Universidad Nacional Autónoma de México
FACULTAD DE CIENCIAS

Representaciones de grupos y teorema de Frobenius

Tesis

que para obtener el título de

MATEMÁTICO

presenta

ALBERTO JUÁREZ ALVAREZ

Asesor: DIANA AVELLA ALAMINOS

Ciudad Universitaria, CDMX 2020

AUTOR

Fecha

Firma

DEDICATORIA

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Introducción

El origen de la teoría de caracteres puede remontarse a 1896 cuando Ferdinand Georg Frobenius publicó su artículo "Über die Gruppencharactere" en el que escribiría "I shall develop the concept [of character for arbitrary finite groups] here in the belief that through its introduction, group theory will be substantially enriched". Ese mismo año Frobenius le escribiría a Richard Dedekind tres cartas que formalizarían el concepto de carácter e incluso le permitirían definir entre 1897 y 1899 las ideas de carácter inducido y producto tensorial de caracteres además de demostrar el que sería conocido como el teorema de reciprocidad de Frobenius y poder obtener los caracteres irreducibles de grupos como S_4, S_5, A_4 y A_5.

El desarrollo de la teoría de caracteres por parte de Frobenius y su contemporáneo William Burnside eventualmente dejaría dos resultados de vital importancia para la teoría de caracteres y posteriormente para la clasificación de grupos finitos: El teorema de Burnside que habla de una condición en el orden de un grupo para que éste sea soluble y el teorema de Frobenius.

En este trabajo pretendemos realizar una prueba detallada del teorema de Frobenius partiendo de los principios básicos de la teoría de grupos finitos y rescatando resultados elementales de álgebra lineal para posteriormente adentrarnos en la teoría de representaciones de grupos y llegar al estudio de la teoría de caracteres, herramienta fundamental para conseguir nuestro objetivo primario.

De primera instancia hablaremos detalladamente de las definiciones y resultados básicos de la teoría de grupos finitos con el propósito de trabajar una numerosa cantidad de ejemplos que serán de utilidad durante todo el trabajo, haciendo hincapié en los conceptos de grupo diédrico, grupo cíclico, clases laterales, clases de conjugación, homomorfismos y acciones de grupos, todo esto con el fin de otorgar al trabajo las bases teóricas que nos permitan hablar y desarrollar la teoría de representaciones de grupos finitos.

Posteriormente nos adentraremos en la teoría de representaciones de grupos finitos, en donde dado un grupo G asignaremos a cada uno de los elementos de dicho grupo una matriz bajo una función a la que llamaremos representación, estudiaremos pues, las propiedades y resultados que se derivan de esta manera de ver y analizar a los grupos finitos para llegar al concepto central de la tesis: los FG módulos. Teniendo a los FG módulos seremos capaces de trabajar resultados de suma importancia para el avance teórico del trabajo, tales como el teorema de Maschke y el lema de Schur. Posteriormente estudiaremos el módulo regular, su construcción y propiedades para concluir la sección sabiendo que todo FG módulo tiene una descomposición en FG submódulos irreducibles y que cada uno de éstos es isomorfo a un miembro de la descomposición del módulo regular.

Habiendo conseguido el objetivo de comprender las representaciones de grupos finitos y los FG módulos comenzaremos a trabajar con el concepto de carácter de una representación y gracias a toda la herramienta desarrollada anteriormente podremos estudiar los caracteres de distintos FG módulos e incluso introduciremos el producto tensorial y su construcción como módulo con el fin de estudiar su carácter y que esto nos permita acercarnos aún más al completo entendimiento de la prueba del teorema de Frobenius. Esta parte del trabajo contará con el teorema que nos indica que dados dos FG módulos V y W, éstos serán isomorfos si y solamente si tienen el mismo carácter y concluirá con la construcción de los llamados caracteres inducidos.

El trabajo concluirá con la prueba del teorema de Frobenius valiéndonos de toda la herramienta que habremos desarrollado para ese momento, después enunciaremos el teorema de otra manera utilizando conceptos que no desarrollaremos en la tesis y mencionaremos para concluir una de las tantas consecuencias del teorema.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo exploraremos los principios básicos de la teoría de grupos finitos, es decir, las definiciones, resultados, ejemplos y consecuencias que nos permitan sentar las bases del trabajo y proseguir con el objetivo de introducir la teoría de representaciones de grupos. Repasaremos pues, los conceptos de grupo, subgrupo, subgrupo generado, subgrupo normal, homomorfismo, imagen, núcleo, clases laterales, clases de conjugación y acciones de grupos. Es importante mencionar que este trabajo buscó desde un principio trabajar con la herramienta necesaria para conseguir el objetivo principal del mismo: la demostración del teorema de Frobenius, es por ello que se invita al lector a ahondar en la bibliografía si se desea conocer de manera mucho más profunda y consistente la teoría de grupos finitos.
En esta parte del trabajo, así como en el resto del mismo, se busca que el lector pueda adquirir progresivamente las herramientas necesarias para comprender de manera satisfactoria todos los resultados que seguirán a continuación, en caso de tratarse de un resultado con una prueba evidente o proveniente de álgebra lineal, se informará en su debido momento y con el fin de no desviar demasiado la atención se continuará con el trabajo haciendo uso del resultado en cuestión.

1.1. Teoría básica de grupos

Definición 1.1.1. *Ungrupo* es una pareja ordenada $(G, *)$ tal que:

1. G es un conjunto.

2. $*$: $G \times G \longrightarrow G$.

3. $\forall$ g_1,g_2 $g_3 \in G$ se tiene que:

$$g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3.$$

4. Existe un elemento distinguido $e \in G$ al que llamaremos el neutro del grupo tal que:

$$\forall g \in G \ g * e = e * g = g.$$

5. $\forall g \in G$ existe un elemento $g^{-1} \in G$ al que llamaremos el inverso de g tal que:

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e.$$

Definición 1.1.2. Un grupo $(G, *)$ es *abeliano* si la operación $*$ es conmutativa, es decir:

$$\forall g_1, g_2 \in G \ g_1 * g_2 = g_2 * g_1.$$

Ejemplo 1.1.3. Son ejemplos de grupos:

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Z}_n, +_n)$.

2. $GL(n, \mathbb{R}) = \{M_{n\times n}(\mathbb{R}) : Det(M) \neq 0\}$ con el producto usual de matrices.

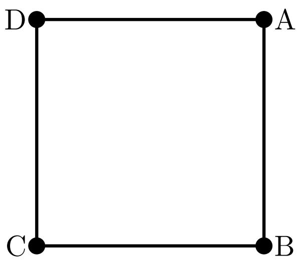
3. ($\mathbb{R}^*$,$\cdot$) donde $\mathbb{R}^*$= $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   El neutro del grupo es 1 y dado $p \in \mathbb{R}^*$ el inverso de p se denota por p^{-1}.

4. Dado un conjunto A, consideramos el conjunto

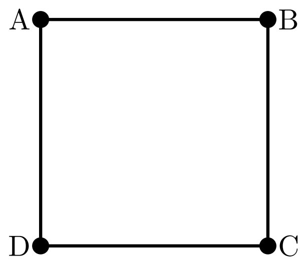
$$S_A = \{f : A \longrightarrow A : f \text{ es biyectiva}\}$$

con la operación composición. El neutro del grupo es la función identidad Id_A y dada una función $f \in S_A$, sabemos que tiene inverso ya que es biyectiva.
A este grupo se le conoce como el grupo simétrico.

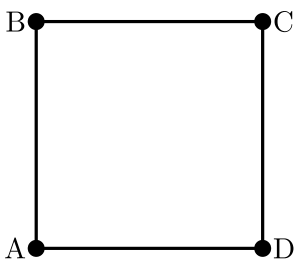
5. El grupo diédrico D_4, que consiste de todas las simetrías de un cuadrado con vértices en $(-1,1), (-1,-1), (1,1)$ y $(1,-1)$ y cuya operación es la composición de funciones.
A continuación mostraremos de manera gráfica los elementos de D_4:



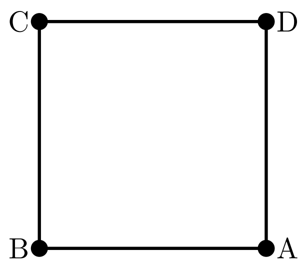
r_0, rotación de cero grados



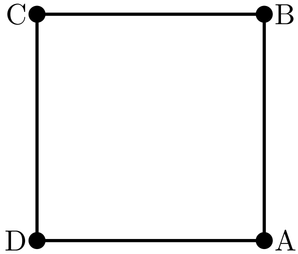
r_1, rotación de 90 grados



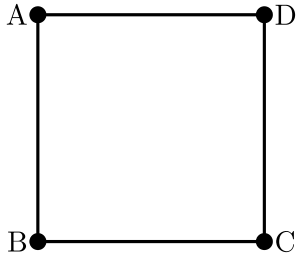
r_2, rotación de 180 grados



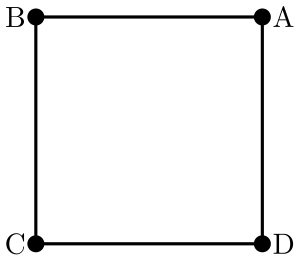
r_3, rotación de 270 grados



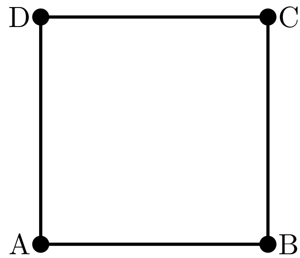
s_x, reflexión respecto al eje x



s_y, reflexión respecto al eje y



s_{id}, reflexión respecto a la identidad



s_{-id}, reflexión respecto a la recta menos identidad

Además mostremos en la tabla 1 el comportamiento de la operación composición en D_4.

$\circ$	r_0	r_1	r_2	r_3	s_x	s_y	s_{id}	s_{-id}
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	s_x	s_y	s_{id}	s_{-id}
r_1	r_1	r_2	r_3	r_0	s_{-id}	s_{id}	s_x	s_y
r_2	r_2	r_3	r_0	r_1	s_y	s_x	s_{-id}	s_{id}
r_3	r_3	r_0	r_1	r_2	s_{id}	s_{-id}	s_y	s_x
s_x	s_x	s_{id}	s_y	s_{-id}	r_0	r_2	r_1	r_3
s_y	s_y	s_{-id}	s_x	s_{id}	r_2	r_0	r_3	r_1
s_{id}	s_{id}	s_y	s_{-id}	s_x	r_3	r_1	r_0	r_2
s_{-id}	s_{-id}	s_x	s_{id}	s_y	r_1	r_3	r_2	r_0

Tabla 1.

6. $\mathbb{H}$ un conjunto con los siguientes elementos: $\mathbb{H} = \{j, -j, k, -k, i, -i, 1, -1\}$ y forma de multiplicarlos como se observa en la tabla 2:

$\cdot$	1	-1	j	$-j$	k	$-k$	i	$-i$
1	1	-1	j	$-j$	k	$-k$	i	$-i$
-1	-1	1	$-j$	j	$-k$	k	$-i$	i
j	j	$-j$	-1	1	i	$-i$	$-k$	k
$-j$	$-j$	j	1	-1	$-i$	i	k	$-k$
k	k	$-k$	$-i$	i	-1	1	j	$-j$
$-k$	$-k$	k	i	$-i$	1	-1	$-j$	j
i	i	$-i$	k	$-k$	$-j$	j	-1	1
$-i$	$-i$	i	$-k$	k	j	$-j$	1	-1

Tabla 2.

A $(\mathbb{H}, \cdot)$ se le conoce como el grupo de los cuarteniones.

Salvo ambigüedad, a partir de ahora, escribiremos G para referirnos a un grupo $(G, *)$ y omitiremos el símbolo $*$ para denotar la operación entre elementos de un grupo G cualquiera, es decir:

$$\text{Dados } g,h \in G \text{ tenemos que } g * h = gh.$$

Definición 1.1.4. Dado un grupo G, $|G|$ denotará el *orden* de G, es decir, el cardinal del conjunto.
Si $|G| < \infty$ diremos que G es un grupo finito.

Definición 1.1.5. Dado un grupo $(G, *)$, un *subgrupo* $(H, *)$, (al que denotaremos como $H \leq G$) es un subconjunto de G con las siguientes propiedades:

1. $e \in H$.
2. Dados $h_1, h_2 \in H$ se tiene que $h_1 h_2 \in H$.
3. Dado $h \in H$ se tiene que $h^{-1} \in H$.

Ejemplo 1.1.6. Son ejemplos de subgrupos:

1. $\{e\} \leq G$ y $G \leq G$.

2. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R}) : c = 0 \right\} \leq GL(2,\mathbb{R})$.

3. $\{r_0, r_1, r_2, r_3\}, \{r_0, r_2, s_x, s_y\}, \{r_0, r_2, s_{id}, s_{-id}\}$ son subgrupos de D_4.

4. $H_i = \{i, -i, 1, -1\}, H_j = \{j, -j, 1, -1\}, H_k = \{k, -k, 1, -1\}$ son subgrupos de $\mathbb{H}$.

5. $Z(G) = \{z \in G : \forall g \in G\ zg = gz\} \leq G$. A $Z(G)$ se le conoce como *el centro de G*.

Proposición 1.1.7. *Sea $(G, *)$ un grupo y $\{S_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de subgrupos de G, es decir $S_i \leq G$ $\forall i \in I$, entonces $\bigcap_{g\in G} S_i$ es un subgrupo de G.*

Demostración. La prueba se sigue inmediatamente de la definición conjuntista de $\bigcap_{g\in G} S_i$. □

Definición 1.1.8. Sea $(G, *)$ un grupo y $X \subseteq G$. Definimos el *subgrupo generado* por X, al que denotaremos como $\langle X \rangle$, como el menor subgrupo de G que contiene a X, es decir, un subgrupo de G que contiene a X y tal que si H es un subgrupo de G y $X \subseteq H$ entonces $\langle X \rangle \subseteq H$.

Observación 1.1.9. *El subgrupo generado por $X \subseteq G$ siempre existe ya que se puede definir con la siguiente igualdad:*

$$\langle X \rangle = \bigcap_{X\subseteq S\leq G} S.$$

Notación 1.1.10. En el caso de que $X \subseteq G$ sea un conjunto finito $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ se acostumbra escribir a $\langle X \rangle$ como $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Definición 1.1.11. Si $X \subseteq G$ con $X = \{g\}$ y $\langle X \rangle = G$, entonces decimos que G es un grupo cíclico.

Ejemplo 1.1.12. Retomando algunos ejemplos vistos en el ejemplo 1.1.6

1. Veamos que podemos generar al grupo $D_4 = \{r_0, r_1, r_2, r_3, s_x, s_{-id}, s_{id}, s_y\}$ con los elementos r_1, s_x:
   $r_2 = r_1 \circ r_1 \qquad r_3 = r_2 \circ r_1 \qquad r_0 = r_3 \circ r_1 \qquad r_1 = r_1$.

$s_{-id} = r_1 \circ s_x \qquad s_y = r_1 \circ s_{-id} \qquad s_{id} = r_1 \circ s_y \qquad s_x = s_x.$

Por lo tanto $\langle r_1, s_x \rangle = D_4$.

2. Considerando $\{s_x, s_y\} \subseteq D_4$ entonces $\langle s_x, s_y \rangle = \{s_x, s_y, r_2, r_0\}$:
$r_0 = s_x \circ s_x \qquad r_2 = s_y \circ s_x \qquad s_x = s_x \qquad s_y = s_y.$

   Por lo tanto $\langle s_x, s_y \rangle = \{s_x, s_y, r_2, r_0\}$.

3. $\{j\} \subseteq \mathbb{H}$ y $\langle j \rangle = \{1, -1, j, -j\}$.

Definición 1.1.13. Dados $(G, *_G)$ y $(H, *_H)$ grupos, un *homomorfismo* de grupos es una función $\varphi : G \longrightarrow H$ tal que:

$$\forall g_1, g_2 \in G \ \varphi(g_1 *_G g_2) = \varphi(g_1) *_H \varphi(g_2).$$

Si el homomorfismo es inyectivo, entonces decimos que φ es un monomorfismo.
Por otro lado, si el homomorfismo φ es suprayectivo le llamaremos epimorfismo.
En caso de ser biyectivo, lo llamaremos isomorfismo y diremos que G y H son grupos isomorfos, situación que denotaremos como $G \cong H$.

Ejemplo 1.1.14. Los siguientes son ejemplos de homomorfismos.

1. $\begin{array}{rrcl} \varphi_{[n]} & : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_n \\ & x & \longrightarrow & [x]_n \end{array}$

2. $\varphi_2 \ : \mathbb{R}^* \longrightarrow \{-1, 1\}$

3. Con la siguiente regla de correspondencia:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \text{ es positivo} \\ \\ -1 & si \quad x \text{ es negativo} \end{cases}$$

4. $\begin{array}{rrcl} \varphi_e & : G & \longrightarrow & H \\ & g & \longrightarrow & e \end{array}$

5. $\begin{array}{rrcl} \varphi_{id} & : G & \longrightarrow & G \\ & g & \longrightarrow & g \end{array}$

Observación 1.1.15. *Dados* $(G, *_G)$, $(H, *_H)$ *y* $(K, *_K)$ *grupos cualesquiera, tenemos que si* $\varphi_1 : G \longrightarrow H$ *y* $\varphi_2 : H \longrightarrow K$ *son homomorfismos de grupos entonces* $\varphi_2 \circ \varphi_1 : G \longrightarrow K$ *es también un homomorfismo de grupos.*

Definición 1.1.16. Dados G y H grupos y un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow H$, definimos el *núcleo* y la *imagen* de φ como:

$$Ker\varphi = \{g \in G : \varphi(g) = e\}$$
$$Im\varphi = \{\varphi(g) : g \in G\}$$

Observación 1.1.17. *Dado un homomorfismo* $\varphi : G \longrightarrow H$ *tenemos que:*

$$Ker\varphi \leq G$$
$$Im\varphi \leq H$$

Observación 1.1.18. φ *es un monomorfismo si y sólo si* $Ker\varphi = \{e\}$ *y* φ *es un epimorfismo si y sólo si* $Im\varphi = H$

Definición 1.1.19. Sea G un grupo, H un subgrupo de G y $g \in G$. Definimos la *clase lateral izquierda* de H en G con representante g como el conjunto

$$gH = \{gh : h \in H\} .$$

Análogamente definimos la clase lateral derecha de H en G como el conjunto

$$Hg = \{hg : h \in H\} .$$

Observación 1.1.20. *Si* $H \leq G$ *y* $g \in H$ *entonces* $gH = Hg = H$.

Ejemplo 1.1.21. Los siguientes son ejemplos de clases laterales:

1. Sabemos gracias al ejemplo 1.1.6 (3) que $\{r_0, r_1, r_2, r_3\}$, $\{r_0, r_2, s_x, s_y\}$, $\{r_0, r_2, s_{id}, s_{-id}\}$ son subgrupos de D_4, así que calcularemos algunas de sus clases laterales.
   $s_{id}\{r_0, r_1, r_2, r_3\} = \{r_0, r_1, r_2, r_3\}s_{id} = \{s_{id}, s_y, s_{-id}, s_x\}$

   $s_{-id}\{r_0, r_2, s_x, s_y\} = \{r_0, r_2, s_x, s_y\}s_{-id} = \{s_{-id}, s_{id}, r_3, r_1\}$

   $s_y\{r_0, r_2, s_{id}, s_{-id}\} = \{r_0, r_2, s_{id}, s_{-id}\}s_y = \{s_y, s_x, r_3, r_1\}$

2. Retomando el ejemplo 1.0.2 (3), analicemos las clases laterales de H_i, H_j, H_k:

   $jH_i = H_i j = \{-k, k, j, -j\}$

   $kH_i = H_i k = \{-j, j, k, -k\}$

   $iH_j = H_j i = \{k, -k, i, -i\}$

   $kH_j = H_j k = \{-i, i, k, -k\}$

   $jH_k = H_k j = \{i, -i, j, -j\}$

   $iH_k = H_k i = \{j, -j, k, -k\}$

3. Analicemos las clases laterales de un subgrupo del grupo $S_3 = \{f : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\} : f \text{ es biyectiva}\}$ escribiendo los elementos de S_3 a continuación:

   $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   Con esta notación abreviamos el hecho de que $\varphi_2(1) = 2$, $\varphi_2(2) = 1$ y $\varphi_2(3) = 3$.
   Continuando de esta manera procederemos a escribir los cuatro elementos faltantes de S_3:

   $\varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
   $\varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   Sea $k = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ un subgrupo de S_3 y analicemos sus clases laterales izquierdas y derechas:
   $\varphi_1 k = \varphi_2 k = \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

   $\varphi_3 k = \varphi_4 k = \{\varphi_3, \varphi_4\}$.

$\varphi_5 k = \varphi_6 k = \{\varphi_5, \varphi_6\}$.

Por otro lado tenemos que:

$k\varphi_1 = k\varphi_2 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

$k\varphi_3 = k\varphi_6 = \{\varphi_3, \varphi_6\}$.

$k\varphi_5 = k\varphi_4 = \{\varphi_5, \varphi_4\}$.

Definición 1.1.22. Dado G un grupo y $H \leq G$, definimos el *índice* de H en G como el cardinal del conjunto de clases laterales izquierdas de H en G, el cual denotamos como $[G : H]$.

Ejemplo 1.1.23. Utilizando algunos ejemplos anteriores calculemos ciertos índices.

1. $[\mathbb{H}, H_i] = 2$
2. $[\mathbb{Z}_6, \{\overline{0}, \overline{3}\}] = 3$

Un resultado de vital importancia que utilizaremos a lo largo de este trabajo es el teorema de Lagrange y para demostrarlo necesitaremos dos lemas auxiliares cuyas pruebas omitiremos.

Lema 1.1.24. *Dado G un grupo y $H \leq G$, para todo $g \in G$ existe una correspondencia biyectiva entre H y gH.*

Lema 1.1.25. *Dado G, $H \leq G$ y $g_1, g_2 \in G$, la relación "$\sim$ "definida de la siguiente manera es una relación equivalencia:*

$$g_1 \sim g_2 \text{ si y sólo si } g_1 H = g_2 H$$

Teorema 1.1.26. *Sea G un grupo finito y $H \leq G$ entonces $|H|$ divide a $|G|$, y de hecho $|G| = [G : H]|H|$.*

Demostración. Como dice el lema 1.1.25, dados dos elementos g_1 y g_2, la relación $g_1 \sim g_2$ si y sólo si $g_1H = g_2H$ es de equivalencia, por lo tanto, existe una partición inducida que consiste de las distintas clases de equivalencia. Entonces tenemos que :

$$G = g_1H \uplus \ldots \uplus g_nH.$$

En donde $g_iH \cap g_jH = \varnothing$ si $g_i \neq g_j$, con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
Por el lema 1.1.24 sabemos que cada una de estas clases laterales está en correspondencia biyectiva con H, por lo que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$|H| = |g_iH| \ .$$

Por lo tanto

$$|G| = |g_1H| + \ldots + |g_nH| = n|H|.$$

Por lo que es claro que $|H|$ divide a $|G|$.
Dado que existen n distintas clases de equivalencia se sigue que $[G : H] = n$, por lo que $|G| = [G : H]|H|$.
Lo que cocluye la prueba del teorema de Lagrange. □

Definición 1.1.27. Dado un grupo G y $N \leq G$, decimos que N es un *subgrupo normal* de G (lo que denotaremos como $N \trianglelefteq G$) si $\forall g \in G$ y $\forall n \in N$ se tiene que $gng^{-1} \in N$.

Ejemplo 1.1.28. Son ejemplos de subgrupos normales:

1. $\{e\} \trianglelefteq G$.
2. $G \trianglelefteq G$.
3. Si G es un grupo abeliano, cualquier subgrupo H de G es un subgrupo normal de G.
4. $Z(G) = \{z \in G : \forall g \in G \ zg = gz\} \trianglelefteq G$.
5. $\{r_0, r_1, r_2, r_3\} \trianglelefteq D_4$.
6. H_i, H_j, H_k son subgrupos normales de $\mathbb{H}$.
7. Dados G y H grupos y $\varphi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo cualquiera se tiene que: $Ker\varphi \trianglelefteq G$.

1.2. Clases de conjugación

Definición 1.2.1. Dado G un grupo, x y y elementos de G, decimos que y es *conjugado* de x si $y = gxg^{-1}$ para algún $g \in G$.

Definición 1.2.2. Dado un grupo G y x un elemento de G definimos la *clase de conjugacion* de x (a la que denotaremos como x^G) como el conjunto de elementos de G que son conjugados de x, es decir

$$x^G = \{gxg^{-1} : g \in G\}.$$

Observación 1.2.3. *El conjunto x^G siempre es diferente del vacío puesto que $x \in x^G$ dado que $x = exe^{-1}$.*

Proposición 1.2.4. *Dado un grupo G y x y y elementos de G tenemos que $x^G = y^G$ o bien $x^G \cap y^G = \varnothing$.*

Demostración. Supongamos que $x^G \cap y^G \neq \varnothing$.
Sea $z \in x^G \cap y^G$, entonces tenemos que

$$z = g_1 x g_1^{-1} = g_2 y g_2^{-1} \text{ con } g_1, g_2 \in G.$$

Despejando x de la ecuación llegamos a que

$$x = g_1^{-1} g_2 y g_2^{-1} g_1 = kyk^{-1} \text{ donde } k = g_1^{-1} g_2.$$

Dado que queremos probar $x^G = y^G$, veamos que $x^G \subseteq y^G$ y la otra contención será análoga.
Sea $a \in x^G$, entonces por definición tenemos que

$$a = bxb^{-1} \text{ para algún } b \in G.$$

Gracias a la igualdad que hicimos anteriormente y a la asociatividad en G llegamos a que

$$a = bxb^{-1} = (bk)y(k^{-1}b^{-1})$$

Por lo que es claro que $a \in y^G$. □

Observación 1.2.5. *Todo grupo G es la unión de las clases de conjugación de sus elementos, por la proposición anterior y a que $x^G \subseteq G$ $\forall x \in G$ y que a su vez todo elemento $x \in G$ pertenece a x^G.*

Definición 1.2.6. Dado un grupo G y $x_1, \ldots, x_i$ elementos de G tales que $G = x_1^G \cup \ldots \cup x_i^G$, donde la unión es disjunta, entonces diremos que $x_1, \ldots, x_i$ son los *representantes* de las clases de conjugación de G.

Definición 1.2.7. Dado un grupo G y $x \in G$, definimos el *centralizador* de x en G, al que denotaremos como $C_G(x)$, como el conjunto de los elementos de G tales que conmutan con x, es decir $C_G(x) = \{g \in G : gx = xg\}$.

Observación 1.2.8. $C_G(x) \leq G$

Teorema 1.2.9. *Dado un grupo G finito y $x \in G$ la cardinalidad de x^G está dada por*

$$|x^G| = [G : C_G(x)] = |G|/|C_G(x)|.$$

Demostración. Dado $x \in G$ consideremos una función f con dominio en x^G y codominio el conjunto de las clases laterales izquierdas de $C_G(x)$ en G con la siguiente regla de correspondencia:

$$f(gxg^{-1}) = gC_G(x)$$

Veamos que f está bien definida.
Sea $hxh^{-1} = gxg^{-1}$, lo que implica que $(gg^{-1})hxh^{-1} = gxg^{-1}(hh^{-1})$, lo que a su vez significa que $g^{-1}hx = xg^{-1}h$, por lo que $gh^{-1} \in C_G(x)$, así concluimos que $gC_G(x) = hC_G(x)$.
Lo que prueba que f está bien definida.
Al ser evidente que f es suprayectiva, para probar el teorema basta ver que f es inyectiva.
Sean $g, h \in G$ tales que $gC_G(x) = hC_G(x)$ entonces se tiene que $gh^{-1} \in C_G(x)$ entonces $g^{-1}hx = xg^{-1}h$, así $(gg^{-1})hxh^{-1} = gxg^{-1}(hh^{-1})$, por lo tanto $hxh^{-1} = gxg^{-1}$.
Lo que prueba que f es inyectiva y concluye la demostración. □

1.3. Acciones de grupo

Definición 1.3.1. Dado un grupo G y un conjunto no vacío X. Una *acción izquierda* de G en X es una función

$$\begin{array}{rl} \alpha \quad : G \times X \longrightarrow & X \\ (g, x) \longrightarrow & g \bullet x \end{array}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $e \bullet x = x \ \forall x \in X$.

2. $(g_1 g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x) \ \forall g_1, g_2 \in G, \ \forall x \in X$.

A la terna (G, X, α) se le conoce como un G-conjunto a la izquierda, o simplemente decimos que X es un G-conjunto vía la acción α.

Ejemplo 1.3.2. Son ejemplos de G-conjuntos:

1. G un grupo , $X = G$ y la acción $g \bullet h = gh \ \forall \ g \in G$ y $h \in X$.

2. G un grupo, $X = G$ y la acción $g \bullet h = ghg^{-1} \ \forall \ g \in G$ y $h \in X$.

3. $G = (\mathbb{R}, \cdot)$, $X = \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R} \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$.

   G actúa en X mediante la multiplicación escalar, es decir: dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\alpha \bullet (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$.

Definición 1.3.3. Dado X un $G-$ *conjunto* definimos:

1. La G-órbita de $x \in X$ en X como el conjunto

$$G(x) = \{g \bullet x \in X : g \in G\}.$$

2. El estabilizador de $x \in X$ en G como el conjunto

$$G_x = \{g \in G : g \bullet x = x\}.$$

3. El estabilizador de X en G como el conjunto

$$St_G(X) = \bigcap_{x \in X} St_G(x) = \{g \in G : g \bullet x = x \ \forall x \in X\}.$$

Definición 1.3.4. Dado un G-conjunto X no vacío con la acción α, decimos que la acción es transitiva si dados dos elementos $x, y \in X$ arbitrarios, existe un $g \in G$ tal que

$$g \bullet x = y.$$

Observación 1.3.5. *Dado un G-conjunto (G, X, α), se tiene que:*

$$St_G(x) \leq G.$$

Lema 1.3.6. *Si X es un G-conjunto entonces $\forall x \in X$ y $\forall g \in G$ se tiene que:*

$$G_{g\bullet x} = gG_x g^{-1}.$$

Demostración. Veamos primero que $gG_x g^{-1} \subseteq G_{g\bullet x}$.
Sea $u \in gG_x g^{-1}$, entonces se tiene que

$$u = gu'g^{-1} \text{ con } u' \in G_x.$$

Veamos que $u \bullet (g \bullet x) = g \bullet x$.
Por lo visto anteriormente, tenemos que

$$u \bullet (g \bullet x) = gu'g^{-1} \bullet (g \bullet x) \ .$$

Por los axiomas de acción llegamos a que

$$gu'g^{-1} \bullet (g \bullet x) = gu'g^{-1}g \bullet x = gu'(g^{-1}g) \bullet x = gu'(e) \bullet x = gu' \bullet x = g \bullet (u' \bullet x).$$

Y como $u' \in G_x$ se tiene que:

$$g \bullet (u' \bullet x) = g \bullet x.$$

Por lo tanto $u \bullet (g \bullet x) = g \bullet x$ y así $u \in G_{g\bullet x}$, lo que concluye la primera parte de la prueba.

Veamos ahora que $G_{g\bullet x} \subseteq gG_x g^{-1}$.
Sea $u \in G_{g\bullet x}$, eso implica por definición que

$$u \bullet (g \bullet x) = g \bullet x.$$

Por lo tanto $(ug) \bullet x = g \bullet x$, y haciendo actuar el inverso de g de ambos lados de la igualdad tenemos que

$$(g^{-1}ug) \bullet x = (g^{-1}g) \bullet x.$$

De lo anterior se sigue inmediatamente que $(g^{-1}ug) \bullet x = x$.
Sea $u' = g^{-1}ug$ entonces $u' \in G_x$ y por otro lado se tiene que $u = gu'g^{-1}$ con $u' \in G_x$
Por lo tanto $u \in gG_xg^{-1}$, lo que concluye la segunda parte de la prueba. $\square$

Definición 1.3.7. Dados dos G-conjuntos X y Y, definimos un G-homomorfismo como una función $f : X \longrightarrow Y$ tal que

$$f(g \bullet x) = g \bullet' f(x) \text{ para todo } x \in X \text{ y } g \in G.$$

Si f es invertible decimos que es un G-isomorfismo y que X y Y son G-conjuntos isomorfos.

Capítulo 2

Teoría de representaciones

Valiéndonos de toda la herramienta desarrollada en el capítulo anterior, a partir de este momento comenzaremos a trabajar con los conceptos de representaciones de grupos finitos, FG-módulos, álgebra de grupo, el módulo regular, FG-homomorfismos y el espacio generado por estos últimos. Además retomaremos ejemplos vistos en el capítulo pasado y los usaremos con el fin de que el lector se familiarice rápidamente con las representaciones de grupos y los FG-módulos. Posteriormente estableceremos la relación entre estos dos conceptos y después de algunos lemas y definiciones trabajaremos con dos de los teoremas más importantes de la tesis: el lema de Schur y el teorema de Maschke, los cuales nos permitirán sentar las bases para comprender la importancia de descomponer cualquier $\mathbb{C}G$-módulo en irreducibles.

Para poder continuar con el desarrollo teórico de la tesis haremos con detalle la construcción del módulo regular $\mathbb{C}G$ y demostraremos que los irreducibles que descomponen a cualquier $\mathbb{C}G$-módulo serán isomorfos a alguno que pertenece a la descomposición en irreducibles del módulo regular, lo cual constituirá una de las herramientas más importantes del trabajo y que será de vital importancia en el siguiente capítulo.

Este capítulo del trabajo concluirá con el estudio del espacio generado por los $\mathbb{C}G$-homomorfismos entre dos $\mathbb{C}G$-módulos V y W, obtendremos la dimensión de dicho espacio y haciendo uso de los recursos que habremos obtenido para entonces utilizaremos la descomposición de $\mathbb{C}G$-módulos para obtener información acerca del espacio de los $\mathbb{C}G$-homomorfismos entre el módulo regular $\mathbb{C}G$ y un $\mathbb{C}G$-módulo cualquiera.

2.1. Teoría de representaciones de grupos.

A partir de ahora, cuando se haga referencia a un campo F se supondrá que $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.1. Una *representación* φ de un grupo G sobre un campo F es un homomorfismo con dominio G y codominio $GL(n, F)$ para algún natural postivo n, es decir:

$$\varphi : \quad G \longrightarrow \quad GL(n, F)$$

$$\text{tal que } \varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \ \forall g_1, g_2 \in G$$

Observación 2.1.2. *Dado que una representación φ es un homomorfismo, tenemos que:*

$$\varphi(e) = Id_n$$
$$\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$$

Ejemplo 2.1.3. Son ejemplos de representaciones de grupos:
(1) G un grupo cualquiera. $\varphi_1 : G \longrightarrow GL(n, F)$ con la siguiente regla de correspondencia: $\varphi_1(g) = I_n \ \forall g \in G$.

(2) El grupo diédrico D_4, $\varphi_2 : D_4 \longrightarrow GL(2, F)$ y la siguiente regla de correspondencia:

$$\varphi_2(r_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \varphi_2(s_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dado que todos los elementos de D_4 se pueden expresar en términos de r_1 y s_x como vimos en el ejemplo 1.1.12 (1), basta con escribir la representación en $GL(2, F)$ de estos dos elementos para definir la de todo el grupo y utilizando la información obtenida en 1 y el producto de matrices podemos ver que φ_2 es un homomorfismo.

(3) El grupo de los cuaterniones $\mathbb{H}$, $\varphi_3 : \mathbb{H} \longrightarrow GL(2,\mathbb{C})$ y la siguiente regla de correspondencia:

$$\varphi_3(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; \varphi_3(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; \varphi_3(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \; \varphi_3(-j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; \varphi_3(-k) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \; \varphi_3(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \; \varphi_3(-i) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Veamos que efectivamente es una representación del grupo $\mathbb{H}$:
Sabemos gracias al ejemplo 1.1.3 (4) cómo se multiplican los miembros de $\mathbb{H}$, lo cual hará más sencilla la tarea de corroborar que la función enunciada anteriormente es una representación.

$$\varphi_3(k\cdot i) = \varphi_3(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \varphi_3(k)\varphi_3(i)$$

$$\varphi_3(i\cdot j) = \varphi_3(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varphi_3(i)\varphi_3(j)$$

$$\varphi_3(j\cdot k) = \varphi_3(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \varphi_3(j)\varphi_3(k)$$

$$\varphi_3(i\cdot k) = \varphi_3(-j) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \varphi_3(i)\varphi_3(k)$$

$$\varphi_3(j\cdot i) = \varphi_3(-k) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \varphi_3(j)\varphi_3(i)$$

$$\varphi_3(k\cdot j) = \varphi_3(-i) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \varphi_3(k)\varphi_3(j)$$

$$\varphi_3(i\cdot i) = \varphi_3(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \varphi_3(i)\varphi_3(i)$$

$$\varphi_3(j\cdot j)=\varphi_3(-1)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\varphi_3(j)\varphi_3(j)$$

$$\varphi_3(k\cdot k)=\varphi_3(-1)=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}=\varphi_3(k)\varphi_3(k)$$

$$\varphi_3(-k\cdot i)=\varphi_3(-j)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}=\varphi_3(-k)\varphi_3(i)$$

(4) Un grupo cíclico de orden 3, es decir $G=\{e,a,a^2\}$.
Con $\varphi_4 : G \longrightarrow GL(3,\mathbb{C})$.

$$\varphi_4(e)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi_4(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \varphi_4(a^2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

con $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Definición 2.1.4. Sea G un grupo, $\rho : G \longrightarrow GL(m,F)$ y $\sigma : G \longrightarrow GL(n,F)$ dos representaciones de grupos. Decimos que ρ y σ son *representaciones equivalentes* si $n=m$ y existe una matriz invertible T de $n\times n$ tal que para todo $g\in G$ se tenga que

$$\sigma(g)=T^{-1}(\rho(g))T.$$

Ejemplo 2.1.5. Sea $G=D_4$ y sea φ como en el ejemplo 2.1.3 (2), es decir

$$\varphi(r_1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0, \end{pmatrix}, \varphi(s_x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomemos $F=\mathbb{C}$ y definamos a T de la siguiente manera

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$T^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$T^{-1}\varphi(r_1)T = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

$$T^{-1}\varphi(s_x)T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definimos entonces

$$\sigma(r_1) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

$$\sigma(s_x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y notemos que σ es una nueva representación de D_4.
Es claro además que φ y σ son representaciones equivalentes.

2.2. FG-módulos

Definición 2.2.1. Sea V un espacio vectorial sobre F de dimensión finita y G un grupo, entonces decimos que V es un *FG-módulo* si para todo elemento $g \in G$ y todo elemento $v \in V$ la operación gv está definida y cumple las siguientes propiedades $\forall v, u \in V$, $\forall \lambda \in F$ y $\forall g, h \in G$:

1. $gv \in V$
2. $(gh)v = g(hv)$
3. $ev = v$
4. $g(\lambda v) = \lambda(gv)$
5. $g(u + v) = gu + gv$

A partir de ahora siempre supondremos que todo espacio vectorial V es de dimensión finita.

Definición 2.2.2. Sea V un FG-módulo y γ una base de V, definimos $[g]_\gamma$ como la matriz correspondiente al endomorfismo $g \longmapsto gv$ respecto a la base γ para todo $g \in G$.

El siguiente teorema describe la relación entre los dos conceptos que acabamos de enunciar, es decir, describe la conexión que existe entre las representaciones de grupos y los FG-módulos.

Teorema 2.2.3. *(1) Sea $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ una representación de G sobre un campo F, donde $V = F^n$ es el espacio de los vectores columna, entonces V es un FG-módulo si definimos la operación gv para $g \in G, v \in V$ como*

$$gv = \rho(g)v.$$

Más aún, existe una base γ de V tal que $\rho(g) = [g]_\gamma$ $\forall g \in G$.

(2) Supongamos que V es un FG-módulo y sea γ una base de V, entonces la función

$$g \longrightarrow [g]_\gamma \quad g \in G$$

es una representación de G sobre F.

Demostración. (1)

1. Veamos que $gv = \rho(g)v \in V$.
   Sabemos que $\rho(g)$ es una matriz de $n \times n$ con entradas a_{ij} y que v es un vector columna con entradas v_i en el campo F por lo tanto:

   $$gv = \rho(g)v = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} v_i a_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} v_i a_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} v_i a_{ni} \end{pmatrix}$$

   Por lo tanto $gv \in V$.

2. Veamos que $(gh)v = g(hv)$.

   Por la manera en la que definimos la operación de los elementos de G con los de V se tiene que $(gh)v = \rho(gh)v$, como la representación es un homomorfismo tenemos que $\rho(gh)v = \rho(g)\rho(h)v$ y por la asociatividad de la multiplicación de matrices se tiene que $\rho(g)\rho(h)v = \rho(g)(\rho(h)v)$, entonces $\rho(g)(\rho(h)v) = \rho(g)(hv) = g(hv)$.

3. Veamos que $ev = v$.

   Por la manera en la que se definió el producto se tiene que $ev = \rho(e)v$, y dado que $\rho(e) = I_n$ entonces tenemos que $\rho(e)v = v$.

4. Veamos que $g(\lambda v) = \lambda(gv)$.

   Sabemos que $g(\lambda v) = \rho(g)(\lambda v)$, y gracias a las propiedades del producto de matrices sabemos que $\rho(g)(\lambda v) = \lambda\rho(g)v$, asociando se tiene que $\lambda\rho(g)v = \lambda(\rho(g)v)$ y por lo tanto $\lambda(\rho(g)v) = \lambda(gv)$

5. Veamos que $g(u + v) = gu + gv$.

   Por la manera en la que se definió el producto sabemos que $g(u+v) = \rho(g)(u+v)$ y por la distributividad del producto de matrices tenemos que $\rho(g)(u + v) = \rho(g)u + \rho(g)v$ y así $\rho(g)u + \rho(g)v = gu + gv$.

Habiendo demostrado todas las propiedades, podemos concluir que $V = F^n$ es un FG-módulo.

y la base con la que podemos afirmar que $\rho(g) = [g]_\gamma$ es la base canónica de F^n, es decir $\gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(2)

Veamos ahora que $g \longrightarrow [g]_\gamma$ es una representación de G sobre F.
Dado que V es un FG-módulo sabemos que $(gh)v = g(hv)$, entonces se tiene que $[gh]_\gamma = [g]_\gamma[h]_\gamma$, lo que prueba que $g \longrightarrow [g]_\gamma$ es una representación de G sobre F. $\square$

Ejemplo 2.2.4. Sea $G = \{e, a, a^2\}$ el grupo cíclico de orden 3 y V un espacio vectorial de dimensión tres con base $\{v_1, v_2, v_3\}$ y la siguiente representación asociada:

$$\varphi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi(a^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expongamos entonces la forma de multiplicar los elementos de G con la base de V con el fin de obtener un FG-módulo:

$ev_1 = v_1$ $\quad$ $ev_2 = v_2$ $\quad$ $ev_3 = v_3$
$av_1 = v_2$ $\quad$ $av_2 = v_3$ $\quad$ $av_3 = v_1$
$a^2v_1 = v_3$ $\quad$ $a^2v_2 = v_1$ $\quad$ $a^2v_3 = v_2$.

Y para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F$, $g \in G$ establecemos que

$$g(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_1(gv_1) + \lambda_2(gv_2) + \lambda_3(gv_3).$$

Es fácil ver que esto cumple con todas las propiedades de FG-módulo.

Definición 2.2.5. Dado un FG-módulo V, decimos que un subconjunto W de V es un *FG-submódulo* de V (situación que denotaremos como $W \leq V$) si W es un subespacio de V y $gw \in W \ \forall w \in W$ y $\forall g \in G$.

Ejemplo 2.2.6. Dado un FG-módulo V, los siguientes son ejemplos de FG-submódulos:

1. V es un FG-submódulo de V.

2. $\{0\}$ es un FG-submódulo de V.

3. Sea $G = \{e, a, a^2\}$, el grupo cícliclo de orden 3 y sea V el FG-módulo de dimensión 3 inducido por G del ejemplo 2.2.4.
   Sea $w = v_1 + v_2 + v_3$ y $W = \langle w \rangle$.
   Dado que
   $$w = ew = aw = a^2w$$
   se concluye que W es un FG-submódulo de V.

Definición 2.2.7. Dados V y W dos FG-módulos, decimos que una función $\theta : V \longrightarrow W$ es un *FG-homomorfismo* si θ es una transformación lineal con la siguiente propiedad:

$$\forall g \in G \ \forall v \in V \ \theta(gv) = g\theta(v).$$

Observación 2.2.8. *Dados V y W dos FG-módulos y un FG-homomorfismo $\theta : V \longrightarrow W$ se tiene que:*

$$Ker\theta \leq V.$$
$$Im\theta \leq W.$$

Definición 2.2.9. Dados V y W dos FG-módulos, decimos que una función $\theta : V \longrightarrow W$ es un *$FG-isomorfismo$* si θ es un FG-homomorfismo y es invertible, además diremos que V y W son FG-módulos isomorfos, situación que denotaremos como $V \cong W$.

Proposición 2.2.10. *Dos FG-módulos son isomorfos si y sólo si hay bases γ_1 de V y γ_2 de W tales que para todo $g \in G$ se tiene que*

$$[g]_{\gamma_1} = [g]_{\gamma_2}.$$

Demostración. Veamos la primera implicación.
Sean V y W FG-módulos isomorfos con $\gamma_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.
Tenemos que $\gamma_2 = \{\theta(v_1), \ldots, \theta(v_n)\}$ es una base de W con θ un FG-isomorfismo.
Dado que para todo $g \in G$ e $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$g(\theta(v_i)) = \theta(gv_i),$$

se sigue que $[g]_{\gamma_1} = [g]_{\gamma_2}$.

Sea $\gamma_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\gamma_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de W con $[g]_{\gamma_1} = [g]_{\gamma_2}$ para todo $g \in G$.
Veamos que V y W son FG-módulos isomorfos.
Sea $\theta : V \longrightarrow W$ una transformación lineal biyectiva con la siguiente regla de correspondencia para $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\theta(v_i) = w_i.$$

Sea $g \in G$, dado que $[g]_{\gamma_1} = [g]_{\gamma_2}$, se deduce inmediatemente que $g(\theta(v_i)) = \theta(gv_i)$ para todo i, por lo tanto θ es un FG-isomorfismo.
Lo que concluye la prueba. □

Definición 2.2.11. Dado un FG-módulo V, decimos que V es *irreducible* si sus únicos FG-submódulos son V y $\{0\}$.

Ejemplo 2.2.12. Cualquier FG-módulo de dimensión uno es irreducible.

2.3. Maschke y Schur

Observación 2.3.1. *Dados dos FG-módulos V y W, se puede considerar su suma directa como el conjunto de todos los $u + v$ con $u \in U$ y $v \in V$. Claramente este conjunto será un espacio vectorial y también resulta ser un FG-módulo con la acción $g(u + v) = gu + gv$ para todo $g \in G$.*

Teorema 2.3.2. *Sea G un grupo finito, $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y V un FG-módulo. Si U es un FG-submódulo de V entonces existe un FG-submódulo W de V tal que:*

$$V = U \oplus W.$$

Al resultado anterior se le conoce como el teorema de Maschke.

Demostración. Tomemos W' un subespacio vectorial de V tal que $V = U \oplus W'$. Así, sabemos que para $v \in V$ tenemos que $v = u + w$ para $u \in U$ y $w \in W'$ únicos. Del hecho anterior definamos una función lineal $\phi : V \longrightarrow V$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$\phi(v) = u \ \forall v \in V.$$

Resulta claro que $Ker\phi = W'$ e $Im\phi = U$. Ahora utilizaremos ϕ para generar un FG-homomorfismo θ con dominio V, codominio V e imagen U de la siguiente manera:

$$\theta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1} \phi g \ \forall v \in V.$$

Veamos que $\theta : V \longrightarrow V$ es un FG-homomorfismo, es decir, que $\theta(xv) = x\theta(v) \ \forall x \in G \ \forall v \in V$.

$$\theta(xv) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\phi(g(xv)).$$

Usando la asociatividad del grupo tenemos que

$$\theta(xv) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\phi((gx)v).$$

Definiendo $h = gx$ se tiene que

$$\theta(xv) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} xh^{-1}\phi(hv).$$

Así

$$\theta(xv) = x(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h^{-1}\phi(hv)) = x\theta(v).$$

Por lo tanto, θ es un FG-homomorfismo.

Veamos ahora que $Im\theta = U$.

Dado que U es un FG-submódulo y ϕ es una proyección, resulta claro que $Im\theta \subseteq U$.
Veamos ahora que $U \subseteq Im\theta$
Sea $u \in U$, entonces

$$\theta(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\phi(gu) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}gu = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u = \frac{|G|}{|G|}u = u.$$

Por lo tanto $Im\theta = U$.

Notemos que del hecho de que $Im\theta = U$ podemos deducir que $\theta|_U = Id_U$, lo cual resultará de mucha utilidad para probar que $\theta\circ\theta = \theta$.
Tomemos un elemento v de V. Veamos que $\theta\circ\theta(v) = \theta(v)$.

Es claro que $\theta(v) \in Im\theta = U$, así $\theta\circ\theta(v) = Id_U \circ \theta(v) = \theta(v)$.
Por lo tanto $\theta\circ\theta(v) = \theta(v)$.
Sea $Ker\theta = W$, y así del hecho de que $Im\theta = U$ y de que ambos son submódulos de V, como vimos en la observación 2.2.8, podemos concluir que $V = U \oplus W$. □

Proposición 2.3.3. *Sean V y W FG-módulos y $\theta : V \longrightarrow W$ un FG-homomorfismo, entonces hay un FG-submódulo U de V tal que*

$$V = Ker\theta \oplus U \text{ y } U \cong Im\theta.$$

Demostración. Dado que $Ker\theta$ es un FG-submódulo de V entonces por el teorema de Maschke existe un FG-submódulo U de V tal que $V = Ker\theta \oplus U$. Con el fin de probar que $U \cong Im\theta$ definamos una función $\theta' : U \longrightarrow Im\theta$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$\theta' = \theta\restriction_U.$$

Es claro que θ' es un FG-homomorfismo dado que θ lo es.
Por otro lado, dado $u \in Ker\theta'$ se tiene que $u \in Ker\theta \cap U = \{0\}$ ya que $V = Ker\theta \oplus U$. Por lo tanto $Ker\theta' = \{0\}$.

Es claro que $Im\theta' \subseteq Im\theta$, por lo tanto basta ver la otra contención para terminar de probar que θ' es un FG-isomorfismo.
Sea $w \in Im\theta$, entonces $\theta(v) = w$ para algún $v \in V$, dado que $V = Ker\theta \oplus U$ entonces podemos escribir a v como $v = k + u$ con $k \in Ker\theta$ y $u \in U$ entonces se tiene que

$$\theta'(u) = \theta(u) = \theta(u) + \theta(k) = \theta(v) = w.$$

Por lo tanto $Im\theta \subseteq Im\theta'$ y concluimos que θ' es un FG-isomorfismo, lo que concluye la demostración. □

Definición 2.3.4. Dado V un FG-módulo, decimos que V es *completamente reducible* si $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$ donde cada U_i $i \in \{1, \ldots, n\}$ es un FG-submódulo irreducible de V.

Teorema 2.3.5. *Sea G un grupo finito y $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, entonces todo FG-módulo no cero es completamente reducible.*

Demostración. Haremos la prueba por inducción fuerte sobre $dimV$.
Base de inducción: Supongamos que $dimV = 1$.
Como $dimV = 1$ entonces resulta claro que V es irreducible.

Hipótesis de inducción: Supongamos que todo FG-módulo W con $0 < dimW < dimV$ es completamente reducible.

Paso inductivo: Si V es un FG-módulo irreducible se tiene el resultado directo, si V es un FG-módulo reducible entonces existe un U FG-submódulo de V distinto de V y no trivial, y gracias al teorema 2.3.2 sabemos que existe otro FG-submódulo W de V tal que $V = U \oplus W$.
Como $0 < dimU < dimV$ se tiene que $0 < dimW < dimV$, por lo que, por hipótesis de inducción se tiene que

$$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$$

y a su vez

$$W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_s$$

con U_i irreducible $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$ y W_j irreducible $\forall j \in \{1, \ldots, s\}$.
Así

$$V = U \oplus V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r \oplus W_1 \oplus \ldots \oplus W_s.$$

Por lo tanto V es un FG-módulo completamente reducible. □

Teorema 2.3.6. *Dados dos $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles V y W se tiene que:*

1. *Si $\theta : V \longrightarrow W$ es un $\mathbb{C}G$-homomorfismo entonces θ es un $\mathbb{C}G$-isomorfismo o bien $\theta(v) = 0$ $\forall v \in V$.*

2. *Si $\theta : V \longrightarrow V$ es un $\mathbb{C}G$-isomorfismo entonces θ es un múltiplo escalar del endomorfismo identidad Id_V.*

El teorema anterior es conocido como el lema de Schur.

Demostración. (1) Supongamos que existe un $v \in V$ tal que $\theta(v) \neq 0$, entonces $Im\theta \neq \{0\}$. Gracias a la observación 2.2.8 sabemos que $Im\theta \leq W$ y dado que W es un $\mathbb{C}G$-módulo irreducible, podemos deducir que $Im\theta = W$. Por otro lado, dado que $\theta(v) \neq 0$ entonces podemos deducir que $Ker\theta \neq V$ y como V es un $\mathbb{C}G$-módulo irreducible y $Ker\theta \leq V$, entonces resulta claro que $Ker\theta = \{0\}$. Por lo tanto θ es un $\mathbb{C}G$-isomorfismo, lo que concluye la demostración de (1).

(2) Dado que θ es un endomorfismo, sabemos que tiene un eigenvalor $\lambda \in \mathbb{C}$ y por lo tanto $Ker(\theta - \lambda Id_V) \neq \{0\}$.

Como $Ker(\theta - \lambda Id_V) \leq V$ y V es irreducible, entonces podemos deducir que $Ker(\theta - \lambda Id_V) = V$, por lo tanto $(\theta - \lambda Id_V)(v) = 0$ $\forall v \in V$, así, resulta claro que $\theta = \lambda Id_V$, lo que concluye la demostración de (2). □

Proposición 2.3.7. *Si G es un grupo abeliano de orden finito entonces todo $\mathbb{C}G$-módulo irreducible tiene dimensión 1.*

Demostración. Sea G un grupo abeliano y V un $\mathbb{C}G$-módulo irreducible. Como G es abeliano entonces dado $g \in G$ se tiene que

$$(gx)v = x(gv) \ \forall x \in G.$$

Por lo tanto, el endomorfismo θ de V con la siguiente regla de correspondencia será un $\mathbb{C}G$-homomorfismo:

$$\theta(v) = gv.$$

Por el teorema 2.3.6 (1) sabemos que θ es un $\mathbb{C}G$-isomorfismo y por (2) tenemos que es un múltiplo escalar de Id_V, así $\theta(v) = \lambda_g v$ p. a. $\lambda_g \in \mathbb{C}$.

Veamos ahora que todo subespacio de V es un $\mathbb{C}G$-submódulo de V.
Dado un subespacio W de V y $w \in W$ arbitrario, tenemos que

$$\theta(w) = gw = \lambda_g w$$

y por la estructura de subespacio de W sabemos que $\lambda_g w \in W$, por lo tanto W es un $\mathbb{C}G$-submódulo de V.
Falta ver que $dimV = 1$.
Tomemos $v_0 \in V$ diferente de 0 y consideremos $\langle v_0 \rangle$, el subespacio generado por v_0. Como $v_0 \neq 0$ y V es irreducible entonces $\langle v_0 \rangle = V$. Por lo tanto, $\{v_0\}$ es una base de V y así, podemos deducir que $dimV = 1$.

□

Proposición 2.3.8. *(1) Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico de orden n y V un $\mathbb{C}G$-módulo, entonces existe una base γ de V tal que la matriz $[g]_\gamma$ se ve de la siguiente manera :*

$$[g]_\gamma = \begin{pmatrix} \omega^{m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega^{m_r} \end{pmatrix} \text{ donde } \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

(2) Dados G un grupo finito y V un $\mathbb{C}G$-módulo. Si $g \in G$ entonces hay una base γ de V tal que la matriz $[g]_\gamma$ es una matriz diagonal. Si g es un elemento de orden n entonces las entradas de la diagonal de $[g]_\gamma$ son raíces n-ésimas de la unidad.

$$[g]_\gamma = \begin{pmatrix} \omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}$$

Demostración. (1)
Por el teorema 2.3.5 y la proposición 2.3.7 sabemos que $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ donde U_i es un $\mathbb{C}G$-submódulo irreducible de dimensión uno $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$.
Sea u_i un vector que genera a U_i, como U_i es un $\mathbb{C}G$-submódulo de V entonces $gu_i \in U_i = \langle u_i \rangle$ por lo tanto, para cada i se tiene que:

$$gu_i = \lambda_i u_i \text{ para algún } \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Dado que G es un grupo cíclico de orden n entonces tenemos que $u_j = g^n u_j = \lambda_j^n u_j$ para toda $j \in \{1, \ldots, r\}$, por lo cual, podemos deducir que $\lambda_j^n = 1$, es decir, λ_j es una raíz n-ésima de la unidad.
Gracias a la deducción anterior sabemos que $\lambda_j = (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{m_j} = \omega^{m_j}$ para algún $m_j \in \mathbb{Z}$.
Por lo tanto, si $\gamma = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es la base de V, entonces

$$[g]_\gamma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega^{m_n} \end{pmatrix}$$

Lo que concluye la prueba de (1).

(2)
Dado $g \in G$, consideremos $H = \langle g \rangle$. Dado que V es un $\mathbb{C}H$-módulo completamente reducible y H es un grupo abeliano de orden finito, entonces sabemos que V se ve la siguiente manera $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_j$ donde U_i es un submódulo irreducible de dimensión 1 $\forall i \in \{1, \ldots, j\}$ como lo vimos en la proposición 2.3.7 y como $U_i = \langle u_i \rangle$ entonces resulta claro que si $\gamma = \{u_1, \ldots, u_n\}$ entonces la matriz $[g]_\gamma$ será diagonal.
Si suponemos que g es un elemento de orden n entonces el $\mathbb{C}\langle g \rangle$-módulo V cumple con las hipótesis de (1) y por ello resulta claro que las entradas

diagonales de la matriz $[g]_\gamma$ con $\gamma = \{u_1, \ldots, u_n\}$ son raíces n-ésimas de la unidad.
Lo que conluye la prueba de (2). □

2.4. El módulo regular

2.4.1. El álgebra de grupo

Sea $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un grupo y $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Definimos un espacio vectorial sobre F con base $\gamma = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ al que llamaremos FG y cuyos elementos tendrán la siguiente forma:

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, \ldots + \lambda_n g_n \text{ con } \lambda_i \in F.$$

Para poder tener la estructura de espacio vectorial, debemos dotar a FG con una suma y un producto por escalar, operaciones que presentamos a continuación:

$$\text{Si } u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i,\ v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i \text{ con } \lambda_i, \mu_i \in F,$$

$$\text{entonces } u + v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i.$$

$$\lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) g_i.$$

Además, podemos definir una multiplicación entre elementos de FG como sigue:

$$\text{Si } r = \sum_{g \in G} \lambda_g g,\ s = \sum_{h \in G} \mu_h h \text{ con } \lambda_g, \mu_h \in F,$$

entonces

$$rs = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h (gh).$$

Definición 2.4.1. El espacio vectorial FG con la multiplicación definida anteriormente es conocida como el *álgebra de grupo* de G sobre F.

Proposición 2.4.2. *El producto del álgebra de grupo cumple las siguientes propiedades para toda* $r, s, t \in FG$ *y* $\lambda \in F$*:*

1. $rs \in FG$.
2. $r(st) = (rs)t$.
3. $r(1e) = (1e)r = r$.
4. $(\lambda r)s = \lambda(rs) = r(\lambda s)$.
5. $(r+s)t = rt + st$.
6. $r(s+t) = rs + rt$.
7. $r0 = 0r = 0$

Demostración. Todas las propiedades se deducen inmediatamente de la asociatividad en G y la manera en la que se definieron las operaciones básicas en FG. □

Observación 2.4.3. *El elemento identidad del álgebra de grupo es el producto de la identidad del campo* F *con la identidad del grupo* G*, es decir* $1e$*.*

2.4.2. El módulo regular

Definición 2.4.4. Sea G un grupo finito y $F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. El espacio vectorial FG con el producto gv ($g \in G$ y $v \in FG$) es llamado el *módulo regular* FG.

Observación 2.4.5. *La dimensión del módulo regular* FG *es igual a* $|G|$*.*

Proposición 2.4.6. *Sea* V *un* $\mathbb{C}G$*-módulo con*

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s,$$

una suma directa de $\mathbb{C}G$*-submódulos irreducibles* U_i *con* $i \in \{1, \ldots, s\}$*. Si* U *es un* $\mathbb{C}G$*-submódulo irreducible de* V *cualquiera, entonces* $U \cong U_i$ *para algún* $i \in \{1, \ldots, s\}$*.*

Demostración. Para $u \in U$, tenemos que

$$u = u_1 + \ldots + u_s \text{ con } u_i \in U_i \text{ únicos.}$$

Como U es no nulo se tiene algún $u \in U$ distinto de cero, y por tanto existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $u_i \neq 0$. Definimos la función $\pi_i : U \longrightarrow U_i$ con la regla de correspondencia

$$\pi_i(u) = u_i, \text{ para toda } u \in U.$$

Por construcción π_i es un $\mathbb{C}G$-homomorfismo no nulo. Además, tanto U como U_i son irreducibles, así que por el lema de Schur 2.3.6 concluimos que π_i es un $\mathbb{C}G$-isomorfismo y por lo tanto $U \cong U_i$.
Lo que concluye la prueba. □

Teorema 2.4.7. *Dado el módulo regular $\mathbb{C}G$, si escribimos $\mathbb{C}G$ como suma de directa de $\mathbb{C}G$-submódulos irreducibles, es decir, $\mathbb{C}G = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ entonces todo $\mathbb{C}G$-módulo irreducible es isomorfo a algún U_i para $i \in \{1, \ldots, r\}$.*

Demostración. Sea W un $\mathbb{C}G$-módulo irreducible y tomemos un vector no cero $w \in W$. Notemos que el conjunto $\{rw : r \in \mathbb{C}G\}$ es un $\mathbb{C}G$-submódulo de W, y gracias a que W es irreducible podemos afirmar que $W = \{rw : r \in \mathbb{C}G\}$.
Definamos una función $\theta : \mathbb{C}G \longrightarrow W$ con la siguiente regla de correspondencia y veamos que es un $\mathbb{C}G$-homomorfismo :

$$\theta(r) = rw \text{ con } r \in \mathbb{C}G.$$

Claramente θ es lineal y dado que $W = \{rw : r \in \mathbb{C}G\}$ podemos afirmar que $Im\theta = W$.
Por otro lado, tenemos que para $r, s \in \mathbb{C}G$ se tiene que $\theta(sr) = (sr)w = s(rw) = s(\theta(r))$, lo que prueba que θ es un $\mathbb{C}G$-homomorfismo y gracias a la proposición 2.3.3 sabemos que existe un $\mathbb{C}G$-submódulo U de $\mathbb{C}G$ tal que $\mathbb{C}G = U \oplus Ker\theta$ y además que $U \cong Im\theta = W$.
Por lo tanto, por la proposición 2.4.6 tenemos que $U \cong U_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, r\}$ y así $W \cong U_i$.

□

Ejemplo 2.4.8. Sea G un grupo cíclico de orden 3, es decir $G = \{e, a, a^2\}$.
Definimos $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}G$ como:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 + a + a^2 \\ v_2 &= 1 + a\omega^2 + a^2\omega \\ v_3 &= 1 + a\omega + a^2\omega^2 \end{aligned}$$

Y sea $U_i = \langle v_i \rangle$ con $i \in \{1,2,3\}$.
Notemos que $av_i = \omega^i v_i$ con $i \in \{1,2,3\}$, por lo que es claro que U_i es un $\mathbb{C}G$-submódulo de $\mathbb{C}G$.
Finalmente, es claro que el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ forma una base de $\mathbb{C}G$ ya que los vectores coordenadas respecto a la base $\{e, a, a^2\}$ son linealmente independientes, por lo que concluimos que:

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3.$$

Definición 2.4.9. Definimos el centro de $\mathbb{C}G$ como el siguiente conjunto:

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zr = rz \ \forall r \in \mathbb{C}G\}.$$

Observación 2.4.10. *$Z(\mathbb{C}G)$ es un subespacio de $\mathbb{C}G$.*

Proposición 2.4.11. *Sea G un grupo con l clases de conjugación, entonces $dim Z(\mathbb{C}G) = l$.*

Con el fin de no desviar la atención omitiremos la prueba de esta proposición, pero el lector la puede revisar en [[3],p.114].

2.5. El espacio de los $\mathbb{C}G$-homomorfismos

Definición 2.5.1. Sean V y W $\mathbb{C}G$-módulos. Al conjunto de todos los $\mathbb{C}G$-homomorfismos de V a W lo denotaremos $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W)$.

Notación 2.5.2. Como ya se dijo en la definición anterior, $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W)$ representará el conjunto de los $\mathbb{C}G$-homomorfismos de V a W. Mientras que $Hom(V, W)$ el conjunto de transformaciones lineales de V a W.

Es fácil verificar que $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ si definimos la suma y el producto por escalar de la siguiente manera:
Para todo $\phi, \theta \in Hom_{\mathbb{C}G}(V, W)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \in V$ se tiene que:

$$\begin{aligned} (\theta + \phi)(v) &= \theta(v) + \phi(v). \\ (\lambda\theta)(v) &= \lambda(\theta(v)). \end{aligned}$$

Proposición 2.5.3. *Si V y W son $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles entonces:*

$$dimHom_{\mathbb{C}G}(V,W) = \begin{cases} 1 & si \quad V \cong W \\ \\ 0 & si \quad V \ncong W \end{cases}$$

Demostración. Si suponemos que $V \ncong W$ entonces se sigue inmediatamente del Lema de Schur que $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W) = \{0\}$.
Si suponemos que $V \cong W$ entonces podemos tomar $\theta : V \longrightarrow W$ un $\mathbb{C}G$-isomorfismo y dado $\phi \in Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$, entonces, por el lema de Schur 2.3.6 (1) se tiene que ϕ es el homomorfismo cero o un isomorfismo. En el primer caso $\theta^{-1} \circ \phi = 0Id_V$, en el segundo caso $\theta^{-1} \circ \phi$ es un $\mathbb{C}G$-isomorfismo con dominio V y codominio V, entonces por el lema de Schur 2.3.6 (2) existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\theta^{-1} \circ \phi = \lambda Id_V$. En ambos casos tenemos

$$\theta^{-1} \circ \phi = \lambda Id_V, \text{ para alguna } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Entonces $\phi = \lambda\theta$ y por lo tanto, es posible escribir a todos los elementos de $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$ como un múltiplo escalar de θ, y así podemos afirmar que $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W) = \{\lambda\theta : \lambda \in \mathbb{C}\}$, es decir, $dimHom_{\mathbb{C}G}(V,W) = 1$. □

Proposición 2.5.4. *Sean V, V_1, V_2 y W, W_1, W_2 $\mathbb{C}G$-módulos entonces:*

1. $dimHom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2) = dimHom_{\mathbb{C}G}(V,W_1) + dimHom_{\mathbb{C}G}(V,W_2)$.

2. $dimHom_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W) = dimHom_{\mathbb{C}G}(V_1,W) + dimHom_{\mathbb{C}G}(V_2,W)$.

Demostración. (1)
Consideremos las siguientes proyecciones $\pi_1 : W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_1$ y $\pi_2 : W_1 \oplus W_2 \longrightarrow W_2$ con las siguientes reglas de correspondencia:

$$\pi_1(w_1 + w_2) = w_1 \text{ y } \pi_2(w_1 + w_2) = w_2. \text{ Para todo } w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2.$$

Como π_1 y π_2 son $\mathbb{C}G$-homomorfismos, entonces si consideramos a $\theta \in Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ es claro que $\pi_1 \circ \theta \in Hom_{\mathbb{C}G}(V,W_1)$ y a su vez $\pi_2 \circ \theta \in Hom_{\mathbb{C}G}(V,W_2)$.
Definimos una función f con dominio $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ y codomonio la suma directa externa de $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W_1)$ y $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W_2$, es decir:

$$f : Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2) \longrightarrow Hom_{\mathbb{C}G}(V,W_1) \oplus Hom_{\mathbb{C}G}(V,W_2).$$

Y con la siguiente regla de correspondencia:

$$f(\theta) = (\pi_1 \circ \theta, \pi_2 \circ \theta).$$

Por herencia es claro que f es lineal, veamos ahora que es biyectiva.
Sea $\phi_i \in Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_i)$ con $i \in \{1,2\}$ y a partir de estas funciones construyamos la función ϕ con la siguiente regla de correspondencia:

$$\phi(v) = \phi_1(v) + \phi_2(v) \text{ con } v \in V.$$

Es claro que $\phi \in Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ y que $f(\phi) = (\phi_1, \phi_2)$, por lo que podemos concluir que f es suprayectiva.
Sea $\theta \in Kerf$ entonces $\forall v \in V$ se tiene que $\pi_1 \circ \theta(v) = 0$ y $\pi_2 \circ \theta(v) = 0$ y así $\theta(v) = (\pi_1 + \pi_2) \circ \theta(v) = 0$, por lo tanto $\theta = 0$ y podemos concluir que $Kerf = \{0\}$.
Al probar que f es una función lineal y biyectiva con dominio $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ y codominio $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1) \oplus Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$, podemos concluir que ambos espacios vectoriales tienen la misma dimensión, lo que conlcuye la prueba de (1).
La prueba de (2) es anaáloga a la de (1). □

Observación 2.5.5. *Con un simple proceso inductivo de la proposición anterior es fácil ver que si tenemos $\mathbb{C}G$-módulos V, W, V_i, W_j con $i \in \{1, \ldots, r\}$ y $j \in \{1, \ldots, s\}$ entonces:*

1. $dimHom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus, \ldots, \oplus W_s) = \sum_{j=1}^{s} dimHom_{\mathbb{C}G}(V, W_j)$.

2. $dimHom_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus, \ldots, \oplus V_r, W) = \sum_{i=1}^{r} dimHom_{\mathbb{C}G}(V_i, W)$.

3. $dimHom_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus, \ldots, \oplus V_r, W_1 \oplus, \ldots, \oplus W_s) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} dimHom_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j)$.

Corolario 2.5.6. *Sea V un $\mathbb{C}G$-módulo con:*

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$$

donde cada U_i es un $\mathbb{C}G$-módulo irreducible. Sea W un $\mathbb{C}G$-módulo irreducible cualquiera, entonces las dimensiones de $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W)$ y $Hom_{\mathbb{C}G}(W, V)$ son iguales al número de $\mathbb{C}G$-módulos U_i tales que $U_i \cong W$.

Demostración. Por la observación 2.5.5 tenemos que:

$$dimHom_{\mathbb{C}G}(V,W) = \sum_{i=1}^{s} dimHom_{\mathbb{C}G}(U_i,W) \text{ y}$$
$$dimHom_{\mathbb{C}G}(W,V) = \sum_{i=1}^{s} dimHom_{\mathbb{C}G}(W,U_i)$$

Y por la proposición 2.5.3 se tiene que:

$$dimHom_{\mathbb{C}G}(U_i,W) = dimHom_{\mathbb{C}G}(W,U_i) = \begin{cases} 1 & si \quad U_i \cong W \\ \\ 0 & si \quad U_i \ncong W \end{cases}$$

Lo que concluye la prueba. □

Proposición 2.5.7. *Sea U un $\mathbb{C}G$-módulo, entonces*

$$dimHom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U) = dimU.$$

Demostración. Sea $d = dimU$, consideremos una base $\{u_1,\ldots,u_d\}$ de U y para $i \in \{1,\ldots d\}$ definimos la función $\theta_i : \mathbb{C}G \longrightarrow U$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$\theta_i(r) = ru_i \text{ con } r \in \mathbb{C}G.$$

Dado que para cada $r,s \in \mathbb{C}G$ se tiene que:

$$\theta_i(sr) = (sr)u_i = s(ru_i) = s\theta_i(r).$$

Podemos afirmar que $\theta_i \in Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U)$.
Basta probar entonces que el conjunto de funciones $\{\theta_1,\ldots,\theta_d\}$ es base de $Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U)$.
Veamos que $\{\theta_1,\ldots,\theta_d\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes:
Consideremos $\lambda_1\theta_1 + \ldots + \lambda_d\theta_d = 0$ con $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
entonces se tiene que:

$$(\lambda_1\theta_1 + \ldots + \lambda_d\theta_d)(1) = \lambda_1\theta_1(1) + \ldots + \lambda_d\theta_d(1) = 0.$$

Por cómo se definió la regla de correspondecia de θ_i se sigue que:

$$\lambda_1\theta_1(1) + \ldots + \lambda_d\theta_d(1) = \lambda_1(1u_1) + \ldots + \lambda_d(1u_d) = 0.$$

Y se sabe por hipótesis que $\{u_1, \dots, u_d\}$ es un conjunto linealmente independiente, por lo tanto $\lambda_i = 0$ para toda $i \in \{1, \dots, d\}$.
Lo que prueba que $\{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.
Veamos ahora que $\{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ genera a $Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$.
Sea $\theta \in Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$.
Dado que $\{u_1, \dots, u_d\}$ es base de U, se tiene que:

$$\theta(1) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Dado que θ es un $\mathbb{C}G$-homomorfismo , para todo $r \in \mathbb{C}G$ tenemos que:

$$\theta(r) = \theta(1r) = r\theta(1) = \lambda_1 r u_1 + \dots + \lambda_d r u_d = \lambda_1 \theta_1(r) + \dots + \lambda_d \theta_d(r) = (\lambda_1 \theta_1 + \dots + \lambda_d \theta_d)(r).$$

Se concluye $\theta = \lambda_1 \theta_1 + \dots + \lambda_d \theta_d$ que era lo que queríamos probar.
Por lo tanto $d = dimHom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U) = dimU$. □

Teorema 2.5.8. *Supongamos que $\mathbb{C}G = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, donde cada U_i es un $\mathbb{C}G$-submódulo irreducible. Si U es un $\mathbb{C}G$-módulo irreducible arbitrario, entonces el número de $\mathbb{C}G$-módulos U_i tales que $U_i \cong U$ es igual a $dimU$.*

Demostración. Por la proposición 2.5.7 sabemos que $dimHom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U) = dimU$. Y por el corolario 2.5.6 tenemos que $dimHom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$ es igual al número de $\mathbb{C}G$-módulos U_i tales que $U_i \cong U$.
Lo que concluye la prueba. □

Definición 2.5.9. Dados $V_1, \dots, V_k$ $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles, decimos que dichos $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles forman un *conjunto completo de $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles no isomorfos* si todo $\mathbb{C}G$-módulo irreducible es isomorfo a algún V_i, además $V_i \ncong V_j$ para toda $i \neq j$.

Teorema 2.5.10. *Sea $V_1, \dots, V_k$ un conjunto completo de $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles no isomorfos y G un grupo, entonces:*

$$\sum_{i=1}^{k} (dimV_i)^2 = |G|.$$

Demostración. Sea $\mathbb{C}G = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ donde cada U_j con $j \in \{1, \dots, r\}$ es un $\mathbb{C}G$-submódulo irreducible. Para $i \in \{1, \dots, k\}$ escribimos $d_i = dimV_i$. Por el teorema 2.5.8 tenemos que para cada i, el número de $\mathbb{C}G$-módulos U_j tales que $U_j \cong V_i$ es igual a d_i. Por lo tanto:

$$|G| = dim\mathbb{C}G = dimU_1 + \ldots + dimU_r = \sum_{i=1}^{k} d_i(dimV_i) = \sum_{i=1}^{k}(dimV_i)^2.$$

Lo que concluye la prueba. □

Proposición 2.5.11. *Sea V un $\mathbb{C}G$-módulo irreducible y $z \in Z(\mathbb{C}G)$, entonces existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que para todo $v \in V$ se tiene que:*

$$zv = \lambda v$$

Demostración. Sea $z \in Z(\mathbb{C}G)$ y $v \in V$, entonces es claro que $rzv = zrv$. Por lo tanto la función $\phi : V \longrightarrow V$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$\phi(v) = zv$$

es un $\mathbb{C}G$-homomorfismo, ahora, por el lema de Schur 2.3.6 (2), $\phi = \lambda Id_V$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, así, se tiene que:

$$zv = \phi(v) = \lambda v.$$

Lo que concluye la prueba. □

Capítulo 3

Teoría de caracteres

La prueba del teorema de Frobenius y toda la construcción que hicimos en las partes previas de la tesis giran en torno a la teoría de caracteres y en este capítulo nos encargaremos de trabajar con sus definiciones y resultados primarios, otorgando contexto con ejemplos que retomaremos de secciones anteriores, obtendremos también el carácter de algunos módulos destacados y nos desviaremos por un momento para hablar de producto tensorial para retomar con el producto interno de caracteres y concluir con el teorema que nos indica que dos $C\mathbb{G}$-módulos V y W son isomorfos si y sólo si sus caracteres coinciden, un objetivo que no fue trazado al iniciar el trabajo, pero que es consecuencia directa de todo lo que construimos para ese momento y constituye un resultado de suma importancia. El capítulo concluirá con una pequeña sección que hablará de tablas de caracteres y relaciones de ortogonalidad, en la que buscamos enunciar y probar resultados que nos aportarán más herramientas encaminadas a probar el teorema de Frobenius.

3.1. Caracteres

Definición 3.1.1. Dado un $\mathbb{C}G$-módulo V con base γ, definimos el carácter de V como una función $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$\chi(g) = tr[g]_\gamma \ \forall g \in G.$$

Observación 3.1.2. *Gracias al teorema 2.2.3 podemos definir el carácter de una representación $\rho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ como el carácter χ correspondiente al $\mathbb{C}G$-módulo $\mathbb{C}^n$ de la siguiente manera:*

$$\chi(g) = tr\rho(g) \ \forall g \in G$$

Ejemplo 3.1.3. Consideremos las representaciones (2), (3) y (4) del ejemplo 2.1.3 y obtengamos sus caracteres.

(1)

g	r_0	r_1	r_2	r_3
$\rho(g)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	2	0	-2	0

g	s_x	s_{-id}	s_y	s_{id}
$\rho(g)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	0	0	0	0

(2)

g	k	$-k$	i	$-i$
$\rho(g)$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	0	0	0	0

g	1	-1	j	$-j$
$\rho(g)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	2	-2	0	0

(3)

g	e	a	a^2
$\rho(g)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$
$\chi(g)$	3	0	0

Definición 3.1.4. Dado un $\mathbb{C}G$-módulo decimos que χ es un *carácter* de G si es carácter de un $\mathbb{C}G$-módulo.

Definición 3.1.5. Dado un $\mathbb{C}G$-módulo decimos que χ es un *carácter irreducible* si el $\mathbb{C}G$-módulo correspondiente es irreducible.

Definición 3.1.6. Dado un $\mathbb{C}G$-módulo V y su carácter χ, entonces a la dimensión de V se le llama el *grado* del carácter.

Proposición 3.1.7. *Dados un $\mathbb{C}G$-módulo V, su carácter χ y $g \in G$ de orden n entonces:*

1. $\chi(e) = dimV$.

2. $\chi(g)$ *es suma de raíces n-ésimas de la unidad.*

3. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

4. $\chi(g)$ *es un número real si g es conjugado de g^{-1}.*

Demostración. (1) Sea $n = dimV$ y γ la base de V entonces $[e]_\gamma = Id_n$. Por lo tanto, resulta claro que $\chi(e) = tr[e]_\gamma = n$.

(2) Gracias a la proposición 2.3.8 (2) sabemos que existe una base γ de V tal que:

$$[g]_\gamma = \begin{pmatrix} \omega^{m_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega^{m_n} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, resulta claro que $\chi(g)$ es suma de raíces n-ésimas de la unidad.

(3) Ya vimos en el inciso pasado que por la proposición 2.3.8 (2) existe un base γ de V tal que:

$$[g]_\gamma = \begin{pmatrix} \omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}$$

Y gracias al hecho de que $\omega^{-1} = \overline{\omega}$ tenemos que:

$$[g^{-1}]_\gamma = \begin{pmatrix} \omega_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\omega_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \overline{\omega_n} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, resulta claro que $\chi(g^{-1}) = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2} + \ldots + \overline{\omega_n} = \overline{\chi(g)}$.

(4) Dado que dos matrices equivalentes tienen la misma traza, entonces si g es conjugado de g^{-1} tenemos que $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ y por (3) sabemos que $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$, por lo tanto $\chi(g) = \overline{\chi(g)}$ y así $\chi(g)$ es un número real. □

Teorema 3.1.8. *Sea $\rho : G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ una representación del grupo G, χ el carácter de ρ y $g \in G$ de orden n, entonces:*

1. $|\chi(g)| = \chi(e)$ *si y sólo si* $\rho(g) = \lambda(Id_n)$ *para algún* $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. $Ker\rho = \{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$.

Demostración. (1)
Veamos que si $\rho(g) = \lambda(Id_n)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $|\chi(g)| = \chi(e)$.

Del hecho de que $\rho(g) = \lambda(Id_n)$ y de que g sea un elemento de orden n podemos deducir que $\chi(g) = \lambda n$ y además que $\rho(g^n) = \lambda^n Id_n = \rho(e) = Id_n$. Por lo tanto, λ es una raíz n-ésima de la unidad y así, resulta claro que $|\chi(g)| = \chi(e) = n$, lo que concluye la primera parte de la demostración.

Veamos ahora que si $|\chi(g)| = \chi(e)$ entonces $\rho(g) = \lambda(Id_n)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dado que g es un elemento de orden n sabemos gracias a la proposición 2.3.8 que existe una base γ de $\mathbb{C}^n$ tal que:

$$[g]_\gamma = \begin{pmatrix} \omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n \end{pmatrix}$$

donde ω_i es una raíz n-ésima de la unidad $\forall i \in \{1, ..., n\}$. Entonces por hipótesis se tiene que $|\chi(g)| = |\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n| = \chi(e) = n$.
Dado que $|\omega_i| = 1$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y gracias a la igualdad pasada se tiene que $n = |\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n| \leq |\omega_1| + \ldots + |\omega_n| = n$, por lo que se da la igualdad en la desigualdad del triángulo, así que el argumento de ω_i para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ es el mismo y por lo tanto $\omega_i = \omega_j$ para $i \neq j$. Así

$$[g]_\gamma = \begin{pmatrix} \omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_1 \end{pmatrix} = \omega_1 Id_n$$

Y gracias al teorema 2.2.3 sabemos que $\rho(g) = [g]_\gamma$ por lo que resulta evidente que $\rho(g) = \omega_1(Id_n)$.
Lo que concluye (1).
(2)
Veamos que $Ker\rho \subseteq \{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$.
Dado $h \in Ker\rho$ se tiene que $\rho(h) = Id_n$, por lo que resulta evidente que $\chi(h) = \chi(e) = n$ y así, se concluye que $h \in \{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$.

Veamos que $\{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\} \subseteq Ker\rho$.
Dado $h \in \{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$ se sigue que $|\chi(h)| = \chi(e) = n$ entonces, por (1) se tiene que $\rho(h) = \lambda(Id_n)$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Dado que $\rho(h) = \lambda(Id_n)$ entonces podemos decir que $\chi(h) = \lambda\chi(e)$ y entonces se deduce que $\lambda = 1$,

lo que hace claro que $\rho(h) = Id_n$ y por lo tanto, $h \in Ker\rho$.
Lo que concluye (2). □

Definición 3.1.9. Dado un grupo G y su carácter χ, definimos el *kernel* de χ como el siguiente conjunto:

$$Ker\chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}$$

Observación 3.1.10. *Gracias al teorema 3.1.8 sabemos que si ρ es una representación del grupo G con carácter χ, entonces $Ker\chi = Ker\rho$ y por lo tanto $Ker\chi \trianglelefteq G$.*

3.1.1. El carácter regular

Definición 3.1.11. El *carácter regular* de G, es como se conoce al carácter del módulo regular $\mathbb{C}G$, al que a partir de ahora denotaremos como χ_{reg}.

Proposición 3.1.12. *Sea V un $\mathbb{C}G$-módulo y supongamos que*

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r,$$

donde cada U_i es un $\mathbb{C}G$-submódulo irreducible, entonces, el carácter de V es igual a la suma de los caracteres de $U_1, \ldots, U_r$.

Demostración. Es inmediato del hecho de que si un $\mathbb{C}G$-módulo se puede expresar como suma directa de $\mathbb{C}G$-submódulos, existe una base γ de V tal que la matriz asociada a la representación es una matriz por bloques, donde la suma de la diagonal de cada bloque será el respectivo carácter de cada U_i con $i \in \{1, \ldots, r\}$. □

Teorema 3.1.13. *Sea $V_1, \ldots, V_k$ un conjunto completo de $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles no isomorfos como en la definción 2.5.9 y para $i \in \{1, \ldots, k\}$ sea χ_i el carácter de V_i y $d_i = \chi_i(e)$, entonces:*

$$\chi_{reg} = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k.$$

Demostración. Por el teorema 2.5.8 tenemos que:

$$\mathbb{C}G = (V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \ldots \oplus V_2) \oplus \ldots \oplus (V_k \oplus \ldots \oplus V_k),$$

donde para cada i se tienen d_i factores V_i con $i \in 1, \ldots, k$, y por la proposición 3.1.12 se tiene que:

$$\chi_{reg} = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k.$$

Que era lo que queríamos probar. $\square$

Proposición 3.1.14. *Si χ_{reg} es el carácter regular de G, entonces*

$$\chi_{reg}(e) = |G| \text{ y}$$
$$\chi_{reg}(g) = 0 \text{ si } g \neq e.$$

Demostración. Sean $g_1, \ldots, g_n$ los elementos de G y sea $\gamma = \{g_1, \ldots, g_n\}$ una base de $\mathbb{C}G$.
Por la proposición 3.1.7 sabemos que

$$\chi_{reg}(e) = dim\mathbb{C}G = |G|.$$

Por otro lado, si tomamos $g \in G$ con $g \neq e$ tenemos que para cada g_i con $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$gg_i = g_j \text{ para algún } j \neq i$$

por lo tanto la i-ésima columna de la matriz $[g]_\gamma$ tiene ceros en todas las entradas excepto en la del renglón j, por lo que la entrada ii de la matriz es igual a cero para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, por lo que resulta claro que $\chi_{reg}(g) = 0$ si $g \neq e$. $\square$

3.2. Producto tensorial

Definición 3.2.1. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, con bases $\{v_1, \ldots, v_m\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ respectivamente. Definimos *el espacio producto tensorial* como el espacio vectorial de dimensión nm con la siguiente base:

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Es decir, $V \otimes W$ consta de todas las expresiones de la forma:

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes w_j).$$

Si tenemos $v \in V$ y $w \in W$ con $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ y $w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$, entonces definimos $v \otimes w \in V \otimes W$ como:

$$v \otimes w = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j).$$

Proposición 3.2.2. *Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita.*

1. *Si $v \in V$, $w \in W$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces: $v \otimes (\lambda w) = (\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w)$.*

2. *Si $x_1, \dots, x_r \in V$ y $y_1, \dots, y_t \in W$, entonces:*

$$(\sum_{i=1}^{r} x_i) \otimes (\sum_{j=1}^{t} y_j) = \sum_{i,j} x_i \otimes y_j.$$

Demostración. (1)
Sea $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ y $w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$, entonces tenemos que :
$v \otimes (\lambda w) = (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i) \otimes (\sum_{j=1}^{n} \lambda \mu_j w_j) = \sum_{i,j} \lambda \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$.
$(\lambda v) \otimes w = (\sum_{i=1}^{m} \lambda \lambda_i v_i) \otimes (\sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j) = \sum_{i,j} \lambda \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$.
$\lambda(v \otimes w) = \lambda(\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)) = \sum_{i,j} \lambda \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)$.
(2) Se sigue inmediatamente de la definición de producto tensorial. □

Hasta ahora hemos hecho nuestra construcción del producto tensorial de V y W tomando bases específicas de ambos espacios vectoriales. En la siguiente proposición mostraremos que nuestra construcción funciona bien si tomamos cualquier base de V y W respectivamente.

Proposición 3.2.3. *Si $\{e_1, \dots, e_m\}$ es base de V y $\{f_1, \dots, f_n\}$ es base de W, entonces los elementos en el siguiente conjunto forman una base de $V \otimes W$:*

$$\{e_i \otimes f_j : 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}.$$

Demostración. Dado que $\{e_1, \dots, e_m\}$ es base de V y $\{f_1, \dots, f_n\}$ es base de W, entonces:

$$v_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} e_k$$
$$w_j = \sum_{l=1}^{n} \mu_{jl} f_l$$

con v_i y w_j como en la definición 3.2.1 y $\lambda_{ik}, \mu_{jl} \in \mathbb{C}$.
Entonces, por la proposición 3.2.2 tenemos que:

$$v_i \otimes w_j = \sum_{k,l} \lambda_{ik}\mu_{jl}(e_k \otimes f_l).$$

Como los elementos de la forma $v_i \otimes w_j$ forman una base de $V \otimes W$, entonces es claro que los elementos de la forma $e_k \otimes f_l$ generan a $V \otimes W$ y por lo tanto, $e_k \otimes f_l$ es también una base de $V \otimes W$, ya que son nm elementos que generan a dicho espacio. □

Ya que definimos el producto tensorial para espacios vectoriales, es natural preguntarnos acerca de la construcción de este producto para dos $\mathbb{C}G$-módulos.
Dados dos $\mathbb{C}G$-módulos definiremos una acción para el producto tensorial, en términos de las acciones que se tienen en cada módulo:

Definición 3.2.4. Dados V y W dos $\mathbb{C}G$-módulos cuyas bases como espacios vectoriales son $\{v_1, \ldots, v_m\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ respectivamente, G un grupo y para todos $g \in G$, i, j definimos:

$$g(v_i \otimes w_j) = gv_i \otimes gw_j.$$

Y de forma más general definimos:

$$g(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes w_j)) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(gv_i \otimes gw_j).$$

Proposición 3.2.5. *Dados V y W dos $\mathbb{C}G$-módulos cuyas bases como espacios vectoriales son $\{v_1, \ldots, v_m\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ respectivamente, entonces para todo $v \in V$, $w \in W$ y $g \in G$ tenemos que:*

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw.$$

Demostración. Sean $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ y $w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$, entonces por la proposición 3.2.2 se tiene que:

$$g(v \otimes w) = g(\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (gv_i \otimes gw_j).$$

Nuevamente, por la proposición 3.2.2 llegamos a que:

$$\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j(gv_i\otimes gw_j)=(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i gv_i)\otimes(\sum_{j=1}^{n}\mu_j gw_j)=gv\otimes gw.$$

Lo que concluye la prueba. □

Proposición 3.2.6. *Dados V y W dos $\mathbb{C}G$-módulos cuyas bases como espacios vectoriales son $\{v_1,\dots,v_m\}$ y $\{w_1,\dots,w_n\}$ respectivamente, entonces $V\otimes W$ es un $\mathbb{C}G$-módulo.*

Demostración. Sean $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$ y $g,h\in G$, entonces:

1. $g(v_i\otimes w_j)=gv_i\otimes gw_j\in V\otimes W$.
2. $hg(v_i\otimes w_j)=hg(v_i)\otimes hg(w_j)=h(gv_i)\otimes h(gw_j)$, y gracias a la proposición 3.2.5 tenemos que:
   $h(gv_i)\otimes h(gw_j)=h(gv_i\otimes gw_j)=h(g(v_i\otimes w_j))$.
3. $1(v_i\otimes w_j)=v_i\otimes w_j$.
4. $g(\sum_{i,j}\lambda_{ij}(v_i\otimes w_j))=\sum_{i,j}\lambda_{ij}(g(v_i\otimes w_j))$ por la definición 3.2.4.

Al cumplirse estas cuatro condiciones queda probado que $V\otimes W$ es un $\mathbb{C}G$-módulo. □

Proposición 3.2.7. *Sean V y W $\mathbb{C}G$-módulos, con caracteres χ y ψ respectivamente, entonces el carácter del $\mathbb{C}G$-módulo $V\otimes W$, es $\chi\psi$, donde para todo $g\in G$ se tiene que:*

$$(\chi\psi)(g)=\chi(g)\psi(g).$$

Demostración. Sea $g\in G$, gracias al teorema 2.3.8, sabemos que existen bases $\gamma_1=\{v_1,\dots,v_m\}$ y $\gamma_2=\{w_1,\dots,w_n\}$ de V y W respectivamente tales que:

$$gv_i=\lambda_i v_i \text{ para toda } i \text{ con } i\in\{1,\dots,m\}.$$

y a su vez:

$$gw_j=\mu_j w_j \text{ para toda } j \text{ con } j\in\{1,\dots,m\}.$$

Entonces tenemos que los caracteres de V y W son de la siguiente manera:

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i.$$
$$\psi(g) = \sum_{j=1}^{n} \mu_i.$$

Por otro lado, tenemos que:

$$g(v_i \otimes w_j) = gv_i \otimes gw_j = \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j).$$

Por el hecho de que $v_i \otimes w_j$ forma un base de $V \otimes W$, entonces el carácter ω de $V \otimes W$ será como sigue:

$$\omega(g) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i)(\sum_{j=1}^{n} \mu_i) = \chi(g)\psi(g).$$

Que era lo que queríamos probar. □

Proposición 3.2.8. *Sea F un campo y sean V y W espacios vectoriales con $dim U = n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $V^* = Hom(V, F)$ el espacio dual de V, entonces la función $\Gamma \colon V^* \otimes W \longrightarrow Hom(V, W)$ y regla de correspondencia:*

$$\Gamma(\varphi \otimes w)(u) = \varphi(u) w \text{ con } w \in W.$$

Es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $f_i \in V^*$ con la siguiente regla de correspondecia para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} \ \forall j.$$

Entonces $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es una base de V^*. Por lo tanto, podemos escribir a un elemento arbitrario $\sum_{i,k} (\alpha_{ik} f_i \otimes w_k)$ de $V^* \otimes W$ de la siguiente manera con $w_j \in W$:

$$\sum_i f_i \otimes (\sum_k \alpha_{ik} w_k).$$

Por lo tanto si tomamos algún $v_j \in V$, tenemos que:

$$\mathit{\Gamma}(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes (\sum_k \alpha_{ik} w_k))(v_j) = \sum_{i=1}^{n} f_i(v_j)(\sum_k \alpha_{ik} w_k) = \sum_k \alpha_{jk} w_k.$$

Ahora que vimos el comportamiento general de la función Γ, veamos que es un ismorfismo de espacios vectoriales.
Inyectividad:
Si $\Gamma(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes (\sum_k \alpha_{ik} w_k)) = 0$ entonces es claro que $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes (\sum_k \alpha_{ik} w_k) = 0$ dado que $\sum_k \alpha_{jk} w_k = 0$.
Lo que prueba que Γ es inyectiva.
Suprayectividad:
Sea $\sigma \in Hom(V, W)$, entonces para $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, se tiene que:

$$\Gamma(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes \sigma(v_i))(v) = \sum_{i=1}^{n} f_i(v)\sigma(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma(v_i) = \sigma(v).$$

Por lo tanto $\Gamma(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes \sigma(v_i)) = \sigma$ y concluimos que Γ es suprayectiva. □

Ahora que hemos estudiado a la colección $\mathbb{C}G$-homomorfismos entre dos $\mathbb{C}G$-módulos como espacio vectorial, es natural preguntarse por los alcances que tendremos dándole estructura de $\mathbb{C}G$-módulo.

Proposición 3.2.9. *Dados V y W $\mathbb{C}G$-módulos, el espacio vectorial $Hom(V, W)$ adquiere estructura de $\mathbb{C}G$-módulo si definimos el producto de $\varphi \in Hom(V, W)$ y $g \in G$ de la siguiente manera:*

$$(g\varphi)(v) = g\varphi(g^{-1}v) \text{ para todo } v \in V.$$

Demostración. Verificaremos todas las propiedades de $\mathbb{C}G$-módulo.

1. Es claro que $g\varphi \in Hom(V, W)$.

2. Sean $g, h \in G$, $\varphi \in Hom(V, W)$,entonces: $(gh)\varphi(v) = (gh)\varphi((h^{-1}g^{-1})v)$.
   Por otro lado tenemos que:
   $g(h\varphi)(v) = g(h\varphi)(g^{-1}v) = g(h\varphi(h^{-1}(g^{-1}v))) = (gh)\varphi((h^{-1}g^{-1})v)$.
   Por lo tanto:
   $(gh)\varphi(v) = g(h\varphi)(v)$.

3. Es claro que $e\varphi(v) = \varphi(v)$.

4. Sea $g \in G$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in Hom(V,W)$. Para toda $v \in V$ se tiene que: $(g(\lambda\varphi))(v) = g(\lambda\varphi)(g^{-1}v) = g\varphi(\lambda(g^{-1}v)) = g\varphi(g^{-1}(\lambda v)) = (g\varphi)(\lambda v) = (\lambda(g\varphi))(v)$.
   Por lo tanto $g(\lambda\varphi) = \lambda(g\varphi)$.

5. $g \in G$, $\varphi, \gamma \in Hom(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Para todo $v \in V$ se tiene que: $g(\varphi+\gamma)(v) = g(\varphi+\gamma)(g^{-1}v) = g(\varphi(g^{-1}v)+\gamma(g^{-1}v)) = g\varphi(g^{-1}v) + g\gamma(g^{-1}v) = g\varphi(v) + g\gamma(v)$.
   Por lo tanto $g(\varphi+\gamma)(v) = g\varphi(v) + g\gamma(v)$.

□

Definición 3.2.10. Dado V un $\mathbb{C}G$-módulo, definimos *el módulo dual de V*, al que denotaremos como V^*, como el $\mathbb{C}G$ módulo que consiste de los $\mathbb{C}G$-homomorfismos con dominio en V y codominio $\mathbb{C}$, es decir:

$$V^* = Hom(V, \mathbb{C})$$

donde dado $g \in G$, $v \in V$ y $\varphi \in V^*$ definimos la acción de g en φ de la siguiente manera:

$$g\varphi(v) = \varphi(g^{-1}v).$$

Proposición 3.2.11. *Dados V y W $\mathbb{C}G$-módulos, entonces se tiene que $V^* \otimes W$ y $Hom(V,W)$ son $\mathbb{C}G$-módulos isomorfos.*

Demostración. Gracias a la proposición 3.2.8 sabemos que la función Γ : $V^* \otimes W \longrightarrow Hom(V,W)$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$\Gamma(\varphi \otimes w)(u) = \varphi(u)w,$$

es un ismorfismo de espacios vectoriales.
Por lo tanto, para ver que la función Γ es un isomorfismo de $\mathbb{C}G$-módulos basta ver que para todo $g \in G$, $\varphi \in V^*$ y $w \in W$ se tiene que:

$$\Gamma(g(\varphi \otimes w)) = g\Gamma(\varphi \otimes w).$$

Es decir, basta ver que:

$$\Gamma(g(\varphi \otimes w))(u) = g\Gamma(\varphi \otimes w)(u) \text{ para toda } u \in V.$$

Por la forma en la que definimos la regla de correspondencia de Γ tenemos que:

$$\Gamma(g(\varphi\otimes w))(u)=\Gamma(g\varphi\otimes gw)(u)=(g\varphi)(u)gw.$$

Dado que $\varphi\in V^*$, tenemos que

$$(g\varphi)(u)gw=\varphi(g^{-1}u)gw.$$

Por otro lado se tiene que:

$$(g\Gamma(\varphi\otimes w))(u)=g\Gamma(\varphi\otimes w)(g^{-1}u)=g(\varphi(g^{-1}u)w)=\varphi(g^{-1}u)gw.$$

Donde la última igualdad se debe a que $\varphi(g^{-1}u)$ es un escalar y W es un $\mathbb{C}G$-módulo. Por lo que concluimos que $\Gamma(g(\varphi\otimes w))=g\Gamma(\varphi\otimes w)$. □

Proposición 3.2.12. *Dados V y W $\mathbb{C}G$-módulos con caracteres χ y ψ respectivamente, χ^* el carácter de V^* y ν el carácter de $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$, entonces:*

1. $\chi^*=\overline{\chi}$.
2. $\nu=\overline{\chi}\psi$.

Demostración. (1)
Sea $g\in G$ y $\{v_1,\dots,v_n\}$ una base de V compuesta por los vectores propios del homomorfismo γ con dominio V, codomino V y la siguiente regla de correspondencia:

$$\gamma(v)=gv.$$

Con $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ los respectivos valores propios.
Sea $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ la base dual de V^*, compuesta de funciones con dominio V, codominio $\mathbb{C}$ y la siguiente regla de correspondencia para $v_j\in\{v_1,\dots,v_n\}$:

$$\varphi_i(v_j)=\delta_{ij}.$$

Por otra parte tenemos que $gv_j=\lambda_jv_j$, y esto a su vez implica que $g^{-1}v_j=\lambda_j^{-1}v_j$, y por lo demostrado en la proposición 3.1.7 sabemos que $\lambda_j^{-1}=\overline{\lambda_j}$, por lo tanto $g^{-1}v_j=\lambda_j^{-1}v_j=\overline{\lambda_j}v_j$.
Por lo tanto para todas $i,j\in\{1,\dots,n\}$ se tiene que:

$$(g\varphi_i)(v_j)=\varphi_i(g^{-1}v_j)=\varphi_i(\overline{\lambda_j}v_j)=\overline{\lambda_j}\delta_{ij}.$$

Que es el conjugado de λ_j si $j = i$, y 0 en caso contrario, lo cual coincide con el valor de $\overline{\lambda_i}\varphi(v_j)$.
Y concluimos entonces que para toda $i \in \{1,\dots,n\}$ se tiene que:

$$g\varphi_i = \overline{\lambda_i}\varphi_i.$$

Se deduce entonces que la base de V^* que consiste de los vectores propios $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ obtenidos con g tienen como valores propios asociados a $\overline{\lambda_1},\dots,\overline{\lambda_n}$.
Por lo tanto:

$$\chi^*(g) = \overline{\lambda_1} + \dots + \overline{\lambda_n} = \overline{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = \overline{\chi}.$$

Que era lo que queríamos probar.

(2) Gracias a la proposición 3.2.11 sabemos que $V^* \otimes W$ y $Hom(V,W)$ son $\mathbb{C}G$-módulos isomorfos, y por la proposición 3.2.7 es claro que:

$$\nu(g) = \chi^*\psi = \overline{\chi}\psi.$$

Donde la última igualdad se debe al inciso anterior. □

Proposición 3.2.13. *Sea $\mathbb{C}G$ un grupo y V un $\mathbb{C}G$ módulo, entonces V y $\mathbb{C}G \otimes V$ son $\mathbb{C}G$-módulos isomorfos.*

Demostración. Definimos la función $f : \mathbb{C}G \otimes V \longrightarrow V$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$f(r \otimes v) = rv \text{ para toda } r \in \mathbb{C}G.$$

Es claro que f es un $\mathbb{C}G$- homomorfismo. Proponemos $h : V \longrightarrow \mathbb{C}G \otimes V$ con la siguiente regla de correspodencia:

$$h(v) = e \otimes v.$$

Es claro que h es un $\mathbb{C}G$-homomorfismo y que es la inversa de f, por lo tanto V y $\mathbb{C}G \otimes V$ son $\mathbb{C}G$-módulos isomorfos. □

3.3. Producto interno de caracteres.

Definición 3.3.1. Dado G un grupo, ϕ y θ funciones con dominio G y codominio $\mathbb{C}$, definimos la siguiente operación:

$$\langle\theta,\phi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\theta(g)\overline{\phi(g)}.$$

Ejemplo 3.3.2. Sea G un grupo cíclico de orden tres, es decir $G=\{e,g,g^2\}$ y θ y ϕ funciones con las siguientes reglas de correspondencia:

g	e	g	g^2
θ	2	i	-1
ϕ	1	2	$-i$

Entonces:
$\langle\theta,\phi\rangle=\frac{1}{3}(2+2i-i)=\frac{1}{3}(2+i)$.

$\langle\theta,\theta\rangle=\dfrac{1}{3}(4+1+1)=\dfrac{1}{3}(6)=2.$

$\langle\phi,\phi\rangle=\dfrac{1}{3}(1+4+1)=\dfrac{1}{3}(6)=2.$

Proposición 3.3.3. *Sea G un grupo que tiene l clases de conjugación con representantes $g_1,\ldots,g_l$ y χ y ψ dos caracteres de G, entonces se tiene que:*

$$(1)\ \langle\chi,\psi\rangle=\langle\psi,\chi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\psi(g^{-1}).$$

$$(2)\ \langle\chi,\psi\rangle=\sum_{i=1}^{l}\frac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{|C_G(g_i)|}.$$

Demostración. (1)
Sabemos que $\langle\chi,\psi\rangle=\dfrac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\psi(g)}$ y gracias a la proposición 3.1.7

tenemos que $\overline{\psi(g)} = \psi(g^{-1})$, por lo que

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1}).$$

Dado que $G = \{g^{-1} : g \in G\}$ entonces es claro que $\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g) = \langle \psi, \chi \rangle$.

(2)
Dado que el carácter de dos elementos que pertenecen a la misma clase de conjugación es el mismo, tenemos en consecuencia que $\sum_{g \in g_i^G} \chi(g^{-1})\psi(g) = |g_i^G| \chi(g_i^{-1})\psi(g_i)$.
Por otro lado, sabemos que $G = \bigcup_{i=1}^{l} g_i^G$ y por el teorema 1.2.9 tenemos que $|g_i^G| = [G : C_G(g_i)] = |G|/|C_G(g_i)|$.
Por lo tanto:
$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{l} \sum_{g \in g_i^G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = \sum_{i=1}^{l} \frac{|g_i^G|}{|G|} \chi(g_i)\overline{\psi(g_i)} =$
$= \sum_{i=1}^{l} \frac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{|C_G(g_i)|}$.

□

Definición 3.3.4. Dado V un $\mathbb{C}G$-módulo, definimos el conjunto de los $v \in V$ en los que G actúa de forma trivial como sigue

$$V^G = \{v \in V : gv = v \ \forall g \in G\}.$$

Observación 3.3.5. *V^G es un $\mathbb{C}G$-submódulo de V.*

Lema 3.3.6. *Si V es un $\mathbb{C}G$-módulo y χ_V es el carácter de V entonces*

$$dim V^G = \frac{1}{G} \sum_{g \in G} \chi_V(g).$$

Demostración. Sea $x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathbb{C}G$, es claro que $gx = x$ para todo $g \in G$, y gracias a este hecho tenemos que

$$x^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gx = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} x = \frac{|G|}{|G|}x = x.$$

Si consideramos la transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ que tiene como regla de correspondencia la multiplicación por x, es decir:

$$T(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gv.$$

Gracias a que $x^2 = x$ podemos afirmar que $T^2 - T = 0$ y por lo tanto T es diagonalizable y los únicos valores propios de T son 0 y 1.
Sea $V_1 \subseteq V$ el subespacio generado por los vectories propios con valor propio 1.
Veamos que $V_1 = V^G$.
Sea $v \in V_1$, entonces para todo $g \in G$ tenemos que $gv = gxv = xv = v$ y por lo tanto $v \in V^G$.
Por otro lado, sea $v \in V^G$ y tenemos que

$$|G|xv = (\sum_{g\in G} g)v = \sum_{g\in G} gv = \sum_{g\in G} v = |G|v.$$

Lo que implica que $xv = v$, así v es un vector propio con valor propio 1 y por lo tanto $v \in V_1$, así $V_1 = V^G$. Como T es diagonalizable, existe una base de V tal que la matriz asociada es una matriz diagonal D, y como los únicos valores propios son cero y uno, la diagonal de D está compuesta solamente de ceros y unos, tantos unos como la dimensión de V_1, así que el carácter de T será igual a la dimensión de V_1 que es igual a la de V^G, pues $V^G = V_1$.
Por otro lado

$$T(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} T_g(v)$$

donde T_g es la transformación lineal en V que se define por la multiplicación por g y debido a la linealidad de la traza, el carácter de T es igual a $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$, por lo que $dimV^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$, que era lo que queríamos probar. □

Teorema 3.3.7. *Sean V y W $\mathbb{C}G$-módulos con caracteres χ y ψ respectivamente, entonces:*

$$dim Hom_{\mathbb{C}G}(V,W) = \langle \chi, \psi \rangle.$$

Antes de comenzar la prueba es importante recordar que $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$ es el conjunto de los $\mathbb{C}G$-homomorfismos de V en W, mientras que $(Hom(V,W)$ es el conjunto de las transformaciones lineales de V a W.

Demostración. Notemos primero que $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$ es un subespacio del $\mathbb{C}G$-módulo $Hom(V,W)$.
Veamos ahora que $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W) = (Hom(V,W))^G$.

Sea $\varphi \in Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$ y $g \in G$ entonces $(g\varphi)(v) = g\varphi(g^{-1}v) = gg^{-1}\varphi(v) = e\varphi(v) = \varphi(v)$, por lo que $\varphi \in (Hom(V,W))^G$.

Por otro lado, tomemos $\varphi \in (Hom(V,W))^G$, entonces $\varphi(v) = e\varphi(v) = gg^{-1}\varphi(v) = g\varphi(g^{-1}v) = (g\varphi)(v)$. Así, podemos concluir que $\varphi \in Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$.
Por lo que $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W) = (Hom(V,W))^G$.
Por lo tanto, gracias al lema 3.3.6 tenemos que:

$$dim Hom_{\mathbb{C}G}(V,W) = dim(Hom(V,W))^G = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \nu(g) \text{ con } \nu \text{ el carácter de } Hom(V,W).$$

Y al mismo tiempo gracias a la proposición 3.2.12 (2) se tiene que:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \nu(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \overline{\chi(g)}\psi(g) = \langle \psi, \chi \rangle$$

Y como $dim Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$ es un número real entonces $\langle \psi, \chi \rangle = \overline{\langle \chi, \psi \rangle} = \langle \chi, \psi \rangle$.
Lo que concluye la prueba. □

Teorema 3.3.8. *Sean U y V $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles no isomorfos con caracteres χ y ψ respectivamente, entonces :*

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1 \ .$$
$$\langle \chi, \psi \rangle = 0.$$

Demostración. Por el teorema 3.3.7 sabemos que:

$$dim Hom_{\mathbb{C}G}(V,W) = \langle \chi, \psi \rangle.$$

Y por la proposición 2.5.3 tenemos que:

$$dimHom_{\mathbb{C}G}(V,W) = \begin{cases} 1 & si \quad V \cong W \\ \\ 0 & si \quad V \ncong W \end{cases}$$

Por lo que es inmediato que:

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1.$$
$$\langle \chi, \psi \rangle = 0.$$

□

Corolario 3.3.9. *Sea G un grupo finito y $V_1, V_2, \dots, V_k$ un conjunto completo de $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles no isomorfos. Si χ_i es el carácter de V_i con $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces:*

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Con δ_{ij} la delta de Kronecker.

Observación 3.3.10. *Si V es un $\mathbb{C}G$-módulo sabemos por el teorema 2.3.5 que V es igual a una suma directa de $\mathbb{C}G$-submódulos irreducibles de V, donde cada uno de estos es isomorfo a algún V_i, por lo tanto, existen enteros $d_1, \dots, d_k$ tal que*

$$V \cong (V_1 \oplus \dots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \dots \oplus V_2) \oplus \dots (V_k \oplus \dots \oplus V_k)$$

donde para cada i hay d_i factores V_i.

Teorema 3.3.11. *Sean $\chi_1, \dots, \chi_k$ los caracteres irreducibles de G. Si ψ es cualquier carácter de G, entonces*

$$\psi = d_1\chi_1 + \dots + d_k\chi_k,$$

con $d_1, \dots, d_k$ enteros positivos.
Más aún, para $i \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que

$$d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$$

y además

$$\langle \psi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} d_i^2.$$

Demostración. Sabemos por la observación 3.3.10 que existen enteros $d_1, \ldots, d_k$ tales que

$$V \cong (V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \ldots \oplus V_2) \oplus \ldots (V_k \oplus \ldots \oplus V_k)$$

donde para cada i hay d_i factores V_i.
Por lo tanto el carácter ψ de V está dado por

$$\psi = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k.$$

Y gracias al corolario 3.3.9 tenemos que para $i \in \{1, \ldots, k\}$

$$\langle \psi, \chi_i \rangle = \langle \chi_i, \psi \rangle = d_i$$

y por lo tanto

$$\langle \psi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} d_i^2.$$

Que era lo que queríamos probar. □

En ocasiones requeriremos combinaciones lineales enteras de caracteres irreducibles, que no necesariamente son caracteres ya que puede ser que aparezcan con coeficientes negativos:

Definición 3.3.12. Un carácter virtual de G es una combinación lineal entera de caracteres irreducibles de G.

Corolario 3.3.13. *Si $\alpha = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \chi_i$ y $\beta = \sum_{j=1}^{r} \mu_j \chi_j$ son caracteres virtuales de G, entonces:*

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i.$$

Demostración. Tenemos que:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \sum_{i=1}^{r} \lambda i \chi_i, \sum_{j=1}^{r} \mu_j \chi_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \lambda_i \mu_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \lambda_i \mu_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_i.$$

Que es lo que queríamos probar. □

Teorema 3.3.14. *Sean $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ los caracteres irreducibles de G, entonces $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en el espacio vectorial de las funciones de G a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Tomemos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ con $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tales que :

$$\lambda_1\chi_1 + \lambda_2\chi_2 + \ldots + \lambda_k\chi_k = 0.$$

Entonces por el corolario 3.3.9 se tiene que:

$$0 = \langle \lambda_1\chi_1 + \ldots + \lambda_k\chi_k, \chi_i \rangle = \lambda_i.$$

Por lo tanto $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k\}$ es linealmente independiente. □

Definición 3.3.15. Dado un grupo G y una función $\psi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\psi(x) = \psi(y)$ si x es conjugado de y en G. A ψ le llamamos *una función de clase de G.*

Observación 3.3.16. *El conjunto $C = \{\psi : \psi$ es una función de clase$\}$ es un subespacio vectorial del conjunto de las funciones con dominio en G y codominio $\mathbb{C}$, es más, si G tiene l clases de conjugación, entonces $dimC = l$.*

Demostración. Se puede revisar en [[3], p.152]. □

Teorema 3.3.17. *El número de caracteres irreducibles de un grupo G es igual que el número de clases de conjugación de G.*

Demostración. Sean $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ los caracteres irreducibles de G y sea l el número de clases de conjugación de G. Por el teorema 3.3.14 sabemos que el conjunto $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k\}$ es linealmente independiente en C y por la observación 3.3.16 se tiene que $k \leq l$.
Veamos que $l \leq k$.
Consideremos el módulo regular $\mathbb{C}G$.
Si $\{V_1, \ldots, V_k\}$ es un sistema completo de $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles no isomorfos, tenemos que:

$$\mathbb{C}G = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k.$$

Donde cada W_i es isomorfo a una suma directa de copias de V_i.
Dado que $\mathbb{C}G$ tiene a la identidad como elemento, se tiene que:

$$1 = w_1 + \ldots + w_k,\ w_i \in W_i.$$

Sea $z \in Z(\mathbb{C}G)$, por la proposición 2.5.11 sabemos que para cada i existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que:

$$zv = \lambda_i v \text{ para toda } v \in V.$$

Por lo tanto, tendremos que:

$$zw_i = \lambda_i w_i,\ \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Y a su vez, tenemos que:

$$z = z1 = z(w_1 + \ldots + w_k) = zw_1 + \ldots + zw_k = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k$$

Así, podemos afirmar que $Z(\mathbb{C}G)$ está contenido en el subespacio de $\mathbb{C}G$ generado por $w_1, \ldots, w_k$ y ya que en la proposición 2.4.11 se mencionó que $dimZ(\mathbb{C}G) = l$, por lo tanto $l \leq k$.

Lo que concluye la demostración. □

Corolario 3.3.18. *Dados $\chi_1, \ldots, \chi_k$, los caracteres irreducibles de G, éstos forman una base del espacio vectorial C. De hecho, si ψ es una función de clase entonces se tiene que:*

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i,$$

donde $\lambda_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$ con $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Demostración. Dado que el conjunto $\{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$, es linealmente independiente, entonces el subespacio generado por el conjunto es un subespacio de C de dimensión k. Gracias a la observación 3.3.16, sabemos que $dimC = l$, donde l es el número de clases de conjugación y por el teorema 3.3.17 tenemos que $k = l$, lo que garantiza que el conjunto $\{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ es una base de C.
La segunda parte es inmediata del corolario 3.3.9. □

Teorema 3.3.19. *Supongamos que V y W son $\mathbb{C}G$-módulos con caracteres χ y ψ respectivamente. Entonces V y W son isomorfos si y sólo si $\chi = \psi$.*

Demostración. Supongamos que V y W son isomorfos, veamos que $\chi = \psi$. Por la proposición 2.2.10 tenemos que dado que V y W son isomorfos, existen bases γ_1 y γ_2 de V y W respectivamente tales que para todo $g \in G$ se tiene que

$$[g]_{\gamma_1} = [g]_{\gamma_2}.$$

Por lo que resulta claro que

$$tr[g]_{\gamma_1} = tr[g]_{\gamma_2}.$$

Por lo tanto V y W tienen el mismo carácter, es decir $\chi = \psi$.

Supongamos ahora que $\chi = \psi$, veamos que V y W son isomorfos.
Sea $V_1, \ldots, V_k$ un cojunto completo de $\mathbb{C}G$-módulos irreducibles no isomorfos con caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_k$.
Sabemos gracias a la observación 3.3.10 que existen enteros no negativos c_i y d_i con $\{1, \ldots, k\}$ tales que

$$V \cong (V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \ldots \oplus V_2) \oplus \ldots (V_k \oplus \ldots \oplus V_k),$$

con c_i factores V_i cada i y

$$W \cong (V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \ldots \oplus V_2) \oplus \ldots (V_k \oplus \ldots \oplus V_k),$$

con d_i factores V_i cada i.
Por el teorema 3.3.11 tenemos que

$$c_i = \langle \chi, \chi_i \rangle \text{ y } d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle, \ i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Dado que $\chi = \psi$, es inmediato que $c_i = d_i$ para toda i.
Por lo tanto $V \cong W$, que era lo que queríamos probar. □

3.4. Tablas de caracteres y relaciones de ortogonalidad

Definición 3.4.1. Sean $\chi_1, \ldots, \chi_l$ los caracteres irreducibles de G y $g_1, \ldots, g_l$ los representantes de las diferentes clases de conjugación de G. La matriz cuya entrada ij es $\chi_i(g_j)$ con $i, j \in \{1, \ldots, l\}$ es conocida como *la tabla de caracteres de G.*

Ejemplo 3.4.2. Retomando el ejemplo 3.1.3 (3) y gracias a la información adquirida en el ejemplo 2.4.8 tenemos que:

g	e	a	a^2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2

χ_3	1	ω^2	ω

Observación 3.4.3. *Si $\chi_1, \ldots, \chi_l$ son los caracteres irreducibles de G y $g_1, \ldots, g_l$ los representantes de las diferentes clases de conjugación de G, se deduce de la proposición 3.3.3 y el corolario 3.3.9 que:*

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}$$

Teorema 3.4.4. *Sean $\chi_1, \ldots, \chi_l$ los caracteres irreducibles de G y $g_1, \ldots, g_l$ los representantes de las diferentes clases de conjugación de G. Entonces se tienen las siguientes igualdades para $r, s \in \{1, \ldots, l\}$:*

$$(1)\ \sum_{i=1}^{l} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}$$

$$(2)\ \sum_{i=1}^{l} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|C_G(g_s)|$$

Las cuales son conocidas como la relación de ortogonalidad de los renglones y la relación de ortogonalidad de las columnas respectivamente.

Demostración. (1) Es inmediato de la observación anterior.

(2) Para $s \in \{1, \ldots, l\}$ sea ψ_s la función de clase que satisface que:

$$\psi_s(g_r) = \delta_{rs} \text{ con } r \in \{1, \ldots, l\}.$$

Por el corolario 3.3.18 sabemos que ψ_s es una combinación lineal de $\chi_1, \ldots, \chi_l$, es decir:

$$\psi_s = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \chi_i \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Dado que $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$, entonces se sigue que:

$$\lambda_i = \langle \psi_j, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)}.$$

Como $\psi_s(g) = 1$ si g es conjugado de g_s y $\psi_s(g) = 0$ en otro caso y el número de elementos de G que son conjugados de g_s es igual a $\frac{|G|}{|C_g(g_s)|}$ por el teorema 1.2.9, de lo anterior se tiene que:

$$\lambda_i = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in g_s^G} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_g(g_s)|}.$$

Por lo tanto:

$$\delta_{rs} = \psi_s(g_r) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \chi_i(g_r) = \sum_{i=1}^{l} = \frac{\chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_g(g_s)|}.$$

Que es lo que queríamos probar. □

Observación 3.4.5. *La tabla de caracteres de G es una matriz de $l \times l$ y es invertible dado que sus renglones son ortogonales entre sí.*

Observación 3.4.6. *Gracias al teorema 3.1.13 y a la proposición 3.1.14 tenemos que:*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \chi_i(g) = \begin{cases} |G| & si \quad g = e \\ 0 & si \quad g \neq e \end{cases}$$

Donde $d_i = \chi_i(e)$.
Conjugando de ambos lados obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(e)\overline{\chi_i(g)} = \begin{cases} |G| & si \quad g = e \\ 0 & si \quad g \neq e \end{cases}$$

3.5. Módulos y caracteres restringidos

Dado H un subgrupo de un grupo G, entonces es claro que $\mathbb{C}H$ es un submódulo de $\mathbb{C}G$ y asimismo, es claro que un $\mathbb{C}G$-módulo V es a su vez un $\mathbb{C}H$-módulo. Por otro lado es también fácil percatarnos de que la forma de convertir a un $\mathbb{C}G$-módulo en un $\mathbb{C}H$-módulo es restringir G a H. Si V es un $\mathbb{C}G$-módulo, entonces escribiremos el respectivo $\mathbb{C}H$-módulo obtenido de restringir a G como $V \downarrow H$ y lo llamaremos la reestricción de V a H. Naturalmente, el carácter de $V \downarrow H$ es obtenido del carácter χ de V, evaluando solamente los elementos de H, escribiremos este carácter como $\chi \downarrow H$.

Ejemplo 3.5.1. Sea $G = D_4$ y sea V un $\mathbb{C}G$-módulo con base $\gamma = \{v_1, v_2\}$ y con el siguiente producto:

$$\begin{array}{rr} r_1 v_1 = v_2 \qquad & s_x v_1 = v_1 \\ r_1 v_2 = -v_1 \qquad & s_x v_2 = -v_2 \end{array}$$

Y sea $H = r_0, r_2, s_{id}, s_{-id}$ un subgrupo de D_4 , entonces $V \downarrow H$ es un $\mathbb{C}H$-módulo con base $\gamma = \{v_1, v_2\}$ y con el siguiente producto:

$$\begin{array}{rr} r_2 v_1 = -v_1 \qquad & s_x v_1 = v_1 \\ r_2 v_2 = -v_2 \qquad & s_x v_2 = -v_2 \end{array}$$

Gracias al ejemplo 3.1.3 conocemos el carácter de los elementos de D_4, por lo que para conocer a $\chi \downarrow H$ basta con conocer el carácter de los elementos de H, es decir:

h	r_0	r_2	s_{id}	s_{-id}
$\chi(h)$	2	−2	0	0

3.6. Caracteres inducidos

Definición 3.6.1. Para todo subconjunto X del módulo regular $\mathbb{C}G$, escribimos $X(\mathbb{C}G)$ para refererirnos al subespacio de $\mathbb{C}G$ está generado por todos los elementos de la forma gx con $x \in X, g \in G$, es decir:

$$X(\mathbb{C}G) = \langle \{gx : x \in X, g \in G\} \rangle.$$

Observación 3.6.2. *$X(\mathbb{C}G)$ es un submódulo del módulo regular $\mathbb{C}G$.*

Definición 3.6.3. Dado H un subgrupo de G y U un $\mathbb{C}H$-submódulo del módulo regular $\mathbb{C}H$, al $\mathbb{C}G$-módulo $U(\mathbb{C}G)$ lo llamaremos el $\mathbb{C}G - módulo$ inducido de U, al que denotaremos $U \uparrow G$.

Ejemplo 3.6.4. Tomemos $G = D_4 = \{r_0, r_1, r_2, r_3, s_x, s_y, s_{id}, s_{-id}\}$, $H = \langle r_1 \rangle$ y $\omega = e^{\frac{\pi i}{4}}$.
Definimos :

$$U_1 = \langle \{r_0 + r_1 + r_2 + r_3\} \rangle$$
$$U_2 = \langle \{r_0 + \omega r_1 + \omega^2 r_2 + \omega^3 r_3\} \rangle$$

Por lo tanto:
$U_1 \uparrow G = \langle \{r_0 + r_1 + r_2 + r_3, s_x + s_y + s_{id} + s_{-id}\} \rangle$

$U_2 \uparrow G = \langle \{r_0 + \omega r_1 + \omega^2 r_2 + \omega^3 r_3, s_x + \omega s_{-id} + \omega^2 s_y + \omega^3 s_{id}\} \rangle$

Es importante mencionar que la definición anterior es un caso particular de la definición de carácter inducido, por lo que los siguientes resultados estarán encaminados a definir este concepto para cualquier $\mathbb{C}H$ módulo.

Proposición 3.6.5. *Sea $H \leq G$ y U un $\mathbb{C}H$-submódulo de $\mathbb{C}H$. Si θ es un $\mathbb{C}H$-homomorfismo con dominio U y codominio $\mathbb{C}G$, entonces existe un $r \in \mathbb{C}G$ tal que:*

$$\theta(u) = ur \ \ \forall u \in U.$$

Demostración. Por el teorema 2.3.2, existe un $\mathbb{C}H$-submódulo W de $\mathbb{C}H$ tal que $\mathbb{C}H = U \oplus W$.
Definimos una función $\phi : \mathbb{C}H \longrightarrow \mathbb{C}G$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$\phi : u + w \longrightarrow \theta(u)$$

Claramente ϕ es un $\mathbb{C}H$-homomorfismo. Sea $r = \phi(1)$, entonces para $u \in U$ se tiene que:

$$\theta(u) = \phi(u) = \phi(u1) = u\phi(1) = ur$$

Que es lo que queríamos probar. □

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del resultado anterior, por lo que nos limitaremos a enunciarla y utilizarla más adelante.

Corolario 3.6.6. *Sea U un $\mathbb{C}G$- submódulo de $\mathbb{C}G$, entonces todo $\mathbb{C}G$-homomorfimo ϕ con dominio U y codominio $\mathbb{C}G$ tiene la siguiente regla de correspondencia para $u \in U$:*

$$\phi(u) = ur$$

Corolario 3.6.7. *Sean U y V $\mathbb{C}G$-submódulos de $\mathbb{C}G$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $U \cap V = \{0\}$.
2. *Existe un $r \in \mathbb{C}G$ tal que para toda $u \in U$ y $v \in V$ se tiene que:*

$$ur = u \text{ y } vr = 0.$$

Demostración. (1) $\implies$ (2)
Supongamos que $U \cap V = \{0\}$, entonces $U + V$ es una suma directa, por lo tanto, la función $\theta : U \oplus V \longrightarrow U$ con la regla de correspondencia

$$\theta(u + v) = u \text{ para todo } u \in U \text{ y } v \in V.$$

es un $\mathbb{C}G$-homomorfismo, y gracias al colorario 3.6.6 y al hecho de que $U \oplus V$ es un $\mathbb{C}G$-submódulo de $\mathbb{C}G$ sabemos que existe un $r \in \mathbb{C}G$ tal que para todo $u \in U$ y $w \in W$ se tiene que:

$$u = \theta(u + v) = (u + v)r$$

por lo tanto $vr = v$ y $ur = 0$.
Lo que concluye la primera parte de la prueba

(2) $\implies$ (1)
Sea $r \in \mathbb{C}G$ tal que $ur = u$ y $vr = 0$ para toda $u \in U$ y $v \in V$.
Tomemos $x \in U \cap V$, entonces se tiene que $xr = x$ y a su vez que $xr = 0$, por lo que es claro que $x = 0$ y por lo tanto $U \cap V = \{0\}$. □

Proposición 3.6.8. *Supongamos que U y V son $\mathbb{C}H$-submódulos de $\mathbb{C}H$ con $U \cap V = \{0\}$, entonces $(U \uparrow G) \cap (V \uparrow G) = \{0\}$.*

Demostración. Gracias al corolario 3.6.7 sabemos que existe $r \in \mathbb{C}G$ tal que para todo $u \in U$ y $v \in V$ se tiene que $ur = u$ y $vr = 0$, por lo tanto para todo $g \in G$ se tendrá que:

$$gur = gu \text{ y } gvr = 0.$$

Y dado que todos los elementos de $U \uparrow G$ son de la forma gu con $g \in G$ y $u \in U$, entonces claro que para todo $x \in U \uparrow G$ se tiene que:

$$xr = x$$

Y a su vez para todo $x' \in V \uparrow G$ se tendría que:

$$x'r = 0$$

Por lo tanto, por el corolario 3.6.7 se concluye que $(U \uparrow G) \cap (V \uparrow G) = \{0\}$. $\square$

Proposición 3.6.9. *Sea U un $\mathbb{C}H$-submódulo de $\mathbb{C}H$ y supongamos que $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ con U_i $i \in \{1, \ldots, m\}$ $\mathbb{C}H$-submódulos, entonces:*

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow G).$$

Demostración. Sabemos que $U = U_1 \oplus V$ con $V = U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$. Por la forma en la que está definido $U \uparrow G$ se tiene que:

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) + (V \uparrow G).$$

Entonces por la proposición 3.6.8, tenemos que:

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus (V \uparrow G).$$

Por lo tanto, siguiendo un razonamiento inductivo llegamos a que:

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow G).$$

Que era lo que queríamos probar $\square$

Grcias a los resultados anteriormente vistos ahora es posible definir el módulo inducido para cualquier $\mathbb{C}H$-módulo.

Definición 3.6.10. Sea U un $\mathbb{C}H$-módulo. Gracias al teorema 2.4.7 sabemos que $U \cong U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ con U_i un $\mathbb{C}H$-submódulo de $\mathbb{C}H$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Definimos $U \uparrow G$ como la siguiente suma directa externa:

$$U \uparrow G = (U_1 \uparrow G) \oplus \ldots \oplus (U_m \uparrow G).$$

Proposición 3.6.11. *Supongamos que H es un subgrupo de G. Sea U un $\mathbb{C}H$-submódulo de $\mathbb{C}H$ y V un $\mathbb{C}G$-submódulo de $\mathbb{C}G$, entonces:*

$$dimHom_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V) = dimHom_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H).$$

Demostración. Tomemos $\theta \in Hom_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$. Entonces por el corolario 3.6.6 existe un $r \in \mathbb{C}G$ tal que para todo $s \in U \uparrow G$ se tiene que:

$$\theta(s) = sr.$$

Definimos entonces $\overline{\theta}$ como la restricción de θ en U, es decir:

$$\overline{\theta} : U \longrightarrow \mathbb{C}G.$$

y con la siguiente regla de correspondencia para todo $u \in U$:

$$\overline{\theta}(u) = ur.$$

Entonces $\overline{\theta} \in Hom_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$.
Consideremos entonces una función φ' con dominio $Hom_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$ y codominio $Hom_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$ y la siguiente regla de correspondencia:

$$\varphi'(\theta) = \overline{\theta}.$$

Claramente φ' es lineal, veamos que es invertible para completar la prueba.
Veamos primero que φ' es suprayectiva:
Sea $\phi \in Hom_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$, por la proposición 3.6.5 sabemos que existe un $r \in \mathbb{C}G$ tal que ϕ tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$\phi(u) = ur \text{ para todo } u \in U.$$

Consideremos a θ como al principio de la prueba y notemos que $\phi = \overline{\theta}$, por lo tanto, $\varphi'(\theta) = \phi$, así, φ' es suprayectiva.

Veamos que es inyectiva:
Supongamos que $\overline{\theta_1}$, $\overline{\theta_2} \in Hom_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)$ con $\varphi'(\theta_1) = \overline{\theta_1}$ y $\varphi'(\theta_2) = \overline{\theta_2}$ respectivamente, con θ_1, $\theta_2 \in Hom_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)$.
Veamos que $\theta_1 = \theta_2$.
Si tomamos a $u \in U$ y a $r_1, r_2 \in \mathbb{C}G$ y suponemos que $ur_1 = ur_2$ entonces para todo $g \in G$ tenemos que $gur_1 = gur_2$, si hacemos $gu = s$, entonces es claro que $s \in U \uparrow G$ y que $sr_1 = sr_2$.
Por lo tanto, si tomamos $s \in U \uparrow G$ tendremos que $\theta_1(s) = sr_1$ y a su vez $\theta_2(s) = sr_2$. Lo que prueba que $\theta_1 = \theta_2$, que es lo queríamos demostrar. □

Definición 3.6.12. Si χ es el carácter de un $\mathbb{C}H$-módulo U, entonces el carácter del $\mathbb{C}G$-módulo inducido $U \uparrow G$ al que denotaremos como $\chi \uparrow G$ es conocido como el *carácter inducido* de χ.

Teorema 3.6.13. *Supongamos que H es un subgrupo de G. Sea χ el carácter de G y ψ el carácter de H, entonces:*

$$\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = \langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H.$$

Al teorema anterior se le conoce como *El teorema de reciprocidad de Frobenius* y es un resultado importante para alcanzar los objetivos de este trabajo, pero que no representa la meta del mismo.

Demostración. Supongamos que χ y ψ son irreducibles. Entonces existe un $\mathbb{C}H$-submódulo U de $\mathbb{C}H$ con carácter ψ y un $\mathbb{C}G$-submódulo V de $\mathbb{C}G$ con carácter χ.
Gracias al teorema 3.3.7 tenemos que:

$$\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = dim(Hom_{\mathbb{C}G}(U \uparrow G, V)).$$

y también que

$$\langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H = dim(Hom_{\mathbb{C}H}(U, V \downarrow H)).$$

Y por la proposición 3.6.11 es claro que $\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = \langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H$.
Lo que prueba el teorema para el caso en el que ψ y χ son irreducibles.
Para el caso general tomemos $\chi_1, \ldots, \chi_r$ los caracteres irreducibles de G y $\psi_1, \ldots, \psi_n$ los de H, entonces para algunos enteros d_i, e_j tenemos que:

$$\chi = \sum_{i=1}^{r} d_i \chi_i \ .$$

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} e_j \psi_j.$$

Por lo que:
$\langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G = \langle \sum_{j=1}^{n} e_j \psi_j \uparrow G, \sum_{i=1}^{r} d_i \chi_i \rangle_G = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} e_j d_i \langle \psi_j \uparrow G, \chi_i \rangle_G.$
Y por la proposición 3.6.11 podemos deducir que:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} e_j d_i \langle \psi_j \uparrow G, \chi_i \rangle_G = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r} e_j d_i \langle \psi_j, \chi_i \downarrow H \rangle_H = \langle \sum_{j=1}^{n} e_j \psi_j, \sum_{i=1}^{r} d_i \chi_i \downarrow H \rangle_H.$$

Para finalmente llegar a que:

$\langle \sum\limits_{j=1}^{n} e_j\psi_j, \sum\limits_{i=1}^{r} d_i\chi_i \downarrow H\rangle_H = \langle\psi, \chi\downarrow H\rangle_H.$

Por lo tanto $\langle \quad \uparrow G, \chi\rangle_G = \langle\psi, \chi\downarrow H\rangle_H.$

Lo que concluye la prueba. $\square$

Corolario 3.6.14. *Si f es una función de clase en G y   es el carácter de H entonces:*

$$\langle \quad \uparrow G, f\rangle_G = \langle\psi, f\downarrow H\rangle_H.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema de reciprocidad de Frobenius 3.6.13 y del hecho probado en el corolario 3.3.18, ya que el conjunto de los caracteres irreducibles de G forman una base de C, es decir, del espacio vectorial de las funciones de clase de G. $\square$

Definición 3.6.15. Sea ψ el carácter de un subgrupo H de G y definimos la función $\psi' : G \longrightarrow \mathbb{C}$ con la siguiente regla de correspondencia:

$$\ '(g) = \begin{cases} \psi(g) & si \quad g \in H \\ \\ 0 & si \quad g \notin H \end{cases}$$

Proposición 3.6.16. *Dado un grupo G, los valores del carácter inducido $\uparrow G$ están dados por*

$$(\psi\uparrow G)(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G} \ '(ygy^{-1}) \ \textit{para todo } g \in G.$$

Demostración. Sea $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ una función con la siguiente regla de correspondencia:

$$f(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G} \ '(ygy^{-1}) \text{ para todo } g \in G.$$

Veamos que $f = \psi\uparrow G$.
Si $w \in G$, entonces se tiene que

$$f(wgw^{-1}) = \frac{1}{|H|}\sum_{y\in G} \ '(ywgw^{-1}y^{-1}) = f(g)$$

dado que yw recorre todos los elementos de G conforme la y varía sobre todos los elementos de G y por lo tanto sólo estamos permutando elementos del grupo, por lo tanto f es una función de clase y por el corolario 3.3.18, es suficiente probar que $\langle f, \chi \rangle_G = \langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G$ para todos los caracteres irreducibles χ de G.
Sea χ un carácter irreducible de G, entonces se tiene que

$$\langle f, \chi \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \sum_{y \in G} \psi'(ygy^{-1})\overline{\chi(g)}.$$

Si hacemos $x = ygy^{-1}$ y del hecho de que $\psi'(x) = 0$ si $x \neq H$ y $\chi(y^{-1}xy) = \chi(x)$ para toda $y \in G$ tenemos que

$$\langle f, \chi \rangle_G = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \sum_{y \in G} \psi'(x)\overline{\chi(y^{-1}xy)} = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} \psi(x)\overline{\chi(x)}.$$

Por lo tanto

$$\langle f, \chi \rangle_G = \langle \psi, \chi \downarrow H \rangle_H$$

Y por el teorema de reciprocidad de Frobenius concluimos que

$$\langle f, \chi \rangle_G = \langle \psi \uparrow G, \chi \rangle_G$$

Por lo tanto $f = \psi \uparrow G$, que era lo que queríamos probar. □

Definición 3.6.17. Para $x \in G$, definimos la función de clase f_x^G en G de la siguiente manera:

$$f_x^G(y) = \begin{cases} 1 & si \quad y \in x^G \\ \\ 0 & si \quad y \notin x^G \end{cases}$$

Proposición 3.6.18. *Si χ es el carácter de G y $x \in G$ entonces:*

$$\langle \chi, f_x^G \rangle_G = \frac{\chi(x)}{|C_G(x)|}.$$

Demostración. Sabemos que:

$$\langle \chi, f_x^G \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(x) f_x^G(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in x^G} \chi(g).$$

Y a su vez que:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in x^G}\chi(g) = \frac{|x^G|}{|G|}\chi(x).$$

Para finalmente, gracias al teorema 1.2.9 se llega a que:

$$\frac{|x^G|}{|G|}\chi(x) = \frac{\chi(g)}{|C_G(x)|}.$$

Que era lo que queríamos probar. □

Observación 3.6.19. *Sea $x \in G$ entonces:*

1. *Si x^G y H no comparten elementos entonces $f_x^G \downarrow H = 0$.*

2. *Si algún elemento de x^G pertenece también a H, entonces hay elementos $x_1, \ldots, x_m \in H$ tales que:*

$$f_x^G \downarrow H = f_{x_1}^H + \ldots + f_{x_m}^H.$$

Proposición 3.6.20. *Sea ψ el carácter del subgrupo H de G y $x \in G$, entonces:*

1. *Si x^G y H no tienen elementos en común entonces: $(\psi \uparrow G)(x) = 0$.*

2. *Si algún elemento de x^G pertenece también a H, entonces:*

$$(\psi \uparrow G)(x) = |C_G(x)|\left(\frac{\psi(x_1)}{|C_H(x_1)|} + \ldots + \frac{\psi(x_m)}{|C_H(x_m)|}\right).$$

Donde $x_1, \ldots, x_m \in H$ y $f_x^G \downarrow H = f_{x_1}^H + \ldots + f_{x_m}^H$ como en la observación 3.6.19.

Demostración. (1)
Gracias al corolario 3.6.14 y a la proposición 3.6.18 tenemos que:

$$\langle \psi, f_x^G \downarrow H\rangle_H = \langle \psi \uparrow G, f_x^G\rangle_G = \frac{(\psi \uparrow G)(x)}{C_G(x)}.$$

Y como x^G y H no tienen elementos en común, entonces es claro que $(\psi \uparrow G)(x) = 0$.
Lo que concluye (1)

(2)
Si algún elemento de x^G pertenece a también a H y sabemos que $f_x^G \downarrow H = f_{x_1}^H + \ldots + f_{x_m}^H$, entonces:

$$\frac{(\psi \uparrow G)(x)}{C_G(x)} = \langle \psi, f_x^G \downarrow H \rangle_H = \langle \psi, f_{x_1}^H + \ldots + f_{x_m}^H \rangle_H.$$

Por la linealidad del producto interno tenemos:

$$\langle \psi, f_{x_1}^H + \ldots + f_{x_m}^H \rangle_H = \langle \psi, f_{x_1}^G \rangle_H + \ldots + \langle \psi, f_{x_m}^G \rangle_H.$$

Y por la proposición 3.6.18 llegamos a que:

$$\langle \psi, f_{x_1}^G \rangle_H + \ldots + \langle \psi, f_{x_m}^G \rangle_H = \frac{\psi(x_1)}{|C_H(x_1)|} + \ldots + \frac{\psi(x_m)}{|C_H(x_m)|}.$$

Por lo que podemos concluir que:

$$\frac{(\psi \uparrow G)(x)}{C_G(x)} = \frac{\psi(x_1)}{|C_H(x_1)|} + \ldots + \frac{\psi(x_m)}{|C_H(x_m)|}$$

Lo que concluye la prueba. □

Capítulo 4

Teorema de Frobenius

Todo lo que desarrollamos en las partes previas del trabajo tuvieron como objetivo obtener las herramientas necesarias para poder realizar la prueba del teorema de Frobenius y que las justificaciones que usamos estuvieran precedidas por una base teórica muy sólida y que le permitiera entender al lector todos los detalles. A pesar de lo anteriormente mencionado aún en esta sección tendremos que enunciar y probar resultados auxiliares que no habían sido requeridos anteriormente y que tampoco tienen relaciones con la teoría de caracteres. Posterior a esto comenzaremos con la prueba del teorema de Frobenius justificando detalladamente todos los pasos y haciendo referencia a resultados anteriormente expuestos. Al terminar la prueba se mencionarán algunos datos acerca del teorema y con eso concluiremos el trabajo.

Teorema 4.0.1. *Sea G un grupo que actúa en un conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de manera transitiva y $H = G_{x_1}$. Supongamos que cada elemento de G diferente de la identidad fija a lo más a un elemento del conjunto X. Entonces la colección que consta de los elementos de G que no tienen puntos fijos y la identidad son un subgrupo normal de G, es decir*

$$N = \{e\} \cup \{g \in G : g \bullet x \neq x \ \forall x \in X\} \trianglelefteq G.$$

Antes de la prueba del teorema de Frobenius procederemos a demostrar las siguientes observaciones usando la notación del teorema:

Observación 4.0.2. $\{gHg^{-1} : g \in G\} = \{G_{x_i} : i = 1, ..., n\}$.

Demostración. Veamos que $\{gHg^{-1} : g \in G\} \subseteq \{G_{x_i} : i = 1, ..., n\}$

Sea $gHg^{-1} \in \{gHg^{-1} : g \in G\}$, por el lema 1.3.6 se tiene que

$$gHg^{-1} = G_{g\bullet x_1} = G_{x_j}$$

para algún $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Así $gHg^{-1} \in \{G_{x_i} : i = 1, ..., n\}$.

Veamos ahora que $\{G_{x_i} : i = 1, ..., n\} \subseteq \{gHg^{-1} : g \in G\}$.
Sea $G_{x_j} \in \{G_{x_i} : i = 1, ..., n\}$ con $j \in \{1, ..., n\}$, dado que la acción es transitiva sabemos que existe un $g \in G$ tal que $g \bullet x_1 = x_j$ para algún $j \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $G_{x_j} = G_{g\bullet x_1}$ y utilizando el lema 1.3.6 tenemos que

$$G_{g\bullet x_1} = gHg^{-1}.$$

Por lo tanto $G_{x_j} \in \{gHg^{-1} : g \in G\}$. □

Podemos entonces indexar los distintos conjugados de H con el conjunto $\{1, ..., n\}$, es decir

$$\{G_{x_i} : i = 1, ..., n\} = \{g_i H g_i^{-1} : i = 1, ..., n\} = \{H^{g_i} : i = 1, ..., n\}.$$

Donde $g_i H g_i^{-1} = G_{g_i \bullet x_1} = G_{x_i}$.

Observación 4.0.3. *Si $G_{x_j} = \{e\}$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$ entonces por la observación 4.0.2 se tiene que $G_{x_i} = \{e\}$ $\forall$ i y por lo tanto $g \bullet x_i \neq x_i$ $\forall$ $g \in G$ y $g \neq e$, por lo que $N = G$ y se concluiría trivialmente que $N \trianglelefteq G$.*

Observación 4.0.4. *Si $x_i \neq x_j$ entonces $G_{x_i} \neq G_{x_j}$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que dados $x_i \neq x_j$ tengamos que $G_{x_i} = G_{x_j}$.
Sea $g \in G_{x_i} = G_{x_j}$ distinto de la identidad, entonces tenemos por la definición de estabilizador que $g \bullet x_i = x_i$ y por otro lado que $g \bullet x_j = x_j$ lo que contradice que cada elemento no identidad de G fija a lo más a un elemento de X.
Por lo tanto si $x_i \neq x_j$ entonces $G_{x_i} \neq G_{x_j}$. □

Observación 4.0.5. *Conjugados distintos de H sólo se intersecan en la identidad, es decir*

$$G_{g_i \bullet x_1} \cap G_{g_j \bullet x_1} = \{e\} \textit{ para toda } i \neq j.$$

Demostración. Supongamos que existe un $g \in G$ distinto de la identidad que pertenezca a $G_{g_i \bullet x_1} \cap G_{g_j \bullet x_1}$, entonces

$$g \bullet (g_i \bullet x_1) = g_i \bullet x_1$$

y por otro lado

$$g \bullet (g_j \bullet x_1) = g_j \bullet x_1.$$

Por lo tanto g dejaría fijo tanto a $g_i \bullet x_1$ como a $g_j \bullet x_1$, y dado que

$$G_{g_i \bullet x_1} = g_i H g_i^{-1} \neq g_j H g_j^{-1} = G_{g_j \bullet x_1}$$

se tiene que

$$g_i \bullet x_1 \neq g_j \bullet x_1.$$

Esto contradice el hecho de que cada elemento no identidad de G fija a lo más a un elemento de X.
Por lo tanto $G_{g_i \bullet x_1} \cap G_{g_j \bullet x_1} = \{e\}$. □

Observación 4.0.6. $C_G(h) = C_H(h)$ *con* $e \neq h \in H$.

Demostración. $C_G(h) \supseteq C_H(h)$.
La contención es clara.
Probemos ahora que $C_G(h) \subseteq C_H(h)$.
Sea $g \in C_G(h)$. Por definición se tiene que $h = ghg^{-1}$, por lo tanto $h \in gHg^{-1}$ y por hipótesis se sabe que $h \in H = G_{x_1}$. Por la observación 4.0.2 sabemos que

$$gHg^{-1} = G_{g \bullet x_1}$$

así que

$$h \in G_{g \bullet x_1} \cap G_{x_1}.$$

Dado que h es un elemento distinto de la identidad que pertenece a ambos estabilizadores y por lo enunciado en la observación 4.0.6 , podemos concluir que

$$G_{g \bullet x_1} = G_{x_1}.$$

Por tanto $g \bullet x_1 = x_1$ y así $g \in G_{x_1} = H$. □

Procederemos entonces a realizar la prueba del teorema de Frobenius. Primero describamos al conjunto N de manera distinta:

$$N = \{e\} \cup \{g \in G : g \bullet x \neq x \ \forall x \in X\} = \{e\} \cup \{g \in G : g \notin G_{x_i} \forall i\}$$

y a su vez se tiene que

$$\{e\} \cup \{g \in G : g \notin G_{x_i} \forall i\} = \{e\} \cup \bigcap_{i=1}^{n} (G \setminus G_{x_i}).$$

Utilizando leyes de De Morgan tenemos que

$$\{e\} \cup \bigcap_{i=1}^{n} (G \setminus G_{x_i}) = \{e\} \cup (G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}).$$

Y gracias a la observación 4.0.2 tenemos que

$$\{e\} \cup (G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i}) = \{e\} \cup (G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} H^{g_i}).$$

Así

$$N = \{e\} \cup (G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} H^{g_i}).$$

A partir de lo anterior podemos replantear el teorema de la siguiente manera: La colección de elementos que pertenecen al complemento de la unión de las clases de conjugación de H unión la identidad forman un subgrupo normal de G, es decir:

$$N = (G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} H^{g_i}) \cup \{e\} \trianglelefteq G.$$

Como $|gHg^{-1}| = |H|$ entonces por la observación 4.0.2 se tiene que $|G_{x_i}| = |H|$.
Veamos ahora cuál es la cardinalidad del conjunto N.
Sabemos que

$$|N| = |(G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} H^{g_i}) \cup \{e\}| = |G| - |\bigcup_{i=1}^{n} H^{g_i}| + 1.$$

Basta encontrar la cardinalidad de $\bigcup_{i=1}^{n} H^{g_i}$.
Gracias a la observación 4.0.5 y al hecho de que $|G_{x_i}| = |G_{g_i} \bullet x_1| = |g_i H g_i^{-1}| = |H|$ se tiene que

$$|\bigcup_{i=1}^{n} H^{g_i}| = \sum_{i=1}^{n}(|H^{g_i}| - 1) + 1 = \sum_{i=1}^{n}(|H| - 1) + 1 = n(|H| - 1) + 1.$$

Ahora describamos la cardinalidad de G en términos de la cardinalidad de H: Dado que X y G/H son G- conjuntos isomorfos tenemos que $|X| = \frac{|G|}{|H|}$, entonces $|G| = |X||H| = n|H|$.
Por lo tanto

$$|N| = n|H| - [n(|H| - 1) + 1] + 1 = n.$$

Gracias al hecho de que $N = (G \setminus \bigcup_{i=1}^{n} H^{g_i}) \cup \{e\}$ tenemos que todos los elementos de G o bien pertenecen a N o bien a alguno de los n estabilizadores, es decir, aquellos elementos de G que no pertenecen a N son conjugados de un elemento no identidad de H. Por lo tanto, podemos decir que existe un conjunto de representantes de las clases de conjugación de G $\{e, h_2, \ldots, h_s, y_1, \ldots, y_t\}$, donde $\{e, h_2, \ldots, h_s\}$ son los representantes de las clases de conjugación de H y $\{y_1, \ldots, y_t\}$ son los representantes de las clases de conjugación de G que conforman $N \setminus \{e\}$.

Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ los caracteres irreducibles de H y consideremos $\varphi_i \uparrow G$ con $i \in \{1, \ldots, s\}$, entonces gracias a la proposición 3.6.16, tenemos que:

$$(\varphi_i \uparrow G)(e) = \frac{|G|}{|H|}\varphi_i(e) = n\varphi_i(e).$$

Veamos que $(\varphi_i \uparrow G)(h_j) = \varphi_i(h_j)$ para toda $h_j \in \{h_2, \ldots, h_s\}$.

Supongamos que $gh_jg^{-1} \in H$ con $g \in G$ y $g \neq e$.

Dado que $H = G_{x_1}$, se tiene que

$$gh_jg^{-1} \bullet x_0 = x_1$$

entonces tenemos que

$$h_jg^{-1} \bullet x_1 = g^{-1} \bullet x_1.$$

Por lo tanto h_j deja fijos a x_1 (por ser un elemento de H) y a $g^{-1} \bullet x_1$, pero el único elemento de G que puede fijar a más de un elemento es e, por lo que se concluye que

$$g^{-1} \bullet x_1 = x_1$$

y por lo tanto $g^{-1}, g \in H$.

Por lo que gracias a la proposición 3.6.16 se sigue que

$(\varphi_i \uparrow G)(h_j) = \dfrac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \varphi_i'(y h_j y^{-1}) = \dfrac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \varphi_i(y h_j y^{-1}) = \dfrac{1}{|H|} \sum_{y \in H} \varphi_i(h_j) = \varphi_i(h_j)$.

Y es claro gracias a la proposición 3.6.20 (1) que $(\varphi_i \uparrow G)(y_k) = 0$ para toda $k \in \{1, \ldots, t\}$.

Tomemos $i \in \{2, \ldots, s\}$, y sea $\psi_i = (\varphi_i \uparrow G) - (\varphi_i(e)\varphi_1 \uparrow G) + (\varphi_i(e)\chi_1)$, entonces ψ_i es un carácter virtual de G.
Gracias al análisis que hicimos anteriormente, se tiene la siguiente tabla de caracteres para todas $j \in \{2, \ldots, s\}$ y $k \in \{1, \ldots, t\}$:

g	e	h_j	y_k
$\varphi_i \uparrow G$	$n\varphi_i(e)$	$\varphi_i(h_j)$	0
$\varphi_i(e)\varphi_1 \uparrow G$	$n\varphi_i(e)$	$\varphi_i(e)$	0
$\varphi_i(e)\chi_1$	$\varphi_i(e)$	$\varphi_i(e)$	$\varphi_i(e)$
ψ_i	$\varphi_i(e)$	$\varphi_i(h_j)$	$\varphi_i(e)$

Por lo tanto:

$$\langle \psi_i, \psi_i \rangle = \frac{1}{|G|}\Big(\sum_{g \in N} |\psi_i(g)|^2 + \sum_{x \in X} \sum_{e \neq g \in G_x} |\psi_i(g)|^2 \Big) =$$

$$\frac{1}{|G|}\Big(n(\varphi_i(e))^2 + n \sum_{e \neq h \in H} |\psi_i(h)|^2\Big) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} |\varphi_i(h)|^2 = \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = 1$$

Sabemos que $\psi_i = \sum_{j=1}^{n} a_i\varphi_j$ con a_i enteros, como $\langle\psi_i,\psi_i\rangle = 1$, gracias al corolario 3.3.13 se sigue que $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1$, por lo tanto $a_k = 1$ o $a_k = -1$ para algún k y $a_j = 0$ $\forall j \neq k$, lo que implica a su vez que $\varphi_k = \psi_i$ o $\varphi_k = -\psi_i$.
Suponiendo que $\varphi_k = -\psi_i$ tendríamos que $\varphi_k(e) = -\psi_i(e) = -\varphi_i(e)$, pero $\varphi_i(e)$ es la dimensión de un $\mathbb{C}G$-módulo irreducible, por lo que $-\varphi_i(e) < 0$ y esto a su vez implica que $\varphi_k(e) < 0$, lo que es una contradicción.
Concluimos entonces que $\varphi_k = \psi_i$.
Sea χ el carácter $\sum_{i=1}^{s} \psi_i(e)\psi_i$ de G. La relación de ortogonalidad de las columnas implica que:

$$\chi(h) = \sum_{i=1}^{s} \psi_i(e)\psi_i(h) = 0 \text{ si } e \neq h \in H.$$

Gracias al teorema 2.5.10 y a la tabla antes descrita sabemos que para $y \in N$:

$$\chi(y) = \sum_{i=1}^{s} \psi_i(e)\psi_i(y) = \sum_{i=1}^{s} (\varphi_i(e))^2 = |H|.$$

De esto se sigue que $\chi(g) = |H|$ si $g \in N$ y $\chi(g) = 0$ si $g \in G\backslash N$.
Por lo tanto $N = \{g \in G : \chi(g) = \chi(e)\}$, y así por la observación 3.1.10 concluimos que $N \trianglelefteq G$, que era lo que queríamos probar. □

Cabe mencionar que la versión que hemos trabajado en esta tesis es una versión combinatoria del teorema de Frobenius, pero existen otras formas de enunciarlo, ver [6] y [11]. Por ejemplo en [11] el autor nos otorga una forma de enunciar el teorema de Frobenius utilizando conceptos que no definimos en el trabajo, como complemento de Frobenius, kernel de Frobenius y producto semidirecto:

Teorema 4.0.7. *Sea G un grupo de Frobenius con un complemento de Frobenius H y un kernel de Frobenius K. Entonces $K \trianglelefteq G$ y por lo tanto G es el producto semidirecto $K \rtimes H$ de K y H.*

Posteriormente nos brinda un resultado que se sigue directamente del teorema de Frobenius mostrando una de las tantas consecuencias que tiene el mismo y su utilidad en la búsqueda de la clasificación de grupos finitos:

Teorema 4.0.8. *Todos los CA-grupos finitos de orden impar son solubles.*

Este último teorema es llamado *El teorema de Suzuki en CA-grupos.*

Este teorema ejemplifica muy bien el significativo avance que representó la teoría de caracteres propuesta por Frobenius y que posteriormente ayudaría a definir nuevos conceptos que aportarían mucho a la clasificación de grupos finitos.
Concluyendo la primera parte de [11] el autor escribe lo siguiente:
" But even for the simplest two results on this ladder – Frobenius and Suzuki – it seems remarkably difficult to find any proof that is not essentially the character-based proof", reafirmando así la poderosa herramienta que constituye la teoría de caracteres y que se intentó desarrollar de la mejor manera en este trabajo.

Capítulo 5

Anexo: Propiedad universal del producto tensorial

A continuación se dará una construcción más general del producto tensorial entre k-espacios vectoriales para complementar lo dicho en el trabajo respecto a este tema en el ámbito de los FG-módulos, expondremos también la propiedad universal del producto tensorial y concluiremos este apéndice con la obtención de la dimensión del producto tensorial de dos espacios vectoriales. Todo esto nos otorgará una perspectiva mucho más amplia de la que se expuso originalmente e incluso responde a algunas preguntas que pueden surgir en el lector.

Teorema 5.0.1. *Sean dos espacios vectoriales U y V sobre un campo K, entonces existe un único (salvo isomorfismo) espacio vectorial T sobre K y un operador bilineal $\pi : U \times V \longrightarrow T$ tal que*

1. $< Im\pi >= T$
2. *Para todo W espacio vectorial y todo operador bilineal $B : U \times V \longrightarrow W$ existe una única transformación lineal $f : T \longrightarrow W$ tal que $f \circ \pi = B$,*

es decir, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "B"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ & W \end{tikzcd}$$

(T, π) *es llamado* el producto tensorial *de* U *y* V*.*

Demostración. Probaremos primero la unicidad.
Supongamos que existen $(T', \tilde{\pi})$ que cumplen con las dos propiedades del teorema, entonces tenemos que

$$\begin{tikzcd} & T' \arrow[d, dashed, "\exists! g_1"] \\ U \times V \arrow[ur, "\tilde{\pi}"] \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"'] & T \arrow[d, dashed, "\exists! g_2"] \\ & T' \end{tikzcd}$$

del diagrama anterior se sigue que $g_1 \circ g_2 = Id$ y a su vez $g_2 \circ g_1 = Id$.
Por lo tanto $T \cong T'$. Lo que prueba la unicidad.

Veamos la existencia.
Sea $C(U \times V) = \{f : U \times V \longrightarrow K : f \text{ es de soporte finito}\}$. Notemos que una base de $C(U \times V)$ es el conjunto $\{\delta_{(x,y)} : (x, y) \in U \times V\}$ donde $\delta_{(x,y)}$ son funciones que en (x, y) son 1 y en el resto del dominio 0.
Sea $N(U \times V)$ el subespacio de $C(U \times V)$ generado por los vectores

$$f(\alpha u + \beta u', v) = \delta_{\alpha u+\beta u',v} - \alpha\delta_{(u,v)} - \beta\delta_{(u',v)}$$

$$g(u, \alpha v + \beta v') = \delta_{u,\alpha v+\beta v'} - \alpha\delta_{(u,v)} - \beta\delta_{(u,v')}.$$

es decir,

$$N(U \times V) = \langle\{f(\alpha u + \beta u', v), g(u, \alpha v + \beta v') : \alpha, \beta \in K, u, u' \in U, v, v' \in V\}\rangle.$$

Sea $T = C(U \times V)/N(U \times V)$ con $\overline{f} = \overline{g}$ si y sólo si $f - g \in N(U \times V)$ y las operaciones $\overline{f} + \overline{g} = \overline{f + g}$ y $\alpha\overline{f} = \overline{\alpha f}$ para todo $\alpha \in K$.

Sea $\pi : U \times V \longrightarrow C(U \times V) \longrightarrow C(U \times V)/N(U \times V)$ con la siguiente regla de correspondencia

$$\pi(u,v) = \overline{\delta_{(u,v)}}.$$

Es claro que π es bilineal.
Veamos que $\langle Im\pi \rangle = T$.
Sea $\overline{f} \in T$ con $f \in C(U \times V)$, entonces f es de soporte finito y así se sigue que $J = f^{-1}(K - \{0\})$ es finito. Por lo que se tiene que

$$f = \sum_{(u,v)\in J} f(u,v)\delta_{(u,v)}$$

$$\overline{f} = \sum_{(u,v)\in J} f(u,v)\overline{\delta_{(u,v)}}$$

por lo tanto

$$\overline{f} \in \langle \overline{\delta_{(u,v)}} : (u,v) \in U \times V \rangle = \langle \pi(u,v) : (u,v) \in U \times V \rangle.$$

Así, podemos deducir que $\langle Im\pi \rangle = T$.
A continuación probaremos la propiedad universal del producto tensorial.
Veamos que dado W un K-espacio vectorial y una función $B : U \times V \longrightarrow W$ bilineal existe una única función $f : T \longrightarrow W$ lineal tal que $f \circ \pi = B$.

Sea $g : C(U \times V) \longrightarrow W$ con la siguiente regla de correspondencia

$$g(\delta_{(u,v)}) = B(u,v).$$

Notemos que g es lineal ya que está definida en la base de $C(U \times V)$, además de que B es bilineal y $N(U \times V) \subset Kerg$, por lo tanto, podemos definir $f : T \longrightarrow W$ con $f(\overline{\delta_{(u,v)}}) = B(u,v)$ y así concluimos que existe una única transformación lineal f tal que $f \circ \pi = B$. □

Notación 5.0.2. Al espacio vectorial T lo denotamos por $U \otimes V$ y lo llamamos *el producto tensorial de U y V.*

Lema 5.0.3. *Sean U, V y W espacios vectoriales sobre K, entonces $\mathcal{L}(U \otimes V, W) = Bil(U \times V, W)$*

Demostración. Basta recordar la propiedad universal del producto tensorial donde el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & U \otimes V \arrow[d, dashed, "\exists ! l"] \\ & W \end{tikzcd}$$

y definir la función $\psi : \mathcal{L}(U \otimes V, W) \longrightarrow Bil(U \times V, W)$ con la siguiente regla de correspondencia

$$\psi(l) = l \circ \pi.$$

Lo que es suficiente para concluir la prueba. □

Corolario 5.0.4. *Sean dos espacios vectoriales de dimensión finita U y V con dimensiones n y m respectivamente sobre k, entonces $dim(U \otimes V) = nm$.*

Demostración. $dim(U \otimes V) = dim\mathcal{L}(U \otimes V, K) = dimBil(U \times V, K) = nm.$ □

Bibliografía

[1] Avella Diana et al, Grupos I, Instituto de matemáticas de la UNAM, Primera edición, 2014.

[2] Avella Diana et al, Grupos II, Instituto de matemáticas de la UNAM, Primera edición, 2016.

[3] Alperin Jonathan y Bell Rowen, Groups and Representations, University of Chicago, Primera edición, 1995.

[4] James Gordon y Liebeck Martin, Representations and Characters of groups, Cambridge University Press, Segunda edición, 2001.

[5] Friedberg Stephen, Insel Arnold y Spence Lawrence, Linear Algebra, Illinois State University , Cuarta edición, 2003.

[6] Solomon Ronald, A brief history of the classification of the finite simple groups, American Mathematical Society, 2001.

[7] Flavell Paul, A note on Fro benius Groups, University of Birmingham, 1999.

[8] Hassani Sadri, Mathematical Physics: A modern introduction to its foundations, Illinois State Uniersity, 2013.

[9] Moore Emily y Pollatsek Harriet, Difference Sets, Connecting Algebra, Combinatorics and Geometry, American Mathematical Society, 2013.

[10] Lam Tsit, Representations of Finite Groups: A Hundred Years Part I and II, University of California, 1998.

[11] Tao Terence, The theorems of Frobenius and Suzuki on finite groups, terrytao.wordpress.com/2013/04/12/the-theorems-of-frobenius-and-suzuki-on-finite-groups, 2013.