UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
FACULTAD DE CIENCIAS
DIRECCIÓN GENERAL DE DIVULGACIÓN DE LA CIENCIA

EL PAPEL DE LA INTUICIÓN PURA EN LA GEOMETRÍA. UNA REVISIÓN CRÍTICA DEL CONVENCIONALISMO DE HENRI POINCARÉ DE CARA AL SURGIMIENTO DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAESTRÍA EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA

MARIANA FLORES RABASA

DIRECTOR: DR. ÁLVARO PELÁEZ CEDRÉS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Ciudad Universitaria, CDMX, mayo 2021

Para Roberto, Francisco, Sofía y Álvaro

AGRADECIMIENTOS

Sirva este breve espacio para dejar por escrito mi más profundo agradecimiento a las personas e instituciones que hicieron posible este trabajo. En primer lugar, me permito mencionar al Dr. Álvaro Peláez, tutor principal, pues sin su guía, ayuda, sabio y pertinente consejo, pero sobre todo, su enorme paciencia, habría sido imposible llegar a buen puerto. Gracias, Álvaro, por no claudicar. Asimismo, quiero agradecer a todo el Comité de tutores que revisaron esta tesis: Dr. Max Fernández de Castro, Dr. Silvio Mota, Dr. Cristian Gutiérrez y, sobre todo, Dra. Carmen Martínez, cuyas pertinentes y agudas observaciones me impulsaron a mejorar el manuscrito original, al tiempo que fueron razón para motivarme a indagar con más interés en las matemáticas. En tercer término, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por su patrocinio y apoyo en el proceso de esta maestría y del trabajo que aquí se presenta, así como al Posgrado de Filosofía de la Ciencia, por hacer posible la conclusión de esta tesis, que corona varios años de estudio.

A este invaluable apoyo académico se suma el soporte de familiares y amigos quienes, tras bambalinas, no dejaron de animarme a seguir. Especial mención merece el Dr. Luis Rivera y su desinteresado apoyo, la Dra. Rocío Mier y Terán, por su amistad y confianza, y en general, mis colegas de la Universidad Panamericana, que no perdieron la fe en mí. A mis amigas y amigos, filósofos y no filósofos, porque en la conversación fraterna también fluye el conocimiento y es posible encontrar la verdad. A mis padres y a mis suegros por su apoyo incondicional y por una generosidad que no conoce límites; a mis hermanos, a mis hijos, que vivieron conmigo todo este proceso y sobre todo a Roberto, simplemente porque siempre estuvo ahí. Sin su apoyo y amor, nada de esto habría sido posible.

INTRODUCCIÓN

"No entre nadie que no esté instruido en geometría"
Inscripción del frontispicio de la Academia de Platón

Uno de los principales objetivos de la *Crítica de la Razón Pura* es el de explicar la forma en que la razón es capaz de producir conocimientos apodícticos propios de las ciencias, esto es, universales y necesarios, sin ser deducidos directamente de la evidencia empírica. Su propuesta consiste en la idea de una razón pura que se determina a sí misma a partir de fundamentos *a priori,* que a su vez descubre en sí misma, pero guiada por la experiencia. A juicio de Kant, la conexión necesaria entre dos ideas no puede fundamentarse únicamente en el significado de los símbolos dando lugar a razonamientos de carácter meramente analítico, pues es preciso superar el razonamiento psicologista de Hume para sostener que también existen cuestiones de hecho que pueden justificarse con necesidad. El giro copernicano con el que introduce su obra propone que la legalidad de las ciencias reside en la estructura lógica de la razón que, en su articulación con las formas puras de la sensibilidad, espacio y tiempo, permiten al hombre experimentar la naturaleza como un conjunto de reglas estable y unificado.

El método para demostrar que esto es cierto, no solo de hecho, sino también de derecho, es bien conocido: una crítica sobre el conocimiento en la que se determine su capacidad para producir conocimientos sintéticos *a priori*, esto es, conocimientos que suponen atribuir con verdad nuevos predicados a un sujeto sin validarse desde la experiencia. En la antesala de tan ambicioso proyecto, Kant advierte que la razón pura debe ser una unidad tan perfecta que, si su principio resulta insuficiente para una sola de las cuestiones que ella se plantea a sí misma, sería necesario rechazar tal principio, bajo la sospecha de su incapacidad para solucionar con plena seguridad cualquier otra cuestión que se le presente (A XIII).

La fundamentación de las Matemáticas, ocupa un lugar preponderante dentro de todo este entramado argumentativo, por lo que su comprensión es crucial para entender su crítica, en tanto que Kant supone que el método matemático es paradigmático respecto de cualquier saber que busque erigirse como científico. Esta situación resulta particularmente sensible para la Metafísica, pues mientras la Filosofía procede a través de un *conocimiento racional derivado de conceptos*, el método matemático es un *conocimiento obtenido por construcción de conceptos* (A713/B741). Lo anterior significa que, para el caso concreto de la geometría, la razón es capaz de determinar su objeto completamente *a priori*, al construir sus conceptos y extraer de dicha construcción, igualmente *a priori,* sus propiedades, la cuales puede corroborar en la intuición empírica. Además, la solidez de la geometría radica en su capacidad para establecer definiciones, axiomas y demostraciones. Por axioma, Kant entiende principios sintéticos *a priori* en cuanto que son inmediatamente ciertos, y que son posibles en tanto que las matemáticas pueden, mediante la construcción de conceptos en la intuición del objeto, combinar los predicados de éste *a priori* y de forma inmediata (A732/B760).

La crítica por excelencia a esta explicación acusa que la formulación kantiana del método matemático que da cuenta de su carácter apodíctico, aunque audaz, estaba en profunda dependencia de la física newtoniana y la geometría de Euclides, lo cual circunscribió seriamente sus alcances a la luz de descubrimientos matemáticos y físicos posteriores; sin embargo, el alcance de esta filiación no tuvo la necesidad de ser esclarecida hasta aproximadamente cincuenta años después, con el surgimiento de las geometrías no euclidianas. Sin duda, las geometrías que partían de postulados distintos a los sentados por Euclides se convirtieron en un reto importante tanto para el ámbito concreto de las matemáticas en particular, como para la misma historia de la ciencia en general, y en concreto para el papel del espacio como intuición pura y como forma pura de la receptividad, regulada por principios universales y necesarios que, sin haber sido deducidos de la experiencia, de algún modo podían constituirla. Al partir de axiomas contrarios a la intuición, pero lógicamente consistentes, las geometrías no euclidianas supusieron un problema epistemológico genuino que era preciso resolver.

En el escenario de dicha discusión se encuentra Henri Poincaré, destacado matemático y filósofo de la ciencia quien, preocupado por los nuevos problemas suscitados, se dio a la tarea de redefinir el estatus epistemológico de los axiomas geométricos dando lugar a una postura denominada *convencionalismo* la cual se encuentra desarrollada preponderantemente en su obra de divulgación más popular, *Ciencia e hipótesis,* publicada originalmente en 1902. Aunque Poincaré, en coincidencia con Kant, sostiene que la intuición pura persiste como la "intuición del número puro", de vital importancia para justificar el principio de inducción matemática en aritmética, la posibilidad de construir geometrías distintas a la euclidiana lo conduce a negar el mismo camino para la geometría. A su juicio, la aparición de geometrías no euclidianas es un obstáculo para suponer que la geometría del espacio pueda ser determinada *a priori*; pero el hecho de que podamos experimentar cuerpos materiales y sus relaciones, no así el espacio en sí mismo, muestra que la geometría del espacio tampoco puede ser determinada empíricamente. Su propuesta es que los enunciados sobre la geometría del espacio deben concebirse como "definiciones disfrazadas" o convenciones que, sin embargo, tampoco deben ser reducidas a mera lingüística, pues su formulación debe estar guiada por la experiencia.

De este modo, parece que el convencionalismo de Poincaré elimina por completo la suposición de un espacio como forma pura de la sensibilidad en favor del concepto algebraico de grupo para explicar la posibilidad y diversidad de los espacios geométricos, y cuya estructura, aunque *a priori*, proviene más bien del entendimiento; en contraposición, el espacio perceptual, producto de la asociación de los movimientos del sujeto, es el contexto de descubrimiento apropiado para la inspiración de los diversos espacios geométricos y en particular del espacio euclídeo, más no para su justificación.

Como alternativa a esta lectura, el propósito de este trabajo es el de mostrar que, para el mismo Poincaré, la necesidad de la intuición pura como forma de la sensibilidad subsiste no sólo en la aritmética, sino también en los fundamentos de la topología, considerada por Poincaré como la forma más general de geometría. Como trataré de explicar, particularmente en el capítulo 3 de este trabajo, la intuición del continuo de cualquier número de dimensiones al que recurre Poincaré hacia el final de uno de sus últimos artículos titulado "¿Por qué el espacio tiene tres dimensiones?” (1913/1963), muestra similitudes importantes con la caracterización de la intuición del número puro al que recurre en Aritmética, presumible ejemplo de la necesidad de intuición en matemáticas; a su vez, este continuo parece guardar semejanzas importantes con la intuición pura del espacio de la filosofía trascendental kantiana. En consecuencia, el crucial papel que Kant considera para el espacio en tanto forma pura de la sensibilidad no es completamente desechado por Poincaré, quien para resolver una petición de principio que había introducido inadvertidamente en sus textos de divulgación más extendidos sobre este tema, se ve en la necesidad de reintroducir una especie de intuición pura con funciones similares al espacio como forma de la receptividad de los fenómenos en publicaciones posteriores, cuyas conclusiones implicarían ciertas restricciones en los alcances de su propio convencionalismo.

Para mostrar esta continuidad entre Kant y Poincaré, he dividido el presente trabajo en tres capítulos. En el primero de ellos explicaré que para Kant el espacio, entendido como intuición y como forma pura de la sensibilidad, tiene una función imprescindible en la fundamentación de la geometría ya que, en tanto forma de la receptividad, no solo es considerado como condición de la percepción sensible sino también de la construcción matemática desde la cuál es posible extraer los axiomas y postulados de la geometría clásica en su carácter de juicios sintéticos *a priori.* Esta explicación se complementa con el determinante papel que ocupa la imaginación productiva y su referencia a la unidad sintética de apercepción, principio más alto desde el cual se funda la posibilidad de todo conocimiento según la filosofía trascendental kantiana, así como con la discusión sobre algunas de las principales posturas en torno a la interpretación que ocupa la intuición pura en relación al sistema de la geometría euclidiana. En el segundo capítulo, y tras un breve repaso de algunas de las principales revoluciones acaecidas en el campo de la geometría durante el siglo XIX, expondré brevemente la reformulación propuesta por Poincaré en torno al estatus de los axiomas de la geometría como convenciones o definiciones disfrazadas, poniendo particular atención en la naturaleza del espacio que lleva a Poincaré a hacer una aseveración de tal tipo.

En el tercer capítulo explicaré hasta qué punto la noción de intuición del continuo amorfo que se encuentra a la base de la formación del continuo físico y matemático de cualquier número de dimensiones, introducida en un artículo publicado como parte de sus *Últimos pensamientos* de 1913 (Poincaré, 1913/1963), es asimilable al espacio como forma pura de la sensibilidad kantiana, lo cual supone un distanciamiento evidente respecto del formalismo propuesto por David Hilbert, según el cual la verdad de la teoría se resuelve únicamente desde la coherencia de la sintaxis del lenguaje en el cual está expresada. La necesidad de apelar a una especie de representación *a priori* del continuo que subyace a la experiencia, y que está a la base del continuo matemático sobre el cual trabaja la topología, supondrá sin lugar a dudas una circunscripción de los alcances del convencionalismo de Poincaré, lo que me permitirá aportar algunas sugerencias en torno a la discusión de la medida en la que puede considerársele heredero de la filosofía trascendental kantiana.

Ahora bien, el presente trabajo, por su propia naturaleza y objetivos, tiene algunos límites importantes. El primero de ellos radica en la propia comprensión de la posición epistemológica de Kant en torno a la posibilidad del conocimiento matemático, pues en sí misma, dicha discusión ya amerita una reflexión muy extensa. En esta tesis abordaré algunas de las discusiones más importantes en lo que concierne a las posibles interpretaciones del término *intuición*, su relación con el espacio, y su papel en la legitimación de la geometría, con la salvedad de que, a mi juicio, lo más importante no radica en la solución de dicha problemática *per se*, sino en el análisis de lo que de hecho Poincaré comprendió de Kant, aspecto sobre el cual deja un par de señales a mi parecer muy claras que serán exploradas en este trabajo. Sobre este asunto, considero preciso adelantar que, desde mi punto de vista, Poincaré hereda una visión muy “clásica” pero limitada, donde la necesidad de la intuición para las construcciones geométricas debe entenderse a la luz de lo establecido previamente en la Estética Trascendental, es decir, una intuición ligada por completo a la sensibilidad.

Otro inconveniente con el que me topé a lo largo de mi trabajo surgió en relación con los términos utilizados por Poincaré al momento de caracterizar su concepto de espacio, en concreto, a propósito de la diferencia entre lo que identifica como "espacio geométrico" y "espacio sensible" o "espacio perceptual". Al respecto, cabe recordar que Poincaré es el "padre" de la topología algebraica, cuyos cimientos se encuentran precisamente en un artículo suyo, *Analysis Situs*, publicado en 1895, por lo que gran parte de sus reflexiones filosóficas en torno a la naturaleza del espacio y su relación con la geometría están en relación de dependencia tanto de las recientemente descubiertas geometrías no-euclidianas como de sus propias ideas matemáticas plasmadas en este y otros muchos artículos. Como es frecuente en documentos fundacionales de este tipo, gran parte del vocabulario utilizado no se corresponde con el léxico preciso en términos del cual, al día de hoy, se aborda tan interesante ciencia. No obstante, en la medida de lo posible he decidido conservar el vocabulario utilizado por Poincaré, por considerar que éste nos transmite de una forma mucho más fiel el espíritu de su filosofía, y porque hacer una traducción respecto a la terminología moderna ameritaría de suyo todo un trabajo independiente.

Por último, aunque mi propósito original era el de dar un veredicto mucho más definitivo sobre el legado kantiano presente en el conjunto total de la filosofía de Poincaré, me di cuenta que ello implicaba un análisis mucho más detallado de la noción de grupo de trasformaciones como ese elemento que, en palabras de Poincaré, "preexiste en nuestra mente" y que bien podría ser considerado como vestigio importante de un *a priori* constitutivo en su interpretación más fiel a la filosofía kantiana.[1] Y aunque hago algunas anotaciones al respecto, he debido restringir mi investigación a algo mucho más sencillo, a saber, el de destacar, que por lo menos desde el punto de vista de la intuición pura del espacio, Poincaré termina conservando de Kant, más de lo que en principio él mismo estaba dispuesto a admitir. Considero que hacer una llamada de atención en torno a este aspecto de la filosofía de Poincaré puede resultar fructífero para una discusión de mayor amplitud en torno a los fundamentos de la matemática.

[1] Para un análisis más detallado sobre este aspecto recomiendo la lectura del libro *Lo a priori constitutivo: historia y perspectiva* de Álvaro Peláez Cedrés (Anthropos-UAM, México: 2008).

CAPÍTULO 1

EL ESPACIO DESDE LA FILOSOFÍA TRASCENDENTAL KANTIANA

Uno de los principios más fundamentales de la *Crítica de la razón pura* es la necesidad y universalidad de las ciencias, entre las que destaca la geometría euclidiana, de modo que su propósito no es el de cuestionar el carácter apodíctico de sus axiomas, sino el de mostrar qué es lo que justifica su legalidad, para inquirir si el mismo camino le puede ser destinado a la metafísica (B21-B22)[2]. La respuesta de Kant, bien conocida, consiste en afirmar que sus enunciados son juicios sintéticos *a priori,* cuyo contenido no ha surgido a partir del simple análisis de ciertos conceptos como “línea”, o “punto”; dicho de otro modo, no es posible afirmar que el predicado de cada proposición se encuentra incluido, implícitamente, en su sujeto. Por el contrario, su contenido expresa la unión de dos o más conceptos, cuya necesidad y validez tampoco depende en forma alguna de la experiencia sino de un espacio entendido como intuición -o representación- pura y como forma pura *a priori* de nuestra sensibilidad. “La geometría es una ciencia que establece las propiedades del espacio sintéticamente y, no obstante, *a priori*. ¿Cuál ha de ser la representación del espacio para que sea posible semejante conocimiento del mismo? Tiene que ser originalmente una intuición, ya que de un simple concepto no pueden extraerse proposiciones que vayan más allá del concepto, cosa que, sin embargo, ocurre en la geometría” (B41). A diferencia de los conceptos newtonianos de “tiempo y espacio absolutos” como referentes externos del movimiento, para hacer frente al desafío humeano[3], Kant propone una reconsideración de ambos conceptos en un doble sentido, como “formas puras” y como “intuiciones puras”. Ambos calificativos,

[2] En *Prolegómenos a toda metafísica futura* también encontramos una idea similar: “tenemos, pues, por lo menos, algunos indiscutibles conocimientos sintéticos a priori y no debemos preguntar si son posibles (puesto que son reales), sino solamente cómo son posibles, para poder deducir también, del principio de la posibilidad de los conocimientos dados la posibilidad de todos los demás (1999, §4).

[3] En B20, Kant critica que Hume, al convertir toda metafísica en una mera ilusión de pretendidos conocimientos racionales que de hecho solo proceden de la experiencia, y que adquieren apariencia de necesidad gracias a la costumbre, elimina la posibilidad de toda filosofía pura, incluyendo la matemática pura, que contiene ciertamente proposiciones sintéticas *a priori.* De ahí que conciba su propia propuesta, consistente en la posibilidad de un uso puro de la razón en la fundamentación y desarrollo de todas las ciencias que contengan conocimientos teóricos *a priori,* precisamente como una solución al desafío planteado por Hume.

aunque relacionados, destacan aspectos distintos que ameritan ser estudiados individualmente.

1.1 El espacio como forma pura de la sensibilidad

En conformidad con la filosofía clásica, Kant considera para el psiquismo dos facultades: el entendimiento de un lado, y la sensibilidad de otro. Mientras la tarea de la sensibilidad es la de procurar al sujeto las intuiciones, el entendimiento debe ordenarlas en ciertas relaciones a través de categorías para poder pensarlas. Los objetos sólo nos pueden ser dados mediante la sensibilidad, única fuente capaz de proporcionar intuiciones; sin embargo, dista mucho de ser un simple receptáculo pasivo en el que se presentan indistintamente los fenómenos. Por el contrario, como trataré de sostener a lo largo de este capítulo, por su forma pura externa se trata de una instancia imprescindible del conocimiento geométrico que posibilita, al tiempo que limita, el acto de síntesis de la imaginación productiva para dar lugar a los axiomas (postulados) de la geometría[4] como juicios sintéticos *a priori.*

En todo fenómeno es posible distinguir un aspecto material, que no es otra cosa que lo que corresponde a la sensación, que a su vez debe ser ordenado en ciertas relaciones que constituyen su aspecto formal. Y como las sensaciones sólo pueden ser ordenadas y dispuestas en algo que no puede ser a su vez sensación, a diferencia de la materia del fenómeno, que necesariamente es dada *a posteriori*, espacio y tiempo, formas del fenómeno, deben estar completamente *a priori* dispuestas en el psiquismo, y por ello mismo, deben ser susceptibles de una

[4] Kant no es lo suficientemente riguroso en su distinción de los elementos fundamentales que conforman el sistema de la geometría euclídea. Los postulados (αἰτήματα) son denominados axiomas, -mientras que en las traducciones actuales más bien las nociones comunes (κοιναί ἔννοιαι) son las que reciben tal denominación- y tanto éstos como las proposiciones son tratadas indistintamente como juicios sintéticos *a priori* sin que en ningún momento haga explícita la distinción jerárquica que existe entre ellos. Véase por ejemplo A25-B39, donde menciona el "principio geométrico" que en los *Elementos* corresponde a la proposición 20 del libro I, mientras que en B16 presumiblemente se está refiriendo al Postulado 1, el cual también es catalogado como principio geométrico. Todavía más relevante es que las nociones comunes sean catalogadas, en cambio, como juicios analíticos, en tanto que Kant las considera inmediatamente ciertas y dependientes del principio de no contradicción, aunque también son susceptibles de representación intuitiva (ver B17 y A164/B 204-205). En todo este capítulo utilizaré, en consonancia con la traducción de la *Crítica* al español, el término "axioma" para referirme a estos principios geométricos considerados en su calidad de juicios sintéticos *a priori* y, cuando sea pertinente, entre paréntesis especificaré si se refiere a un postulado o a un teorema, bajo el entendido de que la "manzana de la discordia" será propiamente hablando el postulado de las paralelas.

consideración independiente de toda sensación. Espacio y tiempo son pues, las formas de toda intuición sensible, es decir, las formas bajo las cuales el sujeto es afectado por los fenómenos para formarse una representación de los mismos llamada intuición, siendo el espacio la forma del sentido externo, y el tiempo la forma del sentido interno (Cfr. A20-B34).

Esta condición *a priori* de las formas de la intuición sensible conduce a Kant a rematar el apartado de la Estética Trascendental con dos conclusiones.

a) El espacio no representa ninguna propiedad de las cosas en sí mismas ni de sus relaciones entre sí.
b) El espacio en tanto forma de la intuición no solo es una disposición por medio de la cual las intuiciones representan sus objetos como espaciales, sino que contiene en sí mismo, en cuanto intuición pura y previamente a toda experiencia, principios que regulan las relaciones de los objetos que son determinados en él (A26/B42).

Sin embargo, la interpretación de estas conclusiones conlleva ciertas dificultades. En cuanto a *a)*, el problema es que esta forma de concebir la naturaleza de los objetos de la percepción sensible, es decir los fenómenos, según la cual el espacio y el tiempo no son atributos de las cosas en sí, sino formas impuestas de algún modo por el sujeto, resulta paradójica, ya que Kant también sostiene que las cosas en sí no pueden conocerse directamente y por lo tanto en estricto sentido, no puede decirse nada sobre ellas, es decir, no se puede afirmar que son espaciales, pero que tampoco no lo son. En su artículo *The Trascendental Aesthetic* (1992), Charles Parsons identifica tres tipos de respuestas a este dilema, que no es otro que la pregunta por lo que desde Kant debe entenderse como el concepto de un objeto en sí. La primera, a la que llama “la imagen de distorsión”, consiste en asumir que nuestras intuiciones representan a los objetos como poseedores de ciertas propiedades y relaciones que de hecho no tienen. Desde el punto de vista de Parsons, en realidad, no se trata de una solución fundamentada en argumentos, sino que simplemente impone la distinción entre *fenómeno* -espacio-temporal- y *noumeno* -no espacio-temporal- “por decreto”. Su problema, por tanto, reside en que es una alternativa que solo reconduce al problema original ya que, si no podemos tener conocimientos sobre las cosas en sí mismas, entonces no podemos afirmar que son intrínsecamente espaciales, pero tampoco lo contrario, -a menos que se quiera inferir que nuestro conocimiento de los fenómenos es falso porque difiere de cómo son las cosas en sí mismas-. Otra opción es el punto de vista calificado como “intencional”, sostenido por ejemplo por Gerold Prauss a raíz de un cuidadoso análisis textual del modo de hablar de Kant de las “cosas en sí mismas” (1989). De acuerdo con éste, la distinción entre las representaciones espacio-temporales de las cosas -apariencias- por contraposición a las cosas “en sí mismas” -conclusión que apuntala Kant hacia el final de la Estética- no supone una diferencia entre dos clases de objetos diferentes, sino en todo caso, se trata de una mera distinción “intencional” que, sin embargo, no implica una distinción cognoscitiva real. La diferencia entre ambas radica entonces en que la representación de un objeto, -en tanto apariencia- es capaz de ser totalmente conocida, mientras que la representación del objeto en sí es una mera abstracción de ciertas condiciones, la intuición en particular, que hacen dicho conocimiento posible. Prauss admite, sin embargo, que esta interpretación no siempre es consistente, pues hay muchos pasajes donde Kant parece más bien afirmar que las cosas “en sí mismas” efectivamente constituyen una categoría de objetos distintos a las meras apariencias, sin mencionar que esta perspectiva tiene dificultades para articularse coherentemente con la filosofía moral kantiana (Parsons, 1992).

La última solución explorada por Parsons, denominada “la visión subjetivista”, intenta ser fiel a la aseveración de Kant según la cual una intuición, es decir una representación de origen sensible, está condicionada de alguna manera por la propia subjetividad; sin embargo, en este caso, Parsons sugiere que se trata de un condicionamiento no solo relativo sino absoluto, de manera que el espacio, en tanto forma, no es solo una restricción de los objetos que pueden ser percibidos sino más aún, una condición de la naturaleza de esos objetos. Dicho de otra forma, el espacio en tanto forma pura de la sensibilidad, no debe entenderse como una especie de filtro que sólo nos permite percibir cosas que sean euclidianas y espaciales, sino más aún, es nuestra percepción de un objeto, lo que lo constituye como espacial -y euclidiano-. Esta posición, sostenida por Paul Guyer (*Kant and the* *claims of knowledge*, 1987) y suscrita en parte por Parsons (1992), supone que la distinción entre objeto y representación, tanto para el espacio y el tiempo como para las cosas que se hallan en dichas formas, colapsa, o en todo caso sólo es posible hacer una distinción empírica dentro de la esfera de las representaciones, de tal manera que la forma de la sensibilidad es completamente puesta por el sujeto, por lo que la espacialidad de los objetos se debe enteramente al sujeto en un sentido fuerte (Guyer, 1979, p. 361).

La interpretación subjetivista permite, según Parsons, congeniar las similitudes y diferencias que quiso establecer Kant respecto de sus antecesores inmediatos sobre este tema, a saber, el concepto de espacio absoluto de Newton, por un lado, y el espacio como producto de la relación entre objetos de Leibniz y Wolff por otro. En consonancia con la física clásica newtoniana, el espacio en tanto forma de la sensibilidad sigue siendo considerado como "absoluto", pero no desde el punto de vista del objeto, sino del sujeto[5], mientras que a diferencia de Leibniz (y Wolff), el espacio no es producto -sospechosamente empírico- de la relación entre objetos, sino constitutivo de esta relación[6] (Cfr. Parsons, 1992, pp. 67 y ss). De este modo, tenemos que, si todo conocimiento comienza con los sentidos, el papel de ambas formas de la sensibilidad es no solo el de ordenar, sino el de determinar las condiciones de existencia de las cosas, no en sí mismas, sino en tanto fenómenos que se encuentran en ciertas relaciones espacio-temporales, por lo que tienen su lugar en el psiquismo como formas externa e interna del objeto real de los sentidos o de la sensación. En cambio, del objeto en sí, más allá de su dimensión espacio - temporal, no nos es posible afirmar o negar nada, pues dicho problema carece de sentido.

Cabe decir que la perspectiva "subjetivista" del espacio no supone una interpretación relativa o individualista sobre la condición del espacio. Tampoco debe confundirse la filosofía trascendental kantiana con una posición naturalista; la

[5] Desde luego, en Kant esto no quiere decir que la constitución de la espacialidad de los objetos desde el sujeto implique que cada sujeto tendrá su propia y particular intuición del espacio; para Kant las formas de captar la realidad son universales e idénticas en todos los seres humanos: "Sólo conocemos nuestro modo de percibirlos -a los objetos-, modo que nos es peculiar y que, si bien ha de convenir a todos los humanos, no necesariamente ha de convenir a todos los seres." A42 B59.

[6] Para entender mejor ambas perspectivas ver Parsons, 1992: 67 y ss.

representación de los fenómenos espacial y temporalmente situados no es producto de una mera adaptación evolutiva de nuestra mente a los objetos, sino la conclusión de un razonamiento cuya premisa mayor es la suposición sobre la necesidad de la misma geometría de Euclides. Si una de las ideas fundamentales que inspira la *Crítica de la razón pura* es la de explicar la necesidad y universalidad de los postulados en los que se cimienta la geometría como juicios sintéticos *a priori*; si en tanto necesarios y universales no han podido ser deducidos de la experiencia, aunque sí legislen sobre la relación de los objetos de la experiencia, la solución kantiana se encuentra en conceptualizar el espacio como forma pura constitutiva de la sensibilidad del sujeto. En palabras de Parsons, quien sigue a Guyer en esto, la absoluta necesidad del idealismo trascendental depende por entero de la necesidad de la geometría de Euclides, y alude como prueba el siguiente pasaje de la *Crítica*:

> Si no hubiese en nosotros una facultad de intuir *a priori*; si esta condición subjetiva no fuese, a la vez, por su forma, la condición universal *a priori* requerida indispensable para hacer posible el objeto de esa intuición (externa) misma; si el objeto (el triángulo) fuera algo en sí mismo, sin relación con nosotros como sujetos, ¿cómo podríamos decir que lo que se halla necesariamente en nosotros como condición subjetiva para formar un triángulo pertenece también, de modo necesario, al triángulo en sí mismo? Pues no podemos añadir a nuestros conceptos (de tres líneas) nada nuevo (la figura) que tenga que hallarse necesariamente en el objeto, ya que éste no viene dado a través de nuestro conocimiento, sino con anterioridad al mismo. Si, pues, el espacio (e igualmente el tiempo) no fuese una simple forma de nuestra intuición, una forma que contiene las condiciones *a priori* sin las cuales no serían posibles para nosotros los objetos exteriores (que nada serían en sí mismos prescindiendo de esas condiciones subjetivas), no podríamos establecer nada sintéticamente *a priori* sobre dichos objetos exteriores. Por tanto, no solo es posible o probable que espacio y tiempo sean, en cuanto condiciones necesarias de toda experiencia (externa e interna), puras condiciones subjetivas de toda intuición humana, sino que es indudablemente cierto (A48-A49/B66).

Por tanto, aunque no siempre Kant es lo suficientemente claro en este punto, y aunque este enfoque no necesariamente evita por completo la "imagen de la distorsión" [7], por lo menos parece ser el más fácil de conciliar con la segunda

[7] Otro posible obstáculo frente al punto de vista subjetivista mencionado por Parsons radica en que éste también puede llevar a la respuesta denominada "la imagen distorsionada" -con sus consiguientes problemas-

conclusión con la cual remata la Estética trascendental (denominada aquí *b*), y por lo tanto, la opción más factible cuando Kant asegura que no solo tenemos una disposición general (de orden psicológico) a presentar espacialmente los objetos de la intuición, sino más aún, lo que “el espacio en tanto forma de la intuición conlleva sobre los objetos de la intuición externa, es que estos son representados en un espacio, y que se encuentran en relaciones espaciales unos respecto de otros, que obedecen a las leyes de la geometría” (Parsons, 1992, pp. 81). Si la geometría es la ciencia del espacio, y el espacio es la forma pura de la sensibilidad, es decir, la disposición por medio de la cual las intuiciones representan sus objetos como espaciales, lo más natural es concluir que la geometría es la ciencia que de algún modo describe, *a priori,* la forma pura de la sensibilidad externa, de manera que el espacio contiene en sí mismo, en cuanto intuición pura y previamente a toda experiencia, principios que regulan las relaciones de los objetos que son determinados en él (A26/B42), principios que son los propios de la geometría de Euclides (A162/B202). En efecto, en la *Crítica de la razón pura* la geometría es concebida como la ciencia capaz de establecer las propiedades del espacio sintéticamente, y no obstante *a priori* (A25/B40; A87/B120), de tal manera que lo que la geometría afirma para la intuición pura del espacio también vale incuestionablemente para la intuición empírica, que solo es posible a través de la intuición pura. La dependencia de la geometría respecto del espacio -en tanto forma pura de la sensibilidad- es tal que lleva a Kant a afirmar que, si se niega la validez objetiva del espacio -como la forma universal de la percepción externa del sujeto-, se niega la validez de la misma matemática (A165/B206). Si los objetos de los sentidos no pudieran conformarse a las reglas de construcción en el espacio, no podríamos conocer nada *a priori* de ellos ni, por tanto, sintéticamente mediante conceptos puros del espacio. La misma geometría que es la ciencia que determina estos conceptos, no sería posible (A166 / B207).

. Todo depende de la manera en cómo se piense el *objeto* de las representaciones. Si las apariencias son representaciones, es natural pensar en las “cosas en sí mismas” como sus objetos, cosa que a veces parece sugerir Kant (B xxvii; A251). Tendríamos así que mientras los objetos de nuestras representaciones empíricas son “la cosa en sí”, solo las representaciones representarían -valga la redundancia- sus objetos como espaciales. El obstáculo, no obstante, persiste, y es la falta de consistencia de Kant en este punto. (Cfr. Parsons, 1992).

Cuando Kant define al espacio como una forma pura de la sensibilidad, parece designar al espacio como el marco que posibilita un primer acto de determinación de los fenómenos, que tiene como tarea su ordenamiento en tanto percibidos por el sentido externo, y que es puro porque su origen no es ninguna sensación, sino que procede de la misma estructura psíquica trascendental del sujeto para enfrentarse al mundo -en la dimensión de la sensibilidad- , y que se halla enteramente dispuesto *a priori* en el psiquismo, sin necesidad de recurrir a la experiencia ni mediata ni inmediatamente para justificarse, pues en todo caso es posibilitador de la experiencia misma. El espacio es legalmente anterior a los fenómenos mismos y los determina, tanto en su conocimiento -el sujeto no puede propiamente conocer[8] ninguna intuición que no sea espacio-temporal- como en su modo de presentación. Así las cosas, el espacio debe poseer ya un *canon* a partir del cual ordenar los fenómenos, pues de otro modo se caería en la contradicción de una forma-amorfa, y por lo dicho en la conclusión b) identificada hacia el final de la Estética Trascendental, este canon es el que está explícito en los axiomas y postulados de los *Elementos* de Euclides.

Ahora bien, para ser representado como objeto, tal como lo requiere la geometría, el espacio no puede ser considerado solo como forma de la sensibilidad, es decir, como forma de la receptividad de los fenómenos, sino también como intuición pura, conteniendo una variedad, y consiguientemente, con la determinación de la unidad de tal variedad (Cfr. B161, y nota de Kant) para lo cual es necesario un acto de determinación. Ello me conduce a analizar la segunda caracterización que proporciona Kant sobre el mismo, ahora en tanto intuición pura.

1.2 El espacio como intuición pura

En la *Crítica* es posible identificar dos modos de representación: intuiciones y conceptos. Mientras los conceptos son generales y mediatos, toda intuición debe cumplir con dos características: ser inmediata, y como sólo hay intuiciones que se

[8] Kant hace una distinción entre conocer y pensar. Mientras pensar es considerar un concepto sin contradicción ya sea que este corresponda o no a un objeto, conocer implica poder demostrar la posibilidad de algo. Cfr. §22 de la Deducción Trascendental B de la *Crítica.*

dan a través de la sensibilidad, ser singular (Cfr. A320/B377). Si atendemos a la Estética Trascendental, una intuición, en el abigarrado lenguaje kantiano, es una representación inmediata que funciona como referencia del conocimiento con su objeto y aquello a que apunta todo pensamiento en cuanto medio; solo tiene lugar en la medida en que el objeto nos es dado, y esto sólo sucede a través de la sensibilidad (cfr. A19/B23). Si la sensibilidad, entendida como la capacidad de recibir representaciones al ser afectados por los objetos, es la única fuente capaz de suministrar intuiciones, por tanto, toda intuición se remite siempre a la sensibilidad como su origen. En cambio, el entendimiento no puede proporcionarnos intuición alguna; no hay tal cosa como una intuición intelectual, pues de ser así, nos encontraríamos fuera del ámbito de toda experiencia posible.[9]

Hay dos tipos de intuiciones: puras y empíricas. *Intuición* pura en sentido trascendental es aquella que no posee nada que provenga de la experiencia. Lo que queda de la intuición empírica al quitar todo lo perteneciente a la sensación, y sin considerar nada proveniente del entendimiento. En contraste, intuiciones empíricas son aquellas representaciones que se relacionan con su objeto, el fenómeno, objeto indeterminado de dicha intuición, a través de una sensación (A20/B34). De este modo, se entiende que la intuición es pura cuando no hay en ella nada de lo que pertenece a la sensación que es *a posteriori,* ni al entendimiento y sus conceptos mediante los cuales se piensan los objetos, pero sí a lo puesto por la sensibilidad en tanto facultad del psiquismo[10]. Espacio y tiempo no solo son formas puras de la presentación de los fenómenos, sino también representaciones en sí mismas, cuando son tematizadas como objetos geométricos; son intuiciones,

[9] En este punto Kant muestra por tanto, una diferencia considerable con filósofos anteriores, desde Platón y Aristóteles, quienes admitían tanto el pensar intuitivo como el discursivo, medievales como Tomás de Aquino, quien llega a denominar la intuición como una *praesentia intelligibilis ad intellectum quocumque modo*, hasta Descartes, quien ve en la intuición un acto de pensamiento puro, antónimo de la percepción sensible, mediante el cual se aprehende las naturalezas simples (Ferrater Mora,1983, entrada “intuición”). En cambio, desde el principio, Kant se ciñe fielmente a la definición común de intuición como “visión directa de algo individual existente” (Brugger, 2000, entrada “intuición), pero también desde el principio, para el caso humano, restringe su origen a la sensibilidad, a la que incluso por momentos parece llamar “facultad de intuición” (Ver por ejemplo BXVII).

[10] Kant define como sensación al efecto que produce sobre la capacidad de representación un objeto por el que somos afectados (A20/B34). Una sensación es siempre y necesariamente empírica porque procede de un objeto que es dado en la experiencia, en tanto que la sensibilidad, es una facultad del sujeto que procede de la misma estructura psíquica del sujeto como condición de posibilidad de su conocimiento.

pero no de origen empírico, en tanto que nuestra representación de las mismas no ha sido extraída de experiencias o afecciones (sensaciones) externas, sino intuiciones puras que, a su vez, constituyen la condición bajo la cual se nos dan sensiblemente los objetos[11] de la experiencia.

Refieren al sujeto de modo inmediato al objeto de conocimiento –el fenómeno, objeto indeterminado de la intuición empírica- y son condición de posibilidad del conocimiento mismo, sirviendo de base a toda otra intuición. Comparten con las intuiciones empíricas, como ya se dijo, su referencia a la sensibilidad como la facultad del psiquismo donde radican. Pero, además, también poseen las dos características distintivas de toda intuición, a saber, su singularidad e inmediatez[12]. En concreto el espacio es singular porque, a diferencia de un concepto "que está contenido en una cantidad infinita dada de representaciones", en tanto intuición, "contiene en sí una multitud de representaciones". Si la representación del espacio fuera un concepto, seríamos capaces de construirlo juntando partes suyas, es decir, "sumando" diferentes espacios para reunirlos en uno sólo, lo cual, a su vez, supondría la posibilidad de representar sus partes con independencia del todo; tal es el caso de otros conceptos como el de "material", el cual se puede pensar sin hacer referencia a todos los conceptos de los cuáles forma parte (por ejemplo, puede pensarse en el concepto de "materia" sin pensar necesariamente en el concepto de "humano" (Janiak, 2016)). En cambio, sólo podemos representarnos un único espacio, pues cuando se habla de muchos

[11] Si se sigue mi distinción anterior entre los conceptos de puro y empírico por un lado y los de *a priori* y *a posteriori* por otro, no podría comprenderse la posibilidad de una intuición "pura-empírica" que sin embargo es mencionada en (A47-A48/ B65). Para comprender el significado de este tipo de intuición "mixta" que solo es mencionado una vez en la *Crítica,* hay que atender a dos detalles muy importantes. El primero es que la posibilidad de este tipo de intuiciones se da en el contexto de la misma geometría ya que inmediatamente antes menciona: "Ahora bien, es claro que, partiendo de puros conceptos, sólo se obtienen conocimientos analíticos, no sintéticos. (...) Nos vemos obligados a recurrir a la intuición, como hace siempre la misma geometría. Nos damos, pues, un objeto en la intuición, Pero, ¿de qué clase de intuición pura se trata: *a priori* o empírica?" Me parece que la interpretación adecuada es la de leer el "espacio del papel" – que en estricto sentido se trata de una intuición meramente empírica, tal como hace notar en la Doctrina Trascendental de los Elementos (A 714/B 742) - es la instancia adecuada para interpretar este tipo de intuición "mixta" y aparentemente contradictoria, mientras que el espacio de la imaginación productiva como la intuición pura *a priori* que es donde precisamente se verifica la sinteticidad y necesidad de los enunciados geométricos.

[12] "En efecto, ante todo sólo podemos representarnos un espacio único. Cuando se habla de muchos espacios, no se entienden por tales sino partes del mismo espacio único" (A25/B39).

espacios no se entienden por tales sino partes del mismo espacio dentro del cual son pensadas (Cfr. A25/B40); de hecho, su multiplicidad y, por tanto, su concepto, surge tan solo al limitarlo (A25/B39). Es su referencia a la sensibilidad pura lo que hace a las construcciones matemáticas singulares, lo cual es consistente con lo dicho por Kant en el resto de la *Crítica* y lo cual lo lleva a afirmar que mientras el conocimiento filosófico sólo considera lo particular en lo universal, las matemáticas consideran lo universal en lo particular, e incluso en lo singular, pero *a priori* y por medio de la razón (A714/B742). Por su parte, también es inmediato porque al ser forma de la sensibilidad es concomitante a cualquier percepción sin mediación de algo más, cumpliendo así con este criterio.

Ahora bien, si el espacio como forma de la intuición suministra *variedad* a la representación, como intuición formal le proporciona unidad[13] a esa misma variedad, unidad que precede a cualquier concepto, pero que a su vez presupone una síntesis que, sin pertenecer a los sentidos, es la que hace posible todos los conceptos de espacio y tiempo (B161, nota de Kant), es decir, todos los conceptos matemáticos. En otras palabras, en tanto forma *a priori* de la intuición sensible externa, el espacio es una representación que permite toda síntesis de aprehensión de la diversidad del fenómeno, ya que dicha síntesis sólo puede tener lugar de acuerdo con dicha forma, y lo mismo vale para el tiempo en lo que concierne al sentido interno (B161), al cual se hallan sometidos todos los fenómenos en general, y no solo los fenómenos externos. Pero, en tanto que también puede ser representado directamente como una intuición que contiene una variedad, presupone a su vez un principio de unidad para la determinación de tal variedad, principio que no procede de la forma pura de la sensibilidad, sino del entendimiento. Tal principio de unidad es la unidad sintética de apercepción o apercepción originaria, que solo puede ponerse en relación con la forma de la sensibilidad pura a través de la imaginación, la cual juega un papel preponderante en la delimitación de los axiomas de la geometría.

[13] Unidad que, como se verá en el siguiente apartado, no se funda desde sí mismo, sino que depende de la unidad sintética de apercepción.

1.3 Imaginación, unidad sintética de apercepción y geometría euclidiana

En la *Crítica de la razón pura,* el autor afirma que la geometría requiere del espacio representado como objeto, lo cual supone algo más que la mera forma de la intuición (B161, nota). El espacio ordena y da forma al conocimiento fenoménico siguiendo los axiomas de Euclides porque al mismo tiempo, puede ser concebido él mismo como una representación pura susceptible de ser determinada según dichas reglas. Tal determinación está por completo a cargo del entendimiento a través de la imaginación y de la unidad sintética de apercepción; de la imaginación en tanto facultad encargada de llevar a cabo la síntesis, es decir, la reunión de distintas representaciones para entender su variedad en un único conocimiento (Cfr. A77/B103), así como de la unidad sintética de apercepción, como unidad de conciencia que fundamenta y posibilita toda síntesis. Ambas facultades son tratadas en la sección correspondiente a la *Deducción trascendental* de la *Crítica de la Razón Pura*, en la que, una vez rematada la tarea de la deducción metafísica de las categorías, se busca mostrar que no sólo de hecho, sino también de derecho, las categorías se relacionan con los objetos de experiencia. O para decirlo mejor, que las categorías hacen posible la experiencia en cuanto a la forma del pensamiento, cuestión en la que se funda su valor objetivo.

Atendiendo sobre todo a la segunda edición de la *Crítica*, su autor identifica y distingue dos “clases”[14] de imaginación: la *imaginación reproductora,* facultad capaz de reproducir y asociar sensaciones pasadas según leyes empíricas, y que sólo es objeto de la psicología; y la *imaginación productiva,* facultad encargada de llevar a cabo la síntesis[15] de las múltiples impresiones dadas en el tiempo, preparando así la acción unificadora y objetivadora del Entendimiento, al que pertenece como

[14] En realidad, más que clases, se trata de dos dimensiones de una misma facultad imaginativa, que atienden a aspectos diversos del conocimiento y que, por tanto, deben ser tratadas por disciplinas distintas, de modo que la imaginación reproductiva pertenece a la psicología, en tanto que la imaginación productiva pertenece a la filosofía trascendental. Sin embargo, el tratamiento kantiano de ambas por momentos parecería insinuar que se trata incluso de dos facultades diversas.

[15]La síntesis es un acto intelectual que consiste en la combinación de lo vario en general, ya provenga de la intuición sensible o no sensible, o ya sea de varios conceptos, y ya que seamos conscientes de ello o no. Tal combinación no es dada en el objeto; somos nosotros quienes la hacemos, mediante un acto de espontaneidad del entendimiento (B 130).

facultad. Espacio y tiempo, en tanto formas puras, presentan lo vario de la intuición sensible. Pero esta intuición debe ser *combinada* y *unificada* a priori para que la experiencia sea posible. Es la acción trascendental de la imaginación la encargada de combinar lo diverso de la intuición incluido en el sentido interno *determinándolo*, y a esta acción Kant la llama *síntesis figurada* (*synthesis speciosa*). Esta síntesis o combinación –necesaria y posible *a priori*- de la diversidad de la intuición sensible, debe diferenciarse de la combinación que lleva a cabo el entendimiento (*synthesis intellectualis*), y que es pensada en la mera categoría en relación con la diversidad de una intuición en general, aunque ambas son trascendentales, no sólo por tener lugar *a priori*, sino porque, además, sirven de base a la posibilidad de otros conocimientos *a priori*.

En resumen, dado que la imaginación productora tiene como tarea efectuar la síntesis de lo vario de la intuición, su operación es llamada *síntesis figurativa* o *síntesis trascendental de la imaginación.* Y dicha síntesis es una actividad que proviene de la espontaneidad del entendimiento, que determina *a priori* la sensibilidad, de modo que la imaginación depende del entendimiento en lo que se refiere a la unidad de su síntesis intelectual, mientras que depende de la sensibilidad en lo que se refiere a la diversidad de la aprehensión.

Pero la combinación de lo diverso presupone a su vez, dice Kant, la representación de una unidad; unidad que debe anteceder y posibilitar toda combinación o síntesis posible. Dicha representación es identificada como el *Yo pienso* que acompaña a todas mis representaciones y en la *Crítica de la Razón Pura* toma el nombre de *la originaria unidad sintética de apercepción.*

De acuerdo con Kant, no pueden darse en nosotros conocimientos, como tampoco unidad entre los mismos, sin una unidad de conciencia que preceda a la variedad de la intuición. Esa conciencia pura, originaria e inmutable, es llamada *apercepción trascendental, unidad de apercepción* o *unidad trascendental de autoconciencia,* porque el conocimiento *a priori* sólo es posible a través de ella. “En efecto, las diferentes representaciones dadas en una intuición no llegarían a formar conjuntamente *mis* representaciones si no pertenecieran todas a una sola autoconciencia” (B 132).

El principio de la unidad sintética originaria de apercepción es la conciencia *a priori* de la síntesis de todas mis representaciones. A esta unidad han de estar sometidas todas las representaciones que se me dan, y a ella han de ser reducidas mediante una síntesis. Aquello que *une* las representaciones con un objeto y, por ende, lo que garantiza la validez objetiva de tales representaciones, haciendo que se conviertan en conocimiento, fundando así la posibilidad misma del entendimiento, es precisamente esta unidad de conciencia. La unidad sintética originaria de apercepción no es simplemente una condición necesaria para conocer un objeto, sino una condición a la que debe someterse toda intuición *para convertirse en un objeto para mí.* Sin esa síntesis, *no* se unificaría la variedad en una conciencia (*cfr*. B 138).

En relación con la sensibilidad, todo fenómeno es intuido como sujeto a las condiciones formales del tiempo, y en el caso de los fenómenos externos, del espacio. Y en relación con el entendimiento, la diversidad de la intuición puede constituirse en conocimiento, en última instancia, gracias a que se encuentra sujeta a las condiciones de la unidad sintética originaria de apercepción. En tanto dadas, todas las diversas representaciones de la intuición se hallan sujetas a la forma interna de la sensibilidad- y en tanto externas al sujeto, a la forma externa, es decir, al espacio-; en tanto necesariamente *combinables* en una conciencia, se hallan bajo el principio de la unidad sintética de apercepción, el cual une todas las representaciones provenientes de la intuición, y por ello es el principio supremo de todo uso del entendimiento.

1.4 Construcciones, esquemas y axiomas

Dado que para Kant la imaginación es la facultad encargada de poner en relación el conocimiento proveniente de las dos facultades del psiquismo, llevando a cabo la síntesis de la diversidad proveniente de la sensibilidad mediante la aplicación de los conceptos puros tanto del entendimiento como de la sensibilidad[16], posee una capacidad productiva –y no solo reproductiva-, gracias a la cual, en el caso particular de la geometría, es capaz de formar sobre la base de una multiplicidad espacial pura *nuevas* figuras, sintetizando los elementos simples en combinaciones complejas, siempre en conformidad con la intuición espacial. Dicha formación debe llevarse a cabo en la mente o en el papel y a esto lo llama construcción[17]. Construir es pues, un acto de descripción, que tiene lugar *a priori*, a través de la imaginación productiva, de acuerdo con una regla (Ak. 20, 410-11 tomado de Friedman, 2000).

Las *construcciones,* propias del método sintético, permiten ir más allá del concepto a propiedades no contenidas en él, buscando su definición *real;* en contraposición, el método analítico sólo se basa en la *descomposición* del concepto, quedándose sólo en una mera *exposición del mismo* (A728 / B756). Construir un concepto significa presentar la intuición *a priori* que le corresponde, ya sea por medio de la imaginación en la intuición pura, ya sea, de acuerdo con ésta, en el papel, en la intuición empírica, pero en ambos casos completamente *a priori* sin tomar el modelo de una experiencia. (Cfr. A713/741). La construcción equivale a la transición desde un concepto general hasta una intuición que representa al concepto sin recurrir -directamente- a la experiencia (Hintikka, 1992, p. 158) mostrando la posibilidad de su existencia en un sentido matemático (Parsons, 1992, p. 71).

Kant considera que los únicos conceptos que son susceptibles de ser construidos, es decir, de ser representados *a priori* en la intuición, son los relativos a magnitudes (A715/B743) pues son los únicos que, además de sus conceptos, cuentan con la intuición *a priori* sensible donde dicha construcción puede llevarse a cabo independientemente de cualquier determinación empírica *a posteriori.* De hecho, la posibilidad de llevar a cabo construcciones no solo distingue el método

[16] Kant denomina "conceptos puros de la sensibilidad" a los conceptos matemáticos, tal como se explicará a continuación.

[17] La necesidad de llevar a cabo construcciones como parte indispensable del método de la geometría es tomado -sin duda- del mismo procedimiento de prueba seguido por Euclides a lo largo de los *Elementos*, del cual se hablará a detalle en 2.1.

matemático del método filosófico -también llamado dogmático-; también es la razón que justifica su avance, y razón por la cuál es el único que ha sido capaz de constituirse en conocimiento científico.

En este sentido, es importante apuntar que si bien las matemáticas son un producto de la determinación de la intuición (sensible) pura del espacio y el tiempo, “únicos *quanta* originarios” (A 411/ B438; A725/ B753), la relación de sus ramas principales con la magnitud, apuntadas por Kant en la *Crítica*, a saber, la geometría, por un lado, y la aritmética y el álgebra del otro, suponen algunas diferencias interesantes, aunque no siempre claras. De este modo, mientras la geometría lleva a cabo sus construcciones directamente sobre la magnitud (*Größe*) entendida como *quanta,* “lo medible”, esto es, objetos de la intuición a los que las matemáticas aplican sus conceptos de medida (Friedman, 2013) y de la cual “el espacio es su imagen pura” (A142 / B182), la aritmética y el álgebra lo hacen mediatamente a través de la categoría pura del entendimiento de la cantidad (*quantität*), por lo que su objeto es propiamente la *quantitas* (cantidad delimitada), en tanto que se trata de disciplinas a las que les concierne el proceso de contar o de medir en general, y que se aplican a todos los conceptos medibles en tanto *quanta* (Friedman, 2013). Así pues, las matemáticas no sólo construyen magnitudes (*quanta*), como en la geometría, sino también la mera cantidad (*quantitas*) como en el álgebra, donde se prescinde totalmente de la naturaleza del objeto que ha de ser pensado según este concepto de magnitud. Sin embargo, a diferencia de lo que sucede en ésta última, que recurre a construcciones simbólicas, la geometría lo hace por medio de construcciones ostensivas o geométricas (de los objetos mismos) (A717/B745). Construir pues, es representarse *a priori* conceptos relativos al espacio o al tiempo en tanto forma de los fenómenos, considerando, en el caso de la geometría, dicha forma como *quanta* que va acompañada en la representación de su cualidad (figura) (A 720/B748).

Una intuición de tal tipo debe ser un objeto *singular,* a pesar de lo cual, en cuanto construcción de un concepto (universal) tiene que expresar en su representación, una validez universal en relación con todas las posibles intuiciones pertenecientes al mismo concepto. Incluso aunque la figura singular trazada sea empírica –considérese un triángulo dibujado en el papel-, sirve para expresar el concepto no obstante la universalidad de éste, en tanto que dicha intuición apunta siempre al acto de construir el concepto, en el cual hay muchas determinaciones (por ejemplo, la magnitud de los lados y de los ángulos de un triángulo) que son completamente indiferentes" (A714/B742).

La construcción de un concepto es en cierto modo isomórfica a la definición de *esquematismo*, "procedimiento" a través del cual la imaginación pura *a priori* puede actuar "proveyendo una imagen para un concepto". Sin embargo, visto desde esta óptica, surge una tensión no siempre fácil de conciliar. En el contexto de la filosofía kantiana, un *esquema* es una determinación trascendental del tiempo que permite subsumir ya sea una intuición pura, ya sea una intuición empírica, bajo un concepto –que puede ser puro, o bien de origen empírico-, pero que en última instancia permite aplicar las categorías a los fenómenos. Los esquemas no son imágenes, porque las imágenes son en general, "productos de la capacidad empírica de la imaginación productiva" (A141/B181) [18], sino reglas de formación de imágenes, activadas en la imaginación, de acuerdo al concepto correspondiente, que deben mediar entre la diversidad de la percepción y los conceptos. En cuanto producto mediador de la imaginación, el esquema, dice Kant, guarda homogeneidad con la categoría (que constituye la unidad de esa determinación) en la medida en que es *universal* y que está basada en una regla *a priori*, mientras que es homogénea con el *fenómeno* en la medida en que el tiempo se halla contenido en toda representación empírica de la diversidad (A139 / B178). En consecuencia, el *esquema* constituye una representación mediadora y "a esta representación de un procedimiento universal de la imaginación para suministrar a un concepto su propia imagen es a lo que llamo esquema de este concepto" (A140- B180).

Debe diferenciarse, sin embargo, los esquemas de los conceptos puros del entendimiento -que permiten aplicar las categorías a los fenómenos y que no son capaces de imágenes- de los esquemas de los conceptos meramente empíricos y, sobre todo, de lo que Kant denomina *conceptos puros sensibles* (A140/B180) es

[18] Salvo el espacio, que como se aclaró líneas más arriba, es descrito por Kant como "imagen pura de la magnitud".

decir, de los conceptos matemáticos, los cuáles no reposan sobre imágenes, sino sobre esquemas. En este sentido, el esquema sería el método para representar, de acuerdo con cierto concepto sensible puro, una cantidad en una imagen. Ni en los conceptos puros sensibles, ni en los conceptos empíricos su esquema se corresponde con ninguna imagen concreta, por lo que, por ejemplo, el *esquema* de un triángulo no debe identificarse con un triángulo particular, ya sea un triángulo isósceles, rectangular o equilátero, mientras que el número, en tanto esquema de la categoría de cantidad, es distinto de su presentación concreta en la intuición (por ejemplo, cinco puntos seguidos). Todo esquema supone, además, una determinación del tiempo como forma pura de todos los fenómenos de la experiencia; pero mientras Kant deja claro que el número es el esquema de cantidad (en tanto que es la unidad de síntesis de lo diverso de una intuición homogénea en general, obtenida al producir yo el tiempo mismo en la unidad de aprehensión A142-43 / BB182), no queda claro cómo se determina el tiempo en el caso de los esquemas de índole geométrico. En todo caso, lo peculiar de los conceptos geométricos es su capacidad para referirse a figuras en el espacio de la intuición pura, y el modo como se construye un concepto en la intuición pura, -de acuerdo con su esquema-, corresponde en cierto modo a su definición. Como puede notarse, en este contexto la intuición pura no es sinónimo de espacio general, sino de espacio determinado a través de la imaginación -productiva- determinación que se lleva a cabo según las definiciones matemáticas. Dar la definición de un concepto es decir cómo se construye en la intuición pura, ofreciendo de modo originario el concepto detallado de una cosa dentro de sus límites (A727/B755)[19]. En consecuencia, las definiciones matemáticas nunca pueden ser erróneas, ya que, teniendo en cuenta que el concepto no se da sino a través de la definición, no incluye más que aquello que la definición pretende que se piense por medio de él en la intuición(A731/B759). Por ejemplo, la posibilidad de un triángulo no se reduce a la enunciación de su definición, sino propiamente a su presentación, mediante un acto

[19] En palabras de Kant, "detallado quiere decir claridad y suficiencia de características; los límites indican la precisión de que no hay más características que las pertenecientes al concepto detallado; originario significa que esta fijación de límites no deriva de otra cosa ni necesita, por tanto, una nueva prueba, lo cual ocasionaría la incapacidad de la presunta explicación para figurar a la cabeza de todos los juicios de un objeto" (A727/755).

de construcción en el espacio, es decir, cuando se determina el espacio según su definición, siguiendo las reglas de construcción establecidas por los axiomas (postulados) de la geometría de Euclides.

En lo que concierne a estos últimos, aunque no se validan por la experiencia, son capaces de regular las relaciones de los objetos de la experiencia, según deja ver Kant en su segunda conclusión de la Estética Trascendental. Se trata de principios sintéticos *a priori* que se muestran como necesariamente ciertos porque proceden *inmediatamente* de la intuición pura, ya que, de la posibilidad de construir los conceptos en la intuición del objeto, se desprende la posibilidad de combinar sus predicados *a priori* y de forma inmediata (Cfr. A732/B760). Los axiomas (postulados, problemas y teoremas) expresan las condiciones de la intuición sensible *a priori* bajo las cuales, y sólo bajo las cuáles, puede surgir el esquema de un concepto puro de los fenómenos externos. Propiamente no son presentados por Kant como un producto de la imaginación, sino como un tipo de restricción de la intuición sobre la imaginación. Por ejemplo, “entre dos puntos no puede haber más que una línea recta; “dos líneas rectas no cierran un espacio, etc. (A163/B204). Su inmediatez se debe a que son principios intuitivos y no discursivos (del entendimiento). Esto es, la verdad de los axiomas no está mediada por otros conceptos, como es el caso de los discursivos. De las reglas de construcción de un triángulo se debe poder comprender de forma inmediata la proposición sobre la suma de sus ángulos; ante la representación en la intuición o trazo en el papel de un triángulo, inmediatamente surge la intuición de que la suma de sus ángulos internos es 180 grados. En esto consiste la evidencia de la proposición, la cual es captada a través de la intuición pura, por lo que la verdad evidente de los axiomas resulta inmediatamente de las reglas de construcción de los conceptos que estos mismos contienen. El razonamiento anterior también sirve para justificar por qué los axiomas de la geometría son igualmente sintéticos a priori (Cfr. A46-B64/A48-B66).

Si la verdad de todos los “principios” de las matemáticas -es decir, tanto de los postulados como de los teoremas y los problemas- se infiere de la posibilidad de su construcción en la intuición pura, ¿qué explica que algunos de ellos ocupen el lugar de suposiciones o presuposiciones iniciales, es decir, el lugar de postulados a partir de los cuáles se deducen los demás principios? Kant contesta con claridad esta pregunta en su respuesta a Eberhard: de entre todas las construcciones, algunas deben ser las primeras, pues ni la descripción (en el pensamiento) o el dibujo de una línea recta, ni la rotación de dicha línea alrededor de un punto fijo pueden derivarse de ninguna otra construcción del concepto de magnitud, constituyéndose por tanto en los postulados de la geometría de Euclides.

> Se dice muy correctamente [por Kästner] que «Euclides asume la posibilidad de dibujar una línea recta y describir un círculo sin probarlo», -lo cual significa sin probar esta posibilidad *a través de inferencias.* La descripción, que tiene lugar a priori a través de la imaginación de acuerdo con una regla, y se llama construcción, es en sí misma la prueba de la posibilidad del objeto. (…) Sin embargo, la posibilidad de una línea recta y un círculo puede demostrarse, no de manera mediata a través de inferencias, sino solo inmediatamente a través de la construcción de estos conceptos (que de ninguna manera es empírica), debido a la circunstancia de que entre todas las construcciones (presentaciones determinadas de acuerdo con una regla en una intuición a priori) algunas todavía deben ser las primeras, -es decir, el dibujo o la descripción (en el pensamiento) de una línea recta, y la rotación de dicha línea alrededor de un punto fijo -donde este último no puede derivarse del primero, ni puede derivarse de ninguna otra construcción del concepto de magnitud. (Ak XX, pp. 410-411 citado a su vez en Friedman, 2000, p. 189).

Finalmente, Kant va aún más allá y asegura que estos principios pertenecientes a la geometría pura también son válidos para los objetos de la experiencia gracias al principio de los *Axiomas de la Intuición*, cuya función, según Kant, es la de garantizar que todos los fenómenos se encuentren, en última instancia, determinados por la intuición pura, de tal manera que lo que se diga de ésta última, sea también válido para la intuición empírica (Cfr. A165-B206). Ya que las intuiciones no pueden ser objeto de aprehensión sino a través de la sucesión de sus partes, los *Axiomas de la Intuición,* uno de los cuatro principios del entendimiento puro dicta que, en consecuencia, toda intuición es una cantidad o magnitud extensa (A162-B202) en la que la representación de las partes hace posible y necesariamente precede, la representación del todo. Al ser todas las intuiciones necesariamente sensibles, siempre tendrán propiedades espacio-temporales. Y, dado que estas últimas podían ser consideradas *aditivas*, esto es, magnitudes o cantidades extensas, así también las intuiciones, en relación a sus propiedades espacio-temporales, son cantidades extensas, susceptibles de ser construidas *a* *priori* en la imaginación. Así es como el principio de los *Axiomas de la Intuición* subsume todas las sensaciones, en tanto intuiciones, en el espacio y en el tiempo, bajo el concepto de cantidad, tratándose por tanto de un principio de la aplicación de las matemáticas a la experiencia, que garantiza su carácter sintético.

1.5 Críticas a la intuición kantiana.

La concepción kantiana del espacio (y por extensión, del tiempo), desde muy pronto dio lugar a una serie de grandes debates, particularmente en torno al papel de la intuición, que se vieron acrecentados por el surgimiento de las llamadas "geometrías-no euclidianas". De acuerdo con Alberto Coffa (1991), para la tradición semántica, cuyos orígenes se remontan a los escritos de Bolzano, Frege, Husserl, Russell y el primer Wittgenstein, la existencia de conocimiento *a priori* –incluso de carácter sintético- resultaba indudable. Empero, la mayoría consideraba la apelación a la intuición como un estorbo para el desarrollo de la ciencia. En su opinión, la falta de Kant radica en haber pasado por alto la dimensión semántica de la distinción entre *analítico* y *sintético,* omisión que lo condujo a concluir que, dado que la unión de dos conceptos no podía ser llevado a cabo por otro concepto –"pues de los meros conceptos sólo puede obtenerse conocimiento analítico"- había sido necesario introducir un tercer elemento, una especie de "pegamento" que uniera los conceptos contenidos en los juicios sintéticos, al cual había nombrado intuición (Coffa, 1991: 17). Su principal objeción es que, al construir los conceptos geométricos en la intuición, ¿cómo podía decidirse qué determinaciones de la figura debían ser abstraídas, o cuáles características de la figura construida eran relevantes para llevar a cabo una prueba matemática o geométrica? La respuesta kantiana consiste en afirmar que el geómetra "no debe indagar lo que ve en la figura o en el mero concepto de ella y, por así decirlo, leer, a partir de ahí, sus propiedades, sino extraer éstas *a priori* por medio de lo que él mismo piensa y expone (por construcción) en conceptos… [no debiendo añadirle]…sino lo que necesariamente se sigue de lo que él mismo, con arreglo a su concepto, ha puesto en ella" (B xii). No obstante, esta respuesta conduce al siguiente dilema: lo que necesariamente se sigue de lo que el geómetra ha establecido en la figura o (a) se sigue de su concepto de dicha figura, independientemente de cualquiera de sus características ("formales" o de cualquier otro tipo), o (b) se sigue sólo cuando además del concepto en sí mismo, se examinan adicionalmente algunas características relevantes de la figura una vez construida en la intuición pura. Si se inclina la balanza a favor de la alternativa (a), tal como hizo Russell hacia 1900, la síntesis en el conocimiento lógico y matemático bien podía ser producida a través de meros conceptos, sin necesidad de apelar a la intuición. Pero esta solución no solo prescinde de la intuición como condición de posibilidad de juicios sintéticos *a priori*, sino más aún, implica reconsiderar la matemática y la geometría como ciencias de corte más bien analítico que pueden ser construidas únicamente a partir del análisis conceptual. Por otra parte, la elección de la opción (b) sólo conduce a una reformulación de la pregunta original: ¿cuáles de las varias características exhibidas por la figura construida (ya sea en el papel o en la mente) constituyen un soporte válido de inferencia? Tal parece que, de acuerdo con los propios estándares kantianos, la única guía válida para esta decisión son los mismos postulados y teoremas de la geometría. Pero entonces, se cae en una petición de principio, pues "*antes* de que podamos usar [el factor] 'intuicional" *X* para proveer una base a la síntesis expresada en los axiomas, debemos primero tener dichos axiomas con el fin de determinar lo que *X* es." (Coffa, 1991, p. 46) Así, el método de Kant para identificar las características que deben ser abstraídas *a priori* en la intuición incurre en el círculo vicioso según el cual no es posible determinar los axiomas (postulados) de la geometría en tanto no se tienen ya (históricamente), como necesarios.

Lo anterior no significa que Kant nunca se planteara la posibilidad de otros sistemas geométricos, pues ya en un ensayo perteneciente a su etapa pre-crítica titulado "Pensamientos sobre la verdadera estimación de las fuerzas vivientes" (1747) sugiere la posibilidad de desarrollar otras "geometrizaciones" del espacio, y "la ciencia de todos estos posibles espacios sería, ciertamente, la geometría más alta que una mente finita podría concebir" (Kant AK, vol. I, parte 1, §10). Pero el compromiso kantiano con Euclides en la etapa *Crítica* resulta innegable, y para ello basta remitirnos a la discusión sobre la imposibilidad del biángulo[20], una hipotética figura de sólo dos ángulos, posible conceptualmente por no caer en ninguna contradicción lógica, pero irreal matemáticamente, en tanto que su construcción parece imposible (imposibilidad que por cierto la geometría riemaniana se encargó de refutar), lo cual es ilustrativo de cómo, en la filosofía kantiana, las condiciones dictadas por la intuición limitan y restringen el concepto, mientras lo realizan.

En el mismo orden de ideas resulta pertinente revisar también la ya clásica discusión entre dos enfoques más contemporáneos sobre la naturaleza y función de la intuición pura en la explicación kantiana sobre el razonamiento matemático. Me refiero a la posición denominada "fenomenológica" de Charles Parsons de un lado, que entiende la intuición como una imagen mental, por contraposición a la postura "lógico-formal de E.W. Beth y Jaakko Hintikka de otro, que sugiere interpretar la intuición como una instancia individual, no necesariamente ligada a la sensibilidad. En explícita discrepancia con el punto de vista corriente de acuerdo con el cual la naturaleza sintética de las verdades matemáticas se encuentra en los postulados de los cuáles éstas derivan, para Beth y Hintikka la cuestión concerniente a la naturaleza y el carácter del razonamiento geométrico es previa a la cuestión del origen y la justificación de los axiomas de la geometría. En este sentido, el rol más esencial de la intuición sería formal o inferencial, en tanto que sirve para generar, en el contexto del razonamiento matemático, inferencias tales que ahora se representarían por medio de instanciaciones existenciales. Para Hintikka, por lo menos en la Doctrina Trascendental del Método, es posible interpretar la intuición sólo como "idea particular", en contraposición a un "concepto", que siempre es general, superando el recurso kantiano a las intuiciones como si se tratara simplemente de la necesidad de la geometría de imágenes mentales. (1992a). En otras palabras, todo aquello que en la mente humana representa un

[20] La imposibilidad de un biángulo es expuesta por Euclides a propósito de la demostración realizada en los *Elementos* I-4, en la que se demuestra que un triángulo es igual a otro si sus lados son iguales y sus ángulos son iguales. Sin embargo, al parecer, algunos manuales posteriores –entre los que seguramente se encuentra el de Wolff, y que es del que seguramente echaba mano Kant, pues Kant mismo lo pone a ese nivel (A163/B204)-, le dan el tratamiento de Postulado. (Cfr. Heath, 1981, p. 361 y 374).

individuo es una intuición; intuitividad significa individualidad sin más. Por tanto, la dependencia matemática del empleo de construcciones sólo significa que en la matemática se introducen constantemente representantes particulares de conceptos generales (conceptos generales *in concreto*), y se llevan a cabo argumentos en términos de tales representantes, los cuales no pueden ser realizados únicamente por medio de conceptos generales (1992a). La peculiar lectura de Hintikka depende a su vez de tres supuestos: 1) Aunque todo concepto es universal, en las *Lecciones de lógica,* Kant parece aceptar la posibilidad de ideas particulares.[21] 2) La Doctrina Trascendental del Método -sección de la *Crítica* en la que Kant describe el conocimiento matemático como un conocimiento racional por *construcción* de conceptos-, no está condicionado por las conclusiones de la Estética Trascendental, en la que Kant claramente describe la intuición como representación procedente de la sensibilidad, sino que es metodológicamente anterior a ésta, por lo que hay una primacía sistemática en la teoría kantiana del método matemático.[22] 3) Un supuesto "error aristotélico de Kant", según el cual, solo es posible conocer individuos mediante la sensibilidad, reducción en la que Kant cayó después de esbozar su teoría sobre el método matemático, y que en cambio, no parece estar presente en su obra pre-crítica.

En contraste, Charles Parsons se atiene a la versión más clásica de intuición como una referencia directa al objeto que supone su presencia fenomenológica en la mente (1992, p. 83), en tanto que toda intuición debe ser, de acuerdo con Kant, no solo singular, sino también inmediata, propiedad que no parece ser aceptable al margen de alguna relación con la sensibilidad. Esta opción resulta aún más

[21] "Esto es, si se piensa un objeto particular, la representación es una intuición, por ejemplo, al pensar en la Tierra o en Mercurio o en Venus. En cambio, "planeta", que refiere a diversos objetos, es un concepto." Cf. V-Lo/Wiener 24:905.

[22] Una de las principales razones que ofrece Hintikka para invertir el orden de la exposición kantiana en la primera *Crítica*, situando la metodología matemática antes que el análisis sobre la naturaleza del espacio y el tiempo, se encuentra en los *Prolegómenos*. Su lectura es que Kant, al aclarar la estructura de su argumento, al comienzo y durante el razonamiento que corresponde a la Estética Trascendental, apela de manera explícita a sus discusiones de la metodología de la matemática que están precisamente en la Doctrina Trascendental del Método, "mediante lo cual se hace así evidente la dependencia del primero respecto de las últimas", lo cual sucede tanto cuando Kant discute el carácter sintético de la matemática, como cuando discute su carácter intuitivo". En la exposición de la posición de Parsons, de Friedman, y en la conclusión de 1.6 se verá por qué no me resulta procedente esta idea.

verosímil si se considera que, según lo analizado por Parsons en las mismas *Lecciones de Lógica,* para Kant no son los conceptos, sino sólo su uso en un juicio, lo que puede ser singular. Los conceptos son siempre generales pues su determinación de objetos es *per notas communes*,[23] es decir, marcas comunes a todos los objetos determinables por el concepto, aunque su uso en un juicio puede ser singular[24]. En cambio, una intuición es una representación singular, esto es, se relaciona con un solo objeto; y, aunque en esto es análoga a un término singular, se distingue del mismo en tanto que también debe ser inmediata, pues las intuiciones no son propiamente componentes de los juicios (Parsons, 1992)[25]. En resumen, mientras para el punto de vista fenomenológico el espacio es la forma de la intuición o percepción, para el punto de vista lógico-perceptual, el espacio es el objeto de una construcción geométrica, pues la cuestión concerniente a la naturaleza y el carácter del razonamiento geométrico es previa a la cuestión del origen y la justificación de los axiomas de la geometría (Friedman, 2000).

Por su parte, aunque inicialmente cargado hacia la postura lógico-formal, más tarde Friedman reconsidera necesario complementarla con los supuestos del enfoque fenomenológico tras descubrir, en la ya citada respuesta de Kant a Eberhard de 1790, una distinción entre lo que su autor denomina “espacio metafísico” y “espacio geométrico”. Por su importancia, reproduzco el pasaje completo:

[23] Kant, Lógica, *Teoría General Elemental,* p. 95.

[24] La más clara explicación del uso de conceptos en juicios singulares por parte de Kant es en sus lecciones sobre Lógica, donde después de hablar del uso del concepto de *casa* en juicios universales y particulares, afirma que “O puedo usar el concepto sólo a para una cosa singular, por ejemplo: Esta casa es aseada de tal y tal manera. No son los conceptos, sino nuestros juicios, los que pueden ser divididos en universal, particular y singular” citado desde Parsons, 1992, p. 64. Ahora bien, otro comentador al que cita Parsons, Alan Shamoon, aclara en la nota 6 que sigue a esta cita que un juicio es singular, y su concepto está usado de forma singular, si como sujeto va precedido por un artículo definido o demostrativo (Parsons, 1992b, p. 92).

[25] Parsons considera que la negativa a aceptar que cualquier uso de un concepto en un juicio de carácter singular, es decir, en un juicio cuyo sujeto concepto va precedido por un artículo demostrativo o definido, lo convierte por tanto en una intuición, también resulta problemático. Por ejemplo, cuando afirmo “Esta casa es azul”, aunque no puede negarse que hay algo de conceptual en el término “casa”, en muchos contextos actuales, el sujeto que contiene al concepto, es decir, “esta casa” no podría ser interpretado sin la ayuda de la percepción. (1992, p. 65-66)

> La representación del espacio (junto con la del tiempo) posee una peculiaridad que no se encuentra en ningún otro concepto, v.gr., que todos los espacios son solo *posibles* y pensables como partes de un solo espacio, así que la representación de las partes ya presupone la representación del todo. Ahora bien, cuando el geómetra dice que una línea, sin importar qué tan lejos ha sido extendida, siempre puede extenderse aún más, no quiere decir lo mismo que se dice en aritmética en lo que concierne a los números, v.gr., que éstos siempre pueden incrementarse sin fin mediante la adición de otras unidades o números (porque los números y las magnitudes que así se expresan son posibles en sí mismas, sin necesidad de permanecer junto con las previas como partes de un todo). Más bien, decir que una línea puede ser continuada al infinito significa que el espacio en el que describo la línea es más grande que cualquier línea que pueda describir en él. Por tanto, el geómetra establece la posibilidad de su problema -incrementar un espacio (del cual hay muchos) al infinito- en la originaria representación de un singular, infinito y subjetivo espacio dado. Esto concuerda muy bien con el hecho de que el espacio geométrico y objetivamente dado siempre es finito. Porque el último sólo es dado en tanto es generado. En cambio, decir que el metafísico, es decir, original pero meramente subjetivo espacio dado – el cual (porque no hay muchos) no puede ser sometido a ningún concepto capaz de construcción pero que aún contiene el fundamento de todas las posibles construcciones -es *infinito,* significa solamente que éste consiste en la forma pura del modo sensible de representación del sujeto como intuición *a priori*. Por tanto, la posibilidad de todos los espacios, que procede al infinito, es dada en este espacio en tanto representación singular. (Ak. XX, pp. 419-21)[26]

De acuerdo con Friedman, de la distinción anterior claramente se desprende que el espacio metafísico, -es decir, el espacio en tanto forma pura de la sensibilidad, de acuerdo a lo estipulado en este trabajo en 1.1-, y en particular su carácter infinito, un infinito "actual", es el fundamento del espacio geométrico, -es decir, el espacio como intuición pura, del que se habló en 1.2-, el cual es siempre finito y determinado. La geometría trata con una secuencia sucesivamente generada de espacios (objetos espaciales) que es potencialmente infinita como un

[26] Tomado a su vez de Friedman 2000, p. 188.

todo y, por tanto, necesariamente finita a cada paso. En contraste, el espacio tal como es descrito por el metafísico -es decir, tal como es descrito en la Exposición metafísica del concepto de espacio, en la Estética Trascendental de la *Crítica,* tiene una naturaleza mucho más amplia, no en sí mismo, pero sí en tanto propiedad del sujeto que, sin embargo, es capaz de explicar la posibilidad de la infinitud del espacio tal como es descrito por el geómetra.

De ahí que Friedman considere que ahora lo primordial sea descubrir cómo es que el espacio metafísico es fundamento del espacio geométrico (2000, p. 189), pues resulta absurdo suponer que su infinitud -una infinitud en acto, pero subjetiva- se pueda conocer mediante una especie de percepción. Si en la *Crítica de la razón pura* Kant afirma claramente que espacio y tiempo, en tanto formas puras, no se pueden percibir en absoluto porque la infinitud en acto no es un dato que sea asequible a través de alguna sensación (A166/B207), ¿qué tipo de acceso podemos usar para justificar o verificar la posibilidad de las construcciones euclidianas? De acuerdo con Friedman, la clave de la respuesta está en el movimiento ejercido por la acción productiva de la imaginación *a priori* como descripción de un espacio. Si las construcciones pueden entenderse como movimientos producidos por la imaginación productiva, ésta podría situar al sujeto, imaginariamente, en un punto de vista dado y con una orientación definida a partir de la cual podría moverse en y a través del espacio para, potencialmente, ponerse a sí mismo en contacto perceptual con cualquier objeto. De esta manera, el acceso a la singularidad, unidad e infinitud de la estructura del espacio –metafísico- no se daría a través de la percepción –como supuestamente sostiene la versión fenomenológica- sino a través de un acto *kinemático* de la imaginación productiva (Friedman, 2000, pp. 91-92).

Para justificar la licitud de esta estrategia, Friedman se remite al siguiente pasaje de la *Crítica*, donde encuentra un soporte “breve, pero contundente” para defender su posición:

> No podemos pensar una línea sin *trazarla* en el pensamiento, ni un círculo sin *describirlo,* como tampoco representar tres dimensiones del espacio sin *construir* tres líneas perpendiculares a partir del mismo punto (…). Es el

> movimiento, como acto del sujeto, como determinación de un objeto, y consiguientemente, la síntesis de la diversidad en el espacio, lo que produce el mismo concepto de sucesión cuando hacemos abstracción del espacio, y atendemos sólo al acto a través del cual determinamos el sentido *interno* según su forma (B155).

Y en la nota que sigue a continuación Kant aclara:

> El movimiento de un *objeto* en el espacio no pertenece a una ciencia pura ni, por tanto, a la geometría, ya que sólo podemos saber que algo es móvil por experiencia, no *a priori*. Sin embargo, el movimiento, como *descripción* de un espacio, es un acto puro de la síntesis sucesiva de la variedad contenida en la intuición externa en general por medio de la imaginación productiva, y no sólo pertenece a la geometría, sino incluso a la filosofía trascendental.

Construir un espacio -geométrico, es decir, un objeto geométrico- consistiría pues, en describirlo mediante ciertos movimientos particulares, aquellos que son estipulados por los postulados de la geometría de Euclides[27]. La construcción es una descripción que tiene lugar *a priori* a través de la imaginación de acuerdo con un conjunto de reglas que no son otras que los axiomas de la geometría, los cuáles guían dichas construcciones: "En esta síntesis sucesiva de la imaginación productiva se basan, para producir las figuras, las matemáticas de la extensión (geometría) con sus axiomas. Son éstos los que expresan las condiciones de la intuición sensible *a priori* bajo las cuales, y sólo bajo las cuales, puede surgir el esquema de un concepto puro de los fenómenos externos" (A163/B204).

Es posible ver que, en el procedimiento de construcción con regla y compás de por lo menos los tres primeros postulados, todos los objetos introducidos son generados iterativamente, ya sea desde un segmento dado o desde un par de puntos. Tal determinación kinemática del espacio a través de la imaginación

[27] La aplicación del concepto de movimiento en geometría, dice Rosenfeld, (1988, p. 110 y ss), es considerado por Euclides en algunas de sus definiciones, por ejemplo, en la definición de esfera -como rotación de un semicírculo sobre su diámetro-, cono -rotación de un triángulo recto sobre uno de sus lados-, y cilindro -rotación de un rectángulo sobre uno de sus lados-, que corresponden a las definiciones 14, 18 y 21 del libro XI respectivamente). Pero, en la medida de lo posible, este recurso es evitado en los *Elementos*, quizá debido a la condena previa de Aristóteles de utilizar el movimiento como un medio válido en geometría, del que ya se habían servido los pitagóricos. Sin embargo, como regla, tanto los académicos del Cercano como del Medio Oriente, así como los Europeos Occidentales, utilizaron sistemáticamente el movimiento en sus trabajos geométricos.

productiva permitiría generar tanto las traslaciones como las rotaciones que son la base -en términos contemporáneos- del grupo Euclídeo de los movimientos rígidos, y que a su vez permiten generar los dos elementos fundamentales de la construcción euclídea: líneas rectas y círculos. Abordar la estructura formal relevante del espacio intuitivo como fundamentalmente kinemático permitiría, según Friedman, tender un puente entre el enfoque fenomenológico -que supone que el espacio es la forma de la intuición- y lógico -que supone que el espacio es el objeto de una construcción geométrica-. Pero, además, también haría más fácil conectar a Kant con los trabajos tanto de Helmholtz como de Poincaré por su interpretación grupo-teórica y kinemática perceptual de los fundamentos de la geometría que, al quedar establecida en dichos términos también podría ser extendida a las geometrías no-euclidianas de curvatura constante. De este modo, el carácter fenomenológico del conocimiento geométrico quedaría reinterpretado y ampliado por un rasgo esencial destacado por la perspectiva lógica-constructiva, a saber, el proceso constructivo de prueba, generado por regla y compás que, al parecer, también encuentra en la *Crítica* un respaldo argumentativo pequeño pero sólido.

1.6 El papel constitutivo del espacio en tanto forma pura de la sensibilidad

La propuesta esbozada por Friedman será esencial para conectar a Poincaré con Kant en el capítulo 3 de este trabajo. Con todo, no debe perderse de vista el papel fundamental que juegan las formas puras de la sensibilidad, y en particular, la forma de la sensibilidad externa. Aunque la unidad de la experiencia depende en última instancia de la unidad de la conciencia pura a priori mediante su síntesis de apercepción, no se reduce únicamente a ésta, pues el resultado sería una unidad meramente "conceptual". En cambio, resulta mucho más consecuente suponer que la relación entre el entendimiento y la sensibilidad, efectuada por la síntesis trascendental de la imaginación, posee una direccionalidad que corre hacia ambos lados. Siguiendo al propio Friedman (2000) en esta idea, aunque el espacio no sería unitario en ningún sentido relevante sin la "acción del entendimiento sobre la sensibilidad (B152) manifestada en la "síntesis figurativa", la unidad producida de ese modo no es en sí misma una unidad conceptual por la cual una serie de representaciones (conceptos subordinados) están contenidas bajo una representación dada (esto es, en una especie de concepto superior o más general). Más bien se trata de una unidad claramente intuitiva, por la cual varias representaciones (regiones espaciales) están contenidas en una representación dada (la de un solo espacio). Todas las regiones espaciales pertenecen a un único espacio en tanto que deben ser alcanzables desde ahí; pero "alcanzables desde ahí" no es una relación conceptual. De la misma manera, aunque la síntesis trascendental de la imaginación es una realización o encarnación de la "síntesis intelectual pura" contenida en la unidad sintética de apercepción (B150-2), también debe ir más allá de la síntesis pura intelectual en tanto que ésta última requiere de la sensibilidad pura si quiere lograr la unificación de una variedad dada (B153-4).

Por tanto, la espontaneidad de la imaginación productiva, como facultad que depende del entendimiento para determinar el espacio según las condiciones estipuladas por los postulados de la geometría, resulta inexplicable al margen de cualquier suposición sobre la naturaleza del mismo, el cual, en tanto forma de la sensibilidad, debe limitarla o restringirla de algún modo. La posibilidad de un objeto matemático exige no solo que su concepto esté libre de contradicción[28] sino, además, su concordancia con las condiciones formales de la experiencia tanto desde el punto de vista de la intuición como de los conceptos, tal como asegura Kant en los Postulados del pensar empírico en general. Aunque, el espacio, mera forma de la intuición sensible externa, no constituye, por sí mismo, conocimiento alguno, sí es restrictivo respecto de las síntesis que puede construir la imaginación en él, lo cual queda particularmente claro al explicar su doctrina del esquematismo y la imposibilidad del biángulo:

> El que un concepto semejante [es decir, un concepto puro] se halle libre de toda contradicción es una condición lógica necesaria. Pero ello no basta, ni de lejos, en relación con la realidad objetiva del concepto, es decir, con la posibilidad de un objeto como el pensado a través del concepto. Así, el concepto de una figura

[28] No se puede dejar de lado que el principio lógico de no contradicción es para Kant el primer principio de todos los juicios analíticos, condición necesaria para el conocimiento, pero que por sí misma no es capaz de aportar conocimiento nuevo. (Cfr. A150/B189 y ss).

> encerrada entre dos rectas no implica contradicción alguna, ya que los conceptos de dos rectas y su cruce no implican la negación de ninguna figura. La imposibilidad no descansa en el concepto como tal, sino en la construcción de tal figura en el espacio, es decir, en las condiciones del espacio y en la determinación de éste. Ahora bien, estas condiciones poseen, a su vez, realidad objetiva, es decir, se refieren a cosas posibles, por contener *a priori* en sí mismas la forma de la experiencia en general." (A220/B268)

.

Un biángulo se comprende, pero no se puede construir, ni puede referirse a ningún objeto de experiencia. Esto es verdad, siempre y cuando partamos de la suposición de un espacio euclidiano. Eso me lleva a pensar que ciertamente Kant ya da por sentado que la forma del espacio es euclidiana o por lo menos posee las propiedades que supuestamente subyacen al espacio euclidiano, a saber, un espacio tridimensional, infinito, isotrópico y homogéneo[29] y, por lo tanto, es restrictiva respecto de lo que la imaginación productiva puede construir en él.

Si la única manera en la que se nos pueden dar los objetos es como modificación de nuestra sensibilidad (A139/B178) la geometría no podrá apelar a ninguna clase de intuición intelectual, recurso que en su momento será explorado por Poincaré, tal como se verá más adelante. El entendimiento no puede proporcionarnos intuición alguna; no es posible hablar de tal cosa como una intuición intelectual, pues de ser así, nos encontraríamos fuera del ámbito de toda experiencia posible.[30] La intuición sensible no crea, sino que recibe el objeto, pero no como es en sí mismo, sino en tanto fenómeno, esto es, en tanto está referido a un sujeto, mientras que la intuición intelectual es originaria, porque no solo es

---

[29] Euclides parece suponer ciertas propiedades espaciales que parecen implícitas en los postulados. Por ejemplo, se ha pensado a menudo que tanto el postulado ii -que demanda la construcción efectiva de una recta finita en línea recta- como el postulado iii -que postula describir un círculo con cualquier centro y distancia- envuelve la idea de un espacio continuo e infinito, ya que no indica restricción alguna del tamaño del círculo o línea descrito. Sin embargo, su estudio introductorio al texto, Luis Vega afirma que "es muy aventurado atribuir a Euclides la intención de fijar, con tales postulados, las propiedades definitorias o estructurales del espacio que hoy calificaríamos de «euclidiano». Euclides, según todos los visos, trabaja con objetos geométricos determinados (segmentos, figuras, etc.), no con la idea abstracta o formal de espacio que hoy nos es familiar" (1982, p. 53).

[30] Por experiencia, Kant se refiere a "aquello que surge de la colaboración entre las impresiones recibidas y lo que nuestra propia facultad de conocer produce de sí misma". La experiencia incluye ambos componentes, lo que le es dado al sujeto y lo que pone de sí mismo, por lo que ir más allá de toda experiencia posible significa prescindir de cualquiera de estos dos elementos, y particularmente del primero. Más bien, prescinde solo de lo primero. La metafísica rebasa la experiencia al pensar sobre objetos que rebasan la experiencia (alma, Dios, universo)

condición del *conocimiento* de las cosas, sino más aún, de la *existencia* de las cosas consideradas en sí mismas, de manera que, si espacio y tiempo no fuesen intuiciones sensibles sino intelectuales, deberían ser condiciones de la existencia de cualquier cosa incluyendo a Dios[31], llevando a la conclusión absurda de que Dios no existe porque no es espacio-temporal. (Cfr. B71-72) En cambio, "si no queremos hacer de espacio y tiempo formas objetivas de todas las cosas, no nos queda otra alternativa que convertirlas en formas subjetivas de nuestra forma de intuir, tanto externa como interna" (B72). Más aún, si no hay una verdad que provenga de los sentidos (de la sensibilidad), o por lo menos de una fuente distinta del entendimiento, no solo la diferencia entre intuición sensible e intelectual se vería comprometida, sino que la misma unidad sintética de apercepción, principio más alto de conocimiento, tampoco sería necesaria, pues ya no haría falta en absoluto un acto de síntesis de lo diverso para alcanzar la unidad de conciencia. (B138-B139)

Sobra decir que varios de los nuevos descubrimientos en el campo de las matemáticas y la física llevados a cabo durante el siglo XIX, tornaron este punto de vista en argumentos que para muchos parecían un tanto obsoletos e inflexibles (Cfr. Magnani, 2001, p. 54). Es así que:

> Todos los pretendidos principios que Kant había juzgado como indispensables para la construcción de la experiencia –conservación de la masa, determinismo causal, interacción instantánea a distancia, la continuidad de las cantidades, los axiomas de la geometría euclidiana- fueron desechados y reemplazados por un tentativo, nebuloso, no del todo consistente, pero dramáticamente provechoso, nuevo conjunto de conceptos y leyes. Los cinco temas ya mencionados correspondían o eran propiciados por los principios kantianos de las Analogías de la Experiencia (1,2 y 3), las Anticipaciones de la Percepción (4) y los Axiomas de la Intuición (5). (1) y (3) fueron trastornados por la Relatividad Especial, (5) por la Relatividad General, (4) por la vieja Teoría Cuántica, y (2) por la Mecánica Cuántica (Torretti, 1983, p. 232).

Es en este contexto en el que es posible encontrar el convencionalismo de Poincaré, que se erigió como una propuesta para conciliar –con los arreglos

[31] Aquí vale la pena aclarar que, para Kant, Dios no piensa -porque el pensamiento es limitado- sino que "intuye". Sin embargo, su intuición es intelectual, porque no conoce (receptividad) sino que su intuición es un acto creativo.

pertinentes- uno de los pilares más significativos de la filosofía kantiana a saber, el activo papel del sujeto en el proceso de conocimiento, con los presupuestos epistemológicos que se seguían del surgimiento de las geometrías no- euclidianas. El análisis de dicho proyecto será el objeto de reflexión del siguiente capítulo.

CAPÍTULO 2

EL CONVENCIONALISMO DE HENRI POINCARÉ

La palabra “convencionalismo” es un término difícil y ambiguo, cuyo uso puede llevar a múltiples malentendidos[32]. Aún más si quien lo usa parece compartir la perspectiva kantiana sobre el activo papel del sujeto en el conocimiento matemático. Este es el caso de la posición filosófica de Henri Poincaré para quien, mientras los principios de la aritmética constituyen un auténtico ejemplo de juicios sintéticos *a priori*, en los que la intuición pura aún parece jugar un papel, no puede decirse lo mismo de los axiomas de la geometría, los cuales son calificados como convenciones, inspiradas en todo caso en intuiciones o representaciones meramente empíricas. Su propuesta estuvo decididamente ligada a la revolución[33] de la que formó parte el desarrollo de las geometrías no euclidianas para el ámbito de la matemática, la cual impactó de forma considerable no solo el campo de las ciencias en general, sino también de la epistemología y su modo de explicar tanto los fundamentos como el alcance de nuestro conocimiento matemático en particular; en concreto, el convencionalismo fue un intento de saldar la imposibilidad de atender a la intuición pura, por lo menos en el ámbito de la geometría. En este capítulo explicaré sucintamente tanto el contexto como las premisas principales de esta propuesta.

---

[32] Cito, por ejemplo, la interpretación que hace Eli de Gortari sobre el mismo: “Pero, en cambio, en sus reflexiones filosóficas, Poincaré cometió la inconsecuencia de llegar a sostener una actitud diferente respecto a la interpretación científica de la realidad objetiva. Llevado, tal vez, de su justificado repudio hacia exposiciones poco convincentes y el lenguaje alambricado de los escritos filosóficos que tuvo la oportunidad de leer, Poincaré intentó hallar por su cuenta propia el camino, extraviándose y yendo a desembocar a una especie de convencionalismo filosófico, cómodo pero insostenible. Desde luego, los filósofos idealistas trataron de aprovechar esa posición vacilante, pero entonces Poincaré reaccionó vigorosamente atacándole con decisión. En todo caso, aun cuando no se pueda atribuir valor singular a la “filosofía poincareana” debido a su inconsecuencia y falta de originalidad, sin embargo, la “filosofía de la ciencia” de Poincaré tiene gran importancia por la finura de sus análisis y su rigor crítico. De aquí que resulte indispensable su lectura, tanto para entender los problemas científicos como para conocer uno de los tratamientos clásicos de sus implicaciones filosóficas.” (de Gortari, 1984: xxii-xxiii). Desde luego, no puede dejarse de lado tampoco, la interpretación del convencionalismo como instrumentalismo, hecha por Popper.

[33] Aunque la obra de Kuhn, *La estructura de las revoluciones científicas* remite a una definición de revolución que puede ser muy polémica respecto de su aplicación a la irrupción de las geometrías no-euclidianas, esta novedad es así calificada por autores como Trudeau (1986), y Rosenfeld (1988, p. vii).

2.1 El surgimiento de las geometrías no euclidianas

Como se sabe, la aparición de las geometrías no euclidianas tiene que ver con la historia del problema del quinto postulado de la geometría de Euclides, mejor conocido como el postulado de las paralelas. Ello coincidió con el desarrollo de las ideas algebraicas de grupo y campo que permitió una definición más rigurosa de la geometría, así como el desarrollo más tardío de la teoría de conjuntos (Rosenfeld, 1988, p. vii), cuya exploración, aún en ciernes durante el tiempo en que Poincaré redactó sus textos más importantes, tampoco puede dejarse de lado.

Abordar las implicaciones epistemológicas que supuso su desarrollo reclama de manera natural atender al proyecto que representó la propia geometría euclidiana durante más de dos mil años. Los *Elementos* de Euclides constituyen uno de los primeros y más acabados sistemas matemáticos, que fijaron una especie de estándar metodológico o nivel básico de exigencia tanto en lo referente a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimientos como en lo referente al rigor informal de la prueba matemática (Vega, 1982). El carácter axiomático de la geometría ahí presentado -la derivación de teoremas desde sus axiomas o nociones comunes y postulados fundamentales- fue en sí mismo una contribución sofisticada, que todavía juega un papel básico en las formas más modernas de formular los sistemas matemáticos de manera exacta (Peláez, 2008).

La geometría de Euclides, de inspiración aristotélica, es bien conocida. El primer libro de los *Elementos* se inaugura con 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes. A diferencia de las primeras definiciones que precisan de conceptos no definidos con anterioridad, tales como “parte”, “anchura”, “longitud”, etc., las siguientes se basan en la comprensión del significado de entes geométricos previos, aunque en algunos casos la prueba de su existencia por construcción esté pendiente y sólo sea demostrada hasta proposiciones ulteriores como en el caso del diámetro o las figuras triláteras (Heath, 1981). En lo que concierne a las nociones comunes, son propuestas como “axiomas relacionados con la comparación de magnitudes” (Rosenfeld, 1988, p. 36), por lo que su rango de validez es más amplio que el estricto de la geometría. Finalmente, los postulados funcionan como suposiciones que idealmente son válidas para el contenido de la disciplina en cuestión, en este caso la geometría[34] (Cfr. Heath, 1981, p. 336).

Debido a su presentación más extensa y técnica que el resto, desde el inicio, el quinto postulado o “postulado de las paralelas”[35] levantó numerosas suspicacias. En muy resumidas cuentas, su debate transcurrió por tres vertientes: en primer lugar, se encuentran quienes intentaron derivarlo del resto de la geometría elemental para demostrar que se trataba tan solo de un teorema; personajes tan tempranos como Proclo o los comentadores árabes se inclinaron por esta opción[36]. En segundo lugar, están aquellos que intentaron hacer una reformulación del mismo para convertirlo en algo que no pudiera ser objeto de tantas objeciones; tal fue el caso de John Wallis. Y, en tercer lugar, quienes, por vía negativa, se propusieron demostrar que efectivamente era un postulado; tal fue el propósito de Saccheri quien, al intentar demostrar el quinto postulado por reducción al absurdo, se encontró con la sorpresa de que su estrategia no suponía ninguna contradicción, conclusión que nunca se atrevió a admitir en público (Cfr. Bonola, 1912, p.13-44; Gray, 1992 p. 56). La formulación de las geometrías no euclidianas durante el siglo XIX a manos de Lobachevski (1829-1830), J. Bolyai (1832) y B. Riemann (1854), que justamente parten de la negación o el abandono del postulado de las paralelas para obtener otras geometrías tan consistentes como la geometría euclidiana, terminarían por zanjar esta discusión, al demostrar la independencia lógica del quinto postulado respecto de los otros cuatro (Vega, 1982).

---

[34] Aunque un postulado es una propiedad que funciona como suposición (Alexander, 2013) lo cierto es que los cinco postulados de los *Elementos* no cumplen con esta función del mismo modo, pues mientras los postulados (i) – (iii) sientan las bases operativas de un procedimiento de construcción por regla y compás, el postulado (iv) establece una propiedad esencial de los ángulos rectos, a saber, la de ser una magnitud determinada capaz de representar un patrón invariable para medir los demás tipos de ángulos. El caso del (v) es aún más particular, pues a pesar de asemejarse a los postulados operativos (i) – (iii) al demandar, aparentemente, la existencia de puntos de intersección o encuentro de rectas con rectas, también cumple la función de completar el criterio de paralelismo avanzado en la definición de rectas paralelas, aunque no goza de la evidencia inmediata de los demás principios geométricos (Cfr. Vega, 1982, p. 53-57).

[35] En su formulación euclidiana dice: “Si una recta al incidir sobre dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están” (Euclides, 1982).

[36] Ver K. Jaouiche, La théorie des parallèles en pays d’Islam, París, 1986, citado a su vez en Euclides (1982).

La primera de estas posibilidades que se apartan de Euclides fue explorada independientemente, pero casi en forma simultánea, durante la primera mitad del siglo XIX por Karl Friedrich Gauss, János Bolyai y Nikolai Lobachevski. Aunque las cartas de Gauss a colegas y amigos prueban los grandes avances realizados por él en el tema de las paralelas, el mérito se atribuye sobre todo y de modo independiente a Lobachevski y a Bolyai por ser quienes publicaron sus resultados. Lobachevski comenzó por suponer, al contrario de lo que sucede en la geometría euclidiana, que la suma de los ángulos internos de un triángulo rectángulo puede ser menor a dos rectos, sobre todo al incrementar considerablemente sus lados, corroborando que esto no suponía ninguna contradicción (Rosenfeld, 1988, p. 207). En esta geometría, que Lobachevski denominó "imaginaria", el área del triángulo es proporcional a su *defecto*, definido como la diferencia entre π, es decir, dos rectos, y la suma de los ángulos de un triángulo. Si el defecto de un triángulo es δ, y el área es kδ, entonces, en tanto que δ<π, tenemos que kδ no puede exceder kπ. (Rosenfeld,1988, p. 214)[37]. La consecuencia es que en esta geometría -denominada más tarde como hiperbólica- se mantienen los cuatro primeros postulados de la geometría euclidiana, pero se rechaza el quinto, proponiendo como alternativa algo equivalente al siguiente enunciado: por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela.

Dado que la negación del postulado de las paralelas no supuso ninguna consecuencia contradictoria, Lobachevski negó que la geometría euclidiana fuera la única geometría consistente posible. La geometría hiperbólica, apartada de Euclides, también lo llevó a refutar la doctrina idealista de la innatez de nuestras nociones en favor de una posición de carácter más bien empirista para determinar la geometría del espacio (Rosenfeld, 1988, p. 208). Con esta suposición en mente, Lobachevski propuso medir la suma de los ángulos de un triángulo con lados muy grandes; en concreto, usando los datos proporcionados por el calendario astronómico más reciente, calculó la suma de los ángulos de un triángulo cuyos

[37] Como se ve, en dicha fórmula figura una constante *k* de la que dependía el comportamiento de las figuras geométricas, pero de momento carente de interpretación; *k* podía variar continuamente, y la geometría euclídea aparecía como un caso degenerado de geometría de Lobachevski–Bolyai (*k* = 0) que con el desarrollo de Gauss adquirirá la interpretación de curvatura intrínseca de una superficie (Ferreirós, 2000).

vértices eran la estrella Sirius y dos posiciones diametralmente opuestas de la Tierra, encontrando que la suma de los ángulos difería de π por menos de 0.000372 segundos (de hecho, en este punto Lobachevski tuvo un error de cálculo: la diferencia en cuestión es 100 veces más pequeña que su resultado (Rosenfeld, 1988, p. 208)). En todo caso, esto lo motivó a afirmar que, entre más pequeño fuese un triángulo -y, en consecuencia, su área-, menos diferiría la suma de sus ángulos de dos rectos, por lo que la exactitud de nuestra geometría actual era bastante acertada, aunque en estricto sentido resultaba imposible determinar, desde un punto de vista empírico, cuál de ambas geometrías describía correctamente el espacio.

En todo caso, tanto Bolyai como Lobachevski creyeron que habían dado con la forma más general de tratar la geometría, a la cual el segundo denominó la "ciencia absoluta del espacio". Pero hay que decir que con el trabajo de Bernhard Riemann se alcanzó un enfoque muy superior en relación con el problema del espacio que hizo que las geometrías de Lobachevski–Bolyai se quedaran, a su vez, en casos muy especiales y particulares (Ferreirós, 2000, p. 53). Ello se debe a que Riemann consideraba necesario abordar la idea de espacio euclídeo desde un punto de vista más abstracto que permitiese analizar en profundidad la interrelación entre los principios básicos de la geometría. Para ello, se propuso llevar a cabo un replanteamiento de la teoría de magnitudes en términos del concepto topológico de *variedad,* con el que de hecho buscaba un tratamiento unificado de toda la matemática (aritmética, álgebra, geometría, topología y análisis). Su trabajo abriría un enfoque totalmente nuevo para la cuestión, basado en la geometría diferencial, cuyo desarrollo encuentra un antecedente importante en la geometría diferencial de superficies de Gauss (Ferreirós, 2000, p. 54).

El planteamiento de Riemann es expuesto por primera vez en una famosa publicación de 1854 titulada *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría* (*Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*) donde, para evitar toda ambigüedad en el tratamiento del concepto de magnitud, propone introducir el concepto más general de "magnitud n-uplemente extensa" o variedad n-uplemente extensa (esto es, n-dimensional). Informalmente hablando, una variedad es un conjunto determinado por un concepto que la asocia con cierta estructura y dependiendo de las características del concepto la variedad será continua (es el caso de conceptos como el *lugar* o el *color*[38]), o bien, discreta. De hecho, la "variedad", en el sentido general que Riemann da a esta palabra puede entenderse como una colección de instancias, una clase, un conjunto[39]. En todo caso, las consideraciones geométricas de Riemann se refieren a variedades continuas que además se suponen tácitamente diferenciables (Ferreirós, 2000).

Desde la óptica de Riemann, el espacio es una variedad continua que puede admitir un número infinito de dimensiones, las cuales se expresan en términos de las diversas coordenadas necesarias para obtener los puntos de un objeto. Esto es, para determinar un punto en una variedad *n*- dimensional se deben establecer sus coordenadas o una parametrización local (no en toda la variedad) o, dicho con otras palabras, para establecer la posición de un punto en la variedad *n*-dimensional, se requieren *n* parámetros o coordenadas. El concepto topológico de dimensión es aclarado por Riemann mediante la imagen de una generación sucesiva, de tal modo que el movimiento de un punto generará una variedad unidimensional; el movimiento de una variedad unidimensional, una bidimensional y así

---

[38] Como parte de su proyecto, Riemann sustituye el concepto de espacio por uno más general, que haga alusión a cualquier clase de magnitud: el concepto de variedad. Y, dependiendo de las características del concepto desde el cual se determina la variedad, ésta puede ser continua o bien, discreta (en cuyo caso se habla de puntos en lugar de elementos). Para aclarar -intuitivamente- el concepto de una variedad continua, Riemann mismo sugiere el ejemplo del color, ya que la transición de un color (digamos, un cierto azul) a otro (un verde) sucede a través de una infinidad de grados intermedios, esto es, a través de un intervalo cromático continuo. De este modo, el conjunto de todos los colores es uno de los pocos ejemplos de variedades continuas; lo mismo sucede con el lugar. En cambio, el conjunto de (digamos) las ciudades del planeta Tierra constituiría una variedad discreta (Cfr. Ferreirós, 2000, p. 41-42).

[39] Riemann habla en términos de "variedad" y no de "conjunto" porque la terminología no estaba ni mucho menos asentada en aquel momento, y la elección de términos resultaba especialmente complicada en alemán. Cada autor adoptaba un término distinto, como puede verse consultando las obras de Bolzano, Dedekind, Frege y Cantor. Riemann optó por un término que aparece con mucha frecuencia en los escritos del filósofo J F Herbart (aunque no en el sentido técnico que le dio el matemático) y que el propio Gauss había empleado, de manera poco sistemática, para plantear ideas acerca del espacio n-dimensional. Como es sabido, Gauss fue el primer gran matemático que aceptó plenamente los números complejos, haciendo amplio uso de ellos. Cuando, en 1831, decidió ofrecer una justificación de su uso, dijo que está justificado para determinar los puntos de una "variedad de dos dimensiones"; y en sus lecciones habló también de "variedades de n dimensiones". Riemann recogió este uso lingüístico y lo generalizó todo lo posible, al ponerlo en conexión con la idea de clase que venían manejando los lógicos. El propio Cantor, creador de la teoría de conjuntos transfinitos, la llamó "teoría de variedades" [*Mannigfaltigkeitslehre*] desde 1878 a 1892 (Ferrerirós, 2000).

sucesivamente, esbozo al que aún le harían falta precisiones sofisticadas (Ferreirós, 2000).

Cabe decir que la geometría riemanniana es una generalización de la geometría intrínseca de una superficie de dos dimensiones desarrollada previamente por Gauss, a un número arbitrario *n*. Efectivamente, en su obra *Investigaciones generales sobre superficies curvas* (1828), Gauss introduce el importante concepto de “medida de curvatura”, ahora conocida como la curvatura gaussiana de una superficie (Rosenfeld, 1988, pp. 283-284). Este teorema, denominado *Theorema Egregium,* afirma que la “medida de curvatura” (o curvatura gaussiana) es una propiedad que pertenece a la geometría intrínseca de una superficie diferenciable[40] y puede determinarse por completo midiendo ángulos y distancias sobre la propia superficie, sin hacer referencia a la forma particular en que se curva dentro del espacio euclídeo tridimensional (Rosenfeld, 1988, p. 286).

Dado que una variedad *n*-dimensional sólo tiene características topológicas, es necesario introducir una métrica para dar paso a los conceptos de distancia y ángulo. Precisamente otra de las grandes aportaciones de Riemann es el descubrimiento de que una misma base topológica admite múltiples métricas (Ferreirós, 2000: 59-60). Para introducir una métrica, Riemann parte de una hipótesis que resulta natural, pero a la vez, interesantemente débil: los segmentos pueden desplazarse por la variedad sin que su longitud se vea afectada. Con todo, esta condición es mucho menos restrictiva que la condición de la libre movilidad de cuerpos sólidos rígidos, pues mientras el segundo supuesto conduce necesariamente a variedades de curvatura constante, el primero da lugar a variedades de curvatura variable.

La medida de curvatura tiene la función de expresar hasta qué punto las propiedades geométricas de la variedad se diferencian de las propiedades de un espacio euclideo; viene a ser una medida de la no-euclidianidad de la variedad. Esto es, las variedades riemannianas son variedades n-dimensionales dotadas de una métrica euclidea a nivel local. Pero Riemann destaca, empleando geometría diferencial inspirada en Gauss, que una misma variedad riemanniana puede dar

[40] Es decir, el concepto de curvatura es un invariante intrínseco de una superficie.

lugar a muy diversas métricas globales, lo que serviría, a fin de cuentas, no sólo para comprender mejor las ideas básicas de la geometría, sino también para hacer posibles nuevos planteamientos geométricos en la exploración física del universo, lo que para Riemann era mucho más importante (Ferreirós, 2000).

Para introducir una métrica, Riemann encuentra una expresión general para el elemento de línea de sus variedades denominada *forma cuadrática fundamental.* Para que la variedad sea riemanniana, se debe cumplir en todo punto:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, d_{xi} d_{xk}$$

donde los g_{ik} varían continuamente con la posición dentro de la variedad, es decir, son funciones continuas de las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dada la expresión general para *ds*, nociones métricas como la longitud de una curva, el ángulo entre dos curvas, el área y volumen, etc., dependen de las funciones g_{ik}. Por ejemplo, la longitud *l* de una curva vendrá dada por una integral definida a lo largo de la curva, $l = \int ds$. La forma cuadrática también hace posible encontrar las geodésicas, o curvas de longitud mínima entre dos puntos para una variedad dada: se trata de un problema de cálculo de variaciones, el cual conduce a una ecuación diferencial que deben cumplir las geodésicas. Se demuestra por ejemplo que, en un dominio pequeño, cada dos puntos de la variedad están unidos por una geodésica (Ferreirós, 2000). Este nuevo modo de estudiar la geometría considera que cualquier modelo del espacio (ya sea plano, el espacio tridimensional, o cualquiera otro, ya sea que tenga una curvatura constante o variable) puede ser estudiado como una variedad diferenciable, y que solo hasta introducir en ella una métrica , se está determinando la geometría que gobierna ese objeto, de manera que el plano no debe considerarse por sí solo euclidiano o no euclidiano, sino que, hasta introducir la métrica euclídea, es cuando en el plano verifica el quinto postulado de Euclides, pudiendo desde luego, introducirse cualquier otra.

Las variedades riemannianas de *n* dimensiones y de curvatura variable, permiten establecer un terreno de partida enormemente general, desde el que contemplar el caso particular del espacio euclídeo. Sus principios pueden ser analizados en la forma de una serie de hipótesis cada vez más restrictivas, que nos llevan de las nociones geométricas más generales a su concreción. En el caso del espacio euclídeo se trata de una variedad continua -en específico, una variedad diferenciable- de tres dimensiones y las líneas dentro de esa variedad tridimensional son medibles y comparables (es decir, cada segmento posee una longitud que no depende de la posición; no se ve afectado por el movimiento de la variedad). Los sólidos pueden moverse libremente en el espacio sin sufrir deformaciones métricas o “estiramientos”, lo que determina que la variedad tenga una curvatura igual en todos los puntos y en todas las direcciones de superficie, siendo su medida siempre igual a cero (Ferreirós, 2000).

Para Riemann esta hipótesis establece una cierta homogeneidad del espacio, y es la forma más simple de concebir los fenómenos de la experiencia habitual, lo que explica que la geometría hubiese asumido siempre que tal era el caso. Pero considera que dicho supuesto no conduce directamente al espacio euclídeo, sino sólo a variedades de curvatura constante K = α, donde α puede ser un número positivo o negativo, o cero de modo que, en el caso de α negativo, lo que se obtienen son precisamente las geometrías de Lobachevski–Bolyai, las cuales quedan reducidas a un caso particular dentro del marco riemanniano,[41] mientras que el caso de α positivo lleva a las que a veces se denominan (de forma equívoca) geometrías no euclidianas de Riemann; aunque es más adecuado llamarlas geometrías elípticas, reservando la expresión “riemannianas” para el caso más general que abarca también espacios de curvatura variable. Los nombres de geometría “hiperbólica” para la de Lobachevski–Bolyai, y geometría “elíptica” para el otro caso, fueron propuestos por Felix Klein y tienen su origen en la geometría proyectiva, y en concreto en la manera proyectiva de alcanzar o definir esas dos situaciones no euclídeas (Ferreirós, 2000, p. 63).

Este nuevo enfoque abstracto de la geometría coincidió además con la necesidad de definirla en términos más rigurosos. En 1872 Felix Klein propuso una

[41] En la lección, Riemann no indicó esta relación explícitamente; los historiadores tienden a pensar que, o bien no conocía la obra de esos dos predecesores, o bien prefirió evitar alusiones demasiado explícitas a un tema controvertido (Ferrerirós, p. 62).

definición formal que pretendía superar la mera aproximación intuitiva que se tenía de ella como el estudio de puntos, líneas y superficies. Su contribución, plasmada en una memoria titulada *Programa de Erlangen*, consistió en introducir para esta disciplina un nuevo concepto de carácter algebraico[42] que serviría como principio organizador y clarificador (Cassirer, 1944): el concepto de grupo[43]. Aunque dicho concepto no es invención de Klein, es él quien descubre un hecho fundamental: cada geometría es el estudio de ciertas propiedades que no cambian cuando se le aplican un tipo de transformaciones. Esas propiedades, por no cambiar, las denomina invariantes, y las transformaciones que a un invariante no le hacen cambiar, han de tener estructura de grupo bajo la operación de composición. Esta nueva definición supuso, por tanto, una inversión de términos de manera que no es la geometría la que define su "grupo principal", sino que es más bien al revés: *a priori* se admite un grupo de transformaciones y todo lo demás se reconstruye a partir de él; así, la naturaleza de una geometría dada es definida por referencia a un grupo determinado y el modo en el cual las formas espaciales se relacionan dentro de ese tipo de geometría (Cassirer, 1944). De acuerdo con el Programa de Erlangen, tanto la geometría euclidiana como las no euclidianas -de curvatura constante- pueden considerarse como casos particulares de la geometría de una superficie proyectiva con una sección cónica adjunta. Esto implica dos cosas: la

---

[42] Hacia finales del s. XIX Heinrich Heine proporciona una definición axiomática de grupo como un conjunto de elementos de naturaleza arbitraria sobre los cuáles está definida una operación de grupo $a*b=c$. Esta operación es asociativa; esto es, para cualesquiera tres de sus elementos a, b, c, $(a*b)*c = a * (b*c)$; existe un elemento neutro e tal que para cada a en el grupo $e * a = a* e =a$; y por cada elemento a existe un elemento $\bar{a}$ tal que $\bar{a} * a = a* \bar{a} = e$. (Rosenfeld, 1988, p. 333).

[43] La teoría de grupo usa métodos algebraicos para abstraer la idea de simetría. Con cada geometría, Klein asoció un grupo de simetrías subyacente. La jerarquía de geometrías es representada matemáticamente como una jerarquía de esos grupos y la jerarquía de sus invariantes. Por tanto, al abstraer los grupos de simetrías subyacentes de cada geometría, puede establecerse una relación entre ellas a nivel de grupo. El proyecto de Erlangen propone que todas las nuevas geometrías son casos especiales de la geometría proyectiva, tal como había sido desarrollada por Poncelet, Möbius, Cayley y otros, la cual, por tanto, actúa como un marco unificador para otras geometrías, permitiendo además establecer cierto orden jerárquico entre ellas; la geometría euclídea es más restrictiva que la geometría afín, que a su vez es más restrictiva que la geometría proyectiva. Sobre la base de las ideas de Cayley, Klein probó además, que si uno parte de transformaciones proyectivas que llevan a cierto círculo (o cualquier otra cónica) en sí mismo, se obtiene la geometría no-euclidiana de Lobachevski, aunque cabe decir también que el programa de Erlangen no comprehende algunas ramas importantes de la geometría como la geometría Riemanniana (las variedades de curvatura variable), aunque en todo caso tendría un sustancial valor estimulante para el subsecuente desarrollo de la geometría (Encyclopediaofmath.org/Erlangen program).

primera es que la geometría euclidiana y las no euclidianas podían considerarse como casos particulares de la geometría proyectiva (o, mejor dicho, de la geometría de una superficie en un espacio proyectivo), y la segunda, que la geometría euclidiana es consistente (es decir, no puede llevar a contradicciones) si y sólo si lo son las geometrías no euclidianas (la geometría hiperbólica y la geometría elíptica, esto es, aquellas geometrías de curvatura constante).

Todo este panorama supuso algunos desafíos importantes para la mente de muchos científicos y filósofos acostumbrados a concebir la geometría como la ciencia del espacio: ¿Cuál de todas las posibles geometrías es la verdadera? ¿Cuál de ellas corresponde al mundo físico? En el contexto de esta discusión se sitúa el convencionalismo de Henri Poincaré, mediante el cual se propuso explicar la inutilidad de tal controversia, para lo cual sería imprescindible una profunda revisión de lo que podía considerarse *a priori* en el conocimiento matemático, como marco posibilitador ya no de axiomas lógicamente necesarios, pero sí funcionalmente necesarios, en tanto que su estatus sería recategorizado de apodíctico a convencional.

2.2 La concepción del espacio para H. Poincaré.

A diferencia de Kant, para quien la geometría era la ciencia del espacio perceptual, su trabajo sobre geometrías no euclidianas y topología llevó a Poincaré, así como a muchos otros antes que él, a abandonar esta concepción en favor de una consideración mucho más abstracta. Esto es claro si nos restringimos a sus dos obras de divulgación más conocidas y, por ende, más comentadas, *Sobre los fundamentos de la geometría* (1898) y *Ciencia e hipótesis* (1902/1905), donde el concepto de espacio se bifurca entre espacio sensible o perceptual de un lado, y espacio geométrico de otro. Su punto de partida para llevar a cabo tal escisión es la diferencia entre las características espaciales atribuidas a los objetos por la física matemática –que, de hecho, coloca a los objetos físicos en el espacio geométrico-, y las características espaciales descritas por los “hechos duros” que una persona normal es capaz de percibir a través de los sentidos y movimiento de su cuerpo.

Para Poincaré, el espacio sensible también llamado representativo, es el producto de nuestras sensaciones tanto visuales como táctiles y motoras, y su conocimiento solo es posible *a posteriori*. Se caracteriza por ser finito, no isotrópico y no homogéneo; carece de una estructura predefinida dada y nuestra noción del mismo se conforma mediante la interconexión de las distintas relaciones espaciales acumuladas por el sujeto, por lo que en modo alguno puede ser considerado como forma pura *a priori* de la sensibilidad. Es resultado, más que precondición, de la misma percepción, la cual, al ir acompañada de movimiento, permite su génesis. Para ejemplificar este punto, en su artículo de 1898, *Sobre los fundamentos de la geometría,* Poincaré sugiere el siguiente experimento mental: supóngase un hombre con un solo ojo inmóvil, tanto porque la retina permanece fija como porque el cuerpo al que pertenece dicho ojo es completamente estático. Ahora supóngase que frente a dicho hombre hay una imagen formada por cuatro puntos *A, B, C y D.* Dada su completa inmovilidad, este ser es incapaz de afirmar si la distancia entre el punto *A* y el punto *B* es igual, mayor o menor que la distancia entre el punto *C* y el punto *D*. De hecho, este tipo de preguntas y otras similares carecen por completo de sentido, y su limitación se extiende incluso a su incapacidad para determinar si dos puntos son contiguos o no. Mediante éste y otros experimentos similares, Poincaré se propone demostrar que nuestras sensaciones por sí mismas, no son capaces de proveernos de la noción de espacio: las sensaciones visuales sin movimiento no permiten diferenciar entre un cambio de estado -es decir, un cambio externo que no puede ser corregido por un cambio interno del sujeto-, y un cambio de posición o desplazamiento -es decir, un cambio externo que sí puede ser corregido por un cambio interno del sujeto[44]-. Frente a un vaso que ha cambiado de

[44] La distinción entre cambio de estado y cambio de posición o desplazamiento es fundamental para detonar la clasificación de grupos de desplazamientos en Poincaré. Para explicar su diferencia, el matemático primero hace una distinción entre cambios externos, es decir, aquellos que no son voluntarios ni van acompañados de sensaciones musculares, y los cambios internos, que son voluntarios y van acompañados de sensaciones musculares. Si un cambio externo puede ser corregido por un cambio interno, entonces se llama cambio de posición o desplazamiento. Si un cambio externo no puede ser reestablecido por un cambio interno, se trata de un cambio de estado. Dos cambios externos, diferentes desde un punto de vista cualitativo, pueden constituir el mismo cambio, si son susceptibles de ser corregidos por el mismo cambio interno. E igualmente, dos cambios internos pueden estar hechos de dos series de movimientos musculares que bien pueden no tener nada en común y con todo corresponder al mismo cambio de posición, si son capaces de corregir el mismo cambio externo.

rojo a azul, la retina inmóvil sería incapaz de explicar si se trata de un vaso cuyo contenido original era rojo pero que, gracias a un colorante, se ha tornado en azul (cambio de estado), o si el vaso de un lado era rojo, pero ha sido rotado de tal manera que ahora muestra su cara azul (cambio de posición). La sensación aislada tampoco puede proporcionarnos la noción de dirección, en tanto que la misma sensación, asociada a los mismos movimientos musculares, puede estar relacionada con movimientos hacia diferentes direcciones[45]. Sólo en conjunción con la capacidad de desplazamiento muscular, la percepción sensible constituye la condición de posibilidad de la percepción espacial. Un tipo de espacio que, en todo caso, aún no cuenta con las características propias del espacio del geómetra; con incontables dimensiones, tantas cuantas fibras nerviosas sean necesarias para la percepción visual, táctil o de otro tipo de un objeto, y cuya aprehensión sólo es llevada a cabo *a posteriori.*

Con todo, y en contraste con formalistas como Hilbert, Poincaré considera que el espacio sensible es condición de posibilidad no solo del conocimiento, sino de la conformación del espacio geométrico, el cual, a diferencia del primero, es continuo, tridimensional, homogéneo e isotrópico[46]. Dicho salto toma realidad si se considera que ciertas acciones, cuando están acompañadas por sensaciones musculares, definen clases equivalentes llamadas desplazamientos, de manera tal que cada conjunto de clases de desplazamientos forma un grupo en el sentido matemático (Heinzmann y Nabonnand, 2008). Esto no significa que haya una equivalencia entre cada desplazamiento y un grupo determinado, ya que el mismo cambio externo -considérese una rotación- puede ser corregido por distintos cambios internos. Por ejemplo, una pelota que primero me muestra una cara verde y luego una amarilla debido a una rotación, puede corregirse por infinidad de cambios internos míos para regresar al estado inicial, pues puedo rodearla o pasar sobre ella para volver a la impresión original suscitada por la cara verde. A pesar de ello, es posible afirmar

[45] Además, agrega Poincaré, los datos de los sentidos no se pueden “medir” propiamente. Puedo saber si una sensación fue más profunda que otra, o una distancia más larga que otra, pero no si fue lo doble o triple que la otra. Es decir, el espacio perceptivo no tiene una métrica.

[46] Homogéneo quiere decir que todos sus puntos son equivalentes. Isotrópico, que tiene propiedades que son idénticas en todas direcciones. Continuo: que no admite indivisibles (Poincaré, 1913/1963, p.30).

que se trata del mismo desplazamiento -rotación- porque por experiencia se conoce que ciertas sensaciones y movimientos musculares pueden ser corregidas por ciertas otras[47]. En todo caso, dice Poincaré, cuando la experiencia nos enseña que cierto fenómeno no se corresponde con estas leyes -con las leyes de los desplazamientos-, sino que solo lo hace aproximadamente, su validez no queda descartada, sino aceptada mediante una convención artificial que supone al cambio en cuestión como resultado de otros dos cambios componentes: el susodicho desplazamiento acompañado de una alteración cualitativa -tal como una pequeña flexión o una pequeña dilatación térmica- la cual debe ser ignorada (1898, p. 11). Estos desplazamientos deben ser ordenados según ciertas leyes que obedecen a la estructura algebraica de grupo cuyos elementos preexisten en nuestra mente y que son la esencia del espacio geométrico, por ser el medio a través del cual puede introducirse la idea de medida. Bajo este paradigma, por ejemplo, la geometría euclidiana será el estudio de las propiedades de las figuras que no cambian bajo movimientos rígidos.

De este modo, el espacio geométrico se obtiene al elegir el lenguaje de grupo como herramienta para razonar sobre las representaciones de las sensaciones musculares. Ninguna de nuestras sensaciones, tomadas aisladamente, puede proveer por sí misma el concepto de espacio, pero sí al estudiar las leyes por medio de las cuales aquellas sensaciones se suceden unas a otras, y la experiencia es la ocasión para ejercer tal poder (Poincaré, 1902/1905, p. 58). De hecho, tenemos *a priori* dentro de nosotros, en forma potencial, un cierto número de modelos de grupos, y la experiencia simplemente nos asiste en descubrir cuál de esos modelos se aparta menos de la realidad (1898, p. 13).

Ahora bien, en sintonía con la filosofía aristotélica, Poincaré establece una distinción entre el aspecto formal de un grupo -al que llama “orden”- y su elemento

[47] R. Torretti tiene muchas críticas y objeciones sobre estos experimentos mentales expuestos por Poincaré porque sus resultados no necesariamente nos llevan a las conclusiones que su autor pretendía extraer de ellos (1978). Sin embargo, creo que dicha crítica es excesiva, en tanto que Poincaré no afirma que dichos experimentos sean el contexto de justificación de cualquier grupo de transformaciones, sino que simplemente, lo inspira, aunque una “activa operación de la mente” debe hacer los arreglos pertinentes para lograr la exactitud deseada.

material, al que llama “grado”[48]. Si, informalmente, puede decirse que un grupo es un ensamble de un cierto número de operaciones (en el caso de la geometría, estas operaciones son desplazamientos), así como de todas las combinaciones que pueden hacerse con ellas (1898, p. 13), el carácter de sus operaciones será su grado, mientras que las leyes de acuerdo a las cuales se determinan las combinaciones posibles entre ellas será su forma. O, dicho de otro modo, mientras la forma corresponde a su estructura abstracta, la materia es el conjunto que proporciona una base para la realización del grupo (Torretti, 1978, p. 337). Como ya se dijo, en su artículo *Sobre los Fundamentos de la geometría,* Poincaré establece que nuestro conocimiento sensorial es capaz de detectar un número enorme de dimensiones, tantas cuantas fibras nerviosas estén implicadas en una sensación. Pero como es muy difícil, por no decir imposible, realizar mediciones en un grupo así, y el espacio geométrico solo es tal en tanto es una magnitud medible (1898, p. 40), esta situación empírica es reemplazada convencionalmente por un grupo más sencillo de solo tres dimensiones, es decir, de un grado menor, pero con el mismo orden, que por consiguiente será isomorfo[49] con el espacio perceptual. De esta manera, la mente llega por fin a la noción de espacio geométrico, el cual es calificado por Poincaré como una forma no de la sensibilidad, sino del entendimiento, porque no es condición de posibilidad de la existencia de nuestras propias sensaciones, consideradas individualmente, sino porque es condición necesaria para comparar dichas sensaciones y razonar sobre ellas (1898, p. 3). El conjunto de las relaciones entre los primitivos geométricos constituye la forma, no la materia, de los objetos geométricos, y tales son las que se estudian; precisamente

[48] Esta distinción proviene de la idea según la cual, en geometría las propiedades de los primitivos o de los objetos a los que se aplica cualquier clase de relación geométrica carecen de importancia, en detrimento del aspecto relacional de dichos primitivos, y en ello reside precisamente su aspecto formal. (Heinzmann y Stump, 2017).

[49] En una definición que pretende ser muy intuitiva por ubicarse en un libro de divulgación, Poincaré define como isomorfos a dos grupos que poseen el mismo orden, es decir, el mismo elemento formal/ la misma operación (1898, p. 22); si un grupo es un conjunto de cierto número de operaciones y de todas las combinaciones que pueden hacerse con ellas, se dice que un grupo será isomorfo a otro si en ambos sus operaciones, incluso aunque sean diferentes, se combinan de acuerdo a las mismas reglas (1898, p. 13). En términos más contemporáneos y rigurosos, un isomorfismo puede definirse como un mapeo que preserva conjuntos y relaciones entre elementos o bien, como un morfismo biyectivo (Rosenfeld, 1988, p. 331).

es la forma la que constituye el aspecto relacional del estructuralismo de Poincaré (Cfr. Heinzmann y Stump, 2017).

De hecho, Poincaré supone que esta aproximación sobre el tema del espacio es el aspecto que más lo aleja de la filosofía kantiana. No es difícil adivinar que la siguiente cita, ubicada en *Ciencia e hipótesis* resume la versión recibida por él sobre Kant, aunque ciertamente no haga ninguna referencia explícita a tal origen: “Con frecuencia se dice que las imágenes de los objetos externos se localizan en el espacio, incluso que no pueden formarse excepto en esta condición. También se dice que este espacio, que por tanto sirve como un marco ya preparado para nuestras sensaciones y representaciones, es idéntico a aquél de los geómetras, y posee todas sus propiedades” (1902/1905, p. 51-52). En clara contraposición a esta postura -que puede ser demasiado simplificada si pretende resumir, como es mi hipótesis, el punto neurálgico de la estética trascendental-, Poincaré insiste a lo largo de toda su obra, que el espacio (de los sentidos) no es condición de posibilidad de la percepción sensorial, sino resultado de la misma; y a su vez, que el espacio sensible es condición de posibilidad del surgimiento del espacio del geómetra, sin que sea posible establecer una identidad entre ambos.

2.3 El continuo físico y matemático como precondición del espacio geométrico.

Ahora bien, según Poincaré la propiedad más importante del espacio -o en todo caso, del espacio entendido como un grupo- es su continuidad (1898, p. 14; 1913/1963, p.27). Sin embargo, “para comprender lo que el matemático entiende por continuo, uno no puede investigarlo en la geometría” (1902/1905, p. 17); el continuo matemático no es una propiedad obtenida por la experiencia, pero sí está inspirada en ella, en concreto, a partir de la idea de un continuo físico, cuyo origen es el cúmulo de sensaciones experimentadas en el que nos es posible distinguir grandes diferencias entre una sensación y otra del mismo tipo, no así cuando dichas diferencias son muy pequeñas, por resultarnos completamente indistinguibles. El experimento mental al que recurre reiteradamente Poincaré para explicar esta noción, inspirado en los estudios del psicofísico Fechner, es el siguiente: mientras es fácil distinguir 10 gramos respecto de 12 gramos, difícilmente puede hacerse lo mismo al comparar un peso de 10 gramos con uno de 11 gramos, o uno de 11 gramos con otro de 12 gramos, situación que puede expresarse mediante la siguiente fórmula, a todas luces absurda desde el punto de vista de la lógica:

$$A=B, \quad B=C, \quad A<C$$

Esta característica, propia del continuo físico, no puede resolverse satisfactoriamente ni con los instrumentos más desarrollados, en tanto que una presumible distinción de sus partes siempre nos remitirá a elementos más pequeños cuyas porciones nuevamente nos resultarán indistinguibles. De ahí que, el espacio matemático requiera primero la construcción de un continuo matemático apropiado, con ciertas características que le permitan salvar las contradicciones y limitaciones del continuo físico. Para ello será necesario concebirlo -informalmente- como un conjunto formado tanto por números conmensurables como inconmensurables, cuyos elementos tienen una especie de vínculo íntimo que hace de ellos un todo, donde el punto existe antes que la línea, sino la línea antes que el punto (Poincaré, 1902/1905, p. 18).

De acuerdo con Poincaré, el continuo matemático, por tanto, se presenta como una completa creación de la mente del científico, cuya génesis obedece a dos motivos fundamentales: el primero, como ya se dijo, hacer razonables las conclusiones ilógicas derivadas de la información proveniente de los sentidos que inspira nuestra noción de continuo físico. Pero además, porque dado que en la intuición empírica o en la imaginación, elementos como el punto o la línea son representados con propiedades que de hecho no tienen, como un área o una anchura determinada, el continuo matemático, y en particular el continuo matemático de segundo orden -es decir, aquél compuesto no solo por números conmensurables sino también inconmensurables (1902/1905, p. 25)- permite, si no la representación, sí la racionalización y comprensión de dichos conceptos de una manera mucho más analítica. La formación del continuo matemático permite pues, abordar adecuadamente el concepto de espacio geométrico en el que cada coordenada se define tanto a partir de números conmensurables como inconmensurables.

Ahora bien, si el continuo físico es precondición para la formación del continuo matemático, aún falta establecer la relación del continuo físico con el espacio sensorial, pues Poincaré niega que el primero sea una imagen más o menos tosca del segundo. El espacio sensorial es tan solo un cúmulo de sensaciones complejas con distintas características, que nunca pueden ser iguales entre sí, mientras que la construcción del continuo físico supone discriminar, dentro de dichas sensaciones, aquellas características que nos resulten irrelevantes, y asumir como similares datos que en realidad no lo son, como, por ejemplo, aspectos ambientales que varían con cada una de las sensaciones consideradas. A modo de ilustración sobre este punto, supóngase que la rotación *a* fue llevada a cabo en una situación de frío, mientras que la rotación *b* fue llevada a cabo en una situación de calor; es preciso ignorar las sensaciones de temperatura que podrían ocasionar algún tipo de dilatación que alterara los resultados, para poder calificar las rotaciones como iguales. “Por tanto, en el caso de la definición del continuo físico, es necesario hacer una doble elección: primero, elegir aquellos conjuntos de sensaciones simultáneas o sucesivas que servirán como elementos de este continuo; y en segundo lugar elegir la condición fundamental que definirá los casos en los que dos elementos sean considerados idénticos” (1913/1963, p.32). Esta asimilación de situaciones de percepción en sí mismos desiguales, también es llevado a cabo por “una activa operación de la mente”.

Por lo tanto, la conclusión de los textos clásicos de 1898 *Sobre los fundamentos de la geometría,* y de 1902, *Ciencia e hipótesis,* es que nuestro conocimiento del espacio no puede llevarse *a priori,* pero su definición depende del concepto de grupo que sí preexiste en nuestra mente, y desde el cual debe abordarse para quedar adecuadamente determinado. Si el espacio no define la geometría, sino la geometría al espacio, el único espacio que en rigor puede ostentar tal título es el “espacio geométrico”, en tanto es el único que supone explícitamente la idea de medida. Con todo, el *espacio sensible,* por lo demás, completamente empírico, debe ser considerado el contexto de descubrimiento necesario del espacio geométrico, cuya idea se obtiene precisamente al estudiar las regularidades de acuerdo a las cuales unas sensaciones se suceden a otras. Pero el espacio geométrico es el verdadero campo de estudio de la geometría como ciencia, y solo a él se le pueden atribuir propiamente los predicados de continuidad, homogeneidad e isotropía; al estar fundado en una concepción algebraica según la cual cada grupo de transformaciones y sus invariantes puede dar lugar a una geometría diferente, implica una absoluta superación del mero recurso a la intuición o a la visualización espacial pura, que le permite, de un lado, independizarse de la experiencia como fuente de legitimación con todos los problemas adyacentes que ello supone, y de otro, la posibilidad de construir una variedad de espacios geométricos, que sin embargo obedecen a distintos sistemas axiomáticos completamente consistentes. Si se intenta explicar esta diferencia atendiendo a la clasificación sobre los tipos de hipótesis identificables a lo largo de su obra[50], mientras los enunciados que dan lugar al espacio geométrico son hipótesis aparentes o convenciones, el espacio sensible es un ejemplo de hipótesis natural, una condición necesaria para la ciencia, pero experimentalmente inaccesible, pues en principio no podemos determinar su métrica (Heinzmann y Stump, 2017).

2.4 El convencionalismo de H. Poincaré

La asimetría entre espacio perceptual y espacio geométrico de un lado, así como entre el continuo físico y el continuo matemático de otro, permiten comprender el convencionalismo de Poincaré como una solución alternativa a la oposición entre empirismo y *a priorismo* dominante en la discusión académica de los últimos años del siglo XIX en torno a los fundamentos de la geometría; a su juicio los datos de los sentidos son necesarios pero insuficientes para definir un espacio matemático concreto, el cual requiere además, un elemento que *a priori* habita en nuestra

[50] A lo largo de su obra, Poincaré identifica cuatro tipos de hipótesis: 1) Hipótesis verificables: enunciados generales confirmados por la experiencia. 2) Hipótesis indiferentes o neutras: modelos explicativos que pueden ser sacrificados sin perder exactitud empírica. 3) Hipótesis naturales: condiciones necesarias para la ciencia, pero experimentalmente inaccesibles, que son la base común de todas las teorías de la física matemática, y finalmente, 4) Hipótesis aparentes: definiciones convencionales más que aseveraciones actuales sobre el mundo. No deberían ser consideradas hipótesis como tales, pero erróneamente se les considera así (Heinzmann y Stump, 2017).

mente, la estructura algebraica de grupo, siendo posible la construcción de más de un subgrupo consistente. La elección del grupo Euclídeo[51] se debe a su simplicidad y mayor semejanza con nuestra experiencia con los objetos físicos, cuyo movimiento se asemeja al grupo de desplazamientos de los sólidos invariantes, pero ello no invalida o hace menos verdadero cualquier otro grupo geométrico. Por lo tanto, resulta no sólo imposible, sino también inútil, decidir sobre bases exclusivamente empíricas qué geometría resulta "verdadera" para el espacio físico. Pero la estructura intrínseca del espacio tampoco se descubre como forma pura *a priori* de nuestra sensibilidad, pues de ser así, se nos impondría con tal fuerza que no podríamos concebir la proposición contraria, esto es, no habría geometría no-euclidiana" (Poincaré 1902/1905, p. 48).

Los axiomas o postulados de la geometría pues no son ni verdades sintéticas *a priori*, ni verdades analíticas; pero tampoco hechos experimentales. Más bien, tienen un nuevo estatus epistémico al cual Poincaré bautiza como "convención", comparable al de las definiciones o al de un sistema de medidas determinado como el sistema métrico, y la elección entre distintas convenciones debe llevarse a la luz de criterios metodológicos como la simplicidad.

> Los axiomas geométricos no son, pues, ni juicios sintéticos *a priori ni hechos experimentales.* Son convenciones: nuestra elección entre todas las convenciones posibles está *guiada* por los hechos experimentales, pero permanece libre, y sólo está guiada por la necesidad de evitar toda contradicción. Es así que los postulados pueden permanecer *rigurosamente* válidos, aun cuando las leyes experimentales que han determinado su adopción no son más que aproximadas. En otros términos, *los axiomas de la geometría* (no hablo de los de la aritmética) *no son sino definiciones disfrazadas.* Entonces, ¿qué se debe pensar de la pregunta: es verdadera la geometría euclidiana? La pregunta no tiene ningún sentido. (Poincaré, 1902/1905, p.49-50).

[51] Informalmente hablando, un grupo euclídeo es el grupo característico de las isometrías de un espacio euclídeo $\mathbb{E}$n; es decir, de las transformaciones de ese espacio que preservan la distancia euclidiana entre cualquier par de puntos. De manera más formal, se puede decir que la geometría euclidiana de *n* dimensiones se ocupa de las biyecciones α: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que preserva las distancias en el espacio-*n* Euclidiano (es decir, los movimientos rígidos). Este grupo es isométrico y el grupo de todas las isometrías de $\mathbb{R}^n$ se llama el grupo Euclídeo de *n* dimensiones. Se denota como *E(n)* (Ghosh y Deguchi, 2008, p.105).

La novedad del convencionalismo radica pues, en entender los axiomas de las distintas geometrías no como enunciados sintéticos *a priori*, sino como "definiciones disfrazadas" de las entidades geométricas que puedan satisfacerlas, siempre y cuando sean consistentes. En una definición implícita, a diferencia de una explícita, el término que se quiere definir es primitivo y no puede ser definido por medio de términos más básicos; más bien se introduce para estipular nuevas entidades, generalmente dentro de una teoría, por lo que en principio carece de significado. La primera condición para llevar a cabo dicha tarea es que sea consistente, es decir, que no sea autocontradictorio. Pero esto no es suficiente. También tiene que ser consistente con el resto de la teoría dentro de la cual se va a incluir. A esto se le llama condición de no-creatividad o "conservatividad", según la cual, los nuevos teoremas deben involucrar a los nuevos términos definidos. Ben-Menahem lo explica de la siguiente manera:

> La idea subyacente a la noción de definición implícita es la de que nosotros somos capaces de imponer axiomas que relacionan los términos primitivos entre sí, así como con una terminología previamente entendida (como por ejemplo, un vocabulario lógico) que les confiere por encima de los términos definidos los significados que tienen que hacer los axiomas verdaderos. En otras palabras, los términos implícitamente definidos refieren a cualquier entidad que haga verdaderos los axiomas. Los términos implícitamente definidos no son eliminables; continúan apareciendo esencialmente en los axiomas y teoremas que se siguen de ellos. En la medida en que los axiomas regulan su uso y sirven como limitaciones que fijan su extensión, se considera que los términos definidos implícitamente tienen significado". (2006, p. 138)

Esta nueva caracterización le permite a Poincaré dar una explicación satisfactoria del acceso a los términos primitivos que, según algunos, como Russell, se daba mediante un supuesto "conocimiento directo" [*acquaintance*]. (Cfr. Russell, 1904, p.593).[52] Contrario a Russell y Frege, para quienes definir es llevar a cabo el análisis de un concepto, descomponiéndolo en sus elementos más simples, Poincaré parte de un punto de vista mucho más "coloquial", en el que definir es simplemente "asignar un significado a una expresión" (Coffa, 1991, p. 131). De este

[52] La cita que sugiere que Russell creía esto efectivamente, y que tomo de A. Coffa (p. 390) dice como sigue: Es, indudablemente, por medio del análisis de los objetos percibidos que obtenemos una "noción" [acquaintance] de lo que se quiere decir por línea recta en el espacio actual".

modo, mientras que el primer punto de vista supone que los significados están disponibles previamente a la definición –posición que es denominada por Coffa con el título de *tesis del atomismo semántico* - para Poincaré una entidad matemática queda definida cuando puede llevarse a cabo una construcción de la entidad en sí misma. En otras palabras, una definición matemática crea y justifica su objeto.

La vacuidad de la apelación de Russell al “conocimiento directo” es clara en relación al contexto de los hechos geométricos relevantes. En opinión de Alberto Coffa, hacia 1900 no era posible seguir suponiendo que este tipo de “conocimiento directo” (*acquaintance*) jugaba un papel explicativo semántico específico en geometría que se supone tenía en la *perspectiva atomista del conocimiento*, donde la construcción de la teoría geométrica comenzaba con el ‘conocimiento directo’, después se procedía a la construcción de afirmaciones y quizá concluía después con su comprobación (Coffa, 1991, p.133). El convencionalismo de Poincaré supone, a diferencia de Russell así como de muchos positivistas lógicos posteriores, que los axiomas de la geometría no pueden ser considerados como términos primitivos indefinibles a los cuales se puede acceder mediante intuición o en todo caso, mediante “conocimiento directo”.[53] Mientras que los positivistas lógicos, siguiendo el programa logicista de Russell, se habían planteado la posibilidad de basar todo el conocimiento *a priori* en definiciones, de acuerdo con Coffa, para Poincaré lo único verdaderamente *a priori* -en el sentido de independiente de la experiencia- son las definiciones implícitas, las cuales, al formar los axiomas de un sistema geométrico particular, se encuentran a la espera de algún modelo que pueda satisfacerlas y, por ende, hacerlas verdaderas. En este sentido, las distintas geometrías pueden considerarse como equivalentes, esto es, alternativas igualmente válidas, ninguna de las cuales puede imponerse por necesidad lógica o racional, pero tampoco a través de la experiencia. El hecho de que los axiomas sean tomados como definiciones, que pueden escoger las entidades hacia las cuales están referidas, hace que el único límite en la construcción de un nuevo sistema axiomático se encuentre del lado de la consistencia. Por tanto, “el misterio que rodea

[53] “Encuentro difícil hablar con aquellos que dicen tener una intuición directa de la igualdad de dos distancias o de dos lapsos de tiempo; hablamos dos lenguajes muy distintos. No puedo sino admirarlos, ya que yo me encuentro completamente privado de dicha clase de intuición” (Poincaré 1899, p. 274).

a las diferentes geometrías desaparece cuando nos percatamos de que los axiomas y teoremas hacen referencia a distintos conjuntos de entidades” (Ben-Menahem, 2006, p. 17).

No obstante, dicha referencia debe entenderse en un sentido no convencionalista, pues en términos modernos, para comprobar la consistencia de ciertos axiomas, es necesario construir un modelo. Si éste es satisfecho por los axiomas, entonces puede afirmarse que los axiomas son verdaderos para dicho modelo. El objetivo de construir axiomas como definiciones es que dichos axiomas pueden señalar las entidades que los satisfacen. Pero esto es ya una cuestión de hecho, y no de convención. La pregunta por la verdad de un axioma no es sino la pregunta por la existencia de un conjunto de entidades que lo satisface, dado que diferentes conjuntos de axiomas pueden ser verdad para distintos conjuntos de entidades. Por tanto, los axiomas son definiciones en el sentido de que pueden escoger su interpretación, y convencionales en tanto que depende de nosotros en qué conjuntos de entidades preferimos centrarnos, tomar como primitivas y así. (Cfr. Ben Menahem, 2006, p. 18).

En todo caso, el tipo de geometría empirista que Henri Poincaré está atacando es aquella que sostiene que hay una métrica intrínseca en el espacio a ser descubierta por la experiencia tal como sostiene Helmholtz (Friedman, 2000, p. 200) o incluso el propio Lobachevski a su manera (Rosenfeld, 1988, p. 208). Desde su punto de vista, no hay una métrica intrínseca como tal, ni ésta puede ser experimentalmente extraída de las fuerzas coligantes que operan en el espacio. Pero tampoco puede ser extraída con necesidad y exclusividad de la estructura de nuestra mente. La elección de una geometría particular es convencional –y de hecho sólo puede ser convencional-, porque no nos es impuesta unilateralmente ni por la experiencia ni por la estructura de nuestro psiquismo; pero se distingue de una mera elección arbitraria porque también deben intervenir criterios racionales y pragmáticos, al tomar en consideración cuál es la que se aleja menos de la experiencia. Aunque no se puede predicar la verdad o falsedad de ninguna geometría particular, la elección de alguna de ellas se hace en función de lo que resulte más conveniente para nosotros, dada nuestra experiencia y objetivos. En opinión de Poincaré, no es la naturaleza la que posee una estructura determinada, sino que es nuestra mente la que proporciona una categoría para la naturaleza; pero no se la impone violentamente como la cama de Procusto, mutilándola tanto como nuestras necesidades así lo requieran, sino que ofrece varias para ver cuál le acomoda más (Poincaré, 1898, p. 43).

Tal como observa Michael Friedman, los axiomas de las distintas geometrías, entendidos como convenciones, son cruciales para entender la coordinación entre los conceptos y la realidad empírica en las ciencias exactas (2007, p. 100), pues sin ser simétricos con los datos provenientes de los sentidos, se inspiran en gran medida en ellos, al tiempo que son capaces de organizar nuestro conocimiento en general. Para Poincaré, ninguna propiedad del espacio puede ser impuesta unilateralmente por la experiencia, y esta posición debe extenderse tanto a la congruencia de la métrica, como a la "naturaleza" de la dimensionalidad del espacio de las teorías físicas. Los avances tanto en el campo de las matemáticas como de la biología hacen imposible seguir manteniendo el punto de vista kantiano según el cual el espacio debe concebirse como una intuición pura con una estructura única determinada. Pero tampoco considera que la solución se encuentre del lado del empirismo; el espacio propiamente geométrico no es un producto que pueda obtenerse de la experiencia, aunque, como trataré de demostrar a continuación, es posible corroborar a lo largo de sus obras, una evolución sobre su concepto del mismo, que paulatinamente lo fue acercando a una perspectiva muy similar a la kantiana esbozada en el primer capítulo de este trabajo, y muy específicamente a partir de una propiedad topológica suya: la continuidad.

Para acercarme a esta idea es importante notar que, hacia el final de *Sobre los fundamentos de la geometría,* Poincaré manifiesta una "pequeña y quizá no esencial diferencia con los creadores de la teoría de grupos, Sophus Lie y Helmholtz" (1898, p. 40) que a la postre se mostraría del todo relevante: y es que mientras ellos suponen que la materia del grupo existe previamente a la forma, lo cual en geometría significa que el número de dimensiones, en concreto una *zahlenmannigfaltigkeit* o continuo de tres dimensiones, es anterior al grupo, Poincaré, por el contrario, considera que es la forma, es decir, la noción de grupo, la que preexiste a la materia (1898, p. 40). Su posición es sustentada en dos razones: la primera, porque la propiedad de isomorfismo entre grupos es válida con independencia de la materia de ambos; y la segunda, aún más importante, porque ello le permite escapar a la objeción que algunos críticos han interpuesto contra Lie y Helmholtz, según la cual si el grupo supone la noción de -continuo tridimensional- se cae en un círculo vicioso, pues los fundamentos de la geometría suponen de hecho, un conocimiento previo del espacio, y un continuo de tres dimensiones (1898, p. 40). En otras palabras, a diferencia de Lie y Helmholtz, Poincaré niega como prerrequisito un continuo tridimensional (Cfr. Heinzmann y Nabonnand, 2008, p. 9). En todo caso, haciendo gala de su usual perspicacia para zanjar este tipo de diferencias, concluye que la objeción hecha a los artífices de la teoría de grupo no es del todo justa, en tanto que el continuo tridimensional del que parten es una especie de magnitud no-mensurable (es decir, que carece de una métrica), que solo hasta la introducción del grupo se convierte en mensurable y, por consiguiente, en un espacio verdadero (p. 40). Sin embargo, como nota Philippe Nabonnad, la presentación del espacio geométrico que hace Poincaré en *Sobre los fundamentos de la geometría*, también es circular:

> En su documento de 1898, [Poincaré] presenta una explicación (matemática) de las tres dimensiones del espacio. Observa que el grupo euclidiano, seleccionado tras muchas convenciones, podía ser visto como actuando en un espacio de tres, cuatro o cinco dimensiones. La elección de un espacio tridimensional se justificaba por consideraciones de mera comodidad. Lamentablemente, el argumento de Poincaré era viciosamente circular porque la elección del grupo euclídeo a su vez estaba basada en la clasificación de grupos de transformaciones de Lie que operaban en R_3 (Heinzmann y Nabonnand, 2008, p. 9).

Con el objeto de corregir este inconveniente, que parece dar la razón a Lie y Helmholtz en torno a la prioridad del aspecto material sobre el formal, en *El valor de la ciencia* (1905/1907), y posteriormente, en el artículo titulado "¿Por qué el espacio tiene tres dimensiones?" publicado póstumamente en una obra llamada *Matemáticas y ciencia. Últimos pensamientos* (1913/1963), Poincaré remonta sobre su explicación en torno a las propiedades del continuo físico y su relación con el continuo matemático. Esta vez, introduce un continuo físico tridimensional que le permite justificar apropiadamente la clasificación de Lie (Stump, 2017). Sin embargo, como consecuencia de dicha introducción, la geometría no se mostrará tan independiente de cualquier espacio matemático como previamente había supuesto, sino que más bien, éste debe ser presupuesto como una noción al parecer, tan primitiva como la noción de grupo pragmáticamente sugerida existente en nuestra mente (Stump, 2017), o por lo menos una de sus propiedades, a saber, la de continuidad. A ello hay que sumar que, en dichos artículos, Poincaré aborda de manera más explícita una disciplina matemática que apenas se encuentra en ciernes, la cual en ese momento es llamada *analysis situs*, más tarde conocida como topología. El objeto del último capítulo será el de mostrar cómo Poincaré termina introduciendo la necesidad de una intuición aparentemente pura, en su tratamiento del origen del continuo físico y matemático, a propósito de la naciente topología. Como se verá a lo largo de ese capítulo, mi propuesta consiste en afirmar que la intuición pura del espacio de Kant sobrevive en la filosofía de la geometría de Poincaré precisamente bajo la forma de un "continuo amorfo tridimensional", necesario para la naciente topología (y a través de ella para la geometría, por cuanto que Poincaré asume que la topología es la forma más general de geometría), limitando en cierto modo, el alcance de su convencionalismo original.

CAPÍTULO 3

EL PAPEL DE LA INTUICIÓN PURA EN EL CONVENCIONALISMO DE POINCARÉ

3.1 La intuición en Poincaré

Tal como se anticipó en 1.5, uno de los motivos más influyentes que impulsó el creciente interés por desarrollar una rigurosa formalización de las matemáticas, promovida por personajes como Peano, Russell, Frege y Hilbert, fue precisamente el deseo de eliminar la intuición del campo de las matemáticas, por considerar que se trataba de un modo de conocimiento vago y poco fiable. Por una parte, logicistas como Bertrand Russell y Gottlob Frege creían que la matemática era básicamente una rama de la lógica, pues suponían que la terminología matemática podía ser definida usando sólo la terminología de la lógica, y porque, después de llevar a cabo dicha traducción, también era posible mostrar cómo cualquier teorema matemático podía ser presentado como una nueva exposición de un teorema lógico. En otras palabras, el programa lógico tenía como propósito reducir los diversos campos de la matemática a la aritmética, para posteriormente "reconstruir" la aritmética en términos lógicos. De este modo, toda la matemática quedaría establecida como una ciencia por completo analítica. Por otra, los formalistas como Hilbert, pensaban que si se formalizaba cada una de las diferentes ramas de las matemáticas para probar -matemáticamente, que cada una de ellas está libre de contradicciones, se podría dar un fundamento seguro a toda la matemática en independencia total del cualquier recurso intuitivo.

En cualquier caso, Poincaré no estaba de acuerdo con este programa. Al menos en el ámbito de la aritmética consideraba que la intuición jugaba un papel preponderante en su fundamentación. De hecho, en general se le considera como un matemático inclinado hacia el intuicionismo -así lo clasificó el propio Brouwer- aunque difícilmente pueda identificarse plenamente como tal si se atiende a ciertas diferencias, que no siempre son claras dada la ambigüedad en el uso del término a lo largo de su obra[54]. En cambio, según Alberto Coffa (1991, p. 129), Poincaré sí estaba de acuerdo con Russell en remover la intuición pura del campo de la geometría, pues mientras la unicidad de la aritmética era prueba de su carácter sintético *a priori*, como ya se vio, los trabajos sobre geometrías no-euclidianas sugerían la imposibilidad de abordar desde un contexto trascendental -en sentido kantiano- la geometría.

En *El valor de la ciencia* Poincaré proporciona una lista que resulta muy clarificadora, en la que da a conocer las tres diferentes acepciones bajo las que entiende el término intuición: (1905/1907, p. 215-216):

1) Como apelación al sentido y la imaginación, cuyo lugar es la geometría.
2) Como generalización por inducción, de vital importancia para las ciencias experimentales.
3) Como intuición del número puro, la cual tiene lugar en la aritmética y el álgebra.

Mientras la intuición en sus dos primeros usos no es fuente de certeza, el tercero sí lo es. En concreto la intuición "del número puro" tiene un contexto de aplicación muy específico, a saber, la validación del axioma de inducción en aritmética. En un artículo de 1906 aclara que dicha intuición no debe entenderse como el modo de representarse un objeto, sino que más bien concierne a nuestra capacidad para seguir una regla (Stump, 2017)[55]en tanto que es un "poder de la

[54] De acuerdo con Heinzmann y Stump, (2017) tanto Poincaré como Brouwer consideran que la garantía de certeza inherente a las matemáticas está en la intuición, y en concreto, comparten la convicción de que la inducción completa es "el razonamiento matemático por excelencia". Sin embargo, a diferencia de Poincaré, Brouwer cree que la intuición es de hecho la única base para la construcción matemática (aritmética), además de que ambos difieren en torno a la relación que existe entre la intuición y el lenguaje, pues mientras la implicación de paradojas es atribuida por Brouwer a la aplicación de leyes lógicas a una estructura lingüística que jamás podría ser transformada propiamente en matemáticas, de modo que el logicismo era inútil, para Poincaré, la solución consistía más bien en corregir la filosofía platónica que acompañaba a dicho formalismo. Finalmente, en lo concerniente al tema del infinito en acto, Poincaré terminó por rechazarlo, mientras que Brouwer lo consideraba aceptable en tanto podía ser sujeto de una construcción intuitiva (Stump, 2017).

[55] La aseveración anterior se sigue de sus diferencias con Russell en el marco de la investigación que en su momento realizó en torno al programa de axiomatización de la aritmética llevada a cabo por Peano. Mientras para Russell los cinco axiomas matemáticos de Peano constituyen una definición implícita de los números naturales, para Poincaré esto sólo puede afirmarse si se demuestra que los axiomas son consistentes; y su

mente" que legitima la iteración indefinida, necesaria para el razonamiento recursivo que subyace al principio de inducción de la Aritmética.

La característica esencial del razonamiento por recurrencia es su capacidad para condensar, por así decirlo, en una fórmula singular, una infinidad de silogismos (Poincaré, 1902/1905, p. 39). Cada uno de estos es un silogismo hipotético, cuya premisa menor afirma que un teorema es verdadero para algún número natural, y cuya premisa mayor es una instanciación, para ese valor de *n*, de la fórmula "Si el teorema es verdad para *n*, entonces es verdadero para n + 1". El papel de la intuición del número puro sería precisamente el de proporcionar la garantía para formar dicho tipo de silogismo, el cual procede al tomar la conclusión del silogismo anterior como premisa menor e instanciando la fórmula al valor correspondiente de *n*. Ante la imposibilidad de demostrar proposiciones que dependen de una variable que puede tomar una infinidad de valores enteros, la función de la intuición sería la de garantizar la iteración de una determinada regla al permitirnos alcanzar estas series potencialmente infinitas como un todo unificado, "condensado" en una fórmula singular (Poincaré, 1902/1905).

Para Poincaré, la "intuición del número puro" es un auténtico tipo de intuición pura en tanto que la aritmética es una ciencia sintética *a priori.* El principio de inducción matemática que depende de tal tipo de intuición no es un razonamiento de tipo analítico, porque no es reductible al principio de no contradicción, ni es deductivo; su validez tampoco deriva de la experiencia, y mucho menos es una

---

consistencia sólo puede mostrarse si hay algún objeto que satisfaga dichos axiomas. Desde un punto de vista muy general, cualquier sistema de axiomas puede ser concebido como un conjunto de definiciones implícitas sólo si es posible demostrar la existencia de, al menos, un objeto que satisfaga los axiomas. Pero dicha demostración no es tarea fácil, pues el número de consecuencias de los axiomas de Peano es infinito y una inspección directa de cada una de ellas es posible. Al parecer sólo queda una alternativa: si se verifica que las premisas de una inferencia en el sistema son consistentes con los axiomas de la lógica, también lo será la conclusión. Por ende, si después de *n* inferencias no se produce ninguna contradicción, entonces, tampoco se obtendrá contradicción alguna después de n+1 inferencias. Poincaré, sin embargo, rechazó el razonamiento anterior por considerar que se trataba de un círculo vicioso, pues necesariamente depende del principio de completa inducción, cuya consistencia a su vez era necesario probar. (Recuérdese que el principio de completa inducción era el quinto axioma de Peano). Si no puede establecerse de manera no viciosa la consistencia de los axiomas de Peano, entonces, con toda seguridad el principio de inducción completa no es demostrable por medio de las leyes de la lógica general, por lo que no se trataba de un principio analítico sino de un juicio sintético que requería de la intuición -en el sentido de número puro o de seguimiento de una regla-, quedando refutado así el logicismo.

convención como los postulados de la geometría. Más bien posee una “virtud creativa” que procede de lo particular a lo general. Sin embargo, a diferencia de la inducción utilizada en las ciencias empíricas, es capaz de imponer su conclusión con necesidad ya que no depende de nuestra creencia en un orden general del universo, orden que es externo a nosotros, sino de un poder de la propia mente, que surge cuando se percata de que es capaz de concebir la repetición indefinida del mismo acto, una vez que dicho acto se ha mostrado posible. Y, “esta regla, inaccesible a la prueba analítica tanto como a la experimentación, es el tipo exacto de intuición sintética *a priori*” (Poincaré, 1902/1905, p. 12-13).

En cambio, las acepciones b y c (intuición como apelación al sentido y la imaginación, y como generalización por inducción), bien pueden interpretarse, a la luz de la filosofía kantiana, en términos de intuiciones meramente empíricas por tratarse de representaciones provenientes de la experiencia que, desde la perspectiva de Poincaré -y aquí sí, a diferencia de lo defendido por Kant-, encuentran su utilidad preponderantemente en la geometría. Así las cosas, si nos restringimos a lo estudiado en *Sobre los fundamentos de la geometría* (1898) y *Ciencia e hipótesis* (1902/1905), en contraste con el papel de la intuición pura en aritmética, es claro que el único tipo de intuición posible para geometría según Poincaré es el de la intuición como apelación al sentido y la imaginación que, en el contexto de la crítica kantiana, se traduce en términos de intuiciones meramente empíricas; representaciones de sensaciones reales o imaginadas, experimentadas por el sujeto, que deben ser idealizadas y clasificadas por el entendimiento mediante la aplicación de un grupo, sin que haya una relación isomorfa entre ellas.

Esta interpretación grupo-teórica y kinemática-perceptual de los fundamentos de la geometría puede extenderse a las geometrías no-euclidianas de curvatura constante en las que la intuición ocupa un papel epistemológico importante, siempre y cuando se haga en términos de una intuición empírica y no pura, mientras que la teoría de grupo, aunque *a priori,* no es constitutiva de la experiencia (Friedman, 2000), conclusión que empata muy bien con su perspectiva convencionalista. Aparentemente, la intuición -empírica- constituye el contexto de descubrimiento de la geometría en general, además de jugar un papel importante, orientativo, más no normativo, en el contexto de justificación. Es en este orden de ideas que la conocida frase de Poincaré "la lógica, que por sí sola puede proporcionar certeza, es el instrumento de la demostración; la intuición, es el instrumento de la invención" (1905/1907, p. 23) cobra sentido.

Sin embargo, y aquí se encuentra la novedad de este trabajo, sus últimas reflexiones parecen ensanchar esta perspectiva, extendiendo la función de la intuición pura de la aritmética, si bien no a la geometría, sí a una forma más general de la misma, la topología. En concreto me remito nuevamente al artículo titulado "¿Por qué el espacio tiene tres dimensiones?" ubicado en sus *Últimos pensamientos* (1913/1963), donde su autor hace un esbozo de la manera en que se debe clasificar la geometría, a propósito de una nueva rama, el *analysis situs* o topología, de la cual es considerado fundador. Inspirado en la organización propuesta por el Programa de Erlangen, el nivel más básico está ocupado por la geometría métrica, basada en la noción de distancia. En el segundo nivel se encuentra la geometría proyectiva "fundada en la noción de línea recta", en la que los criterios cuantitativos ceden paso a algunos de carácter cualitativo, aunque el concepto de medida es todavía irrenunciable. Y, por último, en el nivel más alto de generalidad, se encuentra el *analysis situs*, geometría en la que aspecto cuantitativo es excluido por completo para ceder paso al aspecto meramente cualitativo, de manera que dos figuras son equivalentes si solo si es posible hacer que una corresponda a la otra por medio de una deformación continua, cualquiera que sea la ley que rija tal deformación, es decir, siempre que se mantenga la continuidad (1913/1963, p. 25). Poincaré afirma que es precisamente en el *analysis situs* donde "verdaderamente la intuición geométrica juega un rol" (p. 26) pues a diferencia de lo que sucede en la geometría métrica y proyectiva, la función de esta "auténtica intuición geométrica" es análoga al que utiliza el álgebra y la aritmética; y en todo caso, si la intuición juega también un papel en la geometría métrica y proyectiva se debe a lo que subyace de *analysis situs* en éstas, "pues es imposible estudiar las propiedades métricas de una figura sin considerar sus propiedades cualitativas" (p. 26).

En el artículo de 1913, y unos ocho años antes, en el *Valor de la ciencia* de 1905, Poincaré da a entender que la función de esta intuición es precisamente la de captar un "continuo amorfo tridimensional", carente aún de propiedades métricas o proyectivas, que se ve forzado a introducir tras percatarse de que la elección del grupo euclídeo (que suponía como completamente convencional) se basaba en la clasificación de Lie de grupo de transformaciones que actúan sobre R_3 y admiten un invariante fundamental (Heinzmann y Nabonnand, 2008, p. 8). Esto es, mientras que en 1898 Poincaré afirmaba que no necesitaba de ningún continuo preexistente[56], después cambia de parecer y se da cuenta de que tiene que introducir un continuo tridimensional no mensurable como requisito para el *analysis situs*, considerado como una geometría cualitativa; la función de este continuo amorfo tridimensional a su vez es el de permitir la construcción del continuo físico que funciona como contexto de descubrimiento apropiado para el continuo matemático -en el que se puede introducir una métrica para dar lugar al espacio geométrico-. Si una de las premisas fundamentales del *analysis situs* es que el espacio es un continuo tridimensional (1905/1907, p. 240; 1913/1963, p. 27), y la cuestión del número de dimensiones tiene que ver con una deformación continua, primero hay que penetrar en el concepto de dimensión a través de la noción de coordenada para comprender lo que este continuo es. Poincaré propone que este ejercicio es no sólo psicológicamente más asequible mediante la intuición sino, sobre todo, epistemológicamente inevitable. A continuación, explicaré esto con más detalle.

3.2 Intuición en la captación de la dimensión.

Remitiéndose a lo dicho en obras anteriores, Poincaré afirma que la caracterización de una dimensión espacial puede hacerse de dos modos. La primera es mediante una explicación lógica, que califica de analítica, según la cual un continuo de *n* dimensiones es un conjunto de *n* coordenadas, esto es, un conjunto de *n* cantidades capaces de variar independientemente unas de otras, y

[56] Poincaré insiste al principio que, una de las virtudes de su teoría es que no parecía requerir de una noción primaria de espacio. En el artículo de 1898 la idea es clara: la geometría precede al espacio. De ahí que sus ideas fueran consideradas como originales si se las compara con las de Riemann, Klein, Helmholtz o Lie quienes sí presuponían la existencia de un continuo amorfo en el desarrollo de sus tesis geométricas (Heinzmann y Nabonnand, 2008).

de asumir todos los valores reales que satisfacen ciertas desigualdades (1913/1963, p. 28)[57]. Aunque impecable desde el punto de vista de las matemáticas, para Poincaré resulta, sin embargo, insatisfactoria, ya que a su juicio en un continuo las diversas coordenadas no están yuxtapuestas unas a otras sino entrelazadas "de tal manera que forman los diversos aspectos de un todo". Si en cada instante del estudio del espacio se lleva a cabo lo que se denomina "cambio de coordenadas"; esto es, se reemplazan las coordenadas *n* por funciones continuas cualquiera de las *n* coordenadas, para quien solo se atiene a la definición analítica, la operación parece barroca y no justificada ya que, en clara oposición a la escuela de Cantor, para Poincaré, cualquier tendencia de aritmetizar la geometría, aunque rigurosa, no es suficiente, para comprender todos los profundos aspectos de esta idea. Pero, continúa Poincaré, para aquellos que derivan la noción de continuo de *n* dimensiones de una fuente más profunda, esta operación parece natural y no cambia lo que es esencial para un continuo. Ello explica que se decante por una explicación sobre el concepto de dimensión que califica como más *intuitiva*, asentada en la noción de corte. Para comprenderla, debe suponerse un continuo C del que se pueda distinguir dos elementos, A y B; si entre ellos es posible encontrar una serie de elementos E_1, E_2, E_3, de tal manera que A resulte indistinguible de E_1 y E_n resulte indistinguible de B, entonces se dice que C es "una sola pieza" que carece de dimensión, lo cual corresponde al punto, unidad básica que no puede ser dividida. Pero, si dentro de los elementos de C es posible distinguir unos de otros, entonces C tendrá varios cortes, tantos cuantos elementos puedan distinguirse. Ahora bien, no es el número de cortes, sino su cualidad, el que da lugar al número de dimensiones, de tal manera que si los cortes sobre un continuo C' son 0-dimensionales (por ejemplo, puntos), C' será un continuo de una sola dimensión

[57] Aquí Poincaré está describiendo con términos coloquiales un *homeomorfismo*, es decir, un isomorfismo entre espacios topológicos. Se trata de un mapeo que preserva la estructura entre dos estructuras del mismo tipo que se puede revertir mediante un mapeo inverso y que en este caso cumple con lo siguiente: Sean *X* y *Y* espacios topológicos y *f* una función de *X* a *Y*; entonces *f* es un homeomorfismo si se cumple que:

- *f* es una biyección
- *f* es continua
- La inversa de *f* es continua.

(por ejemplo, una línea); si los cortes son 1-dimensionales, C'' será un continuo de dos dimensiones, y así sucesivamente (1905/1907, p. 242). Por tanto, la definición de dimensión se explica *intuitivamente* en términos de corte de un continuo a partir de un continuo de menor dimensión, de tal modo que el continuo de *n* dimensiones es definido como el continuo de *n* -1 dimensiones, en una *definición por recurrencia* (1913/1963, p. 29). Lo anterior se constata al corroborar el tratamiento que "muchos otros matemáticos" han propuesto al tema de modo tal que:

a) Las superficies son consideradas los límites de los sólidos.
b) Las líneas son consideradas los límites de las superficies
c) Los puntos son considerados los límites de las líneas.

Pero Poincaré va aún más allá, pues al parecer esta noción intuitiva de dimensión como corte de un continuo de menor dimensión, subyace incluso en la reinterpretación formal hecha por Hilbert de los axiomas de la geometría euclídea: en concreto en el axioma del orden.

Más allá de sus críticas al programa de Hilbert debido a su extremo formalismo y nula recurrencia a cualquier intuición posible, -intuición en el sentido de apelación a la imaginación, o en todo caso a algún sentido corporal-, características que lo convierten fácilmente en una "colección de proposiciones barrocas y proco comprensibles", Poincaré reitera que los axiomas propuestos por Hilbert son convenciones verdaderamente justificadas -convenciones en el sentido de definiciones disfrazadas según lo expuesto en el apartado 2.4 de este trabajo-, porque son las más acordes con ciertos hechos experimentales que nos son más familiares, desmarcándose así también de posiciones instrumentalistas y nominalistas. Sin embargo, los axiomas del orden, y en concreto el axioma 2, son una excepción.

El axioma dice que "si en cualquier línea, cualquier punto *C* se ubica *entre A* y *B,* y un punto *D entre A* y *C*, el punto *D* estará *entre A y B*". Para Poincaré no se trata solamente de una definición disfrazada de la palabra *entre*, sino más bien de una "auténtica proposición intuitiva", porque su contenido "está conectado con el método del corte de un continuo unidimensional, con la ayuda de cortes formados por puntos infranqueables" (cfr. 1913/1963, p. 43) que se acaba de mencionar.

Ahora bien, si el Axioma del orden no es una definición disfrazada en la que basta su mera consistencia para afirmar su valor de verdad, ¿cuál es la intuición de la que está haciendo uso para justificarse adecuadamente? De acuerdo con Poincaré, las opciones disponibles son:

a) La intuición del espacio en sí mismo[58]
b) La intuición del continuo matemático
c) La intuición del continuo físico general

Considerando lo leído en las obras de Poincaré, la opción a) parece quedar descartada porque la topología nos muestra que hay continuos de más de tres dimensiones, aunque el de carácter tridimensional es aquél del que tenemos una intuición más clara. Por su parte, aunque no excluye explícitamente las opciones b) y c), por lo menos es muy claro que la opción b) queda descartada porque la formación del continuo matemático depende a su vez, al menos para su cabal comprensión, del continuo físico. En cambio, sobre la opción c) no hay claridad, ya que éste depende de una activa operación de la mente que actúa sobre las sensaciones, clasificándolas, por lo que sería a posteriori a ellas. Además, Poincaré afirma que todo lo que cae bajo nuestros sentidos tiene las características del continuo físico (1905/1907, p.44). De ahí que en lugar de ceñirse por b) o por c) Poincaré concluya que existe en nosotros una "noción *intuitiva* del continuo de cualquier número de dimensiones", que de alguna manera nos permite construir tanto el continuo matemático como el continuo físico, y que esta capacidad existe en nosotros, previa a toda experiencia (1913/1963, p. 43-44).

Poincaré se pregunta si este continuo amorfo que el *analysis situs* ha permitido sobrevivir, y en el que debe introducirse la idea intuitiva de dimensión, puede considerarse una forma de nuestra sensibilidad; su pregunta es lanzada con

[58] Es decir, el espacio geométrico tridimensional, donde ubicamos nuestras sensaciones para razonar apropiadamente sobre ellas.

pesar, pues de ser así, la cárcel en la que se haya confinada la sensibilidad, aunque ensanchada, no dejaría nunca de ser una cárcel (Cfr.1905/1907, p. 239). La respuesta, aunque negativa, se expresa con cautela: "si dicho continuo fuese forma de nuestra sensibilidad, seríamos incapaces de siquiera imaginar espacios distintos al euclidiano". Sin embargo, sus *Últimos pensamientos*, publicados póstumamente en 1913, rematan con una sentencia inesperada y diferente:

> Concluiré que hay en todos nosotros una noción intuitiva del continuo de cualquier número de dimensiones del espacio que sea, porque poseemos la capacidad de construir un continuo físico y matemático; y que esta capacidad existe en nosotros *previa a cualquier experiencia* porque, sin ella, la experiencia propiamente hablando, sería imposible, y estaría reducida a las sensaciones duras, inapropiadas para cualquier organización; y porque esta intuición es solamente la conciencia de que poseemos esta facultad. Y aun esta facultad puede ser usada de distintas formas; puede permitirnos construir un espacio de cuatro, así como un espacio de tres dimensiones. Es el mundo exterior, es la experiencia la que nos induce a hacer uso de este en un sentido en lugar de otro. (Poincaré, 1913/1963, p. 44).

Aseveración de la que se desprenden las siguientes conclusiones:

1) Poseemos una noción intuitiva del continuo en general.
2) Esta noción intuitiva consiste en la conciencia de la facultad de construir un continuo físico y matemático de cualquier número de dimensiones.
3) Esta capacidad de construcción de continuos físicos y matemáticos es previa a la experiencia.
4) Sin esta capacidad, la experiencia se reduciría a un cúmulo de sensaciones duras, inapropiadas para cualquier organización.
5) La experiencia es la que nos induce a suponer el número de dimensiones que nos conviene atribuir a determinado continuo.
6) La experiencia también nos induce a suponer cuál es el grupo que le debemos aplicar.

Esta noción intuitiva del continuo de cualquier número de dimensiones no parece identificarse con el espacio sensible o representativo, en tanto que éste solo corresponde a una noción vaga e informal para denominar al cúmulo de sensaciones acompañadas de desplazamientos que permite al sujeto tener una experiencia espacial, pero tampoco al continuo físico, que ya implica una discriminación de sensaciones para considerar solo aquellas que sean adecuadas, a saber, aquellas que sean de la misma clase y cuyos elementos sean indistinguibles unos de otros, formando un todo graduado. En cambio, este continuo es antecedente y posibilitador de la experiencia, y subyace no solo a la geometría (sea euclidiana o no euclidiana) sino más aún a la propia topología o *analysis situs.* A continuación, expondré las razones por las cuáles me parece posible abordar la la intuición de este continuo amorfo en los mismos términos en los que se da la intuición del número puro que Poincaré había restringido en un principio sólo para la Aritmética, no sólo ensanchando sus propiedades, sino identificándolo con la intuición pura del espacio en términos muy similares a los kantianos.

3.3 Intuición pura en topología

Me parece que el punto de encuentro entre ambos tipos de intuición -entre la intuición pura y la intuición del continuo de cualquier número de dimensiones-, así como la clave para hallarlo se encuentra precisamente en la síntesis que hace Michael Friedman entre la interpretación lógico-constructiva y la interpretación fenomenológica de la intuición del espacio de Kant que fue abordada en el primer capítulo de este trabajo. Retomando brevemente esta disputa, recordemos que la interpretación lógica surge como consecuencia de un análisis del tipo de pruebas constructivas que utiliza Euclides con regla y compás en sus *Elementos*. Friedman nota, y con razón, que si se asume que la cuestión concerniente a la naturaleza y el carácter del razonamiento geométrico es previa a la cuestión del origen y la justificación de los axiomas de la geometría, es posible ver que, en el procedimiento de construcción con regla y compás de por lo menos los tres primeros postulados, todos los objetos introducidos son generados iterativamente, ya sea desde un segmento dado o desde un par de puntos, de lo cual se seguiría que, la infinitud del espacio es una característica meramente lógico-formal de la geometría matemática, y el carácter intuitivo, no conceptual del espacio, es una consecuencia de esta misma característica lógico-formal (Friedman, 2000, pp. 186-187). Como resultado, la infinitud del espacio –defendida por Kant como característica esencial- debería ser interpretada en términos de un infinito meramente potencial.

Sin embargo, por lo que ya se dijo en todo el capítulo I, y en particular en 1.6, esta interpretación es incompatible con numerosas aseveraciones y presupuestos de la *Crítica de la razón pura*. Friedman mismo cambia de enfoque al encontrar en la respuesta de Kant a Eberhard una clara y tajante distinción entre un espacio "geométrico"[59] (objetivamente generado, múltiple y potencialmente infinito) y un espacio "metafísico" (subjetivamente originario, único e infinito en acto) como precondición de aquél, y que en el capítulo I fue caracterizado como forma pura de la sensibilidad.

Esta diferencia evidencia que la dimensión constructiva, que está en el fundamento tanto de la aritmética como de la geometría, no implica dejar de lado la intuición "metafísica" del espacio en tanto forma de la intuición pura; un espacio además único e infinito en acto. Pero también resulta significativa porque permite establecer un puente entre Kant y Poincaré, particularmente si se aborda el origen psico-fisiológico del espacio geométrico en términos de la intuición del número puro y su capacidad constructiva. Recordemos que para Poincaré el espacio geométrico se inspira en ciertas acciones, acompañadas de ciertas sensaciones musculares,

[59] "La representación del espacio (junto con la del tiempo) tiene una peculiaridad que no se encuentra en otro concepto, a saber, que todos los espacios son solo *posibles* y pensables como partes de uno y el mismo espacio, de manera que la representación de las partes presupone la representación del todo. Ahora, cuando el geómetra dice que una línea, no importando cuánto haya sido extendida, siempre puede ser extendida todavía más; esto no significa lo mismo que lo que se dice en aritmética respecto de los números que se pueden aumentar siempre e infinitamente mediante la adición de otras unidades o números, porque los números agregados y las magnitudes que se expresan de ese modo son posibles en sí mismos sin necesidad de pertenecer junto con los anteriores como partes de un todo. En cambio, decir que una línea puede ser continuada al infinito significa que el espacio en el que es descrita dicha línea es más grande que cualquier línea que pueda describirse en él. Así, el geómetra basa la posibilidad de su problema –el de incrementar el espacio (del que hay muchos) al infinito –en la representación original de un único, infinito espacio subjetivamente dado. Esto está de acuerdo muy bien con el hecho de que el espacio geométrico y objetivamente dado es siempre *finito*. Porque este último es dado en tanto es generado [*gemacth*]. Decir, sin embargo, que el metafísico, es decir, el original pero meramente subjetivo espacio dado -el cual (dado que no hay muchos) no puede ser llevado bajo ningún concepto capaz de construcción pero que contiene la base de todas las construcciones posibles –es *infinito* significa solamente que este consiste en la forma pura del modo sensible de representación del sujeto como intuición *a priori*. Esto me parece discutible; todavía no entiendo que es el espacio metafísico kantiano. Por tanto, la posibilidad de todos los espacios, que procede al infinito, es dada en el espacio como una representación singular." (AK. 20, pp. 419-21, tomado a su vez de Friedman, 2000, p. 188.)

que definen clases equivalentes llamadas desplazamientos, de modo que cada conjunto de clases de desplazamientos forma un grupo en sentido matemático. Es posible afirmar que la virtud creativa de la aritmética, es decir, la repetición, se hace presente precisamente en esta génesis psico-fisiológica de la geometría, sin la cual no podríamos ser conscientes de la activa operación de la mente para formar un grupo continuo. De este modo, aunque la continuidad sería esa especie de representación primigenia desde la cuál es posible la percepción sensorial, el único modo de acceder a ella sería a través no sólo del movimiento del sujeto, sino de la iteración y posibilidad de repetir ciertos movimientos, lo cual es, según la filosofía de Poincaré, condición de posibilidad para acceder al concepto de grupo, el cual preexiste en nuestra mente, y que sirve para organizarlos geométricamente introduciendo una métrica. De hecho, el uso geométrico de esta lectura de la intuición ya estaría presente –aunque implícitamente- en textos anteriores a sus *Últimos ensayos*, cuando el mismo Poincaré sugiere la importancia de la intuición aritmética –entendida como construcción iterativa- en el razonamiento geométrico, al momento de llevar a cabo la construcción del espacio geométrico, en tanto este tiene su origen en la idealización y concatenación de los desplazamientos que se repiten en el espacio físico una y otra vez. Considérese, por ejemplo, la siguiente cita:

> En el primer capítulo, al discutir la naturaleza del razonamiento matemático, vimos la importancia que debe ser atribuida a la posibilidad de repetir indefinidamente la misma operación. Es de esta repetición que el razonamiento matemático obtiene su poder; es, por tanto, gracias a la ley de la homogeneidad que tiene un control sobre los hechos geométricos" (Poincaré 1902/1905, p.64).

De aquí se sigue que, aunque Poincaré no es claro del todo, el modo en el que yuxtapone en este caso la intuición aritmética y geométrica sugiere una conexión entre el grupo de movimientos de sólidos rígidos en el espacio de curvatura constante y el procedimiento iterativo necesario para la inducción aritmética, que generalizaría lo que previamente se argumentó en el caso de la teoría kantiana de construcción geométrica, específicamente de la geometría de Euclides. En otras palabras, a la condición de movilidad libre del sujeto subyace la intuición pura de la aritmética en la forma de iteración repetitiva, y esto coincidiría a su vez con el origen kinemático del espacio, también presente en Kant y mencionada en el capítulo 1 de este trabajo.

Es así que esta continua iteración permitiría acceder descriptivamente, en un sentido originario, no ya a un espacio físico, sino a un continuo amorfo básico que le subyace y que estaría en la base no sólo de la geometría sino de la topología. De hecho, la necesidad de un continuo amorfo como marco primigenio en el que esta construcción es posible se correspondería con la dimensión fenomenológica y subjetivista de la intuición pura del espacio kantiano, la cual sería accesible precisamente mediante la primera, sin restringirse a ella.

La propuesta de asimilar la intuición del número puro con la intuición pura del espacio se refuerza si se atiende a otra de sus características fundamentales: su unidad. Por lo que se puede leer en *El valor de la ciencia*, si la intuición del número puro capacita para intuir las formas lógicas puras…. permitiendo no solo demostrar -como la lógica- sino inventar -como la intuición -empírica- (cfr. p. 25), es porque se trata de un tipo de intuición capaz de captar el “plano general de un edificio” sin necesidad de recurrir a los sentidos, y en ese sentido es calificada por él como “pura” (p. 25). Siguiendo una tesis de Dunlop sobre este tema, (quien a su vez se encuentra en deuda con Mooij, 1966 y Detlefsen, 1993) el rol de la intuición, tanto en aritmética como en geometría, es la de familiarizarnos con relaciones estructurales u ordenamientos entre elementos, lo cual da unidad a los todos que constituyen (Dunlop, 2017)[60]. Tanto en sus polémicas contra el logicismo, como en la exposición de sus propias opiniones, Poincaré caracteriza la intuición como la comprensión del orden o estructura que nos permite considerar agregados o series como totalidades unificadas. En el capítulo de “Intuición y lógica en Matemáticas” de *El valor de la ciencia* (1905/1907) Poincaré explícitamente identifica la intuición del número puro con el sentido directo de lo que constituye la unidad de una pieza de razonamiento, de lo que conforma, por decirlo así, su alma y su vida más íntima.

[60] Dunlop afirma que la opinión de que el rol distintivo de la intuición es el de representar la unidad es posiblemente común tanto a Poincaré como a Kant y llega a ser sugerido por Hilbert y Brouwer, tesis que antes encuentra en artículo mencionado de Godlove de 2009.

También afirma que esta intuición “le permite a uno percibir de un vistazo el plan general de un edificio lógico” (citado en Dunlop, 2017, p. 94).

Este enfoque de Poincaré, no sólo sería satisfactorio, sino más aún, significativo desde un punto de vista epistemológico y no sólo psicológico, al especificar que la contribución de la intuición sirve para representar la unidad que une diversos elementos dentro de un todo o, dicho de otro modo, familiarizándonos con la organización de un todo. Se distingue pues, de la intuición como sentido e imaginación, en que no tiene el mismo objeto, y llama a juego una facultad del alma completamente diferente (Poincaré, 1905/1907, p, 220). Pero esta “intuición pura” también es algo por completo diferente de la lógica, en tanto que no consiste simplemente en la capacidad para deducir “conclusiones particulares de premisas universales”. La prueba de su diferencia respecto de la intuición empírica -de la sensación y la imaginación- es su propio maestro de matemáticas, Charles Hermite quien, por un lado, fue una de esas “raras mentes que nunca necesitó hacer uso de la intuición sensible” -entiéndase, empírica- y, sin embargo, tampoco puede considerársele como un lógico propiamente dicho, en tanto que “nunca ocultó su aversión a los procedimientos puramente deductivos, que comenzaban de lo general y terminaban en lo particular” (Poincaré, 1905/1907, p 220).

Pienso que, precisamente el análisis de los procesos de razonamiento matemático de Hermite, estimularon a su discípulo a dar una caracterización de esta intuición pura tal, que lo llevan a reconocerle un ámbito de acción mucho más amplio que el de la aritmética. El catalogarla como una facultad que permite ver “el fin desde lejos” posibilitando al explorador elegir la mejor ruta a tomar, y como una facultad que propicia captar la conexión del “todo” más allá de sus partes componentes, dando un sentido coherente y unificado a las reglas que se siguen de acuerdo a la lógica (cfr. Poincaré, 1902/1905, p.25), claramente implica mucho más que la capacidad de repetición iterativa que subyace al principio de inducción matemática, pues supone también una representación con sentido de unidad que justifique la posibilidad de dicha iteración. Me arriesgo a pensar que, de hecho, esta es la razón por la que, en su artículo de 1913, Poincaré extiende el uso de la intuición del número puro, propio de la aritmética y el álgebra, también al *analysis situs* (o topología), donde tiene lugar la “verdadera intuición geométrica”. Reproduzco el pasaje por su importancia:

> Esta simple observación indica el verdadero rol de la intuición geométrica; es con el fin de facilitar esta intuición que el geómetra necesita dibujar figuras o por lo menos formarse imágenes mentales de las mismas. Ahora, si se minimiza la importancia de las propiedades métricas o proyectivas de dichas figuras, si se concentra sólo en sus cualidades puramente cualitativas, es porque solo aquí [en el *analysis situs*] la intuición geométrica juega verdaderamente un rol. No quiero decir con ello que la geometría métrica está basada en la pura lógica o que ninguna verdad intuitiva tenga lugar en ella. Pero se trata de ideas intuitivas de otro tipo, análogas a aquellas que juegan un rol esencial en la aritmética y el álgebra (1913/1963, p. 26-27).

A partir de aquí me parece que hay dos opciones: proponer que Poincaré estaba postulando un cuarto tipo de intuición, especial para la topología, o bien, ensanchar la intuición del número puro de manera que, no solo deba entenderse como repetición iterativa ligada a una prueba constructiva que tiene lugar a priori, sino simultáneamente, como un continuo amorfo cuya unidad juega el papel de la forma pura que hace posible esa repetición, en analogía al modo en que la unidad del espacio posibilitaba la unidad de experiencia y de cualquier representación geométrica en Kant. Me decanto por la segunda opción. Si la intuición del número puro supone tanto la dimensión constructiva propia de la interpretación lógico-constructiva, como la “visión cuasi-fenomenológica” -en tanto que simultáneamente se trata de una especie de percepción primigenia que es capaz de ver el todo que antecede a las partes- propia de la interpretación fenomenológica- entonces, la necesidad de establecer una diferencia con la intuición necesaria para captar el continuo que subyace al *anaylisis situs* se difumina.

La característica más importante que comparte la intuición del número puro con la noción de la intuición del continuo de cualquier número de dimensiones es que ambas no dependen de la experiencia, sino que en cierto modo la preceden. A esta, se puede añadir una segunda. La intuición del número puro, además de ser concebida como capacidad de construcción iterativa, también consiste en la capacidad que permite “ver el todo más allá de sus partes, dando un sentido coherente y unificado a las reglas que se siguen de acuerdo a la lógica (cfr. 1905, p. 22). Aunque breve y general, esto me parece indicativo de que este tipo de intuición, en analogía con la intuición espacial de Kant, permite simultáneamente captar una totalidad más allá de cualquier construcción, y esto tiene sentido si lo llevamos al ámbito de la topología donde, en palabras de Poincaré, las coordenadas del continuo –amorfo- de la que ésta depende como ciencia, no están yuxtapuestas, sino vinculadas entre sí, formando los diversos aspectos de un todo (1913/1963, p. 28) que se estaría presuponiendo como forma de la experiencia. [61]

Esta brecha se cierra aún más si se toma en cuenta que, en *El valor de ciencia,* donde Poincaré introduce por primera vez su clasificación de los sentidos que atribuye a la palabra "intuición", el axioma del orden de Hilbert es propuesto abiertamente como ejemplo de "intuición como apelación a la imaginación" (p. 18), a diferencia del "axioma de las paralelas", que es catalogado como exponente de una definición disfrazada. En *El valor de la ciencia,* Poincaré es enfático en afirmar que la imaginación, de la que depende el mencionado axioma, tiene su origen en la intuición sensible (cfr. 1905/1907, p.24). El paralelismo con Kant se hace posible entonces, si por un momento suponemos que el axioma del orden es precisamente un enunciado producto de la acción determinante de una imaginación no reproductiva, sino productiva en el sentido kantiano, que no ha actuado como receptividad, sino como espontaneidad, llevando a cabo una síntesis determinante de la intuición pura de este continuo. En otras palabras, no parece-descabellado afirmar que el axioma del orden de Hilbert sería expresión de la acción trascendental de la imaginación para determinar, si bien no la intuición de un espacio, sí la intuición de una especie de continuo primigenio, que sería la forma pura de toda sensación[62],

[61] Cabe decir que este paralelismo ya ha sido sugerido por otros autores. Por ejemplo, a juicio de Lorenzo Magnani, aunque la noción de intuición a la que alude Poincaré no parece estar directamente relacionada con la intuición espacial pura de Kant (tal como Torretti parece afirmar en 1978, p. 414, nota a pie de página), el hecho de que la exprese como facultad predecesora de toda experiencia y condición de posibilidad de su conocimiento, hace que el isomorfismo entre ambas resulte incuestionable, incluso desde una perspectiva dinámica mucho más amplia (Magnani, 2001, pp. 113-114); sin embargo, tanto Torreti como Magnani apenas esbozan esta idea sin proporcionar una ulterior justificación.

[62] Es forma pura de la sensación no solo porque la precede y ordena, sino porque Poincaré mismo afirma que "todo lo que cae bajo nuestros sentidos tiene las características del continuo físico" (1905/1907, p. 44).

aunque eso sí, careciendo de cualquier estructura geométrica determinada, siendo el único ejemplo que pervive como caso de juicio sintético *a priori*.

No obstante, este ensanchamiento de la intuición del número puro también debe superar algunos obstáculos para poder identificarse con la intuición “verdaderamente geométrica” necesaria para captar los axiomas del orden. El más importante es la caracterización de la intuición del número como meramente intelectual, en tanto que la intuición de la noción de continuo para la topología tiene una veta de orden más sensible, pues no solo es condición de posibilidad del continuo matemático, sino también del continuo físico y de nuestra propia experiencia del mundo. Esta condición intelectual, además, no permitiría resolver, sino más bien reabrir, el problema de la unidad de la espontaneidad y receptividad que Kant había cerrado precisamente mediante la suposición de una sensibilidad pura (cfr. Heinzman y Stump, 2017) vinculada al entendimiento mediante la imaginación pura.

Con todo, es posible esbozar un ensayo de respuesta si se atiende a ciertas divergencias entre el uso de los términos en Poincaré y Kant. Por ejemplo, considero que la ambivalencia entre intuiciones intelectuales y sensibles se debe a una imprecisión en la recepción de los conceptos básicos de la estructura del sujeto trascendental kantiano por parte de Poincaré, cuya dilucidación bien puede arrojar luz sobre este asunto. Y es que, por lo leído en sus escritos, tal parece que su obstinación temprana en el rechazo al espacio –geométrico- como forma de nuestra sensibilidad, se debe a que, de ser así, sería no solo condición del *conocimiento*, sino más aún, de la *existencia* de los objetos de la experiencia, no siendo posible concebir ninguna idea distinta a dicha posibilidad (1898, p. 3). De ahí que prefiera considerarlo como condición de posibilidad de nuestra capacidad para razonar y comparar sensaciones y, por lo tanto, como una forma del entendimiento, calificándolo en todo caso como una “intuición intelectual”. Más aún, Poincaré afirma que si el espacio -geométrico- fuese la forma pura de nuestra sensibilidad, se convertiría en un marco rígido que no nos permitiría pensar en ninguna otra posibilidad sobre las características del espacio –como, por ejemplo, un espacio de cuatro dimensiones, o un tipo de geometría no-euclidiana, alejada por completo de la intuición empírica-.

Pero si se repara en que, desde la interpretación subjetivista, el espacio en tanto forma pura de la sensibilidad no es condición de posibilidad de la existencia del objeto en sí, sino tan solo condición de posibilidad de la receptividad de la variedad, y por tanto, condición de posibilidad de la experiencia, el rechazo de Poincaré en ese sentido no estaría fundamentado, o por lo menos no en las razones correctas. Tal como afirmé en el capítulo I a propósito del punto de vista denominado "subjetivista", el espacio como forma de nuestra sensibilidad posee un carácter constitutivo en un sentido fenoménico y no en sentido nouménico; es constitutivo de nuestra capacidad para *conocer*, en tanto que sólo podemos *conocer* en sentido riguroso, espacio-temporalmente (en un espacio euclidiano); pero no es constitutivo de la existencia de ningún objeto en sí, ni *excluyente* respecto de nuestra posibilidad de *pensarla* de otra manera. Si fuese una intuición intelectual, sería constitutivo de la existencia del objeto en sí, y en ese sentido, originaria. De otro modo, sería imposible comprender el rechazo de Kant a la posibilidad -para nosotros- de tener intuiciones intelectuales, que sí son plenamente originarias. Desde luego, no quisiera con ello negar que la objeción de Poincaré a Kant estuviera por completo fuera de lugar tan solo por no considerar este detalle, por cuanto que es bien sabido que precisamente una de las principales críticas a Kant es la de su compromiso con la geometría de Euclides, que lo lleva a la suposición de que el espacio solo puede ser determinado de una sola manera. Pero creo que una lectura que por lo menos se atenga a un uso más riguroso de los términos permite señalar detalles interesantes, capaces de suavizar quizá algunas críticas.

3.4 Tridimensionalidad del espacio y convencionalismo subsistente.

El continuo como forma pura de nuestra sensibilidad, apenas serviría para garantizar, por decirlo de alguna manera, una experiencia unificada de la realidad sensible, sin indivisibles. Pero, al carecer de una métrica dada, sería tarea del entendimiento, a través de la imaginación, asignar una. De ahí que ciertamente el convencionalismo de Poincaré pervive tanto en el número de dimensiones que le atribuimos al espacio como en la noción *a priori* de grupo desde la cual organizaremos los diversos desplazamientos para razonar geométricamente sobre la realidad física. Por una parte, el continuo amorfo resulta en sí mismo insuficiente para la geometría pues aún falta encontrar un continuo físico que sea, por así decirlo, equivalente al espacio, de tal forma que a cada punto del espacio le corresponda un elemento de este continuo, y a puntos del espacio muy cercanos unos de otros les corresponda elementos indistinguibles. El espacio tendrá tantas dimensiones cuantas tenga dicho continuo. Para responder esta incógnita, Poincaré revisa la noción de continuo o grupo de desplazamientos explorada en sus dos artículos precedentes; el problema es que el continuo de dichos desplazamientos de los sólidos rígidos (rotación y traslación) no es equivalente al espacio, ya que el primero es sextadimensional [63]. -algo que se sabe por experiencia-, mientras que el espacio solo tiene tres dimensiones: “Este grupo de desplazamientos sin duda está relacionado con el espacio, y el espacio puede ser deducido de éste, pero no es equivalente al espacio en tanto que no tiene el mismo número de dimensiones” (1898, p. 22; 1905/1907, p. 259).

De ahí que Poincaré se vea obligado a buscar en otro lugar la razón que justifique el axioma de la tridimensionalidad del continuo matemático. Dicha fuente de inspiración es tanto física como psico-fisiológica. En lo que concierne a la segunda, tanto en *El valor de la ciencia* como en “¿Por qué el espacio tiene tres dimensiones?” su autor se dedica a hacer un exhaustivo examen sobre la génesis del espacio visual y táctil, llegando a la conclusión de que ambos sugieren cierta tridimensionalidad. Por un lado, la retina es una especie de lienzo bidimensional, pero dado que tenemos dos ojos, el proceso de acomodación o convergencia al objeto visual por la distancia respecto de éste genera la tercera dimensión; en lo que concierne al espacio táctil, aunque en principio solo es bidimensional, al hacer un análisis de los movimientos que se necesita para restablecer ciertas sensaciones, y ver que estos movimientos se remiten a tres coordenadas, es posible

[63] En el grupo euclídeo E^n, es decir, el grupo característico de las isometrías o transformaciones de ese espacio que preservan la distancia euclidiana entre cualquier par de puntos, el número de grados de libertad viene dado por la fórmula $n(n+1)/2$, que da 3 para el caso de $n=2$ (es decir, cuando el grupo es de dimensión 2) o bien 6, cuando al grupo es de dimensión 3.

afirmar que este resulta isomorfo con el visual (cfr. 1905/1907, p 52 y ss; 1913/1963, p. 34 y ss). Es el mismo espacio perceptual el que inclina la balanza hacia la suposición de un espacio con tres dimensiones, sin que ello se derive propiamente de alguna métrica intrínseca a nuestras sensaciones. A esto se suma una razón que califica de física. "Las leyes de la física se expresan en ecuaciones diferenciales, y estas ecuaciones involucran las tres coordenadas de ciertos puntos materiales; y aunque sea posible expresar estas mismas leyes por medio de otras ecuaciones que supongan dos o cuatro coordenadas, incluso asumiendo que dichas leyes mantendrán un paralelismo en sus resultados fenoménicos, el supuesto de la tridimensionalidad es el que les proporciona su forma más simple" (1913/1963, p. 41). De este modo, las sensaciones captadas en la experiencia, aunque no son determinantes, sí son relevantes al momento de detonar nuestra elección entre las características propias del continuo matemático: "En el *anaylsis situs* los experimentos aproximados son suficientes para dar lugar a un teorema riguroso y, por tanto, si se ve que el espacio no puede tener dos o menos de dos dimensiones, ni tampoco cuatro o más de cuatro, podemos estar ciertos de que tiene tres, en tanto que no podría tener dos y medio o tres y medio" (1905/1907, p.41). En todo caso, lo cierto es que mientras la noción de continuidad es de carácter intuitivo, la tridimensionalidad atribuida al espacio tiene un origen convencional inspirado (mas no determinado) por la experiencia física.

Por otra parte, como ya se dijo, el carácter primitivo de la noción de grupo no es abandonada, en tanto que Poincaré afirma que, si dichas ecuaciones diferenciales son capaces de tomar su forma más simple, ello se debe también a la permanencia de un grupo de transformaciones que siempre será isomorfo con el grupo fundamental de la geometría, que es sexta-dimensional : "Porque este grupo juega un importante papel en todos los casos, porque es isomorfo con el grupo de cambios de ejes en el espacio ordinario, y porque está tan estrechamente relacionado a nuestro espacio tridimensional, por estas razones, nuestras ecuaciones asumirán su forma más simple cuando este grupo se imponga de la forma más natural posible, esto es, introduciendo un espacio tridimensional." (1913/1963, p. 42). En todo caso, las pruebas y razonamientos que esboza Poincaré en torno a las pruebas empíricas que nos inducen a suponer que el espacio representativo es más o menos tridimensional se verifican la mayoría de las veces, pero no siempre (1905/1907, p. 271), de ahí que no se pueda aseverar que el espacio es intrínsecamente tridimensional, sino solo que es el más fácil o intuitivo de formar. Sin embargo, la tridimensionalidad es reafirmada por ser isomorfa con el grupo fundamental de transformaciones de dimensión seis, propia del grupo de desplazamientos de los sólidos invariantes. A lo anterior, Poincaré añade que la percepción tridimensional supone una ventaja en la lucha por la supervivencia en un mundo como el nuestro (1913/1963, pp.38-39). De este modo, tenemos que Poincaré insiste en que la tridimensionalidad del espacio es más una convención -guiada, tanto por criterios evolutivo adaptativos, relacionados con la fisiología de nuestros sentidos, como por criterios metodológicos como la simplicidad de las ecuaciones-, que algo que pudiera intuirse *a priori* tal como sostiene Kant pues, de hecho, el *analysis situs* o, mejor dicho, la topología, considera continuos de más de tres dimensiones. Sin embargo, no puede decirse lo mismo sobre la noción de continuo en sí, más allá de su dimensionalidad (Cfr. 1913/1963).

En todo caso, la aportación de esta investigación reside en sugerir que, a la luz de lo analizado en *El valor de la ciencia* pero, sobre todo, por lo dicho en su artículo "¿Por qué el espacio tiene tres dimensiones?" sobre la noción intuitiva del continuo, Poincaré no renuncia completamente a la intuición pura kantiana, necesaria para fundamentar, en algún sentido, por lo menos algunos de los axiomas de la geometría, aunque éste sea reformulada en términos de un continuo *a priori* bajo cuya forma es dada la variedad al entendimiento, sin la cual no podría constituir este conocimiento ya no se diga bajo algún modelo geométrico particular. En este sentido, Heinzmann y Stump tienen razón al afirmar que la libertad para elegir una función geométrica de distancia- una métrica particular–no es resultado de una posición escéptica o una mera adecuación verbal. Los grupos -que se corresponden con el aspecto estructural a partir del cual es reconocido Poincaré en la filosofía contemporánea- no son patrones cuyas posiciones se correspondan con entidades dadas. La génesis de una geometría con una métrica particular no es concebida por Poincaré como la creación de material concreto desde la idea general (un grupo), ni como la creación de una categoría (un grupo) desde lo concreto, sino como el advenimiento de relaciones ligadas a lo concreto en un *análisis estético* de la idea general y desde mi aportación, no solo de la idea general, sino de un continuo *a priori* que a ser determinado mediante la acción sintética de la imaginación. Lo que Poincaré llama "realidad objetiva común a muchos seres pensantes" (Poincaré 1905/1907, p. 14) es exactamente la armonía expresada por las leyes matemáticas, por lo que es posible afirmar que en Poincaré hay un camino de reconciliación entre la sensibilidad estética y la cognición (Stump., 2017) un camino que, en mi opinión, se extiende más allá de las precondiciones desde el punto del entendimiento, para alcanzar también el ámbito de la sensibilidad.

Si en Kant la estructura kinemática del espacio, posible gracias a la acción sintética de la imaginación productiva, puede conciliar la interpretación fenomenológica y la interpretación lógico-constructiva de la naturaleza de la intuición pura del espacio, es posible sugerir en Poincaré una estrategia de conciliación análoga, aunque en términos de un continuo primigenio. Pero, dado que el movimiento que da lugar a la descripción del espacio es un producto de la síntesis figurativa de la imaginación pura, que a su vez depende, no de una deducción cuasi-perceptual del espacio, sino de la unidad e identidad del sujeto y, por lo tanto, de la unidad trascendental de apercepción, para determinar con mayor certeza los alcances del paralelismo entre Kant y Poincaré, sería importante remitir todos los elementos del segundo, con la estructura fundamental del primero, y en particular con este principio, piedra angular de la filosofía trascendental. Un análisis más profundo, que alcance los cimientos más básicos de esta simetría, supera por completo los límites de este trabajo[64].

[64] Los retos a un examen de tal tipo son numerosos, sobre todo si se considera que, desde el punto de vista histórico y como resultado de la revolución en geometría ocurrida en el siglo XIX, la naturaleza de lo *a priori* constitutivo, fue sometido a revisiones profundas. Tenemos el caso por ejemplo de Friedman, quien siguiendo a Coffa, articula una concepción de lo *a priori* que, deudora de las concepciones de Reichenbach de los años 20, y Carnap de 1934, es interpretada como presuposición semántica, esto es, como aquellas condiciones semánticas que condicionan no la verdad, sino la significatividad de cualquier expresión dentro de un marco lingüístico (Cfr. Peláez, 2008: 14); a Alan Richardson, quien piensa que la única manera de hablar de un *a priori* constitutivo de la experiencia, es en un sentido pragmático, en tanto que lo que se constituye son las prácticas científicas, o al mismo Álvaro Peláez, quien en una audaz tesis, intenta identificar el concepto de

CONCLUSIONES

En este trabajo me he dado a la tarea de clarificar las bases sobre las cuáles tanto Kant como Poincaré asentaron los fundamentos de la geometría y su relación con el espacio, considerando el particular papel de la intuición en el desarrollo de dicha ciencia. El objetivo de juzgar la medida en que puede considerarse a Poincaré como heredero de la tradición kantiana en lo que concierne al tema de la intuición, ha supuesto la dificultad de establecer un compromiso previo con una lectura específica de Kant sobre otras posibles en lo que concierne a su filosofía de las matemáticas, y en particular, sobre el papel constitutivo de la estética del sujeto en torno a la fundamentación de la geometría. La similitud más evidente entre ambos autores se sitúa en el interés por solucionar, desde alguna especie de estructura *a priori* del sujeto cognoscente, la oposición entre empirismo y racionalismo. Pero la exposición de cada uno ha sacado a relucir una serie de diferencias sustantivas en lo concerniente a la función tanto de la sensibilidad como del entendimiento, y particularmente en lo que atañe a la posibilidad de una sensibilidad pura.

El propósito de este trabajo fue pues el de evaluar sucintamente hasta qué punto es posible considerar un lugar para la intuición pura en el convencionalismo geométrico de Poincaré para apuntarlo como una posición que puede situarse aun dentro de la tradición kantiana, particularmente en lo que toca al aspecto constitutivo del espacio, en tanto forma pura de la sensibilidad y en tanto fundamento de la geometría.

La pregunta resulta interesante porque a diferencia de Kant, Poincaré había tenido la suerte de presenciar la pequeña revolución que había supuesto la crisis de los fundamentos de las matemáticas acontecida a mediados del siglo XIX, que había

---

grupo de transformaciones que según Poincaré subyace *a priori* en nuestra mente, con la misma unidad sintética de apercepción (Peláez, 2008). En todo caso, la tesis de Álvaro Pelaez quien, tras llevar a cabo un análisis profundo de los textos de Poincaré, y otros neokantianos, llega a la conclusión de que la función sintética básica *a priori* constitutiva del objeto de experiencia, que Kant llamó "originaria unidad sintética de apercepción", encuentra en el concepto de *transformación* y particularmente en el de *grupo de transformaciones,* su formulación exacta. Bien podrían corresponderse con la función cognitiva responsable de la constitución de los objetos de experiencia al exhibir una estructura de objetos permanentes en relaciones también permanentes (p. 232), bien podría permitir una mayor investigación en ese sentido.

puesto en entredicho los postulados de la geometría como juicios sintéticos *a priori,* Dicha revolución, que aún se encontraba en ciernes, no necesariamente implicaba renunciar por completo a todo el idealismo trascendental, pero muchos científicos y filósofos solo estaban dispuestos a aceptarla con una salvedad: la renuncia de la consideración del espacio como forma pura de la sensibilidad que, al ser determinado por la imaginación, podía convertirse en intuición pura determinada. Si el surgimiento de las “geometrías no euclidianas” había puesto en entredicho la clásica imagen kantiana de la ciencia como un conjunto unificado de conocimientos, bien sistematizado, desde el que era posible reconciliar objetividad y subjetividad, me parecía interesante explorar si Poincaré había logrado resolver esta dicotomía, preservando una posición fundante para el sujeto, a la luz de esos descubrimientos.

Así pues, en el primer capítulo se llevó a cabo un análisis del fundamento trascendental de la geometría desarrollado por Kant, para lo cual se hizo un repaso de la relación entre el espacio, entendido como forma pura de la sensibilidad, es decir, como condición de posibilidad del conocimiento de los fenómenos, y su determinación como intuición pura, llevada a cabo mediante la acción trascendental de la imaginación productiva, dominada en última instancia por la unidad sintética de apercepción. Asimismo, se hizo hincapié en la necesidad de remitir todo contenido geométrico a una experiencia posible para poder constituir verdadero conocimiento, tarea que es posible gracias a los Axiomas de la Intuición. Hacia el final del capítulo, se abordó la disputa entre la interpretación lógico-constructiva defendida por E.W. Beth y Hintikka, en contraposición con la interpretación fenomenológica, defendida por Parsons. El camino intermedio asumido por Friedman en este contexto, me sirvió a su vez, para comprender que en Kant los axiomas de la geometría no surgen de manera inmediata de una cuasi-percepción fenomenológica del espacio, sino como descripciones de un espacio en términos de un movimiento puro, como una síntesis sucesiva dominada por la acción trascendental de la imaginación productiva, cuya unidad de representación depende en última instancia de la unidad sintética de apercepción; Para Friedman, esta interpretación kinemática de la estructura del espacio, además de permitir conciliar la perspectiva constructiva con la interpretación fenomenológica, sería el puente de contacto con Poincaré, quien habría reinterpretado la condición de movilidad libre en términos no puros sino empíricos.

En el segundo capítulo, después de llevar a cabo un breve recorrido por algunos de los hitos más importantes de la historia del surgimiento de las geometrías no-euclidianas, me di a la tarea de explicar la piedra de toque del convencionalismo de Poincaré, a saber, la redefinición de los axiomas de la geometría en términos de definiciones disfrazadas que no dependen ya de ninguna intuición *a priori* del espacio con alguna estructura particular, tal como podía deducirse de la filosofía trascendental kantiana. Esto hizo necesario exponer la bifurcación del concepto de "espacio" llevada a cabo por Poincaré, quien distingue por un lado el espacio sensible o perceptual, fundamentalmente kinemático y de origen empírico, como ocasión del descubrimiento, mas no de la justificación, del espacio del geómetra. También se explicó la forma en que ambas nociones se relacionan con los conceptos de continuo físico y continuo matemático. El énfasis de este capítulo viene dado cuando Poincaré, tras argumentar que la génesis del espacio propiamente geométrico depende de la aplicación de un grupo de transformaciones y sus invariantes que preexiste en nuestra mente, al notar que la suposición sobre la tridimensionalidad del continuo del que parte Sophus Lie para su clasificación es antecedente respecto de su misma clasificación de grupos, en dos obras posteriores a saber, *El valor de la ciencia* (1905/1907) y "¿Por qué el espacio tiene tres dimensiones?" (1913/1963), se ve en la necesidad de redefinir qué papel juega la noción de continuo y la noción de tridimensionalidad dentro de la geometría, no sólo en términos de la geometría métrica y proyectiva, sino más aún de la topología, ciencia que caracteriza como una "geometría que solo atiende a las características cualitativas del espacio". Esta redefinición lo lleva a afirmar que, mientras la dimensionalidad y la métrica del espacio sigue siendo convencional en el sentido antes esbozando, ahora "parece conceder la idea de la existencia de un continuo amorfo como una especie de marco primigenio de la génesis de la geometría" (Heinzmann y Nabonnand, 2008), y en particular de la geometría del *analysis situs.* Continuo que es intuido con anterioridad al mismo continuo físico y matemático, y en el que puede ser concebida su dimensionalidad, gracias a la intuición del axioma del orden de Hilbert, el cual también se capta intuitivamente.

En el tercer capítulo me enfoqué en argumentar la hipótesis central de este trabajo, según la cual es posible establecer una relación de semejanza entre esta intuición primigenia de la noción de continuo -y, por lo tanto, presumiblemente *a priori*- con el espacio kantiano en tanto intuición pura y en tanto forma pura de la sensibilidad. Para defenderla, me remití a la noción poincareana de intuición del número puro, cuya función, en principio está restringida al principio de inducción matemática y, por lo tanto, a la aritmética, donde de acuerdo con Poincaré, sí son posibles los juicios sintéticos *a priori.* La propuesta se logra mediante la estrategia de ensanchar la intuición del número puro, atendiendo tanto a su función constructiva, como a su capacidad de previsualización comprehensiva y unitaria, para poder subsumir bajo su definición la intuición de la noción de continuo, necesaria para el *analysis situs* o topología.

La intuición sensible del espacio, como forma pura de la experiencia, no solo es para Kant, condición de posibilidad de la geometría -euclidiana- sino de la constitución misma de la experiencia ordinaria. Como he buscado demostrar en este trabajo, esta idea tiene una continuación en Poincaré, en términos de la intuición de un continuo “amorfo”, que estaría *a priori* dispuesto, presumiblemente en la sensibilidad como facultad del psiquismo, como condición de posibilidad, al menos, de cualquier geometría métrica y proyectiva de curvatura constante, así como con una función constitutiva de la experiencia, en tanto que, sin ésta, solo tendríamos un cúmulo inconexo de sensaciones

Por tanto, el convencionalismo de Poincaré no alcanza a todos los axiomas de la geometría, de manera que por lo menos uno, los Axiomas del Orden de Hilbert, parecen mantener su estatus como juicios sintéticos *a priori*. Si en Kant la intuición pura, pero de orden sensible, posee, junto al entendimiento, un papel fundamental para el conocimiento matemático, Poincaré puede llamarse con toda legitimidad, heredero de dicho proyecto, abrazando tanto las ventajas como desventajas que supone su distancia del formalismo en ciernes de Hilbert, en tanto que no solo es la intuición empírica, sino también una forma de intuición pura, la que permite sostener una especie de principio de continuidad, anterior a la experiencia, y desde el cual es posible construir, tanto el continuo físico como el continuo matemático, base del espacio geométrico, de cualquier número de dimensiones. Aunque en Poincaré hay una disociación entre sensibilidad, espacio y geometría, que no es propia de Kant, la brecha abierta no implica una ruptura absoluta con la posibilidad de una intuición pura a la base de por lo menos uno de los axiomas de la geometría, por lo que es posible afirmar que Poincaré es continuador de Kant en un sentido mucho más amplio del que podemos imaginar, y que puede llevar a una revisión mucho más provechosa de los límites y alcances de su propio convencionalismo.

REFERENCIAS

Alexander, Daniel C. et.al. (2013). *Geometría*. Cengage Learning: México.

Ben-Menahem, Y. (2006). *Conventionalism.* Cambridge: Cambridge University Press.

Black, M. (1942). “Conventionalism in geometry and the interpretation of necessary statements”. *Philosophy of Science* 9, 335-349.

Bonola, R. (1912). *Non-euclidean Geometry*. *A Critical and Historical Study of its Development*. Chicago: The Open Court Publishing Company.

Brugger, W. (2000). *Diccionario de filosofía.* Herder: México.

Carnap, R. (1958). “Introductory Remarks to the English Edition” (pp. v-vii). En Reichenbach, H. *The Philosophy of Space and Time*. New York: Dover Publications.

Cassirer, E (1944). “The Concept of Group and the Theory of Perception”. *Philosophy and Phenomenological Research*, Vol. 1 n. 1. Sept. 1944, 1-36.

Caygill, H. (2000). *A Kant Dictionary*. Blackwell Publishers: Oxford.

Coffa, A. (1991). *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: to the Vienna Station.* Cambridge: Cambridge University Press.

Coxeter, H.S.M et.al. (1998). *Non-Euclidean Geometry* (6a ed.). Washington: The Mathematical Association of America.

De Gortari, E. (1984). *Henri Poincaré. Filosofía de la ciencia.* México: UNAM, Dirección General de Publicaciones (año de publicación del libro original; 1964).

Dunlop, K. (2017). “Poincaré on the Foundations of Arithmetic and Geometry. Part 2: Intuition and Unity in Mathematics”. *HOPOS (The Journal for the International Society for the History and Philosophy of Science)*, 7(1), 88-107.

Euclides. (1982). *Elementos*. Madrid: Gredos.

Ferrater Mora, J. (1983). *Diccionario de filosofía abreviado*. Buenos Aires: Sudamericana.

Ferreirós, J. (2000). *Riemanniana selecta.* Estudio introductorio. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Friedman, M. (1985). “Kant’s theory of Geometry”. *The philosophical review,* vol. 94, n. 4, 455-506.

------------------ (1992). *Kant and the exact sciences.* Cambridge: Cambridge Harvard University Press.

------------------ (2000). “Geometry, Construction and Intuition in Kant and His Successors”. En *Between Logic and Intuition. Essays in honor of Charles Parsons.* Cambridge: Cambridge University Press.

----------------- (2013). *Kant’s Construction of Nature*: *A Reading of the Metaphysical Foundations of Natural Science*: Cambridge University Press.

Giedymin, J. (1982). *Science and Convention. Essays on Henri Poincaré´s Philosophy of Science and the Conventionalist Tradition.* Oxford: Pergamon Press.

Ghosh, P., y Deguchi, K. (2008). *Mathematics of Shape Description: A Morphological Approach to Image Processing and Computer Graphics*. Singapur: John Wiley & Sons, Incorporated.

Godlove, T. (2009). “Poincaré, Kant and the Scope of Mathematical Intuition”. *The Review of Metaphysics*, vol. 62, n. 4 (jun 2009), pp. 779-801.

Gray, J. (1992). *Ideas de espacio.* Madrid: Biblioteca Mondadori.

Guerrero Pino, G. (2005). “Geometrías pura y aplicada desde el enfoque sintáctico-axiomático de las teorías”. *Eidos, Revista de Filosofía de la Universidad del Norte,* 3, Julio, 60-82.

Guyer, P. (1987). *Kant and the Claims of Knowledge.* Cambridge: Cambridge University Press.

Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics*. *Vol. 1 From Thales to Euclid.* New York: Dover.

Heinzmann, G., Nabonnand, P. (2008). “Poincaré, Intuitionism, Intuition and Convention” (pp. 163-177). En *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007)*. *The Cerisy Conference.* v. Atten, M., Boldini, P., Bordeau, M., & Heinzmann, G (eds). Basel: Birkhäuser. Publications des Archives Henri-Poincaré, 978-3-7643-8652-8. ff10.1007/978-3-7643-8653-5_11ff. ffhal-01083141f.

Heinzmann, G., Stump, D. (2017). "Henri Poincaré". *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2017 Edition). Edward N. Zalta (ed.). Recuperado el 30 de abril de 2017 de URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/poincare/>.

Hilbert, David (2009), *Foundations of Geometry*. Townsend, E.J. (trad.). Charleston, south carolina: Biblio Bazaar.(libro publicado originalmente en 1900).

Hintikka, J. (1992a). "Kant's on the Mathematical Method" (pp. 21-42). En *Kant's Philosophy of Mathematics.* Carl J. Posy (ed.). Dordrecht: Kluwer Academic.

--------------- (1992b). "Kant's Transcendental Method and his Theory of Mathematics" (pp. 341-359). En *Kant's Philosophy of Mathematics.* Carl J. Posy (ed.). Dordrecht: Kluwer Academic.

Horwich, P. (2000). "Stipulation, Meaning and Apriority". En *New Essays on the A priori*. Boghossian, P.A. & Peacocke, C. (eds). Oxford: Clarendon.

Janiak, A. (2016). "Kant's Views on Space and Time". *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition). Edward N. Zalta (ed.). Recuperado en febrero de 2017 de URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/kant-spacetime/>.

Kant, I. (2003). *Crítica de la Razón Pura.* Madrid: Alfaguara.

--------------- (1999). *Prolegómenos a toda metafísica futura que haya de presentarse como ciencia.* Madrid: Istmo.

Magnani, L. (2001). *Philosophy and Geometry. Theoretical and Historical Issues.* Dordrecht: Kluwer Academic.

Parsons, C. (1992). "The Trascendental Aesthetic" (pp. 3-62). En *The Cambridge Companion to Kant*. New York: Cambridge University.

Peláez Cédres, Á. (2008). *Lo* a priori *constitutivo. Historia y prospectiva.* Barcelona: Anthropos-UAM.

Piñeiro, G.E. (2013). *Cantor. El infinito en matemáticas.* Navarra: National Geographic.

Poincaré, H. (1898). “On the Foundations of Geometry” [Sobre los fundamentos de la geometría]. *The Monist*, 9, 1-43.

--------------- (1899). “Des fondaments de la géometrie: a propos d’un libre de M. Russell”. *Revue de Métaphysique et de Morale,* T. 7, No. 3, Mayo, pp. 251-279.

--------------- (1905). *Science and Hypothesis* [Ciencia e hipótesis]. (W.J.G. trad.). New York: The Walter Scott Publishing CO. (Obra original publicada en 1902).

--------------- (1907). *The Value of Science* [El valor de la ciencia] (Halsted, G.B. trad.). New York: The Science Press. (Obra original publicada en 1905)

--------------- (1952). *Science and Method* [Ciencia y método]. (Maitland, F., trad.). New York: Dover. (Obra original publicada en 1908).

--------------- (1963). “Why space has three dimensions?” [¿por qué el espacio tiene tres dimensiones?]. En *Mathematics and Science: Last Essays* (J.W. Bolduc, trad.). New York: Dover Publications. (Obra original publicada en 1913).

--------------- (2009). *Papers on Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements* (J. Stillwell, trad.). Rhode Island: American Mathematical Society – London Mathematical Society.

Popper, K. (2004). *La lógica de la investigación científica.* Madrid: Tecnos.

Prauss, G. (1976). “Kant und das Problem der Dinge an sich” *Zeitschrift für Philosophische Forschung* 30 (3), pp. 487-490.

Rosenfeld, B.A. (1988). *A History of Non Euclidean Geometry. Evolution of a Geometric Space*, Nueva York: Springer Verlag.

Russell, B. (1904). “Non-Euclidean Geometry”. *Athenaeum,* no.4018, 592-3.

Shabel, L. (2016). "Kant's Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), Recuperado en octubre de 2019 de URL =

<https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/kant-mathematics/>.

Schlick, M. (1974). *General Theory of Knowledge*. Nueva York: Springer Verlag.

Torretti, R. (1978). *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré.* Dordrecht: D. Reidel.

--------------- (1983). *Relativity and Geometry*. Oxford: Pergamon Press.

Trudeau, R. (1986). *The Non-Euclidean Revolution*. Birkhäuser: Boston.

Vega, L. (1982). "Introducción general". En Euclides, *Elementos* (p.7-184). Madrid: Gredos.

Zahar, E. (2001). *Poincaré's Philosophy. From Conventionalist to Phenomenology*. Chicago: Open Court, Chicago.

Encyclopediaofmath.org/Erlangen program, consultada en diciembre de 2020.