



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

VELOCIDAD DE ESCAPE DE ESTRELLAS DE
NEUTRONES POR EMISIÓN ANISOTRÓPICA DE
NEUTRINOS DERECHOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

SANTIAGO BERNAL LANGARICA

TUTOR

DR. JOSÉ ALEJANDRO AYALA MERCADO

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno
Bernal
Langarica
Santiago
(55) 56758567
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
312142971
2. Datos del tutor
Dr.
José Alejandro
Ayala
Mercado
3. Datos del sinodal 1
Dr.
Dany Pierre
Page
Rollinet
4. Datos del sinodal 2
Dr.
Manuel
Torres
Labansat
5. Datos del sinodal 3
Dr.
Sarira
Sahu
6. Datos del sinodal 4
Dr.
Luis Alberto
Hernández
Rosas
7. Datos del trabajo escrito
Velocidad de escape de estrellas de neutrones por emisión anisotrópica de neutrinos derechos
137 p
2021

Resumen

Uno de los mecanismos propuestos para explicar las velocidades de escape de estrellas de neutrones es la emisión anisotrópica de neutrinos debida a la presencia de campos magnéticos intensos. En las primeras etapas de la evolución de estos objetos astrofísicos, en donde la producción de neutrinos es mayor, las interacciones entre neutrinos y el medio que conforma a la estrella implican que el camino libre medio de los neutrinos es mucho menor que el radio de la estrella, por lo que la emisión asimétrica se diluye y su efecto no es suficiente para explicar las velocidades observadas en las estrellas.

En este trabajo se estudió la posibilidad de que los neutrinos puedan tener un cambio en su quiralidad, producido por la presencia de un posible momento magnético. Si los neutrinos, originalmente izquierdos, cambian su quiralidad y se convierten en derechos, sus interacciones con la materia se suprimen y pueden escapar libremente de la estrella, siempre y cuando el tiempo que les tome cambiar de quiralidad sea menor que el tiempo que les tome recorrer un camino libre medio. Esta condición implica una cota inferior al momento magnético del neutrino, pues si éste es menor que $4.7 \times 10^{-15} \mu_B$, donde μ_B es el magnetón de Bohr, el mecanismo de cambio de quiralidad no será eficiente y por lo tanto los neutrinos interactuarán con la materia de la estrella antes de cambiar de quiralidad. Esta cota inferior, junto con la cota superior, deducida a partir del límite de luminosidad de supernovas, da un intervalo de valores para el momento magnético del neutrino $4.7 \times 10^{-15} \leq \mu_\nu / \mu_B \leq (0.1 - 0.4) \times 10^{-11}$.

Si el momento magnético del neutrino se encuentra dentro del intervalo encontrado, entonces el mecanismo de cambio de quiralidad es un mecanismo eficiente para explicar las velocidades de escape de las estrellas de neutrones, que se pueden obtener al considerar la anisotropía en la emisión causada por la presencia del campo magnético.

En este trabajo se estudió la emisión asimétrica de neutrinos del núcleo de una protoestrella de neutrones, el cual está compuesto por materia de quarks extraños magnetizada. A partir de la termodinámica de este gas, se pudo calcular la velocidad de escape de las estrellas. Los resultados obtenidos son consistentes con las velocidades observadas en los pulsares y abarcan el rango de radios y campos magnéticos que se cree que tienen los núcleos de las protoestrellas de neutrones.

Este trabajo está organizado como sigue: En el Capítulo 1 se da una introducción histórica a los objetos compactos, en particular a las estrellas de neutrones, a los neutrinos

y a la relación entre las estrellas de neutrones y los neutrinos; además, se presentan algunas cantidades observadas y se plantea el problema de las velocidades de escape. En el Capítulo 2 se presentan los principales resultados sobre la física de las estrellas de neutrones, como el Límite de Chandrasekhar, su estructura, su composición, su evolución y, además, se expone el modelo más simple de enfriamiento de las estrellas de neutrones. En el Capítulo 3 se plantea con detenimiento el problema de las velocidades de escape y se presentan los principales mecanismos que se han considerado para estudiar este fenómeno. En el Capítulo 4 se muestran los principales resultados de la física de los neutrinos dentro del Modelo Estándar de partículas elementales, como la Ecuación de Dirac, el Modelo de Weinberg-Salam y la masa de los neutrinos dentro de esta teoría; además, se presentan las interacciones de neutrinos en medios densos y calientes, con especial enfoque en el camino libre medio de los neutrinos en el interior de las estrellas de neutrones; finalmente se hace una introducción a la física de los neutrinos más allá del Modelo Estándar, como la masa de los neutrinos, las oscilaciones y sus propiedades electromagnéticas, poniendo énfasis en el momento magnético que tienen los neutrinos masivos. En el Capítulo 5 se presenta el formalismo de las teorías de campos a temperatura finita, dentro del formalismo de integrales de camino y de operadores, que se utiliza para obtener una expresión para la tasa de producción de neutrinos derechos, y en el Capítulo 6, se obtiene explícitamente la tasa de producción de neutrinos derechos, utilizándola para determinar un intervalo de valores del momento magnético del neutrino, dentro del cual, el proceso de cambio de quiralidad es eficiente. En el Capítulo 7 se muestra el cálculo de las velocidades de escape de estrellas de neutrones y se presentan los resultados obtenidos, siempre que el valor del momento magnético del neutrino esté dentro del intervalo propuesto. Finalmente, en el Capítulo 8, se presentan las conclusiones de este trabajo.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetos compactos y estrellas de neutrones	2
1.1.1. Enanas blancas	3
1.1.2. Agujeros negros	4
1.1.3. Estrellas de neutrones	5
1.2. Estrellas de neutrones y neutrinos	6
1.3. Observaciones de estrellas de neutrones y movimiento propio	8
2. La física de las estrellas de neutrones	11
2.1. Límite de Chandrasekhar	11
2.2. Estructura de una estrella de neutrones	14
2.2.1. La estructura global: Las ecuaciones de Tolman – Oppenheimer – Volkoff y un límite superior para la masa	14
2.2.2. La estructura interna de una estrella de neutrones y su composición	16
2.3. Evolución de una estrella de neutrones	21
2.3.1. Evolución térmica de las estrellas de neutrones	23
3. Velocidades de escape de estrellas de neutrones	27
3.1. <i>Kick</i> debido a perturbaciones hidrodinámicas	29
3.2. <i>Kick</i> debido a la formación de jets asimétricos	30
3.3. <i>Kick</i> debido al rompimiento de un sistema binario	30
3.4. <i>Kick</i> debido a la fragmentación de un núcleo giratorio en un sistema binario de protoestrellas de neutrones	32
3.5. <i>Kick</i> debido a un efecto cohete electromagnético	32
3.6. <i>Kick</i> debido a emisión anisotrópica de neutrinos	34
4. La física de los neutrinos	39
4.1. Neutrinos en el Modelo Estándar de partículas elementales	39
4.1.1. Neutrinos y la ecuación de Dirac	40
4.1.2. Solución a la ecuación no masiva de Dirac	42
4.1.3. El Modelo de Weinberg-Salam	44

4.1.4.	La masa del neutrino en el Modelo Estándar	53
4.2.	Interacciones de neutrinos en medios densos y calientes	53
4.2.1.	Física de neutrinos en medios materiales	54
4.2.2.	Camino libre medio de neutrinos en estrellas de neutrones	54
4.3.	Física de neutrinos más allá del Modelo Estándar	58
4.3.1.	La masa de los neutrinos	60
4.3.2.	Oscilaciones de neutrinos	61
4.3.3.	Propiedades electromagnéticas de los neutrinos y su momento magnético	65
5.	Resultados de teoría de campos a temperatura finita	69
5.1.	La autoenergía	69
5.2.	El formalismo de tiempo imaginario de la teoría térmica de campos	71
5.2.1.	El formalismo de integrales de camino	72
5.2.2.	El formalismo de operadores y las densidades espectrales	75
5.2.3.	El propagador de Matsubara	78
5.2.4.	El propagador fermiónico a temperatura y potencial químico finito	79
5.3.	La aproximación de <i>Hard Thermal Loops</i>	83
5.4.	Tasa de amortiguamiento y tasa de producción de fermiones a altas temperaturas	86
6.	Cambio de quiralidad en neutrinos y una cota al momento magnético del neutrino	91
6.1.	Tasa de producción de neutrinos derechos	91
6.2.	Una cota inferior para el momento magnético del neutrino	98
6.3.	Una cota superior para el momento magnético del neutrino	103
7.	Cálculo de las velocidades de escape en estrellas de neutrones	105
7.1.	Velocidad de escape de estrellas de neutrones	105
7.2.	Termodinámica de fermiones magnetizados	107
7.2.1.	Polarización de los electrones en un campo magnético	109
7.2.2.	Condiciones de equilibrio estelar	111
7.3.	Resultados	116
8.	Conclusiones	119
A.	Apéndice A	123
A.1.	Identidades de matrices gamma	123
A.2.	Sumas de frecuencias de Matsubara	125

Agradecimientos

A lo largo de la elaboración de este trabajo, he recibido un enorme apoyo por parte de una gran cantidad de personas, tanto a un nivel personal como académico.

Dentro de los agradecimientos académicos quiero mencionar al Dr. Daryel Manreza Paret, por todas sus explicaciones, discusiones, los artículos que me recomendó, el gran apoyo con el programa para calcular las velocidades de *kick*, así como por los comentarios que me hizo para mejorar la redacción de esta tesis.

Al Dr. Saúl Hernández Ortiz y al Dr. Luis Hernández Rosas, por todas las enseñanzas y discusiones enriquecedoras.

A mi asesor, el Dr. Alejandro Ayala Mercado, por todo lo que me enseñó, por proponerme este gran proyecto de tesis (que ha sido un gusto trabajar). En fin, por todo, aunque Umberto Eco considere que es de mal gusto agradecer al asesor . . .

Al Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM, por las facilidades que me dio para la realización de este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) y al Sistema Nacional de Investigadores (SNI), por el apoyo como Ayudante de Investigador.

Dentro de los agradecimientos personales quiero mencionar a mi mamá, Rosalia, a mi papá, Abel, y a mi hermana, Valentina, por todo. Mención especial, a mi mamá, que me ayudó, con su ojo clínico, a encontrar errores de dedo, faltas de ortografía y ayudarme a encontrar la mejor redacción posible en algunas frases.

A mi familia: abuelos, primos y tíos, en especial a mi tía Mónica, que también me ayudó a revisar la redacción y ortografía.

A mis dos grupos de amigos de los últimos tiempos: los *Gos* y los de *la mesa del Prometeo*. A Miguel Alcubierre Méndez, que aunque no llegó a ver este trabajo terminado, estuvo muy presente a lo largo de su elaboración.

Finalmente a los grandes maestros que tuve en la facultad y que me encaminaron a esta rama de la física. En particular el Dr. Fermín Viniegra Heberlein, el Dr. José Marquina Fábrega, el Dr. Atahualpa Kraemer y el Dr. Manuel Torres Labansat.

“Entre los muchos y variados estudios sobre las letras y las artes, con los que se vivifican las inteligencias de los hombres, pienso que principalmente han de abarcarse y seguirse con el mayor afán las que versan sobre las cosas más bellas y más dignas del saber. Tales son las que tratan de las maravillosas revoluciones del mundo y el curso de los astros [...], y de las causas de todo lo que aparece en el cielo y que finalmente explican la forma total. Pues, ¿qué hay más hermoso que el cielo, que contiene toda la belleza?”

NIKLAS KOPPERNIGK,
De Revolutionibus orbium coelestium

“Expongamos, ahora, una ciencia nueva acerca de un tema muy antiguo. No hay, tal vez, en la naturaleza nada más viejo que el movimiento y no faltan libros voluminosos sobre tal asunto, escritos por los filósofos. A pesar de todo esto, muchas de sus propiedades, muy dignas, no han sido observadas ni demostradas hasta el momento.”

GALILEO GALILEI,
Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali.

Capítulo 1

Introducción

Desde tiempos prehistóricos, la humanidad ha observado el cielo y los cuerpos celestes que están presentes en él, más aun, los ha utilizado como métodos de orientación y para medir el paso del tiempo. Después de siglos de observación, se empezaron a encontrar patrones en el movimiento de dichos cuerpos, y se hizo el intento de describir su movimiento y entenderlo. Con la llegada de las grandes civilizaciones de la antigüedad, la descripción fue cada vez más precisa y se empezaron a predecir los movimientos observados, incluso algunas culturas fueron capaces de deducir las diferentes naturalezas de los cuerpos celestes que a simple vista parecían ser similares, solamente por sus distintos movimientos, por ejemplo, se observaron cinco estrellas cuyo movimiento era errante con respecto a las demás, por lo que se les llamó planetas, del griego *estrella errante* o *vagabunda*. Incluso, algunas culturas como las que florecieron en la antigua Mesopotamia o en la civilización maya antigua, atribuyeron un carácter divino a los planetas.

Con el advenimiento de la astronomía moderna en Occidente, en particular del estudio de las estrellas, se comenzaron a formular algunas preguntas sobre la evolución estelar: ¿Las estrellas nacen? y si es así, ¿cómo y bajo qué condiciones lo hacen?, ¿cómo viven y qué cambios sufren a lo largo de su vida?, ¿las estrellas mueren? y si lo hacen, ¿qué queda después? La respuesta a algunas de estas preguntas ha ido cambiando históricamente, pues la concepción aristotélica, que permeó en gran parte de la antigüedad y de la edad media, era que la esfera estelar, y todo lo que contenía era imperturbable, por lo que las estrellas no podían morir ni nacer. Gracias a la observación de las ahora llamadas supernovas, así como la utilización del telescopio con fines astronómicos, se observó que la esfera estelar no era imperturbable, y por tanto, las estrellas podían nacer, evolucionar e incluso morir. De especial interés para este trabajo son las preguntas relativas a su muerte y a lo que queda después.

A partir de los estudios de termodinámica y la mecánica de fluidos, Frank H. Shu [1] establece dos importantes propiedades que gobiernan a las estrellas ordinarias:

- (a) Las estrellas ordinarias son un fluido auto gravitante y, por lo tanto, tienen que estar

calientes en su interior para que la presión evite el colapso gravitacional.

- (b) El espacio exterior es oscuro y frío, por lo que existe un flujo de calor continuo de la estrella al universo.

Si la estrella se comporta como un gas clásico, no hay equilibrio termodinámico bajo esas circunstancias y la estrella se pondrá cada vez más caliente en comparación con el universo. La presión, que expande, no será suficiente para que la estrella se mantenga en equilibrio con la gravedad, que comprime, y eventualmente la estrella morirá con una explosión más o menos violenta. Los astrónomos creen que hay cuatro posibles escenarios para lo que queda después de que una estrella muere [1]:

Nada: si la explosión es suficientemente violenta, toda la materia será dispersada por el universo. En palabras de Shu, esto sería “la máxima victoria para la termodinámica” ([1] p. 125).

Enana Blanca: el núcleo expuesto de una estrella vieja. Este objeto estaría muy caliente en un principio, pero eventualmente se enfriaría y apagaría. Representaría una tregua entre la presión y la gravedad mediada por los electrones presentes.

Estrella de Neutrones: el núcleo que implotó de una estrella sumamente evolucionada, durante un corto periodo “enviaría señales de vida” (pulsos), pero finalmente llegará a un equilibrio (“sin vida”) con el universo. Representaría una tregua entre la presión y la gravedad mediada por los bariones presentes.

Agujero Negro: como dice Shu: “el Drácula estelar” ([1] p. 126), un objeto que espera para atrapar más materia para que comparta su destino. Representaría la “máxima victoria para la auto gravedad”.

A los objetos que quedan después de la muerte de la estrella (¡si es que algo queda!) se conocen como objetos compactos y serán el tema de la siguiente sección.

1.1. Objetos compactos y estrellas de neutrones

Al final de la evolución estelar se encuentran una clase de objetos astrofísicos conocidos como objetos compactos. Son parte del remanente que deja la estrella después de que terminó su combustible y se dio el colapso gravitacional. De acuerdo con Max Camenzind [2], dependiendo de las características de la estrella progenitora, como su masa y radio, se pueden formar distintos tipos de objetos, como enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros.

Los objetos compactos difieren de las estrellas ordinarias en al menos tres aspectos:

- No queman combustible nuclear y la presión térmica no puede mantener el colapso gravitacional.

- Tienen un tamaño mucho más pequeño que las estrellas ordinarias y por lo tanto, tienen un campo gravitacional mucho más intenso en la superficie.
- Comúnmente, los objetos tienen campos magnéticos muy intensos, mayores que los de las estrellas ordinarias.

A continuación se presentará una discusión más detallada de estos objetos.

1.1.1. Enanas blancas

Las enanas blancas son estrellas cuya masa es aproximadamente igual a la masa del Sol y que tienen un radio característico de 5000 km, lo que corresponde a una densidad de 10^6g/cm^3 . La primer enana blanca fue descubierta en 1844 por el astrónomo alemán Friedrich Bessel (1784 – 1846), quien observó que la estrella más brillante del cielo, Sirio, se alejaba y acercaba ligeramente, como si otro cuerpo la orbitara. El también astrónomo alemán C. H. F. Peters (1813 – 1890) determinó, en 1851, la órbita y masa que debía de tener la compañera de Sirio, actualmente llamada Sirio B. En 1865, el óptico estadounidense Alvan Graham Clarke (1832 – 1897) logró resolver a Sirio B, y a partir de la magnitud absoluta (y la distancia a la que se encuentra) se pudo calcular el radio de Sirio B (~ 4000 km, que es menor que el de la Tierra), por lo que se conoció su densidad. Por cuestiones hidrostáticas, densidades tan altas no permiten que la estrella sea autogravitante, por lo que algún mecanismo desconocido hacia finales del siglo XIX debía de estar presente. Hasta las primeras décadas del siglo XX, se creía que una vez que las estrellas terminaban su fuente de energía, todas se convertirían en enanas blancas.

En 1926, el inglés Ralph H. Fowler (1889 – 1944), basándose en la formulación que hiciera el también inglés Paul A. M. Dirac (1902 – 1984) de la estadística de Fermi - Dirac en ese mismo año, identificó que la presión que sostenía a las enanas blancas del colapso gravitacional era la presión de degeneración de los electrones.

El astrónomo indio, Subrahmanyan Chandrasekhar (1910 – 1995), en un viaje en barco de la India a Inglaterra, que hizo en 1930, combinó el trabajo de Fowler con la Teoría de la Relatividad Especial y encontró que cuando la masa de la enana blanca es mayor que una masa solar, la gravedad comprime a esa masa, generando densidades muy altas que reducirían el espacio entre partículas (Δx), por lo que los electrones ganarían un momento relativo muy alto, ya que, por el Principio de Incertidumbre de Heisenberg se tiene que $\Delta p \sim h/\Delta x$. Así, los electrones se volverán relativistas, pero la presión de degeneración de los electrones relativistas es menor que la de los no relativistas, por lo que el radio de la enana blanca se acercaría a cero. Cuando esto ocurre, la masa corresponde a un límite conocido como Límite de Chandrasekhar, que establece que estrellas suficientemente masivas no podrán ser enanas blancas.

Cuando la masa de la enana blanca supera el Límite de Chandrasekhar, la presión de degeneración de los electrones no es suficiente para detener el colapso gravitacional, por lo que la presión de degeneración de los neutrones es el último mecanismo que podría evitar

el colapso total. Los objetos en los que las fuerzas gravitacionales son balanceadas por la presión de degeneración de los neutrones y la repulsión producida por la fuerza nuclear, se conocen como estrellas de neutrones, y son el tema central de este trabajo.

Al igual que en el caso de las enanas blancas, cuando la masa es suficientemente grande, la fuerza gravitacional vence a la presión de degeneración de los neutrones y se forma un agujero negro.

Para continuar con la discusión de los objetos compactos se seguirá con los agujeros negros, sin embargo, el tema central de este trabajo son las estrellas de neutrones, por lo que se tratarán con mayor profundidad y detenimiento más adelante.

1.1.2. Agujeros negros

En el siglo XVIII, después de que el astrónomo danés Ole Rømer (1644 – 1710) diera, en 1676, la primera medición de la velocidad de la luz probando así que dicha velocidad no era infinita, el naturalista francés Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) y, de forma independiente el también naturalista inglés John Michell (1724 – 1783), plantearon el concepto de “estrella oscura”: un objeto tan denso que su velocidad de escape es mayor que la velocidad de la luz.

Laplace dedujo que una estrella de dichas características debería de tener un radio $R_{Sch} = 2GM/c^2$ (posteriormente llamado radio de Schwarzschild). Esta deducción contiene dos errores importantes, sin embargo el valor al que llegó es el correcto. Después de la publicación de la Teoría General de la Relatividad de Albert Einstein (1879 – 1955), el alemán Karl Schwarzschild (1873 – 1916) publicó en 1916 una solución a las Ecuaciones de Campo de Einstein, deduciendo el mismo valor dado por Laplace. Fue el estadounidense John A. Wheeler (1911 – 2008) quien, en 1969, llamó a dichos objetos agujero negro [1].

Un agujero negro estelar es una estrella sumamente masiva, que después de consumir todo su combustible y explotar, sufre el colapso gravitacional que, debido a que su masa es tan grande, nada lo puede contener. La superficie donde la velocidad de escape del agujero negro es igual a la velocidad de la luz, se conoce como horizonte de sucesos, donde, en una primera aproximación, dicha superficie es una esfera cuyo radio es el radio de Schwarzschild, R_{Sch} .

Aunque la idea de los agujeros negros es bastante antigua, su existencia no era plenamente aceptada hasta mediados de la década de 1960, cuando la evidencia observacional de una de las fuentes de rayos X más intensas del cielo, el sistema binario de Cygnus X-1, mostró que uno de los dos cuerpos que conforman al sistema es un objeto compacto, cuya masa es cercana a quince veces la masa solar. Para un cuerpo de esta masa, los modelos predicen que el colapso gravitacional es inevitable, y por tanto, es un agujero negro [2].

Existen cuatro soluciones principales a las Ecuaciones de Campo de Einstein para describir un agujero negro:

Solución de Schwarzschild (1916): para un cuerpo estático y con una simetría esférica.

Tanto su momento angular total, como su carga eléctrica son cero.

Solución de Reissner - Nordstrøm (1918): para un cuerpo estático, cargado y con una simetría esférica. Su momento angular total es cero, pero su carga eléctrica es distinta de cero.

Solución de Kerr (1963): para un cuerpo estacionario y con una simetría axial. Su momento angular total es diferente de cero, pero su carga eléctrica es cero.

Solución de Kerr - Newman (1965): para un cuerpo estacionario, cargado y con una simetría axial. Tanto su momento angular total como su carga eléctrica son diferentes de cero.

Todas las soluciones anteriores son estacionarias, y se cree que todo agujero negro aislado, eventualmente, llegará a ser estacionario. La importancia de esta afirmación es que un agujero negro estacionario está caracterizado solamente por tres cantidades: su masa, su carga y su momento angular total, aunque se cree que la carga eléctrica debe ser muy pequeña [3].

1.1.3. Estrellas de neutrones

Cuando la masa de la estrella supera el Límite de Chandrasekhar, la presión de degeneración de los electrones no es suficiente para detener el colapso gravitacional, por lo que los electrones serán forzados a combinarse con los protones presentes para formar neutrones mediante el decaimiento beta inverso: $e^- + p \rightarrow n + \nu$. Este proceso es conocido como la neutronización.

Nuevamente, como en el caso de las enanas blancas, los neutrones se pueden estudiar como un gas de fermiones, y su presión de degeneración y repulsión nuclear será la que contrarreste el colapso gravitacional. Cuando la masa de la estrella de neutrones sea suficientemente grande, ni siquiera la presión de degeneración ni la repulsión nuclear de los neutrones serán capaces de detener el colapso gravitacional y la estrella se convertirá en un agujero negro, por lo que debe existir un límite superior para la masa de las estrellas de neutrones. Debido a la naturaleza de las interacciones nucleares presentes dentro de la estrella, no se conoce con certeza la ecuación de estado a densidades supranucleares, por lo que dicha cota superior permanece desconocida. Sin embargo, por argumentos de causalidad relacionados con la propagación del sonido dentro de la estrella, así como la validez de la relatividad general, se ha podido estimar que la cota superior para la masa de estos objetos es inferior a tres masas solares [1, 2].

Poco después del descubrimiento del neutrón por el inglés James Chadwick (1891 – 1974) en 1932, el alemán Walter Baade (1893 – 1960) y el suizo de origen búlgaro, Fritz Zwicky (1898 – 1974), predijeron, en 1934, la existencia de estrellas compuestas principalmente por neutrones, como producto de la explosión de una supernova. En 1939, Robert Oppenheimer (1904 – 1967) y George Volkoff (1914 – 2000) e, independientemente Lev D. Landau (1908 – 1968), analizaron la estructura de una estrella formada por un gas degenerado de neutrones, y predijeron la masa y densidad que debería tener un objeto de esta

naturaleza. A mediados de la década de 1960, se propuso que las estrellas de neutrones deberían tener un campo magnético sumamente intenso, del orden de $10^{10} G$. En 1967, Franco Pacini (1939 – 2012) sugirió que una estrella de neutrones altamente magnetizada y que gira rápidamente, liberaría su energía rotacional y produciría un flujo de partículas relativistas.

Al igual que los agujeros negros, la existencia de las estrellas de neutrones no fue plenamente aceptada hasta finales de la década de 1960 cuando, en 1967, Jocelyn Bell - Burnell (nacida en 1943) y Anthony Hewish (nacido en 1924) descubrieron una fuente regular y pulsante de radio en la constelación de Vulpecula que llamaron pulsar [4]. Thomas Gold (1920 – 2004) sugirió que dicha fuente era una estrella de neutrones que gira y altamente magnetizada, sin embargo, su modelo no fue totalmente aceptado hasta el descubrimiento del pulsar de la Nebulosa del Cangrejo en 1968. Para ese mismo año, cerca de veinte pulsares habían sido descubiertos y para el año 2020, el número se ha incrementado a más de dos mil ochocientos ¹.

En los más de cincuenta años que han pasado desde el descubrimiento observacional de las estrellas de neutrones, y en particular de los pulsares, una variedad de nuevos fenómenos y desarrollos independientes han puesto a estos objetos en el centro de la investigación científica de frontera en el mundo pues son escenario de condiciones que no se pueden reproducir en laboratorios terrestres y que permiten una colaboración estrecha entre especialistas de distintas áreas de la física y la astrofísica. Por ejemplo, el estudio de la materia en el interior de las estrellas de neutrones y el estudio del diagrama de fase de la Cromodinámica Cuántica, en la región de alta densidad, se retroalimentan entre si. Además, las estrellas de neutrones, en particular aquellas que se encuentran en sistemas binarios, permiten someter a prueba las predicciones hechas por la Teoría de la Relatividad General. Por ejemplo, en 2017 la colaboración LIGO - VIRGO anunció la detección de ondas gravitacionales provenientes de la fusión de un sistema binario de estrellas de neutrones.

1.2. Estrellas de neutrones y neutrinos

En 1914, J. Chadwick encontró que el espectro de energía de los electrones, emitidos en decaimientos radioactivos β , es continuo, lo cual violaba la conservación de la energía, pues en un decaimiento de dos cuerpos, la energía de estos tiene un valor fijo y único. Ante ese escenario, en 1930, el austriaco Wolfgang Pauli (1900 – 1958), para preservar la conservación de la energía, propuso la existencia de una nueva partícula neutra y ligera (con una masa menor o igual que la del electrón), que llamó “neutrón”. En 1934, el italiano Enrico Fermi (1901 – 1954) formuló la teoría del decaimiento β y, dado que el nombre de neutrón ya se le había dado a la partícula descubierta en 1932 por Chadwick, Fermi renombró a la

¹Uno de los catálogos más completos de pulsares se encuentra en el sitio web del Australian Telescope National Facility (ATNF)

partícula de Pauli como neutrino ². Fermi describió a la interacción débil, que daba origen al decaimiento β como una interacción entre cuatro fermiones (protón, neutrón, electrón y neutrino), descrita por la Lagrangiana efectiva

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{p}\gamma^\mu n) (\bar{e}\gamma_\mu \nu), \quad (1.1)$$

donde $G_F = 1.1664 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ es la constante de Fermi, p , n , e y ν son los campos del protón, neutrón, electrón y neutrino, es decir, de cada uno de los fermiones involucrados y γ^μ son las matrices de Dirac en su representación quirral, que se definen mediante la relación de anticonmutatividad $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, con $g^{\mu\nu}$ la métrica de Minkowski. La teoría de Fermi permitió calcular la sección eficaz de la dispersión de un neutrino y un neutrón. Ese mismo año, los alemanes Hans Bethe (1906 – 2005) y Rudolf Peierls (1905 – 1995) obtuvieron dicha sección eficaz

$$\sigma(n + \nu \rightarrow e^- + p) \sim E_\nu(\text{MeV}) \times 10^{43} \text{ cm}^2, \quad (1.2)$$

donde E_ν es la energía del neutrino. Este resultado implica que una columna de agua de 50 años luz de longitud sería necesaria para detener a un neutrino cuya energía es 1 MeV, por lo que la detección de los neutrinos parecía imposible [6].

En 1937, los estadounidenses Carl D. Anderson (1905 – 1991) y Seth Neddermeyer (1907–1988) descubrieron al muon, y diez años después, el italo-ruso, Bruno Pontecorvo (1913 – 1993) propuso que la teoría de Fermi para el decaimiento β debería aplicarse tanto a los electrones como a los muones. En 1956, los estadounidenses Frederick Reines (1918 – 1998) y Clyde Cowan (1919 – 1974) descubrieron observacionalmente al neutrino.

Durante la Segunda Guerra Mundial, y en los años posteriores, la investigación en física nuclear tuvo grandes avances e incluso fue aplicada a la teoría del colapso estelar. A principios de la década de 1960, el chino Hong-Yee Chiu (nacido en 1932) mostró que los recientemente descubiertos neutrinos se deberían de producir en grandes cantidades en las últimas etapas de la evolución estelar, así como durante el colapso gravitacional, por lo que los neutrinos deberían jugar un papel importante en el nacimiento de las estrellas de neutrones [7].

Con el descubrimiento observacional de las estrellas de neutrones y los posteriores modelos de su formación, el papel de los neutrinos en la formación y evolución de las estrellas de neutrones se ha vuelto una importante herramienta para dilucidar la estructura interna de estos cuerpos, mediante el estudio de su enfriamiento, así como para comprender los fenómenos observados en los remanentes de supernova que tienen asociados una estrella de neutrones, entre muchos otros temas de investigación.

²El sufijo *ino* en italiano significa “pequeño”. La raíz de la palabra, *neuter*, significa en latín “ni siquiera” [5].

1.3. Observaciones de estrellas de neutrones y movimiento propio

Desde el descubrimiento del primer pulsar por J. Bell - Burrell y A. Hewish, las observaciones en longitudes de onda distintas a la luz visible, como el radio (especialmente en frecuencias cercanas a 1.4 GHz), los rayos X y la radiación gamma, han permitido obtener una gran cantidad de información nueva acerca de estos objetos. Por ejemplo, se ha podido determinar su periodo, P , y la derivada de éste, \dot{P} , encontrando que el periodo está en el intervalo entre 1.4 ms y 8.5 s, mientras que su derivada es muy pequeña, por lo que el pulso observado es casi constante. A la cantidad $\tau_c = P/2\dot{P}$ se le conoce como edad característica y es una estimación de la edad del pulsar. Así mismo, la intensidad de campo magnético en la superficie se puede estimar por $B = 3.2 \times 10^{19}(P\dot{P})^{1/2}$ G [4, 8]. En un diagrama $P - \dot{P}$, como el de la Figura 1.1, se muestran líneas de edad, intensidad de campo magnético y tasa de pérdida de energía rotacional constantes.

Los pulsares “normales” ($P \sim 0.5$ s y $\dot{P} \sim 10^{-15}$ s s $^{-1}$, por lo que $\tau_c \sim 10^7$ años y $B \sim 10^{12}$ G), forman la aglomeración principal, mientras que los pulsares de milisegundos ($P \sim 3$ ms y $\dot{P} \sim 10^{-20}$ s s $^{-1}$, por lo que $\tau_c \sim 10^9$ años y $B \sim 10^8$ G) se encuentran en la parte inferior izquierda del diagrama.

La posición de mil seiscientos pulsares en coordenadas galácticas (ℓ, b) se muestran en la Figura 1.2. Nótese la concentración de la gran mayoría de los pulsares a lo largo del plano galáctico ($b = 0$). En particular, casi la totalidad de los pulsares jóvenes (aquellos cuya edad característica τ_c es menor a tres millones de años) se encuentran en dicho plano [8].

Con el desarrollo de técnicas cada vez más precisas en astronomía, se han podido medir características de las estrellas de neutrones que corroboran o contradicen las teorías existentes, así como aportar nuevos elementos para el desarrollo de las mismas; uno de ellos es el descubrimiento de que muchos de los pulsares observados presentan un movimiento propio o velocidad de escape (en inglés *proper motion* o *kick velocity*), que no estaba presente en las estrellas progenitoras, pues el remanente de la supernova que se forma junto con el pulsar no lo presenta. Estas velocidades se han medido en unas centenas de pulsares [9] y diversos mecanismos han sido propuestos para explicarlos [10, 11], cada uno con sus ventajas y desventajas.

El objetivo del presente trabajo es proponer un mecanismo para explicar dichas velocidades y será expuesto con detenimiento en capítulos posteriores. Para ello, en el siguiente capítulo, se comenzará por una breve discusión acerca de las principales teorías que estudian a las estrellas de neutrones, como lo son su ecuación de estado, su estructura, composición y su evolución térmica.

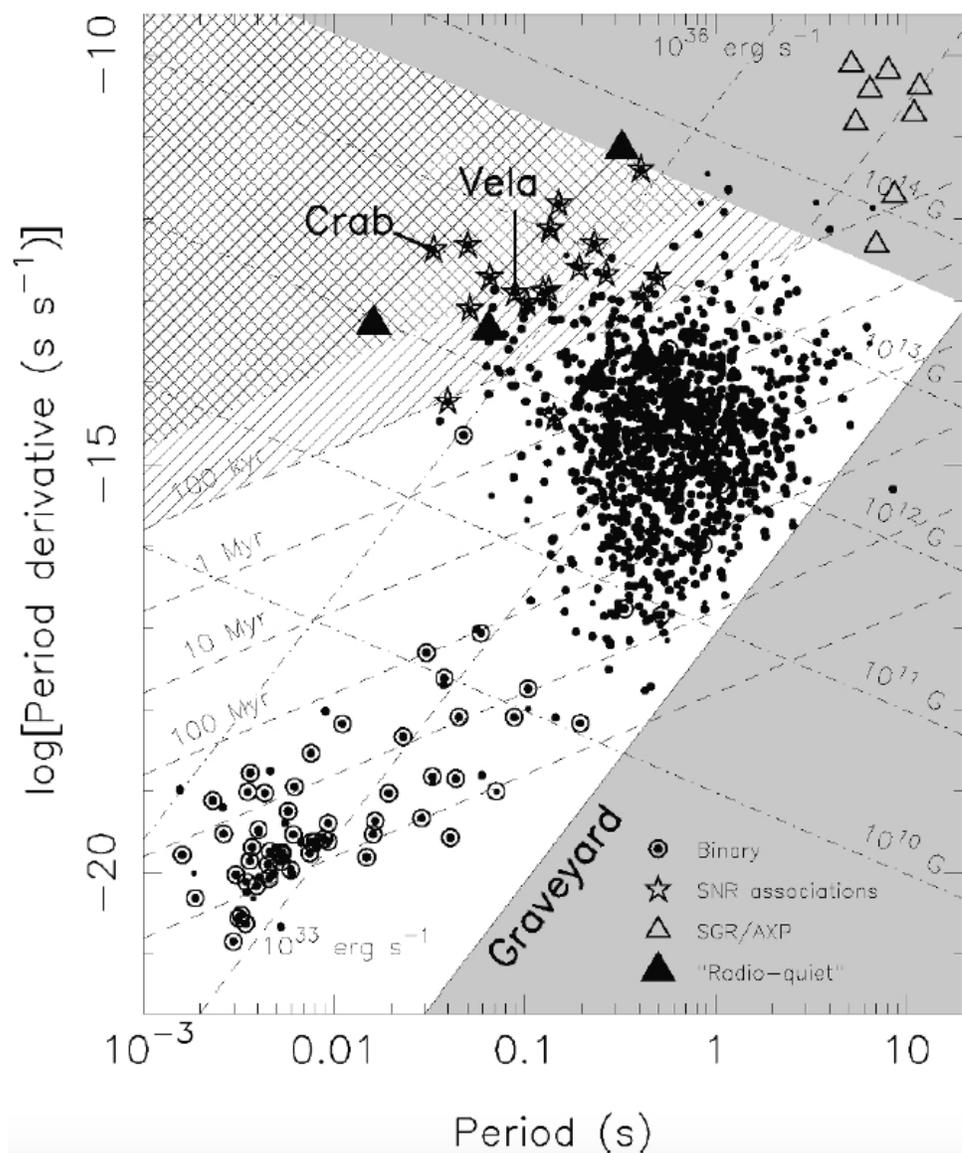


Figura 1.1: Diagrama $P - \dot{P}$ de pulsares de radio aislados y en sistemas binarios, pulsares que no emiten radio, repetidores de gammas suaves (SGR) y pulsares de rayos X anómalos. Imagen de M. Kramer [8].

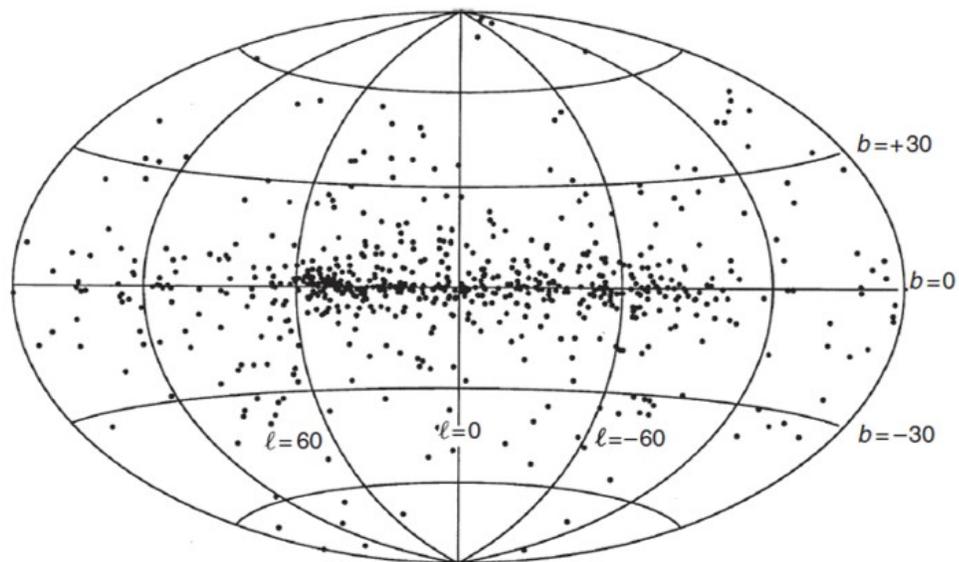


Figura 1.2: Distribución de 1600 pulsares en coordenadas galácticas. Se muestra la alta concentración a lo largo del plano galáctico. Imagen de A. Lyne y F. Graham - Smith [4].

Capítulo 2

La física de las estrellas de neutrones

2.1. Límite de Chandrasekhar

Como se mencionó en el capítulo anterior, las enanas blancas tienen una cota superior para su masa, conocida como el Límite de Chandrasekhar. Cuando la masa de la enana se acerca a dicho límite, la presión de degeneración de los electrones no es suficiente para detener el colapso gravitacional.

A continuación se presenta un esbozo del cálculo del Límite de Chandrasekhar, siguiendo a [1, 12–14]: considérese un gas de electrones a una temperatura T , cercana a cero. Dado que la degeneración de espín de los electrones $g = 2$, el número de estados de un electrón en un volumen V , con un momento en el intervalo $p + dp$, es:

$$2 \cdot \frac{4\pi p^2 dp \cdot V}{(2\pi\hbar)^3} = V \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3}, \quad (2.1)$$

donde $\hbar = h/2\pi = 1.0546 \times 10^{-27} \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-1}$ es la constante reducida de Planck. Los electrones ocupan todos los estados con momento desde cero a un límite $p = p_F$, llamado el radio de la esfera de Fermi en el espacio de momentos. Por tanto, el número total de electrones será la integral del número de estados sobre los momentos que ocupan los electrones, es decir,

$$N_e = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{V p_F^3}{3 \pi^2 \hbar^3}, \quad (2.2)$$

por lo que el momento de Fermi, p_F estará dado por

$$p_F = (3 \pi^2)^{1/3} (N_e/V)^{1/3} \hbar. \quad (2.3)$$

La energía total del gas se obtiene de multiplicar el número de estados (ecuación (2.1)) por $p^2/2m_e$ e integrar sobre todos los momentos:

$$E = \frac{V}{2\pi^2\hbar^3m_e} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{V p_F^5}{10\pi^2\hbar^3m_e}. \quad (2.4)$$

Si se sustituye el valor del momento de Fermi (ecuación (2.3)), se encuentra que

$$E = \frac{3(3\pi^2)^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{N_e}{V}\right)^{2/3} N_e. \quad (2.5)$$

Por otro lado, la energía promedio del gas de electrones

$$E = \int d\varepsilon \frac{\varepsilon g(\varepsilon)}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} - 1}, \quad (2.6)$$

donde $z = e^{\beta\mu}$ es la fugacidad y

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}. \quad (2.7)$$

Como se considera que dentro de la estrella hay flujo de energía y materia, el ensamble termodinámico a utilizar será el gran canónico. El gran potencial Ω , está relacionado con la función de partición gran canónica \mathcal{Z} mediante

$$\Omega = -P_e V = \frac{1}{\beta} \log \mathcal{Z} = \frac{1}{\beta} \int d\varepsilon g(\varepsilon) \log \left(1 + z e^{-\beta\varepsilon}\right), \quad (2.8)$$

al hacer la integral de la ecuación anterior por partes, y dado que $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1/2}$ se encuentra que

$$\Omega = -\frac{2}{3} \int d\varepsilon \frac{\varepsilon g(\varepsilon)}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon} + 1} = -\frac{2}{3} E. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, $P_e V = \frac{2}{3} E$. Dado que E está dada por la ecuación (2.5), se encontrará que

$$P_e = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{N_e}{V}\right)^{5/3} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2 n_e^{5/3}}{m_e}. \quad (2.10)$$

Dado que en la enana blanca se tiene una carga total neutra, si se tienen n_+ iones positivos, de número atómico Z y masa atómica A , entonces $Z n_+ = n_e$. Además, la densidad, ρ , está dada por $\rho = A m_p n_+ + m_e n_e \approx A m_p n_+$, pues la masa de los electrones es mucho menor que la masa de los protones. Por lo tanto, de la neutralidad de la carga se encuentra que

$$n_e = \frac{Z}{A} \frac{\rho}{m_p}, \quad (2.11)$$

que al sustituirla en la ecuación (2.10) se obtiene una expresión para la presión de degeneración de los electrones

$$P_e = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} \left(\frac{\rho}{m_p} \right)^{5/3}. \quad (2.12)$$

Por otro lado, la presión que se ejerce sobre un elemento de volumen cilíndrico en el centro de la estrella, debe ser igual al peso por unidad de área de material que hay sobre dicho elemento. Es decir, debe ser proporcional a GM^2/R^2 . A partir de cálculos hidrostáticos se encuentra que la constante de proporcionalidad es ≈ 0.770 , y la densidad en el centro de la enana blanca está dada por $\rho_c = 1.43M/R^3$. En la condición de equilibrio, la presión de degeneración de los electrones es igual a la presión hidrostática, por lo que sustituyendo el valor de la densidad central en la ecuación (2.12), e igualando con la presión hidrostática, se encuentra que

$$R = 0.114 \frac{h^2}{G m_e m_p^{5/3}} \left(\frac{Z}{A} \right)^{5/3} M^{-1/3}. \quad (2.13)$$

La ecuación (2.13) da una relación entre el radio de la enana blanca y su masa, tal que cuando la masa aumenta, el radio disminuye.

Como se discutió anteriormente, cuando la masa de la enana blanca es grande, por la ecuación (2.13), el radio disminuye y por lo tanto la densidad aumenta; esto hace que los electrones sean relativistas y las expresiones anteriores pierden su validez pues la velocidad de los electrones se acerca a la velocidad de la luz. Si se utiliza el hecho de que la velocidad de los electrones es muy cercana a la de la luz, se puede encontrar que la presión, dada por la ecuación (2.10) se modifica a

$$P_e = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \hbar c \left[\left(\frac{Z}{A} \right) \frac{\rho}{m_p} \right]^{4/3}. \quad (2.14)$$

La presión de degeneración dada por la ecuación (2.12) implica que $P_e \propto \rho^{5/3}$, mientras que la dada por la ecuación (2.14) implica que $P_e \propto \rho^{4/3}$. Este cambio genera que la enana blanca ya no sea dinámicamente estable y una pequeña perturbación generará un colapso gravitacional. Por otro lado, la constante de proporcionalidad para la presión hidrostática cambia cuando $P_e \propto \rho^{4/3}$, ahora es ≈ 11.0 , mientras que la densidad central está dada por $\rho_c = 54.2 \frac{3M}{4\pi R^3}$, por lo que al igualar la presión de degeneración relativista con la nueva presión hidrostática se llega a

$$M_{Ch} = 0.198 \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \left(\frac{Z}{A} \right)^2 m_p^{-2} \quad (2.15)$$

La masa que da la ecuación (2.15) es conocida como el Límite de Chandrasekhar y para $Z/A = 0.5$ se encuentra el valor numérico de

$$M_{Ch} = 1.4M_{\odot}, \quad (2.16)$$

donde M_{\odot} ¹ es la masa del Sol.

En el desarrollo anterior se utilizó la termodinámica del gas ideal de fermiones en el caso degenerado, relativista y no relativista, para encontrar el Límite de Chandrasekhar. Sin embargo, de acuerdo con Camenzind *op. cit.*, la ecuación de estado del gas de fermiones se modifica debido a las interacciones electrostáticas, pues la distribución de carga es no uniforme: las cargas positivas presentes en iones, junto con las altas densidades, causan que la distancia promedio entre ellos y los electrones sea menor que la distancia promedio entre electrones, por lo que el potencial atractivo que actúa sobre los electrones, reduce la presión para una densidad dada. Se ha demostrado que la presión debida a la interacción coulombiana está dada por:

$$P_C = -\frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 n_e^{4/3}. \quad (2.17)$$

La presión total, $P = P_e + P_C$, donde P_e está dada por la ecuación (2.10), se puede comparar con P_e

$$\frac{P}{P_e} = 1 - \frac{Z^{2/3}}{2^{1/3} \pi a_0 n_e^{-1/3}}, \quad (2.18)$$

donde $a_0 = \hbar^2/m_e c^2$ es el Radio de Bohr, por lo que la ecuación anterior predeciría $P = 0$ para

$$n_e^{crit} = \frac{Z^2}{2\pi^3 a_0^3}, \quad (2.19)$$

que corresponde a una densidad, para $A \simeq 2Z$,

$$\rho^{crit} \simeq 0.4 Z^2 \text{ gm cm}^{-3}. \quad (2.20)$$

Finalmente, otra corrección que se puede hacer a la presión es la debida al decaimiento beta inverso ($e^- + p \rightarrow n + \nu$) [2], el cual solamente sucede cuando la densidad es muy alta. Esta corrección se basa en que los electrones, al combinarse con átomos de hierro, forman manganeso y, al combinarse con éstos, forman cromo, lo cual genera una reducción de la presión.

2.2. Estructura de una estrella de neutrones

2.2.1. La estructura global: Las ecuaciones de Tolman – Oppenheimer – Volkoff y un límite superior para la masa

Con el desarrollo de la Teoría de la Relatividad General, fue posible estudiar la estructura que tendrían las estrellas en las que los efectos relativistas son importantes, como es el caso de los objetos compactos.

¹La masa solar es $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}$ g.

La primera aproximación a la estructura de las estrellas de neutrones, y en general a toda estrella, es un conjunto de ecuaciones que dedujeron, en 1939, R. Oppenheimer y G. Volkoff a partir del trabajo de Richard Tolman (1881 – 1948). Este conjunto de ecuaciones, conocidas como las ecuaciones de Tolman – Oppenheimer – Volkoff (T – O – V) o las ecuaciones de estructura estelar, describen la estructura de un cuerpo estático con simetría esférica que no rota. Para ello se considera una métrica del espacio–tiempo estático, asintóticamente plano y con simetría esférica:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.21)$$

donde $\Phi(r)$ se relaciona con el corrimiento al rojo gravitacional mediante $z = e^{-\Phi(r)} - 1$, y $\lambda(r)$ está relacionada con la masa de la estrella. La masa total de la estrella, dentro de un radio r , se define como

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr', \quad (2.22)$$

donde ϱ es la distribución de masa - energía, que se define como $\varrho = \varrho_0 (1 + \epsilon/\varrho_0 c^2)$, donde ϱ_0 es la densidad de masa y ϵ es la densidad de energía interna de la estrella.

La estructura completa de la estrella está descrita por las ecuaciones T – O – V, cuya deducción se puede encontrar en Camenzind *op. cit.* :

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi \varrho(r) r^2 \quad (2.23a)$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\varrho(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\varrho(r)c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P(r)}{M(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \quad (2.23b)$$

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \quad (2.23c)$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{1}{1 - 2GM(r)/c^2 r} \left(\frac{GM(r)}{c^2 r^2} + \frac{4\pi G r P}{c^4} \right), \quad (2.23d)$$

que se reducen al caso newtoniano cuando se dan las siguientes condiciones:

- $P \ll \varrho c^2$, es decir, cuando la velocidad de propagación del sonido es mucho menor que la de la luz
- $2GM(r)/c^2 \ll r$, es decir, cuando el objeto no es “muy compacto”
- $4\pi r^3 P(r) \ll M(r)c^2$, es decir, cuando el objeto tiene una presión baja

Dada una ecuación de estado, $P = P(\varrho)$, las ecuaciones T – O – V (2.23) se pueden integrar, junto con las condiciones iniciales $M(0) = 0$ y un valor arbitrario para la densidad en el centro, $\varrho_c = \varrho(0)$, hasta que la presión se haga cero para un cierto radio R . Es decir, se obtendrá una relación para la masa y el radio de la estrella, análoga a la ecuación (2.13).

Para cada posible ecuación de estado, se obtiene una familia de estrellas parametrizadas por la densidad en el centro [2].

Por otro lado, si se denota por R_* al radio donde la presión se hace cero, es decir, $P(R_*) = 0$, y la masa total $M = M(R_*)$, entonces la solución de (2.23) para $r > R_*$ es la solución de Schwarzschild. La razón R_*/R_{Sch} es una medida de qué tan compacta es la estrella. Cuando dicha razón es cercana a uno, el objeto colapsará y formará un agujero negro, por lo tanto, una ecuación de estado que dé una relación entre masa y radio, tal que $R_*/R_{Sch} \leq 1$, no será consistente con la Relatividad General. Además, por la condición de causalidad, que se traduce en que la velocidad de propagación del sonido dentro de la estrella sea menor que la velocidad de la luz, la razón $R_*/R_{Sch} \lesssim 1.412$ no será consistente con la causalidad [15]. Así, tanto la gravedad como la causalidad, dictan una cota inferior a la relación entre la masa y el radio de la estrella.

Por otro lado, a partir de igualar la velocidad de rotación de la estrella con la de una partícula que orbita a la estrella sobre la superficie, se encuentra una cota superior para la relación entre la masa y el radio de la estrella. La frecuencia de rotación máxima recibe el nombre de frecuencia kepleriana, ν_k , y está dada por:

$$\nu_k = (2\pi)^{-1} \sqrt{GM/R^3}. \quad (2.24)$$

Dicha cota superior, así como la cota inferior, se resumen en la Figura 2.1.

El límite para la masa máxima de la estrella es $M_{TOV} \simeq (2 - 3)M_\odot$, dependiendo de la ecuación de estado que se utilice, como se puede ver en la Figura 2.1 [17]. Recientemente, en marzo de 2020, Capano *et al.* [18] combinaron las observaciones de la radiación gravitacional proveniente de la fusión de un sistema binario de estrellas de neutrones, por parte de la colaboración LIGO - VIRGO, con las contrapartes electromagnéticas reportadas para el mismo evento, así como con desarrollos teóricos dentro del marco de una teoría de campos efectiva quiral, para encontrar que la cota superior para el radio de una estrella de neutrones, cuya masa es $1.4M_\odot$, es $11.0_{-0.6}^{+0.9}$ km, con un intervalo de confianza del 90 %.

2.2.2. La estructura interna de una estrella de neutrones y su composición

El interior de una estrella de neutrones está dividido en cinco regiones principales que, yendo de la más externa hacia el centro de la estrella, se muestran en la Figura 2.2 [2, 16, 19]:

1. **Atmósfera:** Contiene una cantidad de materia despreciable y tiene un grosor de unos cuantos centímetros. Está compuesta de hidrógeno y, posiblemente, algunos elementos pesados o una superficie de condensados magnéticos. Es importante para determinar el espectro de fotones emergentes de la estrella.
2. **Envoltura:** Al igual que la atmósfera, contiene una cantidad de materia despreciable y tiene un grosor de unas decenas de metros. Aquí, la materia no está totalmente

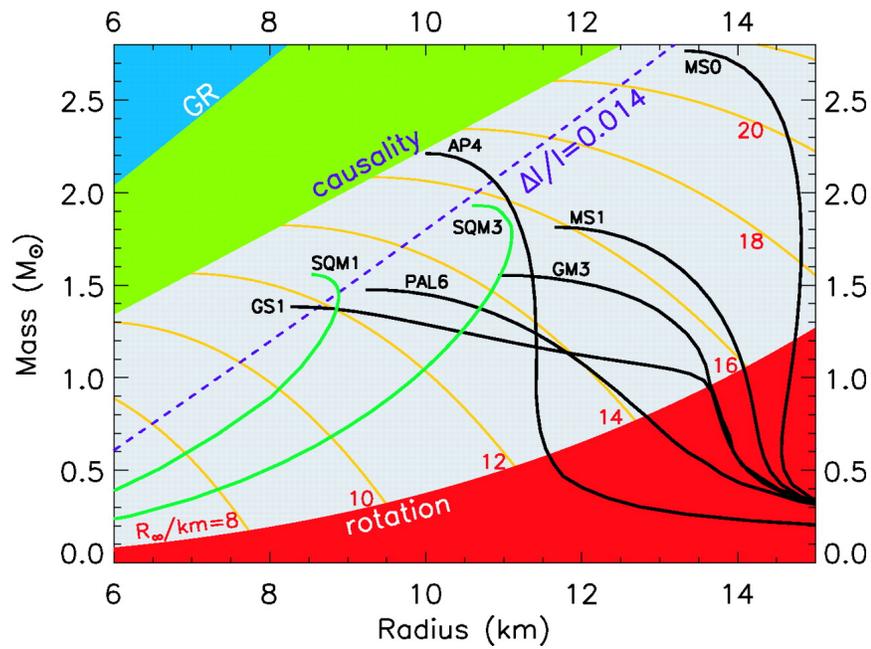


Figura 2.1: Diagrama de masa y radio de una estrella de neutrones. En rojo se muestra la región prohibida debido a la rotación, en verde la que viola la causalidad y en azul la que no es consistente con la relatividad general. Imagen de J. Lattimer y M. Prakash [16].

degenerada y tiene un gran impacto en el transporte y en la emisión de energía térmica de la superficie de la estrella, pues actúa como un aislante térmico entre el interior de la estrella y su superficie.

3. **Corteza:** Es una región inhomogénea que abarca entre doscientos metros y dos kilómetros (o más) hacia el interior de la estrella y principalmente contiene núcleos atómicos que forman cerca del uno por ciento de la masa de la estrella. Se divide en dos partes: la corteza externa y la interna. La externa consiste en una red de núcleos similares al hierro, y un líquido de Fermi de electrones relativistas degenerados; es muy similar a la materia de las enanas blancas. La corteza interna contiene núcleos con cerca de doscientos nucleones pero con una fracción protónica muy baja. Tiene una densidad cercana a la densidad nuclear y, en sus regiones más densas, la mayor parte de la materia se concentra en un estado superfluido de neutrones, quedando una menor cantidad en los núcleos.
4. **Núcleo Externo:** Es una región homogénea, en cuya interfaz con la corteza, los núcleos están casi en contacto entre ellos. La frontera entre esta región y la corteza es conocida como la “pasta nuclear”, pues por la alta densidad que hay, los núcleos se empiezan a elongar, pasan de ser esferas tridimensionales (*albóndigas*) a ser cilindros bidimensionales (*espaguetis*), luego forman estructuras bidimensionales planas con los neutrones superfluidos entre ellas (*lasañas*), que pasan a ser cilindros bidimensionales del superfluido (*ziti*) y posteriormente forman burbujas de neutrones inmersas en un líquido de neutrones y protones (fase de *queso suizo*), que finalmente pasará a ser la materia nucleónica uniforme que compone al resto del núcleo externo (*salsa*).
5. **Núcleo Interno:** Es una región desconocida donde se pueden encontrar partículas exóticas como mesones cargados π^- o K^- ; hiperones con carga extraña como Σ^- o Λ ; condensados de quarks y / o materia de quarks desconfiados (esto último implicaría una fase mixta de pasta), posiblemente en estados de superconductividad de color.

Diversos modelos y ecuaciones de estado para la materia en el núcleo de la estrella han sido propuestos y se resumen en Heiselberg *et al.* [20, 21]. Entre ellos están los que suponen que la materia está compuesta de nucleones; dichos modelos utilizan la aproximación de campo medio, métodos de Brueckner – Hartree – Fock y Monte Carlo o métodos variacionales para llegar a una ecuación de estado. Por otro lado, se espera que el potencial químico de los neutrones sea mayor que su masa y la de muchos hadrones, más aún, como la energía de los neutrones es alta, estos decaerán mediante el decaimiento beta ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) a un estado de menor energía, facilitando la formación de hadrones, en particular, se pueden formar hadrones con carga extraña. Por esto, existen modelos que suponen que la materia, además de tener nucleones, tiene hadrones presentes, como mesones cargados negativamente o hiperones: hay una abundante producción de bariones Δ negativos, neutros, positivos y doble positivos; si la densidad es cercana a dos veces la densidad nuclear hay producción

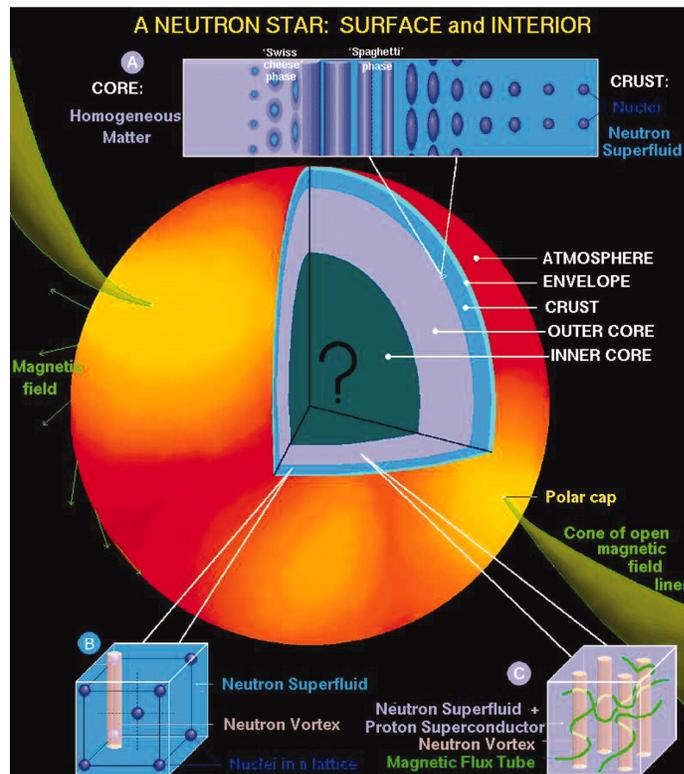


Figura 2.2: Principales regiones y posibles composiciones de una estrella de neutrones. Imagen de D. Page [20].

de hiperones Λ así como una pequeña cantidad de hiperones Σ y Ξ [17]. Estos modelos requieren una menor energía que los modelos para materia nucleónica, si la densidad es suficientemente alta.

Dado que el radio de un nucleón es del orden de un fermi ($r_N \sim 1$ fm), entonces los nucleones entrarán en contacto si la densidad es del orden de $1.5n_0$, con $n_0 = 0.16\text{fm}^{-3}$ la densidad nuclear ($(4\pi r_N^3/3)^{-1} \simeq 0.24\text{fm}^{-3} = 1.5n_0$) [17], por tanto, los hadrones se mezclarán y sufrirán una transición de fase de primer orden [22] a materia compuesta por sus componentes fundamentales: quarks desconfiados [17, 21–23]. Más aún, para las densidades en las que se da el deconfinamiento de quarks, los quarks u y d son suficientemente energéticos para transformarse en quarks s , pues la masa de éste es aproximadamente 93 MeV. Por lo tanto, si existe materia de quarks en el núcleo de la estrella, estará formada por los tres quarks más ligeros: u , d y s . Para la aparición del siguiente quark más pesado, el quark c , se necesitaría una densidad cercana a cien veces la densidad nuclear [17]. Es posible que en ciertas regiones del núcleo externo, la densidad no sea lo suficientemente alta como para permitir el deconfinamiento de los quarks, por lo que deben de existir estrellas híbridas, las cuales están compuestas de un núcleo de materia de quarks, una fase donde se hallan tanto hadrones como quarks y otra donde solamente haya hadrones. En Keranen *et al.* [22], se aborda con mayor detenimiento la formación de las estrellas de quarks e híbridas.

Recientemente, Annala *et al.*, en [24], argumentaron que las estrellas de neutrones estables más masivas, cuya masa $M \approx 2M_\odot$, exhiben características consistentes con una fase de materia de quarks desconfiados, lo que interpretan como la presencia de un núcleo de materia de quarks. Entre sus resultados muestran que si en una estrella muy masiva, la velocidad del sonido satisface $c_s^2 \leq 1/3$, entonces el núcleo debería ser una fase de quarks. Además, encuentran que para una estrella de neutrones con radio de 12 km y masa de $2M_\odot$, el núcleo de quarks tendría una masa entre 0.7 y 0.8 M_\odot , mientras que la masa máxima que puede tener una estrella de neutrones con un núcleo de quarks de entre 6 y 6.5 km de radio es entre 1.8 y 2.05 M_\odot .

Por otro lado, en la fase de desconfinamiento, si la densidad es extremadamente alta, los quarks formarán pares de Cooper, que romperán la simetría local de color y harán que los gluones adquieran masa. A este fenómeno se le conoce como superconductividad de color, y cuando la densidad es extremadamente alta, se forma una nueva fase conocida como *Color-Flavor-Locked* (CFL), que es una fase superfluida, eléctricamente neutra y en la que se rompe la simetría quiral. por lo que en las zonas más internas del núcleo puede existir una fase CFL. Sin embargo, los efectos de dicha fase contribuirían a segundo orden y no son observables [2, 17, 21, 25]. En la Figura 2.3, se muestra la estructura interna de una estrella de neutrones para tres distintas composiciones (materia hadrónica, estrella híbrida y estrella híbrida con núcleo en fase CFL) como función de la frecuencia de rotación, la cual es menor que la frecuencia kepleriana, dada por la ecuación (2.24). Dicha rotación modifica la estructura interna de la estrella.

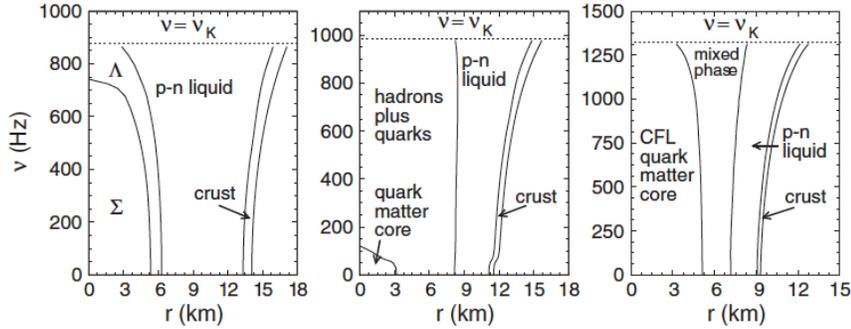


Figura 2.3: Estructura interna de una estrella de neutrones para tres composiciones distintas (*izquierda*: materia con hiperones, *centro*: composición de quarks-híbrida, *derecha*: composición de quarks-híbrida, pero con un núcleo en una fase CFL. La masa de la estrella es de $1.4 M_{\odot}$ y gira con una frecuencia ν , menor que la frecuencia kepleriana ν_k . Imagen de F. Weber, R. Negreiros y P. Rosenfield [17].

2.3. Evolución de una estrella de neutrones

Como se ha planteado en secciones precedentes, las estrellas de neutrones nacen después de que el núcleo de una estrella masiva ($> 8M_{\odot}$) sufre el colapso gravitacional al final de su vida, lo que desencadena una explosión, conocida como supernova tipo II, en la que la mayor parte de la energía es emitida como neutrinos y antineutrinos de todos los sabores y en proporciones similares. A continuación se describirá cómo evoluciona el núcleo de la estrella progenitora para formar una estrella de neutrones, siguiendo la descripción de Lattimer y Prakash [16]: la estrella recién formada, conocida como proto-estrella de neutrones (PNS), tiene una alta fracción de leptones, principalmente electrones y neutrinos electrónicos.

Etapa I: El colapso del núcleo de la estrella progenitora se detiene cuando alcanza una densidad cercana a la densidad nuclear, lo cual desencadena la formación de una onda de choque en la frontera externa del núcleo que se propaga entre cien y doscientos kilómetros antes de que se diluya, pues la energía que transporta la onda, disocia los núcleos de las capas externas de la estrella y, además, produce neutrinos. (Etapa I, Figura 2.4). Los neutrinos provenientes del núcleo, posiblemente aunados a otros factores como la rotación, campos magnéticos y fenómenos de convección, reaniman a la onda de choque, que despoja a la estrella de su masivo manto estelar.

Etapa II: La PNS se encoje rápidamente debido a la pérdida de presión ocasionada por el escape de los neutrinos en su periferia. Esto ocurre en un tiempo de difusión $\tau \cong 3R^2/\lambda c \approx 10$ s, donde $\lambda \sim 10$ cm es el camino libre medio de los neutrinos. (Etapa II, Figura 2.4).

Etapa III: La pérdida de neutrinos, que hace que los electrones y protones se combinen

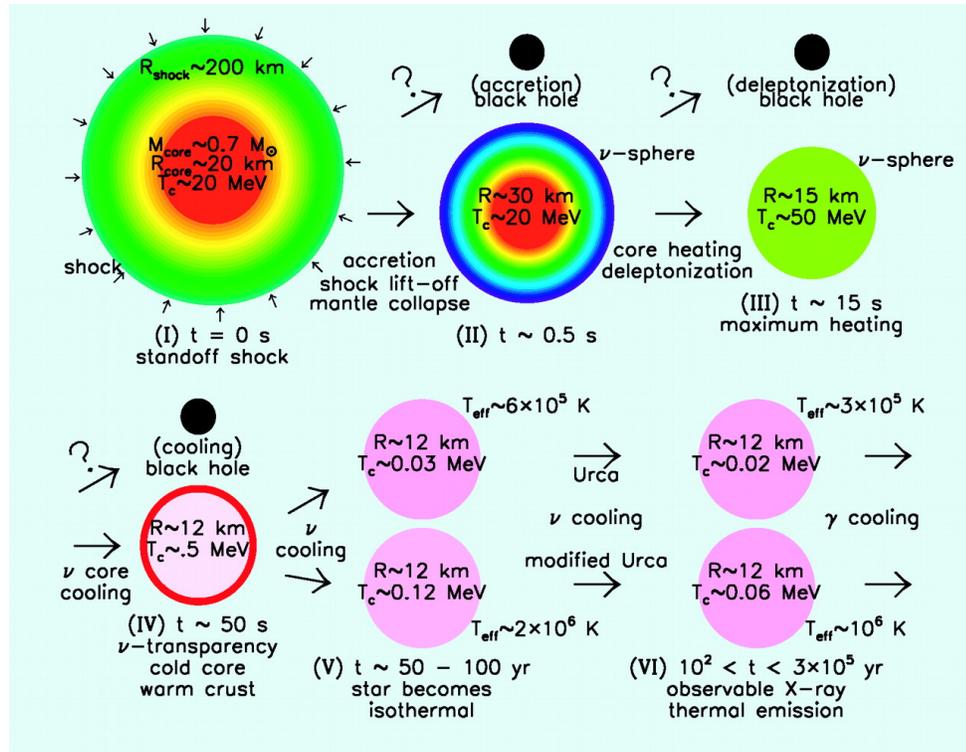


Figura 2.4: Principales etapas de la evolución de una estrella de neutrones. El radio R y la temperatura del centro, T_c de la estrella, se indican para distintos tiempos t . Imagen de J. Lattimer y M. Prakash [16].

para hacer materia rica en neutrones, calienta el interior de la estrella, llegando a duplicar la temperatura en el núcleo ($\sim 50 \text{ MeV} = 6 \times 10^{11} \text{ K}$). (Etapa III, Figura 2.4).

Etapa IV: Después de diez a veinte segundos, la emisión de neutrinos enfría el interior de la estrella. Como la sección eficaz de la interacción entre la materia y los neutrinos ($\sigma \propto \lambda^{-1}$) escala como el cuadrado de la energía promedio de los neutrinos, el camino libre medio se hace más grande que el radio de la estrella en un tiempo cercano a los 50 segundos, por lo que escapan fácilmente y su tasa de enfriamiento se acelera. (Etapa IV, Figura 2.4).

Etapa V: Dentro de los primeros diez a cien años, el transporte de calor por electrones desde la corteza hacia el interior, donde es radiado como neutrinos, crea una estructura isotérmica. Además, emite fotones muy energéticos (rayos X), pero dicha emisión es cien veces menor que la de los neutrinos. (Etapa V, Figura 2.4).

Etapa VI: Cuando la temperatura de la estrella de neutrones está entre $10^8 - 10^6 \text{ K}$, la emisión de fotones pasa a ser el mecanismo principal de emisión y de enfriamiento de la estrella. La luminosidad de la estrella decae hasta que está lo suficientemente fría para que la emisión térmica sea muy pequeña y ya no sea visible. Esto ocurre cuando la estrella de neutrones tiene una edad de millones de años. (Etapa VI, Figura 2.4).

2.3.1. Evolución térmica de las estrellas de neutrones

Prácticamente todo estado de la materia en condiciones de alta densidad, tal y como se encuentra en el núcleo de una estrella de neutrones, emitirá neutrinos, y si éstos son capaces de escapar, la materia se enfriará de diferentes maneras, por lo que el estudio del enfriamiento de las estrellas de neutrones puede dar pistas sobre la composición de estos objetos.

A continuación se presentan algunos resultados que se han obtenido en el estudio del enfriamiento de las estrellas de neutrones, siguiendo a [2, 19, 26]. Suponiendo que el interior de la estrella tiene una temperatura uniforme T (etapa IV, Figura 2.4), si E_{th} es el contenido de energía térmica de la estrella y C_v su calor específico, entonces, de acuerdo con la Ley de Enfriamiento de Newton:

$$\frac{dE_{th}}{dt} = \frac{dE_{th}}{dT} \frac{dT}{dt} = C_v \frac{dT}{dt} = -L_\nu - L_\gamma + H. \quad (2.25)$$

La ecuación (2.25) dice que el cambio en E_{th} es la suma de las pérdidas de energía debidas a la emisión de neutrinos, L_ν , del interior de la estrella; a la emisión de fotones, L_γ , de la superficie y, posiblemente, compensado por un mecanismo de calentamiento, H , el cual puede incluir procesos disipativos que convierten energía rotacional, magnética o química en calor. Por el momento, dicho término se considerará cero, es decir, $H = 0$.

El calor específico por unidad de volumen, c_v , será la suma de los calores específicos de cada especie constituyente, $c_{v,i}$, donde i = electrones, muones, protones, neutrones, quarks, etc. La integral de c_v sobre el volumen de toda la estrella será igual a C_v . Además,

$$c_{v,i} = \left(\frac{m_i^* p_{F,i}}{\pi^2 \hbar^3} \right) \frac{\pi^2}{3} k_B^2 T, \quad (2.26)$$

donde $p_{F,i}$ es el momento de Fermi, relacionado con su densidad de número por la ecuación (2.3), k_B es la constante de Boltzmann y m_i^* es la masa efectiva, definida por

$$m_i^* := p_{F,i} \left(\frac{\partial \varepsilon_i(p)}{\partial p} \Big|_{p=p_{F,i}} \right)^{-1}, \quad (2.27)$$

con $\varepsilon_i(p)$ la energía de excitación de una partícula.

El proceso más eficiente de emisión de neutrinos en el núcleo de una estrella es el llamado proceso directo de URCA (DURCA) ²:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{y} \quad p + e^- \rightarrow n + \nu_e, \quad (2.28)$$

es decir, el decaimiento beta y el decaimiento beta inverso del neutrón. Este proceso solamente puede ocurrir si se conservan el momento y la energía: la conservación de la energía implica que si los neutrinos escapan de la estrella y tienen un potencial químico cero, entonces la relación de equilibrio químico, $\mu_n = \mu_p + \mu_e$, es siempre cierta. Sin embargo, la conservación del momento implica que $p_{F,n} \leq p_{F,p} + p_{F,e}$. Debido a la neutralidad de la carga total, y si los protones y electrones son las únicas partículas cargadas presentes, entonces a partir de la ecuación (2.3), se encuentra que la fracción protónica $x_p = n_p/n_B$, con n_B la densidad bariónica, debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$x_p \geq \frac{1}{9} \simeq 11 \%. \quad (2.29)$$

Durante muchos años se consideró que dicha fracción protónica era sumamente alta y que no se encontraría en el interior de las estrellas, por lo que el proceso DURCA no conservaría el momento, y por lo tanto, no ocurriría. Sin embargo, en 1991, Lattimer *et al.* [28] mostraron que para las densidades presentes en el núcleo de la estrella, la fracción protónica se encuentra entre el 11 % y 15 %, por lo que el proceso DURCA ocurrirá.

El proceso URCA modificado (MURCA)

$$n + n' \rightarrow p + n' + e^- + \bar{\nu}_e \quad \text{y} \quad p + n' + e^- \rightarrow n + n' + \nu_e \quad (2.30)$$

²El nombre de proceso URCA fue dado por el ruso George Gamow (1904 – 1968) y el brasileño Mário Schenberg (1914 – 1990) cuando visitaban el “*Cassino da - Urca*” de Rio de Janeiro y se preguntaban por qué la energía en el núcleo de una supernova desaparece tan rápidamente. En el dialecto del sur de Rusia, en particular de Odessa, que hablaba G. Gamow, la palabra *urca* se utiliza coloquialmente para referirse a un ladrón o mafioso. [27]

tiene la ventaja de no estar cinemáticamente prohibido, pues el neutrón n' asegura que el momento se conserve, sin embargo, es seis órdenes de magnitud menos eficiente que el proceso DURCA, creando así la diferenciación entre los procesos rápidos y lentos.

Existen procesos análogos al DURCA y MURCA, donde se reemplaza al neutrón de las ecuaciones (2.28) y (2.30) por otros hadrones o quarks desconfiados, que pueden estar presentes en el núcleo de la estrella. Dichos procesos se pueden encontrar en la Tabla 11.1 de [19, 26].

Además de los procesos de tipo URCA, existen otros procesos que deben de ocurrir en el núcleo de la estrella y que emiten pares de neutrinos y antineutrinos de cualquier sabor (ν_e, ν_μ y ν_τ) y se discuten con detenimiento en Yakovlev *et al.* [29]. Entre éstos destacan el bremsstrahlung de neutrones ($n+n \rightarrow n+n+\nu_i\bar{\nu}_i$) o electrones ($e^-+e^- \rightarrow e^-+e^-+\nu_i\bar{\nu}_i$), la formación de pares de Cooper ($n+n \rightarrow [nn]+\nu_i\bar{\nu}_i$) y la aniquilación de pares ($e^-+e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}$). Por otro lado, en etapas tempranas de la estrella, la evolución térmica de la corteza y del núcleo son independientes, por lo que la corteza también participa en el enfriamiento de la estrella. Los dos procesos dominantes en la corteza son el decaimiento de plasmones ($\Gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$) y el bremsstrahlung de un electrón con un ion ($e^- + \text{núcleo} \rightarrow e^- + \text{núcleo} + \nu\bar{\nu}$).

Existen diferentes soluciones a la emisividad de neutrinos y fotones de la ecuación (2.25), las cuales se muestran en [19, 26, 29, 30]. Una solución analítica al enfriamiento de las estrellas de neutrones está dada por [2, 19, 26]

$$C_\nu = C \cdot T, \quad L_\nu^{slow} = N^s \cdot T^8, \quad L_\nu^{fast} = N^f \cdot T^6, \quad (2.31)$$

donde $C = 10^{29} - 10^{30} \text{ erg } K^{-2}$, L_ν^{slow} y L_ν^{fast} son la emisividad de neutrinos para procesos lentos y rápidos, respectivamente; $N^s = 10^{-34} - 10^{-32} \text{ erg } s^{-1} K^{-8}$ y $N^f = 0 - 10^{-9} \text{ erg } s^{-1} K^{-6}$. Para la emisividad de fotones de la superficie

$$L_\gamma = 4\pi R^2 \sigma_{SB} T_e^4 = S T^{2+4\alpha}, \quad (2.32)$$

donde R es el radio de la estrella; σ_{SB} es la constante de Stefan – Boltzmann; $T_e \propto T^{0.5+\alpha}$ es la temperatura efectiva o superficial, es decir: la temperatura que mediría un observador “situado en infinito”, T_∞ , está relacionada con la temperatura efectiva mediante $T_\infty = e^\Phi T_e$, donde $e^{2\Phi}$ es la componente temporal de la métrica del espaciotiempo, y satisface la ecuación (2.23); $S = 2 \times 10^{15} - 4 \times 10^{14} \text{ erg } s^{-1} K^{-2-4\alpha}$ y $\alpha = 0.05 - 0.1$.

Al comparar L_ν con L_γ se encuentra que para épocas tempranas en la evolución de la estrella, la emisión de neutrinos será el principal mecanismo de enfriamiento, mientras que, cuando la temperatura es suficientemente baja, la emisión de fotones pasará a ser el mecanismo principal. La temperatura, T_{shift} , a partir de la cual el enfriamiento se da principalmente por la emisión de fotones, se puede determinar al igualar L_ν con L_γ : para los procesos lentos, T_{shift} estará dada por

$$T_{shift}^s \simeq \left(\frac{S}{N^s} \right)^{1/6} \sim 10^8 K, \quad (2.33)$$

con $T_e \sim 10^6 K$. Y para procesos rápidos, T_{shift} estará dada por

$$T_{shift}^f \simeq \left(\frac{S}{Nf} \right)^{1/4} \sim 10^6 K, \quad (2.34)$$

con $T_e \sim 10^5 K$. Además, la solución de la ecuación (2.25) en la época del enfriamiento por neutrinos es, para procesos lentos

$$t = \frac{C}{6N^s} \left(\frac{1}{T^6} - \frac{1}{T_0^6} \right), \quad (2.35)$$

donde T_0 es la temperatura inicial a $t = t_0$. Y para procesos rápidos, la solución a la ecuación (2.25) es

$$t = \frac{C}{4N^f} \left(\frac{1}{T^4} - \frac{1}{T_0^4} \right). \quad (2.36)$$

Las ecuaciones (2.35) y (2.36) se pueden invertir fácilmente, es decir, expresar a la temperatura como función del tiempo, y así obtener la escala de tiempo del enfriamiento por neutrinos: $\tau_\nu^{slow} \sim 6$ meses y $\tau_\nu^{fast} \sim 4$ minutos, si $T_0 \sim 10^9$ K.

Por otro lado, la solución de la ecuación (2.25) en la época del enfriamiento por fotones es

$$t = t_1 + \frac{C}{4\alpha S} \left(\frac{1}{T^{4\alpha}} - \frac{1}{T_1^{4\alpha}} \right), \quad (2.37)$$

donde T_1 es la temperatura al tiempo t_1 . Las constantes α y S dependen de la cantidad de elementos ligeros y pesados que existen en la envoltura, por lo que afectarán considerablemente el valor numérico de la ecuación (2.37).

El enfriamiento es afectado por múltiples causas, por ejemplo: la presencia de campos magnéticos (pues éstos afectan el transporte de calor), los efectos de superconductividad y superfluidez (ya que la formación de pares que caracteriza a estos fenómenos altera a los procesos en los que se producen neutrinos) y las diferentes composiciones que pueda tener la estrella, tanto en el núcleo como en la envoltura (pues las reacciones que produzcan neutrinos cambiarán y, por tanto, la emisividad de éstos) [19, 26, 29, 30].

Dado que la composición del núcleo modifica la emisividad de neutrinos, diferentes ecuaciones de estado podrían predecir enfriamientos suficientemente distintos para poder discernir si dicha ecuación de estado es válida. Sin embargo, escenarios muy distintos de enfriamiento, así como ecuaciones de estado, llevan a resultados muy similares, por lo que las observaciones no han sido capaces de determinar una mejor ecuación de estado.

Capítulo 3

Velocidades de escape de estrellas de neutrones

Entre 1970 y 1974, Manchester, Taylor y Van [31], observaron la regularidad con la que se observan los pulsos de PSR B1133 + 16, uno de los pulsares más cercanos a la Tierra (a una distancia ~ 350 pc¹), y encontraron que el residuo en la llegada del pulso aumentaba debido a que el pulsar tiene un movimiento propio con una velocidad de 380 km s^{-1} . Aunque dicho movimiento ya se había observado en el pulsar en la Nebulosa del Cangrejo, así como de otros cinco pulsares (que no se encontraban en el centro del remanente de la supernova), ésa fue la primera medición de la velocidad del movimiento propio de un pulsar. Las primeras velocidades que se midieron eran relativamente pequeñas, sin embargo, con la medición del movimiento propio de algunos pulsares como Circinus X - 1, el arco de choque de la Nebulosa de la Guitarra, entre otros, se determinó la existencia de pulsares de alta velocidad ($\gtrsim 1000 \text{ km s}^{-1}$) [10].

En 2005, Hobbs *et al.* [9] publicaron un estudio estadístico del movimiento propio de doscientos treinta y tres pulsares, cuyas trayectorias se indican en la Figura 3.1, mostrando que las velocidades medidas siguen una distribución maxwelliana, cuyo promedio es de 400 km s^{-1} . Cerca de una cuarta parte de los pulsares tienen una velocidad superior a 500 km s^{-1} [4, 9], es decir, mayor que la velocidad de escape de la Vía Láctea ($\sim 550 \text{ km s}^{-1}$), por lo que eventualmente terminarán en el espacio intergaláctico.

Si todos los pulsares nacen cerca del plano galáctico, así como lo parece indicar la Figura 1.2, entonces su edad cinemática se define como la razón entre la distancia a la que están del plano galáctico y la velocidad a la que se “alejan” de él. Dicha edad cinemática se puede comparar con la edad característica: para los pulsares jóvenes ambas edades coinciden, pero para los pulsares viejos, la edad cinemática y la característica difieren (hasta por millones de años) [4]. Además, como se puede ver en la Figura 1.1, hay una menor cantidad de pulsares viejos que de pulsares normales, más aún, casi no se observan pulsares viejos de

¹1 pc = 3.2615 años luz = 3.0856×10^{18} cm

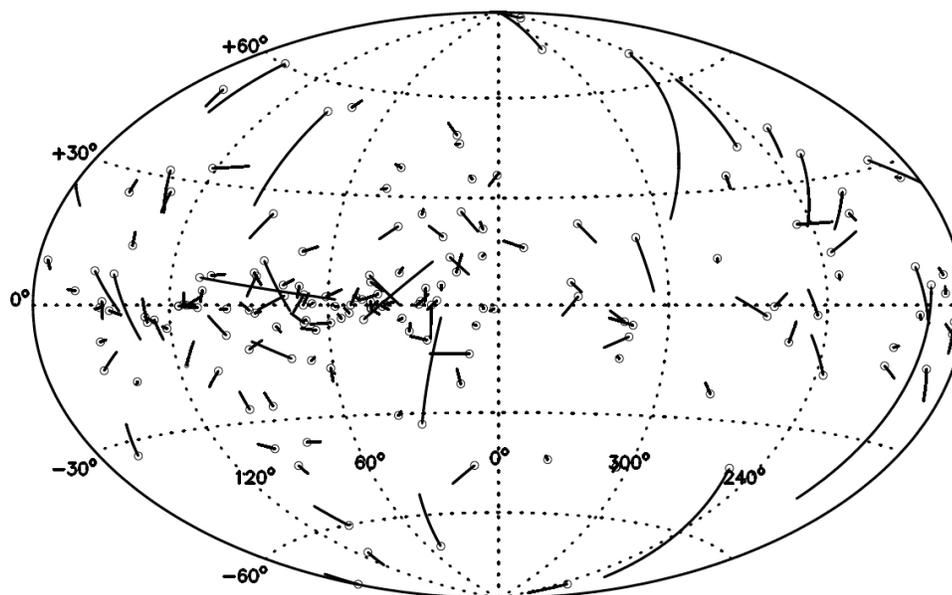


Figura 3.1: Movimiento propio de los 233 pulsares reportados en [9]. La posición del pulsar se indica por un círculo y la línea indica su movimiento durante el último millón de años, asumiendo que no tiene velocidad radial. Imagen de G. Hobbs, D. R. Lorimer, A. G. Lyne y M. Kramer [9].

alta velocidad, lo cual podría indicar que dichos objetos ya se alejaron tanto del plano galáctico, que ya no son visibles desde la vecindad del Sol [4].

Una explicación natural al movimiento propio es que las explosiones de supernova en las que nacen los pulsares son asimétricas, por lo que los pulsares reciben un impulso o patada (*kick* en inglés) al nacer que les da esa velocidad, sin embargo, conforme se han acumulado más observaciones del movimiento propio de los pulsares, el origen de sus velocidades de escape no es claro. En los pulsares del Cangrejo y de la Vela hay evidencia de que la dirección de movimiento del pulsar corresponde con la dirección del eje de giro. En otros pulsares también parece haberla, pero en menor medida que en los ya mencionados [10, 11].

Se han propuesto diferentes mecanismos para explicar las velocidades de *kick* y se revisan en [10, 11]. Entre ellos destacan:

- ***Kick* debido a perturbaciones hidrodinámicas:** este mecanismo depende de perturbaciones hidrodinámicas durante el colapso del núcleo y en la explosión de supernova. Inestabilidades locales podrían generar velocidades $\sim 100 \text{ km s}^{-1}$, mientras que perturbaciones asimétricas globales generan velocidades mayores a 1000 km s^{-1} .
- ***Kick* debido a la formación de jets asimétricos:** la combinación de un núcleo de hierro que gira rápidamente, con un campo magnético, puede formar dos jets en

los polos de la estrella. En el caso de una asimetría entre estos jets, la explosión de supernova generaría una velocidad alta.

- ***Kick* debido al rompimiento de un sistema binario:** cuando en un sistema binario, una de las compañeras explota como supernova, la otra se va con una velocidad similar a su velocidad orbital.
- ***Kick* debido a la fragmentación de un núcleo giratorio en un sistema binario de PNS:** un núcleo que gira rápidamente y se fragmenta formando un sistema binario de PNS. La explosión de la PNS más ligera (después de la transferencia de masa) podría darle a la otra estrella el impulso necesario.
- ***Kick* debido a un efecto cohete electromagnético:** radiación proveniente de un dipolo rotatorio fuera del centro le imparte una aceleración gradual al pulsar a lo largo de su eje de giro.
- ***Kick* debido a emisión anisotrópica de neutrinos:** una emisión asimétrica de neutrinos inducida por los intensos campos magnéticos ($> 10^{15}$ G) presentes en el interior de la estrella.

A continuación se presenta una discusión más detallada de dichos mecanismos, así como de las evidencias observacionales que podrían descartar o apoyar a cada uno de ellos.

3.1. *Kick* debido a perturbaciones hidrodinámicas

Si en las explosiones de supernovas, en las que tienen su origen las estrellas de neutrones, existe una dirección en la que, por algún motivo, sean más fuertes, la PNS recibirá un impulso por conservación de momento. Por ejemplo, en Scheck *et al.* [32], se muestra una simulación numérica de la explosión de una supernova en la que la energía de los neutrinos emitidos se deposita entre la PNS y la onda de choque de la supernova, generando asimetrías suficientes para que la estrella de neutrones alcance velocidades superiores a 500 km s^{-1} , e incluso, en casos extremos, alcanzar velocidades de miles de km s^{-1} .

En Burrows y Hayes [33], la asimetría es generada por una anisotropía dipolar en la masa del núcleo colapsado menor al 0.1% (o en cualquier capa de masa menor al 2%), además de una anisotropía inicial cuadrupolar total de 0.008% (normalizada a 2/3). En dicho trabajo la velocidad de la estrella de neutrones alcanzó 530 km s^{-1} .

En general, los diferentes trabajos que se han hecho suponen una inestabilidad local en el núcleo colapsado de la estrella y en el manto estelar en el que se propaga la onda de choque de la supernova. Los modelos que suponen una rotación del núcleo colapsado no muestran ningún impacto en la velocidad de *kick* de origen hidrodinámico [10], sin embargo, el impulso general sí será afectado por la rotación promedio si el patrón asimétrico generado

por la onda de choque rota con la materia con un periodo menor que la escala de tiempo del *kick*, τ_{kick} , que en este mecanismo es $\tau_{kick} \sim 10 - 100$ ms.

Page *et al.* argumentaron en [34], que en el remanente de la supernova SN1987A parece haber una estrella de neutrones, que además está desplazada del centro de la supernova una distancia consistente con la predicción del *kick* hidrodinámico (moviéndose a una velocidad entre 160 y 700 km s⁻¹).

Los escenarios que se describen con este mecanismo parecen reproducir la velocidad promedio, pues las velocidades estándar producidas son cercanas a 500 km s⁻¹ y, además, es capaz de generar las velocidades más altas que se han observado. Sin embargo, se necesitan condiciones de asimetría muy extremas que pueden no ser completamente ciertas en todos los casos.

3.2. *Kick* debido a la formación de jets asimétricos

Este mecanismo, propuesto por Kholkhlov *et al.* [35] en 1999, supone que en el colapso del núcleo de la estrella progenitora, debido a mecanismos magnetorrotacionales (la rápida rotación del núcleo, junto con la presencia de un campo magnético), se forman dos jets supersónicos de alta densidad, en los polos del núcleo colapsado. Se estima que estos jets colimados tendrían un tiempo característico ~ 1 s.

Suponiendo que la masa de cada jet $M_j \sim 1M_\odot$, la asimetría en la velocidad de los jets suficiente para generar una velocidad de 1000 km s⁻¹ debe ser $\Delta v_j/v_j \sim 1$, con v_j la velocidad del jet. Si la duración de los jets se duplica, entonces la asimetría en la velocidad de los jets disminuye a 0.5.

3.3. *Kick* debido al rompimiento de un sistema binario

De acuerdo con Gott *et al.* [36], algunas estrellas con movimiento propio se han podido relacionar con un antiguo sistema binario, formado por dos estrellas de neutrones o una estrella de neutrones con una estrella de secuencia principal ², una enana blanca masiva o una binaria masiva de rayos X ³ [11].

Para estudiar este mecanismo, siguiendo a Gott *et al.* y a Wang *et al.* [11, 36] considérense dos estrellas en órbita circular, es decir, con excentricidad $e_i = 0$ y semieje mayor a_i : una estrella *A* de masa m_A , que puede ser una estrella de neutrones, una estrella de secuencia principal o una enana blanca masiva; y una estrella *B*, que es una estrella principalmente compuesta de helio, lista para explotar como supernova, cuya masa antes de

²Estrellas que son químicamente homogéneas y transforman hidrógeno en helio en su núcleo. Las diferentes cantidades de elementos más pesados que el hidrógeno y el helio tienen poco impacto en este tipo de estrellas. Una discusión más amplia sobre este tipo de objetos se puede encontrar en [1].

³Un sistema binario en el que la estrella compañera de la estrella de neutrones le transfiere masa, generalmente formando un disco de acreción del que se emiten rayos X. Una discusión más amplia sobre este tipo de sistemas se puede encontrar en [1].

la explosión es $m_{B,i}$. La duración de la supernova se puede considerar instantánea pues es mucho menor que el periodo orbital del sistema binario. Cuando B explota, deja una estrella de neutrones con masa $m_B < m_{B,i}$, que además, puede recibir una velocidad de *kick*, \mathbf{V}_k , durante la explosión, por alguno de los métodos listados anteriormente. En general, la estrella A no es afectada por la supernova, es decir, tanto su masa, como su velocidad, antes y después de la supernova, son iguales.

Debido a la pérdida de masa de la estrella B , así como el impulso que ésta recibe, la órbita posterior a la supernova tendrá, en general, una excentricidad $e_f \neq 0$, y si $m_{B,i} - m_A > 2(m_{B,i} - m_B)$, entonces $e_f > 1$ [36]. Si V_∞ es la velocidad relativa entre A y B en infinito y V_c es la velocidad del centro de masa, entonces

$$V_c = \frac{G^{1/2} m_A (m_{B,i} - m_B)}{a_i^{1/2} (m_{B,i} + m_A)^{1/2} (m_A + m_B)}, \quad (3.1)$$

$$V_\infty = \left[\frac{G (m_{B,i} - m_A - 2m_B)}{a_i} \right]^{1/2}. \quad (3.2)$$

Si las velocidades de las estrellas en el marco de referencia del laboratorio son \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B , y el ángulo entre ellas es ψ , entonces

$$\frac{|\mathbf{v}_B|}{|\mathbf{v}_A|} = \frac{m_A}{\left[m_{B,i}^2 - 2m_B (m_{B,i} + m_A) \right]^{1/2}} = \frac{\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{v}_A}{|\mathbf{v}_B| |\mathbf{v}_A|} = \cos \psi. \quad (3.3)$$

Por otro lado, Wang *et al.*, *op. cit.*, encuentra unas restricciones al impulso que puede recibir B en su explosión: si el ángulo entre \mathbf{V}_k y el momento angular orbital anterior a la supernova, \mathbf{L}_i , es γ , su semieje mayor posterior a la supernova es a_f y su momento angular orbital posterior a la supernova, \mathbf{L}_f , hace un un ángulo θ con \mathbf{L}_i , entonces, a partir de la conservación del momento angular y de la energía se encuentra que

$$V_k^2 = \frac{GM_f}{a_f} \left[2\xi - 1 + \xi\eta^{-1} - 2(1 - e_f^2)^{1/2} \xi^{3/2} \eta^{-1/2} \cos \theta \right], \quad (3.4)$$

$$\cos^2 \gamma = \frac{\xi^2 (1 - e_f^2) \sin^2 \theta}{2\xi - 1 + \xi\eta^{-1} - 2(1 - e_f^2)^{1/2} \xi^{3/2} \eta^{-1/2} \cos \theta}, \quad (3.5)$$

donde $M_f = m_A + m_B$, $M_i = m_A + m_{B,i}$, $\eta = M_f/M_i < 1$ y $\xi = a_f/a_i$, que satisface $(1 + e_f)^{-1} < \xi < (1 - e_f)^{-1}$.

Las ecuaciones anteriores se usan para encontrar el valor de las velocidades de *kick* de sistemas binarios. Por ejemplo, Gott *et al.* en *op. cit.*, las aplican al pulsar que se encuentra en la Nebulosa del Cangrejo (PSR B0531 + 21) y a su pulsar más cercano (PSR B0525 + 21), que dista cerca de un grado de dicha nebulosa. La predicción de la velocidad de dichos objetos es cercana a la observada.

Por otro lado, en Wang *et al. op. cit.* se encuentran los intervalos de velocidades que deberían de tener veintidos objetos, y aunque los intervalos en ocasiones son muy amplios (algunos son de decenas a miles de km s^{-1}), éstos parecen estar de acuerdo con los valores reportados en Hobbs *op. cit.*

3.4. *Kick* debido a la fragmentación de un núcleo giratorio en un sistema binario de protoestrellas de neutrones

Este mecanismo supone que durante el colapso de un núcleo giratorio, se pueden formar una o más protuberancias de materia neutrónica en órbitas cerradas alrededor de la PNS. El transporte de masa del objeto más ligero al más pesado causa que el primero llegue al límite inferior para la masa de una estrella de neutrones y, por lo tanto, explotará generando un escenario de rompimiento del sistema binario [37] como el descrito anteriormente.

La formación de una compañera ligera en los alrededores de la estrella de neutrones principal implica el rompimiento de las simetrías esférica y axial durante el colapso. Colpi *et al.* [37] argumenta que la rápida rotación de cuerpos en equilibrio lleva a la formación de inestabilidades dinámicas que no tienen simetría axial, que pueden crecer en el núcleo de la PNS, formando estructuras de barras, las cuales se pueden fragmentar de la PNS al interactuar con la materia que las circunda. Fryer *et al.* [38] argumentan que la fragmentación solamente puede ocurrir cuando la razón entre la energía rotacional y la energía de ligadura gravitacional es mayor a 0.25 . Sin embargo, el núcleo se vuelve dinámicamente inestable cuando esa razón es mayor que 0.14 . Incluso en núcleos muy masivos y que rotan sumamente rápido, dicha razón parece ser apenas superior a 0.1 y, por lo tanto, la fragmentación del núcleo no ocurrirá.

Sin embargo, suponiendo que es posible la formación de una compañera ligera cuya masa es $0.1 - 0.3M_{\odot}$, la transferencia de masa de la compañera ligera a la pesada se da por la formación de un disco de acreción, hasta que la compañera ligera llegue a tener una masa igual al límite inferior que puede tener una estrella de neutrones (véase la Figura 2.1) y explota, rompiendo el sistema binario y generando velocidades cercanas y superiores a 1000 km s^{-1} . Colpi *et al.*, en *op. cit.*, argumentan que las velocidades de *kick* sumamente altas podrían ser indicio de la fragmentación del núcleo.

3.5. *Kick* debido a un efecto cohete electromagnético

En 1975, Harrison *et al.* [39] mostraron que la radiación electromagnética de un dipolo magnético giratorio descentrado impulsa al pulsar en la dirección de su eje de giro. Este mecanismo es diferente a los ya expuestos, pues asume un escenario para el *kick* posnatal, donde el impulso que se le imprime a la estrella implica una aceleración gradual en el pulsar, proveniente de la energía cinética de giro. Para estudiar este mecanismo, siguiendo a Lai *et al.* y Harrison *et al.* [10, 39], sean $\mu_z, \mu_{\rho}, \mu_{\phi}$ las componentes del dipolo magnético

en coordenadas cilíndricas, en donde z está en la dirección del eje de giro del pulsar y ϕ es el ángulo coordenado. Si el dipolo está desplazado una distancia s del eje de giro, la fuerza ejercida sobre el pulsar estará dada (a primer orden) por

$$F = \frac{8}{15} \left(\frac{\Omega s}{c} \right) \frac{\Omega^4 \mu_z \mu_\phi}{c^4}, \quad (3.6)$$

donde Ω es la velocidad angular del pulsar, y si F es negativa, entonces implica que la velocidad de *kick*, \mathbf{V}_k , es paralela al eje de giro. Los términos dominantes de la luminosidad, o tasa de radiación de energía, serán, por tanto:

$$L = \frac{2\Omega^4}{3c^3} \left(\mu_\rho^2 + \mu_\phi^2 + \frac{2\Omega^2 s^2 \mu_z^2}{5c^2} \right). \quad (3.7)$$

En una situación “típica”, $\mu_z \sim \mu_\rho \sim \mu_\phi$ y el factor de asimetría en la radiación emitida $\epsilon := F/(L/c)$ es del orden de $0.4(\Omega s/c)$. Para una Ω dada, la máxima asimetría, $\epsilon_{max} = 0.63$, sucede cuando $\mu_\rho/\mu_z = 0$ y $\mu_\phi/\mu_z = \sqrt{0.4}(\Omega s/c)$. Las ecuaciones diferenciales que determinan al momento lineal y angular para un pulsar de masa m , momento de inercia I y que se mueve a una velocidad V_k , están dadas a segundo orden por

$$\frac{d}{dt}(mV_k) = \frac{L}{c} \left(\epsilon - \frac{V_k}{c} \right), \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt}(I\Omega) = -\frac{L}{c} \left(1 + \frac{\epsilon V_k}{c} \right). \quad (3.9)$$

Estas ecuaciones tienen como solución a

$$V_k \simeq 140 R_{10}^2 \frac{s}{10 \text{ km}} \left(\frac{\nu_i}{1 \text{ kHz}} \right)^3 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_i} \right)^3 \right] \text{ km s}^{-1}, \quad (3.10)$$

donde $R_{10} = R/10$ km, con R el radio de la estrella de neutrones, ν_i es la frecuencia de giro inicial, ν es la frecuencia de giro observada y, para llegar a la ecuación (3.10), se asumió una situación “típica”.

En la situación “óptima”, en la que $\mu_\rho = 0$, $\mu_\phi/\mu_z = \sqrt{0.4}(\Omega s/c)$ y $\epsilon = \sqrt{0.4} [2\Omega_i \Omega / (\Omega^2 + \Omega_i^2)]$, la velocidad máxima de *kick* será

$$v_{max} \simeq 1400 R_{10}^2 \left(\frac{\nu_i}{1 \text{ kHz}} \right)^2 \left[1 - 4.66 \left(\frac{\nu}{\nu_i} - \tan^{-1} \frac{\nu}{\nu_i} \right) \right] \text{ km s}^{-1}. \quad (3.11)$$

Por lo tanto, si el pulsar nace con una frecuencia de giro $\nu_i \gtrsim 1$ kHz, es posible que alcance velocidades de algunos cientos de km s^{-1} o incluso 1000 km s^{-1} .

Para obtener las ecuaciones (3.11) y (3.10) se asumió que la energía rotacional del pulsar se transforma en su totalidad en radiación electromagnética. Sin embargo, de acuerdo con

Lai *et al.* en *op. cit.*, si el pulsar tiene una frecuencia de giro $\nu \gtrsim 100$ Hz, perderá una cantidad significativa de momento angular en la forma de radiación gravitacional.

En Lai *et al. op. cit.*, se argumenta que los pulsares tienen un periodo al nacer de 0.02 – 0.5 s, por lo que la frecuencia de giro necesaria para reproducir las velocidades observadas es mucho mayor. Sin embargo, existen sistemas como el Pulsar del Cangrejo y el de la Vela en donde la frecuencia de giro inicial parece indicar que este mecanismo podría entrar en funcionamiento.

3.6. *Kick* debido a emisión anisotrópica de neutrinos

Cuando una estrella de neutrones nace, su temperatura es del orden de 10^{11} K. A estas temperaturas, la emisión de neutrinos es el principal mecanismo por el cual la estrella se enfría, hasta que alcanza una temperatura entre 10^8 y 10^6 K (ecuaciones (2.35) y (2.36)), a partir de entonces, el mecanismo de enfriamiento dominante pasa a ser la emisión de fotones, lo cual ocurre en aproximadamente un millón de años. Más aún, la energía emitida en forma de neutrinos por una estrella de neutrones es aproximadamente el 99% de la energía de ligadura gravitacional ($\sim 10^{53}$ erg), por lo que este proceso podría jugar un papel importante en las velocidades de *kick*.

La mayor parte de los neutrinos que se producen en el interior de las estrellas de neutrones se originan en procesos mediados por la interacción débil; ésta presenta una violación a la simetría de paridad, P , que es la transformación que invierte las coordenadas espaciales: $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$, es decir, es una reflexión en un espejo más una rotación de 180° con respecto a un eje perpendicular al espejo. Por la violación a esta simetría, así como por la presencia de campos magnéticos que orientan la emisión de neutrinos, esta puede ser asimétrica. También puede deberse a la presencia de un campo magnético asimétrico en una PNS altamente magnetizada ⁴.

Como resultado de la conservación del momento, si la emisión de neutrinos es asimétrica, la estrella recibirá un *kick* en la dirección contraria a aquella en la que la emisión es más intensa, y que es opuesta a la dirección del campo magnético. De acuerdo con [41], si se considera una estrella de neutrones de masa $1.4M_\odot$, con una velocidad de *kick* de 1000 km s^{-1} , el momento de los neutrinos emitidos será

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c} \simeq \frac{3 \times 10^{53} \text{ erg}}{3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}} = 10^{43} \frac{\text{erg}\cdot\text{s}}{\text{cm}}, \quad (3.12)$$

mientras que el momento de la estrella de neutrones será

$$p_{NS} = M_{NS} \cdot v_{kick} = 1.4M_\odot \cdot 10^8 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \simeq 2.8 \times 10^{41} \frac{\text{erg}\cdot\text{s}}{\text{cm}} \simeq 0.03 p_\nu. \quad (3.13)$$

Por lo tanto, una asimetría del 3% será suficiente para proporcionarle una velocidad de 1000 km s^{-1} a una estrella de masa $1.4M_\odot$. Más aún, P. Arras y D. Lai [42] encontraron

⁴Véase, por ejemplo [40]

que, bajo una aproximación no relativista en la propagación de los neutrinos en el interior de la estrella, una asimetría cercana al 1 % en la luminosidad total de neutrinos ($\sim 10^{53}$ erg) podría ser suficiente para explicar las velocidades de *kick* observadas

El problema de las velocidades de *kick* mediante la emisión anisotrópica de neutrinos ha sido abordado de diferentes maneras, entre ellas destacan [41–48] y se revisarán brevemente a continuación.

Dorofeev *et al.* [47], estudiaron, en 1984, el proceso DURCA en un campo magnético intenso y encontraron que si el campo magnético satisface

$$B \geq \frac{1}{2}B_c(\mu_e^2 - 1), \quad (3.14)$$

donde $B_c = m_e^2 c^3 / (e\hbar)$ es el campo magnético crítico del electrón y μ_e es el potencial químico del electrón, entonces el coeficiente de asimetría en la radiación de neutrinos será máximo. En el año de la publicación de este trabajo, las velocidades de *kick* observadas eran del orden de 100 km s^{-1} , lo que implicaría que el campo magnético debería ser del orden de $10^{14} - 10^{15}$ G, si la temperatura y el potencial químico electrónico, al momento del colapso de la estrella progenitora, tuvieran valores $T = (3 - 4) \times 10^{10} \text{ K}$ y $\mu_e = (3 - 4)(k_B T / (mc^2))$, respectivamente.

Varios autores [42, 43, 45, 46], han estudiado las asimetrías generadas en las secciones eficaces de los procesos de dispersión de neutrinos por nucleones y electrones, así como los procesos de absorción, en un medio nuclear denso y magnetizado. En [45, 46] se estudia la contribución que podrían tener los hiperones Λ . Posteriormente, se utilizan dichas secciones eficaces para resolver la Ecuación de Transporte de Boltzmann y encontrar la transferencia de momento a la estrella.

En [42, 43], los autores encuentran que campos magnéticos del orden de $10^{15} - 10^{16}$ G podrían generar una asimetría suficiente en la dispersión y absorción de neutrinos para que la velocidad de la estrella sea de unos cuantos cientos de km s^{-1} . Por otro lado, en [45, 46] se encuentra que un campo magnético del orden de 10^{17} G aumentaría la sección eficaz de los procesos de absorción y reduciría la de los procesos de dispersión por un 1 – 3 % en la dirección contraria al campo magnético (antártica), generando así una asimetría en la emisión de neutrinos que podría generar velocidades de 580 km s^{-1} ó 520 km s^{-1} , si hay o no presentes hiperones Λ , respectivamente.

Akhmedov *et al.* [48], argumentan que si los neutrinos adquieren un momento magnético transitorio al resonar entre los distintos sabores (para neutrinos de Dirac: $\nu_{eL} \leftrightarrow \nu_{xR}$, con $x = \mu$ ó τ ó $\nu_{e,xL} \leftrightarrow \bar{\nu}_s$, donde s indica al hipotético neutrino estéril; o para neutrinos de Majorana: $\nu_e \leftrightarrow \bar{\nu}_\mu$ ó $\bar{\nu}_\tau$), entonces escaparán libremente de la estrella y, más aún, el mecanismo de resonancia generará una asimetría en el momento de los neutrinos emitidos, que si es del orden de 10^{-2} (suficiente para generar velocidades del orden de 1000 km s^{-1} , de acuerdo con la ecuación (3.13)), entonces el campo magnético deberá ser $B \gtrsim 4 \times 10^{15}$ G y el momento magnético del neutrino deberá ser

$$\mu_\nu \gtrsim 10^{-14} \mu_B \quad (10^{-15} \mu_B), \quad (3.15)$$

para neutrinos de Dirac (Majorana).

Ayala *et al.* y Sagert *et al.* [41, 44] consideran que el núcleo de la estrella de neutrones está compuesto de un gas de quarks u , d y s libres, así como de electrones en un campo magnético que forma un ángulo muy pequeño con el eje de rotación del pulsar. La conservación de momento y de momento angular en un proceso que viola la simetría de paridad implica que la polarización del espín de los neutrinos y positrones (anti-neutrinos y electrones) emitidos esté correlacionada con su dirección de movimiento, proyectada a lo largo u opuesta a la dirección del campo magnético. Por lo tanto, el número de neutrinos o antineutrinos emitidos en una u otra dirección se puede determinar de la asimetría de espín. La velocidad de *kick* estará dada por

$$dv = \frac{\chi}{M_{NS}} \frac{4}{3} \pi R^3 \epsilon dt \quad (3.16)$$

donde v , M_{NS} y R son la velocidad, la masa y el radio del pulsar, respectivamente, ϵ es la emisividad de neutrinos y χ es la polarización del espín de los electrones, que determina la fracción de neutrinos asimétricamente emitidos. Sagert y Schaffner-Bielich [41] utilizan la Ley de Enfriamiento de Newton (ecuación (2.25)), así como una aproximación a primer orden en la densidad de energía interna, que sirve para aproximar a la capacidad calorífica del núcleo de la estrella, y así poder integrar a la ecuación (3.16) y obtener

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{3} \pi R^3 \frac{\chi}{M_{NS}} 9 \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi} \right) \mu_q^2 (T_i^2 - T_f^2) \\ &\sim 40 \frac{\text{km}}{\text{s}} \left(\frac{\mu_q}{400 \text{ MeV}} \right)^2 \left(\frac{T_i}{\text{MeV}} \right)^2 \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^3 \left(\frac{1.4 M_\odot}{M_{NS}} \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde $\alpha_s = g^2/(4\pi)$ es la constante de acoplamiento fuerte y g , el factor de degeneración, μ_q es el potencial químico de los quarks y T_f y T_i son la temperatura final e inicial de la estrella, respectivamente. Para obtener la ecuación (3.17), se utilizó que T_f es menor que 1 MeV, pues dentro del primer minuto, la estrella se enfría a esas temperaturas [16], y por lo tanto, su contribución a la velocidad es despreciable; además, la capacidad calorífica se aproximó como la capacidad calorífica de los quarks pues el potencial químico de los quarks es mucho más grande que el de los electrones; y finalmente, se consideró a $\chi = 1$, pues para temperaturas bajas y campos magnéticos intensos, dicho valor es una buena aproximación.

Los resultados de Sagert *et al.*, en *op. cit.*, reproducen velocidades mayores a 1000 km s⁻¹ para $T_i > 5$ MeV y $R < 10$ km, siempre y cuando, la intensidad del campo magnético sea del orden de 10¹⁷ G, pues si no, la polarización no será total. Además, también reproduce velocidades inferiores, del orden de 100 km s⁻¹. Estos autores continúan su discusión sobre los efectos que tienen las interacciones de los neutrinos con la materia de la estrella en las velocidades de *kick*, pues el camino libre medio es mucho menor que el radio de la estrella y, por lo tanto, los neutrinos se dispersarán, impidiendo que su emisión asimétrica genere el impulso sobre la estrella. Además, los efectos de una fase de superconductividad de color

(CFL) implicarían que el radio de la fase de quarks de la estrella debería de ser más grande, ~ 14 km [41], lo cual está en contradicción con el límite al radio que encontraron Capano *et al.* [18].

Por otro lado, Ayala *et al* [44] integran la ecuación (3.16) de forma directa, para obtener

$$v = -803.925 \frac{\text{km}}{\text{s}} \left(\frac{1.4M_{\odot}}{M_{NS}} \right) \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^3 \left(\frac{I}{\text{MeV fm}^{-3}} \right), \quad (3.18)$$

donde I está definida por

$$I = \int_{T_i}^{T_f} \chi C_v dT, \quad (3.19)$$

con C_v la capacidad calorífica del núcleo de la estrella. En la ecuación (3.18) no se utiliza ninguna aproximación sobre la capacidad calorífica ni la polarización del espín de los electrones, dichas cantidades las obtienen a partir de la termodinámica del gas de fermiones que compone al núcleo de la estrella, utilizando expresiones exactas para χ y C_v . Los resultados de Ayala *et al.*, *op. cit.*, reproducen velocidades a partir de 100 km s^{-1} , e inclusive superiores a 1000 km s^{-1} , para campos magnéticos entre 10^{15} y 10^{18} G y para densidades entre 3 y 8 veces la densidad nuclear. Además, sus resultados se aproximan a los obtenidos en Sagert *et al.*, *op. cit.*, cuando el campo magnético aumenta.

Aunque los resultados de Ayala *et al.* [44] reproducen las velocidades observadas, el efecto de las interacciones entre los neutrinos y la materia que compone a la estrella no se toma en cuenta, por lo que su efecto disminuiría las velocidades encontradas. El objetivo de esta tesis es proponer un mecanismo para que dichas interacciones no modifiquen la emisión de neutrinos, y tomando como base a Ayala *et al.*, *op. cit.*, calcular las velocidades que alcanzarán las estrellas de neutrones.

Kusenko, Segre y Vilenkin argumentan en [49], mediante su “teorema de no se va” (“*the no-go theorem*”, en inglés), que si la estrella se encuentra en equilibrio térmico, no se puede producir ninguna asimetría en la emisión de neutrinos, incluso en la presencia de procesos que violen la simetría de paridad. Más aún, los mecanismos que pretenden explicar las velocidades de *kick* como la amplificación por la suma de pequeñas asimetrías, debidas a múltiples colisiones, serán imposibles, pues las múltiples colisiones implicarían que los neutrinos, que se producen en procesos térmicos, continuarían estando en un equilibrio estadístico. Sin embargo, como los mismos autores mencionan, las estrellas de neutrones nacen en explosiones de supernovas como cuerpos calientes, que en muy poco tiempo disminuyen su temperatura en varios ordenes de magnitud, por lo tanto, no se encuentran en un equilibrio térmico en sus primeras etapas, en donde la emisión de neutrinos es más importante. Si además, la transición a una fase de quarks desconfiados no ocurre en los primeros instantes y, de acuerdo con los autores de [22], toma ~ 0.1 ms en volver a estar en equilibrio, entonces dicha transición volverá a sacar a la estrella de su equilibrio ⁵.

⁵De acuerdo con [50], los hadrones que componen a la materia nuclear se desconfinan a materia de quarks

Murayama *et al.* [45] mencionan que el resultado de Kusenko *et al.*, *op. cit.*, solamente toma en cuenta las colisiones de neutrinos y neutrones (dispersión de neutrinos), y desprecia los efectos de la estadística de Fermi-Dirac, por lo que el “teorema de no se va” sólo es válido en la región de muy baja densidad. Además, argumentan que la dispersión de neutrinos dentro de la materia nuclear no se ve reflejada en la evolución térmica ni en la propagación de los neutrinos que se encuentran fuera de equilibrio, más aún, como ellos mismos demuestran, la absorción de neutrinos juega un papel importante en la asimetría de la emisión.

Para finalizar con la discusión sobre el *kick* debido a la emisión anisotrópica de neutrinos, y con los diferentes mecanismos que se han propuesto para explicarlo, es importante hacer notar que la alineación entre el eje de giro y la dirección del *kick* es una condición necesaria en la mayoría de los mecanismos aquí descritos. Actualmente, los dos mecanismos de mayor aceptación dentro de la comunidad científica internacional son los debidos a perturbaciones hidrodinámicas y a la emisión anisotrópica de neutrinos; el primero no necesita una alineación entre el eje de giro y la dirección del *kick*, mientras que el segundo sí. Como se mencionó anteriormente, las observaciones parecen indicar que en la mayoría de los pulsares existe dicha alineación. Sin embargo, en aquellos pulsares en los que no se diera la alineación entre el eje de giro y la dirección del *kick*, la emisión anisotrópica de neutrinos podría no ser la explicación de su movimiento propio. Además, el movimiento propio de los pulsares podría ser la suma de dos o más de los mecanismos aquí expuestos (y los no expuestos también).

en una escala de tiempo de la interacción fuerte del orden de $\sim 10^{-23}$ s. El gas de quarks de dos sabores que se forma no está en equilibrio bajo interacciones débiles, las cuales equilibrarán químicamente al gas en una escala de tiempo de $\sim 10^{-8}$ s, formando materia de quarks extraños y emitiendo neutrinos.

Capítulo 4

La física de los neutrinos

Uno de los distintos mecanismos que se han planteado para explicar las velocidades de escape de las estrellas de neutrones es por la emisión anisotrópica de neutrinos que se generan conforme la estrella se enfría. Como se ha mencionado, el objetivo de este trabajo es proponer un mecanismo para que las interacciones entre los neutrinos y la materia de la estrella de neutrones se supriman y éstos puedan escapar libremente, por lo que es importante revisar la física de los neutrinos ¹.

Los neutrinos son partículas elementales fermiónicas, es decir, tienen un espín de un medio de \hbar , y no tienen carga. Son leptones, es decir, no interactúan fuertemente y son partículas ultrarrelativistas, es decir, viajan a velocidades tan próximas a la velocidad de la luz que se puede considerar que su velocidad es la de la luz. Uno de los temas más importantes de investigación actualmente es el concerniente a la masa de estas partículas. Varios experimentos han concluido que, si tienen masa, esta es muy pequeña (\lesssim eV). Actualmente se conocen tres tipos de neutrinos: el neutrino del electrón, ν_e , el neutrino del muón, ν_μ , y el neutrino del tau, ν_τ .

4.1. Neutrinos en el Modelo Estándar de partículas elementales

El Modelo Estándar de partículas elementales (SM) es la teoría que describe las interacciones fuertes, electromagnéticas y débiles de las partículas elementales bajo el formalismo de la teoría cuántica de campos. El SM es una teoría de norma basada en el grupo de simetrías local $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, donde los subíndices C , L e Y denotan las cargas de color, quiralidad izquierda e hipercarga. Este grupo de simetrías determina únicamente las interacciones y el número de bosones vectoriales que corresponden con los generadores del grupo.

¹A partir de este capítulo, y en los capítulos subsecuentes, se utilizarán unidades naturales, es decir $c = \hbar = k_B = 1$, salvo donde se indique.

En el SM existen ocho gluones no masivos que corresponden con los ocho generadores del grupo $SU(3)_C$ y son los intermediarios de las interacciones fuertes; además, cuatro bosones de norma: tres masivos (W^\pm y Z) y uno no masivo (el fotón γ), que corresponden con los tres generadores de $SU(2)_L$ y el generador de $U(1)_Y$, responsables de la interacción electrodébil.

La teoría de las interacciones electrodébiles fue formulada por el pakistaní Abdus Salam (1926 – 1996) y el estadounidense Steven Weinberg (nacido en 1933). Éstas se pueden estudiar de forma independiente a las interacciones fuertes, ya que la simetría del grupo de color, $SU(3)_C$, se mantiene y no hay mezclas entre los sectores electrodébiles ($SU(2)_L \otimes U(1)_Y$) y fuertes. Por esto, para estudiar a los neutrinos que no interactúan fuertemente, basta con considerar al grupo de simetría local ($SU(2)_L \otimes U(1)_Y$) [51].

El grupo de simetría del SM fija las interacciones, es decir, el número de propiedades de los bosones vectoriales de norma, y adicionalmente se requieren tres parámetros independientes que están indeterminados, que se llaman constantes de acoplamiento, y se obtienen a partir de experimentos.

4.1.1. Neutrinos y la ecuación de Dirac

Los neutrinos, al ser fermiones ultrarrelativistas están descritos por la ecuación de Dirac.

Para un campo fermiónico libre, $\psi(x)$, la ecuación de Dirac se obtiene a partir de la Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) (i\rlap{\not{\partial}} - m) \psi(x), \quad (4.1)$$

donde $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ y donde se ha introducido la notación $\rlap{\not{\partial}} = \gamma^\mu a_\mu$ de Feynman ². Las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \quad \text{y} \quad \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0, \quad (4.2)$$

dan, entonces, la ecuación de Dirac:

$$(i\rlap{\not{\partial}} - m) \psi(x) = 0 \quad \text{y} \quad - (i\rlap{\not{\partial}} + m) \bar{\psi}(x) = 0, \quad (4.3)$$

donde la segunda ecuación de (4.3) es el conjugado hermitiano de la primera.

²De acuerdo con [51], la Lagrangiana de Dirac debe escribirse $\mathcal{L}'(x) = \bar{\psi}(x) (i\overleftrightarrow{\not{\partial}} - m) \psi(x)$, donde $\overleftrightarrow{\partial}_\mu = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)$, $\overrightarrow{\partial}_\mu$ es el operador de derivada normal, que actúa a la derecha, y $\overleftarrow{\partial}_\mu$ es el operador de derivada que actúa a la izquierda. Esto es así ya que la Lagrangiana debe ser explícitamente real. Esta Lagrangiana difiere de aquella de la ecuación (4.1) por la derivada total $\mathcal{L} - \mathcal{L}' = \frac{i}{2} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)$. Por el teorema de Gauss, la integral de una derivada total es un término de frontera, que es invariante bajo la variación que da origen a las ecuaciones de Euler-Lagrange, y como consecuencia, se obtendrá la misma ecuación de movimiento.

Además, si se multiplica por la izquierda a la ecuación de Dirac por $(-i\cancel{\partial} - m)$, entonces se obtiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\partial^2 + m^2) \psi(x) = (\square + m^2) \psi(x) = 0. \quad (4.4)$$

Por otro lado, la matriz $\gamma^5 \equiv \gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, llamada matriz de quiralidad, tiene dos valores propios: ± 1 . Además, siempre es posible descomponer un campo ψ en sus componentes izquierda, ψ_L , y derecha, ψ_R , las cuales son funciones propias de γ^5 , con valores propios $+1$ y -1 , respectivamente, de tal forma que

$$\psi = \psi_R + \psi_L, \quad (4.5)$$

donde

$$\psi_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \psi := R\psi \quad \text{y} \quad \psi_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi := L\psi. \quad (4.6)$$

Ahora, si se sustituye la descomposición del campo en sus componentes izquierda y derecha en la Lagrangiana (ecuación (4.1)) se obtendrá

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= (\overline{\psi_R}(x) + \overline{\psi_L}(x)) (i\cancel{\partial} - m) (\psi_R(x) + \psi_L(x)) \\ &= \overline{\psi_R}(x) i\cancel{\partial} \psi_R(x) + \overline{\psi_L}(x) i\cancel{\partial} \psi_L(x) - m (\overline{\psi_R}(x) \psi_L(x) + \overline{\psi_L}(x) \psi_R(x)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Es decir, las componentes izquierdas y derechas tienen términos cinemáticos independientes pero están acopladas por la masa. Más aun, las ecuaciones de Euler-Lagrange que satisfacen estos campos son

$$i\cancel{\partial} \psi_R = m \psi_L \quad \text{y} \quad i\cancel{\partial} \psi_L = m \psi_R, \quad (4.8)$$

por lo que la evolución de cada componente está relacionada por la masa m .

Campo sin masa

Ahora, en el caso de que el campo sea no masivo, las ecuaciones (4.8) se convierten en la Ecuación de Dirac para campos no masivos

$$i\cancel{\partial} \psi_R = 0 \quad \text{y} \quad i\cancel{\partial} \psi_L = 0. \quad (4.9)$$

De estas ecuaciones se concluye que una partícula no masiva de quiralidad izquierda (o derecha) no podrá cambiar a una partícula de quiralidad derecha (o izquierda) [52]. Más aun, si $\psi(x, p)$ es una solución de la Ecuación de Dirac para campos no masivos, entonces, al escribir de forma más explícita esa ecuación, se llega a

$$(\gamma^0 |\vec{p}| - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}) \psi(x, p) = 0, \quad (4.10)$$

y si se define a

$$\vec{\Sigma} = (i\gamma^2\gamma^3, i\gamma^3\gamma^1, i\gamma^1\gamma^2), \quad (4.11)$$

es decir, $\Sigma^k = \gamma^0 \gamma^k \gamma^5$, y se multiplica a la Ecuación de Dirac no masiva por $\gamma^5 \gamma^0$, entonces se encuentra que

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi(x, p) = \gamma^5 \psi(x, p), \quad (4.12)$$

donde se reconoce al operador de helicidad

$$\hat{h} = \frac{\vec{S} \cdot \vec{P}}{s|\vec{P}|} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|}, \quad (4.13)$$

si $P_\mu \rightarrow p_\mu$.

La ecuación (4.12) muestra que la helicidad de las funciones propias del operador de momento, que son soluciones de la ecuación de Dirac para campos no masivos, coincide con la quiralidad de esas funciones propias. En particular, las funciones propias de la matriz de quiralidad son funciones propias del operador de helicidad con el mismo valor propio:

$$\frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi_R(x, p) = + \psi_R(x, p) \quad \text{y} \quad \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \psi_L(x, p) = - \psi_L(x, p). \quad (4.14)$$

Por lo tanto, la componente derecha de un campo no masivo con momento definido tiene helicidad positiva, mientras que la componente izquierda de un campo no masivo con momento definido tiene helicidad negativa [51]. Es importante mencionar que aunque en el caso de partículas sin masa, la helicidad y la quiralidad son idénticas, en general no son lo mismo para partículas masivas: la helicidad nos dice si el espín y el momento de la partícula son paralelos o antiparalelos, y por lo tanto depende del marco de referencia en el que se mida. Se puede pensar que las partículas masivas, que son descritas por la Ecuación de Dirac, oscilan en el tiempo entre estados izquierdos y derechos, con una tasa determinada por su masa [52].

4.1.2. Solución a la ecuación no masiva de Dirac

Siguiendo a [51, 53], la solución general a la Ecuación de Dirac (ecuación (4.3)) se obtiene a partir de la expansión de Fourier del campo de Dirac

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left(a^{(h)}(p) u^{(h)}(p) e^{-ip \cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v^{(h)}(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (4.15a)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left(b^{(h)}(p) \bar{v}^{(h)}(p) e^{-ip \cdot x} + a^{(h)\dagger}(p) \bar{u}^{(h)}(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (4.15b)$$

donde h es la helicidad, $p_0 = E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, $u^{(h)}(p)$ y $v^{(h)}(p)$ son espinores y $a^{(h)}(p)$ y $b^{(h)}(p)$ son coeficientes numéricos, operadores de creación y aniquilación. Además, los espinores $u^{(h)}$ y $v^{(h)}$ satisfacen, cada uno, las ecuaciones

$$(i \not{\partial} - m) u^{(h)}(p) = 0 \quad \text{y} \quad (i \not{\partial} + m) v^{(h)}(p) = 0, \quad (4.16)$$

así como las análogas para los espinores adjuntos. De las ecuaciones anteriores se deduce que esos espinores son ortogonales

$$\overline{u^{(h)}}(p)v^{(h')}(p) = 0. \quad (4.17)$$

Los espinores $u^{(h)}$ y $v^{(h)}$ deben estar normalizados, es decir,

$$\overline{u^{(h)}}(p)u^{(h')}(p) = 2m\delta^{hh'}, \quad (4.18)$$

$$\overline{v^{(h)}}(p)v^{(h')}(p) = -2m\delta^{hh'}. \quad (4.19)$$

A partir de las condiciones de normalización de $u^{(h)}$ y $v^{(h)}$, así como las ecuaciones (4.16), se encuentra que los operadores de creación y aniquilación $a^{(h)}(p)$ y $b^{(h)}(p)$ están dados por

$$a^{(h)}(p) = \int d^3x u^{(h)\dagger}(p)\psi(x)e^{ip\cdot x}, \quad (4.20)$$

$$b^{(h)}(p) = \int d^3x \psi^\dagger(x)v^{(h)}(p)e^{ip\cdot x}. \quad (4.21)$$

Además, la normalización del campo,

$$\int d^3x |\psi(x)|^2 = 1, \quad (4.22)$$

implica que los coeficientes $a^{(h)}(p)$ y $b^{(h)}(p)$ están restringidos por

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[|a^{(h)}(p)|^2 + |b^{(h)}(p)|^2 \right] = 1. \quad (4.23)$$

En el caso particular en el que la partícula no tiene masa, los espinores $u^{(\pm)}$ y $v^{(\pm)}$ tienen solamente dos componentes diferentes de cero, por lo que las componentes quirales del campo estarán dadas por

$$\psi_{R,L}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left(a^{(h)}(p) u_{R,L}^{(h)}(p) e^{-ip\cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v_{R,L}^{(h)}(p) e^{ip\cdot x} \right), \quad (4.24)$$

donde

$$u_L^{(+)}(p) = u_R^{(-)}(p) = v_R^{(+)}(p) = v_L^{(-)}(p) = 0, \quad (4.25)$$

y se define a

$$u_R^{(+)}(p) = u^{(+)}(p), \quad u_L^{(-)}(p) = u^{(-)}(p), \quad v_R^{(-)}(p) = v^{(-)}(p), \quad v_L^{(+)}(p) = v^{(+)}(p). \quad (4.26)$$

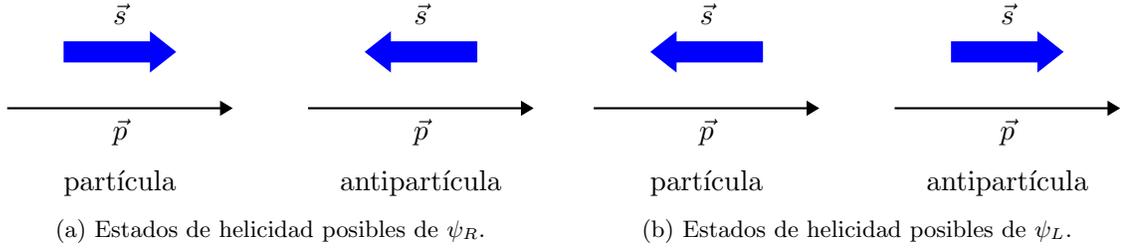


Figura 4.1: Estados de helicidad posibles de ψ_R y ψ_L . Figura del autor, basada en la Figura 2.1 de [51]

Por lo tanto, la expansión de Fourier de los campos quirales no masivos será

$$\psi_R(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left(a^{(+)}(p) u^{(+)}(p) e^{-ip \cdot x} + b^{(-)\dagger}(p) v^{(-)}(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (4.27)$$

$$\psi_L(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left(a^{(-)}(p) u^{(-)}(p) e^{-ip \cdot x} + b^{(+)\dagger}(p) v^{(+)}(p) e^{ip \cdot x} \right). \quad (4.28)$$

De las ecuaciones (4.27), se comprueba que los campos ψ_R y ψ_L son independientes, así como se había discutido anteriormente. Más aun, la componente de energía positiva de ψ_R y ψ_L tiene helicidad positiva y negativa, respectivamente. Por lo tanto, ψ_R solamente describe partículas con helicidad positiva y antipartículas con helicidad negativa, mientras que ψ_L describe partículas con helicidad negativa y antipartículas con helicidad positiva. Esto se muestra gráficamente en la Figura 4.1

4.1.3. El Modelo de Weinberg-Salam

Los neutrinos son partículas que solamente interactúan débilmente, mediante el intercambio de un bosón W^\pm o Z con otros fermiones, sin embargo, en la interacción débil, el campo W_μ que describe al bosón W^\pm solamente se acopla con fermiones de quiralidad izquierda, es decir, solamente un fermión izquierdo puede intercambiar un bosón W^\pm . Por ejemplo, un electrón masivo, que oscila entre sus componentes izquierda y derecha solamente puede emitir un bosón W^- (y, al hacerlo, convertirse en un neutrino) cuando es un electrón izquierdo [52]. La teoría que describe estas interacciones en el SM se conoce como el Modelo de Weingberg-Salam y se presentará a continuación, siguiendo a T. Lancaster y S. Blundell [52] ³.

³En Peskin y Schroeder [53] se presenta con mayor profundidad y formalidad ese desarrollo.

Teorías de Yang-Mills

Las teorías de Yang-Mills son teorías en las que las simetrías locales provienen de transformaciones no abelianas, por ejemplo del grupo SU(2).

En el caso de las simetrías del grupo SU(2), considérese la Lagrangiana para dos fermiones, f y g de masa m , dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{f} (i \not{\partial} - m) f + \bar{g} (i \not{\partial} - m) g \\ &= \bar{\Psi} (i \not{\partial} - m) \Psi,\end{aligned}\quad (4.29)$$

donde

$$\Psi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad y \quad \bar{\Psi} = (\bar{f} \quad \bar{g}). \quad (4.30)$$

La Lagrangiana de la ecuación (4.29) es invariante bajo las transformaciones globales del grupo SU(2)⁴

$$\Psi \rightarrow e^{\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}} \Psi, \quad y \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}}, \quad (4.31)$$

donde $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ son las matrices de isoespín de Pauli. La carga que se conserva a partir de esta simetría es el isoespín $\hat{\mathbf{I}} = \int d^3x \hat{\Psi}^\dagger \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \hat{\Psi}$.

Las transformaciones anteriores se pueden escribir, en su forma infinitesimal, como

$$\Psi \rightarrow \left(1 + \frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha} \right) \Psi \quad y \quad \bar{\Psi} \Psi \rightarrow \bar{\Psi} \Psi [1 + \mathcal{O}(\alpha^2)]. \quad (4.32)$$

Ahora, si $\boldsymbol{\alpha}$ es una función del espacio-tiempo x , el término de masa de la Lagrangiana (4.29) se mantendrá invariante por la forma en la que se transforman $\bar{\Psi} \Psi$ en la ecuación (4.32). Sin embargo, la derivada se transformará como

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow \partial_\mu \Psi + \frac{i}{2} [\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)] \partial_\mu \Psi + \frac{i}{2} [\boldsymbol{\tau} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\alpha}(x)] \Psi, \quad (4.33)$$

por lo que el último término evita que $\partial_\mu \Psi$ se transforme como Ψ , y por lo tanto no sea invariante.

Para hacer que la derivada sea invariante bajo las transformaciones de SU(2) se debe de introducir el campo de norma $\mathbf{W}_\mu(x)$ que tiene tres componentes internas ($W_\mu^1(x), W_\mu^2(x), W_\mu^3(x)$), cada una de las cuales tiene cuatro componentes en el espacio-tiempo de Minkowski. Este campo se combina con el operador de derivada para definir la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} g \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu(x), \quad (4.34)$$

⁴El grupo SU(n) es el grupo de matrices complejas cuadradas, de $n \times n$, que son unitarias, es decir, $MM^\dagger = M^\dagger M = 1$; y que además tienen determinante uno, es decir, $\det M = 1$.

donde g es la carga de la teoría e indica qué tan fuerte interactúa el campo \mathbf{W}_μ con las partículas Ψ . El campo \mathbf{W}_μ se transforma de acuerdo con

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \rightarrow \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu + \frac{1}{g} \boldsymbol{\tau} \cdot (\partial_\mu \boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{W}_\mu). \quad (4.35)$$

El acoplamiento entre una partícula fermiónica y un campo de norma externo se da a partir del Principio de Acoplamiento Mínimo, que en el caso de la interacción electromagnética corresponde, en el límite no relativista, con la interacción dipolar magnética. Las partículas con estructura no trivial, es decir aquellas que no son puntuales y tienen una posible distribución de carga, pueden tener interacciones adicionales (conocidas como acoplamiento no mínimo) debidas a su estructura. El Principio de Acoplamiento Mínimo establece que para una partícula puntual, el acoplamiento se da con el menor de los multipolos de su posible distribución de carga; en una partícula con multipolos de orden superior no nulos, no aplica [54]. En el Modelo de Weinberg-Salam, las partículas descritas se consideran puntuales a primer orden, por lo que el Principio de Acoplamiento Mínimo es válido y así, la interacción entre el campo de norma y el campo fermiónico está dada por la multiplicación del término que incluye a la derivada covariante en la Lagrangiana de Dirac, es decir,

$$\bar{\Psi} i \not{D} \Psi = \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi + \frac{g}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \Psi. \quad (4.36)$$

Al cuantizar el campo de norma \mathbf{W}_μ , se encontrarán excitaciones en ese campo que mediarán las interacciones entre los fermiones de la teoría. Se espera que W^1 , W^2 y W^3 sean partículas no masivas y similares al fotón, cada una con dos posibles polarizaciones transversales.

Además de la contribución que tiene el campo de norma a la derivada covariante, éste también contribuye a la Lagrangiana, por un término $-\frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{G}^{\mu\nu}$, donde

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + g (\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu), \quad (4.37)$$

lo que indica que $\mathbf{G}_{\mu\nu}$ es una función no lineal del campo de norma.

Por lo tanto, la expresión para la Lagrangiana localmente invariante bajo SU(2) es

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i \not{D} - m) \Psi - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{G}^{\mu\nu}. \quad (4.38)$$

El rompimiento de la simetría y el Mecanismo de Higgs

Para entender más fácilmente al Modelo de Weinberg-Salam, es conveniente pensar en el universo temprano, unos instantes después del Big Bang. En esta época, los campos leptónicos tienen una simetría interna SU(2) \otimes U(1). Aproximadamente 10^{-12} segundos después del Big Bang, el universo alcanzó una temperatura de 10^{16} K y sufrió una transición de fase que rompió la simetría que tenía.

Tabla 4.1:
Tabla de hipercarga débil, Y , e isoespín, I e I_3 .

Carga	ν_e	e_L	e_R
Y	-1	-1	-2
I	$+1/2$	$+1/2$	0
I_3	$+1/2$	$-1/2$	0

Antes del rompimiento de la simetría, los neutrinos, que en este modelo solamente se considerarán izquierdos, y los electrones (que existen tanto derechos como izquierdos) eran partículas no masivas. Por esto, la Lagrangiana que describe a estos campos será la Lagrangiana de Dirac para partículas no masivas:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \bar{\nu}_e(x) i \not{\partial} \nu_e(x) + \bar{e}_L(x) i \not{\partial} e_L(x) + \bar{e}_R(x) i \not{\partial} e_R(x) \\ &= \bar{\Psi}(x) i \not{\partial} \Psi(x),\end{aligned}\quad (4.39)$$

donde ν_e es el campo del neutrino, e_L es el campo del electrón izquierdo y e_R es el campo del electrón derecho. Además, en la segunda igualdad se definió a

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ e_L(x) \\ e_R(x) \end{pmatrix}.\quad (4.40)$$

En esta teoría existirán dos cargas conservadas: la hipercarga débil, Y , y el isoespín débil, I , que se relacionarán con la carga electromagnética, Q , mediante

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2},\quad (4.41)$$

donde los valores de Y , I e I_3 se presentan en la tabla 4.1. La ecuación (4.41) se conoce como la relación de Gell-Mann–Nishijima

Esta teoría tiene dos simetrías. La primera es una simetría local $U(1)$. Las transformaciones de $U(1)$ hacen que el campo adquiera un factor de fase $e^{i\beta(x)}$. Para asegurar la invariancia de la Lagrangiana, se introduce el campo de norma $B_\mu(x)$, que se transforma como $B_\mu(x) \rightarrow B_\mu(x) + \frac{1}{g'} \partial_\mu \beta(x)$, donde g' indica qué tan fuerte será la interacción de las partículas. Además, los campos fermiónicos se transformarán como

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ e_L(x) \\ e_R(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\beta(x)}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\beta(x)}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\beta(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ e_L(x) \\ e_R(x) \end{pmatrix}.\quad (4.42)$$

La otra simetría que tiene la teoría es una simetría local $SU(2)$. Los campos fermiónicos se transformarán de acuerdo a lo descrito anteriormente:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \rightarrow e^{\frac{i}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\alpha}(x)} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad e_R \rightarrow e_R.\quad (4.43)$$

Además, para garantizar la invariancia local, es necesaria la existencia del campo de norma $\mathbf{W}_\mu(x)$, que se transforma siguiendo a la ecuación (4.35).

Juntando las dos simetrías presentes en la teoría, se forma un mayor grupo de transformaciones: $SU(2) \otimes U(1)$. Para que la Lagrangiana sea explícitamente simétrica bajo este grupo, se deben de sustituir a las derivadas por las derivadas covariantes de cada simetría

$$U(1) : \quad D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} g' Y B_\mu(x) \Psi \quad (4.44)$$

$$SU(2) : \quad D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - i g I \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu(x) \Psi. \quad (4.45)$$

Como las partículas de quiralidad izquierda tienen los mismos valores de carga Y e I , mientras que los valores para el electrón derecho son diferentes, se pueden reescribir los campos para no tener que escribir explícitamente las cargas de cada partícula:

$$\Psi = \begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix}, \text{ donde } \quad L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}, \quad R = e_R. \quad (4.46)$$

Por lo tanto, las derivadas covariantes se escriben, en términos de los nuevos campos, como:

$$D_\mu L = \partial_\mu L - \frac{i}{2} g \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu L + \frac{i}{2} g' B_\mu(x) L, \quad (4.47)$$

$$D_\mu R = \partial_\mu R - i g' B_\mu R. \quad (4.48)$$

Por lo tanto, la Lagrangiana localmente simétrica, será

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{R} i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g' B_\mu) R + \bar{L} i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g' \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu + \frac{i}{2} g B_\mu \right) L \\ & - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(W)} \cdot \mathbf{G}^{(W)\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(B)} \cdot F^{(B)\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde $\mathbf{G}_{\mu\nu}^{(W)} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + g (\mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu)$ y $F_{\mu\nu}^{(B)} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

Si se agregara un término de masa a la Lagrangiana de la ecuación (4.49), entonces se violaría la simetría local que se introdujo, pues un término de masa relacionaría las componentes izquierdas y derechas del campo electrónico, pero como las transformaciones de $SU(2)$ actúan de modo diferente en la parte izquierda que en la derecha, entonces un término de masa no debe estar presente en esta Lagrangiana.

Ahora, se debe introducir un campo escalar complejo en el universo, llamado el campo de Higgs. El campo de Higgs tiene cuatro componentes dadas por

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

donde además,

$$\phi^\dagger \phi = (\phi^+)^* \phi^+ + (\phi^0)^* \phi^0 = \frac{1}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2). \quad (4.51)$$

Se define que el campo de Higgs tiene hipercarga débil $Y = +1$ e isospín débil $I = +1/2$, por lo que, bajo los grupos de transformaciones $U(1)$ y $SU(2)$, se transforma como

$$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\beta} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \rightarrow e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\alpha}} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Esto implica que la derivada covariante del campo de Higgs será

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - \frac{i}{2} g \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu \phi - \frac{i}{2} g' B_\mu \phi. \quad (4.53)$$

El campo de Higgs contribuirá a la Lagrangiana de (4.49) con

$$\mathcal{L}_\phi = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + \frac{m_h^2}{2} \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^4. \quad (4.54)$$

Como el término de masa es positivo, entonces el potencial será como el que se muestra en la Figura 4.2, en el que se deberá hacer el rompimiento explícito de la simetría, pues el estado base del campo de Higgs en el origen es diferente de cero.

La interacción entre el campo de Higgs y los campos de los electrones y neutrinos está dada por

$$\mathcal{L}_I = -G_e \left(\bar{L} \phi R + \bar{R} \phi^\dagger L \right), \quad (4.55)$$

donde G_e es la constante de acoplamiento entre el campo de Higgs y los campos leptónicos. Finalmente, la Lagrangiana del modelo de Weinberg-Salam será

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{L} i \not{D} L + \bar{R} i \not{D} R + (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + \frac{m_h^2}{2} \phi^\dagger \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^4 - G_e \left(\bar{L} \phi R + \bar{R} \phi^\dagger L \right) \\ & - \frac{1}{4} \mathbf{G}_{\mu\nu}^{(W)} \cdot \mathbf{G}^{(W)\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(B)} \cdot F^{(B)\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde las derivadas covariantes son las apropiadas para cada campo, es decir, las correspondientes a las ecuaciones (4.47), (4.48) y (4.53).

Una vez que pasan 10^{-12} segundos, después del Big Bang, el universo está a una temperatura menor a 10^{16} K, y su estado base rompe la simetría de $SU(2) \otimes U(1)$. El mínimo del potencial del campo de Higgs, descrito en la ecuación (4.54) no se encuentra en $(\phi)_0 = 0$, si no en $(\phi^\dagger \phi)_0 = v^2 = m_h^2/\lambda$, por lo que el rompimiento de la simetría con un nuevo estado base será en

$$(\phi_1)_0^2 = \frac{2m_h^2}{\lambda}, \quad (\phi_2)_0 = 0, \quad (\phi_3)_0 = 0, \quad (\phi_4)_0 = 0. \quad (4.57)$$

Si $(\phi_1)_0 = \left(\frac{2m_h^2}{\lambda}\right)^{1/2} = \sqrt{2}v$, entonces el estado base del campo será

$$(\phi)_0 = \begin{pmatrix} \phi^\dagger \\ \phi^0 \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

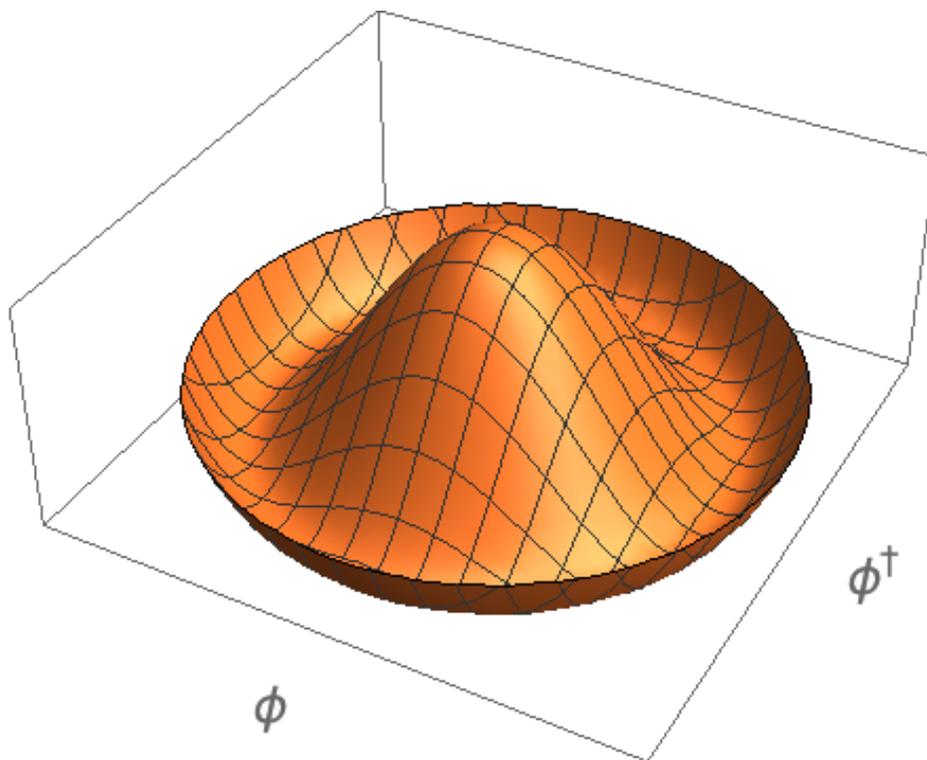


Figura 4.2: Potencial del campo de Higgs.

Aunque con la elección de este estado base se ha roto la simetría no abeliana que tiene la teoría, la elección del estado base es invariante bajo un subconjunto de las transformaciones de simetría originales, por lo que esas simetrías no están rotas. El vacío que se escogió tiene la propiedad de que es invariante bajo las transformaciones locales $\hat{U} = e^{i\left(\frac{Y}{2} + I_3\tau^3\right)\alpha(x)}$, que al sustituir la relación de Gell-Mann–Nishijima (ecuación (4.41)), se hace equivalente a las transformaciones de $U(1)$, $e^{iQ\alpha(x)}$. Esta invariancia tiene como resultado el electromagnetismo de Maxwell.

Para buscar los estados excitados del estado base, basta con considerar al campo como

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{h(x)}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

A partir de la Lagrangiana (ecuación (4.7)), se puede esperar que la masa de los electrones en la Lagrangiana del modelo de Weinberg-Salam provendrá del término que tenga la combinación $(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$, multiplicado por una cantidad escalar. Un término así se encuentra en el término de interacción entre el campo de Higgs y el campo leptónico, dado por la Lagrangiana de la ecuación (4.55). Insertando el estado excitado con rompimiento de la simetría en esa ecuación se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -G_e (\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi L) \\ &= -G_e \left((\bar{\nu}_e \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R \begin{pmatrix} 0 & \left(v + \frac{h(x)}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \right) \\ &= -G_e (\bar{e}_L v e_R + \bar{e}_R v e_L) - G_e \left(\bar{e}_L \frac{h(x)}{\sqrt{2}} e_R + \bar{e}_R \frac{h(x)}{\sqrt{2}} e_L \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

El primer término tiene la forma del término de masa, por lo que los electrones adquirirán una masa $m_e = G_e v$. Además, el campo del neutrino no aparece, por lo que se mantendrá como una partícula no masiva.

Para terminar, si se hace el rompimiento de la simetría en la derivada covariante del campo de Higgs, se encuentra que las partículas vectoriales W_μ^1 y W_μ^2 se hicieron masivas, con masas $M_W^2 = (gv)^2/2$. Además, la combinación de los campos de norma $(gW_\mu^3 - g'B_\mu)$ también adquirió masa, $M_Z = M_W/\cos\theta_W$, donde θ_W es el ángulo de Weinberg, definido como $\tan\theta_W = g'/g$, es decir, la masa de la combinación $(gW_\mu^3 - g'B_\mu)$, depende de las constantes de acoplamiento g y g' . Las excitaciones de estos campos se llaman los bosones W^+ , W^- y Z . Finalmente, la combinación lineal ortogonal al campo Z , $(g'W_\mu^3 + gB_\mu)$ no adquiere masa, y se propone que sea proporcional a A_μ , es decir, al fotón del electromagnetismo.

Como los campos W_μ y Z_μ adquirieron masa, del orden de $M_W \sim 80$ GeV, entonces, comparada con la interacción electromagnética, la interacción débil es de corto alcance, pues su efecto es importante a distancias menores que $1/M_W$.

Los vértices de la interacción electrodébil que predice el modelo de Weinberg-Salam se muestran en la figura 4.3.

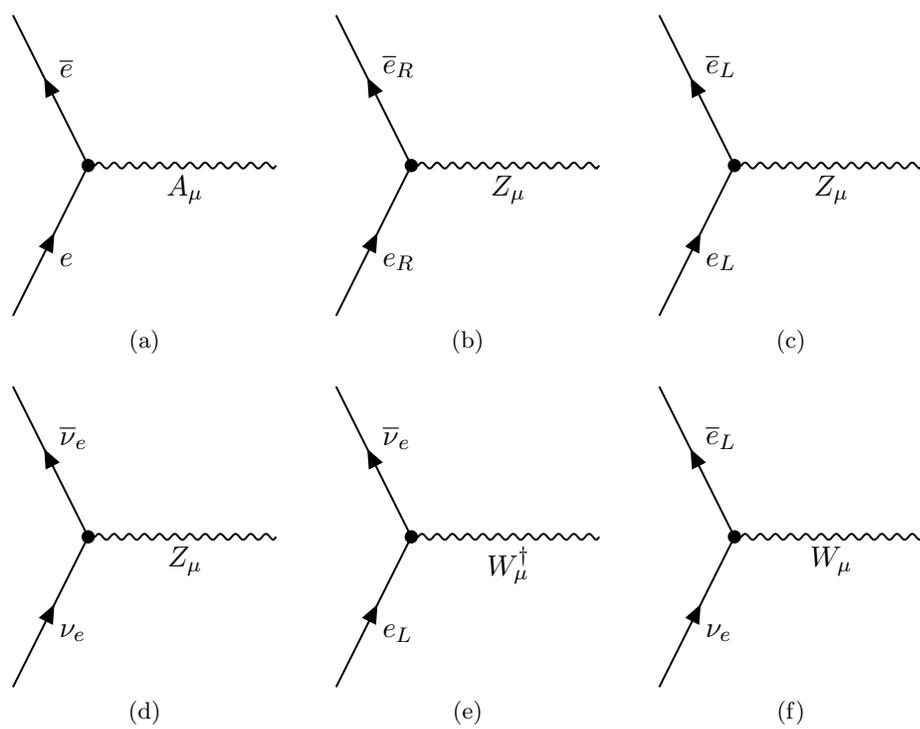


Figura 4.3: Vértices de la interacción electrodébil predichos por el modelo de Weinberg-Salam.

El modelo aquí presentado, no corresponde con la teoría completa, pues solamente está presente la primer generación de leptones y tampoco aparecen los quarks. Sin embargo, los principales resultados de la teoría se pueden resumir en que los electrones, muones, tau y quarks adquieren su masa mediante la interacción con el campo de Higgs, mientras que los neutrinos no adquieren masa, y por lo tanto, en el SM no tienen masa. Además, los bosones que median las interacciones débiles son masivos, mientras que el bosón que media la interacción electromagnética es no masivo.

4.1.4. La masa del neutrino en el Modelo Estándar

Tal y como se ha mostrado, en el modelo de Weinberg-Salam los neutrinos no adquieren masa mediante el mecanismo de Higgs. Sin embargo, solamente se considera la existencia de los neutrinos izquierdos, por lo que no pueden adquirir una masa como las partículas de Dirac, pues los dos estados de helicidad se requieren para que puedan adquirirla. En general, los neutrinos podrían adquirir un término de masa alternativo, llamado masa de Majorana, que es de la forma $\nu_L^T C^{-1} \nu_L$, donde C es la matriz de conjugación de carga. Esta forma requiere un solo estado de helicidad para la partícula, y utiliza el estado de helicidad contrario de la antipartícula. Sin embargo, ν_L es parte del doblete del campo de $SU(2)_L$ y tiene número leptónico $+1$, por lo que el término de masa de Majorana se transformaría como un triplete de $SU(2)_L$, que no es invariante de norma y separa al número leptónico en dos unidades. Más aun, la Lagrangiana del SM tiene una simetría de conservación del número leptónico exacta, por lo que incluso en teoría de perturbaciones los términos de masa de Majorana no pueden surgir en ningún orden. Por lo tanto, los neutrinos no tienen masa en ningún orden perturbativo [55]. Incluso bajo efectos no perturbativos, como la cancelación de la anomalía, donde la conservación de los números leptónico, L , y bariónico, B , se rompe. Sin embargo, la conservación del número de bariones menos leptones, $B - L$, debe conservarse a todos los órdenes, por lo que los efectos no perturbativos no pueden introducir una violación a la conservación de $B - L$. El operador de masa del neutrino violaría la conservación de este número, por lo que incluso en la presencia de efectos no perturbativos, la masa de los neutrinos deberá ser cero, dentro del modelo estándar [55].

4.2. Interacciones de neutrinos en medios densos y calientes

Dentro del SM, los neutrinos solamente interactúan débilmente. Sus interacciones consisten en el intercambio de los bosones de norma W^\pm y Z , por lo que están muy suprimidas, en especial cuando se propagan en el vacío y en los medios poco densos. Sin embargo, en los medios densos y calientes, como objetos astrofísicos (estrellas, los remanentes de supernovas) o el universo temprano (cerca de un segundo después del Big Bang), las interacciones de los neutrinos con el medio en el que se propagan son relevantes.

4.2.1. Física de neutrinos en medios materiales

Existen múltiples trabajos acerca de las interacciones de los neutrinos en medios densos. Por ejemplo en [55] se presentan los principales efectos que modifican la física de los neutrinos que se propagan por medios materiales, como su relación de dispersión, la cual, bajo una aproximación a primer orden, es $E_P = P \pm \sqrt{2} G_F (n_{e^-} - n_{e^+})$, donde G_F es la constante de Fermi, el signo positivo se toma para neutrinos, y el negativo, para antineutrinos, y n_{e^\pm} es la densidad de número de electrones y positrones. Además, algunos efectos electromagnéticos aparecen en los neutrinos, por ejemplo, adquieren una carga eléctrica efectiva $e_{\text{eff}} = \frac{1}{4} e G_F n_e \beta (g_V^{(e)} + 1)$, donde $g_V^{(e)}$ es el acoplamiento de la corriente cargada vectorial; más aun, se pueden dar: el decaimiento de plasmones a un par neutrino-antineutrino, el efecto Čerenkov de neutrinos y, si los neutrinos son masivos, puede ocurrir un decaimiento radiativo.

4.2.2. Camino libre medio de neutrinos en estrellas de neutrones

En el caso de la propagación de los neutrinos en estrellas de neutrones, existen dos tipos de procesos predominantes: la absorción y la dispersión de neutrinos, por las partículas del medio que conforma a la estrella. La sección eficaz y el camino libre medio de los neutrinos, para esos procesos, se ha calculado en [45, 56–63], cada uno con sus consideraciones y aproximaciones propias.

Por ejemplo, A. Burrows, en [63], calculó la emisividad de neutrinos de estrellas de quarks que se emiten mediante el proceso URCA de quarks a altas temperaturas, considerando que los quarks que componen a la estrella están libres y los electrones no se encuentran en un estado degenerado, debido a las altas temperaturas. Además, sus resultados muestran que las temperaturas de las estrellas de quarks son similares a las observadas.

N. Iwamoto, en [57], estudió la emisividad de neutrinos mediante diferentes procesos, como los procesos DURCA y MURCA de quarks, tomando en cuenta la presencia del quark s ; el bremsstrahlung de quarks y el decaimiento de plasmones de color, así como el efecto que tienen todos estos procesos en el enfriamiento de las estrellas de neutrones. Además, presenta el cálculo del camino libre medio de los neutrinos en materia de quarks, para los procesos de absorción ($d + \nu_e \rightarrow u + e$ y su inverso) y dispersión de neutrinos ($a + \nu \rightarrow a' + \nu'$) degenerados y no degenerados, que se muestran en la Figura 4.4, y compara los resultados del camino libre medio de los neutrinos en materia de quarks con aquellos para otras posibles materias que compongan a las estrellas de neutrones, como neutrones degenerados y condensados de piones. Sus resultados muestran que el camino libre medio de los neutrinos en materia de quarks y materia ordinaria de neutrones están dentro del mismo orden de magnitud y un orden de magnitud mayores que para la materia con condensados de piones. El camino libre medio, para temperaturas del orden de 10 MeV, es del orden de $10^2 - 10^3$ m.

Por otro lado, Reddy *et al.*, en [56], obtienen las secciones eficaces de los procesos de

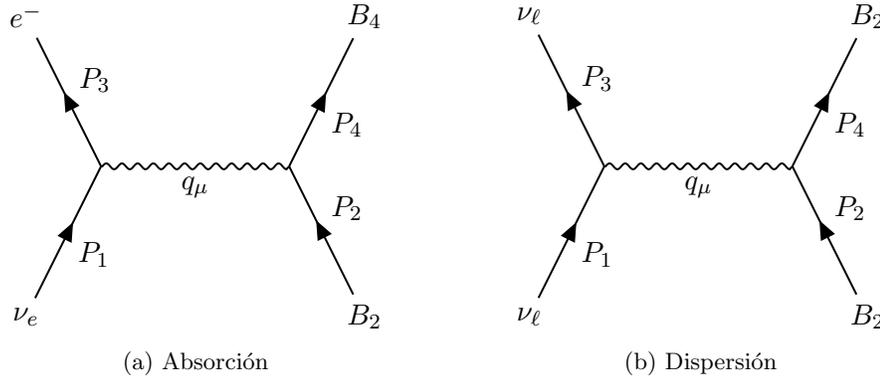


Figura 4.4: Diagramas de Feynman al orden más bajo para los procesos de absorción (a) y dispersión (b) de neutrinos. Las partículas etiquetadas como B_i son bariones o quarks, mientras que la partícula de cuadrimento q_μ es un bosón W para la absorción y un W o Z en la dispersión.

absorción y dispersión de neutrinos por bariones (Figura 4.4), como neutrones, protones, electrones, muones, hiperones Σ , Λ y Ξ , bajo diferentes aproximaciones. Por ejemplo, en un medio compuesto por bariones, que pueden o no interactuar entre ellos, que pueden o no ser relativistas, así como el contenido de extrañeza del medio. Con esos resultados obtienen las fracciones de cada uno de los componentes del medio, el potencial químico de los neutrinos, el camino libre medio de los neutrinos en diferentes situaciones - que tiene valores entre décimas y decenas de metros -, para temperaturas entre 30 y 60 MeV. A partir de esos resultados, obtienen la opacidad y los coeficientes de difusión de los neutrinos.

Reddy *et al.*, en [62], consideraron las interacciones de neutrinos que se propagan a través de la fase CFL de la estrella de quarks. Encuentran una expresión analítica para el camino libre medio y para la emisividad de neutrinos por esta fase. Así determinan que el camino libre medio de los neutrinos, para temperaturas entre 5 y 30 MeV, es entre 100 y 1 m, respectivamente.

Maruyama *et al.* [45], estudian con métodos perturbativos, bajo la aproximación de campo medio relativista, la dispersión y la absorción de neutrinos por materia de estrellas de neutrones (neutrones, protones y electrones) que contiene hiperones Λ . Este trabajo es similar al trabajo de Reddy *et al.* [56], pero con la diferencia de que Maruyama *et al.* consideran los efectos de campos magnéticos intensos en las secciones eficaces de los procesos de absorción y dispersión. El resultado que obtienen es que el campo magnético no tiene un impacto significativo en la sección eficaz de los procesos de dispersión, sin embargo, el campo magnético suprime la sección eficaz para la absorción en la dirección paralela al campo por un factor de 2–4 %, y la aumenta en la dirección antiparalela a éste por un factor cercano al 1 %. A partir de la sección eficaz que obtienen, encuentran el

camino libre medio de los neutrinos, a temperaturas de 20 y 40 MeV, que tiene valores de decenas de centímetros a algunos metros.

Pastore *et al.*, en [60], describen, bajo diferentes aproximaciones, las interacciones de la materia nuclear que compone a la estrella de neutrones dentro del formalismo de los Funcionales de Bruselas-Montreal Skyrme, para el cual argumentan que describe muy bien las propiedades de gran variedad de núcleos y ha reproducido varias constricciones que se han dado a la materia nuclear. Con este formalismo, encuentran que el camino libre medio de los neutrinos, debido a la dispersión, a temperatura baja (0–2 MeV), como función de la densidad de la materia que conforma a la estrella y la energía del neutrino, es del orden de centenas de metros a decenas de kilómetros.

Rrapaj *et al.*, en [58], estudian la razón de absorción por neutrinos en la neutrínosfera de las PNS, es decir, en sus capas más externas. Mediante el estudio de las reacciones de corrientes cargadas, bajo la aproximación de Hartree-Fock, estudian el diagrama de absorción de la Figura 4.4 (a), en donde B_2 y B_4 son un neutrón y un protón, respectivamente, así como el bremsstrahlung inverso. Para una temperatura de 8 MeV, el camino libre medio de los neutrinos en la neutrínosfera es del orden de decenas de metros a decenas de kilómetros, dependiendo de si la reacción involucra neutrinos o antineutrinos. Además, encuentran que la tasa de absorción de neutrinos aumenta, mientras que la de antineutrinos se suprime, es decir, la materia de la neutrínosfera absorbe en una mayor proporción a los neutrinos que a los antineutrinos, por lo que el camino libre medio de los últimos es mayor. Roberts y Reddy, en [59], modifican el trabajo de Rrapaj *op. cit.*, al aplicar la aproximación de campo medio y correcciones relativistas a las corrientes cargadas de nucleones, entre otras correcciones, a la razón de absorción. Sus resultados del camino libre medio, para una temperatura de 10 MeV y densidades bajas, son equivalentes a los resultados de Reddy *et al.* [56], sin embargo, para densidades supranucleares, como las que hay en el interior de las estrellas de neutrones, las correcciones son más relevantes.

Torres Patiño *et al.* [61], estudian la dispersión de neutrinos por neutrones (Figura 4.4 (b)). La materia que conforma a la estrella consiste de neutrones polarizados por campos magnéticos intensos, descrita bajo la aproximación no relativista de Brueckner-Hartree-Fock. Sus resultados muestran que, para campos magnéticos de intensidad $10^{17} - 10^{18}$ G y una temperatura de 30 MeV, el camino libre medio de los neutrinos es de 1 a 10 metros.

Finalmente, Sagert *et al.* [41], a partir del trabajo de Iwamoto *op. cit.*, da unas expresiones aproximadas para los caminos libres medios de los procesos de absorción y dispersión de neutrinos en materia de quarks, compuesta de quarks u , d y s . Aunque estas expresiones no toman en cuenta la influencia del campo magnético, ilustran de buena manera el comportamiento del camino libre medio, como función de la temperatura. A continuación se resume el trabajo de Sagert *op. cit.*

El camino libre medio para el proceso de absorción de neutrinos no degenerados, λ_{abs} ,

está dado por

$$\begin{aligned}\lambda_{abs} &= \frac{\pi^4}{4} \left(\alpha_s G_F \cos^2 \Theta_C p_F(d) p_F(u) p_F(e) \right)^{-1} \left(\frac{1 + e^{-E_\nu/T}}{E_\nu^2 + (\pi T)^2} \right) \\ &\sim \left(3 \times 10^4 \text{ m} \right) \left(\frac{\mu_e}{\text{MeV}} \right)^{-1} \left(\frac{\mu_q}{400 \text{ MeV}} \right)^{-2} \left(\frac{T}{\text{MeV}} \right)^{-2},\end{aligned}\quad (4.61)$$

donde α_s es la constante de acoplamiento fuerte de las interacciones entre quarks, G_F es la constante de Fermi, $\cos^2 \Theta_C = 0.948$ es el ángulo de Cabbibo, $p_F(i)$ es el momento de Fermi de la partícula i , E_ν es la energía del neutrino absorbido y que se aproximará por $E_\nu \sim \pi T$, μ_e es el potencial químico del electrón y μ_q es el potencial químico de los quarks, que se supone es igual para todas las especies.

Por otro lado, el camino libre medio para el proceso de dispersión por la partícula i en materia de quarks, en donde no se consideran las interacciones entre quarks, está dado por

$$\lambda_{scat}^i = \frac{20}{C_{V_i}^2 + C_{A_i}^2} \frac{\pi^2}{\mu_q^2 \sigma_0 m_e} \left(\frac{m_e}{E_\nu} \right)^3, \quad (4.62)$$

donde C_V y C_A son las constantes de acoplamiento vectorial y axial, que se encuentran en la Tabla II de Iwamoto *op. cit.*, $\sigma_0 = 4 m_e^2 G_F^2 / \pi$. El inverso del camino libre medio de dispersión total, λ_{scat}^{-1} , se define como la suma de los inversos de los caminos libres medios de dispersión por cada partícula, es decir, la suma del inverso de la ecuación (4.62), para cada partícula. La dispersión de neutrinos por electrones se considera como un proceso subdominante con respecto a la dispersión por quarks, y no se tomará en cuenta su contribución. Por lo tanto, el camino libre medio de dispersión total, estará dado por

$$\begin{aligned}\lambda_{scat} &= \left(\sum_{i=u,d,s} \frac{1}{\lambda_{scat}^i} \right)^{-1} \\ &\sim \left(4 \times 10^4 \text{ m} \right) \left(\frac{\mu_q}{400 \text{ MeV}} \right)^{-2} \left(\frac{T}{\text{MeV}} \right)^{-3}\end{aligned}\quad (4.63)$$

donde, nuevamente, se aproximó $E_\nu \sim \pi T$. El camino libre medio de los neutrinos, para los procesos de absorción y dispersión, dados por las ecuaciones (4.61) y (4.63) se muestra en la Figura 4.5 (a).

De acuerdo con Sagert *op. cit.*, el camino libre medio total, debido a la absorción y a la dispersión, está dado por

$$\lambda_{tot} = \left(\frac{1}{\lambda_{scat}} + \frac{1}{\lambda_{abs}} \right)^{-1}, \quad (4.64)$$

mientras que Reddy *et al.* [56], argumentan que debe estar dado por

$$\lambda_{tot} = \left(1 - f(E_\nu) \right) \left(\frac{1}{\lambda_{scat}} + \frac{1}{\lambda_{abs}} \right)^{-1}, \quad (4.65)$$

donde $f(E_\nu)$ es la distribución de Fermi-Dirac, E_ν es la energía del neutrino y se aproximará por el potencial químico del neutrino. El factor $(1 - f(E_\nu))$ toma en cuenta al proceso inverso. En la Figura 4.5 (b), se muestra el camino libre medio total de los neutrinos, dado por las ecuaciones (4.64) y (4.65).

A partir de los valores que se han discutido en esta sección, así como los que se muestran en la Figura 4.5, se puede concluir que el orden de magnitud del camino libre medio de los neutrinos en materia de quarks de una PNS es de un metro.

4.3. Física de neutrinos más allá del Modelo Estándar

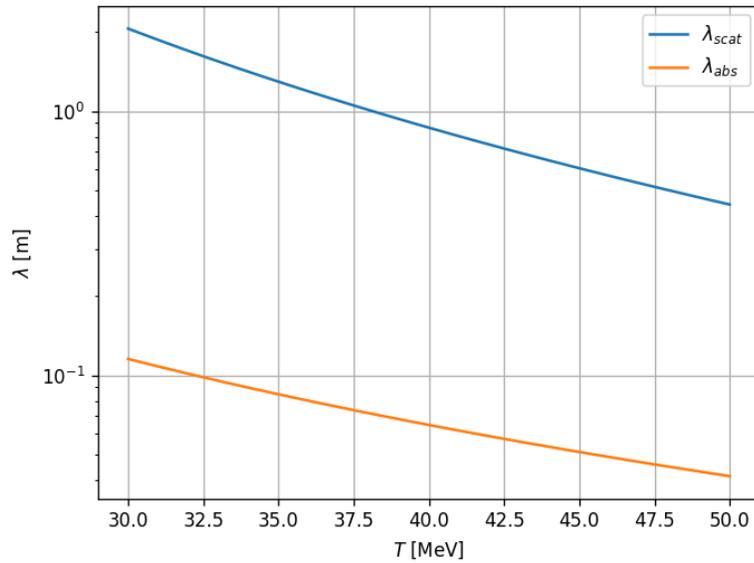
En 1964, los estadounidenses Raymond Davis (1914 – 2006) y John Bahcall (1934 – 2005) propusieron un experimento para detectar y medir el flujo de neutrinos del Sol, basándose en el modelo solar de Bahcall, que posteriormente sería conocido como el Modelo Estándar Solar. Los resultados del experimento mostraron que solamente se detectaron cerca de la tercera parte de los neutrinos que se esperaban, por lo que había algo mal con el experimento, el modelo solar o la física de neutrinos del SM. A la deficiencia en el flujo se le conoce como el problema de los neutrinos solares.

A partir de la instalación y puesta en marcha de otros experimentos, a finales de la década de 1980, como el (Super) Kamiokande, en Japón; SAGE, en Rusia; GALLEX y GNO, en Italia; así como SNO, en Canadá, se pudo comprobar que, en efecto, se detectaban cerca de la tercera parte de los neutrinos esperados e incluso, se detectaban neutrinos del electrón, del muón y del tau, cuando se esperaba que solamente se observaran neutrinos electrónicos. Más aun, otras predicciones del Modelo Estándar Solar (como los temblores solares), que utilizan las mismas hipótesis que aquellas que se utilizan para predecir el flujo de neutrinos, mostraron que el modelo era suficientemente correcto como para predecir el flujo correcto de neutrinos. Por lo tanto, había algo erróneo con la física de los neutrinos que aparece en el SM.

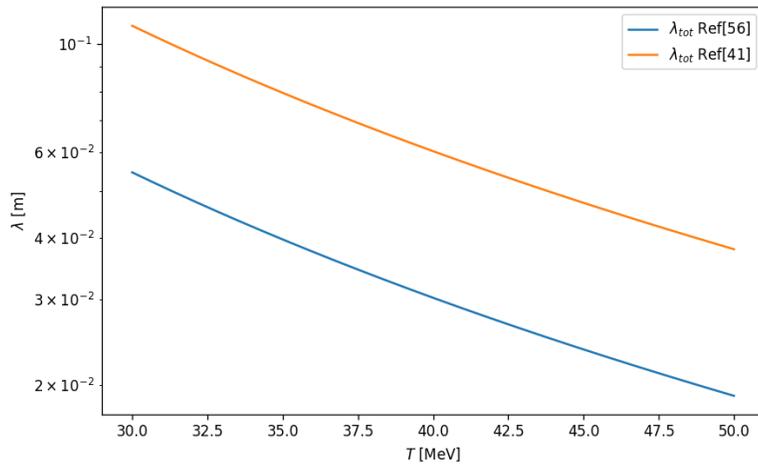
La explicación al problema de los neutrinos solares se encontró en la suposición de la masa de los neutrinos: si los neutrinos son masivos, entonces a partir del fenómeno de las oscilaciones de neutrinos, el cual puede ocurrir debido a que los neutrinos son masivos, se pudo resolver el problema de los neutrinos solares.

A partir de las mediciones del espectro de energía del decaimiento β , se ha podido determinar que la masa del neutrino electrónico debe ser menor que 2.05 eV. Por otro lado, las mediciones de las masas de los neutrinos del muón y del tau no han sido muy restrictivas, sin embargo, Peskin [64] argumenta que las masas de los neutrinos distan a lo más 1 eV, entre ellas. Además, si la masa de los neutrinos es suficientemente grande, en el universo temprano hubieran transferido su energía y modificado la formación de estructura, por lo que la ausencia de estos efectos da la cota de

$$\sum_{i=e,\mu,\tau} m_i < 0.23 \text{ eV} \quad (4.66)$$



(a) Camino libre medio de absorción y dispersión



(b) Camino libre medio total

Figura 4.5: Camino libre medio de los neutrinos como función de la temperatura. En el panel superior (a) se muestran los caminos libres medios debidos a los procesos de absorción y de dispersión, dados por las ecuaciones (4.61) y (4.63), con $\mu_e = 400$ MeV y $\mu_q = 340$ MeV. En el panel inferior (b) se muestra el camino libre medio total, dado por las ecuaciones (4.64) y (4.65), en donde $\mu_\nu = 325$ MeV.

4.3.1. La masa de los neutrinos

Como se mostró anteriormente, las partículas que conforman al SM adquieren masa a través del mecanismo de Higgs. En la versión ya presentada del modelo de Weinberg-Salam, existen electrones derechos e izquierdos, así como neutrinos izquierdos. Incluso en la versión completa del modelo de Weinberg-Salam, en donde se consideran las tres generaciones de quarks y leptones, los neutrinos solamente existen como partículas de quiralidad izquierda, mientras que los demás fermiones tienen las dos componentes. Esto plantea la pregunta de por qué no aparecen las componentes derechas de los neutrinos, pues si estos existieran, posiblemente podrían formar un término de masa, así como los demás fermiones. Además, aunque los neutrinos que se han observado son todos izquierdos (y los antineutrinos, derechos), esto no implica que no existan los neutrinos derechos (y los antineutrinos izquierdos), pues no hay ninguna razón fundamental para no incluirlos.

La evidencia que dio el problema de los neutrinos solares mostró que los neutrinos tienen masa. Existen varios modelos para explicar la masa de los neutrinos, como por ejemplo los modelos de simetría izquierda y derecha, los modelos de gran unificación, los modelos de supersimetría y los modelos de grandes mezclas, entre otros. Estos modelos se revisan con cierto detalle en Pal *et al.* [55], pero para los propósitos de este trabajo basta con considerar el modelo conocido como la “*mínima extensión del SM*” o “*con sector fermiónico crecido*”, que se presenta a continuación, siguiendo a Pal *et al.*, *op. cit.* y Zukanovich Funchal *et al.* [6], el cual también está basado en el grupo de norma $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Como ya se mencionó, en la Lagrangiana del SM todas las partículas tienen sus componentes izquierda y derecha, menos los neutrinos, por lo que se agregarán singletes de $SU(2)_L$, es decir, campos neutros $N_{\ell R}$ correspondientes a cada leptón cargado ℓ . La relación de Gell-Mann–Nishijima (ecuación (4.41)) implica que los singletes tienen hipercarga débil $Y = 0$. Esto se representa como $N_{\ell R} : (1, 0)$. Además, estos campos son singletes del grupo de norma entero, es decir, no interactúan con los bosones de norma. Sin embargo, aunque estos campos no interactúan, afectarán al modelo de forma no trivial, pues su presencia implicará nuevas interacciones de norma que aparecen en el sector de Yukawa de la Lagrangiana, es decir

$$- \mathcal{L}'_Y = \sum_{\ell, \ell'} f_{\ell\ell'} \bar{L} \hat{\phi} N_{\ell' R} + \text{h.c.}, \quad (4.67)$$

donde $f_{\ell\ell'}$ son las nuevas constantes de acoplamiento, \bar{L} es el doblete leptónico de la ecuación (4.46) y ϕ es el campo de Higgs (con el mismo valor del estado base definido anteriormente), que hará que aparezca en la Lagrangiana un término de masa

$$- \mathcal{L}_{masa} = \sum_{\ell\ell'} \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{\ell L} N_{\ell' R} + \text{h.c.} \quad (4.68)$$

Este es un término de masa para los neutrinos si se identifica a los campos $N_{\ell R}$ con las componentes derechas de los neutrinos, es decir, $N_{\ell R} = \nu_{\ell R}$. La matriz de masa $M_{\ell\ell'} = \frac{v}{\sqrt{2}} f_{\ell\ell'}$, en general no es diagonal, por lo que los campos $\nu_{\ell L}$ y $N_{\ell R}$ no corresponden con

las proyecciones izquierda y derecha de los campos físicos, sin embargo, si se encuentran los vectores propios de la matriz M , mediante la transformación biunitaria $U^\dagger M V = m$, donde m es una matriz diagonal, entonces los nuevos estados, definidos por las relaciones

$$\nu_{\ell L} := \sum_{\alpha} U_{\ell\alpha} \nu_{\alpha L}, \quad (4.69)$$

$$N_{\ell R} := \sum_{\alpha} V_{\ell\alpha} N_{\alpha R}, \quad (4.70)$$

se pueden sustituir en el término de masa de la Lagrangiana para los neutrinos, obteniendo

$$- \mathcal{L}_{masa} = \sum_{\alpha} \bar{\nu}_{\alpha L} m_{\alpha} \nu_{\alpha R} + \text{h.c.}, \quad (4.71)$$

donde m_{α} es el elemento α -ésimo de la diagonal de la matriz m . Este término de masa de la Lagrangiana muestra que los campos ν_{α} son campos con masa definida m_{α} y, por lo tanto, son partículas físicas.

Sin el término de masa de los neutrinos, la Lagrangiana era invariante bajo las transformaciones

$$e_{\alpha} \rightarrow e^{i\phi_{\alpha}} e_{\alpha} \quad \text{y} \quad \nu_{\alpha} \rightarrow e^{i\phi_{\alpha}} \nu_{\alpha} \quad (4.72)$$

y además, los números leptónicos de cada familia, L_e , L_{μ} y L_{τ} se conservaban. Pero ahora, como los neutrinos tienen masa, los términos $\bar{\nu}_{\alpha L} \nu_{\alpha R}$ y $(i\bar{\nu}_{\alpha L} \not{\partial} \nu_{\alpha L} + i\bar{\nu}_{\alpha R} \not{\partial} \nu_{\alpha R})$ no pueden ser invariantes ante esta transformación al mismo tiempo. Por lo tanto, los números leptónicos de cada familia no se conservan, pero el número leptónico total, que se define como la suma de los tres, sí se conserva.

Más aun, como muestran Zukanovich Funchal *et al.* [6] y Giunti *et al.* [51], las corrientes leptónicas, neutra y cargada, para neutrinos, no dependen de las componentes derechas de los campos de los neutrinos, por lo que no participan en ninguna reacción, y por lo tanto son estériles. Esto se conoce como el mecanismo de Glashow Iliopolos Miani (GIM). Como los campos de quiralidad izquierda son independientes de los derechos, los grados de libertad activos y estériles permanecen desacoplados y la oscilación entre estados activos y estériles no es posible bajo las interacciones débiles.

Un problema del modelo aquí presentado, de la masa de los neutrinos, es que no explica por qué las masas de los neutrinos son tan pequeñas, en comparación con las de los demás fermiones, además, la inclusión de los neutrinos derechos que se presentó es un poco arbitraria, por lo que se han propuesto modelos más sofisticados, sin embargo, para los propósitos de este trabajo basta con asumir que los neutrinos son masivos y examinar las consecuencias que esto tiene.

4.3.2. Oscilaciones de neutrinos

Una de las consecuencias más importantes que tiene la existencia de masa de los neutrinos es el efecto de las oscilaciones de neutrinos, en el que éstos se estudian como una superposición de los distintos sabores.

El modelo más simple de oscilaciones de neutrinos supone que los estados propios de la interacción débil (sabores), ν_e , ν_μ , y ν_τ , difieren de los estados propios de masa, que se denotan por ν_i , $i = 1, 2, 3$. Más aun, no es de importancia el mecanismo que hace masivos a los neutrinos, solamente importa que lo son.

Para explicar el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos, siguiendo a Pal *et al.* [55], Giunti *et al.* [51] y a Zukanovich Funchal *et al.* [6], se debe descomponer al estado propio de sabor, ν_α , en la base de estados propios de masa.

Suponiendo que: existen n especies diferentes de neutrinos, y que la base de los estados propios de sabor y la de los estados propios de masa están relacionados por una matriz unitaria U .

Dado que los neutrinos, de sabor α , son producidos por las corrientes cargadas de la interacción débil a partir de un leptón cargado, ℓ_α^- , o junto con un anti leptón, ℓ_α^+ , como paquetes de onda localizados alrededor de una fuente de posición $x_0 = (t_0, x_0)$, por lo que el estado del neutrino debería estar dado por

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_j(\vec{p}) e^{-iE_i(t-t_0)} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)} |\nu_i\rangle, \quad (4.73)$$

donde $|\nu_\alpha(0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle$. Sin embargo, como los estados de neutrinos masivos $|\nu_i\rangle$ son estados propios del Hamiltoniano, entonces

$$H |\nu_i\rangle = E_i |\nu_i\rangle, \quad (4.74)$$

con valores propios de energía $E_i^2 = p^2 + m_i^2$. Además, la ecuación de Schrödinger,

$$i \frac{d}{dt} |\nu_i(t)\rangle = H |\nu_i\rangle, \quad (4.75)$$

implica que los estados de neutrinos masivos evolucionan en el tiempo como ondas planas

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle. \quad (4.76)$$

Es decir, bajo una primera aproximación se pueden utilizar ondas planas, aunque es incorrecto conceptualmente, pues los neutrinos son partículas ultrarrelativistas, y por lo tanto están descritos por la ecuación de Dirac, no por la de Schrödinger. Sin embargo, la aproximación de ondas planas da el resultado correcto [6], por lo que la evolución del estado de sabor es

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i(t)\rangle, \quad (4.77)$$

donde todos los $|\nu_i\rangle$ tienen el mismo momento p , pero al tener diferente masa, su energía es diferente ⁵. En general, el neutrino creado, ν_α , no es una partícula física, sino una

⁵Debido al Principio de Incertidumbre de Heisenberg, esta suposición no es totalmente cierta, pues si p está muy bien determinado, la posición del punto donde se producen los neutrinos tendrá una incertidumbre muy grande. Por lo tanto, un tratamiento correcto deberá considerar a los neutrinos como un paquete de ondas que tendrá diferentes valores de momento. Sin embargo, como Pal *et al.* [55] mencionan, el tratamiento formal llega al mismo resultado.

superposición de los campos ν_i con masas diferentes m_i . Además, la suma de la ecuación anterior no limita el número de neutrinos masivos, pues aunque se conocen tres sabores, el número de neutrinos masivos es mayor o igual a tres: si este número es mayor que tres, los neutrinos adicionales en la base de sabores serán estériles, es decir, no interactúan débilmente [51].

El operador $\nu_\alpha = \sum_i U_{\alpha i} \nu_i$ aniquila partículas y crea antipartículas, mientras que $\bar{\nu}_\alpha = \sum_i U_{\alpha i}^* \bar{\nu}_i$ crea partículas y aniquila antipartículas. Por lo tanto, el estado $|\nu_\alpha\rangle$ es creado por el operador $\bar{\nu}_\alpha$.

Por otro lado, como la matriz U es unitaria, entonces la ecuación (4.77) se puede invertir a $|\nu_i\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle$, y al sustituir esta expresión, junto con la evolución del estado de neutrinos masivos en el tiempo (ecuación (4.76)) se obtiene

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_\beta \left(\sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} U_{\beta i} \right) |\nu_\beta\rangle. \quad (4.78)$$

En consecuencia, la superposición de estados de neutrinos masivos, $|\nu_\alpha(t)\rangle$, que es el estado puro de sabor en el tiempo $t = 0$, se convierte en una superposición de estados de diferentes sabores en el tiempo $t > 0$.

Ahora, la probabilidad de transición al estado de sabor β es

$$P_{\alpha\beta}(t) = |\langle \nu_\alpha(t) | \nu_\beta \rangle|^2 = \left| \sum_{i=1}^n U_{\alpha i} U_{\beta i}^* e^{-iE_i t} \right|^2, \quad (4.79)$$

donde se aplicó el hecho que los estados propios de masa son ortonormales. Como los neutrinos son partículas ultrarrelativistas, entonces se puede expandir la energía en serie de Taylor y obtener

$$E_i \approx p + \frac{m_i^2}{2p} := E + \frac{m_i^2}{2E}. \quad (4.80)$$

Ahora, la probabilidad de transición, después de que el neutrino recorrió una distancia $L \simeq t$, es

$$P_{\alpha\beta}(L) = \sum_{i,j=1}^n U_{\alpha i} U_{\beta i}^* U_{\alpha j}^* U_{\beta j} e^{-\frac{i\Delta m_{ij}^2}{2E} L}, \quad (4.81)$$

donde $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$.

La matriz U es una matriz cuadrada de $n \times n$ que recibe el nombre de matriz de mezcla y, en general, depende de n^2 parámetros, de los cuales $n(n-1)/2$ son ángulos de mezcla y $n(n+1)/2$ son fases. En el caso más simple, en el que $n = 2$, es decir que solamente existen dos sabores de neutrinos (e y μ), existe un único ángulo de mezcla, θ , así como una fase δ que toma en cuenta la violación de la simetría CP. Por lo tanto, en el caso más general, la matriz U se escribe como

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\delta} \sin \theta \\ -e^{i\delta} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4.82)$$

y así, las probabilidades de oscilación son

$$\begin{aligned} P_{e\mu}(L) &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E} \right) \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\pi L}{L_{osc}} \right), \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$P_{ee}(L) = 1 - P_{e\mu}(L), \quad (4.84)$$

donde $L_{osc} = \frac{4\pi E}{\Delta M_{12}^2}$ es la longitud de oscilación. Nótese que $P_{e\mu}$ es la probabilidad de conversión (o transición) y P_{ee} es la probabilidad de supervivencia de los neutrinos electrónicos y la fase δ , relacionada con la violación a la simetría de CP, no aparece. Además, si $L \gg L_{osc}$, entonces la probabilidad de conversión se reduce a

$$P_{e\mu}(L) = \sin^2 2\theta, \quad (4.85)$$

que es de gran importancia experimental.

Por otro lado, si se consideran los tres sabores de neutrinos (e , μ y τ), la matriz U tendrá tres ángulos de mezcla y una fase que corresponde con la violación de la simetría CP. Por lo tanto, U se puede parametrizar por

$$U = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{13} s_{23} e^{i\delta} & c_{13} s_{23} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} s_{13} c_{23} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} s_{13} c_{23} e^{i\delta} & c_{13} c_{23} \end{pmatrix}, \quad (4.86)$$

donde $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ y δ es la fase, con $\theta_{ij} \in [0, \pi/2]$ y $\delta \in [0, 2\pi]$. Además, la diferencia de masa satisface

$$\Delta m_{31}^2 = \Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2. \quad (4.87)$$

Un caso de interés es para cuáles valores de $|U_{\alpha i}|^2$ y $|U_{\beta i}|^2$, que aparecen en la ecuación (4.81), con $\alpha \neq \beta$, la probabilidad de transición es máxima. Giunti y Kim, en [51] encuentran, a partir del método de multiplicadores de Lagrange, que el promedio de la máxima probabilidad de supervivencia es

$$\langle P_{\alpha\beta} \rangle_{max} = \frac{1}{n}, \quad (4.88)$$

donde n es el número de neutrinos masivos. Además, el promedio de la mínima probabilidad de supervivencia de los neutrinos es

$$\langle P_{\alpha\alpha} \rangle_{min} = \frac{1}{n}. \quad (4.89)$$

Si todos los elementos de la matriz de mezcla tienen el mismo valor absoluto, esto corresponde con la mínima probabilidad promedio de supervivencia y máxima probabilidad promedio de transición.

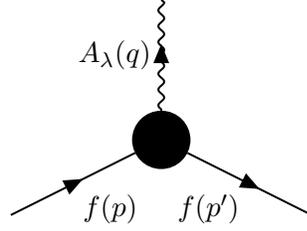


Figura 4.6: Vértice electromagnético efectivo de un fermión.

La conclusión de lo expuesto anteriormente es que se puede detectar la presencia de las pequeñas masas de los neutrinos si los neutrinos oscilan entre los diferentes sabores, es decir, el efecto de un término de masa es generar oscilaciones de sabor que, además, son función de la distancia a la que están de la fuente de neutrinos. Por ejemplo, para neutrinos de energías del orden de MeV con masas del orden de 10^{-2} eV, o para neutrinos de energías del orden de GeV con masas del orden de 10^{-1} eV, la escala de longitud de la oscilación es del orden de kilómetros [64].

4.3.3. Propiedades electromagnéticas de los neutrinos y su momento magnético

Como se ha mencionado, los neutrinos, al propagarse en medios materiales adquieren algunas propiedades electromagnéticas, como carga eléctrica efectiva. Más aun, al considerar neutrinos masivos, las propiedades electromagnéticas de los neutrinos adquieren una mayor relevancia.

Las propiedades electromagnéticas de cualquier fermión aparecen, dentro de las teorías cuánticas de campos, como su interacción con el fotón, y están descritas por el vértice de interacción efectivo, que se muestra en el diagrama de la Figura 4.6 [55]. Para fermiones cargados, existe un diagrama de esta forma incluso al nivel árbol, pues la Lagrangiana de interacción contiene un término $\mathcal{L}_{int} = eQ\bar{\psi}\gamma_\lambda\psi A^\lambda$, donde e es la carga del positrón y Q es la carga del fermión, en unidades de e . Para fermiones sin carga, como los neutrinos, este término está ausente, por lo que las interacciones solamente surgen al nivel de lazos, y por lo tanto, en general, dependen del momento. En analogía con el término de interacción de la Lagrangiana para fermiones cargados, la interacción efectiva para los neutrinos se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{eff} = \bar{\psi}\mathcal{O}_\lambda\bar{\psi}A^\lambda \equiv j_\lambda(x)A^\lambda(x), \quad (4.90)$$

donde j_λ es la corriente electromagnética. El elemento de matriz de esta Lagrangiana efectiva, entre dos estados de una partícula es

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{s}' | j_\lambda(0) | \mathbf{p}, \mathbf{s} \rangle = \bar{u}_{\mathbf{s}'}(\mathbf{p}') V_\lambda(p, p') u_{\mathbf{s}}(\mathbf{p}), \quad (4.91)$$

donde $u_s(\mathbf{p})$ es un espinor, que es una solución de onda plana y energía positiva de la ecuación de Dirac y V_λ es el vértice efectivo de la interacción.

Además, la conservación de la corriente electromagnética implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{p}', \mathbf{s}' | \partial^\lambda j_\lambda(x) | \mathbf{p}, \mathbf{s} \rangle \\ &= iq^\lambda \bar{u}(\mathbf{p}') V_\lambda(p, p') u(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (4.92)$$

donde $q = p - p'$. Mientras esta ecuación es general para fermiones, una condición más restrictiva para fermiones sin carga, como los neutrinos, se obtiene de la identidad de Ward

$$q^\lambda V_\lambda(p, p') = 0. \quad (4.93)$$

Por tanto, la forma más general para V_λ , que es consistente con la covariancia de Lorentz es

$$V_\lambda(p, p') = (q^2 \gamma_\lambda - q_\lambda \not{q}) [R(q^2) + r(q^2) \gamma^5] + \sigma_{\lambda\rho} q^\rho [D_M(q^2) + iD_E(q^2) \gamma_5]. \quad (4.94)$$

Es importante recalcar que V_λ depende solamente del vector q , y no de $p + p'$, pues todos los términos posibles que involucren a $p + p'$ se pueden convertir a términos que involucren a q mediante la identidad de Gordon,

$$\bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p). \quad (4.95)$$

Además, la hermiticidad de la Lagrangiana implica que $V_\lambda(p, p') = \gamma_0 V_\lambda^\dagger(p, p') \gamma_0$, por lo que las funciones R , r , D_M y D_E , llamados factores de forma, son reales e invariantes de Lorentz. Como $p^2 = p'^2 = m^2$, donde m es la masa del fermion f , solamente existe una cantidad dinámica independiente, es decir q^2 , que también es un invariante de Lorentz. Por tanto, los factores de forma solamente dependen de q^2 [55].

El significado físico de los factores de forma se obtiene en el límite no relativista: bajo este, $D_M(q^2)$ se reduce a $D_M(0) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$, donde \mathbf{B} es el campo magnético. Por lo tanto, $D_M(0)$ es el momento magnético de la partícula. En general, $D_M(q^2)$ es llamado el factor de forma magnético. Similarmente, $D_E(q^2)$ es el factor de forma eléctrico, pues $d = D_E(0)$ es el momento dipolar eléctrico. La cantidad $R(q^2)$ se llama el radio de carga, y $r(q^2)$ es el radio de carga axial [55].

Como ya se había mencionado, los factores de forma $R(q^2)$ y $r(q^2)$ son diferentes de cero, incluso cuando la masa del neutrino se considera cero, mientras que $D_M(q^2) = D_E(q^2) = 0$ si la masa del neutrino es cero.

En la mínima extensión del SM, basada en el grupo de norma $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, los diagramas de Feynman a orden lazo, que contribuyen a los vértices electromagnéticos de los neutrinos, se muestran en la figura 4.7. Bajo la suposición de que $m_\alpha \ll M_W$ y $m_\alpha \ll m_\ell$, el vértice efectivo será [55]

$$V_\lambda = - \frac{e G_F}{4\sqrt{2} \pi^2} (m_\alpha R + m_{\alpha'} L) \sigma_{\lambda\rho} q^\rho \sum_\ell U_{\ell\alpha} U_{\ell\alpha'}^* f(r_\ell), \quad (4.96)$$

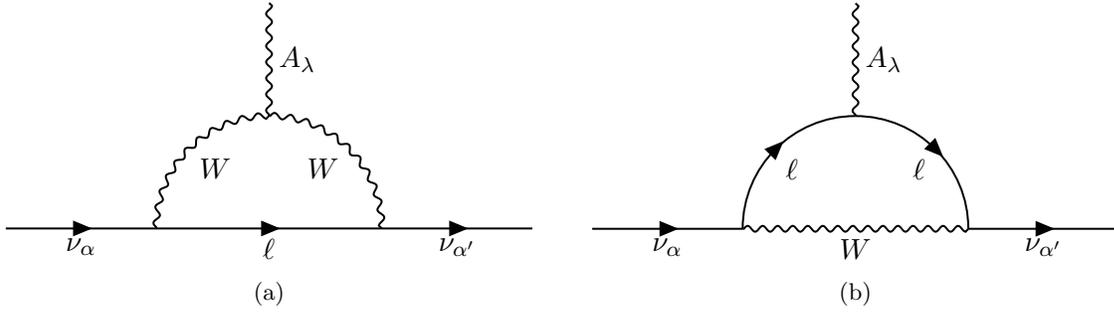


Figura 4.7: Diagramas de Feynman a orden lazo para el decaimiento $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha + \gamma$.

donde $r_\ell = (m_\ell/M_W)^2$ y

$$f(r) := \frac{3}{4(1-r)^2} \left[-2 + 5r - r^2 + \frac{2r^2 \ln r}{1-r} \right] \simeq -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}r + \dots \quad (4.97)$$

Donde la aproximación en la ecuación anterior es válida para $r \ll 1$. Ahora, si se considera al elemento de matriz para $\nu_\alpha = \nu_{\alpha'}$, el factor $(m_\alpha R + m_{\alpha'} L)$ en la amplitud se convierte en m_α . Esto quiere decir que, exista o no la violación a la simetría CP, el momento dipolar eléctrico se hace cero en el nivel lazo. Sin embargo, el momento magnético de ν_α está dado por [51, 55, 65–68]

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= -\frac{e G_F}{4\sqrt{2} \pi^2} m_\alpha \sum_\ell U_{\ell\alpha}^* U_{\ell\alpha} f(r_\ell) \\ &= \frac{3e G_F}{8\sqrt{2} \pi^2} m_\alpha = \frac{3e G_F m_e m_\alpha}{4\pi^2 \sqrt{2}} \mu_B, \end{aligned} \quad (4.98)$$

donde μ_B es el magnetón de Bohr. Es importante recalcar que el momento magnético es proporcional a la masa del neutrino, por lo que si la masa del neutrino es cero, su momento magnético también lo será. El valor numérico del momento magnético, dado por la ecuación (4.98) es

$$\mu_\nu \approx 3.2 \times 10^{-19} \left(\frac{m_\nu}{1 \text{ eV}} \right) \mu_B \geq (4 \times 10^{-20}) \mu_B \quad (4.99)$$

donde la desigualdad de la ecuación anterior se da a partir de los parámetros que se han deducido del análisis de los experimentos de neutrinos atmosféricos, solares y de reactores nucleares [68]. Sin embargo, su magnitud es demasiado pequeña para poder ser medida.

Por otro lado, a partir de condiciones astrofísicas (principalmente a partir de las supernovas, estrellas de neutrones y el sol) y cosmológicas se han podido establecer algunas restricciones para el valor que tenga el momento magnético de los neutrinos, de forma que sean independientes del modelo que les dé masa.

A partir de la supernova SN1987A, en la que la señal de 19 neutrinos fue observada por las colaboraciones Kamiokande (K II) [69] e Irvine-Michigan-Brookhaven (IMB) [70], varios autores [71–73] infirieron algunas propiedades de los neutrinos observados. Por ejemplo, Goldman *et al.* [71] encontraron que el momento magnético debería ser $\mu_{\nu_e} \lesssim (10^{-13} - 10^{-12})\mu_B$. Por otro lado, Lattimer y Cooperstein [72] estiman, a partir de la energía de los neutrinos observados así como del tiempo de difusión de éstos en la estrella de neutrones, que su momento magnético debe ser $\mu_\nu < 3 \times 10^{-13}\mu_B$. Además, al considerar los efectos del cambio de helicidad de los neutrinos debido al campo magnético presente en el medio interestelar, encuentran que $\mu_\nu \sim (10^{-12} - 10^{-13})\mu_B$. Bajo consideraciones similares, Barbieri y Mohapatra [73], estudiaron el proceso de cambio de quiralidad por la interacción con el campo magnético de la estrella, así como la dispersión de neutrinos por fermiones cargados, por ejemplo $\nu_L + e \rightarrow \nu_R + e$ y $\nu_L + p \rightarrow \nu_R + p$. A partir de esto encuentran que $\mu_\nu \lesssim (0.1 - 0.8) \times 10^{-11}\mu_B$. Todas estas cotas superiores están, aproximadamente, en el mismo orden de magnitud.

Ayala *et al.* en [74, 75], consideran que el proceso de conversión de neutrinos izquierdos a derechos ocurre mediante la dispersión por electrones del medio, por el intercambio de fotones efectivos tipo espacio. Encuentran que al comparar la cota de luminosidad de neutrinos derechos con la que se observó en SN1987A, el momento magnético de los neutrinos es $\mu_\nu \leq (0.1 - 0.4) \times 10^{-11}\mu_B$.

Adicionalmente, Ayala *et al.* [75], dan una cota a partir de condiciones cosmológicas, pues consideran la producción de neutrinos derechos en el universo temprano. Si la tasa de producción de éstos hubiera sido lo suficientemente grande como para mantenerlos en equilibrio termodinámico con el resto de las partículas en el plasma que conformaba al universo temprano, entonces los neutrinos derechos hubieran contribuido a los grados de libertad y modificado la nucleosíntesis primordial, hasta la etapa de desacoplamiento. Para evitar que este efecto sucediera, los neutrinos derechos debieron desacoplarse antes de encontrarse en equilibrio termodinámico, es decir, la razón entre su tasa de interacción por partícula por unidad de tiempo y la tasa de crecimiento del volumen que los contiene, es decir el parámetro de Hubble, debe ser menor que uno ⁶. Ayala *et al.* encuentran que el momento magnético de los neutrinos debe ser $\mu_\nu < 2.9 \times 10^{-10}\mu_B$, el cual es más grande que las cotas de origen astrofísico.

⁶El porqué se debe dar esta desigualdad escapa los objetivos de este trabajo. Una explicación detallada se encuentra en el libro de Kolb y Turner “*The Early Universe*”, publicado por CRC Press.

Capítulo 5

Resultados de teoría de campos a temperatura finita

En los capítulos anteriores se planteó el problema que este trabajo busca resolver. Además, se introdujeron los principales conceptos y resultados de los sistemas y componentes que conforman al problema, es decir, se introdujeron las estrellas de neutrones y sus condiciones físicas, así como los neutrinos y sus principales propiedades. Este capítulo introducirá el formalismo teórico con el que se buscará resolver el problema de las velocidades de escape de neutrinos: el formalismo de tiempo imaginario de las teorías de campo a temperatura finita.

Un elemento que jugará un papel importante en este trabajo es el efecto que tienen las interacciones en la forma en la que se propaga una partícula, por lo que se comenzará con introducir el concepto de autoenergía, el cual es un concepto importante en todas las teorías de campos. Posteriormente se dará una breve introducción al formalismo de tiempo imaginario de las teorías de campo a temperatura finita y se mostrarán algunos resultados de importancia.

5.1. La autoenergía

Una de las teorías más simples es aquella en la que las partículas que describe no interactúan, descrita por un Hamiltoniano libre. A partir de éste se definen los operadores de evolución del campo y el estado base del Hamiltoniano. Además, la función de Green o propagador de Feynman, para la partícula escalar libre que describe la evolución de la partícula -la amplitud de probabilidad de que esta se propague- con un momento p , entre dos puntos está dada por

$$\tilde{G}_0(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (5.1)$$

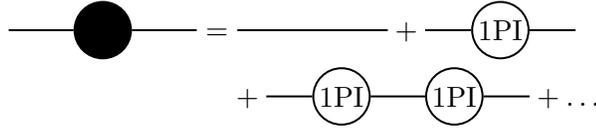


Figura 5.1: Versión diagramática de la ecuación (5.4).

donde la masa de la partícula está dada por el polo de esta función. Ahora, si la teoría permite las interacciones de las partículas, entonces las propiedades de estas cambiarán; en particular, si la teoría es perturbativa, la función de Green se puede calcular a partir de la suma de los diagramas de Feynman, es decir

$$\tilde{G}(p) = \sum \left(\begin{array}{l} \text{Todos los diagramas de Feynman} \\ \text{conexos con dos líneas externas} \end{array} \right). \quad (5.2)$$

De acuerdo con Lancaster y Blundell [52], la función de Green se puede imaginar como dos líneas externas con todo aquello que se pueda insertar entre ellas. Esto que se pudiera insertar recibe el nombre de autoenergía, y se describe utilizando el llamado diagrama irreducible a una parte (diagrama 1PI), que se define como un diagrama conexo que no se hace desconexo al cortar una línea interna [52], es decir, no se puede separar en dos diagramas al quitar una sola línea [53]. La suma de los diagramas 1PI, con dos líneas externas, forma una función de Green conocida como la autoenergía 1PI, $\tilde{\Sigma}(p)$, dada por

$$-i\tilde{\Sigma}(p) = \sum \left(\begin{array}{l} \text{Todos los diagramas 1PI} \\ \text{con dos líneas externas} \end{array} \right). \quad (5.3)$$

Ahora, el propagador de la teoría interactuante se puede escribir como una serie de interacciones, es decir, es la amplitud de propagación sin interacciones más la amplitud de propagación interrumpida por una interacción con $\tilde{\Sigma}$ más la amplitud de propagación interrumpida por dos interacciones con $\tilde{\Sigma}$, etc. Esta serie se muestra diagramáticamente en la figura 5.1, y en forma de ecuación, para una partícula escalar se escribe como

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2} + \frac{i}{p^2 - m^2} \left[-i\tilde{\Sigma}(p) \right] \frac{i}{p^2 - m^2} \\ &+ \frac{i}{p^2 - m^2} \left[-i\tilde{\Sigma}(p) \right] \frac{i}{p^2 - m^2} \left[-i\tilde{\Sigma}(p) \right] \frac{i}{p^2 - m^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

La ecuación anterior representa una serie geométrica, por lo que

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2} \left\{ 1 + \left[-i \tilde{\Sigma}(p) \right] \frac{i}{p^2 - m^2} \right. \\
&\quad \left. + \left[-i \tilde{\Sigma}(p) \right] \frac{i}{p^2 - m^2} \left[-i \tilde{\Sigma}(p) \right] \frac{i}{p^2 - m^2} + \dots \right\} \\
&= \frac{i}{p^2 - m^2} \left\{ 1 - \frac{\tilde{\Sigma}(p)}{p^2 - m^2} \right\}^{-1} \\
&= \frac{i}{p^2 - m^2 - \tilde{\Sigma}(p) + i\epsilon}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

A partir de la ecuación (5.5), se ve que el propagador de la teoría interactuante es muy similar al de la teoría libre, excepto por la autoenergía que aparece en el denominador. Esta función de Green recibe el nombre de propagador vestido.

Además, la masa física de la partícula está dada por la posición del polo en el propagador, es decir,

$$p^2 - m^2 - \text{Re} \left(\tilde{\Sigma}(p) \right) = 0, \tag{5.6}$$

cuando $p^2 = m_P^2$. Por lo tanto, la masa física de la partícula está dada por

$$m_P^2 = m^2 + \text{Re} \left(\tilde{\Sigma}(p^2 = m_P^2) \right), \tag{5.7}$$

por lo que la parte real de la autoenergía indica qué tanto modifican las interacciones a la masa de la partícula. Además, la parte imaginaria de la autoenergía está relacionada con la tasa de decaimiento de la partícula, pues tomar la parte imaginaria de la autoenergía, por ejemplo a nivel lazo, es equivalente a cortar el lazo por la mitad y quedarse con una de las mitades, que representa un decaimiento.

5.2. El formalismo de tiempo imaginario de la teoría térmica de campos

Antes de comenzar con la descripción del formalismo de tiempo imaginario o de Matsubara, se presentará brevemente el formalismo de integrales de camino de la teoría de campos, siguiendo a Le Bellac [76], Laine y Vuorinen [77] y Das [78]. En las teorías de campo a temperatura cero, es usual realizar la continuación analítica de tiempo real a imaginario: $t \rightarrow -i\tau$ ó $x^0 \rightarrow -ix_4$, donde $t(x_4)$ es real. Esto significa ir de un espacio de Minkowski a uno Euclideo, pues la métrica de Minkowski se transforma en una métrica Euclidea (con un cambio de signo) bajo $t^2 - \mathbf{x}^2 \rightarrow -(\tau^2 + \mathbf{x}^2)$. Además, en el espacio de momentos, la transformación correspondiente es $k^0 \rightarrow -ix_4$.

5.2.1. El formalismo de integrales de camino

En la mecánica cuántica convencional, el movimiento de una partícula, en un potencial independiente del tiempo, $V(q)$, puede ser descrito por la amplitud de probabilidad

$$F(q', t'; q, t) = \langle q' | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | q \rangle \quad (5.8)$$

donde \hat{H} es el Hamiltoniano completo, independiente del tiempo, y que por simplicidad solamente tendrá una dimensión de movimiento espacial. Ahora, haciendo la continuación analítica de F al tiempo imaginario:

$$t \rightarrow -i\tau, \quad t' \rightarrow -i\tau', \quad (5.9)$$

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \langle q' | e^{-\hat{H}(\tau'-\tau)} | q \rangle. \quad (5.10)$$

Si se subdivide el intervalo $[\tau, \tau']$ en $(n+1)$ subintervalos, cada uno de longitud $\epsilon = (\tau - \tau')/(n+1)$, con $n \rightarrow \infty$; si se considera que las partículas que describe el Hamiltoniano no tienen espín, entonces éste se puede escribir como $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + V(\hat{q})$, donde \hat{p} y \hat{q} son los operadores de momento y posición, respectivamente; si se escribe F a partir de un conjunto completo de estados propios del operador de posición \hat{q} en los tiempos imaginarios τ_1, \dots, τ_n , entonces

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \prod_{l=1}^n dq_l \langle q_{l+1} | \exp(-\epsilon V(\hat{q})) \times \exp\left(-\epsilon \frac{\hat{p}^2}{2m}\right) | q_l \rangle. \quad (5.11)$$

La acción de $V(\hat{q})$ sobre el ket es trivial, mientras que para el elemento de matriz de la parte cinética del Hamiltoniano se debe recordar que los estados propios, $|p_l\rangle$, del operador de momento son completos, por lo que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\langle q_l | p_l \rangle = e^{ipx}, \quad 1 = \int dq_l |q_l\rangle \langle q_l|, \quad 1 = \int \frac{dp_l}{2\pi} |p_l\rangle \langle p_l|, \quad l = 1, \dots, n \quad (5.12)$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle q_{l+1} | \exp\left(-\epsilon \frac{\hat{p}^2}{2m}\right) | q_l \rangle &= \int dp_l \langle q_{l+1} | \exp\left(-\epsilon \frac{\hat{p}^2}{2m}\right) | p_l \rangle \langle p_l | q_l \rangle \\ &= \int \frac{dp_l}{2\pi} e^{i(q_{l+1}-q_l)p_l} e^{-\epsilon p_l^2/2m + \mathcal{O}(\epsilon)} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi\epsilon}\right)^{1/2} e^{-m(q_{l+1}-q_l)^2/2\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde los términos $\mathcal{O}(\epsilon)$, que son de frontera, se pueden eliminar en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, es decir, $n \rightarrow \infty$.

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (5.11), se encuentra que

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi\epsilon} \right)^{1/2} \int \prod_{l=1}^n \left[\left(\frac{m}{2\pi\epsilon} \right)^{1/2} dq_l \right] \\ \times \exp \left[-\epsilon \left(\sum_{l=0}^n \frac{m(q_{l+1} - q_l)^2}{2\epsilon^2} + \sum_{l=1}^n V \left(\frac{q_l + q_{l+1}}{2} \right) \right) \right]. \quad (5.14)$$

El argumento del potencial se escribe así por razones estéticas. A la medida de integración de la ecuación (5.14) se le llamará $\mathcal{D}q(\tau'')$ y, además, la suma que aparece en la exponencial se puede identificar con una suma de Riemann, es decir

$$S_E(\tau - \tau') = \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau'') + V(q(\tau'')) \right], \quad (5.15)$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a τ ; S_E recibe el nombre de acción Euclídeana. Finalmente, se puede escribir a F en la forma de integral de camino

$$F(q', -i\tau'; q, -i\tau) = \int \mathcal{D}q(\tau'') \exp \left[- \int_{\tau}^{\tau'} d\tau'' \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau'') + V(q(\tau'')) \right) \right] \\ = \int \mathcal{D}q(\tau'') \exp [-S_E(\tau - \tau')], \quad (5.16)$$

donde las condiciones de frontera en los caminos $q(\tau'')$ son $q(\tau) = q$, $q(\tau') = q'$.

El desarrollo anterior se puede conectar con la mecánica estadística, al relacionar la ecuación (5.16) con la función de partición. Para esto, recuérdese que la función de partición, Z , se define a partir de la matriz de densidad ϱ como

$$Z(\beta) = \text{Tr } \varrho(\beta) = \text{Tr } e^{-\beta \hat{H}} = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad (5.17)$$

donde la traza se evaluó sobre el conjunto de vectores propios de \hat{H} : $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$. También, la traza de la función de partición se puede escribir utilizando un conjunto completo de vectores propios del operador de posición, es decir,

$$Z(\beta) = \text{Tr } e^{-\beta \hat{H}} = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle, \quad (5.18)$$

por lo que la matriz de densidad, ϱ , se puede interpretar formalmente como un operador de evolución en tiempo imaginario. Comparando la ecuación (5.18) con la ecuación (5.10), se puede ver que

$$Z(\beta) = \int dq F(q, -i\beta; q, 0), \quad (5.19)$$

por lo que, a partir de la ecuación (5.16), se puede escribir la función de partición como una integral de camino

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau) + V(q(\tau)) \right) \right] = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp[-S_E(\beta)], \quad (5.20)$$

donde los caminos están sujetos a la condición de periodicidad $q(\beta) = q(0)$, es decir, sobre caminos con periodo β en tiempo imaginario.

Más aun, la funcional generadora $Z(\beta; j)$, con $Z(\beta) = Z(\beta; j = 0)$ y j , el término de fuente, se define como

$$Z(\beta; j) = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[-S_E(\beta) + \int_0^\beta j(\tau) q(\tau) d\tau \right]. \quad (5.21)$$

La derivada funcional de la funcional generadora está relacionada con el propagador en tiempo imaginario mediante

$$\frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^2 Z(\beta; j)}{\delta j(\tau_1) \delta j(\tau_2)} \Big|_{j=0} = \frac{1}{Z(\beta)} \int \mathcal{D}q(\tau) q(\tau_1) q(\tau_2) e^{-S_E(\beta)}. \quad (5.22)$$

Nótese que en la teoría de campos a temperatura cero es usual que la funcional generadora que aparece en el denominador del lado izquierdo de la ecuación (5.22) sea $Z(J = 0)$, sin embargo, por la condición de periodicidad $q(\beta) = q(0)$, esta definición es equivalente.

Ahora, se debe probar que el lado derecho de la ecuación (5.22) está relacionado con el promedio térmico de un producto de operadores de posición ordenados temporalmente:

$$\langle T(\hat{q}(-i\tau_1) \hat{q}(-i\tau_2)) \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H}} T(\hat{q}(-i\tau_1) \hat{q}(-i\tau_2)) \right], \quad (5.23)$$

donde $\hat{q}(-i\tau)$ es el operador de posición en la descripción de Heissenberg, es decir, $\hat{q}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{q} e^{-i\hat{H}t}$ y $\hat{q}(-i\tau) = e^{\hat{H}\tau} \hat{q} e^{-\hat{H}\tau}$. El promedio térmico $\langle A \rangle_\beta$ de un operador \hat{A} se define como

$$\langle \hat{A} \rangle_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left(\hat{A} e^{-\beta \hat{H}} \right) = \frac{\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} \hat{A}}{\text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}}, \quad (5.24)$$

y el producto ordenado temporalmente en tiempo imaginario se define como

$$T(\hat{q}(-i\tau_1) \hat{q}(-i\tau_2)) = \begin{cases} \hat{q}(-i\tau_1) \hat{q}(-i\tau_2) & \text{si } \tau_1 > \tau_2 \\ \hat{q}(-i\tau_2) \hat{q}(-i\tau_1) & \text{si } \tau_2 > \tau_1 \end{cases}. \quad (5.25)$$

Ahora, la diferenciación funcional de la funcional generadora $Z(\beta; j)$ da el promedio térmico de un producto ordenado temporalmente de operadores de posición pues, si por ejemplo $\tau_1 > \tau_2$, entonces

$$Z(\beta) \langle T(\hat{q}(-i\tau_1) \hat{q}(-i\tau_2)) \rangle_\beta = \int dq \langle q | e^{-(\beta-\tau_1)\hat{H}} \hat{q} e^{-(\tau_1-\tau_2)\hat{H}} \hat{q} e^{-\tau_2\hat{H}} | q \rangle, \quad (5.26)$$

donde la igualdad se da al sustituir en la definición de promedio térmico la ecuación (5.18). Al insertar un conjunto completo de estados propios del operador de posición en los tiempos imaginarios τ_1 y τ_2 , se llega a una situación similar a la de la ecuación (5.14), por lo que se obtiene la integral de camino análoga a la ecuación (5.16).

Por otro lado, a partir de la condición de periodicidad de los caminos de integración, el propagador satisface

$$\langle T(\hat{q}(-i\beta)\hat{q}(-i\tau)) \rangle_\beta = \langle T(\hat{q}(0)\hat{q}(-i\tau)) \rangle_\beta, \quad (5.27)$$

por lo que se puede definir a la función $\Delta(\tau)$, en el intervalo $[-\beta, \beta]$, periódica en el tiempo imaginario, como

$$\Delta(\tau) = \langle T(\hat{q}(-i\tau)\hat{q}(0)) \rangle_\beta, \quad (5.28)$$

que es conocida como propagador de Matsubara y satisface que $\Delta(\tau - \beta) = \Delta(\tau)$, para cualquier $\tau \in [0, \beta]$.

5.2.2. El formalismo de operadores y las densidades espectrales

En la presentación que se hizo del formalismo de integrales de camino se desarrollaron algunos conceptos del formalismo de operadores. A continuación se presentará brevemente, con la intención de estudiar los propagadores e introducir las densidades espectrales, el formalismo de operadores, siguiendo nuevamente a Le Bellac [76]. Previamente, el tiempo estaba restringido a ser puramente imaginario, a partir de ahora, esta restricción se levantará, pues son de particular interés los valores reales del tiempo.

Para comenzar, se definirán los correladores para el campo ϕ :

$$D^+(x, y) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle_\beta, \quad (5.29)$$

$$D^-(x, y) = \langle \phi(y)\phi(x) \rangle_\beta = D^+(y, x), \quad (5.30)$$

Si se inserta un conjunto completo de estados propios del Hamiltoniano, $|n\rangle$, es decir, $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, entonces se expresa al correlador D^+ como

$$\begin{aligned} D^+(x, y) &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} \langle n| e^{-\beta\hat{H}} \phi(x) |m\rangle \langle m| \phi(y) |n\rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} \langle n| e^{ipx} \phi(0) e^{-ipx} |m\rangle \langle m| e^{ipy} \phi(0) e^{-ipy} |n\rangle \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{i(p_n - p_m)(x-y)} |\langle n| \phi(0) |m\rangle|^2, \end{aligned} \quad (5.31)$$

y análogamente para D^- :

$$D^-(x, y) = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{i(p_m - p_n)(x-y)} |\langle n| \phi(0) |m\rangle|^2. \quad (5.32)$$

Las ecuaciones anteriores muestran que los correladores son, en realidad, funciones de $(x - y)$ y, si por simplicidad, solamente se considera el argumento temporal de x e y , es decir, t y t' , respectivamente, y si, además, la convergencia de las series la controlan las exponenciales, entonces $D^+(t, t')$ está definida para $-\beta \leq \text{Im}(t - t') \leq 0$, mientras que $D^-(t, t')$ está definida para $0 \leq \text{Im}(t - t') \leq \beta$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} D^+(t - i\beta, t') &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} e^{i(E_n - E_m)(t - i\beta - t')} |\langle n | \phi(0) | m \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_m} e^{i(E_n - E_m)(t - t')} |\langle n | \phi(0) | m \rangle|^2 \\ &= D^-(t, t'). \end{aligned} \quad (5.33)$$

La ecuación (5.33) es conocida como la relación de Kubo-Martin-Schwinger (KMS).

La transformada de Fourier de los correladores es

$$\begin{aligned} D^+(k) &= \int d^4x e^{ik \cdot x} D^+(x) \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} |\langle n | \phi(0) | m \rangle|^2 \int d^4x e^{i(p_n - p_m)(x)} e^{ik \cdot x} \\ &= \frac{(2\pi)^4}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} |\langle n | \phi(0) | m \rangle|^2 \delta^{(4)}(k - p_n + p_m), \end{aligned} \quad (5.34)$$

en particular, si solamente se considera la componente energética,

$$D^+(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ik_0 t} D^+(t), \quad (5.35)$$

además, para el correlador D^- se encuentra que

$$\begin{aligned} D^-(k_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ik_0 t} D^-(t) = e^{ik_0(i\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ik_0(t - i\beta)} D^+(t - i\beta) \\ &= e^{-\beta k_0} D^+(k_0) \end{aligned} \quad (5.36)$$

donde la segunda igualdad se da al usar la relación KMS. La ecuación (5.36) está relacionada con el balance detallado, que establece que si se conoce la probabilidad de transición de un estado n a otro estado m , $P_{n \rightarrow m}$, y además se conoce la probabilidad de transición del estado m a n , $P_{m \rightarrow n}$, entonces se conoce la condición de equilibrio para $N = N_n + N_m$ partículas distribuidas entre los dos estados, dada por $N_n P_{n \rightarrow m} = N_m P_{m \rightarrow n}$.

A partir de los correladores se puede definir la densidad espectral

$$\begin{aligned} \rho(k_0) &= D^+(k_0) - D^-(k_0) \\ &= (e^{\beta k_0} - 1) D^-(k_0) \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde la segunda igualdad se da a partir de la ecuación (5.36). Las densidades espectrales contienen las discontinuidades a lo largo del eje real. Su soporte depende de si el cuadrimento está dentro o fuera del cono de luz: para cuadrimentos tipo tiempo, las densidades espectrales tienen soporte en los polos de cuasipartículas, mientras que para cuadrimentos tipo espacio, su soporte está en el intervalo completo que corresponde al cambio de rama del propagador. Por lo tanto, los correladores se pueden reescribir en términos de la densidad espectral como

$$D^+(k_0) = (1 + f(k_0)) \rho(k_0) \quad (5.38)$$

$$D^-(k_0) = f(k_0) \rho(k_0) \quad (5.39)$$

donde $f(k_0) = (e^{\beta k_0} - 1)$ es la distribución de Bose-Einstein.

Por otro lado, como la densidad espectral está definida en términos de los correladores en el espacio de Fourier, éstos se pueden escribir en términos de su representación en el tiempo, es decir, usando la ecuación (5.34):

$$\rho(k_0) = \frac{2\pi}{Z(\beta)} \sum_{n,m} e^{-\beta E_n} |\langle n | \phi(0) | m \rangle|^2 [\delta(k_0 - E_m + E_n) - \delta(k_0 + E_m - E_n)], \quad (5.40)$$

por lo tanto, la densidad espectral es una función impar, es decir, $\rho(-k_0) = -\rho(k_0)$, y además, es positiva definida, es decir, $\epsilon(k_0)\rho(k_0) > 0$, donde $\epsilon(k_0)$ es la función signo.

Como

$$D^+(t) - D^-(t) = \langle \phi(t)\phi(0) \rangle_\beta - \langle \phi(0)\phi(t) \rangle_\beta = \langle [\phi(t), \phi(0)] \rangle_\beta, \quad (5.41)$$

es decir, la densidad espectral es la transformada de Fourier del promedio térmico del conmutador $[\phi(t), \phi(0)]$, entonces

$$\frac{d}{dt} (D^+(t) - D^-(t)) = \frac{d}{dt} \langle [\phi(t), \phi(0)] \rangle_\beta = - \langle [\phi(0), \Pi(t)] \rangle_\beta, \quad (5.42)$$

lo que corresponde con la relación de conmutación canónica $[\phi(t), \Pi(t')]|_{t=t'} = i$, si se considera el límite $t \rightarrow 0$. Además, la última igualdad de la ecuación (5.42) se da por la definición del momento conjugado al campo:

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (5.43)$$

y el hecho de que

$$\frac{d}{dt} \langle [\phi(t), \phi(0)] \rangle_\beta = \left\langle \left[\frac{d}{dt} \phi(t), \phi(0) \right] \right\rangle_\beta. \quad (5.44)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (D^+(t) - D^-(t)) &= \frac{d}{dt} \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0 t} (D^+(k_0) - D^-(k_0)) \\ &= -i \int \frac{dk_0}{2\pi} k_0 e^{-ik_0 t} \rho(k_0), \end{aligned} \quad (5.45)$$

por lo que, si se toma el límite $t \rightarrow 0$ en las últimas dos ecuaciones, se obtendrá

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} k_0 \rho(k_0) = 1. \quad (5.46)$$

Esta última ecuación muestra que la densidad espectral está acotada para k_0 grande. Más aun, cuando $|k_0| \rightarrow \infty$, para que la identidad se mantenga, $\rho(k_0) \rightarrow (k_0)^{-\alpha}$, con $\alpha \geq 2$.

Un ejemplo interesante es el campo libre, que se define como aquel que

$$\phi(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a e^{-i\omega_k t} + a^\dagger e^{i\omega_k t} \right), \quad (5.47)$$

donde $[a, a^\dagger] = 1$. Los detalles de este cálculo se pueden encontrar en Le Bellac [76], pero a partir del valor del conmutador de los operadores de creación y aniquilación, se muestra que $D^+(t) - D^-(t) = \frac{1}{2\omega_k} (e^{-i\omega_k t} - e^{i\omega_k t})$, y por lo tanto, la transformada de Fourier de esta igualdad, será la densidad espectral, es decir,

$$\rho(k_0) = 2\pi \epsilon(k_0) \delta((k_0)^2 - \omega_k^2). \quad (5.48)$$

Es importante notar que esta densidad espectral satisface las propiedades que se habían probado: es positiva definida, impar y satisface la ecuación (5.46).

5.2.3. El propagador de Matsubara

La transformada de Fourier del propagador de Matsubara de un campo bosónico, $\Delta(\tau)$, es

$$\Delta(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \Delta(\tau), \quad (5.49)$$

y su inversa es:

$$\Delta(\tau) = T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \Delta(i\omega_n). \quad (5.50)$$

Como $\Delta(\tau)$ es periódica, basta con considerar su transformada de Fourier en el intervalo $[0, \beta]$, por lo que

$$\begin{aligned} \Delta(i\omega_n) &= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \Delta(\tau) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \Delta(\tau + \beta) \\ &= \int_\beta^{2\beta} d\tau' e^{i\omega_n(\tau' - \beta)} \Delta(\tau') \\ &= e^{-i\omega_n \beta} \int_0^\beta d\tau' e^{i\omega_n \tau'} \Delta(\tau') = e^{i\omega_n \beta} \Delta(i\omega_n), \end{aligned} \quad (5.51)$$

por lo tanto, las frecuencias ω_n toman valores discretos, es decir,

$$\omega_n = 2\pi n T, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.52)$$

Estas frecuencias reciben el nombre de frecuencias de Matsubara para bosones.

Por otro lado, si τ está en el intervalo $[0, \beta]$, entonces la relación entre el propagador en tiempos real e imaginario puede encontrarse como

$$\Delta(\tau) = D^+(t = -i\tau), \quad (5.53)$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-k_0\tau} D^+(k_0) \\ &= \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{-k_0\tau} [1 + f(k_0)] \rho(k_0). \end{aligned} \quad (5.54)$$

E incluso, a partir de la última ecuación y de la ecuación (5.49) se puede encontrar, mediante un cómputo directo, que

$$\Delta(i\omega_n) = - \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{\rho(k_0)}{i\omega_n - k_0} \quad (5.55)$$

Este propagador de Matsubara está definido solamente para valores discretos de frecuencia, y su continuación analítica a valores arbitrarios de las frecuencias, no es única.

5.2.4. El propagador fermiónico a temperatura y potencial químico finito

Como una síntesis de lo presentado en las secciones precedentes de este capítulo, se mostrará el propagador para los fermiones a temperatura y potencial químico finito, siguiendo a Le Bellac [76] y Kapusta y Gale [79].

El campo de Dirac a temperatura finita

En el estudio del campo de Dirac, surge naturalmente el concepto de álgebra de Grassmann, \mathcal{A} , la cual se genera por n números complejos, η_1, \dots, η_n , que anticonmutan y satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si η_i y $\eta_j \in \mathcal{A}$, entonces $\{\eta_i, \eta_j\} = 0$
2. Si η_i y $\eta_j \in \mathcal{A}$, entonces $\lambda\eta_i + \mu\eta_j \in \mathcal{A}$, donde λ y μ son números complejos arbitrarios
3. Si η_i y $\eta_j \in \mathcal{A}$, entonces $\eta_i\eta_j \in \mathcal{A}$

Una consecuencia importante de los números de Grassmann es que, debido a la propiedad de anticonmutatividad, $\eta^2 = 0$, y por lo tanto, al desarrollar una función de variables de Grassmann como serie de Taylor, solamente puede aparecer una potencia de la variable, por lo que la expresión más general para una función de una variable de Grassmann es

$$f(\eta) = \lambda + \mu\eta. \quad (5.56)$$

La derivada y la integral de esta clase de funciones también están definidas mediante

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \eta = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \lambda = 0, \quad \int d\eta \eta = 1, \quad \int d\eta = 0. \quad (5.57)$$

Algunos resultados importantes que surgen de estas definiciones son: el operador de derivada anticonmuta con los números de Grassmann; la diferenciación y la integración de funciones de variables de Grassmann llevan al mismo resultado (en particular, si la función es de una sola variable: $\frac{\partial f(\eta)}{\partial \eta} = \mu$, $\int d\eta f(\eta) = \mu$). Como consecuencia, la integración de un polinomio de dos variables, η y η^* , $g(\eta, \eta^*) = \lambda_0 + \lambda_1 \eta + \lambda_2 \eta^* + \lambda_{12} \eta^* \eta$, da como resultado

$$\int d\eta^* d\eta g(\eta, \eta^*) = -\lambda_{12}, \quad (5.58)$$

y por lo tanto,

$$\int d\eta^* d\eta \exp(-\lambda \eta^* \eta) = \int d\eta^* d\eta (1 - \lambda \eta^* \eta) = \lambda. \quad (5.59)$$

Esta última ecuación se generaliza para una matriz M a:

$$\int \prod_{i=1}^n d\eta_i^* d\eta_i \exp\left(-\sum_{j=1}^n \eta_i^* M_{ij} \eta_j\right) = \det M. \quad (5.60)$$

Por otro lado, el campo de Dirac libre satisface la ecuación de Dirac (ecuación (4.3))

$$(i\partial - m) \psi(x) = 0, \quad (5.61)$$

y además, se puede expresar a partir de su expansión de Fourier, tal como se hizo en la ecuación (4.15):

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_{r=1}^2 \left(b_r(p) u_r(p) e^{-ip \cdot x} + d_r^\dagger(p) v_r(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (5.62)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_{r=1}^2 \left(d_r(p) \bar{v}_r(p) e^{-ip \cdot x} + b_r^\dagger(p) \bar{u}_r(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (5.63)$$

donde ahora r es un índice de espín (que puede ser la helicidad, como en la ecuación (4.15)) y los operadores $b_r(p)$ y $d_r(p)$ satisfacen las relaciones de anticonmutatividad

$$\{b_r(p), b_s(p')\} = \{d_r(p), d_s(p')\} = 0 \quad (5.64)$$

$$\{b_r(p), b_s^\dagger(p')\} = \{d_r(p), d_s^\dagger(p')\} = (2\pi)^3 2E_p \delta_{rs} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (5.65)$$

Además, el campo de Dirac obedece las relaciones canónicas de anticonmutatividad de mismo tiempo

$$\left\{ \psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(x') \right\} \Big|_{t=t'} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (5.66)$$

donde α y β denotan los componentes espinoriales del operador de campo de cuatro componentes $\psi(x)$.

Así como en el caso bosónico que se trató anteriormente, se puede definir a los correladores S^+ y S^- como

$$S_{\alpha\beta}^+(x, y) = \langle \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \rangle_\beta \quad (5.67)$$

$$S_{\alpha\beta}^-(x, y) = -\langle \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) \rangle_\beta. \quad (5.68)$$

De forma análoga al caso bosónico, se puede utilizar el hecho de que $\exp(-\beta H)$ es un operador de evolución en tiempo imaginario, así como la propiedad cíclica de la traza, para deducir la relación KMS:

$$S_{\alpha\beta}^+(t, \vec{x}; t', y) = S_{\alpha\beta}^-(t + i\beta, \vec{x}; t', y). \quad (5.69)$$

La transformada de Fourier del correlador está dada por

$$S_{\alpha\beta}^+(p) = \int dx e^{-ip \cdot x} S_{\alpha\beta}^+(x), \quad (5.70)$$

y al sustituir la ecuación (5.69) y siguiendo un procedimiento análogo al que se utilizó para llegar a la ecuación (5.36), se obtiene que

$$S_{\alpha\beta}^-(p_0) = -e^{-\beta p_0} S_{\alpha\beta}^+(p_0). \quad (5.71)$$

Nuevamente, se puede definir la densidad espectral como

$$\rho_{\alpha\beta}(p) = S_{\alpha\beta}^+(p) - S_{\alpha\beta}^-(p), \quad (5.72)$$

y así, los correladores se pueden escribir en términos de las densidades espectrales como

$$S_{\alpha\beta}^+(p) = (1 - \tilde{f}(p_0)) \rho_{\alpha\beta}(p) \quad (5.73)$$

$$S_{\alpha\beta}^-(p) = -\tilde{f}(p_0) \rho_{\alpha\beta}(p), \quad (5.74)$$

donde $\tilde{f}(p_0)$ es la distribución de Fermi-Dirac

$$\tilde{f}(p_0) = \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1}. \quad (5.75)$$

Como la densidad espectral debe ser invariante rotacionalmente, entonces se puede descomponer como

$$\rho(p) = \gamma_0 \rho_0(p) - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} \rho_p(p) + \rho_m(p). \quad (5.76)$$

La densidad espectral nuevamente satisfará las propiedades que se dedujeron para el caso bosónico.

A partir de la descomposición de Fourier del campo de Dirac y de las relaciones de anticonmutatividad, se obtiene la densidad espectral para el caso libre:

$$\rho_F(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} [\Lambda_+(\vec{p})e^{-ip \cdot x} - \Lambda_-(\vec{p})e^{ip \cdot x}], \quad (5.77)$$

donde Λ_+ y Λ_- son los proyectores a estados de energía positiva y negativa, respectivamente, dados por

$$\Lambda_+(\vec{p}) = \sum_{r=1}^2 u_r \bar{u}_r = \gamma_0 E_p - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m \quad (5.78)$$

$$\Lambda_-(\vec{p}) = - \sum_{r=1}^2 v_r \bar{v}_r = -\gamma_0 E_p + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + m. \quad (5.79)$$

La ecuación (5.80) es equivalente a

$$\rho_F(p) = 2\pi \epsilon(p_0) (\not{p} + m) \delta(p^2 - m^2) \quad (5.80)$$

por lo que los correladores estarán dados por

$$S_F^+(p) = 2\pi (1 - \tilde{f}(p_0)) \epsilon(p_0) (\not{p} + m) \delta(p^2 - m^2) \quad (5.81)$$

$$S_F^-(p) = -2\pi \tilde{f}(p_0) \epsilon(p_0) (\not{p} + m) \delta(p^2 - m^2). \quad (5.82)$$

Por otro lado, el propagador de Matsubara

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta}(\tau, \vec{x}; \tau', \vec{y}) &= \langle T(\psi_\alpha(-i\tau, \vec{x}) \bar{\psi}_\beta(-i\tau', \vec{y})) \rangle_\beta \\ &= \theta(\tau - \tau') S_{\alpha\beta}^+(\tau, \vec{x}; \tau', \vec{y}) + \theta(\tau' - \tau) S_{\alpha\beta}^-(\tau, \vec{x}; \tau', \vec{y}), \end{aligned} \quad (5.83)$$

satisface la condición de antiperiodicidad

$$S_{\alpha\beta}(\tau - \beta; \vec{x}; \tau', \vec{y}) = -S_{\alpha\beta}(\tau, \vec{x}; \tau', \vec{y}), \quad (5.84)$$

para $0 \leq \tau \leq \beta$, que implica que $\psi(\tau - \beta, \vec{x}) = \psi(\tau, \vec{x})$ y por lo tanto, las frecuencias de Matsubara estarán dadas por $\tilde{\omega}_n = (2n+1)\pi T$, $n \in \mathbb{Z}$. La condición de antiperiodicidad que satisfacen los campos fermiónicos, solamente implica una fase (el signo menos) y por lo tanto no es observable.

Finalmente, la representación de Fourier del propagador libre de Matsubara es:

$$S_F(i\tilde{\omega}_n, \vec{p}) = - \int_{-\text{inf}}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{\rho_F(p_0, \vec{p})}{i\tilde{\omega}_n - p_0} = - \frac{\not{p} + m}{\tilde{\omega}_n^2 + E_p^2}. \quad (5.85)$$

El campo de Dirac a potencial químico finito

Ahora se considerará el campo de Dirac a potencial químico $\mu \neq 0$. Para ello, el Hamiltoniano libre de Dirac está dado por

$$\hat{H} = \int d^3x \psi^\dagger(x) \gamma^0 (-i\vec{\gamma} \cdot \nabla + m) \psi(x). \quad (5.86)$$

Cuando el potencial químico es diferente de cero, el Hamiltoniano libre de Dirac debe sustituirse por

$$\hat{H}' = \hat{H} - \mu \hat{Q} = \hat{H} - \mu \int d^3x \psi^\dagger \gamma^0 \psi. \quad (5.87)$$

La carga \hat{Q} se conserva y satisface las siguientes relaciones de conmutatividad:

$$[\hat{Q}, \psi(x)] = -\psi(x), \quad [\hat{Q}, \bar{\psi}(x)] = \bar{\psi}(x). \quad (5.88)$$

La función de partición está dada por

$$Z = \int_{\psi_\alpha(\beta)=-\psi_\alpha(0)} \mathcal{D}(\psi_\alpha^*, \psi_\alpha) \exp \left(- \int_0^\beta [\psi_\alpha^* (\partial_\tau - \mu) \psi_\alpha + H(\psi_\alpha^*, \psi_\alpha)] d\tau \right), \quad (5.89)$$

donde ψ_α y ψ_α^* son variables de Grassmann y no operadores (a diferencia de la ecuación (5.87)), es decir, se obtiene el resultado al hacer las sustituciones

$$\partial_\tau \psi \rightarrow (\partial_\tau - \mu) \psi, \quad \partial_\tau \psi^* \rightarrow (\partial_\tau + \mu) \psi^*, \quad i\tilde{\omega}_n \rightarrow i\tilde{\omega}_n + \mu = i(2n+1)\pi T + \mu. \quad (5.90)$$

5.3. La aproximación de *Hard Thermal Loops*

Como se mostró en la sección anterior, en el formalismo de tiempo imaginario de la teoría de campos a temperatura finita, la única diferencia entre el caso de temperatura cero y temperatura finita es la forma de los propagadores que llevan la dependencia en la temperatura: los vértices de interacción de la teoría se definen igual que en el caso de temperatura cero, pues estos se obtienen directamente de la teoría que se está estudiando. Por lo tanto, dada una teoría se pueden hacer los cálculos de interés termodinámico de forma perturbativa a partir del cálculo de diagramas de Feynman [78].

Más aun, dentro del formalismo de tiempo imaginario que se expuso, el tiempo se considera como un parámetro imaginario, por lo que la teoría se hace una teoría Euclídeana. Así, los cálculos diagramáticos se pueden hacer de forma análoga al caso de temperatura cero, con la única diferencia de que, como los valores de la energía están ahora cuantizados, las integrales de energía intermedias deben reemplazarse por sumas sobre valores discretos [78], es decir,

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (5.91)$$

Dentro de un régimen perturbativo, cuando se hacen cálculos a nivel lazo en una teoría de campos a temperatura finita, surgen divergencias y dificultades que hacen que esta tarea sea sumamente compleja. Una forma de simplificarla es escribir el diagrama como una contribución a temperatura cero más la contribución a temperatura finita. Gracias a esto, la contribución a temperatura finita carece de divergencias ultravioletas, y en el límite de alta temperatura, la contribución de temperatura cero se puede despreciar. Para esto se considera que existen dos escalas naturales de momentos: la temperatura T , que se llama escala *dura* (proviene del nombre inglés *hard*, que significa duro), y gT , donde g es la constante de acoplamiento de la teoría y recibe el nombre de escala *suave* (proviene del nombre inglés *soft*, que significa suave). Se dice que un momento $P^\mu = (p_0, \vec{p})$ es *suave* si p_0 y $p = |\vec{p}|$ son del orden de gT , mientras que si alguna de sus componentes es de orden T , el momento será *duro*. Estas escalas, dentro del régimen perturbativo, se distinguen solamente en el límite de que $g \ll 1$, que es una suposición básica para que las escalas sean distintas.

En las teorías de norma a temperatura alta se pierde la conexión usual entre el orden de la expansión en lazos y las potencias de la constante de acoplamiento, por lo que Pisarski y Braaten [80–82], así como Frenkel y Taylor [83], desarrollaron un procedimiento sistemático que suma el subconjunto infinito de gráficas que surgen al hacer esta expansión. Aquellos diagramas que deben resumirse a propagadores efectivos y vértices, reciben el nombre de *Hard Thermal Loops* (lazos térmicos duros, en inglés), y por lo tanto, este método de aproximación es conocido con este nombre, o por sus siglas HTL.

En particular, en el cálculo de autoenergías en el límite de alta temperatura, las partículas adquieren, mediante la interacción con el medio, masas efectivas, las cuales son mucho más grandes que la masa de la partícula en el límite de temperatura alta, por lo que esta última, en general, se considera cero. Sin embargo, hay partículas muy masivas (con masas del orden de la temperatura) que no se pueden considerar de masa cero.

De acuerdo con Le Bellac [76], la aproximación HTL se puede resumir en dos reglas:

Regla 1: Los momentos externos se pueden despreciar si aparecen en el numerador y se deben despreciar a lo largo de todo el cálculo.

Regla 2: Para los momentos del lazo, se deben ignorar los términos cuadráticos de estos momentos en el numerador, excepto cuando la expresión a temperatura cero es cuadráticamente divergente. Esta divergencia solamente ocurre en el caso de la autoenergía de la partícula de norma.

Por ejemplo, en el cálculo de la aproximación a un lazo del propagador del fotón bajo la aproximación HTL, el tensor de polarización del fotón (o la autoenergía del fotón), $\Pi_{\mu\nu}$, que se muestra diagramáticamente en la Figura 5.2, está dada por

$$\Pi_{\mu\nu} = e^2 T \sum_n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \text{Tr} [\gamma_\mu \not{K} \gamma_\nu (\not{K} - \not{Q})] \tilde{\Delta}(K) \tilde{\Delta}(K - Q). \quad (5.92)$$

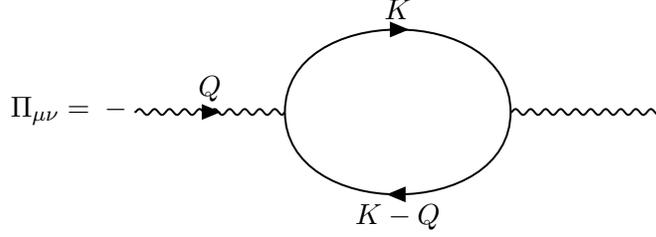


Figura 5.2: Aproximación a un lazo del propagador del fotón.

El cálculo completo de este tensor se muestra con detalle en múltiples textos, como en [76, 79]. Sin embargo, para ejemplificar la aproximación de HTL se mostrarán aquí las aproximaciones utilizadas.

Por ejemplo, una integral de lazo que aparece en $\Pi_{\mu\nu}$ es

$$J = T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k^2 \tilde{\Delta}(K) \tilde{\Delta}(K - Q), \quad (5.93)$$

si θ es el ángulo entre \vec{k} y \vec{q} , y se denota por $E_1 = k$ y $E_2 = |\vec{q} - \vec{k}|$, entonces se puede mostrar que

$$J = -\frac{1}{8\pi^2} \int \frac{k^2 dk d\Omega}{4\pi} \frac{k^2}{E_1 E_2} \left[\left(1 - \tilde{f}(E_1) - \tilde{f}(E_2)\right) \left(\frac{1}{i\omega - E_1 - E_2} - \frac{1}{i\omega + E_1 + E_2} \right) - \left(\tilde{f}(E_1) - \tilde{f}(E_2) \right) \left(\frac{1}{i\omega + E_1 - E_2} - \frac{1}{i\omega - E_1 + E_2} \right) \right]. \quad (5.94)$$

En la aproximación de HTL, es decir, en el límite de alta temperatura, se considera que $k \gg q$, pues la contribución principal a la integral proviene de la región $k \sim T$, por esto se aproximarán las siguientes cantidades como

$$E_2 \simeq k - q \cos \theta, \quad \tilde{f}(E_2) \simeq \tilde{f}(k - q \cos \theta) \simeq \tilde{f}(k) - q \cos \theta \frac{d\tilde{f}(k)}{dk}, \quad (5.95)$$

donde el símbolo \simeq indica que se ha aplicado la aproximación de HTL. Estas dos aproximaciones provienen de la expansión a orden lineal en serie de Taylor.

Bajo estas aproximaciones se puede escribir la autoenergía del fotón como

$$\Pi_{\mu\nu} \simeq 2m_\gamma^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left(\frac{i\omega \hat{K}_\mu \hat{K}_\nu}{Q \cdot \hat{K}} + \delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} \right), \quad (5.96)$$

donde $\hat{K} = (-i, \vec{k})$ y $m_\gamma^2 = e^2 T^2/6$, que es la masa térmica del fotón.

A temperatura cero, $\Pi_{\mu\nu}$ es complejo para valores de $Q^2 > 0$. Esto proviene del hecho de que un fotón virtual puede decaer en estados físicos finales, y la parte imaginaria de $\Pi_{\mu\nu}$ está directamente relacionada con la tasa de decaimiento. Por otro lado, la contribución principal en T tiene la propiedad opuesta, pues $\Pi_{\mu\nu}$ es real para $Q^2 > 0$ y compleja para $Q^2 < 0$: aquí, la parte imaginaria proviene de la dispersión de electrones y positrones con momento del orden de T para momentos suaves del fotón. En la física de plasmas este fenómeno se conoce como amortiguamiento de Landau, en el que el campo de norma (fotón) le transfiere energía al plasma, que constituye el medio en el que se propaga, en forma de trabajo mecánico realizado por el campo eléctrico en las partículas cargadas. La disipación de energía en el plasma ocurre en un plasma sin colisiones y no está relacionada con un incremento en la entropía del sistema. La disipación de energía proviene de electrones cuya componente de velocidad a lo largo del vector de onda \vec{q} del fotón es cercana a la energía disipada. Los electrones que se mueven a una velocidad un poco mayor le ceden energía al plasma, mientras que los que se mueven a una velocidad un poco menor reciben energía del plasma [76].

5.4. Tasa de amortiguamiento y tasa de producción de fermiones a altas temperaturas

A lo largo del capítulo anterior y en éste, se ha planteado cómo las propiedades de una partícula que se propaga en un medio, en particular los neutrinos, se modifican con respecto a aquellas que tiene en el vacío, es decir, sus interacciones se ven afectadas. De forma más general, se habla de la propagación de modos colectivos, o cuasipartículas, que surgen a partir de las interacciones presentes. Los modos colectivos están caracterizados por relaciones de dispersión, que relacionan su energía como función de su momento. Más aun, estos modos colectivos no tienen una vida media infinita, por lo que la tasa de decaimiento o amortiguamiento de las cuasipartículas es otra cantidad importante en su descripción [76].

En general, los modos colectivos surgen matemáticamente como polos de los propagadores con números cuánticos bien definidos en el plano complejo de la energía: la parte real del polo da la relación de dispersión, mientras que la parte imaginaria da la tasa de amortiguamiento [76].

Ahora, si $P^\mu = (\omega, \vec{p})$ es el cuádrimomento de un modo fermiónico en el marco de referencia del medio, el correspondiente polo del propagador está localizado, en general, en el valor complejo

$$\omega = \omega_p - i\frac{\gamma}{2}, \quad (5.97)$$

donde ω_p y γ son funciones reales de p y corresponden con la energía y la tasa de amortiguación del modo, respectivamente. En particular, $m_f \equiv \omega_{p=0}$ se puede interpretar como la masa de la excitación fermiónica y γ^{-1} , de acuerdo con la teoría de respuesta lineal, da la escala de tiempo característica para el decaimiento del modo. Dentro de la descripción

dada por la teoría de campos, ω_p y γ se determinan, en el caso de amortiguamiento débil, a partir de la parte real e imaginaria de la autoenergía del fermión, respectivamente.

Por otro lado, existe otra cantidad relacionada con la parte imaginaria de la autoenergía del fermión, que es la tasa de reacción total Γ . La interpretación usual de esta cantidad es que su inverso da la escala de tiempo para que la distribución de fermiones alcance el equilibrio. D'Olivo y Nieves, en [84], mostraron que la tasa de amortiguamiento y la tasa de reacción total son equivalentes para fermiones quirales que interactúan con un campo escalar mediante una interacción del tipo de Yukawa. Su resultado es que

$$\Gamma = \gamma, \quad (5.98)$$

si Γ está definida mediante funciones de onda apropiadas para el modo fermiónico quiral en el medio.

Posteriormente, Ayala *et al.*, en [85], mostraron que, bajo la aproximación de HTL, la equivalencia entre la tasa de amortiguamiento y la tasa de reacción de un modo fermiónico que se propaga en un medio, es siempre válida.

Siguiendo a Ayala *et al.*, *op. cit.*, se mostrará a continuación cómo la tasa de amortiguamiento se puede expresar en términos de la parte imaginaria de la autoenergía.

De acuerdo con las ecuaciones (5.5) y (5.85), y bajo la aproximación de HTL, en donde la masa del fermión es mucho menor que la temperatura, el inverso del propagador de un fermión quiral en un medio se puede escribir como

$$iS^{-1}(P) = \not{P} - \Sigma, \quad (5.99)$$

donde Σ es la autoenergía efectiva inducida por el medio. A $T = 0$, la teoría es invariante de quiralidad, pues la masa del fermión es muy pequeña. Para comenzar, se expresará al inverso del propagador, en sus dos proyecciones de la razón de helicidad, positiva o negativa, sobre quiralidad, como

$$iS^{-1}(P) = \frac{1}{2}\mathcal{X}_+(\gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_-(\gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \hat{p}), \quad (5.100)$$

y al propagador mismo, en términos de los correladores, como

$$-iS(P) = \frac{1}{2}\Delta_+(P)(\gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) + \frac{1}{2}\Delta_-(P)(\gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \hat{p}), \quad (5.101)$$

donde $\hat{p} = \vec{p}/p$. A partir de las ecuaciones anteriores se obtiene que

$$\begin{aligned} 1 &= (iS^{-1}(P))(-iS(P)) \\ &= \left(\frac{1}{2}\mathcal{X}_+(\gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_-(\gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) \right) \left(\frac{1}{2}\Delta_+(P)(\gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) + \frac{1}{2}\Delta_-(P)(\gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) \right) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{X}_+\Delta_-(P)\gamma_0(\gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) + \frac{1}{2}\mathcal{X}_-\Delta_+(P)\gamma_0(\gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) \end{aligned} \quad (5.102)$$

donde la última igualdad se da a partir de las identidades A.1.5 y A.1.6, que se demuestran en el Apéndice. Además, para que la última igualdad sea igual a uno, las siguientes condiciones deben satisfacerse:

$$\mathcal{X}_+\Delta_-(P) = 1, \quad \mathcal{X}_-\Delta_+(P) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta_-(P) = \mathcal{X}_+^{-1}, \quad \Delta_+(P) = \mathcal{X}_-^{-1} \quad (5.103)$$

Como la invariancia de quiralidad no es afectada por la presencia del medio, entonces el inverso del propagador, en el marco de referencia del medio, se puede escribir como

$$\begin{aligned} iS^{-1}(P) &= A_0\gamma_0 - A_s\vec{\gamma} \cdot \hat{p} \\ &= \frac{1}{2}\Delta_+^{-1}(P)(\gamma_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) + \frac{1}{2}\Delta_-^{-1}(P)(\gamma_0 + \vec{\gamma} \cdot \hat{p}), \end{aligned} \quad (5.104)$$

donde $\Delta_{\pm}(P) = (A_0 \mp A_s)^{-1}$. Los polos del propagador están dados por $\Delta_{\pm}^{-1}(P) = 0$. En el sector de energía positiva, la ecuación (5.104) da lugar a cuatro modos de propagación: dos con la razón entre helicidad y quiralidad positiva, y dos con la razón negativa. Considerando una solución con helicidad negativa así como polos de energía positiva en $\Delta_+(P)$ ¹.

En general, $\Delta_{\pm}^{-1}(\omega, p)$ tiene partes real e imaginaria, por lo que, si se escribe a ω como en (5.97), la ecuación que determina los polos del propagador es

$$\text{Re } \Delta_+^{-1}(\omega_p - i\frac{\gamma}{2}, p) + i \text{Im } \Delta_+^{-1}(\omega_p - i\frac{\gamma}{2}, p) = 0. \quad (5.105)$$

Si se considera el caso de amortiguamiento débil, es decir, $\gamma \ll \omega_p$, la ecuación (5.105) se puede resolver al expandir en serie de Taylor, de potencias de γ , hasta orden lineal en γ y $\text{Im } \Delta_+^{-1}$:

$$\Delta_+^{-1}(\omega_p, p) = \Delta_+^{-1}(\omega_p - i\frac{\gamma}{2}, p) + i\frac{\gamma}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\Delta_+^{-1}(\omega_p)) + \dots \quad (5.106)$$

La ecuación (5.105) implica a orden cero que

$$\text{Re } \Delta_+^{-1}(\omega_p, p) = 0, \quad (5.107)$$

mientras que a primer orden en γ

$$\text{Im } \Delta_+^{-1}(\omega_p, p) = \frac{\gamma}{2} \text{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \Delta_+^{-1}(\omega_p - i\frac{\gamma}{2}, p) \right) \Longleftrightarrow \frac{\gamma}{2} = Z_p \text{Im } \Delta_+^{-1}(\omega_p, p), \quad (5.108)$$

donde

$$Z_p^{-1} = \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } \Delta_+^{-1}(\omega_p, p) \right]_{\omega=\omega_p}. \quad (5.109)$$

El factor Z_p coincide con el residuo en el polo de la contribución de una partícula al propagador, y por lo tanto es un factor de normalización que debe ser tomado en cuenta

¹El mismo argumento es válido para soluciones de energía negativa y helicidad positiva, y los polos de $\Delta_-(P)$

en la construcción de espinores que representan estados de una partícula. Además, en el contexto de la física de muchos cuerpos, Z_p representa el factor de probabilidad que se necesita considerar para los diferentes procesos que involucran al modo fermiónico.

Por otro lado, para relacionar γ a la parte imaginaria de la autoenergía, se debe considerar que los estados de una partícula están representados por espinores que satisfacen la ecuación de Dirac efectiva

$$(\not{P} - \text{Re } \Sigma) u(P) = 0, \quad (5.110)$$

que se obtiene al despreciar la parte absorbente de la autoenergía efectiva. Además, las partes real e imaginaria de la autoenergía se definen como ²

$$\begin{aligned} \text{Re } \Sigma &= \frac{1}{2} \left(\Sigma + \gamma^0 \Sigma^\dagger \gamma^0 \right), \\ \text{Im } \Sigma &= \frac{1}{2i} \left(\Sigma - \gamma^0 \Sigma^\dagger \gamma^0 \right). \end{aligned} \quad (5.111)$$

Las soluciones a la ecuación efectiva de Dirac (ecuación (5.110)) no son necesarias para este análisis, solamente son de interés los operadores de proyección correspondientes. Ahora, se debe escoger una normalización que corresponda a aquellas de los estados de una partícula, por lo que el proyectador para la solución buscada se puede escribir como

$$u(P)\bar{u}(P) = Z_p \omega_p L \not{\hat{p}} \quad (5.112)$$

donde $L = (1 - \gamma_5)/2$ y n^μ es un cuadrivector con componentes $n^\mu = (1, \hat{p})$ en el marco de referencia del plasma.

A partir de sustituir la ecuación (5.99) en la ecuación (5.104), y ésta en la ecuación (5.108) se llega a una expresión para γ :

$$\gamma = -\frac{Z_p}{2} \text{Tr} [\not{\hat{p}} \text{Im } \Sigma(\omega_p, p)], \quad (5.113)$$

donde la autoenergía está evaluada en $\omega = \omega_p$. Además, si se sustituye la ecuación (5.112) en la ecuación (5.113) se llega a

$$\gamma = -\frac{1}{\omega_p} \bar{u}(P) \text{Im } \Sigma(\omega_p, p) u(P). \quad (5.114)$$

Las ecuaciones (5.113) y (5.114) son válidas independientemente de cualquier esquema de aproximación, perturbativo o no, y solamente requieren que la tasa de amortiguamiento sea pequeña comparada con la energía del modo colectivo.

Por lo tanto, a partir de la equivalencia dada por Ayala *et al.*, $\Gamma = \gamma$, se puede encontrar la tasa total de reacción, a partir de la parte imaginaria de la autoenergía.

²Nótese la similitud entre estas definiciones para las partes real e imaginaria con la definición de partes real e imaginaria usuales del Campo Complejo: $2 \text{Re } z = z + \bar{z}$ y $2i \text{Im } z = z - \bar{z}$.

Capítulo 6

Cambio de quiralidad en neutrinos y una cota al momento magnético del neutrino

6.1. Tasa de producción de neutrinos derechos

Como se ha planteado anteriormente, el camino libre medio de los neutrinos en épocas tempranas de la evolución de las estrellas de neutrones es mucho menor que su radio, por lo que los neutrinos emitidos se dispersarán y no podrán transmitirle momento a la PNS al escapar de forma asimétrica. Para ello es necesario incluir un mecanismo que suprima las posibles interacciones. Este mecanismo podría consistir en que los neutrinos que se producen mediante los procesos térmicos por los cuales se enfrían las estrellas (DURCA, MURCA, entre otros), se conviertan en neutrinos estériles, que no interactúen: por ejemplo, la conversión de neutrinos izquierdos en derechos, que son estériles, y por lo tanto escapan libremente de la estrella, transfiriéndole momento.

Siguiendo a Ayala *et al.* [74], considérese un plasma de QED en equilibrio térmico a una temperatura T , tal que T y $\mu_e \gg m_e$, donde μ_e y m_e son el potencial químico y la masa del electrón, respectivamente. Como se mostró en el capítulo anterior (ecuación (5.113)), la tasa de producción de neutrinos derechos con energía p_0 y momento \vec{p} , a partir de neutrinos izquierdos, está dada, de acuerdo con [74, 75, 86], por

$$\Gamma(p_0) = \frac{n_F(p_0)}{2p_0} \text{Tr} [\not{P} R \text{Im} \Sigma], \quad (6.1)$$

donde n_F es la distribución de Fermi-Dirac para los neutrinos derechos, $P_\mu = (p_0, \vec{p})$, $\|\vec{p}\| = p$, los proyectores $R, L = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ y Σ es la autoenergía del neutrino derecho. El cálculo de $\text{Im} \Sigma$ se hará dentro del formalismo de tiempo imaginario de la Teoría Térmica

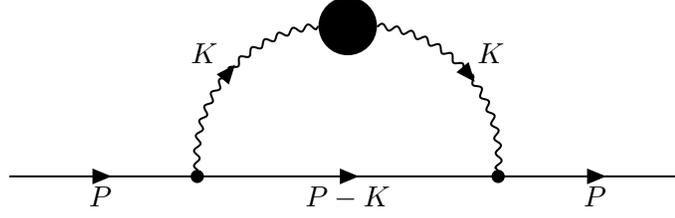


Figura 6.1: Diagrama de Feynman de la autoenergía del neutrino derecho. El propagador vestido del fotón, bajo la aproximación de HTL, se denota por la mota.

de Campos ¹. La contribución a la autoenergía a un lazo se muestra en la figura 6.1, y está dada por

$$\Sigma(P) = T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V^\rho(K) S_F(\not{P} - \not{K}) L V^\lambda(K) D_{\rho\lambda}(K), \quad (6.2)$$

donde $K_\alpha = (k_0, \vec{k})$, $\|\vec{k}\| = k$, V^μ es la función del vértice neutrino-fotón, S_F es el propagador fermiónico del neutrino, el cual se considera libre, y $D_{\rho\lambda}$ es el propagador vestido del fotón.

Para el vértice neutrino-fotón se considera la interacción dipolar magnética, dada por $V_\mu(K) = \mu_\nu \sigma_{\alpha\mu} K^\alpha$, donde μ_ν es el momento magnético del neutrino ² y $\sigma_{\alpha\rho} = \frac{i}{2} [\gamma_\alpha, \gamma_\rho]$, pues los vértices efectivos electromagnéticos se pueden despreciar, ya que provienen de la interacción débil de las partículas en el medio, y conservan la quiralidad. Si se sustituye la forma explícita del vértice, la ecuación (6.1) se reescribe como

$$\Sigma(P) = \mu^2 T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} K_\alpha \sigma^{\alpha\rho} S_F(\not{P} - \not{K}) L K_\beta \sigma^{\beta\lambda} D_{\rho\lambda}(K). \quad (6.3)$$

Por otro lado, el propagador del fotón se puede separar en sus componentes longitudinal y transversal:

$$D_{\rho\lambda}(K) = \Delta_L(K) P_{\rho\lambda}^L + \Delta_T(K) P_{\rho\lambda}^T. \quad (6.4)$$

Definiendo a $P_1 = P - K$ y $P_2 = P$, y sustituyendo la ecuación (6.2) en la (6.1), la traza se separará en dos términos, correspondientes a las partes longitudinales y transversales del propagador bosónico:

$$C_T = P_{\rho\lambda}^T K_\alpha K_\beta \text{Tr} \left[\not{P}_2 R \sigma^{\alpha\rho} \not{P}_1 L \sigma^{\beta\lambda} \right] \quad (6.5)$$

¹Como Ayala *et al.* [74, 75] prueban, la parte imaginaria de la autoenergía se puede obtener tanto del formalismo de tiempo imaginario, como del formalismo de tiempo real, llegando al mismo resultado.

²Nótese que en este caso, ν no es un índice de Lorentz, es una etiqueta para denotar al momento magnético del neutrino.

y

$$C_L = P_{\rho\lambda}^L K_\alpha K_\beta \text{Tr} \left[\not{P}_2 R \sigma^{\alpha\rho} \not{P}_1 L \sigma^{\beta\lambda} \right]. \quad (6.6)$$

Para evaluar las funciones C_T y C_L se requieren las identidades $[L, \sigma^{\alpha\rho}] = 0$ (ecuación (A.3)) y $R\gamma^\mu = \gamma^\mu L$ (ecuación (A.10)), las cuales se prueban en las identidades A.1.1 y A.1.2, del apéndice. Por lo tanto, al sustituir las ecuaciones (A.3) y (A.10) en las ecuaciones (6.5) y (6.6), y utilizar que $R^2 = R$ (ecuación (A.13), que se prueba en la identidad A.1.3 del apéndice), así como la propiedad cíclica de la traza ($\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[CAB] = \text{Tr}[BCA]$), se llega a

$$C_T = P_{\rho\lambda}^T K_\alpha K_\beta \text{Tr} \left[\sigma^{\alpha\rho} \not{P}_1 \sigma^{\beta\lambda} \not{P}_2 R \right] \quad (6.7)$$

y

$$C_L = P_{\rho\lambda}^L K_\alpha K_\beta \text{Tr} \left[\sigma^{\alpha\rho} \not{P}_1 \sigma^{\beta\lambda} \not{P}_2 R \right]. \quad (6.8)$$

Por lo tanto, después de una inspección visual de las ecuaciones (6.7) y (6.8), se ve que la traza a calcular es la misma:

$$\begin{aligned} & P_{1\sigma} P_{2\eta} \text{Tr} \left[\frac{i}{2} (\gamma^\alpha \gamma^\rho - \gamma^\rho \gamma^\alpha) \gamma^\sigma \frac{i}{2} (\gamma^\beta \gamma^\lambda - \gamma^\lambda \gamma^\beta) \gamma^\eta \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \right] \\ &= -\frac{1}{8} P_{1\sigma} P_{2\eta} \left\{ \text{Tr} \left[\gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\eta (1 + \gamma^5) \right] - \text{Tr} \left[\gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\eta (1 + \gamma^5) \right] \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr} \left[\gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\eta (1 + \gamma^5) \right] + \text{Tr} \left[\gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\eta (1 + \gamma^5) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

La ecuación (6.9) es la suma de dos términos asimétricos ante el intercambio $\alpha \leftrightarrow \rho$. Para evaluarlos se comenzará por calcular el término que contiene al “1”, que se denotará por $\{1\}$. Utilizando la paquetería **FeynCalc** de *Mathematica*, y después de simplificar el resultado, se encuentra que

$$\begin{aligned} \{1\} \rightarrow 16 \left\{ -g^{\alpha\sigma} \left(g^{\rho\beta} g^{\lambda\eta} - g^{\rho\lambda} g^{\beta\eta} \right) + g^{\rho\sigma} \left(g^{\alpha\beta} g^{\lambda\eta} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\eta} \right) \right. \\ \left. - g^{\alpha\beta} \left(g^{\rho\lambda} g^{\sigma\eta} - g^{\rho\eta} g^{\beta\lambda} \right) + g^{\rho\beta} \left(g^{\alpha\lambda} g^{\sigma\eta} - g^{\alpha\eta} g^{\sigma\lambda} \right) \right. \\ \left. - g^{\sigma\beta} \left(g^{\alpha\lambda} g^{\rho\eta} - g^{\alpha\eta} g^{\rho\lambda} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Además, si en el término con “ γ^5 ”, que se denotará por $\{\gamma^5\}$, se utiliza **FeynCalc**, y se simplifica el resultado, se encuentra que

$$\{\gamma^5\} \rightarrow -16i \left\{ -g^{\alpha\sigma} \epsilon^{\rho\beta\lambda\eta} + g^{\sigma\rho} \epsilon^{\alpha\beta\lambda\eta} - g^{\lambda\eta} \epsilon^{\beta\alpha\rho\sigma} + g^{\beta\eta} \epsilon^{\lambda\alpha\rho\sigma} \right\}. \quad (6.11)$$

Las trazas de las ecuaciones (6.7) y (6.8) deben de contraerse con tensores simétricos en los índices “ $\rho\lambda$ ” ($P_{\rho\lambda}^L$) y “ $\alpha\beta$ ” ($K_\alpha K_\beta$), y como $\{\gamma^5\}$ es un tensor antisimétrico ante “ $\rho\lambda$ ” o ante “ $\alpha\beta$ ”, entonces su contracción no contribuye.

Ahora,

$$P_{\rho\lambda}^T = -g_{\rho\lambda} - \frac{K_\rho K_\lambda}{K^2} + \frac{K \cdot U}{K^2} (K_\rho U_\lambda + K_\lambda U_\rho) - \frac{K^2}{k^2} U_\rho U_\lambda \quad (6.12)$$

y

$$P_{\rho\lambda}^L = -g_{\rho\lambda} + \frac{K_\rho K_\lambda}{K^2} - P_{\rho\lambda}^T \quad (6.13)$$

donde $U_\alpha = (1, 0, 0, 0)$, además, como el vértice es $K_\alpha \sigma^{\alpha\rho}$ ó $K_\beta \sigma^{\beta\lambda}$, cuando una o dos K_ρ , K_λ ó $K_\rho K_\lambda$, que provengan de $P_{\rho\lambda}^T$ ó $P_{\rho\lambda}^L$, la contracción se anulará, por lo que $P_{\rho\lambda}^T \rightarrow -g_{\rho\lambda} - \frac{K^2}{k^2} U_\rho U_\lambda$ y $P_{\rho\lambda}^L \rightarrow -\frac{K^2}{k^2} U_\rho U_\lambda$.

A partir de (6.9) y (6.10) se obtiene que

$$\begin{aligned} & K_\alpha K_\beta \text{Tr} \left[\sigma^{\alpha\rho} \not{P}_1 \sigma^{\beta\lambda} \not{P}_2 R \right] = \\ & -2 \left\{ 2g^{\rho\lambda} (K \cdot P_1) (K \cdot P_2) - K^\lambda (P_1^\rho (K \cdot P_2) + P_2^\rho (K \cdot P_1)) - K^2 (P_1^\rho P_2^\lambda + P_1^\lambda P_2^\rho) \right. \\ & \quad \left. + K^\rho (P_2^\lambda (K \cdot P_1) + P_1^\lambda (K \cdot P_2)) - (P_1 \cdot P_2) (K^2 g^{\rho\lambda} - K^\rho K^\lambda) \right\}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} C_L = & -2 \frac{K^2}{k^2} \left\{ 2K^2 [(P_1 \cdot U)(P_2 \cdot U)] + 2(K \cdot P_1)(K \cdot P_2) - (P_1 \cdot P_2) [K^2 - (K \cdot U)^2] \right. \\ & \left. - 2(K \cdot U) [(P_1 \cdot U)(K \cdot P_2) + (P_2 \cdot U)(K \cdot P_1)] \right\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Como $P_1 = P - K$ y $P_2 = P$ corresponden con los cuadrimentos de los neutrinos, y dado que para un neutrino $P^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = 0$, pues la masa se considera cero, entonces $P_1^2 = P_2^2 = 0$ y por lo tanto $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)^2 = P_1 \cdot P_2$, que al sustituirlo en C_L , junto con el valor de los productos punto, se obtiene

$$\begin{aligned} C_L = & -2 \frac{k_0^2 - k^2}{k^2} \left\{ 2(k_0^2 - k^2)(p_0 - k_0)p_0 + 2(K \cdot P - K^2)(K \cdot P) \right. \\ & \left. - 2k_0 [(p_0 - k_0)(K \cdot P) + p_0(K \cdot P - K^2)] + \frac{k^2}{2}(K^2 - 4P \cdot K) \right\}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Antes de continuar reduciendo la expresión de C_L , se debe expresar la suma sobre frecuencias de Matsubara, $M_{L,T}$, en términos de las densidades espectrales:

$$M_{L,T} = T \sum_n \Delta_{L,T}(i\omega_n) \tilde{\Delta}_F(i(\omega - \omega_n)). \quad (6.17)$$

Ahora, la parte imaginaria de $M_{L,T}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \text{Im} [M_{L,T}] = & \pi \left(e^{\beta(p_0 - \mu)} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \delta(p_0 - k_0 - p'_0) \\ & \times f(k_0) \tilde{f}(p'_0 - \mu) \rho_F(p'_0) \rho_{L,T}(k_0), \end{aligned} \quad (6.18)$$

y se prueba en las identidades A.2.1 y A.2.2, junto con su generalización para potencial químico finito, la identidad A.2.3.

Por lo tanto, la expresión buscada para $\Gamma(p_0)$ involucra, salvo el factor de $\mu_\nu^2 \frac{n_F}{2p_0}$, a la siguiente cantidad:

$$\begin{aligned} & \pi \left(e^{\beta(p_0 - \mu)} + 1 \right) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} f(k_0) \tilde{f}(p'_0 - \mu) \\ & \quad \times \delta(p_0 - k_0 - p'_0) \rho_F(p'_0) \sum_{i=L,T} C_i \rho_i(k_0). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Como el fermión se considera libre, entonces $\rho_F(p'_0) = (2\pi)\epsilon(p'_0)\delta(p_0'^2 - E_p^2)$, donde $E_p = \sqrt{\|\vec{P} - \vec{K}\|^2 + m^2}$ y $\epsilon(p'_0) = \theta(p'_0) - \theta(-p'_0)$ es la función signo, con θ la función escalón.

Por lo tanto, la ecuación anterior se reescribirá como

$$\begin{aligned} & \pi \left(e^{\beta(p_0 - \mu)} + 1 \right) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} f(k_0) \tilde{f}(p'_0 - \mu) \\ & \quad \times \delta(p_0 - k_0 - p'_0) 2\pi\epsilon(p'_0)\delta(p_0'^2 - E_p^2) \sum_{i=L,T} C_i \rho_i(k_0). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Por otro lado, para poder reescribir la $\delta(p_0'^2 - E_p^2)$ de forma adecuada, se debe de considerar a $g(p'_0) = p_0'^2 - E_p^2$, por lo que las raíces de la función g se encuentran en $p'_0 = \pm E_p$, y además, $g'(p'_0) = 2p'_0$. Dado que

$$\delta(g(x)) = \sum_{\substack{a, \\ g(a)=0, \\ g'(a) \neq 0}} \frac{\delta(x - a)}{\|g'(a)\|}, \quad (6.21)$$

entonces $\delta(p_0'^2 - E_p^2) = \frac{1}{2E_p} (\delta(p'_0 - E_p) + \delta(p'_0 + E_p))$, y por lo tanto $\epsilon(p'_0)\delta(p_0'^2 - E_p^2) = \frac{1}{2E_p} (\delta(p'_0 - E_p) - \delta(p'_0 + E_p))$. Con esto se puede realizar la integración sobre dp'_0 y obtener

$$\begin{aligned} & \pi \left(e^{\beta(p_0 - \mu)} + 1 \right) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} f(k_0) \left(\sum_{i=L,T} C_i \rho_i(k_0) \right) \\ & \quad \times \frac{1}{2E_p} \left[\tilde{f}(E_p - \mu) \delta(E_p - (p_0 - k_0)) - \left(1 - \tilde{f}(E_p + \mu) \right) \delta(E_p - (p_0 - k_0)) \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Ahora, el término de la ecuación (6.22) que es proporcional a $\tilde{f}(E_p - \mu)$ corresponde al caso en el que el neutrino izquierdo está en el estado inicial, mientras que el término proporcional a $\left(1 - \tilde{f}(E_p + \mu) \right)$ es el caso en el que está en el estado final, donde lo hace como un antineutrino. Dado que se busca producir neutrinos derechos a partir de neutrinos izquierdos, sólo se deberá considerar el primer término.

Separando la integral en d^3k en su parte radial y su componente angular, se puede realizar la integración de la componente axial y obtener

$$\begin{aligned} & \pi \left(e^{\beta(p_0 - \mu)} + 1 \right) \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 d(\cos \Theta) \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_0}{2\pi} f(k_0) \\ & \times \left(\sum_{i=L,T} C_i \rho_i(k_0) \right) \frac{1}{2E_p} \tilde{f}(E_p - \mu) \delta(E_p - (p_0 - k_0)), \end{aligned} \quad (6.23)$$

donde Θ es el ángulo entre el momento del neutrino entrante (izquierdo) y el del fotón virtual. Ahora, como $\delta(E_p - (p_0 - k_0)) = \delta(\sqrt{p^2 + k^2 - 2pk \cos \Theta} - p_0 + k_0)$, entonces, cuando se integre, junto con el hecho de que los neutrinos (derechos) son no masivos, se tendrá la siguiente igualdad:

$$\sqrt{p^2 + k^2 - 2pk \cos \Theta} = p_0 - k_0 \iff \cos \Theta = -\frac{2p_0 k_0 - k^2}{2pk}. \quad (6.24)$$

Como la función coseno es acotada, $-1 \leq \cos \Theta \leq 1$, entonces, de la ecuación (6.24), se desprenden las siguientes desigualdades:

$$k_0 \leq k, \quad (6.25)$$

$$2p - k_0 - k \geq 0, \quad (6.26)$$

$$k_0 \geq k, \quad (6.27)$$

$$k_0 - 2p - k \geq 0. \quad (6.28)$$

La desigualdad (6.26) implica una función escalón $\theta(2p_0 - k_0 - k)$, además es válida en la región $-k \leq k_0 \leq k$. Más aun, las desigualdades (6.25), (6.26), (6.27) y (6.28) se satisfacen sólo si

$$-k \leq k_0 \leq k. \quad (6.29)$$

La desigualdad (6.29) implica que el corte de Landau solamente contribuirá en $\rho_{L,T}(k_0)$.

Ahora, regresando al cálculo de C_L : como $K \cdot P = k_0 p_0 - k p \cos \Theta$, si se sustituye la ecuación (6.24), se obtiene que $K \cdot P = \frac{K^2}{2}$, por lo que al sustituir este resultado en la ecuación (6.16) se llega a:

$$C_L = -\frac{(k_0^2 - k^2)^2}{k^2} (2p_0 - k_0)^2, \quad (6.30)$$

Definiendo $x := \frac{k_0}{k}$ y sustituyendo en la ecuación (6.30) se llega, finalmente, a:

$$C_L = -k^2 (1 - x^2)^2 (2p_0 - k_0)^2. \quad (6.31)$$

Por otro lado, por las ecuaciones (6.7) y (6.8), C_L y C_T son proporcionales a $P_{\rho\lambda}^L$ y $P_{\rho\lambda}^T$, respectivamente. Como $P_{\rho\lambda}^T = P_{\rho\lambda}^L - g_{\rho\lambda}$, entonces para calcular C_T se debe contraer la ecuación (6.14) con $-g_{\rho\lambda}$ y restarle C_L . Por lo tanto, el resultado de C_T es:

$$C_T = k^2(1 - x^2)^2 [(2p_0 - k_0)^2 - k^2]. \quad (6.32)$$

Por otro lado, como

$$\left| \frac{d}{d(\cos \Theta)} \left(\sqrt{p^2 + k^2 - 2pk \cos \Theta} - (p_0 - k_0) \right) \right| = \left| \frac{pk}{\sqrt{p^2 + k^2 - 2pk \cos \Theta}} \right|, \quad (6.33)$$

sustituyendo en esta última ecuación la ecuación (6.24), se llega a

$$\left| \frac{d}{d(\cos \Theta)} \left(\sqrt{p^2 + k^2 - 2pk \cos \Theta} - (p_0 - k_0) \right) \right| = \frac{p_0 k}{E_p}, \quad (6.34)$$

y por lo tanto,

$$\delta(E_p - (p_p - k_0)) = \frac{E_p}{p_0 k} \delta(\sqrt{p^2 + k^2 - 2pk \cos \Theta} - p_0 + k_0). \quad (6.35)$$

Entonces, si se sustituye la condición (6.29); C_L , viz., (6.31); C_T , viz., (6.32) y la ecuación (6.35) en la ecuación (6.23), y se realiza la integración sobre $d(\cos \Theta)$ se obtiene

$$\begin{aligned} & \pi \left(e^{\beta(p_0 - \mu)} + 1 \right) \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} k^2 \int_{-k}^k \frac{dk_0}{2\pi} \frac{1}{2p_0 k} f(k_0) \tilde{f}(E_p - \mu) \theta(2p_0 - k_0 - k) \\ & \times (-k^2(1 - x^2)^2 (2p_0 - k_0)^2 \rho_L(k_0) + k^2(1 - x^2)^2 [(2p_0 - k_0)^2 - k^2] \rho_T(k_0)). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Ahora, si se hace el cambio $k_0 \rightarrow -k_0$, como las densidades espectrales son funciones impares, es decir, $\rho(E) = -\rho(-E)$, entonces $\rho_{L,T} \rightarrow -\rho_{L,T}$. Además, $E_p = p_0 - k_0 \rightarrow p_0 + k_0$; $f(k_0) \rightarrow f(-k_0) = -(1 + f(k_0))$. Finalmente, como $n_F(p_0) = (e^{\beta(p_0 - \mu)} + 1)^{-1}$, si se sustituyen estos cambios en la ecuación (6.36) y ésta en la ecuación (6.1), se obtiene la expresión para $\Gamma(p_0)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(p_0) &= \frac{\mu_\nu^2}{32 \pi^2 p_0^2} \int_0^\infty dk k^3 \int_{-k}^k dk_0 [1 + f(k_0)] \tilde{f}(p_0 + k_0 - \mu) \theta(2p_0 + k_0 - k) \\ & \times (1 - x^2)^2 (2p_0 + k_0)^2 \left[-\rho_L(k_0) + \left(1 - \frac{k^2}{(2p_0 + k_0)^2} \right) \rho_T(k_0) \right]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

De acuerdo con Le Bellac [76], las densidades espectrales del fotón están dadas por:

$$\rho_L(k_0) = \frac{2\pi m_\gamma^2 x}{\left[k^2 + 2m_\gamma^2 \left(1 - \frac{x}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) \right]^2 + [\pi m_\gamma^2 x]^2}, \quad (6.38)$$

donde $m_\gamma^2 = \frac{e^2}{2\pi^2} \left(\mu_e^2 + \frac{\pi^2 T^2}{3} \right)$ es la masa térmica del fotón y

$$\rho_T(k_0) = \frac{2\pi m_\gamma^2 x(1-x^2)}{\left[k^2(1-x^2) + m_\gamma^2 \left(x^2 + \frac{x}{2}(1-x^2) \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) \right]^2 + \left[\frac{\pi}{2} m_\gamma^2 x(1-x^2) \right]^2}. \quad (6.39)$$

Por otro lado, ρ_L está dada por la ecuación (6.38), y debe corresponder con un propagador longitudinal definido como

$$\Delta_L(q_0) = \frac{Q^2}{q^2} \frac{-1}{Q^2 - F}, \quad (6.40)$$

donde $F = -\frac{2m_\gamma^2 Q^2}{q^2} Q_1\left(\frac{i\omega}{q}\right)$ y $Q_1(z) = \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1$ es un polinomio de Legendre del segundo tipo. Esto significa que se debe restaurar el factor $\frac{Q^2}{q^2}$, es decir, hay que multiplicar a ρ_L (dada por la ecuación (6.38)) por $\frac{q^2}{Q^2} = \frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2}$ para obtener la densidad espectral apropiada. Si se hace eso se llega, finalmente, a la expresión para $\Gamma(p_0)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(p_0) = & \frac{\mu_\nu^2}{32\pi^2 p_0^2} \int_0^\infty dk k^3 \int_{-k}^k dk_0 \theta(2p_0 + k_0 - k) [1 + f(k_0)] \tilde{f}(p_0 + k_0 - \mu) \\ & \times (2p_0 + k_0)^2 \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2}\right)^2 \left[\rho_L(k_0) + \left(1 - \frac{k^2}{(2p_0 + k_0)^2}\right) \rho_T(k_0) \right], \end{aligned} \quad (6.41)$$

donde ρ_T está dada por la ecuación (6.39) y ρ_L está dada por

$$\rho_L(k_0) = \frac{2\pi m_\gamma^2 x}{(1-x^2) \left\{ \left[k^2 + 2m_\gamma^2 \left(1 - \frac{x}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right) \right]^2 + [\pi m_\gamma^2 x]^2 \right\}}. \quad (6.42)$$

Ahora que se tiene una expresión para $\Gamma(p_0)$, esta se puede evaluar numéricamente. En la Figura 6.2 se muestran los valores que toma para las temperaturas y potenciales químicos que existen en las etapas tempranas de la evolución de la PNS (transición de la etapa III a la IV, según la clasificación de [16], Figura 2.4).

6.2. Una cota inferior para el momento magnético del neutrino

Si se escribe el momento magnético del neutrino en unidades del magnetón de Bohr, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 0.296342 \text{ MeV}^{-1}$, es decir,

$$\mu_\nu = a\mu_B, \quad (6.43)$$

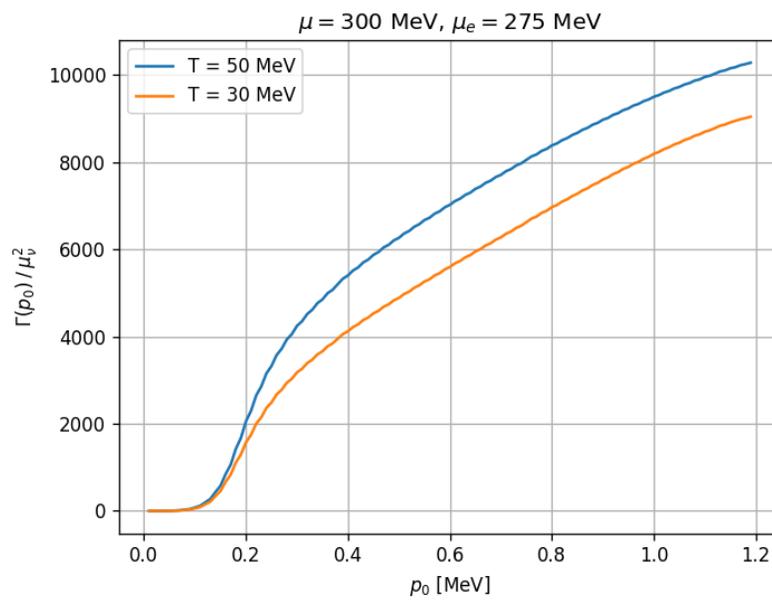


Figura 6.2: Gráfica de $\Gamma(p_0)/\mu_\nu^2$ para distintas temperaturas $T = 50$ y $T = 30$ MeV, y potencial químico del neutrino $\mu = 300$ MeV y del electrón $\mu_e = 275$ MeV.

entonces, $\Gamma(p_0)$ se reescribirá de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Gamma(p_0) &= \frac{a^2 \mu_B^2}{32\pi^2 p_0^2} \int_0^\infty dk k^3 \int_{-k}^k dk_0 \theta(2p_0 + k_0 - k) [1 + f(k_0)] \tilde{f}(p_0 + k_0 - \mu) \\ &\quad \times (2p_0 + k_0)^2 \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2}\right)^2 \left[\rho_L(k_0, k) + \left(1 - \frac{k^2}{(2p_0 + k_0)^2}\right) \rho_T(k_0, k) \right] \end{aligned} \quad (6.44)$$

Ahora, la tasa total de producción de neutrinos derechos, Γ , se define como la integral de $\Gamma(p_0)$ sobre todo el espacio fase accesible, es decir,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int \frac{d^3 r d^3 p}{(2\pi)^3} \Gamma(p_0) \\ &= V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Gamma(p_0), \end{aligned} \quad (6.45)$$

donde V es el volumen en el que ocurre la reacción. La tasa total de producción depende paraméricamente de la temperatura y del potencial químico del electrón y del neutrino. Aunque los últimos dos son función de la temperatura, se puede considerar que se mantienen constantes, sin embargo, como se ve en las Figuras 6.2 y 6.3, $\Gamma(p_0)$, y por tanto Γ , sí varían considerablemente con respecto a la temperatura. Por ello es necesario considerar a la tasa de producción promedio, definida como

$$\langle \Gamma \rangle_T = \frac{1}{T_f - T_i} \int_{T_i}^{T_f} \Gamma dT. \quad (6.46)$$

Reescribiendo $\int d^3 p = \int dp_0 d\Omega p_0^2 = 4\pi \int_{p_0^{min}}^{p_0^{max}} dp_0 p_0^2$ y sustituyendo la ecuación (6.44) en las ecuaciones (6.45) y (6.46) se llega a:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma \rangle_T &= a^2 \frac{\mu_B^2 V}{64\pi^4} \frac{1}{T_f - T_i} \int_{T_i}^{T_f} dT \int_{p_0^{min}}^{p_0^{max}} dp_0 p_0^2 \int_0^\infty dk k^3 \int_{-k}^k dk_0 \theta(2p_0 + k_0 - k) \\ &\quad \times [1 + f(k_0)] \tilde{f}(p_0 + k_0 - \mu) (2p_0 + k_0)^2 \left(1 - \frac{k_0^2}{k^2}\right)^2 \\ &\quad \times \left[\rho_L(k_0, k) + \left(1 - \frac{k^2}{(2p_0 + k_0)^2}\right) \rho_T(k_0, k) \right] \\ &= a^2 \frac{\mu_B^2 V}{64\pi^4} \mathbb{I}(\mu), \end{aligned} \quad (6.47)$$

donde $p_0^{min} = 0$ y p_0^{max} son los valores mínimo y máximo, respectivamente, de la energía del neutrino en el decaimiento beta, el cual está mediado por el intercambio de un bosón W intermedio, el cual tiene una masa (≈ 80.2 GeV) mucho mayor que la típica escala de energías en el nacimiento de las PNS (decenas de MeV), por lo que $p_0^{max} = 1.2$ MeV, que es el valor máximo de energía de un neutrino no masivo proveniente del decaimiento en el vacío.

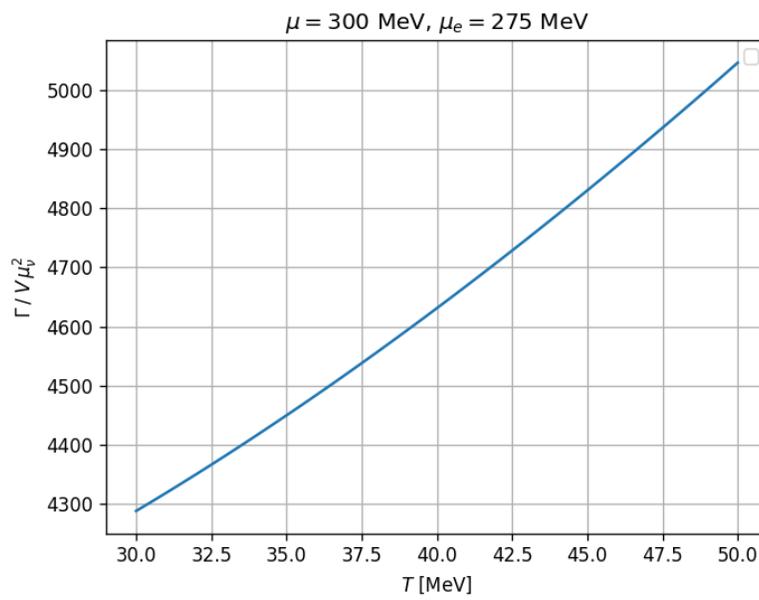


Figura 6.3: Gráfica de $\Gamma/V\mu_\nu^2$ para temperaturas entre 50 y 30 MeV, y potencial químico del neutrino $\mu = 300$ MeV y del electrón $\mu_e = 275$ MeV.

Dado que los neutrinos derechos son estériles, no interactuarán con la materia del núcleo de la PNS, por lo que podrán escapar libremente. De modo que, para que este proceso sea lo más eficiente, el cambio de quiralidad de los neutrinos deberá ocurrir antes de que éstos interactúen con el medio, es decir, el tiempo típico que le toma al proceso deberá ser menor que el tiempo necesario para que un neutrino recorra en el núcleo de la PNS, a la velocidad de la luz, un camino libre medio.

Por otro lado, el tiempo típico que le toma al proceso, τ , se define como el inverso de Γ , es decir

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}, \quad (6.48)$$

y así, el tiempo típico promedio será

$$\langle \tau \rangle_T = \frac{1}{\langle \Gamma \rangle_T}. \quad (6.49)$$

Por lo tanto, para que el proceso sea lo más eficiente

$$\langle \tau \rangle_T \leq \lambda, \quad (6.50)$$

donde λ es el camino libre medio de los neutrinos en el medio. Sustituyendo el valor de $\langle \tau \rangle$ en dicha desigualdad se obtiene

$$a^2 \frac{\mu_B^2 V}{64\pi^4} \mathbb{I}(\mu) \geq \frac{1}{\lambda} \iff a^2 \geq \frac{64\pi^4}{\lambda V \mu_B^2} (\mathbb{I}(\mu))^{-1}. \quad (6.51)$$

A partir de la desigualdad (6.51) se puede encontrar una cota inferior para el valor del momento magnético del neutrino, en unidades del magnetón de Bohr.

El volumen en el que ocurre la reacción, V , es un cilindro cuya altura es el camino libre medio, λ , y el radio de su base es la escala en la que la aproximación de campo magnético uniforme es válida, conocida como longitud de coherencia magnética, l_m , que se define, en Lattimer y Prakash [87], y está dada, bajo la aproximación de campo magnético fuerte como

$$l_m \approx 2\pi n_e (\lambda_e^2/b)^2 \approx 2000 \text{ fm}, \quad (6.52)$$

donde n_e es la densidad de número de electrones, λ_e es la longitud de onda de Compton del electrón, dada por $\lambda_e = \hbar/m_e c$ y $b = B/B_e^c$, con $B_e^c = (\hbar c/e)\lambda_e^{-2}$ el campo magnético crítico del electrón. Por tanto, el volumen de reacción estará dado por

$$V = 4\pi^3 n_e^2 (\lambda_e^2/b)^4 \lambda = 4\pi^3 n_0^2 \lambda_e^8 \left(\frac{n_e}{n_0}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{b^4}\right) \approx 1.3 \text{ fm}^3 \quad (6.53)$$

y la desigualdad (6.51) se reescribirá como

$$a^2 \geq \frac{16\pi}{\mu_B^2 n_0^2 \lambda_e^8} \frac{b^4}{\lambda^2} \left(\frac{n_e}{n_0}\right)^{-2} (\mathbb{I}(\mu))^{-1}. \quad (6.54)$$

Para evaluar la desigualdad (6.54), se considerará que $p_0^{min} = 0$, $p_0^{max} \simeq 1.2 \text{ MeV}$, $B \sim 5 \times 10^{16} \text{ G}$, $T_f = 50 \text{ MeV}$, $T_i = 30 \text{ MeV}$, $\mu = 300 \text{ MeV}$, $\mu_e = 275 \text{ MeV}$, $\lambda \sim 1 \text{ m}$ y $l_m \approx 2000 \text{ fm}$, por lo que

$$a \geq 4.7 \times 10^{-15}, \quad (6.55)$$

es decir,

$$\mu_\nu \geq 4.7 \times 10^{-15} \mu_B. \quad (6.56)$$

Por lo tanto, para que todos los neutrinos escapen del núcleo de la estrella, y lo puedan hacer de forma asimétrica, transfiriéndole momento a la estrella, el valor del momento magnético de los neutrinos deberá ser mayor que $4.7 \times 10^{-15} \mu_B$, de lo contrario, el neutrino interactuará con la materia presente en el núcleo y la emisión asimétrica no ocurrirá.

Como ya se mencionó anteriormente, Akhmedov *et al.* [48] (ecuación (3.15)), encontraron, mediante el mecanismo de resonancia entre distintos sabores de neutrinos, que los neutrinos deberían obtener un momento magnético transitorio mayor que $10^{-14} (10^{-15}) \mu_B$. Esta cota coincide con la que se obtuvo aquí, ecuación (6.56), mediante el mecanismo descrito.

6.3. Una cota superior para el momento magnético del neutrino

Siguiendo a Ayala *et al.* [74, 75], la luminosidad del núcleo de neutrinos derechos, inmediatamente después de su colapso en una supernova, se puede obtener como

$$Q_{\nu_R} = V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p_0 \Gamma(p_0), \quad (6.57)$$

donde V es el volumen del plasma. Tomando en cuenta los parámetros promedio de la supernova SN1987A [7, 55, 88], es decir: una densidad constante $\rho = 8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$, un volumen $V = 8 \times 10^{18} \text{ cm}^3$, una razón de electrones y bariones $Y_e \simeq Y_p \simeq 0.3$, y temperaturas en el intervalo $T = 30 \sim 60 \text{ MeV}$, que corresponden a un gas de electrones degenerados con potencial químico electrónico μ_e con valores entre 307 y 280 MeV. El potencial químico de los neutrinos se considera $\mu \approx 160 \text{ MeV}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (6.57), Ayala *et al.*, *op. cit.* obtuvieron

$$Q_{\nu_R} = \left(\frac{\mu_\nu}{\mu_B} \right)^2 (0.7 - 4.3) \times 10^{76} \text{ erg s}^{-1}. \quad (6.58)$$

Si la emisión de neutrinos derechos dura cerca de un segundo, la cota de luminosidad es $Q_{\nu_R} \leq 10^{53} \text{ erg s}^{-1}$, por lo que los autores obtuvieron una cota superior para el momento magnético del neutrino

$$\mu_\nu \leq (0.1 - 0.4) \times 10^{-11} \mu_B, \quad (6.59)$$

que es la cota superior más restrictiva que se ha encontrado.

Combinando las ecuaciones (6.56) y (6.59), se obtiene un rango de valores para el momento magnético del neutrino, para el cual, el proceso considerado será lo más eficiente:

$$4.7 \times 10^{-15} \leq \frac{\mu_\nu}{\mu_B} \leq (0.1 - 0.4) \times 10^{-11}. \quad (6.60)$$

Capítulo 7

Cálculo de las velocidades de escape en estrellas de neutrones

En el capítulo anterior se planteó un mecanismo para que los neutrinos que se emitan en el enfriamiento de la estrella de neutrones puedan escapar libremente, en épocas en las que el camino libre medio de los neutrinos es menor que el radio de la estrella. Para esto, se planteó que los neutrinos izquierdos que se producen se transforman en neutrinos derechos, que al ser estériles escapan libremente, si su momento magnético está en el intervalo dado por la ecuación (6.60)

$$4.7 \times 10^{-15} \leq \frac{\mu_\nu}{\mu_B} \leq (0.1 - 0.4) \times 10^{-11}. \quad (7.1)$$

Suponiendo que se da esta condición, los neutrinos escaparán libremente de forma asimétrica y serán capaces de transmitirle un momento a la estrella, relacionado con esa asimetría. En este capítulo se calculará la velocidad que adquiere la PNS debida a la emisión anisotrópica de neutrinos, siguiendo a [44].

7.1. Velocidad de escape de estrellas de neutrones

En el capítulo sobre la física de las estrellas de neutrones, en la sección sobre su evolución térmica, se argumentó que el principal mecanismo de enfriamiento de las estrellas de neutrones, en sus primeras etapas, es por la emisión de neutrinos. En particular, en épocas tempranas, la emisión principal de estas partículas proviene del núcleo, además, la emisión de neutrinos en la corteza es independiente de la del núcleo, por lo que, en una primera aproximación, bastará con considerar que la emisión de neutrinos proviene del núcleo de la PNS.

El núcleo de la PNS se considerará compuesto de materia de quarks extraña magnetizada (MSQM, por sus siglas en inglés). Al considerar este tipo de materia, la densidad del

núcleo deberá ser tan alta, que los grados de libertad relevantes son los quarks u , d y s . Además, la emisión de neutrinos, o antineutrinos, será a partir del decaimiento β (proceso DURCA para quarks, es decir, solamente el proceso dominante). Como el decaimiento β es un proceso que viola la simetría de paridad, la cantidad relevante en el cálculo de la velocidad de *kick* es la asimetría en la polarización del espín del electrón, el cual se define como la razón entre la diferencia y la suma de los espines polarizados de los electrones en las direcciones a lo largo y opuestas al campo magnético. La conservación de momento y de momento angular en un proceso que viola la simetría de paridad implica que la polarización del espín de los neutrinos y positrones (anti-neutrinos y electrones) emitidos, esté correlacionada con su dirección de movimiento, proyectada a lo largo u opuesta a la dirección del campo magnético. Por lo tanto, el número de neutrinos o antineutrinos emitidos en una u otra dirección se puede determinar de la asimetría de espín.

A lo largo de este cálculo se supondrá que el ángulo entre la dirección del campo magnético y el eje de rotación es tan pequeño que se consideran paralelos. Lattimer y Prakash [87] argumentan que el campo magnético se puede considerar uniforme para distancias microscópicas (e incluso para distancias del tamaño del núcleo de la estrella de neutrones), por lo que dicha hipótesis se considerará en el cálculo siguiente.

De acuerdo con Ayala *et al.* y Sagert *et al.* [41, 44], la velocidad de *kick* de la PNS está dada por

$$dv = \frac{\chi}{M_{NS}} \frac{4}{3} \pi R^3 \epsilon dt, \quad (7.2)$$

donde v es la velocidad de la estrella, M_{NS} es la masa de la estrella, R es el radio del núcleo de la estrella (pues es donde se da la principal emisión de neutrinos), χ es la polarización del espín del electrón y ϵ es la emisividad de neutrinos. La ecuación anterior plantea que la fuerza que se ejerce sobre la estrella es igual a la fracción de neutrinos emitidos por el núcleo, en una dirección.

La emisividad es función de la temperatura, campo magnético y potencial químico del núcleo de la estrella, sin embargo, se puede utilizar una ecuación de enfriamiento (Ley de enfriamiento de Newton, ecuación (2.25)) para expresar su dependencia con la temperatura, es decir,

$$-\epsilon = \frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dT} \frac{dT}{dt} = C_v \frac{dT}{dt}, \quad (7.3)$$

donde U es la densidad de energía interna y C_v es la capacidad calorífica de la estrella. Por lo tanto, al sustituir la ecuación de enfriamiento (7.3), la ecuación (7.2) se puede integrar y obtener

$$v = - \frac{1}{M_{NS}} \frac{4}{3} \pi R^3 \int_{T_i}^{T_f} \chi C_v dT, \quad (7.4)$$

la cual se puede escribir de la siguiente forma

$$v = - 803.925 \frac{\text{km}}{\text{s}} \left(\frac{1.4 M_{\odot}}{M_{NS}} \right) \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^3 \left(\frac{I}{\text{MeV fm}^{-3}} \right), \quad (7.5)$$

donde

$$I = \int_{T_i}^{T_f} \chi C_v dT. \quad (7.6)$$

La integral I es una función de C_v y χ , y las dos dependen del campo magnético, potencial químico y temperatura. Para poder evaluar a I , y así encontrar la velocidad de la PNS, se deberá encontrar la polarización del espín del electrón y la capacidad calorífica a partir de la termodinámica del núcleo de la PNS.

7.2. Termodinámica de fermiones magnetizados

El núcleo de la PNS se estudiará como un gas compuesto de quarks u , d y s , así como electrones e y neutrinos ν , en presencia de un campo magnético, es decir, el núcleo está compuesto de MSQM.

Para cada una de las especies f de los fermiones cargados que componen al núcleo, en presencia de un campo magnético \mathbf{B} en la dirección \hat{z} , el gran potencial termodinámico está dado por [44, 89, 90]

$$\Omega_f(B, \mu_f, T) = - \frac{e_f d_f B}{2\pi^2} \int_0^\infty dp_3 \sum_{l=0}^\infty (2 - \delta_{l0}) \left[E_{lf} + \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + e^{-\beta(E_{lf} - \mu_f)} \right) \right] \quad (7.7)$$

donde

$$E_{lf} = \sqrt{p_3^2 + 2|e_f|Bl + m_f^2}, \quad l = j + \frac{1}{2} + \frac{s}{2}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad s = \pm 1, \quad (7.8)$$

con e_f y m_f la carga y masa del fermión, respectivamente, d_f es el factor de degeneración de los fermiones, que para el electrón es 1 y para los quarks es 3; l es el nivel de Landau, s es el espín de la partícula y p_3 es el momento a lo largo del campo magnético \mathbf{B} .

Para los neutrinos, que son los únicos fermiones no cargados presentes, el gran potencial está dado por [91]

$$\Omega_\nu(\mu, T) = - \frac{T^4}{\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \ln \left[\left(1 + e^{\frac{\mu}{T} - y} \right) \left(1 + e^{-\frac{\mu}{T} - y} \right) \right]. \quad (7.9)$$

Las cantidades termodinámicas relevantes, tales como la densidad de número, la entropía y la capacidad calorífica se obtienen a partir de los potenciales anteriores, y están dadas por

$$n_f = - \frac{\partial \Omega_f}{\partial \mu_f}, \quad (7.10a)$$

$$S_f = - \frac{\partial \Omega_f}{\partial T}, \quad (7.10b)$$

$$C_{vf} = T \frac{\partial S_f}{\partial T}. \quad (7.10c)$$

Al sustituir la ecuación (7.7) en las ecuaciones (7.10) se encuentran sus expresiones exactas para cada especie de fermión cargada

$$n_f = \frac{d_f m_f^3}{2\pi^2} b_f \sum_{l=0}^{\infty} (2 - \delta_{l0}) \int_0^{\infty} dx_3 \frac{1}{e^{\frac{m_f}{T}(\sqrt{x_3^2+1+2lb_f-x_f})} + 1}, \quad (7.11)$$

$$S_f = \frac{d_f m_f^2}{2\pi^2} b_f \int_0^{\infty} dp_3 \sum_{l=0}^{\infty} (2 - \delta_{l0}) \left[\ln \left(1 + e^{-\frac{1}{T}(E_{lf}-\mu_f)} \right) + \frac{1}{T} \frac{E_{lf} - \mu_f}{e^{\frac{1}{T}(E_{lf}-\mu_f)} + 1} \right] \quad (7.12)$$

$$C_{vf} = \frac{d_f m_f^2}{4\pi^2 T^2} b_f \int_0^{\infty} dp_3 \sum_{l=0}^{\infty} (2 - \delta_{l0}) \frac{(E_{lf} - \mu_f)^2}{\left[1 + \cosh \left(\frac{E_{lf} - \mu_f}{T} \right) \right]}, \quad (7.13)$$

donde $x_3 = p_3/m_f$ es el momento adimensional en la dirección del campo magnético, $x_f = \mu_f/m_f$ es el potencial químico adimensional y $b_f = B/B_f^c$, con $B_f^c = m_f^2/e_f$ el campo magnético crítico. Como referencia, se tomará el campo crítico del electrón $B_e^c = m_e^2/e_e = 4.41 \times 10^{13}$ G, que se denotará por $b_e \equiv b$.

Por otro lado, para los neutrinos, se obtiene que

$$n_\nu = \frac{T^3}{\pi^2} \int_0^{\infty} dy \frac{y^2 \sinh \left(\frac{\mu}{T} \right)}{\left(\cosh \left(\frac{\mu}{T} \right) + \cosh(y) \right)}, \quad (7.14)$$

$$S_\nu = \frac{2T^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} dy y^2 e^{\frac{\mu}{T}+y} \left(\frac{4T \left(\cosh \left(\frac{\mu}{T} \right) + \cosh(y) \right) \ln \left(2e^{-y} \left(\cosh \left(\frac{\mu}{T} \right) + \cosh(y) \right) \right)}{\left(e^{\frac{\mu}{T}} + e^y \right) \left(e^{\frac{\mu}{T}+y} + 1 \right)} - \frac{\mu \sinh \left(\frac{\mu}{T} \right)}{\left(e^{\frac{\mu}{T}} + e^y \right) \left(e^{\frac{\mu}{T}+y} + 1 \right)} \right), \quad (7.15)$$

$$C_{\nu\nu} = \frac{T}{\pi^2} \int_0^{\infty} dy y^2 \left(12 T^2 \ln \left(2e^{-y} \left(\cosh \left(\frac{\mu}{T} \right) + \cosh(y) \right) \right) + \frac{\mu \left(\mu - 3T \sinh \left(\frac{2\mu}{T} \right) + \cosh(y) \left(\mu \cosh \left(\frac{\mu}{T} \right) - 6T \sinh \left(\frac{\mu}{T} \right) \right) \right)}{\left(\cosh \left(\frac{\mu}{T} \right) + \cosh(y) \right)^2} \right). \quad (7.16)$$

Además, la capacidad calorífica será la suma de las capacidades caloríficas de cada especie que constituye a la MSQM, es decir,

$$C_v = \sum_f C_{vf}. \quad (7.17)$$

Por tanto, la capacidad calorífica se obtendrá como la suma de las ecuaciones (7.13), para cada especie, y la ecuación (7.16). Estas expresiones se deben evaluar numéricamente,

Para evaluar la integral I , ecuación (7.6), se necesita la capacidad calorífica y la polarización del espín del electrón, que ya se definió como la razón entre la diferencia y la

suma de los espines polarizados de los electrones en las direcciones a lo largo y opuestas al campo magnético, que se obtendrá a partir de la ecuación (7.11).

7.2.1. Polarización de los electrones en un campo magnético

Como ya se mencionó, la fracción de neutrinos emitidos asimétricamente es igual al número de electrones con espín polarizado en la presencia del campo magnético.

Los electrones en un nivel de Landau $l \neq 0$ cuyo espín apunta hacia arriba ($s = +1$), se alinean paralelamente con el campo magnético, mientras que aquellos cuyo espín apunta hacia abajo ($s = -1$) se alinean de forma antiparalela. Además, los electrones en el nivel más bajo de Landau, $l = 0$, solamente pueden alinearse en dirección antiparalela al campo magnético, pues por la relación entre l y s , ecuación (7.8), si $l = 0$, entonces $j = 0$ y $s = -1$.

La fracción de espines de electrones polarizados, χ , puede calcularse como

$$\chi = \frac{n_- - n_+}{n_- + n_+}, \quad (7.18)$$

donde n_{\pm} son las densidades de número que corresponden a los electrones orientados paralela y antiparalelamente con la dirección del campo magnético, respectivamente.

A partir de la relación entre l , j y s , que se da en la ecuación (7.8), se puede reemplazar la suma sobre niveles de Landau $\sum_{l=0}^{\infty} (2 - \delta_{l0}) \rightarrow \sum_{s=\pm 1} \sum_{j=0}^{\infty}$, y así expresar a n_{\pm} como

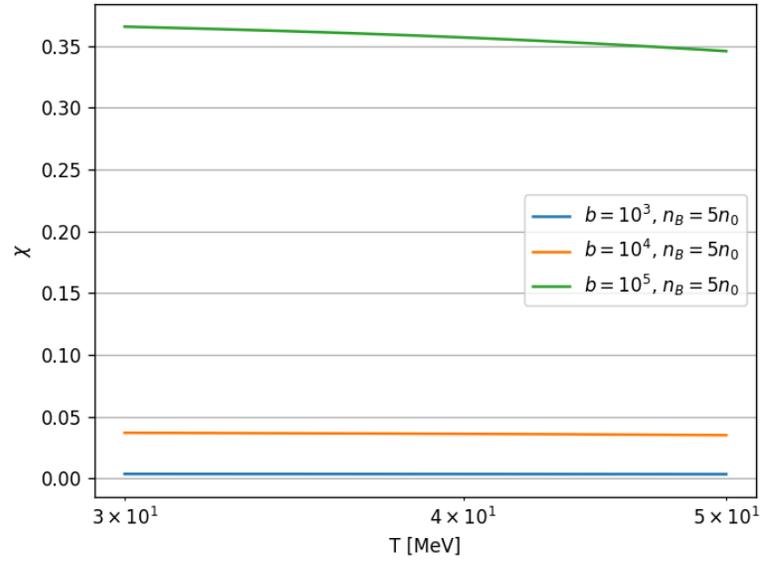
$$n_+ = \frac{d_e m_e^3}{2\pi^2} b \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx_3 \frac{1}{e^{\frac{m_e}{T}(\sqrt{x_3^2+1+2jb-x_e})} + 1}, \quad (7.19)$$

$$n_- = \frac{d_e m_e^3}{2\pi^2} b \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx_3 \frac{1}{e^{\frac{m_e}{T}(\sqrt{x_3^2+1+2jb-x_e})} + 1}. \quad (7.20)$$

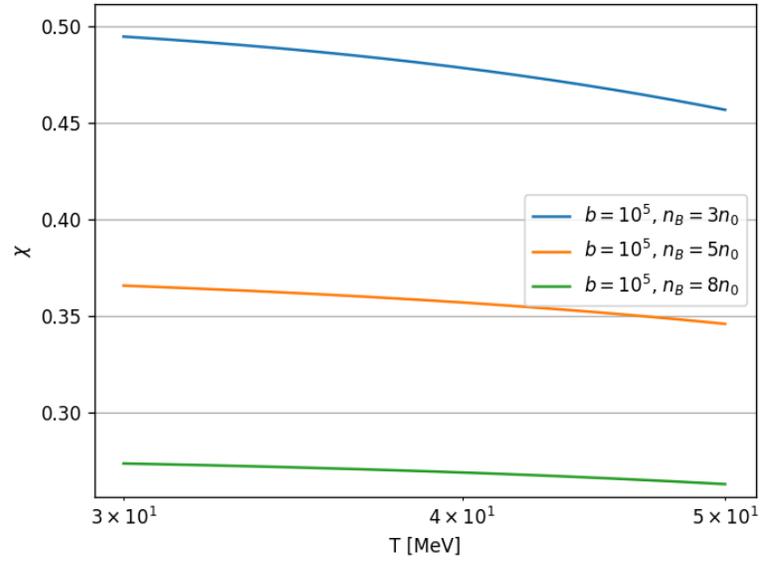
Por lo tanto, al sustituir las ecuaciones (7.19) y (7.20) en la ecuación (7.18), se encuentra a χ , como función de los parámetros B , T y μ_e

$$\chi = \left\{ 1 + \frac{2 \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dx_3 \frac{1}{e^{\frac{m_e}{T}(\sqrt{x_3^2+1+2jb-x_e})} + 1}}{\int_0^{\infty} dx_3 \frac{1}{e^{\frac{m_e}{T}(\sqrt{x_3^2+1-x_e})} + 1}} \right\}^{-1}. \quad (7.21)$$

En la Figura 7.1 se muestra la polarización del espín del electrón como función de la temperatura, para distintas intensidades del campo magnético y diferentes densidades bariónicas. Como es de esperarse, debido al alto intervalo de temperaturas, la polarización de los espines de los electrones no es total, incluso para campos magnéticos tan altos como $B = 10^{18}$ G.



(a) Densidad bariónica fija.



(b) Campo magnético fijo.

Figura 7.1: Polarización del espín del electrón como función de la temperatura. En el panel superior (a) se grafica para distintas intensidades de campo magnético $b = 10^3, 10^4$ y 10^5 , donde b es el campo magnético normalizado por el campo magnético crítico del electrón, $b = B/B_e^c = B/(m_e^2/e)$, que corresponde con campos magnéticos $B \sim 10^{16}, 10^{17}$ y 10^{18} G, y densidad bariónica fija $n_B = 5n_0$. En el panel inferior (b) se grafica para distintas densidades bariónicas $n_B = 3n_0, 5n_0$ y $8n_0$, y para una intensidad de campo magnético fija $B \sim 10^{18}$ G.

7.2.2. Condiciones de equilibrio estelar

Ya que se tienen las expresiones explícitas para la polarización del espín del electrón, χ , y la capacidad calorífica, C_v , necesarias para determinar la velocidad de *kick*, se debe de considerar su dependencia con el campo magnético, potencial químico y temperatura, para los valores presentes en la PNS.

A diferencia del trabajo de Ayala *et al.* [44], donde se considera un escenario posnatal para la emisión de neutrinos que da origen a las velocidades de *kick*, en este trabajo se supondrá un origen natal, es decir, ocurre en la transición de la etapa III a la IV, de acuerdo con la clasificación de Lattimer y Prakash [16] (Figura 2.4). Por lo tanto, la emisión principal de neutrinos ocurrirá entre 15 y 50 segundos después de la explosión de la supernova. Entonces, se deben de imponer las condiciones que existen en el núcleo de la PNS en esas épocas, tales como el equilibrio en el decaimiento β entre las especies de quarks, es decir,

$$d \rightarrow u + e + \bar{\nu}_e, \quad (7.22a)$$

$$s \rightarrow u + e + \bar{\nu}_e, \quad (7.22b)$$

$$u + e \rightarrow d + \nu_e, \quad (7.22c)$$

$$u + d \rightarrow u + s. \quad (7.22d)$$

Además, se debe imponer la conservación de la carga, la conservación del número bariónico y una razón entre electrones más neutrinos y bariones, Y_L , de 0.4, tal como se argumenta que debe de existir en [45, 46, 56, 92], es decir,

$$Y_L = \frac{n_e + n_{\nu_e}}{n_B} = 0.4, \quad (7.23)$$

donde n_B es la densidad bariónica. Las ecuaciones (7.22) y (7.23), así como la conservación de la carga y del número bariónico se resumen en

$$\mu_d - \mu_u - \mu_e + \mu_{\nu_e} = 0, \quad (7.24a)$$

$$\mu_d - \mu_s = 0, \quad (7.24b)$$

$$\mu_{\nu_e} - \mu_{\bar{\nu}_e} = 0, \quad (7.24c)$$

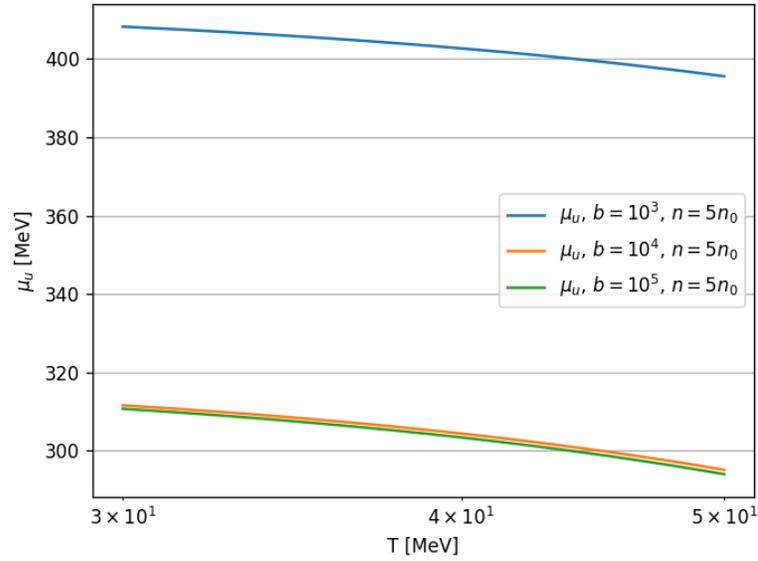
$$2n_u - n_d - n_s - 3n_e = 0, \quad (7.24d)$$

$$n_u + n_d + n_s - 3n_B = 0, \quad (7.24e)$$

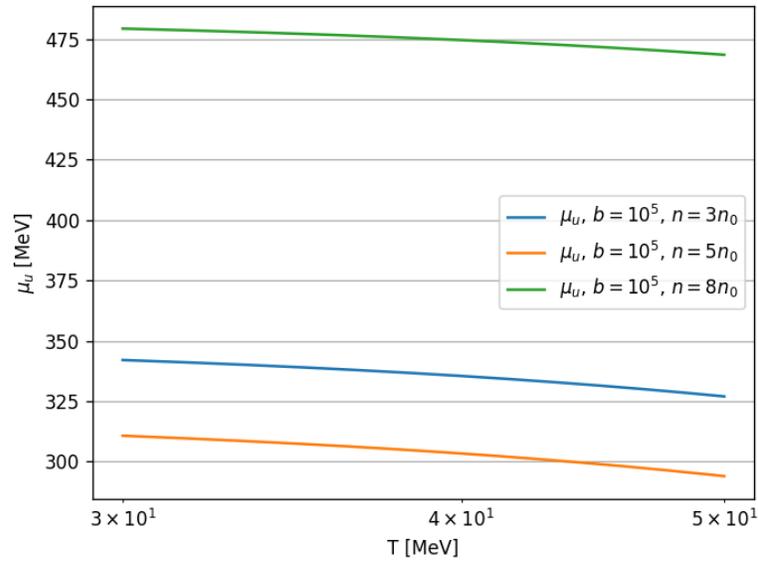
$$n_e + n_{\nu} - 0.4n_B = 0. \quad (7.24f)$$

Las ecuaciones (7.24) se referirán como las Ecuaciones de Equilibrio Estelar.

Las ecuaciones (7.24), a, b, c son consecuencia del equilibrio β entre las especies de quarks, ecuaciones (7.22), mientras que la d es consecuencia de la conservación de la carga, la e de la conservación del número bariónico y la f de la condición dada por la ecuación (7.23).

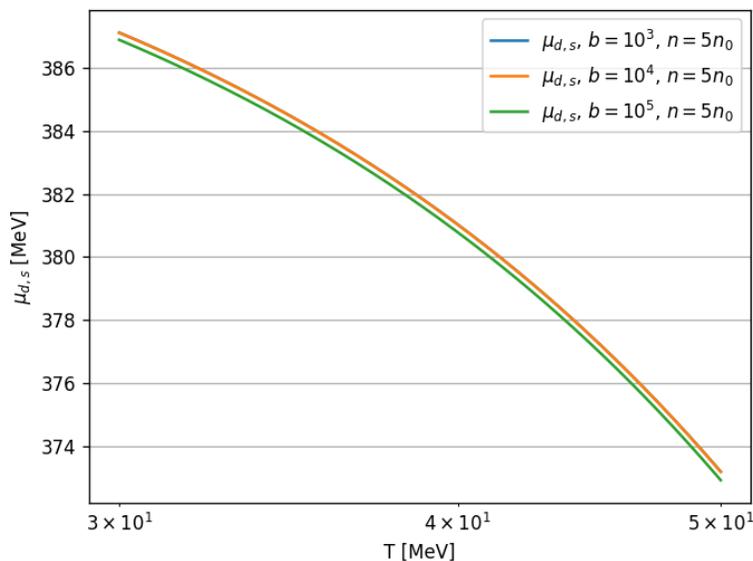


(a) Densidad bariónica fija.

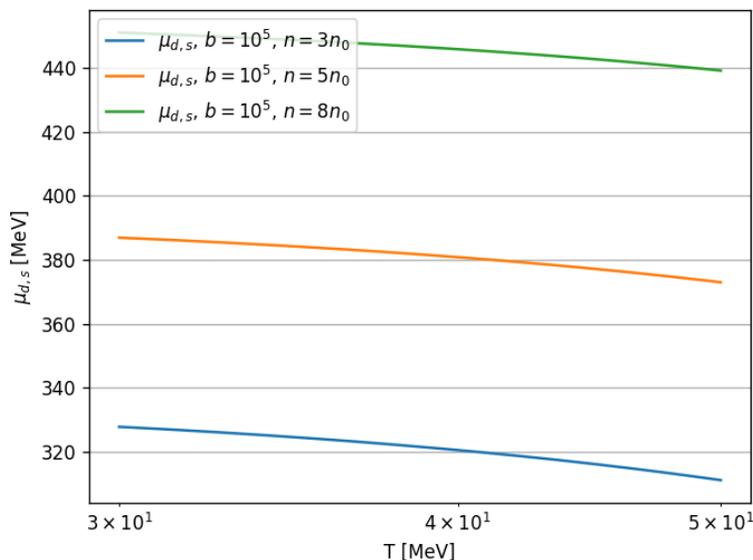


(b) Campo magnético fijo.

Figura 7.2: Potencial químico del quark u como función de la temperatura. En el panel superior (a) se grafica para distintas intensidades de campo magnético $b = 10^3, 10^4$ y 10^5 , donde b es el campo magnético normalizado por el campo magnético crítico del electrón, $b = B/B_e^c = B/(m_e^2/e)$, que corresponde con campos magnéticos $B \sim 10^{16}, 10^{17}$ y 10^{18} G, y densidad bariónica fija $n_B = 5n_0$. En el panel inferior (b) se grafica para distintas densidades bariónicas $n_B = 3n_0, 5n_0$ y $8n_0$, y para una intensidad de campo magnético fija $B \sim 10^{18}$ G.

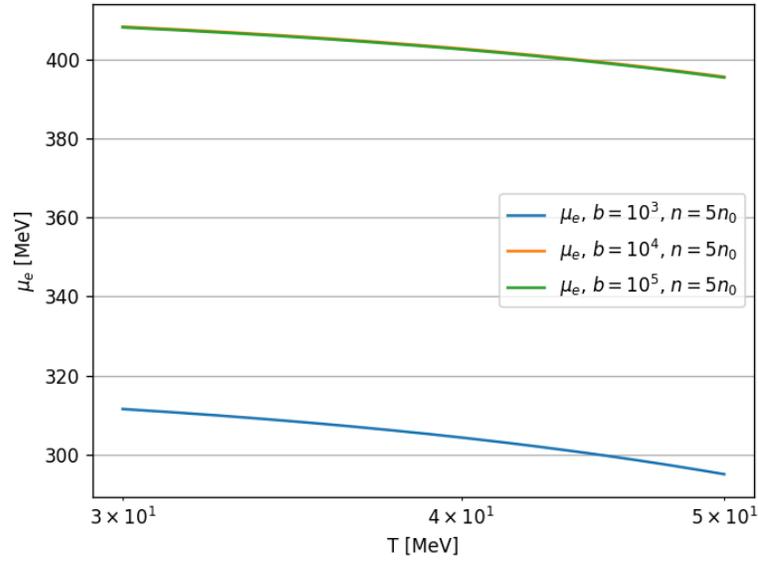


(a) Densidad bariónica fija.

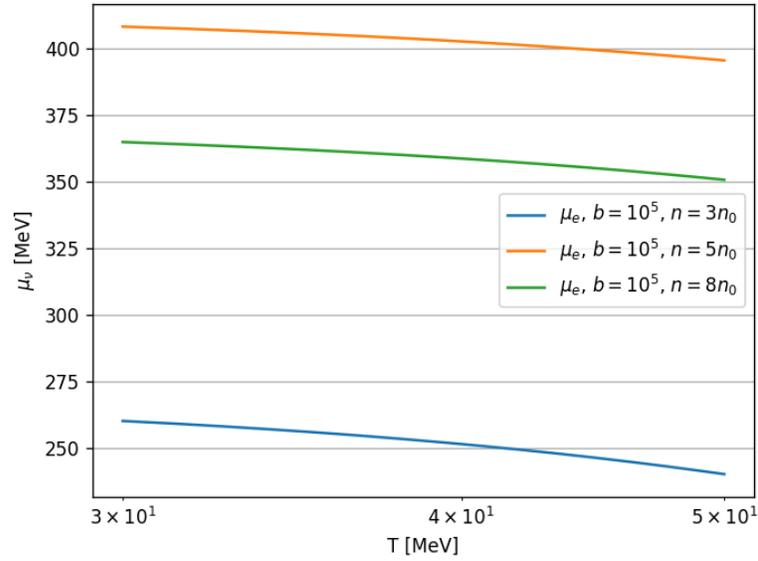


(b) Campo magnético fijo.

Figura 7.3: Potencial químico de los quarks d y s como función de la temperatura. En el panel superior (a) se grafica para distintas intensidades de campo magnético $b = 10^3$, 10^4 y 10^5 , donde b es el campo magnético normalizado por el campo magnético crítico del electrón, $b = B/B_e^c = B/(m_e^2/e)$, que corresponde con campos magnéticos $B \sim 10^{16}$, 10^{17} y 10^{18} G, y densidad bariónica fija $n_B = 5n_0$. En el panel inferior (b) se grafica para distintas densidades bariónicas $n_B = 3n_0$, $5n_0$ y $8n_0$, y para una intensidad de campo magnético fija $B \sim 10^{18}$ G.

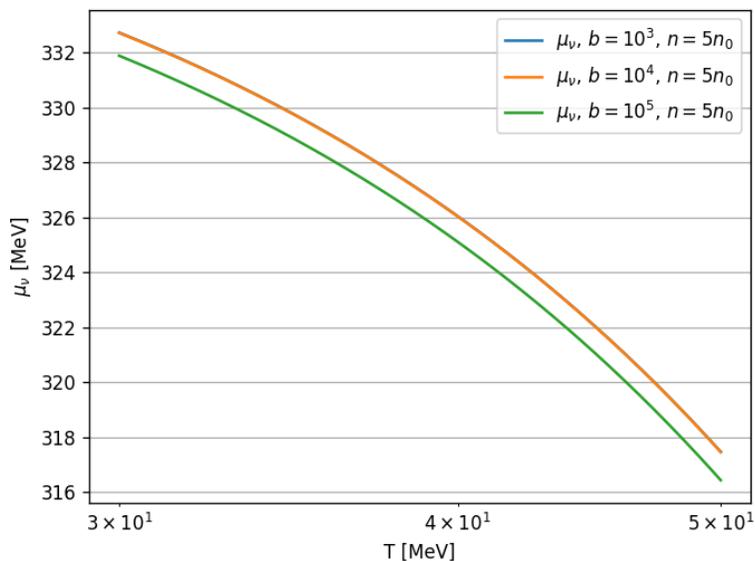


(a) Densidad bariónica fija.

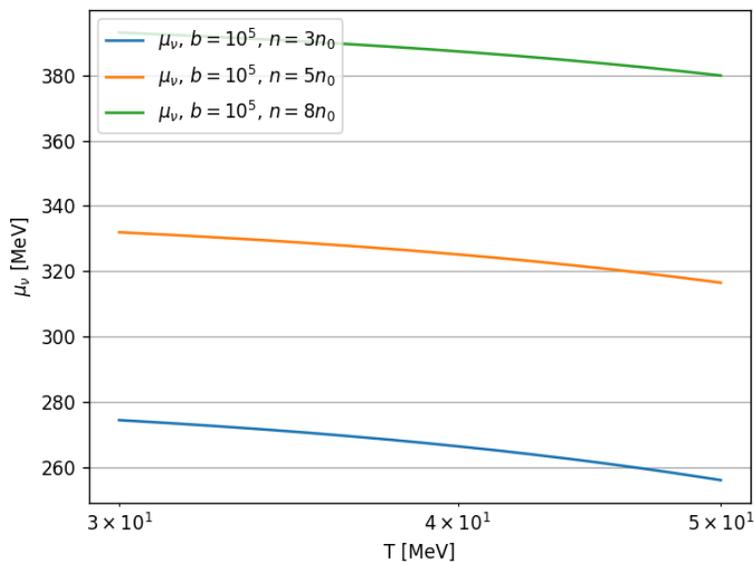


(b) Campo magnético fijo.

Figura 7.4: Potencial químico del electrón como función de la temperatura. En el panel superior (a) se grafica para distintas intensidades de campo magnético $b = 10^3, 10^4$ y 10^5 , donde b es el campo magnético normalizado por el campo magnético crítico del electrón, $b = B/B_e^c = B/(m_e^2/e)$, que corresponde con campos magnéticos $B \sim 10^{16}, 10^{17}$ y 10^{18} G, y densidad bariónica fija $n_B = 5n_0$. En el panel inferior (b) se grafica para distintas densidades bariónicas $n_B = 3n_0, 5n_0$ y $8n_0$, y para una intensidad de campo magnético fija $B \sim 10^{18}$ G.



(a) Densidad bariónica fija.



(b) Campo magnético fijo.

Figura 7.5: Potencial químico del neutrino como función de la temperatura. En el panel superior (a) se grafica para distintas intensidades de campo magnético $b = 10^3$, 10^4 y 10^5 , donde b es el campo magnético normalizado por el campo magnético crítico del electrón, $b = B/B_e^c = B/(m_e^2/e)$, que corresponde con campos magnéticos $B \sim 10^{16}$, 10^{17} y 10^{18} G, y densidad bariónica fija $n_B = 5n_0$. En el panel inferior (b) se grafica para distintas densidades bariónicas $n_B = 3n_0$, $5n_0$ y $8n_0$, y para una intensidad de campo magnético fija $B \sim 10^{18}$ G.

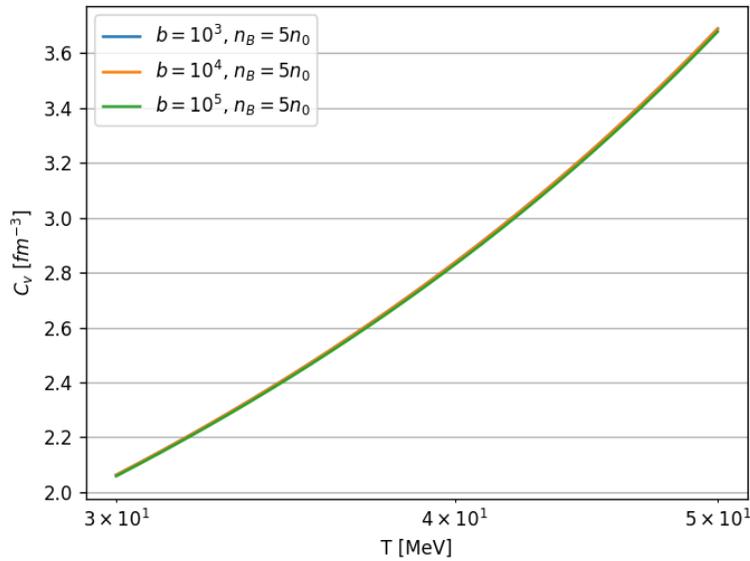
7.3. Resultados

La solución a las Ecuaciones de Equilibrio Estelar, ecuaciones (7.24) (potencial químico de las diferentes especies fermiónicas como función de la temperatura), se muestra en las Figuras 7.2, 7.3, 7.4 y 7.5, para intensidades de campo magnético $B = 10^{16} - 10^{18}$ G, y densidades bariónicas $n_B = (3 - 8)n_0$, donde $n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ es la densidad de saturación nuclear. Para densidad fija, y campo magnético más intenso, el cambio en el potencial químico es muy poco significativo para todas las especies, sin embargo, los cambios en el potencial químico del electrón y del neutrino son los más significativos. Los resultados para el potencial químico del neutrino son consistentes con los resultados obtenidos por Lugones y Benvenuto [50], en donde estudian los efectos del gas de neutrinos en la transición de fase de materia hadrónica a materia de quarks extraños.

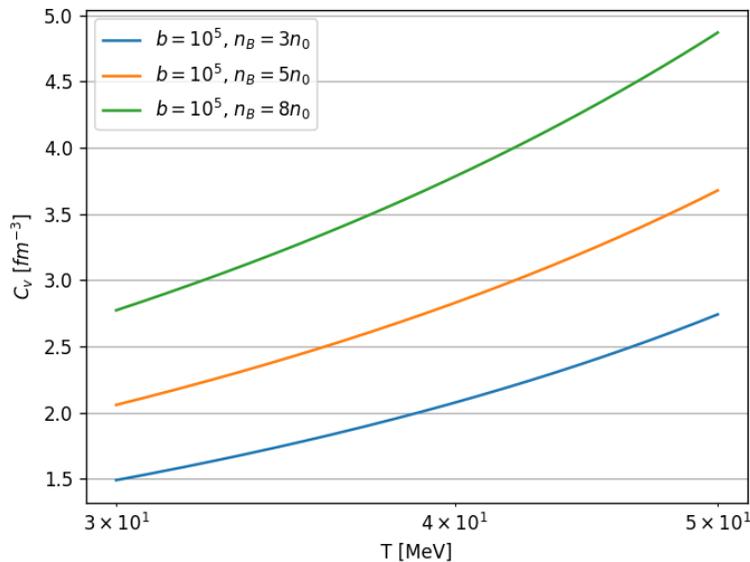
En la Figura 7.6 se muestra a la capacidad calorífica como función de la temperatura, para distintas intensidades del campo magnético y diferentes densidades bariónicas. Para densidad fija, el cambio en la intensidad de campo magnético es apenas notorio, sin embargo, para campo magnético fijo, el cambio en la densidad es significativo.

Con los resultados que se tienen de la capacidad calorífica y de la polarización del espín del electrón, se puede encontrar la velocidad de *kick* que adquiere la estrella a partir de la ecuación (7.5), que relaciona la velocidad de *kick* con la capacidad calorífica, la polarización de espín del electrón, la masa y el radio de la estrella; pues ya se puede evaluar a la integral I , que es la integral sobre el intervalo de temperaturas del producto de la capacidad calorífica por la polarización del espín del electrón, (ecuación (7.6)). En la figura 7.7 se muestra la velocidad de *kick* obtenida como función del radio del núcleo de una PNS de masa $1.4M_\odot$, para densidades bariónicas $n_B = (3 - 8)n_0$ e intensidad de campo magnético $B = 10^{16} - 10^{18}$ G. El intervalo de velocidades encontradas reproduce el intervalo de las velocidades observadas [9].

Para una intensidad de campo magnético fija, los cambios en la densidad bariónica no tienen un efecto significativo en la velocidad de la estrella, sin embargo, para una densidad fija, los cambios en la intensidad del campo magnético tienen un efecto importante en la velocidad. Esto se debe a que, como la velocidad es proporcional a la integral del producto de la capacidad calorífica, C_v , y la polarización del espín del electrón, χ , y dado que un cambio en la intensidad de campo magnético genera un aumento importante en χ , pero mínimo en C_v , mientras que un aumento en la densidad bariónica aumenta C_v y disminuye χ , por lo que el cambio se anula en el producto.

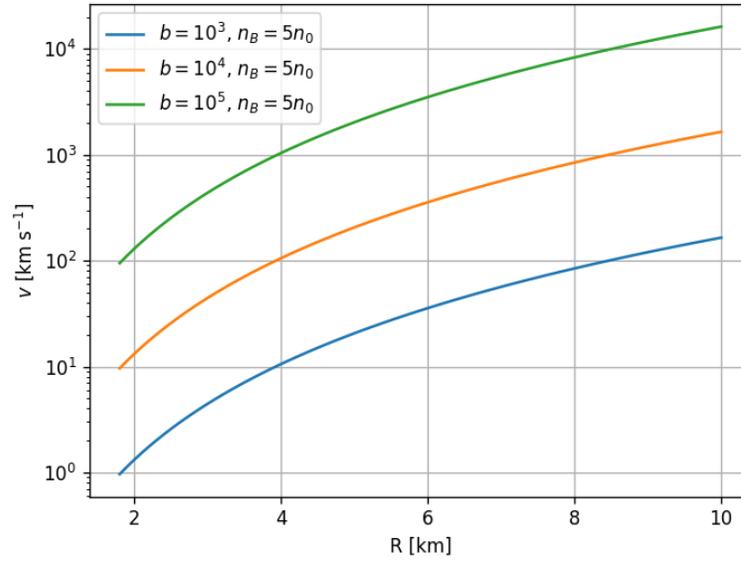


(a) Densidad bariónica fija.

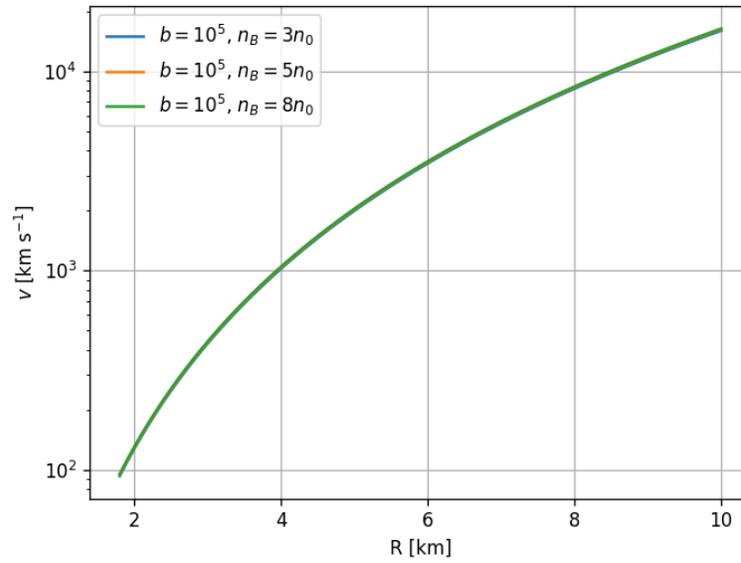


(b) Campo magnético fijo.

Figura 7.6: Capacidad calorífica como función de la temperatura. En el panel superior (a) se grafica para distintas intensidades de campo magnético $b = 10^3$, 10^4 y 10^5 , donde b es el campo magnético normalizado por el campo magnético crítico del electrón, $b = B/B_e^c = B/(m_e^2/e)$, que corresponde con campos magnéticos $B \sim 10^{16}$, 10^{17} y 10^{18} G, y densidad bariónica fija $n_B = 5n_0$. En el panel inferior (b) se grafica para distintas densidades bariónicas $n_B = 3n_0$, $5n_0$ y $8n_0$, y para una intensidad de campo magnético fija $B \sim 10^{18}$ G.



(a) Densidad bariónica fija.



(b) Campo magnético fijo.

Figura 7.7: Velocidad de *kick* como función del radio del núcleo de una PNS de masa $1.4M_{\odot}$. En el panel superior (a) se grafican las velocidades encontradas para distintas intensidades de campo magnético $b = 10^3$, 10^4 y 10^5 , donde b es el campo magnético normalizado por el campo magnético crítico del electrón, $b = B/B_e^c = B/(m_e^2/e)$, que corresponde con campos magnéticos $B \sim 10^{16}$, 10^{17} y 10^{18} G, y densidad bariónica fija $n_B = 5n_0$. En el panel inferior (b) se grafican las velocidades encontradas para distintas densidades bariónicas $n_B = 3n_0$, $5n_0$ y $8n_0$, y para una intensidad de campo magnético fija $B \sim 10^{18}$ G .

Capítulo 8

Conclusiones

El problema de las velocidades de escape de estrellas de neutrones ha sido un tema de investigación sumamente activo en los últimos años y se han propuesto múltiples posibles soluciones para explicarlo. Las dos propuestas más aceptadas, el modelo hidrodinámico y la emisión anisotrópica de neutrinos, han recibido argumentos a favor y en contra.

En particular, respecto a la emisión anisotrópica de neutrinos se ha argumentado que una vez que la estrella llega al equilibrio térmico no puede haber ningún proceso que genere la anisotropía necesaria para que la estrella alcance las velocidades que se han observado, por lo que la emisión de neutrinos en las etapas más tempranas de la evolución de la estrella de neutrones, donde la luminosidad de neutrinos es mayor, parece ser el escenario natural para este modelo. Sin embargo, en las primeras etapas de la evolución de las estrellas de neutrones los neutrinos quedan atrapados, por lo que es necesario considerar las interacciones de neutrinos con el material que conforma al núcleo de una protoestrella de neutrones, en donde el camino libre medio de los neutrinos es mucho menor que el radio del núcleo de la estrella.

Para ello, en este trabajo se consideró el mecanismo del cambio de quiralidad producido por la presencia de un posible momento magnético del neutrino. Cuando los neutrinos, originalmente izquierdos, cambian su quiralidad y se hacen derechos, sus interacciones con la materia se suprimen y estos pueden escapar libremente de la estrella, siempre y cuando el tiempo que les tome cambiar su quiralidad sea menor que el tiempo que les toma recorrer un camino libre medio. Esta condición da una cota inferior al momento magnético del neutrino, que junto con la cota superior que se obtiene del límite de luminosidad observado en supernovas, da un intervalo de valores para el momento magnético del neutrino que permiten explicar las velocidades de escape de las estrellas de neutrones:

$$4.7 \times 10^{-15} \leq \frac{\mu_\nu}{\mu_B} \leq (0.1 - 0.4) \times 10^{-11}. \quad (8.1)$$

El límite inferior de este intervalo es mayor que el valor típico dado en una mínima extensión

del modelo estándar:

$$\mu_\nu \approx 3.2 \times 10^{-19} \left(\frac{m_\nu}{1\text{eV}} \right) \mu_B \geq (4 \times 10^{-20}) \mu_B, \quad (8.2)$$

sin embargo, este valor depende directamente de la masa de los neutrinos, que es una cantidad que todavía no está bien determinada, y por lo tanto, el valor del momento magnético del neutrino dentro del modelo estándar aún queda por determinar. Además, el límite inferior que se obtuvo es consistente con el valor del momento magnético transitorio que adquieren los neutrinos al resonar entre los distintos sabores, como encontraron Akhmedov *et al.* en [48].

Si el momento magnético de los neutrinos está dentro del intervalo encontrado, entonces los neutrinos producidos por el decaimiento β para quarks podrán escapar libremente de la estrella, y debido a la violación de la simetría de paridad, y la presencia del campo magnético, su emisión será asimétrica, por lo que transferirán momento a la estrella. Para determinar la velocidad que adquirirá la estrella se consideró que el núcleo de la protoestrella de neutrones está hecho de materia de quarks extraños magnetizados, y a partir de la Ley de Enfriamiento de Newton, se pudo relacionar la velocidad de escape con ciertas cantidades termodinámicas que se pueden obtener para la materia de quarks extraños magnetizados. Las velocidades que se encontraron para una estrella de 1.4 masas solares, con campos magnéticos sumamente intensos, en el intervalo $10^{16} - 10^{18}$ G, y densidades bariónicas de 3 – 8 veces la densidad de saturación nuclear, están en el intervalo de las velocidades observadas en pulsares, y reproducen tanto las velocidades más bajas (decenas de km s^{-1}), como las más altas (superiores a 1500 km s^{-1}). Además, se encontró que la densidad bariónica de la estrella no es un parámetro significativo, pues cambios en esta cantidad no se reflejan en la velocidad que adquiere la estrella.

De acuerdo con las recientes estimaciones de Annala *et al.* [24], los núcleos de quarks solamente ocurrirían en las estrellas más masivas, con masas superiores a dos masas solares, y además, el núcleo de quarks tendría una masa inferior a una masa solar y su radio debería ser aproximadamente 6 km. Por lo tanto, dado que el cálculo que se presentó aquí muestra que la velocidad es proporcional a la masa del núcleo, si las estimaciones de Annala *et al.* son correctas, entonces las velocidades encontradas deberían ser un poco menores, pero dentro del mismo orden de magnitud.

Por lo tanto, el cambio de quiralidad de neutrinos durante el nacimiento de una estrella de neutrones, con núcleo de materia de quarks extraños, parece ser un mecanismo eficiente para explicar las velocidades de escape de las estrellas de neutrones, siempre y cuando el momento magnético de los neutrinos esté dentro del intervalo propuesto. Más aun, los resultados obtenidos parecen indicar que las estrellas de neutrones con velocidades de escape muy grandes podrían ser consistentes con la presencia de un núcleo de quarks sujeto a un campo magnético muy intenso.

Sin embargo, en este trabajo no se descarta que las estrellas puedan adquirir parte de su velocidad mediante el mecanismo hidrodinámico. Mediciones más precisas de la alineación

entre el eje de giro y la velocidad de escape de múltiples estrellas (tal como se ha hecho con los pulsares del Cangrejo y de la Vela) podrán mostrar si la hipótesis básica para la emisión asimétrica de neutrinos (la alineación entre el eje de giro y el campo magnético) es verdadera y así arrojar evidencia sobre el origen de las velocidades de escape.

Cuando los neutrinos escapan de la estrella de neutrones recién nacida, mediante el mecanismo aquí planteado, las condiciones en el núcleo de las estrellas, en el periodo en el que éstas radian su energía de ligadura gravitacional, podrían cambiar, por lo que estas condiciones se deberán tomar en cuenta en las simulaciones modernas de transporte y evolución de las estrellas de neutrones en sus primeras etapas. Estas consideraciones podrían proveer nuevas características observacionales de las estrellas de neutrones, que gracias a los nuevos detectores de neutrinos de alta energía, puestos en marcha en los últimos años, podrían dar luz sobre los procesos de enfriamiento a los que están sujetas, así como dilucidar aspectos relacionados con la física de los neutrinos.



Apéndice A

A.1. Identidades de matrices gamma

Identidad A.1.1. Si $L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$ y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, entonces

$$[L, \sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Demostración.

$$[L, \sigma^{\alpha\rho}] = \frac{i}{4} [1 - \gamma^5, [\gamma^\alpha, \gamma^\rho]] = \frac{i}{4} ([1, [\gamma^\alpha, \gamma^\rho]] - [\gamma^5, [\gamma^\alpha, \gamma^\rho]]), \quad (\text{A.2})$$

como $[1, [\gamma^\alpha, \gamma^\rho]] = 0$ y $\{\gamma^5, \gamma^\alpha\} = 0$, entonces $[\gamma^5, [\gamma^\alpha, \gamma^\rho]] = 0$ y por tanto, se obtiene que

$$[L, \sigma^{\alpha\rho}] = 0. \quad (\text{A.3})$$

□

Identidad A.1.2. Si $R, L = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$, entonces

$$R\gamma^\mu = \gamma^\mu L. \quad (\text{A.4})$$

Demostración. Primero, se probará que

$$\{R, \gamma^\mu\} = \gamma^\mu, \quad (\text{A.5})$$

pues

$$\{R, \gamma^\mu\} = \frac{1}{2} \{1 + \gamma^5, \gamma^\mu\} = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu + \gamma^\mu + \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5\} = \gamma^\mu + \frac{1}{2} \{\gamma^5, \gamma^\mu\}. \quad (\text{A.6})$$

Pero $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, y por lo tanto

$$\{R, \gamma^\mu\} = \gamma^\mu. \quad (\text{A.7})$$

La identidad anterior se puede escribir explícitamente como

$$\frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu + \frac{1}{2} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) = \gamma^\mu \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^\mu = \gamma^\mu - \frac{1}{2} \gamma^\mu (1 + \gamma^5) = \frac{1}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma^5), \quad (\text{A.9})$$

Por lo tanto,

$$R \gamma^\mu = \gamma^\mu L. \quad (\text{A.10})$$

□

Identidad A.1.3. Si $R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$, entonces

$$R^2 = R. \quad (\text{A.11})$$

Demostración.

$$R^2 = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \frac{1}{4}(1 + 2\gamma^5 + (\gamma^5)^2). \quad (\text{A.12})$$

Como $(\gamma^5)^2 = 1$, entonces

$$R^2 = R. \quad (\text{A.13})$$

□

Identidad A.1.4. Si $|\vec{p}| = p$ y $\hat{p} = \vec{p}/p$, entonces

$$(\vec{\gamma} \cdot \hat{p})^2 = -1. \quad (\text{A.14})$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (\vec{\gamma} \cdot \hat{p})^2 &= \gamma_i \hat{p}^i \gamma_j \hat{p}^j = \gamma_i \gamma_j \hat{p}^i \hat{p}^j \\ &= \frac{1}{2}([\gamma_i, \gamma_j] + \{\gamma_i, \gamma_j\}) \hat{p}^i \hat{p}^j = -g_{ij} \hat{p}^i \hat{p}^j \\ &= -\hat{p}^2 = -1. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

□

Identidad A.1.5.

$$(\gamma^0 \mp \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) (\gamma^0 \pm \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) = 2\gamma^0 (\gamma^0 \pm \vec{\gamma} \cdot \hat{p}). \quad (\text{A.16})$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (\gamma^0 \mp \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) (\gamma^0 \pm \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) &= (\gamma^0)^2 \pm \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{p} \mp (\vec{\gamma} \cdot \hat{p}) \gamma^0 - (\vec{\gamma} \cdot \hat{p})^2 \\ &= 2 \pm \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{p} \mp (\vec{\gamma} \cdot \hat{p}) \gamma^0, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

donde la segunda igualdad se da al sustituir la identidad (A.15) y $(\gamma^0)^2 = 1$. Como $\gamma^0 \vec{\gamma} = -\vec{\gamma} \gamma^0$, entonces se prueba la identidad

$$(\gamma^0 \mp \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) (\gamma^0 \pm \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) = 2\gamma^0 (\gamma^0 \pm \vec{\gamma} \cdot \hat{p}). \quad (\text{A.18})$$

□

Identidad A.1.6.

$$(\gamma^0 \pm \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) (\gamma^0 \pm \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Demostración.

$$\begin{aligned} (\gamma^0 \pm \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) (\gamma^0 \pm \vec{\gamma} \cdot \hat{p}) &= (\gamma^0)^2 \pm \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{p} \pm (\vec{\gamma} \cdot \hat{p}) \gamma^0 - (\vec{\gamma} \cdot \hat{p})^2 \\ &= \pm \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \hat{p} \pm (\vec{\gamma} \cdot \hat{p}) \gamma^0 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

donde la segunda igualdad se da al sustituir la identidad (A.15) y $(\gamma^0)^2 = 1$ y la última igualdad es debida a que $\gamma^0 \vec{\gamma} = -\vec{\gamma} \gamma^0$. □

A.2. Sumas de frecuencias de Matsubara

Identidad A.2.1. Si la suma de frecuencias de Matsubara para la interacción fermión-bosón esta dada por

$$M_{L,T} = T \sum_n \Delta_{L,T}(i\omega_n) \tilde{\Delta}_F(i(\omega - \omega_n)), \quad (\text{A.21})$$

entonces su parte imaginaria será:

$$\text{Im}[M_{L,T}] = \pi \left(e^{\beta p_0} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \delta(p_0 - k_0 - p'_0) f(k_0) \tilde{f}(p'_0) \rho_F(p'_0) \rho_{L,T}(k_0). \quad (\text{A.22})$$

Demostración. Para calcular la parte imaginaria de la suma, se escribirán los correladores en términos del tiempo imaginario:

$$\begin{aligned} \text{Im}[M_{L,T}] &= \text{Im} \left\{ T \sum_n \Delta_{L,T}(i\omega_n) \tilde{\Delta}_F(i(\omega - \omega_n)) \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ T \sum_n \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' \left(e^{i\omega\tau} e^{i\omega_n(\tau' - \tau)} \Delta_{L,T}(\tau') \tilde{\Delta}_F(\tau) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

ahora, en la ecuación (A.23) aparece el término $T \sum_n e^{i\omega_n(\tau' - \tau)}$, que satisface la siguiente igualdad:

$$T \sum_n e^{i\omega_n(\tau' - \tau)} = \sum_p \delta(\tau' - \tau - p\beta), \quad (\text{A.24})$$

que al integrar sobre τ o τ' solamente contribuirá el término con $p = 0$, por lo que la ecuación (A.23) se reescribe de la siguiente forma:

$$\text{Im}[M_{L,T}] = \text{Im} \left\{ \int_0^\beta d\tau \left(e^{i\omega\tau} \Delta_{L,T}(\tau) \tilde{\Delta}_F(\tau) \right) \right\}. \quad (\text{A.25})$$

Bajo la representación de Fourier, las funciones de correlación $\tilde{\Delta}_F$ y $\Delta_{L,T}$ se escriben como:

$$\tilde{\Delta}_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} e^{-p'_0\tau} \tilde{\Delta}_F(p'_0) \quad (\text{A.26})$$

y

$$\Delta_{L,T}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-k_0\tau} \Delta_{L,T}(k_0), \quad (\text{A.27})$$

por lo que la ecuación (A.25) se reescribe como

$$\begin{aligned} \text{Im}[M_{L,T}] &= \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \int_0^\beta d\tau \left(e^{\tau(i\omega - k_0 - p'_0)} \Delta_{L,T}(k_0) \tilde{\Delta}_F(p'_0) \right) \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \left(\frac{e^{\beta(i\omega - k_0 - p'_0)} - 1}{i\omega - k_0 - p'_0} \Delta_{L,T}(k_0) \tilde{\Delta}_F(p'_0) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Ahora, se puede escribir a los correladores $\Delta_{L,T}$ y $\tilde{\Delta}_F$ en su representación espectral, es decir

$$\Delta_{L,T}(k_0) = (1 + f(k_0))\rho_{L,T}(k_0), \quad (\text{A.29})$$

donde $f(z) = \frac{1}{e^{\beta z} - 1}$ es la distribución de Bose-Einstein y $\rho_{L,T}$ es la densidad espectral del fotón, en su modo longitudinal o transversal; y para el caso fermiónico, el correlador en su representación espectral se escribe como

$$\tilde{\Delta}_F(p'_0) = (1 - \tilde{f}(p'_0))\rho_F(p'_0), \quad (\text{A.30})$$

donde $\tilde{f}(z) = \frac{1}{e^{\beta(z - \mu)} + 1}$ es la distribución de Fermi-Dirac y ρ_F es la densidad espectral del neutrino.

Sustituyendo las funciones de correlación $\Delta_{L,T}$ y $\tilde{\Delta}_F$ en la ecuación (A.28) se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Im}[M_{L,T}] &= \text{Im} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{e^{\beta(i\omega - k_0 - p'_0)} - 1}{i\omega - k_0 - p'_0} \right. \\ &\quad \left. \times (1 - \tilde{f}(p'_0))\rho_F(p'_0)(1 + f(k_0))\rho_{L,T}(k_0) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Ahora, en el proceso estudiado se tiene un fermión entrante, por lo que $\omega = 2\pi(m + 1)T$, con $m \in \mathbb{Z}$, por lo que $e^{\beta i\omega} = -1$ y, por tanto, en la fracción que contiene a la exponencial se puede factorizar un -1 .

Por otro lado, si se desarrolla $(e^{-\beta(k_0 + p'_0)} + 1)(1 - \tilde{f}(p'_0))(1 + f(k_0))$:

$$\begin{aligned} &(e^{-\beta(k_0 + p'_0)} + 1)(1 - \tilde{f}(p'_0))(1 + f(k_0)) = \\ &(1 + f(k_0) - \tilde{f}(p'_0)) + (1 + f(k_0) - \tilde{f}(p'_0))e^{-\beta(k_0 + p'_0)} - f(k_0)\tilde{f}(p'_0)(e^{-\beta(k_0 + p'_0)} + 1), \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

pero

$$\begin{aligned}
(1 + f(k_0) - \tilde{f}(p'_0)) &= \frac{(e^{\beta k_0} - 1)(e^{\beta p'_0} + 1) + e^{\beta p'_0} + 1 - e^{\beta k_0} + 1}{(e^{\beta k_0} - 1)(e^{\beta p'_0} + 1)} \\
&= \frac{e^{\beta(k_0+p'_0)} + 1}{(e^{\beta k_0} - 1)(e^{\beta p'_0} + 1)} \\
&= f(k_0)\tilde{f}(p'_0)(e^{\beta(k_0+p'_0)} + 1). \tag{A.33}
\end{aligned}$$

Entonces, al sustituir la última ecuación en el segundo término de la ecuación (A.32), se puede simplificar dicho término de la siguiente forma:

$$f(k_0)\tilde{f}(p'_0)(e^{\beta(k_0+p'_0)} + 1)e^{-\beta(k_0+p'_0)} = f(k_0)\tilde{f}(p'_0)(e^{-\beta(k_0+p'_0)} + 1), \tag{A.34}$$

por lo que el segundo y tercer término de la ecuación (A.32) se cancelan y ésta se reescribe como

$$\begin{aligned}
(e^{-\beta(k_0+p'_0)} + 1)(1 - \tilde{f}(p'_0))(1 + f(k_0)) &= f(k_0)\tilde{f}(p'_0)(e^{\beta(k_0+p'_0)} + 1) \\
&= (e^{\beta p_0} + 1)f(k_0)\tilde{f}(p'_0), \tag{A.35}
\end{aligned}$$

donde la última igualdad de la ecuación (A.35) se da por conservación de momento.

Si se sustituye la ecuación (A.35) en la ecuación (A.31) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\text{Im}[M_{L,T}] &= -\text{Im} \left\{ (e^{\beta p_0} + 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \frac{1}{i\omega - k_0 - p'_0} \right. \\
&\quad \left. \times f(k_0)\tilde{f}(p'_0)\rho_F(p'_0)\rho_{L,T}(k_0) \right\}, \tag{A.36}
\end{aligned}$$

la única parte que no es real en los dos términos de esta ecuación es el factor $\frac{1}{i\omega - k_0 - p'_0}$, por lo que su parte imaginaria será solamente la parte imaginaria de $\frac{1}{i\omega - k_0 - p'_0}$. Para encontrarla, primero se identifica a $i\omega \rightarrow p_0 + i\epsilon$ y se desarrolla su parte imaginaria:

$$\begin{aligned}
\text{Im} \left(\frac{1}{i\omega - k_0 - p'_0} \right) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Im} \left(\frac{1}{p_0 - k_0 - p'_0 + i\epsilon} \right) \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p_0 - k_0 - p'_0 + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 - k_0 - p'_0 - i\epsilon} \right). \tag{A.37}
\end{aligned}$$

Ahora, los términos del lado derecho de la ecuación (A.37) se pueden desarrollar como

$$\frac{1}{p_0 - k_0 - p'_0 + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 - k_0 - p'_0 - i\epsilon} = \frac{-2i\epsilon}{(p_0 - k_0 - p'_0)^2 + \epsilon^2}, \tag{A.38}$$

pero

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{x^2 + a^2} = \pi \delta(x), \quad (\text{A.39})$$

por lo que

$$\text{Im} \left(\frac{1}{p_0 - k_0 - p'_0} \right) = -\pi \delta(p_0 - k_0 - p'_0), \quad (\text{A.40})$$

y si se sustituye la ecuación (A.40) en la ecuación (A.36) se obtiene finalmente que la ecuación (A.23) es igual a

$$\text{Im}[M_{L,T}] = \pi \left(e^{\beta p_0} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \delta(p_0 - k_0 - p'_0) f(k_0) \tilde{f}(p'_0) \rho_F(p'_0) \rho_{L,T}(k_0). \quad (\text{A.41})$$

□

Identidad A.2.2. Si la suma de frecuencias de Matsubara para la interacción fermión-bosón esta dada por

$$M_{L,T} = T \sum_n (i\omega_n)^m \Delta_{L,T}(i\omega_n) \tilde{\Delta}_F(i(\omega - \omega_n)), \quad (\text{A.42})$$

con $m \geq 1$, entonces su parte imaginaria será:

$$\begin{aligned} [M_{L,T}] &= \pi \left(e^{\beta p_0} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \delta(p_0 - k_0 - p'_0) \\ &\quad \times (k_0)^m f(k_0) \tilde{f}(p'_0) \rho_F(p'_0) \rho_{L,T}(k_0). \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Demostración. Nuevamente, para calcular la parte imaginaria de la suma, se escribirán los correladores en términos del tiempo imaginario:

$$\begin{aligned} \text{Im}[M_{L,T}] &= \text{Im} \left\{ T \sum_n (i\omega_n)^m \Delta_{L,T}(i\omega_n) \tilde{\Delta}_F(i(\omega - \omega_n)) \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ T \sum_n \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' (i\omega_n)^m \left(e^{i\omega\tau} e^{i\omega_n(\tau' - \tau)} \tilde{\Delta}_F(\tau) \Delta_{L,T}(\tau') \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Ahora,

$$T \sum_n (i\omega_n)^m e^{i\omega_n(\tau' - \tau)} = \frac{\partial^m}{\partial \tau'^m} \left(T \sum_n e^{i\omega_n(\tau' - \tau)} \right) = \frac{\partial^m}{\partial \tau'^m} \delta(\tau' - \tau) := \delta^{(m)}(\tau' - \tau), \quad (\text{A.45})$$

donde se introdujo la notación $f^{(m)}$, para referirse a la m -ésima derivada de la función. Sustituyendo a la ecuación anterior en la ecuación (A.44)

$$\text{Im}[M_{L,T}] = \text{Im} \left\{ \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' \delta^{(m)}(\tau' - \tau) \left(e^{i\omega\tau} \Delta_{L,T}(\tau') \tilde{\Delta}_F(\tau) \right) \right\}. \quad (\text{A.46})$$

La derivada de la Delta de Dirac satisface la igualdad

$$\int dx \delta^{(n)}(x - a) f(x) = (-1)^n f^{(n)}(a), \quad (\text{A.47})$$

por lo que se puede reescribir la ecuación (A.46) como

$$\text{Im}[M_{L,T}] = \text{Im} \left\{ (-1)^m \int_0^\beta d\tau \left(e^{i\omega\tau} \Delta_{L,T}^{(m)}(\tau) \tilde{\Delta}_F(\tau) \right) \right\}. \quad (\text{A.48})$$

Por lo tanto, si se escribe a los correladores $\tilde{\Delta}_F$ y $\Delta_{L,T}$ en su representación de Fourier:

$$\tilde{\Delta}_F(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} e^{-p'_0\tau} \tilde{\Delta}_F(p'_0) \quad (\text{A.49})$$

y

$$\Delta_{L,T}^{(m)}(\tau) = \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-k_0\tau} \Delta_{L,T}(k_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} (-k_0)^m e^{-k_0\tau} \Delta_{L,T}(k_0), \quad (\text{A.50})$$

y se sustituyen en la ecuación (A.48) se obtiene:

$$\text{Im}[M_{L,T}] = \text{Im} \left\{ (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \int_0^\beta d\tau \left(e^{\tau(i\omega - k_0 - p'_0)} (-k_0)^m \Delta_{L,T}(k_0) \tilde{\Delta}_F(p'_0) \right) \right\}. \quad (\text{A.51})$$

Si se compara la ecuación (A.51) con la (A.28) se puede ver que solamente difieren por el factor de $(k_0)^m$, que no modifica la integral sobre τ ni la parte imaginaria, por lo que todos los pasos que siguen para probar la identidad A.2.1 son iguales. Por lo tanto se obtiene como resultado final

$$\text{Im}[M_{L,T}] = \pi \left(e^{\beta p_0} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} \delta(p_0 - k_0 - p'_0) (k_0)^m f(k_0) \tilde{f}(p'_0) \rho_F(p'_0) \rho_{L,T}(k_0). \quad (\text{A.52})$$

De la ecuación (A.52) se puede concluir que cuando aparecen potencias de $(i\omega_n)$ en las sumas sobre frecuencias de Matsubara, estas se traducen en potencias de k_0 , por lo que se puede utilizar la ecuación sin potencias de $(i\omega_n)$, es decir, la identidad A.2.1. \square

Identidad A.2.3. Si la suma de frecuencias de Matsubara para la interacción fermión-bosón esta dada por

$$M_{L,T} = T \sum_n \Delta_{L,T}(i\omega_n) \tilde{\Delta}_F(i(\omega - \omega_n)), \quad (\text{A.53})$$

donde el potencial químico del fermión $\mu \neq 0$, entonces su parte imaginaria será:

$$[M_{L,T}] = \pi \left(e^{\beta(p_0 - \mu)} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} f(k_0) \tilde{f}(p'_0 - \mu) \times \delta(p_0 - k_0 - p'_0) \rho_F(p'_0) \rho_{L,T}(k_0). \quad (\text{A.54})$$

Demostración. Para encontrar la parte imaginaria de la suma, se escribirán los correladores en términos del tiempo imaginario y bajo su representación espectral:

$$\Delta_{L,T}(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \Delta_{L,T}(\tau) = \int_0^\beta d\tau \int \frac{dk_0}{2\pi} e^{(i\omega_n - k_0)\tau} [1 + f(k_0)] \rho_{L,T}(k_0), \quad (\text{A.55})$$

y análogamente,

$$\tilde{\Delta}_F(i(\omega - \omega_n)) = \int_0^\beta d\tau \int \frac{dp'_0}{2\pi} e^{(i(\omega - \omega_n) - p'_0 + \mu)\tau} [1 - \tilde{f}(p'_0 - \mu)] \rho_F(p'_0). \quad (\text{A.56})$$

Sustituyendo a los correladores bosónico y fermiónico en $M_{L,T}$, ésta se reescribe como

$$\begin{aligned} M_{L,T} &= T \sum_n \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau' \int \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{dp'_0}{2\pi} e^{(i\omega_n - k_0)\tau} e^{i(\omega - \omega_n - (p'_0 - \mu))\tau'} \\ &\quad \times [1 + f(k_0)] \rho_{L,T}(k_0) [1 - \tilde{f}(p'_0 - \mu)] \rho_F(p'_0), \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

y dado que $T \sum_n e^{i\omega_n(\tau - \tau')} = \delta(\tau - \tau')$, entonces

$$\begin{aligned} M_{L,T} &= \int_0^\beta d\tau \int \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{dp'_0}{2\pi} e^{(i\omega - k_0 - p'_0 + \mu)\tau} [1 + f(k_0)] \rho_{L,T}(k_0) \\ &\quad \times [1 - \tilde{f}(p'_0 - \mu)] \rho_F(p'_0) \\ &= \int \frac{dk_0}{2\pi} \int \frac{dp'_0}{2\pi} [1 + f(k_0)] [1 - \tilde{f}(p'_0 - \mu)] \rho_{L,T}(k_0) \\ &\quad \times \rho_F(p'_0) \frac{e^{(i\omega - k_0 - p'_0 + \mu)\beta} - 1}{i\omega + \mu - k_0 - p'_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Nuevamente, como $i\omega$ es frecuencia de fermión, entonces es un múltiplo impar de πT , por lo que si se sigue un procedimiento análogo al de las ecuaciones (A.31), (A.32), (A.35), y (A.36), así como el de las ecuaciones (A.37) y (A.40), pero haciendo la sustitución de $i\omega + \mu \rightarrow p_0 + i\epsilon$, se llega a

$$\begin{aligned} \text{Im}[M_{L,T}] &= \pi \left(e^{\beta(p_0 - \mu)} + 1 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'_0}{2\pi} f(k_0) \tilde{f}(p'_0 - \mu) \\ &\quad \times \delta(p_0 - k_0 - p'_0) \rho_{L,T}(k_0) \rho_F(p'_0). \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

La ecuación (A.59) coincide con la ecuación (A.41), pero generalizada para potencial químico finito. Por lo tanto, la identidad A.2.3 generaliza a las identidades A.2.1 y A.2.2

□

Bibliografía

- [1] F. H. Shu, *The Physical Universe: An Introduction to Astronomy*, 1st ed., A Series of Books in Astronomy (University Science Books, 1982).
- [2] M. Camenzind, *Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes*, 1st ed., Astronomy and Astrophysics Library (Springer-Verlag, 2007).
- [3] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 2009).
- [4] A. Lyne and F. Graham-Smith, *Pulsar Astronomy*, 4th ed., Cambridge Astrophysics (Cambridge University Press, 2012).
- [5] A. Strumia and F. Vissani, “Neutrino masses and mixings and...” arXiv (2006), arXiv:hep-ph/0606054 .
- [6] R. Zukanovich Funchal, B. Schmauch, and G. Giesen, “The physics of neutrinos,” arXiv (2013), arXiv:1308.1029 [hep-ph] .
- [7] A. Burrows, “Neutrinos from supernova explosions,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **40**, 181–212 (1990).
- [8] D. R. Lorimer, “Radio pulsar statistics,” in *Neutron Stars and Pulsars*, edited by W. Becker (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009) pp. 1–17.
- [9] G. Hobbs, D. R. Lorimer, A. G. Lyne, and M. Kramer, “A statistical study of 233 pulsar proper motions,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **360**, 974–992 (2005).
- [10] D. Lai, D. F. Chernoff, and J. M. Cordes, “Pulsar jets: Implications for neutron star kicks and initial spins,” *The Astrophysical Journal* **549**, 1111–1118 (2001).
- [11] C. Wang, D. Lai, and J. L. Han, “Neutron star kicks in isolated and binary pulsars: Observational constraints and implications for kick mechanisms,” *The Astrophysical Journal* **639**, 1007–1017 (2006).

- [12] D. Tong, “Statistical Physics,” (2012), notas de curso. Disponibles en <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/statphys.html>.
- [13] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, edited by P. Press (Pergamon Press, 1980).
- [14] F. Aratore, “Compact star structure and Chandrasekhar limit,” (2015), tesis de licenciatura de la Università degli Studi di Salerno. Disponible en <https://www.loyolacollege.edu/e-document/physics/9943-Aratore-triennale.pdf>.
- [15] J. M. Lattimer, “The nuclear equation of state and neutron star masses,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **62**, 485–515 (2012).
- [16] J. M. Lattimer and M. Prakash, “The physics of neutron stars,” *Science* **304**, 536–542 (2004).
- [17] F. Weber, R. Negreiros, and P. Rosenfield, “Neutron star interiors and the equation of state of superdense matter,” in *Neutron Stars and Pulsars*, edited by W. Becker (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009) pp. 213–245.
- [18] C. D. Capano, I. Tews, S. M. Brown, B. Margalit, S. De, S. Kumar, D. A. Brown, B. Krishnan, and S. Reddy, “Stringent constraints on neutron-star radii from multimessenger observations and nuclear theory,” *Nat. Astron.* (2020), 10.1038/s41550-020-1014-6.
- [19] D. Page, “Neutron star cooling: I,” in *Neutron Stars and Pulsars*, edited by W. Becker (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009) pp. 247–288.
- [20] D. Page and S. Reddy, “Dense matter in compact stars: Theoretical developments and observational constraints,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **56**, 327–374 (2006).
- [21] H. Heiselberg and V. Pandharipande, “Recent progress in neutron star theory,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **50**, 481–524 (2000).
- [22] P. Keranen, R. Ouyed, and P. Jaikumar, “Neutrino emission and mass ejection in quark novae,” *The Astrophysical Journal* **618**, 485–492 (2005).
- [23] K. Sumiyoshi, “Supernovae and neutron stars: playgrounds of dense matter and neutrinos,” *Journal of Physics: Conference Series* **861**, 012028 (2017).
- [24] E. Annala, T. Gorda, A. Kurkela, J. Nättilä, and A. Vuorinen, “Evidence for quark-matter cores in massive neutron stars,” *Nat. Phys.* (2020), 10.1038/s41567-020-0914-9.

- [25] M. Alford, “Color-superconducting quark matter,” *Annual Review of Nuclear and Particle Science* **51**, 131–160 (2001).
- [26] D. Page, U. Geppert, and F. Weber, “The cooling of compact stars,” *Nuclear Physics A* **777**, 497 – 530 (2006), special Issue on Nuclear Astrophysics.
- [27] D. K. Nadyozhin, “Gamow and the physics and evolution of stars,” *Space Sci. Rev.* **74**, 455 – 461 (1995).
- [28] J. M. Lattimer, C. J. Pethick, M. Prakash, and P. Haensel, “Direct URCA process in neutron stars,” *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2701–2704 (1991).
- [29] D. Yakovlev, A. Kaminker, O. Gnedin, and P. Haensel, “Neutrino emission from neutron stars,” *Physics Reports* **354**, 1 – 155 (2001).
- [30] S. Tsuruta, “Neutron star cooling: II,” in *Neutron Stars and Pulsars*, edited by W. Becker (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009) pp. 289–318.
- [31] R. N. Manchester, J. H. Taylor, and Y. Y. Van, “Detection of pulsar proper motion,” *The Astrophysical Journal* **189**, L119 – L122 (1974).
- [32] L. Scheck, T. Plewa, H.-T. Janka, K. Kifonidis, and E. Müller, “Pulsar recoil by large-scale anisotropies in supernova explosions,” *Phys. Rev. Lett.* **92**, 011103 (2004).
- [33] A. Burrows and J. Hayes, “Pulsar recoil and gravitational radiation due to asymmetrical stellar collapse and explosion,” *Phys. Rev. Lett.* **76**, 352–355 (1996).
- [34] D. Page, M. V. Beznogov, I. Garibay, J. M. Lattimer, M. Prakash, and H.-T. Janka, “NS 1987A in SN 1987A,” *The Astrophysical Journal* **898**, 125 (2020).
- [35] A. M. Khokhlov, P. A. Höflich, E. S. Oran, J. C. Wheeler, L. Wang, and A. Y. Tchchelkanova, “Jet-induced explosions of core collapse supernovae,” *The Astrophysical Journal* **524**, L107–L110 (1999).
- [36] I. Gott, J. Richard, J. E. Gunn, and J. P. Ostriker, “Runaway stars and the pulsars near the crab nebula,” *The Astrophysical Journal* **160**, L91 (1970).
- [37] M. Colpi and I. Wasserman, “Formation of an evanescent proto–neutron star binary and the origin of pulsar kicks,” *The Astrophysical Journal* **581**, 1271–1279 (2002).
- [38] C. L. Fryer and M. S. Warren, “The collapse of rotating massive stars in three dimensions,” *The Astrophysical Journal* **601**, 391–404 (2004).
- [39] E. R. Harrison and E. Tademaru, “Acceleration of pulsars by asymmetric radiation.” *The Astrophysical Journal* **201**, 447–461 (1975).

- [40] G. S. Bisnovatyi-Kogan, “Asymmetric neutrino emission and formation of rapidly moving pulsars,” *Astronomical & Astrophysical Transactions* **3**, 287–294 (1993).
- [41] I. Sagert and J. Schaffner-Bielich, “Pulsar kicks by anisotropic neutrino emission from quark matter in strong magnetic fields,” *A&A* **489**, 281–289 (2008).
- [42] P. Arras and D. Lai, “Neutrino-nucleon interactions in magnetized neutron-star matter: The effects of parity violation,” *Phys. Rev. D* **60**, 043001 (1999).
- [43] D. Lai and Y.-Z. Qian, “Parity violation in neutrino transport and the origin of pulsar kicks,” *The Astrophysical Journal* **495**, L103–L106 (1998).
- [44] A. Ayala, D. Manreza Paret, A. Pérez Martínez, G. Piccinelli, A. Sánchez, and J. S. Ruíz Montaña, “Kicks of magnetized strange quark stars induced by anisotropic emission of neutrinos,” *Phys. Rev. D* **97**, 103008 (2018).
- [45] T. Maruyama, N. Yasutake, M.-K. Cheoun, J. Hidaka, T. Kajino, G. J. Mathews, and C.-Y. Ryu, “Relativistic mean-field treatment of pulsar kicks from neutrino propagation in magnetized proto-neutron stars,” *Phys. Rev. D* **86**, 123003 (2012).
- [46] T. Maruyama, T. Kajino, N. Yasutake, M.-K. Cheoun, and C.-Y. Ryu, “Asymmetric neutrino emission from magnetized proto-neutron star matter including hyperons in relativistic mean field theory,” *Phys. Rev. D* **83**, 081303 (2011).
- [47] O. F. Dorofeev, V. N. Rodionov, and I. M. Ternov, “Anisotropic neutrino emission from beta-decays in a strong magnetic field,” *Soviet Astronomy Letters* **11**, 123–126 (1985).
- [48] E. K. Akhmedov, A. Lanza, and D. W. Sciama, “Resonant spin-flavor precession of neutrinos and pulsar velocities,” *Phys. Rev. D* **56**, 6117–6124 (1997).
- [49] A. Kusenko, G. Segrè, and A. Vilenkin, “Neutrino transport: no asymmetry in equilibrium,” *Physics Letters B* **437**, 359 – 361 (1998).
- [50] G. Lugones and O. G. Benvenuto, “Effect of trapped neutrinos in the hadron matter to quark matter transition,” *Phys. Rev. D* **58**, 083001 (1998).
- [51] C. Giunti and C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics* (Oxford University Press, 2007).
- [52] T. Lancaster and S. Blundell, *Quantum field theory for the gifted amateur*, 1st ed. (Oxford University Press, 2018).
- [53] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass., 1995).

- [54] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory* (WORLD SCIENTIFIC, Singapore, 2008).
- [55] R. N. Mohapatra and P. B. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, 3rd ed. (WORLD SCIENTIFIC, 2004).
- [56] S. Reddy, M. Prakash, and J. M. Lattimer, “Neutrino interactions in hot and dense matter,” *Phys. Rev. D* **58**, 013009 (1998).
- [57] N. Iwamoto, “Neutrino emissivities and mean free paths of degenerate quark matter,” *Annals of Physics* **141**, 1 – 49 (1982).
- [58] E. Rrapaj, J. W. Holt, A. Bartl, S. Reddy, and A. Schwenk, “Charged-current reactions in the supernova neutrino-sphere,” *Phys. Rev. C* **91**, 035806 (2015).
- [59] L. F. Roberts and S. Reddy, “Charged current neutrino interactions in hot and dense matter,” *Phys. Rev. C* **95**, 045807 (2017).
- [60] A. Pastore, M. Martini, D. Davesne, J. Navarro, S. Goriely, and N. Chamel, “Linear response theory and neutrino mean free path using Brussels-Montreal Skyrme functionals,” *Phys. Rev. C* **90**, 025804 (2014).
- [61] J. Torres Patiño, E. Bauer, and I. Vidaña, “Asymmetry of the neutrino mean free path in hot neutron matter under strong magnetic fields,” *Phys. Rev. C* **99**, 045808 (2019).
- [62] S. Reddy, M. Sadzikowski, and M. Tachibana, “Neutrino rates in color flavor locked quark matter,” *Nuclear Physics A* **721**, C309 – C312 (2003).
- [63] A. Burrows, “Beta decay in quark stars,” *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1640–1643 (1980).
- [64] M. E. Peskin, *Concepts of elementary particle physics*, 1st ed., Oxford master series in particle physics, astrophysics, and cosmology, Vol. 26 (2019).
- [65] B. W. Lee and R. E. Shrock, “Natural suppression of symmetry violation in gauge theories: Muon- and electron-lepton-number nonconservation,” *Phys. Rev. D* **16**, 1444–1473 (1977).
- [66] K. Fujikawa and R. E. Shrock, “Magnetic moment of a massive neutrino and neutrino-spin rotation,” *Phys. Rev. Lett.* **45**, 963–966 (1980).
- [67] W. Marciano and A. Sanda, “Exotic decays of the muon and heavy leptons in gauge theories,” *Physics Letters B* **67**, 303 – 305 (1977).
- [68] A. B. Balantekin, “Neutrino magnetic moment,” *AIP Conference Proceedings* **847**, 128–133 (2006).

- [69] K. Hirata, T. Kajita, M. Koshiba, M. Nakahata, Y. Oyama, N. Sato, A. Suzuki, M. Takita, Y. Totsuka, T. Kifune, T. Suda, K. Takahashi, T. Tanimori, K. Miyano, M. Yamada, E. W. Beier, L. R. Feldscher, S. B. Kim, A. K. Mann, F. M. Newcomer, R. Van, W. Zhang, and B. G. Cortez, “Observation of a neutrino burst from the supernova SN1987A,” *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1490–1493 (1987).
- [70] R. M. Bionta, G. Blewitt, C. B. Bratton, D. Casper, A. Ciocio, R. Claus, B. Cortez, M. Crouch, S. T. Dye, S. Errede, G. W. Foster, W. Gajewski, K. S. Ganezer, M. Goldhaber, T. J. Haines, T. W. Jones, D. Kielczewska, W. R. Kropp, J. G. Learned, J. M. LoSecco, J. Matthews, R. Miller, M. S. Mudan, H. S. Park, L. R. Price, F. Reines, J. Schultz, S. Seidel, E. Shumard, D. Sinclair, H. W. Sobel, J. L. Stone, L. R. Sulak, R. Svoboda, G. Thornton, J. C. van der Velde, and C. Wuest, “Observation of a neutrino burst in coincidence with supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud,” *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1494–1496 (1987).
- [71] I. Goldman, Y. Aharonov, G. Alexander, and S. Nussinov, “Implications of the supernova SN1987A neutrino signals,” *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1789–1792 (1988).
- [72] J. M. Lattimer and J. Cooperstein, “Limits on the neutrino magnetic moment from SN1987A,” *Phys. Rev. Lett.* **61**, 23–26 (1988).
- [73] R. Barbieri and R. N. Mohapatra, “Limit on the magnetic moment of the neutrino from supernova 1987A observations,” *Phys. Rev. Lett.* **61**, 27–30 (1988).
- [74] A. Ayala, J. C. D’Olivo, and M. Torres, “Bound on the neutrino magnetic moment from chirality flip in supernovae,” *Phys. Rev. D* **59**, 111901 (1999).
- [75] A. Ayala, J. C. D’Olivo, and M. Torres, “Right-handed neutrino production in dense and hot plasmas,” *Nuclear Physics B* **564**, 204 – 222 (2000).
- [76] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 1996).
- [77] M. Laine and A. Vuorinen, *Basics of Thermal Field Theory: A Tutorial on Perturbative Computations*, 1st ed., Lecture Notes in Physics (Springer International Publishing, 2016).
- [78] A. Das, *Finite Temperature Field Theory* (WORLD SCIENTIFIC, 1997).
- [79] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory: Principles and Applications*, 2nd ed., Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2006).
- [80] R. D. Pisarski, “Computing finite-temperature loops with ease,” *Nuclear Physics B* **309**, 476 – 492 (1988).

-
- [81] R. D. Pisarski, “Scattering amplitudes in hot gauge theories,” *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1129–1132 (1989).
- [82] E. Braaten and R. D. Pisarski, “Soft amplitudes in hot gauge theories: A general analysis,” *Nuclear Physics B* **337**, 569 – 634 (1990).
- [83] J. Frenkel and J. Taylor, “High-temperature limit of thermal QCD,” *Nuclear Physics B* **334**, 199 – 216 (1990).
- [84] J. C. D’Olivo and J. F. Nieves, “Damping rate of a fermion in a medium,” *Phys. Rev. D* **52**, 2987–2993 (1995).
- [85] A. Ayala, J. C. D’Olivo, and A. Weber, “Damping and reaction rates and wave function renormalization of fermions in hot gauge theories,” *International Journal of Modern Physics A* **15**, 2953–2969 (2000).
- [86] H. A. Weldon, “Covariant calculations at finite temperature: The relativistic plasma,” *Phys. Rev. D* **26**, 1394–1407 (1982).
- [87] J. M. Lattimer and M. Prakash, “Neutron star observations: Prognosis for equation of state constraints,” *Physics Reports* **442**, 109 – 165 (2007), the Hans Bethe Centennial Volume 1906-2006.
- [88] S. E. Woosley and T. A. Weaver, “The physics of supernova explosions,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **24**, 205–253 (1986).
- [89] H. Pérez Rojas, “Electroweak plasma in constant magnetic field,” *Acta Phys. Pol. B* **17**, 861–885 (1986).
- [90] M. Chaichian, S. S. Masood, C. Montonen, A. Pérez Martínez, and H. Pérez Rojas, “Quantum magnetic collapse,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5261–5264 (2000).
- [91] Y. N. Srivastava, A. Widom, and J. Swain, “Thermodynamic equations of state for Dirac and Majorana fermions,” *arXiv*, hep-ph/9709434 (1997).
- [92] M. Prakash, J. R. Cooke, and J. M. Lattimer, “Quark-hadron phase transition in protoneutron stars,” *Phys. Rev. D* **52**, 661–665 (1995).