



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

EFEECTO DE DERIVADAS ALTAS EN LA TASA DE  
DECAIMIENTO DE UN CAMPO ESCALAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Bernardo Andrade Pérez Rubio

TUTOR

Dr. Angel Sánchez Cecilio



Ciudad de México

2021



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Dedicatoria

Los tres pilares que han formado mi vida; Familia, Amigos y Maestros. Este trabajo es para las personas que ocupan uno o más espacios ahí.



# Agradecimientos

Se agradece a PAPIIT por el apoyo a los proyectos que hicieron posible este trabajo

IN117817 - *Comportamiento de la materia en condiciones extremas del universo.*

IN118219 - *Efectos de un medio magnetizado a densidad y temperatura finitas sobre las funciones de correlación en teoría cuántica de campos.*

A los miembros del jurado por sus correcciones y sugerencias.

A Ángel Sánchez por su apoyo y valiosas discusiones.



# Resumen

En el siguiente trabajo se trata el estudio de los efectos que generan los términos en el Lagrangiano con derivadas de orden superior de un campo escalar en la tasa de decaimiento a escalares, el cual es un proceso físico de relevancia, tanto a nivel teórico y experimental en la física de altas energías. Se estudia con detalle un campo escalar que tiene una ecuación de movimiento de orden cuarto en las derivadas, esto implica que el propagador tiene la posibilidad de factorizarse y separarse en dos grados de libertad. Esta idea motiva a que los grados de libertad se pueden visualizar explícitamente desde Lagrangiano. Se trabajó con los dos acercamientos, separando los grados desde el Lagrangiano y en el propagador. Se calcula la tasa de decaimiento a través del Teorema Óptico, tomando la parte imaginaria de la función de autoenergía, a orden perturbativo dominante. Usando dos prescripciones para teorías con derivadas de orden superior, o altas, CLOP<sup>1</sup> y Anselmi & Piva, se calculó la parte imaginaria de la función de autoenergía, obteniendo dos resultados con comportamientos idénticos pero con intensidades distintas debidas a la forma en que se separaron los grados de libertad. Los efectos que provocan las derivadas altas en la tasa de decaimiento del escalar son dos: un aumento en la tasa de decaimiento y una modificación en la energía del umbral.

---

<sup>1</sup>Cutkosky, Landshoff, Olive y Polkinghorne



# Introducción

Desde un punto de vista clásico, introducir una derivada alta al Lagrangiano cambia las ecuaciones de Euler-Lagrange, agregando un término que trata con esta derivada de orden superior en la coordenada generalizada o campo. La dinámica de este sistema, estudiada por Ostrogradsky en 1850 [1], muestra una inestabilidad cinética en el Hamiltoniano y predice soluciones no acotadas. Al cuantizar este tipo de teorías, aparecen los llamados *fantasmas* de Ostrogradsky que llevan consigo esta inestabilidad. Existen formas de quitar estos fantasmas, con el costo de perder correspondencia con la mecánica clásica (Anomalía), sin embargo, se puede recuperar la correspondencia y evitar la inestabilidad con la complejificación de estos fantasmas [2]. Al extender estas ideas a la teoría de campos, las teorías con derivadas altas tienen una subclase local donde se pueden reconciliar unitariedad y renormalizabilidad. Estas teorías son denominados de *Lee-Wick* (LW), en honor a T.D. Lee y G.C. Wick [3, 19], quienes fueron los primeros en proponer una extensión de la electrodinámica cuántica modificando el regulador de Pauli Villars, asociado a una escala finita de energía, promoviéndolo a un grado de libertad físico. En esta teoría, el propagador del fotón de Lee-Wick (LW) es masivo y tiene polos de signo distinto. Se argumentó que este nuevo fotón no viola unitariedad, puesto que decae a fermiones ordinarios [3]. Lee y Wick se dieron cuenta de que la matriz de transición que involucra los fantasmas diverge exponencialmente con el tiempo, pero se puede remover con ciertas prescripciones. Al remover esta divergencia, aparece el fenómeno de la no-causalidad a muy altas energías [4, 5]. En este trabajo se usan dos prescripciones para estudiar el efecto de derivadas altas en la tasa de decaimiento de un escalar, la de CLOP [6] y la de Anselmi & Piva [7, 8]. La prescripción usada por CLOP consiste en variar las masas en los propagadores para evitar que los polos y puntos rama se crucen con algún contorno de integración, mientras que el procedimiento de Anselmi & Piva argumenta que las teorías tienen, por sí mismas,

---

todas la herramientas para ser integradas. Haciendo un análisis de la ubicación de los polos junto con una rotación de Wick, aseguran que se puede deformar de manera no analítica el contorno de integración. Esta deformación permite hacer continuaciones analíticas desde regiones donde está bien definido la autoenergía a un lazo para definir toda la recta real de valores de energía. En el presente trabajo, se utilizan ambas prescripciones en una teoría particular que permita estudiar los detalles específicos y resalte las ventajas y desventajas de una con respecto de la otra. Con esto en mente, el trabajo se ha dividido en 4 capítulos. El primer capítulo trata los preliminares de teorías clásicas de campos, mecánica cuántica, teoría cuántica de campos y herramientas necesarias para el estudio de la tasa de decaimiento. El segundo capítulo trata a detalle la forma del decaimiento de una partícula escalar en dos escalares. En el tercer capítulo se trabaja un modelo escalar y se calcula la parte imaginaria de la autoenergía a un lazo, usando las dos prescripciones, y se comparan ambos resultados. Finalmente, en el cuarto capítulo, se presentan las conclusiones de la comparación del decaimiento de Klein Gordon contra la teoría de Lee-Wick y se hace una breve discusión sobre las diferencias de las prescripciones.

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
I. Campos Clásicos . . . . .	1
I.1. Formalismo Hamiltoniano . . . . .	2
I.2. Teoría de Campos con Derivadas Altas . . . . .	2
II. Mecánica Cuántica . . . . .	5
II.1. Evolución Temporal y Cuadros de Schrödinger y Heisenberg . . . . .	6
II.2. Oscilador Armónico . . . . .	8
II.3. Oscilador de Pais-Uhlenbeck . . . . .	11
III. Teoría Cuántica de Campos . . . . .	13
III.1. Ecuación de Klein-Gordon . . . . .	14
III.2. Cuantización del Campo de Klein-Gordon . . . . .	15
III.3. Propagador Escalar . . . . .	17
III.4. Diagramas y reglas de Feynman . . . . .	19
IV. Matriz S, en resumidas cuentas . . . . .	22
V. Teorema Óptico y Reglas de Corte . . . . .	24
VI. Correlador de dos puntos . . . . .	25

VII. Partículas Inestables y Breit Wigner . . . . .	29
<b>2. Autoenergía y decaimiento para una Teoría Escalar de Klein Gordon</b>	<b>31</b>
I. Autoenergía de la teoría . . . . .	31
II. Decaimiento . . . . .	34
III. Acercamiento Alternativo . . . . .	36
<b>3. Teoría de Lee-Wick</b>	<b>39</b>
I. Teorías de Lee-Wick . . . . .	39
I.1. Prescripción CLOP . . . . .	46
I.2. Polos Estándar . . . . .	47
I.3. Polos Lee-Wick-Lee-Wick . . . . .	48
I.4. Polos Estándar - Lee-Wick . . . . .	51
II. Acercamiento con Anselmi & Piva . . . . .	54
II.1. Polo Lee-Wick - Lee Wick . . . . .	55
II.2. Polo Estándar . . . . .	57
II.3. Polos Lee-Wick - Estándar . . . . .	58
<b>4. Conclusiones</b>	<b>63</b>
<b>A. Un poco de Variable Compleja</b>	<b>65</b>
I. Principio de Simetría de Schwarz . . . . .	65
II. Calculo de Residuos para el aventurado inexperto . . . . .	66
III. Diagramas con derivadas altas . . . . .	66

<b>B. Cálculo de la parte imaginaria de la Autenergía</b>	<b>71</b>
I. Combinaciones de signo de $i\epsilon$ . . . . .	71
II. Autoenergía . . . . .	72



# Capítulo 1

## Preliminares

### I. Campos Clásicos

Las nociones de partículas de mecánica clásica se pueden extender a campos, con nuevos parámetros espaciales involucrados en el Lagrangiano. Por ejemplo, el Lagrangiano para sistemas de una dimensión tiene la forma

$$L = \int dx \mathcal{L}, \quad (1.1)$$

donde  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x, t), \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t})$  es la densidad Lagrangiana y  $\phi$  una función escalar que será llamada campo. El concepto de campo, a diferencia de una partícula discreta, trae consigo una infinidad de grados de libertad, o sea, que deben incorporarse a una ecuación de movimiento en la forma de índices continuos para cada punto. Este campo se puede ver como una colección infinita de puntos que llenan el espacio y esos índices continuos se ven como parámetros espaciales. El campo es una función de los parámetros que asigna un escalar, espinor, vector o tensor a ese punto del espacio. La extensión a sistemas de cuatro dimensiones en espacio plano es sencilla, etiquetando las variables  $x^0 = t$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  para empaquetarlas en un vector  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  y la densidad lagrangiana se verá  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}; x^\mu)$ . Al aplicar el Principio de Hamilton, se recuperan las ecuaciones de Euler-Lagrange para medios continuos

$$\partial_\mu \left( \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad (1.2)$$

donde se usó la notación  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$  y la métrica plana  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

## I.1. Formalismo Hamiltoniano

A diferencia del formalismo Lagrangiano, el formalismo Hamiltoniano busca expresar las ecuaciones de movimiento como ecuaciones de primer orden. Esto se logra introduciendo momentos generalizados que son conjugados al campo

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}. \quad (1.3)$$

La transición entre ambos formalismos consiste en cambiar las variables  $\partial_0 \phi$  por  $\pi$ , mediante una transformada de Legendre

$$\mathcal{H} = \pi \partial_0 \phi - \mathcal{L}. \quad (1.4)$$

El diferencial del Hamiltoniano  $d\mathcal{H}$  permite identificar algunas relaciones entre ambos formalismos,

$$\partial_0 \phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}, \quad (1.5)$$

$$- \partial_0 \pi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}, \quad (1.6)$$

$$- \partial_0 \mathcal{L} = \partial_0 \mathcal{H}. \quad (1.7)$$

Este formalismo es útil entre otras cosas, en teorías cuánticas ya que el Hamiltoniano tiene una fuerte relación con la evolución temporal de las amplitudes.

## I.2. Teoría de Campos con Derivadas Altas

Las teorías con derivadas altas del campo son de gran interés para la física, pues ofrecen algunos remedios a problemas de las teorías comunmente estudiadas, por ejemplo, renormalización de teorías cuánticas en cuatro dimensiones[2], también afectan potenciales efectivos y transiciones de fase de campos escalares en fondos curvos[9], generando interés en astrofísica y cosmología. Estas derivadas altas se introducen en el Lagrangiano del sistema como derivadas de orden superior a dos de las variables dinámicas. Ostrogradsky formuló un teorema que predice inestabilidades en el Hamiltoniano del sistema cuando existen derivadas de, al menos, orden 2 [1].

A nivel clásico, se puede considerar un Lagrangiano  $L$  que depende de las variables  $x, \dot{x}, \ddot{x}$ , al cual, por el principio de Hamilton, le corresponde la ecuación de movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = 0. \quad (1.8)$$

Debido a la ecuación (1.8), la ecuación de movimiento será de orden 4 en las derivadas temporales, requiriendo 4 condiciones iniciales y 4 variables canónicas. Ostrogradsky eligió los siguientes pares conjugados [2, 9]

$$X_1 = x, \quad X_2 = \dot{x}, \quad (1.9)$$

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}, \quad P_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}. \quad (1.10)$$

Se identifica una aceleración generalizada  $A = A(X_1, X_2, P_2)$  y se asocia a  $\ddot{x}$ , al igual que se hace con una velocidad y se asocia con  $\dot{x}$  en el caso sin derivadas altas.

Una vez identificadas las coordenadas y los momentos, al hacer una transformada de Legendre sobre  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$ , se obtiene el Hamiltoniano de este sistema

$$H(X_1, X_2, P_1, P_2) = P_1 X_2 + P_2 A(X_1, X_2, P_2) - L(X_1, X_2, A(X_1, X_2, P_2)). \quad (1.11)$$

Para mostrar que verdaderamente es un Hamiltoniano, hay que ver la evolución temporal. Según el formalismo Hamiltoniano

$$\dot{X}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial X_i}. \quad (1.12)$$

Aplicando lo anterior a las variables canónicas del problema, se tiene

$$\dot{X}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1} = X_2 \quad (1.13)$$

aterrizado al caso que propone Ostrogradsky

$$\dot{x} \equiv \dot{X}_1 = X_2 \equiv \dot{x}, \quad (1.14)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_2 &= \frac{\partial H}{\partial P_2} \\
 &= A + P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} - \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial A}{\partial P_2} \\
 &= A + P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} - P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} \\
 &= A \\
 &\text{o} \\
 \ddot{x} &= A.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned}
 \dot{P}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial X_2} \\
 &= -P_1 - P_2 \frac{\partial A}{\partial X_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial A}{\partial X_2} \\
 &= -P_1 - P_2 \frac{\partial A}{\partial X_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + P_2 \frac{\partial A}{\partial X_2} \\
 &= -P_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \dot{P}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial X_1} \\
 &= -P_2 \frac{\partial A}{\partial X_1} + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \frac{\partial A}{\partial X_1} \\
 &= -P_2 \frac{\partial A}{\partial X_1} + \frac{\partial L}{\partial x} + P_2 \frac{\partial A}{\partial X_1} \\
 &= \frac{\partial L}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Usando la ecuación de Euler-Lagrange (1.8) se concluye de manera inmediata que hay evolución temporal en estas variables canónicas.

De esta manera, el Hamiltoniano dado por la ecuación (1.11) genera evolución temporal. Si el Lagrangiano no contiene dependencia temporal explícita, la cantidad  $H$  se conserva. El Hamiltoniano de Ostrogradsky para segundas derivadas es general, sin embargo, al depender linealmente de  $P_1$  se presenta una inestabilidad cinética. Esta se manifiesta como una dependencia temporal en la variable dinámica provocando que no exista una cota inferior en el Hamiltoniano [1].

Antes de entrar en las aplicaciones de estas teorías cuantizadas, hay que sentar las bases de la mecánica cuántica. En la siguiente sección se abordan los detalles necesarios para iniciar el estudio de la teoría cuántica de campos.

## II. Mecánica Cuántica

En mecánica cuántica se describe el estado cuántico de una partícula como un estado dependiente del tiempo, caracterizado por una función de onda  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , que contiene toda la información posible de la partícula. Ya que las posibles posiciones de la partícula forman un continuo, la probabilidad  $d\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$  de la partícula de estar a un tiempo  $t$  y en una posición  $\mathbf{r}$ , debe de ser proporcional a  $d^3r = dx dy dz$  y por ende, infinitesimal.  $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$  se interpreta como la densidad de probabilidad

$$d\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = C|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r, \quad (1.18)$$

siendo  $C$  una constante de normalización.

La mecánica cuántica se rige por una serie de postulados [10]:

1. A un tiempo fijo  $t_0$ , el estado de un sistema físico se define especificando una función de onda  $\Psi$  que pertenece al espacio de Hilbert y contiene toda la información física del sistema.
2. Cada cantidad física es descrita por un operador  $\hat{A}$  que actúa en el espacio de Hilbert; este operador es un observable si es hermitiano.
3. El único resultado posible de una medición es el eigenvalor del observable correspondiente.
4. Si la medición de una cantidad física del sistema en el estado  $|\Psi\rangle$  devuelve un eigenestado, el estado del sistema inmediatamente después es la proyección normalizada

$$\frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| P_n |\psi\rangle}}$$

de  $|\psi\rangle$  en el subespacio asociado al eigenvalor obtenido. Y  $P_n$  es la proyección de  $\phi$  en su n-ésimo estado.

5. La evolución temporal de un estado  $\Psi(t)$  es regido por la ecuación de Schrödinger

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle &= \hat{H}\Psi(t) \\ &= \frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi(t) + V(\mathbf{r})\Psi(t) \end{aligned} \tag{1.19}$$

donde  $\hat{H}$  es un observable asociado a la energía total del sistema, que en muchos casos coincide con el Hamiltoniano. Es posible separar la parte temporal de la espacial de la función de onda, hacer esto permite trabajar con soluciones *estacionarias*. Estas dan simplicidad a la hora de dar soluciones a la ecuación de Schrödinger, la dependencia temporal se puede recuperar al evolucionar en el tiempo el sistema.

En las siguientes secciones se busca introducir las formas de trabajar la evolución de los sistemas en el tiempo, esto será útil porque mantienen su esencia después de la *segunda cuantización* también llamada teoría cuántica de campos. Finalmente, se introduce el arma más poderosa de un físico, el oscilador armónico tratado desde la perspectiva de la mecánica cuántica y una interesante modificación con derivadas altas.

## II.1. Evolución Temporal y Cuadros de Schrödinger y Heisenberg

Para estudiar la evolución temporal de un sistema cuántico hay dos descripciones distintas, una que toma operadores fijos en el tiempo con una amplitud de probabilidad que varía y otra que considera operadores cambiantes con el tiempo, fijando la amplitud de probabilidad. Estos son los cuadros de Schrödinger y Heisenberg, respectivamente. Para trabajar en esta sección, se hará la distinción entre cuadros, pero en el resto del trabajo se dará por hecho que se trabaja en el cuadro de Schrödinger.

Para hablar de evolución se debe de comenzar tratando al sistema cuántico desde un tiempo arbitrario, que puede ser cero, de forma que la relación entre el estado  $|\psi(t)\rangle$ , en dos tiempos arbitrarios está dado por un operador lineal tal que

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle. \tag{1.20}$$

Este operador, por definición, es el operador de evolución y cumple las siguientes propiedades:

1. De (1.20), el ket  $|\psi(t_0)\rangle$  es arbitrario y se cumple que

$$\hat{U}(t_0, t_0) = I_d. \quad (1.21)$$

2. Al sustituir en la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle,$$

para un ket arbitrario, los operadores cumplen

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0). \quad (1.22)$$

3. Tomando un tiempo arbitrario  $t'$  distinto,

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t') |\psi(t')\rangle. \quad (1.23)$$

anidando de la misma manera

$$|\psi(t')\rangle = \hat{U}(t', t'') |\psi(t'')\rangle, \quad (1.24)$$

y sustituyendo

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t'') |\psi(t'')\rangle, \quad (1.25)$$

de tal manera que para un ket arbitrario, los operadores cumplen

$$\hat{U}(t', t'') = \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t''). \quad (1.26)$$

De esta forma, si se tienen tiempos arbitrarios el sistema puede progresar paso a paso usando un operador entre cada dos tiempos.

Un caso específico es fijando el último tiempo igual al primero  $t = t''$  en (1.26)

$$I_d = \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t). \quad (1.27)$$

De esta manera, se tiene que ante el intercambio de argumentos la evolución se invierte

$$\hat{U}(t, t') = \hat{U}^{-1}(t', t). \quad (1.28)$$

De esto último se concluye que este operador es unitario.

Teniendo en la mano este operador, se puede aplicar a kets o a operadores, dependiendo sobre quien se aplique es el cuadro que se utiliza.

Considérese un ket  $|\psi_s(t)\rangle$  a un instante  $t$ , que es descrito según la evolución temporal del sistema (1.20). Para obtener un vector constante en el tiempo basta con invertir la evolución de  $|\psi_s(t)\rangle$

$$|\psi_H\rangle = \hat{U}^\dagger(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle. \quad (1.29)$$

Entonces en el cuadro de Heisenberg, el ket es constante e igual al ket en el tiempo inicial del cuadro de Schrödinger. Sólo falta tratar la evolución de los operadores como

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{A}_S(t) \hat{U}(t, t_0). \quad (1.30)$$

Generalmente,  $\hat{A}_H(t)$  depende del tiempo mientras que  $\hat{A}_S(t)$  no siempre lo hace. Sin embargo, existe un caso en el cual  $\hat{A}_H(t)$  y  $\hat{A}_S(t)$  no dependen del tiempo, el caso en el cual se tiene un sistema conservativo y  $\hat{A}_S$  conmuta con el Hamiltoniano  $\hat{H}$ . Entonces el operador  $\hat{A}_S$  conmuta con el de evolución temporal y la ecuación (1.30) se reduce a

$$\hat{A}_H(t) = \hat{A}_S, \quad (1.31)$$

donde los operadores son iguales y son constantes de movimiento.

Ahora se tratarán dos ejemplos de gran importancia, el primero es una piedra angular para los físicos y el segundo es una modificación del mismo que permite dilucidar algunos problemas que presentan las derivadas altas al cuantizar.

## II.2. Oscilador Armónico

El oscilador armónico cuántico es uno de los ejemplos más ilustrativos y más apegados al formalismo de la teoría cuántica de campos. El Hamiltoniano para el sistema de una dimensión, con masa  $m$  y frecuencia natural de oscilación  $\omega$ , está dado por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \hat{q}^2. \quad (1.32)$$

Es posible obtener una solución, de forma algebraica, mediante la introducción de nuevos operadores que se definen en términos de  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$ , esto es

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( \hat{q} + i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right), \quad (1.33)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( \hat{q} - i \frac{\hat{p}}{m\omega} \right). \quad (1.34)$$

Estos operadores no son Hermitianos, y por ende, no medibles. Las relaciones entre los operadores se pueden invertir fácilmente, obteniendo

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (1.35)$$

$$\hat{p} = \frac{1}{i\sqrt{2m\omega}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (1.36)$$

Usando las relaciones de conmutación entre  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  se obtiene fácilmente que

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1^1. \quad (1.37)$$

Sabiendo la forma de (1.36) y (1.35) es posible reescribir el Hamiltoniano, como sigue (1.32)

$$\hat{H} = \omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.38)$$

Usando la notación de Dirac se puede construir el espacio de Hilbert sobre el cual actúan estos operadores. Si se etiqueta a los estados con algún número natural  $n$ , la ecuación de Shrödinger se ve:

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (1.39)$$

Mediante el uso de las relaciones de conmutación (1.37), es posible observar que los estados  $\hat{a} |n\rangle$ ,  $\hat{a}^\dagger |n\rangle$  también son eigenestados del Hamiltoniano, esto es

$$\hat{H} \hat{a}^\dagger |n\rangle = (E_n + \omega) \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (1.40)$$

$$\hat{H} \hat{a} |n\rangle = (E_n - \omega) \hat{a} |n\rangle. \quad (1.41)$$

---

<sup>1</sup>Este resultado es  $\hbar$ , para este trabajo su valor es 1

## II. MECÁNICA CUÁNTICA

---

De esta manera se puede definir el estado base, como el estado de energía más baja en el cual se cumple que

$$\hat{a} |0\rangle = 0. \quad (1.42)$$

Este estado en particular ( $n = 0$ ) tiene energía  $E_0 = \frac{1}{2}\omega$ . Las energías, entonces, estarán dadas como función de  $n$ , específicamente

$$E_n = \omega(n + 1/2). \quad (1.43)$$

El operador  $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ , se identifica como el operador de número  $\hat{n}$ , ya que su eigenvalor es  $n$ , el número de cuantos de energía que tiene el sistema. Estos nuevos operadores, debido a (1.40) y (1.41), reciben el nombre de operadores de creación y aniquilación. Crean cuantos de excitación y en el marco de la teoría cuántica de campos, partículas. Cada eigenestado del oscilador puede ser construido mediante la aplicación consecutiva del operador de creación sobre el estado base, esto es

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (1.44)$$

La representación matricial de los operadores de creación y aniquilación en la eigenbase  $\{|n\rangle\}$ , es

$$\langle m | \hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1}, \quad (1.45)$$

$$\langle m | \hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} \delta_{m,n-1}. \quad (1.46)$$

La evolución temporal del sistema queda a cargo de la ecuación de Schrödinger. En el marco de Heisenberg la dependencia temporal la llevan los operadores y satisfacen

$$i \frac{d}{dt} \hat{a}(t) = [\hat{a}(t), H]. \quad (1.47)$$

Usando las relaciones de conmutación (1.37), para tiempos iguales, se obtiene

$$i \frac{d}{dt} \hat{a}(t) = \omega \hat{a}(t), \quad (1.48)$$

cuya solución analítica lleva a la forma de la evolución temporal de los operadores de creación (aniquilación)

$$\hat{a}(t) = e^{-i\omega t} \hat{a}(t=0), \quad (1.49)$$

y análogamente

$$\hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega t} \hat{a}^\dagger(t=0). \quad (1.50)$$

En la siguiente subsección se propone una modificación con derivas altas al oscilador armónico. Se tratarán los problemas y las posibles soluciones propuestas por [11].

### II.3. Oscilador de Pais-Uhlenbeck

El oscilador de Pais-Uhlenbeck (PU) trata con un Lagragiano de la forma

$$L = \frac{1}{2}[\dot{q}^2 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)q^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2q^4] + (\text{Términos no lineales}), \quad (1.51)$$

donde  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son frecuencias del oscilador. Al introducir estas derivadas altas, la inestabilidad de Ostrogradsky (energías no acotadas por abajo) se manifiesta [1, 11] y, en general, los términos no lineales no ayudan con el problema. El Hamiltoniano asociado a la teoría se puede manipular con transformaciones canónicas para ser diagonalizado. Las coordenadas canónicas se obtienen con el método de Ostrogradsky (1.9) y (1.10) y son transformadas para diagonalizar el Hamiltoniano. Cuando se aplica el esquema de cuantización convencional a este sistema, el espectro de energías que se obtiene es

$$E_{n,m} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Omega_1 - \left(m + \frac{1}{2}\right) \Omega_2, \quad (1.52)$$

para  $n, m \in \mathbb{N}$ . Las eigenfunciones del Hamiltoniano forman una base ortogonal, pero para frecuencias arbitrarias el espectro es denso. Esta propiedad inusual está relacionada con el hecho de que no hay cota inferior [11].

En el caso donde  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ , se obtiene un espectro aparentemente discreto

$$E_{n,m} = \Omega(n - m), \quad (1.53)$$

manteniendo  $m, n$  finitas. El único problema es que las eigenfunciones no se pueden normalizar. Por eso se busca tratar el límite de  $\Omega_1 - \Omega_2$  cuando se aproxima a cero y  $n - m$  se van a infinito, de tal forma que el producto  $n(\Omega_1 - \Omega_2)$  se mantenga finito, pero de nuevo, la energía puede obtener valores arbitrarios no necesariamente discretos. Esto vuelve a ser indicador de un espectro continuo. Estas últimas situaciones hacen ver que no se puede definir un estado base, pero aún así se puede trabajar de manera unitaria en ambos casos, donde las frecuencias son iguales ( $\Omega$ ) y distintas ( $\Omega_1, \Omega_2$ ) [11].

Cuando los osciladores tienen una interacción se observa que hay intercambio de energía entre ambos subsistemas que puede llevar a inestabilidades y pérdida de unitariedad. Se han hecho una serie de esfuerzos para evitar estas inestabilidades y colapsos, uno de ellos consiste en añadir un término de interacción particular. Cuando el Hamiltoniano de interacción toma la forma de la ecuación (1.54)

$$\lambda(X_1 - X_2)(X_1 + X_2)^3, \quad \lambda > 0, \quad (1.54)$$

donde las  $X_i$  son las coordenadas generalizadas. Se puede ver que las soluciones no presentan un colapso y la amplitud de oscilaciones crece con el tiempo<sup>2</sup>. En el caso cuántico el Hamiltoniano vuelve a presentar un espectro continuo. [11]

La complexificación de la teoría trae consigo un cambio de signo en un término de el Hamiltoniano, al continuar analíticamente la amplitud de onda para valores complejos de las coordenadas. Para ver que es lo que puede hacer esta forma de pensar hay que regresar al oscilador estándar, cuyas amplitudes de probabilidad son proporcionales a  $e^{X^2/2}$ . Al continuar analíticamente esta función las amplitudes se desvanecen asintóticamente en la región *cuña* de Stokes, que se ve sombreada en la figura 1.1.

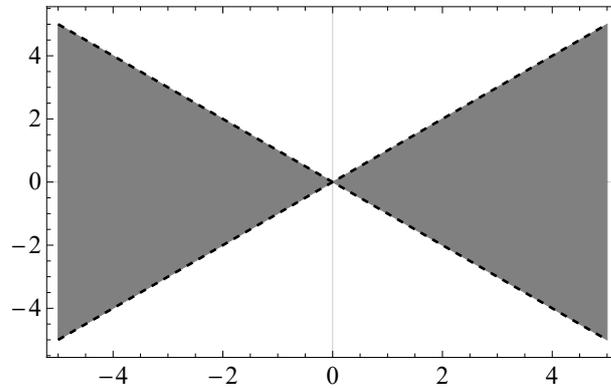


Figura 1.1: La región sombreada es la región donde el oscilador estándar se desvanece, el complemento es donde el oscilador complexificado lo hace.

Si se piensa que  $X$  puede tomar valores imaginarios, con amplitudes proporcionales a  $(iX)e^{X^2/2}$  donde se desvanecen en la región complementaria a la figura 1.1. El espectro cambia

$$E_n = -\Omega(n + 1/2). \quad (1.55)$$

---

<sup>2</sup>Clásicamente.

Para el oscilador de PU con espectro (1.52), se puede hacer lo mismo con la coordenada del segundo oscilador, donde  $X_2$  se asume imaginaria y se obtiene un espectro positivo definido donde se puede identificar un estado base. El precio a pagar es que no se tiene una teoría unitaria y si se busca cambiar la norma se obtienen estructuras no locales [11]. Estos problemas se vuelven a encontrar cuando se aborda desde un formalismo de campos cuánticos, y es un tema que se continúa investigando. En las siguientes secciones se aborda la teoría cuántica de campos.

### III. Teoría Cuántica de Campos

Un aspecto importante que no toma en cuenta la mecánica cuántica es la causalidad de eventos independientes. Es fácil hacer que dos eventos no estén conectados causalmente, simplemente hay que ubicarlos fuera del cono de luz, esto quiere decir que para unirlos se requiere viajar a una velocidad mayor a la de la luz. Esto en mecánica cuántica no representa mayor problema, pero en relatividad especial causa muchas preocupaciones, al unir la relatividad especial con la mecánica cuántica se trae a la vida la relación de dispersión relativista

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \tag{1.56}$$

También la QFT<sup>3</sup> trabaja con campos con distintas estructuras, llámense escalares, espinores, vectores y tensores. Es importante por principios de relatividad que estas estructuras se conserven en distintos sistemas de referencia, o sea que transformen como escalares, espinores, vectores y tensores bajo el grupo de Poincaré. Entonces reciben el nombre de *invariantes de Lorentz* [12] en el espacio de Minkowski.

El sistema más simple tomado desde la infancia de la mecánica cuántica relativista es aquel que buscaba satisfacer la relación de dispersión (1.56), el cual da origen a la ecuación de Klein-Gordon.

---

<sup>3</sup>*Quantum Field Theory.*

### III.1. Ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Klein-Gordon fue el primer intento para describir partículas relativistas [13]. Se puede partir del Lagrangiano clásico de Klein-Gordon para explorar la estructura que tiene este campo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

donde  $m$  es la masa del sistema y  $\nabla$  el gradiente. En notación relativista, tiene la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (1.57)$$

Calculando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.2), se llega a

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0, \quad (1.58)$$

mejor conocida como la ecuación de Klein-Gordon. Identificando al momento conjugado (1.3) con  $\pi = \dot{\phi}$ , se puede construir el Hamiltoniano usando la transformada de Legendre (1.4), esto es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} \\ \mathcal{H} &= \pi^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Estos tres términos se asocian a energía de trasladarse en el tiempo, de moverse a través del espacio y el costo de tener el campo alrededor, respectivamente [14].

Uno de los principales problemas que tuvo esta ecuación fue que se trabajó con el cuadrado de la relación de dispersión, lo cual trae consigo una posible raíz negativa[13]. En un principio por satisfacer la relación de dispersión aparecieron soluciones con energía negativa, esto tuvo solución al introducir anti-partículas. El mayor problema que no encontró solución fue que la densidad de probabilidad no es positiva-definida, por estas razones la ecuación de KG fue dejada a un lado. Cuando se propuso la existencia de anti partículas fue posible rescatarla [13].

Una motivación para la QFT fue por la llamada *segunda cuantización*, que presentaba la opción de no solo trabajar con una partícula, sino con un espacio donde podían vivir

varias partículas como osciladores armónicos desacoplados. Sumado a algunas situaciones de causalidad, se tuvo que recurrir a una formulación de más de una partícula, los campos, y para describir partículas éstos deben de ser cuantizados.

### III.2. Cuantización del Campo de Klein-Gordon

Por su estructura, el campo de Klein-Gordon real se comporta como un escalar de spin 0 y carga neutra [14]. Para que describa partículas con esas características se debe de cuantizar. Existen al menos dos esquemas de cuantización, el más directo es la cuantización canónica que consiste en promover las variables dinámicas a operadores de la misma manera que se hace en mecánica cuántica. El segundo esquema ampliamente usado es el de integral de trayectoria, el cual es muy elegante. Está basado en principios simples que van al núcleo de las suposiciones de la teoría cuántica [15].

Para cuantizar el campo de Klein-Gordon se utilizará la cuantización canónica [16, 17]. Al igual que en el caso clásico se buscará recuperar la ecuación de Klein-Gordon, el campo, su momento conjugado y el Hamiltoniano a partir de la densidad Lagrangiana (1.57). Se promueven a operadores las variables dinámicas

$$\phi(x) \rightarrow \hat{\phi}(x) \tag{1.60}$$

$$\pi(x) \rightarrow \hat{\pi}(x), \tag{1.61}$$

los cuales cumplen con relaciones de conmutación<sup>4</sup>

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \tag{1.62}$$

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}(\mathbf{x}', t)] = 0, \tag{1.63}$$

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{x}', t)] = 0. \tag{1.64}$$

Usando el operador Hamiltoniano de Klein-Gordon (1.59) y las relaciones canónicas de conmutación, es posible obtener la evolución temporal de los operadores, esto es

---

<sup>4</sup>Se está trabajando en el marco de Schrödinger, por lo que podemos tomar tiempos arbitrarios y luego evolucionar el operador de campo.

$$\dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t) = -i[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{H}] = \hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \quad (1.65)$$

y

$$\dot{\hat{\pi}}(\mathbf{x}, t) = -i[\hat{\pi}(\mathbf{x}, t), \hat{H}] = (\nabla^2 - m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}, t). \quad (1.66)$$

Uniendo las evoluciones temporales (1.65) y (1.66), se obtiene la ecuación de movimiento del campo de Klein-Gordon, en similitud con el caso clásico

$$\ddot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}, t) = (\nabla^2 - m^2)\hat{\phi}(\mathbf{x}, t). \quad (1.67)$$

Al saber la ecuación de movimiento es posible dar con una solución en ondas planas

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{ip \cdot x} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-ip \cdot x}) \quad (1.68)$$

y

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{ip \cdot x} - \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-ip \cdot x}), \quad (1.69)$$

con  $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . El factor  $\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}$  permite que la expresión sea un invariante de Lorentz, esta es la frecuencia de oscilación. Como consecuencia de estas soluciones y la similitud al oscilador armónico, se derivan las relaciones de conmutación de  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  y  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger$

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (1.70)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}'}] = 0, \quad (1.71)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 0. \quad (1.72)$$

Usando estos operadores se describe al operador Hamiltoniano.

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}}), \quad (1.73)$$

donde el término proporcional a  $\delta(0)$  (infinito) corresponde a la energía de punto-cero de los todos los modos de oscilación. Se puede omitir ya que experimentalmente se miden

diferencias de energía, en el Hamiltoniano se reordenan los operadores para evitar la aparición de este infinito. Esta forma de reordenar la energía consiste en agrupar los operadores de creación a la izquierda de los de aniquilación, esto se llama ordenamiento normal [16]. Con estos operadores se puede definir el estado base o vacío de la teoría  $|0\rangle$  como:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0, \forall \mathbf{p} \quad (1.74)$$

con energía  $E = 0$ . Los demás estados se pueden construir con operadores de creación llenando el espectro.

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger \dots |0\rangle \quad (1.75)$$

con energía  $E = \omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} + \dots$ . De esta forma se construye el espacio multipartícula o espacio de Fock como suma directa de espacios de Hilbert de cada partícula [12].

Para entrar en el estudio principal de este trabajo que es el decaimiento, se deben de tratar herramientas que son útiles en la dispersión. En especial en el caso de tratar de una partícula que comienza en un punto  $x^\mu$  y termina en un punto  $y^\mu$ , la amplitud para el proceso de esta partícula se conoce como propagador.

### III.3. Propagador Escalar

El propagador en QFT cuantifica la amplitud de probabilidad de que un estado originado en  $x$  esté en  $x'$ . La información de lo que sucede entre los puntos  $x$  y  $x'$  viene codificado en el correlador de una teoría que trata con interacciones. Para la teoría libre que se está trabajando hay un vacío entre ambos puntos. Al hablar de un propagador necesariamente hay que involucrar funciones de Green y la inversión de un operador diferencial. La ecuación que satisface el propagador, usando una transformada de Fourier, es

$$D(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x - y)} \tilde{D}(p), \quad (1.76)$$

al aplicar el operador sobre la función de Green debe igualar a una delta de Dirac. En el espacio de momentos la ecuación diferencial toma una forma algebraica muy simple

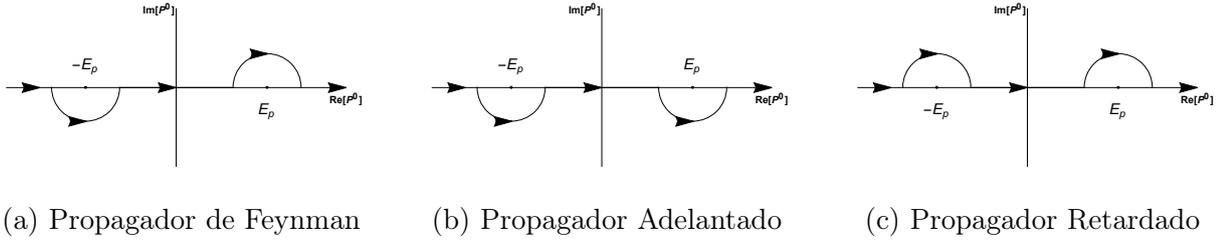


Figura 1.2: Contornos de integración para obtener los propagadores

$$(-p^2 + m^2)\tilde{D}(p) = -i, \quad (1.77)$$

de forma que el propagador en el espacio de configuraciones es

$$D(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (1.78)$$

La integral en  $(p^0)^5$  se puede evaluar en diferentes contornos. Estos diferentes contornos se interpretan como la propagación de una partícula o anti-partícula, al ser procesos cuánticos que deben de ser causales, las dos se deben de propagar, es por eso que se usa la prescripción de Feynman [14]. Según el orden de  $x^0 > y^0$  se obtiene el propagador adelantado cerrando por abajo, el retardado si  $x^0 < y^0$  y cierra por arriba. La prescripción de Feynman introduce en el propagador un término  $i\epsilon$ , que hace que los polos estén arriba y abajo del eje real y las dos expresiones estén incluidas.

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (1.79)$$

De esta manera, dependiendo de si  $x^0 < y^0$  o  $x^0 > y^0$  se elije el contorno de integración.

Las figuras 1.2a, 1.2b y 1.2c muestran los propagadores de Feynman, Adelantado y Retardado, respectivamente.

Estos propagadores representan la amplitud de una partícula de propagarse de  $x^\mu$  a  $y^\mu$  (por simplicidad los 4-vectores se van a expresar sin índices, si se refiere a 3-vectores se usarán negritas) y se expresan como

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle. \quad (1.80)$$

<sup>5</sup>El denominador del propagador es una contracción del 4-vector  $p^\mu$ .

El propagador de Feynman, que es una función de Green, se puede descomponer como estas amplitudes

$$D_F = \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle. \quad (1.81)$$

En la siguiente sección se tratan las teorías con interacciones y como se involucran los propagadores de Feynman.

### III.4. Diagramas y reglas de Feynman

De manera breve, las teorías interactuantes se pueden identificar desde el Lagrangiano, a través de un término distinto a los que aparecen en los Lagrangianos de teorías libres. Este término se llama Lagrangiano de interacción, y se identifica fácilmente como aquel término que involucra a productos del mismo o distintos campos. Los ejemplos más simples y ampliamente tratados en la literatura en teorías de interacción incluyen la teoría  $\phi^N$ , que es puramente escalar; QED (electrodinámica cuántica) vector con dos fermiones; tipo Yukawa un escalar y dos fermiones. Al considerar la interacción de los campos libres, de manera natural, la ecuación de movimiento se vuelve no lineal.

Para estudiar las interacciones conviene implementar el cuadro de interacción (de Dirac o Tomonaga), el cual permite a hacer una descripción del campo completo en términos de los campos libres. La clave en esta descripción radica en identificar el papel que juega el Hamiltoniano de interacción en la evolución del sistema, haciendo posible evolucionar el vacío de la teoría libre al vacío de la teoría interactuante. Estos vacíos suelen ser diferentes ya que el vacío interactuante suele tener autointeracciones que *polarizan* el vacío. Sabiendo la relación entre los vacíos de las teorías se puede calcular un correlador de dos puntos [14, 16],

$$\langle \Omega|T\{\phi(x)\phi(y)\}|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\exp(i \int_{-T}^T dt H_I(t))\}|0\rangle}{\langle 0|\exp(i \int_{-T}^T dt H_I(t))|0\rangle} \quad (1.82)$$

Este resultado es de suma importancia ya que se pueden usar las herramientas desarro-

lladas para la teoría libre.<sup>6</sup>

Con ayuda del Teorema de Wick se puede calcular cualquier correlador ( $n$  puntos) y escribirlo en términos de propagadores libres de Feynman. El teorema de Wick establece que

$$T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n)\} =: \phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n) + \text{Todas las posibles contracciones :} \quad (1.83)$$

donde : denota el producto normalmente ordenado<sup>7</sup> y entendiendo por contracción [14]

$$\langle 0 | \overline{\phi_I(x)\phi_I(y)} | 0 \rangle = D_F(x - y). \quad (1.84)$$

De esta manera el valor esperado de todas las posibles contracciones (1,2..., n) se ven como un producto de propagadores de Feynman. Al hablar del correlador de  $n$  puntos se tendrán productos de propagadores de Feynman.

Con lo anterior, un término de interacción de la forma  $\langle 0 | \phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\cdots\phi_I(x_n) | 0 \rangle$  puede expresarse como la suma de productos de propagadores y, de este modo, darle una interpretación diagramática a dichas expresiones. Por ejemplo, al considerar un correlador de cuatro puntos, se asigna a cada propagador una línea que une a los puntos tratados, i.e.  $D_F(x - z)$  una línea que une a  $x$  con  $z$ . Dependiendo del resultado del Teorema de Wick, la suma resultante es la amplitud del proceso. La unión de estas líneas en cada término representan un *Diagrama de Feynman*.

Una función de gran importancia es el correlador de dos puntos, que en general tiene la forma que se muestra en la figura 1.3.

Cuando la constante de acoplamiento es pequeña, es posible hacer una expansión perturbativa en la exponencial del correlador de dos puntos en la teoría de interacción (1.82),

---

<sup>6</sup>Es importante notar que los campos ordenados temporalmente están siendo operados sobre el vacío de la teoría interactuante.

<sup>7</sup>El orden normal es una manera de acomodar los productos de los campos de forma que los operadores de creación estén a la izquierda de los de aniquilación.

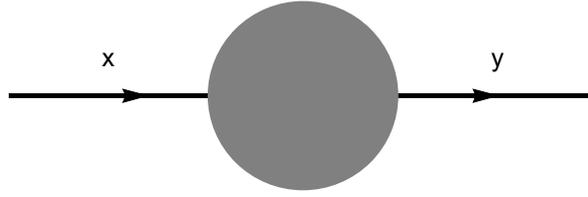


Figura 1.3: Interacción para cualquier teoría interactuante, según un correlador de 2 puntos  $x$  y  $y$ .

obteniendo un término de la forma

$$\langle 0|T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\phi_I(z)\phi_I(z)\phi_I(z)\phi_I(z)\}|0\rangle, \quad (1.85)$$

donde los campos  $\phi_I$  están descritos en el cuadro de interacción. Para el caso de la teoría  $\phi^4$ , ya que el Hamiltoniano de interacción tiene un producto de cuatro  $\phi$ . Esto quiere decir que el punto  $z$  tendrá cuatro líneas entrantes/salientes.

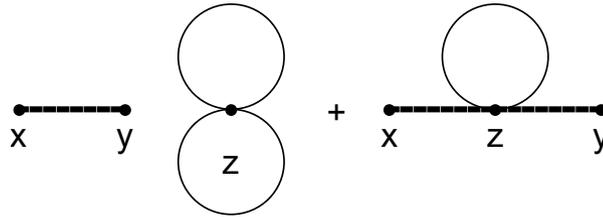


Figura 1.4: Diagramas de Feynman, para un correlador de 2 puntos y a primer orden de expansión perturbativa.

Este punto de intersección recibe el nombre de *vértice* y la cantidad de estos depende del orden de perturbación. En la figura 1.4 se aprecian dos términos, primero (izquierda) tiene un propagador entre dos puntos  $x$  e  $y$  y una burbuja de vacío en  $z$  este tipo de diagramas se conocen como *disconexos*. Todas burbujas de vacío se pueden sumar para ser factorizadas y canceladas con el denominador de (1.82) y así tener solamente diagramas conexos.

Este análisis es general pero poco práctico para hacer cálculos. Sin embargo, existen un conjunto de reglas que permiten escribir las expresiones matemáticas para distintos correladores al orden de perturbación que se deseé. Estas reglas se conocen como Reglas de Feynman que, para el caso de una interacción tipo  $\phi^4$  con constante de acoplamiento  $\lambda$  en el espacio de configuraciones, están dadas por

Por estructura	
Propagador	$D_F(x - y)$
Vértice	$(-i\lambda) \int d^4z$
Pata exterior	1

De igual manera en el espacio de momentos

Por estructura	
Propagador	$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Vértice	$-i\lambda$
Pata exterior	$e^{-ip \cdot x}$
Imponer conservación de momento en cada vértice	$\delta(\sum p_{entra} - \sum p_{sale})$
Integrar sobre momentos indeterminados	$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$

En la siguiente sección se aplicarán estas ideas al cálculo de la matriz de dispersión  $\hat{S}$ .

## IV. Matriz S, en resumidas cuentas

La matriz  $\hat{S}$  surge como la manera de describir la transición de un sistema físico de un estado inicial evolucionando a un estado final. La idea es simple, si se imaginan dos estados físicos que no interactúan entre sí, llamados asintóticos, pero hay una región espacio-temporal donde sí interactúan. Esta idea se representa en la figura 1.5 donde la “bola” es la suma de todos los posibles diagramas de Feynman cuando llegan  $n$  estados y salen  $m$  estados.

El caso más simple toma dos estados que entran y se etiquetan como  $|p_1 p_2\rangle_{in}$ , y se toman dos salientes  ${}_{out} \langle q_1 q_2 |$ . La amplitud de este tipo de dispersión se define

$$\mathcal{A} = {}_{out} \langle q_1 q_2 | p_1 p_2 \rangle_{in}, \quad (1.86)$$

estos estados se presentan a distancias/tiempos muy grandes, donde la interacción deja de actuar. La amplitud a  $t = 0$ , donde los marcos coinciden, se puede escribir como:

$${}_{free} \langle \phi | \hat{S} | \psi \rangle_{free} = {}_{out} \langle \phi | \psi \rangle_{in} = \langle \phi_I(t=0) | \psi_I(t=0) \rangle \quad (1.87)$$

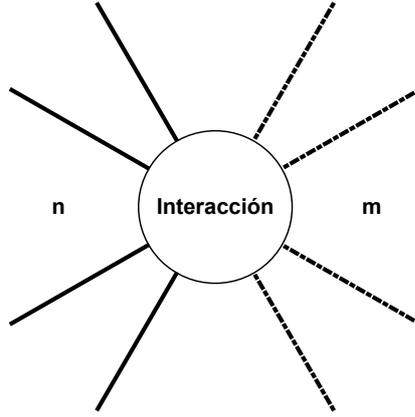


Figura 1.5: Interacción general para  $n$  puntos entrantes y  $m$  salientes.

$$= \langle \phi_I(\infty) | \hat{U}_I(\infty, 0) \hat{U}_I(0, -\infty) | \psi_I(-\infty) \rangle, \quad (1.88)$$

usando las propiedades del operador de evolución se obtiene [17]

$${}_{free} \langle \phi | \hat{S} | \psi \rangle_{free} = {}_{free} \langle \phi | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | \psi \rangle_{free}, \quad (1.89)$$

de esta manera la matriz de dispersión evoluciona partículas entrantes, hace que interactúen y devuelve partículas. Obsérvese que se hizo una expansión perturbativa, se da bajo la hipótesis de que los campos están débilmente acoplados. Esta expansión siempre comienza con  $I_d$ , por lo que la matriz  $\hat{S}$  se suele descomponer en una suma

$$\hat{S} = I_d + i\hat{T}, \quad (1.90)$$

donde  $\hat{T}$  recibe el nombre de matriz de transición el cual es de suma importancia en la física de partículas pues cuantifica la amplitud de probabilidad de que el sistema físico evolucione de un estado inicial a un estado final. Al tomar en cuenta esto, es natural que este término forme parte central de lo que se conoce como la sección eficaz diferencial, definida como: [17]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM}}, \quad (1.91)$$

donde  $\mathcal{M} = \hat{T}^* \hat{T}$ , es el elemento invariante que toma en cuenta la interacción durante el proceso de dispersión y  $E_{CM}$ , la energía total en el marco de referencia del centro de masa. En la siguiente sección se abordan otros aspectos analíticos de la matriz y su significado físico.

## V. Teorema Óptico y Reglas de Corte

Dado que la matriz  $\hat{S}$  es Hermitiana y unitaria [12], es fácil observar que la matriz de transición  $\hat{T}$  satisface la siguiente relación

$$i(\hat{T}^\dagger - \hat{T}) = \hat{T}^\dagger \hat{T}. \quad (1.92)$$

Si de la expresión anterior se obtiene el valor esperado de transición, el lado izquierdo se ve:

$$\langle f | i(\hat{T}^\dagger - \hat{T}) | i \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) (\mathcal{M}^*(f \rightarrow i) - \mathcal{M}(i \rightarrow f)), \quad (1.93)$$

mientras que el lado derecho, se tiene

$$\langle f | \hat{T}^\dagger \hat{T} | i \rangle = \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_X) (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_X) \int d\Pi_X \mathcal{M}(i \rightarrow X) \mathcal{M}^*(f \rightarrow X) \quad (1.94)$$

donde se usó la relación de completitud con estados intermedios de (1.95).

$$I_d = \sum_X \int d\Pi_X |X\rangle \langle X| \quad (1.95)$$

donde

$$d\Pi_X \equiv \prod_{j \in X} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)} \frac{1}{2E_j} \quad (1.96)$$

Igualando ambos resultados se tiene el teorema Optico Generalizado [12]

$$\mathcal{M}(i \rightarrow f) - \mathcal{M}^*(f \rightarrow i) = -i \sum_X \int d\Pi_X \mathcal{M}^*(f \rightarrow X) \mathcal{M}(i \rightarrow X). \quad (1.97)$$

Obsérvese que si los estados inicial y final coinciden, y describen al estado de una partícula, la ecuación previa se reduce a

$$2i \text{Im}(\mathcal{M}(A \rightarrow A)) = i \sum_X \int d\Pi_X \mathcal{M}^*(f \rightarrow X) \mathcal{M}(i \rightarrow X) \quad (1.98)$$

dividiendo la ecuación previa por  $2m_A$

$$\text{Im}\mathcal{M}(A \rightarrow A) = m_A \sum \Gamma(A), \quad (1.99)$$

con

$$\Gamma_{tot} = \frac{1}{2m_A} \sum_X \int d\Pi_X |\mathcal{M}(A \rightarrow X)|^2, \quad (1.100)$$

Esta interpretación se basa en el hecho que la amplitud de transición  $\mathcal{M}$  cuantifica la probabilidad de que el estado A se convierta a un estado final X. Este resultado proporciona una igualdad entre la parte imaginaria del propagador y la tasa de decaimiento. Estas ideas fueron ampliamente estudiadas por Cutkosky [12, 14, 17], quien logró sintetizar un conjunto de reglas, conocidas como reglas de corte y que a continuación se enumeran:

1. Cortar un diagrama en cualquier manera en la cual todos los propagadores puedan ser enviados a la capa de masa, es decir que su energía sea  $E^2 = m^2 + p^2$ <sup>8</sup>
2. Por cada corte, reemplazar un propagador por  $-2i\pi\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0)$ <sup>9</sup>
3. Sumar sobre todos los cortes

Esto, en otras palabras, indica que la amplitud  $\mathcal{M}$  genera una parte imaginaria [14] y las partículas virtuales se van a la capa de masa. Este tipo de análisis sirve para trabajar con partículas inestables que tienen fluctuaciones cuánticas, al enviarlas (cortar el diagrama) a la capa de masa estas partículas 'hijas' son parte de la dispersión. Esto se ve con mas detalle en la sección VII y en los capítulos subsecuentes.

En la siguiente sección se estudiará la estructura analítica del correlador de dos puntos.

## VI. Correlador de dos puntos

Para estudiar la estructura analítica del correlador de dos puntos, conviene comenzar con su definición, la cual esta dada por

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle \quad (1.101)$$

donde los estados de expectación  $|\Omega\rangle$  son el vacío de la teoría interactuante, estos distintos vacíos difieren, entre otras cosas, en las autointeracciones que se dan en el vacío. Para la

---

<sup>8</sup>Se toma el valor de la velocidad de la luz  $c=1$ .

<sup>9</sup>La función  $\theta$  es el escalón unitario de Heaviside, si valor es 1 cuando el argumento es mayor que cero y 0 cuando el argumento es menor que cero.

teoría libre  $\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle$  el correlador es la amplitud de una partícula para propagarse de  $y^\mu$  a  $x^\mu$ . El análisis dentro de la teoría interactuante depende de la naturaleza de la interacción, a partir de los principios de relatividad y mecánica cuántica. La identidad se ve como la suma sobre un conjunto completo de eigenestados del Hamiltoniano de interacción, los cuales también serán eigenestados de  $\hat{p}$ , esto es

$$I_D = |\Omega\rangle \langle \Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} |\lambda\rangle \langle \lambda|, \quad (1.102)$$

donde los eigenestados  $|\lambda\rangle$  se generan mediante un boost del eigenestado de momento cero  $|\lambda_0\rangle$ , el cual satisface  $\hat{P}|\lambda_0\rangle = 0$ , es de esta manera todos los boosts de  $|\lambda_0\rangle$  son eigenestados del Hamiltoniano. Los eigenvalores del 4-momentum se organizan en hiperboloides como un corte transversal de estas superficies se muestra la figura 1.6. Esta figura tiene tres hiperboloides que corresponden a los eigenvalores de  $P^\mu = (H, \mathbf{P})$  en el espacio de momentos. Los hiperboloides corresponden a partículas masivas, donde corta el primer hiperboloide es el estado de una partícula en reposo y la superficie contiene los distintos valores de 3-momento. También hay estados ligados debajo del umbral de creación de dos partículas, y cruzando el umbral de  $2m$  existe un continuo de hiperboloides para estados de 2, 3 y más partículas.

Para continuar con el cálculo se usa la relación de completitud donde la suma corre por todos los estados de momento cero  $|\lambda_0\rangle$ . Insertando esta identidad en el correlador de dos puntos (1.101), donde se asume que  $x^0 > y^0$ , e ignorando, por un momento, el primer término, el correlador de dos puntos se ve como sigue

$$\langle \Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}(\lambda)} \langle \Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle \langle \lambda_{\mathbf{p}}|\phi(y)|\Omega\rangle. \quad (1.103)$$

Al manipular cada elemento de matriz de forma que

$$\begin{aligned} \langle \Omega|\phi(x)|\lambda_{\mathbf{p}}\rangle &= \langle \Omega|e^{iP \cdot x} \phi(0) e^{-iP \cdot x} |\lambda_{\mathbf{p}}\rangle \\ &= \langle \Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0=E_p} \end{aligned}$$

e introduciendo la integración sobre  $p^0$ , el correlador (1.103) puede reescribirse como sigue

$$\langle \Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \sum_{\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} |\langle \Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle|^2. \quad (1.104)$$



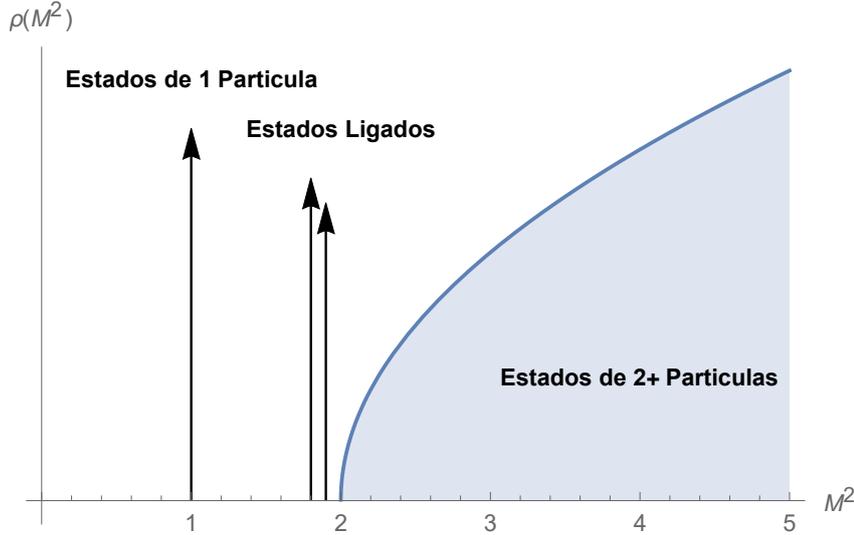


Figura 1.7: Densidad espectral de Källén-Lehman, la primer flecha corresponde a la delta de Dirac de la ecuación (1.106), la otra incluye la posibilidad de un estado ligado como otras deltas de Dirac. Y después hay un corte rama en  $p^2 = (2m)^2$ .

El correlador de dos puntos en el espacio de momentos se encuentra fácilmente haciendo una transformada de Fourier, esto es

$$\begin{aligned} \int d^4x \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(0) \Omega \} \rangle &= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

La densidad indica las contribuciones de todos los estados intermedios en capa de masa en la teoría. La representación contiene una suma de amplitudes de propagaciones escalares para estados creados del vacío por el operador de campo  $\phi(0)$ . Los polos de  $p^2$  vienen de estados intermedios de una partícula, mientras que los estados multipartícula dan regiones en el plano complejo donde la función es multivaluada, también llamados cortes rama.

Para cerrar con la discusión del teorema óptico se van a tocar las llamadas *partículas inestables*, éstas nunca se observan como estados asintóticos ya que decaen a modos estables que llegan a ser observados. Las regla de corte desarrolladas en la sección anterior cobran utilidad cuando se *cortan* los diagramas y se envían propagadores a la capa de masa.

## VII. Partículas Inestables y Breit Wigner

Para el estudio de la masa física  $m$ , se hace uso de la suma de inserciones de diagramas irreducibles de una partícula para corregir la masa desnuda. Estas inserciones toman el aspecto de diagramas de autoenergía con valor  $\Sigma$ , diagramáticamente se ven como en la figura 1.8. Esta autoenergía  $-i\Sigma$  se define como la suma de todos los diagramas irreducibles de una partícula [14]. De esta forma el elemento de matriz invariante  $\mathcal{M}$ , que se construye con reglas de Feynman, toma el nombre de autoenergía cuando es la amplitud de un loop.



Figura 1.8: Suma de diagramas 1PI para corregir el término de masa

La serie diagramática de la figura 1.8 corrige al propagador de Feynman. A este propagador corregido le corresponde la siguiente expresión

$$D_{Full}(p) = D_F(p) + D_F(p)(-i\Sigma)(p)D_F(p) + D_F(p)(-i\Sigma)D_F(p)(-i\Sigma)(p) + \dots,$$

factorizando, se obtiene

$$= D_F(p) [1 - i\Sigma(p)D_F(p) + (-i\Sigma(p)D_F(p))^2 + \dots],$$

de donde es posible reconocer una serie geométrica, esto es

$$D_{Full}(p) = D_F(p) \frac{1}{1 + i\Sigma(p)D_F(p)}.$$

De lo anterior, usando explícitamente la forma del propagador escalar, la expresión anterior se simplifica a

$$\begin{aligned} D_{Full}(p) &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} \frac{1}{1 - \Sigma(p) \frac{1}{p^2 - m_0^2}} \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p)}. \end{aligned} \tag{1.107}$$

Cuando  $\Sigma(p)$  desarrolla una parte imaginaria, se está tratando con partículas inestables.

Si el propagador está en el canal  $s$ , la sección transversal cerca del polo toma la forma

$$\left| \frac{i}{p^2 - m_0^2 + im_0\Gamma_{tot}} \right|^2 = \frac{1}{(p^2 - m_0^2)^2 + (m_0\Gamma_{tot})^2}, \quad (1.108)$$

conocida como la *distribución de Breit-Wigner*, y tiene la misma forma de una resonancia como en la figura 1.9.

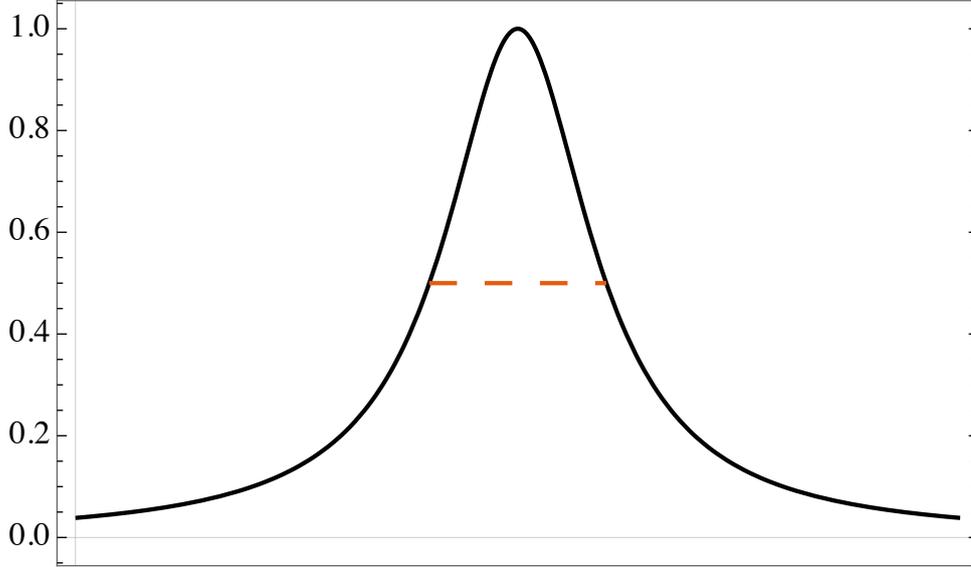


Figura 1.9: Distribución de Breit-Wigner, el ancho marcado está a la mitad del máximo

El ancho total a la mitad del máximo es  $2m_0\Gamma_{tot}$ . Cuando el ancho  $\Gamma_{tot}$  se aproxima a cero la distribución se ve como una función  $\delta$  de Dirac, ya que tiene soporte en  $p^2 \sim m_0^2$ . La función a la que converge en la aproximación va como

$$\frac{1}{(p^2 - m_0^2)^2 + (m_0\Gamma_{tot})^2} \approx \frac{\pi}{m_0\Gamma} \delta(p^2 - m_0^2). \quad (1.109)$$

Esta aproximación recibe el nombre de *narrow-width approximation* (NWA), o aproximación de ancho reducido y permite tratar a una partícula resonante como una en la capa de masa.

El siguiente capítulo utiliza los conceptos de las últimas secciones para trabajar con la función de autoenergía de una teoría escalar.

## Capítulo 2

# Autoenergía y decaimiento para una Teoría Escalar de Klein Gordon

En este capítulo se va a trabajar con una teoría escalar con interacción  $\phi^3$  y se calcula la función de autoenergía a un lazo. El objetivo es presentar los detalles de la aplicación de las reglas de Cutkowsky para estudiar el decaimiento del campo.

### I. Autoenergía de la teoría

La teoría escalar con una interacción  $\phi^3$  es descrita por el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi + \frac{g}{3!}\phi^3, \quad (2.1)$$

es una teoría que tiene una autointeracción de tres líneas. De esta teoría, aplicando las reglas de Feynman, es posible obtener el correlador de dos puntos a un lazo, el cual se ilustra en la figura 2.1, donde entra una partícula con momento  $p$  en el punto  $x$ , produciendo un par de partículas que interactúan en el segundo vértice  $y$ , resultando en una partícula saliente con momento  $p$ .

Como cada una de las partículas creadas en el lazo tienen un momento indeterminado, por conservación del momento en los vértices resulta que sólo hay un momento indeterminado  $l$  sobre el cual se deben de considerar todos sus posibles valores.

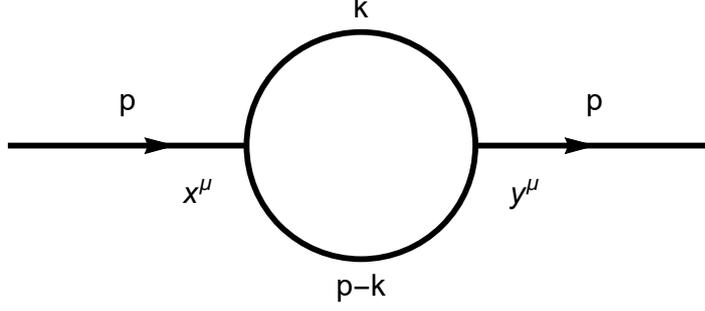


Figura 2.1: Loop de Teoría  $\phi^3$ , con momento externo  $\mathbf{p}$

En el espacio de momentos las reglas de Feynman para una teoría escalar indican que el diagrama 2.1 tiene una amplitud dada por

$$i\mathcal{M}_{loop} = \frac{1}{2}(ig)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{i}{(l-p)^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{l^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.2)$$

Esta amplitud permitirá obtener toda la información relevante al teorema óptico.

Los parámetros de Feynman se basan en una identidad que permite trabajar con productos de denominadores como los de (2.2)

$$\frac{1}{AB} = \int dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2}. \quad (2.3)$$

Usando la ecuación (2.3) es posible reescribir la ecuación (2.2) de la forma

$$i\mathcal{M}_{loop} = \frac{1}{2}(ig)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{[l^2 - m^2 + i\epsilon + (k^2 - m^2 + i\epsilon - (p-l)^2 + m^2 - i\epsilon)x]^2}, \quad (2.4)$$

completando el cuadrado en el denominador, se tiene

$$i\mathcal{M}_{loop} = \frac{1}{2}(ig)^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{[(l-px)^2 - p^2x(x-1) - m^2 + i\epsilon]^2}. \quad (2.5)$$

Al escribir la amplitud de esta forma, es posible identificar el cambio de variable  $k = (l-px)$ , de tal forma que la integral previa se reduce a

$$i\mathcal{M}_{loop} = -\frac{1}{2}g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{[k^2 - \Delta + i\epsilon]^2}, \quad (2.6)$$

donde  $\Delta = p^2x(x-1) + m^2$ .

Si ahora se hace una rotación de Wick, definida como

$$k^0 \rightarrow ik^4$$

$$dk^2 \rightarrow idk^4$$

esto permitirá que el término  $k^2$  sea semejante a un cuadrado Euclideo, es decir

$$k^\mu k_\mu = k^2 = (k^0)^2 - (\mathbf{k})^2 \quad (2.7)$$

$$k^\mu k_\mu = k_E^2 = -((k^4)^2 + (\mathbf{k})^2). \quad (2.8)$$

Usando esto en la ecuación (2.6), la amplitud en el espacio Euclideo adquiere la forma

$$i\mathcal{M}_{loop} = -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{i}{[-k_E^2 - \Delta]^2} \quad (2.9)$$

En este espacio Euclideo, al no depender el integrando de algún ángulo, es conveniente trabajar en coordenadas hipersféricas, separando la parte angular de la parte radial, esto es

$$i\mathcal{M}_{loop} = -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dx \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dk_E \frac{ik_E^3}{[k_E^2 + \Delta]^2}. \quad (2.10)$$

Finalmente, resolviendo la integral en  $k_E$ , se llega a

$$i\mathcal{M}_{loop} = -\frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dx \frac{i}{16\pi^2} \log \left( \frac{\Lambda^2 + \Delta}{e\Delta} \right). \quad (2.11)$$

donde  $e$  es la constante de Euler-Mascheroni. Reemplazando la forma explícita de  $\Delta$  en la ecuación previa, se tiene que la amplitud  $\mathcal{M}$  está dada por

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dx \frac{1}{16\pi^2} \log \left( \frac{\Lambda^2 + p^2 x(x-1) + m^2}{e(p^2 x(x-1) + m^2)} \right). \quad (2.12)$$

En esta expresión se puede observar que la divergencia del logaritmo en la ecuación (2.12) ha sido controlada por un corte UV que se ha representado por  $\Lambda$ , este corte evita que la integral diverja y representa una escala grande de energía. Este  $\Lambda$  no depende del momento

externo y hace el papel de un regulador. Un regulador controla los infinitos de la teoría y, en este caso, representa la física de cortas distancias/altas energías, a las cuales en los experimentos no se tiene acceso. Dicho de otra forma, la integración de 0 a  $\Lambda$  colecta física a la cual sí se tiene acceso en los experimentos.

## II. Decaimiento

Según el Teorema Óptico, la partícula presenta un decaimiento si el elemento invariante de matriz  $\mathcal{M}$  desarrolla parte imaginaria. Al observar a detalle la ecuación (2.12), la única parte que puede desarrollar parte imaginaria es el logaritmo.

Como  $\Lambda$  es una escala grande de energía comparada con  $p$  y  $m$  el numerador no puede ser menor que cero, sin embargo, el denominador sí tiene esta posibilidad, esto es

$$p^2 x(x-1) + m^2 < 0. \quad (2.13)$$

La solución polinomial de  $x$  es

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \sqrt{p^2 - 4m^2} \quad (2.14)$$

y

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \sqrt{p^2 - 4m^2} \quad (2.15)$$

estas soluciones definen un dominio de integración  $[x_1, x_2]$  donde el logaritmo tiene una parte imaginaria. Estas soluciones requieren que  $p^2 - 4m^2 > 0$ , o en otras palabras  $p > 2m$ . Esta condición es el umbral de energía mínima que una partícula debe de tener para poder separarse en dos idénticas de masa  $m$ . Así, la parte imaginaria es:

$$Im(\mathcal{M}) = g^2 \frac{1}{32\pi^2} \int_{x_1}^{x_2} dx \log \left( \frac{\Lambda^2 + p^2 x(x-1) + m^2}{e(p^2 x(x-1) + m^2)} \right), \quad (2.16)$$

$$Im(\mathcal{M}) = g^2 \frac{1}{32\pi^2} \int_{x_1}^{x_2} \pi dx, \quad (2.17)$$

$$Im(\mathcal{M}) = g^2 \frac{1}{32\pi} \left( \frac{\sqrt{p^2 - 4m^2}}{p} \right). \quad (2.18)$$

En la figura 2.2 se muestra el comportamiento de la parte imaginaria como función de la energía

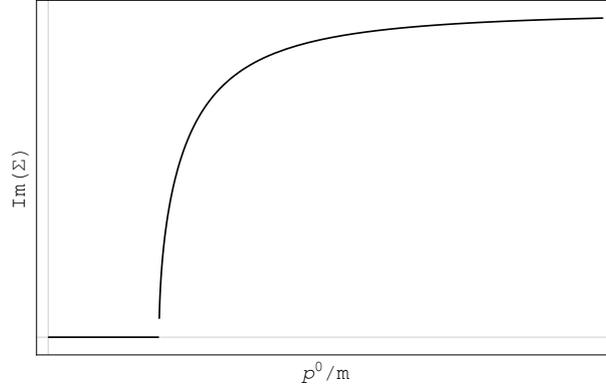


Figura 2.2: Gráfica de decaimiento

En el caso de una teoría con dos campos escalares distintos  $\phi$ ,  $\pi$  con un término de interacción de tres líneas de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\partial_\mu\partial^\mu + M^2)\phi - \frac{1}{2}\pi(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\pi + \frac{g}{2}\phi\pi^2, \quad (2.19)$$

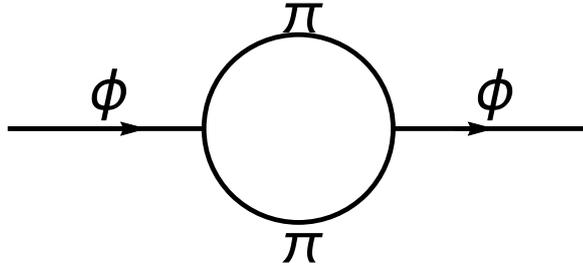


Figura 2.3: Diagrama de Interacción para dos partículas

donde  $g$  es la constante de acoplamiento. La tasa de decaimiento del campo  $\phi$  a dos partículas  $\pi$  sería proporcional a

$$\Gamma_{tot} \propto Im(\mathcal{M}) = g^2 \frac{1}{32\pi} \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{M^2}} \theta(M - 2m). \quad (2.20)$$

En esta expresión es mas claro el umbral de energía requerido para que el proceso tenga lugar.

La siguiente sección se presenta un enfoque alternativo para el cálculo de la parte imaginaria de la amplitud  $\mathcal{M}$ . Este enfoque será de gran ayuda para estudiar el corte en teorías con derivadas de orden superior.

### III. Acercamiento Alternativo

Considérese la amplitud  $\mathcal{M}$  dada por la ecuación (2.2), con dos masas distintas en los propagadores y anchos infinitesimales arbitrarios  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , esto es

$$i\mathcal{M} = \frac{g^2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m_1^2 + i\epsilon_1} \frac{1}{(k-p)^2 - m_2^2 + i\epsilon_2}, \quad (2.21)$$

o en forma compacta, como

$$i\mathcal{M} = \frac{g^2}{2} \int \frac{dk^0 d^{d-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \prod_{j=1}^2 \frac{1}{(e_j - \omega_j + i\epsilon_j)(e_j + \omega_j - i\epsilon_j)}, \quad (2.22)$$

donde  $e_1 = k^2$ ,  $e_2 = k^0 - p^0$ ,  $\omega_1 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_1^2}$  y  $\omega_2 = \sqrt{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 + m_2^2}$  con los anchos  $\epsilon_j$  reescalados según el Apéndice B.

Debido a que la integral presenta polos en el plano complejo de  $k^0$ , en

$$z_1 = \omega_1 - i\epsilon_1, \quad z_2 = p^0 + \omega_2 - i\epsilon_2 \quad (2.23)$$

con ayuda del teorema del residuo, los residuos del integrando son

$$Res(z_1) = \frac{1}{2z_1(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 2p^0)} = r_1, \quad (2.24)$$

$$Res(z_2) = -\frac{1}{2(z_2 - p^0)(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)} = r_2. \quad (2.25)$$

Nótese que los denominadores dependen de la combinación  $z_1 - z_2$ , la cual trae consigo una ambigüedad de la forma  $\epsilon_- = \epsilon_1 - \epsilon_2$ , al tomar el límite a cero de alguna de las  $\epsilon_i$ , lleva a distintas distribuciones si éstas no van a cero a la misma velocidad. Esta ambigüedad se alivia al tomar la suma de los residuos

$$\begin{aligned}
 Res(z_1) + Res(z_2) &= \frac{1}{2(z_1 - z_2)} \left[ \frac{1}{z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)} - \frac{1}{(z_2 - p^0)(z_1 + z_2)} \right] \\
 &= \frac{1}{2(z_1 - z_2)} \left[ \frac{(z_2 - p^0)(z_1 + z_2) - z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)}{z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)(z_2 - p^0)(z_1 + z_2)} \right] \\
 &= \frac{1}{2(z_1 - z_2)} \left[ \frac{(z_2 + z_1 - p^0)(z_2 - z_1)}{z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)(z_2 - p^0)(z_1 + z_2)} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2 - p^0}{z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)(z_2 - p^0)(z_1 + z_2)}
 \end{aligned}$$

en términos de  $\omega_i$ , tiene la forma

$$\begin{aligned}
 Res(z_1) + Res(z_2) &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2 - p^0 - i\epsilon_+) (\omega_1 + \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+)} \\
 &= -\frac{1}{4\omega_1 \omega_2} \left[ \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 - p^0 - i\epsilon_+} + \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+} \right].
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Como se esperaba, se removi6 la ambigüedad.

Ahora, usando la identidad

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \left( \frac{1}{x} \right) \mp i\pi \delta(x), \tag{2.27}$$

es fácil ver que la parte imaginaria de los residuos en (2.26), es

$$Im(Res(z_1) + Res(z_2)) = -\frac{1}{4\omega_1 \omega_2} i\pi \left[ \delta(-\omega_1 - \omega_2 - p^0) + \delta(-\omega_1 - \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+) \right], \tag{2.28}$$

insertando en (2.21), se tiene

$$\begin{aligned}
 Im(i\mathcal{M}) &= -\frac{i^2}{g} 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} Im[Res(z_1) + Res(z_2)] \\
 &= \frac{g^2}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega_1 \omega_2} 2\pi \left[ \delta(-\omega_1 - \omega_2 - p^0) + \delta(-\omega_1 - \omega_2 + p^0) \right].
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

En el Apéndice B, se realiza la integral sobre  $k$  a todo detalle. El resultado de ese análisis es

$$Im(i\mathcal{M}) = \frac{g^2}{32\pi p^2} \sqrt{(p^2 - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}. \tag{2.30}$$

### III. ACERCAMIENTO ALTERNATIVO

---

Este resultado se debe agregar un a función de Heaviside donde se tome la parte real de la raíz, aprovechando la factorización de la función triangular de Källen, los límites de la raíz se hacen evidentes.

$$Im(i\mathcal{M}) = \frac{g^2}{32\pi p^2} \sqrt{(p^2 - (m_1 - m_2)^2)(p^2 - (m_1 + m_2)^2)} \theta(p^2 - (m_1 + m_2)^2) \quad (2.31)$$

que en el caso  $m_1 = m_2$ , se replica el resultado obtenido previamente en (2.18).

# Capítulo 3

## Teoría de Lee-Wick

En el presente capítulo se abordará un modelo que modifica el campo escalar con un término de derivada alta con el formalismo desarrollado por [6] y por el discutido por [7], para encontrar diferencias y contribuciones de estos términos de derivadas altas en la tasa de decaimiento de un campo escalar.

### I. Teorías de Lee-Wick

Las teorías de Lee-Wick, son teorías con derivadas altas de los campos definidas de una manera que mantienen a la matriz  $\hat{S}$  unitaria de manera perturbativa [6, 7]. Esto hace que las reglas de corte para la teoría estén bien definidas. Otra ventaja de estas teorías, es que los términos cinéticos del Lagrangiano pueden mejorar los comportamientos ultravioleta de los diagramas de Feynman, con el potencial de transformar teorías no renormalizables a teorías que se pueden renormalizar a través de una posible cancelación de divergencias de loops de orden superior [7, 18].

Estas teorías, al tener un orden mayor en las derivadas, cargan un mayor número de polos en la estructura del propagador en el espacio de momentos. Estos polos extra son denominados Polos LW. Estos polos no tienen física y se espera que sus contribuciones no se propaguen ya que suelen decaer rápidamente [4, 18]. El principal problema que ofrecen las teorías con derivadas altas es que la matriz  $\hat{S}$  se vuelve no unitaria y no analítica si no

se tratan de manera correcta la estructura de los polos [6], esto pasa ya que la ubicación de los polos al momento de integrar en el plano complejo de la energía pueden cruzar el contorno de integración y presentar singularidades no-analíticas. Cuando se tiene un contorno de integración se busca rodear un polo que está en el eje real modificando el propagador sumando un término  $i\epsilon$ , es decir usando la prescripción de Feynman para evitar que el contorno de integración toque los polos o los cortes rama. Al evitar estos *pellizcamientos* o *pinchings* se evitan singularidades y la integral se mantiene bien definida [4]. Una vez hecha la integración se puede tomar el límite de  $i\epsilon \rightarrow 0$ . Para el estudio de estas teorías se han propuesto distintas formas para abordar esa estructura de polos. La primera fue propuesta por Lee & Wick [6, 19] y consiste en tomar los polos de la teoría como función de la constante de acoplamiento de la teoría. Cuando esta toma un valor nulo, no hay decaimiento. Al aumentar la intensidad de la interacción las partículas LW se vuelven inestables y los polos en el eje real se mueven formando pares conjugados. Lo que falta hacer es deformar el contorno, conforme la constante crece para evitar que se cruce con los polos conjugados. Cutkoswky et. al. [6] formularon una prescripción para rodear estos cruces introduciendo un parámetro que permite hacer la integración para después mandar este parámetro a cero. Anselmi & Piva y Nakanishi [5, 7, 8] discuten que estas prescripciones son 'artificiales' ya que no se pueden integrar en el Lagrangiano o en reglas de Feynman y que las teorías ya vienen equipadas con lo necesario para mantener la unitariedad pero no necesariamente la analiticidad.

Como el interés de este trabajo de tesis consiste en analizar el efecto de derivadas altas en la tasa de decaimiento de un campo escalar, es conveniente trabajar con un Lagrangiano similar al de la ecuación (2.1), de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi}\partial^\mu\hat{\phi} - \frac{1}{2M^2}(\partial^2\hat{\phi})^2 - \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 - \frac{1}{3!}g\hat{\phi}^3, \quad (3.1)$$

donde  $M$ , es una escala de energía muy grande, de Planck ( $1.22 \times 10^{19}$  GeV) a partir de la cual estos términos podrían comenzar a jugar un rol importante. Las ecuaciones de movimiento para estos campos son

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\hat{\phi}} - \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\hat{\phi})} + \partial^\mu\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\nu\partial_\nu\hat{\phi})} = 0. \quad (3.2)$$

Para el caso libre

$$\left[ \frac{1}{M^2} \partial^2 \partial^2 + \partial^2 + m^2 \right] \hat{\phi} = 0. \quad (3.3)$$

De esta última ecuación, es fácil observar que el propagador libre de estos campos tendrá una dependencia cuártica en los momentos, esto es, el propagador en el espacio de momentos será una función de  $p^4$ , esto es

$$D_F(p) = \frac{i}{p^2 - p^4/M^2 - (m^2 - i\epsilon)}. \quad (3.4)$$

La ecuación anterior puede ser manipulada algebraicamente de forma tal que puede ser escrita como

$$D_F(p^2, m^2, \epsilon) = -\frac{i}{\alpha} \left( \frac{1}{p^2 - \mathcal{M}_1^2} - \frac{1}{p^2 - \mathcal{M}_2^2} \right), \quad (3.5)$$

donde  $\mathcal{M}_1^2 = \frac{M^2}{2}(1 + \alpha)$  y  $\mathcal{M}_2^2 = \frac{M^2}{2}(1 - \alpha)$  con  $\alpha = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}$  y el término  $i\epsilon$  va implícitamente en  $m^2$ .

Nótese que en el límite de  $M \gg m$ , uno de los propagadores se anula y queda el propagador de la teoría analizada en el Capítulo 2.

De la ecuación (3.5) se aprecia que la teoría cuenta con dos polos los cuales representan grados de libertad. Para exhibir de forma explícita estos grados de libertad, a continuación se manipulará algebraicamente el Lagrangiano de (3.1), trabajando de forma independiente cada término. El primer término

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi} &= \partial_\mu (\hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi}) - \hat{\phi} \partial^2 \hat{\phi} \\ &= -\hat{\phi} \partial^2 \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde se omitió el término de superficie. Para el segundo

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi})^2 &= \partial^\mu (\partial_\mu \hat{\phi}) \partial_\nu \hat{\phi} \partial^\nu \hat{\phi} \\ &= \partial^\mu (\partial_\mu \hat{\phi} \partial^2 \hat{\phi}) - \partial^\mu \hat{\phi} (\partial_\mu \partial^2 \hat{\phi}) \\ &= -\partial^\mu \hat{\phi} (\partial_\mu \partial^2 \hat{\phi}) \\ &= -\partial^\mu (\hat{\phi} \partial_\mu (\partial^2 \hat{\phi})) + \hat{\phi} \partial^2 \partial^2 \hat{\phi} \\ &= \hat{\phi} \partial^2 \partial^2 \hat{\phi}, \end{aligned}$$

donde se ignoraron los términos de superficie. El lagrangiano original puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\hat{\phi}\partial^2\hat{\phi} - \frac{1}{2M^2}\hat{\phi}\partial^2\partial^2\hat{\phi} - \frac{1}{2}m^2\hat{\phi}^2 \\ &= -\frac{1}{2}\hat{\phi}\left[\partial^2 + \frac{1}{M^2}\partial^2\partial^2 + m^2\right]\hat{\phi},\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde se puede ver como un polinomio en  $\partial^2$  por lo que se puede factorizar de forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{M^2}\partial^2\partial^2 + \partial^2 + m^2 &= \frac{1}{M^2}(\partial^2\partial^2 + M^2\partial^2 + M^2m^2) \\ &= \frac{1}{M^2}\left[\left(\partial^2 + \frac{1}{2}M^2\right)^2 - \frac{1}{4}M^4 + M^2m^2\right] \\ &= \frac{1}{M^2}\left[\left(\partial^2 + \frac{1}{2}M^2\right)^2 - \frac{M^2}{4}(M^2 - 4m^2)\right] \\ &= \frac{1}{M^2}\left[\left(\partial^2 + \frac{1}{2}M^2 - \frac{M}{2}\sqrt{M^2 - 4m^2}\right)\left(\partial^2 + \frac{1}{2}M^2 + \frac{M}{2}\sqrt{M^2 - 4m^2}\right)\right] \\ &\equiv \frac{1}{M^2}[(\partial^2 + \mathcal{M}_2^2)(\partial^2 + \mathcal{M}_1^2)].\end{aligned}\tag{3.8}$$

El Lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\hat{\phi}\left[\frac{1}{M^2}(\partial^2 + \mathcal{M}_2^2)(\partial^2 + \mathcal{M}_1^2)\right]\hat{\phi}.\tag{3.9}$$

Ahora, para exhibir explícitamente los dos grados de libertad, se define

$$\phi_2 \equiv \frac{1}{M\sqrt{\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}}(\partial^2 + \mathcal{M}_1^2)\hat{\phi}; \quad \phi_1 \equiv \frac{1}{M\sqrt{\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}}(\partial^2 + \mathcal{M}_2^2)\hat{\phi}\tag{3.10}$$

donde inmediatamente se observa que

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{\sqrt{\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}}{M}\hat{\phi}.\tag{3.11}$$

Usando (3.10), el Lagrangiano se verá modificado y estará en función de estos dos campos, esto es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\hat{\phi}\left[\frac{1}{M^2}(\partial^2 + \mathcal{M}_2^2)M\sqrt{\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}\phi_2\right]$$

usando la diferencia

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{M}{\sqrt{\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}} (\phi_2 - \phi_1) \left[ \frac{1}{M^2} (\partial^2 + \mathcal{M}_2^2) M \sqrt{\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2} \phi_2 \right]$$

simplificando

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} (\phi_2 - \phi_1) [(\partial^2 + \mathcal{M}_2^2) \phi_2] \\ &= -\frac{1}{2} \phi_2 (\partial^2 + \mathcal{M}_2^2) \phi_2 + \frac{1}{2} \phi_1 (\partial^2 + \mathcal{M}_2^2) \phi_2 \end{aligned}$$

sumando dos ceros con  $\mathcal{M}_1$  y  $\phi_1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \phi_2 (\partial^2 + \mathcal{M}_2^2) \phi_2 + \frac{1}{2} \phi_1 (\partial^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2) (\phi_2 - \phi_1 + \phi_1) \\ &= -\frac{1}{2} \phi_2 (\partial^2 + \mathcal{M}_2^2) \phi_2 + \frac{1}{2} \phi_1 (\partial^2 + \mathcal{M}_1^2) \phi_1 + \\ &\quad \frac{1}{2} \phi_1 (\partial^2 + \mathcal{M}_1^2) (\phi_2 - \phi_1) + \frac{1}{2} \phi_1 (-\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2) (\phi_2 - \phi_1 + \phi_1) \\ &= -\frac{1}{2} \phi_2 (\partial^2 + \mathcal{M}_2^2) \phi_2 + \frac{1}{2} \phi_1 (\partial^2 + \mathcal{M}_1^2) \phi_1 + \\ &\quad \frac{1}{2} \phi_1 (\partial^2 + \mathcal{M}_1^2) \frac{\sqrt{\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}}{M} \hat{\phi} + \frac{1}{2} \phi_1 (-\mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2) \phi_2 \end{aligned}$$

identificando a  $\phi_2$  en el tercer término, se anula con el cuarto término que tiene el signo opuesto, quedando sólo dos términos en el lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi_2 (\partial^2 + \mathcal{M}_2^2) \phi_2 + \frac{1}{2} \phi_1 (\partial^2 + \mathcal{M}_1^2) \phi_1. \quad (3.12)$$

En esta ecuación se puede notar que los términos son iguales en estructura con la salvedad de un signo. El segundo término corresponde a un fantasma. Estos fantasmas vuelven a aparecer de la misma manera que en el oscilador de Pais Uhlenbeck. Los dos osciladores están desacoplados y sus energías son independientes. Al agregar el término de interacción se “filtra” la energía de un oscilador a otro [18].

Para el caso a trabajar en esta tesis, el término de interacción se ve como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -\frac{g}{3!} \hat{\phi}^3 \\ &= -\frac{g}{3!} \left( \frac{M}{\sqrt{\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}} \right)^3 (\phi_2 - \phi_1)^3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Este término de interacción, al trabajarlo desde un contexto usual de campos, es inestable bajo perturbaciones.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>En un entorno cosmológico [21] existen potenciales efectivos con esta forma.

El cual, en la notación de Grinstein [4, 20]

$$\phi \equiv \phi_2, \quad \tilde{\phi} \equiv \phi_1. \quad (3.14)$$

tiene la forma

$$\mathcal{L}_I = -\frac{g}{3!} \left( \frac{M}{\sqrt{\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}} \right)^3 (\phi - \tilde{\phi})^3. \quad (3.15)$$

Al tomar en cuenta la forma de cada una de las masas debajo de (3.5), la diferencia de las masas se ve como

$$\mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2 = M^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} = M^2 \alpha. \quad (3.16)$$

De esta forma el término de interacción es redefinido como

$$\mathcal{L}_I = -\frac{g'}{3!} (\phi - \tilde{\phi})^3, \quad \text{con} \quad g' = g\alpha^{-3/2}. \quad (3.17)$$

El Lagrangiano con los grados de libertad explícitos es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial\phi)^2 - \mathcal{M}_2^2 \phi^2] - \frac{1}{2} [(\partial\tilde{\phi})^2 - \mathcal{M}_1^2 \tilde{\phi}^2] - \frac{g'}{3!} (\phi - \tilde{\phi})^3, \quad (3.18)$$

donde se ha realizado una integración por partes. De esta última expresión es más claro ver como, a excepción de la interacción, son dos campos de Klein-Gordon desacoplados y el signo cambiado corresponde a un fantasma, un grado de libertad que tiene norma negativa y rompe unitariedad.

La elección de los campos en (3.10) parece ser arbitraria ya que termina agregando factores de  $\alpha$  a los términos de la densidad Lagrangiana. Esta elección en principio escala los campos de manera que hay un factor de  $1/\alpha$ ; esta potencia específica permite separar los grados de libertad dejando el Lagrangiano libre sin factores globales de  $\alpha$ . El único precio a pagar es que el Lagrangiano de interacción se ve modificado y como consecuencia la intensidad de la interacción se ve modificada.

Es importante hacer hincapié en las magnitudes de estas masas  $\mathcal{M}_i^2$  en el caso donde  $M \gg m$ . Haciendo una factorización para recuperar  $\alpha$  como estaba en (3.5) las masas se ven

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^2 &= \frac{M^2}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \right) \\ &\approx M^2 - m^2 \end{aligned} \quad (3.19)$$

corresponde a un modo pesado (Por el parámetro  $M$ ). Para la otra masa

$$\mathcal{M}_2^2 = \frac{M^2}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \right) \approx m^2 \quad (3.20)$$

corresponde a un modo ligero (Ya que  $m < M$ ). Entonces podemos asociar estos dos modos a uno ligero de masa  $m$ , que carga el grado de libertad estándar y uno pesado de masa  $\sqrt{M^2 - m^2}$  que carga el grado de libertad de LW. Al obtener los propagadores en el espacio de momentos se observa que el propagador del campo  $\phi$  tiene polos en  $\mathcal{M}_2$  y que el propagador del campo  $\tilde{\phi}$  los tiene en  $\mathcal{M}_1$  con un signo distinto. Los propagadores son

$$D_F = \frac{i}{p^2 - \mathcal{M}_2^2} \quad (3.21)$$

y

$$D_F^f = -\frac{i}{p^2 - \mathcal{M}_1^2} \quad (3.22)$$

éste último propagador, por el signo menos, se asocia a un grado de libertad fantasma o de LW [18].

Para calcular el elemento de matriz asociado a la autoenergía, se hará uso de todos los posibles diagramas que contribuyen con un loop a orden 2 con los distintos términos de interacción.

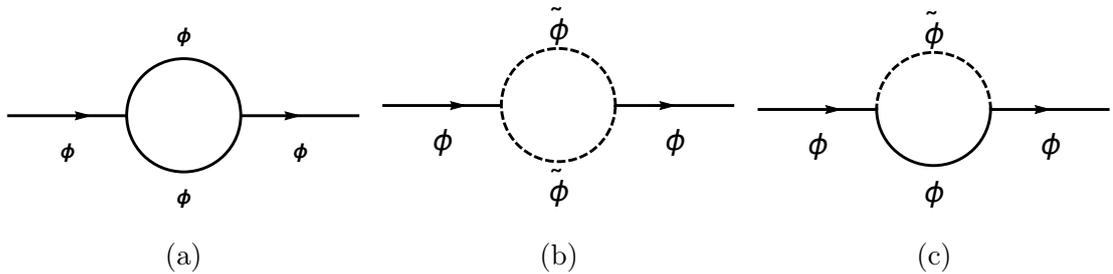


Figura 3.1: Diagramas a orden 2 de perturbación que contribuyen a la autoenergía del campo  $\hat{\phi}$ . La línea continua corresponde al campo  $\phi$  de Klein-Gordon y la punteada al campo  $\tilde{\phi}$ , el de LW.

Los diagramas que se muestran en la Figura 3.1, contribuyen en general a segundo orden de perturbaciones a la amplitud de dispersión. Como estos involucran dos propagadores escalares, es conveniente definir la siguiente función

$$\begin{aligned}
 F(m^2, M^2, p^2) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{(k-p)^2 - m^2} \frac{i}{k^2 - M^2} \\
 &= -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log[c(p^2 x(x-1) + m^2 x + (1-x)M^2)]
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde  $c$  es una constante proporcional a la constante de Euler-Mascheroni.

Al ver la figura 3.1, se observa que hay tres distintas combinaciones de propagadores en el loop, las que tienen dos líneas continuas, dos punteadas y una combinación de estas dos. En las siguientes secciones se expone el desarrollo y resultados de la tesis. Se usan dos prescripciones, la de CLOP[4, 6] y la de Anselmi & Piva [7, 8].

### I.1. Prescripción CLOP

Esta prescripción fue usada para tratar la estructura analítica de las teorías con derivadas altas. De acuerdo a la prescripción se supone que cada propagador del fantasma en la integral tiene una masa con parte imaginaria distinta a cualquier otra masa en los propagadores. Esto permite la deformación del contorno de integración para calcular la integral. Como los pares complejos generan un corte rama en el eje real, se garantiza unitariedad para la matriz  $\hat{S}$  [5].

Siguiendo las ideas de [4], se hace el desarrollo de la teoría usando la prescripción CLOP. Como cualquier otro campo fantasma, este campo desarrolla un ancho de decaimiento el cual se obtiene al tomar en cuenta las inserciones de autoenergía de Lee-Wick. Es decir  $M_c^2 = \mathcal{M}_1^2 + i\mathcal{M}_1\Gamma$ , el cual al ser real y regular en un segmento de la recta real cumple con el principio de reflexión de Schwarz<sup>2</sup> por lo que tiene otro polo en  $M_c^{*\ 2}$  haciendo posible una corrección al propagador de la forma [4, 6]

$$D_F^f(p^2) = \frac{-i}{p^2 - M_c^2} + \frac{-i}{p^2 - M_c^{*\ 2}} + \frac{i}{\pi} \int_{9m^2}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{p^2 - s + i\epsilon} \tag{3.24}$$

donde se utilizó la descomposición espectral de Källén-Lehman para los estados multipartícula.

Aterrizando al caso de las integrales que se van a trabajar, la autoenergía depende de

---

<sup>2</sup>Véase A.

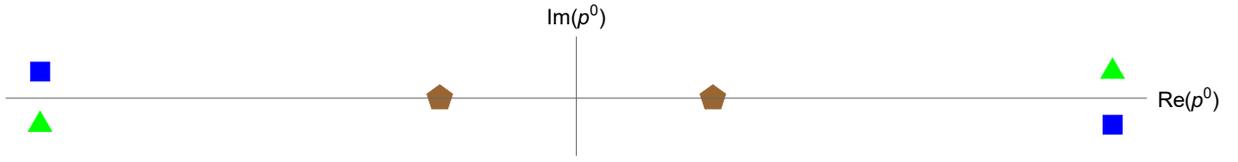


Figura 3.2: Ubicación de los polos del modelo de Lee-Wick. Los polos en forma de pentágono son los correspondientes a los de la teoría de Klein-Gordon y los polos cuadrados y triangulares son los polos de LW, y son conjugados complejos.

masas  $M_1^2$  y  $(M_1^*)^2$ , como parámetros complejos no relacionados para evitar el cruce (*pinching*) de polos. Se utilizan dos masas complejas para los propagadores  $M_1^2 = M_c^2 + i\delta$  y  $M_2 = M_c^2$ , esto es

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p+q)^2 - M_1^2} \frac{i}{p^2 - M_2^2}, \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p+q)^2 - M_c^2 - i\delta} \frac{i}{p^2 - M_c^2}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde el parámetro  $\delta$  es el responsable de evitar los cruces no deseados con cortes y puntos rama procurando así la invariancia [4, 6, 8]. Al hacer la integral y evitar los cruces se puede tomar el límite  $\delta \rightarrow 0$ . El siguiente procedimiento se sigue de las ideas de [4].

## I.2. Polos Estándar

Se va a estudiar los diagramas con la combinación de dos propagadores con polos en  $m$ , i.e. con líneas continuas. Los valores de masa en la función son  $\mathcal{M}_2^2$  en los dos propagadores. Definiendo por conveniencia  $g' = g/\alpha$ , la autoenergía es

$$\Sigma_1(p^2) = \frac{g'^2 i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_F(p) D_F(p-q) \quad (3.26)$$

tomando únicamente los productos que tienen los propagadores individuales

$$\begin{aligned} \Sigma_1(p^2) &= g'^2 F(\mathcal{M}_2^2, \mathcal{M}_2^2, p^2) \\ &= -\frac{g'^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log[c(p^2 x(x-1) + \mathcal{M}_2^2 x + (1-x)\mathcal{M}_2^2)] \end{aligned} \quad (3.27)$$

analizando el polinomio del argumento del logaritmo, se tiene que las raíces están en

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 4\frac{\mathcal{M}_2^2}{p^2}}}{2} \quad (3.28)$$

y el logaritmo desarrolla parte imaginaria en el intervalo entre las dos raíces, por lo que la autoenergía se ve

$$\begin{aligned} \Sigma_1(p^2) = & -\frac{g'^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log[|p^2x(x-1) + \mathcal{M}_2^2x + (1-x)\mathcal{M}_2^2|] \\ & + \frac{ig'^2}{32\pi} \sqrt{1 - 4\frac{\mathcal{M}_2^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4\mathcal{M}_2^2) \end{aligned} \quad (3.29)$$

este es un resultado que ya se había visto en el capítulo anterior. Es algo esperado de la teoría, recuperar el caso conocido. Las siguientes subsecciones tendrán resultados más interesantes sobre la estructura analítica de estos loops.

### I.3. Polos Lee-Wick-Lee-Wick

En el caso del producto de los propagadores del campo  $\tilde{\phi}$ , que corresponden a la figura 3.1b. Se separará el término con densidad espectral ya que requiere un análisis distinto. De acuerdo a la prescripción CLOP, se introduce una pequeña variación de la masa de magnitud  $i\delta$ . Usando la descomposición (3.24) la autoenergía toma la forma

$$\Sigma_2(p^2) = \frac{g'^2 i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} D_F^f(p) D_F^f(p-q), \quad (3.30)$$

la integral que se tiene en este caso se va a dividir en tres partes

$$\Sigma_2(p^2) = \Sigma_2^{pp} + \Sigma_2^{\rho p} + \Sigma_2^{\rho\rho}, \quad (3.31)$$

donde el primer término consiste de los productos que contienen la estructura de propagador individual, el segundo combina el propagador individual y el término proporcional a la densidad espectral y por último los productos proporcionales a las dos densidades

espectrales. El primer término se desarrolla

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{pp}(p^2) &= \frac{ig'^2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \\ &\left( \frac{-i}{k^2 - M_c^2 - i\delta} + \frac{-i}{k^2 - M_c^{*2} + i\delta} \right) \times \left( \frac{-i}{(k-p)^2 - M_c^2} + \frac{-i}{(k-p)^2 - M_c^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

haciendo los productos de los propagadores y sustituyendo por las funciones  $F$

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{pp}(p^2) &= g'^2 F(M_c^2 + i\delta, M_c^2, p^2) + g'^2 F(M_c^2 + i\delta, M_c^{*2}, p^2) \\ &+ g'^2 F(M_c^{*2} - i\delta, M_c^2, p^2) + g'^2 F(M_c^{*2} - i\delta, M_c^{*2}, p^2), \end{aligned} \quad (3.33)$$

en función de logaritmos

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{pp}(p^2) &= -\frac{g'^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx [\log(p^2 x(x-1) + (M_c^2 + i\delta)x + (1-x)(M_c^2)) + \\ &\log(p^2 x(x-1) + (M_c^{*2} - i\delta)x + (1-x)(M_c^{*2})) + \\ &\log(p^2 x(x-1) + (M_c^2 + i\delta)x + (1-x)(M_c^{*2})) + \\ &\log(p^2 x(x-1) + (M_c^{*2} - i\delta)x + (1-x)(M_c^2))]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Los primeros dos términos al igual que los últimos dos son conjugados complejos de sí mismos, y al sumarse se obtiene la parte real. Por lo que este término de la autoenergía es totalmente real y no generará parte imaginaria. De modo que el ancho de decaimiento en estos términos es  $\Gamma \rightarrow 0$  lo que hace que  $M_c^2 = \mathcal{M}_1^2$  y  $M_c^{*2} = \mathcal{M}_1^2$ . Este procedimiento dado por [6] permitió mover los cortes rama del eje real, haciendo la función analítica en una banda de ancho  $\sim \delta$  [4]. El parámetro  $\delta$  acompaña a los términos de masa y a sus conjugados, se omitirá ya que al tratar a las masas el término con delta se conjuga de la misma forma.

$$\Sigma_2^{pp}(p^2) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx [\log(|p^2 x(x-1) + \mathcal{M}_1^2|^2)]. \quad (3.35)$$

Ahora los términos que involucran la densidad espectral y los propagadores individuales

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{\rho\rho}(p^2) &= \frac{ig'^2}{2\pi} \int_{9m^2}^{\infty} ds \int \frac{d^d k}{(2\pi)^4} \left( \rho(s) \frac{i}{p^2 - s + i\epsilon} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{-i}{(k-p)^2 - M_c^{*2}} + \frac{-i}{(k-p)^2 - M_c^2} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\Sigma_2^{\rho\rho}(p^2) = \frac{2g'^2}{\pi} \int ds \rho(s) (F(s, M_c^2, p^2) + F(s, M_c^{*2}, p^2)). \quad (3.37)$$

La suma, de nuevo, convierte a la expresión en real, y los anchos  $\Gamma$ , se pueden enviar a cero. Usando la *NWA*<sup>3</sup>, la forma de  $\rho(s)$  se va a  $\delta(s - \mathcal{M}_1^2)$ , permitiendo simplificar la expresión anterior a

$$\Sigma_2^{\rho\rho}(p^2) = \frac{4g'^2}{32\pi^2} F(\mathcal{M}_1^2, \mathcal{M}_1^2, p^2), \quad (3.38)$$

la cual, en términos de logaritmos, es

$$\Sigma_2^{\rho\rho}(p^2) = \frac{g'^2}{16\pi^2} \log(|p^2 x(x-1) + \mathcal{M}_1^2|^2). \quad (3.39)$$

Por último, el término que involucra las dos densidades espectrales.

$$\Sigma_2^{\rho\rho}(p^2) = \frac{ig'^2}{2} \int \int ds dt \rho(s) \rho(t) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left( \frac{i}{\pi} \right)^2 \frac{1}{k^2 - s + i\epsilon} \frac{1}{(p-k)^2 - t + i\epsilon}, \quad (3.40)$$

es decir

$$\Sigma_2^{\rho\rho}(p^2) = -\frac{g'^2}{\pi^2} \int \int ds dt \rho(s) \rho(t) F(s, t, p^2) \quad (3.41)$$

en la *NWA*, las densidades tienden a deltas de Dirac  $\delta(s - \mathcal{M}_1^2)$ ,  $\delta(t - \mathcal{M}_1^2)$  y se encargan de las dos integrales, reduciendo la expresión anterior a

$$\Sigma_2^{\rho\rho}(p^2) = F(\mathcal{M}_1^2, \mathcal{M}_1^2, p^2). \quad (3.42)$$

Este término sí genera una parte imaginaria análoga a la teoría estándar, con el parámetro de masa  $\mathcal{M}_1$

$$\Sigma_2^{\rho\rho}(p^2) = -\frac{g'^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log(p^2 x(x-1) + \mathcal{M}_1^2) + \frac{ig'^2}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4\mathcal{M}_1^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4\mathcal{M}_1^2). \quad (3.43)$$

---

<sup>3</sup>Narrow Width Approximation VII

El único término que es de interés es el que desarrolla parte imaginaria, es decir  $\Sigma_2^{\rho\rho}(p^2)$ .

#### I.4. Polos Estándar - Lee-Wick

Para la combinación polos estándar y de Lee-Wick, que corresponde al diagrama 3.1c, se tienen dos términos distintos. Los que combinan el polo estándar con los propagadores individuales y el polo estándar con la densidad espectral. La autoenergía toma la forma

$$\Sigma_3(p^2) = \frac{g'^2 i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D_F(p) D_F^f(p-q), \quad (3.44)$$

la integral que se tiene en este caso se va a dividir en dos partes

$$\Sigma_3(p^2) = \Sigma_3^{sp} + \Sigma_3^{\rho s}. \quad (3.45)$$

El primer término se desarrolla

$$\begin{aligned} \Sigma_3^{sp}(p^2) = & -\frac{ig'^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mathcal{M}_2^2} \left( \frac{1}{(k-p)^2 - M_c^2} + \frac{1}{(k-p)^2 - M_c^{*2}} \right) \\ & + \frac{1}{(k-p)^2 - \mathcal{M}_2^2} \left( \frac{1}{k^2 - M_c^2} + \frac{1}{k^2 - M_c^{*2}} \right), \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde se sumó el último término para evitar los cortes rama, según CLOP. Como función de las funciones  $F$  de (3.27)

$$\Sigma_3^{sp}(p^2) = -2g'^2 (F(\mathcal{M}_2^2, M_c^2, p^2) + F(\mathcal{M}_1^2, M_c^{*2}, p^2)), \quad (3.47)$$

de igual manera que en la sección anterior, se tiene la suma de conjugados complejos haciendo que la contribución sea totalmente real. Permitiendo hacer el ancho cero para tener un término

$$\Sigma_3^{sp}(p^2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx [\log(|p^2 x(x-1) + x\mathcal{M}_1^2 + (1-x)\mathcal{M}_2^2|)^2]. \quad (3.48)$$

Sólo falta el término de la densidad espectral con el polo estándar

$$\Sigma_3^{\rho s}(p^2) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i g'^2}{2\pi} \int ds \rho(s) \left[ \frac{1}{k^2 - \mathcal{M}_2^2} \frac{1}{(p-k)^2 - s + i\epsilon} \right], \quad (3.49)$$

en el la *NWA*, se da la resonancia que provoca que la densidad espectral se comporté como  $\rho(s) \rightarrow \delta(s - \mathcal{M}_1^2)$ , provocando

$$\Sigma_3^{\rho s}(p^2) = g'^2 F(\mathcal{M}_2^2, \mathcal{M}_1^2, p^2) \quad (3.50)$$

este término desarrolla parte imaginaria en el logaritmo

$$\Sigma_3^{\rho s}(p^2) = - \frac{g'^2}{32\pi^2} \int_0^1 \log(p^2 x(x-1) + \mathcal{M}_1^2 x + (1-x)\mathcal{M}_1^2), \quad (3.51)$$

la concavidad del polinomio indica que se desarrolla parte imaginaria entre las dos raíces, es decir

$$\begin{aligned} \Sigma_3(p^2) = & - \frac{g'^2}{32\pi^2} \int_0^1 \log(|p^2 x(x-1) + \mathcal{M}_1^2 x + (1-x)\mathcal{M}_2^2|) \\ & + \frac{i g'^2}{32\pi} \sqrt{\left(1 - \frac{(\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_1^2)^2}{p^2}\right) \left(1 - \frac{(\mathcal{M}_2^2 - \mathcal{M}_1^2)^2}{p^2}\right)} \theta(p^2 - (\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_1^2)^2), \end{aligned} \quad (3.52)$$

la parte imaginaria es la raíz de la llamada función triangular de Källén. Y el argumento de la función de Heaviside es el mínimo para tener una raíz real. Sumando las contribuciones se tienen tres términos imaginarios y los demás se agrupan dentro del logaritmo. La parte imaginaria resultado de esta interacción es

$$\begin{aligned} Im(\Sigma) = & \frac{g'^2}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4\mathcal{M}_2^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4\mathcal{M}_2^2) \\ & + \frac{2g'^2}{32\pi} \sqrt{\left(1 - \frac{(\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_1^2)^2}{p^2}\right) \left(1 - \frac{(\mathcal{M}_2^2 - \mathcal{M}_1^2)^2}{p^2}\right)} \theta(p^2 - (\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_1^2)^2) \\ & + \frac{g'^2}{32\pi} \sqrt{1 - \frac{4\mathcal{M}_1^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4\mathcal{M}_1^2), \end{aligned} \quad (3.53)$$

en función de la constante de acoplamiento  $g$ ,

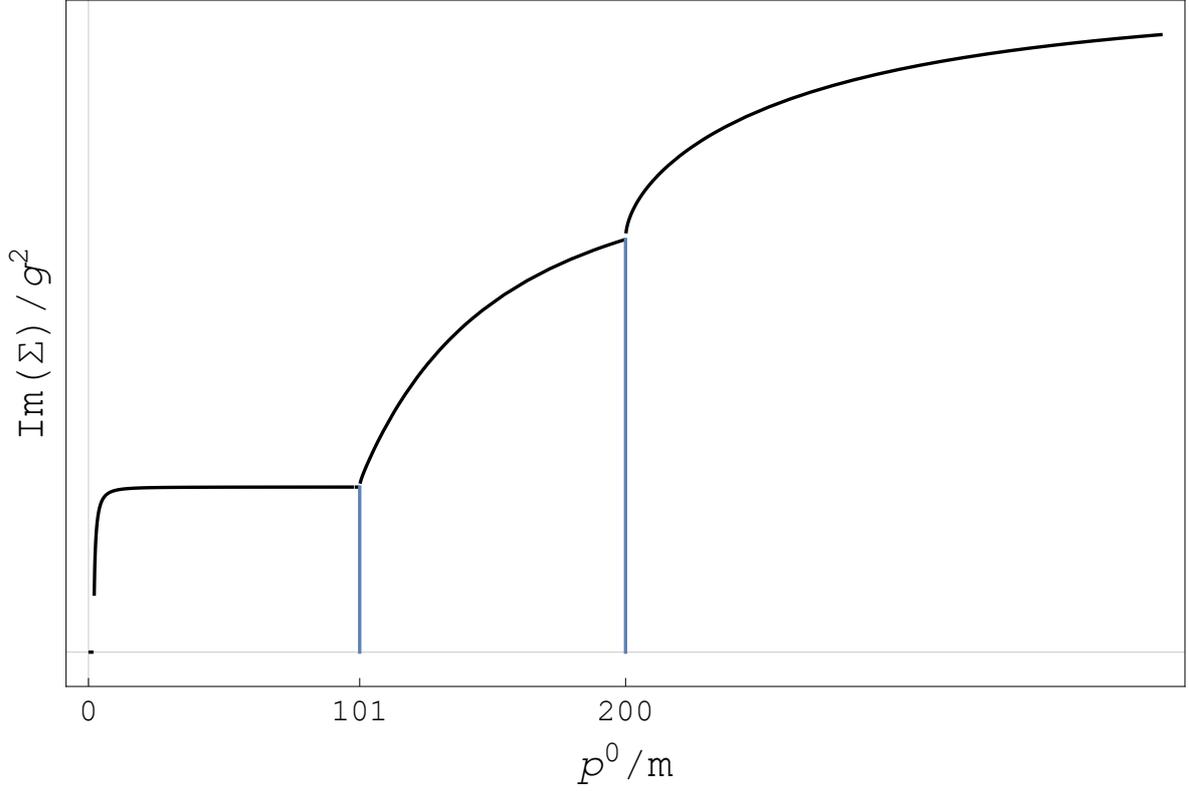


Figura 3.3: Autoenergía entre  $g^2$  del acercamiento de CLOP dado por la ecuación (3.54), los umbrales en el marco en reposo se dan en  $p^0 = 2m$ ,  $p^0 = m + M$  y  $p^0 = 2M$ , en este gráfico  $M = 100m$

$$\begin{aligned}
 \text{Im}(\Sigma_{CLOP}) = & \frac{g^2}{32\pi\alpha^{3/2}} \sqrt{1 - \frac{4\mathcal{M}_2^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4\mathcal{M}_2^2) \\
 & + \frac{2g^2}{32\pi\alpha^{3/2}} \sqrt{\left(1 - \frac{(\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_1^2)^2}{p^2}\right) \left(1 - \frac{(\mathcal{M}_2^2 - \mathcal{M}_1^2)^2}{p^2}\right)} \theta(p^2 - (\mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_1^2)^2) \\
 & + \frac{g^2}{32\pi\alpha^{3/2}} \sqrt{1 - \frac{4\mathcal{M}_1^2}{p^2}} \theta(p^2 - 4\mathcal{M}_1^2),
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

donde es  $\alpha = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}}$ .

La parte imaginaria de la autoenergía de la ecuación (3.54) gráficamente toma la forma de la figura 3.3, donde el primer escalón corresponde a la teoría estándar y el segundo proviene de la interacción de este nuevo grado de libertad de Lee-Wick, el campo  $\tilde{\phi}$ , con el campo de Klein-Gordon y el último por si mismo es de los grados de Lee-Wick. Esta

descomposición permite ver claramente que el decaimiento de un modo de Lee-Wick lleva a que existan más partículas salientes, de manera que el grado de libertad de Lee Wick no se propague.

## II. Acercamiento con Anselmi & Piva

Retomando las ideas de [7, 8], se puede hacer un cálculo para este modelo. Sin necesidad de separar explícitamente el grado de libertad de Lee-Wick con un campo  $\tilde{\phi}$ , se puede trabajar con el propagador como tal y tratar de separar este polo “pesado” como indica (A.4). A partir de (3.4), se pueden identificar dos raíces de  $p^2$  una en  $\mathcal{M}_1^2 = \frac{M^2}{2}(1 + \alpha)$  y la otra en  $\mathcal{M}_2^2 = \frac{M^2}{2}(1 - \alpha)$ . Con estas raíces el propagador se puede reescribir como

$$D_F(p^2) = -\frac{i}{\alpha} \left( \frac{1}{p^2 - \mathcal{M}_1^2 - i\epsilon} - \frac{1}{p^2 - \mathcal{M}_2^2 + i\epsilon} \right). \quad (3.55)$$

para el cálculo del elemento de matriz asociado a la autoenergía se hará un procedimiento similar al del Capítulo 2. Solo se considerarán anchos arbitrarios y distintos,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ . Para los objetivos que se buscan, tomar  $m_1 = m_2 = m$  es suficiente. El elemento de matriz tiene los productos

$$D_F(k^2)D_F((p - k)^2), \quad (3.56)$$

los términos proporcionales a  $\mathcal{M}_2$  están asociados al grado de libertad estándar y los que están con  $\mathcal{M}_1$ , al grado de libertad de Lee-Wick o fantasma. La ubicación de los polos para esta prescripción no toma en cuenta que un campo decae, haciendo nula la corrección de los polos y provocando que estén ligeramente separados del eje real. Esta localización de los polos abre la puerta a que la integración se pueda hacer de manera regular ya que no habrá problemas con cruces de rama.

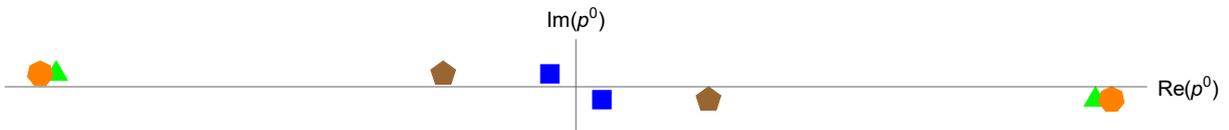


Figura 3.4: Polos del modelo sin tomar un decaimiento del modo fantasma.

Los cuatro términos del elemento de matriz son

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M} = \frac{g}{2\alpha^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} & \left( -\frac{1}{k^2 - \mathcal{M}_1^2 - i\epsilon_1} \frac{1}{(k-p)^2 - \mathcal{M}_1^2 - i\epsilon_2} \right. \\
 & + \frac{1}{k^2 - \mathcal{M}_1^2 - i\epsilon_1} \frac{1}{(k-p)^2 - \mathcal{M}_2^2 + i\epsilon_2} \\
 & + \frac{1}{k^2 - \mathcal{M}_2^2 + i\epsilon_1} \frac{1}{(k-p)^2 - \mathcal{M}_1^2 - i\epsilon_2} \\
 & \left. - \frac{1}{k^2 - \mathcal{M}_2^2 + i\epsilon_1} \frac{1}{(k-p)^2 - \mathcal{M}_2^2 + i\epsilon_2} \right). \tag{3.57}
 \end{aligned}$$

De los cuatro términos de (3.57) es importante notar los signos de los  $i\epsilon$ , al tratar con la masa del polo estándar se suma, y cuando se trata con la masa del polo fantasma se resta. Los cambios en los signos que acompañan a las  $\epsilon_i$  se tratan en el Apéndice B.

Definiendo la autoenergía para cada término como  $\Sigma_i$ , con  $i$  corriendo desde 1 a 4, para cada renglón de (3.57) se trabajan los tres casos distintos.

## II.1. Polo Lee-Wick - Lee Wick

El primer término de (3.57) corresponde al producto de los grados de libertad de Lee - Wick,

$$\Sigma_1(p) = \frac{-ig^2}{2\alpha^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( -\frac{1}{k^2 - \mathcal{M}_1^2 - i\epsilon_1} \frac{1}{(k-p)^2 - \mathcal{M}_1^2 - i\epsilon_2} \right), \tag{3.58}$$

factorizando para poder integrar por residuos

$$\Sigma_1(p) = \frac{-ig^2}{2\alpha^2} \int \frac{d^3k dk^0}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^0 - \omega_1 + i\epsilon_1} \frac{1}{k^0 + \omega_1 - i\epsilon_1} \frac{1}{k^0 - p^0 - \omega_2 + i\epsilon_2} \frac{1}{k^0 - p^0 + \omega_2 - i\epsilon_2} \right), \tag{3.59}$$

definiendo  $\omega_1 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mathcal{M}_1}$  y  $\omega_2 = \sqrt{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 + \mathcal{M}_1}$ . Cerrando el contorno de integración por abajo, los polos relevantes son

$$z_1 = \omega_1 - i\epsilon_1 \qquad z_2 = p^0 + \omega_2 - i\epsilon_2. \tag{3.60}$$

Reescribiendo la autoenergía en función de las  $z_i$  se tiene

$$\Sigma_1(p) = \frac{-ig^2}{2\alpha^2} \int \frac{d^3k dk^0}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{k^0 - z_1} \frac{1}{k^0 + z_1} \frac{1}{k^0 - z_2} \frac{1}{k^0 + z_2 - 2p^0} \right). \tag{3.61}$$

Antes de seguir, vale la pena trabajar con la suma y diferencia de los polos

$$z_1 + z_2 = \omega_1 + \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+ \quad z_1 - z_2 = \omega_1 - \omega_2 - p^0 - i\epsilon_-, \quad (3.62)$$

recordando que se definieron dos cantidades en el capítulo 2,  $\epsilon_{\pm} = \epsilon_1 \pm \epsilon_2$ . La cantidad  $\epsilon_-$  puede generar ambigüedades al momento de tomar los límites  $\epsilon_i \rightarrow 0$ .

Por el teorema del Residuo la autonergía se ve

$$\Sigma_1(p) = \frac{-ig^2}{2\alpha^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \times 2\pi i (Res(z_1) + Res(z_2)), \quad (3.63)$$

los residuos son

$$Res(z_1) = \frac{1}{2z_1} \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_1 + z_2 - 2p^0}, \quad Res(z_2) = -\frac{1}{2} \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{z_2 + z_1} \frac{1}{z_2 - p^0} \quad (3.64)$$

al tomar la suma

$$\begin{aligned} Res(z_1) + Res(z_2) &= \frac{1}{2(z_1 - z_2)} \left[ \frac{1}{z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)} - \frac{1}{(z_2 - p^0)(z_1 + z_2)} \right] \\ &= \frac{1}{2(z_1 - z_2)} \left[ \frac{(z_2 - p^0)(z_1 + z_2) - z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)}{z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)(z_2 - p^0)(z_1 + z_2)} \right] \\ &= \frac{1}{2(z_1 - z_2)} \left[ \frac{z_2^2 - z_1^2 - p^0(z_2 - z_1)}{z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)(z_2 - p^0)(z_1 + z_2)} \right] \\ &= \frac{1}{2(z_1 - z_2)} \left[ \frac{(z_2 - z_1)(z_2 + z_1 - p^0)}{z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)(z_2 - p^0)(z_1 + z_2)} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2 - p^0}{z_1(z_1 + z_2 - 2p^0)(z_2 - p^0)(z_1 + z_2)} \end{aligned}$$

en términos de  $\omega_i$ , tiene la forma

$$\begin{aligned} Res(z_1) + Res(z_2) &= -\frac{1}{2} \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2 - p^0 - i\epsilon_+) (\omega_1 + \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+)} \\ &= -\frac{1}{4\omega_1 \omega_2} \left[ \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 - p^0 - i\epsilon_+} + \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+} \right]. \end{aligned}$$

con el uso de la identidad

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \left( \frac{1}{x} \right) \mp i\pi\delta(x), \quad (3.65)$$

se puede considerar únicamente la parte imaginaria

$$Im(\Sigma_1) = \frac{g^2}{4\alpha^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{(2\omega_1)(2\omega_2)} (\delta(\omega_1 + \omega_2 - p^0) + \delta(\omega_1 + \omega_1 + p^0)). \quad (3.66)$$

Según el tratamiento del Apéndice B esta ecuación es igual a (B.20)

$$Im(\Sigma_1)(p) = \frac{g^2}{32\pi\alpha^2} \frac{1}{p^2} \sqrt{(p^2 - (M_1 + M_2)^2)(p^2 - (M_1 - M_2)^2)}, \quad (3.67)$$

para  $\Sigma_1$ , se tiene que las masas son las del grado de libertad de Lee-Wick,  $M_1 = M_2 = \mathcal{M}_1$

$$Im(\Sigma_1(p)) = \frac{g^2}{32\pi\alpha^2} \frac{1}{p} \sqrt{(p^2 - 4\mathcal{M}_1^2)} \theta(p^2 - 4\mathcal{M}_1^2). \quad (3.68)$$

## II.2. Polo Estándar

El cuarto término de la autoenergía (3.57) es proporcional al producto de dos grados de libertad estándar, se tratará igual que la sección anterior

$$\Sigma_4(p) = \frac{-ig^2}{2\alpha^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( -\frac{1}{k^2 - \mathcal{M}_2^2 + i\epsilon_1} \frac{1}{(k-p)^2 - \mathcal{M}_2^2 + i\epsilon_2} \right), \quad (3.69)$$

se factoriza para identificar los polos

$$\Sigma_4(p) = \frac{-ig^2}{2\alpha^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( -\frac{1}{k^0 - \omega_1 - i\epsilon_1} \frac{1}{k^0 + \omega_1 + i\epsilon_1} \frac{1}{k^0 - p^0 - \omega_1 - i\epsilon_2} \frac{1}{k^0 - p^0 + \omega_2 + i\epsilon_2} \right), \quad (3.70)$$

con  $\omega_1 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mathcal{M}_2^2}$  y  $\omega_2 = \sqrt{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 + \mathcal{M}_2^2}$ . Los polos están en

$$z_1 = -\omega_1 - i\epsilon_1 \quad z_2 = -\omega_2 + p^0 - i\epsilon_2, \quad (3.71)$$

y reescribiendo el integrando

$$\frac{1}{k^0 + z_1} \frac{1}{k^0 - z_1} \frac{1}{k^0 - z_2} \frac{1}{k^0 + z_2 - 2p^0}. \quad (3.72)$$

Las combinaciones lineales de  $z$  son

$$z_1 + z_2 = -\omega_1 - \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+ \quad z_1 - z_2 = -\omega_1 + \omega_2 - p^0 - i\epsilon_-. \quad (3.73)$$

De igual manera que con  $\Sigma_1$  se llega a que la suma de los residuos

$$Res(z_1) + Res(z_2) = -\frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2 - p^0}{z_1(z_2 - p^0)(z_1 + z_2 - p^0)(z_1 + z_2)}, \quad (3.74)$$

al sustituir con los valores de  $\omega_i$

$$Res(z_1) + Res(z_2) = -\frac{1}{2\omega_2\omega_1} \frac{-\omega_1 - \omega_2}{(-\omega_1 - \omega_2 - p^0 - i\epsilon_+)(-\omega_1 - \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+)}. \quad (3.75)$$

Esta ecuación se puede separar por fracciones parciales

$$Res(z_1) + Res(z_2) = -\frac{1}{4\omega_1\omega_2} \left[ \frac{1}{-\omega_1 - \omega_2 - p^0 - i\epsilon_+} + \frac{1}{-\omega_1 - \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+} \right], \quad (3.76)$$

en el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  se hace uso de la identidad (3.65). De forma que la parte imaginaria de  $\Sigma_4$  es

$$Im(\Sigma_4) = \frac{g^2}{4\alpha^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{4\omega_1\omega_2} (\delta(p^0 - (\omega_1 + \omega_2)) + \delta(p^0 + (\omega_1 + \omega_2))), \quad (3.77)$$

por el tratamiento del Apéndice B

$$Im(\Sigma_4) = \frac{g^2}{32\pi\alpha^2} \frac{1}{p^2} \sqrt{p^2 - 4\mathcal{M}_2^2} \theta(p^2 - 4\mathcal{M}_2^2). \quad (3.78)$$

Los siguientes términos son más interesantes, ya que tienen la combinación de los dos tipos de polos y un signo relativo respecto a los dos anteriores.

### II.3. Polos Lee-Wick - Estándar

Comenzando con el segundo término de (3.57)

$$\Sigma_2(p) = \frac{-ig^2}{2\alpha^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( +\frac{1}{k^2 - \mathcal{M}_1^2 - i\epsilon_1} \frac{1}{(k-p)^2 - \mathcal{M}_2^2 + i\epsilon_2} \right), \quad (3.79)$$

factorizando el integrando

$$\frac{1}{k^0 - \omega_1 + i\epsilon} \frac{1}{k^0 + \omega_1 - i\epsilon} \frac{1}{k^0 - p^0 - \omega_2 - i\epsilon_2} \frac{1}{k^0 - p^0 + \omega_2 + i\epsilon_2} \quad (3.80)$$

con  $\omega_1 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mathcal{M}_1^2}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 + \mathcal{M}_2^2}$ . Cerrando el contorno por abajo, los polos son

$$z_1 = \omega_1 - i\epsilon_1, \quad z_2 = p^0 - \omega_2 - i\epsilon_2. \quad (3.81)$$

Reescribiendo el integrando en función de los polos

$$\frac{1}{k^0 - z_1} \frac{1}{k^0 + z_1} \frac{1}{k^0 - z_2} \frac{1}{k^0 + z_2 - 2p^0} \quad (3.82)$$

las combinaciones lineales de  $z_i$

$$z_1 + z_2 = \omega_1 - \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+ \quad z_1 - z_2 = \omega_1 + \omega_2 - p^0 - i\epsilon_-. \quad (3.83)$$

Al igual que la sección anterior, la suma de los residuos

$$Res(z_1) + Res(z_2) = -\frac{1}{2} \frac{z_1 + z_2 - p^0}{z_1(z_2 - p^0)(z_1 + z_2 - p^0)(z_1 + z_2)}, \quad (3.84)$$

en función de los  $\omega_i$

$$Res(z_1) + Res(z_2) = +\frac{1}{2} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1(\omega_2)(\omega_1 - \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+)(\omega_1 - \omega_2 - p^0 - i\epsilon_-)}. \quad (3.85)$$

Al separar por fracciones parciales

$$Res(z_1) + Res(z_2) = \frac{1}{4\omega_2\omega_1} \left( \frac{1}{\omega_1 - \omega_2 + p^0 - i\epsilon_+} + \frac{1}{\omega_1 - \omega_2 - p^0 - i\epsilon_-} \right). \quad (3.86)$$

El signo relativo del término en (3.57) compensa el cambio en la suma de los residuos.

Haciendo uso de (3.65), la parte imaginaria de la autonergía

$$Im(\Sigma_2(p)) = \frac{g^2}{4\alpha^2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{4\omega_2\omega_1} (\delta(p^0 + \omega_1 - \omega_2)) + \delta(-p^0 + \omega_1 - \omega_2)), \quad (3.87)$$

de nuevo, por el Apéndice B y (B.20)

$$Im(\Sigma_2(p)) = \frac{g^2}{32\alpha^2} \sqrt{(p^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^2)(p^2 - (\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2)^2)} \theta(p^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^2). \quad (3.88)$$

Por último, el tercer término de (3.57). Este término es igual al segundo

$$Im(\Sigma_3(p)) = \frac{g^2}{32\alpha^2} \sqrt{(p^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^2)(p^2 - (\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2)^2)} \theta(p^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^2). \quad (3.89)$$

La contribución total de los cuatro términos toma la forma

$$\begin{aligned} \Sigma_{AP}(p) = & \frac{g^2}{32\pi\alpha^2} \left( \frac{1}{p^2} \sqrt{p^2 - 4\mathcal{M}_2^2} \theta(p^2 - 4m^2) \right. \\ & + 2\sqrt{(p^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^2)(p^2 - (\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2)^2)} \theta(p^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^2) \quad (3.90) \\ & \left. + \frac{1}{p^2} \sqrt{p^2 - 4(\mathcal{M}_1)^2} \theta(p^2 - 4M_1^2) \right). \end{aligned}$$

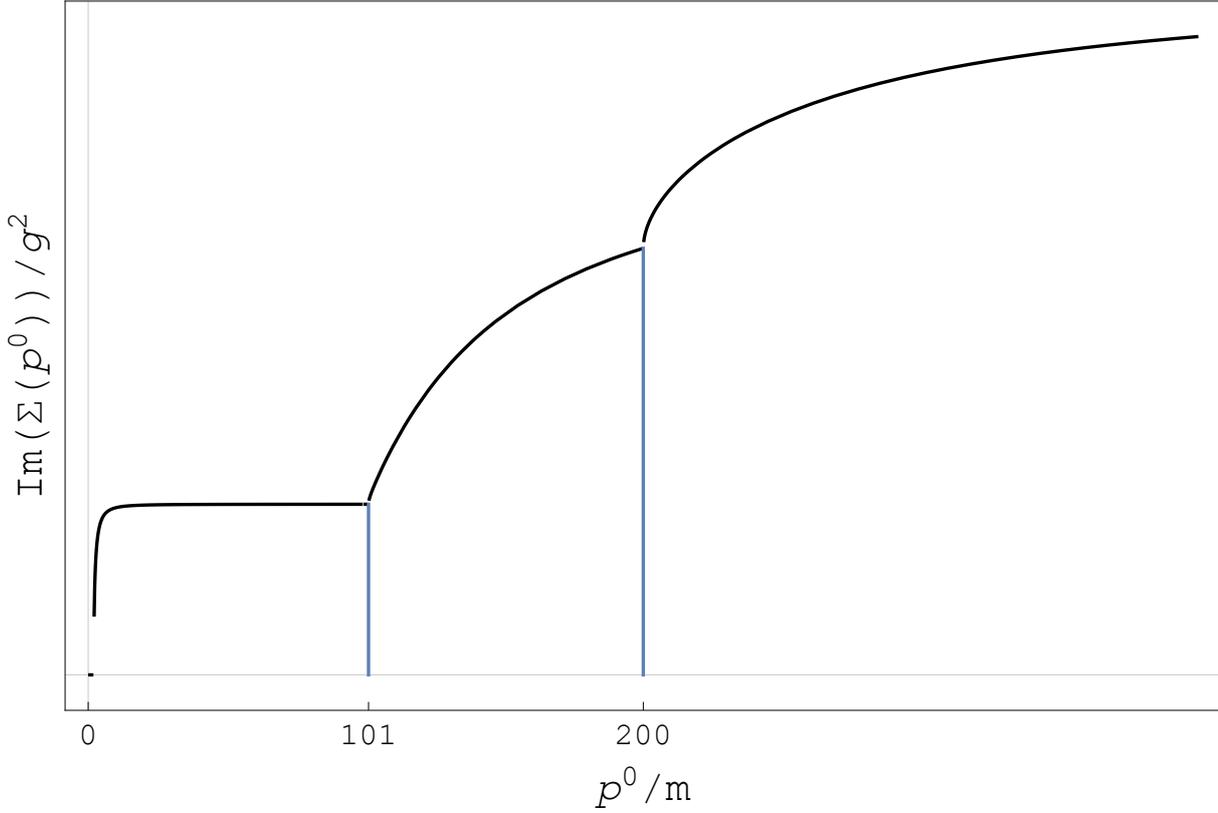


Figura 3.5: Autoenergía entre  $g^2$  del acercamiento de Anselmi & Piva dado por la ecuación (3.90), los umbrales se dan en  $p^0 = 2m$ ,  $p^0 = m + M$  y  $p^0 = 2M$ , en este caso  $m = 1$ ,  $M = 200$ .

La autoenergía (3.90) toma la forma de la figura 3.5, que es la misma forma escalonada de 3.3. La única diferencia entre (3.90) y (3.54) es un factor de  $\alpha^{1/2}$ . Esta diferencia entre los acercamientos se ve en la figura 3.6, cuando se separan los grados de libertad de forma explícita se tiene (3.54) la cual va como  $1/\alpha^{3/2}$  y (3.90) donde se separaron los grados de libertad en el propagador va como  $1/\alpha^2$ . Es notable en la figura que la autoenergía A & P tiene mayor efecto en la tasa de decaimiento. Esta diferencia debe de tomar en cuenta que en la descomposición de CLOP se toman partículas estándar entrantes y salientes, al no

separar estos grados se considera que un escalar con los dos grados (estándar y Lee-Wick) entra, interactúa y vuelve a salir.

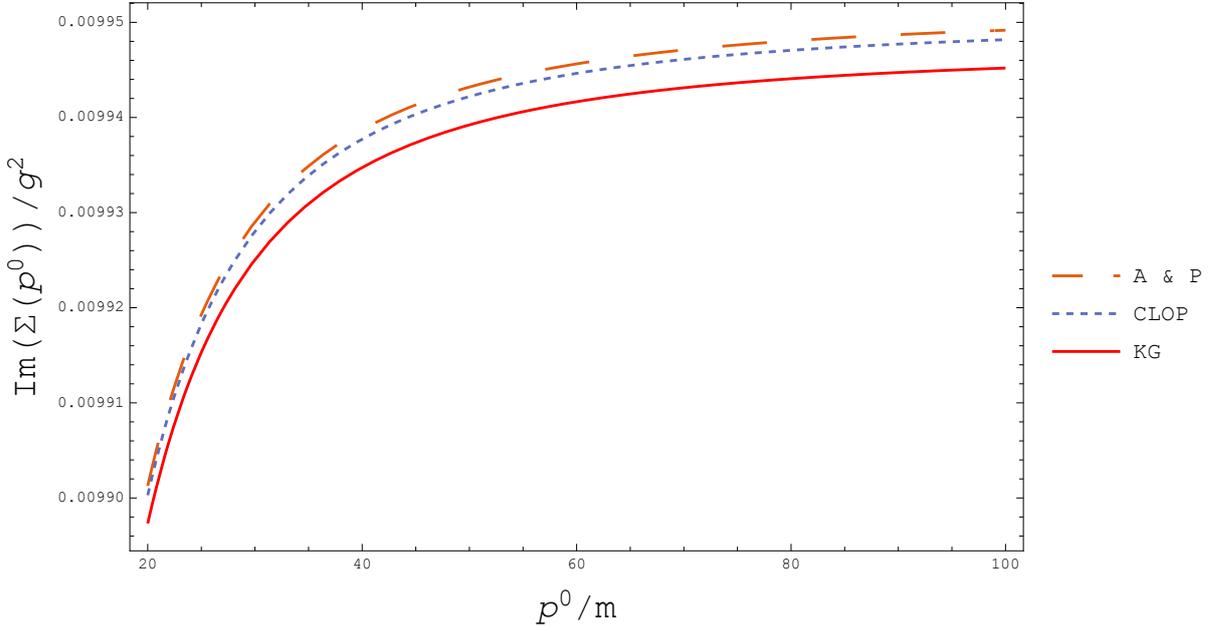


Figura 3.6: Comparación de las autoenergías en el marco en reposo de los dos acercamientos contra Klein-Gordon en el dominio de  $p^0 \in [20m, 100m]$  y  $M = 100m$

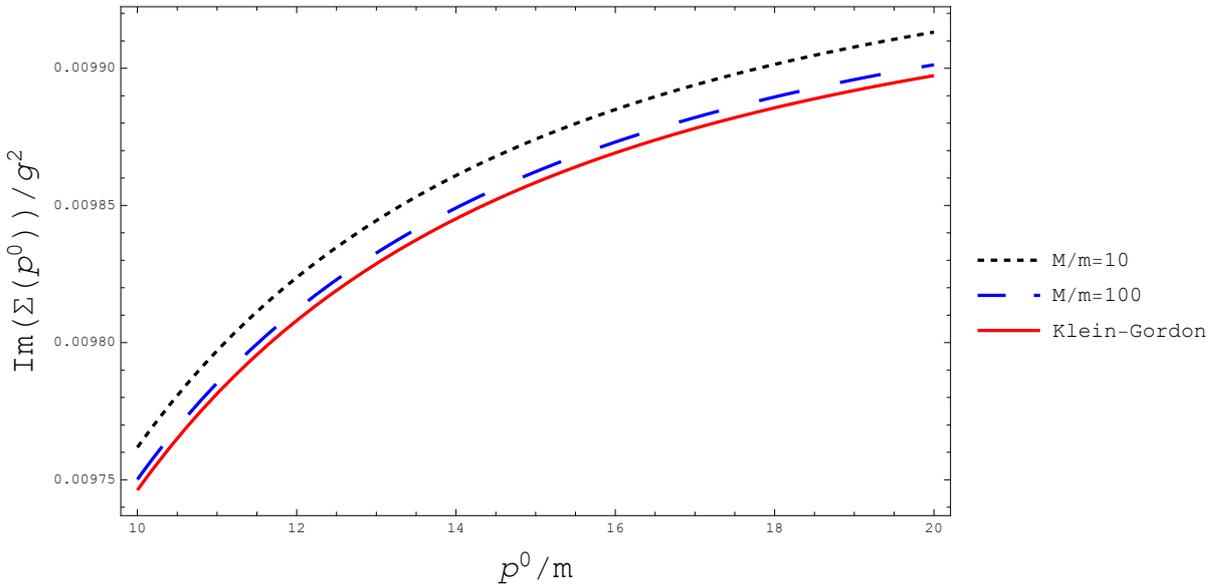


Figura 3.7: Comparación de las autoenergías contra Klein Gordon a valores de  $M/m = 10$  y  $M/m = 100$  en el marco en reposo. Entre mayor sea el cociente  $M/m$  se pegará más a Klein-Gordon.

La diferencia de los resultados a bajas energías permite ver que existe un efecto en la

tasa de decaimiento del campo escalar. Este efecto es proporcional a  $\alpha$ , en específico en la magnitud de la masa  $M$ , la figura 3.7 permite ver como este efecto no es tan notorio cuando  $M$  crece en relación a  $m$ . La figura 3.8 compara las diferencias entre las autoenergías  $Im(\Sigma_{CLOP})$  y  $Im(\Sigma_{AP})$  con la de Klein Gordon debajo del umbral de Lee-Wick, así es más claro observar cómo es la diferencia entre los acercamientos.

Al poner atención en la región de bajas energías  $p^2 < M^2$  en la figura 3.7, se puede observar una diferencia más sutil entre el resultado de este trabajo y el de Klein Gordon, en el límite donde  $M \gg m$ , se puede observar como el resultado con derivadas altas se separa ligeramente antes de tomar el comportamiento asintótico propio de la función.

El efecto es muy bajo, pero no nulo, aumenta la amplitud de decaimiento. Como indican las referencias [4, 18] los resultados obtenidos no son causales, pero aseguran que no generarán resultados paradójicos en experimentos de dispersión ya que es prácticamente inobservable. Siendo más específicos ambos autores argumentan que estos comportamientos serán del orden de  $1/M$ .

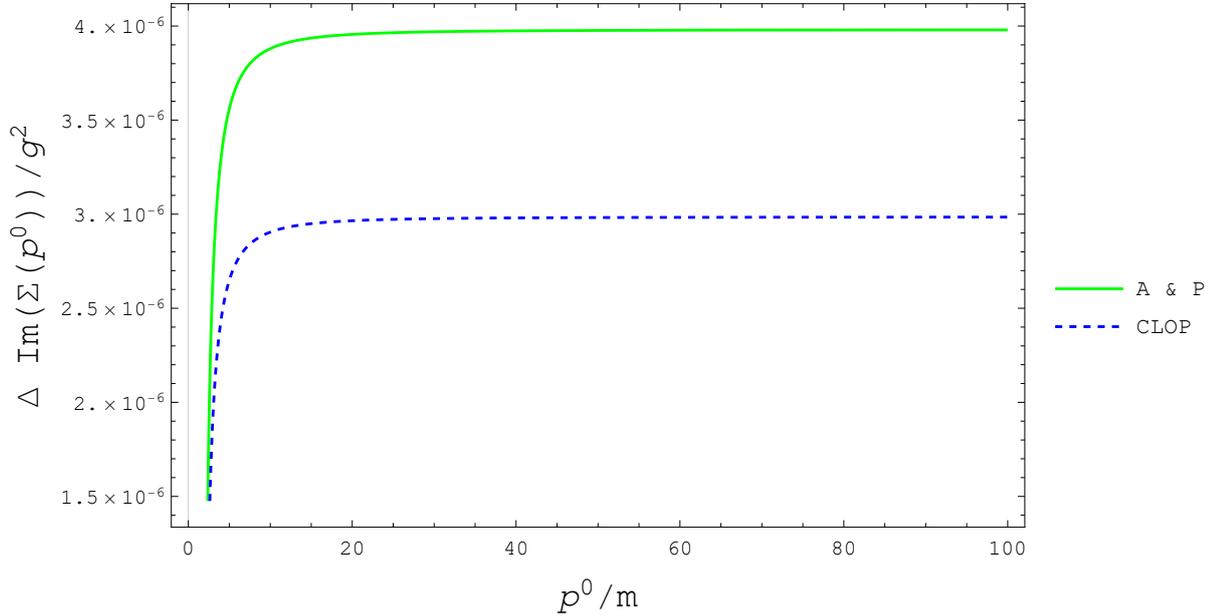


Figura 3.8: Diferencias de cada autoenergía, CLOP y Anselmi & Piva para  $M = 100m$  en el reposo

# Capítulo 4

## Conclusiones

Recordando un poco los procedimientos usados para tratar la teoría con derivadas altas, fue importante recalcar que el camino de integración no cruzara cortes rama, de esta manera la prescripción CLOP introduce un parámetro  $\delta$  que hace que este pinch no suceda para ciertos valores de  $p^{\mu}$ . Para pedir esto, fue necesario separar el grado de libertad de Lee-Wick, o fantasma, del Lagrangiano y trabajar con un campo escalar más grande, teniendo un campo que lleve la parte de Klein Gordon y otro la parte de Lee-Wick. Al hacer esto se dieron distintas interacciones que llevaron a sumar inserciones de autoenergía en el campo que carga la información de Lee-Wick, estas inserciones indican que el campo en si, no es estable por lo que el propagador se ve corregido para incluir una descomposición espectral y la estructura de polos permitió agregar un término extra para un estado de 1 partícula, mientras que los estados multipartícula iban a ir codificados en la densidad espectral. El análisis con CLOP permitió descifrar que algunas interacciones permitían la existencia de estados asintóticos y que la inestabilidad viene de interacciones de multipartícula del grado de libertad de Lee-Wick, esto refuerza la idea de que estos estados intermedios no son físicos y que decaen a partículas en la capa de masa. Un acercamiento alternativo es el que no separa el grado de libertad de Lee-Wick de manera explícita del Lagrangiano y trata el campo con el efecto de derivada alta. En este acercamiento el propagador presentó dos grados polinomiales de más, lo que permitió separarlo en dos propagadores, uno con polos estándar de Klein-Gordon y otro con los polos cerca de los de Lee-Wick, solamente desplazados por una pequeña cantidad  $m$ . Dada la ubicación de los polos en el plano complejo se pudo reproducir el procedimiento estándar para evaluar la auto energía con la

---

seguridad de que al cambiar de marco de referencia no cambiarán las regiones analíticas, de igual manera para calcular la autoenergía surgieron tres distintos términos, los que involucran parejas de los grados de libertad de cada propagador y cuando se mezclan. Siguiendo el procedimiento de integración se obtuvo la parte imaginaria de la autoenergía y se comparó con el resultado anterior. El comportamiento fue similar en las distintas escalas de energía. Las diferencias radican en que en este modelo de Lee-Wick existe una diferencia respecto al campo de Klein Gordon regular, esta diferencia cambia dependiendo el acercamiento tomado, como ilustra la figura 3.6. Estos dos acercamientos difieren en como se identificó y separó el grado de libertad de Lee-Wick: en el acercamiento de CLOP se trabaja con dos campos escalares que interactúan con un término  $(\phi - \tilde{\phi})^3$ , esto ofrece la libertad de elegir los estados entrantes y finales en un análisis de dispersión. Por otro lado, en el acercamiento de Anselmi & Piva se toma el campo completo, con su grado de Lee-Wick y estándar, y la interacción que se tiene es  $\hat{\phi}^3$ . Y aunado a eso en el caso CLOP se toman masa complejas, que de cierta manera se cancelan para no propagar este grado de libertad fantasma. Esto limita a tomar distintos tipos de partículas para la dispersión, ya que el campo completo va a estar en los correladores de  $n$  puntos. La adición de estos grados de libertad en la interacción y dispersión es a lo que se atribuye la diferencia de potencias de  $\alpha$  entre los dos acercamientos. Si bien esta  $\alpha$  es muy cercana a 1 dependiendo si  $M$  es mucho mayor a  $m$ , no deja de contribuir con un cambio en la tasa de decaimiento.

Los resultados obtenidos en este trabajo podrían ser interesantes dentro de un contexto cosmológico ya que al agregar derivadas altas [22] predicen un comportamiento a altas energías que podría modificar la ecuación de movimiento del campo inflatónico. Este tipo de corrección actúa sobre las derivadas del campo y según [22], es relevante en el estudio de la inflación en etapas tempranas. En este escenario de altas energías será posible observar las otras partes de (3.54) y (3.90) que toman parte cuando se cruza el umbral dado por la masa  $M$ , la posible presencia de un baño térmico del campo  $\hat{\phi}$  hace el escenario descrito por el acercamiento de Anselmi & Piva en la ecuación (3.90) relevante. Se espera que este tipo de correcciones se observen en la Radiación Cómica de Fondo o por ondas gravitacionales primordiales [22].

# Apéndice A

## Un poco de Variable Compleja

### I. Principio de Simetría de Schwarz

Este resultado de la variable compleja entra en las técnicas para hacer una continuación analítica de una función analítica de manera sencilla y explícita. Se supone una función analítica  $f$  definida en la región  $P$ , la imagen bajo  $f$  es  $Q$ . Las reflexiones respecto al eje real son  $\bar{P}$  y  $\bar{Q}$ , ahora se puede usar  $f$  para hacer un mapeo analítico de  $\bar{P}$  a  $\bar{Q}$ , usando

$$f^*(z) \equiv \bar{f}(\bar{z}) \tag{A.1}$$

$f$  es un mapeo conforme y por ende analítico. Al tomar un punto  $a \rightarrow \bar{a} \rightarrow f(\bar{a}) \rightarrow \bar{f}(\bar{a})$  se preserva la magnitud del ángulo de  $a$ . La primera reflexión preserva el sentido,  $f$  preserva el sentido al reverso y la segunda reflexión repara el daño. En general el mapeo  $f^*$  no será una continuación de  $f$ , más bien un nuevo mapeo. Si se imagina que la región  $P$  se aproxima al eje real hasta que lo cruza y la intersección de estos dominios no necesariamente coinciden. Pero en el caso donde  $f^*$  si es una continuación, se puede suponer que  $f$  es la generalización compleja de alguna función real donde  $P$  comparte frontera con el eje real. Como  $Q$  es la imagen de  $f$ , también tendrá una frontera con el eje real, de esta manera sí habrá igualdad en el dominio en común con  $\bar{P}$ . Ahora  $f$  y  $f^*$  son dos partes de un mapeo analítico  $F$  en  $P \cup \bar{P}$ . Considerando que pasa en un disco centrado en la recta real, se puede ver que  $F$  es analítico porque la imagen es otro disco centrado en  $F$ .

## II. Calculo de Residuos para el aventurado inexperto

Las técnicas exploradas en variable compleja permiten evaluar integrales del tipo

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i Res[f, a], \quad (A.2)$$

donde el polo de la función  $f$  está en  $a$  y es rodeado por el contorno de integración  $l$ . Este resultado es directo de la Fórmula integral de Cauchy. Para poder expresarlo de esta forma se hace uso de una serie de Laurent y ubicar el término que contiene al residuo con la primer potencia negativa del polinomio con el que se desarrolló. Los polos, según su multiplicidad adquieren un orden, a partir de la serie de Laurent un polo de orden  $m$ , el residuo de la función  $f$

$$Res[f, a] = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d}{dz} \right]^{m-1} [(z-a)^m f(z)] \Big|_{z=a} \quad (A.3)$$

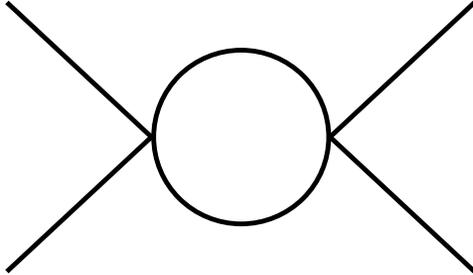
de esta manera para un polo simple (grado 1) se 'quita' el factor que causa problema divisiones entre cero y se evalúa la expresión resultante en el polo  $a$ . Todos los polos de este trabajo son simples, por lo que no será necesario evaluar derivadas.

## III. Diagramas con derivadas altas

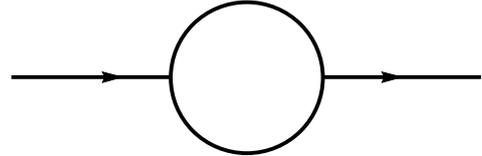
Para el estudio de diagramas con loops, se utiliza la prescripción *CLOP* [6] que ha tenido varias aplicaciones en diagramas de orden bajo [20], pero no es tan claro su uso para diagramas de orden superior. Anselmi & Piva formularon un una solución que es aplicable a diagramas de distintos órdenes. Definen las teorías de LW como modelos de derivadas altas mediante una rotación de Wick no analítica desde un marco Euclídeo. Estas rotaciones en conjunción con el *LW pinching*, dividen al plano de energía en distintas regiones donde la rotación de Wick es analítica y donde no lo es.

Los propagadores de LW, difieren en factores de los propagadores usuales de la teoría escalar. Estos factores contribuyen a parejas conjugadas de polos que afectan la integración en la energía. Para esta integración se usa la métrica Euclidea por medio de la rotación de Wick. Esta operación es analítica en las regiones que contienen al eje imaginario. Esta

región se denomina *Región Principal*  $\mathcal{A}_0$ . El plano complejo se divide en distintas regiones disconexas  $\mathcal{A}_i$ , que pueden ser unidas a la región principal de una forma no analítica. Estas regiones se denominan *analíticas*.



(a) Loop de una teoría con vértice de cuarto factores.



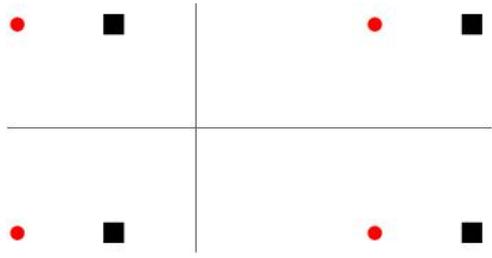
(b) Loop de una teoría con vértice de tres factores

Figura A.1: Dos distintos diagramas con loops a orden más bajo

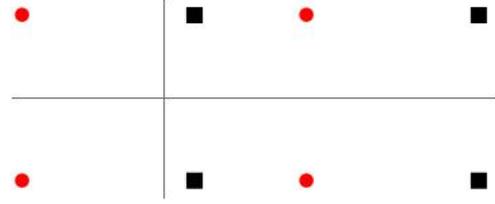
Para un diagrama de burbuja, las reglas de Feynman indican que debe de haber dos propagadores por cada lazo, y estos propagadores llevarán un momento indeterminado. El elemento de matriz será proporcional al producto de propagadores como función del momento externo  $p$  y uno indeterminado  $k$ :  $D_F(k)D_F(p-k)$ . Este producto está integrado sobre  $k$ , al ser propagadores LW se pueden encontrar polos como función de  $p^0$  y  $\mathbf{p}$ . Dependiendo del momento externo estos polos son desplazados por  $p^0$  y deformados por  $\mathbf{p}$ , en algún momento la traslación genera que algunos polos crucen el eje imaginario, es decir el contorno de integración. Si se ha de preservar la estructura analítica el contorno de integración debe de ser deformado para evitar este cruce y el de algún corte rama [6, 7]. O de manera equivalente se puede mantener el mismo contorno de integración sobre el eje imaginario y agregar contornos alrededor de los polos que cruzan el eje imaginario.

Para el estudio de estos diagramas, la rotación de Wick altera el camino de integración manteniendo los polos LW izquierdos por arriba y los derechos por debajo del camino. Con los distintos valores de  $p^\mu$  la figura A.2 muestra que los polos cuadrados se mueven, cuando coinciden ocurre un pellizcamiento o *pinching*. Este *pinching* puede ocurrir con pares LW-LW o con polos regulares, puros o mezclados, respectivamente. Los que son puros se dividen en dos caso: el primero, cuando la pareja derecha de polos del primer propagador  $D_F(k)$  se junta con la pareja izquierda del segundo propagador  $D_F(p-k)$ . El segundo caso involucra el polo derecho superior del primer propagador con el inferior

### III. DIAGRAMAS CON DERIVADAS ALTAS



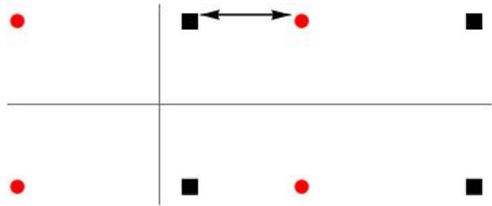
(a) Polos con un valor de  $p^0$  que no cruza el eje imaginario



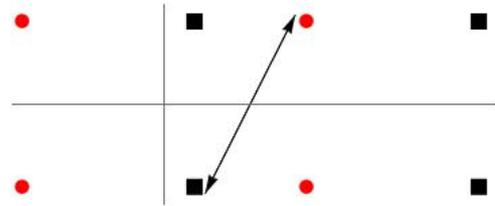
(b) Polos con un valor de  $p^0$  mayor a la figura de la izquierda, suficiente para cruzar el eje imaginario

Figura A.2: Polos LW de un Loop, los polos circulares representan al propagador  $D_F(k)$  y los cuadrados los polos de  $D_F(p - k)$

izquierdo del segundo propagador.



(a) Primer caso de pellizcamiento



(b) Segundo caso de pellizcamiento

Figura A.3: Casos de pinching

Estos pellizcos tienen cierta simetría, por lo que calcular todos sería redundante. Teniendo en cuenta las ecuaciones de *pinching*, se puede evaluar el elemento de matriz. Se evalúa la integral  $k^0$ , usando el teorema del residuo. Las condiciones de *pinching* dan cortes rama al ser asociados a singularidades y se debe de evitar el cruce de los polos deformando el dominio de integración por medio de  $\mathbf{k}$ , que a su vez deformará los cortes rama. La deformación del dominio debe de incluir valores complejos para restaurar invariancia de Lorentz [7, 8].

Las ecuaciones referentes al *pinching* dan lugar a distintos cortes rama, es necesario que estos cortes sean simétricos respecto a eje real para preservar unitariedad [7].

El propagador se separa de manera conveniente para estudiar los efectos de los polos LW.

$$D_F(k) = D_0(k) + D_{LW}(k) \quad (\text{A.4})$$

donde  $D_0(k)$  representa el propagador escalar de Klein-Gordon.

Al separar el propagador y estudiar el loop, resultan cuatro productos cuyas contribuciones se pueden cuantificar según el formalismo del capítulo 2, ya que aceptan una rotación de Wick analítica a excepción del producto

$$\mathcal{J}_{LW}(p) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} D_{LW}(K) D_{LW}(p - k) \quad (\text{A.5})$$

esta función es analítica en la región principal  $\mathcal{A}_0$  ya que la rotación de Wick es analítica e invariante de Lorentz ahí. Esta función restringida a la región principal se denotará como  $\mathcal{J}_{LW}^0$ . Al deformar el dominio cerca de los corte rama se llega al resultado

$$\mathcal{J}_{LW}(p) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{J}_{LW}^{0+}(p) + \mathcal{J}_{LW}^{0-}(p) \right) \quad (\text{A.6})$$

estas funciones  $\mathcal{J}_{LW}^{0\pm}(p)$  se obtienen al continuar analíticamente  $\mathcal{J}_{LW}(0)$  desde la región principal desde el semiplano imaginario superior (+) y desde el semiplano imaginario inferior (-). Esta continuación analítica asegura invariancia de Lorentz y analiticidad. Esta última expresión permite obtener la contribución del elemento de matriz, sin deformar el dominio: es suficiente con separar los propagadores, aislar las contribuciones que son de interés para el proceso de *pinching*, continuar analíticamente desde la región principal y promediar las contribuciones. Esta separación se utiliza para estudiar la continuidad de  $\mathcal{J}_{LW}$  y asegurar la invariancia de Lorentz en el marco de referencia en reposo [7]. Debido a que el procedimiento de cambiar el marco de referencia puede alterar el contorno y las regiones de interés se suele integrar en un marco con momento genérico. Lo que sugieren los autores es hacer la integración en la energía usando el teorema del residuo.



# Apéndice B

## Cálculo de la parte imaginaria de la Autenergía

### I. Combinaciones de signo de $i\epsilon$

En el Capítulo 3 al momento de separar y factorizar los propagadores entra en juego la combinación de los signos de los  $\epsilon$  de la prescripción de Feynman. Al definir las  $\omega_i$  las  $\epsilon$  quedan dentro de la raíz.

$$\omega_- = \sqrt{\mathbf{X}^2 - \mathcal{M}^2 - i\epsilon} \quad (\text{B.1})$$

con  $\mathbf{X}$ , un vector arbitrario y  $\mathcal{M}$  una masa arbitraria. Factorizando

$$\begin{aligned} \omega_- &= \sqrt{\mathbf{X}^2 - \mathcal{M}^2} \sqrt{1 - i\tilde{\epsilon}}, \\ &= \sqrt{\mathbf{X}^2 - \mathcal{M}^2} \left(1 - \frac{i\tilde{\epsilon}}{2}\right), \\ &= \omega_1 - i\hat{\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Para el signo más

$$\omega_+ = \sqrt{\mathbf{X}^2 - \mathcal{M}^2 + i\epsilon} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \sqrt{\mathbf{X}^2 - \mathcal{M}^2} \sqrt{1 + i\tilde{\epsilon}}, \\ &= \sqrt{\mathbf{X}^2 - \mathcal{M}^2} \left(1 + \frac{\tilde{\epsilon}}{2}\right), \\ &= \omega_1 + i\hat{\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

## II. AUTOENERGÍA

---

Al ser  $\hat{\epsilon}$  arbitrariamente chica, se puede redefinir. Las combinaciones con en los denominadores

$$(k^0 - \omega_-) = (k^0 - \omega_1 + i\epsilon) \quad (k^0 + \omega_-) = (k^0 + \omega_1 - i\epsilon), \quad (\text{B.5})$$

$$(k^0 - \omega_+) = (k^0 - \omega_1 - i\epsilon) \quad (k^0 + \omega_+) = (k^0 + \omega_1 + i\epsilon). \quad (\text{B.6})$$

De aquí vienen los cambios de signo en las  $\epsilon$

## II. Autoenergía

Se van abordar los detalles de la última sección del Capítulo 3.

Las expresiones a las que se llega en la sección son de la forma

$$\text{Im}(\Sigma_i(p)) = \frac{g^2}{4\alpha} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{4\omega_1\omega_2} + (\delta(p^0 + (\sigma_1\omega_1 + \sigma_2\omega_2)) + (\delta(p^0 - (\sigma_1\omega_1 + \sigma_2\omega_2))), \quad (\text{B.7})$$

donde  $\sigma_i = \pm 1$ ,  $\omega_1 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mathcal{M}_1^2}$  y  $\omega_2 = \sqrt{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2 + \mathcal{M}_2^2}$ . Los parámetros  $\mathcal{M}_i$  dependen de las masas de los polos, ya sean estándar o de Lee-Wick.

La integral se va a renombrar con cada término de las deltas, como  $I_1$  e  $I_2$ , se va a trabajar en coordenadas esféricas

$$I_1 = \int \frac{k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^2} \frac{\delta(p^0 - (\sigma_1\omega_1 + \sigma_2\omega_2))}{4\omega_1\omega_2}. \quad (\text{B.8})$$

Reescribiendo a  $\omega_2$  como función de  $\omega_1$

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \mathbf{p}^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos \theta - \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2}, \quad (\text{B.9})$$

hecho esto es conveniente hacer un cambio de variable para trabajar la integral,  $\omega_1 d\omega_1 = k dk$ .

$$I_1 = \int d\Omega \int d\omega_1 \frac{\sqrt{\omega_1 - \mathcal{M}_2^2}}{16\pi^2 \omega_2} \delta(p^0 - (\sigma_1\omega_1 + \sigma_2\omega_2)), \quad (\text{B.10})$$

el integrando que acompaña a la delta es una función del coseno, de esta manera se puede manipular a la delta de Dirac como una función del coseno usando la identidad

$$\delta(f(x)) = \sum_{raices} \frac{\delta(x - x_0)}{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0}}. \quad (\text{B.11})$$

Se trabajará con el argumento de la función delta

$$p^0 - (\sigma_1 \omega_1 + \sigma_2 \omega_2) = 0 \quad (\text{B.12})$$

Sustituyendo  $\cos \theta = x$

$$p^0 = \sigma_1 \omega_1 + \sigma_2 \sqrt{\omega_1^2 + \mathbf{p}^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|x - \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2},$$

tomando la derivada respecto a  $x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sigma_2 \frac{\mathbf{p}\mathbf{k}}{\omega_2}, \quad (\text{B.13})$$

solo falta ver en donde se encuentran las raíces de la función  $f$ . La raíz de esta función es  $x_0$ , agrupando los términos que no tienen raíz cuadrada

$$(p^0 - \sigma_1 \omega_1)^2 = \sigma_2^2 (\omega_1^2 + \mathbf{p}^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|x_0 - \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2)$$

haciendo uso de que  $\sigma_i^2 = 1$

$$\begin{aligned} -2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|x_0 &= (p^0 - \sigma_1 \omega_1)^2 - \omega_1^2 - \mathbf{p}^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2 \\ x_0 &= -\frac{(p^0 - \sigma_1 \omega_1)^2 - \omega_1^2 - \mathbf{p}^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|} \\ x_0 &= -\frac{(p^0)^2 + \sigma_1^2 \omega_1^2 - 2p^0 \sigma_1 \omega_1 - \omega_1^2 - \mathbf{p}^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|}. \end{aligned}$$

Teniendo la raíz de esta función se puede evaluar en la derivada de la ecuación (B.13), comenzando por el denominador

$$\begin{aligned}
 \omega_2(x_0) &= \sqrt{\omega_1^2 + \mathbf{p}^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|x_0 - \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2} \\
 \omega_2(x_0) &= \sqrt{\omega_1^2 + \mathbf{p}^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{k}| \left( -\frac{(p^0)^2 + \sigma_1^2 \omega_1^2 - 2p^0 \sigma_1 \omega_1 - \omega_1^2 - \mathbf{p}^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}{2|\mathbf{p}||\mathbf{k}|} \right) - \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2}
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

haciendo cancelaciones,

$$\begin{aligned}
 \omega_2(x_0) &= \sqrt{\omega_1^2 + \mathbf{p}^2 + ((p^0)^2 + \sigma_1^2 \omega_1^2 - 2p^0 \sigma_1 \omega_1 - \omega_1^2 - \mathbf{p}^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2) - \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2} \\
 \omega_2(x_0) &= \sqrt{\omega_1^2 + \mathbf{p}^2 + (p^0)^2 + \sigma_1^2 \omega_1^2 - 2p^0 \sigma_1 \omega_1 - \omega_1^2 - \mathbf{p}^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2 - \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2} \\
 \omega_2(x_0) &= \sqrt{\omega_1^2 + (p^0)^2 - 2p^0 \sigma_1 \omega_1} \\
 \omega_2(x_0) &= \sqrt{(\omega_1 - \sigma_1 p^0)^2} \\
 \omega_2(x_0) &= (\omega_1 - \sigma_1 p^0).
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

de forma que la ecuación (B.13) se ve

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} = \frac{|\mathbf{p}||\mathbf{k}|}{|\omega_1 - \sigma_1 p^0|}. \tag{B.16}$$

Un detalle esencial del resultado de  $x_0$  es que es un coseno, y está acotado  $|x_0| \leq 1$ , esta condición ejerce una restricción sobre el rango de valores de  $\omega_1$  en (B.10)

$$x_0 = \frac{(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 - 2p^0 \sigma_1 \omega_1 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2}{2|\mathbf{p}|\sqrt{\omega_1^2 - \mathcal{M}_1^2}} \leq 1 \tag{B.17}$$

resolviendo para  $\omega_1$

$$\begin{aligned}
 (p^2 - 2p^0 \sigma_1 \omega_1 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)^2 &\leq \left( 2|\mathbf{p}|\sqrt{\omega_1^2 - \mathcal{M}_1^2} \right)^2 \\
 [(p^\mu p_\mu + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2) - 2p^0 \sigma_1 \omega_1]^2 &\leq 4\mathbf{p}^2 (\omega_1^2 - \mathcal{M}_1^2) \\
 (p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)^2 + 4p^0 \omega_1^2 - 4p^0 \sigma_1 \omega_1 (p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2) &\leq 4\mathbf{p}^2 (\omega_1 - \mathcal{M}_1^2),
 \end{aligned}$$

agrupando  $w_1$

$$\begin{aligned}
 & (p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)^2 + 4\omega_1^2((p^0)^2 - \mathbf{p}^2) - 4p^0\sigma_1\omega_1((p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2) + 4\mathbf{p}^2\mathcal{M}_1^2) \leq 0 \\
 4p_\mu^2 & \left( \omega_1 - \frac{p^0\sigma_1}{2p_\mu^2(p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)} \right)^2 + (p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)^2 - (p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)^2 \frac{(p^0)^2}{p_\mu^2} + 4\mathbf{p}^2\mathcal{M}_1^2 \leq 0 \\
 4p_\mu^2 & \left( \omega_1 - \frac{p^0\sigma_1}{2p_\mu^2(p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)} \right)^2 + (p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)^2 \left( 1 - \frac{(p^0)^2}{p_\mu^2} \right) + 4\mathbf{p}^2\mathcal{M}_1^2 \leq 0 \\
 4p_\mu^2 & \left( \omega_1 - \frac{p^0\sigma_1}{2p_\mu^2(p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)} \right)^2 + (p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)^2 \left( -\frac{\mathbf{p}^2}{p_\mu^2} \right) + 4\mathbf{p}^2\mathcal{M}_1^2 \leq 0,
 \end{aligned}$$

de esta manera se puede trabajar con los límites de  $\omega_1$

$$\begin{aligned}
 \left( \omega_1 - \frac{p^0\sigma_1}{2p_\mu^2(p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)} \right)^2 & \leq \frac{\mathbf{p}^2}{4p_\mu^4} ((p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)^2 - 4\mathbf{p}^2\mathcal{M}_1^2) \\
 \left( \omega_1 - \frac{p^0\sigma_1}{2p_\mu^2(p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)} \right) & \leq \pm \frac{|\mathbf{p}|}{1p_\mu^2} [(p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2)^2 - 4\mathcal{M}_1^2 p_\mu^2]^{1/2},
 \end{aligned}$$

en el miembro derecho se identifica la función triangular de Källen. Despejando  $\omega_1$

$$w_\pm = \pm \frac{|\mathbf{p}|}{2p_\mu^2} [(p^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_1)^2)(p^2 - (\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2)^2)]^{1/2} + \frac{\sigma_1 p_0}{2p_\mu^2} (p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2), \quad (\text{B.18})$$

teniendo este resultado en cuenta la integral (B.10) con la delta de Dirac.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int dx \int d\omega_1 \frac{|\mathbf{k}|}{16\pi\omega_2(x_0)} \frac{\delta(x - x_0)|\omega_1 - \sigma_1 p^0|}{\mathbf{p}\mathbf{k}} \\
 I_1 &= \int_{\omega_-}^{\omega_+} dx d\omega_1 \frac{|\mathbf{k}|}{16\pi|\omega_1 - \sigma_1 p^0|} \frac{\delta(x - x_0)|\omega_1 - \sigma_1 p^0|}{\mathbf{p}\mathbf{k}} \\
 I_1 &= \int_{\omega_-}^{\omega_+} \frac{d\omega_1}{|\mathbf{p}|} \\
 I_1 &= \frac{1}{16\pi|\mathbf{p}|} (\omega_+ - \omega_-).
 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Las  $\omega_\pm$  son las soluciones (B.18), sustituyendo se tiene

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{16\pi|\mathbf{p}|} \left[ |\mathbf{p}| \frac{\lambda^{1/2}(p_\mu, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)}{2p_\mu^2} + \frac{\sigma_1 p_0}{2p_\mu^2} (p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2) \right] \\
 &\quad - \left[ -|\mathbf{p}| \frac{\lambda^{1/2}(p_\mu, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)}{2p_\mu^2} + \frac{\sigma_1 p_0}{2p_\mu^2} (p_\mu^2 + \mathcal{M}_1^2 - \mathcal{M}_2^2) \right].
 \end{aligned}$$

## II. AUTOENERGÍA

---

donde  $\lambda(p_\mu, m_1, m_2) = (p^2 - (m_1 + m_2)^2)(p^2 - (m_1 - m_2)^2)$  Es importante notar que el resultado es independiente de las  $\sigma_i$  y también es válido para  $I_2$ . Solo hace falta agregar el umbral en el cual la función se mantiene real, esto se hace mediante la introducción de una función escalón de Heaviside. El valor mas pequeño para mantener la raíz real es  $p^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^2$ , el argumento del escalón será este.

La parte imaginaria de la autoenergía se ve

$$Im(\Sigma)(p) = \frac{g^2}{32\pi\alpha^2} \frac{1}{p^2} \sqrt{(p^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^2)(p^2 - (\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2)^2)} \theta(p^2 - (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^2) \quad (\text{B.20})$$

# Bibliografía

- <sup>1</sup>R. P. Woodard, “The Theorem of Ostrogradsky”, arXiv:1506.02210 (2015).
- <sup>2</sup>M. Raidal y H. Veermäe, “On the Quantisation of Complex Higher Derivative Theories and Avoiding the Ostrogradsky Ghost”, 10.1016/j.nuclphysb.2017.01.024 (2016).
- <sup>3</sup>T. D. Lee y G. C. Wick, “Finite Theory of Quantum Electrodynamics”, Physical Review D **2**, 1033-1048 (1970).
- <sup>4</sup>B. Grinstein, D. O’Connell y M. B. Wise, “Causality as an emergent macroscopic phenomenon: The Lee-WickO(N)model”, Physical Review D **79**, 10.1103/physrevd.79.105019 (2009).
- <sup>5</sup>N. Nakanishi, “Lorentz Noninvariance of the Complex-Ghost Relativistic Field Theory”, Physical Review D **3**, 811-814 (1971).
- <sup>6</sup>R. Cutkosky, P. Landshoff, D. Olive y J. Polkinghorne, “A non-analytic S-matrix”, Nuclear Physics B **12**, 281-300 (1969).
- <sup>7</sup>D. Anselmi y M. Piva, “A new formulation of Lee-Wick quantum field theory”, Journal of High Energy Physics **2017**, 10.1007/JHEP06(2017)066 (2017).
- <sup>8</sup>D. Anselmi y M. Piva, “Perturbative unitarity of Lee-Wick quantum field theory”, Physical Review D **96**, 10.1103/physrevd.96.045009 (2017).
- <sup>9</sup>F. J. d. Urries y J. Julve, “Ostrogradski formalism for higher-derivative scalar field theories”, Journal of Physics A: Mathematical and General **31**, 6949-6964 (1998).
- <sup>10</sup>C. Tannoudji, *Quantum mechanics* (Wiley, New York, 1977).
- <sup>11</sup>A. V. Smilga, “Comments on the Dynamics of the Pais-Uhlenbeck Oscillator”, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 10.3842/sigma.2009.017 (2009).

- <sup>12</sup>M. Schwartz, *Quantum field theory and the standard model* (Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom New York, 2014).
- <sup>13</sup>J. Bjorken, *Relative quantum mechanics* (McGraw-Hill, New York, 1998).
- <sup>14</sup>M. Peskin, *An Introduction To Quantum Field Theory* (Westview Press, New York, 1995).
- <sup>15</sup>M. Kaku, *Quantum field theory : a modern introduction* (Oxford University Press, New York, 1993).
- <sup>16</sup>W. Greiner, *Field quantization* (Springer, Berlin New York, 1996).
- <sup>17</sup>T. Lancaster, *Quantum field theory for the gifted amateur* (Oxford University Press, Oxford, 2014).
- <sup>18</sup>S. W. Hawking y T. Hertog, “Living with ghosts”, *Physical Review D* **65**, 10.1103/physrevd.65.103515 (2002).
- <sup>19</sup>T. Lee y G. Wick, “Negative metric and the unitarity of the S-matrix”, *Nuclear Physics B* **9**, 209-243 (1969).
- <sup>20</sup>B. Grinstein, D. O’Connell y M. B. Wise, “The Lee-Wick Standard Model”, 10.1103/PhysRevD.77.025012 (2007).
- <sup>21</sup>D. Chialva y A. Mazumdar, “Cosmological implications of quantum corrections and higher-derivative extension”, *Modern Physics Letters A* **30**, 1540008 (2015).
- <sup>22</sup>M. Bastero-Gil, A. Berera y R. O. Ramos, “Dissipation coefficients from scalar and fermion quantum field interactions”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2011**, 033-033 (2011).
- <sup>23</sup>R. Turcati y M. J. Neves, “Probing features of the Lee-Wick quantum electrodynamics”, *Advances in High Energy Physics* **2014**, 10.1155/2014/153953 (2014).
- <sup>24</sup>C. M. Reyes y L. F. Urrutia, “Unitarity and Lee-Wick prescription at one loop level in the effective Myers-Pospelov electrodynamics: The  $e^+e^-$  annihilation”, *Physical Review D* **95**, 10.1103/PhysRevD.95.015024 (2017).
- <sup>25</sup>S. I. Muslih, “Quantization of singular systems with second-order Lagrangians”, *Modern Physics Letters A* **17**, 2383-2391 (2002).
- <sup>26</sup>S. Weinberg, *The quantum theory of fields* (Cambridge University Press, Cambridge New York, 1995).

## BIBLIOGRAFÍA

---

- <sup>27</sup>J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics* (Addison-Wesley, Boston, 2011).
- <sup>28</sup>M. Maggiore, *A modern introduction to quantum field theory* (Oxford University Press, Oxford, 2005).
- <sup>29</sup>T. Needham, *Visual complex analysis* (Clarendon Press Oxford University Press, Oxford New York, 1997).
- <sup>30</sup>J. Bjorken, *Relativistic quantum fields* (McGraw-Hill, New York, 1965).