



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HAMILTONICIDAD EN LOS (n, k) -CUBOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ERIKA LIZBETH HERNÁNDEZ MORALES

DRA. MARÍA DE LUZ GASCA SOTO



CIUDAD DE MÉXICO, 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Porque el esfuerzo tiene sus frutos y
para aquellos que creyeron en mí.*

Agradecimientos

A la Dra. María de Luz Gasca Soto por aceptar guiarme, darme herramientas, apoyo y aliento en momentos difíciles para la culminación de este proyecto.

A mi familia por darme las fuerzas y apoyo en todo momento de la licenciatura, hasta la culminación de ésta etapa.

A Daniel, Alexia, Bryan, compañeros preciados de licenciatura los cuales me brindaron su apoyo y ayuda en momentos difíciles para la culminación de este proyecto. Finalmente a mis amigos con los cuales compartí gratos momentos que sirvieron de inspiración para la licenciatura y finalmente este proyecto.

Índice general

Introducción	1
1. Antecedentes	3
1.1. Teoría de Gráficas	3
1.1.1. Producto en Gráficas	5
1.2. Redes de Interconexión	5
1.2.1. Topologías en Redes de Interconexión	6
1.3. Hipercubos	8
1.3.1. Los Códigos Gray y los Hipercubos	9
2. La red (n, k)-cubo	11
2.1. Construcción del (n, k) -cubo	11
2.2. Distancia de Lee	13
2.3. Trayectorias Ajenas	17
2.4. Aplicación: Difusión de Comunicación	25
2.4.1. Algoritmo para la difusión de la información con multi-puertos	25
2.4.2. Difusión de la Información Multi-Puerto	32
2.4.3. Ruteo Dimensional	34
2.5. Encajes	36
2.5.1. Encaje en una Malla	36
2.5.2. Encaje en Hipercubos	37
3. Ciclos Hamiltonianos en los (n, k)-cubos	41
3.1. Códigos Gray para los (n, k) -cubos	42
3.2. Encaje en Ciclos/Anillos	45
3.3. Ciclos Hamiltonianos Ajenos por Aristas	50
3.4. Ciclos Hamiltonianos Ajenos en un $(2, k)$ -cubo	51
3.5. Ciclos Hamiltonianos Ajenos en un Toro	53
3.6. Ciclos Hamiltonianos Ajenos en un Hipercubo	57
4. La red (n, k)-cubo con fallos	63
4.1. Preliminares	63
4.2. Tolerancia a fallos	66
Conclusiones	83
Bibliografía	84

Introducción

Dentro del área de las Matemáticas se encuentra la rama de la Teoría de Gráficas que estudia los objetos llamados Gráficas los cuales son un par ordenado $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de vértices y E es un conjunto de parejas no ordenadas de vértices.

Podemos usar las gráficas para modelar objetos o actividades del mundo real; en ellas podemos simular un fenómeno que se presente en el mundo real y observar su comportamiento. De esta manera, las gráficas son una representación abstracta de algún problema real.

Tal es el caso que las gráficas se utilizan para representar redes de interconexión entre computadoras, si tenemos n procesadores cada vértice representa a un procesador y cada arista representa si hay un medio de comunicación entre ellos. Si cada vértice está conectado a todos los demás, podemos decir que la red de interconexión es igual a una gráfica completa.

La red de interconexión más popular es el hipercubo, también existen algunas otras como: malla extendida también conocida como toro, estrella, hiper estrella, árboles, entre otros. Constantemente se busca mejorar estas topologías, así se decidió probar con la topología de los (n, k) -cubos ya que cuando $k = 2$ tenemos un hipercubo; es decir, los (n, k) -cubos son la generalización de los hipercubos. Estas topologías han sido implementadas en algunas computadores concurrentes como: Ametek 2020; Mosaic, la cual utiliza la topología del (n, k) -cubo; iWarp, Cray T3D y Tera las cuales utilizan la topología del toro.

El propósito del presente material es estudiar la topología de interconexión (n, k) -cubos, desde su construcción recursiva, la cuál es similar al de un hipercubo, las propiedades que presenta como la definición de una interesante métrica llamada Distancia de Lee con la que podremos encontrar rutas más cortas y la cantidad máxima de rutas ajenas de un vértice a otro, también se estudiará la forma de encajar algunas estructuras como las mallas o anillos (también llamados ciclos o toros) en la red (n, k) -cubo. Se dará como ejemplo de aplicación en el mundo real el problema de Difusión de Mensajes de forma Simultánea para ello se estudian tres algoritmos dependiendo de las capacidades que puedan tener los vértices en el mundo real. Finalmente, estudiaremos la Hamiltonicidad en los (n, k) -cubos dependiendo del valor de los parámetros n y k donde no se presenten fallos ni en aristas ni en vértices, todo esto se hará en mayor parte utilizando la generalización de los Códigos Gray. Al implementar las redes de interconexión en el mundo real se espera que en algún momento presente fallos, así que se verán algunas condiciones bajo las cuales aún podemos encontrar tanto trayectorias Hamiltonianas como ciclos Hamiltonianos en un (n, k) -cubo con fallas.

Examinaremos la red (n, k) -cubo desde el punto de vista de la Teoría de Gráficas. El presente trabajo está organizado de la siguiente forma:

- En el Capítulo 1 presentamos algunos conceptos básicos de la Teoría de Gráficas que utilizaremos a lo largo de toda la tesis, con el fin de establecer notación. Se presenta el concepto de Red de Interconexión que es parte de nuestro tema de estudio y mostraremos una breve explicación de la construcción de los hipercubos $(n, 2)$ -cubo) y cómo se construyen los Códigos Gray a partir de éstos.
- En el Capítulo 2 veremos cómo se construyen los (n, k) -cubos de forma recursiva. Introducimos la distancia de Lee y daremos una breve explicación del por qué no se puede usar la distancia de Hamming utilizada para los hipercubos. Utilizando la distancia de Lee encontraremos trayectorias ajenas por aristas entre dos vértices lo cual nos servirá para estudiar los algoritmos de Enrutamiento y Difusión de la información. Por último, mostraremos algunas formas de encajar estructuras como mallas o ciclos en el (n, k) -cubo.
- En el Capítulo 3 daremos mayor énfasis a los encajes de ciclos en el (n, k) -cubo debido a que nos interesan encontrar ciclos Hamiltonianos, se presentan cuatro funciones que generan Códigos Gray. Desde la Sección 3.2 hasta la 3.4 mostraremos los casos para poder encontrar n ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas en la gráfica (n, k) -cubo. Por último la Sección 3.5 se explica cómo generar ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas en el hipercubo.
- En el Capítulo 4 estudiaremos el concepto de **tolerancia a fallos** ya que en el Capítulo 3 supusimos que la topología (n, k) -cubo no tiene fallos, en la Sección 4.1 se definen los conceptos necesarios y por último en la Sección 4.2 analizamos al (n, k) -cubo y su tolerancia a fallas; revisaremos cuándo y cómo es posible construir trayectorias Hamiltonianas y ciclos Hamiltonianos en subgráficas del (n, k) -cubo libres de fallas, estableciendo de esta manera propiedades de hamiltonicidad para el (n, k) -cubo.
- Cabe mencionar que durante todo el trabajo se desarrollaron ejercicios para ejemplificar tanto algunas definiciones como resultados teóricos (teoremas, lemas, etc.) y algoritmos; esto se hizo con el propósito de que este material tan abstracto fuera más entendible. Finalmente presentamos las conclusiones del presente trabajo.

Capítulo 1

Antecedentes

En este capítulo presentamos conceptos básicos de la Teoría de Gráficas que es la herramienta que utilizaremos a lo largo del presente trabajo para estudiar la Red de Interconexión (n, k) -cubo. Definiremos qué es una red de interconexión y brevemente ejemplificaremos las redes más comunes, estos dos temas nos dan las bases necesarias. Por último, nos centraremos en la red de interconexión hiper-cubos $((n, 2)$ -cubo) Q_n daremos una breve explicación de su construcción. También explicamos cómo se construyen los Códigos Gray, los cuales resultan ser una herramienta muy útil para construir ciclos Hamiltonianos.

1.1. Teoría de Gráficas

Para establecer la notación de este escrito recordaremos definiciones básicas sobre la Teoría de Gráficas. Partiremos de estas definiciones y conforme avancemos en el texto, iremos definiendo términos que resulten necesarios.

Definición 1 Una **gráfica** G es una pareja ordenada $G = (V, E)$, tal que V es un conjunto distinto del vacío, tal que sus elementos son llamados **vértices**. Por otro lado, E es un conjunto de pares no ordenados (x, y) ¹, tal que $x, y \in V$, llamados **aristas**; es decir, una arista une a dos vértices.

El número de vértices de G se le denomina **orden de G** y se denota por $|V(G)|$ y el número de aristas de G se le denomina el **tamaño de G** , denotado por $|E(G)|$.

En la Figura 1.1 mostramos dos gráficas, la gráfica X está compuesta por el conjunto de vértices $V(X) = \{a, b, c, d, e, f\}$ y su conjunto de aristas $E(X) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, d), (c, e), (c, f), (d, e), (d, f), (e, f)\}$.

Por otro lado en la Figura 1.1 mostramos la gráfica Y la cual está compuesta por el conjunto de vértices: $V(Y) = \{b, d, c, e, f\}$ y su conjunto de aristas: $E(Y) = \{(b, d), (d, e), (d, f), (d, c), (c, e), (e, f)\}$.

Definición 2 Sea e la arista $(u, v) \in E(G)$. Decimos que los vértices u, v son **adyacentes** o bien que e incide en u y e incide en v ; o bien decimos que u y v son **vecinos**. Por otro lado, en caso de **adyacencia en aristas**, decimos que (v, u) y (u, x) son adyacentes con $u, v, x \in V(G)$, ya que inciden en el mismo vértice u . En la gráfica X de la Figura 1.1 el vértice a es adyacente a los demás vértices ya que existe una arista que los conecta.

¹La notación estándar para (x, y) es de una pareja ordenada, sin embargo para esta tesis estamos siguiendo la notación de los artículos escritos por *Bella Bose*[6]

Definición 3 Sea $G = (V, E)$ y $v \in V(G)$ el **grado de v** es el número de aristas incidentes en v y se denota por $d_G(v)$.

El **grado mínimo de G** se define como:

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) | v \in V(G)\}$$

El **grado máximo de G** se define como:

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) | v \in V(G)\}$$

En la Figura 1.1 notamos que en la gráfica Y el grado mínimo es 1 ya que sobre el vértice b sólo incide una arista. Por otro lado, el grado máximo es 4 ya que sobre el vértice d inciden cuatro aristas.

Definición 4 Sea $G = (V, E)$ una gráfica, decimos que G es k -regular con $k \in \mathbb{N}$ si para todo $v \in V(G)$ hay k aristas inciendiendo en v ; es decir, cada vértice en $V(G)$ tiene grado k . En la Figura 1.1, la gráfica X es 5-regular ya que sobre cada vértice inciden cinco aristas.

Definición 5 Sea $G = (V, E)$ una gráfica y sea $V' \subset V(G)$ y $E' \subset E(G)$. Decimos que $G' = (V', E')$ es una **sub-gráfica de G** . En la Figura 1.1 tenemos que la gráfica Y es una sub-gráfica de X , debido a que $V'(Y) \subset V(X)$ y $E'(Y) \subset E(X)$.

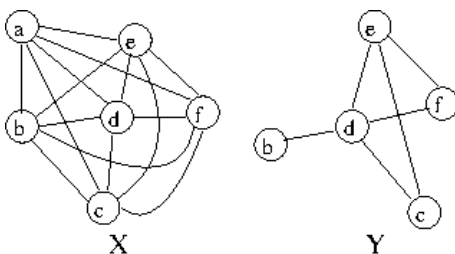


Figura 1.1: Ejemplos de Gráficas

En una gráfica $G = (V, E)$ podemos recorrer los vértices utilizando las aristas que los unen. Estos recorridos tienen diferentes características.

Definición 6 Un **camino** es una sucesión finita no vacía de vértices $C = u_1 u_2 \cdots u_k$, con $(u_i, u_{i+1}) \in E(G)$ para $1 \leq i < k$. Diremos que el vértice u_1 es el inicio del camino y el vértice u_k es el final del camino. El camino C tiene la notación $u_1 u_k$ -camino. En la Figura 1.3 podemos ver ejemplos de cinco caminos en la gráfica X .

Definición 7 Una **trayectoria** es un uv -camino en el cual no se repiten vértices. En la Figura 1.3 (1) tenemos el ejemplo de una trayectoria, ya que no se repiten vértices.

Definición 8 La **distancia entre dos vértices** denotada como $d(u, v)$, es la longitud de la trayectoria más corta entre u y v en una gráfica conexa, si la gráfica no es conexa y no existe un camino que una a u con v , la $d(u, v)$ es infinita.

Definición 9 Sea $C = u_1 u_2 \cdots u_i \cdots u_k$ un camino dentro de la gráfica G . Decimos que C es un **Ciclo** si $u_1 = u_k$, además C es un **Ciclo Hamiltoniano** si no repite vértices, salvo $u_1 = u_k$ y todos los vértices de G se encuentran en C . En la Figura 1.3 (3) tenemos el ejemplo de un ciclo, ya que no se repiten vértices y el último vértice es el mismo que el primero.

Definición 10 Sea G una gráfica, decimos que G es **Conexa** si para cualquier par de vértices u, v de G ; existe al menos una trayectoria entre u y v . En la Figura 1.2 la gráfica A nos muestra una gráfica no conexa, debido a que no hay un camino para llegar al vértice 1 desde el vértice 2 o 3.

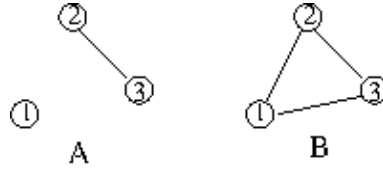


Figura 1.2: Gráfica No conexas y Conexas

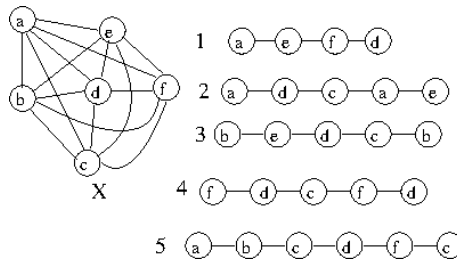


Figura 1.3: Caminos, ciclos, Trayectorias

1.1.1. Producto en Gráficas

En Teoría de Gráficas cuando nos referimos al producto de gráficas debemos tener cuidado ya que tenemos diferentes operaciones producto, para términos de este texto, sólo usaremos el **Producto Cartesiano**.

Sean $G_1 = (V, E)$ y $G_2 = (V, E)$ dos gráficas, no necesariamente iguales con sus respectivos conjuntos $V(G_1)$, $V(G_2)$, $E(G_1)$ y $E(G_2)$.

- **Producto Cartesiano:** Llamamos Producto Cartesiano a la operación binaria entre gráficas $\times : G_1 \times G_2$, tales que nos dará una nueva gráfica H en la que $V(H) = V(G_1) \times V(G_2)$ es decir los vértices de H los obtenemos a partir del producto cartesiano de $V(G_1)$ y $V(G_2)$, y si $((a, b), (c, d))$ es una arista en H si y sólo si:

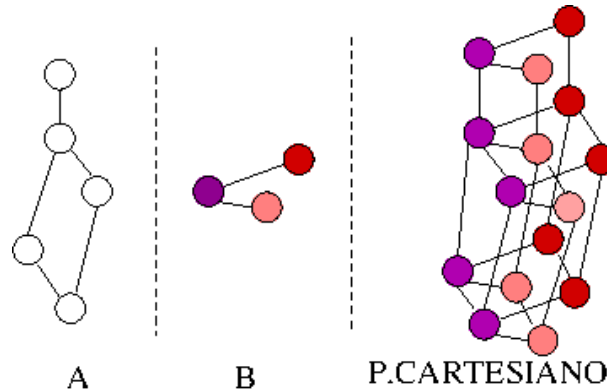
1. $a = c$ y $(b, d) \in E(G_2)$; o bien,
2. $b = d$ y $(a, c) \in E(G_1)$

Denotaremos al producto cartesiano por \times . En la Figura 1.4 mostramos la gráfica A , la gráfica B en la segunda columna y finalmente la tercera columna nos muestra como se ve el Producto Cartesiano $A \times B$, la cual podemos notar que tiene 5 copias de la gráfica B , o visto desde otra perspectiva tiene 3 copias de la gráfica A , las cuales se muestran en color morado, rosa y rojo respectivamente.

1.2. Redes de Interconexión

Como sabemos, los modelos nos sirven para representar objetos o situaciones de la vida real, así la Teoría de gráficas nos ayuda a plasmar los modelos matemáticos. En esta sección vamos a explicar brevemente el objeto y situación que representa el modelo de este escrito: la Red de Interconexión. En ciencias de la computación los modelos describen entidades reales llamadas computadoras, estos modelos de cómputo representan una versión simplificada de la computadora o de alguna parte de ella para concentrarnos en sus características esenciales.

Pensaremos en las redes de interconexión como un conjunto de procesadores P_i y sus conexiones entre

Figura 1.4: Producto Cartesiano ($A \times B$)

ellos. Estas conexiones que permiten la comunicación recíproca entre los procesadores es a lo que le llamaremos una **Red de Interconexión**. Teniendo en cuenta lo anterior, el modelo tiene la estructura de una gráfica no dirigida $G = (V, E)$ en donde cada procesador P_i es representado por un vértice v_i y cada enlace entre procesadores (P_i, P_j) está representado por una arista (v_i, v_j) . Algunos ejemplos de redes de interconexión son: los sistemas informáticos, las redes de computadoras, los sistemas de información y los sistemas de transporte.

Existen diferentes formas de acomodar estos procesadores y enlazarlos, nos referiremos a estas estructuras de redes de interconexión como **topologías de redes de interconexión**. Esta variedad de topologías se debe a que cada una tiene diferentes propiedades, las cuales pueden ser diámetro de red, simetría, homogeneidad, etc.

1.2.1. Topologías en Redes de Interconexión

Supondremos que tenemos n procesadores

1. **Arreglo Lineal** (*Linear Array*) Es la red de interconexión más simple considerada fundamental. Los n procesadores se acomodan en una línea recta; es decir, una trayectoria, cada vértice P_i , con $1 < i < n$, está conectado con dos vértices adyacentes P_{i-1} y P_{i+1} a excepción de los procesadores P_1 y P_n los cuales sólo tienen un vértice adyacente. En esta topología el diámetro es $n - 1$ ya que nos toma $n - 1$ pasos llegar de un extremo al otro. La homogeneidad no es igual para los procesadores P_1 y P_n que para los demás.

Un caso especial de los arreglos Lineales son los **Ciclos**, conocidos en computación como Ring o **Anillos**, en los cuales su única diferencia es que los procesadores P_1 y P_n están conectados por lo que todos los procesadores P_i del arreglo tienen dos vecinos. Con el nuevo enlace entre P_1 y P_n el diámetro se ve reducido a $n/2$, los procesadores son homogéneos y existe la simetría. En la Figura 1.5(a) tenemos el ejemplo de un arreglo lineal de cuatro procesadores y en la Figura 1.5(b) tenemos un anillo de cuatro procesadores.

2. **Estrella** (*Star*) Esta red consta de un procesador supongamos P_1 en el centro y los procesadores P_i , con $2 < i < n$, colocados al rededor de P_1 , así cada P_i (los picos de la estrella) está unido

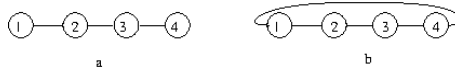


Figura 1.5: Redes de Interconexión en forma de Arreglo y Ciclo.

solamente a P_1 . Si queremos comunicar a dos procesadores tendremos que pasar forzosamente por P_1 por lo que el diámetro es 2; sin embargo, no tenemos homogeneidad ya que tenemos al procesador P_1 que siempre estará en nuestra trayectoria. En la Figura 1.6, el procesador 1 está al centro de la estrella.

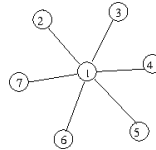


Figura 1.6: Red de Interconexión en forma de Estrella

3. **Árboles** (*Trees*) La topología es una gráfica de tipo árbol, existe un procesador raíz, los vértices internos son procesadores y las hojas son recursos computacionales. Un inconveniente de esta red es que toda ruta debe pasar por el vértice raíz por lo que no tenemos homogeneidad. En la Figura 1.7 tenemos un ejemplo en donde el vértice 0 es la raíz.

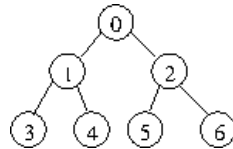


Figura 1.7: Red de Interconexión en forma de Árbol

4. **Red Completa** (*Complete Network*) Es la red más obvia ya que representa a la gráfica completa, K_n , donde cada procesador está conectado directamente a los restantes $n - 1$ procesadores. El grado de cada vértice es de $n - 1$, el diámetro es 1, es simétrica y homogénea. Sin embargo, implementar esta red en la vida real resulta ser muy costoso ya que tenemos un total de $n - 1$ enlaces, lo cual excede el límite de físico de procesadores. En la Figura 1.8 tenemos el ejemplo de una red completa de cinco procesadores (a) y de cuatro procesadores (b).
5. **Malla** (*Grids*) Esta red la podemos visualizar como una cuadrícula de n filas por m columnas donde en cada intersección se localiza un procesador, esto es conveniente ya que nos podemos referir a los procesadores por coordenadas xy . Los procesadores que se encuentran en el perímetro de la malla tienen grado 3, los extremos tienen grado 2 y por último los procesadores que no están en el perímetro tienen grado 4 por lo que no hay homogeneidad, el diámetro es de $(m - 1) + (n - 1)$. En la Figura 1.9 (a) vemos el ejemplo de una malla de 4×3 . La malla se puede generalizar a d dimensiones.
6. **Toro** (*Torus*) Esta topología se le considera una mejora de la topología de malla. Básicamente es una malla en la que sus nodos extremos están unidos; es decir, si vemos cada columna veremos un

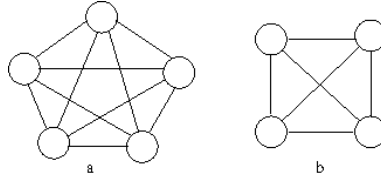


Figura 1.8: Red de Interconexión en forma Completa

ciclo y si observamos cada fila veremos un ciclo. Así el grado de cada vértice es 4 por lo que tenemos simetría y homogeneidad. El toro se puede generalizar a d dimensiones: (n_1, n_2, \dots, n_d) -Toro y su diámetro es $\sum_{i=1}^d \lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$

En la Figura 1.9 (b) se transformó a la malla de 4×3 en un toro.

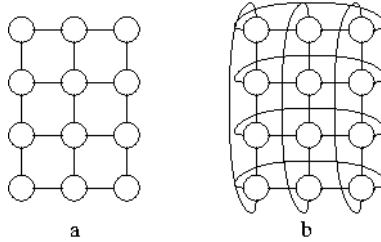


Figura 1.9: Redes de Interconexión de Malla y Toro.

1.3. Hipercubos

En la Sección anterior de Redes de Interconexión mostramos algunas de las más populares topologías de Redes de Interconexión, ahora hablaremos sobre la topología llamada Hipercubo. Se le conoce como hipercubo a la gráfica de 3-dimensional que es utilizada para representar nuestro mundo real. Para términos de este documento lo llamaremos hipercubo n -dimensional, donde $n \in \mathbb{N}$ nos indica en qué dimensión nos encontramos, por lo que nos referimos a un cuadrado cuando decimos un hipercubo de 2-dimensional. Al igual que en la sección anterior los vértices del hipercubo representan a los procesadores y las aristas las uniones entre los procesadores.

El hipercubo fue la red de interconexión más popular propuesta en 1978 y fue hasta 1981 que se implementó en el Caltech Cosmic Cube, en 1980 se comenzaron a estudiar las propiedades del hipercubo utilizando la Teoría de Gráficas. Como ya mencionamos en la Introducción, los (n, k) -cubos son el caso general de los hipercubos; es decir, un hipercubo es un (n, k) -cubo cuando $n = 2$, por lo que en esta sección explicaremos cómo construir hipercubos de forma recursiva para después poder extender esta construcción a los (n, k) -cubos en el siguiente capítulo.

Construcción del Hipercubo Q_n

- **Caso Base:** Comenzamos con la gráfica completa K_2 que coincide con el Q_1 , para diferenciar a cada vértice les pondremos la etiqueta 0, 1 por lo que $B = \{0, 1\}$. Esto nos genera el hipercubo Q_1
- **Paso Recursivo:** Podemos pensar en un hipercubo de dimensión n como el producto de dos

gráficas; el Q_{n-1} con K_2 , es decir:

$$Q_n = Q_{n-1} \times K_2$$

El número total de vértices será 2^n al estarse duplicando las copias de forma recursiva. Ya que tenemos la idea de cómo construir el hipercubo, necesitamos una forma de diferenciar los vértices para poder referirnos a uno en específico, por lo que necesitamos etiquetarlos, cada etiqueta será una sucesión de 0 y 1, además tendrá longitud n para un hipercubo n -dimensional.

En el paso recursivo al multiplicar las gráficas K_2 y Q_{n-1} obtenemos dos copias de la gráficas Q_{n-1} necesitamos diferenciarlas, por lo que a las etiquetas de Q_{n-1} les anteponeamos un 0 y a las etiquetas de Q'_{n-1} les anteponeamos el dígito 1. Al hipercubo Q_n también lo podemos visualizar como dos copias de Q_{n-1} .

Ejemplo 1 Vamos a mostrar cómo es la construcción de los hipercubos de dimensión 1, 2, 3, 4 y cómo se realiza el producto cartesiano entre sus sub-cubos.

En la Figura 1.10 la primera columna nos dice el hipercubo que se está representando. En la segunda columna podemos ver la notación del producto cartesiano, en la tercera columna vemos gráficamente la columna número dos. Para la cuarta columna obtenemos el resultado final de como se ve Q_n y por último en la quinta columna vemos como se ve la descomposición de Q_n en dos copias de Q_{n-1} .

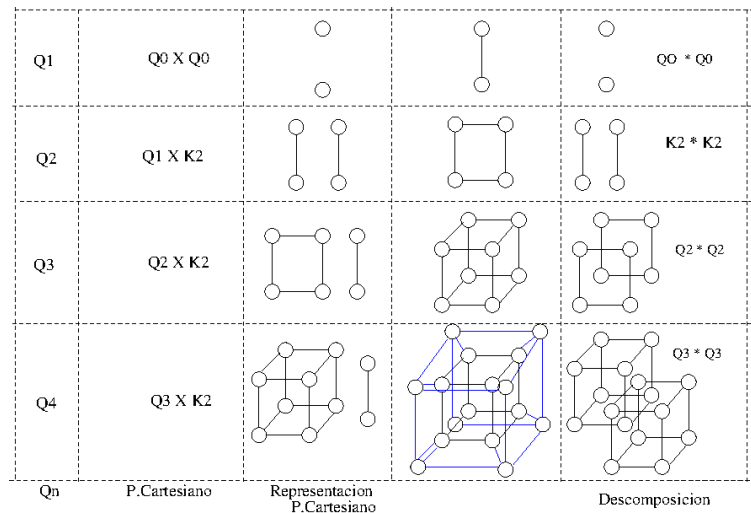


Figura 1.10: Construcción de los primeros hipercubos

1.3.1. Los Códigos Gray y los Hipercubos

Si queremos encontrar un Ciclo Hamiltoniano en un hipercubo n -dimensional necesitamos encontrar una trayectoria para recorrer todo el hipercubo, mostramos que las aristas conectan pares de vértices si estos difieren en una posición de su etiqueta. Buscaremos una función f que asocie un valor a cada elemento, por definición de función inyectiva, para cada dos elementos diferentes la función devolverá etiquetas diferentes y aplicando f podríamos saber la etiqueta de cada elemento, sin necesidad de conocer las otras etiquetas.

Definición 11 Sea $A = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_r \rangle$ una secuencia de vértices etiquetados en una gráfica hipercubo, A es un anillo o ciclo de longitud r si cumple:

1. $a_i \neq a_j$ para $1 \leq i, j \leq r$
2. $D_L(a_i, a_{i+1}) = 1$ para $1 \leq i \leq (r - 1)$
3. $D_L(a_r, a_1) = 1$

En la parte de construcción observamos que cada vértice está dentro de n ciclos de 2 vértices cada uno. Cada anillo representa una secuencia de números en base 2, para los hipercubos las etiquetas son números binarios (base 2), por lo que la longitud de las etiquetas es igual a n y preserva que si dos etiquetas son consecutivas solo difieren en un dígito. Las secuencias en base 2 que cumplen con estas propiedades se conocen como **Códigos Gray**, también llamados **Código Binario Reflejado**. Visualmente los podemos entender por medio de gráficas, lo cual es pertinente ya que queremos recorrer los vértices del hipercubo Q_n .

Existen diversas formas de generar los Códigos Gray, sin embargo, la más fácil e intuitiva es que al tener k etiquetas, la mitad de ellas serán el reflejo de las anteriores:

Definición 12 Para generar el Código Gray en base 2 (esto quiere decir $k = 2$).

- Si el código es de 1-bit (longitud 1) se define como:

$$G = \{ 0, 1 \}$$

- Si el código es de 2-bits entonces partiendo del caso anterior, se hace una copia del anterior y después una copia al revés:

$$G = \{ 0, 1, 1, 0 \}$$

Las copias se distinguen anteponiendo a una de ellas el número 0 y la otra el número 1

$$G = \{ 00, 01, 11, 10 \}$$

- Si el código es de 3-bits (longitud 3) entonces partiendo del caso de 2-bits, se hace la copia y después una copia de su *reversa*:

$$G = \{ 00, 01, 11, 10, 10, 11, 01, 00 \}$$

Análogamente, anteponeamos un 0 y 1 para distinguir las copias.

$$G = \{ 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100 \}$$

- Para el código de n -bits, se hará una copia de $n - 1$ y una copia con su reversa, a la primera se le antepone el número 0 y a la segunda se le antepone el número 1.

Capítulo 2

La red (n, k) –cubo

En el Capítulo 1 presentamos brevemente lo que es una red de Interconexión y algunas topologías básicas. En este capítulo abordaremos a la topología conocida como (n, k) –cubo, denotada como Q_n^k , mostraremos su construcción recursiva y algunas de sus propiedades como gráfica, tanto propiedades topológicas como algorítmicas. Encontraremos trayectorias ajenas entre vértices ayudados por la distancia de Lee, con lo anterior abordaremos el problema de Difusión de la Información cuando cada procesador sólo tiene un puerto o es multi-puerto. Finalmente daremos una introducción al tema de Encajes, mismo que tendrá importancia en el siguiente capítulo.

2.1. Construcción del (n, k) –cubo

En esta sección mostraremos una idea general de cómo construir la gráfica (n, k) –cubo también denotada Q_n^k , cómo se puede representar y las posibles subgráficas que nos ayudarán a trabajar con ella en los capítulos posteriores.

Un (n, k) –cubo Q_n^k es una gráfica que posee k^n vértices, cada uno de estos vértices lo identificamos por una etiqueta la cual está formada por n -bits, tal que cada bit está en base k .

Construcción Recursiva

Una forma de definir al (n, k) –cubo, Q_n^k es recursivamente. La idea general es construirlo a partir de un ciclo A de k elementos donde cada uno de estos, es un vértice de Q_1^k representado por su etiqueta, $A = \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$ y estos dígitos están en base k .

- **Caso Base:** Sea el $(1, k)$ –cubo Q_1^k , el cual es un ciclo que tiene k vértices, sin pérdida de generalidad, podemos acomodar en el espacio estos k vértices, la forma más sencilla y conveniente es colocar los k vértices en línea recta, así el nodo que esté en la última posición de derecha a izquierda será etiquetado con el 0 y el vértice en la última posición de izquierda a derecha tendrá la etiqueta $k - 1$ así podemos ver la forma de ciclo.
- **Paso Recursivo:** Un (n, k) –cubo contiene k componentes, denominados sub-cubos, tal que cada componente es un $((n - 1), k)$ –cubo. Tomando como referencia la primera de estas componentes se puede ver como un ciclo, tal que en éste se encuentran todos los vértices en la posición i de

cada componente, esto para todas las posiciones de las componentes. Es decir:

$$Q_n^k = Q_{n-1}^k \times C_n$$

Podemos acomodar a los ciclos sobre líneas rectas, por lo que lo podemos ver como $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n$ que es una malla tal que los vértices que quedan en los extremos tienen una arista que los conecta directamente. Al ser A un ciclo, cada vértice tiene dos aristas adyacentes para $k \geq 2$ ya que existe una arista entre el vértice i y el vértice $i + 1 \pmod k$, además, por cada vértice pasan n ciclos, por lo que hace a Q_n^k una gráfica $2n$ -regular.

Otra observación es que $k, n \in \mathbb{N}$, debido a que no existen gráficas con un número negativo de vértices, pues no tiene sentido, y para $k = 0$ entonces $0^n = 0$ para cualquier n y si $n = 0$ tendríamos entonces $k^0 = 1$ por lo que tendríamos un solo vértice.

Ejemplo 2 Mostraremos la construcción de un (n, k) -cubo, Q_n^k para $n = 1, 2, 3$, usando la definición recursiva. Fijamos $k = 3$

1. Para $n = 1$ la cantidad de vértices del $(1, 3)$ -cubo Q_1^3 es $3^1 = 3$, lo cual implica que hay un ciclo con 3 vértices. La forma de diferenciar estos tres vértices es asignando las etiquetas 0, 1, 2. En la Figura 2.1 (A) podemos observar la forma de ciclo.
 2. Para $n = 2$ la cantidad de vértices del $(2, 3)$ -cubo o Q_2^3 es $3^2 = 9$, hay tres copias del $(1, 3)$ -cubo. Las etiquetas de la componente base tienen la forma $0*$; es decir: 00, 01, 02, las etiquetas de la primera copia tienen la forma $1*$; es decir: 10, 11, 12, las etiquetas de la segunda copia tienen la forma $2*$; es decir: 20, 21, 22. Cada copia es un ciclo, además se forman los siguientes ciclos.
 - En el cuarto ciclo estarán los vértices 00, 10, 20, los de la forma $x0$ con $x \in \{0, 1, 2\}$
 - El quinto ciclo están los vértices 01, 11, 21, los de la forma $x1$ con $x \in \{0, 1, 2\}$
 - El sexto ciclo estarán los vértices 02, 12, 22 los de la forma $x2$ con $x \in \{0, 1, 2\}$

En la Figura 2.1 (B) se observa que se agregan dos copias del ciclo anterior, se colocan las etiquetas correspondientes y se forman tres nuevos anillos mostrados en color morado, azul y verde.

3. Para $n = 3$ la cantidad de vértices es $3^2 = 27$, la gráfica es difícil de visualizar por la cantidad de aristas que se tiene por cada nodo. Las etiquetas de la copia base tienen la forma: $0**$, las etiquetas de la primera copia tienen la forma $1**$ y las etiquetas de la segunda copia tienen la forma $2**$, además de formarse nueve anillos nuevos:

■ 000, 100, 200	■ 010, 110, 210	■ 020, 120, 220
■ 001, 101, 201	■ 011, 111, 211	■ 021, 121, 221
■ 002, 102, 202	■ 012, 112, 212	■ 022, 122, 222

En la Figura 2.1 (C) se agregan dos copias del caso $n = 2$ y se forman nueve ciclos nuevos (tres rosas, tres azules y tres verdes).

Una última observación a considerar con la partición de un Q_n^k , ya que sabemos que nos dará k copias de Q_{n-1}^k , estas k copias podemos utilizarlas en la dimensión que más nos convenga, esto lo veremos claramente en el Capítulo 4. Ejemplificaremos con el $(3, 3)$ -cubo Q_3^3 de la Figura 2.1.C.

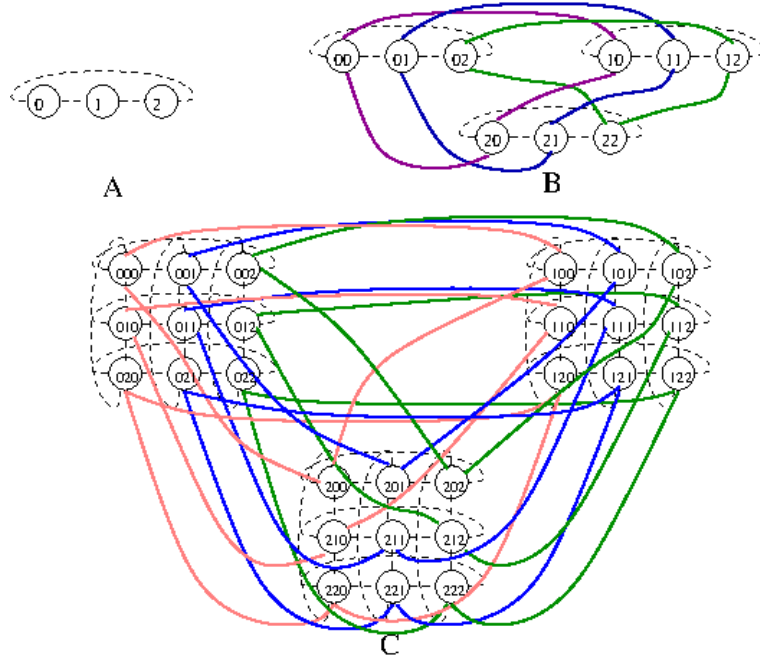


Figura 2.1: Ejemplo de (Q_n^3) para $n = 1, 2, 3$

Ejemplo 3 Considerando Q_3^3 , mostramos gráficamente cómo es posible ver las particiones en las tres dimensiones correspondientes.

En la Figura 2.2 (A) presentamos la partición a través de la dimensión 0, los vértices en verde tienen la forma $0**$, los azules $1**$ y los rosas $2**$. En la Figura 2.2 (B) presentamos la partición a través de la dimensión 1, así los vértices verdes tienen la forma $*0*$, los azules $*1*$ y los rosas $*2*$. Por último la Figura 2.2 (C) ilustra la partición a través de la dimensión 2, así los vértices azules son de la forma $**0$, los verdes $**1$ y los rosas $**2$.

2.2. Distancia de Lee

Los (n, k) -cubo Q_n^k son una generalización de los hipercubos Q_n , sin embargo sus diámetros no son iguales, la distancia entre vértices en el hipercubo (conocida como la Distancia de Hamming) que indica el número de posiciones en que difieren las etiquetas de dos vértices, esta regla no la podemos aplicar en el (n, k) -cubo Q_n^k . Por lo cual definiremos otra métrica, que es la Distancia de Lee.

Definición 13 Sea A un vértice en el (n, k) -cubo Q_n^k , $A = (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1a_0)$. Se define el **peso del vértice A** como:

$$W_L(A) = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \tag{2.1}$$

en donde $|a_i| = \min(a_i, k - a_i)$

Definición 14 Sean A y B dos vértices en un (n, k) -cubo Q_n^k , donde $A = (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1a_0)$ y $B = (b_{n-1}b_{n-2} \cdots b_1b_0)$. Se define la **Distancia de Lee entre A y B** en función del peso de la

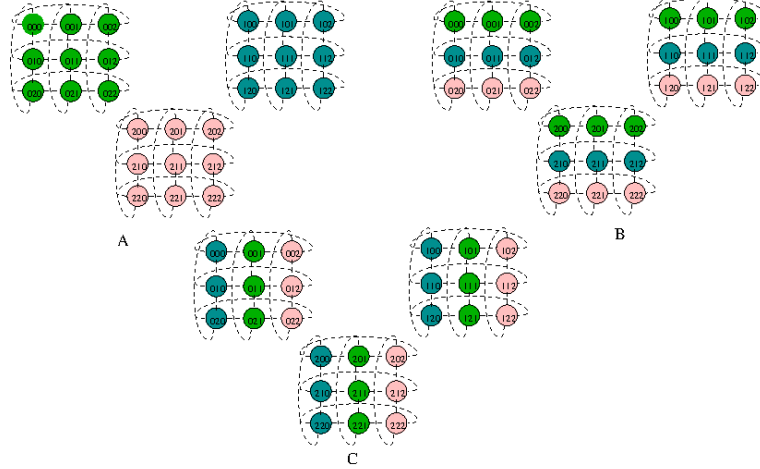


Figura 2.2: $k = 3$ con $n = 1, 2, 3$

siguiente forma:

$$D_L(A, B) = W_L(A - B) \tag{2.2}$$

Ejemplo 4 Consideremos la gráfica $(2, 4)$ -cubo Q_2^4 , encontrar el peso de los vectores 00, 12, 31 y la distancia entre los vértices $D_L(12, 31)$.

En la Figura 2.3 se muestra en color rosa el vértice 12 y en color azul el vértice 31.

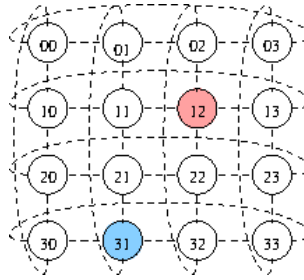


Figura 2.3: Ejemplificación Distancia de Lee en $(2,4)$ -cubo

Primero calculamos el peso de los vértices.

$$W_L(00) = \sum_{i=0}^1 |a_i| \text{ en donde} \tag{2.3}$$

$$|a_0| = \min(0, 4 - 0) = 0, \quad |a_1| = \min(0, 4 - 0) = 0$$

$$\text{Obtenemos: } W_L(0, 0) = |a_0| + |a_1| = 0 + 0 = 0$$

$$W_L(12) = \sum_{i=0}^1 |a_i| \text{ en donde} \tag{2.4}$$

$$|a_0| = \min(1, 4 - 1) = \min(1, 3) = 1, \quad |a_1| = \min(2, 4 - 2) = \min(2, 2) = 2$$

$$\text{Obtenemos: } W_L(1, 2) = |a_0| + |a_1| = 2 + 1 = 3$$

$$W_L(31) = \sum_{i=0}^1 |a_i| \text{ en donde} \quad (2.5)$$

$$|a_0| = \min(3, 4 - 3) = \min(3, 1) = 1, \quad |a_1| = \min(1, 4 - 1) = \min(1, 3) = 1$$

Obtenemos: $W_L(3, 1) = |a_0| + |a_1| = 1 + 1 = 2$

Calculando la distancia entre los vértices 12, 31.

$$D_L(12, 31) = W_L(12 - 31)$$

Se calcula la distancia de cada bit

$$\begin{aligned} |1 - 3| &= 2 \\ |2 - 1| &= 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$W_L(12 - 31) = W_L(21) = 2 + 1 = 3$$

De lo anterior podemos verificar en la gráfica de la Figura 2.3, que en efecto, la distancia entre los vértices 31 y 12 es 3.

Recordaremos algunos conceptos de la teoría de gráficas los cuales nos serán de utilidad.

Definición 15 Sea $v \in V(G)$, la **excentricidad** de v , se define como $e(v) = \max\{d(v, w) : w \in V(G)\}$. En otras palabras es la máxima distancia del vértice v a cualquier otro vértice de la gráfica G .

Definición 16 Se define al **diámetro** de la gráfica G como: $diam(G) = \max\{e(v) : v \in V(G)\}$. En otras palabras primero obtenemos la excentricidad de cada vértice de G y la mayor de éstas es el diámetro.

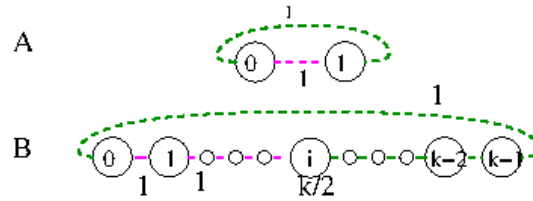
De las definiciones anteriores podemos notar que si queremos llegar del vértice A al vértice B , existen varias formas de llegar. Pero $diam(G) \geq d(A, B)$, nos da una cota superior sobre la mayor distancia que encontraremos en G , por lo que nos interesa conocer cuál es el diámetro de la gráfica (n, k) -cubo.

Observación: Sea G un hipercubo $(n, 2)$ -cubo o Q_n^2 , sabemos que el $diam(G) = n$, entonces se tiene que $diam(Q_n^k) = n * \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ para $k \geq 3$.

Intuitivamente, podemos ver que el diámetro de un hipercubo es n debido a que la longitud de la etiqueta en un vértice es n . Sean $A = (a_0 a_1 \cdots a_{n-1})$ y $B = (b_0 b_1 \cdots b_{n-1})$ vértices en un hipercubo H , cada $a_i, b_i = 0$ o 1 con $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Si queremos llegar desde A , hasta B , comparamos cada a_i con b_i . Ya que sólo tenemos dos números 0 y 1, $a_i = b_i$ o $a_i \neq b_i$, entonces cambiamos, si $a_i = 0$ ahora $a_i = 1$ y por otro lado $a_i = 1$ ahora $a_i = 0$. Así que a lo más tendremos que hacer n cambios. Por ejemplo del vértice $A = 0000$ a $B = 1111$ en un $(4, 2)$ -cubo Q_4^2 para cada a_i se tendrá que cambiar el número, por lo que se harán $n = 4$ cambios. En la Figura 2.4 (A) se muestra que para hacer el cambio sólo necesitamos un paso.

Tomando lo anterior, para la gráfica (n, k) -cubo vimos que a lo más tendremos n cambios, que es el tamaño de las etiquetas, pero ahora tenemos números de $1, 2, 3, k-1$, gracias a la distancia de Lee, sabemos que en un ciclo sobre alguna dimensión el diámetro es $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Multiplicando lo anterior, obtenemos $diam(Q_n^k) = n * \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ para $k \geq 3$. En la Figura 2.4 (B) si el vértice i se encuentra a la mitad del ciclo de longitud k , nos toma a lo más $k/2$ pasos alcanzarlo.

Para ver gráficamente esto, tomaremos el ejemplo de la gráfica $(3, 3)$ -cubo o Q_3^3 :

Figura 2.4: Diámetro del anillo de longitud k

Ejemplo Sea $(3, 3)$ -cubo, su diámetro según la Observación 2.2 es $3 * \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 3 * 1 = 3$, lo cual indica que la mayor distancia entre cualesquiera dos vértices es 3.

Sea el vértice $A = 112$, la distancia a todos los vértices agrupada de acuerdo a la longitud de la distancia que los separa queda:

- Los vértices a *distancia 1* de A son: 012, 102, 122, 110, 111, 212.
- Los vértices a *distancia 2* de A son: 002, 022, 010, 011, 100, 101, 121, 120, 202, 210, 211, 222.
- Los vértices a *distancia 3* de A son: 000, 001, 020, 021, 200, 201, 220, 221.

Notemos que la distancia de Lee coincide con la distancia de Hamming para $k = 2$, para $k > 3$ se tiene que $D_L(A, B) \leq D_H(A, B)$. Si $D_L(A, B) = 1$ significa que hay una arista entre los vértices A y B . En la Figura 2.5 apreciamos al vértice 112 en color blanco, los vértices de distancia 1 en color azul, por ultimo los vértices de distancia 2 en color rosa y los vectores de distancia 3 en color amarillo.

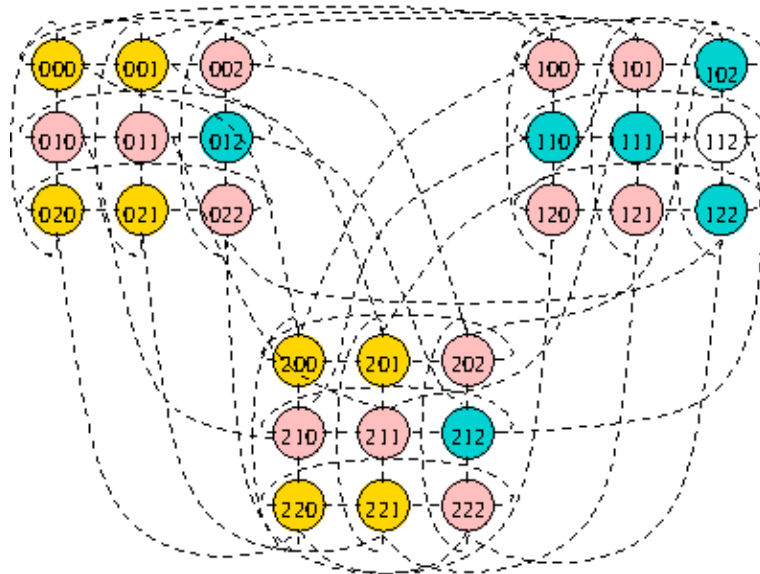


Figura 2.5: Distancias del vértice 112

2.3. Trayectorias Ajenas

En la sección anterior se presentó la Distancia de Lee para obtener la longitud de la distancia más corta entre dos vértices, ahora nos preguntamos ¿Cuántas trayectorias existen entre dos vértices? Para ayudar a encontrar una aplicación útil, discutiremos el problema de transmitir una gran cantidad de datos en una computadora cuya red de interconexión se puede ver como una gráfica (n, k) -cubo Q_n^k . ¿Cuál sería una forma óptima de hacerlo?

Una buena solución que provee el procesamiento en paralelo consiste en partir la cantidad de datos en pequeños bloques (paquetes de datos) y enviar cada paquete por rutas diferentes. Al dividir los datos, se espera que no se crucen en algún punto o no tendría sentido dividirlos en un principio. La mejor forma de garantizar esto consiste en encontrar diferentes trayectorias ajenas por vértices entre el vértice de origen A y el vértice final B , con esto también disminuye la tolerancia a fallos al tener diferentes opciones de trayectorias en caso de que alguna falle.

Para llevar a cabo el proceso anterior, es importante saber ¿Cuántas trayectorias ajenas por vértices hay en un (n, k) -cubo Q_n^k ? El siguiente teorema proporciona la respuesta:

Teorema 1 Sean $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$ y $B = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$ vértices, en un (n, k) -cubo. Sean $\ell = D_L(A, B)$ la distancia de Lee y $h = D_H(A, B)$ la distancia de Hamming, además, sea $w_i = D_L(a_i, b_i)$ para $0 \leq i \leq n-1$. Si $k > 2$ hay un total de $2n$ trayectorias ajenas por vértices entre A y B que además cumplen con que:

1. h trayectorias tiene longitud ℓ ;
2. $2(n-h)$ trayectorias tiene longitud $\ell + 2$; y
3. para cada i tal que $w_i \geq 0$ hay una trayectoria de longitud $\ell + k - 2w_i$.

Demostración: Para la demostración del teorema construiremos las trayectorias. Sin pérdida de generalidad, consideremos que los primeros h dígitos de A y B son diferentes y los restantes $n-h$ son iguales.

1. Para i tal que $0 \leq i < h$, los primeros h dígitos diferentes, la trayectoria P_i se construye de la siguiente forma:
Empezamos desde el vértice A , desde el dígito a_i se alcanza el valor del dígito b_i usando la trayectoria más corta en el ciclo de dimensión i , cambiando el dígito a_i por el siguiente dígito en el ciclo i hasta que sea igual al dígito b_i . Se repite este proceso para todos los dígitos restantes de A siguiendo con el dígito $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{h-1}, 0, \dots, a_{i-1}$. Esto genera h trayectorias de longitud ℓ . En la Figura 2.6 desde i , sumando una unidad se llega a j por la trayectoria más corta.
Restando una unidad se llega a j por la trayectoria más larga.
2. Para la construcción de las siguientes $2(n-h)$ trayectorias que serán de longitud $\ell + 2$ procedemos de la siguiente forma:
 - Para cada j tal que $h \leq j < n$, sumamos 1 al dígito 1, no olvidando que todas las sumas o restas están en mód k , luego repetimos el procedimiento anterior también utilizando la trayectoria más corta para los dígitos i , con $1 \leq j < h$, por último se resta 1 al dígito j . Con esto las $n-h$ trayectorias tendrán longitud $\ell + 2$, debido a que se le agregó y quitó 1 al dígito j , se hicieron dos pasos adicionales.

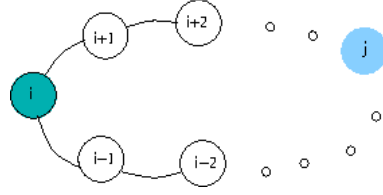


Figura 2.6: Teorema 1 ejemplo 1

- Para las $n - h$ trayectorias restantes, primero se resta uno al dígito j , se repite el procedimiento de corrección (que se mostró en los incisos anteriores) para finalmente sumar 1 al dígito j . Este paso nos genera también $n - h$ trayectorias con longitud $\ell + 2$.

De las dos condiciones anteriores obtenemos $2(n - h)$ trayectorias de longitud $\ell + 2$.

En la Figura 2.7 desde i , primero se sumó 1, para cambiar de dimensión, se utiliza la trayectoria más corta para los demás índices, por último se regresa a la dimensión inicial.

En el caso, estando desde i en el primer paso se resta una unidad y al final se suma una unidad, el proceso entre la resta y la suma es análogo.

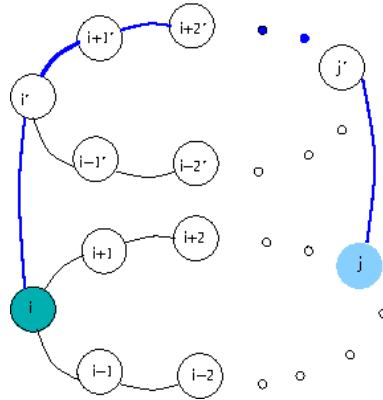


Figura 2.7: Teorema 1 ejemplo 2

3. Para construir las h trayectorias restantes hacemos lo siguiente:

Para cada i con $0 \leq i < h$ se suma o resta 1 para moverse sobre la trayectoria más larga en el ciclo en la dimensión i entre a_i y b_i . Este paso es contrario a los puntos anteriores para el dígito i . Después se alcanzará el dígito b_i con los dígitos restantes utilizando la trayectoria más corta en los ciclos de dimensión $i + 1, i + 2, \dots, h - 1, 0, \dots, i - 1$; esto quiere decir, se utiliza el mismo procedimiento de los dos incisos anteriores.

Por último, se completa la trayectoria hacia B cambiando el dígito i siguiendo la trayectoria más larga en la dimensión i , hasta que sea igual a b_i . La longitud de esta trayectoria será $\ell + k - 2w_i$ debido a que alcanzar el dígito b_i usando la trayectoria más larga en el ciclo de dimensión i usa $(k - w_i)$ pasos y alcanzar los dígitos restantes de B usando la trayectoria más corta en cada ciclo requiere $(\ell - w_i)$.

En la Figura 2.8 desde i , se elige la trayectoria más larga, luego se alcanzan los dígitos de los demás índices i y se regresa a terminar la trayectoria de la dimensión i siguiendo la trayectoria más larga.

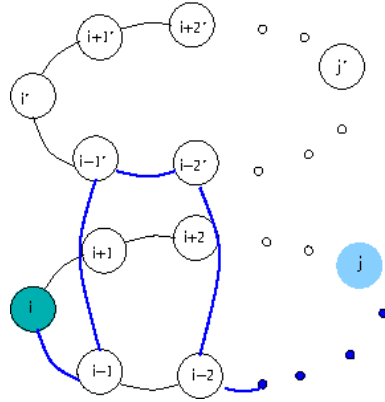


Figura 2.8: Teorema 1 ejemplo 3

Las trayectorias formadas no comparten vértices, excepto los vértices extremos A y B . El teorema no es válido cuando $k = 2$ debido a que sumar o restar 1 al dígito 1 da el mismo resultado, en otras palabras la trayectoria más corta y más larga tienen siempre la misma longitud.

A continuación ejemplificaremos el Teorema 2.3.

Ejemplo 5 Encontrar las trayectorias ajenas entre los vértices $A = (013)$ y $B = (034)$ en el $(3, 5)$ -cubo. Aplicamos el Teorema 2.3 para encontrar a ℓ y h .

$$\begin{aligned} \ell = D_L(A, B) &= W(A - B) = W(013 - 034) = W(034) = \\ &= \min\{0, 5 - 0\} + \min\{3, 5 - 3\} + \min\{4, 5 - 4\} = 0 + 2 + 1 = 3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para h se tiene que: $h = 2$ ya que $A=013$ y $B = 034$

La longitud de las etiquetas de A y B es 3, por lo que tenemos A_i y B_i con $i \in \{0, 1, 2\}$ así:

$$A = A_2 = 0, A_1 = 1, A_0 = 3 \quad \text{y} \quad B = B_2 = 0, B_1 = 3 B_0 = 4$$

1. Las primeras $h = 2$ trayectorias de longitud 3 a las cuales llamaremos φ_1 y φ_2 , quedan de la siguiente manera.

Empezamos para la trayectoria φ_1 .

Se comienza con $i = 0$, como $A_0 \neq B_0$, procedemos a alcanzar el dígito 4 partiendo del 3, la trayectoria más corta es solo agregar 1:

$$013 \rightarrow 014$$

Para $i = 1$, $A_1 \neq B_1$ se alcanza el dígito 3 desde el dígito 1, se tiene que pasar por el dígito 2 para lograrlo:

$$014 \rightarrow 024 \rightarrow 034$$

Para la trayectoria φ_2 .

Iniciamos con $i = 1$, $A_1 \neq B_1$ alcanzando el dígito 3 desde el dígito 1:

$$013 \rightarrow 023 \rightarrow 033$$

Para $i = 2$, $A_2 = B_2$ por lo que no sucede nada.

Para $i = 0$, $A_0 \neq B_0$, se alcanza el dígito 4 desde el 3:

$$033 \rightarrow 034$$

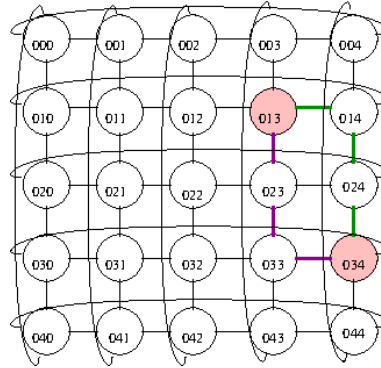


Figura 2.9: Caminos 1 y 2

En la figura 2.9 desde el vértice 013, la trayectoria morada representa a φ_1 y la trayectoria verde representa a φ_2 .

2. Las siguientes $2(3 - 2) = 2$ trayectorias de longitud 5 a las cuales llamaremos φ_3 y φ_4 , respectivamente, se construyen de la siguiente forma:

Tomando la variable j , tal que $2 \leq j < 3$, entonces $j = 2$

Para la trayectoria φ_3 .

Se suma 1 mód k al valor $A_j = A_2$:

$$013 \rightarrow 113$$

Se procede a aplicar el mismo procedimiento del paso 1.

Para $i = 0$, $A_0 \neq B_0$, se alcanza el dígito 4 desde el dígito 3:

$$113 \rightarrow 114$$

Para $i = 1$, $A_1 \neq B_1$, se alcanza el dígito 3 desde el dígito 1.

$$114 \rightarrow 124 \rightarrow 134$$

Para $i = 2$, $A_2 = B_2$, no se realiza algún paso.

Por último se resta el 1 que sumamos a la posición $A_j = A_2$.

$$134 \rightarrow 034$$

Para la trayectoria φ_4 .

Como en el paso anterior empezamos sumando 1 a la posición j , después se resta 1:

$$013 \rightarrow 413$$

Se procede a aplicar el mismo procedimiento del paso 1.

Para $i = 0$, $A_0 \neq B_0$, se alcanza el dígito 4 desde el dígito 3:

$$413 \rightarrow 414$$

Para $i = 1$, $A_1 \neq B_1$, se alcanza el dígito 4 desde el dígito 1:

$$414 \rightarrow 424 \rightarrow 434$$

Para $i = 2$, $A_2 = B_2$, no se realiza algún paso.

Por último se añade el 1 que se restó a la posición $A_j = A_2$:

$$434 \rightarrow 034$$

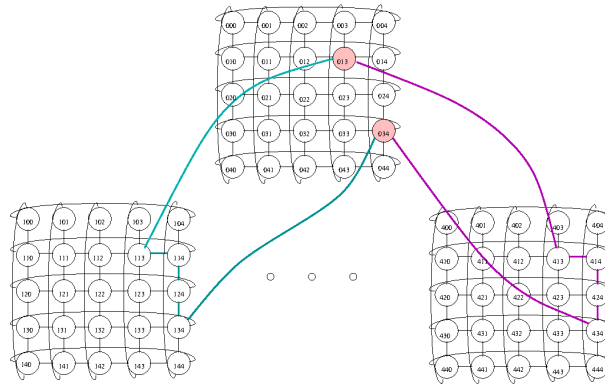


Figura 2.10: Caminos 3,4

En la Figura 2.10 desde el vértice 013, la trayectoria azul representa a φ_3 y la trayectoria morada representa a φ_4 . Solo se muestran los componentes 0^{**} , 1^{**} y 4^{**} evitando los ciclos que las unen para que las trayectorias sean claramente visibles.

- Para construir las 2 trayectorias restantes a las cuales llamaremos φ_5 y φ_6 , respectivamente, se construyen de acuerdo al punto 3 del Teorema 1.

Para $i = 0$ obtenemos a w_0 :

$$w_0 = D_L(A_0, B_0) = D_L(3, 4) = W(3 - 4) = 4 = \min\{4, 5 - 4\} = 1$$

Así la trayectoria φ_5 tendrá longitud $3 + 5 - 2 = 6$

Desde $A_0 = 3$ se suma 1 tomando la trayectoria más larga para ir a 4; esto es, ir en sentido inverso:

$$013 \rightarrow 012$$

Se aplica el procedimiento usado en los puntos anteriores para alcanzar los b'_i s para los índices restantes. Para $i = 1$, se toma la trayectoria más corta para alcanzar el 3 desde el 1:

$$012 \rightarrow 022 \rightarrow 032$$

Se continua con $i = 2$, pero como $A_2 = B_2$ no se hace algún procedimiento. Por último se regresa a $i = 0$ y con la trayectoria más larga en ese ciclo, se alcanza el 4 desde el dígito 2:

$$032 \rightarrow 031 \rightarrow 030 \rightarrow 034$$

Para $i = 1$ obtendremos w_1 :

$$w_1 = D_L(A_1, B_1) = D_L(1, 3) = W(1 - 3) = 3 = \min\{3, 5 - 3\} = 2$$

Así la trayectoria φ_6 tendrá longitud $3 + 5 - 4 = 4$.

Para $i = 1$ sumamos 1 tomando la trayectoria más larga para ir de $A_1 = 1$ a $B_1 = 3$:

$$013 \rightarrow 003$$

Para $i = 2$, como $A_2 = B_2$ no se hace algún procedimiento. Para $i = 0$ se utiliza el procedimiento de los anteriores puntos para alcanzar a B_0 desde A_0 utilizando la trayectoria más corta:

$$003 \rightarrow 004$$

Se regresa a $i = 1$ y se sigue alcanzando a B_1 utilizando la trayectoria más larga sobre ese ciclo:

$$004 \rightarrow 044 \rightarrow 034$$

Para $i = 2$ obtenemos a w_2 :

$$w_2 = D_L(A_2, B_2) = D_L(0, 0) = W(0 - 0) = 0 = \min\{0, 5 - 0\} = 0,$$

como el teorema no considera a los $w_i = 0$ solo se omite el caso.

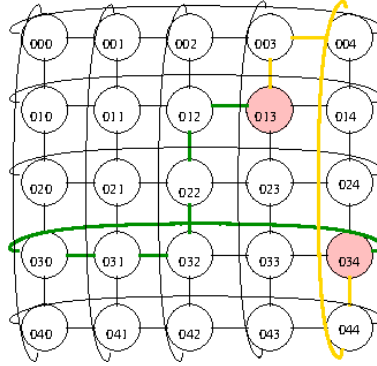


Figura 2.11: Caminos 5 y 6

En la Figura 2.11 desde el vértice 013, la trayectoria verde representa a φ_5 y la trayectoria amarilla representa a φ_6

Así las seis trayectorias obtenidas son:

$$\varphi_1: 013 \rightarrow 014 \rightarrow 024 \rightarrow 034$$

$$\varphi_2: 013 \rightarrow 023 \rightarrow 033 \rightarrow 034$$

$$\varphi_3: 013 \rightarrow 113 \rightarrow 114 \rightarrow 124 \rightarrow 134 \rightarrow 034$$

$$\varphi_4: 013 \rightarrow 413 \rightarrow 414 \rightarrow 424 \rightarrow 434 \rightarrow 034$$

$$\varphi_5: 013 \rightarrow 012 \rightarrow 022 \rightarrow 032 \rightarrow 031 \rightarrow 030 \rightarrow 034$$

$$\varphi_6: 013 \rightarrow 003 \rightarrow 004 \rightarrow 044 \rightarrow 034$$

Haremos un último ejemplo de una forma más compacta, para ilustrar el Teorema 1.

Ejemplo 6 Encontrar las trayectorias ajenas entre el vértice $A = (1532)$ y $B = (3221)$ en el $(4, 6)$ -cubo Q_4^6 . Para aplicar el Teorema 1 procedemos a encontrar a ℓ y h .

$$\begin{aligned} \ell = D_L(A, B) &= W(A - B) = W(1532 - 3221) = W(4311) = \\ &= \min\{4, 6 - 4\} + \min\{3, 6 - 3\} + \min\{1, 6 - 1\} \\ &+ \min\{1, 6 - 1\} = 2 + 3 + 1 + 1 = 7 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para h se tiene que: $h = 4$ debido a que $A=1532$ y $B = 3221$

La longitud de las etiquetas de A y B es 4, $i \in \{0,1,2,3\}$.

1. Se aplica el Teorema 1 para las primeras cuatro trayectorias de longitud 3 a las cuales llamaremos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ y φ_4 respectivamente, obtenemos lo siguiente.

Para φ_1 .

$i = 0:$ 1532 \rightarrow 1531
 $i = 1:$ 1531 \rightarrow 1521
 $i = 2:$ 1521 \rightarrow 1421 \rightarrow 1321 \rightarrow 1221
 $i = 3:$ 1221 \rightarrow 2221 \rightarrow 3221

Para φ_2 .

$i = 1:$ 1532 \rightarrow 1522
 $i = 2:$ 1522 \rightarrow 1022 \rightarrow 1122 \rightarrow 1222
 $i = 3:$ 1222 \rightarrow 2222 \rightarrow 3222
 $i = 0:$ 3222 \rightarrow 3221

Para φ_3 .

$i = 2:$ 1532 \rightarrow 1032 \rightarrow 1132 \rightarrow 1232
 $i = 3:$ 1232 \rightarrow 2232 \rightarrow 3232
 $i = 0:$ 3232 \rightarrow 3231
 $i = 1:$ 3231 \rightarrow 3221

Para φ_4 .

$i = 3:$ 1532 \rightarrow 2532 \rightarrow 3532
 $i = 0:$ 3532 \rightarrow 3531
 $i = 1:$ 3531 \rightarrow 3521
 $i = 2:$ 3521 \rightarrow 3021 \rightarrow 3121 \rightarrow 3221

2. Para el segundo inciso del teorema, sustituyendo las variables obtenemos $2(4-4) = 0$ trayectorias, por lo que no construimos ninguna trayectoria.

3. Para construir las cuatro trayectorias restantes a las cuales llamaremos $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7$ y φ_8 , respectivamente, procedemos de acuerdo al punto número 3 del Teorema 1. Para $i = 0$ se obtiene $w_0 = D_L(2,1) = W(2-1) = 1$

Así φ_5 tendrá longitud 11

$i = 0:$ 1532 \rightarrow 1533
 $i = 1:$ 1533 \rightarrow 1523
 $i = 2:$ 1523 \rightarrow 1423 \rightarrow 1323 \rightarrow 1223
 $i = 3:$ 1223 \rightarrow 2223 \rightarrow 3223
 $i = 0:$ 3223 \rightarrow 3224 \rightarrow 3225 \rightarrow 3220 \rightarrow 3221

Para $i = 1$, $w_1 = D_L(3, 2) = W(3 - 2) = 1$

Así φ_6 tendrá longitud 11.

$i = 1$: 1532 \rightarrow 1542
 $i = 2$: 1542 \rightarrow 1442 \rightarrow 1342 \rightarrow 1242
 $i = 3$: 1242 \rightarrow 2242 \rightarrow 3242
 $i = 0$: 3242 \rightarrow 3241
 $i = 1$: 3241 \rightarrow 3251 \rightarrow 3201 \rightarrow 3211 \rightarrow 3221

Para $i = 2$, $w_1 = D_L(5, 2) = W(5 - 2) = 3$

Así φ_6 tendrá longitud 7.

$i = 2$: 1532 \rightarrow 1432
 $i = 3$: 1432 \rightarrow 2432 \rightarrow 3432
 $i = 0$: 3432 \rightarrow 3431
 $i = 1$: 3431 \rightarrow 3421
 $i = 2$: 3421 \rightarrow 3321 \rightarrow 3221

Para $i = 3$, $w_1 = D_L(1, 3) = W(1 - 3) = 2$

Así φ_6 tendrá longitud 9.

$i = 3$: 1532 \rightarrow 0532
 $i = 0$: 0532 \rightarrow 0531
 $i = 1$: 0531 \rightarrow 0521
 $i = 2$: 0521 \rightarrow 0421 \rightarrow 0321 \rightarrow 0221
 $i = 3$: 0221 \rightarrow 5221 \rightarrow 4221 \rightarrow 3221

Así las ocho trayectorias son:

φ_1 : 1532 \rightarrow 1531 \rightarrow 1521 \rightarrow 1421 \rightarrow 1321 \rightarrow 1221 \rightarrow 2221 \rightarrow 3221

φ_2 : 1532 \rightarrow 1522 \rightarrow 1022 \rightarrow 1122 \rightarrow 1222 \rightarrow 2222 \rightarrow 3222 \rightarrow 3221

φ_3 : 1532 \rightarrow 1032 \rightarrow 1132 \rightarrow 1232 \rightarrow 2232 \rightarrow 3232 \rightarrow 3231 \rightarrow 3221

φ_4 : 1532 \rightarrow 2532 \rightarrow 3532 \rightarrow 3531 \rightarrow 3521 \rightarrow 3021 \rightarrow 3121 \rightarrow 3221

φ_5 : 1532 \rightarrow 1533 \rightarrow 1523 \rightarrow 1423 \rightarrow 1323 \rightarrow 1223 \rightarrow 2223 \rightarrow
 3223 \rightarrow 3223 \rightarrow 3224 \rightarrow 3225 \rightarrow 3220 \rightarrow 3221

φ_6 : 1532 \rightarrow 1542 \rightarrow 1442 \rightarrow 1342 \rightarrow 1242 \rightarrow 2242 \rightarrow 3242 \rightarrow
 3241 \rightarrow 3251 \rightarrow 3201 \rightarrow 3211 \rightarrow 3221

φ_7 : 1532 \rightarrow 1432 \rightarrow 2432 \rightarrow 3432 \rightarrow 3431 \rightarrow 3421 \rightarrow 3321 \rightarrow 3221

φ_8 : 1532 \rightarrow 0532 \rightarrow 0531 \rightarrow 0521 \rightarrow 0421 \rightarrow 0321 \rightarrow 0221 \rightarrow
 5221 \rightarrow 4221 \rightarrow 3221

2.4. Aplicación: Difusión de Comunicación

En la Sección 2.3 mostramos cómo obtener trayectorias ajenas en un (n, k) -cubo. Para esta sección presentamos dos algoritmos para la difusión de comunicación desde un nodo de origen A , basados en la Distancia de Lee. Pensaremos en la gráfica (n, k) -cubo Q_n^k como una red de interconexión, por lo que llamaremos nodos a los vértices en esta sección.

Para la emisión de mensajes desde un procesador, el procesador envía el mismo mensaje a todos los procesadores restantes, se le conoce como Difusión de la Información¹. En el segundo algoritmo, el nodo emisor A envía el mensaje nodo por nodo, a este método se le conoce como Ruteo². Los algoritmos basados en la difusión de la información hacen una o dos suposiciones a cerca del sistema en el que están trabajando. La primera suposición es que existe un único puerto de entrada o salida E/S. La segunda suposición es que de existir un multipuerto de entrada o salida E/S, el nodo puede transmitir en diversas direcciones de forma simultánea. En la red (n, k) -cubo Q_n^k los multipuertos solo pueden enviar información simultánea en $2n$ direcciones que son los nodos vecinos. Recordemos una propiedad útil de algunas gráficas:

Definición 17 Sea G una gráfica, g es **Transitiva por vértices** si para todo vértice A, B en G existe $f : G \rightarrow G$ un automorfismo tal que $f(A) = B$.

En otras palabras la Definición 17 nos dice que podemos acomodar la gráfica como mejor nos convenga para empezar a trabajarla desde un determinado nodo A y si por alguna razón más adelante necesitamos empezar desde otro nodo B , encontramos algún f tal que $f(A) = B$ y al ser f automorfismo preserva la estructura de la gráfica, por lo que cada vértice sigue teniendo a los mismos nodos adyacentes después de aplicarle f .

Por lo anterior, suponemos que los siguientes tres algoritmos para difusión de la información y ruteo comienzan en el nodo 000; es decir, el nodo emisor de la información en la red (n, k) -cubo o nodo fuente tiene la etiqueta $(00 \dots 0)$.

2.4.1. Algoritmo para la difusión de la información con multi-puertos

El primer algoritmo presentado se basa en construir un árbol generador de la red (n, k) -cubo y suponemos que el nodo es multi-puerto E/S, el algoritmo es óptimo en tiempo.

El segundo algoritmo utiliza una descomposición de Q_n^k en un producto de ciclos. Cuando k es par, el segundo algoritmo es óptimo en tiempo para un puerto E/S, caso contrario, cuando k es impar; el algoritmo es óptimo en tiempo para 2-puerto E/S.

Algoritmo 1 Difusión de Información un puerto

Para el siguiente algoritmo consideramos los nodos:

$$a = (a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0), b = (b_{n-1}b_{n-2} \dots b_0) \text{ y } c = (c_{n-1}c_{n-2} \dots c_0)$$

¹En inglés conocido como *Broadcasting*, usaremos Difusión de la Información como traducción.

²En inglés conocido como *Routing*, usaremos Ruteo como traducción.

Algoritmo 1 Difusión de la Información**Entrada:** conjunto de nodos V , conjunto de aristas E , dimensión n , modulo k **Salida:** árbol generador T .

```

1: Cola  $q$ 
2: árbol  $t$ 
3: t.raiz( $\bar{0}$ ) //la raíz será el  $\bar{0}$ 
4: q.agrega( $\bar{0}$ )
5: if  $a$  nodo, es adyacente  $\bar{0}$  then
    q.agrega( $a$ )
6: end if
7: while  $q \neq \emptyset$  do
8:   int  $m = \text{máx}(i | a_i \neq 0 \text{ con } 0 \leq i \leq n)$  //Buscamos la posición más a la izquierda del nodo a que
    su valor sea distinto de cero
9:   if  $m < n - 1$  then
10:    for  $j < m < n$  do
11:      obtenemos  $b : a_i = b_i$  para  $i \neq j, b_j = 1$ 
12:      padre( $a, b$ ) //La función padre hace que  $b$  esté ligado a  $a$ 
13:      q.agrega( $b$ )
14:      obtenemos  $c : a_i = c_i$  para  $i \neq j, c_j = k - 1$ 
15:      padre( $a, c$ )
16:      q.agrega( $c$ )
17:    end for
18:  end if
19:  if  $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  then
20:    obtenemos  $b : b_i = a_i$  para  $i \neq m, b_m = a_m + 1$ 
21:    padre( $a, b$ )
22:    q.agrega( $b$ )
23:  end if
24:  if  $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$  then
25:    obtenemos  $b : b_i = a_i$  para  $i \neq m, b_m = a_m - 1$ 
26:    padre( $a, b$ )
27:    q.agrega( $b$ )
28:  end if
29: end while
30: return  $t$ 
31: función padre( $a, b$ ) { //Función que coloca al nodo  $A$  como padre de  $B$ 
32:    $b$  apunta a su padre  $a$ 
33: }
```

En la línea 5, 10, 19 y 21 del Algoritmo 1 notamos que cada nodo interno de t tiene a lo más $2(n-l) + 1$ hijos y las hojas tienen $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ o $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$ hijos, como su dígito más a la izquierda. Si existe la comunicación para varios puertos, esta requiere cuatro pasos.

Una vez que el árbol generador t se construyó, se puede usar para el envío de información desde cualquier nodo en la red. Si queremos que la difusión comience desde el nodo $x = (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_0)$ sólo debemos restar x a cada nodo u de t mód k , $\bar{u} - \bar{x} = (u_{n-1} - a_{n-1}, u_{n-2} - a_{n-2}, \cdots, u_0 - a_0)$ mód k , ahora el vector $x = \bar{0}$ y cada nodo será re-etiquetado.

Ejemplo 7 Consideremos el árbol T que se puede encontrar utilizando el Algoritmo 1 con el $(3, 2)$ -cubo Q_3^2 como entrada, más adelante se ejemplificará cómo se ejecuta el algoritmo.

La Figura 2.12 (A) muestra el árbol T generado por el Algoritmo 1. En la Figura 2.12 (B) muestra como queda el árbol T después de enraizarlo en el nodo 010 y realizar las siguientes operaciones:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ■ $000 - 010 = 010$ | ■ $101 - 010 = 111$ |
| ■ $001 - 010 = 011$ | ■ $011 - 010 = 001$ |
| ■ $010 - 010 = 000$ | ■ $110 - 010 = 100$ |
| ■ $100 - 010 = 110$ | ■ $111 - 010 = 101$ |

En la Figura 2.12 (C) muestra como queda el árbol T después de enraizarlo en el nodo 011, las operaciones que se hicieron son las siguientes:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| ■ $000 - 011 = 011$ | ■ $101 - 011 = 110$ |
| ■ $001 - 011 = 010$ | ■ $011 - 011 = 000$ |
| ■ $010 - 011 = 001$ | ■ $110 - 011 = 101$ |
| ■ $100 - 011 = 111$ | ■ $111 - 011 = 100$ |

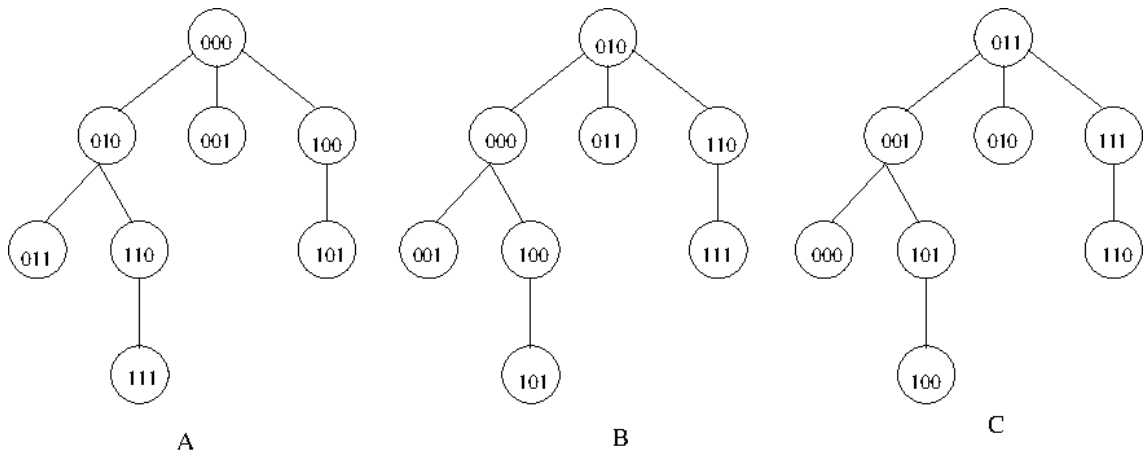


Figura 2.12: Automorfismos del árbol A

Para analizar la complejidad de este algoritmo, podemos notar que en cada dimensión, las etiquetas aumentan monótonamente desde 0 a $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, o decrecen monótonamente desde 0 a $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$. Además consideremos el siguiente resultado.

Lema 1 Dada la secuencia $\langle 0, 1, \dots, k-1 \rangle$, se tiene que $D_L(0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor) \geq D_L(0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1)$

Demostración: La demostración tiene dos casos, cuando k es par o impar.

- **Caso 1** k es par, entonces $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \frac{k}{2}$ nos da las siguientes igualdades:

$$D_L\left(0, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) = D_L\left(0, \frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2} \quad (2.9)$$

$$D_L\left(0, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1\right) = D_L\left(0, \frac{k}{2} + 1\right) = k - \left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{k}{2} - 1 \quad (2.10)$$

- **Caso 2** k es impar, entonces $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$ nos da las siguientes igualdades:

$$D_L\left(0, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) = D_L\left(0, \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{k-1}{2} \quad (2.11)$$

$$D_L\left(0, \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1\right) = D_L\left(0, \frac{k}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) = D_L\left(0, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) = k - \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{k-1}{2} \quad (2.12)$$

De las Ecuaciones 2.9 y 2.10 podemos ver que $D_L(0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor) > D_L(0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1)$ y de las Ecuaciones 2.11 y 2.12 obtenemos que $D_L(0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor) = D_L(0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1)$.

Por lo tanto, obtenemos que $D_L(0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor) \geq D_L(0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1)$

Así usando el Lema 1 podemos obtener la complejidad del Algoritmo 1, basados en dos proposiciones. Primero, tomamos una unidad de tiempo generar la unión del nuevo nodo al árbol y segundo, cada nodo puede comunicarse con sus $2n$ vecinos simultáneamente. Combinando la monotonía del etiquetado que se probó en el Lema 1 y el hecho de que se observa que el camino más largo es el que contiene a la raíz $(00\dots 0)$ hasta $(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ que la hoja más lejana que tenga el árbol resultante. Al tener comunicación simultánea de entrada y de salida (multi-port E/S), el tiempo de envío de información se ve representado como el tiempo en que se puede alcanzar al nodo más lejano:

$$\underbrace{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}_{n \text{ veces}} = n \times \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \quad (2.13)$$

Como el diámetro del (n, k) -cubo Q_n^k es $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, el Algoritmo 1 es óptimo.

Ejemplo 8 Dado el $(2, 4)$ -cubo Q_2^4 , construya a detalle el árbol de expansión utilizando el Algoritmo 1, Difusión de Información.

Consideremos Q_2^4 , tenemos que $n = 2$ y $k = 4$, el algoritmo comienza tomando como raíz el nodo $\bar{a} = 0000$ y agregamos a la cola q , los vecinos de éste: $q = \{30, 10, 01, 03\}$. En la Figura 2.13 estas aristas se muestran en color morado. Ahora verificamos las condiciones del Algoritmo 1 de las líneas 9-24 para cada uno de estos hijos.

- Para $u = a_1a_0 = 30$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_1 \neq 0$, $a_m = 3$. Verificamos cada desigualdad:
 Si $m < n - 1$, sustituyendo los valores: $1 < 2 - 1$ es Falso.
 Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo los valores: $3 < 2$ es Falso.
 Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo los valores: $3 > 2 + 1$ es Falso.
 $q = \{10, 01, 03\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 10$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_1 \neq 0$, $a_m = 1$. Verificamos cada desigualdad:
 Si $m < n - 1$, sustituyendo los valores: $1 < 1$ es Falso.
 Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo los valores: $1 < 2$ es Verdadero;
 Sea $h = b_1b_0$ el hijo de u . En este caso $h = 20$ ya que $a_0 = b_0$ y $b_1 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$.
 Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo los valores: $2 > 1$ es Falso.
 $q = \{01, 03, 20\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 01$, se obtiene $m = 0$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_0 \neq 0$, $a_m = 1$. Verificamos cada desigualdad:
 Si $m < n - 1$, sustituyendo los valores: $0 < 1$ es Verdadero;
 Buscamos los valores de j que cumplen con $0 < j < 2$ lo cual implica que $j = 1$.
 Construimos a los hijos de u de la siguiente forma:
 $h_1 = 11$ ya que $b_0 = a_0$ y $b_1 = 1$,
 para el segundo hijo $h_2 = 31$ ya que $b_0 = a_0$ y $b_1 = k - 1 = 4 - 1$.
 Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo los valores: $1 < 2$ es Verdadero;
 Obtenemos al hijo $h_3 = 02$ ya que $a_0 = b_0 = 1$ y $b_1 = a_1 + 1$.
 Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo los valores: $1 > 3$ es Falso.
 $q = \{03, 20, 11, 31, 02\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 03$, se obtiene $m = 0$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_0 \neq 0$, $a_m = 3$. Verificamos cada desigualdad:
 Si $m < n - 1$, sustituyendo los valores: $0 < 1$ es Verdadero;
 Buscamos los valores de j que cumplen con $0 < j < 2$ lo cual implica que $j = 1$.
 Construimos a los hijos de u : $h_1 = 13$ ya que $b_0 = a_0$ y $b_1 = 1$
 y $h_2 = 33$ ya que $b_0 = a_0 = 3$ y $b_1 = k - 1 = 4 - 1$.
 Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo los valores: $3 < 2$ es Falso.
 Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo los valores: $3 > 3 = 2 + 1$ es Falso.
 $q = \{20, 31, 11, 02, 13, 33\}$.

Terminamos con el primer nivel del árbol y vemos que se agregaron los nodos 20, 31, 11, 02, 13, 33 a sus respectivos padres. En la Figura 2.13 las aristas que se agregaron se muestran en color verde. Ahora se revisaran estos nodos.

- Para $u = a_1a_0 = 20$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_1 \neq 0$, $a_m = 2$. Verificamos cada desigualdad:
 Si $m < n - 1$, sustituyendo: $1 < 2 - 1$ es Falso.
 Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $2 < 2$ es Falso.
 Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $2 > 3$ es Falso.
 $q = \{31, 11, 02, 13, 33\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 31$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_1 \neq 0$, $a_m = 3$. Verificamos cada desigualdad:
 Si $m < n - 1$, sustituyendo: $1 < 2 - 1$ es Falso.
 Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $3 < 2$ es Falso.
 Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $3 > 2 + 1$ es Falso.
 $q = \{11, 02, 13, 33\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 11$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_0 \neq 0$, $a_m = 1$. Verificamos cada desigualdad:

Si $m < n - 1$, sustituyendo: $1 < 1$ es Falso.

Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $1 < 2$ es Verdadero;

se construye el hijo $h_1 = 21$ ya que $a_1 = b_1 = 1$ y $b_0 = a_0 + 1 = 0 + 1 = 1$.

Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $1 > 2$ es Falso.

$q = \{02, 13, 33, 21\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 02$, se obtiene $m = 0$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_0 \neq 0$, $a_m = 2$. Verificamos cada desigualdad:

Si $m < n - 1$, sustituyendo: $0 < 1$ es Verdadero;

Buscamos los valores de j que cumplen que $0 < j < 2$ lo cual implica que $j = 1$.

Construimos a los hijos de u :

$h_1 = 12$ ya que $b_0 = a_0$ y $b_1 = 1$

y para $h_2 = 32$ ya que $b_0 = a_0$ y $b_1 = k - 1 = 4 - 1$.

Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $2 < 2$ es Falso.

Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $2 > 3$ es Falso.

$q = \{13, 33, 21, 12, 32\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 13$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_0 \neq 0$, $a_m = 1$. Verificamos cada desigualdad:

Si $m < n - 1$, sustituyendo: $1 < 1$ es Falso.

Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $1 < 2$ es Verdadero;

se construye el hijo $h = 23$ ya que $a_0 = b_0 = 3$ y $b_1 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $1 > 3$ es Falso.

$q = \{33, 21, 12, 32, 23\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 33$, se obtiene $m = 1$ ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_0 \neq 0$, $a_m = 3$. Verificamos cada desigualdad:

Si $m < n - 1$, sustituyendo: $1 < 1$ es Falso.

Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $3 < 2$ es Falso.

Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $3 > 3$ es Falso.

$q = \{21, 12, 32, 23\}$.

Ahora se procede a revisar los nuevos nodos que se agregaron al árbol, que son 21, 12, 32, 23. En la Figura 2.13 se agregaron las aristas en color azul.

- Para $u = a_1a_0 = 21$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_1 \neq 0$, $a_m = 2$. Verificamos cada desigualdad:

Si $m < n - 1$, sustituyendo: $1 < 2 - 1$ es Falso.

Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $2 < 2$ es Falso.

Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $2 > 2 + 1$ es Falso.

$q = \{12, 32, 23\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 12$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_0 \neq 0$, $a_m = 1$. Verificamos cada desigualdad:

Si $m < n - 1$, sustituyendo: $1 < 1$ es Falso.

Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $1 < 2$ es Verdadero;

se construye el hijo $h = 22$ ya que $a_0 = b_0 = 2$ y $b_1 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$.

Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $1 > 3$ es Falso.

$q = \{32, 23, 22\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 32$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_1 \neq 0$, $a_m = 3$. Verificamos cada desigualdad:
 - Si $m < n - 1$, sustituyendo: $1 < 2 - 1$ es Falso.
 - Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $3 < 2$ es Falso.
 - Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $3 > 2 + 1$ es Falso. $q = \{23, 22\}$.

- Para $u = a_1a_0 = 23$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_1 \neq 0$, $a_m = 2$. Verificamos cada desigualdad:
 - Si $m < n - 1$, sustituyendo: $1 < 2 - 1$ es Falso.
 - Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $2 < 2$ es Falso.
 - Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $2 > 2 + 1$ es Falso. $q = \{22\}$.

Solo queda revisar el nodo 22, en cual se agrego con una arista en color amarillo en la Figura 2.13

- Para $u = a_1a_0 = 22$, se obtiene $m = 1$, ya que es la posición del dígito más grande tal que el valor de $a_1 \neq 0$, $a_m = 2$. Verificamos cada desigualdad:
 - Si $m < n - 1$, sustituyendo: $1 < 2 - 1$ es Falso.
 - Si $a_m < \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, sustituyendo: $2 < 2$ es Falso.
 - Si $a_m > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$, sustituyendo: $2 > 2 + 1$ es Falso. $q = \{\}$.

El algoritmo termina ya que q está vacía; es decir, no quedan más vértices que revisar y podemos verificar en la Figura 2.13 que el árbol contiene a todos los vértices del $(2, 4)$ -cubo.

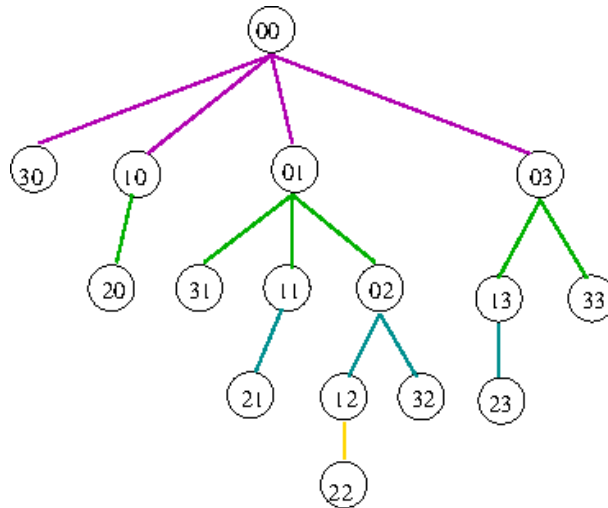


Figura 2.13: Árbol generador

2.4.2. Difusión de la Información Multi-Puerto

Ahora presentamos el segundo algoritmo para Difusión de la información, en éste se considera que en la red cada vértice puede enviar o recibir la información de algún vecino, uno a la vez.

Algoritmo 2 Difusión de la Información Multi-Puerto

El objetivo es lograr la difusión de información a toda la red desde el nodo $\bar{0} = 00 \cdots 0$.

Algoritmo 2 Difusión de la información

Entrada: gráfica (n, k) -cubo G , mensaje m

Salida: gráfica (n, k) -cubo G

```

1:  $v_0 = \bar{0} = 00 \cdots 0$  // Tomamos al vértice  $\bar{0}$ , este será la raíz.
2:  $0 = 0 \cdots 0i$ 
3: for  $i = 0$  a  $k - 1$  do
4:   send( $m, i$ )
5: end for // Al terminar todos los vértices, el ciclo de dimensión 0 tendrán copia de  $m$ 
6: return  $G$ 

```

1. Comenzando desde el nodo $\bar{0} = 00 \cdots 0$, al pertenecer a un (n, k) -cubo Q_n^k , cada nodo está dentro de k dimensiones, éste envía la información a través de ciclo de dimensión 0. Cuando este paso termine, el sub-cubo $000*$ tiene una copia de la información.
2. Cada nodo perteneciente al sub-cubo $000*$ envía una copia de la información a través del ciclo de dimensión 1.
3. Cada vez que el sub-cubo de dimensión i tenga la copia de la información, cada vértice envía la información a través del ciclo de dimensión $i + 1$ hasta que se utilice el ciclo de dimensión k .

Teorema 2 La forma de difusión de la Información del Algoritmo 2 es óptima respecto al tiempo.

Demostración: Tenemos dos casos, cuando k es par y cuando k es impar

- k es par

Suponiendo que el nodo $\bar{0} = (00 \cdots 0)$ es el que comienza el algoritmo de difusión en el tiempo $t = 0$ enviando a lo largo del ciclo de dimensión 0, avanzando en una dirección positiva, en el tiempo $t = 1$ el nodo $(00 \cdots 1)$ recibe el mensaje y envía una copia al nodo $(00 \cdots 2)$ en el tiempo $t = 2$; simultáneamente, en el $t = 2$ el nodo $\bar{0}$ envía el mensaje al nodo $(00 \cdots (k - 1))$ en una dirección negativa, así en el tiempo $t = \frac{k}{2}$ la dirección que avanza alcanza el nodo $(00 \cdots 0(\frac{k}{2}))$ y la dirección que retrocede alcanza al nodo $(00 \cdots 0(\frac{k}{2} - 1))$, es decir, cada vértice en el anillo 0 tendrá copia, debido a que ser k par $\frac{k}{2}$ y $\frac{k}{2} - 1$ son adyacentes. Al tener n dimensiones, que el mensaje llegue a todos los nodos toma tiempo $n \frac{k}{2}$ que coincide con el radio de la gráfica (n, k) -cubo Q_n^k cuando k es par, por lo que el Algoritmo 2 es óptimo.

- k es impar

Usando el algoritmo con un puerto E/S, comenzando desde el vértice $\bar{0}$ en el tiempo $t = 0$, mandará la información a través del ciclo 0 en un tiempo de $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ el mensaje llega al vértice $(00 \cdots 0(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}))$ avanzando en la dirección positiva y llega al nodo $(00 \cdots 0(\frac{k}{2} + \frac{3}{2}))$ avanzando en la dirección negativa, la distancia de Lee entre estos dos nodos es 2, por lo que nos toma

un tiempo de $t = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ enviar el mensaje a través de una dimensión, al tener n dimensiones, nos toma un total de $n \lceil \frac{k}{2} \rceil$ enviar el mensaje en un Q_n^k , si bien usar un solo puerto no es óptimo, está dentro de los n pasos del óptimo, por lo que es implementable.

Usando el algoritmo con un 2-puerto E/S, al tiempo $t = 0$ el nodo $\bar{0}(00 \dots 0)$ comienza a enviar el mensaje a los nodos $(00 \dots 01)$, $(000(k-1))$. En $t = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ el mensaje es recibido por el nodo $(000(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}))$ cuando avanza el dirección positiva, en dirección negativa el mensaje es recibido por el vértice $((000(\frac{k}{2} + \frac{1}{2})))$, aplicando la distancia de Lee se tiene que estos nodos son adyacentes, así que se alcanza a todos los nodos de la dimensión 0 con $t = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, por lo que toma $n \times \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ alcanzar a todos los vértices del Q_n^k , por lo que el Algoritmo 2 es óptimo cuando k es impar.

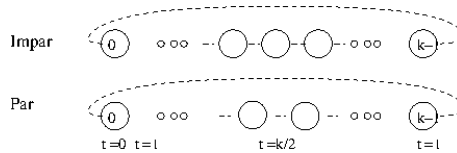


Figura 2.14: (2,4)-cubo

Ejemplo 9 Utilizando el Algoritmo 2 ilustrar la forma en que funciona sobre el (3,4)-cubo Q_3^4 .

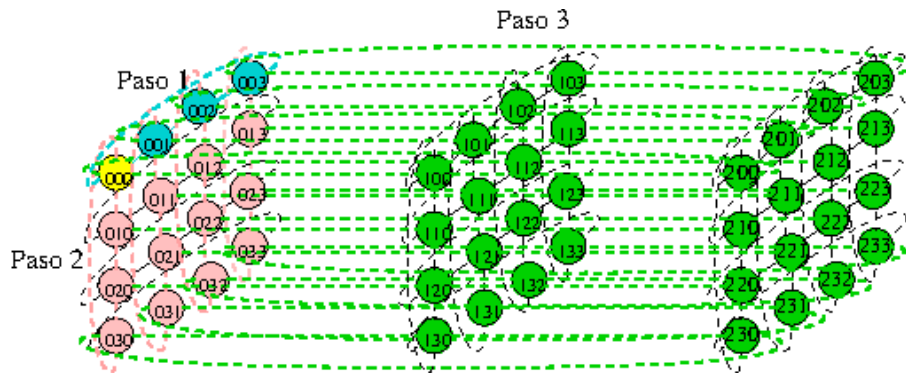


Figura 2.15: Implementación del Algoritmo 2 en (3,4)-cubo

En la Figura 2.15 el Algoritmo 2 comienza con el nodo $\bar{0} = 000$ el cuál se muestra en amarillo. El Paso 1 del Algoritmo 2, nos dice que enviará la información a través del ciclo $00*$ el cual se encuentra en color azul en la Figura 2.15, con esto la información alcanza a los nodos 003, 001, 002. El Paso 2 del Algoritmo 2, nos dice que cada nodo 003, 001, 002 enviará la información a través de su ciclo correspondiente $0**$. Con esto alcanzamos a todos los nodos de la componente $0**$. En la Figura 2.15 las aristas usadas y los nodos alcanzados se muestran en rosa. Por último para el Paso 3 del Algoritmo 2, cada nodo de la componente $0**$ enviará la información a través de su ciclo correspondiente a las siguientes componentes, con esto alcanzamos a todos los nodos del (3,4)-cubo Q_3^4 . En la Figura 2.15 las aristas usadas y los nodos alcanzados se muestran en verde.

2.4.3. Ruteo Dimensional

En una red (n, k) -cubo Q_n^k cuando se quiere enviar un mensaje del nodo x al nodo y se debe escoger un camino por el cual se enviará. Este proceso se le conoce como **ruteo**. En esta sección mostramos una aplicación de la distancia de Lee al Ruteo dimensional en un (n, k) -cubo Q_n^k .

En la comunicación de ruteo, el mensaje es dividido en pequeñas unidades llamadas *flits* (Digitos de control de flujo) las cuales viajan entre los nodos a través de chips de ruteo. Cada uno de estos chips tiene un buffer de tamaño predeterminado. Si el canal de comunicación del siguiente chip esta libre, el buffer en el ruteo está desocupado, el flit es enviado a través del canal de comunicación. Caso contrario, si el canal del siguiente enrutador en el camino esta bloqueado, entonces el flit se almacena en su ubicación actual.

El flit que va a la cabeza es enviado a través de un canal de comunicación, los restantes flits lo siguen en modo pipeline. Si el flit que esta la cabeza es bloqueado debido a que el canal de comunicación está bloqueada, los restantes flits también se bloquean. Una ventaja de este tipo de ruteo es que el tiempo de envío del mensaje, depende menos de la longitud del camino. Una desventaja es que es mas susceptible a puntos muertos ya que los flits podrían quedarse bloqueados.

Un Algoritmo de ruteo se dice que es **determinista** si la ruta seleccionada no depende de la condición de la ruta actual. Si la ruta escogida por el algoritmo entre dos nodos/vértices (el nodo origen y el nodo destino) es la más corta posible, entonces se le conoce como **mínimo**. Un algoritmo de ruteo es **dimensional** si la ruta escogida toma el mensaje y lo envía cambiado de dimensiones.

Un algoritmo de ruteo dimensional que también es mínimo para el (n, k) -cubo Q_n^k puede ser construido de manera natural usando la distancia de Lee.

Algoritmo 3 Ruteo Dimensional

Sea S un nodo con la etiqueta $S = (s_{n-1}s_{n-2} \cdots s_0)$ y D es el nodo con la etiqueta $D = (d_{n-1}d_{n-2} \cdots d_0)$. Suponemos que S quiere enviar un mensaje a D .

Podemos notar que en cada nodo la magnitud de $|x_i|$ se decrementa. Cuando $|x_i| = 0$ el flit se borra de la cabeza y el mensaje gira, moviéndose en dimensión $i + 1$. El proceso es el mismo si x_i es negativo a excepción de que el mensaje va desde el nodo $(a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_i \cdots a_0)$ al nodo $(a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_i - 1 \cdots a_0)$. Las operaciones de suma y resta se realizan en mód k . Finalmente, el mensaje es enrutado en orden de su dimensión, empezando desde la dimensión 0 y terminando con la dimensión $n - 1$. El ruteo de información puede contener n flits en donde cada flit consiste en un signo (+ o -) y una magnitud $|x| \in \{0, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$. Sea $x = (x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_0)$, el vector de desplazamiento en el que cada x_i codifica la información de ruteo para la dimensión i . Es decir x_i codifica tanto el índice como la magnitud.

Ejemplo 10 Sea el nodo $S = (000)$ y $D = (634)$ en Q_3^7 si el nodo S quiere enviar un mensaje a D , encontrar la trayectoria que se usará utilizando el Algoritmo 3 de Ruteo Dimensional.

Utilizando el Algoritmo 3 de Ruteo Dimensional primero encontramos el vector de desplazamiento.

$$\text{Calculamos } \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3$$

Restamos dígito a dígito $S - D$

$$\hat{x}_2 = (d_2 - s_2) = (6 - 0) = 6$$

$$\hat{x}_1 = (d_1 - s_1) = (3 - 0) = 3$$

$$\hat{x}_0 = (d_0 - s_0) = (4 - 0) = 4$$

Para encontrar los valores del vector de desplazamiento, verificamos si $\hat{x}_i > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$:

Algoritmo 3 Ruteo Dimensional**Entrada:** nodo S y nodo D **Salida:** arreglo x //vector de desplazamiento

```

    //Calculamos el vector de desplazamiento  $x$ 
1: for  $i = 0$  a  $k - 1$  do
2:    $x_i = d_i - s_i$ 
3:   if  $x_i \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  then
4:      $|x_i| = x_i$  //Tomamos el valor absoluto de  $x_i$ 
5:   else
6:      $x_i = -(|k - x_i|)$ 
7:   end if
8: end for
    //Mostramos la ruta dada por el vector  $x$ 
9: for  $i = 0$  a  $k - 1$  do
10:  print  $s_i + x_i$  //Este debe coincidir con el dígito en la posición  $d_i$ 
11: end for
12: return  $p$ 

```

$$|\hat{x}_2| = 6 > 3 \Rightarrow -(k - \hat{x}_2) = 7 - 6 = -1$$

$$|\hat{x}_1| = 3 \leq 3 \Rightarrow (\hat{x}_1) = 3$$

$$|\hat{x}_0| = 4 > 3 \Rightarrow -(k - \hat{x}_0) = 7 - 4 = -3$$

Así encontramos al vector $x = (-1, +3, -3)$, así construimos la ruta:

000 → 600 → 610 → 620 → 630 → 636 → 635 → 634

Ejemplo 11 Sea el nodo $S = (13436)$ y $D = (02520)$ en Q_5^7 si el nodo S quiere enviar un mensaje a D , encuentre la trayectoria que se usara utilizando el Algoritmo 3 de Ruteo Dimensional.

Utilizando el Algoritmo 3 de Ruteo Dimensional primero encontramos el vector de desplazamiento.

Calculamos $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3$

Restamos dígito a dígito $S - D$

$$\hat{x}_4 = (d_4 - s_4) = (0 - 1) = -1$$

$$\hat{x}_3 = (d_3 - s_3) = (2 - 3) = -1$$

$$\hat{x}_2 = (d_2 - s_2) = (5 - 4) = 1$$

$$\hat{x}_1 = (d_1 - s_1) = (2 - 3) = -1$$

$$\hat{x}_0 = (d_0 - s_0) = (0 - 6) = -6$$

Para encontrar los valores del vector de desplazamiento, verificamos si $\hat{x}_i > \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$:

$$|\hat{x}_4| = 6 > 3 \Rightarrow -(k - \hat{x}_4) = 7 - 6 = -1$$

$$|\hat{x}_3| = 6 > 3 \Rightarrow -(k - \hat{x}_3) = 7 - 6 = -1$$

$$|\hat{x}_2| = 1 \leq 3 \Rightarrow (\hat{x}_2) = 1$$

$$|\hat{x}_1| = 6 > 3 \Rightarrow -(k - \hat{x}_1) = 7 - 6 = -1$$

$$|\hat{x}_0| = 6 > 3 \Rightarrow -(k - \hat{x}_0) = 7 - 6 = -1$$

Así encontramos al vector $x = (-1, -1, +1, -1, +1)$, así construimos la ruta:

13436 → 03436 → 02436 → 02536 → 02526 → 02520

2.5. Encajes

Debido a las propiedades topológicas del (n, k) -cubo, en esta sección pretendemos mostrar como encajar el (n, k) -cubo dentro de distintas estructuras como la malla o el hipercubo. Estos encajes en estructuras nos servirán en el Capítulo 3 para encontrar más fácilmente los ciclos Hamiltonianos.

Definición 18 Sea G_1 y G_2 dos gráficas no dirigidas, además consideramos al conjunto P_{G_2} el cual contiene a todas las trayectorias en G_2 ; es decir, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P_{G_2}$ si x_i está en $V(G_2)$ y la arista (x_i, x_{i+1}) pertenece al conjunto $E(G_2)$ para $1 \leq i < n$. Decimos que el **Encaje de G_1 en G_2** es el par de funciones (f_V, f_E) donde: $f_V : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ y $f_E : E(G_1) \rightarrow P_{G_2}$, que además preserva: si (a, b) es arista de la gráfica G_1 entonces $f(a, b) = (x_1, \dots, x_n)$ generó una trayectoria en G_2 con $f(a) = x_1$ y $f(b) = x_n$.

2.5.1. Encaje en una Malla

Definición 19 Se le conoce como $K_n \times K_{n-1} \times \dots \times K_1$ -malla a la topología de interconexiones que consiste en $\prod_{i=1}^n K_i$ nodos.

Cada nodo es etiquetado con una etiqueta formada de n -dígitos $a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0$ donde a_i es un número en base K_i . Cada nodo está conectado a $2n$ vértices. Sea A un vértice con etiqueta $a_{n-1} \dots a_i \dots a_0$ para cada $0 \leq i < n$, A está conectado con el vértice que tiene la etiqueta $a_{n-1} \dots a_i + 1 \dots a_0$ si $a_i < K_i$ y con el vértice que tiene la etiqueta $a_{n-1} \dots a_i - 1 \dots a_0$ si $a_i > 0$. El Código Gray generado por el Teorema 3 se puede usar para encajar mallas de ciertas dimensiones en un (n, k) -cubo Q_n^k .

Sea M una $k^{n_1} \times k^{n_2} \times \dots \times k^{n_m}$ -malla y sea Q un Q_n^k , en donde $n = \sum_{i=1}^m n_i$. La siguiente construcción muestra como encajar a M en Q .

Suponemos que cada dimensión i de M está etiquetada con un número en base k , el dígito n_i entre $0 \dots k^{n_i} - 1$. Se re-etiqueta cada dimensión usando el Teorema 3 con su Código de Gray correspondiente. Cada vértice de M puede ser identificado como una m -tupla, las cuales en el i -ésimo vértice en la i -ésima dimensión para $1 \leq i \leq m$. Si x es un vértice de M con etiqueta $x_1, x_2 \dots x_m$, se define $f_v(x) = x_1, x_2, \dots, x_m$ que es la concatenación de las etiquetas x_1, \dots, x_m .

Si x y y son cualesquiera dos vértices adyacentes en M , entonces el resultado de las funciones $f_v(x)$ y $f_v(y)$ son adyacentes en Q . Para x y y adyacentes en M , sus etiquetas difieren solo en alguna dimensión i . Como cada dimensión está etiquetada con un Código Gray. La distancia de Lee entre x y y en la dimensión i es uno $D_L(x, y) = 1$. Por lo tanto $D_L(f_v(x), f_v(y)) = 1$ y x, y son adyacentes en Q .

Ejemplo 12 Encajar una malla en el $(4, 4)$ -cubo Q_4^4 .

Como $k = 4$ la malla tendrá la siguiente estructura $k^{n_1} \times k^{n_2} \times \dots \times k^1$. Para este ejemplo se utilizará la forma de la malla $k^2 \times k^2$, lo cual cumple la definición ya que $2 + 2 = 4 = k$

Así se tiene una malla de 16×16 , donde cada lado tiene las etiquetas pertenecientes a Q_2^4 . En la Figura 2.16 se representa esta malla. El vértice coloreado de azul corresponde al vértice $(21, 11) = 2111$ y los vértices coloreados en rosa corresponden a $(20, 11) = 2011, (21, 10) = 2110, (21, 12) = 2112, (22, 10) = 2210$ si se aplica la distancia de Lee entre estos vértices:

$$D_L(2111, 2011) = W(2111 - 2011) = 1 \quad D_L(2111, 2110) = W(2111 - 2110) = 1$$

$$D_L(2111, 2112) = W(2111 - 2112) = 1 \quad D_L(2111, 2210) = W(2111 - 2210) = 1$$

En la Figura B se aplica el código Gray a Q_4^4 y después se encaja en una malla, tomando el vértice $2111 = 2310$, si aplicamos la distancia de Lee a sus vecinos:

$$D_L(2310, 2210) = W(2310 - 2210) = 1 \quad D_L(2310, 2313) = W(2310 - 2313) = 1$$

$$D_L(2310, 2010) = W(2310 - 2010) = 1 \quad D_L(2310, 2311) = W(2310 - 2311) = 1$$

Por lo que se llega a la conclusión de que también se puede encajar a Q_4^4 después de aplicar un Código

Gray y conservará las propiedades de la distancia de Lee.

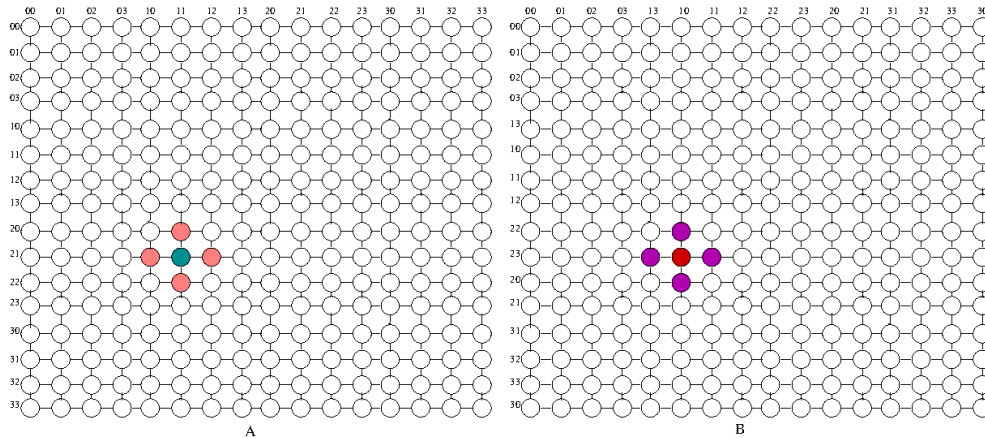


Figura 2.16: Encaje Q_4^4 en $4^2 \times 4^2$ -malla

La forma anterior de encajar a Q_4^4 en una malla no es única, otra alternativa es encajar lo en una $4^3 \times 4^1$ -malla. En la Figura 2.17 se muestra como se verían el punto 2111 y sus vértices vecinos.

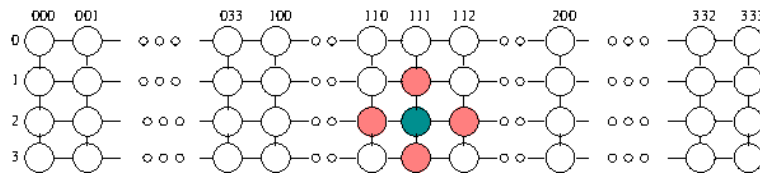


Figura 2.17: Encaje Q_4^4 en $4^3 \times 4^1$ -malla

2.5.2. Encaje en Hipercubos

Como sabemos, un hipercubo es el caso particular de un (n, k) -cubo en el que $k = 2$. Esta subsección presenta los elementos que permiten encajar a un hipercubo Q_n o $(n, 2)$ -cubo dentro de un $(n, \frac{n}{2})$ -cubo $Q_{\frac{n}{2}}$.

Comenzaremos con el siguiente resultado el cual nos indica como encajar a Q_2 .

Lema 2 Sea $f : (0, 1)^2 \rightarrow (0, 1, 2, 3)$ en donde $f(00) = 0, f(01) = 1, f(10) = 3$ y $f(11) = 2$, entonces f mapea los dos dígitos del Código Gray reflexivo en un único dígito en base 4 perteneciente al Código Gray de base 4.

Demostración: Sea $D = \{00, 01, 10, 11\}$ el dominio de la función f . Tomando los vértices $u, v \in D$ tales que su distancia de Lee sea igual a 1 tenemos:

$$\begin{aligned} D_L(00, 01) &= W_L(00 - 01) = 1 \\ D_L(01, 11) &= W_L(01 - 11) = 1 \\ D_L(10, 11) &= W_L(10 - 11) = 1 \\ D_L(00, 10) &= W_L(00 - 11) = 1 \end{aligned}$$

al aplicar la función f al dominio estas quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D_L(f(00), f(01)) &= D_L(0, 1) = W_L(0 - 1) = \text{mín}\{3, 1\} = 1 \\ D_L(f(01), f(11)) &= D_L(1, 2) = W_L(3 - 1) = \text{mín}\{1, 3\} = 1 \\ D_L(f(10), f(11)) &= D_L(3, 2) = W_L(3 - 2) = \text{mín}\{1, 3\} = 1 \\ D_L(f(00), f(10)) &= D_L(0, 3) = W_L(0 - 3) = \text{mín}\{1, 3\} = 1 \end{aligned}$$

Por lo que la función f preserva las propiedades de la Distancia de Lee, es decir $D_L(f(u), f(v)) = 1$.

Lema 3 Sea H un hipercubo de dimensión $n = 2d$ y sea K un $(d, 4)$ -cubo Q_d^4 .

Sea $u = (a_{2d}a_{2d-1} \cdots a_1)$ y $v = (b_{2d}b_{2d-1} \cdots b_1)$ los vértices de H y sean $u' = (a'_d a'_{d-1} \cdots a'_1)$ y $v = (b'_d b'_{d-1} \cdots b'_1)$ los vértices de K .

Sea $f_v = (u')$ donde $a'_i = f(a_{2i}a_{2i-1})$ en donde f es la función definida en el Lema 2 y sea $f_E(u, v) = (u', v') = (f_v(u), f_v(v))$. Entonces el par (f_v, f_E) encaja a H en K .

Demostración: Podemos observar que H y K tienen el mismo número de vértices, debido a que $4^d = 2^{2d}$. La función f_v mapea los nodos de H a K , se mostrará que el par (f_v, f_E) es un encaje mostrando que los nodos adyacentes en H también son adyacentes en K .

Sean $u, v \in H$, tales que son adyacentes, esto implica que difieren en algún dígito j de sus etiquetas, para $1 \leq j \leq 2d$. Sin pérdida de generalidad, sea $j = 2p$, se tiene que:

$$D_L(a_j a_{j-1}, b_j b_{j-1}) = D_L(a_j a_{j-1}, \bar{a}_j a_{j-1}) = 1,$$

utilizando el Lema 2 se tiene que $D_L(f(a_j a_{j-1}), f(\bar{a}_j a_{j-1})) = D_L(a'_p, b'_p) = 1$. Pero como u' y v' sólo difieren en la posición p , esto implica que $D_L(u', v') = 1$ por lo que podemos concluir que son adyacentes en K .

Corolario 1 Sea H un hipercubo de dimensión $2d - 1$ Q_{2d-1}^2 y sea K un Q_d^4 . Usando la notación del Lema 3 con $f_v(u) = u'$ donde:

$$a'_i = \begin{cases} f(0a_{2i-1}) & \text{si } i = d \\ f(a_{2i}a_{2i-1}) & \text{si } 1 \leq i < d \end{cases}$$

el par (f_v, f_E) encaja a H en K .

Demostración: Retomando la demostración anterior del Lema 3, como la dimensión de H es $2d - 1$, el número de vértices que contiene H es 2^{2d-1} , lo cual es menor al número de vértices de k que es $4d$, sean u, v vértices adyacentes en H , así que difieren en algún dígito de sus etiquetadas, sea esta posición $j = 2p$, para $1 \leq j \leq 2d - 1$, por el lema anterior ya vimos que este caso sí se cumple. Así que sólo nos falta verificar el caso cuando $i = d$, al cual sólo agregaremos el 0, por lo que $D_L(0, a_d) = D_L(0, a'_d) = 1$.

A partir de los Lemas 2 y 3 y el Corolario 1 presentamos cómo encajar un hipercubo Q_{2d} en un $Q_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}^4$. Sea $(a_n a_{n-1} \cdots a_1)$ la etiqueta del vértice x , si n es impar, volvemos a etiquetar a x como $x = (0a_n a_{n-1} \cdots a_1)$, así el vértice x' de $Q_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}^4$ tendrá la etiqueta $x' = (b_j b_{j-1} \cdots b_1)$ en donde $j = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y $b_i = f(a_{2i} a_{2i-1})$ con $1 \leq i \leq j$, la función f se definió en el Lema 2.

Ejemplo 13 Encajar el hipercubo de 3-dimensión Q_3^2 en Q_2^4 .

Primero tomemos las etiquetas de Q_3^2 , las cuales son el dominio de la función f .

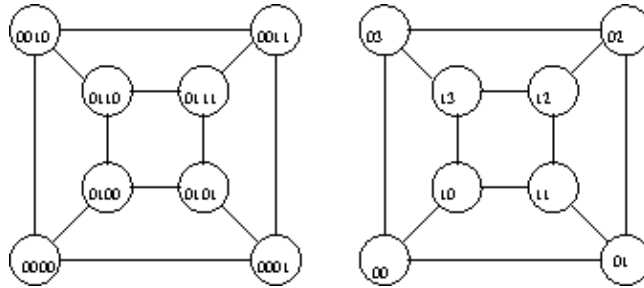
$\mathcal{D} = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$ al ser n número impar se antepone un 0 a todas las etiquetas.

$\mathcal{D} = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111\}$, para cada vértice aplicamos el Lema 2 y obtenemos:

$$f(a_3 a_2 a_1 a_0) = (f(a_3 a_2) f(a_1 a_0))$$

$$0000 = f(00)f(00) = 00 \quad 0100 = f(01)f(00) = 10$$

$$\begin{array}{ll}
0001 = f(00)f(01) = 01 & 0101 = f(01)f(01) = 11 \\
0010 = f(00)f(10) = 03 & 0110 = f(01)f(10) = 13 \\
0011 = f(00)f(11) = 02 & 0111 = f(01)f(11) = 12
\end{array}$$

Figura 2.18: Encaje de Q_3^2 en Q_2^4

Ejemplo 14 Encajar el hipercubo de 4-dimensión Q_4^2 en Q_3^4 .

El dominio de la función f es $\mathcal{D} = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111\}$, al ser $n = 4$ un número par aplicamos la función directamente:

$$f(a_3a_2a_1a_0) = (f(a_3a_2)f(a_1a_0))$$

$$\begin{array}{ll}
0000 = f(00)f(00) = 00 & 1000 = f(10)f(00) = 30 \\
0010 = f(00)f(10) = 03 & 1001 = f(10)f(01) = 31 \\
0011 = f(00)f(11) = 02 & 1010 = f(10)f(10) = 33 \\
0100 = f(01)f(00) = 10 & 1011 = f(10)f(11) = 32 \\
0101 = f(01)f(01) = 11 & 1100 = f(11)f(00) = 20 \\
0110 = f(01)f(10) = 13 & 1101 = f(11)f(01) = 21 \\
0111 = f(01)f(11) = 12 & 1110 = f(11)f(10) = 23 \\
0001 = f(00)f(01) = 01 & 1111 = f(11)f(11) = 22
\end{array}$$

Capítulo 3

Ciclos Hamiltonianos en los (n, k) -cubos

Al final del capítulo anterior dimos una introducción a los encajes, este tema es de gran importancia, ya que este capítulo, estudiaremos los encajes en ciclos. En esta sección nos referiremos a los ciclos como la red de interconexión anillo para mayor facilidad.

Recordemos dos conceptos importantes de la Teoría de Gráficas sobre trayectorias. Sea $G = (V, E)$ una gráfica cualquiera y sean $u, v \in V(G)$ dos vértices de G .

- **Trayectoria Hamiltoniana:** Una uv -trayectoria es Hamiltoniana si pasa por todos los vértices de G .
- Un **ciclo Hamiltoniano** es un ciclo que contiene a todos los vértices de G .

El propósito de encajar al (n, k) -cubo en un ciclo es debido a que si encajamos la gráfica (n, k) -cubo sobre el ciclo tendríamos un ciclo Hamiltoniano, lo cual nos permite encontrar una forma de recorrer al (n, k) -cubo pasando por todos los vértices exactamente una vez.

En la primera sección del capítulo veremos que al encontrar un Código Gray éste nos genera un ciclo Hamiltoniano. En las siguientes secciones se presentan diversas funciones para encajar a Q_n^k en un ciclo, estas funciones al ser diferentes generan ciclos Hamiltonianos distintos, pueden tener o no aristas en común, estas funciones son propuestas en el artículo *Lee Distance and Topological Properties of k -ary n -cubes* de Bella Bose y Bob Groeg[6].

Debido a que existen diversas funciones nos interesará saber cuántos Códigos Gray ajenos por aristas podemos encajar en un (n, k) -cubo. Para tener un ciclo Hamiltoniano de n vértices necesitaríamos n aristas, el (n, k) -cubo esta formado por k^n vértices, por lo que necesitamos k^n aristas para formar un ciclo Hamiltoniano dentro de él, además $k^n \leq |E(G)|$ por lo que pensaríamos que podemos encontrar más de un ciclo Hamiltoniano. Mostraremos algunas funciones que generan estos ciclos dependiendo de los valores de n y k utilizando las funciones propuestas por el artículo *Edge Disjoint Hamiltonian Cycles in k -Ary n -Cubes and Hypercubes* de Weizhen Mao y Bella Bose[3].

Ilustramos algunos términos y resultados, sobre ejemplares pequeños del (n, k) -cubo, con el fin de que los conceptos queden mejor explicados.

3.1. Códigos Gray para los (n, k) -cubos

En la Sección 1.3 presentamos la forma de generar ciclos Hamiltonianos para un hipercubo Q_n usando códigos Gray en base 2, nos ayudaremos de esta idea de construcción para generalizar estos códigos a base k .

En la parte de construcción del (n, k) -cubo, en la Sección 2.1, observamos que cada vértice está dentro de n ciclos de k vértices cada uno. Cada ciclo representa una sucesión de números en base k , por lo que la longitud de las etiquetas es igual a n y si dos etiquetas son consecutivas sólo difieren en un dígito; esto significa que los respectivos nodos son vecinos. Las sucesiones en base k que cumplen con estas propiedades se conocen como **Códigos Gray** \mathcal{G}_n^k , algunas veces se abreviarán como \mathcal{G} . Generalizar para k va a depender de la paridad de k ; es decir, si k es par o impar, para ello vamos a establecer nueva notación.

Definición 20 Sea $A = 0, 1, 2, \dots, k-1$ una secuencia de vértices vecinos entre ellos:

1. Denotamos por $(A)^{-1}$ como la secuencia A en orden inverso; es decir,
 $(A)^{-1} = k-1, k-2, \dots, 1, 0$.
2. Denotamos por $(A)^t$ a la secuencia que resulta de traer al inicio al último elemento de A por lo que los elementos de A se recorren una posición a la derecha; es decir, el primer elemento de A pasa a ser el segundo, el segundo elemento de A pasa a ser el tercero y así sucesivamente:
 $(A)^t = k-1, 0, 1, 2, \dots, k-2$. Podemos notar que si aplicamos $\underbrace{((A^t) \cdots)^t}_{k \text{ veces}} = 0, 1, 2, \dots, k-1$,
 entonces volvemos a tener a A .

Definición 21 Generalización Código Gray, base $k = 2p$, para $p \in \mathbb{N}$

- **Caso Base:** $n = 1$ tendremos k dígitos $0, 1, 2, \dots, k-1$
 $\mathcal{G}_1 = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$
- **Paso Recursivo:** Para algún n , $n \in \mathbb{N}$, se define de la siguiente forma:
 $\mathcal{G}_n = \{0 \mathcal{G}_{n-1}, 1(\mathcal{G}_{n-1})^{-1}, 2\mathcal{G}_{n-1}, 3(\mathcal{G}_{n-1})^{-1}, \dots, k-1(\mathcal{G}_{n-1})^{-1}\}$
 Es decir, cuando el prefijo sea un número impar usaremos $(\mathcal{G}_{n-1})^{-1}$, la secuencia en orden inverso; y si es par el prefijo usamos \mathcal{G}_{n-1} .

Definición 22 Generalización Código Gray, base $k = 2p + 1$, para $p \in \mathbb{N}$

- **Caso Base:** $n = 1$ tendremos k dígitos $0, 1, 2, \dots, k-1$
 $\mathcal{G}_1 = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$
- **Paso Recursivo:** Para algún n , $n \in \mathbb{N}$, se define de la siguiente forma:
 $\mathcal{G}_n = \{0 (\mathcal{G}_{n-1}), 1(\mathcal{G}_{n-1})^t, 2 \underbrace{((\mathcal{G}_{n-1})^t)^t}_2, 3 \underbrace{(((\mathcal{G}_{n-1})^t)^t)^t}_3, \dots, k-1 \underbrace{(((\mathcal{G}_{n-1})^t) \cdots)^t}_{k-1}\}$

Ejemplo 15 Sea $k = 3$ en un (n, k) -cubo vamos a encontrar los Códigos Gray cuando n vale 1, 2, 3:

- Para $n = 1$ $\mathcal{G}_1 = \{0, 1, 2\}$
 Este es el primer ciclo y el más simple.

- Para $n = 2$ Primero copiamos a $0(\mathcal{G}_1) = 00, 01, 02$
 Luego aplicamos $(\mathcal{G}_{n-1})^t = 2, 0, 1$ y nos queda $1(\mathcal{G}_{n-1})^t = 12, 10, 11$
 Por último, aplicamos $((\mathcal{G}_{n-1})^t)^t = 1, 2, 0$ y nos queda $2(\mathcal{G}_{n-1})^t = 21, 22, 20$.
 $\mathcal{G} = \{00, 01, 02, 12, 10, 11, 21, 22, 20\}$

- Para $n = 3$ Primero copiamos a $0(\mathcal{G}_2) = 000, 001, 002, 012, 010, 011, 021, 022, 020$
 Luego aplicamos $(\mathcal{G}_2)^t = 20, 21, 22, 02, 00, 01, 11, 12, 10$ por lo que
 $1(\mathcal{G}_2)^t = 122, 121, 120, 110, 111, 112, 120, 121, 122$
 Por último, aplicamos $((\mathcal{G}_{n-1})^t)^t = 10, 11, 12, 22, 20, 21, 01, 02, 00$ por lo que
 $2((\mathcal{G}_{n-1})^t)^t = 210, 211, 212, 222, 220, 221, 201, 202, 200$

$$\mathcal{G} = \{000, 001, 002, 012, 010, 011, 021, 022, 020$$

$$120, 121, 122, 102, 100, 101, 111, 112, 110$$

$$210, 211, 212, 222, 220, 221, 201, 202, 200\}$$

Para un $(n, 3)$ -cubo, en la Figura 3.1 se muestra como se vería, variando la n desde 1 hasta 3. Al ser estos códigos circulares, en cada círculo deben estar el número total de vértices. En el círculo más pequeño se encuentra el caso del $(1, 3)$ -cubo en el cual sus etiquetas se definieron como 0,1,2. En el círculo de en medio se puede observar el $(2, 3)$ -cubo y en el último círculo tenemos el $(3, 3)$ -cubo.

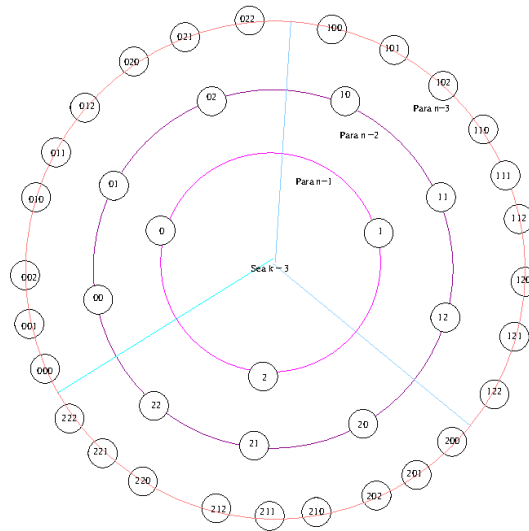


Figura 3.1: El Código Gray para $K=3$

Ejemplo 16 Sea $k = 4$ en un (n, k) -cubo vamos a encontrar los Códigos Gray cuando n vale 1, 2, 3:

- Para $n = 1$ $\mathcal{G}_1 = \{0, 1, 2, 3\}$
 Este es el primer ciclo y el más simple.

- Para $n = 2$ Primero copiamos a $0(\mathcal{G}_1) = 00, 01, 02, 03$.
 Aplicamos $(\mathcal{G}_1)^{-1} = 3, 2, 1, 0$, nos queda:
 $1(\mathcal{G}_{n-1})^t = 13, 12, 11, 10$
 Aplicamos $2(\mathcal{G}_1)^{-1} = 20, 21, 22, 23$.
 Por último, aplicamos $(\mathcal{G}_1)^{-1} = 3, 2, 1, 0$ nos queda: $1(\mathcal{G}_{\mathcal{G}_1})^{-1} = 33, 32, 31, 30$
 $\mathcal{G} = \{00, 01, 02, 03, 13, 12, 11, 10, 20, 21, 22, 23, 33, 32, 31, 30\}$

- Para $n = 3$ Primero tenemos:
 $0(\mathcal{G}_2) = 000, 001, 002, 003, 013, 012, 011, 010, 020, 021, 022, 023, 033, 032, 031, 030$.
 Aplicamos $(\mathcal{G}_2)^{-1} = 30, 31, 32, 33, 23, 22, 21, 20, 10, 11, 12, 13, 03, 02, 01, 00$
 por lo que:
 $1(\mathcal{G}_2)^t = 130, 131, 132, 133, 123, 122, 121, 120, 110, 111, 112, 113, 103, 102, 101, 100$.
 Aplicamos $2(\mathcal{G}_2) = 200, 201, 202, 203, 213, 212, 211, 210, 220, 221, 222, 223,$
 $233, 232, 231, 230$.
 Por último, $(\mathcal{G}_2)^{-1} = 30, 31, 32, 33, 23, 22, 21, 20, 10, 11, 12, 13, 03, 02, 01, 00$,
 por lo que:
 $2(\mathcal{G}_2)^{-1} = 330, 331, 332, 333, 323, 322, 321, 320, 310, 311, 312, 313, 303, 302, 301, 300$

$\mathcal{G} = \{000, 001, 002, 003, 013, 012, 011, 010, 020, 021, 022, 023, 033, 032, 031, 030$

$130, 131, 132, 133, 123, 122, 121, 120, 110, 111, 112, 113, 103, 102, 101, 100$

$200, 201, 202, 203, 213, 212, 211, 210, 220, 221, 222, 223, 233, 232, 231, 230$

$330, 331, 332, 333, 323, 322, 321, 320, 310, 311, 312, 313, 303, 302, 301, 300\}$

Lema 4 Sean n y k dos enteros y sea \mathcal{G}_n^k un Código Gray en un (n, k) -cubo, entonces \mathcal{G}_n^k genera un ciclo Hamiltoniano H en el (n, k) -cubo.

Demostración: Para demostrar que el Código Gray \mathcal{G} de un (n, k) -cubo es un ciclo Hamiltoniano H en el (n, k) -cubo, tenemos que probar dos cosas: primero, recorre a cada vértice del (n, k) -cubo exactamente una vez y, segundo, empieza en el lugar que termina.

- Primero vamos a demostrar que pasamos por todos los vértices exactamente una vez. Como sabemos un (n, k) -cubo lo podemos visualizar como $Q_{n-1}^k \times C_k$; es decir, al (n, k) -cubo por el ciclo de orden k , esto nos da k copias del $(n-1, k)$ -cubo, cada copia contiene los mismos vértices y utilizando la Definición 21 o 22 dependiendo de k se antepone un número i con $i = 0, 1, \dots, k-1$ así que tenemos $k * k^{n-1} = k^n$ vértices y ninguno lo tenemos repetido ya que tienen un número prefijo diferente.
- Por la definición de Código Gray sabemos que entre dos números de él hay un bit de diferencia; es decir, si g_i y g_{i+1} existen en \mathcal{G} , la arista (g_i, g_{i+1}) existe en el conjunto de aristas del (n, k) -cubo, sólo nos fijaremos en el primer y último número de \mathcal{G} para garantizar que exista la aristas, tenemos dos casos:

1. k es par, para este caso se utilizo $(\mathcal{G}_{n-1})^{-1}$, pensaremos en el caso de hipercubo donde sólo se tomaba la inversa de el elemento $k-1(\mathcal{G}_{n-1})^{-1}$ es la reversa de $0(\mathcal{G}_{n-1})^{-1}$ por

lo que $k-1(\mathcal{G}_{n-1})^{-1}$ termina con el número $k-1(00\cdots 0)$ y $0(\mathcal{G}_{n-1})^{-1}$ empieza con la etiqueta $0(00\cdots 0)$, por lo que sólo difiere el prefijo $k-1$ y 0 así que hay una arista entre ellos.

2. k es impar, utilizamos la Definición 22, además sabemos que:

$$\underbrace{((A^t)\cdots)^t}_{k \text{ veces}} = \{0, 1, 2, \dots, k-1\} = A \text{ y } \underbrace{((A^t)\cdots)^t}_{k-1 \text{ veces}} = \{1, 2, \dots, k-1, 0\}$$

por lo que únicamente va a cambiar el dígito que se anteponga.

De lo anterior es fácil ver que el código Gray \mathcal{G} genera el ciclo Hamiltoniano H ; es decir, si tenemos un ciclo Hamiltoniano H hay un código Gray \mathcal{G} que lo genera.

3.2. Encaje en Ciclos/Anillos

Hemos revisado una forma general e intuitiva de generalizar los Códigos Gray en la Sección pasada; además, en el primer capítulo se definió formalmente a los anillos también conocidos como ciclos, por lo que deduciremos los siguientes teoremas.

A partir de este momento, nos referiremos a los vértices o nodos de un (n, k) -cubo por sus etiquetas las cuales están formadas por cadenas (números) de n dígitos en base k . Es decir, la etiqueta de un vértice A es $A = (a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0)$, donde cada a_i está en base k .

Sea $\mathcal{A}[A_1, A_2, \dots, A_r]$ una secuencia de vértices (etiquetas) que forman un anillo en un (n, k) -cubo. Ya que la distancia de Lee entre dos etiquetas sucesivas (vértices vecinos) debe ser uno, entonces esta secuencia de vértices forma un Código Gray, por la Definición 11. Si además, $r = k^n$ entonces el anillo forma un ciclo Hamiltoniano. Esto sugiere que al generar un ciclo Hamiltoniano se construye un código Gray y viceversa. El siguiente resultado presenta un método para construir un código Gray para k , con $k \geq 1$.

Teorema 3 Sea la gráfica (n, k) -cubo y A un vértice de él, dada la función $f = \{0, \dots, k-1\}^n \rightarrow \{0, \dots, k-1\}^n$ y

$\tilde{f} = \{0, \dots, k-1\}^n \rightarrow \{0, \dots, k-1\}^n$ definida de la siguiente forma:

$$f(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0) = a_{n-1}(a_{n-2} - a_{n-1})\cdots(a_0 - a_1) y$$

Si S es una secuencia de etiquetas de longitud n en base k de un nodo de la gráfica (n, k) -cubo, donde:

$$S = \langle (00\cdots 00), (00\cdots 01), \dots, (00\cdots 0(k-1)), \\ (00\cdots 10), \dots, ((k-1)(k-1)\cdots(k-1)(k-1)) \rangle$$

al aplica la función f a S , obtenemos un ciclo Hamiltoniano

$G = \langle f(00\cdots 00), f(00\cdots 01), \dots, f(00\cdots 0(k-1)), f(00\cdots 10), \dots, f((k-1)(k-1)\cdots f(k-1)(k-1)) \rangle$ el cual es un Código Gray.

Demostración: Sea la gráfica (n, k) -cubo y sean $A = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0$ y $B = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0$ dos vértices del (n, k) -cubo donde $B = (A + 1) \pmod{k^n}$; es decir, A y B son vecinos. Consideramos a m como la posición del primer dígito desde la izquierda en que la etiqueta de A difiere e B , tenemos divididos a las etiquetas de los vértices A y B de la siguiente forma:

$$A = [a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_{m+1}] \quad a_m \quad [(k-1)\cdots(k-1)] \\ B = [a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_{m+1}] \quad a_m + 1 \quad [00\cdots 0]$$

Observamos que las subsecuencias entre corchetes podrían no existir, debido a que la posición del primer dígito en diferir se puede encontrar en cualquier lugar del ciclo. Aplicando f al ciclo A obtenemos:

$$f(A) = [x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_{m+1}] \quad x_m \quad [x_{m-1}0 \cdots 0]$$

en donde $x_{n-1} = a_{n-1}$

$$x_i = (a_i - a_{m+1} \text{ mód } k) \text{ para } i = n - 2 \cdots m + 1$$

$$x_m = a_m - a_{m+1} \text{ mód } k$$

$$x_{m-1} = ((k - 1) - a_m) \text{ mód } k$$

y aplicando la función f a B :

$$f(B) = [x_{n-1}x_{n-2} \cdots x_{m+1}] \quad y_m \quad [y_{m-1}0 \cdots 0]$$

en donde:

$$y_m = (a_m + 1) - a_{m+1} \text{ mód } k = (x_m + 1) \text{ mód } k$$

$$y_{m-1} = 0 - (a_m + 1) = (k - 1 - a_m) \text{ mód } k = x_{m-1}$$

De lo anterior vemos que $f(A)$ y $f(B)$ difieren en el m -ésimo dígito sólo si $D_L(f(A), f(B)) = 1$, así que si la secuencia S posee todos los vértices del (n, k) -cubo este código Gray genera un ciclo Hamiltoniano.

En la Figura 3.2 se muestra como se aplica la función f .

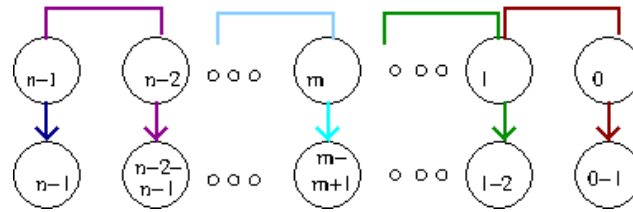


Figura 3.2: Función f

Por otro lado la función $\tilde{f} = \{0, \dots, k - 1\}^n \rightarrow \{0, \dots, k - 1\}^n$ definida de forma

$\tilde{f}(a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0) = a_{n-1}(a_{n-1} - a_{n-2})(a_{n-2} - a_{n-3}) \dots (a_1 - a_0)$ también genera un código Gray. La prueba es análoga a la del Teorema 3.

A continuación mostraremos un ejemplo de cómo se aplican las funciones f y \tilde{f} .

Ejemplo 17 Sea el $(2, 4)$ -cubo (Q_2^4) , encontrar el ciclo Hamiltoniano generado por las funciones f y \tilde{f} . Se toman todas las etiquetas de Q_2^4 por orden en cada componente.

$S = \langle 00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33 \rangle$. Primero mostramos en las columnas uno y tres los elementos de S y en las columnas dos y cuatro como se ven cada a_1a_0 al aplicarles la función f .

a_1a_0	$f(a_1a_0) = a_1(a_0 - a_1)$	a_1a_0	$f(a_1a_0) = a_1(a_0 - a_1)$
00	$0(0 - 0) = 00$	20	$2(0 - 2) = 22$
01	$0(1 - 0) = 01$	21	$2(1 - 2) = 23$
02	$0(2 - 0) = 02$	22	$2(2 - 2) = 20$
03	$0(3 - 0) = 03$	23	$2(3 - 2) = 21$
10	$1(0 - 1) = 13$	30	$3(0 - 3) = 31$
11	$1(1 - 1) = 10$	31	$3(1 - 3) = 32$
12	$1(2 - 1) = 11$	32	$3(2 - 3) = 33$
13	$1(3 - 1) = 12$	33	$3(3 - 3) = 30$

Ahora aplicaremos la función \tilde{f} , como en la función f , en las columnas uno y tres los elementos de S y en las columnas dos y cuatro como se ven cada a_1a_0 al aplicarles la función \tilde{f} .

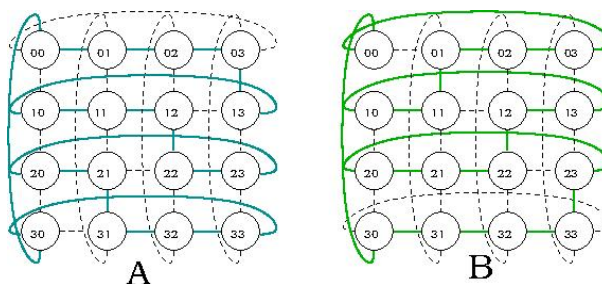


Figura 3.3: Función f y función \tilde{f}

a_1a_0	$\tilde{f}(a_1a_0) = a_1(a_1 - a_0)$	a_1a_0	$\tilde{f}(a_1a_0) = a_1(a_1 - a_0)$
00	$0(0 - 0) = 00$	20	$2(2 - 0) = 22$
01	$0(0 - 1) = 03$	21	$2(2 - 1) = 21$
02	$0(0 - 2) = 02$	22	$2(2 - 2) = 20$
03	$0(0 - 3) = 01$	23	$2(2 - 3) = 23$
10	$1(1 - 0) = 11$	30	$3(3 - 0) = 33$
11	$1(1 - 1) = 10$	31	$3(3 - 1) = 32$
12	$1(1 - 2) = 13$	32	$3(3 - 2) = 31$
13	$1(1 - 3) = 12$	33	$3(3 - 3) = 30$

En la Figura 3.3 la gráfica A muestra el ciclo Hamiltoniano generado por la función f y la gráfica B muestra el ciclo Hamiltoniano generado por la función \tilde{f}

Para la función f , descrita en el Teorema 3 podemos encontrar la función inversa, esta función también genera un código Gray.

Consideramos la gráfica (n, k) -cubo para n, k dos enteros, y sea la función f presentada en el Teorema 3, podemos encontrarla función inversa de f : f^{-1} y la función f^* que también genera un código Gray de la siguiente forma:

1. Para encontrar **inversa de f** , sea $R = r_{n-1}r_{n-2}\dots r_0$ un número de n dígitos en base k y sea $G = g_{n-1}g_{n-2}\dots g_0$ el código Gray generado por la función f , $G = f(R)$, entonces podemos encontrar la $R = f^{-1}(G)$ con $r_{n-1} = g_{n-1}$:

$$\text{en donde } r_i = (r_{i+1} + g_i) \text{ mód } k = \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_j \right) \text{ mód } k$$

para $i = n - 2, n - 3, \dots, 0$

Esto debido a que $f(r_i) = g_i = r_i - r_{i+1}$

Por lo que

$$\begin{aligned} r_i &= r_{i+1} + g_i \\ &= (r_{i+2} + g_{i+1}) + g_i \\ &\quad \vdots \\ &= r_{n-1} + g_{n-2} + \dots + g_i \\ &= g_{n-1} + g_{n-2} + \dots + g_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

2. Ahora presentamos la función f^* , esta función presenta la propiedades de reflexividad.

Sea $n = 2m$ para algún entero m y sea $S = \langle G_0, G_1, \dots, G_{n-1} \rangle$ una secuencia generada por un código Gray de longitud n .

La secuencia S es *reflexiva* si $D_L(G_i, G_{n-1-i}) = 1$ para $i = 0, 1, \dots, m-1$.

La secuencia S es *reflexiva por bloques* de longitud k^i si es posible dividir a S en k^i bloques $B_0, B_1, \dots, B_{k^{n-i}-1}$, tal que cada B_i tiene longitud k^i y los bloques adyacentes son reflexivos. Esto quiere decir que el bloque $B_j = \langle G_{jk^i}, G_{jk^i+1}, \dots, G_{jk^i+k^i-1} \rangle$ para $j = 0, \dots, k^{n-i}-1$ y la secuencia $\langle B_x, B_y \rangle$ en donde $D_L(x, y) = 1$ es reflexiva.

Si la secuencia S es reflexiva por bloques de longitud k^i pero la secuencia $\langle B_0, B_{k^{n-i}-1} \rangle$ no es reflexiva, entonces se dice que S es *parcialmente reflexiva por bloques* de longitud k^i .

Sea $R = r_{n-1}r_{n-2}\dots r_0$ un número en base k y sea $G = g_{n-1}g_{n-2}\dots g_0$ el código Gray generado por la función f^* , f^* esta definida de la siguiente forma:

$G = f^*(R)$ donde $g_{n-1} = r_{n-1}$ y para $i = n-2, \dots, 0$ se tienen dos casos:

- Si k es par:

$$g_i = \begin{cases} r_i & \text{si } r_{i+1} \text{ es par} \\ k-1-r_i & \text{si } r_{i+1} \text{ es impar} \end{cases}$$

- Si k es impar, sea $r' = \sum_{j=i+1}^{n-1} r_j$ y :

$$g_i = \begin{cases} r_i & \text{si } r' \text{ es par} \\ k-1-r_i & \text{si } r' \text{ es impar} \end{cases}$$

De lo anterior concluimos que si tenemos a $S = [R_0, R_1, \dots, R_{k^n-1}]$ una secuencia de etiquetas de n dígitos en base k y sea $S' = \langle G_0, G_1, \dots, G_{k^n-1} \rangle$ donde $G_i = f(R_i)$ para $0 \leq i \leq k^n-1$. Si k es par, entonces S' forma un ciclo Hamiltoniano. Sin embargo, si k es impar, entonces S' forma una trayectoria Hamiltoniana.

Además, si $k = 2$ o $k = 4$ se tiene que S' es reflexiva. En otro caso, S' es reflexiva por bloque, para bloques de longitud k, k^2, \dots, k^{n-1} cuando k es par; y se tiene que si S' es parcialmente reflexiva por bloques cuando k es impar.

Ejemplificaremos cómo obtener f^* y f^{-1} .

Ejemplo 18 Utilizando la gráfica $(2, 4)$ -cubo del Ejemplo 2.1, aplicar la función f^* .

Teniendo $k = 4$ y $n = 2$, se aplica el caso de k par, así $g_1 = r_1$ y para r_0 si agregamos uno se tiene que $r_0 + 1 = r_1$ al ser las operaciones en módulo k .

Se mostrará paso a paso cada componente.

Para la componente 00, 01, 02, 03 tenemos que $r_0 + 1 = r_1 = 0$, el cual es número par por lo que $g_0 = r_0$:

$$\begin{aligned} g(00) &= 00 \\ g(01) &= 01 \\ g(02) &= 02 \\ g(03) &= 03 \end{aligned}$$

Para la componente 10, 11, 12, 13 tenemos que $r_0 + 1 = r_1 = 1$, el cual es número impar por lo que $g_0 = 4 - 1 - r_i$:

$$\begin{aligned} g(10) &= 1(4 - 1 - 0) = 13 \\ g(11) &= 1(4 - 1 - 1) = 12 \\ g(12) &= 1(4 - 1 - 2) = 11 \\ g(13) &= 1(4 - 1 - 3) = 10 \end{aligned}$$

Para la componente 20, 21, 22, 23 tenemos que $r_0 + 1 = r_1 = 2$, el cual es número par por lo que $g_0 = r_0$:

$$\begin{aligned} g(20) &= 20 \\ g(21) &= 21 \\ g(22) &= 22 \\ g(23) &= 23 \end{aligned}$$

Para la componente 30, 31, 32, 33 tenemos que $r_0 + 1 = r_1 = 3$, el cual es número impar por lo que $g_0 = 4 - 1 - r_i$:

$$\begin{aligned} g(30) &= 3(4 - 1 - 0) = 33 \\ g(31) &= 3(4 - 1 - 1) = 32 \\ g(32) &= 3(4 - 1 - 2) = 31 \\ g(33) &= 3(4 - 1 - 3) = 30 \end{aligned}$$

Mostramos los resultados obtenidos de los pasos anteriores y en la Figura 3.4 observamos el ciclo Hamiltoniano generado por f^* .

a_1a_0	$f^*(a_1a_0)$	a_1a_0	$f^*(a_1a_0)$
00	00	20	20
01	01	21	21
02	02	22	22
03	03	23	23
10	13	30	33
11	12	31	32
12	11	32	31
13	10	33	30

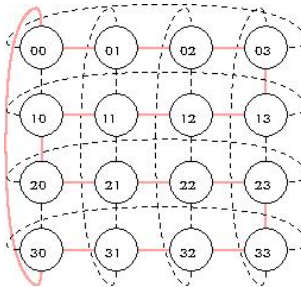


Figura 3.4: Función f^*

Ejemplo 19 Utilizando la gráfica $(2, 4)$ -cubo, aplicar la función inversa f^{-1} al Código Gray obtenido en el Ejemplo 2.1, mostrando que al aplicar f^{-1} se obtendrá la secuencia original. Para $r_1 = g_1$ y para $r_0 = (r_1 + g_0)$.

g_1g_0	$f^{-1}(g_1g_0) = g_1(r_1 + g_0)$	g_1g_0	$f^{-1}(g_1g_0) = g_1(r_1 + g_0)$
00	$0(0 + 0) = 00$	22	$2(2 + 2) = 20$
01	$0(0 + 1) = 01$	23	$2(2 + 3) = 21$
02	$0(0 + 2) = 02$	20	$2(2 + 0) = 22$
03	$0(0 + 3) = 03$	21	$2(2 + 1) = 23$
13	$1(1 + 3) = 10$	31	$3(3 + 1) = 30$
10	$1(1 + 0) = 11$	32	$3(3 + 2) = 31$
11	$1(1 + 1) = 12$	33	$3(3 + 3) = 32$
12	$1(1 + 2) = 13$	30	$3(3 + 0) = 33$

Ejemplo 20 Sea el $(3, 4)$ -cubo Q_3^4 aplicar la función f^* para encontrar el ciclo Hamiltoniano.

R	$f^*(R)$	R	$f^*(R)$	R	$f^*(R)$	R	$f^*(R)$
000	000	100	130	200	200	300	330
001	001	101	131	201	201	301	331
002	002	102	132	202	202	302	332
003	003	103	133	203	203	303	333
010	013	110	123	210	213	310	323
011	012	111	122	211	212	311	322
012	011	112	121	212	211	312	321
013	010	113	120	213	210	313	320
020	020	120	110	220	220	320	310
021	021	121	111	221	221	321	311
022	022	122	112	222	222	322	312
023	023	123	113	223	223	323	313
030	033	130	103	230	233	330	303
031	032	131	102	231	232	331	302
032	031	132	101	232	231	332	301
033	030	133	100	233	230	333	300

3.3. Ciclos Hamiltonianos Ajenos por Aristas

En los ejemplos de la Sección 3.2 mostramos cómo construir ciclos Hamiltonianos a partir de los códigos Gray, algunos ejemplos comparten aristas, sin embargo en el Ejemplo 17 vemos que las funciones f y \tilde{f} no poseen aristas en común; es decir, estas funciones generan trayectorias ajenas por aristas. Sin embargo, observando a la función f^* , comparte aristas tanto con la función f y con la función \tilde{f} . Intuitivamente esto nos muestra que podríamos encajar diferentes ciclos Hamiltonianos en un (n, k) -cubos.

Definición 23 Dos Códigos Gray \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 en la gráfica (n, k) -cubo son **ajenos por aristas** si para toda arista $(x, y) \in \mathcal{G}_1$ no pertenece a \mathcal{G}_2 o $(x, y) \in \mathcal{G}_2$ no pertenece a \mathcal{G}_1 .

Intuitivamente, si la gráfica (n, k) -cubo Q_n^k es $2n$ -regular podríamos pensar que podemos encontrar n ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas, esto es cierto para $k \geq 3$ y para $k = 2$ podemos encontrar $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; sin embargo, encontrar estos ciclos no es trivial. En lo que resta de la sección se mostrarán algunos ejemplos de cómo construir los ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas.

Teorema 4 La cantidad de códigos Gray independientes dentro de la gráfica (n, k) -cubo Q_n^k es equivalente a la cantidad de ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas en un (n, k) -cubo Q_n^k para k con $k \geq 3$.

Demostración: Tomaremos la idea del Lema 4 de la Sección 3.1, el cual indica que cada Código Gray genera un ciclo Hamiltoniano y veremos que los ciclos Hamiltonianos generados son ajenos dos a dos.

Un código Gray de la gráfica (n, k) -cubo consiste en k^n vértices cuyas etiquetas tienen longitud n en base k , si dos códigos Gray independientes \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 cada uno genera los ciclos Hamiltonianos H_1 y H_2 , respectivamente, sean $u = (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0)$ y $v = (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0)$ dos vértices adyacentes dentro de \mathcal{G}_1 esto implica que $D_L(u, v) = 1$ por lo que la arista $(u, v) \in H_1$, como \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 son independientes dentro de \mathcal{G}_2 , los vértices u y v no son adyacentes, así que la arista (u, v) no pertenece a H_2 . Como tomamos una arista cualquiera, nos sirve para todas las aristas de \mathcal{G}_1 .

Definición 24 Sea $X = (x_{n-1}, x_{n-2}, x_0)$ un vértice dentro del Código Gray \mathcal{G}_n^k del (n, k) -cubo, denotamos por $(X; \mathcal{G}_{n_1}^{k_1})$ a los dígitos de tamaño n_1 en base k_1 del vértice x ; es decir, hicimos una transformación de los vértices del Código Gray \mathcal{G} que están en base k con longitud n a otro Código Gray $\mathcal{G}_{n_1}^{k_1}$ que está en base k_1 y tiene longitud n_1 .

Ejemplo 21 Sea $x = (2443) \in \mathcal{G}_4^5$, el cual es un vértice donde cada número está en base 5 y tiene longitud 4. Encontraremos a $(X; \mathcal{G}_2^{25})$.

Como vamos a pasar a x a dimensión 2, separamos a x en dos partes 24 y 43, los cuales están en base 10. También podemos notar que $25 = 5^2$;

Para 24 : $2 * 5^1 + 4 * 5^0 = 10 + 4 = 14$, Para 43 : $4 * 5^1 + 3 * 5^0 = 20 + 3 = 23$. De lo anterior $(X; \mathcal{G}_2^{25}) = (14, 23)$.

Definición 25 Sea $x = (x_{n-1}, x_{n-2}, x_0)$ un vértice dentro del Código Gray G_n^k , la función h_i con: $h_i(x) : G_n^k \rightarrow G_n^k$ para $0 \leq i \leq n-1$ es un automorfismo (mapeo), el cual nos dará otro Código Gray. Así $H_i(Q_n^k)$ para $0 \leq i \leq n-1$ corresponde al ciclo Hamiltoniano de cada función h_i .

La forma de encontrar las funciones h_i varía de acuerdo a quien sea n y k . Para ello mostraremos algunos casos de tales funciones.

3.4. Ciclos Hamiltonianos Ajenos en un $(2, k)$ -cubo

El siguiente teorema es la base para encontrar ciclos Hamiltonianos en un toro de dimensión $T_{k^r, k}$. En la Sección 2.5 vimos que podemos incrustar a los (n, k) -cubos en una malla, esta información nos es de utilidad.

Teorema 5 Sean k un enteros, la gráfica $(2, k)$ -cubo Q_2^k y sea $x = (x_1 x_0)$ una arista del $(2, k)$ -cubo, existen dos funciones h_0 y h_1 las cuales generan dos Códigos Gray. Estas funciones están dadas por:

- $h_0(x) = h_0(x_1, x_0) = (x_1, (x_0 - x_1)) \pmod k$
- $h_1(x) = h_1(x_1, x_0) = ((x_0 - x_1), x_1) \pmod k$

Demostración: Primero probaremos que h_0 y h_1 son funciones inyectivas.

Sean $x = (x_1, x_0)$ y $y = (y_1, y_0)$ dos vértices consecutivos. Si $x = (k-1, k-1)$ y $y = (0, 0)$ y aplicamos la función h_0 , $h_0(x)$ y $h_0(y)$ quedan adyacentes. En otro caso, vamos a probar que la Distancia de Lee $D_L(h_0(x), h_0(y)) = 1$, para que esto ocurra tenemos dos opciones:

- Si $y_1 = x_1$ y $y_0 = x_0 + 1$ lo que implica que al aplicar la función $h_0(x) = (x_1, x_0 - x_1)$ y $h_0(y) = (y_1, y_0 - y_1)$, sustituyendo en $h_0(y) = (x_1, x_0 + 1 - x_1)$ lo cual implica $D_L(h_0(x), h_0(y)) = 1$.
- Si $y_1 = x_1 + 1$ entonces $x_0 = k - 1$ y $y_0 = 0$.

Así, tenemos que $h_0(x) = (x_1, k - 1 - x_1)$ y $h_0(y) = (y_1, y_0 - y_1) = (x_1 + 1, 0 - 1 - x_1) = (x_1 + 1, k - 1 - x_1)$, por lo que $D_L(h_0(x), h_0(y)) = 1$. Por lo tanto, h_0 genera un Código Gray en la gráfica (n, k) -cubo Q_n^k .

Para h_1 es una permutación de los dígitos obtenidos por h_0 , por lo que h_1 también genera un código Gray.

Falta probar que las aristas que se utilizan para h_1 son diferentes a las de h_0 . En la i -ésima fila para $0 \leq i \leq k - 1$ la función h_0 usa todas las aristas a excepción de la arista $((i, k - 1 - i), (i, k - i))$, esta arista es usada por la función h_1 . De manera similar, la función h_1 utiliza las todas las aristas de la j -ésima columna para $0 \leq j \leq k - 1$ a excepción de la arista $((j, k - 1 - j), (j, k - j))$ la cual es usada por la función h_0 . Por lo que las funciones h_0 y h_1 generan ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas.

Tanto h_0 como h_1 tienen sus respectivas funciones inversas al ser funciones biyectivas, las cuales se muestran a continuación.

- $h_0(x)^{-1} = h_0^{-1}(x_1, x_0) = (x_1, (x_0 + x_1)) \pmod k$
- $h_1(x)^{-1} = h_1^{-1}(x_1, x_0) = (x_1, (x_0 + x_1)) \pmod k$

Ejemplo 22 Generar los dos ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas de un $(2, 3)$ -cubo Q_2^3 utilizando las funciones presentadas en el Teorema 5.

Los vértices del $(2, 3)$ -cubo Q_2^3 son: 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22.

Primero, aplicamos la función h_0 la cual es la forma mas simple del Teorema 3 de la Sección 3.1:

$$\begin{array}{ll}
 x_1x_0 = h_0(x_1x_0) = (x_1, (x_0 - x_1)) & x_1x_0 = h_0(x_1x_0) = (x_1, (x_0 - x_1)) \\
 00 = 0(0 - 0) = 00 & 12 = 1(2 - 1) = 11 \\
 01 = 0(1 - 0) = 01 & 20 = 2(0 - 2) = 21 \\
 02 = 0(2 - 0) = 02 & 21 = 2(1 - 2) = 22 \\
 10 = 1(0 - 1) = 12 & 22 = 2(2 - 2) = 20 \\
 11 = 1(1 - 1) = 10 &
 \end{array}$$

Después, aplicamos la función h_1 :

$$\begin{array}{ll}
 x_1x_0 = h_1(x_1x_0) = ((x_0 - x_1), x_1) & x_1x_0 = h_1(x_1x_0) = ((x_0 - x_1), x_1) \\
 00 = (0 - 0)0 = 00 & 12 = (2 - 1)1 = 11 \\
 01 = (1 - 0)0 = 10 & 20 = (0 - 2)2 = 12 \\
 02 = (2 - 0)0 = 20 & 21 = (1 - 2)2 = 22 \\
 10 = (0 - 1)1 = 21 & 22 = (2 - 2)2 = 02 \\
 11 = (1 - 1)1 = 01 &
 \end{array}$$

En la Figura 3.5 podemos ver los dos ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas. La función h_0 se muestra en la línea continua y la función h_1 se muestra en líneas punteadas.

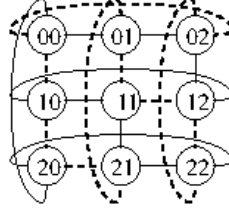


Figura 3.5: Ciclos Hamiltonianos ajenos (2, 3)–cubo

3.5. Ciclos Hamiltonianos Ajenos en un Toro

El Teorema 5 de la sección anterior puede ser generalizado a un toro de dimensión $k^r \times k$ para $k \geq 3$ y $r \geq 1$, esta sección nos mostrara cómo hacerlo. En toda la sección trabajaremos con el Toro de dos dimensiones por lo que en lugar de escribir $T_{k^r, k}$ solo lo denotaremos por $\mathbb{Z}_{k_0} \times \mathbb{Z}_{k_1}$ para indicar que estamos hablando de los enteros en módulo k .

Teorema 6 En un toro T de dimensión $k_1 \times k_0$, si el $MCD(k_1, k_0 - 1) = 1$ y $k_1 = mk_0$ para algún $m \geq 1$ y sea $x = (x_1 \text{ mód } k_1, x_0 \text{ mód } k_0)$, las siguientes dos funciones generan códigos Gray Independientes.

- $h_0(x) = (x_1 \text{ mód } k_1, (x_0 + (k_0 - 1)x_1) \text{ mód } k_0)$
- $h_1(x) = ((x_0 + (k_0 - 1)x_1) \text{ mód } k_1, x_1 \text{ mód } k_0)$

Demostración: Sean $x' = (x'_1, x'_0)$ y $x'' = (x''_1, x''_0)$, tal que $x', x'' \in \mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_0}$. La demostración tiene tres partes:

1. Primero probaremos que las funciones son inyectivas.

Suponemos que $x' \neq x''$, vamos a demostrar que $h_0(x') \neq h_0(x'')$ y $h_1(x') \neq h_1(x'')$.

a) Suponemos que $h_0(x') = h_0(x'')$ esto nos da $(x'_1 \text{ mód } k_1, (x'_0 + (k_0 - 1)x'_1) \text{ mód } k_0) = (x''_1 \text{ mód } k_1, (x''_0 + (k_0 - 1)x''_1) \text{ mód } k_0)$, esto implica que la primera componente es la misma; es decir, $x'_1 = x''_1 \text{ mód } k_1$. Para la segunda componente tenemos que $x'_0 + (k_0 - 1)x'_1 = x''_0 + (k_0 - 1)x''_1$, de lo anterior sabemos que $x'_1 = x''_1$, por lo que $x'_0 = x''_0$, lo cual implica que $x' = x''$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $h_0(x') \neq h_0(x'')$.

b) Suponemos que $h_1(x') = h_1(x'')$ esto nos da $(x'_0 + (k_0 - 1)x'_1) \text{ mód } k_1, x'_1 \text{ mód } k_0 = (x''_0 + (k_0 - 1)x''_1) \text{ mód } k_1, x''_1 \text{ mód } k_0$, así que en la segunda componente podemos ver que $x'_1 = x''_1 \text{ mód } k_0$ lo que quiere decir que $k_0 | (x'_1 - x''_1)$ y para la primera componente $x'_0 + (k_0 - 1)x'_1 = x''_0 + (k_0 - 1)x''_1 \text{ mód } k_1$ así que $x'_0 - x''_0 + (k_0 - 1)(x'_1 - x''_1) = 0 \text{ mód } k_1$. Además, $|x'_0 - x''_0| < k_0$ y como $k_0 | (x'_1 - x''_1)$, concluimos que $x'_0 - x''_0 = 0 \text{ mód } k_0$ y también $x'_1 - x''_1 = 0 \text{ mód } k_1$ debido a que $mcm(k_0 - 1, k_1) = 1$. Por lo tanto, $h_1(x') \neq h_1(x'')$.

Por lo que las funciones h_0 y h_1 son funciones inyectivas, además estas funciones son suprayectivas por la forma que va recorriendo los ciclos al estar en módulo k .

2. Ahora vamos a probar que las funciones h_0 y h_1 generan ciclos Hamiltonianos H_0 y H_1 ; es decir, si $x, x + 1$ son vértices adyacentes entonces la función h_1 o h_0 deben generar una arista en el ciclo H_1 o en el ciclo H_0 . Existen dos posibles casos para h_0 y otros dos para h_1 :

a) $x = (x_1, x_0)$ y $x + 1 = (x_1, x_0 + 1)$.

Es decir, que $x, x + 1$ se encuentran en el mismo renglón y son vértices consecutivos. Al aplicar la función $h_0(x) = (x_1 \text{ mód } k_1, (x_0 + (k_0 - 1)x_1) \text{ mód } k_0)$ y $h_0(x + 1) = (x_1 \text{ mód } k_1, (x_0 + 1 + (k_0 - 1)x_1) \text{ mód } k_0)$, podemos notar que la sólo difieren al sumar una unidad en $x + 1$, por lo que $D_L(h_0(x), h_0(x + 1)) = 1$.

Sea $e_0 = (h_0(x), h_0(x + 1)) = (x_1 \text{ mód } k_1, (x_0 + (k_0 - 1)x_1) \text{ mód } k_0, x_1 \text{ mód } k_1, (x_0 + 1 + (k_0 - 1)x_1) \text{ mód } k_0)$; es decir, la arista que se genera pertenece al ciclo H_0 .

En la Figura 3.6.B se muestra cómo se ve este caso.

b) $x' = (x'_1, k_0 - 1)$ y $x' + 1 = (x'_1 + 1, 0)$

Es decir que x es el último vértice de algún renglón y $x + 1$ es el primer vértice del renglón siguiente. Aplicando la función h_0 a x' y $x' + 1$ tenemos que $h_0(x') = (x'_1 \text{ mód } k_1, (k_0 - 1) + (k_0 - 1)x_1 \text{ mód } k_0)$ y $h_0(x' + 1) = (x' + 1 \text{ mód } k_1, 0 + (k_0 - 1)(x' + 1))$, para la primera componente podemos ver que solo difiere sumando una unidad y para la segunda componente tenemos que $(k_0 - 1) + (k_0 - 1)x_1 = k_0 - 1 + x_1 k_0 - x_1 = x_1 k_0 - x_1 + k_0 - 1 = 0 + (k_0 - 1)(x' + 1)$ por lo que estos dígitos son iguales, así la $D_L(h_0(x), h_0(x + 1)) = 1$.

Así la arista $e_1 = (x'_1 \text{ mód } k_1, (k_0 - 1) + (k_0 - 1)x_1 \text{ mód } k_0, x' + 1 \text{ mód } k_1, 0 + (k_0 - 1)(x' + 1))$ está en el ciclo H_0 .

En la Figura 3.6.A se ilustra este caso.

c) $x'' = (x''_1, x''_0)$ y $x'' + 1 = (x''_1, x''_0 + 1)$.

Similar al caso *a*, $x'', x'' + 1$ se encuentran en el mismo renglón y son vértices consecutivos. Como la función h_1 solo invierte los dígitos obtenidos por la función h_0 , el primer dígito difiere en una unidad y el segundo dígito es igual, por lo que $D_L(h_1(x), h_1(x + 1)) = 1$.

Así, la arista $e_2 = ((x''_0 + (k_0 - 1)x''_1) \text{ mód } k_1, x''_1 \text{ mód } k_0, (x''_0 + 1 + (k_0 - 1)x''_1) \text{ mód } k_1, x''_1 \text{ mód } k_0)$ está en el ciclo H_1 .

d) $x''' = (x'''_1, k_0 - 1)$ y $x''' + 1 = (x'''_1 + 1, 0)$.

Similar al caso *b*, x''' es el último vértice de algún renglón y $x''' + 1$ es el primer vértice del renglón siguiente, como la función h_1 solo invierte los dígitos obtenidos por la función h_0 , el segundo dígito difiere en una unidad y el primer dígito es igual, por lo que $D_L(h_1(x), h_1(x + 1)) = 1$.

Así la arista $e_3 = (((k_0 - 1)(x'''_1 + 1) \text{ mód } k_1, x'''_1 \text{ mód } k_0), ((k_0 - 1)(x'''_1 + 1) \text{ mód } k_1, x'''_1 + 1 \text{ mód } k_0))$ está en el ciclo H_1 .

En el primer punto se vio que la función es inyectiva y en todos los casos se verificó que las distancias de Lee $D_L(h_0(x), h_0(x + 1)) = 1$ y $D_L(h_1(x), h_1(x + 1)) = 1$, por lo que h_1 y h_0 generan ciclos Hamiltonianos.

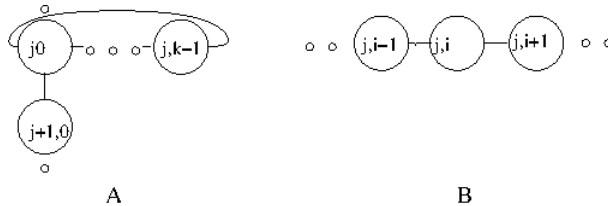


Figura 3.6: Casos en un $T_{k \times k}$

- En este punto vamos a probar que las funciones h_0 y h_1 generan ciclos H_0 y H_1 únicos y ajenos; es decir, las aristas e_0, e_1, e_2 y e_3 presentadas en el caso 2 son diferentes entre sí. La demostración la haremos por contradicción. Supondremos que las aristas $e_0 = e_2$ y $e_1 = e_3$.

Suponemos que e_0 que está en H_0 es igual a e_2 que está en H_1 , por lo que tendría que pasar alguno de los dos casos siguientes:

a)

$$x_1 = (x_0'' + (k_0 - 1)x_1'') \pmod{k_1} \quad (1)$$

$$(x_0 + (k_0 - 1)x_1) \pmod{k_1} = x_1'' \quad (2)$$

$$x_1 = (x_0'' + 1 + (k_0 - 1)x_1'') \pmod{k_1} \quad (3)$$

$$(x_0 + 1 + (k_0 - 1)x_1) \pmod{k_1} = x_1'' \quad (4)$$

b)

$$x_1 = (x_0'' + 1 + (k_0 - 1)x_1'') \pmod{k_1} \quad (1)$$

$$(x_0 + (k_0 - 1)x_1) \pmod{k_1} = x_1'' \quad (2)$$

$$x_1 = (x_0'' + (k_0 - 1)x_1'') \pmod{k_1} \quad (3)$$

$$(x_0 + 1 + (k_0 - 1)x_1) \pmod{k_1} = x_1'' \quad (4)$$

Cualquiera de los casos a o b no pueden ocurrir debido a que de las igualdades $a.(1)$ y $a.(3)$ $(x_0'' + 1 + (k_0 - 1)x_1'') \pmod{k_1} = x_1 = (x_0'' + (k_0 - 1)x_1'') \pmod{k_1}$, lo cual no es cierto ya que difieren en una unidad. En las igualdades $b.(1)$ y $b.(3)$ $(x_0'' + (k_0 - 1)x_1'') \pmod{k_1} = x_1 = (x_0'' + 1 + (k_0 - 1)x_1'') \pmod{k_1}$.

Repetimos el proceso para ver si e_1 que está en H_0 es igual a e_3 que está en H_1 , por lo que tendría que pasar alguno de los dos casos siguientes:

a)

$$x_1' = ((k_0 - 1)(x_1''' + 1)) \pmod{k_1} \quad (1)$$

$$((k_0 - 1)(x_1' + 1)) \pmod{k_0} = x_1''' \pmod{k_0} \quad (2)$$

$$x_1' + 1 = (k_0 - 1)(x_1''' + 1) \pmod{k_1} \quad (3)$$

$$(k_0 - 1)(x_1' + 1) \pmod{k_0} = x_1''' + 1 \pmod{k_0} \quad (4)$$

b)

$$x_1' = (x_0''' + (k_0 - 1)x_1''') \pmod{k_1} \quad (1)$$

$$(x_0' + (k_0 - 1)x_1') \pmod{k_1} = x_1''' \quad (2)$$

$$x_1' = (x_0''' + 1 + (k_0 - 1)x_1''') \pmod{k_1} \quad (3)$$

$$(x_0' + 1 + (k_0 - 1)x_1') \pmod{k_1} = x_1''' \quad (4)$$

Análogamente al caso anterior, los casos a o b no pueden ocurrir debido a que la igualdad $a.(2)$ y $a.(4)$ difieren en una unidad, por otro lado, la igualdad $b.(1)$ y $b.(3)$ también difieren en una unidad.

Al ser las aristas pertenecientes a diferentes ciclos ajenos, concluimos que los ciclos H_0 y H_1 son ajenos.

De los puntos anteriores podemos concluir que las funciones h_1 y h_0 son biyectivas por el punto uno, generan ciclos Hamiltonianos por el punto dos y estos ciclos son ajenos por aristas por el punto tres.

Al ser h_0 y h_1 funciones biyectivas, podemos encontrar las inversas de ellas. El siguiente corolario nos indica cómo.

Corolario 2 En un $T_{k^r \times k}$ para $k \geq 3$ y $r \geq 1$, se pueden encontrar dos Códigos Gray generados por las funciones h_0 y h_1 descritas de la siguiente forma:

- $h_0(x) = (x_1 \text{ mód } k_1, (x_0 + (k_0 - 1)x_1) \text{ mód } k_0) = (a_1, a_0)$
- $h_1(x) = ((x_0 + (k_0 - 1)x_1) \text{ mód } k_1, x_1 \text{ mód } k_0) = (b_1, b_0)$

Para obtener las inversas de h_0 y h_1 recordemos que en el Teorema 6 se pidió que k^r y k fueran primos relativos por lo que al escribir $(k - 1)^{-1}$ nos referiremos al inverso multiplicativo del número $(k - 1) \text{ mód } k^r$, el cuál existe al ser primos relativos.

Dado G_n^k un código Gray obtenido por la función h_0 o h_1 sobre la gráfica $T_{k^r \times k}$, las funciones h_0^{-1} y h_1^{-1} están dadas de la siguiente forma:

- $h_0^{-1}(a_1, a_0) = (a_1, (a_1 + a_0) \text{ mód } k)$
- $h_1^{-1} = ((b_1 - x_0)((k - 1)^{-1}) \text{ mód } k_1, (b_1 - b_0(k - 1)) \text{ mód } k_0) =$
 $((b_1 - x_0)((k - 1)^{-1}) \text{ mód } k_1, (b_1 + b_0) \text{ mód } k_0) =$
 $((b_1 - ((b_1 + b_0) \text{ mód } k))((k - 1)^{-1}) \text{ mód } k_1, (b_1 + b_0) \text{ mód } k)$

Ejemplo 23 Dada la gráfica $T_{9 \times 3}$ encontraremos paso a paso los dos códigos Gray que nos darán los ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas. El dominio de las funciones es $\{00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 40, 41, 42, 50, 51, 52, 60, 61, 62, 70, 71, 72, 80, 81, 82\}$.

Aplicamos la función h_0 para encontrar el primer código Gray:

- | | |
|---|---|
| ▪ $h_0(00) = (0, 0 + (2)0 \text{ mód } 3) = 00$ | ▪ $h_0(42) = (4, 2 + (2)4 \text{ mód } 3) = 41$ |
| ▪ $h_0(01) = (0, 1 + (2)0 \text{ mód } 3) = 01$ | ▪ $h_0(50) = (5, 0 + (2)5 \text{ mód } 3) = 51$ |
| ▪ $h_0(02) = (0, 2 + (2)0 \text{ mód } 3) = 02$ | ▪ $h_0(51) = (5, 1 + (2)5 \text{ mód } 3) = 52$ |
| ▪ $h_0(10) = (1, 0 + (2)1 \text{ mód } 3) = 12$ | ▪ $h_0(52) = (5, 2 + (2)5 \text{ mód } 3) = 50$ |
| ▪ $h_0(11) = (1, 1 + (2)1 \text{ mód } 3) = 10$ | ▪ $h_0(60) = (6, 0 + (2)6 \text{ mód } 3) = 60$ |
| ▪ $h_0(12) = (1, 2 + (2)1 \text{ mód } 3) = 11$ | ▪ $h_0(61) = (6, 1 + (2)6 \text{ mód } 3) = 61$ |
| ▪ $h_0(20) = (2, 0 + (2)2 \text{ mód } 3) = 21$ | ▪ $h_0(62) = (6, 2 + (2)6 \text{ mód } 3) = 62$ |
| ▪ $h_0(21) = (2, 1 + (2)2 \text{ mód } 3) = 22$ | ▪ $h_0(70) = (7, 0 + (2)7 \text{ mód } 3) = 72$ |
| ▪ $h_0(22) = (2, 2 + (2)2 \text{ mód } 3) = 20$ | ▪ $h_0(71) = (7, 1 + (2)7 \text{ mód } 3) = 70$ |
| ▪ $h_0(30) = (3, 0 + (2)3 \text{ mód } 3) = 30$ | ▪ $h_0(72) = (7, 2 + (2)7 \text{ mód } 3) = 71$ |
| ▪ $h_0(31) = (3, 1 + (2)3 \text{ mód } 3) = 31$ | ▪ $h_0(80) = (8, 0 + (2)8 \text{ mód } 3) = 81$ |
| ▪ $h_0(32) = (3, 2 + (2)3 \text{ mód } 3) = 32$ | ▪ $h_0(81) = (8, 1 + (2)8 \text{ mód } 3) = 82$ |
| ▪ $h_0(40) = (4, 0 + (2)4 \text{ mód } 3) = 42$ | ▪ $h_0(82) = (8, 2 + (2)8 \text{ mód } 3) = 80$ |
| ▪ $h_0(41) = (4, 1 + (2)4 \text{ mód } 3) = 40$ | |

Aplicamos la función h_1 para encontrar el primer código Gray:

- | | |
|--|--|
| ▪ $h_1(00) = (0 + (2)0 \text{ mód } 9, 0 \text{ mód } 3) = 00$ | ▪ $h_1(42) = (2 + (2)4 \text{ mód } 9, 4 \text{ mód } 3) = 11$ |
| ▪ $h_1(01) = (1 + (2)0 \text{ mód } 9, 0 \text{ mód } 3) = 10$ | ▪ $h_1(50) = (0 + (2)5 \text{ mód } 9, 5 \text{ mód } 3) = 12$ |
| ▪ $h_1(02) = (2 + (2)0 \text{ mód } 9, 0 \text{ mód } 3) = 20$ | ▪ $h_1(51) = (1 + (2)5 \text{ mód } 9, 5 \text{ mód } 3) = 22$ |
| ▪ $h_1(10) = (0 + (2)1 \text{ mód } 9, 1 \text{ mód } 3) = 21$ | ▪ $h_1(52) = (2 + (2)5 \text{ mód } 9, 5 \text{ mód } 3) = 32$ |
| ▪ $h_1(11) = (1 + (2)1 \text{ mód } 9, 1 \text{ mód } 3) = 31$ | ▪ $h_1(60) = (0 + (2)6 \text{ mód } 9, 6 \text{ mód } 3) = 30$ |
| ▪ $h_1(12) = (2 + (2)1 \text{ mód } 9, 1 \text{ mód } 3) = 41$ | ▪ $h_1(61) = (1 + (2)6 \text{ mód } 9, 6 \text{ mód } 3) = 40$ |
| ▪ $h_1(20) = (0 + (2)2 \text{ mód } 9, 2 \text{ mód } 3) = 42$ | ▪ $h_1(62) = (2 + (2)6 \text{ mód } 9, 6 \text{ mód } 3) = 50$ |
| ▪ $h_1(21) = (1 + (2)2 \text{ mód } 9, 2 \text{ mód } 3) = 52$ | ▪ $h_1(70) = (0 + (2)7 \text{ mód } 9, 7 \text{ mód } 3) = 51$ |
| ▪ $h_1(22) = (2 + (2)2 \text{ mód } 9, 2 \text{ mód } 3) = 62$ | ▪ $h_1(71) = (1 + (2)7 \text{ mód } 9, 7 \text{ mód } 3) = 61$ |
| ▪ $h_1(30) = (0 + (2)3 \text{ mód } 9, 3 \text{ mód } 3) = 60$ | ▪ $h_1(72) = (2 + (2)7 \text{ mód } 9, 7 \text{ mód } 3) = 71$ |
| ▪ $h_1(31) = (1 + (2)3 \text{ mód } 9, 3 \text{ mód } 3) = 70$ | ▪ $h_1(80) = (0 + (2)8 \text{ mód } 9, 8 \text{ mód } 3) = 72$ |
| ▪ $h_1(32) = (2 + (2)3 \text{ mód } 9, 3 \text{ mód } 3) = 80$ | ▪ $h_1(81) = (1 + (2)8 \text{ mód } 9, 8 \text{ mód } 3) = 82$ |
| ▪ $h_1(40) = (0 + (2)4 \text{ mód } 9, 4 \text{ mód } 3) = 81$ | ▪ $h_1(82) = (2 + (2)8 \text{ mód } 9, 8 \text{ mód } 3) = 02$ |
| ▪ $h_1(41) = (1 + (2)4 \text{ mód } 9, 4 \text{ mód } 3) = 01$ | |

En la Figura 3.7, ambas gráficas representan al $T_{3 \times 9}$, en la primera gráfica se enumeraron los vértices de acuerdo al ciclo Hamiltoniano generado por la función h_1 (él cual se muestra siguiendo las líneas oscuras), en la segunda gráfica se enumeraron los vértices de acuerdo al ciclo Hamiltoniano generado por la función h_0 el cual se muestra siguiendo las líneas punteadas.

3.6. Ciclos Hamiltonianos Ajenos en un Hipercubo

Por último, mostraremos cómo encontrar los dos ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas en un hipercubo. Utilizaremos lo visto en el capítulo pasado sobre encajes en hipercubos, donde en el Lema 2 se mostró la función $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1, 2, 3)$ en donde $f(00) = 0$, $f(01) = 1$, $f(10) = 3$ y $f(11) = 2$, así como el Corolario 1 de esa misma sección.

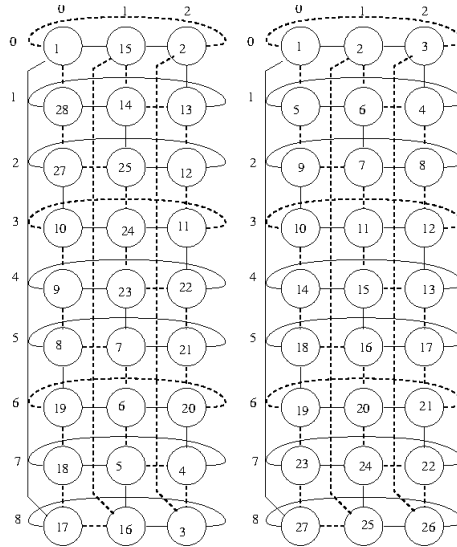
Teorema 7 Sea n y m dos enteros, en el hipercubo Q_n podemos encontrar $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ciclos ajenos por aristas utilizando la siguiente fórmula:

- Si $n = 2m$ para $m \geq 1$. Sabemos que podemos descomponer a los hipercubos de la forma:

$$\begin{aligned}
 Q_n &= Q_{2m} \\
 &= Q_2 \times Q_2 \times \cdots \times Q_2 \text{ Aplicando la función } f \text{ tenemos:} \\
 &= Q_1^3 \times \cdots \times Q_1^3 \\
 &= T_{4,m}
 \end{aligned}$$

Una vez obtenido el vértice x' de aplicar f a x encontramos un código Gray en $(n, 4)$ -cubo y utilizamos la inversa de esta función para regresar a Q_n . Así:

$$h_i(x) = h_i(x') \text{ para toda } i = 1, \dots, n-1$$

Figura 3.7: Ciclos Ajenos en un $T_{3 \times 9}$

- Si $n = 2m + 1$ para $m \geq 1$. Podemos descomponer al hipercubo de la siguiente forma:
 $Q_n = Q_{2m+1} = Q_{2m} \times Q_1$

Por lo que para encontrar las funciones que generan los ciclos Hamiltonianos ajenos:

$$h_i(x) = \begin{cases} 0h_i(x) & \text{si } x < 2^{2m} \\ 1h_i(2^{2m+1} - x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $i = 1, \dots, n - 1$

Vamos a ejemplificar el Teorema anterior.

Ejemplo 24 Encontrar los ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas dentro de un $(4, 2)$ -cubo Q_4 . Al ser $n = 4$ sabemos que tendremos $\lfloor \frac{4}{2} \rfloor = 2$ ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas.

1. Primero comenzamos transformando los vértices de Q_4 :

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| ■ 00 00 \rightarrow 00 | ■ 11 00 \rightarrow 20 |
| ■ 00 01 \rightarrow 01 | ■ 11 01 \rightarrow 21 |
| ■ 00 11 \rightarrow 02 | ■ 11 11 \rightarrow 22 |
| ■ 00 10 \rightarrow 03 | ■ 11 10 \rightarrow 23 |
| ■ 01 00 \rightarrow 10 | ■ 10 00 \rightarrow 30 |
| ■ 01 01 \rightarrow 11 | ■ 10 01 \rightarrow 31 |
| ■ 01 11 \rightarrow 12 | ■ 10 11 \rightarrow 32 |
| ■ 01 10 \rightarrow 13 | ■ 10 10 \rightarrow 33 |

2. Ahora buscaremos los ciclos Hamiltonianos en el Q_2^4 el cual también podemos ver como una malla $T_{2,4}$, por lo que sabemos que existen dos funciones h_0 y h_1 que fueron presentadas en la Sección 3.3, así primero aplicamos la función h_0 :

$$h_0(x) = h_0(x_1, x_0) = (x_1, (x_0 - x_1) \text{ mód } k)$$

▪ $h_0(00) = (0, 0 - 0) = 00$	▪ $h_0(20) = (2, 0 - 2) = 22$
▪ $h_0(01) = (0, 1 - 0) = 01$	▪ $h_0(21) = (2, 1 - 2) = 23$
▪ $h_0(02) = (0, 2 - 0) = 02$	▪ $h_0(22) = (2, 2 - 2) = 20$
▪ $h_0(03) = (0, 3 - 0) = 03$	▪ $h_0(23) = (2, 3 - 2) = 21$
▪ $h_0(10) = (1, 0 - 1) = 13$	▪ $h_0(30) = (3, 0 - 3) = 31$
▪ $h_0(11) = (1, 1 - 1) = 10$	▪ $h_0(31) = (3, 1 - 3) = 32$
▪ $h_0(12) = (1, 2 - 1) = 11$	▪ $h_0(32) = (3, 2 - 3) = 33$
▪ $h_0(13) = (1, 3 - 1) = 12$	▪ $h_0(33) = (3, 3 - 3) = 30$

Después aplicamos la función h_1 :

$$h_1(x) = h_1(x_1, x_0) = ((x_0 - x_1) \text{ mód } k, x_1)$$

▪ $h_1(00) = (0 - 0, 0) = 00$	▪ $h_1(20) = (0 - 2, 2) = 22$
▪ $h_1(01) = (1 - 0, 0) = 10$	▪ $h_1(21) = (1 - 2, 2) = 32$
▪ $h_1(02) = (2 - 0, 0) = 20$	▪ $h_1(22) = (2 - 2, 2) = 02$
▪ $h_1(03) = (3 - 0, 0) = 30$	▪ $h_1(23) = (3 - 2, 2) = 12$
▪ $h_1(10) = (0 - 1, 1) = 31$	▪ $h_1(30) = (0 - 3, 3) = 13$
▪ $h_1(11) = (1 - 1, 1) = 01$	▪ $h_1(31) = (1 - 3, 3) = 23$
▪ $h_1(12) = (2 - 1, 1) = 11$	▪ $h_1(32) = (2 - 3, 3) = 33$
▪ $h_1(13) = (3 - 1, 1) = 21$	▪ $h_1(33) = (3 - 3, 3) = 03$

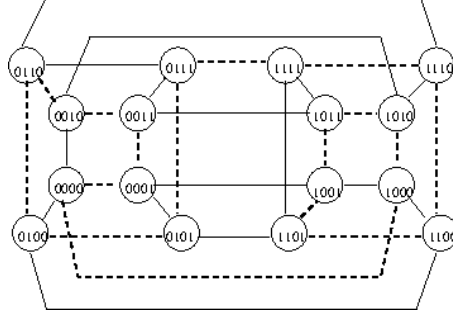
3. Por último regresaremos los números de los ciclos Hamiltonianos obtenidos a vértices de Q_4 .

Para h_0 :

▪ $h_0(00) = 00 = f^{-1}(0 \ 0) = 00 \ 00$	▪ $h_0(20) = 22 = f^{-1}(2 \ 2) = 11 \ 11$
▪ $h_0(01) = 01 = f^{-1}(0 \ 1) = 00 \ 01$	▪ $h_0(21) = 23 = f^{-1}(2 \ 3) = 11 \ 10$
▪ $h_0(02) = 02 = f^{-1}(0 \ 2) = 00 \ 11$	▪ $h_0(22) = 20 = f^{-1}(2 \ 0) = 11 \ 00$
▪ $h_0(03) = 03 = f^{-1}(0 \ 3) = 00 \ 10$	▪ $h_0(23) = 21 = f^{-1}(2 \ 1) = 11 \ 01$
▪ $h_0(10) = 13 = f^{-1}(1 \ 3) = 01 \ 10$	▪ $h_0(30) = 31 = f^{-1}(3 \ 1) = 10 \ 01$
▪ $h_0(11) = 10 = f^{-1}(1 \ 0) = 01 \ 00$	▪ $h_0(31) = 32 = f^{-1}(3 \ 2) = 10 \ 11$
▪ $h_0(12) = 11 = f^{-1}(1 \ 1) = 01 \ 01$	▪ $h_0(32) = 33 = f^{-1}(3 \ 3) = 10 \ 10$
▪ $h_0(13) = 12 = f^{-1}(1 \ 2) = 01 \ 11$	▪ $h_0(33) = 30 = f^{-1}(3 \ 0) = 10 \ 00$

Así obtenemos que el primer ciclo Hamiltoniano es $h_0 = \langle 0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0100, 0101, 0111, 1111, 1110, 1100, 1101, 1001, 1011, 1010, 1000 \rangle$

Para h_1 :

Figura 3.8: Ciclos Hamiltonianos Ajenos en un Q_4

- | | |
|--|--|
| ▪ $h_1(00) = 00 = f^{-1}(0\ 0) = 00\ 00$ | ▪ $h_1(20) = 22 = f^{-1}(2\ 2) = 11\ 11$ |
| ▪ $h_1(01) = 10 = f^{-1}(1\ 0) = 01\ 00$ | ▪ $h_1(21) = 32 = f^{-1}(3\ 2) = 10\ 11$ |
| ▪ $h_1(02) = 20 = f^{-1}(2\ 0) = 11\ 00$ | ▪ $h_1(22) = 02 = f^{-1}(0\ 2) = 00\ 11$ |
| ▪ $h_1(03) = 30 = f^{-1}(3\ 0) = 10\ 00$ | ▪ $h_1(23) = 12 = f^{-1}(1\ 2) = 01\ 11$ |
| ▪ $h_1(10) = 31 = f^{-1}(3\ 1) = 10\ 01$ | ▪ $h_1(30) = 13 = f^{-1}(1\ 3) = 01\ 10$ |
| ▪ $h_1(11) = 01 = f^{-1}(0\ 1) = 00\ 01$ | ▪ $h_1(31) = 23 = f^{-1}(2\ 3) = 11\ 10$ |
| ▪ $h_1(12) = 11 = f^{-1}(1\ 1) = 01\ 01$ | ▪ $h_1(32) = 33 = f^{-1}(3\ 3) = 10\ 10$ |
| ▪ $h_1(13) = 21 = f^{-1}(2\ 1) = 11\ 01$ | ▪ $h_1(33) = 03 = f^{-1}(0\ 3) = 00\ 10$ |

Así obtenemos que el primer ciclo Hamiltoniano es $h_1 = \langle 0000, 0100, 1100, 1000, 1001, 0001, 0101, 1101, 1111, 1011, 0011, 0111, 0110, 1110, 1010, 0010 \rangle$

En la Figura 3.8 en líneas punteadas se muestra el ciclo generado por la función h_0 y en la línea continua se muestra el ciclo generado por la función h_1 .

Ejemplo 25 Encontrar los ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas dentro de un $(3, 2)$ -cubo Q_3 . Al ser $n = 3$ sabemos que tendremos $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$ ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas.

- Primero comenzamos transformando los vértices de Q_3 , al ser n impar debemos agregar un 1 o 0 a la izquierda dependiendo de la regla:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| ▪ $0\ 00 \rightarrow 00$ | ▪ $1\ 00 \rightarrow 10$ |
| ▪ $0\ 01 \rightarrow 01$ | ▪ $1\ 01 \rightarrow 11$ |
| ▪ $0\ 11 \rightarrow 02$ | ▪ $1\ 11 \rightarrow 12$ |
| ▪ $0\ 10 \rightarrow 03$ | ▪ $1\ 10 \rightarrow 13$ |

- Después vamos a encontrar los ciclos Hamiltonianos a través de la función mostrada en la Sección 3.4:

$$h_0(x) = h_0(x_1, x_0) = (x_1, (x_0 - x_1) \text{ mód } k).$$

- | | |
|--|--|
| ▪ $h_0(00) = (0, (0 - 0) \text{ mód } 4) = 00$ | ▪ $h_0(10) = (1, (0 - 1) \text{ mód } 4) = 13$ |
| ▪ $h_0(01) = (0, (1 - 0) \text{ mód } 4) = 01$ | ▪ $h_0(11) = (1, (1 - 1) \text{ mód } 4) = 10$ |
| ▪ $h_0(02) = (0, (2 - 0) \text{ mód } 4) = 02$ | ▪ $h_0(12) = (1, (2 - 1) \text{ mód } 4) = 11$ |
| ▪ $h_0(03) = (0, (3 - 0) \text{ mód } 4) = 03$ | ▪ $h_0(13) = (1, (3 - 1) \text{ mód } 4) = 12$ |

3. Ahora regresamos a

- | | |
|--|--|
| ▪ $h_0(00) = 00 = f^{-1}(0 \ 0) = 00 \ 00 = 000$ | ▪ $h_0(10) = 13 = f^{-1}(1 \ 3) = 01 \ 01 = 101$ |
| ▪ $h_0(01) = 01 = f^{-1}(0 \ 1) = 00 \ 01 = 001$ | ▪ $h_0(11) = 10 = f^{-1}(1 \ 0) = 01 \ 00 = 100$ |
| ▪ $h_0(02) = 02 = f^{-1}(0 \ 2) = 00 \ 11 = 011$ | ▪ $h_0(12) = 11 = f^{-1}(1 \ 1) = 01 \ 01 = 101$ |
| ▪ $h_0(03) = 03 = f^{-1}(0 \ 3) = 00 \ 10 = 010$ | ▪ $h_0(13) = 12 = f^{-1}(1 \ 2) = 01 \ 11 = 111$ |

Capítulo 4

La red (n, k) –cubo con fallos

En los capítulos anteriores trabajamos con la red de interconexión (n, k) –cubo Q_n^k libre de fallos¹ tanto en sus aristas como en sus vértices. Esta situación es bastante utópica, dado que al implementar una red Q_n^k en la vida real, las fallas son inevitables por lo que la tolerancia a fallos es importante.

En esta sección consideraremos la posibilidad de que tanto vértices como aristas puedan presentar un fallo. Ashir y Stewart en el artículo *Fault-Tolerant embeddings of hamiltonian circuits in k -ary n -cubes* [2] mostraron que si en un (n, k) –cubo sólo hay aristas con fallos² tales que cumplen la condición que hay al menos dos aristas libres de fallos en cada nodo y el número de aristas con fallos no es más de $4n - 5$ en total, aún se puede encontrar un ciclo Hamiltoniano en el (n, k) –cubo. Si tenemos tanto aristas como vértices con fallos³, la pregunta sobre encontrar un ciclo Hamiltoniano aún no está resuelta; sin embargo, se plantearan algunas condiciones para encontrar un ciclo Hamiltoniano. Todo este capítulo está basado principalmente en el artículo *Fault-Tolerant embeddings of hamiltonian circuits in k -ary n -cubes* [2].

Comenzaremos con la definición de vértices con fallos y aristas con fallos.

Definición 26 Sea Q_n^k un (n, k) –cubo y (u, v) una arista en el (n, k) –cubo, decimos que la arista (u, v) tiene fallos (no es sana o está dañada) si desde el vértice u no podemos enviar un mensaje m a v o desde el vértice v no podemos enviar un mensaje m a u . Caso contrario decimos que la arista es libre de fallo o está sana.

Definición 27 Sea Q_n^k un (n, k) –cubo y v una vértice del (n, k) –cubo, decimos que v tiene fallos (no es sano o no está dañado) si cualquier arista incidente (v, x) sana con $x \in V(Q_n^k)$, el mensaje m no puede llegar a v . En caso contrario decimos que el vértice es libre de fallo o está sano.

4.1. Preliminares

Recordaremos algunas definiciones de teoría de gráficas que nos ayudarán a construir los ciclos Hamiltonianos y, sobre todo, a demostrar los resultados sobre propiedades de Hamiltonicidad con tolerancia a fallos:

- Una gráfica G es una **gráfica Hamiltoniana** si y sólo si contiene al menos un ciclo Hamiltoniano.

¹Usaremos Libre de fallos como traducción literal de *Faulty Free*.

²Usaremos Aristas con fallos como traducción literal de *Faulty Edges*.

³Usaremos Vértices con fallos como traducción literal de *Faulty Nodes*.

- Una gráfica G es **Hamiltonianamente Conexa** si para cualesquiera dos vértices x, y en G existe una trayectoria Hamiltoniana entre ellos.

Ya que planteamos las bases, pasaremos a definir formalmente la tolerancia a fallos en una gráfica para términos de esta sección.

Sea F un conjunto de fallos⁴ de la gráfica G , éste puede contener vértices dañados o aristas dañadas. Se denota $F_v = F \cap V(G)$ como el conjunto de vértices dañados y $F_e = F \cap V(E)$ el conjunto de aristas dañadas en G .

Tomamos a $V(G) - F_v$ esto nos da los vértices sin fallos de G ; es decir, vértices sanos. Utilizando el conjunto $E(G) - F_e$ sólo nos quedan las aristas sin fallos incidentes a vértices sin fallos, denotaremos a esta sub-gráfica como $G - F$ la cual está libre de fallos.

Definición 28 Sea k un entero positivo y F un conjunto de fallas, una gráfica G es k -**Hamiltoniana tolerante a fallos** (abreviada como k -Hamiltoniana) si $G - F$ es Hamiltoniana para todo conjunto de fallas F tal que $|F| \leq k$.

Definición 29 Una gráfica G es k -**Hamiltonianamente Conexa tolerante a fallos** (abreviada como k -Hamiltonianamente Conexa) si $G - F$ es Hamiltonianamente conexa para todo conjunto de fallas F tal que $|F| \leq k$.

Utilizaremos lo visto en el Ejemplo 3 de la Sección 2.1, se puede crear una partición de Q_n^k en k copias numeradas de 0 a $k - 1$ a lo largo de cualquiera de las n dimensiones diferentes, éstas tienen dimensión $n - 1$ y, de hecho, cada una de ellas es un $(n - 1, k)$ -cubo Q_{n-1}^k . Ya que tenemos las $k - 1$ particiones usaremos la notación:

- $Q[i]$: Nos referimos a la componente con la posición i .
- $Q[i, j]$: Para cada $0 \leq i \leq k - 1$ y $0 \leq j \leq k - 1$ decimos que $Q[i, j]$ comprende las componentes $[i, i + 1, i + 2, \dots, j]$ y las aristas que unen a las componentes.

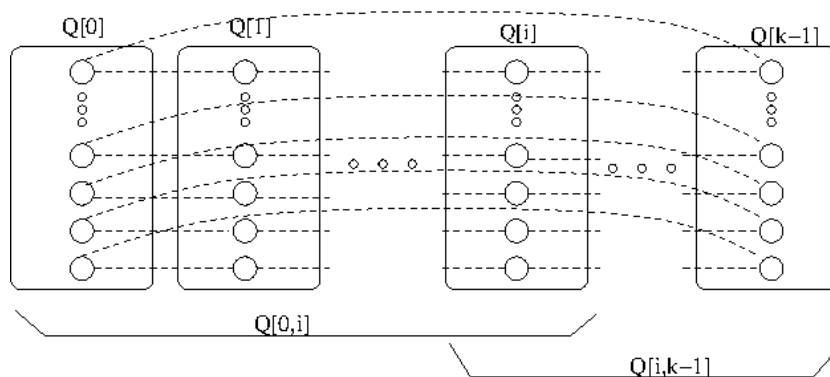


Figura 4.1: Partición (n, k) -cubo

⁴Usaremos Conjunto de Fallas o Fallos como traducción literal de *Faulty set*.

Así, al escribir $Q_n^k[i, j]$ o $Q[i, j]$ para abreviar, se hace referencia a la sub-gráfica de Q_n^k inducida por el conjunto de vértices $\{u | u \in V(Q[l]) : l \in [i, j]\}$.

Definición 30 Sea Q_n^k un (n, k) -cubo, si tenemos la partición $Q[i, i + 1]$ para $0 \leq i \leq k - 1$, llamamos **arista de cruce sana** a la arista libre de fallos (u_i, v_{i+1}) con $u_i \in Q[i] - F^i$ y $v_{i+1} \in Q[i + 1] - F^{i+1}$; es decir, la arista (u_i, v_{i+1}) es una arista libre de fallos que nos permite pasar de la componente $Q[i]$ a la componente $Q[i + 1]$. En la Figura 4.2 las aristas de cruce entre la componente $Q[i]$ y $Q[i + 1]$ se muestran en azul, mientras que la arista roja no es libre de fallo por lo que no es arista de cruce sana.

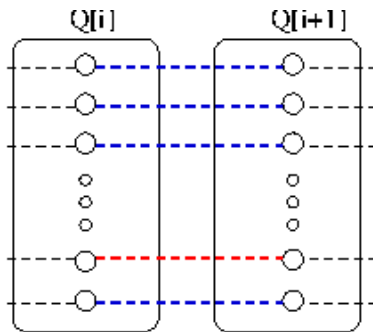


Figura 4.2: Aristas de Cruce entre $Q[i]$ y $Q[i + 1]$

Ejemplo 26 En la Figura 4.3 (A) se ilustra el $(2, 3)$ -cubo. En la Figura 4.3 (B) se muestra una partición a través de la dimensión dos, así en la componente $Q[0]$ están los vértices de forma $*0$, en la componente $Q[1]$ están los vértices de forma $*1$ y en la componente $Q[2]$ están los vértices de forma $*2$. Las aristas $(00, 01)$, $(11, 12)$ y $(22 - 20)$ son ejemplos de aristas de cruce.

En la Figura 4.3 (C) se muestra una partición a través de la dimensión uno, así en la componente $Q[0]$ están los vértices de forma $0*$, en la componente $Q[1]$ están los vértices de forma $1*$ y en la componente $Q[2]$ están los vértices de forma $2*$. Las aristas $(00, 10)$, $(11, 21)$ y $(22 - 02)$ son ejemplos de aristas de cruce. Podemos observar, claramente, que cada $Q[i]$ es un $(1, 3)$ -cubo.

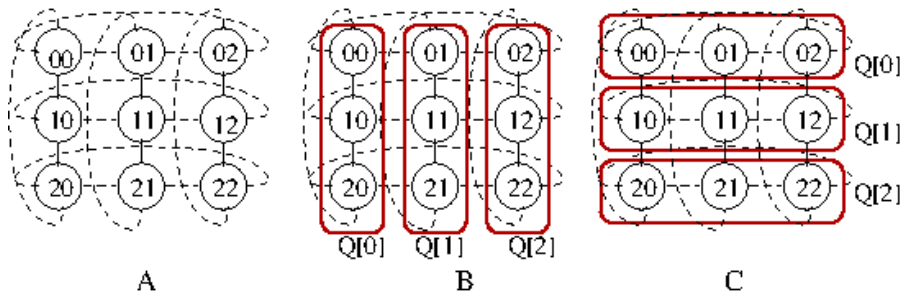
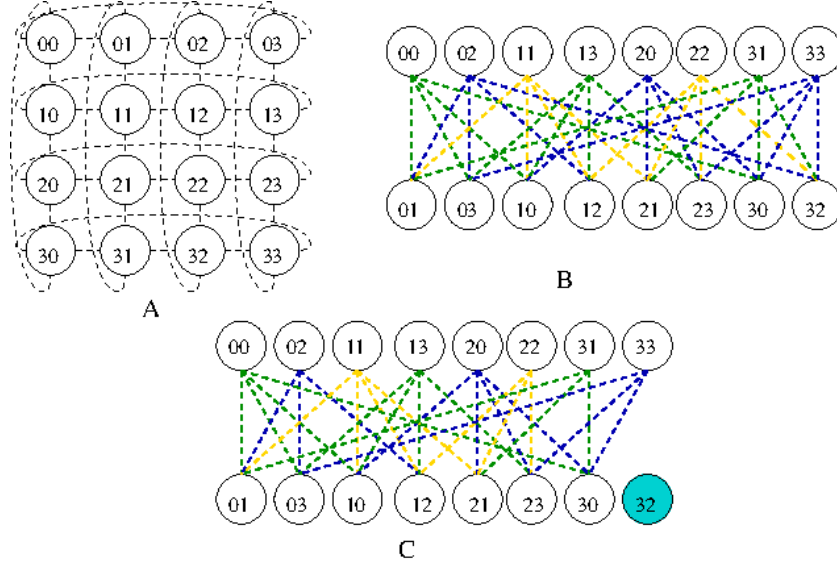


Figura 4.3: Partición $(2, 3)$ -cubo

Figura 4.4: Q_2^4 Bipartita

4.2. Tolerancia a fallos

Consideraremos a F como el conjunto de los vértices o aristas con fallos. Observamos que la red (n, k) -cubo es bipartita si y sólo si k es par, pues podemos separar a la gráfica en dos. Pero si k es par y existe un vértice dañado, no existe un ciclo Hamiltoniano. En el capítulo anterior vimos diferentes formas de encontrar ciclos Hamiltonianos, si un vértice $x \in V(Q_n^k)$ cualquiera dentro del ciclo Hamiltoniano falla, la gráfica se desconecta ya que no podemos utilizar ninguna aristas incidente en x , aunque estas aristas estén libres de fallos.

En la Figura 4.4(A) presentamos un $(2, 4)$ -cubo, Q_2^4 , en 4.4(B) mostramos una bipartición. Por último en la Figura 4.4(C) se considera al vértice 32 dañado y aunque las aristas que inciden en él estén sanas no las ocuparemos ya que al entrar al vértice dañado no podremos salir, por lo que no se muestran las aristas en la Figura 4.4(C). Por lo tanto al no ser conexa no podremos generar el ciclo Hamiltoniano.

Debido a lo anterior, para los siguientes lemas y teoremas supondremos que k es un entero impar tal que $k \geq 3$. Un anillo de longitud máxima, o un ciclo Hamiltoniano en un (n, k) -cubo Q_n^k con fallos puede construirse siempre y cuando el conjunto de fallos F sea tal que $|F| \leq 2n - 2$, para $n \geq 2$.

Por otro lado, si $|F| \leq 2n - 3$, con $n \geq 2$ presentamos una construcción de un arreglo lineal de longitud máxima, o un camino Hamiltoniano que conecta dos vértices arbitrarios en un (n, k) -cubo Q_n^k con fallos teniendo en cuenta las siguientes dos condiciones:

- No se puede encontrar un ciclo Hamiltoniano en un Q_n^k dañado si hay $2n - 1$ aristas dañadas que inciden en un único vértice.
- Suponiendo que hay $2n - 2$ aristas dañadas incidentes en el nodo x . Sean y, z dos nodos en Q_n^k , tales que existe una arista que los conecta a x . Entonces no existe una trayectoria Hamiltoniana que conecte al vértice y con el vértice z cuando todas las aristas incidentes en x están dañadas, exceptuando las aristas (x, y) y (x, z) .

Sea k un entero impar tal que $k \geq 3$ y sea n un entero con $n \geq 2$ un entero cualquiera y sea F^l el conjunto de fallos de la partición $Q[l]$; es decir, $F \subseteq V(Q_n^k) \cup E(Q_n^k)$, lo que significa que el conjunto

F de vértices o aristas dañados en un (n, k) -cubo Q_n^k . Dividimos a Q_n^k en $Q[0], Q[1], \dots, Q[k-1]$ a lo largo de alguna dimensión y sea $F^l = F \cap (V(Q[l]) \cup E(Q[l]))$ para toda $0 \leq l \leq k-1$.

En los siguientes tres lemas, desglosamos la construcción de las trayectorias Hamiltonianas en un $Q[i, j]$ dañado para toda $i, j \in [0, k-1]$, cuando cada $Q[l]$ dañado es Hamiltonianamente conexo para $l \in [i, j]$. Presentamos cómo construir una trayectoria Hamiltoniana entre dos vértices arbitrarios pertenecientes a $Q[i]$ en un $Q[i, j]$ dañado.

Observación 1 A partir de aquí, vamos a utilizar la siguiente notación:

- Denotaremos como $P_i(u, v)$ a la trayectoria llamada P_i que va desde el vértice u hasta el vértice v .
- Una trayectoria puede estar formada de sub trayectorias, en esta sección, esto será muy común por lo que se utilizará la siguiente notación:
Si $P(u_0, u_n) = \langle u_0, u_1, u_2 \cdots u_i \cdots u_n \rangle$ es una trayectoria, podemos partirla en distintas trayectorias, por ejemplo:
 $P = \langle P'(u_0, u_i), P''(u_{i+1}, u_n) \rangle$ muestra que P fue dividida en dos trayectorias P' y P'' .
 $P = \langle P'(u_0, u_{i-1}), u_i, P''(u_{i+1}, u_n) \rangle$, aquí la trayectoria P fue dividida en dos sub trayectorias P' y P'' en las cuales el vértice u_i no está incluido, por eso se colocó aparte.

Lema 5 Sean $i, j \in [0, k-1]$, y sea $F \subseteq V(Q[i, j]) \cup E(Q[i, j])$ un conjunto de fallos con $|F| \leq 2n-3$. Si $Q[l] - F^l$ es Hamiltonianamente conexo para cada $l \in [i, j]$, entonces existe una trayectoria Hamiltoniana que conecta a cada par de vértices u_i y $v_i \in V(Q[i] - F^i)$ en $Q[i, j] - F$, para cada $n \geq 3$ y $k \geq 3$, con k impar.

Demostración: Primero veamos que una de las hipótesis nos indica que $|F| < 2n-3$. Partiremos en dos casos, cuando $i = j$ y cuando $i \neq j$.

Sea $i = j$ entonces la componente $Q[i, j] = Q[i, i] = Q[j, j] = Q[i]$, tenemos que $\ell = i$, como cada $Q[i] - F$ es Hamiltonianamente conexa, hay una trayectoria Hamiltoniana conectando a cualesquiera dos vértices.

Sea $i \neq j$, sin pérdida de generalidad, tomamos $i = 0$. Como $Q[\ell] - F^\ell$ es Hamiltonianamente conexa para toda $\ell \in [0, j]$ por hipótesis así que $Q[0] - F^0$ es Hamiltonianamente conexa, existe una trayectoria Hamiltoniana, sea $P_0(u_0, v_0)$ en $Q[0] - F^0$ la trayectoria.

Si en el conjunto F^0 sólo hay vértices dañados la trayectoria $P_0(u_0, v_0)$ tiene longitud a lo más $k^{n-1} - 1$, debido a que $V(Q[0]) = F^0 + (Q[0] - F^0)$, lo que significa que en $V(Q[0])$ están los vértices con fallos más los vértices sanos. Así, $V(Q[0]) \leq (Q[0] - F^0)$ por lo que en la trayectoria no están los vértices con fallos, esto se puede ver en la Figura 4.5 (A) podemos ver la trayectoria $P_0(u_0, v_0)$ mientras que afuera existen vértices con fallos, por lo que la longitud de P_0 queda: $|P_0(u_0, v_0)| \leq k^{n-1} - 1$. Si en F^0 sólo existen aristas dañadas, éstas no se encuentran en la trayectoria $P_0(u_0, v_0)$, fuera de la trayectoria $P_0(u_0, v_0)$ en la componente $Q[0] - F^0$ hay a lo más $(2n-3) - |F^0|$. Por otro lado, en la Figura 4.5 (B) vemos que fuera de la trayectoria $P_0(u_0, v_0)$ existen aristas con fallos por lo que la longitud de P_0 queda: $|P_0(u_0, v_0)| = k^{n-1} - 1$. Además cuando $n \geq 3$ y $k \geq 3$ tenemos la siguiente desigualdad $\lceil \frac{k^{n-1} - |F^i| - 1}{2} \rceil \geq \frac{3^{n-1} - |F^i| - 1}{2} > (2n-3) - |F^i|$, por lo que $\frac{3^{n-1} - |F^0| - 1}{2} > (2n-3) - |F^0|$, así que podemos encontrar dos vértices consecutivos, w_0 y z_0 en $P(u_0, v_0)$ tal que (w_0, w_1) y (z_0, z_1) son aristas que estamos seguros que no están dañadas; es decir, aristas que cruce sanas con w_1 y z_1 son los vecinos de w_0 y z_0 en $Q[1]$, respectivamente. En la Figura 4.6 (A) mostramos gráficamente las trayectorias P_0 y P_1 siendo unidas, a través de los vértices w_0, z_0, w_1 y z_1 . Sea $\langle u_0, P_{0,1}(u_0, w_0), w_0, z_0, P_{0,2}(z_0, v_0), v_0 \rangle = P_0(u_0, v_0)$ y sea $P_1(w_1, z_1)$ una trayectoria Hamiltoniana en $Q[1] - F^1$. Así $T_{0,1} = u_0, P_{0,1}(u_0, w_0), w_0, w_1, P_1(w_1, z_1), z_1, z_0, P_{0,2}(z_0, v_0), v_0$

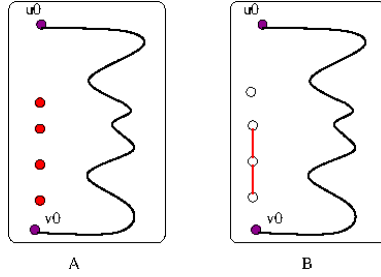


Figura 4.5: Ejemplo Lema 6

es una trayectoria Hamiltoniana en $Q[0, 1] - F$, en la Figura 4.6 (A) se muestra la construcción de la trayectoria $T_{0,1}$.

Una vez encontrando la trayectoria $T_{0,1}$ repetimos el procedimiento a los $Q[i]$ vecinos, en la Figura 4.6 (B) damos el ejemplo de cómo se puede construir la trayectoria $T_{0,2}$ a partir de las trayectorias $T_{0,1}$ y $P_2(w_2, z_2)$. Al tomar a una componente vecina de $Q[i]$, ésta puede ser la que se encuentre a la izquierda $Q[i - 1]$ o a su derecha $Q[i + 1]$, esto lo podemos ver en la Figura 4.6 (C) y Figura 4.6 (D).

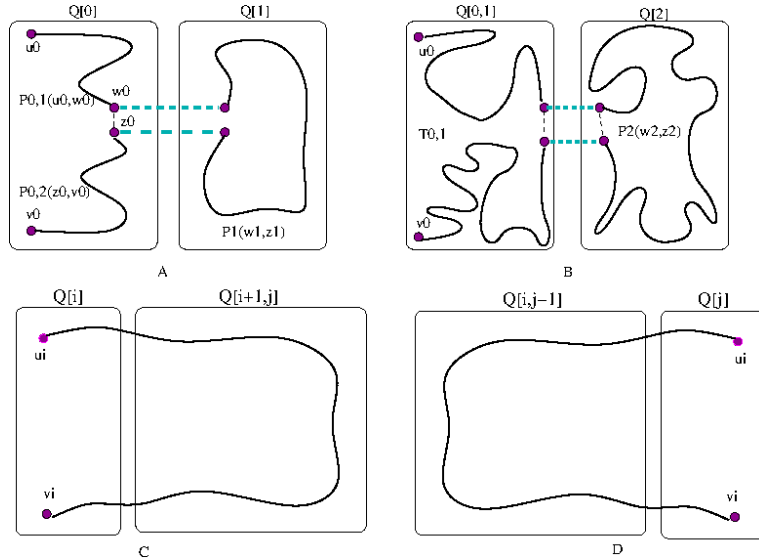


Figura 4.6: Ejemplo Lema 6

En el siguiente lema, se mostrará la construcción de la trayectoria Hamiltoniana entre dos vértices arbitrarios $u_i \in V(Q[i] - F^i)$ y $u_j \in V(Q[j] - F^j)$ en un Q_n^k con fallas. Notamos que $Q[i, j]$ puede tolerar $2n - 2$ fallos, que es el máximo grado de tolerancia para encajar un ciclo Hamiltoniano. Se buscan todos los vértices en $Q[j] - F^j$ para formar una sub-trayectoria en esa trayectoria Hamiltoniana para probar el lema 9.

Lema 6 Sean $i, j \in [0, k-1]$, y sea $F \subseteq V(Q[i, j]) \cup E(Q[i, j])$ un conjunto con fallos con $|F| \leq 2n-2$. Si $Q[l] - F^l$ es Hamiltonianamente conexo para cada $l \in [i, j]$, entonces existe una trayectoria Hamiltoniana que conecta dos vértices arbitrarios $u_i \in V(Q[i] - F^i)$ y $u_j \in V(Q[j] - F^j)$ en $Q[i, j] - F$ tal que todos los vértices en $Q[j] - F^j$ forman una sub-trayectoria sobre esa trayectoria Hamiltoniana para toda n y k con $n \geq 3$, $k \geq 3$ y k impar.

Demostración: Partiremos en dos casos, cuando $i = j$ y cuando $i \neq j$.

Sea $i = j$, esto implica que estamos hablando de una sola componente $Q[i]$, por lo que, al ser Hamiltonianamente conexa, existe una trayectoria Hamiltoniana así que cualesquiera dos vértices de $Q[i]$ forman una sub-trayectoria.

Sea $i \neq j$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $i = 0$. Por hipótesis $|F| = (2n - 2)$, la cantidad de vértices en $Q[0]$ es $|V(Q[0])| = k^{n-1}$. Si todos los vértices con fallos se encuentran en $Q[0]$ implica $k^{n-1} - (2n - 2) \geq 9 - 4 = 5$, para cada $n \geq 3$, $k \geq 3$ y k impar. Sin embargo estas fallas pueden estar dispersas en varios $Q[i]$, así que podemos encontrar a (v_0, v_1) , una arista de cruce sana, tal que $v_0 \neq u_0$, con $v_0 \in V(Q[0] - F^0)$ y $v_1 \neq u_j$ con $v_1 \in V(Q[1] - F^1)$. Como por hipótesis $Q[0]$ y $Q[1]$ son Hamiltonianamente conexos, para cada $l \in [0, j-1]$, entonces tenemos las trayectorias Hamiltonianas $P_0(u_0, v_0)$ en $Q[0] - F^0$ y $P_1(u_1, v_1)$ en $Q[1] - F^1$. Así la trayectoria $\langle u_0, P_0(u_0, v_0), v_0, v_1, P_1(v_1, u_1), u_1 \rangle$ que está uniendo a las componentes $Q[0]$ y $Q[1]$ es Hamiltoniana, en la Figura 4.7 (A) podemos ver gráficamente el proceso. Continuando con el proceso, podemos extender esta trayectoria hasta la componente $Q[j]$ como se ve en la Figura 4.7 (B), para ello suponemos que tenemos la trayectoria $R(u_0, v_{j-1})$ en $Q[0, j-1] - F$ que une desde la componentes $Q[0]$ hasta la componente $Q[j-1]$, por hipótesis $|V(Q[i])| = k^{n-1}$. Como $k^{n-1} - (2n - 2) \geq 9 - 4 = 5$ el total de vértices con fallos puede ya estar en $Q[0, j-1]$ o aún existir fallos en $Q[j]$, sin embargo, podemos encontrar una arista (v_{j-1}, v_j) una arista de cruce sana, tal que $v_{j-1} \neq v_1$ y $v_{j-1} \in V(Q(j-1) - F^{j-1})$, y $v_j \neq u_j$ y $v_j \in V(Q(j) - F^j)$.

Sea $S(v_j, u_j)$ una trayectoria Hamiltoniana en $Q[j]$. Así la trayectoria $\langle u_0, R(u_0, v_{j-1}), v_{j-1}, v_j, S(v_j, u_j), u_j \rangle$ es Hamiltoniana y se encuentra en $Q[0, j] - F$, además $S(v_j, u_j)$ contiene a todos los vértices sin fallos de $Q[j] - F^j$ al ser una trayectoria Hamiltoniana.

Finalmente, si queremos unir dos componentes $Q[i]$ y $Q[j]$ que no son vecinos contiguos, tendremos que encontrar la trayectoria que une a las componentes que están entre ellas. Por ejemplo, si queremos encontrar una trayectoria Hamiltoniana entre $Q[i]$ y $Q[j]$ tenemos que encontrar la trayectoria que une a $Q[i+1, j-1]$, así la trayectoria $R1(u_i, v_{j-1})$ une a $Q[i, j-1]$, ubicamos una arista de cruce sana para la trayectoria $R2(v_j, u_j)$ para conseguir la trayectoria Hamiltoniana, como se ilustra en la Figura 4.7 C.

En la siguiente construcción haremos una trayectoria Hamiltoniana entre dos vértices arbitrarios $u_i \in V(Q[i] - F^i)$ y $u_s \in V(Q[s] - F^s)$ para $s \in [i, j]$ en una gráfica $Q[i, j]$ con fallos.

Notamos que $Q[i, j]$ puede tolerar $2n - 3$ fallos en el lema siguiente, el cual es el máximo grado de tolerancia a fallos en un encaje de ciclo Hamiltoniano.

Lema 7 Sean $i, j \in [0, k-1]$ y sea $F \subseteq V(Q[i, j]) \cup E(Q[i, j])$ un conjunto con fallos tal que $|F| \leq 2n - 3$. Si $Q[l] - F^l$ es Hamiltonianamente conexo para cada $l \in [i, j]$, entonces existe una trayectoria Hamiltoniana que conecta dos vértices arbitrarios $u_i \in V(Q[i] - F^i)$ y $u_s \in V(Q[s] - F^s)$ en $Q[i, j] - F$ tal que $s \in [i, j]$ para $n \geq 3$, $k \geq 3$ y con k impar.

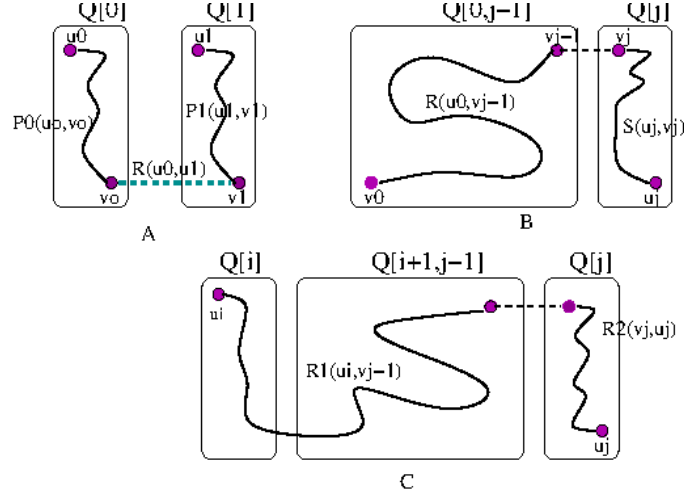


Figura 4.7: Ejemplo Lema 7

Demostración: Tenemos dos casos, cuando $i = j$ y cuando $i \neq j$.

Sea $i = j$, esto implica que estamos hablando de una sola componente $Q[i]$, por el lema anterior (Lema 6) en el caso base, existe una trayectoria Hamiltoniana en $Q[i]$ y ésta a su vez, forma una sub-trayectoria con todos los vértices de $Q[i]$.

Sea $i \neq j$, por lema anterior existe una trayectoria Hamiltoniana, $R(u_i, u_s)$ en $Q[i, s] - F$ tal que todos los vértices en $Q[s] - F^s$ forman una sub-trayectoria en $R(u_i, u_s)$. Usando la siguiente desigualdad $\lceil \frac{k^{n-1} - |F^i| - 1}{2} \rceil \geq \frac{3^{n-1} - |F^i| - 1}{2} > (2n - 3) - |F^i|$, implica que lo peor que puede pasar en este caso es que un vértice que no esté dañado, sólo se pueda acceder a él por una arista para mantener la hipótesis de Hamiltonianamente conexa por lo que podemos encontrar dos vértices consecutivos en $R(u_i, u_s)$, u_s y v_s que existen en $V(Q[s])$, tal que (u_s, u_{s+1}) y (v_s, v_{s+1}) son aristas que no tienen fallos; es decir, aristas de cruce, donde u_{s+1} y $v_{s+1} \in V(Q[s+1])$. Por el Lema 6, hay una trayectoria Hamiltoniana $S(u_{s+1}, v_{s+1})$ en $Q[s+1, j] - F$. Sea $\langle u_i, R_1(u_i, u_s), u_s, v_s, R_2(v_s, v_i), v_i \rangle = R(u_i, u_s)$. Así, $\langle u_i, R_1(u_i, u_s), u_s, u_{s+1}, S(u_{s+1}, v_{s+1}), v_{s+1}, v_s, R_2(v_s, v_i), v_i \rangle$ forma una trayectoria Hamiltoniana en $Q[j] - F$.

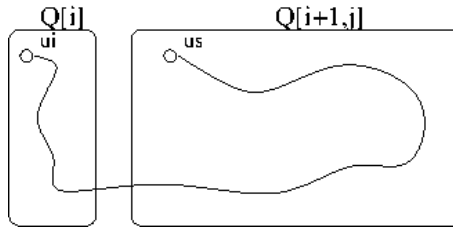


Figura 4.8: Ejemplo Lema 8

Ejemplo 27 Consideremos la red Q_3^3 , sabemos que podemos partirlo en $Q[0]$, $Q[1]$, $Q[2]$. Para cada componente, ejemplificamos los casos del Lema 6.

En la Figura 4.9.A observamos a $Q[0]$ donde sólo tenemos vértices con fallos. En él se muestran en verde los vértices 000, 021, 022, los cuales están dañados y $Q[0]$ sigue teniendo una trayectoria Hamiltoniana,

la cual se muestra siguiendo la línea punteada en morado.

En la Figura 4.9.B observamos a $Q[2]$ donde únicamente hay aristas con fallas. En verde se observan las aristas dañadas $(210, 212), (210, 220), (210, 211)$, se puede observar que estamos en el límite para encontrar una trayectoria Hamiltoniana debido a que sólo hay una arista libre de daño, o arista de cruce sana, $(200, 210)$ en el vértice 210 por la que forzosamente tendremos que usar para la trayectoria Hamiltoniana que se visualiza por la línea punteada de color morado.

En la Figura 4.9.C observamos a $Q[1]$ donde tenemos aristas y vértices con fallos. Resulta más fácil encontrar trayectorias Hamiltonianas.

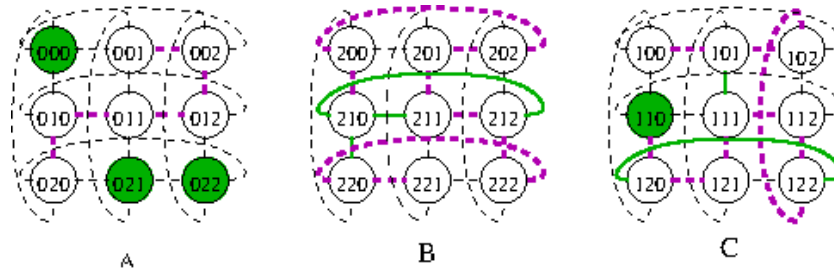


Figura 4.9: Posibles fallas dentro de un Q_3^3

Definición 31 El **Toro** de dimensiones $m \times n$, denotado como (m, n) -toro, es una gráfica con $m \times n$ vértices etiquetados como ab , donde a, b son enteros tales que $0 \leq a \leq m - 1$ y $0 \leq b \leq n - 1$. Dos vértices ab y cd son adyacentes si y sólo si ocurre cualquiera de dos casos:

$$a = c \text{ y } b = d \pm 1 \pmod{n} \text{ o } b = d \text{ y } a = c \pm 1 \pmod{m}.$$

Así, Q_2^k es un (k, k) -Toro para toda $k \geq 3$, por definición. El siguiente teorema relaciona la Hamiltonicidad y la tolerancia a fallos de el (m, n) -Toro.

Teorema 8 Sean m y n enteros, tales que $m \geq 3$ y $n \geq 3$, con n impar, entonces el (m, n) -Toro es 2-Hamiltoniano y 1-Hamiltonianamente Conexo, [2].

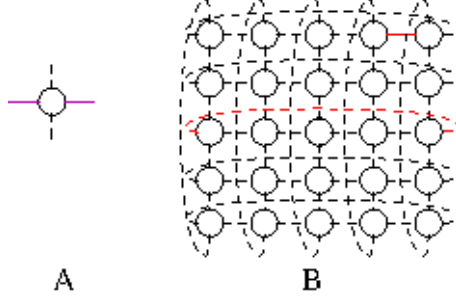
A continuación ejemplificamos el Teorema 8, debido a que no se está utilizando como objeto de estudio la red (m, n) -toro.

Como podemos observar el $m \times n$ -toro es una gráfica 4-regular, por lo que para lograr un ciclo Hamiltoniano cada vértice debe tener al menos dos aristas incidentes a él, una por la cual entraremos por primera vez al vértice y la otra nos servirá para salir del vértice a un nuevo vértice, en el peor caso, sobre un vértice sano inciden dos aristas dañadas que es lo máximo tolerado, al ser 2-Hamiltoniana, aún podemos entrar y salir del vértice, pero si hubiera tres aristas incidentes, podemos alcanzar al vértice, pero ya no podemos salir, esto está representado en la Figura 4.10 (A) donde las líneas punteadas representan las aristas dañadas y las aristas moradas representan el paso de un ciclo Hamiltoniano.

Por otro lado, si sobre un vértice sin fallas u inciden tres vértices con fallos aún podemos alcanzar al vértice u a través de esa única arista para tener una trayectoria Hamiltoniana.

Corolario 3 Si k es impar, con $k \geq 3$, entonces Q_2^k es 2-Hamiltoniana y 1-Hamiltonianamente Conexa.

Como vimos en la sección pasada, podemos fácilmente encajar un Q_n^k en una malla, una $m \times n$ -malla tiene la propiedad de ser 4-conexa y como sabemos los Q_2^k son $2(2) = 4$ -conexo, por lo que, podemos ver lo como otra representación del Q_2^k , y utilizando el Teorema 8 anterior concluimos que es

Figura 4.10: 5×5 -toro

2-Hamiltoniana y 1-Hamiltonianamente Conexa.

Usando la tolerancia a fallos Hamiltoniana y las propiedades de Hamiltonicidad Conexa de Q_{n-1}^k , se mostrará la propiedad de tolerancia a fallos Hamiltoniana del (n, k) -cubo Q_n^k .

Teorema 9 Sea k un entero impar con $k \geq 3$. Si el $(n-1, k)$ -cubo Q_{n-1}^k es $(2n-4)$ -Hamiltoniana y $(2n-5)$ -Hamiltonianamente Conexa para algún $n \geq 3$, entonces el (n, k) -cubo Q_n^k es $(2n-2)$ -Hamiltoniana.

Demostración: Sea $F \subseteq V(Q_n^k) \cup E(Q_n^k)$; es decir, un conjunto de vértices o aristas con fallos en un (n, k) -cubo tal que $|F| \leq 2n-2$. Como se puede dividir al (n, k) -cubo Q_n^k en $Q[i]$ para $i \in \{0, k-1\}$, sobre alguna dimensión tal que $|F^\ell| \leq 2n-3$ para cada ℓ con $0 \leq \ell \leq k-1$.

Si en total $|F| \leq 2n-3$, el teorema se cumpliría, debido a que $2n-3 < 2n-2$ y al volver a partir a Q_n^k tenemos la $(2n-5)$ -Hamiltonianamente Conexa, por lo que asumiremos que $|F| = 2n-2$. Si $F \subseteq E(Q_n^k)$; es decir, solo tenemos aristas con fallos, dividimos al (n, k) -cubo Q_n^k en la dimensión que se encuentre las aristas con fallos. Por otro lado, si no existen tales aristas con fallos entonces $F \subseteq V(Q_n^k)$. lo que indica que sólo hay vértices con fallos. La cota inferior para $|F| \geq 2(3) - 2 = 4$ para toda $n \geq 3$, tomamos dos vértices con fallos arbitrarios del (n, k) -cubo y partiremos al (n, k) -cubo sobre alguna dimensión, de forma que estos dos vértices queden en diferentes $(n-1, k)$ -cubo; o sea, en diferentes componentes. Sin pérdida de generalidad se supondrá que $|F^0| \geq |F^\ell|$ para toda $\ell \in [0, k-1]$. Tenemos tres posibles casos para la existencia de ciclos Hamiltonianos:

- (1) $|F^0| = 2n-3$; (2) $|F^0| = 2n-4$; y (3) $|F^0| \leq 2n-5$.

A continuación, revisamos cada uno de ellos.

Caso 1: $|F^0| = 2n-3$

Tenemos que, por hipótesis cada $(n-1, k)$ -cubo Q_{n-1}^k es $(2n-4)$ -Hamiltoniano, esto implica que existe una trayectoria Hamiltoniana $P_0(u_0, v_0)$ en $Q[0] - F^0$. Sean u_1 y v_1 los vecinos de u_0 y v_0 en la componente $Q[1]$, respectivamente. Por el otro lado, sean u_{k-1} y v_{k-1} los vecinos de u_0 y v_0 en la componente $Q[k-1]$. Como hay al menos alguna arista con fallo afuera de $Q[0]$, o las dos aristas $(u_0, u_1), (v_0, v_1)$ son aristas sin fallo o $(u_0, u_{k-1}), (v_0, v_{k-1})$ son aristas sin daño, por las que es posible cruzar entre componentes por algún par de aristas. Sin pérdida de generalidad, suponemos que las aristas sin fallos por las que podemos cruzar son (u_0, u_1) y (v_0, v_1) . Por hipótesis $(n-1, k)$ -cubo Q_{n-1}^k es $(2n-5)$ -Hamiltonianamente conexa y $2n-5 \geq 1$ para $n \geq 3$, así $Q[\ell] - F^\ell$ es Hamiltonianamente conexa para toda $\ell \in [1, k-1]$ y $n \geq 3$. Tomando que $1 < 2n-3$, para $n \geq 3$, por el Lema 7, existe una trayectoria Hamiltoniana $R(u_1, v_1)$ que

existe en $Q[1, k-1] - F$. Así tenemos que $\langle u_0, P_0(u_0, v_0), v_0, v_1, R(v_1, u_1), u_1, u_0 \rangle$ forma un ciclo Hamiltoniano en $Q_n^k - F$. En la Figura 4.11 (A) vemos la construcción del ciclo Hamiltoniano, utilizando las aristas de cruce sanas (u_0, u_1) y (v_0, v_1) para unir las trayectorias $P_0(u_0, v_0)$ y $R(u_1, v_1)$.

Caso 2: $|F^0| = 2n - 4$

Por hipótesis, cada $(n-1, k)$ -cubo Q_{n-1}^k es $(2n-4)$ -Hamiltoniana lo cual implica que hay un ciclo Hamiltoniano C_0 que existe en $Q[0] - F^0$. Como hay al menos dos aristas o vértices con fallos, fuera de la componente $Q[0]$, podemos encontrar dos vértices consecutivos u_0 y v_0 que se encuentran en el ciclo C_0 , para $n \geq 3$ tal que (u_0, u_1) y (v_0, v_1) son aristas libres de fallos tal que u_1 y v_1 que están en $Q[1]$ son vecinos de u_0 y v_0 , respectivamente.

Como $Q[\ell] - F$ es Hamiltonianamente conexa para toda ℓ , con $\ell \in [1, k-1]$ y $n \geq 4$, se repite la construcción pasada, encontrando una arista de cruce sana a la siguiente componente y utilizando el Lema 7 encontramos el ciclo Hamiltoniano.

Por otro lado, si $n = 3$, además de la componente $Q[0]$ puede existir otra componente digamos, $Q[i]$ tal que $Q[i]$ también contiene dos fallos, si las demás copias tienen a lo más un fallo, utilizamos el procedimiento anterior, para encontrar dos aristas sin fallo; es decir, aplicamos el Lema 7 para encontrar el ciclo Hamiltoniano. Sin embargo, ambas componentes $Q[0] - F^0$ y $Q[i] - F^i$ podrían no ser Hamiltonianamente conexas, pero por hipótesis, cada una es Hamiltoniana. Así que existe un ciclo Hamiltoniano, C_i en la componente $Q[i]$. Podemos notar que no hay más fallas fuera de estas dos componentes, y por hipótesis, $Q[\ell] - F^\ell$ es Hamiltonianamente Conexa para toda $\ell \neq \{0, i\}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $i \neq k-1$. Así podemos encontrar una arista sin fallas por la que sea seguro cruzar, (u_{i-1}, u_i) , tal que $u_{i-1} \in Q[i-1]$ y $u_i \in Q[i]$. Aplicando el Lema 7, tenemos que existe una trayectoria Hamiltoniana, $R(u_1, u_{i-1})$ en $Q[1, i-1]$, cuando $i = 1$ entonces $(u_{i-1}, u_i) = (u_0, u_1)$. Sea $v_{k-1} \in V(Q[k-1])$ un vecino de V_1 . Sea v_i adyacente a u_i en C_i tal que v_{i+1} que es el vecino de v_i en $Q[i+1]$ es diferente de v_{k-1} ; es decir $v_{i+1} \neq v_{k-1}$. Por el Lema 7 existe una trayectoria Hamiltoniana $S(v_{i+1}, v_{k-1})$ que se encuentra en $Q[i+1, k-1]$. Además, sea $C_0 = \langle u_0, P_0(u_0, v_0), v_0 \rangle$ y $C_i = \langle u_i, P_i(u_i, v_i), v_i \rangle$. Entonces, tenemos que $\langle u_0, u_1, R(u_1, u_{i-1}), u_{i-1}, u_i, P_i(u_i, v_i), v_i, v_{i+1}, S(v_{i+1}, v_{k-1}), v_{k-1}, v_0, P_0(v_0, u_0), u_0 \rangle$ es un ciclo Hamiltoniano en $Q_3^k - F$. En la Figura 4.11(B) podemos ver la construcción de este caso a través de la unión del ciclo C_0 con la trayectoria $R(u_1, u_{i-1})$, el ciclo C_i y conectarlo finalmente con la trayectoria $S(v_{i+1}, v_{k-1})$.

Caso 3: $|F^0| \leq 2n - 5$

Como $k^{n-1} > 2n - 2$ para $k \geq 3$ y $n \geq 3$, podemos encontrar una arista sin fallos por la que podemos cruzar, (u_0, u_{k-1}) , donde $u_0 \in Q[1]$ y $u_{k-1} \in Q[k-1]$. Como $|F^0| \leq 2n - 5$ y por hipótesis, sabemos que Q_{n-1}^k es $(2n-5)$ -Hamiltonianamente Conexa, así $Q[\ell] - F^\ell$ es Hamiltonianamente conexa para cada ℓ con $0 \leq \ell \leq k-1$. Aplicando el Lema 6, tenemos que existe una trayectoria Hamiltoniana $P(u_0, u_{k-1})$ en $Q[0, k-1]$. Así, obtenemos que $\langle u_0, P(u_0, u_{k-1}), u_{k-1}, u_0 \rangle$ es un ciclo Hamiltoniano en $Q_n^k - F$.

Esto significa que Q_n^k hereda propiedades de Hamiltonicidad del Q_{n-1}^k , aún cuando éste presenta más fallas. En particular, el Teorema 9 indica que si Q_{n-1}^k tolera el conjunto de fallas F con $|F| \leq 2n - 4$, de tal manera que Q_{n-1}^k es una gráfica Hamiltoniana; y, además $Q_{n-1}^k - F$ es Hamiltonianamente conexa para toda F con $|F| \leq 2n - 5$, entonces Q_n^k tolera conjuntos de fallas F' , con $|F'| \leq 2n - 2$, así $Q_n^k - F$ es una gráfica Hamiltoniana.

Usando la Hamiltonicidad de la tolerancia a fallos y las propiedades Hamiltonianamente Conexas del Q_{n-1}^k , se probará la Hamiltonicidad Conexa de la tolerancia a fallos del Q_n^k en el siguiente teorema.

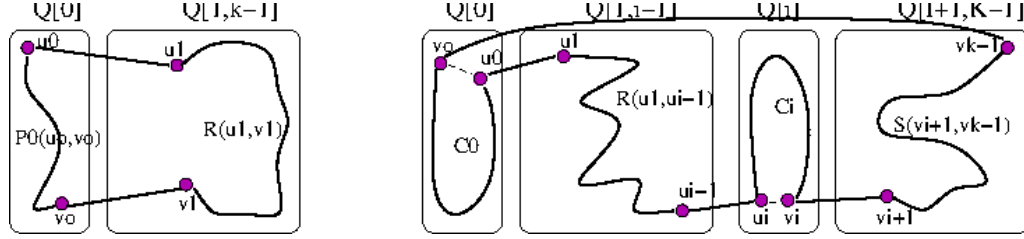


Figura 4.11: Ejemplo Teorema 9

Teorema 10 Sea k un entero impar con $k \geq 3$. Si el $(n-1, k)$ -cubo Q_{n-1}^k es $(2n-4)$ -Hamiltoniana y $(2n-5)$ -Hamiltonianamente Conexa para algún entero n , con $n \geq 3$, entonces la gráfica (n, k) -cubo Q_n^k es $(2n-3)$ -Hamiltonianamente Conexa.

Demostración: Queremos probar que existe una trayectoria Hamiltoniana que conecta a cualesquiera dos vértices x y y en $Q_n^k - F$ y para toda F que cumpla $|F| \leq 2n-3$. Supondremos que $x \neq y$ y partimos al (n, k) -cubo Q_n^k en $Q[0], Q[1], \dots, Q[k-1]$ a través de alguna dimensión de tal forma que x y y estén en diferentes partes Q_{n-1}^k . Por último, sin pérdida de generalidad, suponemos que $|F^0| \geq |F^\ell|$ para toda ℓ con $0 \leq \ell \leq k-1$. Tenemos tres casos generales y algunos subcasos, para ver la existencia de las trayectorias Hamiltonianas:

Caso 1: $|F^0| = 2n-3$:
 Caso 1.1: $x \in V(Q[0] - F^0)$ y $y \in V(Q[i] - F^i)$,
 Caso 1.2: $x \in V(Q[i] - F^i)$ y $y \in V(Q[j] - F^j)$;

Caso 2: $|F^0| = 2n-4$:
 Caso 2.1: $x \in V(Q[0] - F^0)$ y $y \in V(Q[i] - F^i)$,
 Caso 2.2: $x \in V(Q[i] - F^i)$ y $y \in V(Q[j] - F^j)$;

Caso 3: $|F^0| = 2n-5$.

A continuación, revisamos cada uno de ellos.

Caso 1: $|F^0| = 2n-3$

Por hipótesis, cada $(n-1, k)$ -cubo Q_{n-1}^k es $(2n-4)$ -Hamiltoniana, así que existe una trayectoria Hamiltoniana $P_0(u_0, v_0)$ en $Q[0] - F^0$. Como $|F^0| = 2n-3$ no existen más fallos en aristas o vértices afuera de $Q[0]$. Así que $Q[\ell]$ es Hamiltonianamente Conexa para toda ℓ con $\ell \in [1, k-1]$. Ahora tenemos dos casos, los cuales trataremos con detalle a continuación.

Caso 1.1: $x \in V(Q[0] - F^0)$ y $y \in V(Q[i] - F^i)$, con $i \neq 0$. Tenemos que x y y no están en la misma componente. Sea $P_0(u_0, v_0) = \langle u_0, P_{0,1}(u_0, w_0), w_0, x, P_{0,2}(x, w_0), v_0 \rangle$. Tenemos que $|V(P_0(u_0, v_0))| \geq k^{n-1} - (2n-3) \geq 3^2 - 3 = 6$ para toda k y n tales que $k \geq 3$ y $n \geq 3$, que es la cota inferior, así que se supondrá que $w_0 \neq u_0$ y $w_0 \neq x$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $i \neq 1$. Así, sean v_1 y w_1 en $Q[1]$ vecinos de v_0 y w_0 , respectivamente. Además, sea u_{k-1} en $Q[k-1]$ el vecino de u_0 .

Primero consideramos el caso $y \neq u_{k-1}$. Por el Lema 7 existe una trayectoria Hamiltoniana $R(v_1, w_1)$ en $Q[1, i-1]$. También por el Lema 7, existe una trayectoria Hamiltoniana $S(u_{k-1}, y)$ en $Q[i, k-1]$. Así $\langle x, P_{0,2}(x, v_0), v_0, v_1, R(v_1, w_1), w_1, w_0, P_{0,1}(w_0, u_0), u_0, u_{k-1}, S(u_{k-1}, y), y \rangle$ es una trayectoria Hamiltoniana en $Q_n^k - F$. Ahora, para el Caso 1.1, consideramos cuando $y = u_{k-1}$. Si

$n \geq 3$, por el Lema 7, existe una trayectoria Hamiltoniana $R(v_1, w_1)$ en $Q[1, k-1] - y$. Entonces, $\langle x, P_{0,2}(x, v_0), v_0, v_1, R(v_1, w_1), w_1, w_0, P_{0,1}(w_0, u_0), u_0, y \rangle$ forma un ciclo Hamiltoniano en $Q_n^k - F$. La Figura 4.12 (A) nos permite ver gráficamente la construcción de la trayectoria, con x dentro de la trayectoria P_0 en la componente $Q[0]$ y y en la componente $Q[i, k-1]$, además de mostrar las trayectorias $R(v_1, w_1)$ y $S(u_{k-1}, y)$.

Caso 1.2: $x \in V(Q[i] - F^i)$ y $y \in V(Q[j] - F^j)$, tal que $i, j \neq 0$.

Suponemos que $i > j$, también supongamos que x y y son vecinos ya sea de u_0 o de v_0 , si $x \in Q[k-1]$ y $y \in Q[1]$. Sea v_{k-1} en $Q[k-1]$ el vecino de v_0 . Al no tener fallas en $Q[k-1]$ ya que todas están dentro de $Q[0]$, existe una trayectoria Hamiltoniana $P_{k-1}(x, v_{k-1})$ en $Q[k-1]$. Sea $P_0(u_0, v_0) = \langle u_0, P_{0,1}(u_0, w_0), w_0, z_0, P_{0,2}(z_0, v_0), v_0 \rangle$ y sean w_0 y z_0 dos vértices consecutivos dentro de $P_0(u_0, v_0)$. Por otro lado, sean $w_1, z_1 \in Q[1]$ los vecinos de w_0, z_0 , respectivamente. Por el Lema 7, existe una trayectoria Hamiltoniana $R(w_1, z_1) \in Q[1, k-2] - y$. Así, la trayectoria $\langle y, v_0, P_{0,1}(u_0, w_0), w_0, w_1, R(w_1, z_1), z_1, z_0, P_{0,2}(z_0, v_0), v_0, v_{k-1}, P_{k-1}(v_{k-1}, x), x \rangle$ es Hamiltoniana, conectando x con y en el $Q_n^k - F$.

Por otro lado, supongamos que ni x ni y son vecinos de u_0 o v_0 , respectivamente. Sea $u_1 \in Q[1]$ y $v_{k-1} \in Q[k-1]$ vecinos de u_0 y v_0 respectivamente. Sin pérdida de generalidad, supongamos que son distintos; es decir, $u_1 \neq y$ y $v_{k-1} \neq x$. Aplicando el Lema 7 tenemos que existen dos trayectorias Hamiltonianas, $S(x, v_{k-1}) \in Q[i, k-1]$ y $T(u_1, y) \in Q[1, i-1]$. Por lo que $\langle x, S(x, v_{k-1}), v_{k-1}, v_0, P_0(v_0, u_0), u_0, u_1, T(u_1, y), y \rangle$ es una trayectoria Hamiltoniana que conecta a x con y en $Q_n^k - F$.

La Figura 4.12 (B) nos muestra el caso donde hay un ciclo Hamiltoniano en la componente $Q[1, k-2]$ y la Figura 4.12 (C) nos muestra a la trayectoria solo con la unión de las trayectorias $S(x, v_{k-1}), P_0(u_0, v_0)$ y $T(u_1, y)$ a través de las aristas de cruce sanas (v_{k-1}, v_0) y (u_0, u_1) .

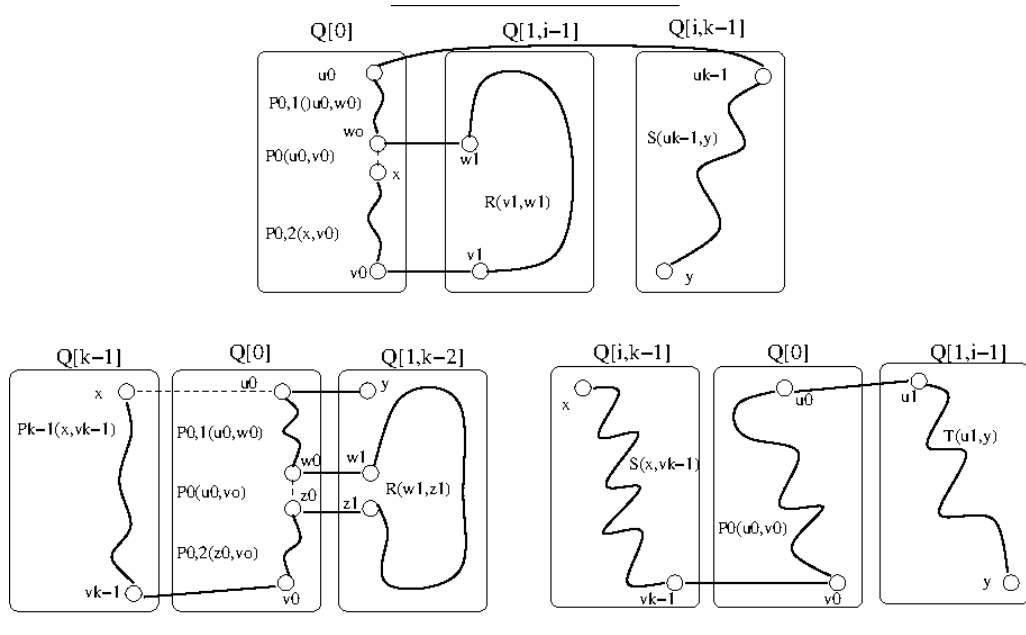


Figura 4.12: Ejemplo Teorema 10

Caso 2: $|F^0| = 2n - 4$

Por hipótesis $Q[0]$ es $(2n - 4)$ -Hamiltoniana, por lo que existe C_0 , un ciclo Hamiltoniano en $Q[0] - F^0$, tomando la cardinalidad de $|F|$, esto implica que hay al menos una falla fuera de la componente $Q[0]$. Como $Q[\ell] - F^\ell$ es Hamiltonianamente conexa para toda ℓ con $\ell \in [1, k - 1]$, ahora tenemos dos casos, los cuales trataremos con detalle a continuación.

Caso 2.1: $x \in V(Q[0] - F^0)$ y $y \in V(Q[i] - F^i)$ cuando $i \neq 0$.

Sea $u_0 \in V(C_0)$ tal que u_0 no es vecino de y y u_0 es adyacente a x dentro de C_0 . Sea $u_1 \in V(Q[1] - F^1)$ el vecino de u_0 , como a lo más hay un fallo fuera de la componente $Q[0]$, suponemos, sin pérdida de generalidad, que la arista (u_0, u_1) no presenta fallas. Por el Lema 7 existe una trayectoria Hamiltoniana $R(u_1, y) \in Q[1, k - 1] - F$, el ciclo Hamiltoniano se ve como: $C_0 = \langle x, P_0(x, u_0), u_0, x \rangle$. Así, la trayectoria $\langle x, P_0(x, u_0), u_0, u_1, R(u_1, y), y \rangle$ es Hamiltoniana y conecta a los vértices x, y en el $Q_n^k - F$. En la Figura 4.13 (A) podemos ver el caso de tener un ciclo Hamiltoniano C_0 al cual le quitaremos una arista (x, u_0) y a través de la arista de cruce sana (u_0, u_1) lo unimos a la trayectoria $R(u_1, y)$.

Caso 2.2: $x \in V(Q[i] - F^i)$ y $y \in V(Q[j] - F^j)$, tal que $i \neq j$.

Suponemos que $i > j$, como ya sabemos que existe un fallo afuera de la componente $Q[0]$, elegimos dos vértices adyacentes, $u_0, v_0 \in Q[0]$, tal que (u_0, u_{k-1}) y (v_0, v_1) son aristas libres de fallos, que además cumplen que $u_{k-1} \neq x$ y $v_1 \neq y$ con $u_{k-1} \in Q[k-1]$ es vecino de u_0 y $v_1 \in Q[1]$ es vecino de v_0 . Aplicando el Lema 7 existe una trayectoria Hamiltoniana $R(v_1, y) \in Q[1, i-1] - F$, análogamente, existe $S(x, u_{k-1}) \in Q[i, k-1] - F$. Veremos al Ciclo C_0 como: $C_0 = \langle u_0, P_0(u_0, v_0), v_0, u_0 \rangle$. Así, la trayectoria $\langle x, S(x, u_{k-1}), u_{k-1}, u_0, P_0(u_0, v_0), v_0, v_1, R(v_1, y), y \rangle$ es Hamiltoniana en $Q_n^k - F$. En la Figura 4.13 (B) podemos ver el caso de tener dos trayectorias, una en la componente $Q[i, k-1]$ y otra en la componente $Q[1, i-1]$, entre las componentes se localiza la componente $Q[0]$ en la cual existe un ciclo Hamiltoniano, el cual partiremos.

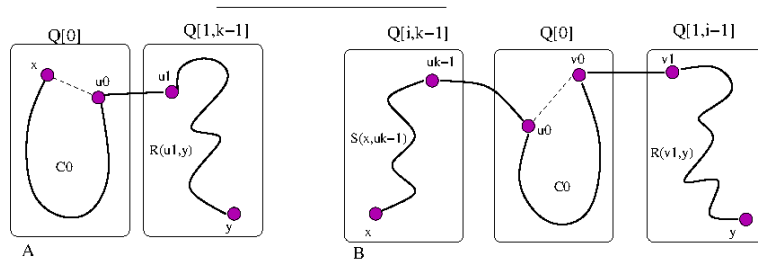


Figura 4.13: Ejemplo Teorema 10

Caso 3: $|F^0| = 2n - 5$

Como resultado de los casos anteriores, $Q[\ell] - F^\ell$ es Hamiltonianamente Conexas para toda ℓ con $\ell \in [0, k - 1]$. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $x \in V(Q[0] - F^0)$. Como $|F| \leq 2n - 3$, aplicando el Lema 7 existe una trayectoria Hamiltoniana que conecta a los vértices x y y en la componente $Q[0, k - 1] - F$, lo cual implica que existe la trayectoria Hamiltoniana en $Q_n^k - F$.

Este resultado también implica que Q_n^k hereda propiedades de Hamiltonicidad de la gráfica Q_{n-1}^k , cuando ambas tiene fallas. En particular, indica que si Q_{n-1}^k tolera cualquier conjunto de fallas F con

$|F| \leq 2n - 5$ de tal manera que $Q_{n-1}^k - F$ es tal que para todo par de vértices x, y en $Q_n^k - F$ existe una trayectoria Hamiltoniana que los conecta y además $Q_{n-1}^k - F'$ es Hamiltoniana para todo F' con $|F'| \leq 2n - 4$ entonces Q_n^k tolera cualquier conjunto de fallas F'' con $|F''| \leq 2n - 3$, así $Q_n^k - F''$ posee una trayectoria Hamiltoniana para cualquier par de vértices x, y en él.

Concluyendo, la Hamiltonicidad de tolerancia a fallos de la gráfica (n, k) -cubo Q_n^k está dada en el siguiente teorema:

Teorema 11 Sean k y n dos enteros, tales que $n \geq 2$, $k \geq 3$ con k impar. Entonces, el (n, k) -cubo Q_n^k resulta ser una gráfica $(2n - 2)$ -Hamiltoniana y $(2n - 3)$ -Hamiltonianamente Conexa.

Demostración: Teniendo los anteriores teoremas, el Teorema 9 nos da las condiciones para garantizar que la gráfica (n, k) -cubo es $(2n - 2)$ -Hamiltoniana; es decir, se pide que cada subcubo $(n - 1, k)$ -cubo sea $(2n - 4)$ -Hamiltoniano y $(2n - 5)$ -Hamiltonianamente Conexo para poder encontrar al menos un ciclo Hamiltoniano dentro del (n, k) -cubo. El Teorema 10 nos da las condiciones para garantizar que la gráfica (n, k) -cubo es $(2n - 3)$ -Hamiltonianamente Conexa; es decir, se pide que cada subcubo $(n - 1, k)$ -cubo sea $(2n - 4)$ -Hamiltoniano y $(2n - 5)$ -Hamiltonianamente Conexo para poder encontrar al menos un ciclo Hamiltoniano dentro del (n, k) -cubo.

Vemos que ambos teoremas nos piden los mismos requisitos referente a los subcubos, podemos garantizar que el (n, k) -cubo Q_n^k resulta ser una gráfica $(2n - 2)$ -Hamiltoniana y $(2n - 3)$ -Hamiltonianamente Conexa.

Esto significa que:

1. El (n, k) -cubo con $n \geq 2$ y $k \geq 3$ y k impar en una gráfica $(2n - 2)$ -Hamiltoniana tolerante a fallos; es decir que, para todo conjunto de fallas F , con $|F| \leq 2n - 2$ se tiene que $Q_n^k - F$ es una gráfica Hamiltoniana.
Queremos enfatizar que un (n, k) -cubo dañado aun existen ciclos Hamiltonianos incluso si el conjunto con fallas F tiene $2n - 2$ aristas o vértices con fallas y como el (n, k) -cubo es una gráfica $2n$ -regular tal cota es óptima.
2. El (n, k) -cubo con $n \geq 2$ y $k \geq 3$ y k impar es una gráfica $(2n - 3)$ -Hamiltonianamente Conexa lo que significa que para todo conjunto de fallas F , con $|F| \leq 2n - 3$ se tiene que si $Q_n^k - F$ entonces existe una trayectoria Hamiltoniana entre cualesquiera par de vértices en él.
Para este caso, tal cota también es óptima ya que Q_n^k es $2n$ -regular.

Ejemplo 28

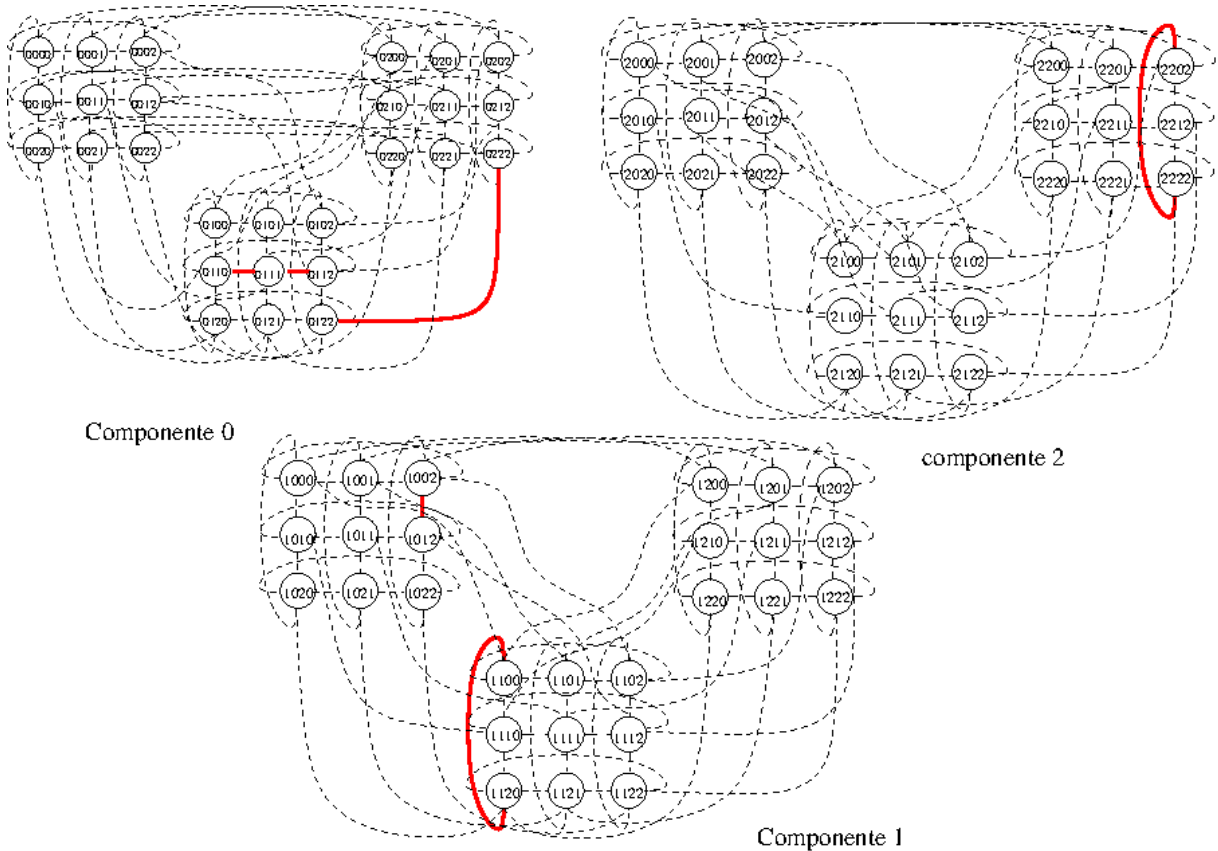
Sea el $(4, 3)$ -cubo Q_4^3 vamos ver que es 6 -Hamiltoniana y 5 -Hamiltonianamente Conexa, como lo dice el Teorema 11. En la Figura 4.14 mostramos como se ve el $(4, 3)$ -cubo, en rojo resaltamos las aristas que tienen fallos. Tenemos tres componentes y están unidas entre ellas pero las aristas se omitieron para que se aprecie la Figura, cada componente es un $(3, 3)$ -cubo Q_3^3 .

Analizaremos cada componente, utilizando el Lema 5, Lema 6 y Lema 7:

Componente 0:

Las aristas con fallos de la componente son $Q[0]$ son $(0110, 0111)$, $(0111, 0112)$ y $(0122, 0222)$.

Primero, encontraremos una trayectoria Hamiltoniana en $Q[0]$. En la Figura 4.15 (A) marcamos en azul el ciclo Hamiltoniano: $C_0 = \langle 0000, 0100, 0110, 0120, 0122, 0112, 0102, 0101, 0111, 0121, 0221, 0220, 0210, 0200, 0202, 0222, 0212, 0211, 0201, 0001, 0002, 0022, 0012, 0010, 0011, 0021, 0020 \rangle$.

Figura 4.14: Partición del $(4, 3)$ -cubo

Por lo que la Componente $Q[0]$ es 4-Hamiltoniana.

Ahora, vamos a ver que es 3-Hamiltoniana Conexa, lo cual implica que para cualesquiera dos vértices u_i, v_i podemos encontrar la trayectoria Hamiltoniana $P_i(u_i, v_i)$, por el Lema 5 nos garantiza que es $2n - 3 = 5$ y teniendo la siguiente desigualdad: $2n - 5 < 2n - 3$, por lo que si es 3-Hamiltoniana. Tomaremos dos vértices arbitrarios, 0011 y 0222, en la Figura 4.15 (B) se muestra la trayectoria $P_0(0011, 0222) = \langle 0011, 0010, 0012, 0022, 0002, 0001, 0000, 0020, 0021, 0121, 0111, 0101, 0102, 0112, 0122, 0120, 0110, 0100, 0200, 0210, 0220, 0221, 0211, 0201, 0202, 0212, 0222 \rangle$.

Componente 1:

Las aristas con fallos de la componente $Q[1]$ son $(1100, 1120)$ y $(1002, 1012)$.

Primero, encontraremos una trayectoria Hamiltoniana en $Q[1]$. En la Figura 4.16 (A) marcamos en azul el ciclo Hamiltoniano: $C_1 = \langle 1000, 1002, 1001, 1101, 1102, 1100, 1200, 1201, 1202, 1212, 1210, 1211, 1111, 1112, 1110, 1010, 1011, 1012, 1022, 1122, 1121, 1120, 1220, 1222, 1221, 1021, 1020 \rangle$.

Por lo que la Componente $Q[0]$ es 4-Hamiltoniana.

Después, vamos a ver que es 3-Hamiltoniana Conexa, lo cual implica que para cualesquiera dos vértices u_i, v_i podemos encontrar la trayectoria Hamiltoniana $P_i(u_i, v_i)$, por el Lema 5 nos garantiza que es

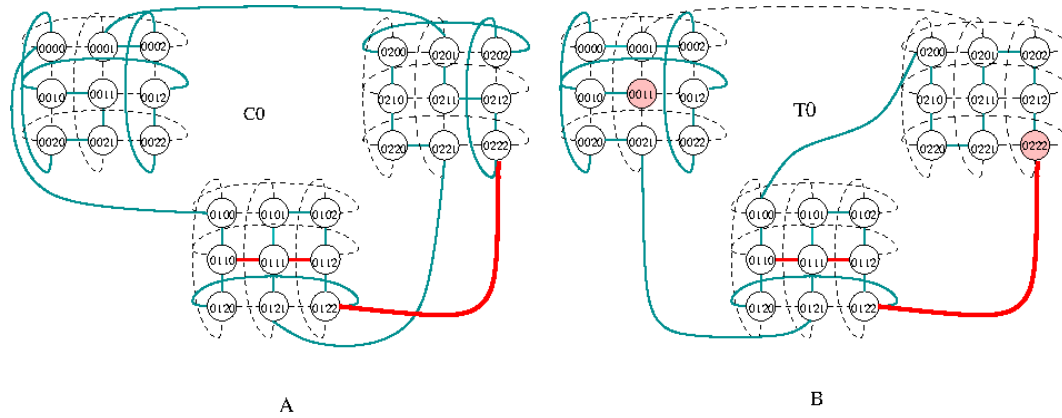


Figura 4.15: Ciclo C_1 y Trayectoria T_1 en $Q[1]$

$2n - 3 = 5$ y teniendo la siguiente desigualdad: $2n - 5 < 2n - 3$, por lo que si es 3-Hamiltoniana. Tomaremos dos vértices arbitrarios, 0011 y 0222, en la Figura 4.16 (B) se muestra la trayectoria $P_0(1101, 1102) = \langle 1101, 1111, 1121, 1021, 1020, 1022, 1012, 1011, 1010, 1000, 1001, 1002, 1202, 1201, 1211, 1212, 1222, 1221, 1220, 1210, 1200, 1100, 1110, 1120, 1122, 1112, 1102 \rangle$.

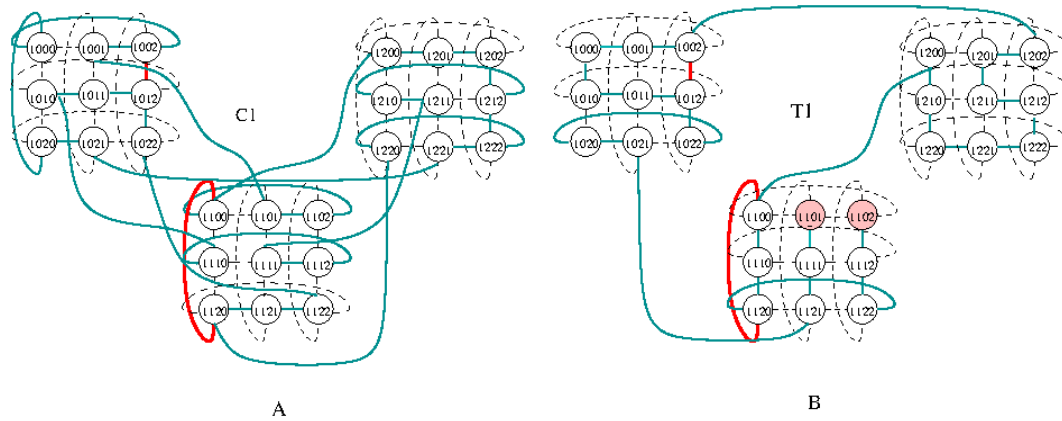


Figura 4.16: Ciclo C_2 y Trayectoria T_2 en $Q[2]$

Componente 2:

La única arista con fallo de la componente $Q[2]$ es $(2202, 2222)$.

Primero, encontraremos una trayectoria Hamiltoniana en $Q[2]$. En la Figura 4.17 (A) se observa en azul el ciclo Hamiltoniano: $C_1 = \langle 2000, 2001, 2002, 2012, 2010, 2011, 2021, 2022, 2020, 2120, 2110, 2100, 2101, 2111, 2121, 2122, 2112, 2102, 2202, 2201, 2211, 2212, 2222, 2221, 2220, 2010, 2200 \rangle$.

Por lo que la componente $Q[2]$ es 4-Hamiltoniana.

Ahora, veamos que es 3-Hamiltoniana Conexa, lo cual implica que para cualesquiera dos vértices u_i, v_i podemos encontrar la trayectoria Hamiltoniana $P_i(u_i, v_i)$, por el Lema 5 nos garantiza que es $2n - 3 = 5$

y teniendo la siguiente desigualdad: $2n - 5 < 2n - 3$, por lo que si es 3-Hamiltoniana.

Tomaremos dos vértices arbitrarios, 2120 y 2222, en la Figura 4.15 (B) se muestra la trayectoria $P_0(2120, 2222) = \langle 2120, 2100, 2102, 2101, 2111, 2110, 2112, 2122, 2121, 2021, 2020, 2010, 2011, 2012, 2022, 2022, 2001, 2000, 2200, 2210, 2220, 2221, 2211, 2201, 2202, 2212, 2222 \rangle$.

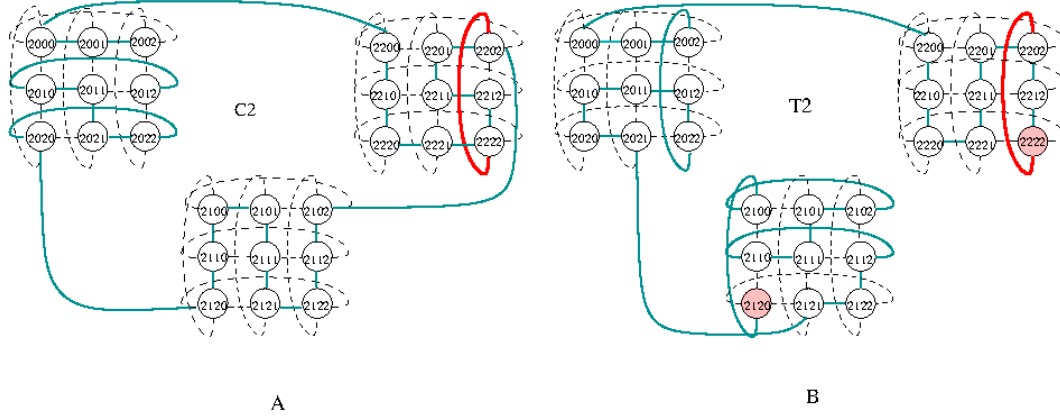


Figura 4.17: Ciclo C_2 y Trayectoria T_2 en $Q[2]$

Procedemos a aplicar el Teorema 4.11 para obtener el ciclo Hamiltoniano, cada conjunto $|F^0|$, $|F^1|$ y $|F^2|$ de su respectiva componente $Q[0]$, $Q[1]$ y $Q[2]$ es $|F^i| \leq 2n - 5 = 3$. Del ciclo C_0 quitamos la aristas $(0101, 0102)$, nos queda la trayectoria $T_0(0101, 0102)$ y del ciclo C_2 quitamos la arista $(2212, 2222)$ y nos queda la trayectoria $T_2(2212, 2222)$, esto se puede ver en la Figura 4.18 donde hay tachos sobre las aristas. Así construimos al ciclo $C = \langle T_0, T_1, T_2 \rangle$ utilizando las aristas de cruce sanas $(0101, 1101)$, $(0102, 1102)$, $(1212, 2212)$ y $(1222, 2222)$ las cuales están dibujadas en verdes en la Figura 4.18, este ciclo es Hamiltoniano.

Finalmente, revisaremos que es Hamiltonianamente Conexo, tomamos dos vértices arbitrarios 2101 y 2222 y encontraremos una trayectoria Hamiltoniana entre ellos, en la Figura 4.19 estos vértices están en color rosa. Se utilizó la trayectoria T_1 de la componente $Q[1]$, además de buscar una trayectoria $T_0(0120, 0102)$ en $Q[0]$ y una trayectoria $T_2(2120, 2222)$ en $Q[2]$. Se utilizaron las aristas de cruce sanas $(0120, 1102)$ y $(0102, 1102)$ las cuales están dibujadas en verde, así tenemos la trayectoria $T = \langle T_1, T_0, T_2 \rangle$. A pesar de que cada componente cumple el hecho de ser $(2n - 5)$ -Hamiltoniana Conexo, no descartamos que existan más aristas con fallos entre las componentes $Q[0]$, $Q[1]$ y $Q[2]$.

De lo anterior concluimos que el $(4, 3)$ -cubo Q_4^3 es 6-Hamiltoniana y 5-Hamiltoniana Conexo

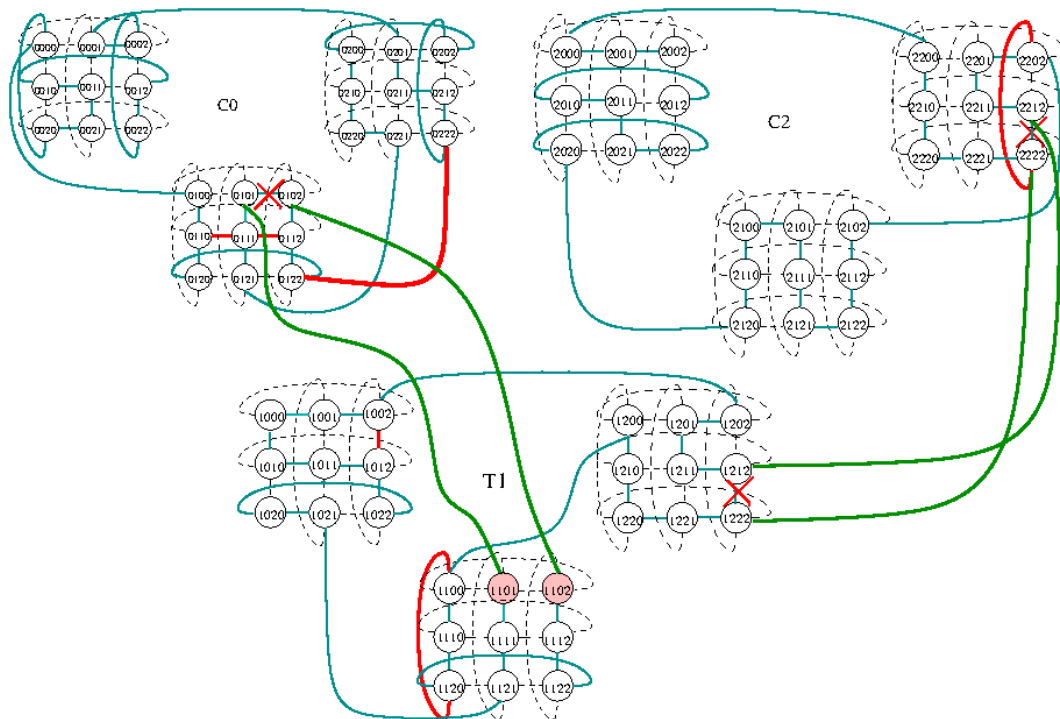


Figura 4.18: Ciclo Hamiltoniano en un $(4, 3)$ -cubo con fallas

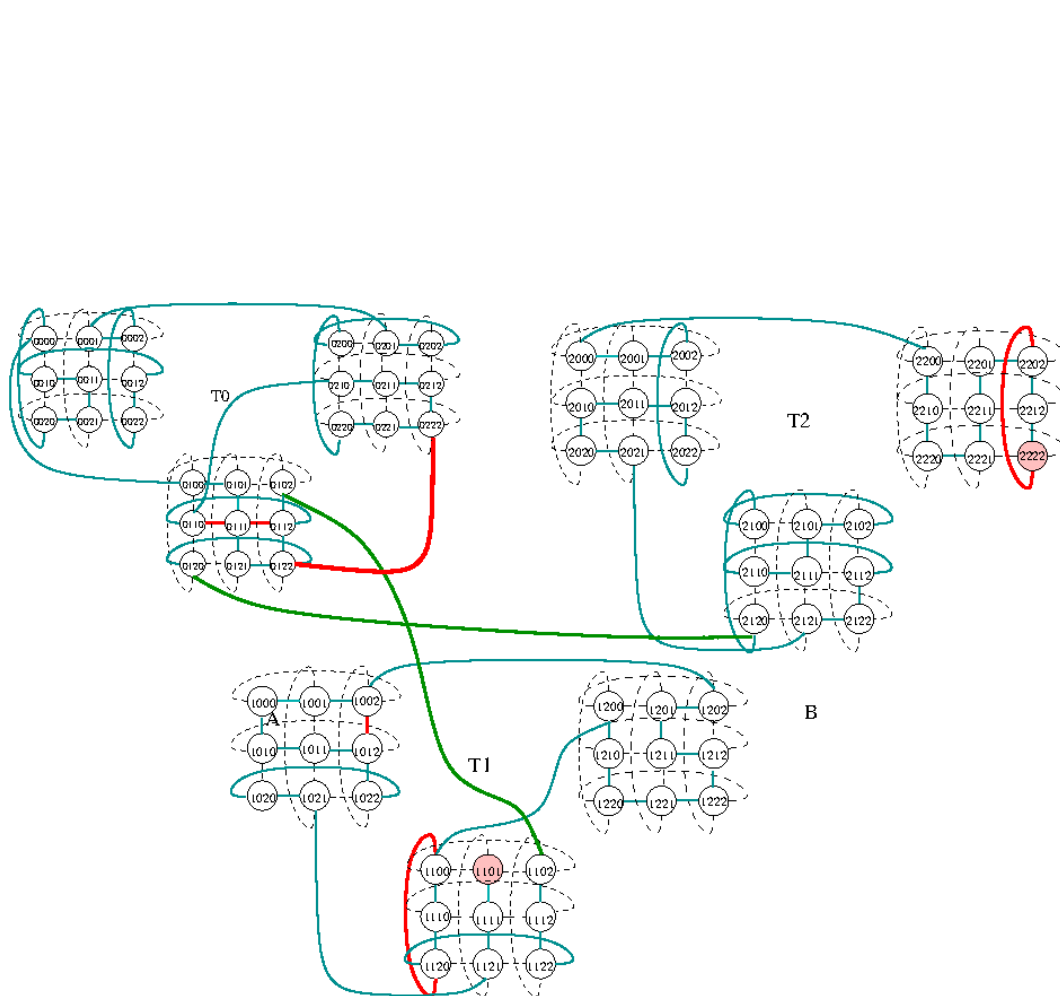


Figura 4.19: Trayectoria Hamiltoniana en un $(4, 3)$ -cubo con fallas

Conclusiones

A lo largo de este documento tomamos como objeto de estudio la red de interconexión Q_n^k desde el punto de vista de la Teoría de gráficas [5, 8, 12]; es decir, la gráfica (n, k) -cubo, la cual es una generalización del hipercubo $(n, 2)$ -cubo Q_n [10], analizamos su topología, además revisamos y ejemplificamos tres algoritmos para la difusión de la información basados en dos artículos [6, 13]. Planteamos la posibilidad de tener fallas dentro del (n, k) -cubo y, entonces, estudiamos propiedades topológicas más sofisticadas como la k -Hamiltonicidad, sin olvidar la Hamiltonicidad [15, 2, 7]. Se examinaron los siguientes puntos:

- Breve introducción a los conceptos y ejemplos de redes de interconexión.
- Estructura de la red (n, k) -cubo basada en la generalización del hipercubo, el (n, k) -cubo está formado recursivamente por k copias del $(n - 1, k)$ -cubo, por lo que existen k formas diferentes de descomponer al (n, k) -cubo.
- Una métrica llamada Distancia de Lee para encontrar la distancia mínima entre vértices del (n, k) -cubo, por lo que el diámetro del (n, k) -cubo es $n * \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.
- En un (n, k) -cubo, si tenemos dos vértices diferentes u y v , hay $2n$ trayectorias ajenas por vértices entre ellos.
- En la red Q_n^k sin fallos, podemos aplicar algoritmos óptimos de difusión para un puerto o multi-puertos, además de mostrar un algoritmo de Ruteo Dimensional.
- Vimos la forma de encajar a la gráfica (n, k) -cubo en las estructuras de Anillo, Malla e Hipercubos. Gracias a esto podemos encontrar ciclos Hamiltonianos dentro del (n, k) -cubo.
- Para ayudarnos a encontrar los ciclos Hamiltonianos, generalizamos los Códigos Gray Binarios propios del hipercubo para los (n, k) -cubos.
- Se mostraron diversas funciones que generan Códigos Gray como f, f^*, f

Teniendo como preámbulo lo anterior nos centramos en encontrar ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas dentro de un (n, k) -cubo sin fallos.

- Si tenemos un Código Gray es equivalente a tener un Ciclo Hamiltoniano.
- Se vió que la cantidad de ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas en un (n, k) -cubo sin fallos depende de la forma del (n, k) -cubo, por ejemplo dentro de un $(2, k)$ -cubo tenemos 2 ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas.
- Para un hipercubo $(n, 2)$ -cubo podemos encontrar $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ciclos Hamiltonianos ajenos por aristas.

Concluimos el documento con el capítulo cuatro donde nos planteamos la posibilidad de que al implementarse la red Q_n^k en la vida real, presente fallas, ya sea en vértices o en aristas. Para ello analizamos su Hamiltonicidad.

- Analizamos el hecho de que los fallos puedan encontrarse tanto en vértices como en aristas.
- Nos ayudamos de partir al (n, k) -cubo sobre la dimensión que encontremos una mayor número de fallos.
- Los Lemas 5, 6 y 7 nos ayudan a encontrar un ciclo Hamiltoniano y una Trayectoria Hamiltoniana.
- Finalmente el Teorema 9 y el Teorema 10 nos dan las condiciones para que un (n, k) -cubo sea $(2n - 2)$ -Hamiltoniana y $(2n - 3)$ -Hamiltoniana Conexa.

A lo largo del trabajo, estuvimos no sólo desglosando las demostraciones, sino también ilustrándolas y ejemplificando los resultados (teoremas, lemas). Este ejercicio fue de gran importancia para la comprensión del material.

Índice de figuras

1.1. Ejemplos de Gráficas	4
1.2. Gráfica No conexa y Conexa	5
1.3. Caminos, ciclos, Trayectorias	5
1.4. Producto Cartesiano (A x B)	6
1.5. Redes de Interconexión en forma de Arreglo y Ciclo.	7
1.6. Red de Interconexión en forma de Estrella	7
1.7. Red de Interconexión en forma de Árbol	7
1.8. Red de Interconexión en forma Completa	8
1.9. Redes de Interconexión de Malla y Toro.	8
1.10. Construcción de los primeros hipercubos	9
2.1. Ejemplo de (Q_n^3) para $n = 1, 2, 3$	13
2.2. $k = 3$ con $n = 1, 2, 3$	14
2.3. Ejemplificación Distancia de Lee en (2,4)-cubo	14
2.4. Diámetro del anillo de longitud k	16
2.5. Distancias del vértice 112	16
2.6. Teorema 1 ejemplo 1	18
2.7. Teorema 1 ejemplo 2	18
2.8. Teorema 1 ejemplo 3	19
2.9. Caminos 1 y 2	20
2.10. Caminos 3,4	21
2.11. Caminos 5 y 6	22
2.12. Automorfismos del árbol A	27
2.13. Árbol generador	31
2.14. (2,4)-cubo	33
2.15. Implementación del Algoritmo 2 en (3,4)-cubo	33
2.16. Encaje Q_4^4 en $4^2 \times 4^2$ -malla	37
2.17. Encaje Q_4^4 en $4^3 \times 4^1$ -malla	37
2.18. Encaje de Q_3^2 en Q_2^4	39
3.1. El Código Gray para K=3	43
3.2. Función f	46
3.3. Función f y función \tilde{f}	47
3.4. Función f^*	49
3.5. Ciclos Hamiltonianos ajenos (2,3)-cubo	53
3.6. Casos en un $T_{k \times k}$	54
3.7. Ciclos Ajenos en un $T_{3 \times 9}$	58

3.8. Ciclos Hamiltonianos Ajenos en un Q_4	60
4.1. Partición (n, k) –cubo	64
4.2. Aristas de Cruce entre $Q[i]$ y $Q[i + 1]$	65
4.3. Partición $(2, 3)$ –cubo	65
4.4. Q_2^4 Bipartita	66
4.5. Ejemplo Lema 6	68
4.6. Ejemplo Lema 6	68
4.7. Ejemplo Lema 7	70
4.8. Ejemplo Lema 8	70
4.9. Posibles fallas dentro de un Q_3^3	71
4.10. 5×5 –toro	72
4.11. Ejemplo Teorema 9	74
4.12. Ejemplo Teorema 10	75
4.13. Ejemplo Teorema 10	76
4.14. Partición del $(4, 3)$ –cubo	78
4.15. Ciclo C_1 y Trayectoria T_1 en $Q[1]$	79
4.16. Ciclo C_2 y Trayectoria T_2 en $Q[2]$	79
4.17. Ciclo C_2 y Trayectoria T_2 en $Q[2]$	80
4.18. Ciclo Hamiltoniano en un $(4, 3)$ –cubo con fallas	81
4.19. Trayectoria Hamiltoniana en un $(4, 3)$ –cubo con fallas	82

Bibliografía

- [1] Y. A. Ashir and I. A. Stewart. On Embedding Cycles in k -Ary n -Cubes. *Parallel Processing Letters*, 7:45–55, 1997.
- [2] Y. A. Ashir and I. A. Stewart. Fault-Tolerant Embeddings of Hamiltonian Circuits in k -Ary n -Cubes. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 15:317–328, 2002.
- [3] M. M. Bae and B. Bose. Edge Disjoin Hamiltonian Cycles in k -Ary n -Cubes and Hypercubes. *IEEE TRANSACTIONS ON COMPUTERS*, 52:1271–1284, 2003.
- [4] S. Bettayeb. On the k -Ary Hypercube. *Theoretical Computer Science*, 140:333–339, 1995.
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory With Applications*. Springer, 4th edition, 2008.
- [6] B. Bose, B. Broeg, Y. Know, and Y. Ashir. Lee Distance and Topological Properties of k -Ary n -Cubes. *IEEE Transaction ON Computers*, 44:1021–1030, 1995.
- [7] M. Y. Chan and S.J. Lee. On the Exisence of Hamiltonian Circuits in Faulty Hypercubes. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, pages 511–527, 1991.
- [8] G. Chartrand and P. Zhang. *A First Course in Graph Theory*. McGraw-Hill, 2nd edition, 2012.
- [9] G. Dantzig and P. Wolfe. Descomposition Principle for Linear Programs. *Operations Research*, 8:101–111, 1960.
- [10] E. A. Domínguez Jiménez. Propiedades topológicas y algorítmicas del hipercubo y sus variantes. *Universidad Nacional Autónoma de México*, 2014.
- [11] J. Duato, L. Ni, and S. Yalamanchili. *Interconnection Networks An Engineering Approach*. Morgan Kaufmann, 2nd edition, 2003.
- [12] U. Manber. *Introduction to Algorithms. A creative approach*. Addison Wesley U.S.A., 1st edition, 1989.
- [13] W. Mao and D. Nicol. On k -Ary n -Cubes: Theory and Applications. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 129:171–193, 2003.
- [14] E. Vite Sevilla. Propiedades topológicas y algorítmicas de la (n, k) -estrella. *Universidad Nacional Autónoma de México*, 2015.
- [15] M. Yang, J.J. Tan, and L. Hsu. Hamiltonian Circuit and Linear Array Embeddings in Faulty k -Ary n -Cubes. *Journal of Parallel Distributed Computing*, pages 362–368, 2007.