. El segundo método de Lyapunov constituye una generalización de este hecho. Lyapunov demostró que ciertas funciones, aparte de la función energía<sup>3</sup>, pueden ser usadas para determinar la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema. Este segundo método no requiere el conocimiento de la solución de manera expresa, en vez usa funciones auxiliares que a continuación se definen:

---

<sup>3</sup>La función de la energía usualmente es la suma de energía potencial y la energía cinética

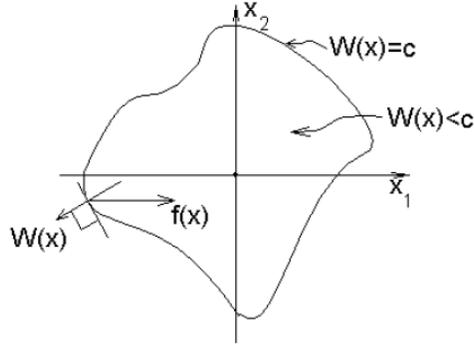


Figura 21: Interpretación geométrica de la derivada Euleriana  $\dot{W} = \nabla W \cdot f$  ( $n = 2$ )

Una función continua

$$W : \overline{B_\sigma} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow W(x)$$

tal que  $W(0) = 0$  (donde la barra denota la cerradura de la bola  $B_\sigma$ ) será llamada

- i) Semidefinida positiva si  $\forall x \in B_\sigma, W(x) \geq 0$
- ii) Definida positiva si  $\forall x \in B_\sigma \setminus \{0\}, W(x) > 0$
- iii) Semidefinida negativa si  $\forall x \in B_\sigma, W(x) \leq 0$
- iv) Definida negativa si  $\forall x \in B_\sigma \setminus \{0\}, W(x) < 0$

Sea  $W(x)$  una función definida positiva (o negativa) de clase  $C^1$  sobre  $B_\sigma$  y considere la ecuación  $\dot{x} = f(x)$ . Se define la derivada euleriana de esta función a la expresión:

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_i} f_i$$

donde la  $f_i$  es la  $i$ -ésima coordenada de  $f$ . De esta manera la derivada euleriana de  $W$  es justamente la derivada de  $W$  a lo largo de soluciones de  $\dot{x} = f(x)$ .

Se hacen notar dos cosas:

- i)  $\dot{W} = \nabla W \cdot f$ , lo que da lugar a una interpretación geométrica muy clara.
- ii)  $\dot{W}$  es una función de  $x$  que se anula para  $x = 0$ .

### 2.5.3. Funciones y Teoremas de Lyapunov

Se dice que una función de clase  $C^1$

$$W : \overline{B_\sigma} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow W(x) \quad (14)$$

es una función de Lyapunov para la ecuación  $\dot{x} = f(x)$  si  $W$  es definida positiva (negativa) y  $\dot{W}$  (la derivada euleriana) es semidefinida negativa (positiva).

Si  $\dot{W}$  es definida negativa (positiva) entonces  $W$  es una *función fuerte de Lyapunov* para la ecuación  $\dot{x} = f(x)$ .

Se enuncia a continuación el teorema para determinar la estabilidad de un equilibrio usando las funciones de Lyapunov:

**Teorema 12** *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio del sistema  $\dot{x} = f(x)$  y  $W : \overline{B_\sigma} \rightarrow \mathbb{R}$  entonces:*

- Si  $W$  es una función de Lyapunov para  $\dot{x} = f(x)$ , el origen es estable.
- Si  $W$  es una función fuerte de Lyapunov para  $\dot{x} = f(x)$  el origen es asintóticamente estable.

Este método constituye una herramienta de análisis muy poderosa. Sin embargo, presenta dos desventajas: no existe un método sistemático para hallar una función de Lyapunov, por lo tanto es necesario proponer una función candidata a función de Lyapunov y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad. La segunda, el teorema sólo brinda condiciones suficientes, por lo tanto, el hecho de no encontrar una función candidata de Lyapunov que, satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica no significa que, el origen es inestable o no asintóticamente estable.

**Ejemplo 13** *Para el sistema (13) del ejemplo anterior, la función*

$$E(x, y) = y^2 + x^2 - y^3$$

*es una función fuerte de Lyapunov. Con esto se tiene que el origen es asintóticamente estable; aunque los valores propios de la parte lineal sean imaginarios.*

**Ejemplo 14** *Estabilidad del péndulo simple.*

*La ecuación del péndulo simple es*

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (15)$$

*Con el cambio de variable  $\dot{\theta} = v$  la ecuación (15) es equivalente al sistema de ecuaciones de primer orden*

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 \sin \theta \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $\omega^2 = \frac{g}{l}$ .

Si el sistema es estudiado en el plano los estados de equilibrios son  $(k\pi, 0)$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Sin embargo el retrato fase natural del péndulo es el cilindro, en el cual hay solamente dos equilibrios: el  $(0, 0)$  y  $(\pi, 0)$ . Físicamente corresponden a las posiciones del péndulo en la que está en la posición natural (abajo) y la posición vertical (arriba).

A continuación determinamos la estabilidad de cada equilibrio como ejemplo del primer y segundo método de Lyapunov.

Para el sistema (16) la matriz de linealización es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que la matriz de linealización alrededor del equilibrio  $(\pi, 0)$  es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

calculamos los valores propios

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \omega^2 = 0$$

los valores propios asociados al equilibrio  $(\pi, 0)$  son  $\lambda = \pm\omega$ . Por lo tanto el equilibrio  $(\pi, 0)$  es inestable de tipo silla.

Para el equilibrio  $(0, 0)$  se usa el segundo método de Lyapunov debido a que la matriz de linealización evaluada en el  $(0, 0)$  es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

con valores propios imaginarios  $\lambda = \pm\omega i$ .

Como función de Lyapunov proponemos la función de la energía, que es la suma de la energía potencial y la energía cinética

$$\begin{aligned} E(\theta, v) &= \frac{1}{2}v^2 + \int_0^\theta \frac{g}{l} \sin \theta \\ E(\theta, v) &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{g}{l} \cos \theta + \frac{g}{l} \end{aligned}$$

con derivada euleriana

$$\begin{aligned} \frac{dE(\theta, v)}{dt} &= \left(-\frac{g}{l} \sin \theta, v\right) \cdot \left(v, \frac{g}{l} \sin \theta\right) \\ \frac{dE(\theta, v)}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

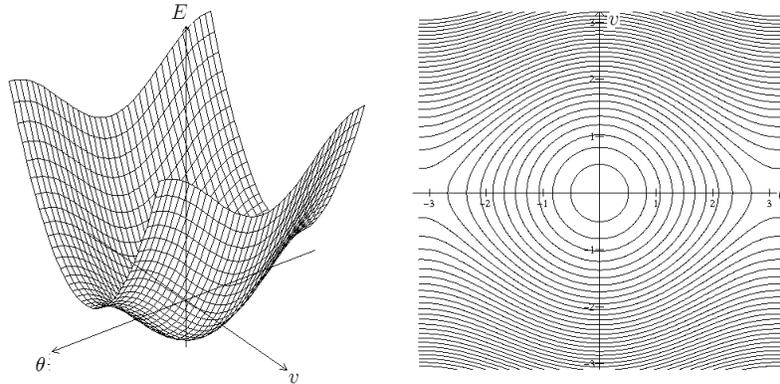


Figura 22: A la izquierda la función de Lyapunov. A la derecha las curvas de nivel proyectadas en el plano  $\theta v$ .

En el abierto  $\{(\theta, v) \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ , la función de la energía es definida positiva y la derivada euleriana es semidefinida negativa, con esto se concluye que el equilibrio  $(0, 0)$  es estable. En la Figura (22) se muestran las curvas de nivel de la función de Lyapunov, en la que se observa que el equilibrio es un centro.

El retrato fase obtenido con INTEGRA se muestra en la figura 23. Las órbitas periódicas alrededor del  $(0, 0)$  representan oscilaciones alrededor del equilibrio. Cuando el valor de  $E$  incrementa, las órbitas crecen hasta llegar a ser las trayectorias heteroclínicas entre equilibrios silla  $(n\pi, 0)$ ; esto representa el movimiento del péndulo cuando se detiene en el equilibrio silla. Para algunos valores de la energía, el péndulo gira y nunca se detiene, estos giros son considerados como oscilaciones, ya que los estados  $(0, -\pi)$  y  $(0, \pi)$  representan la misma posición.

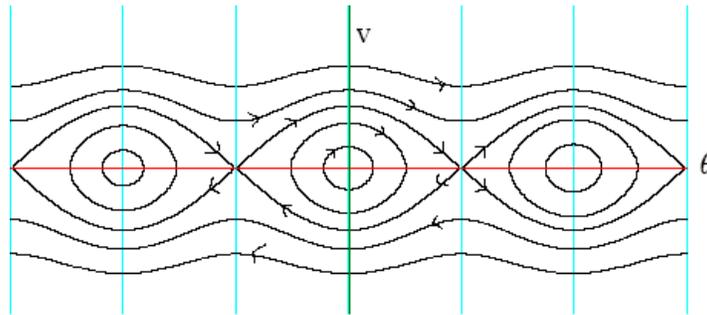


Figura 23: Retrato fase para el péndulo simple.

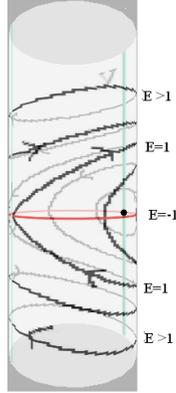


Figura 24: Espacio fase en el cilindro.

La razón de observar el retrato fase del péndulo en un cilindro es por que permite ver que los giros son oscilaciones periódicas, las cuales corresponden a órbitas cerradas que abrazan al cilindro. Los puntos silla de la figura 23 son un solo estado de equilibrio y las trayectorias heteroclínicas ahora son órbitas homoclínicas (figura 24).

**Ejemplo 15** Estabilidad del péndulo con fricción.

Para el péndulo con fricción,

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (17)$$

una función fuerte de Lyapunov en el origen es

$$W(\theta, v) = \frac{1}{2}v^2 + 4(1 - \cos \theta) + (b\theta + v)^2 \quad (18)$$

por tanto el equilibrio  $(0, 0)$  es asintóticamente estable.

Se puede demostrar que si  $W$  es una función de Lyapunov, el conjunto de los puntos  $x$  tal que  $W(x) = c$ , para alguna constante  $c > 0$ , es una hipersuperficie cerrada (denominada superficie de Lyapunov o superficie de nivel) en el espacio de estados que encierra al origen. El uso de las superficies de Lyapunov permite que el teorema sea fácilmente interpretable, como se muestra en la figura 25.

Cuando  $W$  es semidefinida negativa, todavía es posible determinar la estabilidad asintótica del origen, usando el principio de invarianza, también conocido como el principio de LaSalle:

**Corolario 16** [14] Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(x)$ ,  $W$  una función de Lyapunov y  $S = \{x \in \mathbb{R}^n | \dot{W}(x) = 0\}$ . Si ninguna trayectoria, solución

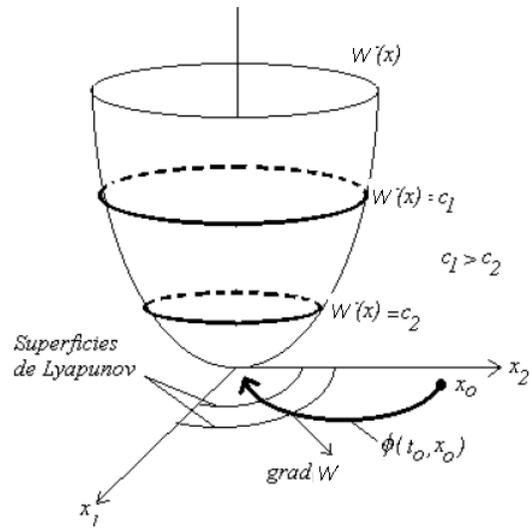


Figura 25: Interpretación de la función y superficies de Lyapunov.

de  $\dot{x} = f(x)$ , que entra en la región  $S$  permanece allí indefinidamente salvo la solución trivial, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Este corolario establece que para poder concluir que el origen de un sistema es asintóticamente estable, una vez hallada una función de Lyapunov, se debe demostrar que cuando las trayectorias entran en la zona del espacio de estados donde se anula  $\dot{W}$ , éstas no permanecen allí para siempre a menos que esté en el punto de equilibrio.

### 3. Osciladores no Lineales del VCON

A continuación se hace un análisis del péndulo, péndulo con torca y de la ecuación de van der Pol como casos particulares del VCON.

#### 3.1. Oscilaciones Pendulares

Para obtener la ecuación que gobierna la dinámica del péndulo forzado con una torca constante, basta tomar  $f\left(\frac{\dot{\theta}}{\gamma}\right) = 0$ , de modo que  $F(\dot{\theta}) = \dot{\theta}$  y la ecuación (2) toma la forma:

$$\tau\ddot{\theta} + \dot{\theta} + A \sin(\theta) = \omega.$$

Esta última ecuación es la del péndulo amortiguado forzado por una torca constante  $\omega$ .

Tomar  $f\left(\frac{\dot{\theta}}{\gamma}\right) = 0$  quiere decir que para todos los valores de voltaje que se apliquen a esa rama del circuito la corriente será cero, esto equivale a eliminar esa rama del circuito (ver figura 26).

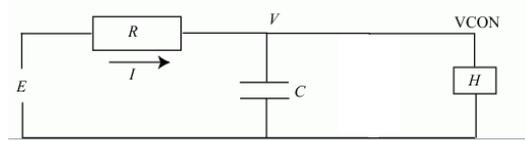


Figura 26: Circuito VCON-Péndulo.

##### 3.1.1. Oscilaciones Amortiguadas

La ecuación que modela el péndulo con fricción y sin torca como caso particular del VCON es:

$$\tau\ddot{\theta} + \dot{\theta} + A \sin \theta = 0. \quad (19)$$

Introduciendo  $\dot{\theta} = v$  la ecuación (19) se puede llevar a un sistema de dos ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\tau}v - \frac{A}{\tau} \sin \theta \end{aligned} \quad (20)$$

claramente hay dos equilibrios (mod  $2\pi$ ), el  $(0, 0)$  y la posición vertical  $(\pi, 0)$ .

A continuación se presentan dos afirmaciones con respecto a la estabilidad de cada equilibrio.

**Teorema 17** *El equilibrio  $(0, 0)$  es asintóticamente estable del sistema (20).*

**Demostración.** La matriz de linealización del sistema (20) alrededor del equilibrio  $(0, 0)$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{A}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$$

con valores propios

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\frac{1}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 4\frac{A}{\tau}}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-\frac{1}{\tau} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 4\frac{A}{\tau}}}{2} \end{aligned}$$

si  $\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 4\frac{A}{\tau} \geq 0$  se cumple que  $Re(\lambda_2) < 0$ . Por otro lado se tiene que

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 > \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 4\frac{A}{\tau} \geq 0$$

implicando

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &> \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 4\frac{A}{\tau}} \\ 0 &> -\frac{1}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 4\frac{A}{\tau}} \end{aligned}$$

por lo tanto  $Re(\lambda_1) < 0$ .

Si  $\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 4\frac{A}{\tau} < 0$  entonces  $\sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - 4\frac{A}{\tau}}$  es imaginario, así los valores propios son complejos con parte real  $-\frac{1}{\tau} < 0$ . Con esto se concluye que el equilibrio  $(0, 0)$  es asintóticamente estable. ■

**Teorema 18** *El equilibrio  $(\pi, 0)$  es inestable de tipo silla del sistema (20).*

**Demostración.** La matriz de linealización del sistema (20) alrededor del equilibrio  $(\pi, 0)$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{A}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$$

con valores propios

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{1}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 4\frac{A}{\tau}}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{1}{\tau} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 4\frac{A}{\tau}}}{2}$$

Como  $\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 4\frac{A}{\tau} > 0$  y  $\frac{1}{\tau} > 0$  los valores propios son reales, además

$$0 < \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 < \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 4\frac{A}{\tau}$$

implicando

$$\frac{1}{\tau} < \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 4\frac{A}{\tau}}$$

$$0 < -\frac{1}{\tau} + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 4\frac{A}{\tau}}$$

$$0 > -\frac{1}{\tau} - \sqrt{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + 4\frac{A}{\tau}}$$

así  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 < 0$ . Por lo tanto el equilibrio  $(\pi, 0)$  es inestable de tipo silla. ■

El retrato fase para el péndulo con fricción se muestra en la figura 27. Comparando los espacios fase del péndulo simple con el del péndulo amortiguado se ve como los equilibrios centros se convierten en espirales (fuentes) mientras que los sillars permanecen como sillars.

### 3.1.2. Bifurcación Silla-Nodo en el Péndulo con Forzamiento Constante

Como se mencionó anteriormente, la ecuación que modela al péndulo con torca es:

$$\tau\ddot{\theta} + \dot{\theta} + A\sin\theta = \omega$$

equivalente al sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\tau}v - \frac{A}{\tau}\sin\theta + \frac{\omega}{\tau}\end{aligned}\tag{21}$$

donde  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Para el análisis de este sistema se define lo que es una bifurcación con el objeto de demostrar que el sistema experimenta la bifurcación Silla-Nodo.

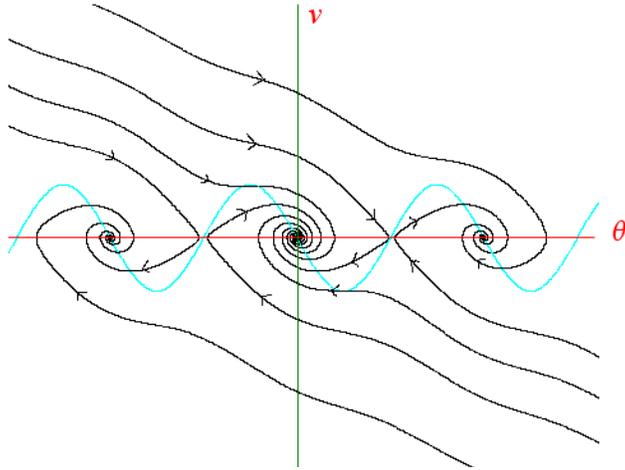


Figura 27: Ceroclinas y órbitas del péndulo con fricción donde  $\tau = 1$  y  $A = 1$ .

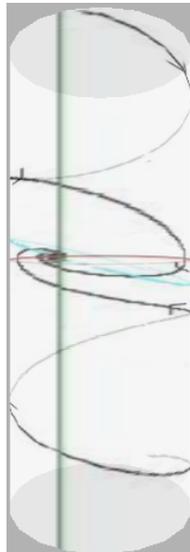


Figura 28: Espacio fase del péndulo con fricción en el cilindro.

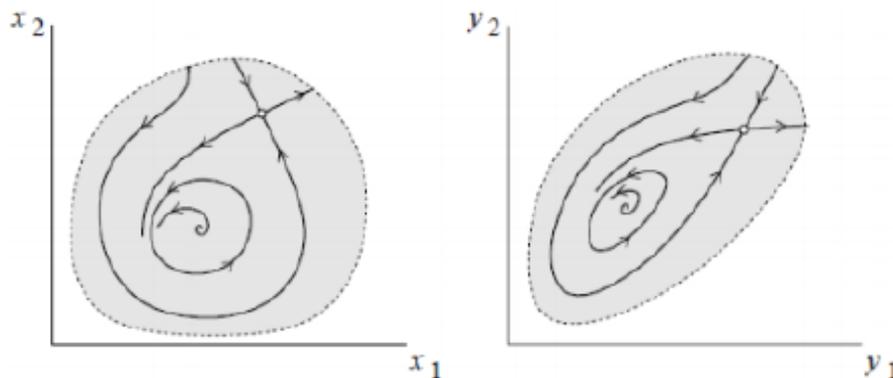


Figura 29: Sistemas topológicamente equivalentes.

Considere la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha$  un vector de parámetros en  $\mathbb{R}^m$ .

Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  se obtiene un retrato fase del sistema. Al hacer la comparación geométrica entre los retratos fase se pueden ver si son parecidos o hay cambios considerables, en el segundo caso se dice que el sistema experimenta una bifurcación. En este sentido es importante determinar todas las bifurcaciones posibles. Estos fenómenos se formalizan en las siguientes definiciones.

**Definición 19** *Dos retratos fase son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo (mapeo invertible)  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que él y su inversa son continuas. Dicho homeomorfismo mapea las órbitas del primer sistema en las del segundo sistema, preservando la dirección en el tiempo.*

**Definición 20** *Si al variar los parámetros se produce un diagrama de fase que no es topológicamente equivalente al inicial se conceptualiza como bifurcación.*

La comparación entre los espacios fase se basa en una relación de equivalencia que permite definir clases de espacios fase equivalentes facilitando estudiar las transiciones entre estas clases. Intuitivamente se entiende que dos retratos de fase son equivalentes si son cualitativamente similares (figura 29), es decir, si un retrato se puede obtener del otro por medio de una transformación continua. Por lo tanto ambos sistemas son equivalentes si tienen el mismo número y naturaleza de equilibrios y ciclos.

En general los cambios que un sistema puede sufrir en una bifurcación son: crear y/o destruir equilibrios, cambiar la estabilidad de los equilibrios y crear o destruir ciclos límites. En base al tipo de cambio que presenta un sistema se

han clasificado las bifurcaciones, y para algunas de ellas se tienen teoremas que dan las condiciones para que el sistema experimente la bifurcación.

La Bifurcación Silla-Nodo, por ejemplo, consiste en la colisión y desaparición de dos equilibrios. Una condición necesaria para que ocurra esta bifurcación es que uno de los valores propios del equilibrio crítico tome valor cero. En la Figura 30 se muestra un esbozo de esta bifurcación.

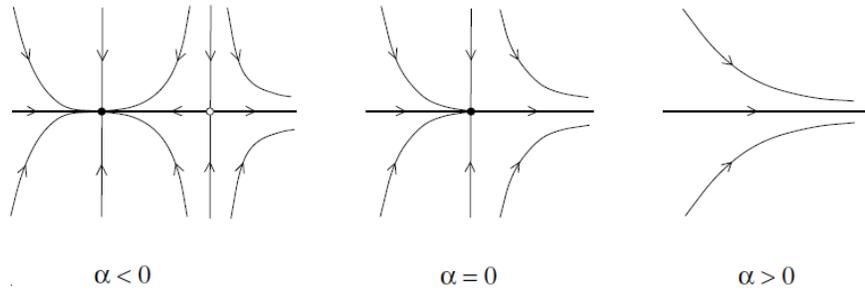


Figura 30: Bifurcación Silla-Nodo

Antes de presentar el teorema que caracteriza esta bifurcación se introducirá la siguiente definición.

**Definición 21** *Un equilibrio se dice hiperbólico si su valor propio asociado tiene parte real no nula.*

**Teorema 22 (Silla-Nodo)** *Considere el sistema:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F_1(\alpha, x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + F_2(\alpha, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Si

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}(0, 0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0, 0, 0) \neq 0$$

entonces hay una bifurcación Silla-Nodo para  $\alpha = 0$ , esto es, cuando  $\alpha \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} < 0$  hay dos equilibrios hiperbólicos, uno silla y otro nodo asintóticamente estable; no habrá equilibrio cuando  $\alpha \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} > 0$ .

**Demostración.** Ver [20 pág. 316]. ■

Dadas las definiciones anteriores procedemos con el análisis.

El sistema de ecuaciones que gobierna el movimiento del péndulo con torca es:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\tau}v - \frac{A}{\tau}\sin\theta + \frac{\omega}{\tau}\end{aligned}\tag{22}$$

A continuación se demuestra que el sistema experimenta una bifurcación Silla-Nodo. Para esto se hace una traslación en las variables como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\omega}{\tau} &= \frac{A}{\tau} + \alpha \\ \theta &= \frac{\pi}{2} + z_1 \\ v &= z_2\end{aligned}$$

De esta manera el sistema (22) se transforma en:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{\tau}z_2 - \frac{A}{\tau}\cos z_1 + \frac{A}{\tau} + \alpha.\end{aligned}\tag{23}$$

Para  $\alpha = 0$  el origen es un punto equilibrio y la matriz de linealización asociada es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$$

con valores propios  $0$  y  $-\frac{1}{\tau}$  y vectores propios correspondientes  $(1, 0)$  y  $(-1, \frac{1}{\tau})$  respectivamente. Por simplificación se supondrá a la razones  $\frac{1}{\tau} = 1 = \frac{A}{\tau}$ .

Usando la transformación de variables

$$Z = Px \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

el sistema (23) es equivalente a

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\cos(x_1 - x_2) + 1 + \alpha \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \cos(x_1 - x_2) + 1 + \alpha.\end{aligned}\tag{24}$$

A continuación se verifica que el sistema (24) cumpla con las condiciones del teorema.

Cuando  $\alpha = 0$  el sistema tiene como equilibrio al  $(0, 0)$ .

Las funciones  $F_1$  y  $F_2$  son:

$$\begin{aligned}F_1(\alpha, x_1, x_2) &= -\cos(x_1 - x_2) + 1 + \alpha \\ F_2(\alpha, x_1, x_2) &= -x_2 - \cos(x_1 - x_2) + 1 + \alpha\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}(0,0,0) &= 1 \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}(0,0,0) &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema (24) satisface las hipótesis del teorema Silla-Nodo, la bifurcación ocurre cuando  $\alpha = 0$ , lo cual implica que el sistema (22) experimenta la bifurcación en el valor  $\omega = 1$ .

Cuando  $\alpha < 0$  se tiene que  $0 < \omega < 1$  entonces hay dos equilibrios en el sistema (22), uno es nodo asintóticamente estable y el otro es una silla, por otro lado cuando  $\alpha > 0$ , es decir cuando  $1 < \omega$ , no existen equilibrios en el sistema (22).

A continuación se presentan las simulaciones donde se observa la secuencia de la bifurcación:

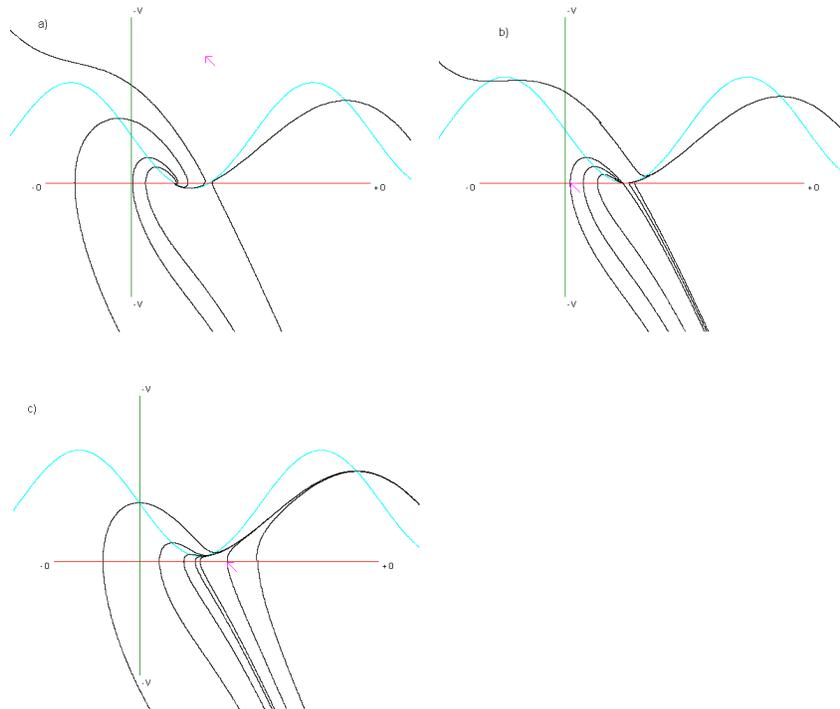


Figura 31: En la simulación a) se muestra que hay dos equilibrios cuando  $\omega = 0,9$ , en la simulación b) se observa que sólo hay un equilibrio cuando  $\omega = 1$  como resultado de la colisión de los equilibrios, y en la simulación c) se observa que no hay equilibrios cuando  $\omega = 1,1$ .

## 3.2. Oscilaciones de Relajación

En esta sección se analiza la dinámica de los osciladores de relajación, primero se demuestra que el oscilador de van der Pol experimenta la bifurcación de Hopf, después se demuestra que la ecuación y dinámicas de Rayleigh son equivalentes a las de van der Pol.

### 3.2.1. Oscilación en van der Pol

Para obtener la ecuación de van der Pol se consideran valores de  $\theta$  pequeños, así la corriente por el mecanismo homeostático pasa de ser  $I_H = \alpha \sin\left(\gamma \int_0^t V(t') dt'\right)$  a  $I_H = \alpha\gamma \int_0^t V(t') dt'$ . Con lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} (I_C + I_H + I_N)R &= E - V \\ \left[ C\dot{V} + \alpha \left( \gamma \int_0^t V(t') dt' \right) + f(V) \right] R &= E - V \end{aligned}$$

Derivando la última ecuación con respecto de  $t$  obtenemos:

$$\begin{aligned} \left[ C\ddot{V} + \alpha\gamma V(t) + f'(V)\dot{V} \right] R &= -\dot{V} \\ RC\ddot{V} + R\alpha\gamma V(t) + f'(V)\dot{V}R + \dot{V} &= 0 \\ RC\ddot{V} + [f'(V)R + 1]\dot{V} + R\alpha\gamma V(t) &= 0 \end{aligned}$$

considerando  $RC = 1$  y  $R\alpha\gamma = 1$ , se obtiene

$$\ddot{V} + [f'(V)R + 1]\dot{V} + V = 0 \quad (25)$$

La última ecuación tiene la forma de la ecuación de Lienard, es decir,

$$\ddot{v} + \dot{v}g(v) + v = 0.$$

Para el análisis de (25) se toma y sustituye  $f(V) = \frac{V^3}{3R} - \frac{(1+a)V}{R}$  obteniendo el oscilador de van der Pol:

$$\ddot{V} + [V^2 - a]\dot{V} + V = 0 \quad (26)$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ .

A continuación se demostrará que el sistema (26) puede tener un ciclo límite para cierta configuración del parámetro  $a$ . Primero se explica la bifurcación de Hopf y después se enuncia el teorema que lo caracteriza.

### 3.2.2. Bifurcación de Hopf en van der Pol

La bifurcación de Andronov-Hopf es una de las bifurcaciones en la que se crean o destruyen ciclos límite. Consiste en el nacimiento de un ciclo límite alrededor de un equilibrio. Una condición necesaria para que esta bifurcación ocurra es que la estabilidad del equilibrio cambie al variar un parámetro. La bifurcación puede ser de dos tipos: Subcrítica si el ciclo límite es inestable o Supercrítica si el ciclo límite es estable. En la figura 32 se muestra un ejemplo de la bifurcación.

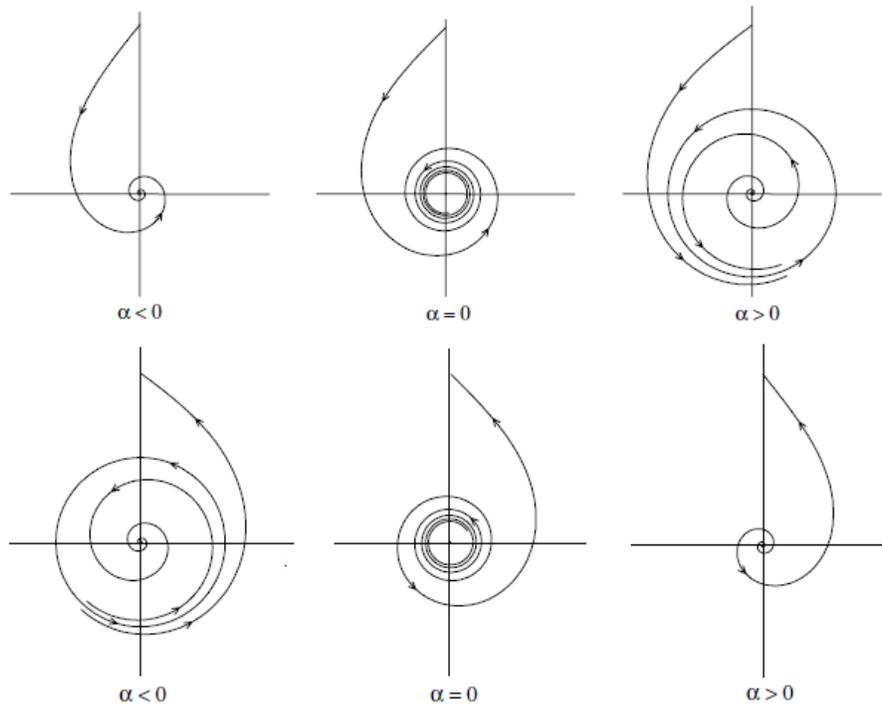


Figura 32: Arriba: Bifurcación Andronov-Hopf Supercrítica. Abajo: Bifurcación Andronov-Hopf Subcrítica. Donde  $\alpha$  es la parte real del valor propio.

El siguiente teorema da las condiciones para que un sistema experimente la bifurcación de Hopf.

**Teorema 23 (Bifurcación de Andronov-Hopf)** *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

con  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y que existe  $(x_0, \alpha_0)$  tal que se cumplen las siguientes hipótesis:

- a)  $f(x_0, \alpha_0) = 0$ .  
 b)  $D_x f(x_0, \alpha_0)$  tiene un par de valores propios puramente imaginarios.  
 c)  $\frac{d}{d\alpha}(\text{Re}(\lambda(\alpha)))_{\alpha=\alpha_0} > 0$ , donde  $\lambda(\alpha)$  es un valor propio de  $D_x f(x_0, \alpha_0)$ .  
 d) El equilibrio es asintóticamente estable cuando  $\alpha = \alpha_0$
- Entonces

1.  $\alpha = \alpha_0$  es un punto de bifurcación del sistema,
2. para  $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_0)$ , algún  $\alpha_1 < \alpha_0$ , el equilibrio es un foco estable,
3. para  $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_2)$ , algún  $\alpha_0 < \alpha_2$ , el equilibrio es un foco inestable rodeado por un ciclo límite estable cuyo tamaño aumenta con  $\alpha$  [12].

Ahora se procede a mostrar que el sistema

$$\ddot{V} + [V^2 - a] \dot{V} + V = 0,$$

presenta la bifurcación de Andronov-Hopf. Para ello se escribe la ecuación anterior como un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{V} &= W \\ \dot{W} &= (a - V^2)W - V. \end{aligned} \tag{27}$$

El sistema (27) tiene como único equilibrio al origen.

La matriz de linealización evaluada en el equilibrio es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2VW - 1 & a - V^2 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

con valores propios

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Con esto se aplicará el teorema Andronov-Hopf. Primero se comprueban cada una de las hipótesis. Considerando que cuando  $a = 0$  el sistema tiene como equilibrio al origen y los valores propios son  $\lambda = \pm i$ , lo que comprueba las hipótesis a) y b) del teorema. Como  $\text{Re}(\lambda(a)) = a$  implica que  $\frac{d}{d\alpha}(\text{Re}(\lambda(a)))_{a=0} = 1$ , lo que prueba la hipótesis c) del teorema. Para probar que el equilibrio es asintóticamente estable cuando  $\alpha = 0$  se hace uso de la función  $h(v, y) = V^2 + W^2$  cuya derivada euleriana es:

$$\frac{dh}{dt} = 2V\dot{V} + 2W\dot{W} = 2VW + 2W((a - V^2)W - V).$$

Si  $a = 0$  se tiene que  $\frac{dh}{dt} = -2V^2W^2$  la cual es una función fuerte de Lyapunov, esto prueba que se cumple la hipótesis d). Por lo tanto, el sistema experimenta la bifurcación de Hopf. En la figura 33 se muestra la secuencia de la bifurcación.

A continuación se mostrará cómo se puede obtener la ecuación de Rayleigh como caso particular del VCON y que además es equivalente al oscilador de van der Pol.

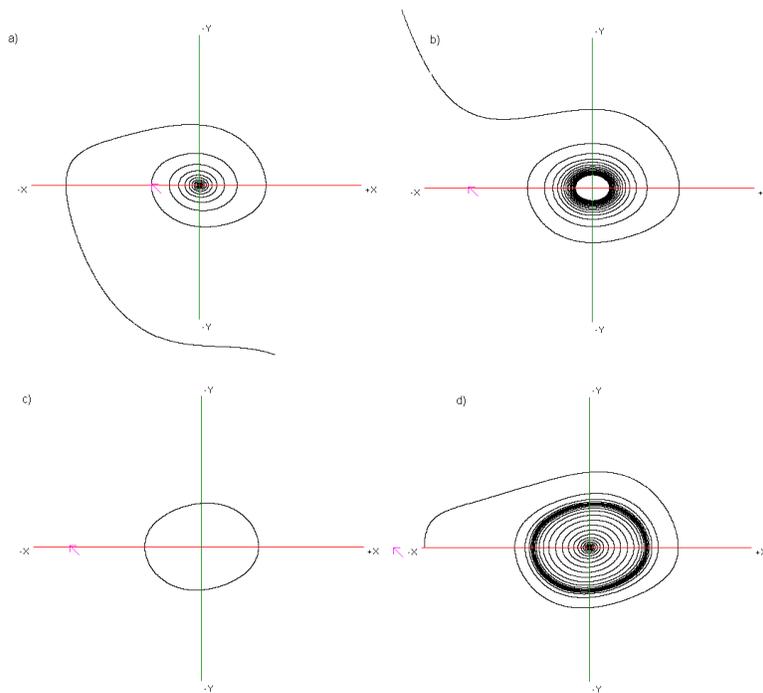


Figura 33: Secuencia de la bifurcación de Hopf. En la simulación a) se observa que el origen es un equilibrio asintóticamente estable cuando  $a = -0,1$ , en la simulación b) el equilibrio sigue siendo asintóticamente estable cuando el valor de bifurcación  $a = 0$ , y en la simulaciones c) y d) se muestra el ciclo límite cuando  $a = 0,1$ .

### 3.2.3. Oscilador de Rayleigh

Recordando que la ecuación general de VCON es

$$\tau\ddot{\theta} + F(\dot{\theta}) + A \sin(\theta) = \omega. \quad (28)$$

se puede obtener la ecuación de Rayleigh como caso particular del VCON si se considera a la función

$$F(\dot{\theta}) = \dot{\theta} \left( \frac{\dot{\theta}^2}{3} - a \right),$$

y al ángulo  $\theta$  muy cercano a cero, por lo que se usará la aproximación  $\sin(\theta) \approx \theta$ , además se considerarán los valores  $\tau = 1$  y  $A = 1$ . Así, la ecuación (28) toma la forma:

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} \left( \frac{\dot{\theta}^2}{3} - a \right) + \theta = \omega. \quad (29)$$

La ecuación (29) es conocida como la ecuación de Rayleigh con forzamiento constante. La cual es equivalente al oscilador de van der Pol (por lo tanto sus dinámicas son cualitativamente iguales) si se deriva la ecuación con respecto del tiempo como se muestra a continuación

$$\ddot{\theta} + \dot{\theta} \left( \frac{\dot{\theta}^2}{3} - a \right) + \dot{\theta} = 0,$$

haciendo el cambio de variable  $\dot{\theta} = V$  se obtiene

$$\begin{aligned} \ddot{V} + V^2 \dot{V} - a \dot{V} + V &= 0 \\ \ddot{V} + (V^2 - a) \dot{V} + V &= 0, \end{aligned}$$

la última ecuación es la ecuación del oscilador de van der Pol, de esta manera la dinámica de ambos son cualitativamente iguales.

## 4. Análisis del VCON

Para el estudio de la dinámica del VCON se emplea la función:

$$F(\dot{\theta}) = \left[ (\dot{\theta})^2 - a \right] \dot{\theta}$$

donde  $a \in \mathbb{R}$ . Se considera esta función porque se desea que parte de la dinámica del VCON sea la combinación de las dinámicas del péndulo con una torca constante y la ecuación de Rayleigh. También se supondrán que la constante de tiempo  $\tau = 1$  y el valor de  $A = 1$ . Con estas consideraciones la ecuación (2) toma la forma:

$$\ddot{\theta} + \left[ (\dot{\theta})^2 - \alpha \right] \dot{\theta} + \sin(\theta) = \omega. \quad (30)$$

### 4.1. Análisis de Equilibrios

El análisis de los equilibrios del sistema llevará la ecuación (30) a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, para ello se empleará el hecho de que  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{\gamma}$ , donde se tomará a  $\gamma = 1$ . Al considerar lo anterior se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= V \\ \frac{dV}{dt} &= \omega - (V^2 - \alpha)V - \sin(\theta). \end{aligned} \quad (31)$$

Para determinar los equilibrios se emplean las ceroclinas, las cuales son el lugar geométrico de los puntos donde  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  o  $\frac{dV}{dt} = 0$ . Los equilibrios son los puntos que cumplen que  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  y  $\frac{dV}{dt} = 0$ , por lo tanto los equilibrios quedan determinados por las intersecciones de las ceroclinas. Las ecuaciones de las ceroclinas son:

$$\begin{aligned} 0 &= V \\ 0 &= \omega - (V^2 - \alpha)V - \sin(\theta). \end{aligned}$$

Para obtener la intersección de las ceroclinas, se sustituye  $V = 0$  en la segunda ecuación, obteniendo:

$$\begin{aligned} \omega - \sin(\theta) &= 0 \\ \omega &= \sin(\theta) \\ \theta &= \arcsin(\omega). \end{aligned}$$

Por tanto, las ceroclinas se intersectan en los puntos del plano  $(0, \arcsin(\omega))$ , considerando que  $\arcsin(\omega)$  consta de dos ramas.

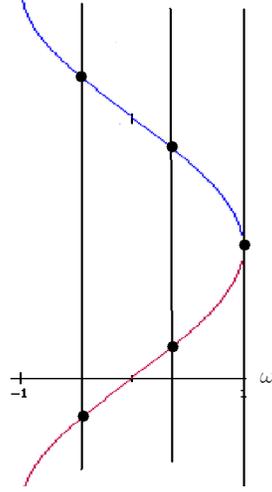


Figura 34: Ramas de arc seno.

En la figura 34 se observan las dos ramas de  $\arcsin(\omega)$ . Se concluye que, el sistema tendrá equilibrios si y sólo si el parámetro  $|\omega| \leq 1$ , pues  $\arcsin(\omega)$  sólo está definido para valores de  $\omega$  en el intervalo  $[-1, 1]$ . Con lo anterior se llega a las siguientes conclusiones:

1. Si  $|\omega| < 1$ ,  $\arcsin(\omega)$  toma dos valores,  $\theta_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  y  $\theta_2 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ , por lo tanto el sistema tendrá dos equilibrios:  $eq_1 = (0, \theta_1)$ ,  $eq_2 = (0, \theta_2)$ .
2. Si  $|\omega| = 1$ ,  $\arcsin(\omega)$  toma el valor  $\pm\frac{\pi}{2}$ , por lo tanto el sistema tendrá como único equilibrio al punto  $(0, \pm\frac{\pi}{2})$ .
3. Si  $|\omega| > 1$  el sistema no tendrá equilibrios.

A continuación hacemos el análisis de la estabilidad de los equilibrios. Para determinar la estabilidad de los equilibrios usamos el primer método de Lyapunov. La matriz de linealización del sistema (31) es:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\theta) & -3V^2 + \alpha \end{pmatrix}.$$

Al evaluar los equilibrios se obtiene:

$$M_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(\arcsin \omega) & \alpha \end{pmatrix}.$$

Luego se calcula su polinomio característico:

$$\begin{aligned} M_{eq} - \beta I &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\cos(\arcsin \omega) & \alpha - \lambda \end{pmatrix} \\ |M_{eq} - \beta I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\cos(\arcsin \omega) & \alpha - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(\alpha - \lambda) + \cos(\arcsin \omega) \end{aligned}$$

de modo que  $\lambda^2 - \alpha\lambda + \cos(\arcsin \omega) = 0$  es el polinomio característico y los valores propios de la matriz  $M_{eq}$  son:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-(-\alpha) \pm \sqrt{(\alpha)^2 - 4(1)(\cos(\arcsin \omega))}}{2} \\ &= \frac{\alpha \pm \sqrt{(\alpha)^2 - 4(\cos(\arcsin \omega))}}{2}. \end{aligned}$$

Cuando el sistema tiene sólo un equilibrio no se puede aplicar la linealización por que  $|\omega| = 1$  implicando que  $\arcsin \omega = \arcsin(\pm 1) = \pm \frac{\pi}{2}$  y  $\cos(\pm \frac{\pi}{2}) = 0$ . Más adelante se demostrará que hay una bifurcación tipo Silla-Nodo, con lo que se concluirá que el equilibrio es inestable. Si el sistema tiene dos equilibrios, denominados  $eq_1$  y  $eq_2$ , se obtienen los siguientes teoremas:

**Teorema 24** Si  $|\omega| < 1$  entonces  $0 < \cos(\theta_1) \leq 1$  y  $-1 \leq \cos(\theta_2) < 0$ .

**Demostración.** Sea  $\omega \in (-1, 0]$  entonces:

$$\theta_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0] \text{ y } \theta_2 \in [\pi, \frac{3\pi}{2})$$

lo cual implica que

$$0 < \cos(\theta_1) \leq 1 \text{ y } -1 \leq \cos(\theta_2) < 0.$$

Sea  $\omega \in (0, 1)$  entonces

$$\theta_1 \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ y } \theta_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$$

lo cual implica que

$$0 < \cos(\theta_1) < 1 \text{ y } -1 < \cos(\theta_2) < 0.$$

■

Usando la proposición anterior, se prueban los siguientes teoremas sobre la estabilidad de los equilibrios:

**Teorema 25** *El equilibrio  $eq_1$  del sistema (31) es estable para  $\alpha \in \mathbb{R}^-$  e inestable para  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .*

**Demostración.** Primero se analiza el caso cuando

$$\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1) < 0$$

lo cual implica que

$$\sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1)}$$

es un número imaginario, así los valores propios son los complejos:

$$\beta_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{4 \cos(\theta_1) - \alpha^2}i}{2}.$$

Si  $\alpha < 0$  los valores propios tienen parte real negativa, por lo que  $eq_1$  es sumidero. Si  $\alpha > 0$  los valores propios tienen parte real positiva, por lo tanto  $eq_1$  es una fuente.

Ahora se analiza el caso cuando los valores propios son reales.

Como se quiere que los valores propios sean reales positivos se asume que  $\alpha^2 > 4 \cos(\theta_1)$ ; dado que  $\cos(\theta_1) > 0$  se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha^2 &> \alpha^2 - 4 \cos(\theta_1) > 0 \\ |\alpha| &> \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1)} \\ \alpha &> \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1)} \text{ o } \alpha < -\sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1)} \end{aligned}$$

Si

$$\alpha > \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1)}$$

entonces

$$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1)} > 0$$

y

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1)} > 0$$

por tanto los valores propios son positivos y el equilibrio  $eq_1$  es un nodo inestable.

Para el caso en que los valores propios sean reales negativos se considera

$$\alpha < -\sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1)}$$

implicando que

$$\alpha < 0 \text{ y } \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1)} < 0$$

entonces

$$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1)} < 0$$

por tanto los valores propios son reales negativos, concluyendo que  $eq_1$  es un nodo estable. ■

**Teorema 26** *El equilibrio  $eq_2$  del sistema (31) es un punto silla para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

**Demostración.** Si  $eq_2$  es un equilibrio del sistema (31) y  $\alpha \in \mathbb{R}$  se tiene que  $\alpha^2 - 4 \cos(\theta_2) > 0$ , ya que en caso contrario se tendría que:

$$\alpha^2 - 4 \cos(\theta_2) < 0$$

$$\alpha^2 < 4 \cos(\theta_2)$$

pero

$$4 \cos(\theta_2) < 0 \text{ y } \alpha^2 > 0$$

lo que sería absurdo.

Usando el hecho que  $\cos(\theta_2) < 0$ , lo cual implica que  $-4 \cos(\theta_2) > 0$ , para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$  se da la siguiente desigualdad:

$$0 < \alpha^2 < \alpha^2 - 4 \cos(\theta_2)$$

de aquí se tiene que,

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha^2} &< \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_2)} \\ |\alpha| &< \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_2)} \\ -\sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_2)} &< \alpha < \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_2)} \end{aligned}$$

implicando

$$0 < \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_2)}$$

y

$$\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4 \cos(\theta_2)} < 0$$

entonces los valores propios son reales, uno es negativo y el otro positivo. Por tanto  $eq_2$  es un punto silla para cualquier valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$ . ■

El diagrama de la figura 35 muestra de manera resumida los teoremas anteriores sobre el equilibrio  $eq_1$ .

## 4.2. Bifurcaciones del VCON en el Plano

Se ha visto que para diferentes configuraciones de parámetros, el sistema tiene la capacidad de presentar cambios de estabilidad y bifurcaciones de equilibrios. A continuación se demuestran cuales bifurcaciones, con las respectivas simulaciones, se han encontrado al hacer el análisis del modelo VCON.

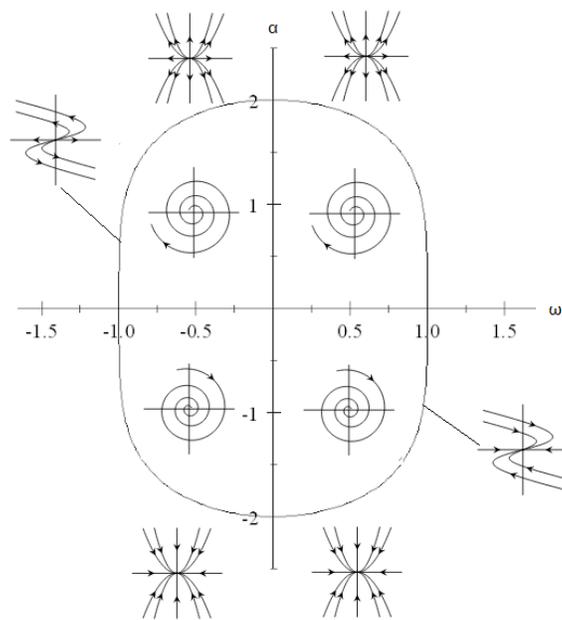


Figura 35: Curva con ecuación  $\alpha^2 + 4\sqrt{1 - \omega^2} = 0$ .

### 4.2.1. Bifurcación de Andronov-Hopf

Para generar la bifurcación de Hopf, se considera el caso cuando el sistema tiene dos equilibrios, porque uno de ellos siempre es un nodo y su estabilidad queda en términos del parámetro  $\alpha$ . Además, para que ocurra la bifurcación es necesario que los valores propios del equilibrio sean distintos de cero, por tal razón no se toma en cuenta el caso cuando el sistema tiene sólo un equilibrio (ya que uno de sus valores propios es cero).

Se considera el equilibrio  $x_0 = (0, \theta_1)$  y se toman valores de  $\alpha$  que cumpla que  $\alpha^2 - 4 \cos(\theta_1) < 0$ . Haciendo lo anterior se verifica que el sistema cumple con las hipótesis para que ocurra la bifurcación de Andronov-Hopf, las cuales son:

- a)  $f(x_0, \alpha_0) = 0$  se cumple para el valor de parámetro  $\alpha = 0$ ,
- b)  $D_x f(x_0, \alpha_0)$  tiene un par de valores propios imaginarios  $\lambda = \frac{\pm i \sqrt{4(\cos(x_{eq1}))}}{2}$ ,
- c)  $\frac{d}{d\alpha}(\text{Re}(\lambda(\alpha)))_{\alpha=\alpha_0} > 0$  se cumple ya que  $\frac{d}{d\alpha}(\text{Re}(\lambda(\alpha)))_{\alpha=0} = 1$ .
- d) Para probar que el equilibrio es asintóticamente estable, usaremos las simulaciones computacionales ya que no es trivial la comprobación de esta hipótesis.

La Bifurcación Andronov-Hopf se presenta cuando el valor de  $\alpha$  pasa de ser negativo a positivo. También es necesario que:

$$\alpha^2 < 4 \cos(\arcsin(\omega))$$

así que se fija el parámetro  $\omega = \frac{2}{3}$  obteniendo:

$$\alpha^2 < 4 \cos(\arcsin(0,6)) = 3,2$$

implicando que

$$|\alpha| < \sqrt{3,2} \simeq 1,78$$

por lo tanto los valores de  $\alpha$  se deben de tomar en el intervalo  $(-1,78, 1,78)$ .

En la figura (36) se muestran las simulaciones donde se aprecia como ocurre la bifurcación de Andronov-Hopf. Las curvas de color azul son las ceroclinas. En la imagen: a) muestra el equilibrio estable para el valor de  $\alpha = -0,5$ , b) el equilibrio es asintóticamente estable para el valor de  $\alpha = 0$ , c) el equilibrio se inestabiliza y se crea una órbita periódica para el valor de  $\alpha = 0,5$  y en d) se muestra sólo la órbita periódica.

En las figuras 37, 38 y 39 se muestran ternas de imágenes en las que se pueden ver las ceroclinas, el espacio fase en el plano y el espacio fase en el cilindro, para diferentes valores del parámetro de bifurcación.

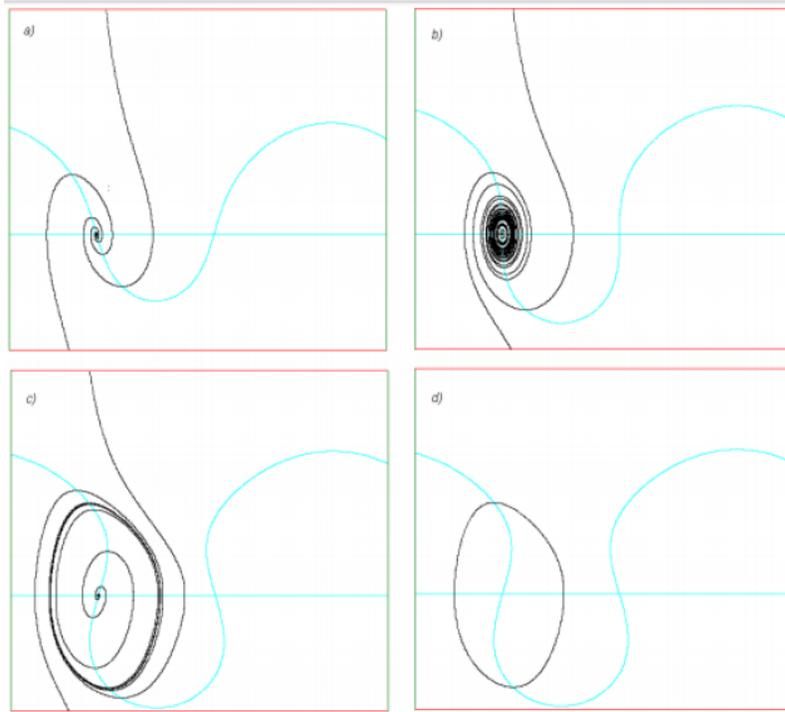


Figura 36: Bifurcación de Hopf.

Como se observa en las simulaciones la bifurcación es supercrítica ya que la órbita periódica es estable. En este caso la órbita periódica atrae a todas las órbitas que están dentro de ella y también a las que están fuera de ella, es decir, la cuenca de atracción de la órbita periódica es todo el plano.

La órbita periódica que nace de la bifurcación crece en amplitud cuando al valor del parámetro  $\alpha$  aumenta, crecerá hasta chocar con el equilibrio de tipo silla. A continuación se discute dicha bifurcación usando las simulaciones computacionales.

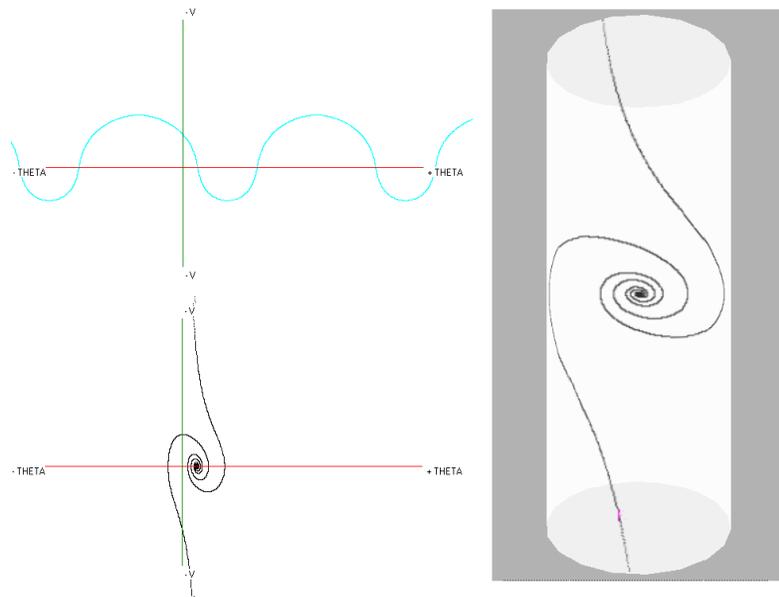


Figura 37:  $\lambda = -3$ .

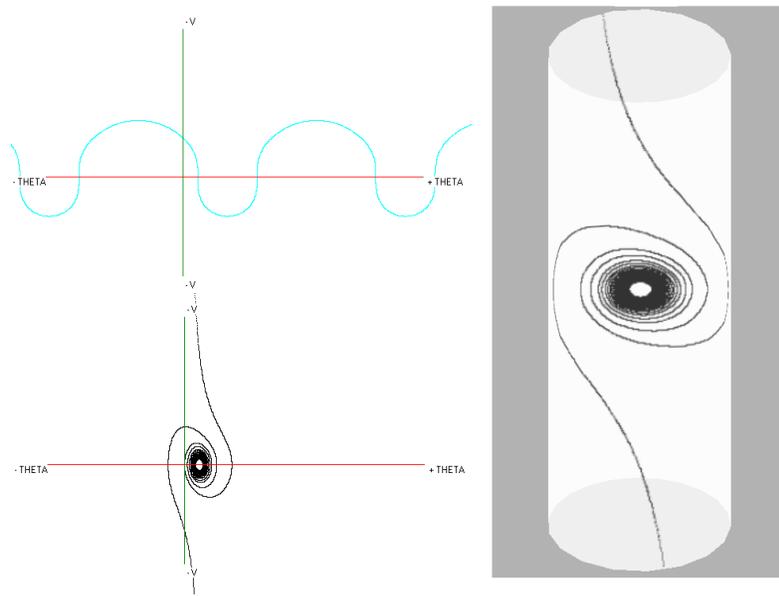


Figura 38:  $\lambda = 0$

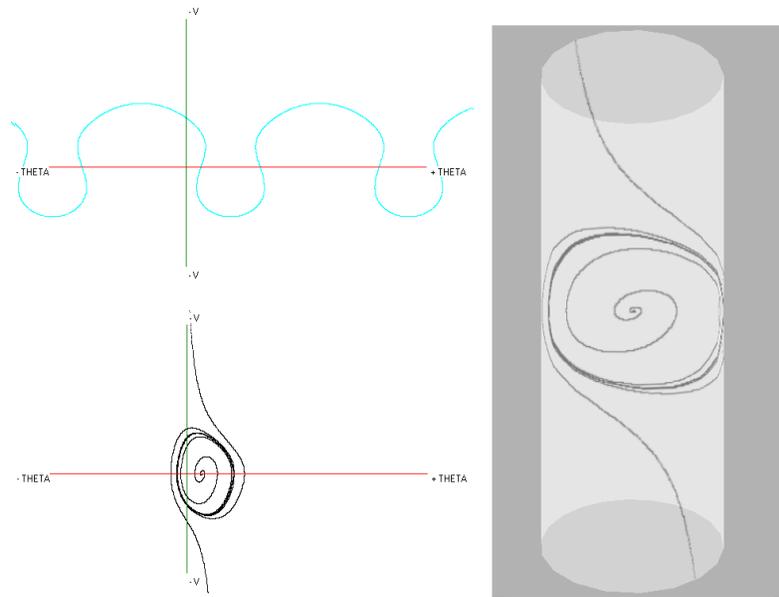


Figura 39:  $\lambda = 5$ .

#### 4.2.2. Bifurcación Homoclínica

La bifurcación Saddle Separatrix Loop es una bifurcación global del sistema, conocida también como bifurcación homoclínica o bifurcación de Andronov-Leontovich. En dimensión dos la bifurcación consiste en la colisión de una órbita periódica con un punto silla, convirtiéndose en una órbita homoclínica la cual después desaparece. La imagen (40) ilustra dos casos de esta bifurcación. Se basó en las simulaciones computacionales para determinar que el VCON experimenta la bifurcación homoclínica.

Para generar esta bifurcación es necesario que el sistema tenga un equilibrio de tipo silla, por lo que usaremos la configuración de parámetros de tal manera que el sistema en estudio tenga dos equilibrios, ya que uno de ellos es un equilibrio tipo silla, además de que los valores propios y vectores propios de los equilibrios están en función de  $\alpha$ , y esto sugiere que el parámetro de bifurcación es  $\alpha$ .

Por la bifurcación de Andronov-Hopf se sabe que cuando el valor del parámetro  $\alpha$  pasa de ser negativo a positivo se genera la órbita periódica. Si continúa aumentando el valor de  $\alpha$ , la órbita sigue creciendo hasta chocar con el equilibrio silla, después de la colisión la órbita desaparece.

En la figura 41 se muestran las simulaciones donde se observa la bifurcación homoclínica. En la imagen a) se muestra la órbita periódica que nació en la

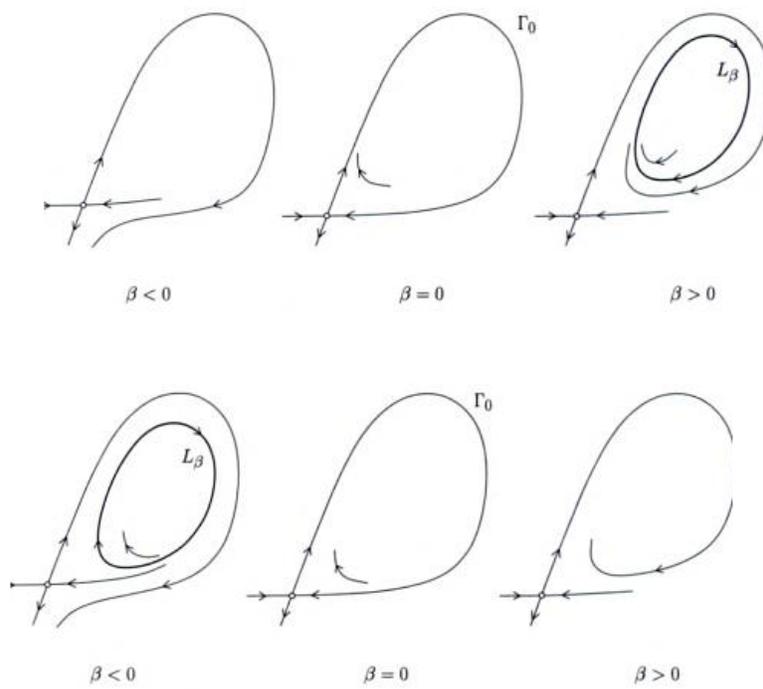


Figura 40: La imagen de arriba se obtiene cuando  $\sigma_0 < 0$ . La imagen de abajo cuando  $\sigma_0 > 0$ .

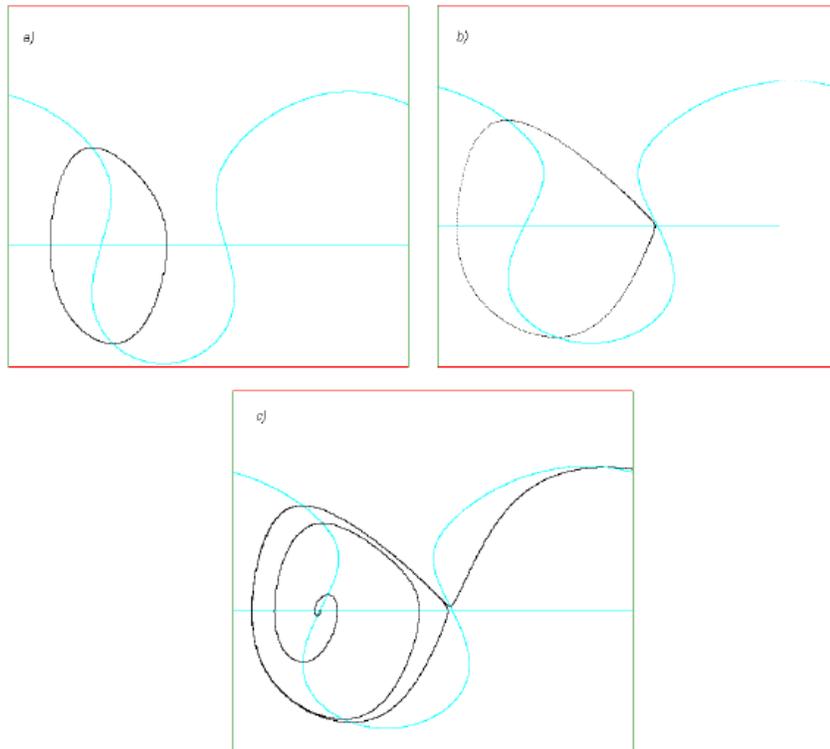


Figura 41: Bifurcación Homoclínica.

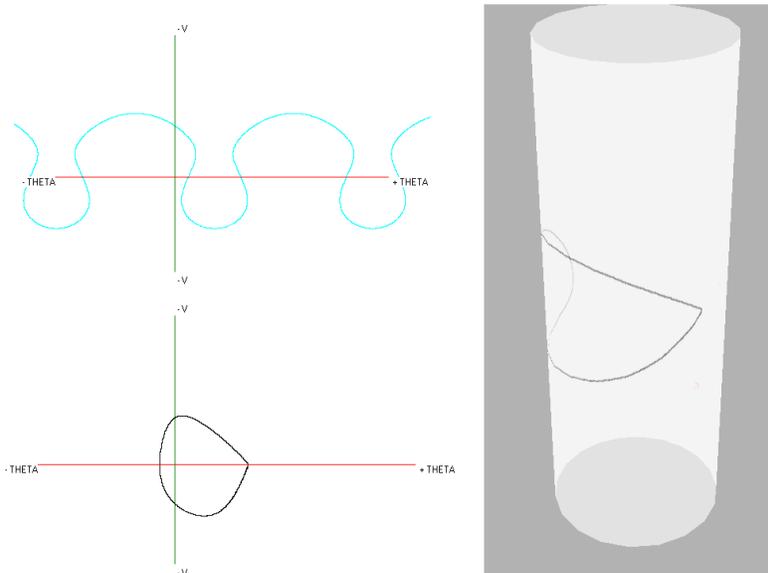


Figura 42: Ceroclinas, órbita homoclínica en el plano y órbita homoclínica en el cilindro.

bifurcación de Andronov-Hopf para el valor del parámetro  $\alpha = 0,5$ , en la imagen b) se muestra cómo la órbita ha colapsado con el equilibrio silla formando una órbita homoclínica de este equilibrio ( $\alpha = 0,7249$ ) y en la imagen c) se muestra una órbita que viene del equilibrio nodo, acercándose tres veces al equilibrio silla, después de acercarse la tercera vez la órbita se aleja, ya que la órbita periódica ha desaparecido ( $\alpha = 0,725$ ).

### 4.2.3. Bifurcación Silla-Nodo

Se observó que el sistema VCON puede tener dos equilibrios, un solo equilibrio o ningún equilibrio, y la existencia de estos equilibrios depende del parámetro  $\omega$ . El sistema podrá tener dos equilibrios si  $|\omega| < 1$ , los equilibrios serán  $eq_1 = (0, \theta_1)$  y  $eq_2 = (0, \theta_2)$ . Para tener un solo equilibrio es necesario que  $|\omega| = 1$ , a saber  $(0, \pm \frac{\pi}{2})$ , y ningún equilibrio si  $|\omega| > 1$ .

Previamente se mencionó que una condición necesaria para que ocurra la bifurcación Silla-Nodo es que uno de los equilibrios tenga un valor propio igual a cero. Considerando lo anterior se analiza el polinomio característico cuando el  $|\omega| = 1$ :

$$\begin{aligned} -\lambda(\alpha - \lambda) + \cos(\arcsin \omega) &= 0 \\ -\lambda(\alpha - \lambda) + \cos(\arcsin 1) &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\cos(\arcsin 1) = 0$  el polinomio se reduce a  $-\lambda(\alpha - \lambda) = 0$ , así uno de los valores propios es  $\lambda = 0$ . Con base en esto se sabe que se podría generar la bifurcación Silla-Nodo y que el parámetro de bifurcación es  $\omega$ .

Para generar esta bifurcación se toma el valor de  $\alpha = 0,125$ . En la figura 43 se muestran tres imágenes; en la imagen a) se observa que existen dos equilibrios cuando el parámetro  $\omega = 0,7$ , en la imagen b) el valor del parámetro  $\omega = 1$ , se muestra que hay un solo equilibrio que resultó de la colisión de los dos equilibrios y en la imagen c) se muestra como desaparece el equilibrio cuando el valor de  $\omega$  es mayor que 1, en este caso  $\omega = 1,07$ .

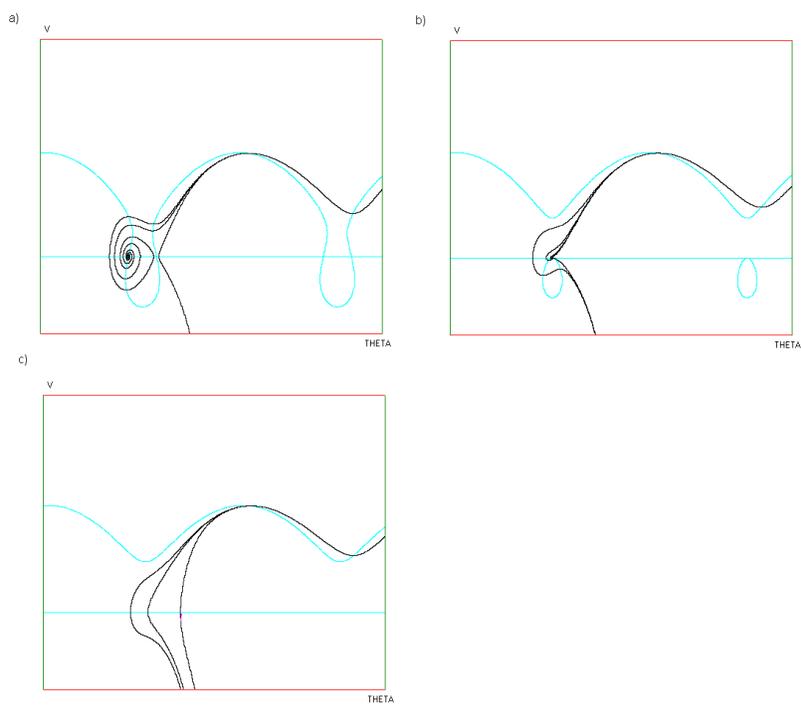


Figura 43: Bifurcación silla nodo.

#### 4.2.4. Bifurcación Bogdanov-Takens

Como se vió en secciones anteriores, el modelo VCON puede exhibir la bifurcación de Andronov-Hopf, Homoclínica y Silla-Nodo; la secuencia de estas bifurcaciones es un caso de la bifurcación Bogdanov-Takens.

La bifurcación de Bogdanov-Takens consiste en hacer secuencias de las bifurcaciones Andronov-Hopf, Homoclínica y Silla-Nodo. Una secuencia que se puede presentar es con la aparición de una órbita periódica alrededor de uno de los equilibrios, la órbita continúa creciendo hasta chocar con el equilibrio silla y desaparecer, después los equilibrios colisionan y desaparecen. Está secuencia es la que se presentan en el modelo del VCON.

El teorema que caracterizó esta bifurcación es el siguiente.

**Teorema 27** *Considere el sistema*

$$\dot{x} = f(x, \alpha)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ . Si  $f(0, 0) = 0$  y  $A = f_x(0, 0)$  tiene un valor propio cero de multiplicidad dos con matriz de linealización  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  entonces:

- a) El sistema experimenta la bifurcación de Bogdanov-Takens .
- b) El sistema es topológicamente equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= \sum_{k \geq 2} (a_k w_1^k + b_k w_1^{k+1} w_2) \end{aligned}$$

- c) Si  $a_2 b_2 \neq 0$  el sistema topológicamente equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \beta_1 + \beta_2 \xi_1 + a_2 \xi_1^2 + b_2 \xi_1 \xi_2 \end{aligned}$$

Si se cumple el inciso c) el diagrama de bifurcación es el de la figura 44. Donde

$$\begin{aligned} T_+ &= \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \frac{1}{4} \beta_2^2, \beta_2 > 0 \right\} \\ T_- &= \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \frac{1}{4} \beta_2^2, \beta_2 < 0 \right\} \\ H &= \{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0, \beta_2 < 0 \} \\ P &= \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = \frac{-6}{25} \beta_2^2 + O(|\beta_2|^3), \beta_2 < 0 \right\} \end{aligned}$$

**Demostración.** Ver [15 pág. 200] ■

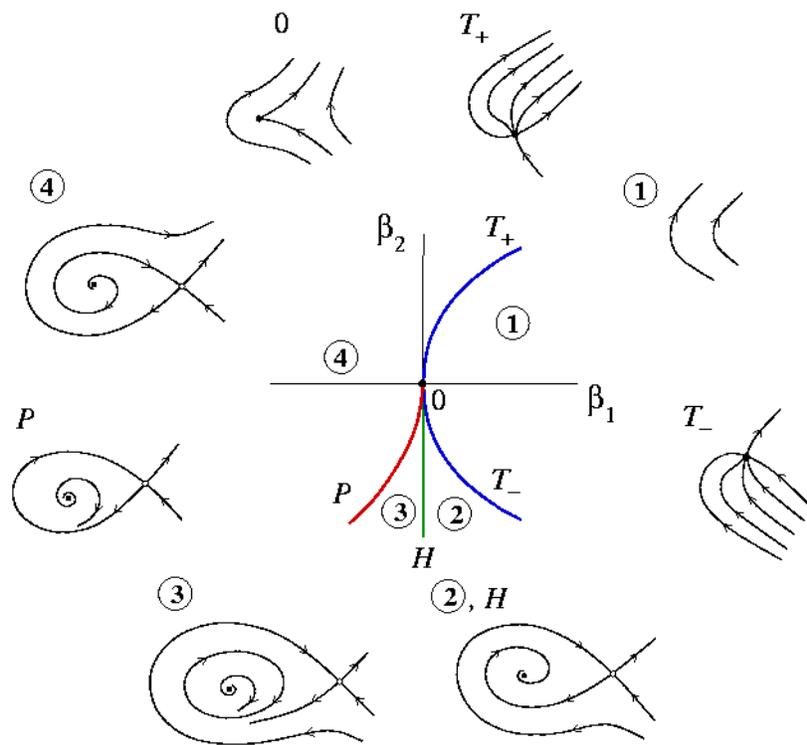


Figura 44: Diagrama de bifurcación Bogdanov-Takens.

A continuación se prueba que el sistema VCON presenta la bifurcación de Bogdanov-Takens; para ello es necesario realizar los siguientes tres cambios de variable:

$$\begin{aligned} z_1 &= \theta - \frac{\pi}{2} \\ z_2 &= V \\ \omega &= 1 + \tau \end{aligned}$$

por lo cual el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= V \\ \frac{dV}{dt} &= \omega - (V^2 - \alpha) V - \sin(\theta) \end{aligned}$$

es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} &= 1 + \tau - (z_2^2 - \alpha) z_2 - \cos(z_1) \end{aligned} \tag{32}$$

Con esto basta ver que el sistema (32) cumple con las hipótesis del teorema.

Se verifica que que  $\dot{x} = f(0,0) = 0$  sustituyendo  $\tau = 0$ ,  $z_2 = 0$ ,  $\alpha = 0$  y  $z_1 = 0$ .

La matriz de linealización es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin(z_1) & -3z_2^2 - \alpha \end{pmatrix}$$

evaluando la matriz cuando el equilibrio es cero y el valor de los parámetros es cero, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz anterior tiene un valor propio cero con multiplicidad dos, por lo tanto, el sistema VCON experimenta una bifurcación Bogdanov-Takens, que depende de los parámetros  $\alpha$  y  $\omega$ .

En la figura 45 se muestran una serie de imágenes donde se aprecia el desarrollo de esta bifurcación. Para la imagen a) se tomaron los valores de los parámetros  $\omega = 0,6$  y  $\alpha = -0,2$ , para b)  $\omega = 0,6$  y  $\alpha = 0,5$ , para la imagen c)  $\omega = 0,6$  y  $\alpha = 0,723$ , para la imagen d)  $\omega = 1$  y  $\alpha = 0,723$  y para la imagen e)  $\omega = 1,1$  y  $\alpha = 0,723$ .

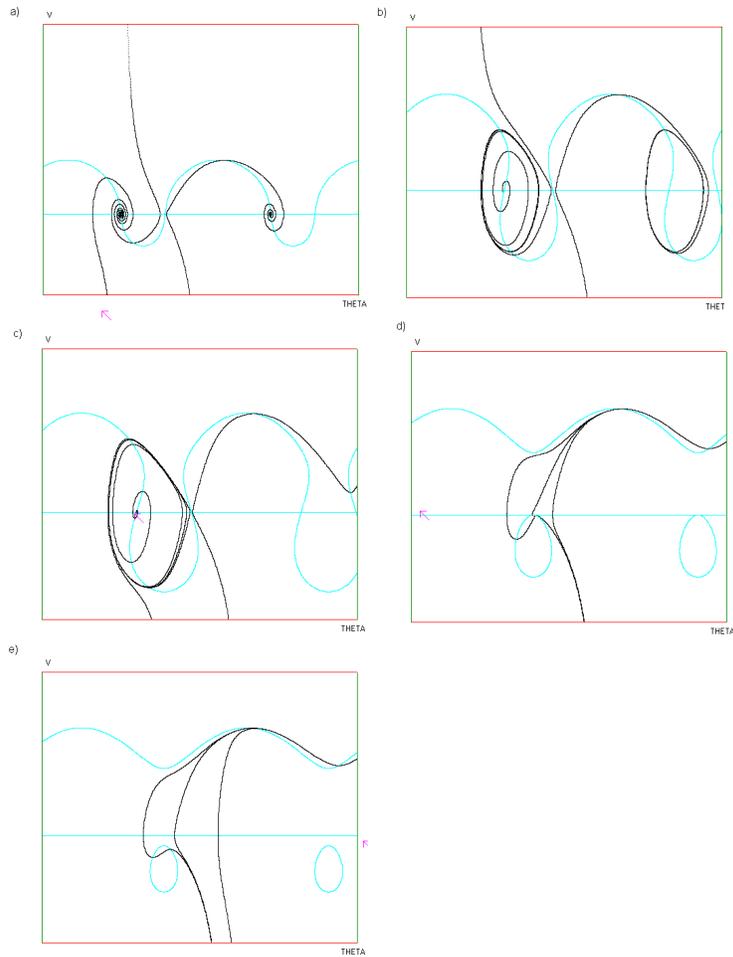


Figura 45: Secuencia para la bifurcación Bogdanov-Takens.

### 4.3. Oscilaciones del VCON en el Cilindro.

Después de analizar las bifurcaciones anteriores que se generán en el plano, ahora se presentan configuraciones del modelo en el que se exhiben oscilaciones que sólo pueden ser vistas considerando como espacio fase el cilindro  $C = \{(\theta, V) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < V < \infty\}$ . Estas oscilaciones no están caracterizadas en la literatura, por lo que para apreciarlas se usan las simulaciones computacionales.

A continuación se presentan los siguientes escenarios:

1. La coexistencia de dos órbitas periódicas, una que está sobre el cilindro y otra que abraza al cilindro.
2. Dos oscilaciones que abrazan al cilindro y dos órbitas heteroclínicas que juntas abrazan al cilindro.
3. Tres oscilaciones que abrazan al cilindro, una de ellas producto de una bifurcación Silla-Nodo en una curva invariante.

#### 4.3.1. Coexistencia de dos oscilaciones.

Se encontró que para ciertos valores de los parámetros pueden coexistir dos oscilaciones diferentes, una que está sobre el cilindro, como resultado de la bifurcación de Hopf, y otra oscilación que abraza al cilindro. Además de que la órbita que proviene de la bifurcación de hopf puede desaparecer y solo quedar la órbita que abraza al cilindro.

Para generar las dos oscilaciones se considera la oscilación obtenida por medio de la bifurcación de Hopf, se genera la oscilación que abraza al cilindro a partir de la variación del parámetro  $\alpha$  y fijando el parámetro  $\omega = 0,5$ . En la figura 46 se muestran las dos oscilaciones y en la imagen 47 se muestra la dinámica en el plano.

A continuación se muestra en la figura 48 las imágenes en donde se aprecia la desaparición de la oscilación que está sobre el cilindro y la permanencia de la oscilación que abraza al cilindro.

#### 4.3.2. Bifurcación Silla-Nodo en una Curva Invariante

Anteriormente se presentó la bifurcación Silla-Nodo en el plano para el VCON. Si se estudia la dinámica de esta bifurcación en el cilindro, es posible que los dos equilibrios pueden estar conectados por dos órbitas heteroclínicas que juntas abrazan al cilindro, las cuales, al chocar los equilibrios se bifurcan en una órbita homoclínica. Después de que el equilibrio desaparece, la órbita homoclínica se convierte en una órbita periódica que abraza al cilindro. A continuación se muestran las simulaciones de esta bifurcación.

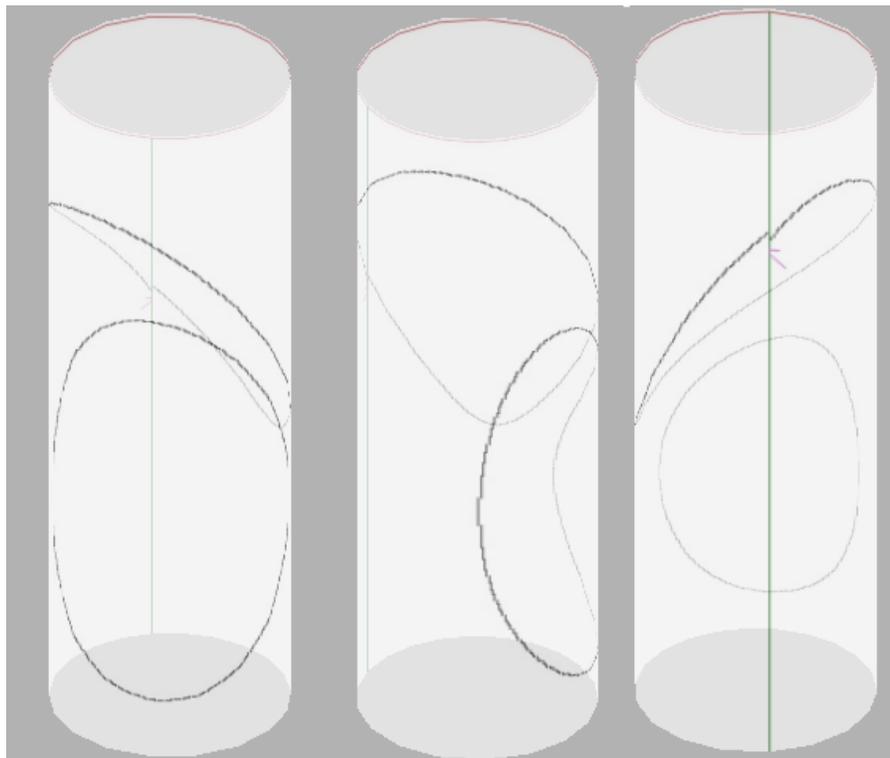


Figura 46: Coexistencia de oscilaciones.

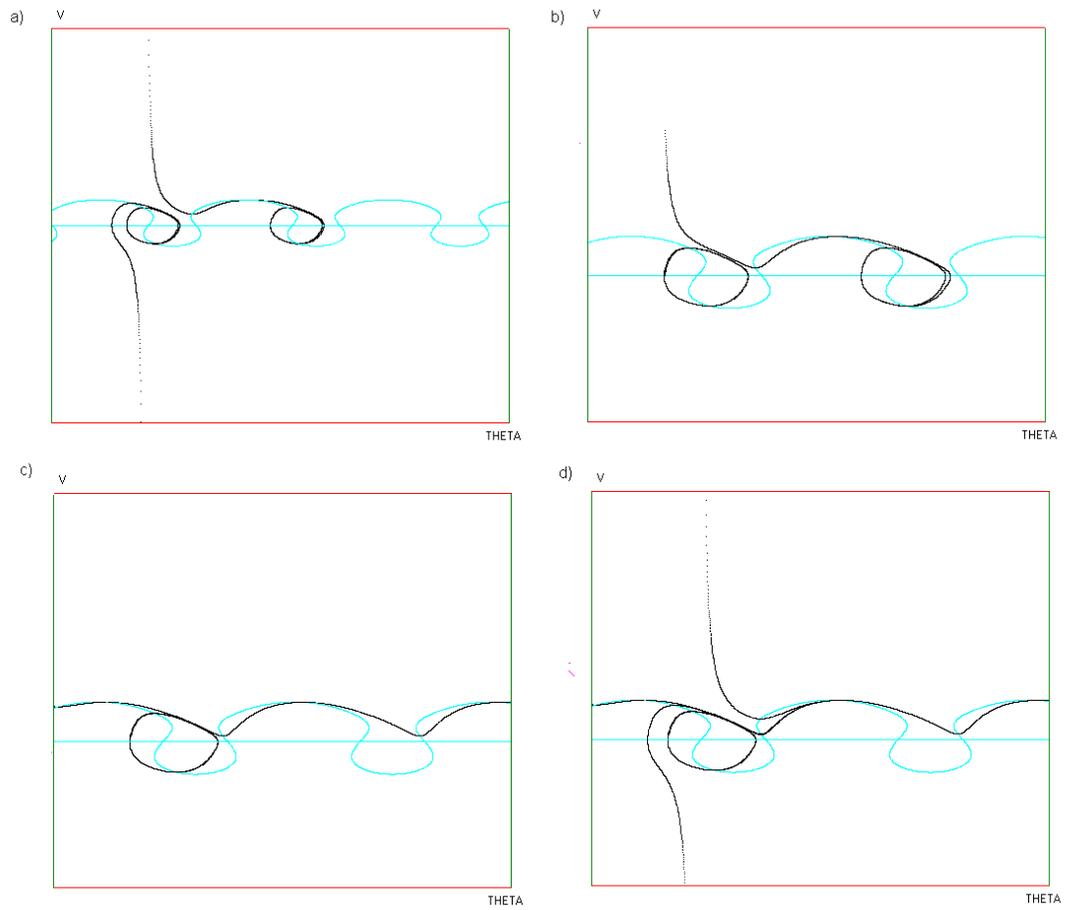


Figura 47: Coexistencia de oscilaciones.

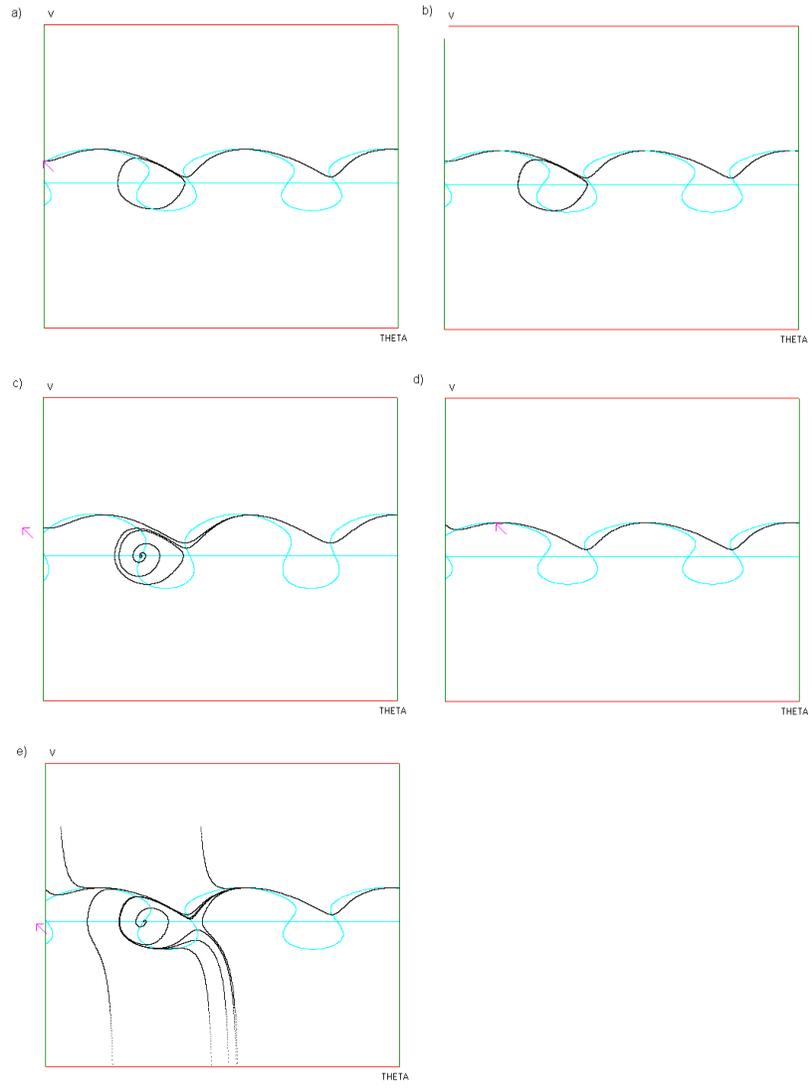


Figura 48: Colisión de la órbita que está sobre el cilindro. Permanencia de la órbita que abraza al cilindro.

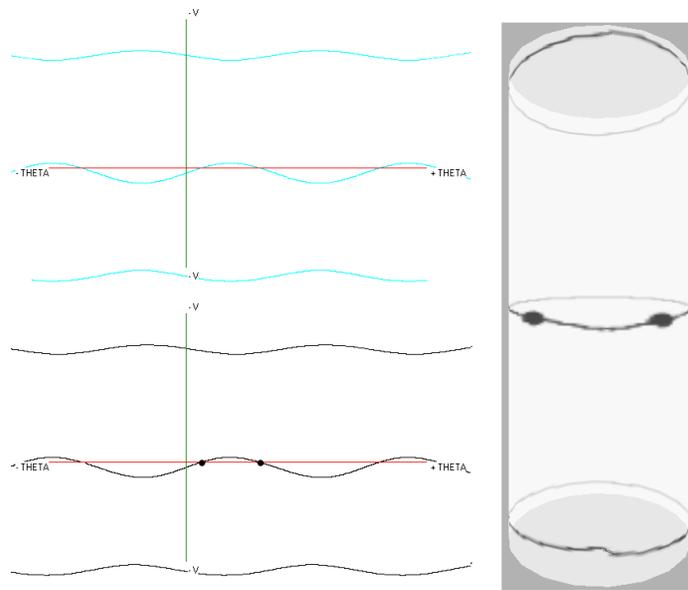


Figura 49: Simulaciones obtenidas con los valores de parámetros  $\omega = 0,5$  y  $\alpha = 4$ .

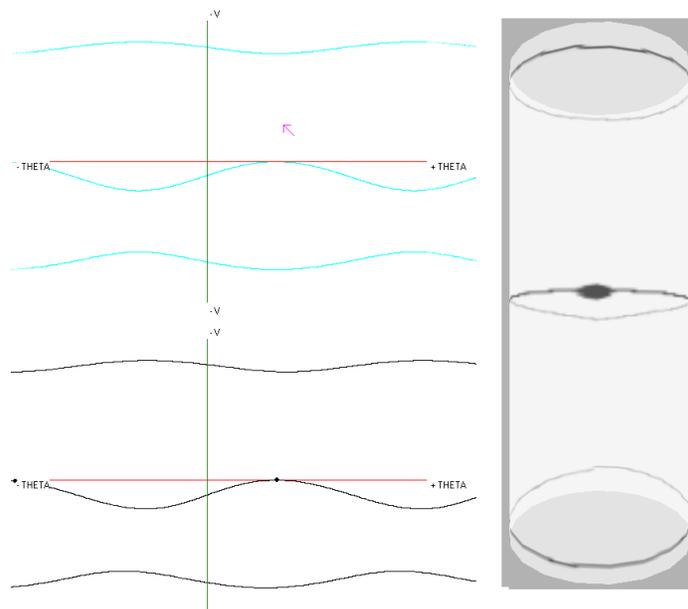


Figura 50: Simulaciones obtenidas con los valores de parámetros  $\omega = 1$  y  $\alpha = 4$ .

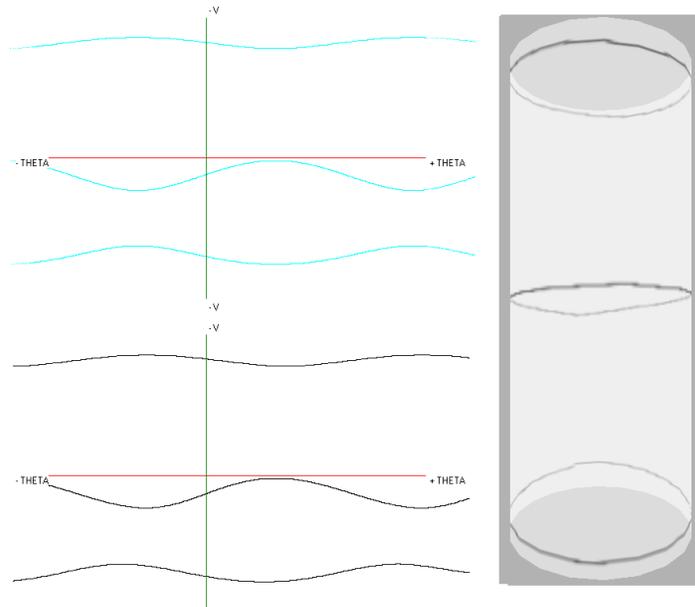


Figura 51: Simulaciones obtenidas con los valores de parámetros  $\varpi = 1,2$  y  $\alpha = 4$ .

## 5. Conclusiones.

La investigación matemática realizada sobre el sistema VCON permitió llegar a las siguientes conclusiones.

1. El modelo pudo ser configurado de manera que puede tener un equilibrio, dos equilibrios o ningún equilibrio. La existencia de dichos equilibrios depende del parámetro  $\omega$ .

Para obtener dos equilibrios, el parámetro tiene que cumplir con la desigualdad  $|\omega| < 1$ . Para este caso se hizo la clasificación de los equilibrios según su estabilidad.

- a) La naturaleza y estabilidad del equilibrio  $eq_1$  está determinada por el valor de parámetro  $\alpha$ .
  - 1) Si  $\alpha < 0$  el equilibrio es un sumidero.
  - 2) Si  $\alpha = 0$  se produce el cambio de estabilidad.
  - 3) Si  $\alpha > 0$  el equilibrio es una fuente.
- b) Para el equilibrio  $eq_2$  cualquier valor del parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}$  será un punto silla.
- c) Si  $|\omega| = 1$  el sistema tendrá sólo el equilibrio inestable  $(0, \pm \frac{\pi}{2})$ , de tipo Silla-Nodo.

- d) Si  $|\omega| > 1$  el sistema no tiene equilibrios.
2. Las ecuaciones del péndulo y las ecuaciones del oscilador de Rayleigh pueden ser obtenidas como casos particulares del modelo VCON.
  3. El sistema experimenta la bifurcación de Andronov-Hopf y el parámetro de bifurcación es  $\alpha$ , la bifurcación ocurre cuando el valor de  $\alpha$  pasa de negativo a positivo.
  4. El sistema experimenta la bifurcación Silla-Nodo y el parámetro de bifurcación es  $\omega$ , la bifurcación ocurre cuando el valor de  $\omega$  pasa a ser mayor a uno.
  5. El sistema experimenta la bifurcación Bogdanov-Takens, los parámetros de bifurcación son  $\alpha$  y  $\omega$ .

En la figura 52 se muestra una colección de imágenes para exhibir como se desarrolla la dinámica al variar el parámetro  $\alpha$ .

En la figura 53 se muestra también varias imágenes al variar el parámetro  $\omega$ .

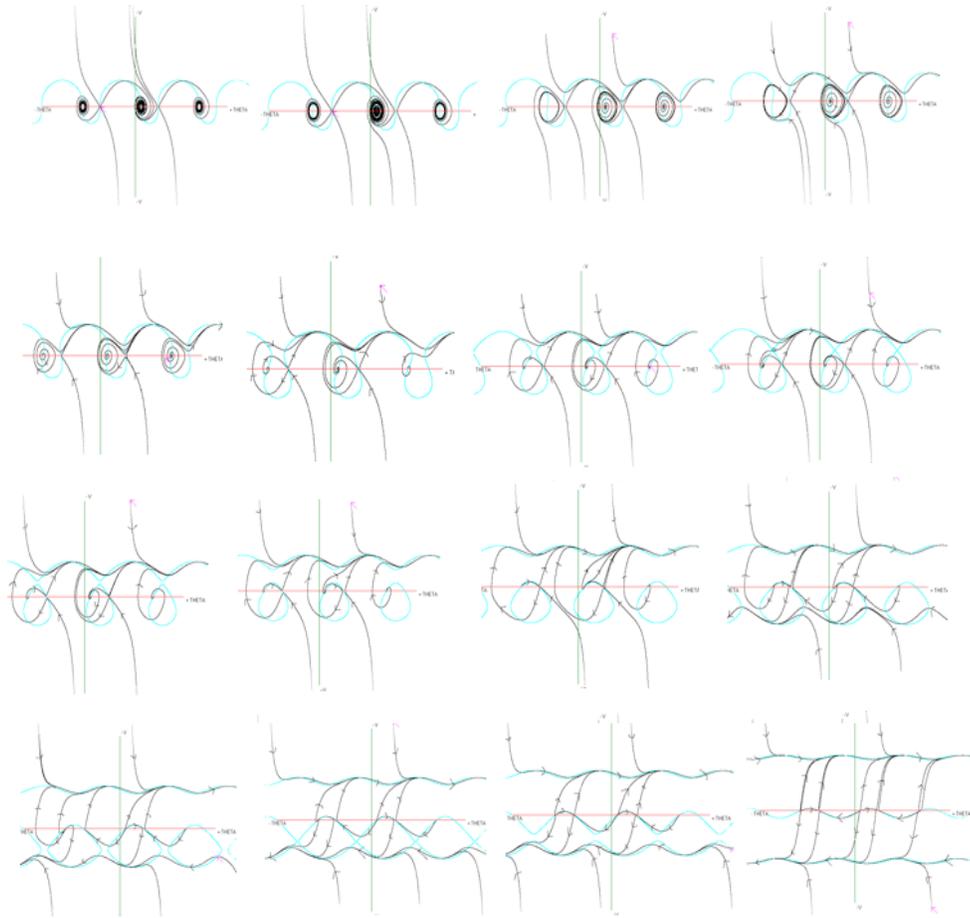


Figura 52: Espacios de fase variando el valor de  $\alpha$ .

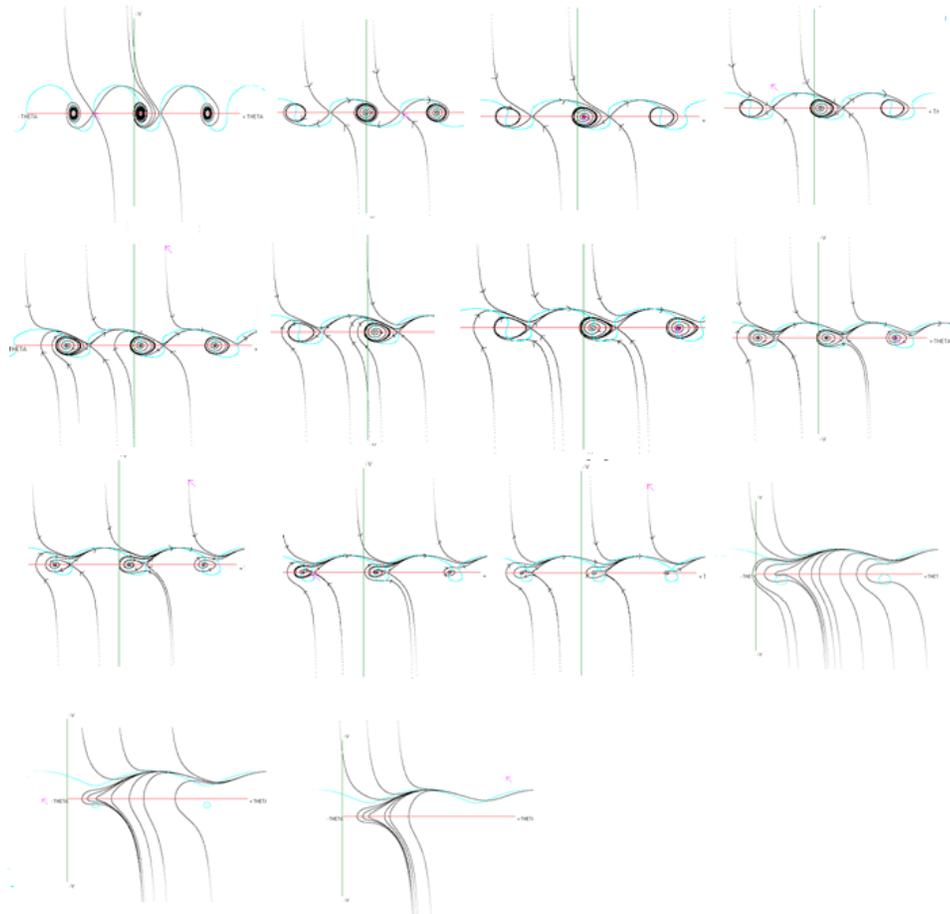


Figura 53: Colección de imágenes de los retratos fase al variar el parámetro  $\omega$ .

## Referencias

- [1] A. L. Hodgkin , A. F. Huxley and B. Katz, Measurement of current-voltage relation in the membrane of the giant axon of Loligo, Journal of Physiology, 1952.
- [2] FitzHugh R. (1961) Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. Biophysical J. 1:445-466
- [3] Nagumo, J., Arimoto, S. and Yoshizawa, S. "An active pulse transmission line simulating nerve axon", Proc. IRE, 50, 2061-2070, (1962).
- [4] B. van der Pol and J. van der Mark, The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science Ser.7, 6, 763-775, 1928.
- [5] H. Carrillo and F.C. Hoppensteadt, Unfolding an Electronic Integrate-and-Fire Circuit. Biological Cybernetics. Volumen 102, 2010.
- [6] Humberto Carrillo Calvet, Miguel Angel Mendoza Reyes y Fernando Ongay Larios. Integrate-and-Fire Neurons and Circle Maps. WSEAS TRANSACTIONS ON BIOLOGY AND BIOMEDICINE Issue 2, Vol. 1, April 2004, 287-293.
- [7] F. Ongay y H. Carrillo, On the Firing Maps of a General Class of Forced Integrate and Fire Neurons. Journal of Mathematical Biosciences, 2001.
- [8] Jordan.D.W. Smith P. Nonlinear Ordinary Differential Equations (2007)
- [9] Perko. L. Differential Equations and Dynamical SystemsSpringer-Verlag, Berlin/New York (1996)
- [10] H. K. Khalil, Nonlinear Systems , 2da. Ed. , Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [11] F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich. Weakly Connected Neural Networks New York: Springer-Verlag, 1997
- [12] Arrowsmith and Place. Dynamical Systems, Differential Equations, maps and chaotic behaviour.
- [13] Ogata, K., 1990
- [14] Khalil, H., Nonlinear Systems, Second Edition, Prentice-Hall (1996)
- [15] Yuri A. Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory Springer,
- [16] Hoppensteadt F.C. (1997) Introduction to Mathematics of Neurons, Modeling in the frequency domain (2nd ed.) Camb. U. Press.

- [17] Hoppensteadt F.C. Eugene M. Izhikevich (1997) Weakly Connected Neural Networks Springer.
- [18] Horowitz P., Hill W. (1989) The Art of Electronics, 2nd ed., Camb. U. Press.
- [19] Hoppensteadt FC (2006) Voltage-Controlled Oscilaciones en neuronas . Scholarpedia, p.4977
- [20] Jack K. Hale y H"useyin Koçak. Dynamics and Bifurcations. Springer-Verlag, 1991.