UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

FACULTAD DE CIENCIAS

EL PRINCIPIO FUNDAMENTAL DEL CONTEO, UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE PARA ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MAT. ALBERTO SANTANA CRUZ

TUTOR PRINCIPAL:

MTRO. JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA

(FACULTAD DE CIENCIAS)

INTEGRANTES DEL COMITÉ TUTOR:

DRA. CLARA ROSA MARÍA ALVARADO ZAMORANO

(INSTITUTO DE CIENCIAS APLICADAS Y TECNOLOGÍA)

MTRA. SARA ALEJANDRA PANDO FIGUEROA

(FACULTAD DE CIENCIAS)

Cd. Universitaria, Cd. Mx. Agosto 2021

Dedicatoria:

A mi mamá, Josefina, a mi papá, Alberto, y a mi hermana, Kenia. No tengo las palabras suficientes para agradecerles por todo lo que han hecho por mí; la vida me bendijo con una familia tan hermosa y llena de amor como lo son ustedes. Se que este logro no habría sido posible de no ser por su cariño y su apoyo.

A mis amigas, Verónica Nancy, Paola, Verónica Domínguez, Tania y Lizbeth, y a mi amigo José Antonio, porque hay amistades que llegan para quedarse; también quiero dedicarles este trabajo a ustedes.

Finalmente, y no menos importante, quiero dedicar esta tesis a la memoria de tres personas a quienes quise mucho y que, lamentablemente, dejaron este mundo durante la pandemia del SARS-COV-2. A mi tía Rosalía, gracias por haber sido mi madrina y por toda la calidez de hogar que nos brindaste cuando te íbamos a visitar. A mi tía Martha, gracias por todo el amor y apoyo que nos brindaste a mi familia y a mí; sin duda alguna, parte de este logro te lo debo a ti. A mi mejor amigo de Universum, Marco Antonio Meza, siempre fuiste una gran persona y un gran amigo; me quedo con el recuerdo de las risas y la alegría que siempre compartiste con tus amigos; sé que tu trabajo y tu optimismo siempre inspirará a muchas personas.

Agradecimientos:

Quiero agradecer a mi tutor principal, el M. en C. José Antonio Gómez Ortega, por la atención, el apoyo y la motivación que me brindó para la elaboración del presente trabajo de graduación. Del mismo modo, a las integrantes de mi comité tutor, la Dra. Clara Rosa María Alvarado y la M. en D. Sara Alejandra Pando por todos los consejos y la retroalimentación que me brindaron antes, durante y después de la implementación de mi proyecto de grado.

Agradezco a la profesora Lilian Mendoza, del CCH plantel Sur, quien me permitió implementar el presente proyecto con su grupo de la materia Estadística y Probabilidad I a finales del 2018; así como a los estudiantes del grupo quienes mostraron la mayor disposición de trabajo y cooperación.

También quiero agradecer a los miembros del jurado, el Dr. Carlos Hernández Garciadiego y el Dr. Alejandro Ricardo Garciadiego; por la lectura y revisión del presente trabajo para su posterior aprobación.

Enfatizo mi agradecimiento con el Dr. Alejandro R. Garciadiego, quien fue mi profesor durante los cuatro semestres de la maestría, así como mi agradecimiento con mis demás profesoras y profesores, entre ellos la Dra. Marquina Terán y el Mtro. Fernando Aurelio; por ser excelentes guías durante mi formación profesional a lo largo de la maestría.

Agradezco a Ramón Hernández Acosta, curador de la sala de Matemáticas de Universum, por su invaluable apoyo antes, durante y después de mis estudios de posgrado.

Finalmente, quiero agradecer a mis compañeros de generación de MADEMS matemáticas: Judith, Mónica, Karina, Berenice, Martha, Leti, Blanquita, César, y mi compañera y amiga de MADEMS química, Jazmín, por los invaluables momentos compartidos dentro y fuera del ámbito profesional.

Integrantes del jurado:

1) M. en C. José Antonio Gómez Ortega (tutor principal).
2) Dra. Clara Rosa María Alvarado Zamorano (integrante del comité tutor)
3) M. en D. Sara Alejandra Pando Figueroa (integrante del comité tutor)
4) Dr. Alejandro Ricardo Garciadiego Dantan
5) Dr. Carlos Hernández Garciadiego

Resumen:

La presente tesis es el resultado del diseño e implementación de una propuesta de enseñanza-aprendizaje sobre el principio fundamental del conteo para el bachillerato. Aunque este principio es el tema central de la propuesta, también se retomaron y profundizaron algunos contenidos de la educación básica con el fin de fomentar en los estudiantes la reflexión, el análisis, la intuición y la evaluación. La propuesta se implementó en el CCH plantel sur y se dividió en dos sesiones.

Durante la primera sesión los estudiantes resolvieron problemas matemáticos de proporcionalidad; esto con el propósito de fomentar el pensamiento reflexivo y el análisis sobre situaciones en las que se requiere aplicar e interpretar dos o más operaciones básicas.

En la segunda sesión los estudiantes resolvieron problemas que requieren de una o más aplicaciones del principio fundamental del conteo; estos se diseñaron de tal modo que su solución no sea evidente; de modo que los estudiantes tuvieron que analizar los problemas e intuir métodos de solución.

Ambas sesiones se implementaron bajo el modelo de Aula Invertida; para esto, se editaron dos textos cuya lectura se encomendó a los estudiantes como una actividad extra-clase previa a cada sesión. En total se evaluó a los estudiantes con tres problemas, uno de proporcionalidad y dos de conteo. En esta tesis se presentan los resultados de la evaluación; así como un análisis exhaustivo de los métodos intuidos por los estudiantes para llegar a la solución de los problemas.

Palabras clave: Intuición, conteo, análisis combinatorio, regla de tres, aula invertida.

Contenido

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son el resultado de siglos de evolución humana, y su campo de estudio es tan amplio que sería aventurado precisar cuándo y dónde tuvo su origen. Lo que es un hecho, es que una de las prácticas matemáticas más antiguas entre los seres humanos es el acto de contar. Desde la antigüedad, el hombre se ha visto en la necesidad de contar un sinfín de objetos (reales o ficticios) que le ha permitido avanzar hacia diversas direcciones; como es el desarrollo del calendario, la medición de la tierra, el desarrollo del comercio, etc. A nuestros días, se han creado técnicas cada vez más sofisticadas de conteo, a partir de las cuales es posible el cálculo y la estimación de cantidades que, pese a ser finitas, pueden llegar a ser tan grandes como una persona podría (o no) imaginar.

En el sistema educativo vigente, las primeras técnicas de conteo las aprenden los estudiantes desde la educación básica; y estas son las operaciones elementales (la suma, la resta, la multiplicación y la división). Sin embargo, en la vida cotidiana es posible encontrar situaciones en las que contar supone dificultades mayores, que van más allá de un dominio básico de las operaciones elementales. Por ello, es necesario el desarrollo de técnicas cada vez más sofisticadas de conteo. El Análisis Combinatorio es la rama de las matemáticas responsable de crear y evaluar métodos cada vez más sofisticados de conteo; y sin duda alguna, uno de sus frutos más importantes es el Principio Fundamental del Conteo.

El presente trabajo es el resultado del diseño e implementación de una propuesta de enseñanza-aprendizaje del principio fundamental del conteo para el bachillerato; esto último bajo el modelo de aula invertida. Además, se tomó como guía el paradigma de la educación matemática realista para el diseño de la propuesta, último que es atribuido a Hans Freudenthal y que se caracteriza por el peso que da al contexto personal, social y cultural en el que se desarrollan los estudiantes, tanto dentro como fuera del aula.

Por su parte, el modelo de aula invertida es un modelo de enseñanza-aprendizaje que ha ganado popularidad en las últimas décadas frente al modelo tradicional; y el cual consiste en invertir los papeles que desempeñan los alumnos dentro y fuera del aula. Esto último significa que los alumnos adquieren por cuenta propia los conocimientos más elementales del tema a aprender; mientras que las sesiones de clase son utilizadas para implementar actividades que requieren de una participación activa por parte de los estudiantes.

La propuesta aquí desarrollada comprende el diseño de dos sesiones de clase, las cuales fueron implementadas en un grupo de 39 estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH) plantel Sur, con una asistencia de 34 y 36 alumnos a dichas sesiones. La primera de las sesiones fue diseñada con el propósito de fomentar la reflexión y el análisis sobre el uso de la división en la resolución de problemas de conteo básicos de la vida cotidiana, operación que suele aplicarse de forma puramente intuitiva. Para ello, se diseñaron problemas de conteo que requerían de una aplicación de la regla de tres; sin embargo, se solicitó a los estudiantes interpretar cada una de las operaciones implicadas, con lo que se fomentó el pensamiento reflexivo.

Por su parte, la segunda sesión de trabajo se diseñó para introducir el Principio Fundamental del Conteo; desde sus fundamentos, hasta las ventajas y dificultades que pueden surgir en relación con su aplicación. La instrucción en torno a este principio estuvo enfocada al análisis de sus fundamentos teóricos y, sobre todo, a detonar en los estudiantes intuiciones que les permitieron proponer métodos de solución a problemas de conteo que no pueden resolverse con una aplicación inmediata del principio fundamental; esto debido a la presencia de dos o más eventos (o fenómenos) con alguna relación de dependencia entre sí.

Dado que se eligió el modelo de aula invertida para el diseño de la propuesta, el presente trabajo también comprende el diseño y redacción de dos textos que sirvieron a los alumnos como un material introductorio; último que se les encomendó leer como una actividad extra-clase previa a las sesiones de trabajo. Aunque el modelo de aula invertida sugiere implementar material audiovisual para dichos fines, en el presente trabajo se optó por la edición de material de lectura debido a diversas razones; últimas que serán enlistadas en el capítulo 1. Por ahora conviene decir que una de las razones es la de fomentar en los estudiantes el hábito de la lectura sobre textos de matemáticas; además de que la lectura permite a los estudiantes sumergirse en un espacio de análisis y reflexión sobre los temas que se abordan, de tal modo que pueden hacer una pausa en aquellos puntos que exigen un mayor grado de reflexión.

Tanto el material de lectura, así como los problemas implementados durante la instrucción y la evaluación de la propuesta, se diseñaron tomando como referencia el contexto personal, social, cultural y profesional en el que se desarrollan los estudiantes mexicanos que residen en alguna de las zonas metropolitanas del país.

Además, como parte del diseño del presente trabajo se propusieron cuatro puntos que, se espera, sirvan como un modelo para la planeación y el diseño de secuencias didácticas de enseñanza-aprendizaje dentro del campo del análisis combinatorio; puntos que serán introducidos y explicados durante el capítulo 3.

Es oportuno señalar que para el proceso de evaluación se propuso no sólo evaluar los aprendizajes alcanzados; sino que también se llevó a cabo un análisis exhaustivo de los errores detectados, especialmente aquellos que derivan de un análisis erróneo del problema, o bien, de alguna intuición errónea por parte de los estudiantes. También se llevó a cabo un al análisis de los métodos de solución válidos empleados por los estudiantes que guardan relación con aquellos utilizados durante el proceso de instrucción.

Ahora bien, en lo que refiere a la estructura y organización del presente trabajo, este está dividido y organizado en un total de seis capítulos. En el primer capítulo se explica el fundamento psicológico y pedagógico que da sustento a la propuesta de enseñanza-aprendizaje aquí desarrollada. Por su parte, en el capítulo 2 se analizan y describen los contenidos del análisis combinatorio que forman parte de los programas de estudio de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), así como del CCH, ambas instituciones de educación media superior, pertenecientes a la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Además, durante el segundo capítulo también se analizan algunas de las investigaciones más relevantes que hay con relación a la enseñanza-aprendizaje del análisis combinatorio.

En el capítulo 3 se presenta un análisis de la problemática actual que hay en torno a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general y, en particular, en el análisis combinatorio. Finalmente, se introducirán los cuatro puntos que, en opinión del autor del presente trabajo, deben guiar la planeación y el diseño de cualquier secuencia didáctica de enseñanza-aprendizaje dentro del campo del análisis combinatorio. Estos últimos fueron propuestos tomando en cuenta el paradigma de la educación matemática realista de Freudenthal (véase Goffree, 2000), las investigaciones de Fischbein (1975), y la obra de Kline (1990).

Los capítulos 4 y 5 presentan el desarrollo de las dos sesiones implementadas, donde cada capítulo está dedicada a una sesión. En ellos se describe tanto el proceso de instrucción, así como el proceso de evaluación, se anexan y analizan los resultados, y se presentan las conclusiones particulares de cada sesión. Por último, en el capítulo 6 se retoman y contrastan las conclusiones más importantes de ambas sesiones. En ese mismo capítulo también se analizará de qué forma podría mejorarse la propuesta aquí desarrollada; esto con base a los resultados de la evaluación y a la experiencia del autor tras la implementación de la propuesta.

CAPÍTULO 1:

SUSTENTO PEDAGÓGICO

En este capítulo se revisará parte del fundamento psicológico y pedagógico que dará sustento a la propuesta de enseñanza-aprendizaje desarrollada en el presente trabajo. El capítulo está dividido en dos secciones. En la primera de ellas se explica de forma muy general las teorías de Ausubel, Piaget y Vygotsky, las cuales han servido como punto de partida para el desarrollo de una variedad de paradigmas y modelos pedagógicos. Entre ellos se encuentra el modelo de *Aula Invertida* y el paradigma de la *Educación Matemática Realista*, los cuales sirvieron de guía para el diseño y la elaboración de la propuesta de enseñanza-aprendizaje aquí desarrollada. Ambos modelos serán explicados en la segunda sección de este capítulo.

1.1 TEORÍAS DEL APRENDIZAJE Y DEL DESARROLLO COGNITIVO

El desarrollo de la psicología durante el siglo XX dio origen a una variedad de teorías que permiten explicar y describir cómo se lleva a cabo el proceso de aprendizaje, así como también el desarrollo del conocimiento en los individuos (esto es el desarrollo cognitivo). Entre dichas teorías se encuentran la del *Aprendizaje Significativo* de David P. Ausubel, las teorías de los *Estadios* de Jean Piaget, y la teoría *Sociocultural* de Lev Vygotsky. Conviene mencionar que Moreira (1997) enfatiza que, a diferencia de la teoría de Ausubel que se trata de una teoría del aprendizaje, las teorías de Piaget y Vygotsky son teorías del desarrollo cognitivo.

El estudio de las teorías del aprendizaje es de relevancia en el contexto educativo y en particular para la enseñanza de las matemáticas, pues permiten conocer sobre el proceso de aprendizaje de los individuos, y a partir de ello, diseñar propuestas de enseñanza-aprendizaje que sean efectivas para los objetivos establecidos por cada una de las instituciones educativas del país, y las cuales comprenden desde la educación básica hasta la educación superior.

A lo largo de la presente sección se proporcionará una breve explicación de las tres teorías del aprendizaje y del desarrollo cognitivo antes mencionadas, así como también se explicarán sus implicaciones en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas dentro de los sistemas de educación media superior.

1.1.1 La teoría del aprendizaje significativo de Ausubel

De acuerdo con Ausubel (1963, citado en Moreira 1997), el aprendizaje significativo es el proceso por excelencia a través del cual los estudiantes incorporan a su estructura cognitiva los nuevos conocimientos. Un aspecto bastante relevante de esta teoría es que, a diferencia de otras teorías del aprendizaje, la teoría de Ausubel está orientada al contexto escolar, además de permanecer vigente hasta nuestros días (Hernández 1998).

El *aprendizaje significativo* se caracteriza por ser sustancial y no arbitrario, contrario al aprendizaje memorístico (o mecánico) que consiste en la retención literal de la información a aprender. En este contexto, *sustancial* significa que lo que el alumno aprende no es el concepto en su forma literal, sino el significado (o la sustancia) que yace en el mismo, y el cual puede ser enunciado de múltiples formas. Por su parte, la *no arbitrariedad* se refiere a que el nuevo conocimiento debe estar conectado con aquellos conocimientos que han sido adquiridos de forma previa por el estudiante (Moreira 1997).

La no arbitrariedad de los conocimientos toma gran importancia en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, pues suele haber una conexión entre los resultados y de los conocimientos que integran esta disciplina. Ejemplo de ello es que el estudio del álgebra y del plano cartesiano en el primer año de educación media superior es un paso necesario para el estudio de la geometría analítica durante el segundo año de bachillerato. Al mismo tiempo, el estudio de la representación gráfica de la recta, así como de la pendiente que la determina es fundamental para el estudio del cálculo diferencial durante el tercer año de educación media superior.

Por otro lado, Ausubel (1968, citado en Moreira 1997) menciona que existe una tercera condición para que pueda llevarse a cabo el aprendizaje significativo; y es que debe existir una predisposición por parte del individuo para aprender un nuevo conocimiento. Por esta razón, es importante desarrollar en los estudiantes la motivación necesaria para aprender un tema o contenido nuevo, pues en caso contrario será poco probable que los alumnos desarrollen un aprendizaje significativo del mismo.

De este modo, los docentes, y en particular los docentes en matemáticas tienen la obligación de asegurase que los alumnos cuentan con los conocimientos previos necesarios antes de la enseñanza de un tema nuevo. En el caso de haber algún conocimiento previo deficiente por parte de los estudiantes, el docente debe mostrarse flexible y valerse de su ingenio para introducir los temas necesarios previos a la enseñanza del tema nuevo. Esto último sin perder de vista que debe de mantener la motivación en los estudiantes para fomentar el aprendizaje.

1.1.2 La teoría de los estadios de Jean Piaget

De forma general, la teoría de los estadios de Piaget define cuatro etapas en el desarrollo cognitivo de los individuos, las cuales van desde las primeras conductas inteligentes posteriores al nacimiento, hasta el desarrollo del pensamiento lógico-deductivo durante la adolescencia.

Las cuatro etapas del desarrollo cognitivo, las cuales Piaget llama *Estadios*, están jerarquizadas y no es posible que un individuo alcance alguna de ellas sin haber pasado previamente por las anteriores. Estas son, en orden de jerarquía, la etapa sensoriomotora, la etapa preoperatoria, la etapa de las operaciones concretas y, finalmente, la etapa de las operaciones formales. Hernández (1998) resume algunas de las características más importantes de las cuatro etapas de la teoría Piagetiana, y las cuales se describen de forma breve en el siguiente cuadro:

Etapa Sensoriomotora **(De los 0 a los 2 años aproximadamente)**	Se caracteriza porque el niño activa y pone en práctica los reflejos con los que nace, para posteriormente desarrollar sus primeras acciones del tipo sensoriomotor. Estos últimos aumentan progresivamente en complejidad hasta desembocar en los primeros actos inteligentes donde el niño ya persigue un fin específico. Otro aspecto importante de esta etapa es que el niño comienza a percibir el mundo de forma tal que los objetos, a pesar de que desaparecen momentáneamente, permanecen en el mundo.
Etapa del Pensamiento Preoperatorio **(De los 2 a los 8 años aproximadamente)**	En esta etapa, el niño ya es capaz de crearse representaciones mentales, lo que da lugar al desarrollo del lenguaje y del dibujo. Por otra parte, es capaz de usar conceptos incompletos (o parcialmente erróneos), y su orientación hacia los problemas es de carácter cualitativo. Además, se dice que el pensamiento del niño es egocéntrico, lo cual significa que difícilmente tomará en cuenta su propio punto de vista y el de otras personas de manera simultánea. Su razonamiento es de carácter intuitivo (se deja llevar fácilmente por las apariencias), y su moral es heterónoma (determinada por la autoridad de los demás).

Etapa de las Operaciones Concretas **(De los 8 a los 12 años aproximadamente)**	En esta etapa, los niños son capaces de emplear conceptos y no se dejan llevar tan fácilmente por las apariencias. Son capaces de clasificar y seriar distintos objetos y, en particular, comprenden la noción de número. Además, su orientación a los problemas se vuelve más de carácter cuantitativo, mientras que su forma de razonamiento es del tipo inductivo. Su pensamiento es concreto, es decir; apegado situaciones reales. Sobre el trabajo cooperativo, son capaces de tomar en cuenta su propio punto de vista y el de los demás. En adición, el niño comienza a formarse una moral más autónoma (es capaz de discernir por sí mismo).
Etapa de las Operaciones Formales **(De los 12 a los 16 años aproximadamente)**	En esta etapa, el ahora adolescente desarrolla una capacidad de razonamiento que se caracteriza por ser del tipo hipotético-deductivo, al mismo tiempo que adquiere la capacidad de comprender conceptos abstractos que van más allá de las situaciones reales.

La teoría de los estadios de Piaget es de relevancia para la enseñanza de las matemáticas, pues esta última explica los diferentes niveles de razonamiento que adquiere un individuo de acuerdo con la etapa del desarrollo cognitivo en la que se encuentra. De este modo, la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato debe aspirar a que los alumnos alcancen la etapa de las operaciones formales. Para ello, es importante aplicar las matemáticas desde situaciones concretas hasta casos con cierto grado de abstracción.

Ahora bien, en lo que se refiere al aprendizaje del *Análisis Combinatorio* (rama de las matemáticas que comprende el tema del que trata la propuesta de enseñanza-aprendizaje aquí planteada), Inhelder y Piaget (1985) investigaron las diferencias entre la forma de razonamiento de niños y adolescentes pertenecientes a las etapas del pensamiento preoperatorio, de las operaciones concretas, así como de la etapa de las operaciones formales; esto en relación con el cálculo y la enumeración del conjunto de combinaciones posibles de una situación determinada.

En el siguiente capítulo se hará una descripción breve de los resultados obtenidos por ambos investigadores con relación a esta última investigación. Lo anterior toma relevancia porque permite conocer tanto las dificultades, así como también las facilidades que presenta un individuo al momento de razonar y llevar a cabo una tarea de conteo; esto último de acuerdo con la etapa del desarrollo cognitivo en la que se encuentra dicho individuo.

1.1.3 La teoría sociocultural de Vygotsky

Una de las características más destacadas de la teoría de Vygotsky es la importancia que adquiere el entorno social y cultural como un factor para el desarrollo cognitivo de un individuo (Moreira 1997, Hernández 1998). Para los fines de la presente subsección, conviene conocer algunos de los términos sobre los que Vygotsky edificó su teoría.

Vygotsky habla de las funciones psicológicas del individuo y las clasifica en dos tipos que son las funciones psicológicas inferiores y las superiores (Hernández 1998). Las *funciones psicológicas inferiores* son aquellas que el ser humano tiene en común con las demás especies del reino animal; es decir, se tratan de aquellas funciones que hacen del ser humano una especie más en el mundo. Por el contrario, las *funciones psicológicas superiores* son aquellas que caracterizan al ser humano y se desarrollan dentro del entorno social y cultural en el que se desarrolla, y dentro de las cuales se encuentra el lenguaje.

Otro aspecto relevante de la teoría de Vygotsky es la apropiación de signos y herramientas por parte de los individuos (Moreira 1997, Hernández 1998). Desde la perspectiva epistemológica de la relación sujeto-objeto, los *signos* son aquellos objetos que producen una transformación en el sujeto, mientras que las *herramientas* son aquellas que el sujeto emplea para estudiar al objeto, así como para realizar transformaciones en este último (Hernández 1998).

Cabe mencionar que las matemáticas, en conjunto, pueden concebirse como una herramienta, pues es a través de ella que resulta posible estudiar y comprender la diversidad de fenómenos que tienen lugar en el mundo. Por ejemplo, la lógica establece las reglas que dan estructura al lenguaje, y a partir de las cuales es posible determinar cuándo una oración es equivalente a otra, o bien, cuando un enunciado implica a otro. Otro ejemplo es el caso del Análisis Combinatorio, rama de las matemáticas que permite cuantificar el número de formas posibles como puede llegar a ocurrir un fenómeno o un conjunto de fenómenos determinados.

Por otro lado, dentro de las mismas matemáticas se emplean una diversidad de signos (como es el caso de los dígitos, los símbolos de las operaciones básicas, las variables, etc.) y herramientas (el ábaco, la calculadora, la regla, el compás, etc.) que son de relevancia para el estudio y el desarrollo de esta disciplina. A su vez, estas cumplen una función en la enseñanza y el aprendizaje de las mismas matemáticas.

Ahora bien, en un contexto más general, Moreira (1997) clasifica a los signos en un total de tres clases, y estas son:

a) *Indicadores:* se refiere al caso de aquellos signos que definen una relación de causa y efecto. Por ejemplo: las ojeras en una persona significan que dicha persona no ha dormido lo suficiente (causa: falta de sueño, efecto: ojeras).
b) *Icónicos:* son representaciones gráficas (o imágenes) e intuitivas del objeto o fenómeno que representan. Ejemplo de este tipo de signos son los denominados 'emojis' que hoy en día se emplean en las redes sociales para expresar acciones, sentimientos y emociones por parte de quienes los usan.
c) *Simbólicos:* son representaciones abstractas de aquello que simbolizan. Ejemplo de este tipo de signos son las letras del alfabeto que representan los diferentes sonidos del lenguaje oral; así como también las palabras que con ellas de construyen (la palabra 'casa' escrita o pronunciada se refiere a una edificación en la que habita una persona o una familia). Otro ejemplo son los símbolos usados por algunas culturas para representar a los números enteros positivos, como es el caso de los números arábigos (1, 2, 3, etc.) y los números romanos (I, II, III, IV, etc.).

A un conjunto de signos con determinada función social o cultural se le denomina *sistema de signos*. Ejemplos de ellos son el lenguaje oral, el lenguaje escrito, los sistemas de numeración, el lenguaje musical (tono y tiempo), entre otros. De acuerdo con Vygotsky (citado en Moreira 1997), es a través de la internalización de los sistemas de signos y herramientas que se lleva a cabo el desarrollo cognitivo del individuo. Sobre este punto, Hernández (1998) enfatiza que:

> A partir de una serie de estudios realizados por Vygotsky y sus colegas, se demostró que el desarrollo psicológico debe ser entendido como una serie de transformaciones cualitativas, asociadas con cambios en el uso de los instrumentos psicológicos [herramientas y sistemas de signos]. En este sentido, se producen cambios en las formas de mediación, los cuales hacen que los sujetos realicen operaciones más complejas (de orden cualitativamente superior) sobre los objetos (p. 222).

Cabe destacar que si hay algo que caracteriza a las matemáticas es que esta disciplina comprende su propio sistema de signos; último que ha evolucionado a través de la historia y el cual presenta variaciones de un país a otro, e incluso de una comunidad a otra. Ejemplo de ello es que desde la educación prescolar se enseña a los niños a representar los primeros números a través de diez signos llamados dígitos. Más adelante, en la educación primaria, se les enseña a representar números más grandes y a operar con ellos; y para ello se introducen símbolos que permitan representar las cuatro operaciones básicas.

Hoy en día, para bien o para mal, el sistema de signos empleado en matemáticas es vasto, y comprende desde los símbolos elementales introducidos en la educación básica, hasta aquellos símbolos que se emplean en las matemáticas más avanzadas, últimas que tienen lugar en el ámbito profesional. De este modo, cada estudiante debe internalizar una parte del sistema de signos que integra esta disciplina, esto último con base en el nivel educativo que se encuentra cursando y de acuerdo con las funciones que este desempeñe.

Un último punto por destacar sobre la teoría de Vygotsky es la función que desempeña la interacción social para el desarrollo cognitivo del individuo. De acuerdo con Vygotsky (citado en Moreira 1997), el conocimiento primero se construye en conjunto con los demás integrantes de una sociedad para que posteriormente sea internalizado por el individuo.

Este último aspecto de la teoría de Vygotsky ha inspirado uno de los paradigmas en educación más importantes que es el paradigma de la *cognición situada*, último que también es aplicable a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Bajo este paradigma, las matemáticas deben ser enseñadas tomando como referencia el contexto social y cultural en el que se desenvuelven los estudiantes, y nunca deben ser enseñadas como algo ajeno a ello.

El paradigma de la cognición situada, el cual será abordado con más detalle en la siguiente sección, también guarda relación con la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, pues al enseñar las matemáticas haciendo énfasis en el contexto social y cultural de los estudiantes, se está dando significado a los contenidos planteados, pues se está creando una conexión entre el contexto social y cultural que es familiar a los estudiantes con los con los contenidos planteados.

Bajo el enfoque vygotskyano, el aprendizaje se concibe como el proceso a través del cual el individuo internaliza los sistemas de signos y las herramientas; esto último en un proceso donde ambos son definidos y adquiridos a través de la interacción social con otros individuos de la misma comunidad (Moreira 1997).

En lo que al docente se refiere, Hernández (1998) concibe al profesor como un guía quien interactúa con el estudiante con el propósito de instruirlo sobre aquellos saberes que el estudiante debe adquirir. Sin embargo, el profesor deberá ceder al alumno, de forma paulatina, el control de su propio proceso de aprendizaje, fomentando así el desarrollo de su autonomía. En el proceso, el docente también deberá fomentar la interacción social entre sus estudiantes, esto a través de permitir el intercambio de ideas y opiniones entre ellos, y de tal modo que los conocimientos y las ideas se construyan de forma colaborativa.

1.2 MODELOS PEDAGÓGICOS

Una de las funciones más importantes que desempeña el docente es definir cuáles son los fines que espera lograr con sus estudiantes. Para ello, el profesor tendrá que valerse de todo su ingenio con el propósito de hallar el mejor de los medios que le permita alcanzar cada uno de los objetivos definidos.

En lo que a los fines se refiere, toda propuesta de enseñanza-aprendizaje debe partir de objetivos bien definidos que determinen una dirección para su diseño, así como para su elaboración e implementación. Para ello, existen modelos pedagógicos que permiten definir de forma clara y específica cuáles son los objetivos propuestos para el diseño de una propuesta de enseñanza-aprendizaje. Ejemplos de estos son el *modelo de objetivos de aprendizaje* y el *modelo de competencias*, últimos que se tomaron como referencia para definir los objetivos de la propuesta de enseñanza aprendizaje aquí presentada.

Ahora bien, en lo que a los medios se refiere, las teorías de aprendizaje y del desarrollo cognitivo dieron paso a una diversidad de modelos pedagógicos de enseñanza-aprendizaje que guían el diseño de una secuencia didáctica que permita lograr los fines propuestos. Algunos de ellos son el modelo de *aula invertida* y el paradigma de la *educación matemática realista*, últimos que también se tomaron como referencia para el diseño e implementación de la propuesta.

A lo largo de la presente sección se introducirán y explicarán de forma breve cada uno de los modelos pedagógicos que sirvieron guiaron el diseño, elaboración e implementación de la propuesta.

1.2.1 La enseñanza basada en objetivos de aprendizaje.

Un problema que se presenta a menudo en las instituciones de educación media superior es que los docentes se dedican a cubrir el temario del curso con el único propósito de transmitir a sus alumnos la información referente a los contenidos del programa. En tal caso, se pierde de vista lo verdaderamente importante: ¿Cuáles son los aprendizajes que el alumno debe adquirir a lo largo del curso?

En relación con la cuestión anterior, Fallahi (2011) sugiere que los docentes no deberían preocuparse por cubrir la totalidad de los temas que integran un programa de estudio, de tal modo que les sea posible centrarse en aquellos temas que, a su juicio, sean relevantes para la formación de los estudiantes. Fallahi también destaca la importancia de diseñar actividades que fomenten una participación activa por parte de los estudiantes y para las cuales sea necesario aplicar los aprendizajes adquiridos sobre un contexto de la vida real, ya sea en el ámbito personal, en el social, o bien, en el profesional.

De ahí que, al principio del curso, y en particular, al principio de cada unidad temática, el docente debe darse a la tarea de definir cuáles son los objetivos de aprendizaje que espera lograr en sus alumnos, y los cuales serán el esqueleto del curso mismo. De acuerdo con Zarzar (2009) "De los objetivos planteados dependerá la estructuración del contenido, la organización del curso, el diseño de actividades de aprendizaje dentro y fuera del aula, así como los criterios y mecanismos de evaluación" (p. 17).

No existe un modelo único para definir los objetivos de enseñanza-aprendizaje que guiarán el diseño de un curso o unidad temática. Sin embargo, uno de los modelos más empleados por los docentes para dicho propósito es la *Taxonomía de Bloom*, a través de la cual es posible definir los objetivos de enseñanza-aprendizaje dentro de seis niveles que son:

1) *Conocimiento:* recuerdo de la información en su forma literal.
2) *Comprensión:* se refiere a la asimilación del contenido sustancial de la información; es decir, a la asimilación del significado de la información.
3) *Aplicación:* hacer uso de la información enseñada.
4) *Análisis:* descomposición de la información en las partes que lo constituyen, así como la revisión de dichas partes.

5) *Síntesis:* Integración de las partes que componen la información con el propósito de formar un todo.
6) *Evaluación:* emitir un juicio sobre la información adquirida.

Por su parte, Zarzar (2009) plantea que los objetivos de aprendizaje deben definirse con base en tres categorías generales, que son: la adquisición de información, el desarrollo de capacidades y el desarrollo de la subjetividad. A su vez, las anteriores abarcan distintos rubros los cuales se presentan de forma resumida en el siguiente cuadro:

ADQUISICIÓN DE LA INFORMACIÓN	*Conocer la información:* es el equivalente al primer nivel de la taxonomía de Bloom, en el que el alumno recuerda la información, aunque no exista una comprensión como tal de la misma.
	Comprender la información: es el equivalente al segundo nivel de la taxonomía de Bloom, en el cual el alumno es capaz no sólo de recordar la información, sino también de explicarla o parafrasearla (con sus propias palabras).
	Manejar la información: es el equivalente al tercer nivel de la taxonomía de Bloom, y se refiere a que el alumno sea capaz de emplear la información en diferentes contextos.
DESARROLLO DE CAPACIDADES	*Lenguajes:* se refiere al aprendizaje y constante desarrollo de los distintos tipos de lenguaje. Estos abarcan desde un idioma en su forma verbal y escrita hasta los lenguajes de programación, el lenguaje algebraico, el lenguaje de señas, entre otros.
	Habilidades de pensamiento: se refiere a aquellas capacidades de carácter intelectual. Entre ellas encontramos el análisis, la síntesis, que corresponden con el cuarto y quinto nivel (respectivamente) de la taxonomía de Bloom. Zarzar (2009) también incluye habilidades como son la inducción, la deducción y la abstracción. Aunque Zarzar no las menciona, aquí también se deben incluir la reflexión, la intuición y la argumentación (estas últimas serán explicadas más adelante en el presente trabajo).

DESARROLLO DE CAPACIDADES	*Destrezas físicas o motoras:* son aquellas capacidades del tipo motriz. Por ejemplo, a manejar un automóvil, tocar un instrumento o practicar un deporte exige el aprendizaje de cierto tipo de capacidades motrices.
	Métodos: de acuerdo con la Real Academia Española (RAE), un método es "un modo de decir o hacer con orden". Zarzar (2009) menciona los métodos de investigación, los procedimientos de trabajo y los métodos de estudio, entre otros. En matemáticas existen una diversidad de métodos de cálculo; sin embargo, a menudo se requiere proponer y evaluar nuevos métodos para situaciones específicas.
DESARROLLO DE LA SUBJETIVIDAD	*Hábitos:* la RAE define los hábitos como una conducta que se lleva a cabo de forma periódica y repetitiva. Zarzar (2009) menciona el hábito de estudio, de trabajo, los hábitos personales, entre otros.
	Actitudes: Zarzar (2009) define las actitudes como "… [la] predisposición aprendida a responder positiva o negativamente a cierto objeto, situación, institución o persona" (p. 24), y entre ellas considera la responsabilidad, el profesionalismo, el respeto hacia los demás y hacia uno mismo, entre otros.
	Valores: para Zarzar (2009) los valores son aquellas cualidades que contribuyen a la formación moral de los individuos. Entre ellos menciona la honestidad, la ética, la paz, la democracia, entre otros.

Con base en las tres categorías de la tabla anterior, Zarzar (2009) clasifica los objetivos de aprendizaje en dos tipos: *los objetivos informativos* (referentes a la adquisición de la información) y *los objetivos formativos* (referentes al desarrollo de capacidades y al desarrollo de la subjetividad). De acuerdo con este autor, los objetivos informativos están directamente relacionados con los contenidos temáticos que integran una materia y pueden ser concebidos como una meta que debe ser alcanzada al término del curso. Por su parte, los objetivos formativos van más allá de los contenidos de un curso, pues lo que plantean es contribuir al desarrollo de cualidades que difícilmente serán perfeccionadas a través de un único curso, ni a través de una sola materia o disciplina.

En lo que a la enseñanza de las matemáticas se refiere, es importante que el docente identifique cuáles son las habilidades y actitudes que un alumno debe desarrollar en relación con esta disciplina. En matemáticas es fundamental el desarrollo de capacidades como son la intuición, la argumentación, el pensamiento inductivo, el razonamiento lógico-deductivo, el pensamiento reflexivo, la aplicación de métodos para la solución de problemas, así como el diseño de métodos novedosos que cubran las deficiencias de los ya existentes. También es importante fomentar hábitos como son el de la lectura y la investigación, y actitudes tales como la curiosidad y la perseverancia; todas ellas de relevancia para el aprendizaje de la disciplina.

1.2.2 La enseñanza basada en competencias

Otro de los modelos que permiten fijar los fines de una propuesta de enseñanza-aprendizaje es el modelo basado en la adquisición de competencias. De acuerdo con Zarzar (2010), “una persona es competente cuando nos consta que es capaz de hacer algo bien hecho. Una competencia, por lo tanto, es la demostración de la capacidad para hacer algo bien hecho” (p. 1). De este modo, una competencia debe comprender los siguientes tres elementos:

a) Se trata de una capacidad que se demuestra.
b) Es una capacidad para hacer algo.
c) Ese algo debe estar bien hecho.

Bajo un enfoque de enseñanza de competencias, el docente debe darse a la tarea de identificar cuáles son las competencias que desea que sus alumnos adquieran a lo largo del ciclo escolar, y a partir de ahí diseñar la estructura del curso. De este modo, serán las competencias las que determinarán cuáles son los contenidos que deberán ser abordados a lo largo del ciclo escolar, y no al revés (Zarzar, 2010).

Para ello, Zarzar (2010) propone que los docentes deben responder las tres preguntas que les permitirán determinar cuáles son las competencias que espera los alumnos adquieran. Estas son las siguientes:

1) ¿Qué capacidad quiero que el alumno desarrolle?
2) ¿Qué debe aprender a hacer con esas capacidades?
3) ¿Cómo me va a demostrar que ya es capaz de hacer eso?

De este modo, la descripción de una competencia dentro de un plan de estudios deberá contener los siguientes elementos:

1) *El verbo activo:* se refiere a la acción que el alumno debe ser capaz de hacer una vez que ha adquirido la competencia.
2) *El objeto sobre el que recae la acción:* el docente debe determinar cuáles serán los productos o conductas observables que demostrarán si el alumno ha adquirido la competencia en cuestión.
3) *Elementos adicionales:* se refiere a condiciones específicas y adicionales que recaen sobre el verbo activo, o bien, sobre el producto (o conducta) esperado.

En adición, el docente debe darse a la tarea de identificar cuáles son los conocimientos, habilidades y actitudes que un alumno debe adquirir para desarrollar la competencia propuesta. En este caso, los objetivos de enseñanza-aprendizaje vistos en la sección anterior pasan a definirse como los *requisitos cognitivos* (adquisición, comprensión y aplicación de la información), *procedimentales* (desarrollo de lenguajes, habilidades, destrezas y métodos) y *actitudinales* (hábitos, actitudes y valores) que forman parte integral de una competencia (Zarzar 2010).

Para el diseño de la propuesta de enseñanza-aprendizaje aquí presentada se tomó como base el modelo de competencias. La razón de esto es que la propuesta no se limita a que los alumnos conozcan y comprendan el principio fundamental del conteo. Por el contrario, se definió como propósito que los estudiantes sean capaces de aplicar dicho principio en la resolución de problemas contextualizados de conteo; es decir, en problemas donde los alumnos tengan que realizar el conteo de un conjunto numeroso de formas o posibilidades sobre situaciones que sean familiares a su entorno personal y social.

1.2.3 El modelo de aula invertida

El modelo de aula invertida (o *flipped classroom* por su nombre en inglés) es un modelo de enseñanza-aprendizaje que se caracteriza por invertir las actividades que los estudiantes desempeñan dentro y fuera del aula con respecto al modelo tradicional. Para describir mejor el modelo, conviene hacer una breve narración de su historia.

El origen del modelo es atribuido a Eric Mazur, un profesor de física de la Universidad de Harvard quien, a principios de los 90's, propuso e implementó este modelo bajo el nombre de *instrucción entre pares* (*peer instruction* en inglés). En su obra, Mazur (1997) relata dos sucesos que fueron decisivos para la propuesta e implementación del modelo. Primero, Mazur observó que sus estudiantes se dejaban llevar por intuiciones falsas adquiridas a través de la experiencia, aun cuando estas se contradecían con los hechos científicos abordados en clase. Sobre el segundo suceso, Mazur relata que al principio del semestre solía entregar a sus estudiantes un compendio de sus notas de clase; esto para ahorrarles el trabajo de escribir sus propias notas, y con el propósito de que prestaran mayor atención a la clase. Sin embargo, algunos de sus estudiantes le reclamaron porque su clase se limitaba a reproducir las notas que él mismo había entregado con anterioridad.

Frente a los hechos anteriores, Mazur reflexionó y puso en marcha un modelo que consiste en solicitar a sus estudiantes leer las notas de clase (o en su defecto el libro de texto) como una actividad extra-clase previa a la sesión, de tal modo que las sesiones fueran utilizadas para implementar actividades que requieran de una mayor participación por parte de los estudiantes. Dichas actividades estarían enfocadas a profundizar los temas y discutir sobre aquellas cuestiones que van en contra de la intuición general de los estudiantes:

> El objetivo principal de la *Instrucción en Pares* es aprovechar la capacidad de interacción de los estudiantes durante las sesiones y enfocar su atención en subrayar los conceptos. En lugar de presentar el nivel de detalle cubierto por el libro de texto o las notas de clase [del profesor], las sesiones consisten en presentaciones cortas de puntos clave, cada una seguida de un *cuestionario de conceptos* – preguntas conceptuales cortas sobre el tema a discutir. Primero se les da tiempo a los estudiantes para formular respuestas y después se les solicita discutir dichas respuestas con sus demás compañeros. Este proceso (*a*) obliga a los estudiantes a pensar bien los argumentos desarrollados, y (*b*) les proporciona (así como al docente) un camino para evaluar su nivel de comprensión sobre el concepto. (Mazur, 1997, p. 10, trad.)

Años más tarde, a finales de los 90's, un grupo de profesores de economía de la Universidad de Miami aplicaron el modelo (Lage, Platt y Treglia, 2000) bajo el nombre de *invertir el aula* (*inverting the classroom* en inglés); aunque con una metodología y recursos diferentes de los utilizados por Mazur. Para ello, los profesores se valieron de herramientas digitales; específicamente, presentaciones en PowerPoint con sonido, así como hojas de trabajo y videograbaciones donde se desarrolla el tema a trabajar.

Por otra parte, Baker (2000) presentó el modelo bajo el nombre de *la vuelta del aula* (*the classroom flip* en inglés), y para ello utilizó programas en la web diseñados específicamente para realizar cursos en línea. Baker vio en dichos programas un medio a través del cual los estudiantes podían tener acceso a textos digitalizados que debían leer como una actividad previa a la clase.

Para garantizar que los estudiantes llevaran a cabo la lectura de los textos correspondientes, Baker considera importante la implementación de cuestionarios, los cuales deberán ser resueltos por los estudiantes como una actividad complementaria. Por su parte, el tiempo de las sesiones es destinado para: 1) aclarar cualquier duda que los estudiantes puedan plantear, 2) expandir el conocimiento a través de un ambiente de diálogo favorezca la oportunidad de compartir alguna experiencia personal o algún conocimiento que guarde relación con el tema en cuestión, 3) aplicar el conocimiento adquirido en diversas situaciones, y 4) practicar lo aprendido a través del trabajo colaborativo y del pensamiento creativo.

Más tarde, en el año 2006, los profesores de química Jonathan Bergmann y Aron Sams de la Woodland Park High School propusieron una solución ante la problemática de que sus estudiantes tenían dificultades para asistir a clase por causa de las actividades extracurriculares. Ellos se enteraron de la existencia de un programa que permitía anexar grabaciones de voz a las presentaciones de PowerPoint y convertir ambas cosas en un archivo de video único que podía ser distribuido vía internet. Así, en el año 2007, comenzaron a editar una serie de videos con el propósito inicial de que aquellos estudiantes que no podían asistir a alguna de las sesiones tuvieran acceso a los contenidos trabajados durante la clase.

Sin embargo, Bergmann y Sams no tardaron en darse cuenta de que los estudiantes no tenían dificultades para adquirir la información que se les presentaba en las grabaciones. Por el contrario, las dificultades surgían al momento de asimilar y aplicar los conocimientos que estas desarrollan. De este modo, ambos profesores acordaron invertir las actividades que normalmente se realizaban dentro y fuera del horario de clase; de tal modo que ahora los estudiantes revisarían la información presentada en las videograbaciones como una actividad extra-clase, mientras que el tiempo en el aula sería utilizado para aclarar dudas y realizar otras actividades que exigen una mayor actividad por parte de los estudiantes.

De acuerdo con Bergmann y Sams (2012), sus videos se volvieron populares entre estudiantes y profesores de todo el mundo, y su obra contribuyó a la popularización del modelo. Casi al mismo tiempo, el modelo de aula invertida también fue popularizado por Salman Khan, fundador de la hoy conocida Khan Academy; una plataforma a través de la cual los estudiantes y profesores tienen acceso a una diversidad de videos y contenidos en línea donde se introducen temas sobre matemáticas y otras disciplinas. Su trabajo fue dado a conocer en su charla de las conferencias TED 2011, con lo que contribuyó a la popularización del modelo.

Como se infiere de la historia del modelo de aula invertida, lo que este propone es invertir las actividades que los estudiantes realizan dentro y fuera del aula con respecto al modelo tradicional. Bajo el modelo tradicional, el tiempo de clase es destinado para que los profesores den una charla o conferencia de los contenidos a trabajar, de tal modo que los estudiantes se limitan a recibir pasivamente la información transmitida por los profesores. Luego, los profesores dejan actividades que los estudiantes deberán trabajar fuera de clase para asimilar, aplicar y profundizar los temas vistos en clase. Por su parte, lo que hace el modelo de aula invertida es invertir el momento y el lugar en el que se llevan a cabo dichas actividades.

Bajo este último modelo, el profesor ahora debe proporcionar a los estudiantes el material necesario (documentos, videos, grabaciones, etc.) que les permita adquirir la información básica respecto al tema que se pretende desarrollar; para ello se les encomienda revisar el material como una actividad extra-clase previa a la sesión de trabajo. Ya en clase, la tarea del profesor es retroalimentar a los estudiantes y, más importante aún, proponer y mediar actividades que requieran de una participación activa por parte de los mismos. Esto último favorece el trabajar niveles más altos de la taxonomía de Bloom, tales como son la aplicación del conocimiento, el análisis, la síntesis y la evaluación (Jordán, Pérez y Sanabria, 2014).

Es importante hacer la aclaración de que, aunque el modelo de aula invertida se ha popularizado bajo la idea de usar materiales del tipo audiovisual, el modelo no se restringe al uso de este tipo de materiales como medio único para la adquisición de información por parte de los estudiantes. Un profesor que desee implementar el modelo puede apoyarse de las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC), pero no es un elemento necesario, ni tampoco es lo que define al modelo. El modelo de aula invertida no se define por los materiales y herramientas que con él se implementa, sino por la acción de invertir las actividades que los estudiantes realizan dentro y fuera del aula; de tal modo que ahora adquieren la información fuera del horario de clase, mientras que en las sesiones se implementan actividades que favorecen su participación activa. Sobre este punto, Correa (2015) señala que:

> Como podemos ver, invertir el aula no se trata de la tecnología, sino de la pedagogía. Es innegable que la tecnología puede mejorar la forma de invertir el aula de la misma forma en

> que puede mejorar la forma de explicar un tema. El punto de ambos, de este paradigma y de la pedagogía crítica, es expandir los objetivos de aprendizaje a través de transferir la responsabilidad del aprendizaje al estudiante. Ahora, es el estudiante quien, después de asimilar la información desde su casa, debe presentarse a clase y poner en práctica el conocimiento adquirido (p. 120, trad.).

Aquí conviene mencionar que, para la implementación de la presente propuesta de enseñanza-aprendizaje, se optó por elaborar un material de lectura en lugar de realizar la grabación de una videoconferencia. El material está compuesto por dos textos (anexos A y B) que fueron diseñados de tal modo que su lectura permita a los estudiantes retomar sus conocimientos previos, profundizar en ellos, y enlazarlos con el tema de la propuesta.

Hay cuatro razones por las cuales se optó por la elaboración de un material de lectura en lugar de la edición de una videoconferencia (o de utilizar videos realizados por terceros); razones que van más allá de las dificultades y los recursos que suponen la edición de material audiovisual. Las razones son las siguientes:

a) La elaboración de un material propio permite dar un enfoque personalizado de acuerdo con los objetivos de la propuesta; por dar un ejemplo, el texto del anexo B no se limitó a sólo introducir el *principio fundamental del conteo* y sus fundamentos, sino que también se ejemplificaron y explicaron algunos casos en los que no es posible aplicar el principio para realizar el conteo de un conjunto de elementos.
b) Presentar la información a través de un texto permite a los estudiantes hacer pausas en aquellos fragmentos que le exigen un mayor grado de reflexión y comprensión, de tal modo que cada estudiante puede leer el texto a su propio ritmo.
c) Los estudiantes pueden utilizar estrategias (tales como el subrayado) que les permitan identificar las ideas principales y los conceptos importantes; por lo que será más fácil identificar y recapitular una idea en caso de tener que consultarla más adelante.
d) No se puede negar que la prensa escrita sigue y seguirá teniendo un papel crucial en la difusión de la información (ya sea a través de medios impresos o digitales); razón por la que es crucial fomentar el hábito de la lectura en los estudiantes.

1.2.4 El paradigma de la cognición situada

Un punto importante que los docentes deben tener en cuenta en su día a día, es que los alumnos adquieren aprendizajes más allá del aula. Aprenden cuando visitan un museo, cuando leen un artículo periodístico, cuando ven un documental en la TV y cuando interaccionan con otras personas (familia y amigos principalmente). Por esta razón, han surgido modelos pedagógicos los cuales plantean la necesidad de guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje a partir del contexto social y cultural en el cual se desarrollan los alumnos. Uno de estos modelos pedagógicos es el paradigma de la *cognición situada*. De acuerdo con Díaz Barriga (2013):

> Los teóricos de la cognición situada… cuestionan la forma en que se enseñan aprendizajes declarativos abstractos y descontextualizados, conocimientos inertes, poco útiles y escasamente motivantes, de relevancia social limitada… donde el conocimiento se trata como si fuera neutral, ajeno, autosuficiente e independiente de las situaciones de la vida real o de las prácticas sociales de la cultura a la que se pertenece (p. 3).

El paradigma de la cognición situada plantea la necesidad de orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje de tal modo que los estudiantes se desarrollen tanto en un contexto individual como también en el social. Bajo este paradigma, se espera que los alumnos adquieran conocimientos que les resulten útiles para su vida personal y la social. De este modo, los docentes deben darse a la tarea de diseñar actividades que sean ricas en contexto personal, social y cultural para guiar el aprendizaje de sus estudiantes.

En lo que se refiere al campo de las matemáticas, el paradigma de la cognición situada está implícito en otro paradigma denominado como *educación matemática realista*, y el cual es atribuido a los trabajos realizados en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática bajo la dirección de Hans Freudenthal (Goffree, 2000). Dicho paradigma se fundamenta bajo la premisa de que la educación matemática debe partir de aquellos conocimientos que los alumnos han adquirido en su día a día, y no necesariamente dentro del contexto escolar.

De lo anterior surge la necesidad de hacer de las matemáticas algo *concreto*, para lo cual Goffree (2000) señala que:

> La palabra concreto a menudo se interpreta en el sentido de manipulativo, algo que, incluso para los niños más pequeños, es sólo parte de la verdad. Concreto no significa únicamente materializable, sino también algo que puedan imaginar fácilmente, por ejemplo, un viaje en autobús (p. 155).

El paradigma de la educación matemática realista da importancia al contexto en el cual se desenvuelven los alumnos, y que deberá ser tomado en cuenta como un punto de partida para abordar los temas a cubrir. De este modo, el docente debe darse a la tarea de conectar los contenidos matemáticos con las situaciones que los alumnos viven en su día a día, incluyendo aquellas experiencias que han adquirido fuera del contexto escolar.

En adición, Goffree (2000) menciona la existencia de cinco principios de enseñanza y cinco principios de aprendizaje, los cuales sirven como esqueleto de una educación matemática realista. Estos principios son los siguientes:

Principios de aprendizaje de una educación matemática realista	**Principios de enseñanza de una educación matemática realista**
Construcción: el estudiante no absorbe el conocimiento matemático, sino que lo construye.	*Bases concretas para la orientación:* el docente debe hacer de las matemáticas algo concreto; es decir, partir del contexto del alumno para abordar los contenidos de matemáticas.
Subiendo el nivel: el proceso de aprendizaje de las matemáticas se da en diferentes niveles, que van desde las primeras nociones (intuitivas) del niño, hasta las matemáticas formales de los profesionistas.	*Modelos:* proporcionar a los alumnos modelos de pensamiento a partir de alguna situación concreta, de tal modo que puedan analizarla y aplicarla a otro tipo de situaciones.
La reflexión: la RAE define el verbo reflexionar como: pensar atenta y detenidamente sobre algo. La reflexión es el proceso a través del cual un individuo asimila y se apodera del nuevo conocimiento.	*Momentos de reflexión:* el docente debe fomentar la reflexión en sus alumnos sobre los conceptos y métodos matemáticos abordados, así como sobre sus aplicaciones.
El contexto social: las personas también aprenden de forma colaborativa. Los estudiantes deben intercambiar ideas con otros estudiantes, establecer acuerdos y enfrentarse a posturas que difieren de las personales.	*Lecciones de matemáticas interactivas:* el profesor debe fomentar la interacción social entre sus estudiantes, y encaminarla hacia un aprendizaje colaborativo del nuevo conocimiento matemático.

Estructuración: este principio hace referencia a la teoría piagetiana. El nuevo conocimiento es asimilado, o bien, requiere de una acomodación del conocimiento matemático previo que dé lugar a la asimilación del nuevo conocimiento. De este modo, el conocimiento matemático se concibe como una estructura integrada de conocimientos relacionados entre sí, y también relacionados con otros conocimientos del mundo real.	*Entretejer los hilos del aprendizaje:* para hacer de las matemáticas algo concreto, el docente debe darse a la tarea de relacionar el nuevo conocimiento matemático con situaciones de la vida real, o bien, de otras áreas del conocimiento (matematización horizontal). Por otra parte, el nuevo conocimiento matemático también debe relacionarse con el conocimiento matemático previo, dando un sentido lógico a los contenidos de la materia (matematización vertical).

Es conveniente que los docentes en matemáticas tengan presentes los cinco principios de enseñanza-aprendizaje antes mencionados al momento de diseñar la secuencia didáctica de los temas a impartir. En particular, cabe resaltar la importancia de la reflexión en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues es a través de la reflexión que los alumnos se plantean preguntas sobre el nuevo conocimiento, acto que los lleva a desarrollar un mayor grado de profundidad sobre tales conocimientos.

Por su parte, Bishop (2000) menciona la existencia de dos constructos que son de relevancia para la educación matemática; estos son *la etnomatemática* y *la alfabetización numérica*. De acuerdo con este autor, la etnomatemática "se refiere tanto al estudio de las relaciones entre las matemáticas y la cultura como a las prácticas matemáticas concretas que se llevan a cabo dentro de las comunidades donde se halla ubicada la escuela" (p. 40).

Por su parte, la alfabetización numérica se define como "…[el] conocimiento de las matemáticas necesarias para vivir en sociedad como individuo plenamente funcional" (Bishop, 2000, p. 40). La etnomatemática, al igual que la alfabetización numérica, plantean la importancia de que los investigadores en matemática educativa, así como los docentes, se den a la tarea de conocer cuáles son las practicas matemáticas que desempeñan las personas dentro de su comunidad (en el ámbito personal, familiar, social y profesional), esto con el propósito de encaminar la enseñanza de las matemáticas en una dirección que permita formar estudiantes con conocimientos matemáticos de relevancia para la vida.

Kline (1990), quien hace una fuerte crítica a lo que él llama la enseñanza moderna de las matemáticas, destaca la importancia de que las matemáticas deben ser enseñadas sobre un contexto en el cual se muestre su utilidad y aplicabilidad en el mundo real:

> Naturalmente, la matemática no es un campo aislado y autosuficiente de conocimientos. Existe sobre todo para ayudar al hombre a comprender y dominar el mundo físico y también, en alguna medida, los mundos económico y social. La matemática está al servicio de determinados fines y propósitos. Si no fuese así, no habría lugar para ella en los programas de enseñanza. Si las matemáticas son objeto de gran demanda y se les concede tanta importancia, la razón es que son un instrumento de gran ayuda (p. 92).

Por su parte, Bishop (2000) define seis categorías de prácticas matemáticas que, él considera, están presentes en todas las culturas del mundo, razón por la que deben ser concebidas como una parte integral de la alfabetización numérica. Estas categorías son *contar*, *localizar*, *medir*, *diseñar*, *jugar* y *explicar*, las cuales también pueden considerarse como habilidades matemáticas que los individuos deben desarrollar como parte de su formación. En el siguiente cuadro se explica de forma resumida cada una de las categorías antes mencionadas.

CONTAR	Es una de las actividades más comunes que llevan a cabo las personas en su día a día. Desde cosas tan básicas como contar el dinero o los días del año, hasta otras más sofisticadas como elaborar estadísticas en relación con diversos temas de alta relevancia social. Por tanto, contar no se limita al caso de cantidades pequeñas, sino que también se incluye el conteo de cantidades grandes.
LOCALIZAR	Está relacionado con el estudio del plano y del espacio euclidiano. Su relevancia social se ve reflejada en actividades a diferentes escalas; como construir una casa con una orientación adecuada para aprovechar la luz natural, elaborar un proyecto para conectar dos ciudades mediante una carretera o, incluso, poner en órbita un satélite alrededor de la Tierra.
MEDIR	Al igual que contar, medir es una de las actividades más comunes que el ser humano lleva a cabo en su día a día. Hoy en día existe la necesidad de medir casi todo: se mide la distancia, la temperatura, la fuerza, el volumen de un líquido, la masa de una sustancia, etc. Medir no se limita al caso de magnitudes físicas, sino también de cualidades abstractas (como es el caso de usar un instrumento para calificar el desempeño de un alumno durante un ciclo escolar).

DISEÑAR	El hombre se enfrenta a la necesidad de diseñar objetos para llevar a cabo diferentes fines. Al igual que los puntos anteriores, esto puede darse a diferentes escalas; desde el diseño de un instrumento de tamaño menor (una calculadora, una prenda de vestir, etc.), hasta objetos de gran tamaño (como una casa o un satélite). Diseñar tampoco se limita a objetos que ocupen un espacio físico, también se incluye el diseñar un programa de computadora o, incluso, la planeación de una clase o actividad.
JUGAR	Los juegos también son parte de la vida cotidiana de las personas, y es bien sabido que una cantidad considerable de ellos guardan una estrecha relación con las matemáticas, desde los juegos de mesa (como el ajedrez, las damas chinas, juegos de cartas, etc.), hasta los deportes populares (como el futbol, el básquetbol y el beisbol). Incluso es posible encontrar juegos de video con contenido matemático implícito.
EXPLICAR	El hombre, desde la antigüedad, ha buscado explicaciones a los distintos fenómenos físicos, así como también a los sociales. La relevancia social de esta categoría es evidente; en el día a día las personas se encuentran con artículos de ciencia, cultura, política y muchos otros temas en los que los autores hacen un esfuerzo para explicar un fenómeno o situación importante. Explicar implica poner en práctica los conocimientos adquiridos, así como las habilidades y actitudes desarrolladas. Demanda expresar las ideas de forma clara y con coherencia lógica entre ellas.

CAPÍTULO 2:

ANTECEDENTES SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CONTEO

En México, las *técnicas de conteo* no forman parte del currículo obligatorio de los sistemas de educación media superior. Por lo general, dichas técnicas son introducidas en cursos más especializados que se imparten en el último año de educación media superior y los cuales son de carácter optativo. Al hablar de técnicas de conteo, podemos entender el término 'técnica' como lo define la RAE: "Conjunto de procedimientos o recursos de que se sirve una ciencia o un arte". De este modo, las técnicas de conteo son el conjunto de métodos con los que se lleva a cabo la acción de contar y son empleados para resolver *problemas de conteo*; es decir, problemas o situaciones en las que se debe calcular del número de objetos que conforman un conjunto (real o ficticio), o bien, el número de formas posibles como podría llegar a ocurrir un fenómeno. La rama de las matemáticas que estudia las técnicas de conteo recibe el nombre de *Análisis Combinatorio*.

Recordemos que el término 'análisis', de acuerdo con la Taxonomía de Bloom, se refiere a la descomposición de la información en sus partes que la constituyen. En efecto, resolver problemas de conteo exige analizar el problema a resolver, estudiar cuáles son las partes que lo componen y, posteriormente, proponer y fundamentar un método que permita llegar a su solución. Para esto, una vez que se ha validado un método de solución a un problema de conteo determinado, dicho método puede llegar a convertirse en un modelo que permita resolver problemas de conteo más generales, enriqueciendo a su vez la caja de herramientas que conforma al Análisis Combinatorio.

En este capítulo se revisarán tres aspectos sobre la enseñanza del conteo que son de relevancia para el presente trabajo. Se comenzará por analizar los planes de estudio de aquellas materias de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP), así como del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), ambas instituciones de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), dentro de las cuales se da un lugar a la enseñanza del Análisis Combinatorio.

Un segundo punto por revisar en este capítulo son algunas de las investigaciones que se han llevado a cabo en torno a la enseñanza-aprendizaje del Análisis Combinatorio, que van desde las investigaciones realizadas por Piaget e Inhelder, pasando por las investigaciones de Fischbein y, finalmente, llegando a las investigaciones de Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996), así como las de Roa, Batanero y Godino (2003).

2.1 LA ENSEÑANZA DEL CONTEO EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Las técnicas de conteo, en el sistema educativo mexicano, no es un tema que forme parte del currículo obligatorio que deben cursar los estudiantes de educación media superior. Sin embargo, dichas técnicas sí son introducidas en algunas de las materias optativas que los alumnos pueden cursar durante el último año de este nivel educativo.

Para el caso de la ENP, las técnicas de conteo forman parte de los programas de estudios de la materia Estadística y Probabilidad, así como también de la materia Temas Selectos de Matemáticas, ambas correspondientes al 6º grado de dicha institución, equivalente al tercer año de bachillerato. Conviene mencionar que, mientras que la primera corresponde a una materia optativa para cualquiera de las cuatro áreas del conocimiento, la segunda es una materia optativa exclusiva del área de las Ciencias Físico-Matemáticas, también llamada Área I. Por su parte, las técnicas de conteo también forman parte de los programas de estudios de las materias Estadística y Probabilidad I y II que se imparten en el CCH.

Para el caso de la ENP, los programas de estudio de las dos materias antes mencionadas comprenden esencialmente cuatro temas del conteo que son: 1) El Principio Fundamental del Conteo, 2) Ordenaciones con repetición, 3) Ordenaciones sin repetición y 4) Combinaciones sin repetición. En general, los temas anteriores comprenden el estudio de distintos tipos de arreglos ordenados (ordenaciones) y un tipo de arreglos no ordenados (combinaciones). Para el caso de los cursos de Estadística y Probabilidad I y II del CCH, el programa de estudios también comprende al Análisis Combinatorio, pero no menciona de forma explícita cuáles son los temas de conteo que se debe cubrir en dichos cursos.

2.1.1 Los contenidos que integran la enseñanza del conteo

En esta subsección hablaremos, de forma resumida, sobre los contenidos del conteo que forman parte de los programas de estudios de las materias de Temas Selectos de Matemáticas y Estadística y Probabilidad de la ENP, así como de las materias Estadística y Probabilidad I y II del CCH.

Como se mencionó con anterioridad, en el Análisis Combinatorio se estudian técnicas para contar los arreglos ordenados y los no ordenados. Un ejemplo de arreglo ordenado son las palabras que escribimos; por ejemplo, palabras como ‘amor’, ‘mora’ y ‘ramo’ son arreglos ordenados, distintos entre sí, formados con las mismas cuatro letras.

En el contexto del leguaje escrito, se puede pensar en el conjunto de todas las palabras de 4 letras que pueden escribirse usando libremente las 27 letras del alfabeto (sea que tengan un significado o no), y a dicho conjunto se le denomina *las ordenaciones con repetición de 27 tomadas de 4 en 4*. En el caso anterior, el término ‘con repetición’ hace alusión al hecho de que se permite la repetición de cada tipo de letra dentro de su composición, tal y como ocurre con las palabras ‘casa’, ‘solo’, ‘rama’, entre otras.

Por otra parte, también se puede pensar en el conjunto de palabras de 4 letras que pueden ser escritas con las 27 letras del alfabeto, pero esta vez bajo la restricción de que no se permite repetir letras dentro de la composición de una misma palabra. En este caso, el conjunto recibe el nombre de *las ordenaciones sin repetición de 27 tomadas de 4 en 4*. Aquí, el término ‘sin repetición’ hace alusión al hecho de que no se permite repetir letras dentro de una misma palabra.

Los arreglos ordenados no se limitan al contexto de las palabras escritas. En una carrera de autos, por ejemplo, la tabla de posiciones de los competidores es un ejemplo de una ordenación sin repetición, pues cada competidor ocupa un lugar único en la tabla dependiendo de su posición en la competencia. Más aún, dicha tabla se va modificando durante el transcurso de la competencia, mostrando distintos tipos de arreglos ordenados.

Por otra parte, el marcador de un partido de Futbol es un ejemplo de ordenaciones con repetición, pues en la primera posición del marcador se muestra el número de goles anotados por el equipo anfitrión, mientras que en la segunda posición se muestra el número de goles del equipo visitante. Dado que es posible el empate, es válido la repetición de números en el marcador, tal como es el caso del marcador 3-3 que corresponde a un empate de 3 goles por cada equipo.

Finalmente, para hablar de los arreglos no ordenados, conviene pensar en el juego tradicional de la lotería mexicana. En este juego se tienen 54 tarjetas con diferentes ilustraciones (el número puede variar) y a cada jugador se le entrega un tablero que contiene 16 imágenes de entre las que aparecen en las tarjetas. En dichos tableros, no importa el orden en que están acomodadas las imágenes, pero todos los tableros deben ser diferentes en el conjunto de ilustraciones que contienen; es decir, no debe haber dos o más tableros que contengan exactamente las mismas ilustraciones, aunque sí pueden tener ilustraciones en común. Al conjunto de posibilidades para formar un tablero de juego de la lotería mexicana se le denomina *las combinaciones de 54 tomadas de 16 en 16*; donde cada tablero se concibe como un arreglo no ordenado (o combinación) de 16 imágenes diferentes entre sí, tomadas de las 57 ilustraciones disponibles (pues el orden en que las imágenes son colocadas en el tablero no tienen relevancia alguna para el juego).

Los arreglos no ordenados también están presentes en otras situaciones de la vida cotidiana. Por ejemplo, al comprar una ensalada para la cual se da a elegir entre cierto número de ingredientes disponibles, o bien, al comprar un paquete de comida china para el cual se da a elegir tres guisados de entre los que se encuentran en una barra del menú. Para los dos casos anteriores, se trata de arreglos no ordenados porque no importa el orden para solicitar los ingredientes de la ensalada, como tampoco importa el orden para la elección de los tres guisados que se elegirán en el paquete de comida china (en estos casos el orden no altera el producto final).

En términos estrictamente formales, dado un repertorio de *n* objetos distintos entre sí (donde '*n*' denota un número natural), las ordenaciones con repetición de *n* objetos tomados de *m* en *m* (donde '*m'* también es un número natural) se refiere a la totalidad de arreglos posibles que resultan de extraer, y luego acomodar en una línea recta hipotética, a un total de *m* objetos de entre los *n* que conforman el repertorio, y para lo cual se permite la extracción de elementos repetidos. Al número total de arreglos posibles se le denota por OR_m^n.

Para el caso de las ordenaciones sin repetición, el número *m* de objetos a extraer debe ser menor que el número *n* de objetos que conforman el repertorio, pues es una condición necesaria para que no haya elementos repetidos. En este caso, O_m^n denotará el número ordenaciones sin repetición de *n* objetos tomados de *m* en *m*; es decir, el número total de formas como podrían extraerse, y luego acomodarse en una línea recta hipotética, *m* objetos diferentes entre sí de entre los *n* que conforman el repertorio.

Por último, se denota por C_m^n al número de combinaciones de *n* objetos tomados de *m* en *m*; es decir, el número de posibilidades como podrían ser extraídos un total de *m* objetos de entre los *n* que conforman el repertorio, esto último sin permitir la repetición de elementos y sin que importe el orden de extracción de los mismos. En este caso, el número *m* también debe ser menor a *n*.

De este modo, OR_m^n, O_m^n y C_m^n representan variables dependientes que están determinadas por los valores que se les asigne a las variables independientes *n* y *m*. Existen fórmulas matemáticas que permiten calcular cada uno de los valores antes mencionados en términos de *n* y *m*, y las cuales son presentadas en la siguiente tabla:

Número de ordenaciones con repetición de *n* objetos tomados de *m* en *m*	**Número de ordenaciones sin repetición de *n* objetos tomados de *m* en *m***	**Número de combinaciones de *n* objetos tomados de *m* en *m***
$OR_m^n = n^m$	$O_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$ Donde $n!$ es el producto de los primeros *n* números naturales: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$	$C_m^n = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$

En la vida real existe una diversidad de fenómenos que pueden ser estudiados a través de los conceptos y de las fórmulas anteriores. Por ejemplo, la contraseña que introduce un usuario para acceder a su correo electrónico es una ordenación con repetición (suponiendo que el sistema permita la repetición de caracteres). En este caso, calcular el número de contraseñas posibles es un factor importante para evaluar el nivel de seguridad del sistema.

Por otro lado, las combinaciones sirven como fundamento para definir a la distribución binomial, la cual permite calcular la probabilidad de que, en dos o más fenómenos aleatorios idénticos e independientes entre sí, se obtenga el mismo resultado un número determinado de veces (este tema está relacionado con el análisis de riesgos).

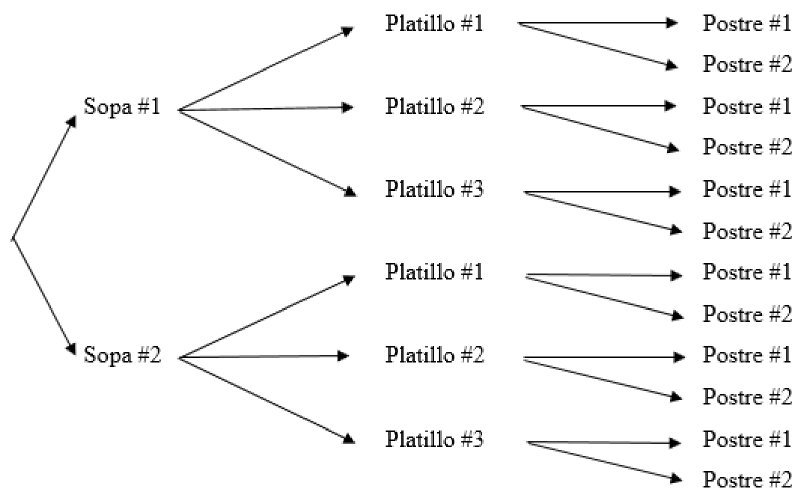
Las primeras dos fórmulas presentadas en el cuadro anterior son una implicación directa de un resultado matemático conocido como *El Principio Fundamental del Conteo*, el cual puede enunciarse de la siguiente forma: supongamos que se presenta una secuencia de *m* eventos (o fenómenos) tales que el primero de ellos puede ocurrir de n_1 formas posibles, el segundo de n_2 formas posibles, y así sucesivamente hasta el evento *m* que puede ocurrir de n_m formas posibles, entonces los resultados de los eventos, en secuencia, pueden suceder de $n_1 \times n_2 \times ... \times n_m$ formas posibles.

Para ilustrar lo que dice el Principio Fundamental del Conteo se puede plantear la siguiente situación: el menú de un restaurante permite elegir entre 2 opciones de sopa, 5 opciones de platillo fuerte y 3 opciones de postre, además que ofrecen una jarra de agua con 2 opciones de sabor: ¿De cuántas formas puede armarse el menú? En este problema, cada elección se asocia con un evento, y la respuesta está dada por el resultado de la operación: 2×5×3×2=60; es decir, hay un total de 60 posibilidades para armar el menú.

Las fórmulas para calcular el número de ordenaciones con y sin repetición son casos específicos de aplicación del Principio Fundamental del Conteo. Por su parte, la fórmula para calcular el número de combinaciones no puede obtenerse de forma directa a partir de dicho principio; sin embargo, este último sí cumple un papel importante para su deducción.

El Principio Fundamental del Conteo tiene su fundamento en una de las herramientas más intuitivas del conteo: los *diagramas de árbol*. De forma general, un diagrama de árbol es un dibujo que consiste en trazar, a partir de un punto inicial, un número de ramificaciones igual al número de posibilidades como podría suceder el primer evento (cada posibilidad está representada por una y sólo una de las ramas). Después, para cada una de las ramas anteriores, se prolongan nuevas ramas igual al número de posibilidades como puede suceder el segundo evento. Se continúa con este proceso hasta concluir la totalidad de los eventos. Al completar el diagrama, el número de ramas finales equivale al número total de formas como podrían suceder los eventos en secuencia.

Para mostrar cómo se ve un diagrama de árbol, conviene replantear el ejemplo del restaurante de la siguiente forma: ahora para armar el menú hay dos opciones de sopa, tres opciones para el platillo fuerte y dos opciones de postre. En este caso, el diagrama de árbol es el siguiente:



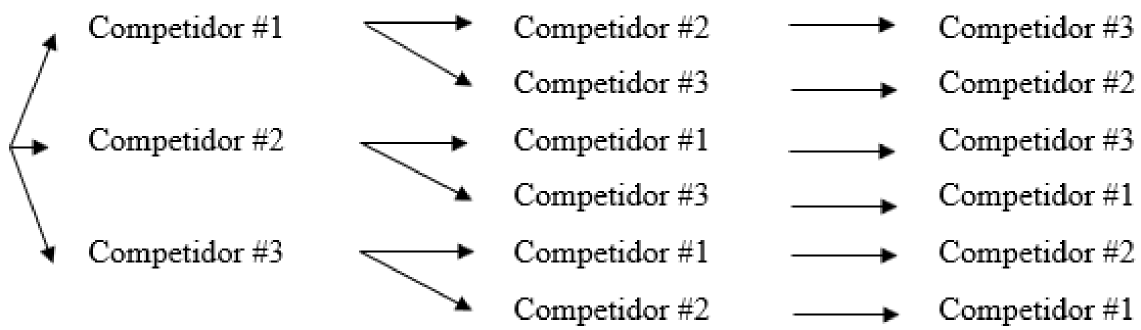
El diagrama de árbol comienza con 2 ramas (opciones de sopa), y de cada una de ellas se desprenden 3 ramas (opciones de platillo). Por último, se desprenden 2 ramas nuevas por cada una de las anteriores (opciones de postre), concluyendo que hay 12 ramas finales, y cada una de ellas representa una forma única de armar el menú. Así, por ejemplo, la sexta rama final (contando de arriba hacia abajo) representa pedir la sopa #1, con el platillo #3 y el postre #2.

Los diagramas de árbol permiten visualiza todos los resultados posibles de una secuencia de eventos o fenómenos. Sin embargo, no son una herramienta práctica para aquellos casos que resulten en un número grande de posibilidades. Pese a esta dificultad, los diagramas de árbol son el pilar sobre el que se sostiene el Principio Fundamental del Conteo. Por ejemplo, en el diagrama anterior, del primer evento se desprenden 2 ramas iniciales, y luego por cada una de estas ramas se desprenden 3 ramas nuevas, teniendo hasta aquí un total de $3 \times 2 = 6$ ramas. Por último, por cada una de las 6 ramas anteriores se desprenden 2 ramas nuevas, teniendo una totalidad de $6 \times 2 = 12$ ramas finales. Por esta razón, el número de ramas finales está determinado por la operación $2 \times 3 \times 2 = 12$.

Ahora bien, existen algunas condiciones que deben cumplirse para poder aplicar el Principio Fundamental del Conteo. La primera de ellas es que los eventos deben estar bien definidos y ser distinguibles entre sí. Sería un error, por ejemplo, utilizar el Principio Fundamental del Conteo para calcular el número de fichas que hay en un juego tradicional de dominó. Alguien podría intuir, de forma errónea, que un primer evento consiste en asignar un valor numérico (del 0 al 6) al lado izquierdo de una ficha de domino y, en un segundo evento, asignar el valor al lado derecho de la ficha, de lo que se obtiene un total de $7 \times 7 = 49$ fichas. Sin embargo, el juego tradicional de dominó está conformado por un total de 28 fichas. El error se debe a que las fichas de dominó no poseen un lado izquierdo ni tampoco un lado derecho. Así, por ejemplo, los valores 1-6 y 6-1 representan a la misma ficha; sin embargo, al aplicar el Principio Fundamental del Conteo se están contando como si trataran de fichas distintas.

La segunda condición es que el número de posibilidades como podrían resultar cada uno de los eventos se debe mantener constante, esto independientemente del resultado obtenido en los demás eventos. Lo anterior es especialmente importante en el caso de eventos que guarden alguna relación de dependencia entre sí. Por ejemplo, se sabe que un año no bisiesto tiene un total de 365 días, y determinar una fecha específica del año puede concebirse como una secuencia de dos eventos: en el primero se determina el mes del año y en el segundo se especifica el día del mes. Sin embargo, hay meses con 30 días, otros con 31 días y febrero posee sólo 28 días, por lo que el número de posibilidades del segundo evento varía dependiendo del valor que tome el primer evento. De este modo, no es posible aplicar el Principio Fundamental del Conteo para calcular el número de días que conforman un año.

Lo anterior deriva en la siguiente pregunta: ¿Qué pasa cuando cambia el conjunto de posibilidades de un evento en función de otro, pero el número de posibilidades se mantiene constante en cada caso? Por ejemplo, para el caso de una competencia olímpica en la que participan 3 competidores, el resultado final de dicha competencia puede concebirse como una secuencia de tres eventos: en el primero se determina al primer lugar de la competencia, en un segundo se determina al segundo lugar y en el tercero se determina al tercer lugar. En este caso, el conjunto de posibilidades del segundo evento cambia dependiendo de cuál competidor se haya posicionado en el primer lugar. Por ejemplo, si el competidor #2 queda en la primera posición, entonces sólo los competidores #1 y #3 podrían quedar en el segundo lugar, mientras que, si el competidor #3 queda en el primer lugar, en este caso sólo los competidores #1 y #2 podrían quedar en la segunda posición. El siguiente diagrama de árbol presenta la totalidad de resultados posibles para dicha competencia:



En el diagrama anterior se observa que, a pesar de que el conjunto de posibilidades del segundo evento varía dependiendo del resultado obtenido en el primero, el número de resultados posibles se mantiene constante, pues en cada caso sólo hay dos resultados posibles (esto porque cada una de las ramas iniciales ramifica exactamente 2 veces). Lo mismo ocurre con el tercer evento, en el que sólo hay una posibilidad de ocurrencia para cada caso. Del diagrama se infiere que el número de posibilidades para el resultado final de la competencia puede calcularse mediante la operación $3 \times 2 \times 1 = 6$ (esto es $3! = 6$).

El caso anterior muestra que es posible aplicar el Principio Fundamental del Conteo incluso en aquellas situaciones cuando el conjunto de posibilidades de uno o más eventos varía debido a alguna relación de dependencia entre ellos; aunque esto siempre y cuando el número de resultados posibles de dichos eventos se mantenga constante para cada caso. De esta última observación se infiere la fórmula para calcular el número de ordenaciones sin repetición O_m^n presentada en la tabla anterior, aunque también se debe llevar a cabo cierta manipulación algebraica sobre la notación factorial. En particular se infiere que m objetos pueden ser acomodados, en línea recta, de $m!$ formas posibles.

El Principio Fundamental del Conteo es una herramienta que simplifica la tarea de contar. Sin embargo, como se ha mostrado en los párrafos anteriores, debe ser manipulado con cuidado para evitar caer en resultados erróneos. La clave está en visualizar el *diagrama de árbol implícito* que hay detrás de cada aplicación particular del principio. En general, se debe verificar que el número de ramificaciones sea el mismo dentro de un mismo nivel de ramificación del diagrama. Esto último se traduce en comprobar que el número de resultados posibles de cada evento se mantenga constante, sin importar que el conjunto de posibilidades varíe (tal y como se mostró con el ejemplo de la competencia olímpica).

De acuerdo con Fischbein (1975) los diagramas de árbol representan un método de construcción que resulta intuitivo a los estudiantes, por lo que este autor concibe a los diagramas de árbol como una parte fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Análisis Combinatorio. En una sección posterior retomaremos algunas de las ideas de Fischbein en torno a los diagramas de árbol.

Ahora bien, para el caso de las combinaciones de n objetos tomados de m en m, la deducción de su fórmula parte de la observación de que los elementos que conforman cada combinación (de m elementos) pueden ser ordenados, en línea recta, de $m!$ formas distintas. Esto significa que cada una de las combinaciones posibles determina de forma única un conjunto de $m!$ ordenaciones sin repetición. Además, dichos conjuntos son ajenos entre sí (esto es que no tienen elementos en común), pues cualquier forma de ordenar dos combinaciones diferentes resultará en dos ordenaciones diferentes entre sí.

Por ejemplo, al comprar un paquete de comida china, y para el cual se tiene la opción de elegir 3 guisados diferentes de entre un menú de 20, cada posible elección de los guisados es una combinación de 3 objetos. Para pedir los guisados, estos pueden ser solicitados en cualquier orden sin que aquello altere el producto final; y para ello hay un total de 3! formas distintas de hacerlo. Esto significa que cada elección de los tres guisados es una combinación asociada a un conjunto de 3! ordenaciones sin repetición que, en este caso, representan a las 3! formas posibles de solicitar los guisados de manera ordenada.

De este modo, el número de combinaciones C_m^n multiplicado por el número de formas en que pueden ser ordenadas cada una de ellas (esto es $m!$) da como resultado el número de ordenaciones sin repetición O_m^n. Esto significa que:

$$m!\,C_m^n = O_m^n$$

Despejando a C_m^n en la fórmula anterior se obtiene la fórmula para calcular el número de combinaciones en términos de las ordenaciones sin repetición:

$$C_m^n = \frac{O_m^n}{m!}$$

Si en la fórmula de arriba se sustituye el valor O_m^n por su fórmula en términos de las variables n y m (presentada con anterioridad en esta misma sección), se obtiene la siguiente versión de la fórmula para calcular el número de combinaciones:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Esta última versión de la fórmula es la que suele presentarse en la mayoría de los libros de texto de matemáticas que abordan el análisis combinatorio. Sin embargo, esta tiene la desventaja de ocultar el razonamiento a partir del cual se deduce la fórmula.

2.1.2 El enfoque de la ENP para la enseñanza del conteo

La Escuela Nacional Preparatoria de la UNAM plantea dos enfoques distintos para la enseñanza del conteo, los cuales pertenecen a las materias de Temas Selectos de Matemáticas y Estadística y Probabilidad. Ambas materias son optativas del 6º grado de la ENP; grado equivalente al tercer año de bachillerato. Sin embargo, la primera de ellas está dirigida exclusivamente a estudiantes que cursan el Área de las Ciencias Físico Matemáticas y las Ingenierías, mientras que la segunda está dirigida a las cuatro áreas del conocimiento.

En el caso de Temas Selectos de Matemáticas, el programa de estudios de la materia plantea que el enfoque que debe predominar a lo largo de curso es "… el desarrollo del pensamiento lógico y abstracto, mediante el uso de las herramientas de la matemática formal, a través de las cuales el alumno plantee conjeturas, refute o demuestre afirmaciones, infiera entre otros" (Programa: Temas Selectos de Matemáticas, 2018, p. 2). De este modo, el plan de estudios de esta materia concede importancia a los métodos de demostración y considera que los resultados presentados deben ser, en la medida de lo posible, demostrados.

En lo que al Análisis Combinatorio se refiere, el programa de estudios sugiere seguir un enfoque bidireccional. Por un lado, uno de los objetivos específicos establece que el alumno "Desarrollará habilidades de pensamiento numérico y abstracto, a través del planteamiento y solución de problemas del cálculo combinatorio…" (Programa: Temas Selectos de Matemáticas, 2018, p. 6). De este modo, el programa de estudios sugiere que el tema sea abordado con cierto grado de abstracción, lo que implica la aplicación de los contenidos a situaciones abstractas tal y como es el caso de la demostración del Teorema del Binomio, el cual también forma parte del programa de estudios de la materia. Aquí, conviene mencionar que Kline (1990) hace una crítica en contra de este enfoque de enseñanza de las matemáticas, el cual es conocido bajo el nombre de 'matemática moderna'.

Por otro lado, el programa de estudios de la materia también otorga lugar a la resolución de problemas de conteo que guarden una conexión con situaciones de la vida real, pues como parte de los contenidos procedimentales se propone el "Planteamiento y solución de problemas significativos y de su entorno que involucren ordenaciones con repetición, ordenaciones, permutaciones y combinaciones" (Programa: Temas Selectos de Matemáticas, 2018, p. 7).

En general, el programa de estudios de Temas Selectos de Matemáticas sugiere aplicar los resultados elementales del Análisis Combinatorio tanto a problemas concretos, como también a situaciones abstractas de la matemática pura.

Ahora bien, en el caso de la materia Estadística y Probabilidad, el programa de estudios plantea como objetivo general que los estudiantes desarrollen habilidades de pensamiento estadístico y probabilístico:

> El propósito de la materia Estadística y Probabilidad es que los estudiantes consoliden sus conocimientos sobre estadística descriptiva e inicien el tránsito hacia el pensamiento estocástico. Este tránsito requiere una base sólida sobre el concepto de probabilidad, que en la actualidad es un elemento fundamental para describir fenómenos naturales y sociales que abarcan las cuatro áreas del conocimiento… (Programa: Estadística y Probabilidad, 2018, p. 2).

Las técnicas de conteo son una herramienta necesaria para el cálculo de la cardinalidad del espacio muestral de una diversidad de fenómenos; es decir, son una herramienta que permite estimar, e incluso calcular con exactitud el número de formas posibles como podría llegar a ocurrir algún fenómeno determinado. Por ello, no es de sorprenderse que el Análisis Combinatorio forme parte de los contenidos de Estadística y Probabilidad.

A diferencia de Temas Selectos de Matemáticas, en Estadística y Probabilidad se promueve un enfoque de enseñanza basado "…en el análisis de datos reales, en la solución de problemas y en el desarrollo de proyectos de investigación; de esta manera se promueve un aprendizaje significativo, autónomo, no memorístico y que puede trascender en su vida académica y personal" (Programa: Estadística y Probabilidad, 2018, p. 2).

Con base en lo anterior, los contenidos de Estadística y Probabilidad deben ser abordados desde lo concreto, tomando en cuenta el contexto personal, social, cultural y profesional de los estudiantes. Para el caso específico del Análisis Combinatorio, dentro de los contenidos conceptuales se mencionan las ordenaciones con y sin repetición, las permutaciones (que son un caso particular de las ordenaciones sin repetición), y las combinaciones. Sin embargo, los contenidos procedimentales sugieren la aplicación de diagramas de árbol para la representación del espacio muestral de fenómenos aleatorios. Esta es una de las grandes diferencias entre los programas de estudio de Estadística y Probabilidad y Temas Selectos de Matemáticas de la ENP. El primero hace una referencia explícita al empleo de diagramas de árbol como una herramienta del conteo, mientras que el segundo lo omite.

Como se mencionó en la subsección anterior, los diagramas de árbol son un fundamento intuitivo del Principio Fundamental del Conteo; último que se aplica de forma directa o indirecta para la deducción de las fórmulas elementales del conteo, además de ser una herramienta práctica para el cálculo y la estimación de cantidades grandes.

2.1.3 El enfoque del CCH para la enseñanza del conteo

Para el caso del Colegio de Ciencias y Humanidades, último que sigue un plan de estudios semestral, la materia Estadística y Probabilidad se divide en los cursos I y II. Por lo general, los profesores de esta materia imparten ambos cursos de forma seriada y dedican el primer curso a la estadística y el segundo a la probabilidad, tal y como lo sugiere el programa de estudios de la materia (Programa de Estudios de Estadística y Probabilidad I y II, s.f.).

El programa de estudios de Estadística y Probabilidad I y II no enlista de forma explícita cuáles son las técnicas de conteo que deberán abordarse a lo largo del curso; de hecho, el programa sólo menciona que las técnicas de conteo deberán abordarse a un nivel elemental, y a partir de la selección de experimentos aleatorios sencillos. Por su parte, también se plantea el uso de diagramas de árbol para la descripción del espacio muestral de un fenómeno determinado.

Al igual que para el caso de la ENP, en las materias Estadística y Probabilidad I y II del CCH se sugiere un enfoque de enseñanza-aprendizaje basado en el planteamiento y resolución de problemas, así como también se promueve fomentar el aprendizaje autónomo por parte de los estudiantes. Sin embargo, algo que hay que destacar del enfoque de enseñanza-aprendizaje de las materias Estadística y Probabilidad I y II es que se sugiere que los alumnos lean textos científicos, escolares y de divulgación que contribuyan a su formación en la materia, algo que está estrechamente relacionado con el modelo de aula invertida, último que forma parte del diseño de la propuesta de enseñanza-aprendizaje sobre la que trata el presente trabajo. En adición, el programa también promueve desarrollar el pensamiento reflexivo de los alumnos, así como también el pensamiento deductivo e inductivo.

2.2 INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA-ARPENDIZAJE DEL CONTEO

En lo que se refiere a la enseñanza-aprendizaje del análisis combinatorio, destacan las investigaciones de Piaget e Inhelder y, posteriormente, las de Fischbein. En esta sección se analizarán sólo algunas de las investigaciones realizadas por estos tres investigadores. Por último, se analizarán algunas de las investigaciones más recientes que se han realizado en torno a este tema durante las últimas tres décadas.

2.2.1 Las investigaciones de Piaget e Inhelder

Como se mencionó en la sección 1.1.2, la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget plantea que la estructura cognitiva de los individuos evoluciona a través de cuatro etapas, que van desde la etapa sensoriomotora hasta la etapa de las operaciones formales, pasando antes por la etapa del pensamiento preoperatorio y la etapa de las operaciones concretas en ese orden.

Piaget y su colaboradora Inhelder concedieron a las matemáticas y a las ciencias físicas un papel importante dentro del desarrollo cognitivo de las personas. Esto se ve reflejado en sus investigaciones de 1951 y 1955, en las que estudiaron la evolución en la forma de razonar de los individuos sobre determinados fenómenos en relación con las dos disciplinas antes mencionadas. Para esto, Piaget e Inhelder llevaron a cabo diversos estudios sobre la evolución del pensamiento de los niños a través de las etapas del pensamiento preoperatorio, de las operaciones concretas y de las operaciones formales. Piaget e Inhelder (1985) se refieren a las tres etapas anteriores como Estadios I, II y III respectivamente.

En su publicación de 1951 (citado en Inhelder y Piaget, 1985), los autores estudiaron el razonamiento combinatorio en niños de los estadios I, II y III, específicamente en lo que se refiere a las permutaciones y las combinaciones (siendo las primeras un caso particular de las ordenaciones sin repetición).

Mas adelante, en su obra de 1955 (véase Inhelder y Piaget, 1985), estudiaron el razonamiento combinatorio en niños de los estadios I, II y III, esta vez para el caso específico de las combinaciones. Dedicaremos el resto de esta subsección para describir los resultados obtenidos en esta última publicación, los cuales son semejantes a los presentados en su publicación de 1951.

El experimento realizado por Piaget e Inhelder consistió en presentar a los sujetos de estudio un total de cinco frascos los cuales contenían: 1) ácido sulfúrico diluido, 2) agua, 3) agua oxigenada, 4) tiosulfato y 5) ioduro de potasio. Los químicos de los frascos 1 a 4 son incoloros e inoloros, de tal modo que lucen idénticos ante la percepción. Por su parte, el frasco 5 tenía un cuentagotas que lo distinguía de los demás frascos.

Si se combina el ácido sulfúrico diluido con el agua oxigenada, y luego se agregan unas gotas de ioduro de potasio, se produce una nueva sustancia de color amarillo. Por su parte, si a la mezcla anterior se le agrega tiosulfato, este último decolora la mezcla de tal modo que se pierde el color amarillo previamente adquirido. En resumen, si se combinan los frascos 1, 3 y 5 se obtiene una sustancia amarilla, la adición de 2 no altera la mezcla, mientras que la adición de 4 la decolora.

Al comienzo del experimento se colocaban dos frascos frente al sujeto de estudio. El primero de ellos contenía una mezcla de 1 y 3, mientras que el segundo contenía sólo agua. Posteriormente se añadían unas gotas de ioduro de potasio a ambos frascos y se le pedía al individuo que observara las reacciones. Finalmente, se le solicitaba que reprodujera el experimento utilizando los cinco frascos antes mencionados.

El experimento antes descrito se llevó a cabo con niños de los estadios I, II y III, y se observaron diferencias significativas en el razonamiento combinatorio entre los niños de los tres estadios. Para ello, Piaget e Inhelder dividieron cada uno de los estadios II y III en dos subestadios, a los que llamaron subestadios IIA, IIB, IIIA y IIIB respectivamente.

Los niños del subestadio IIA procedieron a mezclar cada uno de los frascos del 1 al 4 con el ioduro de potasio. Sin embargo, para que mezclaran entre sí dos o más de los frascos del 1 al 4 se les tuvo que sugerir esta opción. Sólo algunos niños procedieron a mezclar, sin sugerencia del investigador, el contenido de los cinco frascos, por lo que el cambio de color se presentaba o no dependiendo del orden en que agregaban los compuestos. Por ejemplo, 1, 2, 3 y 5 mezclados en cualquier orden producen el cambio de color, pero añadir el contenido del frasco 4 antes de mezclar 1, 3 y 5 hace que falle el experimento. Incluso para el caso de aquellos niños quienes sugirieron que el cambio de color dependía del orden, sólo probaron con un orden específico y con su orden inverso.

Inhelder y Piaget concluyeron que en el subestadio IIA "no existe aún operación combinatoria alguna en sentido estricto, sino sólo correspondencias y seriaciones" (1985, p. 101). Es importante mencionar que dichos autores definen *la seriación* como la acción de ordenar un grupo de objetos a partir de algún criterio específico (Piaget e Inhelder, 1997), algo que difiere de la noción de permutaciones que consiste en encontrar la totalidad de los órdenes posibles.

Por su parte, los niños del subestadio IIB mostraron resultados semejantes a los del subestadio IIA, pero con la diferencia de que procedieron a combinar de forma espontánea los compuestos de los frascos 1 a 4 de dos en dos y de tres en tres. Lo anterior es una diferencia importante si se considera que a los sujetos del subestadio IIA se les tuvo que sugerir que probaran combinando con dos o tres sustancias de los frascos 1 a 4. Sin embargo, los sujetos de ambos subestadios no lograron completar la totalidad de combinaciones de dos en dos que pueden formarse con las sustancias de los frascos 1 a 4.

Para el caso de los niños del subestadio IIIA hubo dos diferencias significativas con respecto a los niños del subestadio IIA. La primera de ellas es que los niños del subestadio IIIA desarrollaron un método sistemático que les permitió enunciar la totalidad de las combinaciones de dos en dos que pueden formarse con los frascos del 1 al 4. Uno de los niños incluso recurrió a enlistar las combinaciones que había probado para llevar un control y evitar la repetición de las mismas. La segunda diferencia fue que los niños del subestadio IIIA no se conformaron con haber reproducido el experimento, sino que mostraron interés en verificar si había otras formas de llegar al mismo resultado. Al continuar experimentando, los niños del subestadio IIIA llegaron a deducir que el contenido del frasco 2 se trataba de agua, mientras que el contenido del frasco 4 es lo que decoloraba la mezcla. Conviene recordar que el razonamiento lógico-deductivo es una de las principales características del estadio III; es decir, de la etapa de las operaciones formales.

Por último, en el caso de los sujetos del subestadio IIIB los resultados fueron semejantes al de los niños del subestadio IIIA. Piaget e Inhelder mencionan que, la única diferencia entre los sujetos de ambos estadios consiste en que los sujetos del estadio IIIA emplean métodos aún más sistemáticos al momento de combinar, así como para deducir la función que cumplen cada uno de los compuestos al ser mezclados entre sí. De acuerdo con ambos autores, lo anterior significa que los sujetos del subestadio IIIA están en un proceso de organización de sus esquemas combinatorios, mientras que en el caso de los sujetos del subestadio IIIB dichos esquemas ya están en un estado de equilibrio.

De este modo, Piaget e Inhelder concluyen que es hasta la etapa de las operaciones formales que los individuos han adquirido los esquemas combinatorios necesarios para emplear métodos sistemáticos que permitan obtener la totalidad de las combinaciones posibles de un conjunto de objetos determinado. Además, ambos autores consideran que en el razonamiento combinatorio está la clave para combinar ideas e hipótesis, creando nuevos operadores lógicos que hasta ese momento eran desconocidos por el individuo; como es el caso de la implicación lógica, la disyunción exclusiva (decir que ‘o es una cosa o la otra, pero no ambas’), así como la operación bicondicional, sólo por mencionar algunas (Piaget e Inhelder, 1997).

2.2.2 Las investigaciones de Fischbein sobre la intuición

La intuición, sin duda alguna, juega un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas; e incluso, en el desarrollo de la disciplina misma. Aquí, cabe hacer la aclaración que la noción de *intuición* tiene diferentes significados aún dentro de las matemáticas. La RAE define la intuición como la facultad de comprender las cosas de forma instantánea y sin la necesidad de razonamiento. Esta última definición está ligada con la noción de *concreto* expuesta por Goffree (2000), quien considera que hacer de las matemáticas algo concreto significa abordar las matemáticas desde situaciones que sean fáciles de imaginar por los alumnos. Bajo este contexto, la intuición se concibe como un recurso para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, donde se califica como *intuitivo* aquello que es fácil de imaginar y, por lo tanto, de comprender.

Sin embargo, las matemáticas no se limitan a formular y comprender conceptos, pues también es importante aplicarlos con el propósito de resolver problemas, o bien, con el de responder a nuevas interrogantes que surgen en torno a los primeros. Resolver un problema matemático no siempre se limita a seguir una receta que permita llegar a la solución del problema. De hecho, los problemas matemáticos auténticos exigen llevar a cabo un análisis a fondo del problema y, a partir de ello, diseñar uno o más métodos de solución. Sobre este último punto, Félix Klein (citado en Kline, 1990) señala que:

> A menudo oye decir a los no matemáticos, especialmente a los filósofos, que las matemáticas consisten exclusivamente en sacar conclusiones de unas premisas claramente establecidas…

> Pero una persona que haya hecho un trabajo matemático productivo hablará de forma diferente… el investigador en matemáticas como en cualquier otra ciencia, no trabaja con un modelo deductivo riguroso. Por el contrario, esencialmente hace uso de su imaginación, y procede intuitivamente ayudado por métodos heurísticos (p. 54).

Llevando el pensamiento de Klein al contexto de la solución de problemas matemáticos, lo que este matemático expone es que hacer matemáticas no se limita a seguir un conjunto de reglas establecidas, sino que también implica analizar y dejarse guiar por la intuición con el propósito de hallar una o más estrategias que permitan llegar a la solución del problema.

Para ejemplificar lo anterior, se puede considerar el caso de un estudiante de bachillerato quien pretende resolver un sistema de ecuaciones, teniendo la libertad de escoger el método de solución que más le convenga. En tal caso, el estudiante no procederá a elegir arbitrariamente el método de solución, sino que, guiado por su intuición, seguirá el método que considere más práctico para resolver el sistema de ecuaciones que le fue presentado.

Desde la experiencia individual del autor de la presente tesis, la intuición puede concebirse como una voz interna que sugiere por dónde se debe buscar la solución a un problema matemático determinado. Desde luego, para que dicha voz pueda manifestarse, antes es necesario haber realizado un análisis a fondo del problema a resolver y, para ello, también es importante comprender los conceptos matemáticos que, de forma implícita o explícita, yacen inmersos en el contenido del problema.

Aquí conviene aclarar que el pensamiento intuitivo de ningún modo resta importancia al pensamiento lógico-deductivo. Ambas formas de pensamiento son fundamentales para el desarrollo del conocimiento matemático, y deben operar de forma articulada. Sobre esto último, Crespo (2008) enfatiza que la intuición, sin un proceso de razonamiento y argumentación que la respalde, puede derivar en afirmaciones matemáticamente falsas, o bien, en proponer un método de solución inválido a un problema determinado. Un ejemplo común es que los alumnos tienden a intuir, de forma errónea, que la división de cualquier número real entre el número cero está definida y que, en tal caso, el cociente de la división también es cero. Sin embargo, tras un proceso de observación y de argumentación, se puede comprobar que la división de un número real entre cero no está definida. Una forma de hacerlo consiste en observar que, al dividir un número positivo específico (digamos el 1) entre números positivos cada vez más pequeños (como el 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, etc.), se obtendrá como resultado un número cada vez más grande; es decir, la secuencia de resultados obtenidos de las operaciones tenderá hacia infinito.

Por la razón anterior, la intuición no debe concebirse como algo desarticulado de lo que es el razonamiento hipotético-deductivo. Sobre este último punto, Henri Lebesgue (citado en Kline, 1990) señala que "… los descubrimientos resultan del trabajo de la imaginación creadora… Una vez que un descubrimiento ha sido hecho, la lógica interviene como un control; es la lógica la que decide finalmente si el descubrimiento es verdadero o ilusorio" (p. 59).

Ahora bien, ya que se ha abordado de forma general el papel que juega la intuición dentro de las matemáticas, es natural preguntarse si el desarrollo de determinado tipo de intuiciones se adquiere de forma espontánea, o bien, si es necesaria la instrucción para ser adquiridas. Las investigaciones de Fischbein sobre los efectos de la instrucción en el aprendizaje del análisis combinatorio están encaminadas en esa dirección.

De acuerdo con Fischbein (1975), una intuición es un proceso cognitivo "cuya función es la de engranar el conocimiento hacia la acción [física o mental]" (p. 15, trad.). Por otra parte, cuando se trata de hallar la solución a un problema determinado, Fischbein atribuye a la intuición el momento del 'insight'; es decir, aquel momento específico en el que un individuo tiene una idea que podría resultar (o no) en la solución del problema.

Para esto, Fischbein clasifica las intuiciones en dos tipos: las intuiciones primarias y las secundarias. Las *intuiciones primarias* son aquellas que un individuo adquiere de forma independiente a la instrucción; por ejemplo, antes de cruzar una calle se puede intuir la rapidez con la que se aproximan los vehículos y, a partir de ello, decidir si es conveniente o no cruzar la calle en un momento determinado. Por su parte, las *intuiciones secundarias* son aquellas que se adquieren como resultado de un proceso sistemático de instrucción.

En lo que se refiere a la formación de intuiciones secundarias, Fischbein (1975) concede gran importancia a lo que él llama *modelos generativos*. Un modelo generativo es aquél que puede ser aplicado a un número infinito de situaciones con características comunes entre sí, además que dicho modelo también puede llegar a modificarse de tal modo que se ajuste y sea aplicable a situaciones con cualidades diferentes de aquellas para las que fue diseñado.

En el caso particular del Análisis Combinatorio, un modelo generativo de gran importancia es el diagrama de árbol. Los diagramas de árbol pueden ser enseñados con el propósito de obtener la totalidad de ordenaciones con repetición de 2 objetos tomados de 2 en 2 y, una vez aprendido este modelo, puede aplicarse para obtener las ordenaciones con repetición de los mismos 2 objetos, pero esta vez tomados de 3 en 3, de 4 en 4 o de 5 en 5. También podría aplicarse para obtener todas las ordenaciones con repetición ahora de 3 objetos tomados de 2 en 2 o de 3 en 3. Además, a partir de un análisis adecuado, el modelo puede ser adaptado para el caso de las ordenaciones sin repetición e, incluso, para el caso de las combinaciones.

En su investigación, Fischbein, Pampu y Minzat (1970) enseñaron a niños de 10, 12 y 14 años el modelo de los diagramas de árbol como una herramienta para elaborar los inventarios de las ordenaciones con repetición de 2 objetos tomados de 3 en 3 y de 4 en 4, así como para las permutaciones de 3, 4 y 5 objetos. Observaron que incluso los individuos de 10 años fueron capaces de comprender y emplear el modelo. De acuerdo con Fischbein (1975), "la construcción de intuiciones secundarias por métodos pedagógicos puede, a fin de cuentas, ser reducido a la tarea de crear y usar modelos generativos adecuados" (p. 116, trad.).

2.2.3 El modelo combinatorio implícito

Entre las investigaciones más recientes sobre la resolución de problemas combinatorios por parte de estudiantes, destacan las llevadas a cabo por Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996) y Roa, Batanero y Godino (2003). En la primera de ellas se diseñó un cuestionario compuesto de trece problemas combinatorios simples (aquellos que se resuelven con una única operación combinatoria), y el cual se implementó a un total de 720 alumnos de entre 14 y 15 años pertenecientes a 9 institutos de Granada y Córdoba (España), y de entre los cuales 352 alumnos habían recibido instrucción previa en combinatoria, mientras que los 368 restantes no recibieron instrucción alguna sobre el tema.

Para el diseño y elaboración de los ítems, los autores consideraron como una variable importante lo que ellos denominan el *modelo combinatorio implícito*, que consiste en un modelo de clasificación para los problemas combinatorios, y el cual fue propuesto por Dubois (1984, citado en Navarro-Pelayo, Batanero y Godino 1996). Dicho modelo clasifica los problemas combinatorios en tres clases que son los de selección, los de colocación y los de partición. Los problemas combinatorios de *selección* son aquellos en los que se desea conocer de cuántas formas se puede extraer o seleccionar una muestra de elementos. En los problemas de *colocación*, por su parte, interesa calcular de cuántas formas posibles pueden ser colocados u acomodados un conjunto de objetos. Finalmente, los problemas combinatorios de *partición* consisten en partir o agrupar un determinado conjunto de elementos.

El cuestionario elaborado por Navarro-Pelayo *et al.* (1996) estaba compuesto por 5 problemas de selección, 5 de colocación y 3 de partición. Además, cada uno los ítems se resuelven con una operación combinatoria única, y de entre los cuales se encuentran 3 ítems de combinaciones, 3 de permutaciones con repetición, 3 de ordenaciones con repetición, 2 de permutaciones y 2 de ordenaciones sin repetición. Los cinco ítems de selección y los cinco de colocación del cuestionario comprenden problemas sobre las cinco operaciones combinatorias antes enlistadas, mientras que los tres ítems de partición sólo comprenden problemas referentes a las tres primeras operaciones combinatorias enlistadas.

Tras la implementación del cuestionario, los autores observaron que el grupo que recibió instrucción previa en combinatoria tuvo mejores resultados que el grupo que no recibió instrucción. Sin embargo, incluso los alumnos que recibieron instrucción mostraron dificultades para resolver los problemas del cuestionario, pues en 9 de los 13 ítems se obtuvo un porcentaje de aciertos inferior al 50% por parte del grupo que recibió instrucción.

Además, Navarro-Pelayo y colaboradores analizaron y clasificaron los errores cometidos por los estudiantes en 11 tipos diferentes. Para esto, observaron que dentro del grupo que recibió instrucción los errores más frecuentes fueron los de orden (identificar si el orden es relevante o no), seguido por los errores de repetición (si es válida o no la repetición de elementos), y por un empleo erróneo de los parámetros n y m de las operaciones combinatorias (donde n es el número total de elementos que conforman un repertorio y m es el número de elementos que serán extraídos de dicho repertorio). Por otro lado, para el grupo que no recibió instrucción el mayor número de errores fue el resultado de un proceso de enumeración no sistemático.

Por su parte, los dos ítems que presentaron un menor porcentaje de aciertos entre el grupo que recibió instrucción fueron aquellos que involucraban una operación combinatoria donde el parámetro n era menor que el parámetro m, uno de los cuales corresponde al modelo de partición y el otro al de colocación. Finalmente, los autores concluyen que el modelo combinatorio implícito influye en el grado de dificultad de los problemas combinatorios simples, así como también está relacionado con los tipos de errores que cometen los alumnos.

Posteriormente Roa, Batanero y Godino (2003) estudiaron las estrategias empleadas por estudiantes de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada, en la resolución de problemas combinatorios simples y compuestos (estos últimos son aquellos que involucra más de una operación combinatoria). Para ello, se diseñó un cuestionario de 13 ítems el cual retomaba 11 de los ítems del cuestionario de Navarro-Pelayo *et al.* (1996), más 2 ítems que consistían en dos problemas combinatorios compuestos.

El cuestionario fue implementado en 91 alumnos de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada, y quienes ya habían recibido instrucción en combinatoria durante sus cursos previos de probabilidad en la misma licenciatura. Los resultados mostraron que incluso los estudiantes con una formación matemática avanzada presentan dificultades para resolver problemas combinatorios.

Al comparar los resultados de los estudiantes de licenciatura con los obtenidos por el grupo que recibió instrucción en la investigación de Navarro-Pelayo *et al.* (1996), se observa que en tres de los ítems los porcentajes de aciertos obtenidos por ambos grupos fueron semejantes (el porcentaje de aciertos obtenido en ambos grupos presenta a una diferencia no mayor del 5%). Incluso se tuvo el caso de dos ítems en los que el grupo de licenciatura tuvo un porcentaje de aciertos inferior al del grupo de estudiantes de 14 y 15 años que recibió instrucción (con una diferencia respectiva del 11% y del 19% entre el porcentaje de aciertos obtenidos por ambos grupos en los dos ítems).

En general, el grupo de licenciatura tuvo un porcentaje de aciertos inferior al 50% en ocho de los trece ítems del cuestionario, siete de los cuales corresponden al cuestionario original de Navarro-Pelayo, mientras que el ítem restante se trataba de uno de los problemas combinatorios compuestos, y en el cual se tuvo un porcentaje de aciertos del 6.6%. Esto corrobora que incluso los estudiantes con preparación matemática avanzada presentan dificultades para solucionar problemas combinatorios.

Por otra parte, Roa *et al.* (2003) analizaron las estrategias empleadas por los estudiantes de licenciatura para resolver problemas combinatorios y las clasificaron en *estrategias generales* y *estrategias aritméticas*. Las estrategias generales son tres: la traducción del problema combinatorio a otro equivalente (como podría ser el acto de reinterpretar un problema de colocación en un problema de selección), fijar variables, y la descomposición del problema combinatorio en subproblemas combinatorios más simples.

En lo que a las estrategias aritméticas se refiere, estas son la regla de la suma, la regla del producto y la regla del cociente. *La regla de la suma* consiste en contar por separado dos conjuntos ajenos entre sí (esto es que carecen de elementos comunes), y cuya unión equivale a la totalidad del conjunto a contar. Por su parte, *la regla del producto* se refiere a la aplicación del Principio Fundamental del Conteo, el cual ya fue introducido y explicado con anterioridad. Finalmente, *la regla del cociente* consiste en aplicar la operación división como una herramienta que permite contar cuántas veces cabe una cantidad dentro de otra, o bien, para determinar cuántos elementos le corresponden a cada parte en el caso de que se desee partir una cantidad en algún número determinado de partes iguales entre sí.

Roa *et al.* (2003) observaron que la regla de la suma y la del cociente fueron poco utilizadas por los estudiantes de licenciatura, y consideran que la regla del cociente resulta poco intuitiva para llevar a cabo la resolución de problemas combinatorios. Por otra parte, la regla del producto fue mucho más utilizada por los estudiantes de licenciatura, sin embargo, Roa y colaboradores consideran que los resultados obtenidos sobre la aplicación de esta regla deberían mejorarse.

Finalmente, Roa y colaboradores concluyen que la enseñanza del análisis combinatorio no debe limitarse a enseñar e identificar las operaciones combinatorias elementales como la única estrategia para solucionar problemas combinatorios, sino que también atribuyen importancia a identificar el modelo combinatorio implícito, así como a la aplicación de estrategias generales y aritméticas con el propósito de incrementar el repertorio de herramientas del que disponen los estudiantes para solucionar este tipo de problemas.

CAPÍTULO 3:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y JUSTIFICACIÓN DE LA PROPUESTA

El presente capítulo tiene como propósito hacer un análisis de la problemática que hay en torno a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y, en particular, del Análisis Combinatorio. Con base en lo anterior, se reafirma la importancia del Análisis Combinatorio como parte integral del currículo de matemáticas del nivel medio superior. También se proponen cuatro puntos que, de acuerdo con el autor de la presente tesis, deben guiar la enseñanza-aprendizaje del Análisis Combinatorio. Finalmente, se justifica la presente propuesta de enseñanza-aprendizaje del principio fundamental del conteo; diseñada para implementarse en el nivel medio superior bajo el modelo de aula invertida y con base a los principios de la educación matemática realista.

3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

No es nuevo que las matemáticas sean consideradas por la mayoría de los estudiantes como una de las materias más difíciles de cada ciclo escolar. Analizar cuáles son las causas que dan a esta disciplina el calificativo de 'difícil' es algo complejo, y sería ambicioso mencionar todas las razones que hay detrás de ello. Lo que es un hecho, es que en México la mayoría de los alumnos presentan dificultades en el aprendizaje de esta disciplina y en su aplicación a la vida real; y esto último no es excepción para el caso de aquellos estudiantes quienes cursan el nivel medio superior.

De lo anterior hay suficiente evidencia en los resultados arrojados por el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (Planea) del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) en el 2017. Por su parte, los resultados del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA por sus siglas en inglés), llevado a cabo por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) en el 2015, aportan información sobre los conocimientos y habilidades que poseen aquellos estudiantes que han concluido la educación básica y que ingresan al nivel medio superior.

3.1.1 Los resultados de la prueba Planea 2017

En lo que se refiere a la prueba Planea (INEE, 2017), esta define cuatro niveles de logro en el extracto matemáticas. Dentro del Nivel I se encuentran aquellos estudiantes quienes tienen dificultades para realizar operaciones con fracciones y operaciones que involucren incógnitas (estas son valores numéricos desconocidos representados por literales), así como para analizar y relacionar dos variables cuando el valor numérico de una varía en función de la otra. Los resultados de Planea 2017 (INNE, 2017) muestran que el 66.2% de los estudiantes del nivel medio superior se encuentran en el Nivel 1; esto significa que la mayoría de los alumnos de este nivel presentan dificultades para comprender y aplicar el conocimiento matemático.

3.1.2 Los resultados de la prueba PISA 2015

En lo que refiere a la prueba PISA 2015 (OCDE, 2016), última que fue aplicada a estudiantes de 15 años de edad en un total de 72 países, entre ellos México, los resultados mostraron que el 57% de los estudiantes mexicanos no alcanzaron el nivel básico en competencias matemáticas. Esto significa, entre otras cosas, que la mayoría de los estudiantes mexicanos son capaces de resolver problemas matemáticos en un contexto que les sea familiar y sólo cuando se les proporciona la información de forma explícita, con instrucciones bien definidas sobre cómo resolver un problema; pero presentan dificultades para resolver problemas donde la información debe ser analizada y extraída. En general, México mostró resultados por debajo del promedio OCDE en matemáticas, ciencias y comprensión lectora.

La prueba PISA 2015 pone en evidencia que hay una deficiencia en el logro de aprendizajes sobre matemáticas, esto por parte de aquellos estudiantes mexicanos que están por ingresar al nivel medio superior. Por su parte, la prueba Planea 2017 da evidencia de esta deficiencia en aquellos estudiantes que ya se encuentran cursando el nivel medio superior.

Las pruebas Planea y PISA enfocan la evaluación en aspectos diferentes del aprendizaje de las matemáticas. Para el caso de la prueba Planea (INEE, 2017), esta pretende evaluar el conocimiento algebraico adquirido por los estudiantes en relación con los contenidos que integran el currículo de enseñanza del nivel medio superior.

Por su parte, la prueba PISA tiene como propósito evaluar si los estudiantes que están por concluir la educación básica (adolescentes de 15 años) han desarrollado las competencias lectoras, matemáticas y científicas que, de acuerdo con la OCDE, son necesarias para el análisis y la resolución de problemas en un contexto personal, social y profesional (OCDE, s.f.). Es importante mencionar que la prueba PISA es independiente del currículo de enseñanza que se implementa en cada país.

3.1.3 El problema con el currículo en matemáticas

Si bien, es importante hacer énfasis en que las causas que dificultan la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas son numerosas y diversas, tampoco cabe duda de que la problemática guarda relación con el currículo en matemáticas y con el modelo tradicional de enseñanza que aún predomina dentro de las instituciones de educación secundaria y del nivel medio superior.

A menudo, los profesores ven el programa de estudios como una lista de temas que deben cubrir en su totalidad. Aparte de que esto va en contra de los modelos pedagógicos vigentes (como es el caso del modelo por competencias), hay que añadir que los programas de estudio en matemáticas suelen estar integrados por una cantidad abrumadora de temas, cada uno con sus propias dificultades de enseñanza-aprendizaje. Por si fuera poco, los contenidos del currículo en matemáticas suelen ser acumulativos; es decir, que lo que se ha aprendido sobre un tema será determinante para alcanzar un aprendizaje satisfactorio de los temas subsecuentes.

Lo anterior deriva en dos grandes problemas. El primero de ellos es que los docentes, por la presión de concluir el programa de estudios, no promueven en sus alumnos la reflexión sobre los contenidos a estudiar, ni tampoco sobre los estudiados en cursos anteriores. Ante la falta de reflexión, los alumnos difícilmente alcanzarán un grado superior de asimilación y comprensión de los temas vistos en clase. Sobre esto último, Goffree (2000) señala que "El maestro debe encontrar el momento oportuno para incluir la reflexión en la clase de matemáticas" (p. 156).

El otro gran problema es que, al abordar temas que requieren de cierto bagaje de conocimientos previos, los docentes no siempre dedican el tiempo necesario para evaluar si los estudiantes cuentan con dichos conocimientos, y tampoco invierten el tiempo necesario para su repaso. Lo anterior tiene serias repercusiones en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Ligado a lo anterior, los contenidos que conforman los programas de estudio suelen ser enseñados con una total descontextualización de sus aplicaciones a la vida real, y cuando los estudiantes cuestionan a los docentes sobre el propósito de aprender dichos contenidos, a menudo los profesores responden con el argumento de que 'podría ser de utilidad en el futuro'. Sobre este punto, Kline (1990) señala que "A los jóvenes no se les puede pedir seriamente que aprendan algo porque pueden necesitarlo en años sucesivos" (p. 13).

De este modo, un programa de estudios de matemáticas no debe ser concebido como una lista de temas a cubrir como si fuera una lista de pendientes. Centrarse sólo en cubrir el programa de estudios puede derivar en una pérdida de visión sobre el verdadero propósito de la educación; último que va más allá de la adquisición de conocimientos informativos por parte de los estudiantes, pues más importante aún es el desarrollo de habilidades, destrezas y actitudes relevantes para la vida personal, social y profesional de los estudiantes.

3.1.4 El problema con el modelo tradicional de enseñanza en matemáticas

Uno de los modelos de enseñanza de las matemáticas que aún prevalece entre las instituciones de educación secundaria y de nivel medio superior es el llamado *modelo tradicional*. Bajo este modelo, el profesor enseña a los estudiantes una diversidad de procedimientos para determinados fines, pero lo hace sin promover la reflexión y el fundamento de los temas abordados.

Por ejemplo, cuando un profesor enseña a sus alumnos la división de fracciones bajo el modelo tradicional, ejemplifica el procedimiento que se debe seguir para resolver la operación. Sin embargo, casi nunca hay una explicación intuitiva del porqué se hace de tal forma; tampoco se asigna el tiempo suficiente para que los estudiantes analicen las diversas interpretaciones que hay en torno a dicha operación. Así, el énfasis recae en un proceso mecánico de resolver operaciones, más allá de comprender su fundamento e interpretación en diferentes contextos.

Así, bajo el modelo tradicional los alumnos son capaces de resolver ${}^{1}/_{2} \div {}^{1}/_{3} = {}^{3}/_{2}$, pero no hay una interpretación de la operación, ni tampoco de su resultado; como sería decir que ${}^{1}/_{2}$ equivale a tres mitades de la magnitud ${}^{1}/_{3}$, o bien, que ${}^{1}/_{2}$ equivale al 150% de ${}^{1}/_{3}$. Tampoco se explica el fundamento del procedimiento, último que se describe a continuación:

1) Se interpreta que dividir $1/2$ entre $1/3$ significa calcular cuántas veces cabe la fracción $1/3$ dentro de la fracción $1/2$.
2) Para lograr el objetivo del inciso anterior, conviene convertir las fracciones $1/3$ y $1/2$ a fracciones equivalentes con el mismo denominador entre sí; esto permitirá compararlas. Las fracciones pueden ser $2/6$ y $3/6$ respectivamente.
3) Ahora se desea calcular cuántas veces cabe $2/6$ dentro de $3/6$. Como ambas fracciones tienen el mismo denominador, la solución equivale a calcular cuántas veces cabe el numerador de la primera fracción dentro del numerador de la segunda; la respuesta está dada por la operación $3 \div 2 = 3/2 = 1.5$.

Otro caso donde los estudiantes ignorar el fundamento del procedimiento es el que refiere a la aplicación y resolución de *la regla de tres*; método que permite calcular un valor desconocido a partir de 3 valores dados, todos ellos relacionados por una regla de proporción. Bajo el modelo tradicional, los alumnos organizan y operan los datos mecánicamente con el fin de calcular el valor faltante. Sin embargo, rara vez interpretan las operaciones implicadas; tampoco distinguen bajo qué condiciones es válido o no aplicar dicha regla.

Ignorar el fundamento lógico de un procedimiento es justificable en aquellos casos donde la complejidad va más allá del nivel general de los estudiantes. Sin embargo, debe abordarse tanto como sea posible; pues al hacerlo se fomentará el pensamiento crítico de los estudiantes y les evitará cometer errores de intuición e interpretación. Además, al comprender el sustento lógico de un conjunto de métodos, también serán capaces de crear y proponer sus propios métodos para resolver problemas más complejos.

Conviene señalar que el modelo tradicional de enseñanza en matemáticas ha sido criticado por Kline (1990), quien señala que "… los alumnos se enfrentan con una variedad desconcertante de procedimientos que aprenden de memoria a fin de dominarlos. Casi siempre el aprendizaje es completamente memorístico" (p. 10). Sobre este último punto es importante recordar que, de acuerdo con la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, el aprendizaje memorístico es un tipo de aprendizaje propenso al olvido.

Para el autor del presente trabajo, aplicar un método sin interpretar el resultado es análogo a poseer una herramienta y no saber qué hacer con ella. Bajo esta misma analogía, ignorar el fundamento que hay detrás de un método equivale a ignorar cómo funciona la herramienta; a veces esto puede provocar accidentes que, en el contexto de las matemáticas, se traducen en errores de intuición, de análisis, o bien, de interpretación. Los resultados de la prueba PISA 2015 (OCDE, 2016) podrían ser la consecuencia de que, hoy en día, prevalece el sistema tradicional en la enseñanza de las matemáticas.

3.1.5 La problemática en la enseñanza-aprendizaje del Análisis Combinatorio

En el capítulo anterior se analizaron y compararon las investigaciones de Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (1996) y Roa, Batanero y Godino (2003), a partir de las cuales se concluyó que aún en los niveles de educación superior existe una dificultad generalizada para resolver problemas de conteo, incluso tratándose de aquellos problemas que se resuelven con una operación combinatoria única, denominados problemas combinatorios simples.

Más evidencia de esta problemática se encuentra en la investigación de Sastre y Panella (2008), quienes estudiaron los errores más frecuentes cometidos por estudiantes de licenciatura en la materia de Matemáticas Discretas; última que comprende los contenidos del Análisis Combinatorio. Por su parte, Melusova y Vidermanova (2015), quienes estudiaron la relación que hay entre las estrategias empleadas por estudiantes para resolver problemas de conteo y el nivel de éxito logrado, consideran que el análisis combinatorio es uno de los tópicos más difíciles en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Ante dicha problemática, la pregunta natural es: ¿Cuáles son las dificultades en torno a la enseñanza y el aprendizaje del análisis combinatorio? Antes de responder a la pregunta anterior, conviene describir las características de una clase de análisis combinatorio bajo el modelo tradicional de enseñanza.

Bajo el modelo tradicional, el profesor invierte la mayoría del tiempo de clase para introducir y explicar a los estudiantes los conceptos y fórmulas características del análisis combinatorio; estas refieren a las ordenaciones con repetición, a las permutaciones, a las ordenaciones sin repetición y las combinaciones sin repetición. Lo anterior generalmente se hace bajo el *modelo combinatorio* *de selección* (véase Roa *et al.*, 2003); es decir, interpretando cada una de las nociones como una extracción de objetos, o bien, como una selección de ellos.

Una vez que los conceptos y fórmulas han sido introducidos y explicados por el profesor, resta poco tiempo para abordar algunos ejemplos concretos. De este modo, los alumnos se limitan a seguir pasivamente la explicación del profesor, quien ejemplifica cómo utilizar las fórmulas y cómo aplicar el principio fundamental del conteo para el caso de las ordenaciones con y sin repetición. Cabe señalar que resolver un problema de conteo exige un análisis riguroso del problema, por lo que los estudiantes deben mostrarse activos frente al problema.

Dado que la cantidad de temas es extensa y el tiempo para abordarlos es reducido, no se dispone de tiempo suficiente para promover la reflexión ni el análisis de los temas, tampoco para aplicar los conocimientos en situaciones concretas. Rara vez se discute el fundamento de las fórmulas y de los métodos empleados y, si se hace, es con argumentos superficiales que poco ayudan al estudiante a comprender lo que ocurre de fondo.

En lo que al principio fundamental del conteo se refiere, suele suponerse que los estudiantes conocen los fundamentos del principio, últimos que se remontan a la educación básica; esto a pesar de que los resultados de la prueba PISA 2015 (OCDE, 2016) señalan que existe una deficiencia en el aprendizaje de aquellos temas por parte de los estudiantes. El profesor tampoco ejemplifica problemas de conteo donde no sea válido aplicar el principio fundamental, al menos no de forma inmediata.

Aunado a lo anterior se debe considerar que, para resolver un problema de conteo, los alumnos deben aplicar e interpretar las operaciones básicas con un nivel de complejidad superior al que utilizan en la vida cotidiana. Para el caso de la multiplicación, los estudiantes se enfrentan a situaciones cotidianas en las que deben calcular el producto de dos y sólo dos números; por ejemplo, al calcular el costo de solicitar un número determinado de fotocopias en la papelería. Sin embargo, aplicar el principio fundamental del conteo generalmente implica calcular e interpretar el producto de tres o más números naturales; operación que está asociada con calcular el número de ramas finales de un diagrama de árbol, así como con la cardinalidad de espacios n-dimensionales.

Para el caso de la división, los alumnos están familiarizados con aplicar esta operación en situaciones donde requieren partir una cantidad en un número determinado de partes iguales entre sí. Ejemplo de esto se da cuando un grupo de estudiantes deben pagar el costo de un material y deciden dividirse el gasto de forma igualitaria. En este contexto, el cociente de la división refiere a la cantidad que le corresponde a cada una de las partes.

Sin embargo, en el caso del Análisis Combinatorio, la división suele aplicarse en un sentido más complejo, y generalmente implica comparar dos cantidades enteras de gran tamaño. Ejemplo de esto es la deducción de la fórmula para calcular el número de combinaciones posibles al extraer cierto número de objetos de un conjunto dado. En este caso se emplea la división para calcular cuántos grupos de ordenaciones sin repetición se forman si se integran en un mismo grupo aquellas ordenaciones formadas con exactamente el mismo subconjunto de elementos. A esta aplicación de la división se le denomina *la regla del cociente*.

En su investigación, Roa *et al.* (2003) observaron que la regla del cociente fue una de las estrategias aritméticas menos empleadas por los estudiantes de la licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada. Por la razón anterior, concluyeron que la regla del cociente es la menos intuitiva de las estrategias aritméticas. También observaron que *la regla del producto* fue la estrategia más empleada por dichos estudiantes, y por lo tanto la más intuitiva; aunque consideran que los resultados obtenidos deben mejorarse. Esta última regla es la que refiere al principio fundamental del conteo.

En síntesis, el problema con la enseñanza del Análisis Combinatorio radica en que el profesor apenas dispone del tiempo de clase suficiente para introducir los conceptos y fórmulas elementales, así como para ejemplificar la resolución de algunos problemas sencillos. Rara vez se destina tiempo para reflexionar sobre los fundamentos del conteo. Por otra parte, los problemas de aprendizaje se deben a que los estudiantes se limitan a escuchar pasivamente la clase del profesor; esto en lugar de tener una participación activa en la resolución de problemas combinatorios. Tampoco se retoman ni profundizan aquellos conocimientos de la educación básica que se entrelazan con el Análisis Combinatorio y que son indispensables para desarrollar el pensamiento crítico de los estudiantes.

Para el autor del presente trabajo, el énfasis en la enseñanza-aprendizaje del Análisis Combinatorio no debe recaer en cubrir la totalidad de los temas que integran el programa de estudios. Por el contrario, se debe priorizar el desarrollo de aquellas habilidades y capacidades que forman parte del pensamiento combinatorio del estudiante; estas son el análisis, la intuición y la evaluación, así como también la reflexión y la profundización de los conocimientos adquiridos durante la educación básica. De este modo, los conceptos, fundamentos y fórmulas del Análisis Combinatorio adquieren importancia sólo como un medio para lograr el desarrollo de habilidades y capacidades relevantes, no sólo para las matemáticas, sino también para la vida misma.

Con base en lo anterior, se ha propuesto cuatro puntos que, se espera, sirvan como un modelo a los docentes para guiar la planeación y el diseño de secuencias didácticas de enseñanza-aprendizaje dentro del campo del Análisis Combinatorio. Estos cuatro puntos son presentados y explicados en el siguiente cuadro:

I **Fomentar la reflexión sobre el uso y aplicación de las reglas aritméticas que dan fundamento a las operaciones combinatorias elementales.**	No se puede negar que los conceptos y fórmulas del análisis combinatorio son relevantes para la creación de modelos estadísticos avanzados. Sin embargo, es ambicioso introducir un concepto o fórmula cuando los alumnos carecen de las bases lógicas necesarias. Por esta razón, promover la reflexión sobre los fundamentos del conteo y las estrategias aritméticas debe tener mayor prioridad que introducir las fórmulas elementales del conteo. Esto implica retomar y profundizar aquellos conocimientos adquiridos durante la educación básica; de tal modo que los estudiantes reflexionen sobre la aplicación de las operaciones elementales en diferentes contextos, especialmente para el caso de la multiplicación y de la división.
II **Plantear a los alumnos problemas contextualizados de conteo que permitan desarrollar su capacidad de análisis.**	No olvidemos que el término ‘Análisis Combinatorio’ recibe su nombre porque dar solución a un problema de conteo exige llevar a cabo un análisis previo del problema que se desea resolver. Aquí conviene mencionar que en la vida cotidiana existen situaciones sobre las cuales es posible diseñar problemas contextualizados de conteo cuya solución no es evidente para los estudiantes e, incluso, para el mismo docente. Estos problemas fomentan un pensamiento analítico en aquellos quienes acepten el reto de resolverlos.

III **Guiar la instrucción con el propósito de detonar el desarrollo de intuiciones secundarias en los estudiantes.**	Para resolver un problema de conteo, los estudiantes deben dejarse guiar por su intuición, esto con el propósito de hallar un método de solución al problema planteado. Sin embargo, hay intuiciones que para ser detonadas se requiere del aprendizaje previo de modelos generativos, tal como es el caso de los diagramas de árbol (Fischbein, 1975), así como de formas de razonamiento que se desarrollan a través de la reflexión mediada por la instrucción.
IV **Solicitar a los estudiantes que argumenten la validez del método de solución propuesto para un problema de conteo.**	Si bien la intuición es el medio a través del cual un estudiante propone un método de solución a un problema combinatorio determinado, el estudiante aún debe corroborar que el método intuido sea válido en todos los sentidos. Para ello, debe analizar una vez más el problema combinatorio; pero esta vez debe hacerlo en conjunto con el método de solución intuido y evaluar si las operaciones aritméticas que lo integran son las correctas bajo las condiciones del problema. Es en este paso cuándo se articula el razonamiento intuitivo con el de tipo deductivo. Esta articulación es importante, pues como señala Crespo (2008), un resultado intuitivo sin una argumentación lógica que la respalde puede conducir a un resultado erróneo.

3.2 DISEÑO Y JUSTIFICACIÓN DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

Para el presente trabajo se planteó como un objetivo original desarrollar una propuesta de enseñanza-aprendizaje que cubriera la totalidad de los temas del Análisis Combinatorio que forman parte del programa de estudios de la materia Estadística y Probabilidad de la ENP. Sin embargo, implementar la propuesta bajo este propósito inicial habría exigido más tiempo para su diseño e implementación del que se disponía; razón por la cual se tomó la decisión de acotar el proyecto sólo al tema del Principio Fundamental del Conteo, por tratarse del punto de partida para abordar los demás temas del Análisis Combinatorio.

Resolver problemas de conteo requiere desarrollar un pensamiento reflexivo sobre las operaciones básicas, especialmente la multiplicación y la división. Por esa razón, también se llevó a cabo el diseño e implementación de una sesión cuyo objetivo fue promover la reflexión sobre la aplicación de las operaciones básicas en diversos contextos de la vida cotidiana; sesión que también sirvió como un diagnóstico para evaluar los conocimientos previos y las habilidades de los estudiantes, necesarias para el estudio del Análisis Combinatorio.

El desarrollo metodológico y la evaluación de los resultados se abordarán a lo largo de los capítulos 4 y 5. Mientras tanto, en lo que resta del presente capítulo se enunciarán algunas de las razones que ratifican la importancia del del Análisis Combinatorio como parte del currículo de matemáticas del nivel medio superior, así como también se justificará el diseño e implementación de la presente propuesta de enseñanza-aprendizaje. Por último, se enlistarán los objetivos generales y específicos de este trabajo.

3.2.1 Justificación de una propuesta de enseñanza-aprendizaje

En la sección anterior se planteó la problemática que hay en torno a la enseñanza-aprendizaje del Análisis Combinatorio. Sin embargo, es conveniente preguntarse: ¿Por qué es importante enseñar el análisis combinatorio a los estudiantes del nivel medio superior? Uno de los grandes problemas con el currículo de matemáticas tanto de la ENP como del CCH es que integra una cantidad extensa de contenidos; el Análisis Combinatorio, por sí solo, comprende la enseñanza del principio fundamental del conteo, las ordenaciones con repetición, las permutaciones, las ordenaciones sin repetición y las combinaciones.

Por la razón anterior, se deben tener motivos que ratifiquen al Análisis Combinatorio como parte integral del currículo de matemáticas en el nivel medio superior. A continuación, se presentan algunas de estas razones:

a) Resolver problemas de conteo permite desarrollar mayores niveles de comprensión sobre el uso y la aplicación de las operaciones básicas a problemas y situaciones de la vida cotidiana. Los resultados de la prueba PISA 2015 (OCDE, 2016) dan evidencia de lo importante que es reflexionar y profundizar en torno a dichas operaciones; las cuales son una pieza clave para desarrollar el pensamiento crítico de los estudiantes.
b) Los problemas reales de conteo no siempre pueden resolverse mediante la aplicación mecánica de una fórmula. Por el contrario, en la vida real es posible encontrar situaciones que derivan en problemas de conteo que, para ser resueltos, se debe llevar a cabo un análisis

a fondo del problema o situación, de tal modo que sea posible proponer un método de solución. Por esta razón, resolver problemas de conteo fomenta el desarrollo de habilidades como la reflexión, el análisis, la intuición y la evaluación.

c) No está de más decir que el Análisis Combinatorio sienta las bases de métodos probabilísticos y estadísticos avanzados que son abordados en los niveles de educación superior. Hoy en día la estadística y la probabilidad juega un papel fundamental en la investigación, y las técnicas de conteo son parte integral de ambas disciplinas.

De acuerdo con Crespo (2008), “es necesario que los niños aprendan a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando sea posible, ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones, aunque sin exigencia de formalización” (pp. 117-118). El estudio del Análisis Combinatorio permite a los estudiantes desarrollar algunas de las habilidades matemáticas antes mencionadas. Para resolver un problema de conteo, el estudiante debe analizar el problema y después intuir un método de solución. Posteriormente, deberá analizar el problema una vez más; pero esta vez con el propósito de evaluar si el método intuido es o no válido como método de solución bajo las condiciones del problema. En el caso de que se compruebe la validez del método, este puede ser generalizado y aplicado a situaciones análogas a las del problema para el que fue originalmente propuesto.

Por otra parte, en OCDE (s. f.) se menciona que “El concepto general de competencia matemática se refiere a la capacidad del alumno para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas… e implica la capacidad de emplear el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana” (p. 12). En este sentido, el estudio del Análisis Combinatorio contribuye al desarrollo de la competencia matemática en los estudiantes, pues resolver problemas de conteo definidos sobre un contexto real permite a los estudiantes desarrollar habilidades como son la reflexión, el análisis, la intuición y la evaluación.

Conviene recordar que Bishop (2000) considera que contar es una de las prácticas matemáticas que están presentes en todas las culturas, razón por la cual es importante que los individuos desarrollen su capacidad para la estimación y el cálculo de cantidades grandes. El Análisis Combinatorio aporta herramientas a dicho fin, y el Principio Fundamental del Conteo (cuyo fundamento yace en los diagramas de árbol) es quizá la herramienta más importante de esa rama de las matemáticas.

Tomando en cuenta todo lo anterior, se justifica el diseño e implementación de la presente propuesta de enseñanza-aprendizaje del principio fundamental del conteo para el nivel medio superior; esto bajo el modelo de aula invertida. Así, se encomienda a los estudiantes la tarea de estudiar los conceptos más elementales de forma autónoma, mientras que el tiempo de clase es destinado para fomentar un aprendizaje activo de su parte. Así, durante la clase, los estudiantes participan en la resolución de problemas concretos de conteo que les exigen poner en práctica habilidades como son la reflexión, el análisis, la intuición y la evaluación.

Por otra parte, la propuesta también se diseñó bajo el modelo de competencias; esto permitió centrar los objetivos sobre las capacidades que se espera desarrollar en los estudiantes; así como en las habilidades necesarias para ello. A su vez, se tomó como base el paradigma de la educación matemática realista de Freudenthal (véase Goffree, 2000) para el diseño de los problemas combinatorios y de conteo que integran la propuesta; de tal modo que los estudiantes aplicaron sus conocimientos sobre situaciones reales.

3.2.2 Objetivo general y objetivos específicos

Como objetivo general del presente trabajo se propuso el diseño de una propuesta de enseñanza-aprendizaje del Principio Fundamental del Conteo para ser implementada en los cursos de Estadística y Probabilidad del nivel medio superior, y para lo cual se tomó como base los programas de estudio de Estadística y Probabilidad I y II del CCH, así como el de Estadística y Probabilidad de la ENP. La propuesta fue diseñada bajo el modelo de aula invertida (véase la subsección 1.2.3 del capítulo 1) y con base en los principios del paradigma de la educación matemática realista de Freudenthal (Goffree, 2000).

Aunque la propuesta fue diseñada para ser implementada en los sistemas de educación media superior de la UNAM, esta es, en general, aplicable a todos los sistemas de educación media superior que tienen sus sedes dentro de las zonas urbanas de México. Este punto es muy importante porque para el diseño de la propuesta se ha tomado como referencia el contexto personal, social y cultural que caracteriza a aquellos estudiantes de bachillerato que residen dentro de alguna de las zonas metropolitanas del país.

Conviene señalar que la razón por la cual se eligió el modelo de aula invertida para el diseño de la propuesta es porque los conocimientos más elementales en torno al Principio Fundamental del Conteo pueden ser estudiados de forma autónoma por los estudiantes; esto con el apoyo de recursos didácticos adecuados. Para esto, el diseño de la propuesta incluye la edición de dos documentos (anexos A y B) que sirven como texto introductorio del Principio Fundamental del Conteo. Dicho material fue diseñado para ser estudiado por los estudiantes como una actividad extra-clase. Conviene recordar que en la subsección 1.2.3 del capítulo 1 se expusieron diversas razones que motivaron el diseño y edición del material de lectura en lugar de otro tipo de materiales.

El primero de los textos (anexo A) tiene como propósito que los estudiantes retomen aquellos conocimientos de la educación básica necesarios para el estudio del Análisis Combinatorio. Por su parte, el segundo texto (anexo B) introduce los fundamentos del Principio Fundamental del Conteo y proporciona ejemplos concretos de aplicación del principio; últimos que presentan un bajo grado de dificultad en comparación con los problemas implementados durante la clase. Este último texto también comprende algunos ejemplos donde no es válido aplicar el principio.

Por su parte, las sesiones de clase fueron diseñadas para promover la reflexión en los estudiantes sobre los fundamentos y las aplicaciones de los temas que la propuesta comprende, así como para analizar y resolver problemas de conteo con un grado de dificultad mayor a los ejemplificados en los textos de los anexos A y B.

Como objetivo específico se propuso implementar la propuesta en un grupo de la materia Estadística y Probabilidad I del CCH plantel Sur, así como evaluar los aprendizajes alcanzados por los estudiantes. La propuesta comprende el diseño e implementación de tres problemas que fueron analizados, discutidos y resueltos de manera grupal y con la guía del profesor. Por su parte, se diseñaron otros tres problemas para el proceso de evaluación; los estudiantes también los trabajaron de forma colaborativa, aunque esta vez sin la guía del profesor.

En lo que refiere a los resultados de la evaluación, se llevó a cabo un análisis meticuloso sobre los métodos de solución redactados por los estudiantes, se analizaron y describieron los errores, y también se llevó a cabo un análisis sobre las intuiciones implícitas en cada uno de los métodos presentados.

CAPÍTULO 4

DESARROLLO METODOLÓGICO Y ANÁLISIS DE LA PRIMERA SESIÓN

Como se describió en capítulos anteriores, la presente tesis es el resultado del diseño e implementación de una propuesta de enseñanza-aprendizaje sobre el Principio Fundamental del Conteo. Aunque este último es el tema central de la propuesta; en ella también se retomaron y profundizaron algunos temas de la educación básica referentes a la aplicación e interpretación de las operaciones elementales en diversos contextos de la vida real.

La propuesta se diseñó bajo el modelo de aula invertida y fue implementada en un grupo de materia Estadística y Probabilidad I del turno matutino del CCH plantel Sur, el cual estaba conformado por un total de 39 estudiantes. Para su implementación, se dispuso de dos sesiones de 100 minutos cada una, más una sesión previa de 20 minutos en la que se explicó y encomendó a los estudiantes las actividades extra-clase que debían llevar acabo de forma previa a cada una de las sesiones de clase.

Para el diseño de la propuesta también se tomó como referencia el paradigma de la educación matemática realista de Freudenthal (Goffree, 2000), último que ya fue descrito en el capítulo 1 de la tesis. Cabe destacar que, aunque se tomaron como base los programas de estudio de Estadística y Probabilidad I y II del CCH, así como el de Estadística y Probabilidad y Temas Selectos de Matemáticas de la ENP, la propuesta está diseñada para ser implementada en cualquiera de las instituciones de educación media superior de las diferentes zonas metropolitanas de México. Esto último es importante porque para el diseño de la propuesta se tomó en cuenta el contexto personal, social y cultural en el que se desenvuelve un estudiante promedio de dichas zonas.

En este capítulo se describirá el desarrollo metodológico seguido durante la implementación de la 1ª sesión de la propuesta, la cual comprende tanto un proceso de instrucción como también uno de evaluación. En lo que refiere al proceso de instrucción, se anexa una transcripción literal de las participaciones de los alumnos y la guía del profesor. Respecto a la evaluación, se presentarán los resultados de la misma, seguido de un análisis riguroso de los resultados, y con especial énfasis en los métodos y procedimientos realizados por los estudiantes para resolver los problemas planteados durante la evaluación.

Aquí conviene mencionar que en total se llevaron a cabo dos evaluaciones, las cuales corresponden con las dos sesiones implementadas. Ambas evaluaciones fueron diseñadas con el propósito de desarrollar y evaluar en los estudiantes su capacidad para analizar un problema de conteo, comprenderlo, y después intuir, evaluar y aplicar un método que permita calcular con precisión el conjunto de objetos o posibilidades que se desea contar. En particular, uno de los aspectos que se desea evaluar es el desarrollo de intuiciones por parte de los estudiantes.

La primera sesión tiene el propósito de retomar algunos contenidos de la educación básica referente a la aplicación e interpretación de las operaciones aritméticas elementales en diferentes contextos de la vida real. Con ello se espera que los alumnos desarrollen su capacidad para analizar y resolver problemas que requieren de la aplicación e interpretación de múltiples operaciones, y así fomentar habilidades características del pensamiento matemático como son la reflexión, el análisis, la intuición y la evaluación. También se espera fomentar en los estudiantes el razonamiento deductivo y articularlo con el de tipo intuitivo. Aunque los temas abordados durante la primera sesión refieren a la educación básica, los estudiantes no siempre desarrollan un aprendizaje profundo de ellos; evidencia de esto se encuentra en los resultados de la prueba PISA 2015 (véase OCDE 2016).

La primera clase también sirvió como un diagnóstico, pues el profesor implementador tuvo la oportunidad de conocer mejor al grupo y de evaluar sus conocimientos previos. En forma general, durante sesión se promovió en los estudiantes la reflexión y la aplicación e interpretación de *la regla del cociente* en una diversidad de situaciones concretas. Aunque este tema se abordó bajo la restricción de operar sólo con números naturales y sólo cuándo la división es exacta, esta restricción fue omitida durante el análisis de algunos de los problemas planteados.

En lo que refiere a la segunda sesión, su propósito fue que los estudiantes aprendieran y aplicaran el *Principio Fundamental del Conteo*, de tal modo que les sea posible llevar a cabo el conteo de cantidades grandes. Los estudiantes aprendieron los fundamentos del principio como una actividad extra-clase; mientras que en el aula analizaron y resolvieron problemas en los que deben llevar a cabo el conteo de cantidades grandes, y cuya estructura les impide aplicar el principio fundamental de forma inmediata. El objetivo de esto fue que los estudiantes intuyeran, evaluaran y aplicaran métodos de solución con los cuales se pueden resolver las dificultades que este tipo de problemas presentan. Lo referente a la implementación y evaluación de la segunda sesión será abordado en el capítulo siguiente; pues el presente capítulo se limitará a la descripción y evaluación de la primera sesión.

Aclarado lo anterior, conviene hacer una breve descripción sobre el contenido del capítulo. En la primera sección se describirá el desarrollo de la sesión previa de 20 minutos que tuvo lugar antes de la implementación de la propuesta. En la segunda sección, se discutirán diversos aspectos referentes al diseño y la planeación de la primera sesión. En la tercera sección se hará una descripción del proceso de instrucción, también se llevará a cabo una autocrítica sobre el desarrollo de la misma. En la cuarta sección se describirá el proceso de evaluación, se presentarán los resultados, y se analizarán de manera rigurosa. Finalmente, en la quinta y última sección se presentarán las conclusiones generales referentes a la implementación y evaluación de la primera sesión.

4.1 DESARROLLO DE LA SESIÓN PREVIA

Como ya se mencionó con anterioridad, la propuesta fue implementada en un grupo de la materia Estadística y Probabilidad I del turno matutino del CCH plantel sur, y el cual estaba conformado por 39 alumnos. La propuesta fue implementada por el autor de la presente tesis, quien se presentó con el grupo una semana antes de la fecha programada para la implementación. Para evitar confusión, se referirá al autor de esta tesis como 'el profesor implementador', o simplemente como 'el profesor'; mientras que a la profesora titular del grupo se le referirá como 'la profesora titular', o bien, como 'la profesora'.

Como parte de sus estrategias docentes, la profesora ya había acordado una forma de estar en contacto con sus estudiantes a través de la creación de un grupo en la red social de Facebook; de este modo de fue posible compartir a los estudiantes las tareas, actividades y material relacionado con la materia de Estadística y Probabilidad I y II. Esto último trajo muchas facilidades al profesor implementador, quien fue agregado al grupo en Facebook de tal modo que le fue posible estar en comunicación con el grupo durante el periodo de la implementación, así como también le facilitó la tarea de enviar a los estudiantes el material extra-clase que se les encomendó estudiar de forma previa a cada sesión.

La sesión previa tuvo lugar el lunes 5 de noviembre del 2018, la profesora titular otorgó al profesor implementador un espacio de 20 minutos para que pudiera presentarse frente al grupo; y así explicarles en qué consistía la propuesta, la fecha de las sesiones, y las actividades que ellos debían realizar como una actividad extra-clase previa a cada sesión.

Sobre esto último, el profesor notificó a los estudiantes que, a través de la plataforma de Facebook, se les proporcionaría un primer texto (anexo A) el cual se les encomendó estudiar como una actividad extra-clase previa a la primera sesión, última que se llevó a cabo una semana después: el día lunes 12 de noviembre del 2018. Además, se les encomendó contestar un cuestionario de opinión (anexo D) sobre la lectura del anexo A; último que también debían imprimir y contestar como una actividad extra-clase.

El propósito del cuestionario de opinión fue que los alumnos evaluaran el texto del anexo A, de tal modo que al final de la implementación se contara con una base de opiniones sobre las cualidades y deficiencias del texto. También se diseñó un cuestionario similar (anexo E) para la evaluación del texto del anexo B; el cual se encomendó a los estudiantes leer como una actividad extra-clase previa a la segunda sesión.

El texto del anexo A y su respectivo cuestionario de opinión (anexo D) se compartieron en el grupo de Facebook el día miércoles 7 de noviembre del 2018, de tal modo que los estudiantes contaron con al menos cuatro días para estudiar el documento, así como para contestar el cuestionario de opinión. Aquí conviene mencionar que, minutos antes de que diera inicio la primera sesión, algunos estudiantes expusieron una duda al profesor referente a la última pregunta del cuestionario. Al revisarla, el profesor identificó un error en la pregunta que tuvo lugar durante la edición del documento. Los detalles sobre el primer cuestionario de opinión serán abordados más adelante en este mismo capítulo.

4.2 DESARROLLO METODOLÓGICO DE LA 1ª SESIÓN

La propuesta se desarrolló con el objetivo de que los estudiantes desarrollen su capacidad para *resolver problemas contextualizados de conteo*; esta última es la competencia general por desarrollar en la propuesta. Recuerde que los problemas de conteo refieren a aquellas situaciones en las que se debe llevar a cabo el conteo de un conjunto de elementos, o bien, de posibilidades; algo que a menudo implica trabajar con cantidades grandes y poco intuitivas. Cuando se habla de problemas contextualizados, se refiere a situaciones que son familiares a los estudiantes con base a su contexto personal, social, cultural o profesional.

No obstante, los problemas de conteo abarcan un gran número de situaciones, y muchas de ellas requieren de técnicas específicas; algunas de las cuales se escapan de los límites definidos para la presente propuesta. De este modo, la propuesta aquí desarrollada solo abarca algunas de las subcompetencias que conforman a la competencia general. Específicamente, la propuesta desarrolla dos subcompetencias que contribuyen al desarrollo de la competencia más general.

En lo que refiera a la primera sesión, se propuso que los estudiantes desarrollen su capacidad para resolver problemas de conteo que no exigen el desarrollo de un pensamiento combinatorio; pero sí exigen un pensamiento reflexivo sobre la aplicación e interpretación de las operaciones aritméticas elementales en una diversidad de contextos.

Por su parte, la segunda sesión sí tiene la finalidad de que los estudiantes desarrollen su capacidad para resolver problemas de conteo que involucran un pensamiento combinatorio; específicamente de aquellas situaciones en las que se requiere la aplicación del Principio Fundamental del Conteo. Este principio permite conocer el conjunto de posibilidades como puede ocurrir una secuencia de eventos; el término ‘*evento*’ puede tener distintos significados según el contexto, pero por lo general este refiere a una situación o fenómeno que puede ocurrir de múltiples formas posibles.

4.2.1 La competencia por desarrollar durante la 1ª sesión

La primera sesión tiene como propósito que los alumnos desarrollen su capacidad para *resolver problemas contextualizados de conteo mediante la aplicación e interpretación de las operaciones aritméticas elementales*; esta es la primera de las dos competencias a trabajar en la propuesta. Para esto, se hizo especial énfasis en la aplicación e interpretación de *la regla del cociente*; última que refiere a la aplicación de la operación división. Esta regla juega un papel importante en el análisis combinatorio, y puede interpretarse de más de una forma. En su investigación, Roa et al. (2003) llegó a la conclusión de que la regla del cociente es poco intuitiva, incluso para estudiantes con una educación matemática avanzada.

La regla del cociente está implícita al aplicar y resolver una *regla de tres*. Sin embargo, esta última regla suele ser aplicada por los alumnos de una forma parcialmente mecánica; es decir, no hay una interpretación de las operaciones aritméticas implicadas. En la primera sesión los estudiantes resolvieron problemas que requieren la aplicación de una regla de tres; sin embargo, se les solicitó que interpretaran cada una de las operaciones implicadas, esto con el fin de hacer explícita la regla del cociente durante el procedimiento.

Además, la primera sesión también puede concebirse como un diagnóstico que permitió al profesor implementador conocer mejor al grupo, así como evaluar los conocimientos previos de los estudiantes. En la siguiente tabla se presenta los requisitos cognitivos, procedimentales y actitudinales que integran la competencia a desarrollar durante la primera sesión.

Competencia general: resuelve problemas contextualizados de conteo.		
Competencia particular: resuelve problemas contextualizados de conteo mediante la aplicación e interpretación de las operaciones aritméticas elementales.		
Requisitos cognitivos	**Requisitos procedimentales**	**Requisitos actitudinales**
• Interpreta en situaciones concretas el resultado obtenido al multiplicar dos números naturales, esto a partir de la definición elemental de la multiplicación. • Interpreta en situaciones concretas el resultado de dividir un número natural entre otro; cuando se desea partir una cantidad en partes iguales y cuando se pretende comparar ambas cantidades. • Interpreta y aplica las operaciones aritméticas básicas para extraer la información cuantitativa relevante.	• Analiza problemas básicos de conteo y extrae la información cuantitativa relevante que yace implícita. • Intuye, evalúa y aplica un método de solución personal para llegar a la solución de un problema básico de conteo.	• Fomenta el hábito de la lectura como un medio para el autoaprendizaje. • Fomenta el aprendizaje cooperativo, para lo cual expresará sus propias ideas y también escuchará las ideas de sus compañeros.

4.2.2 Diseño y planeación de la 1ª sesión

Para la implementación de la primera sesión se redactó una planeación que le sirviera de guía al profesor durante la instrucción. Esta planeación puede consultarse en el anexo F de la presente tesis. Sin embargo, ya durante la implementación se tomó la decisión de omitir algunas fases de la planeación original y, al mismo tiempo, se consideró abordar algunos puntos y actividades que no formaban parte de su diseño.

Respecto a la evaluación de la primera sesión, se diseñó e implementó un problema que puede consultarse en el anexo H de la tesis. Dicho problema les fue entregado a los estudiantes de forma impresa; posteriormente se les solicitó resolverlo y redactar ahí mismo el método de solución aplicado, y bajo la instrucción de que debían escribir y explicar el propósito de cada una de las operaciones implicadas. También se diseñó un segundo problema el cual se consideró para la evaluación y el cual puede consultarse en el anexo I; sin embargo, durante la sesión se tomó la decisión de implementar el problema como parte de la instrucción.

Como ya se comentó, durante la implementación de la primera sesión se tomó la decisión de hacer algunas modificaciones al diseño original de la planeación (anexo F), y la cual poseía la siguiente estructura:

1) Al comienzo de la sesión se solicita a los alumnos entregar el cuestionario de opinión (anexo D) sobre el texto del anexo A, último que se les encomendó contestar como una actividad extra-clase junto con la lectura del texto.
2) Se cuestiona a los alumnos sobre cuáles son los números naturales.
3) Se discuten con los estudiantes algunas estrategias que facilitan el cálculo mental de ciertas clases de multiplicaciones.
4) Se discute con los estudiantes las diferentes interpretaciones del cociente de la división al aplicar esta operación en una diversidad de contextos de la vida cotidiana. Se abordan los problemas #1 y #2 de la planeación (anexo D) y se invita a los estudiantes a reflexionar sobre las diferencias que hay entre las dos formas de interpretar el cociente de una misma división.
5) Se cuestiona a los alumnos qué sucede cuando no es posible dividir un número entre otro de forma exacta; esto es cuando el residuo es distinto de cero.

6) Se plantea a los alumnos el problema #3 y se guía la instrucción para que los alumnos lleguen a la solución del problema. Para esto, se les pone como condición que interpreten cada una de las operaciones implicadas; de tal modo que no se permite la aplicación mecanizada de la regla de tres.
7) El profesor entrega a los alumnos el problema impreso del anexo H. Después se solicita a los alumnos resolver el problema y redactar en la misma hoja el método de solución aplicado; para ello se les da la instrucción de escribir y explicar el propósito de cada una de las operaciones aplicadas. Se les otorga el tiempo necesario para que resuelvan el problema y redacten el procedimiento aplicado.
8) En el caso de que reste tiempo tras la implementación del problema del anexo H, se complementa la evaluación con el problema el anexo I; último que el profesor debe escribir en el pizarrón para que los alumnos puedan escribirlo en una hoja de su cuaderno.

Sin embargo, durante la implementación se optó por hacer modificaciones al diseño original de la planeación (anexo F). Estas modificaciones consistieron en omitir el paso 3, pues se consideró que podría resultar tedioso a los estudiantes. También se abrió un espacio para abordar algunos puntos que no se habían considerado en la planeación original. Un último cambio fue que el problema del anexo I no se implementó como un problema de evaluación; este se abordó hacia el cierre de la sesión de tal modo que los estudiantes lo resolvieron con la guía del profesor. De este modo, la primera sesión quedó integrada por las siguientes fases:

1) Fase I: Al comienzo de la sesión se solicitó a los estudiantes entregar el cuestionario de opinión sobre la lectura del anexo A. También se cuestionó a los estudiantes sobre su opinión general del texto.
2) Fase II: Se cuestiona a los estudiantes sobre cuáles son los números naturales; también se les pregunta si el cero forma parte de dicho conjunto de números. Se llega al acuerdo de que, para los fines de la propuesta, se excluirá al número cero del conjunto de los números naturales.
3) Fase III: Los estudiantes leen y resuelven los problemas #1 y #2 de la planeación del anexo F; luego se les invita a reflexionar sobre las diferentes interpretaciones y aplicaciones de la misma división que resuelve ambos problemas.

4) Fase IV: Las conclusiones de la fase III se trasladan al caso de los números racionales. Esta parte de se trabaja con una analogía donde se identifican los componentes de la división.
5) Fase V: Se cuestiona a los alumnos sobre qué sucede cuando la división de dos números naturales no es exacta.
6) Fase VI: Esta es la fase más importante de la instrucción de la primera sesión. En ella se plantea a los estudiantes el problema #3 de la planeación del anexo F y se guía la instrucción para que los estudiantes resuelvan el problema. Para esto, se pone como condición a los estudiantes que interpreten cada una de las operaciones implicadas; de tal modo que no se considera válido aplicar la regla de tres de forma mecánica.
7) Fase VII: Da inicio el proceso de evaluación. Los estudiantes reciben una copia impresa del problema del anexo H; cuentan con un tiempo límite de 50 minutos para resolverlo y redactar el método de solución aplicado. Todos los estudiantes concluyeron la actividad en un tiempo inferior a 30 minutos, de tal modo que restaron 20 minutos para implementar la siguiente fase.
8) Fase VIII: El profesor escribe en el pizarrón el problema del anexo I y guía la instrucción para que los alumnos lleguen a la solución del problema.

Observe que la fase VII corresponde al proceso de evaluación de la primera sesión; los resultados serán presentados y analizados más adelante en este capítulo. Mientras tanto, en la siguiente sección se llevará a cabo una descripción detallada de la instrucción; también se realizará un análisis y una autocrítica de la misma.

4.3 LA INSTRUCCIÓN DURANTE LA 1ª SESIÓN

En esta sección se describirá el proceso de instrucción de la primera sesión. Para esto, se realizó la grabación de un audio con el cual se registró el desarrollo de la instrucción. Sin embargo, la calidad del audio grabado no permitió registrar todas las participaciones de los estudiantes; por esta razón sólo se analizarán las participaciones de aquellos alumnos cuya voz fue registrada en la grabación.

La sección será dividida en siete subsecciones, cada una refiere a la descripción y el análisis de alguna de las fases que integraron la instrucción de la primera sesión. Además, en algunas subsecciones se anexará la transcripción literal de las participaciones de los estudiantes. Esto último dependerá de la calidad del audio registrado durante la implementación de la propuesta, así como de la relevancia de las participaciones para su análisis y su discusión. En algunas subsecciones también se realizará una autocrítica sobre el desarrollo de la instrucción.

Aquí conviene explicar cómo se presentará la transcripción de las participaciones del profesor y de los estudiantes. Cada participación será enumerada conforme a la fase en la que tuvieron lugar; además, a un conjunto de participaciones se le referirá como 'diálogo'. Las participaciones se transcribieron de la forma más fiel posible; sin embargo, debido a la calidad del audio, no se descarta que haya alguna transcripción errónea debido a las limitaciones de la percepción humana. Aquellos fragmentos de las participaciones que no fueron registrados por la grabación serán omitidos y referidos con puntos suspensivos '…'; por su parte, se usarán corchetes '[…]' para explicar y describir las reacciones de los estudiantes; últimas que no pueden ser percibidas en la transcripción.

Dado que el profesor no conoció al grupo hasta una semana antes de la implementación, no conoció a los estudiantes lo suficiente como para reconocer y diferenciar la voz de cada uno. Por esa razón, no le fue posible identificar y dar seguimiento a las participaciones de todos los estudiantes. Si bien fue posible dar seguimiento a la participación de algunos estudiantes en específico, tampoco se está exento de haber omitido alguna de sus participaciones, o bien, de confundir sus voces con las de los demás estudiantes.

Para tener un registro de las participaciones, los diálogos serán enumerados con los números romanos I a VI, y con el número VIII; de tal modo que la numeración coincida con el número de la fase en la que tuvo lugar; por ejemplo, el diálogo VI referirá a las participaciones registradas durante la fase VI de la instrucción. Las participaciones del profesor implementador serán referidas con las siglas 'PI'; por su parte, las participaciones de las alumnas se referirán con la letra 'A' y la de los alumnos con la letra 'O'. Para el caso de aquellos estudiantes a quienes se le dio seguimiento a su participación, se les citará con los códigos 'A-1', 'A-2', 'A-3', etc. para el caso de las alumnas, y 'O-1', 'O-2', 'O-3', etc. para el caso de los alumnos.

Los diálogos permitirán llevar a cabo un análisis de las participaciones más importantes; también permitirán realizar una autocrítica de la instrucción realizada por el autor de la presente tesis. Además, se reportarán los errores de instrucción en caso de haberlos, y se compartirán algunas reflexiones sobre cómo mejorar la propuesta.

4.3.1 *Fase I: Entrega del primer cuestionario de opinión*

La primera sesión se llevó a cabo el lunes 12 de noviembre del 2018 y dio inicio una vez que transcurrieron los 10 minutos de tolerancia otorgados. No obstante, se permitió el acceso al salón a aquellos alumnos quienes llegaron después del tiempo de tolerancia.

Algunos estudiantes entregaron el cuestionario de opinión (anexo D) antes de que les fuera solicitado; también notificaron al profesor que tenían una duda sobre la última pregunta abierta del cuestionario. Al revisarlo, el profesor detectó un error de edición en la pregunta. El cuestionario completo puede consultarse en el anexo D; la pregunta con el error de edición se muestra en la siguiente imagen:

Considero que el texto ***"Dos operaciones básicas para la vida"*** me proporcionó herramientas para analizar y solucionar problemas.	*Totalmente en desacuerdo.* ( )	*En desacuerdo.* ( )	*Ni de acuerdo ni en desacuerdo.* ( )	*De acuerdo.* ( )	*Totalmente de acuerdo* ( )
Sobre los temas que se desarrollaron en texto ***"Contando contraseñas y otras cosas"***, menciona qué temas fueron nuevos para ti y de cuáles ya tenías conocimiento.					

Recuerde que el documento del anexo D consiste en un cuestionario de opinión diseñado con el propósito de que los estudiantes evalúen el texto del anexo A, esto con el fin de contar con un conjunto de opiniones que sirvan de referencia para rediseñar el texto como parte de un proyecto futuro. Sin embargo, al editar el cuestionario, en la última pregunta abierta se cometió el error de referir al texto del anexo B en lugar de referir al texto del anexo A.

El profesor notificó sobre este error a los estudiantes quienes preguntaron; no obstante, la mayoría de los estudiantes pasaron por alto el error gracias al contexto del cuestionario y de la pregunta de escala Likert que la precedía y que refería al título correcto del texto. Note que el cuestionario de opinión está integrado por cinco preguntas de escala Likert y cinco preguntas de respuesta abierta; estas vienen en pares, de tal modo que las preguntas de respuesta abierta complementan a las de escala Likert.

Una vez que concluyeron los 10 minutos de tolerancia, se solicitó al resto de los estudiantes que entregaran del cuestionario de opinión. Luego se cuestionó sobre cuál fue su opinión general del texto del anexo A; último que fue editado con el propósito de que los estudiantes retomaran y reflexionaran sobre algunos conocimientos adquiridos durante la educación básica. En general, se escucharon respuestas positivas entre los alumnos, tal como puede apreciarse en el siguiente diálogo:

Diálogo I:

(I,1) PI: De forma muy general, les voy a preguntar: ¿Cómo sintieron la lectura? ¿La sintieron muy difícil?

(I,2) O-1: Muy ligera

(I,3) A-1: Sí bastante ligera. El lenguaje que ocupas está muy bien para que sigamos leyendo y no digamos: ¡Hay! otra ronda de dos horas.

(I,4) O-1: Además empatiza con el lector…

(I,5) A: Tiene ejemplos y entonces eso es fácil.

Observe que el texto del anexo A fue redactado con un lenguaje informal y en primera persona; esto con el fin de que los estudiantes lo relacionen con su contexto personal y social. El comentario (I,3) de la alumna A-1 refiere al estilo de redacción; pues señala que el lenguaje le resultó cómodo para mantener un ritmo de lectura constante y sin mayores complicaciones. Además, el texto incluye ejemplos concretos de la vida real y analogías que relacionan sus conocimientos previos con situaciones cotidianas, algo que fue señalado por dos estudiantes en (1,4) y (I,5).

Resultados del cuestionario de opinión sobre la lectura del anexo A

Recuerde que el cuestionario de opinión del anexo D está conformado por cinco preguntas de escala Likert y cinco preguntas de respuesta abierta que complementan a las primeras. La siguiente tabla presenta los resultados obtenidos en cada una de las preguntas de escala Likert del cuestionario, último que fue contestado por un total de 30 estudiantes:

1. Considero que la sección ***"La propiedad conmutativa de la multiplicación"*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo **7%**	En desacuerdo **0%**	Ni de acuerdo ni en desacuerdo **0%**	De acuerdo **40%**	Totalmente de acuerdo **50%**	Respuesta anulada **3%**
2. Considero que la sección ***"La propiedad asociativa de la multiplicación"*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo **7%**	En desacuerdo **0%**	Ni de acuerdo ni en desacuerdo **7%**	De acuerdo **30%**	Totalmente de acuerdo **53%**	Respuesta anulada **3%**
3. Considero que la sección ***"La división como operación inversa de la multiplicación"*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo **7%**	En desacuerdo **0%**	Ni de acuerdo ni en desacuerdo **0%**	De acuerdo **27%**	Totalmente de acuerdo **66%**	Respuesta anulada **0%**
4. Considero que la sección ***"Dos usos prácticos de la división"*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo **7%**	En desacuerdo **3%**	Ni de acuerdo ni en desacuerdo **3%**	De acuerdo **33%**	Totalmente de acuerdo **54%**	Respuesta anulada **0%**

5. Considero que el texto ***“Dos operaciones básicas para la vida”*** me proporcionó herramientas para analizar y solucionar problemas.					
Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Respuesta anulada
7%	**0%**	**10%**	**37%**	**43%**	**3%**

El rubro “Respuesta anulada” refiere al caso de aquellos estudiantes quienes olvidaron marcar alguna de las respuestas posibles, o bien, quienes marcaron más de una opción.

En general, los resultados muestran que los alumnos tuvieron una opinión positiva sobre el texto del anexo A. Sin embargo, en las preguntas abiertas al menos 11 alumnos señalaron que el contenido del texto no les aportó algo nuevo. Aquí conviene recordar que el propósito del texto es retomar algunos contenidos de la educación básica con el fin de promover un pensamiento reflexivo de los mismos, profundizarlos y aplicarlos en situaciones concretas que exigen llevar a cabo un proceso de análisis.

También se tuvo el caso de dos alumnos quienes marcaron “Totalmente en desacuerdo” en todas las preguntas de escala Likert del cuestionario; sin embargo, en las preguntas abiertas señalaron que el texto les pareció fácil de entender. Por ello, hay razones para creer que quienes marcaron “totalmente en desacuerdo” se debe a una comprensión errónea del cuestionario.

No se hará un análisis riguroso sobre las respuestas redactadas por los alumnos. Sin embargo, se compartirán algunas de las opiniones más significativas sobre los aspectos positivos y negativos del texto del anexo A. Recuerde que el propósito del cuestionario es tener una base de opiniones que sirvan de referencia para una posible reedición del texto del anexo A.

En el siguiente cuadro se comparten algunas de las respuestas más significativas; estas fueron seleccionadas bajo el criterio del autor de la tesis y no representan la opinión general del grupo. No obstante, permiten darse una idea de la diversidad de opiniones expresadas por los estudiantes en relación con el texto del anexo A.

PREGUNTA 1: Escribe tu opinión sobre la sección *"La propiedad conmutativa de la multiplicación"*, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.

Alumna #1: Sinceramente, al menos para mí, fue bastante claro y no encontré algo que no me quedara claro. Aunque había conceptos que no lograba entender del todo.

Alumno #2: Me gustó ya que todo está claro en esa parte, además de que es concreto.

Alumna #3: Toda la sección me quedó clara porque es un tema sencillo.

Alumna #4: Esta sección fue clara, ya que el desarrollo venía acompañado de ejemplos lo cual facilitaba la comprensión del tema, además no había términos confusos y la redacción era de algún modo personal, a lo que me refiero es [que se siente] como si un amigo me lo explicara.

Alumna #5: Es sencilla y clara, deja claro que al multiplicar dos números no importa el orden que se realice la operación, el resultado es el mismo.

Alumna #6: En esta sección todo me resultó totalmente claro.

Alumno #7: Lo que me pareció claro fue la introducción a aquella sección porque me hizo clavarme más en la lectura por recordar las clases que tomé cuando era pequeño. No me resultó confusa ninguna parte de la sección debido a que está explicado de tal manera que hasta un niño pueda entender (ayuda mucho los recursos gráficos que están incluidos).

PREGUNTA 2: Escribe tu opinión sobre la sección *"La propiedad asociativa de la multiplicación"*, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.

Alumna #1: Igual que la parte anterior del texto, no me resultó complicado poder comprender el texto.

Alumno #2: Es concreta y deja muy clara la idea.

Alumna #3: Me gustó el ejemplo de los prismas porque no sólo pude razonar la propiedad, sino verla.

Alumna #4: Al igual que en el primer caso esta sección fue clara, ya que los ejemplos fueron sencillos y fáciles de entender, no hay términos confusos y la redacción en buena.

Alumna #5: Como la anterior, es clara la explicación, aunque sea casi lo mismo que la propiedad conmutativa, solo que aquí se usan de tres o más números en la operación. Se nos explica que en una multiplicación no importa que números (par) se resuelvan primero, sigue siendo el mismo resultado.

Alumna #6: En esta nueva sección sigue estando todo claro, más aparte me reconozco conforme con la relación [la alumna quizá quiso escribir 'redacción'] de los apartados.

Alumno #7: Absolutamente todo me quedó claro (hasta sorprendido por la manera en la que se representa una multiplicación de tres números en forma de prisma). Ninguna parte me resultó confusa.

PREGUNTA 3: Escribe tu opinión sobre la sección *"La división como operación inversa de la multiplicación"*, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.

Alumna #1: Incluso me pareció interesante y amena la lectura por el lenguaje utilizado.

Alumno #2: Me gustó ya que deja clara la comparación.

Alumna #3: Todo me pareció claro, sobre todo los ejemplos.

Alumna #4: Esta sección es también clara, el autor relaciona muy bien las situaciones de la vida cotidiana con el tema, haciendo de este algo divertido y nada pesada al leerlo, los ejemplos son claros, no hay términos difíciles de entender.

Almuna #5: Se me hace una explicación agradable para definir la división y decirnos sus partes, además de para qué sirve.

Alumna #6: Nuevamente todo ha quedado de forma fina, se me hace buena la explicación.

Alumno #7: La manera en la que se explica el funcionamiento de la división resulta fascinante, porque a mí únicamente me enseñaron a aplicarla, pero no a entender el cómo funciona. Todo quedó muy claro y no hubo confusión alguna.

PREGUNTA 4: Escribe tu opinión sobre la sección *"Dos usos prácticos de la división"*, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.

Alumna #1: Me pareció un texto con la información bastante sintetizada, pero que logra dar todo el mensaje o información.

Alumno #2: Muy buenas las diferencias las cuales deja claras.

Alumna #3: Me pareció claro todo.

Alumna #4: En esta parte se muestran dos usos de la división, el primer uso era que a partir de una cantidad se obtengan partes iguales, y el segundo es "dadas dos cantidades, nos interesa saber cuántas veces cabe la segunda en la primera", el primer caso se me hizo más fácil de asimilar que el segundo, ya que ambos casos al momento de leerlos se me hicieron similares, pero al leer el ejemplo del caso dos lo diferencié del ejemplo, así que gracias al ejemplo logré diferenciar el caso 1 del caso 2.

Alumna #5: Esta sección sí se me hizo más difícil de comprender, porque me revolvió con el caso 1 y el 2, aunque al final creo que el 2º era para ver cuántas veces el número cabe en el dividendo y el 1º para mostrar en cuánto se debe dividir el dividendo… [los puntos suspensivos anteriores los escribió la alumna] sigue algo confuso.

Alumna #6: Está muy clara, tanto aquí como en las anteriores no pongo el énfasis en lo que me parece claro ya que todo me parece está correcto.

Alumno #7: Siendo prácticamente puros ejemplos en esta sección, la explicación teórica por la cual se utilizan los casos mencionados es dada de manera clara y concisa. En ningún momento me perdí en la lectura, o me pareció confusa.

PREGUNTA 5: Sobre los temas que se desarrollaron en el texto *"Contando contraseñas y otras cosas"* [aquí está el error de edición, la pregunta debía decir *"Dos operaciones básicas para la vida"*], menciona qué temas fueron nuevos para ti y de cuáles ya tenías conocimiento.

Alumna #1: → Qué la división se podía "clasificar en 2". → No recordaba las propiedades de la multiplicación.

Alumno #2: Prácticamente tenía conocimiento de todo, sólo que no sabía ni el nombre ni había razonado bien como lo hacía, mi cabeza lo hacía inconscientemente y aquí conocí bien paso a paso cómo se desarrolla.

Alumna #3: La verdad ya tenía conocimiento de los temas porque, como dice la lectura, es algo que te enseñan desde la primaria, pero nunca lo había visto tan detalladamente o tan enfocado en el por qué es así.

Alumna #4: [Sin respuesta].

Alumna #5: En esta lectura se vio la multiplicación y la división.

En el tema de la multiplicación ya sabía que esta era una suma abreviada y que el orden no afecta el producto, lo que no sabía es que lo segundo que mencioné se divide en propiedad conmutativa y en asociativa.

En la parte de la división sabía que era la inversa de la multiplicación, y de cierta forma que incluía suma, resta y multiplicación. Lo que sí me confundió fue lo de los usos (caso 1 y 2), sé que se usa para ver cuántas veces un número cabe en otro o en cuánto se debe dividir uno, pero la forma en que lo leí siento que debe de ser otra cosa lo que yo entendí.

Alumna #6: No me proporcionó exactamente algo nuevo, no por lo escrito ni la ejemplificación, sino por el simple hecho de que son cuestiones básicas, de hecho, para un novato es un texto idóneo.

Alumno #7: Lo único nuevo que aprendí, que en mi interior ya sabía, pero no era una definición clara, son las propiedades conmutativa y asociativa. Por otra parte, ya tenía conocimiento sobre la multiplicación y la división, al igual que los casos en las que se utilizan ambas operaciones.

En el cuadro anterior se anexaron las opiniones de cinco alumnas y dos alumnos; a cada estudiante se le refiere con un número del 1 al 7 de tal modo que se le pueda dar seguimiento a sus respuestas. La enumeración antes descrita es exclusiva para este recuadro, y no guarda relación con los diálogos y participaciones registradas en esta tesis.

Conviene discutir algunas de las respuestas de los estudiantes. Como ya se mencionó, la primera lectura tiene el propósito de fomentar el pensamiento reflexivo sobre la interpretación de las operaciones elementales; especialmente de la multiplicación y la división. Las respuestas de la alumna #3 a las preguntas 2 y 5 dan evidencia de que reflexionó las implicaciones de la interpretación geométrica del producto de tres números. La propiedad asociativa de la multiplicación tiene su justificación en esa interpretación; sin embargo, los estudiantes se convencerse de su veracidad porque se les enseña como un dogma. El texto del anexo A también tiene el propósito de que los estudiantes reflexionen sobre la justificación lógica de algunos conocimientos que adquirieron durante la educación básica.

Durante la educación básica, los estudiantes aprenden a aplicar la división de forma intuitiva, pero no siempre hay un proceso de reflexión que haga explícito que no sólo se divide para partir una cantidad en partes iguales; sino que también se divide para comparar cuántas veces cabe una cantidad dentro de otra. Las respuestas de las alumnas #4 y #5 a la pregunta 4 dan evidencia de que este conocimiento es puramente intuitivo, pues tuvieron dificultades para diferenciar entre un caso y el otro. Los ejemplos facilitaron la comprensión de esta parte del texto; sin embargo, la parte teórica debe rediseñarse para que sea más precisa y sintética.

En general, el contenido del texto del anexo A debe hacerse más sintético y con explicaciones menos redundantes, pero preservando los temas desarrollados de tal modo que se fomente la reflexión sobre aquellos conocimientos que los estudiantes adquirieron por intuición durante la educación básica; esto a fin de articular el razonamiento deductivo con el intuitivo. Esta articulación es necesaria para que los estudiantes resuelvan problemas más complejos donde se requieren aplicar e interpretar múltiples operaciones; desde aplicar una regla de tres hasta resolver problemas combinatorios complejos.

4.3.2 Fase II: Concepción del conjunto de los números naturales

El proceso de instrucción inició justo después de preguntar a los estudiantes su opinión sobre el texto del anexo A. Para esto, se explicó a los estudiantes que el propósito de la primera sesión es retomar algunos temas de la educación básica referentes al concepto y aplicación de las operaciones elementales; además de que esta sesión serviría como un diagnóstico para evaluar si las aplican correctamente para resolver problemas de la vida cotidiana.

El profesor también explicó que las técnicas del conteo se limitan a aplicar y resolver operaciones elementales. No obstante, enfatizó que resolver un problema de conteo exige llevar a cabo un proceso de análisis riguroso del problema; algo que implica utilizar e interpretar las operaciones básicas de forma correcta.

Después de la explicación anterior, se cuestionó a los estudiantes si sabían cuáles son los números naturales. El propósito de esta pregunta fue informar a los estudiantes que, hoy en día, no hay un acuerdo sólido entre matemáticos y filósofos acerca de si el número cero debe o no ser considerado un número natural. También se indicó a los estudiantes que, para los fines de las dos sesiones a trabajar, el cero será excluido de los números naturales. A continuación, se anexa una parte del diálogo que tuvo lugar en esta fase:

Diálogo II (1ª parte):

(II,1) PI: ¿Cuáles son los números naturales?

(II,2) Es: [Se muestran confundidos]

(II,3) PI: A ver, a qué les suena, para empezar, la palabra 'natural'. O sea, 'número natural' ¿Por qué creen que se les llama así?

(II,4) A: Los que no son negativos ni son fracciones

(II,5) PI: ¿Esos números que no son negativos ni son fracciones para qué los utilizamos en la vida real?

(II,6) O: Para contar

(II,7) PI: Para contar... [responde en forma afirmativa]. Son los números que ustedes aprenden desde que son pequeñitos, desde que iban en el kínder. Esos son los números naturales. Se dice que se llaman naturales porque, supuestamente, el hombre los descubrió de forma 'natural', desde la antigüedad… ¿Creen que el cero sea un número natural?

Narración:

Frente a la pregunta planteada al final del fragmento (II,7), los estudiantes se mostraron inseguros de dar una respuesta. Por ello, el profesor solicitó que alzaran la mano aquellos quienes consideraban que el cero sí es un número natural. Luego solicitó que alzaran la mano aquellos quienes piensan que no es un número natural. Cabe señalar que no todos los estudiantes levantaron la mano; sin embargo, se percibió una opinión dividida entre el grupo.

Diálogo II (2ª parte):

(II,8) PI: Ok, les comento que, entre matemáticos, no hay un acuerdo de si el cero debe ser considerado como un número natural o no… La verdad es que, al final, cada quien lo termina tomando más a su conveniencia. Hay veces que conviene que el cero sí sea [un número] natural, y hay veces que no. Pero ahí hay mucha pelea, sobre todo con los filósofos… Los filósofos son los que dicen que no, porque dicen que el cero no fue descubierto de forma natural…

(II,9) O: Pero: ¿Y los mayas?

(II,10) PI: Los mayas, de hecho, fíjense ahí la importancia del cero. Nuestro sistema de numeración utiliza el cero para marcar posiciones ¿No? Ahora sí que, sabemos que, entre más ceros, más vale el número. Bueno, ese fue el gran avance de los mayas, justamente, que ellos introdujeron el cero para el sistema posicional, que es el que ocupamos hasta la fecha. La diferencia es que los mayas utilizaban la base 20; es decir, ellos contaban de 20 en 20, y nosotros: ¿Qué base ocupamos?

(II,11) A: La base 10, ¿no?

(II,12) PI: La base 10 [Confirma]

Aquí conviene señalar que el propósito de la primera sesión no es estudiar la historia ni el origen del número cero; por un lado, porque implicaría desviarse de los objetivos definidos y, por el otro lado, porque el profesor no cuenta con una formación en filosofía de la ciencia ni en historia de las matemáticas. Sin embargo, tal como se mencionó en el diálogo (II,8), no hay un acuerdo de si el número cero debe o no ser considerado un número natural. Prueba de ello es que existen textos en matemáticas avanzadas que refieren al cero como parte de los números naturales (véase Kunen, 1980, p. 19); pero también hay otros textos que lo excluyen de dicho conjunto de números (véase Apostol, 1998, p. 1).

A continuación, se hará un breve análisis sobre el desarrollo del diálogo II y, posteriormente, se presentará una autocrítica sobre posibles deficiencias y errores en esta parte de la instrucción. También, se compartirán algunas reflexiones en respecto a haber implementado esta parte en la planeación.

Análisis del diálogo II:

Al principio los estudiantes se mostraron confusos sobre cuáles son los números naturales; aunque sí mostraron señales de tenerlos identificados. En lo que a esta cuestión se refiere, la respuesta de la alumna del fragmento (II,4) es parcialmente correcta. La razón de esto es que existen números que cumplen la propiedad de no ser una fracción (sin mencionar que todo número natural puede expresarse como una fracción con denominador 1), así como la propiedad de no ser un número negativo; pero que no cumplen la propiedad de ser un número natural. Dichos números son los irracionales positivos como es el caso de π y $\sqrt{2}$. Los conceptos de número natural, entero, racional e irracional se introducen de forma superficial en el nivel medio superior; de tal modo que los alumnos trabajan con ellos, pero no siempre tienen presente el nombre y las características de cada conjunto de números. No obstante, en (II,6) un alumno mencionó cuál es la cualidad más importante que caracteriza a los números naturales.

En lo que se refiere a la segunda parte del diálogo II, el comentario del alumno en (II,9) es acertado; la cultura maya tenía conocimiento del número cero, lo empleaban en su sistema de numeración y además tenían una forma de representarlo. De hecho, los mayas desarrollaron un sistema de numeración posicional en parte semejante al sistema decimal que empleamos hoy en día, pero con la principal diferencia de que su sistema posicional era vigesimal; es decir, agrupaban las cifras en potencias de 20. Además, los mayas utilizaban sólo tres símbolos para representar sus dígitos del 0 al 19; a diferencia de nuestro sistema decimal que utiliza un símbolo único para representar a cada uno de los dígitos de la base, estos son los dígitos del 0 al 9.

Autocrítica sobre la instrucción de la fase II:

El propósito principal de la fase II fue el de informar a los estudiantes que no hay un acuerdo sobre si el cero debe o no ser considerado como un número natural; además de acordar excluirlo de dicho conjunto solamente para los fines de las dos sesiones a trabajar. Al hacer esto, se evita caer en ciertas complicaciones que, por cuestiones de tiempo, convenía evitar; como demostrar la igualdad $0! = 1$, entre otras.

No obstante, durante la implementación surgieron algunos temas que no se consideraron en la planeación; razón por la cual no se tuvo la intención de profundizar en ellos; algunos por falta de tiempo, y otros porque el profesor no tenía conocimiento en historia de las matemáticas ni en filosofía de la ciencia.

Específicamente en los fragmentos (II,7), (II,8) y (II,10) se abordaron algunos temas en los que no hubo una planeación previa; lo que resultó en una explicación deficiente por parte del profesor implementador. En el diálogo (II,7), la expresión ‘descubierto de forma natural’ es ambigua; pues no se tiene una definición precisa de lo que significa que un conocimiento se descubra de forma natural. Una de las razones por las cuales algunos teóricos excluyen al cero de los números naturales es debido a que la mayoría de las culturas de la antigüedad no tenían un conocimiento explícito del mismo. Quizá una expresión más adecuada sería decir que el cero no surgió con la misma naturalidad que el número uno y sus sucesores inmediatos.

Por otro lado, en el diálogo (II,8) el profesor mencionó que, por lo general, son los filósofos quienes no conciben al cero como parte de los números naturales. Aquí conviene señalar que este comentario fue el resultado de un prejuicio por parte del profesor que, más allá de ser falso o verdadero, no dispone de fuentes que lo respalde. Esta fue una afirmación espontanea del profesor sobre una percepción personal él que podría estar lejos de la realidad.

En lo que al fragmento (II,10) se refiere, el profesor empleó una expresión que llega a ser falsa si se interpreta de forma literal. La frase es la siguiente: ‘entre más ceros, más vale el número’; con ello el profesor quiso decir que el valor de una expresión numérica incrementa conforme agregan dígitos cero la derecha de la expresión. Sin embargo, la frase es ambigua y llega a ser falsa si se interpreta de forma literal; por ejemplo, el número 1,000 tiene más dígitos cero que el número 19,890, pero el segundo es mayor que el primero. Esta frase fue empleada de forma espontánea durante la instrucción; pues este tema no se concibió dentro de lo planeado.

Reflexión sobre sobre la fase II:

La fase II no aportó algo significativo a la instrucción. Se integró a la planeación para acordar excluir al número cero de los naturales; esto con el fin de evitar algunas complicaciones que podrían surgir en el caso de no hacer dicha aclaración. Además, es importante que los alumnos estén conscientes de no existe un acuerdo sobre si el cero es un número natural o no, pues en la bibliografía es posible encontrar fuentes que dicen que sí y otras que afirman que no.

Adentrarse en la cuestión sobre si el cero debe o no ser considerado como un número natural requiere llevar a cabo una investigación profunda sobre cada uno de los sistemas de numeración que empleaban las culturas de la antigüedad; no solo de aquellas que se desarrollaron en oriente y en occidente, sino también de aquellas que se desarrollaron en el continente americano.

En opinión del autor, analizar y discutir el sistema de numeración maya y como se emplea el cero en dicho sistema, es un tema relevante para ser abordado como parte de los contenidos de bases numéricas y sistemas de numeración posicional. Los estudiantes pueden aprender a convertir un número del sistema decimal a su equivalente del sistema vigesimal maya y viceversa; además se pueden discutir las ventajas y desventajas de ambos sistemas de numeración. Sin embargo, este tema va más allá de los objetivos de la propuesta.

4.3.3 Fase III: Análisis de las situaciones #1 y #2

Una vez que se acordó con los alumnos el excluir al cero de los naturales, el profesor cuestionó a los estudiantes si habían comprendido la sección del texto del anexo A referente a la operación multiplicación. En ese momento, el profesor consideró apropiado omitir una parte de la planeación original del anexo F, parte que fue diseñada con el propósito de promover la reflexión sobre el concepto de multiplicación; esto a través de estrategias que facilitan el cálculo de esta operación en situaciones determinadas.

De este modo, el profesor procedió a escribir en el pizarrón los problemas #1 y #2 que se encuentran en la planeación del anexo F, e hizo la aclaración a los alumnos de que, más allá de ser problemas básicos, el propósito es analizar, discutir y reflexionar sobre las diferencias entre ambos problemas y operación que los soluciona.

Descripción de la fase III:

El profesor escribió en el pizarrón las siguientes situaciones:

a) **Situación #1:** En un grupo de 30 alumnos se desean formar equipos de 5 alumnos cada uno. ¿Cuántos equipos se pueden formar?
b) **Situación #2:** En un grupo de 30 alumnos el profesor desea formar 5 equipos con igual número de alumnos. ¿Cuántos alumnos deberán integrar cada equipo?

Aunque las situaciones anteriores son básicas y no suponen un problema para los estudiantes, el propósito es que analicen sus diferencias. Ambas situaciones se resuelven con la misma operación: $30 \div 5 = 6$; sin embargo, esta se aplica con fines distintos. En la lectura del anexo A se habla de esta diferencia; de tal modo que la fase III puede concebirse como un proceso de exploración sobre los aprendizajes y los conocimientos previos que poseen los estudiantes en relación con el contenido de texto.

En el caso de la situación #2, la división se aplica con el propósito partir una cantidad en un número determinado de partes iguales. Esta forma de aplicar la división tiene un uso recurrente en la vida cotidiana de las personas; razón por la que resulta familiar a los estudiantes. Desde la experiencia personal del autor, la idea de dividir un numero entre otro se asocia con la acción de partir una cantidad en un número determinado de cantidades iguales; esta acción está presente en el día a día de las personas.

Por otra parte, en el caso de la situación #1 la división se aplica con un objetivo diferente: el de comparar el tamaño de dos cantidades. Así, bajo el contexto de esta situación, se resuelve la división $30 \div 5$ para calcular cuántas veces cabe el número 5 dentro del 30; es decir, se calcula cuántos subconjuntos de 5 unidades pueden formarse a partir de un conjunto de 30 elementos. Desde la experiencia personal del autor, los estudiantes no siempre poseen una intuición directa que asocie la división con este fin; sino que hay una intuición intermedia que primero asocia la multiplicación con este fin. Así, un alumno se pregunta: '¿Cuántas veces cabe el número 5 en el 30?' de tal modo que plantea y resuelve la ecuación $5x = 30$; ultima que tiene su solución en la operación $x = 30 \div 5$.

Esta última forma de aplicar la división es sumamente importante en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; pues está implícita en múltiples conceptos y métodos de la disciplina como es el caso de la regla de tres, la definición de la probabilidad condicional, el límite con el cual se define y calcula la derivada de una función, así como también en la fórmula para calcular el número de combinaciones posibles que pueden formarse con los elementos de un conjunto.

Hay razones para concebir esta forma de aplicar la división como poco intuitiva; esto a pesar de su importancia en matemáticas; tanto en las puras como en las aplicadas. En lo que refiere al análisis combinatorio, Roa *et al.* (2003) consideran que la regla del cociente es la menos intuitiva de las estrategias aritméticas para la resolución de problemas combinatorios.

A continuación, se anexa el diálogo que tuvo lugar durante la fase III, y en el cual se tienen registradas las participaciones de los estudiantes:

Diálogo III (1ª parte):

(III,1) PI: [Solicita a uno de los alumnos leer la situación #1]

(III,2) A: [Lee en voz alta la situación #1]

(III,3) PI: ¿Cuál es la respuesta a este problema?

(III,4) Es: Seis

(III,5) PI: Seis, exacto ¿Seis qué?

(III,6) Es: Equipos [El profesor escribe en el pizarrón 'R=6 equipos' justo debajo de la situación #1]

(III,7) PI: [Solicita a uno de los alumnos leer en voz alta la situación #2]

(III,8) A: [Lee la situación #2]

(III,9) PI: ¿Entonces la respuesta es?

(III,10) Es: Seis

(III,11) PI: ¿Seis qué?

(III,12) Es: Alumnos [El profesor escribe en el pizarrón 'R=6 alumnos' justo debajo de la situación #2]

(III,13) PI: ¿Cómo lo resolvieron?

(III,14) Es: Dividiendo

(III,15) PI: Con una división [El profesor se da cuenta que no hizo la misma pregunta para el caso de la situación #1] ¿En ambos casos?

(III,16) Es: Sí

(III,17) A-1: Yo lo pensé como multiplicación. O sea, buscar el número que multiplicado por 5 te dé 30.

(III,18) PI: Ajá, ¿Y por qué lo pensaste de ese modo?

(III,19) A-1: Bueno, porque para mí es más fácil así. Porque al final de cuentas es como una división también.

(III,20) PI: Es justamente porque la división es la operación inversa de la multiplicación ¿Verdad? [Algunos estudiantes responden en voz baja: Sí]

(III,21) PI: Ok, lo que yo quiero aquí es que se den cuenta, [cambia de expresión] que me digan: ¿Cuál es la diferencia entre el problema 1 y el problema 2? Ambos se resuelven con una [misma] división, ambos dan el mismo resultado, pero si se dan cuenta… [Una alumna interrumpe]

(III,22) A: Pero es que hay diferentes maneras de pensarlo

(III,23) A: Ajá, porque dice formar 5 grupos con igual número de alumnos, entonces tengo que formar 5 pero con diferente cantidad de alumnos.

(III,24) O: Pero ¿No será por la propiedad conmutativa? ¿No?

(III,25) PI: [El profesor duda] Ahorita checamos esa parte…

(III,26) A-1: Aja, es que yo digo que en el problema 1 podíamos hacer los equipos, ósea, los equipos que nos decían, pero de los alumnos que quisiéramos, el número variable, y en el otro no porque son equipos de cinco. [La alumna confundió el número del problema, pero su explicación es parcialmente correcta].

(III,27) PI: Aquí [refiere a la situación #1] ¿Qué es lo que estamos desconociendo?

(III,28) Es: Los equipos.

(III,29) PI: El número de equipos, exactamente y queremos que sean equipos de 5 alumnos.

(III,30) PI: Aquí [refiere a la situación #2] ¿Qué es lo que estamos desconociendo?

(III,31) Es: Los alumnos.

(III,32) PI: Los alumnos [confirma]. Si se dan cuenta son problemas totalmente diferentes, que se resuelven con la misma operación. Sólo que aquí [refiere a la situación #2] nos da el número de equipos y aquí [refiere a la situación #1] el número de alumnos. Y es porque, en realidad, estamos aplicando la división para hacer cosas diferentes.

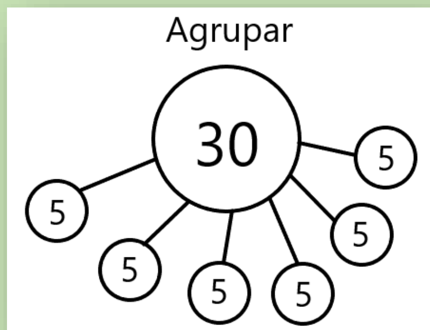
(III,33) PI: En el primero ¿Qué es lo que estamos haciendo ahí?

(III,34) O: Distribuir equitativamente.

(III,35) PI: [Duda] De hecho fíjense bien, en el primero no… [Un alumno interrumpe]

(III,36) A: Agrupar alumnos.

(III,37) PI: Exactamente, lo que estamos haciendo aquí es agrupar [El profesor escribe en el pizarrón la palabra ‘agrupar’ debajo de la situación #1 y comienza a dibujar un gráfico mientras explica]. Dijiste una palabra clave… que es ‘agrupar’.



(III,38) PI: Tenemos nuestro conjunto: ¿De cuántos alumnos?

(III,39) Es: Treinta.

(III,40) PI: Treinta en total [responde de forma afirmativa]. Tenemos nuestro conjunto de 30 alumnos, y lo que nos están pidiendo es: ¿Qué? Formar equipos de: ¿Cuántos?

(III,41) Es: Cinco

(III,42) PI: Entonces lo que se está haciendo es [El profesor deja que los alumnos completen la oración]

(III,43) A: Agrupar

(III,44) O: Agrupar 30

(III,45) PI: Están agrupando su conjunto en grupos de: ¿Cuántos?

(III,46) Es: De cinco

(III,47) PI: Exacto, y vimos que entonces nos salieron, seis en total

(III,48) PI: [Después de dibujar el diagrama el profesor retoma] ¿Cuántos grupos les salieron?

(III,49) Es: Seis.

(III,50) PI: Seis [Confirma] ¿Eso qué significa? ¿Cuántas veces cabe el 5 en el 30?

(III,51) Es: Seis veces.

(III,52) PI: Efectivamente. Bueno, esta es la primera forma en que solemos ocupar la división en la vida real, que tiene que ver con la agrupación, como dice su compañera.

(III,53) PI: Ahora, yo les voy a preguntar. Vuelvan a leer el problema #2 y díganme: ¿Qué estamos haciendo?

(III,54) Es: [Audio inaudible]

(III,55) PI: ¿Distribuyendo? Ok [Escribe en el pizarrón la palabra distribuir debajo de la situación #2] ¿Se les ocurre alguna otra palabra? ¿Algún sinónimo?

(III,56) A: Ordenando

(III,57) A: Repartir.

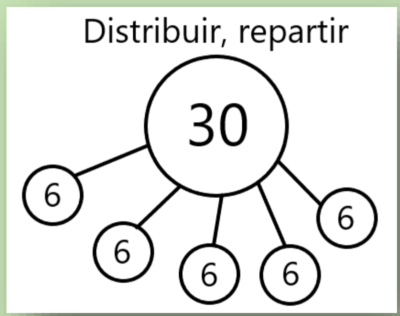
(III,58) PI: Ajá, repartir [Confirma y escribe en el pizarrón la palabra 'repartir', justo a la derecha de la palabra 'distribuir']

(III,59) A-1: Haciendo conjuntos

(III,60) PI: Bueno, haciendo conjuntos también podría ocuparse para esto ¿no? [refiere a la situación #1]. Pero, de hecho, creo que ya dijeron las dos palabras claves: 'distribuir' o 'repartir'. Es como el clásico problema de cuando compran una pizza… y dicen: nos toca de a tantas rebanadas. Algo parecido están haciendo aquí [problema #2], sólo que: ¿Qué es lo que pasa? Ustedes tienen su grupo de 30 alumnos ¿Verdad? Entonces ustedes lo que quieren hacer es formar 5 equipos [Una alumna interrumpe]

(III,61) A: Equipos iguales.

(III,62) Iguales, exactamente. Entonces ¿Qué es lo que están haciendo? [El profesor procede a dibujar en el pizarrón un gráfico mientras continúa con la explicación]. Lo que ustedes hacen es que empiezan a repartir los 30 alumnos que tienen en los 5 cinco grupos que ustedes ya decidieron, y dividen para averiguar: ¿Para qué dividen?



(III,63) Es: [Muchos estudiantes responden a la vez y el audio es inaudible en esta parte]

(III,64) PI: Para saber cuánto le toca a cada equipo, y después llegan a la conclusión de que son seis. Entonces, si se dan cuenta, son dos usos completamente distintos y muchas veces los usamos sin estar conscientes de ello.

Narración:

Después de (III,64) se explicó a los estudiantes que en la vida cotidiana se aplica la división con fines equivalentes a las situaciones #1 y #2, pero no siempre se reflexiona lo suficiente sobre las diferencias entre ambos casos. También se mencionó que es importante reflexionar esta diferencia porque hay situaciones más complejas donde se debe identificar en qué sentido interpretar el cociente de la división; esto a fin de evitar posibles errores de interpretación.

Diálogo III (2ª parte):

(III,65) PI: Entonces… ustedes: ¿Cómo definirían en sus propias palabras la división?

(III,66) Es: Como una distribución.

(III,67) PI: Como una distribución, ok. [Ratifica] ¿Qué más?

(III,68) A: Un reparto.

(III,69) PI: Un reparto, ok ¿Qué más?

(III,70) A: Repartir… [en el audio no se distingue el resto de la frase]

(III,71) O: Dividir en partes iguales

(III,72) PI: Están dejando esto de lado [el profesor se refiere a la situación #1].

(III,73) A: Una agrupación infinita [el profesor no prestó atención a la palabra 'infinita' hasta el momento de revisar el audio]

(III,74) PI: Una agrupación [responde en forma afirmativa]

(III,75) O: Ordenar

Análisis del diálogo III:

Hay razones para suponer que los estudiantes están más familiarizados con aplicar la división en el sentido de la situación #2 que en el de la situación #1. Por ejemplo, un grupo de estudiantes aplican la división en el sentido de la situación #2 cuando desean repartirse un gasto de forma igualitaria entre sus miembros; ya sea para pagar un material de trabajo, para imprimir un ensayo, o bien, al comprar lo necesario para un convivio.

Por su parte, las situaciones que requieren aplicar la división para comparar dos cantidades son menos frecuentes en la vida cotidiana; a pesar de ser relevante para el estudio de diversos fenómenos. De hecho, esta forma de concebir la división tiene relevancia en las matemáticas puras y en las aplicadas. Sin embargo, no siempre hay una intuición directa que asocie la operación división con el propósito de comparar dos cantidades; sino que este último está más asociado con la multiplicación.

Lo anterior se ve reflejado en los comentarios de la alumna A-1 en los fragmentos (III,17) y (III,19). Ella comentó que, para resolver la situación #1, le fue más intuitivo pensar en una multiplicación; luego, reflexionó y refirió al hecho de que hay una relación entre la multiplicación y la división. El proceder de la alumna sugiere que, cuando se trata de resolver una situación en la que se debe de comparar dos cantidades, a veces es más intuitivo pensar en una multiplicación que en una división.

Este tipo de razonamientos son relevantes en el estudio del análisis combinatorio, pues la división puede ser poco intuitiva cuando se trabaja con cantidades grandes, o bien, con situaciones abstractas; por ejemplo, al deducir la fórmula que permite calcular el número de combinaciones C_m^n que se obtienen al extraer m objetos distintos de un conjunto conformado por n elementos. La fórmula para C_m^n fue introducida en el capítulo 2; no obstante, conviene explicar la deducción de la fórmula una vez más, esta vez con el fin de enfatizar el uso de la división en el sentido de la situación #1 durante el proceso de deducción.

Suponga que se desea calcular de cuántas formas posibles se pueden elegir 3 vocales distintas de entre las 5 vocales existentes: ‘A’, ‘E’, ‘I’, ‘O’, y ‘U’, esto es C_3^5. Recuerde que al hablar de combinaciones no se considera el orden en el que se eligen las vocales; no obstante, observe que cada combinación de 3 vocales puede ser ordenada de 6 formas distintas. Por ejemplo, si se elige la combinación de vocales ‘A’, ‘I’ y ‘U’, estas pueden ordenarse como ‘AIU’, ‘AUI’, ‘IAU’, ‘IUA’, ‘UAI’, y ‘UIA’. Esto significa que cada combinación está asociada a un conjunto de 6 ordenaciones exclusivas de esa combinación.

Por lo anterior, el conjunto de todas las ordenaciones de 3 vocales distintas entre sí puede partirse en subconjuntos de 6 ordenaciones; de modo que cada subconjunto comprenda las ordenaciones asociadas a una combinación de vocales específica. De este modo, hay un subconjunto para las seis ordenaciones de ‘A’, ‘I’ y ‘U’, y lo mismo para cada una de las combinaciones posibles. Además, todos los grupos son ajenos entre sí; de tal modo que calcular el número de combinaciones equivale a responder la pregunta: ¿Cuántos grupos de 6 ordenaciones pueden formarse con el conjunto total de ordenaciones?

De este modo, el número de combinaciones posibles de 3 vocales distintas entre sí está determinado por la siguiente operación:

$$C_m^n = \frac{\text{Número de ordenaciones posibles formadas con 3 vocales distintas}}{6}$$

El numerador de la expresión anterior está determinado por la operación $O_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$; es decir, hay 60 ordenaciones sin repetición posibles. Así, el número de combinaciones de tres vocales queda determinado por la división $60 \div 6 = 10$; de esto se concluye que hay $C_3^5 = 10$ combinaciones. En general, la fórmula para calcular el número de combinaciones C_m^n de un conjunto de n objetos tomados de m en m es:

$$C_m^n = \frac{O_m^n}{m}$$

Deducir la fórmula anterior no sólo requiere un análisis riguroso de la situación; sino que también debe intuirse la división que permite realizar el cálculo final. Por esta razón es importante que los estudiantes reflexionen sobre esta forma de aplicar la división; pues es de relevancia tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Retomando el análisis del diálogo III, conviene discutir la cuestión referida por un alumno en el fragmento (III,24); quien cuestionó si la diferencia entre la resolución de las situaciones #1 y #2 guarda alguna relación con la propiedad conmutativa de la multiplicación. Aunque el autor no llegó a razonarlo durante la implementación, cabe decir que la afirmación del alumno es parcialmente correcta; pues si hay una relación entre la propiedad y las dos formas de interpretar la operación división.

La propiedad conmutativa de la multiplicación es explicada y demostrada en el texto del anexo A, último que se les encomendó a los estudiantes leer como una actividad extra-clase previa a la sesión. De forma general, esta propiedad dice que, al multiplicar dos números, es indistinto cuál de ellos sea el multiplicando y cuál el multiplicador (se sugiere consultar el anexo A para cualquier aclaración sobre la terminología).

Por ejemplo, la multiplicación 6×10 puede resolverse sumando 10 veces el número el 6, o bien, sumando 6 veces el número 10; la propiedad conmutativa señala que en ambos casos se llegará a un mismo resultado:

$$6 \times 10 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 60$$

$$10 \times 6 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$$

Observe que la principal diferencia entre las situaciones #1 y #2 es que en la situación #1 se solicita calcular un multiplicador, mientras que en la situación #2 se solicita calcular un multiplicando. En general, ‘partir’ una cantidad en partes iguales se traduce en calcular un multiplicando; mientras que comparar cuántas veces cabe una cantidad dentro de otra equivale a calcular un multiplicador.

Aunque la observación anterior no se hizo explícita durante la instrucción, los estudiantes identificaron diferencias relevantes entre las situaciones #1 y #2 y las explicaron con sus propias palabras. Respecto a la situación #1, una alumna asoció la acción de ‘agrupar’ con la de comparar cuántas veces cabe una cantidad dentro de la otra. Así, la operación $30 \div 5$ se concibe como el medio para calcular cuántas veces cabe una cantidad dentro de otra.

Respecto a la situación #2, los estudiantes asociaron la división con la acción de ‘partir en partes iguales’ y ‘distribuir’. Es posible que en la vida cotidiana los estudiantes se enfrentes a situaciones análogas, de tal modo que esta forma de concebir la operación división sea más intuitiva.

Autocrítica sobre la fase III:

En opinión del autor, esta fase de la implementación tuvo algunas deficiencias desde su planeación, pues no se hizo un énfasis explícito sobre que: la división se aplica en el sentido de la situación #1 cuando se pide calcular cuántas veces cabe una cantidad dentro de otra, y se aplica en el sentido de la situación #2 cuando se desea partir una cantidad en un número determinado de partes iguales.

Una forma de hacer explícita esta diferencia es mostrar que en el caso de la situación #1 se divide para calcular un multiplicador, mientras que en el caso de la situación #2 se divide para calcular un multiplicando. En particular, se pueden expresar las situaciones #1 y #2 en términos de la ecuación $5 \times x = 30$, de tal modo que la incógnita x es un multiplicador en el contexto de la situación #1 y un multiplicando en el contexto de la situación #2. Normalmente estas diferencias pasan inadvertidas debido a la conmutatividad de la multiplicación; no obstante, toman relevancia cuando se analizan situaciones más complejas.

4.3.4 Fase IV: Interpretación de la división en los números racionales

Después de implementar la fase III, el profesor consideró oportuno enfatizar que las dos formas de interpretar la división pueden trasladarse al caso de los números fraccionarios y, en general, al de los números reales; a esta etapa de la instrucción nos referiremos como la fase IV. Cabe mencionar que esta fase no formó parte de la planeación original y fue una decisión que se tomó durante la implementación.

Descripción de la fase IV:

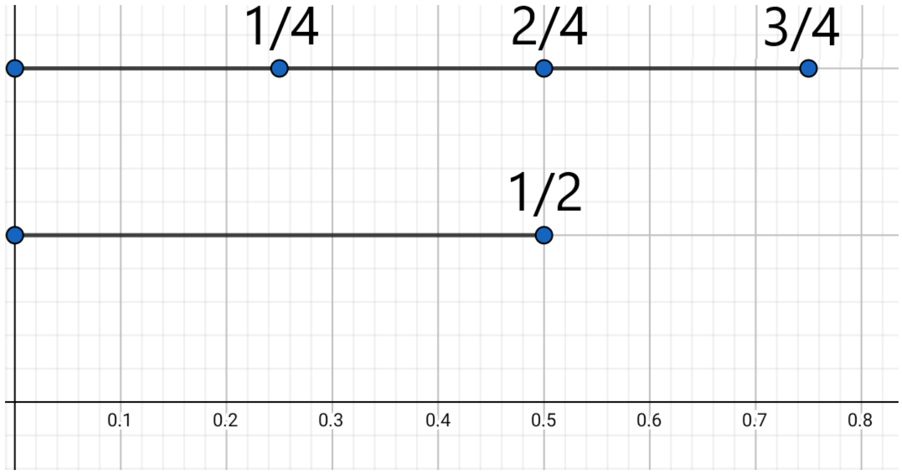
El propósito de la fase IV fue enfatizar que las dos formas de interpretar la división según las situaciones #1 y #2 puede llevarse al caso de los números fraccionarios y, en general, al de los números reales. Por ejemplo, en la división ${}^{1}/_{2} \div {}^{1}/_{4} = 2$, el cociente es la proporción de veces que cabe el divisor ${}^{1}/_{4}$ en el dividendo ${}^{1}/_{2}$. Así, la interpretación que se dio a la división según la situación #1 puede generalizarse.

Para esto, el profesor solicitó a los estudiantes que propusieran dos números fraccionarios arbitrarios; a lo que propusieron las fracciones ${}^{1}/_{2}$ y ${}^{3}/_{4}$. Luego se realizó una analogía entre las dos operaciones siguientes:

a) La división $30 \div 5 = 6$ significa que el 5 (divisor) cabe 6 veces en el 30 (dividendo).

b) La división $^1/_2 \div {^3/_4} = {^2/_3}$ significa que, al tomar un segmento de longitud $^3/_4$ (el divisor), dos terceras partes de este segmento (esto es $^2/_3$) caben exactamente dentro del segmento con longitud $^1/_2$ (el dividendo).

El siguiente dibujo permite visualizar la analogía anterior; este no se presentó durante la implementación de la fase IV debido a que no se consideró en el momento.



A continuación, se anexa la narración y el diálogo que tuvo lugar durante el desarrollo de la fase IV de la instrucción:

Narración: El profesor solicitó a los estudiantes que propusieran dos números fraccionarios, luego escribió en el pizarrón la operación $^1/_2 \div {^3/_4}$ cuyo dividendo y divisor fueron los números propuestos. Después de resolver la operación, el profesor procedió a explicar la analogía entre los casos de dividir dos naturales y el de dividir dos fracciones.
Diálogo IV: (IV,1) PI: [Explica la analogía mencionada en la descripción; para ello, escribe en el pizarrón la operación $30 \div 5 = 6$ a un lado de la división $^1/_2 \div {^3/_4} = {^4/_6}$]

(IV,2) PI: Cuándo ustedes dividen este [señala a la fracción $1/2$] entre este [apunta a la fracción $3/4$], están averiguando cuántas veces cabe este número [señala a $3/4$] ¿En cuál?

(IV,3) Es: En $1/2$

(IV,4) PI: En este [confirma y señala al $1/2$]. Solo que aquí ya no son como [cambia la expresión], ya estamos pensando en ¿Qué?

(IV,5) Es: En fracciones

(IV,6) PI: ¿Una fracción puede representarse como un?

(IV,7) O: Un decimal

(IV,8) PI: Un segmento ¿No? [Responde instintivamente, pero la respuesta del alumno también es correcta]

(IV,9) Es: [Ríen]

(IV,10) PI: [El profesor explica a los estudiantes que no se va a adentrar más en el tema de las operaciones con fracciones, pero que la intención fue hacer notar que las dos formas de aplicar la división según las situaciones #1 y #2 se traslada de forma análoga al caso de los números racionales y, en general, de los reales].

Análisis del diálogo IV:

En lo que respecta al desarrollo del dialogó IV, no hay algo que analizar debido a que esta parte se abordó de forma rápida. Como ya se mencionó, el profesor tomó la decisión de abordar este punto durante la implementación, pero no se concibió dentro del diseño de la planeación.

Autocrítica sobre la fase IV:

Respecto a la pregunta (IV,6) del profesor, la respuesta de un alumno en (IV,7) es correcta; pues todos los números fraccionarios pueden representarse con su equivalente decimal. La corrección del profesor en el fragmento (IV,8) fue una acción meramente instintiva, pues en ese momento él tenía la imagen mental de un segmento cuya longitud corresponde a la de la fracción dada. No obstante, es importante señalar que sólo los decimales finitos y los infinitos periódicos equivalen a números fraccionarios y viceversa.

Reflexión sobre la fase IV:

Aunque los estudiantes aprendieron a resolver y aplicar la división entre fracciones desde la educación básica; siempre conviene destinar un espacio de reflexión sobre la interpretación asociada a este tipo de operaciones; esto con el fin de hacer explícitas algunas observaciones que suelen pasarse por alto. Un posible medio para lograrlo es solicitar a los estudiantes que interpreten un conjunto de operaciones bajo el sentido de las situaciones #1 y #2 como se ejemplifica a continuación:

1) La división $1/_2 \div 5 = 1/_{10}$ significa que al partir un segmento de longitud $1/_2$ en 5 segmentos de la igual longitud, cada uno de los segmentos tendrá una longitud de $1/_{10}$. En este caso el dividendo es un número fraccionario mientras que el divisor es un número natural. Aquí la división se interpreta en el sentido de la situación #2.
2) La división $5 \div 1/_2 = 10$ significa que un segmento de longitud $1/_2$ cabe exactamente 10 veces en un segmento de longitud 5. Aquí el dividendo es un número entero y el divisor es un número natural. La división se interpreta en el sentido de la situación #1.
3) La división $1/_2 \div 1/_4 = 4/_2 = 2$ se interpreta de forma análoga al inciso anterior; significa que un segmento de longitud $1/_4$ cabe exactamente dos veces en un segmento de longitud $1/_2$. A diferencia del inciso 2, ahora el divisor es un número fraccionario; aunque la división también se interpreta en el sentido de la situación #1.
4) La división $1/_3 \div 2/_3 = 3/_6 = 1/_2$ significa que, si se compara la longitud de dos segmentos, uno con longitud $1/_3$ y el otro con longitud $2/_3$, sólo la mitad del segundo segmento cabe exactamente dentro del primero. En este caso también se aplicó la división en el sentido de la situación #1; pero a diferencia de los incisos anteriores el cociente es un número fraccionario. El dibujo que precede al diálogo IV permite visualizar esta proporción entre ambas magnitudes.

5) La misma división ${}^{1}\!/_{3} \div {}^{2}\!/_{3} = {}^{1}\!/_{2}$ del inciso anterior arroja el valor decimal ${}^{1}\!/_{2} = 0.5$. Este cociente también significa que el segmento de longitud es ${}^{1}\!/_{3}$ equivale al 50% del segmento cuya longitud es ${}^{2}\!/_{3}$.
6) La interpretación del inciso anterior puede generalizarse a operaciones menos intuitivas; por ejemplo, la división ${}^{5}\!/_{6} \div {}^{8}\!/_{3} = {}^{15}\!/_{48} = 0.3125$ significa que ${}^{5}\!/_{6}$ equivale al 31.25% de la fracción ${}^{8}\!/_{3}$. Aquí se sigue aplicando la división en un sentido análogo al de la situación #1.
7) El razonamiento del inciso anterior puede generalizarse al caso cuando el dividendo es un número mayor que el divisor; por ejemplo, la operación ${}^{9}\!/_{8} \div {}^{1}\!/_{2} = {}^{18}\!/_{8} = 2.25$ significa que un segmento de longitud ${}^{9}\!/_{8}$ equivale al 225% de la longitud del segmento cuya longitud es ${}^{1}\!/_{2}$. En este caso también se interpretó la división en el sentido de la situación #1; pues se puede decir que ${}^{1}\!/_{2}$ cabe 2.25 veces en ${}^{9}\!/_{8}$.
8) La división también puede interpretarse en el sentido de la situación #2 cuando el divisor no es un número entero; pero sí es un número real mayor que la unidad. Por ejemplo, la división ${}^{11}\!/_{2} \div {}^{5}\!/_{2} = {}^{22}\!/_{10}$ es equivalente a la operación $5.5 \div 2.5 = 2.2$, y esta puede concebirse como un *reparto proporcional*, o bien, como una *partición proporcional*; de tal modo que 5.5 se parte en partes proporcionales a las dos unidades y a las cinco décimas de unidad ($2.5 = 2 + 0.5$). Bajo este contexto, el cociente 2.2 significa que a cada unidad le corresponde esa cantidad, pero a las cinco décimas le corresponde una cantidad proporcional que es equivalente a 1.1 (esto es la mitad de 2.2).

Para abordar los ocho puntos anteriores, conviene hacerlo en orden y mediante situaciones concretas como se hizo con las situaciones #1 y #2. Esto implica diseñar ejemplos contextualizados que integren las operaciones de los incisos 1 al 8. Observe que los valores utilizados en los incisos 1 a 3 son más intuitivos; es decir, más fáciles de imaginar y de operar.

En lo que refiere a la representación decimal de los números fraccionarios, es importante mencionar que cada fracción posee, ya sea una representación decimal finita (como es el caso de ${}^{3}\!/_{4} = 0.75$), o bien, una representación decimal infinita periódica (como es el caso de la fracción

${}^{1}\!/_{3} = 0.33333 \ldots = 0.\overline{3}$). De este modo, los estudiantes no deben perder de vista que $0.3 = {}^{3}\!/_{10}$, $0.33 = {}^{33}\!/_{100}$, $0.333 = {}^{333}\!/_{1000}$, etc., son sólo aproximaciones decimales de ${}^{1}\!/_{3}$; pero representan a una fracción diferente de ${}^{1}\!/_{3}$.

4.3.5 Fase V: Interpretación del residuo de una división

Al igual que la fase IV, la fase V tampoco formó parte de la planeación original; esta se abordó por sugerencia de la profesora del grupo; esto con el fin de no dejar de mencionar la existencia de un *residuo* en el caso de que la división entre dos números naturales no sea exacta. De este modo, durante la implementación de la fase se dedicó un pequeño espacio para cuestionar a los estudiantes sobre una situación concreta en la que requerirían realizar una división no exacta entre naturales y cómo procederían ante dicha situación.

Descripción de la fase V:

Se planteó a los estudiantes la siguiente situación concreta que, probablemente, se hayan enfrentado a ella en algún momento de su vida cotidiana:

> Cinco personas cooperan para comprar una pizza familiar, la cual contiene un total de 12 rebanadas. Para esto, deciden repartirse las rebanadas de tal modo que a cada uno le toque la misma cantidad de rebanadas.

Formalmente hablando, dividir un número natural a entre otro natural b distinto de cero, consiste en calcular dos números: el cociente q que es el número de veces que 'cabe' b dentro de a, y el residuo r que es la cantidad sobrante; es decir, la diferencia entre a y $p \times b$. Por definición, el residuo debe ser un número entre 0 y $b - 1$.

En lo concreto, el residuo se concibe en la cantidad sobrante al partir una cantidad en un número determinado de partes enteras e iguales entre sí, o bien, en la cantidad sobrante al comparar cuántas veces cabe un número natural dentro del otro. La diferencia entre ambas interpretaciones radica en las situaciones #1 o #2 analizadas durante la fase III; no obstante, en ambos casos se interpreta el residuo como una cantidad sobrante.

Como ya se mencionó, esta fase se implementó por no dejar de mencionar la presencia del residuo en el caso de una división no exacta entre números naturales; como era de esperarse, los estudiantes resolvieron la situación de forma inmediata:

Diálogo V:

(V,1) PI: [Plantea la situación anterior a los estudiantes] ¿De a cuántas rebanadas le toca a cada persona?

(V,2) O: 5/12 [Esto es erróneo]

(V,3) PI: Supongamos que no pueden [cambia de expresión], que todavía no deciden repartirse cachitos [se refiere a rebanadas no completas] ¿Cuántas partes enteras les tocaría?

(V,4) Es: Dos

(V,5) PI: Dos a cada quien [confirma]. Entonces son dos rebanadas por persona ¿Sobran rebanadas?

(V,6) Es: Sí

(V,7) PI: ¿Cuántas?

(V,8) Es: Cinco [Notan su error y corrigen] Dos

(V,9) PI: [Recuerda a los alumnos que, en el texto del anexo A, se habla de la operación división limitándola al caso cuando dicha operación es exacta]

(V,8) PI: ¿Ustedes qué harían con esas dos rebanadas?

(V,9) Es: [Muchos alumnos hablan a la vez y algunos bromean]

(V,10) PI: [Replantea la pregunta] Si quieren que a todos les toque exactamente la misma cantidad ¿Qué es lo que harían?

(V,11) O: Se reparte entre 5.

(V,12) PI: [Responde por instinto] Parten a la mitad ¿No? [El profesor nota su error]

(V,13) Es: [Corrigen al profesor]

(V,14) A-1: Se deben repartir entre 5.

(V,15) O-2: Se parten en 5 y reparten dos pedacitos a cada quien.

(V,16) PI: Exactamente [procede a dibujar en el pizarrón dos figuras que simulan ser rebanadas de pizza] Y como dice su compañero, cada una la reparten [cambia de verbo] la dividen en 5 cachos ¿No?

(V,17) PI: Aquí es donde justamente se ve cuál es la necesidad de saltar a las fracciones. Nosotros, en todo lo que vamos a estar manejando [se refiere a las dos sesiones] van a ser con valores exactos y en los problemas que vamos a trabajar no van a haber residuos [El profesor utilizó el concepto de residuo antes de cuestionar a los alumnos sobre dicho concepto]. Ya me adelanté, les iba a preguntar eso: ¿Cómo se le llama a esa cantidad sobrante:

(V,18) Es: residuo

Análisis del diálogo V:

Lo primero que conviene señalar sobre el diálogo V es que la respuesta a la pregunta (V,1) que dio un alumno en el fragmento (V,2) es errónea. En tal caso, lo que se tendría que hacer es tomar la fracción $^{12}/_{5}$ que equivale al cociente de la división $12 \div 5 = 2.4$, y que en el contexto del problema equivale a la cantidad de rebanadas de pizza que le corresponde a cada uno de los integrantes del grupo. Por tanto, la respuesta del alumno en (V,2) es errónea porque refiere a la fracción inversa.

Por otra parte, observe que el razonamiento del alumno O-2 en (V,15) es por sí mismo una demostración intuitiva de la equivalencia $2 \div 5 = {}^{2}/_{5}$. El argumento del alumno O-2 es generalizable al caso de dos enteros cualesquiera a y b, con $b \neq 0$; es decir, el cociente de la división $a \div b$ siempre será equivalente a la fracción $^{a}/_{b}$. Siguiendo el argumento del alumno, cada unida de a se parte en b partes iguales; cada parte medirá $^{1}/_{b}$ y a cada unidad de b le corresponde $^{1}/_{b}$ por cada unidad de a. Por lo tanto, a cada unidad de b le corresponden $^{a}/_{b}$, con lo que se demuestra la equivalencia $a \div b = {}^{a}/_{b}$. Observe que esta demostración es deductiva; sin embargo, comprende razonamientos intuitivos que implican interpretar la división en el sentido de la situación #2 (descrita en la fase III).

La equivalencia del párrafo anterior es sumamente importante en matemáticas, pues permite concebir la división $a \div b$ y la fracción $^{a}/_{b}$ como un mismo objeto matemático; de tal modo que pueden emplearse de forma indistinta. Así, una división puede operarse algebraicamente como una fracción y viceversa.

Reflexión sobre la fase V:

Durante la fase V se planteó una situación en la que se debe dividir dos enteros cuando la división entre ellos no es exacta, además esta situación implicaba interpretar la división en un sentido equivalente al de la situación #2 introducida en la fase III. Sin embargo, no se ejemplificó el caso cuando la división no es exacta y debe interpretarse en el sentido de la situación #1 de la fase III; es decir, cuando se desea comparar dos cantidades entre sí. Una situación podría ser la siguiente:

Situación (no implementada): Se compran 230 gramos de chocolate en polvo el cual sirve para preparar una bebida de leche con sabor a chocolate. Si para preparar un vaso de leche se requieren 20 gramos de chocolate en polvo ¿Cuántos vasos de leche se pueden preparar con los 230 gramos?

Para calcular cuántos vasos de chocolate se pueden preparar con los 230 gramos, se divide $230 \div 20$ con el fin de calcular cuántos grupos de 20 unidades se forman con 230 unidades. En este caso se interpreta la división en el sentido de la situación #1, de tal modo que se obtiene un cociente de 11 y un residuo de 10. Así, los 230 gramos rinden para preparar 11 vasos de leche, además sobrarían 10 gramos de chocolate en polvo. Ahora bien:

$$230 \div 20 = {}^{230}/_{20} = 11 + {}^{10}/_{20} = 11 + {}^{1}/_{2} = 11.5$$

En la igualdad anterior, la fracción ${}^{1}/_{2} = 0.5$ significa que los 10 gramos sobrantes equivalen a preparar el 50% de otro vaso de leche; es decir ${}^{1}/_{2}$ vaso. En este contexto se ha interpretado el residuo en un sentido equivalente al de la situación #1. Es importante que los estudiantes sean capaces de interpretar el residuo en contextos diferentes y equivalentes a los de las situaciones #1 y #2 de la fase III.

4.3.6 Fase VI: Resolución del problema #3

Durante la fase VI se planteó un problema que puede resolverse con una regla de tres. Sin embargo, se solicitó a los estudiantes que interpretaran cada una de las operaciones implicadas en la resolución; esto bajo el contexto del problema. Lo anterior supuso cierto grado de dificultad a los estudiantes debido a que suelen resolver una regla de tres de forma mecánica.

El problema que se resolvió durante la implementación de esta etapa sirvió a los estudiantes como un modelo para solucionar el problema de evaluación del anexo H, último que se implementó justo después de la fase VI.

Descripción general de la fase VI:

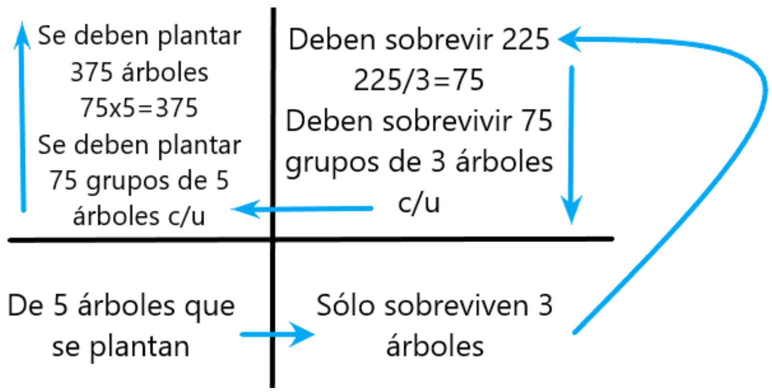
En esta etapa se planteó a los alumnos el siguiente problema, el cual debían analizar y proponer un método de solución; para ello debían justificar cada paso del método, lo que implicaba interpretar cada una de las operaciones:

Problema #3: Se desea reforestar un bosque. Se sabe que sólo 3 de cada 5 árboles plantados sobreviven y llegan a la etapa adulta. Si para reforestar dicho bosque se requieren de 225 árboles adultos ¿Cuántos árboles se necesitan plantar?

Como ya se comentó, el problema #3 puede resolverse mecánicamente con una regla de tres; no obstante, se solicitó a los estudiantes que justificaran cada una de las operaciones implicadas, de tal modo que interpreten las operaciones implicadas en el contexto del problema. Un método para llegar a la solución es el siguiente:

1) Se sabe que de cada 5 árboles plantados sólo sobreviven 3. Por ello, podría decirse que los árboles sobreviven en grupos de 3 árboles.
2) La meta es que sobrevivan 225 árboles. Se divide 225 entre 3 para calcular cuántos grupos de 3 árboles deben sobrevivir; esto implica resolver la división en un sentido equivalente al del problema #1. De este modo, $225 \div 3 = 75$ significa que deben sobrevivir 75 grupos de 3 árboles cada uno.
3) Dado que se espera que sobrevivan 75 grupos de 3 árboles cada uno, se deben plantar 75 grupos de 5 árboles cada uno.
4) Finalmente, se multiplica 75×5 para calcular el número de árboles que se deben plantar para llegar a la meta, estos son 375 árboles en total.

Para mostrar el proceso anterior, se tomó la decisión de dibujar en el pizarrón el siguiente diagrama:



Las flechas azules señalan el orden con el que se fue elaborando durante la instrucción. Este es semejante al diagrama de la planeación del anexo F; de hecho, el profesor llevó el diagrama de la planeación dibujado en una cartulina, pero durante la implementación decidió hacerlo en el pizarrón para incentivar la participación de los estudiantes en la elaboración del mismo.

Una vez que el problema #3 fue escrito en el pizarrón, los alumnos contaron con un tiempo estimado de 2 a 5 minutos para discutir entre ellos sobre cómo solucionarían el problema. Finalmente, el profesor cuestionó a los alumnos si lograron resolverlo, dando lugar al siguiente diálogo:

Diálogo VI:

(VI,1) PI: [El profesor cuestiona a aquellos alumnos quienes, supuso, ya habían llegado a la solución del problema]

(VI,2) O-2: Primero dividimos entre 3 el 225, entonces el resultado que sale lo tengo que multiplicar por 2 [Esto último es erróneo]

(VI,3) PI: ¿Qué divides entre 3?

(VI,4) O-2: 225

(VI,5) PI: Por qué hiciste esa división

(VI,6) O-2: Porque si de cada 3 árboles sobreviven, entonces debo dividir eso para saber cuántos árboles ahora sí plante ¿No?

(VI,7) A-1: [Audio inaudible] Yo lo que hice fue una tabla de tres.

(VI,8) PI: [Pregunta a los alumnos quienes lo resolvieron aplicando la Regla de Tres]

(VI,9) PI: ¿Entienden el significado de cada operación que hicieron en la regla de tres?

(VI,10) A-1: Sí porque lo planeamos como una oración antes de hacer la operación. Si de 3 [corrige] Si de 5 árboles nacen 3 árboles ¿Cuántos árboles van a crecer de 225?

(VI,11) PI: [Avisa a los alumnos que dibujará un esquema en el pizarrón, el cual corresponde con el esquema antes descrito]

(VI,12) PI: Quedamos que, si se plantan 5 árboles, sobreviven 3, efectivamente [escribe en el lado inferior izquierdo del esquema '5 árboles' y del lado inferior derecho '3 sobreviven'] ¿Cuántos árboles queremos que sobrevivan?

(VI,13) Es: 225

(VI,14) PI: [Escribe en la parte superior derecha del diagrama '225 sobreviven']. Ok, sobreviven 225. A ver, la primera división que ustedes hicieron, si aplicaron la regla de tres: ¿Cuál fue?

(VI,15) O: 225 entre 3 [El profesor escribe en el pizarrón '225÷3' justo debajo de '225 sobreviven']

(VI,16) Es: [Algunos estudiantes discuten]

(VI,17) A-1: Primero por 5 y luego entre 3.

(VI,18) PI: Cuando aplican una regla de tres, no es necesario tener que multiplicar primero o tener que dividir primero. Hay que tener cuidado porque sí es importante a veces el cómo se escriben las operaciones, pero en este caso no, ok. No vamos a profundizar en eso, lo que quiero es que vean aquí es el por qué [se refiere a por qué se resuelven esas operaciones].

(VI,19) PI: Qué significa esta división ¿Por qué les interesa dividir 225 entre 3?

(VI,20) Es: [Se escuchan muchas opiniones a la vez y los alumnos discuten entre ellos]

(VI,21) Es: [Dan algunas respuestas simultaneas, pero el audio es inaudible]

(VI,22) O-2: Es porque de cada 5 árboles, este… [Audio inaudible] Uno de cada uno ¿No? [Tiene dificultades para explicar su idea]

(VI,25) A-2: Es que sería como el resultado que saldría de los [tartamudea] De los 5 árboles van a quedar 3, y eso ya es el resultado de esos 3 que salieron. Eso es sólo de los 3, los otros 2 de cada 5 ya se murieron, bueno no sé si se murieron. Entonces, ese es como el resultado, lo tienes que dividir entre 3 porque, es como cada grupito de 5 y entonces… [la alumna tiene dificultades para explicar el resto de su argumento].

(VI,26) PI: Ok, lo que tú dijiste, pero hay que ponerlo más claro [El profesor notó que la alumna ya tenía una idea aproximada, aunque tenía dificultades para explicarlo].

(VI,27) PI: Va la primera pregunta, 225 tienen que sobrevivir, y ustedes saben, por decirlo de algún modo, que sobreviven por grupos de: ¿Cuántos?

(VI,28) Es: De tres.

(VI,29) PI: Ok, ¿Cuántos grupos de 3 árboles tienen que sobrevivir de los 225?

(VI,30) Es: 75

(VI,31) PI: [Escribe en el diagrama '=75' justo a la derecha de '225÷3'] Ok, esto significa que de los 225 tienen 75 grupos de ¿cuántos?

(VI,32) Es: De 3

(VI,33) PI: Pero por cada grupo de 3: ¿Cuántos grupos de 5 árboles tienen que plantar? [El profesor fue poco claro con la pregunta]

(VI,34) Es: [Los estudiantes responden confundidos]

(VI,35) PI: Creo que no les hice bien la pregunta. A ver, se los voy a poner así; ya vieron que los 225 están compuestos por 75 grupos de 3 árboles ¿Ok?

(VI,36) Es: Sí

(VI,37) PI: Pregunta: ¿Cuántos grupos de 5 árboles tienen que plantar?

(VI,38) Es: 75

(VI,39) A-2: 5 [Discute con sus compañeros y luego reflexiona] Ah, sí, 75.

(VI,40) PI: Si se dan cuenta, la respuesta de aquí es la misma respuesta de aquí. Ustedes… [replantea la idea] ustedes quieren que sobrevivan 75 grupos de 3 árboles, entonces tienen que haber plantado esa misma cantidad [Un alumno interrumpe]

(VI,41) O: 75 grupos de 5 árboles

(VI,42) PI: Exactamente [En el audio se escucha una reacción de desacuerdo de un alumno] Entonces esa misma cantidad de grupos la tienen que plantar, pero en grupos de ¿cuántos?

(VI,43) Es: De 5 árboles.

(VI,44) PI: Entonces plantan [Permite que los alumnos completen la oración]

(VI,45) Es: [Hablan al mismo tiempo, el audio es inaudible]

(VI,46) O: 375 [Es correcto]

(VI,47) PI: Bueno, vamos por partes [Escribe en la parte superior derecha del diagrama lo siguiente: 'Plantan 75 grupos de 5 árboles']. 75 grupos de 5 árboles. Ahora sí, entonces: ¿Cuántos árboles en total tienen que plantar?

(VI,48) Es: 375

(VI,49) PI: Y eso ¿Cómo lo saben?

(VI,50) Es: Porque lo multiplicamos.

(VI,51) PI: Exactamente [Escribe en el diagrama '75×5=375' justo arriba de 'Plantan 75 grupos de 5 árboles']

Narración:

El profesor platicó una anécdota a los estudiantes: narró que cuando él era alumno de bachillerato, sabía aplicar una regla de tres; pero desconocía por qué la regla funcionaba. Con ello, el profesor propuso a los estudiantes reflexionar sobre aquellos conocimientos de matemáticas que se asumen verdaderos sin antes haber corroborado su validez.

Análisis del diálogo VI:

El propósito del problema #3 es que los alumnos analicen el problema y, posteriormente, propongan un método de solución en el cual deban interpretar cada una de las operaciones implicadas en el proceso de resolución.

Pese a que el problema puede resolverse con una aplicación directa de una *la regla de tres*, la instrucción se llevó de tal forma que se solicitó a los estudiantes interpretar cada una de las operaciones implicadas, aun cuando cuándo propusieron resolver una regla de tres. Tal y como se esperaba, algunos alumnos, entre ellos la alumna A-1 en (VI,7), refirió haber logrado resolver el problema con una aplicación de la popular regla.

Cuando el profesor cuestionó a los estudiantes si entendían el significado de las operaciones implicadas al resolver una regla de tres (fragmento VI,9), la respuesta de la alumna A-1 (fragmento VI,10) sugiere que resolvió las operaciones implicadas sin interpretarlas bajo el contexto del problema. Desde luego, la alumna A-1 observó que existe una regla de proporción entre la cantidad de árboles plantados y el número de árboles sobrevivientes. Esto le permitió determinar las operaciones que debía resolver según lo dicta la regla; pero carecía de un proceso de interpretación de las operaciones que integran el procedimiento.

Ahora bien, el razonamiento que siguió la alumna A-1 para determinar las operaciones que debía resolver consiste en organizar los datos de la siguiente forma:

ÁRBOLES PLANTADOS	**ÁRBOLES SOBREVIVIENTES**
Se plantan 5 árboles	Sobreviven 3
Se deben plantar ‘n’ árboles	Para que sobrevivan 225

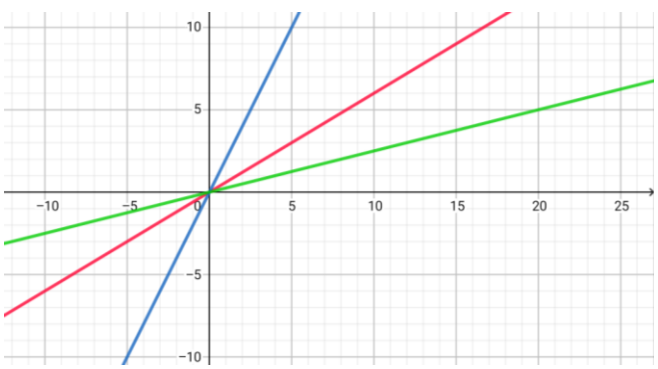
De este modo, interesa conocer el número de árboles que se deben plantar para que sobrevivan 225 árboles; este valor desconocido puede denotarse con una literal, digamos ‘n’. Los datos deben organizarse según la regla de correspondencia que los define; en este caso es el número de árboles plantados en relación con el número de árboles sobrevivientes.

Para calcular el valor de la incógnita n, se deben multiplicar los valores de la tabla que forman una diagonal; estos son los que se encuentran en renglones y columnas opuestas de la tabla, en este caso 5 y 225. Luego se debe dividir el resultado obtenido entre el dato restante, que en este caso es 3. El cociente de la última operación será el valor de la incógnita n. Por lo tanto, el resultado queda determinado por la siguiente expresión:

$$n = \frac{5 \times 225}{3}$$

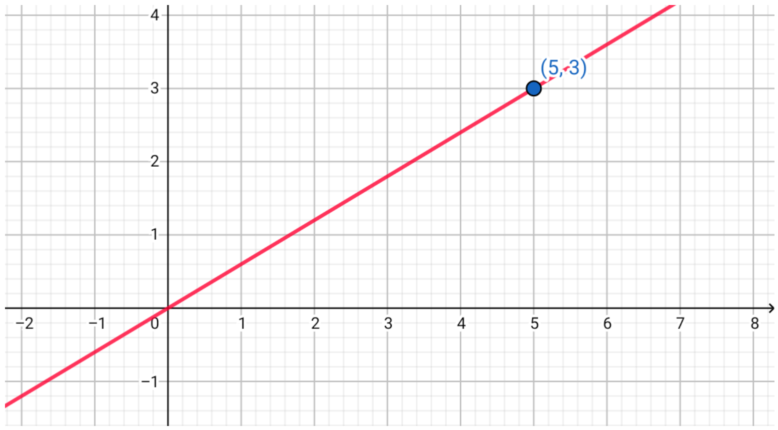
Finalmente, los estudiantes concluyen que $n = 375$. Observe que la operación anterior no es intuitiva; es decir, no permite observar por qué esa selección de operaciones lleva al valor de la incógnita n. La razón es que no hay un proceso de interpretación que justifique la elección de las operaciones más allá de lo que dicta la regla de tres.

Aquí conviene dedicar algunos párrafos para demostrar la validez de la regla de tres mediante el método gráfico. Lo primero que se debe observar es que la regla de tres siempre refiere a una función lineal cuya gráfica pasa por el centro del plano cartesiano; es decir, el punto cuyas coordenadas son (0,0). El término *función lineal* refiere a una regla de correspondencia cuya representación gráfica corresponde a una recta sobre el plano cartesiano; como las que se ejemplifican en la siguiente imagen:



Dado que se necesitan dos puntos para determinan una recta de forma única, toda función lineal que pasa por el punto $(0,0)$ queda determinada por las coordenadas de un segundo punto; último que fija la proporción y la pendiente con la que crece (o decrece) la recta en relación con el eje de las abscisas (también llamado eje X). En el caso del problema #3, este punto tiene las coordenadas $(5,3)$ y define la proporción entre la cantidad de árboles sobrevivientes respecto al número de árboles plantados.

De este modo, el problema #3 está asociado a una recta sobre el plano cartesiano. Si se fija la atención en un punto arbitrario (x, y) sobre la recta, el valor de la ordenada y equivale al número de árboles sobrevivientes en relación con el número de árboles plantados; valor que está asociado a la abscisa x. La recta es la siguiente:



En el caso del problema #3, la recta tiene una pendiente de $m = {}^{3}/_{5}$; esto significa que la recta crece 3 unidades respecto al eje de las ordenadas (también llamado eje Y) por cada 5 unidades que crece con respecto al eje X. En general, toda recta tiene asociada una ecuación con la cual es posible calcular la ordenada y de un punto cuando se conoce su abscisa x, y viceversa. Si x representa la cantidad de árboles plantados, ${}^{x}/_{5}$ se interpreta como el número de conjuntos de 5 árboles plantados. Dado que sobreviven 3 árboles por cada conjunto de 5 árboles plantados, entonces el número de árboles sobrevivientes está determinado por $3 \times \left({}^{x}/_{5}\right)$. Así, la ecuación asociada a la recta es:

$$y = f(x) = \frac{3}{5}x$$

La ecuación anterior permite calcular el número de árboles sobrevivientes y en función del número de árboles plantados x. Esta ecuación puede operarse algebraicamente para calcular el valor de la abscisa x en función de la ordenada y; es decir, para calcular el número de árboles plantados en función del número de árboles sobrevivientes. Para ello, se debe despejar la variable x para expresarla en función de la variable y; de tal modo que:

$$x = g(y) = \frac{5}{3}y$$

La ecuación anterior es la inversa de la función $f(x)$, y esta permite calcular los valores de y en función de los valores de x; en contexto, el número de árboles plantados en función del número de árboles sobrevivientes. Observe que el problema #3 solicita calcular el número x de árboles que se necesitan plantar para que sobrevivan 225 árboles. Así, se sustituye $y = 225$ en la función anterior para calcular el valor de x deseado:

$$x = \frac{5}{3} \times 225 = 375$$

La regla de tres es un método que sintetiza el procedimiento anterior; en general, está fundamentada en la siguiente expresión algebraica que es equivalente a las funciones $f(x)$ y $g(y)$ arriba deducidas:

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{5}$$

Esta ecuación demuestra que el cociente de dos cantidades relacionadas por una regla de proporción determinada siempre será el mismo, de tal modo que al fijar un valor a las variables x o y se puede calcular el valor de la otra variable mediante un despeje algebraico. En el contexto del problema #3 esto significa que el número de árboles sobrevivientes dividido entre el número de árboles plantados siempre arrojará $^3/_5 = 0.6$.

En general, se puede aplicar una regla de tres cuando dos variables x e y varían de forma proporcional una respecto de la otra; aunque esto siempre y cuando el valor $x = 0$ esté asociado con el valor $y = 0$. En otras palabras, la regla de tres sirve para calcular cualquiera de las coordenadas de un punto que yace sobre una recta que pasa por el origen; esto si se conoce la pendiente de la recta y la otra coordenada del punto.

Regresando al análisis del diálogo VI, conviene observar que los estudiantes del grupo de Estadística y Probabilidad I, por tratarse de estudiantes de 5º semestre del CCH, cursaron la materia de Geometría Analítica; última que corresponde a los semestres 3º y 4º en dicha institución. En ella se estudia la ecuación de la recta y su representación gráfica en el plano cartesiano; sin embargo, no siempre se enfatiza cómo este tema da validez a la regla de tres.

En lo que refiere al problema #3, este fue planteado con el propósito de fomentar un pensamiento reflexivo y analítico de parte de ellos; razón por la cual se les solicitó interpretar cada una de las operaciones aplicadas. Cuando un estudiante aplica la regla de tres generalmente ha intuido que existe una regla de proporción entre las variables implicadas; sin embargo, la resolución suele ser mecánica y no hay un proceso de interpretación de las operaciones.

Quienes aplicaron la regla de tres sin interpretar las operaciones concluyeron que el número ‘x’ de árboles plantados está determinado por la expresión:

$$x = \frac{5 \times 225}{3}$$

Observe que en el fragmento (VI,17) la alumna A-1 explicó que primero multiplicó 5×225 y luego dividió el resultado entre 3; sin embargo, la multiplicación referida no tiene una interpretación bajo el contexto de problema. De lo anterior se infiere que no hubo una interpretación de las operaciones implicadas, sino que se operó con los valores dados tal y como indica ‘la receta’.

Por otra parte, las operaciones de la expresión anterior pueden reorganizarse de la siguiente forma:

$$x = \left(\frac{225}{3}\right) \times 5$$

Esta última configuración de las operaciones sí posee una interpretación bajo el contexto del problema #3. Primero, la división $225 \div 3 = 75$ permite calcular cuántos conjuntos de tres árboles deben sobrevivir para alcanzar la meta. Por cada conjunto de tres árboles sobrevivientes se deben plantar cinco árboles; así que la multiplicación $75 \times 5 = 375$ da el número de árboles que se deben plantar para alcanzar la meta.

Al principio los estudiantes mostraron algunas dificultades para interpretar las operaciones de la expresión anterior; finalmente la alumna A-2 dio una explicación válida en el fragmento (VI,25) con la cual dio un sentido a las operaciones implicadas. Aunque tuvo dificultades para expresar su idea, la alumna argumentó que se debían ‘agrupar’ los árboles sobrevivientes en conjuntos de tres para calcular el número de grupos formados; de tal modo que se plantara un conjunto de 5 árboles por cada grupo de 3 árboles sobrevivientes.

4.3.7 Fase VIII: Resolución de la situación #4

Una vez concluida la fase VI dio inicio el proceso de evaluación. Para ello, se entregó a cada estudiante una copia del problema del anexo H; último que se les solicitó resolver bajo la condición de argumentar detalladamente su procedimiento e interpretando cada una de las operaciones implicadas. Los estudiantes contaron con tiempo aproximado de 50 minutos; sin embargo, todos entregaron el problema resuelto durante los primeros 30 minutos. Los resultados del proceso de evaluación serán presentados y analizados en la siguiente sección.

Dado que restaron 20 minutos tras el proceso de evaluación, el profesor decidió plantear a los alumnos otra situación que, inicialmente, se había considerado para formar parte de la evaluación. Esta es la situación del anexo I.

Descripción de la fase VIII

El profesor escribió en el pizarrón una la situación del anexo I a modo de aprovechar los 20 minutos restantes de clase. A esta se le referirá como situación #4:

Situación #4: Una caja de galletas de avena, de cierta marca conocida, tiene un costo al consumidor de $20 en los supermercados. Dicha caja contiene un total de 6 paquetes con 4 galletas cada uno. Por otra parte, un paquete de 6 galletas de avena de la misma marca tiene un precio al consumidor de $10 en el minisúper de la esquina ¿De cuánto es tu ahorro entre comprar una caja de galletas y comprar paquetes sueltos de 6 galletas c/u, de tal modo que iguales la cantidad de galletas que contiene la caja?

La situación no supuso un problema a los estudiantes e inmediatamente propusieron dos métodos de solución diferentes; no obstante, hay elementos interesantes que conviene analizar del diálogo que tuvo lugar en esta etapa de la instrucción.

El primero de los métodos consiste en calcular cuántos paquetes de 6 galletas c/u deben comprarse para igualar la cantidad de galletas que contiene la caja y, una vez hecho esto, comparar los precios entre comprar una caja o paquetes individuales. Por su parte, el segundo método consiste en calcular el precio individual de cada galleta según el precio de cada una de las presentaciones del producto.

Diálogo VIII (1ª Parte):

(VIII,1) PI: Entonces quedamos que la caja de galletas cuesta $20 ¿Cuántos paquetes trae?

(VIII,2) Es: Seis

(VIII,3) PI: Seis paquetes

(VIII,4) PI: Ok, entonces, en total: ¿Cuántas galletas tiene…? [Los alumnos entienden la pregunta antes de que el profesor termine de plantearla]

(VIII,5) Es: 24

(VIII,6) PI: [Dos alumnas propusieron el primer método] Lo que ellas proponen es averiguar cuántos paquetes necesitamos comprar, de 6 galletas, para igualar esto [se refiere a la cantidad de galletas por caja].

(VIII,7) PI: Un paquete de 6 galletas ¿Cuánto cuesta?

(VIII,8) Es: 10 pesos.

(VIII,9) PI: 10 pesos [confirma]. ¿Cuántos [paquetes] tienen que comprar para poder igualar esta cantidad? [Refiriéndose a las 24 galletas que tiene la caja]

(VIII,10) A-1: Sería 24 entre 6 [El profesor escribe la operación en el pizarrón]

(VIII,11) O: 4

(VIII,12) PI: Observación, aquí, si se dan cuenta, lo que están haciendo es que están aplicando la división, pero en el contexto de ver por cuántos grupos de 6 está compuesto 24…

(VIII,13) PI: Ok, entonces… ¿Cuánto gastarían para igualar la cantidad de la caja?

(VIII,14) Es: 40

(VIII,15) PI: 40 pesos [Confirma]

(VIII,16) O: 4 por 10

(VIII,17) PI: Ok, ¿De cuánto es su ahorro?

(VIII,18) Es: De 20

(VIII,19) PI: ¿Les conviene comprar más la caja o andar comprando paquetes sueltos?

(VIII,20) Es: La caja.

Narración:

El profesor explica que el mismo razonamiento se puede aplicar a otros productos. Mencionó ejemplos de algunos productos que, bajo el término ‘Econo-pack’, venden presentaciones con menor cantidad de producto; sin embargo, el contenido de estas presentaciones suele tener un precio mayor en comparación con las demás presentaciones de ese mismo producto. Cabe destacar que la alumna A-1 refirió que ese mismo método puede aplicarse a productos cuyo contenido no se mide por piezas, sino por su peso o volumen.

Diálogo VII (2ª Parte):

(VIII,21) PI: [El profesor indica que ahora se resolverá la situación aplicando el otro método] Vamos a averiguar cuál sería el costo individual de cada galleta.

(VIII,22) O-1: Yo hice eso.

(VIII,23) PI: Ok, entonces: ¿Qué es lo que hay que hacer?

(VIII,24) O-1: Ah, dividir 24 entre 20

(VIII,25) PI: [El profesor reflexiona e insinúa que la respuesta es errónea] Seguros que… [algunos estudiantes interrumpen]

(VIII,26) Es: [Se escucha a los estudiantes discutir entre ellos]

(VIII,27) A-1: 24 entre 26 [Reflexiona] Ah, no, 20 entre 24.

(VIII,28) PI: Ajá, 20 entre 24… Ok, aquí hay que hacer una reflexión un poquito sobre por qué tomamos 20 entre 24 y no 24 entre 20, ahí sí es como para detenerse a pensar… [El profesor reconoce que ese tipo de errores llega a pasar y enfatiza la importancia de reflexionar sobre cómo se interpretan las operaciones según el contexto de la situación]

(VIII,29) O-1: Sí [Contesta de forma afirmativa mientras el profesor hace el comentario de arriba].

(VIII,30) PI: Y aquí [refiriéndose a los paquetes de 6 galletas c/u] quedamos que un paquete cuesta 10 pesos, ¿Cuánto trae cada paquete?

(VIII,31) O: 6, sería 6 entre 10.

(VIII,32) O-1: No, 10 entre 6.

(VIII,33) PI: [Escribe la operación 10÷6 en el pizarrón].

(VIII,34) PI: Ok, entonces, aquí: ¿Cuánto les están cobrando? [Refiriéndose al precio de galleta por paquete de 6 galletas]

(VIII,35) A-1: Es que es el doble.

(VIII,36) Es: Los alumnos discuten.

(VIII,37) PI: Sí es el doble…

(VIII,38) PI: [Reconoce que queda pendiente reflexionar el por qué se debe calcular una división particular y no la inversa]

(VIII,39) O-1: Sale casi igual si se hace al revés. [Este comentario en parte incorrecto y en parte correcto]

(VIII,40) PI: Exacto [El profesor respondió de forma instintiva]

Análisis del diálogo VIII:

Como se observa en la primera parte del diálogo, resolver la situación #4 no supuso un problema a los estudiantes. Además, en (VIII,10) la alumna A-1 identificó inmediatamente la operación $24 \div 6$ para comparar cuántas veces cabe divisor en el dividendo; esto contrasta con el desarrollo del diálogo III cuando la misma alumna explicó que para ella era más intuitivo pensar en una multiplicación a pensar en una división.

Ahora bien, con respecto al segundo método, es evidente que surgieron algunas complicaciones, tal como se observa en los fragmentos de (VIII,21) a (VIII,39). Durante el desarrollo de esta parte, el profesor detectó el error del alumno O-1 en el fragmento (VIII,24); sin embargo, en ese preciso momento no se sintió seguro sobre la razón de por qué era una operación y no la otra.

Conviene analizar parte por parte algunos de los fragmentos del diálogo VIII. Cuando el profesor preguntó a los estudiantes cuál sería el precio individual de cada galleta para la presentación de la caja de 24 galletas cuyo precio total es de $20, el alumno O-1 respondió que se debía resolver la operación $24 \div 20$ para dicho fin. Sin embargo, esto es incorrecto, pues la operación para calcular el precio particular de cada galleta es la división inversa $20 \div 24$.

Los demás alumnos y el profesor intuyeron la operación correcta e hicieron la corrección; sin embargo, existe la cuestión: ¿Por qué se soluciona con una operación y no la otra? Observe que, bajo el contexto de la situación #4, la división $20 \div 24$ se interpreta en el mismo sentido de la situación #2 descrita en la fase III; es decir, esta se concibe como la acción de partir una cantidad en un número determinado de partes iguales.

Así que, para calcular el precio particular de cada galleta, se debe dividir el precio de la caja que es de $20 entre el número de piezas que contiene la caja, estas son 24 galletas. De este sentido, el precio se está dividiendo en 24 partes iguales, y cada parte corresponde al precio de una única galleta. Dado que $20 \div 24 = 0.8333333 \ldots = 0.8\overline{3}$, se concluye que cada galleta tiene un precio aproximado de $0.83.

Ahora bien: ¿Existe alguna interpretación para la división inversa $24 \div 20$ bajo el contexto de la situación #4? La respuesta es afirmativa. Si la división $24 \div 20$ se interpreta en el mismo sentido de la situación #2 e la fase III, esto significa que el contenido de la caja de 24 galletas se divide en 20 porciones iguales ente sí; de modo que cada porción corresponde a un peso ($1) del precio total de la caja. En otras palabras, la división $24 \div 20 = 1.2$ significa que con cada $1 se paga una porción equivalente a 1.2 galletas; es decir, una galleta completa y el 20% de otra.

De este modo, ambas operaciones $24 \div 20 \approx 0.83$ y $20 \div 24 = 1.2$ tienen interpretaciones válidas bajo el contexto de la situación #4 si estas se interpretan en el sentido de la situación #2. Cabe señalar que se puede llegar a la misma conclusión si se utiliza la segunda división en lugar de la primera; sin embargo, es este caso sería fundamental detectar la interpretación correcta de dicha operación. En este sentido, la afirmación del alumno O-1 en el fragmento (VIII,39) es parcialmente cierta, pues se puede llegar a la misma conclusión utilizando la división inversa; sin embargo, la interpretación de la operación cambia totalmente.

Observe que el alumno O-1 no fue el único que intuyó una división errónea para calcular el precio individual de una galleta, pues en el fragmento (VIII,31) otro alumno intuyo la división incorrecta para calcular el precio individual de cada pieza, en este caso para la presentación del paquete de seis galletas con precio de $10.

Autocrítica sobre la fase VIII:

Como se observa en el fragmento (VIII,40), en una reacción puramente instintiva, el profesor confirmó la afirmación del alumno O-1 en el fragmento (VIII,39); esto sin antes corroborar la validez de la afirmación. No obstante, conviene analizar el comentario del alumno, último que es en parte correcto y en parte incorrecto.

Tal como se explicó durante el análisis del diálogo VIII, la división $20 \div 24$ arroja el precio individual de cada galleta por caja, que es aproximadamente igual a \$0.83. Por su parte, la división inversa $24 \div 20 = 1.2$ da como resultado la proporción de galletas equivalente por cada peso pagado (\$1); esto tomando como referencia la caja completa cuyo contenido es de 24 piezas y con un precio de \$20.

Como es de esperarse, hay una diferencia significativa entre los resultados arrojados por ambas divisiones: $24 \div 20 = 1.2$ y $20 \div 24 = 0.8\overline{3}$. Además, ambas poseen interpretaciones diferentes bajo el contexto de la situación #4. No obstante, se puede llegar a la misma conclusión si se utilizan las divisiones inversas con su respectiva interpretación; para esto, observe que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\frac{20}{24} \approx 0.83 < 1.6 \approx \frac{10}{6}$$

$$\frac{24}{20} = 1.2 > 0.6 = \frac{6}{10}$$

En la primera desigualdad se compara el precio individual de cada galleta entre la presentación por caja de 24 piezas y la de paquete de 6 piezas; esta es la desigualdad que los estudiantes refirieron en los fragmentos (VIII,35) y (VIII,37). Por otra parte, en la segunda desigualdad se comparan a qué proporción de producto equivale un \$1 respecto a las presentaciones de una caja de 24 piezas y un paquete de 6 piezas.

Observe que al invertir el numerador y el denominador de las fracciones de la primera desigualdad también se invierte el sentido de la misma; obteniendo como resultado la segunda desigualdad. En el contexto de la situación #4, la segunda desigualdad muestra que \$1 invertido en la presentación de la caja de 24 galletas equivale al doble que en el caso de invertirlo en la presentación de un paquete de 6 galletas. En ese sentido se llega a la misma conclusión: que conviene más comprar la caja de 24 galletas; sin embargo, las operaciones implicadas tienen una interpretación diferente a las de la primera desigualdad.

Reflexión sobre el diálogo VIII:

La situación #4 mostro que pueden surgir errores de intuición al momento de proponer la operación que resolvería una situación determinada. Por esa razón es conveniente que, incluso en los niveles de educación media superior, se promueva la reflexión en torno a la aplicación e interpretación de las operaciones elementales; especialmente de la división en los sentidos equivalentes a las situaciones #1 y #2 descritas en la fase III.

Cabe destacar que los estudiantes mostraron una actitud de interés sobre las conclusiones del problema #4, pues se les informó que el problema se diseñó tomando en cuenta las presentaciones y los precios reales de una marca de galletas que se vende en los supermercados y en los minisúper que se encuentran en la Cd. de México. De hecho, los estudiantes identificaron la marca de galletas que inspiró el diseño del problema sin que el profesor la hubiera mencionado.

Al final, los estudiantes infirieron que los mismos métodos empleados durante la fase VIII pueden generalizarse para comparar el precio de diferentes presentaciones de un mismo producto, esto en relación con el contenido de dichas presentaciones; es decir, comparando la proporción que existe entre el precio y el contenido del producto.

La actitud positiva de los estudiantes ratifica la importancia de enseñar matemáticas a través de situaciones y contextos que les sean significativos; esto último tomando como referencia su contexto personal, social, cultural y profesional, tal y como sugiere el paradigma de la educación matemática realista de Freudenthal (Goffree, 2000).

4.4 PROCESO DE EVALUACIÓN DE LA 1ª SESIÓN (FASE VII)

Una vez concluida la fase VI, el profesor entregó a cada alumno una hoja con el problema del anexo H impreso; esto con el propósito de evaluar los aprendizajes desarrollados hasta ese parte de la sesión. Posteriormente, solicitó a un alumno que leyera en voz alta las instrucciones previas al problema, así como el problema mismo.

Para ello, los estudiantes recibieron la instrucción de resolver el problema y, posteriormente, redactar una explicación detallada del procedimiento que siguieron para llegar a la solución. En particular se les solicitó escribir todas las operaciones aplicadas como parte de su procedimiento y explicar el propósito de cada una sobre el contexto del problema.

El problema de evaluación puede consultarse en el anexo H tal y como les fue entregado a los estudiantes durante la sesión (incluyendo las instrucciones). No obstante, abajo se anexa el problema de evaluación junto con las observaciones que este incluía.

> **PROBLEMA #1:** Una empresa que se dedica a la fabricación de focos, tuvo una producción de 200 focos. Sin embargo, la empresa sabe que, por cada 40 focos fabricados, 7 de ellos no pasan el control de calidad. Cada foco fabricado generó a la empresa un costo de producción de $5, y sólo los que pasaron el control de calidad se venden a un precio de $20 **¿Cuál será la ganancia de la empresa sobre la producción antes mencionada?**
>
> *Observación #1.1: recuerda que la ganancia no es el dinero que ingresa a la empresa de una venta, sino la diferencia entre la venta y el costo que generó la misma.*
>
> *Observación #1.2: no pierdas de vista que los focos defectuosos generaron un costo a la empresa, el cual no se recupera, pues estos últimos no se venderán.*

Aquí conviene hacer la aclaración de que, en lo que resta de la presente tesis, se referirá al problema anterior como ‘primer problema de evaluación’, o bien, como ‘problema de evaluación’ si el contexto permite identificarlo. La enumeración ‘#1’ del problema anterior será ignorada, pues esta se incorporó ante la posibilidad de aplicar dos problemas de evaluación durante la primera sesión. Sin embargo, como ya se mencionó, el otro problema (anexo I) se implementó durante la fase VIII como un problema a discutir de forma grupal.

Como puede observarse, debajo del problema de evaluación hay dos observaciones. La primera de ellas fue redactada con el fin de evitar una interpretación errónea de los términos ‘venta’ y ‘ganancia’. Por su parte, el propósito de la segunda observación fue la de advertir a los alumnos que deben ser cuidadosos al momento de calcular la inversión de la impresa. Aquí conviene mencionar que, posterior a la implementación, se consideró como un error el haber incluido ambas observaciones, pues estas quizá sugirieron a los estudiantes la forma de calcular la ganancia final obtenida por la empresa; esto en relación con el costo y la venta.

Más allá del error antes mencionado, el problema fue diseñado con el propósito principal de evaluar si los alumnos llevaban a cabo un proceso de interpretación de las operaciones; específicamente de la división en el sentido de la situación #1 descrita en la fase III. Para ello, los estudiantes debían darse a la tarea de analizar el problema y descomponerlo en subproblemas más simples; de hecho, uno de los subproblemas es equivalente al problema que se resolvió durante la fase VI.

Para ello, los estudiantes contaron con 50 minutos para resolver el problema y para explicar detalladamente el proceso que los llevó a la solución; sin embargo, todos los alumnos entregaron el problema durante los primeros 30 minutos. Además, se les permitió que trabajaran de forma colaborativa; aunque cada alumno debía redactar su propia explicación sobre el procedimiento que siguieron para llegar a la solución del problema.

A continuación, se presentarán y analizarán los resultados obtenidos en la evaluación de este problema. Para esto, la sección estará dividida en cuatro subsecciones; en cada una se presentarán y analizarán los resultados referentes de un aspecto de los resultados generales; estos son la descripción de los métodos de solución válidos redactados por los estudiantes, sus conclusiones parciales y finales, la aplicación de la regla de tres como parte del procedimiento y, finalmente, una categorización de los errores detectados.

Aquí es preciso hacer la aclaración de que el propósito de evaluación aquí descrita no fue asignar una calificación a los estudiantes; sino que se propuso analizar detalladamente cuáles fueron los aciertos y desaciertos de los estudiantes en relación con sus métodos de solución redactados. Por esta razón, el análisis que se llevará a cabo será esencialmente de carácter cualitativo.

4.4.1 Tres métodos de solución diferentes para el primer problema de evaluación

Durante el diseño del problema se previó que los estudiantes propondrían un único método de solución, y al cuál se le referirá como 'Método Tipo A'. Conviene adelantar que los estudiantes propusieron otros métodos que, de aplicarse correctamente, también llevarían a la solución correcta del problema. Dicho método consta de cuatro pasos:

En lo que refiere al método de tipo A, este consta de cuatro pasos que se describen en la siguiente tabla:

Pasos que Integran el Método Tipo A	
Costo de Producción	Se calcula el costo de producción de los focos; es decir, la inversión de la empresa. Para ello, se multiplica el número de focos fabricados (200 focos) por el costo de producción de cada foco ($5), obteniendo así un costo de producción de $1,000. Los estudiantes deben resolver $5 \times 200 = 1000$ y dar una explicación equivalente a la anterior.
Focos Buenos	Se calcula el número de focos que aprobaron el control de calidad de entre los 200 focos fabricados; estos son los focos que serán vendidos por la empresa. Para realizar este cálculo se debe de aplicar una regla de tres; se espera que los estudiantes apliquen la regla interpretando cada una de las operaciones implicadas. El número de focos buenos es 165; también podría calcularse por regla de tres el número de focos defectuosos (35 focos) y luego calcular los focos buenos con la resta $200 - 35 = 165$.
Venta	Este paso consiste en calcular los ingresos de la venta; es necesario haber calculado antes el número de focos buenos debido a que sólo estos serán vendidos por la empresa. Para ello, se multiplica el número de focos buenos (165) por el precio de venta por unidad ($20), obteniendo así un ingreso de $3,300. Los estudiantes deben resolver $20 \times 165 = 3300$ y proporcionar una explicación análoga a la aquí descrita.
Ganancia	El último paso consiste en calcular la ganancia final de la empresa y es consecuencia de los pasos anteriores. Para ello, se resta el costo de producción de los focos ($1,000) a los ingresos de la venta ($3,300), obteniendo así una ganancia final de $2,300. Los estudiantes deben resolver y explicar la operación: $3300 - 1000 = 2300$.

A continuación, se anexa el procedimiento redactado por la alumna A-1 quien aplicó y explicó el método de solución anterior:

* primero determinaré el gasto total en producir los focos

$$\boxed{\underset{\text{focos}}{200} \times \underset{\text{pesos}}{5} = 1{,}000 \text{ pesos}}$$

* luego saber el total de focos funcionales y defectuosos.

$\underset{\text{focos}}{40}$ — 7 defectuosos

$\underset{\text{focos}}{200}$ — X defectuosos

si de 40 focos, 7 son defectuosos de 200, ¿cuántos serán defectuosos?

$$X = \frac{(200)(7)}{40}$$

$$X = \frac{1{,}400}{40}$$

$X = 35$ defectuosos.

ó

200 focos / (200÷40)= 5	5 x 7 = 35 / 5 grupos de 7 focos defectuosos
40 focos / $\boxed{\text{grupos de 40 focos}}$	7 defectuosos

Funcionales → $\underset{\text{total de focos}}{200} - \underset{\text{defectuosos}}{35} = 165$ focos

Defectuosos → 35 focos

* obtener la ganancia de los focos funcionales.

(165 focos)(20 pesos) = $3,300

* Se resta la ganancia a la cantidad del gasto total (que incluye los focos defectuosos) para saber cuánto ganó la empresa netamente.

3,300 → ganancia focos funcionales
− 1,000 → inversión
2,300 → ganancia neta

Observe que calcular el número de focos requiere de aplicar una regla de tres. La alumna A-1 primero aplicó la regla de tres sin interpretar las operaciones implicadas; sin embargo, después volvió a aplicar la misma regla ahora sí interpretando cada una de las operaciones implicadas. Esto es importante porque en las instrucciones se solicitó explicar el propósito de cada una de las operaciones referidas.

A pesar de que el método A se consideró el más simple e intuitivo, se observó el caso de cuatro alumnos quienes intentaron resolver el problema por un método diferente; sin embargo, ninguno de ellos llegó a la solución correcta del problema.

En total se propusieron dos métodos diferentes al de tipo A. Pese a que ningún estudiante llegó a la solución correcta por estos métodos, una parte de ellos es válida, de tal modo que se explicará en qué consisten y cuál sería la forma válida de proceder para llegar a la solución correcta. A dichos métodos se les referirá como tipo B y C. A continuación, se explica el primero de ellos:

Pasos que Integran el Método Tipo B	
Focos Defectuosos	Se calcula por regla de tres (o algún método diferente) el número de focos fabricados que resultaron defectuosos. Si este paso se lleva a cabo de forma correcta, se concluirá que el total de focos defectuosos es de 35.
Focos Buenos	Se calcula por regla de tres (o por algún método diferente) el número de focos fabricados que aprobaron el control de calidad. Si este paso se lleva a cabo de forma correcta, se concluirá que el número de focos buenos es 165.
Ganancia por Unidad Vendida	Se calcula la ganancia individual por cada unidad vendida; aunque esta refiere sólo al caso de los focos que aprobaron el control de calidad. Cada foco tiene un costo de producción de $5 y se vende a $20. De este modo, la ganancia individual por unidad vendida es de $15. Los estudiantes deben resolver la operación $20 - 5 = 15$ y explicarla.
Ganancia sin Pérdida	Ahora se calcula la ganancia inicial por las unidades vendidas; aunque todavía no se toma en cuenta que el costo de producción de los focos defectuosos representa una pérdida para la empresa. Para esto, se multiplica el número de focos buenos (165) por la ganancia individual de cada foco ($15), obteniendo así una ganancia inicial de $2,475. Los estudiantes deben resolver la operación $15 \times 165 = 2475$ y explicarla.

Pérdida	Dado que los focos defectuosos no se venden, su costo de producción representa una pérdida para la empresa. Dicho esto, se multiplica el número de focos defectuosos (35) por el costo de fabricación de cada foco ($5), obteniendo así una pérdida de $175. Los estudiantes deben resolver $5 \times 35 = 175$ y explicar el significado de la operación.
Ganancia Final de la Empresa	El último paso es calcular la ganancia final de la empresa. Para ello se resta la pérdida por la fabricación de los focos defectuosos ($175) a la ganancia derivada de la venta de los focos buenos ($2,475), obteniendo así una ganancia final de $2,300. Los estudiantes deben resolver $2475 - 175 = 2300$ y explicar esta operación.

Sólo tres estudiantes aplicaron un método de solución cuya estructura coincide en parte con el método de solución B; sin embargo, todos cometieron algún error de análisis que los llevó a un resultado erróneo.

Note que el análisis y el razonamiento detrás del método B es más complejo que el del método A; esto tomando en cuenta que en el método A se calcula el costo de producción de la totalidad de focos con una única operación. Por su parte, en el método B se calcula el costo de producción de los focos defectuosos para interpretarlo como una perdida; mientras que el costo de producción de los focos buenos está implícito al calcular la ganancia inicial de la empresa.

Otra diferencia entre los métodos de A y B es que el método A sólo requiere calcular el número de focos buenos, mientras que para el método B se necesita calcular tanto el número de focos buenos como también el número de focos defectuosos; aunque conociendo una de las cantidades se puede calcular la otra con una resta. De hecho, como se verá más adelante, la mayoría de los alumnos quienes aplicaron el método A también calcularon el número de focos defectuosos antes que el número de focos buenos.

Ahora bien ¿De qué depende que un estudiante siguiera un método y no los otro? Es posible que quienes aplicaron el método B obedecieron a algún tipo de intuición característica del método B y no del método A; mientras que quienes aplicaron el método A obedecieron a un tipo de intuición propia del método A.

Quienes aplicaron el método A intuyeron que la mejor forma de calcular la ganancia final sería calcular los ingresos obtenidos de la venta de los focos buenos para después restarle el costo de producción de los 200 focos fabricados. Por su parte, quienes siguieron el método B intuyeron que sería mejor calcular directamente la ganancia obtenida de la venta de cada foco. De este modo, cada método refiere a un tipo de intuición que los estudiantes adquirieron durante su experiencia previa.

Como se describió en el capítulo 2, la intuición es la que guía el proceso de búsqueda de la solución a un problema determinado. En otras palabras, es la intuición la que da paso a proponer un método de solución, más allá de que este resulte ser válido o no. Sin embargo, la intuición por sí sola no es suficiente, pues puede llevar a errores. Aquí es oportuno recordar que Crespo (2008) y Kline (1990) destacan que tanto la intuición como la razón deben trabajar de forma articulada. En otras palabras, la intuición cumple la función de proponer uno o más métodos de solución a un problema determinado; mientras que la razón se encargará de evaluar si el o los métodos propuestos son válidos o no.

Es por la razón anterior que se solicitó a los estudiantes escribir todas las operaciones e interpretar su significado. Al hacer esto, los estudiantes se ven en la necesidad de comprender los fundamentos del método que propusieron más allá de lo que dicta la intuición. Argumentar el propósito de cada operación implica razonar cada paso del método, aunque esto no siempre exenta al estudiante de cometer errores de razonamiento. De hecho, se detectaron diversos errores de razonamiento por parte de los estudiantes que serán explicados y analizados más adelante en esta misma sección.

En lo que refiere a los métodos de solución se detectó un tercer método; último que fue empleado por un único alumno. Este estudiante escribió todas las operaciones que integraron su procedimiento; pero no proporcionó una explicación de estas. A pesar de este inconveniente, es posible interpretar las operaciones y dar seguimiento al procedimiento del estudiante.

El método de este último estudiante comprende un error de razonamiento que, a percepción del autor de la presente tesis, es difícil de identificar. Sin embargo, una parte del método resultó ser válido y, con las correcciones necesarias, se puede llegar a la solución correcta del problema. En tal caso el método de solución sería el siguiente:

Pasos que Integran el Método Tipo C	
Focos Defectuosos	Se calcula el número de focos defectuosos fabricados por la empresa; esto a través de la aplicación de la regla de tres, o bien, con un método alternativo.
Costo de Producción	Al igual que en el método A, se calcula el costo de producción de los focos ($1,000), multiplicando el costo de producción de cada foco ($5) por el número de focos fabricados (200).
Ingreso por la Venta de la Totalidad de Focos	Se asume que se venderán la totalidad de focos (incluidos los defectuosos), aun cuando esto vaya contra las indicaciones del problema. Para esto, se multiplica el precio de venta de cada foco ($20) por el número de focos fabricados (200), obteniendo así un ingreso inicial de $4,000.
Ganancia Inicial de la Venta	Se calcula la ganancia inicial, aunque esta no será la ganancia final de la empresa; pues quienes compraron los focos defectuosos exigirán la devolución de su dinero. Para esto, se resta el costo de producción de los focos ($1,000) al ingreso de la venta ($4,000), obteniendo así una ganancia inicial de $3,000.
Pérdida por el Rembolso de Dinero	Se supone que los clientes quienes compararon un foco defectuoso exigirán el reembolso de su dinero, último que será interpretado como una pérdida. De este modo, se multiplica el número de focos defectuosos (35) por el precio de venta por unidad ($20), que resulta en una pérdida de $700.
Ganancia Final	Por último, se calcula la ganancia final que obtuvo la empresa. Para ello se resta la pérdida ($700) a la ganancia inicial ($3,000), de tal modo que se obtiene una ganancia final de $2,300.

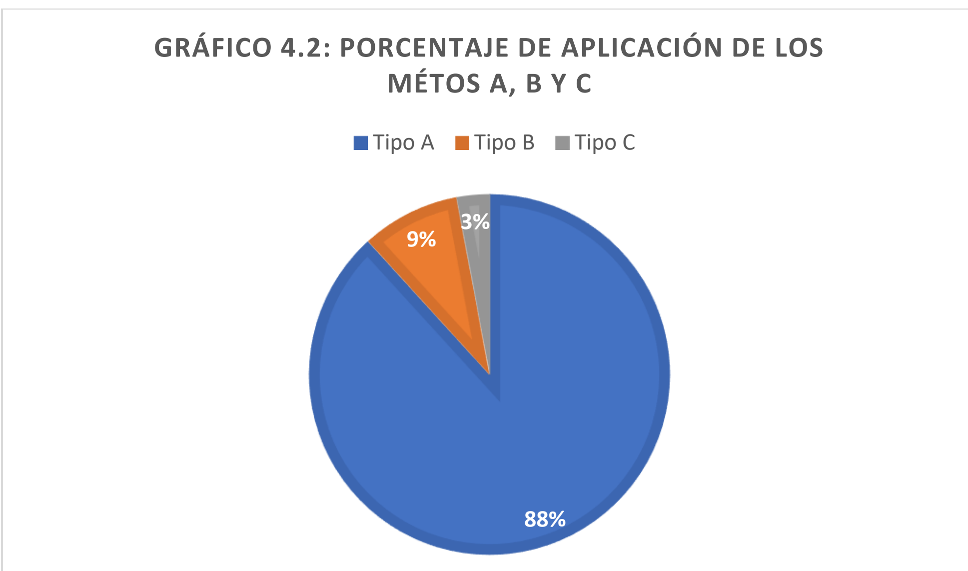
El método anterior retoma la parte válida del procedimiento redactado por el alumno antes referido; sin embargo, este comprende los ajustes necesarios para llegar a la solución correcta. El procedimiento del estudiante comprendía un error de razonamiento asociado a una intuición errónea; última que aparentaba ser válida. Este error de razonamiento será explicado y analizado en una subsección posterior.

Los tres métodos antes descritos servirán de modelo para evaluar los aciertos y desaciertos de los métodos redactados por los estudiantes. Esto también permitirá detectar dónde se presentaron la mayoría de los errores. Además, se realizará una categorización de todos los errores cometidos por los estudiantes en sus respectivos métodos de solución.

A continuación, se anexa una tabla y un gráfico que muestra la proporción de alumnos que aplicó cada uno de los métodos anteriores; esto independientemente de que hayan llegado o no a la solución correcta del problema.

Tipo de Método	Número de Estudiantes	Porcentaje
Tipo A	30	88%
Tipo B	3	9%
Tipo C	1	3%

TABLA 4.1: Número de estudiantes que siguieron los métodos de solución A, B y C.



No se puede descartar que la primera ‘observación’ redactada debajo del problema del anexo H guarde relación con el hecho de que la mayoría de los estudiantes intuyeron y aplicaron el método de solución tipo A. Como ya se explicó, la observación se incluyó para evitar que los estudiantes confundieran los términos ‘venta’ y ‘ganancia’, y evitar así errores de interpretación. Esto podría explicar por qué predominó el método de solución A. No obstante, los métodos de solución B y C exigen un análisis más complejo; razón por la cual se les puede considerar menos intuitivos que el método A.

4.4.2 Aciertos y desaciertos en la resolución del primer problema de evaluación

En esta subsección se presentarán y analizarán los resultados referentes a los aciertos y desaciertos de los estudiantes en los métodos que redactaron; esto último tomando como base los pasos que integran cada uno de los tres métodos antes vistos. Recuerde que estos últimos están integrados por una serie de pasos con los cuales se llega a la solución correcta del problema.

Para evaluar los aciertos y desaciertos de un estudiante se asoció el método que empleó con alguno de los métodos A, B, o C; luego se evaluaron sus resultados en cada uno de los pasos que integran el método asociado. Por ejemplo, si un estudiante aplicó el método tipo A, se evaluaron sus resultados en los pasos: 1) calcular el costo de producción, 2) calcular el número de focos buenos, 3) calcular los ingresos de la venta y 4) calcular la ganancia final de la empresa. Para esto, se clasificaron y cuantificaron los resultados en cada uno de los pasos conforme a las siguientes tres categorías:

a) *Correcto:* el estudiante presentó un resultado correcto del paso en cuestión.
b) *Incorrecto:* el estudiante presentó un resultado erróneo en dicho paso; sin embargo, sí identificó esta parte del método y aplicó una operación para calcularlo.
c) *No especificado:* el estudiante no presentó el resultado del paso; ya sea porque lo omitió, o bien, porque no identificó esta parte del método.

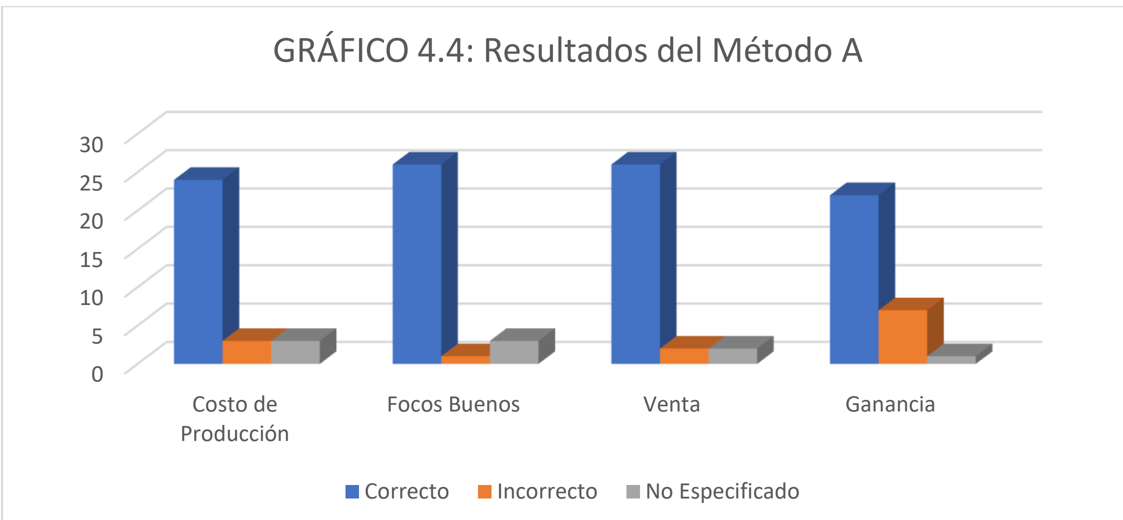
Por ejemplo, se dio el caso de un estudiante que, siguiendo el método de solución tipo B, calculó correctamente la ganancia de la venta de los focos buenos; sin embargo, lo interpretó como la ganancia final a pesar de que faltaba calcular y restar la pérdida. A este estudiante se le calificó con ‘Correcto’ en el paso ‘Ganancia sin pérdida’, pero en los pasos ‘Perdida’ y ‘Ganancia final’ se le calificó con ‘No especificado’, pues no refirió a dichos pasos.

En la siguiente tabla se presentan los resultados sobre los aciertos y desaciertos de aquellos estudiantes quienes aplicaron el método de solución tipo A:

RESULTADOS	Costo de Producción	Focos Buenos	Venta	Ganancia
Correcto	24	26	26	22
Incorrecto	3	1	2	7
No Especificado	3	3	2	1

TABLA 4.3: No. de Aciertos y Desaciertos en la Resolución del Problema por el Método A

La tabla anterior detalla el número de aciertos (valores correctos) y desaciertos (valores incorrectos o no especificados) cometidos por los 30 alumnos quienes siguieron el método de solución tipo A. Observe que la suma de los valores de cada columna da como resultado el número total de estudiantes quienes aplicaron ese método. El siguiente gráfico facilita comparar los resultados obtenidos en cada uno de los pasos del método:



Lo errores cometidos por los estudiantes serán detallados en la subsección 4.4.4. Por ahora conviene observar que la mayoría de los errores en torno a este método de solución están relacionados con el cálculo del costo de producción de los focos, así como también con el cálculo de la ganancia final de la empresa, tal como se infiere del gráfico anterior.

En lo que se refiere al cálculo del número de focos buenos, esta parte del método implica aplicar la regla de tres. Los datos de la tabla 4.3 muestran la proporción de aciertos en esta parte del método; sin embargo, no aporta información adicional sobre cómo los estudiantes procedieron en esta parte del método. Los detalles serán analizados en la siguiente subsección.

Por ahora conviene mencionar que se tuvo el caso de dos alumnas quienes interpretaron de forma errónea el resultado obtenido al aplicar la regla de tres. El primer caso refiere al de una alumna cuya explicación del método fue confusa e inconsistente más allá de referir haber resuelto una regla de tres. El otro caso refiere al de una alumna quien aplicó la regla de tres de forma correcta; sin embargo, interpretó el resultado de forma errónea. Ambos errores serán referidos y explicados en las subsecciones 4.4.3 y 4.4.4. También se dio el caso de dos estudiantes quienes omitieron el resultado de este paso, aunque sí proporcionaron elementos que sugieren que aplicaron la regla de tres correctamente.

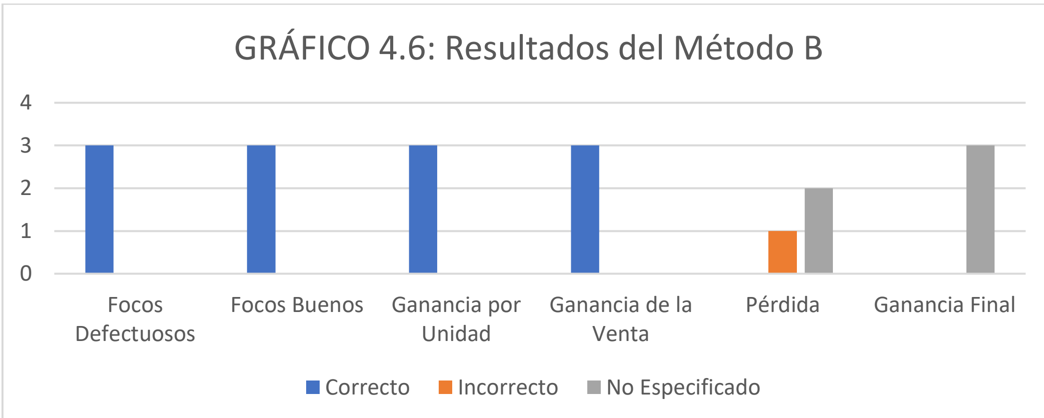
En general se tuvo el caso de tres estudiantes quienes aplicaron el método A sin escribir los resultados parciales referentes a los pasos del método; esto a pesar la indicación de escribir todas las operaciones, sus resultados y la explicación de las mismas. Como ejemplo se anexa el procedimiento redactado por una alumna quien omitió las operaciones, aunque sí aportó una explicación de este:

> RESULTADO
>
> La ganancia de la empresa es de $2,300.//
>
> procedimiento
>
> primero tome en cuenta el número total de focos 200 agrupe de 40 en 40 para que el resultado de esta agrupación que fue 5 lo multiplic por los veces que 7 focos no pasaban el control de calidad y ese sería el total de focos no vendidos. Despues reste esos focos, con los focos buenos para conocer el total de los que se vendería Por último, multiplique el total de focos por el gasto y los focos buenos a lo que se venderían así podria restar el total de ganancias con la pérdid para conocer la ganancia real.

Ahora bien, en lo que se refiere al método de solución tipo B, sólo tres estudiantes aplicaron este método; probablemente guiados por la intuición de calcular la ganancia individual obtenida de la venta cada foco ($15). A continuación, se presentan los resultados sobre los aciertos y desaciertos de los tres alumnos quienes aplicaron este método de solución:

RESULTADOS	Focos Defectuosos	Focos Buenos	Ganancia por Unidad	Ganancia de la Venta	Pérdida	Ganancia Final
Correcto	3	3	3	3	0	0
Incorrecto	0	0	0	0	1	0
No Especificado	0	0	0	0	2	3

TABLA 4.5: No. de Aciertos y Desaciertos en la Resolución del Problema por el Método B



Observe que todos los estudiantes quienes siguieron el método B obtuvieron un resultado erróneo en el cálculo de la ganancia final (véase la descripción del método tipo B en la subsección anterior). Como se mencionó antes, quienes siguieron este método probablemente obedecían a la intuición de calcular la ganancia particular obtenida de la venta de un solo foco. Sin embargo, al hacer esto no se está considerando el costo de producción de aquellos focos que reprobaron el control de calidad; es decir, de aquellos que no se vendieron. El costo de producción de estos focos debía interpretarse como una pérdida y restarse a la ganancia inicial de la empresa.

Tal como se infiere del gráfico anterior, sólo una alumna interpretó la producción de los focos defectuosos como una pérdida para la empresa; aunque realizó el cálculo de forma errónea. Por su parte, los demás estudiantes interpretaron la ganancia obtenida por la venta de los focos buenos como la ganancia final; esto sin darse cuenta de que la producción de los focos defectuosos representa una pérdida que debía restarse a la ganancia de la venta.

Ahora bien, sólo un alumno aplicó un método de solución diferente a los métodos A y B. El método de solución C sirve de base para evaluar los aciertos y desaciertos de este único estudiante quien no llegó a la solución correcta del problema debido a un error en su procedimiento; último que podría calificarse como contraintuitivo.

Aunque sólo este alumno aplicó el método C, se comparte la siguiente tabla en la cual es posible apreciar sus aciertos y desaciertos en relación con el método de solución tipo C:

RESULTADOS	Focos Defectuosos	Costo de Producción	Ingresos por la Venta	Ganancia Inicial	Pérdida por Rembolso	Ganancia Final
Correcto	1	1	1	1	0	0
Incorrecto	0	0	0	0	1	1
No Especificado	0	0	0	0	0	0

TABLA 4.7: No. de Aciertos y Desaciertos en la Resolución del Problema por el Método C

Como se observa en la tabla, el alumno calculó correctamente el número de focos defectuosos, el costo de producción de los focos, los ingresos de la venta bajo el supuesto de que se hubieran vendido la totalidad de focos (incluyendo los defectuosos), y la ganancia inicial de la venta. Sin embargo, falló en el análisis y el cálculo de la pérdida; algo que también derivó en el cálculo erróneo de la ganancia final. Su error será interpretado y analizado en la subsección 4.4.4, pues este alumno escribió sus operaciones sin explicarlas.

En general, sólo los estudiantes quienes aplicaron el método A llegaron a la solución correcta del problema. Recuerde que los métodos A, B y C tienen su origen en distintos tipos de intuiciones. El método A deriva de la intuición de calcular la ganancia final como una diferencia entre los ingresos por la venta de los focos buenos y el costo de producción de los focos fabricados. Por su parte, el método B deriva de la intuición de calcular la ganancia particular por la venta de un solo foco ($15) y usar esta cifra para calcular la ganancia final. Finalmente, el método C deriva de la intuición de suponer que se venden la totalidad de los focos fabricados, incluyendo aquellos que resultaron defectuosos.

El método C es el que implica un análisis más complejo del problema, mientras que el A comprende de un análisis más simple; esto último en virtud de los pasos que integran ambos métodos. Por su parte, el método B comprende un análisis más complejo que el del método A, aunque menos complejo que el método C. Esto podría explicar por qué la mayoría de los estudiantes aplicaron el método A, además de que ningún estudiante llegó a la solución correcta por los métodos B y C. Sin embargo, no se descarta que las observaciones que acompañaron al problema (véase el anexo H) hayan interferido en la proporción de los métodos aplicados.

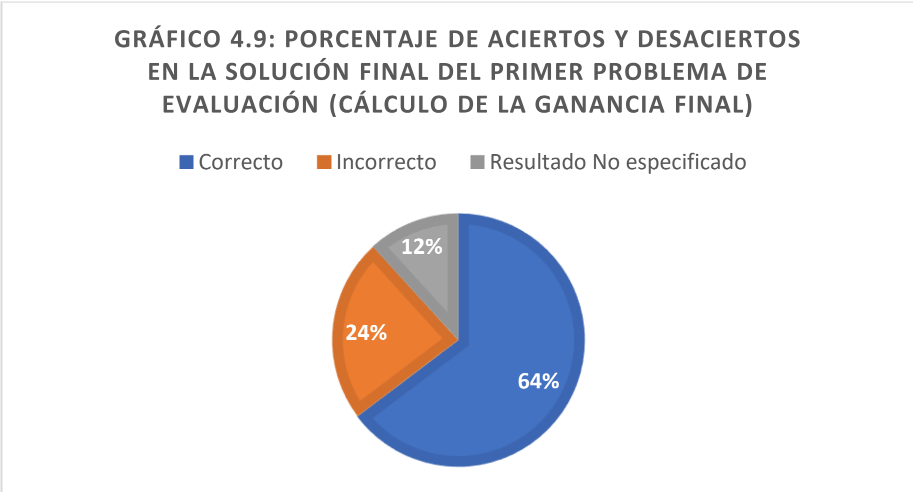
Para resolver un problema los estudiantes deben seguir al menos tres pasos: 1) analizar el problema, 2) dejarse guiar por su intuición hasta proponer un método de solución y, finalmente, 3) evaluar el método intuido con el fin de comprobar o refutar su validez. Los estudiantes quienes aplicaron los métodos B y C fallaron en el 3er paso; pues todos ellos propusieron un método de solución, pero son inválidos en alguna de sus partes. Los errores serán descritos y analizados en la subsección 4.4.4.

Respecto a los estudiantes quienes aplicaron el método A, una proporción considerable de ellos no llegó a la solución correcta del problema. Sólo 22 de los 30 estudiantes concluyo el resultado correcto (sin contar el caso de un alumno quien omitió escribir el resultado). Esto significa que sólo el 73% de los estudiantes quienes aplicaron el método A redactó la solución correcta del mismo.

En general, sólo 22 de los 34 estudiantes escribieron la solución correcta; es decir, el 64% del grupo. Como pasó con los métodos B y C, la mayoría de los errores de los estudiantes quienes aplicaron el método de solución tipo A refieren a una evaluación errónea o deficiente del método de solución intuido, pues se detectaron errores en su estructura.

Solución del Problema	No. de Estudiantes	Porcentaje
Correcto	22	64%
Incorrecto	8	24%
Resultado No especificado	4	12%

TABLA 4.8: No. de Aciertos y Desaciertos en la Solución Final del Primer Problema de Evaluación (Cálculo de la Ganancia Final)



4.4.3 Formas de aplicación de la regla de tres en la resolución del problema

Una parte del proceso de solución del primer problema de evaluación requiere calcular el número de focos que aprobaron el control de calidad, o en otro caso, el número de focos defectuosos. Esta parte del procedimiento es un paso común de los métodos A, B y C, además de que se resuelve de forma análoga al problema #3 trabajado en la fase VI. En esta subsección se presentarán y analizarán los resultados sobre cómo los estudiantes resolvieron esta parte del problema. Entre otras cosas, interesa saber si los estudiantes fueron capaces de interpretar las operaciones, o bien, si resolvieron la regla de tres saltándose el proceso de interpretación.

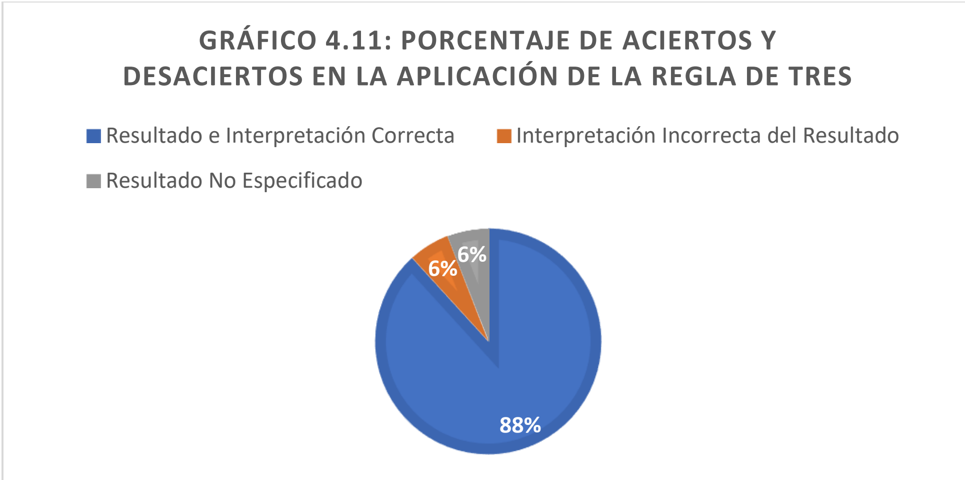
Se cuantificó que 26 de los 30 alumnos quienes aplicaron el método A calcularon de forma correcta el número de focos buenos. Por su parte, los 3 alumnos quienes aplicaron el método B calcularon de forma correcta tanto el número de focos buenos como el número de focos defectuosos. Además, el único estudiante quien aplicó el método de solución C también calculó el número de focos defectuosos de forma correcta.

En la siguiente tabla se presentan los resultados generales referentes a la aplicación de la regla de tres por parte de los estudiantes, esto en referencia a que hayan aplicado la regla de forma correcta y que la interpretación del resultado también sea la correcta:

Aplicación de la Regla de Tres	No. de Estudiantes	Porcentaje
Interpretación Correcta del Resultado	30	88%
Interpretación Errónea del Resultado	2	6%
Resultado No Especificado	2	6%

Tabla 4.10: Aciertos y desaciertos en la aplicación de la regla de tres

Los datos anteriores refieren a la aplicación de la regla de tres ya sea para calcular el número de focos buenos, o bien, los defectuosos. Estos muestran que 30 de los 34 estudiantes (el 88% del grupo) aplicaron la regla de tres de forma correcta e interpretaron bien el resultado obtenido. Por su parte, los cuatro alumnos restantes (el 12% del grupo) refiere al caso de dos alumnas quienes interpretaron mal el resultado (más allá de que las operaciones fueran o no correctas), y de dos estudiantes quienes omitieron redactar el resultado obtenido.



Recuerde que durante la fase VI los estudiantes analizaron y resolvieron un problema para el cual debían aplicar una regla de tres o algún procedimiento análogo. Sin embargo, se solicitó a los estudiantes que reflexionaran e interpretaran cada una de las operaciones implicadas en el proceso de resolución de la regla.

Al igual que con el problema #3, el problema de evaluación del anexo H fue diseñado de tal modo que se requiere aplicar la regla de tres. Para esto, se solicitó a los estudiantes que interpretaran y explicaran cada una de las operaciones implicadas, tal como se realizó durante la fase VI. A pesar de esto, no todos los estudiantes explicaron sus operaciones, y hay quienes aplicaron la regla sin llevar a cabo un proceso de interpretación de las operaciones que la conforman.

Otro aspecto que conviene analizar es si los estudiantes aplicaron la regla de tres sobre el conjunto de focos buenos, o bien, sobre el conjunto de focos defectuosos. No obstante, una vez calculada cualquiera de las cantidades anteriores puede calcularse la otra por complemento. Observe que en el problema de evaluación describe la proporción de focos defectuosos respecto a la totalidad de focos fabricados.

Conviene recordar que para la resolución del problema por los métodos A y C sólo es necesario calcular el número de focos buenos. Por su parte, para el método tipo B se necesita calcular tanto el número de focos buenos como también el de focos defectuosos. En general, cada caso requiere aplicar la regla de tres, aunque conociendo una de las cantidades se puede calcular la otra resolviendo una resta.

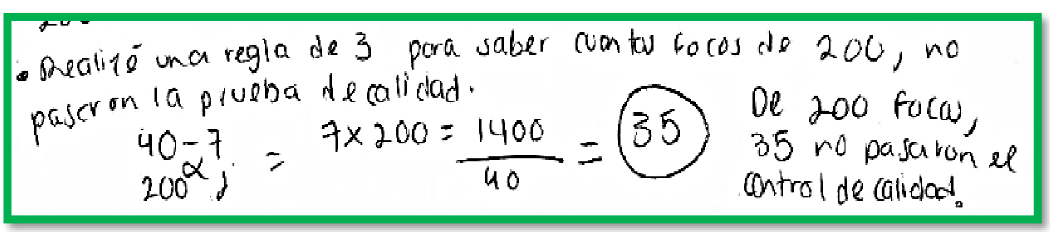
A continuación, se analizarán y clasificarán cada una de las formas de aplicación de la regla de tres que se observaron en los procedimientos redactados por los 34 estudiantes del grupo. Conviene hacer la aclaración de que, para dicho propósito, sólo se evaluará el procedimiento redactado por los estudiantes, último que será independiente al hecho de que hayan escrito o no el resultado obtenido en tras la aplicación de la regla (recuerde que se tuvo el caso de dos estudiantes quienes explicaron el procedimiento, pero no redactaron el resultado). Los dos errores de interpretación detectados serán clasificados en categorías específicas.

Método R3ND: Aplica la regla de tres sobre los focos defectuosos, pero lo hace sin interpretar las operaciones implicadas.

Esta categoría refiere al caso de aquellos estudiantes que identificaron la regla de proporción en término de los focos defectuosos; luego aplicaron la regla de tres sin pasar por un proceso de interpretación de las operaciones. Bajo este procedimiento, un estudiante ordena y opera los datos como dicta la regla para calcular el número de focos que salieron defectuosos de entre los 200 fabricados. Esto implica resolver la siguiente expresión:

$$x = \frac{7 \times 200}{40}$$

La incógnita *x* representa el número de focos que resultaron defectuosos de los 200 focos fabricados. Esta expresión se obtiene al ordenar los datos y operar con ellos tal y como lo dicta el método de la regla de tres; sin embargo, no hay una interpretación de las operaciones (multiplicación y división). A continuación, se anexa un fragmento del procedimiento redactado por un alumno quien aplicó la regla de tres bajo esta categoría; es decir, sin interpretar el significado particular de cada operación:



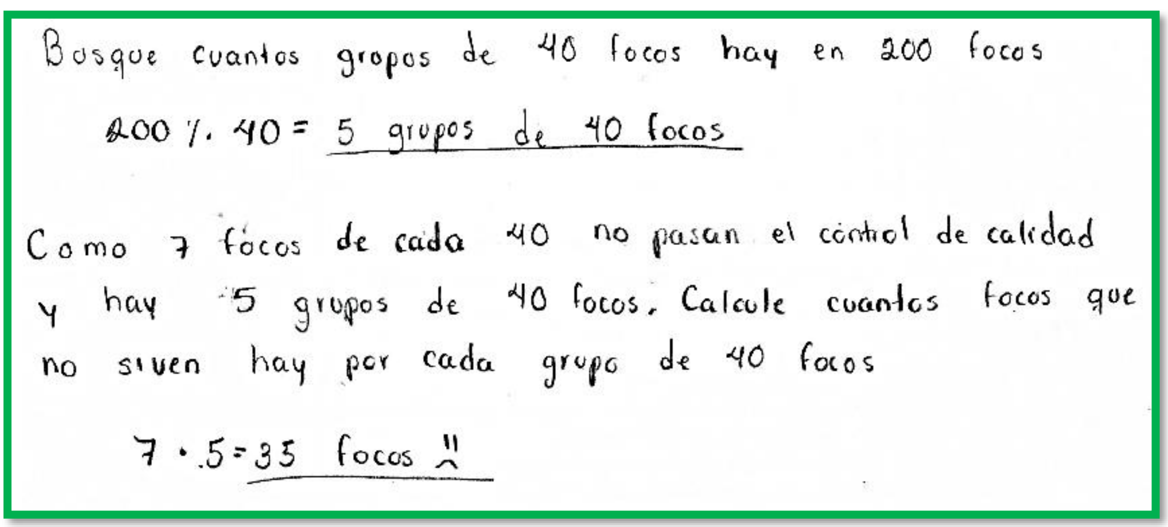
Observe que, en la parte inferior izquierda de la imagen, el alumno organizó los datos según la correspondencia entre el número de focos fabricados y la proporción de ellos que resultan ser defectuosos. Después siguió las instrucciones de la regla de tres; etas son multiplicar las cantidades que se encuentran en diagonal ($7 \times 200 = 1400$) y luego su resultado por la cantidad sobrante que en este caso es 40 ($1400 \div 40 = 35$), concluyendo así que el número total de focos defectuosos fabricados es de 35.

Note que el alumno no interpretó las operaciones que conforman este proceso; sólo ordenó los valores y armó la expresión como lo dicta la regla. Además, utilizó la notación de igualdad '$=$' de forma incorrecta, pues las operaciones 7×200 y $1400 \div 40$ no deben relacionarse bajo esta notación debido a que arrojan resultados diferentes.

Método R3ID: Aplica la regla de tres sobre los focos defectuosos e interpreta cada una de las operaciones implicadas.

Este método es equivalente al método R3ND, pero con la diferencia de que aquí sí hay una interpretación de las operaciones realizadas. Bajo este procedimiento el estudiante primero divide $200 \div 40 = 5$ para concluir que los 200 focos fabricados equivalen a 5 lotes de 40 focos cada uno; esta información es importante porque el problema del anexo H da la proporción de focos defectuosos para lotes de 40 focos, de los cuales 7 resultan defectuosos. Con base en lo anterior, ahora el estudiante resuelve la multiplicación $7 \times 5 = 35$ para concluir que de los 200 focos fabricados 35 son defectuosos.

A continuación, se presenta un fragmento del procedimiento redactado por una alumna quien aplicó la regla de tres bajo esta categoría; es decir, interpretado las operaciones:

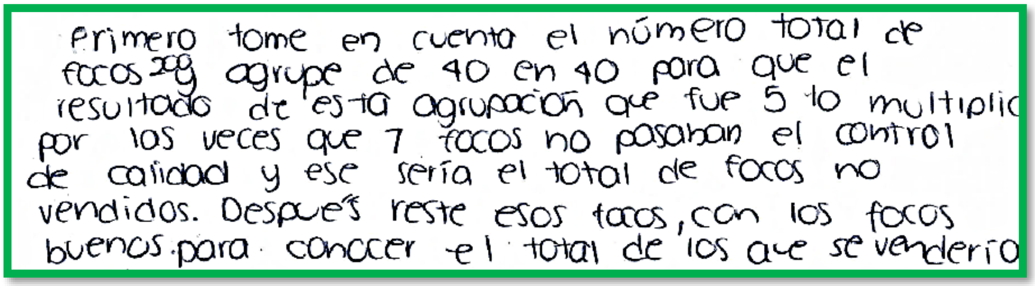

Busque cuantos grupos de 40 focos hay en 200 focos

200 ÷ 40 = 5 grupos de 40 focos

Como 7 focos de cada 40 no pasan el control de calidad y hay 5 grupos de 40 focos. Calcule cuantos focos que no siven hay por cada grupo de 40 focos

7 · 5 = 35 focos !!

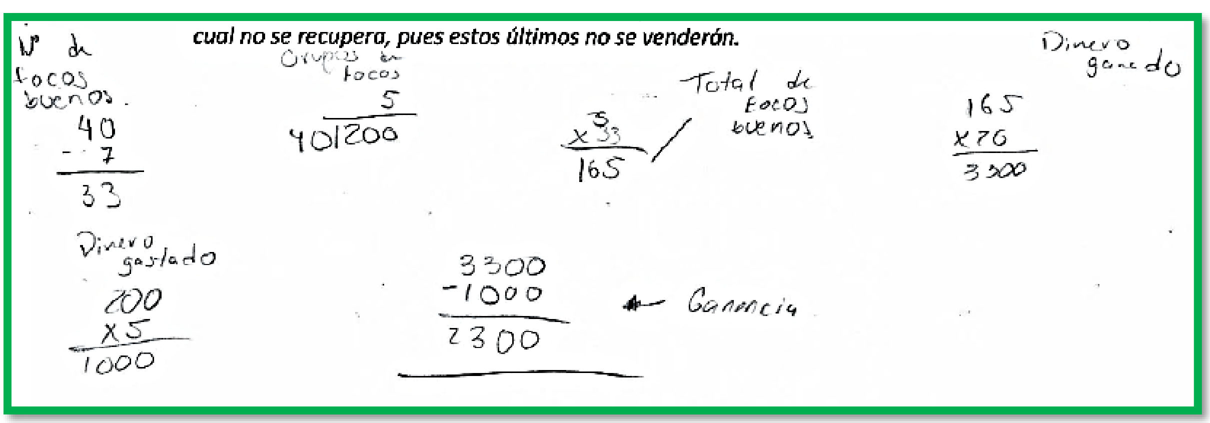
También se dio el caso de una alumna quien aplicó la regla de tres bajo esta categoría, pero omitió escribir el resultado obtenido. Pese a ello, su explicación aporta evidencia de que interpretó las operaciones de forma correcta; razón por la que se clasificó su procedimiento bajo esta categoría. A continuación, se anexa una parte del procedimiento de la alumna:


Primero tome en cuenta el número total de focos 200 agrupe de 40 en 40 para que el resultado de esta agrupación que fue 5 lo multiplic por los veces que 7 focos no pasaban el control de calidad y ese sería el total de focos no vendidos. Después reste esos focos, con los focos buenos para conocer el total de los que se venderío

También conviene recordar el procedimiento de la alumna A-1 (puede consultarlo en la subsección 4.4.1), quien primero aplicó la regla de tres bajo la categoría R3ND; pero después repitió el procedimiento interpretando cada una de las operaciones como se acaba de explicar. Por esa razón se clasificó su procedimiento bajo la categoría R3ID, pues la alumna A-1 sí llevó a cabo un proceso de interpretación de las operaciones que conforman el método de la regla de tres.

Método R3IB: Aplica la regla de tres sobre los focos que aprobaron el control de calidad (focos buenos) e interpreta cada una de las operaciones implicadas.

Este método consiste en aplicar la regla de tres para calcular directamente el número de focos que aprobaron el control de calidad, esto último interpretado cada una de las operaciones implicadas en el procedimiento. A continuación, se anexa el procedimiento de una alumna quien aplicó la regla de tres bajo esta categoría:



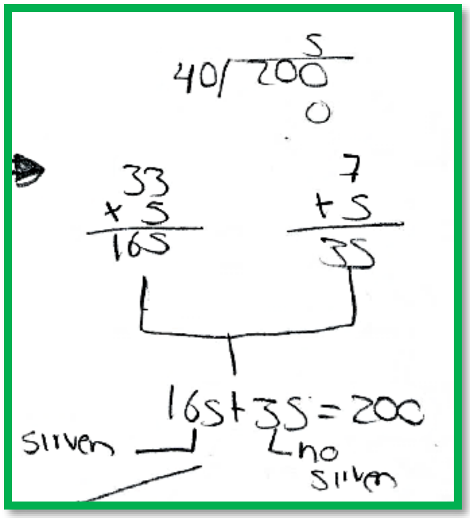
Bajo esta categoría primero se calcula el número de focos buenos que resultan de la fabricación de un lote de 40 focos; estos son $40 - 7 = 33$ focos. Luego se resuelve la división $200 \div 40 = 5$ para inferir que los 200 focos fabricados forman 5 lotes de 40 focos cada uno. Finalmente se multiplica $33 \times 5 = 165$ para concluir que 165 focos de los 200 fabricados pasaron el control de calidad.

Método R3IA: Aplica la regla de tres sobre ambos conjuntos de focos (buenos y defectuosos) e interpreta cada una de las operaciones implicadas.

Este método sigue exactamente los mismos pasos que la categoría R3IB, pero también se calcula el número de focos defectuosos como se hizo en R3ID. Para ser más específicos, una vez que el estudiante resolvió $200 \div 40 = 5$ para inferir que los 200 focos forman cinco lotes de 40 focos, procede a resolver $33 \times 5 = 165$ y $7 \times 5 = 35$ para calcular el número total de focos buenos y de focos defectuosos fabricados, respectivamente. A continuación, se anexa el procedimiento redactado por la única alumna quien aplicó la regla de tres bajo esta categoría:

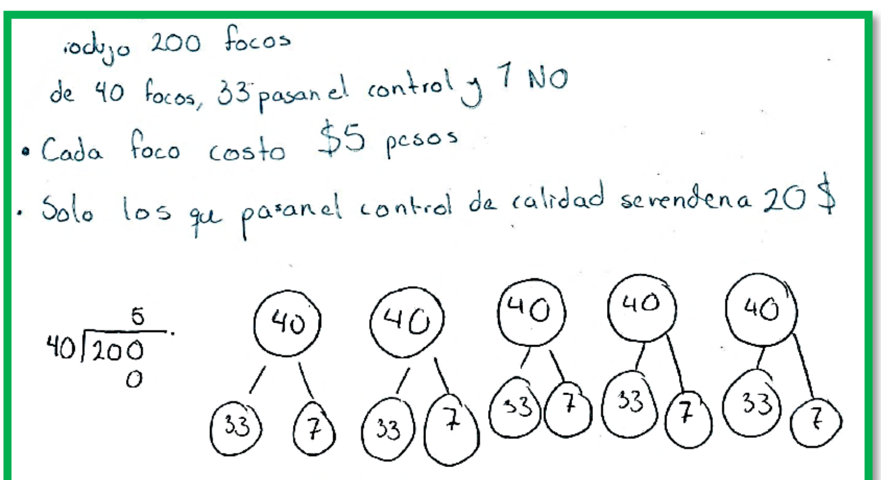
- Primero realizé una resta para poder saber cuantos focos servían por cada 40 fabricados ya que de cada 40, 7 no sirven y esto me dio un total de 33 focos.
- Despuès realizé una divisiòn para poder agrupar en grupos de 40 focos y facilitar la resolución en total me dio 5. Esto me ayudò a que existen 5 grupos de 40 focos
- Despuès multipliquè los focos que sí servían por el nùmero de grupos que me salieron para poder saber cuantos focos servían en total de los 200 focos y lo mismo hice con los 7 focos que si sirven por cada 40 focos y en total me dieron 165 focos que si sirven y 35 focos que no sirven esto da el total de 200 focos.

Como se observa en la evidencia anterior, la alumna multiplicó el número de lotes fabricados por la proporción de focos buenos y defectuosos que hay en cada lote (33 y 7 respectivamente). La siguiente imagen también forma parte del procedimiento de la alumna y en ella se observan las operaciones que resolvió:



Método R3DG: Se apoya de un diagrama para calcular el número total de focos que aprobaron en control de calidad (focos buenos) y el de focos defectuosos.

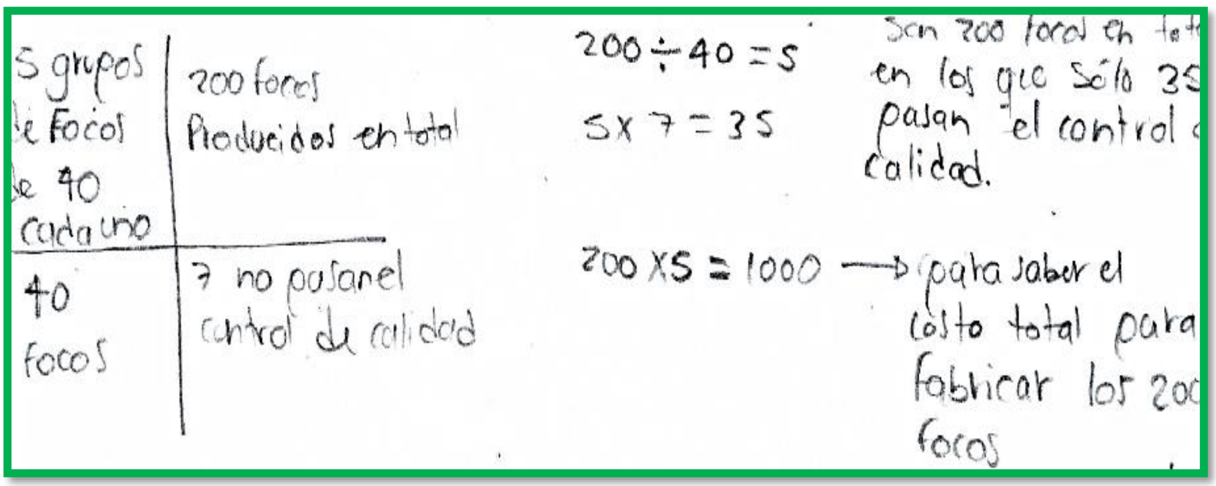
Este fue el caso de una sola alumna quien dibujó un diagrama en el que representa la totalidad de los focos buenos y defectuosos que conforman los 200 focos fabricados. El diagrama sí fue acompañado de algunas operaciones; sin embargo, por la presencia del diagrama conviene clasificarlo en una categoría aparte. A continuación, se presenta el diagrama dibujado por la alumna:



Note la alumna redactó la división $200 \div 40 = 5$, última que arroja el número de lotes de 40 focos fabricados por la empresa. El diagrama de la alumna da evidencia de que sí interpretó el resultado de la división aun cuando no dio una explicación de esta. Aunque tampoco hay una explicación del diagrama, este se entiende por el contexto, así como por la información que redactó arriba del diagrama.

Errores de Interpretación.

También se dio el caso de dos estudiantes quienes al aplicar la regla de tres interpretaron de forma errónea el resultado obtenido. Cabe mencionar que uno de los estudiantes sí interpretó las operaciones multiplicación y división que conforman el procedimiento bajo la categoría R3ID; pero con el error de interpretar el resultado como el número de focos buenos, interpretación que es errónea bajo el procedimiento R3ID. A continuación, se presenta un fragmento del procedimiento de la alumna:



Observe que la alumna interpretó correctamente la operación la operación $200 \div 40 = 5$; esto se ve en la tabla del lado izquierdo donde señaló que los 200 focos fabricados forman 5 lotes de 40 focos cada uno. Sin embargo, al multiplicar esta cantidad por el número de focos defectuosos que hay en cada lote, interpretó el resultado como el número total de focos buenos fabricados; interpretación que es errónea.

Es probable que el error anterior fuera debido a una distracción por parte de la alumna; pues la explicación de la primera parte del procedimiento es correcta. El error anterior derivó en una serie de errores en el resto del procedimiento. Este último puede consultarse en la subsección 4.4.4 en la categoría ‘error de tipo 5-R3’.

Método no Especificado.

Esta categoría refiere al caso de cuatro estudiantes quienes no redactaron una explicación detallada de su método que permitiera clasificarlo en alguna de las categorías anteriores. Dos de ellos afirmaron haber aplicaron la regla de tres para calcular el número total de focos defectuosos fabricados; sin embargo, no hay información adicional que permita inferir si interpretaron o no las operaciones implicadas.

A continuación, se anexa el procedimiento de una alumna quien afirmó haber aplicado la regla de tres; sin embargo, no hay forma de inferir si interpretó o no las operaciones:

> Primero realize una regla de 3 donde de la producción. de 200 focos vi cuantos resultaron no pasar el control de calidad (35), después saque la diferencia de 200 y 35=1 los cuales generaron $3300 en base de que pasaron el control de calidad con venta a $20. luego de los 200 focos los multiplique por $5 que era el costo de todos. Al final los resultados del costo y venta los reste y su resultado es la ganancia.

También se dio el caso de dos alumnas quienes omitieron las operaciones referentes a la regla de tres; por lo que se desconoce si aplicaron la regla sobre el conjunto de focos buenos o el de los defectuosos (o ambos). No obstante, sus procedimientos aportan elementos que sugieren que sí interpretaron de las operaciones, como afirmar que los 200 focos fabricados forman 5 grupos de 40 focos cada uno. A continuación, se anexa parte del procedimiento redactado de una de las alumnas:

> Se forman 5 grupos de 40 focos
>
> 35 focos son defectuosos de los 200 en total
>
> 165 focos de buena calidad, se venden en $3300

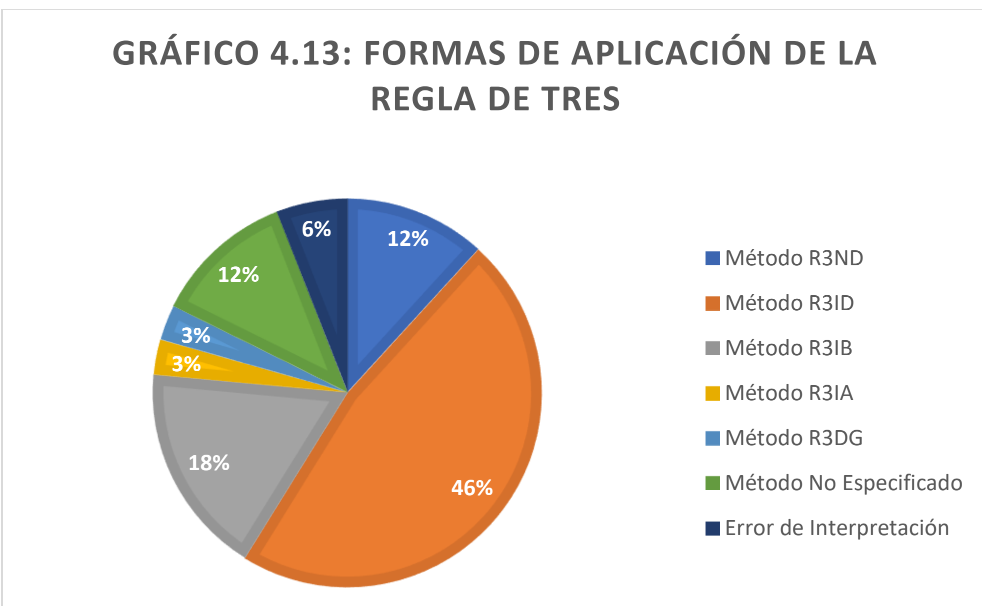
Resultados sobre la aplicación de la regla de tres.

Las siete categorías anteriores permiten clasificar y cuantificar la diversidad de procedimientos bajo las cuales los estudiantes aplicaron la regla de tres. En la siguiente tabla se cuantifica el número de alumnos que aplicó la regla de tres bajo cada una de las categorías anteriormente descritas:

	Método A	Método B	Método C	No. de Estudiantes	Porcentaje
Método R3ND	4	0	0	4	12%
Método R3ID	13	2	1	16	46%
Método R3IB	6	0	0	6	18%
Método R3IA	0	1	0	1	3%
Método R3DG	1	0	0	1	3%
Método No Especificado	4	0	0	4	12%
Error de Interpretación	2	0	0	2	6%
			Total:	**34**	**100%**

TABLA 4.12: Formas de aplicación de la regla por parte de los estudiantes.

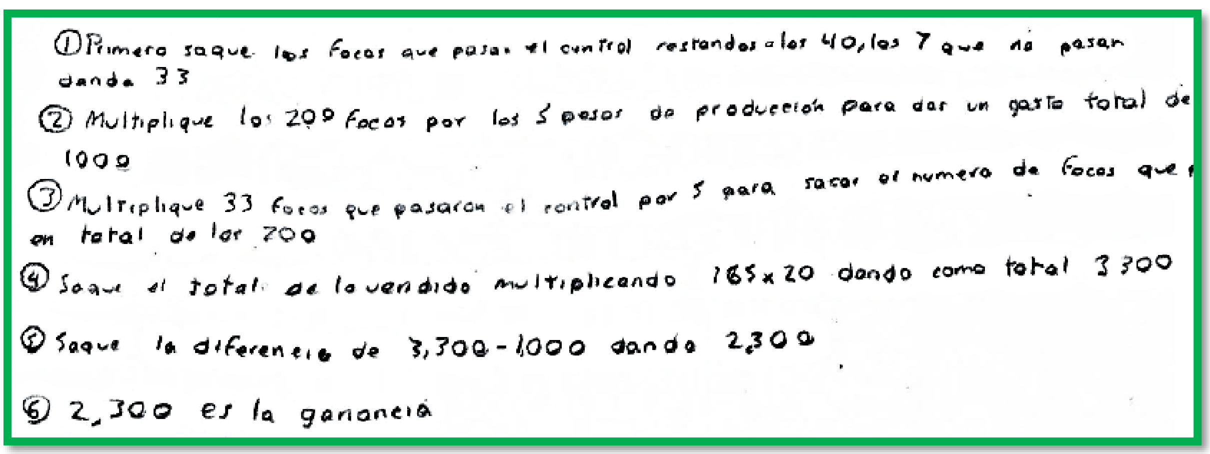
La tabla anterior permite analizar distintos aspectos de carácter cualitativo que no se observan en los resultados de la subsección anterior. Abajo se anexa un gráfico que facilita comparar la proporción con la que se aplicó la regla de tres bajo las siete categorías:



Hay varias observaciones que conviene hacer a partir de los datos de la tabla 4.12. La primera de ellas es que al menos el 76% de los estudiantes interpretaron correctamente las operaciones implicadas al resolver la regla de tres. Este fue el caso de aquellos estudiantes quienes aplicaron la regla bajo alguna de las categorías R3ID, R3IB, R3IA y R3DG, así como un 6% referente a 'Método no especificado'. Este 6% fue el caso de dos alumnas quienes no redactaron las operaciones; aunque sus explicaciones sí aportaron elementos que sugieren una interpretación válida de las operaciones.

Sólo dos estudiantes (el 6% del grupo) interpretaron de forma errónea el resultado obtenido al resolver la regla de tres. A esto se le suma que al menos el 12% del grupo aplicó la regla de tres sin interpretar las operaciones implicadas. La proporción exacta se desconoce debido al caso de aquellos estudiantes que dieron una explicación deficiente de su procedimiento.

En general, fue posible determinar si un estudiante interpretó o no las operaciones con base al orden de ejecución y a la organización matemática de las mismas. Por ejemplo, un procedimiento que refiere a las operaciones $200 \div 40 = 5$ y $7 \times 5 = 35$ se clasificó bajo la categoría R3ID, pues las operaciones corresponden a esa categoría. Del mismo modo los procedimientos que refieren a las operaciones $200 \div 40 = 5$ y $33 \times 5 = 165$ se clasificaron bajo la categoría R3IB. Ejemplo de esto es la siguiente evidencia:

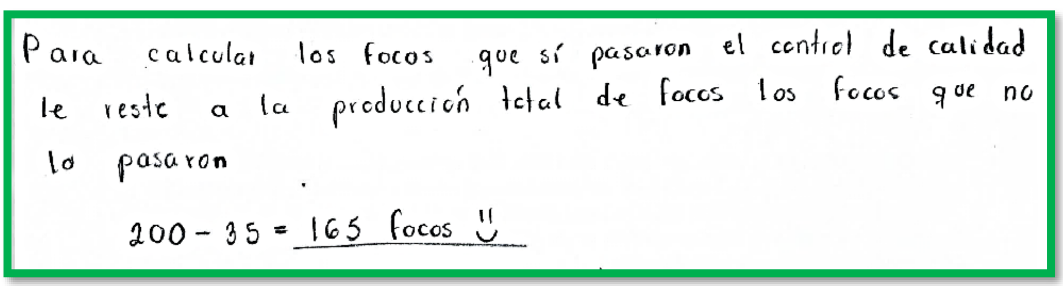

① Primero saque los focos que pasan el control restandos a los 40, los 7 que no pasan dando 33
② Multiplique los 200 focos por los 5 pesos de producción para dar un gasto total de 1000
③ Multiplique 33 focos que pasaron el control por 5 para sacar el numero de focos que en total de los 200
④ Saque el total de lo vendido multiplicando 165 x 20 dando como total 3300
⑤ Saque la diferencia de 3,300 - 1000 dando 2,300
⑥ 2,300 es la ganancia

Observe que el alumno omitió la operación $200 \div 40 = 5$, cuyo resultado refiere a los cinco lotes de 40 focos fabricados. A pesar de ello, el resultado de esta división aparece como uno de los factores de la multiplicación 33×5, última que sí es referida y argumentada por el alumno en su procedimiento. Esta operación es característica procedimiento R3IB, razón por la cual se le clasificó bajo esta categoría.

Por el contrario, aquellos estudiantes quienes aplicaron la regla de tres sin interpretar las operaciones resolvieron $7 \times 200 = 1400$ y $1400 \div 40 =$35 en ese orden; tal como se observa en la evidencia anexada en la descripción de la categoría R3ND. Las operaciones anteriores son propias de dicha categoría y carecen de una interpretación bajo el contexto del problema.

Otro aspecto que se puede observar en los resultados de la tabla 4.12 es que más de la mitad del grupo (al menos el 58% de los estudiantes) aplicó la regla de tres sobre el conjunto de los focos defectuosos (categorías R3ND y R3ID). Esto quizá guarde relación con los datos proporcionados en el problema, pues este da la proporción de focos defectuosos de forma explícita, mientras que la proporción de focos buenos está implícita en el problema.

Los estudiantes que resolvieron el problema por el método tipo A y que aplicaron la regla de tres sobre el conjunto de los focos defectuosos (categorías R3ND y R3ID), resolvieron la operación $200 - 35 = 165$ para calcular el número total de focos buenos fabricados, pues esta es la cantidad que se necesita para llegar a la solución del problema (véase la siguiente evidencia).



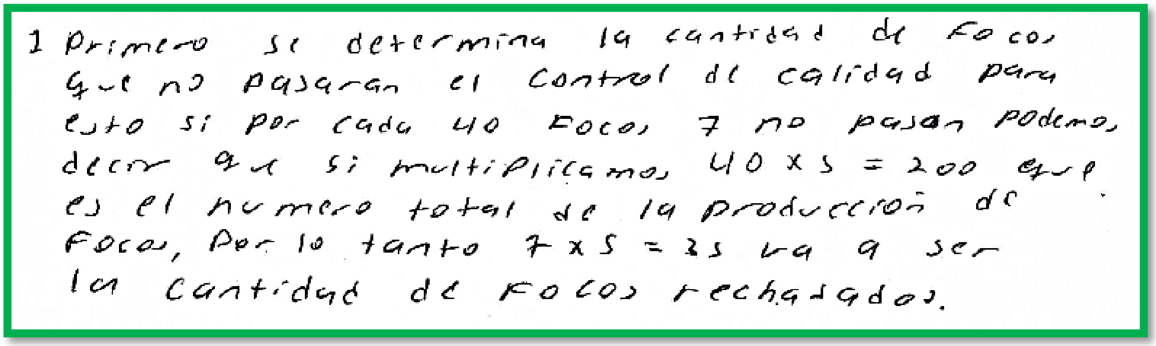
Para calcular los focos que sí pasaron el control de calidad le reste a la producción total de focos los focos que no lo pasaron

$200 - 35 = \underline{165 \text{ focos}}$

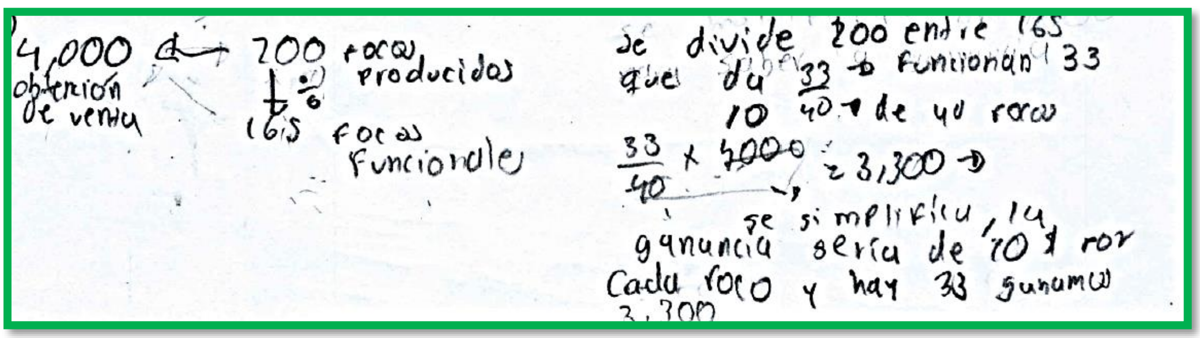
Esta resta no se tomó en cuenta en los resultados de la tabla 4.3, pues se trata de un paso que depende del conjunto de focos sobre el cual se aplicó la regla de tres. Dado que el método de solución tipo A necesita de calcular la cantidad de focos buenos fabricados, el éxito o fracaso en el cálculo de este dato es lo que se cuantificó en la tabla 4.3, aun cuando haya aplicado correctamente la regla de tres sobre el conjunto de focos defectuosos. Por otra parte, en la tabla 4.10 se evaluó si la aplicación de la regla de tres fue correcta o incorrecta, independientemente del método y del conjunto de focos sobre el que se aplicó la regla.

Un último punto que conviene comentar es el caso de aquellos estudiantes quienes resolvieron alguna operación diferente de la que se esperaba. El primer caso refiere al procedimiento de dos estudiantes quienes al aplicar la regla de tres bajo la categoría R3ID escribieron la multiplicación $40 \times 5 = 200$ para comparar el número de lotes de 40 focos que se forman con 200 fabricados; esto en lugar de resolver la división $200 \div 40 = 5$.

Lo anterior se relaciona con los fragmentos (III,17) a (III,20) del diálogo III, donde la alumna A-1 explicó que a veces le resulta más intuitivo pensar en una multiplicación en lugar de una división.


1 Primero se determina la cantidad de focos que no pasaran el control de calidad para esto si por cada 40 focos 7 no pasan podemos decir que si multiplicamos 40 x 5 = 200 que es el numero total de la produccion de focos, Por lo tanto 7 x 5 = 35 va a ser la cantidad de focos rechazados.

El otro caso refiere al procedimiento de una alumna quien resolvió una regla de tres para calcular los ingresos obtenidos de la venta de los focos buenos:


4,000 $ → 200 focos producidos
obtención de venta
165 focos funcionales

Se divide 200 entre 165 que da 33/40 → funcionan 33 de 40 focos
$\frac{33}{40} \times 4000 = 3{,}300$ → se simplifica, la ganancia sería de 10 $ por cada foco y hay 33 ganamos 3,300

Observe que la alumna calculó los ingresos que se obtendrían de vender los 200 focos fabricados ($4,000); después resolvió una regla de tres con esta información para calcular los ingresos obtenidos de la venta de los 165 focos buenos. En el lado izquierdo de imagen se observa que la alumna ordenó los datos sobre los que aplicó la regla de tres.

Hay dos observaciones que conviene hacer respecto a la evidencia anterior. La primera de ellas es que, en esta aplicación la regla de tres, la alumna no interpretó las operaciones; a pesar de que sí lo hizo cuando calculó el número de focos buenos fabricados (su procedimiento se clasificó bajo la categoría R3IB).

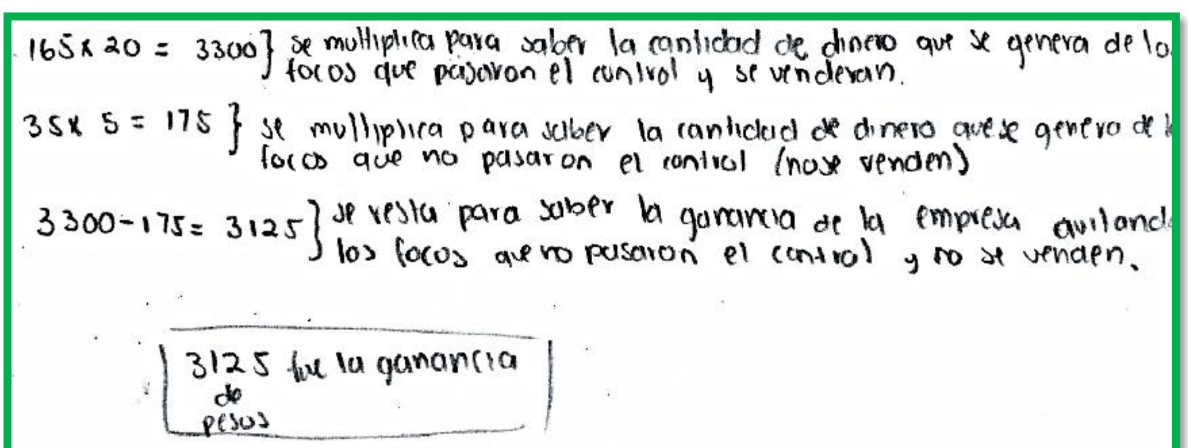
La segunda observación es que el procedimiento de la alumna para calcular los ingresos obtenidos de la venta de los focos buenos es válido; sin embargo, este se simplificaba con sólo multiplicar $165 \times 20 = 3300$.

4.4.4 *Tipos de errores en la resolución del primer problema de evaluación*

En esta subsección se analizarán los errores cometidos por los estudiantes en lo que refiere al proceso de solución del primer problema de evaluación. Para esto, se presentará una categorización de los errores y, al final, se cuantificarán el número de errores de cada tipo; de tal modo que sea posible identificar cuáles fueron los errores más frecuentes.

Error de Tipo 1-A:

Este error consistió en que, para calcular la ganancia final de la empresa, sólo se restó el costo de producción de los focos defectuosos; esto en lugar de restar el costo de producción de la totalidad de focos fabricados (200 focos). Los estudiantes quienes cometieron este error multiplicaron el número de focos defectuosos (35 focos) por el costo de producción de cada foco ($5), obteniendo solamente el costo de producción de los focos defectuosos ($175). Luego restaron dicho costo a los ingresos de la venta ($3,000), obteniendo así una ganancia errónea de $3,125. A continuación, se anexa una parte del procedimiento redactado por una alumna quien cometió este error:


165 x 20 = 3300 } se multiplica para saber la cantidad de dinero que se genera de lo focos que pasaron el control y se venderan.
35 x 5 = 175 } se multiplica para saber la cantidad de dinero que se genera de l focos que no pasaron el control (no se venden)
3300-175= 3125 } se resta para saber la ganancia de la empresa quitand los focos que no pasaron el control y no se venden.
3125 fue la ganancia de pesos

Conviene señalar que este tipo de error fue exclusivo del método de solución tipo A, y fue cometido por un total de dos alumnos. Nótese que el error es el resultado de un análisis erróneo del problema en conjunto con una evaluación errónea o deficiente del método de solución intuido; pues no se tomó en cuenta que la producción de los focos que aprobaron el control de calidad también generó un costo que se debe deducir de los ingresos de la empresa. Como se verá con el resto de las categorías, la mayoría de los errores fueron consecuencia de un análisis erróneo del problema y de una evaluación deficiente sobre la validez del método de intuido.

Error de Tipo 2-A:

Al igual que el error de tipo 1-A, el de tipo 2-A también refiere a un error en el procedimiento para calcular la ganancia final de la empresa; esto en relación con el cálculo del costo de producción de los focos. En detalle, este error consiste en restar al ingreso de la venta ($3,300) el costo de producción de los 200 focos fabricados ($1,000) seguida de la pérdida por la producción de los focos defectuosos ($175); última que ya estaba contemplada dentro del costo de producción de la totalidad de focos, obteniendo así una ganancia errónea de $2,125. Este error es el resultado de una evaluación errónea o deficiente sobre la validez del procedimiento propuesto; pues no se observó que la perdida por la fabricación de los focos defectuosos ya está comprendida dentro del costo de producción de los 200 focos fabricados. A continuación, se anexa el procedimiento redactado por una alumna quien cometió este último error:

* El costo de la producción fue de $1000.00
* Se forman 5 grupos de 40 focos
* 35 focos son defectuosos de los 200 en total
* 165 focos de buena calidad, se venden en $3300
* Se invierten $175 en los focos defectuosos
* La ganancia es de $2300 en total, sin contar los focos defectuosos
* La ganancia final es de $2125

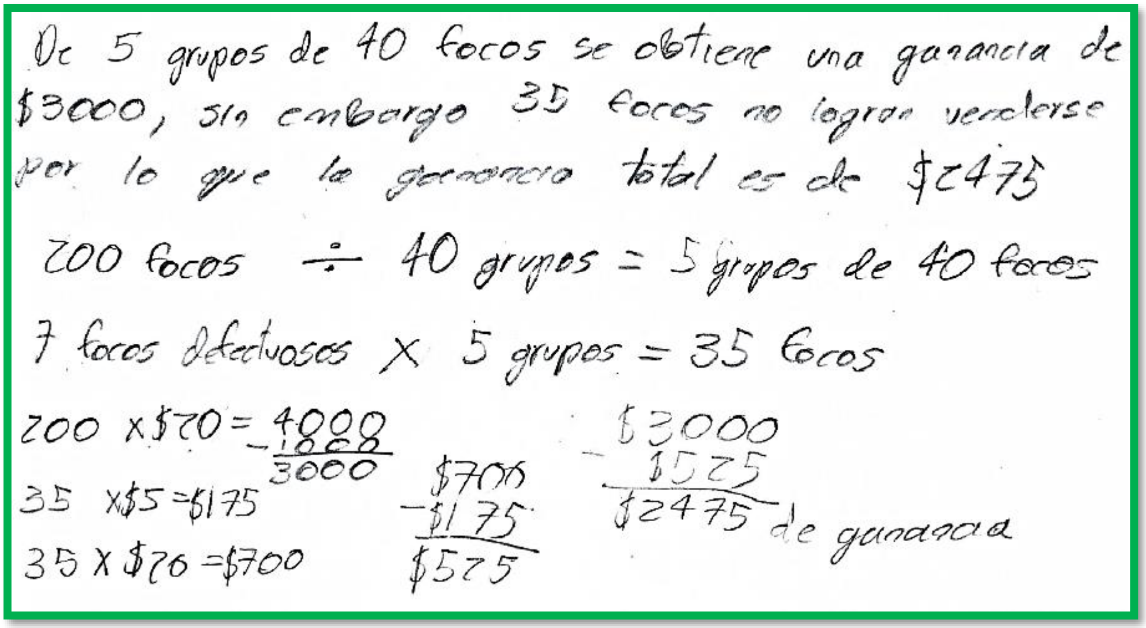
Observe que la alumna no redactó ni mencionó las operaciones que integran el proceso de solución del problema; sin embargo, es posible dar seguimiento al método empleado. En lo que refiere a la aplicación de la regla de tres, esta se registró bajo la categoría ‘Método No Especificado’, pues no se tiene certeza de si aplicó la regla sobre el conjunto de focos buenos, o bien, sobre el de los defectuosos; aunque hay elementos para suponer que sí interpretó las operaciones implicadas.

Error de Tipo 3-C:

Este error refiere al caso único de un alumno quien intentó resolver el problema por un medio diferente a los métodos de solución A y B. Como ya se había mencionado, el método de solución tipo C (descrito en la subsección 4.4.1) se propuso rescatando la parte válida del método intuido por este alumno; último quien no llegó a la solución correcta del problema debido a un error de razonamiento que, a juicio del autor de la presente tesis, es difícil de detectar. De este modo, el método de solución tipo C comprende la parte válida del método redactado por el alumno, más los ajustes y correcciones que permiten llegar a la solución correcta del problema de forma válida.

Antes de proseguir con la lectura de esta tesis, se sugiere al lector que revise la descripción del método de solución tipo C introducida en la subsección 4.4.1. Dicho esto, el error de tipo 3-C consistió en que, para calcular la ganancia final de la empresa, el alumno partió de suponer que se venderían los 200 focos fabricados, obteniendo una ganancia inicial de $3,000. Posteriormente restó la ganancia derivada de la venta de los focos defectuosos ($525), obteniendo así una ganancia final errónea de $2,475. El procedimiento anterior sería equivalente a que la empresa no rembolsara a sus clientes el precio pagado por un foco defectuosos ($20), sino la cantidad de $15 que equivale a la ganancia esperada por la venta de ese foco.

A continuación, se anexa el procedimiento redactado por este alumno. Observe que el alumno omitió la explicación de la mayoría de las operaciones; de tal modo que el autor se dio a la tarea de interpretar cada una de las operaciones redactadas con el fin de dar seguimiento a la argumentación que yace implícita en el procedimiento del alumno.



De 5 grupos de 40 focos se obtiene una ganancia de $3000, sin embargo 35 focos no logran venderse por lo que la ganancia total es de $2475

200 focos ÷ 40 grupos = 5 grupos de 40 focos

7 focos defectuosos × 5 grupos = 35 focos

200 × $20 = 4000 − 1000 = 3000

35 × $5 = $175

35 × $20 = $700

$700 − $175 = $525

$3000 − $525 = $2475 de ganancia

Conviene dar una explicación de las operaciones que conforman el procedimiento anterior. El primer paso que realizó el alumno fue calcular el número total de focos defectuosos fabricados, y cuyo procedimiento corresponde a la categoría R3ID descrita en la subsección anterior. Después multiplicó $200 \times 20 = 4000$ para calcula los ingresos que resultan de la venta de los 200 focos fabricados y cuyo costo por unidad es de \$20, obteniendo así un ingreso de \$4,000.

Luego, al ingreso de \$4,000 le restó \$1,000, que refiere al costo de producción de los 200 focos fabricados, obteniendo así una ganancia inicial de \$3,000. Observe que el alumno no redactó la operación con la que se calcula el costo de producción de los focos, aunque sí emplea esta cantidad en su procedimiento. El siguiente paso del alumno fue resolver las operaciones $35 \times \$5 = \$175$ y $35 \times \$20 = \$700$, con las cuales se calcula el costo de producción de los focos defectuosos y los ingresos que resultarían de su venta. Después calculó la diferencia entre ambas cantidades $\$700 - \$175 = \$525$; resultado que refiere a la ganancia que se obtendría de la venta de los focos defectuosos.

Por último, el alumno cometió el error de suponer que, si a la ganancia inicial de \$3,000 se le resta la ganancia obtenida por la venta de los focos defectuosos (\$525), entonces obtendrá la ganancia final de la empresa. Sin embargo, esto arroja un resultado de \$2,475, cantidad que es diferente de la esperada; por lo tanto, su procedimiento es erróneo.

Hay una analogía que facilita detectar el error en el procedimiento del alumno. Para ello, hay que recordar que la ganancia inicial de $3,000 proviene de suponer que se vendieron todos los focos fabricados, incluyendo aquellos que resultaron defectuosos. Naturalmente, quienes compraron alguno de los focos defectuosos exigirán el rembolso de su dinero, que son $20 por cada pieza defectuosa. Dado que se vendieron 35 focos defectuosos, la empresa tendrá que rembolsar una cantidad de $700, cantidad que se restará a la ganancia inicial de $3,000; obteniendo así una ganancia final de $2,300.

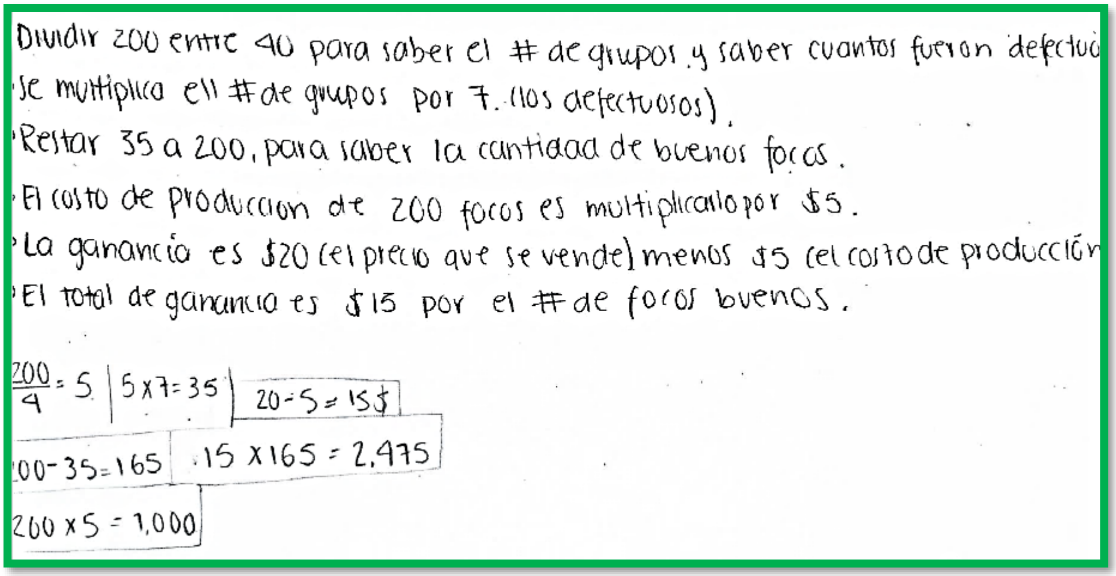
El error del alumno fue suponer que a la ganancia inicial de $3,000 le debía restar el equivalente a la ganancia de los focos defectuosos; en lugar del rembolso consecuencia de la venta de los mismos. Este error fue único, pues sólo un estudiante aplicó este método de solución. Observe que este es consecuencia de una evaluación errónea o deficiente del método intuido; último que puede considerarse como el menos intuitivo de los tres métodos descritos.

Error de Tipo 4-B:

Este error es exclusivo de aquellos estudiantes quienes intentaron resolver el problema por el método de solución tipo B; es decir, guiados por la intuición de calcular y operar con la ganancia particular que resulta de la venta de cada foco ($15). Los tres estudiantes que intentaron resolver el problema por este método cometieron el mismo error.

El error consiste en interpretar la ganancia obtenida de la venta de los 165 focos buenos ($2,475) como la ganancia final de la empresa. Sin embargo, el costo de producción de los 35 focos defectuosos aún supone una pérdida de la empresa y que equivalente a la cantidad de $175; última que debe restarse a la ganancia inicial obtenida por la venta de los focos buenos (véanse los detalles del método B en la sección 4.4.1).

A continuación, se anexa el procedimiento de una alumna quien incurrió en el error aquí descrito. Observe que en la parte inferior escribió las operaciones mientras que en la parte superior escribió la explicación de las mismas:

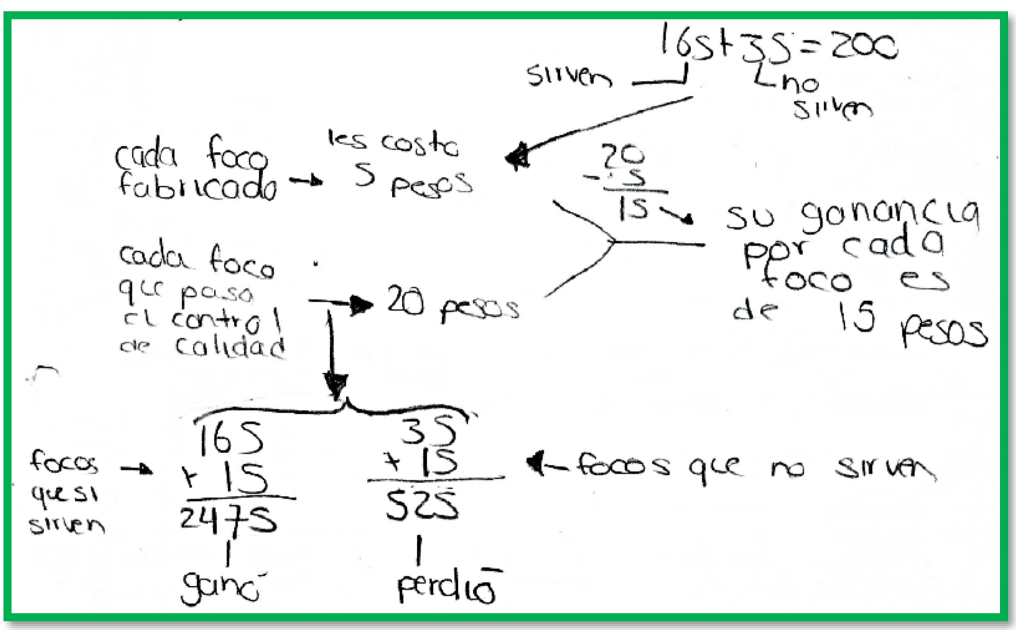


Dividir 200 entre 40 para saber el # de grupos y saber cuantos fueron defectuo
·Se multiplica ell # de grupos por 7. (los defectuosos).
·Restar 35 a 200, para saber la cantidad de buenos focos.
·El costo de produccion de 200 focos es multiplicarlo por $5.
·La ganancia es $20 (el precio que se vende) menos $5 (el costo de producción
·El total de ganancia es $15 por el # de focos buenos.

$\frac{200}{4} = 5$ | 5 x 7 = 35 | 20 - 5 = 15$
00 - 35 = 165 | 15 x 165 = 2,475
200 x 5 = 1,000

Observe que la alumna explicó que por cada foco vendido se obtiene una ganancia individual de $15; sin embargo, no se dio cuenta de que el costo de producción de los focos defectuosos supone una pérdida de la empresa no recupera, a pesar de que en la segunda observación que acompaña al problema de evaluación (véase el anexo H) refiere a esta pérdida.

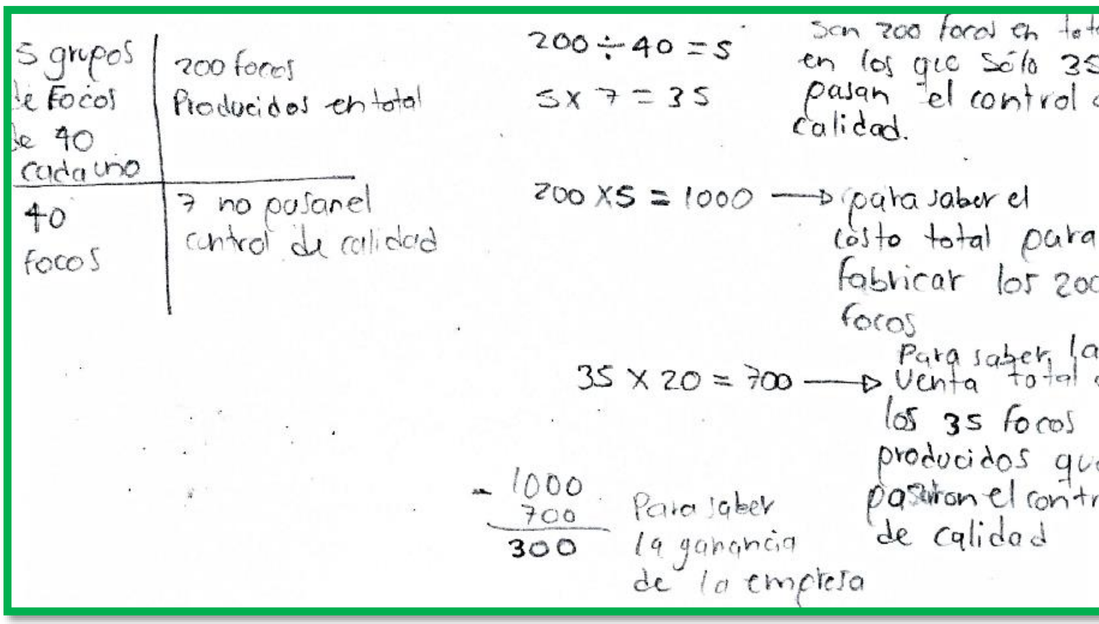
Sólo una alumna se dio cuenta de la pérdida derivada de la fabricación de los focos defectuosos, pero realizó el cálculo de forma errónea; tampoco restó la cantidad calculada a la ganancia inicial. A continuación, se anexa una parte del procedimiento de la alumna:



En el procedimiento se observa que la alumna sí reconoció la pérdida derivada de la fabricación de los focos defectuosos. Sin embargo, ella intuyó de forma errónea que la pérdida equivale a la ganancia que la empresa habría tenido en el caso de vender 35 focos defectuosos. Este error es consecuencia de una evaluación errónea o deficiente del método de solución intuido.

Error de Tipo 5-R3:

Este error no es propio de un método de solución, sino que refiere a un error de interpretación del resultado calculado con una regla de tres; a pesar de que sí hay una interpretación individual de las operaciones implicadas. El error fue único y refiere al procedimiento de una alumna quien calculó el número de focos defectuosos fabricados (35 focos) y lo interpretó como la cantidad de focos que sí aprobaron el control de calidad.



5 grupos de Focos de 40 cada uno	200 focos Producidos en total
40 focos	7 no pasan el control de calidad

$200 \div 40 = 5$

$5 \times 7 = 35$

Son 200 focos en total en los que sólo 35 pasan el control de calidad.

$200 \times 5 = 1000$ → para saber el costo total para fabricar los 200 focos

$35 \times 20 = 700$ → Para saber la Venta total de los 35 focos producidos que pasaron el control de calidad

$1000 - 700 = 300$ Para saber la ganancia de la empresa

El error anterior ya fue referido en la subsección 4.4.3 y se clasificó bajo la categoría 'Error de Interpretación'. Llama la atención que la alumna sí interpretó el significado individual de las operaciones que conforman la regla de tres. Esto último se ve en la tabla de la parte superior izquierda de la evidencia, ahí la alumna argumentó que los focos fabricados forman cinco lotes de 40 focos cada uno, luego multiplicó esta cantidad por el número de focos defectuosos que hay en cada lote; sin embargo, interpretó este resultado como el número de focos buenos.

A diferencia de los demás errores, este refiere a un error de interpretación. Es posible que el error fuera a causa de una distracción por parte de la alumna. Además, se observa que este error derivó en un segundo error por parte de la alumna; pues de 35 focos buenos se obtienen ingresos de tan sólo $700; esto contra el costo de producción de los 200 focos que es de $1,000.

Bajo el error anterior, la empresa recupera sólo $700 de los $1,000 invertidos. Esto significaría que la empresa no obtuvo ganancia alguna, sino todo lo contrario; la empresa perdió una cantidad de $300 respecto a su inversión. Esta pérdida se calcula con la operación $700 - 1000 = -300$, donde el signo negativo se interpreta como una perdida. Sin embargo, la alumna omitió el signo e interpretó el resultado como una ganancia a favor de la empresa.

Error de Tipo 6-R3:

Este error también refiere a un error de interpretación sobre el resultado obtenido al aplicar y resolver una regla de tres. Sin embargo, este se caracteriza porque no hay una interpretación individual de las operaciones que integran la regla. Este error también fue único y refiere al procedimiento de una alumna:

Primero hice una regla de tres, la cual fue : $200 \times 7 \div 40 = 35$. luego lo multiplique por 7 la cual me dió como resultado 245 la cual fue es el número de focos que se hicieron , luego lo multipliqué por 5 que es el costo que generó la empresa al hacerlo el cual me dió el resultado de 1225 , luego multipliqué el numero de focos que pasaron por el control de calidad por 20 , que es el precio al que se vende cada foco el cual me dió como resultado 4000 , y por ultimo reste 4000 menos 1225 el cual me dio el resultado de la ganancia de la empresa que es 2775.

Hay que señalar que el procedimiento anterior es inconsistente con los datos proporcionados en el problema; por ello no fue posible dar seguimiento a la argumentación de la alumna. Ejemplo de esto es que el resultado obtenido al aplicar la regla de tres (35) es multiplicado por 7 para obtener, según se argumenta, el número total de focos fabricados. La alumna argumentó que la empresa fabricó 245 focos; sin embargo, este argumento contradice los datos proporcionados por el mismo problema, pues en este describe explícitamente que se fabricaron 200 focos.

Cuantificación de los errores.

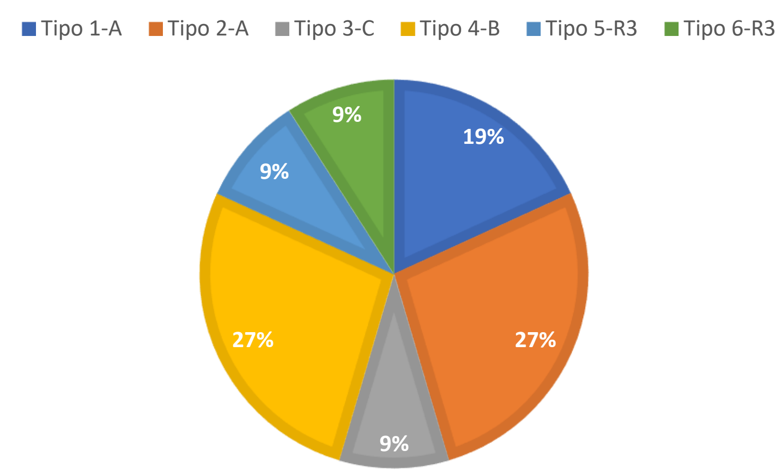
Los seis errores antes descritos son el resultado de la categorización de la totalidad de errores observados en los procedimientos de los estudiantes. Dicha categorización permitió clasificar y cuantificar los errores, información que se recopila en la siguiente tabla:

Tipo de Error	Número de Errores	Porcentaje
Tipo 1-A	2	19%
Tipo 2-A	3	27%
Tipo 3-C	1	9%
Tipo 4-B	3	27%
Tipo 5-R3	1	9%
Tipo 6-R3	1	9%
Total:	**11**	**100%**

TABLA 4.14: Número de errores por categoría

Observe que los errores detectados suman 11 en total. El siguiente gráfico facilita comparar la proporción de ocurrencia de cada uno de ellos respecto a los demás:

GRÁFICO 4.15: PORCENTAJE DE ERRORES COMETIDOS POR LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DEL PRIMER PROBLEMA DE EVALUACIÓN



Hay algunas observaciones que conviene hacer a partir de los datos de la tabla 4.14. La primera observación es que los errores con mayor frecuencia fueron los de tipo 2-A y 4-B (con 3 ocurrencias cada uno), seguidos por el error tipo 1-A (con 2 ocurrencias). La segunda observación es que los errores tipo 1-A, 2-A, 3-C y 4-B son consecuencia de una evaluación deficiente del método de solución intuido, o bien, por la falta de esta. En conjunto, los cuatro errores anteriores representan el 82% de los errores cuantificados; además de que todos refieren al cálculo de la ganancia final en relación con el costo de producción y/o la pérdida derivada de la fabricación de los 35 focos defectuosos.

En relación con este último punto, observe que ninguno de los cuatro alumnos quienes intentaron resolver el problema por un método diferente al tipo A (métodos B y C) llegó a la solución correcta del problema. Sus errores se clasificaron entre las categorías 3-C y 4-B, que refieren a los métodos C y B respectivamente.

Por otra parte, sólo el 18% de los errores refieren a errores de interpretación, específicamente del resultado obtenido al resolver una regla de tres (errores del tipo 5-R3 y 6-R3). También se tuvo el caso de tres estudiantes quienes omitieron los resultados parciales de su procedimiento; específicamente del método tipo A. Al omitir los resultados parciales (e incluso el resultado final), no se tiene certeza de que los cálculos se hayan efectuado de forma correcta; razón por la cual dichos casos se cuantificaron como 'Resultado No Especificado' en la tabla 4.3 (subsección 4.4.2). Omitir alguno de los resultados parciales no se consideró para la categorización de los errores.

4.5 CONCLUSIONES GENERALES DE LA 1ª SESIÓN

En esta sección se sacarán algunas conclusiones sobre el desarrollo de la primera sesión. Además, se presentarán las concusiones referentes a los resultados del proceso de evaluación de dicha sesión; resultados que ya fueron presentados y analizados en la sección anterior.

4.5.1 Observaciones sobre el proceso de instrucción de la primera sesión

Uno de los propósitos de la primera sesión fue la de fomentar en los estudiantes la reflexión sobre el uso y aplicación de las operaciones básicas en la vida cotidiana, haciendo especial énfasis la interpretación que adquieren en diversos contextos. Durante la clase se observó que los estudiantes fueron capaces de intuir las operaciones que debían aplicar para solucionar distintas situaciones; sin embargo, tuvieron dificultades para interpretar las operaciones que forman parte del proceso de aplicación y resolución de una regla de tres. Este fue el caso del problema #3, donde los estudiantes aplicaron la regla de tres para llegar a la solución del problema; no obstante, presentaron dificultades para interpretar las operaciones que integran el procedimiento.

También se observó que los estudiantes no están exentos de cometer errores de intuición cuando se trata de analizar o solucionar alguna situación determinada. Para esto conviene recordar que, durante la fase VIII, algunos estudiantes intuyeron operaciones equívocas para los fines de una tarea específica; tal como es comparar los precios de venta de dos o más presentaciones de un mismo producto, pero con diferente cantidad de contenido.

Lo anterior se debe a que, con el paso del tiempo, profesores y estudiantes aprenden a aplicar e interpretar las operaciones de forma puramente intuitiva. Sin embargo, hay situaciones en las que se debe ser más reflexivo sobre la interpretación que adquieren estas operaciones en contexto. Para el caso de la división, es importante recordar que esta operación posee dos interpretaciones diferentes y equivalentes a las situaciones #1 y #2 descritas en la fase III; pues el cociente puede interpretarse como un multiplicando, o bien, como un multiplicador dependiendo del contexto.

En relación con lo anterior, Kline (1990) destaca la importancia de la intuición y enfatiza que, por practicidad, una persona no debe razonar todo lo que hace; de tal modo que la mecanicidad juega un papel importante en el quehacer matemático. Si bien la intuición es parte del proceso de aprendizaje y aplicación de las matemáticas, también es importante que los estudiantes sean capaces validar o refutar sus propias intuiciones; para ello es necesario que sean capaces de interpretar las operaciones básicas en múltiples contextos. Esto es especialmente cierto en el caso de estadística, la probabilidad y del Análisis Combinatorio; pues la interpretación de estas operaciones permite formular conceptos, desarrollar métodos e interpretar resultados, necesarios para el estudio y la comprensión de una diversidad de fenómenos.

Por la razón anterior es importante que los profesores fomenten espacios de reflexión donde los estudiantes analicen situaciones, fenómenos o problemas donde deban proponer, analizar e interpretar operaciones para alcanzar una mejor comprensión tanto de la situación como de las operaciones mismas. Estas situaciones pueden referir a fenómenos de la vida real, o bien, a conceptos, métodos y fórmulas de la teoría matemática misma.

4.5.2 Conclusiones sobre la evaluación de la primera sesión

Los resultados presentados en la sección 4.4 mostraron que los alumnos tuvieron dificultades para resolver el primer problema de evaluación. Prueba de ello es que tan sólo el 64% del grupo calculó y escribió la solución correcta del problema. En particular, la categorización de los errores permitió comprender mejor cuáles fueron los fallos de los estudiantes en la resolución del problema; últimos que refieren en su mayoría a errores de análisis del problema y del método de solución intuido.

Se identificaron tres métodos de solución (A, B y C), cada uno asociado a una intuición específica. Los métodos B y C exigieron a los estudiantes un análisis más profundo y cuidadoso en comparación con el método A; esto tomando en cuenta que ninguno de los cuatro alumnos quienes intentaron resolver el problema por los métodos B y C llegó a la solución correcta. Es evidente que los estudiantes quienes siguieron los métodos B y C obedecían a su intuición durante el desarrollo del método; sin embargo, el grado de dificultad de ambos métodos derivó en los errores de tipo 4-B y 3-C respectivamente, últimos que dan evidencia de un análisis erróneo o deficiente sobre la validez del procedimiento intuido.

Aquí es importante recordar que los métodos B y C descritos en la subsección 4.4.1 son procedimientos de solución válidos derivados de las intuiciones que siguieron los estudiantes, de tal modo que estos comprenden la parte válida de los procedimientos redactados por los estudiantes. Esto permitió tener un marco de referencia que permitiera evaluar a los estudiantes quienes intentaron resolver el problema con un procedimiento diferente al de tipo A, último que se concibió como el más simple e intuitivo.

El hecho de que el método tipo A haya sido el más intuido entre los alumnos sugiere que, en efecto, es el método más simple e intuitivo para llegar a la solución del problema. Sin embargo, no se puede descartar que haya una correlación entre los procedimientos intuidos y las observaciones redactadas debajo del problema; pues la primera observación del anexo H se relaciona con el método de solución tipo A.

No obstante, también se registraron numerosos errores por parte de los estudiantes quienes aplicaron el método A y que corresponden al 46% de los errores; esto sin tomar en cuenta aquellos errores que refieren a una interpretación errónea del resultado obtenido con una regla de tres. En general, nueve de los 11 errores detectados (esto es el 82% de los errores) refieren a errores de análisis sobre la validez del método intuido.

Los datos anteriores de ningún modo deben entenderse como la ausencia de un proceso de análisis por parte de los estudiantes. De hecho, desde el momento en que los alumnos intuyeron y propusieron un método de solución, es porque sí llevaron a cabo un proceso de análisis del problema. Sin embargo, una vez intuido el método, los estudiantes debían analizarlo con el fin de corroborar su validez, o bien, descartarlo para proponer otro método. Es en esto donde el análisis fue deficiente o incluso nulo, pues el 82% de los errores apuntan a errores sobre los métodos de solución intuidos.

Ahora bien, uno de los propósitos de la evaluación de la primera sesión fue comprobar si los estudiantes eran capaces de interpretar cada una de las operaciones que conforman el proceso de resolución de una regla de tres, tal como se hizo durante la fase VI. Los resultados arrojaron que al menos el 88% del grupo aplicó la regla de tres de forma correcta. Más aún, la evidencia muestra que al menos el 76% del grupo interpretó correctamente cada una de las operaciones que conforman la resolución de la regla de tres; 70% correspondiente a las categorías R3ID, R3IB R3IA y un 6% referente a la categoría ‘Método no especificado’ (véase la tabla 4.12 de la subsección 4.4.3).

En general, los resultados son favorables si se toma en cuenta que los estudiantes tuvieron dificultades para interpretar las operaciones que conforman la regla de tres durante la fase VI de la instrucción. Sin embargo, al menos el 18% del grupo no logró interpretar dichas operaciones durante la evaluación, o bien, sí las interpretaron, pero lo hicieron de forma errónea; por lo que se debe aspirar a mejorar los resultados.

CAPÍTULO 5

DESARROLLO METODOLÓGICO Y ANÁLISIS DE LA SEGUNDA SESIÓN

La segunda sesión se llevó a cabo el miércoles 21 de noviembre del 2018 y se implementó en el mismo grupo de la materia Estadística y Probabilidad I del turno matutino del CCH plantel Sur. Sin embargo, en ella se registró una asistencia de 36 estudiantes, a diferencia de la primera sesión donde se registró la asistencia de 34 estudiantes.

La segunda también se diseñó bajo el modelo de Aula Invertida. Para esto, durante los últimos minutos de la primera sesión (el lunes 12 de noviembre del 2018), el profesor avisó a los estudiantes que en los próximos días les sería enviado el texto del anexo B el cual debían leer como una actividad extra-clase previa a la implementación de la segunda sesión. Además, se les notificó que también se les enviaría el cuestionario de opinión del anexo E; último que debían contestar como actividad extra-clase y entregarlo durante los primeros minutos de la segunda sesión.

Como se describió en el capítulo anterior, la profesora del grupo abrió un grupo en la red social de Facebook con el propósito de mantener contacto con sus estudiantes sobre asuntos relacionados con el curso de Estadística y Probabilidad I y II, así como para compartir contenido relacionado con la materia. De este modo, durante el día viernes 16 de noviembre del 2018, el profesor implementador subió al grupo de Facebook el texto del anexo B junto con el cuestionario de opinión del anexo E.

De este modo, los estudiantes contaron con al menos cuatro días para realizar la lectura del texto del anexo B, así como para contestar del cuestionario de opinión del anexo E. Este último cuestionario tuvo como propósito que los alumnos evaluaran el texto del anexo B, de tal modo que se disponga de una base de opiniones que pueda tomarse como referencia en el caso de llevar a cabo una reedición del texto del anexo B; esto como parte de algún proyecto futuro.

A lo largo de este capítulo se describirá el proceso de instrucción de la segunda sesión, posteriormente se presentarán y analizarán los resultados obtenidos durante el proceso de evaluación de la misma. El objetivo de la segunda sesión fue el introducir a los estudiantes el *Principio Fundamental del Conteo*, y desarrollar su capacidad para resolver problemas de conteo que requieren de la aplicación de dicho principio. Con ello también se espera fomentar en los estudiantes el desarrollo de habilidades como la reflexión, el análisis y la evaluación; así como detonar intuiciones secundarias que los guíen en la resolución de problemas más generales del análisis combinatorio.

Para esto, el presente capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera se presentarán los detalles referentes al diseño y a la planeación de la segunda sesión. En la segunda sección se detallará y analizará el desarrollo de la instrucción. En la tercera sección se presentarán y analizarán los resultados obtenidos en el proceso de evaluación de la sesión; último que refiere a la resolución de dos problemas de conteo por parte de los estudiantes. Finalmente, durante la cuarta y última sección, se presentarán las conclusiones referentes a la implementación de la segunda sesión.

5.1 DESARROLLO METODOLÓGICO DE LA SEGUNDA SESIÓN

En esta sección se describirán los objetivos definidos para la segunda sesión. También se revisarán los elementos que integraron el diseño de la planeación de dicha sesión, además de que se describirán y justificarán las modificaciones que se le realizaron en el momento de su implementación frente al grupo.

5.1.1 La competencia por desarrollar durante la 2ª sesión

La segunda sesión tuvo como propósito introducir a los estudiantes el *Principio Fundamental del Conteo*, último que sirve como la piedra angular del Análisis Combinatorio. Si bien dicho principio es introducido desde la educación básica a un nivel elemental, durante la sesión se fomentarán habilidades como la reflexión, el análisis, la intuición y la evaluación a un nivel más elevado del que se desarrolla durante la educación básica.

De este modo, la segunda sesión no se limitó a introducir el Principio Fundamental del Conteo; sino que también se analizó el fundamento que hay detrás de dicho principio. Más específicamente, se propuso que los estudiantes desarrollen la capacidad de analizar problemas contextualizados de conteo que no pueden resolverse con una aplicación inmediata del principio fundamental, y para los cuales los estudiantes tuvieron que intuir, proponer y evaluar algún método de solución.

En general se propuso que los estudiantes desarrollen su capacidad para resolver problemas contextualizados de conteo mediante la aplicación del Principio Fundamental del Conteo; competencia que comprende los siguientes requisitos cognitivos, procedimentales y actitudinales que sirvieron de guía para el diseño y la planeación de la segunda sesión:

<table>
<tr><td colspan="3">Competencia general: Resuelve problemas contextualizados de conteo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Competencia particular: Resuelve problemas contextualizados de conteo mediante la aplicación del Principio Fundamental del Conteo.</td></tr>
<tr><th>Requisitos Cognitivos</th><th>Requisitos Procedimentales</th><th>Requisitos Actitudinales</th></tr>
<tr><td>• Conoce el Principio Fundamental del Conteo.
• Comprende el fundamento que hay detrás del Principio Fundamental del Conteo.
• Aplica el Principio Fundamental del Conteo para resolver problemas contextualizados de conteo.</td><td>• Analiza problemas contextualizados de conteo.
• Intuye un método de solución personal para resolver un problema de conteo determinado.
• Evalúa si un método de solución intuido es válido (o inválido) para resolver un problema de conteo determinado.</td><td>• Fomenta el hábito de la lectura como un medio para el autoaprendizaje.
• Fomenta el aprendizaje cooperativo, para lo cual expresará sus propias ideas y también escuchará las ideas de sus compañeros.</td></tr>
</table>

En la vida real es posible encontrar situaciones donde contar un conjunto de elementos o posibilidades es una tarea complicada. Para dichas situaciones, los estudiantes deben desarrollar su capacidad de análisis, así como su intuición. A través del análisis los estudiantes son capaces de comprender las características del conjunto de objetos (reales o ficticios) que se desean contar y, posteriormente, intuir algún método que permita calcular la cardinalidad el conjunto. El método intuido puede ser uno que los estudiantes ya conocen, o bien, puede tratarse de un procedimiento novedoso fundamentado en los métodos ya existentes. Para esto, los estudiantes deben darse a la tarea de evaluar el método intuido, esto último con el propósito de determinar su validez, o en caso contrario, su invalidez.

5.1.2 Diseño de la planeación para la 2ª sesión

La planeación original de la segunda sesión, la cual puede consultarse en el anexo G, está conformada por dos problemas de conteo que debían ser resueltos con la participación del grupo y la guía del profesor. También se diseñaron otros dos problemas adicionales para el proceso de evaluación, últimos que pueden consultarse en los anexos J y K.

Sin embargo, durante la implementación de la segunda sesión se realizaron ajustes al diseño original; esto debido a múltiples circunstancias que serán referidas más adelante. En general, el diseño original de la sesión comprendía los siguientes seis pasos:

1) Se solicita a los estudiantes la entrega del cuestionario de opinión (anexo E) sobre el texto del anexo B, el cual debieron contestar como una actividad extra-clase previa a la segunda sesión de trabajo.
2) Se lleva a cabo una breve retroalimentación sobre el contenido del texto del anexo E. Para ello se cuestiona a los estudiantes sobre el significado del término ‘evento’, también se les cuestiona qué afirma el Principio Fundamental del Conteo.
3) Se introduce el contexto que permita abordar el primero de los dos problemas a resolver con la participación del grupo y con la guía del profesor. Para esto, se explica a los estudiantes qué es el Registro Federal de Contribuyentes (RFC) y cómo pueden obtener dicha clave a partir de sus propios datos personales (nombre completo y fecha de nacimiento).
4) Una vez que los estudiantes están en contexto se les plantea el primer problema, el cual consiste en realizar el cálculo del número total de RFCs posibles (sin la homoclave) que podrían emitirse bajo las reglas con las que se forma dicha clave. Conviene señalar que para dicho cálculo no se consideró el caso de aquellas personas que hayan nacido un 29 de febrero de un año bisiesto; pues sin esa restricción resolver el problema habría demandado más tiempo del que se disponía.
5) Una vez resuelto el primer problema se plantea a los estudiantes el segundo problema, último que también debe resolverse con la participación del grupo y con la guía del profesor. Dicho problema consiste en calcular el número de contraseñas posibles que se pueden introducir para acceder a los servicios en línea de una compañía bancaria, y el cual

pone como restricción que la contraseña esté integrada por ocho caracteres entre los cuales debe haber al menos una letra y al menos un número. Cabe destacar que este último problema se diseñó a partir de una situación real.

6) Por último, se procede al proceso de evaluación. Para ello, se hace entrega a los estudiantes de dos problemas impresos (anexos J y K). Los alumnos deben darse a la tarea de resolver los problemas y, posteriormente, redactar de forma limpia, clara y ordenada una explicación detallada del método de solución empleado.

Aquí conviene mencionar que se otorgó a los estudiantes una tolerancia de 10 minutos para que se incorporara a la clase. Una vez transcurridos los 10 minutos se les solicitó entregar el cuestionario de opinión del anexo E, último que debieron contestar como una actividad extra-clase previa a la sesión de trabajo.

Contrario a lo acordado, el profesor observó que varios de los estudiantes llegaron al salón de clase a contestar el cuestionario y, una vez transcurridos los 10 minutos de tolerancia, varios de los estudiantes continuaban con el llenado del cuestionario; razón por la cual la clase comenzó 10 minutos después de lo planeado. El profesor observó que la demora también estaba relacionada con el hecho de que los alumnos debían entregar trabajos finales, pues la sesión se implementó durante los últimos días del semestre 2019-1 de la UNAM.

Ante la situación anterior, el profesor tomó la decisión de sólo trabajar con el primero de los dos problemas considerados en la planeación; esto con el propósito de garantizar el tiempo necesario para llevar a cabo el proceso de evaluación (anexos J y K). De este modo, la segunda sesión quedó integrada por las siguientes cinco fases:

1) Fase IX: Se solicita a los estudiantes la entrega del cuestionario de opinión (anexo E), referente a la lectura del anexo B.
2) Fase X: Se lleva a cabo una breve retroalimentación sobre la lectura del anexo E, y para lo cual se cuestiona a los estudiantes sobre el significado del término ‘evento’ y sobre lo que plantea el Principio Fundamental del Conteo.
3) Fase XI: Se explica a los estudiantes qué es el RFC y cómo pueden obtener dicha clave a partir de sus datos personales.
4) Fase XII: Se plantea a los estudiantes el problema de calcular el número total de RFCs distintos que podrían emitirse; esto a partir de las reglas establecidas para formular dicha

clave. La resolución de este problema se lleva a cabo con la participación del grupo con la guía del profesor.

5) Fase XIII: Da inicio el proceso de evaluación. Para esto, se entrega a los estudiantes los problemas de los anexos J y K de forma impresa, bajo la instrucción de resolverlos y redactar de forma limpia, clara y ordenada una explicación detallada del método de solución empleado en cada uno de los problemas.

Las cinco fases anteriores fueron enumeradas con números romanos continuando con la enumeración propuesta durante el capítulo 4; de tal modo que sea posible referirse de forma única a cada una de las fases que conformaron las dos sesiones implementadas.

5.2 LA INSTRUCCIÓN DURANTE LA SEGUNDA SESIÓN

En esta sección se hará una descripción general sobre el desarrollo del proceso de instrucción de la segunda sesión, y la cual tuvo lugar el miércoles 21 de noviembre del año 2018. Para esto, se contó con una grabación en la cual se registró el desarrollo de la fase XII; última en la que se planteó a los estudiantes un problema contextualizado de conteo que no puede ser resuelto con una aplicación inmediata del Principio Fundamental del Conteo. Para la descripción y el análisis de la fase XII se anexará una transcripción del diálogo entre el profesor y los estudiantes que tuvo lugar durante el desarrollo de la misma.

Ahora bien, en lo que refiere a la fase IX, momento en que los estudiantes entregaron el cuestionario de opinión del anexo E sobre la lectura del anexo B, se compartirán los resultados generales obtenidos en las preguntas de escala Likert que integran el cuestionario. Además, se compartirán y analizarán algunas de las respuestas proporcionadas por los estudiantes en las preguntas de respuesta abierta que también conforman el cuestionario.

No se reportará el desarrollo de la fase X, la cual refiere a una breve retroalimentación sobre el contenido del texto del anexo B. La razón de esto es que dicha fase se desarrolló de forma breve y no se realizó una grabación.

Por otra parte, se describirá de forma general el desarrollo de la fase XI, fase en la que se presentó un error de instrucción referente al modelo con el cual se obtiene el RFC de una persona (sin la homoclave) a partir de sus datos personales. Los detalles de este error de instrucción serán descritos más adelante en esta misma sección. Por ahora conviene mencionar que el análisis que se llevó a cabo durante la fase XII se hizo bajo este modelo equívoco para obtener el RFC de una persona; sin embargo, el análisis fue correcto más allá del error de instrucción. Además, el procedimiento de solución propuesto por los estudiantes durante la fase XII es completamente análogo al caso de haber empleado el modelo correcto para general el RFC de un individuo.

5.2.1 Fase IX: Entrega del segundo cuestionario de opinión

Para la segunda sesión se otorgó a los estudiantes una tolerancia de diez minutos para que se incorporaran al salón de clase. Una vez concluidos los diez minutos, el profesor solicitó a los estudiantes que entregaran el cuestionario de opinión (anexo E) referente al texto del anexo B. Tanto la lectura del texto del anexo B como el llenado del cuestionario de opinión fueron actividades extra-clase que se solicitó a los estudiantes realizar con anterioridad a la sesión. Para ello, contaron con al menos cuatro días para realizar ambas actividades.

Contrario a lo anterior, el profesor observó que algunos alumnos empezaron a contestar el cuestionario apenas ingresaron al salón de clase, y al solicitar la entrega de los mismos, los estudiantes demoraron en entregarlo. Además, el profesor percibió a los estudiantes distraídos con otras actividades de sus demás materias. Por esta razón la clase dio inicio de forma posterior al horario que se había planeado.

En lo que al segundo cuestionario de opinión se refiere, este está conformado por ocho preguntas de escala Likert y ocho preguntas de respuesta abierta (véase el anexo E). A través de las preguntas de escala Likert los estudiantes evaluaron el nivel de claridad con el que se redactó cada una de las secciones que conforman la lectura del anexo B. Por su parte, cada pregunta de escala Likert fue acompañada por una pregunta de respuesta abierta a través de la cual los estudiantes compartieron su opinión en relación con la parte del texto que refiere cada pregunta.

En esta subsección se compartirán los resultados obtenidos en el cuestionario de opinión contestado por los estudiantes, aunque no se realizará un análisis riguroso de los resultados. Se debe recordar que el propósito del cuestionario es el de tener una base de opiniones emitidas por los estudiantes sobre el texto del anexo B, para que pueda ser tomada en cuenta en el caso de llevar a cabo una reedición del texto como parte de algún proyecto futuro.

Antes de presentar los resultados obtenidos en el cuestionario, conviene hacer las siguientes aclaraciones. La primera de ellas es que sólo 25 de los 36 alumnos asistentes entregaron el cuestionario de opinión. Además, entre los 25 alumnos que entregaron el cuestionario, se detectó el caso de siete alumnos quienes fotocopiaron el cuestionario de alguno de sus compañeros. De estos siete alumnos, cinco de ellos borraron el nombre y las respuestas de su compañero, con lo que procedieron a contestar el cuestionario con sus propias respuestas.

Por otra parte, uno de los alumnos que fotocopió el cuestionario sólo borró el nombre de su compañero y lo sustituyó por el suyo. El último de los siete alumnos sí escribió sus propias respuestas en las preguntas de respuesta abierta; sin embargo, no borró las respuestas de escala Likert del documento fotocopiado con las respuestas de su compañero, por lo que registró más de una respuesta en las preguntas de escala Likert. Por las razones anteriores se tomó la decisión de anular las respuestas presentadas por estos últimos dos estudiantes. De este modo, los resultados presentados en el siguiente cuadro sólo muestran las opiniones de los 23 alumnos restantes que entregaron el cuestionario de opinión con sus respuestas personales.

1. Considero que la sección ***"Introducción"*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Respuesta anulada
4%	**0%**	**0%**	**26%**	**70%**	**0%**
2. Considero que la sección ***"El Principio Fundamental del Conteo"*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Respuesta anulada
4%	**0%**	**0%**	**44%**	**52%**	**0%**

3. Considero que la sección ***“La Técnica de las Casillas”*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Respuesta anulada
4%	**0%**	**4%**	**40%**	**52%**	**0%**

4. Considero que la sección ***“Ordenaciones con Repetición”*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Respuesta anulada
4%	**0%**	**0%**	**48%**	**44%**	**4%**

5. Considero que la sección ***“Una notación para el número de ordenaciones con repetición”*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Respuesta anulada
4%	**4%**	**4%**	**36%**	**48%**	**4%**

6. Considero que la sección ***“Una fórmula para calcular el número de ordenaciones con repetición”*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Respuesta anulada
4%	**4%**	**13%**	**23%**	**52%**	**4%**
7. Considero que la sección ***“El orden, un factor importante en el conteo”*** se desarrolla de forma clara.					
Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Respuesta anulada
4%	**0%**	**0%**	**39%**	**48%**	**9%**
8. Considero que el texto ***“Contando contraseñas y otras cosas”*** me proporcionó herramientas para analizar y solucionar problemas.					
Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Respuesta anulada
4%	**0%**	**4%**	**40%**	**35%**	**17%**

Los resultados de las preguntas 1 a 7 muestran que la mayoría de los estudiantes no tuvieron dificultades para comprender el texto del anexo B; pues en cada una de ellas al menos el 70% de las selecciones se concentraron entre las opciones de 'De acuerdo' y 'Totalmente de acuerdo'. No obstante, los resultados de las preguntas 5 y 6 mostraron que algunos estudiantes sí presentaron dificultades para comprender las secciones donde se presenta la notación y a la fórmula correspondiente a las ordenaciones con repetición.

A continuación, se anexan algunas de las respuestas proporcionadas por los estudiantes en las ocho preguntas de respuesta abierta; últimas que acompañaban a las preguntas de escala Likert con el fin de tener una opinión más profunda. Es importante señalar que las respuestas abajo anexadas fueron seleccionadas bajo el juicio del profesor implementador, y no son representativas de la opinión general del grupo. Sin embargo, estas permiten vislumbrar la diversidad de opiniones de los estudiantes respecto al texto del anexo B.

1. Escribe tu opinión sobre la sección ***"Introducción"***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.
Alumno #1: Presenta muy bien el tema del capítulo, sin resultar confuso. Empatiza correctamente con el lector. **Alumna #2:** Está desarrollado de forma correcta, además de que incluya los ejemplos de la vida cotidiana ayuda a desarrollar el tema. **Alumna #3:** Se me hace una buena forma de dar dirección al texto, intriga y no aburre. En esta parte no hay gran confusión, además que los ejemplos son de gran ayuda. **Alumna #4:** Es clara y buena para dar inicio al tema, además usa ejemplos que son del mundo actual, por lo tanto, genera un interés. **Alumna #5:** Mi opinión sobre este tema es que me gusta la forma en la que nos habla del conteo. **Alumno #6:** Todo me pareció muy claro. **Alumna #7:** Clara, hace una introducción sencilla de entender [sobre de] qué se va a tratar y las situaciones que tomará como ejemplo.

2. Escribe tu opinión sobre la sección ***“El Principio Fundamental del Conteo”***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.
Alumno #1: Completamente claro la sección leída. Resulta bastante ligero primero pone ejemplos para explicarlos a lo largo de la sección, ya que así logré entenderlo mejor. **Alumna #2:** Me gusta cómo desarrolla en cuanto a la forma de explicar con el ejemplo del diagrama de árbol y la forma sencilla de calcularlo. **Alumna #3:** Se me hace clara la forma en que es explicado, principalmente para obtener el total de posibilidades, aunque me perdí un poco con el 2º árbol de la ropa y el cómo se enunció el principio fundamental del conteo (para tres eventos). **Alumna #4:** Es claro, el uso de ejemplos e imágenes ayuda a la comprensión de esta sección. No hay términos confusos. **Alumna #5:** Me gusta el primer ejemplo, debido a que es muy fácil de entender el tema, sin embargo, se me complicó un poco con los demás ejemplos. **Alumno #6:** Me pareció claro, aunque siento que es un texto un poco largo que [se] vuelve tedioso. **Alumna #7:** Al principio explica bien el ejemplo del diagrama de árbol, sin embargo, en la parte de explicar los diferentes niveles y el cálculo de cómo cada rama se ramifica y por qué, es algo confuso.
3. Escribe tu opinión sobre la sección ***“La Técnica de las Casillas”***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.
Alumno #1: Resulta claro y nada confuso la sección leída. Me gustan los recursos gráficos utilizados porque se entiende de mejor manera los temas. **Alumna #2:** La forma de explicar los pasos de cómo usar la técnica es buena y sencilla. **Alumna #3:** El capítulo se me hizo claro y creo haber logrado comprender el cómo obtenerlo y para qué sirve. **Alumna #4:** Es claro, el uso de ejemplos ayuda a la comprensión de esta sección. No hay términos confusos, además de que explica de forma detallada el porqué de los resultados; es decir hay un orden claro. **Alumna #5:** El único ejemplo que utilizó me hizo que entendiera muy fácil y rápido el tema.

Alumno #6: Muy clara es la sección.

Alumna #7: Es un método que se explica de forma concisa y resulta bastante sencillo y entendible el ejemplo que maneja.

4. Escribe tu opinión sobre la sección ***"Ordenaciones con Repetición"***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.

Alumno #1: Me confundió un poco esta sección, pero cuando la leí nuevamente, se dedica únicamente a explicar lo que es una ordenación y repetición.

Alumna #2: Su forma de desarrollar el tema es buena y concreto.

Alumna #3: Me queda claro aquí que la característica de dichas ordenaciones con repetición es que el orden sí importa, aunque dudé en la parte del ejemplo con "parangaricutirimícuaro". [Esta última palabra se trata de un trabalenguas tradicional mexicano, el cual se mencionó dentro del texto del anexo B].

Alumna #4: Es claro, da una explicación breve de lo que son las ordenaciones con repetición, además de mencionar ejemplos para que llegue a ser más clara la explicación.

Alumna #5: Toda esta parte del texto me pareció clara.

Alumno #6: Todo me pareció muy claro.

Alumna #7: Sin ningún problema, es comprensible lo que son las ordenaciones con repetición y sus componentes.

5. Escribe tu opinión sobre la sección ***"Una notación para el número de ordenaciones con repetición"***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.

Alumno #1: Diría que es mejor unir la sección anterior junto con este, debido a que el primero explica conceptos y este ya explica el método. Aun así, se me hizo muy clara esta sección.

Alumna #2: Me gusta que explique a base de ejemplos, ya que así lo entiendo más.

Alumna #3: Aquí sí no comprendí el capítulo, lo principal tal vez fue porque todo es ejemplo y casi nada (o nada) de explicación, así que terminé confundiéndome.

Alumna #4: También es clara, el desarrollo del ejemplo es esencial para obtener la anotación [probablemente quiso decir: para entender la notación] y gracias a esto se entiende de manera fácil.

Alumna #5: Me confundí en esta parte del texto, por los ejemplos.

Alumno #6: Totalmente clara en todos los aspectos.

Alumna #7: El ejemplo y cómo se desarrolla cada observación de este son muy comprensibles.

6. Escribe tu opinión sobre la sección ***“Una fórmula para calcular el número de ordenaciones con repetición”***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.

Alumno #1: Nuevamente recomiendo unir esta sección con las otras 2 anteriores porque se trata del mismo tema. Completamente claro todo en esta sección.

Alumna #2: Aunque es un poco corto, es concreto y entendible.

Alumna #3: En este capítulo tampoco fui capaz de comprender lo que se quería explicar, supongo que es sobre la fórmula $OR_m^n = n^m$, la cual tiene que ver con el capítulo anterior, pero no logro entender lo que dice.

Alumna #4: Es clara, pero tiende a ser algo confuso, más que nada antes de llegar al ejemplo porque el modo en que está redactado este [es] algo revuelto, el ejemplo saca a flote esta parte.

Alumna #5: Aquí me volví a confundir en el ejemplo.

Alumno #6: Todo queda muy claro, aunque siento que ya es un poco repetitivo.

Alumna #7: Aquí mismo con el uso del ejemplo resulta sencillo comprender cada parte de la conclusión.

7. Escribe tu opinión sobre la sección ***“El orden, un factor importante en el conteo”***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.

Alumno #1: Sirve como introducción al nuevo capítulo, sin perder de vista el objetivo de este. Está muy bien explicado y completamente claro.

Alumna #2: Deja en claro cuando es vista en situación el tema mencionado y a que se refiere.

Alumna #3: De cierta forma lo entendí; lo entendí simple y sencillamente que el orden no importa [se refiere al orden de los valores en una ficha de dominó], y que el usar técnicas como las anteriores sería inútil porque resultados ya aparecidos se repetirían.

Alumna #4: Es claro, es un buen cierre para la lectura.

Alumna #5: La conclusión sobre todo este tema de las técnicas de conteo es excelente, porque recaba todos los puntos vistos anteriormente.

Alumno #6: Estoy totalmente de acuerdo, aunque me hubiese gustado que dieran el ejemplo de las piezas de dominó. [Quizá se refiere a calcular el número de fichas de dominó mediante la aplicación de técnicas de conteo; es algo factible de añadir en una posible reedición del texto del anexo B].

Alumna #7: Resulta algo difícil de comprender cómo es importante el orden [y entender] en qué situaciones aplica y en cuáles no.

8. Sobre los temas que se desarrollaron en el texto ***"Contando contraseñas y otras cosas"***, menciona qué temas fueron nuevos para ti y de cuáles ya tenías conocimiento.

Alumno #1: Como las técnicas de conteo las aprendí hace un par de clases, se me hizo este capítulo para reforzar mi conocimiento que tenía sobre estas. Además, con las explicaciones logré entender el fundamento teórico de las técnicas de conteo. Sabía sobre las ordenaciones con repetición y sin repetición, pero no sabía en qué casos se utilizaban.

Alumna#2: Me pareció que el tema es un poco extenso, pero la mayoría de los temas los conocía o había escuchado de ellos.

Alumna #3: Todos los temas de este texto fueron nuevos para mí, la lectura se me hizo agradable y me permitió entender algunas técnicas de conteo, aunque hubiera preferido haber entendido todas ellas.

Alumna #4: La mayoría de los temas tocados en este texto eran de mi conocimiento, por ejemplo el diagrama de árbol que vi desde primaria, a unos más recientes como la técnica de casillas, ordenaciones con y sin repetición que apenas vi en mi clase de estadística, pero de ser sincera me quedó más claro todo lo anterior en este texto que en lo visto en clase.

Alumna #5: Los ejemplos y la explicación que dan en este artículo son buenos ya [que] facilitan a comprender mejor los temas.

Alumno #6: Prácticamente ya tenía conocimiento de todos, pero con el texto me quedaron más claros y fue más practico que el método de cómo me lo enseñaron.

Alumna #7: Sobre el diagrama de árbol y la técnica de casillas ya tenía conocimiento previo, lo que sí me resultó nuevo fue comprender las ordenaciones con repetición y cómo cada paso tenía una razón de ser.

En el cuadro anterior se presentan las respuestas de siete estudiantes referentes a las ocho preguntas de respuesta abierta del cuestionario del anexo E. Es importante mencionar que la enumeración 'Alumno #' es independiente de la que se presenta en los diálogos anexados a lo largo de la tesis. Además, esta enumeración tampoco corresponde con la del cuadro de la subsección 4.3.1 del capítulo 4. De este modo, el número asignado a los alumnos en el cuadro anterior es únicamente para dar seguimiento a las respuestas de un mismo alumno dentro de ese mismo cuadro.

Una primera observación que conviene hacer es que el alumno #1 marcó "Totalmente en desacuerdo" en todas las preguntas de escala Likert; sin embargo, en sus respuestas a las preguntas abiertas explicó que no tuvo complicaciones para comprender el texto del anexo B. Esto sugiere que el alumno mal interpretó las preguntas de escala Likert, pues el 4% que refiere a la opción "Totalmente en desacuerdo" en cada una de las preguntas de escala Likert corresponden a las respuestas de este único estudiante.

Más allá de la aclaración anterior, es evidente que algunos estudiantes sí tuvieron dificultades para comprender el texto del anexo B, especialmente las partes del texto a las que refieren las preguntas abiertas 5 y 6 del cuestionario de opinión. Evidencia de ello son las respuestas de las alumnas #3 y #5 en dichas preguntas; así como las respuestas de la alumna #4 y el alumno #6 a la pregunta 6, quienes calificaron esa parte del texto como 'algo confusa' y 'tediosa'. Conviene señalar que las secciones sobre las que refieren las preguntas 5 y 6 se redactaron de una forma más técnica.

Conviene discutir si fue oportuno incluir tecnicismos como la notación OR_m^n y su fórmula asociada en el texto del anexo B; pues dichos tecnicismos dificultaron la lectura del texto. En lo que a las ordenaciones con repetición se refiere, lo más relevante es que los alumnos comprendan y apliquen los términos ‘*ordenación*’ y ‘*con repetición*’ en situaciones generales del conteo. Además, para los fines de la sesión no fue necesario introducir la notación y la fórmula antes mencionadas, pues calcular el número de ordenaciones con repetición es algo que se puede hacer con una aplicación directa del Principio Fundamental del Conteo.

Sin embargo, la inclusión de la notación y la fórmula de las ordenaciones con repetición se consideró para conectarla con textos posteriores donde quizá sería necesario el uso de esta notación más técnica. De hecho, sí se redactó un tercer texto no implementado (véase el anexo C) en el cual se desarrolla el tema de las ordenaciones sin repetición. Aunque el tema que desarrolla este último texto no se implementó, en el contenido del anexo B refiere al texto del anexo C como un capítulo sucesor.

Ahora bien, la última parte del texto del anexo B (a la que refiere la pregunta 7) se redactó apenas una semana antes de que el texto fuera enviado a los estudiantes. La decisión de redactar esa última parte fue para ejemplificar un caso concreto donde los componentes de los objetos a contar, en este caso fichas de dominó, no poseen un orden; en otras palabras, no hay un orden entre los valores numéricos impresos en las fichas de dominó. Lo anterior permitió mostrar a los estudiantes un problema de conteo donde el orden es un factor irrelevante (combinaciones); por lo que es inválido aplicar el Principio Fundamental del Conteo a dicho caso.

Por último, conviene mencionar que los estudiantes del grupo ya contaban con algunos conocimientos previos del tema. Sobre esto, la profesora del grupo comentó al profesor implementador que los alumnos ya conocían los términos de *eventos dependientes* e *independientes*; esto es cuando el resultado obtenido en un primer evento influye en el conjunto de posibilidades de un evento subsecuente. La profesora también comentó que los estudiantes ya habían trabajado algunos problemas de conteo sencillos. Las respuestas de los estudiantes #1, #4, #6 y #7 a la pregunta abierta 8 muestran que, en efecto, ya contaban con algunos conocimientos previos; aunque también mencionaron que el texto del anexo B les permitió profundizar más sobre dichos temas.

5.2.2 Fase XI: Obtención del RFC a partir de los datos personales

En esta fase de la instrucción se les explicó a los estudiantes la forma de obtener su clave del Registro Federal de Contribuyentes (RFC) sin la homoclave, y la cual coincide con los primeros diez caracteres de la Clave Única del Registro de Población (CURP). Los ciudadanos mexicanos disponen de su propia clave CURP, y esta es asignada de forma única a cada persona; razón por la que no puede darse el caso de dos mexicanos con la misma clave.

Aquí es oportuno mencionar que, durante el desarrollo de la fase XI, el profesor cometió un error de instrucción derivado de un conocimiento falso que él tenía sobre las reglas con las que se le asigna el CURP a un ciudadano mexicano. Antes de hacer explícito el error de instrucción, se presenta el modelo que les fue explicado a los estudiantes, el cual permite obtener los primeros diez caracteres del CURP y que comprende el error de instrucción referido:

1) El primer carácter del CURP es la primera letra del apellido paterno.
2) El segundo carácter del CURP es la segunda letra del apellido paterno.
3) El tercer carácter del CURP es la primera letra del apellido materno
4) El cuarto carácter del CURP es la primera letra del primer nombre.
5) Los caracteres quinto y sexto del CURP corresponden con los últimos dos dígitos del año de nacimiento.
6) Los caracteres séptimo y octavo del CURP corresponden con el número del mes de nacimiento (del 01 al 12).
7) Los caracteres noveno y décimo del CURP son los dos dígitos del día de nacimiento.

El error de instrucción refiere al inciso dos; pues el segundo carácter del CURP de un ciudadano no es la segunda letra de su apellido paterno, sino la primera vocal interna de dicho apellido. Como ya se mencionó, este error fue el resultado de un conocimiento erróneo del profesor, error que pasó a formar parte del diseño y la planeación de la segunda sesión (anexo G).

Una vez que los estudiantes comprendieron el procedimiento para obtener su RFC (sin la homoclave) a partir de sus datos personales, se les planteó el reto de calcular el número de RFCs diferentes que podrían emitirse bajo las reglas descritas. Más allá del error de instrucción, tanto el análisis como los métodos empleados durante la instrucción fueron válidos; de hecho, de haber empleado el modelo correcto para la obtención del RFC se habría procedido de forma análoga a como se hizo bajo el error referido.

Cabe mencionar que el error de instrucción fue detectado por el profesor cuatro meses después de la implementación de la segunda sesión. De hecho, durante la segunda sesión la alumna A-1 mencionó al profesor que el segundo carácter de su CURP no coincidía con el del modelo presentado en clase. Sin embargo, en ese momento el profesor no contaba con acceso a internet para revisar si había un error en el modelo presentado.

Cuatro meses después de la implementación, el profesor se percató del error en el modelo que presentó para obtener el RFC. Para entonces, los estudiantes del grupo ya cursaban la materia subsecuente: Estadística y Probabilidad II. Dado que los estudiantes aún permanecían como miembros del grupo de Facebook, el profesor tuvo la oportunidad de contactarlos y notificarles sobre el error de instrucción, evitando así que se quedaran con un conocimiento erróneo sobre las reglas para obtener su RFC a partir de sus datos personales.

De este modo, el día 23 de marzo del 2019, el profesor compartió el siguiente comunicado en el grupo de Facebook:

Hola chicos, buen día:

Soy Alberto, el profesor que a finales del semestre pasado les impartió el tema de "El Principio Fundamental del Conteo". No sé si recuerden que, en dicha sesión, les proporcioné una receta para obtener los primeros 10 caracteres de su CURP, los cuales corresponden al RFC.

Aquél día, algunos de ustedes comentaron que los primeros caracteres de su CURP no coincidían con los que obtenían de la receta. De antemano quiero pedirles una disculpa porque el error fue de mi parte. Quiero aclarar que los primeros dos caracteres del CURP se componen de la primera letra del apellido paterno, seguida de la primera vocal interna del mismo apellido.

Por ejemplo, alguien cuyo apellido paterno sea Olvera, su CURP empezará con las letras "OE". Por su parte, los caracteres 3 a 10 del CURP sí se obtienen con la receta que proporcioné en clase.

El error estuvo en que, en la clase, les comenté que los dos primeros caracteres del CURP coinciden con las dos primeras letras del apellido paterno, pero esto en general es falso.

Considero importante mencionar que, bajo la corrección de arriba, el análisis para calcular el número total de claves RFC posibles es análogo al que hicimos durante la clase. De hecho, sólo cambia el número de posibilidades para asignar el segundo carácter del RFC, por lo que el resto del procedimiento se mantiene exactamente igual al que hicimos.

Les envío un cordial saludo y abajo anexo un artículo en el cual se explica cual es el significado de cada uno de los caracteres que aparecen en el CURP:

¿Sabes cómo se conforma tu CURP?

La CURP se integra por 18 caracteres. A continuación conocerás su composición

gob.mx

Como se observa en el comunicado, el profesor enfatizó que tanto el análisis como el método de solución aplicado durante la sesión fueron correctos. Explicó que para el modelo correcto el procedimiento sería análogo, sólo habría que ajustar el número de posibilidades del segundo carácter del RFC; de modo que para el modelo correcto hay 5 posibilidades (5 vocales del alfabeto), mientras que en el modelo implementado se consideraron las 27 letras del alfabeto.

En efecto, como se detallará en la siguiente subsección, el método de solución del problema para ambos modelos es completamente análogo y sólo cambia en el número de posibilidades que se le da al segundo carácter del CURP. En otras palabras, entre el modelo erróneo y el correcto, sólo se debe sustituir el valor de 27 por el de 5 y proceder a resolver el problema con el mismo método que se aplicó para el modelo erróneo.

Cabe mencionar que, además de la explicación antes compartida, también se les proporcionó el link de una página web (véase https://www.gob.mx/segob/renapo/es/articulos/sabes-como-se-conforma-tu-curp?idiom=es) en donde se explica el significado de cada uno de los caracteres que conforman la CURP de un ciudadano mexicano.

5.2.3 Fase XII: Resolución del problema #5, cálculo del número de RFCs posibles

Una vez concluida la fase XI, se planteó a los estudiantes el problema de calcular el número de RFCs diferentes que podrían emitirse. Como se mencionó en la sección anterior, se cometió un error sobre el modelo con el cual se obtienen los primeros diez caracteres del CURP de un ciudadano mexicano, caracteres que coinciden con los del RFC. No obstante, tanto el en análisis como el método de solución aplicado fueron válidos. De hecho, el método empleado es generalizable y análogamente aplicable al caso de haber utilizado el modelo correcto para obtener el RFC de los ciudadanos.

El objetivo fue que los estudiantes intuyeran y aplicaran algún método de solución generalizable a una diversidad de situaciones; método que necesariamente requiere de una o más aplicaciones del Principio Fundamental del Conteo, aunque no de forma inmediata. Calcular el número de RFCs supone un problema con obstáculos que los estudiantes deberán detectar, analizar y, posteriormente, solucionar.

Para resolver el problema, se deben identificar cada uno de los caracteres que integran el RFC y asignarles un valor equivalente al número de posibilidades que existen para dicho carácter. El problema radica en que el conjunto de posibilidades de ciertos caracteres varía en función de los valores asignados a los caracteres previos, de modo que los estudiantes deben encontrar una solución a dicha situación.

El método que los estudiantes aplicaron comprende varios pasos que se describirán a continuación. El primer paso consistió en dibujar diez casillas en el pizarrón, una por cada carácter que conforma el RFC (sin la homoclave), tal y como se muestra en la imagen de abajo:

Las casillas representan los caracteres del RFC de un ciudadano, de modo que bajo cada casilla se refiere al carácter con el que está asociada; esto último bajo el modelo de obtención del RFC descrito durante la fase XI:

1a Letra Apellido Paterno	**2a Letra Apellido Paterno**	**1a Letra Apellido Materno**	**1a Letra Nombre**	**Penúltimo dígito del año de nacimiento**	**Último dígito del año de nacimiento**	**Primer dígito del mes de nacimiento**	**Segundo dígito del mes de nacimiento**	**Primer dígito del día de nacimiento**	**Segundo dígito del día de nacimieto**

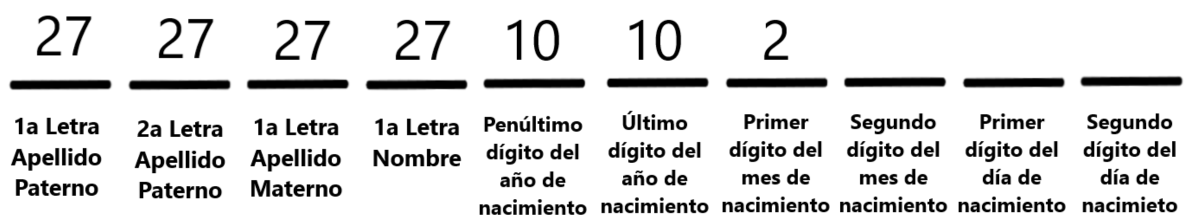
Después, el profesor solicitó a los estudiantes que indicaran cuántas posibilidades hay para asignar un valor a cada carácter. En el caso de las primeras cuatro casillas hay 27 opciones que corresponden con las 27 letras del alfabeto. De este modo, que el profesor escribió el número 27 sobre cada una de las casillas referidas:

27	27	27	27						
1a Letra Apellido Paterno	**2a Letra Apellido Paterno**	**1a Letra Apellido Materno**	**1a Letra Nombre**	**Penúltimo dígito del año de nacimiento**	**Último dígito del año de nacimiento**	**Primer dígito del mes de nacimiento**	**Segundo dígito del mes de nacimiento**	**Primer dígito del día de nacimiento**	**Segundo dígito del día de nacimieto**

Por otra parte, los caracteres quinto y sexto del RFC corresponden a los dígitos del año de nacimiento; de modo que el conjunto de posibilidades comprende los números del cero al nueve; es decir, hay 10 valores posibles para dichas casillas. Así que se escribe un ‘10’ sobre las casillas quinta y sexta:

27	27	27	27	10	10				
1a Letra Apellido Paterno	**2a Letra Apellido Paterno**	**1a Letra Apellido Materno**	**1a Letra Nombre**	**Penúltimo dígito del año de nacimiento**	**Último dígito del año de nacimiento**	**Primer dígito del mes de nacimiento**	**Segundo dígito del mes de nacimiento**	**Primer dígito del día de nacimiento**	**Segundo dígito del día de nacimieto**

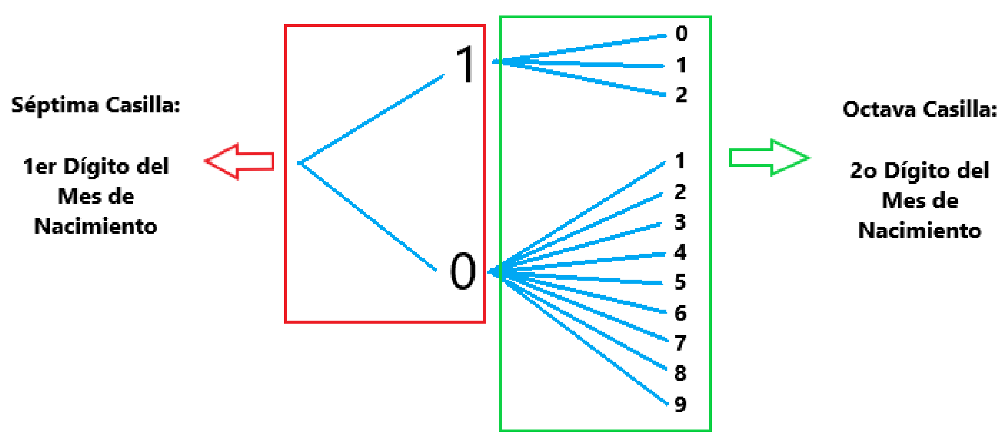
En el siguiente paso los estudiantes tendrían que mencionar cuantas posibilidades hay para los caracteres séptimo y octavo del RFC, los cuales refieren a los dígitos asociados a los meses del año. Recuerde que los meses se numeran del 01 al 12, donde 01 refiere a enero, 02 a febrero, 03 a marzo, y así hasta el 12 que corresponde al mes de diciembre. Esto significa que para el séptimo carácter del CURP hay dos dígitos posibles que son el ‘0’ y el ‘1’. Los estudiantes propusieron escribir un ’2’ sobre la séptima casilla:



Respecto a la octava casilla, es ahí donde surge el primer problema. El octavo carácter del RFC corresponde al segundo dígito del mes de nacimiento. Dado que los meses se numeran del 01 al 12, el octavo carácter puede tomar valores que varían del 1 al 9, o bien, del 0 al 2 dependiendo del valor asignado al séptimo carácter; es decir, su conjunto de posibilidades varía en función del su predecesor.

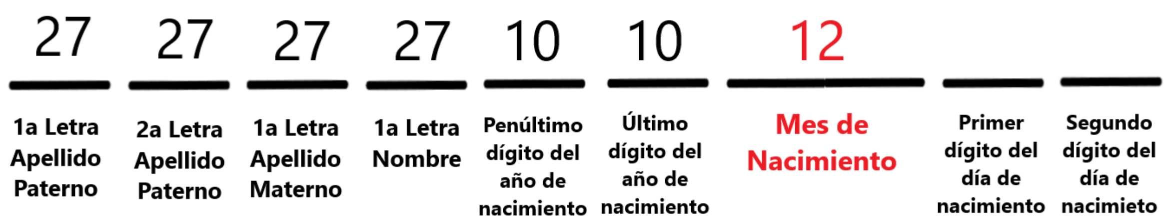
Por ejemplo, si el séptimo carácter es 1, el octavo carácter no puede ser 3, pues no existe un mes asociado al número 13; de modo que este sólo puede tomar valores del 0 al 2 (en este caso hay tres valores posibles). Por su parte, cuando el séptimo carácter es 0, el octavo carácter puede variar del 1 al 9 (hay nueve posibilidades).

Con el texto del anexo B los estudiantes profundizaron sobre los fundamentos del Principio Fundamental del Conteo, último que es válido sólo cuando el diagrama de árbol asociado ramifica un número constante de veces dentro de cada nivel de ramificación. En contraste con lo anterior, los estudiantes observaron que el diagrama de árbol asociado al problema en cuestión ramifica en los niveles séptimo y octavo de la siguiente forma:



Del diagrama anterior, los estudiantes dedujeron que no es posible aplicar el principio fundamental bajo el procedimiento hasta aquí descrito, pues dentro del octavo nivel de ramificación algunos puntos ramifican tres veces y otros nueve veces. El profesor guio la instrucción para que los estudiantes propusieran un método de solución diferente, específicamente el que se describe a continuación.

Primero, los estudiantes observaron que, en conjunto, los caracteres séptimo y octavo del RFC pueden configurarse de doce formas posibles; pues el par de dígitos corresponde a los meses del año. Dado que el objetivo es calcular el número de posibilidades para formar un RFC, las casillas séptima y octava pueden ‘fusionarse’ en una única casilla cuyo conjunto de posibilidades son las doce configuraciones válidas que varían del 01 al 12.



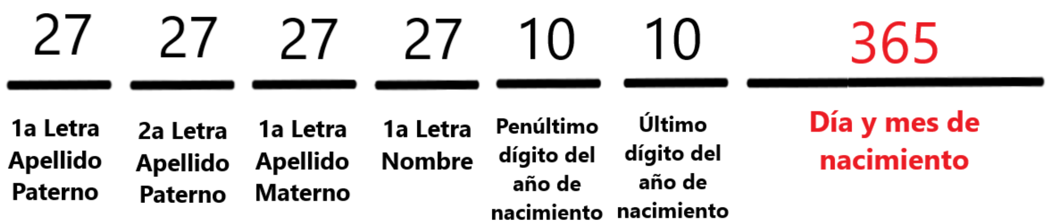
Ahora bien, al contar el conjunto de posibilidades para asignar un valor a los caracteres del día de nacimiento, surge una nueva dificultad. Observe que los meses del año varían en el número de días que los conforman; algunos tienen 30 días, otros tienen 31 días, mientras que febrero sólo tiene 28 días cuando el año es no bisiesto. Aquí es importante hacer la aclaración de que en el diseño del problema se decidió no tomar en cuenta los años bisiestos, pues esto complicaría mucho el cálculo.

El profesor guio la instrucción con el propósito de que los alumnos detectaran este nuevo inconveniente, y para que intuyan un modo de solucionarlo. Note que el nuevo problema es similar al anterior, pues se tiene que el conjunto de posibilidades de las dos últimas casillas varía dependiendo del mes de nacimiento.

Esto significa que no es posible aplicar el Principio Fundamental del Conteo hasta este punto del procedimiento, por lo que se debe proponer una nueva solución. Para ello, basta observar que las últimas tres casillas refieren, en conjunto, a los 365 días que conforman un año no bisiesto.

Esto significa que, en conjunto, los caracteres referentes al día y mes de nacimiento pueden configurarse de 365 formas posibles, y cada configuración corresponde a un día específico del año.

De este modo, se pueden ‘fusionar’ las últimas tres casillas una única casilla que refiera al día de nacimiento de una persona. Como un año no bisiesto está compuesto por 365 días, hay 365 configuraciones válidas para esta nueva casilla. De este modo, las casillas quedan organizadas de la siguiente forma con sus respectivos valores de posibilidades:



Por el Principio Fundamental del Conteo, sólo falta multiplicar entre sí los valores correspondientes a cada una de las casillas, y para lo que se obtiene el siguiente resultado:

$$27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 10 \times 10 \times 365 = 19{,}397'596{,}500$$

El resultado anterior es el número de RFCs diferentes que pueden formarse bajo el modelo introducido durante la fase XI; último que comprende el error de instrucción descrito al comienzo de esta subsección. No obstante, el método aquí descrito es válido en su totalidad, y este puede aplicarse de forma análoga al caso del modelo correcto.

Bajo el modelo correcto, el segundo carácter del RFC de un ciudadano corresponde a la primera vocal interna de su apellido paterno, de modo que hay cinco posibilidades para asignar un valor a dicho carácter y que corresponden a las cinco vocales del alfabeto. Basta cambiar el número 27 de la segunda casilla por un 5, conservando el resto del procedimiento intacto. Así, sólo restaría resolver la siguiente operación:

$$27 \times 5 \times 27 \times 27 \times 10 \times 10 \times 365 = 3{,}592'147{,}500$$

Cabe mencionar que el número de posibilidades entre del modelo correcto y del erróneo es significativamente diferente.

Desarrollo de la instrucción de la fase XII

A continuación, se anexa la transcripción del desarrollo de la fase XII, última que comprende las participaciones de los estudiantes y del profesor durante la instrucción:

Diálogo XII:

(XII,1) PI: ¿Cuántos RFCs diferentes pueden emitirse?

(XII,2) A: Un millón [se trata de una estimación intuitiva]

(XII,3) A-1: Es lo que venía en tu documento [anexo B] de que teníamos 9 casillas, 6 casillas… [audio inaudible]

(XII,4) PI: ¿Cómo se calcula?

(XII,5) O-1: 27 por 27 por 27

(XII,6) PI: Ajá, vamos a hacerlo. Vamos a anotar casillas. ¿Qué es lo que se hacía en la lectura cuando queríamos calcular el número de algo?

(XII,7) Es: [Audio inaudible]

(XII,8) PI: Ajá… por ejemplo, cuando en la lectura queríamos calcular de cuántas formas podía ocurrir [un alumno interrumpe]

(XII,9) O-1: Por casillas

(XII,10) PI: Usábamos casillas ¿Verdad? Entonces, a ver ¿Cuántas casillas tienen? [replantea]. Quedamos que el RFC son los primeros 10 caracteres del CURP ¿Verdad?

(XII,11) A-1: Mjum [confirma]. Entonces son 10 posibles, bueno, 10 casillas.

(XII,12) PI: Entonces vamos a dibujar 10 casillas [Dibuja las casillas alineadas de izquierda a derecha]. La primera casilla: ¿De qué es?

(XII,13) A-2: La primera letra, es la letra del paterno… [Audio inaudible] Apellido paterno

(XII,14) PI: Sí ¿Todos?

(XII,15) A-2: Y se trata de las letras del abecedario ¿No?

(XII,16) O-1: 27 por 27 por 27 por 27.

(XII,17) PI: ¿La siguiente? [Luego responde a los estudiantes A-2 y O-1] Ok, vamos por partes.

(XII,18) A-2: Apellido materno.

(XII,19) PI: A ver, chequen ¿Qué es lo que dice…? [un alumno interrumpe]

(XII,20) A-2: Primera letra del apellido paterno

(XII,21) O-1: [Audio inaudible] ... las primeras dos letras.

(XII,22) PI: Las primeras dos letras.

(XII,23) A-2: Ah, arriba, el paterno ¿no?

(XII,24) A-2: Pero ahí dice sólo la primera letra.

(XII,25) PI: La primera letra del apellido paterno y la segunda letra del apellido paterno.

(XII,26) A-2: Ah, si ya entendí.

(XII,27) PI: Ok, ¿Qué sigue?

(XII,28) Es: La primera letra del apellido materno.

(XII,29) PI: Ok ¿Qué sigue?

(XII,30) Es: La primera letra del primer nombre.

(XII,31) PI: Muy bien ¿Qué sigue?

(XII,32) Es: Dos últimos dígitos del año de nacimiento.

(XII,33) A: Entonces es uno el primer dígito. ¿El penúltimo dígito del año de nacimiento?

(XII,34) PI: Es año y año ¿Verdad?

(XII,35) PI: ¿Qué sigue?

(XII,36) Es: Los dos dígitos del mes de nacimiento.

(XII,37) PI: Los dos dígitos del mes de nacimiento [confirma].

(XII,38) PI: Y por último ¿Qué sigue?

(XII,39) Es: El día de nacimiento.

(XII,40) PI: Ok, a ver ¿Qué es lo que queremos hacer? Calcular el número de RFCs que existen ¿Ok?

(XII,41) PI: A ver, primero, cuántas opciones existen para esta [la primera letra del apellido paterno].

(XII,42) Es: 27.

(XII,43) PI: Exacto porque hay 27 letras ¿Cuántas opciones hay para aquí? [la segunda letra del apellido].

(XII,44) Es: 27

(XII,45) PI: ¿Cuántas opciones hay aquí? [la primera letra del apellido materno].

(XII,46) Es: 27, igual.

(XII,47) A-1: 9 [Se adelantó al caso de la quinta casilla y además su observación fue errónea].

(XII,48) Es: [Corrigen a su compañera].

(XII,49) PI: La primera letra del nombre [aclara].

(XII,50) PI: ¿Y aquí? [el dígito izquierdo del año de nacimiento]

(XII,51) Es: 10.

(XII,52) PI: A ver ¿Quién dice que 10?

(XII,53) O-1: Contando el 0.

(XII,54) PI: ¿Quién dice que 9?

(XII,55) A-1: Ah, sí, es 10.

(XII,56) PI: Fíjense como aquí empiezan las complicaciones. A ver, aquí me dice que hay 10 opciones ¿Cuáles son esas 10 opciones?

(XII,57) Es: Del 0 al 9.

(XII,58) PI: Del 0 al 9. A ver, ¿Han visto que alguien…? [El profesor se confundió] Ah, sí, está bien.

(XII,59) A-1: Sí.

(XII,60) PI: Sí.

(XII,61) Es: [Ríen].

(XII,62) Es: [Los estudiantes comentan entre su año de nacimiento y cómo se refiere en su CURP].

(XII,63) O-1: Yo soy 00.

(XII,64) A: Pero no puede ser… [Una alumna duda].

(XII,65) PI: Los que nacieron, por ejemplo, en el 2000 [Un alumno interrumpe]

(XII,66) O-1: 00.

(XII,67) PI: Exacto.

(XII,68) A-1: Son los números de dígitos que pueden ser.

(XII,69) A-2: Ah, sí.

(XII,70) PI: Exacto, por ejemplo, aquí, lo que estamos diciendo es: los dos últimos dígitos del año de nacimiento, los que nacieron en el 2000… [Una alumna interrumpe].

(XII,71) A-1: Son 00.

(XII,72) PI: Ahora sí ¿Para el mes?

(XII,73) O-1: El 0 o el 1 [primer dígito del mes de nacimiento].

(XII,74) A-1: No, el 0 no.

(XII,75) O-1: Son dos opciones.

(XII,76) PI: Ok [Confirma].

(XII,77) Es: [Discuten entre ellos].

(XII,78) PI: Ok, A ver ¿Sí? ¿Todos? Que para el mes es 0 o 1 [primer dígito del mes de nacimiento].

(XII,79) A-1: Ah, no, son 12.

(XII,80) O-1: Sí porque son 12 meses.

(XII,81) Es: [Discuten entre ellos, audio es inaudible].

(XII,82) PI: A ver, se dan cuenta que ya están empezando a ver las complicaciones ¿Verdad?

(XII,83) Es: [Continúan discutiendo].

(XII,84) PI: A ver chicos, vamos por orden. [Pide a los alumnos guardar silencio para darle la palabra a la alumna A-1].

(XII,85) A-1: Yo digo que en esa casilla pueden ser 13 dígitos, porque son los 12 meses del año, que bueno, puede ser el… [otro alumno interrumpe]

(XII,86) Es: Sólo puede haber 12.

(XII,87) O-1: O sea, ella se refiere de los meses, pero lo que se está refiriendo esto es de los dígitos.

(XII,88) PI: Ok, a ver, vamos a escuchar lo que… [Una alumna interrumpe].

(XII,89) A-2: [El audio inaudible al inicio] Como es el primer dígito para contar un mes, sería 0 o 1, porque pues no hay mes 23, entonces no puedes poner un 2.

(XII,90) PI: ¿Sí se dan cuenta de eso? [Los estudiantes responden de afirmativamente] Aquí no puede ir ni un 2, ni un 3, ni un 4, etc. Solamente pueden ir el 0 o el 1. Entonces ¿Cuántas opciones hay ahí?

(XII,91) Es: 2.

(XII,92) PI: Y ¿En la siguiente casilla que es el segundo dígito del mes?

(XII,93) Es: [Discuten entre ellos, algunos señalan que varía del 0 al 9 y discuten si el segundo dígito del mes puede ser 0 o no].

(XII,94) PI: A ver, aquí: ¿No se dan cuenta que está pasando ahí algo raro?

(XII,95) Es: [Se detienen a pensar por un momento y continúan con la discusión].

(XII,96) O-1: Sí, son 10.

(XII,97) O-1: Es del 0 al 9.

(XII,98) PI: Ok, aquí dicen que son 10. Pero, a ver ¿No se dan cuenta que ahí está pasando algo raro?

(XII,99) A: Pues sí porque no hay un mes 20.

(XII,100) PI: A ver, recuerdan una parte de la lectura en donde decían que siempre que se va a aplicar el principio fundamental del conteo tienen que imaginarse cómo se vería el diagrama de árbol, aunque no sea posible dibujarlo.

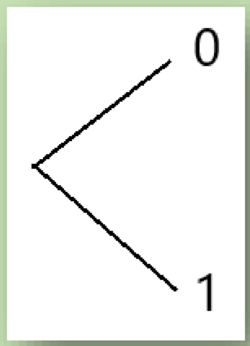
(XII,101) O-1: Sí.

(XII,102) A-1: Claro.

(XII,103) PI: A ver ¿Qué es lo que está pasando aquí? Fíjense… estamos aquí en las letras, y aquí no hay problema ¿Verdad? Por cada parte ramifica 27 veces [caracteres de los apellidos y el nombre] Igual aquí, por cada parte ramifica 10 veces [últimos dos dígitos del año de nacimiento]. Pero qué pasa cuando llegamos aquí [dígitos del mes de nacimiento]. Quedamos que aquí hay dos opciones de dígito ¿Cuáles son?

(XII,104) Es: El 0 y el 1.

(XII,105) PI: El 0 y el 1. [Dibuja el siguiente diagrama].



(XII,106) Es: Ah [asimilan].

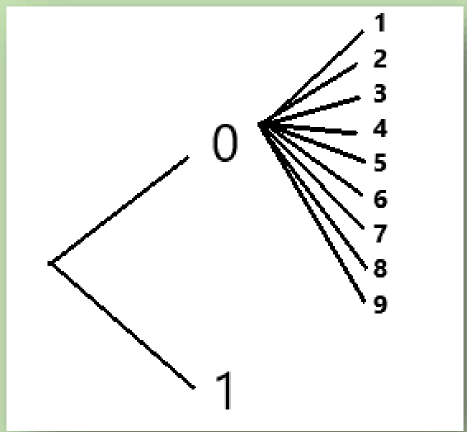
(XII,107) PI: Pero cuando estamos aquí en el 0 ¿Cuántas ramificaciones hay?

(XII,108) Es: 9.

(XII,109) PI: [Continúa con el dibujo del diagrama. Comete un error y los estudiantes corrigen].

(XII,110) Es: Pero el 0 no.

(XII,111) PI: [Corrige el error, continúa con el diagrama].



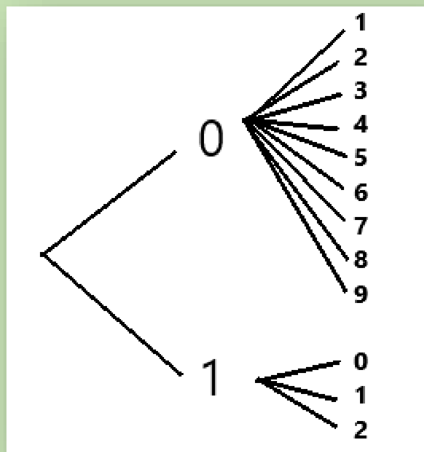
(XII,112) PI: Sería del 1, hasta el: ¿Cuál?

(XII,113) Es: El 9.

(XII,114) PI: Y ¿Cuándo estamos aquí en el 1?

(XII,115) Es: Nada más es el 0, 1 y 2

(XII,116) PI: [Concluye el diagrama de abajo].



(XII,117) PI: ¿Podemos aplicar el Principio Fundamental del Conteo?

(XII,118) Es: No.

(XII,119) PI: ¿Por qué no?

(XII,120) A: [Audio inaudible]. Porque debería tener el número de sus ramificaciones igual.

(XII,121) PI: Exactamente ¿Recuerdan esa parte? ¿No? Dijimos que, para poder aplicar el Principio Fundamental del Conteo, el árbol debe verse como que, en cada parte, ramifica el mismo número de veces. Pero aquí [la rama del 0] ya estamos viendo uno donde aquí ramifica 9 veces, y aquí [la rama del 1]: ¿Cuántas veces ramificó?

(XII,122) Es: 3.

(XII,123) PI: Entonces no podemos aplicar el principio fundamental del conteo de este modo ¿Qué hacemos?

(XII,124) O-1: OR [refiere a las ordenaciones con repetición].

(XII,125) A-1: No, es lo mismo.

(XII,126) PI: A ver ¿Qué se les ocurre?

(XII,127) O-2: Dos como opciones ¿Sería?

(XII,128) PI: ¿Cómo? Perdón.

(XII,129) O-2: Dos como opciones ¿Sería?

(XII,130) PI: Mmmm [Duda]. ¿Cómo que dos opciones?

(XII,131) O-2: De que si calculamos con el del cero [El alumno tuvo dificultades para explicar su idea, pero el profesor sí la comprendió].

(XII,132) PI: Ah [Reacciona con sorpresa]. Ya te entendí, ya te entendí. Esa puede ser una solución ¿Sí les quedó claro por dónde va el asunto?

(XII,133) Es: No.

(XII,134) PI: [El método propuesto por el alumno O-2 es válido, pero en el caso de este problema habría supuesto un mayor número de cálculos y no se contaba con suficiente tiempo para realizarlos].

(XII,135) PI: Ok, es la menos práctica, pero es una forma de resolverlo… Lo que su compañero propone es calcular cuántos RFCs hay que tengan aquí el dígito 0 y cuántos hay que tengan el dígito 1. Ok, ¿Sí se dan cuenta qué es lo que propone su compañero?

(XII,136) Es: Sí.

(XII,137) PI: ¿Funcionaría?

(XII,138) Es: Sí.

(XII,139) A-1: Pues sí funciona, pero…

(XII,140) PI: Pues de principio parece que sí ¿Verdad?

(XII,141) A: Sí, pero, no le entro [quizá algunos estudiantes que implicaría bastantes cálculos].

(XII,142) PI: Bueno, les platico que hay una forma un poco más sencilla. Pero lo que su compañero propuso es un método que a veces sí tiene que hacer, y que no hay de otra, y que es el método al que se tiene que recurrir…

(XII,143) PI: Pero, bueno, hay una forma todavía mucho más sencilla. Pero muy bien [reconocer la propuesta del alumno O-2 y enfatiza que es un método válido].

(XII,144) PI: A ver: ¿Qué otra cosa se les ocurre? [Los alumnos no responden, entonces el profesor plantea las preguntas de la planeación]. A ver, pregunta: ¿Cuántos meses hay?

(XII,145) Es: 12.

(XII,146) PI: Ok, Entre estas dos casillas [las del mes de nacimiento] ¿Cuántas opciones de números hay?

(XII,147) A: Mmmm, no entendí [algunos estudiantes no entendieron la pregunta y otros sí].

(XII,148) Es: 12.

(XII,149) PI: A ver: ¿Qué proponen hacer entonces con esas dos casillas?

(XII,150) O-3: Podría ser quitar una y hacerlo como si fueran las 12.

(XII,151) PI: Ok. Sí ¿Quedó claro lo que su compañero propone?

(XII,152) Es: No.

(XII,153) PI: Ok, lo que su compañero quiso decir, es que: ¿Por qué no… Lo que su compañero propone hacer es ¿Por qué no hacemos esto? [El profesor unió la línea de ambas casillas, dejando una única casilla para los dígitos del mes de nacimiento].

(XII,154) A: Ooooooh [Reacciona con sorpresa].

(XII,155) Es: [Ríen].

(XII,156) A: Woaoooh.

(XII,157) PI: A ver ¿Todos entienden por qué?

(XII,158) A: No.

(XII,159) A: [Otra alumna] Sí.

(XII,160) Es: [Discuten entre ellos].

(XII,161) PI: A ver. ¿Sí a todos les queda claro este paso?

(XII,162) Es: Sí.

(XII,163) PI: Allá [Se dirige a un grupo de estudiantes] ¿Sí queda claro que es lo que vamos a hacer?

(XII,164) Es: [Audio inaudible].

(XII,165) PI: ¿Y entonces cuántas opciones hay para el mes?

(XII,166) Es: 12.

(XII,167) A: Increíble.

(XII,168) PI: Ok, va la siguiente pregunta… ¿Cuántas opciones hay para aquí? [el día de nacimiento].

(XII,169) A: 31.

(XII,170) Es: [Discuten entre ellos y mencionan que hay meses de 30 días y otros de 31 días].

(XII,171) PI: A ver ¿Cuántos días hay? A ver, queremos ver de cuántas formas podemos llenar las últimas dos casillas.

(XII,172) Es: [Discuten entre ellos].

(XII,173) A-1: [Audio inaudible] …Porque obviamente hay meses que nada más tienen 30 y febrero que tiene 28…

(XII,174) PI: A ver ¿Escucharon lo que dijo su compañera?

(XII,175) Es: [Discuten si pueden generalizar que los meses tienen 30 días o bien 31 días, también cuestionan qué pasa con febrero que tiene 28 días].

(XII,176) A: Pero febrero entraría dentro de la multiplicación [Audio inaudible] … O sea, el 28… porque se tomaría como si fuera [reflexiona y retoma], yo digo que no habría tanto problema porque está dentro de [una alumna interrumpe].

(XII,177) A-1: No, porque te puede salir una combinación en la que te salga el mes de febrero con 31 días [Su argumento es correcto].

(XII,178) PI: A ver, todos ¿Se dan cuenta de cuál es el problema en esta parte?

(XII,179) O-1: Febrero.

(XII,180) PI: ¿Febrero cuántos días tiene?

(XII,181) Es: [Se escuchan varios comentarios, audio es inaudible].

(XII,182) O: [Audio inaudible] Entonces se podría poner como la ley de febrero, o sea, separarlo.

(XII,183) PI: No necesariamente. Ok, ya se están dando cuenta de que hay un problema ¿Verdad?

(XII,184) Es: Sí.

(XII,185) PI: A ver, quiero que me digan: ¿Cuál es el problema?

(XII,186) A-1: Que los meses tienen diferentes días.

(XII,187) PI: Los meses tienen diferentes días. ¿Verdad? Ese es, efectivamente, el problema. Vamos a olvidarnos de los años bisiestos. ¿Ok? Esos sí de plano vamos a dejarlos a un lado.

(XII,188) Es: Ah, ok.

(XII,189) PI: ¿Vale? Pensemos en un año, en años normales. Entonces febrero tiene 28 días. Pero también hay meses [un alumno interrumpe].

(XII,190) O-1: 30 y 31

(XII,191) PI: [Continúa] … que tienen 31 días, y hay meses que tienen [los alumnos completan la oración].

(XII,192) Es: 30.

(XII,193) PI: 30… Entonces: ¿Qué se les ocurre?

(XII,194) O-2: Los días del año.

(XII,195) PI: ¿Escucharon lo que dijo su compañero?

(XII,196) O-1: 365.

(XII,197) PI: Efectivamente, muy bien.

(XII,198) Es: [Discuten entre ellos].

(XII,199) O-1: Entonces ¿Sería quitar el mes? [Sugiere quitar las casillas del mes].

(XII,200) PI: [Los alumnos discuten entre sí, el profesor dirige la atención al argumento del alumno O-1]. Vean lo que dijo su compañero. Dilo más fuerte [Se dirige al alumno O-1].

(XII,201) O-1: Sería también quitar el mes, para poner los 365 días.

(XII,202) Es: Ooooooh.

(XII,203) A-2: Pero en la ley ya no cuenta hacer eso ¿No?

(XII,204) PI: No, obviamente no, pero: ¿Qué es lo que estamos queriendo hacer? Calcular cuántos RFCs diferentes pueden emitirse. Entonces: ¿Cómo les llamamos a los días del año? [Replantea] … A ver, aquí ¿Qué es lo que estamos poniendo? Sobre todo, tiene que ver con la fecha de nacimiento ¿No? Aquí es el año de nacimiento y aquí el día y mes de nacimiento ¿A estos días cómo le llamamos? [día y mes de nacimiento].

(XII,205) O: Cumpleaños.

(XII,206) PI: Efectivamente, es la fecha de cumpleaños. Entonces ¿Cuántas fechas de cumpleaños hay?

(XII,207) Es: 365.

(XII,208) PI: Finalmente: ¿Qué es lo que tenemos que hacer para calcular ya el número de RFCs?

(XII,209) Es: Multiplicamos.

Narración:

Para terminar, se resolvió la multiplicación $27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 10 \times 10 \times 365$ cuyo resultado es el número de RFCs diferentes que pueden emitirse bajo el modelo explicado en la fase XI. La calculadora arrojó el siguiente resultado:

$$1.93975965 \times 10^{10} = 19{,}397'596{,}500$$

Análisis del Diálogo XII

El problema de la fase XII permite profundizar algunos puntos relevantes sobre el texto del anexo B. Uno de ellos refiere a que no es válido aplicar el Principio Fundamental del Conteo sobre la configuración de 10 casillas asignadas a los caracteres del RFCs; pues el número de posibilidades para asignar determinados caracteres varía en función de los caracteres que le preceden. Por esa razón, el problema de la fase XII derivó en una serie de dificultades que los estudiantes se dieron a la tarea de resolver.

De ahora en adelante, al problema de los RFCs se le referirá como 'problema #5', esto último continuando con la enumeración definida en el capítulo anterior referente a la primera sesión. Aclarado lo anterior, observe que la resolución del problema #5 se desarrolló de la misma forma como fue planeado. No obstante, hay algunas observaciones que conviene enfatizar.

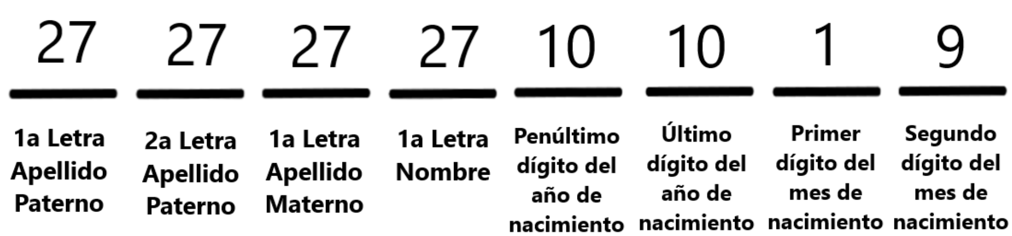
Los estudiantes no tuvieron dificultades para determinar el número de posibilidades asociadas a los primeros seis caracteres del RFC. Las dificultades surgieron al analizar el conjunto de posibilidades asociadas al 8º carácter, pues dicho conjunto varía dependiendo del valor asignado al 7º carácter.

Con la guía del profesor, los estudiantes analizaron el diagrama de árbol asociado a los caracteres 7º y 8º, y observaron las variaciones dentro de un mismo nivel de ramificación. Así, determinaron que no es posible aplicar el Principio Fundamental del Conteo sobre la configuración original; pues las posibilidades del segundo dígito del mes cambian entre $\{0, 1, 2\}$ y $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dependiendo de si el primer dígito es 1 o 0, respectivamente.

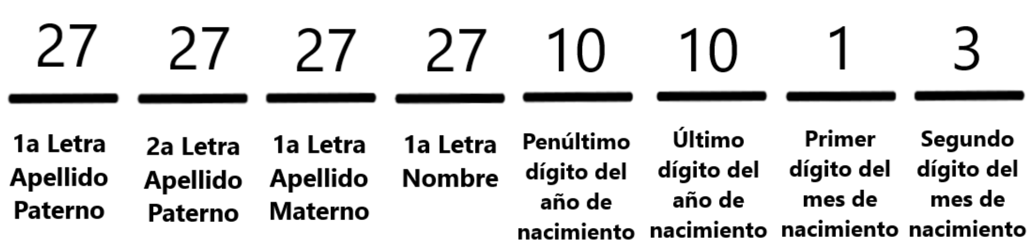
Bajo esta observación, el alumno O-2 propuso un método de solución válido, tal como se aprecia en los fragmentos (XII,126) a (XII,143). El método del alumno O-2 corresponde con la estrategia *fijar variables* y *descomponer en subproblemas* descrita por Roa, Batanero y Godino (2003). A su vez, se fundamenta en la estrategia aritmética *regla de la suma*, también referida por dichos autores.

El método propuesto por el alumno O-2 consiste en estimar por separado los RFCs que tienen 0 en su séptimo carácter, de aquellos que tienen 1 en ese mismo carácter. Esto deriva en dos subproblemas más sencillos cuyos resultados deben sumarse para obtener el resultado deseado (regla de la suma).

En el primer caso se calculan los RFCs que poseen el dígito ‘0’ en el séptimo carácter; de modo que hay nueve posibilidades para el octavo carácter. Así, el número de posibilidades para las primeras ocho casillas son:



En el segundo caso se calculan los RFCs que tienen el dígito ‘1’ en su séptimo carácter; de modo que hay tres posibilidades para el octavo carácter. Se escriben los siguientes números sobre las primeras ocho casillas:



En conjunto, los dos casos anteriores son ajenos y representarían la totalidad de los RFCs que pueden emitirse. Sin embargo, este método se complica al pasar a las casillas que refieren al día de nacimiento, pues hay meses con 30 días, otros con 31 días, y febrero que sólo tiene 28 días. Bajo este método, los dos casos antes descritos tendrían que subdividirse en tres casos nuevos, dando un total de seis casos a resolver. Lo anterior aumenta considerablemente la cantidad de casos que se deben analizar y resolver.

El profesor, consciente de las complicaciones que surgirían de resolver el problema mediante el método propuesto por alumno O-2, sugirió buscar un método de solución más simple; no sin antes hacer énfasis sobre la validez del método, reconociendo la aportación del alumno. Como se verá en la siguiente sección, algunos estudiantes resolvieron el segundo problema de evaluación (anexo J) con un método equivalente que propuso el alumno O-2.

Fue el alumno O-3 quien intuyo el método de solución más simple, tal como se observa en los fragmentos (XII,146) a (XII,150). Cuando el profesor explicó el método del alumno O-3, los demás estudiantes reaccionaron con sorpresa. Dichas reacciones confirmaron su comprensión del método.

La solución que propuesta por el alumno O-3 es la que se consideró en la planeación, y refiere a combinar las dos casillas referentes al mes de nacimiento en una única casilla. Este es el razonamiento que permite llegar a la solución definitiva del problema; aunque no sin antes toparse con una segunda dificultad que se resuelve análoga a la primera.

Esta segunda dificultad refiere a las casillas 9ª y 10ª en relación con el número de días que tienen los doce meses del del año. Los estudiantes observaron que el número de posibilidades de dichas casillas varía debido a que hay meses con 30 días, otros con 31 días, y también febrero que posee 28 días en un año no normal (no bisiesto).

Destacan los fragmentos (XII,176) y (XII,177), donde dos alumnas discuten sobre si es válido generalizar que los meses poseen un mismo número de días. La primera de ellas mencionó que, si se generaliza a meses con 31 días, se contarían todos los días del año. En desacuerdo, la alumna A-1 señala que al hacer eso también se contarían días que no existen en el calendario (como sería el caso del 31 de febrero). El argumento de la alumna A-1 es correcto.

Finalmente, los alumnos O-2 y O-1 intuyeron que el método propuesto por el estudiante O-3 podía ser generalizado y aplicado para resolver la nueva dificultad, tal y como se observa en los fragmentos (XII,193) a (XII,202). Esto es evidencia de que los alumnos adquirieron un nuevo tipo de intuición durante el planteamiento de la primera dificultad que supuso este problema.

5.3 IMPLEMENTACIÓN DEL SEGUNDO PROBLEMA DE EVALUACIÓN (FASE XIII)

Una vez concluida la fase XII se procedió a la evaluación de los aprendizajes. Para esto, se entregó a los estudiantes dos problemas impresos (anexos J y K); acto seguido se les solicitó resolver los problemas y redactar una explicación detallada de su procedimiento solución. En total, los estudiantes contaron con un tiempo de 40 minutos para resolver ambos problemas.

En lo que resta del trabajo se referirá a los problemas de los anexos J y K como segundo y tercer problema de evaluación, respectivamente. A continuación, se anexa el segundo problema de evaluación, último que también puede consultarse en el anexo J tal y como les fue entregado a los estudiantes.

> **Problema #1:** El menú de una cafetería te da las siguientes opciones para armar tu *Paquete Desayuno*: café americano o café con leche, jugo o fruta, un platillo a elegir del menú y una pieza de pan de dulce. Si eliges jugo, puedes elegir entre jugo de naranja, de toronja o de zanahoria. Si eliges fruta, te dan a elegir entre una rebanada de sandía, una de melón, o una de piña. Para el platillo, puedes elegir entre las 15 opciones del menú. Por su parte, para el pan dulce, puedes elegir entre una dona de chocolate, una concha o una mantecada **¿De cuántas formas puedes armar tu paquete desayuno?**

El problema fue diseñado para evaluar los aprendizajes desarrollados durante la fase XII de la instrucción. Consiste en un problema de conteo que no puede ser resuelto con una aplicación inmediata del Principio Fundamental del Conteo; por lo que debe ser analizado para detectar las dificultades y, finalmente, intuir y aplicar un método de solución alternativo.

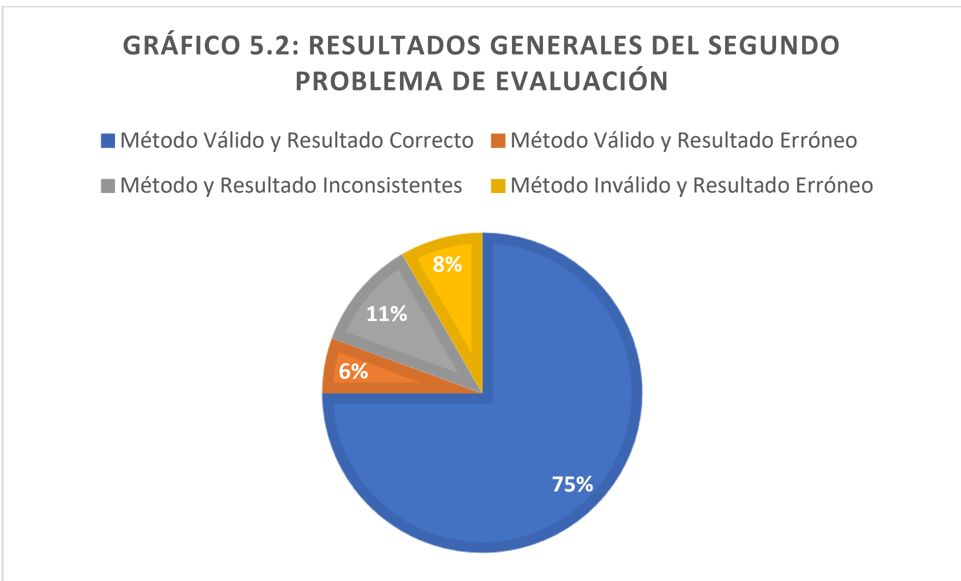
5.3.1 Resultados generales del segundo problema de evaluación

Como ya se mencionó, el segundo problema de evaluación no puede ser resuelto con una aplicación inmediata del Principio Fundamental del Conteo. La dificultad del problema radica en que este comprende un evento cuyo conjunto de posibilidades (o espacio muestral) varía dependiendo de la elección realizada en el evento previo; que es la posibilidad de elegir entre jugo o fruta.

Los estudiantes se dieron a la tarea de leer el problema y, posteriormente, intuir y aplicar un método de solución válido. También se les solicitó redactar una explicación detallada de su procedimiento. Cabe señalar que algunos estudiantes trabajaron esta actividad de forma colaborativa con sus compañeros adyacentes. Sin embargo, cada estudiante entregó su propio producto con el desarrollo del método de solución aplicado. La siguiente tabla presenta los resultados generales obtenidos en la evaluación:

RESULTADOS GENERALES	No. de Estudiantes	Porcentaje de Estudiantes
Método Válido y Resultado Correcto	27	75%
Método Válido y Resultado Erróneo	2	6%
Método y Resultado Inconsistentes	4	11%
Método Inválido y Resultado Erróneo	3	8%

TABLA 5.1: Resultados Generales del Segundo Problema de Evaluación



Como se observa en la tabla y en el gráfico anterior, el 75% de los estudiantes llegó a la solución correcta del problema bajo la aplicación de un método de solución válido.

Adicionalmente se observó que el 11% de los estudiantes escribieron la solución correcta del problema, pero esta es inconsistente con el método de solución que redactaron. Esto último sugiere que dichos estudiantes copiaron la respuesta correcta sin haber llegado a ella, o bien, compararon su método y resultado con el de sus compañeros adyacentes y no dispusieron de tiempo suficiente para realizar las correcciones pertinentes.

También se detectó el caso de dos estudiantes (el 6% de los evaluados) quienes, a pesar de redactar un método de solución válido, concluyeron un resultado erróneo; probablemente debido a alguna distracción durante la redacción del método. El procedimiento redactado por dichos estudiantes será revisado en una subsección posterior.

Finalmente, sólo el 8% de los estudiantes concluyó un resultado erróneo debido a la aplicación de un método de solución inválido. Conviene adelantar que hay semejanzas entre los métodos de aquellos estudiantes quienes siguieron un procedimiento inválido y aquellos quienes presentaron un resultado inconsistente con el método redactado.

5.3.2 Métodos de solución válidos para el segundo problema de evaluación

Aquellos estudiantes quienes resolvieron el problema mediante la aplicación de un método de solución válido redactaron alguno de los siguientes procedimientos:

Método de Solución 2°PE-A

Este método es el análogo al método aplicado durante la instrucción de la fase XII, última donde se calculó el número posible de RFCs que pueden emitirse. Para el caso del segundo problema de evaluación, primero se identifican cinco eventos: *i*) elección de café americano o café con leche, *ii*) elección de jugo o fruta, *iii*) elección del tipo de jugo, o bien, del tipo fruta según la elección previa, *iv*) elección de un platillo del menú y *v*) elección de algún tipo de pan.

La dificultad está en el tercer evento, pues el conjunto de posibilidades varía dependiendo de la elección realizada (jugo o fruta) durante en el segundo evento. Una forma de superar la dificultad es reinterpretar los eventos segundo y tercero como un único evento. En el contexto del problema esto significa que el comensal sólo puede elegir un único elemento entre el conjunto de opciones de jugo y de fruta.

Una vez que se hayan combinado ambos los eventos, los eventos quedarán configurados de la siguiente forma: *i*) se elige el tipo de café (hay 3 opciones), *ii*) se elige algún tipo de jugo o de fruta (se tienen 6 opciones en total), *iii*) luego se selecciona algún platillo del menú (hay 15 platillos diferentes) y *iv*) se escoge algún tipo de pan dulce (3 opciones de pan). Con base en lo anterior se dibujan cuatro casillas:

2	6	15	3
Tipo de Café	Algún tipo de Jugo o Fruta	Un platillo del Menú	Tipo de Pan

Finalmente, se aplica el Principio Fundamental del Conteo para calcular el número de posibilidades para armar el paquete desayuno:

$$2 \times 6 \times 15 \times 3 = 540 \text{ posibilidades}$$

A continuación, se anexa el procedimiento redactado por la alumna A-1, quien aplicó este método de solución:

2 × 6 × 15 × 3 = 540 formas

Conté todas las posibles opciones primero. Luego las organicé en las casillas de acuerdo a las opciones para cada una.
Por ejemplo, para el primer "conjunto" del que debemos elegir (el café) y sólo hay 2 opciones, del segundo caso nos dan a elegir entre dos opciones y estas a su vez tienen otras opciones a elegir, pero al final, podemos elegir sólo una de todas ellas, así que, yo opté por juntar todos los tipos de jugos (3) y los tipos de fruta (3) dando como resultado 6 posibles opciones. Y ya en los otros casos sólo conté.
Al multiplicar todas las casillas, obtuve el resultado de 540 posibilidades.

Nótese que la alumna explicó que la elección entre jugo o fruta deriva en conjuntos de posibilidades diferentes. Luego argumentó que, en conjunto, sólo se puede elegir una opción entre el total de posibilidades derivadas de ambos casos.

Método de Solución 2°PE-B

Este método emplea las estrategias de *fijar variables* y *descomponer en subproblemas* referida por Roa, Batanero y Godino (2003). Bajo este método, se fija la elección del segundo evento como jugo o fruta, obteniendo así dos casos más sencillos y ajenos entre sí que deberán analizarse de manera individual. De este modo, se cuentan las posibilidades que resultan de dichos casos, y al final se calcula la suma de los dos resultados obtenidos. Esto último es posible debido a que ambos conjuntos de posibilidades son ajenos entre sí, y ambos constituyen el total de las posibilidades que se desean contar.

En el primer caso se supone la elección de jugo; así que se identifican un total de cuatro eventos que son: *i*) elección del tipo de café (2 opciones), *ii*) se elige el tipo de jugo (hay 3 opciones de jugo), *iii*) se decide por alguno de los platillos del menú (15 posibilidades) y *iv*) se elige alguna pieza de pan (3 opciones). Al multiplicar entre sí el número de posibilidades de cada evento se obtiene el número de posibilidades para este primer caso:

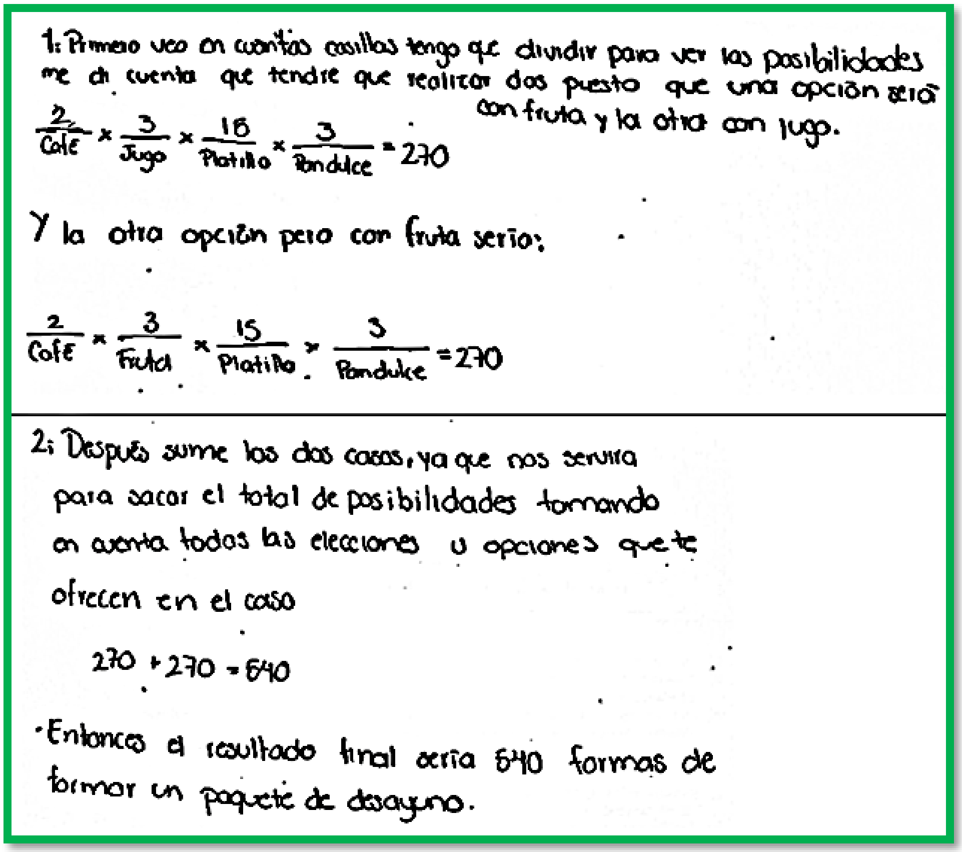
$$2 \times 3 \times 15 \times 3 = 270 \text{ posibilidades}$$

El segundo caso corresponde a la opción de elegir algún tipo de fruta, y de lo que también se determinan cuatro eventos: *i*) elección del tipo de café (2 opciones), *ii*) se elige el tipo de fruta (igual que en el caso anterior hay 3 opciones), *iii*) se decide por alguno de los platillos del menú (hay 15 posibilidades) y *iv*) se elige alguna pieza de pan (3 opciones). Luego se aplica el Principio Fundamental del Conteo para determinar el número de posibilidades de este este caso particular:

$$2 \times 3 \times 15 \times 3 = 270 \text{ posibilidades}$$

Por último, se suman los resultados obtenidos en ambos casos: $270 + 270 = 540$, de lo que se concluye que hay 540 posibilidades para armar el paquete desayuno.

A continuación, se anexa el procedimiento redactado por una alumna quien aplicó este método de solución:


1: Primero veo en cuantas casillas tengo que dividir para ver las posibilidades me di cuenta que tendre que realizar dos puesto que una opción seria con fruta y la otra con jugo.

$\frac{2}{\text{Cafe}} \times \frac{3}{\text{Jugo}} \times \frac{15}{\text{Platillo}} \times \frac{3}{\text{Pandulce}} = 270$

Y la otra opción pero con fruta seria:

$\frac{2}{\text{Cafe}} \times \frac{3}{\text{Fruta}} \times \frac{15}{\text{Platillo}} \times \frac{3}{\text{Pandulce}} = 270$

2: Después sume los dos casos, ya que nos servira para sacar el total de posibilidades tomando en cuenta todos las elecciones u opciones que te ofrecen en el caso

$270 + 270 = 540$

- Entonces el resultado final seria 540 formas de formar un paquete de desayuno.

Como se observa en la imagen, la alumna calculó por separado el número de formas como se puede armar el paquete en los casos de elegir jugo o fruta. Al final sólo sumó el número de posibilidades obtenidas de ambos casos.

Método de Solución 2°PE-C

Este método es semejante al método 2°PE-B, pero difiere en que se fijan las variables del primer y segundo evento; es decir, se fija la elección del tipo de café y de jugo o fruta. De ello se desprenden cuatro subproblemas.

En el primero se supone la elección de café americano y de algún tipo de fruta, por lo que se identifican sólo tres eventos: *i*) se elige un tipo de fruta (tres opciones), *ii*) se decide por uno de los platillos del menú (15 opciones) y *iii*) se elige algún tipo de pan (tres opciones). Luego se aplica el Principio Fundamental del Conteo para calcular el número de posibilidades de este caso:

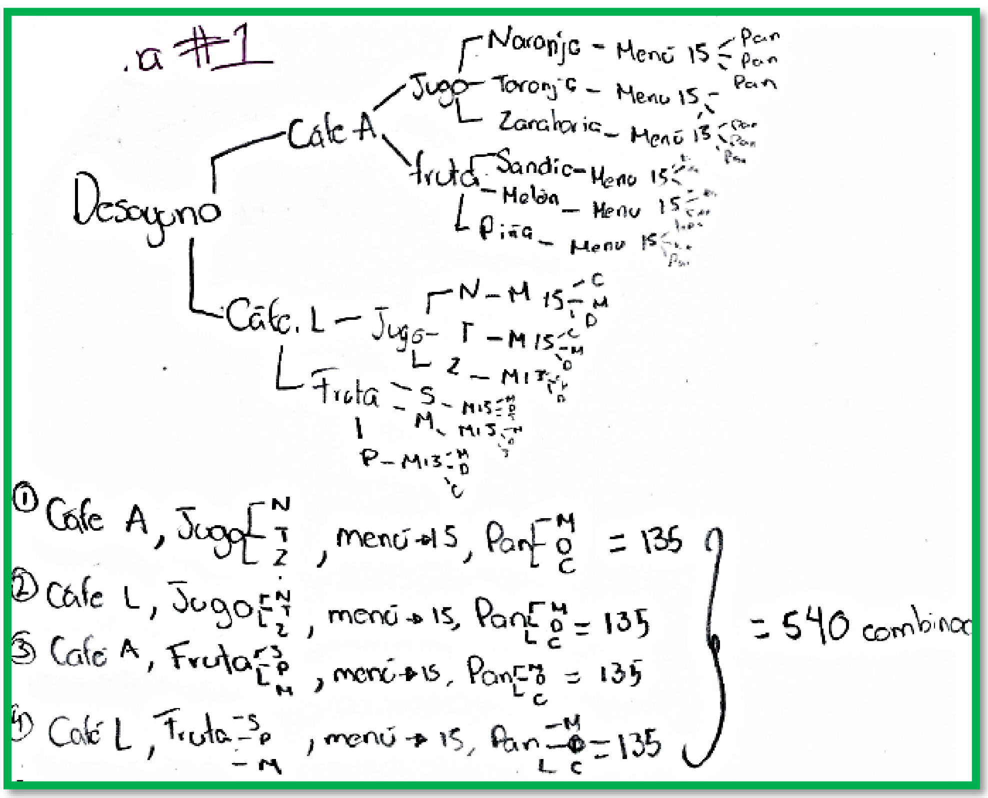
$$3 \times 15 \times 3 = 135 \text{ posibilidades}$$

El segundo caso resulta de elegir café americano, pero seguido por algún tipo de jugo. También se identifican tres eventos: *i*) se elige el tipo de jugo (tres opciones), *ii*) se decide por uno de los platillos del menú (15 opciones) y *iii*) se elige algún tipo de pan (tres opciones). Nuevamente se aplica el Principio Fundamental del Conteo para determinar el número de posibilidades de este subproblema particular:

$$3 \times 15 \times 3 = 135 \text{ posibilidades}$$

Los casos tres y cuatro son análogos a los dos anteriores, estos corresponden a la elección de café con leche en lugar de café americano. En cada caso se obtienen 135 posibilidades. Finalmente, basta sumar las posibilidades de los cuatro casos: $135 + 135 + 135 + 135 = 540$, para concluir que hay 540 formas distintas de armar el paquete desayuno.

A continuación, se anexa el procedimiento redactado por una alumna quien aplicó este método de solución:

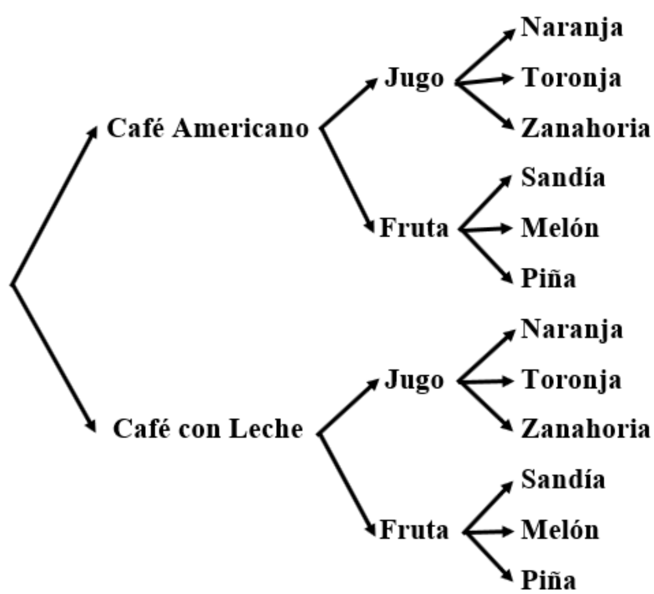


Nótese que la alumna dibujó un diagrama de árbol el cual le permitió identificar los cuatro casos antes descritos.

Aunque no es práctico dibujar un diagrama de árbol en aquellas situaciones cuando el conjunto de posibilidades es intuitivamente grande, sí es posible dibujar una representación parcial del diagrama de árbol, facilitando así el análisis del problema. Es evidente que la alumna se apoyó del diagrama para definir los cuatro casos particulares que integran su método de solución.

Método de Solución 2°PE-D

Este método puede validarse de varias formas, y requiere la aplicación del Principio Fundamental del Conteo sobre los cinco eventos tal y como son planteados en la redacción del problema. Los eventos son: *i*) elección del tipo de café (2 opciones), *ii*) se decide entre jugo o fruta (2 opciones), *iii*) según la elección anterior se elige entre algún tipo de jugo o de fruta (en ambos casos hay 3 opciones), *iv*) se decide por alguno de los platillos del menú (hay 15 opciones de platillo) y, por último, *v*) se elige algún tipo de pan (3 opciones). Véase el siguiente diagrama:

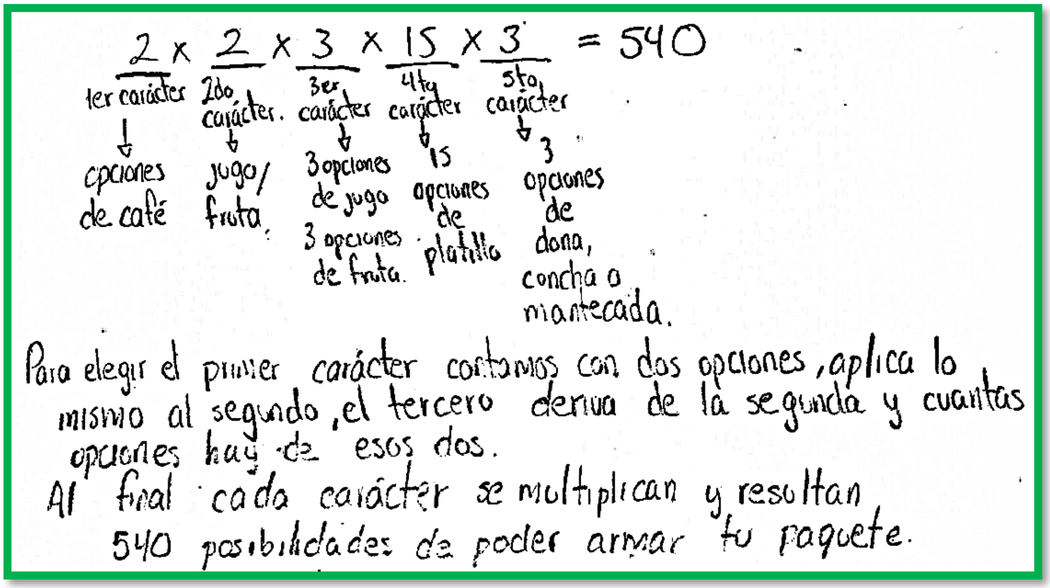


El conjunto de posibilidades del tercer evento (tipo de jugo o tipo de fruta) varía en función de la elección realizada durante el segundo evento (jugo o fruta). Sin embargo, en ambos casos se tienen tres posibilidades; es decir, el número de posibilidades es constante a pesar de que estas varían entre los casos de elegir jugo o fruta. Dado que el número de ramificaciones se mantiene constante dentro de un mismo nivel de ramificación, es válido aplicar el Principio Fundamental del Conteo de la siguiente forma:

$$2 \times 2 \times 3 \times 15 \times 3 = 450$$

De este modo, se concluye que hay 450 formas de armar el paquete desayuno. No hay forma de saber si los estudiantes quienes aplicaron este método de solución lograron abstraer el diagrama de árbol anterior. A pesar de ello, la evidencia sugiere que dichos estudiantes sí razonaron que los casos de elegir jugo o fruta son análogos entre sí; es decir, que ambos casos derivan en el mismo número de posibilidades.

A continuación, se anexa el procedimiento redactado por una alumna quien aplicó este método de solución:


$2 \times 2 \times 3 \times 15 \times 3 = 540$

1er carácter → opciones de café

2do carácter → jugo/fruta

3er carácter → 3 opciones de jugo, 3 opciones de fruta.

4to carácter → 15 opciones de platillo

5to carácter → 3 opciones de dona, concha o mantecada.

Para elegir el primer carácter contamos con dos opciones, aplica lo mismo al segundo, el tercero deriva de la segunda y cuantas opciones hay de esos dos.
Al final cada carácter se multiplican y resultan 540 posibilidades de poder armar tu paquete.

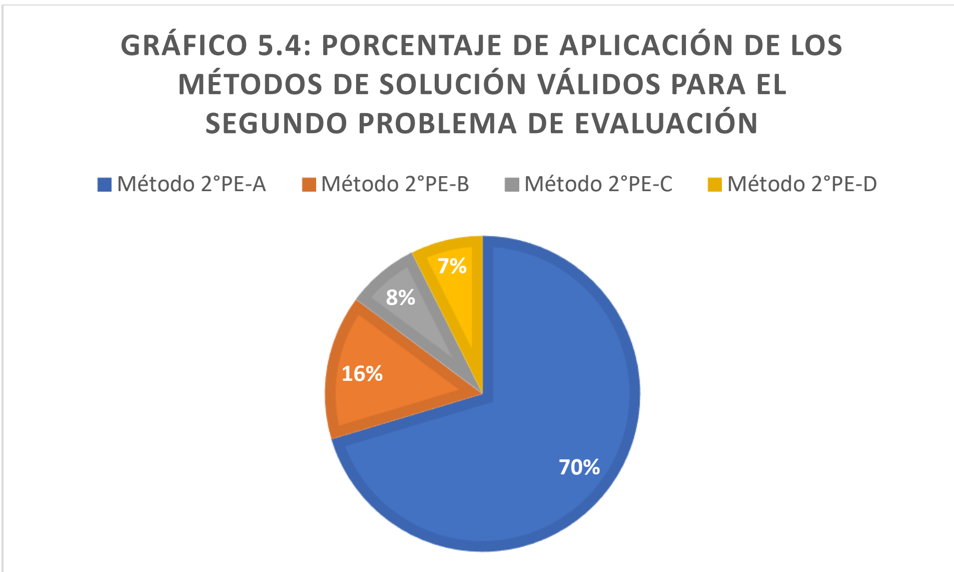
Nótese que la alumna interpretó el segundo evento como la elección de jugo o fruta. Luego asocia el tercer evento a la elección de algún tipo de jugo o fruta, y escribe que hay tres posibilidades de elección para cualquiera de los casos. Es evidente que la alumna está consciente de que el número de posibilidades del tercer evento se mantiene constante entre ambos casos, esto a pesar de que su conjunto de posibilidades sí varía según la elección del evento anterior. Lamentablemente no hay una explicación más detallada que permita dar un seguimiento más profundo al proceso de razonamiento de la alumna.

Cuantificación de los métodos de solución empleados

Los cuatro métodos anteriores constituyen la totalidad de los procedimientos válidos redactados por aquellos estudiantes que llegaron a la solución correcta del problema. La siguiente tabla presenta la cuantificación del número de alumnos que empleo cada uno de los métodos:

	Número de Alumnos	Porcentaje de Alumnos
Método 2°PE-A	19	70%
Método 2°PE-B	4	16%
Método 2°PE-C	2	7%
Método 2°PE-D	2	7%

TABLA 5.3: Métodos de Solución Válidos para el Segundo Problema de Evaluación



Como se observa en el gráfico, el método 2°PE-A fue el más empleado entre los estudiantes, con un porcentaje de aplicación del 70%. Se debe tener presente que este porcentaje refiere sólo al caso de aquellos estudiantes quienes obtuvieron la solución correcta del problema mediante la aplicación del correspondiente. El método 2ºPE-A es el análogo al que se aplicó durante la fase XII para realizar el conteo de los RFCs posibles; este método implica reinterpretar dos o más eventos dependientes como un único evento independiente de los demás.

Por otra parte, los métodos 2°PE-B y 2°PE-C en conjunto tuvieron una aplicación del 23%. Ambos métodos refieren a la estrategia de fijar variables y descomponer en subproblemas más simples; estrategia que es referida por Roa, Batanero y Godino (2003). Ambos procedimientos son equivalentes al método propuesto por el alumno O-2 durante la fase XII de la instrucción (véase los fragmentos 127 a 138 del diálogo XII).

Sólo un 7% de los estudiantes resolvieron el problema por el método 2°PE-D. Bajo este método se aplica el principio fundamental del conteo sobre un evento cuyo conjunto de posibilidades varía en función de un evento predecesor. En este caso la aplicación del principio es válida porque el número de posibilidades de dicho evento se mantiene constante, aun cuando su conjunto de posibilidades varíe de un caso al otro.

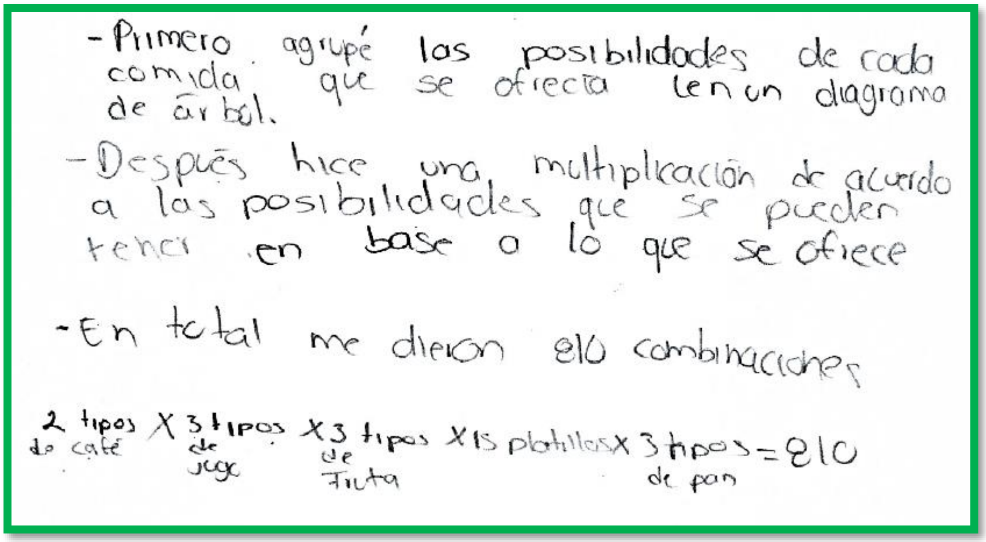
5.3.3 Errores asociados al segundo problema de evaluación

En esta subsección se analizarán y describirán los procedimientos y errores redactados por los nueve estudiantes quienes obtuvieron una solución diferente de la esperada; también se revisarán los errores de aquellos estudiantes que sí redactaron la solución correcta, pero que su procedimiento es inconsistente con la respuesta redactada.

Aplicación de un Método Inválido

Este es el caso de tres alumnos quienes intuyeron y aplicaron algún método de solución inválido bajo las especificaciones del problema. Los tres alumnos aplicaron métodos diferentes que serán referidos como métodos inválidos #1, #2 y #3.

El método inválido #1 consiste en aplicar el Principio Fundamental del Conteo bajo la siguiente configuración de eventos: *i*) elección del tipo de café (2 opciones), *ii*) se elige un tipo de jugo (hay 3 opciones), *iii*) se elige algún tipo de fruta (3 opciones), *iv*) se decide entre un platillo del menú (15 opciones) y *v*) se decide por un tipo de pan (3 opciones). Al aplicar el Principio Fundamental del Conteo se deduce que hay 810 formas de armar el paquete, resultado que es erróneo. A continuación, se anexa el procedimiento redactado por la alumna quien aplicó este método de solución inválido:

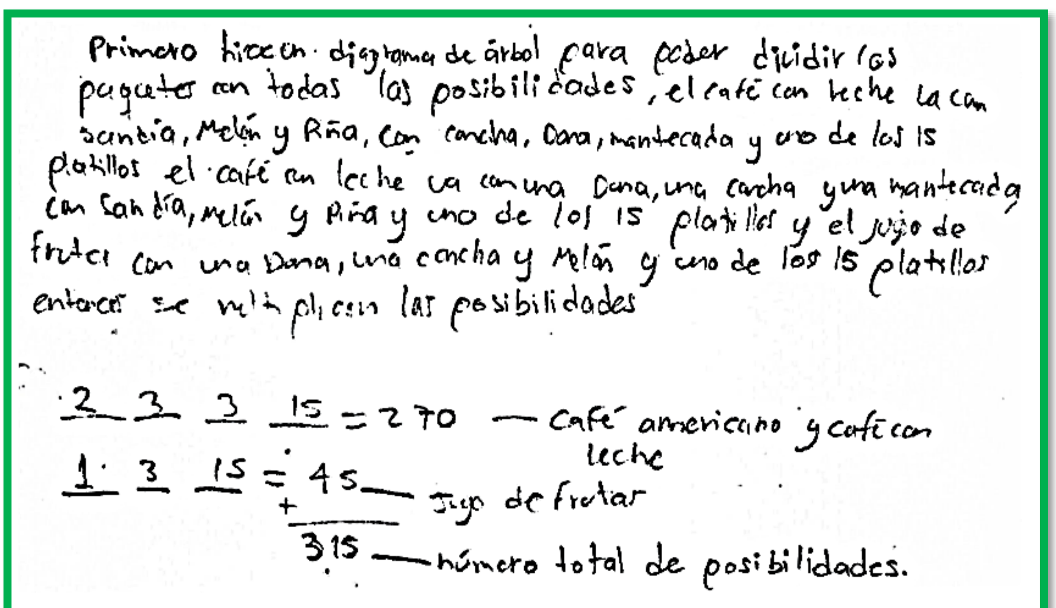


- Primero agrupé las posibilidades de cada comida que se ofrecía en un diagrama de árbol.
- Después hice una multiplicación de acuerdo a las posibilidades que se pueden tener en base a lo que se ofrece
- En total me dieron 810 combinaciones

2 tipos de café X 3 tipos de jugo X 3 tipos de fruta X 15 platillos X 3 tipos de pan = 810

El método anterior habría sido válido en el supuesto caso de que el paquete permitiera elegir ambas cosas, algún tipo de jugo y aparte algún tipo de fruta. Existe la posibilidad de que la alumna haya malinterpretado el problema y que el error sea de comprensión.

Por otra parte, el método inválido #2 comprende una parte válida que refiere a calcular el número de posibilidades para armar el paquete en el caso de elegir fruta (tal y como se lleva a cabo en el método de solución 2°PE-B). Sin embargo, en el caso de elegir jugo, se aplica una operación incorrecta para determinar el número de posibilidades. A continuación, se anexa el procedimiento redactado:



Primero hice un diagrama de árbol para poder dividir los paquetes con todas las posibilidades, el café con leche va con sandía, Melón y Piña, con concha, Dona, mantecada y uno de los 15 platillos el café con leche va con una Dona, una concha y una mantecada con Sandía, melón y Piña y uno de los 15 platillos y el jugo de frutas con una Dona, una concha y Melón y uno de los 15 platillos entonces se multiplican las posibilidades

2 3 3 15 = 270 — Café americano y café con leche

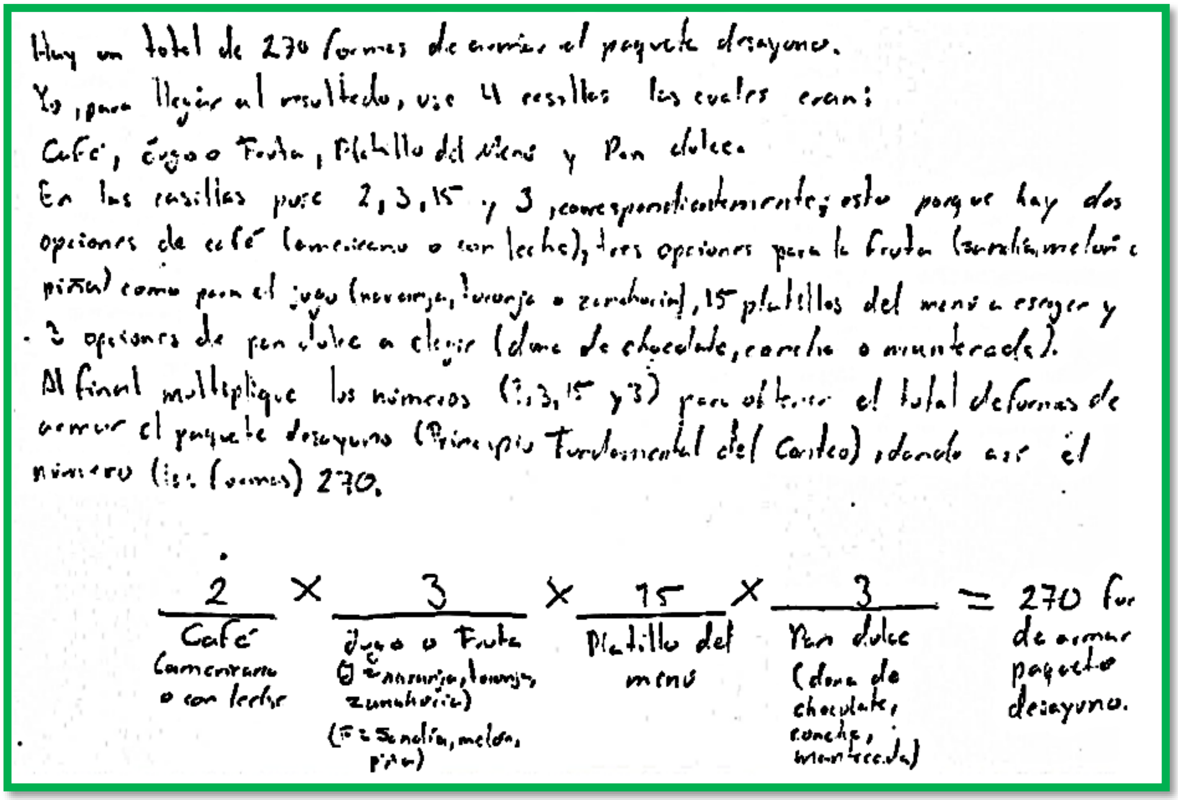
1 3 15 = 45 — Jugo de frutas

\+

315 — número total de posibilidades.

Observe que la alumna calculó las posibilidades en el caso de elegir jugo como un caso ajeno al de elegir un tipo de café; es decir, la alumna interpretó que no se puede elegir café si eligió algún tipo de jugo. Este método inválido refiere a un error de comprensión del problema.

Finalmente, el método inválido #3 consiste en aplicar el método de solución 2°PE-D bajo el error de omitir uno de los eventos. En el método 2°PE-D el segundo evento refiere a la elección de jugo o fruta, mientras que el tercero varía en su conjunto de posibilidades: tres opciones de jugo y tres opciones de fruta según la elección del evento predecesor. En el método inválido #3 se omite el segundo evento. A continuación, se anexa el procedimiento redactado por la alumna quien aplicó este método erróneo:


Hay un total de 270 formas de armar el paquete desayuno.
Yo, para llegar al resultado, use 4 casillas las cuales eran:
Café, jugo o Fruta, Platillo del Menú y Pan dulce.
En las casillas puse 2, 3, 15 y 3, correspondientemente; esto porque hay dos opciones de café (americano o con leche), tres opciones para la fruta (sandía, melón o piña) como para el jugo (naranja, toronja o zanahoria), 15 platillos del menú a escoger y 3 opciones de pan dulce a elegir (dona de chocolate, concha o mantecada).
Al final multipliqué los números (2, 3, 15 y 3) para obtener el total de formas de armar el paquete desayuno (Principio Fundamental del Conteo), dando así el número (i.e. formas) 270.

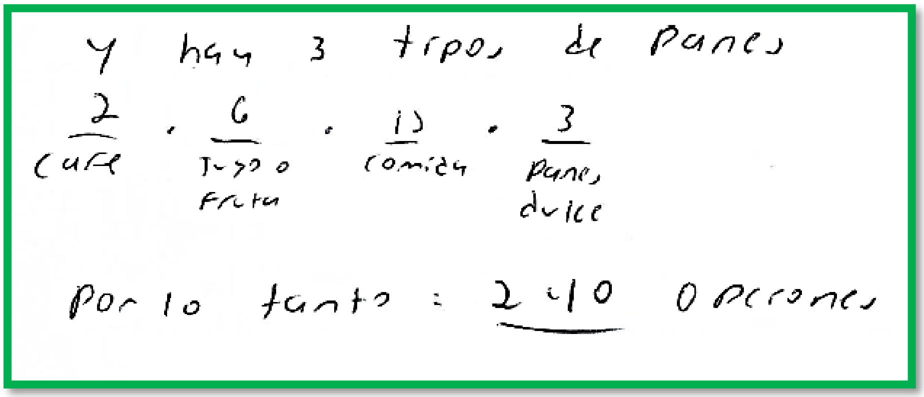
$\underset{\text{Café (americano o con leche)}}{\underline{2}} \times \underset{\text{Jugo o Fruta}}{\underline{3}} \times \underset{\text{Platillo del menú}}{\underline{15}} \times \underset{\text{Pan dulce}}{\underline{3}} = 270$ for de armar paquete desayuno.

(J = naranja, toronja, zanahoria) (F = sandía, melón, piña) (dona de chocolate, concha, mantecada)

Método Válido con Resultado Erróneo

Este es el caso de dos estudiantes quienes sí aplicaron alguno de los métodos de solución válidos; pero que obtuvieron un resultado incorrecto debido a un error de cálculo, o bien, por un mal conteo de las posibilidades individuales de los eventos que conforman el problema.

El primer caso refiere al de un alumno quien aplicó el método de solución 2°PE-A de forma correcta; pero que pese a ello escribió una respuesta incorrecta del problema:

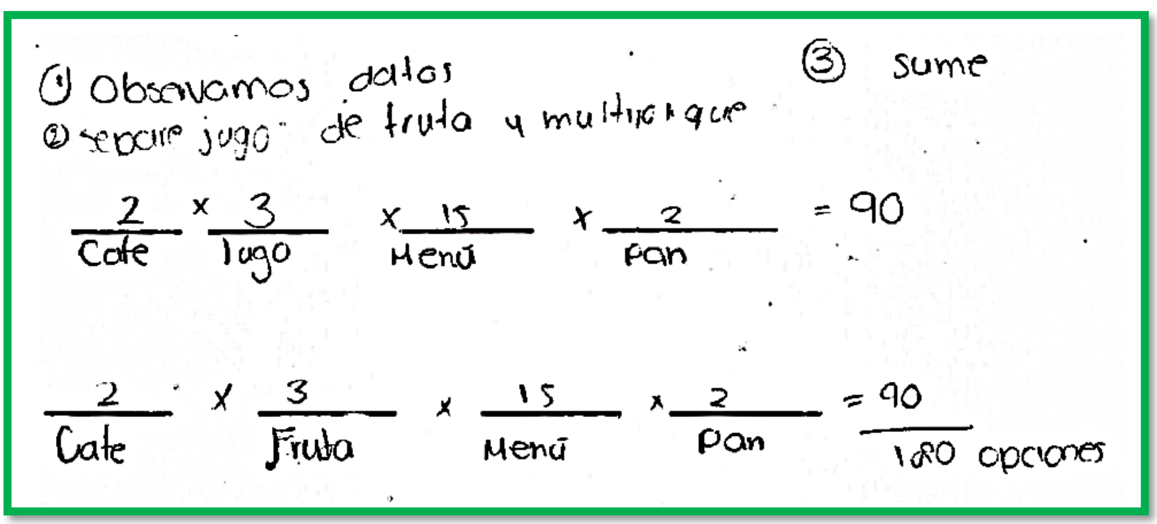

y hay 3 tipos de panes

$\frac{2}{\text{Cafe}} \cdot \frac{6}{\text{Jugo o Fruta}} \cdot \frac{15}{\text{Comida}} \cdot \frac{3}{\text{Panes dulce}}$

Por lo tanto: 240 opciones

La respuesta correcta es 540 posibilidades, resultado que se obtendría al resolver la operación redactada el alumno. Dado que su respuesta difiere por un único dígito, es probable que el error se deba a una mala transcripción del resultado calculado.

El otro caso refiere al de una alumna quien aplicó el método de solución 2°PE-B, pero que se equivocó al enumerar las posibilidades del último evento; es decir, contó mal las opciones sobre el tipo de pan a elegir. Además, olvidó multiplicar los valores que corresponden a dicho evento. A continuación, se anexa el procedimiento redactado por la alumna:


① Observamos datos ③ sume

② separe jugo de fruta y multiplique

$\frac{2}{\text{Cafe}} \times \frac{3}{\text{Jugo}} \times \frac{15}{\text{Menú}} \times \frac{2}{\text{Pan}} = 90$

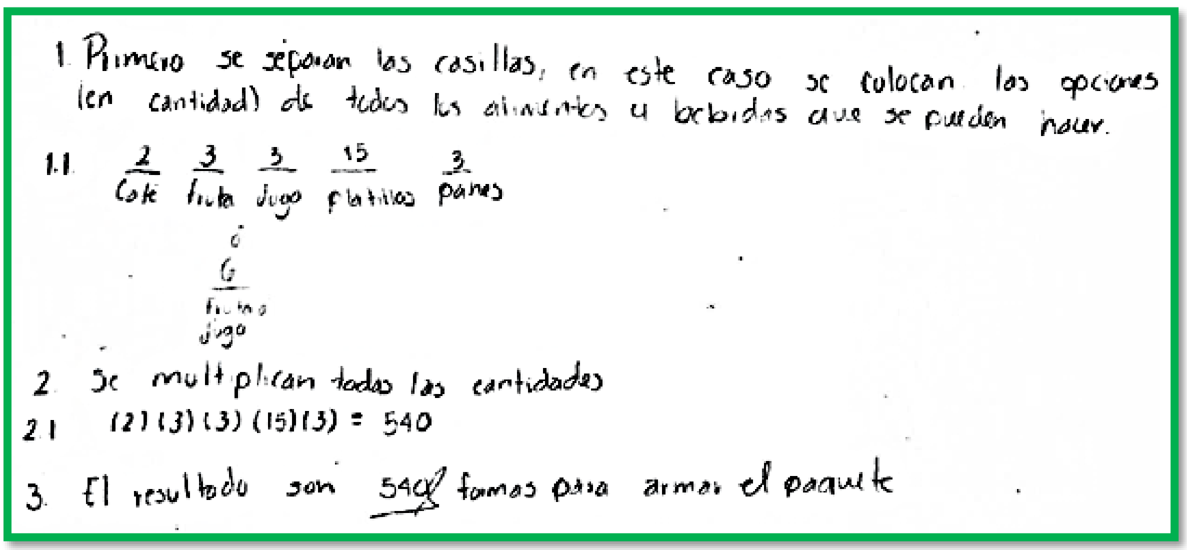
$\frac{2}{\text{Cafe}} \times \frac{3}{\text{Fruta}} \times \frac{15}{\text{Menú}} \times \frac{2}{\text{Pan}} = \frac{90}{180 \text{ opciones}}$

Es de destacar que los errores anteriores se deben ya sea a un cálculo incorrecto, a un error de transcripción del resultado obtenido, o a un conteo erróneo del conjunto de posibilidades de los eventos; sin embargo, el razonamiento detrás del método fue correcto.

Método y el Resultado Inconsistentes

Este es el caso de dos alumnas quienes escribieron el resultado correcto del problema; pero este contradice parcial o totalmente el método redactado.

El primer caso refiere al de una alumna quien intentó resolver el problema bajo el método inválido #1, pues redactó la operación asociada a este método. Sin embargo, escribió la respuesta correcta del problema a pesar de que esta no coincide con el resultado que se obtendría de la operación redactada:


1. Primero se separan las casillas, en este caso se colocan las opciones (en cantidad) de todos los alimentos y bebidas que se pueden hacer.

1.1 $\frac{2}{\text{Cafe}}$ $\frac{3}{\text{fruta}}$ $\frac{3}{\text{Jugo}}$ $\frac{15}{\text{platillos}}$ $\frac{3}{\text{panes}}$

ó $\frac{6}{\text{fruta o jugo}}$

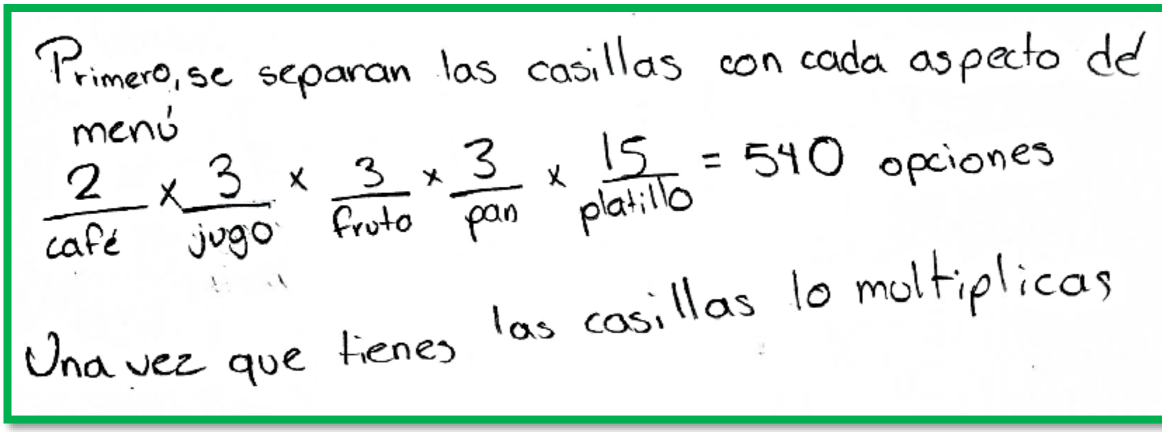
2. Se multiplican todas las cantidades

2.1 (2)(3)(3)(15)(3) = 540

3. El resultado son 540 formas para armar el paquete

Observe que debajo de las casillas de jugo y fruta la alumna escribió: ‘o 6 jugo o fruta’, dato que está asociado al método de solución 2°PE-A. Es posible que la alumna haya intercambiado resultados con algún otro estudiante y así se haya dado cuenta del error en su método; sin embargo, no hizo las correcciones necesarias a la reacción del método, salvo por la especificación ya mencionada.

El segundo caso corresponde al de otra alumna quien también aplicó el método inválido #1 y, pese a ello, redactó la respuesta correcta del problema:


Primero, se separan las casillas con cada aspecto del menú

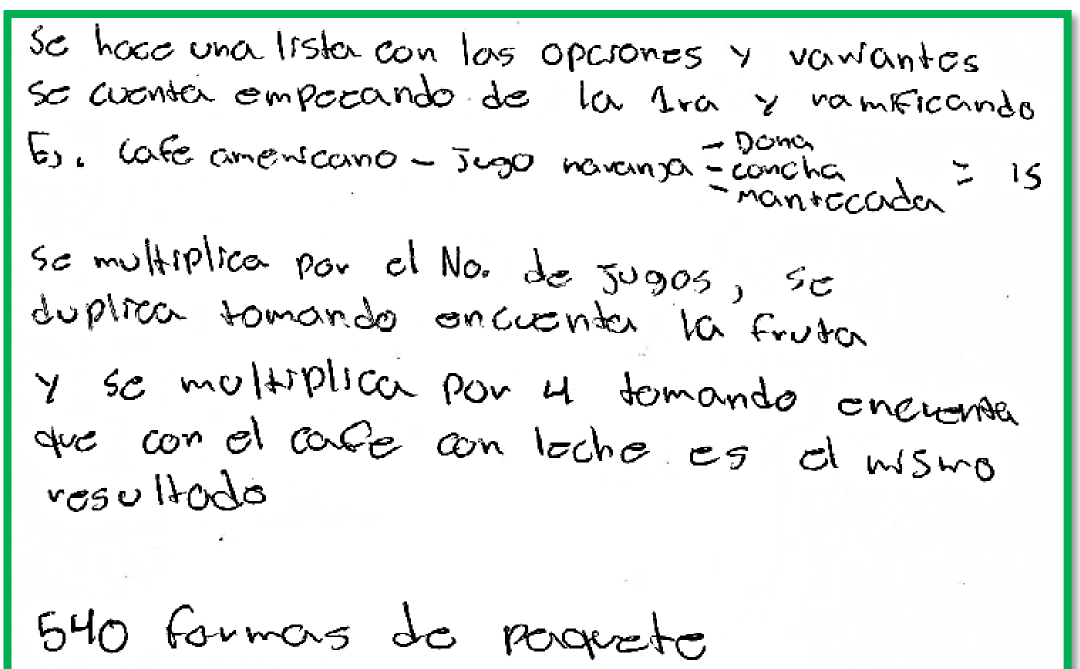
$\frac{2}{\text{café}} \times \frac{3}{\text{jugo}} \times \frac{3}{\text{fruto}} \times \frac{3}{\text{pan}} \times \frac{15}{\text{platillo}} = 540$ opciones

Una vez que tienes las casillas lo multiplicas

Note que la operación $2 \times 3 \times 3 \times 15 \times 3$ da como resultado 810 posibilidades, valor que difiere del resultado correcto que son 540 posibilidades para armar el paquete desayuno.

Método de Solución Ambiguo

Este fue el caso de dos estudiantes quienes sí redactaron la solución correcta del problema; sin embargo, una parte del método redactado no es claro. A continuación, se presenta el procedimiento redactado por el primero de los estudiantes:

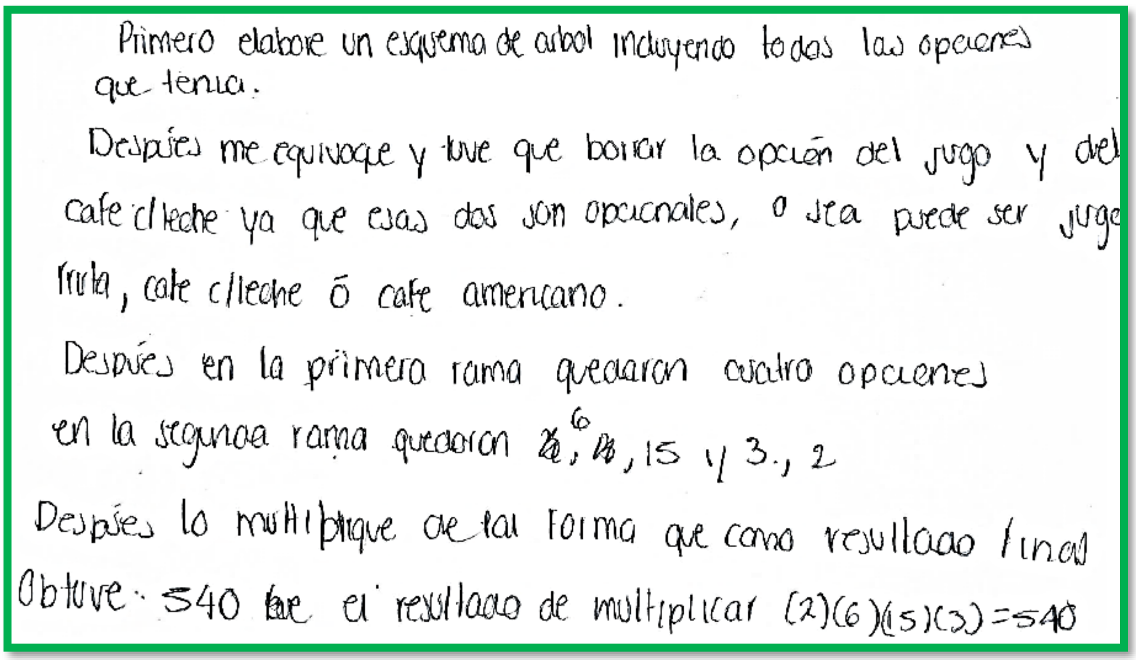

Se hace una lista con las opciones y variantes
se cuenta empezando de la 1ra y ramificando
Ej. cafe americano – Jugo naranja – Dona / concha / mantecada = 15

se multiplica por el No. de jugos, se duplica tomando encuenta la fruta
y se multiplica por 4 tomando encuenta que con el cafe con leche es el mismo resultado

540 formas de paquete

La explicación textual: ‘se multiplica por el número de jugos, se duplica tomando en cuenta la fruta’, sugiere que el alumno aplicó el método de solución 2°PE-D. Sin embargo, también refiere a una multiplicación por el número cuatro que parece referir al método 2°PE-C. En general la explicación del alumno es ambigua.

Ahora bien, el segundo caso corresponde al de una alumna quien sí redactó la operación que, bajo el método de solución 2°PE-A, permite llegar a la solución correcta del problema. Sin embargo, al igual que en el caso del alumno anterior, su explicación es ambigua y no deja claro cuál fue su proceso de razonamiento:


Primero elabore un esquema de arbol incluyendo todas las opciones que tenia.
Después me equivoque y tuve que borrar la opción del jugo y del cafe c/leche ya que esas dos son opcionales, o sea puede ser jugo fruta, cafe c/leche ó cafe americano.
Después en la primera rama quedaron cuatro opciones
en la segunda rama quedaron ~~[illegible]~~ 6, ~~[illegible]~~, 15 y 3., 2
Después lo multiplique de tal forma que como resultado final
Obtuve: 540 ~~[illegible]~~ el resultado de multiplicar (2)(6)(5)(3)=540

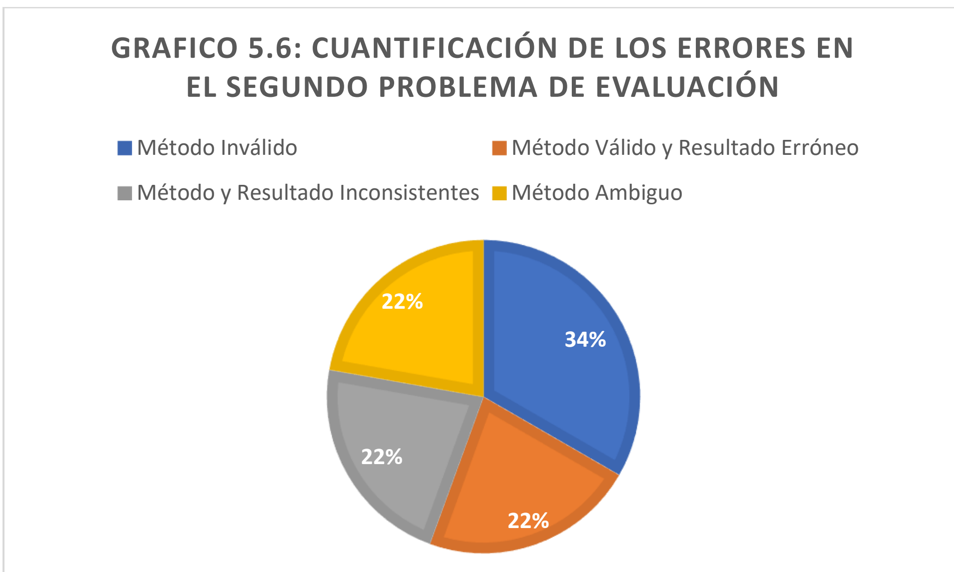
Note que la alumna explica que hay cuatro opciones para el primer evento; dato que es erróneo si se refiere a elegir entre café americano y café con leche, y válido si se refiere a los cuatro casos que derivan del método de solución 2°PE-C. También se aprecia que realizó algunas correcciones sobre el método redactado. La operación escrita al final es válida para el caso del método 2°PE-A; sin embargo, esta carece de una explicación clara sobre el significado de cada uno de los valores que la conforman.

Cuantificación de los Errores

La siguiente tabla presenta una cuantificación de los errores observados entre los nueve estudiantes quienes redactaron una respuesta incorrecta o un método inválido, errores que corresponden a las cuatro categorías previamente descritas:

	Número de Alumnos	Porcentaje de Alumnos
Método Inválido	3	34%
Método Válido y Resultado Erróneo	2	22%
Método y Resultado Inconsistentes	2	22%
Método Ambiguo	2	22%

TABLA 5.5: Cuantificación de los Errores en el Segundo Problema de Evaluación



Los resultados muestran que el 56% de los errores están asociados a una intuición errónea por parte de los estudiantes. Este porcentaje comprende el 34% referente a la aplicación de un método de solución inválido sumado al 22% que corresponde a los casos donde el método de solución fue inconsistente con el resultado redactado.

En total se identificaron tres métodos de solución inválidos que fueron aplicados por cinco estudiantes (que refiere al 56% de los errores). El que tuvo mayor recurrencia, con tres aplicaciones, fue el método inválido #1; último que equivaldría a calcular el número de posibilidades en el caso de que fuera posible elegir tanto un tipo de fruta como también alguna de las opciones de jugo.

Sólo un 22% está asociado a errores de cálculo y de enumeración de los eventos implicados en el método. Por su parte, el 22% restante refiere al caso de aquellos estudiantes quienes redactaron un procedimiento ambiguo, más allá de que el resultado fuera correcto.

5.4 IMPLEMENTACIÓN DEL TERCER PROBLEMA DE EVALUACIÓN (FASE XIII)

El tercer problema de evaluación (anexo K) les fue entregado impreso a los estudiantes junto con el segundo problema de evaluación; último que ya fue discutido en la sección anterior. En total, los estudiantes dispusieron de un tiempo entre 30 y 40 minutos para resolver ambos problemas. En esta sección se presentarán y analizarán los resultados obtenidos del tercer problema de evaluación, el cual dice lo siguiente:

> **PROBLEMA #2:** Una empresa lleva a cabo un sorteo entre sus 20 empleados. En dicho sorteo, primero se rifa un celular, luego una televisión y, por último, una computadora. Para esto, una vez que el ganador del celular ha sido seleccionado, se vuelve a ingresar su nombre a la urna, de modo que aún podría ganar la televisión y/o la computadora. Lo mismo se hace con el ganador de la televisión **¿De cuántas formas podrían salir sorteados los 3 premios entre los 20 empleados?**
>
> **Observación:** puede darse el caso que un mismo empleado resulte ganador de los tres premios sorteados.

Conviene hacer la aclaración de que la enumeración 'PROBLEMA #2' fue con el propósito de que los estudiantes diferenciaran entre los dos problemas que conformaban la evaluación de la sesión. Sin embargo, se le referirá este último problema como 'tercer problema de evaluación', o simplemente como 'el problema' cuando el contexto permita diferenciarlo.

5.4.1 Un método de solución válido para el tercer problema de evaluación

La forma de resolver el problema es mediante una aplicación inmediata del Principio Fundamental del Conteo; sin embargo, la dificultad radica en que los estudiantes deben analizar el problema e identificar cuáles son los eventos sobre los que se debe aplicar dicho principio. A diferencia del segundo problema de evaluación, el tercero sólo puede ser resuelto mediante un único método; al menos de una forma que se considere práctica.

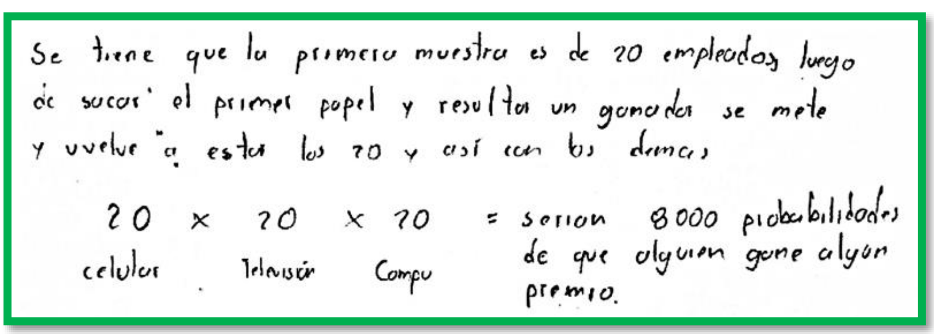
Como se describe en el problema, se desea calcular el número de formas posibles como podrían salir sorteados los tres premios entre los 20 empleados, y permitiendo la posibilidad de que un mismo empleado pueda ganar dos, o los tres premios. Note que cada posibilidad refiere a una forma de distribuir los tres premios entre los 20 empleados; de tal modo que se cuentan los resultados posibles de los tres sorteos en conjunto, y no de forma individual.

Por ejemplo, si Juan y Mariana son empleados de la empresa, una posibilidad es que Juan gane la computadora y Mariana gane la televisión y el celular. Otra posibilidad es que Juan gane la computadora y el Celular mientras que Mariana gana la televisión. Ambos se cuentan como casos diferentes, pues hay una distribución diferente de los premios más allá de que los ganadores sean los mismos.

Para resolver el problema se debe observar que el conjunto de posibilidades está determinado por tres eventos independientes entre sí: el sorteo del celular, el sorteo de la televisión y el sorteo de la computadora, en ese orden. Dado que al ganador del primer y segundo premio se le permite participar en los demás sorteos, hay 20 posibles ganadores para cada uno de los sorteos. Por lo tanto, el número de posibilidades bajo las cuales se puede asignar los premios entre los empleados se calcula con la siguiente operación:

$$\underset{\text{Celular}}{\underline{\;20\;}} \times \underset{\text{Televisión}}{\underline{\;20\;}} \times \underset{\text{Computadora}}{\underline{\;20\;}} = 8000$$

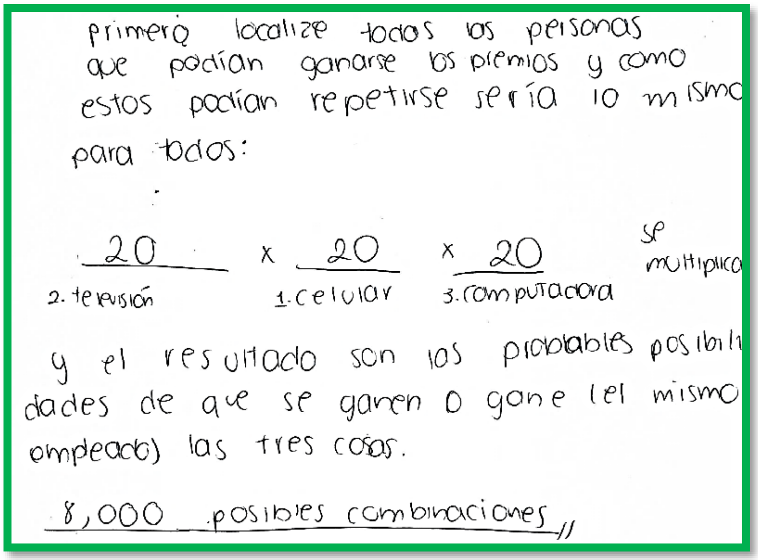
De este modo hay un total de 8,000 formas posibles como podrían resultar sorteados los tres premios entre los 20 empleados. Este es el único método práctico bajo el cual se puede llegar a la solución correcta del problema. A continuación, se anexa el procedimiento redactado por un alumno quien aplicó este método de solución:


Se tiene que la primera muestra es de 20 empleados luego de sacar el primer papel y resulta un ganador se mete y vuelve a estar los 20 y así con los demas

20 x 20 x 20 = serian 8000 probabilidades de que alguien gane algun premio.

celular Televisión Compu

La siguiente evidencia corresponde al caso de una alumna quien dibujó las casillas en un orden diferente; sin embargo, la alumna tenía presente cuál es el orden en el que se sortean los tres premios, pues debajo de cada casilla anotó el número de evento que le corresponde.


primero localize todos los personas que podían ganarse los premios y como estos podían repetirse sería lo mismo para todos:

20 x 20 x 20 se multiplica

2. televisión 1. celular 3. computadora

y el resultado son los probables posibilidades de que se ganen o gane (el mismo empleado) las tres cosas.

8,000 posibles combinaciones //

En general, el orden en el que se sortean los premios no es un factor que importe en este caso, pues sólo se desea calcular de cuántas formas posibles podrían ser distribuidos los premios entre los empleados. Además, por las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación, no es necesario anotar las casillas en un orden especifico.

A pesar de lo anterior, no se debe perder de vista que hay un orden definido para llevar a cabo los tres sorteos. Si el orden de los eventos no estuviera definido y se considerara un factor de interés en conjunto con los resultados del sorteo, el número de posibilidades sería más difícil de cuantificar. Este último caso implicaría no sólo calcular de cuántas formas pueden salir sorteados los premios, sino también en que orden pueden salir sorteados. Como se verá más adelante, algunos estudiantes realizaron este tipo de cálculo a pesar de ser más complejo, probablemente debido a una mala comprensión del problema.

Otro caso que conviene reportar es el de una alumna quien, además de resolver el problema bajo las condiciones definidas, también explicó un método válido para calcular el número de resultados posibles en el supuesto caso de que no se permita la repetición de ganadores; es decir, bajo la suposición de que los ganadores del primer y segundo sorteo no tengan permitido participar por los premios restantes:

20 20 20 = 8000

Pose 3 casillas porque se va a sacar 3 papeles, deje el 20 en las 3 casillas porque el papel se devuelve, esto quiere decir que en las 3 veces hay 20 posibilidades. si el papel no se huera develto sería 20 19 18 debido a que se reduce su posibilidad.

La alumna mencionó que, en el caso de que a un ganador no se le permita participar en los demás sorteos, el número de formas como podrían salir sorteados los premios está determinado por la operación $20 \times 19 \times 18$, y cuyo resultado es 6,840. En efecto, note que bajo esta condición hay 20 posibles ganadores para el primer sorteo. Sin embargo, dado que el ganador del celular ya no podría participar en el sorteo de la televisión, restan 19 participantes para el segundo sorteo; independientemente de que el conjunto de posibilidades varíe en función de quien haya ganado el primero. Del mismo modo, sólo 18 empleados participaran en el sorteo de la computadora.

Este procedimiento refiere al cálculo de ordenaciones sin repetición, tema que no fue implementado como parte de la propuesta de enseñanza-aprendizaje aquí descrita. Esto confirma que algunos estudiantes ya contaban con conocimientos previos en los temas de ordenaciones con y sin repetición, tal y como se observó en las respuestas de algunos estudiantes en relación al segundo cuestionario de opinión (véase subsección 5.2.1).

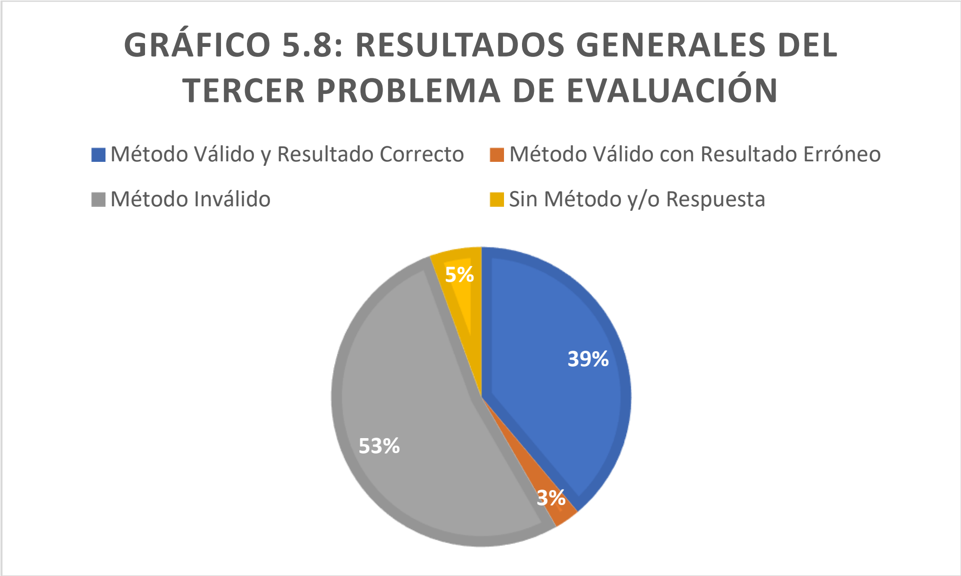
Sobre este último punto, conviene recordar que originalmente se pensó incluir el tema de *ordenaciones sin repetición* al diseño e implementación de la presente propuesta, pero se excluyó debido a que no se dispuso de las sesiones necesarias para su implementación. En el anexo C puede consultarse un texto el cual fue diseñado y editado con el propósito de introducir dicho tema bajo el modelo de aula invertida.

5.4.2 Resultados generales del tercer problema de evaluación

A continuación, se presentan los resultados generales en lo que se refiere a la resolución del tercer problema de evaluación por parte de los 36 estudiantes del grupo:

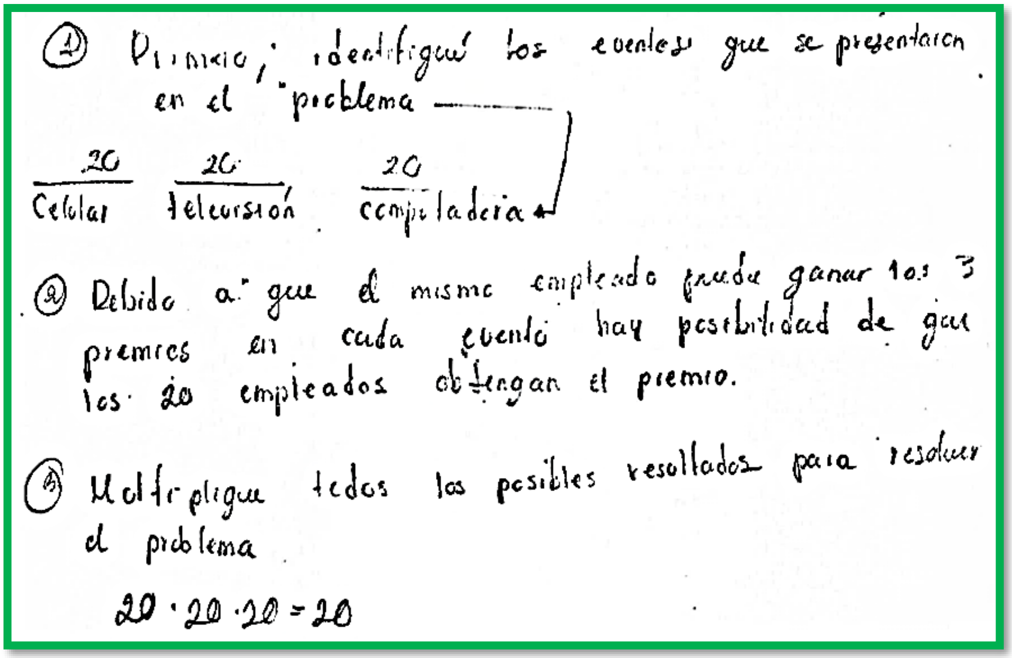
	No. de Estudiantes	Porcentaje de Alumnos
Método Válido y Resultado Correcto	14	39%
Método Válido con Resultado Erróneo	1	3%
Método Inválido	19	53%
Sin Método y/o Respuesta	2	6%
Total:	**36**	**100%**

TABLA 5.7: Resultados generales del tercer problema de evaluación



Los resultados de este problema son menos satisfactorios a los obtenidos en los dos problemas anteriores. Cabe destacar que sólo el 42% del grupo aplicó un método válido para llegar a la solución del problema; sin embargo, sólo un 39% respondió de forma correcta a la pregunta planteada por el problema.

La diferencia entre el 42% y el 39% refiere al caso de una alumna quien sí aplicó el método de solución correcto; sin embargo, escribió una respuesta errónea, probablemente debido a una distracción. Su procedimiento es el siguiente:


① Primero, identifiqué los eventos que se presentaron en el problema

20	20	20
Celular	Televisión	Computadora

② Debido a que el mismo empleado puede ganar los 3 premios en cada evento hay posibilidad de que los 20 empleados obtengan el premio.

③ Multipliqué todos los posibles resultados para resolver el problema

20 · 20 · 20 = 20

Observe que la alumna escribió y justificó la operación $20 \times 20 \times 20$ cuyo resultado es la solución del problema. Sin embargo, el resultado que escribió es erróneo y difiere por mucho del valor correcto que es 8,000. Es probable que el error fuera por alguna distracción de la alumna, pues el método es válido y está bien explicado.

Por otra parte, el 53% de los estudiantes aplicó un método de solución inválido bajo las condiciones del problema. Un aspecto que destacar sobre este porcentaje es que se observó una diversidad entre los procedimientos intuidos por los estudiantes, algunos de los cuales corresponden a la solución de problemas aún más complejos. No se descarta que algunos de los métodos inválidos fueran debido a una comprensión errónea del problema. Estos casos serán presentados y analizados a lo largo de la siguiente subsección.

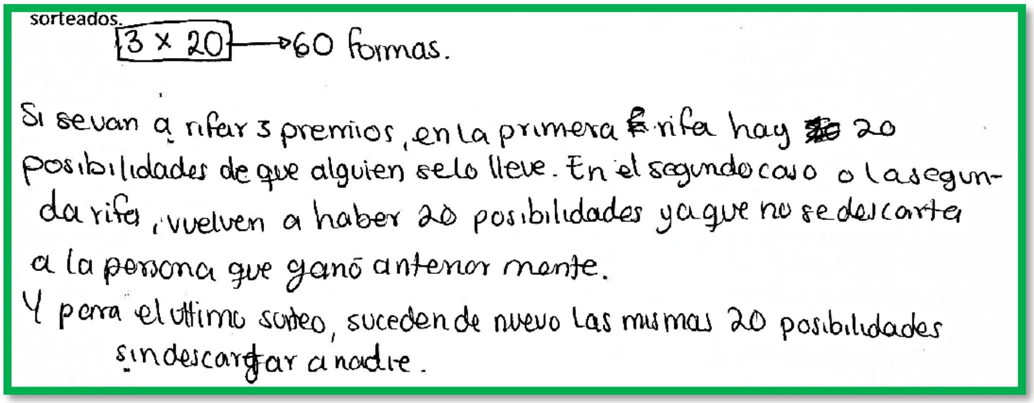
Por último, conviene reportar el caso de dos alumnas quienes no redactaron procedimiento alguno que pueda ser evaluado; esto se categorizó bajo 'Sin método y/o respuesta'. Una de las alumnas sólo mencionó que los premios podían salir sorteados de 60 formas posibles (resultado erróneo), pero no explicó cómo llegó a dicha respuesta.

5.4.3 Errores y métodos inválidos en la resolución del tercer problema de evaluación

En esta subsección se analizarán los métodos inválidos aplicados por aquellos estudiantes (el 53% del grupo) quienes obtuvieron un resultado diferente del correcto. En total se identificaron seis métodos inválidos bajo las condiciones planteadas por el problema; estos se clasificaron bajo las siguientes categorías:

Método Inválido 3PE-#1

Este método está asociado a una intuición errónea. En él se conciben dos eventos bajo los cuales se aplica el Principio Fundamental del Conteo. El primero hace alusión a los tres premios que serán sorteados por la empresa, mientras que el segundo evento refiere a los 20 empleados que podrían salir ganadores de alguno de los premios. A continuación, se anexa el procedimiento de la alumna A-1 quien intuyó este método erróneo:

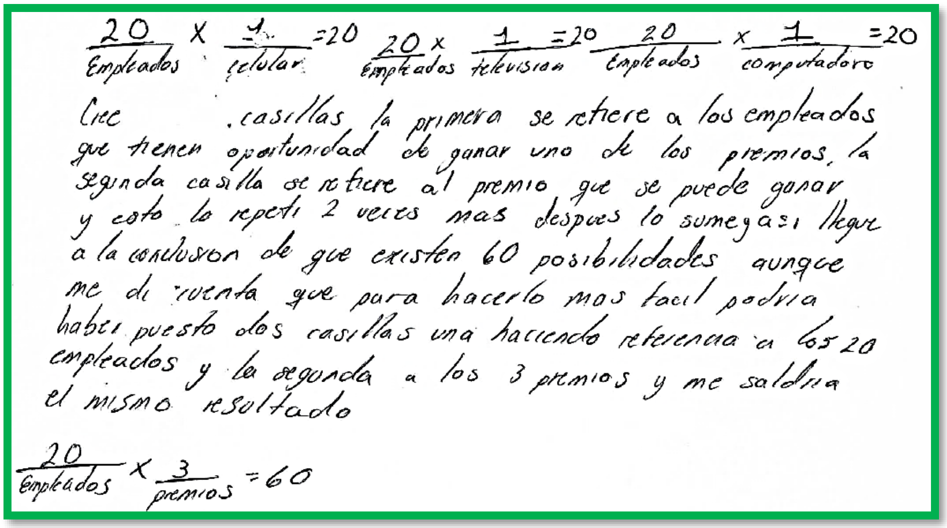

sorteados.

$\boxed{3 \times 20} \rightarrow 60$ formas.

Si sevan a rifar 3 premios, en la primera rifa hay 20 posibilidades de que alguien selo lleve. En el segundo caso o la segun-da rifa, vuelven a haber 20 posibilidades ya que no se descarta a la persona que ganó anterior mente.
Y para el ultimo sorteo, suceden de nuevo las mismas 20 posibilidades sin descartar a nadie.

La operación $3 \times 20 = 60$ sería correcta en el caso hipotético de que la empresa sorteara uno, y sólo uno de los premios entre los empleados; ya sea que el ganador pueda elegir su premio, o bien, que este se elija al azar. Bajo esta situación hipotética, el primer evento correspondería al sorteo del empleado ganador (20 opciones), mientras que el segundo evento referiría a la elección del premio (3 posibilidades).

Este procedimiento fue el resultado de una intuición errónea por parte de aquellos estudiantes quienes lo aplicaron; prueba de ello es que la alumna A-1 analizó y comprendió el problema de forma correcta. El error estuvo en suponer que el tipo de premio (celular, televisión y computadora) es uno de los eventos que conforman el problema; por lo que hay una falta de análisis (o evaluación) del método intuido. Este error también equivale al caso de sumar los resultados posibles de cada sorteo particular; la siguiente evidencia muestra esta versión equivalente del mismo error de intuición:

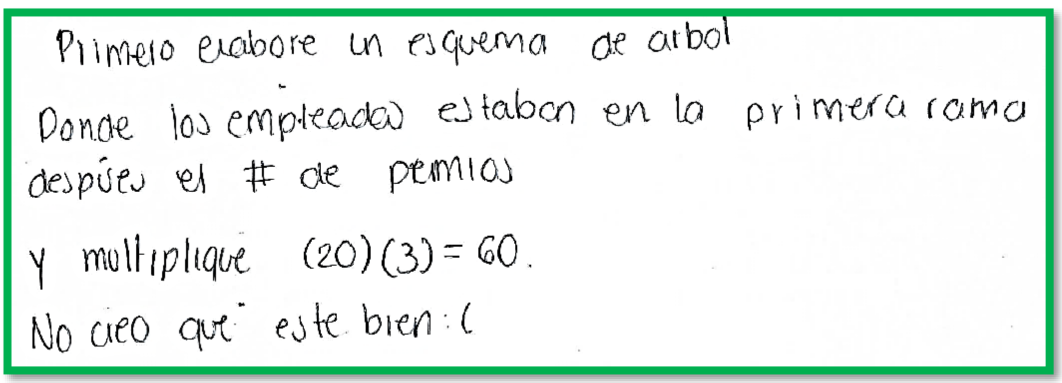


$\frac{20}{\text{Empleados}} \times \frac{1}{\text{celular}} = 20 \quad \frac{20}{\text{Empleados}} \times \frac{1}{\text{television}} = 20 \quad \frac{20}{\text{Empleados}} \times \frac{1}{\text{computadora}} = 20$

Cree . casillas la primera se refiere a los empleados que tienen oportunidad de ganar uno de los premios, la segunda casilla se refiere al premio que se puede ganar y esto lo repeti 2 veces mas despues lo sume y asi llegue a la conclusion de que existen 60 posibilidades aunque me di cuenta que para hacerlo mas facil podria haber puesto dos casillas una haciendo referencia a los 20 empleados y la segunda a los 3 premios y me saldria el mismo resultado

$\frac{20}{\text{Empleados}} \times \frac{3}{\text{premios}} = 60$

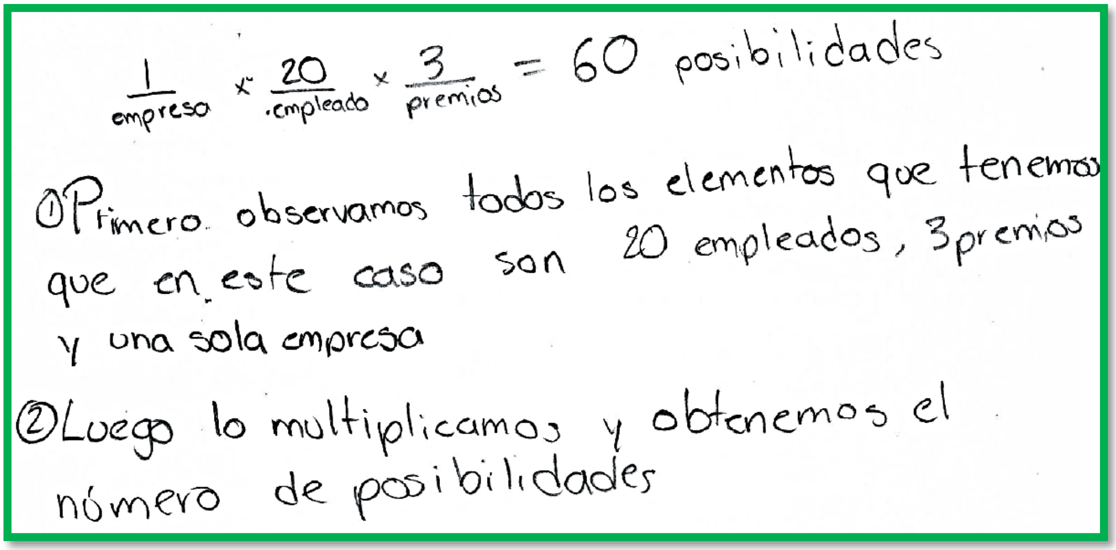
Conviene reportar el caso de una alumna quien aplicó este método inválido; pero quien sí sospechó que el método es erróneo:



Primero elabore un esquema de arbol
Donde los empleados estaban en la primera rama
despúes el # de pemios
y multiplique (20)(3) = 60.
No cieo que este bien :(

Método Inválido 3PE-#2

Este método inválido es equivalente a 3PE-#1. Sin embargo, difiere en el hecho de que se considera el número de empresas implicadas en el sorteo como un evento a considerar:



$\frac{1}{\text{empresa}} \times \frac{20}{\text{empleado}} \times \frac{3}{\text{premios}} = 60$ posibilidades

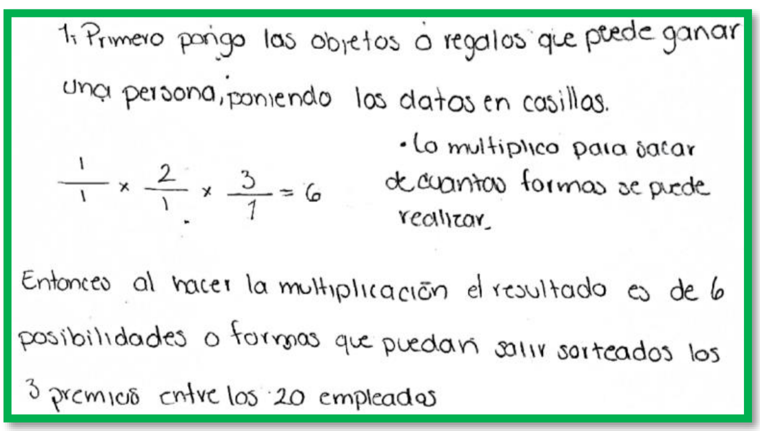
① Primero observamos todos los elementos que tenemos que en este caso son 20 empleados, 3 premios y una sola empresa

② Luego lo multiplicamos y obtenemos el número de posibilidades

La evidencia anterior corresponde al caso de una alumna quien aplicó este procedimiento. Dado que sólo hay una empresa implicada, el error es equivalente al caso del método inválido 3PE-#1.

Método Inválido 3PE-#3

Este procedimiento fue aplicado y redactado por una única alumna; sin embargo, el método es ambiguo en su explicación:



1. Primero pongo los objetos o regalos que puede ganar una persona, poniendo los datos en casillas.

$\frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{1} = 6$

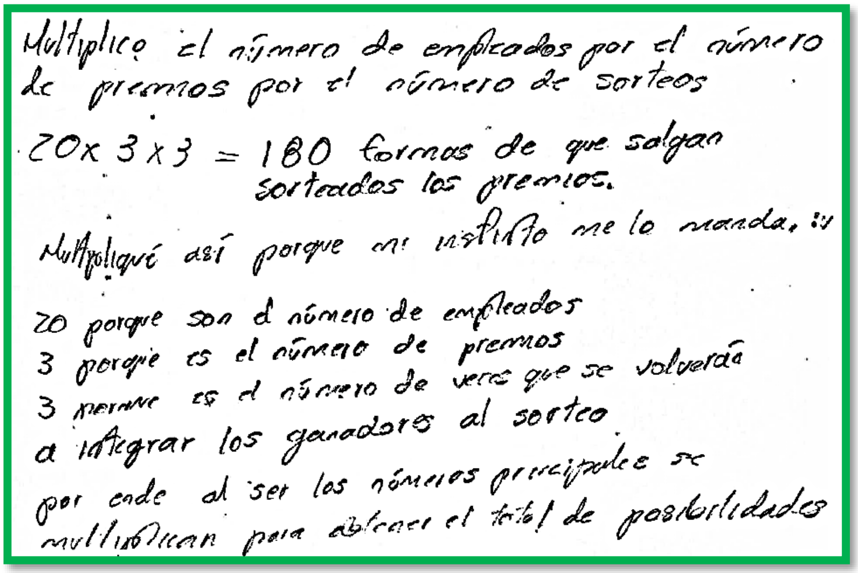
• Lo multiplico para sacar de cuantas formas se puede realizar.

Entonces al hacer la multiplicación el resultado es de 6 posibilidades o formas que puedan salir sorteados los 3 premios entre los 20 empleados

La operación $3 \times 2 \times 1 = 6$ sería válida si el objetivo fuera calcular las diferentes formas de proceder a realizar los sorteos en relación con su orden de ejecución. La alumna quien redactó este método no proporcionó una explicación clara sobre los eventos implicados. Por las razones anteriores, no es posible indagar sobre su proceso de razonamiento; aunque su respuesta sugiere un error de comprensión lectora del problema.

Método Inválido 3PE-#4

Este método también se debe a un error de intuición por parte de los estudiantes que lo aplicaron, el método se conforma por tres eventos que resultan en la operación $20 \times 3 \times 3 = 180$. Hay diferencias entre la argumentación de los dos estudiantes que aplicaron este método. A continuación, se anexa el procedimiento redactado por el primero de ellos:


Multiplico el número de empleados por el número de premios por el número de sorteos.
20x 3 x 3 = 180 formas de que salgan sorteados los premios.
Multipliqué así porque mi instinto me lo manda. :v
20 porque son el número de empleados
3 porque es el número de premios
3 porque es el número de veces que se volverá a integrar los ganadores al sorteo.
por ende al ser los números principales se multiplican para obtener el total de posibilidades

El procedimiento comprende los dos eventos que conforman el método inválido 3PE-#1. Respecto al tercer evento, el alumno explicó que corresponde al número de veces que se reintegra el nombre de un ganador a la urna; esta parte del método es errónea en dos sentidos. Primero, porque la acción de reintegrar el nombre de un ganador a la urna no un evento que derive en un conjunto de posibilidades; sólo se trata de una condición del problema. Segundo, porque el número de veces que se reingresa el nombre de un ganador a la urna es dos; que correspondería a los ganadores del celular y la televisión (primeros dos sorteos).

El segundo caso refiere al de una alumna quien aplicó la misma operación $20 \times 3 \times 3 = 180$. Sin embargo, ella explicó que el tercer evento refiere al número de premios que podría recibir un mismo empleado:

Los premios pueden salir sorteados de 180 formas entre los 20 empleados.

En este caso use tres casillas las cuales eran de: Total de empleados, (Número de) premios y las "diferentes" personas que pueden obtener los premios.

En las casillas iban los números 20, 3 y 3 respectivamente. Esto porque el total de empleados son 20, los premios son 3 (celular, televisión y/o computadora) y las diferentes personas que pueden obtener los premios son de 3 (1 gana todos los premios, 1 gana 2 premios y otro gana 1 (2 personas) o 3 ganan un premio cada uno (3 personas)).

Así que multiplicamos 20 por 3 por 3 obteniendo 180, las formas en que los 3 premios podrían salir sorteados entre los 20 empleados.

20 / Empleados × 3 / Número de Premios (celular, televisión y/o computadora) × 3 / Diferentes personas que pueden obtener los premios = (1 persona = 3 premios, 2 personas 1→2 premios y 1→1 premio, 3 personas 1→1 premio, 1→1 premio, 1→1 premio) = 180 formas en que los tres premios podrían salir sorteados.

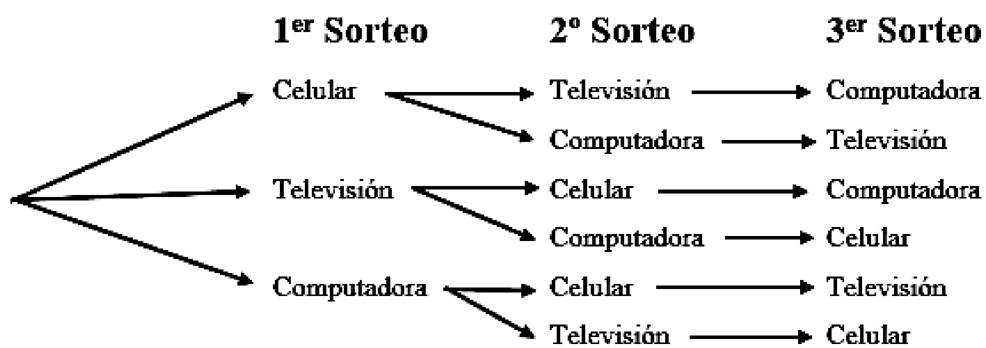
La alumna describió el tercer evento como el número de premios que podría ganar un mismo empleado, y cuyo conjunto de posibilidades está determinado por tres casos: 1) tres de los empleados se llevan un premio cada uno, 2) un empleado se lleva un premio y un segundo empleado se lleva dos premios, y 3) un mismo empleado se lleva los tres premios. El tercer evento corresponde a las posibilidades anteriores.

A pesar de que los eventos propuestos por la alumna tienen sentido bajo el contexto y las condiciones del problema, los tres eventos que describió son incompatibles entre sí; pues los resultados que de ahí se desprenden no determinan de forma única quién o quiénes serían los ganadores de los tres premios sorteados.

Método Inválido 3PE-#5

Este método está conformado por un total de seis eventos y es equivalente al caso de calcular el número de formas posibles como podrían salir sorteados los premios, pero tomando en cuenta el orden de ejecución de los sorteos como un factor variable. Este método es inválido debido a las condiciones descritas en el problema; pues en él se especifica el orden de ejecución de los tres sorteos (primero se sortea el celular, luego la televisión y por último la computadora).

Para describir el método, suponga que no hay un orden específico en la realización de los sorteos, además suponga que el orden de ejecución es un factor a considerar. Por ejemplo, en el caso de que los empleados Juan, María y Linda sean los respectivos ganadores del celular, la televisión y la computadora, se obtendrían casos diferentes según el orden de premiación. Podría ser que primero se sortee la televisión, seguida por el celular y la computadora en ese orden, o bien, primero la computadora y después el celular y la televisión. Aunque los ganadores sean los mismos empleados, se cuantificarían como casos diferentes debido a que el orden de los sorteos fue diferente en ambos casos. Ahora considere el siguiente diagrama de árbol:



El diagrama anterior muestra de cuántas formas pueden ordenarse los tres sorteos para su realización. Para el primer sorteo se puede rifar cualquiera de los tres premios, para el segundo sorteo se rifa alguno de los dos premios restantes, y para el tercer sorteo se rifa el último. Por lo tanto, hay $3 \times 2 \times 1 = 6$ formas de asignar un orden de realización de los sorteos.

Por otra parte, $20 \times 20 \times 20 = 8{,}000$ es el número de formas como pueden salir sorteados los premios. Así que hay $8{,}000 \times 6 = 48{,}000$ formas de presentar los resultados; esto último tomando en cuenta la asignación de los ganadores y el orden de realización de los sorteos. A continuación, se anexa el procedimiento redactado por un alumno quien aplicó este método inválido:

sorteados.

Los conjuntos utilizados fueron los empleados y los premios, para el caso de los empleados fueron 20 casos; y para los premios fueron 3. Sin embargo, los premios se reducían conforme pasaba cada sorteo, por lo que las casillas se ordenaron de la siguiente manera:

$$\frac{20}{\text{empleados}} \times \frac{3}{\text{premio}} \times \frac{20}{\text{empleados}} \times \frac{2}{\text{premios}} \times \frac{20}{\text{empleados}} \times \frac{1}{\text{premio}} = 48{,}000$$ oportunidades de sali

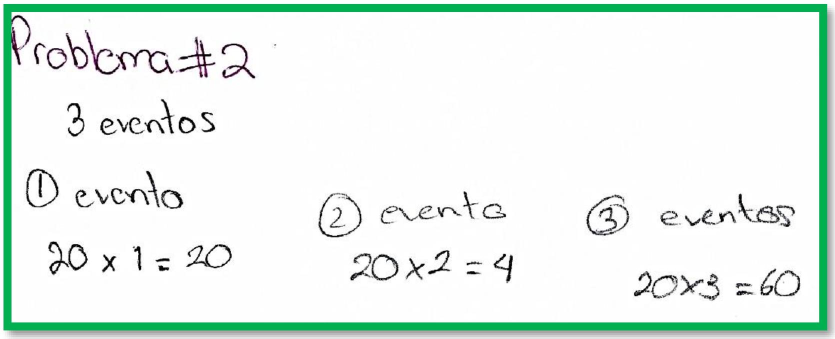
sorteados.

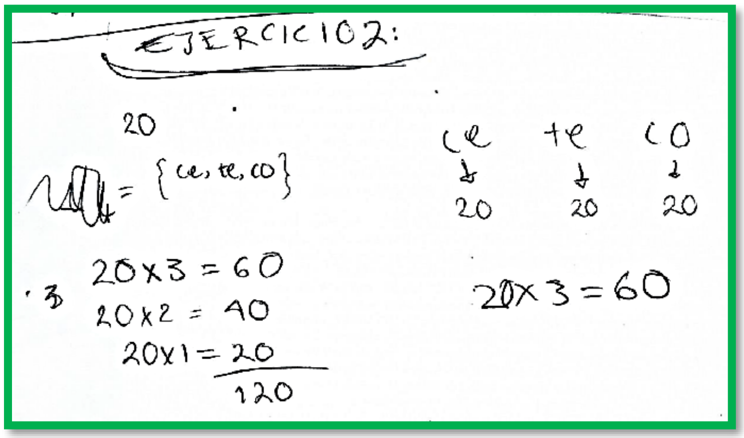
Cabe señalar que los procedimientos redactados por los tres estudiantes que aplicaron el método anterior no son lo suficientemente específicos para determinar si la aplicación del método fue debido a una comprensión errónea del problema. Sin embargo, es probable que así haya sido, pues en él problema se especifica el orden bajo el cual se realiza el sorteo de los premios.

Método Inválido 3PE-#6

Este es el caso de tres alumnas quienes aplicaron un método ambiguo; sin embargo, existe una conexión entre los métodos redactados por las tres (como si fueran las piezas de un rompecabezas). A continuación, se anexan los tres procedimientos redactados:

- De igual manera realice un diagrama de arbol. entre los posibles premios entre los 20 empleados
- Cada articulo puede que sea ganado por alguno de los 20 empleados
- En total son 20 posibilidades para cada articulo
- Estos los sumè y en total me dieron 120 formas





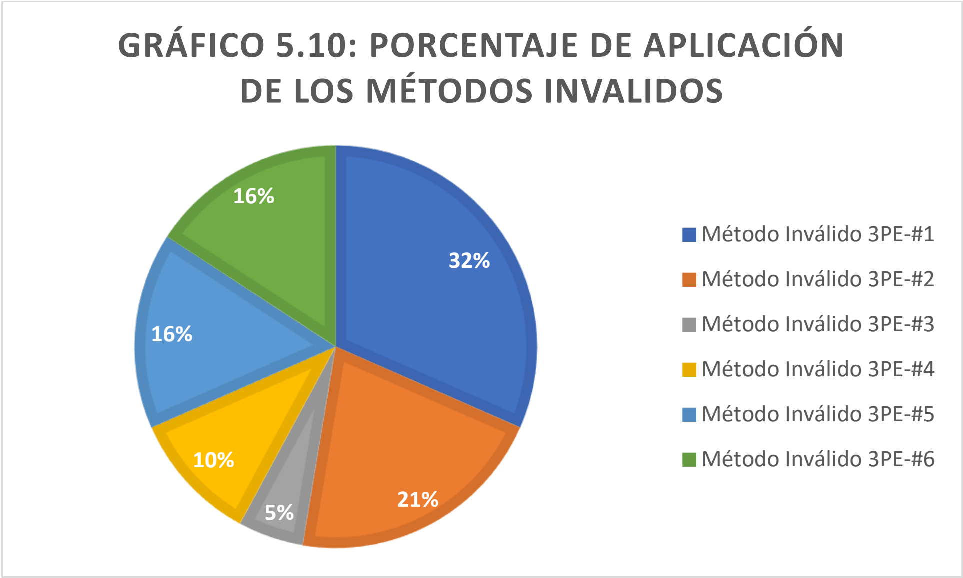
Note que en el procedimiento de la primera alumna no hay operación alguna; sin embargo, su respuesta coincide con la suma de la tercera imagen redactada por otra alumna. Además, los sumandos de la suma coinciden con los resultados de las operaciones $20 \times 3 = 60$, $20 \times 2 = 40$ y $20 \times 1 = 20$, últimas que aparecen en la segunda evidencia.

Cuantificación de los métodos inválidos

La siguiente tabla presenta la cuantificación de los estudiantes que aplicaron alguno de los seis métodos inválidos antes descritos:

	No. de Estudiantes	Porcentaje de Estudiantes
Método Inválido 3PE-#1	6	32%
Método Inválido 3PE-#2	4	21%
Método Inválido 3PE-#3	1	5%
Método Inválido 3PE-#4	2	10%
Método Inválido 3PE-#5	3	16%
Método Inválido 3PE-#6	3	16%
Total:	**19**	**100%**

TABLA 5.9: Cuantificación de los métodos inválidos empleados



La tabla y el gráfico anterior refieren al caso de los 19 estudiantes que aplicaron un método inválido para llegar a la solución del problema, y que corresponde al 53% del grupo (véase la tabla 5.7). Note que el 32% de los procedimientos erróneos corresponde a la aplicación del método inválido 3PE-#1.

No obstante, los métodos 3PE-#1, 3PE-#2 y 3PE-#4 comprenden el mismo error de intuición, el cual consiste en interpretar el tipo de premio como uno de los eventos del problema. Esto significa que el 63% de los procedimientos inválidos apuntan al mismo error. En general, el 33% del grupo (12 de 36 estudiantes) incurrieron en ese mismo error.

5.5 CONCLUSIONES GENERALES DE LA SEGUNDA SESIÓN

Para concluir el presente capítulo, se comentarán las conclusiones en relación con lo observado durante el proceso de instrucción y en los resultados de los problemas de evaluación correspondientes al tema (anexos J y K).

En lo que refiere al proceso de instrucción, los estudiantes fueron capaces de intuir y proponer dos métodos de solución válidos para calcular el número de RFCs que podrían emitirse bajo las condiciones descritas durante la fase XI (véase la subsección 5.2.2). La dificultad en el problema se debe a que comprende eventos que tienen una relación de dependencia con respecto a los eventos predecesores; es decir, cuando su conjunto de posibilidades varía en función de los resultados de los eventos anteriores.

El primero de los métodos refiere al caso de fijar variables para descomponer el problema original en dos o más subproblemas de menor grado de dificultad. Por su parte, el segundo método intuido refiere al caso de reinterpretar dos o más eventos dependientes como uno solo. Conviene recordar que este último método fue el que se aplicó para solucionar el problema de la fase XII, aunque también se hizo referencia al primero de los métodos.

Los resultados obtenidos en el segundo problema de evaluación (anexo J) demostraron que la mayoría de los estudiantes asimilaron alguno de los métodos de solución. Específicamente, el 75% de los estudiantes fueron capaces de intuir y aplicar un método válido para llegar a la solución correcta del problema; métodos que en su mayoría fueron análogos a los procedimientos analizados durante la fase XII de la instrucción. Esto significa que, en términos de Fischbein (1975), los métodos de solución propuestos durante la fase XII sirvieron a los estudiantes como *modelos generativos* para resolver el problema del anexo J.

Bajo el modelo generativo de fijar variables, los estudiantes calcularon por separado el número de posibilidades para armar el paquete desayuno en los casos de elegir jugo o fruta. Por su parte, bajo el modelo de reinterpretar dos o más eventos como uno solo, los estudiantes contaron el total de posibilidades entre elegir jugo o fruta; de tal modo que reinterpretaron ambos eventos como un evento único.

Entre los métodos válidos aplicados por los estudiantes que sí obtuvieron la respuesta correcta del problema, el 70% corresponde al modelo de reinterpretar eventos dependientes como un único evento, mientras que el 23% corresponde al modelo de fijar variables. Por su parte, el 7% restante refiere al caso de aquellos estudiantes que aplicaron el Principio Fundamental del Conteo directamente sobre el número de ramificaciones que hay en el diagrama de árbol asociado, y el cual comprende eventos con una relación de dependencia. Esto sugiere que los estudiantes que aplicaron este último método lograron abstraer el *diagrama de árbol implícito* del problema.

Por otra parte, en lo que refiere al tercer problema de evaluación (anexo K), los resultados fueron poco satisfactorios; pues sólo el 39% del grupo llegó a la solución correcta del problema mediante la aplicación del único método de solución válido. En lo que a este problema refiere, la mayoría de los errores están relacionados con el mismo error de intuición por parte de los estudiantes; quienes intuyeron que la solución del problema estaría determinada por la operación $20 \times 3 = 60$, cuando la operación correcta es:

$$20^3 = 20 \times 20 \times 20 = 8{,}000.$$

En este caso, se puede decir que el análisis realizado por los estudiantes al método de solución intuido fue nulo o deficiente. Esto no significa que los estudiantes no hayan analizado el problema en sí, pero sí da evidencia de una falta de análisis y de evaluación del método de solución intuido; último donde se aplicó una operación inválida bajo las condiciones del problema.

Finalmente, cabe mencionar que una minoría de los errores refiere al caso de algunos estudiantes que no llegaron a la solución correcta debido a una comprensión errónea del problema.

CAPÍTULO 6:

CONCLUSIONES GENERALES E IMPLICACIONES

En este capítulo se sintetizan las conclusiones derivadas de la implementación la propuesta de enseñanza-aprendizaje aquí presentada. Se analizarán sus implicaciones en la enseñanza-aprendizaje del análisis combinatorio y de las matemáticas en general; para ello, se compartirán algunas ideas sobre cómo mejorar la propuesta, esto con base en los resultados de la evaluación y en las observaciones realizadas durante su implementación.

6.1 CONCLUSIONES GENERALES DE LA EVALUACIÓN

La propuesta de enseñanza-aprendizaje se implementó en dos sesiones. La primera de ellas se diseñó para retomar algunos contenidos de la educación básica y a partir de ellos promover un pensamiento reflexivo entre los estudiantes sobre la aplicación e interpretación de las operaciones básicas en múltiples contextos; promover este tipo de habilidades son esenciales para el estudio del análisis combinatorio. En particular se trabajaron con problemas que requieren aplicar una regla de proporción.

Por su parte, durante la segunda sesión se abordó el principio fundamental del conteo, su fundamento, y se resolvieron problemas de conteo que requieren de una o más aplicaciones de dicho principio. Los problemas se diseñaron para que su solución no sea evidente a los estudiantes; pues estos presentan una dificultad que los estudiantes debieron detectar y analizar para, posteriormente, intuir, proponer, evaluar y aplicar un método de solución.

El proceso de evaluación se integró por un total de tres problemas, uno de los cuales se implementó durante la primera sesión y los otros dos durante la segunda sesión. Se permitió a los estudiantes trabajar de forma colaborativa; aunque cada estudiante redactó su propia explicación sobre cada uno de los métodos de solución empleados para resolver los problemas. A continuación, se recapitularán las conclusiones más importantes sobre los resultados de la evaluación.

6.1.1 Conclusiones del primer problema de evaluación

El primer problema de evaluación (anexo H) se diseñó para que los estudiantes aplicaran la regla de tres como una herramienta de conteo. Sin embargo, se solicitó a los estudiantes interpretar y explicar cada una de las operaciones implicadas; a modo de fomentar un pensamiento reflexivo y no solamente intuitivo. Los resultados de la evaluación de este problema fueron poco satisfactorios; pues sólo el 64% del grupo llegó a la solución correcta del problema.

Sin embargo, en lo que refiere a la aplicación de la regla, los resultados fueron más satisfactorios, pues el 88% de los estudiantes aplicaron y resolvieron la regla de forma correcta. Además, al menos el 76% del grupo interpretó correctamente cada una de las operaciones que conforman el proceso de resolución de la regla.

Los resultados muestran que, en general, los estudiantes fueron capaces de aplicar la regla de tres interpretando las dos operaciones implicadas. Sin embargo, los resultados aún deben mejorarse, pues entre el 18% y el 24% del grupo aplicó la regla sin llevar a cabo dicho proceso de interpretación, o bien, las interpretaron las operaciones de forma errónea.

Se concluye que los estudiantes sí llevaron a cabo un proceso de análisis del problema. Con base en sus conocimientos previos, fueron capaces de intuir y aplicar un método de solución. Quienes no llegaron a la solución correcta, por lo general fue debido a una evaluación deficiente del método de solución intuido. Evaluar un método de solución implica analizarlo en conjunto con el problema mismo; esto con el fin de corroborar si el método es válido, o bien, si se requieren hacer ajustes o proponer otro método diferente. De este modo, la mayoría de los errores refieren a errores de análisis.

6.1.2 Conclusiones del segundo problema de evaluación

El segundo problema de evaluación (anexo J), fue diseñado para que los estudiantes apliquen el principio fundamental del conteo; sin embargo, este posee una dificultad que impide resolverlo con una aplicación inmediata del principio. El problema presenta una situación la cual comprende un evento (o fenómeno) cuyo conjunto de posibilidades varía en función del resultado obtenido en un evento previo. Los estudiantes deben analizar el problema para después intuir, evaluar y aplicar un método de solución que permita superar la dificultad planteada.

Recuerde que durante la fase XII, los estudiantes calcularon el número de RFCs diferentes que pueden emitirse; este problema también supone la existencia de eventos dependientes. Para este último problema, los estudiantes propusieron dos métodos de solución válidos que permiten realizar el conteo de los RFCs. Durante la evaluación, los estudiantes fueron capaces de intuir y aplicar esos mismos métodos para llegar a la solución del problema del anexo J; aun cuando este presenta un contexto y una estructura diferente al problema de la fase XII.

En general, los resultados fueron satisfactorios; pues el 75% de los estudiantes llegó a la solución correcta del problema mediante la aplicación de alguno de los métodos de solución válidos. Para ello, analizaron el problema, detectaron la dificultad que este presentaba y, posteriormente, intuyeron y aplicaron alguno de los métodos de solución válidos.

El método más aplicado fue el de reinterpretar dos eventos que poseen alguna relación de dependencia entre sí, de tal modo que se conciben como un único evento; esto implica contar el número de posibilidades como pueden resultar ambos eventos en secuencia. Este procedimiento se aplicó durante la instrucción para contar el número de RFCs. Por su parte, el segundo método más empleado fue el de fijar una variable con el propósito de descomponer el problema original en dos subproblemas más simples. Este último método fue referido durante la fase XII, aunque no fue aplicado como tal.

En conclusión, los estudiantes fueron capaces de intuir y aplicar los métodos propuestos durante la fase XII para resolver el problema del anexo J. En términos de Fischbein (1975), los métodos intuidos durante la fase XII sirvieron a los estudiantes como *modelos generativos*; es decir, modelos que pueden ser intuidos, adaptados y aplicados para solucionar problemas semejantes al problema original sobre el que fueron propuestos, aunque diferentes en su contexto y en su estructura.

6.1.3 Conclusiones del tercer problema de evaluación

El tercer problema de evaluación (anexo K) también fue diseñado para que los estudiantes aplicaran el principio fundamental del conteo. A diferencia del problema del anexo J, el del anexo

K sí puede y debe resolverse con una aplicación inmediata del principio; es decir, sin la necesidad de reinterpretar los eventos, ni tampoco de fijar variables.

La dificultad en este problema radica en que los estudiantes deben analizarlo de forma cuidadosa para identificar cuáles son los eventos sobre los que se requiere aplicar el principio fundamental, y no dejarse llevar por la intuición más inmediata; al menos no sin antes evaluar si el método de solución intuido es válido o no.

Los resultados de la evaluación de este problema fueron deficientes, pues tan sólo el 39% de los estudiantes llegó a la solución correcta del problema. En este caso, la mayoría de los errores refieren a una misma intuición errónea por parte de los estudiantes (el 63% de los métodos inválidos). El error consistió en la asignación intuitiva de los eventos sobre los cuales se aplicó el principio fundamental del conteo; esto sin llevar a cabo una evaluación del método que permitiera concluir su invalidez.

En conclusión, la mayoría de los errores detectados en el problema del anexo K (al menos el 63% de los errores) refieren a una evaluación deficiente, incluso nula, de los métodos de solución aplicados; los cuales refiere a la misma intuición errónea. Esta intuición también refiere a la interpretación equívoca de la multiplicación 20×3 en el contexto del problema; cuya verdadera solución está dada por la potenciación $20^3 = 20 \times 20 \times 20$.

6.1.4 Conclusiones generales de la evaluación

De forma general, se concluye que los alumnos fueron capaces de intuir y aplicar los métodos de solución propuestos durante la instrucción; esto en problemas análogos a aquellos para los que fueron propuestos, aunque diferentes en su contexto y estructura. Respecto al primer problema de evaluación (anexo H), los alumnos fueron capaces de interpretar las operaciones implicadas al resolver una regla de tres (una división y una multiplicación). Respecto al segundo problema de evaluación (anexo J), los estudiantes detectaron la dificultad que este problema presentaba y fueron capaces de intuir y aplicar métodos de solución análogos a los que se propusieron y discutieron durante la instrucción.

En lo que refiere al aprendizaje del principio fundamental del conteo, se concluye que los estudiantes comprendieron el principio, sus fundamentos, y fueron capaces de aplicarlo para solucionar problemas de conteo; incluso en situaciones que suponen la existencia de dos o más eventos con alguna relación de dependencia entre sí.

Sin embargo, también se demostró que los estudiantes no están exentos de cometer errores de intuición como los detectados en la evaluación del problema del anexo K; esto en contraste con los resultados obtenidos en la evaluación del problema del anexo J que fueron satisfactorios. Es por esta razón que se debe llevar a cabo un proceso de evaluación sobre cualquier método de solución intuido; esto con el fin corroborar la validez (o invalidez) del mismo.

Es de destacar que menos de la mitad del grupo (apenas el 39%) llegó a la solución correcta del problema del anexo K; esto en comparación con el 75% del grupo que tuvo éxito al resolver el problema del anexo J, aun cuando este último requiere la aplicación de algún método de solución más complejo.

6.2 IMPLICACIONES DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Para concluir la presente tesis se analizarán y discutirán las implicaciones de la propuesta. Para ello, se realizará un análisis de la propuesta de enseñanza-aprendizaje y se compartirán algunas ideas que permitirán mejorarla; esto con base en los resultados de la evaluación y en las observaciones realizadas durante la instrucción. También se discutirá cómo podría enriquecerse con la integración de los demás temas del análisis combinatorio.

6.2.1 ¿Cómo mejorar la propuesta de enseñanza-aprendizaje?

De acuerdo con lo observado durante la instrucción y en los resultados de la evaluación, es deseable hacer algunos ajustes a la propuesta. Para esto, se tomará como referencia el cuadro introducido en la subsección 3.1.5 (véase el capítulo 3); donde el autor de la presente tesis propuso cuatro puntos que deben guiar la enseñanza-aprendizaje del análisis combinatorio.

Promover la reflexión sobre el uso de las operaciones básicas

El propósito de la primera sesión fue, entre otras cosas, fomentar un pensamiento reflexivo entre los estudiantes sobre el uso e interpretación que se da a la operación división en múltiples contextos la vida cotidiana. Esta refiere a dos casos:

1) Dividir un número natural $\boldsymbol{a}$ entre otro $\boldsymbol{b}$ (diferente de cero) para partir la cantidad $\boldsymbol{a}$ en un número $\boldsymbol{b}$ de partes iguales. El cociente de la división refiere a la cantidad que conformará a cada una de las partes.
2) Dividir un número natural $\boldsymbol{a}$ entre otro $\boldsymbol{b}$ (diferente de cero) para comparar ambas cantidades, y cuyo cociente equivale al número de veces que cabe la segunda cantidad dentro de la primera.

La división se aplica en el sentido del inciso 1 cuando se desea partir una cantidad en partes iguales, o bien, cuando quiere repartir los elementos de un conjunto de forma equitativa. Por otra parte, se aplica la división en el sentido del inciso 2 cuando lo que se quiere es comparar una cantidad en relación con otra, o bien, cuando se desea agrupar los elementos de un conjunto en subconjuntos iguales entre sí y con un número determinado de elementos.

A partir de dos ejemplos definidos sobre situaciones cotidianas, los estudiantes eligieron las expresiones ‘partir’, ‘distribuir equitativamente’ y ‘formar conjuntos’ para referirse al caso del inciso 1; mientras que usaron la palabra ‘agrupar’ para referirse caso del inciso 2. Una palabra más adecuada para describir el caso del inciso 2 es ‘comparar’, pues esta palabra describe mejor las situaciones donde se aplica la división en dicho sentido.

Durante la instrucción, los estudiantes analizaron y comprendieron la diferencia entre ambos casos a partir de situaciones y contextos específicos. Sin embargo, es deseable que también analicen esa diferencia desde un contexto puramente matemático. Aquí conviene recordar que durante la instrucción, un alumno sugirió que la diferencia entre los incisos 1 y 2 se debe a la propiedad conmutativa de la multiplicación. Aunque esto último no se analizó durante la sesión, la observación del alumno es, en cierto modo, acertada.

Recuerde que la multiplicación de dos enteros positivos, digamos $a \times b$, es el resultado de sumar b veces el número a; donde b recibe el nombre de multiplicador y a el de multiplicando. La propiedad conmutativa establece que, al multiplicar dos números, es indistinto quién de ellos sea el multiplicador y quién el multiplicando. En el texto del anexo A se da una demostración intuitiva de esta propiedad.

Un elemento que conviene añadir a la propuesta es analizar y diferenciar los incisos 1 y 2 con base en los componentes de la multiplicación. Así, la diferencia entre ambos incisos es que en el inciso 1 se divide para calcular un multiplicando; es decir, el número que cabe exactamente $\boldsymbol{b}$ veces en el número $\boldsymbol{a}$. Por otra parte, en el caso del inciso 2 se divide para calcular un multiplicador; es decir, el número exacto de veces que cabe $\boldsymbol{b}$ dentro de $\boldsymbol{a}$.

Como la división es la operación opuesta a la multiplicación, y tomando en cuenta que la multiplicación es una operación conmutativa, la división puede concebirse como una operación con dos fines distintos; por un lado, permite calcular un multiplicando cuando se conoce el multiplicador y el producto y, por el otro lado, también sirve para calcular un multiplicador a partir del multiplicando y del producto. Esta observación debe hacerse explícita desde el contexto de las matemáticas puras, a fin de que los estudiantes desarrollen un pensamiento reflexivo que vaya más allá del intuitivo.

Aquí es importante aclarar que, cuando se sugiere hacer la observación anterior desde el contexto de las matemáticas puras, no significa hacerlo de forma ajena a la realidad; sino apoyarse de un contexto familiar para hacer explícita la observación de que dividir implica calcular un multiplicador que, por la propiedad conmutativa, también es un multiplicando. Al final, será el contexto el que determina si el cociente una división debe interpretarse como un multiplicador o como un multiplicando.

Diseñar problemas contextualizados de conteo que fomenten el análisis en los estudiantes

Los problemas abordados durante la instrucción, así como también los que formaron parte del proceso de evaluación, fueron diseñados tomando en cuenta el contexto social y cultural al que pertenecen los estudiantes; en este caso residentes de la Cd. de México. Además, dichos problemas fueron diseñados con el propósito de desarrollar en los estudiantes su capacidad de análisis; así como su intuición.

Uno de los aspectos a tomar en cuenta cuando se diseñan problemas de conteo, es que estos sean lo más reales posibles con base al contexto personal, social y profesional de los estudiantes; esto sin perder de vista el tipo de análisis e intuiciones que se desea que desarrollen. Para ello, se debe elegir un nivel de dificultad adecuado y acorde con los conocimientos previos que, se tenga la absoluta certeza, poseen los estudiantes.

Recuerde que durante la fase XII se propuso el problema de calcular el número de RFCs diferentes que pueden emitirse; este se definió a partir de un modelo erróneo para obtener el RFC de un ciudadano mexicano a partir de sus datos personales (nombre completo y fecha de nacimiento) y el cual difiere parcialmente del modelo correcto. Se sugiere que, en caso de implementar la propuesta aquí presentada, el problema sea planteado utilizando el modelo correcto; en tal caso, el procedimiento de solución será análogo al que se aplicó durante la fase XII (véase el capítulo 5).

Fomentar el desarrollo de intuiciones secundarias en los estudiantes

El problema que se trabajó durante la fase XII, en el cual se plantea calcular el número de RFCs posibles que pueden emitirse, se diseñó con el propósito de que los estudiantes intuyeran y aplicaran algún método de solución generalizable y aplicable a otras situaciones análogas; aunque diferentes en su contexto y estructura.

Para resolver el problema de los RFCs, el profesor guio la instrucción con el fin de que los estudiantes detectaran las dificultades del problema y, posteriormente, intuyeran y aplicaran algún método de solución válido. En lo que a este problema refiere, los estudiantes propusieron dos métodos válidos. Al final, se optó por aplicar el método más práctico de acuerdo a la estructura del problema.

El primero de los métodos consiste en reinterpretar dos o más eventos que poseen alguna relación de dependencia, de tal modo que estos se conciban como un único evento. Por otra parte, el segundo consiste en fijar los valores posibles de uno de los eventos; es decir, se fijan una o más variables con el propósito de descomponer el problema original en dos o más problemas con menor grado de complejidad.

La evaluación de la segunda sesión se conformó por dos problemas (anexos J y K), uno de los cuales es similar al problema de los RFCs; aunque difiere en su contexto y estructura. En general se observó que, para resolver el problema del anexo J, los estudiantes fueron capaces de intuir y aplicar procedimientos análogos a los que se propusieron para resolver el problema de los RFCs. En términos de Fischbein (1975), los métodos propuestos durante la instrucción sirvieron como modelos generativos a los estudiantes.

La planeación original de la segunda sesión (véase el anexo G) comprende un segundo problema que, por razones de tiempo, no fue implementado. Se espera que este problema permita desarrollar en los estudiantes un tipo de intuición diferente al que se desarrolló con el problema de los RFCs. El problema está basado en un sistema de seguridad real para acceder a los servicios en línea de una institución bancaria; sistema que solicita a los usuarios crear una contraseña cuyos caracteres contengan al menos una letra y por lo menos un dígito. Para contar el número de contraseñas posibles, se deben emplear los diagramas de Venn y observar cómo se determina la cardinalidad de la unión de dos conjuntos; temas que pertenecen a la teoría de conjunto.

El problema arriba referido muestra cómo la teoría de conjuntos también sirve como una herramienta para el estudio del análisis combinatorio; cabe destacar que tanto la teoría de conjuntos como el análisis combinatorio son de relevancia en el estudio de la estadística y la probabilidad. Es posible que la implementación del problema antes descrito permita desarrollar otro tipo de intuiciones en los estudiantes.

Solicitar a los alumnos que argumenten la validez de cualquier método de solución intuido

Los resultados obtenidos en el tercer problema de evaluación (anexo K) mostraron que los estudiantes no están exentos de intuir y aplicar algún método de solución inválido bajo las condiciones de un problema determinado. Si bien la intuición juega un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, también es cierto que esta debe trabajar de forma articulada con la razón; esto con el fin de evitar errores.

Por la razón anterior, los estudiantes deben ser capaces de evaluar cualquier método de solución intuido; a fin de dictaminar si el método es o no válido bajo las condiciones definidas por el problema. Esto es especialmente importante en el caso del análisis combinatorio, por lo que es conveniente proponer y enseñar a los estudiantes algún método fiable con el cual puedan evaluar si un procedimiento es válido o no.

Una forma de hacerlo es asignando resultados arbitrarios a cada uno de los eventos sobre los que se desea aplicar el principio fundamental del conteo; esto con el fin de asegurarse de que se contarán todas las posibilidades consideradas por el problema, y evitando caer en el error de contar dos o más veces una misma posibilidad.

Lo anterior se realizó de forma implícita durante la fase XII de la segunda sesión cuando una alumna argumento que, para calcular el número de RFCs posibles, no es válido suponer que todos los meses poseen 30 días; pues se contarían posibilidades que no existen en el calendario, como sería la fecha del 30 de febrero que no existe. Asignar resultados arbitrarios a los eventos permite detectar casos que están fuera del rango de posibilidades, así como también permite detectar aquellas posibilidades que se contarían de manera repetida.

El método antes descrito podría introducirse durante la instrucción y convendría retomarlo en una retroalimentación sobre la evaluación. Aquí conviene mencionar que, en lo que refiere a la implementación de la propuesta, no se tuvo el tiempo para realizar retroalimentación con los estudiantes sobre los resultados evaluación.

Pese a lo anterior, se recomienda destinar un tiempo de retroalimentación donde los estudiantes analicen los errores que cometieron durante la evaluación y realicen las modificaciones adecuadas a sus métodos originales; esto con el fin de que cada uno logre llegar a la solución correcta del problema por sus propios medios. Para ellos es importante que los estudiantes sean capaces de identificar y analizar tanto sus errores y los errores de sus compañeros.

6.2.2 ¿Cómo enriquecer la propuesta de enseñanza-aprendizaje?

La propuesta aquí desarrollada pasó por constantes modificaciones desde su concepción, hasta su diseño e implementación. El plan original fue el de diseñar una propuesta de enseñanza-aprendizaje que cubriera la totalidad de contenidos del análisis combinatorio comprendidos en los programas de estudio de las materias de Temas Selectos de Matemáticas y Estadística y Probabilidad de la ENP.

Sin embargo, debido al tiempo dispuesto para su diseño e implementación, la propuesta se acotó al tema del principio fundamental del conteo, sus fundamentos teóricos, y a la resolución de problemas mediante la aplicación de dicho principio. No obstante, se espera que la propuesta también sirva como modelo para diseñar e implementar secuencias didácticas referentes a los temas de *ordenaciones sin repetición* y *combinaciones*. Para ello, se sugiere tomar en cuenta los cuatro puntos descritos en el cuadro de la subsección 3.1.5 (capítulo 3).

Ahora bien, aunque el tema de ordenaciones sin repetición no fue implementado, sí se llegó a la etapa de edición de un texto que sirva a los estudiantes como una introducción al tema; texto cuya lectura podría encomendarse a los estudiantes bajo el modelo de aula invertida. Dicho texto puede consultarse en el anexo C.

También se concibió el diseño de un texto para introducir el tema de combinaciones sin repetición; aunque no se llegó a la etapa de edición. De llevarse a cabo como parte de un proyecto futuro, sería conveniente limitar su contenido a la noción de ‘combinación’; última que debe diferenciarse del concepto de ‘ordenación’ contrastando ejemplos contextualizados. Como un punto adicional deberá explicar por qué el principio fundamental del conteo no permite calcular de forma directa el número de combinaciones que se forman a partir de un conjunto dado.

Desde la perspectiva del autor de la presente tesis, no convendría introducir en el texto la fórmula para calcular el número de combinaciones; pues deducir la fórmula es por sí mismo un problema combinatorio complejo que los estudiantes deberían resolver con la guía del docente. Desde luego, este problema debe plantearse a partir de situaciones del contexto personal, social, cultural y profesional de los estudiantes.

REFERENCIAS

Apostol, T. M. (1984). *Introducción a la Teoría Analítica de Números* (José Plá Carrera trad.). España: Reverté.

Ausubel, D. P. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning*. New York, Grune and Stratton

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: a cognitive view*. New York, Holt, Rinehart and Winston.

Baker, J. W. (2000). The "Classroom Flip": Using Web course management tolls to become the guide by the side. En J. A. Chambers (Ed.), Selected Papers from the 11th International Conference on College Teaching and Learning (pp. 9-17). Jacksonville, FL: Florida Community College de Jacksonville.

Bergmann, J. y Sams, A. (2012). Flip your classroom: Reach every student in every class every day. EUA: International Society for Technology in Education (ISTE), Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Bishop, A. (2000). Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos? *Matemáticas y educación: Retos y Cambios desde una perspectiva internacional*, Vol. *154*, 35-56.

Correa, M. (2015). Flipping the foreign language classroom and critical pedagogies: A (new) old trend. En *Higher Education for the Future*, *2* (2), 114-125.

Crespo, C. (2008). Intuición y razón en la construcción del conocimiento matemático. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 21. 717-727.

Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. En *Revista electrónica de investigación educativa*, *5*(2), 1-13.

Dubois, J. G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. En *Educational Studies in Mathematics*. v. 15, n. 1, pp. 37-57.

Fallahi, C. R. (2011). Using Fink´s Taxonomy In Curse Design. En *Observer* Vol. 24, No. 7. Recuperado el 5 de junio del 2019 de https://www.psychologicalscience.org/observer/using-finks-taxonomy-in-course-design

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E., Pampu, I. y Minzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. En E. Fischbein (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una "educación matemática realista". En *Matemáticas y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 151-168). Graó.

Hernández, G. (1998). *Paradigmas en psicología de la educación.* México: Paidós.

INEE (2017). *Resultados Nacionales de Planea Educación Media Superior 2017*. Recuperado el 29 de abril del 2019 de http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P2/A/328/P2A328.pdf

Inhelder, B. y Piaget, J. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente: Ensayo sobre la construcción de las operaciones combinatorias formales* (María Teresa Cevasco trad.). España: Paidós (Obra original publicada en 1955).

Jordán, C., Pérez, M. J. y Sanabria, E. (2014). Investigación del impacto en un aula de matemáticas al utilizar flip education. En *Pensamiento matemático* (Vol. 4, No. 2, pp. 9-22). Universidad Politécnica de Madrid.

Kline, M. (1990). *El fracaso de la matemática moderna: por qué Juanito no sabe sumar* (Santiago Garma, trad. 2ª ed.). México: Siglo XXI Editores. (Obra original publicada en 1973).

Kunen, K. (1980). *Set Theory: An Introductión to Independence Proofs.* Países Bajos: Elsevier Science Publishers.

Lage, M. J., Platt, G. J., y Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. En *The Journal of Economic Education*, *31*(1), 30-43.

Lestón, P. (Ed.). (2008). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 21. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Recuperado el 29 de abril del 2019 de http://clame.org.mx/uploads/actas/alme21.pdf

Mazur, E. (1997). *Peer instruction: A user's manual*. EUA: Prentice Hall.

Melusova, J., y Vidermanova, K. (2015). Upper-secondary students' strategies for solving combinatorial problems. En *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *197*, 1703-1709.

Moreira, M. A. (1997). *Aprendizaje Significativo: Un Concepto Subyacente* (Mª Luz Rodríguez Palmero trad.). Recuperado el 11 de junio del 2019 de https://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigsubesp.pdf

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. En *Educación matemática*, *8*(01), 26-39.

OCED (Sin fecha). *El programa PISA de la OCDE: Qué es y para qué sirve.* Recuperado el 29 de abril del 2019 de https://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf

OCED (2016). Nota País – Resultados de PISA 2015: México. Recuperado el 29 de abril del 2019 de http://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La génèse de l´idée de hasard chez l´enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1997). *Psicología del niño* (Alfonso Luis Hernández trad. 14ª ed.). España: Morata. (Obra original publicada en 1966).

Programa de Estudios de Estadística y Probabilidad I y II (Sin fecha). Universidad Nacional Autónoma de México, Colegio de Ciencias y Humanidades. Recuperado el 24 de enero del 2019 de https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/plan_estudio/mapa_estadistica.pdf

Programa: Estadística y Probabilidad (2018). Universidad Nacional Autónoma de México, Escuela Nacional Preparatoria. Recuperado el 5 de septiembre del 2018 de http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/actualizados/sexto-2018/1712_estadistica_y_probabilidad.pdf

Programa: Temas Selectos de Matemáticas (2018). Universidad Nacional Autónoma de México, Escuela Nacional Preparatoria. Recuperado el 5 de septiembre del 2018 de http://dgenp.unam.mx/planesdeestudio/actualizados/sexto-2018/1710_temas_selectos_matematicas.pdf

Roa, R., Batanero, C. y Godino, J. D. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. En *Educación Matemática*, *15* (2), 5-25.

Roa, R., Navarro-Pelayo, V. y Batanero, C. (2001). Antecedentes y estado actual de la investigación en resolución de problemas en el campo de la combinatoria elemental. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, (14), 159-178.

Sastre, M. del, Panella, E (2008) Dificultades para el aprendizaje de matemática discreta. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 21. 507-516.

Zarzar, C. (2009). *10 habilidades básicas para la docencia.* México. Ed. Patria.

Zarzar, C. (2010). *Planeación didáctica por competencias*. México. Instituto Didaxis.

ANEXO A

CAPÍTULO 1:

Dos operaciones básicas para la vida

Introducción

Uno de nuestros primeros aprendizajes de aritmética, justo después de aprender a contar con los dedos, fueron las operaciones básicas: la suma, la resta, la multiplicación y la división. Estas operaciones nos han acompañado en nuestra vida diaria desde la primaria, y las ocupamos casi a diario sin darnos cuenta. Cuando vamos al cine, por ejemplo, calculamos con anterioridad cuánto dinero vamos a gastar entre las entradas, los dulces, e incluso, el transporte, a modo de saber cuánto dinero llevar, más algo extra para no irnos limitados.

Este capítulo está dedicado a repasar algunas propiedades referentes a dos de las operaciones más importantes: la multiplicación y la división. Esto lo haremos limitándonos al caso de los números naturales, es decir; los números que ocupamos en la vida cotidiana para contar:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \text{etc.}$$

La razón por la cual hemos decidido repasar estos temas que resultan ser muy básicos, es por la gran relevancia que tienen estas dos operaciones en los problemas de conteo, que son los que nos importan para el presente texto.

Espero que, más allá de ser un repaso, encuentres una nueva forma de ver aquello que ya habías aprendido con anterioridad.

La multiplicación

Recuerdas cuando estabas en 1° de primaria y te torturaban con las tablas de multiplicar. Probablemente fue una de las misiones más difíciles a las que te enfrentaste a tus escasos seis o siete años de edad, y apuesto a que la tabla del 7 fue un verdadero reto.

La multiplicación, como recordarás, se trata de una suma abreviada. Por ejemplo, multiplicar 7×5 equivale a sumar 5 veces el número 7:

$$7 \times 5 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$$

En el ejemplo anterior, el 7 se llama **multiplicando**, mientras que el 5 recibe el nombre de **multiplicador**. Dicho de otra forma, en una multiplicación, el multiplicador nos indica cuantas veces debemos de sumar el multiplicando.

Con el paso del tiempo, aprendiste la importancia de multiplicar, incluso cuando nos auxiliamos de una calculadora. Piensa en el siguiente caso: tú y tu familia deciden comer quesadillas, y entre todos consumen un total de 17 quesadillas, cada una con un costo de $12. Te imaginas cuánto tiempo le tomaría al encargado calcular la cuenta de tu consumo si en la calculadora tecleara una suma en lugar de una multiplicación. Desde luego, resulta más práctico teclear "12×17=" que teclear la suma de 17 veces el número 12:

"12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12+12="

Más adelante aprendiste que, al multiplicar dos o más números, "el orden de los factores no altera el producto", esa frase que tus profesores te repetían una y otra vez, al punto de encontrarla hasta en la sopa de letras. Sin embargo, ¿te has preguntado por qué esto último es cierto para todos los casos? En las siguientes dos secciones explicaremos por qué dicha afirmación es siempre verdadera, siendo esta una consecuencia directa de dos propiedades más sencillas: la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa de la multiplicación.

La propiedad conmutativa de la multiplicación:

La primera propiedad de la multiplicación es la propiedad conmutativa. Te imagino ahora mismo diciendo en tu mente "¿Conmuta qué?". Descuida, son sólo términos que los matemáticos usan para referirse a una de las propiedades más importantes que presentan algunas operaciones, como es el caso de la suma y la multiplicación. De hecho, se trata de una propiedad que conoces bien.

La propiedad conmutativa nos dice que, si multiplicas dos números, es indistinto si multiplicas el primero por el segundo, o bien, el segundo por el primero. Por ejemplo, si quieres multiplicar los números 12 y 5, es lo mismo 12 veces el número 5, que 5 veces el número 12:

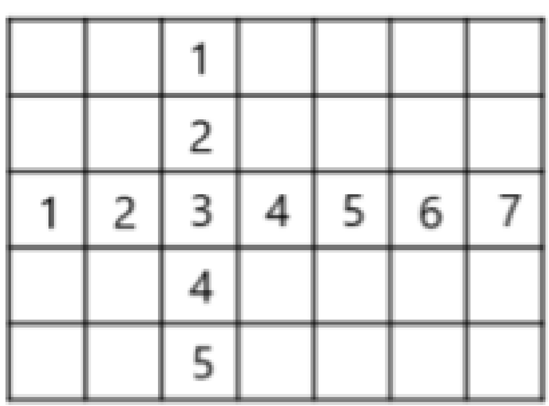
$$12 \times 5 = 12+12+12+12+12 = 60$$

$$5 \times 12 = 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5 = 60$$

En general, cuando multiplicas dos números, es indistinto a quién tomes como el multiplicador, y a quién como el multiplicando.

Con el tiempo, la experiencia te enseñó que la propiedad conmutativa de la multiplicación es cierta, pero ¿te has preguntado por qué? Si lo piensas con cuidado, no parece obvio a simple vista. Sin embargo, existe una forma visual de comprobarla. Tomemos un ejemplo particular, digamos la multiplicación de 5 y 7, también consideremos el siguiente rectángulo:

Cada columna tiene 5 cuadrados



Cada fila tiene 7 cuadrados

El rectángulo anterior está compuesto por 5 filas (horizontales) de 7 cuadrados cada una, y podemos obtener el número total de cuadrados resolviendo la multiplicación $7 \times 5 = 7+7+7+7+7$, que equivale a sumar el número de cuadrados que hay en cada fila.

Sin embargo, también tenemos 7 columnas (verticales) de 5 cuadrados cada una, por lo que otra forma de calcular el número total de cuadrados es resolviendo la multiplicación $5 \times 7 = 5+5+5+5+5+5+5$, que equivale a sumar el número de cuadrados que hay en cada columna.

De esta forma 7×5 y 5×7 son dos operaciones distintas que nos mandan a un mismo resultado: el número de cuadrados que componen el rectángulo.

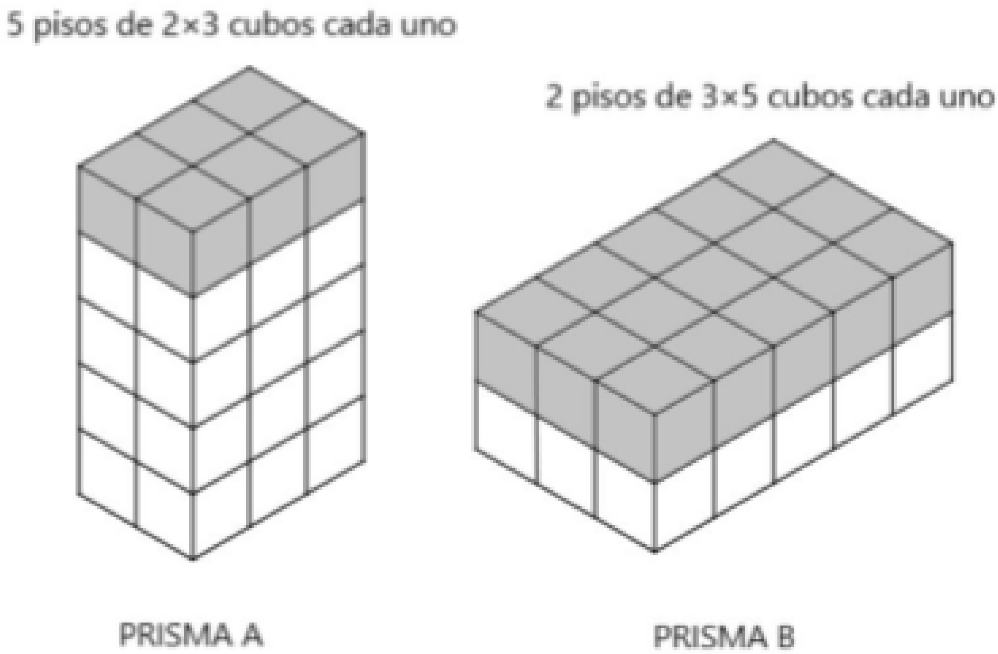
El argumento del párrafo anterior se puede aplicar para dos números naturales cualesquiera, y esta es la razón por la cual la propiedad conmutativa siempre es cierta.

La propiedad asociativa de la multiplicación

La segunda propiedad de la multiplicación es la propiedad asociativa, la cual explicaremos a continuación. Supongamos que deseamos multiplicar los números 2, 3 y 5. Podemos hacerlo en diferente orden, por ejemplo, primero multiplicar $2 \times 3 = 6$ y luego multiplicar el resultado por 5, es decir; $6 \times 5 = 30$, o bien, multiplicar primero $3 \times 5 = 15$ y luego multiplicar el resultado por 2, o sea; $2 \times 15 = 30$.

Como podemos observar con el ejemplo anterior, resulta indistinto el orden en que multiplicamos los tres números. En general, la propiedad asociativa nos dice que, al multiplicar tres o más números, es indistinto el orden en que resolvemos la multiplicación.

Para ilustrar por qué dicha propiedad es cierta, tomemos el ejemplo anterior y consideremos los siguientes prismas rectangulares.



Como te darás cuenta, ambos prismas son iguales entre sí, con la diferencia que están parados sobre una cara distinta. Pensemos en ellos como si fueran edificios, donde cada cubo es una habitación en él. Si fijamos nuestra atención en sólo uno de los edificios, es claro que todos sus pisos tienen el mismo número de habitaciones. De este modo, si queremos calcular cuántas habitaciones hay en ese edificio, primero calculamos cuantas habitaciones hay en cada piso (largo por ancho), y luego multiplicamos por el número de pisos del edificio (la altura).

En el edificio de la izquierda (prisma A) cada piso tiene 2×3=6 habitaciones (2 a lo ancho y 3 a lo largo), y luego multiplicamos por el número de pisos (5 pisos de altura), obteniendo un total de 6×5=30 habitaciones.

Para el edificio de la derecha (prisma B), cada piso tiene 3×5=15 habitaciones (3 a lo ancho y 5 a lo largo), y luego multiplicamos por el número de pisos (2 pisos de altura), obteniendo un total de 15×2=30 habitaciones.

De este modo, al calcular el número de cubos que compone el prisma rectangular, no importa el orden en que realizamos las multiplicaciones, siempre llegaremos al mismo resultado final, que es el número total de cubos que lo compone.

En general, si queremos multiplicar tres números cualesquiera, podemos construir un prisma rectangular cuyas dimensiones a lo largo, ancho y alto correspondan con los números que deseamos multiplicar, y dado que el resultado de la multiplicación siempre será el número total de cubos, resulta indistinto el orden para resolver la multiplicación entre dichos números.

Esta propiedad también es cierta para cuando multiplicamos cuatro, cinco, seis, siete, o cualquier cantidad de números, pero justificar lo anterior requiere adentrarnos con ciertos detalles técnicos que, por ahora, es mejor evitar.

La división como operación inversa de la multiplicación

Sin duda alguna, la operación más complicada que aprendimos durante la primaria fue la división, pues el proceso implicaba multiplicar, sumar y restar. En ese sentido, las calculadoras suelen ahorrarnos mucho tiempo. Esta sección no está dedicada al repaso del algoritmo de la división, sin embargo, sí tiene como propósito profundizar sobre los fines prácticos de dicha operación, esto desde la perspectiva de los números naturales.

Cuando piensas en dividir, es probable que lo primero que se te viene a la mente es repartir algo de forma igualitaria. Demos un ejemplo, supongamos que tú y tres de tus compañeros realizan un trabajo en equipo, para el cual gastan $84 en los materiales necesarios. Para repartirse el gasto de forma igualitaria, dividen la cantidad a pagar entre el número de integrantes, es decir; 84/4=21 y el resultado obtenido es lo que a cada integrante le toca pagar ($21) para cubrir el costo total del material.

En la operación anterior, al número que será dividido en partes iguales se llama ***dividendo*** ($84), el número que nos dice en cuantas partes iguales vamos a dividir se llama ***divisor*** (4 integrantes del equipo), y finalmente, al número de unidades que tendrá cada una de las partes lo llamamos ***cociente*** ($21), siendo este último el resultado de la división realizada.

Lo anterior significa que, si cada uno de los 4 integrantes del equipo paga su parte de $21, se cubrirá el total del costo del material, pues sabemos que:

$$21 + 21 + 21 + 21 = 84, \;\; o\ bien \;\; 21 \times 4 = 84$$

En otras palabras, la división 84/4=21 significa que el número 21 cabe 4 veces en el número 84, o bien; **que el número 4 cabe 21 veces en el número 84**, esto último por la propiedad conmutativa de la multiplicación (4 veces 21 es lo mismo que 21 veces 4).

De forma general, dividimos 84 (dividendo) entre 4 (divisor) para saber cuántas veces cabe el número 4 en el 84, o bien, para encontrar el número que cabe 4 veces en el 84. Dicho número es 21 (el cociente de la división).

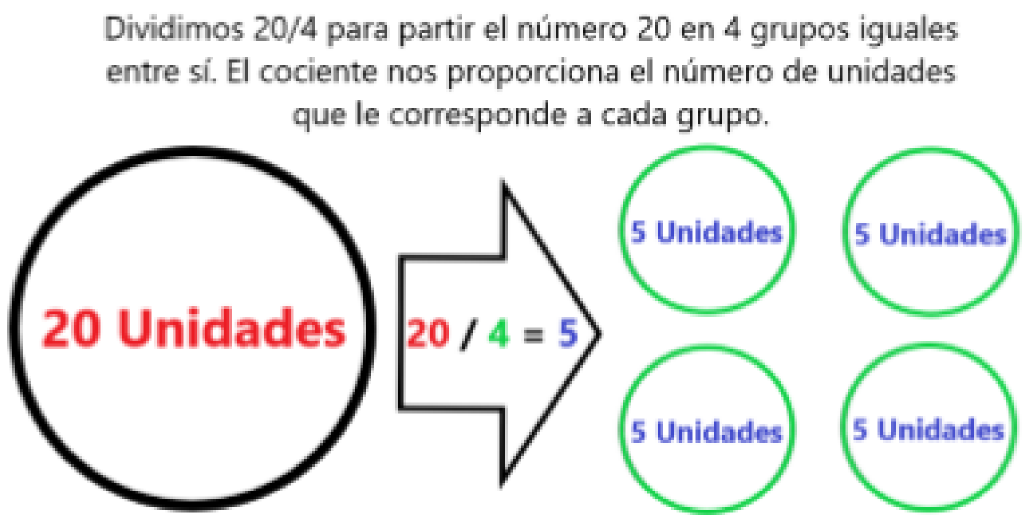
Esto último nos muestra la estrecha relación que existe entre la multiplicación y la división, y el por qué se dice que la segunda es la operación inversa (u opuesta) de la primera.

Así, por ejemplo, podemos decir que la división 84/4=21 es la operación inversa de la multiplicación 21×4=84.

Dos usos prácticos de la división

En la vida cotidiana, la división tiene múltiples usos y/o aplicaciones, las cuales podemos clasificar en los dos casos siguientes:

Caso #1. Es cuando nos interesa partir una cantidad en un número determinado de partes iguales. En este caso, dividimos dicha cantidad (dividendo) entre el número de partes a dividir (divisor) para conocer cuántas unidades le corresponde a cada parte (cociente).



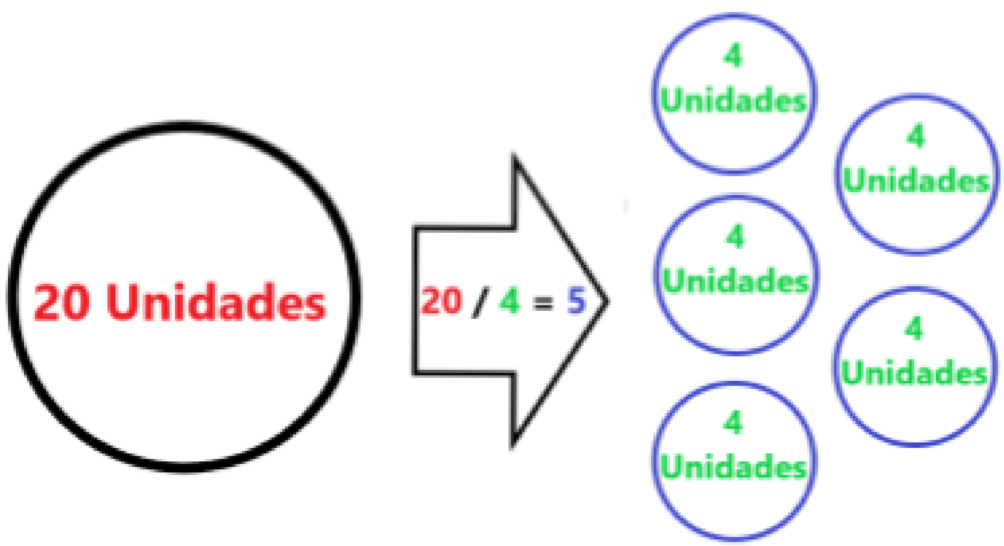
Ejemplo #1:

Imagina que vas a la tienda "El palacio de Acero" y compras unos pantalones con un costo de $1380 a 12 mensualidades sin intereses (e iguales entre sí). Para conocer cuanto debes pagar por cada mensualidad, tienes que dividir el precio total del pantalón ($1380) entre el número de mensualidades (12), obteniendo que 1380/12=115, es decir; deberás pagar un total de $115 por cada una de las 12 mensualidades.

En el ejemplo anterior, realizas la división 1380/12 para partir la cantidad de $1380 en 12 partes (o grupos) iguales entre sí. El resultado de la división, que es 115, te dice el número de unidades monetarias que le corresponde a cada una de las partes.

Caso #2. Es cuando dadas dos cantidades nos interesa saber cuántas veces cabe una dentro de la otra. En este caso, dividimos la primera cantidad (dividendo) entre la segunda (divisor) y el resultado de la división (cociente) nos dirá cuántas veces cabe la segunda cantidad en la primera. En general, el cociente nos dice cuántas veces cabe el divisor en el dividendo.

Dividimos 20/4 para saber cuántas veces cabe el número 4 en el número 20. El cociente nos proporciona la respuesta.



Otra forma de interpretar el caso #2 es que, dadas dos cantidades, digamos 20 y 4, la división 20/4 nos permite conocer cuántos grupos de 4 objetos (cada uno) pueden formarse con 20 unidades de los mismos. Ilustraremos este caso con el siguiente ejemplo.

Ejemplo #2:

Imagina que vas a una tienda de electrónicos y compras una televisión con un costo de $7440, a mensualidades sin intereses de $310 pesos cada una. Si quieres saber el número de mensualidades que deberás pagar, tienes que dividir el precio de la televisión ($7440) entre lo que deberás pagar por cada mensualidad ($310), obteniendo que 7440/310=24, es decir; pagarías un total de 24 mensualidades (te tomaría dos años pagar la televisión).

En el ejemplo anterior, realizas la división 7440/310 para conocer cuántas veces cabe el número 310 en el número 7440, lo cual te da el número de mensualidades que deberás pagar. En otras palabras, te interesa saber cuántos grupos de $310 (cada uno) puedes formar con los $7440 que cuesta el televisor.

Es muy importante que distingas la diferencia entre los casos #1 y #2, pues en la vida cotidiana te enfrentarás a diversos problemas y/o situaciones que deberás interpretar y resolver con base a los dos casos antes mencionados.

ANEXO B

CAPÍTULO 2:

Contando Contraseñas y Otras Cosas

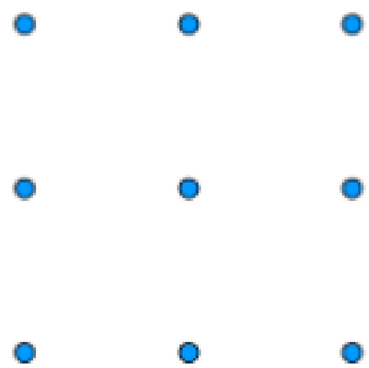
Introducción

Una de las cualidades más importantes que ha desarrollado el ser humano a lo largo de la historia, es su capacidad de contar. En la actualidad, esta actividad es tan común en nuestra vida cotidiana que casi pasa desapercibida ante nosotros. Contamos nuestro dinero para administrarlo correctamente, contamos los días que tenemos de vacaciones para hacer planes, e incluso, contamos a nuestros amores platónicos de la TV.

Contar no es tarea fácil. Por esta razón, las operaciones matemáticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) son una herramienta muy útil, y nos facilita considerablemente la tarea de contar.

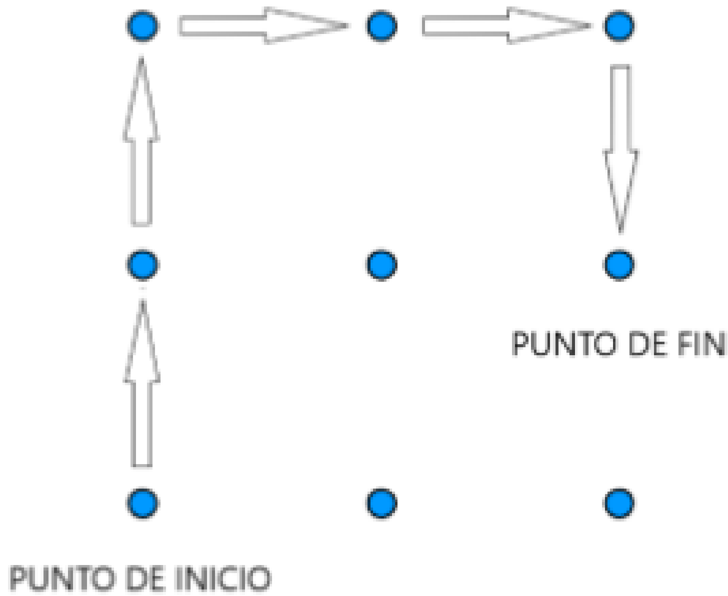
Sin embargo, existen situaciones donde contar requiere de llevar a cabo un análisis profundo de la situación. En particular, en dichas situaciones se requiere emplear técnicas más sofisticadas de conteo, y que van más allá de resolver una única operación elemental.

Daremos un ejemplo de ello. ¿Te parece familiar la siguiente figura de 9 puntos?



Si cuentas con un celular, probablemente notaste que la figura anterior corresponde a la plantilla sobre la cual introduces un patrón, y que sirve como clave de seguridad para tu celular. No obstante ¿Sabías que es mucho más seguro proteger tu privacidad con una contraseña de cuatro letras (por ejemplo: la contraseña "casa") que protegerlo con un patrón de seguridad sobre la plantilla anterior?

Responder a cuestiones como la anterior no es cosa sencilla, pues se requieren de estrategias que permitan identificar y contar un gran número de casos posibles. Por ejemplo, contar cuantos patrones de seguridad existen para la plantilla anterior equivale a contar de cuantas formas pueden enlazarse los puntos de la misma, siguiendo un orden específico, y tomando en cuenta que no es necesario entrelazar todos los puntos. Un ejemplo de patrón es el siguiente:



Como ya te habrás dado cuenta con el caso anterior, contar no siempre se trata de una tarea fácil. Por fortuna, las matemáticas proporcionan distintas estrategias denominadas **técnicas de conteo**, con las cuales podemos realizar este tipo de cálculos.

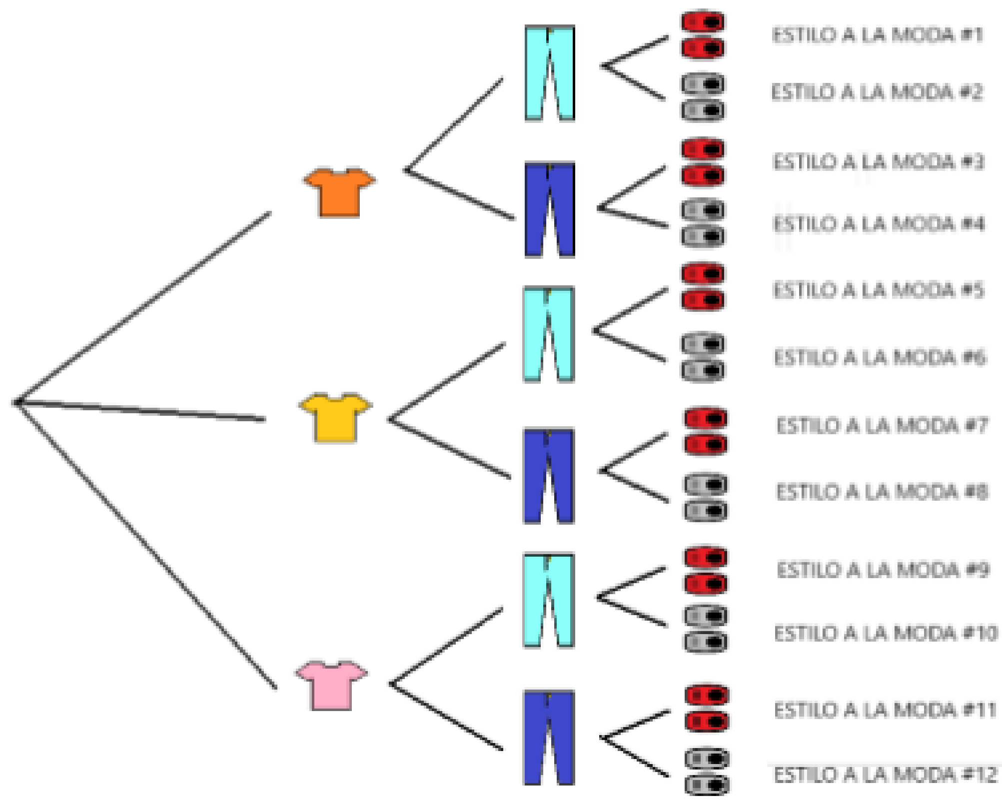
Es importante hacer desde ahora la aclaración que, calcular el número exacto de patrones de seguridad sobre la plantilla antes descrita, es un problema que requiere de herramientas matemáticas que están fuera del alcance del presente texto. Sin embargo, a lo largo de este capítulo y del siguiente, encontrarás las herramientas para verificar que, en efecto, es más seguro proteger tu celular con una contraseña de 4 caracteres, a comparación de protegerlo con cualquier patrón de seguridad.

En este capítulo introduciremos las técnicas de conteo más importantes, que son los diagramas de árbol, el principio fundamental del conteo y la técnica de las casillas. Posterior a ello, utilizaremos las técnicas de conteo para estudiar un tipo de arreglos ordenados denominados **ordenaciones con repetición**. Para adelantarte por dónde va el asunto, un ejemplo de este tipo de arreglos son las contraseñas que introduces para ingresar a tu correo electrónico, así como a las redes sociales. Por su parte, los patrones de seguridad corresponden a otro tipo de arreglos ordenados llamados **ordenaciones sin repetición**, las cuales estudiaremos en un capítulo posterior.

El principio Fundamental del Conteo

Cuando te levantas por la mañana, probablemente la primera pregunta que pasa por tu mente es ¿Qué me voy a poner hoy de vestir? Cuanto abres tu guardarropa, observas que tienes múltiples posibilidades para armar tu conjunto de ropa que usarás (incluyendo la ropa interior).

Vamos a analizar un caso particular. Supongamos que en tu guardarropa tienes tres playeras, cuatro pantalones y dos pares de zapatos (omitamos lo de la ropa interior). Pregunta: ¿De cuantas formas puedes vestirte? Para este caso, debes tomar una secuencia de tres decisiones: primero decides cuál playera te pondrás, luego cuál pantalón y, al final, cuál par de zapatos. A través de un diagrama de árbol podemos conocer de cuántas formas posibles te puedes vestir:

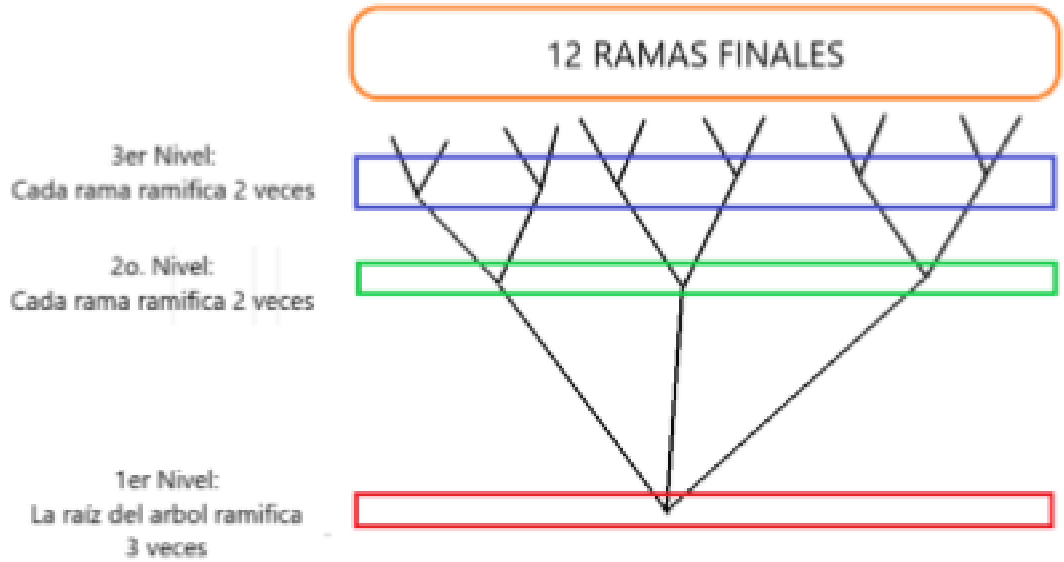


Así, por ejemplo, el estilo a la moda #2 corresponde a usar la playera naranja con pantalón azul cielo y zapatos grises, mientras que el estilo a la moda #7 corresponde a usar la playera amarilla con pantalón azul marino y zapatos rojos. Contando el número de posibilidades que nos da el diagrama observamos que tienes 12 estilos distintos para vestirte.

La construcción de diagramas de árbol es un método útil para contar de cuántas formas puede obtenerse un resultado final que involucra una secuencia de eventos o decisiones, cada una de las cuales puede ocurrir de múltiples formas. Sin embargo, más allá de ser un método útil, en realidad se trata de uno poco práctico, pues, para secuencias de eventos que pueden ocurrir de muchas formas posibles, tomaría bastante tiempo dibujar el diagrama y, en algunos casos, puede que la vida no nos alcance para ello.

Afortunadamente, existen otras técnicas de conteo mucho más prácticas que los diagramas de árbol. En este sentido, el **Principio Fundamental del Conteo** nos proporciona un método más práctico y menos tedioso que dibujar un diagrama de árbol. Sin embargo, para poder aplicarlo, sí se requiere tener una imagen mental (en nuestra imaginación) de cómo se vería el diagrama de árbol, esto si dedicáramos tiempo a la tediosa y poco práctica tarea de dibujarlo.

Antes de enunciar el Principio Fundamental del Conteo, veamos cuales son los fundamentos detrás del mismo, pues es importante comprender cuáles son las condiciones que nos permiten hacer uso de él. Para esto tomemos el diagrama de árbol anterior y démosle un giro de 90° en el sentido contrario de las manecillas del reloj. También retiremos los dibujos de la ropa. De este modo, nos quedara la siguiente figura parecida a un árbol seco:



En el árbol anterior, observamos que de la raíz del árbol se extienden 3 ramas hacia arriba (1er nivel: recuadro rojo), luego cada una de esas ramas resulta en 2 ramas hacia arriba (2° nivel: recuadro verde) y, finalmente, cada una de las anteriores ramifica nuevamente en 2 ramas (3er nivel: recuadro azul).

En general, observamos que tenemos distintos niveles de ramificación, los cuales encerramos en colores. La condición que nos permitirá emplear el principio fundamental del conteo es que, dentro de cada nivel, todas las ramas ramifiquen el mismo número de veces. Por ejemplo, en el 3er nivel, todas las ramas ramifican en 2 ramas nuevas.

No importa que el número de ramificaciones varíe entre un nivel y otro, como ocurre entre el 1er nivel (donde la raíz ramifica en 3 ramas) y en el 2° nivel (donde cada rama ramifica en 2 ramas nuevas).

Aclarado lo anterior, observemos lo siguiente:

1. El número total de ramas que se desprende en el 1er nivel es 3.
2. El número total de ramas que se desprende en el 2° nivel es 3×2=6, pues llegan 3 ramas al 2° nivel, y de cada una se desprenden 2 ramas nuevas.
3. El número total de ramas que se desprende en el 3er nivel es 6×2=12, pues llegan 6 ramas al 3er nivel y cada una de estas ramifica 2 veces.

De este modo, para calcular el número total de ramas finales (las que se desprenden del nivel más alto) debemos resolver la siguiente operación:

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

En el 1er Nivel la raiz ramifica en 3 ramas	En el 2o Nivel cada rama ramifica 2 veces	En el 3er Nivel cada rama ramifica 2 veces	Número total de ramas finales

Regresando al diagrama de árbol original (con la ropa). La operación de arriba se traduce en multiplicar el número de posibilidades que tenemos para la camisa (**3** posibilidades), por el número de posibilidades para los pantalones (**2** posibilidades), y luego por el número de posibilidades para los zapatos (2 posibilidades).

La operación anterior es un ejemplo de aplicación del principio fundamental del conteo, esto para una secuencia de tres eventos. Para este caso particular, el principio anterior puede enunciarse del siguiente modo:

Principio Fundamental del Conteo (para Tres Eventos)

Supongamos que se lleva a cabo una secuencia de tres eventos, de tal modo que el primero puede ocurrir de N_1 formas distintas, el segundo de N_2 formas distintas y el tercero de N_3 formas distintas. El número de formas posibles en que puede resultar la secuencia de los tres eventos está dado por la operación:

$$N_1 \times N_2 \times N_3$$

En el primer diagrama de árbol (el de la ropa), el primer evento representa decidir qué camisa ponerse (N_1=3 posibilidades), el segundo evento es decidir qué pantalones ponerse (N_2=2 posibilidades), mientras que el tercer evento consiste en decidir cuáles zapatos ponerse (N_3=2 posibilidades). De este modo, tenemos $3\times2\times2=12$ estilos a la moda diferentes para vestirnos.

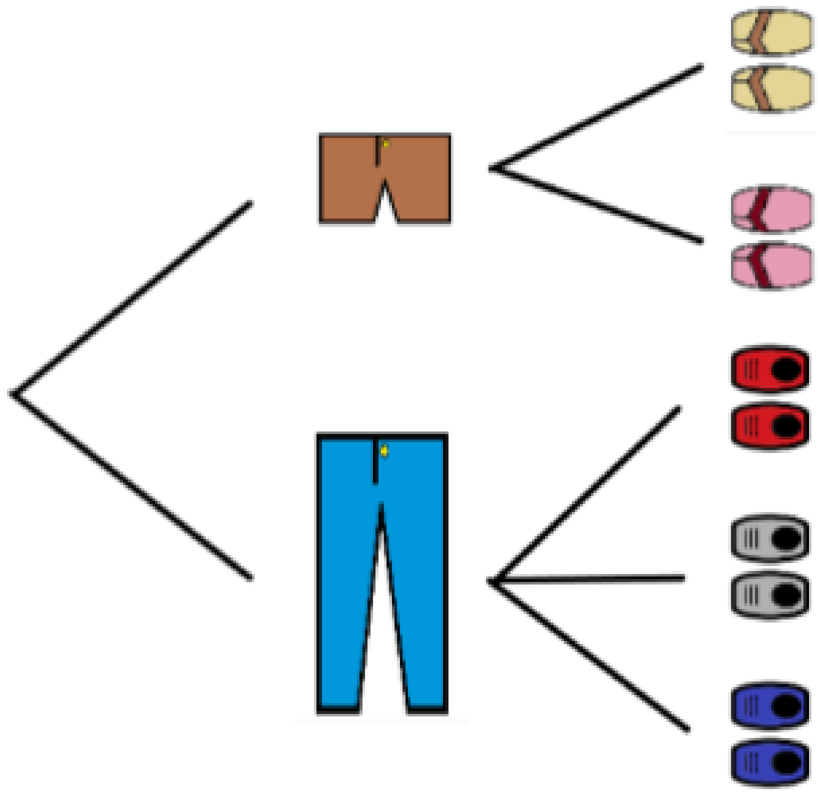
En general, el principio fundamental del conteo puede enunciarse para una secuencia compuesta por cualquier número de eventos. En tales casos, la regla general consiste en multiplicar entre sí el número de posibilidades que hay para cada uno de los eventos.

No hay que perder de vista que, para poder aplicar el principio fundamental del conteo, es fundamental que las ramas del diagrama de árbol tengan el mismo número de ramificaciones dentro de cada nivel (aunque cambie de un nivel a otro). Lo anterior significa que el número de posibilidades para cada evento se debe mantener constante (que no cambie), independientemente de las decisiones o resultados obtenidos en los eventos anteriores.

A continuación se proporciona un ejemplo donde el número de posibilidades de cada evento sí se altera dentro de un mismo nivel y, por lo tanto, no se puede emplear el principio fundamental del conteo a dicho caso.

Supongamos que, para vestirte, tienes un pantalón, un short, tres pares de zapatos y dos pares de huaraches. Decides que, de usar pantalón, te pondrás zapatos. Sin embargo, en el caso de usar short, decides ponerte huaraches ¿De cuántas formas puedes vestirte?

A continuación presentamos el diagrama de árbol para el caso anterior (sí, parece que al autor del presente texto le gusta dibujar ropa):



Del diagrama de árbol anterior, observamos que tienes 5 formas diferentes de vestirte. Pero lo que nos interesa observar aquí es que las posibilidades para elegir el calzado varía dependiendo de si decides usar short o pantalón. Si usas short tienes dos opciones de calzado, mientras que si usas pantalón cuentas con tres opciones de calzado.

De este modo, en un primer evento tienes 2 posibilidades (short o pantalón), pero en el segundo evento, que corresponde a elegir calzado, el número de posibilidades varía entre 2 y 3 dependiendo de lo que hayas elegido en el primer evento. En este caso, no es posible emplear el principio fundamental del conteo.

Ahora que ya conoces los fundamentos que dan sustento al principio fundamental del conteo, procederemos a aplicar dicho principio a situaciones más complejas de la vida real.

La técnica de las casillas

Como vimos en la sección anterior, los diagramas de árbol nos proporcionan un método útil para conocer cuántos resultados finales diferentes podemos obtener de una secuencia de eventos. Sin embargo, también vimos que es un método poco práctico.

Por esa razón, introducimos el principio fundamental del conteo, el cual puede aplicarse para secuencias de eventos donde el número de posibilidades para cada evento no cambia. En este caso, el número total de formas en que puede ocurrir la secuencia de eventos está determinado por multiplicar entre sí el número de posibilidades en que puede ocurrir cada uno de los eventos.

En esta sección introduciremos la técnica de las casillas, cuyo propósito es facilitar la aplicación del principio fundamental del conteo a situaciones más complejas. Esto lo haremos a través del siguiente ejemplo particular:

Ejemplo #1:

Quieres crear una contraseña para tu nueva cuenta de correo electrónico, y el sistema te solicita que la contraseña presente las siguientes características:

a) Debe estar compuesta por 4 caracteres, de tal modo que cada carácter pueda ser una letra minúscula (de la "a" a la "z") o un dígito (del 0 al 9).
b) El primer carácter de la contraseña debe ser una letra minúscula.
c) El último carácter de la contraseña debe ser un dígito.

Pregunta: ¿Cuántas contraseñas diferentes existen que cumplan simultáneamente las condiciones a), b) y c) arriba descritas?

Solución:

Primero que nada, debemos observar que la creación de una contraseña de 4 caracteres podemos interpretarla como una secuencia de 4 eventos, cada uno de los cuales consiste en elegir una letra o dígito.

Para encontrar la solución al problema anterior, lo que haremos es dibujar un esquema de 4 casillas (una por cada evento), del mismo modo como si estuviéramos jugando "ahorcado":

_____ × _____ × _____ × _____ =

1er carácter 2o carácter 3er carácter 4o carácter

Cada una de las casillas anteriores corresponde con un evento. Así, la primera casilla representa la elección del primer carácter de la contraseña, la segunda representa la elección del segundo carácter, y así sucesivamente.

Observamos lo siguiente:

A) Para elegir el primer carácter existen 27 posibilidades, una por cada letra minúscula del alfabeto (esto por el inciso "b" antes establecido).
B) Para el cuarto carácter existen 10 posibilidades, una por cada digito entre el 0 y el 9, y contando al 0 y al 9 (esto por el inciso "c" antes establecido).
C) Tanto para el segundo y tercer carácter existen 37 posibilidades, esto porque pueden ser una letra o un dígito (27 letras + 10 dígitos = 37 posibilidades).

Lo siguiente será escribir en las casillas correspondientes el número de posibilidades que posee el evento al que representa. Después de eso, resolvemos la operación:

$$\underset{\text{1er carácter}}{\underline{27}} \times \underset{\text{2o carácter}}{\underline{37}} \times \underset{\text{3er carácter}}{\underline{37}} \times \underset{\text{4o carácter}}{\underline{10}} = 369{,}630$$

De este modo, por el principio fundamental del conteo, concluimos que hay 369,630 posibilidades de contraseña, cada una de las cuales cumplen, de forma simultánea, las condiciones de los incisos a), b) y c).

Ordenaciones con repetición

Las contraseñas son un tipo de arreglo conocido en matemáticas como **ordenaciones**. El término "ordenación" hace referencia a que se trata de un arreglo ordenado, es decir; en el que importa el orden de sus componentes. Así, por ejemplo, las contraseñas "amor", "ramo", "roma" y "mora" son algunos arreglos ordenados formados con las letras "a", "m", "o" y "r". Además, las cuatro contraseñas anteriores son diferentes entre sí.

Las ordenaciones no se limitan al contexto de las contraseñas solamente. En una carrera de autos, por ejemplo, la tabla de posiciones (donde se muestra en qué lugar va cada competidor) también es un ejemplo de una ordenación. Incluso, una hamburguesa es una ordenación, pues sus ingredientes son colocados en un orden específico.

De este modo, una ordenación está definida por el orden de sus componentes. Existen otro tipo de arreglos donde el orden de los componentes es irrelevante, pero aquellos los estudiaremos hasta el capítulo 4.

Las contraseñas, en general, corresponden a un tipo específico de ordenaciones llamadas **ordenaciones con repetición.** El término "con repetición" se refiere a que, entre sus componentes, está permitida la repetición de objetos. Por ejemplo, la contraseña "parangaricutirimicuaro" se trata de una ordenación donde las letras "a", "r" e "i" aparecen 4 veces cada una, mientras que las letras "c" y "u" aparecen 2 veces cada una.

Una notación para el número de ordenaciones con repetición

En esta sección introduciremos una notación matemática apropiada para referirnos al valor numérico que resulta de calcular el número de ordenaciones con repetición sobre situaciones generales. Esto lo haremos mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo #2

Queremos calcular el número de contraseñas posibles de 5 caracteres que podemos formar con las letras minúsculas del alfabeto (27 letras en total).

Siguiendo la técnica que desarrollamos en el ejemplo #1, escribir una contraseña de 5 caracteres puede interpretarse como una secuencia de 5 eventos. De este modo, lo primero que debemos hacer es dibujar una secuencia de 5 casillas, una por cada carácter de la contraseña:

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} =$$

Ahora bien, dado que cada carácter puede ser cualquiera de las 27 letras minúsculas del alfabeto, tenemos 27 posibilidades diferentes para cada uno de los caracteres. Así, al llenar las casillas como corresponde, nos queda que el número de contraseñas posibles es:

$$\underline{27} \times \underline{27} \times \underline{27} \times \underline{27} \times \underline{27} = 14{,}348{,}907$$

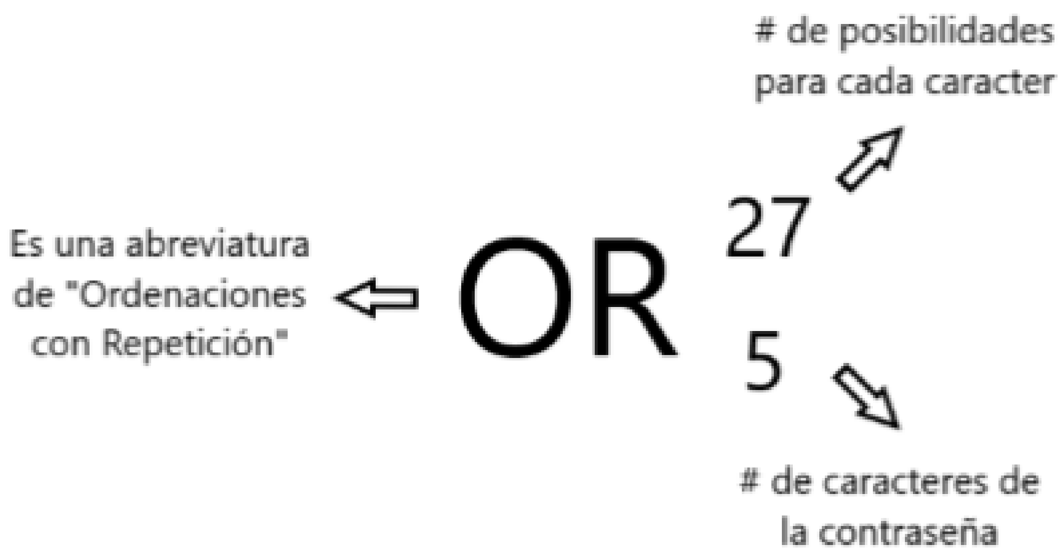
De este modo, existen 14,348,907 posibilidades de contraseña de 5 caracteres (usando sólo las 27 letras minúsculas del alfabeto).

Del ejemplo anterior debemos observar lo siguiente:

a) El número 5 nos dice la cantidad de objetos que nos interesa ordenar (u acomodar), pues cada contraseña posible está compuesta por 5 caracteres.
b) El número 27 nos indica el número de posibilidades que tenemos para elegir a cada uno de los caracteres, y se refiere a las 27 letras minúsculas del alfabeto. Esto

quiere decir que contamos con un repertorio de 27 objetos para cada una de las elecciones.

Al número de contraseñas posibles que obtuvimos del ejemplo #2 lo llamamos **el número de ordenaciones con repetición de 27 objetos tomados de 5 en 5**, y lo denotamos de la siguiente forma:



No hay que perder de vista que la notación OR_5^{27} se refiere a un número, que equivale al número de contraseñas de 5 caracteres, donde cada carácter es una letra minúscula del alfabeto (27 posibilidades). En otras palabras:

$$OR_5^{27} = 27^5 = 14{,}348{,}907$$

Otros ejemplos son los siguientes:

A) OR_9^{27} equivale al número de contraseñas posibles de 9 caracteres donde cada carácter puede ser una letra mayúscula del alfabeto (hay 27 posibilidades para cada carácter).

B) OR_8^{10} equivale al número de contraseñas posibles de 8 caracteres donde cada carácter puede ser un dígito del 0 al 9 (hay 10 posibilidades para cada carácter).

C) OR_7^{37} equivale al número de contraseñas de 7 caracteres donde cada carácter puede ser una letra minúscula del alfabeto o un dígito (27 letras + 10 dígitos = 37 posibilidades para cada carácter).

Una fórmula para calcular el número de ordenaciones con repetición.

Recapitulando el ejemplo #2, observamos que el número de contraseñas de 5 caracteres, en el que cada carácter puede ser una letra minúscula del alfabeto (hay 27 letras minúsculas), está determinado por la operación:

$$27^5 = 27 \times 27 \times 27 \times 27 \times 27 = 14{,}348{,}907$$

En este caso particular, OR_5^{27} se calcula multiplicando 5 veces el número 27, es decir; 27^5. Sin embargo, lo anterior puede generalizarse. Así, si ***n*** y ***m*** denotan números naturales, tenemos que:

$$OR_m^n = n^m$$

Es decir; el número de ordenaciones con repetición de **n** objetos (el repertorio de posibilidades) tomados de **m** en **m** (número de objetos a ordenar) está determinado por n^m.

A continuación, proporcionamos un último ejemplo sobre este tema, y en el que aplicaremos la fórmula anterior de manera directa:

Ejemplo #3

Nos interesa calcular el número de contraseñas posibles de 4 caracteres tales que cada carácter puede ser una letra minúscula del alfabeto (27 posibilidades), o bien, un dígito del 0 al 9 (10 posibilidades).

Dado que existen 27 letras minúsculas y 10 dígitos, tenemos un repertorio de 37 posibilidades para asignar una letra a cada uno de los caracteres de la contraseña. De este modo, debemos multiplicar 4 veces el número 37:

$$OR_4^{37} = 37^4 = 1{,}874{,}161$$

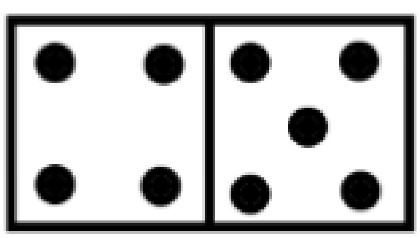
Así, concluimos que existen 16,777,216 contraseñas posibles que satisfacen las condiciones antes descritas. En lenguaje matemático, decimos que el número de ordenaciones con repetición de 64 objetos tomados de 4 en 4 equivale a 16,777,216.

El orden, un factor relevante en el conteo.

Por último, es importante recordar que el principio fundamental del conteo se aplica sólo en aquellas situaciones donde nos interesa conocer el número de formas en que puede ocurrir una **secuencia de eventos**. Lo anterior suele estar relacionado con la noción de **orden** que hemos trabajado a lo largo del presente capítulo. En el caso de las contraseñas, por ejemplo, cada carácter de la misma tiene una posición bien definida. Así, cuando aplicamos el principio fundamental del conteo para calcular el número de contraseñas, cada evento asigna un carácter a una posición bien definida de la contraseña.

En el caso de la ropa, el orden está determinado por el lugar donde se viste cada prenda, es decir; cada evento representa la elección de un tipo de prenda específica. De este modo, tenemos un evento para elegir la playera, otro para elegir el pantalón, y un último evento para elegir el calzado.

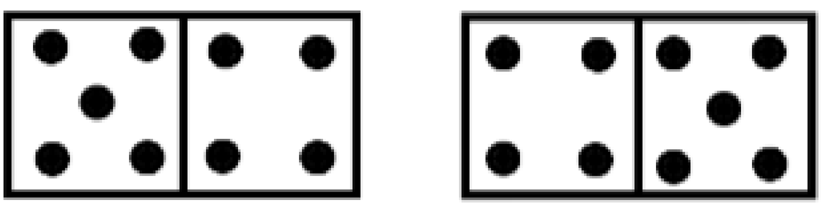
Sin embargo, existen situaciones en las que el orden no es relevante. Por ejemplo: ¿Has jugado al dominó tradicional? Si tienes un juego de dominó tradicional en tu casa, puedes verificar que hay 28 fichas en total. Cada ficha contiene dos valores, representados por una cantidad de puntos que va desde 0 hasta 6 (hay 7 valores diferentes). Por ejemplo, la siguiente ficha tiene a los valores 5 y 4:



Un razonamiento erróneo sería querer aplicar el principio fundamental del conteo para calcular el número de fichas que componen al dominó tradicional. Si colocamos la ficha sin valores de forma horizontal, podríamos pensar que un primer evento es asignar valor al lado izquierdo de la ficha (7 posibilidades), y en un segundo evento se asigna valor al lado derecho de la misma (7 posibilidades).

Sin embargo, de lo anterior obtendríamos que hay $7 \times 7 = 49$ fichas de dominó, que no corresponde con el número de fichas que posee el juego tradicional.

Lo anterior nos lleva a un resultado erróneo porque en las fichas de dominó no existe un lado izquierdo ni un lado derecho. Así, cuando aplicamos el principio fundamental del conteo para calcular el número de fichas, caemos en el error de contar dos veces aquellas fichas con valores distintos. En particular, cometemos el error de contar dos veces la ficha con valores 5 y 4:



Pero, en el dominó tradicional, sólo hay una ficha para cada pareja de valores, incluyendo aquellas parejas formadas por el mismo valor (llamadas mulas).

Una ficha de dominó es un ejemplo de un arreglo no ordenado, pues al asignarle valores a la misma, no hay un orden determinado para tales valores.

Será hasta el capítulo 4 que estudiaremos un tipo específico de arreglos no ordenados que reciben el nombre de **combinaciones sin repetición**, y a los cuales nos referiremos simplemente como **combinaciones.**

ANEXO C

CAPÍTULO 3:

Tablas de Posiciones y Otras Cosas

Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de un tipo de arreglos ordenados denominados **ordenaciones sin repetición**. Es probable que en estos momentos estés un poco confundido, pues en el capítulo anterior estudiamos otro tipo de ordenaciones llamadas **ordenaciones con repetición**. Si lo lees cuidadosamente, notarás que la diferencia entre ambos términos está en el "con" y en el "sin".

Como vimos en el capítulo anterior, las **ordenaciones con repetición** son arreglos ordenados donde está permitida la repetición entre sus componentes. Para esto, pusimos de ejemplo las contraseñas, pues se tratan de arreglos ordenados de caracteres (letras y números) para las cuales está permitida la repetición de elementos (por ejemplo: en la contraseña "tengohambre" donde la letra "e" aparece dos veces, es decir; se repite).

Sin embargo, consideremos el caso particular de aquellas contraseñas que cumplen la propiedad de no repetir caracteres (por ejemplo: "rosa", "gato", etc.). Crear una contraseña de este tipo no tiene las mismas libertades que una en la que se permite la repetición de letras, pues una vez que se ha usado una letra particular, esta ya no puede utilizarse nuevamente.

Comenzaremos estudiando un tipo particular de ordenaciones sin repetición llamadas permutaciones, las cuales te serán familiares porque están presentes en diversas situaciones de la vida real.

Las permutaciones

¿Alguna vez has visto una carrera de autos, o has jugado algún videojuego de carreras? Seguro habrás notado que en dichas competencias se presenta una tabla de posiciones donde se muestra el lugar que ocupa cada competidor dentro de la competencia (1er lugar, 2° lugar, 3er lugar, etc.). Algo que caracteriza a las tablas de posiciones es que cada competidor ocupa un único lugar en la tabla; es decir, no puede darse el caso de alguien que vaya en primer y en segundo lugar al mismo tiempo.

Las tablas de posiciones son un claro ejemplo de un tipo de ordenaciones sin repetición llamadas **permutaciones.** Dado un grupo de objetos determinado (o personas), una permutación puede interpretarse como acomodar en línea recta a los integrantes de dicho grupo, asumiendo que es diferente ser el primero de la línea a ser el último de la misma.

Así, durante una competencia (de clavados, de gimnasia, de atletismo, de caminata, etc.), la tabla de posiciones es una permutación de los competidores, la cual se caracteriza por ordenarlos de acuerdo al lugar que están ocupando en la competencia, comenzando por el 1er lugar y terminando por el último.

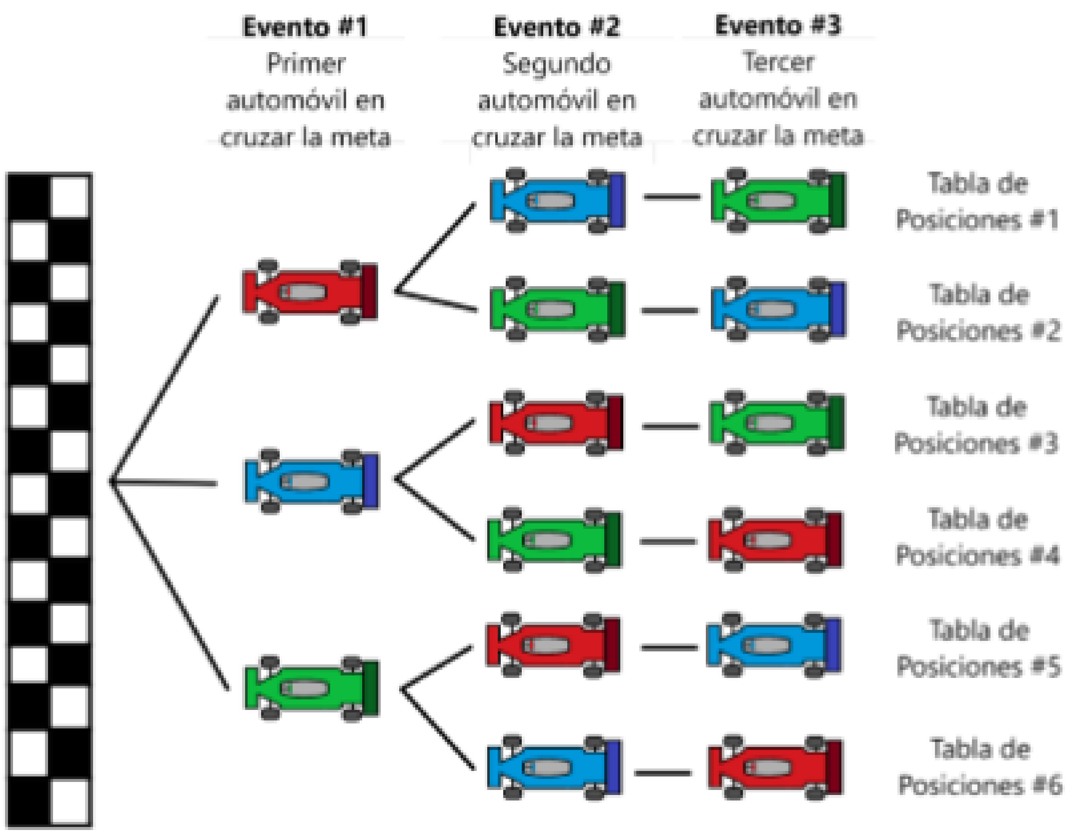
Las permutaciones no sólo se relacionan con las competencias, pues seguramente tus profesores de primaria y secundaria permutaban contigo durante las ceremonias escolares: ¿Recuerdas cuando en dichas ceremonias pedían que te formaras por estaturas? Formarse por estaturas es una de las muchas permutaciones que pueden realizarse; de hecho, cualquier fila de personas es una permutación en particular.

Ahora bien, en las permutaciones no es válida la repetición de elementos. En la tabla de posiciones de una competencia, no puede ocurrir que alguien quede en primer lugar y, al mismo tiempo, en quinto lugar. Por otro lado, cuando un grupo de personas hacen una fila, no puede ocurrir que la misma persona esté ocupando dos lugares diferentes en la misma fila (a menos que pensemos en cosas extrañas como la clonación y los viajes en el tiempo, pero por ahora evitemos ese tipo de casos).

Calculando el número de permutaciones

Ahora bien, dada una competencia en la que participa determinado número de competidores, una pregunta natural sería: ¿De cuántas formas podría quedar la tabla final de posiciones? O bien, dado un grupo de personas: ¿De cuántas maneras podrían formarse en una fila?

Consideremos el caso particular de una carrera de autos en la que participan un total de tres pilotos, quienes conducen un auto rojo, uno azul y uno verde. El siguiente diagrama de árbol nos muestra todos los posibles resultados finales de la carrera:



Por ejemplo, la tabla de posiciones #2 corresponde al caso donde el auto rojo llega en primer lugar, el verde en segundo y el azul en tercero. Por su parte, la tabla de posiciones #5 refiere al caso donde el auto verde llega en primer lugar, el rojo en segundo y el azul en tercero.

De este modo, la carrera puede ser entendida como una secuencia de 3 eventos. En el evento #1 se determina al primer lugar, en el evento #2 al segundo lugar y en el evento #3 se determina quién llegó en último lugar.

Para determinar al 1er lugar existen 3 posibilidades y, una vez que se conoce al ganador de la competencia, para el 2° lugar sólo quedan 2 posibilidades, pues ya no podemos contar al que llegó en la primera posición. Finalmente, una vez que se han determinado los dos primeros lugares, para el tercer lugar sólo queda una única posibilidad.

Resumiendo el párrafo anterior, tenemos tres eventos: en el primero hay 3 posibilidades. Una vez que se conoce el resultado del primer evento, para el segundo sólo quedan 2 posibilidades. Finalmente, una vez que se han determinado los resultados del primer y segundo evento, para el tercero sólo queda una única posibilidad.

Lo primero que debemos observar es que el número de posibilidades de cada evento siempre se mantiene igual, a pesar de que **el conjunto de posibilidades** sí cambia para cada uno de los caso. Por ejemplo, si el automóvil rojo llega en primer lugar, el conjunto de posibilidades para el segundo lugar está compuesto por los autos azul y verde. En otro caso, si el auto verde llega en primer lugar, el conjunto de posibilidades para el segundo lugar lo componen el auto rojo y el auto azul. En ambos casos, el conjunto de posibilidades está formado por 2 posibilidades.

De este modo, lo que cambia es el conjunto de posibilidades, pero no el número de elementos que compone dicho conjunto. Lo segundo que debemos observar es que el número de posibilidades de cada evento disminuye en una unidad con respecto al anterior, es decir; el evento #1 puede ocurrir de 3 formas posibles, para el evento #2 quedan 2 posibilidades, para el evento #3 sólo hay una posibilidad.

Las observaciones anteriores nos dan luz verde para aplicar el principio fundamental del conteo a través de la técnica de las casillas, lo cual nos permitirá calcular el número de resultados finales posibles (o tablas de posiciones posibles) de la competencia:

$$\underset{\substack{\text{Evento \#1:}\\ \text{3 posibilidades}}}{\underline{3}} \times \underset{\substack{\text{Evento \#2:}\\ \text{2 posibilidades}}}{\underline{2}} \times \underset{\substack{\text{Evento \#3:}\\ \text{Una posibilidad}}}{\underline{1}} = \underset{\substack{\text{\# de resultados}\\ \text{finales posibles}}}{6}$$

El ejemplo anterior nos proporciona un método general el cual puede aplicarse para calcular el número de permutaciones posibles que pueden formarse a partir de cualquier grupo de objetos (o personas). A continuación presentamos dos ejemplos más generales donde se aplica el método anterior.

Ejemplo #1:

Pregunta: ¿Cuántas tablas de posiciones posibles existen para una carrera de autos en la que participan un total de 5 competidores?

Del mismo modo que en el caso anterior, se identifican 5 eventos, uno por cada lugar a definir dentro de la tabla de posiciones (1er lugar, 2° lugar, y así hasta el 5° lugar). De este modo escribimos 5 casillas que representan los eventos anteriores, comenzando con la casilla que representa al primer lugar y terminando con la que representa al último:

$$\frac{¿?}{1er\ Lugar} \times \frac{¿?}{2o\ Lugar} \times \frac{¿?}{3er\ Lugar} \times \frac{¿?}{4o\ Lugar} \times \frac{¿?}{5o\ Lugar} =$$

El evento referente al 1er lugar puede ocurrir de 5 formas posibles y, una vez que se tiene este resultado, el evento para determinar el segundo lugar puede ocurrir de 4 formas posibles. Similarmente, el tercer lugar puede ocurrir de 3 formas, el cuarto de 2 y el quinto de 1. Así, llenamos las casillas obteniendo la siguiente operación:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Por lo tanto, el número de tablas de posiciones posibles para esta carrera es de 120 posibilidades.

Ejemplo #2:

Pregunta: ¿Cuántas palabras diferentes pueden escribirse al reacomodar las letras de la palabra "centauro"?

Observamos que el número de letras de la palabra "centauro" son 8 y todas son diferentes entre sí. Este último punto es muy importante, pues si hubieran letras repetidas, no estaríamos hablando de **ordenaciones sin repetición**, y no podríamos utilizar el método antes descrito.

De este modo, nos interesa conocer de cuantas formas podemos permutar (o acomodar) las 8 letras de la palabra "centauro". La lógica es la misma que con una carrera de 8 autos, solo que cambiamos los autos por las letras de la palabra "centauro", y cambiamos los lugares en la tabla de posiciones por los lugares que puede ocupar cada letra dentro de una palabra.

Con base en lo anterior, el número de palabras diferentes que puede formarse con las letras de la palabra "centauro" está dada por la siguiente operación:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40{,}320$$

Por lo tanto, se pueden formar un total de 40,320 palabras distintas reacomodando las letras de la palabra "centauro" (tomando en cuenta a la misma palabra "centauro").

Una notación para las permutaciones

Supongamos que deseamos calcular el número de permutaciones posibles de 15 objetos (pensemos en una carrera de 15 autos). Para calcularlas, tendríamos que resolver la siguiente operación:

$$15 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$$

Introducir la operación anterior en la calculadora podría llevarte tiempo, sin embargo; existe una notación muy útil para abreviar la operación anterior llamada **factorial**, la cual está representada por el símbolo de admiración "!". Así, una forma de abreviar la operación anterior es 15!; puedes encontrar una tecla para el símbolo factorial en cualquier calculadora científica.

Otra forma de denotar las permutaciones es con la letra "P" seguido del número de objetos a permutar encerrado entre paréntesis, esto es:

$$P(15) = 15! = 1{,}307{,}674{,}368{,}000$$

Calculando el número de ordenaciones sin repetición

En las tres secciones anteriores, hablamos de las permutaciones como un tipo particular de **ordenaciones sin repetición**. Sin embargo, dado un grupo de objetos, podría ser de nuestro interés conocer de cuántas formas podemos acomodar sólo un número específico de ellos.

Explicaremos lo anterior con el siguiente caso. Regresemos al ejemplo de las carreras de autos, pero esta vez consideremos el caso de una carrera en la que participan un total de 25 pilotos. También supongamos que sólo nos interesa conocer la tabla de posiciones para los tres primeros lugares, es decir; de aquellos que al término de la carrera subirán al podio para ser premiados.

Pregunta: ¿De cuantas formas posibles podría resultar la tabla de posiciones antes descrita?

Para responder a la pregunta anterior, el procedimiento es casi el mismo que el de las permutaciones, con la diferencia de que dicho procedimiento se termina antes.

Dado que sólo nos interesa conocer de cuantas formas posibles pueden quedar las tres primeras posiciones de la competencia (1er, 2° y 3er lugar), identificamos tres eventos, uno por cada una de las posiciones antes mencionadas.

$$\frac{¿?}{1er\ Lugar} \times \frac{¿?}{2o\ Lugar} \times \frac{¿?}{3er\ Lugar} =$$

El evento referente a la clasificación del primer lugar puede ocurrir de 25 formas posibles (pues participan 25 pilotos). Una vez que determina al primer lugar de la competencia, para el segundo lugar quedan 24 competidores (pues ya no contamos al piloto que quedó en primer lugar). Finalmente, para determinar al ganador del tercer lugar quedan 23 posibilidades (pues ya no contamos a los pilotos que clasificaron en las primeras dos posiciones).

De este modo, al ocurrir el evento #1 (1er lugar) existen 25 posibilidades, para cuando ocurre el evento #2 (2° lugar) existen 24 posibilidades, y para el evento #3 (3er lugar) se dispone de 23 posibilidades. Rellenando las casillas como corresponde nos queda la siguiente operación:

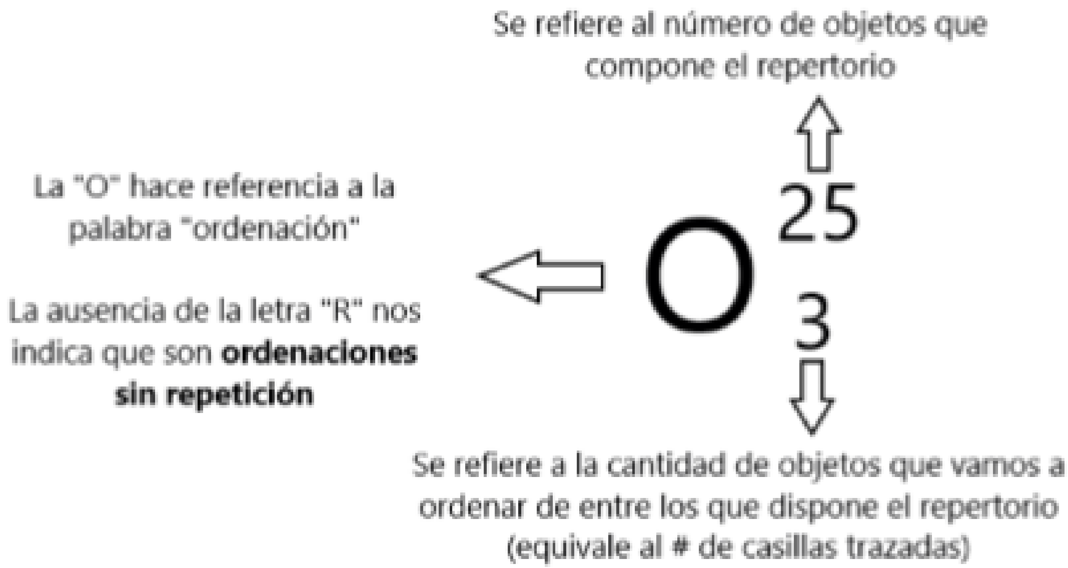
$$25 \times 24 \times 23 = 13{,}800$$

Así, concluimos que la tabla de posiciones de los tres primeros lugares de la competencia puede resultar de 13,800 formas posibles.

Estrictamente hablando, a la cantidad anterior se le conoce como **el número de ordenaciones sin repetición de 25 objetos tomados de 3 en 3**, y se denota por O_3^{25}.

Recuerda que el objetivo de introducir una notación matemática nueva no es para complicar las cosas, sino todo lo contrario, es para simplificarlas. Es como con las instituciones gubernamentales, resulta más práctico nombrar sus siglas que su nombre completo.

En la notación que acabamos de introducir, la O y los dos valores que se encuentran a su derecha (uno arriba y otro abajo) tienen un significado, el cual explicaremos a continuación:



En el contexto de la carrera de autos, cuando hablamos del **repertorio** nos referimos a los 25 pilotos de la competencia, de los cuales sólo 3 serán posicionados (u acomodados) dentro de las primeras tres posiciones de la tabla.

De este modo, O_3^{25} puede concebirse como el número de posibilidades que tenemos para seleccionar y posteriormente acomodar a 3 de los 25 objetos que componen el repertorio, esto bajo la condición de que está prohibido seleccionar el mismo objeto dos o más veces (no está permitida la repetición de elementos).

Así, por ejemplo, O_5^8 nos dice de cuántas formas puede resultar la tabla de posiciones de los primeros 5 lugares en una carrara de autos con 8 competidores:

$$O_5^8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6{,}720$$

Por su parte, O_8^8 nos dice de cuántas formas puede quedar la tabla de posiciones de la misma carrear, pero esta vez para los 8 pilotos participantes de la competencia. Para este último caso, es importante observar que O_8^8 coincide con el número de permutaciones de 8 objetos; es decir, se cumple la siguiente igualdad:

$$O_8^8 = P(8) = 8! = 40{,}320$$

Para terminar el presente capítulo, es importante reflexionar sobre las aplicaciones del principio fundamental del conteo. Como vimos en este capítulo y en el anterior, los diagramas de árbol nos permiten, de forma fácil, visualizar la totalidad de posibilidades como puede llegar a suceder una secuencia de eventos.

Sin embargo, los diagramas de árbol no son una herramienta práctica para contar en aquellos casos cuando el número de posibilidades es muy grande; imagina cómo se vería el diagrama de árbol que describa la tabla de posiciones de la carrera de 8 autos; ya vimos que hay 40,320 posibilidades.

La gran utilidad del Principio Fundamental del Conteo es que permite calcular, con certeza, el número de posibilidades como puede resultar una secuencia de eventos. Sin embargo, para cada aplicación de dicho principio hay, de fondo, un diagrama de árbol que no podemos dibujar por su inmensidad; aunque esto no significa que no lo podamos imaginar.

De hecho, para aplicar el Principio Fundamental del Conteo es muy importante que imaginemos cómo se vería el diagrama de árbol, y debemos verificar que, al momento de ocurrir cada evento, el número de posibilidades siempre sea el mismo, aunque el conjunto de posibilidades sí llegue a cambiar.

En resumen, detrás de cada aplicación del Principio Fundamental del Conteo debe haber un diagrama de árbol que cumpla que, dentro de cada nivel de ramificación, el número de ramificaciones sea siempre el mismo.

En el siguiente capítulo estudiaremos un tipo de arreglos no ordenados de nombre combinaciones. Como veremos en dicho capítulo, los diagramas de árbol para calcular el número de combinaciones no tienen un número fijo de ramificaciones para cada nivel, por lo que no es posible la aplicación del principio fundamental del conteo para calcular el número de combinaciones. Sin embargo, veremos que es posible obtener una fórmula para dicha finalidad.

ANEXO D

Alumno: ____ **Grupo:** ___________

En la escala de ***Totalmente en Desacuerdo*** a ***Totalmente de Acuerdo***, escribe una ***X*** en la opción que mejor describa tu opinión sobre la lectura: ***"Dos operaciones básicas para la vida"***. En adición, responde a las preguntas abiertas que se te plantean:

<table>
<tr><td>Considero que la sección "La propiedad conmutativa de la multiplicación" se desarrolla de forma clara.</td><td>Totalmente en desacuerdo.
( )</td><td>En desacuerdo.
( )</td><td>Ni de acuerdo ni en desacuerdo.
( )</td><td>De acuerdo.
( )</td><td>Totalmente de acuerdo
( )</td></tr>
<tr><td colspan="6">Escribe tu opinión sobre la sección "La propiedad conmutativa de la multiplicación", haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.</td></tr>
<tr><td>Considero que la sección "La propiedad asociativa de la multiplicación" se desarrolla de forma clara.</td><td>Totalmente en desacuerdo.
( )</td><td>En desacuerdo.
( )</td><td>Ni de acuerdo ni en desacuerdo.
( )</td><td>De acuerdo.
( )</td><td>Totalmente de acuerdo
( )</td></tr>
<tr><td colspan="6">Escribe tu opinión sobre la sección "La propiedad asociativa de la multiplicación", haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.</td></tr>
<tr><td>Considero que la sección "La división como operación inversa de la multiplicación" se desarrolla de forma clara.</td><td>Totalmente en desacuerdo.
( )</td><td>En desacuerdo.
( )</td><td>Ni de acuerdo ni en desacuerdo.
( )</td><td>De acuerdo.
( )</td><td>Totalmente de acuerdo
( )</td></tr>
<tr><td colspan="6">Escribe tu opinión sobre la sección "La división como operación inversa de la multiplicación", haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.</td></tr>
</table>

Considero que la sección ***"Dos usos prácticos de la división"*** se desarrolla de forma clara.	*Totalmente en desacuerdo.* ( )	*En desacuerdo.* ( )	*Ni de acuerdo ni en desacuerdo.* ( )	*De acuerdo.* ( )	*Totalmente de acuerdo* ( )
Escribe tu opinión sobre la sección ***"Dos usos prácticos de la división"***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.					
Considero que el texto ***"Dos operaciones básicas para la vida"*** me proporcionó herramientas para analizar y solucionar problemas.	*Totalmente en desacuerdo.* ( )	*En desacuerdo.* ( )	*Ni de acuerdo ni en desacuerdo.* ( )	*De acuerdo.* ( )	*Totalmente de acuerdo* ( )
Sobre los temas que se desarrollaron en texto ***"Dos operaciones básicas para la vida"***, menciona qué temas fueron nuevos para ti y de cuáles ya tenías conocimiento.					

ANEXO E

Alumno: ____ **Grupo:** __________

En la escala de ***Totalmente en Desacuerdo*** a ***Totalmente de Acuerdo***, escribe una ***X*** en la opción que mejor describa tu opinión sobre la lectura: ***"Contando contraseñas y otras cosas"***. En adición, responde a las preguntas abiertas que se te plantean:

Considero que la sección ***"Introducción"*** se desarrolla de forma clara.	*Totalmente en desacuerdo.* ( )	*En desacuerdo.* ( )	*Ni de acuerdo ni en desacuerdo.* ( )	*De acuerdo.* ( )	*Totalmente de acuerdo* ( )
Escribe tu opinión sobre la sección ***"Introducción"***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.					
Considero que la sección ***"El Principio Fundamental del Conteo"*** se desarrolla de forma clara.	*Totalmente en desacuerdo.* ( )	*En desacuerdo.* ( )	*Ni de acuerdo ni en desacuerdo.* ( )	*De acuerdo.* ( )	*Totalmente de acuerdo* ( )
Escribe tu opinión sobre la sección: ***"El Principio Fundamental del Conteo"***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.					
Considero que la sección ***"La Técnica de las Casillas"*** se desarrolla de forma clara.	*Totalmente en desacuerdo.* ( )	*En desacuerdo.* ( )	*Ni de acuerdo ni en desacuerdo.* ( )	*De acuerdo.* ( )	*Totalmente de acuerdo* ( )
Escribe tu opinión sobre la sección: ***"La Técnica de las Casillas"***, haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.					

<table>
<tr><td>Considero que la sección "Ordenaciones con Repetición" se desarrolla de forma clara.</td><td>Totalmente en desacuerdo.
( )</td><td>En desacuerdo.
( )</td><td>Ni de acuerdo ni en desacuerdo.
( )</td><td>De acuerdo.
( )</td><td>Totalmente de acuerdo
( )</td></tr>
<tr><td colspan="6">Escribe tu opinión sobre la sección: "Ordenaciones con Repetición", haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.</td></tr>
<tr><td>Considero que la sección "Una notación para el número de ordenaciones con repetición" se desarrolla de forma clara.</td><td>Totalmente en desacuerdo.
( )</td><td>En desacuerdo.
( )</td><td>Ni de acuerdo ni en desacuerdo.
( )</td><td>De acuerdo.
( )</td><td>Totalmente de acuerdo
( )</td></tr>
<tr><td colspan="6">Escribe tu opinión sobre la sección: "Una notación para el número de ordenaciones con repetición", haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.</td></tr>
<tr><td>Considero que la sección "Una fórmula para calcular el número de ordenaciones con repetición" se desarrolla de forma clara</td><td>Totalmente en desacuerdo.
( )</td><td>En desacuerdo.
( )</td><td>Ni de acuerdo ni en desacuerdo.
( )</td><td>De acuerdo.
( )</td><td>Totalmente de acuerdo
( )</td></tr>
<tr><td colspan="6">Escribe tu opinión sobre la sección: "Una fórmula para calcular el número de ordenaciones con repetición", haciendo énfasis sobre lo que te pareció claro y lo que te resultó confuso de la misma.</td></tr>
</table>

ANEXO F

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES PLANTEL SUR
MATEMÁTICAS I

Competencia General: Resuelve problemas de conteo sobre situaciones de la vida real.

Competencia Particular No. 1: Resuelve problemas de conteo empleando los conceptos de multiplicación y división.

Número de Sesiones: Una sesión de 100 minutos y una pre-sesión de 15 minutos.

Características del Grupo: 30 alumnos de la materia Estadística y Probabilidad I del CCH plantel Sur.

Evaluación:

- **Control de lectura**
- **Examen**

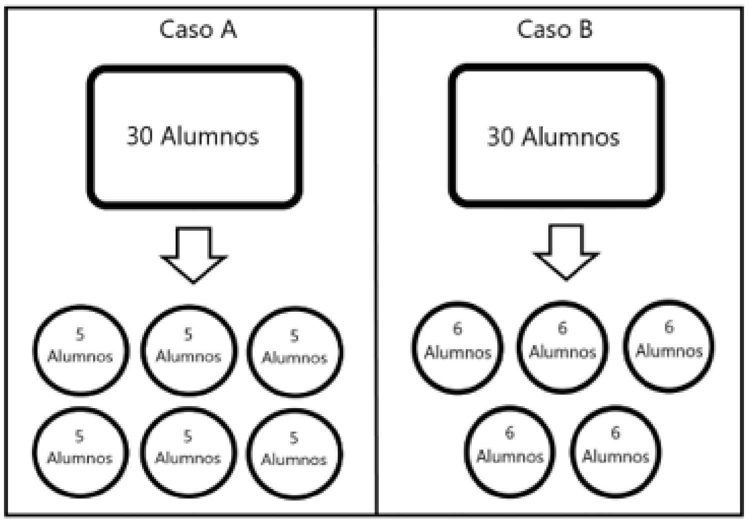
Duración Estimada	**Actividades del Profesor**	**Actividades a realizar por el alumno**
SESIÓN PREVIA Durante los últimos 15´ de una sesión llevada a cabo con una semana de anterioridad a la presente.	El profesor se presentará con los alumnos y, posteriormente, escribirá en el pizarrón su correo electrónico. También deberá pasar dos hojas a los alumnos donde tendrán que escribir su nombre y su correo electrónico en forma de lista **(2 minutos).** Se presentarán a los alumnos, de forma verbal, los objetivos de la actividad a trabajar durante la sesión del lunes 11 de noviembre, la cual tendrá una duración de 100 minutos **(5 minutos)**. Se notificará a los alumnos que se enviará a sus correos electrónicos la lectura **“Dos operaciones básicas para la vida”**, la cual deberán haber leído con anterioridad a la siguiente sesión de trabajo. Además, junto con la lectura, se les enviará un cuestionario en el cual deberán expresar su opinión (subjetiva) sobre la lectura, el cual deberán	El alumno toma nota del correo electrónico del profesor. Escribe, en la lista que pasó el profesor, su nombre y correo electrónico. El alumno toma nota de la información proporcionada por el profesor sobre las sesiones a trabajar.

	imprimir y contestar a mano, o bien, llenar contestar en Word y luego imprimirlo **(3 minutos)**. Se les mencionará que si a las 23:59 horas del día miércoles 8 de noviembre no han recibido los documentos antes mencionados, deberán enviar un correo de aviso al profesor (a la dirección electrónica anotada en el pizarrón), de tal modo que el profesor les envíe los documentos antes mencionados **(2 minutos)**. Se pedirá a los alumnos llegar puntuales a la sesión del 12 de noviembre, pues sólo se dará una tolerancia de 10 minutos. También se les avisará que, transcurridos los 10 minutos de tolerancia, se les recogerá el cuestionario de la lectura, y este servirá para evaluar la asistencia a la clase. Después de esto, la sesión dará inicio **(5 minutos)**. El profesor pregunta a los alumnos si hay alguna duda en torno a la información proporcionada sobre las sesiones a trabajar, y de haber preguntas, el profesor responderá a las mismas. **(3 minuto)**.	En caso de que el alumno tenga alguna duda, plantea su pregunta al profesor.
PRIMERA PARTE (57 MINUTOS)		
2’	Concluidos los 10´ de tolerancia, el profesor solicita a los alumnos que entreguen sus cuestionario. Para ahorrar tiempo, sugiere a sus alumnos pasar sus cuestionarios “de atrás hacia adelante”.	Los alumnos pasan sus cuestionarios “de atrás hacia adelante”.
28´	El profesor retroalimenta a los alumnos sobre la lectura. Lo hace apoyándose en la siguiente lista de preguntas (pueden modificarse de acuerdo a las inquietudes del grupo): 1. ¿Cuáles son los números naturales? **(1 minutos)** Aquí se puede cuestionar a los alumnos sobre si el cero es un número natural, y mencionar que no existe un acuerdo entre matemáticos sobre si considerarlo natural o no.	1. Dos alumnos responden lo que entienden por número natural. Expresan si creen que el 0 debe o no ser considerado como número natural.

	2. ¿Cómo se define la multiplicación en el caso de los números naturales? **(1 minutos).** 3. ¿Conocen algunas estrategias para resolver multiplicaciones de forma más simple? **(5 minutos).** El profesor escucha las estrategias que mencionan los alumnos durante **2 minutos.** Luego menciona estrategias que se pueden utilizar: • **Partir un factor en dos o más sumandos:** 15×7=7×15 es 15 veces 7. Puede calcularse 7×10 y 7×5 por separado y luego sumar los resultados, es decir; 70+35=105. • **Partir un factor en dos o más factores:** 7×4 puede calcularse como (7×2)×2=14×2=28. Aquí se utilizó la propiedad asociativa. • **Multiplicar por nueve:** 9×8=8×9 es 9 veces 8. Puede calcularse fácilmente con sólo restarle 8 a 80, pues 80 es 10 veces 8. 4. ¿Podrían mencionar ejemplos del uso que le damos a la multiplicación en la vida cotidiana? **(1 minutos)** Por ejemplo: calcular el costo al comprar varias entradas en el cine, calcular el precio de un juego de fotocopias cuando vamos a la papelería de la esquina, calcular cuántas rebanadas de pizza hay en determinado número de pizzas, etc. 5. ¿Podrían mencionar ejemplos del uso que le damos a la división en la vida cotidiana? **(5 minutos)** Exponer a los alumnos los siguientes problemas (se sugiere escribirlos en el pizarrón):	2. Dos alumnos parafrasean el concepto de multiplicación. 3. Dos alumnos mencionan algunas estrategias que emplean en su día a día. 4. Dos alumnos proporcionan algunos ejemplos de cómo usan la multiplicación en su vida cotidiana. 5. Dos alumnos proporcionan algunos ejemplos de su día a día en los que han tenido que resolver una división.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
A) Problema #1: En un grupo de 30 alumnos se desean formar equipos de 5 alumnos ¿Cuántos equipos se formarán?

B) Problema #2: En un grupo de 30 alumnos, el profesor desea formar 5 equipos con igual número de alumnos ¿Cuántos alumnos deberá tener cada uno de los equipos?

6. Preguntar a los alumnos cuál es la diferencia entre los dos problemas anteriores. Si la situación lo demanda, se pueden dibujar dos diagramas, uno para cada caso (5 minutos).


7. ¿Cómo definirían la división en sus propias palabras? (2 minutos).

8. El profesor guía a los alumnos para que deduzcan dos formas diferentes de definir la división para los números naturales (2 minutos):
</td>
<td>
6. Dos alumnos responden la pregunta que el profesor plantea.

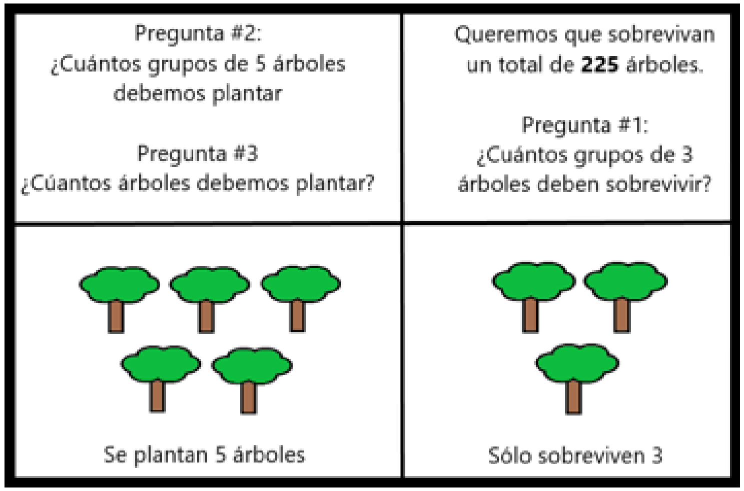
7. Dos alumnos manifiestan su definición de división.

8. Con base en los casos anteriores, los alumnos deben proporcionar dos definiciones diferentes de división:
</td>
</tr>
</table>

	A) X÷Y es el número de veces que cabe el número Y en el número X. B) Si partimos a X en Y partes iguales, X÷Y nos dice el número de objetos que tendría cada parte. 9. El profesor plantea a los alumnos la siguiente situación **(1 minuto):** *Cinco personas cooperan para comprar una pizza familiar, la cual contiene un total de 12 rebanadas. Para esto, deciden repartirse las rebanadas de tal modo que a cada quien le toque la misma cantidad.* ***El profesor escribe en el pizarrón:*** *5 personas, 12 rebanadas de pizza.* 10. Luego plantea a sus alumnos las siguientes preguntas sobre la situación anterior **(5 minutos)**: A) Pregunta 1: ¿Cuántas rebanadas le toca a cada persona? B) Pregunta 2: ¿Sobran rebanadas? ¿Cuántas? C) Pregunta 3: ¿Qué harían con las rebanadas sobrantes? D) Pregunta 4: ¿Qué significa que la división entre dos números naturales no sea exacta? E) Pregunta 5: ¿Cómo se llama a la cantidad sobrante cuando una división no es exacta?	A) La primera es que 30÷5=6 nos dice cuántas veces cabe 5 en el número 30. B) La segunda es que 30÷5=6 nos dice que, si partimos 30 en 5 partes iguales, cada parte tiene 6 unidades. 9. Los alumnos escuchan y reflexionan la situación. 10. Diez alumnos responden a las preguntas planteadas por el profesor (dos alumnos por pregunta).

17’	11. El profesor escribe en el pizarrón el siguiente problema, y solicita a los estudiantes escribirlo en su cuaderno **(2 minutos)**: ***Problema #3:*** *Se desea reforestar un bosque. Se sabe que sólo 3 de cada 5 árboles plantados sobreviven y llegan a la etapa adulta. Si para reforestar dicho bosque se requieren de 225 árboles adultos ¿Cuántos árboles se requiere plantear?*	11. El alumno escribe en su cuaderno el problema y reflexiona sobre la posible solución del mismo.
	12. El profesor pregunta a sus alumnos cómo resolverían el problema y escucha sus sugerencias **(3 minutos)**. Luego plantea las siguientes preguntas: A. ¿Cuántos grupos de 3 árboles deben sobrevivir para llegar a la meta planteada? **(2 minutos).** B. ¿Cuántos grupos de 5 árboles deben plantarse para que sobrevivan 225 árboles? **(2 minutos).** C. ¿Cuántos árboles se deben plantar en total para cubrir la meta? **(2 minuto).**	12. Dos alumnos proponen de qué forma podrían solucionar el problema: A. Dos alumnos responden a la pregunta planteada. ***Respuesta esperada:*** *el alumno interpreta la pregunta como el problema de averiguar cuántas veces cabe el número 3 en el número 225, esto es 225÷3=75.* B. Dos alumnos responden a la pregunta planteada. ***Respuesta esperada:*** *el alumno se da cuenta que la respuesta a la pregunta del inciso B) es idéntica a la respuesta de la pregunta del inciso A).* C. Dos alumnos responden a la pregunta planteada.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Respuesta esperada: el alumno se percata que se deben plantar 75 grupos de 5 árboles, es decir; 5×75=375 árboles.</td></tr>
<tr><td></td><td>13. A continuación, el profesor presenta el siguiente diagrama en el pizarrón y lo explica (2 minutos):



14. El profesor solicita a los alumnos que recapitulen de forma breve cuáles fueron las operaciones que dieron solución al problema (3 minutos).</td><td>13. El alumno copia el diagrama en su cuaderno.

14. Dos alumnos resumen, con sus propias palabras, cuáles fueron las operaciones que se emplearon para dar solución al problema.

A) Las preguntas 1 y 2 del diagrama se responden con la operación 225÷3=75.

B) La pregunta 3 se responde con la operación 5×75=375.</td></tr>
</table>

SEGUNDA PARTE: EVALUACIÓN (43 MINUTOS)		
43’	15. El profesor entrega a los alumnos un ejercicio impreso para evaluar los aprendizajes adquiridos **(3 minutos)**. 16. El profesor pide a los alumnos leer en voz alta las instrucciones del problema, y hace cualquier aclaración sobre las **mismas (5 minutos)**. 17. El profesor deja a los alumnos resolver el problema de forma individual y está al pendiente de cualquier duda que pueda surgir. Puede retroalimentar a los alumnos, pero de ningún modo tiene permitido sugerir la respuesta **(35 minutos)**.	15. Los alumnos reciben el ejercicio impreso del profesor. 16. Un alumno lee en voz alta las instrucciones del ejercicio. 17. Los alumnos resuelven el ejercicio de forma individual, teniendo 35 minutos para resolverlo y redactar la solución. Al término de los 35 minutos, entregan el ejercicio resuelto al profesor.

ANEXO G

Universidad Nacional Autónoma de México
Maestría en Docencia para la Educación Media Superior
Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Sur

Nombre del profesor quien implementa: Alberto Santana Cruz

Nombre de la profesora titular del grupo: Lilian Mendoza Zaragoza

Competencia general: Resuelve problemas de conteo sobre situaciones de la vida real.

Competencia particular: Resuelve problemas de conteo mediante la aplicación del Principio Fundamental del Conteo.

Materiales: Pizarrón, gises/plumones, material del lectura: *"El Principio Fundamental del Conteo"*, autor: Alberto Santana Cruz (2018).

Grupo: 515

Salón: F4

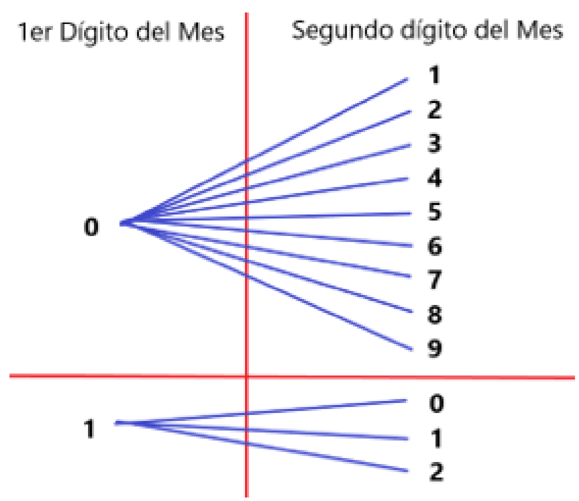
No. De Horas: una sesión de 100 minutos, más una sesión previa de 20 minutos.

Duración Estimada	**Actividades del Profesor**	**Actividades del alumno**
SESIÓN PREVIA Durante los últimos 20´ de una sesión llevada a cabo con una semana de anterioridad a la presente.	El profesor se presentará con los alumnos y, posteriormente, escribirá en el pizarrón su correo electrónico. También deberá pasar dos hojas a los alumnos donde tendrán que escribir su nombre y su correo electrónico en forma de lista **(2 minutos).** Se presentarán a los alumnos, de forma verbal, los objetivos de la actividad a trabajar durante la sesión del lunes 11 de	El alumno toma nota del correo electrónico del profesor. Escribe, en la lista que pasó el profesor, su nombre y correo electrónico. El alumno toma nota de la información proporcionada por el profesor sobre las sesiones a trabajar.

	noviembre, la cual tendrá una duración de 100 minutos **(5 minutos)**. Se notificará a los alumnos que se enviará a sus correos electrónicos la lectura **"El principio fundamental del conteo"**, la cual deberán haber leído con anterioridad a la siguiente sesión de trabajo. Además, junto con la lectura, se les enviará un cuestionario en el cual deberán expresar su opinión (subjetiva) sobre la lectura, el cual deberán imprimir y contestar a mano, o bien, llenar contestar en Word y luego imprimirlo **(3 minutos).** Se les mencionará que si a las 23:59 horas del día miércoles 8 de noviembre no han recibido los documentos antes mencionados, deberán enviar un correo de aviso al profesor (a la dirección electrónica anotada en el pizarrón), de tal modo que el profesor les envíe los documentos antes mencionados **(2 minutos).** Se pedirá a los alumnos llegar puntuales a la sesión del 8 de noviembre, pues sólo se dará una tolerancia de 5 minutos. También se les avisará que, transcurridos los 5 minutos de tolerancia, se les recogerá el cuestionario de la lectura, y este servirá para evaluar la asistencia a la calase. Después de esto, la sesión dará inicio **(5 minutos).** El profesor pregunta a los alumnos si hay alguna duda en torno a la información proporcionada sobre las sesiones a trabajar, y de haber preguntas, el profesor responderá a las mismas. **(3 minuto).**	En caso de que el alumno tenga alguna duda, plantea su pregunta al profesor.

SESIÓN DE TRABAJO (100 MINUTOS)		
Duración Estimado	**Acción del Profesor**	**Acción del Alumno**
2’	Concluidos los 5´ de tolerancia, el profesor solicita a los alumnos que entreguen sus cuestionario. Para ahorrar tiempo, sugiere a sus alumnos pasar sus cuestionarios “de atrás hacia adelante”.	Los alumnos pasan sus cuestionarios “de atrás hacia adelante”.
8’	El profesor plantea las siguientes preguntas a los alumnos, y los retroalimenta a modo de llegar a la respuesta apropiada: 1. ¿Cómo definirían “evento” de acuerdo con el contexto del texto que leyeron? **(3 minutos)** 2. ¿Qué dice el principio fundamental del conteo? **(5 minutos)**	1. Dos alumnos expresan lo que entendieron con el término “evento”. **Respuesta apropiada:** es un fenómeno o acción que puede ocurrir de múltiples formas posibles. 2. Dos alumnos parafrasean el principio fundamental del conteo. **Respuesta apropiada:** el número de formas posibles en que puede resultar una secuencia de eventos, es igual al resultado de multiplicar entre sí el número de posibilidades en que puede ocurrir cada uno de los eventos.
30’	**Problema #1:** calcular el número de claves RFC distintas que pueden emitirse. 3. ¿Saben qué es el Registro Federal de Contribuyentes (RFC)? **(3 minutos)**	3. Dos alumnos explican qué es el RFC.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Respuesta del profesor: Se refiere a los 10 primeros caracteres de la Clave Única de Registro de Población (CURP). Sirve para registrarse ante el Servicio de Administración Tributaria (SAT).
4. ¿Saben cómo se calcula el RFC de una persona? (6 minutos).
El profesor escribe en el pizarrón:
i) Primeras dos letras del apellido paterno.
ii) Primera letra del apellido materno.
iii) Primera letra del primer nombre.
iv) Dos últimos dígitos del año de nacimiento.
v) Dos dígitos del mes de nacimiento
vi) Dos dígitos del día de nacimiento.
El profesor escribe en el pizarrón:
____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____
1ªAP 2ªAP 1ªAM 1ª N AA / MM / DD
Explicación del profesor: cada casilla representa un carácter del RFC.
5. A modo de ejemplo, el profesor escribe en el pizarrón el nombre y fecha de nacimiento de algún actor (actriz) famoso(a) de la TV, y pide a los alumnos calcular el RFC de dicho artista (4 minutos).
</td>
<td>
4. Dos alumnos explican cómo se calcula el RFC (sin homoclave).
5. Los alumnos, en conjunto, dictan al profesor cuál es el RFC del artista en cuestión.
</td>
</tr>
</table>

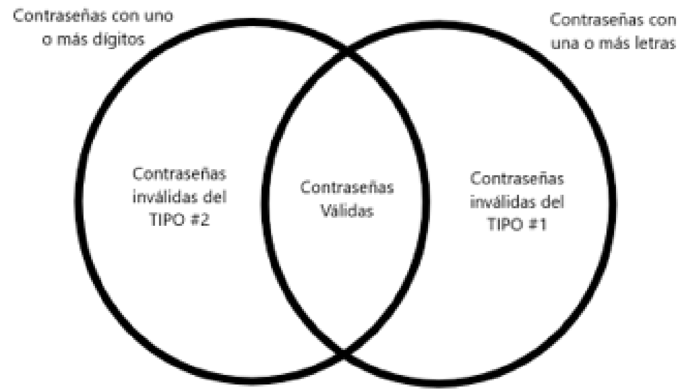
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
El profesor escribe en el pizarrón: Xavier López Rodríguez (Chabelo) nació el 17 de febrero de 1935.
El profesor escribe en el pizarrón: El RFC de Chabelo es: LORX350217.
6. Se cuestiona a los alumnos si es posible aplicar el principio fundamental del conteo para calcular cuántos RFC diferentes pueden emitirse (7 minutos).
Respuesta del profesor: el profesor debe guiar la discusión con los alumnos, y mostrar que existen dificultades para aplicar el principio fundamental del conteo.
Puede dibujar el siguiente diagrama para mostrar como varía el número de posibilidades de la octava casilla:


</td>
<td>
6. Los alumnos interactúan con el profesor, exponiendo cuales son las complicaciones de aplicar el principio fundamental del conteo.
Los alumnos deben llegar a las siguientes conclusiones:
A) Hay 27 opciones para llenar cada una de las casillas referentes al nombre y los apellidos (27 letras mayúsculas del alfabeto).
B) Hay 10 opciones para llenar cada una de las casillas referentes al año de nacimiento (dígitos del 0 al 9).
C) Dificultad: No hay un número de opciones fijo para llenar la casilla referente al segundo dígito del mes de nacimiento (octava casilla), pues este varía dependiendo del primer dígito del mes de nacimiento.
D) Dificultad: No hay un número de opciones fijo para llenar las casillas del día de nacimiento, pues hay meses de 28, 30 y 31 días, es decir; el número de días depende del mes de nacimiento. Por ejemplo, el RFC RASE980231 no puede existir, pues febrero no tiene 31 días.
</td>
</tr>
</table>

	7. Para solucionar el problema, el profesor plantea las siguiente preguntas a los alumnos **(5 minutos)**: A) ¿Cómo llamamos al mes y día de nacimiento? B) ¿Cuántas fechas de cumpleaños existen? C) ¿Podríamos considerar las casillas de la 7 a la 10 como si fuera una sola? El profesor modifica sobre el pizarrón las casillas del inciso 4) de la siguiente forma: ____ ____ ____ ____ ____ ____ ________________ 1ªAP 2ªAP 1ªAM 1ª N AA Fecha de Cumpleaños	7. Dos alumnos responden a las preguntas planteadas por el profesor. A) **Respuesta esperada:** la fecha de cumpleaños. B) **Respuesta esperada:** 365 fechas de cumpleaños. C) **Respuesta apropiada:** Sí, porque el número de posibilidades para llenar las casillas de la 7 a la 10 corresponde con el número de fechas de cumpleaños.
	8. El profesor cuestiona a los alumnos sobre cuantas posibilidades existen al asignar un valor a cada carácter de del RFC, tomando en cuenta que se han remplazado las últimas 4 casillas por una nueva casilla que corresponde a una fecha de cumpleaños **(3 minutos)**. **El profesor escribe sobre las casillas dibujadas en el pizarrón:** 27 27 27 27 10 10 365 1ªAP 2ªAP 1ªAM 1ª N AA Fecha de Cumpleaños	8. Siete alumnos apoyan al profesor mencionando cuántas posibilidades hay para asignar un valor a cada una de las casillas del RFC.

	9. El profesor concluye con las siguientes preguntas **(2 minutos)**: A) ¿Qué nos falta para calcular el número total de RFC que pueden emitirse? B) ¿Cuánto da esa multiplicación?	9. Dos alumnos responden a las preguntas del profesor: A) **Respuesta apropiada:** multiplicar los números sobre las casillas. B) **Respuesta apropiada:** los alumnos sacan la calculadora científica y resuelven: 27×27×27×27×10×10×365 = 19,397,596,500
30’	10. El profesor escribe en el pizarrón el siguiente problema **(5 minutos)**: ***Problema #2:*** *El sistema de seguridad para los servicios en línea de un banco solicita a los usuarios crear una contraseña de exactamente 4 caracteres con las siguientes condiciones:* *a) Solo se aceptan letras minúsculas (hay 27 letras) y dígitos (hay 10 dígitos).* *b) Cada contraseña debe contener al menos una letra y al menos un dígito.* *¿Cuántas contraseñas acepta el sistema?* 11. El profesor cuestiona a los alumnos con las siguientes preguntas **(15 minutos)**: A) ¿Cuántas opciones hay para cada carácter de la contraseña? **El profesor escribe en el pizarrón:** *27 letras + 10 dígitos = 37 opciones.*	10. Los alumnos toman nota del problema. 11. Los alumnos responden a las preguntas planteadas por el profesor como se indica a continuación: A) Dos alumnos responden a la pregunta del profesor. **Respuesta apropiada:** hay 27 opciones de letra y 10 de dígitos, que en total son 37 opciones para cada uno de los 4 caracteres de la contraseña.

	B) ¿Pueden mencionar ejemplos de contraseñas de 4 caracteres que sean inválidas porque no cumplan el inciso b), pero sí cumplan el inciso a)? **El profesor escribe en el pizarrón:** dos contraseñas inválidas que dieron los alumnos, una con sólo letras, y otra con sólo números. C) ¿Cuántos tipos de contraseñas inválidas de 4 caracteres hay que cumplen la condición a), pero fallan en cumplir la condición b)? D) ¿Cuáles son esos dos tipos de contraseñas inválidas? **El profesor escribe en el pizarrón:** *Contraseñas inválidas de 4 caracteres:* • *Tipo #1: Sólo letras minúsculas.* • *Tipo #2: Sólo dígitos.* E) ¿Cómo podríamos calcular el número de contraseñas válidas? **Acción del profesor:** escucha las propuestas de los alumnos y guía la discusión hacia la respuesta esperada. **Acción del profesor:** en el momento que considere apropiado, dibuja en el pizarrón el siguiente diagrama y lo explica:	B) Cuatro alumnos dan ejemplos de contraseñas inválidas. **Respuesta apropiada:** los alumnos proporcionan al menos un ejemplo de una contraseña con sólo letras, y otro de una contraseña con sólo dígitos. C) Dos alumnos responden a la pregunta planteada por el profesor. **Respuesta esperada:** dos tipos de contraseñas inválidas. D) Dos alumnos responden a la pregunta planteada. **Respuesta apropiada:** hay dos tipos de contraseñas inválidas de 4 caracteres: las que sólo contienen letras y las que sólo tienen dígitos. E) Cinco alumnos proponen una forma de calcular el número de contraseñas inválidas. **Respuesta esperada:** podríamos calcular cuántas contraseñas de 4 caracteres hay que cumplen a), y después a esas le restamos el número de contraseñas inválidas que hay. Esto nos da el número de contraseñas válidas, es decir, de 4 caracteres que cumplen a) y b).

	 **El profesor escribe en el pizarrón:** *Contraseñas que cumplen a)* *−Contraseñas del Tipo #1* *−Contraseñas del Tipo #2* *= Contraseñas válidas* 12. El profesor cuestiona a los alumnos con las siguientes preguntas, y guía la discusión para llegar a las respuestas correctas **(12 minutos)**: A) ¿Cómo calculamos el número de contraseñas de 4 caracteres que cumplen la condición a)? **El profesor continúa escribiendo en el pizarrón:** *Contraseñas que cumplen a) = 37×37×37×37* *−Contraseñas del Tipo #1* *−Contraseñas del Tipo #2* *= Contraseñas válidas*	12. Los alumnos responden a las preguntas planteadas por el profesor. A) Dos alumnos explican cómo calcular el número de contraseñas de 4 caracteres que cumplen a). **Respuesta apropiada:** para calcular el número de contraseñas de 4 caracteres que cumplen a), tenemos que resolver la multiplicación: 37×37×37×37.

	B) ¿Cuántas contraseñas de 4 caracteres hay que cumplen a)?	B) Los alumnos resuelven con su calculadora la operación del punto anterior. Un alumno da la solución y los demás ratifican.
	El profesor continúa escribiendo en el pizarrón: *Contraseñas que cumplen a) = 37×37×37×37 = 1,874,161* *− Contraseñas del Tipo #1* *− Contraseñas del Tipo #2* *= Contraseñas válidas*	**Respuesta correcta:** 1,874,161
	C) ¿Cómo calcularían el número de contraseñas inválidas del Tipo #1?	C) Dos alumnos responden a la pregunta planteada.
	El profesor continúa escribiendo en el pizarrón: *Contraseñas que cumplen a) = 37×37×37×37 = 1,874,161* *− Contraseñas del Tipo #1 = 27×27×27×27* *− Contraseñas del Tipo #2* *= Contraseñas válidas*	**Respuesta apropiada:** para calcular el número de contraseñas inválidas del Tipo #1, debemos multiplicar 27×27×27×27, pues hay 27 letras y las contraseñas tienen 4 caracteres.
	D) ¿Cuántas contraseñas inválidas del tipo #1 hay?	D) Los alumnos resuelven con su calculadora la operación del punto anterior. Un alumno da la solución y los demás ratifican.
	El profesor continúa escribiendo en el pizarrón: *… = 27×27×27×27 = 531,441*	**Respuesta correcta:** 531,441
	E) ¿Cómo calcularían el número de contraseñas inválidas del Tipo #2?	E) Dos alumnos responden a la pregunta planteada.

	El profesor continúa escribiendo en el pizarrón: *−Contraseñas del Tipo #2* = *10×10×10×10* F) ¿Cuántas contraseñas inválidas del tipo #2 hay? **El profesor continúa escribiendo en el pizarrón:** *... = 10×10×10×10 = 10,000* 13. El profesor recapitula lo que se analizó en el punto 10 inciso E) y pide a los alumnos calcular el número de contraseñas válidas **(3 minutos).** **El profesor continúa escribiendo en el pizarrón:** *Contraseñas que cumplen a) = 37×37×37×37 = 1,874,161* *−Contraseñas del Tipo #1 = 27×27×27×27 = 531,441* (−) *−Contraseñas del Tipo #2 = 10×10×10×10 = 10,000* (−) *= Contraseñas válidas 1,332,720*	**Respuesta apropiada:** para calcular el número de contraseñas inválidas del Tipo #2, debemos multiplicar 10×10×10×10, pues hay 10 dígitos y las contraseñas tienen 4 caracteres. F) Los alumnos resuelven con su calculadora la operación del punto anterior. Un alumno da la solución y los demás ratifican. **Respuesta correcta:** 10,000 13. Los alumnos restan 531,441 y 10,000 a 1,874,161. Un alumno da la solución y el resto ratifican la respuesta. **Respuesta correcta:** 1,332,720
25’	14. El profesor entrega a los alumnos un ejercicio impreso para evaluar los aprendizajes adquiridos.	14. Los alumnos resuelven el ejercicio de forma individual, teniendo 25 minutos para resolverlo y redactar la solución. Al término de los 25 minutos, entregan el ejercicio resuelto al profesor.

ANEXO H

Alumno: ____ **Grupo:** ___________

Evaluación del Tema: ***Dos operaciones básicas para la vida***

Instrucciones:

1) Lee cuidadosamente el siguiente problema.
2) Analiza el problema y contesta a la pregunta planteada por el mismo. Para esto, cuentas con una hoja en blanco para usar como borrador.
3) Una vez que hayas respondido a la pregunta planteada en el problema, deberás redactar de forma limpia, clara y ordenada, cuál fue tu proceso de razonamiento que te llevó a la solución del problema. Para esto, tienes que mencionar **todas las operaciones que resolviste** (suma, resta, multiplicación y/o división), escribe su solución y explica cuál fue el propósito de resolver dicha operación.
4) Por último, escribe la solución del problema, es decir; responde a la pregunta que se planteó en el problema.

PROBLEMA #1: Una empresa que se dedica a la fabricación de focos, tuvo una producción de 200 focos. Sin embargo, la empresa sabe que, por cada 40 focos fabricados, 7 de ellos no pasan el control de calidad. Cada foco fabricado generó a la empresa un costo de producción de $5, y sólo los que pasaron el control de calidad se venden a un precio de $20 **¿Cuál será la ganancia de la empresa sobre la producción antes mencionada?**

Observación #1.1: *recuerda que la ganancia no es el dinero que ingresa a la empresa de una venta, sino la diferencia entre la venta y el costo que generó la misma.*

Observación #1.2: *no pierdas de vista que los focos defectuosos generaron un costo a la empresa, el cual no se recupera, pues estos últimos no se venderán.*

ANEXO I

Alumno: ____ **Grupo:** ___________

PROBLEMA #2: Una caja de galletas de avena, de cierta marca conocida, tiene un costo al consumidor de $20 en los supermercados. Dicha caja contiene un total de 6 paquetes con 4 galletas cada uno. Por otra parte, un paquete de 6 galletas de avena de la misma marca tiene un precio al consumidor de $10 en el mini-súper de la esquina **¿De cuánto es tu ahorro entre comprar una caja de galletas y comprar paquetes sueltos de 6 galletas c/u, de tal modo que iguales la cantidad de galletas que contiene la caja?**

ANEXO J

Alumno: ____ **Grupo:** ____________

Evaluación del Tema: El principio fundamental del conteo

Instrucciones:

1) Lee cuidadosamente el siguientes problema.
2) Analiza el problema y contesta a la pregunta planteada. Para esto, cuentas con una hoja en blanco para usar como borrador.
3) Una vez que tengas la respuesta de la pregunta planteada en el problema, **deberás redactar de forma limpia, clara y ordenada, cuál fue tu proceso de razonamiento que te llevó a la solución del problema**. Para esto, tienes que mencionar cuáles fueron los eventos sobre los que aplicaste el Principio Fundamental del Conteo, así como también deberás indicar la cardinalidad del espacio muestral de cada uno de ellos. Tampoco dejes de escribir cada una de las operaciones que te llevaron a la solución del problema.
4) Por último, escribe la solución del problema, es decir; responde la pregunta que se planteó en el mismo.

Problema #1: El menú de una cafetería te da las siguientes opciones para armar tu *Paquete Desayuno*: café americano o café con leche, jugo o fruta, un platillo a elegir del menú y una pieza de pan de dulce. Si eliges jugo, puedes elegir entre jugo de naranja, de toronja o de zanahoria. Si eliges fruta, te dan a elegir entre una rebanada de sandía, una de melón, o una de piña. Para el platillo, puedes elegir entre las 15 opciones del menú. Por su parte, para el pan dulce, puedes elegir entre una dona de chocolate, una concha o una mantecada **¿De cuántas formas puedes armar tu paquete desayuno?**

ANEXO K

Alumno: ____ **Grupo:** ___________

PROBLEMA #2: Una empresa lleva a cabo un sorteo entre sus 20 empleados. En dicho sorteo, primero se rifa un celular, luego una televisión y, por último, una computadora. Para esto, una vez que el ganador del celular ha sido seleccionado, se vuelve a ingresar su nombre a la urna, de modo que aún podría ganar la televisión y/o la computadora. Lo mismo se hace con el ganador de la televisión **¿De cuántas formas podrían salir sorteados los 3 premios entre los 20 empleados?**

Observación: puede darse el caso que un mismo empleado resulte ganador de los tres premios sorteados.