



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
ELÉCTRICA - INSTRUMENTACIÓN

ESTUDIO NUMÉRICO DE ANTENAS ACÚSTICAS TIPO GUÍA DE ONDA  
RANURADA (*LEAKY WAVE ANTENNA*)

TESIS  
QUE PARA OPTAR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
OMAR ALEJANDRO BUSTAMANTE PALACIOS

TUTOR:  
DR. ROBERTO VELASCO SEGURA, ICAT

CIUDAD DE MÉXICO, MAYO DE 2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

**Presidente:** DR. FELIPE ORDUÑA BUSTAMANTE

**Secretario:** DR. CALEB A. RASCÓN ESTEBANÉ

**1<sup>er</sup>, Vocal:** DR. ROBERTO VELASCO SEGURA

**2<sup>do</sup>, Vocal:** DR. EDUARDO ROMERO VIVAS

**3<sup>er</sup>, Vocal:** M. EN I. ANTONIO PÉREZ LÓPEZ

CIUDAD DE MÉXICO

**TUTOR DE TESIS:**

DR. ROBERTO VELASCO SEGURA

---

FIRMA



“Evidencia de hoy, imaginación  
de ayer.”

---

*William Blake*

A mi familia



# Agradecimientos

---

Este trabajo de tesis no hubiera sido posible sin el apoyo de mucha gente, incluyendo mi tutor, colegas, amigos y familia.

De manera particular, quiero agradecer a mi tutor el Dr. Roberto Velasco Segura por su apoyo, dedicación y valiosa dirección durante la realización de este trabajo. Gracias por la confianza depositada y la oportunidad de abordar el tema con mucha libertad. Quiero expresar un amplio agradecimiento al Dr. Eduardo Romero Vivas por la preciada orientación en cada etapa de la investigación, sus comentarios y asesorías me brindaron las herramientas necesarias para completar satisfactoriamente este trabajo. Gracias al Laboratorio de Acústica y Vibraciones del Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología, ICAT, por abrirme sus puertas durante mi programa de maestría. Gracias al Grupo de Investigación en Acústica y Procesamiento de Señales del Centro de Investigaciones Biológicas del Noroeste, S.C., CIB-NOR, La Paz, por recibirme durante la estancia de investigación en donde se abordaron temas relevantes sobre el trabajo aquí presentado. Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por apoyar el proyecto de investigación dentro del cuál se establecieron los objetivos para llevar a cabo este trabajo, mediante el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica PAPIIT TA100620. Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, a través de una beca de estudiante PNPC.

# Resumen

---

Estudios recientes en el campo de la localización de fuentes sonoras, han incorporado las antenas acústicas tipo guía de onda ranurada ALWA, las cuales fueron diseñadas originalmente para radiar energía altamente direccional con un sólo elemento activo. Además, debido a sus características de reciprocidad, se han adaptado también como sistemas receptores capaces de determinar la dirección de arribo de una señal sonora con un sólo micrófono. Esto último promete ventajas sobre los métodos de localización típicos basados en el uso de arreglos de micrófonos, tales como simplificación en la cadena de adquisición y procesamiento de datos, particularmente en la parte electrónica. La direccionalidad de una ALWA en ambos sentidos de operación (emisor o receptor), está en función de la frecuencia dentro de un rango de operación. Es por ello que estos sistemas también suelen ser conocidos como prismas acústicos o sistemas de escaneo de frecuencia. Se han reportado diversos diseños de ALWA, típicamente basados en estructuras periódicas que permiten obtener distintas posibilidades de resolución angular.

Con el fin de caracterizar las propiedades direccionales de las antenas acústicas tipo guía de onda ranurada ALWA, en este trabajo se realiza un estudio numérico de una ALWA basado en la solución de la ecuación de Helmholtz por el método de elemento finito, mediante la herramienta de código abierto FEniCS Project. El modelo bajo estudio, es una guía de onda en 1D con ranuras en simetría axial, diseñada para operar en aire, en modo emisor, radiando energía desde una dirección angular perpendicular (*broadside*), hasta una dirección angular positiva (*endfire*). Se presenta una descripción del método numérico implementado, así como la validación del código empleado mediante aproximaciones de elemento concentrado que modelan el tipo de estructuras utilizadas. Esto permite considerar la corrección de extremo debido a la terminación abierta de la cavidad que se forma en las ranuras de radiación, destacando las ventajas del método numérico en este tipo de evaluaciones. Adicionalmente, se presenta un estudio de diferentes diseños de ALWA con geometrías irregulares en donde el análisis teórico se vuelve complicado, pero con la motivación de conseguir diferentes perfiles de radiación con características que exhiban ventajas sobre los ya existentes. Los resultados de este trabajo resaltan la organización del código desarrollado que permite automatizar la exploración de múltiples parámetros geométricos, así como el análisis y procesamiento de los datos generados en cada simulación.

# Índice

---

<b>Lista de símbolos</b>	<b>XII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>3</b>
2.1. Guías de onda . . . . .	3
2.1.1. Modos de propagación . . . . .	4
2.1.2. Guía de onda cilíndrica . . . . .	4
2.1.3. Coeficientes de reflexión y transmisión. . . . .	6
2.2. Modelo acústico de elementos concentrados . . . . .	10
2.2.1. Analogías electroacústicas . . . . .	10
2.2.2. Impedancia acústica en la interfase dentro una guía de onda. . . . .	13
2.2.3. Circuito equivalente de un tubo corto con terminación abierta . . . . .	14
2.2.4. Circuito equivalente de un tubo corto con terminación cerrada . . . . .	14
2.2.5. Corrección de extremo . . . . .	15
2.2.6. Circuito equivalente de un tubo largo . . . . .	17
2.3. Ranura en un ducto cilíndrico . . . . .	17
2.4. Guía de onda con ranuras periódicas . . . . .	21
2.4.1. Efecto de pérdida por viscosidad . . . . .	24
2.4.2. Matriz de transmisión . . . . .	25
2.4.3. Relación de dispersión . . . . .	29
2.4.4. Impedancia de Bloch . . . . .	31
2.5. Antena acústica tipo guía de onda ranurada . . . . .	32
2.5.1. Principios fundamentales de una antena acústica tipo guía de onda ranurada ALWA . . . . .	32
<b>3. Método numérico</b>	<b>34</b>
3.1. Introducción a los métodos numéricos . . . . .	34
3.2. Método de elemento finito . . . . .	35
3.3. Implementación del método numérico . . . . .	37
<b>4. Diseño de la ALWA</b>	<b>39</b>
<b>5. Validación</b>	<b>42</b>
<b>6. Resultados</b>	<b>45</b>
6.1. Estudio de una celda unitaria . . . . .	45
6.2. Estudio de una ALWA de 20 celdas unitarias . . . . .	46
6.3. Parámetros de Bloch . . . . .	47
6.4. Resolución angular como función de la longitud de la ALWA . . . . .	50

6.5. Estudio con celdas de otras geometrías . . . . .	53
<b>7. Conclusiones</b>	<b>58</b>
<b>Apéndices</b>	<b>64</b>
<b>A. ALWA en modo receptor</b>	<b>64</b>

# Índice de figuras

---

1.	Sistema de coordenadas cilíndricas. . . . .	4
2.	Ejemplos de patrones nodales correspondientes a los modos $(m, n)$ de una guía de onda cilíndrica. . . . .	4
3.	Ducto cilíndrico semi infinito en la dirección positiva del eje $z$ . . . . .	5
4.	Guía de onda con interfase en un punto arbitrario. . . . .	6
5.	Modelo para obtención de los coeficientes de Reflexión y Transmisión de una interfase dentro de una guía de onda. . . . .	7
6.	Modelo para el cálculo de la impedancia acústica en un tubo de sección transversal $S$ , con interfase arbitraria ubicada en $z = l$ ó $\xi = 0$ . . . . .	13
7.	Modelo de un tubo corto con terminación abierta. (a) Esquema del tubo. (b) Circuito acústico concentrado correspondiente. . . . .	14
8.	Modelo de un tubo corto con terminación cerrada. (a) Esquema del tubo. (b) Circuito acústico concentrado correspondiente. . . . .	15
9.	Corrección de extremo de un tubo con terminación abierta, con pestaña. . .	16
10.	Corrección de extremo de un tubo con terminación abierta, sin pestaña. . .	16
11.	Modelo de propagación de ondas planas en un tubo largo. (a) Esquema del tubo. (b) Circuito acústico concentrado de secciones pequeñas del tubo. . . .	17
12.	Modelo de una guía de onda cilíndrica con una ranura en simetría axial. (a) Plano longitudinal de la guía. (b) Circuito equivalente. . . . .	18
13.	Transmisión y reflexión de una onda plana debido a la ramificación secundaria de una guía de onda. . . . .	19
14.	Circuito acústico concentrado de una ranura en un ducto de longitud $d$ . (a) Circuito completo. (b) Circuito simplificado. . . . .	21
15.	Circuito acústico concentrado de una ranura en un ducto de longitud $d$ , en términos de la impedancia y admitancia equivalentes. . . . .	21
16.	Circuito acústico concentrado de una ranura en un ducto de longitud $d$ , para frecuencias por arriba de la frecuencia de resonancia de $Y_{sh}$ . (a) Esquema del circuito tipo RH. (b) Filtro pasa bajas ideal del circuito RH. . . . .	23
17.	(a) Celda unitaria representada por una red de dos puertos. (b) Modelo de línea de transmisión equivalente de una guía de onda con $N$ celdas periódicas. . . . .	25
18.	Modelo de celda unitaria simétrica de una guía de onda con ranuras periódicas. (a) Plano longitudinal de la celda. (b) Circuito de impedancias y admitancias equivalente. . . . .	26
19.	Diagrama de dispersión de una guía de onda con ranuras periódicas, espaciadas una distancia $d$ . . . . .	30
20.	Antena acústica tipo guía de onda ranurada. (a) Esquema general. (b) Relación de constantes de propagación. . . . .	32
21.	Discretización de un resonador de Helmholtz para cómputo de Elemento Finito, en dos dimensiones, con base en elementos triangulares. . . . .	35

22.	Dominio de simulación en 2D, en donde se puede observar el incremento gradual de la propiedad absorbente en las fronteras izquierda, derecha y superior. El eje horizontal inferior corresponde al eje de simetría axial. . . . .	37
23.	Modelo de antena acústica tipo guía de onda ranurada propuesto en este trabajo. (a) Vista exterior. (b) Plano longitudinal en 2D. . . . .	40
24.	Modelo para validación de ranura axisimétrica. . . . .	42
25.	Gráficas de validación de una ranura. Los datos teóricos corresponden a una con $L' = 0.02$ m, y los datos numéricos (FEM), corresponden a una ranura con $L = 0.0175$ m. (a) Coeficientes de Reflexión y Transmisión. (b) Susceptancia o parte imaginaria de la admitancia de la ranura. . . . .	44
26.	Modelo para estudio de una celda unitaria de la ALWA. . . . .	46
27.	Posición de los micrófonos para llevar a cabo la caracterización angular de la radiación de la ALWA. Se incluye la referencia de posición de la estructura periódica. . . . .	47
28.	Caracterización de una ALWA en términos del análisis de una celda unitaria y la radiación de una ALWA de 20 celdas. (a) Diagrama de dispersión. (b) Respuesta angular. . . . .	48
29.	Magnitud de la presión acústica a lo largo de la estructura de una ALWA de 20 celdas para: (a) $f = 1850$ Hz, (b) $f = 2500$ Hz, (c) $f = 6350$ Hz y (d) $f = 8350$ Hz. . . . .	50
30.	Gráficas de resolución angular para una ALWA de: (a) 10 celdas, (b) 20 celdas y (c) 30 celdas. . . . .	51
31.	Perfiles de radiación de una ALWA para la frecuencia constante de 2500 Hz, contemplando diferentes longitudes de la antena: (a) 10 celdas. (b) 20 cedas. (c) 30 celdas. En cada gráfica se incluye una marca correspondiente a la posición de la fuente sonora, la dirección de propagación de la onda dentro de la guía de entrada y el tamaño de la estructura periódica de la ALWA, debajo de la zona de radiación principal. . . . .	52
32.	Modelos de geometrías exploradas. (a) Modelo simple, sin obstrucciones. (b) Iris. (c) Resonador de Helmholtz transversal a la guía de onda. (d) Doble cavidad con iris. (e) Doble cavidad con iris mas cerrados. (f) Cavidad elíptica y ancho de ranura no uniforme. (g) Cavidad triangular. . . . .	54
33.	Posición de los micrófonos para llevar a cabo la caracterización angular de la radiación de la ALWA para diferentes geometrías. . . . .	55
34.	Propagación dentro de la ALWA de geometría definida, para la frecuencia de 2600 Hz. (a) Magnitud de la presión a lo largo de la estructura de la antena. (b) Perfil de propagación de los resultados numéricos. En ambos casos, la presión está normalizada con respecto a la amplitud de la onda incidente en la guía de entrada. . . . .	55
35.	Propagación dentro de la ALWA que incluye resonadores de Helmholtz en cada celda, para la frecuencia de 2600 Hz. (a) Magnitud de la presión a lo largo de estructura de la antena. (b) Perfil de propagación de los resultados numéricos. En ambos casos, la presión está normalizada con respecto a la amplitud de la onda incidente en la guía de entrada. . . . .	56

36.	Clasificación de los diferentes modelos de geometrías exploradas, en términos de la respuesta angular. (a) Análisis mediante la matriz de transmisión. (b) Análisis de radiación fuera de la antena. . . . .	57
37.	Resolución angular de la ALWA con 20 celdas de geometría G (cavidades triangulares). . . . .	57
38.	Magnitud de la presión acústica a lo largo de la estructura de una ALWA con modelo de celdas G, para la frecuencia de 1000 Hz. . . . .	57

## Índice de tablas

---

1.	Parámetros geométricos de la ALWA. . . . .	40
2.	Valores teóricos de los elementos acústicos del circuito equivalente del modelo de ALWA propuesta (ver Figura 14.a). . . . .	41

# Lista de símbolos

---

$C_{ac}$  compliancia acústica

$C_{ra}$  compliancia de la ranura

$C_{wg}$  compliancia de la guía de onda

$M_{ac}$  masa acústica

$M_{ra}$  masa de la ranura

$M_{wg}$  masa de la guía de onda

$P$  amplitud de presión compleja

$Q$  amplitud de volumen compleja

$R$  coeficiente de reflexión

$S$  área de sección transversal de una guía de onda cilíndrica

$T$  coeficiente de transmisión

$U$  amplitud de velocidad de partícula compleja

$Z_c$  impedancia característica

$Z_{ac}$  impedancia acústica

$\alpha$  factor de atenuación

$\beta$  factor de fase

$\gamma_B$  constante de propagación de Bloch

$\lambda$  longitud de onda

$\omega$  frecuencia angular

$\rho_0$  densidad del medio

$c_0$  velocidad de propagación de la onda en campo libre

$c_{ph}$  velocidad de fase

$f$  frecuencia de vibración de la onda

$k_0$  número de onda en campo libre

# Introducción

---

La localización de fuentes sonoras, se refiere al problema de estimar la dirección de arribo de una señal sonora a un punto de referencia. Este tema ha sido investigado desde hace muchas décadas debido a las importantes aplicaciones que tiene en múltiples áreas, por ejemplo: vehículos de exploración autónomos, sistemas de seguridad, audición robótica, imagenología médica, mapeo de radiación sonora, que ha demostrado ser muy útil para reducir emisiones de ruido en automóviles o máquinas industriales, hasta aplicaciones subacuáticas con el uso del sonar (navegación por sonido), entre otras.

Típicamente, la localización de fuentes sonoras suele llevarse a cabo mediante el uso de arreglos de micrófonos (o hidrófonos) ensamblados en diferentes configuraciones geométricas, y posteriormente, la estimación de la dirección de arribo de la señal de interés, requiere de canales de adquisición de datos simultáneos que demandan consumo de energía, así como un importante costo computacional [1].

Una alternativa conveniente que ha prometido ventajas sobre el uso de arreglos para realizar este tipo de operaciones, son las antenas tipo guía de onda ranurada (*leaky-wave antenna*, LWA) [2]. Se trata de un dispositivo diseñado originalmente para radiar energía con alta direccionalidad, y que fue introducido en el campo de las telecomunicaciones en 1940 (caso electromagnético), como una antena compacta capaz de generar patrones de radiación direccional que sólo podían conseguirse anteriormente con arreglos de múltiples antenas [3].

El funcionamiento de una LWA se basa en el fenómeno de radiación que ocurre a partir de la fuga de energía que puede ser por medio de una abertura uniforme a lo largo de una guía de onda, o por ranuras a intervalos periódicos formando celdas unitarias, y la direccionalidad de la radiación dependerá de la frecuencia de la onda dentro de la guía, así como de la longitud de la antena, cuyo ángulo, en principio puede ir desde el caso perpendicular denominado *broadside*, hasta una dirección angular positiva denominada *endfire* [4].

Aprovechando las similitudes entre el caso electromagnético y el acústico, Bongard et al., 2010 [5], introdujo la primera antena acústica tipo guía de onda ranurada, denominada en este trabajo como ALWA (*acoustic leaky-wave antenna*). Dicha antena incluye obstrucciones de membranas en cada una de las celdas unitarias para formar un metamaterial acústico basado en la teoría de líneas de transmisión. De esta manera, se obtiene un modelo que permite radiar energía sonora también hacia una dirección angular negativa conocida como *backfire* [5].

Se han reportado evaluaciones numéricas y experimentales que demuestran las ventajas de este tipo de antenas en modo emisor sobre el uso de arreglos lineales de múltiples elementos, como por ejemplo Naify et al., 2016 [6] y Bustamante et al., 2019 [7].

Aprovechando las características de reciprocidad acústica de la ALWA, este sistema puede utilizarse también como receptor. En tal caso, la antena reforzará selectivamente un rango de frecuencias dependiendo del ángulo de arribo, convirtiéndose en un dispositivo capaz de proporcionar información sobre la posición de una fuente sonora de amplio espectro con tan sólo un micrófono [8].

Con el fin de caracterizar las propiedades direccionales de las ALWAs, en este trabajo se realiza un estudio numérico de una ALWA para aire, en modo emisor, fundado en la solución de la ecuación de Helmholtz. El estudio se llevó a cabo mediante una solución numérica basada en el método de elemento finito (*finite element method*, FEM), usando la herramienta de código abierto FEniCS Project. Se propuso un diseño que consta de una guía de onda cilíndrica con ranuras en simetría axial, sin obstrucciones, que radia desde *broadside* a *endfire*. Se describe el método numérico implementado y se presentan resultados que validan el código de simulación empleado mediante aproximaciones teóricas de elemento concentrado.

Adicionalmente, se propusieron nuevos diseños de celda unitaria con geometrías complejas en donde las aproximaciones teóricas se vuelven complicadas pero con el objetivo de conseguir diferentes perfiles de radiación e incluso posibles ángulos de radiación negativos, sin el uso de membranas. Se presentan resultados preliminares que resaltan la organización del código desarrollado para implementar el estudio numérico, permitiendo automatizar la exploración de múltiples parámetros geométricos, así como el análisis y procesamiento de los datos generados en cada simulación.

# Marco teórico

---

En este capítulo se presentan los elementos teóricos para obtener la aproximación analítica del comportamiento de una antena acústica tipo guía de onda ranurada, ALWA.

Se utilizará la siguiente convención, resaltando la dependencia armónica con el tiempo, la cual se asumirá durante todo el trabajo:

$$p(x, y, z, t) = \text{Re}\{P(x, y, z)e^{-j\omega t}\}, \quad (1)$$

en donde  $P$  es la amplitud de presión compleja,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $t$  es la coordenada temporal, y  $j = \sqrt{-1}$ .

## 2.1. Guías de onda

Una guía de onda acústica, es una estructura diseñada para transportar ondas acústicas de un punto a otro, restringiendo la propagación hacia una dirección en particular con un mínimo de pérdida de energía, típicamente debido a la reflexión total en las fronteras que confinan la onda acústica [10]. Algunos ejemplos de guía de onda acústica utilizan paredes rígidas para confinar las ondas, como es el caso de los tubos de impedancias, tubos de Kundt, o los ductos de aire que se utilizan en algunos instrumentos musicales de viento. Existen también otros tipos de guías de onda con diferente frontera, como la que se forma entre la superficie y fondo de un cuerpo de agua, favoreciendo la propagación de ondas acústicas en este medio, o la propagación de ondas en sólidos como barras metálicas, placas y membranas. En este trabajo se estudiarán las guías de onda cilíndricas o ductos de sección transversal circular.

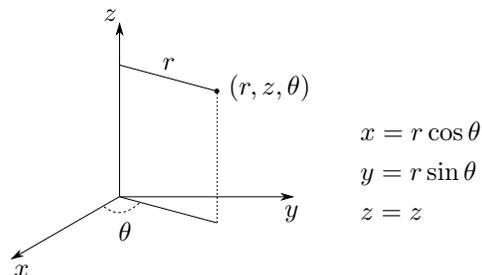
### 2.1.1. Modos de propagación

Los modos de propagación en una guía de onda, indican el patrón de comportamiento nodal de la onda dentro de la guía. La manera de obtener estos modos de propagación es mediante la solución a la ecuación de onda de la guía, la cual estará en función de su geometría. Además, cada modo estará determinado por las condiciones de frontera y la longitud de onda de la señal guiada.

Existe un modo que siempre se propaga en una guía de onda y es conocido como modo fundamental, mientras que a los modos por arriba de este se les conoce como modos de orden superior. Cada modo de orden superior tiene una frecuencia de corte a partir de la cual se puede propagar.

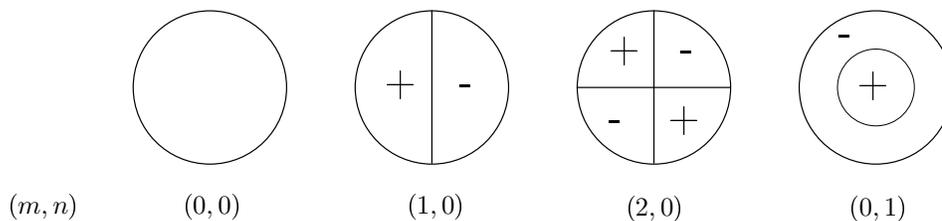
### 2.1.2. Guía de onda cilíndrica

El análisis modal de un ducto de paredes rígidas y sección transversal circular, se simplifica utilizando un sistema de coordenadas cilíndrico (Figura 1). La solución de este tipo de sistemas típicamente se expresa mediante funciones de Bessel, que son correspondientes a la geometría en la dirección radial del ducto.



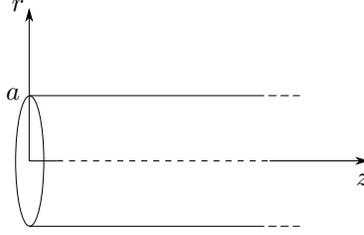
**Figura 1:** Sistema de coordenadas cilíndricas.

Todos los modos de propagación estarán identificados mediante el par ordenado  $(m, n \in \mathbb{Z})$ , en donde  $m$  determina el número de planos nodales y  $n$  determina el número de cilindros nodales paralelos al eje de propagación, como se ilustra en la Figura 2 [11].



**Figura 2:** Ejemplos de patrones nodales correspondientes a los modos  $(m, n)$  de una guía de onda cilíndrica.

De acuerdo con Blackstock, 2001 [12], la presión acústica del modo  $(m, n)$  en un ducto cilíndrico semi infinito y de radio  $a$  como el de la Figura 3, es la siguiente:



**Figura 3:** Ducto cilíndrico semi infinito en la dirección positiva del eje  $z$ .

$$p_{mn} = J_m \left( \frac{\alpha'_{mn} r}{a} \right) [A_{mn} \cos(m\theta) + B_{mn} \sin(m\theta)] e^{j(z\beta_{mn} - \omega t)}, \quad (2)$$

en donde  $J_m$  es la función ordinaria de Bessel,  $\alpha'_{mn}$  representa el cero  $n$ -ésimo de  $J'_m$ ,  $A_{mn}$  y  $B_{mn}$  son los coeficientes modales determinados por la fuente de excitación; además,  $e^{j(z\beta_{mn} - \omega t)}$  indica que se trata de una onda viajera que se propaga en la dirección positiva de  $z$ , y  $\beta_{mn}$  es el número de onda en esa dirección de  $z$ , el cuál se calcula como:

$$\beta_{mn} = \sqrt{(\omega/c_0)^2 - (\alpha'_{mn}/a)^2}, \quad (3)$$

y la velocidad de fase, denotada en este trabajo como  $c_{ph}$ :

$$c_{mn}^{ph} = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{c_0}{\sqrt{(1 - (\alpha'_{mn} c_0 / 2\pi f a)^2)}}, \quad (4)$$

en donde  $c_0$  es la velocidad del sonido y  $f$  es la frecuencia de oscilación de la onda.

De la expresión (4), se puede observar que la velocidad de fase se calcula para cada modo en particular, y la frecuencia de corte de cada modo es aquella para la cuál la velocidad de fase se vuelve imaginaria, dando lugar a ondas evanescentes (ondas que decaen exponencialmente). Esa frecuencia de corte se calcula como:

$$f_{mn}^c = \frac{\alpha'_{mn} c_0}{2\pi a} \quad \forall m, n > 0. \quad (5)$$

Se puede observar que la expresión (5), funciona únicamente para modos de orden superior, y el primero de ellos, se propaga cuando  $(m = 1, n = 1)$ .

A partir de la expresión (2), que denota la solución de la guía de onda cilíndrica, se puede observar que el modo fundamental ocurre cuando  $(m = 0, n = 0)$ , y es un caso especial que sucede en las guías de onda en forma de ductos con paredes rígidas. En ese modo, la distribución de presión es uniforme en el plano perpendicular al eje de propagación (ver Figura 2), por lo que también se le conoce como modo plano [11]. Entre sus características, no tiene frecuencia de corte debido a que  $\alpha'_{00} = 0$  y, por lo tanto, la velocidad de fase

calculada en en la expresión (4), es igual a la velocidad de la onda en campo libre,  $c_{00}^{ph} = c_0$ .

Por otro lado, en el régimen de propagación de modos de orden superior, cada modo tiene una velocidad de fase distinta, y a esto se le conoce como dispersión modal. La dispersión modal es un fenómeno típico que ocurre en una guía de onda que permite la propagación de modos superiores [12].

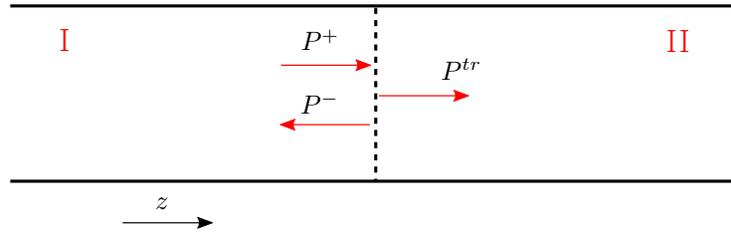
### 2.1.3. Coeficientes de reflexión y transmisión.

Cuando una onda plana que se desplaza en la dirección de  $z$  positiva dentro de una guía de onda ( $P^+$ ), incide sobre una interfase ubicada en un punto arbitrario de la guía, parte de la onda incidente se refleja ( $P^-$ ), y parte de la onda se transmite de la región I a la región II ( $P^{tr}$ ), como se muestra en la Figura 4 [12]. La presión de cada onda se puede denotar como:

$$\text{Onda incidente: } P^+ = P^+ e^{jkz} \quad (6)$$

$$\text{Onda reflejada: } P^- = P^- e^{-jkz} \quad (7)$$

$$\text{Onda transmitida: } P^{tr} = P^{tr} e^{jkz} \quad (8)$$



**Figura 4:** Guía de onda con interfase en un punto arbitrario.

Dicha interfase podría representar un orificio, una ramificación secundaria, un ensanchamiento, una constricción en la guía, una membrana infinitamente delgada, u otro tipo de obstrucción. Una manera de caracterizarla, es calculando los coeficientes de reflexión y transmisión, definidos como:

$$R = \frac{P^-}{P^+} \quad (9)$$

y

$$T = \frac{P^{tr}}{P^+}. \quad (10)$$

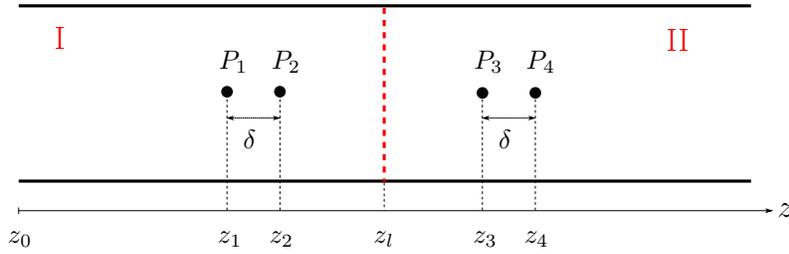
Cabe mencionar que para que las expresiones (9) y (10) sean válidas, se deben cumplir dos condiciones; la primera es que las presiones acústicas en ambos lados de la interfase sean iguales, es decir:

$$P^+ + P^- = P^{tr}. \quad (11)$$

La segunda condición requiere que la componente normal de la velocidad de partícula, denotada mediante la letra  $U$ , sea continua a través de la interfase, como lo indica la expresión (12):

$$U^+ + U^- = U^{tr}. \quad (12)$$

El método implementado en esta sección para obtener los coeficientes de reflexión y transmisión, es un método comúnmente utilizado en la caracterización de materiales acústicos mediante tubos de impedancia [13]. Esta técnica requiere medir la presión compleja en dos puntos conocidos antes y después de la interfase, para poder descomponer matemáticamente las expresiones de las ondas incidentes y reflejadas en cada región de la guía, basados en el esquema de la Figura 5.



**Figura 5:** Modelo para obtención de los coeficientes de Reflexión y Transmisión de una interfase dentro de una guía de onda.

En una guía de onda como la de la Figura 5, con un pistón colocado en  $z_0$ , la presión compleja en cualquier punto de la región I de la guía, en un tiempo  $t = 0$ , estará dada por la superposición de la onda que viaja en la dirección positiva de  $z$ , y la onda reflejada que viaja en sentido opuesto, como se muestra en la expresión (13):

$$\begin{aligned} P(z) &= P^+ + P^- \\ &= Ae^{jkz} + Be^{-jkz}, \end{aligned} \quad (13)$$

en donde  $A$  representa la amplitud de la onda incidente, y  $B$  representa la amplitud de la onda reflejada.

Para encontrar los valores de  $A$  y  $B$ , como primer paso se evalúan las presiones complejas en los puntos  $P_1$  y  $P_2$  de la Figura 5:

$$P_1 = Ae^{jkz_1} + Be^{-jkz_1}. \quad (14)$$

$$P_2 = Ae^{jkz_2} + Be^{-jkz_2}. \quad (15)$$

Sustituyendo  $z_2 = z_1 + \delta$  en la ecuación (15):

$$P_2 = Ae^{jk(z_1+\delta)} + Be^{-jk(z_1+\delta)}. \quad (16)$$

Reacomodando la expresión (16):

$$P_2 = Ae^{jkz_1}e^{jk\delta} + Be^{-jkz_1}e^{-jk\delta}. \quad (17)$$

Despejando  $Be^{-jkz_1}$  de la expresión (14):

$$Be^{-jkz_1} = P_1 - Ae^{jkz_1}. \quad (18)$$

Sustituyendo la expresión (18) en la expresión (17):

$$\begin{aligned} P_2 &= Ae^{jkz_1}e^{jk\delta} + [P_1 - Ae^{jkz_1}]e^{-jk\delta} \\ &= Ae^{jkz_1}e^{jk\delta} + P_1e^{-jk\delta} - Ae^{jkz_1}e^{-jk\delta}. \end{aligned} \quad (19)$$

Factorizando  $Ae^{jkz_1}$  de la expresión (19):

$$P_2 = Ae^{jkz_1}[e^{jk\delta} - e^{-jk\delta}] + P_1e^{-jk\delta}. \quad (20)$$

Despejando  $A$  de la expresión (20):

$$A = \frac{P_2 - P_1e^{-jk\delta}}{e^{jk\delta} - e^{-jk\delta}} e^{-jkz_1}. \quad (21)$$

Luego, multiplicando la expresión (21) por  $\frac{-e^{jk\delta}}{-e^{jk\delta}}$ , para simplificar el resultado:

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{-e^{jk\delta}}{-e^{jk\delta}} \right] \left[ \frac{P_2 - P_1e^{-jk\delta}}{e^{jk\delta} - e^{-jk\delta}} \right] e^{-jkz_1} \\ &= \frac{-P_2e^{jk\delta} + P_1}{-e^{2jk\delta} + 1} e^{-jkz_1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Finalmente, la amplitud de la onda incidente  $A$ , queda:

$$A = \frac{P_1 - P_2e^{jk\delta}}{1 - e^{2jk\delta}} e^{-jkz_1}. \quad (23)$$

Ahora para encontrar  $B$ , se debe despejar  $Ae^{jkz_1}$  de la expresión (14):

$$Ae^{jkz_1} = P_1 - Be^{-jkz_1}. \quad (24)$$

Sustituyendo (24) en (17):

$$P_2 = [P_1 - Be^{-jkz_1}]e^{jk\delta} + Be^{-jkz_1}e^{-jk\delta}. \quad (25)$$

Factorizando  $Be^{-jkz_1}$  de la expresión (25):

$$P_2 = Be^{-jkz_1}[e^{-jk\delta} - e^{jk\delta}] + P_1e^{jk\delta}. \quad (26)$$

Despejando  $B$  de la expresión (26):

$$B = \frac{P_2 - P_1e^{jk\delta}}{e^{-jk\delta} - e^{jk\delta}} e^{jkz_1}. \quad (27)$$

Simplificando la expresión (27), la amplitud compleja de la onda reflejada  $B$ , queda:

$$B = \frac{P_1 - P_2e^{-jk\delta}}{1 - e^{-2jk\delta}} e^{jkz_1}. \quad (28)$$

Respecto a la región II de la guía de onda de la Figura 5, la amplitud de presión en cualquier punto en un tiempo  $t = 0$ , estará dada por:

$$P'(z) = A'e^{jkz} + B'e^{-jkz}, \quad (29)$$

en donde  $A'$  representa la amplitud de la onda transmitida de la región I a la región II, y  $B'$  representa la amplitud de la onda reflejada por cualquier interfase u obstáculo en algún punto de  $z$  lejano. En caso de que se trate de una guía de onda que no permita reflexión,  $B' = 0$ , por ejemplo una guía de longitud infinita.

De acuerdo al desarrollo implementado para encontrar los valores de  $A$  y  $B$  presentado en las ecuaciones (23) y (28), con un procedimiento análogo, se obtiene:

$$A' = \frac{P_3 - P_4e^{jk\delta}}{1 - e^{2jk\delta}} e^{-jkz_3}, \quad (30)$$

y

$$B' = \frac{P_3 - P_4e^{-jk\delta}}{1 - e^{-2jk\delta}} e^{jkz_3}. \quad (31)$$

Por lo tanto, una vez que se han separado las amplitudes presentes en cada región, se pueden calcular los coeficientes de reflexión y transmisión para la interfase en  $z = z_l$ , de acuerdo a las ecuaciones (9) y (10):

$$R = \frac{B'e^{-jkz_l}}{Ae^{jkz_l}} = \frac{B}{A}e^{-2jkz_l}, \quad (32)$$

y

$$T = \frac{A'e^{jkz_l}}{Ae^{jkz_l}} = \frac{A'}{A}. \quad (33)$$

## 2.2. Modelo acústico de elementos concentrados

El análisis de un sistema acústico se simplifica si la longitud de onda en el fluido es mucho mayor que las dimensiones del sistema, permitiendo asumir que la presión acústica es uniforme en el volumen de interés. Por lo tanto, dicho elemento acústico puede ser modelado en términos de un elemento concentrado ideal, utilizando equivalentes eléctricos conocidos como analogías electroacústicas. Al sistema acústico cuyas dimensiones cumplen esta condición o límite de longitud de onda, se le conoce como sistema acústico concentrado, y a su estudio se le denota análisis de elementos acústicos concentrados [14].

### 2.2.1. Analogías electroacústicas

El uso de analogías electroacústicas consiste en aplicar la teoría de redes eléctricas para resolver un problema acústico utilizando parámetros equivalentes, en donde el voltaje o diferencia de potencial  $e$  corresponde a la presión acústica  $p$ , y la corriente eléctrica  $i$  es análoga a la velocidad de volumen  $q$ , que fluye a través de una superficie  $S$ . Esta última representación es comúnmente utilizada en problemas relacionados a guías de onda, en donde  $S$  corresponde al área de sección transversal de la guía, por lo que  $q = uS$ , siendo  $u$  la velocidad de partícula [12, 14].

Comúnmente, en este tipo de análisis, se toma la impedancia eléctrica  $Z_E = e/i$ , como análogo de la impedancia acústica  $Z_{ac}$ , la cual se calcula como la razón entre la presión acústica y la velocidad de volumen [12]:

$$Z_{ac} = \frac{p}{q} = \frac{p}{uS}. \quad (34)$$

Por otra parte, la **inertancia acústica** se define como una propiedad del sistema asociada a la inercia del flujo de cierto volumen de aire tal que en presencia de una presión acústica, es capaz de desplazarse sin compresión apreciable y es análoga a la masa mecánica, por lo que también es conocida como masa acústica. De un modo semejante, la **compliance acústica** se define como una propiedad elástica de cierto volumen de aire tal que en presencia de una presión acústica, es capaz de comprimirse o expandirse sin desplazamiento apreciable, y es análogo a un resorte mecánico.

Para entender los análogos eléctricos de la inertancia y compliance acústica, conviene definir la impedancia mecánica  $Z_{mec}$ , y equivale a la razón entre la fuerza  $F_m$  que actúa en

un área determinada, y la velocidad de partícula en la misma área:

$$Z_{mec} = -\frac{F_m}{u}, \quad (35)$$

en donde el signo negativo se estableció como convención en este trabajo.

La fuerza está asociada a la masa mecánica  $M$  mediante la segunda ley de Newton:

$$F_m = M \frac{du}{dt} = -j\omega M u, \quad (36)$$

con  $u(z, t) = U e^{-j\omega t}$ .

Por lo tanto, la impedancia mecánica queda:

$$Z_{mec} = -\frac{(-j\omega M u)}{u} = j\omega M. \quad (37)$$

Por otro lado, existe una relación entre la presión y la fuerza, ya que la presión es la magnitud de la fuerza que actúa sobre una superficie ( $p = F_m/S$ ).

A partir de las ecuaciones (34), (35) y (37), se puede definir la impedancia acústica en términos de la impedancia mecánica:

$$Z_{ac} = \frac{p}{uS} = \frac{Z_{mec} u/S}{uS} = \frac{j\omega M}{S^2} = j\omega M_{ac}, \quad (38)$$

en donde  $M_{ac} = \frac{M}{S^2}$ , corresponde a la masa o inercia acústica.

La expresión (38) puede relacionarse con la impedancia eléctrica  $Z_E = j\omega L_E$ . Por lo tanto, se observa que la inercia acústica  $M_{ac}$ , es análoga a la inductancia eléctrica  $L_E$  [12].

Para el caso de la compliancia acústica, como ya se mencionó, es una propiedad del sistema que se comporta como un resorte y para su análisis, se utilizarán conceptos de un sistema mecánico. La constante de rigidez mecánica de un resorte depende implícitamente del módulo de Young del material, y se puede expresar como:

$$k_m = \frac{1}{C_m}, \quad (39)$$

en donde  $C_m$  es la compliancia mecánica.

Según la ley de Hooke que describe el comportamiento dinámico del resorte, cuando se le aplica una fuerza  $F_s$  a un resorte, el desplazamiento  $z$  que sufre, es directamente proporcional

a la fuerza aplicada:

$$F_s = -k_m z. \quad (40)$$

Si expresamos el desplazamiento en términos de la velocidad, tomando en cuenta que el desplazamiento o vector de posición corresponde a la integral de la velocidad:

$$F_s = -k_m \int u \, dt = -k_m \frac{u}{-j\omega}. \quad (41)$$

De la ecuación de impedancia mecánica (35) se puede deducir que  $F_s = pS$ ; por lo tanto, en términos de impedancia acústica:

$$Z_{ac} = \frac{p}{uS} = \frac{F_s/S}{uS} = \frac{1}{uS^2} \frac{k_m u}{j\omega} = \frac{k_m}{j\omega S^2}. \quad (42)$$

Definiendo la constante de rigidez acústica como  $k_{ac} = \frac{k_m}{S^2}$ , la ecuación (42) queda:

$$Z_{ac} = \frac{k_{ac}}{j\omega} = \frac{1}{j\omega C_{ac}}, \quad (43)$$

en donde  $C_{ac} = \frac{1}{k_{ac}}$  corresponde a la compliancia acústica.

La expresión (43) puede relacionarse con la impedancia eléctrica  $Z_e = 1/j\omega C_E$ ; por lo tanto, se observa que la compliancia acústica  $C_{ac}$ , es análoga a la capacitancia eléctrica  $C_E$  [12].

La **resistencia acústica**, es una medida de la pérdida de energía acústica por fuerzas viscosas entre las partículas de fluido, especialmente por la presencia de paredes rígidas. En este caso, se tiene que:

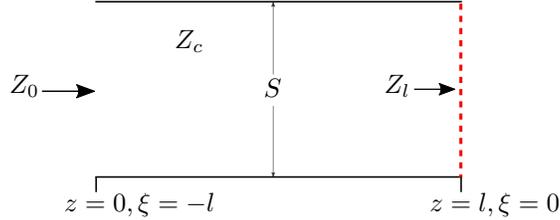
$$p(t) = \nu u(t), \quad (44)$$

en donde  $\nu$  es el coeficiente de fricción viscosa, que depende del coeficiente de viscosidad  $\eta$  y del espesor de la capa del fluido. Se puede observar que la expresión (44), es equivalente a la ley de Ohm:  $v(t) = Ri(t)$ ; es decir, la resistencia acústica es equivalente a la resistencia eléctrica.

La pérdida por viscosidad, juega un rol importante al caracterizar la propagación de ondas sonoras, especialmente en ductos, aunque debido a la dificultad de su análisis, suele ser un término despreciado o considerado de manera aproximada [15].

### 2.2.2. Impedancia acústica en la interfase dentro una guía de onda.

A partir de las ondas incidente y reflejada dentro de un tubo con una interfase arbitraria, se pueden calcular tanto la impedancia acústica en la entrada del tubo  $Z_0$ , como la impedancia acústica en la interfase  $Z_l$  (Figura 6).



**Figura 6:** Modelo para el cálculo de la impedancia acústica en un tubo de sección transversal  $S$ , con interfase arbitraria ubicada en  $z = l$  ó  $\xi = 0$ .

Por comodidad, para simplificar términos al momento de evaluar la impedancia en la interfase, la presión compleja dentro del tubo se escribirá de la forma:

$$P = Ae^{jk(\xi+l)} + Be^{-jk(\xi+l)}, \quad (45)$$

en donde  $\xi + l = z$ .

Luego, la velocidad de volumen  $Q$ , puede expresarse como:

$$Q = \frac{1}{Z_c} [Ae^{jk(\xi+l)} - Be^{-jk(\xi+l)}], \quad (46)$$

donde  $Z_c$  es conocida como la impedancia característica dentro del ducto:

$$Z_c = \frac{\rho_0 c_0}{S}, \quad (47)$$

$\rho_0$  es la densidad del medio y  $S$  es el área de sección transversal dentro de la guía de onda (Figura 6).

La impedancia  $Z_l$ , de la interfase en  $\xi = 0$ , se puede obtener evaluando la presión y la velocidad de volumen en dicho punto:

$$Z_L = \frac{P(\xi = 0)}{Q(\xi = 0)} = Z_c \frac{Ae^{jkl} + Be^{-jkl}}{Ae^{jkl} - Be^{-jkl}}. \quad (48)$$

Así mismo, es posible calcular la impedancia de entrada del tubo  $Z_0$  en  $\xi = -l$ :

$$Z_0 = \frac{P(\xi = -l)}{Q(\xi = -l)} = Z_c \frac{A + B}{A - B}. \quad (49)$$

Despejando cualquiera de las amplitudes  $A$  ó  $B$  de la expresión (49) y sustituyéndola en la expresión (48), después de reducir el álgebra, se puede obtener la impedancia de entrada del tubo  $Z_0$  en términos de la impedancia de la interfase arbitraria  $Z_l$  y la impedancia característica  $Z_c$ :

$$Z_0 = Z_c \frac{Z_l + jZ_c \tan(kl)}{Z_c + jZ_l \tan(kl)}. \quad (50)$$

### 2.2.3. Circuito equivalente de un tubo corto con terminación abierta

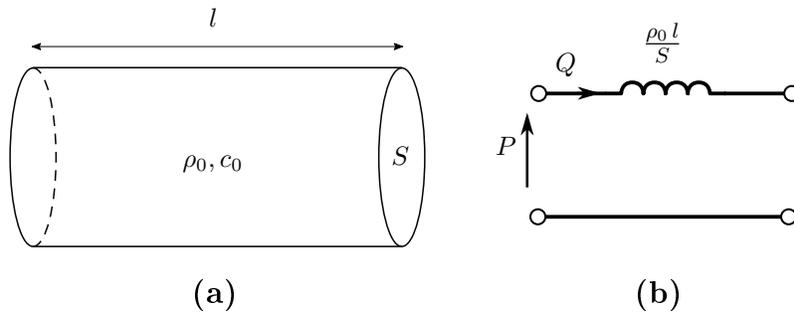
En un tubo cuya longitud es pequeña comparada con la longitud de onda ( $l \ll \lambda$ ), y terminación abierta ( $Z_l = 0$ ), a partir de la expresión (50), la impedancia acústica de entrada se puede reducir a:

$$Z_0 = jZ_c \tan(kl) \approx jZ_c kl = j\omega \frac{\rho_0 l}{S}. \quad (51)$$

De acuerdo al desarrollo para encontrar la inercia en términos de la impedancia acústica en la Sección 2.2.1, el resultado de la expresión (51) sugiere que ante la presencia de una presión acústica, el volumen de aire confinado en un tubo corto con terminación abierta, se comporta como una inercia acústica:

$$M_{ac} = \frac{\rho_0 l}{S}, \quad (52)$$

es decir, que para baja frecuencia, en su análogo eléctrico, el circuito equivalente es el de una inductancia (Figura 7) [16].



**Figura 7:** Modelo de un tubo corto con terminación abierta. (a) Esquema del tubo. (b) Circuito acústico concentrado correspondiente.

### 2.2.4. Circuito equivalente de un tubo corto con terminación cerrada

En un tubo cuya longitud es pequeña comparada con la longitud de onda ( $l \ll \lambda$ ), y terminación cerrada ( $Z_l \rightarrow \infty$ ), a partir de la expresión (50), la impedancia acústica de

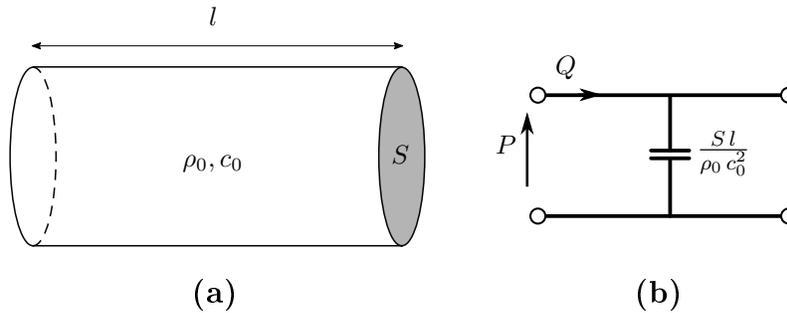
entrada puede reducirse a:

$$Z_0 = jZ_c \cot(kl) \approx -j \frac{Z_c}{kl} = -j \frac{1}{\omega \left[ \frac{Sl}{\rho_0 c_0^2} \right]}. \quad (53)$$

De acuerdo al desarrollo para encontrar la compliancia en términos de la impedancia acústica en la Sección 2.2.1, el resultado de la expresión (53) sugiere que en un tubo corto con terminación cerrada, la presión acústica genera que el volumen de aire confinado se comprima y expanda comportándose como un resorte mecánico, a lo que se le conoce como compliancia acústica:

$$C_{ac} = \frac{Sl}{\rho_0 c_0^2}, \quad (54)$$

es decir, que para baja frecuencia, en su análogo eléctrico, el circuito equivalente es el de un capacitor (Figura 8) [16].



**Figura 8:** Modelo de un tubo corto con terminación cerrada. (a) Esquema del tubo. (b) Circuito acústico concentrado correspondiente.

### 2.2.5. Corrección de extremo

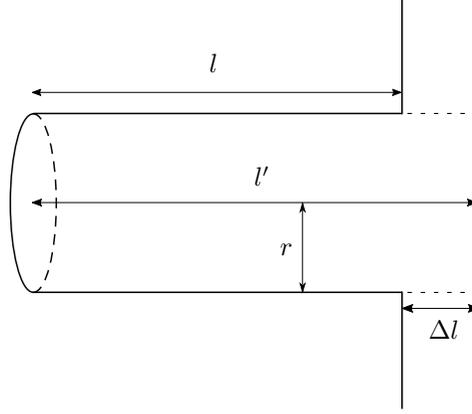
Un fenómeno particular ocurre en el comportamiento de la masa acústica de un tubo con terminación abierta en cualquiera de sus extremos. Las partículas de aire que se encuentran fuera del tubo en la región inmediata al extremo abierto, no se dispersan instantáneamente de su configuración dentro del tubo, por lo que esa región al final del tubo actúa como una pequeña extensión del mismo. A esta extensión se le conoce como corrección de extremo ( $\Delta l$ ), y a la longitud del tubo que contempla dicha corrección se le conoce como longitud efectiva  $l' = l + \Delta l$ , siendo  $l$  la longitud física.

El cálculo de la corrección de extremo dependerá de si el extremo abierto tiene pestaña (*flanged*), Figura 9; o si está libre, Figura 10. Si el extremo abierto del tubo tiene pestaña y la longitud de la onda guiada es suficientemente grande con respecto al radio del tubo ( $r \ll \lambda$ ), la corrección de extremo se puede aproximar como [14]:

$$\Delta l = \frac{8r}{3\pi} \approx 0.85r. \quad (55)$$

Por lo tanto, la masa acústica del tubo quedaría:

$$M_{ac} = \frac{\rho_0(l + 0.85r)}{S}. \quad (56)$$



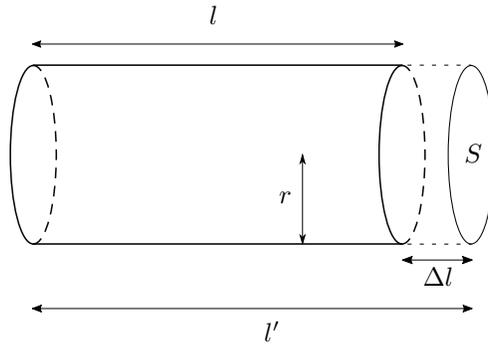
**Figura 9:** Corrección de extremo de un tubo con terminación abierta, con pestaña.

Si el extremo abierto del tubo está libre o sin pestaña, y la longitud de la onda guiada es suficientemente grande con respecto al radio del tubo ( $r \ll \lambda$ ), la corrección de extremo se puede aproximar como [14]:

$$\Delta l = \frac{2r}{\pi} \approx 0.64r. \quad (57)$$

Por lo tanto, la masa acústica del tubo quedaría:

$$M_{ac} = \frac{\rho_0(l + 0.64r)}{S}. \quad (58)$$

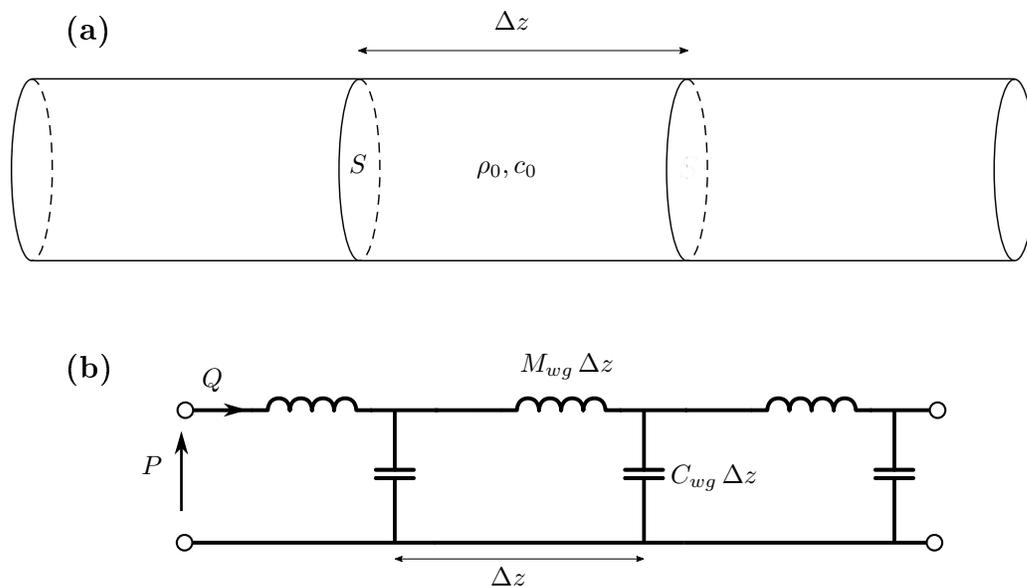


**Figura 10:** Corrección de extremo de un tubo con terminación abierta, sin pestaña.

Las expresiones para obtener la longitud efectiva aquí presentadas, aplican exclusivamente para tubos cilíndricos. No es trivial obtener expresiones correspondientes para otras geometrías [5]. Este punto resulta importante mas adelante.

### 2.2.6. Circuito equivalente de un tubo largo

De acuerdo a la Sección 2.1.2 de este capítulo, un tubo largo se considera como una guía de onda, ya que es capaz de confinar la ondas acústicas dentro de éste. Así mismo, se mencionó que las ondas planas se pueden propagar dentro de una guía de onda cilíndrica. Específicamente, en este modo de propagación fundamental, el circuito que modela la propagación acústica en el aire y que está basado en la teoría de líneas de transmisión, se puede adaptar para describir la propagación acústica en la guía de onda. Es decir, la guía de onda se puede modelar como una red eléctrica de inertancias conectadas en serie (inductores eléctricos), y compliancias conectadas en paralelo (capacitores eléctricos), como se ilustra en la Figura 11 [17]. Los valores de inercancia y compliancia se calculan mediante las ecuaciones (52) y (54), para secciones pequeñas del tubo ( $\Delta z \ll \lambda$ ).



**Figura 11:** Modelo de propagación de ondas planas en un tubo largo. (a) Esquema del tubo. (b) Circuito acústico concentrado de secciones pequeñas del tubo.

En la teoría de líneas de transmisión, al tipo de configuración de la Figura 11.b, se le conoce como circuito RH (*Right-Handed*), debido al comportamiento de sus elementos [18].

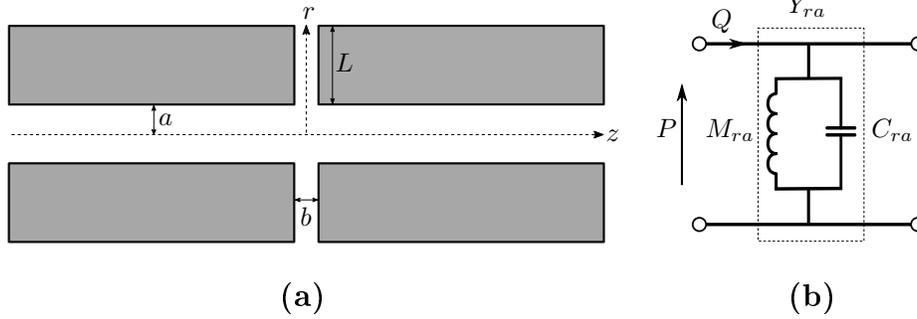
Después del desarrollo de esta sección, se puede observar de manera general que un ducto puede tener una parte inercial y otra elástica.

### 2.3. Ranura en un ducto cilíndrico

En esta sección se estudiará el efecto de una ranura axisimétrica en un ducto cilíndrico, y su circuito equivalente.

Un orificio en la pared de una guía de onda, es el equivalente a conectar un tubo de muy corta longitud y extremos abiertos, a la guía de onda principal en forma de una ramificación secundaria. La longitud de dicha ramificación estará determinada por el grosor de la pared de la guía de onda principal. Por lo tanto, de acuerdo a la Sección 2.2.3 de este capítulo, se puede anticipar que el orificio se comportará como una masa acústica conectada en paralelo al circuito equivalente de la guía.

Si el orificio es un corte transversal en una guía de onda cilíndrica (conocido como ranura axisimétrica), el resultado geométrico es el de un canal radial de longitud  $L$  y ancho  $b$ , conectado a la guía de onda principal, como el de la Figura 12.a. Dicho modelo es el que se utilizará en la construcción de la antena ALWA en este trabajo, facilitando el estudio numérico mediante un sistema en dos dimensiones. De aquí en adelante, a la ranura axisimétrica se le llamará simplemente ranura.



**Figura 12:** Modelo de una guía de onda cilíndrica con una ranura en simetría axial. (a) Plano longitudinal de la guía. (b) Circuito equivalente.

Dado que la ranura axisimétrica es un canal radial, la manera de estudiarla para caracterizar su impedancia de entrada, es mediante las ecuaciones de líneas de transmisión radiales, diseñadas originalmente para ondas electromagnéticas. En dichas ecuaciones, la constante de propagación y la impedancia característica, dependen de la coordenada radial  $r$  y, por lo tanto, las soluciones se expresan en términos de funciones de Bessel [19]. El análisis adaptado para ondas acústicas, se encuentra detallado en [5], y se concluye que en el régimen de baja frecuencia, la impedancia de entrada de la ranura puede aproximarse como una masa acústica:

$$Z_{ra} = j\omega M_{ra}, \quad (59)$$

con

$$M_{ra} = \frac{\rho_0}{2\pi b} \ln \left( 1 + \frac{L}{a} \right), \quad (60)$$

en ambas expresiones, el subíndice  $ra$  denota ranura.

Esta aproximación es consistente con el comportamiento de cualquier orificio en una guía de onda, explicado al principio de esta sección. Sin embargo, de acuerdo con Bongard, et al., 2010 [5], la expresión (59) únicamente funciona para ranuras muy angostas comparadas con la longitud de onda de la señal guiada ( $b \ll \lambda$ ). Para frecuencias altas, el modelo puede mejorarse agregando una compliancia en paralelo con la masa, formándose una admitancia

( $Y_{ra}$ ) en el circuito equivalente de la ranura o canal radial (Figura 12.b):

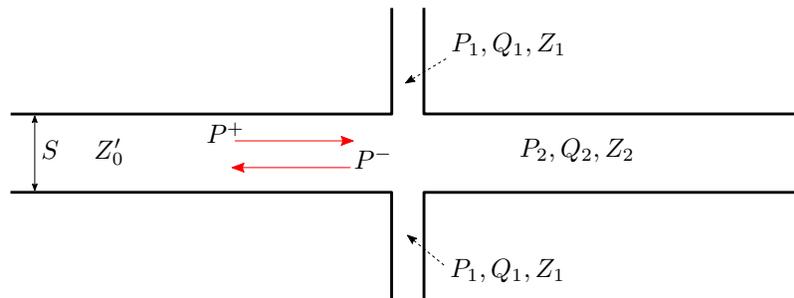
$$Y_{ra} = j \left( \omega C_{ra} - \frac{1}{\omega M_{ra}} \right), \quad (61)$$

quedando la impedancia de entrada de la ranura como  $Z_{ra} = 1/Y_{ra}$ .

El cálculo de la compliancia  $C_{ra}$  no es trivial por el tipo de sistema, y una forma de obtenerlo es de manera indirecta, a partir de la frecuencia de resonancia de la admitancia [6]; ese procedimiento se desarrollará al final de esta sección.

Como la ranura es una guía de onda radial abierta en sus extremos, el comportamiento inercial del volumen de aire confinado que describe la ecuación (60), sugiere tomar en cuenta la corrección de extremo de las paredes de la ranura,  $\Delta L$ . A diferencia de las aproximaciones desarrolladas para guías de onda uniformes, en las expresiones (55) y (57), en el caso de la guía de onda radial no se tiene una aproximación analítica de corrección de extremo, por lo que se utilizará la herramienta de simulación numérica para obtener dicha corrección y, con ello, la longitud efectiva de la pared de la ranura.

Una vez que se definió el circuito equivalente de la ranura en un ducto, una manera de caracterizar su comportamiento sobre un rango de frecuencias, es calculando los coeficientes de reflexión y transmisión en la interfase entre el ducto y la ranura, método desarrollado en la Sección 2.1.3, que requiere la medición de la presión acústica antes y después de la ranura (técnica de los dos micrófonos). Cuando no se tienen dichos datos de presión acústica, existe una alternativa para calcular los coeficientes  $R$  y  $T$ , basada en el problema de ramificación secundaria en un ducto. Para ello, conviene apoyarse en la Figura 13, la cuál ayuda a establecer las condiciones de continuidad de presión y velocidad de volumen en la ranura, que a continuación se describen.



**Figura 13:** Transmisión y reflexión de una onda plana debido a la ramificación secundaria de una guía de onda.

Mientras la longitud de onda sea muy grande comparada con las dimensiones del sistema, la continuidad de presión en la unión de la ranura requiere que:

$$P^+ + P^- = P_1 = P_2, \quad (62)$$

y la continuidad de velocidad de volumen requiere que:

$$Q^+ + Q^- = Q_1 + Q_2. \quad (63)$$

Dividiendo (63) entre (62), resulta:

$$\frac{Q^+ + Q^-}{P^+ + P^-} = \frac{Q_1}{Q_1} + \frac{Q_2}{Q_2}, \quad (64)$$

lo cuál se puede escribir también como:

$$\frac{1}{Z'_0} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (65)$$

La expresión (65) sugiere que la admitancia acústica  $1/Z'_0$ , asociada a las ondas incidente y reflejada antes de la ranura, es igual a la suma de las admitancias acústicas  $1/Z_1$  y  $1/Z_2$ .

De acuerdo a la expresión (59),  $Z_1 = Z_{ra}$ ; además, la ranura está conectada a una ducto con sección transversal uniforme  $S$ , por lo que se puede establecer que  $Z'_0 = Z_2 = \rho_0 c/S$ , recordando que  $S$  es el área de sección transversal. Con lo anterior, se puede encontrar el coeficiente de reflexión a partir de las expresiones (64) y (65), quedando como:

$$R' = \frac{P^-}{P^+} = -\frac{\frac{\rho_0 c_0}{2S}}{\frac{\rho_0 c_0}{2S} + Z_{ra}}, \quad (66)$$

Por último, la expresión (62) muestra que es posible obtener el coeficiente de transmisión a partir del coeficiente de reflexión, es decir,  $P_2/P^+ = 1 + P^-/P^+$ , en donde  $P_2$  equivale a  $P^{tr}$ :

$$T' = \frac{P^{tr}}{P^+} = \frac{Z_{ra}}{\frac{\rho_0 c_0}{2S} + Z_{ra}}. \quad (67)$$

El desarrollo completo para obtener las expresiones (66) y (67), se puede encontrar por ejemplo en [14].

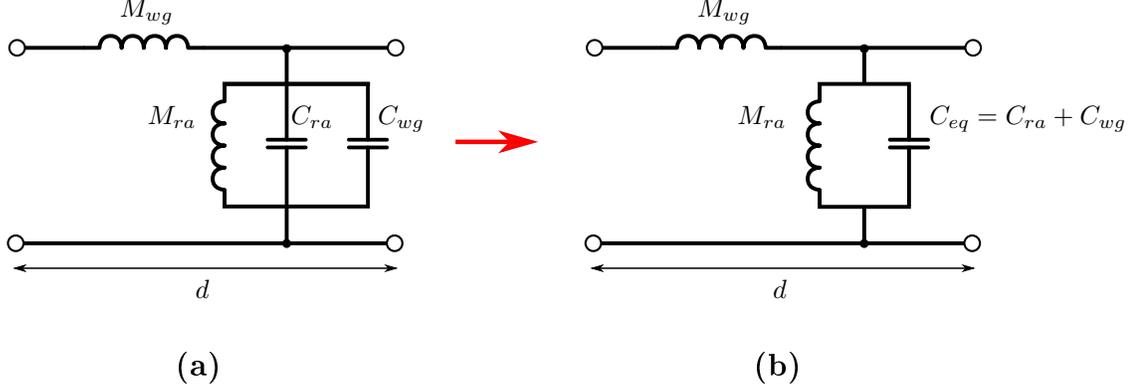
Si en el modelo de la Figura 12, se considera una sección pequeña de ducto antes y después de la ranura, el circuito equivalente estará conformado por el circuito que representa a la ranura (Figura 12.b), y el circuito que representa a la sección del ducto antes y después de la ranura (Figura 11.b). El resultado se muestra en la Figura 14, con:

$$M_{wg} = \frac{\rho_0}{S} d, \quad (68)$$

y

$$C_{wg} = \frac{S}{\rho_0 c_0^2} d, \quad (69)$$

en donde "wg" denota guía de onda (*waveguide*).



**Figura 14:** Circuito acústico concentrado de una ranura en un ducto de longitud  $d$ . (a) Circuito completo. (b) Circuito simplificado.

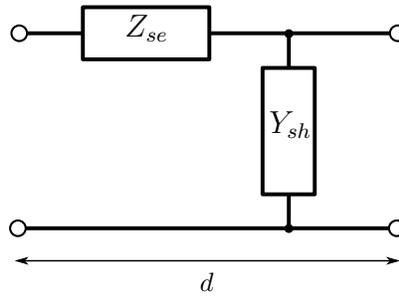
Reemplazando los elementos del circuito de la Figura 14.b por su impedancia y admitancia equivalente, se tiene el circuito de la Figura 15, con:

$$Z_{se} = j\omega M_{wg}, \quad (70)$$

y

$$Y_{sh} = j \left( \omega C_{eq} - \frac{1}{\omega M_{ra}} \right), \quad (71)$$

en donde "se" denota serie, "sh" denota paralelo (*shunt*), y "eq" denota equivalente.



**Figura 15:** Circuito acústico concentrado de una ranura en un ducto de longitud  $d$ , en términos de la impedancia y admitancia equivalentes.

## 2.4. Guía de onda con ranuras periódicas

Extendiendo el modelo de la Figura 12.a a un arreglo de ranuras periódicas espaciadas una distancia  $d$  en una guía de onda, de acuerdo con Caloz et al., 2005 [18], si  $d$  es muy

pequeña con respecto a la longitud de onda de la señal guiada (a lo que se le conoce como condición de homogeneidad:  $d \ll \lambda$ ), es posible dividir la guía en celdas unitarias, y cada celda contendrá una ranura y la sección de ducto que conecta a la siguiente ranura. De esta forma, cada celda se puede representar mediante un circuito equivalente como el de la Figura 14.b.

Un manera general de estudiar el circuito de la Figura 15, es analizándolo como una línea de transmisión y después de aplicar las leyes de corrientes y voltajes de Kirchhoff, es posible obtener las ecuaciones diferenciales parciales lineales que describen el voltaje y la corriente a lo largo de la línea de transmisión, típicamente conocidas como ecuaciones del telegrafista [18]. En términos acústicos, dichas ecuaciones son las siguientes:

$$\frac{dP(z)}{dz} = -Z_{se} Q(z), \quad (72)$$

$$\frac{dQ(z)}{dz} = -Y_{sh} P(z). \quad (73)$$

Si se combinan las expresiones (72) y (73), se pueden obtener las ecuaciones de onda para  $P$  y  $Q$ :

$$\frac{d^2P(z)}{dz^2} - \gamma^2 P(z) = 0, \quad (74)$$

$$\frac{d^2Q(z)}{dz^2} - \gamma^2 Q(z) = 0, \quad (75)$$

en donde  $\gamma$  es la constante compleja de propagación y está dada por:

$$\gamma = \sqrt{Z_{se}Y_{sh}} = \alpha + j\beta, \quad (76)$$

$\alpha$  es el coeficiente de pérdida o atenuación, y  $\beta$  representa el factor de fase. Para una línea de transmisión sin pérdidas ( $\alpha = 0$ ), la constante de propagación es puramente imaginaria, es decir,  $\gamma = j\beta$ .

La constante  $\gamma$  está asociada a la dirección de propagación de una onda viajera mediante las soluciones:

$$P(z) = P^+ + P^- = Ae^{j\gamma z} + Be^{-j\gamma z}, \quad (77)$$

$$Q(z) = Q^+ + Q^- = \frac{j\gamma}{-Z_{se}}(Ae^{j\gamma z} - Be^{-j\gamma z}). \quad (78)$$

La segunda igualdad de la expresión (78), se obtiene solucionando la ecuación (72) con la derivada de la expresión (77).

La velocidad a la que se propaga una onda en una línea de transmisión como la de la

Figura 14.b, es conocida como velocidad de fase, y se calcula como:

$$c_{ph} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (79)$$

Una observación mas detallada sobre expresión (71), correspondiente a la admitancia  $Y_{sh}$  del circuito de la Figura 14.b, es que existe una frecuencia en la que  $\omega C_{eq} = 1/\omega M_{ra}$ , implicando que  $Y_{sh} = 0$ . A esa frecuencia se le conoce como la frecuencia de resonancia de la admitancia, y se calcula como:

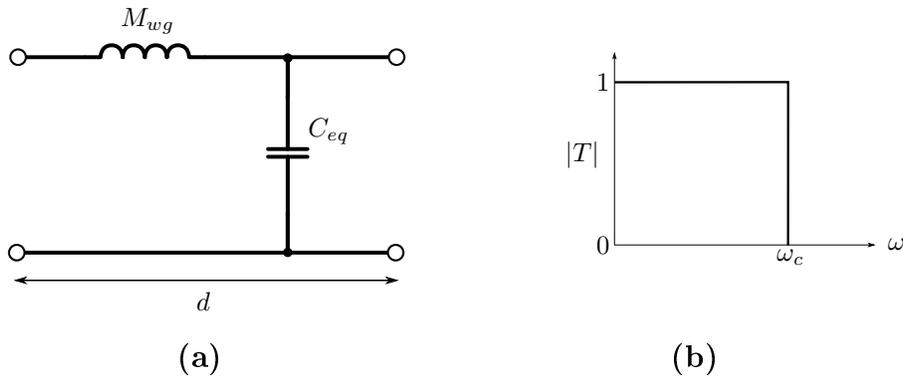
$$\omega_{sh} = \frac{1}{\sqrt{M_{ra} C_{eq}}}. \quad (80)$$

A la frecuencia de resonancia  $\omega_{sh}$ , la constante de propagación  $\gamma = \sqrt{Z_{se} Y_{sh}} = 0$  y, por lo tanto, el factor de fase  $\beta = 0$ , implicando una velocidad de fase nula y, por ende, no hay propagación en la guía o línea de transmisión.

En el siguiente análisis, se considera qué sucede en las frecuencias por debajo y arriba de la frecuencia de resonancia de  $Y_{sh}$ , considerando la expresiones (70) y (71).

Para frecuencias por debajo de la frecuencia de resonancia ( $\omega < \omega_{sh}$ ), mientras más pequeña sea la frecuencia,  $|\omega M_{wg}|, |\omega C_{ra}| \rightarrow 0$ , y el circuito de la Figura 14.b se reduce a un circuito conformado únicamente por la masa  $M_{ra}$ , lo cual no tiene mucha relevancia ya que  $Z_{se} = 0$ , y tampoco hay propagación en la guía.

Para frecuencias arriba de la frecuencia de resonancia ( $\omega > \omega_{sh}$ ), mientras más alta sea la frecuencia,  $|1/\omega M_{ra}| \rightarrow 0$ , quedando un circuito conformado únicamente por la masa  $M_{wg}$ , y por la complicancia  $C_{eq}$ , una configuración de circuito tipo RH [18], como se muestra en la Figura 16.



**Figura 16:** Circuito acústico concentrado de una ranura en un ducto de longitud  $d$ , para frecuencias por arriba de la frecuencia de resonancia de  $Y_{sh}$ . (a) Esquema del circuito tipo RH. (b) Filtro pasa bajas ideal del circuito RH.

Del circuito de la Figura 16.a, se puede extraer lo siguiente:

$$\gamma = j\beta = \sqrt{Z_{se}Y_{sh}} = j\omega\sqrt{M_{wg}C_{eq}}, \quad (81)$$

$$\beta = \omega\sqrt{M_{wg}C_{eq}} > 0, \quad (82)$$

$$c_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{M_{wg}C_{eq}}} > 0, \quad (83)$$

Así mismo, el circuito tipo RH de la Figura 16.a, es por naturaleza un filtro pasa bajas (Figura 16.b), y de acuerdo con Caloz et al., 2005 [18], su frecuencia de corte se calcula como:

$$\omega_c = 2 \omega_{RH}, \quad (84)$$

en donde

$$\omega_{RH} = \frac{1}{\sqrt{M_{wg}C_{eq}}}. \quad (85)$$

Por lo tanto, desde el punto de vista de líneas de transmisión, un ducto con ranuras periódicas, es un sistema que permite la propagación de ondas con un ancho de banda limitado por  $\omega_{sh}$ , en donde el factor de fase  $\beta_{\omega_{sh}} = 0$ , y una frecuencia de corte superior  $\omega_c$ . A partir de este momento, a la frecuencia  $\omega_{sh}$ , se le denominará  $\omega_0 = 2\pi f_0$ .

Finalmente, se observa que es posible obtener el valor de la compliancia de la ranura  $C_{ra}$ , fijando la frecuencia de resonancia  $f_0$  y despejando  $C_{ra}$  de la ecuación (80) [6]:

$$C_{eq} = \frac{1}{\omega_0^2 M_{ra}}, \quad (86)$$

$$C_{ra} + C_{wg} = \frac{1}{\omega_0^2 M_{ra}}, \quad (87)$$

$$C_{ra} = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 M_{ra}} - C_{wg}. \quad (88)$$

#### 2.4.1. Efecto de pérdida por viscosidad

Una onda que se propaga en un canal acústico como el de la ranura de la Figura 12.a, con  $b, L \ll \lambda$ , está sujeta a pérdidas por viscosidad. Una manera de tomar en cuenta esta pérdida, sería agregando una resistencia  $R_{ra}$  en serie con la masa acústica de la Figura 12.b, y de acuerdo con Bongard et al., 2010 [5], se puede aproximar como:

$$R_{ra} = \frac{6\eta}{\pi b^3} \ln \left( 1 + \frac{L}{a} \right). \quad (89)$$

Debido a que el circuito conformado por la resistencia  $R_{ra}$  y la masa  $M_{ra}$  es un circuito resonante, se puede introducir el factor de calidad:

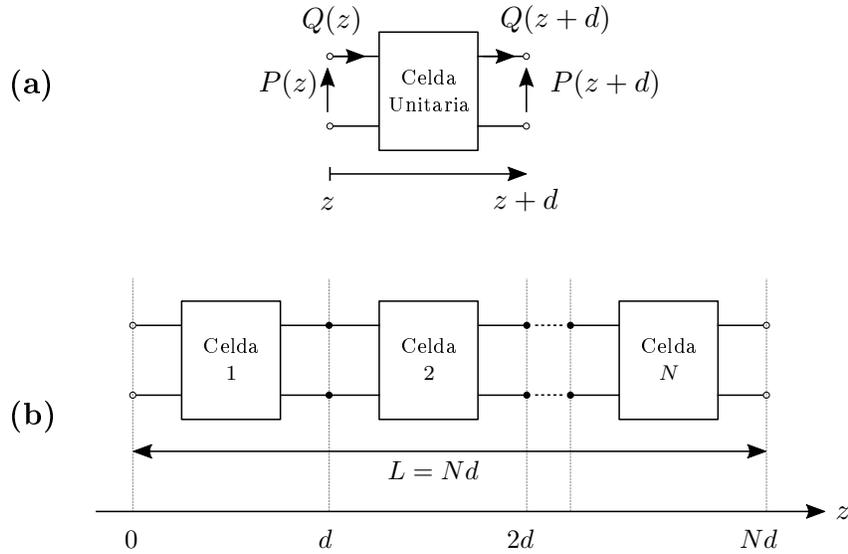
$$Q' = \frac{\omega M_{ra}}{R_{ra}} = \frac{\omega \rho_0 b^2}{10\eta}. \quad (90)$$

El factor de calidad se calcula para una frecuencia en específico y permite comparar la magnitud de la parte reactiva  $\omega M_{ra}$  con respecto a la parte resistiva  $R_{ra}$ .

EL cálculo de la pérdida por viscosidad para el tamaño de ranura propuesto, se incluye en el Capítulo 4; sin embargo, el interés principal de este trabajo se centra en estudiar los corrimientos de fase que ocurren en el sistema propuesto, por lo que se despreciará la pérdida por viscosidad.

### 2.4.2. Matriz de transmisión

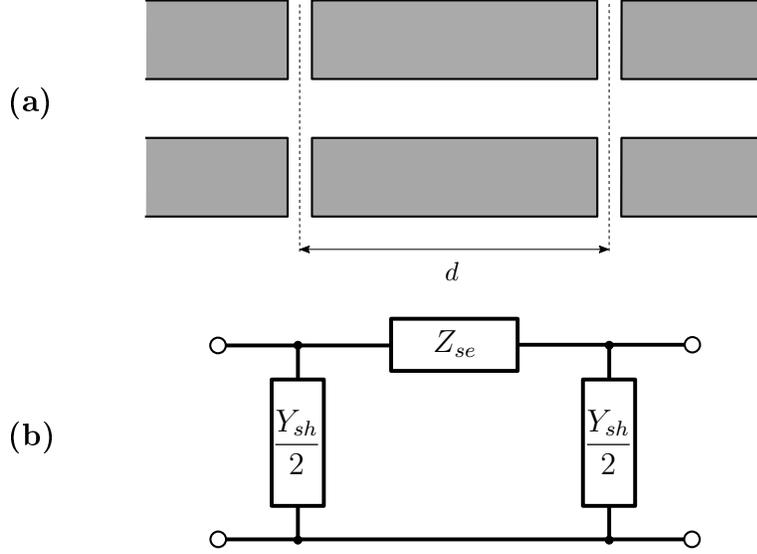
Una alternativa típica para analizar este tipo de sistemas, es decir, una guía de onda con  $N$  ranuras periódicas dividida en celdas unitarias, parte de modelar cada celda como una red de dos puertos, ilustrado en la Figura 17.



**Figura 17:** (a) Celda unitaria representada por una red de dos puertos. (b) Modelo de línea de transmisión equivalente de una guía de onda con  $N$  celdas periódicas.

Luego, es posible obtener los parámetros de transmisión a lo largo de la red de  $N$  celdas periódicas, mediante un método conocido como la matriz de transmisión o matriz  $[\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}]$  [20]. Antes de explicar el método, conviene establecer la convención en la que se tomarán en cuenta los elementos de la celda para llevar a cabo el análisis. En este trabajo, cada celda unitaria

de la guía de onda con ranuras periódicas, se va a ubicar entre la mitad de dos ranuras consecutivas con el objetivo de que cada una tenga la misma admitancia a la entrada y la salida, a lo que se le conoce como condición de simetría y se muestra en la Figura 18.



**Figura 18:** Modelo de celda unitaria simétrica de una guía de onda con ranuras periódicas. (a) Plano longitudinal de la celda. (b) Circuito de impedancias y admitancias equivalente.

La matriz de transmisión, es un método de análisis que permite caracterizar la función de transferencia de una red de dos puertos, relacionando presión sonora  $P$  y la velocidad de volumen  $Q$ , en la entrada y salida de la red o circuito acústico equivalente del sistema bajo estudio, de acuerdo a las ecuaciones generales [18]:

$$P_{in} = \bar{A} P_{out} + \bar{B} Q_{out}, \quad (91)$$

y

$$Q_{in} = \bar{C} P_{out} + \bar{D} Q_{out}. \quad (92)$$

Luego, la matriz de transmisión queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} P_{in} \\ Q_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{out} \\ Q_{out} \end{bmatrix}, \quad (93)$$

$$\begin{bmatrix} P_{out} \\ Q_{out} \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C}} \begin{bmatrix} \bar{D} & -\bar{B} \\ -\bar{C} & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{in} \\ Q_{in} \end{bmatrix}, \quad (94)$$

en donde los coeficientes de la matriz (también llamados parámetros de transmisión), se calculan como:

$$\bar{A} \equiv \frac{P_{in}}{P_{out}} \quad \text{con} \quad Q_{out} = 0, \quad (95)$$

$$\bar{B} \equiv \frac{P_{in}}{Q_{out}} \quad \text{con} \quad P_{out} = 0, \quad (96)$$

$$\bar{C} \equiv \frac{Q_{in}}{P_{out}} \quad \text{con} \quad Q_{out} = 0, \quad (97)$$

$$\bar{D} \equiv \frac{Q_{in}}{Q_{out}} \quad \text{con} \quad P_{out} = 0. \quad (98)$$

Para una red de  $N$  celdas conectadas en cascada como la de la Figura 17.b, se define la  $k$ -ésima celda como:

$$\begin{bmatrix} P_{in} \\ Q_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_k & \bar{b}_k \\ \bar{c}_k & \bar{d}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{out} \\ Q_{out} \end{bmatrix}, \quad (99)$$

y la matriz de transmisión de la red es igual al producto de las matrices de transmisión de cada celda individual:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_\tau & \bar{B}_\tau \\ \bar{C}_\tau & \bar{D}_\tau \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{a}_k & \bar{b}_k \\ \bar{c}_k & \bar{d}_k \end{bmatrix}, \quad (100)$$

en donde el subíndice  $\tau$  denota el número total de las celdas.

En el caso donde las celdas son iguales,  $[\bar{a}_k \bar{b}_k \bar{c}_k \bar{d}_k] = [\bar{A} \bar{B} \bar{C} \bar{D}]$  y la expresión (100) puede reducirse a:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_\tau & \bar{B}_\tau \\ \bar{C}_\tau & \bar{D}_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}^N, \quad (101)$$

es decir, la función de transferencia de la red de  $N$  celdas, puede obtenerse analizando una sola celda [18].

Cada impedancia y admitancia del circuito de la Figura 18.b, se puede analizar por separado como una red de dos puertos y mediante las expresiones (95) a (98), es posible obtener sus parámetros de transmisión y, con ello, la matriz de cada elemento. Luego, los parámetros de transmisión de la celda completa, se obtienen multiplicando las matrices individuales de cada elemento de la celda, como se muestra a continuación [20]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y/2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{YZ}{2} & Z \\ Y \left(1 + \frac{YZ}{4}\right) & 1 + \frac{YZ}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (102)$$

El análisis para obtener las matrices individuales de cada elemento de la Figura 18.b mostradas en la primera igualdad de la expresión (102), ha sido ampliamente desarrollado

en la teoría de redes de dos puertos, ya que se trata de configuraciones típicas de circuitos eléctricos y por tal motivo, no se incluye en este trabajo.

En la segunda igualdad de la expresión (102), se puede observar que  $\bar{A} = \bar{D}$  y esto es debido a que la celda es simétrica. Por otro lado, si se calcula el determinante de la matriz de la expresión (102), se obtiene  $\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = 1$ , y esto indica que la celda es recíproca. En el método de análisis mediante la matriz de transmisión, las condiciones de simetría y reciprocidad, resultan útiles en la simplificación algebraica, como se mostrará más adelante.

Por otro lado, para recuperar la matriz de transmisión de una celda mediante los datos del campo acústico, se puede partir del método de medición de los dos micrófonos, descrito en la Sección 2.1.3. Una vez que se obtienen las amplitudes de las ondas incidente, reflejada y transmitida, se debe evaluar la presión y velocidad de volumen en la entrada y salida de la celda:

$$P_0 = A + B, \quad (103)$$

$$Q_0 = \frac{A - B}{\rho_0 c_0}, \quad (104)$$

$$P_d = A' e^{jkd} + B' e^{-jkd}, \quad (105)$$

$$Q_d = \frac{A' e^{jkd} - B' e^{-jkd}}{\rho_0 c_0}, \quad (106)$$

en donde  $A'$  y  $B'$  corresponden a las amplitudes descritas en la expresiones (30) y (31).

Luego, de acuerdo con Song et al., 2000 [13], si la celda es simétrica y recíproca, los coeficientes de la matriz de transmisión se pueden calcular mediante:

$$\bar{A} = \frac{P_d Q_d + P_0 Q_0}{P_0 Q_d + P_d Q_0} \quad (107)$$

$$\bar{B} = \frac{P_0^2 - P_d^2}{P_0 Q_d + P_d Q_0} \quad (108)$$

$$\bar{C} = \frac{Q_0^2 - Q_d^2}{P_0 Q_d + P_d Q_0} \quad (109)$$

$$\bar{D} = \frac{P_d Q_d + P_0 Q_0}{P_0 Q_d + P_d Q_0} \quad (110)$$

### 2.4.3. Relación de dispersión

Cuando una onda se propaga a través de una estructura periódica como la de la Figura 17, el cambio del campo acústico de una celda a la siguiente, está dada por una constante  $c = e^{\gamma_B d}$ , en donde  $\gamma_B$  es conocida como la constante de propagación de Bloch, y se define como  $\gamma_B(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$ ;  $\beta(\omega)$  describe el corrimiento de fase que ocurre para cada frecuencia en el proceso de propagación a lo largo de la celda de longitud  $d$ , y  $\alpha(\omega)$  es el coeficiente de atenuación que sufre la onda [18]. La constante de propagación de Bloch, esencialmente equivale a la constante compleja definida en la expresión (76).

Lo anterior nos permite describir en términos de la presión y velocidad de volumen, el cambio que experimenta la onda que se propaga entre una determinada celda  $n$ , y la celda consecutiva  $n + 1$  [16]:

$$P_{n+1} = e^{-\gamma_B d} P_n, \quad (111)$$

$$Q_{n+1} = e^{-\gamma_B d} Q_n. \quad (112)$$

Si se comparan las expresiones (111) y (112) con la matriz de transmisión, se puede encontrar la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{bmatrix} = e^{\gamma_B d} \begin{bmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (113)$$

La expresión (113), indica que se puede obtener la constante de propagación de Bloch en términos de los coeficientes de la matriz de transmisión, resolviendo el problema de valores propios de la matriz:

$$\left( \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{\gamma_B d} & 0 \\ 0 & e^{\gamma_B d} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (114)$$

sistema que debe de tener un determinante igual a cero:

$$\det \begin{bmatrix} \bar{A} - e^{\gamma_B d} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} - e^{\gamma_B d} \end{bmatrix} = 0, \quad (115)$$

$$\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} + e^{2\gamma_B d} - e^{\gamma_B d}(\bar{A} + \bar{D}) = 0 \quad (116)$$

Recordando que  $\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = 1$ , debido a que corresponde al determinante de la matriz de transmisión, la expresión (116) puede simplificarse a:

$$\cosh(\gamma_B d) = \frac{\bar{A} + \bar{D}}{2}. \quad (117)$$

Por otro lado, si la condición de celdas simétricas implica que  $\bar{A} = \bar{D}$ , la expresión (117) se reduce a:

$$\cosh(\gamma_B d) = \bar{A}. \quad (118)$$

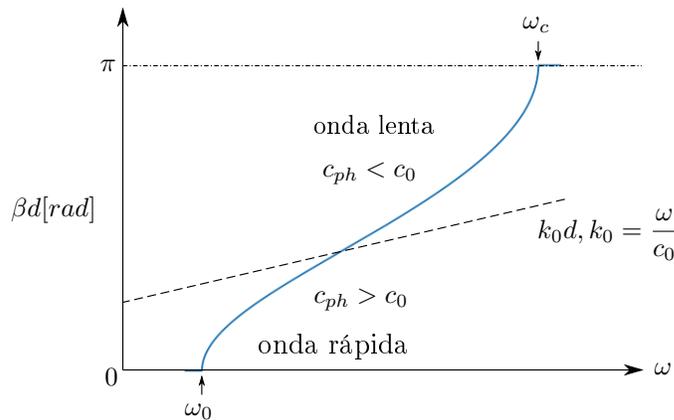
Finalmente, se puede obtener la constante de propagación de Bloch:

$$\gamma_B = \frac{\text{arcosh}(\bar{A})}{d}, \quad (119)$$

y el factor de fase:

$$\beta = \text{Im}(\gamma_B). \quad (120)$$

La Figura 19, muestra el diagrama de dispersión típico de una estructura dispersiva como la de la guía de onda con ranuras periódicas. La curva de dispersión, indica el corrimiento de fase de la onda, medido entre dos puntos separados una distancia  $d$ , que es la longitud de la celda unitaria. Una consecuencia de esto, es que a cada frecuencia le corresponde una velocidad de fase distinta ( $c_{ph} = \omega/\beta$ ). Este tipo de dispersión, es análoga a la dispersión cromática que ocurre bajo ciertas condiciones en el campo de la óptica. Además, en la gráfica de la Figura 19, se incluye número de onda en campo libre  $k_0$ , también multiplicado por la longitud de la celda, y sirve de referencia para identificar las dos regiones del diagrama de dispersión, cuando  $\beta d < k_0 d$ , la velocidad de fase de la onda en el ducto es mayor que la velocidad del sonido en campo libre, y a esta región se le conoce como región de onda rápida; y cuando  $\beta d > k_0 d$ , la velocidad de fase de la onda en el ducto es menor que la velocidad del sonido en campo libre, y a esta región se le conoce como región de onda lenta [18]. La onda que se propaga en la estructura periódica, es una onda guiada conocida como onda de Bloch, y en la Figura 19, se puede observar que su ancho de banda está limitado por  $\omega_0$  (frecuencia de donde parte la fase), y  $\omega_c$  (frecuencia de corte superior), ambas descritas en la Sección 2.3 de este capítulo.



**Figura 19:** Diagrama de dispersión de una guía de onda con ranuras periódicas, espaciadas una distancia  $d$ .

#### 2.4.4. Impedancia de Bloch

Una estructura periódica, también puede ser caracterizada en términos de su impedancia característica, conocida como impedancia de Bloch ( $Z_B$ ), y corresponde a la razón entre la presión y la velocidad de volumen de la onda de Bloch en los límites de determinada celda, y de acuerdo a la ecuación (114), puede calcularse en función de la matriz de transmisión [18]:

$$\begin{bmatrix} \bar{A} - e^{\gamma_B d} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} - e^{\gamma_B d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{n+1} \\ Q_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (121)$$

Al resolver la expresión (121), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\bar{A} - e^{\gamma_B d}) P_{n+1} + \bar{B} Q_{n+1} = 0, \quad (122)$$

$$\bar{C} P_{n+1} + (\bar{D} - e^{\gamma_B d}) Q_{n+1} = 0. \quad (123)$$

Luego, la impedancia de Bloch se puede calcular a partir de:

$$Z_B = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = -\frac{\bar{B}}{\bar{A} - e^{\gamma_B d}} = -\frac{\bar{D} - e^{\gamma_B d}}{\bar{C}}. \quad (124)$$

Resolviendo la ecuación (124) para  $e^{\gamma_B d}$ , y tomando en cuenta que  $\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = 1$ :

$$e^{\gamma_B d} = \frac{(\bar{A} + \bar{D}) \pm \sqrt{(\bar{A} + \bar{D})^2 - 4}}{2}. \quad (125)$$

Sustituyendo (125) en (124):

$$Z_B = \frac{-2\bar{B}}{(\bar{A} - \bar{D}) \pm \sqrt{(\bar{A} + \bar{D})^2 - 4}} = \frac{(\bar{A} - \bar{D}) \pm \sqrt{(\bar{A} + \bar{D})^2 - 4}}{2\bar{C}}, \quad (126)$$

Eligiendo sólo la segunda igualdad de la expresión (126), la impedancia de Bloch puede calcularse como:

$$Z_B = \frac{\pm \sqrt{\bar{A}^2 - 1}}{\bar{C}}, \quad (127)$$

si  $\bar{A} = \bar{D}$ .

Por último, la expresión (127) puede simplificarse a

$$Z_B = \pm \sqrt{\frac{\bar{B}}{\bar{C}}}, \quad (128)$$

si se expresa a  $\bar{A}^2 - 1$  como  $\bar{A}\bar{D} - 1 = \bar{B}\bar{C}$ .

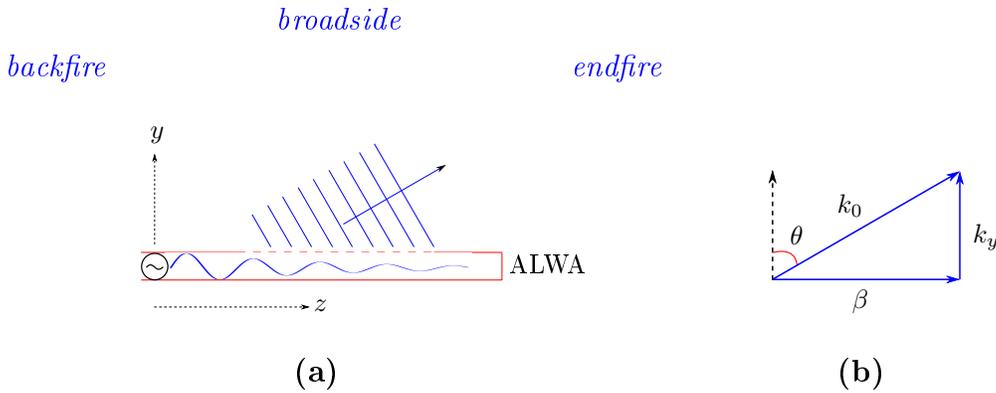
En la expresión (128), los signos  $\pm$  corresponden a las soluciones de las ondas que se desplazan en sentido positivo y negativo, producto de las señales reflejadas y transmitidas en los límites de cada celda; en este trabajo se utilizará únicamente el signo positivo.

## 2.5. Antena acústica tipo guía de onda ranurada

En las secciones 2.3 y 2.4, se estudiaron diferentes conceptos de propagación en una guía de onda con ranuras periódicas, en donde se asumió que la energía permanece esencialmente confinada dentro de la guía, es decir, que el factor de atenuación  $\alpha = 0$ . Sin embargo, debido a que la guía está abierta al espacio libre a través las ranuras, parte de la señal guiada se fuga de la estructura con características direccionales, razón por la cual, la guía de onda con ranuras puede ser utilizada como una antena acústica, conocida como antena acústica tipo guía de onda ranurada o ALWA [18].

### 2.5.1. Principios fundamentales de una antena acústica tipo guía de onda ranurada ALWA

Una antena acústica tipo guía onda ranurada, es una guía de onda que permite la fuga de energía conforme se propaga a lo largo de la estructura [4]. La Figura 20.a, muestra el esquema general de una ALWA, y se puede observar que el fenómeno de fuga, esta asociado con una direccionalidad definida.



**Figura 20:** Antena acústica tipo guía de onda ranurada. (a) Esquema general. (b) Relación de constantes de propagación.

La onda que fuga de la ALWA, en la región libre inmediata a la estructura, exhibe una forma de onda general:

$$P(z, y) = P_0 e^{\gamma z} e^{jk_y y}, \quad (129)$$

en donde  $\gamma = \alpha + j\beta$  es la constante compleja de propagación de la onda en la dirección de la guía de onda  $z$ , y se trata de la constante de propagación de Bloch que se introdujo en la Sección 2.4.3; mientras que  $k_y$ , es la constante de propagación perpendicular a la guía de onda, relacionada con  $\beta$  por:

$$k_y = \sqrt{k_0^2 - \beta^2}, \quad (130)$$

en donde  $k_0$  es el número de onda fuera de la antena o campo libre. Esta relación sugiere dos posibilidades que a continuación se presentan. Si la velocidad de fase de la onda es menor a la velocidad del sonido en campo libre, es decir,  $c_{ph} < c_0$  o  $\beta > k_0$ , la constante  $k_y$  es imaginaria, y en consecuencia, la onda que se propaga en la dirección de  $y$ , es evanescente. En contraste, si la velocidad de fase de la onda es mayor a la velocidad del sonido en campo libre, es decir,  $c_{ph} > c_0$  o  $\beta < k_0$ , la constante  $k_y$  es real, dando lugar a propagación en una dirección dada por  $\theta$ , con  $-\pi < \theta < \pi$ . Esto significa que la onda que fuga, se propaga fuera de la ALWA. Dentro de la Figura 19, en el contexto de la ALWA, la región de onda rápida, es la región de radiación de la antena [18].

Otra observación sobre la Figura 20.b, es que  $\beta$  determina el ángulo  $\theta$  de radiación del lóbulo principal de la ALWA, el cual se puede obtener como:

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{\beta}{k_0} \right), \quad (131)$$

y de acuerdo con Oliner, et al., 2007 [4], el ancho del lóbulo principal para una ALWA de longitud  $l$ , se puede aproximar mediante:

$$\Delta\theta \approx \frac{1}{(l/\lambda) \cos(\theta)}. \quad (132)$$

Como se demostró en la Sección 2.4.3, la guía de onda con ranuras periódicas, es un medio dispersivo, es decir, que  $\beta$  es una función no lineal de  $\omega$ . Debido a ello, en la ecuación (131) se puede observar que el ángulo  $\theta$ , estará en función de la frecuencia, y podría ir desde  $\theta = -90^\circ$  (*backfire*), hasta  $\theta = +90^\circ$  (*endfire*), si la constante de propagación  $\beta$ , varía dentro del intervalo  $[-k_0, +k_0]$  [18]. Notar que cuando  $\beta = 0$ , la radiación apuntará a  $\theta = 0^\circ$  (*broadside*).

Una manera de conseguir valores de  $\beta$  negativos, es incorporando obstrucciones con membranas en cada celda unitaria; dichas membranas en conjunto con los orificios periódicos, proporcionan comportamientos de densidad y compresibilidad del medio negativos por debajo de una frecuencia de corte ( $\rho, B < 0$ ), y esto a su vez ocasiona velocidades de fase negativas, resultando en radiación que apunta a ángulos negativos. El modelo de ALWA que incluye membranas se ha estudiado ampliamente dentro del marco de los metamateriales acústicos [5, 21], un contexto no abordado en este trabajo.

# Método numérico

---

En este capítulo se describen los aspectos fundamentales del método numérico empleado en este trabajo, así como la implementación del mismo.

## 3.1. Introducción a los métodos numéricos

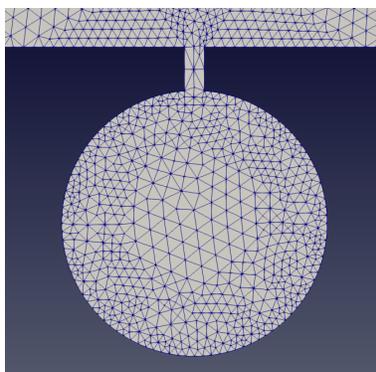
Una manera de estudiar muchos de los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza como es la propagación de ondas acústicas, es a través de métodos analíticos mediante ecuaciones matemáticas que involucran magnitudes físicas y sus variaciones temporales y espaciales, a lo que se le conoce como ecuaciones diferenciales parciales (EDP); y la solución para dichas ecuaciones, estará sujeta a las condiciones de frontera del sistema bajo estudio, es decir, los valores que toma la función incógnita o su derivada en ciertas regiones.

A pesar de que se han desarrollado ecuaciones diferenciales parciales para múltiples escenarios, las soluciones existentes están limitadas a un número reducido de casos, y se ha optado por encontrar soluciones de forma aproximada mediante evaluaciones numéricas, permitiendo resolver problemas matemáticos, de ingeniería y físicos con la ayuda de una computadora. Por lo tanto, el análisis numérico trata de diseñar métodos para aproximar de una manera eficiente las soluciones de problemas expresados matemáticamente.

Existen diferentes técnicas de análisis numérico para problemas acústicos y típicamente difieren en la manera en la que es modelado el fluido; una de ellas es el método de elemento finito, en donde el medio continuo que tiene grados de libertad infinitos, se reduce a un medio con grados de libertad finitos o discretos, logrando conseguir una representación geométrica más precisa del sistema y una buena aproximación de la solución total.

## 3.2. Método de elemento finito

El método de elemento finito ha emergido como un método numérico universal basado en herramientas de cómputo, para la solución de una amplia gama de ecuaciones diferenciales de una gran cantidad de áreas de la ciencia por ser analizadas y resueltas dentro de un marco común. Para ello, una vez que se identificó la EDP asociada al fenómeno físico, se realiza una partición del dominio en elementos de tamaño finito (típicamente triángulos o tetraedros, dependiendo del número de dimensiones espaciales del sistema), y se construye una malla que delimita cada una de las fronteras de un elemento en particular con el adyacente, como se ilustra en la Figura 21. El método busca soluciones mediante familias de funciones dependientes de un número también finito de parámetros, de forma que el problema diferencial se convierte en un sistema de ecuaciones algebraico que se puede resolver numéricamente [22].



**Figura 21:** Discretización de un resonador de Helmholtz para cómputo de Elemento Finito, en dos dimensiones, con base en elementos triangulares.

Para ejemplificar uno de los aspectos más importantes del método de elemento finito, a continuación se define una EDP simple:

$$u''(x) = f(x) \quad x \in 0, 1. \quad (133)$$

Como primer paso, se multiplican ambos lados de la EDP por una función de prueba  $v(x)$ , y se integra en un intervalo de 0 a 1:

$$\int_0^1 u''(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x). \quad (134)$$

La expresión de la izquierda de la ecuación (134) se puede resolver como una integral por partes, permitiendo reducir en uno el orden de la función incógnita  $u(x)$ :

$$u'(x)v(x)|_0^1 - \int_0^1 u'(x)v'(x) = \int_0^1 f(x)v(x). \quad (135)$$

En la terminología del método de elemento finito, a la integral de la EDP, se le conoce como forma débil de la ecuación diferencial.

Lo siguiente es discretizar la ecuación débil convirtiéndola a una forma matricial en donde se calcula la función incógnita  $u(x)$  para cada elemento de la malla del sistema. Por último se interpolan los resultados de la evaluación de cada elemento finito y se obtiene la solución total del problema; dicha solución dependerá de la resolución de la malla, mientras más refinada sea ésta, más exacta será la aproximación a la solución.

Con lo anterior, solamente se han esbozado algunos aspectos generales del análisis mediante el método de elemento finito, cabe destacar que existen muchos tipos de funciones de prueba y diversas variantes de este tipo de método numérico. Una descripción del método completa y detallada se puede encontrar por ejemplo en [23].

El método de elemento finito es utilizado como una herramienta poderosa de diseño, modelación y análisis de sistemas ingenieriles que permite visualizar múltiples datos de interés, ahorrando esfuerzo y recursos.

Entre las ventajas más relevantes del método de elemento finito con respecto a otros tipos de análisis numéricos para problemas acústicos como es el método de volumen finito (*finite volume method*, FVM), método de elementos de contorno (*boundary element method*, BEM) y método espectral, entre otros, es que en el método de elemento finito se pueden modelar sin dificultad geometrías complejas, y las condiciones de frontera, se abordan de manera fácil y sistemática.

Aunque el método de elemento finito se puede aplicar a problemas en los que interviene el tiempo, en este trabajo es de particular interés la solución de problemas acústicos gobernados por la ecuación de Helmholtz (parte independiente del tiempo de la ecuación de onda en el caso de ondas armónicas):

$$\nabla^2 P + kP = 0, \quad (136)$$

en donde el operador laplaciano  $\nabla^2$  representa la suma de las segundas derivadas con respecto a las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , y  $k$  es el número de onda en campo libre, definido previamente como  $k = \omega/c_0$ . Es conveniente recordar que en este trabajo se estableció de manera convencional, la dependencia armónica con el tiempo  $e^{-j\omega t}$ .

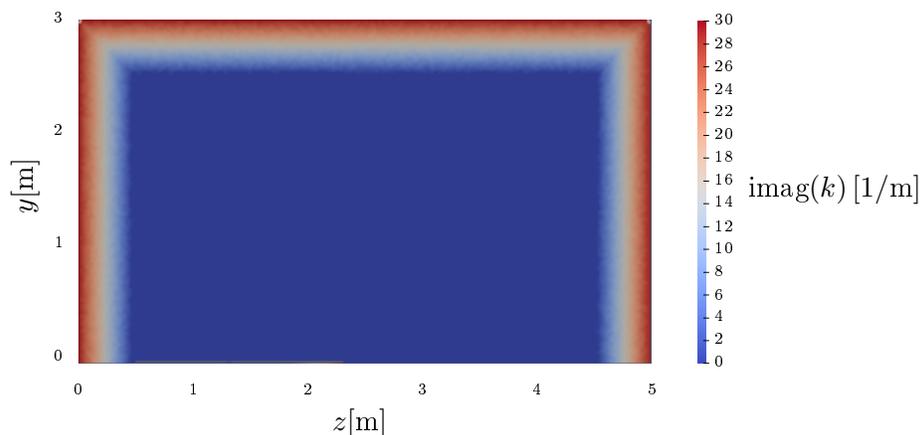
En resumen, durante el estudio numérico, a partir de la posición de la fuente sonora, para cada frecuencia se genera un campo acústico estacionario que obedece a las condiciones de frontera del sistema, y los datos del campo acústico se almacenan en archivos que pueden ser interpretados por una herramienta de lectura y visualización de datos numéricos. Así mismo, es posible medir la presión compleja en cualquier punto del dominio de simulación, colocando micrófonos virtuales, y dichos datos se pueden almacenar de manera independiente para posteriormente ser analizados y procesados libremente.

### 3.3. Implementación del método numérico

El tipo de sistema propuesto en este trabajo, es susceptible de ser modelado numéricamente, mediante la ecuación de Helmholtz, en dominio complejo, con un valor de  $k \in \mathbb{C}$ , dependiente de la posición  $k = k(\vec{x})$ . Se utilizaron geometrías de guías de onda formadas por bloques de paredes rígidas, radiando dentro de un dominio cuya condición de frontera sea absorbente y, con ello, simular condiciones de propagación en campo libre. Para implementar el estudio, se utilizó el programa de cómputo FEniCS Project; se trata de una herramienta robusta de código abierto, diseñada para la solución automatizada de EDPs por el método de elemento finito, en un entorno de programación intuitivo y flexible, implementado en los lenguajes Python y C++ [24].

El estudio numérico se llevó a cabo en 2D (dos dimensiones), con un eje de simetría axial que permite modelar un sistema 3D (tres dimensiones), axisimétrico. Se utilizó un código diseñado para propósitos generales de simulación de campo acústico en aire, basado en Python.

Dentro del dominio de simulación, las fronteras no reflejantes se definieron utilizando un valor no nulo de la parte imaginaria de  $k$ , que simula una región absorbente artificial de 0.475 m (adecuada para las frecuencias de interés), con una propiedad absorbente que incrementa gradualmente, simulando el diseño de los materiales absorbentes de una cámara anecoica, como se ilustra en la Figura 22.



**Figura 22:** Dominio de simulación en 2D, en donde se puede observar el incremento gradual de la propiedad absorbente en las fronteras izquierda, derecha y superior. El eje horizontal inferior corresponde al eje de simetría axial.

Una vez establecido el dominio de simulación, se propuso un diseño de ALWA en modo emisor mediante una geometría de guía de onda con ranuras en simetría axial (3D), cilíndrico, con sección transversal circular.

Por medio de una condición de frontera de Dirichlet, se definió una fuente sonora tipo

pistón oscilante en el punto de interés dentro de la guía de onda [24]. Dicha fuente genera una señal de presión sonora de 1 Pa.

Se utilizó un refinamiento de malla tal que se tuvieran al menos 10 celdas (particiones del dominio) por longitud de onda, y en la región circundante a la ALWA (dentro y fuera de la estructura, así como en las ranuras), se fijó una resolución de malla más fina que en el espacio restante, para obtener una mejor solución en dicha área de interés.

Durante el estudio numérico, la implementación de FEniCS Project permitió automatizar la exploración de múltiples parámetros geométricos, así como el análisis y procesamiento de los datos generados en cada simulación, mediante códigos de Python. También se utilizó la herramienta de cómputo ParaView, una plataforma de código abierto diseñada para el análisis y visualización de estudios numéricos, de donde se obtuvieron los perfiles de radiación y visualizaciones del dominio de simulación que se presentan en este trabajo.

# Diseño de la ALWA

---

El diseño de la ALWA estudiada en este trabajo, se basó en el modelo acústico de elemento concentrado de la Figura 14.b; y en el proceso para obtener las dimensiones de la antena, se tomaron en cuenta algunos puntos que a continuación se describen:

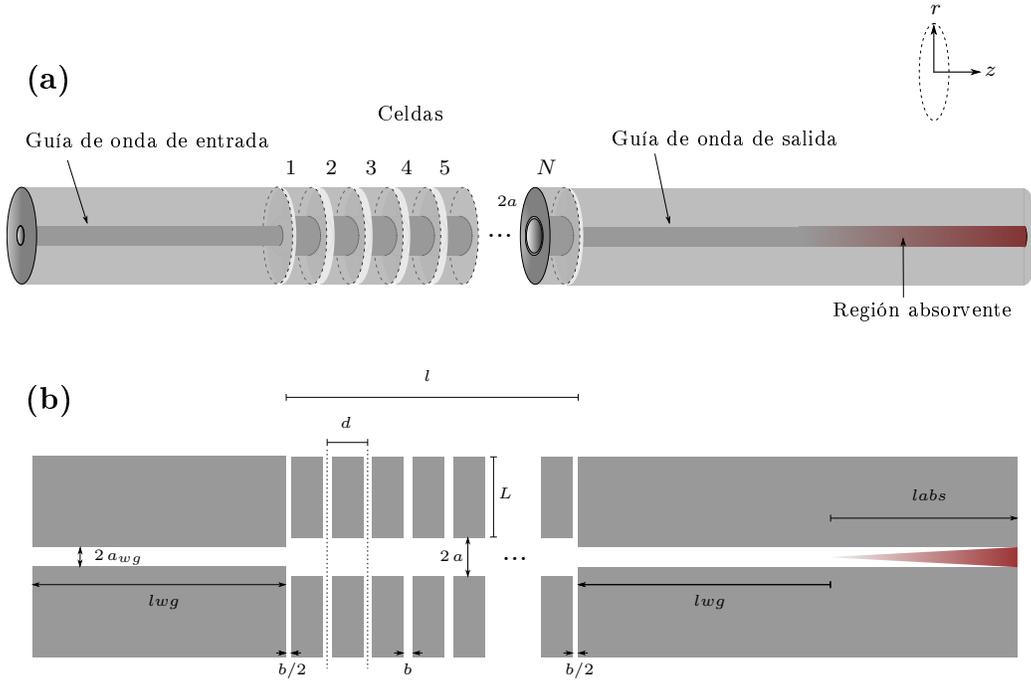
1. Se propuso la frecuencia a partir de la cual se deseaba obtener radiación, denominada frecuencia de diseño, y fue de  $f_0 = 2000$  Hz.
2. Como ya se ha mencionado previamente, la longitud de la celda debe ser pequeña comparada con la longitud de onda de la señal guiada, y de acuerdo con Bongard et al., 2010 [5], una medida óptima es que sea  $d = \lambda/10$  para  $f_0$ . A partir de este dato, se encontró el radio del ducto  $a$ , el ancho de la ranura  $b$ , y la longitud efectiva de la pared de la ranura  $L'$ , mediante las respectivas expresiones analíticas para los elementos del circuito de la Figura 14.b.
3. Se tomó en cuenta la corrección de extremo debido a la propiedad inercial del volumen de aire confinado en la ranura ( $\Delta L$ ), y para ello, fue necesario reducir la longitud del modelo físico ( $L$ ) hasta encontrar la longitud efectiva deseada ( $L' = L + \Delta L$ ); esto se llevó a cabo con la ayuda de la herramienta de simulación.
4. Adicionalmente, a la estructura de la ALWA se le agregaron guías de onda de entrada y salida de un radio  $a_{wg}$  tal que la impedancia característica de estos ductos externos, estuviera acoplada a la impedancia de Bloch de la ALWA, es decir,  $Z_c = Z_B$ , con  $Z_c = (\rho_0 c_0)/(\pi a_{wg}^2)$ , y de esta manera, disminuir las reflexiones en la entrada y salida de la ALWA [5]. Respecto a la longitud de las guías de onda externas, el criterio de diseño fue asegurar que tuvieran una longitud igual o mayor que la longitud de onda de la frecuencia mas baja de simulación; y en el caso de la guía de onda de salida, la parte final se extendió para incluir una región absorbente, y así evitar la reflexión en el ducto de salida.

Las medidas de cada parámetro geométrico, se presentan en la Tabla 1, y con estas

**Tabla 1:** Parámetros geométricos de la ALWA.

Parámetro	Símbolo	Valor [m]
Longitud de las guías de onda de entrada y salida	$l_{wg}$	0.5
Radio de guías de onda de entrada y salida	$a_{wg}$	$3.25 \times 10^{-3}$
Radio de la ALWA	$a$	$4.95 \times 10^{-3}$
Ancho de la ranura	$b$	$0.5 \times 10^{-3}$
Pared de la ranura (longitud efectiva)	$L'$	0.02
Pared de la ranura (longitud física)	$L$	0.0175
Longitud de la celda unitaria	$d$	0.017
Región absorbente	$l_{abs}$	0.475

medidas se construyó el modelo de la Figura 23. En este trabajo, la longitud total de la ALWA ( $l$ ), se referirá únicamente a la región periódica, las guías de onda externas quedan descartadas de este parámetro.



**Figura 23:** Modelo de antena acústica tipo guía de onda ranurada propuesto en este trabajo. (a) Vista exterior. (b) Plano longitudinal en 2D.

En la Tabla 2, se presentan los valores teóricos de cada elemento acústico del circuito de la Figura 14.b, calculados con los parámetros de la Tabla 1.

Con los datos de la Tabla 2, es posible calcular la frecuencia de corte superior hasta donde

**Tabla 2:** Valores teóricos de los elementos acústicos del circuito equivalente del modelo de ALWA propuesta (ver Figura 14.a).

Elemento	Masa [kg/m <sup>4</sup> ]	Compliancia [10 <sup>-12</sup> m <sup>3</sup> /Pa]
Ranura	$M_{ra} = 630.7$	$C_{ra} = 0.98$
Sección de guía de onda	$M_{wg} = 270.5$	$C_{wg} = 9.05$

se puede propagar la onda dentro de la ALWA, mediante las ecuaciones (84) y (85):

$$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{M_{ra} * (C_{ra} + C_{wg})}} = 6107 \text{ Hz.} \quad (137)$$

Por lo tanto, se estima que el rango de frecuencias que se puedan propagar dentro de la ALWA, será de  $f_0 = 2000\text{Hz}$ , a  $f_c = 6107\text{Hz}$ , y así queda definido el rango preliminar de interés principal de este trabajo.

Por último, utilizando la ecuación (5) y la tabla Bessel para ondas cilíndricas incluida por ejemplo en [12], se calculó la frecuencia de corte a partir de la cual se propaga el primer modo de orden superior ( $m = 1, n = 1$ ):

$$f_{1,1}^c = \frac{\alpha'_{1,1} c_0}{2\pi a} = 20327 \text{ Hz.} \quad (138)$$

Este resultado indica que toda frecuencia menor a 20327 Hz, pertenece al modo de propagación fundamental dentro de la guía de onda que conforma la ALWA, confirmando que el rango preliminar de interés es correcto.

Como se mencionó previamente, la onda que se propaga en la ranura propuesta en este trabajo, está sujeta al efecto de pérdida por viscosidad. Si se calcula el factor de calidad para la frecuencia de 2000 Hz mediante la ecuación (90), con  $\eta = 18.6 \mu\text{Pa}$  (coeficiente de viscosidad del aire), y  $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$  (densidad del aire), resulta en  $Q' = 21$ . Una interpretación de esto, es que la parte resistiva  $R_{ra}$  es 21 veces menor que la parte reactiva  $\omega M_{ra}$ , y como ya se mencionó previamente, en este trabajo es de particular interés estudiar los corrimientos de fase del sistema por lo que se despreció la pérdida por viscosidad.

Para la frecuencia de diseño, fue escogido el valor  $f_0 = 2000 \text{ Hz}$ , porque es una frecuencia central en el rango audible, y las dimensiones geométricas resultantes son factibles de ser construidas físicamente.

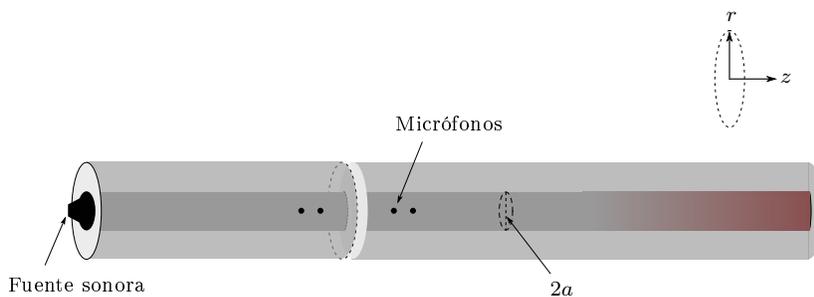
# Validación

Con la finalidad de validar el código de FEniCS Project empleado para el estudio numérico, se llevó a cabo la simulación numérica de la ranura de la Figura 12.a, y los resultados se compararon con aproximaciones de elemento concentrado que describen a la ranura.

Utilizando las medidas de la Tabla 1, en el dominio de simulación se construyó una guía de onda cilíndrica de radio  $a$ , longitud  $2l_{wg}$  más la región absorbente, y un corte transversal de ancho  $b$ , a la mitad del ducto.

Para el tamaño de la pared de la ranura ( $L$ ), se contemplaron múltiples longitudes menores a la longitud efectiva ( $L'$ ), hasta encontrar la mencionada corrección de extremo  $\Delta L$ , lo cual se validó en las gráficas que se presentan mas adelante.

Dentro de la guía de onda, se colocó una fuente sonora en el extremo izquierdo (entrada del sistema), además de dos micrófonos antes de la ranura, y dos micrófonos después. La Figura 24, muestra el sistema empleado para la simulación.



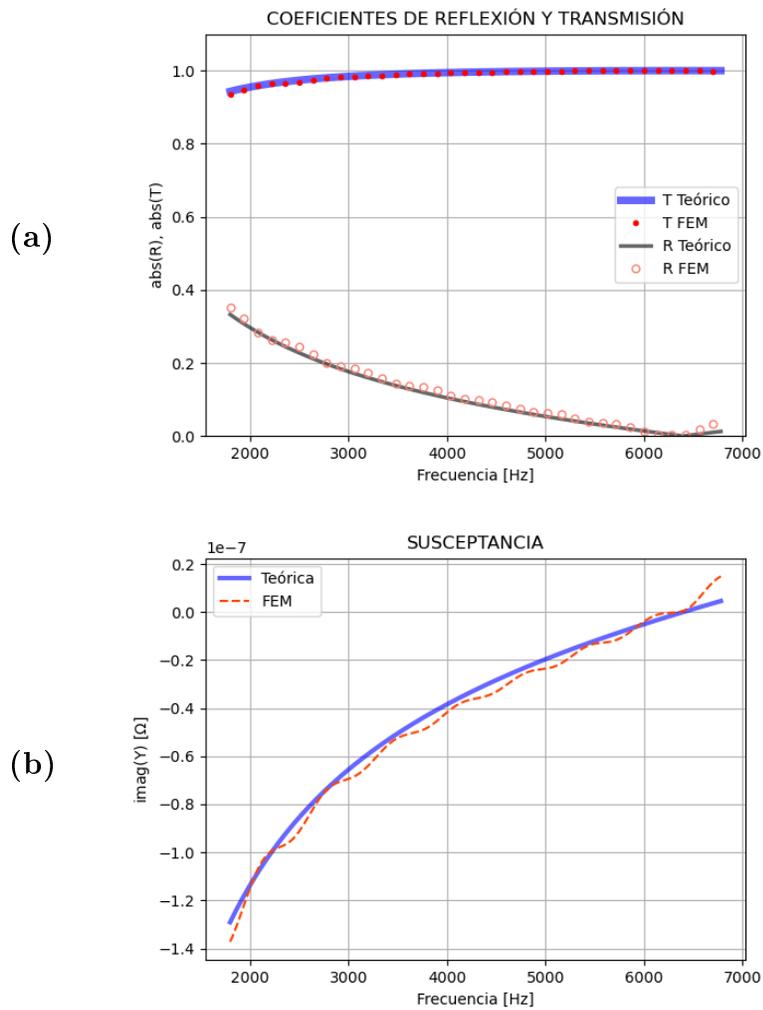
**Figura 24:** Modelo para validación de ranura axisimétrica.

El estudio consistió en generar una onda plana o modo fundamental dentro del ducto, y a partir de los datos de presión compleja registrada por los micrófonos, fue posible calcular los coeficientes de reflexión y transmisión, así como la admitancia  $Y_{ra} = 1/Z_{ra}$  en la interfase entre el ducto y la ranura, mediante las técnicas descritas en las secciones 2.1.3 y 2.2.2.

El rango de frecuencias elegido para el estudio, fue de 1800 Hz a 6800 Hz, con el objetivo de explorar más frecuencias de las establecidas en el rango de interés.

La Figura 25.a, muestra la gráfica con los coeficientes de reflexión y transmisión, mientras que la Figura 25.b, muestra la susceptancia o parte imaginaria de la admitancia calculada en la interfase entre el ducto y la ranura. En ambas gráficas, los datos numéricos (FEM), pertenecen a un una ranura de  $L = 0.0175$  m, que fue la longitud para la cual se encontró mejor correlación respecto a los datos teóricos, con  $L' = 0.02$  m; asumiéndose que la corrección de extremo equivale a  $\Delta L = 0.0025$  m.

Los coeficientes de reflexión y transmisión teóricos, se obtuvieron mediante las ecuaciones (66) y (67); y los datos para graficar la susceptancia teórica, se obtuvieron mediante las ecuaciones (60), (61), y (88), proponiendo  $f_0 = 2000$  Hz, y  $d = 0.017$  m. Se exhibe que la correlación es buena desde 1800 Hz, a 6450 Hz, y en ese rango, tanto el código empleado para el estudio numérico y pos-procesamiento de datos, como las aproximaciones acústicas de elemento concentrado que describen a la ranura, quedan validadas.



**Figura 25:** Gráficas de validación de una ranura. Los datos teóricos corresponden a una con  $L' = 0.02$  m, y los datos numéricos (FEM), corresponden a una ranura con  $L = 0.0175$  m. (a) Coeficientes de Reflexión y Transmisión. (b) Susceptancia o parte imaginaria de la admitancia de la ranura.

# Resultados

---

En esta sección se presentan los resultados del estudio numérico de la ALWA, el cual se llevó a cabo de la siguiente manera:

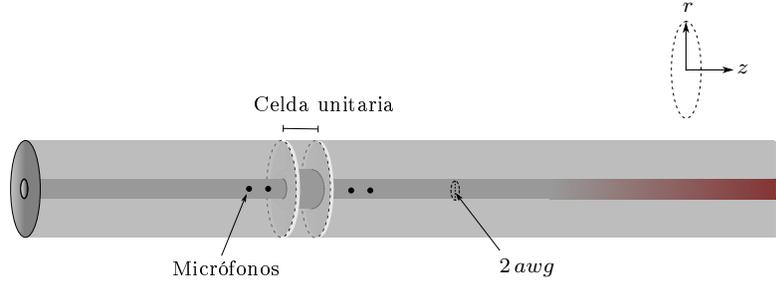
1. Se realizó la simulación de una celda unitaria, de donde se obtuvo la constante de propagación de Bloch y predicción de dirección angular de radiación a partir de los datos de presión dentro de la guía de onda. Notar que este estudio es distinto a la simulación de una sola ranura que se llevó a cabo en el Capítulo 5.
2. Se realizó la simulación de una ALWA con 20 celdas unitarias, y se caracterizó la direccionalidad y constante de propagación de Bloch midiendo el campo de presión fuera de la antena.
3. Se implementó un estudio de resolución angular como función de la longitud de la ALWA, en la que se comparan 3 modelos de 10, 20 y 30 celdas.
4. Se exploraron nuevos diseños de celda unitaria con geometrías complejas, buscando diferentes perfiles de radiación.

El rango de frecuencias para los primeros tres estudios, en principio fue igual al rango utilizado para la validación de la ranura, es decir, de 1800 Hz a 6800 Hz, y debido a los resultados que se encontraron, el rango se amplió hasta 8350 Hz; mientras que para el cuarto estudio se utilizó un rango de frecuencias de 800 Hz a 3500 Hz. Los resultados se presentan en la Figura 28.

## 6.1. Estudio de una celda unitaria

Para llevar a cabo el estudio de una celda unitaria de la ALWA (Figura 18), en el dominio de simulación se construyó un modelo de celda unitaria y simétrica con las dimensiones de

cada parámetro geométrico presentadas en la Tabla 1, incluyendo las guías de onda de entrada y salida, además de la región absorbente al final de la guía de onda de salida. Se colocaron micrófonos dentro de la guía antes y después de la celda, y una fuente sonora en la guía de entrada. El sistema completo se muestra en la Figura 26.



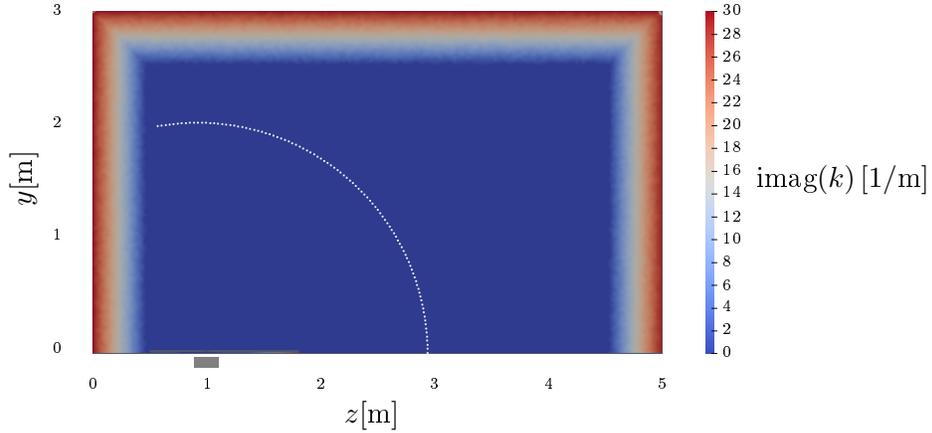
**Figura 26:** Modelo para estudio de una celda unitaria de la ALWA.

Con los datos de presión de los micrófonos, se calcularon los coeficientes de la matriz de transmisión (método descrito en la Sección 2.4.2), de donde se obtuvo el factor fase  $\beta$  con la ecuación (118), y posteriormente se estimó la dirección de radiación para cada frecuencia mediante la ecuación (131). Los resultados se incluyen en la Figura 28.

## 6.2. Estudio de una ALWA de 20 celdas unitarias

En este estudio, se extendió el modelo de celda unitaria descrita en la Sección 6.1, a una antena de 20 celdas periódicas, como el de la Figura 23.a, y el objetivo principal, fue analizar el campo acústico fuera de la antena para caracterizar el patrón direccional de la señal radiada. Para ello, aprovechando las ventajas de la herramienta numérica, fuera de la antena se colocó un arreglo semicircular de 100 micrófonos en la región angular de interés, que va desde la dirección *broadside*, hasta la dirección *endfire* (ver Figura 20.a). Debido a que el ancho de un lóbulo de radiación que podría apuntar a *broadside*, estaría abarcando una dirección angular negativa, fue necesario colocar el arreglo desde -10 grados a 90 grados, situando un micrófono por cada grado. Por otro lado, el arreglo de micrófonos se colocó respecto al centro geométrico de la estructura periódica de la ALWA, a una distancia suficiente para determinar los parámetros de radiación en campo lejano que son relevantes para las aplicaciones buscadas. La Figura 27, muestra la posición de los micrófonos y la referencia de la posición de la estructura de la ALWA de 20 celdas dentro del dominio de simulación.

De manera similar a la caracterización direccional de una fuente sonora [25], mediante el arreglo de micrófonos, se calculó la energía presente en cada ángulo desde 0 a 90 grados, y con la evaluación de un promedio ponderado, fue posible medir a qué ángulo apunta el lóbulo principal de radiación correspondiente a cada frecuencia. Posteriormente, a partir de los valores de  $\theta$ , se calculó el factor de fase  $\beta$  mediante la ecuación (131), la cuál estuvo limitada únicamente a la región de radiación.



**Figura 27:** Posición de los micrófonos para llevar a cabo la caracterización angular de la radiación de la ALWA. Se incluye la referencia de posición de la estructura periódica.

Adicionalmente, dentro del mismo modelo de ALWA, se colocaron micrófonos a lo largo de toda la estructura para poder analizar la presión acústica en cada sección de la antena y poder visualizar la mencionada onda de Bloch.

Cabe mencionar que también es posible medir el ángulo  $\theta$  a partir de la Transformada Rápida de Fourier FFT en 2D para las coordenadas espaciales de los datos que arroja la simulación, pero no se utilizó esa técnica.

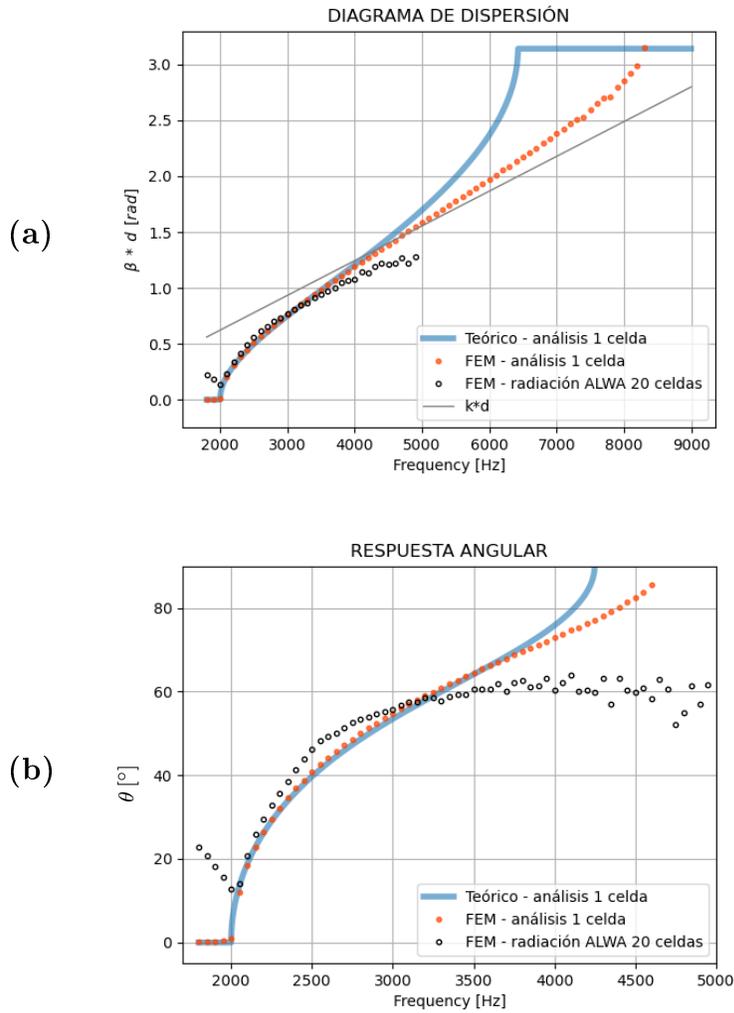
### 6.3. Parámetros de Bloch

A manera de justificación sobre el valor del radio de las guías de onda de entrada y salida ( $a_{wg}$  en la Figura 23), a partir de la impedancia de Bloch teórica del análisis de una celda unitaria, calculada mediante la ecuación (128), se eligieron diferentes valores de  $Z_B$  asociados a frecuencias dentro del rango identificado de radiación. Por lo tanto, se obtuvieron diferentes valores de radio, y en un estudio numérico correspondiente con cada radio elegido, se evaluó la magnitud de la presión acústica antes y después de la región periódica de la ALWA de 20 celdas. De esta manera, se encontró el radio óptimo para el cual se da la mejor transferencia de energía, es decir, que las reflexiones en la entrada y salida de ALWA, son menores en el rango de radiación. Esto sucedió con el radio que le corresponde a la impedancia de Bloch  $Z_B = 12.3 \text{ M}\Omega$ , asociado a la frecuencia  $f = 2212 \text{ Hz}$ , despejado de la ecuación (47), con  $Z_c = Z_B$ :

$$a_{wg} = \sqrt{\frac{\rho_0 c_0}{\pi Z_B}} = 3.25 \times 10^{-3} \text{ m.} \quad (139)$$

La Figura 28, muestra el diagrama de dispersión y respuesta angular de la ALWA propuesta en este trabajo, caracterizada en términos del análisis (matriz de transmisión) de una

celda unitaria, en donde se comparan los datos numéricos con respecto a los datos teóricos; adicionalmente, se incluyen los datos obtenidos a partir del análisis de radiación del estudio numérico de una ALWA de 20 celdas.



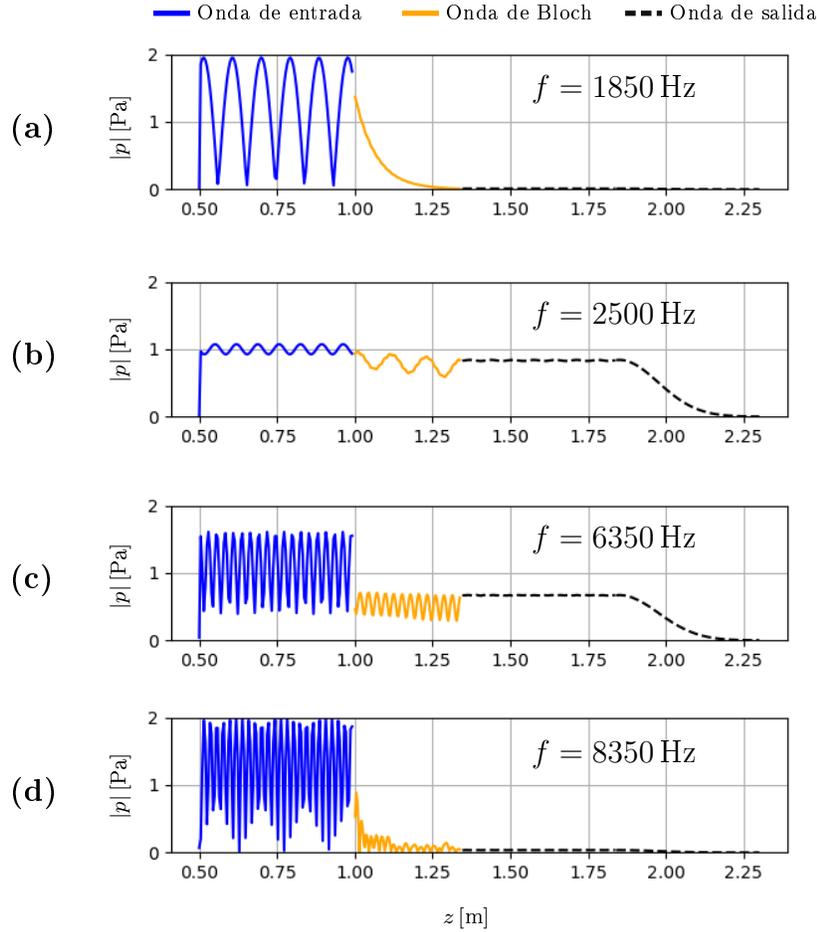
**Figura 28:** Caracterización de una ALWA en términos del análisis de una celda unitaria y la radiación de una ALWA de 20 celdas. (a) Diagrama de dispersión. (b) Respuesta angular.

En el diagrama de dispersión de la Figura 28.a, se puede observar que la razón por la cual se amplió el rango de frecuencias de estudio hasta 8350 Hz, fue porque en el análisis de una celda unitaria, tanto la curva teórica como la curva numérica, difirieron en la frecuencia de corte superior de operación de la ALWA, con respecto a la frecuencia calculada mediante la ecuación (137), y se exploraron más frecuencias hasta encontrar el corrimiento de fase total esperado de  $\pi$ . Se infiere que estas diferencias se deben a que el rango de operación de la ALWA es tan amplio, que las condiciones de homogeneidad de celda unitaria ( $d \ll \lambda$ ), y de elemento acústico concentrado ( $L', b \ll \lambda$ ), no se cumplen para todas las frecuencias, algo no contemplado en el método teórico; notablemente se observa que esto sucede a partir de la región de onda guiada. Pese a estas diferencias, el modelo numérico exhibe el comportamiento

dispersivo esperado para un rango de frecuencias, y la correlación respecto al modelo teórico es buena en la región principal de interés, que es la región de fuga o radiación.

En la Figura 28.b, la resolución angular del estudio numérico de la ALWA de 20 celdas, corrobora que existe radiación direccional desde 12 hasta 60 grados, con un error aproximado de  $\pm 8$  grados respecto a las predicciones calculadas mediante el análisis de una celda unitaria. Aunque estas predicciones indican que existe radiación direccional de 0 a 90 grados, en términos de la aplicación, cuando  $\beta = 0$ , la velocidad de fase es nula y no existe propagación fuera de la antena (ver Sección 2.3). Por lo tanto, la radiación se da únicamente cuando  $\beta > 0$ , y el primer lóbulo detectado fue a partir de 12 grados. Por otro lado, cuando el lóbulo de radiación apunta a un ángulo mayor a 60 grados, las reflexiones causadas por la misma estructura de la antena, interfieren con el lóbulo y pierde definición, quedando establecido 60 grados como el ángulo máximo de operación de una ALWA de 20 celdas periódicas.

La Figura 29, muestra la magnitud de la presión acústica a lo largo de la estructura de la ALWA de 20 celdas, para diferentes frecuencias del rango de estudio. La magnitud de presión está normalizada con respecto al valor absoluto de la amplitud de la onda incidente en la región de entrada de la antena. El dato relevante es que se puede visualizar la onda de Bloch y su comportamiento en cada región de la gráfica de dispersión de la Figura 28.a. Para el caso de  $f = 1850$  Hz, se trata de una frecuencia fuera del rango de operación de la antena, es decir que no se puede propagar en la región periódica o región de las celdas, y notablemente se observa que la magnitud decrece exponencialmente hasta cero, una vez que la onda cruza de la guía de entrada a la región periódica (Figura 29.a). Cuando  $f = 2500$  Hz (Figura 29.b), la onda se propaga en región periódica y además se fuga, mostrando un decaimiento exponencial a mediada que atraviesa cada celda; además, la onda de Bloch exhibe una longitud de onda mayor a la longitud de onda en la guía de entrada, debido al corrimiento de fase que ocurre en las celdas de la antena. Posteriormente en la guía de salida, el porcentaje de la señal que no se alcanzó a fugar, se mantiene como una onda viajera, y finalmente decae a cero en la región absorbente. Cuando  $f = 6360$  Hz (Figura 29.c), la onda se propaga en la estructura periódica pero no se fuga y se mantiene como una onda viajera hasta que decae a cero en la región absorbente. En este caso, la onda de Bloch exhibe una longitud de onda menor a la longitud de onda en la guía de entrada. Por último, cuando  $f = 8350$  Hz (Figura 29.d), es la primera frecuencia que cruza el rango superior de operación y, por ende, ya no se propaga en la estructura periódica.

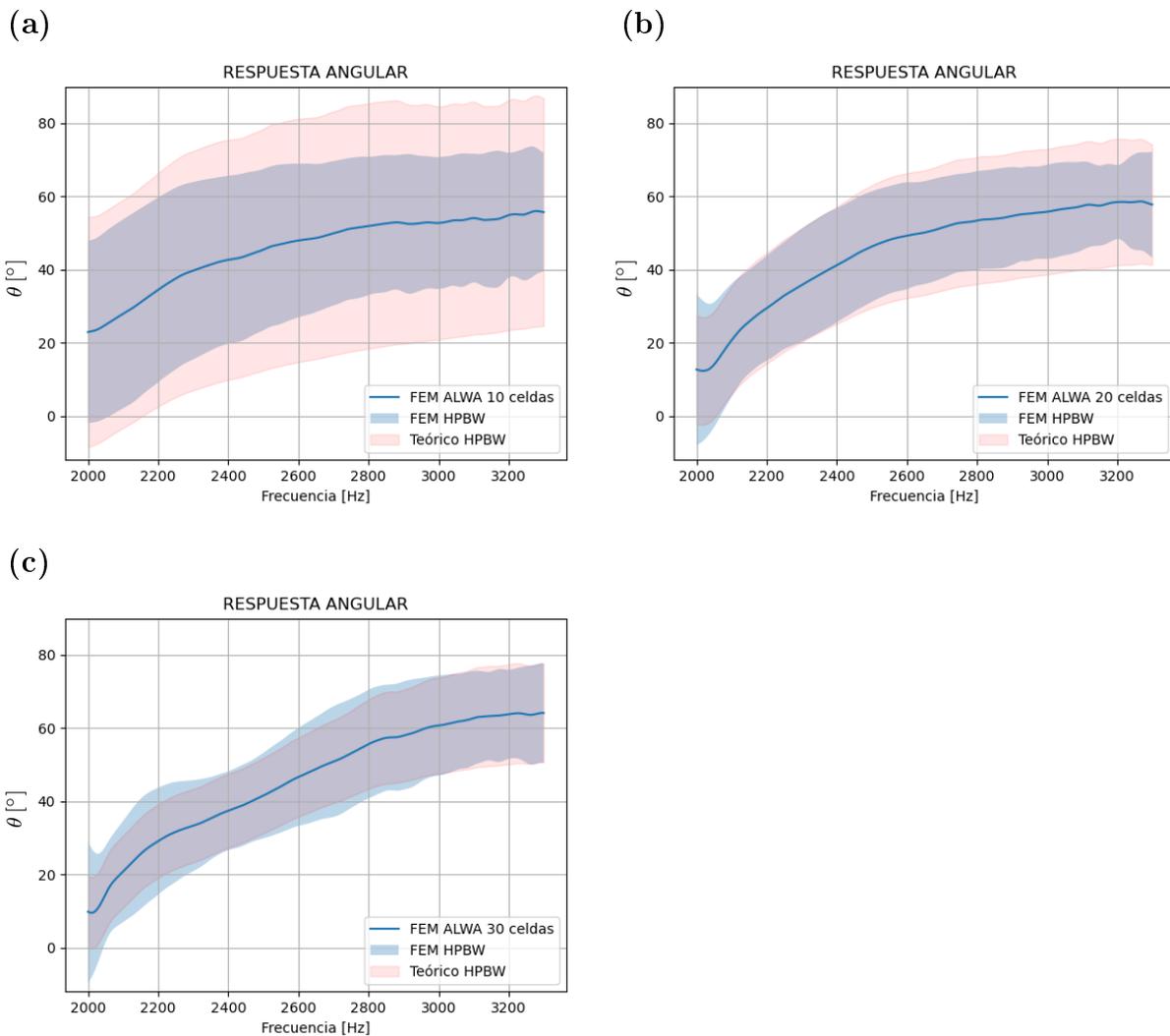


**Figura 29:** Magnitud de la presión acústica a lo largo de la estructura de una ALWA de 20 celdas para: (a)  $f = 1850$  Hz, (b)  $f = 2500$  Hz, (c)  $f = 6350$  Hz y (d)  $f = 8350$  Hz.

#### 6.4. Resolución angular como función de la longitud de la ALWA

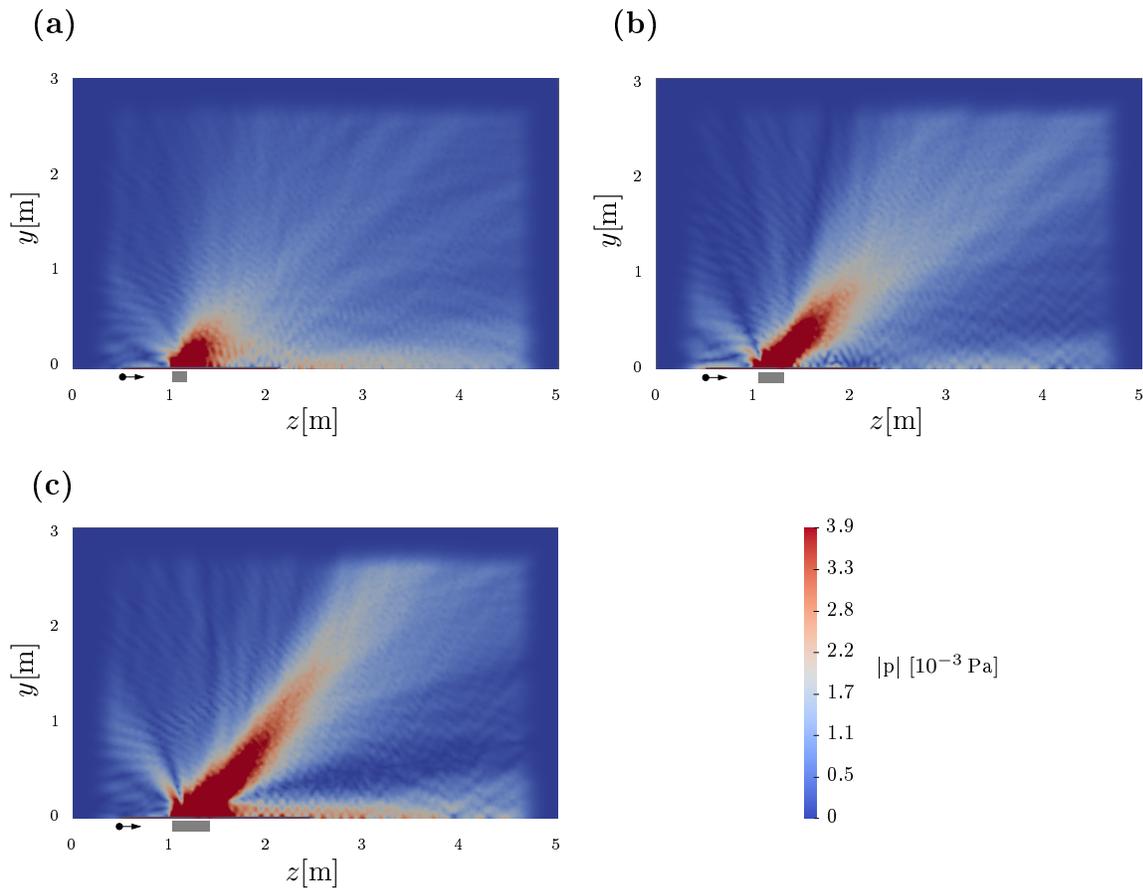
En este estudio, se analizó la resolución angular como función de la longitud de la ALWA, y para ello, se compararon 3 antenas de 10, 20 y 30 celdas, bajo los mismos parámetros de simulación previamente utilizados. Los resultados se presentan en la Figura 30, y cada gráfica incluye el ancho del lóbulo principal  $\Delta\theta$ , caracterizado en términos del ancho de haz de potencia media (*half power beamwidth*, HPBW), a partir del cálculo de la varianza y desviación estándar del lóbulo principal de radiación [26]. Adicionalmente, se incluye el ancho del lóbulo estimado de manera teórica mediante la ecuación (132). En las gráficas se exhibe que a mayor número de celdas, la resolución angular es más direccional, e incluso en la Figura 30.c, que representa la ALWA con más celdas, se observa que el lóbulo al ser más angosto, puede dirigirse hasta aproximadamente 65 grados. Respecto a la comparación entre los datos teóricos y los datos numéricos, la diferencia principal radica en que en los datos

teóricos, cuando incrementa el valor de  $\theta$ , el ancho del lóbulo aumenta proporcionalmente; es decir, que a medida que aumenta la frecuencia y el lóbulo de radiación se desplaza de *broadside* a *endfire*, la región que abarca el lóbulo es mayor; en los datos numéricos sucedió lo contrario, ya que se ilustra que el ancho del lóbulo de radiación decrece a medida que aumenta la frecuencia, y esto se debe a que en altas frecuencias la energía que fuga es menor y, por lo tanto, el lóbulo que se forma tiene menor alcance y es más angosto. También se puede observar que en los tres casos de la Figura 30, la dirección angular difiere para las mismas frecuencias en las tres antenas (especialmente en los extremos de frecuencias bajas y altas). Esto se debe a que con cada longitud de antena, el centro del lóbulo de radiación cambia respecto al centro geométrico de la antena, modificando la lectura de los micrófonos. Si bien es un detalle que se puede ajustar de manera individual para cada antena y cada frecuencia, no se implementó en este trabajo.



**Figura 30:** Gráficas de resolución angular para una ALWA de: (a) 10 celdas, (b) 20 celdas y (c) 30 celdas.

En la Figura 31, se muestra el perfil de radiación de magnitud de presión sonora en pascales, de una ALWA con 10, 20 y 30 celdas, para una frecuencia constante de 2500 Hz. La presión está normalizada con respecto al valor absoluto de la amplitud de la onda incidente en la guía de entrada de la antena, y se ajustó la resolución de colores con el propósito de visualizar el patrón de radiación. Se demuestra que a medida que incrementa la longitud de la ALWA, el lóbulo es más direccional, siendo consistente con los resultados presentados en la Figura 30. Un punto a notar es que a medida que incrementa el número de celdas, aparecen lóbulos secundarios no deseados que apuntan a diferentes direcciones respecto a la dirección del lóbulo principal, aunque con menor magnitud. Un estudio más detallado sobre resolución angular de antenas acústicas tipo guía de onda ranurada se puede encontrar por ejemplo en [6].



**Figura 31:** Perfiles de radiación de una ALWA para la frecuencia constante de 2500 Hz, contemplando diferentes longitudes de la antena: (a) 10 celdas. (b) 20 cedas. (c) 30 celdas. En cada gráfica se incluye una marca correspondiente a la posición de la fuente sonora, la dirección de propagación de la onda dentro de la guía de entrada y el tamaño de la estructura periódica de la ALWA, debajo de la zona de radiación principal.

## 6.5. Estudio con celdas de otras geometrías

Una vez validado el código y demostrada la característica direccional de la ALWA simple y geometría definida, aprovechando las ventajas del método de elemento finito descritas en el Capítulo 3 de este trabajo, se propuso explorar nuevos diseños de celda unitaria con geometrías irregulares en donde el análisis teórico se vuelve complicado, pero con la motivación de conseguir diferentes perfiles de radiación, e incluso posibles ángulos de radiación negativa.

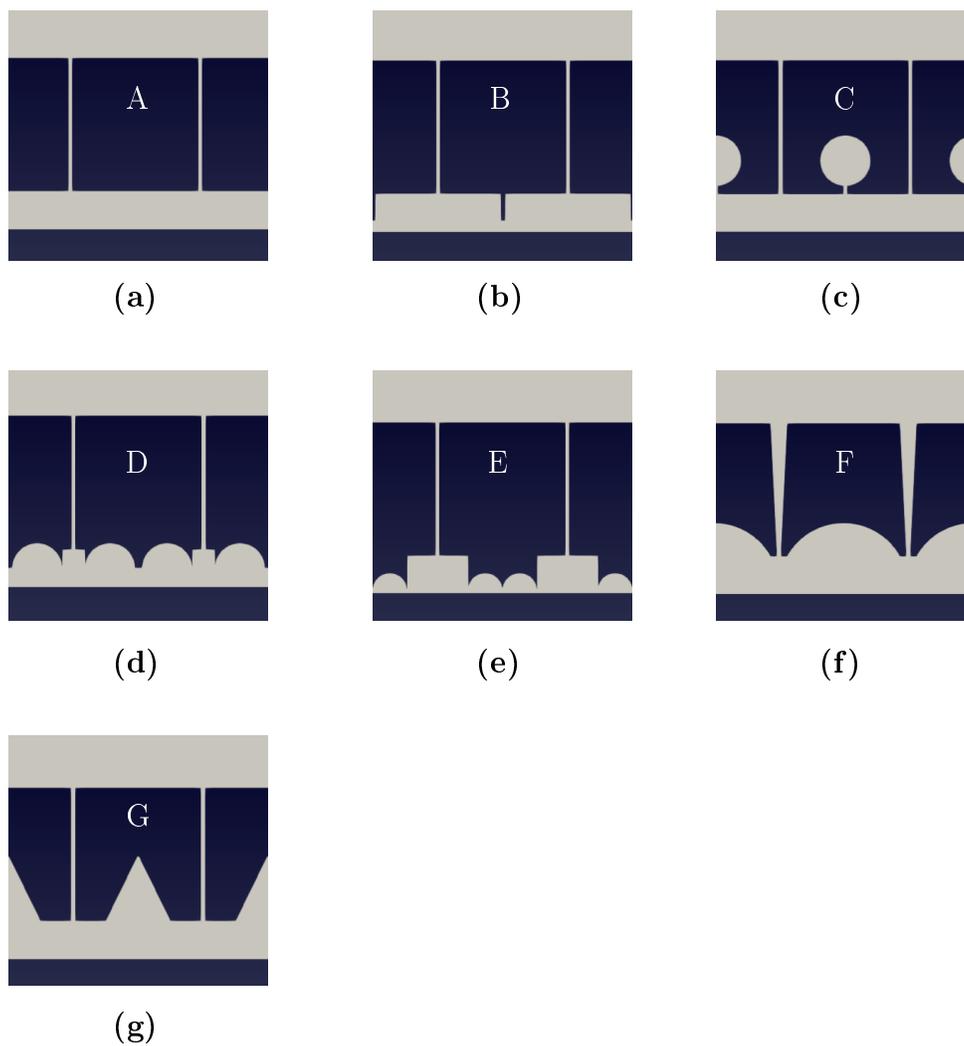
En este nuevo estudio, dentro de cada celda unitaria del modelo de ALWA simple, se añadieron obstáculos que forman distintas cavidades con el objetivo de generar discontinuidades, para conseguir diferentes corrimientos de fase y, con ello, modificar el comportamiento dispersivo de la antena.

Los primeros modelos partieron añadiendo obstrucciones transversales tipo iris o resonadores de Helmholtz también transversales dentro de cada celda, como los que suelen utilizarse en filtros acústicos en guías de onda [12, 27]; posteriormente, los diseños se fueron modificando hasta conseguir que la cavidad del resonador de Helmholtz estuviera en serie, para proporcionar un parámetro elástico en la dirección de propagación de la onda, pero sin obstruir el paso total. Se exploraron también cavidades elípticas y triangulares y diferentes modelos de celda con un ancho de ranura no uniforme. En la Figura 32, se muestran algunos de los modelos que se exploraron en este estudio, incluyendo el modelo sin obstrucciones o geometría definida utilizada para los estudios anteriores.

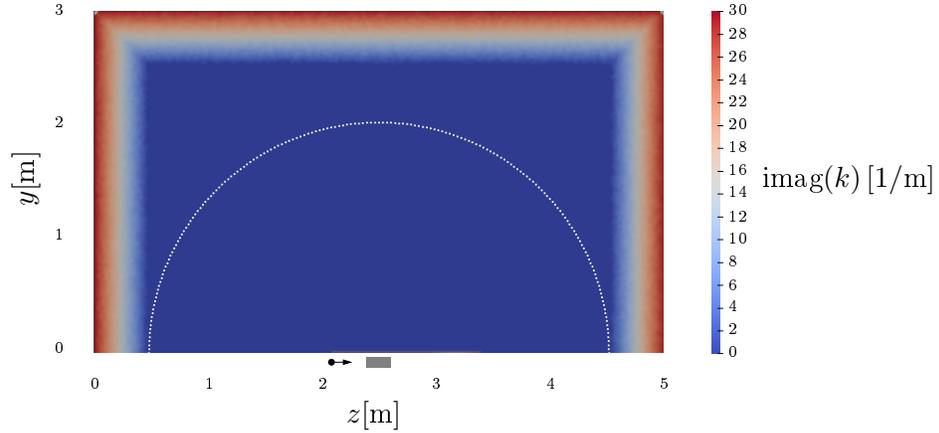
Con cada una de las geometrías propuestas, se realizó un estudio numérico utilizando una configuración de 20 celdas periódicas, y cada modelo se caracterizó de la siguiente manera:

1. Análisis mediante la matriz de transmisión, considerando toda la estructura periódica, es decir, se calculó el factor de fase  $\beta$  de toda la región periódica, y después se dividió entre el número de celdas, y posteriormente se obtuvo el ángulo  $\theta$  mediante la ecuación (131).
2. Análisis de radiación en campo lejano para confirmar los posibles lóbulos direccionales, por lo que para esta caracterización, se amplió el arreglo de micrófonos fuera de la antena para abarcar direcciones negativas y positivas (de *backfire* a *endfire*), como se muestra en la Figura 33.

Para este estudio, se utilizó un rango de frecuencias de estudio de 800 Hz a 3500 Hz.

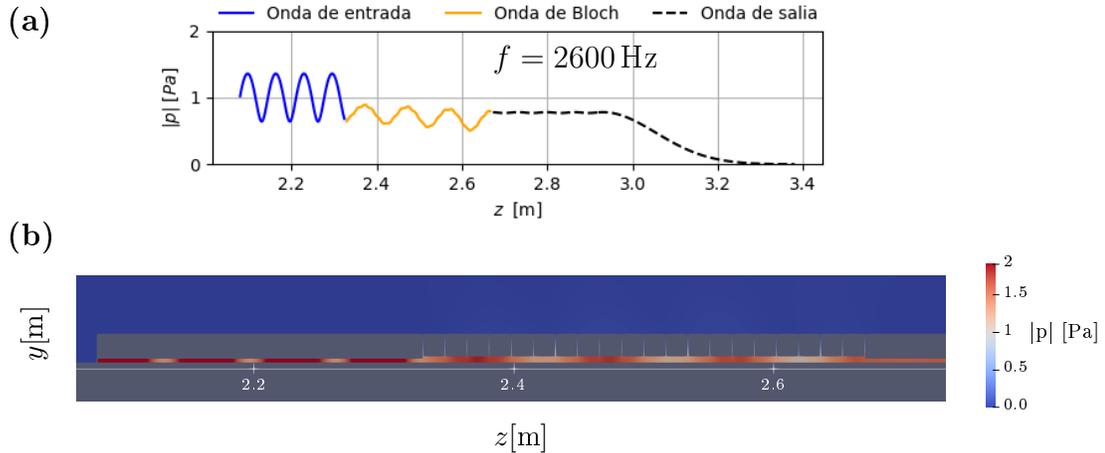


**Figura 32:** Modelos de geometrías exploradas. (a) Modelo simple, sin obstrucciones. (b) Iris. (c) Resonador de Helmholtz transversal a la guía de onda. (d) Doble cavidad con iris. (e) Doble cavidad con iris mas cerrados. (f) Cavidad elíptica y ancho de ranura no uniforme. (g) Cavidad triangular.



**Figura 33:** Posición de los micrófonos para llevar a cabo la caracterización angular de la radiación de la ALWA para diferentes geometrías.

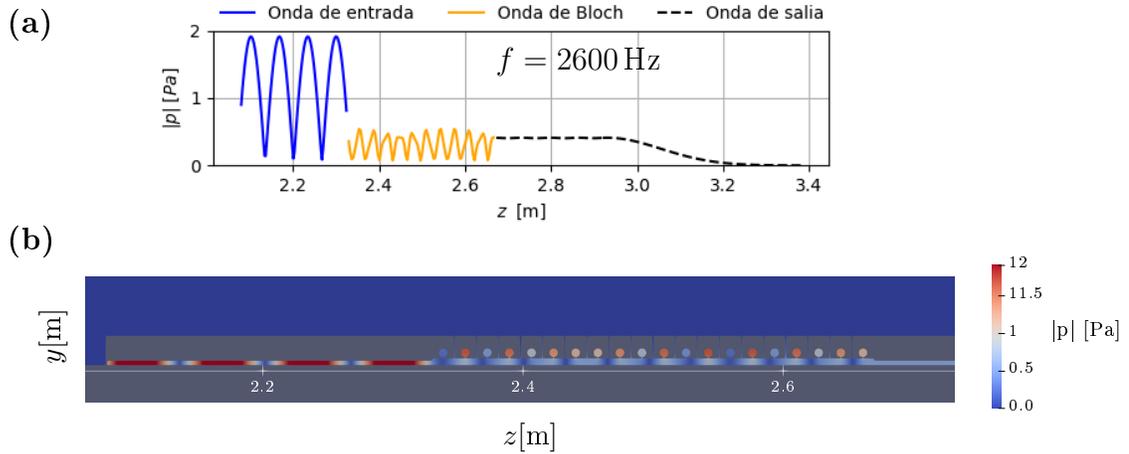
En la Figura 34.a, se repite el análisis en términos de la propagación de la onda dentro de la estructura de la ALWA sin obstrucciones (modelo A de la Figura 32), para otra frecuencia de fuga distinta a la de la Figura 29.b, y se vuelve a demostrar que la onda de Bloch exhibe una longitud de onda mayor a la longitud de onda en la guía de entrada. Esta información se corrobora en la visualización del perfil de propagación de los resultados numéricos para la misma frecuencia, mostrada en la Figura 34.b.



**Figura 34:** Propagación dentro de la ALWA de geometría definida, para la frecuencia de 2600 Hz. (a) Magnitud de la presión a lo largo de la estructura de la antena. (b) Perfil de propagación de los resultados numéricos. En ambos casos, la presión está normalizada con respecto a la amplitud de la onda incidente en la guía de entrada.

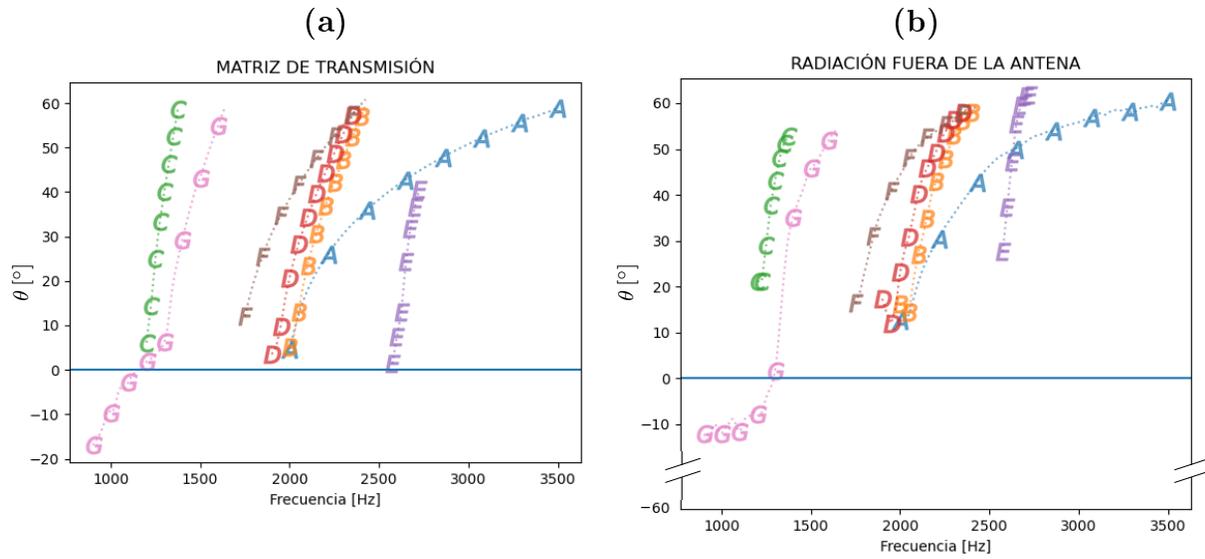
En las Figuras 35.a y 35.b, se presenta el mismo análisis de propagación dentro de la antena, pero para el modelo C de la Figura 32, que incluye resonadores de Helmholtz transversales en cada celda. En este caso, no se tiene una curva de dispersión teórica para saber si exhibirá radiación direccional y estimar su rango de operación, pero al observar que la onda

de Bloch exhibe una longitud de onda menor a la longitud de onda en la guía de entrada, se puede anticipar que no existe fuga sino una onda evanescente, al menos con esa frecuencia de estudio.

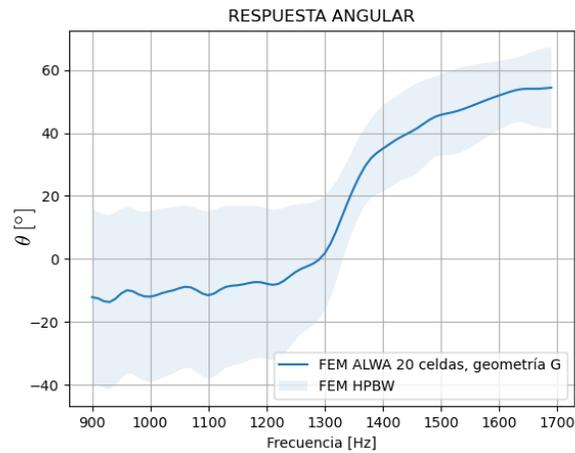


**Figura 35:** Propagación dentro de la ALWA que incluye resonadores de Helmholtz en cada celda, para la frecuencia de 2600 Hz. (a) Magnitud de la presión a lo largo de estructura de la antena. (b) Perfil de propagación de los resultados numéricos. En ambos casos, la presión está normalizada con respecto a la amplitud de la onda incidente en la guía de entrada.

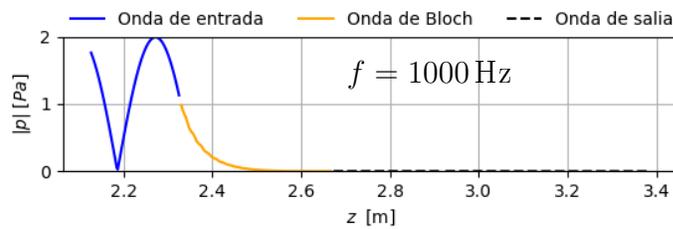
En la Figura 36.a, se muestra el resultado del estudio de las diferentes geometrías exploradas en términos del análisis de la matriz de transmisión, y en la Figura 36.b, se presenta el análisis de la radiación fuera de la antena; ambas figuras incluyen únicamente los valores de  $\theta$  correspondientes a lóbulos direccionales detectados. Se puede observar que en todos los casos explorados, se obtuvo radiación direccional, pero en diferentes frecuencias y en rangos de operación mucho menores al modelo sin obstrucciones. Una desventaja del análisis mediante la matriz de transmisión, es que estima la radiación desde ángulos muy cercanos a 0 grados, y eso no sucede en la aplicación real, ya que en el análisis de radiación fuera de la antena, el primer lóbulo detectado fue a partir de 12 grados en adelante. Otra diferencia fue que en algunos casos, el lóbulo de radiación medido no llegó al ángulo máximo de operación de 60 grados, algo no previsto en el análisis mediante la matriz de transmisión. Se destaca el resultado del modelo G (cavidades triangulares dentro de la celda), ya que de 900 Hz a 1150 Hz, se obtuvieron valores de  $\theta$  negativos en ambos análisis, pero al verificar ancho de haz de potencia media del lóbulo de radiación, en las direcciones negativas se tiene un lóbulo demasiado ancho y para la aplicación deseada, no se puede considerar como un lóbulo direccional, como se muestra en la Figura 37. El siguiente paso fue examinar la magnitud de la presión acústica dentro de la estructura de la antena y se encontró que las frecuencias para las cuales se obtuvieron valores de fase negativos, están fuera del rango que se puede propagar dentro de la estructura, y la onda de Bloch exhibe un decaimiento exponencial, como se puede observar en la Figura 38. Se puede inferir que si bien se encontró un corrimiento de fase negativo, la energía presente en la región de fuga no fue suficiente para que las celdas periódicas permitieran formar un lóbulo direccional.



**Figura 36:** Clasificación de los diferentes modelos de geometrías exploradas, en términos de la respuesta angular. (a) Análisis mediante la matriz de transmisión. (b) Análisis de radiación fuera de la antena.



**Figura 37:** Resolución angular de la ALWA con 20 celdas de geometría G (cavidades triangulares).



**Figura 38:** Magnitud de la presión acústica a lo largo de la estructura de una ALWA con modelo de celdas G, para la frecuencia de 1000 Hz.

# Conclusiones

---

En este trabajo, se han abordado diferentes fenómenos de propagación acústica dentro de guías de onda y en campo libre, como reflexión, transmisión, ondas guiadas y radiación. Dichos fenómenos resultan de la interacción de la onda con el tipo de estructuras utilizadas para construir la antena acústica tipo guía de onda ranurada ALWA.

Se demostró el comportamiento direccional dependiente de la frecuencia de una ALWA que opera de *broadside* a *endfire*, diseñada en modo emisor, para aire, mediante el estudio numérico implementado. De manera análoga a las antenas tipo guía de onda ranurada diseñadas en el campo del electromagnetismo, la característica directiva de la ALWA se puede utilizar para diseñar fuentes sonoras direccionales o sensores acústicos con la capacidad de localizar la dirección de arribo de una señal mediante un escaneo de frecuencias. Si bien la aplicación de localización de fuentes sonoras fue una de las motivaciones principales de este trabajo, el modelo aquí presentado es un primer paso de un sistema que podría tener algunas ventajas respecto a las técnicas de detección convencionales basadas en arreglos de dos o más micrófonos; sin embargo, el modo receptor de la antena, así como el procesamiento requerido para estimar la dirección de arribo, quedaron fuera de los alcances de este trabajo.

La teoría de modelos acústicos de elementos concentrados disponible para aproximar analíticamente una ALWA y desarrollada en el contexto de los metamateriales acústicos basados en la teoría de líneas de transmisión, se adaptó a un modelo de antena simple (sin membranas), y el resultado analítico se utilizó para validar el código empleado en el estudio numérico, mostrando buena correlación entre los datos teóricos y los datos numéricos. Además, se encontró que el modelo simple resultante tiene un rango de operación bastante amplio que incluye la región de fuga y la región de onda guiada, y se infiere que las condiciones de homogeneidad de celda unitaria y de elemento concentrado, no se cumplen para todas las frecuencias, algo no contemplado en el método analítico.

Si se desea modificar la frecuencia de diseño  $f_0$  y recorrer el rango de operación de la ALWA, se deben ajustar los parámetros geométricos de la antena que aparecen en algunas

expresiones: (68), que calcula la masa correspondiente a la guía de onda  $M_{wg}$ ; (69), que calcula la compliancia de la guía de onda  $C_{wg}$ ; y (60), que calcula la masa de la ranura  $M_{ra}$ . Resalta que no se tiene una expresión para obtener  $C_{ra}$  directamente de los parámetros geométricos, como en los casos anteriores, y que la ecuación (60) que calcula la masa de la ranura es una aproximación. Estos parámetros se relacionan con  $f_0$  mediante la expresión (88). Entonces, la manera de corroborar que  $f_0$  tiene el valor deseado, es mediante el método numérico, observando la primera frecuencia de operación de la antena.

Se destaca el atributo del método numérico para aproximar la corrección de extremo de la guía de onda radial o cavidad que se forma en la ranura axisimétrica utilizada en la ALWA, ya que no es común encontrar este tipo de geometrías en la teoría reportada para correcciones debido a la masa de radiación de cavidades pequeñas con extremos abiertos.

Se demostró que la resolución angular de una ALWA, está en función de la longitud de la antena, ya que a mayor número de celdas, se tiene un lóbulo más direccional, pero se debe tomar en cuenta que independientemente de la longitud de la antena, durante el direccionamiento del lóbulo principal, el centro del lóbulo no se mantiene fijo con respecto al centro geométrico de la antena y eso puede generar un sesgo en las mediciones de los micrófonos. También se debe tomar en cuenta la aparición de lóbulos secundarios que típicamente apuntan a direcciones no deseadas.

Se observa que la metodología basada en la ALWA operando en modo emisor para generar un patrón de radiación direccional, no es sensible a la energía de origen de la fuente sonora dentro de la antena, es decir, la resolución angular no depende de la cantidad de energía que emite la fuente sonora, mientras no se exceda el rango lineal de operación del sistema. Se infiere que en un sistema experimental, la cantidad de energía de la fuente sonora podría modificar la ganancia de los lóbulos resultantes, aunque esta información requiere de un estudio específico, el cuál no se incluyó en este trabajo.

Resalta la capacidad del método numérico al proporcionar diferentes maneras de validar los datos encontrados en cualquier análisis, como por ejemplo, los resultados del análisis mediante matriz de transmisión y radiación del modelo de celdas con geometría G (Sección 6.5), los cuales arrojaron valores de  $\theta$  negativos, pero el ancho del lóbulo que apunta a direcciones negativas, es tan grande, que se descarta porque queda fuera de las aplicaciones buscadas en este trabajo, y se pudo encontrar uno de los posibles motivos al verificar el comportamiento de la magnitud de la onda de Bloch para las frecuencias de interés. Sin embargo, dichos resultados de fase negativos, abren la posibilidad de seguir explorando geometrías similares u otro tipo de configuración de obstrucciones y cavidades para conseguir los mencionados ángulos de radiación negativos.

Una de las ventajas más importantes de la herramienta de código abierto FEniCS Project, es que en cada estudio numérico, permite automatizar la exploración de múltiples parámetros geométricos, y esto resulta particularmente útil en casos en donde las aproximaciones analíticas pueden resultar complicadas, ahorrando tiempo. Cabe mencionar que la relación entre parámetros geométricos de una ALWA es crítica, especialmente cuando se exploran

geometrías irregulares, por lo que se requiere de un estudio minucioso para encontrar una proporción que pudiera resultar ventajosa.

Se concluye que el método de elemento finito demuestra ser un método poderoso de análisis que brinda una aproximación cercana a la solución real del problema. Sin embargo, siempre es conveniente validar los resultados mediante evaluaciones teóricas o experimentales. Así mismo, cualquier estudio implica un entendimiento y tratamiento muy cuidadoso de los parámetros de simulación y de los resultados.

# REFERENCIAS

---

- [1] Joe C Chen, Kung Yao, and Ralph E Hudson. Acoustic source localization and beamforming: theory and practice. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2003(4):926837, 2003.
- [2] A Roederer, E Farr, LJ Foged, M Francis, R Hansen, R Haupt, and K Warnick. Ieee standard for definitions of terms for antennas, 2014.
- [3] William W Hansen. Radiating electromagnetic wave guide, June 25 1946. US Patent 2,402,622.
- [4] Arthur A Oliner, David R Jackson, and JL Volakis. Leaky-wave antennas. *Antenna engineering handbook*, 4:12, 2007.
- [5] Frédéric Bongard, Hervé Lissek, and Juan R Mosig. Acoustic transmission line metamaterial with negative/zero/positive refractive index. *physical Review B*, 82(9):094306, 2010.
- [6] Christina J Naify, Jeffrey S Rogers, Matthew D Guild, Charles A Rohde, and Gregory J Orris. Evaluation of the resolution of a metamaterial acoustic leaky wave antenna. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(6):3251–3258, 2016.
- [7] Omar A Bustamante, Roberto Velasco Segura, and Eduardo Romero Vivas. Estudio numérico de una antena acústica tipo guía de onda ranurada. *SOMI XXXIV Congreso de Instrumentación*, 2019. Publicación digital.
- [8] Hussein Esfahlani, Sami Karkar, Hervé Lissek, and Juan R Mosig. Exploiting the leaky-wave properties of transmission-line metamaterials for single-microphone direction finding. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(6):3259–3266, 2016.
- [9] Sabine Graf, William M Megill, Philippe Blondel, and Sally E Clift. Investigation into the possible role of dolphins’ teeth in sound reception. *Journal of the Acoustical Society of America*, 123(5):3360–3360, 2008.
- [10] HB Karplus. Acoustic waveguide designs for smooth transfer functions. Technical report, Argonne National Lab.(ANL), Argonne, IL (United States), 1974.
- [11] John Price. Acoustic waveguides. *University of Colorado, Boulder*, pages 14–31, 2008.

- [12] David T Blackstock. *Fundamentals of physical acoustics*. Acoustical Society of America, 2001.
- [13] Bryan H Song and J Stuart Bolton. A transfer-matrix approach for estimating the characteristic impedance and wave numbers of limp and rigid porous materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(3):1131–1152, 2000.
- [14] Lawrence E Kinsler, Austin R Frey, Alan B Coppens, and James V Sanders. Fundamentals of acoustics. *Fundamentals of Acoustics, 4th Edition, by Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens, James V. Sanders, pp. 560. ISBN 0-471-84789-5. Wiley-VCH, December 1999.*, page 560, 1999.
- [15] Mikhail Naguib Mikhail and Mostafa R El-Tantawy. Effect of the medium viscosity on sound propagation and attenuation in ducts. *Journal of computational and applied mathematics*, 45(3):283–298, 1993.
- [16] Seyyed Hussein Seyyed Esfahlani. *Electromagnetic Inspired Acoustic Metamaterials: Studying the Applications of Sound-Metastructures Interactions Based on Different Wave Phenomena*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2017.
- [17] RW Harris. Electromechanical analogies in acoustics. *Applied Acoustics*, 3(4):265–281, 1970.
- [18] Christophe Caloz and Tatsuo Itoh. *Electromagnetic metamaterials: transmission line theory and microwave applications*. John Wiley & Sons, 2005.
- [19] Nathan Marcuvitz. *Waveguide handbook*. Number 21. Iet, 1951.
- [20] David M Pozar. *Microwave engineering*. John wiley & sons, 2009.
- [21] Sam Hyeon Lee, Choon Mahn Park, Yong Mun Seo, Zhi Guo Wang, and Chul Koo Kim. Composite acoustic medium with simultaneously negative density and modulus. *Physical review letters*, 104(5):054301, 2010.
- [22] Guillermo Castaño Ochoa. Aplicación del método de los elementos finitos a la ecuación de helmholtz. 2013.
- [23] Mats G Larson and Fredrik Bengzon. *The finite element method: theory, implementation, and applications*, volume 10. Springer Science & Business Media, 2013.
- [24] Anders Logg, Kent-Andre Mardal, and Garth Wells. *Automated solution of differential equations by the finite element method: The FEniCS book*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2012.
- [25] Antonio Pérez López, Santiago Jesús Pérez Ruiz, and Elia Palacios González. Diseño, construcción y evaluación de una fuente sonora omnidireccional, conforme a las normas iso 140-3 e iso 3382.
- [26] W. R. Leo. Statistics and the treatment of experimental data. [https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Leo/Stats2\\_3.html](https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Leo/Stats2_3.html). Accedido 19-11-2020.

- [27] Allan D Pierce. *Acoustics: an introduction to its physical principles and applications*. Springer, 2019.

# Apéndices

## A. ALWA en modo receptor

Como se mencionó previamente, la aplicación en modo receptor de la ALWA quedó fuera del alcance de esta trabajo. Hasta donde los autores tienen noticia, para este tipo de dispositivo tanto el método de procesamiento de la señal capturada dentro de la antena, como las posibles aplicaciones, aún están en desarrollo. Sin embargo, a continuación se comentan brevemente algunos puntos.

El caso de la detección más sencilla, sería el de una fuente sonora con un contenido espectral plano, es decir, una fuente de ruido blanco, en donde la antena reforzaría selectivamente las frecuencias correspondientes al ángulo de arribo.

Evidentemente, en general las fuentes sonoras emiten señales con un contenido espectral no plano, es decir, con energía distribuida de manera no uniforme dentro del espectro de frecuencias. En estos casos se observa que la modificación del espectro que realiza la antena, y la dirección de arribo correspondiente, pudieran determinarse mediante comparación con una referencia. Es decir, si dicho espectro fuera previamente conocido, o registrado simultáneamente.

Se infiere que los resultados presentados en este trabajo, puedan alentar al desarrollo de este tipo de tecnologías, encontrando aplicaciones que podrían ser específicas dentro del amplio campo de la localización de fuentes sonoras.