



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Haces principales, conexiones y teorías de Yang Mills

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Andrew Shaw Legarreta

TUTOR:

M. en C. Sergio Iker Martínez Juárez

Ciudad Universitaria, CDMX, 2021





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Grupos y Álgebras de Lie	4
1.1. Álgebras de Lie	6
1.1.1. El álgebra de Lie de un grupo de Lie	7
1.2. Morfismos de grupos y álgebras de Lie	9
1.3. La función exponencial	11
1.4. Representaciones de álgebras y grupos de Lie	14
1.4.1. Levantamiento de representaciones	16
1.5. Representaciones de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$	17
1.5.1. La representación de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ en dimensión 1	18
1.5.2. La representación de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ en dimensión 2	18
1.5.3. La representación de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ en dimensión 3	19
1.6. El grupo de Lorentz $O(1, 3)$	19
1.6.1. $SL(2, \mathbb{C})$ es una doble cubierta de $SO(1, 3)^\uparrow$	23
1.6.2. Representaciones de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$	24
1.6.3. La representación $(0, 0)$	26
1.6.4. La representación $(\frac{1}{2}, 0)$	26
1.6.5. La representación $(0, \frac{1}{2})$	27
1.6.6. La representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	27
1.6.7. La representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$	28
1.6.8. Una representación de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ en dimensión infinita	29
1.7. Grupos de Lie compactos como subgrupos de algún grupo unitario	30
1.7.1. Un producto interno en $Lie(U(N))$ invariante bajo la representación adjunta	31
1.8. La forma de Maurer Cartan	32
2. Haces Principales	33
2.1. Pullback de haces principales	38
2.2. Haces asociados	39
3. Conexiones	43
3.1. Conexiones en haces principales	43
3.2. Formas horizontales y formas básicas	46
3.3. El espacio de conexiones	48

3.4.	Representantes locales de la conexión	48
3.5.	Levantamientos horizontales y transporte paralelo	51
3.5.1.	Levantamiento horizontal en haces asociados	53
3.6.	Derivada covariante en haces vectoriales inducida por una conexión en su haz de marcos	53
3.7.	La curvatura de una conexión	58
3.8.	Holonomía	60
3.8.1.	Curvatura como holonomía infinitesimal	63
3.9.	Derivada Covariante Exterior	63
3.9.1.	La identidad de Bianchi	64
3.10.	Transformaciones Gauge	66
3.11.	La acción de \mathcal{G} sobre el espacio de conexiones	67
4.	Teorías de Yang-Mills	68
4.1.	¿Qué es una teoría de Yang-Mills?	68
4.1.1.	Electrodinámica cuántica	68
4.2.	Conexiones planas y el efecto de Ahanorov-Bohm	72
4.2.1.	El efecto de Ahanorov-Bohm	73
4.3.	Definición rigurosa de teoría de Yang-Mills	75
4.4.	La ecuación de Yang Mills	76
4.4.1.	El operador $*$ de Hodge para formas con valores en haces vectoriales	76
4.4.2.	El funcional de Yang Mills	76
4.5.	Teorías de Yang Mills no abelianas y la ecuación de Yang Mills con cargas externas.	79
4.6.	Instantones	81
4.7.	Instantones en el espacio de Minkowski	82
4.8.	Levantamiento de haces principales	83
4.9.	Cohomología de Chern	84
4.9.1.	Estructuras Spin	86
4.9.2.	El haz de espinores de Dirac	87
4.10.	La ecuación de Dirac en un espacio tiempo curvo	87
	Apéndices	91
A.	Teoría de Hodge	91
A.0.1.	El dual de Hodge en el espacio de Minkowski	92
B.	Los Lagrangianos de las teorías libres de la naturaleza	93
B.0.1.	El lagrangiano de Klein-Gordon	93
B.0.2.	El lagrangiano de Proca	94
B.0.3.	El lagrangiano de Dirac	95
C.	El segundo teorema de Lie y levantamiento de representaciones	97
D.	Homotopía y pullback de haces.	99

Introducción

En el último siglo ha habido un cambio de paradigma en las matemáticas usadas para describir la física teórica. Antes, las matemáticas utilizadas eran principalmente herramientas del análisis matemático que nos permitían hacer cálculos en coordenadas locales. Después de esta transición, la geometría tomó un papel central, lo que permitió formular las teorías físicas de una forma libre de coordenadas. Por ejemplo, en la mecánica clásica, debido al principio de relatividad Galileana, tenemos que la posición y velocidad de un cierto objeto sólo están definidos de forma relativa después de escoger un marco inercial (sistema de coordenadas). Por lo tanto, podemos pensar que la velocidad y la posición de un cierto objeto no son algo intrínseco a este, sino algo que surge al escoger un sistema de coordenadas locales y realizar una medición. Lo mismo es cierto para el electromagnetismo de Maxwell. En éste se tiene que sólo se puede definir de forma relativa al campo eléctrico y magnético, ya que al cambiar de sistema de coordenadas, lo que era un campo eléctrico se puede ver cómo un campo magnético y viceversa.

Sólo fue hasta la teoría de la relatividad general de Einstein que apareció el lenguaje de variedades y de la geometría en la física. Al usar este lenguaje geométrico se eliminó la ambigüedad que existía en la definición de los objetos, ya que todos los objetos usados en esta teoría se construyen a partir del espacio tiempo M , de tal manera que no dependen de la elección de un sistema de coordenadas.

En este trabajo intentaremos describir las bases geométricas requeridas para formular la idea de una teoría de Yang Mills. Éstas han tenido un papel fundamental en la física ya que son la base matemática del modelo estándar de la física de partículas. También han tenido fuertes aplicaciones matemáticas y, por ejemplo, fueron usadas por Simon Donaldson para demostrar que \mathbb{R}^4 admite una cantidad infinita de estructuras diferenciales. Este teorema le hizo ganador de una medalla Fields en 1986.

De fundamental importancia para poder describir a estas teorías son las ideas de grupo de Lie, haz y conexión. Al estudio de las conexiones en un haz principal se le suele llamar teoría gauge y el estudio matemático de esto se le atribuye a Cartan y al francés Charles Ehresmann. Es interesante mencionar que en 1954 Yang y Mills publicaron un famoso artículo de física de partículas en el cual utilizaban implícitamente estas ideas matemáticas sin tener una formulación precisa de estas. Esto se debe a que en esa época existía poca comunicación entre la comunidad física y matemática y fue hasta tiempo después que los físicos se dieron cuenta que llevaban años estudiando lo que los

matemáticos ya habían descubierto tiempo atrás.

En los primeros 3 capítulos de este trabajo estudiaremos las matemáticas requeridas para poder definir de forma rigurosa lo que es una teoría de Yang Mills. En el último capítulo describiremos muy brevemente algunas aplicaciones físicas y matemáticas de estas.

Aunque nos hubiese gustado lograr describir como el modelo estándar de la física de partículas se puede formular en este lenguaje, esto no nos fue posible por cuestiones de tiempo y por la longitud que hubiese adquirido este trabajo. Sin embargo, no quisimos presentarlo sin describir una aplicación física interesante de las teorías de Yang Mills. El ejemplo principal que damos en el último capítulo es el de la electrodinámica cuántica y aunque este ejemplo no ilustra el poder total de las teorías de Yang Mills en la física, esperamos que al menos dé una muestra significativa de esto.

Desde el punto de vista matemático el principal objetivo de este trabajo es desarrollar la teoría de haces y conexiones en estos. Por otro lado también intentamos describir como la teoría de representaciones del grupo de Lorentz nos puede ayudar a construir ciertos objetos de interés físico (espinores) que usaremos para ejemplificar a las teorías de Yang-Mills.

Notas y convenciones

En este trabajo supondremos que el lector está familiarizado con ciertas ideas de la física teórica y que tiene conocimientos básicos de geometría diferencial. Además usaremos durante todo este trabajo la notación de Einstein para facilitar el manejo de expresiones con índices.

Por una función suave nos referiremos a una función C^∞ . Algo que es importante mencionar es que en ciertas demostraciones dentro de este trabajo no hemos puesto principal interés en demostrar las cuestiones relacionadas con la suavidad a todo detalle. No es porque hayamos considerado que estos detalles no son importantes si no porque el describir estos con toda precisión nos hubiera desviado bastante del principal interés de este trabajo el cual es describir las cuestiones geométricas de las teorías de Yang Mills.

En el capítulo uno definimos un espinor en términos de una cierta representación del grupo de Lorentz $SO(1, 3)$. Esto no es la forma más general de definirlo y debido a esto nos hubiera gustado poder definir más generalmente lo que es un espinor. Sin embargo, esto nos hubiera llevado hacia las álgebras de Clifford lo cual ameritaría un trabajo extenso por si mismo.

Capítulo 1

Grupos y Álgebras de Lie

En este capítulo daremos una introducción general a los grupos y álgebras de Lie. El objetivo es introducir el lenguaje que utilizaremos cuando estudiemos conexiones y teorías de Yang- Mills. Un grupo de Lie de particular importancia para nosotros será el grupo de Lorentz $SL(2, \mathbb{C})$ y es por esto que dedicaremos una gran parte de este capítulo al estudio de este grupo y sus representaciones. Como veremos, el grupo de Lorentz actúa naturalmente sobre cuatrivectores en el espacio tiempo pero también actúa sobre objetos de interés físico llamados espinores, esto nos permitirá poder definir un espinor de Dirac, lo cual será de fundamental importancia para nosotros.

Un grupo de Lie consta de un grupo G con una estructura diferenciable en la cual las siguientes operaciones son suaves :

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \\ inv : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

La suavidad de estas operaciones es respecto a la estructura diferenciable de G y la estructura diferenciable de $G \times G$ dada por el producto de cartas y funciones de transición del atlas de G .

Definamos

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto gx \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} R_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto xg \end{aligned}$$

a las cuales llamaremos traslaciones izquierdas y derechas respectivamente.

L_g y R_g son invertibles y sus inversas están dadas por $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ y $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$

Debido a la suavidad de las operaciones de G y al hecho de que L_g y R_g son invertibles podemos concluir que para cada $g \in G$ tanto L_g como R_g son difeomorfismos de G y por lo tanto tenemos una familia de difeomorfismos indexada por los elementos de G .

Ejemplos:

1. Sea V un espacio vectorial sobre los reales. V tiene una estructura diferenciable canónica y es un grupo aditivo. Se puede demostrar fácilmente que m e inv son suaves.
2. Sea $M_n(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices de $n \times n$ con entradas en los reales. $M_n(\mathbb{R})$ es canónicamente isomorfo como espacio vectorial a \mathbb{R}^{n^2} . Se puede demostrar fácilmente que m e inv son funciones suaves. Donde $m(A, B) = A + B$ e $inv(A) = -A$.

3. Sea

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$$

$GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo bajo las operaciones $m(A, B) = AB$ (multiplicación de matrices), $inv(A) = A^{-1} = \frac{adA}{\det A}$.

Consideremos la función

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det A \end{aligned}$$

Esta función es continua y $\mathbb{R} \setminus 0$ es abierto en \mathbb{R} por lo que $f^{-1}[\mathbb{R} \setminus 0] = GL(n, \mathbb{R})$ es abierto en $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, y por lo tanto $GL(n, \mathbb{R})$ es una sub-variedad diferenciable de $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Si se considera la estructura diferenciable de $GL(n, \mathbb{R})$ como la de sub-variedad diferenciable de $M_n(\mathbb{R})$ se tiene que m e inv son suaves ya que son funciones polinomiales y por lo tanto $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

4. Análogamente tenemos el grupo de Lie

$$GL(n, \mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) | \det A \neq 0\}$$

llamado el grupo general lineal complejo.

El siguiente teorema no lo demostraremos y su demostración se puede encontrar en (16)

Teorema 1.1 (Del subgrupo cerrado). *Si G es un grupo de Lie y H es un subgrupo cerrado de G , entonces H es un grupo de Lie (donde la topología de H es la de subespacio) y H es una subvariedad encajada de G .*

Una clase importante de grupos de Lie son los grupos lineales.

Definición 1.1. Un grupo lineal es un subgrupo cerrado de $GL(n, \mathbb{R})$

Observación 1.1. Se puede definir análogamente los grupos lineales complejos.

A partir del teorema del subgrupo cerrado se generan fácilmente los siguientes grupos lineales:

- El grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | AA^t = I\}$
- El grupo especial lineal $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | \det A = 1\}$
- El grupo especial ortogonal $SO(n) = SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n)$
- El grupo unitario $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) | AA^* = I\}$
- El grupo especial unitario $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$

Observación 1.2. Una matriz de $n \times n$ tiene n^2 grados de libertad. Los vectores columna de una matriz en $O(n, \mathbb{R})$ son de norma uno y ortogonales entre si. La condición de ser de norma uno nos proporciona n restricciones. La condición de que el segundo vector columna sea ortogonal al primero nos da una restricción más, mientras que la condición de que el tercero sea ortogonal al segundo y al primero nos da 2 restricciones. Procediendo recursivamente podemos concluir que la condición de que los vectores columna sean ortogonales entre si nos da $\frac{n(n-1)}{2}$ restricciones y por lo tanto el número de grados de libertad de una matriz en $O(n, \mathbb{R})$ es $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$. Dicho de otra forma la dimensión de $O(n, \mathbb{R})$ es $\frac{n(n-1)}{2}$. De forma completamente análoga se deduce que $\dim(U(n)) = n^2$.

1.1. Álgebras de Lie

Definición 1.2. Un álgebra de Lie (real) L es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} que cuenta con una operación binaria

$$[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$$

llamada corchete de Lie, que cumple:

1. $[\cdot, \cdot]$ es bilineal
2. $[x, y] = -[y, x]$ (antisimetría)
3. $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$ (identidad de Jacobi)

Ejemplos:

1. Cualquier espacio vectorial V con el corchete de Lie

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$$

$$(v_1, v_2) \mapsto 0$$

(normalmente llamada el álgebra de Lie trivial)

2. Cualquier álgebra asociativa A con el corchete de Lie

$$[\cdot, \cdot] : A \times A \rightarrow A$$

$$(a, b) \mapsto ab - ba$$

3. Los campos vectoriales suaves como una variedad M con el corchete de Lie dado por el conmutador de campos vectoriales.
4. Si V es un álgebra de Lie y $U \subset V$ es un subespacio vectorial decimos que U es una subálgebra de Lie si $[u_i, u_j] \in U$ para toda $u_i, u_j \in U$. Cualquier subálgebra de Lie es también un álgebra de Lie.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita y consideramos una base $\{T_i\}_{i \in I}$ de esta. Para todo $i, j \in I$ tenemos que $[T_i, T_j] \in \mathfrak{g}$ y por lo tanto $[T_i, T_j]$ es una combinación lineal de los elementos de esta base, es decir

$$[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k$$

A los elementos de la forma f_{ij}^k les llamaremos las constantes de estructura de \mathfrak{g} en la base dada por $\{T_i\}_{i \in I}$. Es fácil ver que si \mathfrak{g} y \mathfrak{h} son álgebras de Lie de la misma dimensión y con las mismas constantes de estructura entonces estas 2 álgebras son isomorfas. La definición de isomorfismo entre álgebras de Lie se puede encontrar en la página 20.

1.1.1. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

Todos los campos vectoriales suaves de una variedad M son un álgebra de Lie (bajo el conmutador de campos vectoriales) usualmente nombrada $\chi(M)$. Debido a la naturalidad del corchete de Lie se deduce de inmediato que si tenemos un conjunto D de difeomorfismos de M , los campos vectoriales suaves invariantes bajo estos difeomorfismos forman una subálgebra de Lie de $\chi(M)$. Tomando $M = G$ y D como el conjunto de traslaciones izquierdas obtenemos el álgebra de Lie $Lie(G)$ de todos los campos invariantes bajo traslaciones izquierdas. A estos campos los llamaremos campos invariantes por la izquierda.

Si $X \in Lie(G)$ la invarianza de X bajo traslaciones izquierdas la podemos expresar de la siguiente manera

$$(L_g)_*(X_h) = X_{gh} \quad \forall g \in G$$

Si $X \in Lie(G)$ entonces $X_g = (L_g)_*(X_e)$ es decir, un campo invariante por la izquierda queda totalmente determinado por su valor en el neutro del grupo por lo que la función lineal

$$\begin{aligned} Lie(G) &\rightarrow T_e G \\ X &\mapsto X_e \end{aligned}$$

es inyectiva, más aún esta función es biyectiva ya que si $A \in T_e G$ podemos definir un campo invariante por la izquierda L^A como

$$L_g^A := (L_g)_*(A)$$

este campo es invariante por la izquierda por construcción. Ahora veremos que este campo es suave. Si $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ y $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow G$ es una curva suave tal que $\gamma'(0) = A$ entonces tenemos que

$$(L_g^A(f)) = ((L_g)_*(A))f = A(f \circ L_g) = \gamma'(0)(f \circ L_g) = \frac{d}{dt}(f \circ L_g \circ \gamma)_{t=0}$$

Si definimos $h : [-\epsilon, \epsilon] \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(t, g) := f \circ L_g \circ \gamma(t) = f(g(\gamma(t)))$$

tenemos que $(L^A(f))_g = \frac{\partial h}{\partial t}(0, g)$ y por lo tanto $(L^A(f))_g$ es una función suave de g . Como esto es cierto para cualquier $f \in C^\infty(G)$ podemos concluir que L^A es un campo suave. En resumen tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2. *La función lineal*

$$\begin{aligned} \text{Lie}(G) &\rightarrow T_e G \\ X &\mapsto X_e \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Podemos usar el corchete de Lie de campos vectoriales para definir un corchete de Lie en $T_e G$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] &: T_e G \times T_e G \rightarrow T_e G \\ (A, B) &\mapsto [L^A, L^B]_e \end{aligned}$$

Esto le da a $T_e G$ una estructura de álgebra de Lie canónicamente isomorfa a $\text{Lie}(G)$.

Teorema 1.3. *Si G es un grupo lineal, entonces para toda $A, B \in \text{Lie}(G)$ se tiene que:*

$$[A, B] = AB - BA$$

Demostración. Debido a que $GL(n, \mathbb{R})$ es un subconjunto abierto de $M_n(\mathbb{R})$ que contiene a I , tenemos que $T_I(GL(n, \mathbb{R})) = T_I(M_n(\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. En $M_n(\mathbb{R}) = T_I(GL(n, \mathbb{R}))$ tenemos coordenadas globales dadas por $x_j^i = A_j^i$. Usando la definición del pushforward es fácil ver que para toda $g \in G$ $(X^A(x_j^i))_g = (X^A)_I(x_j^i \circ L_g)$. Por otro lado $(x_j^i \circ L_g)(h) = x_j^i(gh) = g_k^i h_k^j = g_k^i x_j^k(h)$ y como esto es cierto para toda $h \in G$ se sigue que $x_j^i \circ L_g = g_k^i x_j^k$.

Ahora, $(X^A)_I(x_j^i) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x_j^i(I + tA)) = A_j^i$.

En consecuencia de las observaciones anteriores tenemos que $(X^A)_I(x_j^i \circ L_g) = (X^A)(g_k^i x_j^k) = g_k^i A_j^k = x_k^i(g) A_j^k$.

Con base en lo anterior se calcula el corchete de Lie de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [A, B]_{ij} &= [X^A, X^B]_I(x_j^i) \\ &= (X^A X^B(x_j^i) - X^B X^A(x_j^i))_I \\ &= (X^A(B_j^k x_k^i) - X^B(A_j^k x_k^i))_I \\ &= (B_j^k A_k^l x_l^i - A_j^k B_k^l x_l^i)_I \\ &= (\delta_l^i B_j^k A_k^l - \delta_l^i A_j^k B_k^l) \\ &= (B_j^k A_k^i - A_j^k B_k^i) \\ &= (AB - BA)_{ij} \end{aligned}$$

por lo que $[A, B] = AB - BA$. ■

Ejemplo 1.1. Consideremos el grupo $O(n, \mathbb{R})$ y una trayectoria $A(t)$ en este, tal que $A(0) = e$. Debido a que $\forall t$ tenemos que $A(t)A(t)^T = I$ podemos concluir que

$$\frac{d}{dt}A(t)A(t)^T = A'(t)A(t)^T + A(t)A'(t)^T = 0$$

$A(0) = I$ y por lo tanto para $t = 0$ esta ecuación toma la forma

$$A'(0) + A'(0)^T = 0$$

En consecuencia de esto podemos concluir que el álgebra de Lie de $O(n, \mathbb{R})$ es un subconjunto de las matrices antisimétricas de $n \times n$. Es fácil ver que las matrices antisimétricas de $n \times n$ forman un espacio vectorial de dimensión $\frac{n(n-1)}{2} = \dim(O(n, \mathbb{R}))$ y por lo tanto tenemos que

$$\text{Lie}(O(n, \mathbb{R})) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) : A + A^T = 0\}$$

Observación 1.3. Usando que $A(0) = e$ y que \det es una función continua podemos concluir que $\forall t, A(t) \in SO(n, \mathbb{R})$. Por lo tanto $\text{Lie}(SO(n, \mathbb{R})) = \text{Lie}(O(n, \mathbb{R}))$.

De particular importancia para nosotros será $SO(3, \mathbb{R})$. Una base usual del álgebra de Lie de este está dada por

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde J_i es la derivada en $t = 0$ de una rotación por $t\theta$ alrededor del eje x_i . Por último notemos que estas matrices satisfacen la siguiente relación de conmutación.

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}^k J_k$$

Ejemplo 1.2. Consideremos el grupo $U(n)$ de forma completamente análoga al ejemplo anterior podemos concluir que

$$\text{Lie}(U(n)) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) : A + A^\dagger = 0\}$$

1.2. Morfismos de grupos y álgebras de Lie

Definición 1.3. Los grupos de Lie cuentan con una doble estructura, por un lado son variedades suaves y por otro lado son grupos. Resulta natural definir un isomorfismo de grupos de Lie como una función ϕ de un grupo de Lie G a un grupo de Lie H que cumple:

1. ϕ es homomorfismo de grupos
2. ϕ es suave.

Si \mathfrak{g} y \mathfrak{h} son álgebras de Lie, una función $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie si:

1. τ es lineal.
2. $\tau[x, y] = [\tau(x), \tau(y)] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Teorema 1.4. Si $\phi : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces $\phi_* : T_e G \rightarrow T_e H$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Demostración. Debido a que ϕ es un homomorfismo de grupos, tenemos que para toda $gg' \in G$ $\phi(gg') = \phi(g)\phi(g')$ y por lo tanto $\phi \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi$.

Si $A \in T_e G$ entonces

$$\begin{aligned} \phi_*(L_g^A) &= \phi_* L_{g*}(A) = (\phi \circ L_g)_* A = (L_{\phi(g)} \circ \phi)_* A \\ &= (L_{\phi(g)})_* \phi_*(A) = L_{\phi(g)}^{\phi_* A} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi_*[A, A'] &= \phi_*[L^A, L^{A'}]_e = [\phi_* L^A, \phi_* L^{A'}]_{\phi(e)} \\ &= [\phi_* L^A, \phi_* L^{A'}]_e \end{aligned}$$

ya que ϕ es un homomorfismo

$$= [L_e^{\phi_* A}, L_e^{\phi_* A'}] = [\phi_* A, \phi_* A']$$

■

Definición 1.4. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de G . Decimos que H es un subgrupo de Lie si:

1. H es un grupo de Lie.
2. La inclusión $i : H \rightarrow G$ es una inmersión.

Como un corolario inmediato del teorema anterior tenemos que si H es un subgrupo de Lie de G entonces $Lie(H)$ es una subálgebra de Lie de $Lie(G)$.

Teorema 1.5. Si G es un grupo de Lie y \mathfrak{h} es una subálgebra de Lie de $Lie(G)$, entonces existe un subgrupo $H \subset G$ cuya álgebra de Lie es \mathfrak{h} .

Demostración. Consideremos a la distribución $\mathfrak{D} \subset TG$ dada por $\mathfrak{D}_G := (L_g)_*(\mathfrak{h}), \forall g \in G$ y a los campos invariantes por la izquierda $X_1 \cdots X_r$ que generan a \mathfrak{D} . Debido a que \mathfrak{h} es una subálgebra de Lie de $Lie(G)$, tenemos que

$$[X_i, X_j] \in \mathfrak{D}$$

Por lo que si aplicamos el teorema de Frobenius, podemos construir a la hoja H máxima de la foliación que pasa por la identidad del grupo. La cual es una subvariedad inmersa y conexa de G .

Para demostrar que H es un subgrupo de G , consideremos a $h_1, h_2 \in H$. Debido a la definición de \mathfrak{D} , $h_1 H$ también es una hoja de la foliación y $h_1 h_2 \in h_1 H$. Sin embargo, el hecho de que $h_1 e = h_1$ implica que h_1 , vive tanto en H como en $h_1 H$ y debido a la maximalidad de H podemos concluir que $H = h_1 H$. Por lo tanto, $h_1 h_2 \in H$ es decir H es cerrado bajo productos.

La demostración de que H es cerrado bajo inversos es completamente análoga.

■

1.3. La función exponencial

Definición 1.5. Sea X un campo vectorial suave en una variedad M . Una curva suave $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ es una curva integral de X por un punto x al tiempo t_0 si $\gamma(t_0) = x$ y $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ para todo $t \in (a, b)$.

Definición 1.6. Una curva integral γ es maximal si cualquier curva integral que pase por un punto de la imagen de γ es la restricción de γ a un subintervalo. Un campo vectorial es completo si cualquier curva integral maximal está definida para todo $t \in (-\infty, \infty)$.

Lema 1.1. Si X es un campo vectorial invariante por la izquierda en un grupo de Lie G y $\gamma(a, b) \rightarrow G$ es una curva integral entonces $\hat{\gamma}(t) := g\gamma(t)$ es una curva integral para toda $t \in (a, b)$ y $g \in G$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\hat{\gamma}(t) &= \frac{d}{dt}(g\gamma(t)) \\
 &= \frac{d}{dt}L_g(\gamma(t)) \\
 &= (L_g)_*\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right) \\
 &= (L_g)_*X_{\gamma(t)} \\
 &= X_{g\gamma(t)} \quad (\text{ya que } X \text{ es invariante por la izquierda}) \\
 &= X_{\hat{\gamma}(t)}
 \end{aligned}$$

por lo que $\hat{\gamma}(t)$ es una curva integral. ■

Lema 1.2. Sea X un campo invariante por la izquierda en un grupo de Lie G y γ_X la curva integral maximal tal que $\gamma_X(0) = e$ entonces $\gamma_X(s)\gamma_X(t) = \gamma_X(s+t)$ para toda $s, t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Consideremos la curva: $t \rightarrow \gamma_X(s)\gamma_X(t)$ y la curva: $t \rightarrow \gamma_X(s+t)$. Estas dos curvas son curvas integrales de X (con la misma condición inicial). El teorema de existencia y unicidad nos garantiza que estas dos curvas coinciden. ■

Teorema 1.6. *Todo campo vectorial invariante por la izquierda es completo.*

Demostración. Sea X un campo vectorial invariante por la izquierda. Supongamos que γ_X sólo está definida en un intervalo (a, b) finito. Debido a esto se tiene que $\gamma_X(s)\gamma_X(t)$ pensada como una función de t está definida en (a, b) , pero $\gamma_X(s+t)$ está definida en $(a-s, b-s)$. Si tomamos a s positivo, este contradice la minimalidad de a y tomando a s negativo contradice la maximalidad de b . Por lo tanto $(a, b) = (-\infty, \infty)$. ■

Observación 1.4. La propiedad $\gamma_X(s+t) = \gamma_X(s)\gamma_X(t)$ implica que la función $\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

Definición 1.7. A la única curva integral $\gamma^{L^A} : \mathbb{R} \rightarrow G$ del campo vectorial invariante con la izquierda L^A con condición inicial $\gamma^{L^A}(0) = e$ la escribiremos como $\gamma^{L^A}(t) := \exp(tA)$.

Definición 1.8. La función exponencial $\exp : T_e G \rightarrow G$ está definida por $A \mapsto \exp(tA)|_{t=1}$.

Definición 1.9. Un subgrupo uniparamétrico de un grupo de Lie G es un homomorfismo suave del grupo aditivo de los reales a G .

Teorema 1.7. Si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ es un subgrupo uniparamétrico de G y $A = \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)|_0$. Entonces $\gamma(t) = \exp(tA)$.

Demostración. $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ es un subgrupo uniparamétrico de G . Debido a esto $\gamma(0) = e$ y $\gamma(L_s(t)) = \gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t) = L_{\gamma(s)}\gamma(t)$ por lo que $\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \gamma_* \circ (L_s)_*\left(\frac{d}{dt}\right)|_0 = (L_{\gamma(s)})_* \circ (\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right))|_0 = (L_{\gamma(s)})_* A = L_{\gamma(s)}^A$. Por lo tanto la curva $t \rightarrow \gamma(t)$ es una curva integral de L^A con condición inicial $\gamma(0) = e$. Debido a la unicidad de estas curvas podemos concluir que $\gamma(t) = \exp(tA)$. ■

Teorema 1.8. (Propiedades de la función exponencial)

1. $\exp(s+t)A = \exp(sA)\exp(tA)$
2. $\exp_* : T_0(\text{Lie}(G)) \rightarrow T_e G$ es la función identidad (usando el isomorfismo canónico que existe entre $T_0 \text{Lie}(G)$ y $T_e G$).
3. Si $F : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie entonces: $F \circ \exp_G = \exp_H \circ F_*$
4. Existe una vecindad V de $e_n \in T_e G$ tal que $\exp|_V \rightarrow \exp(V)$ es un difeomorfismo

Demostración.

1. Se sigue del Lema 1.2
2. Si A es un elemento arbitrario de $\text{Lie}(G)$ y $\gamma(t) := tA$ entonces $\gamma'(0) = A$ y $\exp_*(A) = \exp_*(\gamma'(0)) = (\gamma \circ \exp)'|_0 = (\exp(tA))'|_0 = A$
3. La curva

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \mathbb{R} &\rightarrow H \\ t &\mapsto F(\exp_G(tA)) \end{aligned}$$

es un subgrupo uniparamétrico de G (ya que es la composición de 2 homomorfismos de grupos de Lie). Si se define

$$\begin{aligned} \gamma_2 : \mathbb{R} &\rightarrow H \\ t &\mapsto \exp_H(F_*A) \end{aligned}$$

γ_2 también es un subgrupo uniparamétrico de G . Por lo que si demostramos que $\gamma_2'(0) = \gamma_1'(0)$ podemos concluir que $\gamma_2 = \gamma_1$.

$$\gamma_1'(0) = F(\exp(tA))'|_0 = F_*(A) = \gamma_2'(0)$$

4. Esto se demuestra de inmediato a partir del inciso (2) y del teorema de la función inversa. ■

Corolario 1.1. Si H es un subgrupo de Lie de G entonces $\exp_H = (\exp_G)|_H$.

Demostración. Si $i : H \rightarrow G$ es la inclusión canónica, por el inciso 3 del teorema anterior se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_H & \xrightarrow{i_*} & T_e G \\ \exp_H \downarrow & & \downarrow \exp_G \\ H & \xrightarrow{i} & G \end{array}$$

y por lo tanto $\exp_H(tA) = \exp_G(tA)$. ■

Corolario 1.2. Si H es un subgrupo de Lie de G entonces $Lie(H) = \{A \in Lie(G) : \exp_G(tA) \in H \ \forall t \in \mathbb{R}\}$

Demostración. Si $A \in Lie(H)$ entonces $\exp_G(tA) = \exp_H(tA) \in H$. Por el contrario, si $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exp(tA) \in H$ entonces es fácil ver que $A = \frac{d}{dt} \exp(tA)|_{t=0} \in Lie(H)$. ■

Ejemplo 1.3. Si $A \in T_e G = M_n(\mathbb{R})$ y

$$\gamma(t) = \exp(tA)$$

entonces

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (L_{\gamma(t)})_* \gamma'(0) \\ &= L_{\gamma(t)} \gamma'(0) \\ &= \gamma(t) \gamma'(0) \\ &= \gamma(t) A \end{aligned}$$

La función $e^{At} := I_n + \sum_{i=1}^n \frac{(tA)^i}{i!}$ satisface esta ecuación diferencial. Y por lo tanto, si aplicamos el teorema de existencia y unicidad de EDO, obtenemos que $\exp_{GL(n, \mathbb{R})}(A) = e^A$.

Observación 1.5. Esto mismo es cierto para todos los grupos lineales debido al corolario 1.1.

Como un ejemplo de esto calcularemos el álgebra de Lie de $SL(n, \mathbb{R})$. Pero antes necesitamos el siguiente Lema.

Lema 1.3. La exponencial de una matriz satisface la identidad: $\det(e^A) = e^{tr(A)}$

Debido al corolario anterior, se tiene que $Lie(SL(n, \mathbb{R})) = \{A \in Lie(GL(n, \mathbb{R})) : e^A \in SL(n, \mathbb{R})\}$. Si $e^A \in SL(n, \mathbb{R})$ entonces $e^{tr(A)} = 1$ y por lo tanto $tr(A) = 0$. Si $tr(A) = 0$ entonces $\det(e^A) = e^{tr(A)} = 1$ y por lo tanto $e^A \in SL(n, \mathbb{R})$.

En resumen tenemos en siguiente teorema

Teorema 1.9. El álgebra de Lie de $SL(n, \mathbb{R})$ está dada por $\{A \in M_n(\mathbb{R}) | tr(A) = 0\}$.

Ejemplo 1.4. Debido al lema anterior podemos concluir que el álgebra de Lie de $SU(2)$ es precisamente el subconjunto de las $A \in Lie(SU(2))$ tal que $\exp(A) \in SU(2)$. Usando que los elementos

de $SU(2)$ tienen determinante uno podemos concluir que la traza de A es cero. En consecuencia de esto y del hecho que $Lie(U(2)) = \{A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) : A + A^\dagger = 0\}$ tenemos que

$$Lie(SU(2)) = \{A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) : A + A^\dagger = 0, tra(A) = 0\}$$

Una base usual de $Lie(SU(2))$ está dada por

$$J_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que se satisface la siguientes relación de conmutación

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}^k J_k$$

Estas son precisamente las relaciones de conmutación de $Lie(SO(3))$ y por lo tanto $Lie(SU(2))$ y $Lie(SO(3))$ tienen las mismas constantes de estructura. A partir de esto se demuestra inmediatamente que

Teorema 1.10.

$$Lie(SU(2)) \cong Lie(SO(3))$$

Observación 1.6. En textos de física se suele interpretar a los elementos de $T_e G$ como generadores infinitesimales de los elementos de G . Por ejemplo si $G = SO(3)$ y

$$J_1 = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\text{sen}(t) & 0 \\ \text{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces para θ lo suficientemente pequeño podemos expresar a la rotación por θ alrededor del eje z como $R_\theta^z = \exp(\theta J_1)$ y por lo tanto decimos que J_1 es el generador infinitesimal de las rotaciones alrededor del eje de las z .

1.4. Representaciones de álgebras y grupos de Lie

Hasta ahora hemos considerado un grupo de Lie como un ente abstracto definido por su estructura de grupo y de variedad suave. En la física y en la geometría usualmente estamos interesados en la forma en la que este grupo actúa sobre ciertos espacios. Por ejemplo, el grupo de Lie $SO(3, \mathbb{R})$ se puede definir de forma abstracta como el conjunto de matrices de 3×3 con entradas reales que satisfacen $AA^t = I$. Sin embargo para fines geométricos resulta más natural pensar a los elementos de $SO(3)$ como rotaciones de \mathbb{R}^3 . En la física un grupo de especial interés es el grupo $SO(1, 3)^\uparrow$ el cual definiremos más adelante y veremos como este actúa naturalmente en \mathbb{R}^4 como el conjunto de transformaciones de Lorentz. En ciertas ocasiones un grupo se define inicialmente mediante su acción en un cierto espacio, por ejemplo es usual pensar al grupo $GL(n, \mathbb{R})$ como el grupo de transformaciones lineales invertibles de \mathbb{R}^n , en este caso llamaremos a la representación inicial la

representación definitoria, aunque es importante recordar que al olvidarnos de la representación original y abstrayendo las propiedades de grupo, este podría actuar en otros espacios distintos.

Definición 1.10. Una representación de un grupo de Lie G en un espacio vectorial V es un homomorfismo ρ de grupos de Lie $\rho : G \rightarrow GL(V)$.

Observación 1.7. Representamos a $g \in G$ con la función lineal $\rho(g) : V \rightarrow V$.

Ejemplo 1.5. La representación adjunta $Ad : G \rightarrow GL(Lie(G))$ está definida por

$$(Ad(g))(v) := (C_g)_*(v) \quad \forall v \in Lie(G)$$

Teorema 1.11. Si G es un grupo lineal entonces

$$(Ad(g))(v) := gvg^{-1} \quad \forall v \in Lie(G)$$

Demostración. $(Ad(g))(v) = \frac{d}{dt}(g \exp(tv)g^{-1})|_{t=0} = \frac{d}{dt}(g(I + tv + o(t)^2)g^{-1})|_{t=0} = gvg^{-1}$ ■

Una clase importante de representaciones son las representaciones irreducibles

Definición 1.11. Decimos que una representación $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es irreducible si no existe un subespacio no trivial $W \subset V$ tal que ρ restringida a W sea una representación. Esto es equivalente a que no exista un subespacio $W \subset V$ con la propiedad de que $\forall g \in G$ $(\rho(g))(W) = W$.

Observación 1.8. Las representaciones irreducibles son de fundamental importancia ya que es fácil demostrar que cualquier representación en dimensión finita es suma directa de representaciones irreducibles. Si ρ_1, ρ_2 son representaciones de G en V_1, V_2 respectivamente, definimos la suma directa de estas

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow V_1 \oplus V_2$$

como

$$(\rho_1 \oplus \rho_2(g))(V_1, V_2) := (\rho_1(g))(V_1) \oplus (\rho_2(g))(V_2)$$

Definición 1.12. Una representación de un álgebra de Lie g en un espacio vectorial V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : g \rightarrow Lie(GL(V))$

Observación 1.9. Debido al teorema 1.4 tenemos que si $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es una representación de grupos de Lie, entonces $\rho_* : Lie(G) \rightarrow Lie(GL(V))$ es una representación de álgebras de Lie.

Observación 1.10. La definición de representación irreducible para álgebras de Lie es totalmente análoga a la definición para grupos de Lie.

Ejemplo 1.6. La representación adjunta de Lie está definida por

$$\begin{aligned} ad : Lie(G) &\rightarrow Lie(GL(Lie(G))) \\ X &\rightarrow (Ad_*)_e(X) \end{aligned}$$

Teorema 1.12. Si G es un grupo lineal entonces $ad(X)Y = [X, Y]$

Demostración. Sea $X, Y \in T_e(G)$ y $\gamma(t)$ una curva en G tal que $\gamma'(0) = X$. Debido a la definición de ad tenemos que

$$ad(X)Y = \frac{d}{dt} Ad_{\gamma(t)} Y|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\gamma(t)Y\gamma(t)^{-1})|_{t=0} = \gamma'(0)Y\gamma(0)^{-1} + \gamma(0)Y\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)^{-1}\right)|_{t=0}$$

Para un grupo lineal es fácil ver que

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)^{-1} = -\gamma(t)^{-1}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)\gamma(t)^{-1}$$

En consecuencia de esto tenemos que

$$ad(X)Y = \gamma'(0)Y\gamma(0)^{-1} + \gamma(0)Y\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)^{-1}\right)|_{t=0} = \gamma'(0)Y\gamma(0)^{-1} + \gamma(0)Y(-\gamma(0)^{-1}\gamma'(0)\gamma(0)^{-1}) = XY - YX$$

■

La naturalidad de \exp nos da los siguientes 2 diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} Lie(G) & \xrightarrow{Ad(g)} & Lie(G) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{C_g} & G \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Lie(G) & \xrightarrow{ad} & Lie(GL(Lie(G))) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{Ad} & GL(Lie(G)) \end{array}$$

Esto se ve reflejado en el siguiente resultado

Teorema 1.13.

1. $\forall X \in T_e G \quad g \exp(X) g^{-1} = \exp(Ad(g)X)$
2. $Ad(\exp(tX)) = \exp(t ad(X)).$

1.4.1. Levantamiento de representaciones

Una pregunta que puede resultar natural es si es posible generar una representación de un grupo de Lie G a partir de una representación $\rho : Lie(G) \rightarrow Lie(GL(V))$. En primera instancia podríamos intentar definir $\hat{\rho} : G \rightarrow GL(V)$ como

$$\hat{\rho}(\exp(At)) := \exp(\rho(At))$$

Sin embargo esto no es posible ya que \exp no es necesariamente suprayectiva, más aun inclusive en casos donde $\exp : Lie(G) \rightarrow G$ sea suprayectiva podrían existir elementos distintos A_1, A_2 tales que $\exp(A_1) = \exp(A_2)$ y por lo tanto esta supuesta representación podría ser multivaluada si $\rho(A_1)$ es

distinto a $\rho(A_2)$. El siguiente teorema nos dice cuando en efecto podemos levantar una representación de $Lie(G)$ a una representación de G . La demostración se puede encontrar en el apéndice C.

Teorema 1.14. *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo. Si $\rho : Lie(G) \rightarrow Lie(GL(V))$ es una representación entonces ρ es de la forma*

$$(\rho(X))(V) = \frac{d}{dt} \hat{\rho}(\exp(tX))(V)|_{t=0}$$

donde $\hat{\rho} : G \rightarrow GL(V)$ es una representación de G . En particular si tomamos una vecindad pequeña $U_e \subset G$ en la cual $\exp^{-1} : U \rightarrow T_e G$ está definida y escribimos a $g \in U_e$ como $g := \exp(At)$ entonces

$$\hat{\rho}(g) = \exp(\rho(At))$$

1.5. Representaciones de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$

En esta sección describiremos un proceso que nos permite construir distintas representaciones de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$. Supongamos que tenemos una representación irreducible $\rho : Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y consideremos la base $\{J_i\}$ de $Lie(SU(2))$ que describimos en el ejemplo 1.4.

Definamos $J_+, J_- \in Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ como:

$$J_+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(J_2 - iJ_1)$$

$$J_- := \frac{1}{\sqrt{2}}(-J_2 - iJ_1)$$

Computando directamente podemos ver que estos elementos satisfacen la siguiente relación

$$[J_3, J_{\pm}] = \pm iJ_{\pm}$$

$$[J_+, J_-] = iJ_3$$

Supongamos que v es un eigenvector de $\rho(J_3)$ con eigenvalor λ y notemos que

$$\begin{aligned} \rho(J_3 J_{\pm})(v) &= \rho((J_{\pm} J_3 + [J_3, J_{\pm}])(v)) \\ &= \rho(J_{\pm} J_3 + iJ_{\pm})(v) = (\lambda \pm i)\rho(J_{\pm} v) \end{aligned}$$

Debido a esto podemos concluir que $(\rho(J_{\pm}))(v)$ es de nuevo un eigenvalor de $\rho(J_3)$ con eigenvalor $\lambda \pm i$.

Observación 1.11. A J_{\pm} se le suelen llamar operador de ascenso y descenso, respectivamente.

Debido a que ρ es una representación en dimensión finita podemos concluir que existe un eigenvector v_{max} con la propiedad de que $\rho(J_+)(v_{max}) = 0$. Escribamos al eigenvalor λ asociado a v_{max} como $\lambda := ij$. Si se analiza detalladamente como actúa $\rho(J_-)$ en v_{max} se puede demostrar que (ver página 80 de (12))

$$\rho(J_-^k)(v_{max}) = \alpha_{j-k} v_{j-k}$$

donde

$$\alpha_{j-k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(2j - (k-1))k}$$

y v_{j-k} es un eigenvector unitario de $\rho(J_3)$ con eigenvalor $i(j-k)$. Debido a esto tenemos que después de $2j$ pasos habremos llegado a un eigenvector v_{min} con la propiedad de que $\rho(J_-)v_{min} = 0$. Consideremos al conjunto $\{v_{min}, v_{min+1}, \dots, v_{max}\}$ y notemos que podemos expresar a J_1, J_2 como combinación lineal de J_+ y J_- . Por lo tanto tenemos que el espacio vectorial generado por los elementos de este conjunto es un subespacio invariante de \mathbb{C}^n bajo la representación ρ , usando que ρ es una representación irreducible podemos concluir que este subespacio es todo \mathbb{C}^n y por lo tanto tenemos que $\{v_{min}, v_{min+1}, \dots, v_{max}\}$ forma una base de \mathbb{C}^n . Esto implica que para cualquier representación irreducible $\rho : Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ tenemos que los eigenvectores de $\rho(J_3)$ forman una base de \mathbb{C}^n y los eigenvalores asociados a estos están dados por $-ij, -ij+i, \dots, ij-i, ij$. No es difícil convencerse de que esto último sólo es posible si j es un entero positivo o un número racional de la forma $\frac{p}{2}$, $p \in \mathbb{N}$. A continuación describiremos algunas representaciones de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$.

1.5.1. La representación de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ en dimensión 1

El valor más chico que puede tomar j es 0 y en este caso nuestra representación ρ actúa en un espacio vectorial V de dimensión $2j+1 = 1$. En este caso la representación es trivial ya que las únicas matrices de 1×1 que satisfacen la relación de conmutación de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ son idénticamente 0.

1.5.2. La representación de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ en dimensión 2

El siguiente valor más chico que puede tomar j es $\frac{1}{2}$. En este caso V tiene dimensión 2 y los eigenvalores de $\rho(J_3)$ son $-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}$. Por lo tanto si tomamos la base de V dada por los eigenvectores $v_{-\frac{i}{2}}, v_{\frac{i}{2}}$ de $\rho(J_3)$ podemos representar a $\rho(J_3)$ como

$$\rho(J_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} i \sigma_3$$

Donde σ_k es la k -ésima matriz de Pauli. Usando los operadores de ascenso y descenso podemos escribir a J_1, J_2 como

$$J_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}(J_- + J_+)$$

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_+ - J_-)$$

Esto implica que

$$(\rho(J_1))(v_{\frac{i}{2}}) = \frac{i}{\sqrt{2}}((\rho(J_-))(v_{\frac{i}{2}}) + (\rho(J_+))(v_{\frac{i}{2}})) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\rho(J_-))(v_{\frac{i}{2}})) = \frac{i}{2}v_{-\frac{i}{2}}$$

Donde para deducir esta igualdad usamos que $\rho(J_+)v_{\frac{i}{2}} = 0$. De forma similar podemos ver que $(\rho(J_1))(v_{-\frac{i}{2}}) = \frac{i}{2}v_{\frac{i}{2}}$. Debido a esto tenemos que la matriz asociada a la transformación lineal $\rho(J_1)$

en la base $\{v_{\frac{i}{2}}, v_{-\frac{i}{2}}\}$ está dada por

$$\rho(J_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} i \sigma_1$$

De forma completamente análoga obtenemos que

$$\rho(J_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} i \sigma_2$$

1.5.3. La representación de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ en dimensión 3

Siguiendo exactamente el mismo procedimiento que en la sección anterior podemos concluir que

$$\rho(J_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(J_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(J_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.6. El grupo de Lorentz $O(1, 3)$

Definamos el grupo de Lorentz $O(1, 3)$ como el conjunto de todas las transformaciones lineales de \mathbb{R}^4 que actúan como isometrías bajo la pseudo-métrica η definida por

$$\eta = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

Observación 1.12. A \mathbb{R}^4 equipado con esta pseudo-métrica se le suele llamar el espacio de Minkowski.

La condición de que una transformación Λ actúe por isometrías está dada por

$$x^\mu \eta_{\nu\mu} x^\nu = (x^\mu \Lambda_\nu^\sigma) \eta_{\sigma\rho} (\Lambda_\mu^\rho x^\mu)$$

Debido a que esto es cierto para cualquier x^ν podemos concluir que

$$\Lambda_\nu^\sigma \eta_{\sigma\rho} \Lambda_\mu^\rho = \eta_{\nu\mu}$$

O en forma matricial

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$$

Observación 1.13. Usando el teorema del subgrupo cerrado y la ecuación anterior es fácil ver que $SO(1, 3)$ es un grupo de Lie.

Si tomamos el determinante de los 2 lados de la igualdad anterior y usamos que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ obtenemos

$$\det(\Lambda) \det(\eta) \det(\Lambda) = \det(\eta)$$

Esto implica que $(\det(\Lambda))^2 = 1$ y por lo tanto tenemos que

$$\det(\Lambda) = \pm 1$$

Por otro lado, notemos que

$$\Lambda_0^\sigma \eta_{\sigma\rho} \Lambda_0^\rho = \eta_{00} = -1$$

y que debido a esto podemos concluir que

$$\Lambda_0^0 = \pm \sqrt{1 + \sum_i (\Lambda_0^i)^2}$$

Esto nos permite dividir al grupo de Lorentz en 4 componentes dependiendo del signo de esta ecuación y del determinante de Λ .

Observación 1.14. La condición de que $\det(\Lambda)$ sea positivo nos dice que Λ preserva la orientación espacial mientras que la condición de que $\Lambda_0^0 > 0$ nos dice que Λ preserva la dirección del tiempo, es decir el signo del componente temporal de cualquier vector $x \in \mathbb{R}^4$. En primera instancia, la condición de que $\Lambda_0^0 > 0$ no parece ser una condición suficiente para que una transformación de Lorentz preserve la dirección en el tiempo ya que el componente temporal de un cuatrivector $x' := \Lambda x$ está dado por $x'^0 = \Lambda_0^0 x^0 + \Lambda_1^0 x^1 + \Lambda_2^0 x^2 + \Lambda_3^0 x^3$ y por lo tanto parece ser que el hecho de que Λ_0^0 sea positivo no garantiza que Λ preserve el signo de el componente temporal de x . En el siguiente resultado demostraremos que en efecto esta condición es suficiente, antes de poder enunciar este teorema requerimos las siguientes definiciones.

Definición 1.13. Definamos el cono de luz $C \subset \mathbb{R}^4$ como el conjunto de vectores $x \in \mathbb{R}^4$ tales que $\eta(x, x) = 0$. Al conjunto de vectores x en C que satisfacen $\eta(x, e_1) > 0$ lo escribiremos como C^+ y le llamaremos el cono de luz al futuro. Análogamente al conjunto de vectores $x \in C$ tales que $\eta(x, e_1) < 0$ lo escribiremos como C^- y le llamaremos el cono de luz al pasado.

Observación 1.15. El cono de luz tiene dos componentes conexos y estos están dados por C^+ y C^- .

Definición 1.14. Decimos que $x \in \mathbb{R}^4$ es un vector tipo tiempo si $\eta(x, x) < 0$, si $\eta(x, x) > 0$ decimos que x es un vector tipo espacio, si $\eta(x, x) = 0$ decimos que x es un vector nulo. Si $x^0 > 0$ decimos que x es un vector con orientación al futuro, si $x^0 < 0$ decimos que x es un vector con orientación al pasado.

Lema 1.4. Toda transformación de Lorentz Λ mapea a un vector temporal x a otro vector temporal $\Lambda(x)$.

Demostración. Esto se sigue de inmediato de que toda transformación de Lorentz preserva a la norma de Minkowski. ■

Teorema 1.15. Una transformación de Lorentz Λ preserva la dirección en el tiempo si y sólo si $\Lambda_0^0 > 0$.

Demostración. Supongamos que $\Lambda_0^0 > 0$ y escribamos a Λ como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a & b^t \\ c & R \end{bmatrix}$$

donde $a = \Lambda_0^0$ es un número real, b y c son vectores columnas reales de longitud tres y R es una matriz real de 3×3 . Consideremos un elemento $x \in \mathbb{R}^4$ temporal y orientado al futuro y escribamos a este como $x = (t, x_3)$ donde t es un número real x_3 es un vector real de longitud tres. Si definimos x' como $x' := \Lambda x := (t', x'_3)$ entonces para demostrar que Λ preserva la dirección del tiempo debemos demostrar que $t' = at + \langle b, x_3 \rangle > 0$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno canónico en \mathbb{R}^3 . Para demostrar esto notemos que debido a que x es un vector temporal orientado al futuro tenemos que $|x_3| < t$, por otro lado notemos que $\langle b, b \rangle = a^2 - 1$. Usando estos dos hechos obtenemos la siguiente desigualdad

$$-2\langle \frac{b}{a}, \frac{x_3}{t} \rangle \leq \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{t}\right)^2 \leq \frac{a^2 - 1}{a^2} + 1 < 2$$

Usando esta desigualdad se deduce inmediatamente que $t' = at + \langle b, x_3 \rangle > 0$ y por lo tanto usando esto y el lema anterior podemos concluir que si x es un vector temporal orientado al futuro entonces $x' = \Lambda x$ también lo será. De forma completamente análoga se demuestra que Λ preserva la dirección del tiempo en todos los casos sin importar si x es temporal, espacial, nulo, orientado al futuro o orientado al pasado. Por el contrario supongamos que Λ preserva la dirección del tiempo y consideremos un elemento $v \in \mathbb{R}^4$ de la forma $x = (1, x_3)$ donde $x_3 \in \mathbb{R}^3$ es un vector unitario y ortogonal a b . Notemos que esto junto con el hecho de que toda transformación de Lorentz mapea el cono de luz en sí mismo nos permite concluir que $x' := \Lambda(x) \in C^+$ y por lo tanto $t' = \Lambda_0^0 + \langle x, b \rangle = \Lambda_0^0 > 0$. ■

Definición 1.15. Al conjunto de todas las transformaciones de Lorentz que preservan la dirección en el tiempo lo escribiremos como $O(1, 3)^\uparrow$. Al conjunto de transformaciones de Lorentz que preservan tanto la dirección en el tiempo como la orientación espacial lo escribiremos como $SO(1, 3)^\uparrow$. Usando esta caracterización de $SO(1, 3)^\uparrow$ y $O(1, 3)^\uparrow$ es fácil ver que tanto $SO(1, 3)^\uparrow$ como $O(1, 3)^\uparrow$ son subgrupos de $SO(1, 3)$.

Teorema 1.16. $O(1, 3)$ es un grupo de Lie desconexo.

Demostración. Como vimos anteriormente si Λ es una transformación de Lorentz entonces $\det(\Lambda) = \pm 1$. Usando que \det es una función continua se sigue lo que buscábamos demostrar. ■

Teorema 1.17. $SO(1, 3)^\uparrow$ es un subgrupo de Lie de $SO(1, 3)$.

Demostración. Consideremos la función $f : SO(1, 3) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ definida por $f(\Lambda) := (\text{sgn}(\Lambda_0^0), \det(\Lambda))$, $\forall \Lambda \in SO(1, 3)$. Usando que el signo de Λ_0^0 nos dice si Λ preserva la dirección del tiempo y el hecho de que \det es multiplicativo podemos ver que f es un homomorfismo de grupos. Si pensamos a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ como un grupo de Lie de dimensión cero, entonces f es una función suave y por lo tanto un homomorfismo de grupos de Lie. El kernel de un homomorfismo de grupos de Lie $f : G \rightarrow H$ siempre es un subgrupo cerrado de G y por lo tanto un subgrupo de Lie. En este caso $\ker(f) = SO(1, 3)^\uparrow$ y por lo tanto tenemos lo que buscábamos. ■

Teorema 1.18. $SO(1,3)^\uparrow$ es un grupo de Lie conexo. Más aun $SO(1,3)^\uparrow$ es el componente conexo de la identidad de $SO(1,3)$.

Demostración. Consideremos un elemento Λ en el componente conexo de la identidad de $SO(1,3)$ y notemos que claramente Λ preserva tanto la dirección del tiempo como la orientación espacial y por lo tanto $\Lambda \in SO(1,3)^\uparrow$. Debido a esto, para demostrar que $SO(1,3)^\uparrow$ es el componente conexo de la identidad sólo tenemos que demostrar que $SO(1,3)^\uparrow$ es conexo. Definamos $H \subset \mathbb{R}^4$ como:

$$H := \{x \in \mathbb{R}^4 : \eta(x, x) = 1, x_0 > 1\}$$

Notemos que la función $(t, x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^1, x^2, x^3)$ define un difeomorfismo de H a \mathbb{R}^3 . Consideremos un elemento $v \in H$ y completemos a este elemento a una base ortonormal $\{v, v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbb{R}^4 . Notemos que $v^0 > 1$ ya que $v \in H$. Consideremos una matriz A de 4×4 dada por $A := (v, v_1, v_2, v_3)$ y notemos que A define una transformación de Lorentz que preserva la dirección del tiempo ya que $v^0 > 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\det(A) = 1$ ya que siempre podemos remplazar a v_3 por $-v_3$ si $\det(A) = -1$ y por lo tanto podemos suponer que A preserva la orientación espacial. Si $e_0 = (1, 0, 0, 0)$, entonces claramente $A(e_0) = v$ y por lo tanto la acción $\bullet : SO(1,3)^\uparrow \times H \rightarrow H$ definida por $\Lambda \bullet h := \Lambda h$ es transitiva. El estabilizador de $e_0 \in H$ es $SO(3, \mathbb{R})$ y debido a esto usando el teorema 2.2 podemos concluir que $SO(1,3)^\uparrow$ es un $SO(3, \mathbb{R})$ haz principal sobre H . Usando que H es difeomorfo a \mathbb{R}^3 el cual es un espacio simplemente conexo podemos concluir que este haz es trivial (ver apéndice D), es decir $SO(1,3)^\uparrow \cong SO(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3$. En consecuencia de que tanto \mathbb{R}^3 como $SO(3, \mathbb{R})$ son conexos se sigue lo que buscábamos demostrar. ■

Si definimos el operador de paridad Λ_p y el operador de inversión en el tiempo Λ_t como

$$\Lambda_p := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_t := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces no es difícil ver que podemos escribir a $O(1,3)$ como

$$O(1,3) = SO(1,3)^\uparrow \cup \Lambda_p SO(1,3)^\uparrow \cup \Lambda_t SO(1,3)^\uparrow \cup \Lambda_p \Lambda_t SO(1,3)^\uparrow$$

donde cada elemento de esta unión es un componente conexo de $SO(1,3)$.

1.6.1. $SL(2, \mathbb{C})$ es una doble cubierta de $SO(1, 3)^\dagger$

Consideremos un elemento $X = (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ y representemos a este mediante la matriz simétrica

$$X = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} = t\sigma_0 + x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3$$

donde σ_i es la i -ésima matriz de Pauli y σ_0 es la identidad.

Observación 1.16. En esta representación matricial tenemos que $\det(X) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -|X|^2$.

Teorema 1.19. $SL(2, \mathbb{C})$ es una doble cubierta de $SO(1, 3)^\dagger$. Es decir, $SO(1, 3)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\{I, -I\}$.

Demostración. Sea $A \in SL(2, \mathbb{C})$ y consideremos la acción de A en X definida por

$$X \mapsto AXA^\dagger$$

Esta acción preserva el determinante ya que claramente $\det(X) = \det(AXA^\dagger)$ y por lo tanto es una isometría del espacio de Minkowski. Debido a esto podemos definir una función $f : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO^\dagger(1, 3)$ y el diferencial de esta función en la identidad aplicado a un elemento S en $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ nos regresa la transformación lineal $f_*(S)$ del espacio de Minkowski definida por

$$X \mapsto \frac{d}{dt}(e^{tS}X(e^{tS})^\dagger)_{t=0} = SX + XS^\dagger$$

El último elemento de esta igualdad es 2 veces la parte simétrica de SX y por lo tanto podemos concluir que $S \in Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ es un elemento del kernel de f_* si y sólo si para todo X en el espacio de Minkowski tenemos que SX es una matriz anti-hermitiana. De este ser el caso tomando X como la identidad podríamos concluir que S es una matriz anti-hermitiana y por lo tanto un elemento de $Lie(SU(2))$, sin embargo como veremos en el siguiente resultado f_* restringido a $Lie(SU(2))$ es inyectivo y por lo tanto S no puede ser un elemento de $ker(f_*)$. Esto implica que f_* es inyectiva y debido a que tanto $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ como $Lie(SO(1, 3))$ tienen dimensión 6 podemos concluir que f_* es un isomorfismo. En consecuencia de lo anterior y del hecho de que f es un homomorfismo de grupos tenemos que f es un difeomorfismo local y que $f(SL(2, \mathbb{C})) := U$ es subgrupo abierto de $SO(1, 3)^\dagger$ de la misma dimensión. Esto implica que $SO(1, 3)^\dagger$ es la unión disjunta de copias de U indexadas por las clases laterales del grupo cociente $SO(1, 3)^\dagger/U$. Debido a que $SO(1, 3)^\dagger$ es conexo obtenemos que f es suprayectiva. Por último notemos que $ker(f) = \{I, -I\}$ y por lo tanto $SO(1, 3)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\{I, -I\}$. ■

Observación 1.17. En el resultado anterior sólo concluimos que existe un isomorfismo de grupos entre $SO(1, 3)^\dagger$ y $SL(2, \mathbb{C})/\{I, -I\}$. Sin embargo como veremos más adelante el cociente de un grupo de Lie G por un subgrupo H es un haz principal suave $\pi : G \rightarrow G/H$ cuyas fibras se encuentran modeladas por H . Más aun $f : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(1, 3)^\dagger$ desciende a un isomorfismo de grupos suave $\hat{f} : SL(2, \mathbb{C})/\{-I, I\} \rightarrow SO(1, 3)^\dagger$ debido al lema ?? y por lo tanto podemos pensar que $SL(2, \mathbb{C})$ es un haz principal sobre $SO(1, 3)^\dagger \cong SL(2, \mathbb{C})/\{I, -I\}$ cuyas fibras se encuentran modeladas por $\{-I, I\} \cong \mathbb{Z}_2$. Los haces principales conexos cuyas fibras se modelan por grupos

discretos son llamados espacios cubrientes y es por esto que decimos que $SL(2, \mathbb{C})$ es una doble cubierta de $SO(1, 3)^\uparrow$.

Ahora demostremos el lema que quedó pendiente en la demostración del teorema anterior.

Lema 1.5. Sea $\hat{f} : SU(2) \rightarrow SO(1, 3)^\uparrow$ la restricción a $SU(2)$ de $f : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(1, 3)^\uparrow$. $\hat{f}_* : Lie(SU(2)) \rightarrow Lie(SO(1, 3)^\uparrow)$ es una función inyectiva.

Demostración. Sea $S \in Lie(SU(2))$ y notemos que al igual que en el teorema 1.19 $\hat{f}_*(S)$ está dado por la transformación

$$X \mapsto SX + XS^\dagger = SX - XS = [S, X]$$

Donde para deducir la penúltima igualdad usamos que S es una matriz anti-hermitiana ya que es un elemento de $Lie(SU(2))$. Escribamos a S como $S = iS^j\sigma_j$ donde σ_j es la j -ésima matriz de Pauli y supongamos que S es distinto de 0. Debido a que $S \neq 0$ podemos concluir que existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que $S^j \neq 0$, si tomamos a $X = \sigma_k$ donde $k \neq j$ entonces es fácil ver que $[S, X] \neq 0$ y por lo tanto S no es un elemento del kernel de \hat{f}_* . Esto implica que $ker(\hat{f}_*) = \{0\}$ y esto es lo que buscábamos demostrar. ■

Como un corolario importante de la demostración del teorema anterior tenemos

Corolario 1.3. $f_* : Lie(SL(2, \mathbb{C})) \rightarrow Lie(SO(1, 3)^\uparrow)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie.

Debido al corolario anterior, en la siguiente sección nos enfocaremos en estudiar las representaciones irreducibles de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ con la intención de posteriormente describir distintas representaciones del grupo de "Lorentz" $SL(2, \mathbb{C})$.

1.6.2. Representaciones de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$

El álgebra de Lie de $SO(1, 3)^\uparrow$ tiene dimensión 6 y la elección más común de una base de esta está dada por

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación 1.18. J_i es el generador infinitesimal de las rotaciones alrededor de x_i mientras que K_i es el generador infinitesimal de los boosts en la dirección de x_i . Para ejemplificar esto notemos que K_1 es el vector tangente en la identidad de la curva de boosts (en la dirección de x) dada por

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) & 0 & 0 \\ \sinh(t) & \cosh(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Computando por fuerza bruta podemos ver que los generadores de $Lie(SO(1,3))$ satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}^k J_k$$

$$[J_i, K_j] = \epsilon_{ij}^k K_k$$

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ij}^k J_k$$

Observación 1.19. Debido a las relaciones anteriores podemos ver que los generadores infinitesimales de los boosts no generan una subálgebra de Lie de $Lie(SO(1,3))$ dado que el subespacio vectorial generado por $\{K_i\}$ no es cerrado bajo conmutación.

Definamos una nueva base de $Lie(SO(1,3))$ dada por los operadores $N_i^\pm := \frac{1}{2}(J_i \pm K_i)$ y notemos que se satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[N_i^+, N_j^+] = \epsilon_{ij}^k N_k^+$$

$$[N_i^-, N_j^-] = \epsilon_{ij}^k N_k^- \tag{1.2}$$

$$[N_i^+, N_j^-] = 0$$

En consecuencia de esto tenemos que el espacio vectorial generado por $\{N_i^+\} := Lie(SO(1,3))^+$ es una subálgebra de Lie de $Lie(SO(1,3))$ isomorfa a $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ ya que estas 2 álgebras satisfacen las mismas relaciones de conmutación. De la misma manera podemos concluir que esto mismo es cierto para el espacio vectorial generado por $\{N_i^-\} := Lie(SO(1,3))^-$. Más aun $Lie(SO(1,3)) \cong Lie(SO(1,3))^+ \oplus Lie(SO(1,3))^-$ ya que claramente $Lie(SO(1,3))^+ \cap Lie(SO(1,3))^- = \{0\}$. En resumen tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.20. $Lie(SO(1,3)) \cong Lie(SO(1,3))^+ \oplus Lie(SO(1,3))^- \cong (Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}) \oplus (Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C})$.

Observación 1.20. Este resultado es de fundamental importancia ya que nos permite construir representaciones de $Lie(SO(1,3))$ a partir de representaciones de $Lie(SU(2))$.

Debido al teorema 1.14 tenemos que si conocemos representaciones irreducibles de $Lie(SO(1,3))$ podemos construir representaciones irreducibles de la cubierta universal de $SO(1,3)^\uparrow$ y esta está dada por $SL(2, \mathbb{C})$ ya que $SL(2, \mathbb{C})$ es un espacio cubriente de $SO(1,3)^\uparrow$ simplemente conexo. A estas representaciones les llamaremos representaciones del grupo de Lorentz aunque estrictamente serán representaciones de su doble cubierta. Algunas de estas representaciones descenderán a representaciones de $SO(1,3)^\uparrow$ mientras que otras no lo harán y resultarán importantes para poder describir cómo se transforman bajo transformaciones de Lorentz cierto tipo de partículas (campos). Como vimos anteriormente las representaciones de $Lie(SU(2))$ se pueden clasificar mediante un escalar j

que puede ser un entero o un racional de la forma $\frac{p}{2}$. En consecuencia de esto podemos construir representaciones de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ a partir de una pareja de escalares (j_1, j_2) donde de nuevo j_1, j_2 son enteros o racionales de la forma $\frac{p}{2}$.

1.6.3. La representación $(0, 0)$

En este caso las 2 copias de $Lie(SU(2))$ actúan en un espacio vectorial de dimensión 1 y por lo tanto los generadores de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ se representan mediante matrices de 1×1 . Es fácil ver que las únicas matrices de 1×1 que satisfacen las relaciones 1.2 están dadas por la matriz 0

$$N_i^+ = N_i^- = 0$$

Tomando la exponencial de estos generadores obtenemos que $e^{N_i^\pm} = 1$ y en consecuencia de esto tenemos que la representación $(0, 0)$ actúa en objetos que no cambian bajo transformaciones de Lorentz. Debido a esto a esta representación se le suele llamar la representación escalar.

1.6.4. La representación $(\frac{1}{2}, 0)$

En esta representación usaremos la representación en dimensión 2 para la primera copia de $Lie(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ y la representación en dimensión 1 para la segunda copia. Es decir $N_i^+ = i\frac{\sigma_i}{2}$, $N_i^- = 0$. Usando la definición de N_i^- obtenemos que $J_i = iK_i$ y en consecuencia de esto tenemos que

$$N_i^+ = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) = \frac{1}{2}(iK_i + iK_i) = iK_i = i\frac{\sigma_i}{2}$$

$$K_i = \frac{\sigma_i}{2} \quad J_i = i\frac{\sigma_i}{2}$$

Aplicando la función exponencial a estos generadores obtenemos que en esta representación una rotación por un ángulo θ_i alrededor del eje x_i está dada por

$$R_\theta = e^{\theta J_i} = e^{i\theta \frac{\sigma_i}{2}}$$

mientras que un boost por un ángulo ϕ en la dirección x_i se expresa como

$$B_\phi = e^{\phi K_i} = e^{\phi \frac{\sigma_i}{2}}$$

Esto implica que en esta representación podemos expresar cualquier transformación de Lorentz cercana a la identidad de la siguiente manera

$$\chi_L \longrightarrow e^{(i\theta \frac{\sigma}{2} + \phi \frac{\sigma}{2})} \chi_L$$

Donde $\theta \frac{\sigma}{2} := \theta_1 \frac{\sigma_1}{2} + \theta_2 \frac{\sigma_2}{2} + \theta_3 \frac{\sigma_3}{2}$ y $\phi \frac{\sigma}{2} := \phi_1 \frac{\sigma_1}{2} + \phi_2 \frac{\sigma_2}{2} + \phi_3 \frac{\sigma_3}{2}$.

Por ejemplo una rotación por θ_1 alrededor del eje x está dada por

$$R_{\theta_1}^x = e^{i\theta_1 \frac{\sigma_1}{2}} = 1 + \frac{i}{2}\theta_1 \sigma_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2}\theta_1 \sigma_1\right)^2 + \dots$$

Usando la definición de σ_1 y el hecho de que $\sigma_1^2 = 1$ obtenemos que

$$R_\theta^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & i\text{sen}(\frac{\theta}{2}) \\ i\text{sen}(\frac{\theta}{2}) & \cos(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

Análogamente podemos encontrar la forma explícita de las otras rotaciones y de los boosts en esta representación. Por último notemos que esta representación actúa sobre elementos de \mathbb{C}^2 y que la representación de una rotación por 2π no corresponde a la transformación identidad mientras que una rotación por 4π sí. Usando la idea de definir a los objetos mediante la forma en la que se transforman llamaremos a los objetos que se transforman mediante esta representación espinores de quiralidad izquierda y al espacio de todos estos lo escribiremos como \mathbb{C}_L^2 .

1.6.5. La representación $(0, \frac{1}{2})$

Esta representación se construye de forma totalmente análoga sólo que en este caso utilizamos la representación en dimensión 1 para la primera copia de $\text{Lie}(SU(2)) \otimes \mathbb{C}$ y la representación en dimensión 2 para la segunda copia. Es decir $N_i^+ = 0$, $N_i^- = \frac{1}{2}i\sigma_i$. Usando la definición de N_i^+ obtenemos que $N_i^+ = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) = 0$ y esto implica que $J_i = -iK_i$; usando la definición de N_i^- podemos ver que $N_i^- = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) = \frac{1}{2}(-iK_i - iK_i) = -iK_i = \frac{1}{2}i\sigma_i$. En consecuencia de esto tenemos que $J_i = -iK_i = \frac{1}{2}i\sigma_i$. Debido a esto podemos ver que en esta representación una rotación (boost) por $\theta(\phi)$ alrededor (en la dirección) de x_i está dada por

$$R_\theta^i = e^{\theta J_i} = e^{i\theta \frac{\sigma_i}{2}}, \quad B_\phi^i = e^{\phi K_i} = e^{-\phi \frac{\sigma_i}{2}}$$

Esto implica que en esta representación podemos expresar cualquier transformación de Lorentz cercana a la identidad de la siguiente manera

$$\chi_R \mapsto e^{(i\theta \frac{\sigma_i}{2} - \phi \frac{\sigma_i}{2})} \chi_R$$

Donde $\theta \frac{\sigma_i}{2} := \theta_1 \frac{\sigma_1}{2} + \theta_2 \frac{\sigma_2}{2} + \theta_3 \frac{\sigma_3}{2}$ y $\phi \frac{\sigma_i}{2} := \phi_1 \frac{\sigma_1}{2} + \phi_2 \frac{\sigma_2}{2} + \phi_3 \frac{\sigma_3}{2}$.

Comparando a esta representación con la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ podemos ver que las rotaciones coinciden mientras que los boosts difieren por un signo en el exponente. A los objetos que se transforman bajo esta representación los llamaremos espinores de quiralidad derecha y al espacio de todos estos lo escribiremos como \mathbb{C}_R^2 .

1.6.6. La representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Esta representación está dada por el producto tensorial de la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ con la representación $(0, \frac{1}{2})$. Consideremos un elemento $\chi_L \otimes \chi_R$ en $\mathbb{C}_L^2 \otimes \mathbb{C}_{R+}^2$ y escribamos a este como $v^{\alpha\beta} e_\alpha \otimes e_\beta$ o usando notación de índices simplemente como $v^{\alpha\beta}$. Bajo esta representación $v^{\alpha\beta}$ se transforma de la siguiente manera

$$v^{\alpha\beta} \mapsto (e^{(i\theta \frac{\sigma_i}{2} - \phi \frac{\sigma_i}{2})})_\alpha^\gamma (e^{(i\theta \frac{\sigma_i}{2} + \phi \frac{\sigma_i}{2})})_\beta^\delta v^{\alpha\beta}$$

Para transformaciones de Lorentz infinitesimales esto lo podemos expresar como

$$v^{\alpha\beta} \mapsto (I + i\theta \frac{\sigma}{2} - \phi \frac{\sigma}{2})_{\alpha}^{\gamma} (I + i\theta \frac{\sigma}{2} + \phi \frac{\sigma}{2})_{\beta}^{\delta} v^{\alpha\beta}$$

Si definimos $v^0 := v^{11}$, $v^1 := v^{12}$, $v^2 := v^{21}$, $v^3 := v^{22}$ entonces realizando un cálculo directo podemos ver que bajo una transformación de Lorentz infinitesimal

$$v'^0 = v^{11} + i\theta_x v^{12} + i\theta_y v^{21} + i\theta_z v^{22}$$

$$v'^1 = v^{12} + i\theta_x v^{11} - i\phi_y v^{22} + i\phi_z v^{21}$$

$$v'^2 = v^{21} + i\phi_x v^{22} + i\theta_y v^{11} - i\phi_z v^{12}$$

$$v'^3 = v^{22} - i\phi_x v^{21} + i\phi_y v^{12} + i\theta_z v^{11}$$

En notación matricial esto se expresa como

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v'_0 \\ v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i\theta_x & i\theta_y & i\theta_z \\ i\theta_x & 0 & i\phi_z & -i\phi_y \\ i\theta_y & -i\phi_z & 0 & i\phi_x \\ i\theta_z & i\phi_y & -i\phi_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Esta es precisamente la forma en la que actúa una transformación de Lorentz infinitesimal (ver observación 1.21) sobre cuatrivectores en el espacio de Minkowski y por lo tanto podemos concluir que la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ no es más que la representación definitoria de $SO(1, 3)^{\uparrow}$ o más precisamente de su cubierta universal $SL(2, \mathbb{C})$.

Observación 1.21. Si $A \in Lie(SO(1, 3))$ entonces podemos interpretar a A como la transformación de Lorentz infinitesimal definida por $X \mapsto (I + \epsilon A)X$ donde ϵ es un infinitesimal. Si ϵ es de la forma $\epsilon = \frac{1}{n}$ para n arbitrariamente grande, entonces podemos concluir que A es el generador infinitesimal de la transformación de Lorentz definida por $\lim_{n \rightarrow \infty} (I + \frac{A}{n})^n = e^A$.

Observación 1.22. Debido a que podemos pensar a los cuatrivectores del espacio de Minkowski como el producto tensorial de espinores de quiralidad izquierda con espinores de quiralidad derecha es usual decir que un espinor es la raíz cuadrada de un cuatrivector. Esto último le da a los espinores el papel fundamental dentro del álgebra tensorial en el espacio de Minkowski ya que a partir de ellos es que podemos construir al resto de los objetos de interés para esta área.

1.6.7. La representación $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$

Esta representación está dada por la suma directa de la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ con la representación $(0, \frac{1}{2})$. Consideremos un elemento $\Psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}$ en $\mathbb{C}_L^2 \oplus \mathbb{C}_R^2$ y notemos que bajo una transformación de Lorentz

$$\Psi \mapsto \Psi' = \begin{pmatrix} e^{(i\theta \frac{\sigma}{2} - \phi \frac{\sigma}{2})} & 0 \\ 0 & e^{(i\theta \frac{\sigma}{2} + \phi \frac{\sigma}{2})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}$$

A los objetos que se transforman bajo esta representación los llamaremos espinores de Dirac (en la representación de Weyl).

Observación 1.23. Existen otras representaciones de un espinor de Dirac que corresponden a distintas descomposiciones de $\mathbb{C}_L^2 \oplus \mathbb{C}_R^2$ como la suma directa de 2 sub-espacios complejos de dimensión 2. Sin embargo nosotros no las requeriremos y por lo tanto la representación de Weyl será suficiente.

1.6.8. Una representación de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ en dimensión infinita

Hasta ahora hemos considerado representaciones de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ en dimensión finita. Estas representaciones actúan en objetos de una, dos o cuatro entradas. Como describiremos más adelante a estos objetos los podemos interpretar como campos o como funciones de onda y por lo tanto son objetos de la forma $\Phi(x) = (\Phi_i(x))$ donde x es un elemento del espacio tiempo. Los elementos del espacio tiempo también se transforman bajo transformaciones de Lorentz y esto lo debemos de considerar cuando transformamos a Φ . Consideremos una transformación de la forma

$$\Phi(x) \mapsto \Phi(x') := \Phi(\Lambda x)$$

donde Λ es una transformación de Lorentz infinitesimal, es decir $\Lambda = I + \epsilon A$ donde $A \in Lie(SL(2, \mathbb{C}))$. Expandiendo a $\Phi(\Lambda x)$ en primer orden obtenemos

$$\Phi(x') = \Phi(x + \epsilon Ax) = \Phi(x) + \epsilon \partial_\rho \Phi(x) \delta x^\rho = \Phi(x) + \epsilon \partial_\rho \Phi(x) A_\sigma^\rho x^\sigma$$

Esto implica que

$$\Phi(\Lambda x) = (I + \epsilon A_\sigma^\rho x^\sigma \partial_\rho) \Phi(x)$$

y por lo tanto podemos concluir que $A_\sigma^\rho x^\sigma \partial_\rho$ es el generador infinitesimal de la transformación

$$\Phi(x) \mapsto \Phi(x')$$

Utilizando la base de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ que escribimos en la ecuación 1.1, obtenemos que los generadores infinitesimales de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ en esta representación están dados por

$$J_x = -z\partial_y + y\partial_z \quad J_y = -x\partial_z + z\partial_x \quad J_z = -y\partial_x + x\partial_y$$

$$K_x = x\partial_t + t\partial_x \quad K_y = y\partial_t + t\partial_y \quad K_z = z\partial_t + t\partial_z$$

Por último notemos que la acción de una transformación de Lorentz en Φ debe de incluir tanto la transformación de las coordenadas como la transformación de los componentes de Φ y por lo tanto es de la forma

$$\Phi(x) \mapsto M\Phi(\Lambda x)$$

donde M es una representación en dimensión finita de la transformación de Lorentz que estamos considerando.

1.7. Grupos de Lie compactos como subgrupos de algún grupo unitario

En cualquier grupo de Lie G compacto podemos considerar a la forma de volumen $\omega := \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n$ donde n es la dimensión de G y $\{\sigma^i\}$ es la base de T^*M asociada a la base $\{e_i\}$ de TM de campos vectoriales invariantes por la izquierda. Claramente la forma de volumen ω es invariante por la izquierda, es decir $L_g^*(\omega) = \omega$ para toda $g \in G$. Supongamos que ω no es invariante por la derecha y notemos que esto implica que existe $g \in G$ tal que :

$$\omega((R_{g^{-1}})_*e_1, \dots, (R_{g^{-1}})_*e_n) = c \neq 1$$

Observación 1.24. No es difícil convencerse que en el caso en que $c < 1$ podemos remplazar a g por g^{-1} y obtener un nuevo $c > 1$. Por lo tanto supondremos que $c > 1$.

Debido a que ω es invariante por la izquierda tenemos que :

$$\omega((R_{g^{-1}})_*e_1, \dots, (R_{g^{-1}})_*e_n) = \omega((L_g)_*((R_{g^{-1}})_*e_1), \dots, (L_g)_*((R_{g^{-1}})_*e_n)) = \omega(Ad(g)e_1, (g)e_n) = c > 1$$

Esto implica que el marco $(Ad_g e_1, g e_n)$ tiene volumen $c > 1$. Iterando este proceso podemos concluir que el volumen del marco $(Ad_{g^n} e_1, g^n e_n)$ está dado por c^n . Debido a esto y al hecho de que $c > 1$ podemos definir una función no acotada $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(g) := \omega(Ad(g)e_1, (g)e_n) \forall g \in G$. Esta función es continua y por lo tanto hemos construido una función continua cuyo dominio es compacto y que no está acotada. Esta contradicción se sigue de que supusimos que ω no era invariante por la derecha y por lo tanto podemos concluir que para cualquier grupo de Lie compacto la forma de volumen ω es tanto invariante por la derecha como por la izquierda. A estas formas les llamaremos formas bi-invariantes y en resumen tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.21. *En todo grupo de Lie compacto la forma de volumen $\omega = \sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^n$ es una forma bi-invariante.*

Teorema 1.22. *Si G es un grupo de Lie compacto entonces para cualquier función continua $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ y para todo $g \in G$ tenemos que*

$$\int_G f(h)\omega_h = \int_G f(gh)\omega_h = \int_G f(hg)\omega_h$$

Demostración. Consideremos a $\int_G f(hg)\omega_h$. Debido a que ω es invariante por la derecha tenemos que $\omega_h = R_g^*\omega_{hg}$. Definamos $F(h) := f(hg)$ y notemos que claramente $F(h) = (f \circ R_g)(h) = (R_g^*f)(h)$. Por lo tanto

$$\int_G f(hg)\omega_h = \int_G F\omega = \int_G (R_g^*f)(R_g^*\omega) = \int_G R_g^*(f\omega) = \int_{R_g G} f\omega = \int_G f(h)\omega_h$$

La demostración de que $\int_G f(gh)\omega_h = \int_G f(h)\omega_h$ es completamente análoga. ■

Supongamos que tenemos un grupo lineal compacto de matrices de $n \times n$ y notemos que a los elementos de este grupo los podemos pensar como transformaciones lineales de \mathbb{C}^n . Si definimos

un producto interno hermitiano $(,)$ en \mathbb{C}^n entonces es fácil ver que no necesariamente estas transformaciones lineales preservan este producto interno, dicho de otra forma, no necesariamente estas transformaciones actúan como transformaciones unitarias. Definamos un nuevo producto interno en \mathbb{C}^n como

$$\langle X, Y \rangle := \int_G (hX, hY)\omega_h \quad \forall X, Y \in \mathbb{C}^n$$

Usando el teorema anterior obtenemos que $\forall g \in G$ tenemos que

$$\langle gX, gY \rangle = \int_G (hgX, hgY)\omega_h = \int_G (hgX, hgY)\omega_{gh} = \langle X, Y \rangle$$

y por lo tanto podemos concluir que con este nuevo producto interno en \mathbb{C}^n los elementos del grupo lineal del cual partimos actúan como transformaciones unitarias de \mathbb{C}^n . Si escogemos una base de \mathbb{C}^n ortogonal con respecto a la métrica inducida por nuestro nuevo producto interno entonces podemos ver que las matrices que representan a estas transformaciones lineales en esta base están dadas por matrices unitarias, y es en este sentido en el que podemos pensar a cualquier grupo lineal compacto como un subgrupo de algún grupo unitario.

1.7.1. Un producto interno en $Lie(U(N))$ invariante bajo la representación adjunta

Definamos un producto interno \langle , \rangle en $Lie(U(N))$ como

$$\langle X, Y \rangle := tr X^\dagger Y = (X^\dagger)_j^i (Y_i^j) = -X_j^i Y_i^j = -tr XY$$

donde para pasar de la segunda a la tercera igualdad usamos que los elementos de $Lie(U(N))$ están dados por matrices anti-hermitianas.

Observación 1.25. Si pensamos a una matriz de $n \times n$ como un vector de n^2 entradas, es decir como un elemento de \mathbb{C}^n entonces podemos ver que $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (X^\dagger)_j^i (Y_i^j)$ es la restricción del producto interno hermitiano estándar de \mathbb{C}^{n^2} a $Lie(U(N))$.

Notemos que este producto interno es invariante bajo la representación adjunta de $U(N)$ en $Lie(U(N))$ ya que $\forall g \in G$ tenemos que

$$\langle gXg^{-1}, gYg^{-1} \rangle = -tr gXYg^{-1} = -tr XY = \langle X, Y \rangle$$

donde para deducir la segunda igualdad usamos que la traza es invariante bajo conjugación. Esto implica que si $X, Y, Z \in Lie(U(N))$ entonces

$$\langle e^{tX} Y e^{-tx}, e^{tX} Z e^{-tx} \rangle = \langle Y, Z \rangle$$

Derivando y tomando $t = 0$ obtenemos que $\forall X, Y, Z \in Lie(U(N))$.

$$\langle [X, Y], Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle = 0$$

Por último notemos que debido a esto tenemos que $ad(X) : Lie(U(N)) \longrightarrow Lie(U(N))$ es un operador anti-hermitiano.

1.8. La forma de Maurer Cartan

Definición 1.16. Sea G un grupo de *Lie* y definamos la uno-forma de *Maurer – Cartan* $\theta : TG \longrightarrow Lie(G)$ como la uno-forma con valores en $Lie(G)$ que asocia a cada $v \in T_gG$ el único elemento $A \in T_eG$ tal que $(gexp(tA))'(0) = v$.

Observación 1.26. Es fácil demostrar que $\forall v \in T_gG$ existe un único $A \in T_eG$ tal que $v = (gexp(tA))'(0)$ y por lo tanto la definición anterior tiene sentido.

En el caso en el que G sea un grupo lineal tenemos que $\theta = g^{-1}dg$ donde la función $g : G \longrightarrow G$ es la identidad. Para poder ver esto notemos que $dg(v) = (gexp(tA))'(0) = (g(I + tA + o(t)^2))'(0) = gA$ y por lo tanto $g^{-1}dg(v) = A = \theta(v)$. Como esto es cierto para toda $v \in T_gG$ podemos concluir lo que buscábamos.

Teorema 1.23. Si G es un grupo lineal entonces $(Rg)^*(\theta) = g^{-1}\theta g$

Demostración. Sea $h \in G$ y $v \in T_hG$. Escribamos a v como $v = (he^{At})'(0)$, $A \in Lie(G)$ y notemos que $(Rg)_*(v) = (he^{At}g)'(0) = hAg = hgg^{-1}Ag$. Usando esto y la definición de pullback obtenemos que

$$((Rg)^*(\theta))(v)_h = (\theta((Rg_*)(v)))_{hg} = \theta((hg)g^{-1}Ag)_{hg} = \theta((hgexp(tg^{-1}Ag))'(0)) = g^{-1}Ag$$

■

Capítulo 2

Haces Principales

En este capítulo daremos una muy breve introducción a la teoría de haces principales y haces asociados a estos. En particular veremos como si partimos de un haz vectorial E entonces podemos reconstruir a este haz como un haz asociado al haz de marcos $P_{GL(E)}$. La utilidad principal que tendrá la construcción de un haz asociado es que si conocemos los representantes locales de un objeto geométrico y la forma en la que se transforman estos representantes al hacer un cambio de coordenadas entonces podemos definir un haz vectorial en el cual nuestro objeto geométrico se ve como una sección de este haz. Esta idea sera de fundamental importancia ya que nos permitirá interpretar a un campo de espinores de Dirac como una sección de un cierto haz vectorial definido sobre el espacio tiempo M y posteriormente poder formular la ecuación de Dirac en un espacio tiempo curvo M .

Definición 2.1. Si M es una variedad suave y G es un grupo de Lie, un haz principal G sobre M consta de lo siguiente:

1. Una variedad suave P
2. Una acción derecha suave $\bullet : G \times P \rightarrow P$
3. Una función suprayectiva $\pi : P \rightarrow M$ tal que $\pi(p \bullet g) = \pi(p) \quad \forall p \in P$ y $\forall g \in G$ (A π le llamaremos la función proyección)
4. Para cualquier $m \in M$ una vecindad abierta U_i alrededor de m y su difeomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi_i : \pi^{-1}(U_i) &:= P|_{U_i} \rightarrow U_i \times G \\ p &\rightarrow (\pi(p), h_i(p)) \end{aligned}$$

$$\text{tal que } \Phi(p \bullet g) = (\pi(p), h(p)g)$$

Observación 2.1. De la propiedad 4 se sigue que siempre podemos identificar a cualquier fibra con el grupo G .

Definición 2.2. Sea $\rho : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie, $f : M \rightarrow N$ una función suave y sean $\bullet : G \times M \rightarrow M$, $\hat{\bullet} : H \times N \rightarrow N$ acciones suaves. Decimos que f es ρ equivariante si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
G \times M & \xrightarrow{\rho \times f} & H \times N \\
\bullet \downarrow & & \downarrow \bullet \\
M & \xrightarrow{f} & N
\end{array}$$

Si $G = H$ y ρ es la función identidad, decimos que f es equivariente.

Definición 2.3. Sean P y P' G haces principales sobre M , decimos que P y P' son isomorfos si existe un difeomorfismo equivariente $\Psi : P \rightarrow P'$.

Lema 2.1. Sean P_1, P_2 G -haces principales sobre M . Si $f : P_1 \rightarrow P_2$ es un homomorfismo inyectivo de haces principales entonces f es un isomorfismo.

Demostración. Debido a que f es un homomorfismo inyectivo lo único que debemos demostrar es que f es una función suprayectiva. Sea $y \in \pi^{-1}(x) \subset P_2$ y consideremos cualquier elemento $z \in P_1$ tal que $f(z)$ viva en la fibra de y . Debido a que G actúa transitivamente en las fibras de P_2 podemos concluir que existe $g \in G$ tal que $f(z) \bullet g = y$, esto implica que $f(z \bullet g) = y$ y por lo tanto f es suprayectiva. ■

Ejemplo 2.1. Si $\pi : P \rightarrow M$ es un G haz principal y $N \subset M$ es una subvariedad de M , $P|_N$ es un G haz principal sobre N . La función proyección (la acción de G en $P|_N$) es simplemente la restricción de π a $P|_N$ (La restricción de $\bullet : G \times P \rightarrow P$ a $P|_N$)

Ejemplo 2.2. Debido al inciso 4 de la definición del G haz principal se sigue que para todo $m \in M$ existe una vecindad abierta U alrededor de m tal que $P|_U$ es isomorfo a $U \times G$.

Si $m \in U_i \cap U_j$ y $p \in \pi^{-1}(m)$ tenemos que $\Phi_i(p) = (m, h_i(p))$ y $\Phi_j(p) = (m, h_j(p))$ y por lo tanto existe $g_{ji}(p) \in G$ tal que $h_j(p) = g_{ji}h_i(p)$. Es decir $g_{ji}(p) = h_j(p)h_i(p)^{-1}$.

Ahora veremos que $g_{ji}(p)$ es constante en cualquier fibra:

$$\begin{aligned}
g_{ji}(p \bullet g) &= h_j(p \bullet g)h_i(p \bullet g)^{-1} \\
&= h_j(p)gg^{-1}h_i^{-1}(p) \\
&= h_j(p)h_i^{-1}(p) \\
&= g_{ji}(p)
\end{aligned}$$

Debido a lo anterior $g_{ji}(p) = \hat{g}_{ji}(\pi(p))$ donde $\hat{g}_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G$. A estas funciones las llamaremos funciones de transición del haz. Debido a su definición, las funciones de transición del haz, satisfacen la siguiente condición usualmente llamada condición del cociclo:

$$g_{kj}g_{ji}(m) = g_{ki}(m) \quad \forall m \in U_i \cap U_j \cap U_k$$

Si tenemos una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ y un conjunto de funciones de transición $\{g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}$ que satisfacen la condición del cociclo, podemos construir un G haz principal de la siguiente manera: Definimos:

$$P := \bigsqcup_I (U_i \times G) / \sim$$

donde $(m, g) \sim (m', g')$ si y sólo si $m = m'$ y $g' = g_{ji}(m)g \quad \forall m \in U_i \cap U_j$. La función proyección es la inducida por la proyección de $U_i \times G$ en el primer factor, mientras que la acción de G en P es la inducida por la multiplicación derecha. Que la función proyección esté bien definida independientemente de la clase de equivalencia escogida, se sigue inmediatamente de su definición. Que la acción de G esté bien definida se sigue de que la multiplicación izquierda conmuta con la derecha (Debido a la asociatividad de la multiplicación en G). El isomorfismo que necesitamos para satisfacer la propiedad 4 de la definición está dado por

$$\begin{aligned} \Phi_i : P|_{U_i} &\rightarrow U_i \times G \\ [m, g] &\rightarrow (m, g) \end{aligned}$$

donde $[m, g]$ es la clase de equivalencia en la cual vive (m, g) . Por el contrario, si partimos de un haz principal $\pi : P \rightarrow M$, debido al inciso 5 de la definición de haz principal existe una cubierta abierta localmente finita $\{U_i\}_I$ de M con la propiedad de que hay un isomorfismo de haces $\Phi_{U_i} : P|_{U_i} \rightarrow U \times G$.

Consideremos dos elementos $U_i, U_j \in M$ tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ y escribamos a $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(m, g)$ como $(m, g_{ji}(m)g)$ donde $g_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow G$. El conjunto $\{g_{ji}\}_I$ satisface la condición del cociclo por lo que podemos construir un G haz principal P_M a partir de la cubierta abierta M y del conjunto $\{g_{ji}\}$. Este haz es isomorfo a P y el isomorfismo está dado por la función que lleva a $p \in P$ a la clase de equivalencia de Φ_{U_i} . Donde U_i es cualquier elemento de la cubierta M que contiene a $\pi(p)$.

A continuación describiremos algunos ejemplos. En el siguiente veremos cómo construir un haz principal a partir de cualquier haz vectorial. Más adelante, veremos cómo podemos revertir este proceso y generar al haz vectorial a partir de este haz principal. Esto nos será importante cuando estudiemos conexiones.

Ejemplo 2.3. (Haz de marcos) Consideremos un haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$ cuyas fibra tienen dimensión n y definamos $P_{GL(E)}$ (Este resultará ser un $GL(n, \mathbb{R})$ haz principal) como el conjunto de los marcos $(e_1, \dots, e_n) \in \bigoplus_n E$ que forman una base de la fibra en la que viven. La función proyección $\pi : P_{GL(E)} \rightarrow M$ al evaluarse en un cierto marco nos regresa al punto de M sobre el cual está "anclado" este. Si $p = (e_1, \dots, e_n) \in P_{GL(E)}$ y $g \in GL(n, \mathbb{R})$ definamos $p \bullet g := ((g_1^k)^{-1}e_k, (g_2^k)^{-1}e_k, \dots, (g_n^k)^{-1}e_k)$. El isomorfismo que requerimos para satisfacer la propiedad 3 de la definición de haz principal se construye de la siguiente manera:

Consideremos el isomorfismo de haces $\Phi_{U_i} : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$. Este isomorfismo identifica a $\bigoplus_n E$ con $U_i \otimes \left(\bigoplus_n \mathbb{R}^n\right)$ y por lo tanto si consideramos la siguiente función

$$\begin{aligned} &: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \bigoplus_n \mathbb{R}^n \\ &\left[\begin{array}{cccc} \vec{A}_1 & \vec{A}_2 & \cdots & \vec{A}_n \end{array} \right] \mapsto (A_1 \cdots A_n) \end{aligned}$$

Podemos identificar localmente a $P_{GL(E)}$ con $U_i \times GL(n, \mathbb{R})$.

Si $\pi : E \rightarrow M$ cuenta con una métrica podemos considerar a $P_{O(E)}$, que es por definición la subvariedad de $\bigoplus_n E$ cuyos elementos son las n-adas (e_1, \dots, e_n) que forman una base ortonormal de la fibra sobre la cual viven. Debido a que E cuenta con una métrica podemos construir trivializaciones locales isométricas

$$\Phi_{U_i} : E_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$$

y por lo tanto, si pensamos a $O(n)$ como el subconjunto de $\bigoplus_n \mathbb{R}^n$ cuyos elementos son n-adas de vectores que forman una base ortonormal de \mathbb{R}^n entonces, podemos identificar a $P_{O(E)}|_{U_i}$ con $U_i \times O(n)$. Si E es orientable podemos construir un $SO(n)$ haz principal cuyos elementos son simplemente, los marcos que forman una base ortonormal orientada de la fibra en la cual viven.

Ejemplo 2.4. (Fibración de Hopf) Pensemos a S^3 como $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Como veremos a continuación S^3 es un $U(1)$ haz principal sobre S^2

Paso 1: Definamos

$$\begin{aligned} \bullet : S^3 \times U(1) &\rightarrow S^3 \\ ((z_1, z_2), e^{i\theta}) &\rightarrow (z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{i\theta}) \end{aligned}$$

Claramente \bullet satisface los axiomas de acción y está bien definida, ya que $|z_1 e^{i\theta}|^2 + |z_2 e^{i\theta}|^2 = |z_1|^2 |e^{i\theta}|^2 + |z_2|^2 |e^{i\theta}|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Paso 2:

Definamos $\pi : S^3 \rightarrow CP^1 \cong S^2$ como la restricción a S^3 de la función

$$\begin{aligned} [\] : \mathbb{C}^2 &\rightarrow CP^1 \\ (z_1, z_2) &\rightarrow [z_1, z_2] \end{aligned}$$

y notemos que claramente esta satisface el inciso 3 de definición de haz principal.

Para demostrar el inciso 4 necesitaremos un teorema (técnicamente lo que necesitamos es el procedimiento que usaremos en su demostración.) Este implica que, a diferencia de los haces vectoriales, en los haces principales las secciones son "raras".

Teorema 2.1. *Un haz principal $\pi : P \rightarrow M$ es trivial si y sólo si existe una sección $s : M \rightarrow P$*

Demostración. \Rightarrow

Supongamos que P es trivial y consideremos el isomorfismo de haces $\nu : M \times G \rightarrow P$. Definamos a $s : M \rightarrow P$ como $s(m) := \nu(m, e)$. Usando el siguiente diagrama (el cual es conmutativo debido a la definición de haz principal) podemos concluir que s es una sección.

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{V} & M \times G \\ \pi \downarrow & \swarrow \pi_1 & \\ M & & \end{array}$$

\Leftarrow

Supongamos que tenemos una sección $s : M \rightarrow P$, esto implica que podemos escribir a cualquier $p \in P$ como $s(\pi(p)) \bullet \hat{g}_p$ donde $\hat{g}_p \in G$.

Definamos

$$\begin{aligned}\hat{\chi} : P &\rightarrow M \times G \\ p &\rightarrow (\pi(p), \hat{g}_p)\end{aligned}$$

y notemos que $\hat{g}_p \bullet g = \hat{g}_p g$ y por lo tanto $\hat{\chi} : (p \bullet g) = (\pi(p \bullet g), \hat{g}_p g) = (\pi(p), \hat{g}_p) \cdot g$ donde \cdot es la acción canónica derecha de G en $M \times G$. Esto demuestra que $\hat{\chi}$ es un morfismo de haces principales y debido a que la acción \cdot es libre, usando el lema 2.1 podemos concluir que χ es un isomorfismo. ■

Regresando a la fibrición de Hopf, consideremos las siguientes dos funciones:

$$\begin{aligned}s_1 : S^2 - \{\infty\} &\cong \mathbb{C} \rightarrow S^3 & s_2 : S^2 - \{0\} &\cong \mathbb{C} \rightarrow S^3 \\ z \cong [z, 1] &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}(z, 1) & z \cong [z, 1] &\rightarrow s_1\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+|\frac{1}{z}|^2}}\left(\frac{1}{z}, 1\right)\end{aligned}$$

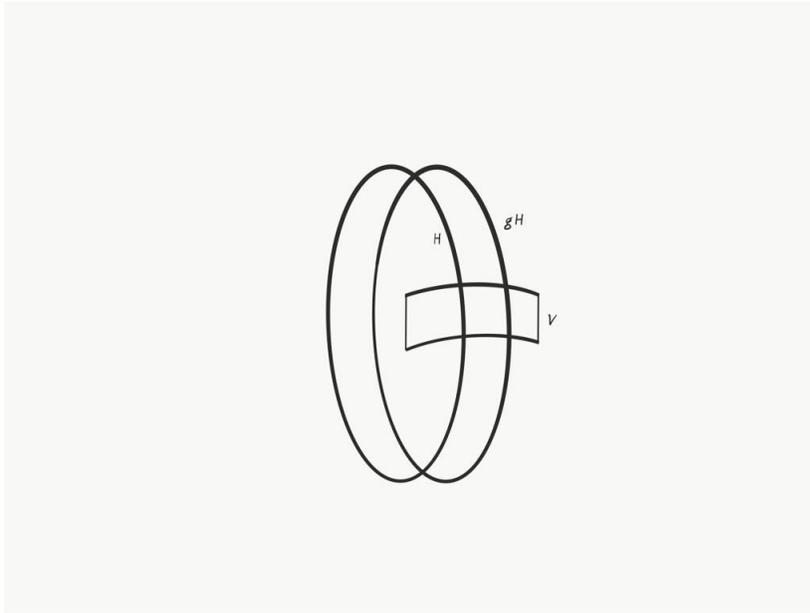
s_1 es una sección ya que $[(\sqrt{1+|z|^2})z, \sqrt{1+|z|^2}] = [z, 1]$ y de forma análoga se puede ver que s_2 también lo es. Notando que tanto $\pi^{-1}[S^2 - \{\infty\}]$ como $\pi^{-1}[S^2 - \{0\}]$ son subconjuntos abiertos de S^3 (y por lo tanto subvariedades suaves), usando la misma idea que en la demostración anterior, podemos construir funciones:

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_1 : \pi^{-1}[S^2 - \{\infty\}] &\rightarrow (S^2 - \{\infty\}) \times U(1) \\ \hat{\chi}_2 : \pi^{-1}[S^2 - \{0\}] &\rightarrow (S^2 - \{0\}) \times U(1)\end{aligned}$$

y por lo tanto hemos demostrado que se satisface el inciso 4.

Teorema 2.2. *Si G es un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado, entonces G/H tiene estructura de variedad suave de dimensión $\dim(G) - \dim(H)$. Más aún, G es un H haz principal sobre G/H . La función proyección está dada por*

$$\begin{aligned}\pi : G &\rightarrow G/H \\ g &\rightarrow [g]\end{aligned}$$



Aunque no demostraremos este teorema, esbozaremos brevemente una cierta parte de la idea. Sea V una subvariedad de G que:

1. Pasa por la identidad de G
2. Es transversal a H
3. Es de dimensión complementaria a H

La idea central se da si V es lo suficientemente "pequeña". Entonces cualquier clase lateral "evita" a V o la intersecta en un único elemento. (Ver dibujo). Para poder demostrar lo anterior es importante que H sea cerrado. Si una cierta clase lateral intersecta a V , entonces dicha clase es de la forma gH para alguna $g \in V$ y por lo tanto los puntos de G/H "cerca" de eH están en correspondencia uno a uno con los puntos de V . A partir de esto se puede demostrar que localmente G/H es una subvariedad de dimensión $\dim(G) - \dim(H)$.

2.1. Pullback de haces principales

Si $f : M \rightarrow N$ es una función suave, G es un grupo de Lie y $\pi : P \rightarrow N$ es un G haz principal, entonces podemos definir un G haz principal sobre M (llamado el pullback de P bajo f) de la siguiente manera: Definamos f^*P como el subconjunto de $M \times P$ cuyos elementos son parejas (m, p) , tales que $f(m) = \pi(p)$. Para poder ver que f^*P es en efecto un haz principal definamos

$$\begin{aligned} \hat{\bullet} : f^*P \times G &\rightarrow f^*P \\ ((m, p), g) &\rightarrow (m, p \bullet g) \end{aligned}$$

donde \bullet es la acción de G en p . La suavidad de $\hat{\bullet}$ se sigue de la suavidad de \bullet .

La función proyección $\hat{\pi} : f^*P \rightarrow M$ está definida como $\hat{\pi}(m, p) := m \quad \forall p \in P, m \in M$. Esta función es claramente suprayectiva y para toda $\hat{p} \in f^*P \quad \pi(p \bullet g) = \pi(\hat{p})$ y por lo tanto se satisface el inciso

3 de la definición de haz principal.

Para el inciso 4 consideremos una vecindad abierta V alrededor de $f(x) \in N$ asociada a una trivialización local

$$\Phi_V : P|_G \rightarrow V \times G$$

y definamos a $\Psi_V : P|_V \rightarrow G$ como $\pi_2 \circ \Phi$ donde π_2 es la proyección de $U \times G$ en G . Definamos U como $f^{-1}(V)$ y consideremos la función

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_V : (f^*P)|_U &\rightarrow U \times G \\ (m, p) &\rightarrow (m, \Psi_V(p)) \end{aligned}$$

que $\tilde{\Phi}_V$ sea equivariante se sigue de su definición. Por lo tanto, f^*P satisface el inciso 4 y es un G haz principal. Anteriormente, vimos cómo dado un haz vectorial podemos construir su haz de marcos el cual resulta ser un haz principal.

En la siguiente sección veremos cómo a partir de un G haz principal y una acción izquierda de G en un espacio vectorial, podemos construir un haz vectorial.

2.2. Haces asociados

Definición 2.4. Si $\pi : P \rightarrow M$ es un G haz principal, F una variedad suave y $\bullet : G \times F \rightarrow F$ es una acción izquierda suave, definimos

$$P_F := P \times F / \sim_G$$

donde $(p, f) \sim_G (p', f') \iff \exists g \in G$ tal que

$$\begin{aligned} p' &= p \bullet g \\ f' &= g^{-1} \bullet f \end{aligned}$$

Dicho de otra forma, los elementos de P_F son las clases de equivalencia $[p, f]$ asociadas a la relación de equivalencia \sim_G .

Teorema 2.3. P_F es un haz fibrado sobre M .

Demostración. Definamos $\hat{\pi} : P_F \rightarrow M$ como $\hat{\pi}([p, f]) := \pi(p)$ y notemos que este mapeo está bien definido. Si $m \in M$ entonces podemos tomar una vecindad U_α alrededor de x en la cual podemos identificar a $\pi^{-1}(U_\alpha)$ con $U_\alpha \times G$. Bajo esta identificación la acción de G en $\pi^{-1}(U_\alpha) \times F$ está dada por

$$(x, g, f) \mapsto (x, gh, h^{-1} \bullet f) \quad \forall h \in G$$

Esto nos permite identificar a $v := [x, g, f] \in P_F$ con $[x, gg^{-1}, g \bullet f] = [x, e, g \bullet f]$, usando esto definamos $\Psi_{U_\alpha} : \pi^{-1}(U_\alpha) \times F / \sim_G \rightarrow U_\alpha \times F$ como $\Psi_{U_\alpha}(v) := (x, g \bullet f)$. La estructura de variedad diferencial en P_F se obtiene al requerir que para toda α $\Psi_{U_\alpha} : \pi^{-1}(U_\alpha) \times F / \sim_G \rightarrow U_\alpha \times F$ sea un difeomorfismo. Si U_β es otra vecindad que contiene a x y en la cual P se trivializa entonces en esta

vecindad podemos representar a v como $v = [x, g_{\alpha\beta}g, f]$ donde $g_{\alpha\beta}$ es el mapeo de transición de P entre $\pi^{-1}(U_\alpha)$ y $\pi^{-1}(U_\beta)$. Esto implica que $\Psi_{U_\beta}(v) = (x, (g_{\alpha\beta}) \bullet g \bullet f)$ y en consecuencia tenemos que

$$P_F \cong \bigsqcup_{\alpha} U_\alpha \times F / \sim$$

donde $(m, f) \in U_\alpha \times F \sim (m', f') \in U_\beta \times F$ si y sólo si $m' = m$ y $f' = g_{\alpha\beta}(m) \bullet f$. En la mayoría de los ejemplos que usaremos F será un espacio vectorial, en este caso P_F será un haz vectorial (siempre y cuando los mapeos de transición $g_{\alpha\beta}$ actúen en F como transformaciones lineales), cuyas funciones de transición están dadas por $g_{\alpha\beta} \bullet$, esto se deduce de inmediato a partir de la formula anterior, la definición de cociclos de un haz vectorial y la definición de \sim . ■

Observación 2.2. La idea de la definición de un haz asociado es que para determinar a un cierto elemento e de un haz vectorial E requerimos especificar un marco p sobre este y el vector coordenado f en este marco. La relación de equivalencia que usamos para definir un haz asociado nos dice cómo cambia la elección del vector coordenado f al cambiar la elección de marco p .

Observación 2.3. Si F es un espacio vectorial, una representación $\rho : G \rightarrow GL(F)$ se puede pensar como una acción izquierda $\bullet : G \times F \rightarrow F$ y por lo tanto en ciertas ocasiones cuando queramos definir un haz asociado P_f definiremos a este como el conjunto de clases de equivalencia de la forma $[p, f]$ donde $[p, f] \sim_G [p', f']$ si y sólo existe $g \in G$ tal que $p' = p \bullet g$ y $f' = \rho(g^{-1})f$. Cuando usemos esta notación escribiremos a P_F como $P \times_{\rho} F$. Usando esta notación podemos expresar las funciones de transición de $P \times_{\rho} G$ como $\rho(g_{\alpha\beta})$ donde $\{g_{\alpha\beta}\}$ es el conjunto de funciones de transición de P .

Observación 2.4. En los ejemplos que usaremos la acción derecha de G en P estará dada por una acción izquierda de G^{-1} en P . Es decir si $p \in P$ y $g \in G$ entonces $p \bullet g = g^{-1} \hat{\bullet} p$ donde $\hat{\bullet} : G \times P \rightarrow P$ es una acción izquierda. En este caso podemos definir a P_F como

$$P_F := P \times F / \sim_G$$

donde $(p, f) \sim_G (p', f') \iff \exists g \in G$ tal que

$$\begin{aligned} p' &= p \bullet g = g^{-1} \hat{\bullet} p \\ f' &= g \bullet f \end{aligned}$$

La demostración de que en efecto P_F es un haz fibrado es completamente análoga a la demostración anterior.

Ejemplo 2.5. Sea $\pi : F \rightarrow M$ un haz vectorial. Consideremos el haz de marcos $P_{GL(E)}$ y recordemos que la acción derecha de $GL(d, \mathbb{R})$ sobre $P_{GL(E)}$ está dada por

$$\bullet : P_{GL(E)} \times GL(d, \mathbb{R}) \rightarrow P_{GL(E)}$$

$$(p, g) \longrightarrow ((g_1^k)^{-1} e_k, (g_2^k)^{-1} e_k, \dots, (g_n^k)^{-1} e_k)$$

Definamos F como \mathbb{R}^d y la acción izquierda \bullet que requerimos como

$$\begin{aligned} \bullet : F \times GL(d, \mathbb{R}) &\rightarrow P_{GL(E)} \\ (f, g) &\rightarrow g_j^i f^j \end{aligned}$$

Una vez dicho la anterior podemos considerar el haz P_F que se obtiene a partir de dicha información. A este haz lo llamaremos $E_{P(E)}$ y el siguiente teorema nos dice que es isomorfo a E .

Teorema 2.4. *La función de haces vectoriales*

$$\begin{aligned} \nu : E_{P(E)} &\rightarrow E \\ [e, f] &\rightarrow f^\alpha e_\alpha \end{aligned}$$

está bien definida y es un isomorfismo.

Demostración. Esto se obtiene de inmediato notando que esta función está bien definida, usando el teorema 2.3 y comparando los mapeos de transición de estos 2 haces. \blacksquare

Ejemplo 2.6. (Productos tensoriales del haz tangente) Sea M una variedad suave de dimensión n , E su haz tangente y $F = \underbrace{(\mathbb{R}^d, \dots, \mathbb{R}^d)}_{p \text{ veces}} \times \underbrace{((\mathbb{R}^d)^*, \dots, (\mathbb{R}^d)^*)}_{q \text{ veces}}$. Definimos la acción izquierda:

$\bullet F \times GL(d, \mathbb{R}) \rightarrow F$ como

$$(g \bullet f)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} := f_{j_1, \dots, j_q}^{\tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_p} g_{\tilde{i}_1}^{i_1} \dots g_{\tilde{i}_p}^{i_p} (g^{-1})_{j_1}^{\tilde{j}_1} \dots (g^{-1})_{j_q}^{\tilde{j}_q}$$

El haz vectorial que se obtiene a partir de esta representación es isomorfo a $\underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{p \text{ veces}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_{q \text{ veces}}$ y el isomorfismo está dado por

$$\begin{aligned} \nu : P_{GL(M)} \times F / \sim_g &\rightarrow \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{p \text{ veces}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \dots \otimes T^*M}_{q \text{ veces}} \\ [(e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_p, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_q)] &\rightarrow f_1^i e_i \otimes f_2^i e_i \dots \otimes f_p^i e_i \otimes \tilde{f}_1^i \tilde{e}^i \otimes \tilde{f}_2^i \tilde{e}^i \dots \otimes \tilde{f}_q^i \tilde{e}^i \end{aligned}$$

donde $\{\tilde{e}^i\}$ es la base dual de $\{e_i\}$. La demostración de que en efecto esto es un isomorfismo es parecida a la demostración anterior.

Los dos ejemplos anteriores ilustran que para estudiar a un cierto haz vectorial E , o a productos tensoriales de este, sólo necesitamos estudiar al haz de marcos $P_{GL(E)}$.

Ejemplo 2.7. ($Ad(P)$)

Sea $\pi : P \rightarrow M$ un G haz principal, definamos el haz $Ad(P)$ como

$$Ad(P) := P \times_\rho Lie(G)$$

donde ρ es la representación adjunta de G en $Lie(G)$. Si $\{g_{\alpha\beta}\}$ es el conjunto de funciones de transición de P asociadas a la cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ entonces $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta trivializadora de $Ad(P)$ y el conjunto de funciones de transición asociadas a esta cubierta está dado por

$\{\rho(g_{\alpha\beta})\}$ y por lo tanto

$$Ad(P) \cong \bigsqcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times F) / \sim$$

donde $(m, f) \in U_{\alpha} \times F \sim (m', f') \in U_{\beta} \times F$ si y sólo si $m = m'$ y $f' = (g_{\alpha\beta}(m))f g_{\alpha\beta}^{-1}(m)$. Un caso de particular importancia para nosotros será el caso en el que nuestro G haz principal $\pi : P \rightarrow M$ es el haz de marcos de un haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$. En este caso las secciones de la haz $Ad(P)$ se pueden interpretar como secciones del haz vectorial $End(E)$. Esto último se sigue del hecho de que estos haces son isomorfos ya que tienen una cubierta abierta trivializadora en común (inducida por una cubierta trivializadora de E) y las mismas funciones de transición. En coordenadas locales el isomorfismo que existe entre $End(E)$ y $Ad(P)$ consiste en asociar a una matriz la transformación lineal canónica que ésta induce. La forma en la que se transforman una sección de $Ad(P)$ bajo un cambio de coordenadas es precisamente la forma en la que se transforma la matriz asociada a una transformación lineal bajo este cambio de coordenadas.

Ejemplo 2.8. ($Ad(P)$) Sea $\pi : P \rightarrow M$ un G haz principal, definamos el haz $Ad(P)$ como

$$Ad(P) := P \times_{Ad} G$$

donde $Ad : G \times G \rightarrow G$ es la acción izquierda definida por

$$Ad(g, h) := (C_g)(h) = ghg^{-1} \quad \forall g, h \in G$$

Si U_{α} es una vecindad en la cual P se trivializa entonces en esta vecindad podemos representar a cualquier sección de $Ad(P)$ como una función $f_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow G$. Si U_{β} es otra vecindad en la que P se trivializa tal que $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ entonces para toda $m \in U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ se tiene que $f_{\beta}(m) = g_{\alpha\beta}(m)f_{\alpha}(m)g_{\alpha\beta}^{-1}(m)$. Como veremos más adelante esta es precisamente la forma en la que se transforman las transformaciones gauge y por lo tanto una transformación gauge de P en P no es más que una sección del haz $Ad(P)$.

Capítulo 3

Conexiones

En este capítulo definiremos una conexión como una cierta estructura adicional que se le da a un haz principal $\pi : P \rightarrow M$. Esta nos permitirá definir la idea de transporte paralelo en P (el cual nos dice como identificar fibras cercanas) y en cualquier haz asociado a P . Si este haz asociado resulta ser un haz vectorial entonces la idea de transporte paralelo nos ayudara a definir la derivada covariante de una sección de E . Nuestro objetivo principal es introducir el material necesario para poder formular la ecuación de Dirac en un espacio tiempo curvo M , para hacer esto tendremos que poder derivar covariantemente a un campo de espinores de Dirac.

Observación 3.1. En la geometría Riemanniana no se suele distinguir mucho entre las ideas de conexión, transporte paralelo y derivada covariante. Sin embargo hay que recordar que en la definición que nosotros usaremos tenemos una jerarquía descendente de generalidad entre estos conceptos.

3.1. Conexiones en haces principales

Definición 3.1. Sea $\pi : P \rightarrow M$ un G haz principal y $p \in P$. Definamos el sub-espacio vertical en p V_pP como $V_pP := \ker(\pi_*)_p$.

Definición 3.2. Sea $A \in \text{Lie}(G)$. Definamos el campo vectorial $X^A \in C^\infty(P, TP)$ como $X_p^A := (p \bullet \exp(tA))'(0)$.

Lema 3.1. Para todo $p \in P$, se tiene que $X_p^A \in V_pP$.

Demostración. Consideremos la curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow P$ definida por $\gamma(t) = p \bullet \exp(tA)$. Claramente, $\gamma'(0) = X_p^A$, ahora, $\pi(\gamma(t)) = \pi(\gamma(0))$, ya que esta curva vive en una fibra y por lo tanto $\pi_*(X_p^A) = 0$ y esto implica que $X_p^A \in V_pP$. ■

Teorema 3.1. La función

$$\begin{aligned} i_p : T_e G &\longrightarrow V_p P \subseteq T_p P \\ A &\longmapsto X_p^A \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Esta función es lineal ya que es el diferencial de B_p en la identidad del grupo, donde $B_p(g) := pg$. Para ver que es inyectiva consideremos $A \in \text{Ker}(i_p)$, por lo tanto la curva $p \bullet \exp(tA)$ es constante por lo que $A = 0$. Es decir, i_p es inyectiva. Ahora, $\dim(P) = \dim(M) + \dim(G)$ como variedades diferenciales y

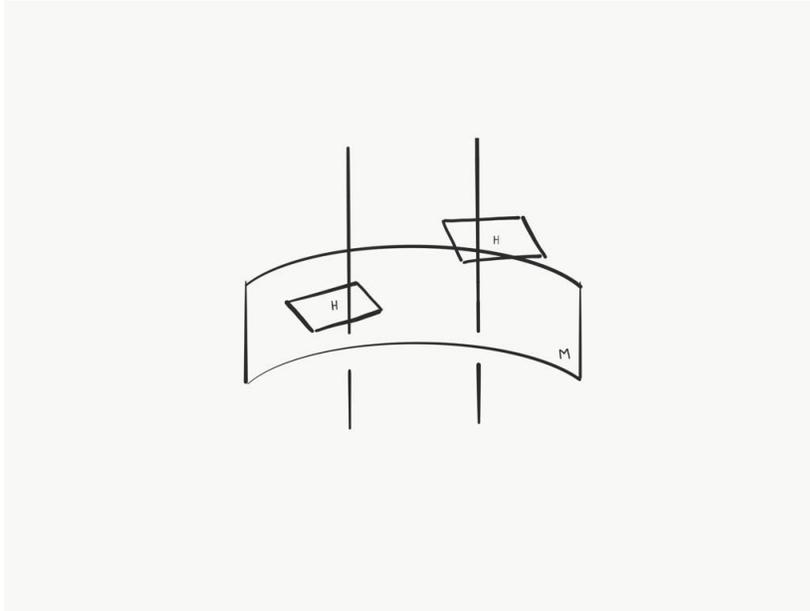
$$\dim(\text{Ker}(\pi_p)_*) + \dim(\text{Im}(\pi_p)_*) = \dim(T_pP)$$

debido a el teorema de la dimensión, es decir, $\dim(V_pP) + \dim(M) = \dim(T_pP)$ pues π es sumersión y así se tiene que

$$\dim(G) = \dim(T_eG) = \dim(V_pP)$$

y por lo tanto i_p es un isomorfismo. ■

La idea de una conexión es elegir cómo conectar los puntos de fibras cercanas, esto nos ayudará para poder definir la idea de transporte paralelo y finalmente la idea de derivada covariante.



Definición 3.3. Una conexión en un haz principal es una asignación para toda $p \in P$ de un subespacio H_pP de T_pP que satisface que

1. $H_pP \oplus V_pP = T_pP$
2. $(Rg)_*(H_pP) = H_{p \bullet g}$

Observación 3.2. Una conexión en un haz principal P nos permite separar a cualquier campo vectorial $X \in \mathcal{C}^\infty(M, TP)$ de la siguiente manera.

$$X_p = \text{hor}(X_p) + \text{ver}(X_p) \in H_pP \oplus V_pP$$

Lo siguiente que veremos es cómo la elección del espacio horizontal H_pP se encuentra convenientemente codificada en la 1-forma

$$\begin{aligned} \omega_p : T_p P &\longrightarrow T_e G \\ X_p &\longmapsto \omega_p(X_p) := i_p^{-1}(\text{ver}(X_p)) \end{aligned} .$$

Lema 3.2. $H_p P = \text{Ker}(\omega_p)$.

Demostración. Sea $X_p \in \text{Ker}(\omega_p)$, entonces $\omega_p(X_p) = 0$, es decir, $i_p^{-1}(\text{ver}(X_p)) = 0$, pero i_p es un isomorfismo entre $T_e G$ y $V_p P$ y por lo tanto i_p^{-1} es un isomorfismo, así $\text{ver}(X_p) = 0$, es decir, $X_p \in H_p P$. Por otro lado, si $X_p \in H_p P$, entonces $\text{ver}(X_p) = 0$ por lo que $X_p \in \text{Ker}(\omega_p)$. ■

Teorema 3.2. La 1-forma ω satisface las siguientes propiedades

1. $\omega(X_p^A) = A$
2. $((Rg)^*\omega)_p(X_p) = (Ad_{g^{-1}})_*(\omega_p(X_p))$

Demostración.

1. $\omega_p(X_p^A) = i_p^{-1}(\text{ver} X_p^A) = i_p^{-1}(X_p^A) = A$, ya que $X_p^A \in V_p P$. ■
2. Claramente, estas dos funciones son lineales y se anulan en cualquier vector horizontal, ya que la distribución horizontal H es equivariante. Por lo tanto, basta probar la igualdad para elementos de TP de la forma X^A .

$$\begin{aligned} &((Rg)^*\omega)(X_p^A) \\ &= \omega((Rg)_*X_p^A) \\ &= \omega((p \cdot \exp(At) \cdot g)'(0)) \\ &= \omega((pgg^{-1} \cdot \exp(At) \cdot g)'(0)) \\ &= \omega(pg(\exp((Ad_{g^{-1}})_*A))'(0)) \\ &= \omega(X_{p \cdot g}^{(Ad_{g^{-1}})_*A}) = (Ad_{g^{-1}})_*A \end{aligned}$$

■

■

Ahora veremos cómo si partimos de una uno forma ω que satisface las condiciones del teorema anterior entonces podemos generar una conexión en P .

Lema 3.3. Si definimos $H_p := \text{Ker}(\omega_p)$ donde ω es una uno-forma que satisface las condiciones del teorema anterior entonces

$$(Rg)_*H_p = H_{p \bullet g}$$

Demostración. Consideremos $X \in H_p$ y notemos que

$$\omega((Rg)_*X) = (Rg)^*\omega(X) = Ad_g^{-1}\omega(X)$$

y por lo tanto $(Rg)_*X \in \text{Ker}(H_{p \bullet g})$. Debido a que $(Rg)_*$ es lineal e invertible, cualquier elemento de $H_{p \bullet g}$ es de la forma $(Rg)_*X$ donde $X \in H_p$ y esto termina la demostración. ■

Lema 3.4. $\text{Ker}(\omega_p) \oplus V_p P = T_p P \quad \forall p \in P$

Demostración. Empecemos por recordar que para toda $p \in P$ $\ker(\omega_p) = H_p$ y que $\dim(V_p P) = \dim(G) = \dim(\text{Lie}(G)) = \dim(\text{im}(\omega_p))$. Usando el teorema de la dimensión obtenemos que $\dim(\ker(\omega_p)) + \dim(\text{im}(\omega_p)) = \dim(H_p) + \dim(V_p P) = \dim(T_p P) = \dim(P)$. Utilizando esto último y el hecho de que $H_p \cap V_p P = \emptyset$ podemos concluir que $H_p \oplus V_p P = T_p P$. ■

Los dos lemas anteriores tienen como consecuencia el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Sea P un G haz principal. Una conexión en P está dada por una uno-forma ω con valores en $\text{Lie}(G)$ que satisface las condiciones del teorema 3.2.*

Ejemplo 3.1. Supongamos que P es un G haz principal de la forma $P = U \times G$ donde G es un grupo lineal y consideremos la uno forma de Maurer-Cartan

$$\omega = g^{-1} dg$$

Usando la definición de la uno-forma de Maurer-Cartan y el teorema anterior es que claro que ω define una conexión en P .

3.2. Formas horizontales y formas básicas

Definición 3.4. Sea $\pi : P \rightarrow M$ un G haz principal y V un espacio vectorial. Decimos que una k -forma $\alpha \in C^\infty(P, \wedge^k T^* P \otimes V)$ es horizontal, si para cualesquiera campos vectoriales $X_1 \cdots, X_k$ en P tenemos que:

$$\alpha(X_1, \cdots, X_k) = \alpha(\text{hor}(X_1), \cdots, \text{hor}(X_k))$$

En el caso en el que V admita una representación $\rho : G \rightarrow GL(V)$ podemos definir una forma básica como:

Definición 3.5. Si $\alpha \in C^\infty(P, \wedge^k T^* P \otimes V)$ es una forma horizontal, decimos que α es básica si $\forall g \in G$:

$$(Rg)^* \alpha = \rho(g^{-1}) \circ \alpha$$

Definición 3.6. Al conjunto de k -formas básicas en P con valores en V lo escribiremos como $C_G^\infty(P, \wedge^k T^* P \otimes V)$.

Como veremos a continuación, existe una biyección entre formas básicas en P con valores en V y formas en M con valores en el haz asociado $P \times_\rho V$.

Supongamos que θ es un elemento de $C_G^\infty(P, \wedge^k T^* P \otimes V)$ y que $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una cubierta abierta en la cual P se trivializa. Definamos $\theta_\alpha := (s_\alpha)^*(\theta)$. Para cualquier $U_\beta \in U$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ tenemos que $\forall m \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $\forall X_1, \cdots, X_k \in T_m M$:

$$\begin{aligned} \theta_\beta(X_1, \cdots, X_k) &= \theta((s_\beta)_*(X_1, \cdots, X_k)) \\ &= \theta((g_{\beta\alpha})_*((s_\alpha)_*(X_1, \cdots, X_k))) \\ &= \rho((g_{\beta\alpha})^{-1})\theta((s_\alpha)_*(X_1, \cdots, X_k)) \\ &= \rho((g_{\beta\alpha})^{-1})\theta_\alpha(X_1, \cdots, X_k) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{\theta_\alpha\}_{\alpha \in I}$ se transforma de la forma requerida para poder definir una k-forma con valores en $P \times_\rho V$.

Por el contrario, supongamos que tenemos un elemento θ de $C^\infty(M, \wedge^k T^*M \otimes (P \times_\rho V))$ y representemos a θ mediante un conjunto de 1-formas $\theta_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, \wedge^k T^*U_\alpha \otimes V)$. En $\pi^{-1}(U_\alpha)$, escribamos a la trivialización local $\phi_\alpha : (U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ como $\phi_\alpha(p) = (\pi(p), g_\alpha(p))$ y definamos $\hat{\theta}_\alpha \in C_G^\infty(\pi^{-1}(U_\alpha), \wedge^k T^*(\pi^{-1}(U_\alpha)) \otimes V)$ como:

$$\hat{\theta}_\alpha(X_p) = \rho(g_\alpha^{-1}(p))\theta_\alpha(\pi_*X_p)$$

donde $X_p := ((X_1)_p, (X_2)_p, \dots, (X_k)_p)$. Claramente $\hat{\theta}_\alpha$ es horizontal por construcción. Para ver que $\hat{\theta}_\alpha$ es básica notemos que:

1. $\forall g \in G \quad \pi = \pi \circ Rg \quad \text{por lo tanto} \quad \pi_*((Rg)_*X_p) = (\pi \circ Rg)_*X_p = \pi_*X_p$
2. $g_\alpha^{-1}(p \cdot g) = (g_\alpha(p) \cdot g)^{-1} = g^{-1}g_\alpha^{-1}(p)$

Esto implica que $((Rg)^*\hat{\theta}_\alpha)(X_p) = \hat{\theta}_\alpha((Rg)_*(X_p)) = \rho(g_\alpha^{-1}(p \cdot g))\theta_\alpha(\pi_*X_p) = \rho(g^{-1}g_\alpha^{-1}(p))\theta_\alpha(\pi_*X_p) = \rho(g^{-1})\rho(g_\alpha^{-1}(p))\theta_\alpha(\pi_*X_p) = \rho(g^{-1})\hat{\theta}_\alpha(X_p)$ y por lo tanto, $\hat{\theta}_\alpha$ es básica. Si $U_\beta \in U$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_\beta(X_p) &= \rho(g_\beta^{-1}(p))\theta_\beta(\pi_*(X_p)) \\ &= \rho(g_\beta^{-1}(p))\rho(g_{\beta\alpha}^{-1}(\pi(p)))\theta_\alpha(\pi_*X_p) \\ &= \rho(g_\beta^{-1}(p)g_\beta(p)g_\alpha^{-1}(p))\theta_\alpha(\pi_*X_p) \\ &= \rho(g_\alpha^{-1}(p))\theta_\alpha(\pi_*(X_p)) \\ &= \hat{\theta}_\alpha(X_p) \end{aligned}$$

Debido a esto tenemos que el conjunto de los $\hat{\theta}_\alpha$ se 'pega' consistentemente y define una k-forma básica $\hat{\theta}$ en P . Básicamente por construcción, estos dos procesos son inversos el uno del otro, es decir $\theta = \hat{\theta}$. Para demostrar esto sólo es necesario notar que en $U_\alpha \times G$ X_p y $R_{g_\alpha(p)}\pi_*(X_p)$ difieren por un vector vertical y por lo tanto se tiene que

$$\theta(X_p) = \theta(R_{g_\alpha(p)}\pi_*(X_p)) = \rho(g_\alpha^{-1}(p))\theta_\alpha(\pi_*X_p) = \hat{\theta}(X_p)$$

En resumen, tenemos el siguiente teorema (este será de gran utilidad).

Teorema 3.4. *Existe una correspondencia uno a uno entre $C_G^\infty(P, \wedge^k T^*P \otimes V)$ y $C^\infty(M, \wedge^k T^*M \otimes (P \times_\rho V))$*

Debido a lo anterior, podemos concluir que existe una correspondencia uno a uno entre:

1. $C^\infty(P_{GL(E)}, \wedge^k T^*P_{GL(E)} \otimes Lie(GL(R^{dim(E)})))$ y $C_G^\infty(M, \wedge^k T^*M \otimes End(E))$
2. $C^\infty(P_{O(E)}, \wedge^k T^*P_{O(E)} \otimes Lie(O(dim(E))))$ y $C_G^\infty(M, \wedge^k T^*M \otimes End_O(E))$

Donde en (2) estamos suponiendo que E tiene una métrica riemanniana y estamos escribiendo a los endomorfismos de E que preservan la métrica como $End_O(E)$. Como un corolario de la demostración del teorema anterior tenemos lo siguiente

Corolario 3.1. Si $\theta \in C_G^\infty(P, \wedge^k T^*P \otimes V)$ y $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta en la cual P se trivializa entonces en $U_\alpha \times G$

$$\theta(X_p) = \rho(g_\alpha^{-1}(p))\theta_\alpha(\pi_* X_p)$$

donde $\theta_\alpha = s_\alpha^*(\theta)$.

3.3. El espacio de conexiones

Si tenemos dos conexiones ω, ω' en un G haz principal $\pi : P \rightarrow M$, la resta de éstas es una forma horizontal. Si $\rho : G \rightarrow Lie(G)$ es la representación adjunta, es fácil ver (usando la definición de conexión del teorema 3.2) que $\omega - \omega'$ es una forma básica. Esto implica que si fijamos una conexión ω entonces cualquier otra conexión ω' se puede representar mediante $\omega - \omega' \in C_G^\infty(P, T^*P \otimes Lie(G))$. Por el contrario, si $\theta \in C_G^\infty(P, T^*P \otimes Lie(G))$ entonces claramente $\omega + \theta$ satisface las condiciones requeridas para definir una conexión en P . En resumen tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.5. El espacio de conexiones de un G haz principal $\pi : P \rightarrow M$ es un espacio afín modelado por $C_G^\infty(P, T^*P \otimes Lie(G)) \cong C^\infty(M, T^*M \otimes Ad(P))$.

3.4. Representantes locales de la conexión

Consideremos un G haz principal $\pi : P \rightarrow M$ una conexión ω en P y una cubierta abierta de M , $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en la cual P se trivializa. Escribamos a estas trivializaciones como $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$ y consideremos la conexión en $U_\alpha \times G$ dada por $(\Phi_\alpha^{-1})^*(\omega)$. Como vimos en el ejemplo 3.1 la forma de Maurer Cartan $g^{-1}dg$ define una conexión en el haz trivial $U_\alpha \times G$ y, por lo tanto, la resta de $g^{-1}dg$ y $(\Phi_\alpha^{-1})^*(\omega)$ es una 1-forma horizontal en $U_\alpha \times G$ con valores en $Lie(G)$. Analizando la demostración del teorema 3.4 podemos concluir que existe una 1-forma $A_\alpha : TU_\alpha \rightarrow Lie(G)$ tal que:

$$(\Phi_\alpha^{-1})^*(\omega) - g^{-1}dg = g^{-1}A_\alpha g$$

es decir:

$$((\Phi_\alpha^{-1})^*(\omega) - g^{-1}dg)(X, V) = g^{-1}A_\alpha(X)g$$

para toda $(X, V) \in T_m M \times T_g G$.

Utilizando de nuevo el teorema 3.4, notemos que $A_\alpha = \hat{s}_\alpha^*((\Phi_\alpha^{-1})^*(\omega) - g^{-1}dg)$. Donde \hat{s}_α es la sección canónica asociada a la trivialización de $U_\alpha \times G$ en U_α . En este caso \hat{s}_α es la sección cero, y debido a que $g^{-1}dg$ es idénticamente 0, cuando se restringe a TU_α , podemos concluir que:

$$A_\alpha = \hat{s}_\alpha^*(\Phi_\alpha^{-1})^*\omega = (\Phi_\alpha^{-1})^*s_\alpha^*\omega$$

donde en la última igualdad s_α representa a la sección canónica de $\pi^{-1}(U_\alpha)$ asociada a la trivialización $\Phi : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$.

Teorema 3.6. Si $U_\beta \in U$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces:

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta}A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} - dg_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1}$$

Demostración. Sea $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ un elemento que vive en la fibra de p y consideremos un elemento v en $T_p P$ tal que $(\Phi_\alpha)_*(v)$ es de la forma $(X, 0) \in T_m(U_\alpha \cap U_\beta) \times T_e G$. Con el objetivo de simplificar la notación, pensemos que (m, e) y $(X, 0)$ son los representantes de p y de v respectivamente, en las coordenadas dadas por U_α . Consideremos una curva

$$\begin{aligned}\gamma_\alpha : [0, 1] &\rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \\ t &\rightarrow (q(t), e)\end{aligned}$$

Tal que $\dot{q}(0) = X$ y pensemos a esta curva, como el representante en $U_\alpha \times G$ de una curva γ en $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. En $U_\beta \times G$, la curva γ se representa como:

$$\begin{aligned}\gamma_\beta : [0, 1] &\rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \\ t &\rightarrow (q(t), g_{\beta\alpha}(t))\end{aligned}$$

Y por lo tanto, las 'etiquetas' de $v \in (TU_\alpha \times TG)$ están dadas por $(X, g'_{\beta\alpha}(0)) = (X, dg_{\beta\alpha}(X)) \in (T_m U_\beta \times T_{g_{\beta\alpha}(m)} G)$. Por lo tanto:

$$A_\alpha(X) = (\Phi_\alpha^{-1})^* \omega(X, 0) = (\Phi_\beta^{-1})^* \omega(X, dg_{\beta\alpha}(X)) = \omega(v)$$

Esto implica que:

$$\begin{aligned}A_\alpha(X) &= g_{\beta\alpha}^{-1}(m) A_\beta(X) g_{\beta\alpha}(m) + g_{\beta\alpha}^{-1} dg_{\beta\alpha}(X) \\ &= g_\alpha(p) g_\beta^{-1}(p) A_\beta(X) g_\beta(p) g_\alpha^{-1}(p) + g_{\beta\alpha}^{-1} dg_{\beta\alpha}(X) \\ &= g_{\alpha\beta}(m) A_\beta(X) g_{\alpha\beta}^{-1}(m) + g_{\alpha\beta}(m) dg_{\alpha\beta}^{-1}(X)\end{aligned}$$

Por último vemos que:

$$d(gg^{-1}) = 0 = dgg^{-1} + gdg^{-1}$$

y por lo tanto

$$A_\alpha(X) = g_{\alpha\beta}(m) A_\beta(X) g_{\alpha\beta}^{-1}(m) - dg_{\alpha\beta}(X) g_{\alpha\beta}^{-1}(m)$$

■

Por el contrario, si tenemos un conjunto de uno formas $(A_\alpha)_{\alpha \in I} : U_\alpha \rightarrow Lie(G)$ que se transforma de la forma dada por el teorema anterior y definimos $\omega_\alpha : TU_\alpha \times TG \rightarrow Lie(G)$ como :

$$\omega_\alpha(X, V) := g^{-1} A_\alpha(X) g + (g^{-1} dg)(V) \quad \forall (X, V) \in T_m U_\alpha \times T_g G$$

Entonces, las 1-formas, ω_α se pegan consistentemente y definen una uno forma ω en P . Para demostrar esto empecemos por considerar una curva $\gamma_\alpha(t) = (q_\alpha(t), h_\alpha(t))$ en $U_\alpha \times G$ tal que $(X, V) = (q'_\alpha(0), h'_\alpha(0))$. Si pensamos a γ_α como el representante en $U_\alpha \times G$ de una curva γ en $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ entonces en $U_\beta \times G$ esta curva se representa como $\gamma_\beta(t) = (q(t), g_{\beta\alpha}(t) h_\alpha(t))$. Esto implica que en $U_\beta \times G$ podemos representar a $\gamma'(0)$ con las etiquetas:

$$\gamma'_\beta(0) = (X, g_{\beta\alpha}(m) V + dg_{\beta\alpha}(X) h_\alpha(0)) = (X, g_{\beta\alpha}(m) V + dg_{\beta\alpha}(X) g) \in T_m U_\alpha \times T_{g_{\beta\alpha}(m)} G$$

Debido a esto, hay que demostrar que $\omega_\alpha(X, V) = \omega_\beta(X, g_{\beta\alpha}(m)V + dg_{\alpha\beta}(X)g)$.

$$\begin{aligned}
\omega_\alpha(X, V) &= g^{-1}A_\alpha(X)g + (g^{-1}dg)(V) \\
&= g^{-1}(g_{\alpha\beta}(m)A_\beta(X)g_{\alpha\beta}^{-1}(m) + g_{\beta\alpha}^{-1}dg_{\beta\alpha}(X))g + (g^{-1}dg)(V) \\
&= (g_{\beta\alpha}g)^{-1}A_\beta(X)(g_{\beta\alpha}g) + g^{-1}(g_{\beta\alpha}^{-1}dg_{\beta\alpha}(X))g + (g^{-1}dg)(V) \\
&= (g_{\beta\alpha}g)^{-1}A_\beta(X)(g_{\beta\alpha}g) + g^{-1}(g_{\beta\alpha}^{-1}dg_{\beta\alpha}(X))g + (g^{-1}dg)(g_{\alpha\beta}(m)V) \\
&= (g_{\beta\alpha}g)^{-1}A_\beta(X)(g_{\beta\alpha}g) + (g^{-1}dg)(g_{\beta\alpha}(m)V + dg_{\alpha\beta}(X)g) \\
&= \omega_\beta(X, g_{\beta\alpha}(m)V + dg_{\alpha\beta}(X)g)
\end{aligned}$$

Es fácil ver que la uno forma ω satisface las condiciones del teorema 3.2 y por lo tanto define una conexión en P . En resumen tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.7. *Sea P un G haz principal. Una conexión en P está dada por un conjunto de uno formas A_α que se transforman de la forma dada por el teorema 3.6. A las formas A_α las llamaremos representantes locales de la conexión.*

Ejemplo 3.2. Consideremos una variedad suave M y el haz de marcos $P_{GL(M)}$ asociado a esta. Sea $(U, \{x^i = (\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R})_{i=1, \dots, \dim(M)}\})$ un sistema de coordenadas locales de M . Esto induce una trivialización local del haz de marcos $P_{GL(M)}$, la sección (local) canónica asociada a esta trivialización está dada por:

$$s(m) := \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_m \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^{\dim(M)}} \right)_m \right) \forall m \in M$$

La uno-forma A toma valores en $Lie(GL(\dim(M), \mathbb{R}))$ y por lo tanto podemos definir

$$A_{\mu j}^i := (A_\mu)_j^i = A \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_j^i$$

Supongamos que tenemos un segundo sistema de coordenadas locales $(U', \{x'^i = (\varphi'_i : U' \rightarrow \mathbb{R})_{i=1, \dots, \dim(M)}\})$ tal que $U \cap U' \neq \emptyset$ entonces para toda $x \in U \cap U'$ tenemos que

$$A' = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$$

En este caso g es el jacobiano del cambio de coordenadas s y por lo tanto

$$g_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}^\nu := \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
A'^\mu &:= (s'^*\omega)(\partial_{\mu'}) = \\
&= (J^{-1}AJ + JdJ^{-1})(\partial_{\mu'}) = \\
&= (J^{-1}AJ)(\partial_{\mu'}) + JdJ^{-1}(\partial_{\mu'}) = \\
&= (J^{-1}AJ)((J^{-1})^\alpha_\mu(J^{-1}AJ\partial_\alpha) + J\partial_{\mu'}(J^{-1})) = \\
&= (J_\mu^{-1\alpha})(J^{-1}A_\alpha J) + J\partial_{\mu'}(J^{-1})
\end{aligned}$$

insertando los índices correspondientes obtenemos

$$A'^\epsilon_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\chi} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\delta} A^\chi_{\alpha\rho} + \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x'^\delta}$$

Esta es precisamente la forma en la que se transforman los símbolos de Christoffel para una conexión afín en el haz tangente. Esta relación será más clara más adelante.

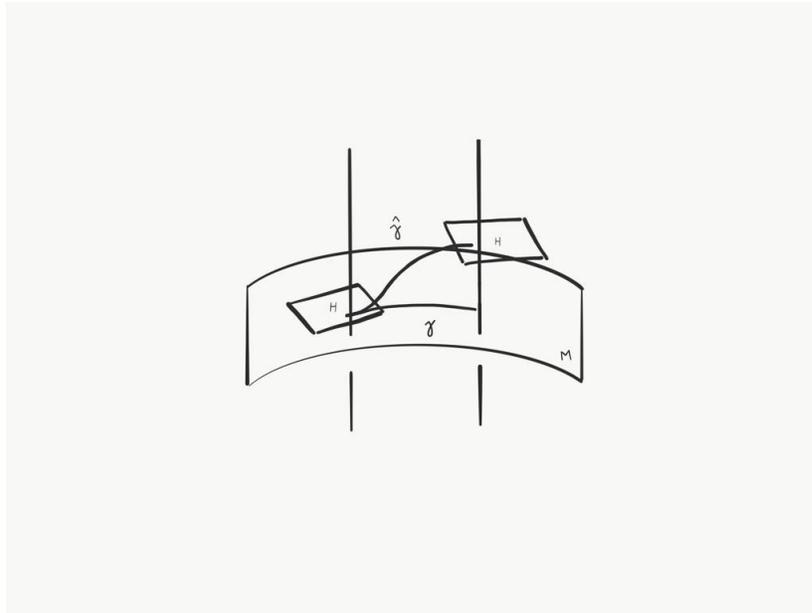
Una de las ventajas de pensar a una conexión mediante sus representantes locales A_α es que la distribución horizontal H_ω toma la siguiente forma en $U_\alpha \times G$:

$$(\Phi_\alpha^{-1})_* H_\omega|_{(m,g)} = \{X, -g^{-1}(g^{-1}A_\alpha(X)g)|X \in T_m U_\alpha\}$$

Esto se demuestra de inmediato, al notar que todo punto de este conjunto está en el kernel de $(\Phi_\alpha^{-1})^*(\omega)$ y que $(\Phi_\alpha^{-1})_* H_\omega|_{(m,g)}$ es un subespacio vectorial de $T_m U_\alpha \times T_g G$ de la misma dimensión que M .

3.5. Levantamientos horizontales y transporte paralelo

Definición 3.7. Una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow P$ es horizontal con respecto a una cierta conexión ω si $\forall t \in [0, 1] \quad \gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}$.



Definición 3.8. Si $\pi : P \rightarrow M$ es un G haz principal y $q(t)$ es una curva en M , decimos que $\gamma(t)$ es un levantamiento de $q(t)$ si para toda t $\pi \circ \gamma(t) = q(t)$. Si, además, $\gamma(t)$ es horizontal decimos que $\gamma(t)$ es un levantamiento horizontal.

Supongamos que $q : [0, 1] \rightarrow U_\alpha \subset M$ es una curva suave en M y que $s_\alpha : U \rightarrow P$ es la sección local canónica asociada a una trivialización local $\Phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times G \rightarrow P$. Definamos $\gamma(t)$ como

$$\begin{aligned} \gamma[0, 1] &\rightarrow P \\ t &\rightarrow s(q(t)) \end{aligned}$$

y consideremos la siguiente pregunta ¿Cómo podemos modificar a $\gamma(t)$ de tal forma que ésta se vuelva horizontal? Algo que podemos hacer es tratar de ver en cuánto difiere γ de un hipotético levantamiento horizontal $\hat{\gamma}(t)$ tal que $\hat{\gamma}(0) = p$. Es decir, encontrar una curva $g : [0, 1] \rightarrow G$ tal que $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t) \cdot g(t)$. Para poder encontrar $g(t)$ usemos que

$$\omega(\hat{\gamma}(t)) = 0$$

Si utilizamos Φ_α para escribir esta ecuación en coordenadas locales, obtenemos

$$((\Phi_\alpha^{-1})^*\omega)_{q(t),g(t)}(q'(t), g'(t)) = 0$$

Como vimos anteriormente $(q'(t), g'(t))$ es horizontal, si y sólo si es de la forma:

$$(x, -g(t)(g(t)^{-1}A_\alpha(x)g(t)))$$

y por lo tanto $(q'(t), g'(t))$ es horizontal si y sólo si:

$$\dot{g}(t) = -g(t)(g(t)^{-1}A_\alpha(\dot{q}(t))g(t)) \quad (3.1)$$

Extendiendo a $\dot{q}(t)$ a un campo vectorial definido en todo U_α y utilizando el teorema fundamental de campos vectoriales, podemos concluir que existe una única solución a esta ecuación diferencial. En resumen, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Si $\pi : P \rightarrow M$ es un G haz principal equipado con una conexión y $q : [0, 1] \rightarrow M$ es una curva suave tal que $q(0) = m$, entonces para cualquier $p \in P|_m$ existe un único levantamiento horizontal $\hat{q} : [0, 1] \rightarrow P$ con la propiedad de que $\hat{q}(0) = p$.*

Debido al teorema anterior tenemos que al variar dentro de la fibra, la condición inicial $p \in P|_m$ obtenemos un mapeo

$$\begin{aligned} \tau : P|_m &\rightarrow P|_{q(t)} \\ p &\rightarrow \hat{\gamma}(t) \end{aligned}$$

A este mapeo le llamaremos transporte paralelo a lo largo de la curva $q : [0, 1] \rightarrow M$

Teorema 3.9. *Para cualquier curva, $q : [0, 1] \rightarrow M$ transportar paralelamente a lo largo de ésta conmuta con la acción de G en P*

Demostración. Si $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow P$ es el levantamiento horizontal de $q : [0, 1] \rightarrow P$ tal que $\hat{\gamma}(0) = p$, entonces $\hat{\gamma} \cdot g$ es el levantamiento de q con la propiedad de que $(\hat{\gamma} \cdot g)(0) = p \cdot g(0)$, $(Rg) \circ \hat{\gamma}$ es horizontal ya que $(\hat{\gamma} \cdot g)'(t) = (Rg)_*(\hat{\gamma}'(t))$ y debido a que Rg preserva los subespacios horizontales podemos concluir que $(Rg)_*(\hat{\gamma}'(t)) \in H_{\hat{\gamma}(t) \cdot g}$. Por lo tanto, $(Rg) \circ \hat{\gamma}$ es el levantamiento horizontal de q con condición inicial $\hat{\gamma}(0) \cdot g = p \cdot g$. Esto implica que $\tau_t \cdot g = (Rg) \circ \tau_t$ y esto es lo que buscábamos demostrar. ■

Debido a que G actúa libre y transitivamente en todas las fibras, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.2. *Si t es lo suficientemente pequeño, entonces*

$$\tau_t : P|_m \rightarrow P|_{q(t)}$$

es un función invertible. A esta función le llamaremos transporte paralelo.

Observación 3.3. Los 2 resultados anteriores ejemplifican porque requerimos que $(Rg)_*H_p = H_{p.g}$. Ya que como veremos más adelante, que τ_t sea invertible será fundamental para poder definir la idea de derivada covariante en haces vectoriales.

3.5.1. Levantamiento horizontal en haces asociados

La idea de levantamiento horizontal en un haz principal induce naturalmente una idea de levantamiento horizontal en cualquier haz asociado a este. Consideremos un G haz principal $\pi : G \rightarrow M$ y un haz vectorial $\hat{\pi} : E \rightarrow M$ de la forma $P \times_\rho V$ donde $\rho : G \rightarrow GL(V)$ es una representación de G en V .

Consideremos una curva $q : [0, 1] \rightarrow U_\alpha \subset M$ donde U_α es una vecindad abierta en la cual el P y por lo tanto E , se trivializan. Sea $[p, v]_\rho$ cualquier elemento en $\pi^{-1}(q(0))$ y definamos

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_E : [0, 1] &\rightarrow E \\ t &\rightarrow [\hat{\gamma}, v]_\rho \end{aligned}$$

Donde $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \subset P$ es el levantamiento horizontal de q con condición inicial $\hat{\gamma}(0) = p$.

Definición 3.9. A $\hat{\gamma}_E : [0, 1] \rightarrow \pi_E^{-1}(U_\alpha)$ le llamaremos el levantamiento horizontal de q en E con condición inicial $\hat{\gamma}_E(0) = [p, v]_\rho$.

Observación 3.4. Recordemos la interpretación de un elemento de un haz asociado como 'una pareja de una base y unas coordenadas'. Luego, notemos que la definición de levantamiento horizontal en un haz asociado nos dice que un 'movimiento' en éste es horizontal, si la base se 'mueve' horizontalmente y las coordenadas permanecen fijas.

Al igual que en el caso de haces principales, podemos definir transporte paralelo a lo largo de una curva $q : [0, 1] \rightarrow U_\alpha \subset M$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \tau_t : \pi_E^{-1}(q(0)) &\rightarrow \pi_E^{-1}(q(t)) \\ [p, v]_\rho &\rightarrow \hat{\gamma}_E(t) \end{aligned}$$

Observación 3.5. Claramente, transportar paralelamente (tanto en haces principales como en asociados) depende de la elección de $q : [0, 1] \rightarrow M$. Sin embargo, es fácil convencerse de que no depende de la parametrización de dicha curva.

3.6. Derivada covariante en haces vectoriales inducida por una conexión en su haz de marcos

Ahora estamos listos para poder derivar secciones de un haz vectorial a lo largo de una curva.

Definición 3.10. Si E es un haz vectorial de la forma $E = P \times_\rho V$ donde P , es un G haz principal, $\sigma : U \subset M \rightarrow \pi_E^{-1}(U)$ una sección local de E y $q : [0, 1] \rightarrow U$ una curva suave con condición inicial $q(0) = x_0$. Definamos la derivada covariante σ a lo largo de q en el tiempo $t = 0$ como

$$\nabla_q \sigma := \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_t^{-1} \sigma(q(t)) - \sigma(x_0)}{t} \right) \in \pi_E^{-1}(x_0)$$

Para poder calcular $\nabla_q \sigma$ supongamos que P y E se trivializan en U e introduzcamos coordenadas locales

$$\begin{aligned} \Phi_E : \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times V \\ [p, v]_\rho &\rightarrow (\pi_E(p), h([p, v]_\rho)) \end{aligned}$$

Sea $\hat{\gamma}(t) = q(t) \cdot g(t)$ el levantamiento horizontal de q en P con condición inicial $\hat{\gamma}(0) = s_U(q(0)) =: p$ donde s_U es la sección canónica asociada a la trivialización de P en U . Notemos que si $[p, v]_\rho \in \pi^{-1}(x_0)$ entonces el levantamiento horizontal $\hat{\gamma}_E$ con condición inicial $\hat{\gamma}_E(0) = [p, v]_\rho$ está dado por

$$\hat{\gamma}_E(t) = [s_U(q(t)) \cdot g(t), v]_\rho = [s_U(q(t)), \rho(g^{-1}(t))(v)]_\rho$$

Por lo tanto, en las coordenadas locales dadas por Φ_E , la curva $\hat{\gamma}_E : [0, 1] \rightarrow \pi^{-1}(U)$ toma la forma

$$\begin{aligned} \Phi \circ \hat{\gamma}_E : [0, 1] &\rightarrow U \times V \\ t &\rightarrow (q(t), \rho(g^{-1}(t))v) \end{aligned}$$

donde $g : [0, 1] \rightarrow G$ satisface la ecuación diferencial dada por la ecuación 3.1. Debido a esto, transportar paralelamente en estas coordenadas está dado por:

$$\begin{aligned} \tau_t : \hat{\pi}^{-1}(q(0)) &\rightarrow \hat{\pi}^{-1}(q(t)) \\ (q(0), v) &\mapsto (q(t), \rho(g^{-1}(t))v) \\ \tau_t^{-1} : \hat{\pi}^{-1}(q(t)) &\rightarrow \hat{\pi}^{-1}(q(0)) \\ (q(t), w) &\rightarrow (q(0), \rho(g(t))w) \end{aligned}$$

donde $\hat{\pi}$ es la proyección canónica de $U \times V$ a U . Por lo tanto, si $\sigma_U(t) := h(\sigma(t))$ entonces

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\Phi_E(\tau_t^{-1} \sigma(q(t))) - \Phi_E(\sigma(q(0)))}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{((q(0), \rho(g(t))\sigma_U(q(t))) - (q(0), \rho(g(0))\sigma_U(q(0))))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(0, \rho(g(t))\sigma_U(q(t)) - \rho(g(0))\sigma_U(q(0)))}{t} \\ &= (0, \frac{d}{dt}(\rho(g(t))\sigma_U(q(t))|_{t=0})) \end{aligned}$$

Ignorando al 0 que aparece en la primera entrada obtenemos que en estas coordenadas locales

podemos escribir a $\nabla_q \sigma$ como

$$\begin{aligned}
\nabla_q \sigma &= \frac{d}{dt}(\rho(g(t))\sigma_U(q(t))|_{t=0} \\
&= \left[\frac{d}{dt}(\rho(g(t)))|_{t=0}\sigma_U(q(t)) + \rho(g(t))\frac{d}{dt}\sigma_U(q(t)) \right]_{t=0} \\
&= \left[(\rho_* \left(\frac{d}{dt}(g(t)) \right))\sigma_U(q(t)) + \rho(g(t))\frac{d}{dt}\sigma_U(q(t)) \right]_{t=0} \\
&= [\partial_\mu \sigma_U(q(0)) + (\rho_* A)_\mu \sigma_U(q(t))] \frac{dq^\mu}{dt} |_{t=0}
\end{aligned}$$

Para deducir la última igualdad usamos la ecuación diferencial 3.1. En resumen tenemos lo siguiente

Teorema 3.10.

$$\nabla_q \sigma = [\partial_\mu \sigma_U(q(0)) + (\rho_* A)_\mu \sigma_U(q(t))] \frac{dq^\mu}{dt} |_{t=0}$$

Observación 3.6. Claramente, si q_1, q_2 son dos curvas tales que $q_1(0) = q_2(0)$ y $q'_1(0) = q'_2(0)$. Entonces $(\nabla_{q_1} \sigma) = (\nabla_{q_2} \sigma)$.

Definición 3.11. Sea $X_m \in T_m M$ y $\sigma : U \rightarrow E$ una sección de E . Definamos la derivada covariante de σ en la dirección de X_m como

$$\nabla_{X_m} \sigma := \nabla_q \sigma$$

donde q es cualquier curva tal que $q(0) = m$ y $\frac{d}{dt}q|_{t=0} = X_m$.

Definición 3.12. Sea X un campo vectorial en M y definamos la derivada covariante a lo largo de X como el operador

$$\begin{aligned}
\nabla_X : C^\infty(M, E) &\rightarrow C^\infty(M, E) \\
\sigma &\rightarrow \nabla_X \sigma
\end{aligned}$$

Donde

$$(\nabla_X \sigma)(m) := \nabla_{X_m} \sigma$$

Teorema 3.11. *La derivada covariante satisface las siguientes propiedades*

1. $\nabla_X(\sigma_1 + \sigma_2) = \nabla_X \sigma_1 + \nabla_X \sigma_2$
2. $(\nabla_{X+Y})\sigma = \nabla_X \sigma + \nabla_Y \sigma$
3. $\nabla_X(f\sigma) = f\nabla_X \sigma + X(f)\sigma$ (Regla de Leibnitz)
4. $(\nabla_{fX})\sigma = f\nabla_X \sigma \quad \forall f \in C^\infty(M)$

Demostración.

1. Se deduce inmediatamente a partir de la fórmula 3.10, de la linealidad de A_μ y de la linealidad de ∂_μ
2. Se deduce inmediatamente de la fórmula 3.10
3. Se deduce de la definición de ∇_X utilizando prácticamente la misma demostración que en el caso de funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
4. Se deduce de la fórmula 3.10 y del hecho de que para toda m en M tenemos que $(\nabla_{fX})\sigma(m) = (\nabla_{f(X)})\sigma_m = \nabla_q \sigma$. Donde q es cualquier curva suave tal que $q(0) = m$ y $\frac{dq}{dt}|_{t=0} = f(m)X_m$

■

A partir de la fórmula 3.10 se sigue inmediatamente que

$$\nabla_{\partial_\mu} \sigma_U = (\partial_\mu \sigma_U) + (\rho_* A_\mu) \sigma_U$$

Donde en esta última ecuación estamos utilizando notación de índices, es decir $A_\mu := A(\partial_\mu)$. Debido a lo anterior podemos concluir que si $X_m := X_m^i \partial_\mu \in T_m U$ entonces

$$\nabla_{X_m} \sigma_U = X_m^\mu \nabla_{\partial_\mu} \sigma_U = X_m^\mu (\partial_\mu \sigma_U + (\rho_* A_\mu) \sigma_U)$$

Si $\pi : E \rightarrow M$ es un haz vectorial, entonces $E = P_{GL(E)} \times_\rho V$ donde $\rho : GL(V) \rightarrow V$ es la representación definitoria de $GL(V)$ (es decir $g \in GL(V)$ actúa sobre un elemento $v \in V$ al multiplicar a g con el vector de coordenadas de v). Si $\sigma : U \rightarrow E$ es una sección local suave definida en una vecindad abierta $U \subset M$ y $\{s_i : U \rightarrow E\}$ es la base de secciones canónicas asociada a esta trivialización, escribamos a σ como $\sigma^i s_i$. Por lo tanto, $\sigma_U = \sigma_U^i e_i$, donde $\{e_i\}$ es la base canónica de V . Usando lo anterior podemos concluir que $\forall m \in U$ y $\forall X_m \in T_m U$ tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{X_m} \sigma_u^i &= X_m^\mu (\partial_\mu \sigma_U^i + A_{\mu j}^i \sigma_U^j) \\ \Leftrightarrow \nabla_{X_m} \sigma_u &= X_m^\mu (\partial_\mu \sigma_U^i + A_{\mu j}^i \sigma_U^j) e_i \end{aligned}$$

Debido a la definición de s_i , podemos concluir que

$$\nabla_{X_m} \sigma_u = X_m^\mu (\partial_\mu \sigma_U^i + A_{\mu j}^i \sigma_U^j) s_i$$

Observación 3.7. A partir de lo anterior podemos ver que

$$\nabla_\mu s_j := \nabla_{\partial_\mu} s_j = A_{\mu j}^i s_i$$

y por lo tanto, podemos ver que A mide cuánto cambia la base al movernos en una cierta dirección, debido a esto, podemos interpretar el término extra de la derivada covariante como un término que nos dice cuánto cambian las coordenadas de una sección debido al cambio de la base.

Ejemplo 3.3. Consideremos al haz $E^{(p,q)} := \underbrace{(E \otimes E \otimes \dots \otimes E)}_{p \text{ veces}} \otimes \underbrace{(E^* \otimes E^* \otimes \dots \otimes E^*)}_{q \text{ veces}}$. Este haz es de la forma $E^{(p,q)} = P_{GL(E)} \times_\rho ((\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{p \text{ veces}}) \times (\underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{q \text{ veces}}))$ donde

$$(\rho(g))(v_1, \dots, v_p, v_1^*, \dots, v_q^*) = (g(v_1), \dots, g(v_p), g^{-1}(v_1^*), \dots, g^{-1}(v_q^*))$$

Sea $U \subset M$ una vecindad abierta e la cual $E^{(p,q)}$ se trivializa. Si $m \in U$ y $\sigma : U \rightarrow E^{(p,q)}$ es una sección entonces

$$[\rho(g)(\sigma_U)_m]_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = (\sigma_U)_{j_1', \dots, j_q'}^{i_1', \dots, i_p'} = g_{i_1'}^{i_1} \dots g_{i_p'}^{i_p} (g^{-1})_{j_1}^{j_1'} \dots (g^{-1})_{j_q}^{j_q'} (\sigma_U)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$$

Debido a que $A_\mu \in Lie(GL(V))$ podemos ver que existe una curva suave $g : [0, 1] \rightarrow G$ tal que la

$\frac{d}{dt}g|_{t=0} = A_\mu$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
& [\rho_* A_\mu(\sigma_U)]_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \\
&= \left[\frac{d}{dt} ((\rho(g(t)))(\sigma_U))_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \right]_{t=0} \\
&= \left[\frac{d}{dt} ((\sigma_U)_{j'_1, \dots, j'_q}^{i'_1, \dots, i'_p} g_{i'_1}^{j'_1} \dots g_{i'_p}^{j'_p} (g^{-1})_{j'_1}^{i'_1} \dots (g^{-1})_{j'_p}^{i'_p}) \right]_{t=0} \\
&= \left[\frac{d}{dt} ((\sigma_U)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}) \right]_{t=0} + A_{i'_1}^{j'_1}(\sigma_U)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, i_2, \dots, i_p} + A_{i'_2}^{j'_2}(\sigma_U)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, i'_2, \dots, i_p} + \\
&\quad , \dots , + A_{i'_p}^{j'_p}(\sigma_U)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, i_2, \dots, i'_p} - A_{j'_1}^{i_1}(\sigma_U)_{j'_1, j_2, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} - A_{j'_2}^{i_2}(\sigma_U)_{j_1, j'_2, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} - \\
&\quad , \dots , A_{j'_q}^{i_q}(\sigma_U)_{j_1, j_2, \dots, j'_q}^{i_1, \dots, i_p}
\end{aligned}$$

Donde para deducir esta última igualdad utilizamos que

1. $\frac{d}{dt}g|_{t=0} = A$.
2. $\frac{d}{dt}g^{-1}|_{t=0} = -A$.
3. La regla de Leibnitz recursivamente.
4. El hecho de que $(g(0))_j^i = \delta_{ij}$.
5. La propiedad de que cuando aparece una δ_{ij} en una ecuación, nos da la instrucción de sustituir a i por j .

Debido a lo anterior, podemos ver que

$$((\nabla_\mu)(\sigma_U))_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} = \partial_\mu [\sigma_U]_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} + A_{i'_1}^{j'_1}(\sigma_U)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} + \dots , A_{i'_p}^{j'_p}(\sigma_U)_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} - A_{j'_1}^{i_1}(\sigma_U)_{j'_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} , \dots , A_{j'_q}^{i_q}(\sigma_U)_{j_1, \dots, j'_q}^{i_1, \dots, i_p}$$

Por lo tanto, si $X \in C^\infty(M, TM)$ y $\sigma \in C^\infty(M, E^{(p,q)})$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \sigma)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots) &= X(\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots)) \\
&- \sigma(\nabla_X \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots) - \sigma(\alpha_1, \nabla_X \alpha_2, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots) - \dots \\
&+ \sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \nabla_X \beta_1, \beta_2, \dots) + \sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_1, \nabla_X \beta_2, \dots) + \dots
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.4. (Tensor Métrico)

Si M es una variedad suave y $g \in C^\infty(Sym(M, T^*M \otimes T^*M))$ es una métrica en TM entonces, usando la fórmula anterior, podemos concluir que

$$\nabla_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Z, \nabla_X Y) \quad \forall X, Y, Z \in C^\infty(M, TM)$$

Ejemplo 3.5. (Endomorfismo)

Si E es un haz vectorial sobre M y $T \in C^\infty(M, E^* \otimes E)$ (es decir T es un endomorfismo de E) entonces, en coordenadas locales tenemos que

$$((\nabla_\mu)(T))_i^j = \partial_\mu T_i^j - T(\nabla_\mu e_i, \hat{e}_j) + T(e_i, \nabla_\mu \hat{e}_j)$$

Donde $\{e_i\}$ es una base de secciones locales de E y $\{\hat{e}_j\}$ es la base dual de $\{e_i\}$.

Pensando a T como una transformación $\hat{T} : E \rightarrow E$ (en vez de como una transformación de $E^* \otimes E$)

a \mathbb{R}), escribamos a $T(e_i)$ como $T_i^j e_j$ y notemos que la fórmula anterior la podemos interpretar como

$$(\nabla_\mu T)(e_i) = \nabla_\mu(T(e_i)) - T(\nabla_\mu e_i)$$

Ya que

1. $\nabla_\mu(\hat{T}(e_i)) = \nabla_\mu(T_i^j e_j) = (\partial_\mu T_i^j) e_j + T_i^j \nabla_\mu e_j = (\partial_\mu T_i^j + T(e_i, \nabla_\mu \hat{e}_j)) e_j$
2. $\hat{T}(\nabla_\mu e_i) = T(\nabla_\mu e_i, \hat{e}_j) e_j$

Como esto es cierto para cualquier elemento de la base e_i , podemos introducir la notación

$$\nabla_\mu T = [\nabla_\mu, T]$$

3.7. La curvatura de una conexión

En esta sección definiremos la curvatura de una conexión y daremos una primera interpretación geométrica de ésta.

Definición 3.13. Dado un G haz principal $\pi : P \rightarrow M$ y una conexión $H \subset TP$ de éste. Definamos la proyección horizontal $hor : TP \rightarrow TP$ mediante la colección de mapeos lineales $hor_p : T_p P \rightarrow T_p P$ definidos por $X_p \mapsto hor(X_p)$.

Definición 3.14. Sea ω la 1-forma de conexión asociada a la conexión $H \subset TP$. Definamos la 2-forma de curvatura Ω como

$$\Omega(X, Y) := d\omega(hor(X), hor(Y)) \quad \forall (X, Y) \in C^\infty(P, TP)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \Omega(X, Y) &= d\omega(hor(X), hor(Y)) \\ &= hor(X)(\omega(hor(Y))) - hor(Y)(\omega(hor(X))) - \omega([hor(X), hor(Y)]) \\ &= -\omega([hor(X), hor(Y)]) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Omega(X, Y) = 0$ si y sólo si $\omega([hor(X), hor(Y)])$ es horizontal. Usando el teorema de Frobenius, podemos concluir que la curvatura es una obstrucción para poder integrar a la distribución horizontal $H \subset TP$.

Evidentemente, la curvatura de una conexión es una 2-forma horizontal con valores en $Lie(G)$. Debido al hecho que $\Omega(X, Y) = \omega([hor(X), hor(Y)])$ podemos concluir que $(Rg)^*(\Omega) = g^{-1}\Omega g$. Por lo tanto, si $\rho : G \rightarrow Lie(G)$ es la representación adjunta, podemos ver que Ω es una 2-forma básica bajo esta representación.

Sea $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta abierta de M en la cual P se trivializa y definamos:

$$F_\alpha := s_\alpha^* \Omega$$

Usando el teorema 3.4, podemos concluir que $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ define una 2-forma en M con valores en

$C^\infty(M, Ad(P))$. Por lo tanto, si $U_\beta \in U$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces

$$F_\beta = g_{\beta\alpha}^{-1} F_\alpha g_{\beta\alpha}$$

Observación 3.8. A F_α le llamaremos un representante local de la curvatura o la intensidad del campo de Yang-Mills.

Antes de poder demostrar el siguiente teorema requerimos este lema.

Lema 3.5. Si $\pi : P \rightarrow M$ es un G haz principal y ω es una conexión en este entonces el corchete de Lie de un campo vectorial horizontal X con un campo vertical de la forma X^A siempre es horizontal.

Demostración. Sea $U \subset M$ una vecindad abierta en la cual TM se trivializa y consideremos una base de secciones locales η_i de TM . Traslademos a estas secciones por la derecha bajo la acción de G en P y escribamos a las secciones locales de P que se obtienen por este proceso como $\hat{\eta}_i$. Notemos que debido a que la distribución horizontal es G invariante tenemos que $\hat{\eta}_i$ es una base local esta. Esto nos permite escribir a X localmente como $X = f^i \eta_i$ Por construcción tenemos que $R_{exp(tA)*}(\eta_i) = \eta_i$ y esto implica que $\forall i$ la derivada de Lie de η_i en la dirección de X^A se anula. Por lo tanto,

$$[X, X^A] = [f^i \eta_i, X^A] = f^i [\eta_i, X^A] + X^A(f^i) \eta_i = X^A(f^i) \eta_i$$

El último elemento de está igualdad claramente esta en la distribución horizontal y esto completa la demostración. ■

Teorema 3.12. (*Ecuación estructural de Cartan*)

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

Demostración. Claramente, Ω es bilineal y por lo tanto basta demostrar los siguientes casos.

Caso 1: (X, Y son campos vectoriales verticales)

Debido a que tanto X como Y son verticales podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\exists A, B \in T_e G$ tales que $X = X^A, Y = X^B$.

$$\omega(X^A, X^B) = d\omega(\text{hor}(X^A), \text{hor}(X^B)) = 0$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} d\omega(X^A, X^B) + \omega \wedge \omega(X^A, X^B) &= X^A(\omega(X^B)) - X^B(\omega(X^A)) - \omega([X^A, X^B]) + [\omega(X^A), \omega(X^B)] \\ &= X^A(B) - X^B(A) - \omega(X^{[A,B]}) + [A, B] \\ &= X^A(B) - X^B(A) - [A, B] + [A, B] \\ &= X^A(B) - X^B(A) = 0 \end{aligned}$$

ya que A, B son constantes. Para pasar de la primera a la segunda línea, usamos que $i : T_e G \rightarrow C^\infty(P, TP)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Caso 2: (X, Y son horizontales)

$$\Omega(X, Y) := d\omega(\text{hor}(X), \text{hor}(Y)) = d\omega(X, Y)$$

Por otro lado

$$d\omega(X, Y) + (\omega \wedge \omega)(X, Y) = d\omega(X, Y) + \frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] = d\omega(X, Y)$$

Ya que $\omega(X) = 0$, $\omega(Y) = 0$ y por lo tanto $[\omega(X), \omega(Y)] = 0$.

Caso 3: (X es horizontal y Y es vertical)

Debido a que Y es vertical podemos suponer, sin perdida de generalidad, $Y = X^A$ con $A \in T_e G$.

$$\Omega(X, X^A) = d\omega(\text{hor}(X), \text{hor}(X^A)) = d\omega(\text{hor}(X), 0) = 0$$

por otro lado

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \omega)(X, X^A) &= d\omega(X, X^A) + [\omega(X), \omega(X^A)] \\ &= X(\omega(X^A)) - X^A(\omega(X)) - \omega([X, X^A]) + [0, \omega(X^A)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ya que como vimos en el lema anterior el conmutador de un campo horizontal con uno vertical siempre es horizontal. ■

Usando la ecuación estructural de Cartan, podemos ver que

$$\begin{aligned} F_\alpha &= s_\alpha^* \Omega = s_\alpha^*(d\omega + \omega \wedge \omega) \\ &= s_\alpha^*(d\omega) + s_\alpha^*(\omega \wedge \omega) \\ &= d(s_\alpha^* \omega) + s_\alpha^*(\omega) \wedge s_\alpha^*(\omega) \\ &= dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \end{aligned}$$

En resumen tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.13. *La intensidad del campo de Yang-Mills está dada por*

$$F_\alpha = dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha = dA_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha, A_\alpha]$$

3.8. Holonomía

Supongamos que tenemos un G haz principal $\pi : P \rightarrow M$, una conexión $\omega \in C^\infty(P, \text{Lie}(G) \otimes T^*M)$ y una curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ suave por pedazos. Consideremos el levantamiento horizontal de γ , $\hat{\gamma}$ con condición inicial $\hat{\gamma}(0) = p \in \pi^{-1}(\gamma(0))$. Debido a que G actúa transitivamente sobre las fibras de P , tenemos que $\hat{\gamma}(0) = \gamma(0) \cdot g_0$ y que $\hat{\gamma}(1) = \gamma(1) \cdot g_1$, donde $g_0, g_1 \in G$. Definamos $g_\gamma \in G$ como $g_\gamma := g_1 g_0^{-1}$ y notemos que g_γ no depende de la condición de levantamiento, ya que si

consideramos a otra condición inicial y a esta la escribimos como $\hat{\gamma}(0) \cdot g$ para alguna $g \in G$ entonces:

1. $\hat{\gamma}(t) \cdot g$ es el levantamiento horizontal de γ , con condición inicial $\hat{\gamma}(0) \cdot g$
2. $\hat{\gamma}(0) \cdot g = \gamma(0) \cdot g_0 \cdot g$, $\hat{\gamma}(1) \cdot g = \gamma(1) \cdot g_1 \cdot g$
3. $(g_1 g)(g_0 g)^{-1} = (g_1 g)(g^{-1} g_0^{-1}) = g_1 g_0^{-1}$

Esto último demuestra que g_γ no depende de la condición inicial de levantamiento y eso es lo que buscábamos argumentar.

Definición 3.15. Definamos $Hol(m)$ como

$$Hol(m) := \{g_\gamma | \gamma \text{ es suave por pedazos y } \gamma(1) = \gamma(0) = m\}$$

Como veremos a continuación $Hol(m)$ es cerrado bajo inversos y bajo productos y, por lo tanto, es un subgrupo de G .

Teorema 3.14. $Hol(m)$ es un subgrupo de G , $\forall m \in M$.

Demostración. Sea $g_\gamma \in Hol(m)$ y $\hat{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$ un levantamiento horizontal arbitrario de γ . Consideremos las curvas definidas por:

$$\begin{array}{ll} \gamma^{-1} : [0, 1] \rightarrow M & \hat{\gamma}^{-1} : [0, 1] \rightarrow P \\ t \rightarrow \gamma(1-t) & t \rightarrow \hat{\gamma}(1-t) \end{array}$$

Claramente

1. $\hat{\gamma}^{-1} : [0, 1] \rightarrow M$ es el levantamiento horizontal de $\gamma^{-1} : [0, 1] \rightarrow M$, con condición inicial $\hat{\gamma}^{-1}(0) = \hat{\gamma}(1)$.
2. $\hat{\gamma}^{-1}(0) = \gamma(0) \cdot g_1$, $\hat{\gamma}^{-1}(1) = \gamma(0) \cdot g_0$ donde g_0, g_1 son elementos de G tales que $\hat{\gamma}(0) = \gamma(0) \cdot g_0$, $\hat{\gamma}(1) = \gamma(0) \cdot g_1 \Rightarrow$
3. $g_{\gamma^{-1}} = g_0 g_1^{-1} = (g_1 g_0^{-1})^{-1} = g_\gamma^{-1}$

Por lo tanto, $Hol(m)$ es cerrado bajo inversos. Para ver que es cerrado bajo productos, consideremos a $g_\gamma, g_{\gamma'} \in Hol(m)$ y escribamos estos como $g_\gamma := g_1 g_0^{-1}$ y a $g_{\gamma'} := g_{1'} g_{0'}^{-1}$. Definamos la curva γ'' como

$$\gamma''(t) := \begin{cases} \gamma'(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

y notemos que si $\hat{\gamma}(t), \hat{\gamma}'(t)$ son levantamientos horizontales (de $\gamma(t)$ y $\gamma'(t)$), tales que $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}'(1)$ entonces, la curva dada por

$$\hat{\gamma}''(t) := \begin{cases} \hat{\gamma}'(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \hat{\gamma}(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

es un levantamiento horizontal de $\gamma''(t)$.

Claramente, $g_{1'} = g_0$ y $g_{\gamma''} = g_{0'}^{-1}$ por lo que

$$g_\gamma g_{\gamma'} = g_1 g_0^{-1} g_{1'} g_{0'}^{-1} = g_1 g_{0'}^{-1} = g_{\gamma''}$$

Por lo tanto, $Hol(m)$ es cerrado bajo multiplicación y esto es lo que buscábamos demostrar. ■

Teorema 3.15. *Si $m, m' \in M$ están en el mismo componente conexo, entonces los grupos $Hol(m)$ y $Hol(m')$ son conjugados y por lo tanto isomorfos.*

Demostración. En las variedades, la noción de conexidad y conexidad por trayectorias (suaves por pedazos) coinciden. Debido a esto, podemos suponer que existe una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ suave por pedazos, tal que $\alpha(0) = m$ y $\alpha(1) = m'$. Consideremos

1. La curva $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1 - t) \quad \forall t \in [0, 1]$
2. Una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ suave por pedazos, tal que $\gamma(0) = m' = \gamma(1)$
3. Un levantamiento horizontal arbitrario $\hat{\gamma}(t)$ de $\gamma(t)$

y notemos que

1. La curva $\gamma'(t)$ definida por

$$\gamma'(t) := \begin{cases} \alpha(3t) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \gamma(3t - 1) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \alpha^{-1}(3t - 2) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

es una curva suave por pedazos tal que $\gamma'(0) = m$

2. Si $\hat{\alpha}(t), \hat{\alpha}^{-1}(t)$ son levantamientos horizontales (de $\alpha(t)$ y $\alpha^{-1}(t)$ respectivamente) tales que $\hat{\alpha}(1) = \hat{\gamma}(0) = m$ y $\hat{\alpha}^{-1}(0) = \hat{\gamma}(1)$ (estos levantamientos horizontales siempre existen ya que G actúa transitivamente sobre P), entonces claramente la curva $\hat{\gamma}' : [0, 1] \rightarrow P$ definida por

$$\hat{\gamma}'(t) := \begin{cases} \hat{\alpha}(3t) & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \hat{\gamma}(3t - 1) & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \hat{\alpha}^{-1}(3t - 2) & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

es un levantamiento horizontal de γ' .

3. Si escribimos a $\hat{\alpha}(0) = \alpha(0) \cdot h$, entonces es fácil ver que

$$g_{\gamma'} = hg_{\gamma}h^{-1}$$

A partir del inciso anterior podemos ver que $Hol(m)$ y $Hol(m')$ son conjugados y por lo tanto isomorfos.

Corolario 3.3. *Si M es una variedad conexa, entonces $Hol(m) \cong Hol(m') \quad \forall m, m' \in M$ y por lo tanto podemos hablar sin ambigüedad (salvo isomorfismo) del grupo de holonomía de M dado por la conexión ω .*

■

3.8.1. Curvatura como holonomía infinitesimal

Supongamos que tenemos un G haz principal $\pi : G \rightarrow M$, un sistema de coordenadas locales de M , (U, x_1, \dots, x_n) alrededor de un punto $m \in M$ y una curva suave por pedazos $\gamma : [0, \epsilon] \rightarrow U$ dada por recorrer (a velocidad unitaria) el paralelogramo 'infinitesimal' con esquinas $O = m$, $P = \frac{\epsilon}{4}(\partial_1)_m$, $Q = \frac{\epsilon}{4}(\partial_1)_m + \frac{\epsilon}{4}(\partial_2)_m$, $R = \frac{\epsilon}{4}(\partial_2)_m$.

Consideremos dos campos vectoriales horizontales X, Y en P , tales que $\pi_*(X_p) = (\partial_1)_m$, $\pi_*(Y_p) = (\partial_2)_m$ donde $p \in \pi^{-1}(m)$.

Es intuitivamente claro que la curva $\hat{\gamma}$ dada por

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} \text{"fluir a partir de } p \text{ por el campo } X\text{"} & t \in [0, \frac{\epsilon}{4}] \\ \text{"fluir por el campo } Y\text{"} & t \in [\frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{2}] \\ \text{"fluir por el campo } -X\text{"} & t \in [\frac{\epsilon}{2}, \frac{3\epsilon}{4}] \\ \text{"fluir por el campo } -Y\text{"} & t \in [\frac{3\epsilon}{4}, \epsilon] \end{cases}$$

es el levantamiento horizontal de $\gamma : [0, \epsilon] \rightarrow M$ con condición inicial $\hat{\gamma}(0) = p$ y por lo tanto

$$(\Omega(X, Y))_p = (d\omega(\text{hor}(X), \text{hor}(Y)))_p = (d\omega(X, Y))_p = -(\omega([X, Y]))_p$$

Debido a que $\pi : P \rightarrow M$ es suave, tenemos que $\pi_*([X, Y])_p = [\partial_1, \partial_2]_m = 0$, por lo que $[X, Y]_p \in (\text{Ver}(P))_p$. Esto implica que $[X, Y]_p = (X^A)_p$, donde $A \in \text{Lie}(G)$ y por lo tanto

$$(\Omega(X, Y))_p = -(\omega([X, Y]))_p = -\omega((X^A)_p) = A$$

Usando la interpretación geométrica del conmutador de dos campos como una medida de cuánto no se cierra el paralelogramo infinitesimal generado por estos, podemos concluir que si $\Omega(X, Y)_p \neq 0$ entonces la curva $\hat{\gamma}(t)$ no es una curva cerrada y la curvatura mide la distancia entre el punto inicial y final de ésta.

3.9. Derivada Covariante Exterior

Consideremos una p -forma θ con valores en un haz vectorial E . Escribamos a esta en coordenadas locales como

$$\theta = S_J dx^J := S_J \otimes dx^J$$

donde J es un multi-índice. Supongamos que E tiene una conexión $\nabla : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, T^*M \otimes E)$, escribamos a este en coordenadas locales como $\nabla = d + A$ y definamos la $p+1$ -forma con valores en $d_A\theta$ como

$$d_A\theta := \nabla_\mu S_J dx^\mu \wedge dx^J$$

Usando la definición de ∇_μ obtenemos

$$\begin{aligned} d_A\theta &= (\partial_\mu + A_\mu)S_J dx^\mu \wedge dx^J \\ &= dS_J \wedge dx^J + A_\mu dx^\mu \wedge S_J dx^J \\ &= d\theta + A \wedge \theta \end{aligned}$$

En resumen tenemos el siguiente resultado

Teorema 3.16. *Si $\theta = S_J dx^J$ es una representación en coordenadas locales de una p -forma θ con valores en un haz vectorial E entonces*

$$d_A\theta = d\theta + A \wedge \theta$$

Observación 3.9. Debido a que la derivada exterior d y la derivada covariante ∇ no depende del sistema de coordenadas elegido, es fácil demostrar que d_A tampoco depende de éste.

En el ejemplo 3.5 demostramos que si $T : E \rightarrow E$ es un endomorfismo:

$$\nabla_\mu T = \partial_\mu + [A_\mu, T]$$

Supongamos que si $\eta = \eta_J dx^J = \eta_J \otimes dx^J$ es la representación en coordenadas locales de una p -forma con valores en $End(E)$ y notemos que para todo multi-índice J , $\eta_J \in End(\mathbb{R}^{dim(E)})$, esto implica que

$$\begin{aligned} d_A\eta &= \partial_m \eta_J dx^m \wedge dx^J + [A_m, \eta_J] dx^m \wedge dx^J = d\eta + (A_m \eta_J - \eta_J A_m) dx^m \wedge dx^J \\ &= d\eta + (A \wedge \eta - (-1)^p \eta \wedge A) \\ &= d\eta + [A, \eta] \end{aligned}$$

Esta última expresión nos será útil más adelante y por lo tanto la enunciaremos como un teorema

Teorema 3.17. *Si $\eta = \eta_J dx^J$ es una representación en coordenadas locales de una p -forma η con valores en $End(E) \cong Ad(P_{GL}(E))$ entonces*

$$d_A\eta = d\eta + [A, \eta]$$

3.9.1. La identidad de Bianchi

Como vimos anteriormente, la curvatura F de un haz vectorial E está dada por

$$F = dA + A \wedge A$$

F es una sección de $End(E)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
d_A F &= dF + [A, F] \\
&= d(dA + A \wedge A) + [A, (dA + A \wedge A)] \\
&= dA \wedge A - A \wedge dA + [A, dA] + [A, A \wedge A] \\
&= [dA, A] + [A, dA] + A \wedge (A \wedge A) - (A \wedge A) \wedge A \\
&= [dA, A] + [A, dA] \\
&= 0
\end{aligned}$$

En resumen tenemos

Teorema 3.18. (*Identidad de Bianchi*)

La derivada covariante exterior de F se anula, es decir

$$d_A F = 0$$

Existe otra forma de expresar la identidad de Bianchi que es más cercana a la forma que, por ejemplo, se utiliza en relatividad general y esto es lo que veremos a continuación. Computando en coordenadas locales y usando la definición de la derivada covariante exterior podemos concluir que

$$d_A F = \nabla_J F_{kl} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l \quad j < k < l = (\nabla_J F_{kl} + \nabla_k F_{lj} + \nabla_l F_{jk}) dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l$$

donde para deducir la última igualdad usamos que

$$\nabla_J F_{kl} = d_A F(\theta_j, \theta_k, \theta_l) = d_A F(\theta_k, \theta_l, \theta_j) = \nabla_k F_{lj} = \nabla_l F_{jk}$$

y el hecho de que $dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l = dx^k \wedge dx^l \wedge dx^j$.

Debido a que $d_A F = 0$ podemos concluir que

$$\nabla_j F_{kl} + \nabla_k F_{lj} + \nabla_l F_{jk} = 0$$

Antes de continuar a la siguiente sección, notemos que si η es un forma con valores en E y escribimos a ésta en coordenadas locales como $\eta = s_J dx^J$ entonces:

$$\begin{aligned}
d_A^2 \eta &= d_A(\nabla_\mu s_J dx^\mu \wedge dx^J) \\
&= \nabla_\nu \nabla_\mu s_J dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^J \\
&= \frac{(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu)}{2} s_J dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^J \\
&= \frac{1}{2} F_{\nu\mu} s_J dx^\nu \wedge dx^\mu \wedge dx^J \\
&= F \wedge \eta
\end{aligned}$$

donde para pasar de la segunda a la tercera línea usamos la anticonmutatividad del producto cuña. Esto último nos permite interpretar a la curvatura como una obstrucción para poder definir un

complejo de cadena de la misma forma que por ejemplo en la cohomología de Rham.

3.10. Transformaciones Gauge

Al igual que en la mayoría de los objetos matemáticos en los haces principales existe una idea natural de automorfismo.

Definición 3.16. Si $\pi : P \rightarrow M$ es un G haz principal y $\xi : P \rightarrow P$ es una función suave. Decimos que ξ es un automorfismo (transformación Gauge) si:

1. ξ es G -equivariante, es decir $\xi(p \cdot g) = \xi(p) \cdot g$
2. La restricción de ξ a M es la función identidad y por lo tanto ξ 'preserva las fibras'.

Observación 3.10. Es fácil ver que el conjunto de transformaciones Gauge forma un grupo donde la operación es la composición.

Definición 3.17. Al grupo de transformaciones Gauge lo escribiremos como \mathfrak{G} .

A continuación veremos cómo describir una transformación Gauge en coordenadas locales.

Consideremos una trivialización local $\{U_\alpha, \Phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de P . Para toda $p \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ escribamos a $\Phi_\alpha(\xi(p))$ como $(\pi(p), g_\alpha(\xi(p)))$. Esto nos permite definir una función $\hat{\xi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow G$ de la siguiente manera:

$$\hat{\xi}_\alpha(p) = g_\alpha(\xi(p))g_\alpha^{-1}(p)$$

Usando la G -equivarianza de g_α y de ξ obtenemos que:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_\alpha(p \cdot g) &= g_\alpha(\xi(p \cdot g))g_\alpha^{-1}(p \cdot g) \\ &= g_\alpha(\xi(p) \cdot g)g_\alpha^{-1}(p \cdot g) \\ &= g_\alpha(\xi(p))gg^{-1}g_\alpha^{-1}(p) \\ &= \hat{\xi}_\alpha(p) \end{aligned}$$

Esto último tiene como consecuencia, que $\hat{\xi}_\alpha(p) = \xi_\alpha(\pi(p))$ para alguna función $\xi_\alpha : U_\alpha \rightarrow G$

Observación 3.11. Claramente $\xi(s_\alpha(\pi_p)) = s_\alpha(\pi(p)) \cdot \xi_\alpha(\pi(p))$

Si $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ y p es cualquier elemento en la fibra de M , entonces

$$\begin{aligned} \xi_\alpha(m) &= g_\alpha(\xi(p))g_\alpha^{-1}(p) \\ &= g_\alpha(\xi(p))g_\beta^{-1}(\xi(p))g_\beta(\xi(p))g_\beta^{-1}(p)g_\beta(p)g_\alpha^{-1}(p) \\ &= (Ad_{g_{\alpha\beta}})\xi_\beta(m) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto de los ξ_α se transforma de la forma requerida para poder definir una sección en el haz de $Ad(P)$

Ejemplo 3.6. Supongamos que tenemos un G haz principal $\pi : P \rightarrow M$ y consideremos una cubierta

abierta de M , $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en la cual P se trivializa. Claramente, la función

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha\beta} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times G &\rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \\ (p, g) &\rightarrow (p, g \cdot g_{\alpha\beta})\end{aligned}$$

es una transformación gauge del haz trivial $(U_\alpha \cap U_\beta) \times G$. A las transformaciones de este tipo las llamaremos transformaciones gauge locales.

3.11. La acción de \mathcal{G} sobre el espacio de conexiones

El grupo de transformaciones Gauge de un G haz principal $\pi : P \rightarrow M$ actúa naturalmente sobre el espacio de conexiones de éste. Existen muchas posibles formas de ver esto y a continuación describiremos la que en nuestra opinión es la más directa.

Supongamos que tenemos una conexión dada por una distribución $H \subset T(P)$ y que $\xi : P \rightarrow P$ es una transformación Gauge. Definamos $H^\xi := \xi_*(H)$ y notemos que $\forall g \in G$ y $\forall p \in P$

$$\begin{aligned}(Rg)_*(H_{\xi(p)}^\xi) &= (Rg)_*(\xi_*(H_p)) \\ &= (Rg \circ \xi)_*H_p \\ &= (\xi \circ Rg)_*H_p \\ &= \xi_*((Rg)_*H_p) \\ &= \xi_*(H_{p \cdot g}) \\ &= H_{\xi(p \cdot g)}^\xi \\ &= H_{\xi(p) \cdot g}^\xi\end{aligned}$$

Por lo tanto, H^ξ es G -equivariante. Para ver que H^ξ es complementaria a la distribución vertical V , es suficiente notar que debido a que ξ mapea cualquier fibra a si misma, ξ_* es un isomorfismo que preserva los subespacios verticales y debido a esto $\dim(T_p P) = \dim(V_p) + \dim(H_p) = \dim((\xi_*(T_p P))_{\xi(p)}) = \dim(V_{\xi(p)}) + \dim(H_{\xi(p)}^\xi) + \dim(V_{\xi(p)} \cap H_{\xi(p)}^\xi)$. Esto claramente implica lo que buscábamos argumentar.

Por último, mencionemos que de forma muy parecida al caso de transformaciones gauge locales (funciones de transición) se puede demostrar que:

$$A_\alpha^\xi = \xi_\alpha A_\alpha \xi_\alpha^{-1} - d\xi_\alpha \xi_\alpha^{-1}$$

Capítulo 4

Teorías de Yang-Mills

4.1. ¿Qué es una teoría de Yang-Mills?

A grandes rasgos una teoría de Yang-Mills, consta de lo siguiente.

1. Una teoría de campo inicial
2. Un grupo de Lie compacto de simetrías globales del Lagrangiano de esta teoría (usualmente llamado grupo Gauge)
3. Un segundo campo (campo de Yang-Mills), que al interactuar con el campo inicial 'expande' la simetría global a una simetría local

Observación 4.1. La idea de simetría global (local) quedará clara más adelante.

Como en la mayoría de los casos, la mejor forma de entender una definición es mediante un ejemplo y eso es lo que presentaremos a continuación.

4.1.1. Electrodinámica cuántica

El lagrangiano del campo de Dirac está dado por

$$\mathcal{L}_{dirac} = -m\bar{\Psi}\Psi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi$$

Este lagrangiano es $U(1)$ simétrico, ya que es invariante bajo la transformación

$$\Psi \rightarrow \Psi' := e^{ia}\Psi$$

Debido a esto tenemos que, si Ψ es una solución de la ecuación Euler-Lagrange asociada a este lagrangiano, entonces también lo es $e^{ia}\Psi$ y por lo tanto somos libres de escoger a cualquier 'representante' de este campo, sin afectar la física del problema.

Observación 4.2. Al fijar un representante de Ψ se tiene que cualquier otro representante se puede identificar con un elemento de $U(1)$.

Debido a la relatividad especial, la elección de un representante de Ψ en un punto del espacio de Minkowski no debería de fijar la elección en cualquier otro punto de éste y, por lo tanto, nos gustaría que nuestro lagrangiano fuese localmente simétrico. Es decir, nos gustaría que a fuese una función suave que depende de la posición y no una constante. Sin embargo, si $\Psi'(x) := e^{ia(x)}\Psi(x)$, entonces, al realizar un cálculo directo, podemos ver que

$$\mathcal{L}'_{dirac} := -m\bar{\Psi}'\Psi' + i\bar{\Psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\Psi' = \mathcal{L}_{dirac} - \bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu(a)\Psi \neq \mathcal{L}'_{dirac}$$

Por lo tanto, este lagrangiano no es localmente simétrico y esto es un problema, ya que queremos que nuestra teoría sea consistente con la relatividad especial. Para poder corregir esto, notemos que al igual que Ψ , el potencial vectorial electromagnético (relativista) A , no está definido únicamente. Si definimos A' como

$$\begin{aligned} A' &:= A + da \\ A'_\mu &:= A_\mu + \partial_\mu a \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$dA' = dA + d^2a = dA = \mathcal{F}$$

y por lo tanto A' es una elección válida del potencial vectorial electromagnético.

Definamos un nuevo lagrangiano $\mathcal{L}_{dirac+TE}$ como

$$\mathcal{L}_{dirac+TE} := \mathcal{L}_{dirac} + \bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi = -m\bar{\Psi}\Psi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu)\Psi$$

y notemos que

$$\bar{\Psi}'\gamma^\mu A'_\mu\Psi' = \bar{\Psi}\gamma^\mu(A_\mu + \partial_\mu a)\Psi$$

esto implica que

$$\mathcal{L}'_{dirac+TE} = \mathcal{L}'_{dirac} + \bar{\Psi}'\gamma^\mu A'_\mu\Psi' = \mathcal{L}_{dirac} - \bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu(A_\mu + \partial_\mu a)\Psi = \mathcal{L}_{dirac} + \bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi = \mathcal{L}_{dirac+TE}$$

y por lo tanto, este lagrangiano es localmente simétrico.

Observación 4.3. El lagrangiano $\mathcal{L}_{dirac+TE}$ define la dinámica de una partícula (campo) en presencia de un campo electromagnético.

Observación 4.4. Debido a lo anterior podemos concluir que si Ψ y A son soluciones de las ecuaciones de movimiento asociadas al lagrangiano $\mathcal{L}'_{dirac+TE}$ entonces $\Psi' = e^{ia}\Psi$ y $A' = A + da$ también lo serán. A esto se le conoce como el principio de invarianza de Weyl.

Ahora veremos cómo podemos relacionar esto con las ideas de haz y de conexión.

Consideremos una cubierta abierta de \mathbb{R}^4 , $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $\forall \alpha, \beta \in I$ $U_\alpha \cap U_\beta$ es contraíble y fijemos $A_\alpha \in C^\infty(U_\alpha, T^*M)$ tal que $F|_{U_\alpha} = dA_\alpha$. Esto implica (debido al lema de Poincaré) que en $U_\alpha \cap U_\beta$

$$A_\beta - A_\alpha = df_{\alpha\beta}$$

Para alguna $f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{R}$.

Debido al principio de invariancia de Weyl, tenemos que si Ψ_α es una solución (local) de la ecuación de Dirac (en presencia de un campo EM) para la cual usamos al representante de A , A_α , entonces $e^{if_{\alpha\beta}}\Psi_\alpha := \Psi_\beta$ también es una solución de esta ecuación, sólo que en este caso utilizamos al representante A_β del potencial vectorial A , en lugar de A_α . Recordando la forma en la que se transforman las secciones de un haz vectorial y la forma en la que se transforman los representantes locales de una conexión, podemos considerar la posibilidad de que

1. El campo de Dirac sea una sección de un haz vectorial sobre \mathbb{R}^4
2. Las funciones de transición de este haz están dadas por $g_{\alpha\beta} = e^{if_{\alpha\beta}}$
3. $\{-iA_\alpha\}_{\alpha \in I}$ define una conexión en este haz hipotético.

Para poder demostrar esto notemos que

1. Si $g_{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ entonces $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in I}$ define un $U(1)$ haz principal P_{Dirac} sobre \mathbb{R}^4 que se trivializa sobre cualquier abierto de la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$.
2. $A_\beta = A_\alpha + df_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1}A_\alpha g_{\alpha\beta} + ig_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}$ y por lo tanto $-iA_\beta = -iA_\alpha + g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}$. Esta es precisamente la forma en la que se desea transformar los elementos de $\{-iA_\alpha\}_{\alpha \in I}$ para poder definir una conexión ω en nuestro (aún hipotético) $U(1)$ haz principal.
3. Si consideramos al haz vectorial $E_{Dirac} = (P_{Dirac} \times_\rho (\mathbb{C}_L \times \mathbb{C}_R))$ donde ρ es la representación de $U(1)$ en $\mathbb{C}_L \times \mathbb{C}_R$, definida por

$$\rho(e^{i\theta})((\chi_1)_L, (\chi_2)_L, (\chi_1)_R, (\chi_2)_R) = (e^{i\theta}(\chi_1)_L, e^{i\theta}(\chi_2)_L, e^{i\theta}(\chi_1)_R, e^{i\theta}(\chi_2)_R)$$

Podemos concluir que las secciones de este haz se transforman de la forma requerida.

4. Si Ψ es una sección de E_{Dirac} y Ψ_α es la representación en coordenadas de Ψ , asociada a la trivialización de E_{Dirac} en U_α , entonces la derivada covariante de Ψ en la dirección de x^μ se puede expresar en esta trivialización como

$$\nabla_\mu \Psi_\alpha = (\partial_\mu - i(A_\alpha)_\mu)\Psi_\alpha$$

Por lo tanto, lo único que hace falta demostrar es que, en efecto, $g_{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$. Estrictamente, lo que veremos es que podemos escoger $f_{\alpha\beta}$ de tal forma que $f_{\alpha\beta}f_{\alpha\gamma}f_{\gamma\alpha} = 2\pi n$. Esto se conoce como la condición de continuación de Dirac y tiene como consecuencia que la carga ésta cuantizada. Una discusión más elaborada de esto se puede encontrar en (6).

El espacio de Minkowski es contraíble y, por lo tanto, existe un potencial A definido globalmente. Debido a esto, resulta natural considerar innecesario el lenguaje de haces para describir cuestiones electromagnéticas ya que en ese caso cualquier haz sobre el espacio de Minkowski será trivial. Sin embargo como demuestra el siguiente ejemplo no necesariamente este es el caso.

El Monopolo de Dirac

Supongamos que tenemos un (hipotético) monopolo magnético situado en el origen de \mathbb{R}^3 . El campo magnético asociado a este monopolo está dado por:

$$B(x) = \frac{q}{\pi r^2} \frac{\partial}{\partial r}$$

donde q es la carga del monopolo. Utilizando el lenguaje geométrico de las formas diferenciales, es usual pensar el campo magnético como la 2-forma \mathfrak{b} , definida como la contracción (ver (10)) de la forma de volumen con el campo magnético B , es decir:

$$\mathfrak{b} = i_B Vol_{\mathbb{R}^3}$$

Observación 4.5. La ventaja de pensar al campo magnético como una 2-forma \mathfrak{b} es que si \mathcal{A} es el potencial vectorial (no relativista) entonces la ecuación $B = \nabla \times \mathcal{A}$ se puede escribir como $\mathfrak{b} = dA^3$, donde $A^3 := \mathcal{A}_1 dx + \mathcal{A}_2 dy + \mathcal{A}_3 dz$. Esto se demuestra al notar que $i_B Vol_{\mathbb{R}^3} = B_x dy \wedge dz + B_y dx \wedge dz + B_z dx \wedge dy$, y que $dA^3 = ((\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial y}) dx \wedge dy + (\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x}) dx \wedge dz + (\frac{\partial \mathcal{A}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial z}) dy \wedge dz) = B_z dx \wedge dy + B_y dx \wedge dz + B_x dy \wedge dz$.

Observación 4.6. Antes de este ejemplo habíamos trabajado (en abstracto) con el potencial vectorial relativista $A = A_\mu dx^\mu$, éste está dado por $A = A_0 dt + A_i dx^i$ donde A^i es el potencial vectorial no relativista y $A_0 = \Phi$ es el potencial eléctrico. Como estamos suponiendo que el campo eléctrico se anula, tenemos $A = A^3$ y por lo tanto $F = dA = dA^3 = \mathfrak{b}$.

En coordenadas esféricas $x_1 = r \sin(\theta) \cos(\Phi)$, $x_2 = r \sin(\Phi) \cos(\theta)$, $x_3 = r \cos(\Phi)$, podemos escribir a la forma de volumen $Vol_{\mathbb{R}^3}$ como

$$Vol_{\mathbb{R}^3} = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\Phi$$

En consecuencia de esto tenemos que

$$\mathfrak{b} = i_B Vol_{\mathbb{R}^3} = \frac{q}{\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\Phi$$

En \mathbb{R}^3 menos el eje z negativo podemos expresar a \mathfrak{b} como:

$$\mathfrak{b} = d(q(1 - \cos(\theta))d\Phi)$$

Por lo que una elección válida del potencial vectorial en estas coordenadas está dada por:

$$A_u = (q(1 - \cos(\theta))d\Phi)$$

Este potencial no está definido en el eje z negativo y, por lo tanto, requerimos definir unas coordenadas en las cuales lo esté.

Consideremos nuevas coordenadas esféricas, dadas por $\theta' := \pi - \theta$ y $\Phi' := -\Phi$. En estas coordenadas

el potencial vectorial toma la forma:

$$A_b = (1 + \cos(\theta))d\Phi$$

y éste está definido en todo \mathbb{R}^3 menos el eje z positivo.

Debido a que el potencial vectorial no está definido globalmente, nos vemos forzados a introducir un haz vectorial (no trivial), para poder 'modelar' localmente a nuestras funciones de onda. En consecuencia de que $A_u - A_b = 2 - 2qd\Phi$ tenemos que (en caso de existir el haz vectorial que buscamos) las funciones de transición de éste, están dadas por

$$g_{bu} = \exp\left(\frac{-2ieq\Phi}{\hbar}\right)$$

Observación 4.7. Debido a que sólo existen dos abiertos, no es necesario verificar la condición del cociclo.

Observación 4.8. Para que estas funciones de transición sean univaluadas, requerimos que $\frac{2eq}{\hbar}$ sea un entero. A esto se le llama la condición de cuantización de Dirac e implica que la carga de un monopolo debe de estar cuantizada.

4.2. Conexiones planas y el efecto de Aharonov-Bohm

Supongamos que tenemos un haz vectorial $\pi : M \rightarrow E$ y que A es una conexión en este. Tomemos una sección Ψ de E y notemos que la condición de que Ψ permanezca constante bajo esta conexión está dada por

$$d_A\Psi = d\Psi + A\Psi = 0$$

$$d\Psi = -A\Psi$$

Esto implica que el transporte paralelo de la sección Ψ a lo largo de un vector infinitesimal δx^α está dado por la rotación infinitesimal

$$\Psi^i \mapsto (I + (A_\alpha)_j^i \delta x^\alpha) \Psi^j$$

Debido a esto podemos ver que si queremos transportar paralelamente a la sección Ψ a lo largo de una curva \mathcal{C} debemos de multiplicar todas estas rotaciones a lo largo de los segmentos infinitesimales que generan a esta curva y por lo tanto transportar paralelamente a lo largo de \mathcal{C} está dado por

$$\Psi \mapsto \prod (I + A_k dx^k) \Psi := (Pexp(\int Adx))\Psi$$

Observación 4.9. A el operador $Pexp$ definido por la última igualdad se le suele llamar la exponencial de trayectoria y probablemente la forma más simple de entender su relación con la función exponencial es al notar que $e^x = \prod (1 + \frac{x}{n})$ y por lo tanto podemos pensar que e^x se obtiene de dividir x en n infinitesimales $\frac{x}{n}$ sumar cada uno de estos con la identidad y después multiplicarlos. Para obtener $Pexp(\int Adx)$ dividimos a $\int Adx$ en los pedazos $A_k dx^k$ luego sumamos estos con la

identidad del grupo G y por último los multiplicamos todos. Si $Lie(G)$ es un álgebra conmutativa entonces es posible demostrar que $Pexp(\int Adx) = exp(\int Adx)$.

4.2.1. El efecto de Aharonov-Bohm

Tomemos un haz de electrones, separemos a este en 2 y mandemos a cada una de estas partes por un lado de un solenoide para finalmente juntarlas al final en una pantalla. Supongamos que las funciones de onda que describen los rayos que se obtienen al separar al rayo inicial en 2 partes están dadas por Ψ_1 y Ψ_2 . Si interpretamos a Ψ_1 uno y Ψ_2 como secciones de un haz vectorial E y al campo electromagnético A como una conexión en el $U(1)$ haz principal $P_{GL(E)}$ entonces al transportar a Ψ_1 y Ψ_2 paralelamente a lo largo de \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 respectivamente obtenemos que

$$\Psi_1 \mapsto (exp(i \int_{\mathcal{C}_1} Adx))\Psi_1$$

$$\Psi_2 \mapsto (exp(i \int_{\mathcal{C}_2} Adx))\Psi_2$$

Esta es precisamente la forma en la que evolucionan las funciones de onda Ψ_1 y Ψ_2 en presencia de un campo magnético, como demostró Dirac y por lo tanto podemos ver que el cambio de fase Ψ_1 está dado por $\int_{\mathcal{C}_1} Adx$ mientras que el cambio de fase de Ψ_2 está dado por $\int_{\mathcal{C}_2} Adx$. Notemos que

$$\int_{\mathcal{C}_1} Adx - \int_{\mathcal{C}_2} Adx = \int_{\mathcal{C}} A = \int_{int(\mathcal{C})} F$$

donde \mathcal{C} es la curva que se obtiene al recorrer primero \mathcal{C}_1 y después \mathcal{C}_2 en sentido contrario. Por lo tanto si el flujo magnético $\int_{int(\mathcal{C})} F \neq 0$ podemos ver que el cambio de fase de Ψ_1 es distinto del cambio de fase de Ψ_2 . En consecuencia de esto tenemos que se puede generar un patrón de interferencia entre Ψ_1 y Ψ_2 al juntarse de nuevo en la pantalla aunque en la región por la que viajan estas el campo electromagnético (curvatura) se anula. Esto no sería cierto si el potencial electromagnético A fuese idénticamente 0 y por lo tanto podemos ver que el potencial vectorial A tiene relevancia física y no sólo es un artefacto matemático como se pensaba anteriormente. Por último notemos que en este ejemplo la curvatura es 0 fuera de la región encerrada por el solenoide y sin embargo la holonomía no es trivial. Esto se debe a que la región en la cual la curvatura F se anula no es simplemente conexa. A una conexión A tal que su curvatura se anula la llamaremos una conexión plana, en primera instancia se podría pensar que si una conexión es plana entonces la holonomía es trivial ya que como vimos anteriormente podemos interpretar a la curvatura como holonomía infinitesimal. Sin embargo, esto es falso si la región en la que está definida la curvatura no es simplemente conexa. Más generalmente tenemos el siguiente teorema el cual no demostraremos y su demostración se puede encontrar en capítulo 13 de (15).

Teorema 4.1. *Sea P es un G haz principal. El conjunto de conexiones planas en P módulo la acción del grupo gauge está en correspondencia uno a uno con $Hom(\pi_1(M), G)/G$ donde la acción de G en $Hom(\pi_1(M), G)$ es la conjugación.*

Por último tenemos los siguientes dos teoremas los cuales serán útiles más adelante.

Teorema 4.2. *Sea $\pi : P \rightarrow M$ un G haz principal y ω una conexión en este. Si ω es plana entonces $\forall m \in M$ existe una vecindad U alrededor de este con la propiedad de que en $\pi^{-1}(U)$ podemos poner coordenadas locales $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tales que*

$$(\Phi^{-1})^*(\omega) = g^{-1}dg$$

Demostración. Sea $m \in M$ y U una vecindad simplemente conexa alrededor de m en la cual P se trivializa y p un elemento sobre la fibra de m . Si m' es cualquier elemento en U y γ es una curva suave que conecta a m con m' , entonces podemos transportar paralelamente a p a lo largo de γ y obtener un elemento p' en la fibra de m' . Usando el teorema anterior, podemos ver que p' no depende de la trayectoria y, por lo tanto, está bien definido independientemente de esta. Repitiendo el mismo proceso para todos los elementos de U , podemos generar una sección s en $\pi^{-1}(U)$ covariantemente constante. Consideremos el isomorfismo de haces

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

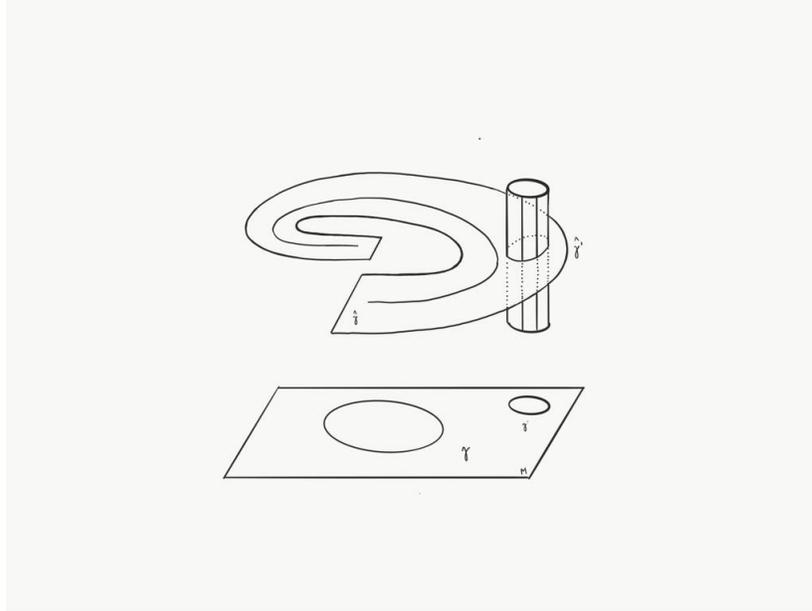
que se obtiene de identificar a la sección cero, s_0 en $U \times \mathbb{R}^n$ con s . También consideremos a la conexión $\Phi^*(\omega)$ definida en $U \times \mathbb{R}^n$ y escribamos a está como $(\Phi)^{-1*}(\omega) = \hat{A} + g^{-1}dg$. Claramente bajo esta conexión la ecuación de transporte paralelo a lo largo de un infinitesimal δx_α esta dada por

$$s_0 \mapsto (I + \hat{A}_\alpha dx^\alpha)s_0 = s_0$$

Debido a que esto es cierto para cualquier δx_α podemos concluir que $\hat{A} = 0$ y por lo tanto $(\Phi)^{-1*}(\omega) = g^{-1}dg$. ■

Teorema 4.3. *Si $\pi : P \rightarrow M$ es un G haz principal y ω una conexión plana en este entonces, (localmente) transportar paralelamente no depende de la trayectoria.*

Demostración. Recordemos que si una conexión es plana entonces la distribución horizontal es integrable. Consideremos una trayectoria cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ lo suficientemente pequeña para que el levantamiento horizontal de esta esté totalmente contenido en una hoja de la foliación. Llamemos a este levantamiento $\hat{\gamma}$ y notemos que $\hat{\gamma}$ es también una trayectoria cerrada ya que esta también es una curva pequeña contenida en una hoja de esta foliación. Esto implica que transportar paralelamente a lo largo de γ es la identidad y a su vez esto implica que (localmente) transportar paralelamente no depende de la trayectoria. ■



4.3. Definición rigurosa de teoría de Yang-Mills

En esta sección daremos una definición rigurosa de la teoría de Yang-Mills. Esperamos que el ejemplo de la electrodinámica cuántica nos permita entender mejor esta definición.

Definición 4.1. Una teoría de Yang-Mills, consta de lo siguiente:

1. Una variedad riemanniana (pseudo-riemanniana).
2. Un grupo de Lie, compacto G .
3. Un G haz principal $\pi : P \rightarrow M$.
4. Un lagrangiano suave $L_{YM} : \mathfrak{C}(P) \rightarrow C^\infty(M)$ donde $\mathfrak{C}(P)$ es el espacio de conexiones del G haz principal $\pi : P \rightarrow M$.
5. Un espacio vectorial W y una representación ρ de G en W . Esta representación define un haz vectorial $P \times_\rho W$.
6. Un lagrangiano $\mathfrak{L}_I : \mathfrak{C}(P) \times C^\infty(P \times_\rho W) \rightarrow C^\infty(M)$.

En el ejemplo de la electrodinámica cuántica tenemos que:

1. La variedad pseudo-riemanniana (M, g) es simplemente el espacio de Minkowski.
2. El grupo de Lie completo es $U(1)$.
3. El G haz principal $\tilde{\pi} : P \rightarrow M$ es el $U(1)$ haz principal, construido a partir de las funciones de transición $g_{\alpha\beta} = e^{if_{\alpha\beta}}$.
4. El lagrangiano $L_{YM} : \mathfrak{C}(P) \rightarrow C^\infty(M)$ es el lagrangiano de Maxwell $\mathfrak{L}_{Maxwell}$.
5. El espacio vectorial W es $\mathbb{C}_L \times \mathbb{C}_R$, y el haz vectorial $P \times_\rho W$ es simplemente E_{Dirac} .
6. La densidad lagrangiana $\mathfrak{L}_I : \mathfrak{C}(P) \times C^\infty(P \times_\rho W) \rightarrow C^\infty(M)$ es el lagrangiano $L_{Dirac+TE+Maxwell}$.

4.4. La ecuación de Yang Mills

4.4.1. El operador $*$ de Hodge para formas con valores en haces vectoriales

Para poder definir el operador $*$ de Hodge para formas con valores en un haz vectorial de la forma $P \times_{\rho} V$, donde P es un G haz principal, nos gustaría poder definir un producto interno para formas con valores en este. Localmente podemos pensar a estas formas como formas con valores en V y lo único que requerimos para poder definir un producto interno en estas formas locales es un producto interno en V . Sin embargo si requerimos que estas formas locales se peguen bien en las intersecciones entonces necesitamos que este producto interno sea G invariante, es decir $\forall g \in G, \forall v, w \in V$

$$\langle (\rho(g))(v), (\rho(g))(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Como vimos en la sección 1.7.1, para cualquier grupo de Lie compacto G siempre podemos definir un producto punto G invariante bajo la representación adjunta de G en $Lie(G)$. Esto nos permite definir un producto interno en formas con valores $Ad_G(P)$ de la siguiente manera. Si ω, θ son 2 p -formas con valores en $Ad_G(P)$ que en coordenadas locales se escriben como $\omega = s_J \otimes dx^J, \theta = s_I \otimes dx^I$ entonces definimos

$$\langle \omega, \theta \rangle := \langle s_J, s_I \rangle \langle dx^J, dx^I \rangle$$

Donde el primer producto interno es el producto interno de $Lie(G)$ mientras que el segundo es el producto interno de formas que se induce a partir de la métrica Riemanniana en M (ver apéndice 1).

Observación 4.10. Está definición no depende del sistema de coordenadas escogido ya que los dos productos internos usados en esta están bien definidos independientemente del sistema de coordenadas.

Definición 4.2. Definamos el operador estrella de Hodge $*$ para formas con valores en $Ad_G(P)$ al requerir que para cualesquiera 2 p -formas ω, ω' con valores en $Ad_G(P)$ se cumpla que :

$$tr(\omega \wedge *\omega') = \langle \omega, \omega' \rangle vol_M$$

4.4.2. El funcional de Yang Mills

Si tenemos una conexión ω en P las intensidades del campo de Yang Mills F_{α} definen una 2 forma F_{ω} con valores en $Ad_G(P)$ y por lo tanto podemos definir la función:

$$\begin{aligned} [\]^2 : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ m &\mapsto [\mathbb{F}]^2 := \langle \mathbb{F}, \mathbb{F} \rangle_m \end{aligned}$$

Observación 4.11. Debido a la definición del operador estrella de Hodge para formas con valores en $Ad_G(P)$ podemos ver que $[\mathbb{F}]^2 vol_M = \langle \mathbb{F}, \mathbb{F} \rangle_m vol_M = tr(\mathbb{F} \wedge *\mathbb{F})$.

Definición 4.3. Definamos el funcional (acción) de Yang Mills como:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{YM} : \mathfrak{C}(P) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \int_M [\mathbb{F}_\omega]^2 vol_M\end{aligned}$$

Observación 4.12. Si tenemos una transformación gauge ϕ , bajo esta transformación $F_\alpha \mapsto F_\alpha^\phi = ad\phi_\alpha \circ F_\alpha$ y por lo tanto debido a la G invariancia del producto interno en $Lie(G)$ podemos concluir que $[F]^2 = [F^\phi]^2$.

Observación 4.13. Debido a la observación anterior podemos concluir que $\mathfrak{S}_{YM} : \mathfrak{C}(P) \rightarrow \mathbb{R}$ desciende a función de $\hat{\mathfrak{S}}_{YM} : \mathfrak{C}(P) / \{\text{Transformaciones Gauge}\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 4.4. Decimos que una conexión ω es de Yang Mills si es un punto crítico del funcional de Yang Mills. Es decir si todas las derivadas direccionales de \mathfrak{S}_{YM} se anulan en ω .

A continuación veremos como podemos volver esta condición una ecuación diferencial parcial de segundo orden en A .

Consideremos una conexión ω y representemos a esta mediante un conjunto de representantes locales A_α . Recordemos que $\mathfrak{C}(P)$ es un espacio afín modelado en $C_G^\infty(T^*P \otimes Lie(G)) \cong C^\infty(T^*M \otimes Ad(P))$, y por lo tanto $\omega = \{A_\alpha\}$ es un punto crítico del funcional de Yang Mills si para toda $\tau \in C^\infty(T^*M \otimes Ad(P))$

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{S}_{YM}(A_\alpha + t\tau)|_{t=0} = 0.$$

Debido a la ecuación estructural de Cartan tenemos que :

$$\begin{aligned}F_{A_\alpha + t\tau} &= d(A_\alpha + t\tau) + \frac{1}{2}[A_\alpha + t\tau, A_\alpha + t\tau] \\ &= dA_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha, A_\alpha] + t(d\tau + \frac{1}{2}[A_\alpha, \tau] + \frac{1}{2}[\tau, A_\alpha]) + o(t^2) \\ &= dA_\alpha + \frac{1}{2}[A_\alpha, A_\alpha] + t(d\tau + [A_\alpha, \tau]) + o(t^2) \\ &= F_{A_\alpha} + td_{A_\alpha}\tau + o(t^2)\end{aligned}$$

Esto implica que :

$$[F_{A_\alpha + t\tau}]^2 = [F_{A_\alpha}]^2 + 2t\langle d_{A_\alpha}\tau, F_{A_\alpha} \rangle + o(t^2)$$

En consecuencia de esto la condición de Yang Mills $\frac{d}{dt} \mathfrak{S}_{YM}(A_\alpha + t\tau)|_{t=0} = 0$ se reduce a :

$$\int_M \langle d_{A_\alpha}\tau, F_\alpha \rangle vol_M = 0 \text{ para toda } \tau$$

Si d_A^* es el adjunto formal de d_A bajo la forma bilineal $\langle \langle, \rangle \rangle$ definida por $\langle \langle \alpha, \beta \rangle \rangle := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle vol_M$ para cualquier par de formas α, β entonces

$$\int_M \langle \tau, d_{A_\alpha}^* F_\alpha \rangle vol_M = 0 \text{ para toda } \tau$$

Debido a esto podemos concluir que $d_{A_\alpha}^* F_\alpha = 0$. Para poder obtener la forma final de las ecuaciones de Yang-Mills supongamos por el momento que $*d_{A_\alpha}^* F_{A_\alpha} = d_{A_\alpha} * F$ (La demostración se encuentra en la siguiente página) esto tiene como consecuencia que la condición $d_{A_\alpha}^* F_\alpha = 0$ es equivalente a $d_{A_\alpha} * F_{A_\alpha} = 0$. Esto junto con la identidad de Bianchi $d_{A_\alpha} F_{A_\alpha} = 0$ constituye una versión no lineal de las condiciones requeridas para que una forma sea armónica:

$$\begin{aligned}d_{A_\alpha} * F_A &= 0 \\ d_{A_\alpha} F_{A_\alpha} &= 0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Antes de poder demostrar que en efecto $*d_{A_\alpha}^* F_{A_\alpha} = d_{A_\alpha} * F_\alpha$ requerimos el siguiente lema

Lema 4.1. Si ω es una forma con valores en el haz $Ad(P)$ entonces

$$d(tr(\omega)) = tr(d_A \omega)$$

Demostración. $d_A \omega = d\omega + [A, \omega] = d\omega + A \wedge \omega - (-1)^p \omega \wedge A$. Debido a esto tenemos que, $tr(d_A \omega) = tr(d\omega) + A_\beta^\alpha \wedge \omega_\alpha^\beta - (-1)^p \omega_\alpha^\beta \wedge A_\beta^\alpha = tr(d\omega) + A_\beta^\alpha \wedge \omega_\alpha^\beta - A_\beta^\alpha \wedge \omega_\alpha^\beta = tr(d\omega) = d(tr(\omega))$ ■

Teorema 4.4. $d_{A_\alpha}^* F_{A_\alpha} = \pm * d_{A_\alpha} * F_\alpha$

Sea η una forma con valores en el haz en el haz vectorial $Ad(P)$ con soporte pequeño.

$$\begin{aligned} \langle \langle d_{A_\alpha} \eta, F_{A_\alpha} \rangle \rangle &= \int_M tr(d_{A_\alpha} \eta \wedge *F) = \int_M tr d_{A_\alpha} (\eta \wedge *F) \pm \int_M tr(\eta \wedge d_{A_\alpha} *F) = \\ &= \int_M d(tr(\eta \wedge *F)) \pm \int_M tr(\eta \wedge d_{A_\alpha} *F) \end{aligned}$$

La primera de estas integrales se anula debido a que el soporte de η es pequeño y por lo tanto

$$\langle \langle d_{A_\alpha} \eta, F_{A_\alpha} \rangle \rangle = \pm \int_M tr(\eta \wedge d_{A_\alpha} *F) = \pm \int_M tr(\eta \wedge ** d_{A_\alpha} *F) = \pm \langle \langle \eta, *d_{A_\alpha} *F \rangle \rangle$$

En coordenadas locales podemos expresar a la primera de las ecuaciones 4.1 como :

$$\nabla_\mu F_{\nu\lambda} \otimes *(dx^\mu \wedge *(dx^\nu \wedge dx^\lambda)) = 0$$

Usando la antisimetría de F se puede ver que esto es equivalente a :

$$\nabla_\mu F_{\nu\mu} = \partial_\mu F_{\nu\mu} + [A_\mu, F_{\nu\mu}] = 0$$

Observación 4.14. En la ecuación anterior estamos usando la convención de Einstein aunque los índices no aparecen correctamente.

En el espacio de Minkowski el potencial vectorial \mathbb{A} define una conexión sobre el $U(1)$ haz principal $U(1) \times \mathbb{R}^4$ esta conexión satisface las ecuaciones de Yang Mills ya que en éste haz principal las ecuaciones de Yang Mills se reducen a las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas. Para notar esto último sólo es necesario usar las ecuaciones 4.1 y utilizar que $Lie(U(1))$ es una álgebra de Lie abeliana. Al realizar esto obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} d * F &= 0 \\ dF &= 0 \end{aligned}$$

Como vimos en el apéndice dos estas son precisamente las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas y por lo tanto podemos concluir que existe un fuerte vínculo entre las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de Yang Mills. Esto no debe de ser sorprendente ya que el lagrangiano de Maxwell coincide en este caso con el lagrangiano (funcional) de Yang Mills definido sobre las conexiones en $U(1) \times \mathbb{R}^4$.

Observación 4.15. Debido a la observación 4.13 se sigue inmediatamente que si A_α satisface las ecuaciones de Yang Mills entonces también lo hace A_α^ϕ para cualquier transformación gauge ϕ .

4.5. Teorías de Yang Mills no abelianas y la ecuación de Yang Mills con cargas externas.

Supongamos que tenemos una n -ada χ de espinores de Dirac definidos sobre el espacio de Minkowski con la propiedad de que todos estos tienen la misma masa m . Análogamente al caso de las interacciones $U(1)$ tenemos que el lagrangiano :

$$\mathfrak{L} = \bar{\chi}(x)[(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)I]\chi(x)$$

Es globalmente invariante bajo la transformación :

$$\begin{aligned}\chi(x) &\mapsto U\chi(x) \\ \bar{\chi}(x) &\mapsto \bar{\chi}(x)U^*\end{aligned}$$

para cualquier $U \in SU(n)$.

Sin embargo, al igual que en el caso de las interacciones $U(1)$ este lagrangiano no es localmente simétrico y si queremos lograr que lo sea podemos intentar considerar la interacción del campo χ con un campo gauge $\{A_\alpha\} = A$. Definamos un nuevo Lagrangiano como :

$$\mathfrak{L} = \bar{\chi}(x)[(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)I]\chi(x)$$

donde $\nabla_\mu := \partial_\mu - iA_\mu$. Si bajo la transformación $\chi(X) \mapsto U\chi(x) := \hat{\chi}$ tenemos que $A \mapsto UAU^* - idUU^* := \hat{A}$ entonces, este Lagrangiano resulta ser localmente simétrico al igual que en el caso de la Electrodinámica Cuántica. Para demostrar esto notemos que:

$$\begin{aligned}\hat{\mathfrak{L}} &= \bar{\hat{\chi}}(x)[(i\gamma^\mu\hat{\nabla}_\mu - m)I]\hat{\chi}(x) = \bar{\chi}(x)U^*[(i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\hat{A}_\mu) - m)I]U\chi(x) \\ &= \bar{\chi}(x)U^*[(i\gamma^\mu(\partial_\mu - i(UA_\mu U^* - idU(\partial_\mu)U^*) - m)I]U\chi(x) \\ &= \bar{\chi}(x)[(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)I]\chi(x) + \bar{\chi}(x)U^*[i\gamma^\mu(\partial_\mu U - dU(\partial_\mu)U^*U)\chi(x)] \\ &= \bar{\chi}(x)[(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)I]\chi(x) + \bar{\chi}(x)U^*[i\gamma^\mu(\partial_\mu U - dU(\partial_\mu))]\chi(x) \\ &= \bar{\chi}(x)[(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)I]\chi(x) + \bar{\chi}(x)U^*[i\gamma^\mu(\partial_\mu U - \partial_\mu U)]\chi(x) \\ &= \bar{\chi}(x)[(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)I]\chi(x) = \mathfrak{L}\end{aligned}$$

Observación 4.16. Debido a la forma en la que se transforman A y $\chi(x)$ supondremos, al igual que en caso de la electrodinámica cuántica que χ es una sección de un haz vectorial de la forma $P \times_\rho (\mathbb{C}_L \oplus \mathbb{C}_R)^n$ (donde P es un $SU(N)$ haz principal) y que $-iA$ define una conexión en P .

El lagrangiano \mathfrak{L} busca describir la dinámica de una n -ada de espinores de Dirac χ al interactuar con el campo gauge A_μ , sin embargo si queremos incluir la dinámica del campo gauge A_μ entonces, debemos de considerar el lagrangiano :

$$\mathfrak{L}_{YM} = \bar{\chi}(x)[(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)I]\chi(x) - \frac{1}{4}[F]^2$$

donde F es la intensidad del campo de Yang-Mills A , es decir $F = d_A A$.

Observación 4.17. Este lagrangiano es localmente simétrico ya que es la suma de \mathfrak{L} y $-\frac{1}{4}|F|^2$ y por lo tanto sólo es necesario ver que $|F|^2$ es localmente simétrico. Esto se sigue de inmediato de su definición.

En coordenadas locales podemos expresar a \mathfrak{L}_{YM} como :

$$\mathfrak{L}_{YM} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^i(F^{\mu\nu})_i + \bar{\chi}(x)[(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)I]\chi(x)$$

y aplicando las ecuaciones de Euler Lagrange para campos :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathfrak{L}_{YM}}{\partial\chi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathfrak{L}_{YM}}{\partial(\partial_\mu\chi)} &= 0 \\ \frac{\partial\mathfrak{L}_{YM}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\frac{\partial\mathfrak{L}_{YM}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} &= 0\end{aligned}$$

obtenemos que :

$$\begin{aligned}\bar{\chi}\gamma^\mu A_\mu^a - m\bar{\chi} - i\partial_\mu\bar{\chi}\gamma^\mu &= 0 \\ (\partial_\nu(F^{\nu\mu})^i + i(F^{\mu\nu})^k f_{jk}^i A_\nu^j)T_i + \bar{\chi}\gamma^\mu\chi &= 0\end{aligned}$$

Para deducir la última igualdad tomamos una base $\{T_i\}$ de $Lie(SU(N))$ y usamos que en esta base $(F_{\mu\nu})^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + f_{jk}^i A_\mu^j A_\nu^k$, donde f_{bc}^a son las constantes de estructura de $Lie(SU(N))$ asociadas a esta base.

La primera de estas ecuaciones describe la dinámica de la n-ada de espinores de Dirac χ en presencia del campo gauge A_μ mientras que la segunda de estas determina la dinámica del campo gauge A_μ en presencia de cargas. Si definimos $(J^\mu) := \bar{\chi}\gamma^\mu\chi$ y notamos que $\partial_\nu(F^{\nu\mu})^i + i(F^{\mu\nu})^k f_{jk}^i A_\nu^j = (\nabla_\nu F^{\mu\nu})^i$, entonces en una notación más resumida podemos escribir esta ecuación como :

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu$$

Si definimos la uno forma \mathcal{J} como $\mathcal{J} := J_\mu dx^\mu$, entonces la ecuación anterior toma la forma

$$*(d_A * F_A) = \mathcal{J}$$

Esta ecuación junto con la identidad de Bianchi nos dan las ecuaciones de Yang Mills en presencia de cargas:

$$\begin{aligned}*(d_A * F_A) &= \mathcal{J} \\ d_A F &= 0\end{aligned}$$

Observación 4.18. En toda esta sección estamos usando el dual de Hodge en el espacio de Minkowski.

Observación 4.19. La corriente J^μ es precisamente la corriente conservada que se obtiene a partir del teorema de Noether debido a la $SU(N)$ simetría de \mathfrak{L}_{YM} (ver (12) o (6)).

Una de las principales diferencias entre las interacciones $U(1)$ y las interacciones $SU(N)$ es que $Lie(SU(N))$ es un álgebra de Lie no abeliana y por lo tanto las ecuaciones de Yang Mills en este caso contienen un término extra de la forma $-ig[A_\nu, F_{\nu\mu}]$. Este término vuelve a las ecuaciones de Yang Mills un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden en A y por lo tanto el principio de superposición no es válido a diferencia del caso de las interacciones $U(1)$. Esto hace mucho más difícil resolver las ecuaciones de Yang Mills para teorías no abelianas y en la mayoría de los casos resulta imposible dar soluciones exactas . Otra diferencia muy importante es que en estas teorías la intensidad del campo de Yang Mills $F_{\mu\nu}$ tiene un término extra de la forma $[A_\mu, A_\nu]$. Este término aporta al lagrangiano \mathfrak{L}_{YM} términos de interacción del campo gauge

A_μ consigo mismo a diferencia de el caso de la electrodinámica cuántica en la cual no pasa esto. Esto último hace que por ejemplo en las interacciones $SU(3)$ (cromodinámica cuántica) los leptones adquieran carga y a su vez esto ocasiona que en estas interacciones la fuerza incremente al aumentar la separación entre 2 objetos cargados. A este fenómeno se le suele llamar libertad asintótica y una discusión iluminadora de esto y mucho más se puede encontrar en (11).

4.6. Instantones

Consideremos una variedad de dimensión 4 M equipada con una métrica Riemanniana g . Como mencionamos en el apéndice uno para cualquier 2-forma $\omega \in M$ el operador $*$ de Hodge satisface la identidad $*^2(\omega) = \omega$ y esto nos permite descomponer al espacio de 2 formas de la siguiente manera :

$$C^\infty(M, \wedge^2 T^*M) = C^\infty_-(M, \wedge^2 T^*M) \oplus C^\infty_+(M, \wedge^2 T^*M) \quad (4.2)$$

Donde una 2 forma $\omega \in C^\infty_\pm(M, \wedge^2 T^*M)$ si $*\omega = \pm\omega$. Esto último se demuestra al escribir a cualquier 2 forma ω como $\omega = \frac{1}{2}(\omega + *\omega) - \frac{1}{2}(\omega - *\omega)$.

Definición 4.5. Decimos que una 2 forma ω es autodual si $*\omega = \omega$. Si $*\omega = -\omega$ entonces diremos que ω es antidual.

Usando la descomposición anterior, podemos ver que cualquier 2-forma ω se puede escribir como $\omega = \omega_+ + \omega_-$ donde $\omega_\pm \in C^\infty_\pm(M, \wedge^2 T^*M)$. Más aun, esta descomposición es ortogonal (con respecto al producto interno inducido en $\wedge^2 T^*M$ por g) ya que por un lado tenemos que :

$$\langle \omega_+, \omega_- \rangle vol_M = \omega_+ \wedge *\omega_- = -\omega_+ \wedge \omega_-$$

Sin embargo también es cierto que :

$$\langle \omega_+, \omega_- \rangle vol_M = \langle \omega_-, \omega_+ \rangle vol_M = \omega_- \wedge *\omega_+ = \omega_- \wedge \omega_+ = \omega_+ \wedge \omega_-$$

Y por lo tanto podemos concluir que :

$$\langle \omega_+, \omega_- \rangle = 0$$

Para 2-formas con valores en un haz vectorial lo anterior aun es cierto y por lo tanto podemos descomponer a la intensidad del campo de Yang Mills F_A en su parte autodual y antidual como :

$$F_A = F_A^+ + F_A^-$$

Esto nos permite expresar al funcional (acción) de Yang-Mills como :

$$\mathfrak{S}_{YM} = \int_M [F_A]^2 = \int_M [F_A^+]^2 + \int_M [F_A^-]^2$$

Donde en la última igualdad utilizamos el hecho de que F_A^+ y F_A^- son ortogonales.

Definición 4.6. Definamos el número de Chern c como :

$$c := \int_M \text{tr}(F_A \wedge F_A)$$

Descomponiendo a F_A en su parte autodual y antidual obtenemos que :

$$c = \int_M \text{tr}(F_A^+ \wedge F_A^+) - \int_M \text{tr}(F_A^- \wedge F_A^-)$$

Observación 4.20. En esta última igualdad están ausentes los términos cruzados ya que F_A^+ y F_A^- son ortogonales.

Debido a lo anterior podemos ver que el funcional de Yang Mills está acotado por abajo por el valor absoluto de el número de Chern c :

$$\mathfrak{S}_{YM} \leq [c]$$

y la igualdad sólo se da si $F_A^\pm = 0$. En este caso tenemos que :

$$\mathfrak{S}_{YM} = \pm c$$

Observación 4.21. Si $F_A^\pm = 0$ entonces A satisface la ecuación de Yang Mills como una consecuencia directa de la identidad de Bianchi.

Definición 4.7. Si $F_A = F_A^+$ diremos que A es un instantón. Si $F_A = F_A^-$ diremos que A es un anti-instantón.

Observación 4.22. Debido a la observación anterior y al hecho de que el valor absoluto de el número de Chern c es una cota del funcional de Yang Mills podemos concluir que un instantón (anti-instantón) es un mínimo global de \mathfrak{S}_{YM} .

Observación 4.23. Notemos que las ecuaciones de Yang Mills son un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en A mientras que la condición de ser un instantón (anti-instantón) está dada por una ecuación diferencial parcial de primer orden. Por lo tanto requerir que una solución sea un instantón (anti-instantón) es una forma más simple de encontrar soluciones a las ecuaciones de Yang Mills.

Observación 4.24. Debido a la forma en la que definimos al número de Chern c este parece depender de la conexión usada para definirlo. Sin embargo como veremos en el siguiente capítulo este no depende de esta y por lo tanto se puede pensar como un número característico asociado al haz principal P del cual partimos.

4.7. Instantones en el espacio de Minkowski

Trabajando en el espacio de Minkowski consideremos una partícula (campo) cuántica Ψ que interactúa con un instantón A y supongamos que la función de onda de esta partícula se encuentra descrita por una sección de un haz vectorial complejo E de la forma $P \times_\rho V$. Donde P es un $SU(N)$ haz principal. En esta breve sección nos concentraremos en la dinámica del campo gauge A y para simplificar la discusión supondremos que la intensidad del campo de Yang Mills F tiene soporte

compacto. Tomemos una esfera S^3 que contenga al soporte de F y consideremos una vecindad U que contenga a esta esfera; también consideremos a un abierto V totalmente ajeno al soporte de F y definido como el exterior de una esfera contenida en la esfera S^3 original. Notemos que debido a la definición de V tenemos que $\forall m \in V, F = 0$. Dicho de otra forma notemos que si restringimos la conexión a V obtenemos una conexión plana. Esto combinado con el hecho de que V es simplemente conexo nos permite concluir que bajo un cambio de base de las secciones locales de $E|_V, s \mapsto s' := gs$ podemos suponer que $A_V = 0$ (ver 4.2) y por lo tanto en $V \cap U$ tenemos que $A_U = g^{-1}A_Ug - g^{-1}dg = g^{-1}dg$. En particular para cualquier elemento de la esfera S^3 que contiene al soporte de F la conexión A se puede expresar de esta forma y esto nos brinda un mapeo :

$$g : S^3 \longrightarrow SU(N)$$

Al grado de este mapeo lo llamaremos el grado k del instantón y se puede demostrar que

$$k = \frac{1}{8\pi} \text{tr}(F \wedge F) \quad (4.3)$$

Observación 4.25. En el caso en el que el soporte de F no sea compacto es posible hacer lo mismo sólo que considerando un mapeo $g : S_\infty^3 \longrightarrow SU(N)$ donde S_∞^3 es el cielo (esfera al infinito).

4.8. Levantamiento de haces principales

Dado un G -haz principal $\pi : P \longrightarrow M$, un grupo de Lie H y un morfismo de grupos de Lie $f : G \longrightarrow H$ siempre podemos construir un H -haz principal de la siguiente manera :

- 1) Consideremos una cubierta abierta de M $\{U_\alpha\}$ en la cual P se trivializa y escribamos a las funciones de transición de P como $g_{\alpha\beta}$.
- 2) Notemos que claramente las funciones $\hat{g}_{\alpha\beta} := f \circ g_{\alpha\beta}$ satisfacen la condición del cociclo.
- 3) Definamos el haz P_H como $P_H := \bigcup (U_\alpha \times H) / \sim_{\hat{g}_{\alpha\beta}}$.

Ahora supongamos que tenemos un H haz principal $\hat{\pi} : \hat{P} \longrightarrow M$. Si este haz es de la forma P_H para algún G haz principal $\pi : P \longrightarrow M$ entonces decimos que P es un levantamiento de \hat{P} bajo $f : G \longrightarrow H$. Dicho de otra manera, un G haz principal P es un levantamiento de un haz principal \hat{P} bajo $f : G \longrightarrow H$ si podemos elegir funciones de transición de \hat{P} de la forma $f \circ g_{\alpha\beta}$ donde $\{g_{\alpha\beta}\}$ es una elección del conjunto de funciones de transición de P .

Observación 4.26. Dado un H haz principal \hat{P} y un morfismo $f : G \longrightarrow H$ no siempre es posible construir un levantamiento bajo f de \hat{P} ya que como esbozaremos en la siguiente sección existen obstrucciones topológicas que nos pueden impedir realizar esto.

Ejemplo 4.1. Supongamos que tenemos una variedad Lorentziana orientable de dimensión 4 (M, g) . Consideremos al haz de marcos $P_{SO(1,3)}(M)$ y al morfismo 2 a 1 $f : SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow SO(1, 3)$. En el caso en el que exista un levantamiento de $P_{SO(1,3)}(M)$ bajo f diremos que M admite una estructura spin y a el $SL(2, \mathbb{C})$ haz principal que se obtiene de este levantamiento lo escribiremos como $P_{SL(2, \mathbb{C})}(M)$. El resultado principal de la siguiente sección nos dará una condición suficiente para que exista una

estructura spin en M y esto será importante para nosotros ya que como veremos un poco más adelante, una estructura spin nos permite construir campos de espinores de Dirac en un espacio tiempo curvo M .

4.9. Cohomología de Chern

Definición 4.8. Una gavilla S en un espacio topológico M asocia a todo subconjunto abierto U de M un grupo abeliano $S(U)$ (secciones de U) y a todo $V \subset U$ un mapeo de restricción $r_{UV} : S(U) \rightarrow S(V)$ tal que :

- 1) Si $W \subset V \subset U$ tenemos que $r_{VW} \circ r_{UV} = r_{UW}$
- 2) Si $\sigma \in S(U)$, $\tau \in S(V)$ y $r_{UU \cap V}(\sigma) = r_{VU \cap V}(\tau)$ entonces existe $\rho \in S(U \cup V)$ tal que $r_{U \cup V U}(\rho) = \sigma$, $r_{U \cup V V}(\rho) = \tau$.
- 3) Si $\sigma \in S(U \cup V)$ es tal que $r_{U \cup V U} = 0$ y $r_{U \cup V V} = 0$ entonces $\sigma = 0$.

A continuación daremos 2 ejemplos que serán importantes para nosotros:

- 1) $S(U) = O(U)$ donde $O(U)$ es el conjunto de funciones holomorfas en U .
- 2) $S(U) = O(L)(U) :=$ conjunto de secciones sobre U del haz de linea complejo L .

Si S es una gavilla podemos construir los grupos de cohomología $H^p(M, S)$ con coeficientes en S de la siguiente manera. Tomemos una cubierta abierta de $\{U_\alpha\}$ de M y supongamos que esta es localmente finita. Definamos :

$$\begin{aligned} S^0 &:= \bigoplus_{\alpha} S(U_\alpha) \\ S^1 &:= \bigoplus_{\alpha \neq \beta} S(U_\alpha \cap U_\beta) \\ S^p &:= \bigoplus_{\alpha_0 \neq \dots \neq \alpha_p} S(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}) \end{aligned}$$

Sea f un elemento en S^p y escribamos a las coordenadas de este como $f_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}$. Decimos que f es alternante si para toda permutación σ tenemos que $f_{\sigma(\alpha_0) \sigma(\alpha_1) \dots \sigma(\alpha_p)} = \text{sgn}(\sigma) f_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}$ donde $\text{sgn}(\sigma)$ es el es signo de la permutación σ . Definamos a C^p como el conjunto de elementos alternantes en S^p y consideremos el morfismo $\delta : C^p \rightarrow C^{p+1}$ definido por :

$$(\delta(f))_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} := \sum_i (-1)^i f_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}}$$

donde $f_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_{p+1}} := f_{\alpha_0 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_p}$.

Lema 4.2. ($\delta^2 = 0$) Para toda $f \in C^p$ se tiene que $(\delta \circ \delta)(f) = 0$.

Demostración. Notemos que

$$(\delta^2(f))_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{p+2}} = \sum_{r=0}^{p+2} (-1)^r \left(\sum_{s < r} (-1)^s f_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \hat{\alpha}_s \dots \hat{\alpha}_r \dots \alpha_p} + \sum_{r < s} (-1)^s f_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \hat{\alpha}_r \dots \hat{\alpha}_s \dots \alpha_p} \right)$$

En esta suma cada término aparece dos veces pero con signo distinto (ya que $f_{\sigma(\alpha_0) \sigma(\alpha_1) \dots \sigma(\alpha_p)} = \text{sgn}(\sigma) f_{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_p}$ donde $\text{sgn}(\sigma)$ es el es signo de la permutación) y por lo tanto esta suma se anula.

■

Debido al lema anterior tenemos el siguiente co-complejo de cadena :

$$\dots \xrightarrow{\delta} C^{i-1} \xrightarrow{\delta} C^i \xrightarrow{\delta} C^{i+1} \xrightarrow{\delta} \dots$$

Esto nos permite definir los grupos de cohomología $H^p(M, S)$ con coeficientes en la gavilla S como :

$$H^p(M, S) := \frac{\ker(\delta : C^p \rightarrow C^{p+1})}{\operatorname{im}(\delta : C^{p-1} \rightarrow C^p)}$$

Observación 4.27. La definición de $H^p(M, S)$ parece depender de la cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M utilizada en la definición. La forma usual de hacer a estos grupos de cohomología independientes de la cubierta utilizada es tomar un límite en el conjunto de todas las cubiertas abiertas de M , el cual forma un conjunto parcialmente ordenado bajo refinamiento. Esto vuelve a los grupos de cohomología incomputables y la forma de solucionar esto es tomar una cubierta buena de M ya que para cubiertas de este tipo se puede demostrar que el límite es igual a la cohomología que se obtiene al usar esta cubierta.

Ejemplo 4.2. Sea L un haz de línea holomorfo sobre M y S la gavilla de secciones holomorfas de L . Si $f \in C^0$ entonces tenemos que :

$$(\delta(f))_{\alpha\beta} = f_\alpha - f_\beta$$

Por lo tanto $\delta(f) = 0$ si y sólo si las secciones f_α se pegan consistentemente y definen una sección global f en L . Es decir $H^0(M, O(L)) = \ker \delta$ está dado por el espacio de secciones holomorfas en L .

Ejemplo 4.3. Supongamos que tenemos un haz de línea holomorfo L sobre M . Si $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de M en la cual L se trivializa y $g_{\alpha\beta}$ son las funciones de transición asociadas a esta cubierta abierta entonces tenemos que $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ y por lo tanto podemos ver que $g_{\alpha\beta}$ es un elemento de C^1 para la gavilla O^* de funciones holomorfas que no se anulan. En esta gavilla la operación de grupo es multiplicativa y por lo tanto usando la condición del cociclo obtenemos que :

$$(\delta(g))_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\alpha\gamma}^{-1} = 1$$

Esto implica que g define un elemento de $H^1(M, O^*)$. Por otro lado cómo vimos en el teorema E.1, L^{\cdot} es isomorfo a L si y sólo si podemos tomar una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M en la que tanto L como L^{\cdot} se trivializan y las funciones de transiciones de L^{\cdot} son de la forma $g'_{\alpha\beta} = h_\alpha g_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}$ donde $h_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$. Usando que la multiplicación en \mathbb{C} es conmutativa obtenemos que :

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} h_\alpha h_\beta^{-1} = g_{\alpha\beta} (\delta(h))_{\alpha\beta}$$

Esto implica que

$$g' = g\delta(h)$$

para alguna $h \in C^0$ y por lo tanto L, L^{\cdot} son isomorfos si y sólo si definen el mismo elemento en

$H^1(M, O^*)$. Por el contrario, tomemos un elemento de $[g_{\alpha\beta}] \in H^1(M, O^*)$ y notemos que el conjunto de funciones $g_{\alpha\beta}$ satisface la condición del cociclo y por lo tanto define un haz de línea holomorfo L sobre M . En resumen tenemos lo siguiente :

Teorema 4.5. *Las clases de isomorfismo de haces de línea holomorfos sobre una variedad M están en correspondencia uno a uno con los elementos de $H^1(M, O^*)$.*

4.9.1. Estructuras Spin

En esta sección daremos una condición necesaria y suficiente para que exista una estructura spin en una variedad 4-dimensional Lorentziana (M, g) . Tomemos una cubierta abierta buena de M , $\{U_\alpha\}$ en la cual TM se trivializa y escribamos a las funciones de transición de TM para esta cubierta como $g_{\alpha\beta}$. Notemos que debido a que $U_\alpha \cap U_\beta$ es contraíble podemos levantar a $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SO(1, 3)$ a una función $\hat{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ tal que $g_{\alpha\beta} = f \circ \hat{g}_{\alpha\beta}$ donde $f : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(1, 3)$ es la función 2 a 1 que definimos en la sección 1.6.1 y por lo tanto:

$$\hat{g}_{\alpha\beta} \hat{g}_{\beta\gamma} \hat{g}_{\alpha\gamma}^{-1} = \pm 1$$

Definamos $\eta_{\alpha\beta\gamma} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$ como $\eta_{\alpha\beta\gamma} := \hat{g}_{\alpha\beta} \hat{g}_{\beta\gamma} \hat{g}_{\alpha\gamma}^{-1}$ Usando que los elementos de \mathbb{Z}_2 son sus propios inversos notemos que :

$$\eta_{\alpha\beta\gamma} = \eta_{\beta\gamma\alpha} = \eta_{\beta\alpha\gamma} = \eta_{\beta\alpha\gamma}^{-1}$$

$$\eta_{\beta\gamma\delta} \eta_{\alpha\gamma\delta}^{-1} \eta_{\alpha\beta\delta} \eta_{\alpha\beta\gamma}^{-1} = 1$$

Esto implica que $\{\eta_{\alpha\beta\gamma}\}$ define una clase de cohomología en $H^2(M, \mathbb{Z}_2)$. A esta clase de cohomología la llamaremos la segunda clase de Stiefel-Whitney del haz tangente de M , TM y la escribiremos como $w_2(TM)$. Si M admite una estructura spin entonces claramente las funciones $\hat{g}_{\alpha\beta}$ satisfacen la condición del cociclo y por lo tanto $w_2(TM) = 0$. Por el contrario, si la segunda clase de Stiefel-Whitney es cero, podemos concluir que $\{\eta_{\alpha\beta\gamma}\}$ es una co-frontera y por lo tanto existen funciones $\eta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{Z}_2$ tales que :

$$\eta_{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} \eta_{\gamma\alpha} = \eta_{\alpha\beta\gamma}$$

Debido a esto tenemos que el conjunto de funciones de la forma $\eta_{\alpha\beta} \hat{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ satisface la condición del cociclo ya que :

$$(\eta_{\alpha\beta} \hat{g}_{\alpha\beta})(\eta_{\beta\gamma} \hat{g}_{\beta\gamma})(\eta_{\alpha\gamma} \hat{g}_{\alpha\gamma})^{-1} = \eta_{\alpha\beta} \eta_{\beta\gamma} \eta_{\gamma\alpha} \hat{g}_{\alpha\beta} \hat{g}_{\beta\gamma} \hat{g}_{\alpha\gamma}^{-1} = (\eta_{\alpha\beta\gamma})^2 = 1$$

combinando esto con el hecho de que claramente $f(\eta_{\alpha\beta} \hat{g}_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$ podemos concluir que $\{\eta_{\alpha\beta} \hat{g}_{\alpha\beta}\}$ define una estructura spin en M . En resumen tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.6. *Sea M es una variedad 4 dimensional Lorentziana y orientable. M admite una estructura spin si y sólo si $w_2(M) = 0$.*

4.9.2. El haz de espinores de Dirac

Si tenemos una variedad Lorentziana y orientable de dimensión 4 (M, g) las funciones de transición de TM se pueden tomar en $SO(1, 3)$. Debido a esto tenemos que si $X \in C^\infty(M, TM)$ es un campo vectorial y $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta de M en la cual TM se trivializa entonces $\forall m \in U_\alpha \cap U_\beta$

$$X_\beta = g_{\beta\alpha}(m)X_\alpha$$

donde $g_{\beta\alpha}(m)$ es un elemento de $SO(1, 3)$. Debido a esto podría resultar natural pensar que si Ψ es un hipotético campo de Dirac (es decir una elección de espinor de Dirac en cada punto de M) entonces los representantes locales Ψ_α, Ψ_β están relacionados por :

$$\rho(g_{\hat{\beta}\alpha})\Psi_\alpha = \Psi_\beta$$

donde ρ es la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de $SL(2, \mathbb{C})$. Es aquí donde es importante que M tenga una estructura spin ya que de este ser el caso podemos definir un haz vectorial E de la siguiente manera :

$$E_D := (P_{SL(2, \mathbb{C})}(M)) \times_\rho (\mathbb{C}_L^2 \times \mathbb{C}_R^2)$$

Observación 4.28. Notemos que $SL(2, \mathbb{C})$ actúa naturalmente en E_D y la forma en la que se transforman (fibra a fibra) las secciones de E_D bajo los elementos de $SL(2, \mathbb{C})$ es precisamente la propiedad definitoria de cómo se transforman los espinores de Dirac y por lo tanto tiene sentido pensar a las secciones de E_D como campos de espinores de Dirac.

4.10. La ecuación de Dirac en un espacio tiempo curvo

Supongamos que tenemos una variedad Lorentziana y orientable de dimensión 4 (M, g) que admite una estructura spin. Consideremos la conexión de Levi-Cevita Γ en TM asociada a g . Tomemos una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de M en la cual TM se trivializa y describamos a este conexión mediante un conjunto de representantes locales $\Gamma_\alpha : T(U_\alpha) \rightarrow Lie(SO(1, 3))$. Si identificamos a $Lie(SO(1, 3))$ con $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ mediante f_* donde $f : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO(1, 3)$ es la función 2 a 1 que definimos en 1.6.1 entonces podemos definir $\hat{\Gamma}_\alpha : T(U_\alpha) \rightarrow Lie(SL(2, \mathbb{C}))$ como $\hat{\Gamma}_\alpha := f_*^{-1} \circ \Gamma_\alpha$. Notemos que en $U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos que :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_\beta &= f_*^{-1} \circ \Gamma_\beta \\ &= f_*^{-1} \circ (g_{\beta\alpha} \Gamma_\alpha g_{\beta\alpha}^{-1} - dg_{\beta\alpha} g_{\beta\alpha}^{-1}) \\ &= \hat{g}_{\beta\alpha} \hat{\Gamma}_\alpha \hat{g}_{\beta\alpha}^{-1} - d\hat{g}_{\beta\alpha} \hat{g}_{\beta\alpha}^{-1} \end{aligned}$$

donde $\hat{g}_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ es el levantamiento a $SL(2, \mathbb{C})$ de la función $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow SO(1, 3)$. Esto implica que $\hat{\Gamma}_\alpha$ se transforma de la forma requerida para poder definir una conexión $\hat{\Gamma}$ en el haz $P_{SL(2, \mathbb{C})}(M)$. Escribamos a Γ en coordenadas locales como :

$$\Gamma_\alpha = \sum_{\mu < \nu} (\Gamma_\alpha)_\nu^\mu E_{\mu\nu}$$

donde $\{E_{\mu\nu}\}_{\mu<\nu}$ es la base de $Lie(SO(1,3))$ definida por :

$$K_1 := E_{01}, K_2 := E_{02}, K_3 := E_{03}$$

$$J_1 := E_{23}, J_2 := E_{13}, J_3 := E_{12}$$

Usando esto podemos escribir a $\hat{\Gamma}_\alpha$ como :

$$\hat{\Gamma}_\alpha = \sum_{\mu<\nu} (\Gamma_\alpha)_\nu^\mu f_*^{-1}(E_{\mu\nu})$$

La conexión $\hat{\Gamma}$ induce una conexión ω en E_D y si Ψ es una sección de E_D entonces en coordenadas locales tenemos que :

$$d_\omega \Psi = d\Psi + \sum_{\mu<\nu} \Gamma_\nu^\mu \rho(f_*^{-1}(E_{\mu\nu})) \Psi$$

Donde ρ es la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de $Lie(SL(2, \mathbb{C}))$. Usando que en la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ se tiene que

$$\rho(J_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_2\sigma_3 & 0 \\ 0 & +\sigma_3\sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\rho(J_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_3\sigma_1 & 0 \\ 0 & +\sigma_1\sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\rho(J_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_2 & 0 \\ 0 & +\sigma_2\sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(K_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_0\sigma_1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(K_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_0\sigma_2 \end{pmatrix}$$

$$\rho(K_3) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_0\sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_0\sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_0\sigma_3 \end{pmatrix}$$

Obtenemos que :

$$\rho(E_{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_\mu\sigma_\nu & 0 \\ 0 & -\sigma_\nu\sigma_\mu \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu$$

Esto último nos permite escribir a $d_\omega \Psi$ como :

$$d_\omega \Psi = d\Psi - \frac{1}{2} \sum_{\mu<\nu} \Gamma_\nu^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi$$

Usando la antisimetría de $\gamma_\mu \gamma_\nu$ y de Γ_ν^μ podemos ver que :

$$d_\omega \Psi = d\Psi - \frac{1}{4} \Gamma_\nu^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi$$

donde en esta última igualdad estamos usando la convención de Einstein aunque los índices no aparecen correctamente. Debido a esto tenemos que en coordenadas locales:

$$\nabla_{\xi}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x^{\xi}} - \frac{1}{4}\Gamma_{\xi\nu}^{\mu}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\Psi$$

El principio de co-varianza de Einstein nos dice que para obtener la versión de una cierta ecuación de la física en un espacio tiempo curvo debemos de remplazar a las derivadas parciales por derivadas covariantes. Usando esto obtenemos que la ecuación de Dirac en un espacio tiempo curvo M está dada por :

$$(i\gamma_{\xi}\nabla_{\xi} - m)\Psi = 0$$

$$i\gamma_{\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial x^{\xi}} - (i\frac{1}{4}\Gamma_{\xi\nu}^{\mu}\gamma_{\xi}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + m)\Psi = 0$$

donde de nuevo estamos usando la convención de Einstein aunque los índices no aparecen correctamente. Si además Ψ se encuentra en presencia de un campo electromagnético entonces tenemos que $\nabla_{\xi}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x^{\xi}} + \Gamma_{\xi\nu}^{\mu}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\Psi + iA_{\xi}\Psi$ y por tanto la ecuación de Dirac en un espacio tiempo curvo y en presencia de un campo electromagnético está dada por :

$$i\gamma_{\xi}\frac{\partial\Psi}{\partial x^{\xi}} - (i\frac{1}{4}\Gamma_{\xi\nu}^{\mu}\gamma_{\xi}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\xi}A_{\xi} + m)\Psi = 0$$

Aunque existe mucho más que decir al respecto de la ecuación de Dirac en un espacio tiempo curvo, creemos que este es buen momento para concluir ya que este último ejemplo involucra muchas de las matemáticas que estudiamos en este trabajo.

Apéndices

Apéndice A

Teoría de Hodge

Supongamos que tenemos una variedad (orientable) M equipada con una métrica Riemanniana g y consideremos una base ortonormal de $T_p M$ $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$. Para toda $p \in \mathbb{N}$ la métrica Riemanniana g induce una métrica en $\wedge^p T^* M$ definida por las siguientes relaciones

$$\langle (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}), (dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \cdots \wedge dx_{j_p}) \rangle := \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \cdots \delta_{j_p}^{i_p}$$

donde δ_j^i es la delta de Kronecker. Usando esta definición, la forma de volumen Riemanniana vol_M nos brinda un isomorfismo :

$$* : \wedge^p T^* M \longrightarrow \wedge^{n-p} T^* M$$

definido de tal manera que para cualquier par de p-formas ω, ω' se tiene que :

$$\omega \wedge \omega'^* = \langle \omega, \omega' \rangle vol_M$$

Para darnos una idea clara de qué forma toma el operador de Hodge consideremos una base ortonormal $\{e_i\}$ de $T^* M$ en un cierto punto de M . La forma de volumen en este punto está dado por $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$ y por lo tanto podemos observar fácilmente que:

$$*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) = e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n$$

Otros elementos de la base de $\wedge^p T^* M$ son de la forma $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p})$ (donde $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$) y la imagen de estos elementos bajo la estrella de Hodge está dado por :

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \pm 1 e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-p}} .$$

donde $j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-p}$ es una secuencia de naturales ordenados que se obtiene del conjunto de los primeros n naturales al retirar i_1, \cdots, i_p . El signo $+1$ o -1 está determinado por la paridad de la permutación que se requiere para mapear $(i_1, \cdots, i_p, j_1, \cdots, j_{n-p})$ a $(1, \cdots, n)$. Por último notemos que el operador de Hodge define una involución, es decir $*^2 = (-1)^{p(n-p)}$. Por ejemplo $*$ mapea la forma de volumen canónica en la función constante 1 y viceversa.

A.0.1. El dual de Hodge en el espacio de Minkowski

Recordemos que el espacio de Minkowski tiene una pseudo-métrica definida por

$$g(v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$$

donde $v_1 := (x_1, y_1, z_1, t_1)$ y $v_2 := (x_2, y_2, z_2, t_2)$. Debido a que la definición del dual de Hodge depende de un producto interno entre formas el cual está definido a partir de la métrica original tenemos que al cambiar la métrica de \mathbb{R}^4 por la métrica de Minkowski el dual de Hodge también cambiará ya que $\langle dt, dt \rangle = -1$. Usando la definición del dual de Hodge es fácil ver que en el espacio de Minkowski se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} *1 &= dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt \\ *dx &= dy \wedge dz \wedge dt \\ *dy &= dz \wedge dx \wedge dt \\ *dz &= dx \wedge dy \wedge dt \\ *dt &= dx \wedge dy \wedge dz \\ *(dx \wedge dy) &= dz \wedge dt \\ *(dz \wedge dx) &= dy \wedge dt \\ *(dy \wedge dz) &= dx \wedge dt \\ *(dx \wedge dt) &= -dy \wedge dz \\ *(dy \wedge dt) &= -dz \wedge dx \\ *(dz \wedge dt) &= -dx \wedge dy \\ *(dx \wedge dy \wedge dz) &= dt \\ *(dx \wedge dy \wedge dt) &= dz \\ *(dz \wedge dx \wedge dt) &= dy \\ *(dy \wedge dz \wedge dt) &= dx \\ *(dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt) &= -1 \end{aligned}$$

Una 2-forma de particular interés en este contexto es la 2-forma de Faraday, la cual está definida por

$$F = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy + E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt$$

donde B_{x_i} es el componente i del campo magnético y análogamente E_{x_i} es el componente i del campo eléctrico. El dual de Hodge en el espacio de Minkowski de la 2 forma de Faraday está dada por

$$*F = -B_x dx \wedge dt - B_y dy \wedge dt - B_z dz \wedge dt + E_x dy \wedge dz + E_y dz \wedge dx + E_z dx \wedge dy$$

Observación A.1. En el espacio euclidiano \mathbb{R}^4 se tiene que $*^2(\alpha) = \alpha$ para cualquier 2 forma α , a diferencia de esto en el espacio de Minkowski se tiene que $*^2(\alpha) = -\alpha$.

Apéndice B

Los Lagrangianos de las teorías libres de la naturaleza

En esta muy breve sección describiremos los Lagrangianos de las teorías libres (sin interacciones) de la naturaleza. El requerimiento central para poder deducir estos Lagrangianos está dado por la condición de que estos sean Lorentz invariantes ya que buscamos que las ecuaciones de la física no dependan del marco inercial que usamos para describirla. Además de esto requerimos que el lagrangiano use el menor número de derivadas posibles. Esto usualmente se pide para evitar que estas teorías tengan niveles de energía negativos arbitrariamente grandes ya que de este ser el caso en estas teorías no existirían estados estables. Para poder construir Lagrangianos Lorentz invariantes necesitamos usar objetos en los cuales las transformaciones de Lorentz puedan actuar.

Observación B.1. Un criterio útil para construir términos Lorentz invariantes es el principio de co-varianza. A grandes rasgos, este nos dice que si construimos un término con la misma cantidad de índices superiores como inferiores entonces este término será un escalar que se transforma bajo la representación 0 del grupo de Lorentz. Por ejemplo, si A^μ es un cuatrivector en el espacio de Minkowski entonces un término de la forma $A^\mu A_\mu$ es Lorentz invariante ya que tiene un índice arriba y uno abajo.

B.0.1. El lagrangiano de Klein-Gordon

Este lagrangiano se construye a partir de un campo escalar Φ que se transforma bajo la representación $(0, 0)$ del grupo de Lorentz. Usando las condiciones del párrafo anterior se puede ver que este es de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^2)$$

donde m es una constante. Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange para campos a este lagrangiano obtenemos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi = 0$$

Esta es precisamente la ecuación de Klein-Gordon que describe correctamente la dinámica de una partícula cuántica libre, de masa m y de spin 0.

B.0.2. El lagrangiano de Proca

Este lagrangiano se construye a partir de un campo A que se transforma mediante la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz. Esta representación es la representación vectorial y por lo tanto para construir este lagrangiano empezaremos por listar los términos Lorentz invariantes que podemos construir a partir de un cuatrivector A^μ utilizando derivadas de orden menor o igual que 2. Usando el principio de co-varianza podemos ver que estos están dados por

$$I_1 = \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu \quad , \quad I_2 = \partial^\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu$$

$$I_3 = A^\nu A_\nu \quad , \quad I_4 = \partial^\mu A_\mu$$

Esto implica que el lagrangiano de Proca es de la forma

$$\mathfrak{L}_{Proca} = C_1 \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu + C_2 \partial^\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu + C_3 A^\nu A_\nu$$

Observación B.2. Estamos suponiendo que $C_4 = 0$ ya que un término de la forma $C_4 \partial^\mu A_\mu$ sólo cambiaría las ecuaciones de Euler-Lagrange por una constante y por lo tanto no tendría relevancia en la dinámica del campo A^μ .

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos asociadas a este Lagrangiano están dadas por

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_\rho} = \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial (\partial_\sigma A_\rho)} \right)$$

Realizando un cálculo delicado es posible ver que estas se reducen a las siguientes ecuaciones

$$2C_3 A^\rho = 2C_1 \partial_\sigma \partial^\sigma A^\rho + 2C_2 \partial^\rho (\partial_\sigma A^\sigma)$$

Si tomamos $C_3 = \frac{1}{2}m^2$, $C_1 = \frac{1}{4}$ y $C_2 = -\frac{1}{4}$ obtenemos

$$m^2 A^\rho = \frac{1}{2} \partial_\sigma (\partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma)$$

Estas son las ecuaciones de Proca las cuales describen la dinámica de la función de onda de una partícula cuántica de masa m y de spin 1. Para partículas de masa cero estas ecuaciones toman la forma

$$0 = \frac{1}{2} \partial_\sigma (\partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma)$$

Si A^μ es el potencial vectorial electromagnético (relativista) (ver Robinson2011 o frankel2011geometry) entonces las ecuaciones anteriores son precisamente las ecuaciones no homogéneas de Maxwell en ausencia de cargas

$$\nabla \cdot E = 0, \quad \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Para deducir estas últimas ecuaciones usamos que $E^i = \partial^i A^0$ y que $B^i = \epsilon_{jk}^i (\partial_j A_k - \partial_k A_j)$.

Definamos el tensor de Faraday $\mathcal{F}^{\sigma\rho}$ como $\mathcal{F}^{\sigma\rho} := \partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma$, esto nos permite escribir al Lagrangiano de Proca \mathfrak{L}_{Proca} como

$$\mathfrak{L}_{Proca} = \frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu$$

en el caso en el que $m = 0$ obtenemos el Lagrangiano de Maxwell

$$\mathfrak{L}_{Maxwell} = \frac{1}{4} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}$$

Por último notemos que si definimos la uno forma A como $A := A_\mu dx^\mu$ y la 2-forma de Faraday F como $F := dA$ entonces podemos expresar las ecuaciones no homogéneas de Maxwell en ausencia de corrientes como $d * F = 0$ donde $*F$ es el dual de Hodge de F (ver apéndice A). Esto convalidado con el hecho de que $dF = d(dA) = 0$ nos proporciona la forma completa de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de cargas

$$d * F = 0$$

$$dF = 0$$

B.0.3. El lagrangiano de Dirac

Este lagrangiano se construye a partir de un campo $\Psi = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \xi_R \end{pmatrix}$ que se transforma bajo la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz. Para poder escribir este Lagrangiano empecemos por listar los objetos Lorentz invariantes que podemos construir a partir de Ψ y que utilizaremos en este

$$I_1 = (\chi_L)^\dagger \xi_R, \quad I_2 = (\xi_R)^\dagger \chi_L, \quad I_3 = (\chi_L)^\dagger \partial_\mu \hat{\sigma}^\mu \chi_L, \quad I_4 = (\xi_R)^\dagger \partial_\mu \sigma^\mu \xi_R$$

Para poder deducir que los términos (de masa) I_1 e I_2 son Lorentz invariantes usamos que bajo una transformación de Lorentz

$$\Psi \mapsto \Psi' = \begin{pmatrix} e^{(i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2})} & 0 \\ 0 & e^{(i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}$$

$$\chi_L \mapsto e^{(i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2})} \chi_L, \quad (\chi_L)^\dagger \mapsto (\chi_L)^\dagger e^{(-i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2})}, \quad \chi_R \mapsto e^{(i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2})} \chi_R, \quad (\chi_R)^\dagger \mapsto (\chi_R)^\dagger e^{(-i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2})}$$

y por lo tanto

$$(\chi'_L)^\dagger \chi'_R = (\chi_L)^\dagger e^{(-i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2})} e^{(i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2})} \chi_R = (\chi_L)^\dagger \chi_R$$

$$(\chi'_R)^\dagger \chi'_L = (\chi_R)^\dagger e^{(-i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2})} e^{(i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2})} \chi_L = (\chi_R)^\dagger \chi_L$$

Observación B.3. Podría resultar más natural observar que debido a la forma en la que se transforman $\chi_L, \chi_R, (\chi_L)^\dagger$ y $(\chi_R)^\dagger$ I_1 e I_2 son los únicos términos Lorentz invariantes (salvo constantes) que podemos construir a partir de estos sin utilizar ninguna derivada y por lo tanto las únicas opciones que tenemos para poder construir un término de masa para el Lagrangiano que buscamos.

Para poder deducir que los términos dinámicos I_3 e I_4 son Lorentz invariantes usamos que bajo la

transformación de Lorentz que estamos considerando

$$\sigma^\mu \mapsto e^{(i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2})} \sigma^\mu e^{(-i\theta\frac{\sigma}{2} + \phi\frac{\sigma}{2})}, \quad \hat{\sigma}^\mu \mapsto e^{(i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2})} \hat{\sigma}^\mu e^{(-i\theta\frac{\sigma}{2} - \phi\frac{\sigma}{2})}$$

Recordando que $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \hat{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}$, podemos escribir a $I_1 + I_2$ y a $I_3 + I_4$ como $I_1 + I_2 = \Psi^\dagger \gamma_0 \Psi = \hat{\Psi} \Psi$, $I_3 + I_4 = \Psi^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = \hat{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi$. Ahora tenemos todo lo requerido para poder construir un Lagrangiano Lorentz invariante usando sólo una derivada

$$\mathcal{L} = A \hat{\Psi} \Psi + B \hat{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi$$

tomando $A = -m$ y $B = i$ obtenemos el lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -m \hat{\Psi} \Psi + i \hat{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi = \hat{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi$$

Observación B.4. En este lagrangiano aparece tanto el campo Ψ como su conjugado $\hat{\Psi}$ y esto es necesario para poder obtener un lagrangiano Lorentz invariante.

Usando la ecuación de Euler-Lagrange para el campo Ψ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \right) = 0$$

obtenemos

$$-m \hat{\Psi} - i \partial_\mu \hat{\Psi} \gamma^\mu = 0$$

mientras que usando la ecuación de Euler Lagrange para el campo $\hat{\Psi}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\Psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\Psi})} \right) = 0$$

obtenemos la ecuación de movimiento del campo Ψ

$$(i \gamma_\mu \partial^\mu - m) \Psi = 0$$

Está es la famosa ecuación de Dirac la cual describe la dinámica de una partícula cuántica libre de masa m y spin $\frac{1}{2}$.

Apéndice C

El segundo teorema de Lie y levantamiento de representaciones

Una pregunta que puede resultar natural es que si dado un homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : Lie(G) \rightarrow Lie(H)$ podemos levantar este morfismo a un morfismo de grupos de Lie $\psi : G \rightarrow H$ tal que $(\psi_*) : Lie(G) \rightarrow Lie(H)$ sea igual a $\phi : Lie(G) \rightarrow Lie(H)$. El siguiente teorema nos dice que esto siempre es posible si G es un grupo de Lie simplemente conexo y H es conexo. Antes de demostrar este teorema requerimos el siguiente lema.

Lema C.1. Sean G y H grupos de Lie conexos. Si $\phi : G \rightarrow H$ es un morfismo de grupos de Lie tal que $(\phi)_* : Lie(G) \rightarrow Lie(H)$ es biyectivo, entonces ϕ es una aplicación cubriente.

Demostración. Notemos que $ker(\phi)$ es un subgrupo de G y por lo tanto $Lie(ker(\phi)) := \mathfrak{l}$ es una subálgebra de Lie de $Lie(G)$. Es fácil ver que $\phi_* : Lie(G) \rightarrow Lie(H)$ desciende a un mapeo $\hat{\phi}_* : Lie(G)/\mathfrak{l} \rightarrow Lie(H)$. Esto último sólo es posible si \mathfrak{l} es trivial ya que ϕ_* es un isomorfismo y por lo tanto no se puede factorizar a un cociente de forma no trivial. Debido a esto tenemos que $ker(\phi)$ es un grupo discreto, usando el teorema 2.2 y el hecho de que $ker(\phi)$ es un subgrupo cerrado de G podemos concluir que $\pi : G \rightarrow G/ker(\phi) \cong H$ es un haz principal sobre H . Un haz principal de esta forma es por definición una aplicación cubriente y por lo tanto tenemos lo que buscábamos demostrar. ■

Teorema C.1. Sean G y H grupos de Lie tales que G es simplemente conexo y H es conexo. Si $\phi : Lie(G) \rightarrow Lie(H)$ es un morfismo de álgebras de Lie, entonces existe un morfismo de grupos de Lie $\Psi : G \rightarrow H$ tal que $d\Psi = \phi$.

Demostración. Notemos que $G \oplus H$ es un grupo de Lie y que la gráfica de ϕ define una subálgebra de Lie \mathfrak{k} de $Lie(G \oplus H)$. Usando el teorema 1.5 podemos concluir que existe un subgrupo de Lie K de $G \oplus H$ con la propiedad de que $Lie(K) = \mathfrak{k}$. Consideremos la función $\pi_1 : K \rightarrow G$ definida como la restricción a K de la proyección de $G \oplus H$ en G . El diferencial de esta función es biyectivo ya que está dado por la composición $Lie(K) \rightarrow (Lie(G) \oplus \phi(Lie(G))) \rightarrow Lie(G)$. Debido al lema anterior podemos concluir que $\pi_1 : K \rightarrow G$ es una aplicación cubriente y usando que G es simplemente obtenemos que $\pi_1 : K \rightarrow G$ es un isomorfismo de grupos de Lie. Por otro lado si

definimos $\pi_2 : K \rightarrow H$ como la restricción a K de la proyección de $G \oplus H$ en H entonces, es fácil ver $(\pi_2 \circ \pi_1^{-1})_*(v) = (\pi_2)_*(v, \phi(v)) = \phi(v)$, $\forall v \in \text{Lie}(G)$ y por lo tanto $\pi_2 \circ \pi_1^{-1} : G \rightarrow H$ es un morfismo de grupos de Lie con la propiedad que buscamos. ■

Debido al teorema anterior tenemos que si G es un grupo de Lie simplemente conexo y $\rho : \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(GL(V))$ es una representación, entonces existe un único morfismo de grupos de Lie $\hat{\rho} : G \rightarrow GL(V)$ con la propiedad de que $d\hat{\rho} = \rho$. Un morfismo de grupos de Lie $\hat{\rho} : G \rightarrow GL(V)$ es una representación de G en $GL(V)$ y si g es un elemento de la forma $g = \exp(A)$ entonces, usando la naturalidad de \exp podemos concluir que $\hat{\rho}(g) = \exp(\rho(A))$. En resumen tenemos el siguiente resultado.

Teorema C.2. *Sea G un grupo de Lie simplemente conexo. Si $\rho : \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(GL(V))$ es una representación entonces ρ es de la forma*

$$(\rho(X))(V) = \frac{d}{dt} \hat{\rho}(\exp(tX))(V)|_{t=0}$$

donde $\hat{\rho} : G \rightarrow GL(V)$ es una representación de G . En particular si tomamos una vecindad pequeña $U \subset G$ alrededor de e en la cual $\exp^{-1} : U \rightarrow T_e G$ está definida, entonces $\forall g \in U$ tenemos que

$$\hat{\rho}(g) = \exp(\rho(At))$$

donde $g = \exp(At)$.

Apéndice D

Homotopía y pullback de haces.

Teorema D.1. *Sea $\pi : P \rightarrow M$ un haz principal y $f, g : N \rightarrow M$ funciones suaves. Si f y g son homotópicas entonces $f^*(P)$ y $g^*(P)$ son haces isomorfos.*

Demostración. Consideremos la homotopía $H : [0, 1] \times N \rightarrow M$ que existe entre f y g . A partir de esta homotopía buscamos definir un isomorfismo de haces entre $f^*(P)$ y $g^*(P)$. Sea (x, p) un elemento fijo en $f^*(P)$ y definamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ como $\alpha(t) := H(t, x)$. Claramente $\pi(\alpha(t), p) = f(x)$. Si definimos una conexión ω en P , entonces usando esta conexión podemos considerar al levantamiento horizontal de α , $\hat{\alpha}_p$ con condición inicial p . Definamos $\lambda_H : f^*(P) \rightarrow g^*(P)$ como $\lambda_H(x, p) := (x, \hat{\alpha}_p(1))$, esta función es suave ya que punto a punto se obtiene de la solución al tiempo uno de la ecuación diferencial que describe este levantamiento horizontal y esta depende suavemente de la condición inicial. Es fácil ver que esta función es invertible. Para ver que en efecto es un isomorfismo de haces notemos que:

$$\lambda_H((x, p) \bullet g) = (x, \hat{\alpha}_{p \bullet g}(1)) = (x, \hat{\alpha}_p(1) \bullet g) = \lambda_H(x, p) \bullet g$$

■

De forma completamente análoga se obtiene el siguiente resultado para el caso de haces vectoriales.

Teorema D.2. *Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial y $f, g : N \rightarrow M$ funciones suaves. Si f y g son homotópicas entonces $f^*(E)$ y $g^*(E)$ son haces isomorfos.*

Como un corolario importante del teorema anterior tenemos:

Corolario D.1. *Si M es una variedad contraíble entonces cualquier haz principal (vectorial) sobre esta es trivial.*

Demostración. Sea P un haz principal sobre M y consideremos un elemento fijo $m_0 \in M$. Notemos que la función $f : M \rightarrow M$ definida por $f(m) := m_0$ es homotópica a la función identidad $i : M \rightarrow M$ ya que M es contraíble. Claramente $i^*(P) = P$ y es fácil ver que $f^*(P)$ es trivial y por lo tanto P también lo es. ■

Ahora enunciaremos otro criterio de homotopía para saber si dos haces principales son isomorfos. La demostración es muy parecida a la demostración del teorema anterior y por lo tanto la omitimos.

Teorema D.3. Sean P_1 y P_2 G haces principales sobre una variedad M y $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de M en la cual P_1 y P_2 se trivializan. Si los mapeos de transición de P_1 son homotópicos a los mapeos de transición de P_2 entonces P_1 y P_2 son isomorfos.

Apéndice E

Un criterio útil para saber si dos haces vectoriales son isomorfos

Teorema E.1. Sean $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$, $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ haces vectoriales sobre M y $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta en la cual estos haces se trivializan. Escribamos a las funciones de transición de E_1 como $g_{\alpha\beta}$ y a las de E_2 como $\hat{g}_{\alpha\beta}$. Si $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ existen funciones $\lambda_\alpha : U_\alpha \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, $\lambda_\beta : U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ tales que

$$g_{\alpha\beta}(x) = (\lambda_\alpha \hat{g}_{\alpha\beta} \lambda_\beta^{-1})(x)$$

entonces E_1 y E_2 son isomorfos.

Demostración. Para todo α definamos $f_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ como $f_\alpha(x, y) := (x, \lambda_\alpha(x)^{-1}(y))$. Definamos $f : E_1 \rightarrow E_2$ al requerir que para todo elemento de $E|_{U_\alpha}$ $f = \hat{\phi}_\alpha^{-1} f_\alpha \phi_\alpha$, donde $\phi_\alpha : \pi_1^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ y $\hat{\phi}_\alpha : \pi_2^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ son trivializaciones locales de E_1 y E_2 respectivamente. Por construcción esta función es lineal y biyectiva cuando se restringe a las fibras de E_1 , para ver que está bien definida notemos que

$$\hat{\phi}_\alpha^{-1} f_\alpha(x, y) = \hat{\phi}_\alpha^{-1}(x, \lambda_\alpha(x)^{-1}(y)) = \hat{\phi}_\beta^{-1}(x, \hat{g}_{\beta\alpha}(x) \lambda_\alpha(x)^{-1}(y)) = \hat{\phi}_\beta^{-1}(x, \lambda_\beta(x)^{-1} g_{\beta\alpha}(x) y) = \hat{\phi}_\beta^{-1} f_\beta(x, g_{\beta\alpha}(x) y)$$

Usando que $f \phi_\alpha^{-1}(x, y) = f \hat{\phi}_\beta^{-1}(x, g_{\beta\alpha}(x) y)$ y que $\hat{\phi}_\alpha^{-1} f_\alpha = f \phi_\alpha^{-1}$ obtenemos que $\hat{\phi}_\beta^{-1} f_\beta(x, g_{\beta\alpha}(x) y) = f \hat{\phi}_\beta^{-1}(x, g_{\beta\alpha}(x) y)$ y por lo tanto

$$f = \hat{\phi}_\beta^{-1} f_\beta \phi_\beta$$

Esto demuestra que f está bien definida. Claramente f es invertible localmente ya que ϕ_α , $\hat{\phi}_\alpha$ y λ_α lo son. Usando exactamente el mismo procedimiento podemos ver que estas inversas locales se pegan consistentemente y definen un morfismo de haces. Por lo tanto f es un isomorfismo de haces y eso es lo que buscábamos demostrar. ■

Bibliografía

- [1] Baez, J. C. and Muniain, J. P. (1994). *Gauge fields, knots, and gravity*. World Scientific.
- [2] Bleecker, D., Booss, B., and Mader, A. (2012). *Topology and Analysis: The Atiyah-Singer Index Formula and Gauge-Theoretic Physics*. Universitext. Springer New York.
- [3] Bott, R. (1956). An application of the morse theory to the topology of lie-groups. *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, 84:251–281.
- [4] Bott, R. and Tu, L. W. (1982). *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer New York.
- [5] Donaldson, S. K. and Kronheimer, P. B. (1990). *The geometry of four-manifolds*. Clarendon Press.
- [6] Frankel, T. (2011). *The Geometry of Physics: An Introduction*. Cambridge University Press.
- [7] Hitchin, N. J., Segal, G. B., and Ward, R. S. (1999). *Integrable Systems: Twistors, Loop Groups, and Riemann Surfaces*. Clarendon Press.
- [8] Isham, C. J. (2002). *Modern differential geometry for physicists*. Allied Publ.
- [9] Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1996). *Foundations of differential geometry*. Wiley.
- [10] Lee, J. M. (2003). *Introduction to smooth manifolds*. Springer.
- [11] Moriyasu, K. (1983). *An elementary primer for gauge theory*. World Scientific.
- [12] Robinson, M. (2011). *Symmetry and the Standard Model*. Springer.
- [13] Schutz, B. and Peterson, M. A. (2005). *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, volume 50. Cambridge University Press.
- [14] Schwichtenberg, J. (2015). *Physics from Symmetry*.
- [15] Taubes, C. H. (2011). *Differential Geometry : Bundles, Connections, Metrics and Curvature*. OUP Oxford.
- [16] Warner, F. W. F. W. (2013). *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer Science & Business Media.