



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS

DESARROLLOS EN ÓPTICA CUÁNTICA Y ÓPTICA DISCRETA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:
ROBERTO KENAN URIOSTEGUI UMAÑA

TUTOR PRINCIPAL:
DR. KURT BERNARDO WOLF BOGNER
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
DR. NATIG ATAKISHIYEV
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
DR. W. LUIS MOCHÁN
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS, UNAM

MÉXICO, CIUDAD DE MÉXICO, MAYO 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Miembros del Jurado Evaluador:

- Dr. Octavio Hector Castaños Garza
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM
- Dr. Kurt Bernardo Wolf Bogner
Instituto de Ciencias Físicas, UNAM
- Dr. Pablo Barberis Blostein
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM
- Dr. José Francisco Récamier Angelini
Instituto de Ciencias Físicas, UNAM
- Dr. Hector Moya Cessa
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Dedico este trabajo a Yuvia

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi esposa, Yuvia, por acompañarme durante este largo camino. Gracias por impulsarme y fortalecerme diariamente. Su amor y amistad ha sido el pilar principal para lograr esta meta que inició hace 10 años. Gracias por hacer equipo conmigo.

Al Dr. Kurt Bernardo Wolf tengo mucho que agradecerle. Gracias por introducirme a la simetría. Gracias por permitirme entrar a su grupo de Óptica Matemática hace 7 años, cuando comencé a trabajar en mi tesis de licenciatura, desde entonces su apoyo académico y personal han sido fundamentales para mi desarrollo profesional. En general, gracias por todo lo que me ha enseñado.

Quiero agradecer al Dr. José F. Récamier por todo lo que me enseñó en física cuántica, desde los primeros cursos de licenciatura hasta cursos avanzados durante el programa de doctorado. Gracias por hacer las veces de co-asesor de esta tesis en el tema mecanocuántico y por sus consejos profesionales.

Agradezco mucho a los Drs. Luis Mochán y Natig Atakishiyev por su apoyo como tutores de mi proyecto doctoral y también a los Drs. Octavio Castaños, Pablo Barberis y Hector Moya por fungir como sinodales de esta tesis.

Al Instituto de Ciencias Físicas UNAM, donde realicé mis estudios doctorales, agradezco permitirme el uso de sus instalaciones y el apoyo que me brindaron poniendo a mi disposición equipo de cómputo durante la pandemia por SARS-CoV-2.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) agradezco por apoyarme económicamente a través de su programa de becas de posgrado. También agradezco a la DGAPA por su apoyo a través del proyecto PAPIIT-AG100120.

Resumen

En esta tesis se abordan tres líneas de investigación diferentes: *discretización de transformadas canónicas lineales complejas, aproximación discreta de funciones especiales y estructuras algebraicas en sistemas optomecánicos*. Los trabajos realizados en cada línea se presentan en secciones separadas, cada una de ellas incluye una introducción, conceptos fundamentales y los resultados obtenidos en la investigación. La organización de las secciones y trabajos corresponde al orden cronológico de su desarrollo.

La sección 1 contiene el trabajo realizado en la discretización de la transformada de Bargmann. Se presentan dos esquemas de discretización distintos, el primero es un análogo discreto de la transformada de Bargmann y el segundo es una discretización de la transformada de Bargmann “normalizada” propuesta por Pei-Huang. El primer trabajo se basa en estados coherentes del modelo de oscilador armónico finito de $\mathfrak{su}(2)$, para ello se construyen estados coherentes como eigenestados del operador de aniquilación considerando que el índice n de pseudo-energía está en una *lattice* toroidal \mathbb{Z}_N , para N impar. Esta transformación discreta mapea las funciones de onda del oscilador finito a funciones de potencia complejas, tal como lo hace su análogo continuo; las funciones de onda del oscilador repulsivo de $\mathfrak{su}(1,1)$ se autoreproducen bajo la transformada de Bargmann discreta; y la dinámica bajo la transformada fraccional de Fourier en el espacio complejo de Bargmann corresponde, en esta transformada discreta, a la dinámica bajo la transformada fraccional de Fourier-Kravchuk. Para invertir la transformación, se propone usar una malla compleja de $N \times N$ la cual permite recuperar las funciones de oscilador finito con un error cuadrático medio del orden de 10^{-7} , cuando $N = 41$. El segundo trabajo se basa en la transformada de giración del modelo de oscilador finito de $\mathfrak{su}(2)$. La transformada de Bargmann normalizada mapea las funciones de Hermite-Gauss a funciones de Laguerre-Gauss; utilizando la analogía entre funciones de Hermite-Kravchuk y funciones de Laguerre-Kravchuk, se introduce la transformada de giración finita para definir la transformada de Bargmann normalizada discreta. Esta transformada finita es unitaria, por lo tanto invertible; y las funciones de oscilador repulsivo de $\mathfrak{su}(1,1)$ se autoreproducen cualitativamente. Además, en el espacio expandido por las funciones de oscilador de $\mathfrak{su}(2)$, la transformada de Bargmann normalizada discreta conmuta con la transformada de Fourier-Kravchuk.

En la sección 2 se presenta una discretización de las funciones de Bessel y funciones de Mathieu. Este trabajo se basa en el método de separación de variables de W. Miller Jr., aplicado a la ecuación de Helmholtz en coordenadas polares y elípticas. Este método hace patente que el grupo euclidiano es el grupo de simetrías de la ecuación de Helmholtz, sustituyendo en dicho grupo las rotaciones continuas por rotaciones discretas, es decir sustituir un grupo continuo por un grupo diédrico, se definen funciones discretas de Bessel y Mathieu. Las funciones discretas de Bessel se obtienen al hacer la separación de variables en coordenadas polares, estas funciones mantienen propiedades importantes de

sus análogos continuos, entre ellos la identidad de Graf e identidades lineales. Utilizando estas propiedades se propone una transformada discreta de Bessel entre posiciones y ‘modos’. Al separar las variables en coordenadas elípticas es posible definir funciones discretas de Mathieu angulares y radiales, estas funciones aproximan a sus contrapartes continuas con una diferencia que va de 10^{-14} a 10^{-16} con $N = 21$, en intervalos que convergen rápidamente al aumentar la cantidad de puntos N sobre los que se evalúa la serie de Fourier subyacente.

La sección 3 presenta un estudio de la estructura algebraica que describe la dinámica de una cavidad optomecánica compuesta por dos espejos perfectamente reflectantes, el primero se encuentra fijo mientras el segundo oscila alrededor de una posición de equilibrio. En el espacio que separa los espejos se consideran un campo electromagnético de dos modos débilmente acoplados entre sí. El fenómeno de interés en este estudio es el efecto Casimir dinámico y la forma en que se ve afectado por el acoplamiento de los modos de la cavidad. En este trabajo se identificó la estructura del hamiltoniano del sistema como una combinación lineal de los generadores del álgebra $\mathfrak{so}(3,2)$, utilizando la ecuación tipo Schrödinger que cumple el operador de evolución temporal se relacionó la trayectoria en el álgebra (hamiltoniano) con una trayectoria en el grupo $SO(3,2)$ a través del mapeo exponencial, lo que equivale a encontrar analíticamente el operador de evolución temporal del sistema. Una vez conocido el operador de evolución temporal se estudió el efecto Casimir dinámico, a través de la evolución de los valores esperados de los operadores de número. Se encontró que el acoplamiento entre los modos no afecta si uno de los modos se encuentra en resonancia mientras el otro modo no lo está, es decir el crecimiento de fotones del modo resonante no se modifica.

Publicaciones en las que se basa esta tesis:

- Kenan Uriostegui, “Discrete Bargmann transform”, *J. Opt. Soc. Ame. A* 36, No. 8, 1367–1373 (2019).
- Kenan Uriostegui. “Discrete normalized Bargmann transform”, *J. opt. Soc. Ame. A* 37, No. 6, 951–958 (2020).
- K. Uriostegui and K. B. Wolf, “Discrete Bessel functions and transform”, *ArXiv preprint*, arXiv:2005.06076 (2020).
(Submitted to *Numerical Methods for Partial Differential Equations*)
- K. Uriostegui and K. B. Wolf, “Discrete Bessel and Mathieu functions”, *Appl. Math. Inf. Sci.* 15, No. 3, 307–315, (2021).

Otras publicaciones:

- J. Román, K. Uriostegui, W. O. Guerrero, A. Figueroa and S. Cuevas, “Electromagnetically generated vortex streets in a narrow channel”, *Int. J. Heat Fluid Flow* 84, 108597 (2020).
- K. Uriostegui and K. B. Wolf, “ 2×2 Matrices: manifolds, realizations, applications”, (Submitted to *Applied Science*), (2021).

Índice general

Jurado Evaluador	iii
Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Índice general	xiii
Índice de figuras	xv
I Discretización de Transformadas Canónicas Lineales Complejas	1
1 Conceptos básicos	5
1.1 Oscilador armónico de $su(2)$	5
1.2 Transformadas canónicas lineales	13
2 Transformada de Bargmann discreta	21
2.1 Transformada de Bargmann y estados coherentes	22
2.2 Estados coherentes de $su(2)$	22
2.3 Transformada de Bargmann discreta	24
2.4 Conclusiones	31
3 Transformada de Bargmann normalizada discreta	33
3.1 Transformada de giración discreta	35
3.2 Transformada de Bargmann normalizada discreta	35
3.3 Conclusiones	40
II Aproximación Discreta de Funciones Especiales	43
4 Conceptos básicos	47
4.1 Grupo de simetría de la ecuación de Helmholtz	47
4.2 Separación de variables	49

5	Funciones de Bessel discretas	53
5.1	Esquema de discretización	53
5.2	Construcción de las funciones de Bessel discretas	55
5.3	Identidades lineales	56
5.4	Identidad de Graf	57
5.5	Aproximaciones del discreto al continuo	59
5.6	Transformada de Bessel discreta	61
5.7	Conclusiones	62
6	Funciones de Mathieu discretas	63
6.1	Funciones angulares de Mathieu discretas	63
6.2	Funciones radiales de Mathieu discretas	66
6.3	Conclusiones	69
III	Estructuras Algebraicas en Sistemas Optomecánicos	71
7	Conceptos básicos	75
7.1	Esquema de Schwinger	75
7.2	Hamiltoniano efectivo del sistema	77
8	Efecto Casimir dinámico	79
8.1	Estructura algebraica del modelo	79
8.2	Mapeo exponencial del álgebra $\mathfrak{so}(3,2)$	82
8.3	Evolución temporal del sistema	85
8.4	Conclusiones	88
	Bibliografía	89

Índice de figuras

1.1	Esfera $S_{j(j+1)}^2$ de los generadores del álgebra $\mathfrak{su}(2)$ en el oscilador finito. Los valores propios de cada operador están indicados con puntos sobre los respectivos ejes. . . .	7
1.2	Funciones de onda del oscilador finito $\phi_n(m)$ para $j = 32$, es decir, 65 puntos calculados para los estados de más baja energía $n = 0, 1, 2, \dots$, el estado intermedio $n = 32$, y los de más alta energía $n = 62, 63, 64$. Los puntos m están marcados con puntos \bullet y son conectados con líneas rectas. Las funciones de mayor energía son la versión con signos alternantes de las funciones de baja energía, simétricamente correspondientes con respecto al estado intermedio $n = j$	9
2.1	Transformada fraccional de Fourier-Kravchuk sobre los estados coherentes $\psi_z(m)$. Las columnas muestran DCS con valores $z = 4, 7, 10$ y las filas muestran su evolución con $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$. La línea a trozos muestra la parte real, la línea punteada es la parte imaginaria y la línea sólida representa el valor absoluto. Las posiciones m son discretas, pero han sido trazadas de forma continua para facilitar la visualización.	25
2.2	Transformada de Bargman discreta propuesta en (2.18). La columna izquierda muestra la función de onda de Kravchuk del modelo de oscilador discreto de $\mathfrak{su}(2)$, sometidas a la transformada de Bargmann \mathbf{B} . Aquí $j = 20$, por lo que las funciones de onda están definidas sobre 41 valores discretos. A la derecha se muestra las partes reales e imaginarias de la transformada de Bargmann sobre la malla discreta \mathcal{M}_c , de dimensión (41×41) . Los pixeles negros y blancos corresponden al mínimo y máximo, respectivamente, mientras que el cero es representado con un tono medio de gris. La aplicación de la transformada inversa (2.31) permite regresar a las funciones de Kravchuk con un error punto a punto que oscila entre 10^{-5} y 10^{-8}	28
2.3	Transformada de Bargmann discreta sobre funciones de onda del oscilador repulsivo discreto $\phi_{\lambda,1}^\kappa(m)$ en (2.40) para $j = 56$ y $\kappa = 49$. Las líneas a trozos representan la función de oscilador repulsivo (2.39) sobre $ m \leq 56 = j$; mientras que las líneas continuas representan su transformada de Bargmann discreta para enteros z en el subintervalo $ z \leq 28 = \frac{1}{2}j$. La columna izquierda compara las partes reales, mientras que la columna derecha muestra las partes imaginarias. Las filas muestran las energías $\mu = \kappa + \lambda = 1, 0$ y -1 , respectivamente donde el oscilador está arriba, sobre y debajo de la barrera, donde la partícula cuántica (viniendo de la izquierda) pasa sobre, se atasca, o tunelea la barrera.	31

- 3.1 *Izquierda:* Imágenes de los modos $2D$ de las funciones de Hermite-Kravchuk $\phi_{n_x, n_y}(m_x, m_y)$, de puntos $m_x, m_y|_{-j}^j$ para $j = 8$, ordenados por número de modo (n_x, n_y) . *Derecha:* Modos de Laguerre-Kravchuk $\Lambda_{n_x, n_y}(m_x, m_y)$, ordenados por número de modo total n y el modo diferencia μ . Al centro ($\mu = 0$) las funciones son reales, y a la derecha ($\mu > 0$) son la parte real de $\Lambda_{n_x, n_y}(m_x, m_y)$. Hacia la izquierda ($\mu < 0$) están la parte imaginaria de $\Lambda_{n_x, n_y}(m_x, m_y)$ 36
- 3.2 Funciones de Hermite-Kravchuk y su transformada de Bargmann normalizada discreta. Aquí $j = 20$ tal que hay 41 valores discretos, para facilitar la visualización se han unido con líneas rectas. *Izquierda:* Las funciones de onda (modos de Hermite-Kravchuk) del oscilador discreto y finito de $\text{su}(2)$, sujeto a la transformada discreta **NB**. *Derecha:* Partes real e imaginaria de la transformada de Bargmann normalizada discreta. Los pixeles grises corresponden al valor cero, los colores negro y blanco corresponden al mínimo y máximo, respectivamente. 37
- 3.3 La fila superior muestra la función f_s definida en (3.25) que ha sido muestreada sobre 41 puntos ($j = 20$); los puntos muestreados han sido marcados con \circ . La fila media muestra la transformada de Bargmann normalizada continua la función, y la fila inferior muestra la transformada discreta **NM** de la misma función intercambiando funciones de Hermite-Gauss por funciones Hermite-Kravchuk. Las transformaciones se muestran sobre un arreglo de 41×41 puntos. Los pixeles negros corresponden al valor cero, y los blanco corresponden al valor máximo. *Izquierda:* La función f_{10} está expandida solo por las primeras diez funciones de Hermite-Gauss, por lo que su transformada continua (muestreada) y su análogo discreto conservan grandes similitudes. *Derecha:* La función f_{41} está expandida por funciones de Hermite-Gauss que no tienen contraparte discreta para el tamaño j de la representación de $\text{su}(2)$ elegida. 39
- 3.4 Transformada de Bargmann normalizada discreta sobre las funciones de onda del oscilador repulsivo $\phi_{\kappa, \lambda}^{+1}(m)$ para $\kappa = 2$. Las filas corresponden a las energías $\mu = \kappa + \lambda = 1, 0$ y -1 donde, respectivamente, la partícula cuántica (que viene de la izquierda) pasa por encima de la barrera de potencial, coincide con su altura o es reflejada por la barrera. Las líneas discontinuas son las funciones del oscilador repulsivo sobre $|m| \leq 10 = j$, mientras la líneas sólidas muestran su transformada de Bargmann normalizada discreta. La columna izquierda muestra el traslape entre las partes reales, mientras la columna derecha muestra las partes imaginarias. 41
- 5.1 Comparación de valores de funciones de Bessel discretas $B_n^{2j+1}(m)$ (círculos abieros) y funciones de Bessel continuas $J_n(m)$ (líneas) en los mismo rangos. Se muestran los casos para $j \in \{10, 30, 50\}$, (i.e., $N \in \{21, 61, 101\}$ puntos discretos), para órdenes $n \in \{0, 10, 30, 50\}$, sobre los rangos $m \in [0, 3j]$ de posición. El error cuadrático medio es menor que 10^{-16} en los rangos $n + m \leq N - 1$ 60
- 5.2 Comparación de las fórmulas dadas por (5.34) y (5.35) para enteros $m \in [0, 100]$ (círculos abiertos), con $\sin(m)$ y $\cos(m)$ para posiciones continuas m (línea) en el mismo rango; aquí, $j = 50$ y $N = 101$ 61

5.3	Comparación de valores de funciones continuas y funciones de Bessel discretas, en los lados derecho e izquierdo de las fórmulas (5.36) y (5.37), como antes, con líneas continuas y círculos abiertos, en los mismos rangos para $j = 50$, $N = 101$	61
6.1	Conjunto discreto de puntos equiespaciados sobre elipses (6.1) de las coordenadas angulares $\{\psi_m\} \in \mathcal{S}_N^1$ para $N = 21$, e hipérbolas para coordenadas radiales $\varrho \in \{0.5, 1, 1.5\}$	64
6.2	Funciones angulares de Mathieu discretas <i>vs.</i> continuas para $N = 41$, $q = 2$. Los valores de las funciones discretas $ce_n^{(N)}(\psi_m, q)$ y $se_n^{(N)}(\psi_m, q)$ en ψ_m , $0 \leq m \leq N-1$, son indicadas por círculos. Las funciones de Mathieu continuas $ce_n(\psi, q)$ y $se_n(\psi, q)$ están marcadas por líneas negras en todo el rango $0 \leq \psi < 2\pi$. La diferencia es menor que 10^{-16} para todos los puntos ψ_m	65
6.3	Comparación entre las funciones angulares de Mathieu discretas $ce_0^{(N)}(\psi_m, q)$ cuyo argumento se ha graficado continuo $\psi_m \in \mathcal{S}^1$ (línea gris) <i>vs.</i> la función angular de Mathieu continua $ce_n(\psi, q)$ (línea negra), para número de puntos $N \in \{5, 11, 21\}$ y $q = 2$. Los puntos discretos $\psi_m \in \mathcal{S}_{(N)}^1$ son el conjunto de puntos de intersección. . .	66
6.4	Funciones radiales de Mathieu discretas <i>vs.</i> continuas en el intervalo $0 \leq \varrho < 3.3$, para $N \in \{5, 11, 21\}$ y con $q = 2$. Las funciones discretas $Ce_n^{(N)}(\varrho, q)$ y $Se_n^{(N)}(\varrho, q)$ con el argumento continuo ϱ (línea gris), es comparada con las funciones continuas $Ce_n(\varrho, q)$ y $Se_n(\varrho, q)$ (línea negra delgada). Donde ambas coinciden con error menor o igual a 10^{-16} son reemplazadas con líneas negras gruesas. Las funciones radiales de Mathieu, cuando son calculadas con el algoritmo comercial Wolfram Mathematica © oscilan fuertemente después de un valor superior que disminuye con valores crecientes de q	68
8.1	En la gráfica superior izquierda se muestra la evolución temporal del valor esperado de los modos $\langle \hat{n}_1(t) \rangle$ (línea roja) y $\langle \hat{n}_2(t) \rangle$ (línea azul) cuando se encuentran acoplados. En la gráfica inferior izquierda se muestra la suma de ambos modos. También se muestra una comparación de los modos cuando se encuentran acoplados y cuando no lo están. La gráfica superior derecha muestra la comparación del modo uno y la gráfica inferior derecha muestra la comparación del modo 2. En estos cálculos se consideran los valores $L = 1$, $q_0 = 1/12$ y $\Omega = 2$. El tiempo se encuentra expresado en unidades atómicas.	86
8.2	La primera fila muestra los valores esperados $\langle \hat{n}_1(t) \rangle$ (línea roja) y $\langle \hat{n}_2(t) \rangle$ (línea azul), la segunda muestra la suma de ambos modos. En la columna izquierda se ha considerado $L = 1.5$, mientras que en la columna derecha el valor es $L = 2$. Como antes, el tiempo se encuentra en unidades atómicas.	87

Parte I

Discretización de Transformadas Canónicas Lineales Complejas

En 1970, Stuart A. Collins Jr. escribió el kernel de las transformadas canónicas lineales (TCL) como un descriptor de la propagación de luz en el régimen paraxial [1]. Por otra parte, Marcos Moshinsky y Christiane Quesne, también en 1970, vieron en las TCL la clave para entender la conservación de la relación de incertidumbre de Heisenberg de la mecánica cuántica, además de considerarlas materia de interés intrínsecamente matemático [2, 3, 4]. Posteriormente, en 1974, Kurt Bernardo Wolf extendió formalmente el análisis de las TCL a valores complejos, complexificando el grupo $SL(2, \mathbb{R})$ para obtener un semigrupo de $SL(2, \mathbb{C})$ [5, 6, 7].

Actualmente, las TCL constituyen una herramienta matemática general con amplia aplicación en muchos campos de la ciencia y la ingeniería [8]. Quizá las más conocidas de ellas son: transformada de Fourier y transformada de Fresnel. Sin embargo, las TCL describen la respuesta de cualquier sistema de fase cuadrática [9] y combinaciones de tales sistemas. En óptica estos sistemas pueden ser lentes, propagación libre o propagación a través de medios con índice de refracción graduado. Pueden ser aplicadas a óptica de primer orden [10], láseres [11], procesamiento de imágenes [12], y otros. Su extensión compleja, transformadas canónicas lineales complejas, encuentra aplicaciones en teoría cuántica de campos [13], óptica cuántica [14], procesamiento de señales en el espacio fase [15], sistemas ópticos con pérdida o ganancia [16], etcétera.

Existen áreas donde un marco discreto para la aplicación de estas transformadas resulta natural y deseable, tal como el procesamiento de imágenes y señales, debido a que en el contexto digital las imágenes son un conjunto de valores discretos representados como píxeles en una pantalla. Mientras que las señales pueden ser tomadas a través de un conjunto finito de sensores. En este campo, la TCL más estudiada ha sido la transformada de Fourier y su versión fraccional. Los trabajos más representativos de sus discretizaciones son [17, 18], pero existe una vasta cantidad de trabajos al respecto. La discretización de las TCL también obedece a la generación de algoritmos computacionales más eficientes en tiempo y error, por lo que una exigencia es que el cálculo numérico de estas discretizaciones aproxime a sus versiones continuas con el mínimo error posible [19, 20]. Algunos métodos se valen de simetrías y otros convierten directamente las integrales en sumas [21]. Los trabajos de discretización más recientes son los de A. Koç, *et al.* [22] y D. Wei *et al.* [23], quienes se basan en la teoría de operadores hiperdiferenciales para presentar algoritmos discretos para calcular numéricamente transformadas canónicas lineales reales y complejas, respectivamente.

En esta sección se presentan dos análogos discretos de una transformada canónica lineal compleja, la transformada de Bargmann. Esta transformada es de especial interés en física, fue introducida por Valentine Bargmann en (1961) [13] con el propósito de establecer una conexión entre la representación de estados de Schrödinger y Fock. En el capítulo 2 se hace una revisión sucinta del modelo de oscilador finito de $su(2)$ sobre el que se construirán estados coherentes y en el que se basa la transformada de giración. De igual manera se hace un repaso de la teoría de transformadas canónicas lineales. En el capítulo 3 se presenta la transformada discreta de Bargmann de $su(2)$, y en el capítulo 4 se construye el análogo discreto de la transformada de Bargmann normalizada.

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1 Oscilador armónico de $\mathfrak{su}(2)$

El modelo de oscilador discreto y finito de $\mathfrak{su}(2)$ fue desarrollado por N.M. Atakishiyev, G.S. Pogosyan y K.B. Wolf [24, 25, 26], es la base de la transformada de Fourier-Kravchuk [27], ha sido usado en el desarrollo de métodos de rotación de arreglos Cartesianos de datos en varias dimensiones [28], en la descripción y corrección de aberraciones en sistemas discretos y finitos [29, 30], entre otras aplicaciones. A continuación se presentan los fundamentos del modelo.

1.1.1 El álgebra dinámica $\mathfrak{u}(2)$

Sean $\{J_i\}_{i=1}^3$ los generadores de $\mathfrak{su}(2)$ en la realización de momento angular [31]. Las relaciones de conmutación entre ellos son

$$[J_3, J_1] = iJ_2, \quad [J_3, -J_2] = iJ_1, \quad [J_1, J_2] = iJ_3. \quad (1.1)$$

Al tomar en cuenta una extensión generada por el operador $E_j := jI$ donde I es el operador identidad, se debe añadir a (1.1) la relación de conmutación $[J_k, E_j] = 0$. El operador E_j genera por sí mismo el álgebra $\mathfrak{u}(1)$ [32], por lo que se obtiene el álgebra de Lie $\mathfrak{u}(2) = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)$, de dimensión $2j + 1$ donde $j \in \mathbb{Z}^+$.

Para definir un modelo de oscilador armónico sobre $\mathfrak{su}(2)$, es necesario que los generadores del álgebra reciban una nueva identificación física,

$$\begin{array}{llll} J_1 = Q & \longleftrightarrow & \text{Posición} & m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}, \\ -J_2 = P & \longleftrightarrow & \text{Momento} & p \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}, \\ J_3 + (j + \frac{1}{2})I = H & \longleftrightarrow & \text{Hamiltoniano} & h \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, 2j + \frac{1}{2}\}, \end{array} \quad (1.2)$$

Se define el operador de número como

$$N = H - \frac{1}{2}I = J_3 + jI, \quad (1.3)$$

cuyo espectro es $n \in \{0, 1, \dots, 2j\}$.

En (1.1) los primeros dos conmutadores corresponden a las ecuaciones de Hamilton geométrica $[H, Q] = -iP$, y dinámica $[H, P] = iQ$ de un oscilador, mientras que el tercero es el conmutador "deformado" entre posición y momento que distingue el modelo de oscilador discreto y finito del modelo de oscilador continuo [32],

$$[Q, P] := iJ_3 = i \left(H - \left(j + \frac{1}{2} \right) I \right). \quad (1.4)$$

Siendo $\mathfrak{su}(2)$ un espacio compacto, el modelo comprende una colección discreta y finita de valores para las observables de posición, momento y modos de oscilación.

Es posible escoger la base de posición como una base de Kronecker. Dentro de la representación de dimensión $2j + 1$ en que el oscilador finito consiste de $2j + 1$ puntos equidistantes [33], hay $2j + 1$ eigenestados de Kronecker, denotados de la forma

$$Q|j, m\rangle_1 = m|j, m\rangle_1, \quad m|_{-j}^j \quad (1.5)$$

$$J^2|j, m\rangle_1 = [j(j+1)]|j, m\rangle_1. \quad (1.6)$$

La segunda eigenbase, llamada base de modo, se introduce como

$$H|j, n\rangle_H = \left(n + \frac{1}{2} \right) |j, n\rangle_H, \quad n|_0^{2j} \quad (1.7)$$

$$J^2|j, n\rangle_H = [j(j+1)]|j, n\rangle_H. \quad (1.8)$$

Los generadores J_1, J_2 y J_3 de $\mathfrak{su}(2)$, vistos como vectores en 3 dimensiones, pueden disponerse para formar un sistema de coordenadas ortogonal derecho, de modo que asociamos la representación irreducible etiquetada por j al espacio generado por este arreglo, esto es, la variedad geométrica S^2 de radio $j(j+1)$, como se muestra en la Figura 1.1. En este sentido la base propia de J_1 está relacionada con la eigenbase de J_3 por medio de una rotación de la esfera S^2 alrededor del eje J_2 , de la forma

$$J_1 = e^{-i\frac{1}{2}\pi J_2} J_3 e^{i\frac{1}{2}\pi J_2} \implies |j, m\rangle_1 = e^{-i\frac{1}{2}\pi J_2} |j, j+m\rangle_H. \quad (1.9)$$

En este modelo de oscilador finito están definidos los operadores de ascenso y descenso [34], de la siguiente manera

$$J_+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 + J_2), \quad J_- := \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 - J_2). \quad (1.10)$$

La acción de estos operadores sobre los elementos de la base de modo es:

$$J_+|j, n\rangle_H = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)(2j-n)}|j, n+1\rangle_H, \quad (1.11)$$

$$J_-|j, n\rangle_H = \sqrt{\frac{1}{2}n(2j-n+1)}|j, n-1\rangle_H, \quad (1.12)$$

cumpliéndose para el estado base $J_-|j, 0\rangle_H = 0$ y para el estado más alto $J_+|j, 2j\rangle_H = 0$. Es posible alcanzar cualquier estado propio de modo del oscilador finito, a través de la aplicación sucesiva de (1.11) sobre el estado base,

$$|j, n\rangle_H = \frac{2^{n/2}}{n!} \binom{2j}{n}^{-\frac{1}{2}} J_+^n |j, 0\rangle_H. \quad (1.13)$$

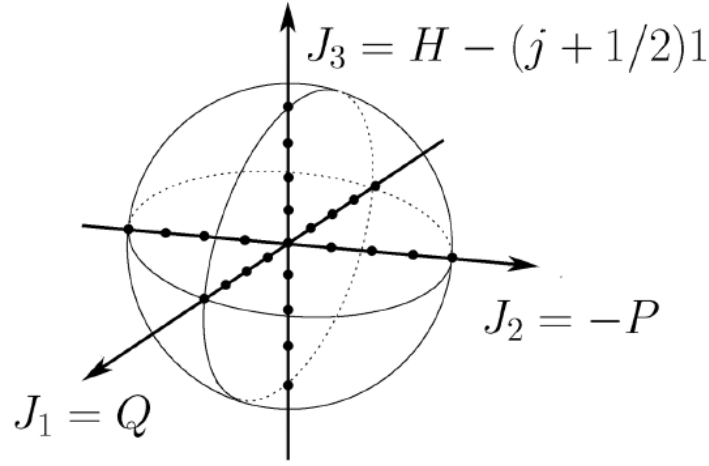


Figura 1.1: Esfera $S^2_{j(j+1)}$ de los generadores del álgebra $\mathfrak{su}(2)$ en el oscilador finito. Los valores propios de cada operador están indicados con puntos sobre los respectivos ejes.

1.1.2 Funciones de onda del oscilador discreto y finito

Las funciones de onda del oscilador finito son superposiciones entre vectores de la base de posiciones y la base de modo,

$$\phi_n(m) := {}_1\langle j, m | j, n \rangle_H, \quad n|_0^{2j}, \quad m|_{-j}^j. \quad (1.14)$$

Estas funciones forman un conjunto ortonormal en el espacio complejo de dimensión $2j + 1$,

$$\sum_{n=0}^{2j} \phi_n(m) \phi_n(m')^* = \delta_{m,m'}, \quad \sum_{m=-j}^j \phi_n(m) \phi_{n'}(m)^* = \delta_{n,n'}. \quad (1.15)$$

De (1.9), las funciones de onda están dadas por

$$\phi_n(m) = {}_H\langle j, j + m | e^{i\frac{1}{2}\pi J_2} | j, n \rangle_H = d_{n-j,m}^j\left(\frac{1}{2}\pi\right), \quad (1.16)$$

donde $d_{m,m'}^j(\beta)$ es la función “ d -pequeña” de Wigner [31], la cual puede expresarse en términos de funciones hipergeométricas Gaussianas, de la forma

$$\begin{aligned} d_{\mu,\mu'}^j(\beta) &= \frac{(-1)^{\mu-\mu'}}{(\mu'-\mu)!} \left(\frac{(j-\mu)!(j+\mu')!}{(j+\mu)!(j-\mu')!} \right)^{1/2} (\cos \frac{1}{2}\beta)^{2j+\mu-\mu'} (\sin \frac{1}{2}\beta)^{\mu-\mu'} \\ &\quad \times {}_2F_1(\mu'-j, -\mu-j; \mu'-\mu+1; -\tan^2 \frac{1}{2}\beta). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Puede obtenerse una relación de tres términos de la definición (1.14) de la función

de onda, usando los operadores de ascenso y descenso (1.11)–(1.12):

$$\begin{aligned}
m\phi_n(m) &= J_1\phi_n(m) = {}_1\langle j, m | J_1 | j, n \rangle_H \\
&= {}_1\langle j, m | \frac{1}{\sqrt{2}}(J_+ + J_-) | j, n \rangle_H \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} {}_1\langle j, m | J_+ | j, n \rangle_H + \frac{1}{\sqrt{2}} {}_1\langle N, m | J_- | N, n \rangle_H \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)(2j-n)} {}_1\langle j, m | j, n+1 \rangle_H + \frac{1}{2}\sqrt{n(2j-n+1)} {}_1\langle j, m | j, n-1 \rangle_H \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(n+1)(2j-n)}\phi_{n+1}(m) + \frac{1}{2}\sqrt{n(2j-n+1)}\phi_{n-1}(m), \tag{1.18}
\end{aligned}$$

Una relación de recurrencia define de manera unívoca una familia de polinomios ortogonales. La relación (1.18), es satisfecha por una función de los *polinomios simétricos de Kravchuk* de grado n en m ; definidos en términos de funciones hipergeométricas [35],

$$K_n(m; \frac{1}{2}, 2j) := {}_2F_1(-n, -j-m; -2j; 2) = (-1)^n K_n(2j-m; \frac{1}{2}, 2j). \tag{1.19}$$

Estos son polinomios ortogonales en el intervalo simétrico $[-j, j] \ni m$ de $2j+1$ puntos equidistantes.

Los polinomios de Kravchuk fueron originalmente introducidos como una generalización de los polinomios de Hermite, reemplazando su relación de ortogonalidad con función de peso Gaussiana e^{-x^2} sobre la línea real x , por una suma sobre $2j+1$ puntos con una distribución binomial como peso [36]. Dado que la función hipergeométrica en (1.19) es simétrica con respecto a su primer y segundo parámetro, se sigue que los polinomios de Kravchuk son “autoduales”, es decir $K_n(m; p, 2j) = K_m(n; p, 2j)$.

A través de los polinomios de Kravchuk con paridad definida $K_n(m; \frac{1}{2}, 2j)$, se definen las *funciones simétricas de Kravchuk* que identificamos como la función de onda del oscilador discreto y finito de $\mathfrak{su}(2)$ debido a que cumplen con la relación (1.18) de tres términos,

$$\phi_n(m) = \frac{(-1)^n}{2^j} \sqrt{\binom{2j}{n} \binom{2j}{j+m}} K_n(m; \frac{1}{2}, 2j), \tag{1.20}$$

con $n \in \{0, 1, \dots, 2j\}$. Estas funciones son base ortonormal para el espacio vectorial de dimensión $2j+1$.

La figura 1.2 muestra algunas funciones de onda del oscilador armónico finito. Se observa que para valores pequeños de n estas funciones se asemejan a las funciones de onda del oscilador armónico cuántico usual, mientras que para valores de n cercanos a j la semejanza se desvanece. Los estados con número de modo grande, tienen la misma envolvente que los estados con valores n pequeños, pero con signos alternantes entre vecinos. Esto se debe a la paridad de las funciones de onda

$$\phi_n(m) = (-1)^n \phi_n(-m), \tag{1.21}$$

lo cual puede entenderse como consecuencia directa de la paridad de los polinomios de Kravchuk (1.19), o bien por la simetría de las funciones d de Wigner (1.17).

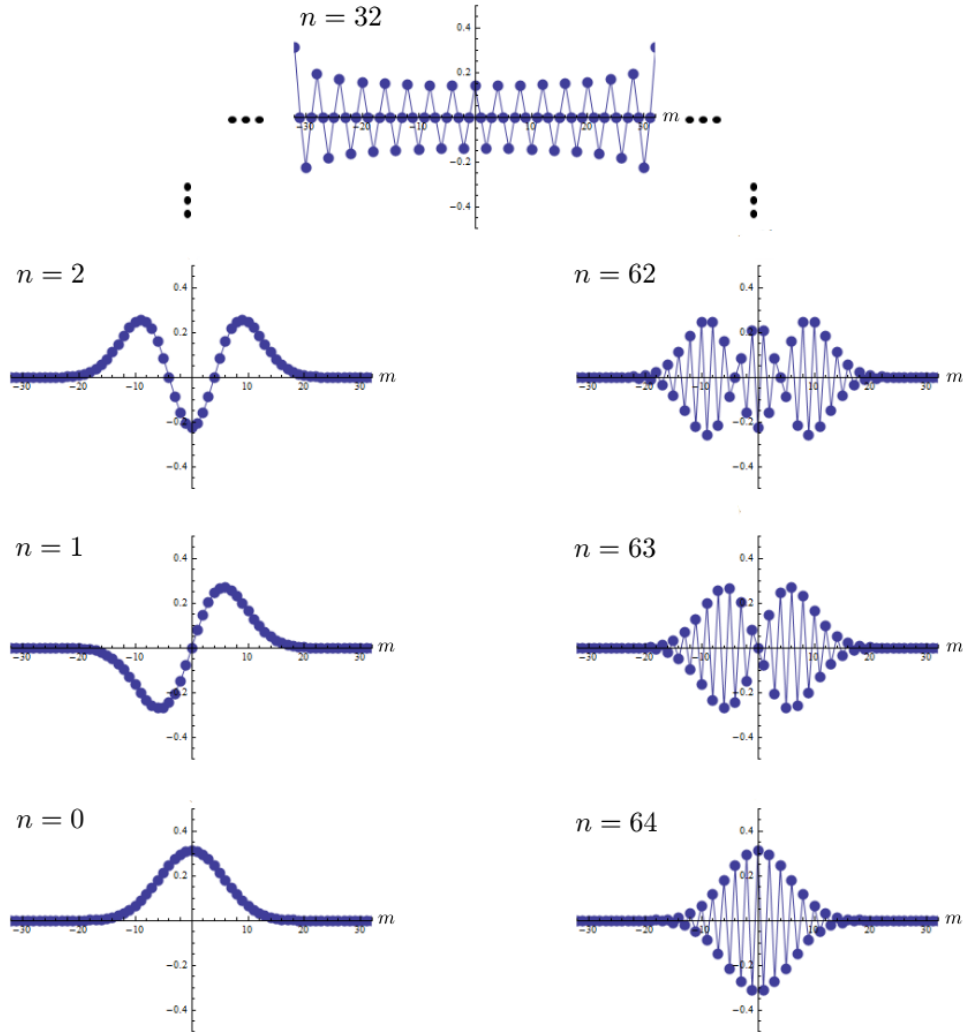


Figura 1.2: Funciones de onda del oscilador finito $\phi_n(m)$ para $j = 32$, es decir, 65 puntos calculados para los estados de más baja energía $n = 0, 1, 2$., el estado intermedio $n = 32$, y los de más alta energía $n = 62, 63, 64$. Los puntos m están marcados con puntos \bullet y son conectados con líneas rectas. Las funciones de mayor energía son la versión con signos alternantes de las funciones de baja energía, simétricamente correspondientes con respecto al estado intermedio $n = j$.

1.1.3 Ecuación de Schrödinger en diferencias finitas

La función de oscilador armónico discreto, $\phi_n(m)$, también cumple la siguiente ecuación en diferencias finitas, que relaciona tres puntos vecinos y que reemplaza a la ecuación diferencial de segundo grado de Schrödinger,

$$2(j-n)\phi_n(m) = \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\phi_n(m+1) + \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\phi_n(m-1), \quad (1.22)$$

reconocida como una ecuación de Schrödinger en diferencias, que define el modelo de oscilador de $\mathfrak{su}(2)$. Es posible escribir esta ecuación en forma espectral definiendo el operador [24]

$$H^{(2j)} = -\frac{1}{2} \left[\sqrt{(j+m+1)(j-m)}e^\delta - (2j+1) + \sqrt{(j+m)(j-m+1)}e^{-\delta} \right], \quad (1.23)$$

donde la acción del operador $e^{\omega\delta}$ es el desplazamiento $e^{\omega\delta}f(m) = f(m+\omega)$, para alguna función $f(m)$. Con el operador ‘hamiltoniano’ (1.23) se obtiene la ecuación espectral

$$H^{(2j)}\phi_n(m) = (n + \frac{1}{2})\phi_n(m), \quad n \in \{0, 1, \dots, 2j\}. \quad (1.24)$$

Al construir el álgebra generadora de espectro para este Hamiltoniano, se obtiene el álgebra de Lie asociada al grupo $\mathbf{SO}(3)$, el cual es isomorfo a $\mathbf{SU}(2)$. De modo que las funciones de oscilador discreto y finito $\{\phi_n(m)\}_{n=0}^{2j}$ para cada $j \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$, constituyen una base para todas las representaciones irreducibles de $\mathbf{SU}(2)$.

Finalmente, el doble conmutador del hamiltoniano y la posición, es $\left[H^{(2j)} \left[H^{(2j)}, m \right] \right] = m$, tal como ocurre en mecánica cuántica (haciendo $\hbar, \omega = 1$).

1.1.4 Evolución del oscilador

De la misma manera en que la transformada fraccional de Fourier, mediante la rotación del plano fase con respecto a un eje perpendicular a él, representa la evolución temporal del oscilador continuo, la transformada fraccional de Fourier-Kravchuk representa la evolución temporal del oscilador finito.

La transformada fraccional de Fourier-Kravchuk [17], sobre las funciones de onda de oscilador finito (1.20), es

$$\mathbf{K}^\alpha \phi_n(m) = e^{-i\frac{1}{2}\pi n\alpha} \phi_n(m), \quad \text{donde } \mathbf{K}^\alpha = e^{i\frac{1}{4}\pi\alpha} e^{-i\frac{1}{2}\pi\alpha H_m}. \quad (1.25)$$

Las matrices \mathbf{K}^α satisfacen las siguientes propiedades:

- Son unitarias: $(\mathbf{K}^\alpha)^\dagger = \mathbf{K}^{-\alpha}$.
- Es una raíz cuarta de la unidad: $\mathbf{K}^4 = \mathbf{1}$.
- Se componen de la forma: $\mathbf{K}^{\alpha_1} \mathbf{K}^{\alpha_2} = \mathbf{K}^{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Las matrices $\mathbf{K}^\alpha \in \mathbf{U}(1)$ representan un subgrupo de las matrices unitarias $\mathbf{U}(2)$; que generan rotaciones unitarias de las funciones de oscilador de $\mathfrak{su}(2)$, alrededor del eje J_3 (véase la figura 1.1).

Considerando que $\phi_n(m) = d_{n-j,m}^j(\frac{1}{2}\pi)$, los elementos de la matriz \mathbf{K}^α pueden expresarse como

$$\mathbf{K}_{m,m'}^\alpha = \sum_{n=0}^{2j} d_{m,n-j}^j(-\frac{1}{2}\pi) e^{-i\frac{1}{2}\pi n\alpha} d_{n-j,m}^j(\frac{1}{2}\pi) \quad (1.26)$$

$$= (-i)^{m-m'} e^{-i\frac{1}{2}\pi j\alpha} d_{m,m'}^j(\frac{1}{2}\pi). \quad (1.27)$$

El kernel de la transformación es unitario, $\mathbf{K}_{m,m'}^{-\alpha} = \left(\mathbf{K}_{m',m}^\alpha\right)^*$, y representa el grupo $\mathbf{SO}(2)$ con $\alpha \equiv \alpha \pmod{4}$.

1.1.5 Contracción del modelo

La contracción del álgebra de oscilador discreto y finito $\mathfrak{su}(2)$ extendida a $\mathbf{U}(2)$, al álgebra de oscilador $osc = \{H, Q, P, I\}$, donde I denota la unidad, ha sido ampliamente estudiada. En [26], los autores demuestran esta convergencia en el límite $j \rightarrow \infty$ realizando el siguiente cambio de base para los cuatro generadores de $\mathbf{U}(2)$ dentro de la representación irreducible j ,

$$\begin{pmatrix} Q_{(j)} \\ P_{(j)} \\ H_{(j)} \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 + \frac{1}{2}j^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & j^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ E_j \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

De las relaciones de conmutación (1.1) queda claro que las relaciones de conmutación para los nuevos generadores son:

$$\left[H_{(j)}, Q_{(j)} \right] = iP_{(j)}, \quad (1.29)$$

$$\left[H_{(j)}, P_{(j)} \right] = -iQ_{(j)}, \quad (1.30)$$

$$\left[Q_{(j)}, P_{(j)} \right] = iI + ij^{-1}H_{(j)}, \quad (1.31)$$

en el límite cuando $j \rightarrow \infty$, estas relaciones se convierten en las del álgebra de oscilador,

$$\left[H_{(\infty)}, Q_{(\infty)} \right] = iP_{(\infty)}, \quad (1.32)$$

$$\left[H_{(\infty)}, P_{(\infty)} \right] = -iQ_{(\infty)}, \quad (1.33)$$

$$\left[Q_{(\infty)}, P_{(\infty)} \right] = iI, \quad (1.34)$$

La contracción del operador $H_{(j)}$ se encuentra a través de (1.2), (1.28) y del operador de Casimir $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = j(j+1)I$,

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = j(Q_{(j)}^2 + P_{(j)}^2) + \left[H_{(j)} - (j + \frac{1}{2})I \right]^2, \quad (1.35)$$

desarrollando el término cuadrático y reagrupando,

$$j^{-1} (j(j+1) - (j + \frac{1}{2})^2) I = Q_{(j)}^2 + P_{(j)}^2 - 2H_{(j)} + j^{-1}(H_{(j)}^2 - H_{(j)}). \quad (1.36)$$

donde al tomar el límite cuando $j \rightarrow \infty$ se recupera el Hamiltoniano cuadrático del oscilador cuántico [26],

$$H_{(\infty)} = \frac{1}{2} \left(Q_{(\infty)}^2 + P_{(\infty)}^2 \right). \quad (1.37)$$

En [37, 38, 39], el autor analiza la contracción por medio de los operadores de ascenso y descenso (1.10). Considerando que, para $n \ll 2j \rightarrow \infty$ se tiene $\binom{2j}{n} \approx \frac{(2j)^n}{n!}$, se puede demostrar que

$$j^{-1/2} J_+ \xrightarrow{j \rightarrow \infty} A^\dagger, \quad j^{-1/2} J_- \xrightarrow{j \rightarrow \infty} A, \quad (1.38)$$

donde A y A^\dagger son los operadores de ascenso y descenso bosónicos de la mecánica cuántica. El conmutador entre J_+ y J_- se contrae a $[A, A^\dagger] = I$. El límite para el Hamiltoniano del oscilador se obtiene desde $J_1^2 + J_2^2 = (2j+1)H - H^2 - \frac{1}{4}$,

$$H = J_3 + (j + \frac{1}{2})I \xrightarrow{j \rightarrow \infty} H_{osc} = A^\dagger A + \frac{1}{2}I = \frac{1}{2}(P + Q) \quad (1.39)$$

en donde H_{osc} es el operador Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico estándar. En esta contracción, el espectro de los operadores de posición y momento de $2j+1$ puntos, crece en número, mientras la distancia entre los puntos decrece como $(2j)^{-1/2}$.

Debido a que las funciones de onda del oscilador finito son soluciones de la ecuación de Schrödinger en diferencias finitas (1.22), se sigue de la contracción del álgebra $u(2)$ que en el límite cuando $j \rightarrow \infty$ las funciones de Kravchuk $\phi_n(m)$ en (1.20) convergen a las funciones de onda de Hermite del oscilador cuántico ordinario. Sin embargo, en [26] los autores demuestran detalladamente dicha convergencia. Al tomar el límite $j \rightarrow \infty$, $n = m + j$ se mantiene finito, esto es, $m \rightarrow -\infty$. Usando funciones “ d -pequeña” de Wigner (1.17) y el cambio de variable $m \rightarrow j^{-1/2}\xi$, se demuestra que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^q j^{\frac{1}{4}} \phi_n(\xi) = \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{n+j} j^{\frac{1}{4}} d_{n-j, \xi}^j \left(\frac{1}{2}\pi \right) \quad (1.40)$$

$$= \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{(\pi)^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{n}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}}} H_n(\xi) =: \Phi_n(\xi), \quad (1.41)$$

donde $H_n(\xi)$ es el polinomio de Hermite ‘físico’ de grado n y $\Phi_n(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, son las funciones de onda normalizadas del oscilador armónico cuántico unidimensional continuo.

Como es de esperarse, cuando el kernel de la transformada fraccional de Fourier-Kravchuk dado por (1.27), converge al kernel de la transformada integral de Fourier,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{j} \mathbf{K}_{\xi, \xi'}^1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt{j} (-i)^{\xi - \xi'} e^{-ji \frac{1}{2} \pi} d_{\xi, \xi'}^j \left(\frac{1}{2} \pi \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi\xi'}, \quad (1.42)$$

el último término del lado derecho es el kernel integral de Fourier. Esta expresión se ha obtenido expresando la función $d_{\xi, \xi'}^j \left(\frac{1}{2} \pi \right)$ en términos de funciones hipergeométricas y suponiendo que es convergente al menos de manera puntual [17].

1.2 Transformadas canónicas lineales

Esta sección se basa en el capítulo 9 del libro *Integral Transforms in Science and Engineering* [8], donde el autor concentra una serie de trabajos publicados previamente.

La formulación Hamiltoniana de la mecánica clásica, permite obtener una comprensión más profunda de la dinámica de un sistema, por ejemplo, manifestando simetrías del sistema inicialmente ocultas en una primer selección de coordenadas (q, p) , que se hacen evidentes en otra (q', p') . Suponiendo el conjunto de variables (q, p) es canónico bajo el corchete de Poisson $\{q, p\} = 1$, la transformación $q \rightarrow q' = q'(q, p)$, $p \rightarrow p' = p'(q, p)$ se denomina *canónica* si preserva el corchete $\{q'(q, p), p'(q, p)\} = 1$. De modo que (q', p') constituye un segundo conjunto de coordenadas canónicas [12].

La mecánica cuántica reemplaza las observables por operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ y los corchetes de Poisson son sustituidos por conmutadores. En este esquema, los operadores posición Q y momento P , junto con el operador identidad I , cierran en un álgebra de Lie tridimensional y nilpotente conocida como álgebra de Heisenberg–Weyl, determinada por las relaciones de conmutación

$$[Q, P] = iI, \quad [Q, I] = 0, \quad \text{y} \quad [P, I] = 0. \quad (1.43)$$

donde se ha escogido $\hbar = 1$. En la realización de Schrödinger, los operadores Q y P se definen por su acción,

$$(Qf)(q) := qf(q), \quad (1.44a)$$

$$(Pf)(q) := -i \frac{d}{dq} f(q). \quad (1.44b)$$

con $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

En este esquema, una transformada canónica lineal estará dada por un operador C_M que produzca la transformación $Q \rightarrow Q' = Q'(Q, P)$, $P \rightarrow P' = P'(Q, P)$. Usando notación vectorial [8], la acción del operador C_M es

$$\begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = C_M \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} C_M^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dQ - bP \\ -cQ + aP \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

donde a, b, c y d son los elementos de matriz de \mathbf{M} ,

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{M} = 1, \quad (1.46)$$

esta provee la etiqueta del operador de la transformación. El conjunto de matrices (1.46) forman el grupo especial lineal de dimensión 2, denotado por $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ si sus elementos son reales y $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ si pertenecen al plano complejo.

El operador C_M puede actuar sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, de funciones $f(q)$, tal que

$$f(q) \xrightarrow{M} f_M(q') = (C_M f)(q'), \quad (1.47)$$

su acción es lineal,

$$C_M(c_1 f + c_2 g) = c_1 C_M f + c_2 C_M g, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad (1.48)$$

por lo que resulta sencillo encontrar la transformación de (1.44) y (1.45),

$$(C_M Q f)(q') = dq' f_M(q') + ib \frac{d}{dq'} f_M(q'), \quad (1.49a)$$

$$(C_M P f)(q') = -cq' f_M(q') - ia \frac{d}{dq'} f_M(q'). \quad (1.49b)$$

Nótese que, si $\mathbf{M} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ entonces las transformaciones (1.49) están $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

1.2.1 Transformadas canónicas reales

Una realización concreta del operador lineal C_M es a través de la transformada integral

$$f_M(q') = (C_M f)(q') := \int_{\mathbb{R}} dq f(q) K_M(q', q), \quad (1.50)$$

la integración toma lugar sobre toda la recta real. El kernel $K_M(q', q)$ de la transformación, puede encontrarse por medio de las ecuaciones (1.49), quedando determinado como

$$K_M(q', q) = (2\pi b)^{-1/2} e^{-i\pi/4} \exp [i(aq^2 - 2q'q + dq'^2)/2b]. \quad (1.51)$$

Para parámetros reales, (1.51) es una función que oscila fuertemente para valores grandes de q y q' , pero de módulo constante. La inversión de la transformada con parámetros reales, es sencillamente

$$(C_M^{-1} f_M)(q) = \int_{\mathbb{R}} dq' f_M(q') K_M(q', q)^*. \quad (1.52)$$

De aquí que, si $\mathbf{M} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ la transformación canónica C_M es un mapeo unitario de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en sí mismo. Entonces, por la unitariedad de la transformación se cumple la identidad de Parseval

$$(f, g) := \int_{\mathbb{R}} dq f(q)^* g(q) = \int_{\mathbb{R}} dq' f_M(q')^* g_M(q') = (f_M, g_M). \quad (1.53)$$

La inversa de la matriz \mathbf{M} en (1.46), es

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} d & e^{-i\pi b} \\ e^{i\pi b} & a \end{pmatrix}, \quad (1.54)$$

debe notarse que $e^{-i\pi b} = -b$. Entonces, de (1.51) y (1.54), tenemos que

$$K_{M^{-1}}(q', q) = K_M(q, q')^*. \quad (1.55)$$

A cada matriz \mathbf{M} corresponde una transformación $C_M f = f_M$ dada por (1.50). La composición de dos transformaciones con distintos parámetros, está dada por

$$C_{M_2,1} := C_{M_2} C_{M_1} = \varphi C_{M_2 M_1}, \quad \varphi \in \mathbb{C}, \quad (1.56)$$

donde

$$\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a_{21} & b_{21} \\ c_{21} & d_{21} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{21}. \quad (1.57)$$

El parámetro libre φ se debe a que la transformación de similaridad que involucra $C_{M_2,1}$ y $C_{M_2,1}^{-1}$ lo que permite que $C_{M_2,1}$ y $C_{M_2 M_1}$ difieran por un factor constante. En la realización integral, este factor constante se determina a través de un análisis en el plano complejo,

$$\int_{\mathbb{R}} dq' K_{M_2}(q'', q') K_{M_1}(q', q) = \varphi(b_{2,1}/b_2 b_1) K_{M_{21}}(q'', q), \quad (1.58)$$

donde

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \arg r \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1 & \text{Si } \arg r \in [-\pi, -\frac{1}{2}]. \end{cases} \quad (1.59)$$

Es de esperarse que la transformación identidad de C_M corresponda a $\mathbf{M} = \mathbf{1}$. Sin embargo, en este caso el kernel integral (1.51) queda indeterminado, y lo mismo pasa para toda matriz \mathbf{M} triangular inferior. De nuevo, extendiendo a valores sobre el plano complejo, se puede demostrar que

$$\lim_{|b| \rightarrow 0} K_M(q', q) = \frac{e^{icq'^2/2a}}{\sqrt{a}} \delta(q - \frac{q'}{a}), \quad (1.60)$$

con las condiciones

$$\arg\left(\frac{a}{b}\right) \in [0, \pi] \quad \text{y} \quad \text{Si } a = 0, \quad \text{entonces } \text{Im } b = 0. \quad (1.61)$$

De (1.60), cuando la matriz \mathbf{M} se acerca a la identidad, se tiene

$$\lim_{\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{1}} K_M(q', q) = \delta(q - q'). \quad (1.62)$$

El kernel integral actúa como un simple kernel reproductor de funciones bajo integración y constituye la identidad del grupo de transformaciones canónicas lineales reales.

La ecuación (1.60) también especifica la acción de los operadores de la clase de matrices triangulares inferiores, como

$$(C_{M(b=0)}f)(q) = \frac{e^{icq^2/2a}}{\sqrt{a}}f\left(\frac{q}{a}\right). \quad (1.63)$$

Esta es una transformación llamada *geométrica*; consiste de dilatación por a y multiplicación por gaussiana de ancho a/ic .

Subgrupos uniparamétricos

Dentro del grupo $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ de transformaciones C_M existen varias formas de definir subgrupos uniparamétricos, una forma que manifiesta propiedades interesantes, es:

- Subgrupo hiperbólico, definido como

$$\mathbf{M}_H := \begin{pmatrix} \cosh(\frac{1}{2}\alpha) & -\sinh(\frac{1}{2}\alpha) \\ -\sinh(\frac{1}{2}\alpha) & \cosh(\frac{1}{2}\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathcal{R}. \quad (1.64)$$

- Subgrupo parabólico, definido como

$$\mathbf{M}_P := \begin{pmatrix} e^{-\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{\beta/2} \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathcal{R}. \quad (1.65)$$

- Subgrupo elíptico, definido como

$$\mathbf{M}_E := \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\gamma) & -\sin(\frac{1}{2}\gamma) \\ \sin(\frac{1}{2}\gamma) & \cos(\frac{1}{2}\gamma) \end{pmatrix}, \quad \gamma \equiv \gamma \pmod{4\pi}. \quad (1.66)$$

Del último subgrupo, se obtiene el kernel integral de la transformada de Fourier cuando $\gamma = -\pi$, pero multiplicado por una fase,

$$C_F = e^{-i\frac{1}{4}\pi}F, \quad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.67)$$

Una descomposición general de las transformadas canónicas que involucra a la transformada de Fourier, es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a/b & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

esto significa que una función es primero multiplicada por una gaussiana de ancho imaginario, luego se toma su transformada de Fourier y finalmente es sometida a una transformación geométrica.

1.2.2 Transformadas canónicas complejas

A pesar de haber utilizado el plano complejo para justificar el valor del factor constante φ de la composición de transformaciones y la forma de la transformación cuando $b = 0$, se han restringido los valores a, b, c y d (entradas de la matriz \mathbf{M}) a los reales. Cuando se permite que $\mathbf{M} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, la forma del kernel (1.51) con las restricciones (1.61) y sus propiedades de composición. Sin embargo, la transformación pierde su unitariedad, además ya no se trata de un mapeo de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en sí mismo, por lo que la fórmula de inversión (1.52) falla. Los operadores en (1.45) ya no son autoadjuntos bajo el producto interno definido en (1.53), en su lugar se tiene

$$\begin{pmatrix} Q^\dagger \\ P^\dagger \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{*-1} \begin{pmatrix} Q^\dagger \\ P^\dagger \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{*-1} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{M} \begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix}, \quad (1.69)$$

donde \mathbf{M}^* está formada por los elementos complejos conjugados de \mathbf{M} y $\mathbf{M}^{*-1} \mathbf{M} = \mathbf{1}$ si y solo si \mathbf{M} es real.

Para recuperar la unitariedad de la transformación y la inversión de la misma, se usa el producto interno sesquilineal que Bargmann propuso en [13],

$$(f, g)_M := \int_{\mathbb{C}} d^2\omega_M(q, q^*) f(q)^* g(q), \quad (1.70)$$

donde la integral se toma en q sobre todo el plano complejo \mathbb{C} , con la medida

$$d^2\omega_M(q, q^*) = \nu_M(q, q^*) d\text{Re } q d\text{Im } q =: \nu_M(q, q^*) d^2q. \quad (1.71)$$

La función de peso $\nu_M(q, q^*)$ depende de los valores de \mathbf{M} , y de las variables independientes q y q^* [5],

$$\nu_M(q, q^*) := \left(\frac{2}{\pi v} \right)^{1/2} \exp \left[\frac{1}{2v} (uq^2 - 2qq^* + u^*q^{*2}) \right], \quad (1.72)$$

donde

$$u := a^*d - b^*c, \quad iv := b^*a - a^*b, \quad iw := c^*d - d^*c. \quad (1.73)$$

De modo que existe una matriz de conjugación \mathbf{N} ,

$$\mathbf{N} := \begin{pmatrix} u & iv \\ iw & u^* \end{pmatrix}, \quad \text{tal que} \quad \begin{pmatrix} Q^\dagger \\ P^\dagger \end{pmatrix} = \mathbf{N}^{-1} \begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix}, \quad (1.74)$$

con $|u|^2 + vw = 1$. Note que $v = 2 \text{Im}(b^*a)$, considerando las condiciones (1.61), tenemos que $v \geq 0$ por lo que la función de peso (1.72) está bien definida. Esta medida arregla la identidad de Parseval para \mathbf{M} en los complejos

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} dq f(q)^* g(q) = \int_{\mathbb{C}} \nu_M(q, q^*) d^2q f_M(q)^* g_M(q) = (f_M, g_M)_M. \quad (1.75)$$

Habiendo obtenido esta identidad, se encuentra la transformación inversa haciendo uso de la delta de Dirac. La transformada compleja de la delta de Dirac $\delta_p = \delta(q - p)$, es

$$(C_M \delta_q)(q') =: K_M(q', q)^*, \quad (1.76)$$

ahora, sustituyendo $K_M(q', q)^*$ en (1.75) con una función continua $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, se tiene

$$f(q) = (K_M^*, f) = \int_{\mathbb{C}} \nu_M(q', q) d^2 q' f_M(q') K_M(q', q)^*. \quad (1.77)$$

Sustituyendo f_M por (1.50) en la integral de (1.77), se tiene

$$\int_{\mathbb{C}} \nu_M(q', q'^*) d^2 q' K_M(q', q'') K_{M'}(q', q)^* = K_{M'^*-1 M^*}(q'', q) \xrightarrow{M' \rightarrow M} \delta(q - q''), \quad (1.78)$$

regresando a (1.77), se obtiene de regreso la función $f(q)$, lo que demuestra que

$$(C_M^{-1} f_M)_M = \int_{\mathbb{C}} \nu_M(q', q) d^2 q' f_M(q') K_M(q', q)^* \quad (1.79)$$

es la transformada canónica inversa en el espacio determinado por el producto interno (1.70).

Transformada y espacio de Bargmann

Un caso particular de transformada canónica lineal compleja es la *transformada de Bargmann*, denotada por C_B . Esta fue introducida por V. Bargmann en 1961, con el propósito de proveer una relación entre el espacio de estados de Schrödinger y el espacio de estados de Fock [13]. En este formalismo, la matriz de la transformación es

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.80)$$

El kernel integral y función de peso con estos parámetros, son

$$K_B(q', q) = \frac{1}{\sqrt{2^{1/2} \pi}} \exp(-q^2 + \sqrt{2} q q' - q'^2), \quad (1.81)$$

$$\nu_B(q', q'^*) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp(-|q'|^2), \quad u_B = 0, v_B = 1. \quad (1.82)$$

El espacio \mathcal{B} de funciones enteras f_B con medida $d^2 \omega_B(q, q^*)$, es llamado espacio de Segal-Bargmann, o sencillamente *espacio de Bargmann*. \mathcal{B} es un espacio de Hilbert y C_B es un operador unitario.

Una característica importante de la transformada de Bargmann es su acción sobre los operadores $Z^\dagger = 2^{-1/2}(Q - iP)$ y $Z = 2^{-1/2}(Q + iP)$ de ascenso y descenso, respectivamente,

$$C_B Z^\dagger = Q C_B, \quad C_B Z = i P C_B. \quad (1.83)$$

La aplicación del operador de ascenso del oscilador armónico Z^\dagger sobre $f(q)$ multiplica su transformada de Bargmann $f_B(q')$ por q' , mientras que el operador de descenso Z sobre $f(q)$ se transforma en d/dq' actuando sobre $f_B(q')$. Además, en el espacio de Bargmann Q es el adjunto de iP y viceversa,

$$(Qf_B, g_B)_B = (f_B, iPg_B)_B. \quad (1.84)$$

Otra característica importante de la transformada de Bargmann, es que convierte las funciones de oscilador armónico cuántico $\Phi_n(q)$ en funciones potencia en el plano complejo \mathbb{C} ,

$$(C_B \Phi_n)(q') = \left(\sqrt{2\pi} n!\right)^{-1/2} q'^n =: \Phi_n^B(q'). \quad (1.85)$$

Debido a que el conjunto $\{\Phi_n(q)\}_{n=0}^\infty$ constituye una base ortonormal y completa para $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, y la transformada de Bargmann es unitaria, se sigue que el conjunto $\{\Phi_n^B(q')\}_{n=0}^\infty$ constituye una base ortonormal y completa para el espacio de Bargmann \mathcal{B} . Así, las matemáticas de sistemas descritos en términos de funciones de onda del oscilador armónico son particularmente sencillas en el espacio de Bargmann, ya que únicamente involucran funciones potencia.

El kernel integral de la transformada de Bargmann, tiene una representación que relaciona las dos bases ortonormales,

$$K_B(q', q) = \frac{1}{\sqrt{2^{1/2}\pi}} \exp\left(-q^2 + \sqrt{2}qq' - q'^2\right) = (2\pi)^{-1/4} \sum_{n=0}^\infty \frac{q'^n}{\sqrt{n!}} \Phi_n(q). \quad (1.86)$$

La última igualdad se obtiene mediante la función generadora de los polinomios de Hermite [8]. La relación (1.86) establece que el kernel de la transformada de Bargmann es un estado coherente del oscilador armónico cuántico. La relación entre estas dos bases conduce a la función llamada *kernel reproductor*, definido como

$$G(q_1, q_2) := \int_{\mathbb{R}} dq K_B(q_1, q) K_B(q, q_2)^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(q_1 q_2^*). \quad (1.87)$$

La cual posee la propiedad

$$\int_{\mathbb{C}} \nu_B(q_1, q_1^*) d^2 q_1 f_B(q_1) G(q_2, q_1) = f_B(q_2), \quad (1.88)$$

para toda $f_B \in \mathcal{B}$. De modo que en el espacio de Bargmann, $G(q_1, q_2)$ toma el rol de la delta de Dirac de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Capítulo 2

Transformada de Bargmann discreta

La transformada de Bargmann es una transformación unitaria integral entre las funciones de cuadrado integrable sobre la recta real $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ y funciones analíticas $f_B(\alpha)$ sobre el plano complejo \mathbb{C} que son elementos de un espacio de Hilbert $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ llamado *espacio de Bargmann*. La transformada de Bargmann $\mathcal{B} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ está definida por un operador integral con kernel gaussiano,

$$(\mathcal{B}f)(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} dx K(\alpha, x) f(x) = f^{\mathcal{B}}(\alpha), \quad (2.1)$$

$$K(\alpha, x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{2}\alpha x - \frac{1}{2}x^2\right) \quad (2.2)$$

El espacio de Bargmann está dotado con el producto interno y medida gaussiana

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{B}} = \int_{\mathbb{C}} d\omega(\alpha) f^*(\alpha) g(\alpha), \quad d\omega(\alpha) = \pi^{-1} e^{-|\alpha|^2} d^2\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.3)$$

donde $d^2\alpha = d\operatorname{Re}\alpha d\operatorname{Im}\alpha$. Finalmente, la transformada inversa de Bargmann $\mathcal{B}^{-1} : \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ mapea funciones a través de la integración sobre el plano complejo, con el conjugado complejo del mismo kernel integral

$$(\mathcal{B}^{-1} f^{\mathcal{B}})(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{C}} d\omega(\alpha) K(\alpha, x)^* f^{\mathcal{B}}(\alpha) = f(x). \quad (2.4)$$

El objetivo original para introducir esta transformada integral fue enlazar las representaciones de Schrödinger y Fock de los estados de oscilador armónico. En este trabajo se provee una transformada de Bargmann discreta y finita en correspondencia con (2.1)–(2.2), basada en el modelo de oscilador armónico discreto y finito de $\mathfrak{su}(2)$, que mantiene sus propiedades básicas.

La construcción está basada en estados coherentes del modelo de oscilador finito, como eigenvectores del operador de descenso de $\mathfrak{su}(2)$. De estos se extrae la propuesta de kernel de transformación y se prueba su dinámica bajo la transformada de Fourier-Kravchuk. Primero se permite que el parámetro α sea continuo en todo el plano complejo

y se encuentran sus limitaciones. Posteriormente se define un conjunto finito de puntos complejos sobre los que se permite que α tome valores. Se verifica que esta transformación lleve las funciones de oscilador armónico finito a funciones potencia en el plano complejo. Similarmente, se verifica que las funciones de oscilador repulsivo discreto se auto reproduzcan. Se muestra que tanto los estados coherentes discretos como el kernel de la transformada de Bargmann discreta convergen a su contraparte continua cuando el número de puntos y su densidad crecen sin límite. Los resultados de este trabajo fueron publicados en [40].

2.1 Transformada de Bargmann y estados coherentes

Siguiendo cualquiera de los tres caminos posibles para definir estados coherentes [41], se llega a la siguiente forma

$$\Psi_\alpha(x) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \Phi_n(x), \quad (2.5)$$

siendo $\Phi_n(x)$ las funciones de onda del oscilador armónico cuántico,

$$\Phi_n(x) = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{1}{2}x^2) H_n(x), \quad (2.6)$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite.

Sustituyendo (2.6) en (2.5) y usando la función generadora de los polinomios de Hermite

$$\exp(2\gamma x - \gamma^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n!} H_n(x) \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad (2.7)$$

se encuentra que el kernel integral (2.2) es un estado coherente [13],

$$K(\alpha, x) = \tilde{\Psi}_\alpha(x) = (\pi)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{2}\alpha x - \frac{1}{2}x^2\right), \quad (2.8)$$

donde $\tilde{\Psi}_\alpha(x)$ es el estado (2.5) sin el factor de normalización $e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$. Por esta razón, la transformada de Bargmann es llamada transformada de estados coherentes por algunos autores [42, 43].

2.2 Estados coherentes de $\mathfrak{su}(2)$

Debido a la estrecha relación entre la transformada de Fourier y la dinámica del oscilador armónico cuántico, diversos autores han propuesto modelos discretos [43, 44, 45, 46, 47], dentro de los cuales definen estados coherentes. En [48], K. B. Wolf y G. Krötzsch, construyen estados coherentes “tipo Glauber” para el modelo de $\mathfrak{su}(2)$ a través del operador de desplazamiento en $SU(2)$. Aquí se definen estados coherentes “tipo Perelomov” como eigenvectores del operador de descenso entre los estados de $\mathfrak{su}(2)$. En adelante se usarán operadores y funciones del modelo de oscilador discreto y finito de $\mathfrak{su}(2)$ definidos en el capítulo anterior.

2.2.1 Estados coherentes discretos

En analogía con la mecánica cuántica (continua), se definen operadores de ascenso y descenso a través de los operadores definidos en (1.2)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP), \quad \text{y} \quad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP), \quad (2.9)$$

cuya acción sobre las funciones de onda de Kravchuk (1.20), es

$$\begin{aligned} A\phi_n(m) &= \sqrt{\frac{1}{2}n(2j+1-n)}\phi_{n-1}(m), \\ A^\dagger\phi_n(m) &= \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)(2j-n)}\phi_{n+1}(m), \end{aligned} \quad (2.10)$$

y su relación de conmutación en la base $\{\phi_n\}$ es $[A, A^\dagger] = (n-j)\mathbf{1}$, con lo que nos mantenemos dentro de los casos físicamente realizables según [49].

El modelo de oscilador de $\mathfrak{su}(2)$ es finito en posiciones y modos, pero si pedimos que el número de modo n se encuentre en la malla toroidal \mathcal{Z}_N , es decir $n \equiv n \pmod{N}$, siendo $N = 2j + 1$ con $j \in \mathbb{Z}^+$ la dimensión de la representación irreducible de $\mathfrak{su}(2)$, tal que

$$A\phi_0(m) = \phi_{2j}(m) \quad \text{y} \quad A^\dagger\phi_{2j}(m) = \phi_0(m), \quad (2.11)$$

es posible definir estados coherentes $\psi_z(m)$ discretos como eigenvectores del operador de aniquilación, esto es

$$A\psi_z(m) = z^*\psi_z(m), \quad \text{donde} \quad \psi_z(m) = C_z \sum_{n=0}^{2j} \omega_n \phi_n(m). \quad (2.12)$$

Haciendo uso de (2.10), se encuentra una relación de recurrencia para ω_n que lleva a la siguiente expresión para los estados coherentes discretos (DCS) de tipo Perelomov [50] es

$$\psi_z(m) := C_z \sum_{n=0}^{2j} \frac{2^{n/2}}{n!} \binom{2j}{n}^{-\frac{1}{2}} (z^*)^n \phi_n(m), \quad (2.13)$$

y el término de normalización es

$$C_z := \left[\sum_{n=0}^{2j} \frac{2^n}{(n!)^2} \binom{2j}{n}^{-1} |z|^{2n} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.14)$$

En el modelo de oscilador de $\mathfrak{su}(2)$, las definiciones de estados coherentes a lo largo de las líneas de Perelomov [50] y Glauber [51] no son equivalentes entre sí. Esto se debe a la naturaleza finita de las sumas resultantes de la acción del operador de descenso [52].

2.2.2 Transformada fraccional de Fourier-Kravchuk sobre DCS

La transformada fraccional de Fourier como subgrupo cíclico y uniparamétrico de $U(1)$ del grupo de Lie $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$ de transformaciones canónicas lineales en la mecánica cuántica unidimensional, tiene aplicaciones en el estudio del oscilador armónico [2], la óptica ondulatoria paraxial [1] y el procesamiento de señales [21]. En [17], los autores construyen una transformada fraccional de Fourier basada en el modelo de oscilador armónico discreto y finito (Fourier-Kravchuk); en [48] analizan la dinámica de estados coherentes construidos mediante el operador de desplazamiento de $SU(2)$. En esta sección se presenta la dinámica de los DCS tipo Perelomov (2.13) bajo la transformada fraccional de Fourier-Kravchuk (FFKT) \mathbf{F}^γ , $\gamma \in (-\pi, \pi]$. Actuando sobre funciones de variable discreta y finita, $f(m)$, $m \in \{-j, -j+1, \dots, j\}$, se define la FFKT como

$$\mathbf{F}^\gamma f(m) = \sum_{m'=-j}^j F^\gamma(m', m) f(m) \quad \text{donde} \quad F^\gamma(m', m) = \sum_{n=0}^{2j} \phi_n(m) e^{-in\gamma \frac{\pi}{2}} \phi_n(m'). \quad (2.15)$$

La acción de esta transformada sobre los DCS es

$$\mathbf{F}^\gamma \psi_z(m) = C_z \sum_{n=0}^{2j} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!} \binom{2j}{n}^{-\frac{1}{2}} (e^{-i\gamma \frac{\pi}{2}} z^*)^n \phi_n(m), \quad (2.16)$$

por lo tanto,

$$\mathbf{F}^\gamma \psi_z(m) = \psi_{ze^{i\gamma \frac{\pi}{2}}}(m). \quad (2.17)$$

El parámetro z de los DCS rota en el plano complejo como muestra la figura 2.1 para $\gamma \in [0, 1]$

2.3 Transformada de Bargmann discreta

En analogía con la transformada de Bargmann (2.1), se define una transformada de Bargmann discreta dentro del modelo de oscilador armónico discreto y finito de $SU(2)$ (DBT), dada por la acción del operador \mathbf{B}

$$(\mathbf{B}f)(z) := \sum_{m=-j}^j \tilde{\psi}_z(m) f(m) = f_B(z), \quad \tilde{\psi}_z(m) := \frac{\psi_z(m)}{C_z}, \quad (2.18)$$

nótese que $\tilde{\psi}_z(m)$ es el estado coherente discreto (2.13) *sin la normalización* C_z . En este modelo, la transformada inversa está dada por

$$(\mathbf{B}^{-1}f)(m) := \int_{\mathbb{C}} d^2\sigma(z) \tilde{\psi}_z^*(m) f_B(z), \quad (2.19)$$

donde $d^2\sigma(z)$ es una medida sobre $z \in \mathbb{C}$ que buscaremos más adelante.

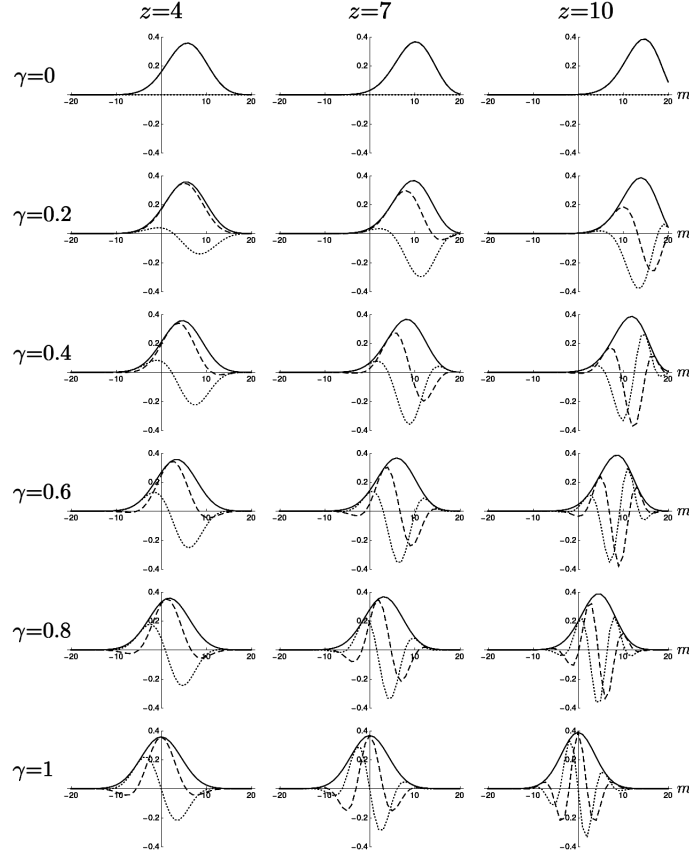


Figura 2.1: Transformada fraccional de Fourier-Kravchuk sobre los estados coherentes $\psi_z(m)$. Las columnas muestran DCS con valores $z = 4, 7, 10$ y las filas muestran su evolución con $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$. La línea a trozos muestra la parte real, la línea punteada es la parte imaginaria y la línea sólida representa el valor absoluto. Las posiciones m son discretas, pero han sido trazadas de forma continua para facilitar la visualización.

Una de las propiedades principales de la transformada de Bargmann es que mapea las funciones de Schrödinger del oscilador armónico en funciones de Fock de potencia compleja,

$$(\mathcal{B}\Phi_n)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 + \sqrt{2}\alpha x - \frac{1}{2}x^2\right) \Phi_n(x) = (\sqrt{2\pi n!})^{-\frac{1}{2}} \alpha^n. \quad (2.20)$$

En el caso discreto se tiene,

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}\phi_n)(z) &= \sum_{m=-j}^j \tilde{\psi}_z(m) \phi_n(m) \\ &= \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!} \binom{2j}{n}^{-\frac{1}{2}} z^n =: \phi_n^B(z), \end{aligned} \quad (2.21)$$

esto es, mapea las funciones de oscilador armónico discreto en funciones de potencia complejas.

Aplicando la transformada inversa (2.19) sobre (2.21), resulta

$$(\mathbf{B}^{-1}\phi_n^B)(m) = 2\pi \frac{2^n}{(n!)^2} \binom{2j}{n}^{-1} \phi_n(m) \int_0^\infty dr \tau(r) r^{2n+1}. \quad (2.22)$$

donde se ha realizado el cambio a coordenadas polares $d^2\sigma(z) = \tau(r) r dr d\theta$ y $z = re^{i\theta}$.

Para que la transformada inversa esté bien definida, es necesario que

$$\sqrt{2}\pi \int_0^\infty dr \tau(r) (\sqrt{2}r)^{2n+1} = (n!)^2 \binom{2j}{n} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2j+1)}{\Gamma(2j+1-n)}, \quad (2.23)$$

la cual es una transformada de Mellin. Usando la fórmula [53]

$$\int_0^\infty dx x^{-\nu} J_\nu(x) x^{\mu-1} = \frac{2^{\mu-\nu-1} \Gamma(\frac{\mu}{2})}{\Gamma(\nu + \frac{\mu}{2} + 1)} \quad (2.24)$$

donde

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (2.25)$$

es la función de Bessel de primer tipo, y $\Gamma(k)$ es la función Gamma de Euler. Con los cambios $x = \sqrt{2}r$, $\nu = 2j + 1$ y $\mu - 1 = 2n + 1$, y ordenando los términos, se obtiene

$$2\sqrt{2} \int_0^\infty dr (\sqrt{2}r)^{-2j-1} J_{2j+1}(2\sqrt{2}r) (\sqrt{2}r)^{2n+1} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2j+1-n)}, \quad \text{para } n \leq \frac{4j+1}{4}. \quad (2.26)$$

Comparando (2.23) y (2.26), se encuentra que la función de peso radial es

$$\sigma(r) = \frac{2}{\pi} \Gamma(2j+1) (\sqrt{2}r)^{-2j-1} J_{2j+1}(2\sqrt{2}r), \quad \sigma(r) > 0, \quad r > 0, \quad (2.27)$$

donde se verifica que $\tau(r) > 0$ para $r > 0$, y no tiene problemas de convergencia cuando $|z| \rightarrow 0$ y $n \leq (4j+1)/4$. Para estos estados la inversión ocurre apropiadamente,

$$(\mathbf{B}^{-1}\phi_n^B)(m) = \phi_n(m). \quad (2.28)$$

Sin embargo, la integral (2.26) solo converge para valores de $0 \leq n \leq j$, esto es, únicamente permite recuperar los primeros $j+1$ estados del oscilador discreto y finito de $\mathfrak{su}(2)$. Estos son los estados que mantienen su análogo con el oscilador continuo de la mecánica cuántica, pues los siguientes niveles $n = j+1, \dots, 2j$ son estados que cambian de signo de punto a punto $\phi_n(m) = (-1)^m \phi_{2j-n}(m)$, de modo que el estado $2j$ corresponde al estado base, el estado $2j-1$ al primer estado excitado y así sucesivamente.

2.3.1 Transformada inversa de Bargmann sobre una malla compleja

Para obtener una inversión completa de la transformada de Bargmann, se propone que z tome valores en un conjunto finito de puntos en el plano complejo, de forma tal que formen una malla cuadrada \mathcal{M}_c de tamaño $N \times N$ centrada en el origen.

En el caso contínuo, el cuadrado del término de normalización de los estados coherentes corresponde con la medida en el espacio de Bargmann. Para mantener analogía con la transformada discreta de Bargmann, el cuadrado de la normalización del estado coherente discreto (2.14) será usado como medida discreta,

$$\Delta\omega(z) := \left(\sum_{n=0}^{2j} \frac{2^n}{(n!)^2} \binom{2j}{n}^{-1} |z|^{2n} \right)^{-1}. \quad (2.29)$$

y el producto interno será

$$\langle f_B, g_B \rangle_{\mathbf{B}} := \sum_{z \in \mathcal{M}_c} \Delta\omega(z) f_B^*(z) g_B(z) \quad (2.30)$$

De modo que la transformación inversa, es

$$(\mathbf{B}^{-1} f_B)(m) := \sum_{z \in \mathcal{M}_c} \Delta\omega(z) \tilde{\psi}_z^*(m) f_B(z), \quad (2.31)$$

para la malla $\mathcal{M}_c = \{z = z^R + iz^I | z^R, z^I \in \{-j, -j+1, \dots, j\}\}$. La acción de (2.31) sobre las funciones de potencia discretas, es

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^{-1} \phi_n^B)(m) &= \sum_{z \in \mathcal{M}_c} \Delta\omega(z) \sum_{s=0}^{2j} \frac{2^{\frac{s+n}{2}}}{s! n!} \binom{2j}{s}^{-\frac{1}{2}} \binom{2j}{n}^{-\frac{1}{2}} (z^*)^s z^n \phi_s(m) \\ &\simeq \phi_n(m). \end{aligned} \quad (2.32)$$

El cálculo numérico de esta transformación inversa, muestra que mapea adecuadamente las funciones potencia z^n de vuelta en funciones de onda del oscilador de $\mathbf{SU}(2)$.

En la figura 2.2 se muestra la transformación de Bargmann de funciones $\phi_n(m)$ del oscilador de $\mathbf{su}(2)$ a funciones potencia $\sim z^n$ sobre la malla \mathcal{M}_c . La transformada inversa (2.31) reconstituye numéricamente las funciones originales para toda $n \in \{0, 1, \dots, 2j\}$. El error promedio que produce esta aproximación, $\sum_m |f(m) - (\mathbf{B}^{-1} f_B)(m)| / (2j+1)$, depende de n y j , sin embargo puede ser sorprendentemente pequeño. Con $j = 20$ los estados $n = 0, 2j$ mostraron un error promedio de 10^{-7} , mientras los mayores se encontraron en el nivel $n = 16$ con cuyo error promedio fue de 10^{-3} . Es importante destacar que el error tiende a disminuir al tomar valores j más grandes.

Una característica conocida de la transformada de Bargmann es la propiedad de tener kernel reproductor,

$$(\mathcal{B}(\mathcal{B}^{-1} f))(w) = \int_{\mathbb{C}} e^{w\alpha^*} f(\alpha) d\omega(\alpha) = f(w), \quad (2.33)$$

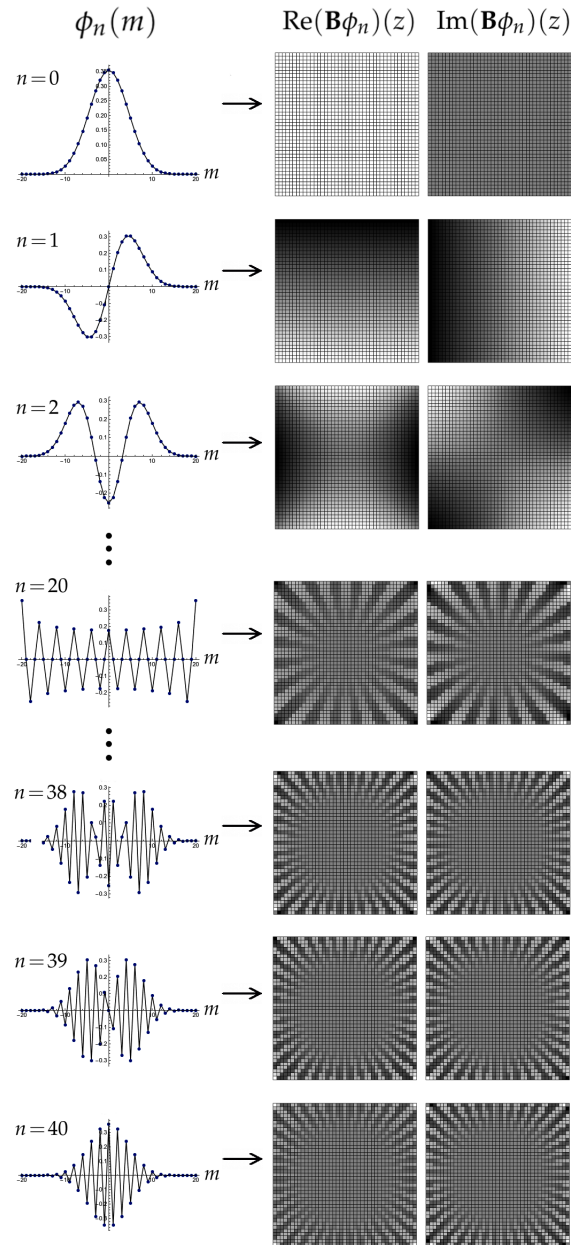


Figura 2.2: Transformada de Bargman discreta propuesta en (2.18). La columna izquierda muestra la función de onda de Kravchuk del modelo de oscilador discreto de $\mathfrak{su}(2)$, sometidas a la transformada de Bargmann \mathbf{B} . Aquí $j = 20$, por lo que las funciones de onda están definidas sobre 41 valores discretos. A la derecha se muestra las partes reales e imaginarias de la transformada de Bargmann sobre la malla discreta \mathcal{M}_c , de dimensión (41×41) . Los pixeles negros y blancos corresponden al mínimo y máximo, respectivamente, mientras que el cero es representado con un tono medio de gris. La aplicación de la transformada inversa (2.31) permite regresar a las funciones de Kravchuk con un error punto a punto que oscila entre 10^{-5} y 10^{-8} .

que aquí es la función exponencial $e^{w\alpha^*}$. Para la transformada de Bargmann discreta se tiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}(\mathbf{B}^{-1}f))(r) &= \sum_{z \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}} f(z) \Delta\omega(z) \sum_{n=0}^{2j} \frac{2^n}{(n!)^2} \binom{2j}{n}^{-1} (rz^*)^n \\ &\simeq f(r). \end{aligned} \quad (2.34)$$

En esta suma finita, el papel de kernel reproductor es desempeñado por

$$N(r, z) := \sum_{n=0}^{2j} \frac{2^n}{(n!)^2} \binom{2j}{n}^{-1} (rz^*)^n. \quad (2.35)$$

La implementación numérica del resultado (2.34), muestra que (2.35) autoreproduce las funciones de potencia en z , con un error de orden 10^{-3} para $|r| \leq \frac{j}{2}$. Si se toman valores mayores, la propiedad reproductora de $N(r, z)$ se pierde.

Es sabido que la transformada de Fourier \mathcal{F} en el espacio de Bargmann actúa como una rotación de $\frac{1}{2}\pi$ en el plano de posición-momento [54, Cap.11], $(\mathcal{B}\mathcal{F}\mathcal{B}^{-1}f)(z) = f(iz)$. Existe una relación similar entre la transformada de Bargmann discreta y la transformada de Fourier-Kravchuk,

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}\mathbf{F}^1\mathbf{B}^{-1}f)(z) &= \sum_{z \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}} \Delta\omega(r) f(r) \sum_{m=-j}^j \tilde{\psi}_z^*(m) \tilde{\psi}_{ir}(m) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}} \Delta\omega(r) f(r) N(ir, z) \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde $N(ir, z)$ es el núcleo reproductor discreto (2.35). Por lo tanto,

$$(\mathbf{B}\mathbf{F}^1\mathbf{B}^{-1}f)(z) \simeq f(iz). \quad (2.37)$$

2.3.2 Transformada del oscilador repulsivo de $\mathfrak{su}(1,1)$

Se dice que una función es auto recíproca bajo una transformada integral cuando,

$$(\mathbf{T}f)(x) = \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.38)$$

Bajo la transformada de Bargmann (2.2), las funciones que son auto recíprocas (se autoreproducen) son las funciones de oscilador repulsivo cuántico [7],

$$(\mathcal{B}\Phi_{\mu}^{\pm})(x) = \frac{e^{-\mu\frac{\pi}{4}}}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \Phi_{\mu}^{\pm}(x), \quad \text{con} \quad \Phi_{\mu}^{\pm}(x) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}(\frac{1}{2}-i\mu)}}{2^{\frac{3}{4}}\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}-i\mu\right) D_{-\frac{1}{2}+i\mu}\left(\pm\sqrt{2}xe^{i\frac{3\pi}{4}}\right) \quad (2.39)$$

donde $D_{-\frac{1}{2}+i\mu}(x)$ son las funciones de cilindro parabólico [55].

Ahora, se investiga la transformada de Bargmann discreta sobre el análogo discreto del oscilador repulsivo que en [56] se basó en la versión $\mathfrak{su}(1,1)$ no compacta del oscilador

$\mathfrak{su}(2)$. Por ello, se anticipa que estas funciones serán aproximadamente auto recíprocas bajo esta transformada discreta. Aquí aparece el desajuste, porque la transformada de Bargmann discreta actúa sobre valores $f(m)$ con $|m| \leq j$, mientras que las funciones de oscilador repulsivo [56] están definidas para todo m entero,

$$\phi_{\lambda,\sigma}^{\kappa}(m) = c_{\lambda}^{\kappa} i^{\sigma m} \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\kappa + \sigma m)|}{\Gamma(1 - i\lambda + \sigma m)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - i\kappa - i\lambda, \frac{1}{2} + i\kappa - i\lambda, 1 - i\lambda + \sigma m; \frac{1}{2}\right)$$

$$\kappa, \lambda \in \mathbb{R} \quad \sigma = \pm 1. \quad (2.40)$$

donde c_{λ}^{κ} es una constante de normalización, κ y λ son parámetros de la separación de la red y la $\mathfrak{su}(1,1)$ representación. La ‘energía’ es $\mu = \kappa + \lambda$, y σ distingue el movimiento de los estados hacia la derecha o la izquierda.

Las funciones (2.40) se autoreproducen de forma aproximada, bajo la transformada discreta de Bargmann. Para que las funciones se autoreproduzcan se debe mantener $|z| \leq \frac{j}{2}$ donde los estados coherentes discretos oscilan lentamente; lo que produce solo un intervalo (centrado en el origen) de la función de onda del oscilador repulsivo $\mathfrak{su}(1,1)$. En la figura 2.3 se presentan algunas funciones de onda de oscilador repulsivo y su transformada de Bargmann discreta, normalizada. La aproximación mejora al tomar más puntos para la transformada.

2.3.3 Convergencia de la transformada de Bargmann discreta

La contracción del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ al álgebra de Heisenberg-Weyl ha sido desarrollada en [26, 42], donde se demuestra que las funciones de oscilador armónico discreto y finito convergen a las funciones de oscilador armónico (2.6) en el límite $j \rightarrow \infty$. La convergencia de los DCS (2.13), es una consecuencia directa de esta convergencia. Realizando los cambios de variable $m \rightarrow j^{\frac{1}{2}}q$, $r \rightarrow j^{1/2}\rho$ y $z \rightarrow j^{\frac{1}{2}}\zeta$. Dado que $m \in \{-j, -j+1, \dots, j\}$, la posición contraída q se extenderá sobre el rango de $2j+1$ puntos espaciados por el intervalo decreciente $\Delta q = j^{-\frac{1}{2}}$. La medida discreta $\Delta\omega(\zeta)$ en (2.35) converge a la medida continua en el espacio de Bargmann,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta\omega(\zeta) = e^{-|\zeta|}, \quad (2.41)$$

Además, la suma de la transformada de Bargmann discreta converge a la transformada integral (2.1),

$$\pi^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=-j}^j \tilde{\psi}_z(m) \circ \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \pi^{-\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} dq \tilde{\Psi}_{\zeta}(q) \circ, \quad (2.42)$$

donde el símbolo \circ indica el lugar de una secuencia de funciones discretas que convergen a una continua, $f^{(j)}(m) \rightarrow f(q)$, en cada caso. Para la transformación inversa el mismo límite se mantiene,

$$\pi^{-2} \sum_{z \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}} \Delta\omega(z) \tilde{\psi}_z^*(m) \circ \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{C}} d\sigma(\zeta) \tilde{\Psi}_{\zeta}^*(q) \circ. \quad (2.43)$$

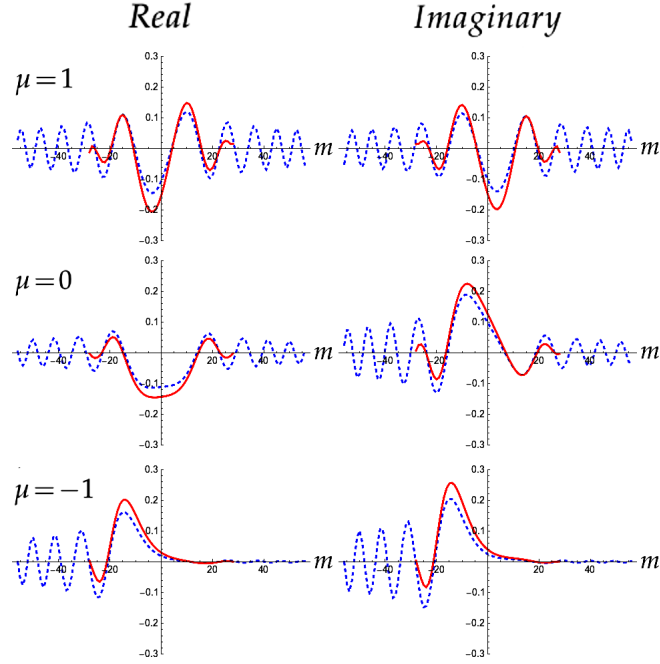


Figura 2.3: Transformada de Bargmann discreta sobre funciones de onda del oscilador repulsivo discreto $\phi_{\lambda,1}^{\kappa}(m)$ en (2.40) para $j = 56$ y $\kappa = 49$. Las líneas a trozos representan la función de oscilador repulsivo (2.39) sobre $|m| \leq 56 = j$; mientras que las líneas continuas representan su transformada de Bargmann discreta para enteros z en el subintervalo $|z| \leq 28 = \frac{1}{2}j$. La columna izquierda compara las partes reales, mientras que la columna derecha muestra las partes imaginarias. Las filas muestran las energías $\mu = \kappa + \lambda = 1, 0$ y -1 , respectivamente donde el oscilador está arriba, sobre y debajo de la barrera, donde la partícula cuántica (viniendo de la izquierda) pasa sobre, se atasca, o tunelea la barrera.

Finalmente, el kernel reproductor (2.35) converge al kernel reproductor de la transformada de Bargmann continua (2.2),

$$\lim_{j \rightarrow \infty} N(\rho, \zeta) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{2j} \frac{(2j)^n}{(n!)^2} \binom{2j}{n}^{-1} (\rho\zeta^*)^n = e^{\rho\zeta^*}. \quad (2.44)$$

2.4 Conclusiones

Se desarrolló una transformada discreta y finita que exhibe las propiedades principales de la transformada canónica compleja y lineal de Bargmann. Estas propiedades involucran el comportamiento de los estados coherentes discretos de $\mathfrak{su}(2)$ definidos como eigenfunciones del operador de descenso, la transformada fraccional de Fourier-Kravchuk y la autoreproducción aproximada de los estados del oscilador repulsivo de $\mathfrak{su}(1,1)$. Finalmente, se indicó la convergencia de la transformada de Bargmann discreta a la transformada integral.

Este enfoque permite obtener una transformada de Bargmann inversa, observando las opciones de un espacio complejo continuo y de una malla en él que recupera todas las funciones de onda del oscilador armónico discreto con una buena aproximación. La aproximación ofrecida por la transformada discreta de Bargmann de las funciones discretas pero infinitas del oscilador repulsivo muestra que puede ser la forma correcta de discretizar los intervalos de tales funciones para su transformada de Bargmann, hasta un error aceptable. Parece ser que este es el primer esquema analítico para la discretización de las transformaciones lineales canónicas complejas unitarias.

Capítulo 3

Transformada de Bargmann normalizada discreta

En el año 2017, Pei and Huang propusieron en el trabajo [57], una *normalización* de la transformada de Bargmann repartiendo la función de peso de la medida del espacio de Bargmann entre la transformada directa e inversa, es decir

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}f)(\alpha) = f^{\mathcal{B}}(\alpha) &\longrightarrow (\mathcal{NB}f)(\alpha) := \sqrt{w(\alpha)}f^{\mathcal{B}}(\alpha), \\ w(\alpha) &= (\pi)^{-1}e^{-|\alpha|^2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde \mathcal{B} denota la transformada de Bargmann ‘usual’ introducida en (2.1)–(2.2) y \mathcal{NB} denota la transformada de Bargmann normalizada; $w(\alpha)$ es la función de peso del espacio de Bargmann $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$. De modo que, en la construcción de Pei–Huang, la medida gaussiana de inversión se convierte en

$$d\bar{w}(\alpha) = (\pi)^{-1/2}e^{-|\alpha|^2}d^2\alpha. \quad (3.2)$$

Debido a este cambio, la transformada ya no es un caso particular de las transformadas canónicas lineales complejas. Sin embargo, con este cambio es posible asociar la transformada de Bargmann normalizada con la transformada de giración \mathcal{G}_{γ} [58], con ángulo de rotación γ , y obtener de vuelta la transformada de Bargmann usual a través de (3.1). La relación se establece como sigue. La acción de la transformada de Bargmann sobre las funciones de Hermite-Gauss,

$$\text{HG}_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-x^2/2} \text{H}_n(x), \quad (3.3)$$

donde $\text{H}_n(x)$ denota los polinomios de Hermite, es

$$(\mathcal{NB} : \text{HG}_n)(\alpha) = \text{LG}_{0,n}(\alpha), \quad (3.4)$$

siendo $\text{LG}_{m,n}(\alpha)$ las funciones de Laguerre-Gauss,

$$\text{LG}_{m,n}(\alpha) = (-1)^{\min\{n,m\}} \frac{\min\{n,m\}!}{\sqrt{\pi n! m!}} e^{-i(n-m)\phi} \rho^{|n-m|} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} L_{\min\{n,m\}}^{|n-m|}(\rho^2), \quad (3.5)$$

donde $L_p^l(x)$ denota los polinomios asociados de Laguerre. En particular

$$\text{LG}_{0,n} = (\pi n!)^{-1/2} \alpha^n e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}. \quad (3.6)$$

Por otra parte, la transformada de giración relaciona el producto de dos funciones de Hermite-Gauss, HG_n y HG_m , con las funciones de Laguerre-Gauss, de la forma

$$(\mathcal{G}_{\pi/4} : \text{HG}_n \text{HG}_m)(\alpha) = e^{i\frac{1}{2}m\pi} \text{LG}_{m,n}(\alpha), \quad (3.7)$$

de donde puede verse la relación con (3.4),

$$(\mathcal{NB} : \text{HG}_n)(\alpha) = (\mathcal{G}_{\pi/4} : \text{HG}_n \text{HG}_0)(\alpha). \quad (3.8)$$

Por lo tanto, escribiendo una función $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en la base de Hermite-Gauss,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{HG}_n(x), \quad (3.9)$$

su transformada de Bargmann normalizada será,

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{NB}}(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n (\mathcal{G}_{\pi/4} : \text{HG}_n \text{HG}_0)(\alpha) \\ &= \left(\mathcal{G}_{\pi/4} : \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{HG}_n \text{HG}_0 \right)(\alpha), \end{aligned} \quad (3.10)$$

y su transformada inversa,

$$f(x) = \left(\mathcal{G}_{-\pi/4} : f^{\mathcal{NB}} \right)(\alpha) \Big|_{y=0}, \quad (3.11)$$

donde se ha usado la propiedad $\mathcal{G}_\gamma^{-1} = \mathcal{G}_{-\gamma}$ y $\alpha = x + iy$.

Aquí se presenta un análogo discreto y finito de la transformada de Bargmann normalizada (de Pei-Huang), basado en el modelo de oscilador armónico de $\mathfrak{su}(2)$. En este modelo, se tienen las funciones simétricas de Hermite-Kravchuk como el análogo finito de las funciones de Hermite-Gauss, similarmente, existen las funciones de Laguerre-Kravchuk como equivalentes finitos de las funciones de Laguerre-Gauss. Además, en [59], K. B. Wolf y T. Alieva construyen las transformaciones del grupo de Fourier $\text{SU}(2)$ sobre arreglos pixelados de $N \times N$, entre ellas se encuentra la transformada de giración discreta y finita. Por lo tanto, siguiendo el procedimiento de Pei-Huang, se construye un análogo discreto de la transformada de Bargmann normalizada.

En las siguientes secciones se mostrará que esta transformación discreta mapea funciones de Hermite-Kravchuk en funciones de Laguerre-Kravchuk, tal como su análogo continuo y las funciones de oscilador repulsivo discreto de $\mathfrak{su}(1,1)$ se autoreproducen cualitativamente bajo la transformada de Bargmann normalizada discreta, con un error pequeño. Además, la transformada de Bargmann normalizada discreta conmuta con la transformada de Fourier-Kravchuk en el espacio expandido por las funciones de onda del oscilador armónico de $\mathfrak{su}(2)$. Los resultados de este trabajo fueron publicados en [60].

3.1 Transformada de giración discreta

En [59], los autores han importado las transformaciones del grupo de Fourier $U(2)$ sobre el modelo de $SU(2)$ para sistemas discretos y finitos, entre ellas está la transformación de giración. La giración actúa sobre modos bidimensionales de Hermite-Kravchuk $\phi_{n_x, n_y}(m_x, m_y) = \phi_{n_x}(m_x)\phi_{n_y}(m_y)$, con la combinación lineal de coeficientes,

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}_\gamma \phi_{n_x, n_y})(m_x, m_y) &= \sum_{n'_x + n'_y = n} e^{-i\pi\mu/4} d_{\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\mu'}^{n/2}(2\gamma) e^{i\mu'\pi/4} \phi_{n'_x, n'_y}(m_x, m_y), \\ &= \phi_{n_x, n_y}(m_x, m_y, \gamma), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde μ es el modo *diferencia* $\mu = n_x - n_y$, n es el modo total $n = n_x + n_y$, y $d_{\mu, \mu'}^j$ son las funciones “d-pequeña” de Wigner [31],

$$d_{\mu, \mu'}^j(\beta) = \sqrt{(j+\mu)!(j-\mu)!(j+\mu')!(j-\mu')!} \sum_k \frac{(\cos \frac{1}{2}\beta)^{2j-2k+\mu-\mu'} (\sin \frac{1}{2}\beta)^{2k-\mu+\mu'}}{k!(j+\mu-k)!(j-\mu'-k)!(\mu'-\mu+k)!}, \quad (3.13)$$

las cuales son reales y poseen la simetría $d_{\mu, \mu'}^j(\beta) = d_{\mu', \mu}^j(-\beta)$. Cuando $\gamma = \pi/4$, los modos girados en (3.12) se transforman en los modos de Laguerre-Kravchuk [61],

$$\Lambda_{n_x, n_y}(m_x, m_y) = e^{i\pi(n_x - n_y)/2} \phi_{n_x, n_y}(m_x, m_y, \frac{1}{4}\pi), \quad (3.14)$$

con número cuántico principal $n = n_x + n_y$ y momento angular entero $\mu \in \{-n, -n + 2, \dots, n\}$. En la figura 3.1 pueden observarse los modos de Hermite-Kravchuk (izquierda) y los modos de Laguerre-Kravchuk (derecha). Ambos modos de funciones discretas son una base ortonormal y completa para \mathbb{C}^{N^2} . También, en ambos conjuntos, el triángulo superior de modos refleja el triángulo inferior multiplicado por signos alternantes, tipo “tablero de ajedrez”.

En particular, para $n_y = 0$ se tiene

$$\Lambda_{n_x, 0}(m_x, m_y) = e^{in_x\pi/2} \phi_{n_x, 0}(m_x, m_y, \frac{1}{4}\pi), \quad (3.15)$$

en analogía con (3.6).

3.2 Transformada de Bargmann normalizada discreta

Se define la transformada de Bargmann normalizada discreta sobre un arreglo discreto, como

$$(\mathbf{NB} f)(m'_x, m'_y) := \sum_{m_x, m_y = -j}^j f_{m_x, m_y} \mathbf{NB}_{m_x, m_y; m'_x, m'_y}, \quad (3.16)$$

donde el kernel matricial de tamaño $N^2 \times N^2$, está dado por

$$\mathbf{NB}_{m_x, m_y; m'_x, m'_y} := \sum_{n=0}^{2j} \sum_{n_x + n_y = 0} \phi_{n_x, n_y}(m_x, m_y, \frac{1}{4}\pi) \phi_{n_x, n_y}(m'_x, m'_y), \quad (3.17)$$

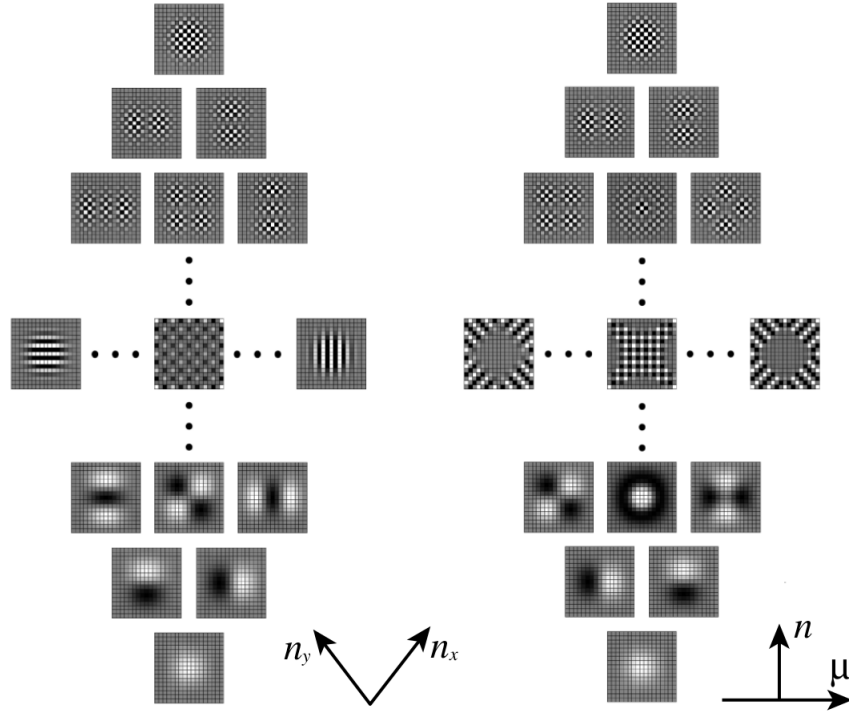


Figura 3.1: *Izquierda:* Imágenes de los modos 2D de las funciones de Hermite-Kravchuk $\phi_{n_x, n_y}(m_x, m_y)$, de puntos $m_x, m_y|_{-j}^j$ para $j = 8$, ordenados por número de modo (n_x, n_y) . *Derecha:* Modos de Laguerre-Kravchuk $\Lambda_{n_x, n_y}(m_x, m_y)$, ordenados por número de modo total n y el modo diferencia μ . Al centro ($\mu = 0$) las funciones son reales, y a la derecha ($\mu > 0$) son la parte real de $\Lambda_{n_x, n_y}(m_x, m_y)$. Hacia la izquierda ($\mu < 0$) están la parte imaginaria de $\Lambda_{n_x, n_y}(m_x, m_y)$.

y la función f_{m_x, m_y} es

$$f_{m_x, m_y} = f(m_x)\phi_0(m_y), \quad f(m) = \sum_{n=0}^{2j} f_n \phi_n(m), \quad (3.18)$$

con coeficientes

$$f_n = \sum_{m=-j}^j f(m)\phi_n(m). \quad (3.19)$$

Nótese que las coordenadas m'_x y m'_y pueden considerarse como la parte real e imaginaria, respectivamente, de un número complejo z . Por ello, indicamos

$$f^B(z) := (\mathbf{NB} f)(z). \quad (3.20)$$

Haciendo uso de las relaciones de ortonormalidad (1.15), el análogo discreto de (3.4), es la relación

$$(\mathbf{NB} \phi_n)(m'_x, m'_y) = e^{-i\pi n/2} \Lambda_{n,0}(m'_x, m'_y) =: \phi_n^B(m'_x, m'_y). \quad (3.21)$$

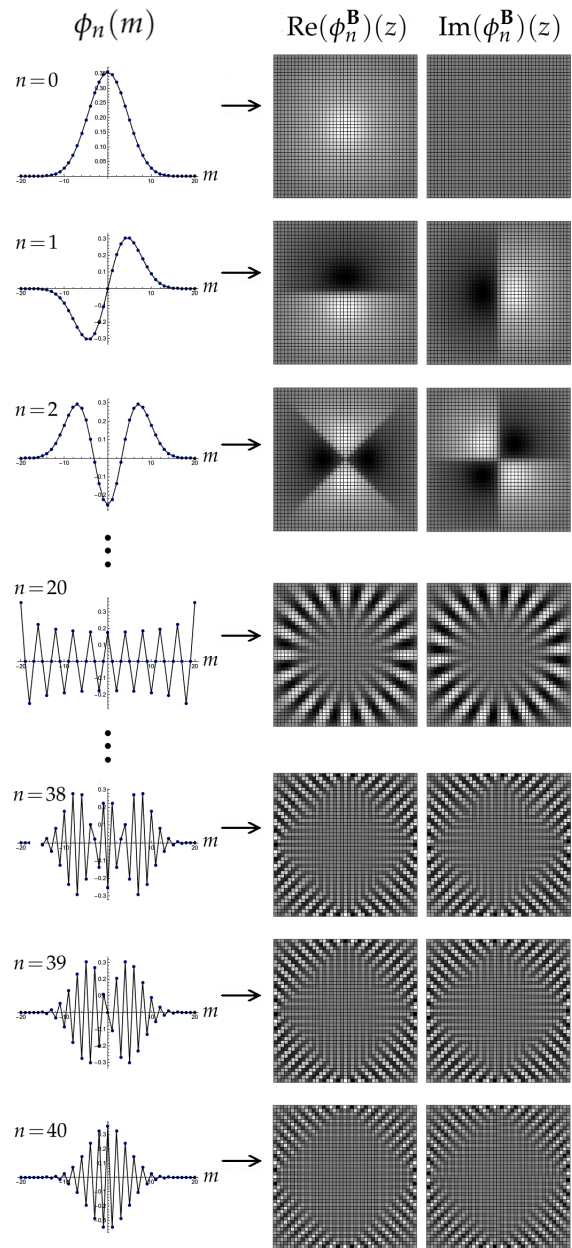


Figura 3.2: Funciones de Hermite-Kravchuk y su transformada de Bargmann normalizada discreta. Aquí $j = 20$ tal que hay 41 valores discretos, para facilitar la visualización se han unido con líneas rectas. *Izquierda*: Las funciones de onda (modos de Hermite-Kravchuk) del oscilador discreto y finito de $su(2)$, sujeto a la transformada discreta \mathbf{NB} . *Derecha*: Partes real e imaginaria de la transformada de Bargmann normalizada discreta. Los pixeles grises corresponden al valor cero, los colores negro y blanco corresponden al mínimo y máximo, respectivamente.

Como consecuencia de la unitariedad de la transformación de giración (3.12), el kernel de la transformada de Bargmann normalizada discreta es unitario, por lo tanto el kernel inverso es

$$\mathbf{NB}_{m'_x, m'_y; m_x, m_y}^{-1} := \sum_{n=0}^{2j} \sum_{n_x+n_y=0} \phi_{n_x, n_y}(m'_x, m'_y, -\frac{1}{4}\pi) \phi_{n_x, n_y}(m_x, m_y), \quad (3.22)$$

con la propiedad $\mathbf{NB}^{-1} = \mathbf{NB}^\dagger$. Entonces, la transformada inversa discreta se define de la forma

$$\left(\mathbf{NB}^{-1} f^B\right)(m_x, m_y) := \sum_{m'_x, m'_y=-j}^j f_{m'_x, m'_y} \mathbf{NB}_{m'_x, m'_y; m_x, m_y}, \quad (3.23)$$

de aquí se sigue que la función original se recupera del modo

$$f(m_x) = \phi_0(0)^{-1} f_{m_x, 0}, \quad (3.24)$$

En la figura 3.2, se muestra la transformada Bargmann normalizada discreta de algunos modos de Hermite-Kravchuk para $j = 20$, representados en arreglos cuadrados de 41×41 pixeles. Se muestra la parte real e imaginaria de la transformación para comparar con los modos de Laguerre-Kravchuk mostrados en la figura 3.1. Comparando la figura 3.2 con la figura 2.2, puede observarse un comportamiento similar al interior del arreglo, pero la transformada de Bargmann normalizada discreta hace que las funciones decaigan hacia los bordes.

3.2.1 Continua *vs.* Discreta

Las funciones de Laguerre-Kravchuk no son aproximaciones de las funciones de Laguerre-Gauss, son sus análogos discretos y finitos en el álgebra $\mathfrak{su}(2)_x \oplus \mathfrak{su}(2)_y = \mathfrak{so}(4)$. En la figura 3.2 puede verse que los primeros $\frac{1}{2}(2j+1)(2j+2)$ estados son similares a las funciones de Laguerre-Gauss, mientras que los otros $\frac{1}{2}j(2j+1)$ estados son inherentes a esta representación. De modo que, solo los primeros $(j+1)$ estados de $\Lambda_{n_x, 0}(m_x, m_y)$ son comparables con sus análogos continuos, y lo mismo es verdad para las funciones de oscilador finito $\phi_n(m)$.

Con el propósito de visualizar las diferencias y similitudes entre la transformada de Bargmann normalizada continua *vs.* discreta, vamos a considerar la función modulada

$$f_s(x) = \sum_{n=0}^{s-1} a_n \text{HG}_n(x/\sqrt{j}), \quad (3.25)$$

$$a_n = \cos\left(\frac{2\pi}{s}(n^2 + n + 1)\right),$$

donde $s = 2j + 1$ indica el número de funciones de Hermite-Gauss que expanden la función original y puede ser infinito. Se ha seleccionado $s = 10$ y $s = 41$ para comparar las transformaciones en la figura 3.3. Las funciones (3.25) se han muestreado sobre

$2j+1 = 41$ puntos con intervalos $\Delta_x = \Delta_y = 1$. Cuando la función está expandida por los primeras 10 funciones HG_n , se observa una gran similitud entre ambas transformaciones, esto se debe a que los primeros $j + 1$ estados de Laguerre-Kravchuk siguen la dinámica de sus contrapartes continuas. Sin embargo, cuando la función $f_s(x)$ está expandida por funciones de orden mayor se presentan diferencias notables entre ambas transformaciones debido a que en la base de funciones Λ_{n_x, n_y} se involucran estados intrínsecos de esta representación.

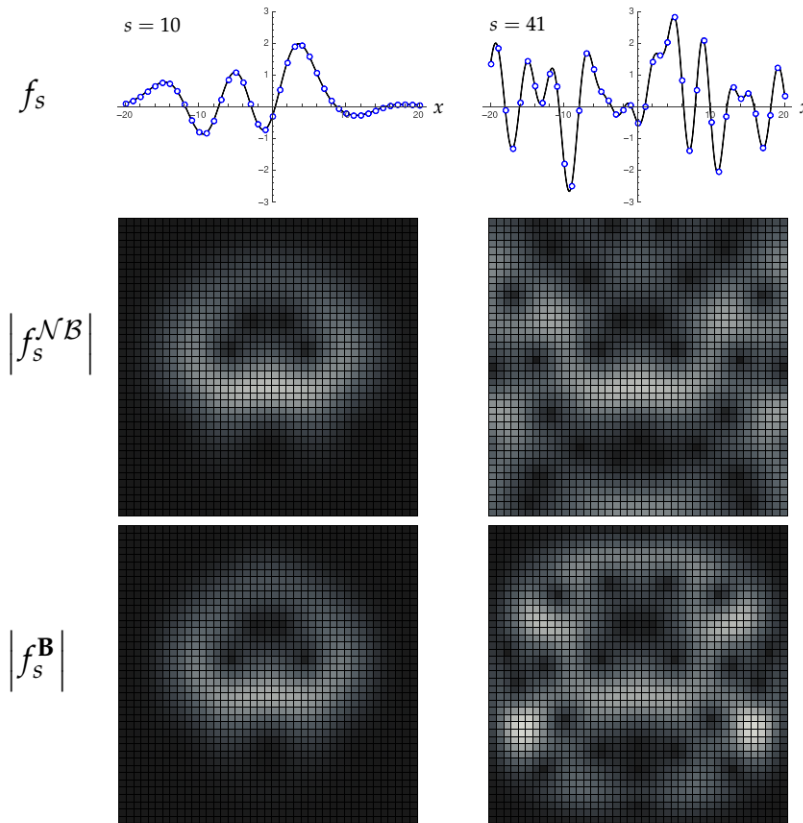


Figura 3.3: La fila superior muestra la función f_s definida en (3.25) que ha sido muestreada sobre 41 puntos ($j = 20$); los puntos muestreados han sido marcados con \circ . La fila media muestra la transformada de Bargmann normalizada continua la función, y la fila inferior muestra la transformada discreta **NM** de la misma función intercambiando funciones de Hermite-Gauss por funciones Hermite-Kravchuk. Las transformaciones se muestran sobre un arreglo de 41×41 puntos. Los pixeles negros corresponden al valor cero, y los blancos corresponden al valor máximo. *Izquierda:* La función f_{10} está expandida por las primeras diez funciones de Hermite-Gauss, por lo que su transformada continua (muestreada) y su análogo discreto conservan grandes similitudes. *Derecha:* La función f_{41} está expandida por funciones de Hermite-Gauss que no tienen contraparte discreta para el tamaño j de la representación de $\mathfrak{su}(2)$ elegida.

3.2.2 Relación entre las transformadas de Bargmann y Fourier

La transformada continua de Fourier \mathcal{F} y la transformada de Bargmann continua se relacionan de la forma $(\mathcal{B}\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} : f)(z) = f(iz)$, esto es, en el espacio de Bargmann la transformada de Fourier actúa como una rotación de $\frac{1}{2}\pi$ [54, Cap.11]. La transformada de Bargmann normalizada discreta y la transformada de Fourier-Kravchuk \mathbf{F}^γ conmuta en el espacio de funciones (3.18),

$$(\mathbf{F}^\gamma \mathbf{N} \mathbf{B} f)(m'_x, m'_y) = \sum_{n=0}^{2j} f_n e^{-i\gamma n\pi/2} \phi_n^{\mathbf{B}}(m'_x, m'_y) = (\mathbf{N} \mathbf{B} \mathbf{F}^\gamma f)(m'_x, m'_y). \quad (3.26)$$

Esto se debe a que las funciones de Hermite-Kravchuk son la base de los generadores de ambas transformaciones.

3.2.3 Transformada del oscilador repulsivo de $\mathfrak{su}(1,1)$

En esta sección se presenta la transformada de Bargmann normalizada discreta sobre las funciones de onda del oscilador repulsivo discreto de $\mathfrak{su}(1,1)$

$$\phi_{\lambda, \sigma}^\kappa(m) = c_\lambda^\kappa i^{\sigma m} \frac{|\Gamma(\frac{1}{2} + i\kappa + \sigma m)|}{\Gamma(1 - i\lambda + \sigma m)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - i\kappa - i\lambda, \frac{1}{2} + i\kappa - i\lambda, 1 - i\lambda + \sigma m; \frac{1}{2}\right) \\ \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \quad \sigma = \pm 1. \quad (3.27)$$

donde $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ son los parámetros de la separación de la red y de la representación de $\mathfrak{su}(1,1)$, cuya suma es la “energía” $\mu = \kappa + \lambda$, el índice $\sigma = \pm 1$ distingue entre estados que se mueven por la derecha o la izquierda y c_λ^κ es la constante de normalización. Estas funciones son aproximadamente autorecíprocas bajo la transformada de Bargmann normalizada discreta.

En la figura 3.4 se muestran tres funciones de onda del oscilador repulsivo de $\mathfrak{su}(1,1)$ y sus respectivas transformaciones bajo (3.16), las cuales se han proyectado sobre el eje x . La apariencia de las funciones bajo transformación aproxima visiblemente a las funciones originales, a pesar del número pequeño de puntos usados en el mapeo. Sin embargo, existe una clara discrepancia debido a que las funciones $\phi_{\kappa, \lambda}^\sigma$ están definidas para todo $m \in \mathbb{Z}$, mientras que la transformada discreta está definida para valores $|m| \leq j$. La aproximación mejora al tomar más puntos en la transformada de Bargmann, además a diferencia de (2.19), funciona sobre todo el intervalo $-j \leq m \leq j$.

3.3 Conclusiones

Se presentó un análogo discreto de la transformada de Bargmann normalizada propuesta por S. -C.Pei y S. -G.Huang. Esta discretización unitaria y finita exhibe propiedades similares a su contraparte continua: transforma funciones de Hermite-Kravchuk en funciones de Laguerre-Kravchuk (con una fase), preservan cualitativamente la estructura

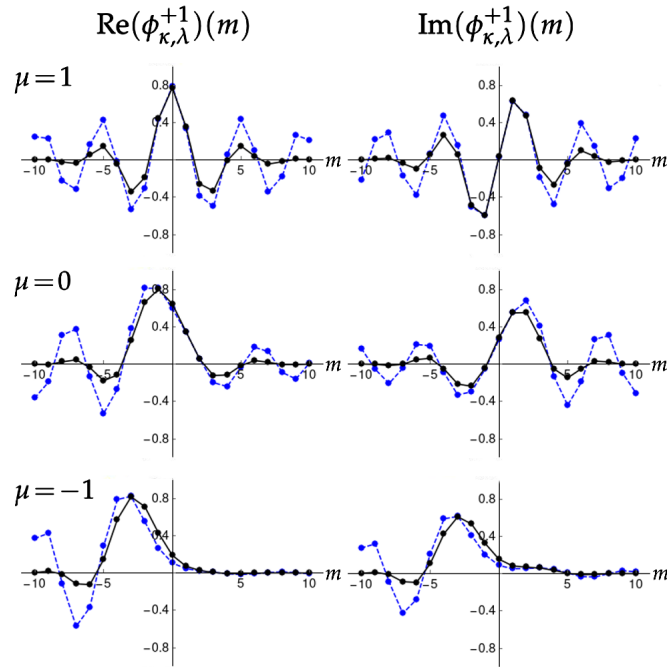


Figura 3.4: Transformada de Bargmann normalizada discreta sobre las funciones de onda del oscilador repulsivo $\phi_{\kappa,\lambda}^{+1}(m)$ para $\kappa = 2$. Las filas corresponden a las energías $\mu = \kappa + \lambda = 1, 0$ y -1 donde, respectivamente, la partícula cuántica (que viene de la izquierda) pasa por encima de la barrera de potencial, coincide con su altura o es reflejada por la barrera. Las líneas discontinuas son las funciones del oscilador repulsivo sobre $|m| \leq 10 = j$, mientras las líneas sólidas muestran su transformada de Bargmann normalizada discreta. La columna izquierda muestra el traslape entre las partes reales, mientras la columna derecha muestra las partes imaginarias.

general de los estados de oscilador repulsivo de $su(1,1)$ y conmuta con la transformada de Fourier-Kravchuk. Esta última propiedad sugiere la posibilidad de implementar la transformada de Bargmann normalizada discreta en un arreglo bidimensional de guías de onda, como se ha hecho con la transformada de Fourier-Kravchuk [62, 63].

La ventaja principal de la transformada discreta presentada en este capítulo sobre la transformada de Bargmann discreta, es la unitariedad que nos permite obtener analíticamente una transformada discreta inversa, lo que significa que esta transformación preserva toda la información contenida en una señal o arreglo de datos. Sin embargo, esta requiere de gran capacidad de computo porque cada valor del arreglo matricial depende de todos los demás, lo que conduce a un crecimiento de $\propto N^4$ en el número de operaciones a realizar. Por otro lado, la transformada de Bargmann discreta basada en estados coherentes mantiene una mejor analogía con su contraparte discreta y puede ser calculada rápidamente, con el inconveniente de las limitaciones de inversión.

Parte II

Aproximación Discreta de Funciones Especiales

Las funciones especiales son funciones que aparecen con frecuencia en campos tan diversos como la mecánica ondulatoria, teoría de números, mecánica cuántica, análisis armónico, procesamiento de señales, etc., lo que las convierte en funciones importantes para la descripción de una gran cantidad de sistemas. Usualmente aparecen como solución de ecuaciones diferenciales o integrales.

En particular, la teoría de funciones de Bessel está íntimamente conectada con cierto tipo de ecuación diferencial de primer orden conocida como ecuación de Riccati. De hecho la ecuación diferencial conocida como ecuación de Bessel se obtiene a través de una transformación fundamental de la ecuación de Riccati. El primero en llegar a las funciones de Bessel (soluciones de la ecuación de Bessel) fue Daniel Bernoulli, quien en 1738 publicó una memoria donde incluye la serie que ahora se conoce como función de Bessel; en dicha memoria Bernoulli publicó teoremas sobre las oscilaciones de una cadena. En 1764, Leonhard Euler, estudiando las vibraciones de una membrana estirada, llega por primera vez a la forma de la ecuación diferencial que ahora se identifica como la ecuación de Bessel. Fue hasta 1824 que Friedrich Bessel, en sus estudios sobre el radio vector en el movimiento planetario, obtiene una expresión integral para la función de Bessel y deriva una gran cantidad de resultados y propiedades de ellas [64].

Otra familia de funciones especiales que surgen por primera vez debido al estudio de los modos vibracionales en membranas estiradas fueron encontradas por Émile Léonard Mathieu en 1868, en este caso se trata de membranas con fronteras elípticas. Mathieu encontró dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con la relación recíproca $z \rightarrow iz$, conocidas como ecuaciones de Mathieu angulares y radiales. En 1878, E. Heine definió las primeras soluciones de la ecuación angular de Mathieu de orden entero como series de seno y coseno, pero no calculó los coeficientes. Entre 1915 y 1941, E. L. Ince publicó 18 artículos sobre funciones de Mathieu en los cuales calculó números característicos, coeficientes de las series seno y coseno de las soluciones de orden entero, ceros de esas funciones, puntos de inflexión y tablas con valores de las funciones [65].

Una gran cantidad de trabajos de diversos autores han sido publicados sobre esas dos familias de funciones especiales, cada uno de ellos con diversas contribuciones, algunas de las más valiosas son formas asintóticas para calcular valores concretos. Con la aparición del cómputo y el aumento vertiginoso de su capacidad de procesamiento, aquellas expresiones con límites al infinito se hicieron más accesibles; pero la naturaleza discreta de las implementaciones computacionales sigue siendo discordante con las formas integrales, peso que recae sobre los algoritmos de implementación. Además, la naturaleza de algunos sistemas requiere de descripciones discretas.

En esta sección se presenta un esquema de discretización de funciones especiales soluciones de la ecuación de Helmholtz, en particular para el caso de coordenadas polares y elípticas. El esquema se basa en el método de separación de variables de W. Miller Jr., en dicho esquema se pide que las soluciones a la ecuación de Helmholtz provengan de la transformada de Fourier sobre el círculo y se utilizan las órbitas de los operadores de simetría para derivar las soluciones y sus propiedades. Cuando se consideran coordenadas polares las soluciones de la ecuación de Helmholtz son las funciones de Bessel y

al considerar coordenadas elípticas las soluciones son funciones de Mathieu.

En el capítulo 6 se hará un repaso del grupo de simetrías de la ecuación de Helmholtz y del método de separación de variables de Miller. El capítulo 7 presenta las funciones discretas de Bessel sustituyendo las rotaciones continuas del grupo euclidiano por un grupo diédrico, se derivan algunas propiedades e identidades lineales que las funciones discretas conservan respecto a sus contrapartes continuas –siendo la identidad de Graf la principal de ellas–, y se muestra cómo aproximan numéricamente otras identidades. También se propone una transformada discreta de Bessel entre posiciones y “modos”, señalando sus limitaciones. En el capítulo 8 se hace el mismo tratamiento pero para el caso de coordenadas elípticas, de modo que se introducen las funciones discretas de Mathieu angulares y radiales. Estas funciones proveen una excelente aproximación a sus contrapartes continuas.

Capítulo 4

Conceptos básicos

El repaso que se realizará en este capítulo es un resumen del método de separación de variables de W. Miller Jr., presentado en su libro [67].

Considere la ecuación de Helmholtz para campos de ondas $f(x, y)$ de número de onda $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ fijo,

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \kappa^2) f(x, y) = 0, \quad (4.1)$$

con $\partial_z \equiv \partial/\partial z$ y $(x, y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, donde \mathcal{D} es algún conjunto abierto conexo en el plano (\mathcal{D} puede ser el plano en sí mismo). El conjunto de todas las soluciones $f(x, y)$ forman un espacio vectorial complejo \mathcal{F}_0 , llamado *espacio solución*. Si \mathcal{F} es el espacio de todas las funciones complejo valuadas definidas y reales analíticas¹ sobre \mathcal{D} , se define el operador

$$Q := (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \kappa^2), \quad (4.2)$$

claramente, $Qf(x, y) \in \mathcal{F}$ para $f(x, y) \in \mathcal{F}$, por lo tanto, \mathcal{F}_0 es el espacio nulo del operador lineal Q .

4.1 Grupo de simetría de la ecuación de Helmholtz

Decimos que un operador diferencial lineal

$$L = X(\mathbf{r})\partial_x + Y(\mathbf{r})\partial_y + Z(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} = (x, y), \quad X, Y, Z \in \mathcal{F}, \quad (4.3)$$

es un *operador de simetría* para la ecuación de Helmholtz, si

$$[L, Q] = R(\mathbf{r})Q, \quad R \in \mathcal{F}, \quad (4.4)$$

donde $[L, Q] = LQ - QL$ es conmutador de L con Q , R es una función analítica que puede depender de L . Sea \mathcal{G} el conjunto de todos los operadores de simetría de la ecuación de Helmholtz. Todo operador $L \in \mathcal{G}$ mapea soluciones de (4.1) en soluciones,

¹Esto significa que todas las funciones del espacio \mathcal{F} son de la forma $g(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones reales analíticas.

esto es, si $f(\mathbf{r}) \in \mathcal{F}_0$ entonces $Qf(\mathbf{r}) = 0$, luego de (4.3) se sigue que $[L, Q]f(\mathbf{r}) = LQf(\mathbf{r}) - QLf(\mathbf{r}) = 0$, por lo que $Lf(\mathbf{r}) \in \mathcal{F}_0$. También puede demostrarse que el conjunto \mathcal{G} es un álgebra de Lie compleja, tal que $[L_1, L_2] \in \mathcal{G}$ y $a_1L_1 + a_2L_2 \in \mathcal{G}$ para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

Para calcular explícitamente el álgebra de simetrías de la ecuación de Helmholtz, basta con sustituir (4.2) y (4.3) en (4.4), de donde se obtiene que la forma del operador de simetría L es

$$L = \alpha\partial_x + \beta\partial_y + \gamma(y\partial_x - x\partial_y) + \delta, \quad (4.5)$$

con α, β, γ y $\delta \in \mathbb{C}$. Claramente, el álgebra de simetría \mathcal{G} tiene dimensión cuatro y la base es

$$P_1 = \partial_x, \quad P_2 = \partial_y, \quad M = y\partial_x - x\partial_y, \quad E = 1, \quad (4.6)$$

cuyas reglas de conmutación, son

$$[P_1, P_2] = 0, \quad [M, P_1] = P_2, \quad [M, P_2] = -P_1, \quad (4.7)$$

y $[E, L] = 0$ para todo $L \in \mathcal{G}$. El operador identidad E puede ser ignorado, para concentrarnos en el álgebra de Lie tridimensional $\mathcal{E}(2)$ generada por $\{P_1, P_2, M\}$ la cual restringiremos a coeficientes reales. El álgebra $\mathcal{E}(2)$ es isomorfa al álgebra de Lie euclidiana $\mathfrak{i}_2\mathfrak{o}(2)$ asociada al grupo euclidiano $\mathfrak{I}_2\mathfrak{O}(2)$ en el plano. Los elementos $E(\theta, t_x, t_y) \in \mathfrak{I}_2\mathfrak{O}(2)$ pueden ser representados por matrices 3×3 adjuntas,

$$E(\theta, t_x, t_y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{pmatrix}, \quad t_x, t_y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (4.8)$$

El elemento identidad se identifica como $E(0, 0, 0) = \mathbf{1}$. Los elementos (4.8), pueden ser separados de la forma

$$E(\theta, t_x, t_y) = E(\theta, 0, 0)E(0, t_x, 0)E(0, 0, t_y), \quad (4.9)$$

es decir se separan en rotaciones y traslaciones en las componentes x y y , respectivamente. Usando (4.9) para encontrar el álgebra de Lie $\mathfrak{i}_2\mathfrak{o}(2)$, es fácil demostrar que la base está dada por las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

tal que, cada elemento de $\mathfrak{I}_2\mathfrak{O}(2)$ tiene la forma

$$E(\theta, t_x, t_y) = \exp(\theta M) \exp(t_x P_1) \exp(t_y P_2). \quad (4.11)$$

Las relaciones de conmutación de las matrices (4.10) son exactamente las mismas que (4.7), lo que demuestra que el álgebra de simetría de la ecuación de Helmholtz $\mathcal{E}(2)$ es isomorfa al álgebra euclidiana $\mathfrak{i}_2\mathfrak{o}(2)$.

De forma completamente análoga al desarrollo hecho con los operadores de simetría de primer orden, es posible determinar operadores de simetría de segundo orden extendiendo la definición (4.5),

$$S = A_{11}(\mathbf{r})\partial_{xx} + A_{12}(\mathbf{r})\partial_{xy} + A_{22}(\mathbf{r})\partial_{yy} + B_1(\mathbf{r})\partial_x + B_2(\mathbf{r})\partial_y + C(\mathbf{r}), \quad A_{ij}, B_i, C \in \mathcal{F}, \quad (4.12)$$

tal que S será un operador de simetría de la ecuación de Helmholtz siempre que cumpla

$$[S, Q] = UQ, \quad (4.13)$$

donde $U \in \mathcal{G}$. Nótese que el operador de simetría de primer orden L puede ser un caso especial de una simetría de segundo orden cuando $U = Z(\mathbf{r})$. Todo operador de simetría de segundo orden mapea soluciones de (4.1) en soluciones. Sea \mathcal{S} el espacio vectorial de todos los operadores de simetría de segundo orden S , de modo que $\mathcal{G} \subset \mathcal{S}$. Sin embargo, \mathcal{S} no es un álgebra de Lie porque el conmutador $[S, S']$ de operadores de simetría de segundo orden es en general un operador de tercer orden, es decir $[S, S'] \notin \mathcal{F}$. Si se denota al conjunto de todas las simetrías triviales $q = \{RQ \mid R \in \mathcal{F}\}$, se denotará como \mathcal{S}/q al espacio de todas las simetrías no triviales.

Sustituyendo (4.12) (con $A_{22} = 0$) en (4.13) e igualando coeficientes de las varias derivadas parciales respecto a x y y en ambos lados de la relación resultante, se encuentra que la base del espacio vectorial complejo de dimensión nueve \mathcal{S}/q , es

$$\underbrace{P_1, P_2, M, E}_{\mathcal{E}(2)}, \quad \underbrace{P_1^2, P_1P_2, M^2, \{M, P_1\}, \{M, P_2\}}_{\mathcal{E}(2)^{(2)}}, \quad (4.14)$$

donde $\{A, B\} = AB + BA$ denota el anticonmutador de A con B . Nótese que se ha excluido el operador P_2^2 , esto se debe a que la suma $P_1^2 + P_2^2$ no es más que el operador de multiplicación por $-\kappa^2$. El segundo conjunto de cinco operadores en (4.14) son la base del espacio de operadores de simetría de segundo orden $\mathcal{E}(2)^{(2)}$ generados a partir del producto de generadores de $\mathcal{E}(2)$. Con esa interpretación en mente, es evidente que el subespacio (de dimensión cinco) de operadores puramente de segundo orden en \mathcal{S}/q es isomorfo al espacio $\mathcal{E}(2)^{(2)}/\{P_1^2 + P_2^2\}$, por ello es posible identificar las simetrías puramente de segundo orden de la ecuación de Helmholtz con los elementos puramente de segundo orden del cubrimiento universal de $\mathcal{E}(2)$ modulo el centro del álgebra de cubrimiento.

4.2 Separación de variables

Sea $f(x, y)$ una solución de $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \kappa^2)f(x, y) = 0$, tal que existe su transformada de Fourier, esto es

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y)] h(\kappa_1, \kappa_2) d\kappa_1 d\kappa_2, \quad (4.15)$$

donde $h(\kappa_1, \kappa_2)$ es la transformada de Fourier de $f(x, y)$, de modo que

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \kappa^2) f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} (\kappa^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2) \exp[i(\kappa_1 x + \kappa_2 y)] h(\kappa_1, \kappa_2) d\kappa_1 d\kappa_2 = 0, \quad (4.16)$$

eligiendo $h(\kappa_1, \kappa_2) = \kappa^{-1} \delta(\kappa - s) h(\psi)$ donde $\delta(r)$ es la función delta de Dirac, $h(\psi) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^1)$, s y ψ son coordenadas polares en el plano $\kappa_1 - \kappa_2$, y $d\kappa_1 d\kappa_2 = s ds d\psi$. Llevando a cabo la integración en s , se encuentra

$$f(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\kappa(x \cos \psi + y \sin \psi)] h(\psi) d\psi. \quad (4.17)$$

Los elementos $E(\theta, t_x, t_y) \in \mathfrak{so}(2)$ actúan sobre las soluciones de la ecuación de Helmholtz vía los operadores definidos en (4.11), los cuales se denotarán como $\mathbf{T}(E)$, de la forma

$$\mathbf{T}(E)f(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\kappa(x \cos \psi + y \sin \psi)] \mathbf{T}(E)h(\psi) d\psi, \quad (4.18)$$

donde

$$\mathbf{T}(E)h(\psi) = \exp[i\kappa(t_x \cos(\psi - \theta) + t_y \sin(\psi - \theta))] h(\psi - \theta). \quad (4.19)$$

Procediendo como en (4.18) y (4.19) es posible calcular los operadores P_1 , P_2 y M en $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^1)$ inducidos por (4.6) actuando sobre (4.17), lo que resulta en

$$P_1 = i\kappa \cos \psi, \quad P_2 = i\kappa \sin \psi, \quad M = -d/d\psi. \quad (4.20)$$

Las soluciones separables de la ecuación de Helmholtz correspondientes a un sistema de coordenadas ortogonales separables son caracterizadas como eigenfunciones de un operador $S \in \mathcal{S}^{(2)}$, es decir un operador de segundo orden en los elementos de $\mathcal{E}(2)$.

4.2.1 Coordenadas polares

Para calcular la descomposición espectral de $S = M^2$ es suficiente calcular la descomposición de iM y el cuadrado de los eigenvalores resultantes. La ecuación de eigenvalores correspondiente es

$$-i \frac{d}{d\psi} h(\psi) = \lambda h(\psi). \quad (4.21)$$

Toda función $h \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^1)$ puede ser expandida en la forma

$$h(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n h_n(\psi), \quad c_n = \langle h, h_n \rangle := \int_{\mathcal{S}^1} h(\psi) h_n^*(\psi) d\psi, \quad (4.22)$$

lo que, en (4.21) conduce a ecuaciones $iMh_n = nh_n$ con solución

$$h_n(\psi) = (2\pi)^{-1/2} e^{in\psi}, \quad \langle h_n, h_m \rangle = \delta_{n,m}. \quad (4.23)$$

Dado que la transformada de Fourier es una transformación unitaria, el operador M posee el mismo espectro en la base $\{h_n\} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^1)$ que en $\{f_n\} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, así en coordenadas polares las eigenfunciones son

$$\begin{aligned} f_n(r, \theta) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\kappa r \cos(\psi - \theta)] \exp(in\psi) d\psi, \\ &= i^n (2\pi)^{1/2} \exp(in\theta) J_n(\kappa r), \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde $J_n(\kappa r)$ es función de Bessel de primer tipo de orden n .

4.2.2 Coordenadas elípticas

Para el caso $S = M^2 + dP_1^2$ sobre un dominio $\mathcal{D} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{S}^1)$, la ecuación de eigenvalores $Sh = \lambda h$ puede escribirse como

$$\frac{d^2}{d\psi^2} h(\psi) + (a - 2q \cos 2\psi) h(\psi) = 0. \quad a = -\lambda - \frac{1}{2} d^2 \kappa^2, \quad q = \frac{1}{4} d^2 \kappa^2. \quad (4.25)$$

La ecuación (4.25) es la ecuación angular de Mathieu, la cual tiene un número infinito de eigenvalores discretos λ_n de multiplicidad uno. Las correspondientes eigenfunciones son²

$$\begin{aligned} h_n^c(\psi) &= \pi^{-1/2} ce_n(\psi, q), & n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \\ h_n^s(\psi) &= \pi^{-1/2} se_n(\psi, q), & n \in \mathbb{Z}^+, \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde las funciones $ce_n(\psi, q)$ y $se_n(\psi, q)$ son las funciones de Mathieu angulares par e impar, respectivamente, definidas como

$$\begin{aligned} ce_n(\psi, q) &= \sum_{s=0}^{\infty} A_{2s+p}^{2n+p} \cos((2s+p)\psi), \\ se_n(\psi, q) &= \sum_{s=0}^{\infty} B_{2s+p}^{2n+p} \sin((2s+p)\psi), \end{aligned} \quad (4.27)$$

con el índice de paridad $p \in \{0, 1\}$. Los coeficientes A_{2s+p}^{2n+p} y B_{2s+p}^{2n+p} dependen del parámetro q y son determinados a partir de relaciones de recurrencia obtenidas por sustitución directa de (4.27) en (4.25). Las funciones (4.26) forman una base ortonormal para $\mathcal{L}^2(\mathcal{S}^1)$,

$$\langle h_n^t, h_{n'}^{t'} \rangle = \delta_{nn'} \delta_{tt'}, \quad t, t' = s, c. \quad (4.28)$$

Para evaluar las transformadas de Fourier

$$f_n^t(x, y) = \pi^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i\kappa(x \cos \psi + y \sin \psi)] h_n^t(\psi) d\psi, \quad t = s, c \quad (4.29)$$

² \mathbb{Z}^+ denota los números enteros positivos, similarmente, \mathbb{R}^+ denota los números reales positivos.

se hace el cambio a coordenadas elípticas,

$$x = d \cosh \varrho \cos \theta, \quad y = d \sinh \varrho \sin \theta, \quad \varrho \in \mathbb{R}^+, \quad \theta \in \mathcal{S}^1, \quad (4.30)$$

el parámetro d es la distancia focal que puede elegirse $d = 1$ sin pérdida de generalidad. En coordenadas elípticas la ecuación de Helmholtz adquiere la forma

$$[(\partial_\varrho^2 + \kappa^2 \cosh^2 \varrho) + (\partial_\theta^2 - \kappa^2 \cos^2 \theta)] f(\varrho, \theta) = 0, \quad (4.31)$$

por lo que claramente, la variable θ de $f_n^t(\varrho, \theta)$ cumple con una ecuación angular de Mathieu, mientras que la parte radial cumple con la ecuación

$$\frac{d^2}{d\varrho^2} g(\varrho) + (-a + 2q \cosh 2\varrho) g(\varrho) = 0, \quad (4.32)$$

conocida como ecuación radial de Mathieu, conectada con (4.25) por el cambio $\theta = i\varrho$. La ecuación (4.32) tiene soluciones $Ce_n(\varrho, q) = ce_n(i\varrho, q)$ y $Se_n(\varrho, q) = ise_n(i\varrho, q)$ conocidas como funciones radiales de Mathieu par e impar, respectivamente. Finalmente, se tiene que las eigenfunciones son

$$\begin{aligned} f_n^c(\varrho, \theta) &= c_n Ce_n(\varrho, q) ce_n(\theta, q), & n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \\ f_n^s(\varrho, \theta) &= s_n Se_n(\varrho, q) se_n(\theta, q), & n \in \mathbb{Z}^+, \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde c_n y s_n son constantes determinadas por la integral (4.29).

Capítulo 5

Funciones de Bessel discretas

El análisis de Fourier–Bessel se origina de la parte radial del análisis de Fourier bidimensional. Las soluciones de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas conducen a las funciones conocidas colectivamente como funciones cilíndricas. De entre ellas, este capítulo se dedica particularmente a las funciones de Bessel de primer tipo y de orden entero, definidas desde una descomposición de onda plana que provee su función generadora [53],

$$e^{ix \sin \varphi} = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos(2k\varphi) + 2i \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(x) \sin((2k+1)\varphi) \quad (5.1)$$

para $x \in \mathbb{R}$ y $\varphi \in \mathcal{S}^1$. En este capítulo se utilizará el método de separación de variables, descrito en el capítulo anterior, para definir funciones de Bessel discretas que permitirán hacer una descomposición de onda plana sobre direcciones discretas $\varphi_m \in \mathcal{S}_{(N)}^1$ a través de sumas finitas¹. Además se propone una transformada discreta entre posiciones y ‘modos’ de las funciones de Bessel. Las funciones de Bessel discretas se mantienen muy cercanas a sus contrapartes continuas en la región $n + m < N$, donde n es el número de modo de la función, m es la coordenada de posición y N es el número de direcciones angulares tomadas sobre \mathcal{S}^1 . Los resultados de este trabajo pueden encontrarse en el manuscrito [66].

5.1 Esquema de discretización

La ecuación de Helmholtz para campos de onda $f(x, y)$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y número de onda $\kappa \in \mathbb{R}$, es

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \kappa^2) f(x, y) = 0, \quad (5.2)$$

donde ∂_z denota la derivada parcial respecto a la coordenada z . Un supuesto clave para introducir una estructura de espacio de Hilbert para el espacio de soluciones $f(x, y)$ es

¹ $\mathcal{S}_{(N)}^1$ denota el conjunto de N puntos equiespaciados elegidos sobre el círculo unitario

considerar aquellas funciones que se pueden escribir como una transformada de Fourier bidimensional,

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp i(x\kappa_x + y\kappa_y) \tilde{f}(\kappa_x, \kappa_y) d\kappa_x d\kappa_y, \quad (5.3)$$

de modo que la función $\tilde{f}(\kappa_x, \kappa_y)$ satisface la ecuación de Helmholtz transformada

$$(\kappa^2 - \kappa_x^2 - \kappa_y^2) \tilde{f}(\kappa_x, \kappa_y) = 0, \quad (5.4)$$

en el espacio conjugado de Fourier $(\kappa_x, \kappa_y) \in \mathbb{R}^2$. Pasando a coordenadas polares $\kappa_x = \kappa \cos \phi$, $\kappa_y = \kappa \sin \phi$ con elemento de superficie $d\kappa_x d\kappa_y = \kappa d\kappa d\phi$, las soluciones a (5.4) se reducen a una distribución de Dirac sobre la coordenada radial, $\tilde{f}(\kappa_x, \kappa_y) = \sqrt{2\pi\kappa}^{-1} \delta(\kappa - \tilde{\kappa}) f_\circ(\phi)$ [67, Cap.1], con $f_\circ(\phi)$ una función sobre el círculo \mathcal{S}^1 de radio $\tilde{\kappa}$. Las soluciones (5.3) adquieren la forma

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathcal{S}^1} \exp[i\kappa(x \cos \phi + y \sin \phi)] f_\circ(\phi) d\phi, \quad (5.5)$$

con la estructura de Hilbert basada sobre el producto interno de funciones $f_\circ^{(1)}(\phi)$ y $f_\circ^{(2)}(\phi)$ sobre el círculo,

$$\langle f_\circ^{(1)}, f_\circ^{(2)} \rangle = \int_{\mathcal{S}^1} f_\circ^{(1)}(\phi) f_\circ^{(2)}(\phi) d\phi. \quad (5.6)$$

Es aquí que se reduce la transformada de Fourier continua sobre el círculo a la transformada de Fourier discreta sobre N puntos angulares, esto es, pasamos de \mathcal{S}^1 a $\mathcal{S}_{(N)}^1$. De tal forma que las integrales se reemplazan por sumas y la variable continua $\phi \in \mathcal{S}^1$ se reemplaza con $\phi_m \in \mathcal{S}_{(N)}^1$,

$$\int_{\mathcal{S}^1} d\phi F_\circ(\phi) \longleftrightarrow \sum_{m \in \mathcal{S}_{(N)}^1} F(\phi_m), \quad \begin{array}{l} 2\pi \leftrightarrow N, \\ \phi_m = 2\pi m/N, \end{array} \quad (5.7)$$

para $m \in \mathbb{Z}_N$; el conjunto de N angulos discretos ϕ_m son equidistantes por un valor de $2\pi/N$. Las funciones $f(\phi_m) \equiv f_m$ pueden ser interpretadas como un muestreo de puntos de una función continua, o como componentes de un vector de dimensión N . Este cambio corresponde a restringir la simetría de la ecuación de Helmholtz al subgrupo $\mathfrak{l}_2\mathcal{O}_{(N)} \subset \mathfrak{l}_2\mathcal{O}(2)$ de rotaciones diédricas. Este cambio respeta la composición de grupo,

$$\begin{aligned} E(\theta_k, t_x, t_y) E(\theta_l, t'_x, t'_y) \\ = E(\theta_k + \theta_l, t_x \cos \theta_l + t_y \sin \theta_l + t'_x, -t_x \sin \theta_l + t_y \cos \theta_l + t'_y), \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde $\theta_k = 2\pi k/N$. Cuando N es par, $\mathcal{O}_{(N)}$ contiene reflexiones a través de líneas $\theta_k - \theta_{k+N/2}$; cuando N es impar, dichas reflexiones no son una simetría del sistema. En

este esquema de discretización se considerarán $N = 2j + 1$, $j \in \mathbb{Z}^+$, es decir, valores impares de N ; esto se debe a que se basa únicamente en la discretización de rotaciones sobre el círculo. El producto interno de dos funciones discretas $f_n^{(1)}$ y $f_n^{(2)}$, naturalmente es

$$\left(f^{(1)}, f^{(2)} \right)_{(N)} := \sum_{n=0}^{N-1} f_n^{(1)*} f_n^{(2)}, \quad (5.9)$$

y es claro que el límite $N \rightarrow \infty$ conduce de vuelta del discreto al continuo, con aproximaciones y límites de la teoría de Fourier.

5.2 Construcción de las funciones de Bessel discretas

La ecuación de Helmholtz (5.2) en coordenadas polares, multiplicada por r^2 ,

$$(r^2 \partial_r^2 + r \partial_r + \partial_\phi^2 + \kappa^2) f(r, \phi) = 0, \quad (5.10)$$

pone de manifiesto que la solución de Helmholtz puede ser factorizada en una función del radio veces una función del ángulo, $f(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$, mientras que (5.5) implica que las soluciones angulares $\Phi(\phi)$ determinarán la correspondiente solución radial $R(r)$. Un conjunto ortonormal y completo de eigenfunciones de ∂_ϕ^2 sobre el círculo $\phi \in \mathcal{S}^1$ es el conjunto de fases $\Phi := (2\pi)^{-1/2} \exp(in\phi)$, con $n \in \mathbb{Z}$, y el producto interno $\langle \Phi_n, \Phi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$. Cuando el dominio de estas funciones se restringe de $\phi \in \mathcal{S}^1$ a $\phi_m \in \mathcal{S}_{(N)}^1$, como en (5.7), se mantiene el subconjunto de N funciones sobre N puntos en $\mathcal{S}_{(N)}^1$, dadas por

$$\Phi_n^{(N)}(\phi_m) := \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(in\phi_m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp(i \frac{2\pi mn}{N}) = \Phi_{n \pm N}^{(N)}(\phi_m), \quad (5.11)$$

etiquetada por el subconjunto cíclico $n \in \mathbb{Z}_N$, que también son ortonormales y completas bajo el producto interno en $\mathcal{S}_{(N)}^1$,

$$\left(\Phi_n^{(N)}, \Phi_{n'}^{(N)} \right)_{(N)} = \delta_{nn'}, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \Phi_n^{(N)}(\phi_m)^* \Phi_n^{(N)}(\phi_{m'}) = \delta_{m,m'}. \quad (5.12)$$

Regresando a (5.5) con (x, y) en coordenadas polares,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \in [0, \infty), \quad \theta \in (-\pi, \pi] = \mathcal{S}^1, \quad (5.13)$$

y tomando para $f_\circ(\phi_m)$ la base de funciones (5.11) sobre los puntos discretos de $\mathcal{S}_{(N)}^1$, las N soluciones para la ecuación de Helmholtz discreta, se escriben de la forma

$$\begin{aligned} f_n(r, \theta_k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m \in \mathcal{S}_{(N)}^1} \exp[i\kappa r (\cos \theta_k \cos \phi_m + \sin \theta_k \sin \phi_m)] \Phi_n^{(N)}(\phi_m) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} e^{in(\theta_k + \pi/2)} \sum_{m \in \mathcal{S}_{(N)}^1} \exp(i\kappa r \sin \varphi_m) \exp(-in\varphi_m), \end{aligned} \quad (5.14)$$

habiendo reemplazado $\varphi_m := \theta_k - \phi_m + \frac{1}{2}\pi$ en la suma sobre los N puntos discretos sobre el círculo. Siguiendo a Miller [67, Cap.1], la fase al frente de (5.14), $e^{in(\theta_k + \pi/2)} = i^n e^{2\pi ink/N} = i^n \Phi_n^{(N)}(\theta_k)$, es extraída para escribir las funciones como

$$f_n(r, \theta_k) = i^n \sqrt{N} B_n^{(N)}(\rho) \Phi_n^{(N)}(\theta_k), \quad (5.15)$$

donde el factor radial $B_n^{(N)}(\rho)$, $\rho := \kappa r$, define las *funciones de Bessel discretas*. De (5.14), estas funciones son reales y sus paridades, usando coeficientes $\{C_n, S_n\} = \{1, 0\}$ para n par y $\{0, 1\}$ para n impar, pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} B_n^{(N)}(\rho) &:= \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathcal{S}_1^{(N)}} \exp(i\rho \sin \varphi_m) [C_n \cos(n\varphi_m) - iS_n \sin(n\varphi_m)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathcal{S}_1^{(N)}} \exp(i\rho \sin \varphi_m) \times \begin{cases} \cos(n\varphi_m), & n \text{ par}, \\ -i \sin(n\varphi_m), & n \text{ impar}. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.16)$$

La distinción entre casos pares e impares de n es sutil pero importante para obtener el resultado de todas las n 's [68]. Tal distinción resulta en que las propiedades cíclicas y paridades de las funciones de Bessel continuas $J_n(\rho)$ de orden entero, se mantienen

$$B_n^{(N)}(\rho) = B_{n \pm N}^{(N)}(\rho) = (-1)^n B_{-n}^{(N)}(\rho) = (-1)^n B_n^{(N)}(-\rho), \quad B_n^{(N)}(0) = \delta_{n,0}, \quad (5.17)$$

así como relaciones que se mostrarán en la siguiente sección. Una onda plana de número de onda κ a lo largo del eje y en un medio de Helmholtz tal que solo permite N direcciones de propagación equidistantes sobre el círculo, puede ser obtenida por medio de las funciones de Bessel discretas usando la relación de completez (5.12) para expandirla en la forma

$$\exp(i\rho \sin \varphi_m) = B_0^{(N)}(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} B_{2n}^{(N)}(\rho) \cos(2n\varphi_m) + 2i \sum_{n=0}^{N-1} B_{2n+1}^{(N)}(\rho) \sin((2n+1)\varphi_m), \quad (5.18)$$

mostrando que las funciones de Bessel discretas pueden tomar el lugar de las funciones continuas [53, Eq.KU120(13)] en los sistemas de naturaleza discreta. Por el esquema de discretización utilizado (5.7), es claro que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B_n^{(N)}(\rho) \longrightarrow J_n(\rho), \quad (5.19)$$

un hecho que se hace evidente en la sección 5.5.

5.3 Identidades lineales

Las funciones de Bessel discretas $B_n(\rho)$ (en adelante se omitirá el súper índice (N)) obedecen diversas identidades bien conocidas para el caso continuo. La transformada de

la serie de Fourier sobre el círculo puede discretizarse directamente a la transformada sobre N puntos en expresiones lineales. Para simplificar, se usará el llamado

$$\text{factor de Neumann: } \varepsilon_n := 2 - \delta_{n,0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \neq 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

Este factor permite escribir de forma compacta la suma sobre órdenes pares de las funciones de Bessel discretas,

$$\sum_{n=-j}^j B_{2n}(\rho) = \sum_{n=0}^j \varepsilon_n B_{2n}(\rho), \quad (5.21)$$

la cual es el caso especial $\varphi_k = 0$ de la suma sobre órdenes pares e impares,

$$\sum_{n=0}^j \varepsilon_n B_{2n}(\rho) \cos(2n\varphi_k) = \cos(\rho \sin \varphi_k), \quad (5.22)$$

$$\sum_{n=0}^j B_{2n+1}(\rho) \sin((2n+1)\varphi_k) = \frac{1}{2} \sin(\rho \sin \varphi_k), \quad (5.23)$$

que pueden probarse usando relaciones trigonométricas y las relaciones de paridad de las funciones discretas de Bessel. Las ecuaciones (5.22) y (5.23) pueden compararse con las ecuaciones [53, Eq.KU120(14), p.935] y [53, Eq.KU120(15), p.935], respectivamente, que se cumplen para las funciones de Bessel continuas.

5.4 Identidad de Graf

Una suma de términos cuadráticos fue encontrada por Neumann en 1867 para órdenes enteros, posteriormente fue extendida por Graf en 1893 para órdenes reales, y desde entonces se conoce como fórmula de Graf [69, Sec.7.6.2,Eq.(6)]. Su origen en teoría de grupos es la transformación lineal de armónicos esféricos $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ a través de funciones d de Wigner bajo rotación alrededor del eje y en contracción al grupo euclidiano [70]. En tal límite, tanto los armónicos esféricos como las funciones d de Wigner se vuelven funciones de Bessel y conducen a la fórmula

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) J_{n'-n}(x') = J_{n'}(x + x'), \quad (5.24)$$

que puede ser vista como un desplazamiento y convolución de argumentos e índices. Las funciones de Bessel discretas $B_n(\rho)$ satisfacen una fórmula correspondiente para $N = 2j + 1$, esto es

$$\sum_{n=-2j}^{2j} B_n(\rho) B_{n'-n}(\rho') = B_{n'}(\rho + \rho'). \quad (5.25)$$

Para probar esta relación, se reemplazarán las funciones discretas (5.17) y se considerarán las propiedades (5.18), lo que permitirá la suma sobre los N términos. El lado izquierdo de la fórmula discreta de Graf, es

$$\begin{aligned} \sum_{n=-2j}^{2j} B_n(\rho)B_{n'-n}(\rho') &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=-2j}^{2j} \sum_{k,k'=-j}^j \exp i(\rho \sin \varphi_k + \rho' \sin \varphi_{k'}) \\ &\times [C_n \cos(n\varphi_k) - iS_n \sin(n\varphi_k)] \\ &\times [C_{n'-n} \cos((n'-n)\varphi_{k'}) - iS_{n'-n} \sin((n'-n)\varphi_{k'})]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

La suma sobre n actúa sobre los dos factores que separan los casos de paridad. Para n' par, la suma sobre n se vuelve

$$\begin{aligned} \sum_{n=-2j}^{2j} \left[C_n C_{n'-n} \cos(n\varphi_k) \cos((n'-n)\varphi_{k'}) + S_n S_{n'-n} \sin(n\varphi_k) \sin((n'-n)\varphi_{k'}) \right] \\ = N \cos(n'\varphi_k) \delta_{k,k'}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

mientras para n' impar la suma es

$$\begin{aligned} -i \sum_{n=-2j}^{2j} \left[C_n S_{n'-n} \cos(n\varphi_k) \sin((n'-n)\varphi_{k'}) + S_n C_{n'-n} \sin(n\varphi_k) \cos((n'-n)\varphi_{k'}) \right] \\ = -i N \sin(n'\varphi_k) \delta_{k,k'}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Esto acerca los factores del lado izquierdo de (5.25) a la definición de $B_{n'}(\rho + \rho')$. Sustituyendo (5.27) y (5.28) en (5.26), se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=-2j}^{2j} B_n(\rho)B_{n'-n}(\rho') &= \\ \frac{1}{N} \sum_{k,k'=-j}^j \exp i(\rho \sin \varphi_k + \rho' \sin \varphi_{k'}) &\left[\tilde{C}_{n'}^{k,k'} \cos(n'\varphi_k) - i\tilde{S}_{n'}^{k,k'} \sin(n'\varphi_k) \right], \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde se han usado los coeficientes,

$$\tilde{C}_{n'}^{k,k'} = \begin{cases} 0, & n' \text{ impar,} \\ \delta_{k,k'}, & n' \text{ par,} \end{cases} \quad \tilde{S}_{n'}^{k,k'} = \begin{cases} \delta_{k,k'}, & n' \text{ impar,} \\ 0, & n' \text{ par.} \end{cases} \quad (5.30)$$

Los índices k y k' se reducen a una sola suma, donde los exponentes se unen para formar el término $(\rho + \rho') \sin \varphi_k$ y la identidad (5.25) se cumple,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=-j}^j \exp(i(\rho + \rho') \sin \varphi_k) \left[C_{n'} \cos(n'\varphi_k) - iS_{n'} \sin(n'\varphi_k) \right] = B_{n'}(\rho + \rho'). \quad (5.31)$$

Las simetrías (5.17) indican que la suma sobre $2N - 1$ puntos puede ser reducida a N sumandos introduciendo el factor de Neumann ε_n (5.20). Así, para $n' = 0$ y $\rho = -\rho'$, la identidad de Graf conduce a

$$\sum_{n=-2j}^{2j} [B_n(\rho)]^2 = \sum_{n=0}^{2j} \varepsilon_n [B_n(\rho)]^2 = 1, \quad (5.32)$$

que corresponde a fórmulas bien conocidas para las funciones de Bessel continuas, con sumas infinitas [53, Eq.WA44, p.934]. La identidad de Graf para funciones de Bessel discretas conduce a diversas fórmulas conocidas, usando las simetrías (5.17). Hasta este momento se había considerado a la variable de posición ρ como continua, en adelante se considerarán posiciones discretas.

5.5 Aproximaciones del discreto al continuo

En esta sección se indican las igualdades aproximadas por $B_n(m) \cong J_n(m)$, donde $m \in \mathbb{Z}$ es la variable de posición, y se reporta el error cuadrático medio en rangos de los parámetros (n, m) sobre una malla de enteros en la mitad superior del plano $n - m$. Para diferentes valores de N , se mide el mérito de la aproximación a través del error cuadrático medio,

$$\Delta_n^{(N)} := \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(J_n(m) - B_n^N(m) \right)^2. \quad (5.33)$$

El espacio de un sistema discreto de $N = 2j + 1$ puntos $\{x_m\}_{m=0}^{2j}$ es generado por un conjunto de N funciones independientes $J_n(x_m)$. Las gráficas en la figura 5.1, contienen intervalos de m más allá de $[0, 2j]$. Excelentes aproximaciones entre valores de las funciones de Bessel discretas y continuas en la malla (n, m) se encuentran en el primer cuadrante, para $n + m < N - 1$; en el intervalo $[0, 2j]$, el error cuadrático medio entre los valores es $\Delta_n^{(321)} < 10^{-16}$, para $j = 160$. La figura 5.1 muestra que el intervalo de coincidencia entre funciones discretas y continuas crece al tomar valores cada vez mayores de N y el error entre ellas decrece, lo que hace evidente que en el límite $N \rightarrow \infty$, las funciones de Bessel discretas convergen a las funciones de Bessel continuas. En la siguiente sección, se utilizará esta característica para definir una transformada discreta de Bessel entre funciones de posición m y modos n para un entero dado j .

Ahora se enlistan otras fórmulas bien conocidas para las funciones de Bessel continuas, y son remplazadas por sus versiones discretas; se da un rango de coincidencia y el valor del error en la aproximación. Entre ellas, se encuentran

$$2 \sum_{n=0}^j (-1)^n B_{2n+1}(m) \cong \sin(m), \quad (5.34)$$

$$\sum_{n=0}^j \varepsilon_n (-1)^n B_{2n}(m) \cong \cos(m), \quad (5.35)$$

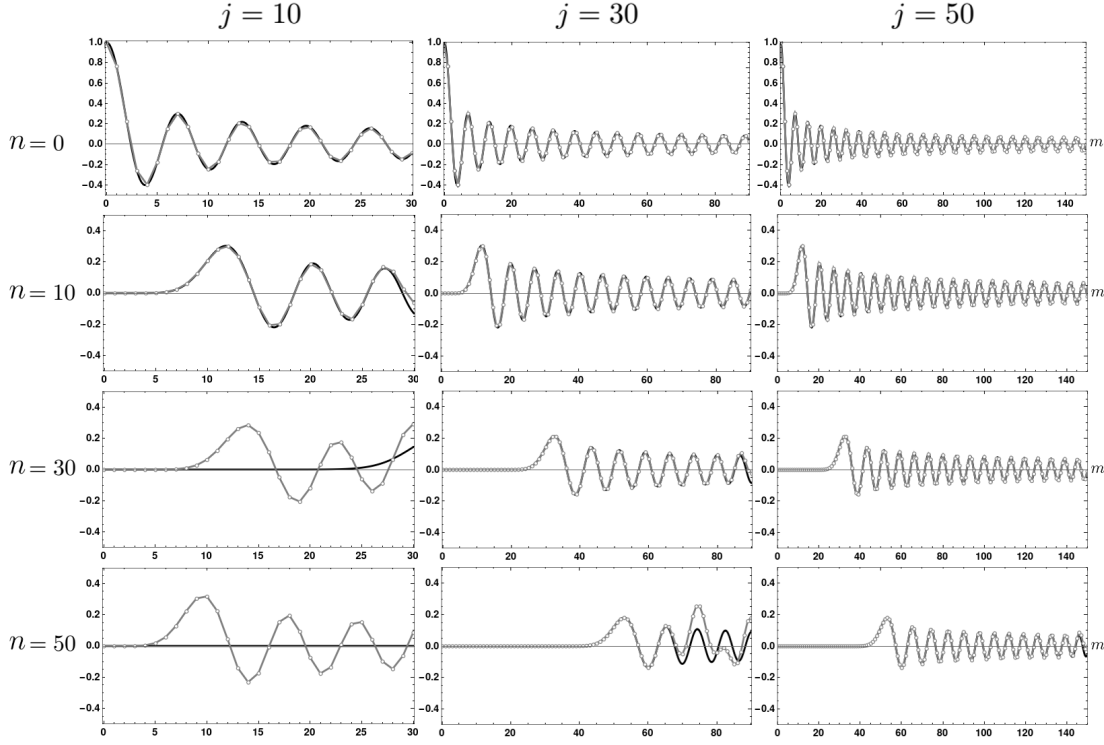


Figura 5.1: Comparación de valores de funciones de Bessel discretas $B_n^{2j+1}(m)$ (círculos abiertos) y funciones de Bessel continuas $J_n(m)$ (líneas) en los mismos rangos. Se muestran los casos para $j \in \{10, 30, 50\}$, (i.e., $N \in \{21, 61, 101\}$ puntos discretos), para órdenes $n \in \{0, 10, 30, 50\}$, sobre los rangos $m \in [0, 3j]$ de posición. El error cuadrático medio es menor que 10^{-16} en los rangos $n+m \leq N-1$.

que pueden ser comparadas con [53, WH(1,2), p.934]. Recordando que en estas fórmulas el argumento del seno y el coseno es entero $m \in \{-j, -j+1, \dots, j\}$. Para mostrar la comparación entre estas funciones discretas y las funciones continuas, se presenta la figura 5.2. El error cuadrático medio entre ellas es $\approx 10^{-6}$.

Las gráficas mostradas en la figura 5.3, corresponden a $n = 1$ y $m \in [-j, j]$, las aproximaciones son

$$\sum_{k=0}^j B_1(m \cos \varphi_k) \cos \varphi_k \cong \frac{\sin m}{m} =: \text{sinc } m, \quad (5.36)$$

$$\sum_{k=0}^j B_1(m \cos \varphi_k) \cong \frac{1 - \cos m}{m} =: \text{cosc } m. \quad (5.37)$$

que se aproximan con un error cuadrático medio menor que 10^{-6} para $j = 50$.

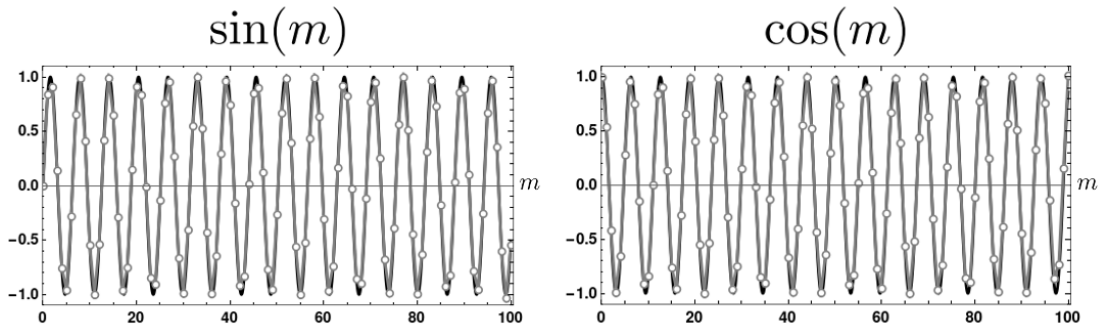


Figura 5.2: Comparación de las fórmulas dadas por (5.34) y (5.35) para enteros $m \in [0, 100]$ (círculos abiertos), con $\sin(m)$ y $\cos(m)$ para posiciones continuas m (línea) en el mismo rango; aquí, $j = 50$ y $N = 101$.

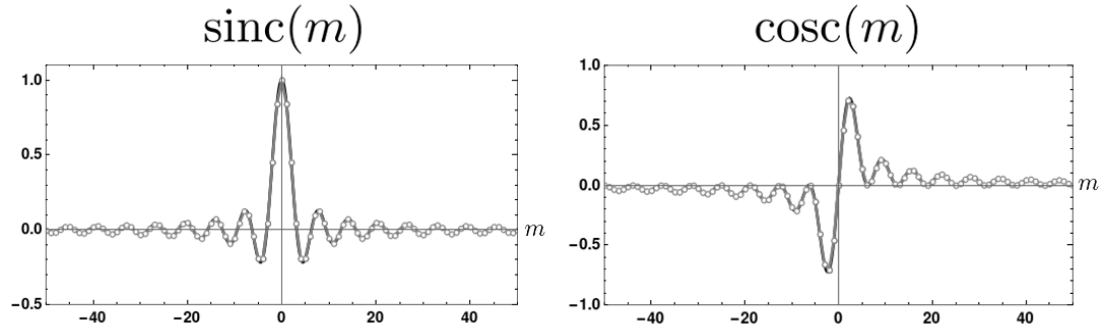


Figura 5.3: Comparación de valores de funciones continuas y funciones de Bessel discretas, en los lados derecho e izquierdo de las fórmulas (5.36) y (5.37), como antes, con líneas continuas y círculos abiertos, en los mismos rangos para $j = 50$, $N = 101$.

5.6 Transformada de Bessel discreta

Considérese la matriz $\mathbf{B} = \| B_{n,m} \|$ de tamaño $N \times N$, con $B_{n,m} := B_n(m)$, esta matriz es el kernel de la *transformada de Bessel discreta*. Cualquier conjunto de N vectores linealmente independientes puede usarse para definir un espacio vectorial de dimensión N ; a pesar de que dicha independencia lineal no ha podido ser probada aquí, verificaciones numéricas de $\det \mathbf{B} \neq 0$ hacen plausible esta conclusión. Por lo tanto, dada una función de N posiciones f_m , será transformada por la matriz \mathbf{B} en una función \tilde{f}_n de N modos. La matriz inversa $\mathbf{C} := \mathbf{B}^{-1}$ recuperará la función original de posiciones,

$$\tilde{f}_n := \sum_{m=0}^{N-1} B_{n,m} f_m, \quad f_m = \sum_{n=0}^{N-1} C_{m,n} \tilde{f}_n, \quad \mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{1}. \quad (5.38)$$

Los elementos de la matriz \mathbf{B} aproximan cercanamente los valores de $J_n(m)$ sobre una malla de enteros en la región $0 \leq n + m \leq N - 1$. Nótese que $B_{n,0} = \delta_{n,0} = J_n(0)$,

y que para $0 < m < n$, $J_n(m)$ y $B_n(m)$ tienen valores muy pequeños. Los valores comienzan a oscilar con amplitud máxima cuando $m \approx n$ y decrecen como $\sim m^{-1/2}$ a lo largo del eje de posición m . Por lo tanto, la matriz \mathbf{B} es efectivamente una matriz triangular superior y su determinante estará dado por el producto de sus N elementos diagonales, $D_N := \det \mathbf{B} \approx \prod_{n=0}^{N-1} B_n(n)$. Este determinante decrece rápidamente: para $N = \{5, 11, 21, 51\}$, se encuentra $D_N \approx \{10^{-2}, 2 \times 10^{-6}, 7 \times 10^{-14}, 10^{-39}\}$. Esto reduce la estabilidad numérica de cálculos para N 's grandes, impidiendo que exista la transformada de Bessel discreta para $N \gg 1$, pero no impide la existencia para valores pequeños de N .

Las transformadas integrales o en series cuyo kernel involucra funciones de Bessel son bastante diferentes de (5.38). La transformada de Hankel de orden n tiene kernel $\sim (pq)^{1/2} J_n(pq)$, entre espacios de funciones $f(q)$ y $\tilde{f}(p)$; La serie armónica de Fourier-Bessel contiene el kernel $\sim J_n(k_{n,m}r) e^{in\phi}$ en coordenadas polares, con enteros n, m y $k_{n,m}$ siendo las frecuencias permitidas por las condiciones de frontera circulares. Otras series detalladas en el tratado de Watson [64] son la c -serie de Neumann con kernel $\sim J_{n+c}(r)$, la c -serie de Kapteyn con $\sim J_{n+c}((n+c)r)$, y la μ -serie Schlömlich con $J_n(\mu r)$, para transformar entre funciones f_n con n entero y $f(r)$ sobre r continua. Como se puede ver, ninguna tiene la estructura simple de la transformada de Bessel discreta (5.38).

5.7 Conclusiones

Después de las funciones trigonométricas, las funciones cilíndricas –en especial las funciones de Bessel– pueden ser consideradas como las más importantes en la física matemática. Las funciones de Bessel tienen importantes propiedades en la teoría de grupos como elementos de matriz de representaciones irreducibles para los grupos euclidianos de rotaciones y traslaciones [71].

Las funciones trigonométricas son la base de las tres distintas transformaciones: la transformada de Fourier integral, la serie de Fourier y la transformada de Fourier finita. Las tres relacionadas a través de límites continuos y discretizaciones de la línea real \mathbb{R} , los enteros \mathbb{Z} y los enteros módulo N , \mathbb{Z}_N . Tal discretización de las funciones generadoras fueron usadas aquí en $J_n(m)$ sobre \mathbb{Z} para definir las funciones de Bessel discretas $B_n^{(N)}(m)$ sobre \mathbb{Z}_N . De hecho, la posición puede ser discreta o continua; como ocurre en el caso de la transformada de Fourier finita, las N fases sobre el círculo pueden ser desplazadas libremente.

El interés sobre las funciones de Bessel discretas fue propuesto en la referencia [68] de tal modo que la discretización de señales con decaimiento, propagación de ondas radiales o dispersión en dos o más dimensiones pueden considerarse como una superposición de modos normales de Bessel.

Capítulo 6

Funciones de Mathieu discretas

Las coordenadas elípticas sobre el plano generalizan las coordenadas polares del desarrollo hecho en el capítulo anterior. Las coordenadas elípticas se definen en términos de coordenadas cartesianas de la forma

$$x = \cosh \varrho \cos \psi, \quad y = \sinh \varrho \sin \psi, \quad \varrho \in [0, \infty), \quad \psi \in (-\pi, \pi] = \mathcal{S}^1. \quad (6.1)$$

donde (ϱ, ψ) son análogos de las coordenadas polares (r, ϕ) por lo que se mantendrán los nombres ‘radial’ y ‘angular’ para las variables. Para ϱ o ψ fija, los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen

$$\frac{x^2}{\cosh^2 \varrho} + \frac{y^2}{\sinh^2 \varrho} = 1, \quad \frac{x^2}{\cos^2 \psi} - \frac{y^2}{\sin^2 \psi} = 1. \quad (6.2)$$

definen familias de elipses confocales o hipérbolas, respectivamente; véase la figura 6.1. En $\varrho = 0$, $\psi \in \mathcal{S}^1$ dibuja dos veces la línea entre los focos $(x, y) = (\pm 1, 0)$ para $\psi = (0, \pi)$. Los semiejes mayor y menor de las elipses son $\cosh \varrho$ y $\sinh \varrho$ respectivamente, por lo que sus excentricidades son $1/\cosh \varrho$, que tienden al círculo cuando $\varrho \rightarrow \infty$. Por otro lado, para $\psi \in \mathcal{S}^1$ en cada uno de los cuadrantes, dado que $\varrho \geq 0$, únicamente uno de los cuatro brazos de la hipérbola es marcado. Por lo tanto, se esperan cuatro casos de paridad de las dos reflexiones a través de los ejes x y y . Comparando el caso polar, también $r \geq 0$ pero todas las reflexiones son equivalentes, tal que $(-1)^n$ provee los dos casos de paridad de las funciones de Bessel. Los resultados de este trabajo se encuentran en el manuscrito [73].

6.1 Funciones angulares de Mathieu discretas

La ecuación diferencial de Helmholtz (4.1), escrita en coordenadas elípticas (6.1), es claramente separable,

$$[(\partial_\varrho^2 + \kappa^2 \cosh^2 \varrho) + (\partial_\psi^2 - \kappa^2 \cos^2 \psi)] f(\varrho, \psi) = 0, \quad (6.3)$$

de modo que las soluciones pueden ser escritas en la forma del producto $f(\varrho, \psi) \sim P(\varrho)\Psi(\psi)$. Dividiendo por f , se obtienen dos ecuaciones acopladas en ϱ y ψ , la última

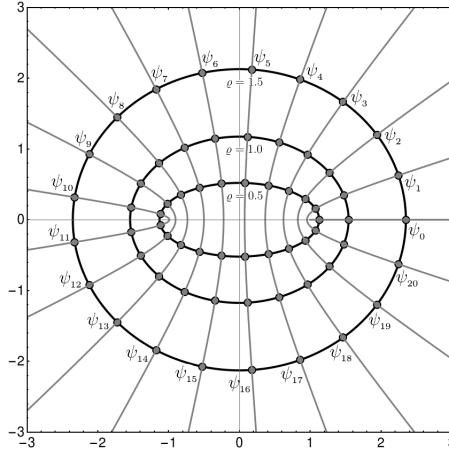


Figura 6.1: Conjunto discreto de puntos equiespaciados sobre elipses (6.1) de las coordenadas angulares $\{\psi_m\} \in \mathcal{S}_N^1$ para $N = 21$, e hipérbolas para coordenadas radiales $\varrho \in \{0.5, 1, 1.5\}$.

es una ecuación de eigenvalores en la coordenada angular,

$$(\partial_\psi^2 - 2q \cos 2\psi) \Psi(\psi, q) = \nu \Psi(\psi, q), \quad q := \frac{1}{4} \kappa^2, \quad (6.4)$$

conocida como ecuación diferencial angular de Mathieu. La coordenada angular ψ es periódica y un método de solución bien conocido consiste en expandir soluciones de (6.4) en la base de Fourier $\sim \exp(in\psi)$ sobre todos los enteros n . Esto define las funciones de Mathieu de primer tipo (funciones angulares) $ce_n(\psi, q)$ y $se_n(\psi, q)$ con n entero [65], caracterizada por un índice de paridad $p \in \{0, 1\}$ para casos pares e impares [53, Eq.(8.61)]. En una expresión de dos líneas los casos pueden ser escritos como

$$\begin{bmatrix} ce_{2n+p}(\psi, q) \\ se_{2n+p}(\psi, q) \end{bmatrix} = \sum_{s=0}^{\infty} \begin{bmatrix} A_{2s+p}^{2n+p} \cos((2s+p)\psi) \\ B_{2s+p}^{2n+p} \sin((2s+p)\psi) \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

Las paridades son: par $ce_n(-\psi, q) = ce_n(\psi, q)$, impar $se_n(-\psi, q) = -se_n(\psi, q)$, y $se_0(\psi, q) \equiv 0$. Los coeficientes A_{2s+p}^{2n+p} y B_{2s+p}^{2n+p} se encuentran introduciendo el desarrollo (6.5) en (6.4) para encontrar relaciones de recursión [53, Eq.(8.62)]. También es posible escribirlos usando la serie de Fourier,

$$\begin{bmatrix} A_s^n \\ B_s^n \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{S}^1} d\psi \begin{bmatrix} \cos(s\psi) ce_n(\psi, q) \\ \sin(s\psi) se_n(\psi, q) \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

para $n \neq 0$, mientras $A_0^n = (2\pi)^{-1} \int_{\mathcal{S}^1} ce_n(\psi, q) d\psi$ y $B_0^n \equiv 0$. Las funciones de Mathieu angulares (6.5) son ortogonales sobre el círculo bajo el producto interno (7.6), $\langle ce_m, ce_n \rangle = \pi \delta_{m,n}$, $\langle se_m, se_n \rangle = \pi \delta_{m,n}$ para $n \neq 0$ –cero otro caso, y $(ce_m, se_n)_\circ = 0$.

Ahora restringimos el rango de la coordenada angular ψ de \mathcal{S}^1 a $\mathcal{S}_{(N)}^1$, mostrado para las coordenadas elípticas en la figura 6.1, en correspondencia con el desarrollo hecho en

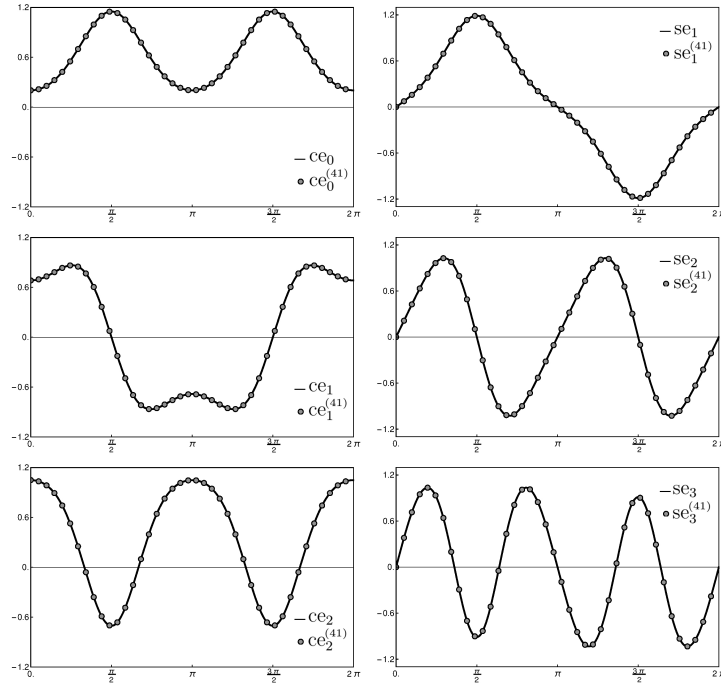


Figura 6.2: Funciones angulares de Mathieu discretas *vs.* continuas para $N = 41$, $q = 2$. Los valores de las funciones discretas $ce_n^{(N)}(\psi_m, q)$ y $se_n^{(N)}(\psi_m, q)$ en ψ_m , $0 \leq m \leq N-1$, son indicadas por círculos. Las funciones de Mathieu continuas $ce_n(\psi, q)$ y $se_n(\psi, q)$ están marcadas por líneas negras en todo el rango $0 \leq \psi < 2\pi$. La diferencia es menor que 10^{-16} para todos los puntos ψ_m .

el capítulo anterior para las funciones de Bessel, siguiendo el esquema de discretización desarrollado en la sección 7.1. Entonces se definen las funciones angulares de Mathieu discretas sobre $\psi_m \in \mathcal{S}_{(N)}^1$, como

$$\begin{bmatrix} ce_{2n+p}^{(N)}(\psi_m, q) \\ se_{2n+p}^{(N)}(\psi_m, q) \end{bmatrix} := \sum_{s=0}^{N-1} \begin{bmatrix} a_{2s+p}^{2n+p} \cos((2s+p)\psi_m) \\ b_{2s+p}^{2n+p} \sin((2s+p)\psi_m) \end{bmatrix}, \quad (6.7)$$

con coeficientes a_s^n, b_s^n . La transformada de Fourier finita sobre N puntos los aproxima mediante la sustitución (7.7) en (6.6), tal que

$$\begin{bmatrix} a_s^n \\ b_s^n \end{bmatrix} := \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \cos(s\psi_m) ce_n^{(N)}(\psi_m, q) \\ \sin(s\psi_m) se_n^{(N)}(\psi_m, q) \end{bmatrix} \simeq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_s^n \\ B_s^n \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

para $s \neq 0$, mientras que $a_0^n = A_0^n$, $b_0^n = 0$, y $b_s^0 = 0$.

La relación (6.8) es una igualdad aproximada, cuya validez depende del cálculo numérico y de la comparación entre los coeficientes de las minúsculas y las mayúsculas dentro de un rango de sus índices en, $0 \leq n, s \leq N-1$, que a su vez se refleja en las funciones de Mathieu discretas. En la figura 6.2 se compara un muestreo de funciones angulares de Mathieu continuas con su aproximación discreta (6.7). Las funciones

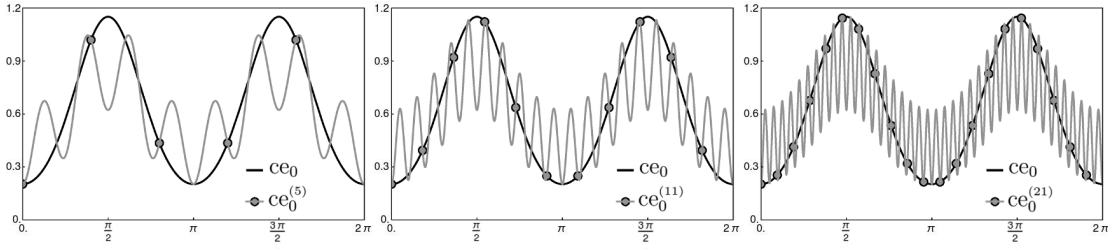


Figura 6.3: Comparación entre las funciones angulares de Mathieu discretas $ce_0^{(N)}(\psi_m, q)$ cuyo argumento se ha graficado continuo $\psi_m \in \mathcal{S}^1$ (línea gris) vs. la función angular de Mathieu continua $ce_n(\psi, q)$ (línea negra), para número de puntos $N \in \{5, 11, 21\}$ y $q = 2$. Los puntos discretos $\psi_m \in \mathcal{S}_{(N)}^1$ son el conjunto de puntos de intersección.

angulares de Mathieu discretas satisfacen relaciones de ortogonalidad bajo el producto interno discreto (7.9),

$$(ce_n^{(N)}, ce_{n'}^{(N)})_{(N)} = \frac{1}{2}N\delta_{n,n'}, \quad (se_n^{(N)}, se_{n' \neq 0}^{(N)})_{(N)} = \frac{1}{2}N\delta_{n,n'}, \quad (ce_n^{(N)}, se_{n'}^{(N)})_{(N)} = 0. \quad (6.9)$$

Por construcción las paridades de las funciones angulares de Mathieu discretas también son: par $ce_n^{(N)}(-\psi_m, q) = ce_n^{(N)}(\psi_m, q)$, e impar $se_n^{(N)}(-\psi_m, q) = -se_n^{(N)}(\psi_m, q)$.

En este punto es ilustrativo indagar en el modo en que las funciones discretas aproximan a las continuas. Considérese como ejemplo $ce_0^{(N)}(\psi_m, q)$, cuya definición permite calcularlo de forma continua, $\psi_m \in \mathcal{S}^1$, y compararla con $ce_0(\psi, q)$ en todo el intervalo $[0, 2\pi]$. En la figura 6.3, se hace para N pequeños, observando que donde las líneas continuas de ψ_m toman sus valores, se cruzan con la línea –propriadamente continua– de ψ ; aunque las líneas se cruzan también en otros puntos, las líneas siguen siendo notablemente distintas. Las líneas se cruzan en más puntos que los correspondientes a ψ_m con $m \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ debido a que la simetría de las funciones angulares permitiría que m tome valores semi-enteros, $m \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots, N - \frac{3}{2}, N-1\}$, pero este desarrollo se limita a considerar m entera porque, siguiendo el método de Miller, las funciones (6.7) se utilizarán para encontrar las correspondientes funciones radiales discretas; incluir m semi-entera permitiría ejes de reflexión en el grupo, dicho de otro modo, convertiría un valor impar de N en una cantidad par de puntos. Como muestra la figura 6.3, la aproximación no es válida para todo ψ , sino únicamente en las direcciones radiales $\psi_m = 2\pi m/N$.

6.2 Funciones radiales de Mathieu discretas

Procediendo como en (7.14), pero usando las funciones angulares de Mathieu discretas $ce_n^{(N)}$ y $se_n^{(N)}$ se obtienen soluciones de Helmholtz $f_n(\varrho, \psi_k)$ sobre el plano por paridades y subíndices n , que darán lugar a las *funciones radiales de Mathieu discretas*, que serán

correspondientemente indicadas como $Ce_n^{(N)}(\varrho, q)$ y $Se_n^{(N)}(\varrho, q)$,

$$\begin{bmatrix} f_{2n+p}^c(\varrho, \psi_k) \\ f_{2n+p+1}^s(\varrho, \psi_k) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N-1} \begin{bmatrix} ce_n^{(N)}(\psi_m, q) \\ se_n^{(N)}(\psi_m, q) \end{bmatrix} \exp[i\kappa(x \cos \psi_m + y \sin \psi_m)] \quad (6.10)$$

$$=: \begin{bmatrix} c_n(q) Ce_n^{(N)}(\varrho, q) ce_n^{(N)}(\psi_k, q) \\ s_n(q) Se_n^{(N)}(\varrho, q) se_n^{(N)}(\psi_k, q) \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

donde $c_n(q)$ y $s_n(q)$ son constantes. Usando las coordenadas elípticas donde el factor angular ha sido discretizado $x(\varrho, \psi_k) = \cosh \varrho \cos \psi_k$ y $y(\varrho, \psi_k) = \sinh \varrho \sin \psi_k$ en (6.1), el exponente en la fase es entonces $i\kappa = 2i\sqrt{q}$ veces $x \cos \psi_m + y \sin \psi_m = \cosh \varrho \cos \psi_k \times \cos \psi_m + \sinh \varrho \sin \psi_k \sin \psi_m$. Como fue hecho antes, se extraen las nuevas funciones radiales discretas usando las relaciones de ortogonalidad (6.9),

$$\begin{bmatrix} Ce_{2n+p}^{(N)}(\varrho, q) \\ Se_{2n+p+1}^{(N)}(\varrho, q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/N c_{2n+p}(q) ce_{2n+p}^{(N)}(\psi_k, q) \\ 1/N s_{2n+p+1}(q) se_{2n+p+1}^{(N)}(\psi_k, q) \end{bmatrix} \sum_{m=0}^{N-1} \begin{bmatrix} ce_{2n+p}^{(N)}(\psi_m, q) \\ se_{2n+p+1}^{(N)}(\psi_m, q) \end{bmatrix} \times \exp[2i\sqrt{q}(\cosh \varrho \cos \psi_k \cos \psi_m + \sinh \varrho \sin \psi_k \sin \psi_m)]. \quad (6.12)$$

Los coeficientes frente a la suma serán ahora determinados considerando valores específicos para la coordenada ‘angular’ $\psi \leftrightarrow \psi_k$, comparándolos con expresiones de las funciones radiales de Mathieu continuas obtenidas como expresiones integrales, tabuladas en [53, §6.92]. Allí los exponentes aparecen con un solo sumando, ya sea seno o coseno. Esto ocurre en (6.12) solo para $\psi_k = 0$ o $\frac{1}{2}\pi$. A pesar de que el segundo valor no se encuentra en el conjunto $\mathcal{S}_{(N)}^1$, dado que N es impar, en la expresión (6.12) ψ_k es solo un parámetro.

Considerando el caso de paridad $p = 0$ y el ángulo $\psi = \frac{1}{2}\pi$ en (6.12), la fórmula se reduce a

$$\begin{bmatrix} Ce_{2n}^{(N)}(\varrho, q) \\ Se_{2n+1}^{(N)}(\varrho, q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{2n}^c \\ K_{2n+1}^s \end{bmatrix} \sum_{m=0}^{N-1} \begin{bmatrix} ce_{2n}^{(N)}(\psi_m, q) \\ se_{2n+1}^{(N)}(\psi_m, q) \end{bmatrix} \exp(2i\sqrt{q} \sinh \varrho \sin \psi_m), \quad (6.13)$$

donde los coeficientes al frente de la suma se han expresado de forma genérica K_{2n}^c y K_{2n+1}^s . Comparando esta fórmula con las expresiones integrales tabuladas en [53, §6.92], a saber

$$\begin{bmatrix} Ce_{2n}(\varrho, q) \\ Se_{2n+1}(\varrho, q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ce_{2n}(0, q)/2\pi A_0^{2n} \\ -ise'_{2n+1}(0, q)/2\pi B_1^{2n+1}\sqrt{q} \end{bmatrix} \times \int_{\mathcal{S}^1} d\psi \begin{bmatrix} ce_{2n}(\psi, q) \\ se_{2n+1}(\psi, q) \end{bmatrix} \exp(2i\sqrt{q} \sinh \varrho \sin \psi), \quad (6.14)$$

se concluye que los coeficientes (6.13), identificando antes $2\pi \leftrightarrow N$, $A_0^{2n} = a_0^{2n}$ y $B_1^{2n+1} \simeq 2b_1^{2n+1}$, son

$$K_{2n}^c = \frac{ce_{2n}(0, q)}{a_0^{2n} N}, \quad K_{2n+1}^s = \frac{-ise'_{2n+1}(0, q)}{2b_1^{2n+1}\sqrt{q} N}. \quad (6.15)$$

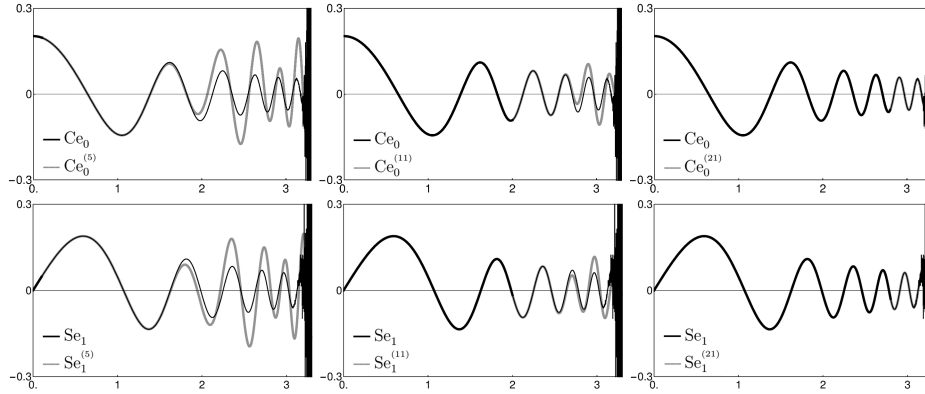


Figura 6.4: Funciones radiales de Mathieu discretas *vs.* continuas en el intervalo $0 \leq \varrho < 3.3$, para $N \in \{5, 11, 21\}$ y con $q = 2$. Las funciones discretas $Ce_n^{(N)}(\varrho, q)$ y $Se_n^{(N)}(\varrho, q)$ con el argumento continuo ϱ (línea gris), es comparada con las funciones continuas $Ce_n(\varrho, q)$ y $Se_n(\varrho, q)$ (línea negra delgada). Donde ambas coinciden con error menor o igual a 10^{-16} son reemplazadas con líneas negras gruesas. Las funciones radiales de Mathieu, cuando son calculadas con el algoritmo comercial **Wolfram Mathematica**© oscilan fuertemente después de un valor superior que disminuye con valores crecientes de q .

donde $se'_n(0, q) := dse_n(\psi, q)/d\psi|_{\psi=0}$. En la figura 6.4, se muestra una comparación entre funciones radiales de Mathieu discretas y continuas, notando que las dos líneas coinciden muy bien en el rango $\varrho \in [0, \pi)$, pero el algoritmo de **Wolfram Mathematica**©, usado para calcular las funciones continuas, oscila fuertemente más allá de π . Ahora considérese el caso de paridad $p = 1$ en el valor $\psi = 0$. La línea superior en (6.12), lleva a

$$Ce_{2n+1}^{(N)}(\varrho, q) = K_{2n+1}^c \sum_{m=0}^{N-1} ce_{2n+1}^{(N)}(\psi_m, q) \exp(2i\sqrt{q} \cosh \varrho \cos \psi_m), \quad (6.16)$$

que se comparará con la integral de la función radial de Mathieu continua en [53, §6.92],

$$Ce_{2n+1}(\varrho, q) = \frac{ice'_{2n+1}(\frac{1}{2}\pi, q)}{2\pi A_1^{2n+1} \sqrt{q}} \int_{S^1} d\psi ce_{2n+1}(\psi, q) \exp(2i\sqrt{q} \cosh \varrho \cos \psi), \quad (6.17)$$

donde $ce'_{2n+1}(\psi, q)$ es una derivada de la función de Mathieu. De nuevo, explorando las correspondencias, $N \leftrightarrow 2\pi$ y $A_1^{2n+1} \simeq 2a_1^{2n+1}$, se concluye que la constante en (6.16) es

$$K_{2n+1}^c = \frac{ice'_{2n+1}(\frac{1}{2}\pi, q)}{2a_1^{2n+1} \sqrt{q} N}. \quad (6.18)$$

El último caso a ser considerado es el de paridad $p = 1$ e índice par, identificado como $Se_{2n+2}(\varrho, q)$. Este caso presenta un problema, porque la suma es idénticamente cero para $\psi = 0$ y $\frac{1}{2}\pi$ dadas las paridades en los términos de la suma. Sin embargo, es diferente de cero en el intervalo $0 < \psi < \frac{1}{2}\pi$, entonces, escogiendo $\psi = \frac{1}{4}\pi$, ambos

sumandos en el exponente se vuelven $1/\sqrt{2}$, y se puede escribir

$$\begin{aligned} \text{Se}_{2n+2}^{(N)}(\varrho, q) &= K_{2n+2}^s \sum_{m=0}^{N-1} \text{se}_{2n+2}^{(N)}(\psi_m, q) \\ &\times \exp[i\sqrt{2}q (\cosh \varrho \cos \psi_m + \sinh \varrho \sin \psi_m)]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Este caso no se puede comparar directamente con su contraparte continua, porque no existe una fórmula integral correspondiente en [53, §6.92]. La ausencia de una expresión integral de onda plana similar para las funciones de Mathieu continuas ha sido notado en [76] sin explicación. Sin embargo, en este trabajo se ha revisado numéricamente la aproximación del discreto al continuo a través de la expresión

$$\text{Se}_{2n+2}^{(N)}(\varrho, q) \simeq -\text{ise}_{2n+2}(i\varrho, q) = \text{Se}_{2n+2}(\varrho, q), \quad (6.20)$$

que es una igualdad para funciones continuas, *cf.* [53, 8.611.4 y 8.631.4]. Para $0 < \varrho < 2$ la diferencia en (6.20) es menor que 10^{-14} . Se hace notar que, en general, las funciones discretas radiales y angulares de Mathieu no se relacionan intercambiando el argumento por un valor imaginario, tal como lo hacen las funciones continuas de Mathieu, ya que las sumas (6.5) involucrarían términos hiperbólicos, esto es

$$\text{Se}_{2n+p+1}^{(N)}(\varrho, q) \neq -\text{ise}_{2n+p+1}^{(N)}(i\varrho, q) = \sum_{m=0}^{N-1} b_{2m+p+1}^{2n+p+1} \sinh[(2m+p+1)\varrho]. \quad (6.21)$$

6.3 Conclusiones

Tal como se expresó un desarrollo de onda plana en términos de funciones de Bessel discretas (7.18), una afirmación similar será válida cuando el campo de ondas se desarrolla en funciones discretas de Mathieu con las fases determinadas por los puntos de una elipse, como se representa en la figura 6.1. Es posible que tales campos puedan producirse en microcavidades bidimensionales resonantes alimentadas por una serie de canales de activación.

El tratamiento completo y la exploración de las propiedades para la función discreta de Mathieu que aquí se presenta no es exhaustivo, pero debería ser suficiente para indicar que el método de aproximación que consiste en la sustitución de un subgrupo continuo cerrado del grupo de simetría de una ecuación diferencial parcial por un grupo discreto finito es definitivamente de interés. En el presente caso de dos dimensiones, el grupo ortogonal fue reducido al grupo diédrico. En tres dimensiones, la simetría euclidiana podría reducir su subgrupo de rotación tridimensional por cualquiera de sus subgrupos poliédricos, cuyas funciones pueden servir para describir campos de ondas con un subconjunto correspondientes de direcciones de propagación de ondas. Aquí se ha presentado un conjunto de relaciones cuya cercanía de aproximación fue estimada mediante cálculo numérico, y otras que sólo han sido sugeridas por ese enfoque.

Parte III

Estructuras Algebraicas en Sistemas Optomecánicos

Una cavidad optomecánica, tipo Fabry-Perot, es un sistema compuesto por dos espejos macroscópicos separados por una distancia L y un campo electromagnético cuantizado entre ellos, uno de los espejos se encuentra fijo mientras que el segundo describe una trayectoria oscilante, el acoplamiento entre los espejos y el campo se debe a la presión de radiación [77]. En el modelo más simple y más usado se considera un solo modo del campo electromagnético acoplado a un solo modo del oscilador mecánico. Cuando los fotones del campo se reflejan sobre los espejos perfectos, existe una transferencia de momento entre el campo y el espejo, como la resonancia de la cavidad depende de su longitud, el desplazamiento mecánico afecta a su vez al campo dentro de la cavidad [78].

El estudio de los sistemas optomecánicos se ha venido desarrollando desde 1967 cuando Braginskiĭ y Manukin [79] realizaron trabajos pioneros con cavidades de microondas. Desde entonces, una gran cantidad de experimentos [80, 81, 82] y trabajos teóricos han descubierto y descrito fenómenos sorprendentes debidos a la transferencia de momento de fotones hacia átomos y objetos macroscópicos. Entre ellos se encuentra la emisión de fotones de un espejo con movimiento no uniforme [83], efecto Casimir dinámico [84, 85, 86], generación de estados comprimidos [94], mediciones cuánticas sin destrucción [87], etc..

En todos estos avances tiene un papel fundamental la capacidad de describir teóricamente los sistemas físicos en consideración, de modo que se pueda encontrar –a través del modelo en cuestión–, la dirección apropiada de indagación experimental, así como la interpretación y manipulación de los datos obtenidos en las mediciones. En física cuántica, la formulación hamiltoniana ha resultado ser una de las formas más efectivas para describir la dinámica de los sistemas. Sin embargo, en muchas ocasiones, a pesar de que se pueda plantear el hamiltoniano del sistema la soluciones no son accesibles por métodos convencionales, por lo que su descripción se limita a situaciones estacionarias o se utilizan métodos de aproximación.

Los métodos algebraicos de Lie han demostrado ser de gran utilidad para abordar sistemas cuánticos. Recientemente se ha abordado con estos métodos el sistema formado por una cavidad optomecánica con un átomo de dos niveles en su interior acoplado al campo de la cavidad [88], el sistema formado por dos hamiltonianos de Jaynes–Cummings [89], el oscilador paramétrico en un medio de Kerr [90], entre otros.

En esta sección se utilizan los métodos de Lie para encontrar el operador de evolución temporal de un sistema formado por una cavidad optomecánica con dos modos de campo electromagnético en su interior, débilmente acoplados entre sí. Cuando los operadores que forman el hamiltoniano de un sistema son los generadores de un álgebra de Lie, es posible mapear la trayectoria descrita por el hamiltoniano en el álgebra, a una trayectoria en el grupo asociado a dicha álgebra a través del mapeo exponencial. En física cuántica, esta relación se cumple gracias a la ecuación tipo Schrödinger que satisface el operador de evolución temporal. Usando el esquema de Schwinger, se encuentra que el álgebra subyacente al sistema es $\mathfrak{so}(3,2)$; una vez encontrado de forma exacta el operador de evolución temporal, se estudia el efecto Casimir dinámico y la influencia del acoplamiento de los modos de la cavidad.

Capítulo 7

Conceptos básicos

7.1 Esquema de Schwinger

En 1952, J. Schwinger introdujo un tratamiento del momento angular (para $j = \frac{1}{2}$), basado en el método de segunda cuantización, que permite implementar un enfoque de teoría de grupos con las técnicas de operadores explícitos de la mecánica cuántica [91].

Considerese dos conjuntos de operadores de creación-aniquilación $\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i\}$ con las relaciones de conmutación usuales $[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j] = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, 2$, y sus respectivos operadores de número $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Se define un espacio $|n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$, tal que

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!}} |0, 0\rangle, \quad \hat{a}_i |0, 0\rangle = 0, \quad (7.1)$$

entonces,

$$\hat{n}_1 |n_1, n_2\rangle = n_1 |n_1, n_2\rangle, \quad \hat{n}_2 |n_1, n_2\rangle = n_2 |n_1, n_2\rangle \quad (7.2)$$

los estados (7.1) son eigenestados de los operadores de número. Se introduce una nueva identificación del producto y combinación lineal de los operadores \hat{a}_i^\dagger y \hat{a}_i ,

$$\hat{J}_+ := \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2, \quad \hat{J}_- := \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger, \quad \hat{J}_z := \frac{1}{2}(\hat{n}_1 - \hat{n}_2), \quad (7.3)$$

$$\hat{K}_+ := \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger, \quad \hat{K}_- := \hat{a}_1 \hat{a}_2, \quad \hat{K}_0 := \frac{1}{2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 1), \quad (7.4)$$

cuyas relaciones de conmutación son:

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm, \quad (7.5)$$

$$[\hat{K}_+, \hat{K}_-] = -2\hat{K}_0, \quad [\hat{K}_0, \hat{K}_\pm] = \pm\hat{K}_\pm, \quad (7.6)$$

de modo que el conjunto de operadores $\{\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_z\}$ son los generadores del álgebra $\mathfrak{su}(2)$ y el conjunto $\{\hat{K}_+, \hat{K}_-, \hat{K}_0\}$ generan el álgebra $\mathfrak{so}(2,1)$. Si se interpreta al sistema como

un conjunto de bosones donde n_1 es el número de espines ‘arriba’ y n_2 es el número de espines ‘abajo’, entonces la acción de los operadores (7.3) y (7.4), es

$$\hat{J}_z |n_1, n_2\rangle = \frac{1}{2}(n_1 - n_2) |n_1, n_2\rangle = m |n_1, n_2\rangle, \quad (7.7)$$

con $m = \frac{1}{2}(n_1 - n_2)$ siendo la proyección en z ;

$$\hat{J}_+ |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2(n_1 + 1)} |n_1 + 1, n_2 - 1\rangle, \quad (7.8)$$

\hat{J}_+ crea un espín arriba y destruye un espín abajo, entonces la proyección en la componente z crece una unidad;

$$\hat{J}_- |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1(n_2 + 1)} |n_1 - 1, n_2 + 1\rangle, \quad (7.9)$$

\hat{J}_- destruye un espín arriba y crea un espín abajo, entonces la componente z decrece una unidad;

$$\hat{K}_0 |n_1, n_2\rangle = \frac{1}{2}(n_1 + n_2 + 1) |n_1, n_2\rangle = (j + \frac{1}{2}) |n_1, n_2\rangle, \quad (7.10)$$

con $j = \frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ siendo el espín total del sistema;

$$\hat{K}_+ |n_1, n_2\rangle = \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} |n_1 + 1, n_2 + 1\rangle, \quad (7.11)$$

\hat{K}_+ crea un espín arriba y también crea un espín abajo, de modo el espín total aumenta una unidad pero la componente en z no cambia;

$$\hat{K}_- |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1 n_2} |n_1 - 1, n_2 - 1\rangle, \quad (7.12)$$

\hat{K}_- destruye un espín arriba y también destruye un espín abajo, de modo que el espín total disminuye una unidad, pero la proyección en z no cambia.

Por su parte los operadores de Casimir $\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_z^2 + \frac{1}{2}(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+)$ y $\hat{\mathbf{K}}^2 = \hat{K}_0^2 - \frac{1}{2}(\hat{K}_+ \hat{K}_- + \hat{K}_- \hat{K}_+)$ adquieren la forma

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}^2 |n_1, n_2\rangle &= j(j + 1) |n_1, n_2\rangle = (\hat{K}_0 - \frac{1}{2})(\hat{K}_0 + \frac{1}{2}) |n_1, n_2\rangle \\ &= (\hat{K}_0^2 - \frac{1}{4}) |n_1, n_2\rangle, \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}^2 |n_1, n_2\rangle &= (m^2 - \frac{1}{4}) |n_1, n_2\rangle = (\hat{J}_z - \frac{1}{2})(\hat{J}_z + \frac{1}{2}) |n_1, n_2\rangle \\ &= (\hat{J}_z^2 - \frac{1}{4}) |n_1, n_2\rangle. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Diversas construcciones de estos operadores han sido utilizadas para describir sistemas bosónicos [92, 93].

7.2 Hamiltoniano efectivo del sistema

El sistema descrito en este trabajo está modelado por el hamiltoniano propuesto por C. K. Law en el artículo [78]. En esta sección se presentan someramente las ideas que condujeron a Law al hamiltoniano efectivo para la radiación dentro de una cavidad optomecánica con un medio dieléctrico.

Considérese una cavidad unidimensional formada por dos espejos perfectamente reflectantes, separados por una distancia L . Uno de los espejos está fijo en $x = 0$ y el otro oscila en la trayectoria $x = q(t)$. El espacio entre espejos contiene un medio dieléctrico no dispersivo, lineal y sin pérdida. La permitividad eléctrica dependerá del tiempo y la posición $\epsilon(x, t)$ y la permeabilidad magnética se considerará constante.

Considerando únicamente polarización lineal, la ecuación de onda que satisface el potencial vectorial $\Lambda(x, t)$ del sistema, es

$$\partial_x^2 \Lambda(x, t) = \partial_t [\epsilon(x, t) \partial_t \Lambda(x, t)], \quad \Lambda(0, t) = \Lambda(q(t), t) = 0. \quad (7.15)$$

La cuantización del campo se logra construyendo un operador $\hat{\Lambda}(x, t)$ asociado al vector potencial, tal que las soluciones a (7.15) satisfagan las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{\Lambda}(x, t), \hat{\Lambda}(x', t)] = [\hat{\pi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = 0, \quad (7.16)$$

$$[\hat{\Lambda}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = i\delta(x - x'), \quad (7.17)$$

donde $x, x' \in (0, L)$. El operador $\hat{\pi}(x, t) := \epsilon(x, t) \partial_t \hat{\Lambda}(x, t)$ es el momento conjugado. La descripción de la interacción entre el espejo oscilante y el campo puede ser muy complicada, pero considerando que $\hat{\Lambda}(x, t)$ desaparece en las fronteras se logra considerar el efecto de dichas oscilaciones en una forma simplificada a través de la trayectoria $q(t)$. La dinámica hamiltoniana se puede recuperar utilizando la base especial dependiente del tiempo $\{\phi_k(x, t)\}$, que cumple con la ecuación diferencial de Hill

$$\partial_x^2 \phi_k + \epsilon(x, t) \omega_k^2(t) \phi_k(x, t) = 0, \quad \phi_k(0, t) = \phi_k(q(t), t) = 0, \quad (7.18)$$

con eigenvalores $\omega_k(t)$. Un caso especial de la ecuación de Hill es la ecuación angular de Mathieu, la ecuación radial no es un caso especial debido a que el producto $\epsilon(x, t) \omega^2(t)$ debe ser una función periódica de x . Nótese que en esta base t sólo es un parámetro. Este conjunto de funciones es ortonormal y completo en el espacio $(0, q(t))$,

$$\int_0^{q(t)} \epsilon(x, t) \phi_n(x, t) \phi_m^*(x, t) dx = \delta_{n,m}, \quad (7.19)$$

y son descritas detalladamente por la teoría de Floquet. Por lo tanto, $\hat{\Lambda}(x, t)$ y $\hat{\pi}(x, t)$ pueden ser expandidas en términos de $\phi_k(x, t)$,

$$\hat{\Lambda}(x, t) = \sum_k \hat{Q}_k(t) \phi_k(x, t), \quad \hat{\pi}(x, t) = \sum_k \hat{P}_k(t) \phi_k(x, t), \quad (7.20)$$

donde $\hat{Q}_k(t)$ y $\hat{P}_k(t)$ están definidas como

$$\hat{Q}_k(t) = \int_0^{q(t)} \epsilon(x, t) \hat{\Lambda}(x, t) \phi_k(x, t) dx, \quad \hat{P}_k(t) = \int_0^{q(t)} \hat{\pi}(x, t) \phi_k(x, t) dx. \quad (7.21)$$

Como consecuencia de las relaciones de conmutación (7.16), los operadores (7.21) generan un semigrupo de oscilador para cada k ,

$$[\hat{Q}_k(t), \hat{Q}_j(t)] = [\hat{P}_k(t), \hat{P}_j(t)] = 0, \quad (7.22)$$

$$[\hat{Q}_k(t), \hat{P}_j(t)] = i\delta_{k,j}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (7.23)$$

por lo que resulta natural identificar a $\hat{Q}_k(t)$ y $\hat{P}_k(t)$ como operadores de posición y momento, respectivamente. Usando los operadores (7.21) se definen operadores de creación-aniquilación para pasar al espacio de Fock,

$$\hat{a}_k^\dagger = (2\omega_k(t))^{-1/2} [\omega_k(t)\hat{Q}_k - i\hat{P}_k], \quad \hat{a}_k = (2\omega_k(t))^{-1/2} [\omega_k(t)\hat{Q}_k + i\hat{P}_k]. \quad (7.24)$$

La derivada de estos operadores conducirá a las derivadas de los operadores de posición y momento,

$$\frac{d}{dt} \hat{Q}_k = \hat{P}_k + \sum_j G_{k,j}(t) \hat{Q}_j(t), \quad \frac{d}{dt} \hat{P}_k = -\omega^2(t) \hat{Q}_k - \sum_j G_{j,k}(t) \hat{P}_j(t), \quad (7.25)$$

$$G_{k,j}(t) := - \int_0^{q(t)} \epsilon(x, t) \phi_k(x, t) \partial_t \phi_j(x, t) dx. \quad (7.26)$$

Comparando directamente las derivadas de (7.24) con sus correspondientes ecuaciones de movimiento de Heisenberg, se encuentra que la forma final del hamiltoniano del sistema es

$$H = \sum_k \omega_k(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + i \sum_k \xi_k(t) [(\hat{a}_k^\dagger)^2 - (\hat{a}_k)^2] + \frac{1}{2} i \sum_{\substack{k,j \\ k \neq j}} \mu_{k,j} [\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j - \hat{a}_j \hat{a}_k - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k], \quad (7.27)$$

donde se han introducido los coeficientes

$$\xi_k(t) = \frac{1}{2} G_{k,k}(t) + \frac{1}{4\omega_k(t)} \frac{d}{dt} \omega_k(t), \quad \mu_{k,j}(t) = \left(\frac{\omega_k(t)}{\omega_j(t)} \right)^{1/2} G_{k,j}(t). \quad (7.28)$$

Inspeccionando el hamiltoniano (7.27) se puede identificar que $\omega_k(t)$ es la frecuencia de oscilación del k -ésimo modo del campo electromagnético dentro de la cavidad y $\xi_k(t)$ es su correspondiente término de *squeezing*; $\mu_{k,j}(t)$ son los términos de acoplamiento intermodal. El hamiltoniano (7.27) describe procesos no adiabáticos de dos tipos, el primero se debe a los términos $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j$ que dispersan fotones de un modo a otro sin cambiar el número total de fotones, el segundo se debe a los términos $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j^\dagger$ y $(\hat{a}_k^\dagger)^2$ que crean pares de fotones desde el estado de vacío.

Capítulo 8

Efecto Casimir dinámico

Se denomina *efecto Casimir dinámico* (ECD) a la generación de fotones desde el estado cuántico de vacío como consecuencia de la dependencia temporal de las condiciones de frontera de una cavidad optomecánica. El primero en mostrar teóricamente la existencia de esta posibilidad, fue G. T. Moore [84], en 1970; pero el nombre con el que se conoce actualmente a este fenómeno fue sugerido 19 años después [85, 86].

Frecuentemente, el ECD es estudiado con un modelo hamiltoniano, cuyo ingrediente principal es que el efecto del cambio de longitud de la cavidad debido a la trayectoria oscilante de uno de los espejos se introduce mediante parámetros dependientes del tiempo [94, 95]. Existen estudios realizados con este modelo, que muestran que el acomplamiento resonante entre modos de una cavidad optomecánica en una dimensión o más, produce un decremento del número de fotones emitidos [96, 97, 98].

En este capítulo se estudia el problema desde un enfoque algebraico. Para ello se usa el hamiltoniano efectivo descrito en el capítulo anterior y se utiliza el esquema de Schwinger para identificar el álgebra que generan los operadores del sistema. Posteriormente se utilizan métodos de Lie para encontrar el operador de evolución temporal, lo que permite evaluar el número de fotones en cada modo y su suma.

8.1 Estructura algebraica del modelo

En ausencia del medio dieléctrico y considerando únicamente dos modos, el hamiltoniano (7.27) para una cavidad optomecánica en el régimen débilmente acoplado, adquiere la forma:

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) = & \sum_{k=1}^2 \omega_k(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + i\xi(t) \sum_{k=1}^2 \left[(\hat{a}_k^\dagger)^2 - (\hat{a}_k)^2 \right] \\ & + i\frac{1}{2} \sum_{j \neq k=1}^2 \mu_{k,j}(t) \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j^\dagger + \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_j - \hat{a}_j \hat{a}_k - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_k \right], \quad (8.1) \end{aligned}$$

donde se ha considerado $\xi_1(t)=\xi_2(t)=\xi(t)$. Aquí \hat{a}_k y \hat{a}_k^\dagger son los operadores bosónicos que satisfacen la relación de conmutación $[\hat{a}_k, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{kj}$. Una elección apropiada para la trayectoria del espejo, propuesta por C. K. Law [78], es

$$q(t) = L \exp\left(\frac{q_0}{L} \sin \Omega t\right), \quad (8.2)$$

siedo L la longitud de la cavidad en equilibrio, $q_0 \ll L$ es la amplitud de oscilación del espejo y Ω es la frecuencia de oscilación. Entonces, la frecuencia instantánea de los modos, el término de squeezing y los coeficientes de acoplamiento intermodal adquieren la forma

$$\begin{aligned} \omega_k(t) &= \frac{k\pi}{L} \exp\left(-\frac{q_0}{L} \sin \Omega t\right), & \xi(t) &= -\frac{q_0}{4L} \Omega \sin \Omega t, \\ \mu_{k,j}(t) &= -\frac{q_0}{L} \Omega \cos \Omega t \frac{j k}{j^2 - k^2} \left(\frac{k}{j}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

El hamiltoniano (8.1) está formado por diez operadores que pueden interpretarse en el esquema de Schwinger. Se introducen las definiciones (7.3) y (7.4),

$$\hat{J}_+ = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2, \quad \hat{J}_- = \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger, \quad \hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{n}_1 - \hat{n}_2), \quad (8.4)$$

$$\hat{K}_+ = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger, \quad \hat{K}_- = \hat{a}_1 \hat{a}_2, \quad \hat{K}_0 = \frac{1}{2}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 1), \quad (8.5)$$

interpretando a los operadores \hat{a}_k^\dagger y \hat{a}_k como los operadores de creación-aniquilación de cada modo de la cavidad. Se sabe de las relaciones de conmutación (7.5) y (7.6), que los operadores (8.3) y (8.4) generan un álgebra $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{so}(2,1)$, respectivamente, pero representan sólo seis de los diez operadores del sistema. Los otros cuatro surgen de las relaciones de conmutación entre ellos, que en esta representación son:

$$[\hat{J}_+, \hat{K}_+] = (\hat{a}_1^\dagger)^2, \quad [\hat{J}_-, \hat{K}_+] = (\hat{a}_2^\dagger)^2, \quad (8.6)$$

$$[\hat{J}_+, \hat{K}_-] = -(\hat{a}_2)^2, \quad [\hat{J}_-, \hat{K}_-] = -(\hat{a}_1)^2, \quad (8.7)$$

$$[\hat{J}_z, \hat{K}_\pm] = [\hat{K}_0, \hat{J}_\pm] = [\hat{J}_z, \hat{K}_0] = 0. \quad (8.8)$$

Por simplicidad se harán las definiciones:

$$\hat{A}_1^+ := (\hat{a}_1^\dagger)^2, \quad \hat{A}_1^- := (\hat{a}_1)^2, \quad \hat{A}_2^+ := (\hat{a}_2^\dagger)^2, \quad \hat{A}_2^- := (\hat{a}_2)^2. \quad (8.9)$$

De modo que el hamiltoniano se puede escribir en términos del conjunto de operadores $\hat{\mathcal{H}} = \{\hat{J}_z, \hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{K}_0, \hat{K}_+, \hat{K}_-, \hat{A}_1^+, \hat{A}_1^-, \hat{A}_2^+, \hat{A}_2^-, \hat{I}\}$, siendo \hat{I} el operador identidad. El hamiltoniano (8.1), se escribe de la forma

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \omega_0(t) \hat{K}_0 + \omega_z(t) \hat{J}_z + i\xi(t) \sum_{k=1}^2 \left(\hat{A}_k^+ - \hat{A}_k^- \right) \\ &\quad + i\mu_+(t) \left(\hat{K}_+ - \hat{K}_- \right) - i\mu_-(t) \left(\hat{J}_+ - \hat{J}_- \right) - \omega_0(t) \hat{I}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

con los coeficientes definidos

$$\begin{aligned}\omega_0(t) &= \omega_1(t) + \omega_2(t), & \omega_z(t) &= \omega_1(t) - \omega_2(t), \\ \mu_+(t) &= \frac{1}{2}(\mu_{1,2}(t) + \mu_{2,1}(t)), & \mu_-(t) &= \frac{1}{2}(\mu_{1,2}(t) - \mu_{2,1}(t)).\end{aligned}\quad (8.11)$$

El operador \hat{I} sólo añadirá una fase global al sistema, $[\hat{I}, \hat{O}] = 0$ para todo $\hat{O} \in \tilde{\mathcal{H}}$, por lo que, en la representación de Heisenberg puede ser ignorado. Se considerará que la dinámica del sistema está completamente descrita por

$$\hat{H}(t) = \hat{H}(t) + \omega_0(t)\hat{I}. \quad (8.12)$$

Para identificar el álgebra del sistema, se calcularán relaciones de conmutación de los operadores:

$$[\hat{J}_\pm, \hat{K}_\pm] = \pm \hat{A}_1^\pm, \quad [\hat{J}_\pm, \hat{K}_\mp] = \mp \hat{A}_2^\mp, \quad (8.13)$$

$$[\hat{J}_\pm, \hat{A}_1^\pm] = 0, \quad [\hat{J}_\pm, \hat{A}_1^\mp] = \mp 2\hat{K}_\mp, \quad (8.14)$$

$$[\hat{J}_\pm, \hat{A}_2^\pm] = \pm 2\hat{K}_\pm, \quad [\hat{J}_\pm, \hat{A}_2^\mp] = 0, \quad (8.15)$$

$$[\hat{K}_\pm, \hat{A}_1^\pm] = 0, \quad [\hat{K}_\pm, \hat{A}_1^\mp] = \mp 2\hat{J}_\mp, \quad (8.16)$$

$$[\hat{K}_\pm, \hat{A}_2^\pm] = 0, \quad [\hat{K}_\pm, \hat{A}_2^\mp] = \mp 2\hat{J}_\pm, \quad (8.17)$$

Además, se puede identificar que cada conjunto $\{\hat{K}_0 + \hat{J}_z, \hat{A}_1^+, \hat{A}_1^-\}$ y $\{\hat{K}_0 - \hat{J}_z, \hat{A}_2^+, \hat{A}_2^-\}$ genera un álgebra $\mathfrak{so}(2,1)$,

$$[\hat{A}_1^+, \hat{A}_1^-] = -4(\hat{K}_0 + \hat{J}_z), \quad [\hat{A}_2^+, \hat{A}_2^-] = -4(\hat{K}_0 - \hat{J}_z), \quad (8.18)$$

$$[\hat{K}_0 + \hat{J}_z, \hat{A}_1^\pm] = \pm 2\hat{A}_1^\pm, \quad [\hat{K}_0 - \hat{J}_z, \hat{A}_2^\pm] = \pm 2\hat{A}_2^\pm, \quad (8.19)$$

$$[\hat{A}_1^\pm, \hat{A}_2^\pm] = [\hat{A}_1^\pm, \hat{A}_2^\mp] = 0, \quad (8.20)$$

Observando las relaciones de conmutación (7.5)–(7.6), (8.6)–(8.8) y (8.13)–(8.20), se identifica que el conjunto $\mathcal{H} = \{\hat{J}_z, \hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{K}_0, \hat{K}_+, \hat{K}_-, \hat{A}_1^+, \hat{A}_1^-, \hat{A}_2^+, \hat{A}_2^-\}$ genera el álgebra no compacta $\mathfrak{so}(3,2)$, que contiene las subálgebras $\mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{su}(2)$ y otras dos subálgebras $\mathfrak{so}(2,1)$ [99].

El álgebra $\mathfrak{so}(3,2)$ tiene 10 generadores:

$$\begin{aligned}4 \text{ compactos} &\longrightarrow 2 \text{ centros: } \hat{K}_0, \hat{J}_z \text{ y } 2 \text{ rotaciones: } \hat{J}_+, \hat{J}_- \\ 6 \text{ no compactos} &\longrightarrow 6 \text{ boost: } \hat{K}_+, \hat{K}_-, \hat{A}_1^+, \hat{A}_2^+, \hat{A}_1^-, \hat{A}_2^-\end{aligned}\quad (8.21)$$

8.2 Mapeo exponencial del álgebra $\mathfrak{so}(3,2)$

Dado que el conjunto de operadores \mathcal{H} , forma el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,2)$ –de dimensión 10, compleja y simple–, entonces, para $t \in \mathbb{R}$ cualquier combinación lineal

$$\hat{H}(t) = \sum_{j=1}^{10} h_j(t) \hat{O}_j \quad (8.22)$$

con $\hat{O}_k \in \mathcal{H}$ es una curva en $\mathfrak{so}(3,2)$. En la teoría de grupos de Lie, toda álgebra está asociada a un grupo a través del mapeo exponencial, esto es, para todo elemento $\hat{O} \in \mathfrak{g}$ siendo \mathfrak{g} un álgebra de Lie, existe una familia paramétrica $\hat{G}(\alpha)$ en el grupo \mathbf{G} asociada al elemento \hat{O} mediante el mapeo exponencial

$$\hat{G}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \hat{O}^n =: e^{\alpha \hat{O}}, \quad (8.23)$$

donde α pertenece a algún campo, usualmente al campo de los reales o los complejos. El grupo asociado al álgebra $\mathfrak{so}(3,2)$ mediante el mapeo (8.23) se denota como $\mathbf{SO}(3,2)$, de modo que cualquier curva en $\mathfrak{so}(3,2)$ define una curva en $\mathbf{SO}(3,2)$.

En física cuántica existe una relación completamente análoga entre el hamiltoniano del sistema \hat{H} y el operador de evolución temporal $\hat{U}(t)$. Esta relación se debe a que el operador de evolución temporal satisface una ecuación tipo Schrödinger,

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = \hat{H}(t) \hat{U}(t), \quad \hat{U}(0) = \hat{I}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8.24)$$

En el caso particular en que los operadores que forman el hamiltoniano generan un álgebra de Lie, tal como en (8.22), entonces cada elemento del álgebra cumplirá con una ecuación diferencial,

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}_{\hat{O}_k}(t) = \dot{\alpha}_k(t) \hat{O}_k \hat{U}_{\hat{O}_k}(t), \quad \hat{U}_{\hat{O}_k}(0) = \hat{I}, \quad (8.25)$$

cuya solución es de la forma (8.23), pero donde el parámetro $\alpha = \alpha(t)$ se vuelve una función del tiempo. De este modo, el operador de evolución del sistema resulta ser el producto

$$\hat{U}(t) = \prod_{k=1}^{\dim(\mathfrak{g})} e^{\alpha_k(t) \hat{O}_k}, \quad (8.26)$$

este resultado es conocido como *teorema de Wei-Norman* [100], y provee una solución exacta a la ecuación (8.24). Este método involucra una cantidad de funciones $\alpha_k(t)$ igual a la dimensión del álgebra en cuestión, en este caso implica 10 funciones, las cuales se definirán de acuerdo al orden del producto (8.26).

Para conocer estas las funciones $\alpha_k(t)$ se desarrolla la derivada en la ecuación (8.24),

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t) = i \sum_{k=1}^{10} \dot{\alpha}_k(t) \prod_{i=1}^{k-1} Ad_{(\alpha_i(t) \hat{O}_i)} \hat{O}_k \hat{U}(t), \quad (8.27)$$

donde $\dot{\alpha}_i(t) = d\alpha_i(t)/dt$ y $Ad_{(\alpha_i(t)\hat{O}_i)}$ denota la acción adjunta de $\mathbf{SO}(3,2)$ sobre $\mathfrak{so}(3,2)$,

$$Ad_{(\alpha_i(t)\hat{O}_i)}\hat{O}_k = e^{\alpha_i(t)\hat{O}_i}\hat{O}_k e^{-\alpha_i(t)\hat{O}_i}, \quad e^{\alpha_i(t)\hat{O}_i} \in \mathbf{SO}(3,2), \quad \hat{O}_k \in \mathfrak{so}(3,2). \quad (8.28)$$

Comparando (8.22), (8.24) y (8.27) se obtiene,

$$\hat{H}(t) = \sum_{j=1}^{10} h_j(t)\hat{O}_j = i \sum_{k=1}^{10} \dot{\alpha}_k(t) \prod_{i=1}^{k-1} Ad_{(\alpha_i(t)\hat{O}_i)}\hat{O}_k. \quad (8.29)$$

Por la propiedad de grupo, se tiene que

$$\prod_{i=1}^{k-1} Ad_{(\alpha_i(t)\hat{O}_i)}\hat{O}_k = \sum_{j=1}^{10} M_{j,k}\hat{O}_j \quad (8.30)$$

sustituyendo en (8.29), se sigue

$$\sum_{j=1}^{10} h_j(t)\hat{O}_j = i \sum_{k=1}^{10} \dot{\alpha}_k(t) \sum_{j=1}^{10} M_{j,k}\hat{O}_j = i \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} M_{j,k}\dot{\alpha}_k(t)\hat{O}_j \quad (8.31)$$

de donde se encuentra una expresión que relaciona las funciones $h_i(t)$ y $\dot{\alpha}_i(t)$, es decir, se obtiene un sistema de diez funciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas,

$$h_j(t) = i \sum_{k=1}^{10} M_{j,k}\dot{\alpha}_k(t), \quad j \in \{1, \dots, 10\}, \quad (8.32)$$

que se puede expresar en forma matricial,

$$h(t) = i\mathbb{M}\dot{\alpha}(t), \quad \dot{\alpha}(t) = -i\mathbb{M}^{-1}h(t). \quad (8.33)$$

Existen varias formas de encontrar los elementos $M_{j,k}$ usando estos generadores, una forma de hacerlo es calcular la acción adjunta de todos los generadores en $\mathbf{SO}(3,2)$ sobre $\mathfrak{so}(3,2)$, utilizando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.

Debido a la no conmutatividad del álgebra $\mathfrak{so}(3,2)$, se debe elegir el orden en que se expresará el desenredamiento (8.26). De acuerdo a la definición bosónica de los generadores del álgebra, se elige un orden que sigue de cerca el *ordenamiento normal* de uso común en la mecánica cuántica,

$$U(t) = e^{\alpha_1(t)\hat{A}_1^+} e^{\alpha_2(t)\hat{A}_2^+} e^{\alpha_3(t)\hat{K}_+} e^{\alpha_4(t)\hat{J}_+} e^{\alpha_5(t)\hat{J}_-} e^{\alpha_6(t)\hat{K}_0} e^{\alpha_7(t)\hat{J}_z} e^{\alpha_8(t)\hat{A}_1^-} e^{\alpha_9(t)\hat{A}_2^-} e^{\alpha_{10}(t)\hat{K}_-}. \quad (8.34)$$

Seguindo el orden (8.34), después de calcular todas las acciones (8.28) y siguiendo la ecuación (8.30), se encuentra que los elementos de matriz $M_{j,k}$ son los siguientes:

$$M_{j,1} = \delta_{j,1}, \quad M_{j,2} = \delta_{j,2}, \quad M_{j,3} = \delta_{j,3}, \quad (8.35)$$

$$M_{j,4} = -\alpha_3\delta_{j,1} - 2\alpha_2\delta_{j,3} + \delta_{j,4}, \quad (8.36)$$

$$M_{j,5} = -\alpha_4(2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_4)\delta_{j,1} + (-\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_4)\delta_{j,2} \\ - 2(\alpha_1 - \alpha_2\alpha_4^2)\delta_{j,3} - \alpha_4^2\delta_{j,4} + \delta_{j,5} + 2\alpha_4\delta_{j,7}, \quad (8.37)$$

$$M_{j,6} = -\alpha_1\delta_{j,1} - \alpha_2\delta_{j,2} - \alpha_3\delta_{j,3} + \delta_{j,6}, \quad (8.38)$$

$$M_{j,7} = [\alpha_3\alpha_4(1 + \alpha_4\alpha_5) - \alpha_1(1 + 2\alpha_4\alpha_5)]\delta_{j,1} + [\alpha_2(1 + 2\alpha_4\alpha_2) - \alpha_3\alpha_5]\delta_{j,2} \\ + [2\alpha_2\alpha_4(1 + \alpha_4\alpha_5) - 2\alpha_1\alpha_5]\delta_{j,3} - \alpha_4(1 + \alpha_4\alpha_5)\delta_{j,4} + \alpha_5\delta_{j,5} \\ + (1 + 2\alpha_4\alpha_5)\delta_{j,7}, \quad (8.39)$$

$$e^{\alpha_6+\alpha_7}M_{j,8} = (2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_4)^2\delta_{j,1} + (\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4)^2\delta_{j,2} + 2(2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_4)(\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4)\delta_{j,3} \\ + 2\alpha_4(2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_4)\delta_{j,4} - 2(\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4)\delta_{j,5} \\ - 4[\alpha_1 - \alpha_4(\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)]\delta_{j,6} - 4(\alpha_1 - \alpha_2\alpha_4^2)\delta_{j,7} + \delta_{j,8} \\ + \alpha_4^2\delta_{j,9} - 2\alpha_4\delta_{j,10}, \quad (8.40)$$

$$e^{\alpha_6-\alpha_7}M_{j,9} = [2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_3(1 + \alpha_4\alpha_5)]^2\delta_{j,1} + [\alpha_3\alpha_5 - 2\alpha_2(1 + \alpha_4\alpha_5)]^2\delta_{j,2} \\ + [4\alpha_2\alpha_3(1 + \alpha_4\alpha_5)^2 - 2\alpha_5(4\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3^2)(1 + \alpha_4\alpha_5) + 4\alpha_1\alpha_3\alpha_5^2]\delta_{j,3} \\ + 2(1 + \alpha_4\alpha_5)[2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_3(1 + \alpha_4\alpha_5)]\delta_{j,4} \\ - 2\alpha_5[\alpha_3\alpha_5 - 2\alpha_2(1 + \alpha_4\alpha_5)]\delta_{j,5} \\ - 4[\alpha_2(1 + \alpha_4\alpha_5)^2 - \alpha_3\alpha_5(1 + \alpha_4\alpha_5) + \alpha_1\alpha_5^2]\delta_{j,6} \\ + 4[\alpha_2(1 + \alpha_4\alpha_5)^2 - \alpha_1\alpha_5^2]\delta_{j,7} \\ + \alpha_5^2\delta_{j,8} + (1 + \alpha_4\alpha_5)^2\delta_{j,9} - 2\alpha_5(1 + \alpha_4\alpha_5)\delta_{j,10}, \quad (8.41)$$

$$e^{\alpha_6}M_{j,10} = [2\alpha_1\alpha_3(1 + 2\alpha_4\alpha_5) - \alpha_3^2\alpha_4(1 + \alpha_4\alpha_5) - 4\alpha_1^2\alpha_5]\delta_{j,1} \\ + [2\alpha_2\alpha_3(1 + 2\alpha_4\alpha_5) - 4\alpha_2^2\alpha_4(1 + \alpha_4\alpha_5) - \alpha_3^2\alpha_5]\delta_{j,2} \\ + [(\alpha_3^2 + 4\alpha_1\alpha_2)(1 + 2\alpha_4\alpha_5) - 4\alpha_2\alpha_3\alpha_4(1 + \alpha_4\alpha_5) - 4\alpha_1\alpha_3\alpha_5]\delta_{j,3} \\ + 2[\alpha_3\alpha_4(1 + \alpha_4\alpha_5) - \alpha_1(1 + 2\alpha_4\alpha_5)]\delta_{j,4} \\ + 2[\alpha_3\alpha_5 - \alpha_2(1 + 2\alpha_4\alpha_5)]\delta_{j,5} \\ + 2[2\alpha_2\alpha_4(1 + \alpha_4\alpha_5) - \alpha_3(1 + 2\alpha_4\alpha_5) - 2\alpha_1\alpha_5]\delta_{j,6} \\ - 4[\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2\alpha_4(1 + \alpha_4\alpha_5)]\delta_{j,7} - \alpha_5\delta_{j,8} \\ - \alpha_4(1 + \alpha_4\alpha_5)\delta_{j,9} + (1 + 2\alpha_4\alpha_5)\delta_{j,10}. \quad (8.42)$$

Mientras que el vector $h(t)$ está determinado por los coeficientes en (8.12),

$$h(t) = \left(i\xi(t), i\xi(t), i\mu_+(t), -i\mu_-(t), i\mu_-(t), \omega_0(t), \omega_z(t), -i\xi(t), -i\xi(t), -i\mu_+(t) \right). \quad (8.43)$$

En este punto se conoce todo lo necesario para plantear y resolver el sistema de ecuaciones (8.32), Una vez que ha sido resuelto, el operador de evolución temporal $\hat{U}(t)$ está completamente determinado y se puede estudiar la evolución del sistema. En este trabajo se ha utilizado el programa Wolfram Mathematica© para resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales.

8.3 Evolución temporal del sistema

La dinámica del sistema será descrita en términos de los operadores de creación-aniquilación de los modos de la cavidad representados en el esquema de Heisenberg. Aplicando el operador de evolución temporal (8.34), se encuentra

$$\hat{U}^\dagger(t)\hat{\mathbf{a}}\hat{U}(t) = \hat{\mathbf{a}}(t) = \mathbb{U}(t)\hat{\mathbf{a}} \quad (8.44)$$

donde se han utilizado las definiciones

$$\mathbb{U}(t) := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{12}^* & u_{11}^* & u_{14}^* & u_{13}^* \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{32}^* & u_{31}^* & u_{34}^* & u_{33}^* \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}} := \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_1^\dagger \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix}, \quad (8.45)$$

y cada elemento de matriz $u_{i,j} = u_{i,j}(t)$ está definido a través de las funciones $\alpha_k(t)$:

$$u_{11} = (1 + \alpha_4\alpha_5)e^{\frac{1}{2}(\alpha_6+\alpha_7)} - 2\alpha_8(2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_4)e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6+\alpha_7)} + \alpha_{10}(2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_3(1 + \alpha_4\alpha_5))e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6-\alpha_7)}, \quad (8.46)$$

$$u_{12} = (2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_4)e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6+\alpha_7)}, \quad (8.47)$$

$$u_{13} = \alpha_4e^{\frac{1}{2}(\alpha_6-\alpha_7)} - \alpha_{10}(2\alpha_1 - \alpha_3\alpha_4)e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6+\alpha_7)} + 2\alpha_9(2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_3(1 + \alpha_4\alpha_5))e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6-\alpha_7)} \quad (8.48)$$

$$u_{14} = -(2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_3(1 + \alpha_4\alpha_5))e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6-\alpha_7)}, \quad (8.49)$$

$$u_{31} = \alpha_5e^{\frac{1}{2}(\alpha_6+\alpha_7)} - 2\alpha_8(\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4)e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6+\alpha_7)} + \alpha_{10}(\alpha_3\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4\alpha_5 - 2\alpha_2)e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6-\alpha_7)}, \quad (8.50)$$

$$u_{32} = (\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4)e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6+\alpha_7)}, \quad (8.50)$$

$$u_{33} = e^{\frac{1}{2}(\alpha_6-\alpha_7)} - \alpha_{10}(\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_4)e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6+\alpha_7)} + 2\alpha_9(\alpha_3\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4\alpha_5 - 2\alpha_2)e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6-\alpha_7)}, \quad (8.51)$$

$$u_{34} = -(\alpha_3\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4\alpha_5 - 2\alpha_2)e^{-\frac{1}{2}(\alpha_6-\alpha_7)}. \quad (8.52)$$

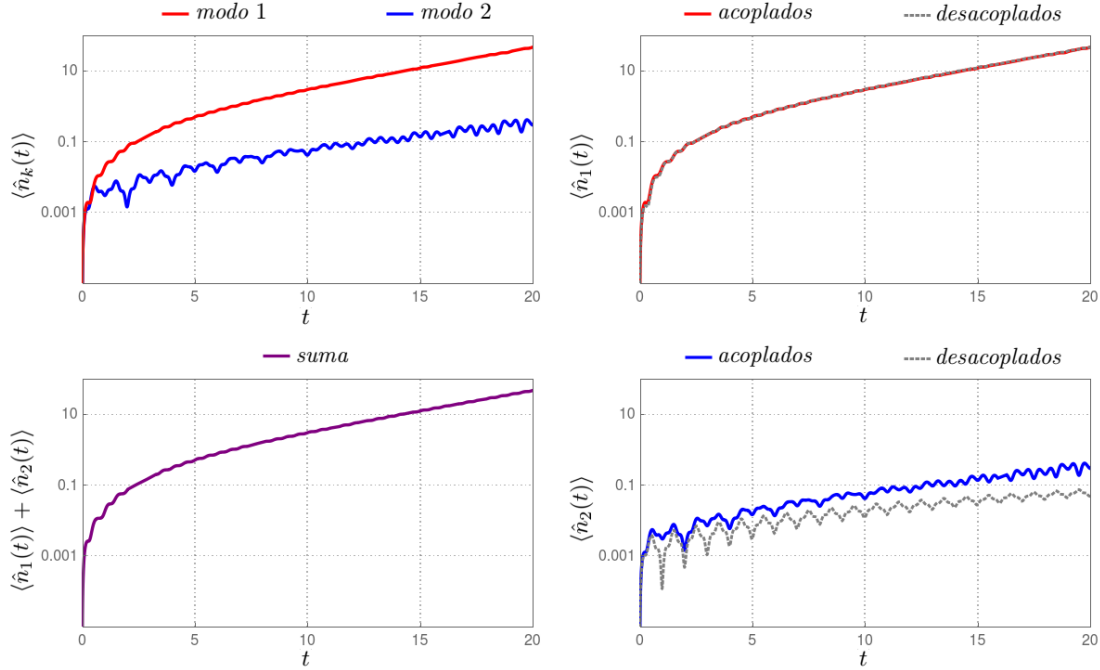


Figura 8.1: En la gráfica superior izquierda se muestra la evolución temporal del valor esperado de los modos $\langle \hat{n}_1(t) \rangle$ (línea roja) y $\langle \hat{n}_2(t) \rangle$ (línea azul) cuando se encuentran acoplados. En la gráfica inferior izquierda se muestra la suma de ambos modos. También se muestra una comparación de los modos cuando se encuentran acoplados y cuando no lo están. La gráfica superior derecha muestra la comparación del modo uno y la gráfica inferior derecha muestra la comparación del modo 2. En estos cálculos se consideran los valores $L = 1$, $q_0 = 1/12$ y $\Omega = 2$. El tiempo se encuentra expresado en unidades atómicas.

De modo que cada operador ‘escalera’ en la representación de Heisenberg es una combinación de los cuatro operadores ‘escalera’ en la representación de Schrödinger, con coeficientes que dependen del tiempo. Lo primero que se analizará es el valor esperado del número de fotones en cada modo expresando el operador de número de la forma

$$\hat{n}_k(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{n}_k \hat{U}(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{U}(t) \hat{U}^\dagger(t) \hat{a}_k \hat{U}(t) = \hat{a}_k^\dagger(t) \hat{a}_k(t), \quad (8.53)$$

donde se ha utilizado la unitariedad del operador de evolución temporal $\hat{U}^\dagger(t) \hat{U}(t) = \hat{I}$. Los valores esperados se calcularán tomando como estado inicial el estado *vacío* $|0\rangle \otimes |0\rangle$.

En la figura 8.1 se muestra la evolución temporal del número promedio de fotones para cada modo de la cavidad, además de mostrar el comportamiento que manifiestan si eliminamos el acoplamiento en el modelo. Se representan en color rojo las cantidades del modo uno y en color azul las que corresponden al modo dos. Dado que la frecuencia del espejo oscilante está en resonancia con el modo uno, el número promedio de fotones en este modo se incrementa rápidamente mientras el número de fotones del modo dos incrementa lentamente y presenta algunas fluctuaciones. Es bien conocido que en condiciones de resonancia la generación de fotones de un solo modo alcanza un crecimiento

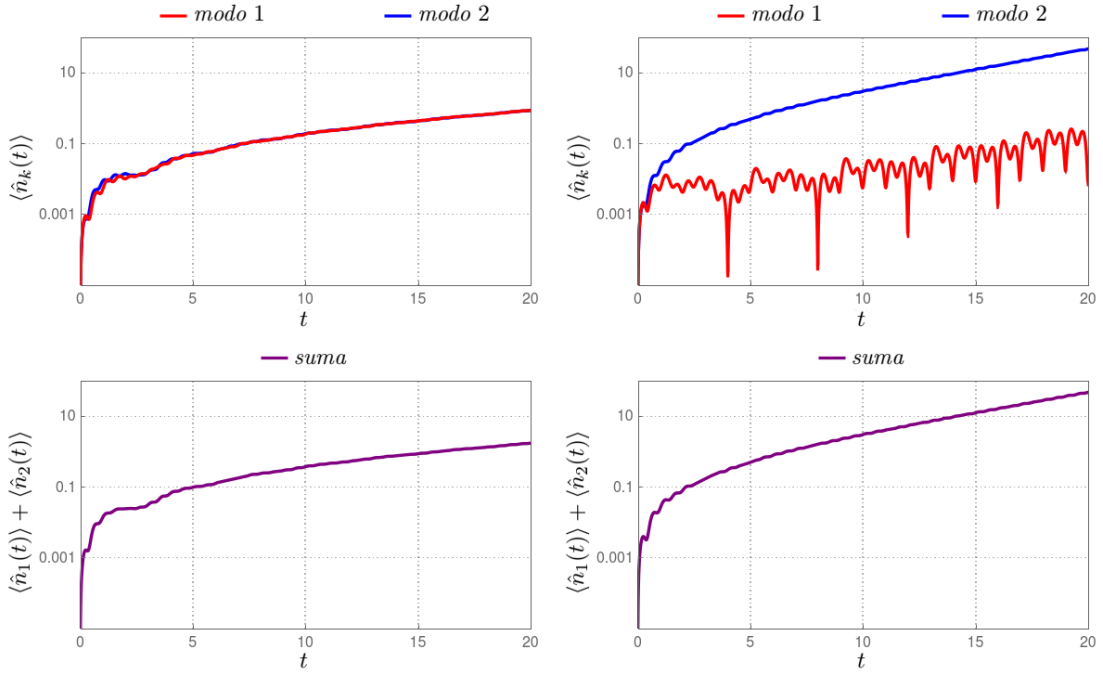


Figura 8.2: La primera fila muestra los valores esperados $\langle \hat{n}_1(t) \rangle$ (línea roja) y $\langle \hat{n}_2(t) \rangle$ (línea azul), la segunda muestra la suma de ambos modos. En la columna izquierda se ha considerado $L = 1.5$, mientras que en la columna derecha el valor es $L = 2$. Como antes, el tiempo se encuentra en unidades atómicas.

exponencial, aquí se muestra que ocurre el mismo crecimiento aun en presencia de un segundo modo acoplado débilmente, sin embargo, el modo no resonante sí parece ser afectado por el coplamiento.

En la figura 8.2, se muestra la evolución temporal de los valores esperados del número de fotones, pero la longitud L ha sido modificada, adquiriendo valores 1.5 y 2, esto cambia directamente la razón q_0/L . En la figura 8.1 los casos mostrados corresponden al valor $q_0/L = 1/12$, en la figura 8.2 se muestran casos con valores $q_0/L = 1/18$ y $1/24$. El cambio de la longitud de equilibrio de la cavidad, también modifica la expresión para la frecuencia de oscilación de los modos, véanse las expresiones (8.3). En el caso, $L = 1.5$ puede verse que ambos modos entran en resonancia, sin embargo la generación de fotones es menor que cuando únicamente un modo lo hace. Cuando $L = 2$, es el segundo modo el que se encuentra en resonancia, el primer modo aumenta lentamente su número de fotones mientras presenta grandes fluctuaciones.

8.4 Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado la estructura algebraica de un sistema optomecánico. Se encontró que el hamiltoniano del sistema describe una curva en el álgebra $\mathfrak{so}(3,2)$, por lo tanto, el operador de evolución temporal se encuentra en el grupo $\mathbf{SO}(3,2)$. Utilizando métodos de Lie se desarrolló la forma exacta del operador de evolución temporal y una expresión ‘desenredada’ para facilitar su aplicación sobre los operadores del sistema.

El tratamiento algebraico realizado en este trabajo provee expresiones exactas para la dinámica, además permite utilizar el esquema de Heisenberg para estudiar las propiedades del sistema. Los resultados encontrados demuestran su validéz al estar en concordancia con estudios realizados previamente, en el régimen de acoplamiento resonante de dos modos [96], sin embargo se presentaron resultados que van más allá de dicho caso al considerar parámetros que dependen del tiempo, incluidas las frecuencias de oscilación. Este tratamiento se puede aplicar para cualquier trayectoria $q(t)$, además, una vez calculada la evolución temporal de los operadores de creación-aniquilación resulta sencillo estudiar otros fenómenos en el sistema, tal como generación de estados comprimidos.

Bibliografía

- [1] S. A. Collins, *Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics*, J. Opt. Soc. Am. 60, 1168-1177 (1970).
- [2] M. Moshinsky and C. Quesne, *Oscillator systems*, in Proceedings of the 15th Solvay Conference in Physics (1970) (Gordon and Breach, New York, 1974).
- [3] M. Moshinsky and C. Quesne, *Linear canonical transformations and their unitary representation*, J. Math. Phys. 12, 1772-1780 (1971).
- [4] M. Moshinsky and C. Quesne, *Linear canonical transformations and their matrix elements*, J. Math. Phys. 12, 1780-1783 (1971).
- [5] K. B. Wolf, *Canonical transforms. I. Complex linear transforms*, J. Math. Phys. 15, No. 8, 1295-1301 (1974).
- [6] K. B. Wolf, *Canonical transforms. II. Complex radial transforms*, J. Math. Phys. 15, No. 8, 1295-1301 (1974).
- [7] K. B. Wolf, *On self-reciprocal functions under a class of integral transforms*, J. Math. Phys. 18, No. 5, 1046-1051 (1977).
- [8] K. B. Wolf, *Integral Transforms in Science and Engineering*, Plenum Pub. Corp. New York and London (1979).
- [9] M. J. Bastiaans, *Wigner distribution function and its application to first-order optics*, J. Opt. Soc. Am. 69, No. 12, 1710-1716 (1979).
- [10] M. J. Bastiaans and T. Alieva, *Classifications of lossless first-order optical systems and the linear canonical transformations*, J. Opt. Soc. Am. A 24, 1053-1062 (2007).
- [11] E. Siegman, *Lasers*, Mill Valley, California (1986).
- [12] J. J. Healy, M. A. Kutay, H. M. Ozaktas and J. T. Sheridan, *Linear Canonical Transforms, Theory and Applications*, Springer Series in Optical Science (2016).
- [13] V. Bargmann, *On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part I*, Comm. Pure Appl. Math. 14, 187-214 (1961).

-
- [14] J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, Courier Corporation (2006).
- [15] G. B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University (2016).
- [16] M. Nazarathy, A. Hardy and J. Shamir, *Generalized mode propagation in first-order optical systems with loss or gain*, J. Opt. Soc. Am. 72, 1409-1420 (1982).
- [17] N. M. Atakishiyev and K. B. Wolf, *Fractional Fourier-Kravchuk transform*, J. Opt. Soc. Am. A 14, No. 7, 1467-1477 (1997)
- [18] Ç. Candan, M. A. Kutay, and H. M. Ozaktas, *The discrete fractional Fourier transform*, IEEE Trans. Sig. Proc. 48, 1329-1337 (1999)
- [19] H. M. Ozaktas, A. Koç, I. Sari, and M. A. Kutay, *Efficient computation of quadratic-phase integrals in optics*, Opt. Lett. 31, 35-37 (2006).
- [20] A. Koç, H. M. Ozaktas, and L. Hesselink, *Fast and accurate algorithm for the computation of complex linear canonical transforms*, J. Opt. Soc. Am. A 27, No. 9, 1896-1908 (2010).
- [21] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*, (Wiley, 2001).
- [22] A. Koç, B. Bartan and H. M. Ozaktas, *Discrete linear canonical transform based on hyperdifferential operators*, IEEE Trans. Sig. Proc. 67, 2237-2248 (2019).
- [23] D. Wei and Y. Shen, *Discrete complex linear canonical transform based on super-differential operators*, Optik 230, 166343 (2021).
- [24] N. M. Atakishiyev, K. B. Wolf, *Approximation on a finite set of points through Kravchuk functions*, Rev. Mex. Fís. 40, núm. 3, 366-377, (1994).
- [25] N. M. Atakishiyev and K. B. Wolf, *Fractional Fourier-Kravchuk transform*, J. Opt. Soc. Am. A 14, 1467-1477 (1997).
- [26] N. M. Atakishiyev, G. S. Pogosyan and K. B. Wolf, *Contraction of the finite one-dimensional oscillator*, Int. J. Mod. Phys. A 18, No. 00, 1-11 (2003).
- [27] R. Simon and K. B. Wolf, *Fractional Fourier transforms in two dimensions*, J. Opt. Soc. Am. A 17, 2368-2381 (2000).
- [28] G. Krötzsch, K. Uriostegui and K. B. Wolf, *Unitary rotations in two-, three-, and D-dimensional Cartesian data array*, J. Opt. Soc. Am. A 31, 1531-1535 (2014).
- [29] K. B. Wolf, *Linear transformations and aberrations in continuous and finite systems*, J. Phys. A 41, 304026 (2008).

-
- [30] K. Uriostegui and K. B. Wolf, *Unitary aberrations on pixellated screens*, Appl. Math. Inf. Sci. 12, No. 6, 1-8 (2018).
- [31] L. C. Biedenharn, J. D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics: Theory and Applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications vol. 8, Addison-Wesley Publishing Company (1981),
- [32] K. B. Wolf, *Geometric Optics on Phase Space*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (2004).
- [33] N. M. Atakishiyev, G. S. Pogosyan, K. B. Wolf, *Finite models of the oscillator*, Fizika Elementarnikh Chastits i Atomnogo Yadra, 3-36, 521-555, (2005).
- [34] L. E. Ruiz Vincent, *Análisis de señales discretas finitas mediante el modelo de oscilador finito de $su(2)$* , Tesis doctoral, sección. 2.2.1, (2007).
- [35] R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, Springer Monographs in Mathematics (2000).
- [36] M. K. Atakishiyeva, N. M. Atakishiyev, K. B. Wolf, *Kravchuk oscillator revisited*, 8th International Symposium on Quantum Theory and Symmetries, Journal of Physics: Conference Series, 512, (2014).
- [37] L. Baker, *Continuum quantum systems as limits of discrete quantum systems: I, State vectors*, J. Funct. Anal. 186, 153-166, (2001).
- [38] L. Baker, *Continuum quantum systems as limits of discrete quantum systems: II, State functions*, J. Phys. A: Math. and Gen. 34, 4673-4682, (2001).
- [39] L. Baker, *Continuum quantum systems as limits of discrete quantum systems: III, Operators*, J. Math. Phys. 42 (10), 4652-4668, (2001).
- [40] K. Uriostegui, *Discrete Bargmann transform*, J. Opt. Soc. Am. A 36, No. 8, 1367-1373 (2019).
- [41] J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, W. A. Benjamin, New York (1968).
- [42] N. M. Atakishiyev, G. S. Pogosyan, L. E. Vicent and K. B. Wolf, *Finite two-dimensional oscillator: I. The Cartesian model*, J. Phys. A: Math. Gen. 34, 9381-9398 (2001).
- [43] D. Rojas-Sandoval and C. Villegas-Blas, *On coherent states for spaces of holomorphic functions related to the hydrogen atom problem in dimensions $n = 2, 3, 5$* , in Non-commutative Geometry in Mathematics and Physics, Contemporary Mathematics Vol. 462, edited by G. Dito, H. Garcia-Compean, E. Lupercio and F. J. Turrubiates (American Mathematical Society, 2008).

-
- [44] S. C. Pei and M. H. Yeh, *Improved discrete fractional transform*, Opt. Lett. 22, 1047-1049 (1997).
- [45] S. C. Pei, M. H. Yeh and C. C. Tseng, *Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections*, IEEE Trans. Signal Process. 47, 1335-1348 (1999).
- [46] M. L. Mehta, *Eigenvalues and eigenvectors of the finite Fourier transform*, J. Math. Phys. 28, 781-785 (1987)
- [47] L. Barker, Ç. Candan, T. Hakioglu, A. Kutay, and H. M. Ozaktas, *The discrete harmonic oscillator, Harper's equation, and the discrete fractional Fourier transform*, J. Phys. A 33, 2209-2222 (2000).
- [48] K. B. Wolf and G. Krötzsch, *Geometry and Dynamics in the fractional Fourier transform*, J. Opt. Soc. Am. A 24, 651-658 (2007).
- [49] W. M. Zhang, D. H. Feng and R. Gilmore, *Coherent states: Theory and some applications*, Rev. Mod. Phys. 62, No. 4, 867-926 (1990).
- [50] A. M. Perelomov, *Coherent states for arbitrary Lie group*, Comm. Math. Phys. 26, 222-236 (1972).
- [51] R. J. Glauber, *Coherent and incoherent states of the radiations field*, Phys. Rev. 131, 2766-2788 (1963).
- [52] J. P. Gazeau and J. R. Klauder, *Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum*, J. Phys. A: Math. Gen. 32, 123-132 (1999).
- [53] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, A. Jeffrey and D. Zwillinger, ed. Academic Press (2007).
- [54] K. Zhu Ed., *Handbook of Analytic Operator Theory*, CRC Press/Chapman and Hall Handbooks in Mathematics Series S.Ed. S. G. Krantz, Taylor&Francis Group (2019).
- [55] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Washington DC: National Bureau of Standards, 1964).
- [56] C. A. Muñoz, J. Rueda-Paz and K. B. Wolf, *Discrete repulsive oscillator wavefunctions*, J. Phys. A: Math. and Theor. 42, 1-12 (2009).
- [57] S. -C. Pei and S. -G. Huang, *Fast and accurate computation of normalized Bargmann transform*, J. Opt. Soc. Am. A 34, No. 1, 18-26 (2017).
- [58] J. A. Rodrigo, T. Alieva, and M. L. Calvo, *Gyrator transform: properties and applications*, Opt. Express 15, 2190-2203 (2007).

-
- [59] K. B. Wolf and T. Alieva, *Rotation and gyration of finite two-dimensional modes*, J. Opt. Soc. Am. A 25, 365-370 (2008).
- [60] K. Uriostegui, *Discrete normalized Bargmann transform through the gyrator transform*, J. Opt. Soc. Am. A 37, No. 6, 951-958 (2020).
- [61] N. M. Atakishiyev, G. S. Pogosyan, L. E. Vicent, and K. B. Wolf, *Finite two-dimensional oscillator: I. The Cartesian model*, J. Phys A 34, 9381-9398 (2001).
- [62] S. Weimann, A. Perez-Leija, M. Lebugle, M. Tichy, M. Gräfe, R. Heilmann, S. Nolte, H. Moya-Cessa, G. Weihs, D. N. Christodoulides, and A. Szameit, *Implementation of the quantum and classical discrete fractional Fourier transforms*, Nat. Commun 7, 11027 (2016).
- [63] M. Stonińska, A. Buraczewski, M. Moore, W. R. Clements, J. J. Renema, S. W. Nam, T. Gerrits, A. Lita, W. S. Kolthammer, A. Eckstein, and I. A. Walmsley, *Quantum interference enables constant-time quantum information processing*, Appl. Sci. Eng. 5, eaau9674 (2019).
- [64] G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*, (Cambridge University Press, 1922).
- [65] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, (Oxford University Press, 1947).
- [66] K. Uriostegui and K. B. Wolf, *Discrete Bessel functions and transform*, arXiv:2005.06076 [math-ph], (2020).
- [67] W. Miller Jr., *Symmetry and Separation of Variables*, Encyclopedia of Mathematics, Vol. 4 (Cambridge University Press, 1984).
- [68] G. Biagetti, P. Crippa, L. Falaschetti, and C. Turchetti, *Discrete Bessel functions for representing the Class of Finite Duration Decaying Sequences*, IEEE Eur. Sig. Proc. Conf. 24, 2126 (2016).
- [69] A. Erdélyi, *et al.*, *Higher Transcendental Functions (Based on notes by H. Bateman)*, Vol. 2 (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [70] P. Winternitz, K. B. Wolf, G. S. Pogosyan, and A. N. Sissakian, *Graf's addition theorem obtained from SO(3) contraction*, Theor. Math. Phys. 129, 1501-1503 (2001).
- [71] J. D. Talman, *Special Functions – A Group Theoretic Approach (Based on lectures by E. P. Wigner)*, (W. A. Benjamin Inc, 1968).
- [72] M. Boyer, *Discrete Bessel functions*, J. Math. Anal. Appl. 2, 509-524 (1961).
- [73] K. Uriostegui and K. B. Wolf, *Discrete Bessel and Mathieu functions*, Appl. Math. Inf. Sci. 15, No. 3, 307–315, (2021).

-
- [74] M. Bohner and T. Cuchta, *The Bessel difference equation*, Proc. Am. Math. Soc. 145, 1567-1580 (2017).
- [75] A. Slavík, *Discrete Bessel functions and partial differential equations*, J. Diff. Eqs. Applics. 24, 425-437 (2017).
- [76] L. Chaos-Cador and E. Ley-Koo, *Mathieu functions, matrix evaluation, and generating functions*, Rev. Mex. Fís. 48, 67-75 (2002).
- [77] S. Haroche and J.-M. Raimond, *Exploring the quantum: Atoms, cavities, and photons*, Oxford University Press (2006).
- [78] C. K. Law, *Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A Hamiltonian formulation*, Phys. Rev. A 51, 2537-2541 (1995).
- [79] V. B. Braginskiĭ and A. B. Manukin, *Ponderomotive effects of electromagnetic radiation*, Sov. Phys. JETP 25, 653 (1967).
- [80] P. F. Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard, *Cooling of a Mirror by Radiation Pressure*, Phys. Rev. Lett. 83, 3174 (1999).
- [81] A. Schliesser, P. Del'Haye, N. Nooshi, K. J. Vahala, and T. J. Kippenberg, *Radiation Pressure Cooling of a Micromechanical Oscillator Using Dynamical Backaction*, Phys. Rev. Lett. 97, 243905 (2006).
- [82] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, and F. Marquardt, *Cavity optomechanics*, Rev. Mod. Phys. 86, 1391-1452 (2014).
- [83] C. M. Caves, *Quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations in an interferometer*, Phys. Rev. Lett. 45, 75 (1980).
- [84] G. T. Moore, *Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity*, J. Math. Phys. 11, No. 9, 2679 (1970).
- [85] E. Yablonovitch, *Accelerating reference frame for electromagnetic waves in a rapidly growing plasma: Unruh-Davies-Fulling-DeWitt radiation and the nonadiabatic Casimir effect*, Phys. Rev. LEtter. 62, 1742 (1989).
- [86] V. V. Dodonov, A. B. Klimov, and V. I. Man'ko, *Nonstationary Casimir effect and oscillator energy level shift*, Phys. Lett. A 142, 511 (1989).
- [87] K. Jacobs, P. Tombesi, M. J. Collett, and D. F. Walls, *Quantum-nondemolition measurement of photon number using radiation pressure*, Phys. Rev. A 49, 1961 (1994).
- [88] L. Medina-Dozal, I. Ramos-Prieto and J. Récamier, *Approximate Evolution for a hybrid system –An optomechanical Jaynes–Cummings model*, Entropy 22, No. 12, 1373 (2020).

- [89] I. Ramos-Prieto, A. Paredes, J. Récamier, and H. Moya-Cessa, *Approximate evolution for a system composed by two coupled Jaynes–Cummings Hamiltonians*, Phys. Scr. 95, 034008 (2020).
- [90] R. Román-Ancheyta, M. Berrondo, and J. Récamier, *Parametric oscillator in a Kerr medium: evolutions of coherent states*, J. Opt. Soc. Am. B 32, 1651-1655 (2015).
- [91] J. Schwinger, *On Angular Momentum*, in Quantum Theory of Angular Momentum, edited by L. C. Biedenharn and H. Van Dam, (Academic Press, New York, 1965), pp. 229.
- [92] Y. Tsue, C. Providência, J. da Providência, and M. Yamamura, *Beyond the Schinger boson representation of the $\mathfrak{su}(2)$ -algebra*, Prog. Theor. Exp. Phys., 043D01 (2015).
- [93] Y. Wu and X. Yang, *Algebraic structure of the algebra $\mathfrak{so}(2,1)$ for a quantized field in a vibrating cavity*, J. Phys. A: Math. Gen. 34, 327-334 (2001).
- [94] C. K. Law, *Resonance Response of the Quantum Vacuum to an Oscillating Boundary*, Phys. Rev. Lett. 73, 1931 (1994)
- [95] G. Calucci, *Casimir effect for moving bodies*, J. Phys. A. Math. Gen. 25, 3873 (1992).
- [96] A. V. Dodonov and V. V. Dodonov, *Nonstationary Casimir effect in cavities with two resonantly coupled modes*, Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys. 289, 289, 291 (2001).
- [97] M. Croce, D. A. Dalvit, and F. D. Mazzitelli, *Resonant photon creation in a three-dimensional oscillating cavity*, Phys. Rev. A. At. Mol. Opt. Phys. 64, 138081 (2001).
- [98] V. Dodonov, *Fifty Years of the Dynamical Casimir Effect*, Physics 2, 67-104 (2020).
- [99] E. Celeghini and M.A. del Olmo, *Algebraic special functions and $\mathrm{SO}(3,2)$* , Annals of Physics 333, 90-103, (2013).
- [100] J. Wei and E. Norman, *Lie algebraic of linear differential equations*, J. Math. Phys. 4, No. 4, 575-581 (1963).

