



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

ENFRIAMIENTO OPTOMECÁNICO CON
PARÁMETROS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTOR EN FÍSICA

P R E S E N T A :

PABLO ENRIQUE YANES THOMAS

TUTOR

DR. PABLO BARBERIS BLOSTEIN, INSTITUTO DE
INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y SISTEMAS
UNAM

COMITÉ TUTOR

DR. FERNANDO RAMÍREZ MARTÍNEZ, INSTITUTO DE
CIENCIAS NUCLEARES UNAM
DR. CARLOS FRANCISCO PINEDA ZORRILLA, INSTITUTO DE
FÍSICA UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, MAYO 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco al Proyecto PAPIIT-DGAPA número IG100518 con el título: “Estimación óptima de parámetros cuánticos y aplicaciones en información cuántica” y al proyecto PAPIIT-DGAPA número IG101421 con el título “Mediciones en sistemas cuánticos de muchos cuerpos: nuevos métodos y perspectivas”. De igual forma agradezco a la beca de doctorado de CONACYT.

Agradezco a mis padres, a mi familia, a mis amigos y a tantas personas más que hicieron esto posible.

Resumen

Se estudia el enfriamiento láser de un sistema optomecánico compuesto por una cavidad de Fabry-Pérot con un espejo móvil acoplado a un resorte cuya frecuencia natural es una función periódica del tiempo. Tanto la cavidad como el resonador mecánico interactúan de forma disipativa con un ambiente. Se encuentra una ecuación maestra que describe el comportamiento del sistema, incluyendo su disipación y que toma en cuenta la dependencia temporal explícita de la frecuencia natural del resonador mecánico de mejor manera que las descripciones usuales. Para el caso donde esta dependencia temporal es pequeña y se puede tratar como una perturbación a primer orden, se encuentra una predicción para la temperatura final del espejo y se encuentra que esta temperatura varía en cerca del 10 % respecto a la temperatura para el caso sin modulación temporal, en la región de parámetros cerca de la temperatura mínima para el caso no modulado.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
1. Introducción	1
1.1. El Sistema Optomecánico Básico	3
1.2. Efectos Optomecánicos	7
1.2.1. Resorte Óptico	7
1.2.2. Transparencia Inducida Optomecánicamente	8
1.2.3. Enfriamiento Optomecánico	9
1.3. Sistemas Optomecánicos	11
1.3.1. Espejos Móviles	11
1.3.2. Micro-resonadores	14
1.3.3. Membrana en el Medio	15
1.4. Oscilador Armónico con Frecuencia Dependiente del Tiempo	17
1.5. Optomecánica con Parámetros Dependientes del Tiempo	19
2. Interacción Optomecánica	21
3. Enfriamiento Optomecánico no Paramétrico	28
3.1. Densidad de Potencia Espectral	28
3.2. Caso clásico y caso cuántico	30
3.3. Teorema de Fluctuación-Disipación	32

4. Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo	38
4.1. Oscilador Armónico Cuántico	38
4.2. Oscilador Armónico Cuántico Dependiente del Tiempo: Evolución Libre	39
4.2.1. Ecuación de Mathieu y teoría de Floquet	41
4.2.2. Operadores de Floquet	45
4.3. Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo: Evolución Abierta . . .	48
5. Ecuación Maestra	55
5.1. Hamiltoniano Optomecánico	55
5.2. Marco de Desplazamiento	57
5.3. Base de Decaimiento	63
5.4. Proyección dependiente de escalas de evolución	66
5.5. Temperatura Final	77
6. Perspectivas futuras	84
6.1. Solución Numérica a Ecuación de Mathieu	84
7. Conclusiones	90
A. Transformación al Marco Desplazado	92
A.1. Transformación de L_a	92
A.2. Derivadas Temporales del Operador de Desplazamiento	93
B. Traza Matriz Covarianza	96

Índice de figuras

1.1. Cavity de Fabry-Pérot con un espejo móvil. La luz entra a la cavity mediante un espejo fijo semi-transparente. El espejo móvil se encuentra acoplado a un resorte o algún otro potencial de oscilador armónico. Basada en imagen de [1].	11
1.2. Microresonador toroidal. La luz entra al resonador mediante una fibra óptica. La luz puede viajar dentro del resonador en modos en la dirección de las manecillas del reloj y en la dirección opuesta. Los grados de libertad mecánicos corresponden a vibraciones del resonador que alteran el camino óptico. Basada en imagen en [2]	14
1.3. Cavity optomecánica con una membrana en el medio. La membrana es semi-transparente y flexible. La posición de la misma respecto a su punto de equilibrio representa los grados de libertad mecánicos de la interacción. Basada en imagen en [3].	16
1.4. Esquema de una trampa de Paul, obtenido de [4].	18
1.5. Cavity de Fabry-Pérot con un espejo móvil acoplado a un resorte cuya frecuencia natural es función del tiempo. Tanto el resorte como la cavity intercambian energía con un ambiente. Un láser bombea fotones de forma continua a la cavity.	20

5.1. Número de excitaciones mecánicas para el caso con modulación temporal (línea de guiones) y para el caso sin modulación temporal (línea punteada). El caso modulado oscila con frecuencia ω en torno a un número promedio de excitaciones menor que el caso no modulado. Se utiliza: $\delta/\nu_0 = -0.9469$, $n = 2$, $\epsilon = 1/18$, $\kappa = 0.25\nu_0$, $\chi_0^2|\alpha_0|^2/\nu_0^2 = 0.25$. 81

5.2. Número de excitaciones mecánicas promediado sobre el tiempo para el resonador modulado y sin modulación. $\epsilon > 0$ corresponde a la línea con guiones, $\epsilon < 0$ a la línea con guiones y puntos y la línea punteada corresponde al caso sin modulación temporal. Se utiliza: $n = 2$, $\epsilon = \pm 1/18$, $\kappa = 0.25\nu_0$, $\chi_0^2|\alpha_0|^2/\nu_0^2 = 0.25$ 82

5.3. Proporción como función de δ entre el número de excitaciones mecánicas promediado sobre el tiempo para el caso con modulación y el caso sin modulación. La línea con guiones corresponde a $\epsilon > 0$ y la línea puntuada a $\epsilon < 0$. Se utiliza $n = 2$, $\epsilon = \pm 1/18$, $\kappa = 0.25\nu_0$, $\chi_0^2|\alpha_0|^2/\nu_0^2 = 0.25$ 83

Capítulo 1

Introducción

La mecánica cuántica es una de las teorías más importantes de la física actual. La mecánica cuántica surge de la necesidad de explicar el espectro de radiación de un cuerpo negro, el cual diverge bajo una derivación clásica [5]. Utilizando la idea de que la energía del cuerpo negro cuyo espectro se estaba describiendo se encontraba cuantizada, es decir solo podía existir en múltiplos enteros de alguna cantidad, Max Planck logró obtener una fórmula que describía correctamente el espectro de energía. Posteriormente, Albert Einstein empleó estos mismos conceptos para explicar el efecto fotoeléctrico, efecto en el cual es posible lograr que un material emita electrones si se hace incidir luz sobre el mismo. La mecánica cuántica siguió siendo desarrollada y se convirtió en la teoría empleada para describir el comportamiento de objetos en la escala atómica.

La mecánica cuántica se emplea actualmente en un amplio rango para los parámetros físicos involucrados [6], y una de las líneas de investigación más activas se enfoca en estudiar las propiedades cuánticas de sistemas macroscópicos, los cuales tradicionalmente no se estudiaban desde un enfoque cuántico. La optomecánica [7, 8] a su vez estudia las propiedades cuánticas de sistemas donde se realiza un acoplamiento entre el campo electromagnético, descrito de forma cuántica, y elementos mecánicos macroscópicos, usualmente osciladores armónicos de algún tipo a los cuales usualmente se les llama resonadores [9]. Este tipo de sistemas tienen una gran cantidad de aplicaciones prácticas. Estas incluyen sensores de desplazamiento de alta calidad capaces de

medir las fluctuaciones de una nube atómica [10], acelerómetros de alta precisión en un chip [11], magnetometría [12], microscopía de fuerza atómica [13], detección más allá del límite cuántico estándar [14], fabricación de osciladores de alta calidad [15], almacenamiento de estados del campo electromagnético en modos mecánicos [16] o conversión de longitud de onda mediante una interfaz mecánica [17].

Dado el gran número de aplicaciones prácticas, naturalmente se trabaja constantemente en la búsqueda de efectos novedosos o de formas de incrementar la intensidad de los efectos ya conocidos. Una posibilidad que se ha explorado con frecuencia es modular alguno de los parámetros involucrados en los sistemas optomecánicos. Una de estas posibilidades es modular la constante de resorte del resonador y se encuentra que es posible encontrar división en las bandas de la cavidad [18], llegar a un régimen cuántico no lineal [19], o lograr estados comprimidos controlables [20]. Si se desea explorar estados comprimidos en el caso de los grados de libertad del resonador mecánico, se ha encontrado que esto es posible mediante la modulación de la amplitud del campo electromagnético que introduce energía a la cavidad [21]. El estudio de sistemas modulados también cubre las ecuaciones periódicas que ocurren al considerar una cavidad óptica con un forzamiento bi-cromático [22].

Si se desea utilizar la mecánica cuántica para estudiar el comportamiento cuántico de un objeto macroscópico de forma productiva, usualmente se busca que este esté cerca de su estado cuántico base [23], o en un estado coherente. Ya sea para realizar estudios como la preparación de estados entrelazados de osciladores mecánicos para computación cuántica [24], probar desigualdades de Bell con resonadores de silicio de aproximadamente 10^{10} átomos [25], el estudio de las fluctuaciones térmicas en un oscilador mecánico cerca de su estado cuántico base [26] o propuestas para realizar teletransportación cuántica de estados ópticos hacia resonadores mecánicos [27], todos estos estudios requieren que los componentes mecánicos sean inicializados en su estado cuántico base o en un estado coherente. Esto requiere enfriar el elemento mecánico lo más posible, ya que el enfriamiento se puede considerar como llevar el objeto que se desea enfriar, el cual se encuentra inicialmente en equilibrio térmico con su medio ambiente, desde un estado inicial arbitrario hacia un estado con mayor pureza [28].

Se puede entonces pensar en el enfriamiento como la purificación de estados [29].

Usualmente, la disipación de sistemas optomecánicos con parámetros modulados se maneja de la misma forma que la disipación para sistemas con parámetros constantes, lo cual se justifica si los parámetros que se están modulando no varían mucho, ni muy rápido. Se ha explorado la posibilidad de modelar la disipación de sistemas optomecánicos con parámetros modulados mediante la introducción ad-hoc de modulación en los parámetros en la disipación misma [30].

En este trabajo se deriva una teoría más adecuada que la teoría usual, la cual normalmente consiste en el uso de coeficientes periódicos ad-hoc para modelar la dependencia temporal, para describir los sistemas optomecánicos con una dependencia temporal periódica en la frecuencia del elemento mecánico, cuando se toman en cuenta procesos de disipación. Una vez se tiene este modelo teórico, se estudia el caso específico de enfriamiento optomecánico.

A continuación se presenta una breve explicación de los elementos teóricos que conforman la optomecánica, seguida de algunos de los efectos más estudiados del área, con un enfoque especial en el enfriamiento optomecánico, seguido de una serie de posibles implementaciones físicas de sistemas optomecánicos, a fin de presentar un panorama del estado actual de la investigación en el área.

1.1. El Sistema Optomecánico Básico

Existen muchas posibles implementaciones de sistemas optomecánicos [8]. Es ilustrativo, sin embargo, considerar uno de los casos más básicos a fin de obtener intuición física para este tipo de sistemas. El sistema más básico consiste en una cavidad de Fabry-Pérot con un espejo móvil. Antes de estudiar este sistema, sin embargo, conviene tener en mente las propiedades de dicha cavidad cuando ambos espejos se encuentran fijos. Una cavidad de Fabry-Pérot [31] consiste de dos superficies reflectantes paralelas que se encuentran separadas por una distancia L . Se trabaja asumiendo una dimensión. Existe un campo electromagnético, tal que las soluciones de las ecuaciones diferenciales que los describen son estacionarias en el espacio entre ambas superficies,

en el caso ideal. Las frecuencias resonantes de esta cavidad están dadas por múltiplos de $\nu(n) = n\pi\frac{c}{L}$ donde c es la velocidad de la luz en el medio contenido dentro de la cavidad y n es un entero. El parámetro $\pi\frac{c}{L}$ se conoce como el rango espectral libre. Trabajar con únicamente una de las frecuencias de la cavidad es una buena aproximación cuando la frecuencia mecánica es menor que la diferencia de frecuencias entre modos de la cavidad, lo cual implica que el movimiento mecánico no acopla modos vecinos de la cavidad [32]. Si la cavidad presenta pérdidas de intensidad por absorción, dispersión o algún otro fenómeno, estas pérdidas de fotones se describen mediante la tasa de decaimiento de la cavidad, denotada por κ . Esta tasa de decaimiento se puede ver como el inverso de τ , el tiempo de vida medio de un fotón dentro de la cavidad. Otros parámetros empleados frecuentemente son el factor de calidad Q_c , que es inversamente proporcional al número de excitaciones que pierde la cavidad por ciclo de oscilación y la finesa óptica F_c la cual mide cuantas veces recorre la cavidad un fotón en promedio antes de abandonar la misma. Estos parámetros están dados por

$$Q_c = \frac{\nu_c}{\kappa}, \quad (1.1)$$

$$F_c = \pi\frac{c}{L}\tau, \quad (1.2)$$

el factor de calidad se utiliza frecuentemente también para describir resonadores mecánicos, en cuyo caso se denota como Q_m . Cuando ahora se considera una cavidad con un espejo móvil, el cual se encuentra bajo la influencia de un potencial de oscilador armónico, éste se acopla a la cavidad mediante la presión de radiación que los fotones ejercen sobre el espejo. El Hamiltoniano usual que describe el sistema acoplado se deduce en detalle en el capítulo 2 y es

$$H = -\hbar\delta a^\dagger a + \hbar\nu_m b^\dagger b - \hbar g_0 a^\dagger a x, \quad (1.3)$$

donde $\delta = \omega_L - \nu_c$, con ω_L la frecuencia de un láser de bombeo y ν_c la frecuencia de la cavidad. a y a^\dagger son los operadores de ascenso y descenso de la cavidad, b y b^\dagger son los

operadores correspondientes al oscilador armónico, x es el operador de posición del oscilador armónico con frecuencia ν_m y g_0 es el parámetro que indica la intensidad de la interacción. Este Hamiltoniano únicamente es válido cuando la interacción es lo suficientemente débil como para aproximar la interacción por un término proporcional a x , para el caso de una interacción más fuerte es necesario agregar términos proporcionales a x^2 o potencias mayores. Se considera que la cavidad pierde fotones. Esto se modela mediante el uso de ecuaciones maestras. Estas ecuaciones modelan el comportamiento de un sistema que interactúa con un sistema mucho más grande cuyos grados de libertad no son de interés. Para el caso de una cavidad optomecánica que puede perder fotones con un ambiente, esta ecuación se escribe [33]

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + L_a\rho, \quad (1.4)$$

donde

$$\begin{aligned} L_a\rho = & -\frac{\kappa}{2}(n_p + 1)[a^\dagger a\rho + \rho a^\dagger a - 2a\rho a^\dagger] \\ & -\frac{\kappa}{2}(n_p)[a a^\dagger \rho + \rho a a^\dagger - 2a^\dagger \rho a], \end{aligned} \quad (1.5)$$

ρ es la matriz densidad del sistema compuesto por la cavidad y el resonador mecánico y H es el Hamiltoniano (1.7). n_p es el número de ocupación promedio de la cavidad y κ es su tasa de decaimiento. Este tipo de términos se conocen como Lindbladianos. En el caso donde se modela disipación para el elemento mecánico, se tiene el término

$$\begin{aligned} L_b\rho = & -\frac{\gamma_m}{2}(n_m + 1)[b^\dagger b\rho + \rho b^\dagger b - 2b\rho b^\dagger] \\ & -\frac{\gamma_m}{2}(n_m)[b b^\dagger \rho + \rho b b^\dagger - 2b^\dagger \rho b], \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde γ_m es la tasa de decaimiento del oscilador y n_m es el número de excitaciones térmicas del baño térmico al cual se encuentra acoplado el resonador. Más adelante se explicará esta cantidad con más detalle. Para mantener la intensidad del campo electromagnético dentro de la cavidad y así mantener una interacción lo suficiente-

mente fuerte, se emplea un láser para bombear fotones dentro de la cavidad, lo cual genera un campo de bombeo con intensidad proporcional a Ω . Esto lleva a que el Hamiltoniano sea

$$H = -\hbar\delta a^\dagger a + \hbar\nu_m b^\dagger b - \hbar g_0 a^\dagger a x + \Omega(a + a^\dagger). \quad (1.7)$$

Es importante considerar los cuatro regímenes de parámetros más comunes en sistemas optomecánicos [8]. El primer régimen es conocido como el régimen de bandas laterales bien definidas o límite de buena cavidad, donde se tiene $\nu_m \gg \kappa$. En el régimen de buena cavidad el oscilador completa muchas oscilaciones por cada pérdida de fotón. Este régimen es particularmente relevante para el tipo de enfriamiento optomecánico que se presenta en este trabajo, puesto que es el régimen de parámetros donde se puede alcanzar la temperatura mínima para el elemento mecánico [34]. Es el régimen de parámetros que se manejará en este trabajo. El régimen opuesto donde $\kappa \gg \nu_m$ es conocido como régimen Doppler o régimen de mala cavidad, el cual no es relevante para el presente trabajo, se emplea cuando se necesita poder monitorear la posición del oscilador de forma instantánea, lo cual requiere leer la salida de la cavidad. Este régimen es relevante en el enfriamiento optomecánico basado en amortiguamiento en frío [35]. La otra categoría de regímenes de uso frecuente se refiere al parámetro de acoplamiento. En el régimen de acoplamiento débil, se tiene $\kappa > g_0$ y se emplea el Hamiltoniano (1.7) En este régimen, las pérdidas de fotones son más frecuentes que las interacciones entre un fotón y un fonón. En el régimen de acoplamiento fuerte, se tiene $g_0 > \kappa$ y es necesario emplear un Hamiltoniano con dependencias cuadráticas o de orden mayor en el desplazamiento mecánico. En este estudio se trabaja en el régimen de acoplamiento débil. La tabla 1.1 contiene la definición de varios parámetros optomecánicos con los símbolos que se usan para representarlos. La tabla 1.2 contiene valores experimentales recientes para algunos de estos parámetros.

ν_m	Frecuencia mecánica
m	Masa del resonador mecánico
ν_c	Frecuencia de la cavidad
γ_m	Disipación mecánica
κ	Disipación de la cavidad
Q_m	Factor de calidad mecánico, $Q_m = \nu_m/\gamma_m$
δ	diferencia entre frecuencia de la cavidad y del láser incidente, $\delta = \nu_c - \omega_L$
n_c	Número promedio de excitaciones térmicas del baño óptico
n_m	Número promedio de excitaciones térmicas del baño mecánico
g_0	Parámetro de interacción optomecánica

Tabla 1.1: Parámetros optomecánicos de uso frecuente

Referencia	$\nu_m/2\pi$	$\gamma_m/2\pi$	$\kappa/2\pi$	Q_m
Peterson, <i>et al.</i> (2016)[36]	1.48 MHz	0.18 Hz	2.6 MHz	8.2×10^6
Park, <i>et al.</i> (2009)[37]	123MHz	12.5 kHz	22.7 MHz	1×10^5
Jayich, <i>et al.</i> (2012)[38]	261.15 kHz	200 Hz	120 kHz	1×10^6
Norte, <i>et al.</i> (2012)[39]	150.15 KHz	1.4 mHz	-	1×10^8
Verhagen, <i>et al.</i> (2012)[40]	78.8 MHz	3.4 kHz	7.1 MHz	1.8×10^5

Tabla 1.2: Valores experimentales para parámetros optomecánicos

1.2. Efectos Optomecánicos

La interacción optomecánica que aparece en el Hamiltoniano (1.7) lleva como consecuencia varios efectos de interés. El efecto optomecánico que se usa como ejemplo para la teoría presentada en este trabajo es el enfriamiento optomecánico, sin embargo, este no es el único efecto de interés en el área, por lo que se da una breve explicación de algunos otros efectos que se estudian actualmente.

1.2.1. Resorte Óptico

El efecto de resorte óptico consiste en un corrimiento en la frecuencia natural de un resonador armónico debido a su acoplamiento a una cavidad óptica. Una de las primeras menciones de este efecto en la literatura aparece en estudios enfocados en los interferómetros gravitacionales como LIGO-II, donde se notó que la presión de radiación en el sistema podría tener el efecto de cambiar la respuesta mecánica hacia fuerzas externas de un espejo móvil como si éste estuviese acoplado a un resorte óptico [41]. Este corrimiento puede ser expresado como [31]

$$\Delta\nu_m = g_0^2 n_p \left(\frac{\delta - \nu_m}{\kappa^2/4 + (\delta - \nu_m)^2} + \frac{\delta + \nu_m}{\kappa^2/4 + (\delta + \nu_m)^2} \right). \quad (1.8)$$

El efecto es mayor en el régimen de parámetros conocido como el régimen Doppler ($\kappa \gg \nu_m$), en donde la expresión (1.8) se reduce a

$$\delta\nu_m = g_0^2 \frac{2\delta}{\frac{\kappa^2}{4} + \delta^2}. \quad (1.9)$$

Esto muestra que el efecto de resorte óptico permite aumentar o disminuir la frecuencia natural del resonador mecánico dependiendo del signo de δ . Sin embargo, este efecto no contribuye de gran manera en el régimen usual donde se realiza enfriamiento optomecánico, el régimen de bandas laterales bien definidas, ($\nu_m \gg \kappa$) por lo que se asume que la presión de radiación, al hablar de enfriamiento optomecánico, no genera un cambio en la frecuencia del elemento mecánico. El efecto de resorte óptico fue demostrado experimentalmente en 2007 [42], en un experimento donde se logró crear un trampa óptica capaz de generar un resorte óptico con un módulo de Young inferido 1.2Tpa donde se atrapó un espejo con una masa de 1g.

1.2.2. Transparencia Inducida Optomecánicamente

Este efecto es el equivalente optomecánico de la Transparencia Inducida Electromagnéticamente, efecto que fue así llamado cuando se estableció su existencia en 1990 [43]. Este efecto ocurre al tener un medio óptico, típicamente un gas, en el cual incide un láser. Este láser puede inducir coherencia entre los estados de los átomos del gas de tal forma que se genere interferencia en las rutas de excitación de estados que controlan la respuesta óptica del medio. Mediante este efecto se puede eliminar la respuesta lineal del medio (absorción y refracción) en alguna frecuencia de transición, haciendo que el medio se vuelva efectivamente transparente en esta ventana de frecuencia. Este efecto también genera una fuerte respuesta no-lineal (dispersión) en la ventana de frecuencia de la transparencia inducida [44]. Este fenómeno permite, entre otras cosas, reducir la velocidad de grupo de un pulso de luz lo suficiente como para atraparlo por un tiempo controlable dentro de un gas atómico [45].

En el 2010, se propuso de forma teórica [46] un equivalente formal del fenómeno para cavidades optomecánicas. Con este efecto, es posible almacenar pulsos de luz en los grados de libertad mecánicos del sistema, en analogía al almacenamiento de pulsos de luz en un gas atómico para el caso de la transparencia electromagnéticamente inducida. Este efecto, en su versión optomecánica, fue observado experimentalmente por primera vez ese mismo año [47]. En este experimento se empleó un resonador optomecánico toroidal el cual se pobló primero con un campo electromagnético de control mediante un láser y luego se midió la transmisión de un láser de prueba de menor intensidad. Como se esperaría de este efecto, se encontró que es posible, sintonizando de forma correcta ambos rayos, transferir la amplitud del láser de prueba a una amplitud en la oscilación del elemento mecánico del sistema.

1.2.3. Enfriamiento Optomecánico

Este es el efecto que se emplea como ejemplo de la teoría mejorada presentada en este trabajo. Se presentará una derivación más detallada de este fenómeno en el capítulo 3. Existen al menos dos esquemas de enfriamiento optomecánico donde se aprovecha la interacción optomecánica entre el elemento mecánico y el campo dentro de la cavidad. En el primer esquema, la posición del elemento mecánico se mide en tiempo real mediante una detección de la salida de la cavidad que sea sensible a la fase, y la dinámica se ajusta en tiempo real para lograr enfriamiento. Se conoce como amortiguamiento en frío. El segundo esquema se basa en operar la cavidad fuera de resonancia, lo cual resulta en una retro acción retardada de la presión de radiación sobre el sistema mecánico. Este esquema se conoce como enfriamiento mediante bandas laterales y es el ejemplo empleado en este trabajo. Estos dos esquemas se comparan en [34], y se encuentra que el esquema de amortiguamiento en frío es mejor para el régimen de mala cavidad y el esquema de enfriamiento de bandas laterales es óptimo en el caso del régimen de buena cavidad. En este trabajo se emplea el régimen de buena cavidad y de interacción débil. Dado que el objetivo es enfriar el objeto mecánico hacia su estado base cuántico (o en dado caso hacia un estado coherente), se utiliza el número promedio de excitaciones mecánicas, $\langle m \rangle$, como una cantidad representativa

de la temperatura de dicho objeto, en un marco de referencia donde se busca llegar a $\langle m \rangle = 0$.

El concepto de enfriamiento optomecánico mediante bandas laterales se puede explicar mediante el efecto Raman. En este efecto, un fotón interactúa con materia y es dispersado de forma inelástica, con una longitud de onda distinta a la incidente haciendo que la materia con la que interactúa el fotón gane o pierda fonones [48]. En el caso de el enfriamiento optomecánico mediante bandas laterales, los fotones que entran a la cavidad tienen una frecuencia que está desentonada hacia el rojo respecto a la resonancia de la cavidad, por lo que es más probable que al ser dispersados por el objeto mecánico, absorban energía para dispersarse en la frecuencia resonante de la cavidad. El desfase del láser respecto a la frecuencia resonante de la cavidad hace que el proceso de dispersión de la luz favorezca la dispersión anti-Stokes. Si el láser se desfase hacia el azul respecto a la frecuencia de la cavidad se favorece el proceso opuesto. Si se denota la tasa con la que ocurren estos procesos mediante los coeficientes A_{\pm} donde A_- denota el proceso de enfriamiento y A_+ el proceso de calentamiento del objeto mecánico, se tiene que la temperatura en equilibrio es

$$\langle m \rangle = \frac{A_+ + n_m \gamma_m}{\Gamma_{\text{opt}} + \gamma_m}, \quad (1.10)$$

donde γ_m es la tasa de decaimiento del oscilador mecánico y $\Gamma_{\text{opt}} = A_- - A_+$, en el caso óptimo donde se considera que el proceso de enfriamiento es mucho más rápido que el tiempo de re-termalización, la temperatura en equilibrio está dada por [31]

$$\langle m \rangle_{\text{min}} = \frac{A_+}{A_- - A_+}. \quad (1.11)$$

Las tasas de enfriamiento y calentamiento se calculan en el capítulo 3 para el caso donde la frecuencia natural del oscilador mecánico es constante y en el capítulo 5 se obtienen los coeficientes para el caso de una frecuencia natural con dependencia periódica en el tiempo, así como una nueva expresión analítica para el número de excitaciones mecánicas, empleando una teoría mejorada de disipación.

1.3. Sistemas Optomecánicos

Existe una gran cantidad de sistemas físicos, implementables en laboratorio, que emplean la interacción entre grados de libertad electromagnéticos y mecánicos. Estos sistemas tienden a agruparse dentro de categorías amplias a fin de poder realizar un estudio más organizado de sus propiedades y de el estado del arte en cada categoría de sistemas.

1.3.1. Espejos Móviles

En el capítulo 2 se describe la teoría básica de una cavidad de Fabry-Pérot en la cual uno de los dos espejos no se encuentra fijo y está acoplado a un resorte, o algún equivalente, que le permite moverse bajo la influencia de un potencial de oscilador armónico, se observa un esquema de este tipo de sistema en la figura 1.1.

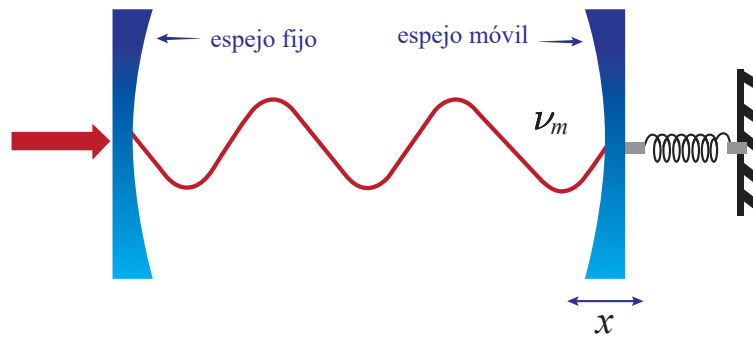


Figura 1.1: Cavidad de Fabry-Pérot con un espejo móvil. La luz entra a la cavidad mediante un espejo fijo semi-transparente. El espejo móvil se encuentra acoplado a un resorte o algún otro potencial de oscilador armónico. Basada en imagen de [1].

Una de las primeras implementaciones experimentales de este tipo de sistemas se remonta al interferómetro de ondas gravitacionales LIGO [49], ya que a fin de aislar

los espejos del interferómetro del ruido acústico de su ambiente, estos se suspendieron utilizando cables de acero, de tal forma que cada espejo se podía describir como la masa de un péndulo ideal. Esto lleva a una de las principales ventajas de los sistemas optomecánicos basados en espejos móviles: el poder acoplar objetos mecánicos grandes, como los espejos de LIGO, a grados de libertad del campo electromagnético. Se ha demostrado enfriamiento optomecánico [50] de objetos en la escala de kilogramos.

Uno de los posibles retos de este tipo de sistemas surge del elemento mecánico y su interacción con el ambiente, ya que este acoplamiento generalmente acarrea una fuerte decoherencia. Debido a que estos sistemas operan en un rango bajo de frecuencias mecánicas ($\nu_0/2\pi < 1\text{kHz}$) son altamente sensibles al ruido acústico [31] por lo que se ha estudiado reemplazar el elemento mecánico con una trampa óptica [51]. En este montaje teórico se emplea un disco dieléctrico suspendido mediante tenazas ópticas, y se encontró que es posible alcanzar un número promedio de ocupación fonónica de $\bar{n} = .14$ para parámetros realizables experimentalmente, lo cual se encuentra dentro del régimen cuántico, usualmente definido en la literatura como $\bar{n} < 1$, lo cual indica que al medir se encuentra al sistema de forma más frecuente en su estado base.

Una de las posibles áreas de investigación en el área de cavidades optomecánicas con espejos móviles es la medición de fuerzas con alta precisión. Esto incluye trabajos como la medición de la carga eléctrica mediante un sistema híbrido de interferómetro de Michelson y una cavidad de espejo móvil [52]. En este sistema, uno de los espejos dentro de un interferómetro de Michelson se puede mover y se encuentra cargado eléctricamente con una carga por determinar. La longitud del brazo del interferómetro cambia en función de la fuerza de Coulomb entre el espejo cargado y un objeto externo con carga conocida. La diferencia entre las intensidades de salida de ambos brazos del interferómetro permite determinar la carga del espejo. Otro trabajo estudia el efecto de introducir un amplificador óptico paramétrico dentro de la cavidad y encuentra que esto permite, dentro de ciertos parámetros, medir una fuerza externa aplicada al espejo móvil con precisión superior al límite cuántico estándar [53].

Los amplificadores ópticos no son el único tipo de objeto que se introduce dentro de una cavidad optomecánica con espejo móvil, esta es un área de estudio activa.

Entre las posibilidades se encuentra introducir un condensado de Bose-Einstein dentro de la cavidad. Se ha encontrado que el Hamiltoniano que describe un condensado de Bose-Einstein dentro de una cavidad con espejos fijos se puede deducir como el caso límite de una cavidad con espejo móvil cuando este espejo oscila de forma no lineal [54]. En el caso de un condensado dentro de una cavidad con espejo móvil, se ha encontrado que bajo ciertos parámetros, el sistema se puede describir como un sistema de dos modos donde los grados de libertad atómicos y mecánicos se acoplan fuertemente mediante el campo electromagnético con un parámetro óptico de acoplamiento [55]. En una combinación de posibles sistemas, al acoplar una cavidad con espejos fijos y un ensamble atómico dentro con una cavidad con un espejo móvil, se logra entrelazamiento de variables continuas a temperaturas de cerca de 32 K [56]. Las cavidades de espejo móvil acopladas a un ensamble atómico o a un condensado también son empleadas en el estudio de efectos optomecánicos como la transparencia optomecánicamente inducida, donde se reporta que la diferencia de frecuencia entre el espejo móvil y un condensado de Bose-Einstein puede llevar a que la ventana de frecuencia donde se manifiesta la transparencia optomecánicamente inducida se divida en dos ventanas [57]. La transparencia optomecánicamente inducida también se ha explorado en una cavidad optomecánica de cuatro brazos con dos espejos móviles controlados con bombas externas, donde se puede modular varios tipos de parámetros optomecánicos y modular perfiles de Fano [58]. Otro estudio logra obtener transparencia mediante una doble capa de grafeno dentro de una cavidad de espejo móvil [59].

Algunos otros temas de estudio actual incluyen el estudio de diferentes tipos de acoplamiento (donde las oscilaciones del espejo móvil modulan la frecuencia de la cavidad, la intensidad del acoplamiento, o el acoplamiento coherente de varios modos ópticos dentro de la cavidad) llevando a un sistema de clasificación de acoplamientos en función de su Hamiltoniano [60]. Se ha explorado el uso de presión de radiación y el uso del efecto de resorte óptico para estabilizar cavidades con espejos móviles y se ha demostrado experimentalmente [61]. Se ha estudiado el efecto de considerar que la cavidad tiene un tamaño finito y el de pequeñas fallas en el alineamiento sobre el

modelo usual de una cavidad de espejo móvil, con miras a la utilización de este tipo de sistemas en aplicaciones industriales y comerciales [62].

1.3.2. Micro-resonadores

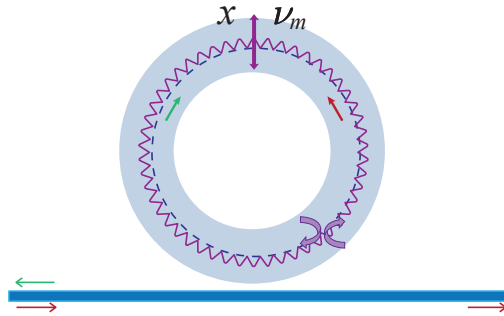


Figura 1.2: Microresonador toroidal. La luz entra al resonador mediante una fibra óptica. La luz puede viajar dentro del resonador en modos en la dirección de las manecillas del reloj y en la dirección opuesta. Los grados de libertad mecánicos corresponden a vibraciones del resonador que alteran el camino óptico. Basada en imagen en [2]

Otra posible configuración de uso frecuente en la actualidad es la de los micro-resonadores. Este tipo de resonador, como se puede observar en la figura 1.2, usualmente consiste de un objeto sólido donde la luz se atrapa en modos donde esta viaja por el perímetro del resonador. Los modos ópticos dependen del tamaño del resonador, por lo que si éste vibra, esto altera los modos ópticos. Tres geometrías comunes para fabricar estos resonadores son anillos, esferas y discos [63]. Una de las grandes ventajas particulares de esta clase de dispositivos optomecánicos es que al reducir el tamaño de la cavidad, es posible alcanzar un acoplamiento mayor que en el caso de las cavidades de espejo móvil [40]. Los micro-resonadores también permiten acceso a un rango muy amplio de frecuencias mecánicas, del rango de MHz a GHz . Entre sus posibles desventajas, se debe considerar que en este tipo de dispositivo la luz se propaga dentro de un medio, por lo que estos dispositivos son especialmente sensibles a pérdidas por absorción y efectos térmicos[64].

Debido a la fuerte relación entre la geometría de este tipo de sistemas y sus modos, se ha realizado investigación reciente respecto al efecto sobre los modos del resonador ocasionados por deformaciones en el mismo. Esta línea de investigación encuentra entre otros resultados que algunos defectos que podrían considerarse inevitables en la fabricación del dispositivo implican un cambio fuerte sobre la frecuencia mecánica del resonador, y que los factores de calidad de los modos que no confinan a la luz en el perímetro pueden ser aumentados en un factor de 4 con la subsidencia correcta en una esfera[65]. Al estudiar el modelo teórico de un resonador ligeramente deformado de manera que los modos mecánicos que viajan en sentidos opuestos de las manecillas del reloj se acoplan, se puede observar la simetría PT de los modos mecánicos en un micro-resonador de disco [66]. Otra posibilidad se observa en un modelo donde se acoplan los modos ópticos que se propagan en sentidos opuestos del reloj y se observa una transparencia optomecánicamente inducida con un fuerte perfil de Fano [2]. Se observan también resonancias de Fano al acoplar dos micro-resonadores, donde solo uno de los cuales actúa como dispositivo optomecánico [67]. En química, los micro-resonadores presentan una avenida de investigación para la detección de moléculas. Un estudio utilizó un micro-resonador esférico lleno de fluido y con un recubrimiento de grafeno. Las propiedades elásticas del grafeno cambian conforme este adsorbe moléculas del fluido y esto altera los modos acústicos del resonador lo que permite la detección de las moléculas. Este tipo de montaje demostró una gran sensibilidad a moléculas de gas de amoníaco [68]. También se ha estudiado el uso de gotas de líquido como micro-resonador, y se encontró que este tipo de montaje es una plataforma para espectroscopia de alta sensibilidad para líquidos transparentes en volúmenes de nL [69].

1.3.3. Membrana en el Medio

En contraste a los sistemas optomecánicos donde la luz se refleja en el elemento con grados de libertad mecánicos o viaja en un medio cuya longitud de camino óptico cambia debido a sus deformaciones, los sistemas de membrana en el medio, como el que se dibuja en la figura 1.3, son sistemas dispersivos. En este tipo de sistemas el elemento

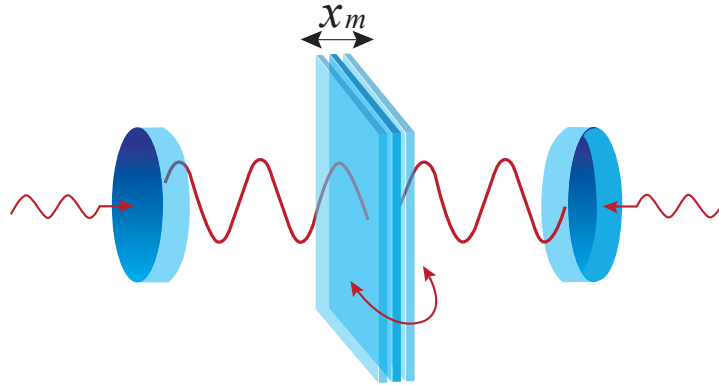


Figura 1.3: Cavidad optomecánica con una membrana en el medio. La membrana es semi-transparente y flexible. La posición de la misma respecto a su punto de equilibrio representa los grados de libertad mecánicos de la interacción. Basada en imagen en [3].

mecánico consiste de una membrana semi transparente y flexible colocada dentro de una cavidad de Fabry-Pérot con ambos espejos fijos. La interacción optomecánica es una función periódica del desplazamiento de la membrana respecto a su punto de equilibrio [70].

Este tipo de sistemas presentan varias oportunidades de estudio, incluyendo estudiar el comportamiento de un sistema optomecánico dentro del régimen de acoplamiento extremadamente fuerte, donde el acoplamiento no puede aproximarse como una función lineal o cuadrática de la posición mecánica [71]. Debido al posicionamiento de la membrana en este tipo de cavidades, es posible modelar sistemas donde se utilizan dos láseres de bombeo con frecuencias distintas, cada una de las cuales introduce luz a la cavidad por un espejo distinto. En este tipo de sistema se encuentra que es posible enfriar la membrana más allá del límite de enfriamiento optomecánico marcado por el acoplamiento a un ambiente térmico [3].

Ya que las membranas empleadas en este tipo de sistemas son semi transparentes,

es posible introducir más de una membrana a la misma cavidad. En una versión, donde se emplean dos membranas con posición, ángulo y flexibilidad controlables, se puede modelar fenómenos no lineales, así como acoplamiento a más de un modo mecánico con resonadores distintos [72]. El sistema de dos membranas se ha logrado montar experimentalmente, inclusive se han desarrollado chips integrados con dos membranas de SiN, con los cuales se encuentra un acoplamiento mayor al modo de centro de masa de lo que se esperaría con una sola membrana [73]. En una extrapolación de este tipo de montajes se ha calculado que el acoplamiento aumenta de forma exponencial con el número de membranas hasta saturarse al alcanzar la completa localización del campo dentro de la cavidad en un sistema de N membranas [74].

Los sistemas de membrana en el medio también permiten el estudio teórico de la interacción de la membrana con otros sistemas dentro de la cavidad, como los condensados de Bose-Einstein. Un estudio analizó el comportamiento de una cavidad con una membrana en el medio y dos condensados de Bose-Einstein idénticos, cada uno de un lado distinto de la membrana. Se encuentra que en el régimen de acoplamiento débil, los condensados actúan como quasi-membranas [75]. En el caso de un solo condensado, se ha encontrado que al considerar acoplamiento tanto lineal como cuadrático, es posible lograr estados altamente comprimidos en el modo mecánico así como un fuerte entrelazamiento entre los grados de libertad mecánicos y atómicos [76].

1.4. Oscilador Armónico con Frecuencia Dependiente del Tiempo

En este trabajo se estudia un sistema optomecánico donde la frecuencia natural del resonador mecánico es una función periódica del tiempo. Para esto es necesario entender la teoría cuántica del oscilador armónico dependiente del tiempo. Un posible origen experimental de la necesidad de modelar un oscilador armónico cuántico con frecuencia natural dependiente del tiempo fue el logro experimental de colocar

un único ion en su estado base de movimiento dentro de una trampa de Paul [77]. Una trampa de Paul, así llamada en honor a su desarrollador Wolfgang Paul [78], consiste en cuatro electrodos hiperbólicos extendidos en una dirección, usualmente denominada y , y donde se genera un campo electromagnético con simetría aproximadamente cilíndrica en su centro. El campo electromagnético se genera mediante un voltaje periódico en el tiempo, puesto que de otra forma la trampa solo sería capaz de confinar iones en dos dimensiones. Agregar la variación temporal permite confinar iones en tres dimensiones [4]. Se observa un esquema de este tipo de dispositivo en la figura 1.4.

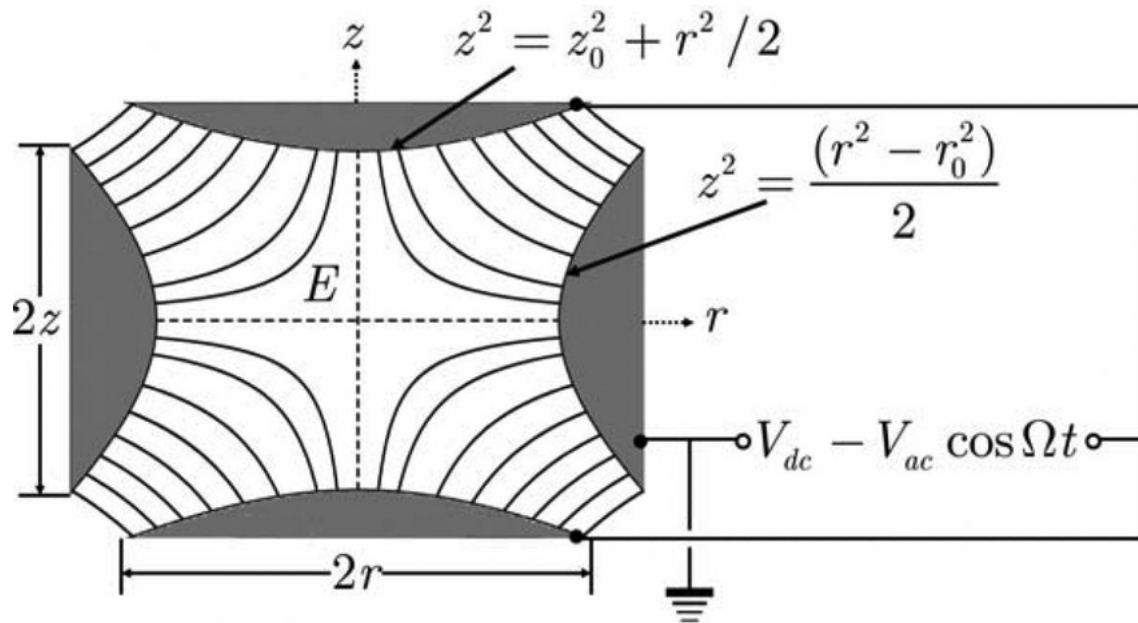


Figura 1.4: Esquema de una trampa de Paul, obtenido de [4].

Este tipo de montaje lleva a analizar el comportamiento de objetos cuánticos que interactúan con un potencial con una dependencia periódica en el tiempo. En particular, requiere poder modelar un oscilador armónico cuántico dependiente del tiempo [79]. La teoría para modelar este tipo de sistema cuántico requiere de poder resolver las ecuaciones de movimiento del problema clásico correspondiente [80]. Una vez que se conocen estas soluciones es posible modelar el sistema de forma muy similar al sistema sin dependencia temporal pero utilizando operadores distintos, con dependencia temporal. Esta distinción es importante, puesto que es usual modelar

sistemas con este tipo de dependencia periódica empleando los operadores usuales de oscilador armónico, pero asignando alguna dependencia temporal a alguna cantidad normalmente constante. Esto no es correcto, como se verá más adelante, ya que los operadores de escalera para el oscilador armónico con frecuencia constante y para el oscilador armónico dependiente del tiempo corresponden a objetos distintos.

1.5. Optomecánica con Parámetros Dependientes del Tiempo

Este trabajo combina varios de los temas vistos en las secciones anteriores. Se analiza un sistema que consiste en una cavidad optomecánica de espejo móvil, donde el resorte al cual se encuentra acoplado el espejo móvil tiene una frecuencia natural que depende del tiempo de forma periódica, como se observa en la figura 1.5. El principal objetivo de este trabajo es modelar este sistema empleando una teoría más adecuada para describir la disipación de sistemas cuánticos con dependencias periódicas. Esto es un modelo de disipación para el oscilador que toma en cuenta su dependencia temporal explícita [81]. Esto lleva a establecer una ecuación maestra que modela el sistema de forma más adecuada que intentos anteriores [30], donde simplemente se incluyó la dependencia temporal del problema en la constante de disipación.

Después de derivar dicha ecuación maestra, se analiza el caso de enfriamiento optomecánico para esta cavidad, en el caso donde la dependencia temporal del oscilador se puede tratar como una perturbación pequeña, y se encuentra que para ciertos regímenes de parámetros es posible alcanzar una temperatura menor que en el caso de una frecuencia natural constante.

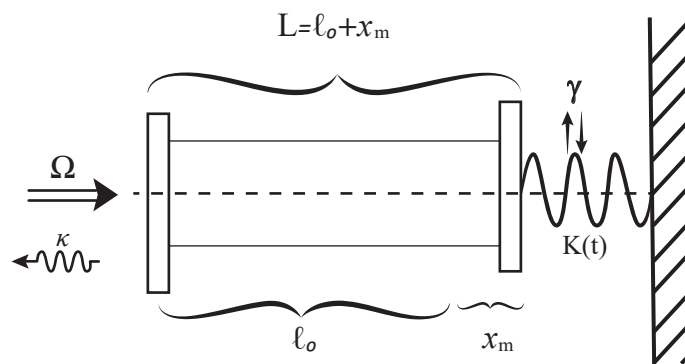


Figura 1.5: Cavidad de Fabry-Pérot con un espejo móvil acoplado a un resorte cuya frecuencia natural es función del tiempo. Tanto el resorte como la cavidad intercambian energía con un ambiente. Un láser bombea fotones de forma continua a la cavidad.

Capítulo 2

Interacción Optomecánica

La forma de acoplamiento entre el campo electromagnético y un elemento mecánico es la presión de radiación debida al intercambio de momento entre fotones y el espejo móvil de una cavidad de optomecánica Fabry-Pérot. Para esta sección se sigue la derivación de la referencia [32]. El potencial vectorial unidimensional dentro de la cavidad cumple con la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

donde x es eje de movimiento del espejo móvil y se toma $c = 1$. El potencial se encuentra definido dentro de la región $0 \leq x \leq q(t)$. Se considera el potencial vectorial unidimensional en la dirección del eje z y se tiene

$$\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{k}}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{k}} = -\frac{\partial A}{\partial t}\hat{\mathbf{k}}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A} = -\frac{\partial A}{\partial x}\hat{\mathbf{j}} = B\hat{\mathbf{j}}. \quad (2.4)$$

Cuando se trata con espejos perfectos fijos, se emplea el requisito de continuidad de $E = 0$ en los espejos [82]. Si uno de los espejos se mueve, la generalización natural es pedir que el campo se anule en el marco de Lorentz donde el espejo se encuentra ins-

tantáneamente en reposo [83], esta condición se cumple si se satisfacen las condiciones de frontera

$$A(0, t) = A(q(t), t) = 0, \quad (2.5)$$

en el marco de referencia del laboratorio. Esto se debe a que, si se considera la transformación de Lorentz parametrizada por $v = \mathbf{v}\hat{\mathbf{i}}$, el campo eléctrico transformado es

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\gamma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v \frac{\partial A}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.6)$$

Si la velocidad del marco de referencia se toma como $\dot{q}(t)$ y se evalúa el potencial vectorial unidimensional A en $x = q(t)$ entonces el término entre paréntesis es la derivada direccional del potencial a lo largo de la trayectoria del espejo y es idénticamente cero [83], lo que asegura que en el marco donde el espejo fijo se encuentra instantáneamente en reposo el campo eléctrico se anula. La ecuación de movimiento no relativista para el espejo de masa m es, considerando además un potencial $V(q)$

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A(x, t)}{\partial x} \right)^2 \Big|_{x=q(t)}. \quad (2.7)$$

El segundo término del lado derecho es la presión de radiación. El término de presión de radiación se deduce a partir de que, en el marco de referencia que se mueve con el espejo, la presión de radiación está dada por $B'^2/2$, ya que el campo eléctrico en este marco es cero debido a las condiciones de frontera. El término de presión de radiación se obtiene transformando B' al marco de referencia del laboratorio en el límite no relativista. El espejo móvil está sujeto entonces a una fuerza proveniente de un potencial de oscilador armónico $V(q)$ y a una fuerza proveniente del campo electromagnético, la presión de radiación. Las ecuaciones (2.7) y (2.1) determinan por completo la dinámica del sistema cuando se toman en cuenta las condiciones de frontera dadas por (2.5). Se define un conjunto de coordenadas generalizadas como

$$Q_k \equiv \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \int_0^{q(t)} dx A(x, t) \sin \frac{k\pi x}{q(t)} \quad (2.8)$$

donde k es un entero positivo. Las coordenadas Q_k representan una descomposición del potencial vectorial $A(x, t)$ en las funciones $\sin \frac{k\pi x}{q(t)}$ las cuales dependen la posición del espejo en cada momento. Para más detalle sobre estas funciones ver [84]. Estas funciones forman un conjunto completo y se puede realizar la expansión

$$A(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sqrt{\frac{2}{q(t)}} \sin \frac{k\pi x}{q(t)}, \quad (2.9)$$

la cual claramente cumple con las condiciones de frontera (2.5). Si se sustituye la expansión en las ecuaciones (2.1) y (2.7), se obtiene

$$\ddot{Q}_k = -\omega_k^2 Q_k + 2\frac{\dot{q}}{q} \sum_j g_{kj} \dot{Q}_j + \frac{\ddot{q}q - \dot{q}^2}{q^2} \sum_j g_{kj} Q_j \quad (2.10)$$

$$+ \frac{\dot{q}^2}{q^2} \sum_{jl} g_{jk} g_{jl} Q_l$$

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{1}{q} \sum_{k,j} (-1)^{k+j} \omega_k \omega_j Q_k Q_j. \quad (2.11)$$

Se usan las frecuencias dependientes de la posición

$$\omega_k(q) = \frac{k\pi}{q}, \quad (2.12)$$

y las funciones

$$g_{kj} = \begin{cases} (-1)^{k+j} \frac{2kj}{j^2 - k^2}, & k \neq j \\ 0, & k = j \end{cases} \quad (2.13)$$

El sistema de ecuaciones (2.10) corresponde a las ecuaciones de Euler-Lagrange del Lagrangiano

$$L(q, \dot{q}, Q_k, \dot{Q}_k) = \frac{1}{2} \sum_k \left[\dot{Q}_k^2 - \omega_k^2(q) Q_k^2 \right] + \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q) \quad (2.14)$$

$$- \frac{\dot{q}}{q} \sum_{j,k} g_{kj} \dot{Q}_k Q_j + \frac{\dot{q}^2}{2q^2} \sum_{j,k,l} g_{kj} g_{kl} Q_l Q_j.$$

Hasta este punto el tratamiento del problema es completamente clásico. Se transforma al Hamiltoniano para proceder con la cuantización. El Hamiltoniano se define mediante la transformación

$$H(P_k, Q_k, p, q) \equiv p\dot{q} + \sum_k P_k \dot{Q}_k - L(q, \dot{q}, Q_k, \dot{Q}_k), \quad (2.15)$$

donde se han definido los momentos

$$P_k = \dot{Q}_k - \frac{\dot{q}}{q} \sum_j g_{kj} Q_j, \quad (2.16)$$

$$p = m\dot{q} - \frac{1}{q} \sum_{j,k} g_{kj} P_k Q_j. \quad (2.17)$$

Como se espera, el momento canónico del espejo no es $m\dot{q}$ para un campo no nulo dentro de la cavidad. El Hamiltoniano resultante es

$$H = \frac{1}{2m} \left(p + \frac{1}{q} \sum_{j,k} g_{kj} P_k Q_j \right)^2 + V(q) + \frac{1}{2} \sum_k [P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2].$$

Usando este Hamiltoniano, se procede a cuantizar de forma canónica. Las variables p, q, P_k, Q_k se convierten en operadores con relaciones de conmutación dadas por

$$\begin{aligned} [\hat{q}, \hat{Q}_j] &= [\hat{q}, \hat{P}_k] = [\hat{p}, \hat{Q}_j] = [\hat{p}, \hat{P}_k] = 0 \\ [\hat{q}, \hat{p}] &= i\hbar, \quad [\hat{Q}_j, \hat{P}_k] = i\delta_{jk}\hbar, \end{aligned} \quad (2.18)$$

y se definen operadores de creación y aniquilación para la cavidad, pero a diferencia de los operadores usuales para un oscilador armónico cuántico, estos dependen

explícitamente de la longitud de la cavidad mediante \hat{q} . Se tiene

$$a_k(\hat{q}) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k(\hat{q})}} \left[\omega_k(\hat{q})\hat{Q}_k + i\hat{P}_k \right], \quad (2.19)$$

$$a_k^\dagger(\hat{q}) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_k(\hat{q})}} \left[\omega_k(\hat{q})\hat{Q}_k - i\hat{P}_k \right]. \quad (2.20)$$

La dependencia de \hat{q} indica que existe una base del espacio de Hilbert para cada posición del espejo. Esto implica que cada estado debe etiquetarse con un valor para el número de excitaciones de cada modo y un valor para la posición del espejo. Esto lleva a la acción de los operadores

$$\begin{aligned} a_k^\dagger(\hat{q})a_k(\hat{q})|\{n_l\}, q\rangle &= n_k|\{n_l\}, q\rangle, \\ \hat{q}|\{n_l\}, q\rangle &= q|\{n_l\}, q\rangle, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde se usa $\{n_l\}$ para denotar el conjunto $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ de los números de ocupación de cada modo de la cavidad. El Hamiltoniano (2.18) se expresa en términos de estos operadores como

$$H = \frac{(p + \Gamma)^2}{2m} + V(q) + \hbar \sum_k \omega_k(q) \left[a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right], \quad (2.22)$$

donde

$$\Gamma \equiv \frac{i\hbar}{2q} \sum_{k,j} g_{kj} \left[\frac{k}{j} \right]^{1/2} \left[a_k^\dagger a_j^\dagger - a_k a_j + a_k^\dagger a_j - a_j^\dagger a_k \right]. \quad (2.23)$$

Aquí se ha omitido escribir explícitamente la dependencia de \hat{q} en los operadores de la cavidad por conveniencia. Este Hamiltoniano es similar al Hamiltoniano de acoplamiento mínimo en electrodinámica, sin embargo en este caso Γ es bilineal, por lo que hay procesos de absorción y emisión de dos fotones. El término de vacío en (2.22) es divergente ya que hay un número infinito de modos, por lo que se emplea el procedimiento usual [85] y se tiene el Hamiltoniano con la energía de Casimir en una dimensión

$$H = \frac{(p + \Gamma)^2}{2m} + V(q) + \hbar \sum_k \omega_k(q) a_k^\dagger a_k - \frac{\hbar\pi}{24q}. \quad (2.24)$$

Es importante notar que el término para la energía de Casimir que se presenta en el Hamiltoniano es el balance de los modos del campo fuera de la cavidad, los cuales empujan el espejo hacia adentro, y los modos dentro de la cavidad los cuales empujan el espejo hacia afuera [86]. Esto implica que deberían considerarse los modos fuera de la cavidad para un tratamiento completo, por lo que este Hamiltoniano es aproximado, sin embargo se considera una buena aproximación en los casos donde el campo dentro de la cavidad es dominante. El Hamiltoniano (2.24) tiene un acoplamiento no lineal entre la cavidad y el espejo. En el caso donde el potencial $V(q)$ confina al espejo a moverse cerca de una posición de equilibrio, se escribe el desplazamiento respecto a esta posición l_0 como $x_0 \equiv q - l_0$ y cuando este desplazamiento es pequeño respecto a l_0 se puede aproximar Γ como

$$\Gamma \approx \Gamma_0 = \Gamma \Big|_{q=l_0}. \quad (2.25)$$

Adicionalmente se pueden realizar expansiones en series de potencias a primer orden del parámetro $\frac{x_0}{l_0}$ y se obtiene

$$a_k(q) \approx a_{k0} - \frac{x_0}{2l_0} a_{k0}^\dagger, \quad (2.26)$$

$$\omega_k(q) \approx \omega_{k0} \left(1 - \frac{x_0}{l_0} \right), \quad (2.27)$$

donde a_{k0} y ω_{k0} son el operador de aniquilación y la frecuencia asociadas a $q = l_0$. Si las aproximaciones (2.26) se sustituyen en el Hamiltoniano (2.24) y se hace una transformación unitaria $H' = U^\dagger H U$ dada por

$$U = e^{ix_0\Gamma_0/\hbar}, \quad (2.28)$$

se obtiene el Hamiltoniano

$$H' \approx \frac{p^2}{2m} + u(x_0) + \hbar \sum_k \omega_{k0} a_{k0}^\dagger a_{k0} - x_0 F_0 \quad (2.29)$$

donde $u(x_m) = V(q) - \hbar\pi/24q$ y F_0 denota la presión de radiación en ordenamiento normal dada por

$$F_0 = \frac{\hbar}{2l_0} \sum_{k,j} (-1)^{k+j} \sqrt{\omega_{k0}\omega_{j0}} \left(a_{k0} a_{j0} + a_{k0}^\dagger a_{j0}^\dagger + a_{k0}^\dagger a_{j0} + a_{j0}^\dagger a_{k0} \right). \quad (2.30)$$

En una aproximación donde se considera únicamente un modo de la cavidad, la presión de radiación se simplifica a

$$x_0 F_0 \approx x_0 \frac{\hbar\omega_{k0}}{l_0} a_{k0}^\dagger a_{k0}, \quad (2.31)$$

lo cual es el resultado deseado y lleva, para el caso donde el potencial $u(x_0)$ corresponde al oscilador armónico, al Hamiltoniano

$$H = \hbar\omega_{k0} a_{k0}^\dagger a_{k0} + \hbar\nu_m b^\dagger b - \hbar g_0 a^\dagger a x. \quad (2.32)$$

Se tiene entonces la interacción optomecánica para el caso donde se considera un único modo de la cavidad y no se considera el campo fuera de la misma. De aquí en adelante se omite el sub-índice k_0 .

Capítulo 3

Enfriamiento Optomecánico en una Cavity no Paramétrica

En este capítulo se presenta una derivación del enfriamiento optomecánico de bandas laterales, desde el enfoque de ruido cuántico, y se presenta en analogía al caso clásico de un oscilador armónico acoplado a un baño térmico. Existen muchas derivaciones de este efecto [87, 33], pero se presenta una que sigue de cerca a la derivación presentada en [88], los conceptos se pueden encontrar con un poco más de detalle en [89]. Primero es importante discutir ciertos conceptos y cantidades relevantes en relación al ruido cuántico.

3.1. Densidad de Potencia Espectral

Se inicia con la teoría clásica. Sea $I(t)$ una señal clásica aleatoria caracterizada por tener un valor promedio cero y por la función de correlación

$$G_{I,I}(t, t') = \langle I(t)I(t') \rangle. \quad (3.1)$$

Esta función de correlación es análoga a una matriz de covarianza. Para $t' = t$, contiene la información sobre las correlaciones entre las fluctuaciones de la señal. Para tiempos distintos contiene la información sobre que tanta correlación existe entre las

fluctuaciones de $I(t)$ y las de $I(t')$. Conviene definir ciertos conceptos. Primero, el ruido bajo consideración es **estacionario**, esto es, la función $I(t)$ no es constante en el tiempo pero sus propiedades estadísticas si lo son. Esto lleva a que la función $G_{I,I}(t, t')$ dependa únicamente de la diferencia entre tiempos, $t - t'$. Segundo, el ruido que se considera es **Gausiano**, es decir el ruido queda completamente caracterizado por la función $G_{I,I}(t, t')$, no tiene momentos estadísticos de mayor orden. Y finalmente el **tiempo característico**, el cual define la escala de tiempo en la cual decaen las correlaciones entre $I(t)$ e $I(t')$. Si el tiempo característico $\tau_c \ll |t - t'|$, entonces se considera $G_{I,I}(t - t') \approx 0$. $I(t)$ es una variable aleatoria Gaussiana con promedio cero, y también lo es su transformada de Fourier, la cual se define en un periodo de muestra τ como

$$I_\tau[\omega] = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt e^{i\omega t} I(t). \quad (3.2)$$

Para un τ lo suficientemente grande, las propiedades estadísticas de esta transformada no dependen de τ . Se define ahora la **densidad de potencia espectral**, la cual contiene la información de cuánta potencia contiene $I(t)$ para alguna frecuencia ω . Es simplemente la varianza de $I_\tau[\omega]$ en el límite donde τ es muy grande

$$\mathcal{S}_{II}[\omega] \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle |I_\tau[\omega]|^2 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle I_\tau[\omega] I_\tau[-\omega] \rangle. \quad (3.3)$$

Esto quiere decir que la densidad de potencia espectral es la transformada de Fourier de la función de auto-correlación de $I(t)$

$$\mathcal{S}_{II}[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} G_{I,I}(t). \quad (3.4)$$

Este resultado se conoce como el teorema de Wiener-Khinchin [90]. En el caso clásico, como la señal $I(t)$ es una función real, $G_{I,I}(t, t')$ también lo es y la densidad de potencia espectral cumple $\mathcal{S}_{II}[\omega] = \mathcal{S}_{II}[-\omega]$. Físicamente esto tiene sentido, pues la interpretación física de que tanta potencia contiene la señal para una frecuencia dada no tendría sentido de otra forma.

La densidad de potencia espectral también se puede definir para sistemas cuánti-

cos, sin embargo es importante entender que mientras la definición es completamente análoga, la interpretación física de esta cantidad no es la misma. Se define de la misma forma. Por ejemplo, en el caso del operador de posición

$$S_{xx}[\omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \hat{x}(t) \hat{x}(0) \rangle. \quad (3.5)$$

Una diferencia clave en este caso es que, en general, se tiene que para un operador $\hat{O}(t)$, $[\hat{O}(t), \hat{O}(t')] \neq 0$, por lo que la función de auto-correlación puede ser compleja y por ende $S_{xx}[\omega] \neq S_{xx}[-\omega]$. Esto no ocurre en el caso clásico cuando se trabaja con variables en lugar de operadores. ¿Cual es la interpretación física de esto? Para el caso cuántico, la densidad de potencia espectral contiene información respecto a transferencia de energía. La parte positiva del espectro corresponde con transferencia de energía *al* sistema y la parte negativa a transferencia de energía *desde* el sistema. Es importante notar que no se pide un sistema físico con frecuencia negativa, se tiene una función que, dada una frecuencia positiva, describe los intercambios de energía del sistema desde y hacia un sistema externo. Se analiza el caso específico de un oscilador armónico acoplado a un baño térmico.

3.2. Caso clásico y caso cuántico

Se inicia con el caso clásico. Se tiene un oscilador armónico con frecuencia ν y masa m en equilibrio con un baño térmico a temperatura T . Se asume que el acoplamiento es lo suficientemente débil como para que no sea necesario considerarlo en la descripción de la dinámica del oscilador. Es este caso, la solución para las ecuaciones de movimiento de Hamilton es

$$x(t) = x(0) \cos(\nu t) + \frac{p(0)}{m\nu} \sin(\nu t), \quad (3.6)$$

donde $x(0)$ y $p(0)$ son los valores iniciales de la posición y el momento, los cuales son aleatorios. La función de auto-correlación de la posición es entonces

$$G_{x,x}(t, 0) = \langle x(t)x(0) \rangle, \quad (3.7)$$

$$= \langle x(0)x(0) \rangle \cos(\nu t) + \langle p(0)x(0) \rangle \frac{1}{m\nu} \sin(\nu t), \quad (3.8)$$

donde únicamente se ha sustituido la solución (3.6) en la definición de la función de correlación. Clásicamente no debe haber correlación entre los valores iniciales de la posición y el momento puesto que se tomaron como valores aleatorios. Eso deja únicamente

$$G_{x,x}(t, 0) = \langle x(0)x(0) \rangle \cos(\nu t). \quad (3.9)$$

Se sabe, del teorema de equipartición, que $\frac{1}{2}m\nu \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$, con k_B la constante de Boltzman. Calcular la transformada de Fourier del coseno es directo y se obtiene la densidad de potencia espectral

$$S_{x,x}[\omega] = \frac{k_B T}{m\nu} (\delta(\omega - \nu) + \delta(\omega + \nu)), \quad (3.10)$$

la cual es simétrica en la frecuencia como se buscaba e indica que toda la potencia se concentra en la frecuencia ν del oscilador. Se considera ahora el caso cuántico. La expresión para la función de correlación es la misma que en el caso de la ecuación (3.7), pero ahora con operadores

$$G_{x,x}(t, 0) = \langle \hat{x}(0)\hat{x}(0) \rangle \cos(\nu t) + \langle \hat{p}(0)\hat{x}(0) \rangle \frac{1}{m\nu} \sin(\nu t). \quad (3.11)$$

Aquí el desarrollo difiere del caso clásico, debido a la relación de conmutación entre los operadores \hat{x} y \hat{p} . Forzosamente debe existir una correlación entre estos o se violaría la relación de conmutación y se tiene que $\langle \hat{x}(0)\hat{p}(0) \rangle = \frac{i\hbar}{2}$. La función de correlación se puede re-escribir

$$G_{x,x}(t) = x_0^2 \{ n_B(\hbar\nu) e^{+i\nu t} + [n_B(\hbar\nu) + 1] e^{-i\nu t} \}, \quad (3.12)$$

donde $x_0^2 = \frac{\hbar}{2m\nu}$ es el movimiento de punto cero y $n_B(\hbar\nu)$ es el número de ocupación de Bose-Einstein en equilibrio térmico. La transformada de Fourier se calcula de forma directa y se tiene

$$S_{xx}[\omega] = 2\pi x_0^2 \{n_B(\hbar\nu)\delta(\omega + \nu) + [n_B(\hbar\nu) + 1]\delta(\omega - \nu)\}. \quad (3.13)$$

Se observa que esta función ha perdido la simetría en la frecuencia. En este caso, el factor de ocupación de Bose-Einstein sugiere la interpretación física. El término correspondiente a la parte positiva del espectro de frecuencias se relaciona con emisión de energía del baño térmico hacia el oscilador y la parte negativa se relaciona con emisión de energía del oscilador al baño térmico. Cuando la temperatura aumenta tal que $\frac{k_B T}{\hbar\nu} \gg 1$, se tiene que $n_B(\hbar\nu) \approx n_B(\hbar\nu) + 1$ y la densidad de potencia espectral cuántica tiende a la densidad de potencia espectral clásica. Es importante notar que aunque se habla de un espectro negativo de frecuencias, no se habla de una frecuencia negativa para el oscilador, esta frecuencia siempre es una cantidad positiva y la densidad de potencia espectral contiene información sobre los intercambios de energía entre un oscilador armónico de frecuencia ν y el baño térmico al cual este se encuentra acoplado.

3.3. Teorema de Fluctuación-Disipación

El desarrollo presentado parecería indicar que las densidades de potencia espectral cuánticas y clásicas no se encuentran conectadas más allá de las expresiones empleada para calcularlas. Sin embargo, existe una conexión en su interpretación física y esto se puede evidenciar mediante el teorema de fluctuación-disipación. Este teorema establece una relación entre la tasa de decaimiento del oscilador armónico y la densidad de potencia espectral [91]. Para el caso clásico, de nuevo pensando en un oscilador armónico sujeto a una fuerza $F(t)$ que actúa como una fuente de ruido, se tiene la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -m\nu^2 x - m\gamma\dot{x} + F(t), \quad (3.14)$$

donde se ha agregado un término de disipación dependiente de la velocidad para evitar que la fuerza $F(t)$ pueda calentar indefinidamente al oscilador. En este caso la fuerza actúa como un baño térmico, ya que lleva al oscilador hacia un punto de equilibrio. Se pide que este baño térmico se encuentre en equilibrio a una temperatura T , por lo que se espera que el oscilador se encuentre en equilibrio también a esta temperatura. Esto implica que los cambios en la energía del oscilador, debido a la disipación y al calentamiento del baño, deben estar balanceados y se tiene, asumiendo que el acoplamiento es pequeño tal que $\nu \gg \gamma$

$$\frac{d}{dt}\langle E \rangle = -\gamma\langle E \rangle + \frac{\mathcal{S}_{FF}[\omega]}{2m}. \quad (3.15)$$

En el caso de energía estacionaria y usando el teorema de equipartición, se tiene el teorema de fluctuación disipación clásico

$$\mathcal{S}_{FF}[\omega] = 2m\gamma k_B T. \quad (3.16)$$

¿Cómo es el teorema de fluctuación disipación para el caso cuántico? Se tiene el Hamiltoniano

$$H = \hbar\nu\hat{b}^\dagger\hat{b} + H_B + \hat{x}\hat{F}, \quad (3.17)$$

donde \hat{b} y \hat{b}^\dagger son los operadores de escalera del oscilador armónico, H_B es el Hamiltoniano del baño y \hat{x} es el operador de posición del oscilador y \hat{F} es el operador para la fuerza que experimenta el oscilador debido al acoplamiento con el baño. \hat{F} es tal que $[\hat{F}, \hat{x}] = 0$. El oscilador evoluciona de acuerdo a la ecuación de Schrödinger. No es necesario conocer de forma explícita el Hamiltoniano que describe la evolución libre del baño térmico. Si el oscilador se encuentra en un estado inicial $|\psi(0)\rangle$ al tiempo cero, se desea conocer la probabilidad de que después de un tiempo t se encuentre en un estado final $|\psi_f\rangle$. Ya que solo es de interés como esta probabilidad de transición depende de \hat{F} , se trabaja en el marco de interacción para eliminar las dinámicas libres del oscilador y el baño. En este marco de referencia, denotado por el sub-índice I se tiene

$$|\Psi_I(t)\rangle = \hat{U}_0^\dagger(t) |\Psi(t)\rangle = \hat{U}_I(t) |\Psi(0)\rangle, \quad (3.18)$$

con $\hat{U}_0(t) = e^{-i(\nu\hat{b}^\dagger\hat{b}+H_b)t/\hbar}$ y $\hat{U}_I(t) = e^{-i\hat{x}\hat{F}t/\hbar}$. El Hamiltoniano en este marco de referencia es

$$\hat{H}_I(t) = \hat{U}_0^\dagger\hat{H}\hat{U}_0 = \hat{U}_0^\dagger\hat{V}\hat{U}_0 = \hat{V}_I(t), \quad (3.19)$$

donde $\hat{V} = \hat{x}\hat{F}$. La amplitud de transición entre un estado inicial i al tiempo t y un estado final f , el cual se asume es un eigen-estado del sistema, está dada por

$$\begin{aligned} A_{i,f} &= \langle\Psi_f|\Psi_i(t)\rangle, \\ &= \langle\Psi_f|\hat{U}_0(t)\hat{U}_I(t)|\Psi(0)\rangle, \\ &= e^{-iE_f t/\hbar} \langle\Psi_f|\Psi_I(t)\rangle, \end{aligned}$$

donde E_f es la energía del estado final. La solución a la ecuación de Schödinger en este marco de referencia está dada por la serie de Dyson [92]. Esta serie tiene, formalmente, un número infinito de términos pero solo es de interés la probabilidad de transición a tiempos cortos, por lo que se tiene, a primer orden

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(0)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \hat{V}_I(\tau) |\Psi(0)\rangle. \quad (3.20)$$

Aquí se ha utilizado que $|\Psi_I(0)\rangle = |\Psi(0)\rangle$ ya que $\hat{U}_0(0) = 1$. Para poder proceder es necesario dar una condición inicial. Se asume que al tiempo 0, el estado del oscilador es separable del estado del baño y que el oscilador se encuentra en algún estado etiquetado como n . Como el estado final elegido es un eigen-estado, debe ser ortogonal a la condición inicial. Primero se calcula la amplitud de transición del caso donde el oscilador va del estado n al estado $n + 1$

$$A_{i,f} = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \langle n + 1|\hat{x}_I(\tau)|n\rangle \langle\hat{F}\rangle. \quad (3.21)$$

Por definición del marco de interacción, $\hat{x}_I(\tau) = \hat{U}_0^\dagger(\tau)\hat{x}\hat{U}_0(\tau)$. Se puede expresar \hat{x} en términos de operadores de creación y aniquilación como $\hat{x} = x_0(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$. Si se procede de esta forma

$$\begin{aligned} A_{i,f} &= \frac{x_0}{i\hbar} \int_0^t d\tau \langle n+1 | e^{i(\nu\hat{b}^\dagger\hat{b}+H_B)\tau/\hbar} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) e^{-i(\nu\hat{b}^\dagger\hat{b}+H_B)\tau/\hbar} | n \rangle \langle \hat{F} \rangle, \\ &= \frac{x_0}{i\hbar} \int_0^t d\tau e^{i\nu\tau} \langle n+1 | (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) | n \rangle \langle \hat{F} \rangle, \\ &= \frac{x_0\sqrt{n+1}}{i\hbar} \int_0^t d\tau e^{i\nu\tau} \langle \hat{F} \rangle. \end{aligned}$$

La dinámica del baño no es conocida, y el objetivo no es desarrollar una descripción de la misma. Se asume que el baño se encuentra en un estado estacionario y que su matriz densidad se puede escribir de forma diagonal. Se tiene que la probabilidad de transición del estado n al estado $n+1$ del oscilador armónico está dada por

$$P_{n,n+1}(t) = \frac{x_0^2(n+1)}{\hbar^2} \int \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 e^{i\nu(\tau_2-\tau_1)} \langle \hat{F}_I(\tau_1)\hat{F}_I(\tau_2) \rangle. \quad (3.22)$$

La probabilidad de transición del estado n del oscilador armónico al estado $n+1$ depende entonces de la función de auto-correlación de \hat{F} . Se hacen los cambios de variable $\tau_1 = t' + \tau$ y $\tau_2 = t'$ tal que

$$P_{n \rightarrow n+1} = \frac{x_{xp}^2(n+1)}{\hbar^2} \int_0^t dt' \int_{-t'}^{t-t'} d\tau e^{-i\nu\tau} \langle \hat{F}_I(t'+\tau)\hat{F}_I(t') \rangle. \quad (3.23)$$

Si la integración se toma en un tiempo lo suficientemente largo comparado con el tiempo de auto-correlación del baño, se pueden aproximar los límites de integración por $\pm\infty$. Si se asume que el baño es Markoviano, entonces su función de auto-correlación es una delta de Dirac y la aproximación es razonable. Esto se puede reescribir en términos de la densidad de potencia espectral como

$$P_{n,n+1}(t) = \frac{x_0^2(n+1)}{\hbar^2} t S_{\hat{F}}(-\omega). \quad (3.24)$$

Es importante notar que este desarrollo asume tiempos cortos únicamente. Si se desea

obtener la tasa de transición de n a $n + 1$ se deriva $P_{n,n+1}(t)$ respecto al tiempo y se obtiene

$$p_{n,n+1} = \frac{x_0^2(n+1)}{\hbar^2} S_{\hat{F}}(-\omega). \quad (3.25)$$

El cálculo para el caso de la transición n a $n - 1$ es completamente análogo y resulta en

$$p_{n,n-1} = \frac{x_0^2(n)}{\hbar^2} S_{\hat{F}}(\omega). \quad (3.26)$$

Ambas transiciones son más probables entre mayor el número de ocupación n y no existe una transición hacia abajo cuando $n = 0$. Sin embargo la propiedad que resulta de mayor interés es que la transición hacia estados con mayor número de excitaciones depende de la parte negativa del espectro de $S_{\hat{F}}(\omega)$ y la transición descendente depende de la parte positiva, como se vio anteriormente. Con estas tasas de transición se puede escribir una ecuación diferencial para la probabilidad de encontrar al oscilador en el estado n . Esta debe ser simplemente la probabilidad de que el oscilador entre al estado n menos la probabilidad de que abandone el estado n , dada por

$$\frac{d}{dt} p_n = [nR_{\uparrow}p_{n-1} + (n+1)R_{\downarrow}p_{n+1}] - [nR_{\downarrow} + (n+1)R_{\uparrow}] p_n, \quad (3.27)$$

donde se emplea la notación

$$R_{\uparrow} = \frac{x_0^2}{\hbar^2} S_{\hat{F}}(-\omega),$$

$$R_{\downarrow} = \frac{x_0^2}{\hbar^2} S_{\hat{F}}(\omega),$$

para las tasas de transición del oscilador. La energía promedio del oscilador armónico está dada por la suma de la energía de cada posible estado multiplicada por la probabilidad de ocupación correspondiente. Esto permite llegar, empleando la ecuación (3.27), a

$$\frac{d}{dt}\langle E \rangle = -\gamma\langle E \rangle + \frac{\bar{S}_{FF}[\omega]}{2m}, \quad (3.28)$$

la cual tiene la misma forma que la ecuación clásica, sin embargo en este caso se tiene que

$$\gamma = \frac{x_0^2}{\hbar^2} (S_{FF}[\omega] - S_{FF}[-\omega]), \quad (3.29)$$

$$\bar{S}_{FF}[\omega] = \frac{S_{FF}[\omega] + S_{FF}[-\omega]}{2}. \quad (3.30)$$

La densidad de potencia espectral cuántica parecía contener más información que su análogo clásico, puesto que describe dos procesos distintos. Lo que se observa aquí es que la parte simétrica contiene la información de como las fluctuaciones del baño calientan el oscilador de la misma forma que en el caso clásico y la parte asimétrica corresponde al coeficiente de decaimiento clásico, al describir como el baño puede enfriar el oscilador. La asimetría de la función de densidad de potencia espectral se debe por completo al hecho de que el operador que describe la acción del baño no necesariamente conmuta consigo mismo a tiempos distintos. Dado que ambos factores dependen de la densidad de potencia espectral, el enfriamiento del oscilador es el resultado de controlar la densidad de potencia espectral del baño con el cual interacciona el oscilador, favoreciendo la parte asimétrica.

Capítulo 4

Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo

En este trabajo se estudia el comportamiento de una cavidad optomecánica con un resonador mecánico cuya frecuencia natural es una función periódica del tiempo. A fin de modelar este sistema es importante entender como modelar primero la evolución libre de un oscilador armónico cuya frecuencia natural es una función del tiempo. Primero se revisa de manera breve la teoría del oscilador armónico cuántico con frecuencia constante y después se estudia el caso de frecuencia dependiente del tiempo así como la ecuación de Mathieu y la teoría de Floquet, las cuales son necesarias para resolver el problema del oscilador armónico con dependencia temporal.

4.1. Oscilador Armónico Cuántico

Tanto el campo electromagnético dentro de una cavidad, como los resonadores mecánicos se describen mediante el formalismo del oscilador armónico cuántico [93]. El Hamiltoniano del oscilador armónico cuántico, cuando se consideran todos los modos, tiene la forma general

$$H = \sum_k \hbar \nu_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (4.1)$$

ν_k corresponde a la frecuencia de cada modo individual y se debe sumar sobre todos los modos. Los operadores a_k y a_k^\dagger se conocen como operadores de creación y aniquilación respectivamente y operan sobre la base de Fock de la siguiente forma [92]

$$a_k |n_k\rangle = \sqrt{n_k} |n_k - 1\rangle, \quad (4.2)$$

$$a_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{n_k + 1} |n_k + 1\rangle, \quad (4.3)$$

$$a_k^\dagger a_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle. \quad (4.4)$$

Las relaciones de conmutación están dadas por

$$[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{j,k}. \quad (4.5)$$

$$(4.6)$$

A manera de aproximación, usualmente se trabaja con un único modo, por lo que en general se omitirá el sub-índice k a menos que sea necesario. El término constante tampoco se tomará en cuenta desde este punto.

4.2. Oscilador Armónico Cuántico Dependiente del Tiempo: Evolución Libre

El Hamiltoniano dado en la sección 4.1 es, en el caso del resonador mecánico, expresable en términos de los operadores de posición y momento x y p como

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \nu^2 x^2, \quad (4.7)$$

donde m es la masa del resonador y ν su frecuencia natural. ¿Qué sucede si se tiene un Hamiltoniano explícitamente dependiente del tiempo en la frecuencia?

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\nu(t)^2x^2. \quad (4.8)$$

El caso de particular interés es el caso cuando $\nu(t)$ es una función periódica del tiempo. En este caso el problema se puede resolver de forma completamente análoga al caso de frecuencia constante siempre y cuando se puedan encontrar las soluciones a la ecuación de movimiento clásica para un resonador armónico con frecuencia dependiente del tiempo

$$\ddot{f}(t) + \nu(t)^2f(t) = 0. \quad (4.9)$$

Para los propósitos de este estudio, se considera una frecuencia de la forma

$$\nu(t) = \nu_0 + \epsilon' \cos(2\omega t), \quad (4.10)$$

donde ν_0 es la frecuencia promedio, ϵ' es un parámetro pequeño en relación a ν_0 y ω es la frecuencia con la que varía la frecuencia natural del resonador y a la cual se hace referencia con el nombre de frecuencia secundaria. Esta elección de $\nu(t)$ lleva a una ecuación de movimiento clásica a primer orden en el parámetro ϵ'

$$\ddot{f} + (\nu_0^2 + 2\epsilon'\nu_0 \cos(2\omega t))f = 0, \quad (4.11)$$

esta ecuación diferencial es conocida como la ecuación de Mathieu [94], la cual es un caso particular de la ecuación de Hill [95]

$$\frac{dy}{dt^2} + Q(t)y = 0. \quad (4.12)$$

La solución de la ecuación de Mathieu es necesaria para poder resolver, de forma analítica, el problema del oscilador armónico dependiente del tiempo por lo que se estudia de forma detallada.

4.2.1. Ecuación de Mathieu y teoría de Floquet

La ecuación de Mathieu usualmente se expresa de la forma [96]

$$\ddot{u} + (a - 2q \cos(2t))u = 0, \quad (4.13)$$

la discusión se limita al caso de a y q reales. Es directo llevar la ecuación (4.11) a esta forma. El tipo de solución que existe depende de los coeficientes a y q . En el caso donde únicamente es aceptable obtener soluciones con periodo π o 2π solo es posible encontrar una solución para ciertos valores de a y q [97]. Este caso lleva a obtener las así llamadas funciones de Mathieu $ce_n(t, q)$ y $se_n(t, q)$. El índice n en estas funciones refiere a que para cada valor de q se puede dar una serie de valores de a para los cuales existe una solución de este tipo. Estos valores usualmente se denotan por las series $a_n(q)$ para $ce_n(q)$ y $b_n(q)$ para $se_n(q)$. Las funciones $ce_n(t, q)$ son pares y las funciones $se_n(t, q)$ son impares. Estas tienden a $\cos(nt)$ y $\sin(nt)$ respectivamente cuando $q \rightarrow 0$. Este tipo de solución no es la más adecuada para un caso más general, ya que esto limitaría el estudio a sólo ciertos valores para la frecuencia. Por esto se busca una solución más general. Esta solución se obtiene mediante el teorema de Floquet [97], el cual dice que para una ecuación de la forma (4.13) es posible encontrar una solución de la forma

$$f(t) = e^{i\mu t} p(t) \quad (4.14)$$

donde μ se conoce como el exponente característico o de Floquet, el cual depende de a y q . La función $p(t)$ es una función periódica con un período igual al de $\cos(2t)$. La segunda solución está dada simplemente por $f^*(t)$. Estas soluciones están expresadas en la llamada forma de Floquet. En el caso general [96], se buscan soluciones donde μ es real para garantizar que la solución no diverja o tienda a cero para tiempos largos. Al ser una función periódica, la función $p(t)$ se puede expresar como serie de Fourier

$$p(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{2j} e^{2jit} \quad (4.15)$$

esta serie se puede sustituir en la ecuación de Mathieu y se obtiene una relación de recurrencia para los coeficientes de la serie. Esta relación es

$$\eta_j(\mu)c_{2j-2} + c_{2j} + \eta_j(\mu)c_{2j+2} = 0, \quad (4.16)$$

con

$$\eta_j(\mu) = \frac{q}{(2j - i\mu)^2 - a}. \quad (4.17)$$

El valor de μ queda determinado por

$$\Delta(\mu) = 0, \quad (4.18)$$

donde $\Delta(\mu)$ es el determinante del sistema de ecuaciones (4.16), este valor de μ garantiza soluciones no triviales. Sin embargo, esta solución es muy compleja para un manejo analítico. Para el caso de interés, donde $q \ll a$ es posible encontrar una solución, con la forma deseada, mediante una expansión en serie de potencias de q [98]. Empleando los parámetros de la ecuación (4.11), se escribe

$$\ddot{f}(t) + (a + \epsilon \cos(2t))f(t) = 0, \quad (4.19)$$

con $a = \frac{\nu_0^2}{\omega^2}$. Se usa de ahora en adelante el parámetro adimensional $\epsilon = \frac{2\epsilon'\nu_0}{\omega^2}$. Se absorbe el factor ω en el tiempo por simplicidad durante la derivación. Primero se determina la región de parámetros donde se buscará una solución a fin de encontrar una solución estable. Se sigue la derivación de [98]. Primero se expresa la solución en serie de Fourier de la forma

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \cos(2jt) + \sum_{j=1}^{\infty} s_j \sin(2jt), \quad (4.20)$$

y se sustituye en la ecuación (4.19) para obtener

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{j=0}^{\infty} (a - 4j^2) c_j \cos(2jt) + \sum_{j=1}^{\infty} (a - 4j^2) s_j \sin(2jt) \\
 & + \epsilon \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(2nt) \cos(2t) + \epsilon \sum_{j=1}^{\infty} s_j \sin(2jt) \cos(2t).
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Si se emplean las igualdades trigonométricas

$$\begin{aligned}
 \cos(A) \cos(B) &= \frac{1}{2} (\cos(A - B) + \cos(A + B)), \\
 \sin(A) \cos(B) &= \frac{1}{2} (\sin(A - B) + \sin(A + B)),
 \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{j=0}^{\infty} (a - 4j^2) c_j \cos(2jt) + \sum_{j=1}^{\infty} (a - 4j^2) s_j \sin(2jt) \\
 & + \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j (\cos(2(j+1)t) + \cos(2(j-1)t)) \\
 & + \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^{\infty} s_j (\sin(2(j+1)t) + \sin(2(j-1)t)),
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

por lo que se tiene

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty} (a - 4j^2) c_j \cos(2jt) \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j (\cos(2(j+1)t) + \cos(2(j-1)t)) \\
 0 = & \left(\delta c_0 + \frac{\epsilon}{2} c_1 \right) \cos(0) + \left((a - 4)c_1 + \frac{\epsilon}{2} (2c_0 + c_2) \right) \cos(2t) \\
 & + \sum_{j=2}^{\infty} \left((a - 4j^2) c_j + \frac{\epsilon}{2} (c_{j-1} + c_{j+1}) \right) \cos(2jt),
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

y de forma completamente análoga

$$0 = \sum_{j=1}^{\infty} (a - 4j^2) s_j \sin(2nt) \quad (4.25)$$

$$+ \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^{\infty} s_n (\sin(2(j+1)t) + \sin(2(j-1)t))$$

$$0 = \left((a - 4)s_1 + \frac{\epsilon}{2}s_2 \right) \sin(2t) \quad (4.26)$$

$$+ \sum_{j=2}^{\infty} \left((a - 4j^2) s_n + \frac{\epsilon}{2} (s_{j-1} + s_{j+1}) \right) \sin(2jt).$$

Se usa la ortogonalidad de las funciones $\cos(jx)$ y $\sin(jx)$ y se escriben los sistemas de ecuaciones resultantes de forma matricial

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{\epsilon}{2} & & & 0 \\ \epsilon & a - 4 \cdot 1^2 & \frac{\epsilon}{2} & & \\ & \frac{\epsilon}{2} & a - 4 \cdot 2^2 & \frac{\epsilon}{2} & \\ & & \frac{\epsilon}{2} & a - 4 \cdot 3^2 & \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & & & \ddots & \ddots \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

y

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 4 \cdot 1^2 & \frac{\epsilon}{2} & & & 0 \\ & \frac{\epsilon}{2} & a - 4 \cdot 2^2 & \frac{\epsilon}{2} & \\ & & \frac{\epsilon}{2} & a - 4 \cdot 3^2 & \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & & & \ddots & \ddots \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Para tener una solución distinta de cero, al menos uno de los determinantes de estos sistemas debe ser cero, lo cual genera las condiciones sobre ϵ y a . Las matrices son de dimensión infinita, por lo que usualmente se aproximan mediante el determinante de matrices de dimensión finita para algún valor de corte para j . Esto lleva a buscar soluciones cerca de $a = n^2$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ para $\epsilon \ll n^2$. Se propone una solución en serie de potencias de ϵ tal que

$$f = f_0(t) + \epsilon f_1(t) + \epsilon^2 f_2(t) + \dots, \quad (4.27)$$

$$a = n^2 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots, \quad (4.28)$$

y se obtiene la solución, regresando la variable de tiempo original, a primer orden en ϵ y en forma de Floquet

$$f(t) = \left(e^{in\omega t} + \epsilon \frac{1}{8(n+1)} e^{i(n+2)\omega t} - \epsilon \frac{1}{8(n-1)} e^{i(n-2)\omega t} \right). \quad (4.29)$$

Esta solución tiene la forma deseada, con $\mu = n$. No hay corrección a primer orden en ϵ para el exponente de Floquet. La segunda solución es $f^*(t)$. Es importante notar que no se emplea la solución general que se obtiene como combinación lineal de las dos soluciones obtenidas debido a que la solución general no tiene forma de Floquet.

4.2.2. Operadores de Floquet

Una vez obtenida la solución (4.29), es posible expresar el Hamiltoniano (4.8) de forma análoga al Hamiltoniano usual para el oscilador armónico cuántico [80]. Esto requiere la aplicación de dos transformaciones unitarias, aplicadas de forma

$$\tilde{H} = U^\dagger H U, \quad (4.30)$$

dadas primero por el operador

$$U_1 = e^{-i\frac{m}{4}\left(\frac{f(t)}{f(t)} + \frac{f^*(t)}{f^*(t)}\right)x^2}, \quad (4.31)$$

que resulta en operadores transformados \bar{x} y \bar{p} . Y una segunda transformación dada por el operador

$$U_2 = e^{\left(\frac{1}{4}i(\bar{p}\bar{x} + \bar{x}\bar{p}) \ln |f(t)|^2\right)}, \quad (4.32)$$

la cual resulta en operadores transformados $P(t)$ y $X(t)$. En términos de estos operadores, se escribe

$$\tilde{H} = \frac{1}{|f(t)|^2} \left(\frac{1}{2m} P^2(t) + \frac{1}{2} m W^2 Q^2(t) \right) \quad (4.33)$$

donde

$$W = \frac{\dot{f}(t)f^*(t) - f(t)\dot{f}^*(t)}{2i}, \quad (4.34)$$

es el Wronskiano del sistema. El Hamiltoniano (4.33) puede escribirse de forma

$$\tilde{H} = \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma'^{\dagger}(t) \Gamma'(t). \quad (4.35)$$

Estos operadores Γ' [81] se escriben en términos de los operadores originales \hat{x} y \hat{p} de la forma

$$\Gamma'(t) = \frac{1}{2i} \left[\hat{x} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \dot{f}(t) - \hat{p} \sqrt{\frac{2}{m\hbar}} f(t) \right], \quad (4.36)$$

$$\Gamma'^{\dagger}(t) = \frac{-1}{2i} \left[\hat{x} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \dot{f}^*(t) - \hat{p} \sqrt{\frac{2}{m\hbar}} f^*(t) \right]. \quad (4.37)$$

Los operadores dependen explícitamente del tiempo. Se emplean los operadores

$$\Gamma(t) = e^{-i\omega t} \Gamma'(t), \quad (4.38)$$

$$\Gamma^{\dagger}(t) = e^{i\omega t} \Gamma'^{\dagger}(t), \quad (4.39)$$

ya que estos operadores no tienen dependencia temporal si $\epsilon = 0$. Estos operadores se escriben

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2i} \left[\hat{x} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} h(t) - \hat{p} \sqrt{\frac{2}{m\hbar}} g(t) \right], \quad (4.40)$$

$$\Gamma^\dagger(t) = \frac{-1}{2i} \left[\hat{x} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} h^*(t) - \hat{p} \sqrt{\frac{2}{m\hbar}} g^*(t) \right] \quad (4.41)$$

con

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{n\omega}} \left(1 + \frac{\epsilon}{8(n+1)} e^{2i\omega t} - \frac{\epsilon}{8(n-1)} e^{-2i\omega t} \right),$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{n\omega}} \left(in\omega + \frac{\epsilon i\omega(n+2)}{8(n+1)} e^{2i\omega t} - \frac{\epsilon i\omega(n-2)}{8(n-1)} e^{-2i\omega t} \right).$$

Estas funciones están multiplicadas por una constante de normalización $\frac{1}{\sqrt{n\omega}}$ de tal forma que

$$[\Gamma(t), \Gamma^\dagger(t)] = 1. \quad (4.42)$$

A partir de este punto se omite escribir la dependencia explícita del tiempo de los operadores Γ por simplicidad. Estos operadores actúan sobre la base de Floquet que es análoga a la base de Fock

$$\Gamma |j\rangle = \sqrt{j} |j-1\rangle, \quad (4.43)$$

$$\Gamma^\dagger |j\rangle = \sqrt{j+1} |j+1\rangle. \quad (4.44)$$

Mediante este formalismo, la evolución libre del oscilador armónico cuántico dependiente del tiempo, considerando un solo modo, está descrito por el Hamiltoniano

$$H(t)_{mec} = \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger \Gamma. \quad (4.45)$$

Es importante notar que el operador $\Gamma^\dagger \Gamma$, al ser aplicado a un estado, resulta en el número de excitaciones de un oscilador armónico con frecuencia dependiente del

tiempo. Este es un sistema físicamente distinto del oscilador armónico cuántico usual, por lo que los operadores correspondientes a cada sistema no son intercambiables. El operador número correspondiente al oscilador armónico cuántico, $b^\dagger b$, al ser aplicado a un eigen-estado, resulta en el número de excitaciones en ese estado. Esas excitaciones son el número de fonones para la frecuencia correspondiente a un oscilador con frecuencia constante. Éstas no son las mismas excitaciones que las que corresponden a un oscilador cuya frecuencia es una función periódica del tiempo no trivial, es decir no es constante. No se puede emplear el operador número de un sistema para medir el número de excitaciones del otro sistema, cada uno se emplea para medir una cantidad física diferente.

Con esta teoría se puede proceder a modelar la disipación de un sistema optomecánico donde la frecuencia mecánica es una función periódica del tiempo.

4.3. Oscilador Armónico Dependiente del Tiempo: Evolución Abierta

Se puede ver la disipación en un sistema chico debido a la interacción con un sistema grande y cuya evolución no es de interés, llamado ambiente. Este ambiente, también conocido como baño térmico, consiste en un sistema que se asume lo suficientemente grande para no ser afectado por su interacción con el sistema cuya evolución si es de interés. Para describir la dinámica del sistema tomando en cuenta su interacción con el baño térmico cuya dinámica no se desea conocer se emplea el formalismo de ecuaciones maestras, el cual se detalla a continuación. Se sigue de cerca la derivación de [81]. Se parte de un Hamiltoniano de la forma

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_S(t) + \hat{H}_{SB} + \hat{H}_B, \quad (4.46)$$

donde $\hat{H}_S(t)$ es un Hamiltoniano de la forma (4.8) y modela a lo que se llamará sistema central, \hat{H}_B modela el comportamiento del baño térmico y \hat{H}_{SB} modela el acoplamiento entre ambos sistemas. El baño se describe como N osciladores armónicos

$$\hat{H}_B = \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\hat{p}_\nu^2}{2m_\nu} + \frac{m_\nu \omega_\nu^2 \hat{x}_\nu^2}{2} \right), \quad (4.47)$$

y el acoplamiento es de la forma

$$\hat{H}_{SB} = -\hat{x} \sum_{\nu=1}^N g_\nu \hat{x}_\nu + \hat{x}^2 \sum_{\nu=1}^N \frac{g_\nu^2}{2m_\nu \omega_\nu^2}, \quad (4.48)$$

que acopla al sistema a cada oscilador del baño, donde g_ν dicta la intensidad del acoplamiento entre el sistema central y cada oscilador del baño. El segundo término del acoplamiento corrige un corrimiento en el mínimo de potencial debido al acoplamiento. La densidad de potencia espectral del baño se calcula como se vio en el capítulo 3 y se obtiene

$$S(\omega) = \pi \sum_{\nu=1}^N \frac{g_\nu^2}{2m_\nu \omega_\nu} \delta(\omega - \omega_\nu). \quad (4.49)$$

Como condición inicial, se pide que para el tiempo $t = t_0$ el baño se encuentre en equilibrio térmico y no tenga correlación con el sistema central, lo cual lleva a que el operador densidad del sistema completo sea separable

$$\rho(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B^0. \quad (4.50)$$

Para este tipo de sistemas, el procedimiento usual es llegar a una ecuación para únicamente las variables del sistema central S, después de trazar sobre las variables del baño. Esta ecuación no siempre es posible de resolver de forma analítica. Sin embargo, en el caso de interacción débil entre el sistema y el baño, es posible realizar una expansión en serie de potencias. Se denota el efecto total del baño por el parámetro γ y se pide

$$\gamma \ll k_B T / \hbar$$

$$\gamma \ll \Delta_{nm}$$

donde T es la temperatura, k_B la constante de Boltzmann y Δ_{nm} denota la frecuencia de transición del sistema central de un estado n a un estado m . Bajo estas condiciones, las correlaciones del baño decaen de forma efectivamente instantánea en la escala de tiempo de las correlaciones del sistema central. Bajo estos parámetros, la ecuación para la evolución del sistema central se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) = & -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_S(t), \rho_S(t) \right] - \frac{i}{\hbar} \text{tr}_B \left[\hat{H}_{SB}, \rho_S(t) \right] \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \text{tr}_B \left[\hat{H}_{SB}, \left[\tilde{H}_{SB}(t-\tau, t), \rho_B^0 \otimes \rho_S(t) \right] \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

donde la tilde denota el marco de interacción definido por

$$\tilde{\mathcal{O}}(t, t') = U_0^\dagger(t, t') \hat{\mathcal{O}} U_0(t, t') \quad (4.52)$$

$$U_0(t, t') = \mathcal{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t dt'' \left(\hat{H}_S(t'') + \hat{H}_B \right) \right) \quad (4.53)$$

donde \mathcal{T} es el operador de ordenamiento temporal de Wick.

Por el teorema de Floquet, la ecuación de Schrödinger para un Hamiltoniano que depende de forma periódica del tiempo [99], como es el caso del sistema central, debe tener una solución de la forma

$$|\Psi_j(t)\rangle = e^{-i\mu_j t} |\phi_j(t)\rangle, \quad (4.54)$$

donde $|\phi_j(t)\rangle$ es periódica. En la región de soluciones estables $\mu_j = (j+1/2)\mu^0$ es real. El índice μ_j , el cual es el exponente de Floquet, está definido únicamente por algún módulo Ω_f debido a la periodicidad de $e^{i\mu t}$. A estos estados se les conoce como cuasi-estados de energía, y los posibles valores de $\mu_{j,k}$ como el cuasi-espectro de energía, el cual está dado por

$$\mu_{j,k} = (j+1/2)\mu^0 + k\Omega_f, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.55)$$

Las funciones de onda con el mismo índice j pero distinta k corresponden al mismo estado debido a la ambigüedad de la definición. Es conveniente conocer la forma de los elementos de matriz del operador x , en la base de estados de Floquet. Se tiene entonces

$$X_{n,m}(t) = \langle \Psi_n(t) | x | \Psi_m(t) \rangle \quad (4.56)$$

$$= e^{i(\mu_n - \mu_m)t} \langle \phi_n(t) | x | \phi_m(t) \rangle \quad (4.57)$$

$$= \sum_k e^{i\Delta_{n,m,k}t} X_{n,m,k}, \quad (4.58)$$

$$(4.59)$$

donde

$$X_{n,m,k} = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{-ik\Omega_f t} \langle \phi_n(t) | x | \phi_m(t) \rangle, \quad (4.60)$$

es el producto interno para las funciones $\phi_i(t)$. Se utilizó la periodicidad de los estados de Floquet. Las frecuencias de transición están dadas por

$$\Delta_{n,m,k} = \mu_n - \mu_m + k\Omega_f. \quad (4.61)$$

Se evalúan las componentes de Fourier en la representación espectral

$$X_{n,m}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n(x, t) x \psi_m(x, t) \quad (4.62)$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} (\sqrt{m} f(t) \delta_{n,m-1} + \sqrt{n} f^*(t) \delta_{n,m+1}), \quad (4.63)$$

y usando la expansión de Fourier de las soluciones $f(t)$ se llega a

$$X_{n,m,k} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} (\sqrt{m} c_{-k} \delta_{n,m-1} + \sqrt{n} c_k \delta_{n,m+1}). \quad (4.64)$$

Volviendo a la ecuación (4.51) pero ahora se limita la discusión a un baño Óhmico

tal que

$$I(\omega) = m\gamma\omega, \quad (4.65)$$

lo cual fija la relación entre la constante macroscópica γ que describe el efecto del baño y las constantes microscópicas g_ν que describen el acoplamiento a cada oscilador armónico del baño. Se impone un corte de Drude tal que

$$I(\omega) \rightarrow I(\omega)/(1 - i\omega/\omega_D)$$

con la frecuencia de corte ω_D mucho mayor que nu_0 y que Ω_f para evitar divergencias. La ecuación maestra se escribe entonces como

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S(t), \rho] \\ & + \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) n_{\text{th}}(\omega) \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} [\tilde{x}(t-\tau, t)\rho, \hat{x}] + \text{c.h.}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

donde c.h. denota el conjugado Hermitiano. Se tiene que

$$n_{\text{th}}(\omega) = (e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^{-1} = -n_{\text{th}}(-\omega) - 1, \quad (4.67)$$

es el número de excitaciones térmicas del oscilador del baño con frecuencia ω . Se escribe la matriz densidad del sistema en los estados de Floquet, los cuales son la solución de la ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano del sistema central

$$\rho_{nm}(t) = \langle \Psi_n(t) | \rho(t) | \Psi_m(t) \rangle, \quad (4.68)$$

la ecuación (4.66) se escribe ahora

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nm} = & \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega I(\omega) n_{\text{th}}(\omega) \\ & \times \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \sum_{n'm'} \{ X_{nn'}(t-\tau) \rho_{n',m'} X_{mm'}^*(t) - X_{n'n}^*(t) X_{n'm'}(t-\tau) \rho_{m'm} \} + \text{c.h.}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

al sustituir las formas explícitas de los elementos de matriz de \hat{x} se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{nm} = & \frac{1}{\hbar} \sum_{n'm'} \sum_{kk'} \{ -I(\Delta_{n'm'k'}) n_{\text{th}}(\Delta_{n'm'k'}) e^{i(\Delta_{n'm'k'} - \Delta_{nn'k})t} X_{n'nk}^* X_{n'm'k'} \rho_{m'm} \\ & + I(\Delta_{nn'k}) n_{\text{th}}(\Delta_{nn'k}) e^{i(\Delta_{nn'k} - \Delta_{nm'k'})t} X_{n'nk} \rho_{n'm'} X_{mm'k'}^* \} + \text{c.h.} \end{aligned} \quad (4.70)$$

aquí se ha empleado la igualdad

$$\int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} = \pi\delta(\omega) + P(i/\omega). \quad (4.71)$$

P es el valor principal de Cauchy [100]. Las cantidades Δ_{nmk} representan frecuencias de transición entre estados, por lo que las cuasi-energías del sistema central figuran en la ecuación (4.70). Dado que estas frecuencias son físicamente significativas si pueden ser utilizadas como argumentos para las funciones $n_{\text{th}}(\omega)$ e $I(\omega)$, a diferencia de las cuasi-energías mismas, ya que éstas están definidas de manera ambigua debido a la periodicidad. Se han descartado corrimientos en las frecuencias de transición debido a las partes principales de la integral. Ahora se procede a hacer la aproximación de onda rotante. Se asume que los factores de la forma $e^{i(\Delta_{nmk} - \Delta_{n'm'k'})t}$ donde $(n, m, k) \neq (n', m', k')$ oscilan más rápido que todos los demás factores con dependencia temporal y pueden ser ignorados. Sin embargo, por la forma del espectro de cuasi-energía, la condición $n - m = n' - m'$ y $k = k'$ es suficiente para que las frecuencias de transición correspondientes sean iguales, por lo que esos términos se deben conservar. Se hace la aproximación y se sustituye la ecuación (4.64) en (4.70) y se obtiene la ecuación

$$\dot{\rho}_{nm} = \frac{\gamma}{2} \{ (N+1) \left(2\sqrt{(n+1)(m+1)} \rho_{n+1,m+1} - (n+m) \rho_{nm} \right) \quad (4.72)$$

$$+ N \left(2\sqrt{nm} \rho_{n-1,m-1} - (n+m+2) \rho_{nm} \right) \} \quad (4.73)$$

donde la ocupación del baño térmico N

$$N = \sum_k (c_k^0)^2 (\mu^0 + k\Omega_f) n_{th} (\mu^0 + k\Omega_f), \quad (4.74)$$

se reduce a $N = n_{th}(\omega_0)$ en el límite sin forzamiento. Si se emplean las definiciones de la acción de los operadores de Floquet sobre los estados correspondientes, se llega de forma directa a

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_S(t), \rho] \quad (4.75) \\ & + \frac{\gamma}{2} \left\{ (n_m + 1) \left(2\hat{\Gamma} \rho \hat{\Gamma}^\dagger - \hat{\Gamma}^\dagger \hat{\Gamma} \rho - \rho \hat{\Gamma}^\dagger \hat{\Gamma} \right) + n_m \left(2\hat{\Gamma}^\dagger \rho \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}^\dagger \rho - \rho \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}^\dagger \right) \right\}. \end{aligned}$$

Donde esta ecuación se empleará utilizando n_m para denotar la ocupación del baño. Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación disipativa del oscilador armónico con frecuencia constante, con un término que modela la evolución libre y los términos disipativos, pero debido a que se tomó en cuenta que el sistema central posee un cuasi espectro de energía, la disipación queda expresada en términos de operadores de Floquet, por lo que en todo momento se ha tomado en cuenta la dependencia temporal explícita del sistema central. Esto hace que esta sea una descripción más correcta del sistema en comparación con el procedimiento común de agregar una dependencia temporal a los parámetros de la ecuación maestra sin dependencia temporal. Con este modelo de disipación es posible proceder a estudiar el enfriamiento optomecánico de un sistema compuesto por una cavidad optomecánica cuyo elemento mecánico tiene una frecuencia natural que depende explícitamente del tiempo.

Capítulo 5

Ecuación Maestra

Con los resultados del capítulo 4, se procede a escribir la ecuación maestra para un oscilador armónico con frecuencia natural dependiente del tiempo, acoplado a una cavidad de Fabry-Pérot, la cual recibe fotones de parte de una bomba láser con frecuencia Ω . Tanto el resonador mecánico como la cavidad interactúan de forma separada con su baño térmico correspondiente. La ecuación maestra se estudia en un marco de referencia desplazado, por lo que se hará esa transformación de forma detallada. Una vez obtenida la ecuación maestra en el marco de referencia deseado, se procederá a realizar la deducción de la ecuación maestra de enfriamiento láser, la cual modela el comportamiento únicamente del resonador mecánico con frecuencia natural dependiente del tiempo, en la escala de tiempo donde alcanza un estado estacionario, lo cual permite encontrar una medida de su temperatura al final de un proceso de enfriamiento.

5.1. Hamiltoniano Optomecánico

El Hamiltoniano del sistema es [30]

$$H(t) = H_{\text{cav}} + H_{\text{mec}}(t) + H_{\text{int}} + H_{\text{bomba}}, \quad (5.1)$$

donde

$$\begin{aligned}
H_{\text{cav}} &= -\hbar\delta a^\dagger a, \\
H_{\text{mec}}(t) &= \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger(t) \Gamma(t), \\
H_{\text{int}} &= -\hbar g_c a^\dagger a x, \\
H_{\text{bomba}} &= \hbar \frac{\Omega}{2} (a^\dagger + a).
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Aquí se han utilizado los resultados del capítulo 4 para expresar el Hamiltoniano del resonador mecánico en operadores de Floquet. El Hamiltoniano H_{cav} modela la evolución libre de la cavidad, en un marco de referencia que rota con la frecuencia del láser de bombeo, por lo que $\delta = \nu_c - \omega_l$. La intensidad del acoplamiento entre la cavidad y el oscilador está modulada por el parámetro g_c . Recordando que

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2i} \left[\hat{x} \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} h(t) - \hat{p} \sqrt{\frac{2}{m\hbar}} g(t) \right], \tag{5.3}$$

es posible expresar el operador x en términos de los operadores de Floquet como

$$\hat{x} = \gamma'_+(t) \Gamma + \gamma'_-(t) \Gamma^\dagger, \tag{5.4}$$

para funciones $\gamma'(t)_\pm$ que dependen de las soluciones de Floquet. De esta forma el Hamiltoniano de interacción se expresa como

$$H_{\text{int}}(t) = g_c \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} a^\dagger a [\gamma'_+(t) \Gamma + \gamma'_-(t) \Gamma^\dagger]. \tag{5.5}$$

Con esto, la ecuación maestra que gobierna el comportamiento del sistema cuando tanto la cavidad como el oscilador armónico dependiente del tiempo interactúan con un baño térmico es [101]

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + L_a \rho + L_\Gamma \rho = \mathcal{L} \rho, \tag{5.6}$$

donde

$$\begin{aligned} L_a \rho = & -\frac{\kappa}{2}(n_p + 1)[a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a - 2a \rho a^\dagger] \\ & -\frac{\kappa}{2}(n_p)[a a^\dagger \rho + \rho a a^\dagger - 2a^\dagger \rho a], \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} L_\Gamma \rho = & -\frac{\gamma}{2}(n_m + 1)[\Gamma^\dagger \Gamma \rho + \rho \Gamma^\dagger \Gamma - 2\Gamma \rho \Gamma^\dagger] \\ & -\frac{\gamma}{2}(n_m)[\Gamma \Gamma^\dagger \rho + \rho \Gamma \Gamma^\dagger - 2\Gamma^\dagger \rho \Gamma], \end{aligned} \quad (5.8)$$

κ describe la interacción de la cavidad con su baño térmico y γ describe la interacción del resonador mecánico con el suyo. n_p es el número de excitaciones térmicas del baño de la cavidad en la frecuencia resonante y n_m es el número de excitaciones térmicas del baño térmico al que está acoplado el resonador mecánico, en el límite donde no existe forzamiento, como se detalló en el capítulo 4. De no existir interacción optomecánica, la cavidad y el resonador mecánico se termalizarían a n_p y n_m excitaciones respectivamente [31]. La ecuación (5.6) es uno de los principales resultados de este trabajo, ya que describe la evolución de un sistema optomecánico donde la frecuencia natural del resonador mecánico se modula con el tiempo, y emplea un modelo de disipación que toma en cuenta el efecto del forzamiento del resonador mecánico sobre el espectro de cuasi-energía. Esto permite una descripción más correcta del sistema, ya que al trabajar con un resonador dependiente del tiempo, se requiere una expresión para el número de excitaciones de Floquet, las cuales son las que corresponden de forma natural al sistema.

5.2. Marco de Desplazamiento

A fin de eliminar el término de bombeo en (5.2) y para poder encontrar aproximaciones útiles se emplea una transformación a un marco de referencia desplazado dada por

$$U_{(a,\Gamma)} = e^{(\alpha(t)a^\dagger - \alpha^*(t)a)} e^{(\beta(t)\Gamma^\dagger - \beta^*(t)\Gamma)}, \quad (5.9)$$

y denotado por primas. A partir de este punto se omite escribir la dependencia temporal de $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ para compactar la notación. Es importante notar que, en el caso de un estado Gaussiano, como los que se consideran en este trabajo, esta transformación, al ser un desplazamiento, no altera segundos momentos [102]. La transformación se realiza mediante el lema de Baker-Hausdorff [92]

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (5.10)$$

Como se desea transformar la ecuación maestra (5.6), es importante tomar en cuenta el término de la derivada temporal del operador densidad. Esto lleva a la ecuación maestra transformada

$$U_{(a,\Gamma)} \dot{\rho}' U_{(a,\Gamma)}^\dagger = \mathcal{L}[U_{(a,\Gamma)} \rho' U_{(a,\Gamma)}^\dagger] - \dot{U}_{(a,\Gamma)} \rho' U_{(a,\Gamma)}^\dagger - U_{(a,\Gamma)} \rho' \dot{U}_{(a,\Gamma)}^\dagger \quad (5.11)$$

$$\dot{\rho}' = U_{(a,\Gamma)}^\dagger \mathcal{L}[U_{(a,\Gamma)} \rho' U_{(a,\Gamma)}^\dagger] U_{(a,\Gamma)} - U_{(a,\Gamma)}^\dagger \dot{U}_{(a,\Gamma)} \rho' - \rho' \dot{U}_{(a,\Gamma)}^\dagger U_{(a,\Gamma)}. \quad (5.12)$$

El efecto de la transformación en los operadores se obtiene de forma directa

$$\begin{aligned} U_{(a,\Gamma)}^\dagger a U_{(a,\Gamma)} &= e^{(\alpha^* a - \alpha a^\dagger)} e^{(\beta^* \Gamma - \beta \Gamma^\dagger)} a e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} e^{(\beta \Gamma^\dagger - \beta^* \Gamma)} \\ &= e^{(\alpha^* a - \alpha a^\dagger)} a e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}, \\ &= a - [(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), a] - [(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), [(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), a]] + \dots, \\ &= a - [\alpha a^\dagger, a] + [\alpha^* a, a] + \dots, \\ &= a - \alpha [a^\dagger, a] + \dots, \\ &= a + \alpha. \end{aligned}$$

Para el caso de las reglas de conmutación involucradas en este ejemplo la serie corta de forma natural ya que los primeros conmutadores de la serie son iguales a números

y los conmutadores subsecuentes son entonces iguales a cero. Esto permite escribir

$$U_{(a,\Gamma)}^\dagger a U_{(a,\Gamma)} = a + \alpha, \quad (5.13)$$

$$U_{(a,\Gamma)}^\dagger a^\dagger U_{(a,\Gamma)} = a^\dagger + \alpha^*, \quad (5.14)$$

$$U_{(a,\Gamma)}^\dagger \Gamma U_{(a,\Gamma)} = \Gamma + \beta, \quad (5.15)$$

$$U_{(a,\Gamma)}^\dagger \Gamma^\dagger U_{(a,\Gamma)} = \Gamma^\dagger + \beta. \quad (5.16)$$

Para el caso del operador $a^\dagger a$ se tiene

$$\begin{aligned} U_{(a,\Gamma)}^\dagger a^\dagger a U_{(a,\Gamma)} &= a^\dagger a - [(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), a^\dagger a] - [(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), [(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), a^\dagger a]] + \dots, \\ &= a^\dagger a - \alpha [a^\dagger, a^\dagger a] + \alpha^* [a, a^\dagger a] + \dots, \\ &= a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + \dots, \\ &= \dots + [(\alpha a^\dagger - \alpha^* a), [(\alpha a^\dagger + \alpha^* a)], \\ &= a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2. \end{aligned}$$

De nuevo los operadores Γ siguen las mismas reglas de conmutación lo que permite escribir

$$U_{(a,\Gamma)}^\dagger a^\dagger a U_{(a,\Gamma)} = a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2, \quad (5.17)$$

$$U_{(a,\Gamma)}^\dagger \Gamma^\dagger \Gamma U_{(a,\Gamma)} = \Gamma^\dagger \Gamma + \beta \Gamma^\dagger + \beta^* \Gamma + |\beta|^2. \quad (5.18)$$

Los términos que involucran la derivada temporal del operador $U_{(a,\Gamma)}$ se tratan con mayor detalle, debido a la dependencia temporal explícita de los operadores Γ . Estos detalles se encuentran en el apéndice. El Hamiltoniano transformado

$$H' = U_{(a,\Gamma)}^\dagger H U_{(a,\Gamma)} \quad (5.19)$$

se escribe entonces

$$\begin{aligned}
H' = & -\hbar\delta (a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a) + \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} (\Gamma^\dagger \Gamma + \beta \Gamma^\dagger + \beta^* \Gamma) \\
& - \hbar g_c \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} [(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2) (\gamma_-(t) (\Gamma^\dagger + \beta^*) + \gamma_+(t) (\Gamma + \beta))] \\
& + \frac{\hbar\Omega}{2} (a^\dagger + a) + i\hbar (\dot{\alpha}^* a - \dot{\alpha} a^\dagger + \dot{\beta}^* \Gamma - \dot{\beta} \Gamma^\dagger) \\
& + i\hbar \left(\frac{\kappa}{2} (\alpha a^\dagger - \alpha^* a) + \frac{\gamma}{2} (\beta \Gamma^\dagger - \beta^* \Gamma) \right) + i\hbar (\beta^* \dot{\Gamma} - \dot{\beta} \Gamma^\dagger).
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Se han descartado los términos constantes ya que éstos no afectan la dinámica. Los términos proporcionales a las constantes de disipación provienen de la transformación de los términos de disipación L_a y L_Γ . En la ecuación (5.20) observamos un término de bombeo que involucra las derivadas temporales de los operadores de Floquet. Se tiene entonces la ecuación maestra

$$\dot{\rho}' = \frac{1}{i\hbar} [H', \rho'] + L'_a \rho' + L'_\Gamma \rho' + C(t)\rho = \mathcal{L}' \rho' + C(t)\rho, \tag{5.21}$$

donde

$$C(t) = -[\dot{\Gamma}^\dagger, \Gamma^\dagger](\beta^2 - |\beta|^2) - [\dot{\Gamma}, \Gamma](\beta^2 - |\beta|^2). \tag{5.22}$$

y L_a y L_Γ son los operadores mencionados en (5.7) y (5.8) respectivamente. En este punto se imponen condiciones a α y β con el fin de eliminar el término original de bombeo y de emplear aproximaciones útiles. Para obtener estas condiciones se reagrupa el Hamiltoniano, poniendo especial atención en los términos de orden uno en operadores, por ejemplo para el caso del operador a se tiene

$$a(-\hbar\delta\alpha^* - \hbar g_c \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} (\gamma'_-(t)\beta^* + \gamma'_+(t)\beta) + \frac{\hbar}{2}\Omega + i\hbar\dot{\alpha}^* + i\hbar\frac{\kappa}{2}\alpha).$$

Si se realiza el mismo proceso para los operadores a^\dagger , Γ y Γ^\dagger , se obtienen ecuaciones diferenciales para α , α^* , β y β^* . En el régimen de parámetros en el que se trabaja, el estado estacionario de α y β se alcanza rápido y se tiene $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$. Con esto, se

tienen las ecuaciones

$$0 = \alpha \left(-\frac{\kappa}{2} + i(\delta + g_c \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} (\gamma'_-(t)\beta^* + \gamma'_+(t)\beta)) \right) - i\frac{\Omega}{2}, \quad (5.23)$$

$$0 = \beta \left(-\frac{\gamma}{2} - i\frac{W}{|f(t)|^2} \right) + ig_c \sqrt{\frac{\hbar}{2M}} |\alpha|^2 \gamma'_-(t). \quad (5.24)$$

Se pide que el acoplamiento sea lo suficientemente débil para resolver estas ecuaciones a orden cero en el parámetro de acoplamiento. Esto lleva a obtener las soluciones

$$\alpha_0 = \frac{\Omega}{2\delta + i\kappa}, \quad (5.25)$$

$$\beta_0 = 0, \quad (5.26)$$

como puede verse en [103] El sub-índice cero denota que son válidas sólo en un régimen de acoplamiento débil. Bajo estos parámetros, el Hamiltoniano se escribe

$$\begin{aligned} H' = & -\hbar\delta a^\dagger a + \hbar \frac{W}{|f(t)|^2} \Gamma^\dagger \Gamma \\ & - \hbar g_c \sqrt{\frac{\hbar}{2M}} [(\alpha_0 a^\dagger + \alpha_0^* a)(\gamma'_-(t)\Gamma^\dagger + \gamma'_+(t)\Gamma)]. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Se ha hecho la aproximación $\alpha \gg 1$, la cual lleva a despreciar el término del operador número de los operadores de la cavidad en el término de interacción optomecánica. Esto quiere decir que se pide que el láser de bombeo tenga una potencia alta en comparación con la disipación de la cavidad y que no esté muy lejos de la frecuencia de resonancia del modo en consideración. El Hamiltoniano de interacción, en términos de las funciones $g(t)$, se escribe como

$$H_{int}(t) = \hbar g_c \sqrt{\frac{\hbar}{2M}} (\alpha_0^* a + \alpha_0 a^\dagger) (g^*(t)\Gamma(t) + g(t)\Gamma^\dagger(t)),$$

y esto se puede re-escribir utilizando un nuevo parámetro $\chi_0 = g_c \sqrt{\frac{\hbar}{\nu_0 2M}}$. Es conve-

niente separar este Hamiltoniano de acuerdo a su dependencia en ϵ

$$H_{int}(t) = H_{int}^0 + H_{int}^\epsilon(t),$$

donde

$$\begin{aligned} H_{int}^0(t) &= \chi_0(\alpha_0^* a + \alpha_0 a^\dagger)(\Gamma(t) + \Gamma^\dagger(t)), \\ H_{int}^\epsilon(t) &= \chi_0 \epsilon (\alpha_0^* a + \alpha_0 a^\dagger) \times \\ &\quad \left(\frac{1}{8(n+1)} (e^{-2i\omega t} \Gamma(t) + e^{2i\omega t} \Gamma^\dagger(t)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8(n-1)} (e^{2i\omega t} \Gamma(t) + e^{-2i\omega t} \Gamma^\dagger(t)) \right). \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene el Hamiltoniano transformado

$$H(t) = -\hbar\delta a^\dagger a + \hbar\nu_0 \Gamma^\dagger \Gamma - H_{int}(t), \quad (5.28)$$

despreciando términos de orden $\frac{\epsilon}{n^2}$. ¿Que significa trabajar en este marco? En términos físicos, el operador de desplazamiento [104] tiene el efecto

$$e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle = |\alpha\rangle, \quad (5.29)$$

para la cavidad. Esto quiere decir que en el marco desplazado, hacer referencia a $|0\rangle$ es hacer referencia a un estado coherente. Debido al bombeo, la cavidad se encuentre en un estado coherente con frecuencia α_0 . La frecuencia natural de la cavidad no tiene un corrimiento en este régimen de parámetros, sin embargo elegir un régimen donde $\beta \neq 0$ llevaría a que la frecuencia natural de la cavidad tuviese un corrimiento proporcional a $Re(\beta)$ y que el resonador mecánico se enfriara hacia un estado coherente. Con esto se llega a la ecuación maestra en el marco de desplazamiento

$$\dot{\rho}' = \frac{1}{i\hbar} [H', \rho'] + L'_a \rho + L'_\Gamma \rho' = \mathcal{L}' \rho', \quad (5.30)$$

la cual es uno de los resultados principales de este trabajo. Esta ecuación se puede emplear para modelar cualquier tipo de sistema optomecánico donde la frecuencia

natural del elemento mecánico es una función periódica del tiempo, y será usada para modelar, a manera de ejemplo, el enfriamiento de los grados de libertad mecánicos del sistema. A partir de este punto se omitirá denotar el marco de desplazamiento mediante el uso de primas puesto que todos los cálculos se realizan en este marco.

5.3. Base de Decaimiento

Antes de proceder, es necesario entender la base comúnmente empleada al trabajar con ecuaciones como (5.30). Esta base se conoce como la base de decaimiento [105]. Se piensa en una ecuación de la forma

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}_{cav}\rho = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho] + L_a\rho, \quad (5.31)$$

con

$$\begin{aligned} L_a\rho = & -\frac{\kappa}{2}(n_p + 1)[a^\dagger a\rho + \rho a^\dagger a - 2a\rho a^\dagger] \\ & -\frac{\kappa}{2}(n_p)[aa^\dagger\rho + \rho aa^\dagger - 2a^\dagger\rho a], \end{aligned} \quad (5.32)$$

y

$$H = \hbar\nu_c a^\dagger a. \quad (5.33)$$

Los operadores a son operadores de creación y aniquilación de oscilador armónico. Se parte de asumir que se tiene una solución para (5.31) tal que se conocen todos los eigenestados y todos los eigenvalores. Si el estado inicial del sistema está dado por $\rho(0)$, se puede entonces realizar la expansión

$$\rho(0) = \sum_{\lambda} \check{c}_{\lambda} \hat{\rho}_{\lambda}, \quad (5.34)$$

donde la suma es sobre todos los eigenvalores y se conoce el estado al tiempo t

$$\rho(t) = \sum_{\lambda} \check{c}_{\lambda} e^{\lambda t} \hat{\rho}_{\lambda}. \quad (5.35)$$

El problema se convierte entonces en poder calcular los coeficientes de la expansión, los cuales están dados por

$$\check{c}_{\lambda} = \text{Tr} \{ \check{\rho}_{\lambda} \rho(0) \}. \quad (5.36)$$

Los estados $\check{\rho}$ cumplen la relación

$$\text{Tr} \{ \check{\rho}_{\lambda} \hat{\rho}_{\lambda'} \} = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (5.37)$$

Se tiene entonces eigenestados denotados como $\hat{\rho}_{\lambda}$ y estados duales, denotados como $\check{\rho}_{\lambda}$. Este tipo de estados surgen del término L_a . Este tipo de términos se conocen como super-operadores ya que actúan sobre operadores, tales como el operador densidad, y actúan de forma distinta al ser aplicados por la derecha o por la izquierda. Esto lleva a considerar estados llamados derechos e izquierdos, la nomenclatura corresponde al lado por el cual se aplica el súper operador, ambos correspondientes al mismo eigenvalor. Los estados derechos son entonces duales de los estados izquierdos. Denotamos a los estados izquierdos como $\hat{\rho}_n^j$ y a los estados derechos como $\check{\rho}_n^j$, tal que

$$L_a \hat{\rho}_n^j = \lambda_n^j \hat{\rho}_n^j, \quad (5.38)$$

$$\check{\rho}_n^j L_a = \lambda_n^j \check{\rho}_n^j. \quad (5.39)$$

La parte real de los eigenvalores λ_n^j correspondientes a estos estados, por razones físicas, deben ser no positivos, ya que se espera que los estados correspondientes a procesos disipativos decaigan con el tiempo [106]. Se tiene que los eigenvalores se escriben como

$$\lambda_n^j = ij\nu_c - \kappa \left[n + \frac{|j|}{2} \right]. \quad (5.40)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. La parte imaginaria de cada eigen-valor corresponde a la evolución libre del Hamiltoniano, acompañada por una parte real no positiva que corresponde a la disipación. Estos estados están dados, en términos de operadores de creación y aniquilación como

$$\hat{\rho}_n^l = a^{\dagger j} \frac{(-1)^n}{(n_p + 1)^{j+1}} : L_n^l \left[\frac{a^\dagger a}{n_p + 1} \right] e^{-\left[\frac{a^\dagger a}{n_p + 1} \right]} : \quad j \geq 0, \quad (5.41)$$

$$\hat{\rho}_n^j = \frac{(-1)^n}{(n_p + 1)^{|j|+1}} : L_n^{|j|} \left[\frac{a^\dagger a}{n_p + 1} \right] e^{-\left[\frac{a^\dagger a}{n_p + 1} \right]} : a^{|j|} \quad j \leq 0, \quad (5.42)$$

para los estados izquierdos y

$$\check{\rho}_n^j = \left(\frac{-n_p}{n_p + 1} \right)^n \frac{n!}{(n + j)!} : L_n^j \left[\frac{a^\dagger a}{n_p} \right] : a^j \quad j \geq 0, \quad (5.43)$$

$$\check{\rho}_n^j = \left(\frac{-n_p}{n_p + 1} \right)^n \frac{n!}{(n + |j|)!} a^{\dagger |j|} : L_n^{|j|} \left[\frac{a^\dagger a}{n_p} \right] : \quad j \leq 0, \quad (5.44)$$

para los estados derechos también conocidos como estados duales. Los estados izquierdos y derechos son ortonormales bajo la traza

$$(\hat{\rho}_n^j, \check{\rho}_{n'}^{j'}) = Tr[\hat{\rho}_n^j \check{\rho}_{n'}^{j'}] = \delta_{n,n'} \delta_{j,j'}, \quad (5.45)$$

y cumplen una relación de completez

$$\sum_{\lambda} \hat{\rho}_{\lambda} \otimes \check{\rho}_{\lambda} = \mathbb{I}, \quad (5.46)$$

donde la suma es sobre todos los posibles eigenvalores. Para el caso de un sistema donde el número de excitaciones térmicas del sistema disipativo se puede considerar como 0, se tiene el caso más simple

$$\hat{\rho}_n^j = a^{\dagger j} (-1)^{a^\dagger a + n} \binom{n+j}{a^\dagger a + j} \quad j \geq 0, \quad (5.47)$$

$$\hat{\rho}_n^j = (-1)^{a^\dagger a + n} \binom{n+|j|}{a^\dagger a + |j|} a^{|j|} \quad j < 0, \quad (5.48)$$

y

$$\check{\rho}_n^j = \frac{n!}{(n+j)!} \binom{a^\dagger a}{n} a^j \quad j \geq 0, \quad (5.49)$$

$$\check{\rho}_n^j = a^{\dagger |j|} \frac{n!}{(n+|j|)!} \binom{a^\dagger a}{n} \quad j < 0. \quad (5.50)$$

Finalmente, si no se considera disipación, los estados correspondientes son

$$\hat{\rho}_n^l = |n+l\rangle \langle n| = \check{\rho}_n^{\dagger l}, \quad (5.51)$$

con eigenvalores

$$\lambda_l = i l \nu_0. \quad (5.52)$$

Se tiene $(n+l) > 0$. Estos estados se construyen de forma completamente análoga en el caso de los operadores de Floquet, ya que siguen las mismas reglas de conmutación.

5.4. Proyección dependiente de escalas de evolución

A fin de obtener una ecuación maestra que describa únicamente los grados de libertad mecánicos, para un sistema que lleva a cabo un proceso de enfriamiento, se emplean operadores de proyección que separan al espacio en dos sub-espacios distintos. Estos operadores son similares a los empleados en [100]. El primer sub-espacio corresponde a los estados de evolución lenta que evolucionan en un tiempo largo. Esto necesariamente implica que la parte real de sus eigenvalores es cero. Los eigenvalores de los estados que corresponden a este sub-espacio se denotan mediante el sub-índice λ . El segundo sub-espacio corresponde a los estados de evolución rápida, estos decaen

en poco tiempo. Estos estados se denotan mediante el sub-índice λ' . Los proyectores a estos espacios se denotan por P y Q respectivamente. En términos de ecuaciones

$$\begin{aligned} P &= \sum_{\lambda} (\hat{\rho}_{\lambda}^{cav} \otimes \hat{\rho}_{\lambda}^{mec}) \otimes (\check{\rho}_{\lambda}^{cav} \otimes \check{\rho}_{\lambda}^{mec}), \\ &= \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\lambda'} (\hat{\rho}_{\lambda'}^{cav} \otimes \hat{\rho}_{\lambda'}^{mec}) \otimes (\check{\rho}_{\lambda'}^{cav} \otimes \check{\rho}_{\lambda'}^{mec}), \\ &= \sum_{\lambda} \mathcal{Q}_{\lambda}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Notando que cada proyector está compuesto por estados derechos e izquierdos tanto para la cavidad como para el elemento mecánico. Estos proyectores se aplican a la ecuación maestra correspondiente al Hamiltoniano (5.27), sin tomar en cuenta la disipación mecánica. Esto se debe a que ésta es mucho más lenta que los demás procesos. Esto, aunado a que se busca trabajar con cavidades con un factor de calidad del orden de 10^6 , lleva a que la disipación mecánica, la cual ocurre con frecuencia γn_m sea varios órdenes de magnitud más lenta que la disipación optomecánica [36]. Esto permite incorporar la disipación mecánica hasta el final del procedimiento. Esta ecuación maestra se escribe

$$\dot{\rho} = (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1)\rho, \quad (5.55)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \mathcal{L}_{cav} + \mathcal{L}_{mec}, \\ &= \left(\frac{1}{i\hbar} [H_{cav}, \bullet] + L_a \right) + \left(\frac{1}{i\hbar} [H_{mec}, \bullet] \right), \end{aligned} \quad (5.56)$$

describe la evolución libre de la cavidad y el resonador mecánico, el punto denota donde entra el operador densidad, y

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1^0 + \mathcal{L}_1^\epsilon = \frac{1}{i\hbar} [H_{int}^0 + H_{int}^\epsilon \bullet], \quad (5.57)$$

describe la interacción, separando la parte del Hamiltoniano de interacción que es proporcional a ϵ de la cual no lo es. Los operadores que se emplean para proyectar la ecuación maestra cumplen varias propiedades [93]

1. $P + Q = \mathcal{I}$. La suma de ambos proyectores cubre todo el espacio, \mathcal{I} es la identidad.
2. $P\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0P = 0$. Debido a que P proyecta al sub-espacio correspondiente a estados estacionarios, los cuales necesariamente tienen eigenvalores con parte real igual a cero.
3. $P\mathcal{L}_1P = 0$. Ya que la interacción no acopla estados en el sub-espacio de P .
4. $P^2 = P \quad Q^2 = Q$ Ya que tanto P y Q son proyectores.

Los cálculos se realizan en el marco de decaimiento, así que se expresa la ecuación maestra mediante

$$\dot{\rho}' = \mathcal{L}'_1 \rho', \quad (5.58)$$

donde se tiene

$$\begin{aligned} \rho' &= e^{-\int_0^t \mathcal{L}_0 dt'} \rho, \\ \mathcal{L}'_1 &= e^{-\int_0^t \mathcal{L}_0 dt'} \mathcal{L}_1 e^{\int_0^t \mathcal{L}_0 dt'}. \end{aligned}$$

de forma explícita, para la expresión empleada para el Hamiltoniano mecánico, se puede escribir

$$\rho' = e^{-\mathcal{L}_0 t} \rho, \quad (5.59)$$

$$\mathcal{L}'_1 = e^{-\mathcal{L}_0 t} \mathcal{L}_1 e^{\mathcal{L}_0 t}. \quad (5.60)$$

La ecuación (5.58) se proyecta a ambos sub-espacios y se obtienen dos ecuaciones

$$\begin{aligned} P\dot{\rho}' &= P\mathcal{L}'_1 Q\rho', \\ Q\dot{\rho}' &= Q\mathcal{L}'_1 Q\rho' + Q\mathcal{L}'_1 P\rho'. \end{aligned}$$

Se resuelve la ecuación correspondiente al sub-espacio Q mediante integración formal

$$\begin{aligned} Q\rho &= Q\rho'(t_0) + \int_{t_0}^t dt' Q\mathcal{L}'_1(t') P\rho'(t') \\ &\quad + \int_{t_0}^t dt' Q\mathcal{L}'_1(t') Q\rho'(t'), \end{aligned}$$

aquí se emplea la aproximación de Markov al aproximar $\rho(t')$ como $\rho(t_0)$, esto resulta en

$$\begin{aligned} Q\rho &= Q\rho'(t_0) + \int_{t_0}^t dt' Q\mathcal{L}'_1(t') P\rho'(t_0) \\ &\quad + \int_{t_0}^t dt' Q\mathcal{L}'_1(t') Q\rho'(t_0), \end{aligned}$$

esa ecuación se puede sustituir en el lado derecho de la ecuación correspondiente al sub-espacio P

$$\begin{aligned} P\dot{\rho}'(t) &= P\mathcal{L}'_1 Q\rho'(t_0) \\ &\quad + P\mathcal{L}'_1 \int_{t_0}^t dt' Q\mathcal{L}'_1(t') P\rho'(t_0) \\ &\quad + P\mathcal{L}'_1 \int_{t_0}^t dt' Q\mathcal{L}'_1(t') Q\rho'(t_0). \end{aligned} \tag{5.61}$$

Es posible elegir una condición inicial $\rho(t_0)$ que no tenga parte en Q y de esta forma sólo el segundo término es no nulo. Se toma únicamente este término y se regresa del marco de decaimiento para obtener la ecuación

$$\begin{aligned}
P\dot{\rho}'(t) &= P e^{-\mathcal{L}_0 t} \mathcal{L}_1 e^{\mathcal{L}_0 t} \\
&\times \int_{t_0}^t dt' Q e^{-\mathcal{L}_0 t'} \mathcal{L}_1 e^{\mathcal{L}_0 t'} P e^{-\mathcal{L}_0 t_0} \rho(t_0).
\end{aligned} \tag{5.62}$$

En este punto es conveniente estudiar de forma más detallada la forma explícita de los proyectores. Se tiene

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{\lambda} (\hat{\rho}_{\lambda}^{cav} \otimes \hat{\rho}_{\lambda}^{mec}) \otimes (\check{\rho}_{\lambda}^{cav} \otimes \check{\rho}_{\lambda}^{mec}), \\
&= \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda_a} \mathcal{P}_{\lambda_{\Gamma}}, \\
&= \sum_{\lambda} \mathcal{P}_{\lambda},
\end{aligned} \tag{5.63}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{\lambda'} (\hat{\rho}_{\lambda'}^{cav} \otimes \hat{\rho}_{\lambda'}^{mec}) \otimes (\check{\rho}_{\lambda'}^{cav} \otimes \check{\rho}_{\lambda'}^{mec}), \\
&= \sum_{\lambda'} \mathcal{Q}_{\lambda'_a} \mathcal{Q}_{\lambda'_{\Gamma}}, \\
&= \sum_{\lambda'} \mathcal{Q}_{\lambda'}.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Cada proyector, como se mencionó anteriormente, está compuesto del producto tensorial de estados tanto de la cavidad como mecánicos y contiene los estados izquierdos y los estados derechos para ambos sistemas. Estos proyectores se aplican de la forma

$$PX = \hat{\rho}_{\lambda} \text{Tr}[\check{\rho}_{\lambda} X], \tag{5.65}$$

y de igual forma para Q , recordando que

$$\hat{\rho}_{\lambda} = \hat{\rho}_{\lambda}^{mec} \otimes \hat{\rho}_{\lambda}^{cav}. \tag{5.66}$$

Se emplean las definiciones de los proyectores (5.53) y (5.54) en la ecuación(5.62). Se

aplica el operador \mathcal{L}_0 y se llega a

$$P\dot{\rho}'(t) = Pe^{-\mathcal{L}_0 t} \mathcal{L}_1 \left(\sum_{\lambda', \lambda} \int_{t_0}^t dt' e^{\lambda' t'} \hat{\rho}_{\lambda'} \otimes \check{\rho}_{\lambda'} e^{-\lambda' t'} \mathcal{L}_1 \right. \\ \left. e^{\lambda' t'} \hat{\rho}_{\lambda} \otimes \check{\rho}_{\lambda} e^{-\lambda' t_0} \rho(t_0) \right). \quad (5.67)$$

\mathcal{L}_1 se puede aproximar como independiente del tiempo para propósitos de esta integración de forma que se obtiene

$$\int_0^t dt' e^{\lambda t'} \mathcal{L}_1^0(t') = \left(\frac{e^{\lambda t}}{(\lambda_0 - \lambda'_0)} \mathcal{L}_1^0(t') \right) \Big|_0^t, \quad (5.68)$$

$$\int_0^t dt' e^{\lambda t'} \mathcal{L}_1^\epsilon(t') = \left(\frac{e^{\lambda t}}{(\lambda_0 - \lambda'_0)} \mathcal{L}_1^\epsilon(t') \right) \Big|_0^t, \quad (5.69)$$

al despreciar términos de orden $\frac{\epsilon}{n^2}$, recordando que se trabaja con $n \gg \epsilon$. Se regresan los proyectores a su notación original y se tiene

$$P\dot{\rho}'(t) = Pe^{-\mathcal{L}_0 t} \mathcal{L}_1 \left(\sum_{\lambda', \lambda} e^{\lambda' t - \lambda t_0} \right. \\ \left. \int_{t_0}^t dt' \mathcal{Q}_{\lambda'} e^{(\lambda - \lambda') t'} \mathcal{L}_1 \mathcal{P}_{\lambda} \rho(t_0) \right). \quad (5.70)$$

La integración es entonces directa y se tiene

$$P\dot{\rho}'(t) = Pe^{-\mathcal{L}_0 t} \mathcal{L}_1 \left(\sum_{\lambda', \lambda} \frac{1}{(\lambda - \lambda')} e^{\lambda' t - \lambda t_0} \right. \\ \left. \mathcal{Q}_{\lambda'} (e^{lt} - e^{lt_0}) \mathcal{L}_1 \mathcal{P}_{\lambda} \rho(t_0) \right), \quad (5.71)$$

con $l = \lambda - \lambda'$. Después de realizar las multiplicaciones de exponenciales se obtiene

$$P\dot{\rho}'(t) = Pe^{-\mathcal{L}_0 t} \mathcal{L}_1 \left(\sum_{\lambda', \lambda} \frac{1}{(\lambda - \lambda')} (e^{\lambda(t-t_0)} - e^{\lambda'(t-t_0)}) \right. \\ \left. \mathcal{Q}_{\lambda'} \mathcal{L}_1 \mathcal{P}_{\lambda \rho}(t_0) \right). \quad (5.72)$$

Los términos proporcionales a $e^{\lambda' t}$ se desprecian puesto que esos eigen-valores decaen rápido y en la escala de tiempo correspondiente a la evolución lenta se consideran como cero. Se utiliza que $\lambda = 0$, y se escribe

$$P\dot{\rho}(t) = \sum_{\lambda'} \left(\frac{-1}{\lambda'} P \mathcal{L}_1^0(t) \mathcal{Q}_{\lambda'} \mathcal{L}_1^0(t) P \rho(0) \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda'} P \mathcal{L}_1^0(t) \mathcal{Q}_{\lambda'} \mathcal{L}_1^\epsilon(t) P \rho(0) \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda'} P \mathcal{L}_1^\epsilon(t) \mathcal{Q}_{\lambda'} \mathcal{L}_1^0(t) P \rho(0) \right). \quad (5.73)$$

Se ha utilizado la separación de $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1^0 + \mathcal{L}_1^\epsilon$ y se ha descartado el término proporcional a ϵ^2 . Si se substituye la definición de \mathcal{L}_1 se tiene

$$P\dot{\rho}(t) = \sum_{\lambda'} \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\lambda'} P [H_{int}^0(t), \bullet] \mathcal{Q}_{\lambda'} [H_{int}^0(t), \bullet] P \rho(0) \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda'} P [H_{int}^0(t), \bullet] \mathcal{Q}_{\lambda'} [H_{int}^\epsilon(t), \bullet] P \rho(0) \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda'} P [H_{int}^\epsilon(t), \bullet] \mathcal{Q}_{\lambda'} [H_{int}^0(t), \bullet] P \rho(0) \right). \quad (5.74)$$

Está es una ecuación maestra sólo para la evolución temporal correspondiente a los estados en el sub-espacio P . Sin embargo, aún incluye los grados de libertad de la cavidad, los cuales no son de interés para obtener una medida de la temperatura del resonador, por lo que se traza sobre los grados de libertad de la cavidad. Si se define

$\mu(t) = Tr_c[P\rho(t)]$ se tiene

$$\begin{aligned} \mu(t) = \sum_{\lambda'} \frac{1}{\hbar^2} & \left(Tr_c \left[\frac{1}{\lambda'} P[H_{int}^0(t), \bullet] \mathcal{Q}_{\lambda'}[H_{int}^0(t), \bullet] P\rho(0) \right] \right. \\ & + Tr_c \left[\frac{1}{\lambda'} P[H_{int}^0(t), \bullet] \mathcal{Q}_{\lambda'}[H_{int}^\epsilon(t), \bullet] P\rho(0) \right] \\ & \left. + Tr_c \left[\frac{1}{\lambda'} P[H_{int}^\epsilon(t), \bullet] \mathcal{Q}_{\lambda'}[H_{int}^0(t), \bullet] P\rho(0) \right] \right). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Esta es una ecuación maestra para el sub-espacio estacionario y para los grados de libertad mecánicos únicamente. Esta ecuación maestra puede llevarse a una forma más conveniente empleando la definición de $H_{int}(t)$, donde se emplea la notación

$$F_a = (\alpha_0^* a + \alpha_0 a^\dagger), \quad (5.76)$$

$$F_\Gamma = (\Gamma + \Gamma^\dagger), \quad (5.77)$$

$$F_\Gamma^+ = \frac{\epsilon}{8(n+1)} (e^{2i\omega t} \Gamma + e^{-2i\omega t} \Gamma^\dagger), \quad (5.78)$$

$$F_\Gamma^- = \frac{\epsilon}{8(n-1)} (e^{-2i\omega t} \Gamma + e^{2i\omega t} \Gamma^\dagger), \quad (5.79)$$

$$F_\Gamma^i = F_\Gamma^+ - F_\Gamma^-, \quad (5.80)$$

$$H_{int}^0 = \chi_0 F_a F_\Gamma, \quad (5.81)$$

$$H_{int}^\epsilon = \chi_0 F_a F_\Gamma^i, \quad (5.82)$$

a fin de obtener expresiones más compactas. Se trabaja con el primer término de la ecuación (5.75), el cual se puede escribir

$$\begin{aligned} \chi_0^2 \sum_{\lambda'} \frac{1}{\hbar^2} Tr_c \left[P[F_a F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'}[F_a F_\Gamma, \mu\rho_{st}]] \right] = \chi_0^2 \sum_{\lambda'} \frac{1}{\hbar^2} & \left(\frac{1}{\lambda'} (Tr_c \left[P F_a F_\Gamma \mathcal{Q}_{\lambda'}(F_a F_\Gamma \mu\rho_{st}) \right] \right. \\ & - Tr_c \left[P \mathcal{Q}_{\lambda'}(F_a F_\Gamma \mu\rho_{st}) F_a F_\Gamma \right] \\ & - Tr_c \left[P F_a F_\Gamma \mathcal{Q}_{\lambda'}(\mu\rho_{st} F_a F_\Gamma) \right] \\ & \left. + Tr_c \left[P \mathcal{Q}_{\lambda'}(\mu\rho_{st} F_a F_\Gamma) F_a F_\Gamma \right] \right). \end{aligned}$$

Aquí se ha asumido que la condición inicial es separable $\rho(0) = \rho_{mec} \otimes \rho_{st}$, lo cual equivale a pedir que no exista una correlación entre la cavidad y el resonador mecánico al inicio del proceso de enfriamiento optomecánico. Es útil notar que el proyector del espacio Q está desglosado en su forma de suma pero el proyector del espacio P no, debido a que ya se utilizó la forma de esos eigenvalores. En ambos casos los proyectores se pueden separar en la parte que corresponde a la cavidad y la que corresponde al resonador mecánico. Se puede escribir

$$\begin{aligned}
& \chi_0^2 \sum_{\lambda'} \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\lambda'} Tr_c [P[F_a F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'}[F_a F_\Gamma, \mu \rho_{st}]]] \\
& = \chi_0^2 \sum_{\lambda'} \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{1}{\lambda'} (Tr_c [P_a \mathcal{Q}_{\lambda'_a}(F_a \rho_{st}) F_a] P_\Gamma F_\Gamma \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma}(F_\Gamma \mu) \right. \\
& \quad - Tr_c [P_a \mathcal{Q}_{\lambda'_a}(F_a \rho_{st}) F_a] P_\Gamma \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma}(F_\Gamma \mu) F_\Gamma \\
& \quad - Tr_c [P_a F_a \mathcal{Q}_{\lambda'_a}(\rho_{st} F_a)] P_\Gamma F_\Gamma \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma}(\mu F_\Gamma) \\
& \quad \left. + Tr_c [P_a \mathcal{Q}_{\lambda'_a}(\rho_{st} F_a) F_a] P_\Gamma \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma}(\mu F_\Gamma) F_\Gamma \right).
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Se han movido todos los elementos que no dependen de los grados de libertad de la cavidad fuera de las trazas. Los paréntesis después de los operadores $\mathcal{Q}_{\lambda'}$ indican que es lo que se proyecta al espacio Q . En todos los casos lo que se proyecta es un elemento del espacio P al cual se le aplica primero un operador de creación o aniquilación por lo que la proyección sobre Q no es cero necesariamente. El término se puede escribir de forma más compacta empleando notación de conmutadores

$$\begin{aligned}
\chi_0^2 \sum_{\lambda'} \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\lambda'} Tr_c [P[F_a F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'}[F_a F_\Gamma, \mu \rho_{st}]]] & = \chi_0^2 \sum_{\lambda'} \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\lambda'} \left(T_{1c} P_\Gamma [F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma} F_\Gamma \mu] \right. \\
& \quad \left. - T_{2c} P_\Gamma [F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma} \mu F_\Gamma] \right),
\end{aligned}$$

las trazas se pueden evaluar como [30]

$$\begin{aligned}
T_{1c} &= Tr_c[F_a \mathcal{Q}_{\lambda'_a} F_a \rho_{st}] \\
&= \hbar^2 |\alpha_1|^2 \delta_{j,1} \delta_{n,0},
\end{aligned} \tag{5.84}$$

$$\begin{aligned}
T_{2c} &= Tr_c[F_a \mathcal{Q}_{\lambda'_a} \rho_{st} F_a] \\
&= \hbar^2 |\alpha_1|^2 \delta_{j,-1} \delta_{n,0}.
\end{aligned} \tag{5.85}$$

En la evaluación de los términos de las trazas se aproxima la temperatura del baño de la cavidad como cero, lo cual es razonable para parámetros experimentales comunes [30], y las trazas se evalúan mediante los estados de base de decaimiento para temperatura cero. Los términos que multiplican a las trazas se evalúan como

$$\begin{aligned}
P_\Gamma \left([F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma} F_\Gamma \mu] \right) &= ((\Gamma \Gamma^\dagger \mu - \Gamma^\dagger \mu \Gamma) \delta_{l,-1} \\
&\quad + (\Gamma^\dagger \Gamma \mu - \Gamma \mu \Gamma^\dagger) \delta_{l,1}),
\end{aligned} \tag{5.86}$$

$$\begin{aligned}
P_\Gamma \left([F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma} \mu F_\Gamma] \right) &= ((\Gamma \mu \Gamma^\dagger - \mu \Gamma^\dagger \Gamma) \delta_{l,-1} \\
&\quad + (\Gamma^\dagger \mu \Gamma - \mu \Gamma \Gamma^\dagger) \delta_{l,1}).
\end{aligned} \tag{5.87}$$

Dado que el último paso es la aplicación del proyector P todos los términos resultantes se encuentran en el sub-espacio P . Los términos proporcionales a ϵ en la ecuación (5.75) se evalúan de la misma forma, y ambos dan el mismo resultado por lo que este simplemente se escribe con un factor de 2, se obtiene

$$\begin{aligned}
Tr_c \left[\frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\lambda'} P[H_{int}^0(t), \bullet] \mathcal{Q}_{\lambda'} [H_{int}^\epsilon(t), \bullet] P \rho(0) \right] &= \chi_0^2 \sum_{\lambda'} \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{2}{\lambda'} (T_{1c} P_\Gamma [F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma} (F_\Gamma^i \mu)] \right. \\
&\quad \left. - T_{2c} P_\Gamma [F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma} (\mu F_\Gamma^i)]) \right),
\end{aligned}$$

lo cual se puede escribir como

$$\begin{aligned}
P_\Gamma[F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma}(F_\Gamma^i \mu)] = & \epsilon(T(-\omega)\Gamma\Gamma^\dagger \mu \delta_{l,-1} - T(-\omega)\Gamma^\dagger \mu \Gamma \delta_{l,-1}) \\
& + T(\omega)\Gamma^\dagger \Gamma \mu \delta_{l,1} - T(\omega)\Gamma \mu \Gamma^\dagger \delta_{l,1}),
\end{aligned} \tag{5.88}$$

y

$$\begin{aligned}
P_\Gamma[F_\Gamma, \mathcal{Q}_{\lambda'_\Gamma}(\mu F_\Gamma^i)] = & \epsilon(T(-\omega)\Gamma \mu \Gamma^\dagger \delta_{l,-1} - T(-\omega)\mu \Gamma^\dagger \Gamma \delta_{l,-1}) \\
& + T(\omega)\Gamma^\dagger \mu \Gamma \delta_{l,1} - T(\omega)\mu \Gamma \Gamma^\dagger \delta_{l,1}),
\end{aligned} \tag{5.89}$$

donde se ha usado la notación para la dependencia temporal

$$T(\omega) = \frac{1}{8(n+1)} e^{2i\omega t} - \frac{1}{8(n-1)} e^{-2i\omega t}. \tag{5.90}$$

Se aproxima esta función, despreciando términos de orden $\frac{\epsilon}{n^2}$ como

$$T(\omega) = \frac{i \sin(2\omega t)}{4n}. \tag{5.91}$$

Las deltas de Kroenecker aplican a los eigenvalores λ' los cuales son, sumando los valores correspondientes a la cavidad, con disipación, y al resonador mecánico

$$\lambda' = i(\delta j + \nu_0 l) - \kappa(n + \frac{|l|}{2}). \tag{5.92}$$

Los términos correspondientes a la ecuación (5.86), así como los términos proporcionales a ϵ pueden ser reordenados para escribir la ecuación

$$\dot{\mu}(t) = A_- D[\Gamma] \mu + A_+ D[\Gamma^\dagger] \mu, \tag{5.93}$$

donde $D[\Gamma] = 2\Gamma \mu \Gamma^\dagger - \{\Gamma^\dagger \Gamma, \mu\}$ aquí no se toma en cuenta un término proporcional a $\Gamma^\dagger \Gamma$, el cual actúa como una pequeña corrección a la frecuencia del Hamiltoniano libre y se puede absorber. Se tiene que los coeficientes son

$$A_{\pm} = A_{\pm}^0 + \epsilon \sin(2\omega t) A_{\pm}^{\epsilon}, \quad (5.94)$$

$$A_{\pm}^0 = \frac{\chi_0^2 |\alpha_0|^2}{2} \frac{\kappa}{(\delta \mp \nu_0)^2 + \frac{\kappa^2}{4}} \quad (5.95)$$

$$A_{\pm}^{\epsilon} = \frac{\chi_0^2 |\alpha_0|^2}{2} \frac{(\delta \mp \nu_0)}{n \left(\frac{\kappa^2}{4} + (\delta \mp \nu_0)^2 \right)}. \quad (5.96)$$

Los coeficientes A_{\pm} corresponden a calentamiento y enfriamiento respectivamente y se conocen como bandas laterales. El proceso dominante, ya sea calentamiento o enfriamiento, depende de cual de estas dos bandas es la dominante en una región particular de valores para el desfazamiento de la cavidad δ . En este punto se agrega la disipación del resonador mecánico. Esta se incorpora de forma directa como

$$\dot{\mu} = (A_-(t) + \frac{\gamma}{2}(n_m + 1))D[\Gamma]\mu + (A_+(t) + \frac{\gamma}{2}n_m)D[\Gamma^\dagger]\mu, \quad (5.97)$$

lo cual es el resultado deseado, una ecuación maestra que describe únicamente los grados de libertad mecánicos, en el sub-espacio correspondiente al decaimiento lento y en la forma usual de una ecuación maestra. Se busca ahora obtener una expresión para la temperatura del sistema. Para este propósito se tomará $\langle \Gamma^\dagger \Gamma \rangle = \langle m \rangle$ como una medida de la temperatura. Es importante notar que esto es el número de excitaciones correspondientes a un resonador mecánico con frecuencia dependiente del tiempo y no es entonces directamente comparable con el número de excitaciones de un resonador mecánico con frecuencia constante. A fin de obtener $\langle m \rangle$, se emplea la matriz covarianza del sistema.

5.5. Temperatura Final

Se sigue el procedimiento establecido en [107] para calcular el valor de expectación de la matriz de covarianza del sistema y obtener $\langle m \rangle$ en términos de su traza. El procedimiento emplea un vector de operadores adimensionales correspondientes a

posición y momento

$$\bar{R} = (X, P)^T, \quad (5.98)$$

donde estos operadores están dados por

$$X = \sqrt{\frac{n\omega}{2}}(g(t)^*\Gamma + g(t)\Gamma^\dagger), \quad (5.99)$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2n\omega}}(h(t)^*\Gamma + h(t)\Gamma^\dagger). \quad (5.100)$$

La cantidad de interés requiere calcular el valor de expectación de la matriz de covarianza, dado por

$$\bar{\gamma}_{i,j} = \frac{1}{2} \langle \bar{R}_i \bar{R}_j + \bar{R}_j \bar{R}_i \rangle - \langle \bar{R}_i \rangle \langle \bar{R}_j \rangle. \quad (5.101)$$

El valor de expectación deseado se calcula a partir de la traza de esta matriz [30] y se tiene

$$\langle m \rangle = \frac{1}{2} (Tr[\bar{\gamma}] - 1). \quad (5.102)$$

el cálculo de esta traza se encuentra en el apéndice B. Se obtiene

$$\begin{aligned} Tr[\bar{\gamma}(t)] &= \frac{\tilde{A}_+^0 + \tilde{A}_-^0}{\tilde{A}_-^0 - \tilde{A}_+^0} \\ &- \epsilon(A_+^\epsilon + A_-^\epsilon) \frac{(\tilde{A}_+^0 - \tilde{A}_-^0) \sin(2\omega t)}{(\tilde{A}_+^0 - \tilde{A}_-^0)^2 + \omega^2} \\ &- \epsilon(A_+^\epsilon + A_-^\epsilon) \frac{\omega \cos(2\omega t)}{(\tilde{A}_+^0 - \tilde{A}_-^0)^2 + \omega^2} \\ &+ \frac{\epsilon}{2\omega} \frac{(A_+^\epsilon - A_-^\epsilon)(\tilde{A}_+^0 - \tilde{A}_-^0)(\tilde{A}_+^0 + \tilde{A}_-^0)}{(\tilde{A}_+^0 - \tilde{A}_-^0)^2 + \omega^2} \\ &- \frac{\epsilon}{2\omega} \frac{(A_+^\epsilon - A_-^\epsilon)(\tilde{A}_-^0 + \tilde{A}_+^0)}{(\tilde{A}_+^0 - \tilde{A}_-^0)}, \end{aligned} \quad (5.103)$$

donde se emplea la notación

$$\begin{aligned}\tilde{A}_-^0 &= A_-^0 + \frac{\gamma}{2}(n_m + 1), \\ \tilde{A}_+^0 &= A_+^0 + \frac{\gamma}{2}n_m,\end{aligned}$$

lo cual significa que la ecuación (5.103) incluye disipación tanto mecánica debido al acoplamiento del resonador mecánico a un baño, como disipación optomecánica debido a la interacción optomecánica con la cavidad. El resultado para la traza del matriz covarianza (ecuación (5.103)) se escribe como un término sin corrección y cuatro correcciones proporcionales a ϵ . Dos de estas correcciones son explícitamente dependientes del tiempo, sin embargo ambas promedian a cero en un promedio temporal integrando sobre un periodo de oscilación. Este resultado únicamente es válido en el caso $\delta < 0$. Si $\delta > 0$ el proceso de calentamiento domina y no tiene sentido hablar de un estado estacionario o final, el número de excitaciones no está acotado por arriba. En este caso se emplean parámetros en el régimen donde $\kappa \ll \nu_0$ el cual se conoce como régimen de bandas laterales definidas. Este es el régimen de parámetros donde es posible, en teoría, alcanzar el estado base del resonador mecánico [108]. Puede observarse también que en el régimen opuesto, cuando $\nu_0 \ll \kappa$ los términos de corrección de (5.103) que no dependen del tiempo tienden a cero ya que en este régimen $A_+ \approx A_-$. Las correcciones con dependencia temporal no se cancelan pero siguen promediando a cero. También se puede notar que A_\pm^0 son proporcionales a $\frac{1}{\kappa}$ y A_\pm^ϵ son proporcionales a $\frac{1}{\kappa^2}$ por lo que aún sin promediar sobre el tiempo, las correcciones pierden relevancia en este régimen. Regresando al régimen de bandas laterales definidas se tiene que para $\omega^2 \ll (A_+^0 - A_-^0)^2$, se puede aproximar el promedio de excitaciones sobre un período de tiempo

$$\langle \bar{m} \rangle = \frac{\pi}{\omega} \int_0^{\pi/\omega} \langle m \rangle dt,$$

como

$$\langle \bar{m} \rangle \approx \langle \bar{m} \rangle_{n_m=0} + \frac{\gamma n_m}{\Gamma_{\text{opt}} + \gamma/2} + \epsilon \omega \frac{\gamma n_m}{2(\Gamma_{\text{opt}} + \gamma/2)^3} (A_+^\epsilon - A_-^\epsilon), \quad (5.104)$$

donde se define la tasa de enfriamiento optomecánico $\Gamma_{\text{opt}} = A_-^0 - A_+^0$ y se ha definido

$$\langle \bar{m} \rangle_{n_m=0} \approx \frac{A_+^0}{\Gamma_{\text{opt}} + \gamma/2} + \epsilon \omega \frac{A_-^0 + A_+^0 + \gamma/2}{2(\Gamma_{\text{opt}} + \gamma/2)^3} (A_+^\epsilon - A_-^\epsilon). \quad (5.105)$$

La ecuación (5.105) describe el número de excitaciones mecánicas en el caso donde se puede asumir que el baño mecánico tiene cero excitaciones térmicas. El término de corrección proporcional a ϵ puede ser positivo o negativo, dependiendo del signo de ϵ y del signo de $(A_+^\epsilon - A_-^\epsilon)$. Aún en el caso donde se considera el intercambio de energía del sistema mecánico con un baño térmico, se pueden elegir parámetros tales que el término de corrección lleve a un número promedio de excitaciones menor que para el caso donde $\epsilon = 0$. Para parámetros experimentales usuales [36] se tiene que $n_m \gamma \ll \Gamma_{\text{opt}}$, por lo que se puede asumir que $\langle \bar{m} \rangle \approx \langle \bar{m} \rangle_{n_m=0}$ y que $\tilde{A}_\pm \approx A_\pm$. Bajo estas aproximaciones se puede expresar el número promedio de excitaciones en un periodo como

$$\langle \bar{m} \rangle \approx -\frac{(\nu_0 + \delta)^2 + \kappa^2/4}{4\delta\nu_0} + \frac{\epsilon\omega}{32\delta^3\kappa^2\nu_0^3\chi_0^2|\alpha_0|^2} [(\nu_0^2 - \delta^2 + \kappa^2/4)(\nu_0^2 + \delta^2 + \kappa^2/4)((\nu_0 + \delta)^2 + \kappa^2/4)((\nu_0 - \delta)^2 + \kappa^2/4)]. \quad (5.106)$$

En este régimen se tiene que si $\nu_0^2 - \delta^2 + \kappa^2/4 = 0$ el término de corrección, proporcional a ϵ es cero, por lo que aún el caso con una corrección correspondiente a una modulación temporal de frecuencia coincide con el caso sin modulación para este punto. Cuando se tiene $\epsilon > 0$ y $\delta^2 < \nu_0^2 + \kappa^2/4$, o $\epsilon < 0$ y $\delta^2 > \nu_0^2 + \kappa^2/4$, el término de corrección lleva a un número menor de excitaciones promedio. Este comportamiento se puede observar de manera gráfica. Se analiza el comportamiento de $\langle m \rangle$ en su punto mínimo como función de $\frac{\delta}{\nu_0}$ y se grafica la evolución de la temperatura en este punto por un

ciclo de las correcciones dependientes del tiempo. El resultado se observa en la figura 5.1

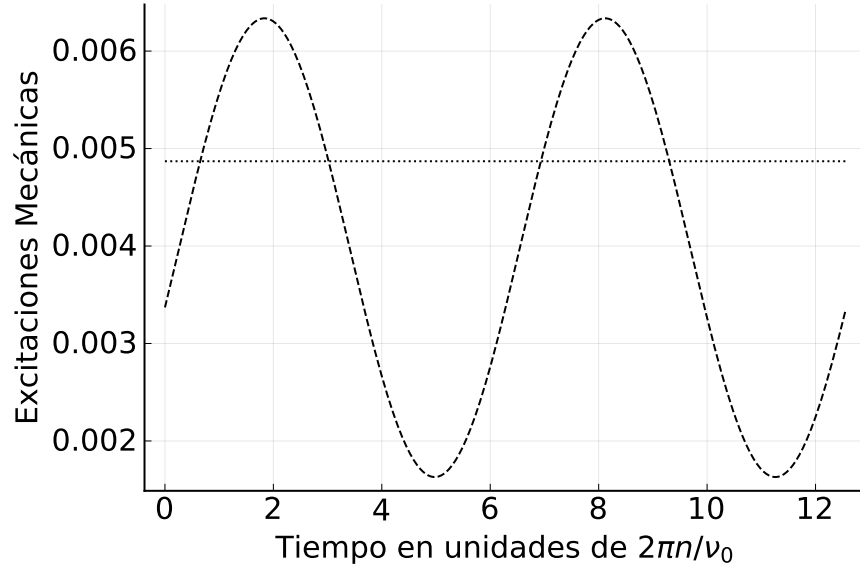


Figura 5.1: Número de excitaciones mecánicas para el caso con modulación temporal (línea de guiones) y para el caso sin modulación temporal (línea punteada). El caso modulado oscila con frecuencia ω en torno a un número promedio de excitaciones menor que el caso no modulado. Se utiliza: $\delta/\nu_0 = -0.9469$, $n = 2$, $\epsilon = 1/18$, $\kappa = 0.25\nu_0$, $\chi_0^2|\alpha_0|^2/\nu_0^2 = 0.25$.

Dado que las correcciones dependientes del tiempo promedian a cero sobre un ciclo completo, se estudia el comportamiento de la temperatura después de haber promediado sobre estas correcciones. Se analiza la temperatura promedio sobre el rango $\frac{\delta}{\nu_0} \in [-1.2, -0.8]$ y se observa que tanto para $\epsilon > 0$ como para $\epsilon < 0$ existe una región donde el número de final de excitaciones promedio es menor que en el caso sin modulación temporal. Estos resultados pueden observarse en la figura 5.2. El modelo desarrollado en este trabajo predice temperaturas finales distintas a las predicciones del modelo sin corrección. Se grafica además la proporción entre la temperatura sin corrección y la temperatura corregida para los casos de $\epsilon < 0$ y $\epsilon > 0$ sobre los mismos valores del parámetro $\frac{\delta}{\nu_0}$ a fin de visualizar por cuanto difieren los modelos. Este resultado se observa en la figura 5.3. Las diferencia entre las predicciones corregidas y sin corrección aumentan al alejarse del punto donde todas las predicciones coinciden. Los puntos donde se alcanza la temperatura mínima se encuentran relativamente cerca

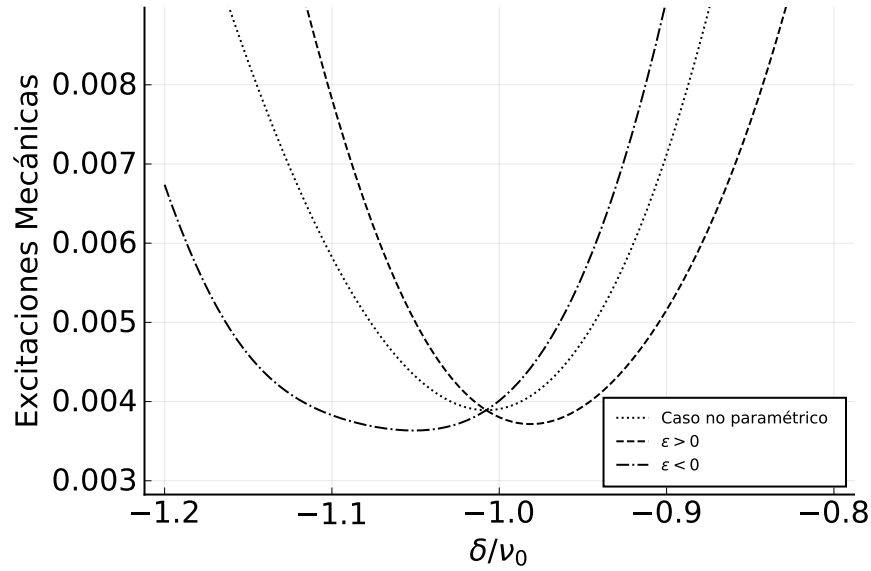


Figura 5.2: Número de excitaciones mecánicas promediado sobre el tiempo para el resonador modulado y sin modulación. $\epsilon > 0$ corresponde a la línea con guiones, $\epsilon < 0$ a la línea con guiones y puntos y la línea punteada corresponde al caso sin modulación temporal. Se utiliza: $n = 2$, $\epsilon = \pm 1/18$, $\kappa = 0.25\nu_0$, $\chi_0^2 |\alpha_0|^2 / \nu_0^2 = 0.25$.

de este punto, por lo que la diferencia entre la predicción, en el caso de la temperatura mínima, es de cerca del 10%. Al alejarse de estos puntos la diferencia entre modelos es mayor, aún si estos puntos pueden no ser de tanto interés al no ser los puntos de máximo enfriamiento.

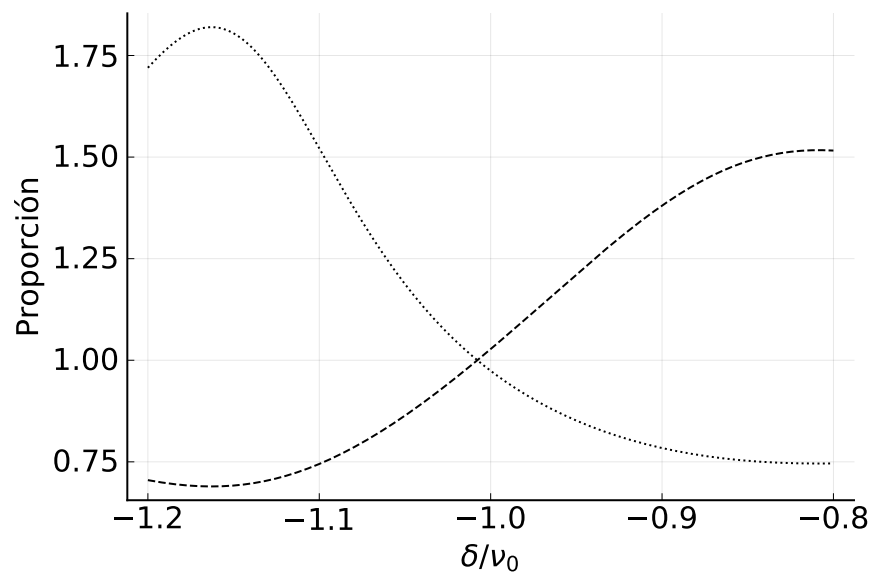


Figura 5.3: Proporción como función de δ entre el número de excitaciones mecánicas promediado sobre el tiempo para el caso con modulación y el caso sin modulación. La línea con guiones corresponde a $\epsilon > 0$ y la línea punteada a $\epsilon < 0$. Se utiliza $n = 2$, $\epsilon = \pm 1/18$, $\kappa = 0.25\nu_0$, $\chi_0^2|\alpha_0|^2/\nu_0^2 = 0.25$

Capítulo 6

Perspectivas futuras

6.1. Solución Numérica a Ecuación de Mathieu

La solución analítica obtenida depende de varias aproximaciones, en especial requiere de una interacción optomecánica pequeña comparada con ν_0 y de un valor pequeño de ϵ al comparar con el valor de n . Estas aproximaciones son razonables a fin de obtener una solución analítica que pueda aportar intuición física. Si se desea analizar el comportamiento de la ecuación maestra (5.30) en otros regímenes de parámetros, es necesario el uso de métodos numéricos. Se busca una solución numérica para la ecuación (B.2) con menos restricciones de parámetros. A fin de poder realizar este cálculo, primero es necesario encontrar una solución numérica para la ecuación de Mathieu

$$\ddot{f} + (a - 2q \cos(2t))f(t) = 0, \quad (6.1)$$

en forma de Floquet

$$f(t) = Ae^{\mu t}\phi(t), \quad (6.2)$$

donde μ es el exponente de Floquet el cual es puramente imaginario para soluciones estables. La función $\phi(t)$ es una función periódica con el mismo periodo que $\cos(2t)$ y puede ser expresada como serie de Fourier de forma

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k} e^{2ikt}. \quad (6.3)$$

La ecuación (6.2), expresada en términos de serie de Fourier, se sustituye en la ecuación de Mathieu para obtener la relación de recurrencia (4.16). A partir de esta relación de recurrencia se obtiene una expresión para el cociente de coeficientes consecutivos de la serie de Fourier [96]

$$\begin{aligned} 0 &= \eta_k(\mu) c_{2k-2} + c_{2k} + \eta_k(\mu) c_{2k+2}, \\ 0 &= \eta_k(\mu) \frac{c_{2k-2}}{c_{2k+2}} + \frac{c_{2k}}{c_{2k+2}} + \eta_k(\mu) \\ -\eta_k(\mu) &= \eta_k(\mu) \frac{c_{2k-2}}{c_{2k+2}} + \frac{c_{2k}}{c_{2k+2}} \\ -\eta_k(\mu) &= \frac{c_{2k}}{c_{2k+2}} \left(\eta_k(\mu) \frac{c_{2k-2}}{c_{2k+2}} \frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} + 1 \right) \\ \frac{c_{2k}}{c_{2k+2}} &= \frac{-\eta_k(\mu)}{\left(\eta_k(\mu) \frac{c_{2k-2}}{c_{2k}} + 1 \right)}, \end{aligned}$$

el proceso para el signo opuesto en el sub-índice del denominador es equivalente y se llega a la expresión

$$\frac{c_{2k}}{c_{2k\mp 2}} = \frac{-q}{(2k - i\mu)^2 - a + q\left(\frac{c_{2k\pm 2}}{c_{2k}}\right)}, \quad (6.4)$$

la cual resulta en una fracción continua. Si se emplea la notación

$$\frac{c_{2k}}{c_{2k\mp 2}} = R_k^{\pm}(\mu), \quad (6.5)$$

se pueden calcular los coeficientes de la serie de Fourier como

$$c_{\pm 2k} = c_0 R_1^{\pm}(\mu) R_2^{\pm}(\mu) \cdots R_k^{\pm}(\mu), \quad (6.6)$$

notando que en el caso de $R_k^{-}(\mu)$ se emplean los valores negativos de k . El valor de μ queda determinado por

$$R_0^-(\mu)R_1^+(\mu) = 1. \quad (6.7)$$

Si se utilizan los valores $q = -\frac{\epsilon}{2}$, $\mu = in$, $a = n^2$ se obtiene, despreciando términos de orden ϵ^2 , la solución a primer orden en ϵ que se emplea en los capítulos anteriores. Mediante las expresiones (6.4) se puede calcular una solución para cualquier valor de ϵ y n , siempre y cuando (6.7) tenga una solución puramente imaginaria. A fin de poder calcular las funciones $R^\pm(\mu)$ se emplea el método de convergentes [109]. Si se tiene una cantidad expresada como fracción continua de la forma

$$K = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}}, \quad (6.8)$$

esta se puede aproximar mediante fracciones $\frac{A_k}{B_k}$ conocidas como convergentes o aproximantes. Estas fracciones forman una serie y se dice que la fracción converge al valor K si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{B_k} = K. \quad (6.9)$$

Esta serie se calcula mediante las relaciones de recurrencia fundamentales

$$A_k = b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2}, \quad (6.10)$$

$$B_k = b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2}, \quad (6.11)$$

con valores iniciales

$$A_{-1} = 1, A_0 = b_0, B_{-1} = 0 \text{ y } B_0 = 1. \quad (6.12)$$

Como criterio de convergencia, puede emplearse el teorema de Sleszynski-Pringsheim el cual dice, para una fracción de la forma (6.8), si

$$|b_k| \geq |a_k| + 1 \quad \forall k \geq 1, \quad (6.13)$$

la serie $\frac{A_k}{B_k}$ converge de manera absoluta a algún valor $0 < |K| \leq 1$ lo cual es suficiente para asegurar que la serie de coeficientes de Fourier no sea divergente. El esquema del cálculo de estas soluciones es

1. Dar valores para ν_0 , ω y ϵ . Calcular $R_0^-(\mu)$ y $R_1^+(\mu)$ sobre un conjunto de posibles valores de μ y buscar los ceros de la función (6.7) para encontrar los valores posibles del exponente de Floquet. Si no se encuentran ceros no existe una solución estable para los parámetros dados. Una vez encontrado el exponente se puede revisar la condición de convergencia (6.13). Se crea un objeto que contiene los valores de entrada y el exponente μ correspondiente.
2. Se calculan los coeficientes c_{2k} . El valor de entrada es un objeto con todos los parámetros del punto anterior y una tolerancia para determinar cuando cortar el cálculo, ya que por (6.13) cada coeficiente c_{2k} debe ser menor o igual al anterior. Es conveniente entonces calcular un coeficiente c_{2k} , verificar su magnitud, calcular la siguiente función $R_k^\pm(\mu)$, obtener $c_{2k\pm 2}$ e iterar hasta que $|c_{2k'}|$ sea menor que la tolerancia.
3. Crear las funciones de Floquet utilizando los coeficientes, de forma sencilla también se puede obtener su derivada con la misma información.

Para calcular las funciones R_k^\pm es necesario expresarlas en la forma usual para fracciones continuas. En términos de ϵ , la fracción (6.4) se escribe como

$$\frac{c_{2k}}{c_{2k\mp 2}} = \frac{\epsilon}{2(2k + \mu')^2 - 2n^2 - \epsilon\left(\frac{c_{2k\pm 2}}{c_{2k}}\right)}. \quad (6.14)$$

Por comodidad se ha hecho la sustitución $\mu' = i\mu$. Con esta expresión en mano se puede calcular ambas soluciones para la ecuación de Mathieu, en forma de Floquet. La fracción (6.14) se escribe como

$$R_k^+(\mu') = \frac{c_{2k}}{c_{2k-2}} = \frac{\epsilon}{2(2k + \mu')^2 - 2n^2 - \epsilon\left(\frac{c_{2k+2}}{c_{2k}}\right)}, \quad (6.15)$$

si se emplea la sustitución $k + 1 = l$ se tiene

$$R_k^+(\mu') = \frac{\epsilon}{2(2k + \mu')^2 - 2n^2 - \epsilon\left(\frac{c_{2l}}{c_{2l-2}}\right)}, \quad (6.16)$$

lo cual permite utilizar de nuevo la definición de $R_k^+(\mu')$

$$\begin{aligned} R_k^+(\mu') &= \frac{\epsilon}{2(2k + \mu')^2 - 2n^2 - \left(\frac{\epsilon^2}{2(2l + \mu')^2 - 2n^2 - \epsilon\left(\frac{c_{2l+2}}{c_{2l}}\right)}\right)}, \\ &= \frac{\epsilon}{2(2k + \mu')^2 - 2n^2 - \left(\frac{\epsilon^2}{2(2k + 2 + \mu')^2 - 2n^2 - \epsilon\left(\frac{c_{2k+4}}{c_{2k+2}}\right)}\right)}. \end{aligned}$$

De esta forma se puede ver como escribir las series de valores a_k y b_k , para la función $R_j^+(\mu')$. Se tiene

$$\begin{aligned} a_1 &= \epsilon, \\ a_2 &= -\epsilon^2, \\ &\vdots \\ a_k &= -\epsilon^2, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0 \\
b_1 &= 2(2j + \mu')^2 - 2n^2, \\
b_2 &= 2(2j + 2 + \mu')^2 - 2n^2, \\
&\vdots \\
b_k &= 2(2(j + k - 1) + \mu')^2 - 2n^2,
\end{aligned}$$

con esto es suficiente para calcular los convergentes de las funciones $R_k^+(\mu')$. El procedimiento para los coeficientes $R_k^-(\mu')$ es completamente análogo. Es importante notar que para este segundo grupo de coeficientes se puede entrar en problemas de estabilidad, ya que en algunos casos es posible que $2(2(k - j + 1) + \mu')^2 - 2n^2$ con $k < 0$ sea igual a cero y no se cumpla la condición de convergencia para ese coeficiente en particular. Esto solo ocurre para ciertos valores de μ' muy cerca de enteros y debido a la velocidad con la que disminuyen los coeficientes c_{2k} , únicamente es problemático para valores pequeños de n .

En un trabajo futuro, el objetivo es modelar numéricamente el comportamiento de la ecuación (5.30) sin emplear aproximaciones restrictivas en los parámetros involucrados. Esto permite explorar el comportamiento del sistema cuando las variaciones de frecuencia son grandes con respecto a la frecuencia promedio del oscilador o donde la variación en la frecuencia no es necesariamente lenta comparada con la frecuencia promedio. También es posible explorar el comportamiento del sistema en regímenes de interacción donde los coeficientes α y β no se pueden aproximar por α_0 y β_0 como se hizo en este trabajo.

Capítulo 7

Conclusiones

Se describió el comportamiento de un sistema optomecánico compuesto por una cavidad de Fabry-Pérot con un espejo móvil, el cual se encuentra acoplado a un resonador mecánico con frecuencia natural dependiente del tiempo, mediante una ecuación maestra más adecuada a la descripción de sistemas paramétricos que la ecuación maestra usual. Tanto la cavidad como el resonador mecánico interactúan de forma disipativa con un ambiente. Mediante el formalismo de operadores de Floquet, se emplea un modelo de disipación que toma en cuenta la dependencia temporal de la frecuencia natural del resonador mecánico durante toda la deducción de la ecuación maestra, lo cual es una descripción más adecuada [81]. De la misma forma, el emplear los operadores de Floquet para escribir el Hamiltoniano libre del resonador mecánico asegura que al medir su temperatura al final del proceso de enfriamiento, se mida la cantidad correcta, es decir el número promedio de excitaciones de un resonador mecánico con frecuencia dependiente del tiempo. Esta ecuación maestra es una descripción más adecuada para el caso de una frecuencia modulada, y por ende debería ser empleada en la descripción de sistemas similares, ya que el procedimiento usual es simplemente emplear coeficientes ad-hoc con dependencia temporal.

Al obtener una predicción para la temperatura final del resonador mecánico después de un procedimiento de enfriamiento láser, se encuentra que esta cantidad difiere de la predicción para el caso de frecuencia no modulada. La diferencia en las predicciones, cerca del punto donde se obtiene la temperatura mínima en el caso no modulado,

es de cerca del 10 %. Sin importar el signo de la modulación, se puede encontrar un régimen de parámetros donde la temperatura final predicha es menor que para el caso no modulado. Esta diferencia es no trivial y muestra que, aún en un caso donde se asumen parámetros moderados para la modulación, no es correcto esperar que la descripción del sistema sin modulación sea la más adecuada para realizar predicciones sobre el comportamiento del sistema modulado.

Un posible siguiente paso a la investigación presentada en este trabajo consiste en resolver, probablemente de forma numérica, casos con parámetros menos moderados. Eso podría ser el caso de un valor mayor para ϵ o de un parámetro de interacción mayor, tal que se deben tomar en cuenta modificaciones a la frecuencia natural de la cavidad.

La combinación de los dos resultados anteriores, la posibilidad de enfriar más mediante el uso de modulación en la frecuencia natural del resonador mecánico y el hecho de basarse en una descripción más adecuada del sistema modulado, lleva a una pregunta. ¿Es posible modelar la disipación de la cavidad tomando en cuenta que su frecuencia natural es una función del tiempo? ¿Que efectos podrían encontrarse de ser este el caso?

Apéndice A

Transformación al Marco Desplazado

A.1. Transformación de L_a

Es necesario realizar la transformación

$$L'_a = U_a^\dagger L_a U_a, \quad (\text{A.1})$$

utilizando el resultado de aplicar la transformación a cada operador de forma individual, se obtiene, escribiendo el súper-operador aplicado ρ a fin de facilitar la lectura

$$\begin{aligned} L'_a \rho &= 2(a + \alpha)\rho(a^\dagger + \alpha^*) - (a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2) \\ &\quad - \rho(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2), \\ &= 2(a\rho + \alpha\rho)(a^\dagger + \alpha^*) - (a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2) \\ &\quad - \rho(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2), \\ &= 2(a\rho a^\dagger + a\rho\alpha^* + \alpha\rho a^\dagger + |\alpha|^2\rho) - (a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2) \\ &\quad - \rho(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a + |\alpha|^2), \\ &= 2(a\rho a^\dagger + a\rho\alpha^* + \alpha\rho a^\dagger) - (a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a) \\ &\quad - \rho(a^\dagger a + \alpha a^\dagger + \alpha^* a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2a\rho a^\dagger - \{a^\dagger a, \rho\} + 2a\rho\alpha^* + 2\alpha\rho a^\dagger \\
 &\quad - \alpha a^\dagger \rho - \alpha^* a \rho - \rho a^\dagger a - \rho \alpha a^\dagger - \rho \alpha^* a, \\
 &= L_a \rho + 2a\rho\alpha^* + 2\alpha\rho a^\dagger \\
 &\quad - \alpha a^\dagger \rho - \alpha^* a \rho - \rho a^\dagger a - \rho \alpha a^\dagger - \rho \alpha^* a, \\
 &= L_a \rho + (\alpha^* a - \alpha a^\dagger) \rho - \rho (\alpha^* a - \alpha a^\dagger), \\
 &= L_a \rho + [(\alpha^* a - \alpha a^\dagger), \rho].
 \end{aligned}$$

El segundo término se considera parte del Hamiltoniano al tener forma de conmutador. Transformar un término en forma de Lindblad tiene entonces únicamente el efecto de agregar un término al Hamiltoniano. La transformación de L_Γ es completamente análoga.

A.2. Derivadas Temporales del Operador de Desplazamiento

Es necesario poder calcular la derivada temporal del operador de desplazamiento. Se tiene

$$\dot{U}_{a,\Gamma} = \dot{U}_a U_\Gamma + U_a \dot{U}_\Gamma, \quad (\text{A.2})$$

donde la derivada del operador correspondiente a la cavidad es directa, sin embargo para el caso del operador correspondiente al resonador mecánico, es conveniente utilizar la forma

$$U_\Gamma = e^{\beta\Gamma^\dagger} e^{-\beta^*\Gamma} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}, \quad (\text{A.3})$$

de tal forma que

$$U_{\Gamma} = (e^{\dot{\beta}\Gamma^{\dagger}})e^{-\beta^*\Gamma}e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} + e^{\beta\Gamma^{\dagger}}(e^{-\dot{\beta}^*\Gamma})e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} + e^{\beta\Gamma^{\dagger}}e^{-\beta^*\Gamma}(e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}). \quad (\text{A.4})$$

Debido a la dependencia temporal de Γ , es necesario utilizar la fórmula de Sneddon [110] la cual dice que, en el caso de un operador A que depende del tiempo (o algún parámetro continuo)

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = \int_0^1 e^{uA} \frac{d}{dt}Ae^{(1-u)A} du, \quad (\text{A.5})$$

esta reduce, en el caso trivial donde $A(t) = At$ a

$$\frac{d}{dt}e^{At} = e^{At}A = Ae^{At}. \quad (\text{A.6})$$

Con esto se puede calcular

$$(e^{\dot{\beta}\Gamma^{\dagger}}) = \beta\dot{\Gamma}^{\dagger}e^{\beta\Gamma^{\dagger}} - \frac{\beta^2}{2}C_{-}^{+}(t)e^{\beta\Gamma^{\dagger}}. \quad (\text{A.7})$$

$C_{-}^{+}(t)$ representa el conmutador de operadores de Floquet y sus derivadas. Se utiliza la notación

$$C_{-}^{-}(t) = [\dot{\Gamma}, \Gamma] \quad (\text{A.8})$$

$$C_{-}^{+}(t) = [\dot{\Gamma}, \Gamma^{\dagger}] \quad (\text{A.9})$$

$$C_{+}^{-}(t) = [\dot{\Gamma}^{\dagger}, \Gamma] \quad (\text{A.10})$$

$$C_{+}^{+}(t) = [\dot{\Gamma}^{\dagger}, \Gamma^{\dagger}], \quad (\text{A.11})$$

estos conmutadores son, en general, distintos de cero y dependen únicamente de las soluciones a la ecuación de Mathieu, no contienen operadores. Con esto es posible obtener la derivada temporal del operador U

$$\dot{U}_{\Gamma} = (\dot{\beta}\Gamma^{\dagger} + \beta\dot{\Gamma}^{\dagger} - \frac{\beta^2 C_{+}^{+}(t)}{2})U_{\Gamma} - U_{\Gamma}(\dot{\beta}^*\Gamma + \beta^*\dot{\Gamma} + \frac{(\beta^*)^2 C_{-}^{-}(t)}{2}) - \frac{1}{2}|\dot{\beta}|^2 U_{\Gamma}, \quad (\text{A.12})$$

y

$$\dot{U}_a = (\dot{\alpha}a^\dagger)U_a - U_a(\dot{\alpha}^*a) - \frac{1}{2}|\dot{\alpha}|^2U_a. \quad (\text{A.13})$$

De manera que es posible calcular los términos correspondientes a las derivadas temporales del operador de desplazamiento en la ecuación maestra

$$\begin{aligned} U^\dagger \dot{U} \rho + \rho \dot{U}^\dagger U &= (\dot{\beta}\Gamma^\dagger + \beta\dot{\Gamma}^\dagger - \dot{\beta}^*\Gamma - \beta^*\dot{\Gamma})\rho \\ &+ (C_+^+(t)(\frac{\beta^2}{2} - \beta^2) - C_-^-(t)\frac{(\beta^*)^2}{2} + \dot{\beta}\beta^* - \frac{|\dot{\beta}|^2}{2})\rho \\ &+ (\dot{\alpha}a^\dagger - \dot{\alpha}^*a)\rho + (\dot{\alpha}\alpha^* - \frac{|\dot{\alpha}|^2}{2}) + \text{C.H.}, \end{aligned}$$

donde *C.H.* denota el conjugado Hermitiano. Esta expresión se puede re-escribir de forma más compacta como

$$\begin{aligned} U^\dagger \dot{U} \rho + \rho \dot{U}^\dagger U &= [\dot{\alpha}a^\dagger - \dot{\alpha}a, \rho] + [\dot{\beta}\Gamma^\dagger - \dot{\beta}\Gamma, \rho] + [\beta\dot{\Gamma}^\dagger - \beta\dot{\Gamma}, \rho] \\ &+ (\dot{\alpha}\alpha^* + \alpha\dot{\alpha}^* - |\dot{\alpha}|^2)\rho + (\dot{\beta}\beta^* + \beta\dot{\beta}^* - |\dot{\beta}|^2)\rho \\ &+ C_+^+(t)(\beta^2 - |\beta|^2)\rho + C_-^-(t)((\beta^*)^2 - |\beta|^2)\rho, \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} U^\dagger \dot{U} \rho + \rho \dot{U}^\dagger U &= [\dot{\alpha}a^\dagger - \dot{\alpha}a, \rho] + [\dot{\beta}\Gamma^\dagger - \dot{\beta}\Gamma, \rho] + [\beta\dot{\Gamma}^\dagger - \beta\dot{\Gamma}, \rho] \\ &+ C_+^+(t)(\beta^2 - |\beta|^2)\rho + C_-^-(t)((\beta^*)^2 - |\beta|^2)\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

lo cual es la expresión deseada. Los términos en forma de conmutador se incluyen en el Hamiltoniano, notando que hay un cambio de signo ya que estos términos aparecen del otro lado de la ecuación. Este se toma en cuenta al voltear los conmutadores.

Apéndice B

Traza Matriz Covarianza

Se sigue el procedimiento establecido en [107, 30, 101]. Una vez hecho el cambio a operadores adimensionales, la ecuación maestra (5.55) se puede expresar en forma lineal

$$\frac{d\mu}{dt} = \sum_k \gamma_k D[\bar{L}_k \bar{R}] \mu. \quad (\text{B.1})$$

A partir de esta ecuación linealizada, se puede obtener una ecuación diferencial para el valor de expectación de la matriz de covarianza correspondiente a la ecuación maestra linealizada. Se tiene

$$\frac{d\bar{\gamma}}{dt} = \bar{H}_{eff} \bar{\gamma} + \bar{\gamma} \bar{H}_{eff}^T + \bar{J}, \quad (\text{B.2})$$

con las matrices

$$\bar{\sigma}_{i,j} = \frac{1}{i} [\bar{R}_i, \bar{R}_j], \quad (\text{B.3})$$

$$\bar{G}_{i,j} = \sum_k \gamma_k (\bar{L}_k^*)_i (\bar{L}_k)_j, \quad (\text{B.4})$$

$$\bar{H}_{eff} = 2\bar{\sigma}(Im(\bar{G})), \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{J} = 2\bar{\sigma}(Re(\bar{G}))\bar{\sigma}^T. \quad (\text{B.6})$$

Esto se integra como

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(t) = & e^{\int_0^t dt' \bar{H}_{eff}(t')} \bar{\gamma}(0) e^{\int_0^t dt' \bar{H}_{eff}^T(t')} \\ & + \int_0^t d\tau e^{\int_0^{t-\tau} dt' \bar{H}_{eff}(t')} \bar{J}(\tau) e^{\int_0^{t-\tau} dt' \bar{H}_{eff}^T(t')}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Debido a la forma de (5.55) Los vectores L deben ser

$$\bar{L}_1 = \frac{1}{2i} \left(\sqrt{\frac{2}{n\omega}} h(t), -\sqrt{2n\omega} g(t) \right), \quad (\text{B.8})$$

$$\bar{L}_2 = \frac{-1}{2i} \left(\sqrt{\frac{2}{n\omega}} h^*(t), -\sqrt{2n\omega} g^*(t) \right), \quad (\text{B.9})$$

con

$$\gamma_1 = A_-(t), \quad (\text{B.10})$$

$$\gamma_2 = A_+(t). \quad (\text{B.11})$$

Todas las matrices en (B.3) se pueden calcular de forma directa. La matriz de conmutadores es

$$\bar{\sigma}_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

y se tiene que, despreciando términos de orden $\frac{\epsilon}{n^2}$

$$\bar{G}_{1,1} = A_-(\bar{L}_1^*)_1 (\bar{L}_1)_1 + A_+(\bar{L}_2^*)_1 (\bar{L}_2)_1, \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{G}_{1,2} = A_-(\bar{L}_1^*)_1 (\bar{L}_1)_2 + A_+(\bar{L}_2^*)_1 (\bar{L}_2)_2, \quad (\text{B.14})$$

$$\bar{G}_{2,1} = A_-(\bar{L}_1^*)_2 (\bar{L}_1)_1 + A_+(\bar{L}_2^*)_2 (\bar{L}_2)_1, \quad (\text{B.15})$$

$$\bar{G}_{2,2} = A_-(\bar{L}_1^*)_2 (\bar{L}_1)_2 + A_+(\bar{L}_2^*)_2 (\bar{L}_2)_2. \quad (\text{B.16})$$

Esto permite escribir las matrices \overline{H}_{eff} y \overline{J} , notando que ambas son proporcionales a la identidad

$$\overline{H}_{eff} = (A_+ - A_-)\overline{I}, \quad (\text{B.17})$$

$$\overline{J} = (A_+ + A_-)\overline{I}, \quad (\text{B.18})$$

donde se denota la identidad \overline{I} en dos dimensiones como

$$\overline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

Se separan los coeficientes $A_{\pm}(t)$ de acuerdo con su dependencia en ϵ y se inicia el proceso de integración. Se realizan primero las integrales que ocurren en los argumentos de las exponenciales

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \overline{H}_{eff}(t') &= (A_+^0 - A_-^0)t\overline{I} \\ &\quad + \frac{\epsilon(1 - \cos(2\omega t))}{2\omega}(A_+^\epsilon - A_-^\epsilon)\overline{I}, \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t-\tau} dt' \overline{H}_{eff}(t') &= (A_+^0 - A_-^0)(t - \tau)\overline{I} \\ &\quad + \frac{\epsilon(1 - \cos(2\omega(t - \tau)))}{2\omega}(A_+^\epsilon - A_-^\epsilon)\overline{I}. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Se define

$$\overline{A}_0 = (A_+^0 - A_-^0)\overline{I}, \quad (\text{B.22})$$

$$\overline{A}_\epsilon = \frac{\epsilon}{2\omega}(A_+^\epsilon - A_-^\epsilon)\overline{I}, \quad (\text{B.23})$$

a fin de compactar la notación. Se escribe (B.7) como

$$\begin{aligned}
 \overline{\gamma(t)} &= e^{\overline{A}_0 t + \overline{A}_\epsilon (1 - \cos(2\omega t))} \overline{\gamma(0)} e^{\overline{A}_0 t + \overline{A}_\epsilon (1 - \cos(2\omega t))} \\
 &+ \int_0^t d\tau e^{\overline{A}_0 (t-\tau) + \overline{A}_\epsilon (1 - \cos(2\omega(t-\tau)))} \\
 &\quad \overline{J}(\tau) e^{\overline{A}_0 (t-\tau) + \overline{A}_\epsilon (1 - \cos(2\omega(t-\tau)))}.
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

y dado que todas las matrices involucradas conmutan al ser proporcionales a la identidad, se tiene

$$\begin{aligned}
 \overline{\gamma(t)} &= e^{2(\overline{A}_0 t + \overline{A}_\epsilon (1 - \cos(2\omega t)))} \overline{\gamma(0)} \\
 &+ \int_0^t d\tau e^{2(\overline{A}_0 (t-\tau) + \overline{A}_\epsilon (1 - \cos(2\omega(t-\tau))))} \overline{J}(\tau).
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Se realiza el resto de las integraciones, comenzando con \overline{J} la cual se re-escibe como

$$\overline{J} = \overline{J}_0 + \sin(2\omega t) \overline{J}_\epsilon \tag{B.26}$$

$$\overline{J}_0 = (A_-^0 + A_+^0) \overline{I}, \tag{B.27}$$

$$\overline{J}_\epsilon = \epsilon (A_-^\epsilon + A_+^\epsilon) \overline{I}. \tag{B.28}$$

Se emplea la aproximación

$$e^{2(\overline{A}_\epsilon (1 - \cos(2\omega t)))} \approx \overline{I} + 2\overline{A}_\epsilon (1 - \cos(2\omega t)). \tag{B.29}$$

Tal que conservando únicamente términos a primer orden en ϵ

$$\begin{aligned}
 \int_0^t d\tau e^{2(\bar{A}_0(t-\tau) + \bar{A}_\epsilon(1 - \cos(2\omega(t-\tau))))} \bar{J}(\tau) &= \int_0^t d\tau e^{2\bar{A}_0(t-\tau)} \bar{J}_0 \\
 &+ \int_0^t d\tau e^{2\bar{A}_0(t-\tau)} \sin(2\omega\tau) \bar{J}_\epsilon \\
 &- 2 \int_0^t d\tau e^{2\bar{A}_0(t-\tau)} \bar{A}_\epsilon \cos(2\omega(t-\tau)) \bar{J}_0 \\
 &+ 2 \int_0^t d\tau e^{2\bar{A}_0(t-\tau)} \bar{A}_\epsilon \bar{J}_0.
 \end{aligned}$$

La integral que no es proporcional a ϵ resulta en

$$\int_0^t d\tau e^{2\bar{A}_0(t-\tau)} \bar{J}_0 = \frac{1}{2} \frac{A_+^0 + A_-^0}{A_+^0 - A_-^0} e^{2(A_+^0 - A_-^0)t} \bar{I} + \frac{1}{2} \frac{A_+^0 + A_-^0}{A_-^0 - A_+^0} \bar{I}. \quad (\text{B.30})$$

Los términos proporcionales a ϵ resultan ser

$$\begin{aligned}
 \int_0^t d\tau e^{2\bar{A}_0(t-\tau)} \sin(2\omega\tau) \bar{J}_\epsilon &= \frac{1}{2} \epsilon (A_+^\epsilon + A_-^\epsilon) \frac{\omega e^{2(A_+^0 - A_-^0)t}}{(A_+^0 - A_-^0)^2 + \omega^2} \bar{I} \\
 &- \frac{1}{2} \epsilon (A_+^\epsilon + A_-^\epsilon) \frac{(A_+^0 - A_-^0) \sin(2\omega t) + \omega \cos(2\omega t)}{(A_+^0 - A_-^0)^2 + \omega^2} \bar{I}.
 \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

y

$$-2 \int_0^t d\tau e^{2\bar{A}_0(t-\tau)} \bar{A}_\epsilon \cos(2\omega(t-\tau)) \bar{J}_0 = \frac{\epsilon}{2\omega} \frac{(A_+^\epsilon - A_-^\epsilon)(A_+^0 - A_-^0)(A_+^0 + A_-^0)}{(A_+^0 - A_-^0)^2 + \omega^2} \bar{I} \quad (\text{B.32})$$

$$- \frac{\epsilon}{2\omega} (A_+^\epsilon - A_-^\epsilon)(A_+^0 + A_-^0) \frac{e^{2(A_+^0 - A_-^0)t}}{(A_+^0 - A_-^0)^2 + \omega^2} \left((A_+^0 - A_-^0) \cos(2\omega t) + \omega \sin(2\omega t) \right) \bar{I}.$$

y

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^t d\tau e^{2\bar{A}_0(t-\tau)} \bar{A}_\epsilon \bar{J}_0 &= 2\bar{A}_\epsilon \bar{J}_0 \left(\frac{e^{2\bar{A}_0 t}}{2\bar{A}_0} - \frac{1}{2\bar{A}_0} \right) \\
 &= \frac{\epsilon}{2\omega} \left(\frac{e^{2(A_+^0 - A_-^0)t} (A_+^\epsilon - A_-^\epsilon) (A_-^0 + A_+^0)}{A_+^0 - A_-^0} \right) \bar{I} \\
 &\quad - \frac{\epsilon}{2\omega} \left(\frac{(A_+^\epsilon - A_-^\epsilon) (A_-^0 + A_+^0)}{A_+^0 - A_-^0} \right) \bar{I}.
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

Si los parámetros del sistema corresponden a enfriamiento, se tiene que $A_+ \ll A_-$ por lo que para un tiempo lo suficientemente largo, todos los términos proporcionales a $e^{2(A_+^0 - A_-^0)t}$ decaen a cero. Esto lleva a un estado semi-estacionario donde $\langle m \rangle$ oscila en torno a un valor promedio constante. La traza es, después de este tiempo largo

$$\begin{aligned}
 Tr[\overline{\gamma(t)}] &= \frac{A_+^0 + A_-^0}{A_-^0 - A_+^0} \\
 &\quad - \epsilon (A_+^\epsilon + A_-^\epsilon) \frac{(A_+^0 - A_-^0) \sin(2\omega t)}{(A_+^0 - A_-^0)^2 + \omega^2} \\
 &\quad - \epsilon (A_+^\epsilon + A_-^\epsilon) \frac{\omega \cos(2\omega t)}{(A_+^0 - A_-^0)^2 + \omega^2} \\
 &\quad + \frac{\epsilon}{\omega} \frac{(A_+^\epsilon - A_-^\epsilon) (A_+^0 - A_-^0) (A_+^0 + A_-^0)}{(A_+^0 - A_-^0)^2 + \omega^2} \\
 &\quad - \frac{\epsilon}{\omega} \frac{(A_+^\epsilon - A_-^\epsilon) (A_-^0 + A_+^0)}{(A_+^0 - A_-^0)}.
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

Lo cual es el resultado deseado.

Bibliografía

- [1] Yu long Liu, Chong Wang, Jing Zhang, and Yu xi Liu. Cavity optomechanics: Manipulating photons and phonons towards the single-photon strong coupling. *Chinese Physics B*, 27(2):024204, feb 2018.
- [2] Suzhen Zhang, Jiahua Li, Rong Yu, Wei Wang, and Ying Wu. Optical multistability and fano line-shape control via mode coupling in whispering-gallery-mode microresonator optomechanics. *Scientific Reports*, 7(1):39781, 2017.
- [3] Chuan Wang, Qing Lin, and Bing He. Breaking the optomechanical cooling limit by two drive fields on a membrane-in-the-middle system. *Phys. Rev. A*, 99:023829, Feb 2019.
- [4] Xiongce Zhao and Predrag Krstic. Molecular dynamics simulation study on trapping ions in a nanoscale paul trap. *Nanotechnology*, 19:195702, 05 2008.
- [5] S.F. Mason. *A History of the Sciences*. Collier books. Collier Books, 1962.
- [6] A J Leggett. Testing the limits of quantum mechanics: motivation, state of play, prospects. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 14(15):R415–R451, apr 2002.
- [7] Florian Marquardt. Push towards the quantum limit. *Nature Physics*, 4(7):513–514, Jul 2008.
- [8] Markus Aspelmeyer, Tobias J. Kippenberg, and florian Marquardt. *Cavity Optomechanics: Nano- and Micromechanical Resonators Interacting with Light*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.

- [9] Michael Metcalfe. Applications of cavity optomechanics. *Applied Physics Reviews*, 1(3):031105, 2014.
- [10] Daniel W. C. Brooks, Thierry Botter, Sydney Schreppler, Thomas P. Purdy, Nathan Brahms, and Dan M. Stamper-Kurn. Non-classical light generated by quantum-noise-driven cavity optomechanics. *Nature*, 488(7412):476–480, Aug 2012.
- [11] Alexander G. Krause, Martin Winger, Tim D. Blasius, Qiang Lin, and Oskar Painter. A high-resolution microchip optomechanical accelerometer. *Nature Photonics*, 6(11):768–772, Nov 2012.
- [12] S. Forstner, S. Prams, J. Knittel, E. D. van Ooijen, J. D. Swaim, G. I. Harris, A. Szorkovszky, W. P. Bowen, and H. Rubinsztein-Dunlop. Cavity optomechanical magnetometer. *Phys. Rev. Lett.*, 108:120801, Mar 2012.
- [13] Yuxiang Liu, Houxun Miao, Vladimir Aksyuk, and Kartik Srinivasan. Wide cantilever stiffness range cavity optomechanical sensors for atomic force microscopy. *Opt. Express*, 20(16):18268–18280, Jul 2012.
- [14] Ulrich B. Hoff, Glen I. Harris, Lars S. Madsen, Hugo Kerdoncuff, Mikael Lassen, Bo M. Nielsen, Warwick P. Bowen, and Ulrik L. Andersen. Quantum-enhanced micromechanical displacement sensitivity. *Opt. Lett.*, 38(9):1413–1415, May 2013.
- [15] H. Rokhsari, T. J. Kippenberg, T. Carmon, and K. J. Vahala. Radiation-pressure-driven micro-mechanical oscillator. *Opt. Express*, 13(14):5293–5301, Jul 2005.
- [16] T. A. Palomaki, J. W. Harlow, J. D. Teufel, R. W. Simmonds, and K. W. Lehnert. Coherent state transfer between itinerant microwave fields and a mechanical oscillator. *Nature*, 495(7440):210–214, Mar 2013.
- [17] L. Tian and Hailin Wang. Optical wavelength conversion of quantum states with optomechanics. *Phys. Rev. A*, 82:053806, Nov 2010.

- [18] P. F. Barker E. B. Aranas, P. Z. G. Fonseca and T. S. Monteiro. Split-sideband spectroscopy in slowly modulated optomechanics. *New J. Phys*, 18:113021, 2016.
- [19] Tai-Shuang Yin, Xin-You Lü, Li-Li Zheng, Mei Wang, Sha Li, and Ying Wu. Nonlinear effects in modulated quantum optomechanics. *Phys. Rev. A*, 95:053861, May 2017.
- [20] Zhu-Cheng Zhang, Yi-Ping Wang, Ya-Fei Yu, and Zhi-Ming Zhang. Quantum squeezing in a modulated optomechanical system. *Opt. Express*, 26(9):11915–11927, Apr 2018.
- [21] A. Mari and J. Eisert. Gently modulating optomechanical systems. *Phys. Rev. Lett.*, 103:213603, Nov 2009.
- [22] Daniel Malz and Andreas Nunnenkamp. Floquet approach to bichromatically driven cavity-optomechanical systems. *Phys. Rev. A*, 94:023803, Aug 2016.
- [23] Menno Poot and Herre S.J. van der Zant. Mechanical systems in the quantum regime. *Physics Reports*, 511(5):273 – 335, 2012. Mechanical systems in the quantum regime.
- [24] Oussama Houhou, Darren Moore, Sougato Bose, and Alessandro Ferraro. Unconditional measurement-based quantum computation with optomechanical continuous variables. *arXiv: Quantum Physics*, 09 2018.
- [25] Igor Marinković, Andreas Wallucks, Ralf Riedinger, Sungkun Hong, Markus Aspelmeyer, and Simon Gröblacher. Optomechanical bell test. *Phys. Rev. Lett.*, 121:220404, Nov 2018.
- [26] E. E. Wollman, C. U. Lei, A. J. Weinstein, J. Suh, A. Kronwald, F. Marquardt, A. A. Clerk, and K. C. Schwab. Quantum squeezing of motion in a mechanical resonator. *Science*, 349(6251):952–955, 2015.
- [27] Jie Li, Andreas Wallucks, Rodrigo Benevides, Niccolo Fiaschi, Bas Hensen, Thiago P. Mayer Alegre, and Simon Groblacher. Proposal for optomechanical teleportation. *arXiv: Quantum Physics*, 2020.

- [28] Bing He, Liu Yang, Qing Lin, and Min Xiao. Radiation pressure cooling as a quantum dynamical process. *Phys. Rev. Lett.*, 118:233604, Jun 2017.
- [29] Francesco Ticozzi and Lorenza Viola. Quantum resources for purification and cooling: fundamental limits and opportunities. *Scientific Reports*, 4(1):5192, Jun 2014.
- [30] Marc Bienert and Pablo Barberis-Blostein. Optomechanical laser cooling with mechanical modulations. *Phys. Rev. A*, 91:023818, Feb 2015.
- [31] Markus Aspelmeyer, Tobias J. Kippenberg, and Florian Marquardt. Cavity optomechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 86:1391–1452, Dec 2014.
- [32] C. K. Law. Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A hamiltonian formulation. *Phys. Rev. A*, 51:2537–2541, Mar 1995.
- [33] W.P. Bowen and G.J. Milburn. *Quantum Optomechanics*. Taylor & Francis, 2015.
- [34] C. Genes, D. Vitali, P. Tombesi, S. Gigan, and M. Aspelmeyer. Ground-state cooling of a micromechanical oscillator: Comparing cold damping and cavity-assisted cooling schemes. *Phys. Rev. A*, 77:033804, Mar 2008.
- [35] David Vitali, Stefano Mancini, Luciano Ribichini, and Paolo Tombesi. Mirror quiescence and high-sensitivity position measurements with feedback. *Phys. Rev. A*, 65:063803, May 2002.
- [36] R. W. Peterson, T. P. Purdy, N. S. Kampel, R. W. Andrews, P.-L. Yu, K. W. Lehnert, and C. A. Regal. Laser cooling of a micromechanical membrane to the quantum backaction limit. *Phys. Rev. Lett.*, 116:063601, Feb 2016.
- [37] Young-Shin Park and Hailin Wang. Resolved-sideband and cryogenic cooling of an optomechanical resonator. *Nature Physics*, 5(7):489–493, Jul 2009.
- [38] A M Jayich, J C Sankey, K Børkje, D Lee, C Yang, M Underwood, L Childress, A Petrenko, S M Girvin, and J G E Harris. Cryogenic optomechanics with a

- si3n4membrane and classical laser noise. *New Journal of Physics*, 14(11):115018, nov 2012.
- [39] R. A. Norte, J. P. Moura, and S. Gröblacher. Mechanical resonators for quantum optomechanics experiments at room temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 116:147202, Apr 2016.
- [40] E. Verhagen, S. Deléglise, S. Weis, A. Schliesser, and T. J. Kippenberg. Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode. *Nature*, 482(7383):63–67, 2012.
- [41] Alessandra Buonanno and Yanbei Chen. Signal recycled laser-interferometer gravitational-wave detectors as optical springs. *Phys. Rev. D*, 65:042001, Jan 2002.
- [42] Thomas Corbitt, Yanbei Chen, Edith Innerhofer, Helge Müller-Ebhardt, David Ottaway, Henning Rehbein, Daniel Sigg, Stanley Whitcomb, Christopher Wipf, and Nergis Mavalvala. An all-optical trap for a gram-scale mirror. *Phys. Rev. Lett.*, 98:150802, Apr 2007.
- [43] S. E. Harris, J. E. Field, and A. Imamoglu. Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1107–1110, Mar 1990.
- [44] Michael Fleischhauer, Atac Imamoglu, and Jonathan P. Marangos. Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media. *Rev. Mod. Phys.*, 77:633–673, Jul 2005.
- [45] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth, and M. D. Lukin. Storage of light in atomic vapor. *Phys. Rev. Lett.*, 86:783–786, Jan 2001.
- [46] G. S. Agarwal and Sumei Huang. Electromagnetically induced transparency in mechanical effects of light. *Physical Review A*, 81(4), Apr 2010.

- [47] Stefan Weis, Rémi Rivière, Samuel Deléglise, Emanuel Gavartin, Olivier Arcizet, Albert Schliesser, and Tobias J. Kippenberg. Optomechanically induced transparency. *Science*, 330(6010):1520–1523, 2010.
- [48] Kevin Mcnesby and Rose Pesce-Rodriguez. *Handbook of Vibrational Spectroscopy*, chapter Introduction to Vibrational Spectroscopy, page 4. Wiley, 08 2006.
- [49] Alex Abramovici, William E. Althouse, Ronald W. P. Drever, Yekta Gürsel, Seiji Kawamura, Frederick J. Raab, David Shoemaker, Lisa Sievers, Robert E. Spero, Kip S. Thorne, Rochus E. Vogt, Rainer Weiss, Stanley E. Whitcomb, and Michael E. Zucker. Ligo: The laser interferometer gravitational-wave observatory. *Science*, 256(5055):325–333, 1992.
- [50] B Abbott, R Abbott, R Adhikari, P Ajith, B Allen, G Allen, R Amin, S B Anderson, W G Anderson, and M A Arain et al. Observation of a kilogram-scale oscillator near its quantum ground state. *New Journal of Physics*, 11(7):073032, jul 2009.
- [51] S. Singh, G. A. Phelps, D. S. Goldbaum, E. M. Wright, and P. Meystre. All-optical optomechanics: An optical spring mirror. *Phys. Rev. Lett.*, 105:213602, Nov 2010.
- [52] Jia-Xin Peng, Zheng Chen, Qi-Zhang Yuan, and Xun-Li Feng. Precision measurement of electrical charge in a hybrid optomechanical system with michelson interferometer. *Optics Communications*, 458:124826, 2020.
- [53] Wen Zhao, Sheng-Dian Zhang, Adam Miranowicz, and Hui Jing. Weak-force sensing with squeezed optomechanics. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 63(2):224211, 2019.
- [54] Nasir Alam, Kishore Thapliyal, Anirban Pathak, Biswajit Sen, Amit Verma, and Swapan Mandal. Lower- and higher-order nonclassicality in a bose-condensed optomechanical-like system and a fabry-perot cavity with one movable mirror: squeezing, antibunching and entanglement, 2017.

- [55] A. Dalafi and M. H. Naderi. Dispersive interaction of a bose-einstein condensate with a movable mirror of an optomechanical cavity in the presence of laser phase noise. *Phys. Rev. A*, 94:063636, Dec 2016.
- [56] Cheng-Hua Bai, Dong-Yang Wang, Hong-Fu Wang, Ai-Dong Zhu, and Shou Zhang. Robust entanglement between a movable mirror and atomic ensemble and entanglement transfer in coupled optomechanical system. *Scientific Reports*, 6(1):33404, 2016.
- [57] Qin Wu and Peng-Cheng Ma. Tunable double optomechanical induced transparency in an optomechanical system with bose–einstein condensate. *Journal of Modern Optics*, 64(7):685–690, 2017.
- [58] Nikhil Pramanik, Krishna Chaitanya Yellapragada, Suneel Singh, and P. Anantha Lakshmi. Coherent control of fano resonances in a macroscopic four-mirror cavity, 2019.
- [59] Asad Hafeez, Ziauddin, Muqaddar Abbas, and Sajid Qamar. Optomechanically induced transparency and fano resonances in a graphene-based nanocavity. *J. Opt. Soc. Am. B*, 36(11):3070–3078, Nov 2019.
- [60] Xiang Li, Mikhail Korobko, Yiqiu Ma, Roman Schnabel, and Yanbei Chen. Coherent coupling completing an unambiguous optomechanical classification framework. *Phys. Rev. A*, 100:053855, Nov 2019.
- [61] Jonathan Cripe, Nancy Aggarwal, Robinjeet Singh, Robert Lanza, Adam Libson, Min Jet Yap, Garrett D. Cole, David E. McClelland, Nergis Mavalvala, and Thomas Corbitt. Radiation-pressure-mediated control of an optomechanical cavity. *Phys. Rev. A*, 97:013827, Jan 2018.
- [62] P. Grünwald and B. M. Rodríguez-Lara. Radiation pressure in finite fabry-perot cavities. *OSA Continuum*, 2(1):175–183, Jan 2019.
- [63] Kerry J. Vahala. Optical microcavities. *Nature*, 424(6950):839–846, 2003.

- [64] Xuefeng Jiang and Lan Yang. Optothermal dynamics in whispering-gallery microresonators. *Light: Science & Applications*, 9(1):24, 2020.
- [65] Min Wang, Yun-Zhao Wang, Xu-Sheng Xu, Yun-Qi Hu, and Gui-Lu Long. Characterization of microresonator-geometry-deformation for cavity optomechanics. *Opt. Express*, 27(1):63–73, Jan 2019.
- [66] Yan-Lei Zhang, Chun-Hua Dong, Chang-Ling Zou, Xu-Bo Zou, Ying-Dan Wang, and Guang-Can Guo. Optomechanical devices based on traveling-wave microresonators. *Phys. Rev. A*, 95:043815, Apr 2017.
- [67] Ziauddin, Rabia Jamil, You-Lin Chaung, and Rahmatullah. Tunable fano resonances via optomechanical effect and gain–loss ratio in coupled microresonators. *Laser Physics*, 28(11):116003, sep 2018.
- [68] Baicheng Yao, Caibin Yu, Yu Wu, Shu-Wei Huang, Han Wu, Yuan Gong, Yuanfu Chen, Yanrong Li, Chee Wei Wong, Xudong Fan, and Yunjiang Rao. Graphene-enhanced brillouin optomechanical microresonator for ultrasensitive gas detection. *Nano Letters*, 17(8):4996–5002, Aug 2017.
- [69] A. Giorgini, S. Avino, P. Malara, P. De Natale, and G. Gagliardi. Fundamental limits in high-q droplet microresonators. *Scientific Reports*, 7(1):41997, 2017.
- [70] A M Jayich, J C Sankey, B M Zwickl, C Yang, J D Thompson, S M Girvin, A A Clerk, F Marquardt, and J G E Harris. Dispersive optomechanics: a membrane inside a cavity. *New Journal of Physics*, 10(9):095008, sep 2008.
- [71] Ming Gao, FuChuan Lei, ChunGuang Du, and GuiLu Long. Dynamics and entanglement of a membrane-in-the-middle optomechanical system in the extremely-large-amplitude regime. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 59(1):610301, 2015.
- [72] Xinrui Wei, Jiteng Sheng, Cheng Yang, Yuelong Wu, and Haibin Wu. Controllable two-membrane-in-the-middle cavity optomechanical system. *Phys. Rev. A*, 99:023851, Feb 2019.

- [73] Claus Gärtner, João P. Moura, Wouter Haaxman, Richard A. Norte, and Simon Gröblacher. Integrated optomechanical arrays of two high reflectivity sin membranes. *Nano Letters*, 18(11):7171–7175, Nov 2018.
- [74] David C. Newsom, Fernando Luna, Vitaly Fedoseev, Wolfgang Löffler, and Dirk Bouwmeester. Optimal optomechanical coupling strength in multimembrane systems. *Phys. Rev. A*, 101:033829, Mar 2020.
- [75] A. Dalafi and M. H. Naderi. Controlling steady-state bipartite entanglement and quadrature squeezing in a membrane-in-the-middle optomechanical system with two bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 96:033631, Sep 2017.
- [76] A. Dalafi, M. H. Naderi, and Ali Motazedifard. Effects of quadratic coupling and squeezed vacuum injection in an optomechanical cavity assisted with a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 97:043619, Apr 2018.
- [77] F. Diedrich, J. C. Bergquist, Wayne M. Itano, and D. J. Wineland. Laser cooling to the zero-point energy of motion. *Phys. Rev. Lett.*, 62:403–406, Jan 1989.
- [78] Wolfgang Paul. Electromagnetic traps for charged and neutral particles. *Rev. Mod. Phys.*, 62:531–540, Jul 1990.
- [79] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland. Quantum dynamics of single trapped ions. *Rev. Mod. Phys.*, 75:281–324, Mar 2003.
- [80] Lowell S. Brown. Quantum motion in a paul trap. *Phys. Rev. Lett.*, 66:527–529, Feb 1991.
- [81] Sigmund Kohler, Thomas Dittrich, and Peter Hänggi. Floquet-markovian description of the parametrically driven, dissipative harmonic quantum oscillator. *Phys. Rev. E*, 55:300–313, Jan 1997.
- [82] R. I. BARANOV and Yu. M. SHIROKOV. Electromagnetic field in an optical resonator with a movable mirror. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 26(6):2123, June 1968.

- [83] Gerald T. Moore. Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity. *Journal of Mathematical Physics*, 11(9):2679–2691, 1970.
- [84] C. K. Law. Effective hamiltonian for the radiation in a cavity with a moving mirror and a time-varying dielectric medium. *Phys. Rev. A*, 49:433–437, Jan 1994.
- [85] Günter Plunien, Berndt Müller, and Walter Greiner. The casimir effect. *Physics Reports*, 134(2):87 – 193, 1986.
- [86] P. W. Milonni, R. J. Cook, and M. E. Goggin. Radiation pressure from the vacuum: Physical interpretation of the casimir force. *Phys. Rev. A*, 38:1621–1623, Aug 1988.
- [87] Florian Marquardt, Joe P. Chen, A Clerk, and Steven Girvin. Quantum theory of cavity-assisted sideband cooling of mechanical motion. *Physical review letters*, 99:093902, 09 2007.
- [88] A. Clerk, M. Devoret, S. Girvin, F. Marquardt, and R. Schoelkopf. Introduction to quantum noise, measurement, and amplification. *Reviews of Modern Physics*, 82:1155–1208, 2010.
- [89] M. Devoret, B. Huard, R. Schoelkopf, and L.F. Cugliandolo. *Quantum Machines: Measurement and Control of Engineered Quantum Systems: Lecture Notes of the Les Houches Summer School: Volume 96, July 2011*. Lecture Notes of the Les Houches Summer School. OUP Oxford, 2014.
- [90] C. Chatfield. *The Analysis of Time Series: An Introduction*. Texts in statistical science. Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [91] R Kubo. The fluctuation-dissipation theorem. *Reports on Progress in Physics*, 29(1):255–284, jan 1966.

- [92] J. J. Sakurai and Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2 edition, 2017.
- [93] C. Gardiner, P. Zoller, and P. Zoller. *Quantum Noise: A Handbook of Markovian and Non-Markovian Quantum Stochastic Methods with Applications to Quantum Optics*. Springer Series in Synergetics. Springer, 2004.
- [94] Marcin Piatek and Artur R. Pietrykowski. Classical irregular blocks, hill's equation and pt-symmetric periodic complex potentials. *Journal of High Energy Physics*, 2016(7):131, Jul 2016.
- [95] R. Reissig. Magnus, w. und s. winkler, hill's equation (interscience tracts in pure and applied mathematics, number 20). viii + 127 s. new york/london/sydney 1966. interscience publishers. preis geb. 68 s.net. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 48(2):138–139, 1968.
- [96] F.G.M.V.N.G.G. Werth, N.I.L.P.R.V.N. Gheorghe, F.G. Major, V.N. Gheorghe, G. Werth, and G. Werth. *Charged Particle Traps: Physics and Techniques of Charged Particle Field Confinement*. Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics. Springer, 2005.
- [97] R. Coisson, G. Vernizzi, and X. Yang. Mathieu functions and numerical solutions of the mathieu equation. In *2009 IEEE International Workshop on Open-source Software for Scientific Computation (OSSC)*, pages 3–10, 2009.
- [98] M.J. Ward. *Industrial Mathematics, Lecture Notes, Dept. of Mathematics*. Unpublished, Univ. of British Columbia, Vancouver, B.C., Canada, 2008.
- [99] A G Fainshtein, N L Manakov, and L P Rapoport. Some general properties of quasi-energetic spectra of quantum systems in classical monochromatic fields. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 11(14):2561–2577, jul 1978.

- [100] Howard Carmichael. *Statistical Methods in Quantum Optics, Vol 1*, volume 1 of *Theoretical and Mathematical Physics*. Springer, 1 edition, 1999.
- [101] Pablo Yanes-Thomas, Pablo Barberis-Blostein, and Marc Bienert. Cooling in a parametrically driven optomechanical cavity. *Phys. Rev. A*, 102:013512, Jul 2020.
- [102] Václav Potoček and Stephen M Barnett. On the exponential form of the displacement operator for different systems. *Physica Scripta*, 90(6):065208, may 2015.
- [103] I Wilson-Rae, N Nooshi, J Dobrindt, T J Kippenberg, and W Zwerger. Cavity-assisted backaction cooling of mechanical resonators. *New Journal of Physics*, 10(9):095007, sep 2008.
- [104] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. Number v. 1 in *Quantum Mechanics*. Wiley, 1991.
- [105] Hans-Jürgen Briegel and Berthold-Georg Englert. Quantum optical master equations: The use of damping bases. *Phys. Rev. A*, 47:3311–3329, Apr 1993.
- [106] Stephen M. Barnett and Stig Stenholm. Spectral decomposition of the lindblad operator. *Journal of Modern Optics*, 47(14-15):2869–2882, 2000.
- [107] M. Wallquist, K. Hammerer, P. Zoller, C. Genes, M. Ludwig, F. Marquardt, P. Treutlein, J. Ye, and H. J. Kimble. Single-atom cavity qed and optomechanics. *Phys. Rev. A*, 81:023816, Feb 2010.
- [108] Nadine Meyer, Andrés de los Rios Sommer, Pau Mestres, Jan Gieseler, Vijay Jain, Lukas Novotny, and Romain Quidant. Resolved-sideband cooling of a levitated nanoparticle in the presence of laser phase noise. *Phys. Rev. Lett.*, 123:153601, Oct 2019.
- [109] H. Waadeland and L. Lorentzen. *CONTINUED FRACTIONS*. Atlantis Studies in Mathematics for Engineering and Science. Atlantis Press, 2008.

- [110] R.R. Puri, T. Asakura, K.H. Brenner, T.W. Hansch, F. Krausz, H. Weber, and W.T. Rhodes. *Mathematical Methods of Quantum Optics*. Physics and astronomy online library. Springer, 2001.