



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

**RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS DE LA DINÁMICA ESTRUCTURAL Y
EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE ANÁLISIS DINÁMICO
MODAL ESPECTRAL CONSIDERANDO LOS CAMBIOS EN
EL RCCDMX 2017 EN EDIFICIOS DE CONCRETO
REFORZADO BAJO DIFERENTES EFECTOS DE
DEFORMACIÓN POR EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ**

TESIS

Que para obtener el título de

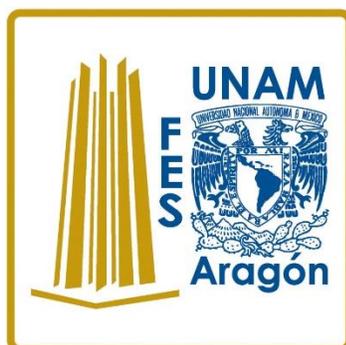
Ingeniero Civil

PRESENTA

Miguel Ángel Pedraza Álvarez

DIRECTOR DE TESIS

Ing. Marcos Molina Elvira



Ciudad Nezahualcoyótl, Estado de México, 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatorias

A mis padres Yolanda y Miguel:

Por todo el cariño, apoyo incondicional, enseñanzas de vida, paciencia, sacrificios y demás cosas que nunca terminaré de agradecerles en esta vida. Por haberme hecho la persona que soy hoy en día. Por enseñarme que cuando nadie más está, la familia siempre permanecerá contigo.

A mi hermano Alan:

Por enseñarme esas lecciones de vida necesarias que un padre no se atreve a enseñar tan fácilmente. Por cometer errores y ser uno de mis mejores amigos cuidando que no cometa los mismos.

A mi cuñada Yessica:

Por haberte convertido en mi “hermana postiza” desde que tenía 12 años.

A Karla:

Por todo el cariño. Por estar conmigo incondicionalmente velando por mis sueños apoyándome en los mejores y peores momentos.

A la familia Pedraza Ruiz:

Por todo el apoyo y cariño que me han brindado, en especial dedicatoria a mis abuelos Francisca y Ángel.

A la familia Álvarez Espinosa:

Por todo el cariño y enseñanzas que me han brindado, en especial dedicatoria a mis abuelos Josefina y Román, así como a mi tío Román.

Agradecimientos

A la UNAM:

Por haberme abierto las puertas de su casa en su reciento de enseñanza desde el bachillerato. Por haberme permitido conocer personas tan especiales y maravillosas.

Al IPN:

Por permitirme pertenecer al programa de posgrado en el área de estructuras y por el conocimiento que adquirí y que sigo adquiriendo para una mejor preparación profesional.

Al ingeniero Marcos:

Por ser mi mentor desde cuarto semestre. Por haber sido mi mayor influencia para buscar un programa de posgrado en el área de estructuras. Por apoyarme incondicionalmente durante el tiempo que desarrollé esta tesis. Por sus sabios consejos tanto de ingeniería estructural como de vida.

A mi amiga Betsy:

Gracias por ser mi mejor amiga desde la preparatoria.

A mis amigos de licenciatura y de posgrado:

Especial agradecimiento a Yair, Araceli, Mauricio, Cruzito, Daniel, Paquito, Miguel, Edgar y Rocío por haberme acompañado durante toda la licenciatura. A Manuel†, Amaury, Lucero, Arturo, Giovanni por haber estado conmigo desde el curso propedéutico. Al resto de amigos que no mencioné pero que saben que los estimo.

Antecedentes

Han sido diversos los textos que han sido escritos acerca de dinámica estructural, o de ingeniería sísmica que toman tópicos de dinámica estructural dentro de ellos.

Entre los libros que pueden mencionarse se destacan los siguientes (los cuales fueron de gran ayuda para la realización de esta tesis):

- ✚ *Dinámica de Estructuras* de Anil K. Chopra.
- ✚ *Fundamentos de Ingeniería Sísmica* de Newmark y Rosenblueth
- ✚ *Dinámica de Estructuras* de Colina M, Valdés G. y González P.
- ✚ *Análisis Sísmico Moderno con Ética Aplicada* de Salvador Ismael Gómez C.
- ✚ *Dinámica Estructural Teoría y Cálculo* de Mario Paz

No obstante, como la dinámica estructural toma como punto de partida el planteamiento y solución de ecuaciones diferenciales, también es posible ver tópicos de dinámica estructural en libros de vibraciones mecánicas o física tales como:

- ✚ *Vibraciones Mecánicas* de Singiresu S. Rao
- ✚ *Vibraciones en Sistemas Físicos* de Tadeus Majewski S.
- ✚ *Física para Ciencias e Ingeniería vol. I* de Serway, R. A., & Jewett, Jr., J. W.

Como es notable, fueron mencionados sólo algunos libros, no obstante, es deber del ingeniero civil estructurista utilizar los conocimientos de la dinámica estructural, junto con el reglamento de construcción vigente, para poder utilizar adecuadamente esta rama de la ingeniería civil y aplicarla a proyectos de ingeniería estructural.

Lo anteriormente mencionado refiere al hecho de que la normativa vigente dentro de la Ciudad de México ha tenido actualizaciones, por ejemplo, las NTC - 1987, NTC - 2004 (tomo I y II), hasta llegar a las NTC - 2017 (norma actual).

Introducción

Esta tesis está dividida en VIII partes. El contenido de esta tesis será presentado en las páginas vi y vii. Los subtemas de cada capítulo serán presentados al inicio del mismo.

En la parte I se abordan nociones necesarias para abordar el conocimiento del resto de la tesis. Los temas considerados a lo largo de tres capítulos se enfocan en teoría de la elasticidad, sismología y fundamentos de dinámica estructural.

La parte II y III se dedica a resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de la dinámica estructural tomando en cuenta diversos casos de excitaciones externas y tipos de amortiguamiento. La parte IV se enfoca a resolver las ecuaciones vistas en las partes II y III mediante el uso de la transformada de Laplace colaborando la solución dada.

En la parte V se explican nociones necesarias para entender y realizar un análisis dinámico modal espectral. En la parte VI se desarrolla el análisis dinámico modal espectral de un edificio de concreto armado, tomando especial consideración en las NTC – Sismo 2017 del RCCDMX y considerando diferentes combinaciones de deformación a flexión, cortante o deformación axial en columnas.

En la parte VII se presenta un capítulo dedicado al análisis estructural matricial de elementos de sección variable, muros de cortante, contraventeos, apoyos elásticos y determinación de la rigidez lateral de muros de mampostería por el método de la columna ancha equivalente y por el método de la diagonal equivalente. Para complementación de este capítulo se incluyen ayudas de análisis para contraventeos con errores de fabricación o cambios de temperatura; estos cambios de temperatura son mencionados brevemente para elementos tipo viga. Así mismo en esta sección son incluidas las conclusiones y referencias utilizadas para la realización de esta tesis.

La parte VIII de esta tesis incluye los anexos. En esta sección se pueden encontrar escalas de magnitud sísmica, ayudas sobre ecuaciones diferenciales y nociones de la transformadas de Laplace.

Justificación

Esta tesis aportará en el lector cómo realizar un análisis dinámico modal espectral tomando en cuenta las consideraciones pertinentes expresadas en el RCCDMX 2017, particularmente en las NTC de sismo y concreto. Así mismo, beneficiará al lector para retroalimentarse en temas tales como solución a ecuaciones diferenciales, análisis estructural y dinámica estructural.

Objetivo

Estudiar las nociones necesarias de teoría de elasticidad, ecuaciones diferenciales, y nociones de dinámica y análisis estructural para que el lector sea capaz de comprender y realizar un análisis dinámico modal espectral, considerando las NTC de sismo y concreto 2017, y desarrolle objetividad para extrapolar ese conocimiento a softwares de ingeniería estructural como ETABS, SAP 2000, STAAD PRO, CYPECAD, entre otros.

Alcances

En esta tesis se limitará a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y a resolver casos de análisis dinámico modal espectral a un sólo caso de un edificio de concreto armado de geometría regular, dentro del rango elástico considerando diferentes efectos de deformación (flexión, cortante y axial) y bajo un análisis estructural en dos dimensiones.

Contenido**PARTE I**

Capítulo I: Nociones de Teoría Elástica Lineal	3
Capítulo II: Nociones Básicas de Sismología	17
Capítulo III: Conceptos Fundamentales en Dinámica Estructural	36

PARTE II

Capítulo IV: Vibración Libre sin Amortiguamiento en Sistemas de 1 G.D.L.	52
Capítulo V: Vibración Libre con Amortiguamiento en Sistemas de 1 G.D.L.	65

PARTE III

Capítulo VI: Vibraciones Armónicas para Sistemas de 1 G.D.L. sin Amortiguamiento	93
Capítulo VII: Fenómenos de Resonancia Pura y Batimiento	130
Capítulo VIII: Vibraciones Armónicas para Sistemas de 1 G.D.L. con Amortiguamiento	139

PARTE IV

Capítulo IX: Uso de la Transformada de Laplace en Vibración Libre Para Sistemas de 1 G.D.L.	223
Capítulo X: Uso de la Transformada de Laplace en Vibración Armónica sin Amortiguamiento para Sistemas de 1 G.D.L.	235
Capítulo XI: Uso de la Transformada de Laplace en Vibración Armónica con Amortiguamiento para Sistemas de 1 G.D.L.	260

PARTE V

Capítulo XII: Condensación Estática y Casos de Aplicación a Sistemas de 1 G.D.L. y Matrices de Rigidez	352
Capítulo XIII: Bases Teóricas del Análisis Dinámico Modal Espectral	397

PARTE VI

Capítulo XIV: Descripción del Edificio de Concreto Reforzado por Analizar y Algunas Consideraciones del RCCDMX 2017 para Realizar el Análisis Dinámico Modal Espectral	417
Capítulo XV: Análisis Dinámico Modal Espectral y Análisis Estructural de Marcos Perimetrales Considerando Deformación por Flexión	444
Capítulo XVI: Análisis Dinámico Modal Espectral y Análisis Estructural de Marcos Perimetrales Considerando Deformación por Flexión y Cortante	499
Capítulo XVII: Análisis Dinámico Modal Espectral y Análisis Estructural de Marcos Perimetrales Considerando Deformación por Flexión y Axial en Columnas	539
Capítulo XVIII: Análisis Dinámico Modal Espectral y Análisis Estructural de Marcos Perimetrales Considerando Deformación por Flexión, Cortante y Axial en Columnas	587
Capítulo XIX: Análisis Dinámico Modal Espectral y Análisis Estructural de Marcos Internos Considerando Deformación por Flexión	628

PARTE VII

Capítulo XX: Análisis Estructural con Elementos de Sección Variable, Contraventeos y Apoyos Elásticos por el Método de la Rigidez Matricial	664
Conclusiones	799
Referencias	802

PARTE VIII

Anexo A: Escala de Magnitud Sísmica MM	809
Anexo B: Escala de Magnitud Sísmica MSK	813
Anexo C: Nociones de Ecuaciones Diferenciales	819
Anexo D: Generalidades de las EDO Lineales	828
Anexo E: Método de Coeficientes Indeterminados	834
Anexo F: Método de Variación de Parámetros	837
Anexo G: Transformada de Laplace	843
Anexo H: Matrices y Determinantes	852

PARTE

I

BREVE DESCRIPCIÓN DE
CONCEPTOS DE TEORÍA
ELÁSTICA, SISMOLOGÍA Y
DINÁMICA ESTRUCTURAL

Capítulo I: Nociones de Teoría Elástica Lineal

- 1.1 Alcances del Capítulo
- 1.2 Introducción
- 1.3 Tensor de Esfuerzos
- 1.4 Tensor de Deformaciones
- 1.5 Principio de Continuidad
- 1.6 Ecuaciones Constitutivas
- 1.7 Determinación de los Parámetros de Lamé y del Módulo de Dilatación Volumétrico
- 1.8 Módulo de Dilatación Cúbica
- 1.9 Ecuaciones de Equilibrio y Compatibilidad
- 1.10 Ecuaciones de Navier para Determinar la Matriz de Rigidez Global Constitutiva

I. Nociones de Teoría Elástica Lineal

1.1 Alcances del Capítulo

Son muchos los temas que se engloban dentro de la teoría de la elasticidad lineal por lo que en este capítulo únicamente se hablará de aquellos temas necesarios para entender esta tesis. Los temas en los cuales se centrará la atención son en el cálculo de las constantes de Lamé y el cálculo de las matrices constitutivas de rigidez y flexibilidad, así como la matriz de rigidez global constitutiva a partir de las ecuaciones de Navier.

1.2 Introducción

La dinámica estructural se encarga del estudio que relaciona la elasticidad con la dinámica. La elasticidad proporciona un pronóstico de la forma de un cuerpo elástico cuando está sometido a una carga dada y la dinámica introduce los efectos de las fuerzas de inercia asociada a dicha carga (Matias Domínguez, 2012, pág. 275).

Como parte de lo que se puede encontrar en la literatura acerca de dinámica estructural, o de vibraciones mecánicas, es el poder representar sistemas físicos a través de una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales.

El análisis estructural mediante el método de las rigideces, o también conocido como el método de los desplazamientos, en sus variantes clásico o matricial, permite obtener la matriz de rigidez de la estructura y con ella poder determinar los elementos mecánicos (fuerzas y momentos).

El saber aplicar los conocimientos del análisis estructural, para llevarlo a la dinámica estructural, será indispensable en esta tesis para poder realizar un análisis dinámico modal espectral a partir de la determinación de la matriz de rigidez de la estructura.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias, las submatrices y matrices de rigidez, e inclusive, algunas constantes que aparecen en el capítulo II: Nociones Básicas de Sismología, se originan dentro de la teoría elástica, por lo cual se considera necesario iniciar esta tesis con este capítulo.

1.3 Tensor de Esfuerzos

Es bien sabido que un elemento infinitesimal puede presentar dos tipos de esfuerzos:

- ✚ Esfuerzos axiales o normales (σ).
- ✚ Esfuerzos tangenciales o cortantes (τ).

Si dicho elemento infinitesimal se representa en dos o tres dimensiones es necesario indicar, por medio de subíndices, la dirección del plano sobre el cual actúan dichos esfuerzos^{1.1}. Si el elemento infinitesimal es analizado en el espacio (R^3) se contemplan tres esfuerzos axiales (σ_x , σ_y , σ_z) y tres esfuerzos tangenciales (τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}). Para un elemento infinitesimal analizado en el plano (R^2) se consideran dos esfuerzos axiales (σ_x , σ_y) y dos esfuerzos tangenciales (τ_{xy} , τ_{xz}).

La manera en que los esfuerzos son representados, mediante una matriz, es un acomodo llamado tensor de esfuerzos. Este tensor se representa por:

$$[T_E] = [\tau_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1.1)^{1.2}$$

1.4 Tensor de Deformaciones

Cuando se desea determinar la deformación de un cuerpo elástico es necesario inferir que hay vínculos suficientes que impiden su movimiento como cuerpo rígido y, en lugar de eso, el cuerpo se deforma (Timoshenko & Goodier, Teoría de la Elasticidad, 1975, pág. 25).

Una vez ejercidos los esfuerzos axiales y/o tangenciales al elemento infinitesimal éste sufrirá deformaciones de dos tipos:

- ✚ Deformación longitudinal asociada a los esfuerzos axiales (ϵ).
- ✚ Deformación tangencial asociada a los esfuerzos cortantes (γ).

^{1.1} Es común utilizar el eje coordenado xy y xyz para denotar ejes coordenados en dos y tres dimensiones respectivamente.

^{1.2} Se observa que cuando se da el caso que $i = j$, los esfuerzos tangenciales son esfuerzos axiales.

Análogamente al tensor de esfuerzos, el tensor de deformaciones se expresa como:

$$[T_D] = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

1.5 Principio de Continuidad

El principio de continuidad permite expresar los desplazamientos (u, v, w) como funciones continuas y las deformaciones como derivadas parciales de los desplazamientos mediante:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Siendo u, v y w la representación de los pequeños desplazamientos que experimentan las partículas de un cuerpo deformado en asociación con el plano xyz . De lo anterior mencionado puede observarse que el principio de continuidad permite relacionar los desplazamientos con las deformaciones.

La manera en cómo se determinan los esfuerzos y deformaciones puede encontrarse en libros de mecánica de sólidos, teoría de elasticidad, mecánica de materiales, resistencia de materiales y libros afines que hablen de esfuerzos y deformaciones de elementos^{1,3}.

El principio de continuidad puede ser expresado matricialmente usando la siguiente notación (Tena Colunga, 2007, pág. 19):

^{1,3} Fuentes de consulta en la bibliografía sobre este tema son:

- ✚ Egor P. Popov. *Ley de Hooke generalizada; recipientes a presión* (págs. 170-177) del libro Mecánica de Sólidos.
- ✚ Stephen Timoshenko. *Introducción* (págs. 21-27) del libro Teoría de la Elasticidad.

$$\{e\} = [A]\{u\} \quad (1.4)$$

Donde:

$\{e\}$ = vector de deformación de los elementos ϵ_{ij} .

$[A]$ = matriz de continuidad.

$\{u\}$ = vector de desplazamientos de una partícula en sus componentes u, v y w.

Si se expande la ecuación 1.4 con todos sus elementos se llega a:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

1.6 Ecuaciones Constitutivas

Se define como ecuaciones constitutivas al conjunto de ecuaciones que relacionan las deformaciones con los esfuerzos. Estas ecuaciones generan un número determinado de ecuaciones con base en el comportamiento del material (elástico o no elástico) y al tipo de cargas al que se someta para su estudio (estáticas de corta o larga duración y dinámicas) (Tena Colunga, 2007, pág. 20).

Dichas ecuaciones se consiguen usando la ley de Hooke generalizada. Para el caso de un material isótropo homogéneo y con comportamiento elástico lineal las constantes elásticas de estos materiales son únicamente tres (E, G y ν). Esta reducción de constantes se debe a lo siguiente (Magdaleno Domínguez, 2018, pág. 29):

- ✚ El esfuerzo normal puro no produce cortante respecto al sistema coordenado del elemento en estudio.
- ✚ El esfuerzo cortante puro produce deformación angular solamente en el plano donde se aplique tal esfuerzo.

Sin embargo, la ley de Hooke generalizada es más compleja para materiales ortotropicos^{1.4} dado que se obtienen nueve constantes independientes, mientras que para los materiales anisotrópicos^{1.5} el número de constantes constitutivas es de 21 (Popov, 2000, pág. 177).

La ley de Hooke generalizada para materiales isotrópicos con comportamiento elástico lineal se expresa mediante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ - \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & | & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & | & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ - \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

Donde es claro que las deformaciones axiales y tangenciales se relacionan únicamente con los esfuerzos del mismo tipo. Al separar la matriz (ecuación 1.6) con base en la relación de deformaciones con esfuerzos del mismo tipo se consigue:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{2(1+\nu)}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

Al despejar el vector que contiene los esfuerzos de la ecuación 1.6 se obtiene:

^{1.4} Es el material cuyas propiedades mecánicas (inclusive térmicas) son independientes en tres direcciones perpendiculares entre sí. Quizá el ejemplo más claro es la madera porque presenta distintas propiedades en sus direcciones longitudinal, radial y trasversal.

^{1.5} Es el material cuyas propiedades mecánicas son diferentes en sus direcciones de estudio. A diferencia de los materiales ortotropicos, sus propiedades no son simétricas en relación con ningún eje de referencia

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ - \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & | & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & | & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ - \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Donde vuelve a ser evidente que los esfuerzos axiales y tangenciales se asocian únicamente con las deformaciones del mismo tipo mediante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

Las ecuaciones constitutivas proporcionan las matrices rigidez $[k]$ y flexibilidad $[f]$ constitutivas (ecuaciones 1.6 y 1.9 respectivamente) para el rango elástico lineal. Por lo tanto, las ecuaciones constitutivas pueden expresarse mediante:

$$\{e\} = [k]^{-1}\{s\} = [f]\{s\} \quad (1.12)$$

$$\{s\} = [f]^{-1}\{e\} = [k]\{e\} \quad (1.13)$$

1.7 Determinación de los Parámetros de Lamé y del Módulo de Dilatación Volumétrico

A partir de la ecuación 1.10 es posible determinar los parámetros de Lamé sumando y restando 2ν en la diagonal principal de la matriz de orden 3×3 , posteriormente se factoriza y simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu+2\nu-2\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu+2\nu-2\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu+2\nu-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vdots &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1+\nu-2\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1+\nu-2\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1+\nu-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \\
\vdots &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \nu+(1-2\nu) & \nu & \nu \\ \nu & \nu+(1-2\nu) & \nu \\ \nu & \nu & \nu+(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \\
\vdots &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} \nu & \nu & \nu \\ \nu & \nu & \nu \\ \nu & \nu & \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \\
\vdots &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} + \frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \\
\vdots &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} + \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Donde el primero y segundo parámetro de Lamé son:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.14)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.15)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1.14 y 1.15 se obtiene una solución más simplificada y en términos de los parámetros de Lamé:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

Al representarse en su forma matricial se tiene:

$$\{s\} = \lambda[1]\{e\} + 2\mu[I]\{e\} \quad (1.17)$$

La ecuación 1.16 expresada como ecuaciones algebraicas, resuelta en:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x \\
\sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_y \\
\sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z
\end{aligned} \quad (1.18)$$

Si se deseará conocer las deformaciones en función de los esfuerzos, al despejar $\{e\}$ se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} + \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

O en su forma matricial:

$$\{e\} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} [1]\{s\} + \frac{1}{2\mu} [I]\{s\} \quad (1.20)$$

Algunas ocasiones $3\lambda + 2\mu$ suele expresarse de la forma $\lambda + (2/3)\mu$, lo cual resulta muy conveniente dado que esta forma de escritura representa el módulo de dilatación volumétrico κ :

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (1.21)$$

Bajo la introducción de este nuevo parámetro es posible reescribir las ecuaciones 1.16 y 1.19 mediante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \left(\kappa - \frac{2\mu}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (1.22)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \left(\frac{2\mu - 3\kappa}{18\kappa\mu}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} - \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1.23)$$

O en notación matricial:

$$\{s\} = \left(\kappa - \frac{2\mu}{3}\right) [1]\{e\} + 2\mu[I]\{e\} \quad (1.24)$$

$$\{e\} = \left(\frac{2\mu - 3\kappa}{18\kappa\mu}\right) [1]\{s\} - \frac{1}{2\mu} [I]\{s\} \quad (1.25)$$

Similarmente, presentando las ecuaciones constitutivas en función de E y ν , se obtiene:

$$\{s\} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} [1]\{e\} + \frac{E}{1+\nu} [I]\{e\} \quad (1.26)$$

$$\{e\} = -\frac{\nu}{E} [1]\{s\} + \frac{1+\nu}{E} [I]\{s\} \quad (1.27)$$

En general las constantes elásticas, los parámetros de Lamé y el módulo de dilatación volumétrico pueden combinarse entre sí al realizar operaciones algebraicas. Estas relaciones se ilustran en la siguiente tabla (Vieira Chaves, 2015, pág. 384):

Tabla I
Relaciones de los parámetros mecánicos μ , E , κ , λ , ν .

	$G = \mu$	E	κ	λ	ν
$f(G, E)$	G	E	$\frac{GE}{9G - E}$	$\frac{G(E - 2G)}{3G - E}$	$\frac{E - 2G}{2G}$
$f(G, \kappa)$	G	$\frac{9G\kappa}{3\kappa + G}$	κ	$\kappa - \frac{2G}{3}$	$\frac{3\kappa - 2G}{2(3\kappa + G)}$
$f(G, \lambda)$	G	$\frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$	$\lambda + \frac{2}{3}G$	λ	$\frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$
$f(G, \nu)$	G	$2G(1 + \nu)$	$\frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{2G\nu}{1 - 2\nu}$	ν
$f(E, \kappa)$	$\frac{3\kappa E}{9\kappa - E}$	E	κ	$\frac{\kappa(9\kappa - 3E)}{9\kappa - E}$	$\frac{3\kappa - E}{6\kappa}$
$f(E, \nu)$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	E	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	ν
$f(\kappa, \lambda)$	$\frac{3(\kappa - \lambda)}{2}$	$\frac{9\kappa(\kappa - \lambda)}{3\kappa - \lambda}$	κ	λ	$\frac{\lambda}{3\kappa - \lambda}$
$f(\kappa, \nu)$	$\frac{3\kappa(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$3\kappa(1 - 2\nu)$	κ	$\frac{3\kappa\nu}{1 + \nu}$	ν

1.8 Módulo de Dilatación Cúbica

El módulo de dilatación cubica se define como:

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{1.28}$$

El módulo de dilatación cubica no se ve afectado por las deformaciones tangenciales dado que estas provocan que el elemento infinitesimal cambie de forma, mas no de volumen,

observándose así que, en la ley de Hooke generalizada (para materiales isotrópicos homogéneos), es proporcional a la suma algebraica de los esfuerzos axiales σ_x , σ_y , σ_z (Popov, 2000, pág. 183).

En la ecuación 1.28 si utiliza la nomenclatura de Timoshenko y Goodier (Teoría de la Elasticidad, 1975, pág. 30) para denominar $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, con un valor igual a Θ , se llega a:

$$e = \frac{\Theta}{E} (1 - 2\nu) \quad (1.29)$$

1.9 Ecuaciones de Equilibrio y Compatibilidad

Existen cuatro grupos de ecuaciones importantes dentro de la teoría de la elasticidad:

- ✚ Ecuaciones de continuidad (relación de deformaciones - desplazamientos).
- ✚ Ecuaciones constitutivas (relación de esfuerzos – deformaciones).
- ✚ Ecuaciones de equilibrio (relación de cargas externas – esfuerzos).
- ✚ Ecuaciones de compatibilidad.

Con anterioridad se habló de las ecuaciones de continuidad y de las ecuaciones constitutivas, sin embargo, las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad tienen igual importancia por lo que no podía dejarse de lado una breve explicación de estas.

Atendiendo al hecho de que los nueve esfuerzos presentes dentro del tensor de esfuerzos (ecuación 1.1) pueden reducirse a 6 dado que existe una simetría en los esfuerzos tangenciales, es posible expresar las ecuaciones de equilibrio mediante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_z + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Estas ecuaciones pueden denotarse matricialmente por medio de:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.31)$$

Al contraer esta expresión a su forma matricial se obtiene (Tena Colunga, 2007, pág. 23):

$$[A]^T \{s\} + \{F\} = \{0\} \quad (1.32)$$

En ausencia de fuerzas externas, la ecuación 1.32 queda reducida a:

$$[A]^T \{s\} = \{0\} \quad (1.33)$$

Lo cual indica que el cuerpo infinitesimal en estudio debe estar en equilibrio en todo momento.

De igual forma las deformaciones presentes dentro del tensor de deformaciones (ecuación 1.2) pueden reducirse a 6 dado que existe una simetría en las deformaciones tangenciales haciendo posible expresar las ecuaciones de compatibilidad mediante:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon_y &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \gamma_{xy} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon_z &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \gamma_{zy} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon_x &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \gamma_{zx} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{yz} + \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xy} \right) \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \varepsilon_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{yz} - \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xy} \right) \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varepsilon_z &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{yz} + \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{zx} - \frac{\partial}{\partial z} \gamma_{xy} \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Estas ecuaciones se deducen a partir de las ecuaciones de continuidad (ecuación 1.5) por diferenciación parcial y algebra de reducción. Las componentes de deformación deben cumplir estas ecuaciones para que las componentes de desplazamiento existan (Matias Domínguez, 2012, pág. 23).

La deducción de estas ecuaciones (1.31 y 1.34) puede hallarse en muchos libros de teoría de elasticidad y temas afines, por lo que queda al lector la comprobación de estas. De igual forma, el lector podrá indagar y verificar que las ecuaciones de equilibrio se tornan más complejas dependiendo de las consideraciones tomadas para la deducción.

1.10 Ecuaciones de Navier para Determinar la Matriz de Rigidez Global Constitutiva

Con todo lo descrito anteriormente es posible determinar en este punto la matriz de rigidez global de un cuerpo o partícula a partir de las ecuaciones de Navier mediante las ecuaciones constitutivas, de continuidad y de equilibrio:

$$\{e\} = [A]\{u\} \quad ; \quad \{s\} = [k]\{e\} \quad ; \quad [A]^T\{s\} + \{F\} = \{0\}$$

Al sustituir la ecuación de continuidad en la ecuación constitutiva se obtiene:

$$\{s\} = [k]\{e\} = [k][A]\{u\} \tag{1.35}$$

Ahora, se sustituye la ecuación 1.35 en la ecuación de equilibrio y se simplifica:

$$[A]^T\{s\} + \{F\} = [A]^T[k][A]\{u\} + \{F\} = [K]\{u\} + \{F\} = \{0\}$$

El resultado final obtenido es:

$$[K]\{u\} + \{F\} = \{0\} \tag{1.36}$$

Donde es posible definir a $[K] = [A]^T[k][A]$ como la matriz de rigidez global constitutiva.

La ecuación 1.36 representa el planteamiento matricial de rigideces con el cual se calculan las matrices y submatrices de rigidez de la estructura, y como fueron obtenidas desde las ecuaciones de la elasticidad lineal, debemos limitar nuestros casos de estudio de análisis dinámico modal espectral a esta consideración.

Capítulo II: Nociones Básicas de Sismología

- 2.1 Introducción
- 2.2 Definición de Sismo y Sismología
- 2.3 Foco, Epifoco y Epicentro
- 2.4 Rebote Elástico
- 2.5 Ondas Sísmicas
 - 2.5.1 Ondas P
 - 2.5.2 Ondas S
 - 2.5.3 Relación entre Ondas S y P
 - 2.5.4 Subdivisión de las ondas de cuerpo
- 2.6 Ondas de Superficie
 - 2.6.1 Ondas R
 - 2.6.2 Ondas L
- 2.7 Intensidad de un sismo
- 2.8 Escalas de Intensidad Sismológica
- 2.9 Escalas Instrumentales para Medir la Intensidad
 - 2.9.1 Escala de Housner
 - 2.9.2 Escala de Arias
 - 2.9.3 Escala resultante de la aceleración de ondas sísmicas
- 2.10 Magnitud de un Sismo
- 2.11 Magnitud de Escala Richter (M_L)
- 2.12 Otras Medidas de Magnitud Sísmica
 - 2.12.1 Magnitud m_b
 - 2.12.2 Magnitud M_s
 - 2.12.3 Magnitud M_w
- 2.13 La Energía de los Sismos
- 2.14 Relación de Intensidad con Magnitud

II. Nociones Básicas de Sismología

2.1 Introducción

A lo largo de los tiempos el ser humano había atribuido el origen de los sismos a diversas causas.

La mitología japonesa refiere que los sismos que azotaban sus islas se debían a una enorme araña que portaba la Tierra sobre sus espaldas (Pavón Rodríguez, 1998, pág. 1) y a un enorme pez gato que habitaba en las profundidades del océano (Gómez Chávez, 2007, pág. 11).

Aristóteles, un famoso científico de la Grecia antigua, asignó la causa de los sismos a algo más “científico” y no mitológico. Su definición consistía en que enormes masas de aire caliente trataban de salir a través de cavernas, y al no tener salida, la Tierra se sacudía desde su interior.

Una creencia del México Prehispánico, de la cultura azteca, era la extinción de la vida humana cada cierto periodo de tiempo por causa de calamidades. Al final de cada era se le denominaba sol. Según esta cultura prehispánica estamos viviendo en el cuarto sol, por lo que la calamidad del quinto sol será presente en forma de terremoto (Nava, 2002, pág. 24).

No obstante, la sismología ha hecho posible estudiar con mayor exactitud teorías concretas y no simplemente creencias o pensamientos mitológicos. Fue después del temblor del año 1906, en San Francisco, California, que se conoció que los temblores se deben a una liberación repentina de energía acumulada durante periodos de tiempo muy largos (Pavón Rodríguez, 1998, pág. 3).

Es bien sabido que las consecuencias de un sismo pueden llegar a causar cientos, o inclusive, miles de pérdidas humanas. Además del hecho del derrumbe de las construcciones, se interrumpen las comunicaciones, hay desolación y también hay una gran falta de servicios básicos para el ser humano por días, semanas o meses dependiendo de la zona afectada.

La devastación de un sismo, independientemente de su magnitud, causan mayor o menor daño por otro tipo de factores tales como (Nava, 2011, pág. 18):

- ✚ La densidad de población.
- ✚ Foco de origen sísmico.
- ✚ Tipo de construcciones que hay en la zona afectada.
- ✚ Condiciones locales del suelo.
- ✚ Hora local en la que se presentó el sismo.
- ✚ Condiciones climatológicas que obligan a las personas a resguardarse de fríos o calores intensos.
- ✚ Así mismo debe considerarse si el sismo ocurrido puede o no, causar otros desastres colaterales como inundaciones, aludes o incendios.

2.2 Definición de Sismo y Sismología

La sismología como materia forma parte de una de las ramas de la geofísica. Dicha rama estudia aspectos de los sismos tales como:

- ✚ Las causas que dan origen a los sismos.
- ✚ Los efectos que provocan los sismos.
- ✚ La propagación de éstos.

La palabra sismo tiene diferentes orígenes dependiendo del lugar y por mencionar algunos:

- ✚ Del griego: *seismós* o *seíein* que significa terremoto, sacudida o agitación.
- ✚ Del indoeuropeo: *tweis* que significa sacudir.
- ✚ Del latín: *terrae motus* donde *terrae* es Tierra y *motus* es mover, por lo que la definición en latín se traduce como sacudida, movimiento o acción de mover la Tierra.
- ✚ Del italiano: *terremoto* que significa sacudida del terreno.

Otras definiciones, con cierto grado de imprecisión, dado que son definiciones con base en la magnitud de un sismo y su percepción son:

- ✚ Terremoto o macrosismo: es un sismo grande cuya presencia puede causar daños destructores a las construcciones.

- ✚ Temblor: es un sismo cuya magnitud es pequeña.
- ✚ Maremoto: es el sismo cuyo origen se presenta dentro del mar y es el causante, de denominarse terremoto, de un fuerte oleaje llamado *tsunami*.

Por definición los sismos son el desprendimiento o liberación de la energía de deformación que se acumula sobre la corteza terrestre.

Con ayuda de la tecnología la sismología ha podido determinar las causas de los sismos. Es sabido que la causa principal de éstos, y los que mayor intensidad presentan, es la que tiene origen en las placas tectónicas.

Temblores insignificantes, en comparación con los que se originan por origen tectónico, son los sismos que tienen origen por precedencia volcánica. Así mismo el ser humano también es participe de la provocación de sismos si éste provoca una explosión causando el derrumbe de una mina o un macizo rocoso para la extracción de agregados pétreos.

La mayoría de las veces los sismos, que son clasificados como moderados y/o grandes, vienen seguidos de sismos llamados replicas que pueden presentarse días, semanas o meses después.

2.3 Foco, Epifoco y Epicentro

Aunque la realidad es que la fuente sísmica no tiene origen en un sólo punto, sino que tiene origen en una región de muchos kilómetros, es común señalar un único punto.

Se denomina foco de un sismo al punto de la corteza terrestre donde las ondas sísmicas inician. Al foco también se le conoce como centro, hipofoco o hipocentro, siendo de todos ‘foco’ el término más utilizado. Por lo general el foco se localiza entre cinco y diez kilómetros de profundidad; en algunas regiones puede llegar a presentarse a cientos de kilómetros por debajo de la superficie terrestre.

El epifoco es la distancia o proyección vertical del foco hacia la superficie de la Tierra. El epifoco es conocido también como epicentro.

La distancia focal y la distancia epicentral son respectivamente, las distancias vertical y horizontal medidas del foco hacia una estación de observación.

La siguiente ilustración ejemplifica los conceptos hablados en este apartado:

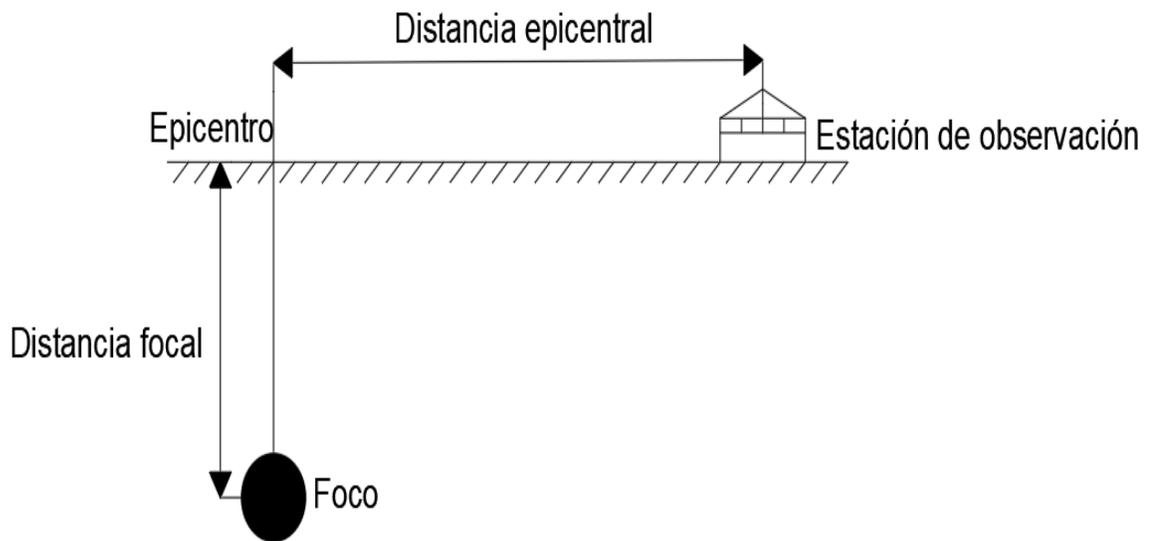


Figura II.1. Representación gráfica de foco, distancia focal, distancia epicentral, epicentro y estación de observación.

2.4 Rebote Elástico

Es bien sabido, por leyes de la mecánica newtoniana, que al aplicar una fuerza a un cuerpo en reposo éste cambiara de posición respecto a su punto de partida; a dicho cambio de posición se le denomina desplazamiento. Sin embargo, si no todos los puntos de dicho cuerpo se desplazan en la misma dirección se presenta una deformación.

Un material tiene un comportamiento elástico cuando al dejar de aplicarle fuerza pasa de su estado deformado a su estado original. Por el contrario, cuando se le deja de aplicar fuerza a dicho material y éste permanece en su estado deformado se dice que presenta un comportamiento plástico.

Consideremos ahora un cubo de un material completamente elástico. Si a las caras de dicho cubo se le aplicarán fuerzas perpendiculares, el elemento se comprimiría o se alargaría dependiendo si la fuerza era de compresión o de tensión respectivamente. Por el contrario, si se le aplicará fuerzas en dirección paralela a las caras del cubo, éste tendría a deformarse en forma de cizalla o corte. Si consideramos que la fuerza se aplica sobre un área determinada de la cara del cubo, entonces estaremos hablando de un esfuerzo.

Dichas definiciones anteriormente explicadas (deformación, comportamiento elástico, comportamiento plástico y esfuerzo) ayudan a entender que el rebote elástico es un fenómeno característico en todo sismo, pues manifiesta importantes deformaciones en la superficie terrestre y las leyes con las que podemos relacionar los esfuerzos con las deformaciones (Leyes de Hooke o lineales y no lineales) que se utilizan para estudiar a los sismos.

La teoría del rebote elástico fue propuesta por el geólogo norteamericano H. F. Reid, a raíz del sismo de San Francisco, California, Estados Unidos, en 1906. Una vez ocurrido el sismo se hicieron levantamientos topográficos a lo largo de varios kilómetros sobre lo que ahora es la famosa falla de San Andrés, y pudo observarse que los caminos y las cercas perimetrales de los predios sufrieron un desplazamiento de hasta seis metros con respecto a su posición original antes del sismo.

De acuerdo con H. F. Reid, las rocas son consideradas un material elástico lo cual las hace capaces de almacenar energía cual si fuera un resorte en compresión. Por este motivo los sismos se deben al comportamiento elástico de la Tierra, ya que los materiales totalmente plásticos son incapaces de almacenar energía elástica (Nava, 2002, pág. 27).

2.5 Ondas Sísmicas

Toda la energía elástica que se había estado acumulando (rebote elástico) se libera en forma de calor generado por la fricción entre las rocas. Dicha manifestación da origen a lo que se denomina ondas sísmicas y precisamente dichas ondas sísmicas son las que percibimos durante un sismo.

Existen dos tipos de ondas elásticas cuando se presenta un sismo:

- ✚ Las ondas de cuerpo (ondas P y ondas S).
- ✚ Las ondas de superficie (ondas de Love o L y ondas de Rayleigh o R).

Las ondas de cuerpo se originan cuando se presenta el sismo, es decir, en el foco de éste. Posteriormente, cuando las ondas de cuerpo viajan hasta el nivel del suelo, se originan las ondas de superficie cuya amplitud decrece a cero conforme aumenta la profundidad.

2.5.1 Ondas P

Conocidas también como ondas principales, primarias, longitudinales, compresionales o dilatacionales. Se denominan ondas P por la palabra en el idioma inglés *push* que significa empujar.

Esta onda adquiere movimiento longitudinal, provocando compresión y dilatación en el sentido en el que viaja. Estas ondas se propagan principalmente a través del granito y de materiales líquidos como lo son el magma volcánico o el agua en los océanos. Al ser su naturaleza tan similar a las ondas sónicas, cuando las ondas P llegan a la superficie de la Tierra una parte se transmite como onda sonora hacia la atmosfera.

En comparación con los demás tipos de ondas sísmicas ésta es la más rápida, pues en las rocas graníticas, cercanas a la superficie, alcanzan velocidades de 5 km/s y en el interior de la Tierra alcanzan velocidades de 11 km/s (Nava, 2011, pág. 53).

La fórmula utilizada para conocer la velocidad de propagación de las ondas P es:

$$v_p = \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} \right)} = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.1)^{2.1}$$

^{2.1} En el capítulo I se detallan estas variables. De igual forma se presenta una tabla que da las relaciones entre estas variables.

Donde:

$[v_p]$ = velocidad de onda P.

$[\rho]$ = peso volumétrico del material.

$[E]$ = módulo de elasticidad.

$[v]$ = relación de poisson.

$[\mu, \lambda]$ = constantes de Lamé.

$[\kappa]$ = módulo de dilatación volumétrico.

2.5.2 Ondas S

Conocidas también como ondas secundarias, transversales, de cortante, de cizalla o equivoluminales. Se denominan ondas S por la palabra en el idioma inglés *shear* que significa cortante.

Cuando esta onda viaja lo hace de manera transversal a la roca por lo que le es imposible viajar a través de los líquidos impidiendo su paso por los océanos (los líquidos son incapaces de soportar esfuerzos cortantes), a diferencia de como lo hacen las ondas P en forma longitudinal.

Dada su naturaleza de movimiento transversal, estas se desplazan ortogonalmente a la dirección de propagación; por esta razón están asociadas a la superficie del suelo provocando deformaciones en el terreno y originando daños estructurales a las edificaciones.

Se dice que cuando una onda S se desplaza en una única dirección ésta se polariza, lo cual significa que oscila en más de una dirección. Cuando las partículas del material que se vio afectado por la onda S se desplazan en el sentido horizontal se designa como SH. Caso distinto, cuando las partículas se mueven en el sentido vertical se denomina SV. La fórmula utilizada para conocer la velocidad de propagación de las ondas S es:

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.2)$$

2.5.3 Relación entre Ondas S y P

Un caso particular ocurre cuando relacionamos las ondas P con las ondas S mediante una relación del siguiente tipo:

$$\frac{v_p}{v_s} \quad (2.3)$$

Si se sustituye la ecuación 2.1 y 2.2 en la ecuación 2.3, además de una correcta manipulación algebraica para simplificar términos, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{v_p}{v_s} = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho} \left(\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} \right)}}{\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \Big|_{\mu=\frac{E}{2(1+\nu)}}} = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho} \left(\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} \right)}}{\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}} = \sqrt{\frac{2\rho E(1+\nu)(1-\nu)}{\rho E(1-\nu-2\nu^2)}} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

Cuyo resultado final es:

$$\frac{v_p}{v_s} = \sqrt{2 \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right)} \quad (2.4)$$

Mediante la ecuación 2.4 se concluye que la relación entre las velocidades v_p y v_s únicamente dependen de la relación de poisson (Vieira Chaves, 2015, pág. 400).

Cuando la relación de poisson es $\nu = 0.25$ se presenta una condición especial conocida como condición de poisson el cual indica que la velocidad de onda P es $v_p = \sqrt{3}v_s$. Esta condición se presenta en una amplia gama de rocas (Nava, 2011, pág. 54).

2.5.4 Subdivisión de las ondas de cuerpo

Otra propiedad que tienen por igual las ondas de cuerpo P y S es la de reflejarse (la onda cambia de dirección) y refractarse (la onda atraviesa) en diferentes estratos rocosos en la corteza de la Tierra.

Las principales clasificaciones, con base en sus propiedades reflectivas y refractivas, son mencionadas a continuación:

- ✚ Las ondas que son reflejadas una vez son PP o SS, las que son reflejadas una segunda vez son PPP o SSS y así sucesivamente.
- ✚ Las ondas que son refractadas son del tipo SP y PS, o de otro tipo de combinación.
- ✚ Cuando las ondas son reflejadas entre el Núcleo y el Manto las ondas adquieren el nombre de PcP o ScS.
- ✚ Aquellas que viajan a través del interior del Núcleo son denominadas como PKP o SKS.
- ✚ Si se usa una letra minúscula 'p' o 's', antes de la denominación de ondas de cuerpo ('S' o 'P'), dando como resultado las ondas pP o sP es porque hubo un sismo de foco muy profundo originando reflexiones en la superficie terrestre.
- ✚ Las ondas Pg y Sg son nombradas de esta forma cuando las ondas de cuerpo viajan a través de la capa granítica de la corteza terrestre.
- ✚ Las ondas PmP y SmS son catalogadas de esta manera cuando las ondas de cuerpo viajan a través de la discontinuidad Mohorovicica.

2.6 Ondas de Superficie

Estas ondas viajan a través de la superficie o en las discontinuidades de los estratos de roca. A diferencia de las ondas de cuerpo, estas son más intensas cerca de la superficie terrestre y son nulas a mayor profundidad. Particularmente estas son las de mayor interés para la ingeniería sísmica (Rosenblueth Deutsch, 1991, pág. 16).

2.6.1 Ondas R

Estas ondas fueron descubiertas por el científico británico John William Strutt (1842-1919), conocido también como Lord Rayleigh y por eso son conocidas como ondas de Rayleigh o simplemente ondas R o L_R .

El desplazamiento de las ondas R se asemeja a la forma del oleaje marítimo dando como resultado movimiento de tipo elíptico, puesto que las partículas del material oscilan vertical y horizontalmente en un plano perpendicular.

2.6.2 Ondas L

Estas ondas fueron descubiertas por el investigador británico Augustus Edward Hough Love (1863-1940) y por eso son denominadas como ondas de Love o simplemente ondas L o L_o.

El movimiento de las ondas L es netamente horizontal, semejante al desplazamiento de las ondas de cuerpo S, pero con la característica de prescindir del movimiento vertical. Su movimiento provoca sacudidas en los cimientos de una edificación causándole daños considerables.

2.7 Intensidad de un sismo

La intensidad es una medida subjetiva en la que se contabilizan los daños de un sismo en un lugar determinado de la superficie terrestre.

Para ejemplificar supóngase que se tienen dos zonas A y B cualesquiera sobre la superficie terrestre. Sí en A un sismo pequeño se hace presente y llega a causar grandes daños, la intensidad medida sería grande. Ahora supóngase que las zonas A y B están muy alejadas la una de la otra por miles de kilómetros y se presenta un sismo que daña gravemente las estructuras en la zona B causando que la intensidad medida sea muy grande, a pesar de ello, como el lugar A apenas sintió ese siniestro la intensidad evaluada sería pequeña.

2.8 Escalas de Intensidad Sismológica

Estas escalas son medidas en grados de intensidad con base en dos aspectos: la reacción de la población ante el sismo y la cuantía de los daños provocados por el siniestro.

La escala Rossi-Forel que constaba de 10 grados, introducida en 1883, fue una de las primeras escalas de intensidad. Esta escala fue creada por el sismólogo italiano Michele Stefano de Rossi (1834-1898) y por el científico suizo François-Alphonse Forel (1841-1912).

Con el paso del tiempo, dicha escala quedó en desuso, ya que en el mundo (dependiendo del país) son más utilizadas otras. Por mencionar algunos ejemplos: en los países de Europa Occidental se adoptó desde 1964 la escala MSK^{2.2} de 12 grados y en Japón la JMA de 7 grados.

No obstante, la escala más utilizada en América es la escala de Mercalli modificada (designada también como escala MM). Se ha publicado en dos formas: la primera es larga y detalla mientras que la segunda es abreviada^{2.3}. Ésta última es la que se divulga para fines de sismología e ingeniería sísmica (Pavón Rodríguez, 1998, pág. 85).

A pesar de que estas escalas son aceptadas internacionalmente y dan fácil entendimiento a la población de la medición subjetiva del sismo y sus daños colaterales, su mayor desventaja es que la gente doblegada por sus emociones tras experimentar un sismo tiende a exagerar el cómo fue el temblor. Por tal hecho no es un parámetro totalmente confiable para los expertos en materia de sismología y sus ramas de apoyo.

2.9 Escalas Instrumentales para Medir la Intensidad

Las escalas de medición como la MM, MSK y JMA son meramente subjetivas por lo que surge la necesidad de medir cuantitativamente la intensidad de un sismo para evitar diferencias de percepción humana. La utilidad de las escalas instrumentales es limitada, ya que el uso de ellas sólo es posible cuando se tienen graficas del movimiento del terreno (Rosenblueth Deutsch, 1991, págs. 19-20).

Las más conocidas son tres:

- ✚ La de Housner.
- ✚ La de Arias y
- ✚ Aquella que relaciona la escala de Mercalli con la aceleración máxima de las ondas sísmicas.

^{2.2} Esta escala se puede encontrar en el Anexo B de esta tesis.

^{2.3} Esta escala se puede encontrar en el Anexo A de esta tesis.

2.9.1 Escala de Housner

La escala de Housner presenta la siguiente fórmula:

$$SI_v = \int_{0.1}^{2.5} SP_v(T, \xi) dT \quad (2.5)$$

[SI_v] = intensidad espectral.

[$SP_v(T, \xi)$] = pseudo velocidad espectral.

[T] = periodo natural de vibración.

[ξ] = amortiguamiento.

2.9.2 Escala de Arias

La escala de Arias presenta la siguiente fórmula:

$$I_A = \frac{\pi}{2g} \int_0^{t_0} a^2(t) dt \quad (2.6)$$

[I_A] = intensidad de Arias.

[g] = gravedad.

[$a(t)$] = aceleración del terreno durante el movimiento sísmico.

[t_0] = duración total del movimiento.

2.9.3 Escala resultante de la aceleración de ondas sísmicas

Como la intensidad es medida con base en los daños provocados por la aceleración máxima de las ondas sísmicas es posible relacionar la escala de Mercalli con dicha aceleración usando la siguiente fórmula:

$$\log|a| = \frac{I}{3} - \frac{1}{2} \quad (2.7)$$

Si se despejará la aceleración o la intensidad de la ecuación 2.7 se obtiene:

$$a = \sqrt[6]{10^{2I-3}} \quad (2.8)$$

$$I = 3 \log|a| + \frac{3}{2} \quad (2.9)$$

Para la ecuación 2.7 a 2.9, la intensidad deberá de estar en $1 \leq I \leq 12$. La siguiente tabla presenta los valores de la aceleración en función de la escala de Mercalli:

Tabla II

Valores de la aceleración (a) con base en los grados de la escala de Mercalli (MM).

Grado MM (I)	Aceleración en cm/s^2 (a)	Valor de la aceleración (a) en función de la gravedad (g)
1	0.681	$a = 0.0007 \text{ g}$
2	1.468	$a = 0.0015 \text{ g}^*$
3	3.162	$a = 0.0032 \text{ g}$
4	6.813	$a = 0.0070 \text{ g}$
5	14.678	$a = 0.0150 \text{ g}$
6	31.623	$a = 0.0323 \text{ g}$
7	68.129	$a = 0.0695 \text{ g}$
8	146.780	$a = 0.1498 \text{ g}$
9	316.228	$a = 0.3227 \text{ g}$
10	681.292	$a = 0.6952 \text{ g}$
11	1467.799	$a = 1.4978 \text{ g}$
12	3162.278	$a = 3.2268 \text{ g}^{**}$

* La aceleración mínima perceptible para el ser humano es de 0.0015g, según la escala de Mercalli.

** El valor de la aceleración no está limitado a que sea $a = 3.2268\text{g}$ si no que puede ser mayor.

2.10 Magnitud de un Sismo

A diferencia de la intensidad de un sismo, que es una medida cualitativa, la magnitud de un sismo es una medida cuantitativa que no depende de la percepción humana, y por lo tanto, el valor registrado será el mismo para todo el mundo.

Dicha medición es la que determina la energía liberada por un sismo, con base en la amplitud de las ondas elásticas que éste genera.

2.11 Magnitud de Escala Richter (M_L)

La escala de medición de la magnitud más conocida en todo el mundo es la escala propuesta, en 1935, por el sismólogo estadounidense Charles Francis Richter. La formula de esta escala es:

$$M_L = \log(A) - \log(A_0) = \log\left(\frac{A}{A_0}\right) \quad (2.10)$$

Siendo:

$[M_L]$ = magnitud del sismo.

$[A]$ = amplitud máxima registrada en un sismógrafo de torsión Wood-Anderson.

$[A_0]$ = función de atenuación, o mejor dicho, la amplitud de un temblor de referencia utilizado como estándar (magnitud $M_L = 0$), siendo el más pequeño que puede registrarse en el área de estudio.

Richter también señala que para el empleo de la ecuación 2.10 es necesario considerar tres aspectos importantes:

- ✚ Es necesario calibrar el sismómetro de torsión Wood-Anderson con parámetros específicos de calibración.
- ✚ El logaritmo tiene que ser forzosamente base 10, a menos que se utilicen propiedades de logaritmos para el cambio de base.
- ✚ La elección del sismo estándar representado por la amplitud A_0 , por el uso de una magnitud $M_L = 0$, no denota que se carezca de sismo en el área de estudio.

Atendiendo a lo anteriormente mencionado, los parámetros con lo que debe contar el sismógrafo son:

- ✚ Una amplificación de 2800, colocado en terreno firme a 100 kilómetros del epicentro y para diferentes condiciones del terreno.

- ✚ Adicionalmente, debe calibrarse con un periodo natural de 0.8 segundos y un coeficiente de amortiguamiento igual al 80 porciento ($\xi = 0.8$).

Originalmente Richter concibió su fórmula (ecuación 2.10) basándose en las características del sur del estado de California en Estados Unidos y para distancias menores a 600 kilómetros, por lo que su fórmula carece de precisión para distancias mayores (provoca que la escala de Richter sea confiable hasta $M_L = 7$).

Por otra parte, puede llegar a presentarse el caso de que un temblor presente amplitudes de onda (A) menores a las de un sismo estándar (A_0) proporcionando una medición negativa, por eso la idea de elegir un sismo lo suficientemente pequeño como punto de inicio para que la medición sea en todo momento positiva (Pavón Rodríguez, 1998, pág. 211).

La necesidad de usar una escala logarítmica es porque cada vez que aumenta la magnitud (M_L) una unidad, es a causa de que la amplitud de las ondas que se registraron aumenta diez veces.

Sin embargo, el uso de la ecuación 2.10, se ve limitado a que únicamente se puede usar en temblores donde su foco es considerado poco profundo (aproximadamente entre 15 – 20 kilómetros de profundidad).

2.12 Otras Medidas de Magnitud Sísmica

Con el paso del tiempo se crearon otras magnitudes muy importantes para medir la magnitud de un sismo. Entre ellas podemos mencionar la magnitud de las ondas de cuerpo (m_b), la magnitud de las ondas de superficie (M_s) y la magnitud de momento sísmico (M_w).

2.12.1 Magnitud m_b

$$m_b = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 0.01\Delta + 5.9 \quad (2.11)$$

Siendo para m_b :

$[m_b]$ = magnitud de ondas de cuerpo.

$[A]$ = amplitud de onda en micrones (10^{-6} m).

$[T]$ = periodo de la onda sísmica en segundos.

$[\Delta]$ = distancia al epicentro en grados.

2.12.2 Magnitud M_s

$$M_s = \log(A) + 1.66 \log(\Delta) + 2 \quad (2.12)$$

Siendo para M_s :

$[M_s]$ = magnitud de ondas de superficie.

$[A]$ = amplitud de onda en micrones (10^{-6} m).

$[\Delta]$ = distancia al epicentro en grados.

2.12.3 Magnitud M_w

$$M_w = \frac{2}{3} \log(M_0) - 10.7 \quad (2.13)$$

Siendo para M_w :

$[M_w]$ = magnitud del momento sísmico.

$[M_0]$ = momento sísmico medido con la siguiente ecuación:

$$M_0 = ADG \quad (2.14)$$

Donde:

$[A]$ = área de falla (longitud por profundidad) en m^2 .

$[D]$ = desplazamiento longitudinal de la falla en m.

$[G]$ = módulo de cizalla aproximadamente igual a 3×10^6 ton/ m^2 .

El momento sísmico es una medida física elemental de la resistencia de la fuente de un sismo. Muchos sismólogos refieren que el parámetro M_0 es el parámetro más trascendental para medir el tamaño de un temblor, aun cuando no sea bien visto desde un punto objetivo teórico-practico.

Todas estas magnitudes tienen como propósito el poder calcular el tamaño de un sismo, utilizando para ello el uso del logaritmo de la amplitud de las ondas arrojadas y registradas por el sismógrafo.

Aunque a veces los medios de comunicación aseveren que la magnitud del sismo fue medida en escala Richter, la realidad es que puede ser otra magnitud, ya que como se mencionó, existen medidas válidas para sismo locales y medidas usadas para sismos más lejanos.

2.13 La Energía de los Sismos

Al desarrollar la escala de magnitudes, Richter y su colega Gutenberg, se propusieron a enlazar una fórmula que calculara la energía como función de la magnitud sísmica medida. La fórmula propuesta, por Gutenberg y Richter, para medir la energía sísmica en ergios^{2.4} es la siguiente:

$$\log(E_s) = 11.8 + 1.5M \quad (2.15)$$

$$E_s = 10^{11.4+1.5M} \quad (2.16)^{2.5}$$

2.14 Relación de Intensidad con Magnitud

Una fórmula que ayuda a calcular la intensidad de un sismo con su magnitud es:

$$I = 8.26 + 1.45M - 2 \log R \quad (2.17)$$

Siendo R la distancia en kilómetros del punto de observación a la fuente.

^{2.4} La palabra ergio tiene orígenes griegas donde *ergon* significa trabajo. Físicamente un ergio es el trabajo realizado por una fuerza de una dina ($1 \text{ dina} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2$) al desplazarse un centímetro, es decir $1 \text{ ergio} = 1 \text{ dina} \cdot \text{cm}$.

^{2.5} M se usa para sismos pequeños y medianos, pero para sismos grandes M debe ser sustituida por M_w .

Capítulo III: Conceptos Fundamentales en Dinámica Estructural

- 3.1 Introducción
- 3.2 Grados de Libertad
- 3.3 Indeterminación Estática
- 3.4 Indeterminación Cinemática
- 3.5 Equilibrio Dinámico: Principio de D'Alembert
- 3.6 Equilibrio Dinámico: Fuerza de Amortiguamiento
- 3.7 Equilibrio Dinámico: Fuerza de Rigidez Lateral
- 3.8 Fuerza de Excitación Externa
- 3.9 Sistema Masa – Resorte - Amortiguador
- 3.10 Idealización de Marcos Reticulares como un Sistema de 1 G. D. L.
- 3.11 Vibraciones de Sistemas Físicos

III. Conceptos Fundamentales en Dinámica Estructural

3.1 Introducción

La dinámica estructural ayuda a comprender, con la formulación de modelos matemáticos, la vibración de las estructuras cuando son influenciadas por una fuerza lateral. Dichas fuerzas pueden ser representadas como fuerzas de corta duración como las explosiones, de mediana duración como los sismos o de larga duración como el viento o el oleaje marítimo (Molina Elvira, Apuntes de Dinámica Estructural).

3.2 Grados de Libertad

Los grados de libertad de un elemento estructural son el número mínimo de coordenadas generalizadas con las cuales pueden representarse los desplazamientos de una estructura. Dichos desplazamientos pueden ser lineales o angulares y presentarse en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 .

Por ejemplo, una estructura cargada bajo la acción de fuerzas experimentará desplazamientos y rotaciones en puntos discretizados de interés llamados nodos. Dichos desplazamientos y rotaciones son denominados grados de libertad de la estructura.

Para el caso de tres dimensiones (\mathbb{R}^3) cada nodo en una viga o marco puede tener un máximo de tres desplazamientos lineales y tres rotaciones angulares. Para el caso en dos dimensiones (\mathbb{R}^2) cada nodo puede tener como máximo dos desplazamientos lineales y una rotación angular.

No obstante, algunos desplazamientos lineales y rotaciones angulares pueden restringirse mediante soportes o apoyos. En casos más específicos los desplazamiento lineales [d] o rotaciones angulares [rad/d] tiene un valor diferente de cero, pero que no es desconocido al inicio del problema.

La dinámica estructural se basa en el concepto de grados de libertad para idealizar estructuras como un modelo matemático representado por una ecuación diferencial ordinaria en el caso de idealizar un sistema de 1 grado de libertad, o un sistema de ecuaciones diferenciales cuando se

presentan dos o más grados de libertad finitos, lo cual provoca el análisis a partir de una masa discreta.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se convierten en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales cuando se considera una estructura continua y no discretizada, dicho de otra manera, se consideran infinitos grados de libertad para el análisis considerando una masa continua o distribuida.

En la figura III.1 puede notarse que un elemento tipo barra presenta seis grados de libertad contemplando únicamente sus nodos extremos cuando se hace un análisis en R^2 .

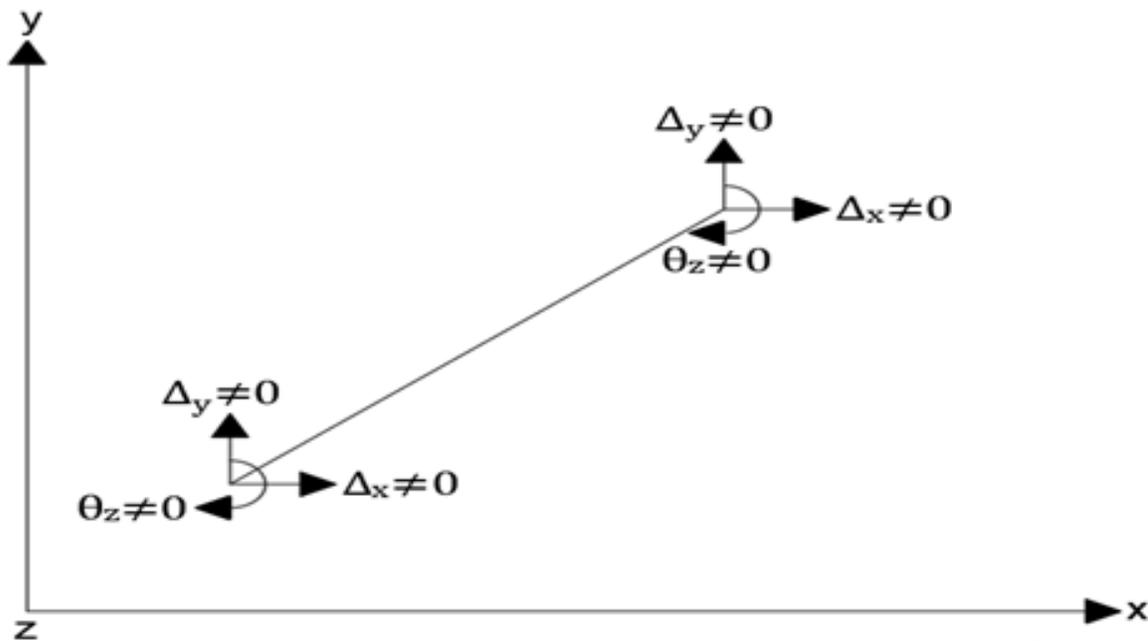


Figura III.1. Grados de libertad presentes en un elemento tipo barra en R^2 .

Por otro lado, en la figura III.2 puede observarse que un elemento tipo barra aumenta sus grados de libertad a 12 cuando se contempla únicamente sus nodos extremos en un análisis en R^3 .

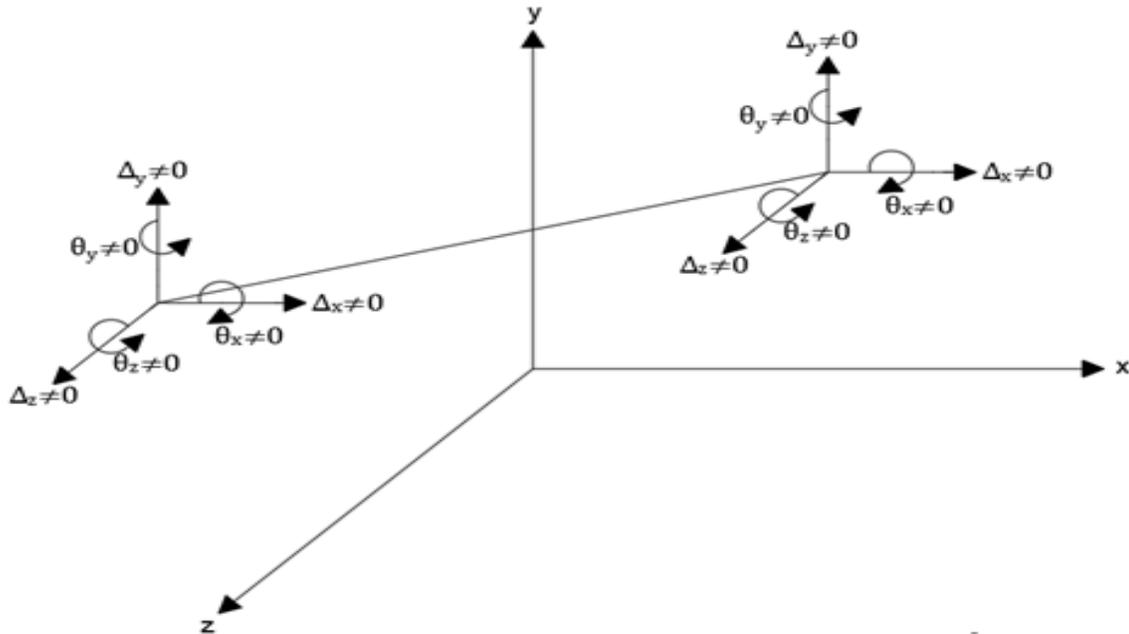


Figura III.2. Grados de libertad presentes en un elemento tipo barra en R^3 .

La importancia de los grados de libertad para el análisis estructural estriba en dos tipos particulares de indeterminación: la estática (para el método de flexibilidades) y la dinámica (para el método de rigideces).

En el método de flexibilidades se plantea una estructura isostática en la que se satisfacen las condiciones de equilibrio (estabilidad estática), pero no se satisfacen las condiciones de deformación (inestabilidad dinámica); en el método de las rigideces se satisfacen las condiciones de deformación (estabilidad dinámica), pero no las condiciones de equilibrio estático (inestabilidad estática) (González Cuevas, 2017, pág. 211).

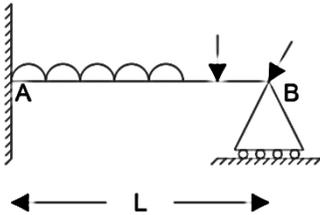
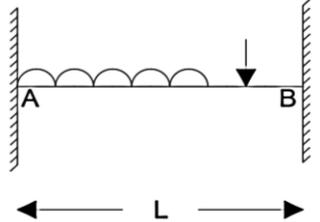
La importancia de tener claro el método de las rigideces radica en que conocer la rigidez de una estructura, así como su masa y amortiguamiento, proporcionará los elementos necesarios para determinar la respuesta dinámica del sistema estructural en estudio a partir de las ecuaciones del movimiento abordadas en los capítulos siguientes.

3.3 Indeterminación Estática

Es importante hacer una buena discretización de las estructuras para conocer cuántos grados de libertad deben establecerse con el objetivo de que el modelo matemático propuesto sea lo más apegado posible al sistema estructural en estudio^{3.1}.

Los siguientes dos casos de estudio por analizar ayudarán a entender como calcular el grado de indeterminación estática para una estructura. Los casos son presentados a continuación en la siguiente tabla:

Tabla III
Cálculo de indeterminación estática para los ejemplos mencionados en el apartado 3.3.

Caso	Estructura	Reacciones	Ecuaciones de equilibrio	Grado de indeterminación estática
1		4	3	1
2		6	3	3

El grado de indeterminación estática para vigas se calcula como la diferencia del número de reacciones menos el número de ecuaciones de equilibrio (sumatoria de fuerzas verticales, sumatoria de fuerzas horizontales y sumatoria de momentos); claro está que el cálculo de indeterminación estática cambia si se presentan articulaciones (a momento, cortante o fuerza axial) o si hablamos de otro tipo de estructuras como marcos o armaduras^{3.2}.

^{3.1} Como apoyo adicional para entender la idealización de las estructuras reales, también es conveniente examinar la sección 2.1 *Estructura Idealizada* (págs. 33-45) del libro Análisis Estructural de R. C. Hibbeler

^{3.2} Los libros de análisis estructural sugeridos en las referencias, dentro de su contenido en los primeros capítulos, abordan de manera detalla como calcular la indeterminación estática para vigas, marcos y armaduras.

3.4 Indeterminación Cinemática^{3.3}

Para el caso de estructuras como marcos y vigas, cuando están sometidas a cargas (principalmente gravitacionales y laterales), los nodos^{3.4} de la estructura sufrirán desplazamientos en formas de rotaciones ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$) y traslaciones ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$). Para armaduras solamente se limitarán a traslaciones ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$).

El concepto de indeterminación cinemática, aunado a la teoría de elasticidad, propicia que en el análisis matricial de estructuras las matrices de rigidez de un elemento tipo viga o columna sea de dimensión 12×12 y 6×6 para R^3 y R^2 . Para armaduras las dimensiones de las matrices de rigidez son de 6×6 y 4×4 , en R^3 y R^2 respectivamente.

El tamaño de las matrices cuadradas se debe al número total de grados de libertad por elemento. La principal característica de las matrices de rigidez por elemento es que son simétricas con respecto a la diagonal principal.

3.5 Equilibrio Dinámico: Principio de D'Alembert

Este principio, postulado por el matemático de origen francés Jean D'Alembert, enuncia que es posible obtener el equilibrio dinámico si se añade una fuerza inercial ficticia igual al producto de la masa por aceleración y que opere en dirección opuesta a la fuerza de excitación externa. Con esta fuerza el sistema alcanza el equilibrio en cada momento de tiempo. La fuerza inercial ficticia se representa como:

$$F_I = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \quad (3.1)$$

Por medio de una sumatoria de fuerzas coplanares, en un diagrama de cuerpo libre, es posible representar un cuerpo de masa conocida y su respectiva ecuación de movimiento. Dicho principio será importante para determinar las ecuaciones diferenciales ordinarias que representen el movimiento de uno o más grados de libertad.

^{3.3} Los grados de libertad también se conocen como indeterminación cinemática de la estructura.

^{3.4} Se denomina nodo a los puntos donde se intersecan por lo menos dos elementos tipo barra o, a los puntos donde existen apoyos.

3.6 Equilibrio Dinámico: Fuerza de Amortiguamiento

Denominamos amortiguamiento a la constante que se encarga de reducir la amplitud de vibración libre. Éste es un elemento disipador de energía del sistema provocando una fuerza directamente proporcional a la velocidad relativa con sentido contrario. Dicha fuerza es expresada mediante:

$$F_A = cv = c \frac{dx}{dt} = c\dot{x} \quad (3.2)$$

Las unidades del amortiguamiento son fuerza por tiempo entre longitud. Para un sistema de un grado de libertad, que idealice una estructura, es apropiado y aceptable el uso del amortiguador viscoso lineal.

Completamente a la rigidez de la estructura, el amortiguamiento no puede ser determinado a partir de las dimensiones del sistema estructural, sino con pruebas experimentales hechas en laboratorio. Por lo anteriormente referido, es posible para casos idealizados de estructuras, considerar el amortiguamiento real por medio de un amortiguamiento viscoso lineal.

Para resolver problemas de vibraciones, desde una perspectiva analítica, por medio de la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, se designa el amortiguamiento del tipo viscoso lineal dado que su manejo matemático es más sencillo (Chopra , 2014, pág. 7). Este amortiguador funciona únicamente si la disipación de energía de las amplitudes de onda generadas por las vibraciones, ocurren dentro del rango elástico.

3.7 Equilibrio Dinámico: Fuerza de Rigidez Lateral

Para un sistema de comportamiento lineal la relación entre la fuerza de rigidez lateral F_L y la deformación resultante 'x' es:

$$F_L = kx \quad (3.3)$$

Siendo k la rigidez lateral del sistema (en unidades fuerza / longitud), donde se supone, por simplicidad, cumple con la ley de Hooke y por ende, los desplazamientos están dentro del rango elástico (pequeños desplazamientos).

Muchas veces la rigidez lateral de una estructura suele considerarse como la suma de las rigideces de las columnas sin contemplar la rigidez de las vigas, es decir:

$$k_L = \sum_{\text{columnas}} \left(\frac{12EI_C}{h^3} \right)$$

$$k_L = \sum_{\text{Columnas}} \left(\frac{3EI_C}{h^3} \right) \quad (3.4)^{3.5}$$

$$k_L = \sum_{\text{Columnas}} \left(\frac{12EI_C}{h^3} \right) + \sum_{\text{Columnas}} \left(\frac{3EI_C}{h^3} \right)$$

Claro está que la rigidez lateral de un marco, con un valor más realista, se determina mediante los procedimientos estándar del análisis estructural estático usando el método de las rigideces.

Es posible demostrar mediante el uso de la condensación estática, que la rigidez lateral es:

$$k_L = [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] \quad (3.5)$$

La ecuación 3.5 se obtiene a partir de particionar la matriz de rigidez de la estructura de la siguiente manera:

$$[k] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{\theta\theta}] & [K_{\theta\delta}] \\ [K_{\delta\theta}] & [K_{\delta\delta}] \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Donde los coeficientes de rigidez se acomodan en $[k]$ de tal forma que pueda presentarse el siguiente acomodo:

$[K_{11}] = [K_{\theta\theta}] =$ momentos resultantes de aplicar rotaciones unitarias en los nodos.

$[K_{21}] = [K_{\delta\theta}] =$ fuerzas resultantes de aplicar rotaciones unitarias en los nodos.

$[K_{12}] = [K_{\theta\delta}] =$ momentos resultantes de aplicar desplazamientos unitarios en los nodos.

$[K_{22}] = [K_{\delta\delta}] =$ fuerzas resultantes de aplicar desplazamientos unitarios en los nodos.

Más adelante se verá como ensamblar las matrices en este orden.

^{3.5} El valor de $12EI_C / h^3$ corresponde a columnas con empotramiento en su base, mientras que $3EI_C / h^3$ cuando la columna está sobre un apoyo fijo (o articulado).

3.8 Fuerza de Excitación Externa

Se denomina fuerza de excitación externa $P(t)$ a aquella fuerza dinámica que interactúa en sentido opuesto a las fuerzas propias de inercia, amortiguamiento y de rigidez lateral.

Como se verá más adelante, esta fuerza dependiendo del valor que tome, dará el carácter de ecuaciones diferenciales ordinarias de vibración libre o ecuaciones diferenciales con excitación externa.

3.9 Sistema Masa – Resorte - Amortiguador

Apoyándose principalmente de la segunda ley de Newton y del principio de D' Alembert, es posible generar el sistema denominado masa – resorte – amortiguador. Con este sistema es posible conseguir una ecuación $x(t)$ que describa el desplazamiento de dicho sistema al ser ejercida una fuerza $P(t)$.

El planteamiento de este modelo matemático idealiza que el resorte y el amortiguamiento carecen de masa, para que el movimiento que experimente $x(t)$ sea netamente sobre un único grado de libertad. Mediante la primera y segunda derivada ordinaria de $x(t)$ es posible determinar la velocidad $\dot{x}(t)$ y la aceleración $\ddot{x}(t)$ del cuerpo en estudio.

Este sistema se plantea en textos de física universitaria (generalmente en los temas referentes al movimiento oscilatorio), en libros de vibraciones mecánicas, y obviamente en libros de dinámica estructural, por lo que en los siguientes capítulos se solucionaran algunos ejercicios para su comprensión.

Este modelo matemático, en dinámica estructural, da una idea de la respuesta dinámica^{3.6} de la estructura en estudio. A partir de este modelo se desarrollan las bases para realizar un análisis dinámico modal espectral.

^{3.6} Parte de la respuesta dinámica es conocer desplazamientos, velocidades, aceleraciones, frecuencias y modos de vibración de las estructuras, principalmente.

Una vez detalladas todas las fuerzas actuantes del sistema masa – resorte – amortiguador se hace un diagrama de cuerpo libre en el que interactúen todas las fuerzas. En el diagrama de cuerpo libre la fuerza externa $P(t)$, así como el desplazamiento $x(t)$, velocidad $\dot{x}(t)$ y aceleración $\ddot{x}(t)$, actúa en dirección positiva ($+ \rightarrow$) sobre el eje horizontal ‘x’. Por el contrario, las fuerza de inercia $m\ddot{x}$, de amortiguamiento $c\dot{x}$ y de rigidez lateral kx , actúan en el sentido negativo ($- \leftarrow$) del eje ‘x’ por ser fuerzas internas que se oponen al movimiento externo.

El diagrama de cuerpo libre es el siguiente:

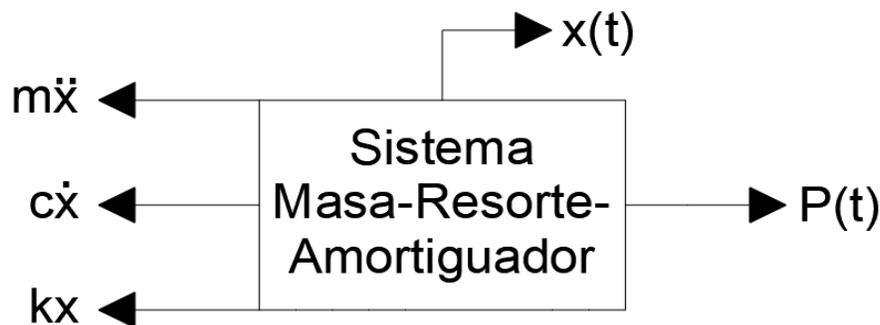


Figura III.3. Diagrama de cuerpo libre aplicado a un sistema masa-resorte-amortiguador presentando las fuerzas como funciones dependientes del tiempo.

Aplicando una sumatoria de fuerzas sobre el eje x:

$$\begin{aligned}
 +\rightarrow \Sigma F_x &= 0 \\
 -m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + P(t) &= 0 \\
 \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= P(t) \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

La ecuación 3.7, representa el movimiento de un sistema masa – resorte - amortiguador de un grado de libertad.

3.10 Idealización de Marcos Reticulares como un Sistema de 1 G. D. L.^{3.7}

Para abordar a la idealización de los sistemas dinámicos de un grado de libertad se hace la siguiente analogía (Molina Elvira, Apuntes de Mecánica de Materiales I, 2017):

^{3.7} G. D. L. es la abreviación de grado de libertad

Se piensa en un marco en dos dimensiones, de un nivel y una crujía, con ambas columnas empotradas en su base. También se puede observar que existen seis grados de libertad posibles (cuatro lineales y dos angulares), es decir, grados de libertad no restringidos por los empotramientos en la base^{3.8}.

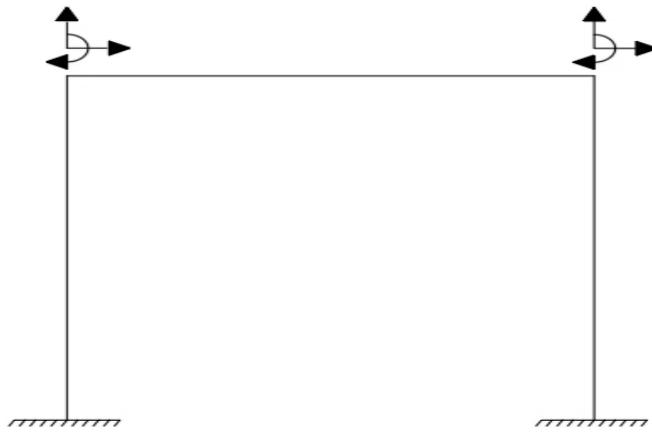


Figura III.4. Estructura idealizada con múltiples grados de libertad.

Posteriormente se hace la suposición de que la losa es infinitamente rígida a flexión y se eliminan los desplazamientos angulares (rotaciones):



Figura III.5. Estructura idealizada con la losa infinitamente rígida a flexión.

Además, si se considera que las columnas son infinitamente rígidas axialmente, se eliminan los desplazamientos verticales:

^{3.8} Dichos grados de libertad no son necesarios de numerar para esta ejemplificación.



Figura III.6. Estructura idealizada con la losa infinitamente rígida a flexión y ambas columnas infinitamente rígidas axialmente.

Finalmente, si idealiza la losa infinitamente rígida en su dirección axial (diafragma rígido), se puede eliminar uno de los dos grados de libertad restantes:

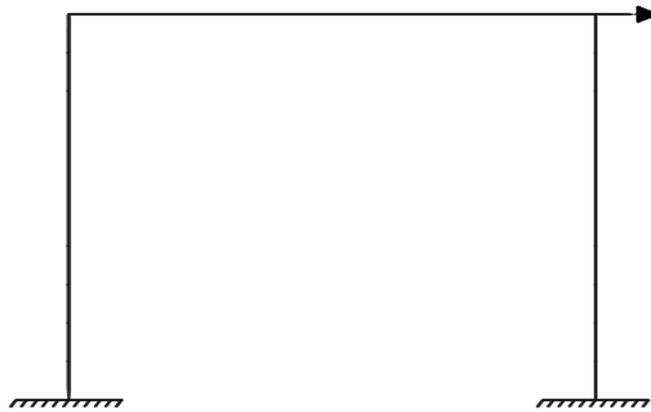


Figura III.7. Estructura idealizada con un sólo grado de libertad.

Estas consideraciones hacen posible modelar un sistema masa – resorte – amortiguador o en su defecto, masa – resorte si se desprecia el amortiguamiento de la estructura. Sin embargo, el problema se torna más complejo conforme se aumentan el número de entrepisos, ya que algunos sistemas estructurales no quedan representados (de manera directa) como un sistema de 1 G. D. L., sino como un sistema de dos o más grados de libertad.

La siguiente figura representa un modelo simple masa – resorte:

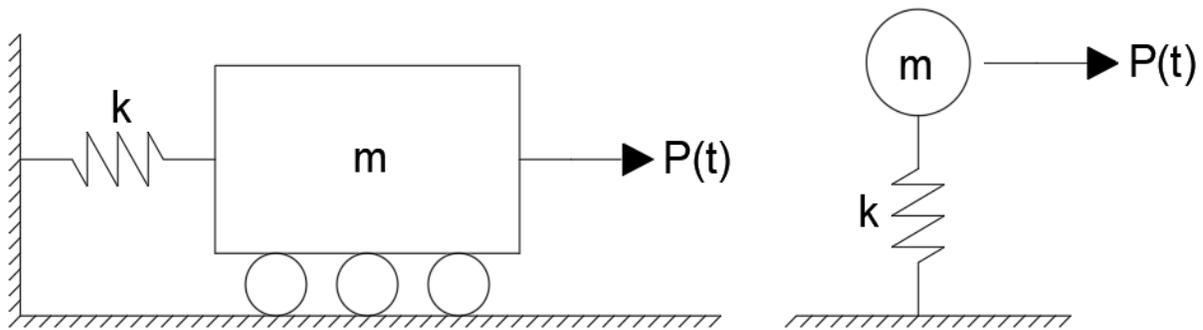


Figura III.8. Representaciones de un sistema dinámico de un grado de libertad sin amortiguamiento.

Si en el sistema se representa el amortiguamiento de la estructura, entonces, su idealización grafica tiene la siguiente forma:

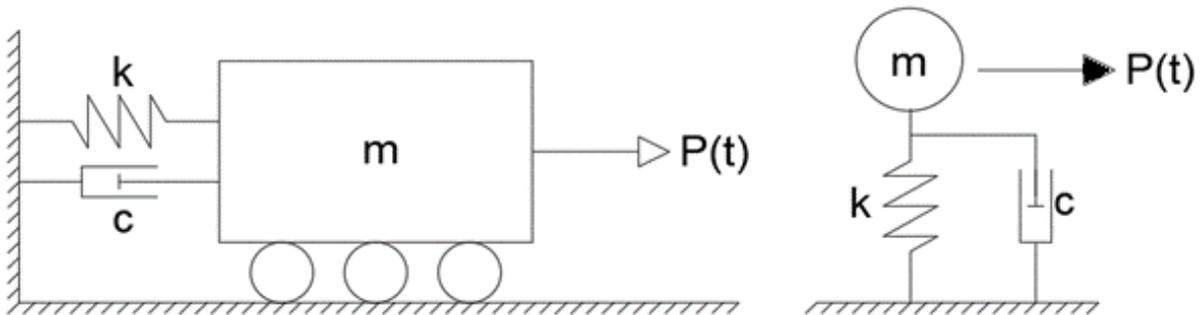


Figura III.9. Representaciones de un sistema dinámico de un grado de libertad con amortiguamiento.

3.11 Vibraciones de Sistemas Físicos

Se define como vibración al movimiento realizado por un sistema físico que contiene una o varias partículas conectadas. Existen principalmente dos tipos de vibraciones:

- 1) Vibraciones libres: son aquellas que se generan cuando en el sistema actúan solamente las fuerzas propias del sistema^{3.9}, sin que interactúe ninguna fuerza externa ($P(t) = 0$).
- 2) Vibraciones forzadas: son aquellas donde además de interactuar fuerzas propias del sistema, interactúan fuerzas externas^{3.10} ($P(t) \neq 0$).

^{3.9} Como fuerzas propias del sistema se consideran la rigidez, el amortiguamiento y la fuerza inercial asociada con la masa.

^{3.10} Dichas fuerzas externas pueden ser representadas por funciones trigonométricas siendo estas las más comunes.

PARTE
II

SOLUCIÓN DE LAS EDO EN
VIBRACIÓN LIBRE PARA
SISTEMAS DE 1 G. D. L.

DECREMENTO LOGARÍTMICO

Capítulo IV: Vibración Libre sin Amortiguamiento en Sistemas de 1 G.D.L.

- 4.1 EDO de la Vibración Libre sin Amortiguamiento
- 4.2 Solución de la EDO de Vibración Libre sin Amortiguamiento.
 - 4.2.1 Solución de la forma compleja a real usando identidades hiperbólicas
 - 4.2.2 Solución de la forma compleja a real usando la fórmula de Euler
- 4.3 Amplitud Máxima de la Respuesta Dinámica
- 4.4 Representación Gráfica de la Respuesta Dinámica

IV. Vibración Libre sin Amortiguamiento en Sistemas de 1 G. D. L.

4.1 EDO^{4.1} de la Vibración Libre sin Amortiguamiento

Una estructura que experimenta vibración libre (amortiguada o no amortiguada) es aquella que es perturbada de su posición de equilibrio estático sin que intervenga una fuerza o excitación externa al sistema masa – resorte - amortiguador o sistema masa - resorte.

Partiendo de la ecuación que representa el sistema idealizado de una estructura con un grado de libertad (1 G.D.L.): $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$, y dado que no se presenta amortiguamiento ($c = 0$) ni fuerza externa ($P(t) = 0$), la ecuación anterior se reescribe como:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (4.1)$$

Esta ecuación representa la vibración libre sin amortiguamiento de un sistema de 1 G. D. L. cuando se considera que las deformaciones ocurren en el rango elástico.

La perturbación comienza en el tiempo cero ($t = 0$) que es donde se inicia el movimiento del sistema, debido a lo cual, deben presentarse dos condiciones iniciales: un desplazamiento x_0 y una velocidad inicial v_0 . Las condiciones iniciales del problema de valor inicial, sin importar el tipo de vibración (libre o forzada), y si presentan amortiguamiento o no, son las siguientes:

$$x(0) = x_0 \quad (4.2)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad (4.3)$$

4.2 Solución de la EDO de Vibración Libre sin Amortiguamiento.

Se propone una solución del tipo:

$$x = e^{\lambda t} \quad (4.4)$$

Donde x es la variable dependiente, t la variable independiente y λ una constante arbitraria (no debe confundirse con la constante de Lamé vista en el primer capítulo).

^{4.1} EDO es la abreviación de Ecuación Diferencial Ordinaria. A partir de aquí será muy recurrente el uso de esta abreviatura.

Como la ecuación $m\ddot{x} + kx = 0$ es de segundo orden, hay que tener dos derivadas sucesivas de $x = e^{\lambda t}$ para poder obtener \dot{x} y \ddot{x} :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\therefore \dot{x} = \lambda e^{\lambda t} \quad (4.5)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\lambda e^{\lambda t}) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\therefore \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (4.6)$$

Sustituyendo $x = e^{\lambda t}$ y $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ en $m\ddot{x} + kx = 0$ nos permite encontrar las soluciones siguientes que satisfacen la EDO de vibración libre sin amortiguamiento:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$m(\lambda^2 e^{\lambda t}) + k(e^{\lambda t}) = 0$$

Simplificando:

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + k) = 0$$

$$m\lambda^2 + k = \frac{0}{e^{\lambda t}}$$

$$m\lambda^2 + k = 0 \quad (4.7)$$

Despejando λ de $m\lambda^2 + k = 0$ se obtienen las dos soluciones que satisfacen la ecuación diferencial de vibración libre sin amortiguamiento:

$$m\lambda^2 + k = 0$$

$$m\lambda^2 = -k$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \quad (4.8)$$

La frecuencia natural de la estructura o frecuencia natural del sistema está definida como:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (4.9)$$

Entonces, el valor de λ^2 se expresa en función de la frecuencia natural ω mediante:

$$\lambda^2 = -\omega^2 \quad (4.10)$$

Las soluciones se obtienen si se aplica raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación 3.10:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda^2} &= \sqrt{-\omega^2} \\ \lambda &= \underbrace{\sqrt{-1}}_i \sqrt{\omega^2} \\ \lambda &= \pm \omega i \end{aligned} \quad (4.11)$$

Al partir de una ecuación cuadrática se presentan dos soluciones para λ , las cuales quedan representadas como:

$$\lambda_1 = \omega i \quad (4.12)$$

$$\lambda_2 = -\omega i \quad (4.13)$$

Utilizando el principio de superposición para EDO homogéneas, teniendo los valores de λ_1 y λ_2 , la ecuación general expone el siguiente modelo de solución:

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t} \\ \therefore x &= C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Para aplicar las condiciones iniciales representadas por $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, es necesario derivar $x = C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t}$ con respecto a t , para obtener la función \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} \\ \therefore &= \frac{d}{dt} (C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t}) \\ \therefore &= C_1 \frac{d}{dt} (e^{\omega i t}) + C_2 \frac{d}{dt} (e^{-\omega i t}) \\ \therefore &= C_1 \omega i e^{\omega i t} + C_2 (-\omega i e^{-\omega i t}) \\ \therefore \dot{x} &= C_1 \omega i e^{\omega i t} - C_2 \omega i e^{-\omega i t} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x = C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t}$:

$$x_0 = C_1 e^{\omega i(0)} + C_2 e^{-\omega i(0)}$$

$$\begin{aligned} \therefore &= C_1 e_{\omega_1}^0 + C_2 e_{\omega_1}^0 \\ &\therefore x_0 = C_1 + C_2 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x} = C_1 \omega i e^{\omega i t} - C_2 \omega i e^{-\omega i t}$:

$$\begin{aligned} v_0 &= C_1 \omega i e^{\omega i(0)} - C_2 \omega i e^{-\omega i(0)} \\ \therefore &= C_1 \omega i e_{\omega_1}^0 - C_2 \omega i e_{\omega_1}^0 \\ &\therefore v_0 = C_1 \omega i - C_2 \omega i \end{aligned} \tag{4.17}$$

Con el fin de obtener los valores de las constantes C_1 y C_2 se plantea un sistema de ecuaciones 2 x 2 formado por 4.16 y 4.17:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ v_0 = C_1 \omega i - C_2 \omega i \end{cases}$$

Despejando C_1 de $x_0 = C_1 + C_2$:

$$C_1 = x_0 - C_2 \tag{4.18}$$

Sustituyendo $C_1 = x_0 - C_2$ en $v_0 = C_1 \omega i - C_2 \omega i$ y despejando C_2 :

$$\begin{aligned} v_0 &= C_1 \omega i - C_2 \omega i \\ v_0 &= (x_0 - C_2) \omega i - C_2 \omega i \\ v_0 &= x_0 \omega i - C_2 \omega i - C_2 \omega i \\ v_0 &= x_0 \omega i - 2C_2 \omega i \\ 2C_2 \omega i &= x_0 \omega i - v_0 \\ C_2 &= \frac{x_0 \omega i}{2 \omega i} - \frac{v_0}{2 \omega i} \\ \therefore C_2 &= \frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2 \omega i} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Obtenido el valor de la constante C_2 se procede a calcular el valor de C_1 mediante la inserción de $C_2 = (x_0 / 2) - (v_0 / 2\omega i)$ en C_1 :

$$\begin{aligned}
C_1 &= x_0 - C_2 \\
C_1 &= x_0 - \left(\frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega i} \right) \\
C_1 &= x_0 - \frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega i} \\
\therefore C_1 &= \frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega i} \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Al sustituir $C_1 = (x_0 / 2) + (v_0 / 2\omega i)$ y $C_2 = (x_0 / 2) - (v_0 / 2\omega i)$ en $x = C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t}$ se obtiene la solución al problema de valor inicial, de vibración libre sin amortiguamiento, representado por la ecuación $m\ddot{x} + kx = 0$:

$$x = C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t} = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega i} \right) e^{\omega i t} + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega i} \right) e^{-\omega i t} \tag{4.21}$$

La ecuación diferencial de vibración libre sin amortiguamiento ha sido resuelta, sin embargo, es deseable obtener una solución dentro del dominio de los números reales. A continuación se presentan dos alternativas posibles para transformar la ecuación de números complejos a números reales.

4.2.1 Solución de la forma compleja a real usando identidades hiperbólicas

La primera alternativa presentada con la cual es posible transformar de magnitud compleja a real la ecuación 4.21 es auxiliándose de la definición de seno y coseno hiperbólico. Primero, se eliminan los paréntesis de la ecuación 4.21 haciendo uso de la propiedad distributiva:

$$x = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega i} \right) e^{\omega i t} + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega i} \right) e^{-\omega i t} = \frac{x_0}{2} e^{\omega i t} + \frac{v_0}{2\omega i} e^{\omega i t} + \frac{x_0}{2} e^{-\omega i t} - \frac{v_0}{2\omega i} e^{-\omega i t}$$

La definición de seno hiperbólico $\sinh(u) = (e^u - e^{-u}) / 2$ y coseno hiperbólico $\cosh(u) = (e^u + e^{-u}) / 2$ implica la necesidad factorizar en función de $e^{\omega i t}$ y $e^{-\omega i t}$ para poder denotar a x en función de estas identidades. Cuando se factoriza x_0 y $(v_0 / \omega i)$ se obtiene una expresión capaz de representarse como seno y coseno hiperbólico al designar $u = \omega t i$:

$$x = \frac{x_0}{2} e^{\omega it} + \frac{v_0}{2\omega i} e^{\omega it} + \frac{x_0}{2} e^{-\omega it} - \frac{v_0}{2\omega i} e^{-\omega it}$$

↓

$$x = x_0 \underbrace{\left(\frac{e^{\omega it} + e^{-\omega it}}{2} \right)}_{\cosh(\omega it)} + \frac{v_0}{\omega i} \underbrace{\left(\frac{e^{\omega it} - e^{-\omega it}}{2} \right)}_{\sinh(\omega it)}$$

$$\therefore x = x_0 \cosh(\omega it) + \frac{v_0}{\omega i} \sinh(\omega it) \tag{4.22}$$

Aunque se sigue manteniendo cantidades imaginarias en la solución, existen otras fórmulas que permiten relacionar el seno y coseno hiperbólico, con el seno y coseno trigonométrico mediante (Spiegel, Lipschutz, & Liu, Fórmulas y Tablas de Matemática aplicada, 2010, pág. 61):

$$\sinh(iz) = i \sen(z) \quad \text{y} \quad \cosh(iz) = \cos(z)$$

Aplicando estas fórmulas a la ecuación 4.22 se obtiene una solución que está expresada en el campo de los números reales al considerar $z = \omega t$:

$$x = x_0 \frac{\cosh(\omega it)}{\cos(\omega t)} + \frac{v_0}{\omega i} \frac{\sinh(\omega it)}{i \sen(\omega t)}$$

$$x = x_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega i} \right) i \sen(\omega t)$$

$$\therefore \mathbf{x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sen(\omega t)} \tag{4.23}$$

La ecuación 4.23 representa la solución a $m\ddot{x} + kx = 0$ una vez utilizadas las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$. A diferencia de la ecuación de partida (ecuación 4.21), la ecuación 4.23 no presenta números imaginarios, por ello, es una función fácil de representar en el dominio de los reales.

4.2.2 Solución de la forma compleja a real usando la fórmula de Euler

La segunda alternativa presentada con la cual es posible transformar de magnitud compleja a real la ecuación 4.21 es auxiliándose de la fórmula de Euler: $e^{a \pm bi} = e^a [\cos(b) \pm i \operatorname{sen}(b)]$, siendo a y b dos magnitudes reales e i la cantidad imaginaria con un valor igual a $\sqrt{-1}$.

Al utilizar la fórmula de Euler en $x = C_1 e^{\omega it} + C_2 e^{-\omega it}$ se obtiene:

$$x = C_1 \underbrace{[\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)]}_{e^{\omega it}} + C_2 \underbrace{[\cos(\omega t) - i \operatorname{sen}(\omega t)]}_{e^{-\omega it}}$$

Haciendo uso de la propiedad distributiva:

$$x = C_1 \cos(\omega t) + i C_1 \operatorname{sen}(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) - i C_2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Factorizando $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$ se obtiene:

$$x = (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen}(\omega t) \quad (4.24)$$

Para aplicar las condiciones iniciales representadas por $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, es necesario derivar la ecuación 4.24 con respecto a t para obtener la función \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} \\ \therefore &= \frac{d}{dt} [(C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen}(\omega t)] \\ \therefore &= \frac{d}{dt} [(C_1 + C_2) \cos(\omega t)] + \frac{d}{dt} [i(C_1 - C_2) \operatorname{sen}(\omega t)] \\ \therefore &= (C_1 + C_2) \frac{d}{dt} [\cos(\omega t)] + i(C_1 - C_2) \frac{d}{dt} [\operatorname{sen}(\omega t)] \\ \therefore &= (C_1 + C_2) [-\omega \operatorname{sen}(\omega t)] + i(C_1 - C_2) [\omega \cos(\omega t)] \\ \therefore \dot{x} &= -\omega(C_1 + C_2) \operatorname{sen}(\omega t) + \omega i(C_1 - C_2) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x = (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \operatorname{sen}(\omega t)$:

$$\begin{aligned} x_0 &= (C_1 + C_2) \underbrace{\cos(0)}_1 + i(C_1 - C_2) \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_0 \\ \therefore x_0 &= C_1 + C_2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x} = -\omega(C_1 + C_2)\text{sen}(\omega t) + \omega i(C_1 - C_2)\text{cos}(\omega t)$:

$$v_0 = -\omega(C_1 + C_2) \underbrace{\text{sen}(0)}_0 + \omega i(C_1 - C_2) \underbrace{\text{cos}(0)}_1$$

$$v_0 = \omega i(C_1 - C_2)$$

$$\therefore v_0 = \omega i C_1 - \omega i C_2 \quad (4.27)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones 4.26 y 4.27, puede observarse que es el mismo sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones 4.16 y 4.17, así que, las soluciones que resuelven simultáneamente a las ecuaciones 4.16 y 4.17 pueden aplicarse a 4.26 y 4.27.

Sustituyendo los valores C_1 y C_2 en la ecuación 4.24 y simplificando se encuentra la solución a $m\ddot{x} + kx = 0$:

$$\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \text{sen}(\omega t) \\ \therefore &= \left[\left(\frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega i} \right) + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega i} \right) \right] \cos(\omega t) + i \left[\left(\frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega i} \right) - \left(\frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega i} \right) \right] \text{sen}(\omega t) \\ \therefore &= \left[\frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega i} + \frac{x_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega i} \right] \cos(\omega t) + i \left[\frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega i} - \frac{x_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega i} \right] \text{sen}(\omega t) \\ \therefore &= \left[\frac{x_0}{2} + \frac{x_0}{2} \right] \cos(\omega t) + i \left[\frac{v_0}{2\omega i} + \frac{v_0}{2\omega i} \right] \text{sen}(\omega t) \\ \therefore &= x_0 \cos(\omega t) + i \left(\frac{v_0}{\omega i} \right) \text{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

Al simplificar se obtiene la misma solución que la obtenida al usar identidades hiperbólicas:

$$\mathbf{x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t)}$$

Para los problemas que plantean un modelo matemático masa – resorte – amortiguador, o como en este caso masa – resorte, la respuesta dinámica buscada puede ser sólo el desplazamiento que experimenta el sistema estructural idealizado, sin embargo, un correcto proceso de derivación de la ecuación $x(t)$ arroja la velocidad $\dot{x}(t)$ y la aceleración $\ddot{x}(t)$.

Para el caso de vibración libre sin amortiguamiento, estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} = \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right] \\
 \vdots &= x_0 \frac{d}{dt} [\cos(\omega t)] + \frac{v_0}{\omega} \frac{d}{dt} [\text{sen}(\omega t)] \\
 \vdots &= x_0 [-\omega \text{sen}(\omega t)] + \frac{v_0}{\omega} [\omega \cos(\omega t)] \\
 \vdots &= -\omega x_0 \text{sen}(\omega t) + v_0 \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{v(t)} = \dot{\mathbf{x(t)}} = \mathbf{v_0 \cos(\omega t) - \omega x_0 \text{sen}(\omega t)} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{d}{dt} [v_0 \cos(\omega t) - \omega x_0 \text{sen}(\omega t)] \\
 \vdots &= v_0 \frac{d}{dt} [\cos(\omega t)] - \omega x_0 \frac{d}{dt} [\text{sen}(\omega t)] \\
 \vdots &= v_0 [-\omega \text{sen}(\omega t)] - \omega x_0 [\omega \cos(\omega t)] \\
 \vdots &= -\omega v_0 \text{sen}(\omega t) - \omega^2 x_0 \cos(\omega t)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{a(t)} = \ddot{\mathbf{x(t)}} = \mathbf{-\omega v_0 \text{sen}(\omega t) - \omega^2 x_0 \cos(\omega t)} \quad (4.29)$$

El proceso de derivación resulta sencillo para este caso, pero para casos con amortiguamiento o donde el sistema presenta una fuerza de excitación externa, la respuesta dinámica $x(t)$ se torna compleja. Para los casos de los capítulos siguientes únicamente se dará la respuesta dinámica $x(t)$ para no detenerse en el cálculo de $\dot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$.

4.3 Amplitud Máxima de la Respuesta Dinámica

Las fórmulas que representan la respuesta dinámica (desplazamiento, velocidad y aceleración) pueden ser llevada a un modelo del tipo:

$$A \text{sen}(\theta) + B \text{cos}(\theta) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - \phi) \quad ; \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{A}{B} \right) \quad (4.30)$$

$$A \sin(\theta) + B \cos(\theta) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\theta + \phi) \quad ; \quad \phi = \tan^{-1} \left(\frac{B}{A} \right) \quad (4.31)^{4.2}$$

Donde la amplitud máxima está dada por $\sqrt{A^2 + B^2}$. Efectuando esta operación, se obtiene que las amplitudes máximas para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son respectivamente:

$$|x_{\text{máx}}| = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad (4.32)$$

$$|v_{\text{máx}}| = \sqrt{v_0^2 + (\omega x_0)^2} \quad (4.33)$$

$$|a_{\text{máx}}| = \sqrt{(\omega v_0)^2 + (\omega^2 x_0)^2} \quad (4.34)^{4.3}$$

A continuación se presenta un ejemplo de la representación gráfica de la respuesta dinámica de un sistema masa – resorte en vibración libre.

^{4.2} La decisión de utilizar la ecuación 4.30 o 4.31 radicaré en las preferencias de quien resuelva el problema.

^{4.3} Las fórmulas 4.32, 4.33 y 4.34 también se pueden obtener por medio del criterio de la primera derivada visto en cursos de cálculo diferencial.

4.4 Representación Gráfica de la Respuesta Dinámica

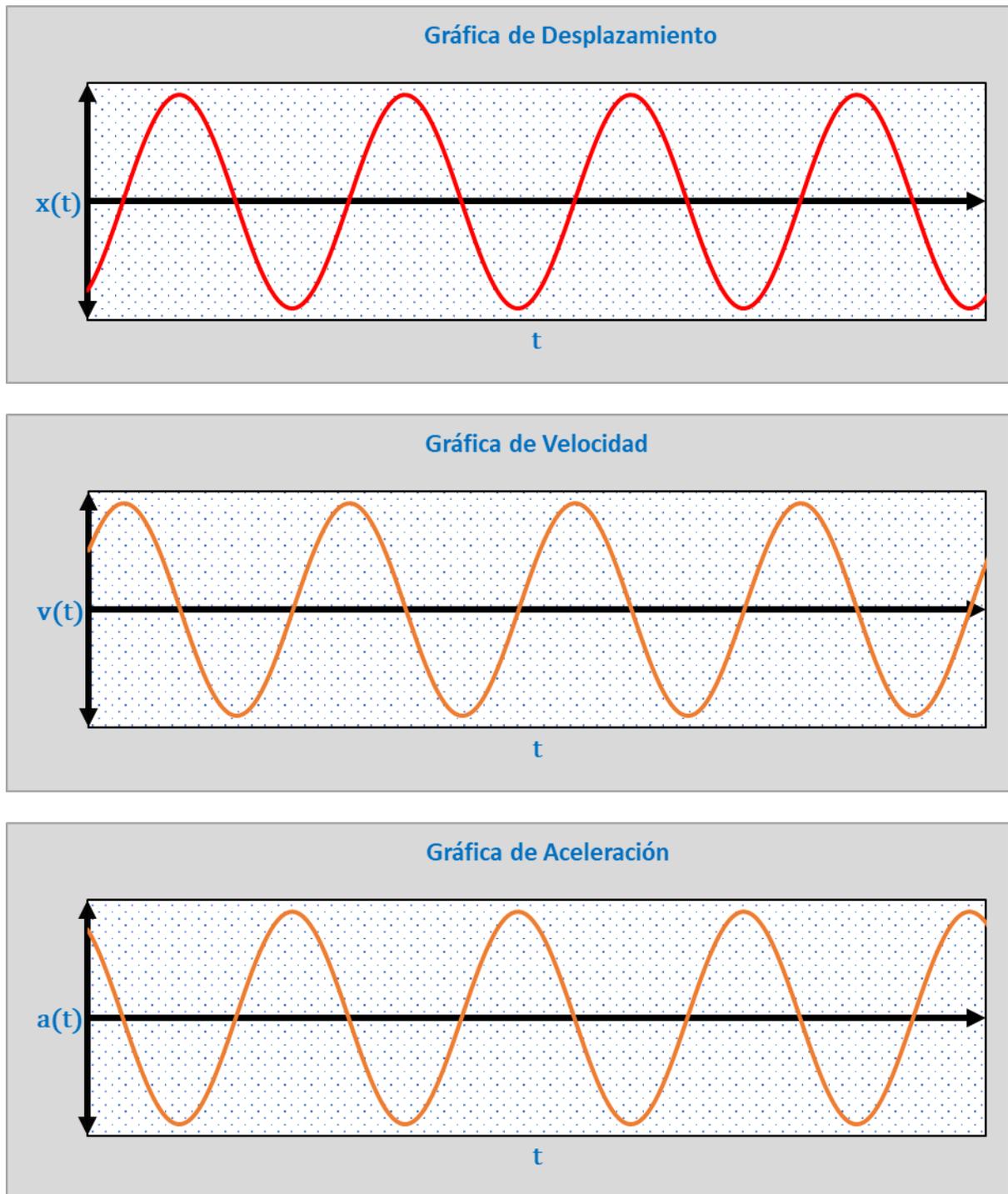


Figura IV.1. Gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración en vibración libre sin amortiguamiento.

Capítulo V: Vibración Libre con Amortiguamiento en Sistemas de 1 G. D. L.

- 5.1 EDO de la Vibración Libre con Amortiguamiento
- 5.2 Parámetros Intrínsecos
 - 5.2.1 Amortiguamiento crítico (c_r)
 - 5.2.2 Relación de amortiguamiento (ξ)
 - 5.2.3 Frecuencia natural amortiguada
- 5.3 Solución de la EDO de Vibración Libre con Amortiguamiento.
- 5.4 Fenómeno de Pulso Muerto
- 5.5 EDO de Vibración Libre con Amortiguamiento Crítico ($\xi = 1$)
- 5.6 EDO de Vibración Libre con Sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)
 - 5.6.1 Solución con funciones exponenciales
- 5.7 EDO de Vibración Libre con Subamortiguamiento ($\xi < 1$)
 - 5.7.1 Curvas envolventes
 - 5.7.2 Frecuencia y periodo subamortiguado
 - 5.7.3 Decremento logarítmico
- 5.8 Soluciones Finales y Ejemplos de las Gráficas de $x(t)$
 - 5.8.1 Representación gráfica de la respuesta dinámica con amortiguamiento crítico
 - 5.8.2 Representación gráfica de la respuesta dinámica con sobreamortiguamiento
 - 5.8.3 Representación gráfica de la respuesta dinámica con subamortiguamiento

V. Vibración Libre con Amortiguamiento en Sistemas de 1 G. D. L.

5.1 EDO de la Vibración Libre con Amortiguamiento

Se parte de la EDO que representa el sistema masa – resorte - amortiguador de una estructura con un grado de libertad: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$. La vibración libre amortiguada exige que la fuerza externa sea nula ($P(t) = 0$), por lo tanto, la EDO asociada a este fenómeno es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (5.1)$$

Esta ecuación representa la vibración libre con amortiguamiento de un sistema de 1 G. D. L. cuando se considera que las deformaciones ocurren en el rango elástico.

De igual forma, se siguen considerando las mismas condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 \quad y \quad \dot{x}(0) = v_0$$

Antes de resolver esta EDO, es oportuno detallar ciertos parámetros que permiten reescribir $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ de una manera diferente, con el objetivo de presentar la ecuación como se utiliza para fines de dinámica estructural.

Durante este capítulo primero se resolverán los casos de estudio y al finalizar el proceso analítico se presentarán las gráficas correspondientes de $x(t)$.

5.2 Parámetros Intrínsecos

Se denominan parámetros intrínsecos a aquellos parámetros presentes en el sistema masa - resorte - amortiguador cuando se presentan vibraciones amortiguadas (libre o forzada).

Dichos parámetros son:

- ✚ Amortiguamiento crítico c_r .
- ✚ Relación de amortiguamiento ξ .
- ✚ Frecuencia natural amortiguada ω_D .

5.2.1 Amortiguamiento crítico (c_r)

El amortiguamiento crítico de un sistema de 1 G.D.L. representa un parámetro propio del sistema estructural cuyo valor es:

$$c_r = 2m\omega \quad (5.2)$$

5.2.2 Relación de amortiguamiento (ξ)

Se define como relación de amortiguamiento (ξ) de un sistema estructural al cociente del amortiguamiento propio del sistema (c) entre el valor del amortiguamiento crítico (c_r), es decir:

$$\xi = \frac{c}{c_r} \quad (5.3)$$

El amortiguamiento propio del sistema estructural, en función de la relación de amortiguamiento es:

$$c = \xi c_r \quad (5.4)$$

Esta relación de amortiguamiento nos permite relacionar los componentes masa, resorte y amortiguador de la siguiente forma:

$$c = 2\xi m\omega \quad (5.5)^{5.1}$$

Si definimos valores para los que la relación de amortiguamiento sea igual, menor o mayor a la unidad, el sistema masa – resorte - amortiguador puede presentar tres casos:

- i. Si $\xi = 1$ el sistema masa – resorte - amortiguador presenta *amortiguamiento crítico*.
- ii. Si $\xi > 1$ el sistema masa – resorte - amortiguador está *sobreamortiguado*.
- iii. Si $\xi < 1$ el sistema masa – resorte - amortiguador está *subamortiguado*.

El caso número iii es el más representativo de la dinámica estructural debido a que la mayoría de los sistemas estructurales en ingeniería civil presentan subamortiguamiento.

^{5.1} Relaciona los componente masa-resorte-amortiguador porque la frecuencia natural del sistema es $\omega = \sqrt{k/m}$.

5.2.3 Frecuencia natural amortiguada

También llamada frecuencia sobreamortiguada o subamortiguada, dependiendo del valor de la relación de amortiguamiento presente en el sistema estructural estudiado. Este parámetro llega a ser confundido con la frecuencia natural de la estructura ω , aunque difiere de ella, porque ésta puede ser nula, mayor o menor según la relación de amortiguamiento.

Cuando el sistema presenta sobreamortiguamiento ($\xi > 1$) se hace presente la frecuencia sobreamortiguada:

$$\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (5.6)$$

Cuando el sistema está críticamente amortiguado ($\xi = 1$) se hace presente la frecuencia críticamente amortiguada:

$$\omega_D = 0 \quad (5.7)^{5.2}$$

Y cuando el sistema está subamortiguado ($\xi < 1$) se hace presente la frecuencia subamortiguada:

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (5.8)$$

Definidos los parámetros intrínsecos necesarios dentro de la vibración libre amortiguada, lo siguiente es dar solución a la ecuación diferencial $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ en los tres casos posibles mencionados con anterioridad.

5.3 Solución de la EDO de Vibración Libre con Amortiguamiento.

Con la finalidad de transformar los componentes masa – resorte - amortiguador a parámetros intrínsecos, se dividen todos los términos entre la masa (m):

$$\begin{aligned} \frac{m}{m}\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{0}{m} \\ \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

^{5.2} Cuando se presenta este caso no suele utilizarse ω_D sino simplemente ω .

La frecuencia natural de la estructura está definida mediante $\omega^2 = k / m$ y el amortiguamiento propio del sistema por $c = 2\xi m \omega$, lo cual permite transformar la ecuación 5.9 a:

$$\ddot{x} + \underbrace{2\xi\omega}_{c/m} \dot{x} + \underbrace{\omega^2}_{k/m} x = 0 \quad (5.10)$$

Se propone como solución $x = e^{\lambda t}$ y sus derivadas sucesivas $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$ y $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$. La sustitución de estas funciones en la ecuación diferencial $\ddot{x} + 2\xi\omega \dot{x} + \omega^2 x = 0$ conducen a una ecuación algebraica de segundo grado en términos de λ haciendo una correcta simplificación de sus términos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\xi\omega \dot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ (\lambda^2 e^{\lambda t}) + 2\xi\omega(\lambda e^{\lambda t}) + \omega^2(e^{\lambda t}) &= 0 \\ e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2) &= 0 \\ \lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Para encontrar las raíces de la $\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0$ se procede a completar el trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 &= 0 \\ \lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 + (\xi\omega)^2 &= (\xi\omega)^2 \\ \lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + (\xi\omega)^2 &= (\xi\omega)^2 - \omega^2 \\ (\lambda + \xi\omega)^2 &= (\xi\omega)^2 - \omega^2 \\ \pm\sqrt{(\lambda + \xi\omega)^2} &= \pm\sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2} \\ \lambda + \xi\omega &= \pm\sqrt{\omega^2(\xi^2 - 1)} \\ \lambda + \xi\omega &= \pm\omega\sqrt{\xi^2 - 1} \\ \therefore \lambda &= -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\xi\omega + \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (5.13)$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -\xi\omega - \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (5.14)$$

Asignando el parámetro intrínseco de la frecuencia sobreamortiguada $\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$ a λ_1 y λ_2 se obtiene una manera más compacta de representar estas soluciones:

$$\lambda_1 = -\xi\omega + \omega_D \quad (5.15)$$

$$\lambda_2 = -\xi\omega - \omega_D \quad (5.16)$$

Al conocer los valores λ_1 y λ_2 se obtiene la solución, a la ecuación diferencial, que representa la vibración libre con amortiguamiento cuyo modelo es $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$:

$$x = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega_D)t} \quad (5.17)$$

5.4 Fenómeno de Pulso Muerto

Sí se expresan como números reales:

$$-\alpha_1 = -\xi\omega + \omega_D \quad (5.18)$$

$$-\alpha_2 = -\xi\omega - \omega_D \quad (5.19)$$

Se obtiene:

$$x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t} \quad (5.20)$$

Con los exponentes positivos, la ecuación $x = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ se transforma en:

$$x = \frac{C_1}{e^{\alpha_1 t}} + \frac{C_2}{e^{\alpha_2 t}} \quad (5.21)$$

Se percibe que la vibración desaparece dado que no existen funciones trigonométricas. A dicho caso de estudio se le denomina *pulso muerto*. Es apreciable que cuando $t \rightarrow \infty$ la amplitud $A \rightarrow 0$, en forma exponencial, excluyendo cualquier tipo de oscilación (Huang, 1976).

5.5 EDO de Vibración Libre con Amortiguamiento Crítico ($\xi = 1$)

Un sistema masa – resorte - amortiguador que presenta vibración libre con amortiguamiento crítico es aquel donde la relación de amortiguamiento es igual a 1 ($\xi = 1$). Bajo esta consideración la frecuencia natural amortiguada es $\omega_D = 0$.

La ecuación $x = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}$ queda simplificada a:

$$x = C_1 e^{-\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \quad (5.22)$$

Esta ecuación no puede resolverse por el hecho de que se presenta dependencia lineal en las constantes C_1 y C_2 . Esta dependencia lineal se elimina multiplicando cualquiera de las dos constantes por t , en este caso se multiplica a C_1 :

$$x = C_1 t e^{-\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \quad (5.23)$$

Para aplicar las condiciones iniciales representadas por $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ es necesario derivar la ecuación $x = C_1 t e^{-\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ con respecto a t , para obtener la función \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} = \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(C_1 t e^{-\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) \\ \vdots &= C_1 \frac{d}{dt}(t e^{-\omega t}) + C_2 \frac{d}{dt}(e^{-\omega t}) \\ \vdots &= C_1 \left[e^{-\omega t} \frac{d}{dt}(t) + t \frac{d}{dt}(e^{-\omega t}) \right] + C_2 (-\omega e^{-\omega t}) \\ \vdots &= C_1 [e^{-\omega t}(1) + t(-\omega e^{-\omega t})] + C_2 (-\omega e^{-\omega t}) \\ \vdots &= C_1 (e^{-\omega t} - \omega t e^{-\omega t}) + C_2 (-\omega e^{-\omega t}) \\ \vdots &= C_1 e^{-\omega t} (1 - \omega t) - \omega e^{-\omega t} C_2 \\ \therefore \dot{x} &= C_1 e^{-\omega t} (1 - \omega t) - \omega e^{-\omega t} C_2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x = C_1 t e^{-\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$:

$$\begin{aligned} x_0 &= C_1(0)e^{-\omega(0)} + C_2 e^{-\omega(0)} \\ \vdots &= \underbrace{C_1(0)e^{-\omega(0)}}_0 + C_2 \underbrace{e^{-\omega(0)}}_1 \\ \therefore C_2 &= x_0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ y $C_2 = x_0$ en $\dot{x} = C_1 e^{-\omega t} (1 - \omega t) - \omega e^{-\omega t} C_2$:

$$\begin{aligned} v_0 &= C_1 e^{-\omega(0)} [1 - \omega(0)] - \omega e^{-\omega(0)} x_0 \\ \vdots &= C_1 \underbrace{e^0 (1 - 0)}_1 - \omega \underbrace{e^0}_1 x_0 \end{aligned}$$

$$\dot{x} = C_1 - \omega x_0$$

$$\therefore C_1 = v_0 + \omega x_0 \quad (5.26)$$

Al sustituir $C_1 = v_0 + \omega x_0$ y $C_2 = x_0$ en $x = C_1 t e^{-\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ se obtiene la solución particular al problema de valor inicial, de vibración libre con amortiguamiento crítico, representado por la ecuación $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2 x = 0$:

$$x = C_1 t e^{-\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

$$\dot{x} = (v_0 + \omega x_0) t e^{-\omega t} + x_0 e^{-\omega t}$$

$$x(t) = e^{-\omega t} [(v_0 + \omega x_0)t + x_0] \quad (5.27)$$

5.6 EDO de Vibración Libre con Sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

Un sistema masa – resorte - amortiguador que presenta vibración libre con sobreamortiguamiento es aquel donde la relación de amortiguamiento es mayor a 1 ($\xi > 1$). Bajo esta consideración la frecuencia natural amortiguada es $\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$ conservándose así la ecuación $x = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}$ como la solución del problema de valor inicial.

La solución, determinados los valores de C_1 y C_2 , presenta dos formulas validas de escribirse:

✚ Solución como una ecuación compuesta de funciones exponenciales.

✚ Solución como ecuación compuesta de funciones hiperbólicas.

Primero se determina la solución en forma exponencial y posteriormente, como consecuencia de una manipulación algebraica de la función exponencial, se determina la solución expresada mediante funciones hiperbólicas.

5.6.1 Solución con funciones exponenciales

Para aplicar las condiciones iniciales representadas por las ecuaciones $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ es necesario derivar la ecuación $x = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}$ con respecto a t , para obtener la función \dot{x} :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt} \\ \therefore &= \frac{d}{dt} [C_1 e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}] \\ \therefore &= C_1 \frac{d}{dt} [e^{(-\xi\omega + \omega_D)t}] + C_2 \frac{d}{dt} [e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}] \\ \therefore \dot{x} &= C_1 (-\xi\omega + \omega_D) e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 (-\xi\omega - \omega_D) e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}\end{aligned}\quad (5.28)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}$:

$$\begin{aligned}x_0 &= C_1 e^{(-\xi\omega + \omega_D)(0)} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega_D)(0)} \\ x_0 &= C_1 \underset{1}{e^0} + C_2 \underset{1}{e^0} \\ \therefore C_1 + C_2 &= x_0\end{aligned}\quad (5.29)$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x} = C_1 (-\xi\omega + \omega_D) e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 (-\xi\omega - \omega_D) e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}$:

$$\begin{aligned}v_0 &= C_1 (-\xi\omega + \omega_D) e^{(-\xi\omega + \omega_D)(0)} + C_2 (-\xi\omega - \omega_D) e^{(-\xi\omega - \omega_D)(0)} \\ v_0 &= C_1 (-\xi\omega + \omega_D) \underset{1}{e^0} + C_2 (-\xi\omega - \omega_D) \underset{1}{e^0} \\ v_0 &= C_1 (-\xi\omega + \omega_D) + C_2 (-\xi\omega - \omega_D) \\ v_0 &= -\xi\omega C_1 + \omega_D C_1 - \xi\omega C_2 - \omega_D C_2 \\ v_0 &= -\xi\omega (C_1 + C_2) + \omega_D (C_1 - C_2)\end{aligned}$$

De la condición inicial $x(0) = x_0$ se determinó que $C_1 + C_2 = x_0$, entonces:

$$v_0 = -\xi\omega x_0 + \omega_D (C_1 - C_2)$$

Dejando de un lado de la ecuación las constantes y del otro lado los términos restantes:

$$\begin{aligned}
 v_0 &= -\xi\omega x_0 + \omega_D(C_1 - C_2) \\
 v_0 + \xi\omega x_0 &= \omega_D(C_1 - C_2) \\
 \therefore C_1 - C_2 &= \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

El sistema generado de ecuaciones 2 x 2 teniendo como incógnitas a C_1 y C_2 es:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ C_1 - C_2 = \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \end{cases}$$

Hay que notar lo conveniente que resulta resolver este sistema sumando ambas ecuaciones entre sí, ya que al hacerlo, se obtiene el valor de C_1 :

$$\begin{aligned}
 C_1 + C_2 + C_1 - C_2 &= x_0 + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \\
 2C_1 &= x_0 + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \\
 \therefore C_1 &= \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{2\omega_D} \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

Como se nota que $C_1 + C_2$ es el conjugado de $C_1 - C_2$, entonces el valor de C_2 es el conjugado de C_1 , es decir, $C_2 = \overline{C_1} = C_1^*$:

$$\therefore C_2 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{2\omega_D} \tag{5.32}$$

Sustituyendo $C_1 = (x_0 / 2) + (v_0 + \xi\omega x_0) / 2\omega_D$ y $C_2 = (x_0 / 2) - (v_0 + \xi\omega x_0) / 2\omega_D$ en $x = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}$ se obtiene la solución particular al problema de valor inicial, de vibración libre con sobreamortiguamiento, representado por la ecuación $\ddot{x} + 2\omega\xi\dot{x} + \omega^2x = 0$ con $\xi > 1$:

$$x = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{2\omega_D} \right) e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{2\omega_D} \right) e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}$$

$$\therefore = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{2\omega_D} \right) e^{-\xi\omega t} e^{\omega_D t} + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{2\omega_D} \right) e^{-\xi\omega t} e^{-\omega_D t}$$

$$\therefore \mathbf{x(t) = \frac{e^{-\xi\omega t}}{2} \left[\left(x_0 + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \right) e^{\omega_D t} + \left(x_0 - \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \right) e^{-\omega_D t} \right]} \quad (5.33)$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

5.6.2 Solución con funciones hiperbólicas

Para llegar a una solución con funciones hiperbólicas, primero se tienen que desarrollar los paréntesis de la ecuación 5.33 y después factorizar en función de los términos x_0 y $(v_0 + \xi\omega)/\omega_D$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{-\xi\omega t}}{2} \left[\left(x_0 + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \right) e^{\omega_D t} + \left(x_0 - \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \right) e^{-\omega_D t} \right] \\ \therefore &= \frac{e^{-\xi\omega t}}{2} \left[x_0 e^{\omega_D t} + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} e^{\omega_D t} + x_0 e^{-\omega_D t} - \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} e^{-\omega_D t} \right] \\ \therefore &= \frac{e^{-\xi\omega t}}{2} \left[x_0 (e^{\omega_D t} + e^{-\omega_D t}) + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} (e^{\omega_D t} - e^{-\omega_D t}) \right] \end{aligned}$$

Al utilizar la propiedad distributiva, se multiplica por $1/2$ dentro del corchete de las expresiones $e^{\omega_D t} + e^{-\omega_D t}$ y $e^{\omega_D t} - e^{-\omega_D t}$. Al hacer esto se obtiene $\cosh(\omega_D t)$ y $\sinh(\omega_D t)$:

$$\therefore = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \underbrace{\left(\frac{e^{\omega_D t} + e^{-\omega_D t}}{2} \right)}_{\cosh(\omega_D t)} + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \underbrace{\left(\frac{e^{\omega_D t} - e^{-\omega_D t}}{2} \right)}_{\sinh(\omega_D t)} \right]$$

$$\therefore \mathbf{x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) \right]} \quad (5.34)$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Las ecuaciones 5.33 y 5.34 deben dar la misma grafica $x(t)$ dado que son funciones iguales pero expresadas de diferente forma.

5.7 EDO de Vibración Libre con Subamortiguamiento ($\xi < 1$)

Un sistema masa - resorte - amortiguador que presenta vibración libre con subamortiguamiento es aquel donde la relación de amortiguamiento es menor a 1 ($\xi < 1$). Bajo esta consideración la frecuencia natural amortiguada $\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$ no es válida haciendo necesario un cambio en ella.

Como $\xi < 1$ entonces:

$$\begin{aligned} \omega_D &= \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \\ \omega_D &= \omega \sqrt{(-1) (-1)(\xi^2 - 1)} \\ \omega_D &= \omega \sqrt{(-1)(1 - \xi^2)} \\ \omega_D &= \omega \underbrace{\sqrt{(-1)}}_i \sqrt{1 - \xi^2} \\ \omega_D &= \omega i \sqrt{1 - \xi^2} \end{aligned} \tag{5.35}^{5.3}$$

La solución, de manera simple, puede obtenerse modificando la solución al problema de valor inicial con sobreamortiguamiento mediante fórmulas que relacionen funciones hiperbólicas con trigonométricas.

Lo primero es sustituir la frecuencia subamortiguada $\omega_D = \omega i \sqrt{1 - \xi^2}$ en $x(t) = e^{-\xi\omega t} \{x_0 \cosh(\omega_D t) + [(v_0 + \xi\omega) / \omega_D] \sinh(\omega_D t)\}$. Posteriormente se debe seguir transformando la ecuación hasta poder utilizar $\sinh(iu) = i \operatorname{sen}(u)$ y $\cosh(iu) = \cos(u)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega i \sqrt{1 - \xi^2} t) + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega i \sqrt{1 - \xi^2}} \sinh(\omega i \sqrt{1 - \xi^2} t) \right] \\ \therefore &= e^{-\xi\omega t} \left\{ \underbrace{x_0 \cosh[i(\omega \sqrt{1 - \xi^2} t)]}_{\cos(\omega \sqrt{1 - \xi^2} t)} + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega i \sqrt{1 - \xi^2}} \underbrace{\sinh[i(\omega \sqrt{1 - \xi^2} t)]}_{i \operatorname{sen}(\omega \sqrt{1 - \xi^2} t)} \right\} \end{aligned}$$

^{5.3} Este es el valor de la frecuencia subamortiguada a partir de la frecuencia sobreamortiguada.

$$\dot{x} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega i\sqrt{1-\xi^2}} i \operatorname{sen}(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) \right]$$

$$\dot{x} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} \operatorname{sen}(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) \right]$$

El término $\omega\sqrt{1-\xi^2}$ es la frecuencia subamortiguada, e igualmente, puede representarse por ω_D siempre y cuando se indique que la naturaleza del sistema es subamortiguado $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$:

$$\dot{x} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos\left(\underbrace{\omega\sqrt{1-\xi^2}t}_{\omega_D}\right) + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\underbrace{\omega\sqrt{1-\xi^2}}_{\omega_D}} \operatorname{sen}\left(\underbrace{\omega\sqrt{1-\xi^2}t}_{\omega_D}\right) \right]$$

$$\therefore \mathbf{x}(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\mathbf{x}_0 \cos(\omega_D t) + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \operatorname{sen}(\omega_D t) \right] \quad (5.36)$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

La manera convencional en cómo se obtiene esta solución es mediante un procedimiento análogo a como se hizo para obtener la solución a un sistema sobreamortiguado. Para ello, como denotamos que $\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1} = \omega i\sqrt{1-\xi^2}$ la ecuación de la que se parte para calcular la solución es: $x = \underbrace{C_1 e^{(-\xi\omega + \omega_D)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega_D)t}}_{\text{EDO para sobreamortiguamiento}} = \underbrace{C_1 e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})t}}_{\text{EDO para subamortiguamiento}}$.

Para aplicar las condiciones iniciales representadas por $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ es necesario derivar la ecuación $x = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})t}$ con respecto a t , para obtener la función \dot{x} :

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \left[C_1 e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} \right]$$

$$\dot{x} = C_1 \frac{d}{dt} \left[e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} \right] + C_2 \frac{d}{dt} \left[e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} \right]$$

$$\therefore \dot{x} = C_1 \left(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2} \right) e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + C_2 \left(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2} \right) e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} \quad (5.37)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})t}$:

$$x_0 = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})(0)} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})(0)}$$

$$x_0 = C_1 e_{\omega}^0 + C_2 e_{\omega}^0$$

$$\therefore x_0 = C_1 + C_2 \quad (5.38)$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x} = C_1(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + C_2(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})t}$:

$$v_0 = C_1(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})(0)} + C_2(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})(0)}$$

$$v_0 = C_1(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})e_{\omega}^0 + C_2(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})e_{\omega}^0$$

$$v_0 = C_1(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2}) + C_2(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})$$

Dejando de un lado de la ecuación las constantes y del otro lado los términos restantes:

$$v_0 = -\xi\omega C_1 + \omega i\sqrt{1-\xi^2}C_1 - \xi\omega C_2 - \omega i\sqrt{1-\xi^2}C_2$$

$$v_0 = -\xi\omega(C_1 + C_2) + \omega i\sqrt{1-\xi^2}(C_1 - C_2)$$

Como $C_1 + C_2 = x_0$:

$$v_0 = -\xi\omega x_0 + \omega i\sqrt{1-\xi^2}(C_1 - C_2)$$

$$v_0 + \xi\omega x_0 = \omega i\sqrt{1-\xi^2}(C_1 - C_2)$$

$$\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega i\sqrt{1-\xi^2}} = C_1 - C_2$$

$$\left(\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega i\sqrt{1-\xi^2}}\right) \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = C_1 - C_2$$

$$\frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{\omega i^2 \sqrt{1-\xi^2}} = C_1 - C_2$$

$$-\frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} = C_1 - C_2$$

Y como se definió que la frecuencia subamortiguada es $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$:

$$\therefore C_1 - C_2 = -\frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{\omega_D} \quad (5.39)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones 2 x 2 generado es:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ C_1 - C_2 = -\frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{\omega_D} \end{cases}$$

Al sumar y restar ambas ecuaciones se logra obtener el valor de la constante C_1 :

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_1 - C_2 &= x_0 - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{\omega_D} \\ 2C_1 &= x_0 - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{\omega_D} \\ \therefore C_1 &= \frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Como se nota que $C_1 + C_2$ es el conjugado de $C_1 - C_2$, entonces el valor de C_2 es el conjugado de C_1 , es decir, $C_2 = \overline{C_1} = C_1^*$:

$$\therefore C_2 = \frac{x_0}{2} + \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \quad (5.41)$$

Sustituyendo $C_1 = (x_0 / 2) - (v_0 + \xi\omega x_0)i / 2\omega_D$ y $C_2 = (x_0 / 2) + (v_0 + \xi\omega x_0)i / 2\omega_D$ en $x = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})t}$ se obtiene la solución particular al problema de valor inicial, de vibración libre con subamortiguamiento, representado por la ecuación $\ddot{x} + 2\omega\xi\dot{x} + \omega^2x = 0$ con $\xi < 1$:

$$x = C_1 e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + C_2 e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})t}$$

$$\begin{aligned}
\therefore &= \left(\frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right) e^{(-\xi\omega + \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + \left(\frac{x_0}{2} + \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right) e^{(-\xi\omega - \omega i\sqrt{1-\xi^2})t} \\
\therefore &= \left[\frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] e^{-\xi\omega t} e^{(\omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + \left[\frac{x_0}{2} + \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] e^{-\xi\omega t} e^{-(\omega i\sqrt{1-\xi^2})t} \\
\therefore &= e^{-\xi\omega t} \left\{ \left[\frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] e^{(\omega i\sqrt{1-\xi^2})t} + \left[\frac{x_0}{2} + \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] e^{-(\omega i\sqrt{1-\xi^2})t} \right\}
\end{aligned}$$

Haciendo uso de la fórmula de Euler: $e^{\pm\theta i} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\therefore &= e^{-\xi\omega t} \left\{ \left[\frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] \left[\cos\left(\frac{\omega\sqrt{1-\xi^2}t}{\omega_D}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\sqrt{1-\xi^2}t}{\omega_D}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{x_0}{2} + \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] \left[\cos\left(\frac{\omega\sqrt{1-\xi^2}t}{\omega_D}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\sqrt{1-\xi^2}t}{\omega_D}\right) \right] \right\} \\
\therefore &= e^{-\xi\omega t} \left\{ \left[\frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] [\cos(\omega_D t) + i \operatorname{sen}(\omega_D t)] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{x_0}{2} + \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] [\cos(\omega_D t) - i \operatorname{sen}(\omega_D t)] \right\} \\
\therefore &= e^{-\xi\omega t} \left\{ \left[\frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] \cos(\omega_D t) + \left[\frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] i \operatorname{sen}(\omega_D t) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{x_0}{2} + \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] \cos(\omega_D t) - \left[\frac{x_0}{2} + \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] i \operatorname{sen}(\omega_D t) \right\} \\
\therefore &= e^{-\xi\omega t} \left\{ \left[\frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} + \frac{x_0}{2} + \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] \cos(\omega_D t) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} - \frac{x_0}{2} - \frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{2\omega_D} \right] i \operatorname{sen}(\omega_D t) \right\} \\
\therefore &= e^{-\xi\omega t} \left\{ x_0 \cos(\omega_D t) - \left[\frac{(v_0 + \xi\omega x_0)i}{\omega_D} \right] i \operatorname{sen}(\omega_D t) \right\}
\end{aligned}$$

$$\therefore = e^{-\xi\omega t} \left\{ x_0 \cos(\omega_D t) - \left[\frac{(v_0 + \xi\omega x_0)^{-1}}{\omega_D} \right] \text{sen}(\omega_D t) \right\}$$

$$\therefore x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega_D t) + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \text{sen}(\omega_D t) \right]$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

5.7.1 Curvas envolventes

El movimiento subamortiguado presenta un movimiento de tipo oscilatorio, mas no periódico dado que las amplitudes decrecen en ciclos sucesivos. Sin embargo, las oscilaciones se presentan en intervalos iguales de tiempo, dicha situación es conocida como periodo de vibración con amortiguación (Paz, 1992, pág. 29). Para la figura V.3 (página 86), las gráficas que representan las líneas punteadas son:

$$A_1(t) = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\right)^2} e^{-\xi\omega t} \quad (5.42)$$

$$A_2(t) = - \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\right)^2} e^{-\xi\omega t} \quad (5.43)$$

Y la manera de obtenerlas radica en transformar la ecuación:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega_D t) + \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \text{sen}(\omega_D t) \right]$$

A cualquiera de las siguientes dos formas:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \text{sen}(\omega_D t) + x_0 \cos(\omega_D t) \right] = [] e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \phi) \quad (5.44)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D x_0} \right) \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + x_0 \cos(\omega_D t) \right] = \left[\sqrt{\left(\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \right)^2 + (x_0)^2} \right] e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t + \phi) \quad (5.45)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_D x_0}{v_0 + \xi\omega x_0} \right) \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

El parámetro $e^{-\xi\omega t}$ indica la disminución del desplazamiento exponencialmente conforme $t \rightarrow \infty$. Las ecuaciones 5.44 y 5.45 reciben el nombre de curvas envolventes (Chopra, 2014, pág. 50). El lugar geométrico de los puntos de las curvas exponenciales (curvas envolventes) aparecen un poco a la derecha de los puntos de la amplitud máxima; aunque la diferencia es tan pequeña que, para fines prácticos, puede considerarse que estos coinciden en el mismo punto (Paz, 1992, pág. 31).

5.7.2 Frecuencia y periodo subamortiguado

Para estructuras en ingeniería civil, siendo las más comunes edificios, la relación de amortiguamiento oscila en un intervalo del 2 al 20 por ciento ($0.02 \leq \xi \leq 0.2$), por tal motivo es importante destacar que el periodo natural de vibración libre sin amortiguamiento es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.46)$$

Mientras que el de una estructura subamortiguada es:

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (5.47)$$

Muchas veces, por practicidad, es usual denotar que la frecuencia subamortiguada es igual a la frecuencia natural de la estructura, es decir:

$$\omega = \omega_D \quad (5.48)$$

Ya que si se considera que $\xi = 0.02$ la frecuencia es $\omega \approx 0.9998 \omega$; si se considera $\xi = 0.2$ la frecuencia es $\omega \approx 0.979 \omega$.

5.7.3 Decremento logarítmico

El decremento logarítmico δ , se utiliza para obtener por medio de una expresión matemática, el valor de la relación de amortiguamiento ξ . Para obtener esta fórmula se parte de la solución de un sistema masa – resorte - amortiguador con subamortiguamiento, dicho de otra manera, el caso cuando $\xi < 1$. Para ello es necesario partir de la ecuación:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t + \phi) \quad (5.49)$$

Siendo:

$[x(t)]$ = la respuesta dinámica subamortiguada en vibración libre.

$$[A] = \sqrt{\left(\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D}\right)^2 + (x_0)^2}.$$

$$[\omega_D] = \omega\sqrt{1 - \xi^2}.$$

$$[\phi] = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_D x_0}{v_0 + \xi\omega x_0}\right)$$

Se empieza por determinar dónde y cada cuánto intervalo de tiempo ocurren los máximos y mínimos valores. Para ello se utiliza el criterio de la primera derivada, así que derivando la ecuación 5.49 con respecto a t , para obtener la función $\dot{x}(t)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{dx}{dt} = A \left\{ [\text{sen}(\omega_D t + \phi)] \frac{d(e^{-\xi\omega t})}{dt} + e^{-\xi\omega t} \frac{d[\text{sen}(\omega_D t + \phi)]}{dt} \right\} \\ \therefore &= A \{ -\xi\omega [\text{sen}(\omega_D t + \phi)] e^{-\xi\omega t} + \omega_D [\text{cos}(\omega_D t + \phi)] e^{-\xi\omega t} \} \\ \therefore \dot{x}(t) &= Ae^{-\xi\omega t} [-\xi\omega \text{sen}(\omega_D t + \phi) + \omega_D \text{cos}(\omega_D t + \phi)] \quad (5.50) \end{aligned}$$

Igualando la ecuación 5.50 a cero y despejando $\omega_D t$, se logra conocer el desplazamiento máximo en la función $x(t)$:

$$\begin{aligned} 0 &= Ae^{-\xi\omega t} \{-\xi\omega \text{sen}(\omega_D t + \phi) + \omega_D \text{cos}(\omega_D t + \phi)\} \\ 0 &= -\xi\omega \text{sen}(\omega_D t + \phi) + \omega_D \text{cos}(\omega_D t + \phi) \\ \xi\omega \text{sen}(\omega_D t + \phi) &= \omega_D \text{cos}(\omega_D t + \phi) \end{aligned}$$

$$\frac{\underbrace{\frac{\text{sen}(\omega_D t + \phi)}{\cos(\omega_D t + \phi)}}_{\tan(\omega_D t + \phi)}}{\xi \omega} = \frac{\omega_D}{\xi \omega} \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_D}{\xi \omega} = \frac{\omega \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi \omega} = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

$$\therefore \tan(\omega_D t + \phi) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \quad (5.51)$$

$$\Rightarrow \omega_D t = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right) - \phi \quad (5.52)$$

Como el valor de la tangente es el mismo para cada π radianes, es posible expresar los máximos y mínimos como:

$$\omega_D t = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right) - \phi + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.53)$$

Por consiguiente, los máximos o mínimos valores sucesivos ocurren cada 2π radianes, en un periodo de $T_D = 2\pi / \omega_D$ (Roca Vila & León L, 1985, pág. 73). Considerando además que dos máximos son sucesivos cuando uno de ellos ocurre el instante t_1 y el otro en el instante t_2 , se obtiene un decrecimiento de la función $x(t)$, es decir:

$$2\pi = \omega_D t_2 - \omega_D t_1 = \omega_D (t_2 - t_1) \quad (5.54)$$

Como existen tiempos t_1 y t_2 , le corresponden posiciones x_1 y x_2 , entonces:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{Ae^{-\xi\omega t_1} \text{sen}(\omega_D t_1 + \phi)}{Ae^{-\xi\omega t_2} \text{sen}(\omega_D t_2 + \phi)} \quad (5.55)$$

Es posible considerar que $\text{sen}(\omega_D t_1 + \phi) = \text{sen}(\omega_D t_2 + \phi)$, por lo que la expresión anterior queda reducida a:

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \frac{e^{-\xi\omega t_1}}{e^{-\xi\omega t_2}} = e^{\xi\omega t_2 - \xi\omega t_1} = e^{\xi\omega(t_2 - t_1)} \\ \therefore \frac{x_1}{x_2} &= e^{\xi\omega(t_2 - t_1)} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Por definición el decremento logarítmico es igual a:

$$\delta = L_n \left| \frac{x_i}{x_{i+1}} \right| \quad (5.57)$$

El argumento x_1/x_2 que aparece en la ecuación 5.56, es el argumento x_i/x_{i+1} de la ecuación 5.57 cuando $i = 1$, por lo cual es posible presentar la siguiente igualdad:

$$L_n \left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \ln |e^{\xi\omega(t_2-t_1)}| = \xi\omega(t_2 - t_1)$$

$$\therefore \delta = L_n \left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \xi\omega(t_2 - t_1)$$

Recordando que al ser $2\pi = \omega_D(t_2 - t_1)$ entonces $t_2 - t_1 = 2\pi / \omega_D$:

$$\delta = L_n \left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \xi\omega(t_2 - t_1) = \frac{2\pi\xi\omega}{\omega_D} = \frac{2\pi\xi\omega}{\omega\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Si se considera que $\omega \neq \omega_D$:

$$L_n \left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (5.58)$$

Si considera que $\omega = \omega_D$:

$$L_n \left| \frac{x_1}{x_2} \right| = 2\pi\xi \quad (5.59)$$

Debido a que no es posible determinar de forma netamente analítica la relación de amortiguamiento ξ para las estructuras en ingeniería civil, es necesario determinarla mediante pruebas de laboratorio auxiliándose de los experimentos de vibración libre para obtener el amortiguamiento (Chopra , 2014, pág. 54).

Para los sistemas con subamortiguamiento, la relación de amortiguamiento puede calcularse a partir de los desplazamientos o aceleraciones:

$$\underbrace{\xi = \frac{1}{2\pi} L_n \left| \frac{x_1}{x_2} \right|}_{\text{Cálculo por desplazamientos}} \qquad \underbrace{\xi = \frac{1}{2\pi} L_n \left| \frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_2} \right|}_{\text{Cálculo por aceleraciones}} \quad (5.60)$$

5.8 Soluciones Finales y Ejemplos de las Gráficas de $x(t)$

Las soluciones finales, así como algunos ejemplos de las funciones $x(t)$ son presentados en esta sección.

Tabla V
Soluciones posibles a $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = 0$

Caso de estudio	Relación de amortiguamiento (ξ) y frecuencia natural amortiguada (ω_D)	Solución
Amortiguamiento Crítico	$\xi = 1$ $\omega_D = \omega$	$x = (v_0 + \omega x_0)te^{-\omega t} + x_0e^{-\omega t}$
Sobreamortiguamiento	$\xi > 1$ $\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$	$x = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \right) \sinh(\omega_D t) \right]$
Subamortiguamiento	$\xi < 1$ $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$	$x = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \right) \sen(\omega_D t) \right]$

5.8.1 Representación gráfica de la respuesta dinámica con amortiguamiento crítico

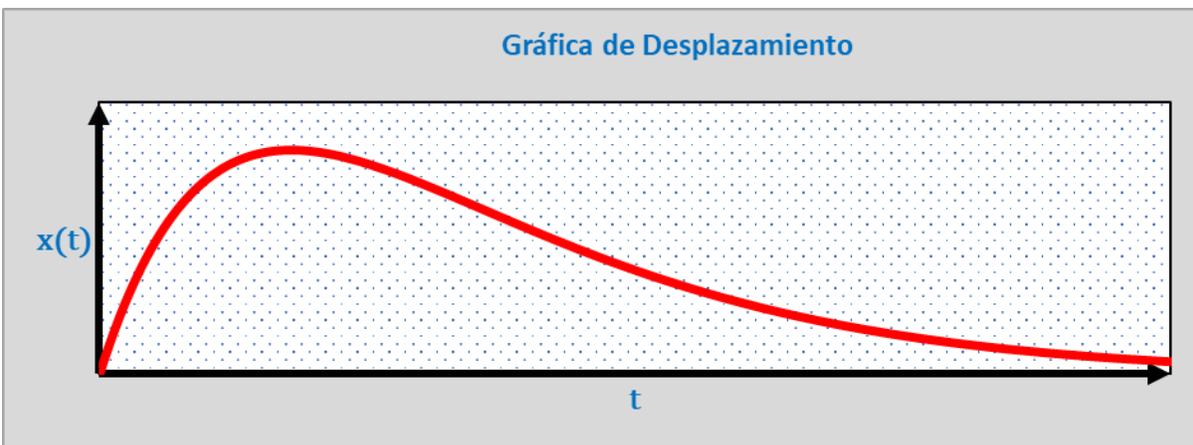
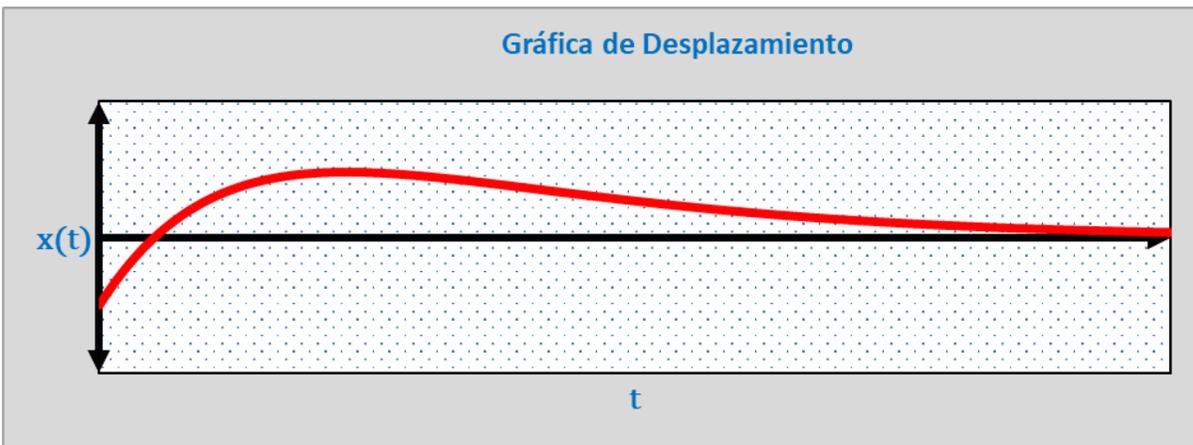
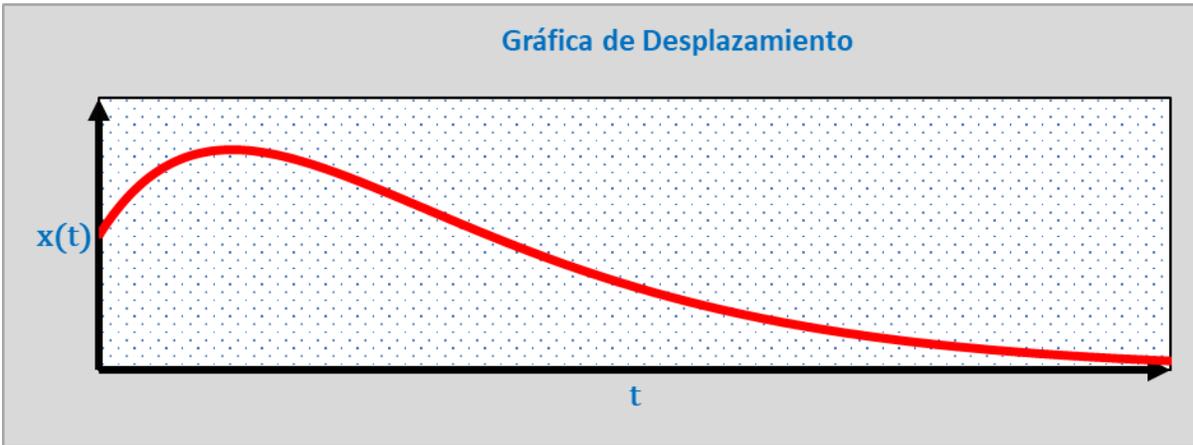


Figura V.1. Gráficas de desplazamiento en vibración libre con amortiguamiento crítico.

5.8.2 Representación gráfica de la respuesta dinámica con sobreamortiguamiento

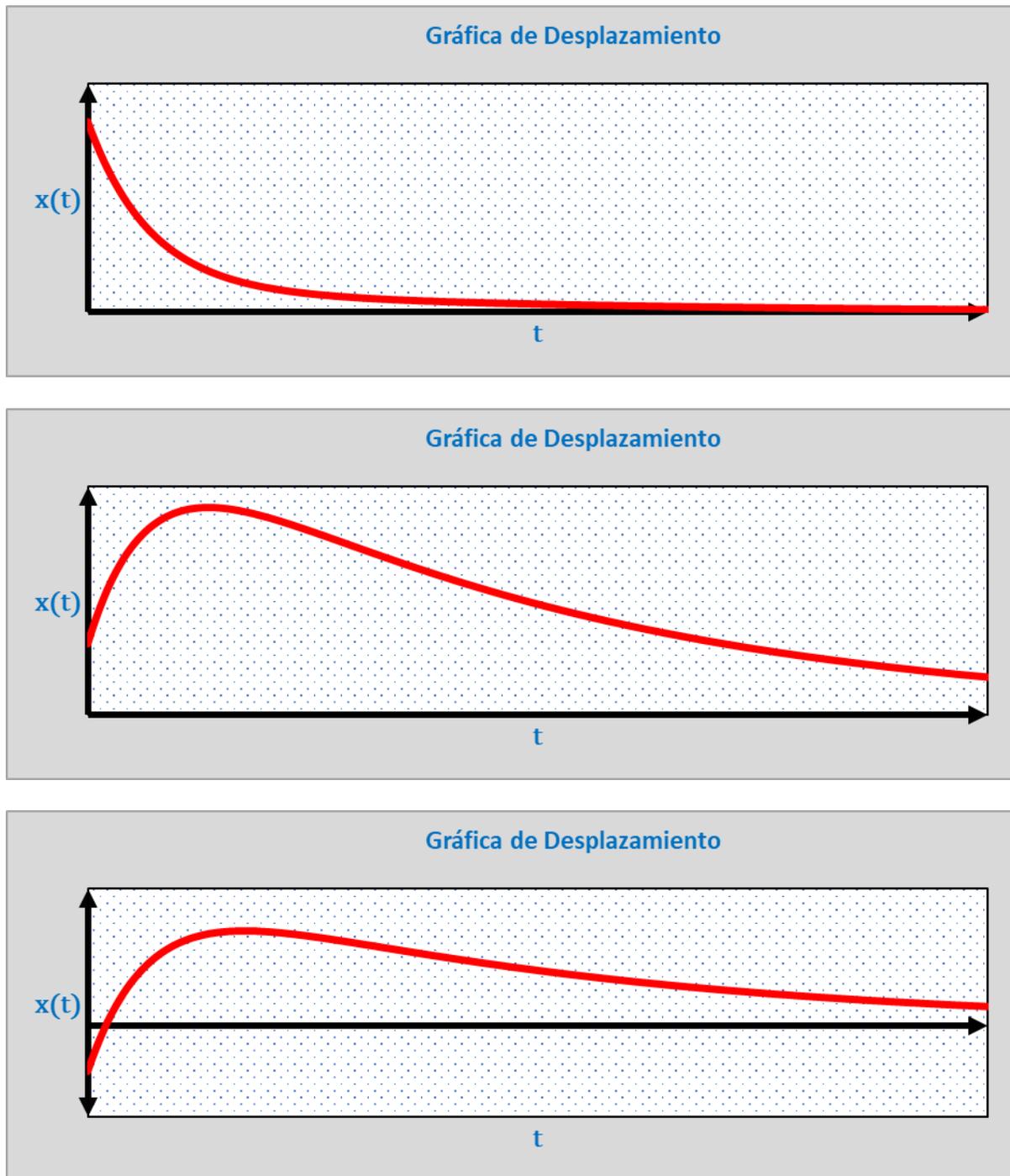


Figura V.2. Gráficas de desplazamiento en vibración libre con sobreamortiguamiento.

5.8.3 Representación gráfica de la respuesta dinámica con subamortiguamiento

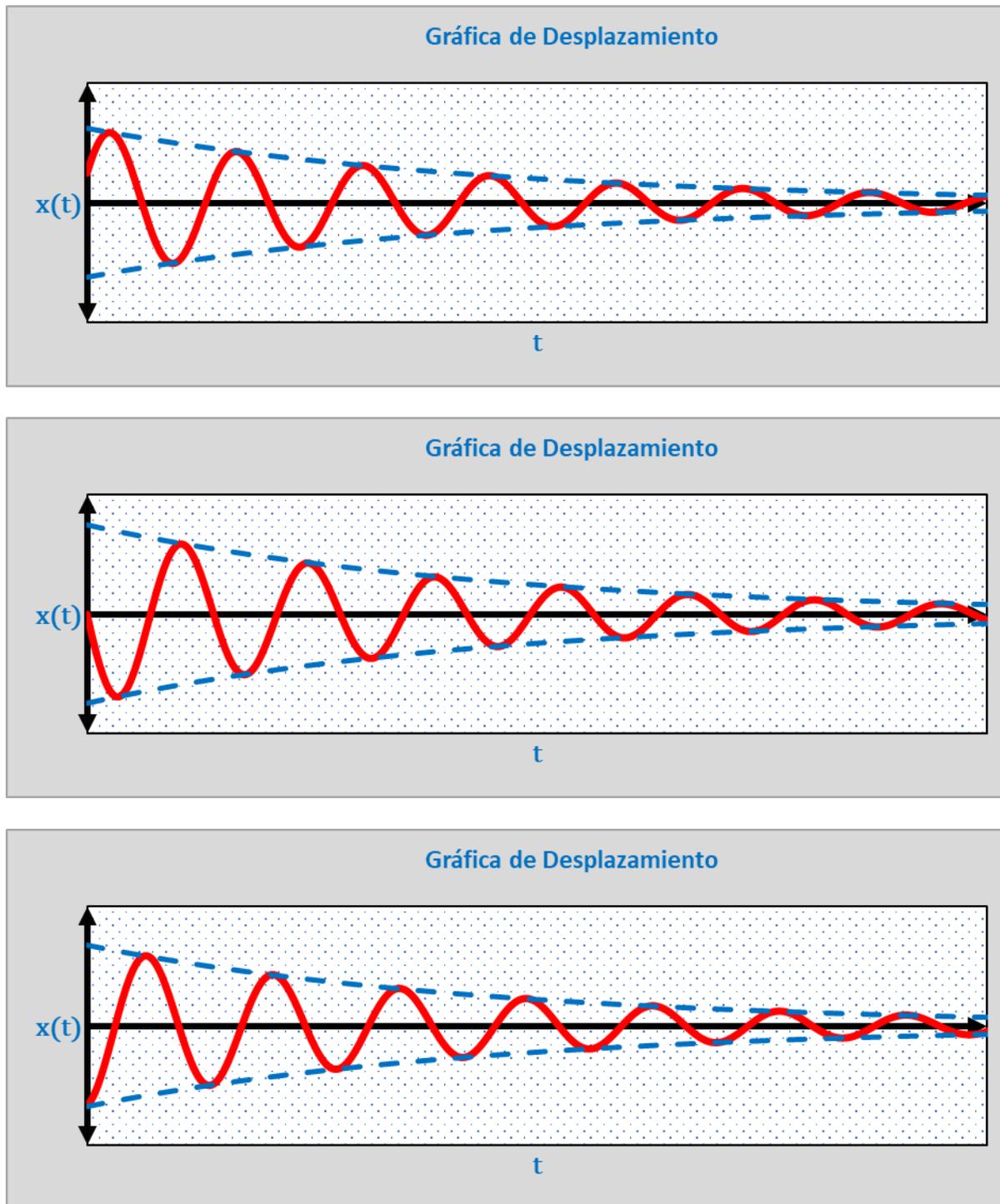


Figura V.3. Gráficas de desplazamiento en vibración libre con subamortiguamiento.

PARTE
III

VIBRACIONES ARMÓNICAS PARA
SISTEMAS DE 1 G.D.L.

FENÓMENOS DE RESONANCIA
PURA Y BATIMIENTO

Capítulo VI: Vibraciones Armónicas para Sistemas de 1 G.D.L Sin Amortiguamiento

- 6.1 Elementos de una Fuerza Armónica
- 6.2 Respuesta Estacionaria y Transitoria
- 6.3 Parámetros Intrínsecos en Vibraciones Armónicas sin Amortiguamiento
 - 6.3.1 Desplazamiento estático (μ_0)
 - 6.3.2 Factor de frecuencia (r)
 - 6.3.3 Factor de amplificación dinámico (D)
- 6.4 Casos de EDO a Resolver de Vibraciones Armónicas
- 6.5 Solución a la EDO con $P(t) = P_0$
- 6.6 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$
- 6.7 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$
- 6.8 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$
- 6.9 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$
- 6.10 Soluciones Finales y Ejemplos de las Gráficas de $x(t)$
 - 6.10.1 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ ($P_0 > 0$)
 - 6.10.2 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ ($P_0 < 0$)
 - 6.10.3 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ ($\Omega \rightarrow 0$)
 - 6.10.4 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ ($\Omega \approx \omega$)
 - 6.10.5 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ ($\Omega \gg \omega$)
 - 6.10.6 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$ ($\Omega \rightarrow 0$)
 - 6.10.7 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$ ($\Omega \approx \omega$)
 - 6.10.8 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$ ($\Omega \gg \omega$)
 - 6.10.9 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$
 - 6.10.10 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$

VI. Vibraciones Armónicas para Sistemas de 1 G.D.L. Sin Amortiguamiento

6.1 Elementos de una Fuerza Armónica

Una fuerza armónica es aquella donde la fuerza de excitación externa $P(t)$ es diferente de cero y adquiere un valor donde se presenta una función trigonométrica como: $P_0 \cos(\Omega t)$, $P_0 \sin(\Omega t)$, $P_0 \cos(\omega t)$ o $P_0 \sin(\omega t)$. Para todos los casos mencionados:

$[P_0]$ = amplitud de la fuerza (máxima) o valor máximo de la fuerza.

$[\omega]$ = frecuencia natural de la estructura.

$[\Omega]$ = frecuencia de excitación externa, frecuencia de forzamiento o frecuencia de cambio.

Antes de empezar a realizar la solución a los ejercicios de este capítulo, será necesario detallar algunos conceptos necesarios que serán utilizados durante la deducción de las funciones $x(t)$.

6.2 Respuesta Estacionaria y Transitoria

Cuando se resuelven ecuaciones diferenciales de orden superior, como la ecuación $m\ddot{x} + kx = P(t)$, siendo $P(t) \neq 0$, la solución se determina a partir de la suma de una función *complementaria* (x_C) con una función *particular* (x_P).

La función complementaria, conforme tienda al infinito se aproxima a cero ($t \rightarrow \infty$), es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_C(t) = 0$. En general para las ecuaciones de este tipo, el lector podrá notar que las funciones $x(t)$ no tenderán a cero, sin embargo, en la práctica la vibración se mitiga debido al hecho de la presencia de amortiguamiento (De la Colina Martínez, Valdés González, & González Pérez, 2016, pág. 95). Bajo esta condición, la representación de los desplazamientos de la masa en estudio se deberá mayormente a la solución particular. La solución particular (a diferencia de la solución complementaria) no se aproximará a ser cero conforme pase el tiempo.

Se dice entonces que la función complementaria (x_C) es el término transitorio o solución transitoria. Este término depende de las condiciones iniciales x_0 y v_0 , así como de las funciones que estén en función de la frecuencia natural de la estructura ω .

La solución particular (x_p) a su vez es llamada término estacionario o solución estacionaria. El término estacionario, a diferencia del término transitorio, depende únicamente de la fuerza aplicada $P(t)$, de las funciones que utilicen la frecuencia de excitación externa Ω y es independiente a las condiciones iniciales x_0 y v_0 ; por consiguiente esta solución existe inclusive si $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

6.3 Parámetros Intrínsecos en Vibraciones Armónicas sin Amortiguamiento

Los nuevos parámetros intrínsecos que aparecen cuando existe fuerza de excitación externa son:

- ✚ factor de frecuencias (r).
- ✚ factor de amplificación dinámica (D).
- ✚ desplazamiento estático (μ_0).

De igual forma que en los casos de vibración libre, estos ayudaran a transformar las ecuaciones diferenciales de forma que sea adaptable a como se usa para fines de dinámica estructural.

6.3.1 Desplazamiento estático (μ_0)

El desplazamiento estático (μ_0) se interpreta como la deformación estática originada por la fuerza P_0 . Es bien sabido, por la ley de Hooke que, $F = k\delta$, por lo que $\delta = F / k$, entonces el desplazamiento estático μ_0 es expresado como:

$$\mu_0 = \frac{P_0}{k} \quad (6.1)$$

6.3.2 Factor de frecuencia (r)

El factor de frecuencia r , por definición, es el cociente entre la frecuencia de excitación externa y la frecuencia natural de la estructura, es decir:

$$r = \frac{\Omega}{\omega} \quad (6.2)$$

6.3.3 Factor de amplificación dinámico (D)

También llamado relación de amplitud, factor de magnificación o simplemente, factor de amplificación dinámico. Este parámetro indica cuantas veces la amplitud de las vibraciones es más grande en comparación con el desplazamiento estático (Majewski Szymiec, 2016, pág. 56). Por definición, cuando el sistema no está amortiguado ($\xi = 0$), el factor D se expresa de la siguiente manera:

$$D = \frac{A}{\mu_0} = \frac{1}{1 - r^2} \quad (6.3)$$

En la solución de sistemas sin amortiguamiento, con excitaciones armónicas, será común encontrar una solución donde esté presente el factor de amplificación dinámico. La figura VI.1 expresa en el eje de las abscisas la relación de frecuencia r y en el eje de las ordenadas $(1 - r^2)^{-1}$.

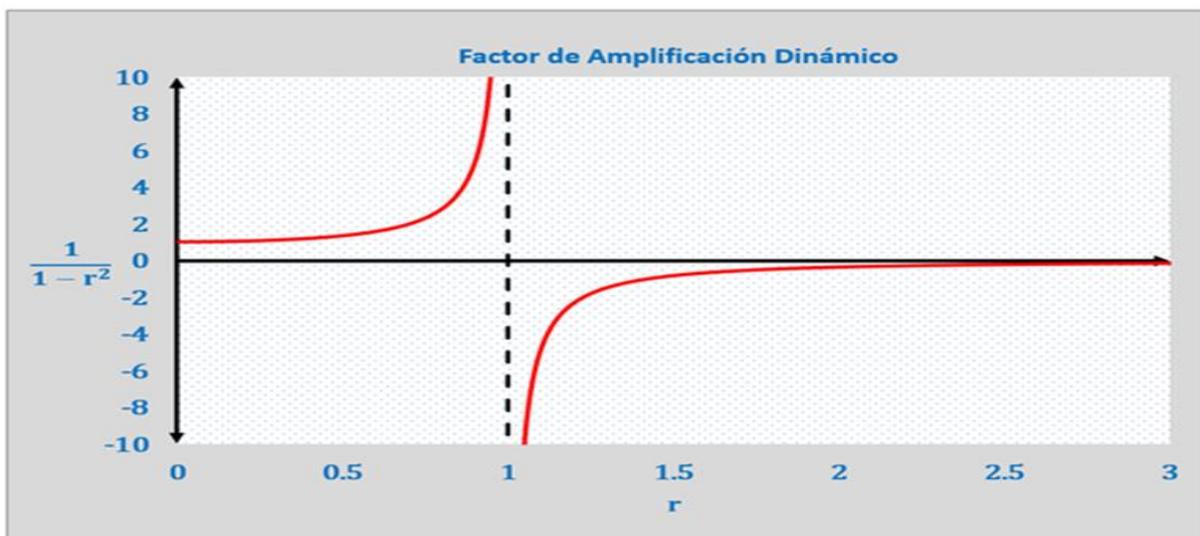


Figura VI.1. Gráfica de $(1 - r^2)^{-1}$ contra r .

Cuando la relación de frecuencias es $r < 1$ (indica que $\Omega < \omega$) el factor $(1 - r^2)^{-1}$ es positivo indicando que las funciones $x(t)$ y $P(t)$ son del mismo signo algebraico. Dicho en función del desplazamiento, si la fuerza $P(t)$ actúa hacia la derecha la estructura también se desplazará en el mismo sentido.

En caso de que la relación de frecuencias sea $r > 1$ (indica que $\Omega > \omega$) el factor $(1 - r^2)^{-1}$ es negativo lo cual señala que las funciones $x(t)$ y $P(t)$ son de diferente signo algebraico entre sí. A

diferencia del caso mencionado en el párrafo anterior, cuando la fuerza $P(t)$ actúa hacia la derecha la estructura se desplazará hacia la izquierda. Si se presenta este caso se dice que el desplazamiento se encuentra en fase (Chopra , 2014, pág. 68).

Cuando $r = 1$ el valor para $(1 - r^2)^{-1}$ no está definido dado que la estructura está en resonancia.

Para los valores donde $r \geq \sqrt{2}$ el valor absoluto de $(1 - r^2)^{-1}$ es mayor a uno indicando que en estos casos la respuesta estática es mayor que la dinámica (De la Colina Martínez, Valdés González, & González Pérez , 2016, pág. 97).

6.4 Casos de EDO a Resolver de Vibraciones Armónicas

Para todos los casos mencionados se limitará a encontrar únicamente $x(t)$ y las gráficas correspondientes a la misma se presentarán al final del capítulo. Los casos por resolver serán:

- i. La fuerza externa $P(t)$ mantiene un valor constante (P_0) a lo largo del tiempo:

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \quad (6.4)$$

- ii. La frecuencia natural de la estructura es diferente a la frecuencia de excitación externa ($\omega \neq \Omega$):

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \cos(\Omega t) \quad (6.5)$$

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \sen(\Omega t) \quad (6.6)$$

- iii. La frecuencia natural de la estructura es igual a la frecuencia de excitación externa^{6.1} ($\omega = \Omega$):

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \cos(\omega t) \quad (6.7)$$

$$m\ddot{x} + kx = P_0 \sen(\omega t) \quad (6.8)$$

^{6.1} El caso iii es un caso particular conocido como resonancia, que se hace presente cuando la frecuencia natural de la estructura se equipara a la frecuencia de excitación externa haciendo que el valor máximo del desplazamiento del sistema tienda a infinito.

6.5 Solución a la EDO con $P(t) = P_0$

Esta ecuación no figura dentro de las excitaciones armónicas, sin embargo, su solución permitirá entender cómo es posible la introducción del desplazamiento estático cuando se presenta una fuerza externa $P(t) \neq 0$. Para dicho propósito se divide $m\ddot{x} + kx = P_0$ entre la masa:

$$\begin{aligned} \frac{m\ddot{x}}{m} + \frac{k}{m}x &= \frac{P_0}{m} \\ \ddot{x} + \omega^2x &= \frac{P_0}{m} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Dado que:

$$\frac{P_0}{m} = \frac{P_0}{m} \left(\frac{k}{k} \right) = \frac{P_0}{\underbrace{k}_{\mu_0}} \left(\frac{k}{\underbrace{m}_{\omega^2}} \right) = \mu_0 \omega^2$$

La ecuación $\ddot{x} + \omega^2x = P_0 / m$ se transforma en:

$$\ddot{x} + \omega^2x = \mu_0 \omega^2 \quad (6.10)$$

En general será posible expresar las EDO de este capítulo usando el modelo de la ecuación 6.10, teniendo en cuenta que a partir de la ecuación 6.4 y hasta la 6.8 se tiene presente una excitación armónica. El modelo de solución las ecuaciones diferencial tendrá la forma:

$$x = x_C + x_P$$

Donde:

$[x_C]$ = solución complementaria obtenida. Esta solución será la misma que se obtuvo en el caso de vibración libre.

$[x_P]$ = solución particular que se obtiene mediante métodos como el de coeficientes indeterminados, variación de parámetros o transformada de Laplace^{6.2}.

^{6.2} En los capítulos VI y VIII únicamente se utilizarán los métodos de coeficientes indeterminados o variación de parámetros; la transformada de Laplace se estudiará en los capítulos IX, X y XI a fin de demostrar que se obtienen las mismas soluciones. El capítulo IX verifica las soluciones de los capítulos IV y V (casos de vibración libre), mientras que los capítulos X y XI comprueban los resultados de los capítulos VI (casos de vibración armónica sin amortiguamiento) y VIII (casos de vibración armónica con amortiguamiento) respectivamente.

Para la ecuación $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2$, la solución complementaria es la ecuación $x_C = C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t}$. Aplicando la fórmula de Euler: $e^{\pm \theta i} = \cos(\theta) \pm i \text{sen}(\theta)$ para x_C , se llega a una solución general en función de senos y cosenos trigonométricos:

$$\begin{aligned} x_C &= C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t} \\ \therefore &= C_1 [\cos(\omega t) + i \text{sen}(\omega t)] + C_2 [\cos(\omega t) - i \text{sen}(\omega t)] \\ \therefore x_C &= (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_1 - C_2) \text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Denominando nuevas constantes arbitrarias H_1 y H_2 :

$$\begin{aligned} x_C &= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{H_1} \cos(\omega t) + i \underbrace{(C_1 - C_2)}_{H_2} \text{sen}(\omega t) \\ \therefore x_C &= H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (6.12)$$

La solución particular x_P se determina por el método de coeficientes indeterminados, aunque es igual de válido calcularla con el método de variación de parámetros.

Como la fuerza externa actuante es $P(t) = P_0$ se plantea un modelo de solución del tipo:

$$x_P = A \quad (6.13)^{6.3}$$

El valor de la constante A se determina resolviendo la ecuación:

$$\ddot{x}_P + \omega^2 x_P = \mu_0 \omega^2 \quad (6.14)$$

Entonces, se tendrá que derivar dos veces $x_P = A$ para sustituir x_P y \ddot{x}_P en $\ddot{x}_P + \omega^2 x_P = \mu_0 \omega^2$ y así obtener el valor de A .

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= \frac{dx_P}{dt} = \frac{d}{dt}(A) = 0 \\ \therefore \dot{x}_P &= 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_P &= \frac{d\dot{x}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(0) = 0 \\ \therefore \ddot{x}_P &= 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Sustituyendo $x_P = A$ y $\dot{x}_P = \ddot{x}_P = 0$ en $\ddot{x}_P + \omega^2 x_P = \mu_0 \omega^2$ se obtiene el valor de A :

^{6.3} La letra A es una constante arbitraria a determinar, no debe confundirse con el valor de amplitud máxima

$$\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = \mu_0 \omega^2$$

$$0 + \omega^2 A = \mu_0 \omega^2$$

$$A = \frac{\mu_0 \omega^2}{\omega^2}$$

$$A = \mu_0 \tag{6.17}$$

Por lo tanto, como $A = \mu_0$ y $x_p = A$ se obtiene que:

$$x_p = \mu_0 \tag{6.18}$$

Entonces, la solución general a $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2$ es:

$$x = x_C + x_p = \underbrace{H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t)}_{x_C} + \underbrace{\mu_0}_{x_p} \tag{6.19}$$

Para calcular la solución con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ es necesario derivar $x = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) + \mu_0$ con respecto a t , para obtener la función \dot{x} :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) + \mu_0]$$

$$\therefore = \frac{d}{dt} [H_1 \cos(\omega t)] + \frac{d}{dt} [H_2 \text{sen}(\omega t)] + \underbrace{\frac{d}{dt} [\mu_0]}_0$$

$$\therefore = -\omega H_1 \text{sen}(\omega t) + \omega H_2 \cos(\omega t)$$

$$\therefore \dot{x} = -\omega H_1 \text{sen}(\omega t) + \omega H_2 \cos(\omega t) \tag{6.20}$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) + \mu_0$, es posible encontrar el valor de la constante H_1 :

$$x_0 = H_1 \underbrace{\cos(0)}_1 + H_2 \underbrace{\text{sen}(0)}_0 + \mu_0$$

$$x_0 = H_1 + \mu_0$$

$$\therefore H_1 = x_0 - \mu_0 \tag{6.21}$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x} = -\omega H_1 \text{sen}(\omega t) + \omega H_2 \cos(\omega t)$ es posible encontrar el valor de la constante H_2 dado que ya se conoce el valor de H_1 :

$$v_0 = -\omega H_1 \underbrace{\text{sen}(0)}_0 + \omega H_2 \underbrace{\text{cos}(0)}_1$$

$$v_0 = \omega H_2$$

$$\therefore H_2 = \frac{v_0}{\omega} \quad (6.22)$$

Reemplazando $H_1 = x_0 - \mu_0$ y $H_2 = v_0 / \omega$ en $x = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) + \mu_0$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\therefore \mathbf{x(t) = (x_0 - \mu_0) \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \mu_0} \quad (6.23)$$

De esta ecuación los primeros dos términos de la igualdad representan la respuesta transitoria, mientras que el último término actúa como la respuesta estacionaria.

Si el desplazamiento estático adquiere un valor de cero ($\mu_0 = 0$) la ecuación 6.23 se reduce a $x = x_0 \cos(\omega t) + (v_0 / \omega) \text{sen}(\omega t)$, que es la solución particular a la vibración libre sin amortiguamiento con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$. En general, todas las soluciones obtenidas para vibraciones con excitación armónica externa deben conducir a las soluciones de vibración libre si $P(t) = 0$.

6.6 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$

Como ahora la fuerza de excitación externa es $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, la EDO de partida es:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t) \quad (6.24)$$

Para determinar la solución particular por el método de coeficientes indeterminados se plantea el modelo de solución:

$$x_p = A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t) \quad (6.25)$$

El valor de A y B se determinan mediante la resolución de la ecuación:

$$\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t) \quad (6.26)$$

Entonces se tendrá que derivar dos veces $x_p = A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)$ para sustituir x_p y \ddot{x}_p en $\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$ y así obtener los valores de A y B:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \frac{dx_p}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)] \\ \therefore &= A \frac{d}{dt} [\cos(\Omega t)] + B \frac{d}{dt} [\text{sen}(\Omega t)] \\ \therefore &= A[-\Omega \text{sen}(\Omega t)] + B[\Omega \cos(\Omega t)] \\ \dot{x}_p &= -A\Omega \text{sen}(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p &= \frac{d\dot{x}_p}{dt} = \frac{d}{dt} [-A\Omega \text{sen}(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)] \\ \therefore &= -A\Omega \frac{d}{dt} [\text{sen}(\Omega t)] + B\Omega \frac{d}{dt} [\cos(\Omega t)] \\ \therefore &= -A\Omega[\Omega \cos(\Omega t)] + B\Omega[-\Omega \text{sen}(\Omega t)] \\ \ddot{x}_p &= -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \text{sen}(\Omega t) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Sustituyendo los valores de \dot{x}_p y \ddot{x}_p en $\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$ se obtienen los valores de A y B por medio de la resolución de un sistema de ecuaciones de 2 x 2, que resultará reducido a una ecuación algebraica de primer grado, a causa de que no existe \dot{x}_p :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p + \omega^2 x_p &= \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t) \\ \underbrace{[-A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \text{sen}(\Omega t)]}_{\ddot{x}_p} + \omega^2 \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)]}_{x_p} &= \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t) \\ [A\omega^2 - A\Omega^2] \cos(\Omega t) + [B\omega^2 - B\Omega^2] \text{sen}(\Omega t) &= \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Introduciendo el concepto de factor de frecuencia $r = \Omega / \omega$, es notorio que dividiendo ambos miembros entre ω^2 es posible transformar la ecuación en términos de r:

$$\begin{aligned} \frac{[A\omega^2 - A\Omega^2] \cos(\Omega t)}{\omega^2} + \frac{[B\omega^2 - B\Omega^2] \text{sen}(\Omega t)}{\omega^2} &= \frac{\mu_0 \omega^2}{\omega^2} \cos(\Omega t) \\ \left[A \frac{\omega^2}{\omega^2} - A \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right] \cos(\Omega t) + \left[B \frac{\omega^2}{\omega^2} - B \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right] \text{sen}(\Omega t) &= \mu_0 \left(\frac{\omega^2}{\omega^2} \right) \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

$$\left[A - A \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] \cos(\Omega t) + \left[B - B \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] \text{sen}(\Omega t) = \mu_0 \cos(\Omega t)$$

$$[A - Ar^2] \cos(\Omega t) + [B - Br^2] \text{sen}(\Omega t) = \mu_0 \cos(\Omega t) \quad (6.30)$$

Para calcular los valores A y B se relacionan los términos buscando una semejanza de los coeficientes de las funciones trigonométricas $\cos(\Omega t)$ y $\text{sen}(\Omega t)$ del lado izquierdo con el derecho de la ecuación llegando a dos ecuaciones de primer grado:

$$[A - Ar^2] \cos(\Omega t) = \mu_0 \cos(\Omega t)$$

$$\frac{[A - Ar^2] \cos(\Omega t)}{\cos(\Omega t)} = \frac{\mu_0 \cos(\Omega t)}{\cos(\Omega t)}$$

$$A - Ar^2 = \mu_0$$

$$A(1 - r^2) = \mu_0$$

$$\therefore A = \frac{\mu_0}{1 - r^2} \quad (6.31)$$

$$[B - Br^2] \text{sen}(\Omega t) = 0$$

$$\frac{[B - Br^2] \text{sen}(\Omega t)}{\text{sen}(\Omega t)} = \frac{0}{\text{sen}(\Omega t)}$$

$$B - Br^2 = 0$$

$$B(1 - r^2) = 0$$

$$\therefore B = 0 \quad (6.32)$$

Sustituyendo $A = \mu_0 / (1 - r^2)$ y $B = 0$ en $x_p = A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)$ se obtiene la solución particular:

$$\therefore x_p = \frac{\mu_0}{1 - r^2} \cos(\Omega t) \quad (6.33)$$

Que sumada a la solución complementaria $x_c = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t)$ da la solución general a la EDO $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$:

$$\therefore \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p = \mathbf{H}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{H}_2 \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1 - r^2} \cos(\Omega t) \quad (6.34)$$

Para calcular la solución con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ es necesario derivar x para obtener \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1 - r^2} \cos(\Omega t) \right] \\ \therefore &= H_1 \frac{d}{dt} [\cos(\omega t)] + H_2 \frac{d}{dt} [\text{sen}(\omega t)] + \frac{\mu_0}{1 - r^2} \frac{d}{dt} [\cos(\Omega t)] \\ \therefore &= H_1 [-\omega \text{sen}(\omega t)] + H_2 [\omega \cos(\omega t)] + \frac{\mu_0}{1 - r^2} [-\Omega \text{sen}(\Omega t)] \\ \therefore \dot{x} &= -\omega H_1 \text{sen}(\omega t) + \omega H_2 \cos(\omega t) - \frac{\mu_0 \Omega}{1 - r^2} \text{sen}(\Omega t) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x(t)$ es posible conocer el valor de la constante H_1 :

$$\begin{aligned} x_0 &= H_1 \underbrace{\cos[\omega(0)]}_1 + H_2 \underbrace{\text{sen}[\omega(0)]}_0 + \frac{\mu_0}{1 - r^2} \underbrace{\cos[\Omega(0)]}_1 \\ x_0 &= H_1 + \frac{\mu_0}{1 - r^2} \\ \therefore H_1 &= x_0 - \frac{\mu_0}{1 - r^2} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x}(t)$ es posible conocer el valor de la constante H_2 :

$$\begin{aligned} v_0 &= -\omega H_1 \underbrace{\text{sen}[\omega(0)]}_0 + \omega H_2 \underbrace{\cos[\omega(0)]}_1 - \frac{\mu_0 \Omega}{1 - r^2} \underbrace{\text{sen}[\Omega(0)]}_0 \\ v_0 &= \omega H_2 \\ \therefore H_2 &= \frac{v_0}{\omega} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Reemplazando el valor de las constantes H_1 y H_2 en $x(t)$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\therefore \mathbf{x}(t) = \underbrace{\left(\mathbf{x}_0 - \frac{\mu_0}{1-r^2} \right) \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t)}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{1-r^2} \cos(\Omega t)}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \quad (6.38)$$

6.7 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$

Como ahora la fuerza de excitación externa es $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$, la EDO de partida es:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t) \quad (6.39)$$

La solución particular por determinar por coeficientes indeterminados tiene el modelo de solución:

$$x_p = A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t) \quad (6.40)$$

El valor de A y B se determinan mediante la resolución de la ecuación:

$$\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t) \quad (6.41)$$

Entonces se tendrá que derivar dos veces $x_p = A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)$ para sustituir x_p y \ddot{x}_p en $\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ y así obtener los valores de A y B:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \frac{dx_p}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)] \\ \therefore &= A \frac{d}{dt} [\cos(\Omega t)] + B \frac{d}{dt} [\text{sen}(\Omega t)] \\ \therefore &= A[-\Omega \text{sen}(\Omega t)] + B[\Omega \cos(\Omega t)] \\ \dot{x}_p &= -A\Omega \text{sen}(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p &= \frac{d\dot{x}_p}{dt} = \frac{d}{dt} [-A\Omega \text{sen}(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)] \\ \therefore &= -A\Omega \frac{d}{dt} [\text{sen}(\Omega t)] + B\Omega \frac{d}{dt} [\cos(\Omega t)] \\ \therefore &= -A\Omega[\Omega \cos(\Omega t)] + B\Omega[-\Omega \text{sen}(\Omega t)] \\ \ddot{x}_p &= -A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \text{sen}(\Omega t) \end{aligned} \quad (6.43)$$

Sustituyendo los valores de \dot{x}_p y \ddot{x}_p en $\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ se obtienen los valores de A y B por medio de la resolución de un sistema de ecuaciones de 2 x 2, que resultará reducido a una ecuación algebraica de primer grado, a causa de que no existe \dot{x}_p :

$$\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$$

$$\underbrace{[-A\Omega^2 \cos(\Omega t) - B\Omega^2 \text{sen}(\Omega t)]}_{\ddot{x}_p} + \omega^2 \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)]}_{x_p} = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$$

$$[A\omega^2 - A\Omega^2] \cos(\Omega t) + [B\omega^2 - B\Omega^2] \text{sen}(\Omega t) = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t) \quad (6.44)$$

Introduciendo el concepto de factor de frecuencia $r = \Omega / \omega$, es notorio que dividiendo ambos miembros entre ω^2 , es posible transformar la ecuación en términos de r:

$$\frac{[A\omega^2 - A\Omega^2] \cos(\Omega t)}{\omega^2} + \frac{[B\omega^2 - B\Omega^2] \text{sen}(\Omega t)}{\omega^2} = \frac{\mu_0 \omega^2}{\omega^2} \text{sen}(\Omega t)$$

$$\left[A \frac{\omega^2}{\omega^2} - A \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right] \cos(\Omega t) + \left[B \frac{\omega^2}{\omega^2} - B \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right] \text{sen}(\Omega t) = \mu_0 \left(\frac{\omega^2}{\omega^2} \right) \text{sen}(\Omega t)$$

$$\left[A - A \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] \cos(\Omega t) + \left[B - B \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right] \text{sen}(\Omega t) = \mu_0 \text{sen}(\Omega t)$$

$$[A - Ar^2] \cos(\Omega t) + [B - Br^2] \text{sen}(\Omega t) = \mu_0 \text{sen}(\Omega t) \quad (6.45)$$

Para calcular los valores A y B se relacionan los términos buscando una semejanza de los coeficientes de las funciones trigonométricas $\cos(\Omega t)$ y $\text{sen}(\Omega t)$ del lado izquierdo con el derecho de la ecuación llegando a dos ecuaciones de primer grado:

$$[A - Ar^2] \cos(\Omega t) = 0$$

$$\frac{[A - Ar^2] \cos(\Omega t)}{\cos(\Omega t)} = \frac{0}{\cos(\Omega t)}$$

$$A - Ar^2 = 0$$

$$A(1 - r^2) = 0$$

$$\therefore A = 0 \quad (6.46)$$

$$[B - Br^2]\text{sen}(\Omega t) = \mu_0 \text{sen}(\Omega t)$$

$$\frac{[B - Br^2]\text{sen}(\Omega t)}{\text{sen}(\Omega t)} = \frac{\mu_0 \text{sen}(\Omega t)}{\text{sen}(\Omega t)}$$

$$B - Br^2 = \mu_0$$

$$B(1 - r^2) = \mu_0$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0}{1 - r^2} \quad (6.47)$$

Sustituyendo $A = 0$ y $B = \mu_0 / (1 - r^2)$ en $x_p = A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)$ se obtiene la solución particular:

$$\therefore x_p = \frac{\mu_0}{1 - r^2} \text{sen}(\Omega t) \quad (6.48)$$

Que sumada a la solución complementaria $x_c = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t)$ da la solución general a la EDO $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$:

$$\therefore \mathbf{x(t) = x_c + x_p = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1 - r^2} \text{sen}(\Omega t)} \quad (6.49)$$

Para calcular la solución con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ es necesario derivar x para obtener \dot{x} :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1 - r^2} \text{sen}(\Omega t) \right]$$

$$\therefore = H_1 \frac{d}{dt} [\cos(\omega t)] + H_2 \frac{d}{dt} [\text{sen}(\omega t)] + \frac{\mu_0}{1 - r^2} \frac{d}{dt} [\text{sen}(\Omega t)]$$

$$\therefore = H_1 [-\omega \text{sen}(\omega t)] + H_2 [\omega \cos(\omega t)] + \frac{\mu_0}{1 - r^2} [\Omega \cos(\Omega t)]$$

$$\therefore \dot{x} = -\omega H_1 \text{sen}(\omega t) + \omega H_2 \cos(\omega t) + \frac{\mu_0 \Omega}{1 - r^2} \cos(\Omega t) \quad (6.50)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x(t)$ es posible conocer el valor de la constante H_1 :

$$x_0 = H_1 \underbrace{\cos[\omega(0)]}_1 + H_2 \underbrace{\text{sen}[\omega(0)]}_0 + \frac{\mu_0}{1 - r^2} \underbrace{\text{sen}[\Omega(0)]}_0$$

$$\therefore H_1 = x_0 \tag{6.51}$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x}(t)$ es posible conocer el valor de la constante H_2 :

$$v_0 = -\omega H_1 \underbrace{\text{sen}[\omega(0)]}_0 + \omega H_2 \underbrace{\text{cos}[\omega(0)]}_1 + \frac{\mu_0 \Omega}{1 - r^2} \underbrace{\text{cos}[\Omega(0)]}_1$$

$$v_0 = \omega H_2 + \frac{\mu_0 \Omega}{1 - r^2}$$

$$v_0 - \frac{\mu_0 \Omega}{1 - r^2} = \omega H_2$$

$$\frac{v_0}{\omega} - \frac{\mu_0 \Omega}{\omega(1 - r^2)} = H_2$$

$$\frac{v_0}{\omega} - \underbrace{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}_r \frac{\mu_0}{1 - r^2} = H_2$$

$$\therefore H_2 = \frac{v_0}{\omega} - \frac{\mu_0 r}{1 - r^2} \tag{6.52}$$

Reemplazando el valor de las constantes H_1 y H_2 en $x(t)$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\therefore x(t) = \underbrace{x_0 \text{cos}(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{\mu_0 r}{1 - r^2}\right) \text{sen}(\omega t)}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{1 - r^2} \text{sen}(\Omega t)}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \tag{6.53}$$

6.8 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \text{cos}(\omega t)$

Para fines didácticos, es conveniente saber resolver ecuaciones diferenciales de orden superior usando más de un método. El método utilizado para resolver las ecuaciones con fuerzas externas $P_0 \text{cos}(\omega t)$ y $P_0 \text{sen}(\omega t)$ será el de variación de parámetros^{6.4}.

Como ahora la fuerza de excitación externa es $P(t) = P_0 \text{cos}(\omega t)$, la EDO de partida es:

^{6.4} Esta EDO puede resolverse utilizando el método de coeficientes indeterminados a partir de proponer como solución particular $x_p = [A \text{cos}(\omega t) + B \text{sen}(\omega t)]t$ y conservando la solución complementaria $x_c = H_1 \text{cos}(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t)$.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (6.54)$$

La solución particular x_p por determinar se asocia con la solución complementaria $x_c = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t)$ cambiando las constantes arbitrarias H_1 y H_2 por funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$, es decir:

$$x_p = u_1(t) \cos(\omega t) + u_2(t) \text{sen}(\omega t) \quad (6.55)$$

Con el fin de encontrar dichas funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ el método exige calcular el Wronskiano^{6.5} y los determinantes W_1 y W_2 usando las funciones $\cos(\omega t)$ y $\text{sen}(\omega t)$ que pertenecen a los términos que acompañan a las constantes en la función complementaria:

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ \frac{d}{dt}[\cos(\omega t)] & \frac{d}{dt}[\text{sen}(\omega t)] \end{vmatrix} \\ \vdots &= \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ -\omega \text{sen}(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{vmatrix} \\ \vdots &= [\cos(\omega t)][\omega \cos(\omega t)] - [\text{sen}(\omega t)][-\omega \text{sen}(\omega t)] \\ \vdots &= \omega \cos^2(\omega t) - [-\omega \text{sen}^2(\omega t)] \\ \vdots &= \omega \cos^2(\omega t) + \omega \text{sen}^2(\omega t) \\ \vdots &= \omega \underbrace{[\cos^2(\omega t) + \text{sen}^2(\omega t)]}_1 \\ &\quad \therefore W = \omega \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \text{sen}(\omega t) \\ \mu_0 \omega^2 \cos(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{vmatrix} \\ \vdots &= \underbrace{[0][\omega \cos(\omega t)]}_0 - [\text{sen}(\omega t)][\mu_0 \omega^2 \cos(\omega t)] \\ &\quad \therefore W_1 = -\mu_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (6.57)$$

^{6.5} Consúltese el *Anexo D: Generalidades de las EDO Lineales* en la sección que habla del wronskiano

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & 0 \\ -\omega \text{sen}(\omega t) & \mu_0 \omega^2 \cos(\omega t) \end{vmatrix} \\
 \therefore &= [\cos(\omega t)][\mu_0 \omega^2 \cos(\omega t)] - \underbrace{[0][-\omega \text{sen}(\omega t)]}_0 \\
 &\therefore W_2 = \mu_0 \omega^2 \cos^2(\omega t) \tag{6.58}
 \end{aligned}$$

Las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se determinan por medio de:

$$u_k = \int \frac{W_k}{W} dt \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{6.59}$$

Para determinar $u_1(t)$:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int \frac{W_1}{W} dt \\
 \therefore &= \int \frac{-\mu_0 \omega^2 \cos(\omega t) \text{sen}(\omega t)}{\omega} dt \\
 \therefore &= \mu_0 \int -\omega \cos(\omega t) \text{sen}(\omega t) dt
 \end{aligned}$$

Asignando como cambio de variable $z = \cos(\omega t)$ y su diferencial $dz = -\omega \text{sen}(\omega t) dt$:

$$\begin{aligned}
 \therefore &= \mu_0 \int \underbrace{[\cos(\omega t)]}_z \underbrace{[-\omega \text{sen}(\omega t)]}_{dz} dt \\
 \therefore &= \mu_0 \int z dz \\
 \therefore &= \mu_0 \left(\frac{z^2}{2} \right) \\
 \therefore &= \mu_0 \left[\frac{\cos^2(\omega t)}{2} \right] \\
 &\therefore u_1(t) = \frac{\mu_0}{2} \cos^2(\omega t) \tag{6.60}
 \end{aligned}$$

Para determinar $u_2(t)$:

$$u_2 = \int \frac{W_2}{W} dt$$

$$\begin{aligned}
 \dot{} &= \int \frac{\mu_0 \omega^2 \cos^2(\omega t)}{\omega} dt \\
 \dot{} &= \mu_0 \int \omega \cos^2(\omega t) dt \\
 \dot{} &= \mu_0 \int \omega \underbrace{\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right]}_{\cos^2(\omega t)} dt \\
 \dot{} &= \mu_0 \left[\frac{\omega}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \omega \cos(2\omega t) dt \right] \\
 \dot{} &= \mu_0 \left[\frac{\omega}{2} \int dt + \frac{1}{2 \cdot 2} \int 2\omega \cos(2\omega t) dt \right] \\
 \dot{} &= \mu_0 \left[\frac{\omega}{2} t + \frac{1}{4} \text{sen}(2\omega t) \right] \\
 \therefore u_2(t) &= \frac{\mu_0 \omega}{2} t + \frac{\mu_0}{4} \text{sen}(2\omega t) \tag{6.61}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores $u_1(t)$ y $u_2(t)$ en $x_p = u_1(t) \cos(\omega t) + u_2(t) \text{sen}(\omega t)$ se obtiene la solución particular x_p del problema:

$$x_p = \left[\frac{\mu_0}{2} \cos^2(\omega t) \right] \cos(\omega t) + \left[\frac{\mu_0 \omega}{2} t + \frac{\mu_0}{4} \text{sen}(2\omega t) \right] \text{sen}(\omega t) \tag{6.62}$$

La ecuación x_p puede reducirse más a partir del uso de identidades trigonométricas y algebra de reducción:

$$\begin{aligned}
 x_p &= \frac{\mu_0}{2} \cos^3(\omega t) + \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{4} \text{sen}(2\omega t) \text{sen}(\omega t) \\
 \dot{} &= \frac{\mu_0}{2} \cos^3(\omega t) + \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{4} \underbrace{[2 \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t)]}_{\text{sen}(2\omega t)} \text{sen}(\omega t) \\
 \dot{} &= \frac{\mu_0}{2} \cos^3(\omega t) + \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{2} \text{sen}^2(\omega t) \cos(\omega t) \\
 \dot{} &= \frac{\mu_0}{2} [\cos^3(\omega t) + \text{sen}^2(\omega t) \cos(\omega t)] + \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{sen}(\omega t) \\
 \dot{} &= \frac{\mu_0}{2} \cos(\omega t) \underbrace{[\cos^2(\omega t) + \text{sen}^2(\omega t)]}_1 + \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{sen}(\omega t)
 \end{aligned}$$

$$\therefore x_p = \frac{\mu_0}{2} \cos(\omega t) + \frac{\mu_0 \omega}{2} t \operatorname{sen}(\omega t) \quad (6.63)$$

La solución general es:

$$\therefore x(t) = x_c + x_p = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{2} \cos(\omega t) + \frac{\mu_0 \omega}{2} t \operatorname{sen}(\omega t) \quad (6.64)$$

La solución se simplifica porque $(\mu_0 / 2) \cos(\omega t)$ puede ser incluido dentro de $H_1 \cos(\omega t)$ quedando:

$$\therefore x(t) = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0 \omega}{2} t \operatorname{sen}(\omega t) \quad (6.65)$$

Para calcular la solución con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ es necesario derivar x para obtener \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[H_1 \cos(\omega t) + H_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0 \omega}{2} t \operatorname{sen}(\omega t) \right] \\ &\therefore = H_1 \frac{d}{dt} [\cos(\omega t)] + H_2 \frac{d}{dt} [\operatorname{sen}(\omega t)] + \frac{\mu_0 \omega}{2} \frac{d}{dt} [t \operatorname{sen}(\omega t)] \\ &\therefore = H_1 \frac{d}{dt} [\cos(\omega t)] + H_2 \frac{d}{dt} [\operatorname{sen}(\omega t)] + \frac{\mu_0 \omega}{2} \left\{ \operatorname{sen}(\omega t) \frac{d}{dt} (t) + t \frac{d}{dt} [\operatorname{sen}(\omega t)] \right\} \\ &\therefore = H_1 [-\omega \operatorname{sen}(\omega t)] + H_2 [\omega \cos(\omega t)] + \frac{\mu_0 \omega}{2} \{ [\operatorname{sen}(\omega t)][1] + [t][\omega \cos(\omega t)] \} \\ &\therefore \dot{x} = -\omega H_1 \operatorname{sen}(\omega t) + \omega H_2 \cos(\omega t) + \frac{\mu_0 \omega}{2} [\operatorname{sen}(\omega t) + \omega t \cos(\omega t)] \quad (6.66) \end{aligned}$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en x es posible determinar el valor de H_1 :

$$\begin{aligned} x_0 &= H_1 \underbrace{\cos[\omega(0)]}_1 + H_2 \underbrace{\operatorname{sen}[\omega(0)]}_0 + \frac{\mu_0 \omega}{2} (0) \underbrace{\operatorname{sen}[\omega(0)]}_0 \\ &\therefore H_1 = x_0 \quad (6.67) \end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en \dot{x} es posible determinar el valor de H_2 :

$$v_0 = -\omega H_1 \underbrace{\operatorname{sen}[\omega(0)]}_0 + \omega H_2 \underbrace{\cos[\omega(0)]}_1 + \frac{\mu_0 \omega}{2} \left\{ \underbrace{\operatorname{sen}[\omega(0)]}_0 + \omega(0) \underbrace{\cos[\omega(0)]}_1 \right\}$$

$$v_0 = \omega H_2$$

$$\therefore H_2 = \frac{v_0}{\omega} \quad (6.68)$$

Reemplazando el valor de las constantes H_1 y H_2 en $x(t)$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\omega t)$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\therefore x(t) = \underbrace{x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0 \omega}{2} t \sin(\omega t)}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \quad (6.69)$$

6.9 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$

La fuerza de excitación externa es $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$, la EDO de partida es:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (6.70)$$

La solución particular x_p por determinar se asocia con la solución complementaria $x_c = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \sin(\omega t)$ cambiando las constantes arbitrarias H_1 y H_2 por funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$, es decir:

$$x_p = u_1(t) \cos(\omega t) + u_2(t) \sin(\omega t) \quad (6.71)$$

De igual forma al ejercicio anterior, se calcula el Wronskiano y los determinantes W_1 y W_2 , usando las funciones $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$ que pertenecen a los términos que acompañan a las constantes en la función complementaria, con el fin de encontrar dichas funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$. El Wronskiano es el mismo del ejercicio anterior:

$$\therefore W = \omega \quad (6.72)$$

Entonces resta encontrar W_1 y W_2 :

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(\omega t) \\ \mu_0 \omega^2 \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{vmatrix}$$

$$\therefore = \underbrace{[0][\omega \cos(\omega t)]}_0 - [\sin(\omega t)][\mu_0 \omega^2 \sin(\omega t)]$$

$$\therefore W_1 = -\mu_0 \omega^2 \text{sen}^2(\omega t) \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{vmatrix} \cos(\omega t) & 0 \\ -\omega \text{sen}(\omega t) & \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t) \end{vmatrix} \\ \therefore &= \frac{[\cos(\omega t)][\mu_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t)] - \underbrace{[0][-\omega \text{sen}(\omega t)]}_0}{0} \\ &\therefore W_2 = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (6.74)$$

Las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ se determinan por medio de:

$$u_k = \int \frac{W_k}{W} dt \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.75)$$

Para determinar $u_1(t)$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{W_1}{W} dt \\ \therefore &= \int \frac{-\mu_0 \omega^2 \text{sen}^2(\omega t)}{\omega} dt \\ \therefore &= -\mu_0 \int \omega \text{sen}^2(\omega t) dt \\ \therefore &= -\mu_0 \int \omega \underbrace{\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right]}_{\text{sen}^2(\omega t)} dt \\ \therefore &= -\mu_0 \left[\frac{\omega}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \omega \cos(2\omega t) dt \right] \\ \therefore &= -\mu_0 \left[\frac{\omega}{2} \int dt - \frac{1}{2 \cdot 2} \int 2\omega \cos(2\omega t) dt \right] \\ \therefore &= -\mu_0 \left[\frac{\omega}{2} t - \frac{1}{4} \text{sen}(2\omega t) \right] \\ &\therefore u_1(t) = -\frac{\mu_0 \omega}{2} t + \frac{\mu_0}{4} \text{sen}(2\omega t) \end{aligned} \quad (6.76)$$

Para determinar $u_2(t)$:

$$u_2 = \int \frac{W_2}{W} dt$$

$$\dot{} = \int \frac{\mu_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t)}{\omega} dt$$

$$\dot{} = \mu_0 \int \omega \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) dt$$

Asignando como cambio de variable $z = \text{sen}(\omega t)$ y su diferencial $dz = \omega \cos(\omega t) dt$:

$$\dot{} = \mu_0 \int \underbrace{[\text{sen}(\omega t)]}_z \underbrace{[\omega \cos(\omega t)]}_{dz} dt$$

$$\dot{} = \mu_0 \int z dz$$

$$\dot{} = \mu_0 \left(\frac{z^2}{2} \right)$$

$$\dot{} = \mu_0 \left[\frac{\text{sen}^2(\omega t)}{2} \right]$$

$$\therefore u_2(t) = \frac{\mu_0}{2} \text{sen}^2(\omega t) \quad (6.77)$$

Sustituyendo los valores $u_1(t)$ y $u_2(t)$ en $x_p = u_1(t) \cos(\omega t) + u_2(t) \text{sen}(\omega t)$ se obtiene la solución particular x_p del problema:

$$x_p = \left[-\frac{\mu_0 \omega}{2} t + \frac{\mu_0}{4} \text{sen}(2\omega t) \right] \cos(\omega t) + \left[\frac{\mu_0}{2} \text{sen}^2(\omega t) \right] \text{sen}(\omega t) \quad (6.78)$$

La ecuación x_p puede reducirse más a partir del uso de identidades trigonométricas y algebra de reducción:

$$x_p = -\frac{\mu_0 \omega}{2} t \cos(\omega t) + \frac{\mu_0}{4} \text{sen}(2\omega t) \cos(\omega t) + \frac{\mu_0}{2} \text{sen}^3(\omega t)$$

$$\dot{} = \frac{\mu_0}{2} \text{sen}^3(\omega t) - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \cos(\omega t) + \frac{\mu_0}{4} \underbrace{[2 \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t)]}_{\text{sen}(2\omega t)} \cos(\omega t)$$

$$\dot{} = \frac{\mu_0}{2} \text{sen}^3(\omega t) - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \cos(\omega t) + \frac{\mu_0}{2} \cos^2(\omega t) \text{sen}(\omega t)$$

$$\dot{} = \frac{\mu_0}{2} [\text{sen}^3(\omega t) + \cos^2(\omega t) \text{sen}(\omega t)] - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} \therefore &= \frac{\mu_0}{2} \text{sen}(\omega t) \underbrace{[\text{sen}^2(\omega t) + \text{cos}^2(\omega t)]}_1 - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{cos}(\omega t) \\ \therefore x_P &= \frac{\mu_0}{2} \text{sen}(\omega t) - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{cos}(\omega t) \end{aligned} \quad (6.79)$$

La solución general es:

$$\therefore x(t) = x_C + x_P = H_1 \text{cos}(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{2} \text{sen}(\omega t) - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{cos}(\omega t) \quad (6.80)$$

La solución se simplifica porque $(\mu_0 / 2) \text{sen}(\omega t)$ puede ser incluido dentro de $H_2 \text{sen}(\omega t)$ quedando:

$$\therefore x(t) = H_1 \text{cos}(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{cos}(\omega t) \quad (6.81)$$

Para calcular la solución con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ es necesario derivar x para obtener \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[H_1 \text{cos}(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t) - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{cos}(\omega t) \right] \\ \therefore &= H_1 \frac{d}{dt} [\text{cos}(\omega t)] + H_2 \frac{d}{dt} [\text{sen}(\omega t)] - \frac{\mu_0 \omega}{2} \frac{d}{dt} [t \text{cos}(\omega t)] \\ \therefore &= H_1 \frac{d}{dt} [\text{cos}(\omega t)] + H_2 \frac{d}{dt} [\text{sen}(\omega t)] - \frac{\mu_0 \omega}{2} \left\{ \text{cos}(\omega t) \frac{d}{dt} (t) + t \frac{d}{dt} [\text{cos}(\omega t)] \right\} \\ \therefore &= H_1 [-\omega \text{sen}(\omega t)] + H_2 [\omega \text{cos}(\omega t)] - \frac{\mu_0 \omega}{2} \{ [\text{cos}(\omega t)][1] + [t][-\omega \text{sen}(\omega t)] \} \\ \therefore \dot{x} &= -\omega H_1 \text{sen}(\omega t) + \omega H_2 \text{cos}(\omega t) - \frac{\mu_0 \omega}{2} [\text{cos}(\omega t) - \omega t \text{sen}(\omega t)] \end{aligned} \quad (6.82)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en x es posible determinar el valor de H_1 :

$$\begin{aligned} x_0 &= H_1 \underbrace{\text{cos}[\omega(0)]}_1 + H_2 \underbrace{\text{sen}[\omega(0)]}_0 - \frac{\mu_0 \omega}{2} (0) \underbrace{\text{cos}[\omega(0)]}_0 \\ \therefore H_1 &= x_0 \end{aligned} \quad (6.83)$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en \dot{x} es posible determinar el valor de H_2 :

$$v_0 = -\omega H_1 \underbrace{\text{sen}[\omega(0)]}_0 + \omega H_2 \underbrace{\text{cos}[\omega(0)]}_1 - \frac{\mu_0 \omega}{2} \left\{ \underbrace{\text{cos}[\omega(0)]}_1 - \omega(0) \underbrace{\text{sen}[\omega(0)]}_0 \right\}$$

$$v_0 = \omega H_2 - \frac{\mu_0 \omega}{2}$$

$$v_0 + \frac{\mu_0 \omega}{2} = \omega H_2$$

$$\therefore H_2 = \frac{v_0}{\omega} + \frac{\mu_0}{2} \quad (6.84)$$

Reemplazando el valor de las constantes H_1 y H_2 en $x(t)$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t)$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\therefore x(t) = \underbrace{x_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\mu_0}{2}\right) \text{sen}(\omega t)}_{\text{Respuesta Transitoria}} - \underbrace{\frac{\mu_0 \omega}{2} t \cos(\omega t)}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \quad (6.86)$$

En el siguiente apartado de este capítulo se presentará la recopilación de todas las soluciones obtenidas para los casos de vibraciones armónicas sin amortiguamiento, así mismo se ilustran las gráficas de las ecuaciones $x(t)$ presentando tres posibles casos cuando $\Omega \neq \omega$:

- ✚ La frecuencia $\Omega \rightarrow 0$.
- ✚ La frecuencia $\Omega \approx \omega$.
- ✚ La frecuencia $\Omega \gg \omega$.

Para los casos cuando $\Omega = \omega$ sólo se exhibirá un ejemplo de la grafica $x(t)$ dado que el fenómeno de resonancia pura que se suscita por la igualación de frecuencia externa Ω con la frecuencia natural de la estructura ω es muy similar en cuanto a patrón de graficación se refiere.

Los tres ejemplos son iguales en cuanto condiciones iniciales y componentes de masa y rigidez.

6.10 Soluciones Finales y Ejemplos de las Gráficas de x(t)

Tabla VI

Soluciones a $m\ddot{x} + kx = P(t)$ con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$

Ecuación	Solución x(t)	
	Respuesta Transitoria	Respuesta Estacionaria
$\ddot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$	$(x_0 - \mu_0) \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t)$	μ_0
$\ddot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$	$\left(x_0 - \frac{\mu_0}{1 - r^2}\right) \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t)$	$\frac{\mu_0}{1 - r^2} \cos(\Omega t)$
$\ddot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$	$x_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{\mu_0 r}{1 - r^2}\right) \text{sen}(\omega t)$	$\frac{\mu_0}{1 - r^2} \text{sen}(\Omega t)$
$\ddot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\omega t)$	$x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t)$	$\frac{\mu_0\omega}{2} t \text{sen}(\omega t)$
$\ddot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\omega t)$	$x_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\mu_0}{2}\right) \text{sen}(\omega t)$	$-\frac{\mu_0\omega}{2} t \cos(\omega t)$

6.10.1 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 (P_0 > 0)$

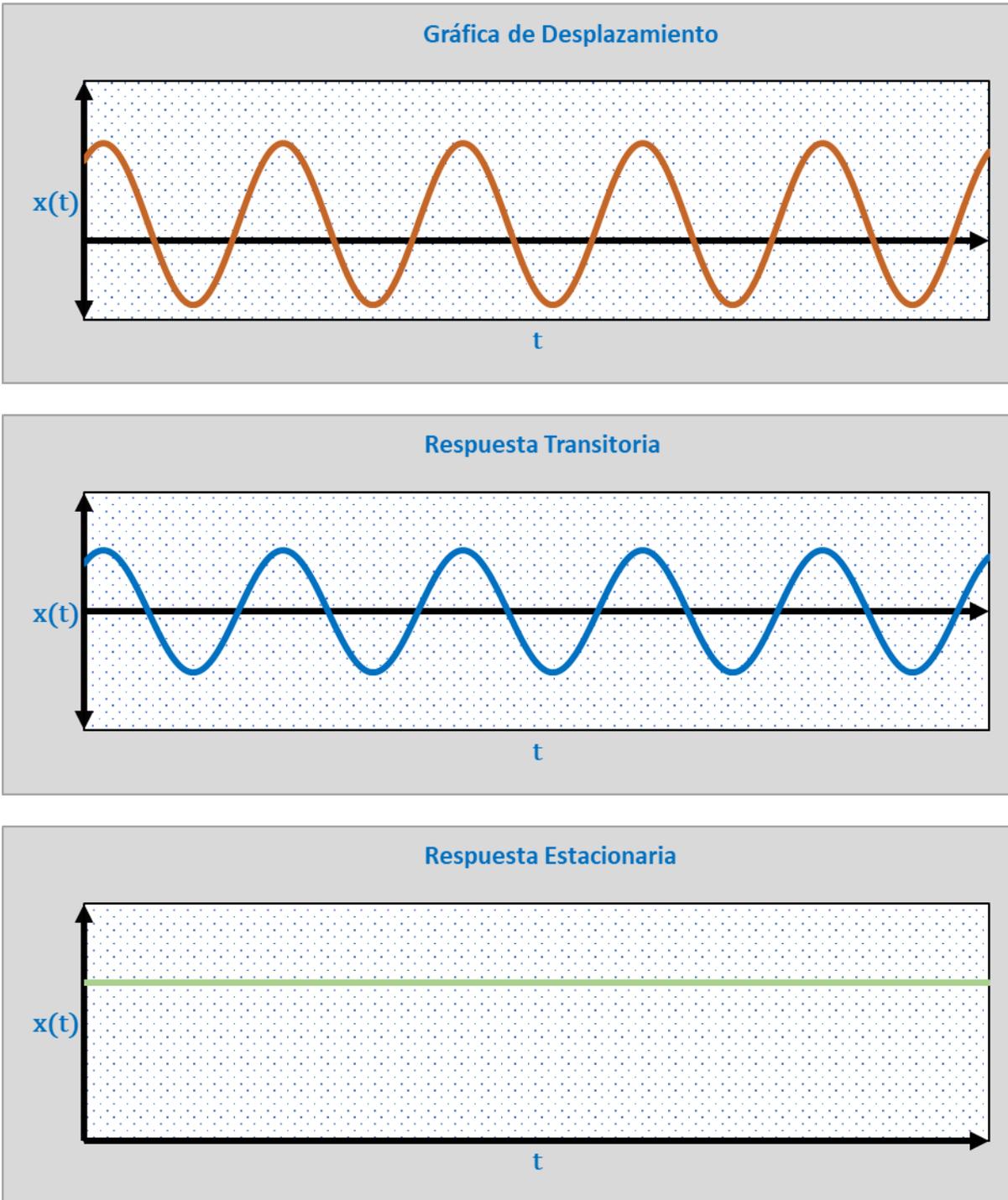


Figura VI.2. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 (P_0 > 0)$.

6.10.2 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 (P_0 < 0)$

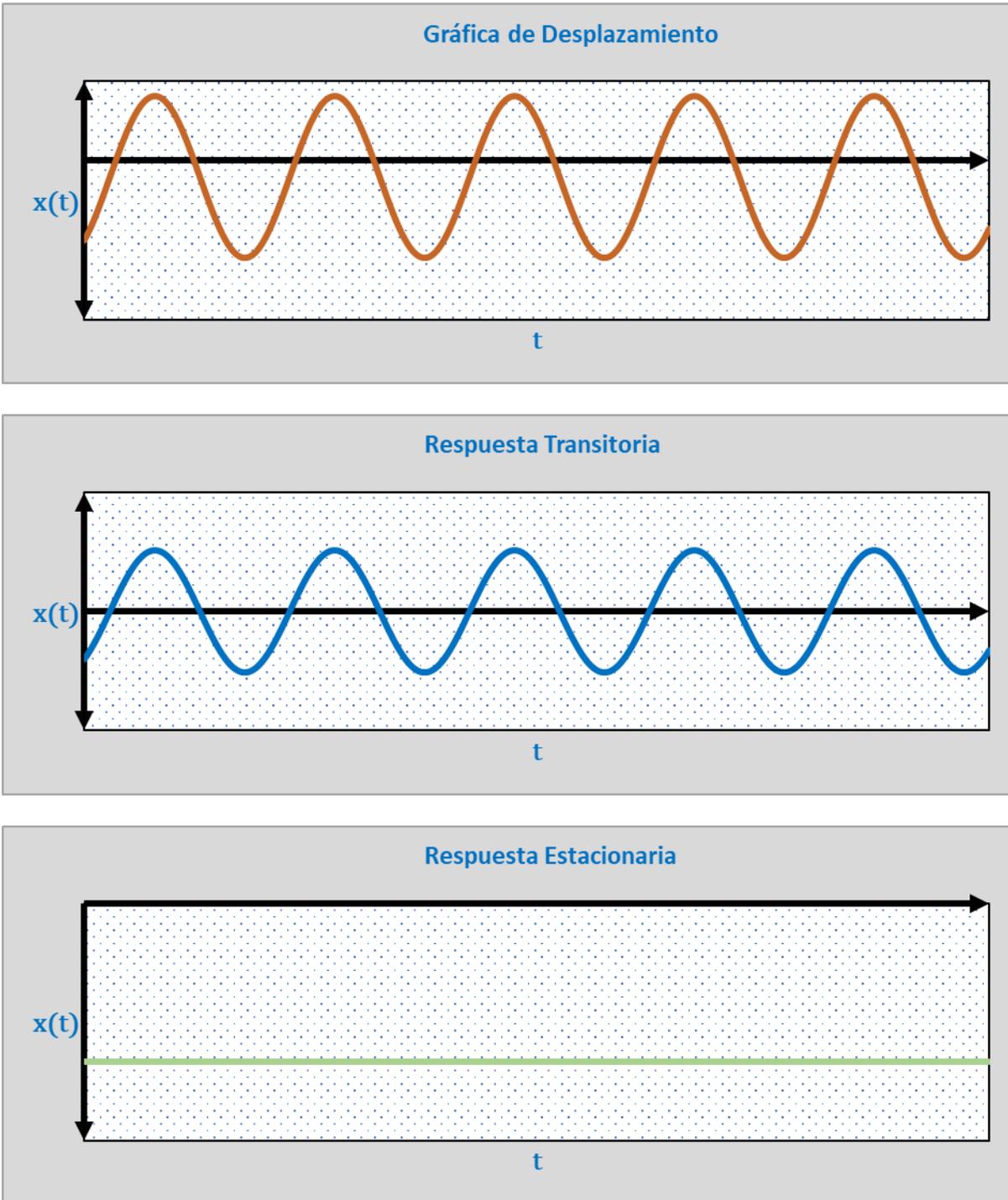


Figura VI.3. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 (P_0 < 0)$.

6.10.3 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ ($\Omega \rightarrow 0$)

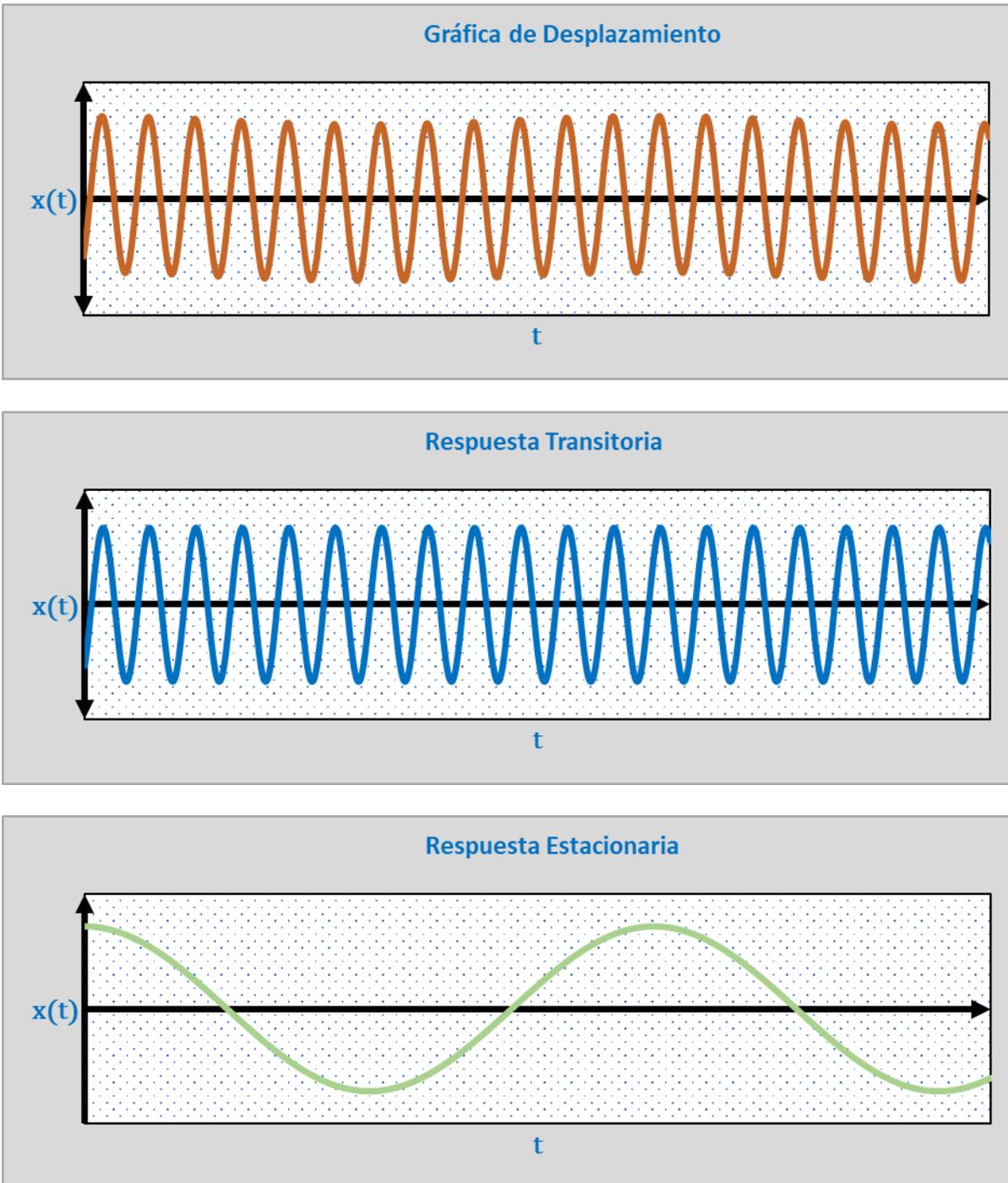


Figura VI.4. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$ ($\Omega \rightarrow 0$).

6.10.4 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ ($\Omega \approx \omega$)

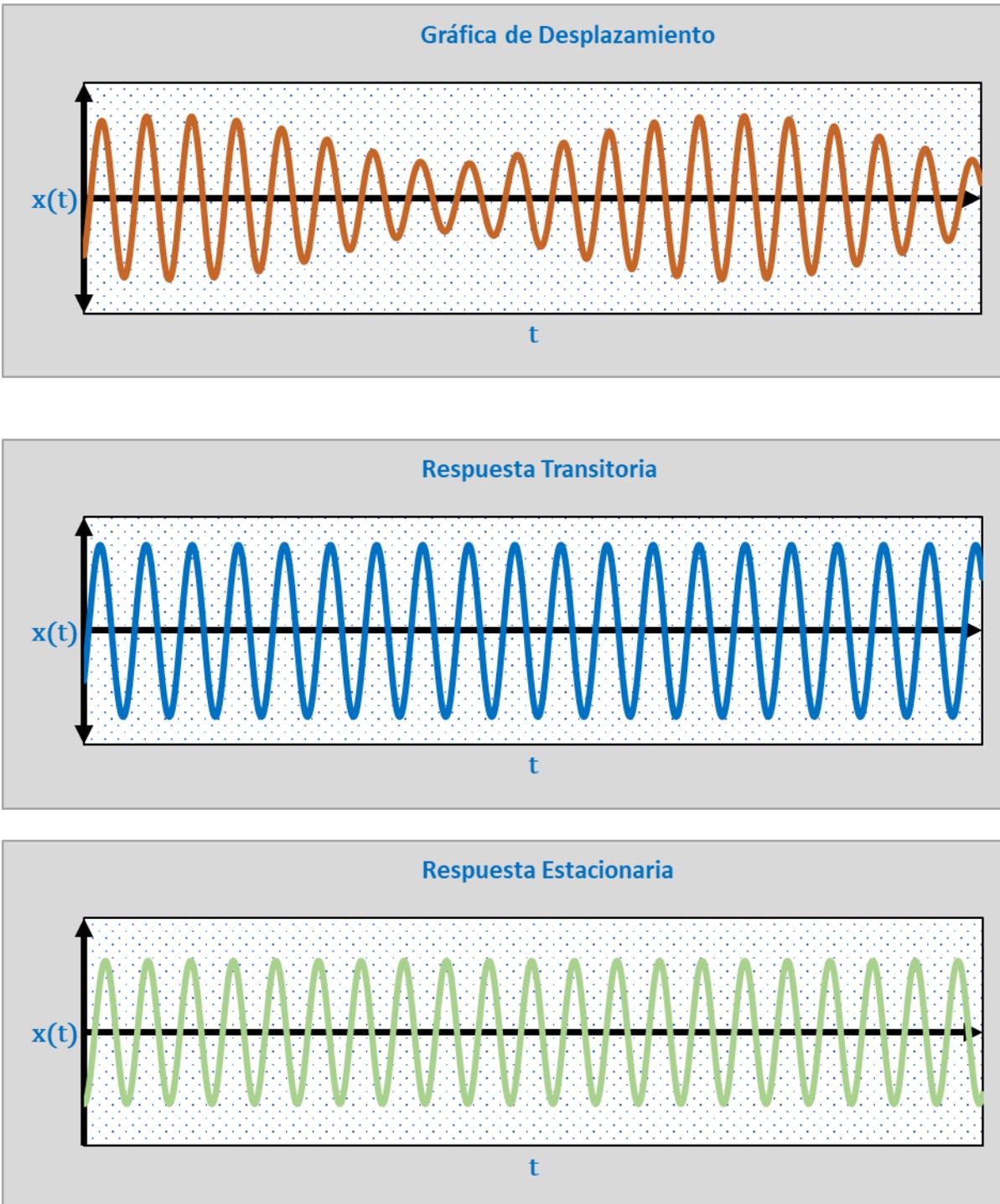


Figura VI.5. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$ ($\Omega \approx \omega$).

6.10.5 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$ ($\Omega \gg \omega$)

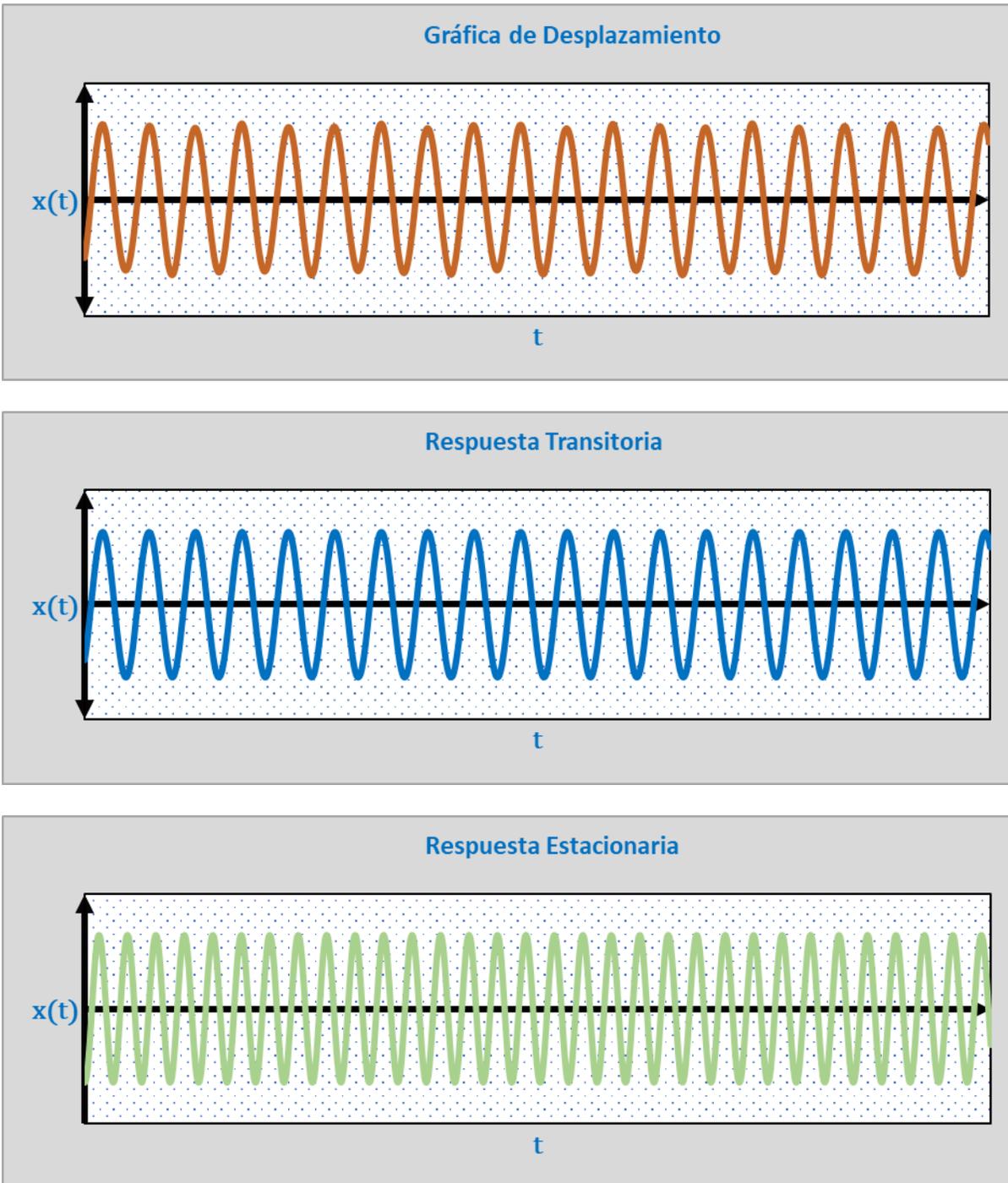


Figura VI.6. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$ ($\Omega \gg \omega$).

6.10.6 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$ ($\Omega \rightarrow 0$)

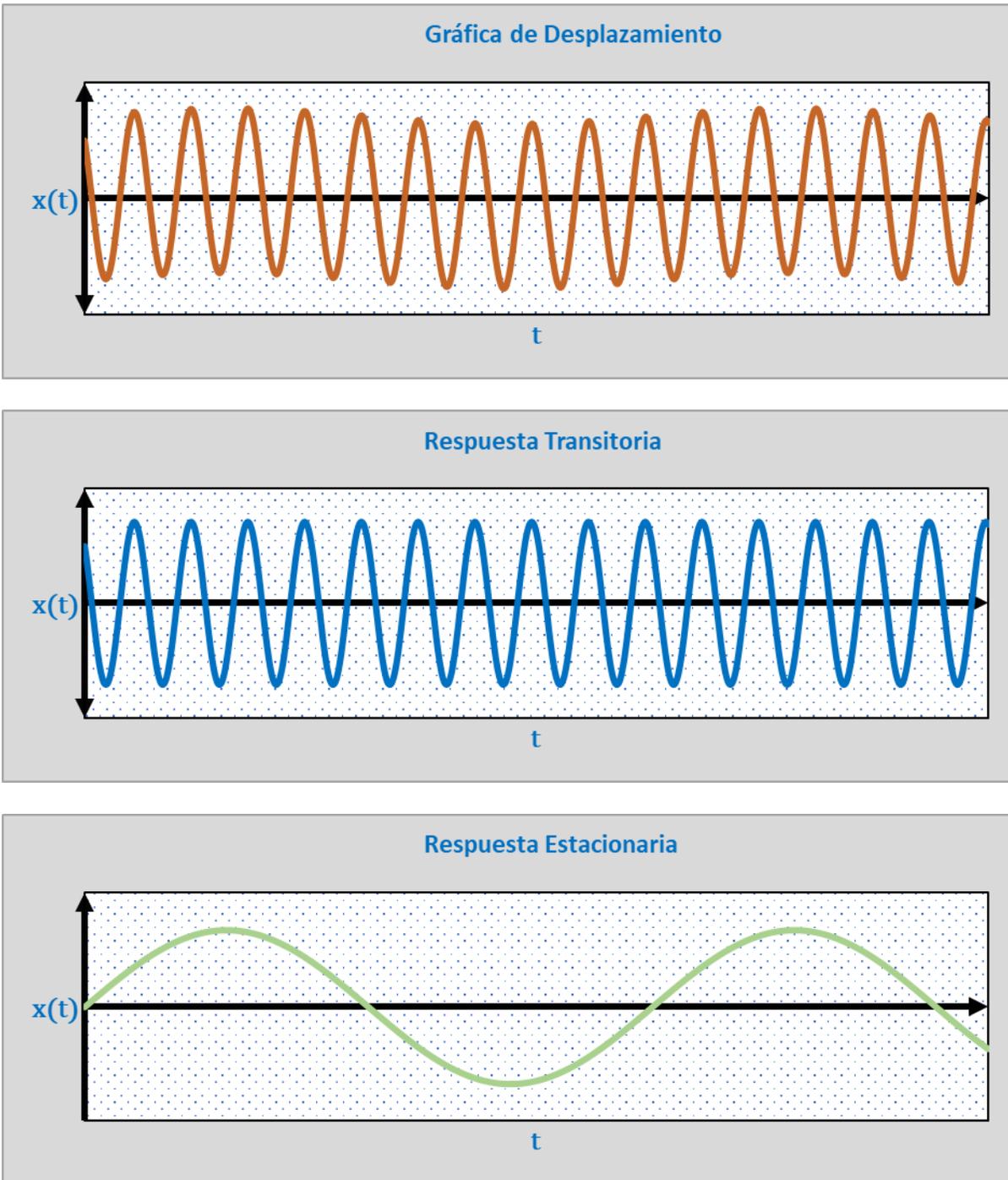


Figura VI.7. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ ($\Omega \rightarrow 0$).

6.10.7 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$ ($\Omega \approx \omega$)

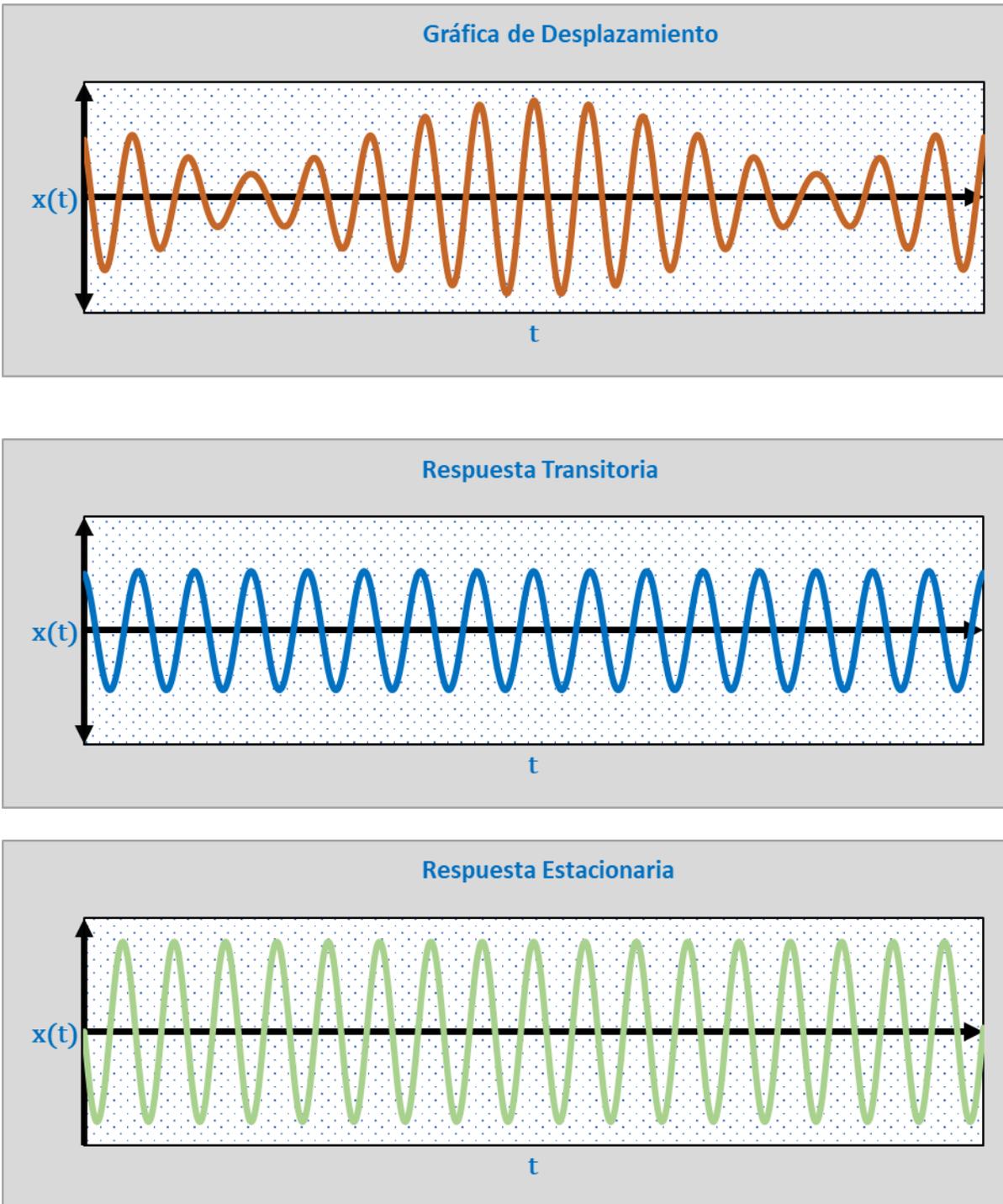


Figura VI.8. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ ($\Omega \approx \omega$).

6.10.8 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$ ($\Omega \gg \omega$)

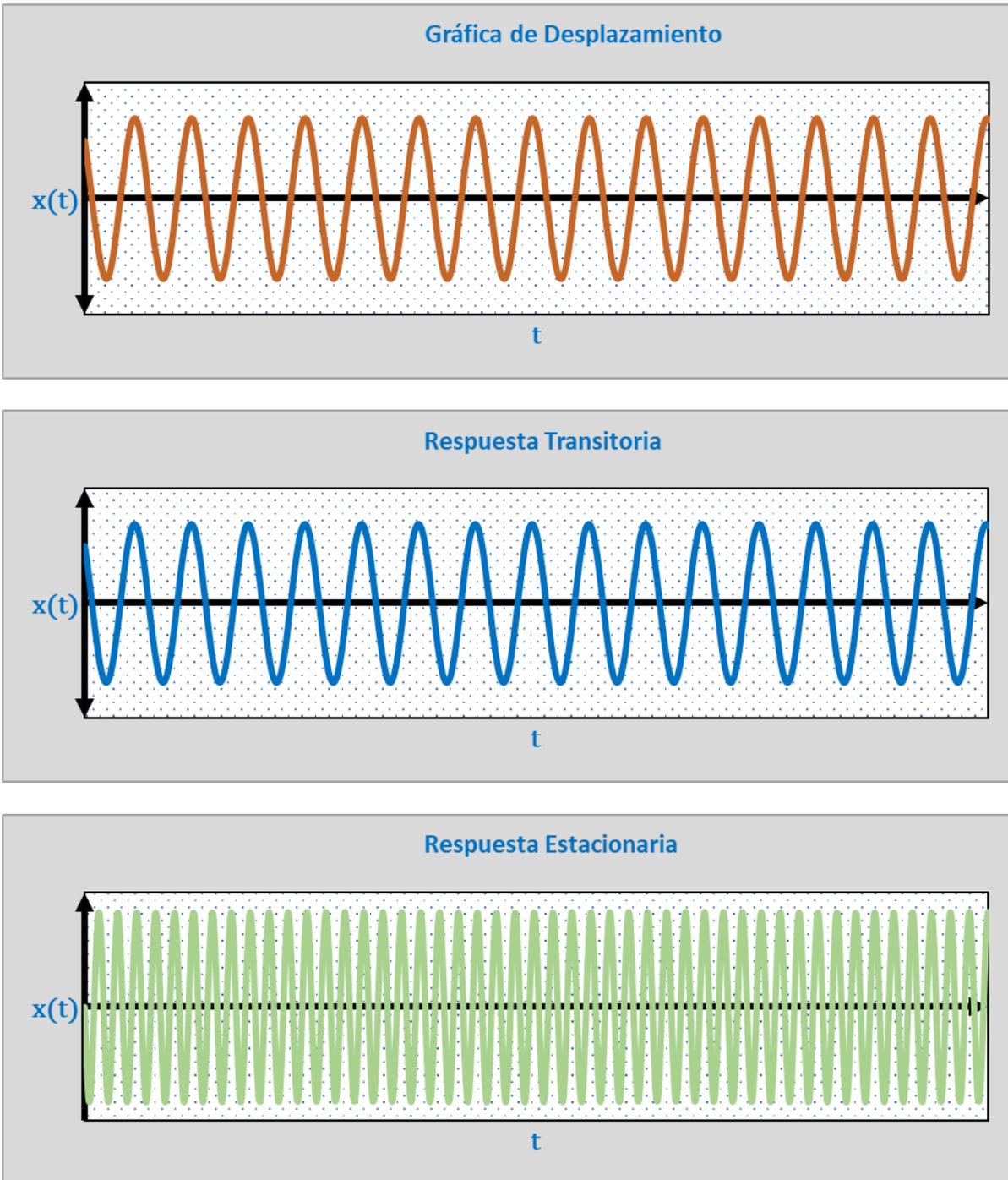


Figura VI.9. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ ($\Omega \gg \omega$).

6.10.9 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$

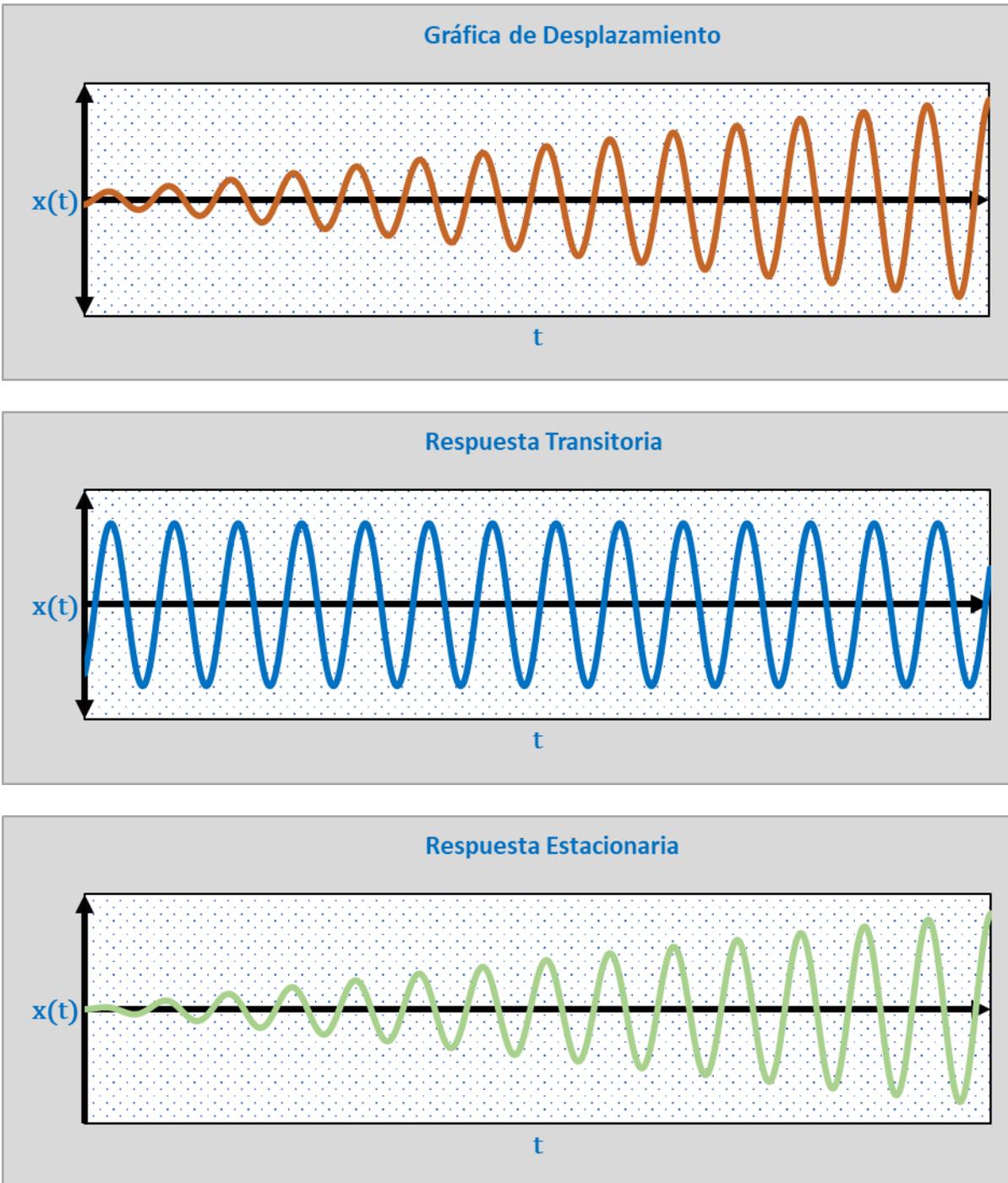


Figura VI.10. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\omega t)$.

6.10.10 Representación gráfica $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\omega t)$

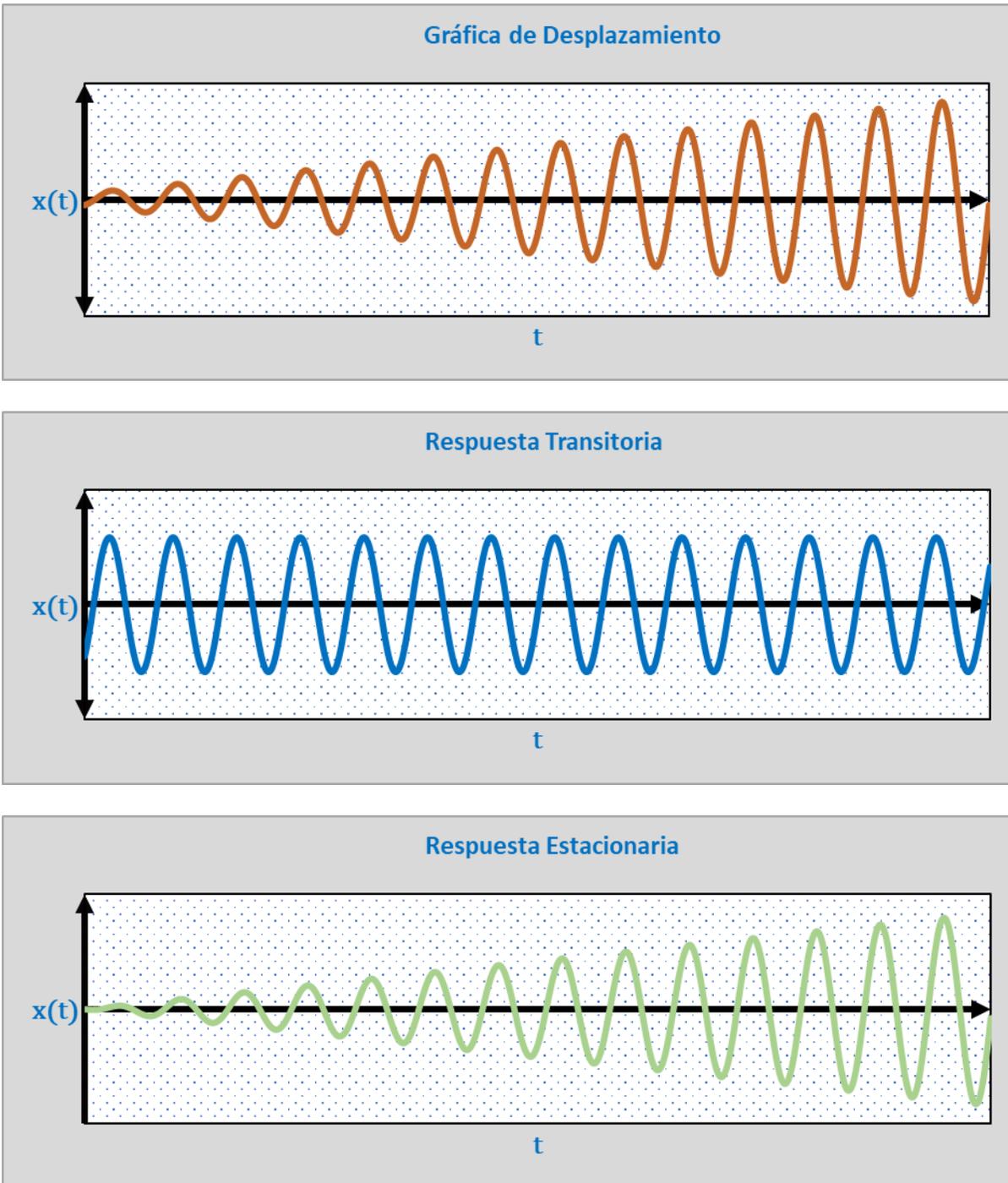


Figura VI.11 Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t)$.

Capítulo VII: Fenómenos de Resonancia Pura y Batimiento

- 7.1 Introducción
- 7.2 Resonancia Pura
- 7.3 Fenómeno de Batimiento

VII. Fenómenos de Resonancia Pura y Batimiento

7.1 Introducción

Quizá el ejemplo más ilustrativo en la ingeniería civil, en cuanto a resonancia se refiere, es el colapso del puente de Tacoma Narrows (en Washington, Estados Unidos) destruido por vibraciones resonantes. La discusión del porqué de su colapso supera los alcances de este texto, no obstante, el desplome del puente se asocia principalmente a dos teorías:

- ✚ Colapso por resonancia: Aun cuando los vientos no eran particularmente intensos y se les clasificó como moderados en dicha ocasión, el “aleteo” del viento a través del puente aportó una fuerza impulsora periódica cuya frecuencia se igualó con la frecuencia natural del puente (Serway & Jewett, Jr., 2008, pág. 438).
- ✚ Colapso por flameo: esta teoría plantea una inestabilidad aeroslática (ciencia que estudia la interacción entre las fuerzas inerciales y elásticas, con la aerodinámica) por la cual una estructura al vibrar absorbe energía del fluido circundante (en el caso del puente de Tacoma fue el aire), de modo que la estructura en cuestión no puede disipar la energía que absorbió en un ciclo de vibración.

Por otro lado, un fenómeno semejante a la resonancia pero en el cual se estudian los sistemas físicos cuando la frecuencia de excitación externa Ω es casi igual (sin llegar a ser igual en ningún momento) a la frecuencia natural de la estructura ω , da origen al fenómeno conocido como *batido* desde el punto de vista de las vibraciones mecánicas (Rao, 2012, pág. 247).

7.2 Resonancia Pura

Se recuerda que el factor de amplificación dinámico sin amortiguamiento toma el valor de:

$$D = \frac{1}{1 - r^2}$$

Como se dijo en el capítulo anterior, los valores de r muy cercanos a la unidad propician que el factor de amplificación dinámico sea muy grande, generando amplitudes de vibración forzada perjudicialmente enormes (Seely & Ensign, 1977, pág. 371). Cuando ocurre que $\Omega = \omega$ se

genera el fenómeno de resonancia que puede destruir el sistema (Majewski Szymiec, 2016, pág. 56), además de propiciar deflexiones y fallas excesivas (Rao, 2012, pág. 11).

La explicación del fenómeno de resonancia pura, desde un punto de vista analítico, para vibraciones armónicas en sistemas sin amortiguamiento, parte de las ecuaciones donde la fuerza $P(t)$ es del tipo cosenoidal $P_0 \cos(\Omega t)$ o senoidal^{7.1} $P_0 \sin(\Omega t)$. Las respuestas dinámicas para esas fuerzas externas son respectivamente:

$$x_1(t) = \left(x_0 - \frac{\mu_0}{1-r^2}\right) \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{\mu_0}{1-r^2} \cos(\Omega t)$$

$$x_2(t) = x_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{\mu_0 r}{1-r^2}\right) \sin(\omega t) + \frac{\mu_0}{1-r^2} \sin(\Omega t)$$

Cuya reescritura, al factorizar en función del factor de amplificación dinámico, es:

$$x_1(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{\mu_0}{1-r^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \quad (7.1)$$

$$x_2(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{\mu_0}{1-r^2} [\sin(\Omega t) - r \sin(\omega t)] \quad (7.2)$$

Como se mencionó con anterioridad, la resonancia pura ocurre cuando la frecuencia externa es igual a la frecuencia natural de la estructura ($\Omega = \omega$). Para conocer el valor que presenta un sistema masa - resorte al entrar en resonancia, sea hace necesario evaluar el límite cuando $\Omega \rightarrow \omega$. Bajo esta consideración, se cambia r por su definición Ω / ω .

$$x_1(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{\mu_0}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \quad (7.3)$$

$$x_2(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{\mu_0}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \left[\sin(\Omega t) - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \sin(\omega t) \right] \quad (7.4)$$

^{7.1} Dicho de otra forma, se explica mediante las respuestas del sistema masa-resorte ante excitaciones armónicas descritas en el capítulo anterior.

Aplicando el límite $\Omega \rightarrow \omega$ en la ecuación 7.3:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} x_1(t) &= \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left\{ x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \right\} \\
 \vdots &= x_0 \underbrace{\lim_{\Omega \rightarrow \omega} [\cos(\omega t)]}_0 + \frac{v_0}{\omega} \underbrace{\lim_{\Omega \rightarrow \omega} [\operatorname{sen}(\omega t)]}_0 + \mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{\cos(\Omega t)}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right] - \mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{\cos(\omega t)}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right] \\
 \vdots &= \underbrace{\mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{\frac{d}{d\Omega} \cos(\Omega t)}{\frac{d}{d\Omega} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)} \right]}_{\substack{\text{Regla} \\ \text{L'Hopital}}} - \underbrace{\mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{\frac{d}{d\Omega} \cos(\omega t)}{\frac{d}{d\Omega} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)} \right]}_{\substack{\text{Regla} \\ \text{L'Hopital}}} \\
 \vdots &= \mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{\frac{d}{d\Omega} \cos(\Omega t)}{\underbrace{\frac{d}{d\Omega} (1)}_0 - \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)} \right] - \mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{\overbrace{\frac{d}{d\Omega} \cos(\omega t)}^0}{\underbrace{\frac{d}{d\Omega} (1)}_0 - \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)} \right] \\
 \vdots &= \mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{-t \operatorname{sen}(\Omega t)}{-\frac{2\Omega}{\omega^2}} \right] - \mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{0}{-\frac{2\Omega}{\omega^2}} \right] \\
 \vdots &= \mu_0 \left[\frac{-t \operatorname{sen}(\omega t)}{-\frac{2\omega}{\omega^2}} \right] - \mu_0 \underbrace{\left[\frac{0}{-\frac{2\omega}{\omega^2}} \right]}_0 \\
 \vdots &= \mu_0 \left[\frac{-t \operatorname{sen}(\omega t)}{-\frac{2}{\omega}} \right] \\
 \vdots &= \mu_0 \left(\frac{\omega}{2} \right) t \operatorname{sen}(\omega t)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\Omega \rightarrow \omega} x_1(t) = \frac{\mu_0 \omega}{2} t \operatorname{sen}(\omega t) \quad (7.5)$$

Aplicando el límite $\Omega \rightarrow \omega$ en la ecuación 7.4:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} x_2(t) &= \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left\{ x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \left[\text{sen}(\Omega t) - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \text{sen}(\omega t) \right] \right\} \\
 \vdots &= x_0 \underbrace{\lim_{\Omega \rightarrow \omega} [\cos(\omega t)]}_0 + \frac{v_0}{\omega} \underbrace{\lim_{\Omega \rightarrow \omega} [\text{sen}(\omega t)]}_0 + \mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{\text{sen}(\Omega t)}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right] \\
 &\quad - \frac{\mu_0}{\omega^2} \text{sen}(\omega t) \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{\Omega^2}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}} \right] \\
 \vdots &= \underbrace{\mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{\frac{d}{d\Omega} \text{sen}(\Omega t)}{\frac{d}{d\Omega} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)} \right]}_{\substack{\text{Regla} \\ \text{L'Hopital}}} - \frac{\mu_0}{\omega^2} \text{sen}(\omega t) \underbrace{\lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{\frac{d}{d\Omega} \Omega^2}{\frac{d}{d\Omega} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right)} \right]}_{\substack{\text{Regla} \\ \text{L'Hopital}}} \\
 \vdots &= \mu_0 \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{t \cos(\Omega t)}{-\frac{2\Omega}{\omega^2}} \right] - \frac{\mu_0}{\omega^2} \text{sen}(\omega t) \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left[\frac{2\Omega}{-\frac{2\Omega}{\omega^2}} \right] \\
 \vdots &= \mu_0 \left[\frac{t \cos(\omega t)}{-\frac{2\omega}{\omega^2}} \right] - \frac{\mu_0}{\omega^2} \text{sen}(\omega t) \left[\frac{2\omega}{-\frac{2\omega}{\omega^2}} \right] \\
 \vdots &= \mu_0 \left[\frac{t \cos(\omega t)}{-\frac{2}{\omega}} \right] - \frac{\mu_0}{\omega^2} \text{sen}(\omega t) \left[\frac{2\omega}{-\frac{2}{\omega}} \right] \\
 \vdots &= \mu_0 \left[\frac{t \cos(\omega t)}{-\frac{2}{\omega}} \right] - \frac{\mu_0}{\omega^2} \text{sen}(\omega t) \left[\frac{2\omega}{-\frac{2}{\omega}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\dot{} = \mu_0 \left(-\frac{\omega}{2}\right) t \cos(\omega t) - \frac{\mu_0}{\omega^2} (2\omega) \left(-\frac{\omega}{2}\right) \sin(\omega t)$$

$$\dot{} = -\frac{\mu_0 \omega}{2} t \cos(\omega t) + \mu_0 \sin(\omega t)$$

Al analizar este resultado el término $\mu_0 \sin(\omega t)$ es dependientemente lineal con $H_2 \sin(\omega t)$ de la ecuación complementaria $x_C(t)$ lo que indica que el resultado final es:

$$\therefore \lim_{\Omega \rightarrow \omega} x_2(t) = -\frac{\mu_0 \omega}{2} t \cos(\omega t) \quad (7.6)$$

Nótese que al hacer el límite cuando $\Omega \rightarrow \omega$ se generan las soluciones particulares $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que corresponden a las ecuaciones $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\omega t)$ y $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \sin(\omega t)$ respectivamente.

7.3 Fenómeno de Batimiento

El batimiento queda definido como la variación periódica en amplitud en un punto dado debido a la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes (Serway & Jewett, Jr., 2008, pág. 517).

Cuando se graficaron las respuestas dinámicas al presentarse $\Omega \approx \omega$ para las ecuaciones $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$ o $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \sin(\Omega t)$ del capítulo anterior (figuras VI.5 y VI.8), se notó que las gráficas generadas presentaban un tipo especial de vibración porque la amplitud aumentaba y disminuía de manera inconsistente.

Auxiliándose de la identidad trigonométrica:

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)$$

Y aplicándola en la solución particular mostrada:

$$x(t) = \frac{\mu_0}{1 - r^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \quad (7.7)$$

Se logra describir el fenómeno de batimiento mediante cambios de variable.

Además de aplicar algebra de reducción y otras suposiciones se llega a una nueva forma de reescribir tal ecuación de tal forma que sea posible describir una curva envolvente para el caso de batimiento:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\mu_0}{1 - r^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \\ \therefore &= \frac{\mu_0}{1 - r^2} \left[2 \operatorname{sen} \left(\frac{\Omega t + \omega t}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\Omega t - \omega t}{2} \right) \right] \\ \therefore x(t) &= \frac{2\mu_0}{1 - r^2} \left\{ \operatorname{sen} \left[\left(\frac{\Omega + \omega}{2} \right) t \right] \operatorname{sen} \left[\left(\frac{\Omega - \omega}{2} \right) t \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Sea 2ε una cantidad positiva con un valor igual a:

$$2\varepsilon = \omega - \Omega \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\omega - \Omega}{2}$$

Considerando que $\Omega \approx \omega$:

$$2\Omega \cong \omega + \Omega \quad \rightarrow \quad \Omega \cong \frac{\Omega + \omega}{2}$$

Por lo tanto, la multiplicación de 2ε con 2Ω genera:

$$4\varepsilon\Omega = \omega^2 - \Omega^2 = \omega^2(1 - r^2) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1 - r^2} = \frac{\omega^2}{4\varepsilon\Omega}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación 7.8 genera la ecuación que representa el batimiento y su curva envolvente:

$$\therefore x(t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{2\varepsilon\Omega} [\operatorname{sen}(\Omega t) \operatorname{sen}(\varepsilon t)] \quad (7.9)$$

La gráfica siguiente representa el fenómeno de batimiento:

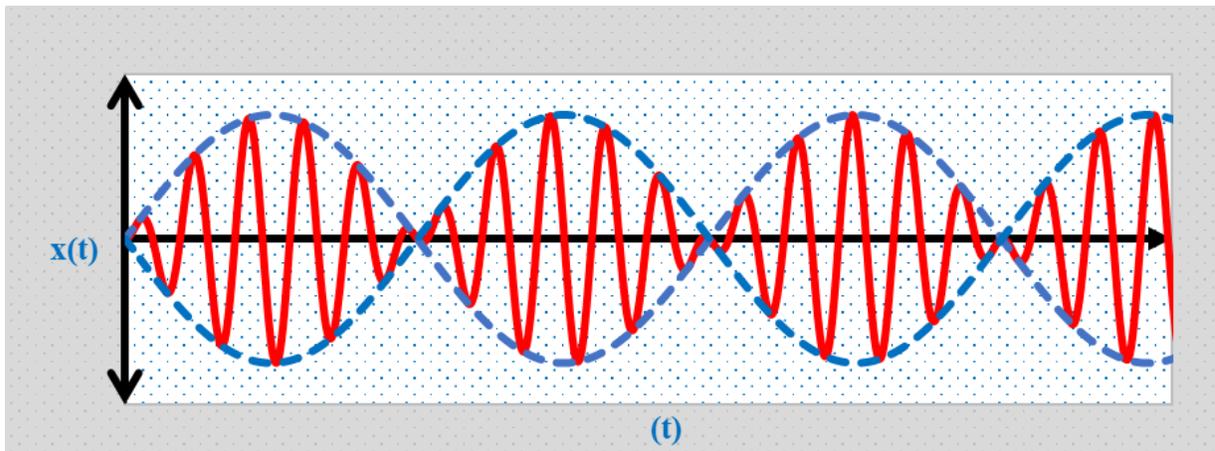


Figura VII.1. Gráfica del fenómeno de batimiento junto con sus curvas envolventes.

Las oscilaciones de este tipo, además de conocerse como fenómeno de batidos, reciben el nombre de pulsaciones, pulsos o latidos.

Las curvas envolventes están representadas por las funciones:

$$\pm \frac{\mu_0 \omega^2}{2\varepsilon \Omega} \text{sen}(\varepsilon t) \quad (7.10)$$

De la figura VII.1 se hacen las siguientes observaciones:

- ✚ Cuando el valor de ε es pequeño, el periodo de la frecuencia externa $2\pi / \Omega$ se aproxima bastante al periodo de las vibraciones libres no amortiguada $2\pi / \omega$. Así mismo la frecuencia de $\text{sen}(\varepsilon t)$ es bastante pequeña en comparación con la de $\text{sen}(\Omega t)$ (Zill & Cullen, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones Diferenciales, 2008, pág. 165).
- ✚ La función representada por $\text{sen}(\Omega t)$ pasará por varios ciclos, mientras que $\text{sen}(\varepsilon t)$ pasa por un sólo ciclo. Por consiguiente, la amplitud se incrementa y disminuye de forma continua. (Rao, 2012, pág. 249)

Capítulo VIII: Vibraciones Armónicas en Sistemas de 1 G.D.L. Con Amortiguamiento

- 8.1 Introducción
- 8.2 Factor de Amplificación Dinámico
- 8.3 Ángulo de Fase
- 8.4 Planteamiento de las Ecuaciones Complementarias y Particulares
- 8.5 Consideración de las Soluciones Finales
 - 8.5.1 Solución complementaria para amortiguamiento crítico
 - 8.5.2 Solución complementaria para sobreamortiguamiento
 - 8.5.3 Ecuación complementaria para subamortiguamiento
- 8.6 Casos de EDO a Resolver de Vibraciones Armónicas
- 8.7 Solución a la EDO con $P(t) = P_0$
 - 8.7.1 Solución particular para todos los casos de amortiguamiento
 - 8.7.2 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)
 - 8.7.3 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)
 - 8.7.4 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)
- 8.8 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$
 - 8.8.1 Solución particular para todos los casos
 - 8.8.2 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)
 - 8.8.3 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)
 - 8.8.4 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)
- 8.9 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \sen(\Omega t)$
 - 8.9.1 Solución particular para todos los casos
 - 8.9.2 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)
 - 8.9.3 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)
 - 8.9.4 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)
- 8.10 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$
 - 8.10.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)
 - 8.10.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)
 - 8.10.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)
- 8.11 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \sen(\omega t)$
 - 8.11.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)
 - 8.11.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

- 8.11.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)
- 8.12 Recopilación de Soluciones y Gráficas cuando $P(t) = P_0$
 - 8.12.1 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi = 1$ (Ej. 1)
 - 8.12.2 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi = 1$ (Ej. 2)
 - 8.12.3 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi > 1$ (Ej. 1)
 - 8.12.4 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi > 1$ (Ej. 2)
 - 8.12.5 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi < 1$ (Ej. 1)
 - 8.12.6 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi < 1$ (Ej. 2)
- 8.13 Recopilación de Funciones y Gráficas Cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$
 - 8.13.1 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi = 1$
 - 8.13.2 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi = 1$
 - 8.13.3 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi = 1$
 - 8.13.4 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi > 1$
 - 8.13.5 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi > 1$
 - 8.13.6 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi > 1$
 - 8.13.7 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi < 1$
 - 8.13.8 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi < 1$
 - 8.13.9 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi < 1$
- 8.14 Recopilación de Funciones y Gráficas Cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$
 - 8.14.1 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi = 1$
 - 8.14.2 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi = 1$
 - 8.14.3 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi = 1$
 - 8.14.4 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi > 1$
 - 8.14.5 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi > 1$
 - 8.14.6 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi > 1$
 - 8.14.7 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi < 1$
 - 8.14.8 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi < 1$
 - 8.14.9 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi < 1$
- 8.15 Recopilación de Funciones y Gráficas Cuando $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$
 - 8.15.1 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$ y $\xi = 1$
 - 8.15.2 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$ y $\xi > 1$
 - 8.15.3 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$ y $\xi < 1$
- 8.16 Recopilación de Funciones y Gráficas Cuando $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$
 - 8.16.1 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$ y $\xi = 1$
 - 8.16.2 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$ y $\xi > 1$
 - 8.16.3 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$ y $\xi < 1$

VIII. Vibraciones Armónicas en Sistemas de 1 G.D.L. Con Amortiguamiento

8.1 Introducción

Hasta el momento se ha visto la respuesta dinámica de:

- ✚ Vibración libre sin amortiguamiento en sistemas de 1 G. D. L.
- ✚ Vibración libre con amortiguamiento en sistemas de 1 G. D. L.
- ✚ Vibración forzada de sistemas de 1 G.D.L sin amortiguamiento ante excitaciones armónicas.

Como se mencionó con anterioridad, es más importante saber y entender la respuesta dinámica en sistemas amortiguados por tener mayor semejanza con la realidad, puesto que la gran mayoría de sistemas físicos presentan, en mayor o menor grado, cierto amortiguamiento.

Aunque se sigue haciendo uso de parámetros intrínsecos explicados anteriormente, aparecen otros como el factor de amplificación dinámico con amortiguamiento y el ángulo de fase, los cuales deben ser explicados antes de comenzar a dar solución a las EDO de vibraciones armónicas.

Por practicidad, al terminar de explicar los parámetros del párrafo anterior, se determinarán las ecuaciones complementarias x_C que facilitan la solución de los casos a resolver de este capítulo.

8.2 Factor de Amplificación Dinámico

El factor de amplificación dinámico sigue teniendo la misma definición: éste indica cuántas veces la amplitud de las vibraciones es más grande en comparación con el desplazamiento estático (Majewski Szymiec, 2016, pág. 56), no obstante, con la presencia de amortiguamiento su valor es:

$$D = \frac{A}{\mu_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (8.1)$$

En la solución de sistemas con amortiguamiento sometido ante excitaciones armónicas será común encontrar una solución donde esté presente el factor de amplificación dinámico. La figura VIII.1 expresa en el eje de las abscisas la relación de frecuencia r y en el eje de las ordenadas

$[(1 - r^2)^2 + (2r\xi)^2]^{-1/2}$ con la finalidad de explicar sus características por medio de dicha representación gráfica.

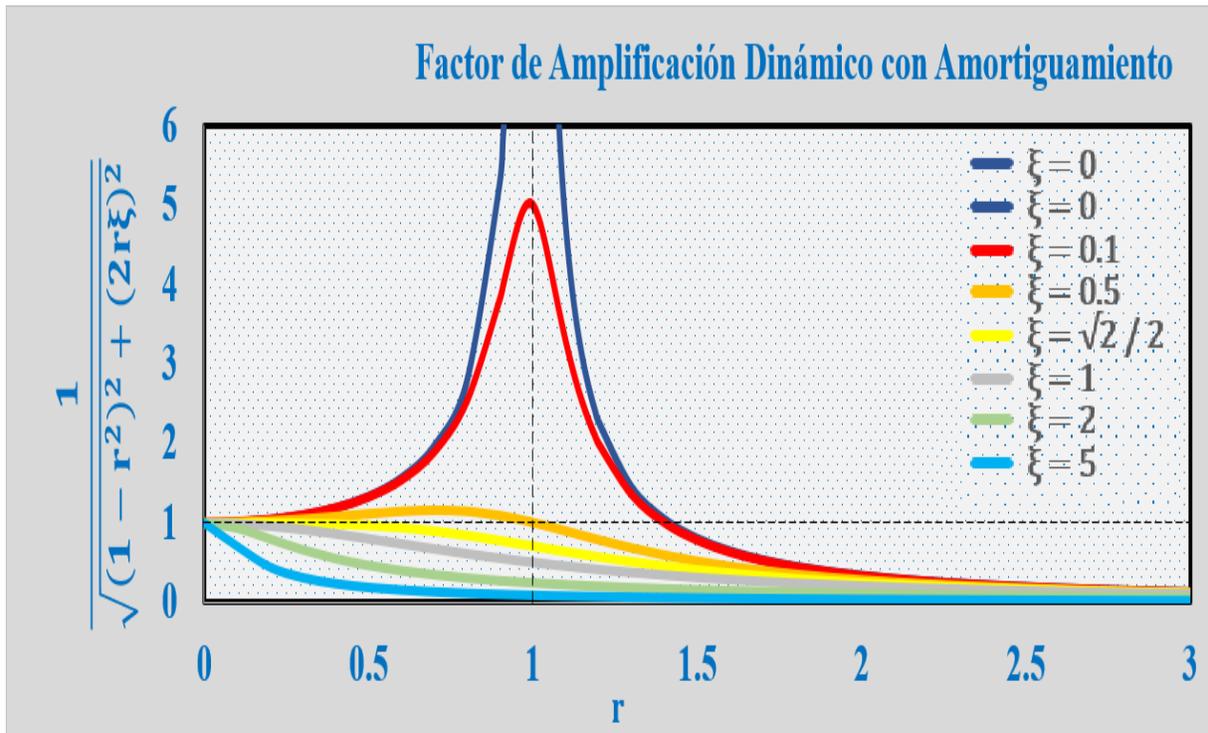


Figura VIII.1. Factor de amplificación dinámica con amortiguamiento.

De la figura VIII.1 pueden observarse las siguientes características del factor de amplificación dinámico:

- ✚ Cuando la relación de amortiguamiento es $\xi = 0$, $D \rightarrow \infty$ conforme $r \rightarrow 1$.
- ✚ Conforme la relación de amortiguamiento ξ va creciendo ($\xi > 0$), el factor de amplificación dinámico (D) se reduce y toma valores cercanos a cero ($D \approx 0$).
- ✚ Sin importar que valor de amortiguamiento presente el sistema, para $r = 0$, el valor de amplificación dinámico será igual a 1 ($D = 1$).
- ✚ Cuando $0 \leq \xi \leq \sqrt{2} / 2$, el valor máximo del factor de amplificación dinámico es $D = 1/2\xi\sqrt{1 - \xi^2}$ cuando $r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ y $D = 1/2\xi$ cuando $r = 1$ (Rao, 2012, pág. 253).
- ✚ El amortiguamiento (ξ) disminuye en forma muy significativa la amplificación de la respuesta dinámica en casos próximos a la resonancia ($r = 1$) (De la Colina Martínez, Valdés González, & González Pérez, 2016, pág. 102).

8.3 Ángulo de Fase

El ángulo de fase definido por:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1 - r^2} \right) \quad (8.2)$$

Junto con el factor de amplificación dinámico D , son parámetros importantes de la vibración armónica en sistemas con amortiguamiento. La figura VIII.2 expresa en el eje de las abscisas la relación de frecuencia r y en el eje de las ordenadas θ con la finalidad de explicar sus características por medio de dicha representación gráfica.

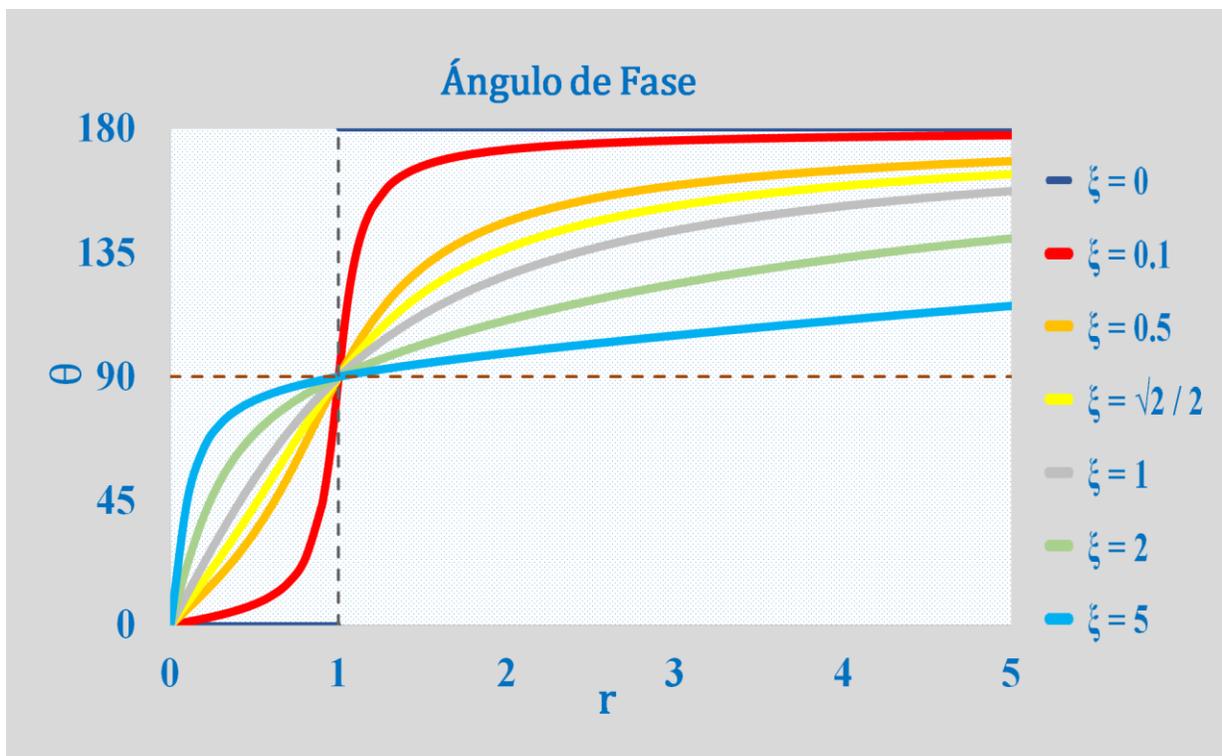


Figura VIII.2. Ángulo de fase.

De la figura VIII.2 pueden observarse las siguientes características del ángulo de fase (θ):

- ✚ Cuando la relación de amortiguamiento es $\xi = 0$, el ángulo de fase adquiere un valor de 0° en el intervalo $0 < r < 1$. Esto indica que la excitación y respuesta están en fase.
- ✚ Cuando la relación de amortiguamiento es $\xi = 0$, el ángulo de fase adquiere un valor de 180° en $r > 1$. Esto indica que la excitación y respuesta están desfasada.

- ✚ Para aquellos valores donde $\xi > 0$ y $0 < r < 1$, el ángulo de fase es $0^\circ < \theta < 90^\circ$, lo que indica que la respuesta se retrasa con respecto a la excitación.
- ✚ Para aquellos valores donde $\xi > 0$ y $r > 1$, el ángulo de fase es $90^\circ < \theta < 180^\circ$, lo que indica que la respuesta se adelanta a la excitación.
- ✚ Para aquellos valores donde $\xi > 0$ y $r = 1$, el ángulo de fase es $\theta = 90^\circ$, lo que indica que la diferencia de fase entre la excitación y la respuesta es de 90°
- ✚ Para aquellos valores donde $\xi > 0$ y $r \gg 1$, el ángulo de fase es $\theta \approx 180^\circ$, lo que indica que la respuesta y la excitación están desfasadas.

8.4 Planteamiento de las Ecuaciones Complementarias y Particulares

Los casos más importantes para la ingeniería civil son los que presentan subamortiguamiento dado que la mayoría de las obras civiles presentan este tipo de amortiguamiento, sin embargo, no se descarta la solución de los otros dos tipos de amortiguamiento.

Para este capítulo se calcularán las ecuaciones complementarias para los tres casos posibles de amortiguamiento (amortiguamiento crítico, sobreamortiguamiento y subamortiguamiento). Así mismo, como se resuelven problemas de valor inicial con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$, se agiliza mucho el procedimiento presentando la ecuación \dot{x}_C dado que será recurrente su uso en este capítulo.

A diferencia de la solución complementaria que funciona como partida para todos los casos dada una clasificación de amortiguamiento, la solución particular al depender de $P(t)$ debe plantearse al inicio de cada ejercicio.

8.5 Consideración de las Soluciones Finales

En el capítulo V se demostró que bajo el uso de operaciones algebraicas es posible transformar $\sinh(\omega_D t)$ y $\cosh(\omega_D t)$ a $\sin(\omega_D t)$ y $\cos(\omega_D t)$. Para realizar esto $\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$ debía sustituirse a $\omega_D = \omega i\sqrt{1 - \xi^2}$ y, al seguir manipulando las ecuaciones con identidades que

relacionan las funciones hiperbólicas con las funciones trigonométricas, se obtenía que la frecuencia para el seno y coseno era $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$.

El realizar el cambio de funciones hiperbólicas a trigonométricas en la vibración libre demostró que la solución con sobreamortiguamiento conducía a la solución subamortiguada; los coeficientes de las funciones se mantenían constantes y lo único que cambiaba eran las funciones propiamente (de hiperbólicas a trigonométricas o viceversa).

Para calcular las funciones $x(t)$ vistas en este capítulo se desarrollará, en la medida de lo posible, el caso con amortiguamiento crítico y el caso sobreamortiguado. Teniendo como precedente la solución de estos casos se considera que el lector podrá desarrollar el caso subamortiguado comprobando que la solución será muy similar al caso sobreamortiguado con la diferencia de que $\sinh(\omega_D t)$ y $\cosh(\omega_D t)$ son $\sin(\omega_D t)$ y $\cos(\omega_D t)$ y $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$.

Se ha decidido omitir el desarrollo de los casos con subamortiguamiento dado que los procesos que llevan a la función $x(t)$ se hacen de manera análoga a los casos con sobreamortiguamiento y se considera que con lo visto en capítulos anteriores, así como en lo escrito en éste, el lector es capaz de desarrollarlos. Además, al llevar un curso de dinámica estructural puede que se le pida resolver las ecuaciones con subamortiguamiento, por lo que es una gran practica para que el lector desarrolle sus habilidades para poder resolver una ecuación diferencial como las vistas en esta tesis.

8.5.1 Solución complementaria para amortiguamiento crítico

La solución encontrada para el caso de vibración libre con amortiguamiento critico (ecuación 5.27) se expresó utilizando funciones polinómicas y exponenciales por lo que se intuye que la ecuación complementaria sea:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{H}_1 t e^{-\omega t} + \mathbf{H}_2 e^{-\omega t} \quad (8.3)$$

Calculando su derivada con respecto a t:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_C &= \frac{dx_C}{dt} = \frac{d}{dt}(H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}) \\
 &\vdots = H_1 \frac{d}{dt}(t e^{-\omega t}) + H_2 \frac{d}{dt}(e^{-\omega t}) \\
 &\vdots = H_1 \left[t \frac{d}{dt}(e^{-\omega t}) + e^{-\omega t} \frac{d}{dt}(t) \right] + H_2 \frac{d}{dt}(e^{-\omega t}) \\
 &\vdots = H_1 [t(-\omega e^{-\omega t}) + e^{-\omega t}(1)] + H_2 (-\omega e^{-\omega t}) \\
 &\vdots = H_1 [-\omega t e^{-\omega t} + e^{-\omega t}] - \omega H_2 e^{-\omega t}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{x}_C = H_1 e^{-\omega t} [1 - \omega t] - \omega H_2 e^{-\omega t} \quad (8.4)$$

8.5.2 Solución complementaria para sobreamortiguamiento

La solución encontrada para el caso de vibración libre sobreamortiguada (ecuación 5.34) se expresó utilizando funciones hiperbólicas y exponenciales por lo que se intuye que la ecuación complementaria sea:

$$x_C = e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)] \quad ; \quad \omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (8.5)$$

Calculando su derivada con respecto a t:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_C &= \frac{dx_C}{dt} = \frac{d}{dt} \{ e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)] \} \\
 &\vdots = [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)] \frac{d}{dt}(e^{-\xi\omega t}) + e^{-\xi\omega t} \frac{d}{dt}[H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)] \\
 &\vdots = [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)](-\xi\omega e^{-\xi\omega t}) + e^{-\xi\omega t} [H_1 \omega_D \sinh(\omega_D t) + H_2 \omega_D \cosh(\omega_D t)] \\
 &\vdots = e^{-\xi\omega t} [-\xi\omega H_1 \cosh(\omega_D t) - \xi\omega H_2 \sinh(\omega_D t) + H_1 \omega_D \sinh(\omega_D t) + H_2 \omega_D \cosh(\omega_D t)] \\
 &\vdots = e^{-\xi\omega t} [(H_2 \omega_D - \xi\omega H_1) \cosh(\omega_D t) + (H_1 \omega_D - \xi\omega H_2) \sinh(\omega_D t)]
 \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{x}_C = e^{-\xi\omega t} [(H_2 \omega_D - H_1 \xi\omega) \cosh(\omega_D t) + (H_1 \omega_D - H_2 \xi\omega) \sinh(\omega_D t)] \quad (8.6)$$

8.5.3 Ecuación complementaria para subamortiguamiento

La solución encontrada para el caso de vibración libre subamortiguada (ecuación 5.36) se expresó utilizando funciones trigonométricas y exponenciales por lo que se intuye que la ecuación complementaria sea:

$$\mathbf{x}_C = e^{-\xi\omega t} [\mathbf{H}_1 \cos(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sen(\omega_D t)] \quad ; \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (8.7)$$

Calculando su derivada con respecto a t:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_C &= \frac{d\mathbf{x}_C}{dt} = \frac{d}{dt} \{ e^{-\xi\omega t} [\mathbf{H}_1 \cos(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sen(\omega_D t)] \} \\ &: = [\mathbf{H}_1 \cos(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sen(\omega_D t)] \frac{d}{dt} (e^{-\xi\omega t}) + e^{-\xi\omega t} \frac{d}{dt} [\mathbf{H}_1 \cos(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sen(\omega_D t)] \\ &: = [\mathbf{H}_1 \cos(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sen(\omega_D t)] (-\xi\omega e^{-\xi\omega t}) + e^{-\xi\omega t} [-\mathbf{H}_1 \omega_D \sen(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \omega_D \cos(\omega_D t)] \\ &: = e^{-\xi\omega t} [-\xi\omega \mathbf{H}_1 \cos(\omega_D t) - \xi\omega \mathbf{H}_2 \sen(\omega_D t) - \mathbf{H}_1 \omega_D \sen(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \omega_D \cos(\omega_D t)] \\ &: = e^{-\xi\omega t} [(\mathbf{H}_2 \omega_D - \xi\omega \mathbf{H}_1) \cos(\omega_D t) - (\mathbf{H}_1 \omega_D + \xi\omega \mathbf{H}_2) \sen(\omega_D t)] \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{\mathbf{x}}_C = e^{-\xi\omega t} [(\mathbf{H}_2 \omega_D - \mathbf{H}_1 \xi\omega) \cos(\omega_D t) - (\mathbf{H}_1 \omega_D + \mathbf{H}_2 \xi\omega) \sen(\omega_D t)] \quad (8.8)$$

8.6 Casos de EDO a Resolver de Vibraciones Armónicas

Las EDO tomadas en cuenta a resolver en este capítulo son las siguientes:

- i. La fuerza externa $P(t)$ mantiene un valor constante (P_0) a lo largo del tiempo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \quad (8.9)$$

- ii. La frecuencia natural de la estructura es diferente a la frecuencia de excitación externa ($\omega \neq \Omega$):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \cos(\Omega t) \quad (8.10)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sen(\Omega t) \quad (8.11)$$

- iii. La frecuencia natural de la estructura es igual a la frecuencia de excitación externa ($\omega = \Omega$):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \cos(\omega t) \quad (8.12)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0 \sin(\omega t) \quad (8.13)$$

Al final del capítulo serán recopiladas cada una de las soluciones que se obtengan para estas ecuaciones. Por facilidad se presentarán en tablas las soluciones y posteriormente las gráficas correspondientes a dichas soluciones.

8.7 Solución a la EDO con $P(t) = P_0$

Como $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x$ y $\mu_0 = P_0 / k$ la EDO a resolver es:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \quad (8.14)$$

8.7.1 Solución particular para todos los casos de amortiguamiento

Se propone como solución particular $x_p = A$ para solucionar la EDO por el método de coeficientes determinados. Se deriva dos veces la ecuación x_p a fin de obtener \dot{x}_p y \ddot{x}_p y sustituirlas en $\ddot{x}_p + 2\xi\omega\dot{x}_p + \omega^2x_p = \mu_0\omega^2$ para obtener el valor de A:

$$\dot{x}_p = \frac{dx_p}{dt} = \frac{d}{dt}(A) = 0$$

$$\therefore \dot{x}_p = 0 \quad (8.15)$$

$$\ddot{x}_p = \frac{d\dot{x}_p}{dt} = \frac{d}{dt}(0) = 0$$

$$\therefore \ddot{x}_p = 0 \quad (8.16)$$

$$\ddot{x}_p + 2\omega\dot{x}_p + \omega^2x_p = \mu_0\omega^2$$

$$(0) + 2\omega(0) + \omega^2A = \mu_0\omega^2$$

$$\begin{aligned}\omega^2 A &= \mu_0 \omega^2 \\ \therefore A &= \mu_0\end{aligned}\quad (8.17)$$

Entonces la solución particular a $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$ es:

$$\mathbf{x_p = \mu_0} \quad (8.18)$$

8.7.2 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

Sabiendo de antemano la solución complementaria y particular se denota la solución general como:

$$\mathbf{x = x_c + x_p = H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t} + \mu_0} \quad (8.19)$$

Así mismo se indica \dot{x} :

$$\mathbf{\dot{x} = \dot{x}_c + \dot{x}_p = H_1 e^{-\omega t}(1 - \omega t) - \omega H_2 e^{-\omega t}} \quad (8.20)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x(t)$:

$$x_0 = H_1(0)e^{-\omega(0)} + H_2 e^{-\omega(0)} + \mu_0$$

$$x_0 = H_1(0) \underset{1}{e_1^0} + H_2 \underset{1}{e_1^0} + \mu_0$$

$$x_0 = H_2 + \mu_0$$

$$\therefore H_2 = x_0 - \mu_0 \quad (8.21)$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ y $H_2 = x_0 - \mu_0$ en $\dot{x}(t)$:

$$v_0 = H_1 e^{-\omega(0)} [1 - \omega(0)] - \omega(x_0 - \mu_0) e^{-\omega(0)}$$

$$v_0 = H_1 \underset{1}{e_1^0} (0 + 1) - \omega(x_0 - \mu_0) \underset{1}{e_1^0}$$

$$v_0 = H_1 - \omega(x_0 - \mu_0)$$

$$\therefore H_1 = v_0 + \omega(x_0 - \mu_0) \quad (8.22)$$

Reemplazando el valor de las constantes H_1 y H_2 en $x(t)$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\therefore x = \underbrace{[v_0 + \omega(x_0 - \mu_0)]te^{-\omega t} + (x_0 - \mu_0)e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\mu_0}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \quad (8.23)$$

8.7.3 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

Sabiendo de antemano la solución complementaria y particular se denota la solución general como:

$$x = x_C + x_P = e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)] + \mu_0 \quad (8.24)$$

Así mismo se indica \dot{x} :

$$\dot{x} = \dot{x}_C + \dot{x}_P = e^{-\xi\omega t} [(H_2\omega_D - H_1\xi\omega) \cosh(\omega_D t) + (H_1\omega_D - H_2\xi\omega) \sinh(\omega_D t)] \quad (8.25)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x(t)$ se encuentra el valor de H_1 :

$$x_0 = \underbrace{e^{-\xi\omega(0)}}_1 \left\{ H_1 \underbrace{\cosh[\omega_D(0)]}_1 + H_2 \underbrace{\sinh[\omega_D(0)]}_0 \right\} + \mu_0$$

$$x_0 = H_1 + \mu_0$$

$$\therefore H_1 = x_0 - \mu_0 \quad (8.26)$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x}(t)$:

$$v_0 = \underbrace{e^{-\xi\omega(0)}}_1 \left\{ (H_2\omega_D - \xi\omega H_1) \underbrace{\cosh[\omega_D(0)]}_1 + (H_1\omega_D - \xi\omega H_2) \underbrace{\sinh[\omega_D(0)]}_0 \right\}$$

$$v_0 = H_2\omega_D - \xi\omega H_1$$

Sustituyendo $H_1 = x_0 - \mu_0$:

$$v_0 = H_2\omega_D - \xi\omega(x_0 - \mu_0)$$

$$v_0 + \xi\omega(x_0 - \mu_0) = H_2\omega_D$$

$$\therefore H_2 = \frac{v_0 + \xi\omega(x_0 - \mu_0)}{\omega_D} \quad (8.27)$$

Reemplazando el valor de las constantes H_1 y H_2 en $x(t)$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\therefore x = e^{-\xi\omega t} \left\{ (x_0 - \mu_0) \cosh(\omega_D t) + \left[\frac{v_0 + \xi\omega(x_0 - \mu_0)}{\omega_D} \right] \sinh(\omega_D t) \right\} + \mu_0 \quad (8.28)^{8.1}$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

8.7.4 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

La solución para el caso subamortiguado resulta ser:

$$\therefore x = e^{-\xi\omega t} \left\{ (x_0 - \mu_0) \cos(\omega_D t) + \left[\frac{v_0 + \xi\omega(x_0 - \mu_0)}{\omega_D} \right] \sen(\omega_D t) \right\} + \mu_0 \quad (8.29)$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

Todo el paréntesis tipo llave multiplicado por la función $e^{-\xi\omega t}$ es la respuesta transitoria mientras que el término μ_0 representa la respuesta estacionaria.

8.8 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$

Como $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x$ y $\mu_0 = P_0 / k$ la EDO a resolver es:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t) \quad (8.30)$$

^{8.1} Todo el paréntesis tipo llave multiplicado por la función $e^{-\xi\omega t}$ es la respuesta transitoria mientras que el término μ_0 representa la respuesta estacionaria.

8.8.1 Solución particular para todos los casos

Se propone como solución particular $x_p = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$ para solucionar la EDO por el método de coeficientes determinados. Se deriva dos veces la ecuación x_p a fin de obtener \dot{x}_p y \ddot{x}_p y sustituirlas en $\ddot{x}_p + 2\xi\omega\dot{x}_p + \omega^2 x_p = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$ para obtener el valor de A y B:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_p &= \frac{dx_p}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \\
 \therefore &= A \frac{d}{dt} [\cos(\Omega t)] + B \frac{d}{dt} [\sin(\Omega t)] \\
 \therefore &= A[-\Omega \sin(\Omega t)] + B[\Omega \cos(\Omega t)] \\
 \therefore \dot{x}_p &= -A \Omega \sin(\Omega t) + B \Omega \cos(\Omega t) \tag{8.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_p &= \frac{d\dot{x}_p}{dt} = \frac{d}{dt} [-A \Omega \sin(\Omega t) + B \Omega \cos(\Omega t)] \\
 \therefore &= -A \Omega \frac{d}{dt} [\sin(\Omega t)] + B \Omega \frac{d}{dt} [\cos(\Omega t)] \\
 \therefore &= -A \Omega [\Omega \cos(\Omega t)] + B \Omega [-\Omega \sin(\Omega t)] \\
 \therefore \ddot{x}_p &= -A \Omega^2 \cos(\Omega t) - B \Omega^2 \sin(\Omega t) \tag{8.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\ddot{x}_p + 2\xi\omega\dot{x}_p + \omega^2 x_p = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t) \\
 &\underbrace{[-A \Omega^2 \cos(\Omega t) - B \Omega^2 \sin(\Omega t)]}_{\ddot{x}_p} + 2\xi\omega \underbrace{[-A \Omega \sin(\Omega t) + B \Omega \cos(\Omega t)]}_{\dot{x}_p} \\
 &+ \omega^2 \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}_{x_p} = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)
 \end{aligned}$$

Factorizando los términos que contienen $\sin(\Omega t)$ y $\cos(\Omega t)$:

$$\begin{aligned}
 &-A \Omega^2 \cos(\Omega t) - B \Omega^2 \sin(\Omega t) - 2\xi\omega A \Omega \sin(\Omega t) + 2\xi\omega B \Omega \cos(\Omega t) + \dots \\
 &\dots + A \omega^2 \cos(\Omega t) + B \omega^2 \sin(\Omega t) = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t) \\
 &(-A \Omega^2 + 2\xi\omega \Omega B + A \omega^2) \cos(\Omega t) + (B \omega^2 - B \Omega^2 - 2\xi\omega A \Omega) \sin(\Omega t) \dots \\
 \dots &= \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & [2\xi\omega\Omega B + A(\omega^2 - \Omega^2)] \cos(\Omega t) + [B(\omega^2 - \Omega^2) - 2\xi\omega A\Omega] \text{sen}(\Omega t) \dots \\
 \dots & = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t) \\
 & \frac{[2\xi\omega\Omega B + A(\omega^2 - \Omega^2)]}{\omega^2} \cos(\Omega t) + \frac{[B(\omega^2 - \Omega^2) - 2\xi\omega A\Omega]}{\omega^2} \text{sen}(\Omega t) \dots \\
 \dots & = \underbrace{\frac{\mu_0 \omega^2}{\omega^2}}_{\mu_0} \cos(\Omega t) \\
 & \left[\frac{2\xi\omega\Omega B}{\omega^2} + A \left(\frac{\omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \right] \cos(\Omega t) + \left[B \left(\frac{\omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) - \frac{2\xi\omega A\Omega}{\omega^2} \right] \text{sen}(\Omega t) \dots \\
 \dots & = \mu_0 \cos(\Omega t) \\
 & \left[2\xi B \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) + A \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \right] \cos(\Omega t) + \left[B \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) - 2\xi A \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \right] \text{sen}(\Omega t) \dots \\
 \dots & = \mu_0 \cos(\Omega t) \\
 & [2\xi Br + A(1 - r^2)] \cos(\Omega t) + [B(1 - r^2) - 2\xi Ar] \text{sen}(\Omega t) = \mu_0 \cos(\Omega t) \quad (8.33)
 \end{aligned}$$

De la simplificación expresada en la ecuación anterior, el sistema 2 x 2 buscado para calcular las constantes A y B, está formado por las ecuaciones:

$$A(1 - r^2) + 2\xi Br = \mu_0 \quad (8.34)$$

$$-2\xi Ar + B(1 - r^2) = 0 \quad (8.35)$$

Cuyo acomodo en un planteamiento matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 - r^2 & 2\xi r \\ -2\xi r & 1 - r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mu_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.36)$$

Siendo la solución de este:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - r^2 & 2\xi r \\ -2\xi r & 1 - r^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mu_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.37)$$

El valor de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan^{8.2}:

^{8.2} Se presentan solamente los resultados y no la reducción algebraica. Únicamente se indica que procedimiento se hace por fila para ir calculando la matriz inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 - r^2 & 2\xi r \\ -2\xi r & 1 - r^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - r^2 & 2\xi r & | & 1 & 0 \\ -2\xi r & 1 - r^2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Haciendo $(1 - r^2)^{-1}R_1$ y $(1 - r^2)^{-1}R_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 - r^2 & 2\xi r & | & 1 & 0 \\ -2\xi r & 1 - r^2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2\xi r}{1 - r^2} & | & \frac{1}{1 - r^2} & 0 \\ -\frac{2\xi r}{1 - r^2} & 1 & | & 0 & \frac{1}{1 - r^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2}$$

Por definición el factor de amplificación dinámico sin amortiguamiento es $D = (1 - r^2)^{-1}$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2\xi r}{1 - r^2} & | & \frac{1}{1 - r^2} & 0 \\ -\frac{2\xi r}{1 - r^2} & 1 & | & 0 & \frac{1}{1 - r^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2\xi r D & | & D & 0 \\ -2\xi r D & 1 & | & 0 & D \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2}$$

Haciendo $R_2 + (2\xi r D)R_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\xi r D & | & D & 0 \\ -2\xi r D & 1 & | & 0 & D \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2\xi r D & | & D & 0 \\ 0 & 1 + 4\xi^2 r^2 D^2 & | & 2\xi r D^2 & D \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2}$$

Haciendo $(1 + 4\xi^2 r^2 D^2)^{-1}R_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\xi r D & | & D & 0 \\ 0 & 1 + 4\xi^2 r^2 D^2 & | & 2\xi r D^2 & D \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2\xi r D & | & D & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{2\xi r D^2}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} & \frac{D}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2}$$

Haciendo $R_1 - R_2(2\xi r D)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\xi r D & | & D & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{2\xi r D^2}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} & \frac{D}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & \frac{D}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} & -\frac{2\xi r D^2}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} \\ 0 & 1 & | & \frac{2\xi r D^2}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} & \frac{D}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2}$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} 1 - r^2 & 2\xi r \\ -2\xi r & 1 - r^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} & -\frac{2\xi r D^2}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} \\ \frac{2\xi r D^2}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} & \frac{D}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} \end{bmatrix}$$

Buscando una simplificación de los términos de la matriz inversa para la diagonal principal (elementos a_{11} y a_{22}):

$$\begin{aligned} \frac{D}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} &= \frac{\frac{1}{1-r^2}}{1 + 4\xi^2 r^2 \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{1-r^2}}{\frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2} + \frac{4\xi^2 r^2}{(1-r^2)^2}} = \frac{\frac{1}{1-r^2}}{\frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2} + \frac{4\xi^2 r^2}{(1-r^2)^2}} = \dots \\ \dots &= \frac{\frac{1}{1-r^2}}{\frac{4\xi^2 r^2 + (1-r^2)^2}{(1-r^2)^2}} = \frac{(1-r^2)^2}{[4\xi^2 r^2 + (1-r^2)^2][1-r^2]} = \frac{1-r^2}{4\xi^2 r^2 + (1-r^2)^2} = \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\ \therefore \frac{D}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} &= \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \end{aligned}$$

Buscando una simplificación de los términos de la matriz inversa para la diagonal secundaria (elementos a_{12} y a_{21}):

$$\begin{aligned} \frac{2\xi r D^2}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} &= \frac{2\xi r \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^2}{1 + 4\xi^2 r^2 \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^2} = \frac{\frac{2\xi r}{(1-r^2)^2}}{1 + \frac{4\xi^2 r^2}{(1-r^2)^2}} = \frac{\frac{2\xi r}{(1-r^2)^2}}{\frac{4\xi^2 r^2 + (1-r^2)^2}{(1-r^2)^2}} = \dots \\ \dots &= \frac{2\xi r}{4\xi^2 r^2 + (1-r^2)^2} = \frac{2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\ \therefore \frac{2\xi r D^2}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} &= \frac{2\xi r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \end{aligned}$$

Finalmente la matriz inversa es:

$$\begin{bmatrix} 1-r^2 & 2\xi r \\ -2\xi r & 1-r^2 \end{bmatrix}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{D}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} & -\frac{2\xi r D^2}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} \\ \frac{2\xi r D^2}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} & \frac{D}{1 + 4\xi^2 r^2 D^2} \end{array} \right]_{D=\frac{1}{1-r^2}} = \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \begin{bmatrix} 1-r^2 & -2\xi r \\ 2\xi r & 1-r^2 \end{bmatrix}$$

Conocida la matriz inversa, se procede a calcular los valores de A y B usando álgebra de matrices:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-r^2 & 2\xi r \\ -2\xi r & 1-r^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mu_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \begin{bmatrix} 1-r^2 & -2\xi r \\ 2\xi r & 1-r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \begin{Bmatrix} (1-r^2)(1) - 2\xi r(0) \\ 2\xi r(1) + (1-r^2)(0) \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \begin{Bmatrix} 1-r^2 \\ 2\xi r \end{Bmatrix} \\
 \therefore \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \begin{Bmatrix} 1-r^2 \\ 2\xi r \end{Bmatrix} \tag{8.38}
 \end{aligned}$$

Esto significa que los valores de A y B son:

$$\therefore A = \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \tag{8.39}$$

$$\therefore B = \frac{2\xi\mu_0 r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \tag{8.40}$$

Conocidos los valores de A y B se sustituyen en la ecuación $x_p = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$ para conocer la solución particular de la EDO $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$:

$$\therefore x_p = \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)] \tag{8.41}^{8.3}$$

Calculando su derivada con respecto a t:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_p &= \frac{dx_p}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)] \right\} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \left\{ (1-r^2) \frac{d}{dt} [\cos(\Omega t)] + 2\xi r \frac{d}{dt} [\sin(\Omega t)] \right\} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \{ (1-r^2) [-\Omega \sin(\Omega t)] + 2\xi r [\Omega \cos(\Omega t)] \}
 \end{aligned}$$

^{8.3} Esta ecuación será la que utilizará para resolver los problemas de valor inicial

$$\dot{x}_p = \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [-\Omega(1-r^2)\sin(\Omega t) + 2\xi r \Omega \cos(\Omega t)]$$

$$\therefore \dot{x}_p = \frac{\mu_0 \Omega}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [2\xi r \cos(\Omega t) - (1-r^2)\sin(\Omega t)] \quad (8.42)^{8.4}$$

8.8.2 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

Antes de dar la solución general a este caso, es conveniente analizar la función particular y la derivada de la solución particular respecto a t cuando $\xi = 1$:

$$x_p = \left\{ \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2)\cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)] \right\} \Big|_{\xi=1}$$

$$\dot{x}_p = \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2r)^2} [(1-r^2)\cos(\Omega t) + 2r \sin(\Omega t)]$$

$$\dot{x}_p = \frac{\mu_0}{1-2r^2+r^4+4r^2} [(1-r^2)\cos(\Omega t) + 2r \sin(\Omega t)]$$

$$\dot{x}_p = \frac{\mu_0}{1+2r^2+r^4} [(1-r^2)\cos(\Omega t) + 2r \sin(\Omega t)]$$

$$\dot{x}_p = \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2)\cos(\Omega t) + 2r \sin(\Omega t)]$$

$$\therefore \dot{x}_p = \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2)\cos(\Omega t) + 2r \sin(\Omega t)] \quad (8.43)$$

Así mismo la derivada resultante con respecto a t es:

$$\therefore \dot{x}_p = \frac{\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} [2r \cos(\Omega t) - (1-r^2)\sin(\Omega t)] \quad (8.44)$$

Entonces la solución general a $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ es:

$$x = x_c + x_p = H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t} + \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2)\cos(\Omega t) + 2r \sin(\Omega t)] \quad (8.45)$$

^{8.4} Esta ecuación será la que utilizará para resolver los problemas de valor inicial

De igual modo se indica \dot{x} :

$$\dot{x} = \dot{x}_C + \dot{x}_P = H_1 e^{-\omega t} [1 - \omega t] - \omega H_2 e^{-\omega t} + \frac{\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} [2r \cos(\Omega t) - (1-r^2) \text{sen}(\Omega t)] \quad (8.46)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x(t)$ se calcula en valor de H_2 :

$$\begin{aligned} x_0 &= H_1(0) \underbrace{e^{-\omega(0)}}_1 + H_2 \underbrace{e^{-\omega(0)}}_1 + \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} \left\{ (1-r^2) \underbrace{\cos[\Omega(0)]}_1 + 2r \underbrace{\text{sen}[\Omega(0)]}_0 \right\} \\ x_0 &= H_2 + \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2} \\ \therefore H_2 &= x_0 - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2} \end{aligned} \quad (8.47)$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x}(t)$ se calcula en valor de H_1 :

$$\begin{aligned} v_0 &= H_1 \underbrace{e^{-\omega(0)}}_1 \left[1 - \underbrace{\omega(0)}_0 \right] - \omega H_2 \underbrace{e^{-\omega(0)}}_1 + \frac{\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} \left\{ 2r \underbrace{\cos[\Omega(0)]}_1 - (1-r^2) \underbrace{\text{sen}[\Omega(0)]}_0 \right\} \\ v_0 &= H_1 - \omega H_2 + \frac{2r\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} \\ v_0 + \omega H_2 - \frac{2r\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} &= H_1 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor calculado de H_2 :

$$\begin{aligned} H_1 &= v_0 + \omega \left[x_0 - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2} \right] - \frac{2r\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} \\ \therefore &= v_0 + x_0 \omega - \frac{\mu_0 \omega (1-r^2)}{(1+r^2)^2} - \frac{2r\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} \\ \therefore &= v_0 + x_0 \omega - \left[\frac{\mu_0 \omega (1-r^2)}{(1+r^2)^2} + \frac{2r\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} \right] \\ \therefore &= v_0 + x_0 \omega - \left[\frac{\mu_0 \omega (1-r^2) + 2r\mu_0 \overset{r\omega}{\tilde{\Omega}}}{(1+r^2)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= v_0 + x_0\omega - \left[\frac{\mu_0\omega(1-r^2) + 2r^2\mu_0\omega}{(1+r^2)^2} \right] \\
 \dot{x} &= v_0 + x_0\omega - \left[\frac{\mu_0\omega - r^2\mu_0\omega + 2r^2\mu_0\omega}{(1+r^2)^2} \right] \\
 \dot{x} &= v_0 + x_0\omega - \left[\frac{\mu_0\omega + r^2\mu_0\omega}{(1+r^2)^2} \right] \\
 \dot{x} &= v_0 + x_0\omega - \mu_0\omega \left[\frac{1+r^2}{(1+r^2)^2} \right] \\
 \therefore H_1 &= v_0 + x_0\omega - \frac{\mu_0\omega}{1+r^2} \tag{8.48}
 \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de las constantes H_1 y H_2 en $x(t)$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\begin{aligned}
 \therefore x &= \underbrace{H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \cos(\Omega t) + 2r \sin(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \tag{8.49} \\
 H_1 &= v_0 + x_0\omega - \frac{\mu_0\omega}{1+r^2} \quad ; \quad H_2 = x_0 - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2}
 \end{aligned}$$

8.8.3 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

La solución general a $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ es:

$$\begin{aligned}
 x = x_c + x_p &= e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)] \\
 &+ \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)] \tag{8.50}
 \end{aligned}$$

De igual modo se indica \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{x}_c + \dot{x}_p = e^{-\xi\omega t} & [(H_2\omega_D - H_1\xi\omega) \cosh(\omega_D t) + (H_1\omega_D - H_2\xi\omega) \sinh(\omega_D t)] \\ & + \frac{\mu_0\Omega}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [2\xi r \cos(\Omega t) - (1-r^2) \sin(\Omega t)] \end{aligned} \quad (8.51)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x(t)$ se calcula en valor de H_1 :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{e^{-\xi\omega(0)}}{1} \left\{ H_1 \frac{\cosh[\omega_D(0)]}{1} + H_2 \frac{\sinh[\omega_D(0)]}{0} \right\} \\ &+ \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \left\{ (1-r^2) \frac{\cos[\Omega(0)]}{1} + 2\xi r \frac{\sin[\Omega(0)]}{0} \right\} \\ x_0 &= H_1 + \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\ \therefore H_1 &= x_0 - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \end{aligned} \quad (8.52)$$

Dejando el valor de H_1 en función del factor de amplificación dinámico con amortiguamiento D :

$$\therefore H_1 = x_0 - \mu_0 D^2 (1-r^2) \quad (8.53)$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x}(t)$ se calcula en valor de H_2 :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{e^{-\xi\omega(0)}}{1} \left\{ (H_2\omega_D - H_1\xi\omega) \frac{\cosh[\omega_D(0)]}{1} + (H_1\omega_D - H_2\xi\omega) \frac{\sinh[\omega_D(0)]}{0} \right\} \\ &+ \frac{\mu_0\Omega}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \left\{ 2\xi r \frac{\cos[\Omega(0)]}{1} - (1-r^2) \frac{\sin[\Omega(0)]}{0} \right\} \\ v_0 &= H_2\omega_D - H_1\xi\omega + \frac{2\xi r\mu_0\Omega}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\ v_0 + H_1\xi\omega - \frac{2\xi r\mu_0\Omega}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} &= H_2\omega_D \\ \frac{v_0}{\omega_D} + H_1 \frac{\xi\omega}{\omega_D} - \frac{2\xi r\mu_0\Omega}{\underbrace{[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]}_{D^{-2}}} &= H_2 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor calculado de H_1 :

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \frac{v_0}{\omega_D} + [x_0 - \mu_0 D^2(1 - r^2)] \frac{\xi \omega}{\omega_D} - \frac{2\xi r \mu_0 \Omega}{D^{-2} \omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0}{\omega_D} + \frac{\xi \omega x_0}{\omega_D} - \frac{\xi \omega \mu_0 D^2(1 - r^2)}{\omega_D} - \frac{2\xi r \mu_0 \Omega D^2}{\omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D} - \frac{\xi \omega \mu_0 D^2(1 - r^2) + 2\xi r \mu_0 \overset{r\omega}{\tilde{\Omega}} D^2}{\omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D} - \frac{\xi \omega \mu_0 D^2 - \xi \omega r^2 \mu_0 D^2 + 2\xi \omega r^2 \mu_0 D^2}{\omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D} - \frac{\xi \omega \mu_0 D^2 + \xi \omega r^2 \mu_0 D^2}{\omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi \omega x_0}{\omega_D} - \frac{\xi \omega \mu_0 D^2(1 + r^2)}{\omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi \omega x_0 - \xi \omega \mu_0 D^2(1 + r^2)}{\omega_D} \\
 \therefore H_2 &= \frac{v_0 + \xi \omega [x_0 - \mu_0 D^2(1 + r^2)]}{\omega_D} \tag{8.54}
 \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de las constantes H_1 y H_2 en $x(t)$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p &= \underbrace{e^{-\xi\omega t} [\mathbf{H}_1 \cosh(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sinh(\omega_D t)]}_{\substack{\text{Respuesta} \\ \text{Transitoria}}} \\
 &+ \underbrace{\mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)]}_{\substack{\text{Respuesta} \\ \text{Estacionaria}}} \tag{8.55}
 \end{aligned}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{x}_0 - \mu_0 D^2(1 - r^2) \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \frac{v_0 + \xi \omega [x_0 - \mu_0 D^2(1 + r^2)]}{\omega_D}$$

8.8.4 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

El lector podrá comprobar que la solución final es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} = \mathbf{x}_C + \mathbf{x}_P = & \underbrace{e^{-\xi\omega t} [\mathbf{H}_1 \cos(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \text{sen}(\omega_D t)]}_{\substack{\text{Respuesta} \\ \text{Transitoria}}} \\
 & + \underbrace{\mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \text{sen}(\Omega t)]}_{\substack{\text{Respuesta} \\ \text{Estacionaria}}} \qquad (8.56)
 \end{aligned}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{x}_0 - \mu_0 D^2 (1 - r^2) \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \frac{v_0 + \xi \omega [\mathbf{x}_0 - \mu_0 D^2 (1 + r^2)]}{\omega_D}$$

8.9 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$

Como $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x$ y $\mu_0 = P_0 / k$ la EDO a resolver es:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t) \qquad (8.57)$$

8.9.1 Solución particular para todos los casos

Se propone como solución particular $x_P = A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)$ para solucionar la EDO por el método de coeficientes determinados. Se deriva dos veces la ecuación x_P a fin de obtener \dot{x}_P y \ddot{x}_P y sustituirlas en $\ddot{x}_P + 2\xi\omega\dot{x}_P + \omega^2x_P = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ para obtener el valor de A y B:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_P &= \frac{dx_P}{dt} = \frac{d}{dt} [A \cos(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)] \\
 \therefore &= A \frac{d}{dt} [\cos(\Omega t)] + B \frac{d}{dt} [\text{sen}(\Omega t)] \\
 \therefore &= A [-\Omega \text{sen}(\Omega t)] + B [\Omega \cos(\Omega t)] \\
 \therefore \dot{x}_P &= -A \Omega \text{sen}(\Omega t) + B \Omega \cos(\Omega t) \qquad (8.58)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_P &= \frac{d\dot{x}_P}{dt} = \frac{d}{dt} [-A \Omega \text{sen}(\Omega t) + B \Omega \text{cos}(\Omega t)] \\
 \therefore &= -A \Omega \frac{d}{dt} [\text{sen}(\Omega t)] + B \Omega \frac{d}{dt} [\text{cos}(\Omega t)] \\
 \therefore &= -A \Omega [\Omega \text{cos}(\Omega t)] + B \Omega [-\Omega \text{sen}(\Omega t)] \\
 \therefore \ddot{x}_P &= -A \Omega^2 \text{cos}(\Omega t) - B \Omega^2 \text{sen}(\Omega t) \tag{8.59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_P + 2\xi\omega\dot{x}_P + \omega^2 x_P &= \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t) \\
 \underbrace{[-A \Omega^2 \text{cos}(\Omega t) - B \Omega^2 \text{sen}(\Omega t)]}_{\ddot{x}_P} + 2\xi\omega \underbrace{[-A \Omega \text{sen}(\Omega t) + B \Omega \text{cos}(\Omega t)]}_{\dot{x}_P} \\
 + \omega^2 \underbrace{[A \text{cos}(\Omega t) + B \text{sen}(\Omega t)]}_{x_P} &= \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)
 \end{aligned}$$

Factorizando los términos que contienen $\text{sen}(\Omega t)$ y $\text{cos}(\Omega t)$:

$$\begin{aligned}
 &-A \Omega^2 \text{cos}(\Omega t) - B \Omega^2 \text{sen}(\Omega t) - 2\xi\omega A \Omega \text{sen}(\Omega t) + 2\xi\omega B \Omega \text{cos}(\Omega t) + \dots \\
 &\dots + A \omega^2 \text{cos}(\Omega t) + B \omega^2 \text{sen}(\Omega t) = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t) \\
 &(-A \Omega^2 + 2\xi\omega \Omega B + A \omega^2) \text{cos}(\Omega t) + (B \omega^2 - B \Omega^2 - 2\xi\omega A \Omega) \text{sen}(\Omega t) \dots \\
 &\dots = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t) \\
 &[2\xi\omega \Omega B + A(\omega^2 - \Omega^2)] \text{cos}(\Omega t) + [B(\omega^2 - \Omega^2) - 2\xi\omega A \Omega] \text{sen}(\Omega t) \dots \\
 &\dots = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t) \\
 &\frac{[2\xi\omega \Omega B + A(\omega^2 - \Omega^2)]}{\omega^2} \text{cos}(\Omega t) + \frac{[B(\omega^2 - \Omega^2) - 2\xi\omega A \Omega]}{\omega^2} \text{sen}(\Omega t) \dots \\
 &\dots = \underbrace{\frac{\mu_0 \omega^2}{\omega^2}}_{\mu_0} \text{sen}(\Omega t) \\
 &\left[\frac{2\xi\omega \Omega B}{\omega^2} + A \left(\frac{\omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \right] \text{cos}(\Omega t) + \left[B \left(\frac{\omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) - \frac{2\xi\omega A \Omega}{\omega^2} \right] \text{sen}(\Omega t) \dots \\
 &\dots = \mu_0 \text{sen}(\Omega t)
 \end{aligned}$$

$$\left[2\xi B \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) + A \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \right] \cos(\Omega t) + \left[B \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) - 2\xi A \left(\frac{\Omega}{\omega} \right) \right] \sin(\Omega t) \dots$$

$$\dots = \mu_0 \sin(\Omega t)$$

$$[2\xi Br + A(1 - r^2)] \cos(\Omega t) + [B(1 - r^2) - 2\xi Ar] \sin(\Omega t) = \mu_0 \sin(\Omega t) \quad (8.60)$$

De la simplificación expresada en la ecuación anterior, el sistema 2 x 2 buscado para calcular las constantes A y B, está formado por las ecuaciones:

$$A(1 - r^2) + 2\xi Br = 0 \quad (8.61)$$

$$-2\xi Ar + B(1 - r^2) = \mu_0 \quad (8.62)$$

Cuyo acomodo en un planteamiento matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 - r^2 & 2\xi r \\ -2\xi r & 1 - r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_0 \end{Bmatrix} \quad (8.63)$$

Siendo la solución de este:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - r^2 & 2\xi r \\ -2\xi r & 1 - r^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_0 \end{Bmatrix} \quad (8.64)$$

El valor de la matriz inversa se calculó en el ejercicio anterior por el método de Gauss-Jordan y se obtuvo que:

$$\begin{bmatrix} 1 - r^2 & 2\xi r \\ -2\xi r & 1 - r^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \begin{bmatrix} 1 - r^2 & -2\xi r \\ 2\xi r & 1 - r^2 \end{bmatrix}$$

Conocida la matriz inversa, se procede a calcular los valores de A y B usando álgebra de matrices:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - r^2 & 2\xi r \\ -2\xi r & 1 - r^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \frac{\mu_0}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \begin{bmatrix} 1 - r^2 & -2\xi r \\ 2\xi r & 1 - r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \frac{\mu_0}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \begin{Bmatrix} (1 - r^2)(0) - 2\xi r(\mu_0) \\ 2\xi r(0) + (1 - r^2)(\mu_0) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \begin{Bmatrix} -2\xi r \\ 1-r^2 \end{Bmatrix} \\ \therefore \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \begin{Bmatrix} -2\xi r \\ 1-r^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (8.65)$$

Esto significa los valores de A y B son:

$$\therefore A = -\frac{2\xi\mu_0 r}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \quad (8.66)$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \quad (8.67)$$

Conocidos los valores de A y B se sustituyen en la ecuación $x_p = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$ para conocer la solución particular de la EDO $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \cos(\Omega t)$:

$$\therefore x_p = \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \text{cos}(\Omega t)] \quad (8.68)$$

Calculando su derivada con respecto a t:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \frac{dx_p}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \text{cos}(\Omega t)] \right\} \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \left\{ (1-r^2) \frac{d}{dt} [\text{sen}(\Omega t)] - 2\xi r \frac{d}{dt} [\text{cos}(\Omega t)] \right\} \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \{ (1-r^2) [\Omega \text{cos}(\Omega t)] - 2\xi r [-\Omega \text{sen}(\Omega t)] \} \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [\Omega(1-r^2)\text{cos}(\Omega t) + 2\xi r \Omega \text{sen}(\Omega t)] \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{x}_p = \frac{\mu_0 \Omega}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2)\text{cos}(\Omega t) + 2\xi r \text{sen}(\Omega t)] \quad (8.69)$$

8.9.2 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

Antes dar la solución general a este caso, es conveniente analizar la función particular y la derivada de la solución particular respecto a t cuando $\xi = 1$:

$$\begin{aligned} x_P &= \left. \left\{ \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2) \operatorname{sen}(\Omega t) - 2\xi r \operatorname{cos}(\Omega t)] \right\} \right|_{\xi=1} \\ &\vdots = \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2r)^2} [(1-r^2) \operatorname{sen}(\Omega t) - 2r \operatorname{cos}(\Omega t)] \\ &\vdots = \frac{\mu_0}{1-2r^2+r^4+4r^2} [(1-r^2) \operatorname{sen}(\Omega t) - 2r \operatorname{cos}(\Omega t)] \\ &\vdots = \frac{\mu_0}{1+2r^2+r^4} [(1-r^2) \operatorname{sen}(\Omega t) - 2r \operatorname{cos}(\Omega t)] \\ &\vdots = \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \operatorname{sen}(\Omega t) - 2r \operatorname{cos}(\Omega t)] \end{aligned}$$

$$\therefore x_P = \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \operatorname{sen}(\Omega t) - 2r \operatorname{cos}(\Omega t)] \quad (8.70)$$

Así mismo la derivada resultante con respecto a t es:

$$\therefore \dot{x}_P = \frac{\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \operatorname{cos}(\Omega t) + 2r \operatorname{sen}(\Omega t)] \quad (8.71)$$

Entonces la solución general a $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \operatorname{cos}(\Omega t)$ es:

$$x = x_C + x_P = H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t} + \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \operatorname{sen}(\Omega t) - 2r \operatorname{cos}(\Omega t)] \quad (8.72)$$

De igual modo se indica \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{x}_C + \dot{x}_P &= H_1 e^{-\omega t} [1 - \omega t] - \omega H_2 e^{-\omega t} \\ &+ \frac{\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \operatorname{cos}(\Omega t) + 2r \operatorname{sen}(\Omega t)] \end{aligned} \quad (8.73)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x(t)$ se calcula en valor de H_2 :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= H_1(0) \underbrace{e^{-\omega(0)}}_1 + H_2 \underbrace{e^{-\omega(0)}}_1 + \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} \left\{ (1-r^2) \underbrace{\text{sen}[\Omega(0)]}_0 - 2r \underbrace{\text{cos}[\Omega(0)]}_1 \right\} \\
 x_0 &= H_2 - \frac{2r\mu_0}{(1+r^2)^2} \\
 \therefore H_2 &= x_0 + \frac{2r\mu_0}{(1+r^2)^2} \tag{8.74}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x}(t)$ se calcula en valor de H_1 :

$$\begin{aligned}
 v_0 &= H_1 \underbrace{e^{-\omega(0)}}_1 \left[1 - \underbrace{\omega(0)}_0 \right] - \omega H_2 \underbrace{e^{-\omega(0)}}_1 \\
 &+ \frac{\mu_0 \Omega}{(1+r^2)^2} \left\{ (1-r^2) \underbrace{\text{cos}[\Omega(0)]}_1 + 2r \underbrace{\text{sen}[\Omega(0)]}_0 \right\} \\
 v_0 &= H_1 - \omega H_2 + \frac{\mu_0 \Omega (1-r^2)}{(1+r^2)^2} \\
 v_0 + \omega H_2 - \frac{\mu_0 \Omega (1-r^2)}{(1+r^2)^2} &= H_1
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor calculado de H_2 :

$$\begin{aligned}
 H_1 &= v_0 + \omega H_2 - \frac{\mu_0 \Omega (1-r^2)}{(1+r^2)^2} \\
 \therefore &= v_0 + x_0 \omega + \frac{2r\omega\mu_0}{(1+r^2)^2} - \frac{\mu_0 \Omega (1-r^2)}{(1+r^2)^2} \\
 \therefore &= v_0 + x_0 \omega + \frac{2r\omega\mu_0 - \mu_0 \Omega (1-r^2)}{(1+r^2)^2} \\
 \therefore &= v_0 + x_0 \omega + \frac{2r\omega\mu_0 - \mu_0 \overset{r\omega}{\tilde{\Omega}} (1-r^2)}{(1+r^2)^2} \\
 \therefore &= v_0 + x_0 \omega + \frac{2r\omega\mu_0 - \mu_0 r\omega (1-r^2)}{(1+r^2)^2} \\
 \therefore &= v_0 + x_0 \omega + \frac{2r\omega\mu_0 - \mu_0 r\omega + \mu_0 r^3\omega}{(1+r^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 + x_0\omega + \frac{r\omega\mu_0 + \mu_0r^3\omega}{(1+r^2)^2} \\ \dot{x} &= v_0 + x_0\omega + \frac{\mu_0r\omega(1+r^2)}{(1+r^2)^2} \\ \therefore H_1 &= v_0 + x_0\omega + \frac{\mu_0r\omega}{1+r^2} \end{aligned} \quad (8.75)$$

Reemplazando el valor de las constantes H_1 y H_2 en $x(t)$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$.

El resultado final es:

$$\begin{aligned} \therefore x &= \underbrace{H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2r \text{cos}(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \\ H_1 &= v_0 + x_0\omega + \frac{\mu_0r\omega}{1+r^2} \quad ; \quad H_2 = x_0 + \frac{2r\mu_0}{(1+r^2)^2} \end{aligned} \quad (8.76)$$

8.9.3 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

La solución general a $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ es:

$$\begin{aligned} x &= x_c + x_p = e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \text{senh}(\omega_D t)] \\ &+ \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \text{cos}(\Omega t)] \end{aligned} \quad (8.77)$$

De igual modo se indica \dot{x} :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_c + \dot{x}_p = e^{-\xi\omega t} [(H_2\omega_D - H_1\xi\omega) \cosh(\omega_D t) + (H_1\omega_D - H_2\xi\omega) \text{senh}(\omega_D t)] \\ &+ \frac{\mu_0\Omega}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} [(1-r^2) \text{cos}(\Omega t) + 2\xi r \text{sen}(\Omega t)] \end{aligned} \quad (8.78)$$

Sustituyendo $x(0) = x_0$ en $x(t)$ se calcula en valor de H_1 :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{e^{-\xi\omega(0)}}{1} \left\{ H_1 \frac{\cosh[\omega_D(0)]}{1} + H_2 \frac{\sinh[\omega_D(0)]}{0} \right\} \\
 &+ \frac{\mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \left\{ (1-r^2) \frac{\text{sen}[\Omega(0)]}{0} - 2\xi r \frac{\text{cos}[\Omega(0)]}{1} \right\} \\
 x_0 &= H_1 - \frac{2\xi r \mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\
 \therefore H_1 &= x_0 + \frac{2\xi r \mu_0}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \tag{8.79}
 \end{aligned}$$

Dejando el valor de H_1 en función del factor de amplificación dinámico con amortiguamiento D :

$$\therefore H_1 = x_0 + 2\xi r \mu_0 D^2 \tag{8.80}$$

Sustituyendo $\dot{x}(0) = v_0$ en $\dot{x}(t)$ se calcula en valor de H_2 :

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \frac{e^{-\xi\omega(0)}}{1} \left\{ (H_2 \omega_D - H_1 \xi \omega) \frac{\cosh[\omega_D(0)]}{1} + (H_1 \omega_D - H_2 \xi \omega) \frac{\sinh[\omega_D(0)]}{0} \right\} \\
 &+ \frac{\mu_0 \Omega}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \left\{ (1-r^2) \frac{\text{cos}[\Omega(0)]}{1} + 2\xi r \frac{\text{sen}[\Omega(0)]}{0} \right\} \\
 v_0 &= H_2 \omega_D - H_1 \xi \omega + \frac{\mu_0 \Omega (1-r^2)}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\
 v_0 + H_1 \xi \omega - \frac{\mu_0 \Omega (1-r^2)}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} &= H_2 \omega_D \\
 \frac{v_0}{\omega_D} + H_1 \frac{\xi \omega}{\omega_D} - \frac{\mu_0 \Omega (1-r^2)}{\underbrace{[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2]}_{D^{-2}} \omega_D} &= H_2
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor calculado de H_1 :

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \frac{v_0}{\omega_D} + [x_0 + 2\xi r \mu_0 D^2] \frac{\xi \omega}{\omega_D} - \frac{\mu_0 \Omega (1-r^2)}{D^{-2} \omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0}{\omega_D} + \frac{\xi \omega x_0}{\omega_D} + \frac{2\xi^2 r \omega \mu_0 D^2}{\omega_D} - \frac{\mu_0 \Omega (1-r^2) D^2}{\omega_D}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} + \frac{2\xi^2 r\omega\mu_0 D^2 - \mu_0 \overset{r\omega}{\Omega} (1 - r^2) D^2}{\omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} + \frac{2\xi^2 r\omega\mu_0 D^2 - \mu_0 r\omega(1 - r^2) D^2}{\omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} + \frac{2\xi^2 r\omega\mu_0 D^2 - \mu_0 r\omega D^2 + \mu_0 r^3 \omega D^2}{\omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0 r\omega D^2 (2\xi^2 - 1 + r^2)}{\omega_D} \\
 \therefore H_2 &= \frac{v_0 + \xi\omega x_0 + \mu_0 r\omega D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D} \tag{8.81}
 \end{aligned}$$

Reemplazando el valor de las constantes H_1 y H_2 en $x(t)$ se obtiene la solución de $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} = \mathbf{x}_C + \mathbf{x}_P &= \underbrace{e^{-\xi\omega t} [\mathbf{H}_1 \cosh(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sinh(\omega_D t)]}_{\substack{\text{Respuesta} \\ \text{Transitoria}}} \\
 &+ \underbrace{\mu_0 D^2 [(1 - r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)]}_{\substack{\text{Respuesta} \\ \text{Estacionaria}}} \tag{8.82} \\
 \omega_D &= \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\
 H_1 &= x_0 + 2\xi r\mu_0 D^2 \quad ; \quad H_2 = \frac{v_0 + \xi\omega x_0 + \mu_0 r\omega D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D}
 \end{aligned}$$

8.9.4 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

El lector podrá comprobar que la solución final es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} = \mathbf{x}_C + \mathbf{x}_P = & \underbrace{e^{-\xi\omega t} [\mathbf{H}_1 \cos(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sen(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} \\
 & + \underbrace{\mu_0 D^2 [(1 - r^2) \sen(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \quad (8.83)
 \end{aligned}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{x}_0 + 2\xi r \mu_0 D^2 \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{v}_0 + \xi \omega \mathbf{x}_0 + \mu_0 r \omega D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D}$$

8.10 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$

Partiendo de la EDO:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \sen(\Omega t) \quad (8.84)$$

La frecuencia externa Ω es igual a la frecuencia natural de la estructura ω obteniéndose así que $\Omega = \omega$ y $r = 1$. Al presentarse esta consideración se obtiene la EDO:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \sen(\omega t) \quad (8.85)$$

8.10.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

La solución cuando $\Omega \neq \omega$ es:

$$\begin{aligned}
 \therefore x = & \underbrace{H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{(1 + r^2)^2} [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2r \sen(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}
 \end{aligned}$$

$$H_1 = v_0 + x_0\omega - \frac{\mu_0\omega}{1 + r^2} \quad ; \quad H_2 = x_0 - \frac{\mu_0(1 - r^2)}{(1 + r^2)^2}$$

Al ser $\Omega = \omega$ (por lo tanto $r = 1$) la ecuación x se transformará para adoptar otra nueva forma ya que el valor de las constantes H_1 y H_2 , así como la solución particular serán simplificadas algebraicamente.

Simplificando las constante H_1 y H_2 :

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \left(v_0 + x_0 \omega - \frac{\mu_0 \omega}{1 + r^2} \right) \Big|_{r=1} \\
 \therefore &= v_0 + x_0 \omega - \frac{\mu_0 \omega}{1 + (1)^2} \\
 \therefore &= v_0 + x_0 \omega - \frac{\mu_0 \omega}{2} \\
 \therefore H_1 &= v_0 + x_0 \omega - \frac{\mu_0 \omega}{2} \tag{8.86}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \left[x_0 - \frac{\mu_0(1 - r^2)}{(1 + r^2)^2} \right] \Big|_{r=1} \\
 \therefore &= x_0 - \frac{\mu_0[1 - (1)^2]}{[1 + (1)^2]^2} \\
 \therefore &= x_0 - \frac{\mu_0(0)}{(2)^2} \\
 \therefore H_2 &= x_0 \tag{8.87}
 \end{aligned}$$

Simplificando x_p :

$$\begin{aligned}
 x_p &= \left\{ \frac{\mu_0}{(1 + r^2)^2} [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2r \operatorname{sen}(\Omega t)] \right\} \Big|_{\substack{\Omega=\omega \\ r=1}} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{[1 + (1)^2]^2} \{ [1 - (1)^2] \cos(\omega t) + 2(1) \operatorname{sen}(\omega t) \} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{\underbrace{(1 + 1)^2}_4} \left[\underbrace{(1 - 1)}_0 \cos(\omega t) + 2 \operatorname{sen}(\omega t) \right] \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{4} [2 \operatorname{sen}(\omega t)]
 \end{aligned}$$

$$\therefore = \frac{\mu_0}{2} \text{sen}(\omega t)$$

$$\therefore x_P = \frac{\mu_0}{2} \text{sen}(\omega t) \quad (8.88)$$

Por consiguiente, la solución final es:

$$\therefore x = \underbrace{H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{2} \text{sen}(\omega t)}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \quad (8.89)$$

$$H_1 = v_0 + x_0 \omega - \frac{\mu_0 \omega}{2} \quad ; \quad H_2 = x_0$$

8.10.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

La solución cuando $\Omega \neq \omega$ es:

$$x = \underbrace{e^{-\xi \omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \text{sen}(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$$H_1 = x_0 - \mu_0 D^2 (1 - r^2) \quad ; \quad ; \quad H_2 = \frac{v_0 + \xi \omega [x_0 - \mu_0 D^2 (1 + r^2)]}{\omega_D}$$

Al ser $\Omega = \omega$ (por lo tanto $r = 1$) la ecuación x se transformará para adoptar otra nueva forma ya que el valor de las constantes H_1 y H_2 , así como el factor de amplificación dinámico y la solución particular serán simplificadas algebraicamente.

Simplificando D^2 :

$$D^2 = \left[\frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right] \Bigg|_{\substack{\Omega=\omega \\ r=1}}$$

$$\therefore = \frac{1}{[1 - (1)^2]^2 + [2\xi(1)]^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore &= \frac{1}{(1-1)^2 + (2\xi)^2} \\ \therefore D^2 &= \frac{1}{4\xi^2} \end{aligned} \quad (8.90)$$

Simplificando las constante H_1 y H_2 :

$$\begin{aligned} H_1 &= [x_0 - \mu_0 D^2 (1 - r^2)] \Big|_{\substack{r=1 \\ D^2=1/4\xi^2}} \\ \therefore &= \left\{ x_0 - \mu_0 \left[\frac{1}{4\xi^2} \right] [1 - (1)^2] \right\} \\ \therefore &= x_0 - \mu_0 \left(\frac{1}{4\xi^2} \right) \underbrace{(1-1)}_0 \\ \therefore H_1 &= x_0 \end{aligned} \quad (8.91)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \left\{ \frac{v_0 + \xi\omega [x_0 - \mu_0 D^2 (1 + r^2)]}{\omega_D} \right\} \Big|_{\substack{r=1 \\ D^2=1/4\xi^2}} \\ \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega \left\{ x_0 - \mu_0 \left[\frac{1}{4\xi^2} \right] [1 + (1)^2] \right\}}{\omega_D} \\ \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega \left[x_0 - \mu_0 \left(\frac{1}{4\xi^2} \right) (1 + 1) \right]}{\omega_D} \\ \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega \left(x_0 - \frac{\mu_0}{2\xi^2} \right)}{\omega_D} \\ \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega x_0 - \frac{\mu_0\omega}{2\xi}}{\omega_D} \\ \therefore H_2 &= \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi\omega x_0 - \frac{\mu_0\omega}{2\xi} \right) \end{aligned} \quad (8.92)$$

Simplificando x_p :

$$\begin{aligned}
 x_p &= \left. \{\mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \operatorname{sen}(\Omega t)]\} \right|_{\substack{\Omega=\omega \\ r=1}} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{4\xi^2} \{[1 - (1)^2] \cos(\omega t) + 2\xi(1) \operatorname{sen}(\omega t)\} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{4\xi^2} \left[\underbrace{(1 - 1)}_0 \cos(\omega t) + 2\xi \operatorname{sen}(\omega t) \right] \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{4\xi^2} [2\xi \operatorname{sen}(\omega t)] \\
 \therefore x_p &= \frac{\mu_0 \operatorname{sen}(\omega t)}{2\xi} \tag{8.93}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución final es:

$$\begin{aligned}
 \therefore x &= \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \operatorname{senh}(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0 \operatorname{sen}(\omega t)}{2\xi}}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \tag{8.94} \\
 \omega_D &= \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \\
 H_1 &= x_0 \quad ; \quad H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi \omega x_0 - \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \right)
 \end{aligned}$$

8.10.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

La solución cuando $\Omega \neq \omega$ es:

$$\begin{aligned}
 x &= \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \operatorname{sen}(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \operatorname{sen}(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \\
 \omega_D &= \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \\
 H_1 &= x_0 - \mu_0 D^2 (1 - r^2) \quad ; \quad ; \quad H_2 = \frac{v_0 + \xi \omega [x_0 - \mu_0 D^2 (1 + r^2)]}{\omega_D}
 \end{aligned}$$

Al ser $\Omega = \omega$ (por lo tanto $r = 1$) la ecuación x se transformará para adoptar otra nueva forma ya que el valor de las constantes H_1 y H_2 , así como el factor de amplificación dinámico y la solución particular serán simplificadas algebraicamente.

Simplificando D^2 :

$$\begin{aligned}
 D^2 &= \left[\frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right] \Bigg|_{\substack{\Omega=\omega \\ r=1}} \\
 \therefore &= \frac{1}{[1-(1)^2]^2 + [2\xi(1)]^2} \\
 \therefore &= \frac{1}{(1-1)^2 + (2\xi)^2} \\
 \therefore D^2 &= \frac{1}{4\xi^2} \tag{8.95}
 \end{aligned}$$

Simplificando las constante H_1 y H_2 :

$$\begin{aligned}
 H_1 &= [x_0 - \mu_0 D^2(1-r^2)] \Bigg|_{\substack{r=1 \\ D^2=1/4\xi^2}} \\
 \therefore &= \left\{ x_0 - \mu_0 \left[\frac{1}{4\xi^2} \right] [1-(1)^2] \right\} \\
 \therefore &= x_0 - \mu_0 \left(\frac{1}{4\xi^2} \right) \frac{(1-1)}{0} \\
 \therefore H_1 &= x_0 \tag{8.96}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \left\{ \frac{v_0 + \xi\omega[x_0 - \mu_0 D^2(1+r^2)]}{\omega_D} \right\} \Bigg|_{\substack{r=1 \\ D^2=1/4\xi^2}} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega \left\{ x_0 - \mu_0 \left[\frac{1}{4\xi^2} \right] [1+(1)^2] \right\}}{\omega_D}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega \left[x_0 - \mu_0 \left(\frac{1}{4\xi^2} \right) (1 + 1) \right]}{\omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega \left(x_0 - \frac{\mu_0}{2\xi^2} \right)}{\omega_D} \\
 \therefore &= \frac{v_0 + \xi\omega x_0 - \frac{\mu_0\omega}{2\xi}}{\omega_D} \\
 \therefore H_2 &= \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi\omega x_0 - \frac{\mu_0\omega}{2\xi} \right) \tag{8.97}
 \end{aligned}$$

Simplificando x_p :

$$\begin{aligned}
 x_p &= \left. \{ \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \operatorname{sen}(\Omega t)] \} \right|_{\substack{\Omega=\omega \\ r=1}} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{4\xi^2} \{ [1 - (1)^2] \cos(\omega t) + 2\xi(1) \operatorname{sen}(\omega t) \} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{4\xi^2} \left[\underbrace{(1 - 1)}_0 \cos(\omega t) + 2\xi \operatorname{sen}(\omega t) \right] \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{4\xi^2} [2\xi \operatorname{sen}(\omega t)] \\
 \therefore x_p &= \frac{\mu_0 \operatorname{sen}(\omega t)}{2\xi} \tag{8.98}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución final es:

$$\begin{aligned}
 \therefore x &= \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \operatorname{sen}(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0 \operatorname{sen}(\omega t)}{2\xi}}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \tag{8.99} \\
 \omega_D &= \omega \sqrt{1 - \xi^2} \\
 H_1 = x_0 \quad ; \quad H_2 &= \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi\omega x_0 - \frac{\mu_0\omega}{2\xi} \right)
 \end{aligned}$$

8.11 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \text{sen}(\omega t)$

Partiendo de la EDO:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t) \quad (8.100)$$

La frecuencia externa Ω es igual a la frecuencia natural de la estructura ω obteniéndose así que $\Omega = \omega$ y $r = 1$. Al presentarse esta consideración se obtiene la EDO:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\omega t) \quad (8.101)$$

8.11.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

La solución cuando $\Omega \neq \omega$ es:

$$\therefore x = \underbrace{H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2r \cos(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$$

$$H_1 = v_0 + x_0\omega + \frac{\mu_0 r \omega}{1+r^2} \quad ; \quad H_2 = x_0 + \frac{2r\mu_0}{(1+r^2)^2}$$

Al ser $\Omega = \omega$ (por lo tanto $r = 1$) la ecuación x se transformará para adoptar otra nueva forma ya que el valor de las constantes H_1 y H_2 , así como la solución particular serán simplificadas algebraicamente.

Simplificando las constante H_1 y H_2 :

$$H_1 = \left(v_0 + x_0\omega + \frac{\mu_0 r \omega}{1+r^2} \right) \Big|_{r=1}$$

$$\therefore = v_0 + x_0\omega + \frac{\mu_0(1)\omega}{1+(1)^2}$$

$$\therefore = v_0 + x_0\omega + \frac{\mu_0\omega}{2}$$

$$\therefore H_1 = v_0 + x_0\omega + \frac{\mu_0\omega}{2} \quad (8.102)$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \left[x_0 + \frac{2r\mu_0}{(1+r^2)^2} \right] \Big|_{r=1} \\
 \therefore &= x_0 + \frac{2(1)\mu_0}{[1+(1)^2]^2} \\
 \therefore &= x_0 + \frac{2\mu_0}{(2)^2} \\
 \therefore H_2 &= x_0 + \frac{\mu_0}{2} \tag{8.103}
 \end{aligned}$$

Simplificando x_p :

$$\begin{aligned}
 x_p &= \left\{ \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \sin(\Omega t) - 2r \cos(\Omega t)] \right\} \Big|_{\substack{\Omega=\omega \\ r=1}} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{[1+(1)^2]^2} \{ [1-(1)^2] \sin(\omega t) - 2(1) \cos(\omega t) \} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{\underbrace{(1+1)^2}_4} \left[\underbrace{(1-1)}_0 \sin(\omega t) - 2 \cos(\omega t) \right] \\
 \therefore &= \frac{\mu_0}{4} [-2 \cos(\omega t)] \\
 \therefore &= -\frac{\mu_0}{2} \cos(\omega t) \\
 \therefore x_p &= -\frac{\mu_0}{2} \cos(\omega t) \tag{8.104}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución final es:

$$\begin{aligned}
 \therefore x &= \underbrace{H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} - \underbrace{\frac{\mu_0}{2} \cos(\omega t)}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \tag{8.105} \\
 H_1 &= v_0 + x_0 \omega + \frac{\mu_0 \omega}{2} \quad ; \quad H_2 = x_0 + \frac{\mu_0}{2}
 \end{aligned}$$

8.11.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

La solución cuando $\Omega \neq \omega$ es:

$$x = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\mu_0 D^2 [(1 - r^2) \sen(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$$H_1 = x_0 + 2\xi r \mu_0 D^2 \quad ; \quad ; \quad H_2 = \frac{v_0 + \xi \omega x_0 + \mu_0 r \omega D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D}$$

Al ser $\Omega = \omega$ (por lo tanto $r = 1$) la ecuación x se transformará para adoptar otra nueva forma ya que el valor de las constantes H_1 y H_2 , así como el factor de amplificación dinámico y la solución particular serán simplificadas algebraicamente.

Simplificando D^2 :

$$\begin{aligned} D^2 &= \left[\frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right] \Bigg|_{\substack{r=1 \\ \Omega=\omega}} \\ \therefore &= \frac{1}{[1 - (1)^2]^2 + [2\xi(1)]^2} \\ \therefore &= \frac{1}{(1 - 1)^2 + (2\xi)^2} \\ \therefore D^2 &= \frac{1}{4\xi^2} \end{aligned} \tag{8.106}$$

Simplificando las constante H_1 y H_2 :

$$\begin{aligned} H_1 &= [x_0 + 2\xi r \mu_0 D^2] \Bigg|_{\substack{r=1 \\ D^2=1/4\xi^2}} \\ \therefore &= x_0 + 2\xi \mu_0 (1) \left(\frac{1}{4\xi^2} \right) \\ \therefore H_1 &= x_0 + \frac{\mu_0}{2\xi} \end{aligned} \tag{8.107}$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \left. \left\{ \frac{v_0 + \xi\omega x_0 + \mu_0 r \omega D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D} \right\} \right|_{\substack{r=1 \\ D^2=1/4\xi^2}} \\
 &\therefore = \frac{v_0 + \xi\omega x_0 + \mu_0(1)\omega \left(\frac{1}{4\xi^2} \right) [(1)^2 + 2\xi^2 - 1]}{\omega_D} \\
 &\therefore = \frac{v_0 + \xi\omega x_0 + \frac{\mu_0\omega}{4\xi^2} [1 + 2\xi^2 - 1]}{\omega_D} \\
 &\therefore = \frac{v_0 + \xi\omega x_0 + \frac{\mu_0\omega}{4\xi^2} (2\xi^2)}{\omega_D} \\
 &\therefore H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi\omega x_0 + \frac{\mu_0\omega}{2} \right) \tag{8.108}
 \end{aligned}$$

Simplificando x_p :

$$\begin{aligned}
 x_p &= \left. \{ \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \text{cos}(\Omega t)] \} \right|_{\substack{\Omega=\omega \\ r=1}} \\
 &\therefore = \frac{\mu_0}{4\xi^2} \{ [1 - (1)^2] \text{sen}(\omega t) - 2\xi(1) \text{cos}(\omega t) \} \\
 &\therefore = \frac{\mu_0}{4\xi^2} \left[\underbrace{(1 - 1)}_0 \text{sen}(\omega t) - 2\xi \text{cos}(\omega t) \right] \\
 &\therefore = \frac{\mu_0}{4\xi^2} [-2\xi \text{cos}(\omega t)] \\
 &\therefore x_p = -\frac{\mu_0 \text{cos}(\omega t)}{2\xi} \tag{8.109}
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución final es:

$$\therefore \mathbf{x} = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [\mathbf{H}_1 \cosh(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sinh(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} - \underbrace{\frac{\mu_0 \cos(\omega t)}{2\xi}}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \quad (8.110)$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\mu_0}{2\xi} \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(\mathbf{v}_0 + \xi\omega \mathbf{x}_0 + \frac{\mu_0 \omega}{2} \right)$$

8.11.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

La solución cuando $\Omega \neq \omega$ es:

$$\mathbf{x} = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [\mathbf{H}_1 \cos(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 (\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\mu_0 D^2 [(1 - r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{x}_0 + 2\xi r \mu_0 D^2 \quad ; \quad ; \quad \mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{v}_0 + \xi\omega \mathbf{x}_0 + \mu_0 r \omega D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D}$$

Al ser $\Omega = \omega$ (por lo tanto $r = 1$) la ecuación \mathbf{x} se transformará para adoptar otra nueva forma ya que el valor de las contantes \mathbf{H}_1 y \mathbf{H}_2 , así como el factor de amplificación dinámico y la solución particular, serán simplificadas algebraicamente.

Simplificando D^2 :

$$D^2 = \left[\frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right] \Bigg|_{\substack{r=1 \\ \Omega=\omega}}$$

$$\therefore = \frac{1}{[1 - (1)^2]^2 + [2\xi(1)]^2}$$

$$\therefore = \frac{1}{(1 - 1)^2 + (2\xi)^2}$$

$$\therefore D^2 = \frac{1}{4\xi^2} \quad (8.111)$$

Simplificando las constante H_1 y H_2 :

$$\begin{aligned} H_1 &= [x_0 + 2\xi r \mu_0 D^2] \Big|_{\substack{r=1 \\ D^2=1/4\xi^2}} \\ \therefore &= x_0 + 2\xi \mu_0 (1) \left(\frac{1}{4\xi^2} \right) \\ \therefore H_1 &= x_0 + \frac{\mu_0}{2\xi} \end{aligned} \quad (8.112)$$

$$\begin{aligned} H_2 &= \left\{ \frac{v_0 + \xi \omega x_0 + \mu_0 r \omega D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D} \right\} \Big|_{\substack{r=1 \\ D^2=1/4\xi^2}} \\ \therefore &= \frac{v_0 + \xi \omega x_0 + \mu_0 (1) \omega \left(\frac{1}{4\xi^2} \right) [(1)^2 + 2\xi^2 - 1]}{\omega_D} \\ \therefore &= \frac{v_0 + \xi \omega x_0 + \frac{\mu_0 \omega}{4\xi^2} (1 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D} \\ \therefore &= \frac{v_0 + \xi \omega x_0 + \frac{\mu_0 \omega}{4\xi^2} (2\xi^2)}{\omega_D} \\ \therefore H_2 &= \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi \omega x_0 + \frac{\mu_0 \omega}{2} \right) \end{aligned} \quad (8.113)$$

Simplificando x_p :

$$\begin{aligned} x_p &= \{ \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \text{cos}(\Omega t)] \} \Big|_{\substack{\Omega=\omega \\ r=1}} \\ \therefore &= \frac{\mu_0}{4\xi^2} \{ [1 - (1)^2] \text{sen}(\omega t) - 2\xi (1) \text{cos}(\omega t) \} \end{aligned}$$

$$\therefore = \frac{\mu_0}{4\xi^2} \left[\underbrace{(1-1)}_0 \text{sen}(\omega t) - 2\xi \cos(\omega t) \right]$$

$$\therefore = \frac{\mu_0}{4\xi^2} [-2\xi \cos(\omega t)]$$

$$\therefore x_p = -\frac{\mu_0 \cos(\omega t)}{2\xi} \tag{8.114}$$

Por consiguiente, la solución final es:

$$\therefore x = e^{-\xi\omega t} \left[\underbrace{H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \text{sen}(\omega_D t)}_{\text{Respuesta Transitoria}} \right] - \underbrace{\frac{\mu_0 \cos(\omega t)}{2\xi}}_{\text{Respuesta Estacionaria}} \tag{8.115}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$H_1 = x_0 + \frac{\mu_0}{2\xi} \quad ; \quad H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi\omega x_0 + \frac{\mu_0 \omega}{2} \right)$$

Ya han sido determinadas todas las soluciones para todas las ecuaciones del tipo $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$ por lo que en las siguientes páginas serán recopiladas todas las soluciones, y posteriormente serán representadas las gráficas a dichas soluciones.

8.12 Recopilación de Soluciones y Gráficas cuando $P(t) = P_0$

Tabla VIII.1

Soluciones a $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = P_0$ con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$

Caso de Estudio	Solución $x(t)$	
	Respuesta Transitoria	Respuesta Estacionaria
Amortiguamiento Crítico $\xi = 1$	$[v_0 + \omega(x_0 - \mu_0)]te^{-\omega t} + (x_0 - \mu_0)e^{-\omega t}$	μ_0
Sobreamortiguamiento $\xi > 1$ $\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$	$e^{-\xi\omega t} \left\{ (x_0 - \mu_0) \cosh(\omega_D t) + \left[\frac{v_0 + \xi\omega(x_0 - \mu_0)}{\omega_D} \right] \sinh(\omega_D t) \right\}$	μ_0
Subamortiguamiento $\xi < 1$ $\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$	$e^{-\xi\omega t} \left\{ (x_0 - \mu_0) \cos(\omega_D t) + \left[\frac{v_0 + \xi\omega(x_0 - \mu_0)}{\omega_D} \right] \sen(\omega_D t) \right\}$	μ_0

8.12.1 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi = 1$ (Ej. 1)

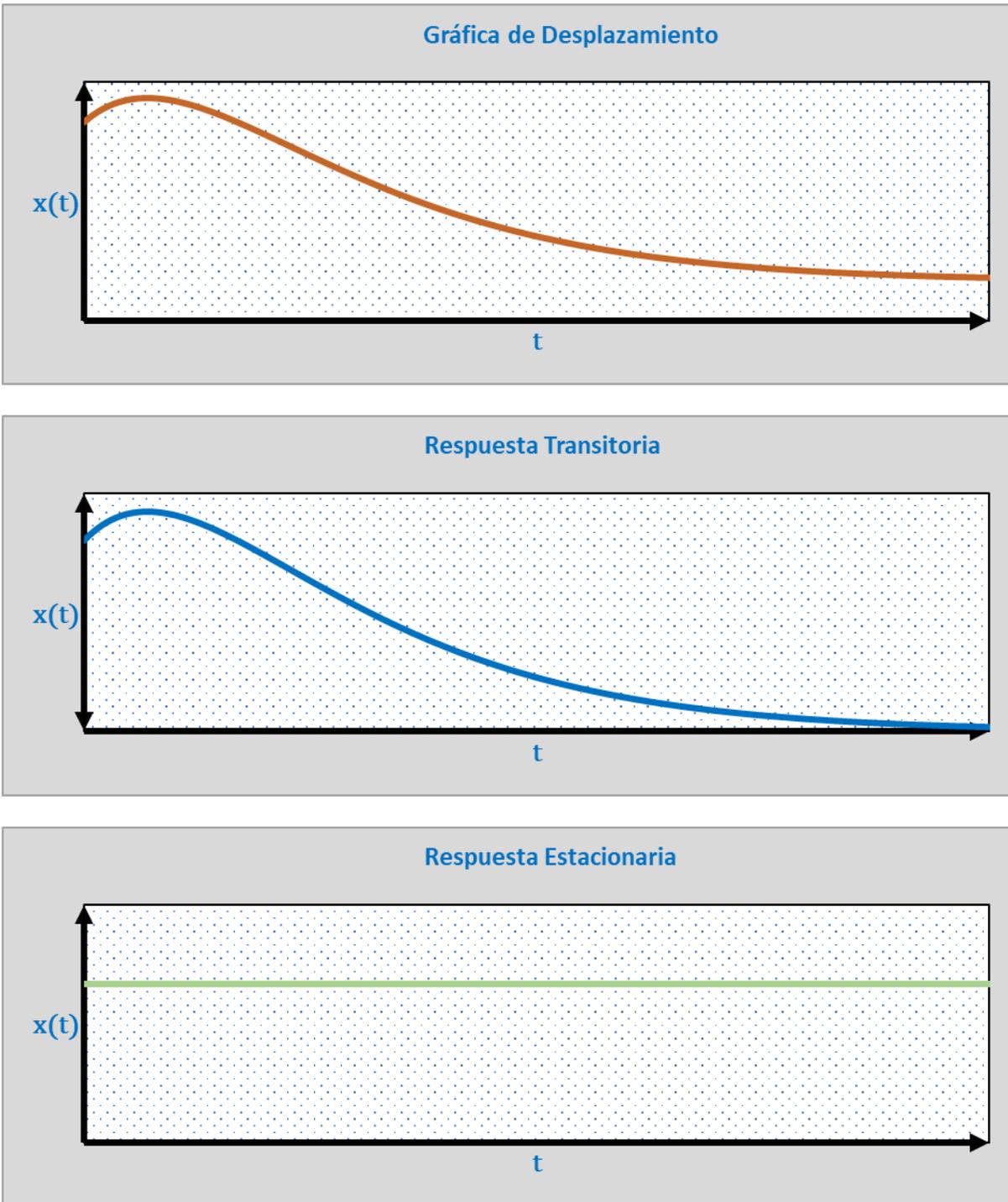


Figura VII.3. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$ cuando $\xi = 1$ (ej. 1).

8.12.2 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi = 1$ (Ej. 2)

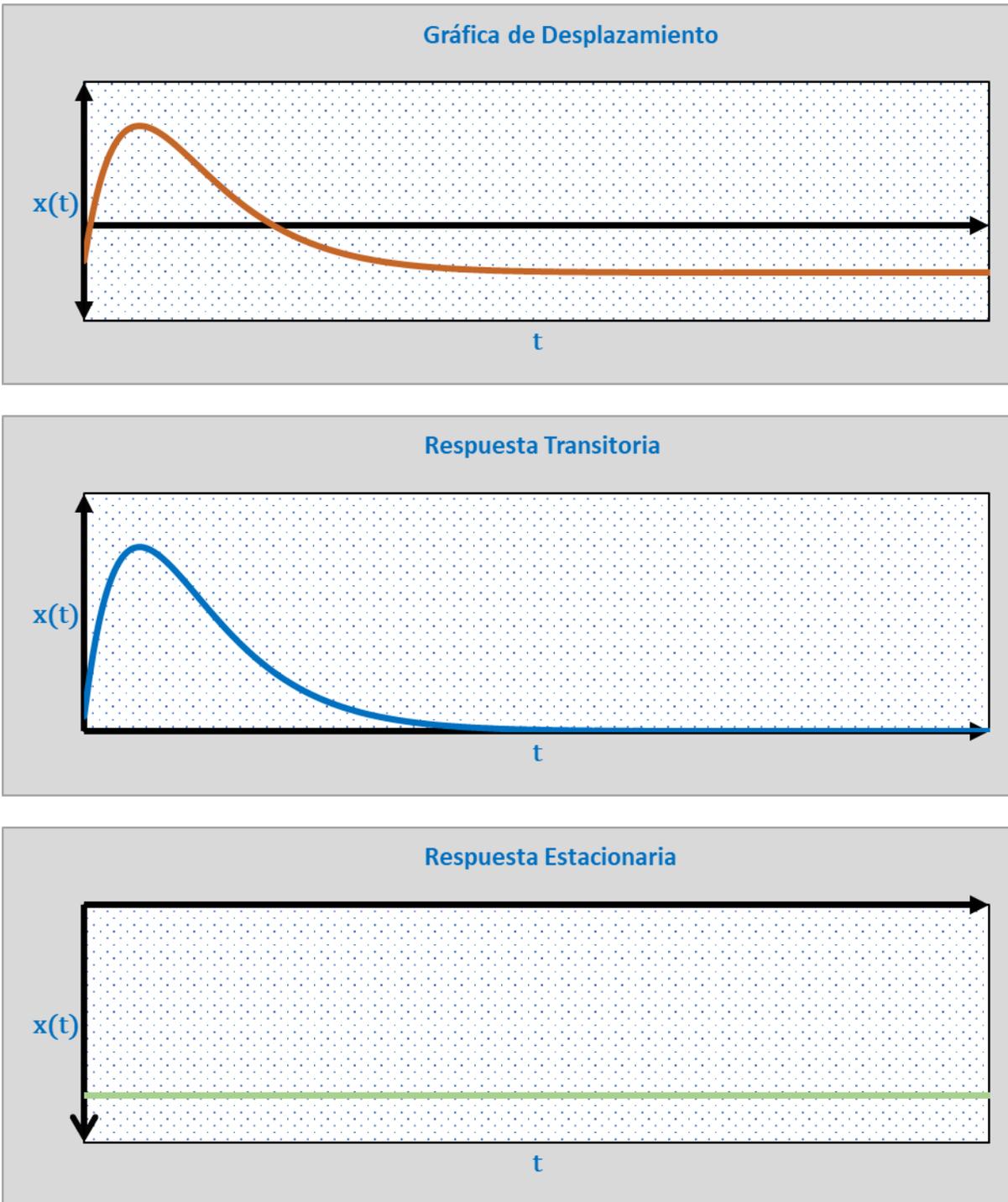


Figura VII.4. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$ cuando $\xi = 1$ (ej. 2).

8.12.3 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi > 1$ (Ej. 1)

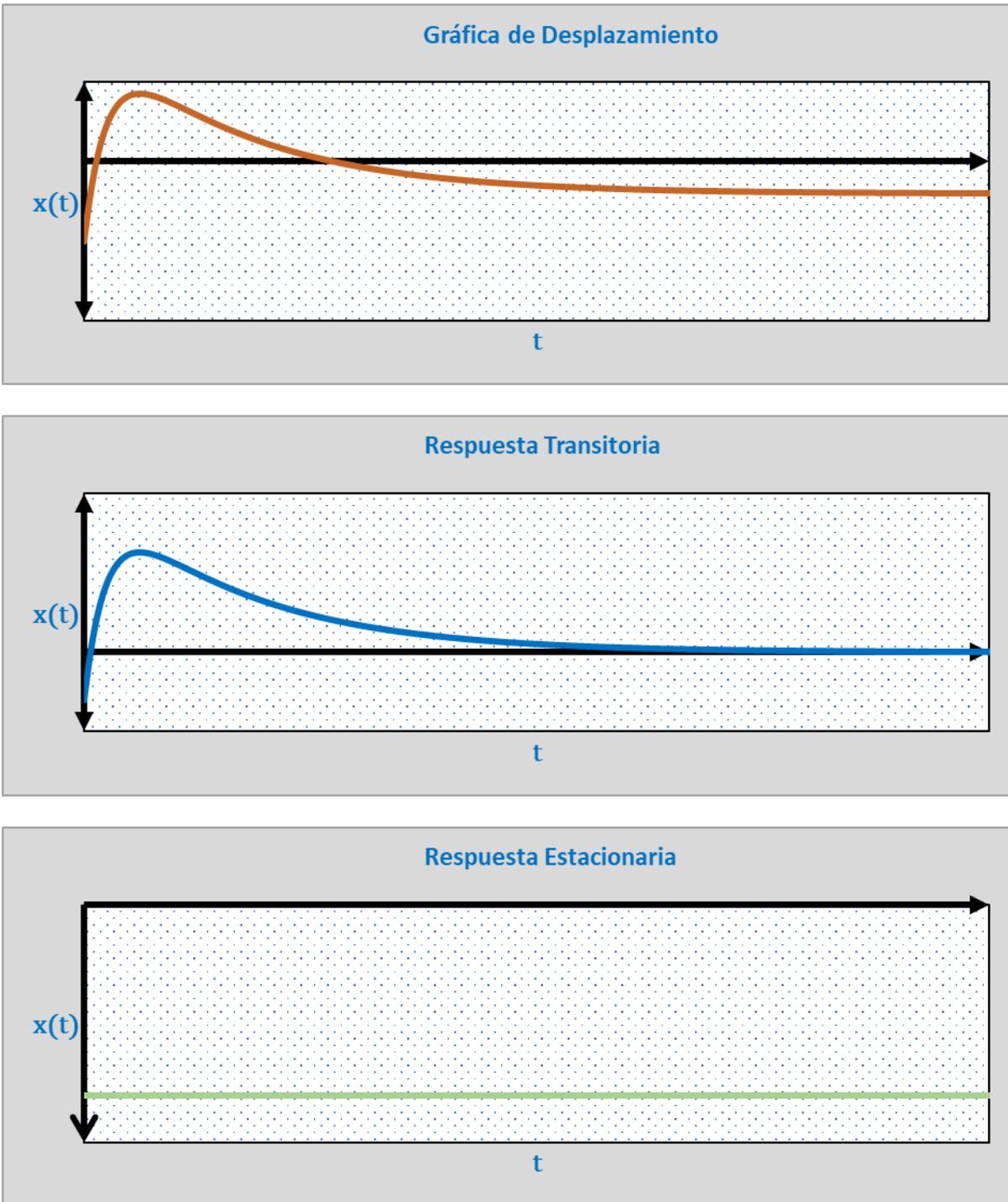


Figura VII.5. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$, $\xi > 1$ (ej. 1).

8.12.4 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi > 1$ (Ej. 2)

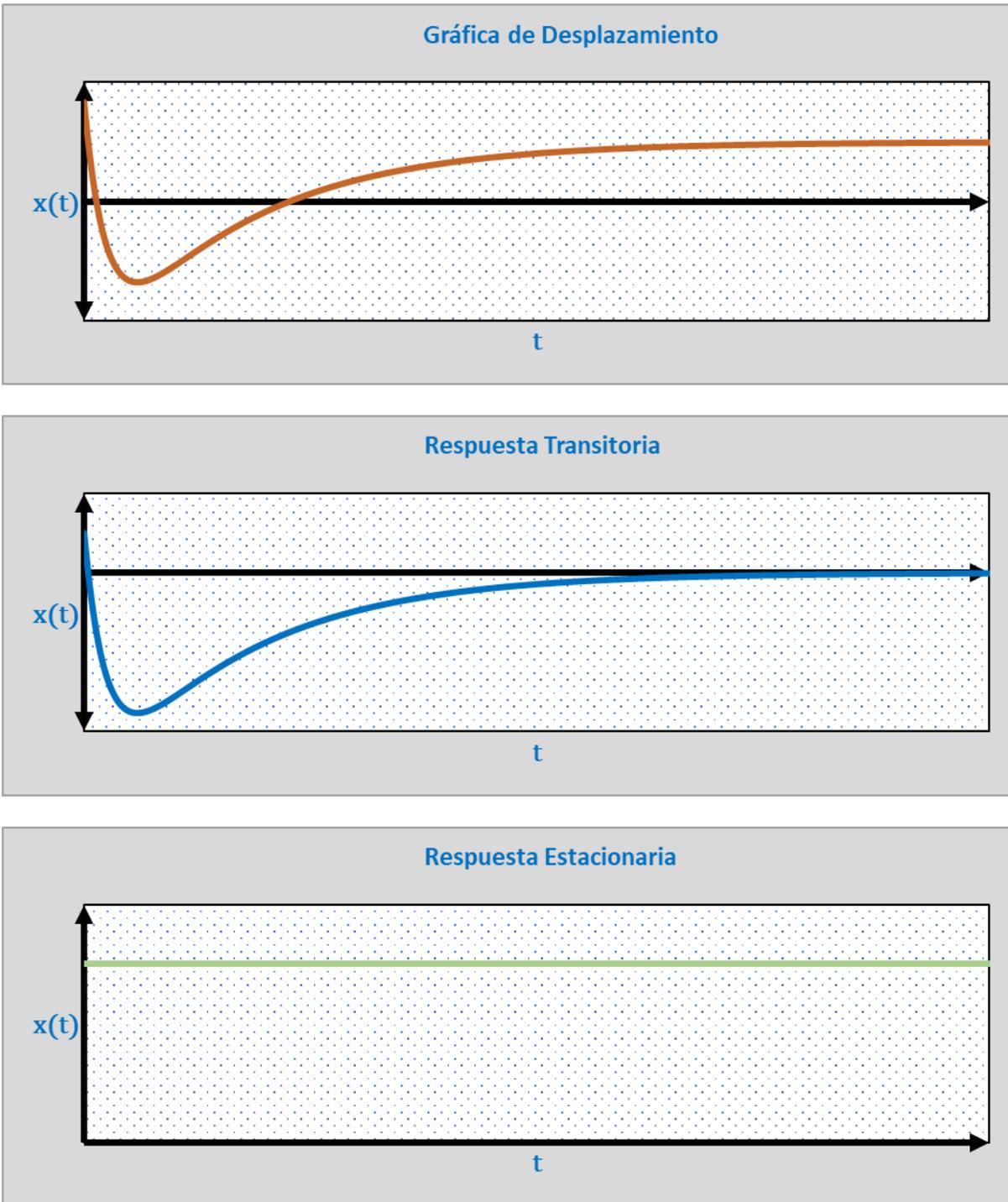


Figura VII.6. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$, $\xi > 1$ (ej. 2).

8.12.5 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi < 1$ (Ej. 1)

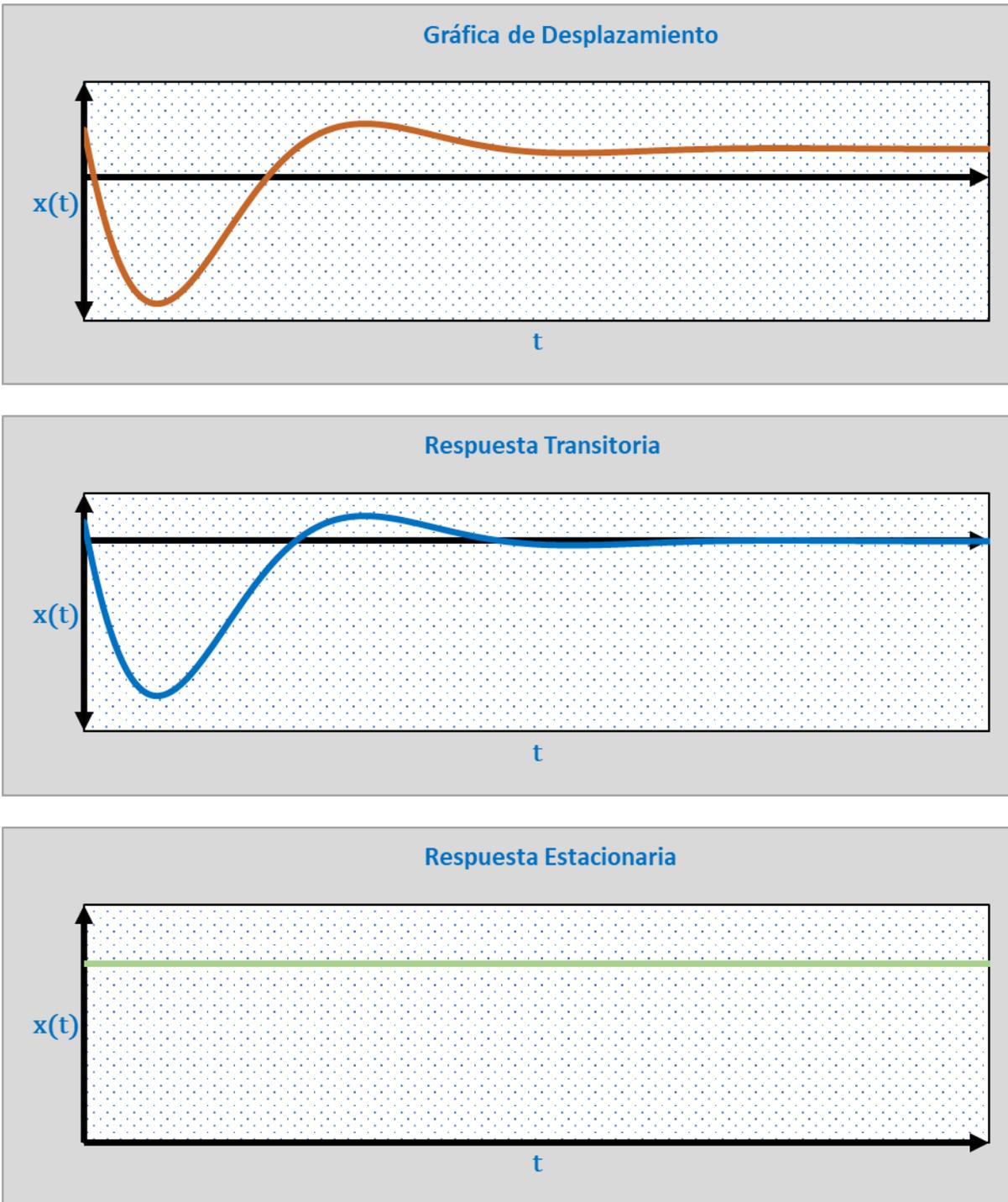


Figura VII.7. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$, $\xi < 1$ (ej. 1).

8.12.6 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0$ y $\xi < 1$ (Ej. 2)

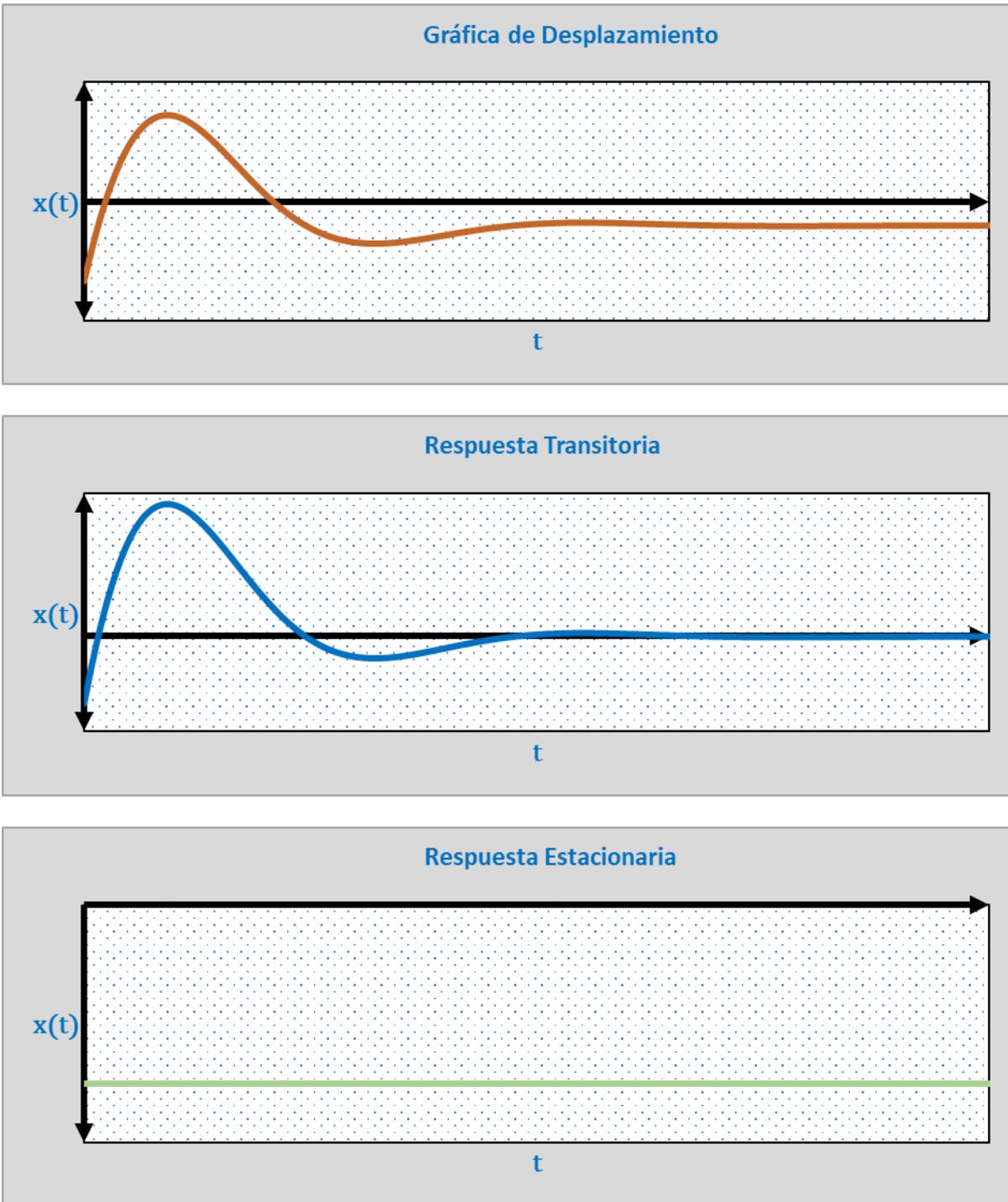


Figura VII.8. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$, $\xi < 1$ (ej. 2).

8.13 Recopilación de Funciones y Gráficas Cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$

Tabla VIII.2

Soluciones a $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \omega^2\mu_0 \cos(\Omega t)$ con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$

Caso de Estudio	Solución $x(t)$
<p>Amortiguamiento Crítico $\xi = 1$</p>	$\therefore x = \underbrace{H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \cos(\Omega t) + 2r \sin(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = v_0 + x_0 \omega - \frac{\mu_0 \omega}{1+r^2} \quad ; \quad H_2 = x_0 - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2}$
<p>Sobreamortiguamiento $\xi > 1$</p> <p>$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$</p>	$x = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\mu_0 D^2 [(1-r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = x_0 - \mu_0 D^2 (1-r^2) \quad ; \quad H_2 = \frac{v_0 + \xi\omega [x_0 - \mu_0 D^2 (1+r^2)]}{\omega_D} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}$
<p>Subamortiguamiento $\xi < 1$</p> <p>$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$</p>	$x = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \sin(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\mu_0 D^2 [(1-r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = x_0 - \mu_0 D^2 (1-r^2) \quad ; \quad H_2 = \frac{v_0 + \xi\omega [x_0 - \mu_0 D^2 (1+r^2)]}{\omega_D} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}$

8.13.1 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi = 1$

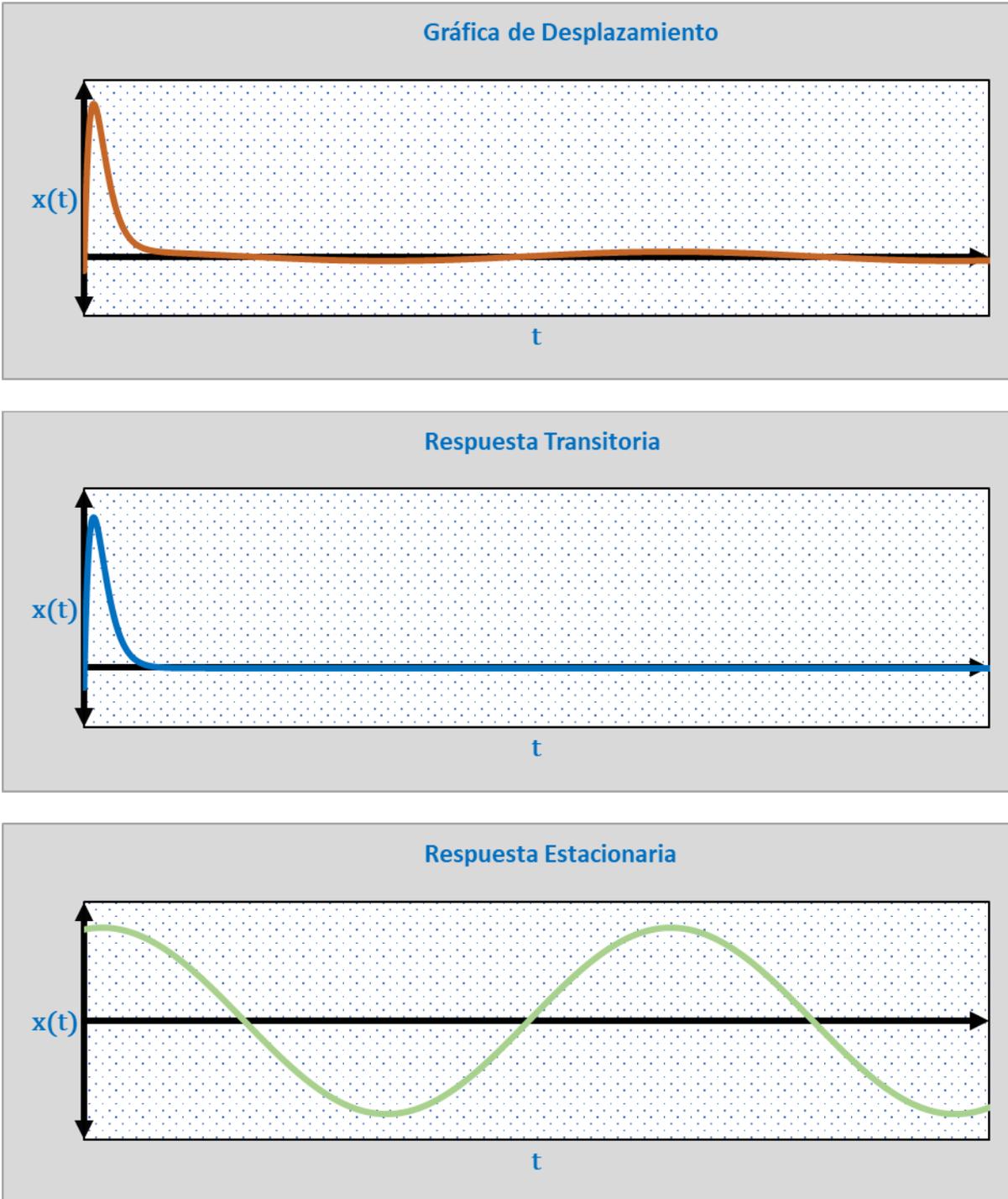


Figura VII.9. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ cuando $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi = 1$

8.13.2 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi = 1$

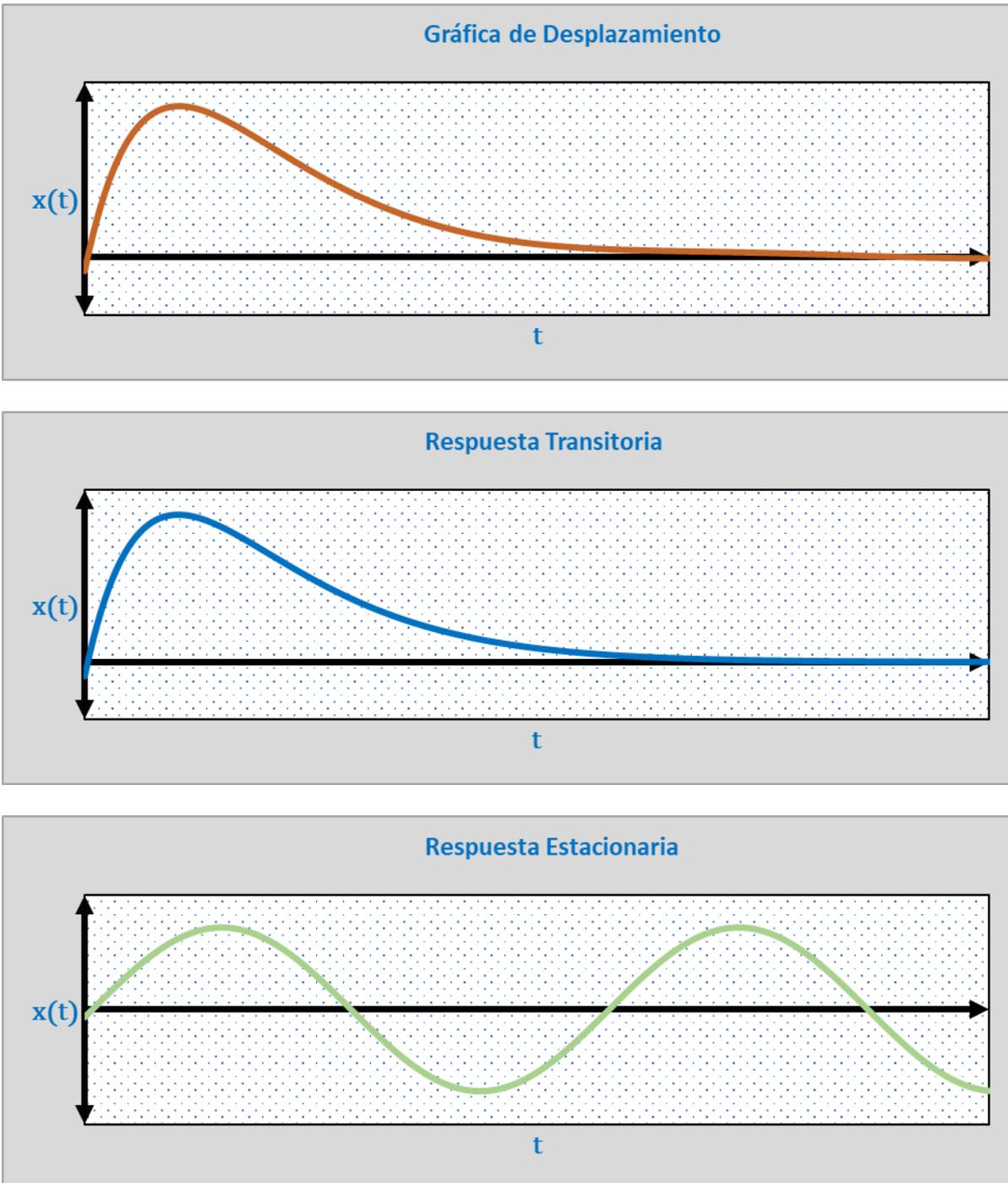


Figura VIII.10. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ cuando $\Omega \approx \omega$ y $\xi = 1$

8.13.3 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi = 1$

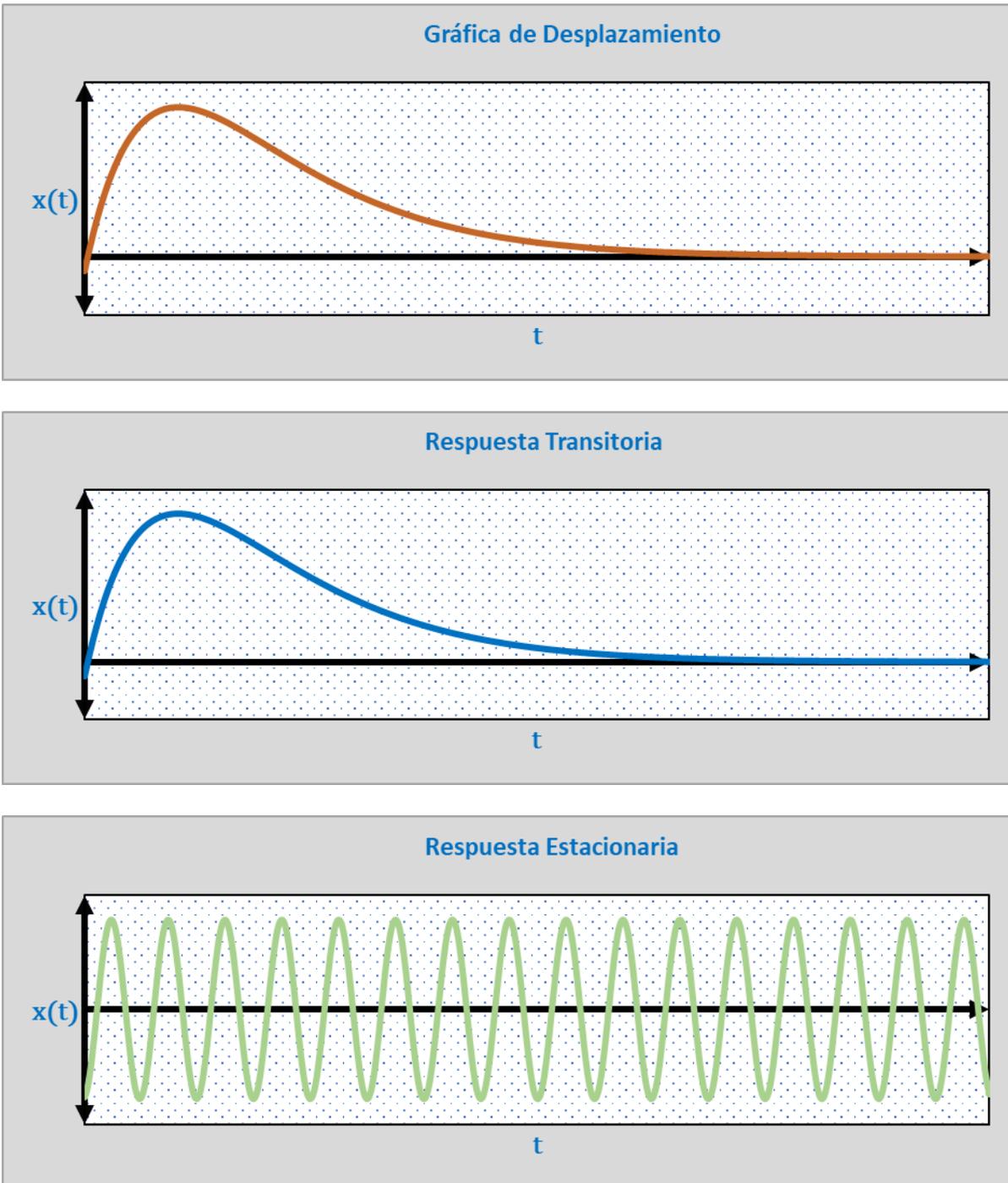


Figura VII.11. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ cuando $\Omega \gg \omega$ y $\xi = 1$

8.13.4 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi > 1$

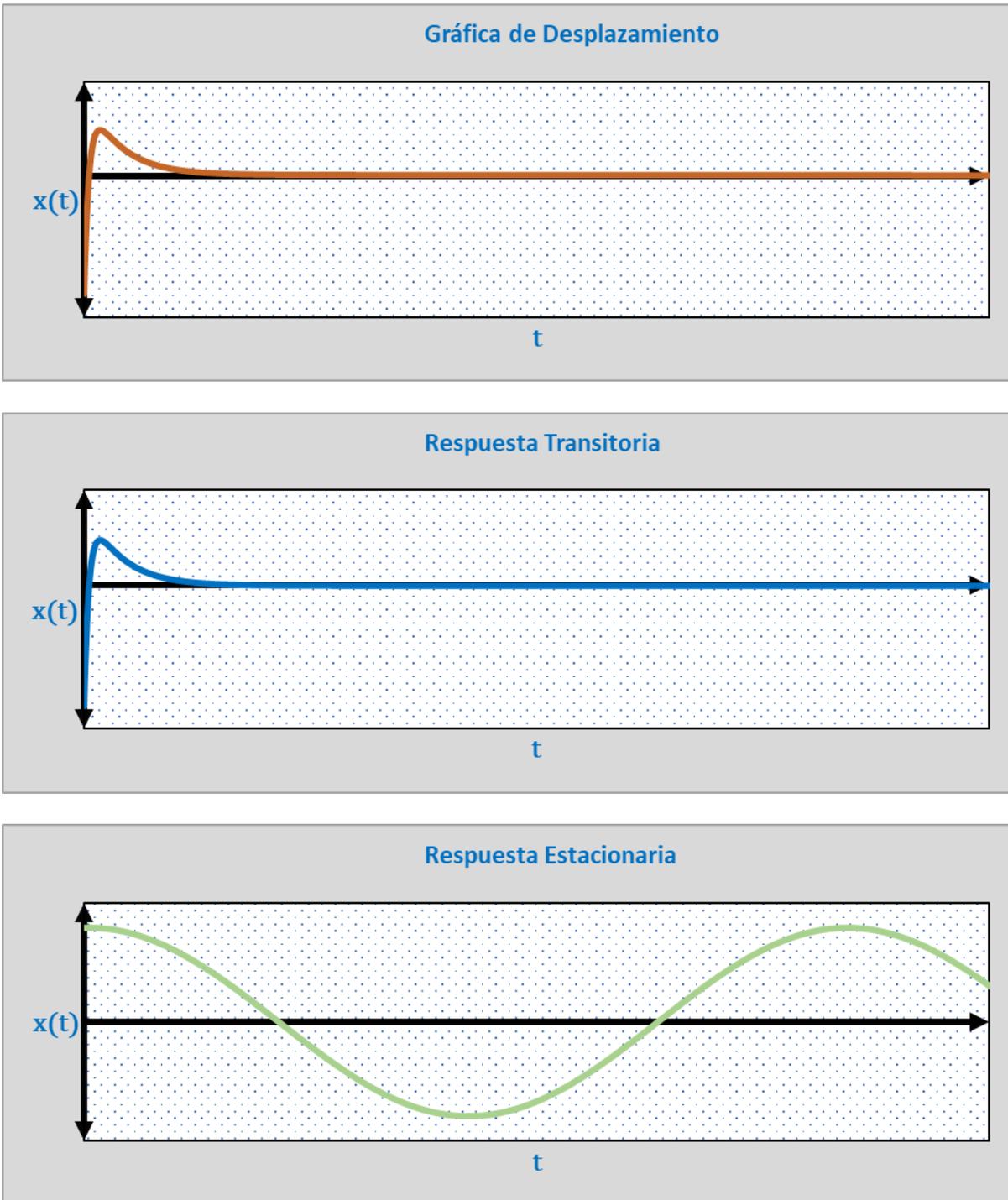


Figura VIII.12. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ cuando $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi > 1$

8.13.5 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi > 1$

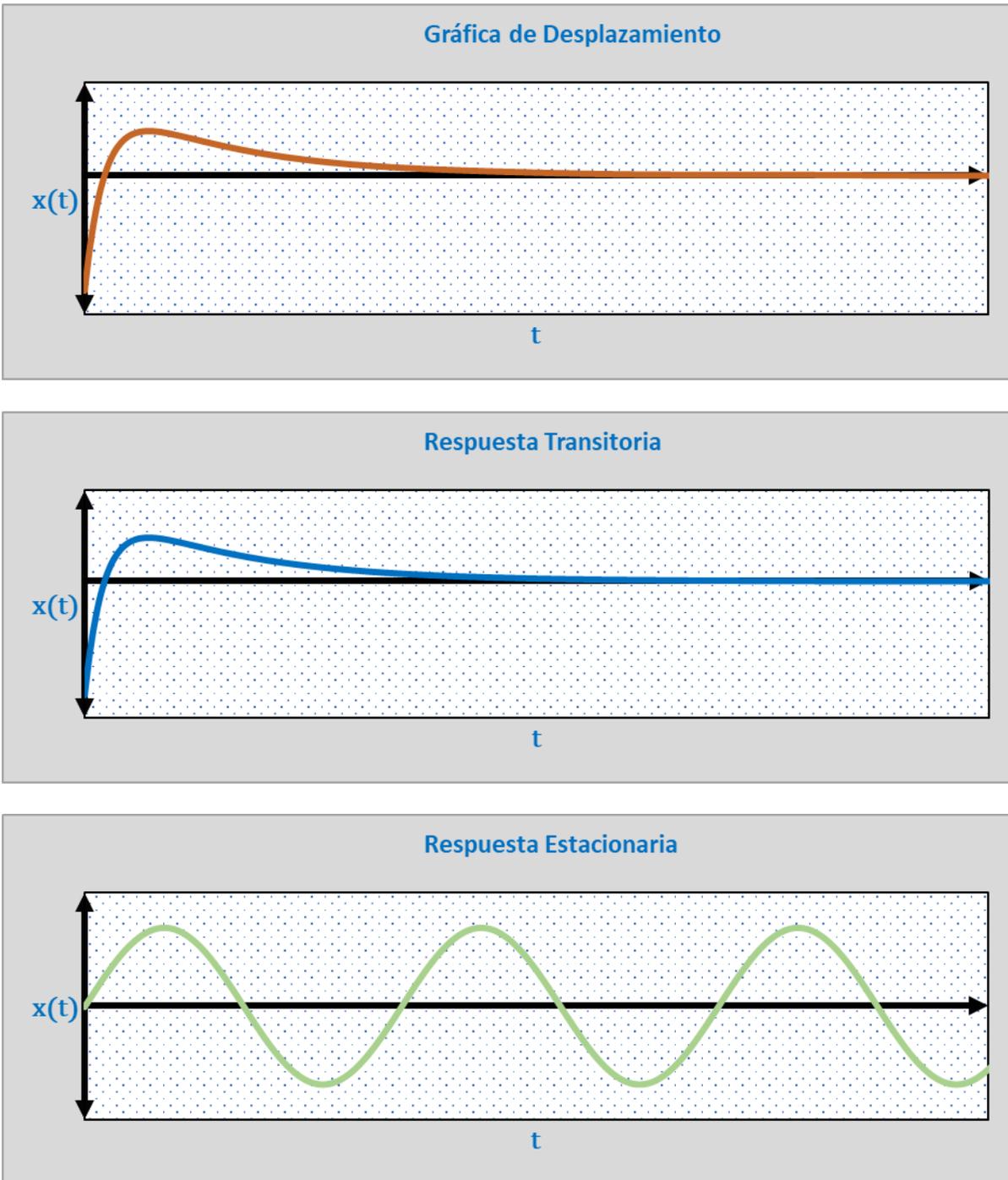


Figura VIII.13. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ cuando $\Omega \approx \omega$ y $\xi > 1$

8.13.6 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi > 1$

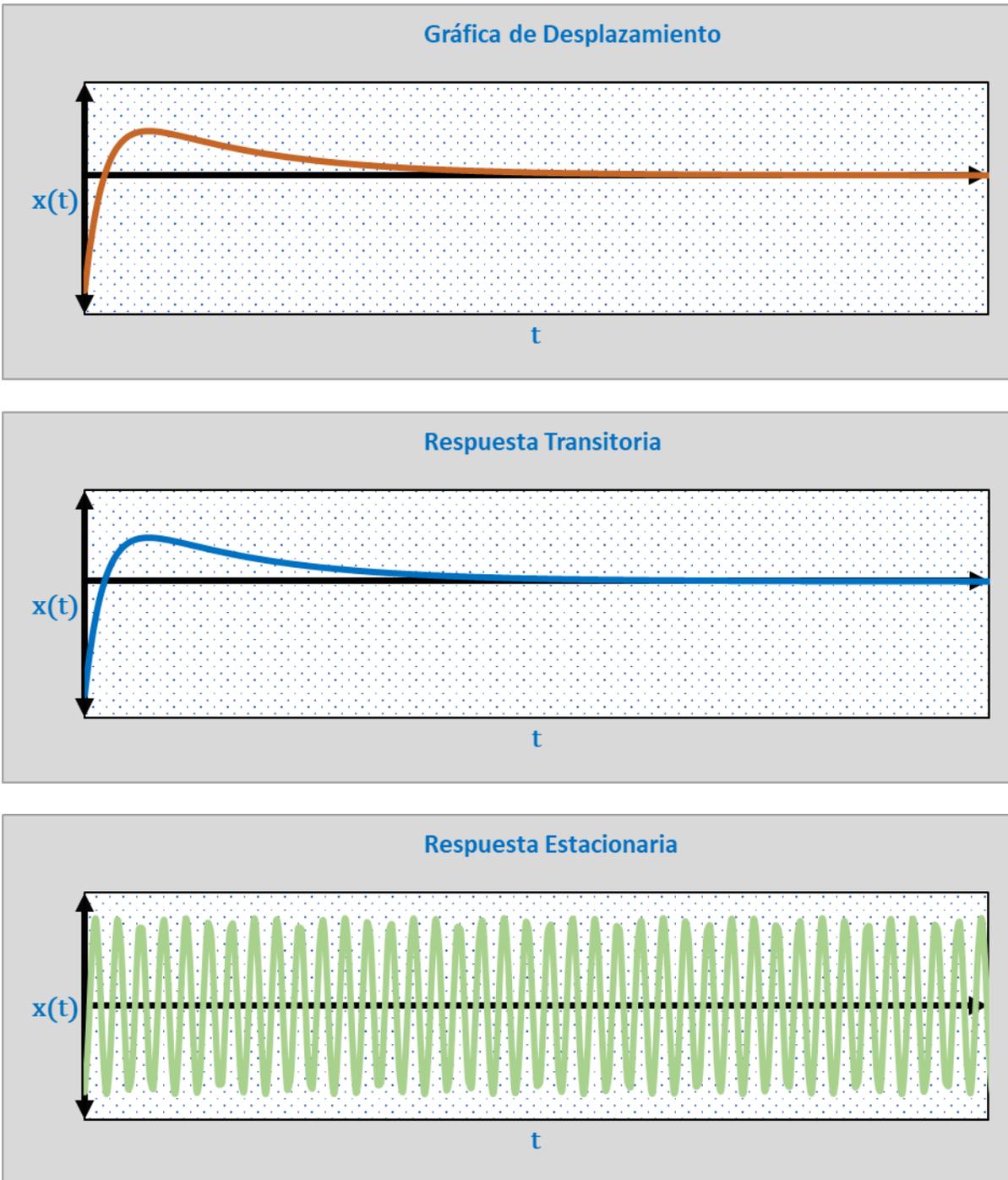


Figura VII.14. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ cuando $\Omega \gg \omega$ y $\xi > 1$

8.13.7 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi < 1$

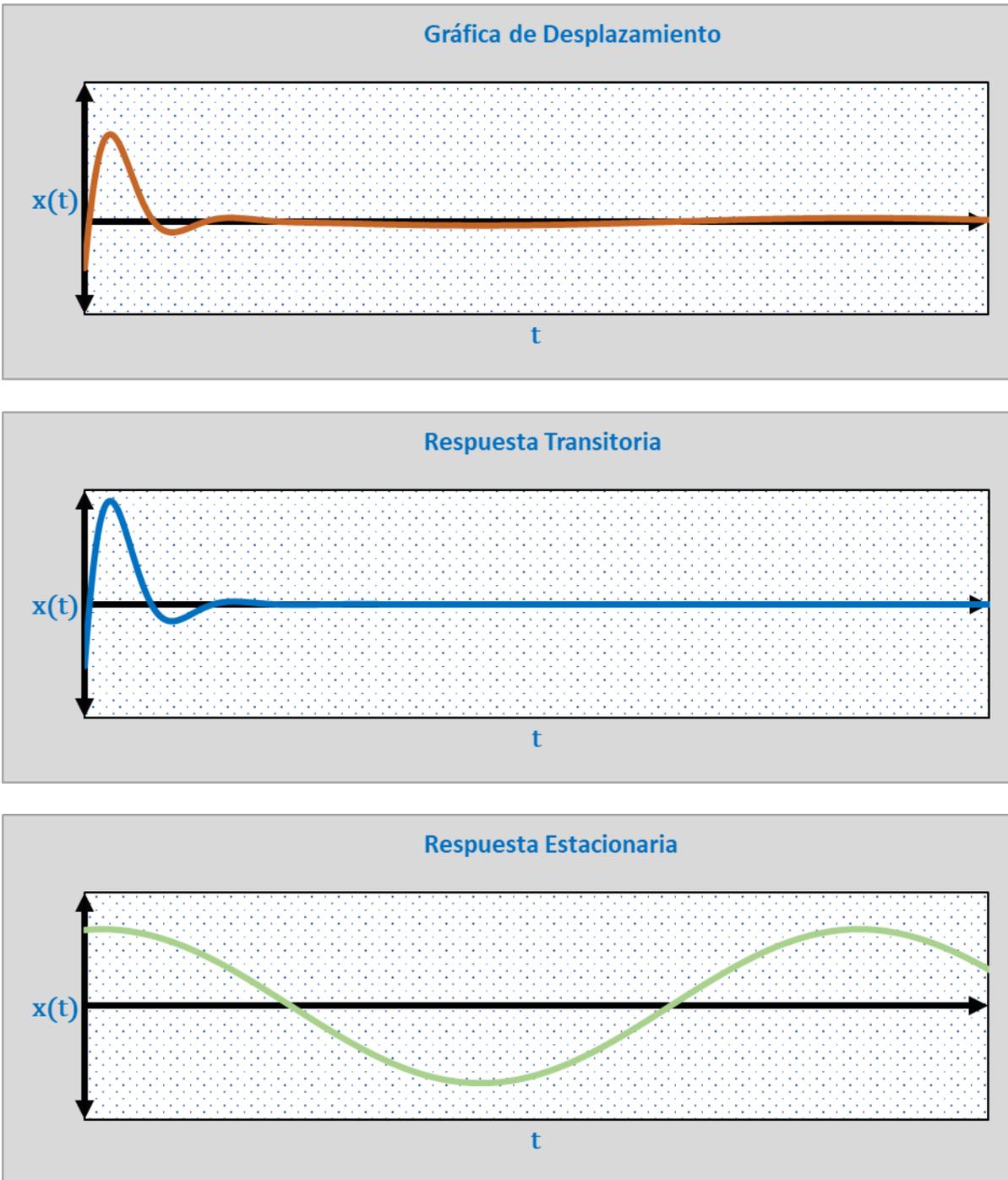


Figura VIII.15. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ cuando $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi < 1$

8.13.8 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi < 1$

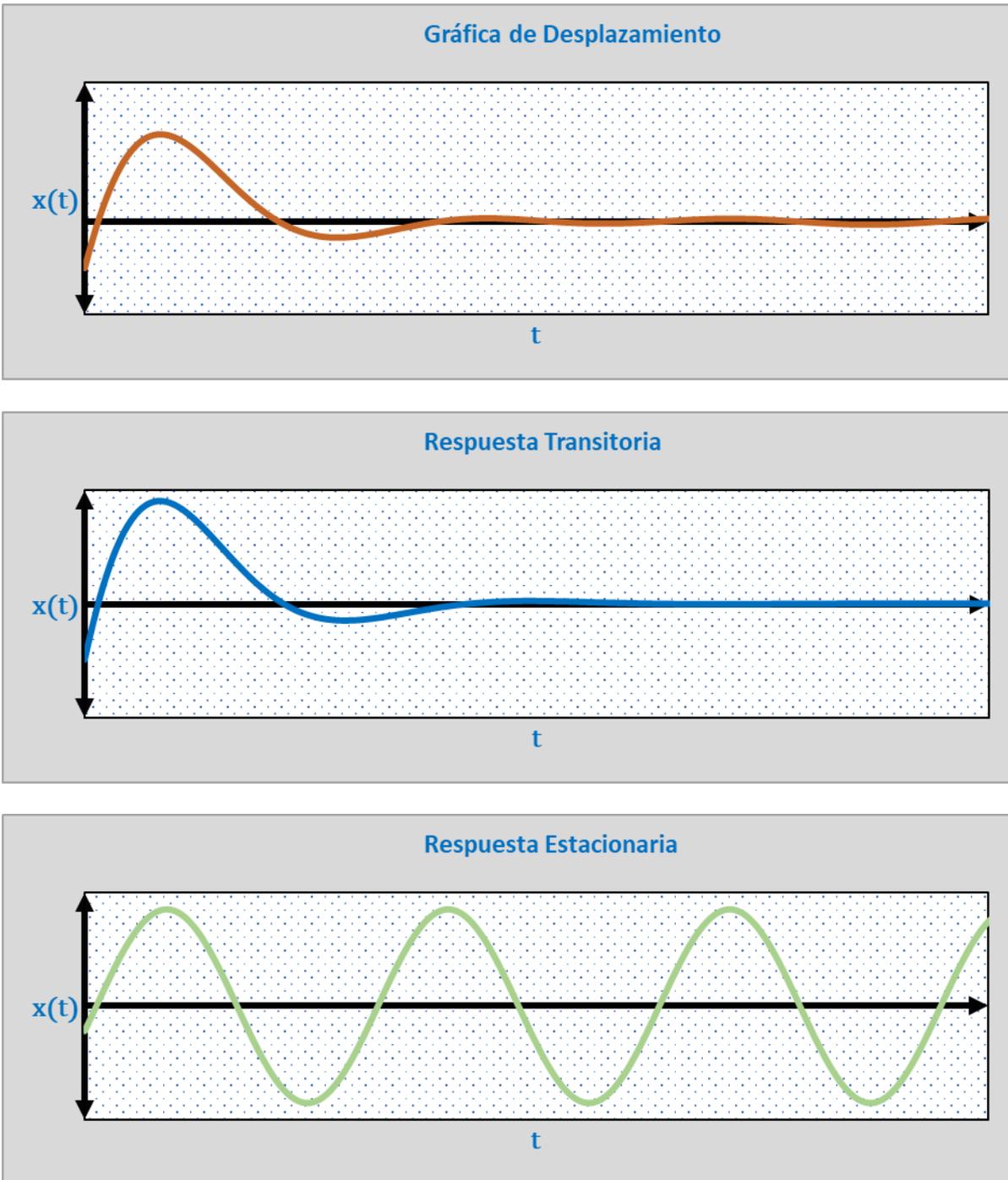


Figura VIII.16. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ cuando $\Omega \approx \omega$ y $\xi < 1$

8.13.9 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi < 1$

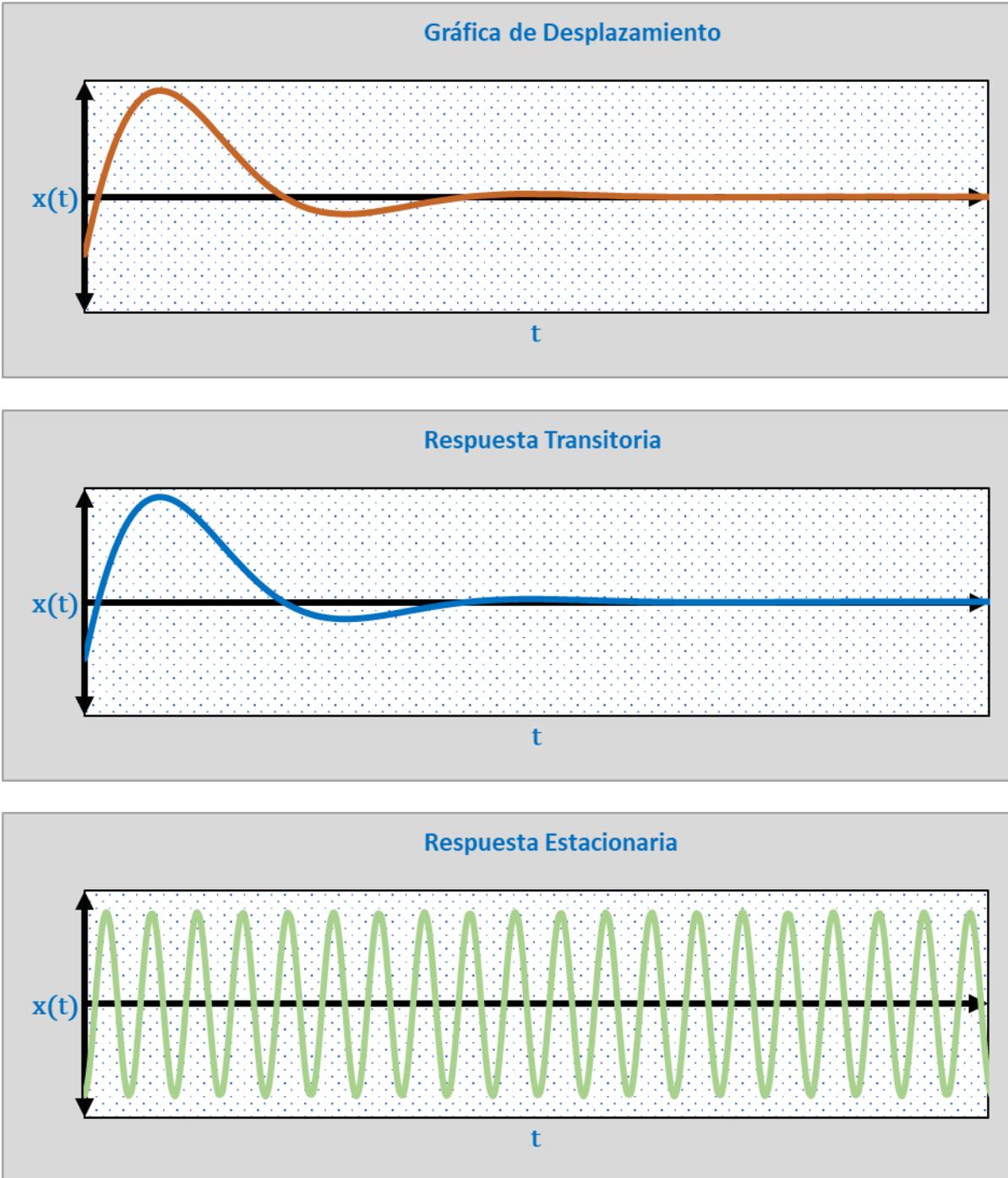


Figura VIII.17. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$ cuando $\Omega \gg \omega$ y $\xi < 1$

8.14 Recopilación de Funciones y Gráficas Cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$

Tabla VIII.3

Soluciones a $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \omega^2\mu_0 \text{sen}(\Omega t)$ con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$

Caso de Estudio	Solución $x(t)$
<p>Amortiguamiento</p> <p>Crítico</p> <p>$\xi = 1$</p>	$\therefore x = \underbrace{H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2r \text{cos}(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = v_0 + x_0 \omega + \frac{\mu_0 r \omega}{1+r^2} \quad ; \quad H_2 = x_0 + \frac{2r\mu_0}{(1+r^2)^2}$
<p>Sobreamortiguamiento</p> <p>$\xi > 1$</p> <p>$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$</p>	$x = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\mu_0 D^2 [(1-r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \text{cos}(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = x_0 + 2\xi r \mu_0 D^2 \quad ; \quad H_2 = \frac{v_0 + \xi \omega x_0 + \mu_0 r \omega D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}$
<p>Subamortiguamiento</p> <p>$\xi < 1$</p> <p>$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$</p>	$x = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \text{sen}(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\mu_0 D^2 [(1-r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \text{cos}(\Omega t)]}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = x_0 + 2\xi r \mu_0 D^2 \quad ; \quad H_2 = \frac{v_0 + \xi \omega x_0 + \mu_0 r \omega D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}$

8.14.1 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi = 1$

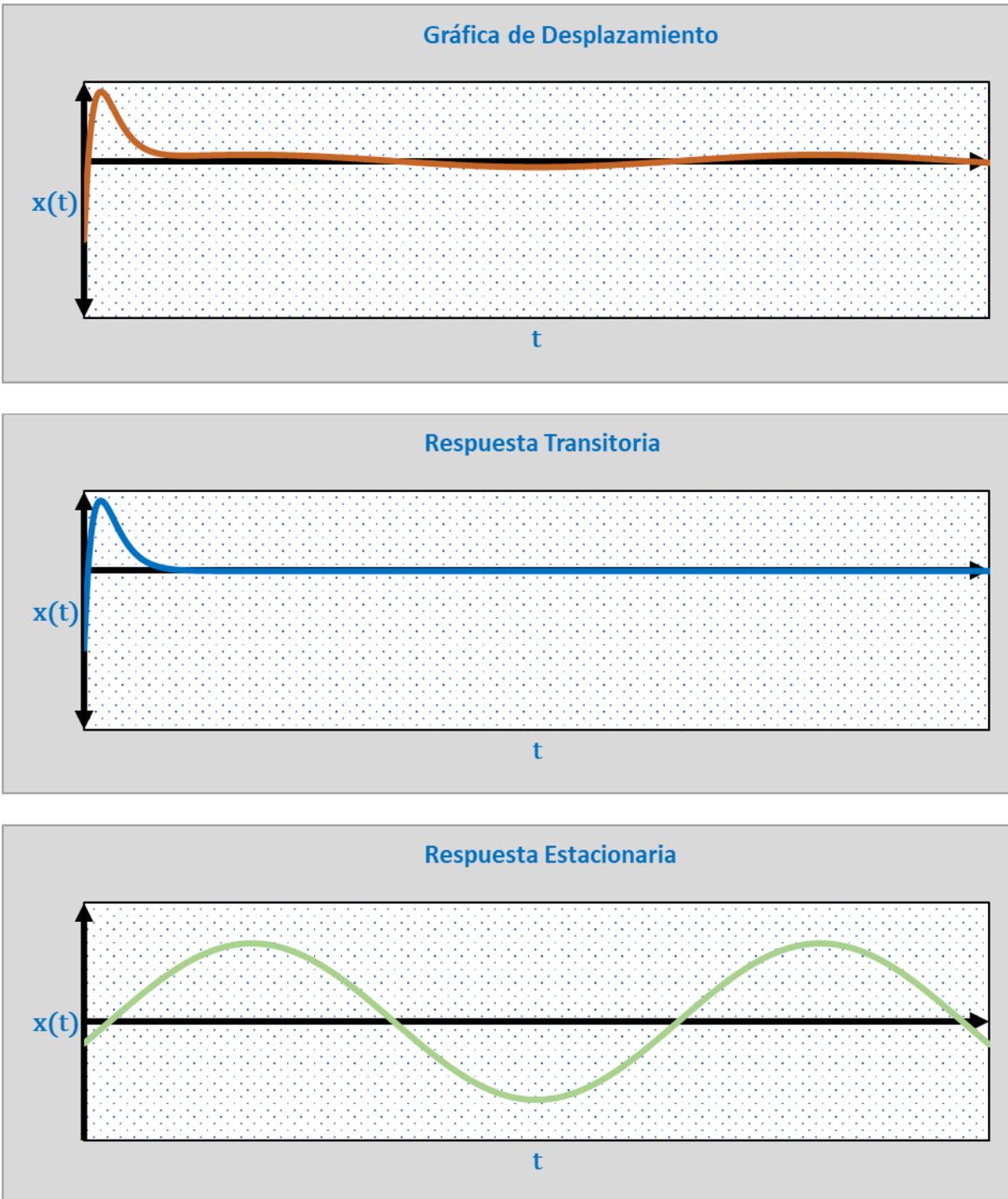


Figura VIII.18. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ cuando $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi = 1$

8.14.2 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi = 1$

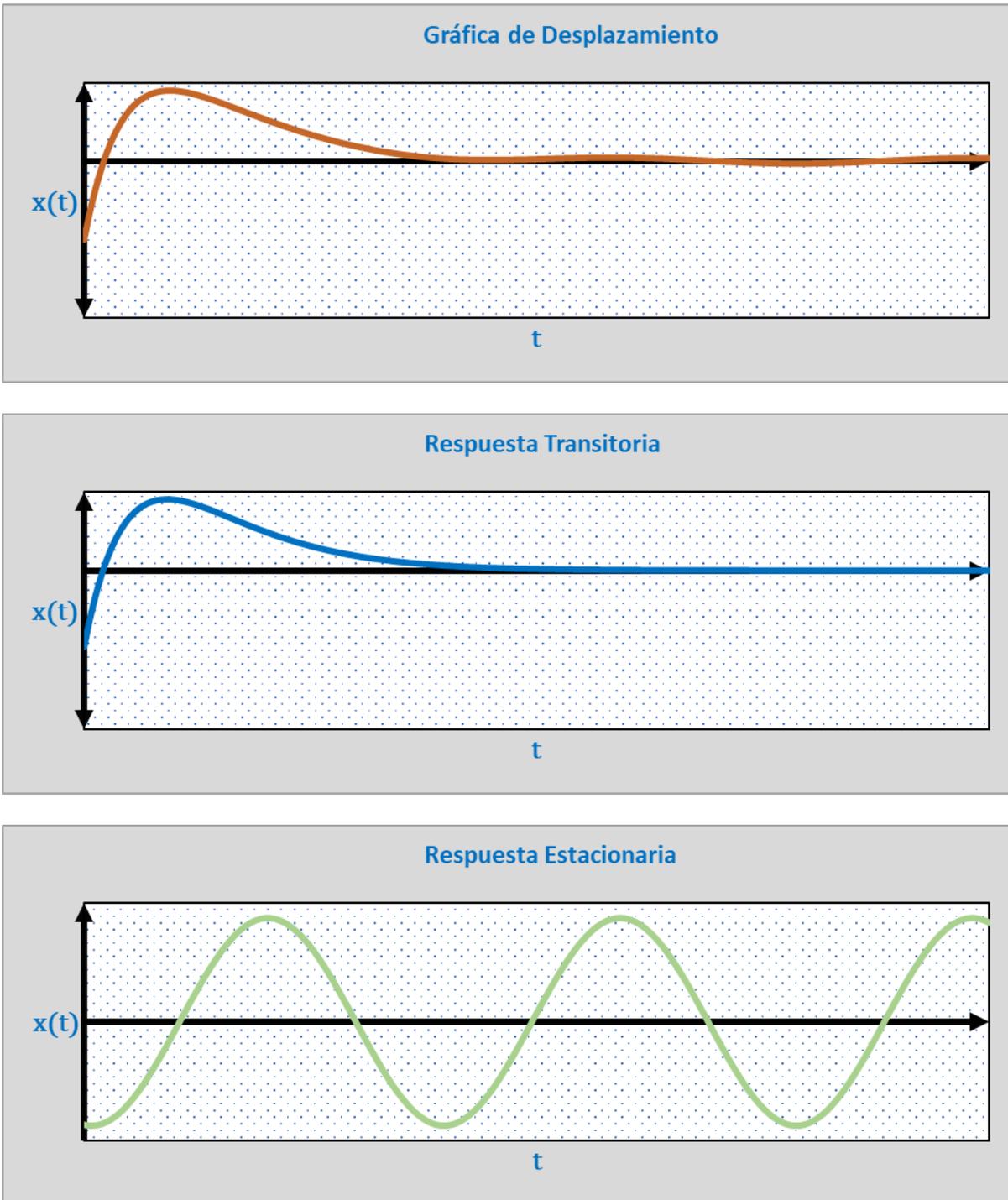


Figura VIII.19. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ cuando $\Omega \approx \omega$ y $\xi = 1$

8.14.3 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi = 1$

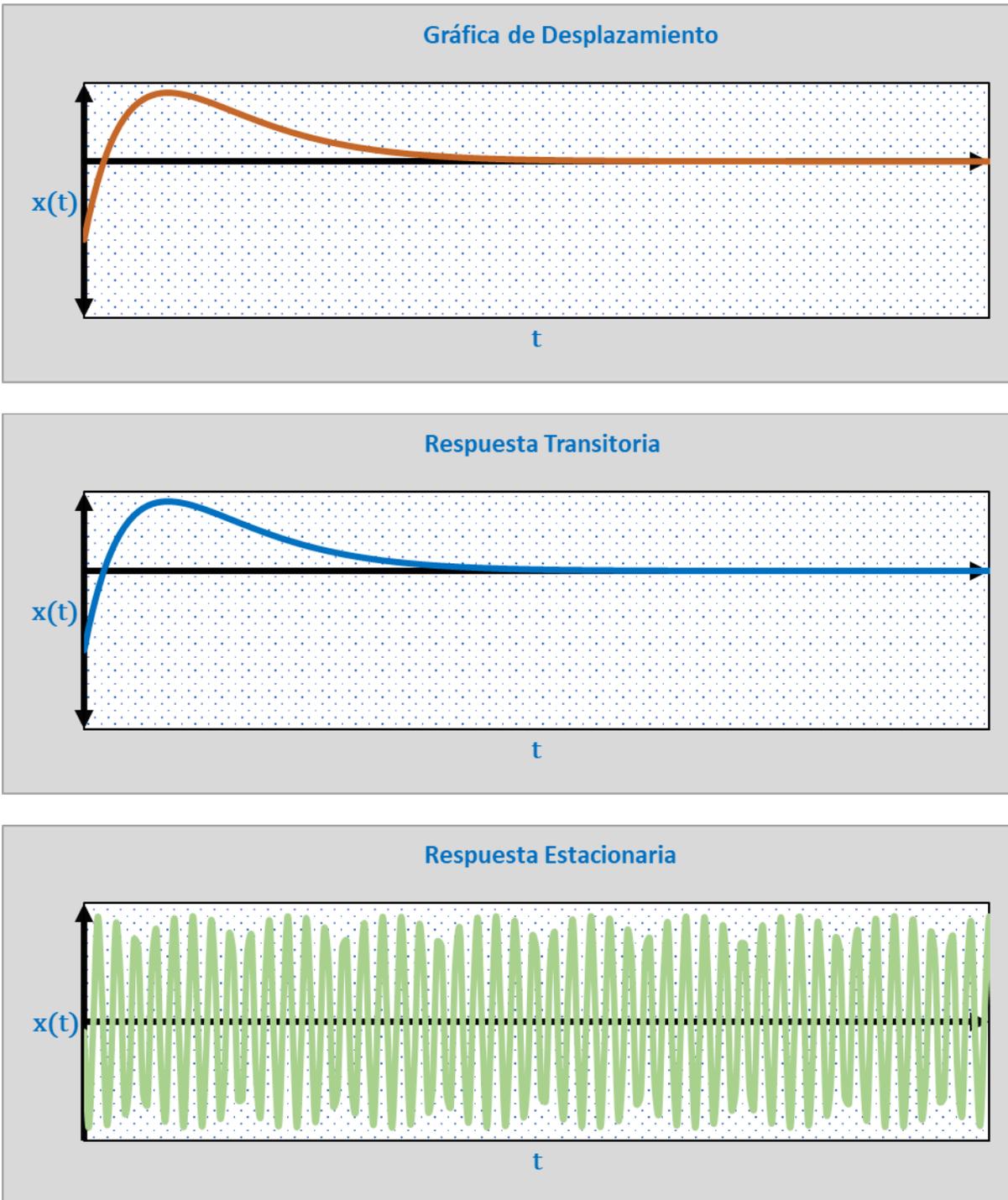


Figura VIII.20. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ cuando $\Omega \gg \omega$ y $\xi = 1$

8.14.4 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi > 1$

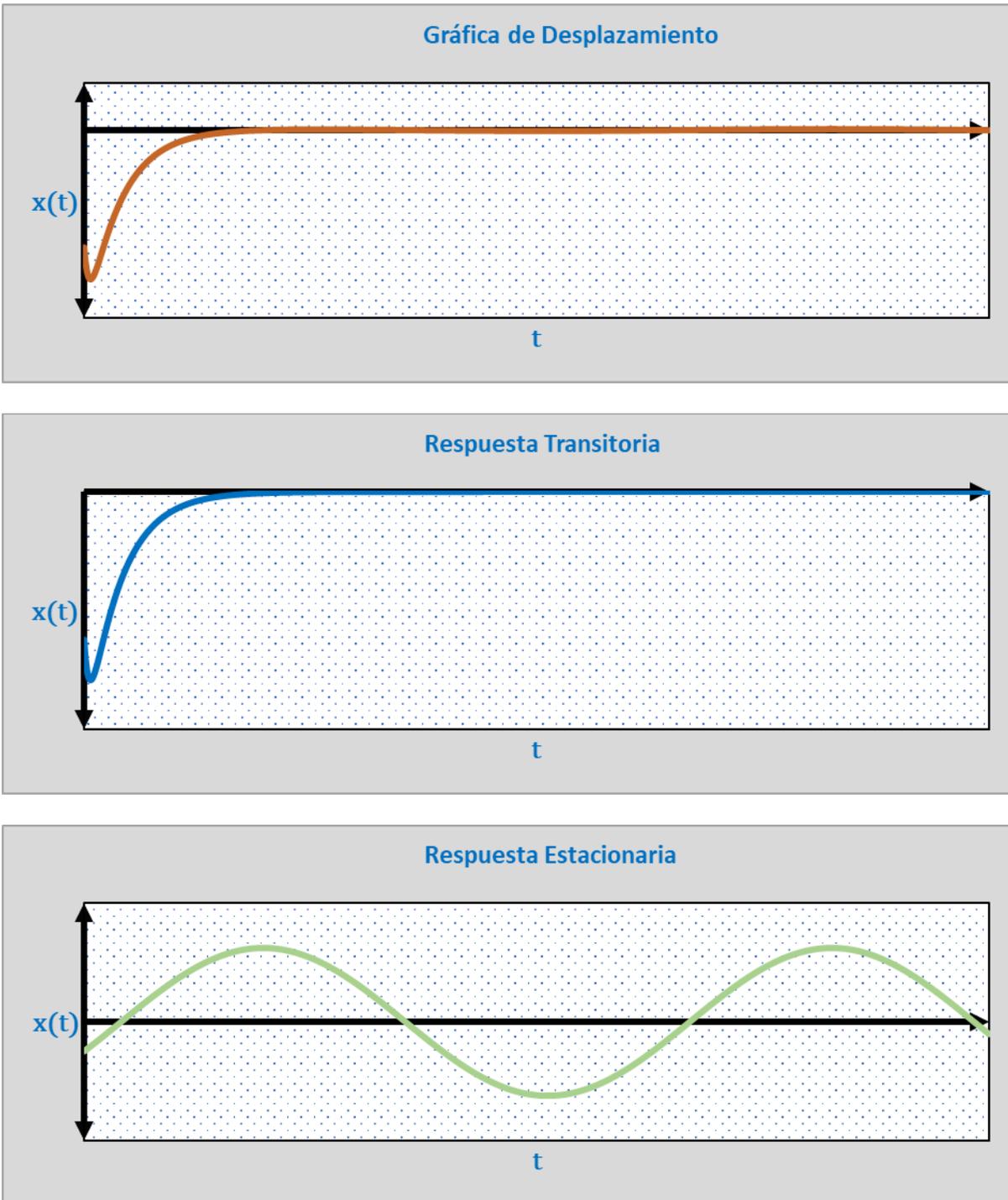


Figura VIII.21. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ cuando $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi > 1$

8.14.5 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi > 1$

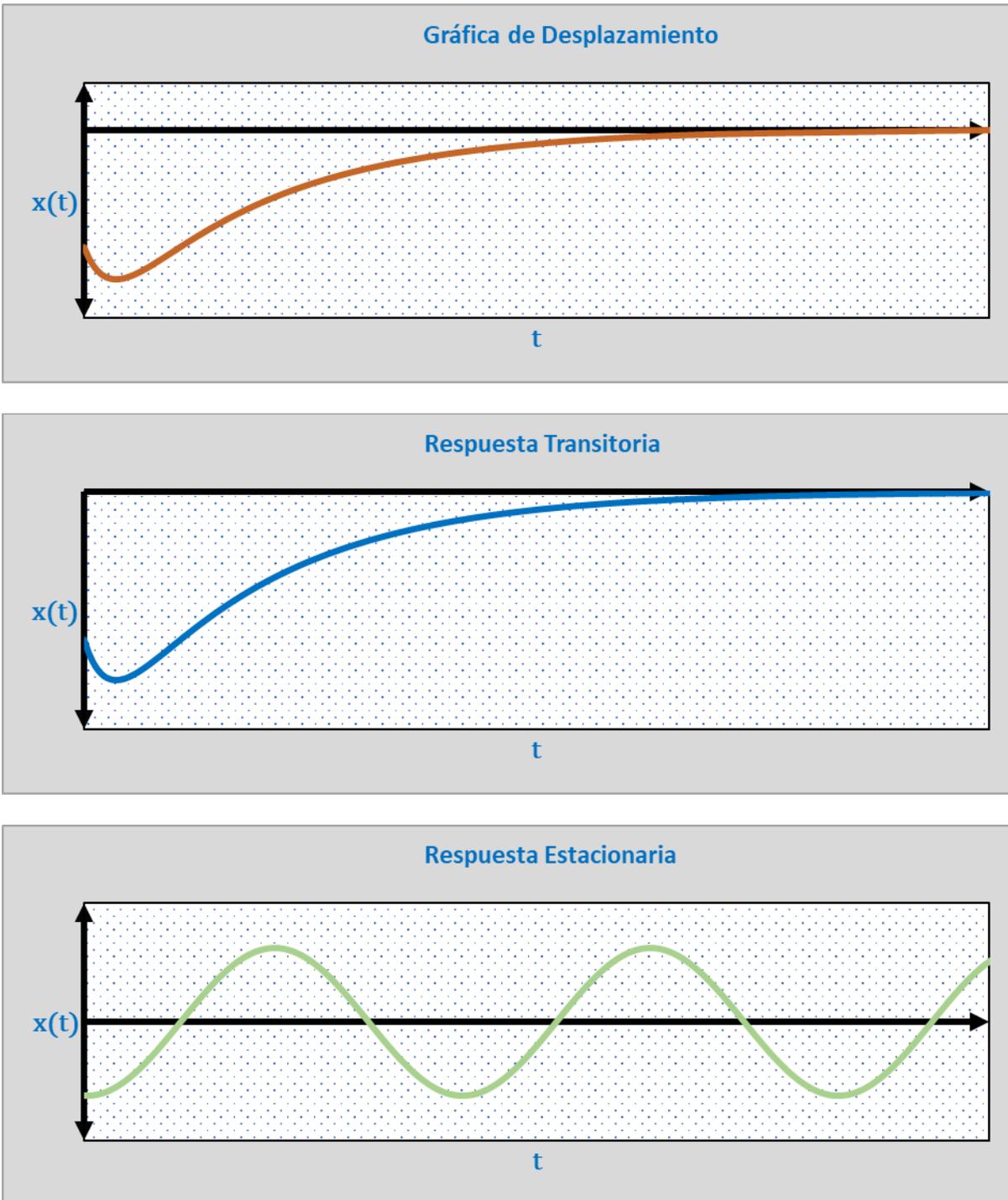


Figura VIII.22. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ cuando $\Omega \approx \omega$ y $\xi > 1$

8.14.6 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi > 1$

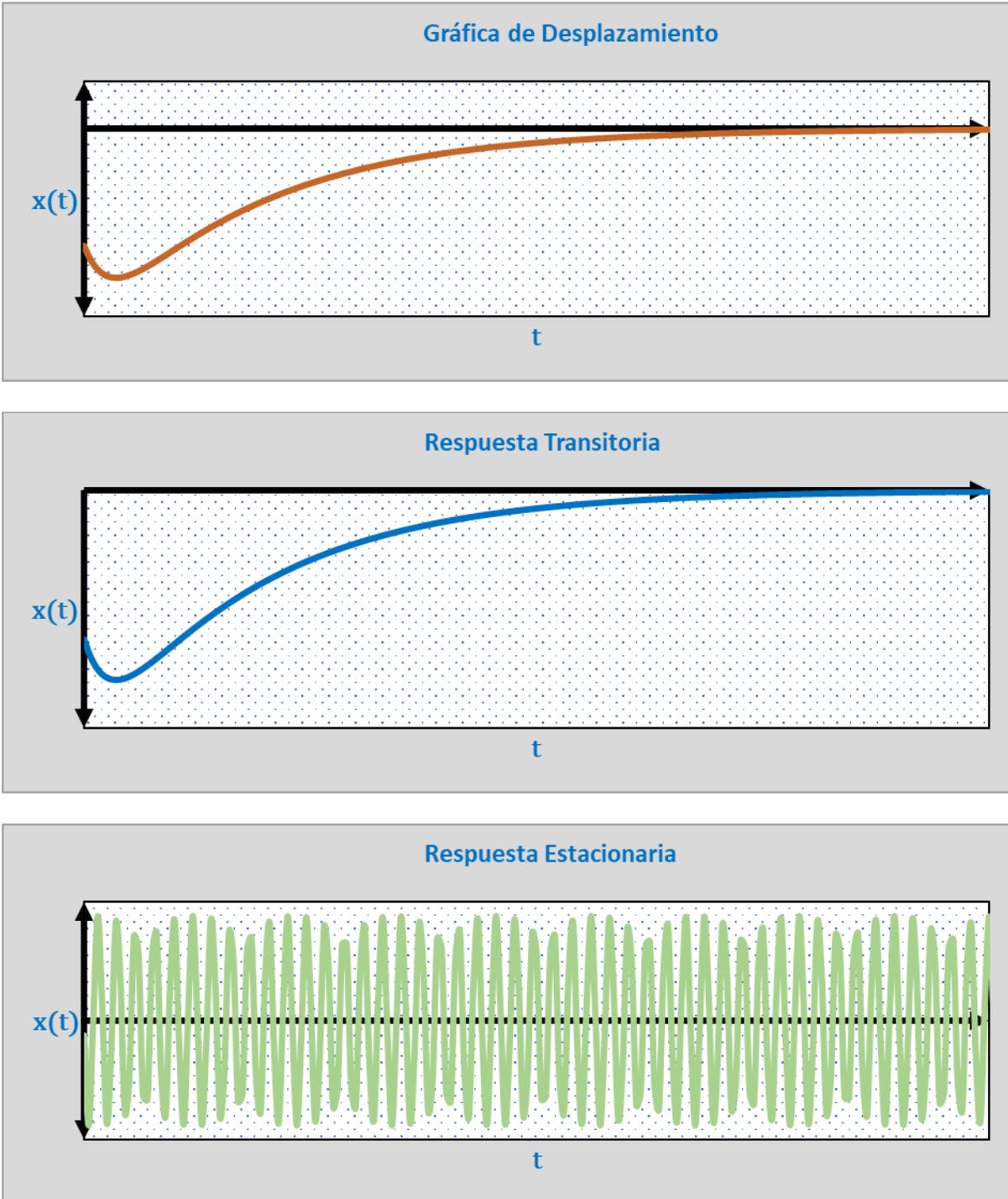


Figura VIII.23. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ cuando $\Omega \gg \omega$ y $\xi > 1$

8.14.7 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$, $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi < 1$

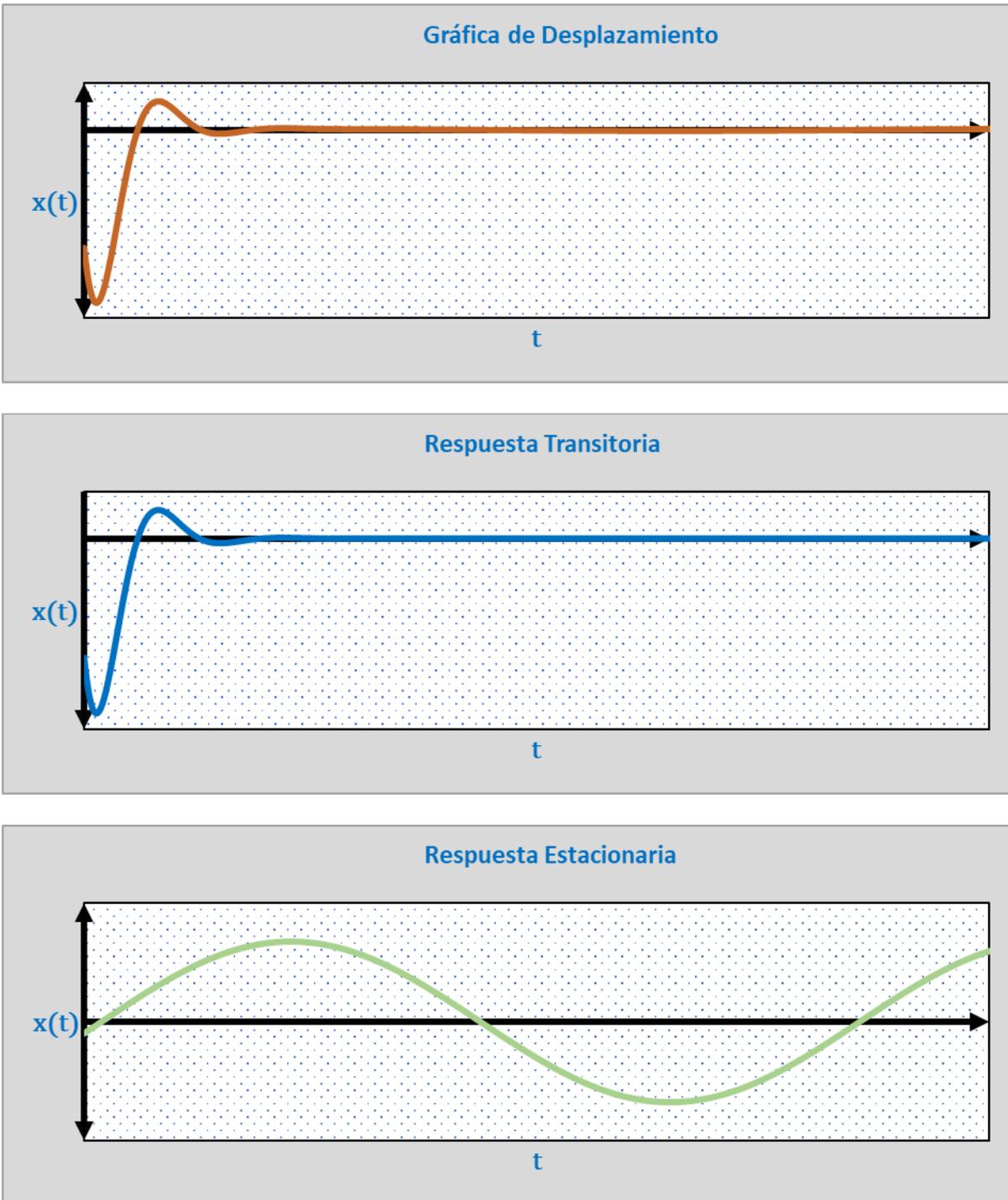


Figura VIII.24. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ cuando $\Omega \rightarrow 0$ y $\xi < 1$

8.14.8 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$, $\Omega \approx \omega$ y $\xi < 1$

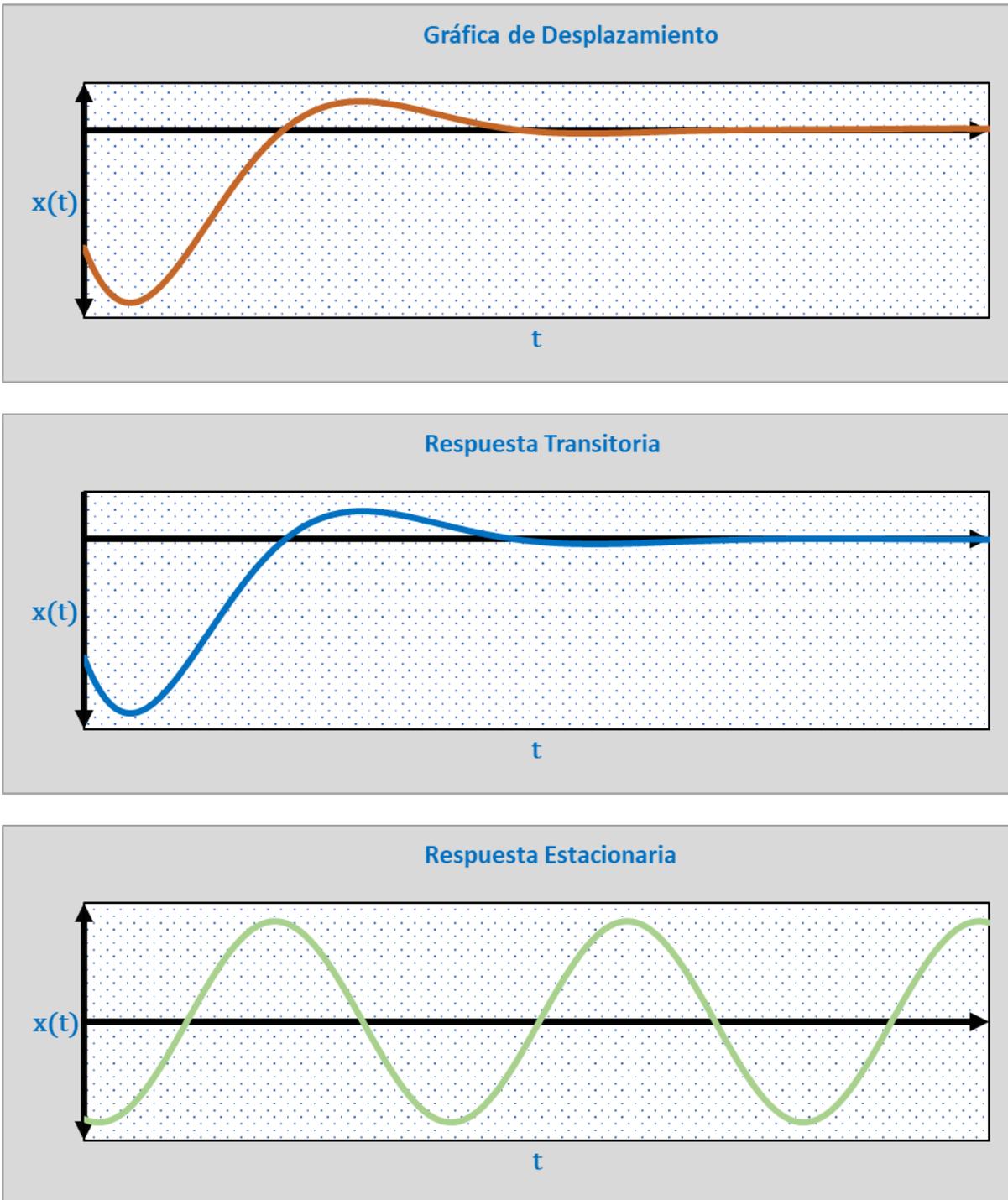


Figura VIII.25. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ cuando $\Omega \approx \omega$ y $\xi < 1$

8.14.9 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$, $\Omega \gg \omega$ y $\xi < 1$

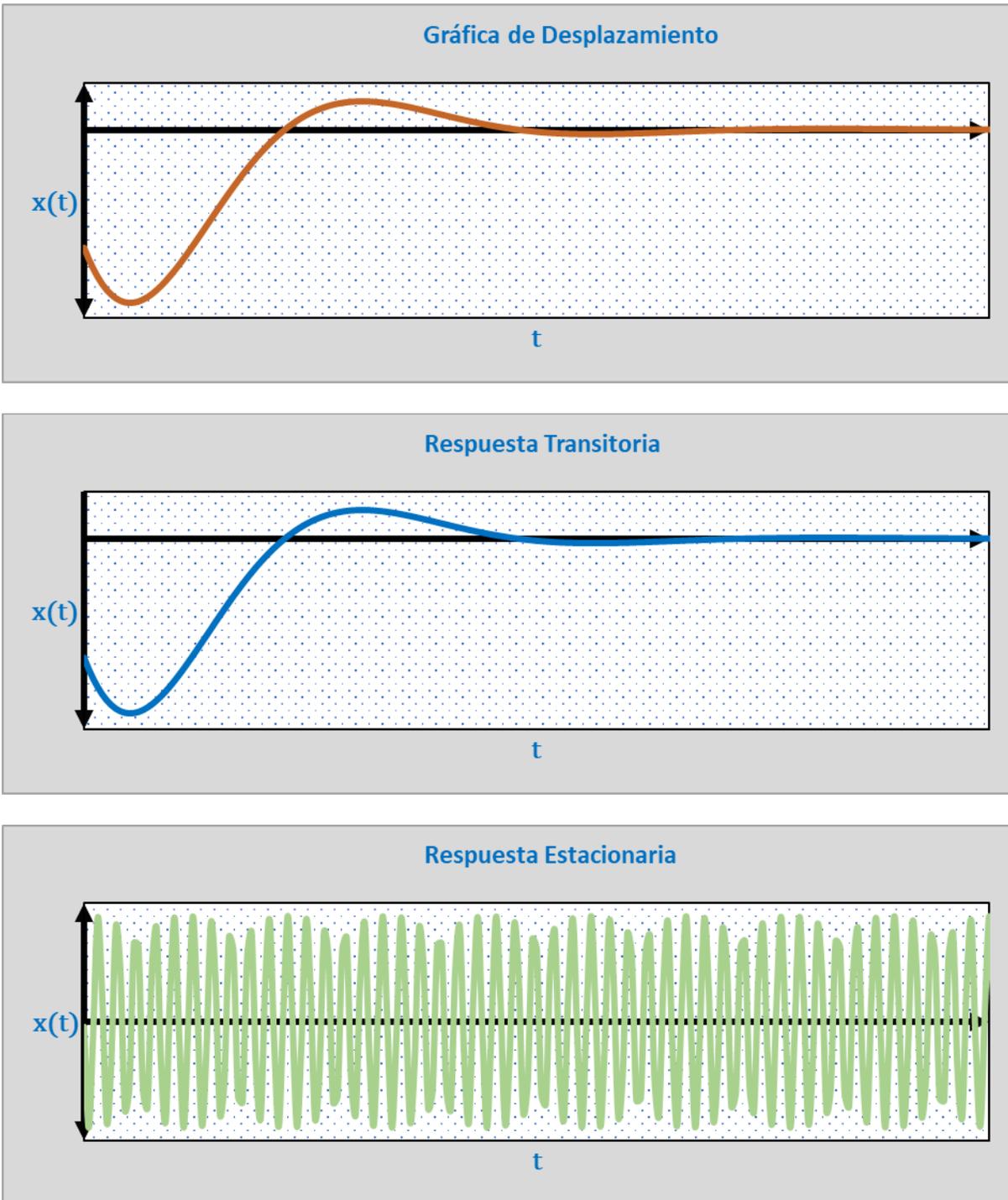


Figura VIII.26. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ cuando $\Omega \gg \omega$ y $\xi < 1$

8.15 Recopilación de Funciones y Gráficas Cuando $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$

Tabla VIII.4

Soluciones a $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \omega^2\mu_0 \cos(\omega t)$ con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$

Caso de Estudio	Solución $x(t)$
<p>Amortiguamiento Crítico $\xi = 1$</p>	$x = \underbrace{H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{2} \text{sen}(\omega t)}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = v_0 + x_0 \omega - \frac{\mu_0 \omega}{2} \quad ; \quad H_2 = x_0$
<p>Sobreamortiguamiento $\xi > 1$ $\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$</p>	$x = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0 \text{sen}(\omega t)}{2\xi}}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = x_0 \quad ; \quad H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi \omega x_0 - \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \right)$
<p>Subamortiguamiento $\xi < 1$ $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$</p>	$x = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \text{sen}(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} + \underbrace{\frac{\mu_0 \text{sen}(\omega t)}{2\xi}}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = x_0 \quad ; \quad H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi \omega x_0 - \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \right)$

8.15.1 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$ y $\xi = 1$

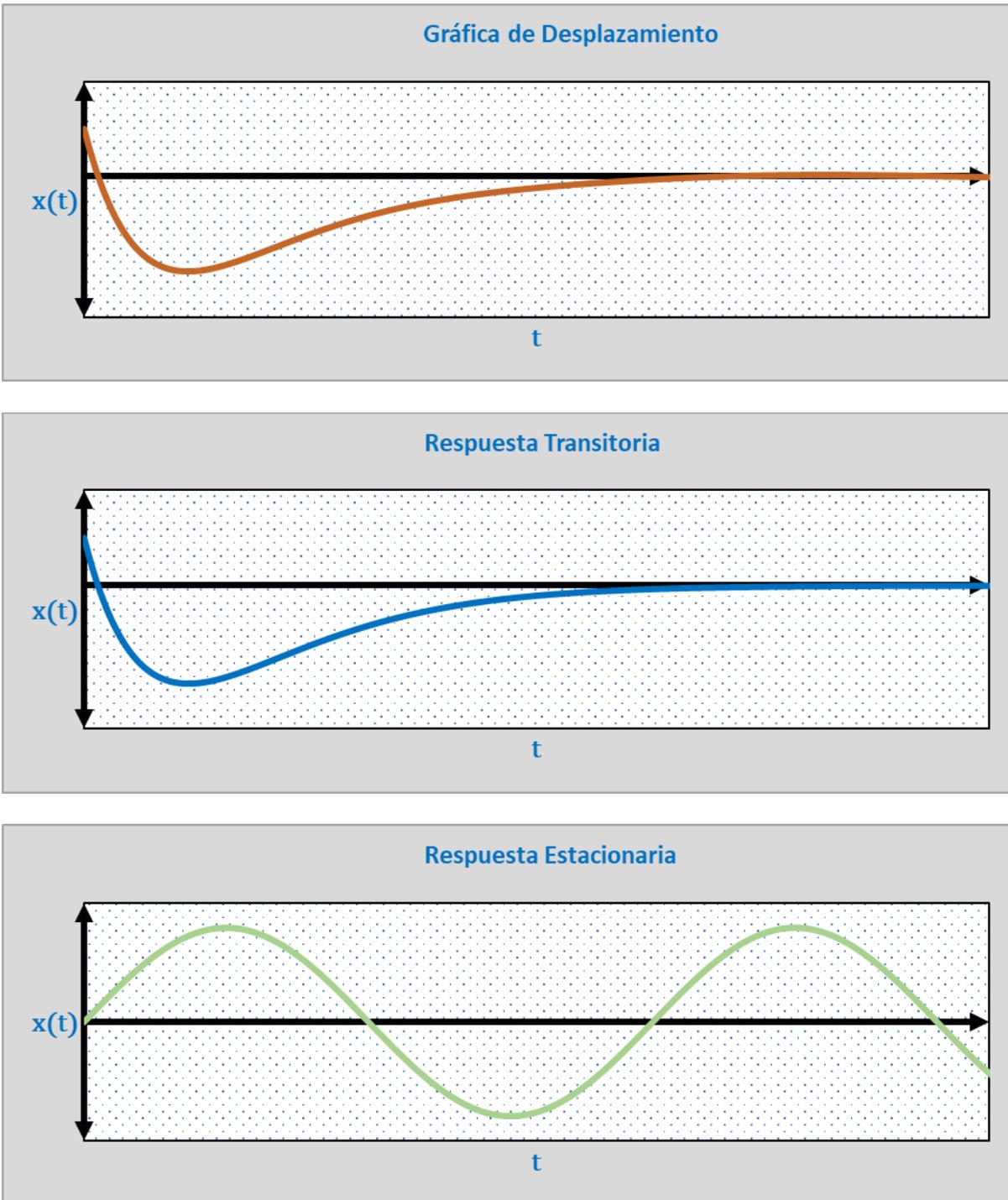


Figura VIII.27. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\omega t)$ y $\xi = 1$

8.15.2 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$ y $\xi > 1$

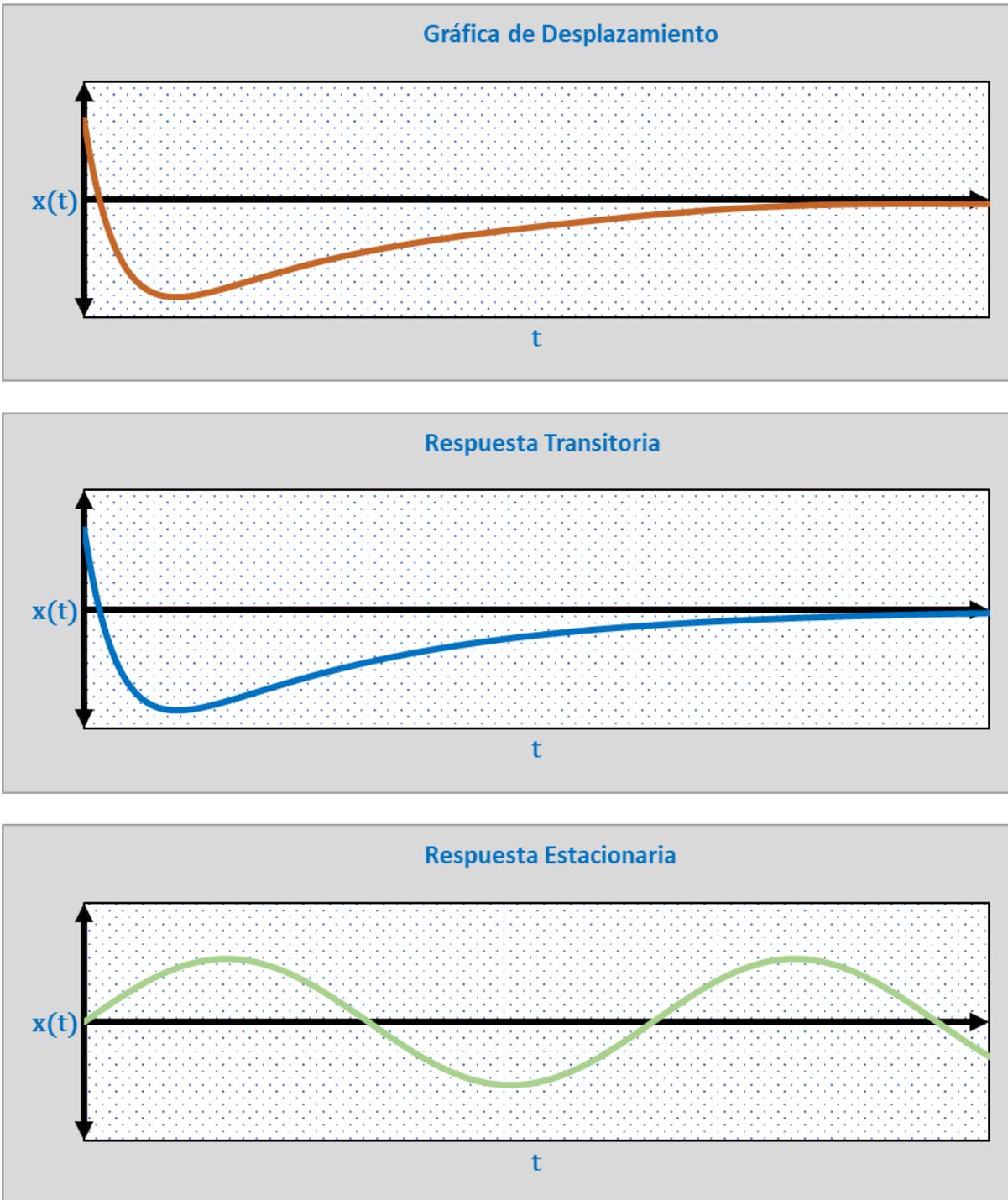


Figura VIII.28. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\omega t)$ y $\xi > 1$

8.15.3 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$ y $\xi < 1$

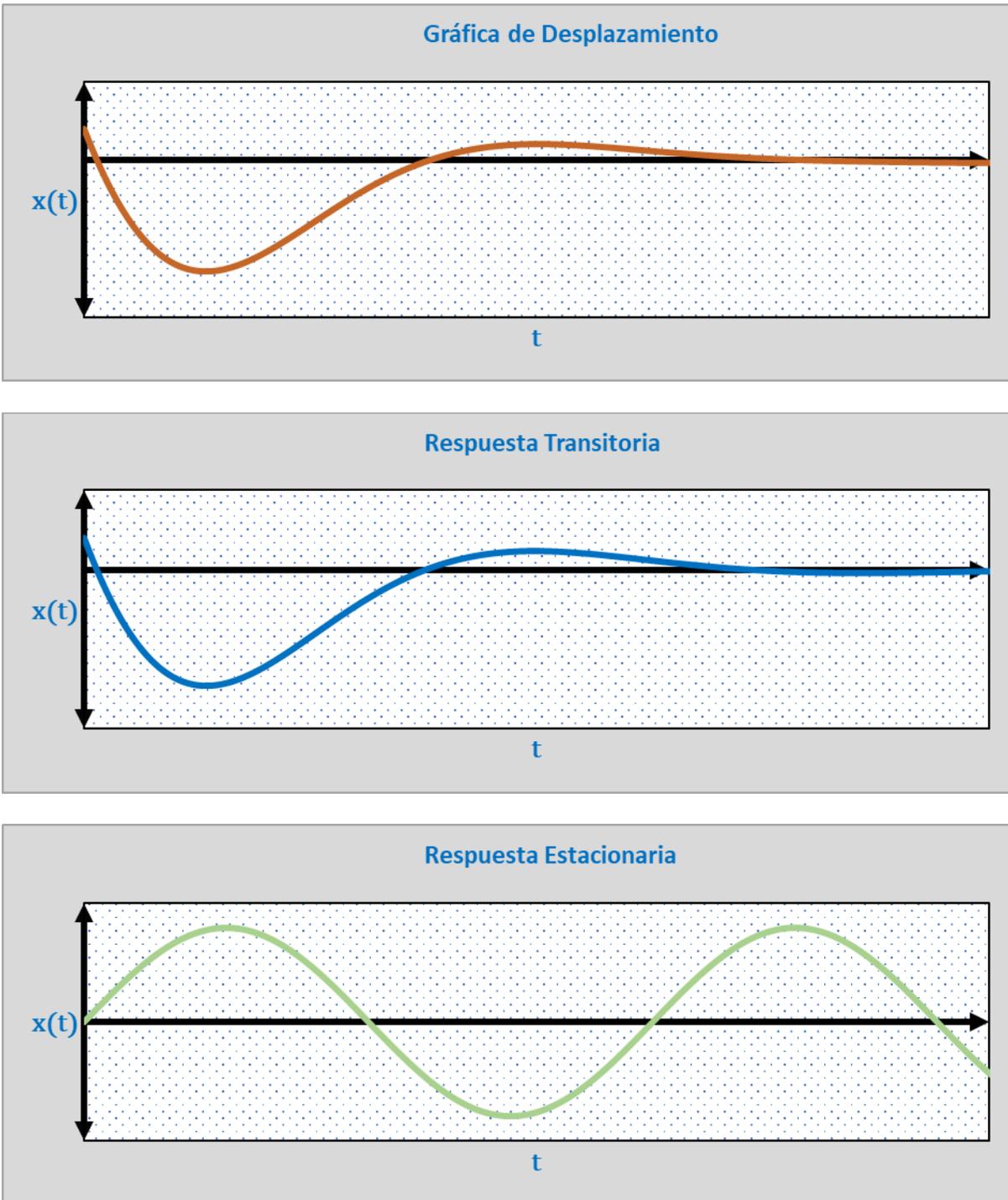


Figura VIII.29. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\omega t)$ y $\xi < 1$

8.16 Recopilación de Funciones y Gráficas Cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\omega t)$

Tabla VIII.5

Soluciones a $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \omega^2\mu_0 \text{sen}(\omega t)$ con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$

Caso de Estudio	Solución $x(t)$
<p>Amortiguamiento Crítico</p> <p>$\xi = 1$</p>	$x = \underbrace{H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t}}_{\text{Respuesta Transitoria}} - \underbrace{\frac{\mu_0}{2} \cos(\omega t)}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = v_0 + x_0 \omega + \frac{\mu_0 \omega}{2} \quad ; \quad H_2 = x_0 + \frac{\mu_0}{2}$
<p>Sobreamortiguamiento</p> <p>$\xi > 1$</p> <p>$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$</p>	$x = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} - \underbrace{\frac{\mu_0}{2} \cos(\omega t)}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = x_0 + \frac{\mu_0}{2\xi} \quad ; \quad H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi\omega x_0 + \frac{\mu_0 \omega}{2} \right)$
<p>Subamortiguamiento</p> <p>$\xi < 1$</p> <p>$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$</p>	$x = \underbrace{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \text{sen}(\omega_D t)]}_{\text{Respuesta Transitoria}} - \underbrace{\frac{\mu_0}{2} \cos(\omega t)}_{\text{Respuesta Estacionaria}}$ $H_1 = x_0 + \frac{\mu_0}{2\xi} \quad ; \quad H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(v_0 + \xi\omega x_0 + \frac{\mu_0 \omega}{2} \right)$

8.16.1 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\omega t)$ y $\xi = 1$

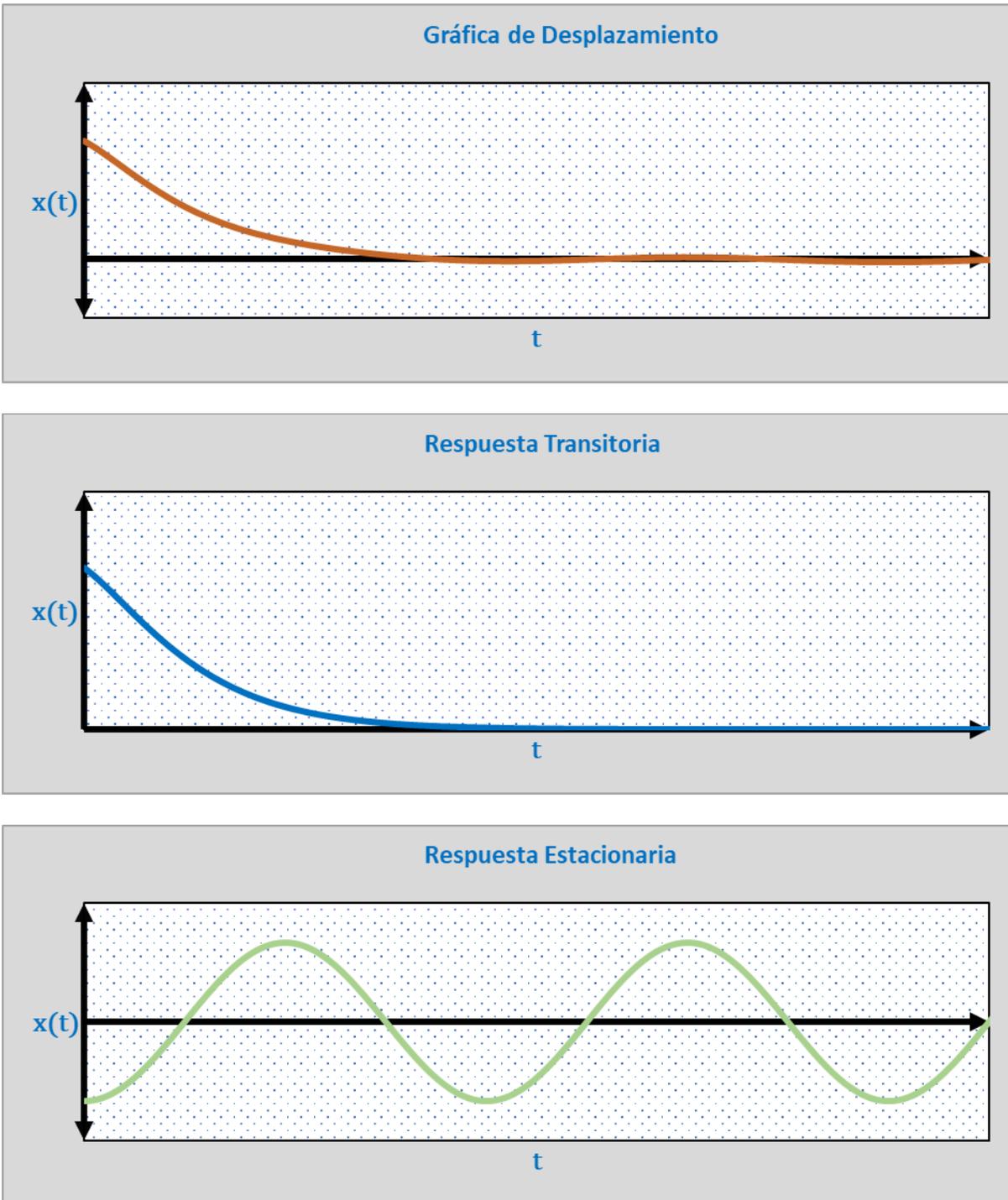


Figura VIII.30. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\omega t)$ y $\xi = 1$

8.16.2 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\omega t)$ y $\xi > 1$

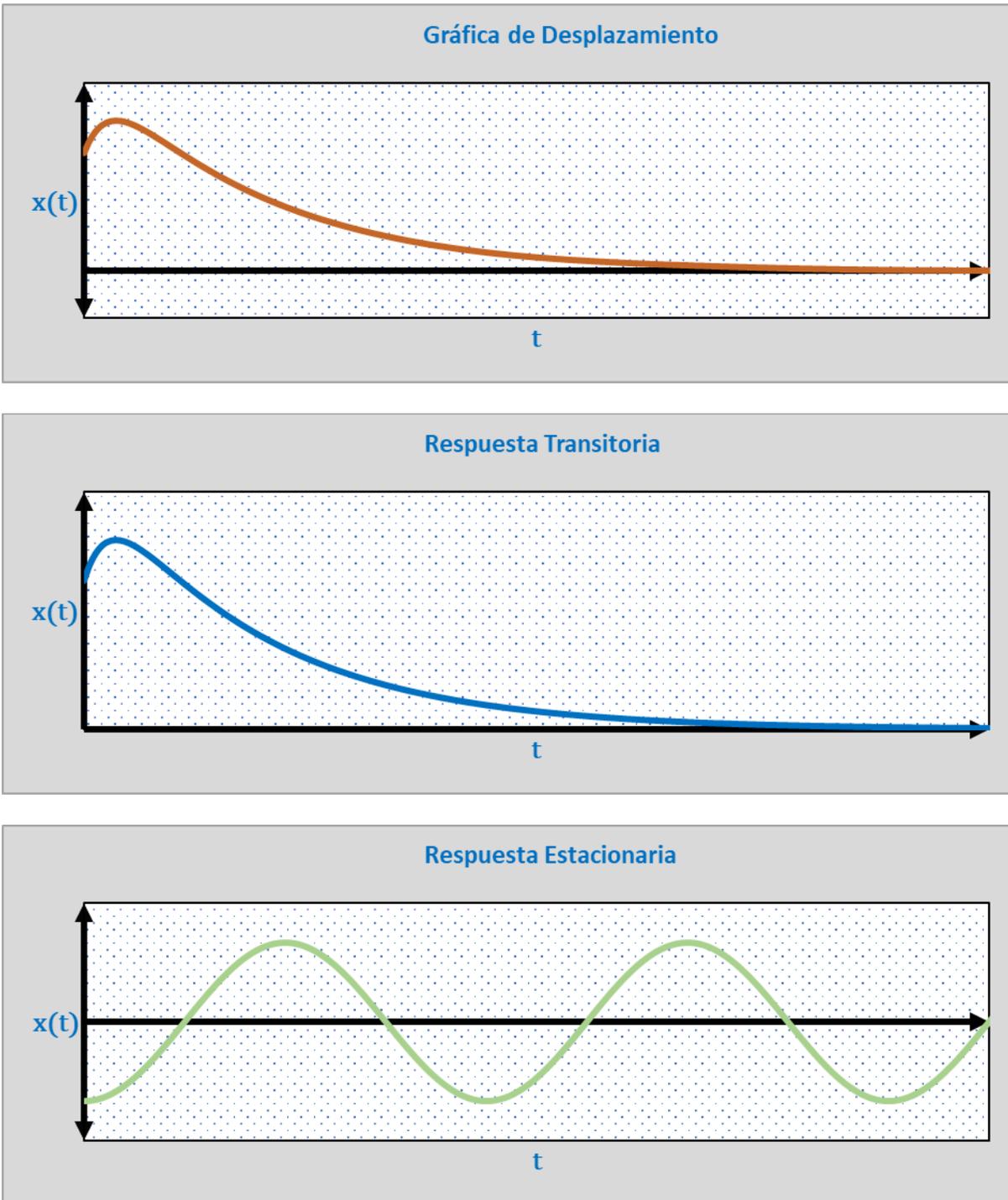


Figura VIII.31. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\omega t)$ y $\xi > 1$

8.16.3 Representación gráfica de $x(t)$ cuando $P(t) = P_0 \text{sen}(\omega t)$ y $\xi < 1$

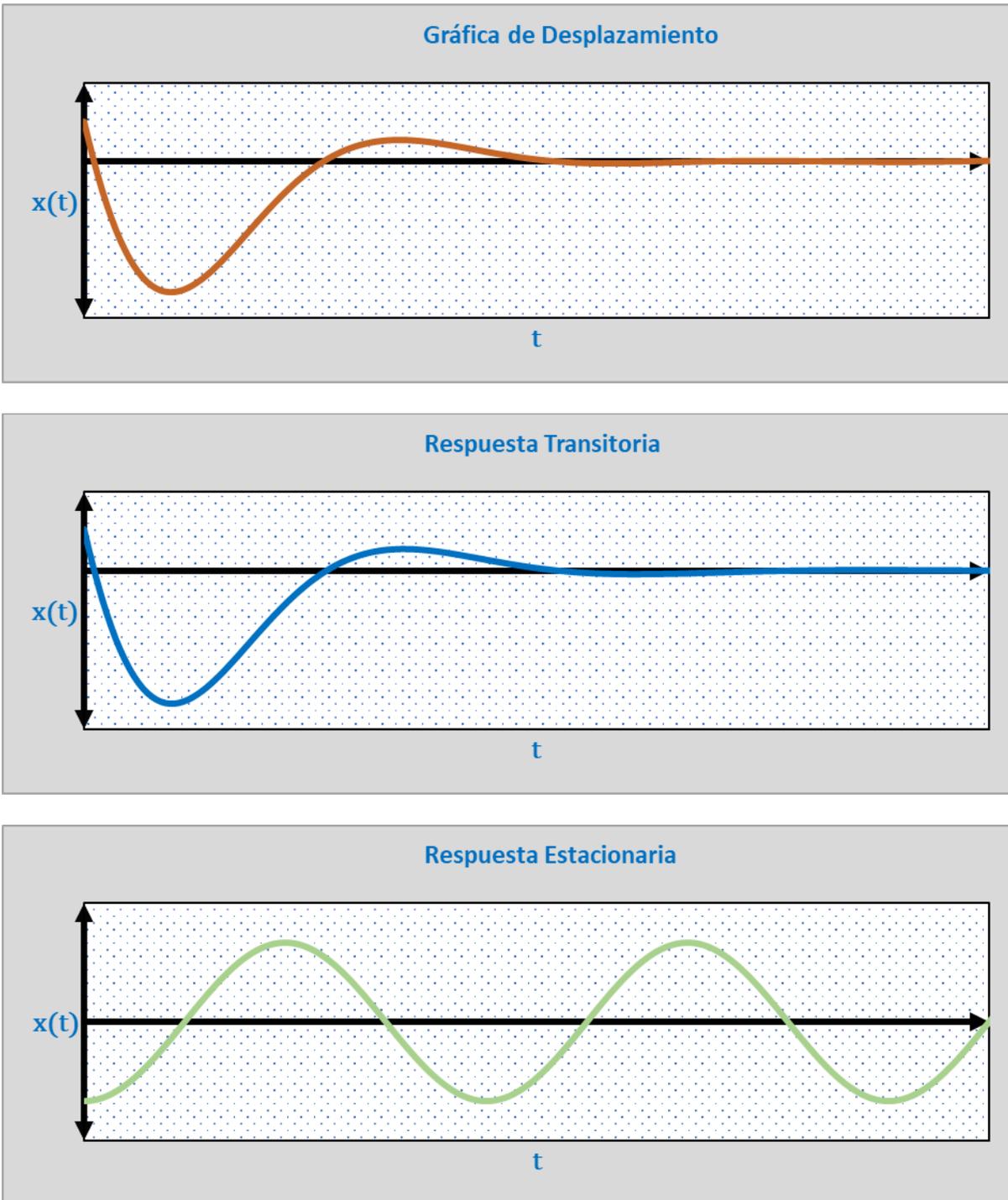


Figura VIII.32. Gráfica de desplazamiento para $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \text{sen}(\omega t)$ y $\xi < 1$

PARTE
IV

USO DE LA TRANSFORMADA DE
LAPLACE PARA RESOLVER LAS
EDO DE VIBRACIONES LIBRES Y
ARMÓNICAS

Capítulo IX:
Uso de la Transformada de
Laplace en Vibración Libre
Para Sistemas de 1 G.D.L.

9.1 Vibración Libre sin Amortiguamiento

9.2 Vibración Libre con Amortiguamiento

9.2.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

9.2.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

9.2.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

IX. Uso de la Transformada de Laplace en Vibración Libre

Se contempla la resolución de los casos mencionados en los capítulos IV y V, con el fin de mostrar que se llega a la misma solución de una manera más sencilla, ya que la transformada de Laplace facilita mucho los cálculos por el hecho de que contempla la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, con valores iniciales en el tiempo cero ($t = 0$), sin tener que encontrar la solución como la suma de la solución complementaria más la particular.

Por mencionarlo de algún modo, la transformada de Laplace transforma una ecuación diferencial ordinaria en una ecuación algebraica (Roca Vila & León L, 1985, pág. 127) en la que las condiciones iniciales resultan automáticamente incluidas en la solución del problema (Roca Vila & León L, 1985, pág. 47).

El Anexo G referente a la transformada de Laplace será de utilidad para una retroalimentación de los tópicos necesarios para aplicarla en este y los siguientes dos capítulos.

9.1 Vibración Libre sin Amortiguamiento

La EDO que representa el caso de vibración libre sin amortiguamiento es $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + \omega^2 x\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{0\} \quad (9.1)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\therefore = s^2 X(s) - sx_0 - v_0$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2 X(s) - sx_0 - v_0 \quad (9.2)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = X(s) \quad (9.3)$$

$$\mathcal{L}\{0\} = 0 \quad (9.4)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{0\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} &= \mathcal{L}\{0\} \\ s^2X(s) - sx_0 - v_0 + \omega^2X(s) &= 0 \end{aligned}$$

Factorizando $X(s)$:

$$\begin{aligned} (s^2 + \omega^2)X(s) - sx_0 - v_0 &= 0 \\ (s^2 + \omega^2)X(s) &= sx_0 + v_0 \\ \therefore X(s) &= x_0 \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) + \frac{v_0}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (9.6)$$

$$x_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\} = x_0 \cos(\omega t) \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} v_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} &= \frac{v_0}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} = \frac{v_0}{\omega}\text{sen}(\omega t) \\ \therefore v_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} &= \frac{v_0}{\omega}\text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (9.8)$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 9.5 se obtiene:

$$\mathbf{x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t)} \quad (9.9)$$

9.2 Vibración Libre con Amortiguamiento

La EDO que representa el caso de vibración libre con amortiguamiento es $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = 0$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{0\} \quad (9.10)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x}\} &= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \\ \vdots &= s^2X(s) - sx_0 - v_0 \\ \therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} &= s^2X(s) - sx_0 - v_0 \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s) - x(0) \\ \vdots &= sX(s) - x_0 \\ \therefore \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s) - x_0 \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) \quad (9.13)$$

$$\mathcal{L}\{0\} = 0 \quad (9.14)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{0\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} &= \mathcal{L}\{0\} \\ s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega[sX(s) - x_0] + \omega^2X(s) &= 0 \end{aligned}$$

Factorizando $X(s)$:

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = 0$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) X(s) - sx_0 - v_0 - 2\xi\omega x_0 = 0$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) X(s) = sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0$$

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \quad (9.15)$$

Esta ecuación puede reescribirse como:

$$X(s) = H(s)F(s) \quad (9.16)$$

Donde:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \quad (9.17)$$

$$F(s) = sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0 \quad (9.18)$$

$H(s)$ es la función de transferencia del sistema y $F(s)$ es la transformada de la excitación total¹.

Manipulando algebraicamente la función de transferencia del sistema $H(s)$, es posible transformar ésta de tal forma que dé una idea clara de cómo se torna la solución, en vibración libre amortiguada, a partir del valor de la relación de amortiguamiento ξ :

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} \\ \vdots &= \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 + (\xi\omega)^2 - (\xi\omega)^2} \\ \vdots &= \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2 - (\xi\omega)^2} \\ \vdots &= \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} \end{aligned}$$

¹ Ésta última se relaciona con la transformada de Laplace de la excitación aplicada exteriormente y la asignación de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ (Roca Vila & León L, 1985, pág. 128).

$$\therefore H(s) = \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} \quad (9.19)$$

A partir de dicha expresión será posible determinar la solución al sistema dependiendo su condición de amortiguamiento.

9.2.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

Sea el amortiguamiento crítico cuando $\xi = 1$:

$$\begin{aligned} H(s)|_{\xi=1} &= \left[\frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} \right]_{\xi=1} \\ \therefore &= \frac{1}{[s + (1)\omega]^2 + \omega^2 \underbrace{[1 - (1)^2]}_0} \\ \therefore &= \frac{1}{(s + \omega)^2} \\ \therefore H(s)|_{\xi=1} &= \frac{1}{(s + \omega)^2} \end{aligned} \quad (9.20)$$

La transformada de la excitación total $F(s)$ también sufre un minúsculo cambio en su escritura:

$$\begin{aligned} F(s)|_{\xi=1} &= (sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0)|_{\xi=1} \\ \therefore &= sx_0 + v_0 + 2(1)\omega x_0 \\ \therefore F(s)|_{\xi=1} &= sx_0 + v_0 + 2\omega x_0 \end{aligned} \quad (9.21)$$

La ecuación $X(s)$ que representa el amortiguamiento crítico es:

$$\begin{aligned} X(s) = X(s)|_{\xi=1} &= H(s)|_{\xi=1} F(s)|_{\xi=1} = \frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2} = \frac{(s + 2\omega)x_0 + v_0}{(s + \omega)^2} \\ \therefore X(s) &= \frac{(s + 2\omega)x_0 + v_0}{(s + \omega)^2} \end{aligned} \quad (9.22)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (9.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2\omega)x_0 + v_0}{(s+\omega)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\overbrace{(s+2\omega)x_0} + v_0}{(s+\omega)^2}\right\} \\ &\vdots \\ &= x_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\omega}{(s+\omega)^2}\right\} + (\omega x_0 + v_0)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\omega)^2}\right\} \\ &\vdots \\ &= x_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega}\right\} + (\omega x_0 + v_0)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\omega)^2}\right\} \\ &\vdots \\ &= x_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega}\right\} + (\omega x_0 + v_0)e^{-\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \\ &\vdots \\ &= x_0e^{-\omega t} + (\omega x_0 + v_0)e^{-\omega t}\left(\frac{t}{1!}\right) \\ &\vdots \\ &= x_0e^{-\omega t} + (\omega x_0 + v_0)te^{-\omega t} \\ \therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2\omega)x_0 + v_0}{(s+\omega)^2}\right\} &= x_0e^{-\omega t} + (\omega x_0 + v_0)te^{-\omega t} \quad (9.24) \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 9.22 se obtiene:

$\mathbf{x(t) = x_0e^{-\omega t} + (\omega x_0 + v_0)te^{-\omega t} \quad (9.25)}$
--

9.2.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

Sea el sobreamortiguamiento cuando $\xi > 1$ se busca obtener una función de transferencia donde esté incluida la frecuencia sobreamortiguada $\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$:

$$H(s)|_{\xi > 1} = \left[\frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} \right]_{\xi > 1}$$

$$\begin{aligned} \therefore &= \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 - \underbrace{\omega^2(\xi^2 - 1)}_{\omega_D^2}} \\ \therefore &= \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \\ \therefore H(s)|_{\xi > 1} &= \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \end{aligned} \quad (9.26)$$

La transformada de la excitación total $F(s)$ no sufre ningún cambio:

$$\begin{aligned} F(s)|_{\xi > 1} &= (sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0)|_{\xi > 1} \\ \therefore F(s)|_{\xi > 1} &= sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0 \end{aligned} \quad (9.27)$$

La ecuación $X(s)$ que representa el sobreamortiguamiento es:

$$\begin{aligned} X(s) = X(s)|_{\xi > 1} &= H(s)|_{\xi > 1} F(s)|_{\xi > 1} = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} = \frac{(s + 2\xi\omega)x_0 + v_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \\ \therefore X(s) &= \frac{(s + 2\xi\omega)x_0 + v_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \end{aligned} \quad (9.28)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (9.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s + 2\xi\omega)x_0 + v_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\overbrace{(s + 2\xi\omega)x_0}^{(s + \xi\omega)x_0 + \xi\omega x_0} + v_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} \\ \therefore &= x_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} + (\xi\omega x_0 + v_0) \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} \\ \therefore &= x_0 e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - \omega_D^2}\right\} + (\xi\omega x_0 + v_0) e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - \omega_D^2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots & = & x_0 e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - \omega_D^2} \right\} + (\xi\omega x_0 + v_0) \frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 - \omega_D^2} \right\} \\
 & \vdots & = & x_0 e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t) + (\xi\omega x_0 + v_0) \frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) \\
 & \vdots & = & e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} \right) \sinh(\omega_D t) \right] \\
 \therefore & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s + 2\xi\omega)x_0 + v_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} \right) \sinh(\omega_D t) \right] \quad (9.30)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 9.28 se obtiene:

$$\mathbf{x(t)} = e^{-\xi\omega t} \left[\mathbf{x_0} \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega \mathbf{x_0} + \mathbf{v_0}}{\omega_D} \right) \sinh(\omega_D t) \right] ; \quad \omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad (9.31)$$

9.2.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

Sea el subamortiguamiento cuando $\xi < 1$ se busca obtener una función de transferencia donde esté incluida la frecuencia subamortiguada $\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$:

$$\begin{aligned}
 H(s)|_{\xi < 1} &= \left[\frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} \right] \Big|_{\xi < 1} \\
 \vdots &= \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \underbrace{\omega^2(1 - \xi^2)}_{\omega_D^2}} \\
 \vdots &= \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \\
 \therefore H(s)|_{\xi < 1} &= \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \quad (9.32)
 \end{aligned}$$

La transformada de la excitación total $F(s)$ no sufre ningún cambio:

$$F(s)|_{\xi < 1} = (s x_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0)|_{\xi < 1}$$

$$\therefore F(s)|_{\xi < 1} = sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0 \quad (9.33)$$

La ecuación $X(s)$ que representa subamortiguamiento es:

$$X(s) = X(s)|_{\xi < 1} = H(s)|_{\xi < 1}F(s)|_{\xi < 1} = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} = \frac{(s + 2\xi\omega)x_0 + v_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}$$

$$\therefore X(s) = \frac{(s + 2\xi\omega)x_0 + v_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \quad (9.34)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (9.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s + 2\xi\omega)x_0 + v_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\overbrace{(s + 2\xi\omega)x_0}^{(s+2\xi\omega)x_0} + v_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} \\ &\vdots \\ &= x_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} + (\xi\omega x_0 + v_0)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} \\ &\vdots \\ &= x_0e^{-\xi\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega_D^2}\right\} + (\xi\omega x_0 + v_0)e^{-\xi\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega_D^2}\right\} \\ &\vdots \\ &= x_0e^{-\xi\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega_D^2}\right\} + (\xi\omega x_0 + v_0)\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega_D}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_D}{s^2 + \omega_D^2}\right\} \\ &\vdots \\ &= x_0e^{-\xi\omega t}\cos(\omega_D t) + (\xi\omega x_0 + v_0)\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega_D}\text{sen}(\omega_D t) \\ &\vdots \\ &= e^{-\xi\omega t}\left[x_0\cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right)\text{sen}(\omega_D t)\right] \\ \therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s + 2\xi\omega)x_0 + v_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} &= e^{-\xi\omega t}\left[x_0\cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right)\text{sen}(\omega_D t)\right] \quad (9.36) \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 9.34 se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\mathbf{x}_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0}{\omega_D} \right) \text{sen}(\omega_D t) \right] ; \quad \omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (9.37)$$

Como pudo observarse, todo el proceso que se desarrolló a lo largo de dos capítulos (IV y V) para encontrar las soluciones $\mathbf{x}(t)$ de los casos de vibración libre con y sin amortiguamiento, se obtuvieron en este capítulo en unas cuantas páginas.

Capítulo X:
Uso de la Transformada de Laplace
En Vibración Armónica sin
Amortiguamiento para Sistemas
De 1 G.D.L.

- 10.1 Solución a la EDO con $P(t) = P_0$
- 10.2 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$
- 10.3 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \operatorname{sen}(\Omega t)$
- 10.4 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$
- 10.5 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \operatorname{sen}(\omega t)$

X. Uso de la Transformada de Laplace en Vibración armónica sin Amortiguamiento para Sistemas de 1 G.D.L.

El capítulo anterior contempló las soluciones de los casos de vibración libre (con y sin amortiguamiento) vistos en los capítulos IV y V, comprobándose que, de una manera más simplificada y directa, se obtienen las soluciones encontradas con antelación en dichos capítulos.

En este capítulo se demostrará las soluciones a las ecuaciones del tipo $m\ddot{x} + kx = P(t)$ cuando $P(t)$ es una carga armónica externa como las vistas en el capítulo VI.

10.1 Solución a la EDO con $P(t) = P_0$

La EDO por resolver es $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + \omega^2 x\} = \mathcal{L}\{\mu_0 \omega^2\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{1\} \quad (10.1)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\therefore = s^2 X(s) - sx_0 - v_0$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2 X(s) - sx_0 - v_0 \quad (10.2)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) \quad (10.3)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad (10.4)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{1\}$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{1\}$$

$$s^2 X(s) - sx_0 - v_0 + \omega^2 X(s) = \frac{\mu_0 \omega^2}{s}$$

Factorizando $X(s)$:

$$(s^2 + \omega^2)X(s) - sx_0 - v_0 = \frac{\mu_0 \omega^2}{s}$$

$$(s^2 + \omega^2)X(s) = sx_0 + v_0 + \frac{\mu_0 \omega^2}{s}$$

$$\therefore X(s) = x_0 \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) + \frac{v_0}{s^2 + \omega^2} + \frac{\mu_0 \omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} \quad (10.5)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (10.6)$$

$$x_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} = x_0 \cos(\omega t) \quad (10.7)$$

$$v_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{v_0}{\omega} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t)$$

$$\therefore v_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \quad (10.8)$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} \right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2} \right\} \quad (10.9)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A, B y C:

$$\frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2} = \frac{\mu_0 \omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$$

$$\frac{As(s^2 + \omega^2)}{s} + \frac{(Bs + C)s(s^2 + \omega^2)}{s^2 + \omega^2} = \frac{\mu_0 \omega^2 s(s^2 + \omega^2)}{s(s^2 + \omega^2)}$$

$$A(s^2 + \omega^2) + (Bs + C)s = \mu_0 \omega^2$$

$$As^2 + A\omega^2 + Bs^2 + Cs = \mu_0 \omega^2$$

Asociando los términos del lado izquierdo con el derecho en función del dominio de la frecuencia s:

$$(A + B)s^2 = 0$$

$$Cs = 0$$

$$A\omega^2 = \mu_0 \omega^2$$

El sistema de ecuaciones lineales (eliminando a ambos lados de las ecuaciones la variable s) es:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = \mu_0 \end{cases}$$

La solución de este sistema es intuitiva dado que $C = 0$ y el valor de B tiene que ser el conjugado de A dando como resultado:

$$A = \mu_0 \quad (10.10)$$

$$B = -\mu_0 \quad (10.11)$$

$$C = 0 \quad (10.12)$$

Sustituyendo estos valores para la ecuación 10.9:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
 \vdots &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\mu_0s + 0}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
 \vdots &= \mu_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mu_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
 \vdots &= \mu_0(1) - \mu_0\cos(\omega t) \\
 \therefore \mu_0\omega^2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}\right\} &= \mu_0[1 - \cos(\omega t)] \tag{10.13}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 10.5 se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \mu_0[1 - \cos(\omega t)] \tag{10.14}$$

O como se presenta en el capítulo VI (ecuación 6.23):

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_0 - \mu_0) \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \mu_0 \tag{10.15}$$

10.2 Solución a la EDO con $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \cos(\Omega t)$

La EDO por resolver es $\ddot{\mathbf{x}} + \omega^2\mathbf{x} = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}} + \omega^2\mathbf{x}\} = \mathcal{L}\{\mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}}\} + \omega^2\mathcal{L}\{\mathbf{x}\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\cos(\Omega t)\} \tag{10.16}$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ y $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}}\} = s^2\mathbf{X}(s) - s\mathbf{x}(0) - \dot{\mathbf{x}}(0)$$

$$\dot{\quad} = s^2X(s) - sx_0 - v_0$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2X(s) - sx_0 - v_0 \quad (10.17)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) \quad (10.18)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\Omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \quad (10.19)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\cos(\Omega t)\}$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\cos(\Omega t)\}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + \omega^2X(s) = \mu_0\omega^2\left(\frac{s}{s^2 + \Omega^2}\right)$$

Factorizando $X(s)$:

$$(s^2 + \omega^2)X(s) - sx_0 - v_0 = \mu_0\omega^2\left(\frac{s}{s^2 + \Omega^2}\right)$$

$$(s^2 + \omega^2)X(s) = sx_0 + v_0 + \mu_0\omega^2\left(\frac{s}{s^2 + \Omega^2}\right)$$

$$\therefore X(s) = x_0\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right) + \frac{v_0}{s^2 + \omega^2} + \mu_0\omega^2\left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)}\right] \quad (10.20)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (10.21)$$

$$x_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\} = x_0 \cos(\omega t) \quad (10.22)$$

$$v_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} = \frac{v_0}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$\therefore v_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \quad (10.23)$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)} \right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{s^2 + \omega^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2} \right\} \quad (10.24)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A, B y C:

$$\frac{As + B}{s^2 + \omega^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2} = \frac{\mu_0 \omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2) \left(\frac{As + B}{s^2 + \omega^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2} \right) = \frac{\mu_0 \omega^2 s (s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$(As + B)(s^2 + \Omega^2) + (Cs + D)(s^2 + \omega^2) = \mu_0 \omega^2 s$$

$$As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs^3 + Cs\omega^2 + Ds^2 + D\omega^2 = \mu_0 \omega^2 s$$

Asociando los términos del lado izquierdo con el derecho en función del dominio de la frecuencia s :

$$(A + C)s^3 = 0$$

$$(B + D)s^2 = 0$$

$$(A\Omega^2 + C\omega^2)s = \mu_0 \omega^2 s$$

$$B\Omega^2 + D\omega^2 = 0$$

Se tienen 4 incógnitas lo que hace necesario plantear un sistema de ecuaciones lineales de 4 x 4 a fin de encontrar la solución del problema, sin embargo, un atajo para encontrar la solución

de dichas incógnitas es crear dos sistemas de ecuaciones 2 x 2: uno con A y C, y otro con B y D de la siguiente forma (los sistemas se presentan en forma matricial):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_0 \omega^2 \end{Bmatrix} \quad \& \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Directamente el sistema de ecuaciones que maneja como incógnitas a B y D es homogéneo lo cual provoca que éste tenga únicamente la solución trivial $B = D = 0$ o en su defecto, que tenga infinitas soluciones (incluyendo la solución trivial). Para simplificar el cálculo de la transformada inversa de Laplace únicamente consideramos que el sistema presenta la solución trivial.

La solución al sistema de ecuaciones que presenta como incógnitas a A y C se resuelve mediante:

$$\begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_0 \omega^2 \end{Bmatrix} \quad (10.25)$$

El valor de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan^{10.1}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ \Omega^2 & \omega^2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Haciendo $R_2 - \Omega^2 R_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ \Omega^2 & \omega^2 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \Omega^2 & | & -\Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2}$$

Haciendo R_2/ω^2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \Omega^2 & | & -\Omega^2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} & | & -\frac{\Omega^2}{\omega^2} & \frac{1}{\omega^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2}$$

Por definición el factor de frecuencia es $r = \Omega / \omega$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\omega^2} & | & -\frac{\Omega^2}{\omega^2} & \frac{1}{\omega^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 - r^2 & | & -r^2 & \frac{1}{\omega^2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2}$$

^{10.1} Se presentan solamente los resultados y no la reducción algebraica. Únicamente se indica que procedimiento se hace por fila para ir calculando la matriz inversa.

Haciendo $R_2 / (1 - r^2)$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - r^2 & -r^2 & \frac{1}{\omega^2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array} \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{r^2}{1 - r^2} & \frac{1}{\omega^2(1 - r^2)} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $R_1 - R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{r^2}{1 - r^2} & \frac{1}{\omega^2(1 - r^2)} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array} \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 + \frac{r^2}{1 - r^2} & -\frac{1}{\omega^2(1 - r^2)} \\ 0 & 1 & -\frac{r^2}{1 - r^2} & \frac{1}{\omega^2(1 - r^2)} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Expresando el resultado en una sola fracción:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 + \frac{r^2}{1 - r^2} & -\frac{1}{\omega^2(1 - r^2)} \\ 0 & 1 & -\frac{r^2}{1 - r^2} & \frac{1}{\omega^2(1 - r^2)} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array} \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{1 - r^2} & -\frac{1}{\omega^2(1 - r^2)} \\ 0 & 1 & -\frac{r^2}{1 - r^2} & \frac{1}{\omega^2(1 - r^2)} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{array} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - r^2} \begin{bmatrix} 1 & -1/\omega^2 \\ -r^2 & 1/\omega^2 \end{bmatrix}$$

Conocida la matriz inversa, se procede a calcular los valores de A y C usando álgebra de matrices:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_0 \omega^2 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \frac{\mu_0 \omega^2}{1 - r^2} \begin{bmatrix} 1 & -1/\omega^2 \\ -r^2 & 1/\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \frac{\mu_0 \omega^2}{1 - r^2} \begin{Bmatrix} 1(0) - (1/\omega^2)(1) \\ -r^2(0) + (1/\omega^2)(1) \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \frac{\mu_0 \omega^2}{1 - r^2} \begin{Bmatrix} -1/\omega^2 \\ 1/\omega^2 \end{Bmatrix} \\ \therefore \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} &= \frac{\mu_0}{1 - r^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{10.26}$$

Por lo tanto los valores finales son:

$$A = -\frac{\mu_0}{1-r^2} \quad (10.27)$$

$$B = 0 \quad (10.28)$$

$$C = \frac{\mu_0}{1-r^2} \quad (10.29)$$

$$D = 0 \quad (10.30)$$

Sustituyendo estos valores para la ecuación 10.24:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\Omega^2)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As+B}{s^2+\omega^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs+D}{s^2+\Omega^2}\right\} \\ \vdots &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{\mu_0}{1-r^2}s+0}{s^2+\omega^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\mu_0}{1-r^2}s+0}{s^2+\Omega^2}\right\} \\ \vdots &= -\frac{\mu_0}{1-r^2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} + \frac{\mu_0}{1-r^2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right\} \\ \vdots &= -\frac{\mu_0}{1-r^2}\cos(\omega t) + \frac{\mu_0}{1-r^2}\cos(\Omega t) \\ \therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\Omega^2)}\right\} &= \frac{\mu_0}{1-r^2}[\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \quad (10.31) \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 10.20 se obtiene:

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{x_0} \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v_0}}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1-r^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \quad (10.32)$$

O como se presenta en el capítulo VI (ecuación 6.38):

$$\mathbf{x(t)} = \left(\mathbf{x_0} - \frac{\mu_0}{1-r^2}\right) \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v_0}}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1-r^2} \cos(\Omega t) \quad (10.33)$$

10.3 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$

La EDO por resolver es $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + \omega^2 x\} = \mathcal{L}\{\mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{\text{sen}(\Omega t)\} \quad (10.34)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\therefore = s^2 X(s) - sx_0 - v_0$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2 X(s) - sx_0 - v_0 \quad (10.35)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) \quad (10.36)$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(\Omega t)\} = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \quad (10.37)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{\text{sen}(\Omega t)\}$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{\text{sen}(\Omega t)\}$$

$$s^2 X(s) - sx_0 - v_0 + \omega^2 X(s) = \mu_0 \omega^2 \left(\frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \right)$$

Factorizando $X(s)$:

$$(s^2 + \omega^2)X(s) - sx_0 - v_0 = \mu_0 \omega^2 \left(\frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \right)$$

$$(s^2 + \omega^2)X(s) = sx_0 + v_0 + \mu_0 \omega^2 \left(\frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \right)$$

$$\therefore X(s) = x_0 \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) + \frac{v_0}{s^2 + \omega^2} + \mu_0 \omega^2 \left[\frac{\Omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)} \right] \quad (10.38)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (10.39)$$

$$x_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\} = x_0 \cos(\omega t) \quad (10.40)$$

$$\begin{aligned} v_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} &= \frac{v_0}{\omega} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} = \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \\ \therefore v_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} &= \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (10.41)$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{s^2 + \omega^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2}\right\} \quad (10.42)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A, B y C:

$$\frac{As + B}{s^2 + \omega^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2} = \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)}$$

$$(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2) \left(\frac{As + B}{s^2 + \omega^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2} \right) = \mu_0 \omega^2 \Omega \left[\frac{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)} \right]$$

$$(As + B)(s^2 + \Omega^2) + (Cs + D)(s^2 + \omega^2) = \mu_0 \omega^2 \Omega$$

$$As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs^3 + Cs\omega^2 + Ds^2 + D\omega^2 = \mu_0 \omega^2 \Omega$$

Asociando los términos del lado izquierdo con el derecho en función del dominio de la frecuencia s :

$$(A + C)s^3 = 0$$

$$(B + D)s^2 = 0$$

$$(A\Omega^2 + C\omega^2)s = 0$$

$$B\Omega^2 + D\omega^2 = \mu_0\omega^2\Omega$$

Se tienen 4 incógnitas lo que hace necesario plantear un sistema de ecuaciones lineales de 4 x 4 a fin de encontrar la solución del problema, sin embargo, un atajo para encontrar la solución de dichas incógnitas es crear dos sistemas de ecuaciones 2 x 2: uno con A y C, y otro con B y D de la siguiente forma (los sistemas se presentan en forma matricial):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \& \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_0\omega^2\Omega \end{Bmatrix}$$

Directamente el sistema de ecuaciones que maneja como incógnitas a A y C es homogéneo lo cual provoca que éste tenga únicamente la solución trivial $A = C = 0$ o en su defecto, que tenga infinitas soluciones (incluyendo la solución trivial). Para simplificar el cálculo de la transformada inversa de Laplace únicamente consideramos que el sistema presenta la solución trivial.

La solución al sistema de ecuaciones que presenta como incógnitas a B y D se resuelve mediante:

$$\begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_0\omega^2\Omega \end{Bmatrix} \quad (10.43)$$

El valor de la matriz inversa se calculó en el ejercicio anterior por el método de Gauss-Jordan y se obtuvo que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - r^2} \begin{bmatrix} 1 & -1/\omega^2 \\ -r^2 & 1/\omega^2 \end{bmatrix}$$

Conocida la matriz inversa, se procede a calcular los valores de B y D usando álgebra de matrices:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \mu_0 \omega^2 \Omega \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{1-r^2} \begin{bmatrix} 1 & -1/\omega^2 \\ -r^2 & 1/\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{1-r^2} \begin{Bmatrix} 1(0) - (1/\omega^2)(1) \\ -r^2(0) + (1/\omega^2)(1) \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{1-r^2} \begin{Bmatrix} -1/\omega^2 \\ 1/\omega^2 \end{Bmatrix} \\
 \therefore \begin{Bmatrix} B \\ D \end{Bmatrix} &= \frac{\mu_0 \Omega}{1-r^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{10.44}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores finales son:

$$A = 0 \tag{10.45}$$

$$B = -\frac{\mu_0 \Omega}{1-r^2} \tag{10.46}$$

$$C = 0 \tag{10.47}$$

$$D = \frac{\mu_0 \Omega}{1-r^2} \tag{10.48}$$

Sustituyendo estos valores para la ecuación 10.42:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{s^2 + \omega^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 \vdots &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(0)s - \frac{\mu_0 \Omega}{1-r^2}}{s^2 + \omega^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(0)s + \frac{\mu_0 \Omega}{1-r^2}}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0 \Omega}{1-r^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} + \frac{\mu_0 \Omega}{1-r^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0 \Omega}{1-r^2} \left[\frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} \right] + \frac{\mu_0 \Omega}{1-r^2} \left[\frac{\text{sen}(\Omega t)}{\Omega} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= -\frac{\mu_0}{1-r^2} \underbrace{\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}_r \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1-r^2} \underbrace{\left(\frac{\Omega}{\Omega}\right)}_1 \text{sen}(\Omega t) \\ \therefore \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)} \right\} &= \frac{\mu_0}{1-r^2} [\text{sen}(\Omega t) - r \text{sen}(\omega t)] \end{aligned} \quad (10.49)$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 10.38 se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1-r^2} [\text{sen}(\Omega t) - r \text{sen}(\omega t)] \quad (10.50)$$

O como se presenta en el capítulo VI (ecuación 6.53):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{\mathbf{v}_0}{\omega} - \frac{\mu_0 r}{1-r^2} \right) \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{1-r^2} \text{sen}(\Omega t) \quad (10.51)$$

10.4 Solución a la EDO con $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \cos(\omega t)$

La EDO por resolver es $\ddot{\mathbf{x}} + \omega^2 \mathbf{x} = \mu_0 \omega^2 \cos(\omega t)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}} + \omega^2 \mathbf{x}\} = \mathcal{L}\{\mu_0 \omega^2 \cos(\omega t)\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{\mathbf{x}\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} \quad (10.52)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ y $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}}\} &= s^2 \mathbf{X}(s) - s\mathbf{x}(0) - \dot{\mathbf{x}}(0) \\ \vdots &= s^2 \mathbf{X}(s) - s\mathbf{x}_0 - \mathbf{v}_0 \\ \therefore \mathcal{L}\{\ddot{\mathbf{x}}\} &= s^2 \mathbf{X}(s) - s\mathbf{x}_0 - \mathbf{v}_0 \end{aligned} \quad (10.53)$$

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}\} = \mathbf{X}(s) \quad (10.54)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (10.55)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$$

$$s^2 X(s) - s x_0 - v_0 + \omega^2 X(s) = \mu_0 \omega^2 \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

Factorizando $X(s)$:

$$(s^2 + \omega^2)X(s) - s x_0 - v_0 = \mu_0 \omega^2 \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

$$(s^2 + \omega^2)X(s) = s x_0 + v_0 + \mu_0 \omega^2 \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)$$

$$\therefore X(s) = x_0 \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) + \frac{v_0}{s^2 + \omega^2} + \mu_0 \omega^2 \left[\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] \quad (10.56)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (10.57)$$

$$x_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} = x_0 \cos(\omega t) \quad (10.58)$$

$$v_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{v_0}{\omega} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t)$$

$$\therefore v_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \quad (10.59)$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mu_0 \omega^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2} \right\}$$

Se puede resolver utilizando el teorema de convolución, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el uso del teorema de convolución $\mathcal{L}^{-1}\{f(s) \cdot g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u) du$

Siendo para este caso:

$$f(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \quad \& \quad g(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Cuyas transformadas inversas de Laplace son:

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} \quad \& \quad G(t) = \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = \cos(\omega t)$$

Teniendo los datos necesarios se utiliza el teorema de convolución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{f(s) \cdot g(s)\} &= \int_0^t F(u)G(t-u) du \\ \vdots &= \int_0^t \underbrace{\frac{\text{sen}(\omega u)}{\omega}}_{F(u)} \underbrace{\cos[\omega(t-u)]}_{G(t-u)} du \\ \vdots &= \frac{1}{\omega} \int_0^t \text{sen}(\omega u) \cos(\omega t - \omega u) du \\ \vdots &= \frac{1}{\omega} \int_0^t \text{sen}(\omega u) \underbrace{[\cos(\omega t) \cos(\omega u) + \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega u)]}_{\cos(\omega t - \omega u)} du \\ \vdots &= \frac{1}{\omega} \int_0^t [\cos(\omega t) \cos(\omega u) \text{sen}(\omega u) + \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega u) \text{sen}(\omega u)] du \\ \vdots &= \frac{1}{\omega} \left[\int_0^t \cos(\omega t) \cos(\omega u) \text{sen}(\omega u) du + \int_0^t \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega u) \text{sen}(\omega u) du \right] \\ \vdots &= \frac{1}{\omega} \left[\cos(\omega t) \int_0^t \cos(\omega u) \text{sen}(\omega u) du + \text{sen}(\omega t) \int_0^t \text{sen}(\omega u) \text{sen}(\omega u) du \right] \end{aligned}$$

$$\therefore = \frac{1}{\omega} \left[\cos(\omega t) \underbrace{\int_0^t \cos(\omega u) \operatorname{sen}(\omega u) \, du}_{I_1} + \operatorname{sen}(\omega t) \underbrace{\int_0^t \operatorname{sen}^2(\omega u) \, du}_{I_2} \right]$$

Resolviendo I_1 asignado como cambio de variable $z = \operatorname{sen}(\omega u)$ y $dz = \omega \cos(\omega u) \, du \rightarrow \cos(\omega u) \, du = dz / \omega$:

$$I_1 = \int_0^t \cos(\omega u) \operatorname{sen}(\omega u) \, du$$

$$\therefore = \int_0^t z \frac{dz}{\omega}$$

$$\therefore = \frac{1}{\omega} \int_0^t z \, dz$$

$$\therefore = \frac{1}{\omega} \left(\frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^t$$

$$\therefore = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\operatorname{sen}^2(\omega u)}{2} \right] \Big|_0^t$$

$$\therefore = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\operatorname{sen}^2[\omega(t)] - \operatorname{sen}^2[\omega(0)]}{2} \right]$$

$$\therefore = \frac{1}{\omega} \left[\frac{\operatorname{sen}^2[\omega(t)] - \overbrace{\operatorname{sen}^2[\omega(0)]}^0}{2} \right]$$

$$\therefore I_1 = \frac{\operatorname{sen}^2(\omega t)}{2\omega}$$

Resolviendo I_2 con $\operatorname{sen}^2(\omega u) = (1/2) - (1/2) \cos(2\omega u)$:

$$I_2 = \int_0^t \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega u) \right] \, du$$

$$\therefore = \frac{1}{2} \int_0^t [1 - \cos(2\omega u)] \, du$$

$$\begin{aligned}
 \therefore &= \frac{1}{2} \left[\int_0^t du - \int_0^t \cos(2\omega u) du \right] \\
 \therefore &= \frac{1}{2} \left[\int_0^t du - \frac{1}{2\omega} \int_0^t 2\omega \cos(2\omega u) du \right] \\
 \therefore &= \frac{1}{2} \left[u \Big|_0^t - \frac{\text{sen}(2\omega u)}{2\omega} \Big|_0^t \right] \\
 \therefore &= \frac{1}{2} \left\{ t - 0 - \frac{\text{sen}[2\omega(t)] - \overbrace{\text{sen}[2\omega(0)]}^0}{2\omega} \right\} \\
 \therefore &= \frac{1}{2} \left[t - \frac{\text{sen}(2\omega t)}{2\omega} \right]
 \end{aligned}$$

$$\therefore I_2 = \frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(2\omega t)}{4\omega}$$

Teniendo el valor de I_1 y I_2 se prosigue con el calculo de la transformada inversa de Laplace utilizando el teorema de convolución:

$$\begin{aligned}
 \therefore &= \frac{1}{\omega} \left[\cos(\omega t) \underbrace{\int_0^t \cos(\omega u) \text{sen}(\omega u) du}_{I_1} + \text{sen}(\omega t) \underbrace{\int_0^t \text{sen}^2(\omega u) du}_{I_2} \right] \\
 \therefore &= \frac{1}{\omega} \left\{ \cos(\omega t) \frac{\text{sen}^2(\omega t)}{2\omega} + \text{sen}(\omega t) \left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(2\omega t)}{4\omega} \right] \right\} \\
 \therefore &= \frac{1}{\omega} \left[\frac{\text{sen}^2(\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega} + \frac{t}{2} \text{sen}(\omega t) - \frac{\text{sen}(2\omega t) \text{sen}(\omega t)}{4\omega} \right] \\
 \therefore &= \frac{\text{sen}^2(\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega^2} + \frac{t}{2\omega} \text{sen}(\omega t) - \frac{\text{sen}(2\omega t) \text{sen}(\omega t)}{4\omega^2} \\
 \therefore &= \frac{\text{sen}^2(\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega^2} + \frac{t}{2\omega} \text{sen}(\omega t) - \frac{\overbrace{\text{sen}(2\omega t)}{2 \cos(\omega t) \text{sen}(\omega t)} \text{sen}(\omega t)}{4\omega^2}
 \end{aligned}$$

$$\dot{} = \frac{\text{sen}^2(\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega^2} + \frac{t}{2\omega} \text{sen}(\omega t) - \frac{\text{sen}^2(\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega^2}$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}\right\} = \frac{t}{2\omega} \text{sen}(\omega t) \rightarrow \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}\right\} = \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{sen}(\omega t)$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 10.56 se obtiene la ecuación tal cual fue presentada en el capítulo VI (ecuación 6.69):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0 \omega}{2} t \text{sen}(\omega t) \quad (10.60)$$

10.5 Solución a la EDO con $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \text{sen}(\omega t)$

La EDO por resolver es $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + \omega^2 x\} = \mathcal{L}\{\mu_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t)\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\} \quad (10.61)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2 X(s) - s x(0) - \dot{x}(0)$$

$$\therefore = s^2 X(s) - s x_0 - v_0$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2 X(s) - s x_0 - v_0 \quad (10.62)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) \quad (10.63)$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (10.64)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\}$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x\} = \mu_0 \omega^2 \mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\}$$

$$s^2 X(s) - s x_0 - v_0 + \omega^2 X(s) = \mu_0 \omega^3 \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right)$$

Factorizando $X(s)$:

$$(s^2 + \omega^2)X(s) - s x_0 - v_0 = \mu_0 \omega^3 \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right)$$

$$(s^2 + \omega^2)X(s) = s x_0 + v_0 + \mu_0 \omega^3 \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right)$$

$$\therefore X(s) = x_0 \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) + \frac{v_0}{s^2 + \omega^2} + \mu_0 \omega^3 \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] \quad (10.65)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (10.66)$$

$$x_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} = x_0 \cos(\omega t) \quad (10.67)$$

$$v_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{v_0}{\omega} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t)$$

$$\therefore v_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} = \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \quad (10.68)$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mu_0 \omega^3 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right\}$$

Se puede resolver utilizando el teorema de convolución, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al

dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el uso del teorema de convolución $\mathcal{L}^{-1}\{f(s) \cdot g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u) du$

Siendo para este caso:

$$f(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \quad \& \quad g(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

Cuyas transformadas inversas de Laplace son:

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} \quad \& \quad G(t) = \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega}$$

Teniendo los datos necesarios se utiliza el teorema de convolución:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{f(s) \cdot g(s)\} &= \int_0^t F(u)G(t-u) du \\ \vdots &= \int_0^t \underbrace{\frac{\text{sen}(\omega u)}{\omega}}_{F(u)} \cdot \underbrace{\frac{\text{sen}[\omega(t-u)]}{\omega}}_{G(t-u)} du \\ \vdots &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \text{sen}(\omega u) \text{sen}(\omega t - \omega u) du \\ \vdots &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t \text{sen}(\omega u) \underbrace{[\text{sen}(\omega t) \cos(\omega u) - \cos(\omega t) \text{sen}(\omega u)]}_{\text{sen}(\omega t - \omega u)} du \\ \vdots &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^t [\text{sen}(\omega t) \cos(\omega u) \text{sen}(\omega u) - \cos(\omega t) \text{sen}(\omega u) \text{sen}(\omega u)] du \\ \vdots &= \frac{1}{\omega^2} \left[\int_0^t \text{sen}(\omega t) \cos(\omega u) \text{sen}(\omega u) du - \int_0^t \cos(\omega t) \text{sen}(\omega u) \text{sen}(\omega u) du \right] \\ \vdots &= \frac{1}{\omega^2} \left[\text{sen}(\omega t) \int_0^t \cos(\omega u) \text{sen}(\omega u) du - \cos(\omega t) \int_0^t \text{sen}(\omega u) \text{sen}(\omega u) du \right] \end{aligned}$$

$$\therefore = \frac{1}{\omega^2} \left[\underbrace{\text{sen}(\omega t) \int_0^t \cos(\omega u) \text{sen}(\omega u) \, du}_{I_1} - \cos(\omega t) \underbrace{\int_0^t \text{sen}^2(\omega u) \, du}_{I_2} \right]$$

Las integrales definidas I_1 y I_2 fueron calculadas en el ejercicio anterior y tienen los siguientes valores:

$$I_1 = \frac{\text{sen}^2(\omega t)}{2\omega} \quad \& \quad I_2 = \frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(2\omega t)}{4\omega}$$

Teniendo el valor de I_1 y I_2 se prosigue con el cálculo de la transformada inversa de Laplace utilizando el teorema de convolución:

$$\therefore = \frac{1}{\omega^2} \left\{ \text{sen}(\omega t) \frac{\text{sen}^2(\omega t)}{2\omega} - \cos(\omega t) \left[\frac{t}{2} - \frac{\text{sen}(2\omega t)}{4\omega} \right] \right\}$$

$$\therefore = \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{\text{sen}^3(\omega t)}{2\omega} - \frac{t}{2} \cos(\omega t) + \frac{\text{sen}(2\omega t) \cos(\omega t)}{4\omega} \right]$$

$$\therefore = \frac{\text{sen}^3(\omega t)}{2\omega^3} - \frac{t}{2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{\text{sen}(2\omega t) \cos(\omega t)}{4\omega^3}$$

$$\therefore = \frac{\text{sen}^3(\omega t)}{2\omega^3} - \frac{t}{2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{\overbrace{\text{sen}(2\omega t)}^{2 \cos(\omega t) \text{sen}(\omega t)} \cos(\omega t)}{4\omega^3}$$

$$\therefore = \frac{\text{sen}^3(\omega t)}{2\omega^3} - \frac{t}{2\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{\text{sen}(\omega t) \cos^2(\omega t)}{2\omega^3}$$

$$\therefore = \frac{\text{sen}(\omega t)}{2\omega^3} \underbrace{[\text{sen}^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]}_1 - \frac{t}{2\omega^2} \cos(\omega t)$$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right\} = \frac{\text{sen}(\omega t)}{2\omega^3} - \frac{t}{2\omega^2} \cos(\omega t) \rightarrow \mu_0 \omega^3 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right\} = \frac{\mu_0}{2} \text{sen}(\omega t) - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \cos(\omega t)$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 10.65 se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) + \frac{\mu_0}{2} \text{sen}(\omega t) - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \cos(\omega t) \quad (10.69)$$

O como se presenta en el capítulo VI (ecuación 6.86):

$$\mathbf{x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\mu_0}{2}\right) \text{sen}(\omega t) - \frac{\mu_0 \omega}{2} t \cos(\omega t)} \quad (10.70)$$

Así como fueron encontrados los casos de vibración libre de una manera más sencilla por medio de las transformadas de Laplace, las ecuaciones del tipo $m\ddot{x} + kx = P(t)$ también se calcularon de una manera más rápida.

Capítulo XI:
Uso de la Transformada de Laplace
En Vibración Armónica con
Amortiguamiento para Sistemas
De 1 G.D.L.

- 11.1 Solución a la EDO con $P(t) = P_0$
 - 11.1.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)
 - 11.1.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)
 - 11.1.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)
- 11.2 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$
 - 11.2.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)
 - 11.2.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)
 - 11.2.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)
- 11.3 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \sin(\Omega t)$
 - 11.3.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)
 - 11.3.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)
 - 11.3.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)
- 11.4 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$
 - 11.4.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)
 - 11.4.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)
 - 11.4.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)
- 11.5 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$
 - 11.5.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)
 - 11.5.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)
 - 11.5.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

XI. Uso de la Transformada de Laplace en Vibración armónica con Amortiguamiento para Sistemas de 1 G.D.L.

El capítulo anterior contempló las soluciones de los casos de vibración armónica sin amortiguamiento vistos en el capítulo VI, comprobándose que, de una manera más simplificada y directa, se obtienen las soluciones de los casos a las ecuaciones $m\ddot{x} + kx = P(t) \neq 0$.

En este capítulo se demostrará las soluciones a las ecuaciones del tipo $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \neq 0$, cuando $P(t)$ es una carga armónica externa como las vistas en el capítulo VIII.

11.1 Solución a la EDO con $P(t) = P_0$

La EDO por resolver es $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x\} = \mathcal{L}\{\mu_0\omega^2\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{1\} \quad (11.1)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x}\} &= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \\ \vdots &= s^2X(s) - sx_0 - v_0 \\ \therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} &= s^2X(s) - sx_0 - v_0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s) - x(0) \\ \vdots &= sX(s) - x_0 \\ \therefore \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s) - x_0 \end{aligned} \quad (11.3)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) \quad (11.4)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad (11.5)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{1\}$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{1\}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega[sX(s) - x_0] + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2}{s}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2}{s}$$

Factorizando X(s):

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2}{s}$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)X(s) - sx_0 - v_0 - 2\xi\omega x_0 = \frac{\mu_0\omega^2}{s}$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)X(s) = sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0 + \frac{\mu_0\omega^2}{s}$$

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \frac{\mu_0\omega^2}{s(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)} \quad (11.6)$$

Recordando que $s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)$:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} + \frac{\mu_0\omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)]} \quad (11.7)$$

11.1.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

Sea el amortiguamiento crítico cuando $\xi = 1$, la ecuación X(s) queda reescrita como:

$$X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2} + \frac{\mu_0\omega^2}{s(s + \omega)^2} \quad (11.8)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.9)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2}\right\} = x_0 e^{-\omega t} + (\omega x_0 + v_0)te^{-\omega t} \quad (11.10)^{11.1}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2}{s(s + \omega)^2}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2}{s(s + \omega)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s + \omega)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s + \omega}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{s}\right\} \quad (11.11)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A , B y C :

$$\frac{\mu_0\omega^2}{s(s + \omega)^2} = \frac{A}{(s + \omega)^2} + \frac{B}{s + \omega} + \frac{C}{s}$$

$$\mu_0\omega^2 = As + Bs(s + \omega) + C(s + \omega)^2$$

$$\mu_0\omega^2 = As + Bs(s + \omega) + C(s^2 + 2\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0\omega^2 = As + Bs^2 + Bs\omega + Cs^2 + 2C\omega s + C\omega^2$$

$$\mu_0\omega^2 = (B + C)s^2 + (A + B\omega + 2C\omega)s + C\omega^2$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} C\omega^2 = \mu_0\omega^2 \\ A + B\omega + 2C\omega = 0 \\ B + C = 0 \end{cases}$$

^{11.1} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.1 *Solución con amortiguamiento crítico* ($\xi = 1$).

Se observa que al determinar el valor de C, se determina inmediatamente el valor de B y posteriormente conocido B y C es posible determinar el valor de A de la siguiente forma:

$$C\omega^2 = \mu_0\omega^2 \quad \rightarrow \quad \mathbf{C} = \mu_0$$

$$B + C = 0 \quad \rightarrow \quad B = -C \quad \therefore \quad \mathbf{B} = -\mu_0$$

$$A + B\omega + 2C\omega = 0 \quad \rightarrow \quad A = -B\omega - 2C\omega = -(-\mu_0)\omega - 2(\mu_0)\omega \quad \therefore \quad \mathbf{A} = -\mu_0\omega$$

Conocidos A, B y C se sustituyen en la ecuación 11.11:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2}{s(s+\omega)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s+\omega)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s+\omega}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{s}\right\} \\ \vdots &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\mu_0\omega}{(s+\omega)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\mu_0}{s+\omega}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0}{s}\right\} \\ \vdots &= -\mu_0\omega\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\omega)^2}\right\} - \mu_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega}\right\} + \mu_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \\ \vdots &= -\mu_0\omega e^{-\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mu_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega}\right\} + \mu_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} \\ \vdots &= -\mu_0\omega e^{-\omega t}t - \mu_0 e^{-\omega t} + \mu_0(1) \\ \therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2}{s(s+\omega)^2}\right\} &= \mu_0 - \mu_0\omega t e^{-\omega t} - \mu_0 e^{-\omega t} \end{aligned} \quad (11.12)$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.8 se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{-\omega t} + (\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0)t e^{-\omega t} + \mu_0 - \mu_0\omega t e^{-\omega t} - \mu_0 e^{-\omega t} \quad (11.13)$$

O como se presenta en el capítulo VIII (ecuación 8.23):

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0 - \mu_0)]t e^{-\omega t} + (\mathbf{x}_0 - \mu_0)e^{-\omega t} + \mu_0 \quad (11.14)$$

11.1.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

Sea el sobreamortiguamiento cuando $\xi > 1$ y la frecuencia sobreamortiguada $\omega_D^2 = \omega^2(\xi^2 - 1)$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} + \frac{\mu_0\omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \quad (11.15)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.16)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right) \sinh(\omega_D t) \right] \quad (11.17)^{11.2}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bs + C}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} \quad (11.18)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A , B y C :

$$\frac{\mu_0\omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}$$

$$\mu_0\omega^2 = A[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2] + (Bs + C)s$$

$$\mu_0\omega^2 = A(s^2 + 2\xi\omega s + \xi^2\omega^2 - \omega_D^2) + (Bs + C)s$$

$$\mu_0\omega^2 = As^2 + 2A\xi\omega s + A\xi^2\omega^2 - A\omega_D^2 + Bs^2 + Cs$$

^{11.2} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$).

$$\mu_0 \omega^2 = (A + B)s^2 + (2A\xi\omega + C)s + (\xi^2\omega^2 - \omega_D^2)A$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A\xi\omega + C = 0 \\ (\xi^2\omega^2 - \omega_D^2)A = \mu_0\omega^2 \end{cases}$$

Se observa que al determinar el valor de A , se determina inmediatamente el valor de B y C

$$(\xi^2\omega^2 - \omega_D^2)A = \mu_0\omega^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{\mu_0\omega^2}{\xi^2\omega^2 - \omega_D^2}$$

$$2A\xi\omega + C = 0 \quad \rightarrow \quad C = -2A\xi\omega \quad \therefore \quad C = -\frac{2\mu_0\xi\omega^3}{\xi^2\omega^2 - \omega_D^2}$$

$$A + B = 0 \quad \rightarrow \quad B = -A \quad \therefore \quad B = -\frac{\mu_0\omega^2}{\xi^2\omega^2 - \omega_D^2}$$

Los valores A , B y C pueden simplificarse al reducir algebraicamente el denominador de estos:

$$\begin{aligned} \xi^2\omega^2 - \omega_D^2 &= \xi^2\omega^2 - \frac{\omega^2(\xi^2 - 1)}{\omega_D^2} = \underbrace{\xi^2\omega^2 - \xi^2\omega^2}_0 + \omega^2 = \omega^2 \\ \therefore \xi^2\omega^2 - \omega_D^2 &= \omega^2 \end{aligned}$$

Con esta reducción los valores finales son:

$$A = \frac{\mu_0\omega^2}{\omega^2} = \mu_0 \quad \rightarrow \quad A = \mu_0$$

$$B = -\frac{\mu_0\omega^2}{\omega^2} = -\mu_0 \quad \rightarrow \quad B = -\mu_0$$

$$C = -\frac{2\mu_0\xi\omega^3}{\omega^2} = -2\mu_0\xi\omega \quad \rightarrow \quad C = -2\mu_0\xi\omega$$

Conocidos A , B y C se sustituyen en la ecuación 11.18:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Bs + C}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\
 \vdots &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\mu_0 s - 2\mu_0 \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\
 \vdots &= \mu_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mu_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 2\xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\
 \vdots &= \mu_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mu_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\
 \vdots &= \mu_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mu_0 \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \right] \\
 \vdots &= \mu_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mu_0 \left[e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - \omega_D^2} \right\} + e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\xi\omega}{s^2 - \omega_D^2} \right\} \right] \\
 \vdots &= \mu_0 (1) - \mu_0 \left[e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t) + \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \right] \\
 \therefore \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \right\} &= \mu_0 - \mu_0 e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega \mu_0}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \quad (11.19)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.15 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[\mathbf{x}_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0}{\omega_D} \right) \sinh(\omega_D t) \right] + \mu_0 \\
 &\quad - \mu_0 e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega \mu_0}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \quad ; \quad \omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}
 \end{aligned} \quad (11.20)$$

O como se presenta en el capítulo VIII (ecuación 8.28):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= e^{-\xi\omega t} \left\{ (\mathbf{x}_0 - \mu_0) \cosh(\omega_D t) + \left[\frac{\mathbf{v}_0 + \xi\omega(\mathbf{x}_0 - \mu_0)}{\omega_D} \right] \sinh(\omega_D t) \right\} + \mu_0 \\
 \omega_D &= \omega \sqrt{\xi^2 - 1}
 \end{aligned} \quad (11.21)$$

11.1.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

Sea el subamortiguamiento cuando $\xi < 1$ y la frecuencia subamortiguada $\omega_D^2 = \omega^2(1 - \xi^2)$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} + \frac{\mu_0\omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \quad (11.22)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.23)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right) \text{sen}(\omega_D t) \right] \quad (11.24)^{11.3}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Bs + C}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} \quad (11.25)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A , B y C :

$$\frac{\mu_0\omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}$$

$$\mu_0\omega^2 = A[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2] + (Bs + C)s$$

$$\mu_0\omega^2 = A(s^2 + 2\xi\omega s + \xi^2\omega^2 + \omega_D^2) + (Bs + C)s$$

$$\mu_0\omega^2 = As^2 + 2A\xi\omega s + A\xi^2\omega^2 + A\omega_D^2 + Bs^2 + Cs$$

^{11.3} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$).

$$\mu_0 \omega^2 = (A + B)s^2 + (2A\xi\omega + C)s + (\xi^2 \omega^2 + \omega_D^2)A$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A\xi\omega + C = 0 \\ (\xi^2 \omega^2 + \omega_D^2)A = \mu_0 \omega^2 \end{cases}$$

Se observa que al determinar el valor de A , se determina inmediatamente el valor de B y C

$$(\xi^2 \omega^2 + \omega_D^2)A = \mu_0 \omega^2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{\mu_0 \omega^2}{\xi^2 \omega^2 + \omega_D^2}$$

$$2A\xi\omega + C = 0 \quad \rightarrow \quad C = -2A\xi\omega \quad \therefore \quad C = -\frac{2\mu_0 \xi \omega^3}{\xi^2 \omega^2 + \omega_D^2}$$

$$A + B = 0 \quad \rightarrow \quad B = -A \quad \therefore \quad B = -\frac{\mu_0 \omega^2}{\xi^2 \omega^2 + \omega_D^2}$$

Los valores A , B y C pueden simplificarse al reducir algebraicamente el denominador de estos:

$$\xi^2 \omega^2 + \omega_D^2 = \xi^2 \omega^2 + \frac{\omega^2(1 - \xi^2)}{\omega_D^2} = \underbrace{\xi^2 \omega^2 - \xi^2 \omega^2}_0 + \omega^2 = \omega^2$$

$$\therefore \xi^2 \omega^2 + \omega_D^2 = \omega^2$$

Con esta reducción los valores finales son:

$$A = \frac{\mu_0 \omega^2}{\omega^2} = \mu_0 \quad \rightarrow \quad A = \mu_0$$

$$B = -\frac{\mu_0 \omega^2}{\omega^2} = -\mu_0 \quad \rightarrow \quad B = -\mu_0$$

$$C = -\frac{2\mu_0 \xi \omega^3}{\omega^2} = -2\mu_0 \xi \omega \quad \rightarrow \quad C = -2\mu_0 \xi \omega$$

Conocidos A , B y C se sustituyen en la ecuación 11.18:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2}{s[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Bs + C}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots & = & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\mu_0 s - 2\mu_0 \xi \omega}{(s + \xi \omega)^2 + \omega_D^2}\right\} \\
 & \vdots & = & \mu_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mu_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 2\xi \omega}{(s + \xi \omega)^2 + \omega_D^2}\right\} \\
 & \vdots & = & \mu_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mu_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \xi \omega + \xi \omega}{(s + \xi \omega)^2 + \omega_D^2}\right\} \\
 & \vdots & = & \mu_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mu_0 \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \xi \omega}{(s + \xi \omega)^2 + \omega_D^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\xi \omega}{(s + \xi \omega)^2 + \omega_D^2}\right\} \right] \\
 & \vdots & = & \mu_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mu_0 \left[e^{-\xi \omega t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega_D^2}\right\} + e^{-\xi \omega t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\xi \omega}{s^2 + \omega_D^2}\right\} \right] \\
 & \vdots & = & \mu_0 (1) - \mu_0 \left[e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t) + \frac{\xi \omega}{\omega_D} e^{-\xi \omega t} \text{sen}(\omega_D t) \right] \\
 \therefore & \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0 \omega^2}{s[(s + \xi \omega)^2 + \omega_D^2]}\right\} = & \mu_0 - \mu_0 e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t) - \frac{\xi \omega \mu_0}{\omega_D} e^{-\xi \omega t} \text{sen}(\omega_D t) \quad (11.26)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.22 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) = e^{-\xi \omega t} \left[\mathbf{x}_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi \omega \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0}{\omega_D} \right) \text{sen}(\omega_D t) \right] + \mu_0 \\
 - \mu_0 e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t) - \frac{\xi \omega \mu_0}{\omega_D} e^{-\xi \omega t} \text{sen}(\omega_D t) \quad ; \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (11.27)
 \end{aligned}$$

O como se presenta en el capítulo VII (ecuación 8.29):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) = e^{-\xi \omega t} \left\{ (\mathbf{x}_0 - \mu_0) \cos(\omega_D t) + \left[\frac{\mathbf{v}_0 + \xi \omega (\mathbf{x}_0 - \mu_0)}{\omega_D} \right] \text{sen}(\omega_D t) \right\} + \mu_0 \quad (11.28) \\
 \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}
 \end{aligned}$$

11.2 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\Omega t)$

La EDO por resolver es $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x\} = \mathcal{L}\{\mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\cos(\Omega t)\} \quad (11.29)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\therefore = s^2X(s) - sx_0 - v_0$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2X(s) - sx_0 - v_0 \quad (11.30)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX(s) - x(0)$$

$$\therefore = sX(s) - x_0$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX(s) - x_0 \quad (11.31)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) \quad (11.32)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\Omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \quad (11.33)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\cos(\Omega t)\}$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\cos(\Omega t)\}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega[sX(s) - x_0] + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2s}{s^2 + \Omega^2}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2s}{s^2 + \Omega^2}$$

Factorizando X(s):

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2s}{s^2 + \Omega^2}$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)X(s) - sx_0 - v_0 - 2\xi\omega x_0 = \frac{\mu_0\omega^2s}{s^2 + \Omega^2}$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)X(s) = sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0 + \frac{\mu_0\omega^2s}{s^2 + \Omega^2}$$

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \frac{\mu_0\omega^2s}{(s^2 + \Omega^2)(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)} \quad (11.34)$$

Recordando que $s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)$:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} + \frac{\mu_0\omega^2s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)]} \quad (11.35)$$

11.2.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

Sea el amortiguamiento crítico cuando $\xi = 1$, la ecuación X(s) queda reescrita como:

$$X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2} + \frac{\mu_0\omega^2s}{(s^2 + \Omega^2)(s + \omega)^2} \quad (11.36)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de X(s):

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.37)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2}\right\} = x_0e^{-\omega t} + (\omega x_0 + v_0)te^{-\omega t} \quad (11.38)^{11.4}$$

^{11.4} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$).

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{(s^2 + \Omega^2)(s + \omega)^2} \right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{(s^2 + \Omega^2)(s + \omega)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{(s + \omega)^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s + \omega} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2} \right\} \quad (11.39)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A, B, C y D:

$$\frac{\mu_0 \omega^2 s}{(s^2 + \Omega^2)(s + \omega)^2} = \frac{A}{(s + \omega)^2} + \frac{B}{s + \omega} + \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2}$$

$$\mu_0 \omega^2 s = A(s^2 + \Omega^2) + B(s^2 + \Omega^2)(s + \omega) + (Cs + D)(s + \omega)^2$$

$$\mu_0 \omega^2 s = A(s^2 + \Omega^2) + B(s^2 + \Omega^2)(s + \omega) + (Cs + D)(s^2 + 2\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0 \omega^2 s = As^2 + A\Omega^2 + Bs^3 + B\omega s^2 + B\Omega^2 s + B\omega\Omega^2 + Cs^3 + 2C\omega s^2 + C\omega^2 s + Ds^2 + 2D\omega s + D\omega^2$$

$$\mu_0 \omega^2 s = (B + C)s^3 + (A + B\omega + 2C\omega + D)s^2 + (B\Omega^2 + C\omega^2 + 2D\omega)s + (A\Omega^2 + B\omega\Omega^2 + D\omega^2)$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + B\omega + 2C\omega + D = 0 \\ B\Omega^2 + C\omega^2 + 2D\omega = \mu_0 \omega^2 \\ A\Omega^2 + B\omega\Omega^2 + D\omega^2 = 0 \end{cases}$$

Cuya representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0 \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_F \quad (11.40)$$

La solución por determinar se da con:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_{E^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_F \quad (11.41)$$

Calculando la matriz inversa por:

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} \text{adj}(E)$$

Siendo:

$[E^{-1}]$ = matriz de tamaño $n \times n$ de la cual se le desea conocer su inversa.

$[\det(E)]$ = determinante de la matriz E .

$[\text{adj}(E)]$ = matriz transpuesta de la matriz de cofactores.

Como la matriz a invertir es de tamaño 4×4 , se hace necesario tener una matriz de cofactores de mismo tamaño representada por:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} & -M_{14} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} & -M_{34} \\ -M_{41} & M_{42} & -M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}$$

Donde cada elemento C_{ij} tienen un valor igual a $(-1)^{i+j}M_{ij}$. Los valores C_{ij} son denominados *cofactores de la matriz E* y los elementos M_{ij} reciben el nombre de *menor elemento de la matriz E*. El menor elemento de una matriz queda definido como el determinante de la submatriz que se forma al suprimir el renglón i y la columna j de la matriz E (Anton , 1984, pág. 89).

Calculando todos los menores elementos de la matriz E :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \vdots &= \left| \begin{array}{ccc|cc} \omega & 2\omega & 1 & \omega & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega & \Omega^2 & \omega^2 \\ \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 \end{array} \right| \\
 \vdots &= (\omega^5 + 4\omega^3\Omega^2 + 0) - (\omega^3\Omega^2 + 0 + 2\omega^3\Omega^2) \\
 \vdots &= \omega^5 + 4\omega^3\Omega^2 - 3\omega^3\Omega^2 \\
 &\therefore M_{11} = \omega^5 + \omega^3\Omega^2 = \omega^5 \left(\frac{\omega^5}{\omega^5} + \frac{\omega^3\Omega^2}{\omega^5} \right) = \omega^5(1 + r^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & & \\ \hline 1 & \omega & 2\omega & 1 & & \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega & & \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 & & \end{array} \right] \\
 \vdots &= \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2\omega & 1 & 1 & 2\omega \\ 0 & \omega^2 & 2\omega & 0 & \omega^2 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & \Omega^2 & 0 \end{array} \right| \\
 \vdots &= (\omega^4 + 4\omega^2\Omega^2 + 0) - (\omega^2\Omega^2 + 0 + 0) \\
 \vdots &= \omega^4 + 4\omega^2\Omega^2 - \omega^2\Omega^2 \\
 &\therefore M_{12} = \omega^4 + 3\omega^2\Omega^2 = \omega^4 \left(\frac{\omega^4}{\omega^4} + \frac{3\omega^2\Omega^2}{\omega^4} \right) = \omega^4(1 + 3r^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{13} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & & \\ \hline 1 & \omega & 2\omega & 1 & & \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega & & \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 & & \end{array} \right] \\
 \vdots &= \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & \omega & 1 & 1 & \omega \\ 0 & \Omega^2 & 2\omega & 0 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & \omega^2 & \Omega^2 & \omega\Omega^2 \end{array} \right| \\
 \vdots &= (\omega^2\Omega^2 + 2\omega^2\Omega^2 + 0) - (\Omega^4 + 2\omega^2\Omega^2 + 0) \\
 \vdots &= 3\omega^2\Omega^2 - \Omega^4 - 2\omega^2\Omega^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore M_{13} = \omega^2 \Omega^2 - \Omega^4 = \omega^4 \left(\frac{\omega^2 \Omega^2}{\omega^4} - \frac{\Omega^4}{\omega^4} \right) = \omega^4 (r^2 - r^4)$$

$$M_{14} = \begin{array}{l} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 & \omega \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega & \Omega^2 \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 & \omega\Omega^2 \end{array} \right] \\ \vdots = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & \omega & 2\omega & 1 & \omega \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 0 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \Omega^2 & \omega\Omega^2 \end{array} \right| \\ \vdots = (0 + \omega^3 \Omega^2 + 0) - (2\omega \Omega^4 + \omega^3 \Omega^2 + 0) \\ \vdots = \omega^3 \Omega^2 - 2\omega \Omega^4 - \omega^3 \Omega^2 \end{array}$$

$$\therefore M_{14} = -2\omega \Omega^4 = \omega^5 \left(-\frac{2\omega \Omega^4}{\omega^5} \right) = -2\omega^5 r^4$$

$$M_{21} = \begin{array}{l} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 & \omega \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega & \Omega^2 \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 & \omega\Omega^2 \end{array} \right] \\ \vdots = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega & \Omega^2 & \omega^2 \\ \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 \end{array} \right| \\ \vdots = (\omega^4 + 2\omega^2 \Omega^2 + 0) - (0 + 0 + \omega^2 \Omega^2) \\ \vdots = \omega^4 + 2\omega^2 \Omega^2 - \omega^2 \Omega^2 \end{array}$$

$$\therefore M_{21} = \omega^4 + \omega^2 \Omega^2 = \omega^4 \left(\frac{\omega^4}{\omega^4} + \frac{\omega^2 \Omega^2}{\omega^4} \right) = \omega^4 (1 + r^2)$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & \omega^2 & 2\omega & | & 0 & \omega^2 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & | & \Omega^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vdots = (0 + 2\omega\Omega^2 + 0) - (0 + 0 + 0)$$

$$\vdots = 2\omega\Omega^2$$

$$\therefore M_{22} = \omega^3 \left(\frac{2\omega\Omega^2}{\omega^3} \right) = 2\omega^3 r^2$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & \Omega^2 & 2\omega & | & 0 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & \omega^2 & | & \Omega^2 & \omega\Omega^2 \end{vmatrix}$$

$$\vdots = (0 + 2\omega\Omega^2 + 0) - (0 + 0 + 0)$$

$$\vdots = 2\omega\Omega^2$$

$$\therefore M_{23} = 2\omega\Omega^2 = 2\omega^3 \left(\frac{\omega\Omega^2}{\omega^3} \right) = 2\omega^3 r^2$$

$$M_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & | & 0 & \Omega^2 \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & | & \Omega^2 & \omega\Omega^2 \end{vmatrix}$$

$$\vdots = (0 + \omega^2\Omega^2 + 0) - (\Omega^4 + 0 + 0)$$

$$\vdots = \omega^2\Omega^2 - \Omega^4$$

$$\therefore M_{24} = \omega^2\Omega^2 - \Omega^4 = \omega^4 \left(\frac{\omega^2\Omega^2}{\omega^4} - \frac{\Omega^4}{\omega^4} \right) = \omega^4(r^2 - r^4)$$

$$M_{31} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\vdots = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \omega & 2\omega & 1 & \omega & 2\omega \\ \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 \end{array} \right|$$

$$\vdots = (2\omega^3 + \omega\Omega^2 + 0) - (0 + 0 + \omega^3)$$

$$\vdots = 2\omega^3 + \omega\Omega^2 - \omega^3$$

$$\therefore M_{31} = \omega^3 + \omega\Omega^2 = \omega^3 \left(\frac{\omega^3}{\omega^3} + \frac{\omega\Omega^2}{\omega^3} \right) = \omega^3(1 + r^2)$$

$$M_{32} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\vdots = \left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2\omega & 1 & 1 & 2\omega \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & \Omega^2 & 0 \end{array} \right|$$

$$\vdots = (0 + \Omega^2 + 0) - (0 + 0 + \omega^2)$$

$$\vdots = \Omega^2 - \omega^2$$

$$\therefore M_{32} = \Omega^2 - \omega^2 = \omega^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{\omega^2} \right) = \omega^2(r^2 - 1)$$

$$M_{33} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\vdots = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \omega & 1 & 1 & \omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & \omega^2 & \Omega^2 & \omega\Omega^2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\vdots = (0 + \Omega^2 + 0) - (0 + 0 + \omega^2)$$

$$\vdots = \Omega^2 - \omega^2$$

$$\therefore M_{33} = \Omega^2 - \omega^2 = \omega^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{\omega^2} \right) = \omega^2 (r^2 - 1)$$

$$M_{34} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\vdots = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 & \omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \Omega^2 & \omega\Omega^2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\vdots = (0 + 2\omega\Omega^2 + \omega\Omega^2) - (\omega\Omega^2 + 0 + 0)$$

$$\vdots = 3\omega\Omega^2 - \omega\Omega^2$$

$$\therefore M_{34} = 2\omega\Omega^2 = \omega^3 \left(\frac{2\omega\Omega^2}{\omega^3} \right) = 2\omega^3 r^2$$

$$M_{41} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\vdots = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \omega & 2\omega & 1 & \omega & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega & \Omega^2 & \omega^2 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\vdots = (4\omega^2 + \Omega^2 + 0) - (0 + \omega^2 + 2\omega^2)$$

$$\vdots = 4\omega^2 + \Omega^2 - 3\omega^2$$

$$\therefore M_{41} = \omega^2 + \Omega^2 = \omega^2 \left(\frac{\omega^2}{\omega^2} + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) = \omega^2(1 + r^2)$$

$$M_{42} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 1 & 2\omega & 1 & | & 1 & 2\omega \\ 0 & \omega^2 & 2\omega & | & 0 & \omega^2 \end{vmatrix}$$

$$\vdots = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 2\omega)$$

$$\vdots = 0 - 2\omega$$

$$\therefore M_{42} = -2\omega$$

$$M_{43} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 1 & \omega & 1 & | & 1 & \omega \\ 0 & \Omega^2 & 2\omega & | & 0 & \Omega^2 \end{vmatrix}$$

$$\vdots = (0 + 0 + 0) - (0 + 0 + 2\omega)$$

$$\vdots = -2\omega$$

$$\therefore M_{43} = -2\omega$$

$$M_{44} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 \\ 1 & \omega & 2\omega & | & 1 & \omega \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & | & 0 & \Omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots = (0 + 0 + \Omega^2) - (0 + 0 + \omega^2)$$

$$\vdots = \Omega^2 - \omega^2$$

$$\therefore M_{44} = \Omega^2 - \omega^2 = \omega^2 \left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{\omega^2} \right) = \omega^2(r^2 - 1)$$

Por lo tanto la matriz de cofactores, respetando la definición de cofactor $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, es:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+3r^2) & \omega^4(r^2-r^4) & 2\omega^5r^4 \\ -\omega^4(1+r^2) & 2\omega^3r^2 & -2\omega^3r^2 & \omega^4(r^2-r^4) \\ \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(r^2-1) & \omega^2(r^2-1) & -2\omega^3r^2 \\ -\omega^2(1+r^2) & -2\omega & 2\omega & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix}$$

Al conocer la matriz de cofactores se puede determinar directamente la matriz adjunta como la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\begin{aligned} \text{adj}(E) &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}^t \\ \vdots &= \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \\ \therefore \text{adj}(E) &= \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11.42)$$

Finalmente se puede conocer el determinante de la matriz E mediante el desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna:

$$\det(E) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{nj} C_{nj}$$

O a lo largo del i-ésimo renglón:

$$\det(E) = \sum_{n=1}^{\infty} e_{in} C_{in}$$

Optando por calcular el $\det(E)$ operando el primer renglón, por tener dos elementos iguales a cero, se tiene que:

$$\begin{aligned} \det(E) &= e_{11}C_{11} + e_{12}C_{12} + e_{13}C_{13} + e_{14}C_{14} \\ &: = (0)[\omega^5(1+r^2)] + (1)[- \omega^4(1+3r^2)] + (1)[\omega^4(r^2-r^4)] + (0)[2\omega^5r^4] \\ &: = -\omega^4(1+3r^2) + \omega^4(r^2-r^4) \\ &: = \omega^4(-1-3r^2+r^2-r^4) \\ &: = \omega^4(-r^4-2r^2-1) \\ &: = -\omega^4(r^4+2r^2+1) \\ &\therefore \det(E) = -\omega^4(1+r^2)^2 \end{aligned} \tag{11.43}$$

Teniendo $\text{adj}(E)$ y $\det(E)$ se puede calcular la matriz inversa:

$$\begin{aligned} E^{-1} &= \frac{1}{\det(E)} \text{adj}(E) \\ &: = \frac{1}{-\omega^4(1+r^2)^2} \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \\ \therefore E^{-1} &= -\frac{1}{\omega^4(1+r^2)^2} \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{11.44}$$

Calculada E^{-1} se pueden calcular los valores A, B, C y D mediante la ecuación matricial planteada con anterioridad:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_{E^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}}_F$$

Así que sustituyendo E^{-1} y simplificando se obtienen los valores de vector $X = \{A \ B \ C \ D\}^t$ al operar la multiplicación de matrices $E^{-1}F$.

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{\omega^4(1+r^2)^2} \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= -\frac{\mu_0\omega^2}{\omega^4(1+r^2)^2} \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= -\frac{\mu_0}{\omega^2(1+r^2)^2} \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Como sólo existe un elemento diferente de cero en el lado derecho de la ecuación se facilita mucho el proceso de cálculo porque únicamente deben multiplicarse los elementos ubicados en las posiciones (1, 3), (2, 3), (3, 3) y (4, 3) con el vector $\{0 \ 0 \ 1 \ 0\}^t$.

$$\begin{aligned} \vdots &= -\frac{\mu_0}{\omega^2(1+r^2)^2} \begin{Bmatrix} \omega^3(1+r^2)(1) \\ -\omega^2(r^2-1)(1) \\ \omega^2(r^2-1)(1) \\ -(2\omega^3r^2)(1) \end{Bmatrix} \\ \vdots &= -\frac{\mu_0}{\omega^2(1+r^2)^2} \begin{Bmatrix} \omega^3(1+r^2) \\ -\omega^2(r^2-1) \\ \omega^2(r^2-1) \\ -2\omega^3r^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore &= -\frac{\mu_0 \omega^2}{\omega^2(1+r^2)^2} \begin{Bmatrix} \omega(1+r^2) \\ -(r^2-1) \\ (r^2-1) \\ -2\omega r^2 \end{Bmatrix} \\ \therefore X &= \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = -\frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} \begin{Bmatrix} \omega(1+r^2) \\ 1-r^2 \\ -(1-r^2) \\ -2\omega r^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (11.45)$$

Finalmente los valores son:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\mu_0 \omega(1+r^2)}{(1+r^2)^2} = -\frac{\mu_0 \omega}{1+r^2} \\ B &= -\frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2} \\ C &= \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2} \\ D &= \frac{2\omega r^2 \mu_0}{(1+r^2)^2} \end{aligned}$$

Conocidos A, B, C y D se sustituyen en la ecuación 11.39:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{(s^2 + \Omega^2)(s + \omega)^2} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{(s + \omega)^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s + \omega} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\ \therefore &= -\frac{\mu_0 \omega}{1+r^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \omega)^2} \right\} - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \omega} \right\} \\ &\quad + \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(1-r^2)s + 2\omega r^2}{s^2 + \Omega^2} \right\} \right] \\ \therefore &= -\frac{\mu_0 \omega}{1+r^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \omega)^2} \right\} - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \omega} \right\} \\ &\quad + \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} \left[(1-r^2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \right\} + 2\omega r^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \Omega^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore &= -\frac{\mu_0\omega}{1+r^2}e^{-\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\omega}\right\} \\
 &+ \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2}\left[(1-r^2)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\Omega^2}\right\}+2\omega r^2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\Omega^2}\right\}\right] \\
 \therefore &= -\frac{\mu_0\omega}{1+r^2}e^{-\omega t}t-\frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2}e^{-\omega t} \\
 &+ \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2}\left[(1-r^2)\cos(\Omega t)+2\omega r^2\frac{\text{sen}(\Omega t)}{\Omega}\right] \\
 \therefore &= -\frac{\mu_0\omega}{1+r^2}e^{-\omega t}t-\frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2}e^{-\omega t} \\
 &+ \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2}\left[(1-r^2)\cos(\Omega t)+2r^2\underbrace{\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)}_{r^{-1}}\text{sen}(\Omega t)\right] \\
 \therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2s}{(s^2+\Omega^2)(s+\omega)^2}\right\} &= -\frac{\mu_0e^{-\omega t}}{1+r^2}\left(\omega t+\frac{1-r^2}{1+r^2}\right) \\
 &+ \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2}[(1-r^2)\cos(\Omega t)+2r\text{sen}(\Omega t)]
 \end{aligned} \tag{11.46}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.36 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0e^{-\omega t}+(\omega\mathbf{x}_0+\mathbf{v}_0)t e^{-\omega t}-\frac{\mu_0e^{-\omega t}}{1+r^2}\left(\omega t+\frac{1-r^2}{1+r^2}\right) \\
 &+ \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2}[(1-r^2)\cos(\Omega t)+2r\text{sen}(\Omega t)]
 \end{aligned} \tag{11.47}$$

Factorizando los términos en función de $te^{-\omega t}$ y $e^{-\omega t}$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $\mathbf{x}(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $te^{-\omega t}$ que se asocian a H_1 :

$$H_1 = \omega\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 - \frac{\mu_0\omega}{1+r^2}$$

Denotando los términos con $e^{-\omega t}$ que se asocian a H_2 :

$$H_2 = x_0 - \frac{\mu_0}{1+r^2} \left(\frac{1-r^2}{1+r^2} \right) = x_0 - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)(1+r^2)} = x_0 - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2}$$

$$\therefore H_2 = x_0 - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2}$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.49):

$$x(t) = H_1 t e^{-\omega t} + H_2 e^{-\omega t} + \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \cos(\Omega t) + 2r \text{sen}(\Omega t)] \quad (11.48)$$

$$H_1 = v_0 + x_0 \omega - \frac{\mu_0 \omega}{1+r^2} \quad ; \quad H_2 = x_0 - \frac{\mu_0(1-r^2)}{(1+r^2)^2}$$

11.2.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

Sea el sobreamortiguamiento cuando $\xi > 1$ y la frecuencia sobreamortiguada $\omega_D^2 = \omega^2(\xi^2 - 1)$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$\therefore X(s) = \frac{s x_0 + v_0 + 2\xi \omega x_0}{(s + \xi \omega)^2 - \omega_D^2} + \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi \omega)^2 - \omega_D^2]} \quad (11.49)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.50)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s x_0 + v_0 + 2\xi \omega x_0}{(s + \xi \omega)^2 - \omega_D^2} \right\} = e^{-\xi \omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi \omega x_0 + v_0}{\omega_D} \right) \text{senh}(\omega_D t) \right] \quad (11.51)^{11.5}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi \omega)^2 - \omega_D^2]} \right\}$$

^{11.5} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$).

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2} \right\} \quad (11.52)^{11.6}$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A, B, C y E:

$$\frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} = \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} + \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2}$$

$$\mu_0 \omega^2 s = [As + B][s^2 + \Omega^2] + [Cs + E][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]$$

$$\mu_0 \omega^2 s = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2] + E[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]$$

$$\text{Recordando que } s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2) = (s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2$$

$$\mu_0 \omega^2 s = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) + E(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0 \omega^2 s = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs^3 + 2C\xi\omega s^2 + Cs\omega^2 + Es^2 + 2E\xi\omega s + E\omega^2$$

$$\mu_0 \omega^2 s = (A + C)s^3 + (B + 2C\xi\omega + E)s^2 + (A\Omega^2 + C\omega^2 + 2E\xi\omega)s + B\Omega^2 + E\omega^2$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C\xi\omega + E = 0 \\ A\Omega^2 + C\omega^2 + 2E\xi\omega = \mu_0 \omega^2 \\ B\Omega^2 + E\omega^2 = 0 \end{cases}$$

Cuya representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0 \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_G \quad (11.53)$$

^{11.6} No se selecciona D para que no se confunda con el factor de amplificación dinámica que se hará presente durante este apartado.

La solución por determinar se da con:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_{F^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_G \quad (11.54)$$

Calculando la matriz inversa por cofactores como el ejercicio anterior con:

$$F^{-1} = \frac{1}{\det(F)} \text{adj}(F)$$

Y sabiendo que la matriz de cofactores y de menores elementos para una matriz inversa de tamaño 4 x 4 es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz} \\ \text{de} \\ \text{Cofactores}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} & -M_{14} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} & -M_{34} \\ -M_{41} & M_{42} & -M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Matriz} \\ \text{de} \\ \text{Menores} \\ \text{Elementos}}}$$

Se tiene que:

$$\left[\begin{array}{cccc} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2\xi\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{ccc} 0 & 2\xi\omega & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ \Omega^2 & 0 & 2\xi\omega \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2\xi\omega \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 \\ 0 & \Omega^2 & 0 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ \Omega^2 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \Omega^2 & 0 & 2\xi\omega \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 \\ 0 & \Omega^2 & 0 \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\xi\omega & 1 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega \\ 0 & \Omega^2 & 0 \end{array} \right| \\ - \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2\xi\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\xi\omega & 1 \\ \Omega^2 & \omega^2 & 2\xi\omega \end{array} \right| & - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \Omega^2 & 0 & 2\xi\omega \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{array} \right| \end{array} \right]$$

Calculados los determinantes la matriz de cofactores resultante es:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega^2 \omega^2 (4\xi^2 - 1) + \omega^4 & 2\xi \omega^3 \Omega^2 & \Omega^4 - \omega^2 \Omega^2 & -2\xi \omega \Omega^4 \\ -2\xi \omega \Omega^2 & \omega^4 - \Omega^2 \omega^2 & 2\xi \omega \Omega^2 & \Omega^4 - \omega^2 \Omega^2 \\ \Omega^2 - \omega^2 & -2\xi \omega^3 & \omega^2 - \Omega^2 & 2\xi \omega \Omega^2 \\ 2\xi \omega & \Omega^2 + \omega^2 (4\xi^2 - 1) & -2\xi \omega & \omega^2 - \Omega^2 \end{bmatrix}$$

Calculando $\det(F)$ utilizando la primer columna:

$$\begin{aligned} \det(F) &= f_{11}C_{11} + f_{12}C_{12} + f_{13}C_{13} + f_{14}C_{14} \\ &: = (1)[\Omega^2 \omega^2 (4\xi^2 - 1) + \omega^4] + (0)(2\xi \omega^3 \Omega^2) + (1)(\Omega^4 - \omega^2 \Omega^2) + (0)(-2\xi \omega \Omega^4) \\ &: = \Omega^2 \omega^2 (4\xi^2 - 1) + \omega^4 + \Omega^4 - \omega^2 \Omega^2 \\ &: = 4\xi^2 \omega^2 \Omega^2 - \omega^2 \Omega^2 + \omega^4 + \Omega^4 - \omega^2 \Omega^2 \\ &: = 4\xi^2 \omega^2 \Omega^2 - 2\omega^2 \Omega^2 + \omega^4 + \Omega^4 \\ &: = \omega^4 \left(\frac{4\xi^2 \omega^2 \Omega^2}{\omega^4} - \frac{2\omega^2 \Omega^2}{\omega^4} + \frac{\omega^4}{\omega^4} + \frac{\Omega^4}{\omega^4} \right) \\ &: = \omega^4 \left(\frac{4\xi^2 \Omega^2}{\omega^2} - \frac{2\Omega^2}{\omega^2} + 1 + \frac{\Omega^4}{\omega^4} \right) \\ &: = \omega^4 (4\xi^2 r^2 - 2r^2 + 1 + r^4) \\ &: = \omega^4 [(1 - 2r^2 + r^4) + (4\xi^2 r^2)] \\ &\therefore \det(F) = \omega^4 [(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2] \end{aligned}$$

Recordando la definición del factor de amplificación dinámico con amortiguamiento:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad \rightarrow \quad D^{-2} = (1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2$$

$\det(F)$ se escribe como:

$$\det(F) = \omega^4 D^{-2} \tag{11.55}$$

Al conocer la matriz de cofactores se puede determinar directamente la matriz adjunta como la matriz transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\therefore \text{adj}(F) = \begin{bmatrix} \Omega^2 \omega^2 (4\xi^2 - 1) + \omega^4 & -2\xi \omega \Omega^2 & \Omega^2 - \omega^2 & 2\xi \omega \\ 2\xi \omega^3 \Omega^2 & \omega^4 - \Omega^2 \omega^2 & -2\xi \omega^3 & \Omega^2 + \omega^2 (4\xi^2 - 1) \\ \Omega^4 - \omega^2 \Omega^2 & 2\xi \omega \Omega^2 & \omega^2 - \Omega^2 & -2\xi \omega \\ -2\xi \omega \Omega^4 & \Omega^4 - \omega^2 \Omega^2 & 2\xi \omega \Omega^2 & \omega^2 - \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (11.56)$$

Teniendo $\text{adj}(F)$ y $\det(F)$ se puede calcular la matriz inversa:

$$F^{-1} = \frac{1}{\det(F)} \text{adj}(F)$$

$$\therefore F^{-1} = \frac{D^2}{\omega^4} \begin{bmatrix} \Omega^2 \omega^2 (4\xi^2 - 1) + \omega^4 & -2\xi \omega \Omega^2 & \Omega^2 - \omega^2 & 2\xi \omega \\ 2\xi \omega^3 \Omega^2 & \omega^4 - \Omega^2 \omega^2 & -2\xi \omega^3 & \Omega^2 + \omega^2 (4\xi^2 - 1) \\ \Omega^4 - \omega^2 \Omega^2 & 2\xi \omega \Omega^2 & \omega^2 - \Omega^2 & -2\xi \omega \\ -2\xi \omega \Omega^4 & \Omega^4 - \omega^2 \Omega^2 & 2\xi \omega \Omega^2 & \omega^2 - \Omega^2 \end{bmatrix} \quad (11.57)$$

Haciendo que F^{-1} esté en función de ξ , ω y r :

$$\therefore F^{-1} = \frac{D^2}{\omega^4} \begin{bmatrix} \omega^4 [(4\xi^2 - 1)r^2 + 1] & -2\xi \omega^3 r^2 & \omega^2 (r^2 - 1) & 2\xi \omega \\ 2\xi \omega^5 r^2 & \omega^4 (1 - r^2) & -2\xi \omega^3 & \omega^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1) \\ \omega^4 (r^4 - r^2) & 2\xi \omega^3 r^2 & \omega^2 (1 - r^2) & -2\xi \omega \\ -2\xi \omega^5 r^4 & \omega^4 (r^4 - r^2) & 2\xi \omega^3 r^2 & \omega^2 (1 - r^2) \end{bmatrix} \quad (11.58)$$

Calculada F^{-1} se pueden calcular los valores A, B, C y E mediante la ecuación matricial planteada con anterioridad:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{Bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi \omega & 1 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi \omega \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{F^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0 \omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}}_G$$

Así que sustituyendo F^{-1} y simplificando se obtienen los valores de vector X al operar la multiplicación de matrices $F^{-1}G$.

$$X = \frac{D^2}{\omega^4} \begin{bmatrix} \omega^4 [(4\xi^2 - 1)r^2 + 1] & -2\xi \omega^3 r^2 & \omega^2 (r^2 - 1) & 2\xi \omega \\ 2\xi \omega^5 r^2 & \omega^4 (1 - r^2) & -2\xi \omega^3 & \omega^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1) \\ \omega^4 (r^4 - r^2) & 2\xi \omega^3 r^2 & \omega^2 (1 - r^2) & -2\xi \omega \\ -2\xi \omega^5 r^4 & \omega^4 (r^4 - r^2) & 2\xi \omega^3 r^2 & \omega^2 (1 - r^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0 \omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{\mu_0 \omega^2 D^2}{\omega^4} \begin{bmatrix} \omega^4[(4\xi^2 - 1)r^2 + 1] & -2\xi\omega^3 r^2 & \omega^2(r^2 - 1) & 2\xi\omega \\ 2\xi\omega^5 r^2 & \omega^4(1 - r^2) & -2\xi\omega^3 & \omega^2(r^2 + 4\xi^2 - 1) \\ \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3 r^2 & \omega^2(1 - r^2) & -2\xi\omega \\ -2\xi\omega^5 r^4 & \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3 r^2 & \omega^2(1 - r^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \frac{\mu_0 D^2}{\omega^2} \begin{bmatrix} \omega^4[(4\xi^2 - 1)r^2 + 1] & -2\xi\omega^3 r^2 & \omega^2(r^2 - 1) & 2\xi\omega \\ 2\xi\omega^5 r^2 & \omega^4(1 - r^2) & -2\xi\omega^3 & \omega^2(r^2 + 4\xi^2 - 1) \\ \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3 r^2 & \omega^2(1 - r^2) & -2\xi\omega \\ -2\xi\omega^5 r^4 & \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3 r^2 & \omega^2(1 - r^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Como sólo existe un elemento diferente se cero en el lado derecho de la ecuación se facilita mucho el proceso de cálculo porque únicamente deben multiplicarse los elementos ubicados en las posiciones (1, 3), (2, 3), (3, 3) y (4, 3) con el vector $\{0 \ 0 \ 1 \ 0\}^t$.

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{\mu_0 D^2}{\omega^2} \begin{Bmatrix} \omega^2(r^2 - 1)(1) \\ (-2\xi\omega^3)(1) \\ \omega^2(1 - r^2)(1) \\ (2\xi\omega^3 r^2)(1) \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \frac{\mu_0 D^2}{\omega^2} \begin{Bmatrix} \omega^2(r^2 - 1) \\ -2\xi\omega^3 \\ \omega^2(1 - r^2) \\ 2\xi\omega^3 r^2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore X = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{Bmatrix} = \mu_0 D^2 \begin{Bmatrix} r^2 - 1 \\ -2\xi\omega \\ 1 - r^2 \\ 2\xi\omega r^2 \end{Bmatrix} \quad (11.59)$$

Finalmente los valores son:

$$A = -\mu_0 D^2(1 - r^2)$$

$$B = -2\xi\omega\mu_0 D^2$$

$$C = \mu_0 D^2(1 - r^2)$$

$$E = 2\xi\omega r^2 \mu_0 D^2$$

Conocidos A, B, C y E se sustituyen en la ecuación 11.52:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \right\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\}}_{\text{TI}_1} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2} \right\}}_{\text{TI}_2} \quad (11.60)$$

Resolviendo TI_1 :

$$\begin{aligned} \text{TI}_1 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\ &: = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\mu_0 D^2 (1 - r^2) s - 2\xi\omega\mu_0 D^2}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\ &: = -\mu_0 D^2 (1 - r^2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} - 2\xi\omega\mu_0 D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\ &: = -\mu_0 D^2 (1 - r^2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega - \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\ &: = -\mu_0 D^2 (1 - r^2) \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \right] \\ &\quad - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\ &: = -\mu_0 D^2 (1 - r^2) \left[e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - \omega_D^2} \right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 - \omega_D^2} \right\} \right] \\ &\quad - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 - \omega_D^2} \right\} \\ &: = -\mu_0 D^2 (1 - r^2) \left[e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \right] \\ &\quad - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \\ \therefore \text{TI}_1 &= -\mu_0 D^2 (1 - r^2) e^{-\xi\omega t} \left[\cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) \right] - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \end{aligned}$$

Resolviendo TI_2 :

$$\begin{aligned}
 TI_2 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 &\vdots = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 D^2 (1 - r^2) s + 2\xi \omega r^2 \mu_0 D^2}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 &\vdots = \mu_0 D^2 (1 - r^2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \right\} + 2\xi \omega r^2 \mu_0 D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 &\vdots = \mu_0 D^2 (1 - r^2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \right\} + 2\xi r^2 \mu_0 D^2 \underbrace{\left(\frac{\omega}{\Omega} \right)}_{r^{-1}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 &\vdots = \mu_0 D^2 (1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \mu_0 D^2 \sin(\Omega t) \\
 &\quad \therefore TI_2 = \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)]
 \end{aligned}$$

Sabiendo TI_1 y TI_2 se sustituyen en la ecuación 11.60:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \right\} &= -\mu_0 D^2 (1 - r^2) e^{-\xi\omega t} \left[\cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) \right] \\
 &\quad - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \\
 &\quad + \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)]
 \end{aligned} \tag{11.61}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.49 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} \right) \sinh(\omega_D t) \right] \\
 &\quad - \mu_0 D^2 (1 - r^2) e^{-\xi\omega t} \left[\cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) \right] \\
 &\quad - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) + \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)]
 \end{aligned} \tag{11.62}$$

Factorizando los términos en función de $e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t)$ y $e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t)$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $x(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t)$ que se asocian a H_1 :

$$\therefore H_1 = x_0 - \mu_0 D^2(1 - r^2)$$

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t)$ que se asocian a H_2 :

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} - \mu_0 D^2(1 - r^2) \left(-\frac{\xi\omega}{\omega_D}\right) - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} \\ &\therefore = \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0 \xi\omega D^2(1 - r^2)}{\omega_D} - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} \\ &\therefore = \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0 \xi\omega D^2 - \mu_0 \xi\omega r^2 D^2}{\omega_D} - \frac{2\mu_0 \xi\omega D^2}{\omega_D} \\ &\therefore = \frac{\xi\omega x_0 + v_0 + \mu_0 \xi\omega D^2 - 2\mu_0 \xi\omega D^2 - \mu_0 \xi\omega r^2 D^2}{\omega_D} \\ &\therefore = \frac{\xi\omega x_0 + v_0 - \mu_0 \xi\omega D^2 - \mu_0 \xi\omega r^2 D^2}{\omega_D} \\ &\therefore = \frac{v_0 + \xi\omega[x_0 - \mu_0 D^2(1 + r^2)]}{\omega_D} \end{aligned}$$

$$\therefore H_2 = \frac{v_0 + \xi\omega[x_0 - \mu_0 D^2(1 + r^2)]}{\omega_D}$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.55):

$$\begin{aligned} \mathbf{x(t)} &= \mathbf{e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)]} \\ &\quad + \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)] \end{aligned} \tag{11.63}$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{\xi^2 - 1} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$$H_1 = x_0 - \mu_0 D^2(1 - r^2) \quad ; \quad H_2 = \frac{v_0 + \xi\omega[x_0 - \mu_0 D^2(1 + r^2)]}{\omega_D}$$

11.2.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

Sea el subamortiguamiento cuando $\xi < 1$ y la frecuencia subamortiguada $\omega_D^2 = \omega^2(1 - \xi^2)$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} + \frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \quad (11.64)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.65)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right) \text{sen}(\omega_D t) \right] \quad (11.66)^{11.7}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2}\right\} \quad (11.67)^{11.8}$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A , B , C y E :

$$\frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} = \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} + \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2}$$

$$\mu_0\omega^2 s = [As + B][s^2 + \Omega^2] + [Cs + E][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]$$

$$\mu_0\omega^2 s = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2] + E[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]$$

^{11.7} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$).

^{11.8} No se selecciona D para que no se confunda con el factor de amplificación dinámico que se hará presente durante este apartado.

Recordando que $s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2) = (s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2$

$$\mu_0\omega^2 s = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) + E(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0\omega^2 s = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs^3 + 2C\xi\omega s^2 + Cs\omega^2 + Es^2 + 2E\xi\omega s + E\omega^2$$

$$\mu_0\omega^2 s = (A + C)s^3 + (B + 2C\xi\omega + E)s^2 + (A\Omega^2 + C\omega^2 + 2E\xi\omega)s + B\Omega^2 + E\omega^2$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C\xi\omega + E = 0 \\ A\Omega^2 + C\omega^2 + 2E\xi\omega = \mu_0\omega^2 \\ B\Omega^2 + E\omega^2 = 0 \end{cases}$$

Cuya representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_G \quad (11.68)$$

La solución a este sistema se dio cuando se calculó la respuesta sobreamortiguada de este ejercicio generando los valores:

$$A = -\mu_0 D^2 (1 - r^2)$$

$$B = -2\xi\omega\mu_0 D^2$$

$$C = \mu_0 D^2 (1 - r^2)$$

$$E = 2\xi\omega r^2 \mu_0 D^2$$

Conocidos A, B, C y E se sustituyen en la ecuación 11.67:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \right\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\}}_{TI_1} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2} \right\}}_{TI_2} \quad (11.69)$$

Resolviendo TI_1 :

$$\begin{aligned}
 TI_1 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 \therefore &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\mu_0 D^2 (1 - r^2) s - 2\xi\omega\mu_0 D^2}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 \therefore &= -\mu_0 D^2 (1 - r^2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} - 2\xi\omega\mu_0 D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 \therefore &= -\mu_0 D^2 (1 - r^2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega - \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 \therefore &= -\mu_0 D^2 (1 - r^2) \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \right] \\
 &\quad - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 \therefore &= -\mu_0 D^2 (1 - r^2) \left[e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_D^2} \right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 + \omega_D^2} \right\} \right] \\
 &\quad - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 \therefore &= -\mu_0 D^2 (1 - r^2) \left[e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t) \right] \\
 &\quad - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t) \\
 \therefore TI_1 &= -\mu_0 D^2 (1 - r^2) e^{-\xi\omega t} \left[\cos(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \text{sen}(\omega_D t) \right] - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t)
 \end{aligned}$$

Resolviendo TI_2 :

$$TI_2 = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 D^2 (1 - r^2) s + 2\xi \omega r^2 \mu_0 D^2}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 \therefore &= \mu_0 D^2 (1 - r^2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \right\} + 2\xi \omega r^2 \mu_0 D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 \therefore &= \mu_0 D^2 (1 - r^2) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \right\} + 2\xi r^2 \mu_0 D^2 \underbrace{\left(\frac{\omega}{\Omega} \right)}_{r^{-1}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 \therefore &= \mu_0 D^2 (1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \mu_0 D^2 \sin(\Omega t) \\
 \therefore \quad TI_2 &= \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)]
 \end{aligned}$$

Sabiendo TI_1 y TI_2 se sustituyen en la ecuación 11.67:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \right\} &= -\mu_0 D^2 (1 - r^2) e^{-\xi\omega t} \left[\cos(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right] \\
 &\quad - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t) \\
 &\quad + \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)]
 \end{aligned} \tag{11.70}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.64 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[\mathbf{x}_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0}{\omega_D} \right) \mathbf{sen}(\omega_D t) \right] \\
 &\quad - \mu_0 D^2 (1 - r^2) e^{-\xi\omega t} \left[\cos(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \sin(\omega_D t) \right] - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t) \\
 &\quad + \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \sin(\Omega t)]
 \end{aligned} \tag{11.71}$$

Factorizando los términos en función de $e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t)$ y $e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t)$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $\mathbf{x}(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t)$ que se asocian a H_1 :

$$\therefore H_1 = \mathbf{x}_0 - \mu_0 D^2 (1 - r^2)$$

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t)$ que se asocian a H_2 :

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} - \mu_0 D^2(1 - r^2) \left(-\frac{\xi\omega}{\omega_D} \right) - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} \\
 \vdots &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0 \xi\omega D^2(1 - r^2)}{\omega_D} - \frac{2\xi\omega\mu_0 D^2}{\omega_D} \\
 \vdots &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0 \xi\omega D^2 - \mu_0 \xi\omega r^2 D^2}{\omega_D} - \frac{2\mu_0 \xi\omega D^2}{\omega_D} \\
 \vdots &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0 + \mu_0 \xi\omega D^2 - 2\mu_0 \xi\omega D^2 - \mu_0 \xi\omega r^2 D^2}{\omega_D} \\
 \vdots &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0 - \mu_0 \xi\omega D^2 - \mu_0 \xi\omega r^2 D^2}{\omega_D} \\
 \vdots &= \frac{v_0 + \xi\omega[x_0 - \mu_0 D^2(1 + r^2)]}{\omega_D} \\
 \therefore H_2 &= \frac{v_0 + \xi\omega[x_0 - \mu_0 D^2(1 + r^2)]}{\omega_D}
 \end{aligned}$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.56):

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \text{sen}(\omega_D t)] + \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \cos(\Omega t) + 2\xi r \text{sen}(\Omega t)] \quad (11.72)$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$$H_1 = x_0 - \mu_0 D^2(1 - r^2) \quad ; \quad H_2 = \frac{v_0 + \xi\omega[x_0 - \mu_0 D^2(1 + r^2)]}{\omega_D}$$

11.3 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \text{sen}(\Omega t)$

La EDO por resolver es $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x\} = \mathcal{L}\{\mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\text{sen}(\Omega t)\} \quad (11.73)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x}\} &= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \\ \vdots &= s^2X(s) - sx_0 - v_0 \\ \therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} &= s^2X(s) - sx_0 - v_0 \end{aligned} \quad (11.74)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s) - x(0) \\ \vdots &= sX(s) - x_0 \\ \therefore \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s) - x_0 \end{aligned} \quad (11.75)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) \quad (11.76)$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(\Omega t)\} = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \quad (11.77)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\text{sen}(\Omega t)\}$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\text{sen}(\Omega t)\}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega[sX(s) - x_0] + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

Factorizando $X(s)$:

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)X(s) - sx_0 - v_0 - 2\xi\omega x_0 = \frac{\mu_0\omega^2\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)X(s) = sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0 + \frac{\mu_0\omega^2\Omega}{s^2 + \Omega^2}$$

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \frac{\mu_0\omega^2\Omega}{(s^2 + \Omega^2)(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)} \quad (11.78)$$

Recordando que $s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)$:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} + \frac{\mu_0\omega^2\Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)]} \quad (11.79)$$

11.3.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

Sea el amortiguamiento crítico cuando $\xi = 1$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2} + \frac{\mu_0\omega^2\Omega}{(s^2 + \Omega^2)(s + \omega)^2} \quad (11.80)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.81)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2}\right\} = x_0 e^{-\omega t} + (\omega x_0 + v_0)te^{-\omega t} \quad (11.82)^{11.9}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2\Omega}{(s^2 + \Omega^2)(s + \omega)^2}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

^{11.9} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{(s^2 + \Omega^2)(s + \omega)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{(s + \omega)^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s + \omega} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2} \right\} \quad (11.83)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A, B, C y D:

$$\frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{(s^2 + \Omega^2)(s + \omega)^2} = \frac{A}{(s + \omega)^2} + \frac{B}{s + \omega} + \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2}$$

$$\mu_0 \omega^2 \Omega = A(s^2 + \Omega^2) + B(s^2 + \Omega^2)(s + \omega) + (Cs + D)(s + \omega)^2$$

$$\mu_0 \omega^2 \Omega = A(s^2 + \Omega^2) + B(s^2 + \Omega^2)(s + \omega) + (Cs + D)(s^2 + 2\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0 \omega^2 \Omega = As^2 + A\Omega^2 + Bs^3 + B\omega s^2 + B\Omega^2 s + B\omega\Omega^2 + Cs^3 + 2C\omega s^2 + C\omega^2 s + Ds^2 + 2D\omega s + D\omega^2$$

$$\mu_0 \omega^2 \Omega = (B + C)s^3 + (A + B\omega + 2C\omega + D)s^2 + (B\Omega^2 + C\omega^2 + 2D\omega)s + (A\Omega^2 + B\omega\Omega^2 + D\omega^2)$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + B\omega + 2C\omega + D = 0 \\ B\Omega^2 + C\omega^2 + 2D\omega = 0 \\ A\Omega^2 + B\omega\Omega^2 + D\omega^2 = \mu_0 \omega^2 \Omega \end{cases}$$

Cuya representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0 \omega^2 \Omega \end{pmatrix}}_F \quad (11.84)$$

La solución por determinar se da con:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1}}_{E^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0 \omega^2 \Omega \end{pmatrix}}_F \quad (11.85)$$

El valor de E^{-1} es:

$$E^{-1} = -\frac{1}{\omega^4(1+r^2)^2} \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \quad (11.86)^{11.10}$$

Calculada E^{-1} se pueden calcular los valores A, B, C y D mediante la ecuación matricial planteada con anterioridad:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \Omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \Omega^2 & \omega\Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_{E^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2\Omega \end{pmatrix}}_F$$

Así que sustituyendo E^{-1} y simplificando se obtienen los valores de vector X al operar la multiplicación de matrices $E^{-1}F$.

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{\omega^4(1+r^2)^2} \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2\Omega \end{pmatrix} \\ &\vdots = -\frac{\mu_0\omega^2\Omega}{\omega^4(1+r^2)^2} \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\vdots = -\frac{\mu_0\Omega}{\omega^2(1+r^2)^2} \begin{bmatrix} \omega^5(1+r^2) & -\omega^4(1+r^2) & \omega^3(1+r^2) & -\omega^2(1+r^2) \\ -\omega^4(1+3r^2) & 2\omega^3r^2 & -\omega^2(r^2-1) & -2\omega \\ \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) & 2\omega \\ 2\omega^5r^4 & \omega^4(r^2-r^4) & -2\omega^3r^2 & \omega^2(r^2-1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como sólo existe un elemento diferente se cero en el lado derecho de la ecuación se facilita mucho el proceso de cálculo porque únicamente deben multiplicarse los elementos ubicados en las posiciones (1, 4), (2, 4), (3, 4) y (4, 4) con el vector $\{0 \ 0 \ 0 \ 1\}^t$.

^{11.10} La matriz E^{-1} fue calculada en el apartado 11.2.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$) cuando se resolvió la EDO $\ddot{x} + 2\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$.

$$\begin{aligned}
 \vdots &= -\frac{\mu_0 \Omega}{\omega^2(1+r^2)^2} \begin{Bmatrix} -\omega^2(1+r^2)(1) \\ (-2\omega)(1) \\ (2\omega)(1) \\ \omega^2(r^2-1)(1) \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0 \Omega}{\omega^2(1+r^2)^2} \begin{Bmatrix} -\omega^2(1+r^2) \\ -2\omega \\ 2\omega \\ \omega^2(r^2-1) \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0 \omega \Omega}{\omega^2(1+r^2)^2} \begin{Bmatrix} -\omega(1+r^2) \\ -2 \\ 2 \\ \omega(r^2-1) \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0 \Omega}{\omega(1+r^2)^2} \begin{Bmatrix} -\omega(1+r^2) \\ -2 \\ 2 \\ \omega(r^2-1) \end{Bmatrix} \\
 \therefore X &= \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = -\frac{\mu_0 r}{(1+r^2)^2} \begin{Bmatrix} -\omega(1+r^2) \\ -2 \\ 2 \\ \omega(r^2-1) \end{Bmatrix} \tag{11.87}
 \end{aligned}$$

Finalmente los valores son:

$$A = \frac{\omega(1+r^2)\mu_0 r}{(1+r^2)^2} = \frac{\omega\mu_0 r}{1+r^2}$$

$$B = \frac{2\mu_0 r}{(1+r^2)^2}$$

$$C = -\frac{2\mu_0 r}{(1+r^2)^2}$$

$$D = -\frac{\omega(r^2-1)\mu_0 r}{(1+r^2)^2}$$

Conocidos A, B, C y D se sustituyen en la ecuación 11.83:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{(s^2 + \Omega^2)(s + \omega)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{(s + \omega)^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s + \omega} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + D}{s^2 + \Omega^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots = \frac{\omega\mu_0r}{1+r^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+\omega)^2} \right\} + \frac{2\mu_0r}{(1+r^2)^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\omega} \right\} \\
 & \quad - \frac{\mu_0r}{(1+r^2)^2} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s+\omega(r^2-1)}{s^2+\Omega^2} \right\} \right] \\
 & \vdots = \frac{\omega\mu_0r}{1+r^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+\omega)^2} \right\} + \frac{2\mu_0r}{(1+r^2)^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\omega} \right\} \\
 & \quad - \frac{\mu_0r}{(1+r^2)^2} \left[2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+\Omega^2} \right\} + \omega(r^2-1) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+\Omega^2} \right\} \right] \\
 & \vdots = \frac{\omega\mu_0r}{1+r^2} e^{-\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} + \frac{2\mu_0r}{(1+r^2)^2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\omega} \right\} \\
 & \quad - \frac{\mu_0r}{(1+r^2)^2} \left[2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+\Omega^2} \right\} + \omega(r^2-1) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+\Omega^2} \right\} \right] \\
 & \vdots = \frac{\omega\mu_0r}{1+r^2} e^{-\omega t} t + \frac{2\mu_0r}{(1+r^2)^2} e^{-\omega t} \\
 & \quad - \frac{\mu_0r}{(1+r^2)^2} \left[2 \cos(\Omega t) + \omega(r^2-1) \frac{\text{sen}(\Omega t)}{\Omega} \right] \\
 & \vdots = \frac{\omega\mu_0r}{1+r^2} e^{-\omega t} t + \frac{2\mu_0r}{(1+r^2)^2} e^{-\omega t} \\
 & \quad - \frac{\mu_0r}{(1+r^2)^2} \left[2 \cos(\Omega t) + (r^2-1) \underbrace{\left(\frac{\omega}{\Omega} \right)}_{r^{-1}} \text{sen}(\Omega t) \right] \\
 & \vdots = \frac{\omega\mu_0r}{1+r^2} e^{-\omega t} t + \frac{2\mu_0r}{(1+r^2)^2} e^{-\omega t} \\
 & \quad - \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [2r \cos(\Omega t) + (r^2-1) \text{sen}(\Omega t)] \\
 \therefore \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0\omega^2 s}{(s^2+\Omega^2)(s+\omega)^2} \right\} &= \frac{\mu_0 r e^{-\omega t}}{1+r^2} \left(\omega t + \frac{2}{1+r^2} \right) \\
 & \quad - \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [2r \cos(\Omega t) + (r^2-1) \text{sen}(\Omega t)]
 \end{aligned} \tag{11.88}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.80 se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = & \mathbf{x}_0 \mathbf{e}^{-\omega t} + (\omega \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0) t \mathbf{e}^{-\omega t} + \frac{\mu_0 r \mathbf{e}^{-\omega t}}{1+r^2} \left(\omega t + \frac{2}{1+r^2} \right) \\ & - \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [2r \cos(\Omega t) + (r^2 - 1) \text{sen}(\Omega t)] \end{aligned} \quad (11.89)$$

Factorizando los términos en función de $t \mathbf{e}^{-\omega t}$ y $\mathbf{e}^{-\omega t}$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $\mathbf{x}(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $t \mathbf{e}^{-\omega t}$ que se asocian a H_1 :

$$\therefore H_1 = \mathbf{v}_0 + \omega \mathbf{x}_0 + \frac{\mu_0 r \omega}{1+r^2}$$

Denotando los términos con $\mathbf{e}^{-\omega t}$ que se asocian a H_2 :

$$H_2 = \mathbf{x}_0 + \frac{\mu_0 r}{1+r^2} \left(\frac{2}{1+r^2} \right) = \mathbf{x}_0 + \frac{2\mu_0 r}{(1+r^2)(1+r^2)} = \mathbf{x}_0 + \frac{2\mu_0 r}{(1+r^2)^2}$$

$$\therefore H_2 = \mathbf{x}_0 + \frac{2\mu_0 r}{(1+r^2)^2}$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.76):

$$\mathbf{x}(t) = H_1 t \mathbf{e}^{-\omega t} + H_2 \mathbf{e}^{-\omega t} + \frac{\mu_0}{(1+r^2)^2} [(1-r^2) \cos(\Omega t) + 2r \text{sen}(\Omega t)] \quad (11.90)$$

$$H_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{x}_0 \omega + \frac{\mu_0 r \omega}{1+r^2} \quad ; \quad H_2 = \mathbf{x}_0 + \frac{2\mu_0 r}{(1+r^2)^2}$$

11.3.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

Sea el sobreamortiguamiento cuando $\xi > 1$ y la frecuencia sobreamortiguada $\omega_D^2 = \omega^2(\xi^2 - 1)$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$\therefore X(s) = \frac{s \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 + 2\xi \omega \mathbf{x}_0}{(s + \xi \omega)^2 - \omega_D^2} + \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi \omega)^2 - \omega_D^2]} \quad (11.91)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.92)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right) \sinh(\omega_D t) \right] \quad (11.93)^{11.11}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2\Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2\Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2}\right\} \quad (11.94)^{11.12}$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A, B, C y E:

$$\frac{\mu_0\omega^2\Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} = \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} + \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2}$$

$$\mu_0\omega^2\Omega = [As + B][s^2 + \Omega^2] + [Cs + E][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]$$

$$\mu_0\omega^2\Omega = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2] + E[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]$$

$$\text{Recordando que } s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2) = (s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2$$

$$\mu_0\omega^2\Omega = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) + E(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0\omega^2\Omega = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs^3 + 2C\xi\omega s^2 + Cs\omega^2 + Es^2 + 2E\xi\omega s + E\omega^2$$

$$\mu_0\omega^2\Omega = (A + C)s^3 + (B + 2C\xi\omega + E)s^2 + (A\Omega^2 + C\omega^2 + 2E\xi\omega)s + B\Omega^2 + E\omega^2$$

^{11.11} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.2 *Solución con sobreamortiguamiento* ($\xi > 1$)

^{11.12} No se selecciona D para que no se confunda con el factor de amplificación dinámica que se hará presente durante este apartado.

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C\xi\omega + E = 0 \\ A\Omega^2 + C\omega^2 + 2E\xi\omega = 0 \\ B\Omega^2 + E\omega^2 = \mu_0\omega^2\Omega \end{cases}$$

Cuya representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2\Omega \end{pmatrix}}_G \quad (11.95)$$

La solución por determinar se da con:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1}}_{F^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2\Omega \end{pmatrix}}_G \quad (11.96)$$

El valor de F^{-1} es:

$$\therefore F^{-1} = \frac{D^2}{\omega^4} \begin{bmatrix} \omega^4[(4\xi^2 - 1)r^2 + 1] & -2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(r^2 - 1) & 2\xi\omega \\ 2\xi\omega^5r^2 & \omega^4(1 - r^2) & -2\xi\omega^3 & \omega^2(r^2 + 4\xi^2 - 1) \\ \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(1 - r^2) & -2\xi\omega \\ -2\xi\omega^5r^4 & \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(1 - r^2) \end{bmatrix} \quad (11.97)^{11.13}$$

Calculada F^{-1} se pueden calcular los valores A, B, C y E mediante la ecuación matricial planteada con anterioridad:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{F^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2\Omega \end{pmatrix}}_G$$

^{11.13} La matriz F^{-1} fue calculada en el apartado 11.2.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$) cuando se resolvió la EDO $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \mu_0\omega^2 \cos(\Omega t)$.

Así que sustituyendo F^{-1} y simplificando se obtienen los valores de vector X al operar la multiplicación de matrices $F^{-1}G$.

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{D^2}{\omega^4} \begin{bmatrix} \omega^4[(4\xi^2 - 1)r^2 + 1] & -2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(r^2 - 1) & 2\xi\omega \\ 2\xi\omega^5r^2 & \omega^4(1 - r^2) & -2\xi\omega^3 & \omega^2(r^2 + 4\xi^2 - 1) \\ \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(1 - r^2) & -2\xi\omega \\ -2\xi\omega^5r^4 & \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(1 - r^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2\Omega \end{Bmatrix} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0\omega^2\Omega D^2}{\omega^4} \begin{bmatrix} \omega^4[(4\xi^2 - 1)r^2 + 1] & -2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(r^2 - 1) & 2\xi\omega \\ 2\xi\omega^5r^2 & \omega^4(1 - r^2) & -2\xi\omega^3 & \omega^2(r^2 + 4\xi^2 - 1) \\ \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(1 - r^2) & -2\xi\omega \\ -2\xi\omega^5r^4 & \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(1 - r^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0\Omega D^2}{\omega^2} \begin{bmatrix} \omega^4[(4\xi^2 - 1)r^2 + 1] & -2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(r^2 - 1) & 2\xi\omega \\ 2\xi\omega^5r^2 & \omega^4(1 - r^2) & -2\xi\omega^3 & \omega^2(r^2 + 4\xi^2 - 1) \\ \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(1 - r^2) & -2\xi\omega \\ -2\xi\omega^5r^4 & \omega^4(r^4 - r^2) & 2\xi\omega^3r^2 & \omega^2(1 - r^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Como sólo existe un elemento diferente se cero en el lado derecho de la ecuación se facilita mucho el proceso de cálculo porque únicamente deben multiplicarse los elementos ubicados en las posiciones (1, 4), (2, 4), (3, 4) y (4, 4) con el vector $\{0 \ 0 \ 0 \ 1\}^t$.

$$\begin{aligned}
 \therefore &= \frac{\mu_0\Omega D^2}{\omega^2} \begin{Bmatrix} (2\xi\omega)(1) \\ \omega^2(r^2 + 4\xi^2 - 1)(1) \\ (-2\xi\omega)(1) \\ \omega^2(1 - r^2)(1) \end{Bmatrix} \\
 \therefore &= \frac{\mu_0\omega\Omega D^2}{\omega^2} \begin{Bmatrix} 2\xi \\ \omega(r^2 + 4\xi^2 - 1) \\ -2\xi \\ \omega(1 - r^2) \end{Bmatrix} \\
 \therefore X &= \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{Bmatrix} = \mu_0rD^2 \begin{Bmatrix} 2\xi \\ \omega(r^2 + 4\xi^2 - 1) \\ -2\xi \\ \omega(1 - r^2) \end{Bmatrix} \quad (11.98)
 \end{aligned}$$

Finalmente los valores son:

$$A = 2\xi\mu_0rD^2$$

$$B = \mu_0\omega rD^2(r^2 + 4\xi^2 - 1)$$

$$C = -2\xi\mu_0rD^2$$

$$E = \mu_0\omega(1 - r^2)rD^2$$

Conocidos A, B, C y E se sustituyen en la ecuación 11.94:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2\Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]}\right\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\}}_{T_{I_1}} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2}\right\}}_{T_{I_2}} \quad (11.99)$$

Resolviendo T_{I_1} :

$$\begin{aligned} T_{I_1} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} \\ &: = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2\xi\mu_0rD^2s + \mu_0\omega rD^2(r^2 + 4\xi^2 - 1)}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} \\ &: = 2\xi\mu_0rD^2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} + \mu_0\omega rD^2(r^2 + 4\xi^2 - 1)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} \\ &: = 2\xi\mu_0rD^2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \xi\omega - \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} + \frac{\mu_0\omega rD^2(r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} \\ &: = 2\xi\mu_0rD^2\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\}\right] \\ &\quad + \frac{\mu_0\omega rD^2(r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} \\ &: = 2\xi\mu_0rD^2\left[e^{-\xi\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - \omega_D^2}\right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D}e^{-\xi\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_D}{s^2 - \omega_D^2}\right\}\right] \\ &\quad + \frac{\mu_0\omega rD^2(r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D}e^{-\xi\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_D}{s^2 - \omega_D^2}\right\} \\ &: = 2\xi\mu_0rD^2\left[e^{-\xi\omega t}\cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D}e^{-\xi\omega t}\sinh(\omega_D t)\right] \\ &\quad + \frac{\mu_0\omega rD^2(r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D}e^{-\xi\omega t}\sinh(\omega_D t) \end{aligned}$$

$$\therefore TI_1 = 2\xi\mu_0 r D^2 e^{-\xi\omega t} \left[\cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) \right] + \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t)$$

Resolviendo TI_2 :

$$\begin{aligned} TI_2 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\ &: = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2\xi\mu_0 r D^2 s + \mu_0 \omega (1 - r^2) r D^2}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\ &: = -2\xi\mu_0 r D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \right\} + \mu_0 \omega (1 - r^2) r D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\ &: = -2\xi\mu_0 r D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \right\} + \mu_0 (1 - r^2) r D^2 \underbrace{\left(\frac{\omega}{r} \right)}_{r^{-1}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\ &: = -2\xi\mu_0 r D^2 \cos(\Omega t) + \mu_0 (1 - r^2) D^2 \sin(\Omega t) \\ &\therefore TI_2 = \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \sin(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)] \end{aligned}$$

Sabiendo TI_1 y TI_2 se sustituyen en la ecuación 11.99:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \right\} &= 2\xi\mu_0 r D^2 e^{-\xi\omega t} \left[\cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) \right] \\ &+ \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \\ &+ \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \sin(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)] \end{aligned} \quad (11.100)$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.91 se obtiene:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} \right) \sinh(\omega_D t) \right] \\ &+ 2\xi\mu_0 r D^2 e^{-\xi\omega t} \left[\cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \sinh(\omega_D t) \right] \\ &+ \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \\ &+ \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \sin(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)] \end{aligned} \quad (11.101)$$

Factorizando los términos en función de $e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t)$ y $e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t)$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $x(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t)$ que se asocian a H_1 :

$$\therefore H_1 = x_0 + 2\xi\mu_0 r D^2$$

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t)$ que se asocian a H_2 :

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + 2\xi\mu_0 r D^2 \left(-\frac{\xi\omega}{\omega_D}\right) + \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} \\ \therefore &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} - \frac{2\xi^2 \mu_0 \omega r D^2}{\omega_D} + \frac{\mu_0 \omega D^2 r^3 + 4\xi^2 \mu_0 \omega r D^2 - \mu_0 \omega r D^2}{\omega_D} \\ \therefore &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0 \omega D^2 r^3 + 4\xi^2 \mu_0 \omega r D^2 - \mu_0 \omega r D^2 - 2\xi^2 \mu_0 \omega r D^2}{\omega_D} \\ \therefore &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0 \omega D^2 r^3 + 2\xi^2 \mu_0 \omega r D^2 - \mu_0 \omega r D^2}{\omega_D} \\ \therefore &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D} \\ \therefore H_2 &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0 + \mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D} \end{aligned}$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.82):

$$\begin{aligned} \mathbf{x(t) = e^{-\xi\omega t} [H_1 \cosh(\omega_D t) + H_2 \sinh(\omega_D t)]} \\ \mathbf{+ \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \text{cos}(\Omega t)]} \end{aligned} \tag{11.102}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{\xi^2 - 1} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$$H_1 = x_0 + 2\xi\mu_0 r D^2 \quad ; \quad H_2 = \frac{\xi\omega x_0 + v_0 + \mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D}$$

11.3.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

Sea el subamortiguamiento cuando $\xi < 1$ y la frecuencia subamortiguada $\omega_D^2 = \omega^2(1 - \xi^2)$ la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} + \frac{\mu_0\omega^2\Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \quad (11.103)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.104)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right) \text{sen}(\omega_D t) \right] \quad (11.105)^{11.14}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2\Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2\Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2}\right\} \quad (11.106)^{11.15}$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A , B , C y E :

$$\frac{\mu_0\omega^2\Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} = \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} + \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2}$$

$$\mu_0\omega^2\Omega = [As + B][s^2 + \Omega^2] + [Cs + E][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]$$

$$\mu_0\omega^2\Omega = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2] + E[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]$$

^{11.14} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

^{11.15} No se selecciona D para que no se confunda con el factor de amplificación dinámica que se hará presente durante este apartado.

$$\text{Recordando que } s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2) = (s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2$$

$$\mu_0\omega^2\Omega = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) + E(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0\omega^2\Omega = As^3 + As\Omega^2 + Bs^2 + B\Omega^2 + Cs^3 + 2C\xi\omega s^2 + Cs\omega^2 + Es^2 + 2E\xi\omega s + E\omega^2$$

$$\mu_0\omega^2\Omega = (A + C)s^3 + (B + 2C\xi\omega + E)s^2 + (A\Omega^2 + C\omega^2 + 2E\xi\omega)s + B\Omega^2 + E\omega^2$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C\xi\omega + E = 0 \\ A\Omega^2 + C\omega^2 + 2E\xi\omega = 0 \\ B\Omega^2 + E\omega^2 = \mu_0\omega^2\Omega \end{cases}$$

Cuya representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \Omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \Omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2\Omega \end{pmatrix}}_G \quad (11.107)$$

La solución a este sistema se dio cuando se calculó la respuesta sobreamortiguada de este ejercicio generando los valores:

$$A = 2\xi\mu_0rD^2$$

$$B = \mu_0\omega rD^2(r^2 + 4\xi^2 - 1)$$

$$C = -2\xi\mu_0rD^2$$

$$E = \mu_0\omega(1 - r^2)rD^2$$

Conocidos A, B, C y E se sustituyen en la ecuación 11.106:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0\omega^2\Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \right\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\}}_{TI_1} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2} \right\}}_{TI_2} \quad (11.108)$$

Resolviendo TI_1 :

$$\begin{aligned}
 TI_1 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 &\vdots = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2\xi\mu_0 r D^2 s + \mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 &\vdots = 2\xi\mu_0 r D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} + \mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 &\vdots = 2\xi\mu_0 r D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega - \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} + \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 &\vdots = 2\xi\mu_0 r D^2 \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \right] \\
 &\quad + \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 &\vdots = 2\xi\mu_0 r D^2 \left[e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_D^2} \right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 + \omega_D^2} \right\} \right] \\
 &\quad + \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 &\vdots = 2\xi\mu_0 r D^2 \left[e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t) \right] \\
 &\quad + \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t) \\
 \therefore TI_1 &= 2\xi\mu_0 r D^2 e^{-\xi\omega t} \left[\cos(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \text{sen}(\omega_D t) \right] + \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t)
 \end{aligned}$$

Resolviendo TI_2 :

$$\begin{aligned}
 TI_2 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + E}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 &\vdots = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2\xi\mu_0 r D^2 s + \mu_0 \omega (1 - r^2) r D^2}{s^2 + \Omega^2} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore &= -2\xi\mu_0 r D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \right\} + \mu_0 \omega (1 - r^2) r D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 \therefore &= -2\xi\mu_0 r D^2 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \right\} + \mu_0 (1 - r^2) r D^2 \underbrace{\left(\frac{\omega}{\Omega} \right)}_{r^{-1}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \right\} \\
 \therefore &= -2\xi\mu_0 r D^2 \cos(\Omega t) + \mu_0 (1 - r^2) D^2 \text{sen}(\Omega t) \\
 \therefore & TI_2 = \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)]
 \end{aligned}$$

Sabiendo TI_1 y TI_2 se sustituyen en la ecuación 11.108:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 \Omega}{[s^2 + \Omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \right\} &= 2\xi\mu_0 r D^2 e^{-\xi\omega t} \left[\cos(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \text{sen}(\omega_D t) \right] \\
 &+ \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t) \\
 &+ \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)]
 \end{aligned} \tag{11.109}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.103 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[\mathbf{x}_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0}{\omega_D} \right) \text{sen}(\omega_D t) \right] \\
 &+ 2\xi\mu_0 r D^2 e^{-\xi\omega t} \left[\cos(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \text{sen}(\omega_D t) \right] \\
 &+ \frac{\mu_0 \omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t) \\
 &+ \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)]
 \end{aligned} \tag{11.110}$$

Factorizando los términos en función de $e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t)$ y $e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t)$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $\mathbf{x}(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t)$ que se asocian a H_1 :

$$\therefore H_1 = \mathbf{x}_0 + 2\xi\mu_0 r D^2$$

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t)$ que se asocian a H_2 :

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + 2\xi\mu_0 r D^2 \left(-\frac{\xi\omega}{\omega_D} \right) + \frac{\mu_0\omega r D^2 (r^2 + 4\xi^2 - 1)}{\omega_D} \\
 \vdots &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} - \frac{2\xi^2\mu_0\omega r D^2}{\omega_D} + \frac{\mu_0\omega D^2 r^3 + 4\xi^2\mu_0\omega r D^2 - \mu_0\omega r D^2}{\omega_D} \\
 \vdots &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0\omega D^2 r^3 + 4\xi^2\mu_0\omega r D^2 - \mu_0\omega r D^2 - 2\xi^2\mu_0\omega r D^2}{\omega_D} \\
 \vdots &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0\omega D^2 r^3 + 2\xi^2\mu_0\omega r D^2 - \mu_0\omega r D^2}{\omega_D} \\
 \vdots &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} + \frac{\mu_0\omega r D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D} \\
 \therefore H_2 &= \frac{\xi\omega x_0 + v_0 + \mu_0\omega r D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D}
 \end{aligned}$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.83):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\xi\omega t} [H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \text{sen}(\omega_D t)] \\
 &\quad + \mu_0 D^2 [(1 - r^2) \text{sen}(\Omega t) - 2\xi r \cos(\Omega t)] \tag{11.111}
 \end{aligned}$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad ; \quad D^2 = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}$$

$$H_1 = x_0 + 2\xi\mu_0 r D^2 \quad ; \quad H_2 = \frac{\xi\omega x_0 + v_0 + \mu_0\omega r D^2 (r^2 + 2\xi^2 - 1)}{\omega_D}$$

11.4 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \cos(\omega t)$

La EDO por resolver es $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \mu_0\omega^2 \cos(\omega t)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x\} = \mathcal{L}\{\mu_0\omega^2 \cos(\omega t)\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} \quad (11.112)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{x}\} &= s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \\ \vdots &= s^2X(s) - sx_0 - v_0 \\ \therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} &= s^2X(s) - sx_0 - v_0 \end{aligned} \quad (11.113)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s) - x(0) \\ \vdots &= sX(s) - x_0 \\ \therefore \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= sX(s) - x_0 \end{aligned} \quad (11.114)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) \quad (11.115)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (11.116)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega[sX(s) - x_0] + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2s}{s^2 + \omega^2}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2s}{s^2 + \omega^2}$$

Factorizando $X(s)$:

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^2s}{s^2 + \omega^2}$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)X(s) - sx_0 - v_0 - 2\xi\omega x_0 = \frac{\mu_0\omega^2 s}{s^2 + \omega^2}$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)X(s) = sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0 + \frac{\mu_0\omega^2 s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \frac{\mu_0\omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)} \quad (11.117)$$

Recordando que $s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)$:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} + \frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)]} \quad (11.118)$$

11.4.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

Sea el amortiguamiento crítico cuando $\xi = 1$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2} + \frac{\mu_0\omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2} \quad (11.119)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.120)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2}\right\} = x_0 e^{-\omega t} + (\omega x_0 + v_0)te^{-\omega t} \quad (11.121)^{11.16}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2}\right\}$$

^{11.16} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{(s + \omega)^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s + \omega} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2} \right\} \quad (11.122)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A, B, C y D:

$$\frac{\mu_0 \omega^2 s}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2} = \frac{A}{(s + \omega)^2} + \frac{B}{s + \omega} + \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mu_0 \omega^2 s = A(s^2 + \omega^2) + B(s^2 + \omega^2)(s + \omega) + (Cs + D)(s + \omega)^2$$

$$\mu_0 \omega^2 s = A(s^2 + \omega^2) + B(s^2 + \omega^2)(s + \omega) + (Cs + D)(s^2 + 2\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0 \omega^2 s = As^2 + A\omega^2 + Bs^3 + B\omega s^2 + B\omega^2 s + B\omega^3 + Cs^3 + 2C\omega s^2 + C\omega^2 s + Ds^2 + 2D\omega s + D\omega^2$$

$$\mu_0 \omega^2 s = (B + C)s^3 + (A + B\omega + 2C\omega + D)s^2 + (B\omega^2 + C\omega^2 + 2D\omega)s + (A\omega^2 + B\omega^3 + D\omega^2)$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + B\omega + 2C\omega + D = 0 \\ B\omega^2 + C\omega^2 + 2D\omega = \mu_0 \omega^2 \\ A\omega^2 + B\omega^3 + D\omega^2 = 0 \end{cases}$$

Cuya representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^2 & \omega^3 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0 \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_F \quad (11.123)$$

La solución por determinar se da con:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^2 & \omega^3 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1}}_{E^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0 \omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_F \quad (11.124)$$

Calculando la matriz inversa por:

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} \text{adj}(E)$$

La matriz de cofactores a simplificar es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \omega & 2\omega & 1 \\ \omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^3 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & \omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^2 & \omega^3 & \omega^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \omega & 2\omega \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^3 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^2 & \omega^3 & \omega^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \omega & 2\omega & 1 \\ \omega^3 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2\omega & 1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & \omega^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & 2\omega \\ \omega^2 & \omega^3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \omega & 2\omega & 1 \\ \omega^2 & \omega^2 & 2\omega \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & 2\omega \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & 2\omega \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & 2\omega \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Al simplificar, la matriz de cofactores es:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega^5 & -4\omega^4 & 0 & 2\omega^5 \\ -2\omega^4 & 2\omega^3 & -2\omega^3 & 0 \\ 2\omega^3 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ -2\omega^2 & -2\omega & 2\omega & 0 \end{bmatrix}$$

Conocida la matriz de cofactores se calcula el determinante de la matriz utilizando los elementos del tercer renglón:

$$\begin{aligned} \det(E) &= e_{31}C_{31} + e_{32}C_{32} + e_{33}C_{33} + e_{34}C_{34} \\ &: = (0)(2\omega^3) + (\omega^2)(0) + (\omega^2)(0) + (2\omega)(-2\omega^3) \\ &: = 0 + 0 + 0 - 4\omega^4 \\ &\therefore \det(E) = -4\omega^4 \end{aligned} \tag{11.125}$$

Por definición $\text{adj}(E)$ es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores, entonces:

$$\therefore \text{adj}(E) = \begin{bmatrix} 2\omega^5 & -4\omega^4 & 2\omega^3 & -2\omega^2 \\ -2\omega^4 & 2\omega^3 & 0 & -2\omega \\ 0 & -2\omega^3 & 0 & 2\omega \\ 2\omega^5 & 0 & -2\omega^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.126}$$

Teniendo $\text{adj}(E)$ y $\text{det}(E)$ se puede calcular la matriz inversa:

$$\begin{aligned}
 E^{-1} &= \frac{1}{\text{det}(E)} \text{adj}(E) \\
 \therefore &= \frac{1}{-4\omega^4} \begin{bmatrix} 2\omega^5 & -2\omega^4 & 2\omega^3 & -2\omega^2 \\ -4\omega^4 & 2\omega^3 & 0 & -2\omega \\ 0 & -2\omega^3 & 0 & 2\omega \\ 2\omega^5 & 0 & -2\omega^3 & 0 \end{bmatrix} \\
 \therefore &= \frac{2\omega}{-4\omega^4} \begin{bmatrix} \omega^4 & -\omega^3 & \omega^2 & -\omega \\ -2\omega^3 & \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \\
 \therefore E^{-1} &= -\frac{1}{2\omega^3} \begin{bmatrix} \omega^4 & -\omega^3 & \omega^2 & -\omega \\ -2\omega^3 & \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.127}
 \end{aligned}$$

Calculada E^{-1} se pueden calcular los valores A, B, C y D mediante la ecuación matricial planteada con anterioridad:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^2 & \omega^3 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_{E^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_F$$

Así que sustituyendo E^{-1} y simplificando se obtienen los valores de vector X al operar la multiplicación de matrices $E^{-1}F$.

$$\begin{aligned}
 X &= -\frac{1}{2\omega^3} \begin{bmatrix} \omega^4 & -\omega^3 & \omega^2 & -\omega \\ -2\omega^3 & \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \therefore &= -\frac{\mu_0\omega^2}{2\omega^3} \begin{bmatrix} \omega^4 & -\omega^3 & \omega^2 & -\omega \\ -2\omega^3 & \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\therefore = -\frac{\mu_0}{2\omega} \begin{bmatrix} \omega^4 & -\omega^3 & \omega^2 & -\omega \\ -2\omega^3 & \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Como sólo existe un elemento diferente se cero en el lado derecho de la ecuación se facilita mucho el proceso de cálculo porque únicamente deben multiplicarse los elementos ubicados en las posiciones (1, 3), (2, 3), (3, 3) y (4, 3) con el vector $\{0 \ 0 \ 1 \ 0\}^t$.

$$\therefore = -\frac{\mu_0}{2\omega} \begin{Bmatrix} (\omega^2)(1) \\ (0)(1) \\ (0)(1) \\ (-\omega^2)(1) \end{Bmatrix}$$

$$\therefore = -\frac{\mu_0}{2\omega} \begin{Bmatrix} \omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ -\omega^2 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore = -\frac{\mu_0\omega^2}{2\omega} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = -\frac{\mu_0\omega}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (11.128)$$

Finalmente los valores son:

$$A = -\frac{\mu_0\omega}{2}$$

$$B = 0$$

$$C = 0$$

$$D = \frac{\mu_0\omega}{2}$$

Conocidos A, B, C y D se sustituyen en la ecuación 11.122:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2s}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s + \omega)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s + \omega}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
 \vdots &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{\mu_0\omega}{2}}{(s + \omega)^2}\right\} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0}{s + \omega}\right\}}_0 + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(0)s + \frac{\mu_0\omega}{2}}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0\omega}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \omega)^2}\right\} + \frac{\mu_0\omega}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0\omega}{2}e^{-\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{\mu_0\omega}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \omega^2}\right\} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0\omega}{2}e^{-\omega t}t + \left[\frac{\mu_0\omega}{2}\right]\left[\frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega}\right] \\
 \therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2s}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2}\right\} &= \frac{\mu_0\text{sen}(\omega t)}{2} - \frac{\mu_0\omega}{2}te^{-\omega t} \tag{11.129}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.119 se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0e^{-\omega t} + (\omega\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0)te^{-\omega t} + \frac{\mu_0\text{sen}(\omega t)}{2} - \frac{\mu_0\omega}{2}te^{-\omega t} \tag{11.130}$$

Factorizando los términos en función de $te^{-\omega t}$ y $e^{-\omega t}$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $\mathbf{x}(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $te^{-\omega t}$ que se asocian a H_1 :

$$H_1 = \omega\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 - \frac{\mu_0\omega}{2}$$

Denotando los términos con $e^{-\omega t}$ que se asocian a H_2 :

$$H_2 = \mathbf{x}_0$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.89):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}_1te^{-\omega t} + \mathbf{H}_2e^{-\omega t} + \frac{\mu_0}{2}\text{sen}(\omega t) \tag{11.131}$$

11.4.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

Sea el sobreamortiguamiento cuando $\xi > 1$ y la frecuencia sobreamortiguada $\omega_D^2 = \omega^2(\xi^2 - 1)$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} + \frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \quad (11.132)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.133)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right) \sinh(\omega_D t) \right] \quad (11.134)^{11.17}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}\right\} \quad (11.135)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A , B , C y D :

$$\frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} = \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mu_0\omega^2 s = [As + B][s^2 + \omega^2] + [Cs + D][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]$$

$$\mu_0\omega^2 s = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2] + D[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]$$

$$\text{Recordando que } s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2) = (s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2$$

^{11.17} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

$$\mu_0 \omega^2 s = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) + D(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0 \omega^2 s = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs^3 + 2C\xi\omega s^2 + Cs\omega^2 + Ds^2 + 2D\xi\omega s + D\omega^2$$

$$\mu_0 \omega^2 s = (A + C)s^3 + (B + 2C\xi\omega + D)s^2 + (A\omega^2 + C\omega^2 + 2D\xi\omega)s + B\omega^2 + D\omega^2$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C\xi\omega + D = 0 \\ A\omega^2 + C\omega^2 + 2D\xi\omega = \mu_0\omega^2 \\ B\omega^2 + D\omega^2 = 0 \end{cases}$$

Cuya representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_F \quad (11.136)$$

La solución por determinar se da con:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1}}_{E^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_F \quad (11.137)$$

Calculando la matriz inversa por cofactores con:

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} \text{adj}(E)$$

La matriz de cofactores a simplificar es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2\xi\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2\xi\omega & 1 \\ \omega^2 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2\xi\omega \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \omega^2 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \omega^2 & 0 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\xi\omega & 1 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2\xi\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2\xi\omega & 1 \\ \omega^2 & \omega^2 & 2\xi\omega \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 2\xi\omega \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Al simplificar, la matriz de cofactores es:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\xi^2\omega^4 & 2\xi\omega^5 & 0 & -2\xi\omega^5 \\ -2\xi\omega^3 & 0 & 2\xi\omega^3 & 0 \\ 0 & -2\xi\omega^3 & 0 & 2\xi\omega^3 \\ 2\xi\omega & 4\xi^2\omega^2 & -2\xi\omega & 0 \end{bmatrix}$$

Conocida la matriz de cofactores se calcula el determinante de la matriz utilizando los elementos del tercer renglón:

$$\begin{aligned} \det(E) &= e_{31}C_{31} + e_{32}C_{32} + e_{33}C_{33} + e_{34}C_{34} \\ &: = (\omega^2)(0) + (0)(-2\xi\omega^3) + (\omega^2)(0) + (2\xi\omega)(2\xi\omega^3) \\ &: = 0 + 0 + 0 + 4\xi^2\omega^4 \\ &\therefore \det(E) = 4\xi^2\omega^4 \end{aligned} \tag{11.138}$$

Por definición $\text{adj}(E)$ es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores, entonces:

$$\therefore \text{adj}(E) = \begin{bmatrix} 4\xi^2\omega^4 & -2\xi\omega^3 & 0 & 2\xi\omega \\ 2\xi\omega^5 & 0 & -2\xi\omega^3 & 4\xi^2\omega^2 \\ 0 & 2\xi\omega^3 & 0 & -2\xi\omega \\ -2\xi\omega^5 & 0 & 2\xi\omega^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.139}$$

Teniendo $\text{adj}(E)$ y $\det(E)$ se puede calcular la matriz inversa:

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} \text{adj}(E)$$

$$\begin{aligned}
 \vdots &= \frac{1}{4\xi^2\omega^4} \begin{bmatrix} 4\xi^2\omega^4 & -2\xi\omega^3 & 0 & 2\xi\omega \\ 2\xi\omega^5 & 0 & -2\xi\omega^3 & 4\xi^2\omega^2 \\ 0 & 2\xi\omega^3 & 0 & -2\xi\omega \\ -2\xi\omega^5 & 0 & 2\xi\omega^3 & 0 \end{bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{2\xi\omega}{4\xi^2\omega^4} \begin{bmatrix} 2\xi\omega^3 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & -1 \\ -\omega^4 & 0 & \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \\
 \therefore E^{-1} &= \frac{1}{2\xi\omega^3} \begin{bmatrix} 2\xi\omega^3 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & -1 \\ -\omega^4 & 0 & \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{11.140}
 \end{aligned}$$

Calculada E^{-1} se pueden calcular los valores A, B, C y D mediante la ecuación matricial planteada con anterioridad:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_{E^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}}_F$$

Así que sustituyendo E^{-1} y simplificando se obtienen los valores de vector X al operar la multiplicación de matrices $E^{-1}F$.

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{1}{2\xi\omega^3} \begin{bmatrix} 2\xi\omega^3 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & -1 \\ -\omega^4 & 0 & \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0\omega^2}{2\xi\omega^3} \begin{bmatrix} 2\xi\omega^3 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & -1 \\ -\omega^4 & 0 & \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi\omega} \begin{bmatrix} 2\xi\omega^3 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & -1 \\ -\omega^4 & 0 & \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Como sólo existe un elemento diferente se cero en el lado derecho de la ecuación se facilita mucho el proceso de cálculo porque únicamente deben multiplicarse los elementos ubicados en las posiciones (1, 3), (2, 3), (3, 3) y (4, 3) con el vector $\{0 \ 0 \ 1 \ 0\}^t$.

$$\vdots = \frac{\mu_0}{2\xi\omega} \begin{pmatrix} (0)(1) \\ (-\omega^2)(1) \\ (0)(1) \\ (\omega^2)(1) \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \frac{\mu_0}{2\xi\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 \\ 0 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \frac{\mu_0\omega^2}{2\xi\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{pmatrix} = \frac{\mu_0\omega}{2\xi} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11.141)$$

Finalmente los valores son:

$$A = 0$$

$$B = -\frac{\mu_0\omega}{2\xi}$$

$$C = 0$$

$$E = \frac{\mu_0\omega}{2\xi}$$

Conocidos A, B, C y E se sustituyen en la ecuación 11.135:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + E}{s^2 + \omega^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(0)s - \frac{\mu_0 \omega}{2\xi}}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(0)s + \frac{\mu_0 \omega}{2\xi}}{s^2 + \omega^2} \right\} \\
 & \vdots = \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \left[-\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} \right] \\
 & \vdots = \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \left[-\frac{1}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{\omega} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} \right] \\
 & \vdots = \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \left[-\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 - \omega_D^2} \right\} + \frac{1}{\omega} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} \right] \\
 & \vdots = \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \left[-\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega_D} \operatorname{senh}(\omega_D t) + \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) \right] \\
 & \vdots = -\frac{\mu_0 \omega}{2\xi \omega_D} e^{-\xi\omega t} \operatorname{senh}(\omega_D t) + \frac{\mu_0}{2\xi} \operatorname{sen}(\omega t) \\
 & \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \right\} = -\frac{\mu_0 \omega}{2\xi \omega_D} e^{-\xi\omega t} \operatorname{senh}(\omega_D t) + \frac{\mu_0}{2\xi} \operatorname{sen}(\omega t) \quad (11.142)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.132 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\mathbf{x}_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0}{\omega_D} \right) \operatorname{senh}(\omega_D t) \right] \\
 - \frac{\mu_0 \omega}{2\xi \omega_D} e^{-\xi\omega t} \operatorname{senh}(\omega_D t) + \frac{\mu_0}{2\xi} \operatorname{sen}(\omega t)
 \end{aligned} \quad (11.143)$$

Factorizando los términos en función de $e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t)$ y $e^{-\xi\omega t} \operatorname{senh}(\omega_D t)$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $\mathbf{x}(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t)$ que se asocian a H_1 :

$$H_1 = \mathbf{x}_0$$

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t)$ que se asocian a H_2 :

$$H_2 = \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} - \frac{\mu_0\omega}{2\xi\omega_D}$$

$$\therefore H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D}\right) \left(\xi\omega x_0 + v_0 - \frac{\mu_0\omega}{2\xi}\right)$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.94):

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\xi\omega t} [\mathbf{H}_1 \cosh(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sinh(\omega_D t)] + \frac{\mu_0}{2\xi} \mathbf{sen}(\omega t) \quad (11.144)$$

11.4.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

Sea el subamortiguamiento cuando $\xi < 1$ y la frecuencia subamortiguada $\omega_D^2 = \omega^2(1 - \xi^2)$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} + \frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \quad (11.145)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.146)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right) \sen(\omega_D t) \right] \quad (11.147)^{11.18}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]}\right\}$$

^{11.18} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2} \right\} \quad (11.148)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A, B, C y D:

$$\frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} = \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mu_0 \omega^2 s = [As + B][s^2 + \omega^2] + [Cs + D][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]$$

$$\mu_0 \omega^2 s = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2] + D[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]$$

$$\text{Recordando que } s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2) = (s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2$$

$$\mu_0 \omega^2 s = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) + D(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0 \omega^2 s = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs^3 + 2C\xi\omega s^2 + Cs\omega^2 + Ds^2 + 2D\xi\omega s + D\omega^2$$

$$\mu_0 \omega^2 s = (A + C)s^3 + (B + 2C\xi\omega + D)s^2 + (A\omega^2 + C\omega^2 + 2D\xi\omega)s + B\omega^2 + D\omega^2$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C\xi\omega + D = 0 \\ A\omega^2 + C\omega^2 + 2D\xi\omega = \mu_0 \omega^2 \\ B\omega^2 + D\omega^2 = 0 \end{cases}$$

La solución, que es la misma que la calculada en este ejercicio cuando se analiza el sistema con sobreamortiguamiento, es:

$$A = 0$$

$$B = -\frac{\mu_0 \omega}{2\xi}$$

$$C = 0$$

$$E = \frac{\mu_0 \omega}{2\xi}$$

Conocidos A, B, C y E se sustituyen en la ecuación 11.148:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + E}{s^2 + \omega^2} \right\} \\ \vdots &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(0)s - \frac{\mu_0 \omega}{2\xi}}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(0)s + \frac{\mu_0 \omega}{2\xi}}{s^2 + \omega^2} \right\} \\ \vdots &= \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \left[-\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right\} \right] \\ \vdots &= \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \left[-\frac{1}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\omega} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} \right] \\ \vdots &= \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \left[-\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 + \omega_D^2} \right\} + \frac{1}{\omega} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} \right] \\ \vdots &= \frac{\mu_0 \omega}{2\xi} \left[-\frac{e^{-\xi\omega t}}{\omega_D} \text{sen}(\omega_D t) + \frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega t) \right] \\ \vdots &= -\frac{\mu_0 \omega}{2\xi \omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t) + \frac{\mu_0}{2\xi} \text{sen}(\omega t) \\ \therefore \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \right\} &= -\frac{\mu_0 \omega}{2\xi \omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t) + \frac{\mu_0}{2\xi} \text{sen}(\omega t) \quad (11.149) \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.145 se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[\mathbf{x}_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0}{\omega_D} \right) \text{sen}(\omega_D t) \right] \\ &\quad - \frac{\mu_0 \omega}{2\xi \omega_D} e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_D t) + \frac{\mu_0}{2\xi} \text{sen}(\omega t) \end{aligned} \quad (11.150)$$

Factorizando los términos en función de $e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t)$ y $e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t)$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $x(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t)$ que se asocian a H_1 :

$$H_1 = x_0$$

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t)$ que se asocian a H_2 :

$$H_2 = \frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D} - \frac{\mu_0\omega}{2\xi\omega_D}$$

$$\therefore H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D}\right) \left(\xi\omega x_0 + v_0 - \frac{\mu_0\omega}{2\xi}\right)$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.99):

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \sin(\omega_D t)] + \frac{\mu_0}{2\xi} \sin(\omega t) \quad (11.151)$$

11.5 Solución a la EDO con $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$

La EDO por resolver es $\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x = \mu_0\omega^2 \sin(\omega t)$. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x\} = \mathcal{L}\{\mu_0\omega^2 \sin(\omega t)\}$$

Por propiedad de linealidad se tiene:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} \quad (11.152)$$

Resolviendo por separado cada transformada de Laplace teniendo como condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

$$\therefore = s^2 X(s) - sx_0 - v_0$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\ddot{x}\} = s^2 X(s) - sx_0 - v_0 \quad (11.152)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX(s) - x(0)$$

$$\therefore = sX(s) - x_0$$

$$\therefore \mathcal{L}\{\dot{x}\} = sX(s) - x_0 \quad (11.153)$$

$$\mathcal{L}\{x\} = X(s) \quad (11.154)$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (11.155)$$

Reemplazando estas transformadas en $\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\}$:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 2\xi\omega\mathcal{L}\{\dot{x}\} + \omega^2\mathcal{L}\{x\} = \mu_0\omega^2\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega[sX(s) - x_0] + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^3}{s^2 + \omega^2}$$

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^3}{s^2 + \omega^2}$$

Factorizando X(s):

$$s^2X(s) - sx_0 - v_0 + 2\xi\omega sX(s) - 2\xi\omega x_0 + \omega^2X(s) = \frac{\mu_0\omega^3}{s^2 + \omega^2}$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)X(s) - sx_0 - v_0 - 2\xi\omega x_0 = \frac{\mu_0\omega^3}{s^2 + \omega^2}$$

$$(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)X(s) = sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0 + \frac{\mu_0\omega^3}{s^2 + \omega^2}$$

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2} + \frac{\mu_0\omega^3}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)} \quad (11.156)$$

Recordando que $s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)$:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)} + \frac{\mu_0\omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2)]} \quad (11.157)$$

11.5.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

Sea el amortiguamiento crítico cuando $\xi = 1$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2} + \frac{\mu_0 \omega^3}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2} \quad (11.158)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.159)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\omega x_0}{(s + \omega)^2}\right\} = x_0 e^{-\omega t} + (\omega x_0 + v_0) t e^{-\omega t} \quad (11.160)^{11.19}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0 \omega^3}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0 \omega^3}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s + \omega)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s + \omega}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}\right\} \quad (11.161)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A , B , C y D :

$$\frac{\mu_0 \omega^3}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2} = \frac{A}{(s + \omega)^2} + \frac{B}{s + \omega} + \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mu_0 \omega^3 = A(s^2 + \omega^2) + B(s^2 + \omega^2)(s + \omega) + (Cs + D)(s + \omega)^2$$

$$\mu_0 \omega^3 = A(s^2 + \omega^2) + B(s^2 + \omega^2)(s + \omega) + (Cs + D)(s^2 + 2\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0 \omega^3 = As^2 + A\omega^2 + Bs^3 + B\omega s^2 + B\omega^2 s + B\omega^3 + Cs^3 + 2C\omega s^2 + C\omega^2 s + Ds^2 + 2D\omega s + D\omega^2$$

$$\mu_0 \omega^3 = (B + C)s^3 + (A + B\omega + 2C\omega + D)s^2 + (B\omega^2 + C\omega^2 + 2D\omega)s + (A\omega^2 + B\omega^3 + D\omega^2)$$

^{11.19} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.1 Solución con amortiguamiento crítico ($\xi = 1$)

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + B\omega + 2C\omega + D = 0 \\ B\omega^2 + C\omega^2 + 2D\omega = 0 \\ A\omega^2 + B\omega^3 + D\omega^2 = \mu_0\omega^3 \end{cases}$$

Cuya representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^2 & \omega^3 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^3 \end{pmatrix}}_F \quad (11.162)$$

La solución por determinar se da con:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^2 & \omega^3 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1}}_{E^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^3 \end{pmatrix}}_F \quad (11.163)$$

La matriz inversa es:

$$\therefore E^{-1} = -\frac{1}{2\omega^3} \begin{bmatrix} \omega^4 & -\omega^3 & \omega^2 & -\omega \\ -2\omega^3 & \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.164)$$

Calculada E^{-1} se pueden calcular los valores A, B, C y D mediante la ecuación matricial planteada con anterioridad:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 2\omega & 1 \\ 0 & \omega^2 & \omega^2 & 2\omega \\ \omega^2 & \omega^3 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1}}_{E^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^3 \end{pmatrix}}_F$$

Así que sustituyendo E^{-1} y simplificando se obtienen los valores de vector X al operar la multiplicación de matrices $E^{-1}F$.

$$\begin{aligned}
 X &= -\frac{1}{2\omega^3} \begin{bmatrix} \omega^4 & -\omega^3 & \omega^2 & -\omega \\ -2\omega^3 & \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^3 \end{pmatrix} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0\omega^3}{2\omega^3} \begin{bmatrix} \omega^4 & -\omega^3 & \omega^2 & -\omega \\ -2\omega^3 & \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0}{2} \begin{bmatrix} \omega^4 & -\omega^3 & \omega^2 & -\omega \\ -2\omega^3 & \omega^2 & 0 & -1 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Como sólo existe un elemento diferente se cero en el lado derecho de la ecuación se facilita mucho el proceso de cálculo porque únicamente deben multiplicarse los elementos ubicados en las posiciones (1, 4), (2, 4), (3, 4) y (4, 4) con el vector $\{0 \ 0 \ 0 \ 1\}^t$.

$$\begin{aligned}
 \vdots &= -\frac{\mu_0}{2} \begin{pmatrix} (-\omega)(1) \\ (-1)(1) \\ (1)(1) \\ (0)(1) \end{pmatrix} \\
 \vdots &= -\frac{\mu_0}{2} \begin{pmatrix} -\omega \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{2} \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.165}$$

Finalmente los valores son:

$$A = \frac{\mu_0\omega}{2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2}$$

$$C = -\frac{\mu_0}{2}$$

$$D = 0$$

Conocidos A, B, C y D se sustituyen en la ecuación 11.161:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^3}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s + \omega)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s + \omega}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}\right\} \\ \vdots &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\mu_0\omega}{2}}{(s + \omega)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\mu_0}{2}}{s + \omega}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{\mu_0}{2}s + (0)}{s^2 + \omega^2}\right\} \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{2}\left[\omega\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \omega)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \omega}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\}\right] \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{2}\left[\omega e^{-\omega t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + \omega}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\}\right] \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{2}\left[\omega e^{-\omega t}t + e^{-\omega t} - \cos(\omega t)\right] \\ \therefore \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^3}{(s^2 + \omega^2)(s + \omega)^2}\right\} &= \frac{\mu_0}{2}\left[\omega t e^{-\omega t} + e^{-\omega t} - \cos(\omega t)\right] \end{aligned} \quad (11.166)$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.158 se obtiene:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 e^{-\omega t} + (\omega \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0) t e^{-\omega t} + \frac{\mu_0}{2} [\omega t e^{-\omega t} + e^{-\omega t} - \cos(\omega t)] \quad (11.167)$$

Factorizando los términos en función de $t e^{-\omega t}$ y $e^{-\omega t}$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $x(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $t e^{-\omega t}$ que se asocian a H_1 :

$$H_1 = \omega x_0 + v_0 + \frac{\mu_0 \omega}{2}$$

Denotando los términos con $e^{-\omega t}$ que se asocian a H_2 :

$$H_2 = x_0 + \frac{\mu_0}{2}$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.105):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}_1 t e^{-\omega t} + \mathbf{H}_2 e^{-\omega t} - \frac{\mu_0}{2} \cos(\omega t) \quad (11.168)$$

11.5.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

Sea el sobreamortiguamiento cuando $\xi > 1$ y la frecuencia sobreamortiguada $\omega_D^2 = \omega^2(\xi^2 - 1)$, la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$\therefore X(s) = \frac{s x_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} + \frac{\mu_0 \omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \quad (11.169)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.170)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s x_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right) \sinh(\omega_D t) \right] \quad (11.171)^{11.20}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0 \omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0 \omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}\right\} \quad (11.172)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A, B, C y D :

$$\frac{\mu_0 \omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} = \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}$$

^{11.20} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.2 Solución con sobreamortiguamiento ($\xi > 1$)

$$\mu_0\omega^3 = [As + B][s^2 + \omega^2] + [Cs + D][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]$$

$$\mu_0\omega^3 = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2] + D[(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]$$

$$\text{Recordando que } s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2) = (s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2$$

$$\mu_0\omega^3 = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) + D(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0\omega^3 = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs^3 + 2C\xi\omega s^2 + Cs\omega^2 + Ds^2 + 2D\xi\omega s + D\omega^2$$

$$\mu_0\omega^3 = (A + C)s^3 + (B + 2C\xi\omega + D)s^2 + (A\omega^2 + C\omega^2 + 2D\xi\omega)s + B\omega^2 + D\omega^2$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C\xi\omega + D = 0 \\ A\omega^2 + C\omega^2 + 2D\xi\omega = 0 \\ B\omega^2 + D\omega^2 = \mu_0\omega^3 \end{cases}$$

Cuya representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_F \quad (11.173)$$

La solución por determinar se da con:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}^{-1}}_{E^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_F \quad (11.174)$$

El valor de la matriz inversa es conocido y tiene un valor igual a:

$$\therefore E^{-1} = \frac{1}{2\xi\omega^3} \begin{bmatrix} 2\xi\omega^3 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & -1 \\ -\omega^4 & 0 & \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.175)$$

Calculada E^{-1} se pueden calcular los valores A, B, C y D mediante la ecuación matricial planteada con anterioridad:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2\xi\omega & 1 \\ \omega^2 & 0 & \omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}}_{E^{-1}}^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^3 \end{pmatrix}}_F$$

Así que sustituyendo E^{-1} y simplificando se obtienen los valores de vector X al operar la multiplicación de matrices $E^{-1}F$.

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2\xi\omega^3} \begin{bmatrix} 2\xi\omega^3 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & -1 \\ -\omega^4 & 0 & \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu_0\omega^3 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \frac{\mu_0\omega^3}{2\xi\omega^3} \begin{bmatrix} 2\xi\omega^3 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & -1 \\ -\omega^4 & 0 & \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \begin{bmatrix} 2\xi\omega^3 & -\omega^2 & 0 & 1 \\ \omega^4 & 0 & -\omega^2 & 2\xi\omega \\ 0 & \omega^2 & 0 & -1 \\ -\omega^4 & 0 & \omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como sólo existe un elemento diferente se cero en el lado derecho de la ecuación se facilita mucho el proceso de cálculo porque únicamente deben multiplicarse los elementos ubicados en las posiciones (1, 4), (2, 4), (3, 4) y (4, 4) con el vector $\{0 \ 0 \ 0 \ 1\}^t$.

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \begin{pmatrix} (1)(1) \\ (2\xi\omega)(1) \\ (-1)(1) \\ (0)(1) \end{pmatrix} \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\xi\omega \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore X = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ E \end{Bmatrix} = \frac{\mu_0}{2\xi} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2\xi\omega \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11.176)$$

Finalmente los valores son:

$$A = \frac{\mu_0}{2\xi}$$

$$B = \mu_0\omega$$

$$C = -\frac{\mu_0}{2\xi}$$

$$E = 0$$

Conocidos A, B, C y E se sustituyen en la ecuación 11.172:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0\omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2} \right\} \\ \vdots &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{\mu_0}{2\xi}s + \mu_0\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{\mu_0}{2\xi}s + 0}{s^2 + \omega^2} \right\} \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} + \mu_0\omega \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\ &\quad - \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega - \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} + \frac{\mu_0\omega}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \\ &\quad - \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \\ \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} \right] \\ &\quad + \frac{\mu_0\omega}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2} \right\} - \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots = \frac{\mu_0}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - \omega_D^2} \right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 - \omega_D^2} \right\} \right] \\
 & \quad + \frac{\mu_0\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 - \omega_D^2} \right\} - \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \\
 & \vdots = \frac{\mu_0}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \right] \\
 & \quad + \frac{\mu_0\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) - \frac{\mu_0}{2\xi} \cos(\omega t) \\
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0\omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2]} \right\} &= \frac{\mu_0}{2\xi} e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t) + \frac{\mu_0\omega}{2\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \\
 & \quad - \frac{\mu_0}{2\xi} \cos(\omega t) \tag{11.177}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.169 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[\mathbf{x}_0 \cosh(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0}{\omega_D} \right) \sinh(\omega_D t) \right] \\
 & \quad + \frac{\mu_0}{2\xi} e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t) + \frac{\mu_0\omega}{2\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t) \\
 & \quad - \frac{\mu_0}{2\xi} \cos(\omega t) \tag{11.178}
 \end{aligned}$$

Factorizando los términos en función de $e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t)$ y $e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t)$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $\mathbf{x}(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \cosh(\omega_D t)$ que se asocian a H_1 :

$$H_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\mu_0}{2\xi}$$

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \sinh(\omega_D t)$ que se asocian a H_2 :

$$H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D} \right) \left(\xi\omega\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 + \frac{\mu_0\omega}{2} \right)$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.110):

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\xi\omega t}[\mathbf{H}_1 \cosh(\omega_D t) + \mathbf{H}_2 \sinh(\omega_D t)] - \frac{\mu_0}{2\xi} \cos(\omega t) \quad (11.179)$$

11.5.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

Sea el subamortiguamiento cuando $\xi < 1$ y la frecuencia subamortiguada $\omega_D^2 = \omega^2(1 - \xi^2)$ la ecuación $X(s)$ queda reescrita como:

$$\therefore X(s) = \frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} + \frac{\mu_0\omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \quad (11.180)$$

Transformando del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t mediante el uso de la transformada inversa de Laplace para cada término de $X(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) \quad (11.181)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sx_0 + v_0 + 2\xi\omega x_0}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} = e^{-\xi\omega t} \left[x_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega x_0 + v_0}{\omega_D}\right) \text{sen}(\omega_D t) \right] \quad (11.182)^{11.21}$$

La transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]}\right\}$$

Se puede resolver utilizando fracciones parciales, o en su defecto, utilizando tablas de transformadas de Laplace que contengan la transformación del dominio de la frecuencia s al dominio del tiempo t o viceversa. Optando por el método de fracciones parciales se tiene que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mu_0\omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}\right\} \quad (11.183)$$

Olvidando momentáneamente el operador \mathcal{L}^{-1} para determinar los valores A , B , C y D :

^{11.21} Esta transformada inversa de Laplace fue calculada en el apartado 9.2.3 Solución con subamortiguamiento ($\xi < 1$)

$$\frac{\mu_0 \omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} = \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mu_0 \omega^3 = [As + B][s^2 + \omega^2] + [Cs + D][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]$$

$$\mu_0 \omega^3 = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2] + D[(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]$$

$$\text{Recordando que } s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = (s + \xi\omega)^2 + \omega^2(1 - \xi^2) = (s + \xi\omega)^2 - \omega_D^2$$

$$\mu_0 \omega^3 = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) + D(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)$$

$$\mu_0 \omega^3 = As^3 + As\omega^2 + Bs^2 + B\omega^2 + Cs^3 + 2C\xi\omega s^2 + Cs\omega^2 + Ds^2 + 2D\xi\omega s + D\omega^2$$

$$\mu_0 \omega^3 = (A + C)s^3 + (B + 2C\xi\omega + D)s^2 + (A\omega^2 + C\omega^2 + 2D\xi\omega)s + B\omega^2 + D\omega^2$$

El sistema de ecuaciones generado asociando términos en función del dominio de la frecuencia s es:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C\xi\omega + D = 0 \\ A\omega^2 + C\omega^2 + 2D\xi\omega = 0 \\ B\omega^2 + D\omega^2 = \mu_0 \omega^3 \end{cases}$$

Cuya solución es:

$$A = \frac{\mu_0}{2\xi}$$

$$B = \mu_0 \omega$$

$$C = -\frac{\mu_0}{2\xi}$$

$$D = 0$$

Conocidos A , B , C y D se sustituyen en la ecuación 11.183:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^3}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{As + B}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Cs + D}{s^2 + \omega^2} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{\mu_0}{2\xi}s + \mu_0 \omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-\frac{\mu_0}{2\xi}s + 0}{s^2 + \omega^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} + \mu_0 \omega \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 &\quad - \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega - \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} + \frac{\mu_0 \omega}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \\
 &\quad - \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \xi\omega}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} \right] \\
 &\quad + \frac{\mu_0 \omega}{\omega_D} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2} \right\} - \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega_D^2} \right\} - \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 + \omega_D^2} \right\} \right] \\
 &\quad + \frac{\mu_0 \omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_D}{s^2 + \omega_D^2} \right\} - \frac{\mu_0}{2\xi} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right\} \\
 \vdots &= \frac{\mu_0}{2\xi} \left[e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t) - \frac{\xi\omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \operatorname{sen}(\omega_D t) \right] \\
 &\quad + \frac{\mu_0 \omega}{\omega_D} e^{-\xi\omega t} \operatorname{sen}(\omega_D t) - \frac{\mu_0}{2\xi} \cos(\omega t) \\
 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu_0 \omega^2 s}{[s^2 + \omega^2][(s + \xi\omega)^2 + \omega_D^2]} \right\} &= \frac{\mu_0}{2\xi} e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t) + \frac{\mu_0 \omega}{2\omega_D} e^{-\xi\omega t} \operatorname{sen}(\omega_D t) \\
 &\quad - \frac{\mu_0}{2\xi} \cos(\omega t)
 \end{aligned} \tag{11.184}$$

Sustituyendo las transformadas inversas calculadas en la ecuación 11.180 se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[\mathbf{x}_0 \cos(\omega_D t) + \left(\frac{\xi\omega \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0}{\omega_D} \right) \operatorname{sen}(\omega_D t) \right] \\
 &\quad + \frac{\mu_0}{2\xi} e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t) + \frac{\mu_0 \omega}{2\omega_D} e^{-\xi\omega t} \operatorname{sen}(\omega_D t) - \frac{\mu_0}{2\xi} \cos(\omega t)
 \end{aligned} \tag{11.185}$$

Factorizando los términos en función de $e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t)$ y $e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t)$ se obtienen los valores de H_1 y H_2 respectivamente para poder representar la respuesta dinámica $x(t)$ como en el capítulo VIII.

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t)$ que se asocian a H_1 :

$$H_1 = x_0 + \frac{\mu_0}{2\xi}$$

Denotando los términos con $e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t)$ que se asocian a H_2 :

$$H_2 = \left(\frac{1}{\omega_D}\right) \left(\xi\omega x_0 + v_0 + \frac{\mu_0\omega}{2}\right)$$

Esta es la solución obtenida en el capítulo VIII (ecuación 8.115):

$x(t) = e^{-\xi\omega t} [H_1 \cos(\omega_D t) + H_2 \sin(\omega_D t)] - \frac{\mu_0}{2\xi} \cos(\omega t) \quad (11.186)$
--

PARTE
V

CONDENSACIÓN ESTÁTICA Y
BASES TEÓRICAS DEL ANÁLISIS
DINÁMICO MODAL ESPECTRAL

Capítulo XII: Condensación Estática y Casos de Aplicación a Sistemas de 1 G. D. L. y Matrices de Rigidez

- 12.1 Definición
- 12.2 Condensación Estática Utilizando el Método de Rigidez Clásico
- 12.3 Ejemplos de condensación Estática a Marcos de una Crujía y un Nivel
 - 12.3.1 Caso 1: apoyos empotrados
 - 12.3.2 Caso 2: apoyos fijos
 - 12.3.3 Caso 3: apoyo empotrado y fijo
- 12.4 Calculo del Periodo de una Estructura a Sistemas de 1 G.D.L.
 - 12.4.1 Periodo natural de la estructura del caso 1
 - 12.4.2 Periodo natural de la estructura del caso 2
 - 12.4.3 Periodo natural de la estructura del caso 3
- 12.5 Relación del Periodo T_n con la Rigidez Lateral K_L
- 12.6 Deducción de la Matriz de Rigidez en el Plano en Coordenadas Locales
 - 12.6.1 Matriz de rigidez en una viga doblemente empotrada
 - 12.6.2 Matriz de rigidez en una columna doblemente empotrada
 - 12.6.3 Matriz de rigidez en una viga articulada – empotrada
 - 12.6.4 Matriz de rigidez en una columna articulada - empotrada
- 12.7 Matrices de Permutación en la Condensación Estática
- 12.8 Propuesta de Numeración de Grados de Libertad para las Coordenadas Globales

XII. Condensación Estática y Casos de Aplicación a Sistemas de 1 G. D. L. y Matrices de Rigidez

12.1 Definición

El proceso de discretización de una estructura ayuda a dividir en varios elementos a la misma para su análisis. Esta división se hace debido a los cambios de geometría, carga o propiedades de los materiales. Posteriormente, los elementos divididos se unen para modelar la estructura entera, sin embargo, el número de grados de libertad puede llegar a resultar muy grande provocando que las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento (propias de la estructura) resulten ser de dimensiones muy extensas. Para estos casos es conveniente reducir las dimensiones de las matrices en un proceso denominado condensación estática (Paz, 1992, pág. 300).

12.2 Condensación Estática Utilizando el Método de Rigidez Clásico

Como el método de la condensación estática necesita conocer la matriz de rigidez de la estructura se comienza por utilizar el planteamiento matricial siguiente:

$$[K]\{\theta\} + \{P\} = \{0\} \quad (12.1)^{12.1}$$

Siendo:

$[K]$ = matriz de rigidez cuadrada y simétrica de dimensión $n \times n$ ^{12.2}.

$\{\theta\}$ = vector columna de rotaciones angulares y desplazamientos lineales en los nodos viga-columna.

$\{P\}$ = vector columna de fuerzas y momentos de disequilibrio en los nodos viga-columna.

$\{0\}$ = vector cero columna.

^{12.1} Esta ecuación representa el mismo planteamiento matricial de rigidez obtenido por las ecuaciones de Navier en el capítulo I (ecuación 1.36).

^{12.2} El grado n es igual al número de grados de libertad presentes en las uniones viga – columna.

Como todos los casos mostrados presentarán una crujía y un nivel, primero se aplicará un giro unitario en el nodo B ($\theta_B = 1$), después en el nodo C ($\theta_C = 1$) y finalmente un desplazamiento lineal en los nodos B y C ($\Delta_B = \Delta_C = 1$).

Al aplicar el método de rigideces clásico se contemplan tres grados de libertad, por ende, la matriz de rigidez será de dimensiones 3 x 3 de la siguiente forma:

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (12.2)$$

El planteamiento de rigideces, basado en la ecuación 12.1, es el siguiente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix}}_{[k]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \{\theta_T\} \\ \{\Delta_T\} \end{Bmatrix}}_{\{\theta\}} + \underbrace{\begin{Bmatrix} \{M_R\} \\ \{P_R\} \end{Bmatrix}}_{\{P\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}}_{\{0\}} \quad (12.3)$$

Donde las matrices $[K_{11}]$, $[K_{12}]$, $[K_{21}]$ y $[K_{22}]$ son matrices particionadas a partir de la ecuación 12.2. Expresado explícitamente, se tiene:

$$\left[\begin{array}{c|c} [K_{11}] & [K_{12}] \\ \hline [K_{21}] & [K_{22}] \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} k_{31} & k_{32} \end{bmatrix} & [k_{33}] \end{array} \right] \quad (12.4)$$

Los elementos de la ecuación 12.3 son los siguientes:

$\{\theta_T\}$ = llamado vector de rotaciones totales. Es la parte del vector $\{\theta\}$ correspondiente a las rotaciones angulares de los nodos viga-columna por la inducción de las rotaciones unitarias ($\theta_B = \theta_C = 1$).

$\{\Delta_T\}$ = llamado vector de desplazamientos lineales totales. Es la parte del vector $\{\theta\}$ correspondiente a los desplazamientos lineales de los nodos viga-columna por la inducción de los desplazamientos lineales ($\Delta_B = \Delta_C = 1$).

$\{M_R\}$ = llamado momentos resultantes. Es la parte del vector $\{P\}$ correspondiente a los momentos de desequilibrio en los nodos viga columna.

$\{P_R\}$ = llamado cortantes resultantes. Es la parte del vector $\{P\}$ correspondiente a los cortantes de desequilibrio en los nodos viga columna.

Para el uso de la condensación estática es necesario transformar la ecuación matricial 12.3 en un sistema de ecuaciones algebraico^{12.3} de la siguiente manera:

$$\begin{cases} [K_{11}]\{\Theta_T\} + [K_{12}]\{\Delta_T\} = -\{M_R\} \\ [K_{21}]\{\Theta_T\} + [K_{22}]\{\Delta_T\} = -\{P_R\} \end{cases} \quad (12.5)$$

Despejando $[K_{11}]$ de 12.5:

$$\begin{aligned} [K_{11}]\{\Theta_T\} + [K_{12}]\{\Delta_T\} &= -\{M_R\} \\ [K_{11}]\{\Theta_T\} &= -\{M_R\} - [K_{12}]\{\Delta_T\} \\ \therefore \{\Theta_T\} &= -[K_{11}]^{-1}\{M_R\} - [K_{11}]^{-1}[K_{12}]\{\Delta_T\} \end{aligned} \quad (12.6)$$

Sustituyendo $\{\Theta_T\} = -[K_{11}]^{-1}\{M_R\} - [K_{11}]^{-1}[K_{12}]\{\Delta_T\}$ en $[K_{21}]\{\Theta_T\} + [K_{22}]\{\Delta_T\} = -\{P_R\}$

$$\begin{aligned} [K_{21}]\{\Theta_T\} + [K_{22}]\{\Delta_T\} &= -\{P_R\} \\ -[K_{21}][K_{11}]^{-1}\{M_R\} - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]\{\Delta_T\} + [K_{22}]\{\Delta_T\} &= -\{P_R\} \\ -[K_{21}][K_{11}]^{-1}\{M_R\} + [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]]\{\Delta_T\} &= -\{P_R\} \\ \therefore [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]]\{\Delta_T\} &= [K_{21}][K_{11}]^{-1}\{M_R\} - \{P_R\} \end{aligned} \quad (12.7)$$

La ecuación 12.7 representa la ley de Hooke obtenida por condensación estática, es decir:

$$[K_L]\{\Delta_L\} = \{F_L\} \quad (12.8)$$

Donde:

$[K_L]$ = rigidez lateral obtenida por condensación estática con un valor de:

$$[K_L] = [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] \quad (12.9)^{12.4}$$

$\{\Delta_L\}$ = desplazamiento lateral obtenido por condensación estática con un valor de:

^{12.3} Los términos deben tratarse como vectores y matrices según sea el caso, no como coeficientes de una ecuación algebraica.

^{12.4} Esta es la matriz de rigidez que se desea obtener como resultado de la condensación estática.

$$\{\Delta_L\} = \{\Delta_T\} \quad (12.10)$$

$\{F_L\}$ = fuerza lateral que se obtiene por condensación estática con un valor de:

$$\{F_L\} = [K_{21}][K_{11}]^{-1}\{M_R\} - \{P_R\} \quad (12.11)$$

12.3 Ejemplos de condensación Estática a Marcos de una Crujía y un Nivel

12.3.1 Caso 1: apoyos empotrados

El marco mostrado a este caso se representa por la siguiente figura:

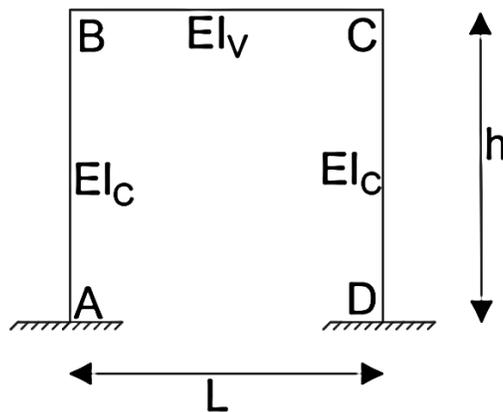


Figura X11.1. Marco de una crujía y un nivel con empotramientos en sus bases.

Donde:

$[E]$ = módulo de elasticidad (en unidades fuerza/longitud al cuadrado).

$[I_v]$ = inercia de la viga (en unidades longitud a la cuarta).

$[I_c]$ = inercia de la columna (en unidades longitud a la cuarta).

$[L]$ = longitud de la crujía.

$[h]$ = altura de la columna.

$[A \text{ y } D]$ = nodos restringidos por empotramientos.

$[B \text{ y } C]$ = nodos viga-columna.

Se empieza por construir la matriz de rigidez a partir de los coeficientes de rigidez k_{ij} generados al aplicar $\theta_B = \theta_C = \Delta_C = 1$. Para calcular todos los coeficientes k_{ij} se debe respetar los valores EI_v, EI_c, L y h de cada elemento tal como en la figura XII.1.

Aplicando $\theta_B = 1$:

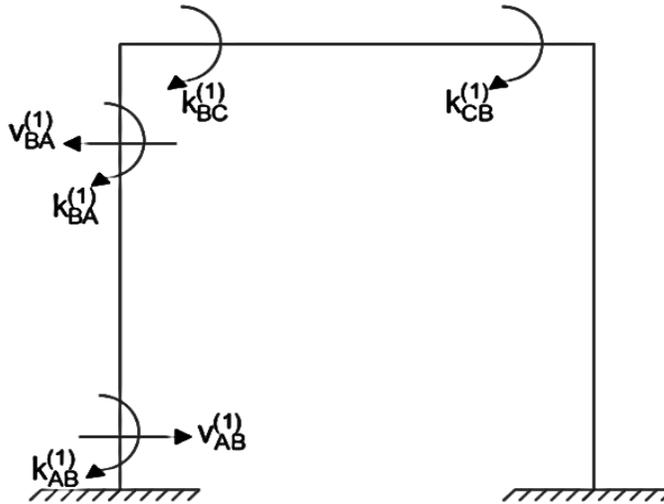


Figura XII.2. Rigideces generadas al aplicar $\theta_B = 1$.

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K_{AB}^{(1)} &= \frac{2EI_c}{h} \\
 K_{BA}^{(1)} &= \frac{4EI_c}{h} \\
 V_{AB}^{(1)} &= \frac{K_{AB}^{(1)} + K_{BA}^{(1)}}{h} = \frac{6EI_c}{h^2} \\
 V_{BA}^{(1)} &= -\frac{K_{AB}^{(1)} + K_{BA}^{(1)}}{h} = -\frac{6EI_c}{h^2} \\
 K_{BC}^{(1)} &= \frac{4EI_v}{L} \\
 K_{CB}^{(1)} &= \frac{2EI_v}{L}
 \end{aligned}
 \tag{12.12}$$

Aplicando $\theta_c = 1$:

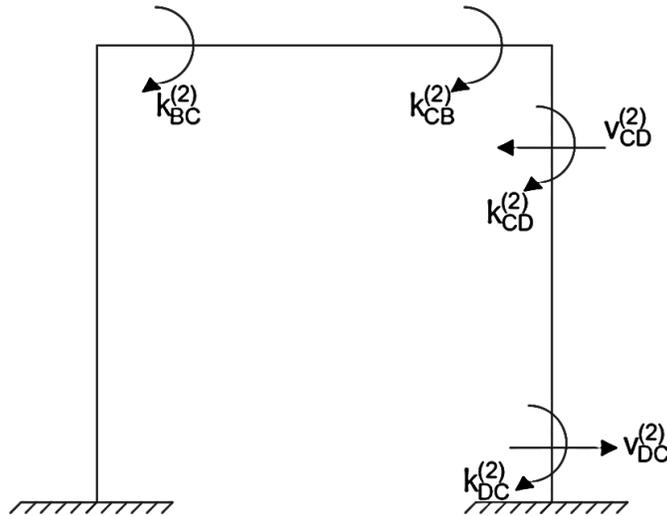


Figura XII.3. Rigideces generadas al aplicar $\theta_c = 1$.

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K_{DC}^{(2)} &= \frac{2EI_c}{h} \\
 K_{CD}^{(2)} &= \frac{4EI_c}{h} \\
 V_{DC}^{(2)} &= \frac{K_{DC}^{(2)} + K_{CD}^{(2)}}{h} = \frac{6EI_c}{h^2} \\
 V_{CD}^{(2)} &= -\frac{K_{DC}^{(2)} + K_{CD}^{(2)}}{h} = -\frac{6EI_c}{h^2} \\
 K_{CB}^{(2)} &= \frac{4EI_v}{L} \\
 K_{BC}^{(2)} &= \frac{2EI_v}{L}
 \end{aligned}
 \tag{12.13}$$

Aplicando $\Delta_c = 1$:

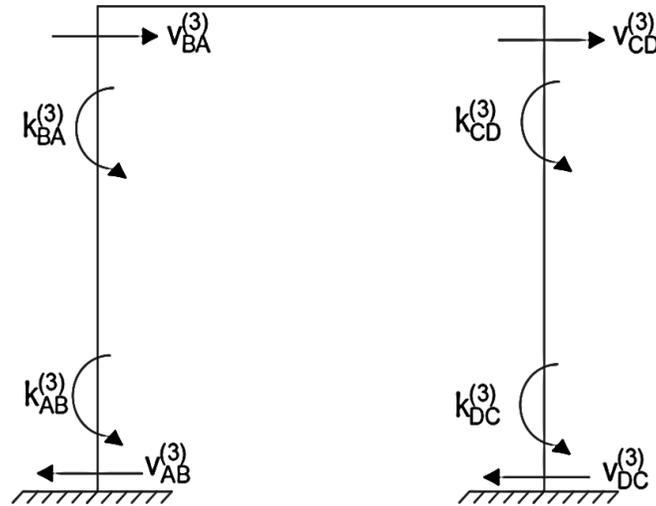


Figura XII.4. Rigideces generadas al aplicar $\Delta_c = 1$.

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K_{AB}^{(3)} &= -\frac{6EI_c}{h^2} \\
 K_{BA}^{(3)} &= -\frac{6EI_c}{h^2} \\
 V_{AB}^{(3)} &= \frac{K_{AB}^{(3)} + K_{BA}^{(3)}}{h} = -\frac{12EI_c}{h^3} \\
 V_{BA}^{(3)} &= -\frac{K_{AB}^{(3)} + K_{BA}^{(3)}}{h} = \frac{12EI_c}{h^3} \\
 K_{DC}^{(3)} &= -\frac{6EI_c}{h^2} \\
 K_{CD}^{(3)} &= -\frac{6EI_c}{h^2} \\
 V_{DC}^{(3)} &= \frac{K_{DC}^{(3)} + K_{CD}^{(3)}}{h} = -\frac{12EI_c}{h^3} \\
 V_{CD}^{(3)} &= -\frac{K_{DC}^{(3)} + K_{CD}^{(3)}}{h} = \frac{12EI_c}{h^3}
 \end{aligned} \tag{12.14}$$

Conociendo los coeficientes de rigidez, se tiene que la matriz de rigidez debe ser igual a:

$$[K] = [K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{BA}^{(1)} + k_{BC}^{(1)} & k_{BC}^{(2)} & k_{BA}^{(3)} \\ k_{CB}^{(1)} & k_{CD}^{(2)} + k_{CB}^{(2)} & K_{CD}^{(3)} \\ V_{BA}^{(1)} & V_{CD}^{(2)} & V_{BA}^{(3)} + V_{CD}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (12.15)$$

Al sustituir los coeficientes de rigidez respectivos de 12.12 a 12.14 en 12.15 se obtiene:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_v}{L} & \frac{2EI_v}{L} & -\frac{6EI_c}{h^2} \\ \frac{2EI_v}{L} & \frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_v}{L} & -\frac{6EI_c}{h^2} \\ -\frac{6EI_c}{h^2} & -\frac{6EI_c}{h^2} & \frac{24EI_c}{h^3} \end{bmatrix} \quad (12.16)$$

Particionando la matriz de rigidez:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & | & [K_{12}] \\ - & - & - \\ [K_{21}] & | & [K_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_v}{L} & \frac{2EI_v}{L} \right] \\ \frac{2EI_v}{L} & \frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_v}{L} \\ - & - \\ \left[-\frac{6EI_c}{h^2} & -\frac{6EI_c}{h^2} \right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[-\frac{6EI_c}{h^2} \right] \\ -\frac{6EI_c}{h^2} \\ \left[\frac{24EI_c}{h^3} \right] \end{bmatrix} \quad (12.17)$$

Teniendo la matriz particionada se puede aplicar la definición de rigidez lateral obtenida a partir de $[K_L] = [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]$:

$$\begin{aligned} [K_L] &= [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] \\ \therefore &= \begin{bmatrix} \frac{24EI_c}{h^3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{6EI_c}{h^2} & -\frac{6EI_c}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_v}{L} & \frac{2EI_v}{L} \\ \frac{2EI_v}{L} & \frac{4EI_c}{h} + \frac{4EI_v}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{6EI_c}{h^2} \\ -\frac{6EI_c}{h^2} \end{bmatrix} \\ \therefore &= \begin{bmatrix} \frac{4}{h} \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{6}{h} \right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{6}{h} \left(\frac{EI_c}{h} \right) & -\frac{6}{h} \left(\frac{EI_c}{h} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \left(\frac{EI_c}{h} + \frac{EI_v}{L} \right) & 2 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \\ 2 \left(\frac{EI_v}{L} \right) & 4 \left(\frac{EI_c}{h} + \frac{EI_v}{L} \right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} - \left(\frac{EI_c}{h} \right) \frac{6}{h} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con:

$$A = \frac{EI_c}{h} \quad ; \quad B = \frac{EI_v}{L} \quad ; \quad C = A + B \quad ; \quad D = \frac{6}{h}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{4}{h} [AD] - [-AD \quad -AD] \begin{bmatrix} 4(A+B) & 2B \\ 2B & 4(A+B) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -AD \\ -AD \end{bmatrix} \\ \vdots &= \frac{4}{h} [AD] - (-AD) [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 4(A+B) & 2B \\ 2B & 4(A+B) \end{bmatrix}^{-1} (-AD) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \vdots &= \frac{4}{h} [AD] - (-AD)(-AD) [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 4(A+B) & 2B \\ 2B & 4(A+B) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \vdots &= \frac{4}{h} [AD] - A^2 D^2 [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 4C & 2B \\ 2B & 4C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculando la matriz inversa presente por eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 4C & 2B \\ 2B & 4C \end{bmatrix}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 4C & 2B & 1 & 0 \\ 2B & 4C & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $R_1 / 4C$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4C & 2B & 1 & 0 \\ 2B & 4C & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{B}{2C} & \frac{1}{4C} & 0 \\ 2B & 4C & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $R_2 - 2BR_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{B}{2C} & \frac{1}{4C} & 0 \\ 2B & 4C & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{B}{2C} & \frac{1}{4C} & 0 \\ 0 & \frac{4C^2 - B^2}{C} & -\frac{B}{2C} & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $[C / (4C^2 - B^2)]R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{B}{2C} & \frac{1}{4C} & 0 \\ 0 & \frac{4C^2 - B^2}{C} & -\frac{B}{2C} & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{B}{2C} & \frac{1}{4C} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{B}{2(4C^2 - B^2)} & \frac{C}{4C^2 - B^2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $R_1 - (B / 2C)R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{B}{2C} & \frac{1}{4C} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{B}{2(4C^2 - B^2)} & \frac{C}{4C^2 - B^2} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{C}{4C^2 - B^2} & -\frac{B}{2(4C^2 - B^2)} \\ 0 & 1 & -\frac{B}{2(4C^2 - B^2)} & \frac{C}{4C^2 - B^2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4C & 2B \\ 2B & 4C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{C}{4C^2 - B^2} & -\frac{B}{2(4C^2 - B^2)} \\ -\frac{B}{2(4C^2 - B^2)} & \frac{C}{4C^2 - B^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4C^2 - B^2} \begin{bmatrix} C & -\frac{B}{2} \\ -\frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$$

Continuando con la simplificación ya calculada la matriz inversa:

$$\therefore = \frac{4}{h} [AD] - A^2 D^2 [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 4C & 2B \\ 2B & 4C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore = \frac{4}{h} [AD] - A^2 D^2 [1 \quad 1] \frac{1}{4C^2 - B^2} \begin{bmatrix} C & -\frac{B}{2} \\ -\frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore = \frac{4}{h} [AD] - \frac{A^2 D^2}{4C^2 - B^2} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} C & -\frac{B}{2} \\ -\frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore = \frac{4}{h} [AD] - \frac{A^2 D^2}{4C^2 - B^2} \left[C - \frac{B}{2} \quad -\frac{B}{2} + C \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore = \frac{4}{h} [AD] - \frac{A^2 D^2}{4C^2 - B^2} \left[C - \frac{B}{2} - \frac{B}{2} + C \right]$$

$$\therefore = \frac{4}{h} [AD] - \frac{A^2 D^2}{4C^2 - B^2} [2C - B]$$

$$\therefore = \frac{4}{h} [AD] - \frac{A^2 D^2}{(2C - B)(2C + B)} [2C - B]$$

$$\therefore = \frac{4AD}{h} - \frac{A^2 D^2}{2C + B}$$

$$\therefore = AD \left(\frac{4}{h} - \frac{AD}{2C + B} \right)$$

Recordando que $C = A + B$, entonces:

$$\begin{aligned} \therefore &= AD \left(\frac{4}{h} - \frac{AD}{2A + 2B + B} \right) \\ \therefore &= AD \left(\frac{4}{h} - \frac{AD}{2A + 3B} \right) \\ \therefore &= \frac{AD}{h} \left(\frac{8A + 12B - ADh}{2A + 3B} \right) \end{aligned}$$

Transformado A, B y D a las sustituciones originales:

$$\begin{aligned} \therefore &= \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{6}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \left[\frac{8 \left(\frac{EI_c}{h} \right) + 12 \left(\frac{EI_v}{L} \right) - \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{6}{h} \right) h}{2 \left(\frac{EI_c}{h} \right) + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right)} \right] \\ \therefore &= \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{6}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \left[\frac{8 \left(\frac{EI_c}{h} \right) + 12 \left(\frac{EI_v}{L} \right) - \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{6}{h} \right) h}{2 \left(\frac{EI_c}{h} \right) + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right)} \right] \left[\begin{array}{l} \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} \\ \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} \end{array} \right] \\ \therefore &= \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{6}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \left[\frac{8 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} + 12 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} - \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} \left(\frac{6}{h} \right) h}{2 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}} \right] \\ \therefore &= \frac{6EI_c}{h^3} \left[\frac{8 + 12 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} - 6}{2 + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}} \right] \\ \therefore &= \frac{6EI_c}{h^3} \left[\frac{2 + 12 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}}{2 + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}} \right] \\ \therefore &= \frac{12EI_c}{h^3} \left[\frac{1 + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}}{2 + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}} \right] \end{aligned}$$

Denominando a γ como la relación de rigidez de la viga con la columna con valor de:

$$\gamma = \frac{\frac{EI_v}{L}}{\frac{EI_c}{h}} = \left(\frac{EI_v}{L}\right) \left(\frac{EI_c}{h}\right)^{-1}$$

Se obtiene el valor de la rigidez lateral:

$$[K_L] = \frac{12EI_c}{h^3} \left[\frac{1 + 6\gamma}{2 + 3\gamma} \right] \quad (12.18)$$

12.3.2 Caso 2: apoyos fijos

El marco mostrado a este caso se representa por la siguiente figura:

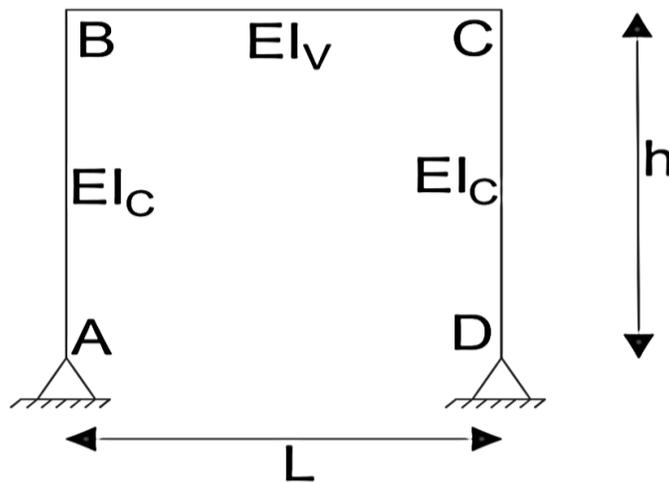


Figura XII.5. Marco de una crujía y un nivel con apoyos fijos en sus bases.

Donde:

$[E]$ = módulo de elasticidad (en unidades fuerza/longitud al cuadrado).

$[I_v]$ = inercia de la viga (en unidades longitud a la cuarta).

$[I_c]$ = inercia de la columna (en unidades longitud a la cuarta).

$[L]$ = longitud de la crujía.

$[h]$ = altura de la columna.

[A y D] = nodos restringidos apoyos fijos.

[B y C] = nodos viga-columna.

Se empieza por construir la matriz de rigidez a partir de los coeficientes de rigidez k_{ij} generados al aplicar $\theta_B = \theta_C = \Delta_C = 1$. Para calcular todos los coeficientes k_{ij} se debe respetar los valores EI_v , EI_c , L y h de cada elemento tal como en la figura XII.5.

Aplicando $\theta_B = 1$:

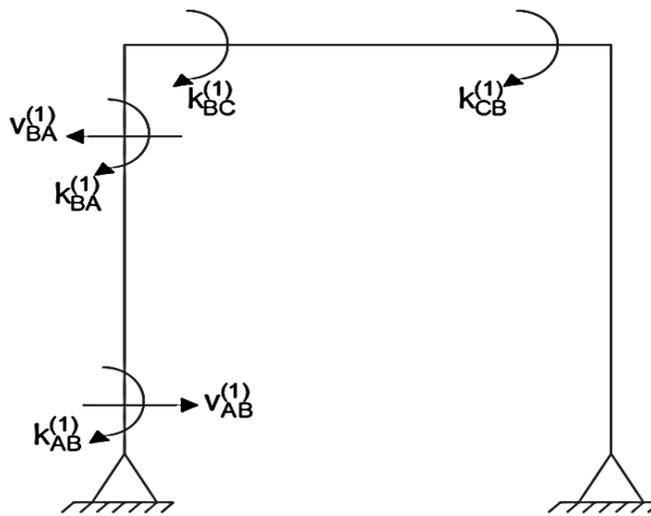


Figura XII.6. Rigideces generadas al aplicar $\theta_B = 1$.

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K_{AB}^{(1)} &= 0 \\
 K_{BA}^{(1)} &= \frac{3EI_c}{h} \\
 V_{AB}^{(1)} &= \frac{K_{AB}^{(1)} + K_{BA}^{(1)}}{h} = \frac{3EI_c}{h^2} \\
 V_{BA}^{(1)} &= -\frac{K_{AB}^{(1)} + K_{BA}^{(1)}}{h} = -\frac{3EI_c}{h^2} \\
 K_{BC}^{(1)} &= \frac{4EI_v}{L} \\
 K_{CB}^{(1)} &= \frac{2EI_v}{L}
 \end{aligned} \tag{12.19}$$

Aplicando $\theta_c = 1$:

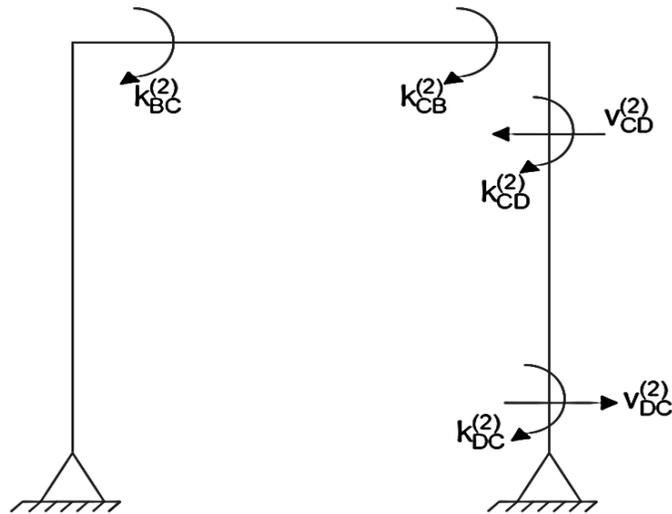


Figura XII.7. Rigideces generadas al aplicar $\theta_c = 1$.

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K_{DC}^{(2)} &= 0 \\
 K_{CD}^{(2)} &= \frac{3EI_C}{h} \\
 V_{DC}^{(2)} &= \frac{K_{DC}^{(2)} + K_{CD}^{(2)}}{h} = \frac{3EI_C}{h^2} \\
 V_{CD}^{(2)} &= -\frac{K_{DC}^{(2)} + K_{CD}^{(2)}}{h} = -\frac{3EI_C}{h^2} \\
 K_{CB}^{(2)} &= \frac{4EI_V}{L} \\
 K_{BC}^{(2)} &= \frac{2EI_V}{L}
 \end{aligned}
 \tag{12.20}$$

Aplicando $\Delta_c = 1$:

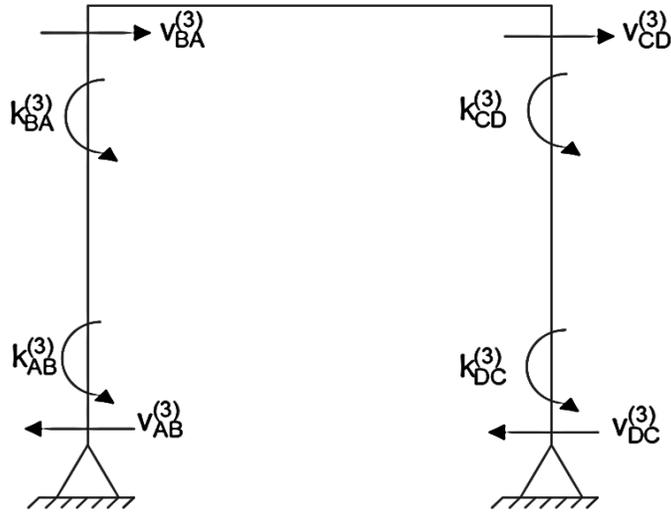


Figura XII.8. Rigideces generadas al aplicar $\Delta_c = 1$.

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K_{AB}^{(3)} &= -\frac{3EI_c}{h^2} \\
 K_{BA}^{(3)} &= -\frac{3EI_c}{h^2} \\
 V_{AB}^{(3)} &= \frac{K_{AB}^{(3)} + K_{BA}^{(3)}}{h} = -\frac{6EI_c}{h^3} \\
 V_{BA}^{(3)} &= -\frac{K_{AB}^{(3)} + K_{BA}^{(3)}}{h} = \frac{6EI_c}{h^3} \\
 K_{DC}^{(3)} &= -\frac{3EI_c}{h^2} \\
 K_{CD}^{(3)} &= -\frac{3EI_c}{h^2} \\
 V_{DC}^{(3)} &= \frac{K_{DC}^{(3)} + K_{CD}^{(3)}}{h} = -\frac{6EI_c}{h^3} \\
 V_{CD}^{(3)} &= -\frac{K_{DC}^{(3)} + K_{CD}^{(3)}}{h} = \frac{6EI_c}{h^3}
 \end{aligned} \tag{12.21}$$

Conociendo los coeficientes de rigidez, se tiene que la matriz de rigidez debe ser igual a:

$$[K] = [K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{BA}^{(1)} + k_{BC}^{(1)} & k_{BC}^{(2)} & k_{BA}^{(3)} \\ k_{CB}^{(1)} & k_{CD}^{(2)} + k_{CB}^{(2)} & K_{CD}^{(3)} \\ V_{BA}^{(1)} & V_{CD}^{(2)} & V_{BA}^{(3)} + V_{CD}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (12.22)$$

Al sustituir los coeficientes de rigidez respectivos de 12.19 a 12.21 en 12.22 se obtiene:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{3EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} & \frac{2EI_V}{L} & -\frac{3EI_C}{h^2} \\ \frac{2EI_V}{L} & \frac{3EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} & -\frac{3EI_C}{h^2} \\ -\frac{3EI_C}{h^2} & -\frac{3EI_C}{h^2} & \frac{12EI_C}{h^3} \end{bmatrix} \quad (12.23)$$

Particionando la matriz de rigidez:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & | & [K_{12}] \\ - & - & - \\ [K_{21}] & | & [K_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{3EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} & \frac{2EI_V}{L} \right] \\ \frac{2EI_V}{L} & \frac{3EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} \\ - & - \\ \left[-\frac{3EI_C}{h^2} & -\frac{3EI_C}{h^2} \right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[-\frac{3EI_C}{h^2} \right] \\ -\frac{3EI_C}{h^2} \\ \left[\frac{12EI_C}{h^3} \right] \end{bmatrix} \quad (12.24)$$

Teniendo la matriz particionada se puede aplicar la definición de rigidez lateral obtenida a partir de $[K_L] = [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]$:

$$\begin{aligned} [K_L] &= [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] \\ \therefore &= \begin{bmatrix} \frac{12EI_C}{h^3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3EI_C}{h^2} & -\frac{3EI_C}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} & \frac{2EI_V}{L} \\ \frac{2EI_V}{L} & \frac{3EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{3EI_C}{h^2} \\ -\frac{3EI_C}{h^2} \end{bmatrix} \\ \therefore &= \begin{bmatrix} \frac{4}{h} \left(\frac{3}{h} \right) \left(\frac{EI_C}{h} \right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{h} \left(\frac{EI_C}{h} \right) & -\frac{3}{h} \left(\frac{EI_C}{h} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \left(\frac{EI_C}{h} \right) + 4 \left(\frac{EI_V}{L} \right) & 2 \left(\frac{EI_V}{L} \right) \\ 2 \left(\frac{EI_V}{L} \right) & 3 \left(\frac{EI_C}{h} \right) + 4 \left(\frac{EI_V}{L} \right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{3}{h} \left(\frac{EI_C}{h} \right) \\ -\frac{3}{h} \left(\frac{EI_C}{h} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con:

$$A = \frac{EI_C}{h} \quad ; \quad B = \frac{EI_V}{L} \quad ; \quad C = 3A + 4B \quad ; \quad D = \frac{3}{h}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \left[\frac{4}{h}AD \right] - [-AD \quad -AD] \begin{bmatrix} 3A+4B & 2B \\ 2B & 3A+4B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -AD \\ -AD \end{bmatrix} \\ \vdots &= \frac{4}{h} [AD] - (-AD) [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 3A+4B & 2B \\ 2B & 3A+4B \end{bmatrix}^{-1} (-AD) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \vdots &= \frac{4}{h} [AD] - (-AD)(-AD) [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 3A+4B & 2B \\ 2B & 3A+4B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \vdots &= \frac{4}{h} [AD] - A^2D^2 [1 \quad 1] \begin{bmatrix} C & 2B \\ 2B & C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculando la matriz inversa presente por eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} C & 2B \\ 2B & C \end{bmatrix}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} C & 2B & 1 & 0 \\ 2B & C & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo R_1 / C :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} C & 2B & 1 & 0 \\ 2B & C & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 2B & C & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $R_2 - 2BR_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 2B & C & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{C^2 - 4B^2}{C} & -\frac{2B}{C} & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $[C / (C^2 - 4B^2)]R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{C^2 - 4B^2}{C} & -\frac{2B}{C} & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2B}{C^2 - 4B^2} & \frac{C}{C^2 - 4B^2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $R_1 - (2B / C)R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2B}{C^2 - 4B^2} & \frac{C}{C^2 - 4B^2} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{C}{C^2 - 4B^2} & -\frac{2B}{C^2 - 4B^2} \\ 0 & 1 & -\frac{2B}{C^2 - 4B^2} & \frac{C}{C^2 - 4B^2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} C & 2B \\ 2B & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{C}{C^2 - 4B^2} & -\frac{2B}{C^2 - 4B^2} \\ -\frac{2B}{C^2 - 4B^2} & \frac{C}{C^2 - 4B^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{C^2 - 4B^2} \begin{bmatrix} C & -2B \\ -2B & C \end{bmatrix}$$

Continuando con la simplificación ya calculada la matriz inversa:

$$\begin{aligned} \therefore &= \frac{4}{h} [AD] - A^2 D^2 [1 \quad 1] \begin{bmatrix} C & 2B \\ 2B & C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{4}{h} [AD] - A^2 D^2 [1 \quad 1] \frac{1}{C^2 - 4B^2} \begin{bmatrix} C & -2B \\ -2B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{4}{h} [AD] - \frac{A^2 D^2}{C^2 - 4B^2} [1 \quad 1] \begin{bmatrix} C & -2B \\ -2B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{4}{h} [AD] - \frac{A^2 D^2}{C^2 - 4B^2} [C - 2B \quad -2B + C] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{4}{h} [AD] - \frac{A^2 D^2}{C^2 - 4B^2} [C - 2B - 2B + C] \\ \therefore &= \frac{4}{h} [AD] - \frac{A^2 D^2}{C^2 - 4B^2} [2C - 4B] \\ \therefore &= \frac{4}{h} (AD) - \frac{A^2 D^2}{(C - 2B)(C + 2B)} 2(C - 2B) \\ \therefore &= \frac{4}{h} (AD) - \frac{2A^2 D^2}{C + 2B} \\ \therefore &= 2AD \left(\frac{2}{h} - \frac{AD}{C + 2B} \right) \end{aligned}$$

Recordando que $C = 3A + 4B$, entonces:

$$\begin{aligned} \therefore &= 2AD \left(\frac{2}{h} - \frac{AD}{3A + 4B + 2B} \right) \\ \therefore &= 2AD \left(\frac{2}{h} - \frac{AD}{3A + 6B} \right) \\ \therefore &= \frac{2AD}{h} \left(\frac{6A + 12B - ADh}{3A + 6B} \right) \end{aligned}$$

Transformado A, B y D a las sustituciones originales:

$$\begin{aligned}
 \therefore &= 2 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{3}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \left[\frac{6 \left(\frac{EI_c}{h} \right) + 12 \left(\frac{EI_v}{L} \right) - \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{3}{h} \right) h}{3 \left(\frac{EI_c}{h} \right) + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right)} \right] \\
 \therefore &= 2 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{3}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \left[\frac{6 \left(\frac{EI_c}{h} \right) + 12 \left(\frac{EI_v}{L} \right) - \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{3}{h} \right) h}{3 \left(\frac{EI_c}{h} \right) + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right)} \right] \left[\frac{\left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}}{\left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}} \right] \\
 \therefore &= 2 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{3}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \left[\frac{6 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} + 12 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} - \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} \left(\frac{3}{h} \right) h}{3 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}} \right] \\
 \therefore &= \frac{6EI_c}{h^3} \left[\frac{6 + 12 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} - 3}{3 + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}} \right] \\
 \therefore &= \frac{6EI_c}{h^3} \left[\frac{3 + 12 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}}{3 + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}} \right] \\
 \therefore &= \frac{18EI_c}{3h^3} \left[\frac{1 + 4 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}}{1 + 2 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}} \right] \\
 \therefore &= \frac{6EI_c}{h^3} \left[\frac{1 + 4 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}}{1 + 2 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}} \right]
 \end{aligned}$$

Denominando a γ como la relación de rigidez de la viga con la columna con valor de:

$$\gamma = \frac{\frac{EI_v}{L}}{\frac{EI_c}{h}} = \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}$$

Se obtiene el valor de la rigidez lateral:

$$[K_L] = \frac{6EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 1 + 4\gamma \\ 1 + 2\gamma \end{bmatrix} \quad (12.25)$$

12.3.3 Caso 3: apoyo empotrado y fijo

El marco mostrado a este caso se representa por la siguiente figura:

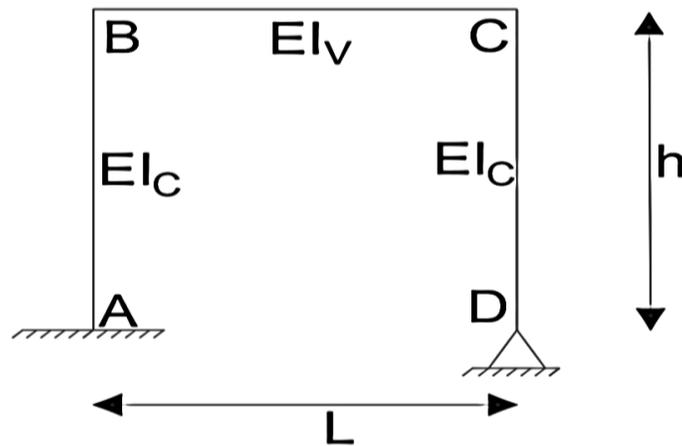


Figura XII.9. Marco de una crujía y un nivel con un apoyo fijo y otro empotrado.

Donde:

$[E]$ = módulo de elasticidad (en unidades fuerza/longitud al cuadrado).

$[I_v]$ = inercia de la viga (en unidades longitud a la cuarta).

$[I_c]$ = inercia de la columna (en unidades longitud a la cuarta).

$[L]$ = longitud de la crujía.

$[h]$ = altura de la columna.

$[A \text{ y } D]$ = nodos restringidos empotramiento y apoyo fijo, respectivamente.

$[B \text{ y } C]$ = nodos viga-columna.

Se empieza por construir la matriz de rigidez a partir de los coeficientes de rigidez k_{ij} generados al aplicar $\theta_B = \theta_C = \Delta_C = 1$. Para calcular todos los coeficientes k_{ij} se debe respetar los valores EI_v, EI_c, L y h de cada elemento tal como en la figura XII.9.

Aplicando $\theta_B = 1$:

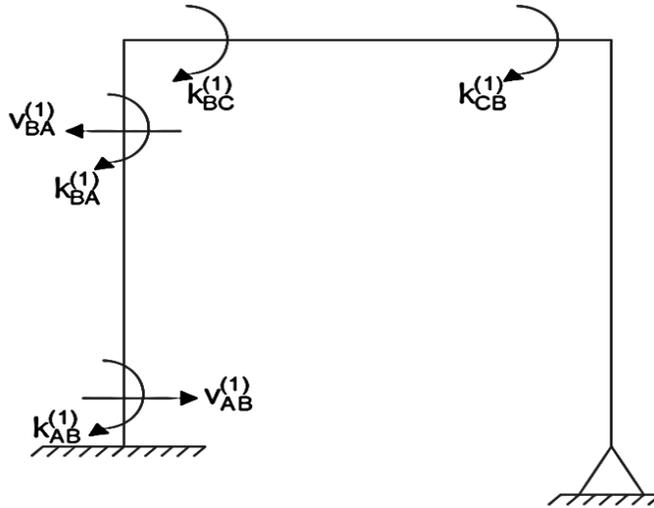


Figura XII.10. Rigideces generadas al aplicar $\theta_B = 1$.

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K_{AB}^{(1)} &= \frac{2EI_c}{h} \\
 K_{BA}^{(1)} &= \frac{4EI_c}{h} \\
 V_{AB}^{(1)} &= \frac{K_{AB}^{(1)} + K_{BA}^{(1)}}{h} = \frac{6EI_c}{h^2} \\
 V_{BA}^{(1)} &= -\frac{K_{AB}^{(1)} + K_{BA}^{(1)}}{h} = -\frac{6EI_c}{h^2} \\
 K_{BC}^{(1)} &= \frac{4EI_v}{L} \\
 K_{CB}^{(1)} &= \frac{2EI_v}{L}
 \end{aligned}
 \tag{12.26}$$

Aplicando $\theta_C = 1$:

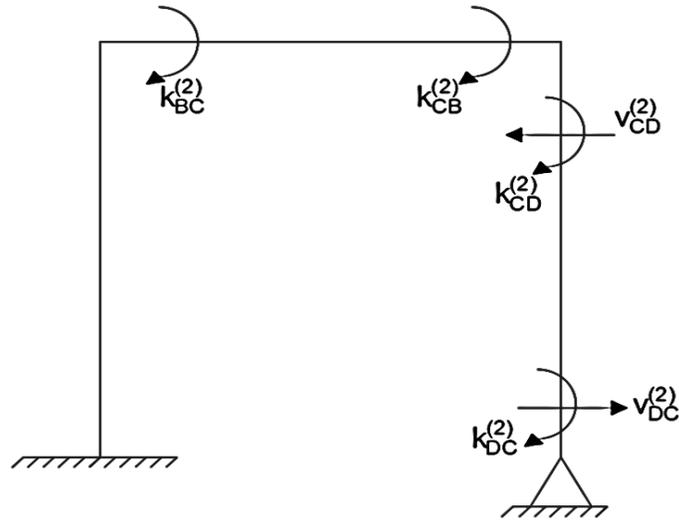


Figura XII.11. Rigideces generadas al aplicar $\theta_C = 1$.

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K_{DC}^{(2)} &= 0 \\
 K_{CD}^{(2)} &= \frac{3EI_C}{h} \\
 V_{DC}^{(2)} &= \frac{K_{DC}^{(2)} + K_{CD}^{(2)}}{h} = \frac{3EI_C}{h^2} \\
 V_{CD}^{(2)} &= -\frac{K_{DC}^{(2)} + K_{CD}^{(2)}}{h} = -\frac{3EI_C}{h^2} \\
 K_{CB}^{(2)} &= \frac{4EI_V}{L} \\
 K_{BC}^{(2)} &= \frac{2EI_V}{L}
 \end{aligned}
 \tag{12.27}$$

Aplicando $\Delta_C = 1$:

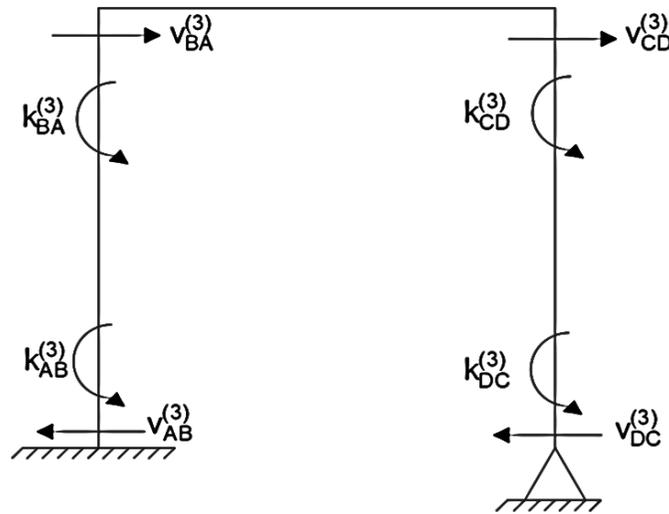


Figura XII.12. Rigideces generadas al aplicar $\Delta_C = 1$.

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
 K_{AB}^{(3)} &= -\frac{6EI_C}{h^2} \\
 K_{BA}^{(3)} &= -\frac{6EI_C}{h^2} \\
 V_{AB}^{(3)} &= \frac{K_{AB}^{(3)} + K_{BA}^{(3)}}{h} = -\frac{12EI_C}{h^3} \\
 V_{BA}^{(3)} &= -\frac{K_{AB}^{(3)} + K_{BA}^{(3)}}{h} = \frac{12EI_C}{h^3} \\
 K_{DC}^{(3)} &= -\frac{3EI_C}{h^2} \\
 K_{CD}^{(3)} &= -\frac{3EI_C}{h^2} \\
 V_{DC}^{(3)} &= \frac{K_{DC}^{(3)} + K_{CD}^{(3)}}{h} = -\frac{6EI_C}{h^3} \\
 V_{CD}^{(3)} &= -\frac{K_{DC}^{(3)} + K_{CD}^{(3)}}{h} = \frac{6EI_C}{h^3}
 \end{aligned} \tag{12.28}$$

Conociendo los coeficientes de rigidez, se tiene que la matriz de rigidez debe ser igual a:

$$[K] = [K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{BA}^{(1)} + k_{BC}^{(1)} & k_{BC}^{(2)} & k_{BA}^{(3)} \\ k_{CB}^{(1)} & k_{CD}^{(2)} + k_{CB}^{(2)} & K_{CD}^{(3)} \\ V_{BA}^{(1)} & V_{CD}^{(2)} & V_{BA}^{(3)} + V_{CD}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (12.29)$$

Al sustituir los coeficientes de rigidez respectivos de 12.26 a 12.28 en 12.29 se obtiene:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{4EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} & \frac{2EI_V}{L} & -\frac{6EI_C}{h^2} \\ \frac{2EI_V}{L} & \frac{3EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} & -\frac{3EI_C}{h^2} \\ -\frac{6EI_C}{h^2} & -\frac{3EI_C}{h^2} & \frac{18EI_C}{h^3} \end{bmatrix} \quad (12.30)$$

Particionando la matriz de rigidez:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & | & [K_{12}] \\ - & - & - \\ [K_{21}] & | & [K_{22}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{4EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} & \frac{2EI_V}{L} \right] \\ \left[\frac{2EI_V}{L} & \frac{3EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} \right] \\ \left[-\frac{6EI_C}{h^2} & -\frac{3EI_C}{h^2} \right] \end{bmatrix} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} + \begin{bmatrix} \left[-\frac{6EI_C}{h^2} \right] \\ \left[-\frac{3EI_C}{h^2} \right] \\ \left[\frac{18EI_C}{h^3} \right] \end{bmatrix} \quad (12.31)$$

Teniendo la matriz particionada se puede aplicar la definición de rigidez lateral obtenida a partir de: $[K_L] = [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]$:

$$\begin{aligned} [K_L] &= [K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}] \\ \therefore &= \begin{bmatrix} \frac{18EI_C}{h^3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{6EI_C}{h^2} & -\frac{3EI_C}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} & \frac{2EI_V}{L} \\ \frac{2EI_V}{L} & \frac{3EI_C}{h} + \frac{4EI_V}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{6EI_C}{h^2} \\ -\frac{3EI_C}{h^2} \end{bmatrix} \\ \therefore &= \begin{bmatrix} \frac{6}{h} \left(\frac{3}{h} \right) \left(\frac{EI_C}{h} \right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{6}{h} \left(\frac{EI_C}{h} \right) & -\frac{3}{h} \left(\frac{EI_C}{h} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \left(\frac{EI_C}{h} + \frac{EI_V}{L} \right) & 2 \left(\frac{EI_V}{L} \right) \\ 2 \left(\frac{EI_V}{L} \right) & 3 \left(\frac{EI_C}{h} \right) + 4 \left(\frac{EI_V}{L} \right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{6}{h} \left(\frac{EI_C}{h} \right) \\ -\frac{3}{h} \left(\frac{EI_C}{h} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con:

$$A = \frac{EI_C}{h} \quad ; \quad B = \frac{EI_V}{L} \quad ; \quad C = 4A + 4B \quad ; \quad D = \frac{1}{h}$$

$$\begin{aligned} \therefore &= \frac{18}{h} [AD] - [-6AD \quad -3AD] \begin{bmatrix} 4(A+B) & 2(B) \\ 2(B) & 3A+4(B) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -6AD \\ -3AD \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{18}{h} [AD] - (-3AD) [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 4A+4B & 2B \\ 2B & 3A+4B \end{bmatrix}^{-1} (-3AD) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{18}{h} [AD] - (-3AD)(-3AD) [2 \quad 1] \begin{bmatrix} C & 2B \\ 2B & C-A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{18}{h} [AD] - 9A^2D^2 [2 \quad 1] \begin{bmatrix} C & 2B \\ 2B & C-A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculando la matriz inversa presente por eliminación de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} C & 2B \\ 2B & C-A \end{bmatrix}^{-1} = \left[\begin{array}{cc|cc} C & 2B & 1 & 0 \\ 2B & C-A & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo R_1 / C :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} C & 2B & 1 & 0 \\ 2B & C-A & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 2B & C-A & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $R_2 - 2BR_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 2B & C-A & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{C^2 - AC - 4B^2}{C} & -\frac{2B}{C} & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $[C / (C^2 - AC - 4B^2)]R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{C^2 - AC - 4B^2}{C} & -\frac{2B}{C} & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2B}{C^2 - AC - 4B^2} & \frac{C}{C^2 - AC - 4B^2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

Haciendo $R_1 - (2B / C)R_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2B}{C} & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2B}{C^2 - AC - 4B^2} & \frac{C}{C^2 - AC - 4B^2} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{C-A}{C^2 - AC - 4B^2} & -\frac{2B}{C^2 - AC - 4B^2} \\ 0 & 1 & -\frac{2B}{C^2 - AC - 4B^2} & \frac{C}{C^2 - AC - 4B^2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \rightarrow R_1 \\ \rightarrow R_2 \end{array}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} C & 2B \\ 2B & C-A \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{C-A}{C^2-AC-4B^2} & -\frac{2B}{C^2-AC-4B^2} \\ -\frac{2B}{C^2-AC-4B^2} & \frac{C}{C^2-AC-4B^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{C^2-AC-4B^2} \begin{bmatrix} C-A & -2B \\ -2B & C \end{bmatrix}$$

Como $C = 4A + 4B$, entonces:

$$\begin{bmatrix} 4A+4B & 2B \\ 2B & 3A+4B \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12A^2+28AB+12B^2} \begin{bmatrix} 3A+4B & -2B \\ -2B & 4A+4B \end{bmatrix}$$

Continuando con la simplificación ya calculada la matriz inversa:

$$\begin{aligned} \therefore &= \frac{18}{h} [AD] - 9A^2D^2 [2 \quad 1] \begin{bmatrix} C & 2B \\ 2B & C-A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{18}{h} [AD] - 9A^2D^2 [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 4A+4B & 2B \\ 2B & 3A+4B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{18}{h} [AD] - 9A^2D^2 [2 \quad 1] \frac{1}{12A^2+28AB+12B^2} \begin{bmatrix} 3A+4B & -2B \\ -2B & 4A+4B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{18}{h} [AD] - \frac{9A^2D^2}{12A^2+28AB+12B^2} [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 3A+4B & -2B \\ -2B & 4A+4B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{18}{h} [AD] - \frac{9A^2D^2}{12A^2+28AB+12B^2} [6A+6B \quad 4A] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \frac{18}{h} [AD] - \frac{9A^2D^2}{12A^2+28AB+12B^2} [16A+12B] \\ \therefore &= \frac{18}{h} (AD) - \frac{9 \cdot 4(4A+3B)A^2D^2}{4(3A^2+7AB+3B^2)} \\ \therefore &= \frac{18}{h} (AD) - \frac{9(4A+3B)A^2D^2}{3A^2+7AB+3B^2} \\ \therefore &= 9AD \left[\frac{2}{h} - \frac{(4A+3B)AD}{3A^2+7AB+3B^2} \right] \\ \therefore &= \frac{9AD}{h} \left[\frac{6A^2+14AB+6B^2-(4A+3B)ADh}{3A^2+7AB+3B^2} \right] \end{aligned}$$

Transformado A, B y D a las sustituciones originales:

$$\begin{aligned}
 \therefore &= 9 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) \left\{ \frac{6 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 + 14 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2 - \left[4 \left(\frac{EI_c}{h} \right) + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right) \right] \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) h}{3 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 + 7 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2} \right\} \\
 \therefore &= \frac{9EI_c}{h^3} \left[\frac{6 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 + 14 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right) - 3 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right)}{3 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 + 7 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2} \right] \\
 \therefore &= \frac{9EI_c}{h^3} \left[\frac{6 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 + 14 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2 - 4 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 - 3 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right)}{3 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 + 7 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2} \right] \\
 \therefore &= \frac{9EI_c}{h^3} \left[\frac{2 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 + 11 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2}{3 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 + 7 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2} \right] \\
 \therefore &= \frac{9EI_c}{h^3} \left[\frac{2 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 + 11 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2}{3 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 + 7 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2} \right] \left[\left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-2} \right] \\
 \therefore &= \frac{9EI_c}{h^3} \left[\frac{2 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-2} + 11 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-2} \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-2}}{3 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^2 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-2} + 7 \left(\frac{EI_c}{h} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-2} \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-2}} \right] \\
 \therefore &= \frac{9EI_c}{h^3} \left[\frac{2 + 11 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 6 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-2}}{3 + 7 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1} \left(\frac{EI_v}{L} \right) + 3 \left(\frac{EI_v}{L} \right)^2 \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-2}} \right]
 \end{aligned}$$

Denominando a γ como la relación de rigidez de la viga con la columna con valor de:

$$\gamma = \frac{\frac{EI_v}{L}}{\frac{EI_c}{h}} = \left(\frac{EI_v}{L} \right) \left(\frac{EI_c}{h} \right)^{-1}$$

Se obtiene el valor de la rigidez lateral:

$$[K_L] = \frac{9EI_c}{h^3} \left[\frac{2 + 11\gamma + 6\gamma^2}{3 + 7\gamma + 3\gamma^2} \right] \quad (12.32)$$

12.4 Calculo del Periodo de una Estructura a Sistemas de 1 G.D.L.

Sabiendo de antemano que el periodo natural de una estructura está dado por $T_n = 2\pi / \omega$ y la frecuencia propia de la estructura tiene un valor de $\omega = \sqrt{k/m}$, es posible expresar a T_n como:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (12.33)$$

Ejemplificaremos el cálculo del periodo natural de una estructura a partir de las ecuaciones de la rigidez lateral obtenidas en el apartado anterior (de este capítulo) considerando tres cosas:

- ✚ La masa es la misma para todos los casos.
- ✚ La rigidez a flexión de la estructura es la misma para todo el sistema estructural ($EI_c = EI_v$).
- ✚ Las dimensiones de las columnas y vigas son iguales ($h = L$).

12.4.1 Periodo natural de la estructura del caso 1

Al considerar que la inercia es la misma para toda la estructura, hay que evaluar la rigidez lateral considerando $\gamma = 1$:

$$[K_L] = \frac{12EI_c}{h^3} \left[\frac{1+6\gamma}{2+3\gamma} \right] \Bigg|_{\gamma=1} = \frac{84EI_c}{5h^3} \quad (12.34)$$

Al sustituir la rigidez lateral obtenida en $T_n = 2\pi \sqrt{m/K_L}$:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_L}} = 2\pi \sqrt{\frac{5}{84} \left(\frac{mh^3}{EI_c} \right)} \quad (12.35)$$

12.4.2 Periodo natural de la estructura del caso 2

Al considerar que la inercia es la misma para toda la estructura, hay que evaluar la rigidez lateral considerando $\gamma = 1$:

$$[K_L] = [K_L] = \frac{6EI_c}{h^3} \left[\frac{1+4\gamma}{1+2\gamma} \right] \Bigg|_{\gamma=1} = \frac{10EI_c}{h^3} \quad (12.36)$$

Al sustituir la rigidez lateral obtenida en $T_n = 2\pi\sqrt{m / K_L}$:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_L}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{10} \left(\frac{mh^3}{EI_c} \right)} \quad (12.37)$$

12.4.3 Periodo natural de la estructura del caso 3

Al considerar que la inercia es la misma para toda la estructura, hay que evaluar la rigidez lateral considerando $\gamma = 1$:

$$[K_L] = [K_L] = \frac{9EI_c}{h^3} \left[\frac{2 + 11\gamma + 6\gamma^2}{3 + 7\gamma + 3\gamma^2} \right] \Bigg|_{\gamma=1} = \frac{171EI_c}{13 h^3} \quad (12.38)$$

Al sustituir la rigidez lateral obtenida en $T_n = 2\pi\sqrt{m / K_L}$:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_L}} = 2\pi \sqrt{\frac{13}{171} \left(\frac{mh^3}{EI_c} \right)} \quad (12.39)$$

12.5 Relación del Periodo T_n con la Rigidez Lateral K_L

Al considerar unitarios a la masa ($m = 1$), la rigidez a flexión ($EI_c = EI_v = 1$) y las dimensiones de la estructura ($h = L = 1$):

$$T_{n1} = 2\pi \sqrt{\frac{5}{84} \left(\frac{mh^3}{EI_c} \right)} \cong 1.5329 \text{ s} \quad (12.40)^{12.5}$$

$$T_{n2} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{10} \left(\frac{mh^3}{EI_c} \right)} \cong 1.9869 \text{ s} \quad (12.41)^{12.6}$$

$$T_{n3} = 2\pi \sqrt{\frac{13}{171} \left(\frac{mh^3}{EI_c} \right)} \cong 1.7234 \text{ s} \quad (12.42)^{12.7}$$

^{12.5} Periodo correspondiente al caso 1.

^{12.6} Periodo correspondiente al caso 2.

^{12.7} Periodo correspondiente al caso 3.

Relacionando los periodos:

$$T_{n2} > T_{n3} > T_{n1}$$

Es evidente que, al considerar una misma masa para todos los casos, una menor rigidez provoca que el periodo aumente y una mayor rigidez que el periodo disminuya.

Claro está que estos valores únicamente consideran deformación debida a flexión, no obstante, algunas veces será necesario incluir los efectos de deformación por cortante y/o deformación axial en columnas. En los siguientes capítulos se harán análisis considerando estas deformaciones y se comparan los resultados obtenidos al tomar estas consideraciones.

12.6 Deducción de la Matriz de Rigidez en el Plano en Coordenadas Locales

Los casos resueltos en el apartado 12.3 tienen como objetivo iniciar al lector en el concepto y cálculo de rigidez lateral, dado que al considerar un sistema estructural conformado por un nivel y por lo menos una crujía, se logra determinar el valor de la rigidez lateral para un sistema de 1 G. D. L.

Sin embargo, el cálculo de la rigidez lateral para sistemas de más de 1 G. D. L no se ve representado por un valor numérico sino por una matriz cuadrada. El tamaño de dicha matriz será igual al número de grados de libertad considerados, es decir, para edificios típicos es el número de entresijos.

El tipo de análisis estructural a realizar en los siguientes capítulos se hará a marcos planos. Para calcular la matriz de rigidez que contemple todos los grados de libertad (matriz de rigidez en coordenadas globales) se determinará primero la matriz de rigidez en coordenadas locales para un elemento tipo viga calculando la matriz de flexibilidades, y posteriormente, invirtiéndola para determinar la matriz de rigidez.

12.6.1 Matriz de rigidez en una viga doblemente empotrada

La matriz de flexibilidades se determina de la siguiente forma (Tolentino López, 2019):

Primero se debe partir de una viga doblemente empotrada de longitud L , de sección transversal constante, como la que se muestra:

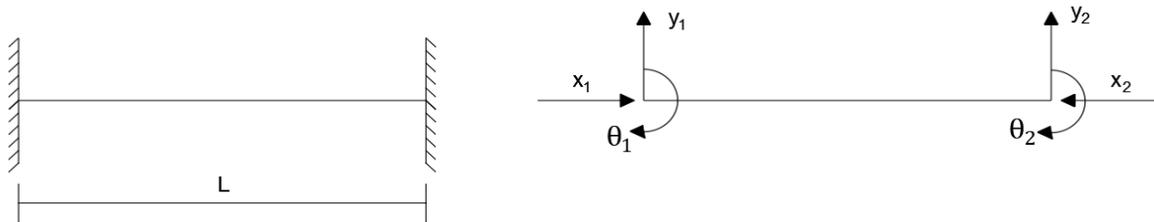


Figura XII.13. Viga doblemente empotrada con grados de libertad restringidos por empotramientos

Posteriormente, como la matriz de rigidez es la matriz inversa de la matriz de flexibilidades, es decir $[f]^{-1} = [k]$, se suponen fuerzas unitarias en el sentido de las reacciones de los grados de libertad por liberar, teniéndose así las siguientes estructuras de estado cero o estructuras primarias:

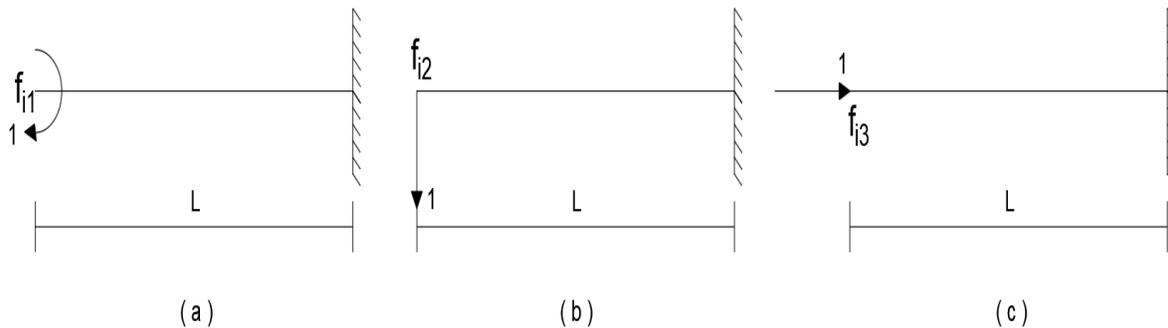


Figura XII.14. Casos de viga con carga unitaria para determinar la matriz de rigidez

Para la estructura (a), las ecuaciones de momento, fuerza cortante y carga axial son:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \\ v_1 &= 0 \\ n_1 &= 0 \end{aligned} \quad (12.43)$$

Para la estructura (b), las ecuaciones de momento, fuerza cortante y carga axial son:

$$\begin{aligned} m_2 &= -x \\ v_2 &= -1 \\ n_2 &= 0 \end{aligned} \quad (12.44)$$

Para la estructura (c), las ecuaciones de momento, fuerza cortante y carga axial son:

$$\begin{aligned} m_3 &= 0 \\ v_3 &= 0 \\ n_3 &= -1 \end{aligned} \quad (12.45)$$

La matriz de flexibilidad se representa por medio de:

$$[f_{ij}] = [\{f_{i1}\} \quad \{f_{i2}\} \quad \{f_{i3}\}] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad (12.46)$$

Los coeficientes de flexibilidad (f_{ij}) de la diagonal principal son:

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \int_0^L m_1^2 dx + \underbrace{\frac{k}{GA} \int_0^L v_1^2 dx}_0 + \frac{n_1^2 L}{EA} = \frac{1}{EI} \int_0^L (1)^2 dx = \frac{L}{EI} \quad (12.47)$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \int_0^L m_2^2 dx + \frac{k}{GA} \int_0^L v_2^2 dx + \frac{n_2^2 L}{EA} = \frac{1}{EI} \int_0^L (-x)^2 dx + \frac{k}{GA} \int_0^L (-1)^2 dx = \frac{L^3}{3EI} + \frac{kL}{GA} \quad (12.48)$$

$$f_{33} = \frac{1}{EI} \int_0^L m_3^2 dx + \underbrace{\frac{k}{GA} \int_0^L v_3^2 dx}_0 + \frac{n_3^2 L}{EA} = \frac{(-1)(-1)L}{EA} = \frac{L}{EA} \quad (12.49)$$

Los coeficientes de flexibilidad (f_{ij}) restantes son:

$$f_{21} = f_{12} = \frac{1}{EI} \int_0^L m_1 m_2 dx + \underbrace{\frac{k}{GA} \int_0^L v_1 v_2 dx}_0 + \frac{n_1 n_2 L}{EA} = \frac{1}{EI} \int_0^L (1)(-x) dx = -\frac{L^2}{2EI} \quad (12.50)$$

$$f_{31} = f_{13} = \frac{1}{EI} \int_0^L m_1 m_3 dx + \underbrace{\frac{k}{GA} \int_0^L v_1 v_3 dx}_0 + \frac{n_1 n_3 L}{EA} = 0 \quad (12.51)$$

$$f_{23} = f_{32} = \frac{1}{EI} \int_0^L m_2 m_3 dx + \underbrace{\frac{k}{GA} \int_0^L v_2 v_3 dx}_0 + \frac{n_2 n_3 L}{EA} = 0 \quad (12.52)$$

Conocidos los coeficientes de flexibilidad, se introducen en la ecuación 12.46 para obtener:

$$[f_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} & 0 \\ -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{3EI} + \frac{kL}{GA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} & 0 \\ -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{3EI}(1+c) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix} \quad (12.53)$$

El coeficiente f_{22} fue transformado algebraicamente de la siguiente manera:

$$f_{22} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{kL}{GA} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{2(1+\nu)kL}{EA} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{2 \cdot 3(1+\nu)kL^3I}{3EA L^2} = \frac{L^3}{3EI} \left(1 + \frac{6(1+\nu)kI}{AL^2} \right) = \frac{L^3}{3EI} (1+c)$$

factor de cortante

El factor de forma k se define como el coeficiente que caracteriza la no homogeneidad de la repartición de tensiones tangenciales en la sección transversal en estudio (González Villanueva, 2007, pág. 24). Así mismo, fue notable que al considerar la deformación a cortante, se incluyó dentro de la matriz de flexibilidad el factor de cortante c .

Para calcular el factor de forma de manera analítica se utiliza la fórmula:

$$k = \int \frac{Q^2}{r^2 I b^2} dA \quad (12.54)$$

Donde:

[Q] = momento estático de primer orden.

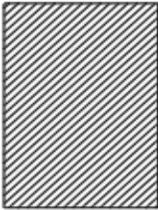
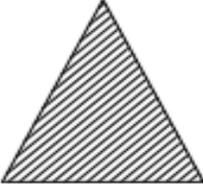
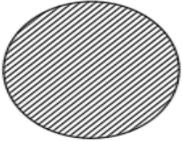
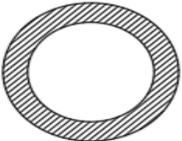
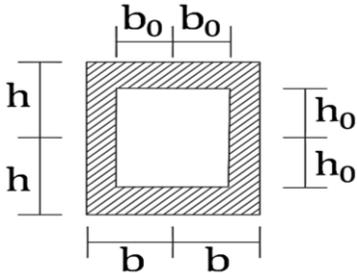
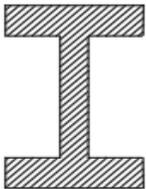
[I] = momento estático de segundo orden o inercia de la sección.

[r] = radio de giro cuyo valor es $\sqrt{I/A}$.

[b] = ancho de la fibra de estudio para el cálculo de k .

Los valores de k para las secciones transversales más comunes se presentan en la siguiente tabla:

Tabla XII
 Factor de forma k para diferentes secciones transversales.

Sección	k
	1.2
	1.2
	1.11
	1.5
	$\frac{72(1 - mp)}{(1 - mp^3)^2} \left\{ \frac{1}{60} + \left[\frac{p}{32} \right] \left[\frac{m(1 - 2p^2) + m^2 p^4}{1 - m} \right] + \frac{7}{480} mp^5 \right\}$
	$\frac{A_{\text{sección}}}{A_{\text{alma}}}$

Finalmente, al invertir la matriz de flexibilidades de la ecuación 12.53 se obtiene la matriz de rigideces que contempla efecto de cortante:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{L}{EI} & -\frac{L^2}{2EI} & 0 \\ -\frac{L^2}{2EI} & \frac{L^3}{3EI}(1+c) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{EA} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{4c+1} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (12.55)$$

Esta matriz de rigidez contempla únicamente una cuarta parte de los coeficientes de rigidez de la matriz de rigidez en coordenadas locales de una viga, sin embargo, pueden obtenerse el resto de los coeficientes de rigidez a partir de las ecuaciones de equilibrio de la estática.

Los coeficiente de rigidez se ensamblan en una matriz de tamaño 6 x 6 representada por:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ F_{y1} \\ F_{y2} \\ F_{x1} \\ F_{x2} \end{matrix} \quad (12.56)$$

Donde:

$[M_1]$ = momento de empotramiento del extremo izquierdo asociado al grado de libertad θ_1 .

$[M_2]$ = momento de empotramiento del extremo derecho asociado al grado de libertad θ_2 .

$[F_{y1}]$ = fuerza cortante del extremo izquierdo asociado al grado de libertad y_1 .

$[F_{y2}]$ = fuerza cortante del extremo derecho asociado al grado de libertad y_2 .

$[F_{x1}]$ = fuerza axial del extremo izquierdo asociado al grado de libertad x_1 .

$[F_{x2}]$ = fuerza axial del extremo derecho asociado al grado de libertad x_2 .

Sabiendo los momentos de empotramiento, fuerzas cortantes y fuerzas axiales, generadas al inducir desplazamiento lineales o rotaciones angulares unitarias en cada grado de libertad será posible ensamblar la matriz de rigidez 12.56.

Al inducir una rotación angular unitaria en el extremo inicial ($\theta_1 = 1$) y otra en el extremo final ($\theta_2 = 1$) se tiene:

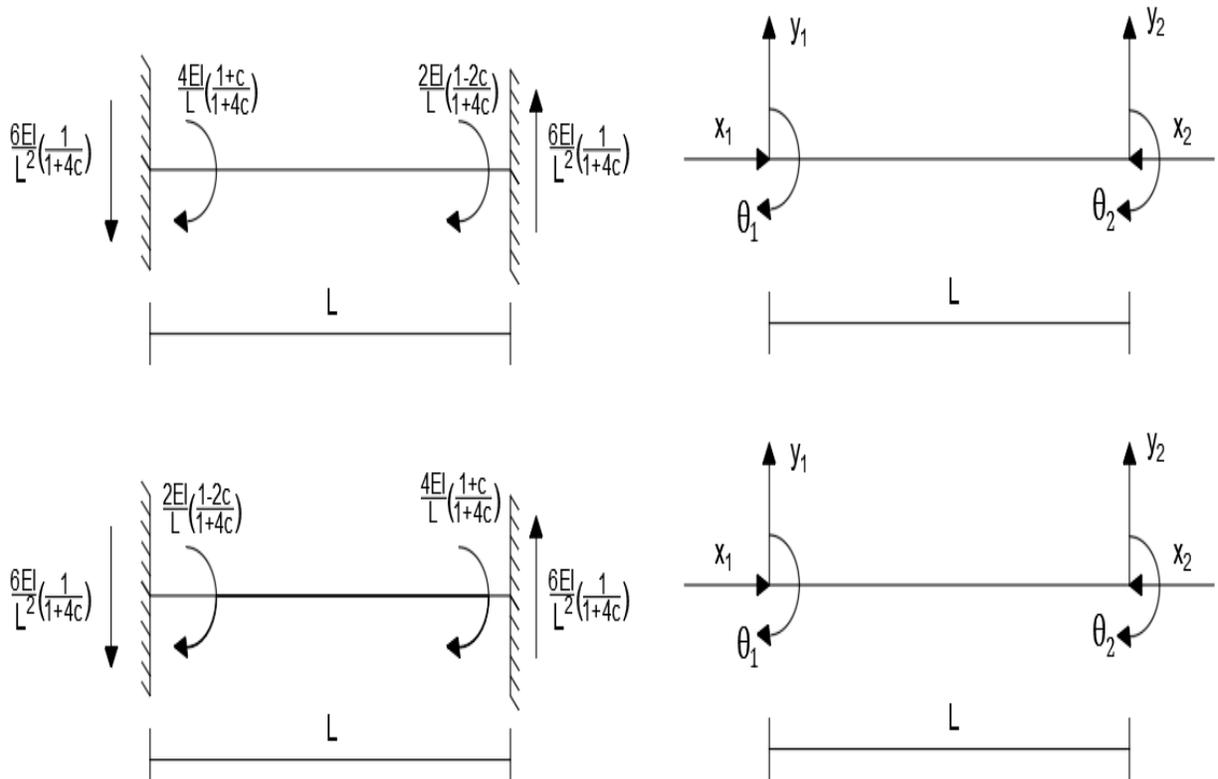


Figura XII.15. Coeficientes de rigidez de una viga contemplando el efecto de cortante al aplicar rotaciones unitarias

Estos valores, dentro de la matriz de rigidez de la ecuación 12.56, son:

$$[k_{ij}] = \begin{matrix} & \theta_1 & \theta_2 & y_1 & y_2 & x_1 & x_2 \\ \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (12.57)$$

Al inducir un desplazamiento vertical unitario en el extremo inicial ($y_1 = 1$) y otro en el extremo final ($y_2 = 1$) se tiene:

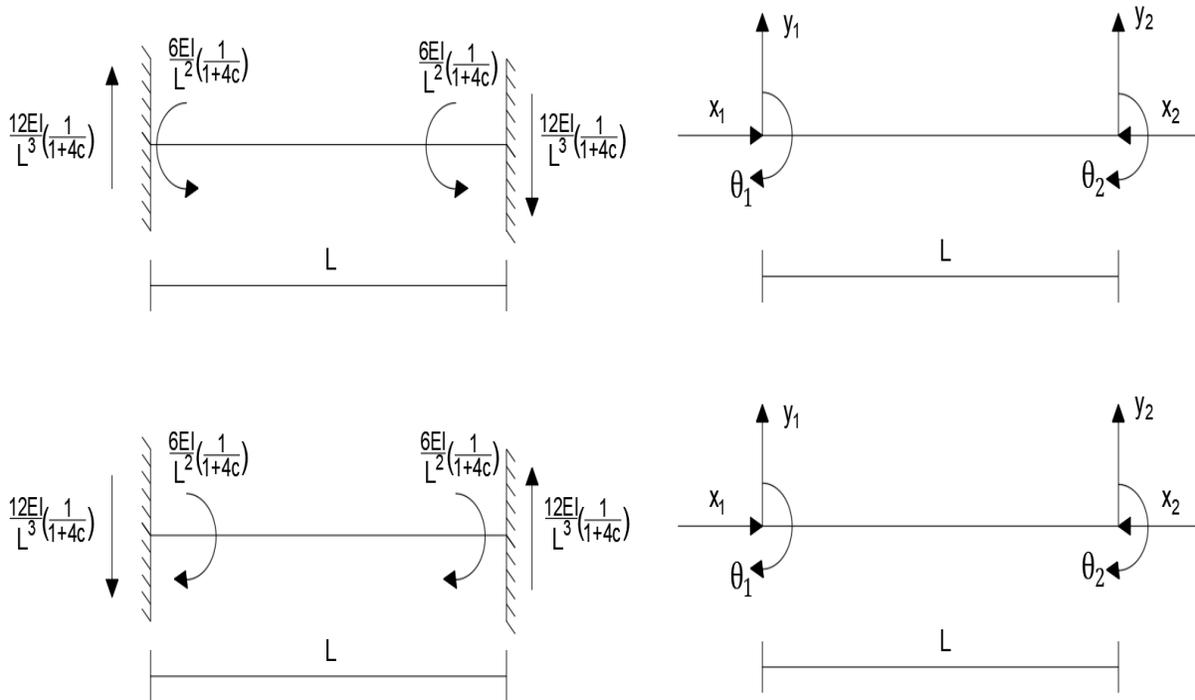


Figura XII.16. Coeficientes de rigidez de una viga contemplando el efecto de cortante al aplicar desplazamientos verticales unitarios

Estos valores, dentro de la matriz de rigidez de la ecuación 12.57, son:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & k_{15} & k_{16} \\ \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & k_{25} & k_{26} \\ -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & k_{35} & k_{36} \\ \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (12.58)$$

Al inducir un desplazamiento horizontal unitario en el extremo inicial ($x_1 = 1$) y otro en el extremo final ($x_2 = 1$) se tiene:

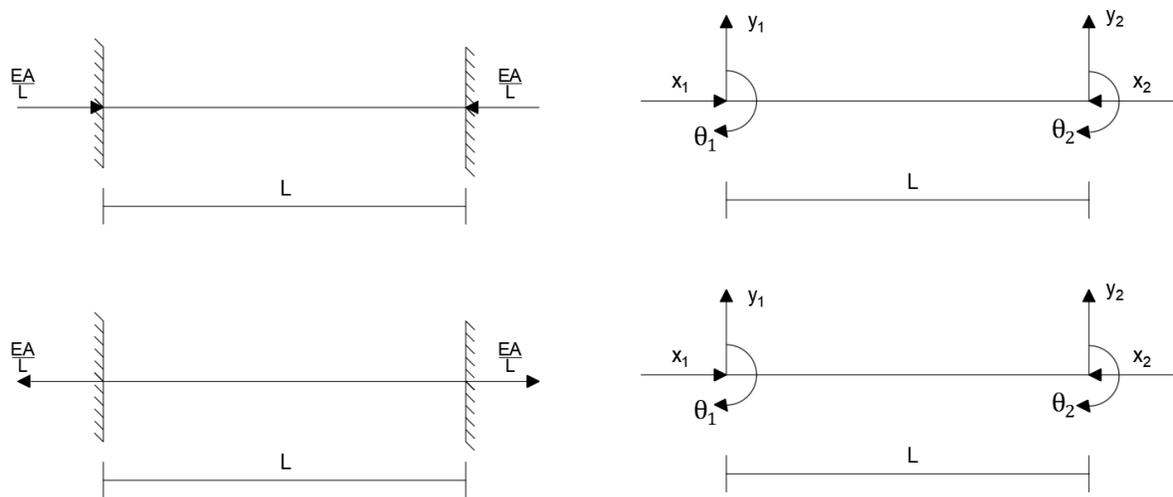


Figura XII.17. Coeficientes de rigidez de una viga contemplando el efecto de cortante al aplicar desplazamientos horizontales unitarios

Estos valores, dentro de la matriz de rigidez de la ecuación 12.58, son:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix}
 \theta_1 & \theta_2 & y_1 & y_2 & x_1 & x_2 \\
 \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L}
 \end{bmatrix} \quad (12.59)$$

La matriz 12.59 representa la matriz de rigidez en el plano para una viga en coordenadas locales al considerar efectos de deformación por flexión, cortante y carga axial, cuando está presenta empotramientos en sus extremos.

12.6.2 Matriz de rigidez en una columna doblemente empotrada

La manera de obtener la matriz de rigidez en coordenadas locales de una columna es a partir de la matriz $[k_i]$ de coordenadas locales de una viga, con la diferencia de que el signo que los valores $\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right)$ cambia obteniéndose así:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix}
 \theta_1 & \theta_2 & y_1 & y_2 & x_1 & x_2 \\
 \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L}
 \end{bmatrix} \quad (12.60)$$

12.6.3 Matriz de rigidez en una viga articulada – empotrada

Haciendo uso de la condensación estática es posible obtener la matriz de rigidez de una viga articulada – empotrada, en coordenadas locales, a partir de la matriz de rigidez en coordenadas locales de una viga doblemente empotrada. Para ello se considera la siguiente partición de la ecuación 12.59:

$$[k_{ij}] = \left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & | & \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & | & \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & | & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & | & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & | & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{array} \right]$$

En matrices particionada se expresa como:

$$[k_{ij}] = \left[\begin{array}{c|c} [k_{11}] & [k_{12}] \\ \hline [k_{21}] & [k_{22}] \end{array} \right]$$

La razón del porqué particionar la matriz de esta forma es por el hecho de que se considera que los grados de libertad θ_1 y y_1 se asocian al apoyo articulado, mientras que los grados de libertad θ_2 y y_2 al apoyo empotrado. Como es necesario considerar que en el apoyo articulado no se presenta momento hay que eliminar θ_1 por medio de la condensación estática asignado el valor de $[k_{11}] = (4EI/L)((1+c)/(1+4c))$

Con los ejercicios vistos con anterioridad el lector podrá comprobar sin ninguna dificultad que el resultado final es:

$$[k_i] = \begin{bmatrix} \theta_2 & y_1 & y_2 & x_1 & x_2 \\ \frac{3EI}{L} \left(\frac{1}{1+c} \right) & -\frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+c} \right) & \frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+c} \right) & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+c} \right) & \frac{3EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+c} \right) & -\frac{3EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+c} \right) & 0 & 0 \\ \frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+c} \right) & -\frac{3EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+c} \right) & \frac{3EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+c} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (12.61)$$

12.6.4 Matriz de rigidez en una columna articulada - empotrada

La manera de obtener la matriz de rigidez en coordenadas locales de una columna es a partir la matriz $[k_i]$ de coordenadas locales de una viga, con la diferencia de que el signo de $\frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+c} \right)$ cambia obteniéndose así:

$$[k_i] = \begin{bmatrix} \theta_2 & y_1 & y_2 & x_1 & x_2 \\ \frac{3EI}{L} \left(\frac{1}{1+c} \right) & \frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+c} \right) & -\frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+c} \right) & 0 & 0 \\ \frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+c} \right) & \frac{3EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+c} \right) & -\frac{3EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+c} \right) & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+c} \right) & -\frac{3EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+c} \right) & \frac{3EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+c} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (12.62)$$

Esta representa la matriz de rigidez con coordenadas locales de una columna con apoyo articulado en su base.

12.7 Matrices de Permutación en la Condensación Estática

Generalmente los libros de análisis estructural que incluyen como contenido el método de rigidez matricial, sin importar el tipo de deformación considerada para su análisis, expresan las matrices de rigidez en coordenadas locales en el orden $y_1, \theta_1, y_2, \theta_2$.

No obstante, la manera de expresar las matrices en el orden deseado se logra por medio de matrices de permutación (Rojas Rojas & Padilla , 2009, págs. 278-279).

Las matrices de permutación $[T_R]$ y $[T_c]$ ayudan a intercambiar renglones y columnas, respectivamente, en la matriz $[k_i]$ con la finalidad de agrupar en un orden específico los grados de libertad mediante $[T_R][\sum k_i][T_c]$. Las matrices de permutación son el resultado de cambiar los 1 de la matriz identidad al orden específico asociado a los G.D.L. Para esto se suele asociarse en los grados de libertad 1, 2, 3 y 4 a y_1, θ_1, y_2 & θ_2 , respectivamente (caso donde no se considera deformación axial).

Para intercambiar el orden de $y_1, \theta_1, y_2, \theta_2$ a $\theta_1, \theta_2, y_1, y_2$ se hace la siguiente operación:

$$\begin{aligned}
 [T_R][\sum k_i][T_c] &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[T_R]} \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}}_{[\sum k_i]} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[T_c]} \\
 \vdots &= \underbrace{\begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \end{bmatrix}}_{[T_R][\sum k_i]} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[T_c]}
 \end{aligned}$$

Al operar $[T_R][\sum k_i]$ el subíndice i de los coeficientes de rigidez k_{ij} cambió al orden 2, 4, 1, 3 mientras que el subíndice j mantuvo su orden 1, 2, 3, 4.

$$\begin{aligned}
 \vdots &= \underbrace{\begin{bmatrix} k_{22} & k_{24} & k_{21} & k_{23} \\ k_{42} & k_{44} & k_{41} & k_{43} \\ k_{12} & k_{14} & k_{11} & k_{13} \\ k_{32} & k_{34} & k_{31} & k_{33} \end{bmatrix}}_{[T_R][\sum k_i][T_c]}
 \end{aligned}$$

Al operar $[T_R][\sum k_i][T_C]$ tanto el subíndice i como el j de los coeficientes de rigidez k_{ij} están ordenados en 2, 4, 1, 3.

En general, puede hacerse uso de las matrices de permutación para orden la matriz de rigidez en el orden que se requiera dependiendo del problema al que se enfrente.

12.8 Propuesta de Numeración de Grados de Libertad para las Coordenadas Globales

Para los marcos de esta tesis, se necesitará recurrir al uso de la condensación estática para obtener la matriz de rigidez lateral de la estructura, por ello es aconsejable ensamblar la matriz de rigidez, en el sistema de coordenadas globales, numerando primero todos los grados de libertad de los nodos en los entrepisos y dejando al final los grados de libertad de los apoyos. Este orden de numeración permitirá hacer dos cosas:

- ✚ Poder seleccionar la submatriz de rigidez cuadrada, en el sistema de coordenadas globales, que tenga como tamaño el mismo número de grados de libertad de los nodos de los entrepisos. La aplicación de las matrices de permutación a esta matriz permitirá realizar una condensación estática eficiente para calcular la rigidez lateral del sistema estructural analizado.
- ✚ En una viga los grados de libertad iniciales deben ser los del extremo izquierdo, y los del extremo derecho los finales; para una columna los grados de libertad iniciales deben ser los del nodo inferior y los grados de libertad finales los del nodo superior. Cuando se menciona grados de libertad iniciales son los que tienen subíndice 1 y los finales los que tienen subíndice 2.

Capítulo XIII: Bases Teóricas del Análisis Dinámico Modal Espectral

13.1 Introducción

13.2 Bases Matemáticas para el Análisis Dinámico Modal

13.2.1 Matriz de masa concentrada o discreta

13.2.2 Matriz de rigidez para análisis dinámico

13.2.3 Formulación del planteamiento de rigideces por segunda ley de Newton

13.2.4 Formulación del planteamiento de flexibilidades conocido el de rigideces

13.2.5 Planteamiento matemático de rigideces como problema de eigenvalores

13.2.6 Planteamiento matemático de flexibilidades como problema de eigenvalores

13.2.7 Solución del problema de eigenvalores: cálculo de las frecuencias naturales

13.2.8 Solución del problema de eigenvectores: modos de vibración naturales

13.2.9 Matriz modal del sistema

XIII. Bases Teóricas del Análisis Dinámico Modal Espectral

13.1 Introducción

El objetivo que persigue este capítulo es dar al lector principios y bases matemáticas necesarias para realizar un análisis dinámico modal espectral, como los que se realizarán en los siguientes capítulos.

Es ambicioso querer abarcar toda la matemática necesaria para entender las deducciones de todas las fórmulas utilizadas durante un análisis dinámico modal espectral, sin embargo, sólo se mencionarán aquellas nociones consideradas imprescindibles para que el lector se empiece a sumergir en la realización de un análisis dinámico dentro del rango elástico.

13.2 Bases Matemáticas para el Análisis Dinámico Modal

13.2.1 Matriz de masa concentrada o discreta

La matriz de masa concentrada, también conocida como matriz de masa discreta, es la forma más simple de considerar las propiedades de inercia en un sistema dinámico (Matias Domínguez, 2012, pág. 300). Esta matriz de masa es una matriz diagonal del tipo:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

El tamaño de esta matriz será igual al número de pisos del sistema estructural, dado que se considera que las masas se concentran a nivel de entrepisos.

Como es observable la matriz es cuadrada, teniendo todos los elementos cero excepto en la diagonal principal. Esto se debe a que la aceleración de la masa en cualquier nodo donde se concentre masa produce una fuerza inercial sólo en ese nodo (Matias Domínguez, 2012, pág. 301).

Esta matriz se ensambla con los coeficientes de rigidez arrojados por $[k_{ij}^*]$ con los elementos tales que $i = j$. El tamaño de la matriz $[K]$ es el mismo que la matriz de masas concentradas $[M]$ detallada con anterioridad.

13.2.3 Formulación del planteamiento de rigideces por segunda ley de Newton

Para un sistema estructural de un grado de libertad, la ecuación diferencial ordinaria de equilibrio dinámico sin amortiguamiento es $m\ddot{x} + kx = P(t)$, como se denotó en capítulos anteriores. Sin embargo, muchas estructuras no pueden describirse dinámicamente mediante un sistema de 1 G. D. L. lo cual hace necesario plantear un modelo de múltiples grados de libertad (Paz, 1992, pág. 219).

Al considerar más de un grado de libertad, la masa que engloba a todo el sistema estructural se representa mediante la matriz de masa concentrada $[M]$ y la rigidez por la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$.

Así como la masa y la rigidez pasa de escalares a matrices en estructuras con más de un grado de libertad, los desplazamientos y aceleraciones del sistema estructural son representados por los vectores columna $\{x\}$ y $\{\ddot{x}\}$ respectivamente.

Lo mencionado en el párrafo anterior alude al hecho de que la ecuación $m\ddot{x} + kx = P(t)$ se ve representada, para múltiples grados de libertad, como:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{P\} \quad (13.5)$$

Se puede implementar el siguiente mecanismo para determinar las ecuaciones del movimiento dinámico de un sistema de varios grados de libertad apoyándose de la segunda ley de Newton:

- 1 Asignar coordenadas adecuadas a los desplazamientos que serán asociadas a todas las m_n masas concentradas.
- 2 Establecer el diagrama de cuerpo libre de cada masa concentrada, así como las respectivas fuerzas actuantes en cada una de ellas.
- 3 Aplicar la segunda ley de Newton a todas las masas resultantes del diagrama de cuerpo libre a fin de generar una ecuación para cada una de ellas.

- 4 Derivar un sistema de ecuaciones con todas ellas. Este sistema de ecuaciones representa todas las EDO de movimiento dinámico del sistema estructural.

Para ejemplificar el procedimiento anterior se establece el siguiente modelo (paso 1) de múltiples grados de libertad:

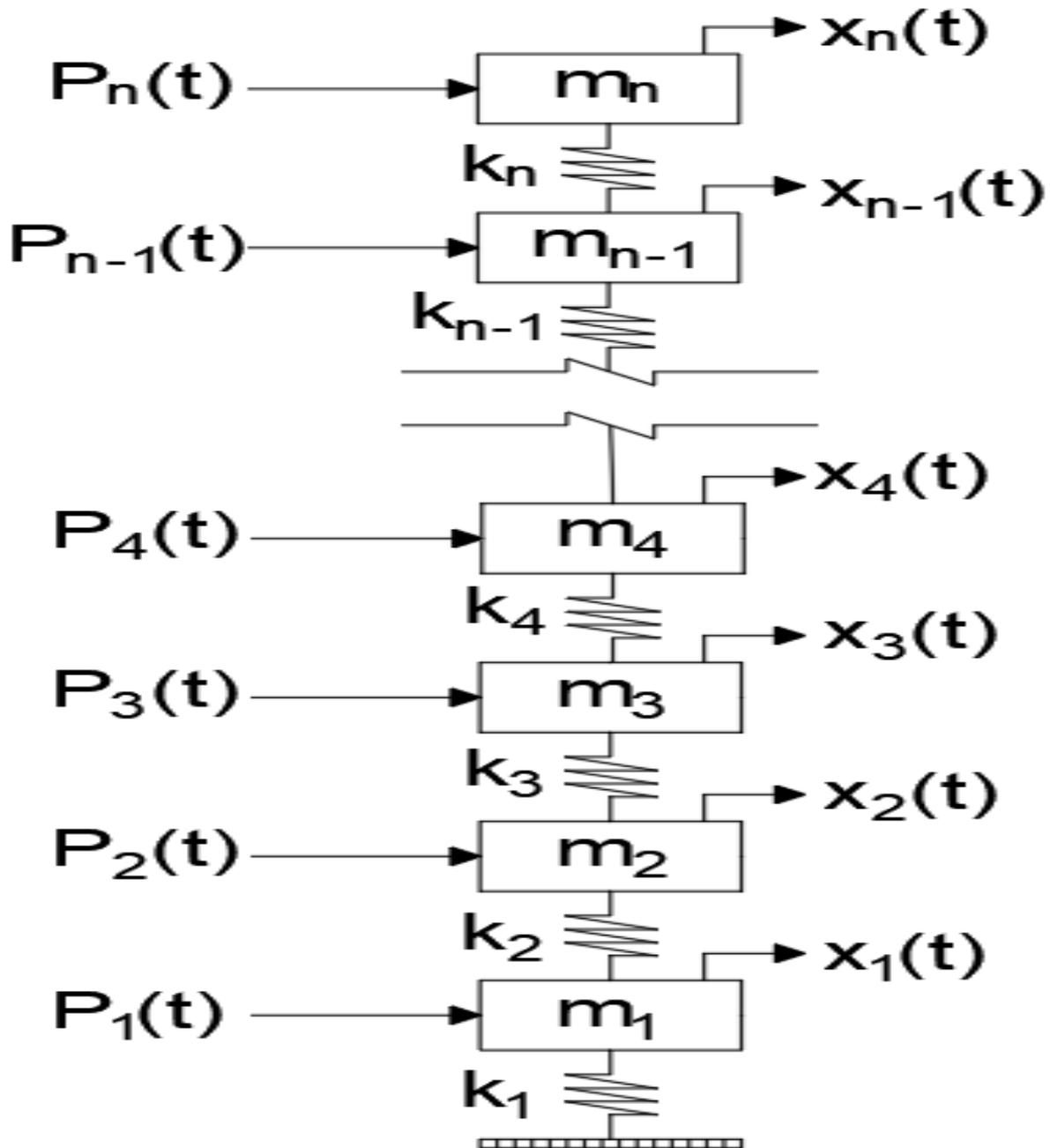


Figura XIII.1. Sistema masa resorte de n grados de libertad

Posteriormente se establece el diagrama de cuerpo libre para todas las masas del sistema estructural (paso 2):

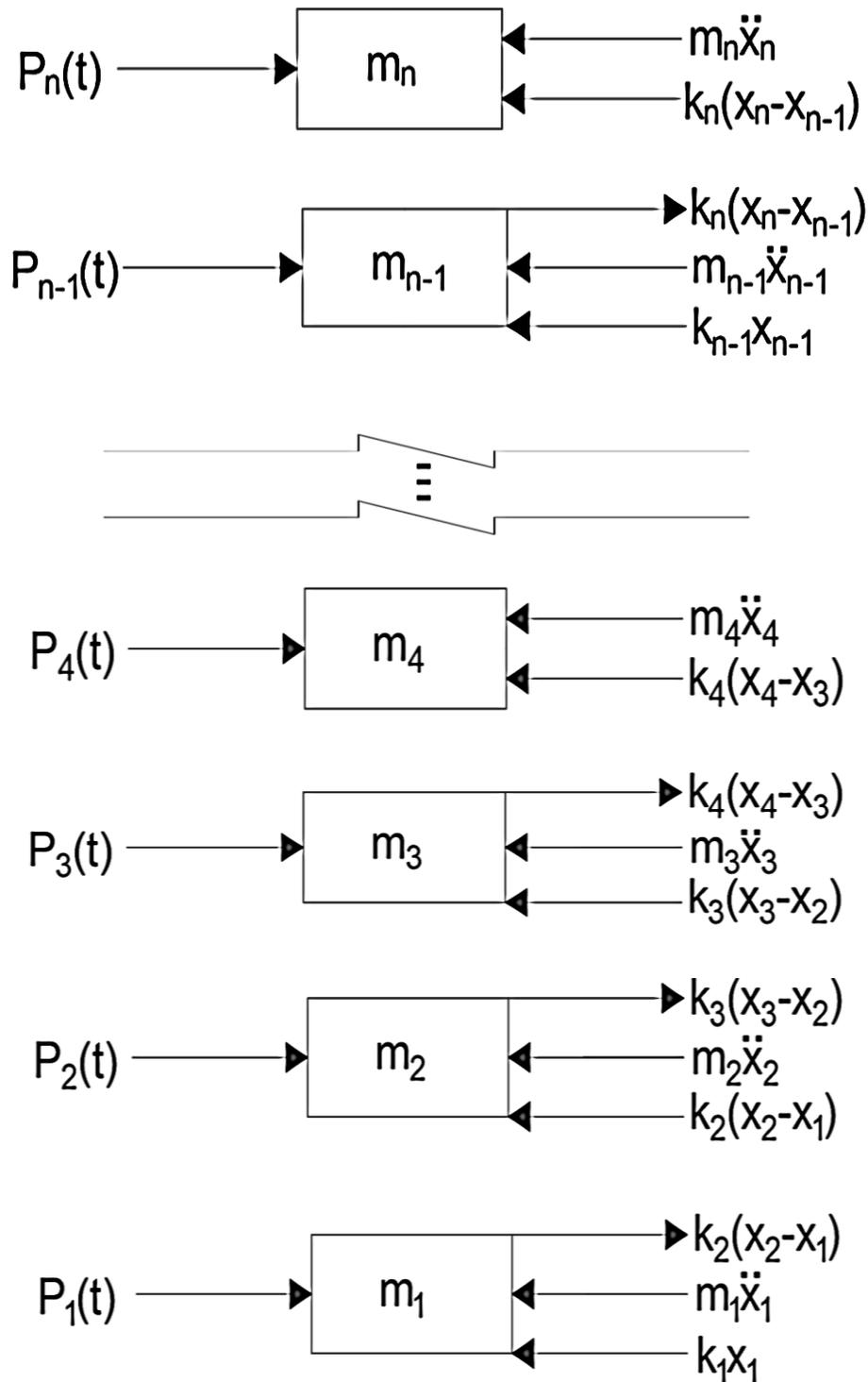


Figura XIII.2. Análisis de fuerzas internas por cada masa

La figura anterior representa las fuerzas actuantes del sistema, lo cual nos permite determinar las ecuaciones de equilibrio dinámico a partir de una suma de fuerzas horizontales ($+ \rightarrow \sum F_x = 0$) de la masa m_1 hasta la masa m_n (paso 3)^{13.1}:

$$\begin{aligned}
 P_1 + k_2(x_2 - x_1) - m_1\ddot{x}_1 - k_1x_1 &= 0 \\
 P_1 + k_2x_2 - k_2x_1 - m_1\ddot{x}_1 - k_1x_1 &= 0 \\
 P_1 + k_2x_2 - (k_1 + k_2)x_1 - m_1\ddot{x}_1 &= 0 \\
 \therefore \underbrace{m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2}_{\text{Ecuación de equilibrio dinámico en } m_1} &= P_1
 \end{aligned} \tag{13.6}$$

$$\begin{aligned}
 P_2 + k_3(x_3 - x_2) - m_2\ddot{x}_2 - k_2(x_2 - x_1) &= 0 \\
 P_2 + k_3x_3 - k_3x_2 - m_2\ddot{x}_2 - k_2x_2 + k_2x_1 &= 0 \\
 P_2 + k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + k_3x_3 - m_2\ddot{x}_2 &= 0 \\
 \therefore \underbrace{m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3}_{\text{Ecuación de equilibrio dinámico en } m_2} &= P_2
 \end{aligned} \tag{13.7}$$

$$\begin{aligned}
 P_3 + k_4(x_4 - x_3) - m_3\ddot{x}_3 - k_3(x_3 - x_2) &= 0 \\
 P_3 + k_4x_4 - k_4x_3 - m_3\ddot{x}_3 - k_3x_3 + k_3x_2 &= 0 \\
 P_3 + k_3x_2 - (k_3 + k_4)x_3 + k_4x_4 - m_3\ddot{x}_3 &= 0 \\
 \therefore \underbrace{m_3\ddot{x}_3 - k_3x_2 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4x_4}_{\text{Ecuación de equilibrio dinámico en } m_3} &= P_3
 \end{aligned} \tag{13.8}$$

$$\begin{aligned}
 P_4 - m_4\ddot{x}_4 - k_4(x_4 - x_3) &= 0 \\
 P_4 - m_4\ddot{x}_4 - k_4x_4 + k_4x_3 &= 0 \\
 \therefore \underbrace{m_4\ddot{x}_4 - k_4x_3 + k_4x_4}_{\text{Ecuación de equilibrio dinámico en } m_4} &= P_4
 \end{aligned} \tag{13.9}$$

$$P_{n-1} + k_n(x_n - x_{n-1}) - m_{n-1}\ddot{x}_{n-1} - k_{n-1}x_{n-1} = 0$$

^{13.1} Se omite la notación $P(t)$, $x(t)$ y $\ddot{x}(t)$ y se reemplazan por P , x y \ddot{x} .

$$\begin{aligned}
 P_{n-1} - (k_n + k_{n-1})x_{n-1} + k_n x_n - m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} &= 0 \\
 \therefore \underbrace{m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} + (k_n + k_{n-1})x_{n-1} - k_n x_n}_{\text{Ecuación de equilibrio dinámico en } m_{n-1}} &= P_{n-1}
 \end{aligned} \tag{13.10}$$

$$\begin{aligned}
 P_n - m_n \ddot{x}_n - k_n (x_n - x_{n-1}) &= 0 \\
 P_n - m_n \ddot{x}_n - k_n x_n + k_n x_{n-1} &= 0 \\
 P_n + k_n x_{n-1} - k_n x_n - m_n \ddot{x}_n &= 0 \\
 \therefore \underbrace{m_n \ddot{x}_n - k_n x_{n-1} + k_n x_n}_{\text{Ecuación de equilibrio dinámico en } m_n} &= P_n
 \end{aligned} \tag{13.11}$$

Acoplando las ecuaciones de equilibrio dinámico, generadas por la segunda ley de Newton, en un sistema de ecuaciones se tiene (paso 4):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = P_1 \\
 m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3 x_3 = P_2 \\
 m_3 \ddot{x}_3 - k_3 x_2 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4 x_4 = P_3 \\
 m_4 \ddot{x}_4 - k_4 x_3 + k_4 x_4 = P_4 \\
 \vdots \\
 m_{n-1} \ddot{x}_{n-1} + (k_n + k_{n-1})x_{n-1} - k_n x_n = P_{n-1} \\
 m_n \ddot{x}_n - k_n x_{n-1} + k_n x_n = P_n
 \end{array} \right. \tag{13.12}$$

Las ecuaciones calculadas constituyen, en forma como sistema de ecuaciones o en su notación matricial (o matricial contraída), la formulación de rigidez de las ecuaciones del movimiento para un edificio simple (Paz, 1992, pág. 222).

El planteamiento de vibración libre (caso donde $\{P\} = 0$) a sistemas estructurales de varios grados de libertad proporciona las propiedades dinámicas más significativas que son:

- ✚ Frecuencias naturales de la estructura.
- ✚ Modos de vibrar asociados a las frecuencias naturales.

El sistema de ecuaciones anterior, llevado a una ecuación con matrices se expresa como $[M]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{P\}$. En su forma extendida se tiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \vdots \\ \ddot{x}_{n-1} \\ \ddot{x}_n \end{Bmatrix}}_{\{\ddot{x}\}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n & k_n \end{bmatrix}}_{[k]} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix}}_{\{x\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{Bmatrix}}_{\{P\}} \tag{13.13}$$

13.2.4 Formulación del planteamiento de flexibilidades conocido el de rigideces

Del análisis estructural se deducen dos métodos matriciales importantes, también llamados métodos matriciales relación fuerza – desplazamiento (Matias Domínguez, 2012, pág. 64) que son el método de las rigideces y el método de las flexibilidades.

Ambos métodos están relacionados entre sí ya que la matriz inversa de la matriz de rigidez $([k_{ij}]^{-1})$ resulta ser la matriz de flexibilidades $([f_{ij}])$.

No se aunaré en el detalle de cómo calcular el planteamiento de flexibilidades por medio de la segunda ley de Newton dado que este texto se enfoca en el planteamiento de rigideces para el análisis dinámico modal espectral, sin embargo, al entender el planteamiento de las rigideces es fácil desglosar el planteamiento de las flexibilidades por operaciones con matrices.

Análogamente, al existir una matriz de rigidez con sus respectivos coeficientes de rigidez^{13.2}, existe una matriz de flexibilidad con coeficientes de flexibilidad^{13.3}. Recordando que el planteamiento de las rigideces se expresa por $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\}$, es posible despejar el vector de desplazamientos para deducir la matriz de flexibilidades para análisis dinámico:

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} &= \{P\} \\ [K]\{x\} &= \{P\} - [M]\{\ddot{x}\} \\ \{x\} &= [K]^{-1}\{P\} - [K]^{-1}[M]\{\ddot{x}\} \\ \{x\} &= [f]\{\{P\} - [M]\{\ddot{x}\}\} = [f]\{P\} - [f][M]\{\ddot{x}\} \end{aligned} \quad (13.14)$$

Como puede observarse la matriz de flexibilidades es cuadrada y surge como consecuencia de invertir la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$, es decir:

$$[f] = [K]^{-1} \quad (13.15)$$

Donde, al expandir $[f]$ se tiene:

^{13.2} Coeficiente de rigidez: fuerza generada en la coordenada i cuando la coordenada j se desplaza una unidad, manteniendo las coordenadas restantes fijas (Paz, 1992, pág. 223).

^{13.3} Coeficiente de flexibilidad: desplazamiento generado en la coordenada i cuando se aplica una fuerza unitaria en la coordenada j (Paz, 1992, pág. 223).

$$[f] = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} & \dots & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \dots & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) \\ \frac{1}{k_1} & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \dots & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i}\right) \\ \frac{1}{k_1} & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \dots & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i}\right) \\ \frac{1}{k_1} & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \dots & \dots & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i}\right) \\ \frac{1}{k_1} & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \dots & \dots & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k_i}\right) \\ \frac{1}{k_1} & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \dots & \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k_i}\right) \\ \frac{1}{k_1} & \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{k_i}\right) & \dots & \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k_i}\right) & \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k_i}\right) \end{bmatrix} \quad (13.16)$$

13.2.5 Planteamiento matemático de rigideces como problema de eigenvalores

Al suponer vibración libre en el planteamiento de las rigideces, en $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{P\}$ es necesario contemplar que $\{P\} = \{0\}$, quedando escrita como:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (13.17)$$

Para dar solución a la ecuación $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$ se plantean soluciones del tipo:

$$\{x\} = \{A\} \text{sen}(\omega t + \theta) \quad (13.18)$$

$$\{x\} = \{A\} \text{cos}(\omega t - \theta) \quad (13.19)$$

Para ambas ecuaciones:

$\{x\}$ = Vector columna de los desplazamientos.

$\{A_n\}$ = Vector columna de las amplitudes de los n grados de libertad con valor de $[A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ \dots \ A_{n-1} \ A_n]^T$.

$[\theta]$ = ángulo de fase.

Las ecuaciones $\{x\} = \{A\} \text{sen}(\omega t + \theta) = \{A\} \text{cos}(\omega t - \theta)$ muestran que todos los grados de libertad, considerados para el análisis dinámico, pueden realizar un movimiento armónico con las mismas frecuencias naturales ω y ángulo de fase θ (Rao, 2012, pág. 537).

No obstante, es incorrecto pensar que para un sistema estructural de varios grados de libertad, existe una única frecuencia natural ω , lo cual hace necesario determinar un método de solución para encontrar las diversas frecuencias.

Para encontrar las diferentes frecuencias ω será necesario tratar el problema como uno de eigenvalores o valores característicos. Se empieza por encontrar $\{\ddot{x}\}$ a partir de la ecuación 13.18 o 13.19 (en este caso se contempla la ecuación 13.18):

$$\{\dot{x}\} = \omega\{A\} \text{cos}(\omega t + \theta) \quad (13.20)$$

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2\{A\} \text{sen}(\omega t + \theta) \quad (13.21)$$

Sustituyendo $\{x\}$ y $\{\ddot{x}\}$ en $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

$$-\omega^2[M]\{A\} \text{sen}(\omega t + \theta) + [K]\{A\} \text{sen}(\omega t + \theta) = \{0\}$$

$$[[K] - \omega^2[M]]\{A\} \text{sen}(\omega t + \theta) = \{0\}$$

$$[[K] - \omega^2[M]]\{A\} = \{0\}$$

Asignando a λ como los eigenvalores a calcular, se denota que $\lambda = \omega^2$, por lo que el problema de eigenvalores por planteamiento de rigidez es:

$$[[K] - \lambda[M]]\{A\} = \{0\} \quad (13.22)$$

13.2.6 Planteamiento matemático de flexibilidades como problema de eigenvalores

De igual forma al planteamiento de rigideces donde se plantea un problema de eigenvalores, el método de flexibilidades también puede ser llevado a un problema de valores característicos cuando se considera el caso de estudio de vibración libre.

Partiendo de la ecuación $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$ y multiplicando a toda la ecuación por $[K]^{-1}$ para incluir la matriz de flexibilidad:

$$\begin{aligned}
 [K]^{-1}[M]\{\ddot{x}\} + [K]^{-1}[K]\{x\} &= \{0\} \\
 [f][M]\{\ddot{x}\} + [I]\{x\} &= \{0\} \\
 [D]\{\ddot{x}\} + [I]\{x\} &= \{0\}
 \end{aligned} \tag{13.23}$$

De esta ecuación:

$[D]$ = producto denominado matriz dinámica (Paz, 1992, pág. 232) cuyo resultado es $[f][M]$.

$[I]$ = matriz identidad (matriz diagonal donde todos sus elementos son 1).

La matriz dinámica no puede ser utilizada cuando se presenten modos de vibración con movimiento de cuerpo rígido, es decir, cuando la frecuencia es cero ya que la matriz $[K]$ es singular, y por ende, no presenta inversa (Matias Domínguez, 2012, pág. 296).

Sustituyendo en la ecuación 13.23 los vectores $\{x\} = \{A\} \text{sen}(\omega t + \theta)$ y $\{\ddot{x}\} = -\omega^2\{A\} \text{sen}(\omega t + \theta)$:

$$\begin{aligned}
 -\omega^2[D]\{A\} \text{sen}(\omega t + \theta) + [I]\{A\} \text{sen}(\omega t + \theta) &= \{0\} \\
 [[I] - \omega^2[D]]\{A\} \text{sen}(\omega t + \theta) &= \{0\} \\
 [[I] - \omega^2[D]]\{A\} &= \{0\}
 \end{aligned} \tag{13.24}$$

Para el problema de eigenvalores, desde el planteamiento de flexibilidades, la ecuación anterior se suele ser escrita como:

$$[[D] - \lambda^{-1}[I]]\{A\} = \{0\} \tag{13.25}$$

13.2.7 Solución del problema de eigenvalores: cálculo de las frecuencias naturales

Por lo regular $[[K] - \lambda[M]]\{A\} = \{0\}$ y $[[D] - \lambda^{-1}[I]]\{A\} = \{0\}$ representan un sistema de ecuaciones lineales homogéneas de n incógnitas, amplitudes A_n y un parámetro por determinar $\lambda = \omega^2$ o $\lambda^{-1} = \omega^{-2}$, ya sea para el planteamiento proveniente de rigideces o flexibilidades, respectivamente.

La solución no trivial donde no todos los valores de A_n son iguales a cero queda determinada cuando el determinante de $[K] - \lambda[M]$ o $[D] - \lambda^{-1}[I]$ sea igual a cero, es decir:

$$\left| [K] - \lambda[M] \right| = 0 \quad (13.26)$$

$$\left| [D] - \lambda^{-1}[I] \right| = 0 \quad (13.27)$$

La expansión de los determinantes (de las ecuaciones 13.26 y 13.27) anteriores es una ecuación polinomial de n –ésimo orden. Esta ecuación es conocida como ecuación característica (Paz, 1992, pág. 231). Respectivamente para las ecuaciones 13.26 y 13.27 las incógnitas son λ y λ^{-1} .

Al ser las matrices de masa concentrada $[M]$ y la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$ simétricas y positivas, todas las raíces $\lambda = \omega^2$ o $\lambda^{-1} = \omega^{-2}$ son reales y positivas.

Al denotar las raíces como $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots, \omega_n^2$ se tiene que $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ siendo ω_1 denominada primera frecuencia natural o fundamental. Por lo general, todas las ω_n son distintas entre sí aun cuando en algunos casos dos frecuencias podrían tener el mismo valor (Rao, 2012, pág. 537).

Analizando para $\omega_1^{-2}, \omega_2^{-2}, \omega_3^{-2}, \dots, \omega_n^{-2}$ se tiene que $\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_n$.

13.2.8 Solución del problema de eigenvectores: modos de vibración naturales

A cada eigenvalor $\lambda = \omega^2$ le corresponde un eigenvector, que para dinámica estructural, se denomina modo natural de vibración ϕ_n . Los modos naturales de vibración ϕ_n se obtienen a partir del planteamiento de $[[K] - \lambda[M]]\{A\} = \{0\}$, donde al expandir se tiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_n & k_n \end{bmatrix}}_{[k]} - \lambda_j \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{Bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ A_{3j} \\ A_{4j} \\ \vdots \\ A_{(n-1)j} \\ A_{nj} \end{Bmatrix}}_{\{A\}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13.28)$$

Es evidente que al desarrollar el planteamiento con matrices, el sistema resultante de ecuaciones lineales es homogéneo contemplan como incógnitas a $[A_{1j} \ A_{2j} \ A_{3j} \ A_{4j} \ \dots \ A_{(n-1)j} \ A_{nj}]^T$.

Los componentes $\phi_{1j}, \phi_{2j}, \phi_{3j}, \phi_{4j}, \phi_{(n-1)j}, \dots, \phi_{nj}$ que conforman los diferentes modos de vibración ϕ_n se conforman del cociente de A_{nj} entre A_{1j} , es decir:

$$\{\phi_{nj}\} = \begin{Bmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \\ \phi_{3j} \\ \phi_{4j} \\ \vdots \\ \phi_{(n-1)j} \\ \phi_{nj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{1j}/A_{1j} \\ A_{2j}/A_{1j} \\ A_{3j}/A_{1j} \\ A_{4j}/A_{1j} \\ \vdots \\ A_{5j}/A_{1j} \\ A_{6j}/A_{1j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ A_{2j}/A_{1j} \\ A_{3j}/A_{1j} \\ A_{4j}/A_{1j} \\ \vdots \\ A_{5j}/A_{1j} \\ A_{6j}/A_{1j} \end{Bmatrix} \quad (13.29)$$

Donde el subíndice n representa los n – ésimos modos de vibrar de la estructura analizada, y el subíndice j se asocia a la frecuencia natural sustituida ($\lambda_j = \omega_j^2$) en la ecuación 13.28, lo cual significa que en ϕ_{nj} el primer subíndice varía de 1 hasta n , mientras que el subíndice j se mantiene fijo y cambia solamente cuando se contemple otra frecuencia distinta, y por ende, otro modo de vibrar distinto.

13.2.9 Matriz modal del sistema

La matriz modal del sistema es una matriz muy llamativa por el hecho de que permite comprobar, multiplicando matrices, si los modos de vibración naturales han sido calculados correctamente.

La matriz modal está representada por:

$$[\phi_{ij}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \cdots & \phi_{1j} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \cdots & \phi_{2j} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \cdots & \phi_{3j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{i1} & \phi_{i2} & \phi_{i3} & \cdots & \phi_{ij} \end{bmatrix} \quad (13.30)$$

Donde cada columna de la matriz modal es un modo de vibración natural normalizado. Una matriz modal debe cumplir con las siguientes dos operaciones con matrices, llamadas relaciones de ortogonalidad (Paz, 1992, pág. 245):

$$[\phi_{ij}]^T [M] [\phi_{ij}] = [I] \quad (13.31)$$

Donde:

$[\phi_{ij}]$ = matriz modal del sistema.

$[M]$ = matriz de masa concentrada.

$[K]$ = matriz de rigidez usada para análisis dinámico.

$[I]$ = matriz identidad.

El proceso de normalización de cada modo se realiza por medio de la siguiente operación:

$$\frac{\{\phi_{nj}\}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n M_j \phi_{nj}^2}} \quad (13.32)$$

Posteriormente se verá de forma clara como normalizar los modos.

PARTE
VI

DESCRIPCIÓN Y DESARROLLO
DE UN ANÁLISIS DINÁMICO
MODAL ESPECTRAL A UN
EDIFICIO DE CONCRETO
REFORZADO

Capítulo XIV:

**Descripción del Edificio de Concreto
Reforzado por Analizar y Algunas
Consideraciones del RCCDMX 2017
Para Realizar el Análisis Dinámico
Modal Espectral**

- 14.1 Introducción
- 14.2 Zona Geotécnica del Inmueble
- 14.3 Georreferencia del Edificio por Analizar
- 14.4 Dimensiones y Materiales de la Estructura
- 14.5 Discretización de la Estructura como Sistema de Marcos
- 14.6 Predimensionamiento del Espesor de la Losa de Azotea
 - 14.6.1 Revisión del espesor propuesto de acuerdo con la NTC – Concreto
- 14.7 Predimensionamiento del Espesor de las Losas de Entrepiso
 - 14.7.1 Revisión del espesor propuesto de acuerdo con la NTC – Concreto
- 14.8 Predimensionamiento de Vigas y Columnas
 - 14.8.1 Determinación de la sección transversal de las vigas de azotea
 - 14.8.2 Determinación de la sección transversal de las vigas de entrepiso
 - 14.8.3 Determinación de la sección transversal de columnas
- 14.9 Consideraciones para el Análisis Modal Espectral con Base en las NTC del RCCDMX
 - 14.9.1 Factor de reducción en el momento de inercia por agrietamiento
 - 14.9.2 Breve descripción del Software SASID
 - 14.9.3 Factor de sobre – resistencia R
 - 14.9.4 Parámetros sísmicos dados por SASID para la estructura en estudio
 - 14.9.5 Alusión a otras consideraciones en capítulos posteriores

XIV. Descripción del Edificio de Concreto Reforzado por Analizar y Algunas Consideraciones del RCCDMX 2017 para Realizar el Análisis Dinámico Modal Espectral

14.1 Introducción

Para un análisis dinámico modal espectral, era necesario explicar las bases matemáticas que conlleva este procedimiento. Detalladas las bases es más sencillo para el lector seguir el procedimiento que se va desarrollando en un análisis modal dentro del rango elástico de los materiales.

No obstante, antes de realizar el análisis dinámico modal espectral a un edificio de concreto reforzado, se hará primero el dimensionamiento de la losa, vigas y columnas que conforman al sistema estructural.

14.2 Zona Geotécnica del Inmueble

Conocida la dirección del inmueble (longitud y latitud), la zona geotécnica correspondiente, con base en la zonificación de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Cimentaciones es zona de lomas o zona I (2017, págs. 13-14).

La siguiente tabla muestra las coordenadas geográficas de longitud y latitud para determinar la zona geotécnica del inmueble:

Tabla XIV.1
Datos del Inmueble Asociados a su Georreferencia

Dirección	Longitud	Latitud
Sanctorum 12, Argentina Poniente, C. P.:		
11230,	-99.20766	19.45679
Ciudad de México, CDMX		

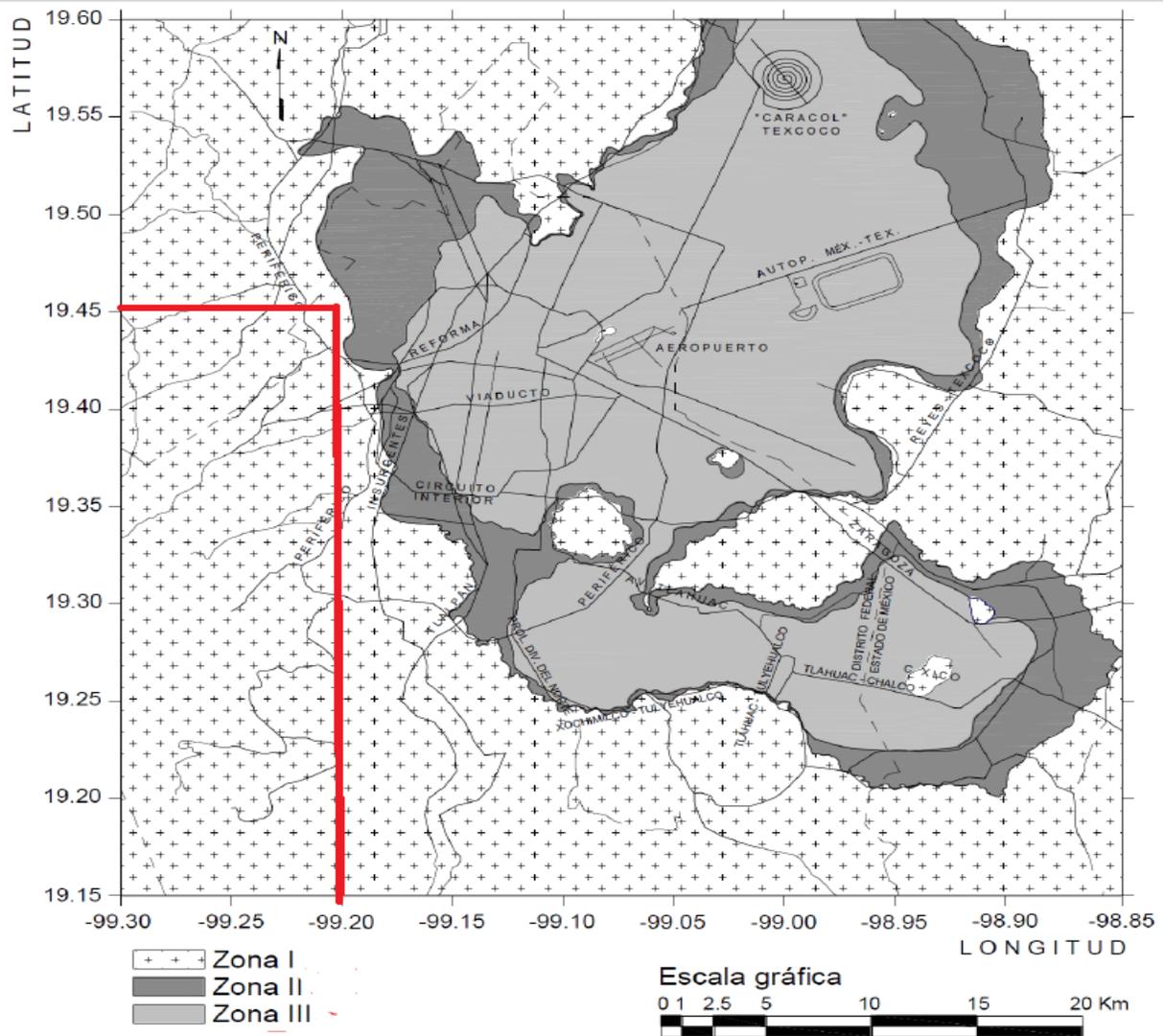


Figura XIV.1. Localización aproximada del inmueble en la Zonificación Geotécnica dada en las NTC de cimentaciones 2017 en su página 14.

14.3 Georreferencia del Edificio por Analizar

La siguiente figura muestra la ubicación del inmueble a través de Google Maps®:

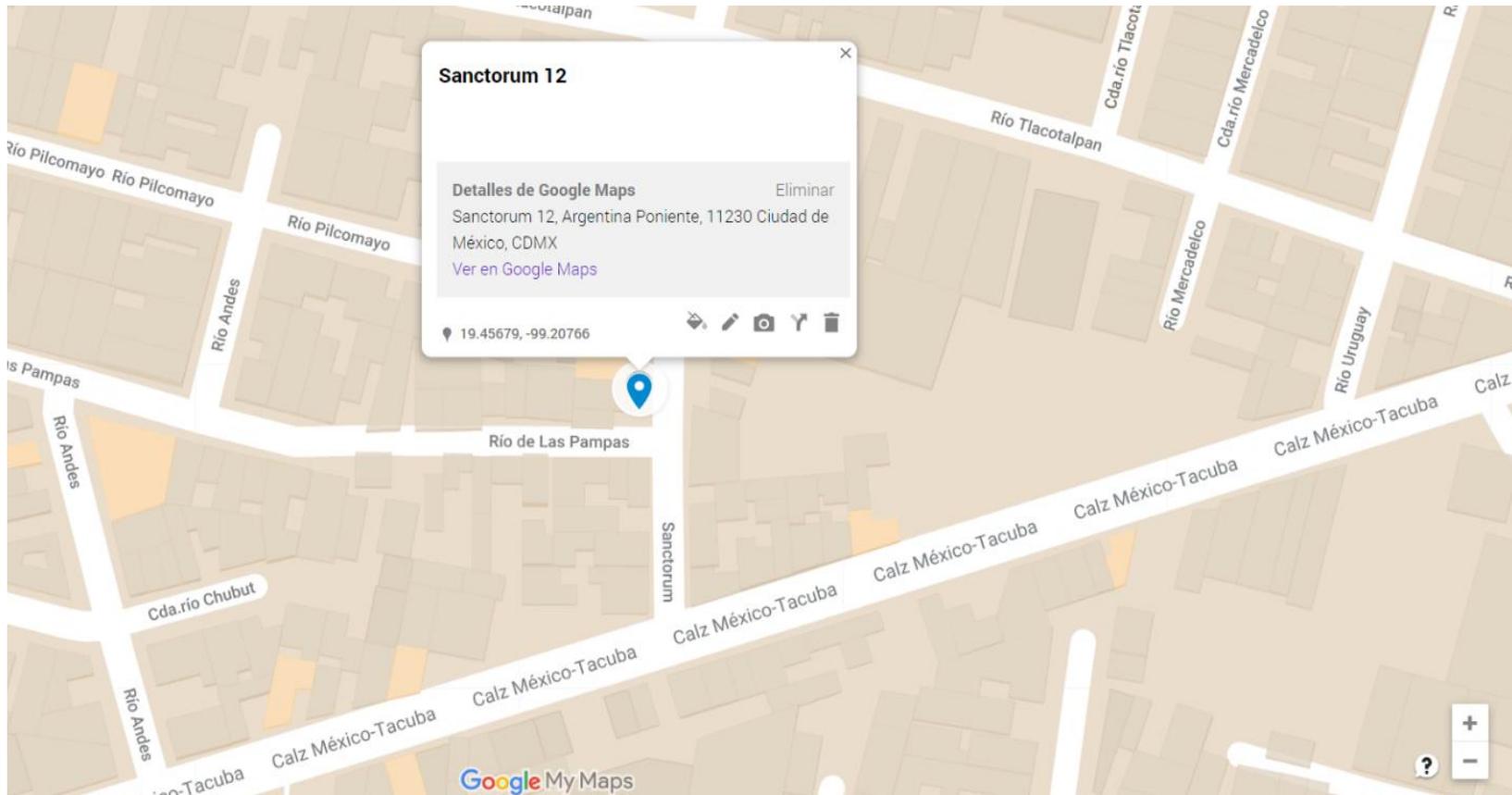


Figura XIV.2. Localización del Inmueble en Google Maps.

14.4 Dimensiones y Materiales de la Estructura

La estructura presenta las siguientes dimensiones^{16.1}:

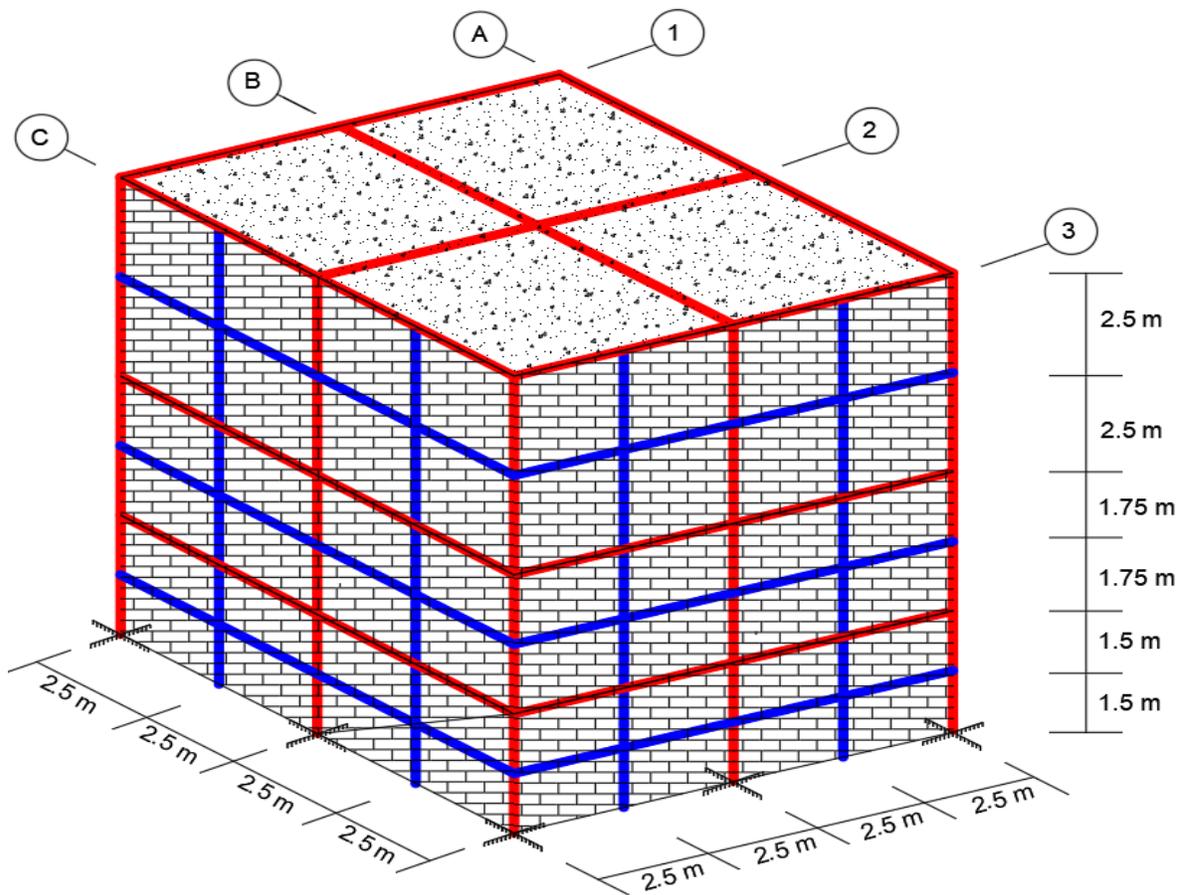


Figura XIV.3. Estructura de concreto reforzado.

Los materiales de construcción por considerar son:

- ✚ Concreto de resistencia a la compresión simple con $f'_c = 280 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
- ✚ Acero con esfuerzo de fluencia $f'_y = 4,200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
- ✚ Muros de Tabimax 15 (24 x 12 x 15 cm donde son medidas de largo, alto y espesor).

^{16.1} Por simplicidad, no se dejan espacios en los muros con la finalidad de que el cálculo de masas sea lo más simple posible.

- ✚ Los elementos en color rojo son vigas y columnas que serán dimensionadas más adelante (las losas de entrepiso también serán dimensionadas más adelante).
- ✚ Los elementos en color azul son castillos de 15 x 40 cm y dalas de 15 x 30 cm.

14.5 Discretización de la Estructura como Sistema de Marcos

A fin de examinar la estructura para el análisis dinámico modal espectral se hace una discretización de ésta en vigas y columnas (por ser los únicos elementos que se contemplarán para calcular la matriz de rigidez $[K]$), auxiliándose de las diferentes perspectivas arquitectónicas. Esta discretización será de mucha utilidad para plantear la matriz de rigidez y de masas.

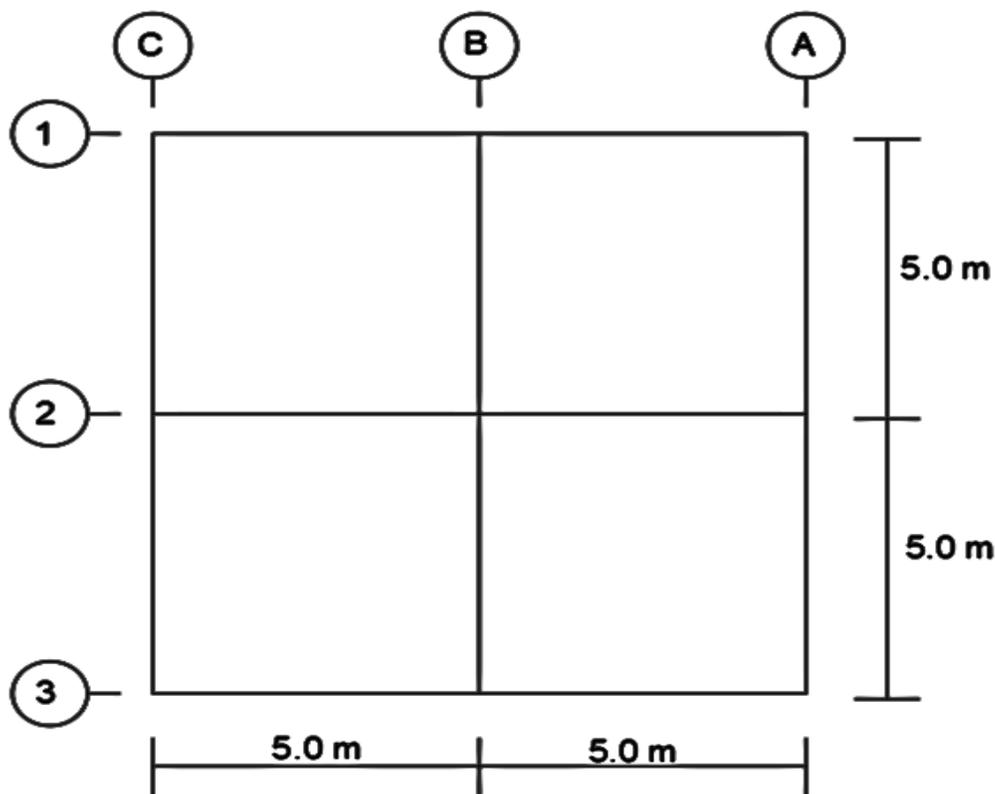


Figura XIV.4. Vista en planta del edificio de concreto reforzado.

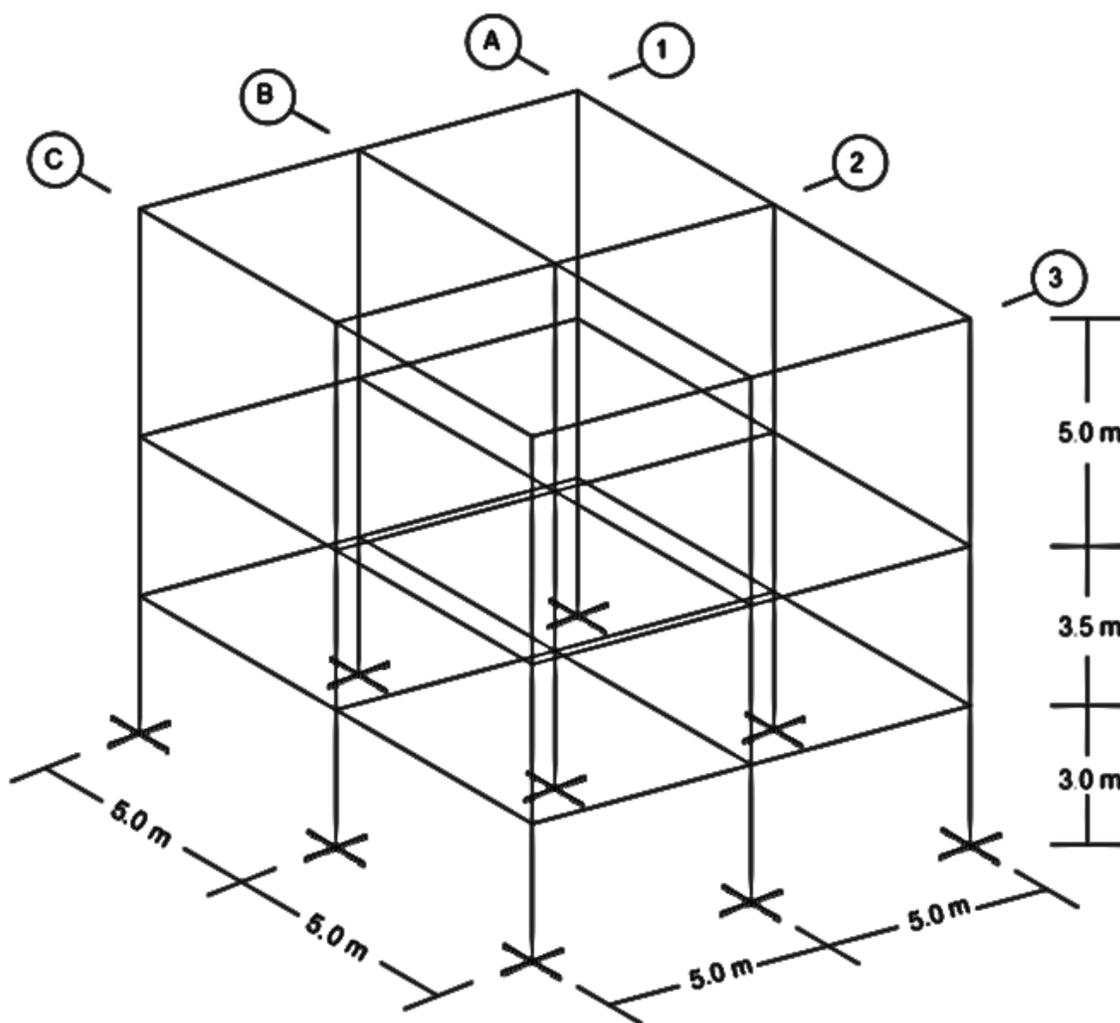


Figura XIV.5. Vista en isométrica del edificio de concreto reforzado.

La simetría de la estructura permite dibujar una sola elevación, siendo su representación la siguiente para todos los ejes:

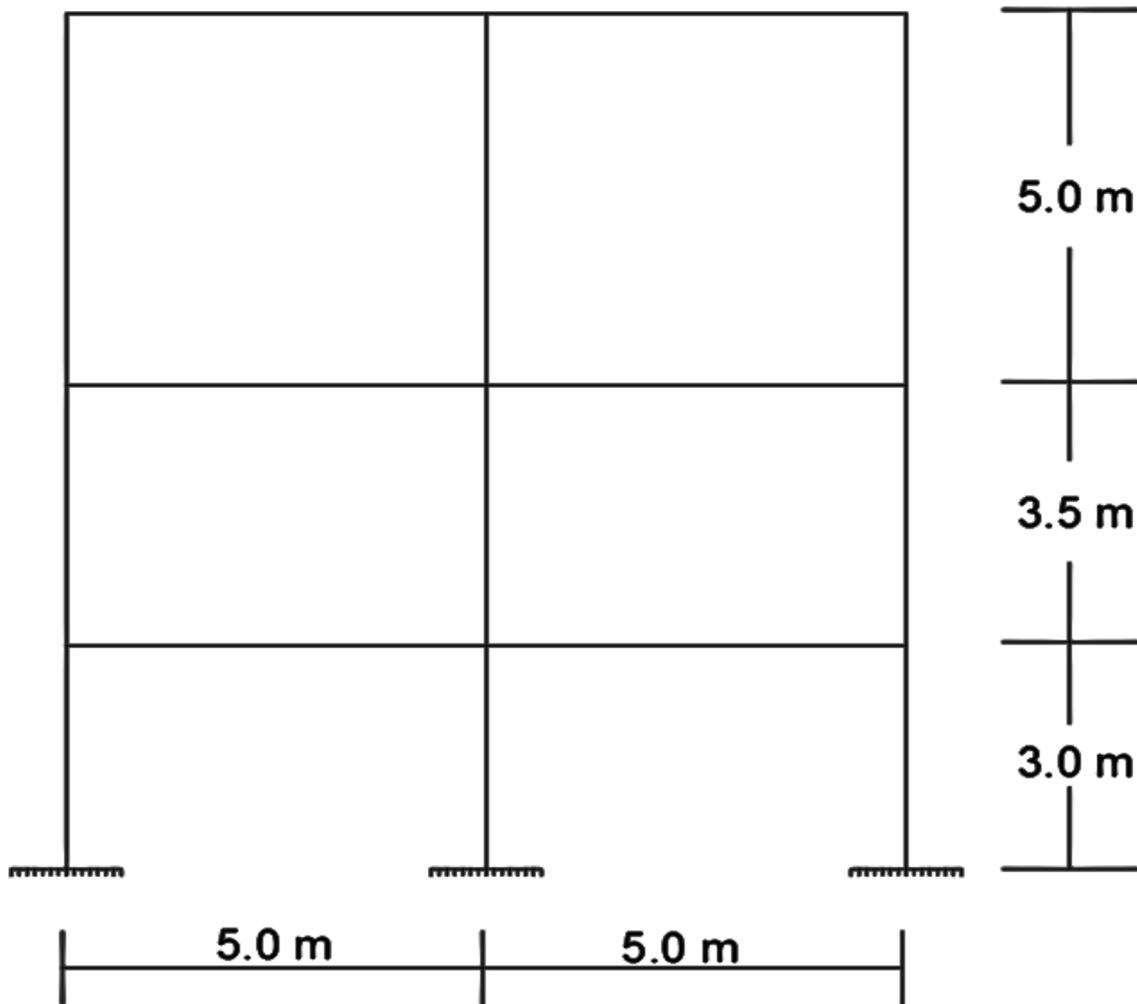


Figura XIV.6. Elevación de la Estructura para todos los ejes del edificio de concreto reforzado.

14.6 Predimensionamiento del Espesor de la Losa de Azotea

Para predimensionar la losa de azotea será considerada, según las Normas Técnicas complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, como losas apoyadas en su perímetro (2017, pág. 450).

Proponiendo un espesor inicial de la losa con la siguiente ecuación para zona I:

$$h_L = \frac{L}{22} \quad (14.1)$$

Donde:

$[h_L]$ = Espesor de la losa propuesto por criterio no normado por las NTC – Concreto.

$[L]$ = Longitud del claro (debe expresarse en cm).

Utilizando esta ecuación se tiene que:

$$h_L = \frac{L}{22} = \frac{500 \text{ cm}}{22} = 22.73 \text{ cm}$$

Proponiendo
un nuevo
espesor

$$\therefore h_L \cong 22.73 \text{ cm} \quad \Leftrightarrow \quad h_L = 20.00 \text{ cm} \quad (14.2)^{16.2}$$

La forma de calcular el peralte de una losa es:

$$d_L = h_L - r \quad (14.3)$$

Siendo:

$[d_L]$ = Peralte de la losa.

$[h_L]$ = Espesor de la losa.

$[r]$ = Recubrimiento.

Calculando d_L con un recubrimiento de 2 cm ($r = 2 \text{ cm}$):

$$d_L = h_L - r = 20.00 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 18.00 \text{ cm}$$
$$\therefore d_L = 18.00 \text{ cm} \quad (14.4)$$

^{16.2} Aunque por cálculo se tiene un valor de espesor $h_L \cong 22.73 \text{ cm}$, se propone bajarlo a $h_L = 18.00 \text{ cm}$. Esta disminución en el espesor, como podrá notarse más adelante, seguirá siendo aceptable según las NTC – Concreto.

14.6.1 Revisión del espesor propuesto de acuerdo con la NTC – Concreto

Para revisar el espesor propuesto se detalla en las NTC – Concreto, en su apartado 7.5.1 *Peralte mínimo* (2017, págs. 450 - 451), que el peralte mínimo d_m debe ser calculado con las siguientes expresiones al utilizar concreto de clase 1 o 2^{16.3} respectivamente:

$$d_m = \frac{\text{Perímetro}}{250} (0.032^4 \sqrt{f_s w_u}) \quad (14.5)^{16.4}$$

$$d_m = \frac{\text{Perímetro}}{170} (0.032^4 \sqrt{f_s w_u}) \quad (14.6)^{16.5}$$

Las ecuaciones para d_m anteriores son utilizadas cuando se presenta que:

$$f_s \geq 2,520 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad \& \quad w_u \geq 380 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Donde:

$[f_s]$ = Esfuerzo del acero en condiciones de servicio en kg / cm^2 . El valor suele ser $0.6 f_y$.

$[w_u]$ = Carga uniforme en condiciones de servicio dada en kg / m^2 .

Si no se cumple lo anterior, el valor de d_m se reduce a:

$$d_m = \frac{\text{Perímetro}}{250} \quad (14.7)$$

$$d_m = \frac{\text{Perímetro}}{170} \quad (14.8)$$

Para todas las ecuaciones de d_m , para calcular el perímetro, se especifica que la longitud de los lados discontinuos debe aumentarse 50 por ciento (multiplicarse por 1.5) si los apoyos no son monolíticos a la losa y debe aumentarse 25 por ciento (multiplicarse por 1.25) cuando lo sea. La siguiente figura ayudará a ilustrar lo mencionado.

^{16.3} El concreto de clase 1 debe tener una resistencia a la compresión simple $f'_c \geq 250 \text{kg} / \text{cm}^2$, mientras que un concreto clase 2, salvo algunas excepciones, debe oscilar su resistencia en $200 \text{kg} / \text{cm}^2 \leq f'_c < 250 \text{kg} / \text{cm}^2$.

^{16.4} Esta formulada es la que se utiliza para concretos clase 1.

^{16.5} Esta es la que se utiliza para concretos de clase 2.

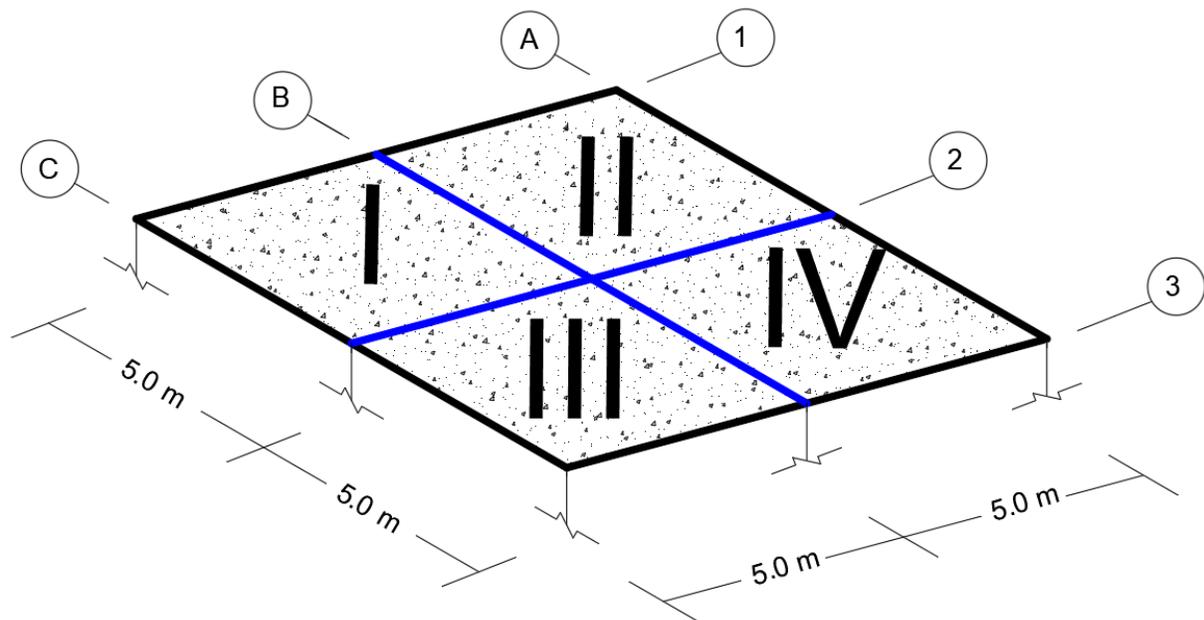


Figura XIV.7. Lados continuos y discontinuos en la losa de azotea.

Es observable que se representaron vigas en color azul y negro en la losa de la azotea. Estas vigas dividen a la losa en cuatro tableros (I, II, III y IV). Las vigas en color azul son aquellas que comparten dos tableros adyacentes; estas vigas se denominan lados continuos. Las vigas en color negro, que no se comparte con un tablero adyacente, son denominados lados discontinuos.

A fin de revisar el peralte, es necesario detallar las cargas muertas y vivas:

Tabla XIV.2
Detallamiento de Cargas Muertas en la Losa de Azotea

Cargas Muertas		
Factor Por Considerar	Símbolo	Valor
Densidad de muros	CM_{MUROS}	$300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
Sistema de piso	CM_{PISO}	$180 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

Peso propio de la losa	$CM_{P.P.LOSA}$	$480 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
Instalaciones y pinturas	$CM_{INS. Y PINT.}$	$40 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
Sobrecarga	$CM_{SOBRECARGA}$	$40 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
		$\Sigma CM = 1,040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

La carga viva para considerar, según las Normas Técnicas Complementarias sobre Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las Edificaciones, establece en la tabla 6.1.1 *Cargas vivas unitarias* (2017, pág. 696), en el inciso h), que la carga viva para azoteas con pendiente menor a 5% es:

$$\Sigma CV = 100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Acatando lo dicho en la misma sección de las normas, en el apartado 3.4 *Factores de Carga*, se establece que el factor de carga (F_C) para cargas permanentes (cargas muertas) es de 1.30 y para las cargas variables (cargas vivas) es 1.5 (2017, pág. 692).

Teniendo detallado tanto cargas vivas como muertas es posible verificar el peralte mínimo d_m a través de la ecuación 14.5:

$$d_m = \frac{P_{\text{erímetro}}}{250} (0.032^4 \sqrt{f_s w_u})$$

Donde:

$$P_{\text{erímetro}} = 2(1.5)(5 \text{ m}) + 2(1.25)(5 \text{ m}) = 15 \text{ m} + 12.5 \text{ m} = 27.5 \text{ m}$$

$$\therefore P_{\text{erímetro}} = 2,750 \text{ cm}$$

$$f_s = (0.6) \left(4,200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right) = 2,520 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$w_u = F_c \Sigma CM + F_c \Sigma CV = (1.3) \left(1,040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) + (1.5) \left(100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) = 1,352 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} + 150 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$\therefore w_u = 1502 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Revisando el peralte mínimo:

$$d_m = \left(\frac{2,750 \text{ cm}}{250} \right) \left(0.032 \sqrt[4]{\left(2,520 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right) \left(1,502 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right)} \right) = 15.5260 \text{ cm} \cong 16 \text{ cm}$$

Y el espesor mínimo de la losa h_m está dado por $h_m = d_m + r$ se tiene que:

$$h_m = d_m + r = 16 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

$$\therefore h_m = 18 \text{ cm} \quad (14.9)$$

El valor propuesto para el espesor de la losa h_L fue de 20 cm, mientras que el valor calculado h_m fue de 18 cm. Esto significa que al ser $h_L > h_m$ se acepta el uso de una losa de 20 cm para la losa de azotea.

14.7 Predimensionamiento del Espesor de las Losas de Entrepiso

El procedimiento para predimensionar la losa es el mismo que el del apartado anterior, entonces, utilizando la ecuación de h_L :

$$h_L = \frac{L}{22} = \frac{500 \text{ cm}}{22} = 22.73 \text{ cm}$$

$$\therefore h_L \cong 22.73 \text{ cm} \quad \begin{array}{c} \text{Proponiendo} \\ \text{un nuevo} \\ \text{espesor} \\ \Rightarrow \end{array} \quad h_L = 20 \text{ cm} \quad (14.10)$$

Y para el peralte:

$$d_L = h_L - r = 20.00 \text{ cm} - 2 \text{ cm} = 18.00 \text{ cm}$$

$$\therefore d_L = 18.00 \text{ cm} \quad (14.11)$$

14.7.1 Revisión del espesor propuesto de acuerdo con la NTC – Concreto

Para verificar que es aceptable el espesor de la losa propuesta, se utilizará la fórmula:

$$d_m = \frac{\text{Perímetro}}{250} (0.032 \sqrt[4]{f_s w_u})$$

Tabla XIV.3

Detallamiento de Cargas Muertas en las Losas de Entrepiso

Cargas Muertas		
Factor Por Considerar	Símbolo	Valor
Densidad de muros	CM_{MUROS}	$300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
Sistema de piso	CM_{PISO}	$180 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
Peso propio de la losa	$CM_{\text{P.P.LOSA}}$	$480 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
Instalaciones y pinturas	$CM_{\text{INS. Y PINT.}}$	$40 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
Sobrecarga	$CM_{\text{SOBRECARGA}}$	$40 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
		$\Sigma CM = 1040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

La carga viva para considerar, según las Normas Técnicas Complementarias sobre Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las Edificaciones, establece en la tabla 6.1.1 *Cargas vivas unitarias* (2017, pág. 696), en el inciso b), que la carga viva para oficinas es:

$$\Sigma CV = 250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

De igual forma el factor de carga (F_C) para cargas permanentes (cargas muertas) es de 1.30 y para las cargas variables (cargas vivas) es 1.5.

Teniendo detallado tanto cargas vivas como muertas es posible verificar el peralte mínimo d_m a través de la ecuación 14.5:

$$d_m = \frac{P_{\text{perímetro}}}{250} (0.032^4 \sqrt{f_s w_u})$$

El $P_{\text{perímetro}}$ y f_s están detallados con valores de 2,750 cm y $f_s = 2,520 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, respectivamente, por lo cual se debe calcular w_u .

$$w_u = F_C \Sigma CM + F_C \Sigma CV = (1.3) \left(1,040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) + (1.5) \left(250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) = 1,352 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} + 375 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

$$\therefore w_u = 1,727 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Revisando el peralte mínimo:

$$d_m = \left(\frac{2,750 \text{ cm}}{250} \right) \left(0.032^4 \sqrt{\left(2,520 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right) \left(1,727 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right)} \right) = 16.0774 \text{ cm} \cong 17 \text{ cm}$$

Y el espesor mínimo de la losa h_m está dado por $h_m = d_m + r$ se tiene que:

$$h_m = d_m + r = 17 \text{ cm} + 2 \text{ cm} = 19 \text{ cm}$$

$$\therefore h_m = 19 \text{ cm} \tag{14.12}$$

El valor propuesto para el espesor de la losa h_L fue de 20 cm, mientras que el valor calculado h_m fue de 19 cm. Esto significa que al ser $h_L > h_m$ se acepta el uso de una losa de 20 cm para las losas de entrepiso.

14.8 Predimensionamiento de Vigas y Columnas

Las fórmulas de Predimensionamiento sugeridas son las siguientes:

Tabla XIV.4
 Predimensionamiento de vigas y columnas

Vigas	Columnas
$h = \frac{L}{10}$	$b = h$
$b = \frac{h}{2}$	$b = \frac{h_1}{8}$
	$b = \frac{h + \frac{h_1}{8}}{2}$

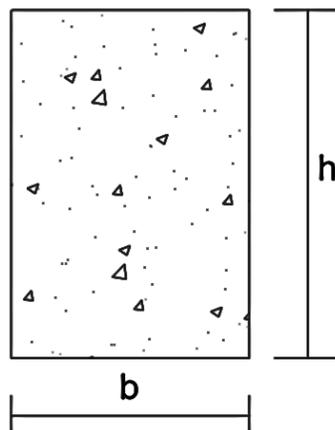


Figura XIV.8. Dimensiones de base (b) y altura (h) de un elemento cuadrado de concreto.

De la tabla anterior:

[b] = Base de la sección cuadrada.

[h] = Altatura de la sección cuadrada.

[h₁] = Altura máxima de entrepiso.

14.8.1 Determinación de la sección transversal de las vigas de azotea

Para las vigas de azotea:

$$h = \frac{L}{10} = \frac{600 \text{ cm}}{10} = 60 \text{ cm} \quad (14.13)$$

$$b = \frac{h}{2} = \frac{60 \text{ cm}}{2} = 30 \text{ cm} \quad (14.14)$$

14.8.2 Determinación de la sección transversal de las vigas de entrepiso

Aunque se tendrán las mismas dimensiones que las ecuaciones 14.13 y 14.14, como la carga viva máxima para oficinas es mayor en entrepisos, que para azoteas con pendientes menores al 5 %, se propone:

$$h = 70 \text{ cm} \quad (14.15)$$

$$b = 35 \text{ cm} \quad (14.16)$$

14.8.3 Determinación de la sección transversal de columnas

Para dimensionar una columna se dan tres formulas, las cuales considera a $h = 70 \text{ cm}$ y $h_1 = 500 \text{ cm}$ por ser las mayores dimensiones de vigas y altura de entrepiso respectivamente. Al desarrollar las ecuaciones se obtiene:

$$b = 70 \text{ cm} \quad (14.17)$$

$$b = \frac{500 \text{ cm}}{8} = 62.5 \text{ cm} \quad (14.18)$$

$$b = \frac{70 \text{ cm} + \frac{500 \text{ cm}}{8}}{2} = 66.25 \text{ cm} \quad (14.19)$$

Las dimensiones de las vigas y columnas que se tomaran finalmente son las siguientes:

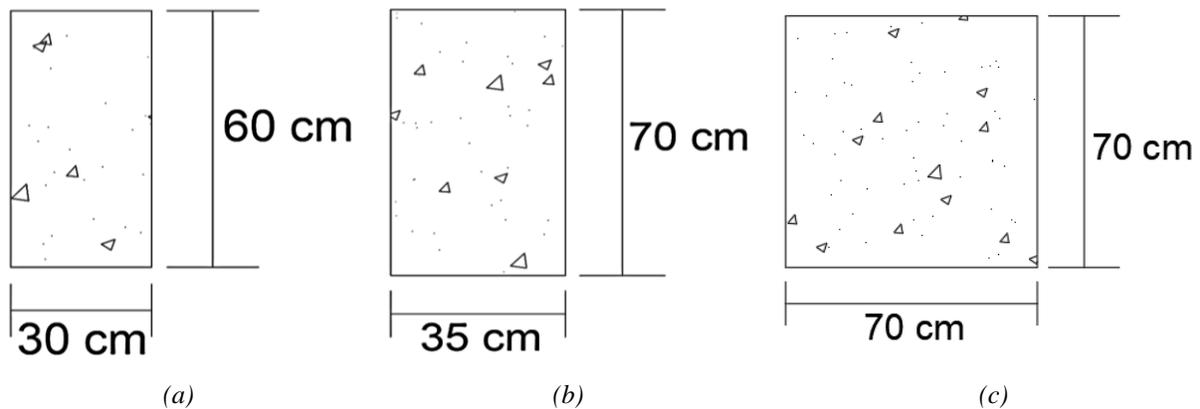


Figura XIV.9. Dimensiones de vigas de (a) azotea, (b) entrepisos y (c) columnas.

Estas medidas serán la que sean tomadas en cuenta para calcular la matriz de rigidez de la estructura y la matriz de masas.

14.9 Consideraciones para el Análisis Modal Espectral con Base en las NTC del RCCDMX

14.9.1 Factor de reducción en el momento de inercia por agrietamiento

El Reglamento de Construcción de la CDMX (RCCDMX) estipula en el apartado 3.2.1.1 *Análisis lineal*, en las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto que, para el cálculo de la rigidez de los miembros estructurales, deberá considerarse el efecto de agrietamiento cuando se utilicen métodos de análisis lineal (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 395). La siguiente tabla estipula los valores de reducción de inercia por efecto de agrietamiento:

Tabla XIV.5

Valores de reducción de inercia por efectos de agrietamiento en elementos estructurales^{16.6}

Elemento	Valor de inercia
Vigas	0.5 I
Columnas	0.7 I

14.9.2 Breve descripción del Software SASID

Al decidir realizar un análisis dinámico modal espectral, las acciones sísmicas de diseño se determinarán a partir de los espectros de diseño dados por el Sistema de Acciones Sísmicas de Diseño, en sus siglas SASID (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 58). Dentro del SASID, se deben introducir datos tales como el factor de importancia^{16.7}, factor de irregularidad^{16.8}, factor de comportamiento sísmico Q ^{16.9} y el factor de hiperasticidad detallado a continuación.

14.9.3 Factor de sobre – resistencia R

Un factor importante por considerar dentro del análisis dinámico modal es el factor de sobre – resistencia. Este factor reduce el valor del espectro elástico del sitio de la construcción (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 58). La fórmula para determinar dicho factor es:

$$R = k_1 R_0 + k_2 \quad (14.20)$$

Donde:

^{16.6} En el RCCDMX, en las NTC – Concreto, se estipulan más valores, sin embargo, estos valores sustraídos del reglamento son los únicos que se ocuparan para el análisis modal.

^{16.7} El factor de importancia se estipula según lo escrito en el apartado 1.4 *Clasificación de las estructuras* (págs. 50 – 51 del RCCDMX).

^{16.8} Factor de irregularidad que puede ser de 0.7 o 0.8 según el apartado 5.5 *Corrección de Q por irregularidad* (pág. 66 del RCCDMX).

^{16.9} Dentro del RCCDMX en su capítulo IV *Factores de Comportamiento Sísmico y Distorsiones Permisibles* (págs. 61 – 64) se estipulan varios valores de Q dependiendo de la estructuración con la que cuente la construcción analizada,

[R] = factor de sobre – resistencia.

[k₁] = factor de corrección por hiperasticidad.

[R₀] = factor básico de sobre – resistencia del sistema estructural.

[k₂] = factor de incremento para estructuras pequeñas y rígidas.

Los valores que toman los últimos tres factores se estipulan en las páginas 60 y 61 del RCCDMX (NTC – Sismo).

Algo importante a destacar para k₂ es que cuando el periodo de la estructura (T) sea igual a cero k₂ deberá tomarse igual a 0.5; si el periodo de la estructura es mayor que el periodo de inicio de la meseta del espectro de diseño (T_a) k₂ deberá tomarse igual a cero (Jean Perrilliat , 2018).

De no cumplirse con las consideraciones del párrafo anterior el valor de k₂ será determinado por (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 61):

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_a}} \right) \quad (14.21)$$

14.9.4 Parámetros sísmicos dados por SASID para la estructura en estudio

La siguiente figura muestra los datos de la estructura dentro del SASID:

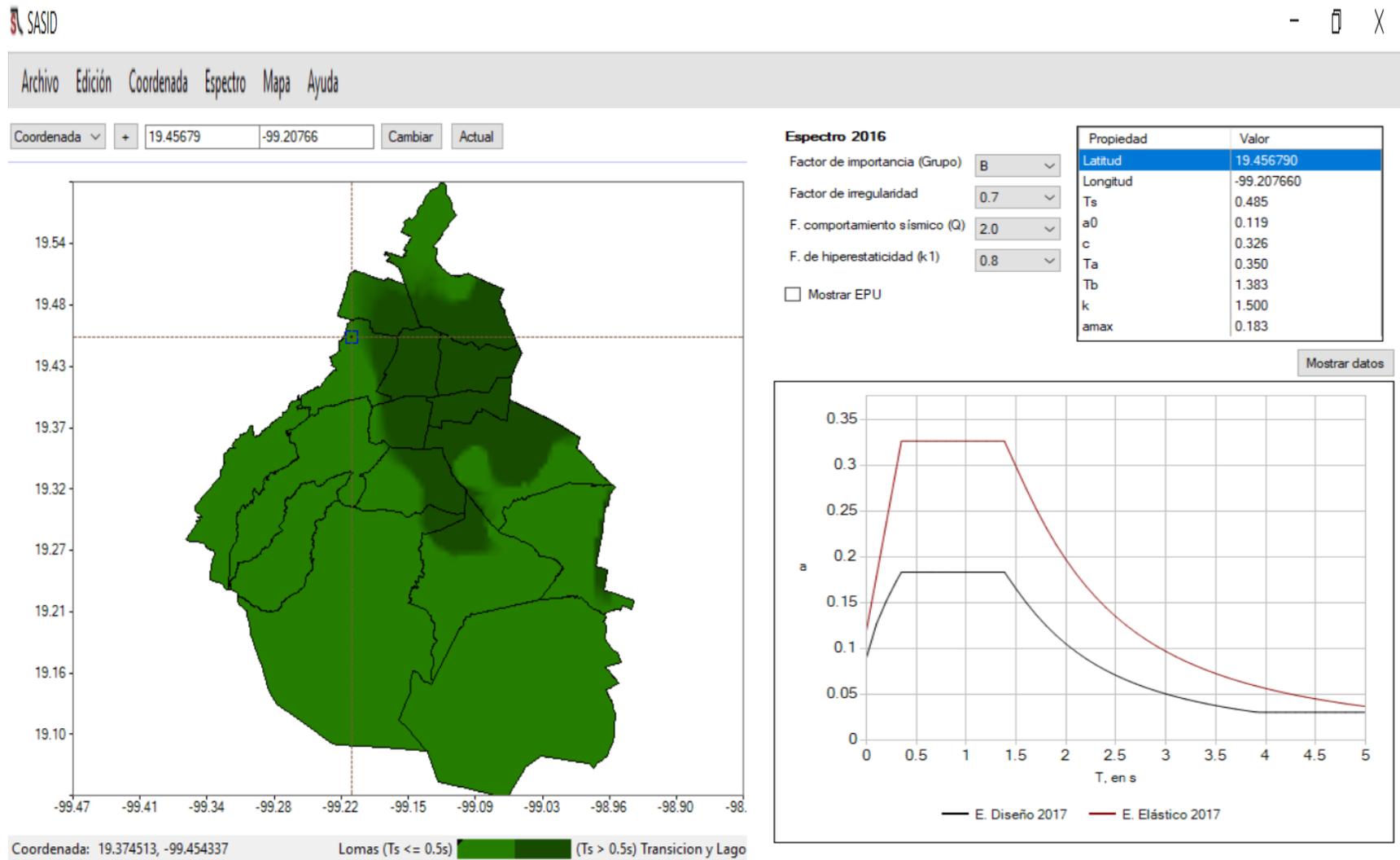


Figura XIV.10. Introducción de los datos de la estructura en estudio dentro del SASID.

La siguiente tabla recopila los parámetros sísmicos de interés de la estructura.

Tabla XIV.6
 Parámetros sísmicos de la estructura

Parámetros Sísmicos de la Estructura en Estudio ^{16.10}		
Coeficientes	Espectro de diseño	Espectro elástico
Periodo dominante de vibrar más largo del terreno en el sitio de interés (T_s).	0.485 s	0.485 s
Inicio de la meseta del espectro de diseño (T_a).	0.350 s	0.350 s
Fin de la meseta del espectro de diseño (T_b)	1.383 s	1.383 s
Aceleración máxima del terreno (a_0)	0.090 m/s ²	0.119 m/s ²
Ordenada espectral correspondiente a la meseta del espectro de diseño (c)	0.183 m/s ²	0.326 m/s ²
Aceleración máxima del espectro ($a_{m\acute{a}x}$)	0.183 m/s ²	0.326 m/s ²
Cociente entre desplazamientos máximos del suelo y de la estructura	k = 1.5	k = 1.5

^{16.10} La notación de los coeficientes de esta tabla se encuentra en el RCCDMX dentro de las NTC – Sismo al inicio de éstas.

Las siguientes figuras muestran los espectros de diseño y elástico, por separado, del sitio sobre el cual está la estructura. En el eje horizontal el periodo está dado en segundos y el eje vertical representa en valor decimal el porcentaje de aceleración de la gravedad g .

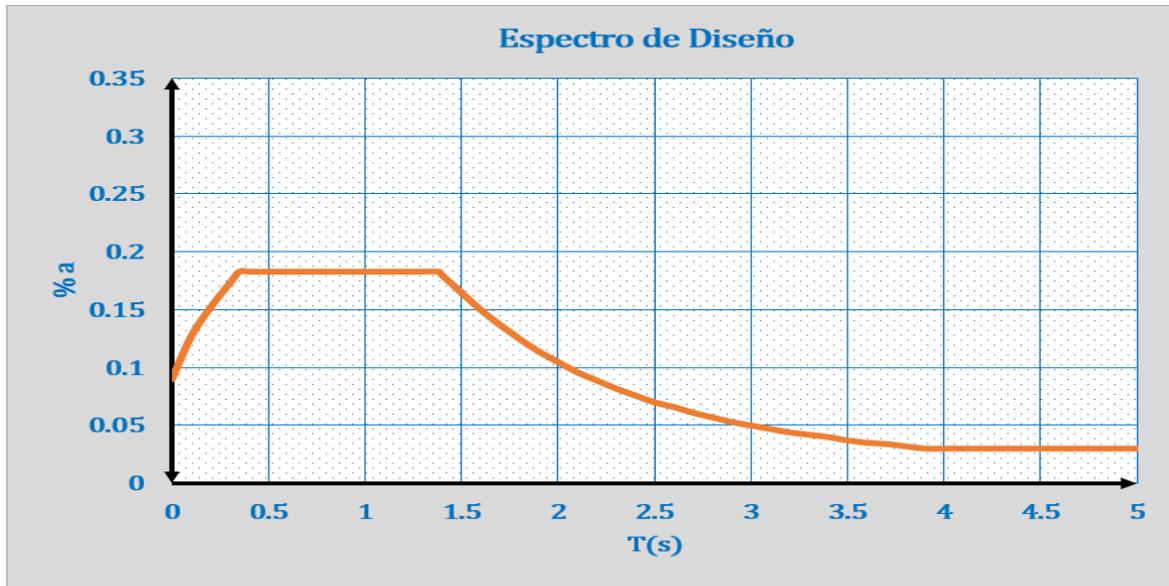


Figura XIV.11. Espectro de diseño de sitio.

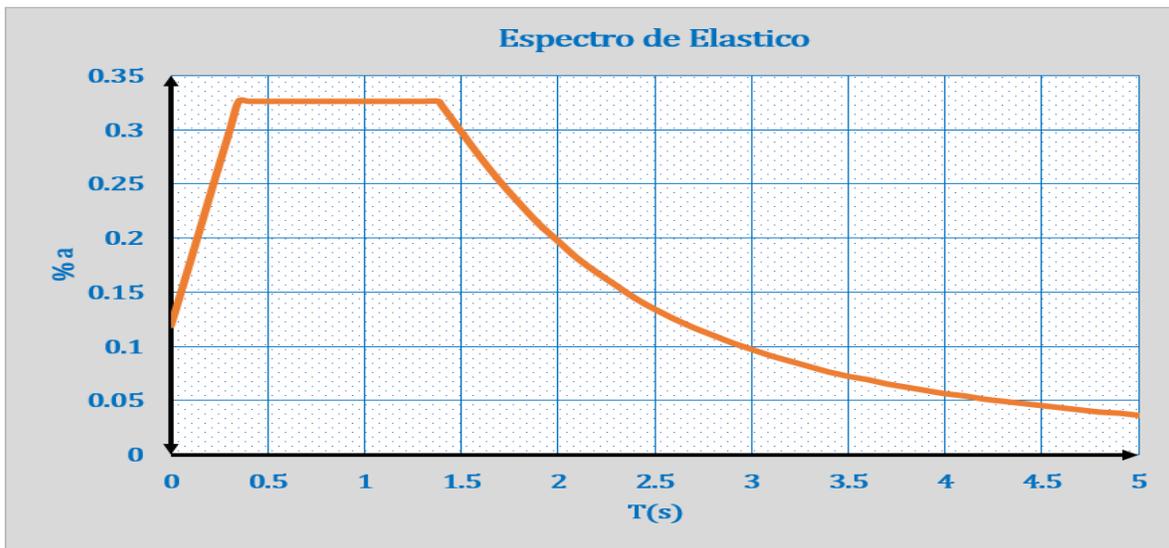


Figura XIV.12. Espectro elástico de sitio.

La siguiente tabla muestra los valores de la aceleración correspondiente al periodo T, para los espectros de diseño y elástico, proporcionados por el SASID. Esta tabla será de utilidad para determinar los valores específicos de aceleración asociadas a los modos de vibrar.

Tabla XIV.7

Valores de las aceleraciones para los espectros de diseño y espectro elástico

T (s)	a (m/s ²)	
	Espectro de diseño	Espectro elástico
0	0.09	0.119
0.1	0.127	0.178
0.2	0.152	0.238
0.3	0.173	0.297
0.35	0.183	0.326
0.4	0.183	0.326
0.5	0.183	0.326
0.6	0.183	0.326
0.7	0.183	0.326
0.8	0.183	0.326
0.9	0.183	0.326
1	0.183	0.326
1.1	0.183	0.326
1.2	0.183	0.326
1.3	0.183	0.326
1.383	0.183	0.326
1.4	0.18	0.322
1.5	0.165	0.298
1.6	0.15	0.274
1.7	0.137	0.252
1.8	0.125	0.232
1.9	0.114	0.213
2	0.105	0.197
2.1	0.096	0.181
2.2	0.089	0.168
2.3	0.082	0.156

2.4	0.076	0.144
2.5	0.07	0.134
2.6	0.066	0.125
2.7	0.061	0.117
2.8	0.057	0.11
2.9	0.053	0.103
3	0.05	0.097
3.1	0.047	0.091
3.2	0.044	0.086
3.3	0.042	0.081
3.4	0.04	0.076
3.5	0.037	0.072
3.6	0.035	0.069
3.7	0.034	0.065
3.8	0.032	0.062
3.9	0.03	0.059
4	0.03	0.056
4.1	0.03	0.054
4.2	0.03	0.051
4.3	0.03	0.049
4.4	0.03	0.047
4.5	0.03	0.045
4.6	0.03	0.043
4.7	0.03	0.041
4.8	0.03	0.039
4.9	0.03	0.038
5	0.03	0.036

14.9.5 Alusión a otras consideraciones en capítulos posteriores

Los apartados anteriores describen factores de reducción, determinados por reglamento, a ciertas propiedades que afectan a la estructura, sin embargo, conforme se vaya avanzando con el análisis dinámico modal surgirán otros conceptos y cálculos por determinar que será preferible explicarlos conforme se vayan requiriendo.

Para determinar las respuestas modales tales como fuerzas cortantes, desplazamientos laterales, entre otras, suele hacerse uso del SRSS^{16.11}. El uso del SRSS es factible sólo cuando los periodos naturales de la estructura difieren entre sí por lo menos un 10%. En caso de no cumplirse esta condición deberá hacerse uso de la combinación cuadrática completa (CQC) (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 66).

^{16.11} El SRSS (Square Root of Sum of Squares, en sus siglas en inglés) es un artificio para calcular un valor promedio de las entidades físicas que se desean calcular (como desplazamientos o fuerzas).

Capítulo XV:
Análisis Dinámico Modal Espectral
Y Análisis Estructural de Marcos
Perimetrales Considerando Deformación
Por Flexión

- 15.1 Discretización de la Estructura para Determinar la Matriz de Masa Concentrada
- 15.2 Concepto de Área tributaria
- 15.3 Calculo de la Matriz de Masa Concentrada
- 15.4 Análisis Dinámico Modal Espectral Bajo Efectos de Deformación por Flexión
 - 15.4.1 Determinación de la matriz de rigidez para análisis dinámico [K]
 - 15.4.2 Calculo de la frecuencia y periodo a través de eigenvalores
 - 15.4.3 Calculo de los modos de vibrar a través de eigenvectores
 - 15.4.4 Factor de participación de masas
 - 15.4.5 Aceleraciones por considerar con base en los periodos de la estructura
 - 15.4.6 Calculo de los desplazamientos relativos y finales
 - 15.4.7 Revisión de los desplazamientos laterales (distorsión de entrepiso)
 - 15.4.8 Calculo de las fuerzas cortantes (cortantes basales)
 - 15.4.9 Revisión por cortante basal mínimo
 - 15.4.10 Determinación de cargas debido a acciones permanentes, variables y accidentales (caso sísmico)
 - 15.4.11 Determinación de cargas debido a acciones permanentes y variables (caso estático)
- 15.5 Análisis Estructural para el Caso Sísmico

XV. Análisis Dinámico Modal Espectral y Análisis Estructural de Marcos Perimetrales Considerando Deformación por Flexión

15.1 Discretización de la Estructura para Determinar la Matriz de Masa Concentrada

El análisis dinámico modal espectral necesita modelar el sistema estructural en estudio en un modelo matemático masa – resorte en vibración libre. Se parte entonces de la ecuación $[M]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$ para poder encontrar las frecuencias naturales y modos de vibración de la estructura.

Con anterioridad se detalló que la matriz de rigidez para análisis estructural $[K]$ se ensambla con los elementos de la matriz $[k_{ij}^*]$ obtenida por condensación estática a partir de la matriz de rigidez de la estructura $[k_{ij}]$.

Así mismo la matriz de masa concentrada $[M]$ será el resultado de considerar la masa de todos los elementos (kg o ton) entre el valor de la gravedad ($981 \text{ cm/s}^2 = 9.81 \text{ m / s}^2$).

La consideración de las masas por entrepiso se hace calculando exclusivamente la mitad de la masa de los elementos en los entrepisos inferior y superior.

Sin importar que tipo de deformaciones se considere en los elementos (deformación axial, a cortante, flexión o combinaciones de éstas), la matriz de masa concentrada será la misma para todos los casos.

Adaptando esta idea a la estructura en estudio se hace el siguiente modelo matemático para ejemplificar este concepto:

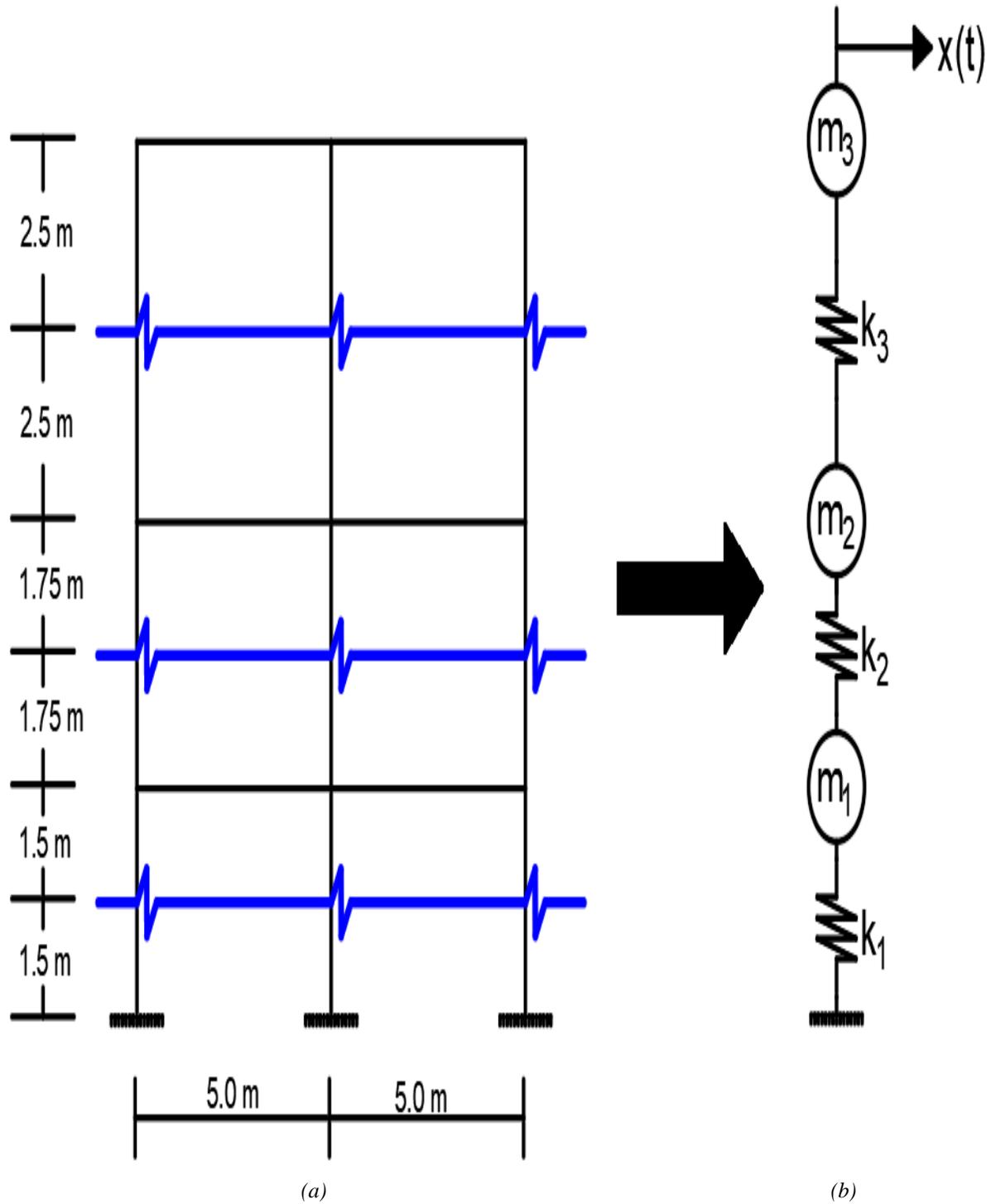


Figura XV.1. (a) elevación de la estructura considerando solo vigas y columnas, y (b) modelo masa – resorte de (a).

15.2 Concepto de Área tributaria

Para el cálculo de todas las masas ($m_1, m_2, m_3, m_4, \dots, m_n$) que conformarán a la matriz de masa concentrada $[M]$ se auxiliará en el concepto de área tributaria. Referiremos como área tributaria de un elemento de un sistema estructural^{15.1}, sujeto a carga uniformemente distribuida, al área que, multiplicada por la carga uniforme, expresa la carga total que se debe considerar sobre dicho elemento. Esta consideración provee una carga que se asemeja a la distribución real de las cargas de la estructura (Meli Piralla , 2011, pág. 141).

La distribución en áreas tributarias de elementos que trabajan en dos direcciones tiene la siguiente representación:

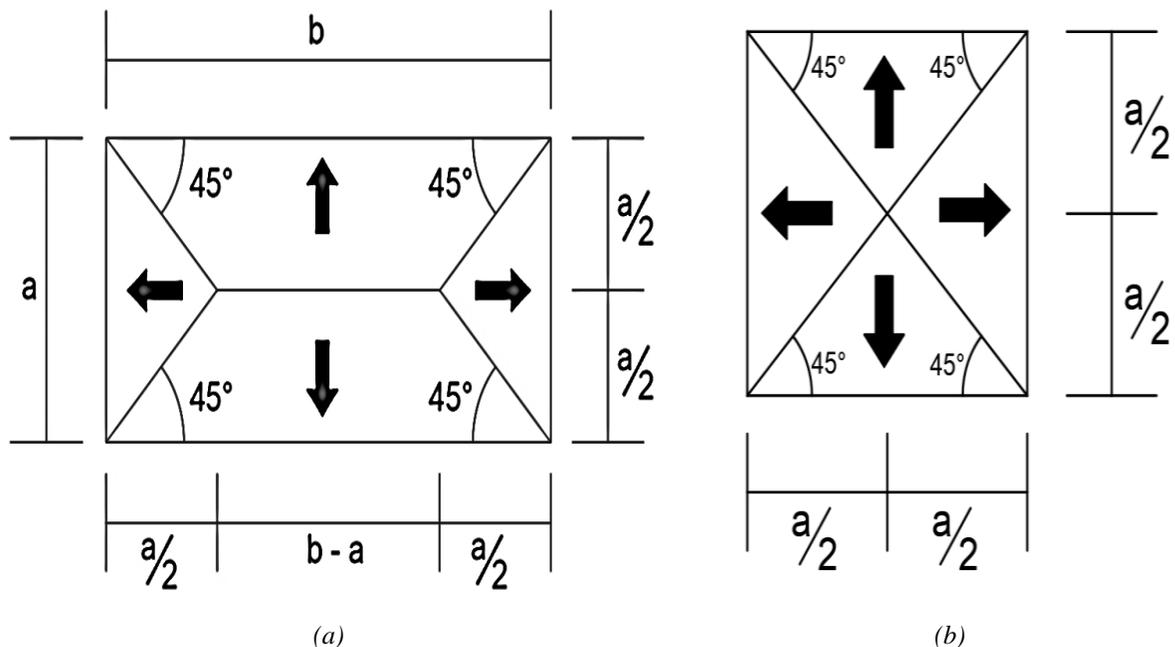


Figura XV.2. Áreas tributarias en tableros de dos direcciones para: (a) tableros rectangulares y (b) tableros cuadrados.

Mientras que la distribución de tableros que trabajan en una dirección es:

^{15.1} En el caso de estudio presente en esta tesis, se utilizará el concepto de áreas tributarias para distribuir cargas de las losas de azotea y entresijos, divididos en tableros, a las vigas principales.

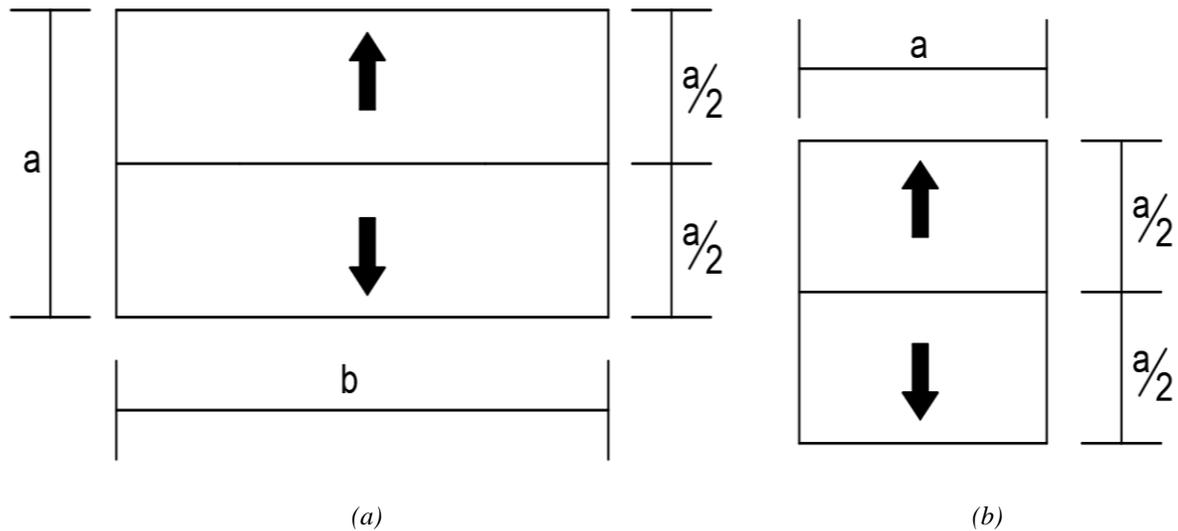


Figura XV.3. Áreas tributarias en tableros en una dirección para: (a) tableros rectangulares y (b) tableros cuadrados.

Hay que considerar, sin embargo, que las distribuciones anteriores sólo son aplicables a tableros rectangulares o cuadrados perfectamente orientados en el plano cartesiano. Para losas que formen polígonos diferentes o no orientados en el plano cartesiano (no ortogonales) se deberá usar métodos numéricos como el de elementos finitos o elementos de frontera (Molina Elvira, Apuntes de Mecánica de Materiales I, 2017).

15.3 Cálculo de la Matriz de Masa Concentrada

Como elementos que proveen rigidez directa a la estructura, se sabe de los apartados anteriores que, las vigas de azotea tienen dimensiones de 30 x 60 cm y las vigas de entrepiso 35 x 70 cm, mientras que las columnas son de 100 x 100 cm. Así mismo se detalló que todas las losas tienen un espesor de 20 cm.

Los elementos que no contribuyen a la rigidez de la estructura (de forma directa), mas si en la contribución de masas, son los castillos intermedios de 15 x 40 cm y las dalas de 15 x 30 cm. De igual forma se consideran los muros de tabimax 15 (se recuerda que las medidas de largo, alto y espesor son 24 x 12 x 15 cm, respectivamente).

Para la determinación de masas en los marcos extremos de la estructura de concreto reforzado, el edificio se divide en los siguientes marcos:

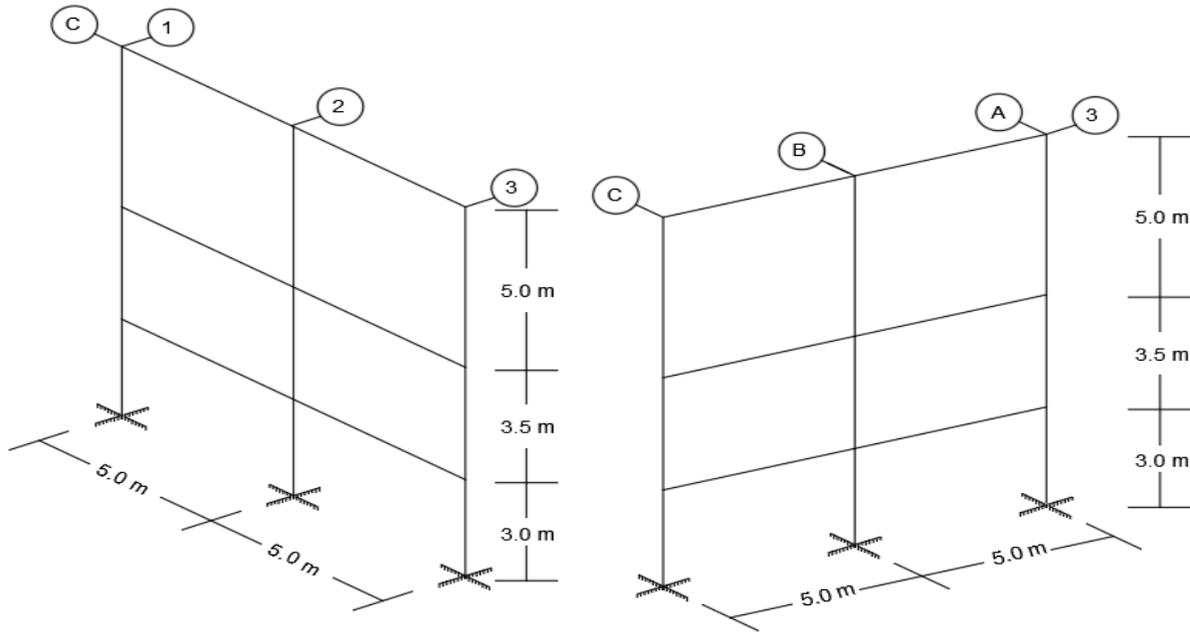


Figura XV.4. Marcos perimetrales vistos desde la perspectiva isométrica (a).

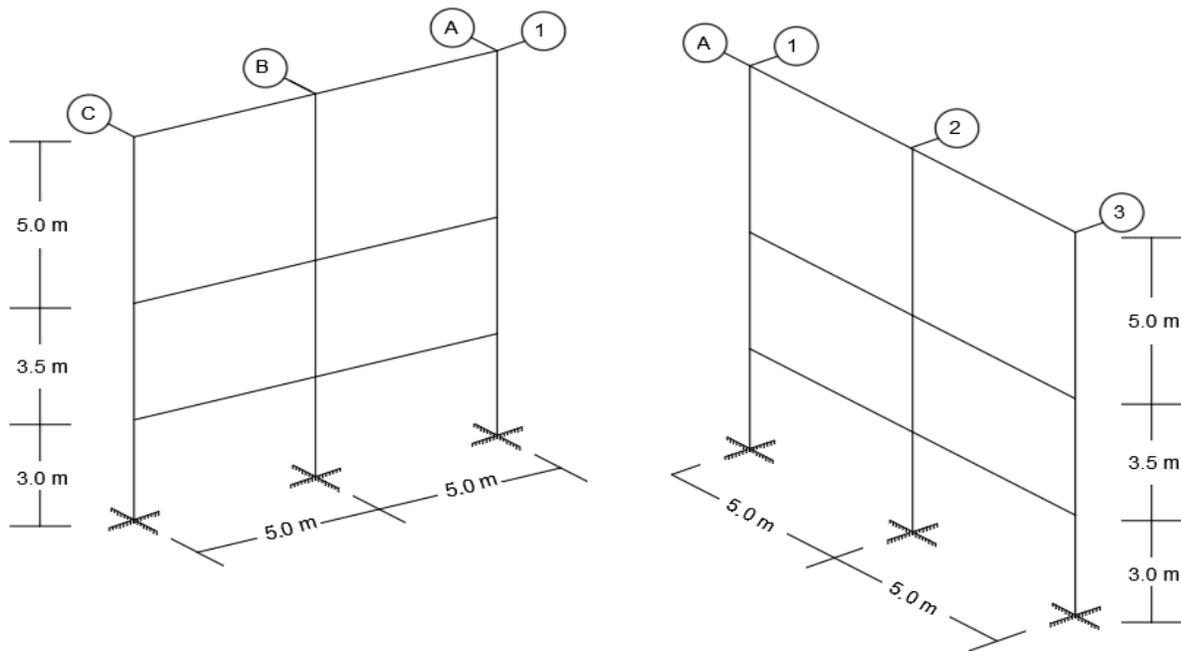


Figura XV.5. Marcos perimetrales vistos desde la perspectiva isométrica (b).

Como es observable, todos y cada uno de los cuatro marcos tienen las mismas medidas, materiales de construcción y elementos (vigas, columnas, losas, castillos, dalas y muros), haciendo necesario sólo realizar el cálculo de masas para un marco externo.

La discretización de masas y áreas tributarias se ejemplifica en la siguiente imagen:

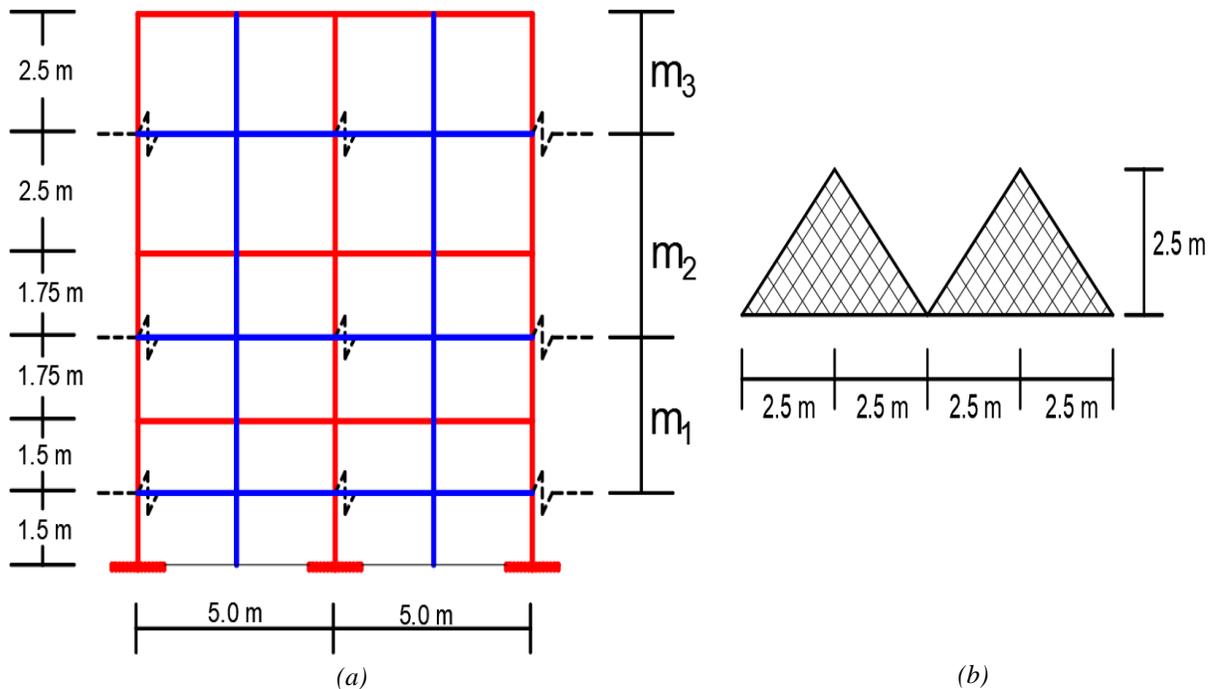


Figura XV.6. (a) Nomenclatura de masas para la elevación de ejes (b) áreas tributarias para cálculo de masas.

Calculando masa m_1 :

$$P_{\text{columnas}} = (3)(1.75 \text{ m} + 1.5 \text{ m})(0.7 \text{ m})(0.7 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 11,466 \text{ kg} = 11.466 \text{ ton}$$

$$P_{\text{vigas}} = (2)(5 \text{ m})(0.35 \text{ m})(0.7 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 5,880 \text{ kg} = 5.88 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa por área tributaria de la CM}} = (4) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2} \right] \left(1,040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) = 13,000 \text{ kg} = 13 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa por área tributaria de la CV}} = (4) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2} \right] \left(250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) = 3,125 \text{ kg} = 3.125 \text{ ton}$$

$$P_{\text{castillos}} = (2)(1.75 \text{ m} + 1.5 \text{ m})(0.15 \text{ m})(0.4 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 936 \text{ kg} = 0.936 \text{ ton}$$

$$P_{\text{dalas}} = (4)(5 \text{ m})(0.15 \text{ m}) \left(\frac{0.3}{2} \text{ m}\right) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 1,080 \text{ kg} = 1.08 \text{ ton}$$

$$P_{\text{muro de tabimax 15}} = (2)(5 \text{ m})(1.75 \text{ m} + 1.5 \text{ m}) \underbrace{(0.15 \text{ m})}_{\text{espesor del muro}} \left(1,800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 8,775 \text{ kg} = 8.775 \text{ ton}$$

$$P_{\text{aplanado}} = \underbrace{(2)(0.02 \text{ m})}_{\substack{2 \text{ cm de} \\ \text{aplanado en} \\ \text{ambos lados} \\ \text{del muro}}} (2)(5 \text{ m})(1.75 \text{ m} + 1.5 \text{ m}) \left(1,500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 1,950 \text{ kg} = 1.95 \text{ ton}$$

$$\sum P = 46.212 \text{ ton}$$

$$m_1 = \frac{\sum P}{g} = \frac{46.212 \text{ ton}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4.711 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \cong 4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$\therefore m_1 = 4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \quad (15.1)$$

Calculando masa m_2 :

$$P_{\text{columnas}} = (3)(1.75 \text{ m} + 2.5 \text{ m})(0.7 \text{ m})(0.7 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 14,994 \text{ kg} = 14.994 \text{ ton}$$

$$P_{\text{vigas}} = (2)(5 \text{ m})(0.35 \text{ m})(0.7 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 5,880 \text{ kg} = 5.88 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa por área tributaria de la CM}} = (4) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2}\right] \left(1,040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right) = 13,000 \text{ kg} = 13 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa por área tributaria de la CV}} = (4) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2}\right] \left(250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right) = 3,125 \text{ kg} = 3.125 \text{ ton}$$

$$P_{\text{castillos}} = (2)(1.75 \text{ m} + 2.5 \text{ m})(0.15 \text{ m})(0.4 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 1,224 \text{ kg} = 1.224 \text{ ton}$$

$$P_{\text{dalas}} = (4)(5 \text{ m})(0.15 \text{ m}) \left(\frac{0.3}{2} \text{ m}\right) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 1,080 \text{ kg} = 1.08 \text{ ton}$$

$$P_{\text{muro de tabimax 15}} = (2)(5 \text{ m})(1.75 \text{ m} + 2.5 \text{ m}) \underbrace{(0.15 \text{ m})}_{\text{espesor del muro}} \left(1,800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 11,475 \text{ kg} = 11.475 \text{ ton}$$

$$P_{\text{aplanado}} = \underbrace{(2)(0.02 \text{ m})}_{\substack{2 \text{ cm de} \\ \text{aplanado en} \\ \text{ambos lados} \\ \text{del muro}}} (2)(5 \text{ m})(1.75 \text{ m} + 2.5 \text{ m}) \left(1,500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 2,550 \text{ kg} = 2.55 \text{ ton}$$

$$\sum P = 53.328 \text{ ton}$$

$$m_2 = \frac{\sum P}{g} = \frac{53.328 \text{ ton}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5.436 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \cong 5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$\therefore m_2 = 5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \quad (15.2)$$

Calculando masa m_3 :

$$P_{\text{columnas}} = (3)(2.5 \text{ m})(0.7 \text{ m})(0.7 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 8,820 \text{ kg} = 8.820 \text{ ton}$$

$$P_{\text{vigas}} = (2)(5 \text{ m})(0.3 \text{ m})(0.6 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 4,320 \text{ kg} = 4.32 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa por área tributaria de la CM}} = (4) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2}\right] \left(1,040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right) = 13,000 \text{ kg} = 13 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa por área tributaria de la CV}} = (4) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2}\right] \left(100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right) = 1,250 \text{ kg} = 1.25 \text{ ton}$$

$$P_{\text{castillos}} = (2)(2.5 \text{ m})(0.15 \text{ m})(0.4 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 720 \text{ kg} = 0.72 \text{ ton}$$

$$P_{\text{daldas}} = (2)(5 \text{ m})(0.15 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \left(\frac{0.3}{2} \text{ m} + 0.3 \text{ m} \right) = 1,620 \text{ kg} = 1.62 \text{ ton}$$

$$P_{\text{muro de tabimax 15}} = (2)(5 \text{ m})(2.5 \text{ m}) \underbrace{(0.15 \text{ m})}_{\text{espesor del muro}} \left(1,800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 6,750 \text{ kg} = 6.75 \text{ ton}$$

$$P_{\text{aplanado}} = \underbrace{(2)(0.02 \text{ m})}_{\substack{2 \text{ cm de} \\ \text{aplanado en} \\ \text{ambos lados} \\ \text{del muro}}} (2)(5 \text{ m})(2.5 \text{ m}) \left(1,500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 1,500 \text{ kg} = 1.5 \text{ ton}$$

$$\sum P = 37.980 \text{ ton}$$

$$m_3 = \frac{\sum P}{g} = \frac{37.980 \text{ ton}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3.872 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \cong 3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$\therefore m_3 = 3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \quad (15.3)$$

Por lo tanto, la matriz de masa concentrada es:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \quad (15.4)$$

15.4 Análisis Dinámico Modal Espectral Bajo Efectos de Deformación por Flexión

El primer análisis que se hará será el que considere únicamente efectos de deformación por flexión, posteriormente flexión y cortante, flexión y deformación Axia, y se finalizará con el análisis dinámico considerando todas las deformaciones anteriormente mencionadas.

Será interesante notar cómo el establecer diferentes consideraciones de deformación en la estructura no proveerá cambios significantes en los resultados

15.4.1 Determinación de la matriz de rigidez para análisis dinámico [K]

Partiendo de la siguiente discretización de elementos:

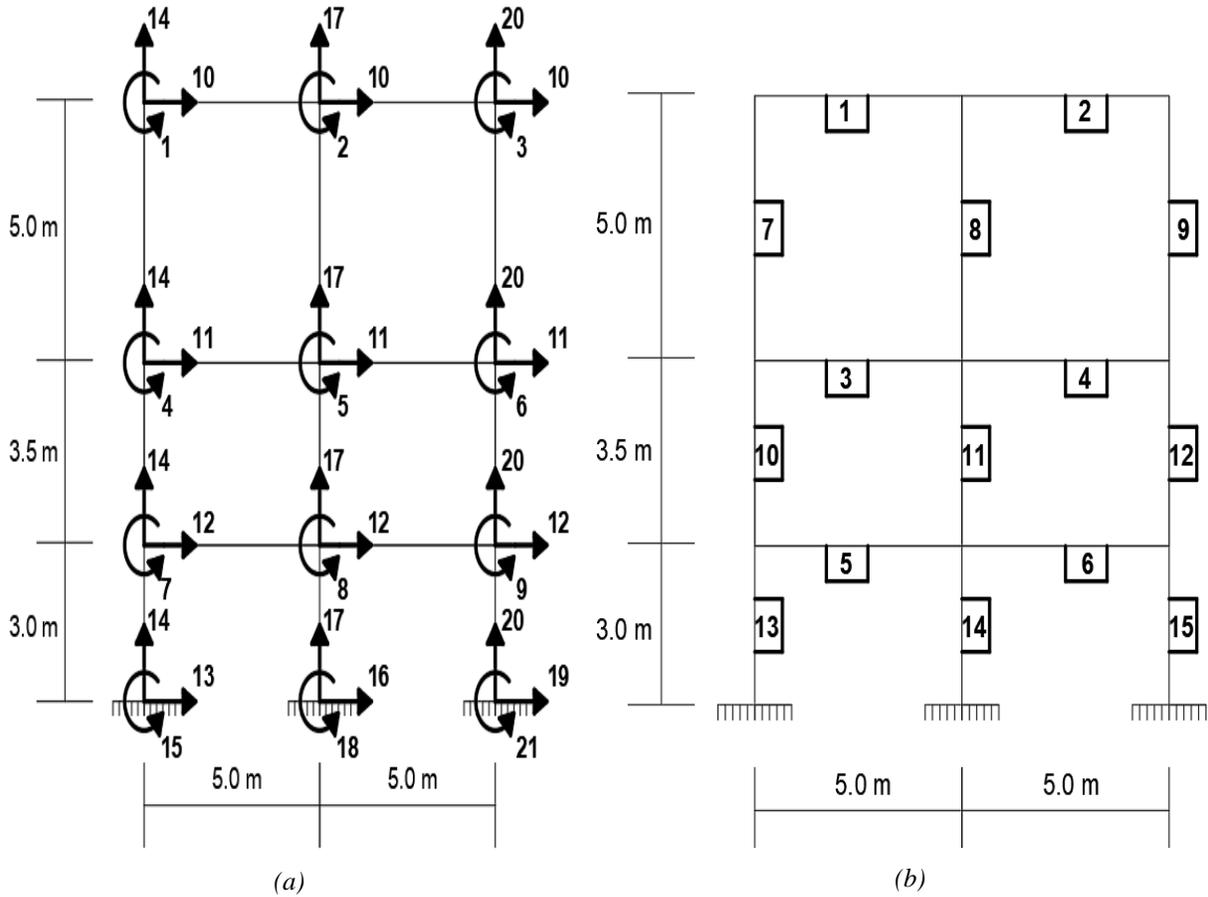


Figura XV.7. (a) Numeración de los grados de libertad (b) numeración de los elementos discretizados.

Se procede a calcular las matrices de rigidez por elemento utilizando las ecuaciones (reducción de las ecuaciones 12.59 y 12.60 al hacer $c = \frac{EA}{L} = 0$):

$$[k_i] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 & -6L & 6L \\ 2L^2 & 4L^2 & -6L & 6L \\ -6L & -6L & 12 & -12 \\ 6L & 6L & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de una viga considerando flexión

$$[k_i] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 & 6L & -6L \\ 2L^2 & 4L^2 & 6L & -6L \\ 6L & 6L & 12 & -12 \\ -6L & -6L & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de una columna considerando flexión

Para determinar todas las matrices de rigidez, L está dada en metros, y como el modulo de elasticidad es constante para toda la estructura (140,000√280 ton / m²) se denota únicamente como E.

Para el elemento 1 se tiene (se omiten unidades):

$$[k_1] = \frac{E(0.5) \left(\frac{(0.3)(0.6)^3}{12} \right)}{(5)^3} \begin{bmatrix} 4(5)^2 & 2(5)^2 & -6(5) & 6(5) \\ 2(5)^2 & 4(5)^2 & -6(5) & 6(5) \\ -6(5) & -6(5) & 12 & -12 \\ 6(5) & 6(5) & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{17} \end{matrix}$$

$$\therefore = \frac{27E}{1,250,000} \begin{bmatrix} 100 & 50 & -30 & 30 \\ 50 & 100 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{17} \end{matrix}$$

$$\therefore [k_1] = \frac{27 E}{625,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{17} \end{matrix} \quad (15.5)$$

Como la sección 1 y 2 tienen la misma longitud y sección transversal, la matriz de rigidez del elemento 2 será:

$$\therefore [k_2] = \frac{27 E}{625,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{17} \\ \mathbf{20} \end{matrix} \quad (15.6)$$

Para el elemento 3 se tiene (se omiten unidades):

$$[k_3] = \frac{E(0.5) \left(\frac{(0.35)(0.7)^3}{12} \right)}{(5)^3} \begin{bmatrix} 4(5)^2 & 2(5)^2 & -6(5) & 6(5) \\ 2(5)^2 & 4(5)^2 & -6(5) & 6(5) \\ -6(5) & -6(5) & 12 & -12 \\ 6(5) & 6(5) & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{17} \end{matrix}$$

$$\therefore = \frac{2401 E}{60,000,000} \begin{bmatrix} 100 & 50 & -30 & 30 \\ 50 & 100 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{17} \end{matrix}$$

$$\therefore [k_3] = \frac{2401 E}{30,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{17} \end{matrix} \quad (15.7)$$

Los elementos 4, 5 y 6 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$[k_4] = \frac{2401 E}{30,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{17} \\ \mathbf{20} \end{matrix} \quad (15.8)$$

$$[k_5] = \frac{2401 E}{30,000,000} \begin{matrix} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{14} & \mathbf{17} \\ \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} & \mathbf{7} \\ & \mathbf{8} \\ & \mathbf{14} \\ & \mathbf{17} \end{matrix} \quad (15.9)$$

$$[k_6] = \frac{2401 E}{30,000,000} \begin{matrix} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{17} & \mathbf{20} \\ \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} & \mathbf{8} \\ & \mathbf{9} \\ & \mathbf{17} \\ & \mathbf{20} \end{matrix} \quad (15.10)$$

Para el elemento 7 se tiene (se omiten unidades):

$$[k_7] = \frac{E(0.7) \left(\frac{(0.7)(0.7)^3}{12} \right)}{(5)^3} \begin{matrix} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{11} & \mathbf{10} \\ \begin{bmatrix} 4(5)^2 & 2(5)^2 & 6(5) & -6(5) \\ 2(5)^2 & 4(5)^2 & 6(5) & -6(5) \\ 6(5) & 6(5) & 12 & -12 \\ -6(5) & -6(5) & -12 & 12 \end{bmatrix} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{1} \\ & \mathbf{11} \\ & \mathbf{10} \end{matrix}$$

$$\therefore = \frac{16,807 E}{150,000,000} \begin{matrix} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{11} & \mathbf{10} \\ \begin{bmatrix} 100 & 50 & 30 & -30 \\ 50 & 100 & 30 & -30 \\ 30 & 30 & 12 & -12 \\ -30 & -30 & -12 & 12 \end{bmatrix} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{5} \\ & \mathbf{11} \\ & \mathbf{10} \end{matrix}$$

$$\therefore [k_7] = \frac{16,807 E}{75,000,000} \begin{matrix} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{11} & \mathbf{10} \\ \begin{bmatrix} 50 & 25 & 15 & -15 \\ 25 & 50 & 15 & -15 \\ 15 & 15 & 6 & -6 \\ -15 & -15 & -6 & 6 \end{bmatrix} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{1} \\ & \mathbf{11} \\ & \mathbf{10} \end{matrix} \quad (15.11)$$

Los elementos 8 y 9 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$[k_8] = \frac{16,807 E}{75,000,000} \begin{matrix} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{11} & \mathbf{10} \\ \begin{bmatrix} 50 & 25 & 15 & -15 \\ 25 & 50 & 15 & -15 \\ 15 & 15 & 6 & -6 \\ -15 & -15 & -6 & 6 \end{bmatrix} & \mathbf{5} \\ & \mathbf{2} \\ & \mathbf{11} \\ & \mathbf{10} \end{matrix} \quad (15.12)$$

$$[k_9] = \frac{16,807 E}{75,000,000} \begin{matrix} & \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{11} & \mathbf{10} \\ \begin{bmatrix} 50 & 25 & 15 & -15 \\ 25 & 50 & 15 & -15 \\ 15 & 15 & 6 & -6 \\ -15 & -15 & -6 & 6 \end{bmatrix} & \mathbf{6} \\ & \mathbf{3} \\ & \mathbf{11} \\ & \mathbf{10} \end{matrix} \quad (15.13)$$

Para el elemento 10 se tiene (se omiten unidades):

$$[k_{10}] = \frac{E(0.7) \left(\frac{(0.7)(0.7)^3}{12} \right)}{(3.5)^3} \begin{matrix} & \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{12} & \mathbf{11} \\ \begin{bmatrix} 4(3.5)^2 & 2(3.5)^2 & 6(3.5) & -6(3.5) \\ 2(3.5)^2 & 4(3.5)^2 & 6(3.5) & -6(3.5) \\ 6(3.5) & 6(3.5) & 12 & -12 \\ -6(3.5) & -6(3.5) & -12 & 12 \end{bmatrix} & \mathbf{7} \\ & \mathbf{5} \\ & \mathbf{12} \\ & \mathbf{11} \end{matrix}$$

$$\therefore = \frac{49 E}{150,000} \begin{matrix} & \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{12} & \mathbf{11} \\ \begin{bmatrix} 49 & 24.5 & 30 & -21 \\ 24.5 & 49 & 21 & -21 \\ 21 & 21 & 12 & -12 \\ -21 & -21 & -12 & 12 \end{bmatrix} & \mathbf{4} \\ & \mathbf{4} \\ & \mathbf{12} \\ & \mathbf{11} \end{matrix}$$

$$[k_{10}] = \frac{49 E}{150,000} \begin{matrix} & \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{12} & \mathbf{11} \\ \begin{bmatrix} 49 & 24.5 & 30 & -21 \\ 24.5 & 49 & 21 & -21 \\ 21 & 21 & 12 & -12 \\ -21 & -21 & -12 & 12 \end{bmatrix} & \mathbf{7} \\ & \mathbf{4} \\ & \mathbf{12} \\ & \mathbf{11} \end{matrix} \quad (15.14)$$

Los elementos 11 y 12 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$\therefore [k_{11}] = \frac{49 E}{150,000} \begin{matrix} & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{12} & \mathbf{11} \\ \begin{bmatrix} 49 & 24.5 & 30 & -21 \\ 24.5 & 49 & 21 & -21 \\ 21 & 21 & 12 & -12 \\ -21 & -21 & -12 & 12 \end{bmatrix} & \mathbf{8} \\ & \mathbf{5} \\ & \mathbf{12} \\ & \mathbf{11} \end{matrix} \quad (15.15)$$

$$\therefore [k_{12}] = \frac{49 E}{150,000} \begin{matrix} & \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{12} & \mathbf{11} \\ \begin{bmatrix} 49 & 24.5 & 30 & -21 \\ 24.5 & 49 & 21 & -21 \\ 21 & 21 & 12 & -12 \\ -21 & -21 & -12 & 12 \end{bmatrix} & \mathbf{9} \\ & \mathbf{6} \\ & \mathbf{12} \\ & \mathbf{11} \end{matrix} \quad (15.16)$$

Para el elemento 13 se tiene (se omiten unidades):

$$[k_{13}] = \frac{E(0.7) \left(\frac{(0.7)(0.7)^3}{12} \right)}{(3)^3} \begin{matrix} & \mathbf{15} & \mathbf{7} & \mathbf{13} & \mathbf{12} \\ \begin{bmatrix} 4(3)^2 & 2(3)^2 & 6(3) & -6(3) \\ 2(3)^2 & 4(3)^2 & 6(3) & -6(3) \\ 6(3) & 6(3) & 12 & -12 \\ -6(3) & -6(3) & -12 & 12 \end{bmatrix} & \mathbf{15} \\ & \mathbf{7} \\ & \mathbf{13} \\ & \mathbf{12} \end{matrix}$$

$$\therefore = \frac{16,807 E}{32,400,000} \begin{matrix} & \mathbf{15} & \mathbf{7} & \mathbf{13} & \mathbf{12} \\ \begin{bmatrix} 36 & 18 & 18 & -18 \\ 18 & 36 & 18 & -18 \\ 18 & 18 & 12 & -12 \\ -18 & -18 & -12 & 12 \end{bmatrix} & \mathbf{15} \\ & \mathbf{7} \\ & \mathbf{13} \\ & \mathbf{12} \end{matrix}$$

Simplificando:

$$\therefore [k_{13}] = \frac{16,807 E}{5,400,000} \begin{matrix} & \mathbf{15} & \mathbf{7} & \mathbf{13} & \mathbf{12} \\ \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{15} \\ & \mathbf{7} \\ & \mathbf{13} \\ & \mathbf{12} \end{matrix} \quad (15.17)$$

Los elementos 14 y 15 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{18} & \mathbf{8} & \mathbf{16} & \mathbf{12} \\
 [\mathbf{k}_{14}] = \frac{16,807 E}{5,400,000} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{18} \\
 & & & & \mathbf{8} \\
 & & & & \mathbf{16} \\
 & & & & \mathbf{12}
 \end{array} \quad (15.18)$$

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{21} & \mathbf{9} & \mathbf{19} & \mathbf{12} \\
 [\mathbf{k}_{15}] = \frac{16,807 E}{5,400,000} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} & \mathbf{21} \\
 & & & & \mathbf{9} \\
 & & & & \mathbf{19} \\
 & & & & \mathbf{12}
 \end{array} \quad (15.19)$$

La matriz de rigidez $[\mathbf{k}_{ij}]$, donde $E = 140,000\sqrt{280}$ ton / m² en coordenadas globales se ilustra en la siguiente página.

$$[k_{ij}] = \begin{array}{cccccccccccc|cccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} & & \\
 \left[\begin{array}{l}
 31,308.711 & 2,530.060 & 0 & 13,124.295 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -7,874.577 & 7,874.577 & 0 & \mathbf{1} \\
 2,530.060 & 36,368.830 & 2,530.060 & 0 & 13,124.295 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -7,874.577 & 7,874.577 & 0 & \mathbf{2} \\
 0 & 2,530.060 & 31,308.711 & 0 & 0 & 13,124.295 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -7,874.577 & 7,874.577 & 0 & \mathbf{3} \\
 13,124.295 & 0 & 0 & 73,121.074 & 4,687.248 & 0 & 18,748.993 & 0 & 0 & 0 & | & -7,874.577 & -8,195.989 & 16,070.566 & \mathbf{4} \\
 0 & 13,124.295 & 0 & 4,687.248 & 82,495.571 & 4,687.248 & 0 & 18,748.993 & 0 & 0 & | & -7,874.577 & -8,195.989 & 16,070.566 & \mathbf{5} \\
 0 & 0 & 13,124.295 & 0 & 4,687.248 & 73,121.074 & 0 & 0 & 18,748.993 & 0 & | & -7,874.577 & -8,195.989 & 16,070.566 & \mathbf{6} \\
 0 & 0 & 0 & 18,748.993 & 0 & 0 & 90,620.135 & 4,687.248 & 0 & 0 & | & 0 & -16,070.566 & -5,803.260 & \mathbf{7} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 18,748.993 & 0 & 4,687.248 & 99,994.632 & 4,687.248 & 0 & | & 0 & -16,070.566 & -5,803.260 & \mathbf{8} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,748.993 & 0 & 4,687.248 & 90,620.135 & 0 & | & 0 & -16,070.566 & -5,803.260 & \mathbf{9} \\
 \hline
 -7,874.577 & -7,874.577 & -7,874.577 & -7,874.577 & -7,874.577 & -7,874.577 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 9,449.493 & -9,449.493 & 0 & \mathbf{10} \\
 7,874.577 & 7,874.577 & 7,874.577 & -8,195.989 & -8,195.989 & -8,195.989 & -16,070.566 & -16,070.566 & -16,070.566 & 0 & | & -9,449.493 & 36,999.034 & -27,549.541 & \mathbf{11} \\
 0 & 0 & 0 & 16,070.566 & 16,070.566 & 16,070.566 & -5,803.260 & -5,803.260 & -5,803.260 & 0 & | & 0 & -27,549.541 & 71,297.193 & \mathbf{12}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Las unidades manejadas para los coeficientes son ton y m

Aplicando condensación estática para reducir la matriz de rigidez $[k_{ij}]$ a los grados de libertad asociados a los desplazamiento lineales 10, 11 y 12 se tiene:

$$[k_{ij}^*] = \begin{matrix} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{10} & 3,263.507 & -5,910.379 & 3,486.313 \\ \mathbf{11} & -5,910.379 & 21,384.213 & -24,699.883 \\ \mathbf{12} & 3,486.313 & -24,699.883 & 58,211.848 \end{matrix} \quad (15.20)$$

De la ecuación 15.20, se deduce que las rigideces asociadas a las masas concentradas de la estructura son:

$$[k_{ij}^*] = \begin{bmatrix} k_3 & & [k_v] \\ & k_2 + k_3 & \\ [k_v] & & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,263.507 & -5,910.379 & 3,486.313 \\ -5,910.379 & 21,384.213 & -24,699.883 \\ 3,486.313 & -24,699.883 & 58,211.848 \end{bmatrix}$$

De los elementos de la diagonal principal se determinan las rigideces de los entresijos:

$$k_3 = 3,263.507 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (15.21)$$

$$k_2 + k_3 = 21,384.213 \quad \therefore \quad k_2 = 18,120.706 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (15.22)$$

$$k_1 + k_2 = 58,211.848 \quad \therefore \quad k_1 = 40,091.142 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (15.23)$$

Conocidas las rigideces de los entresijos k_1 , k_2 y k_3 se puede ensamblar la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore = \begin{bmatrix} 40,091.142 + 18,120.706 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & 18,120.706 + 3,263.507 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & 3,263.507 \end{bmatrix} \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

$$\therefore [K] = \begin{bmatrix} 58,211.848 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & 21,384.213 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & 3,263.507 \end{bmatrix} \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (15.24)$$

Conocidas las matrices de masa concentrada y de rigidez para análisis dinámico, el modelo masa – resorte es el siguiente:

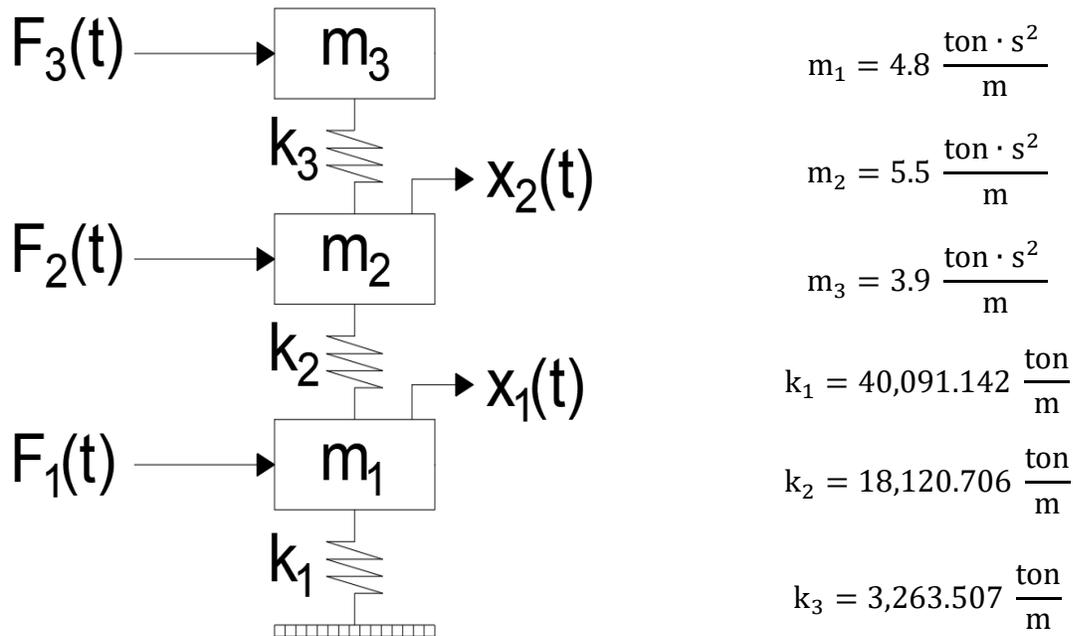


Figura XV.8. Modelo masa – resorte del marco externo de la estructura en estudio.

15.4.2 Cálculo de la frecuencia y periodo a través de eigenvalores

El planteamiento de eigenvalores se realiza a partir de resolver $[[K] - \lambda[M]] = 0$ (donde $\lambda = \omega^2$) para obtener el polinomio característico $p(\lambda)$ con el cual se determinarán las frecuencias naturales de la estructura ω , y posteriormente, los modos de vibrar de la misma.

Para los marcos perimetrales, conocida la matriz de masa concentrada $[M]$ y la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$ se tiene:

$$\left[\begin{bmatrix} 58,211.848 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & 21,384.213 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & 3,263.507 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (15.25)$$

A fin de evitar errores muy grandes de truncamiento, se hace uso del software derive 6® para calcular los valores de λ . La siguiente imagen muestra las operaciones hechas:

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ANÁLISIS DINÁMICO
[K]

$$\begin{bmatrix} 58211.848 & -18120.706 & 0 \\ -18120.706 & 21384.213 & -3263.507 \\ 0 & -3263.507 & 3263.507 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE MASA CONCENTRADA
[M]

$$\begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix}$$

CÁLCULO DE $|[K]-\lambda[M]|$ CON $\lambda=\omega^2$

$$\text{DET} \left(\begin{bmatrix} 58211.848 & -18120.706 & 0 \\ -18120.706 & 21384.213 & -3263.507 \\ 0 & -3263.507 & 3263.507 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right) = 0$$

POLINOMIO CARACTERÍSTICO $p(\lambda)=0$

$$\lambda^3 \cdot (3.79143765 \cdot 10^{12} \cdot \lambda^2 - 6.389445884 \cdot 10^{16} \cdot \lambda + 1.805459308 \cdot 10^{20}) = 8.730587607 \cdot 10^{22}$$

RAÍCES DEL POLINOMIO

$$\lambda = 610.8185216 \vee \lambda = 2805.88842 \vee \lambda = 1.343559678 \cdot 10^4$$

Figura XV.9. Cálculo de los valores de λ utilizando derive 6®.

Teniendo los valores de λ se puede calcular las frecuencias ω :

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = 610.8185216 \quad \therefore \quad \omega_1 \cong 24.715 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (15.26)$$

$$\omega_2^2 = \lambda_2 = 2,805.888420 \quad \therefore \quad \omega_2 \cong 52.971 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (15.27)$$

$$\omega_3^2 = \lambda_3 = 1.343559678 \cdot 10^4 \quad \therefore \quad \omega_3 \cong 115.912 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (15.28)$$

Y teniendo las frecuencias ω es posible determinar los periodos de la estructura:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{24.715 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_1 \cong 0.254 \text{ s} \quad (15.29)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{52.971 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_2 \cong 0.119 \text{ s} \quad (15.30)$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{115.912 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_3 \cong 0.054 \text{ s} \quad (15.31)$$

15.4.3 Cálculo de los modos de vibrar a través de eigenvectores

Para calcular los modos de vibrar se sustituyen las frecuencias ω_1 , ω_2 y ω_3 en $[[K] - \omega_j^2[M]]\{\phi_{nj}\}$, donde los elementos $\{\phi_{1j}\}$ serán igual a 1 para resolver un sistema no homogéneo y obtener una solución que no sea la trivial, es decir, $\phi_{1j} = \phi_{2j} = \dots = \phi_{nj} = 0$.

Calculando el modo de vibrar número 1 asociado a ω_1 :

$$\left[\begin{array}{ccc} 58,211.848 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & 21,384.213 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & 3,263.507 \end{array} \right] - 610.8185216 \left[\begin{array}{ccc} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15.32)$$

Desarrollando con $\phi_{11} = 1$ se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc} 55,279.919 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & 18,024.711 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & 881.315 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15.33)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones cualesquiera entre sí, del sistema de ecuaciones lineales anterior, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.051 \\ 11.297 \end{Bmatrix} \quad (15.34)$$

Al normalizarlo se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(3.051)^2 + (3.9)(11.297)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.051 \\ 11.297 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.042 \\ 0.13 \\ 0.48 \end{Bmatrix} \quad (15.35)$$

Calculando el modo de vibrar número 2 asociado a ω_2 :

$$\left[\begin{array}{ccc} 58,211.848 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & 21,384.213 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & 3,263.507 \end{array} \right] - 2,805.888420 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15.36)$$

Desarrollando con $\Phi_{12} = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 44,743.584 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & 5,951.827 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & -7,679.458 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15.37)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones entre sí se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.469 \\ -1.049 \end{Bmatrix} \quad (15.38)$$

Donde al normalizarlo se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(2.469)^2 + (3.9)(-1.049)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.469 \\ -1.049 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.153 \\ 0.378 \\ -0.161 \end{Bmatrix} \quad (15.39)$$

Calculando el modo de vibrar número 3 asociado a ω_3 :

$$\left[\begin{array}{ccc} 58,211.848 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & 21,384.213 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & 3,263.507 \end{array} \right] - 1.343559678 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15.40)$$

Desarrollando con $\Phi_{13} = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} -6,279.017 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & -52,511.569 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & -49,135.320 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (15.41)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones entre sí se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.347 \\ 0.023 \end{Bmatrix} \quad (15.42)$$

Donde al normalizarlo se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(-0.347)^2 + (3.9)(0.023)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.347 \\ 0.023 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.428 \\ -0.148 \\ 0.010 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz modal del sistema es:

$$[\phi_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.042 & 0.153 & 0.428 \\ 0.13 & 0.378 & -0.148 \\ 0.48 & -0.161 & 0.010 \end{bmatrix}$$

Comprobando las relaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} [\phi_{ij}]^T [M] [\phi_{ij}] &= [I] \\ \vdots &= \begin{bmatrix} 0.042 & 0.153 & 0.428 \\ 0.13 & 0.378 & -0.148 \\ 0.48 & -0.161 & 0.010 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.042 & 0.153 & 0.428 \\ 0.13 & 0.378 & -0.148 \\ 0.48 & -0.161 & 0.010 \end{bmatrix} \\ \vdots &\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comprobando que los modos de vibrar cumplen con la ortogonalidad, se verifica que el cálculo de estos es correcto.

La siguientes figura representan los modos de vibrar de la estructura en estudio:

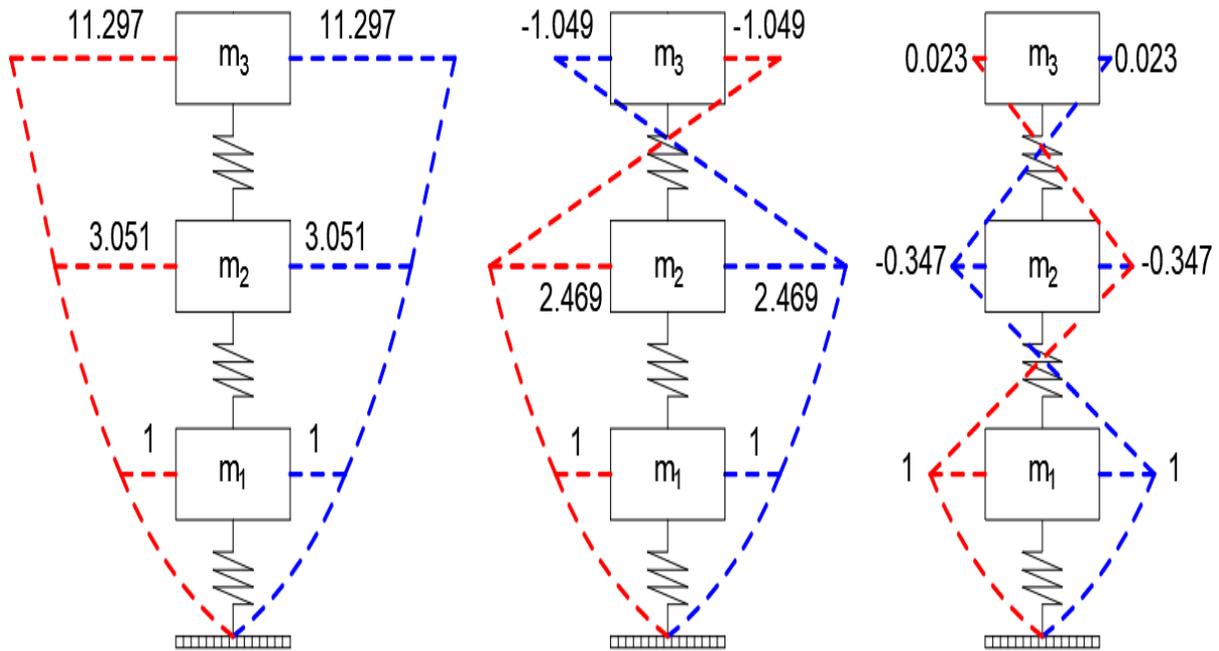


Figura XV.10. Representación gráfica de los modos de vibrar de los marcos externos de la estructura.

15.4.4 Factor de participación de masas

De acuerdo con el RCCDMX, dentro de las NTC – Sismo, se estipula que al realizar un análisis modal dentro del rango elástico debe incluirse el efecto de los modos naturales de vibrar, ordenados de mayor a menor conforme a su relación con sus frecuencias naturales, asegurando por lo menos un 90% de la participación de masas (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 66).

El valor de la participación de masas se realiza con:

$$T_j^* = \frac{\{\phi_{nj}\}^T [M] \{1\}}{\{\phi_{nj}\}^T [M] \{\phi_{nj}\}} = \frac{\sum m_n \phi_{nj}}{\sum m_n \phi_{nj}^2} \quad (15.43)^{15.2}$$

Para el entrepiso 1 se tiene:

$$T_1^* = \frac{\sum m_n \phi_{n1}}{\sum m_n \phi_{n1}^2}$$

^{15.2} {1} es un vector columna de igual número de renglones que de columnas del vector renglón $\{\phi_{nj}\}^T$. Así mismo

$$\begin{aligned}
 \therefore &= \frac{m_1\phi_{11} + m_2\phi_{21} + m_3\phi_{31}}{m_1\phi_{11}^2 + m_2\phi_{21}^2 + m_3\phi_{31}^2} \\
 \therefore &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(3.051) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(11.297)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(3.051)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(11.297)^2} \\
 \therefore &= \frac{65.639 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{553.724 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \\
 \therefore & \quad \quad \quad \therefore \quad T_1^* = 0.119 \quad \quad \quad (15.44)
 \end{aligned}$$

Para el entrepiso 2 se tiene:

$$\begin{aligned}
 T_2^* &= \frac{\sum m_n \phi_{n2}}{\sum m_n \phi_{n2}^2} \\
 \therefore &= \frac{m_1\phi_{12} + m_2\phi_{22} + m_3\phi_{32}}{m_1\phi_{12}^2 + m_2\phi_{22}^2 + m_3\phi_{32}^2} \\
 \therefore &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.469) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-1.049)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.469)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-1.049)^2} \\
 \therefore &= \frac{14.288 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{42.619 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \\
 \therefore & \quad \quad \quad \therefore \quad T_2^* = 0.335 \quad \quad \quad (15.45)
 \end{aligned}$$

Para el entrepiso 3 se tiene:

$$\begin{aligned}
 T_3^* &= \frac{\sum m_n \phi_{n3}}{\sum m_n \phi_{n3}^2} \\
 \therefore &= \frac{m_1\phi_{13} + m_2\phi_{23} + m_3\phi_{33}}{m_1\phi_{13}^2 + m_2\phi_{23}^2 + m_3\phi_{33}^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-0.347) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(0.023)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-0.347)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(0.023)^2} \\ \therefore &= \frac{2.981 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{5.464 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \\ \therefore & T_3^* = 0.546 \end{aligned} \quad (15.46)$$

Para verificar que la participación de masas sea de por lo menos 90% debe cumplirse que $\sum T_j^* \geq 0.9$. Al efectuar $T_1^* + T_2^* + T_3^*$ se obtiene exactamente 1.0 lo cual implica que participa el 100% de la masa total de la estructura en el análisis modal.

15.4.5 Aceleraciones por considerar con base en los periodos de la estructura

Recordando que los periodos de la estructura asociados a los modos de vibrar son:

$$T_1 \cong 0.254 \text{ s}$$

$$T_2 \cong 0.119 \text{ s}$$

$$T_3 \cong 0.054 \text{ s}$$

El valor de la aceleración asociada se calcula con:

$$A_{sn} = a_n g \quad (15.47)$$

Donde:

$[A_{sn}]$ = valor de la aceleración asociada a los modos de vibrar.

$[a_n]$ = coeficiente de reducción de la gravedad obtenido del espectro de diseño de sitio.

$[g]$ = aceleración de la gravedad igual a $9.81 \text{ m} / \text{s}^2$.

Para calcular a_1 asociado a un periodo $T_1 \cong 0.254$ seg, se tiene un valor $a = 0.173$ para $T = 0.3$ seg y un valor $a = 0.152$ para $T = 0.2$ seg. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_1 \cong 0.254$ s le corresponde un $a_1 = 0.158$.

$$\therefore A_{s1} = a_1 g = (0.163) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.599 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (15.48)$$

Para calcular a_2 asociado a un periodo $T_2 \cong 0.119$ seg, se tiene un valor $a = 0.127$ para $T = 0.1$ seg y un valor $a = 0.152$ para $T = 0.2$ seg. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_2 \cong 0.119$ s le corresponde un $a_2 = 0.132$.

$$\therefore A_{s2} = a_2 g = (0.132) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.295 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (15.49)$$

Para calcular a_3 asociado a un periodo $T_3 \cong 0.054$ seg, se tiene un valor $a = 0.09$ para $T = 0$ s y un valor $a = 0.127$ para $T = 0.1$ s. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_3 \cong 0.054$ s le corresponde un $a_3 = 0.110$.

$$\therefore A_{s3} = a_3 g = (0.110) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.079 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (15.50)$$

15.4.6 Cálculo de los desplazamientos relativos y finales

Calculando el factor de sobre-resistencia con base en la ecuación:

$$R = k_1 R_0 + k_2$$

Con base en las NTC – Sismo (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 60) se selecciona $R_0 = 1.75$ por ser una estructura con $Q = 2$ y $k_1 = 0.8$ por ser una estructura que tiene menos de tres crujeas resistentes a sismo en la dirección de análisis.

Para calcular k_2 se hará con la fórmula:

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_a}} \right) \quad (15.51)^{15.3}$$

^{15.3} Ecuación 3.5.2 del RCCDMX.

Los periodos naturales de la estructura son menores que el valor del inicio de la meseta del espectro de diseño por lo que k_2 se calcula conforme al reglamento:

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{0.254 \text{ s}}{0.35 \text{ s}}} \right) = 0.074 \quad (15.52)$$

Calculando el factor de sobre – resistencia conocidos k_1 , k_2 y R_0 :

$$R = (0.8)(1.75) + 0.074 = 1.474 \quad (15.53)$$

Como este es un ejemplo netamente académico se opta por dejar el factor de sobrerresistencia en $R = 1.4$ a fin de facilitar los calculo por no haber más que sólo 5.02% de diferencia.

Los desplazamientos finales se determinan mediante:

$$\{d_{nj}\} = \frac{Q R T_j^* A_{sj}}{\omega_j^2} \{\Phi_{nj}\} \quad (15.54)$$

Calculo para el primer modo de vibrar ($j = 1$):

$$\begin{aligned} \{d_{n1}\} &= \frac{Q R T_1^* A_{s1}}{\omega_1^2} \{\Phi_{n1}\} \\ \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{Bmatrix} &= \frac{Q R T_1^* A_{s1}}{\omega_1^2} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} \\ \therefore &= \frac{(2) (1.4) (0.119) (1.599)}{610.8185216} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.051 \\ 11.297 \end{Bmatrix} \\ \therefore &= (0.000872251 \text{ m}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.051 \\ 11.297 \end{Bmatrix} \\ \therefore \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.000872251 \\ 0.002661236 \\ 0.009853815 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.0872251 \\ 0.2661236 \\ 0.9853815 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 0.872251 \\ 2.661236 \\ 9.853815 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (15.55) \end{aligned}$$

Calculo para el segundo modo de vibrar ($j = 2$):

$$\begin{aligned}
 \{d_{n2}\} &= \frac{Q R T_2^* A_{s2}}{\omega_2^2} \{\phi_{n2}\} \\
 \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{Bmatrix} &= \frac{Q R T_2^* A_{s2}}{\omega_2^2} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{(2) (1.4) (0.335) (1.295)}{2,805.888420} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.469 \\ -1.049 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= (0.000432915 \text{ m}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.469 \\ -1.049 \end{Bmatrix} \\
 \therefore \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.000432915 \\ 0.001068866 \\ -0.000454127 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.0432915 \\ 0.1068866 \\ -0.0454127 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 0.432915 \\ 1.068866 \\ -0.454127 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (15.56)
 \end{aligned}$$

Calculo para el tercer modo de vibrar ($j = 3$):

$$\begin{aligned}
 \{d_3\} &= \frac{Q R T_3^* A_{s3}}{\omega_3^2} \{\phi_{n3}\} \\
 \begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{Bmatrix} &= \frac{Q R T_3^* A_{s3}}{\omega_3^2} \begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{(2) (1.4) (0.546) (1.079)}{1.343559678 \cdot 10^4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.347 \\ 0.023 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= (0.000122776 \text{ m}) \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.347 \\ 0.023 \end{Bmatrix} \\
 \therefore \begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.000122776 \\ -0.000042603 \\ 0.000002824 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.0122776 \\ -0.0042603 \\ 0.0002824 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 0.122776 \\ -0.042603 \\ 0.002824 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (15.57)
 \end{aligned}$$

Como cada periodo de la estructura varía entre sí por lo menos un 10 %, el RCCDMX permite utilizar el método del SRSS para calcular el desplazamiento de cada entrepiso mediante:

$$d_{F-j} = \sqrt{\sum d_{jn}^2}$$

Donde:

$[d_{F-j}]$ = desplazamiento final de cada entrepiso.

$[\sqrt{\sum d_{jn}^2}]$ = suma de los cuadrados de cada renglón asociado al j-ésimo entrepiso de cada uno de los vectores $\{d_{nj}\}$

Para el entrepiso 1:

$$\begin{aligned}
 d_{F-1} &= \sqrt{\sum d_{1n}^2} \\
 \therefore &= \sqrt{d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{13}^2} \\
 \therefore &= \sqrt{(0.872251 \text{ mm})^2 + (0.432915 \text{ mm})^2 + (0.122776 \text{ mm})^2} \\
 \therefore & \quad d_{F-1} \cong 0.981 \text{ mm} \qquad (15.58)
 \end{aligned}$$

Para el entrepiso 2 (en mm):

$$\begin{aligned}
 d_{F-2} &= \sqrt{\sum d_{2n}^2} \\
 \therefore &= \sqrt{d_{21}^2 + d_{22}^2 + d_{23}^2} \\
 \therefore &= \sqrt{(2.661236 \text{ mm})^2 + (1.068866 \text{ mm})^2 + (-0.042603 \text{ mm})^2} \\
 \therefore & \quad d_{F-2} \cong 2.868 \text{ mm} \qquad (15.59)
 \end{aligned}$$

Para el entrepiso 3 (en mm):

$$\begin{aligned}
 d_{F-3} &= \sqrt{\sum d_{3n}^2} \\
 \therefore &= \sqrt{d_{31}^2 + d_{32}^2 + d_{33}^2} \\
 \therefore &= \sqrt{(9.853815 \text{ mm})^2 + (-0.454127 \text{ mm})^2 + (0.002824 \text{ mm})^2} \\
 \therefore & \quad d_{F-3} \cong 9.864 \text{ mm} \qquad (15.60)
 \end{aligned}$$

Los desplazamientos relativos se calculan al restan al desplazamiento de la masa superior, el de la masa inferior. Los desplazamiento relativos se ejemplifican por medio de $\{d_{nj}^*\}$.

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 1:

$$\begin{Bmatrix} d_{11}^* \\ d_{21}^* \\ d_{31}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000872251 \\ 0.002661236 - 0.000872251 \\ 0.009853815 - 0.002661236 \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} 0.000872251 \\ 0.001788985 \\ 0.007192579 \end{Bmatrix} m$$

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 2:

$$\begin{Bmatrix} d_{12}^* \\ d_{22}^* \\ d_{32}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000432915 \\ 0.001068866 - 0.000432915 \\ -0.000454127 - 0.001068866 \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} 0.000432915 \\ 0.00063591 \\ -0.001522993 \end{Bmatrix} m$$

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 3:

$$\begin{Bmatrix} d_{13}^* \\ d_{23}^* \\ d_{33}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000122776 \\ -0.000042603 - 0.000122776 \\ 0.000002824 - (-0.000042603) \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} 0.000122776 \\ -0.000165379 \\ 0.000045427 \end{Bmatrix} m$$

15.4.7 Revisión de los desplazamientos laterales (distorsión de entrepiso)

De acuerdo con el RCCDMX en sus NTC – Sismo, las distorsiones de entrepiso son la diferencia entre los desplazamientos laterales de los pisos consecutivos que lo delimitan entre la diferencia de elevaciones correspondiente (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 51).

La distorsión para el tercer entrepiso se calcula con:

$$\gamma_3 = \frac{d_{F-3}}{h_3} = \frac{9.864 \text{ mm}}{5,000 \text{ mm}} = 0.002 \quad (15.61)$$

La distorsión para el segundo entrepiso se calcula con:

$$\gamma_2 = \frac{d_{F-3} - d_{F-2}}{h_2} = \frac{9.864 \text{ mm} - 2.868 \text{ mm}}{3,500 \text{ mm}} = 0.002 \quad (15.62)$$

La distorsión para el primer entrepiso se calcula con:

$$\gamma_1 = \frac{d_{F-2} - d_{F-1}}{h_1} = \frac{2.868 \text{ mm} - 0.981 \text{ mm}}{3,000 \text{ mm}} = 0.001 \quad (15.63)$$

Los valores de la distorsión máxima ($\gamma_{\text{máx}}$) para estructuras de concreto vienen dados en el RCCDMX en su apartado 4.2 *Valores de Q y γ_{max}* de las NTC – Sismo (Gobierno de la CDMX, 2017, págs. 61 - 63). En ese apartado se estipula que la distorsión máxima con estructuración a base de marcos, para un $Q = 2$ es $\gamma_{\text{máx}} = 0.015$.

Como las distorsiones γ_1 , γ_2 y γ_3 son menores que $\gamma_{\text{máx}}$ se acepta la revisión de la estructura por distorsión de entrepisos.

15.4.8 Cálculo de las fuerzas cortantes (cortantes basales)

Las fuerzas cortantes se determinan por medio de la ecuación:

$$\{V_{nj}\} = k_j \{d_{nj}^*\} \quad (15.64)$$

Donde:

$\{V_{nj}\}$ = vector de fuerzas cortantes.

$[k_j]$ = rigidices denotadas en la matriz de rigidez para análisis dinámico [K].

$\{d_{nj}^*\}$ = vector de desplazamientos relativos.

Para $j = 1$:

$$\{V_{n1}\} = k_1 \{d_{n1}^*\}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} &= k_1 \begin{pmatrix} d_{11}^* \\ d_{21}^* \\ d_{31}^* \end{pmatrix} \\ &= \left(40,091.1142 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) \begin{pmatrix} 0.000872251 \\ 0.001788985 \\ 0.007192579 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \begin{pmatrix} 34.970 \\ 71.772 \\ 288.359 \end{pmatrix} \text{ ton} \\ &\therefore \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34.970 \\ 71.772 \\ 288.359 \end{pmatrix} \text{ ton} \end{aligned} \quad (15.65)$$

Para $j = 2$:

$$\begin{aligned} \{V_{n2}\} &= k_2 \{d_{n2}^*\} \\ \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} &= k_2 \begin{pmatrix} d_{12}^* \\ d_{22}^* \\ d_{32}^* \end{pmatrix} \\ \vdots &= \left(18,120.706 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) \begin{pmatrix} 0.000432915 \\ 0.00063591 \\ -0.001522993 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 7.845 \\ 11.523 \\ -27.598 \end{pmatrix} \text{ ton} \\ &\therefore \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.845 \\ 11.523 \\ -27.598 \end{pmatrix} \text{ ton} \end{aligned} \quad (15.66)$$

Para $j = 3$:

$$\begin{aligned} \{V_{n3}\} &= k_3 \{d_{n3}\} \\ \begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{pmatrix} &= k_2 \begin{pmatrix} d_{13}^* \\ d_{23}^* \\ d_{33}^* \end{pmatrix} \\ \vdots &= \left(3,263.507 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) \begin{pmatrix} 0.000122776 \\ -0.000165379 \\ 0.000045427 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 0.401 \\ -0.54 \\ 0.148 \end{pmatrix} \text{ ton} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.401 \\ -0.54 \\ 0.148 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad (15.67)$$

Aplicando el SRSS para determinar los cortantes sobre los grados de libertad donde se concentran las masas con:

$$V_{F-j} = \sqrt{\sum V_{jn}^2} \quad (15.68)$$

Donde:

$[V_{F-j}]$ = cortante final de cada entrepiso.

$[\sqrt{\sum V_{jn}^2}]$ = suma de los cuadrados de cada renglón asociado al j-ésimo entrepiso de cada uno de los vectores $\{V_{nj}\}$

Para el entrepiso 1 (en ton):

$$\begin{aligned} V_{F-1} &= \sqrt{\sum V_{1n}^2} \\ &= \sqrt{V_{11}^2 + V_{12}^2 + V_{13}^2} \\ &= \sqrt{(34.970 \text{ ton})^2 + (7.845 \text{ ton})^2 + (0.401 \text{ ton})^2} \\ &\therefore V_{F-1} = 35.841 \text{ ton} \cong 36 \text{ ton} \end{aligned} \quad (15.69)$$

Para el entrepiso 2 (en ton):

$$\begin{aligned} V_{F-2} &= \sqrt{\sum V_{2n}^2} \\ &= \sqrt{V_{21}^2 + V_{22}^2 + V_{23}^2} \\ &= \sqrt{(71.772 \text{ ton})^2 + (11.523 \text{ ton})^2 + (-0.54 \text{ ton})^2} \\ &\therefore V_{F-2} = 72.644 \text{ ton} \cong 73 \text{ ton} \end{aligned} \quad (15.70)$$

Para el entrepiso 3 (en ton):

$$\begin{aligned}
 V_{F-3} &= \sqrt{\sum V_{3n}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{V_{31}^2 + V_{32}^2 + V_{33}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{(288.359 \text{ ton})^2 + (-27.598 \text{ ton})^2 + (0.148 \text{ ton})^2} \\
 &\quad \therefore V_{F-3} = 289.677 \text{ ton} \cong 290 \text{ ton} \tag{15.71}
 \end{aligned}$$

15.4.9 Revisión por cortante basal mínimo

Dentro del RCCDMX se estipula, en las NTC – Sismo, que el cortante basal obtenido en la dirección del análisis modal no sea menor que $a_{\text{mín}} W_0$, donde $a_{\text{mín}}$ se tomará igual a 0.03 cuando $T_s < 0.5 \text{ seg}$ o 0.05 si $T_s \geq 1 \text{ seg}$, siendo T_s el periodo dominante más largo del terreno en el sitio de interés (parámetro obtenido en el espectro de diseño del SASID). Para valores de T_s comprendidos entre 0.5 y 1.0, $a_{\text{mín}}$ se hará variar linealmente entre 0.03 y 0.05 (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 51).

$$V_{F-j} \geq a_{\text{mín}} W_0 \tag{15.72}$$

W_0 = es el peso de la estructura que actúa en la base del sistema estructural.

Para la estructura en estudio $T_s = 0.485 \text{ seg}$, por lo tanto, $a_{\text{mín}} = 0.03$. Calculando $a_{\text{mín}} W_0$:

$$\begin{aligned}
 a_{\text{mín}} W_0 &= (0.03) \left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} + 5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} + 3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\
 &\quad \therefore a_{\text{mín}} W_0 = 4.179 \text{ ton} \tag{15.73}
 \end{aligned}$$

Como todos los valores V_{F-j} son mayores que $a_{\text{mín}} W_0$ se acepta la revisión por cortante basal mínimo.

15.4.10 Determinación de cargas debido a acciones permanentes, variables y accidentales (caso sísmico)

Los factores de carga^{15.4}, establecidos en las NTC – Edificaciones, se establece que el factor de carga es $F_C = 1.1$ cuando la estructura en estudio esté sujeta a acciones permanentes, variables y accidentales (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 692). Lo anterior mencionado puede entenderse como cargas debido a sismo.

Las cargas laterales de la estructura serán cargas puntuales en cada uno de los entrepisos donde fue concentrada la masa; mientras que las cargas gravitacionales se ejemplificarán como cargas distribuidas uniformemente (cargas rectangulares) sobre cada una de las vigas de la estructura.

La carga lateral de la estructura para la azotea es:

$$\begin{aligned} F_{u-3}(t) &= F_C V_{F-3} \\ \vdots &= (1.1)(290 \text{ ton}) \\ \therefore F_{u-3}(t) &= 319 \text{ ton} \end{aligned} \quad (15.74)$$

La carga lateral para el entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned} F_{u-2}(t) &= F_C (V_{F-2} - V_{F-3}) \\ \vdots &= (1.1)(73 \text{ ton} - 290 \text{ ton}) \\ \therefore F_{u-2}(t) &= -238.7 \text{ ton} \end{aligned} \quad (15.75)$$

La carga lateral para el entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned} F_{u-1}(t) &= F_C [V_{F-1} - (V_{F-2} - V_{F-3})] \\ \vdots &= (1.1)[36 \text{ ton} - (73 \text{ ton} - 290 \text{ ton})] \\ \therefore F_{u-1}(t) &= 278.3 \text{ ton} \end{aligned} \quad (15.76)$$

La carga gravitacional de la azotea es:

^{15.4} Definición sustraída del RCCDMX: Factor de seguridad parcial mayor que la unidad que se aplica a las cargas calculadas para cubrir la incertidumbre que se tiene para su determinación (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 684).

$$\begin{aligned}
 W_{u-3} &= F_C \left(\frac{m_3 g}{L} \right) \\
 \vdots &= 1.1 \left[\frac{\left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-3} &= 4.208 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}}
 \end{aligned} \tag{15.77}$$

La carga gravitacional del entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-2} &= F_C \left(\frac{m_2 g}{L} \right) \\
 \vdots &= 1.1 \left[\frac{\left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-2} &= 5.935 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 6 \frac{\text{ton}}{\text{m}}
 \end{aligned} \tag{15.78}$$

La carga gravitacional del entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-1} &= F_C \left(\frac{m_1 g}{L} \right) \\
 \vdots &= 1.1 \left[\frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-1} &= 5.180 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}}
 \end{aligned} \tag{15.79}$$

La representación de cargas laterales y gravitacionales en la estructura son:

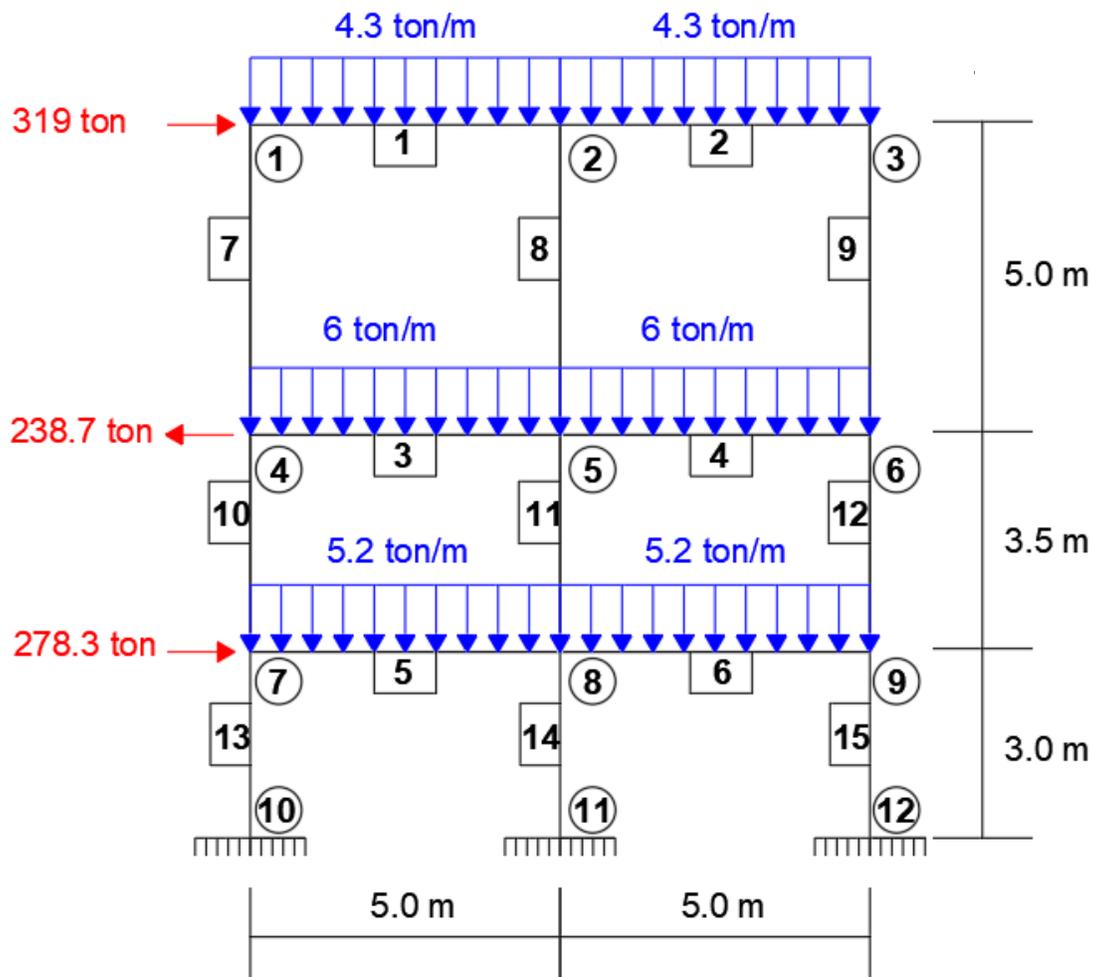


Figura XV.11. Representación gráfica de las cargas por caso sísmico.

15.4.11 Determinación de cargas debido a acciones permanentes y variables (caso estático)

Los factores de carga, establecidos en las NTC – Edificaciones, se establece que el factor de carga es $F_C = 1.3$ para acciones permanentes^{15.5} y $F_C = 1.5$ para cargas variables^{15.6} (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 692). Lo anterior mencionado puede entenderse como acciones debido a cargas gravitacionales.

^{15.5} Si la estructura se cataloga dentro del grupo A el factor de carga permanente aumenta a 1.5.

^{15.6} Si la estructura se cataloga dentro del grupo A el factor de carga variable aumenta a 1.7.

La carga gravitacional de la azotea es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-3} &= F_C \left(\frac{m_3 g - A_T CV}{L} \right) + F_C \left(\frac{A_T CV}{L} \right) \\
 \therefore &= 1.3 \left[\frac{\left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) - (12.5 \text{ m}^2) \left(0.1 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] + 1.5 \left[\frac{(12.5 \text{ m}^2) \left(0.1 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-3} &= 4.999 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 5 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (15.80)
 \end{aligned}$$

La carga gravitacional para el entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-2} &= F_C \left(\frac{m_2 g - A_T CV}{L} \right) + F_C \left(\frac{A_T CV}{L} \right) \\
 \therefore &= 1.3 \left[\frac{\left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) - (12.5 \text{ m}^2) \left(0.25 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] + 1.5 \left[\frac{(12.5 \text{ m}^2) \left(0.25 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-2} &= 7.077 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 8 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (15.81)
 \end{aligned}$$

La carga gravitacional para el entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-1} &= F_C \left(\frac{m_1 g - A_T CV}{L} \right) + F_C \left(\frac{A_T CV}{L} \right) \\
 \therefore &= 1.3 \left[\frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) - (12.5 \text{ m}^2) \left(0.25 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] + 1.5 \left[\frac{(12.5 \text{ m}^2) \left(0.25 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-1} &= 6.184 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (15.82)
 \end{aligned}$$

La representación de cargas laterales y gravitacionales en la estructura son:

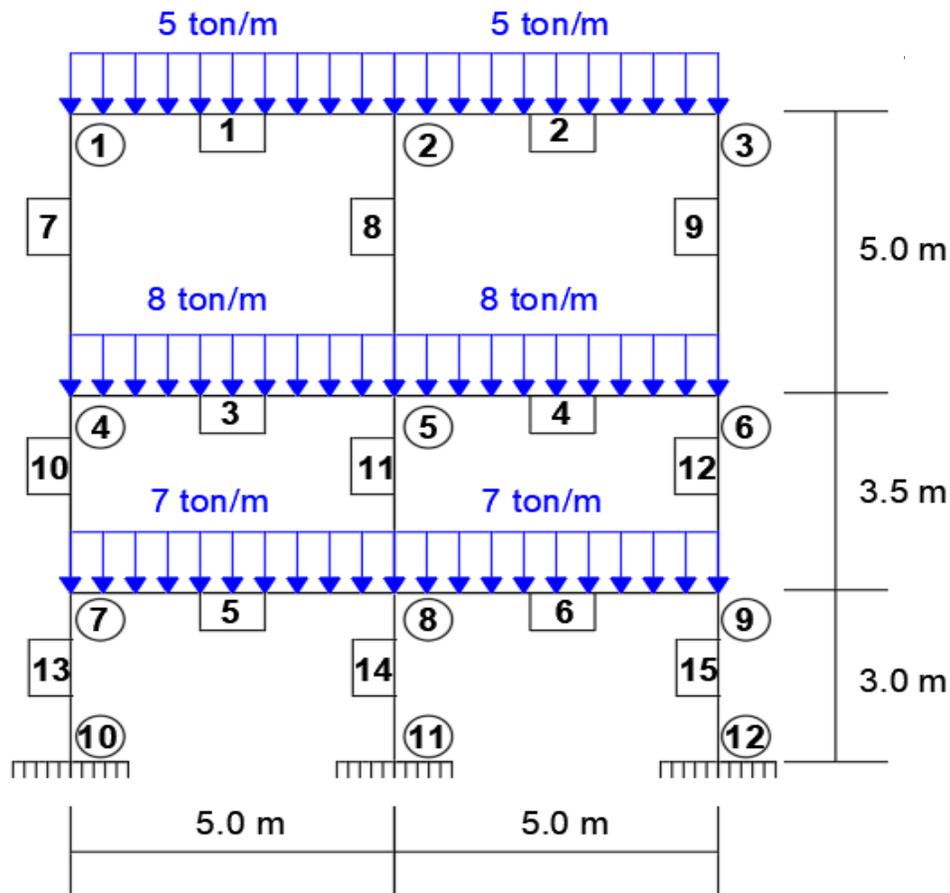


Figura XV.12. Representación gráfica de las cargas por caso gravitacional.

Para generar los casos de carga, nótese como en el caso gravitacional, las cargas fueron truncadas mucho más que en el caso sísmico.

Como puede apreciarse, aunque las acciones gravitacionales aumentan en un margen del 17 al 25 por ciento, en comparación con el caso sísmico, se supondrá que predominará, para efectos de diseño estructural, el caso sísmico tanto en vigas y columnas, debido a que los cortantes laterales provocarán mayores momentos en las columnas y para compensar el equilibrio estático, las vigas también aumentarán sus momentos flectores.

Por lo denotado en el párrafo anterior sólo se realizará el análisis estructural de los casos sísmicos, y se dejará al lector realizar los casos de análisis estático. El lector no debería tener mayor problema en calcular los elementos mecánicos de los casos estáticos, dado que se realizarán, con

el mayor detalle posible, los casos de estudio sísmico y a partir de ellos, bastará con cambiar el vector de fuerzas $\{P\}$ y seguir el procedimiento que se detalla en el siguiente apartado. La matriz de rigidez en coordenadas globales $[k_{ij}]$ y las matrices de rigidez en coordenadas locales $[k_i]$ son las mismas para ambos casos.

Cabe destacar que no siempre predominará el caso sísmico, y será necesario analizar el caso estático; a su vez puede llegar a ocurrir que para columnas los elementos mecánicos sean mayores al realizar el análisis sísmico, mientras que para vigas sean superiores al realizar el análisis estructural estático. Esto provoca el tener que diseñar los elementos estructurales con los diagramas de elementos mecánicos respectivos donde las fuerzas y momentos sean mayores.

15.5 Análisis Estructural para el Caso Sísmico

El análisis estructural se realizará al marco de la figura XV.11.

Todas las matrices de rigidez para análisis dinámico $[K]$ fueron encontradas a partir de la matriz de la estructura $[k_{ij}]$

Esta misma matriz de la cual su condensación estática arrojó $[K]$ como resultado permite establecer mediante $[k_{ij}]\{\Delta\} + \{P\} = \{0\}$ los valores de las rotaciones angulares y desplazamientos lineales a partir de $\{\Delta\} = -[k_{ij}]^{-1}\{P\}$.

Siendo:

$\{\Delta\}$ = vector de desplazamientos que contiene desplazamientos lineales y rotaciones angulares.

$\{P\}$ = vector de fuerzas que contiene los momentos de empotramiento perfecto y fuerzas laterales u horizontales dentro de una estructura.

$[k_{ij}]$ = matriz de rigidez de la estructura en coordenadas globales.

Los casos de análisis estructural por resolver serán únicamente los casos con cargas laterales provenientes del análisis modal, dado que si se presenta la solución de estos casos el lector podrá resolver los casos estáticos sin menor dificultad dado que no presenta cargas laterales.

La matriz de rigidez de la estructura $[k_{ij}]$ se encuentra en la página 461, así que para encontrar el vector $\{\Delta\}$ es necesario definir el vector de fuerza $\{P\}$.

Como la estructura no presenta condiciones de asentamiento y/o desplazamiento en los apoyos, ni está sobre algún tipo de apoyo elástico, el vector de fuerzas es un vector columna con 12 filas que se muestra a continuación:

$$\{P\} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ -\frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ -\frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ -319 \text{ ton} \\ 238.7 \text{ ton} \\ -278.3 \text{ ton} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{215}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{215}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -\frac{25}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{25}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -\frac{65}{6} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{65}{6} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -319 \text{ ton} \\ 238.7 \text{ ton} \\ -278.3 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

Al realizar la operación $\{\Delta\} = -[k_{ij}]^{-1}\{P\}$ se obtiene:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02456 \text{ rad} \\ 0.01963 \text{ rad} \\ 0.02407 \text{ rad} \\ 0.01689 \text{ rad} \\ 0.01481 \text{ rad} \\ 0.01669 \text{ rad} \\ 0.01022 \text{ rad} \\ 0.00901 \text{ rad} \\ 0.01002 \text{ rad} \\ 0.20201 \text{ m} \\ 0.07103 \text{ m} \\ 0.02282 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (15.83)$$

Los elementos mecánicos se obtienen mediante la fórmula:

$$\{F_i\} = [k_i]\{\delta_i\} + \{P_0^{(i)}\} \quad (15.84)$$

Siendo:

$[F_i]$ = vector de elementos mecánicos por elemento.

$[k_i]$ = matriz de rigidez en coordenadas locales.

$\{\delta_i\}$ = vector de desplazamientos sustraídos de $\{\Delta\}$ correspondiente a los grados de libertad de $[k_i]$.

$\{P_0^{(i)}\}$ = vector de fuerzas y momentos iniciales, dentro de la barra analizada, obtenidas por los momentos de empotramiento perfecto.

Al desarrollar la ecuación 15.84 se tiene:

$$\begin{Bmatrix} M_I^{(i)} \\ M_{II}^{(i)} \\ V_I^{(i)} \\ V_{II}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_I^{(i)} \\ \theta_{II}^{(i)} \\ \Delta_I^{(i)} \\ \Delta_{II}^{(i)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_I^{(i)} \\ m_{II}^{(i)} \\ v_I^{(i)} \\ v_{II}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (15.85)$$

Para la ecuación 15.85, el superíndice (i) se asocia al elemento analizado, el subíndice I al nodo inicial y el nodo II el nodo final.

$[M_I^{(i)} \quad M_{II}^{(i)}]$ = son los momentos finales.

$[V_I^{(i)} \quad V_{II}^{(i)}]$ = son los cortantes finales.

$[\theta_I^{(i)} \quad \theta_{II}^{(i)}]$ = son los valores de las rotaciones angulares tomados del vector $\{\Delta\}$.

$[\Delta_I^{(i)} \quad \Delta_{II}^{(i)}]$ = son los valores de los desplazamiento lineales tomados del vector $\{\Delta\}$.

$[m_I^{(i)} \quad m_{II}^{(i)}]$ = son los momentos de empotramiento perfecto utilizados en $\{P\}$.

$[v_I^{(i)} \quad v_{II}^{(i)}]$ = son los cortantes de empotramiento perfecto utilizados en $\{P\}$.

Calculando cortantes y momentos en las vigas y columnas (se utilizan unidades en toneladas y metro):

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= [k_1]\{\delta_1\} + \{P_0^{(1)}\} \\ \vdots &= \frac{27(140,000\sqrt{280})}{625,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.02456 \\ 0.01963 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -215/24 \\ 215/24 \\ 43/4 \\ 43/4 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} 164.9864 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 170.4284 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -56.3329 \text{ ton} \\ 77.8329 \text{ ton} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_2\} = [k_2]\{\delta_2\} + \{P_0^{(2)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{27 (140,000\sqrt{280})}{625,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01963 \\ 0.02407 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -215/24 \\ 215/24 \\ 43/4 \\ 43/4 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 151.2803 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 180.4402 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -55.5941 \text{ ton} \\ 77.0941 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_3\} = [k_3]\{\delta_3\} + \{P_0^{(3)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{2401 (140,000\sqrt{280})}{30,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01689 \\ 0.01481 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25/2 \\ 25/2 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 215.3114 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 230.5609 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -74.1745 \text{ ton} \\ 104.1745 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_4\} = [k_4]\{\delta_4\} + \{P_0^{(4)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{2401 (140,000\sqrt{280})}{30,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01481 \\ 0.01669 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25/2 \\ 25/2 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 204.6045 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 238.3985 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -73.6006 \text{ ton} \\ 103.6006 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_5\} = [k_5]\{\delta_5\} + \{P_0^{(5)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{2401 (140,000\sqrt{280})}{30,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01022 \\ 0.00901 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -65/6 \\ 65/6 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 127.1871 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 143.2195 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -41.0813 \text{ ton} \\ 67.0813 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_6\} = [k_6]\{\delta_6\} + \{P_0^{(6)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{2401 (140,000\sqrt{280})}{30,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.00901 \\ 0.01002 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -65/6 \\ 65/6 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 120.6301 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 147.0082 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -40.5277 \text{ ton} \\ 66.5277 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_7\} = [k_7]\{\delta_7\} + \{P_0^{(7)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{75,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & 15 & -15 \\ 25 & 50 & 15 & -15 \\ 15 & 15 & 6 & -6 \\ -15 & -15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01689 \\ 0.02456 \\ 0.07103 \\ 0.20201 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} -265.6025 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -164.9864 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -86.1178 \text{ ton} \\ 86.1178 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_8\} = [k_8]\{\delta_8\} + \{P_0^{(8)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{75,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & 15 & -15 \\ 25 & 50 & 15 & -15 \\ 15 & 15 & 6 & -6 \\ -15 & -15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01481 \\ 0.01963 \\ 0.07103 \\ 0.20201 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} -384.9157 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -321.7086 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -141.3249 \text{ ton} \\ 141.3249 \text{ ton} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_9\} = [k_9]\{\delta_9\} + \{P_0^{(9)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{75,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & 15 & -15 \\ 25 & 50 & 15 & -15 \\ 15 & 15 & 6 & -6 \\ -15 & -15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01669 \\ 0.02407 \\ 0.07103 \\ 0.20201 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} -277.3466 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -180.4402 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -91.5574 \text{ ton} \\ 91.5574 \text{ ton} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_{10}\} = [k_{10}]\{\delta_{10}\} + \{P_0^{(10)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{49(140,000\sqrt{280})}{150,000} \begin{bmatrix} 49 & 24.5 & 30 & -21 \\ 24.5 & 49 & 21 & -21 \\ 21 & 21 & 12 & -12 \\ -21 & -21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01022 \\ 0.01689 \\ 0.02282 \\ 0.07103 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} -74.9184 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 50.2911 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -7.0364 \text{ ton} \\ 7.0364 \text{ ton} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_{11}\} = [k_{11}]\{\delta_{11}\} + \{P_0^{(11)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{49(140,000\sqrt{280})}{150,000} \begin{bmatrix} 49 & 24.5 & 30 & -21 \\ 24.5 & 49 & 21 & -21 \\ 21 & 21 & 12 & -12 \\ -21 & -21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.00901 \\ 0.01481 \\ 0.02282 \\ 0.07103 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} -158.9944 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -50.2497 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -59.7840 \text{ ton} \\ 59.7840 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_{12}\} &= [k_{12}]\{\delta_{12}\} + \{P_0^{(12)}\} \\ \vdots &= \frac{49(140,000\sqrt{280})}{150,000} \begin{bmatrix} 49 & 24.5 & 30 & -21 \\ 24.5 & 49 & 21 & -21 \\ 21 & 21 & 12 & -12 \\ -21 & -21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01002 \\ 0.01669 \\ 0.02282 \\ 0.07103 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} -86.1267 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 38.9482 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -13.4796 \text{ ton} \\ 13.4796 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

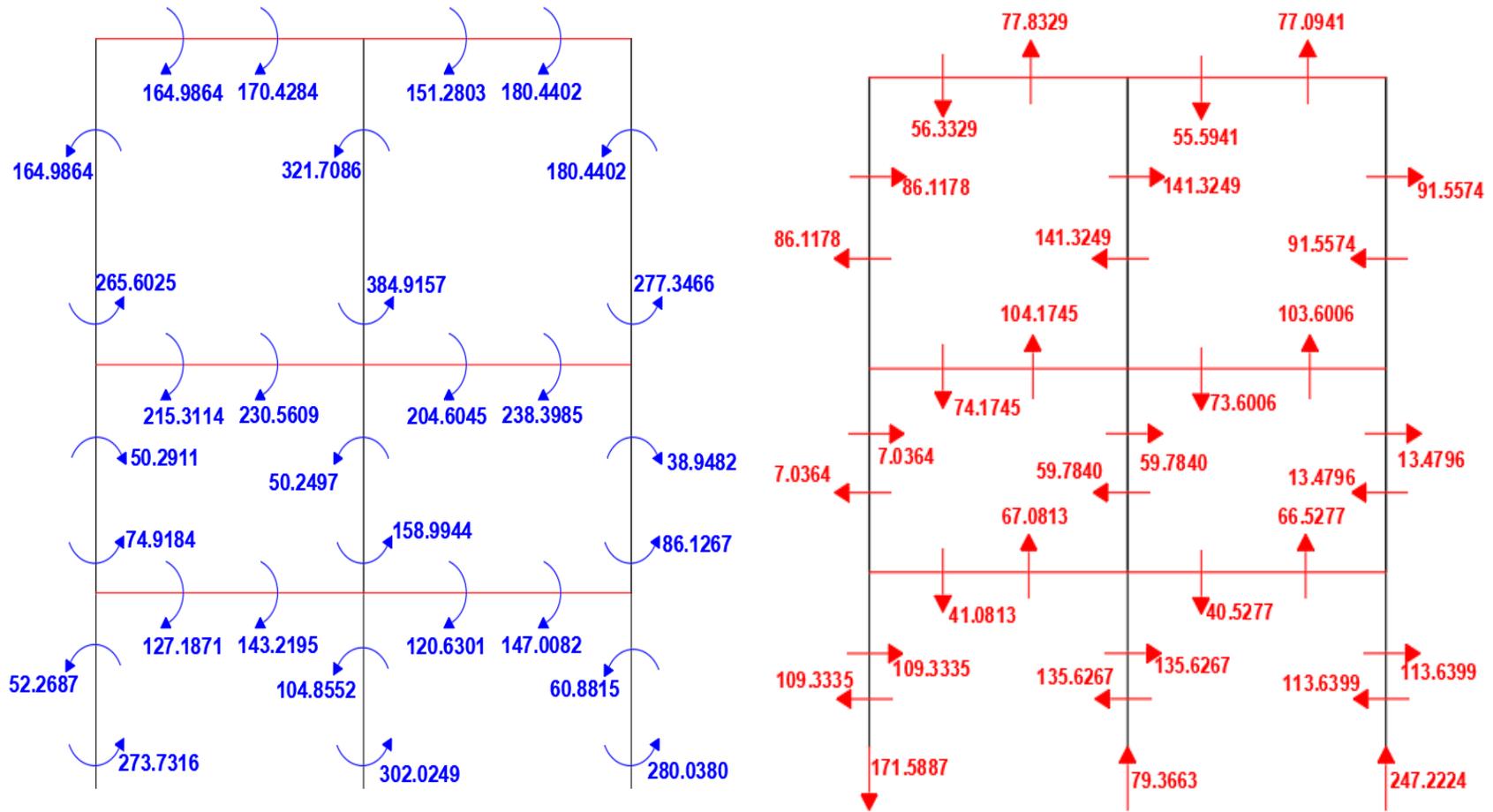
$$\begin{aligned} \{F_{13}\} &= [k_{13}]\{\delta_{13}\} + \{P_0^{(13)}\} \\ \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{5,400,000} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01022 \\ 0 \\ 0.02282 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} -273.7316 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -52.2687 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -109.3335 \text{ ton} \\ 109.3335 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_{14}\} = [k_{14}]\{\delta_{14}\} + \{P_0^{(14)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{5,400,000} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00901 \\ 0 \\ 0.02282 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} -302.0249 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -104.8552 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -135.6267 \text{ ton} \\ 135.6267 \text{ ton} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_{15}\} &= [k_{15}]\{\delta_{15}\} + \{P_0^{(15)}\} \\ \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{5,400,000} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01002 \\ 0 \\ 0.02282 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} -280.0380 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -60.8815 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -113.6399 \text{ ton} \\ 113.6399 \text{ ton} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Al trazar la distribución de momentos y cortantes, así como los diagramas de elementos mecánicos se tiene:



(a)

(b)

Figura XV.13. Distribución de (a) momentos (ton-m) y (b) cortantes (ton).

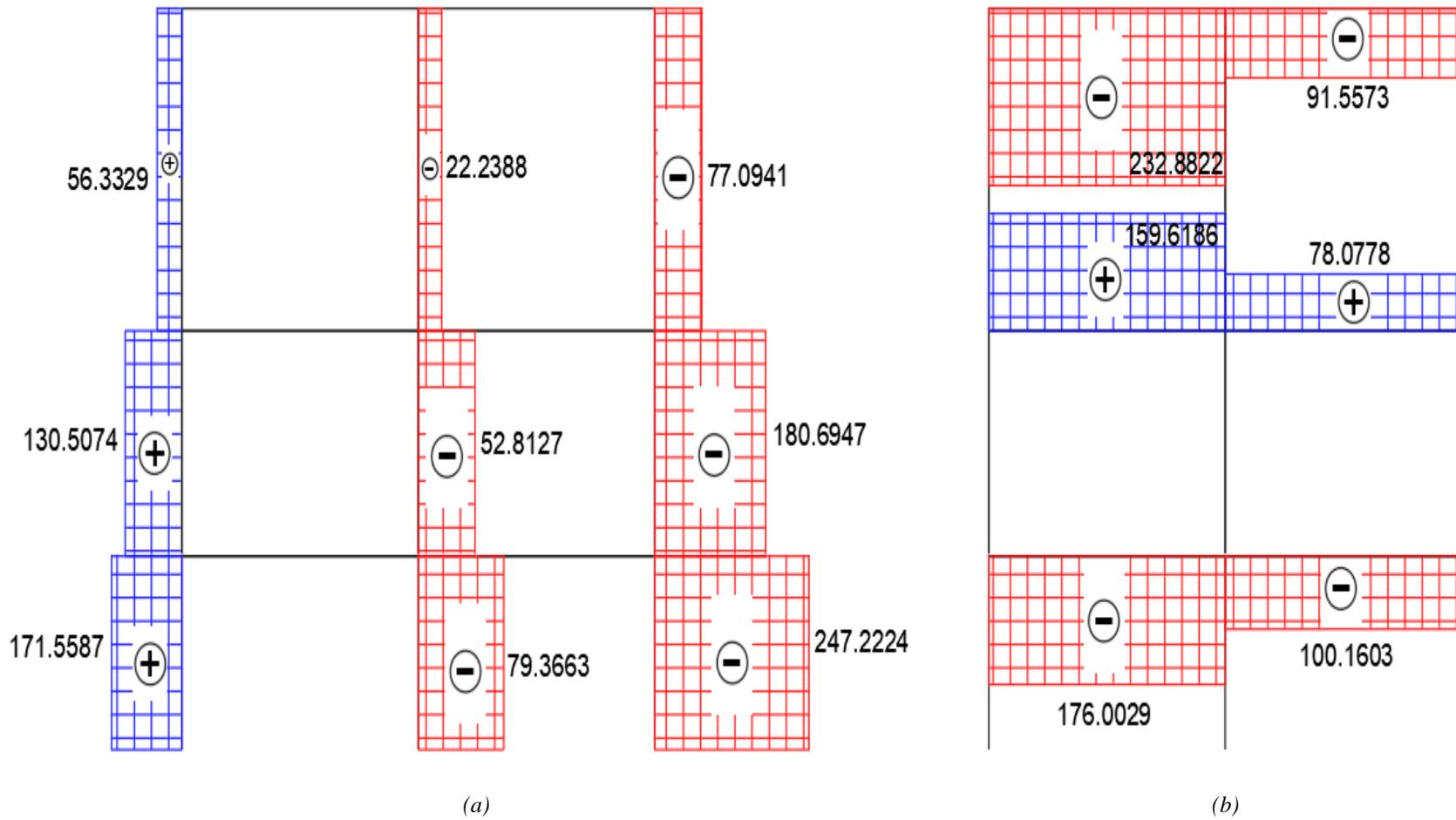


Figura XV.14. Diagrama de fuerza axial (ton) en (a) columnas y (b) vigas.

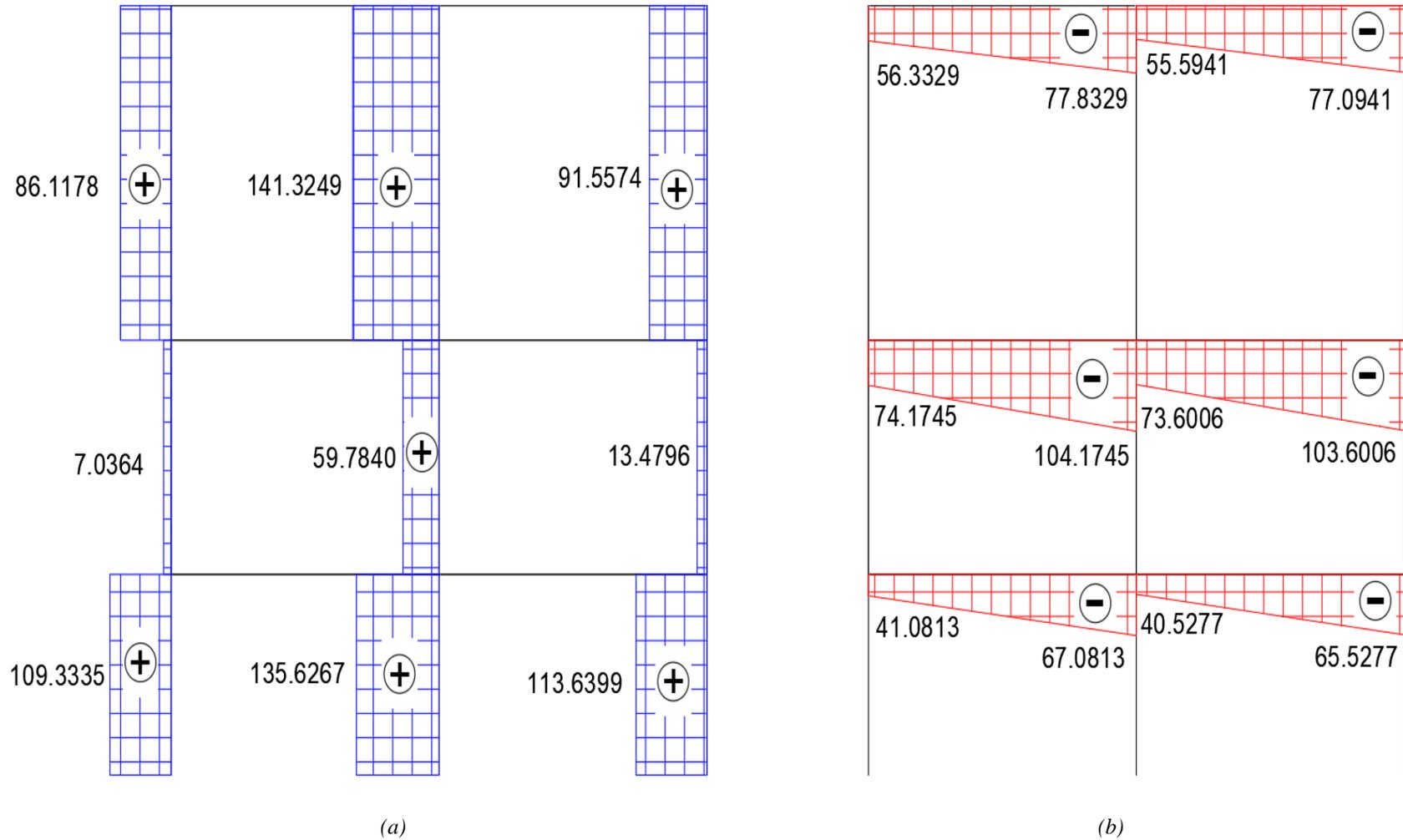


Figura XV.15. Diagrama de fuerza cortante (ton) en (a) columnas y (b) vigas.

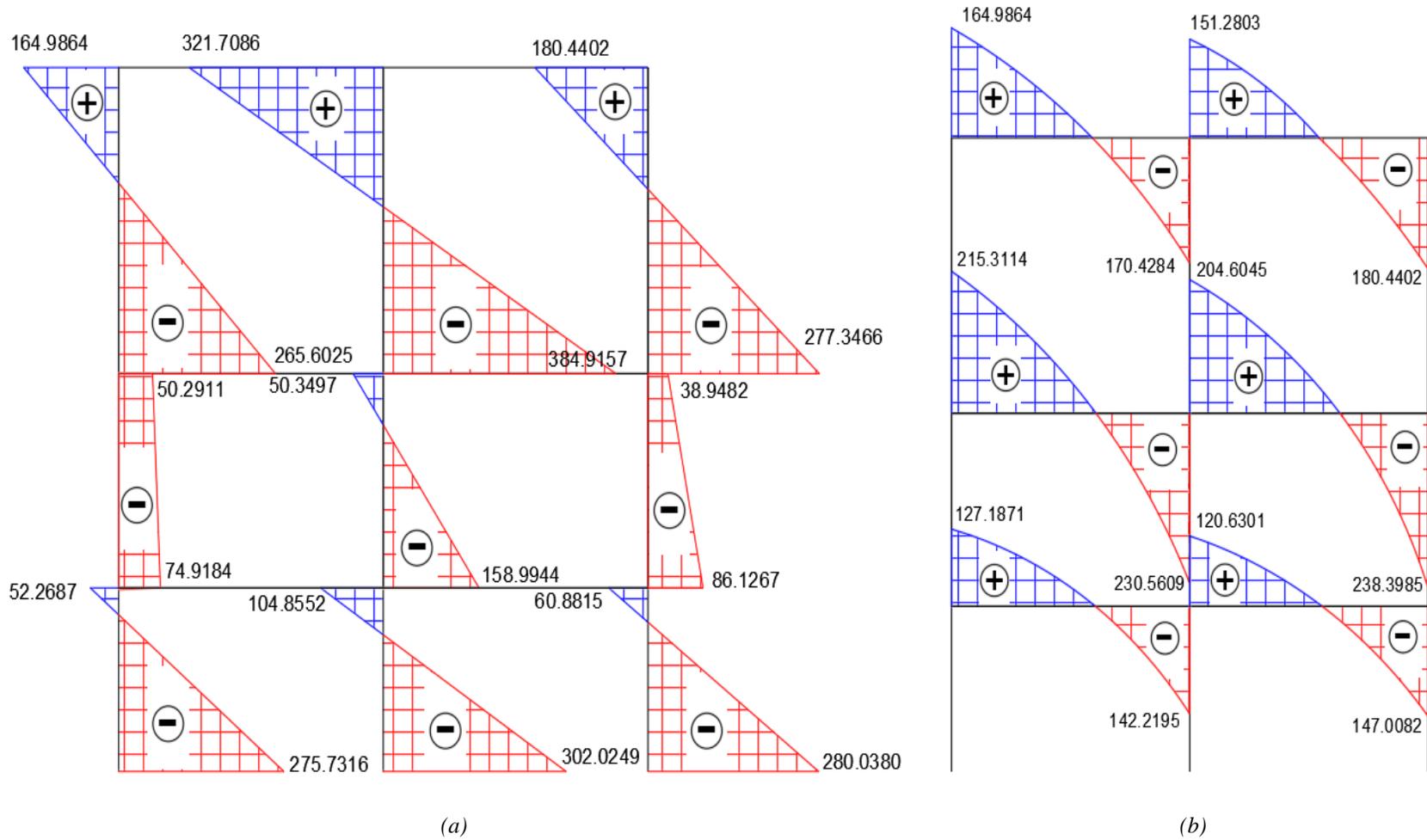


Figura XV.16. Diagrama de momento flector (ton-m) en (a) columnas y (b) vigas.

Capítulo XVI:
Análisis Dinámico Modal Espectral
Y Análisis Estructural de Marcos
Perimetrales Considerando Deformación
Por Flexión y Cortante

- 16.1 Determinación de la Matriz de Rigidez para Análisis Dinámico [K]
- 16.2 Calculo de la Frecuencia y Periodo a Través de Eigenvalores
- 16.3 Calculo de los Modos de Vibrar a Través de Eigenvectores
- 16.4 Factor de Participación de Masas
- 16.5 Aceleraciones a Considerar con Base en los Periodos de la Estructura
- 16.6 Calculo de los Desplazamientos Relativos y Finales
- 16.7 Revisión de los Desplazamientos Laterales (Distorsión de Entrepiso)
- 16.8 Calculo de las Fuerzas Cortantes (Cortantes Basales)
- 16.9 Revisión por Cortante Basal Mínimo
- 16.10 Determinación de Cargas Debidas a Acciones Permanentes, Variables y Accidentales
- 16.11 Determinación de Cargas Debidas a Acciones permanentes y Variables
- 16.12 Análisis Estructural para el Caso Sísmico

XVI. Análisis Dinámico Modal Espectral y Análisis Estructural de Marcos Perimetrales
Considerando Deformación por Flexión y Cortante

16.1 Determinación de la Matriz de Rigidez para Análisis Dinámico [K]

Se parte de la misma discretización de elementos y asignación de grados de libertad que cuando se calculó la matriz $[k_{ij}]$ en el capítulo anterior:

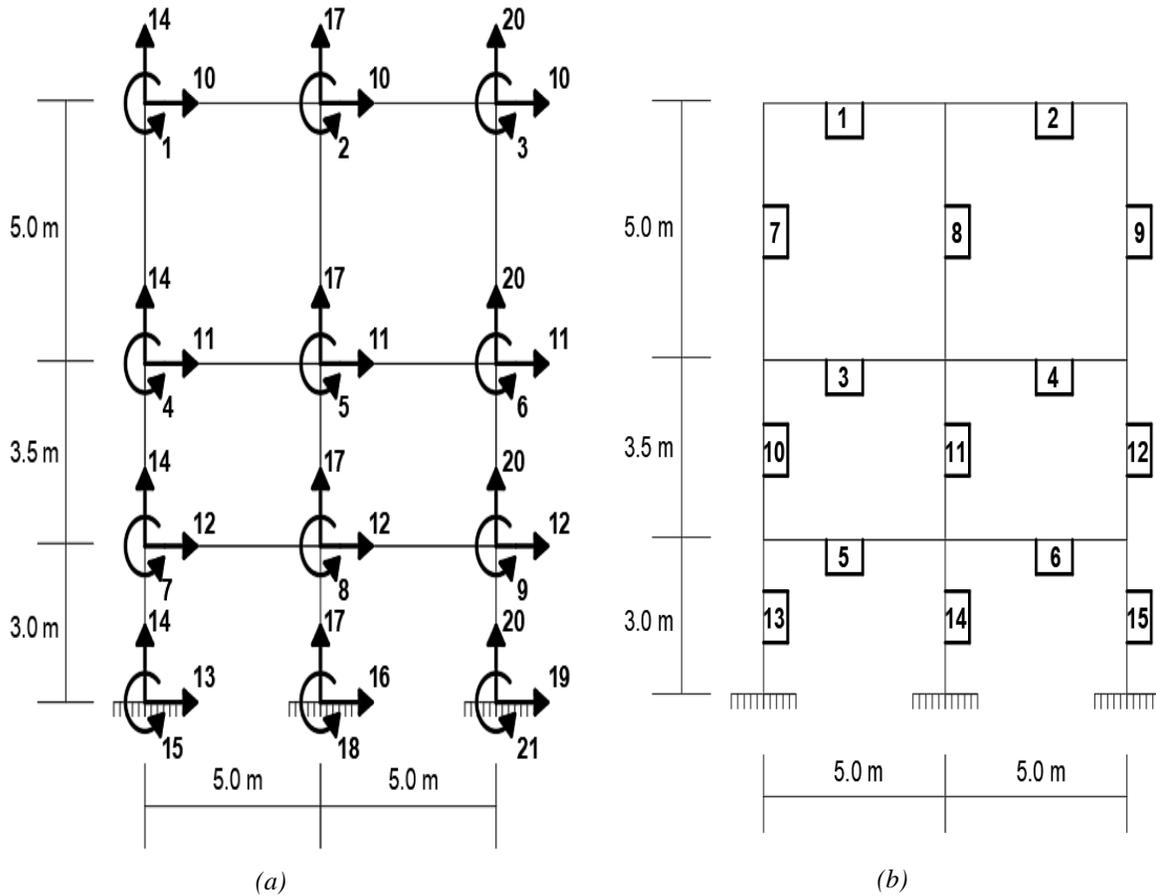


Figura XVI.1. (a) Numeración de los grados de libertad (b) numeración de los elementos discretizados.

Se procede a calcular las matrices de rigidez por elemento utilizando las ecuaciones (reducción de las ecuaciones 12.59 y 12.60 al hacer $\frac{EA}{L} = 0$):

$$[k_i] = \frac{EI}{L^3(1+4c)} \begin{bmatrix} 4(1+c)L^2 & 2(1-2c)L^2 & -6L & 6L \\ 2(1-2c)L^2 & 4(1+c)L^2 & -6L & 6L \\ -6L & -6L & 12 & -12 \\ 6L & 6L & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de una viga considerando flexión y cortante

$$[k_i] = \frac{EI}{L^3(1+4c)} \begin{bmatrix} 4(1+c)L^2 & 2(1-2c)L^2 & 6L & -6L \\ 2(1-2c)L^2 & 4(1+c)L^2 & 6L & -6L \\ 6L & 6L & 12 & -12 \\ -6L & -6L & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de una columna considerando flexión y cortante

Para el elemento 1 se tiene (se omiten unidades):

$$c = \frac{6(1+\nu)kI}{AL^2} = \frac{6(1+0.2)(1.2)(0.5) \left(\frac{(0.3)(0.6)^3}{12} \right)}{(0.3)(0.6)(5)^2} = 0.005184$$

$$[k_1] = \frac{E(0.5) \left(\frac{(0.3)(0.6)^3}{12} \right)}{(5)^3(1+4(0.005184))} \begin{bmatrix} 4(1+0.005184)(5)^2 & 2(1-2(0.005184))(5)^2 & -6(5) & 6(5) \\ 2(1-2(0.005184))(5)^2 & 4(1+0.005184)(5)^2 & -6(5) & 6(5) \\ -6(5) & -6(5) & 12 & -12 \\ 6(5) & 6(5) & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 14 \\ 17 \end{matrix}$$

$$\therefore = \frac{27E}{1,275,920} \begin{bmatrix} 100.5184 & 49.4816 & -30 & 30 \\ 49.4816 & 100.5184 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 14 \\ 17 \end{matrix}$$

$$\therefore [k_1] = \frac{27E}{1,275,920} \begin{bmatrix} 100.5184 & 49.4816 & -30 & 30 \\ 49.4816 & 100.5184 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 14 \\ 17 \end{matrix} \quad (16.1)$$

Como la sección 1 y 2 tienen la misma longitud y sección transversal, la matriz de rigidez del elemento 2 será:

$$[k_2] = \frac{27E}{1,275,920} \begin{bmatrix} 100.5184 & 49.4816 & -30 & 30 \\ 49.4816 & 100.5184 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{17} \\ \mathbf{20} \end{matrix} \quad (16.2)$$

Para el elemento 3 se tiene (se omiten unidades):

$$c = \frac{6(1 + \nu)kl}{AL^2} = \frac{6(1 + 0.2)(1.2)(0.5) \left(\frac{(0.35)(0.7)^3}{12} \right)}{(0.35)(0.7)(5)^2} = 0.007056$$

$$[k_3] = \frac{E(0.5) \left(\frac{(0.35)(0.7)^3}{12} \right)}{(5)^3(1 + 4(0.007056))} \begin{bmatrix} 4(1 + 0.007056)(5)^2 & 2(1 - 2(0.007056))(5)^2 & -6(5) & 6(5) \\ 2(1 - 2(0.007056))(5)^2 & 4(1 + 0.007056)(5)^2 & -6(5) & 6(5) \\ -6(5) & -6(5) & 12 & -12 \\ 6(5) & 6(5) & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{17} \end{matrix}$$

$$\vdots = \frac{2401E}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{17} \end{matrix}$$

$$\therefore [k_3] = \frac{2401E}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{17} \end{matrix} \quad (16.3)$$

Los elementos 4, 5 y 6 tienen la misma longitud y sección trasversal por lo que:

$$[k_4] = \frac{2401E}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{17} \\ \mathbf{20} \end{matrix} \quad (16.4)$$

$$[k_5] = \frac{2401E}{61,693,440} \begin{bmatrix} & \mathbf{7} & & & \\ & 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 \\ & 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 \\ & -30 & -30 & 12 & -12 \\ & 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{17} \end{matrix} \quad (16.5)$$

$$[k_6] = \frac{2401E}{61,693,440} \begin{bmatrix} & \mathbf{8} & & & \\ & 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 \\ & 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 \\ & -30 & -30 & 12 & -12 \\ & 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{17} \\ \mathbf{20} \end{matrix} \quad (16.6)$$

Para el elemento 7 se tiene:

$$c = \frac{6(1 + \nu)kl}{AL^2} = \frac{6(1 + 0.2)(1.2)(0.7) \left(\frac{(0.7)(0.7)^3}{12} \right)}{(0.7)(0.7)(5)^2} = 0.0098784$$

$$[k_7] = \frac{E(0.7) \left(\frac{(0.7)(0.7)^3}{12} \right)}{(5)^3(1 + 4(0.0098784))} \begin{bmatrix} & \mathbf{4} & & & & \\ & 4(1 + 0.0098784)(5)^2 & 2(1 - 2(0.0098784))(5)^2 & -6(5) & 6(5) & \\ & 2(1 - 2(0.0098784))(5)^2 & 4(1 + 0.0098784)(5)^2 & -6(5) & 6(5) & \\ & -6(5) & -6(5) & 12 & -12 & \\ & 6(5) & 6(5) & -12 & 12 & \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{10} \end{matrix}$$

$$\therefore = \frac{16,807E}{155,927,040} \begin{bmatrix} & \mathbf{4} & & & \\ & 100.98784 & 49.01216 & -30 & 30 \\ & 49.01216 & 100.98784 & -30 & 30 \\ & -30 & -30 & 12 & -12 \\ & 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{10} \end{matrix}$$

$$\therefore [k_7] = \frac{16,807E}{155,927,040} \begin{bmatrix} & \mathbf{4} & & & \\ & 100.98784 & 49.01216 & -30 & 30 \\ & 49.01216 & 100.98784 & -30 & 30 \\ & -30 & -30 & 12 & -12 \\ & 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{10} \end{matrix} \quad (16.7)$$

Los elementos 8 y 9 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$[k_8] = \frac{16,807E}{155,927,040} \begin{bmatrix} 100.98784 & 49.01216 & -30 & 30 \\ 49.01216 & 100.98784 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{10} \end{matrix} \quad (16.8)$$

$$[k_9] = \frac{16,807E}{155,927,040} \begin{bmatrix} 100.98784 & 49.01216 & -30 & 30 \\ 49.01216 & 100.98784 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{10} \end{matrix} \quad (16.9)$$

Para el elemento 10 se tiene (se omiten unidades):

$$c = \frac{6(1 + \nu)kl}{AL^2} = \frac{6(1 + 0.2)(1.2)(0.7) \left(\frac{(0.7)(0.7)^3}{12} \right)}{(0.7)(0.7)(3.5)^2} = 0.02016$$

$$[k_{10}] = \frac{E(0.7) \left(\frac{(0.7)(0.7)^3}{12} \right)}{(3.5)^3(1 + 4(0.02016))} \begin{bmatrix} 4(1 + 0.02016)(3.5)^2 & 2(1 - 2(0.02016))(3.5)^2 & -6(3.5) & 6(3.5) \\ 2(1 - 2(0.02016))(3.5)^2 & 4(1 + 0.02016)(3.5)^2 & -6(3.5) & 6(3.5) \\ -6(3.5) & -6(3.5) & 12 & -12 \\ 6(3.5) & 6(3.5) & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{11} \end{matrix}$$

$$\vdots = \frac{49E}{162,096} \begin{bmatrix} 49.98784 & 23.51216 & -21 & 21 \\ 23.51216 & 49.98784 & -21 & 21 \\ -21 & -21 & 12 & -12 \\ 21 & 21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{11} \end{matrix}$$

$$\therefore [k_{10}] = \frac{49E}{162,096} \begin{bmatrix} 49.98784 & 23.51216 & -21 & 21 \\ 23.51216 & 49.98784 & -21 & 21 \\ -21 & -21 & 12 & -12 \\ 21 & 21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{11} \end{matrix} \quad (16.10)$$

Los elementos 11 y 12 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$[k_{11}] = \frac{49E}{162,096} \begin{bmatrix} 49.98784 & 23.51216 & -21 & 21 \\ 23.51216 & 49.98784 & -21 & 21 \\ -21 & -21 & 12 & -12 \\ 21 & 21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{11} \end{matrix} \quad (16.11)$$

$$[k_{12}] = \frac{49E}{162,096} \begin{bmatrix} 49.98784 & 23.51216 & -21 & 21 \\ 23.51216 & 49.98784 & -21 & 21 \\ -21 & -21 & 12 & -12 \\ 21 & 21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{11} \end{matrix} \quad (16.12)$$

Para el elemento 13 se tiene:

$$c = \frac{6(1 + \nu)kI}{AL^2} = \frac{6(1 + 0.2)(1.2)(0.7) \left(\frac{(0.7)(0.7)^3}{12} \right)}{(0.7)(0.7)(3)^2} = 0.02744$$

$$[k_{13}] = \frac{E(0.7) \left(\frac{(0.7)(0.7)^3}{12} \right)}{(3)^3(1 + 4(0.02744))} \begin{bmatrix} 4(1 + 0.02744)(3)^2 & 2(1 - 2(0.02744))(3)^2 & -6(3) & 6(3) \\ 2(1 - 2(0.02744))(3)^2 & 4(1 + 0.02744)(3)^2 & -6(3) & 6(3) \\ -6(3) & -6(3) & 12 & -12 \\ 6(3) & 6(3) & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{13} \\ \mathbf{12} \end{matrix}$$

$$\therefore = \frac{16,807E}{35,956,224} \begin{bmatrix} 36.98784 & 17.01216 & -18 & 18 \\ 17.01216 & 36.98784 & -18 & 18 \\ -18 & -18 & 12 & -12 \\ 18 & 18 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{13} \\ \mathbf{12} \end{matrix}$$

$$\therefore [k_{13}] = \frac{16,807E}{35,956,224} \begin{bmatrix} 36.98784 & 17.01216 & -18 & 18 \\ 17.01216 & 36.98784 & -18 & 18 \\ -18 & -18 & 12 & -12 \\ 18 & 18 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{13} \\ \mathbf{12} \end{matrix} \quad (16.13)$$

Los elementos 14 y 15 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$[k_{14}] = \frac{16,807E}{35,956,224} \begin{bmatrix} \mathbf{18} & \mathbf{8} & \mathbf{16} & \mathbf{12} \\ 36.98784 & 17.01216 & -18 & 18 \\ 17.01216 & 36.98784 & -18 & 18 \\ -18 & -18 & 12 & -12 \\ 18 & 18 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{18} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{16} \\ \mathbf{12} \end{bmatrix} \quad (16.14)$$

$$[k_{15}] = \frac{16,807E}{35,956,224} \begin{bmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{9} & \mathbf{16} & \mathbf{12} \\ 36.98784 & 17.01216 & -18 & 18 \\ 17.01216 & 36.98784 & -18 & 18 \\ -18 & -18 & 12 & -12 \\ 18 & 18 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{21} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{16} \\ \mathbf{12} \end{bmatrix} \quad (16.15)$$

La matriz de rigidez $[k_{ij}]$ donde $E = 140000\sqrt{280}$ ton / m² en coordenadas locales se ilustra en la siguiente página.

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix}
 \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\
 30,483.301 & 2,452.964 & 0 & 12,375.982 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7,575.252 & 7,575.252 & 0 \\
 2,452.964 & 35,466.324 & 2,452.964 & 0 & 12,375.982 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7,575.252 & 7,575.252 & 0 \\
 0 & 2,452.324 & 30,483.301 & 0 & 0 & 12,375.982 & 0 & 0 & 0 & -7,575.252 & 7,575.252 & 0 \\
 12,375.982 & 0 & 0 & 70,081.125 & 4,494.256 & 0 & 16,650.350 & 0 & 0 & -7,575.252 & -7,296.089 & 14,871.341 \\
 0 & 12,375.982 & 0 & 4,494.256 & 7,9267.629 & 4,494.256 & 0 & 16,650.350 & 0 & -7,575.252 & -7,296.089 & 14,871.341 \\
 0 & 0 & 12,375.982 & 0 & 4,494.256 & 70,081.125 & 0 & 0 & 16,650.350 & -7,575.252 & -7,296.089 & 14,871.341 \\
 0 & 0 & 0 & 16,650.350 & 0 & 0 & 85,083.377 & 4,494.256 & 0 & 0 & -14,871.341 & -4,839.070 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 16,650.350 & 0 & 4,494.256 & 94,264.881 & 4,494.256 & 0 & -14,871.341 & -4,839.070 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16,650.350 & 0 & 4,494.256 & 85,083.377 & 0 & -14,871.341 & -4,839.070 \\
 \hline
 -7,573.252 & -7,575.252 & -7,575.252 & -7,575.252 & -7,575.252 & -7,575.252 & 0 & 0 & 0 & 9,090.302 & -9,090.302 & 0 \\
 7,575.252 & 7,575.252 & 7,575.252 & -7,392.089 & -7,296.089 & -7,296.089 & -14,871.341 & -14,871.341 & -1,4871.341 & -9,090.302 & 34,584.029 & -25,493.727 \\
 0 & 0 & 0 & 14,871.341 & 14,871.341 & 14,871.341 & -4,839.070 & -4,839.070 & -4,839.070 & 0 & -25,493.727 & 64,914.549
 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{12} \end{matrix}$$

Las unidades manejadas para los coeficientes son ton y m

Aplicando condensación estática para reducir la matriz de rigidez $[k_{ij}]$ a los grados de libertad asociados a los desplazamiento lineales 10, 11 y 12 se tiene:

$$[k_{ij}^*] = \begin{matrix} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{10} & 3169.535 & -5680.816 & 3233.913 \\ \mathbf{11} & -5680.816 & 20303.080 & -22913.677 \\ \mathbf{12} & 3233.913 & -22913.677 & 53692.165 \end{matrix} \quad (16.16)$$

De la ecuación 16.16 se deduce que las rigideces asociadas a las masas concentradas de la estructura son:

$$[k_{ij}^*] = \begin{bmatrix} k_3 & & [k_v] \\ & k_2 + k_3 & \\ [k_v] & & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3169.535 & -5680.816 & 3233.913 \\ -5680.816 & 20303.080 & -22913.677 \\ 3233.913 & -22913.677 & 53692.165 \end{bmatrix}$$

De los elementos de la diagonal principal se determinan las rigideces de los entrepisos:

$$k_3 = 3169.535 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (16.17)$$

$$k_2 + k_3 = 20,303.080 \quad \therefore \quad k_2 = 17,133.545 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (16.18)$$

$$k_1 + k_2 = 53,692.165 \quad \therefore \quad k_1 = 36,558.620 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (16.19)$$

Conocidas las rigideces de los entrepisos k_1 , k_2 y k_3 se puede ensamblar la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$:

$$\begin{aligned} [K] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \begin{bmatrix} 36,558.620 + 17,133.545 & -17,133.545 & 0 \\ -17,133.545 & 17,133.545 + 3169.535 & -3,169.535 \\ 0 & -3,169.535 & 3,169.535 \end{bmatrix} \frac{\text{ton}}{\text{m}} \\ \therefore [K] &= \begin{bmatrix} 53,692.165 & -17,133.545 & 0 \\ -17,133.545 & 20,303.080 & -3,169.535 \\ 0 & -3,169.535 & 3,169.535 \end{bmatrix} \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (16.20) \end{aligned}$$

Conocidas las matrices de masa concentrada y de rigidez para análisis dinámico, el modelo masa – resorte es el siguiente:

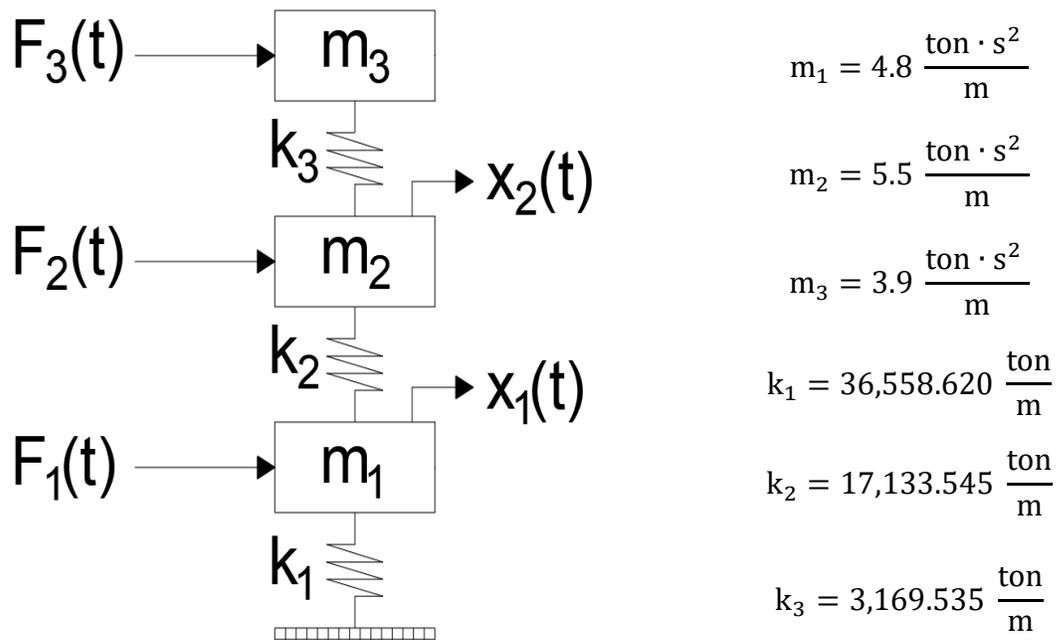


Figura XVI.2. Modelo masa – resorte del marco externo de la estructura en estudio.

16.2 Cálculo de la Frecuencia y Periodo a Través de Eigenvalores

Partiendo del problema de eigenvalores con $[[K] - \omega^2[M]]$, se tiene:

$$\left| \begin{bmatrix} 53,692.165 & -17,133.545 & 0 \\ -17,133.545 & 20,303.080 & -3,169.535 \\ 0 & -3,169.535 & 3,169.535 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (16.21)$$

A fin de evitar errores muy grandes de truncamiento, se hace uso del software derive 6® para calcular los valores de λ . La siguiente imagen muestra las operaciones hechas:

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ANÁLISIS DINÁMICO
[K]

$$\begin{bmatrix} 53692.165 & -17133.545 & 0 \\ -17133.545 & 20303.08 & -3169.535 \\ 0 & -3169.535 & 3169.535 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE MASA CONCENTRADA
[M]

$$\begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix}$$

CÁLCULO DE $| [K] - \lambda[M] |$ CON $\lambda = \omega^2$

$$\text{DET} \left(\begin{bmatrix} 53692.165 & -17133.545 & 0 \\ -17133.545 & 20303.08 & -3169.535 \\ 0 & -3169.535 & 3169.535 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right) = 0$$

POLINOMIO CARACTERÍSTICO $p(\lambda)=0$

$$\lambda \cdot (2.0592 \cdot 10^7 \cdot \lambda^2 - 3.230892641 \cdot 10^{11} \cdot \lambda + 8.606454780 \cdot 10^{14}) = 3.970658811 \cdot 10^{17}$$

RAÍCES DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO $p(\lambda)=0$

$$\lambda = 585.0693753 \vee \lambda = 1.245986009 \cdot 10^4 \vee \lambda = 2645.108610$$

Figura XVI.3. Cálculo de los valores de λ utilizando derive 6®.

Teniendo los valores de λ se puede calcular las frecuencias ω :

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = 585.0693753 \quad \therefore \quad \omega_1 \cong 24.188 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (16.22)$$

$$\omega_2^2 = \lambda_2 = 2,645.108610 \quad \therefore \quad \omega_2 \cong 51.431 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (16.23)$$

$$\omega_3^2 = \lambda_3 = 1.245986009 \cdot 10^4 \quad \therefore \quad \omega_3 \cong 111.624 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (16.24)$$

Y teniendo las frecuencias ω es posible determinar los periodos de la estructura:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{24.188 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_1 \cong 0.260 \text{ s} \quad (16.25)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{51.431 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_2 \cong 0.122 \text{ s} \quad (16.26)$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{111.624 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_3 \cong 0.056 \text{ s} \quad (16.27)$$

16.3 Calculo de los Modos de Vibrar a Través de Eigenvectores

Calculando el modo de vibrar número 1 asociado a ω_1 :

$$\begin{bmatrix} 53,692.165 & -17,133.545 & 0 \\ -17,133.545 & 20,303.080 & -3,169.535 \\ 0 & -3,169.535 & 3,169.535 \end{bmatrix} - 585.0693753 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16.28)$$

Desarrollando con $\phi_{11} = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 50,883.832 & -17,133.545 & 0 \\ -17,133.545 & 17,085.198 & -3,169.535 \\ 0 & -3,169.535 & 887.764 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16.29)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones cualesquiera entre sí, del sistema de ecuaciones lineales anterior, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.970 \\ 10.603 \end{Bmatrix} \quad (16.30)$$

Al normalizarlo se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(2.970)^2 + (3.9)(10.603)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.970 \\ 10.603 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.045 \\ 0.134 \\ 0.478 \end{Bmatrix} \quad (16.31)$$

Calculando el modo de vibrar número 2 asociado a ω_2 :

$$\left[\begin{array}{ccc} 53,692.165 & -17,133.545 & 0 \\ -17,133.545 & 20,303.080 & -3,169.535 \\ 0 & -3,169.535 & 3,169.535 \end{array} \right] - 2,645.108610 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16.32)$$

Desarrollando con $\Phi_{12} = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 40,995.644 & -17,133.545 & 0 \\ -17,133.545 & 5,754.983 & -3,169.535 \\ 0 & -3,169.535 & -7,146.389 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16.33)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones entre sí se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.393 \\ -1.061 \end{Bmatrix} \quad (16.34)$$

Donde al normalizarlo se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(2.393)^2 + (3.9)(-1.061)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.393 \\ -1.061 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.157 \\ 0.375 \\ -0.166 \end{Bmatrix} \quad (16.35)$$

Calculando el modo de vibrar número 3 asociado a ω_3 :

$$\left[\begin{array}{ccc} 53,692.165 & -17,133.545 & 0 \\ -17,133.545 & 20,303.080 & -3,169.535 \\ 0 & -3,169.535 & 3,169.535 \end{array} \right] - 1.245986009 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16.36)$$

Desarrollando con $\Phi_{13} = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} -6,115.163 & -17,133.545 & 0 \\ -17,133.545 & -48,226.150 & -3,169.535 \\ 0 & -3,169.535 & -45,423.919 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16.37)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones entre sí se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.357 \\ 0.025 \end{Bmatrix} \quad (16.38)$$

Donde al normalizarlo se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(-0.357)^2 + (3.9)(0.025)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.357 \\ 0.025 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.426 \\ -0.152 \\ 0.011 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz modal del sistema es:

$$[\phi_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.045 & 0.157 & 0.426 \\ 0.134 & 0.375 & -0.152 \\ 0.478 & -0.166 & 0.011 \end{bmatrix}$$

Comprobando las relaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} [\phi_{ij}]^T [M] [\phi_{ij}] &= [I] \\ \vdots &= \begin{bmatrix} 0.045 & 0.157 & 0.426 \\ 0.134 & 0.375 & -0.152 \\ 0.478 & -0.166 & 0.011 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.045 & 0.157 & 0.426 \\ 0.134 & 0.375 & -0.152 \\ 0.478 & -0.166 & 0.011 \end{bmatrix} \\ \vdots &\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comprobando que los modos de vibrar cumplen con la ortogonalidad, se verifica que el cálculo de estos es correcto.

Las siguientes figuras representan los modos de vibrar de la estructura en estudio:

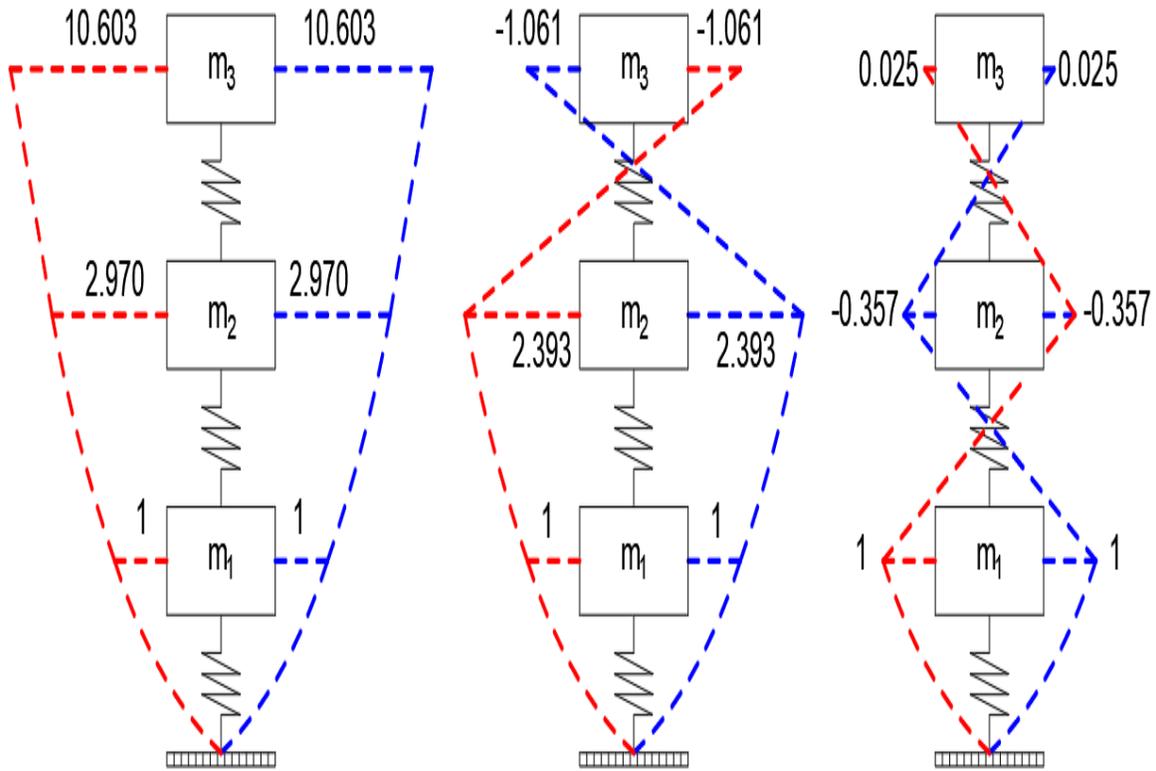


Figura XVI.4. Representación gráfica de los modos de vibrar de los marcos externos de la estructura .

16.4 Factor de Participación de Masas

El valor de la participación de masas se realiza con:

$$T_j^* = \frac{\{\phi_{nj}\}^T [M] \{1\}}{\{\phi_{nj}\}^T [M] \{\phi_{nj}\}} = \frac{\sum m_n \phi_{nj}}{\sum m_n \phi_{nj}^2} \quad (16.39)^{16.1}$$

Para el entrepiso 1 se tiene:

$$T_1^* = \frac{\sum m_n \phi_{n1}}{\sum m_n \phi_{n1}^2}$$

$$\therefore = \frac{m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21} + m_3 \phi_{31}}{m_1 \phi_{11}^2 + m_2 \phi_{21}^2 + m_3 \phi_{31}^2}$$

^{16.1} {1} es un vector columna de igual número de renglones que de columnas del vector renglón $\{\phi_{nj}\}^T$. Así mismo

$$\begin{aligned}
 \therefore &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.970) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(10.603)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.970)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(10.603)^2} \\
 \therefore &= \frac{62.487 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{491.767 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \\
 \therefore & \quad T_1^* = 0.127 \qquad (16.40)
 \end{aligned}$$

Para el entrepiso 2 se tiene:

$$\begin{aligned}
 T_2^* &= \frac{\sum m_n \phi_{n2}}{\sum m_n \phi_{n2}^2} \\
 \therefore &= \frac{m_1 \phi_{12} + m_2 \phi_{22} + m_3 \phi_{32}}{m_1 \phi_{12}^2 + m_2 \phi_{22}^2 + m_3 \phi_{32}^2} \\
 \therefore &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.393) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-1.061)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.393)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-1.061)^2} \\
 \therefore &= \frac{13.824 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{40.686 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \\
 \therefore & \quad T_2^* = 0.340 \qquad (16.41)
 \end{aligned}$$

Para el entrepiso 3 se tiene:

$$\begin{aligned}
 T_3^* &= \frac{\sum m_n \phi_{n3}}{\sum m_n \phi_{n3}^2} \\
 \therefore &= \frac{m_1 \phi_{13} + m_2 \phi_{23} + m_3 \phi_{33}}{m_1 \phi_{13}^2 + m_2 \phi_{23}^2 + m_3 \phi_{33}^2} \\
 \therefore &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-0.357) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(0.025)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-0.357)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(0.025)^2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore = \frac{2.934 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{5.503 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \quad \therefore T_3^* = 0.533 \quad (16.42)$$

Para verificar que la participación de masas sea de por lo menos 90% debe cumplirse que $\sum T_j^* \geq 0.9$. Al efectuar $T_1^* + T_2^* + T_3^*$ se obtiene exactamente 1.0 lo cual implica que participa el 100% de la masa total de la estructura en el análisis modal.

16.5 Aceleraciones a Considerar con Base en los Periodos de la Estructura

Recordando que los periodos de la estructura asociados a los modos de vibrar son:

$$T_1 \cong 0.260 \text{ s}$$

$$T_2 \cong 0.122 \text{ s}$$

$$T_3 \cong 0.056 \text{ s}$$

El valor de la aceleración asociada se calcula con:

$$A_{sn} = a_n g \quad (16.43)$$

Donde:

$[A_{sn}]$ = valor de la aceleración asociada a los modos de vibrar.

$[a_n]$ = coeficiente de reducción de la gravedad obtenido del espectro de diseño de sitio.

$[g]$ = aceleración de la gravedad igual a $9.81 \text{ m} / \text{s}^2$.

Para calcular a_1 asociado a un periodo $T_1 \cong 0.260$ seg, se tiene un valor $a = 0.173$ para $T = 0.3$ seg y un valor $a = 0.152$ para $T = 0.2$ seg. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_1 \cong 0.260$ s le corresponde un $a_1 = 0.186$.

$$\therefore A_{s1} = a_1 g = (0.165) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.619 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (16.44)$$

Para calcular a_2 asociado a un periodo $T_2 \cong 0.122$ seg, se tiene un valor $a = 0.127$ para $T = 0.1$ seg y un valor $a = 0.152$ para $T = 0.2$ seg. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_2 \cong 0.122$ s le corresponde un $a_2 = 0.133$.

$$\therefore A_{s2} = a_2 g = (0.133) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.305 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (16.45)$$

Para calcular a_3 asociado a un periodo $T_3 \cong 0.056$ seg, se tiene un valor $a = 0.09$ para $T = 0$ s y un valor $a = 0.127$ para $T = 0.1$ s. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_3 \cong 0.056$ s le corresponde un $a_3 = 0.111$.

$$\therefore A_{s3} = a_3 g = (0.111) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.089 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (16.46)$$

16.6 Calculo de los Desplazamientos Relativos y Finales

Calculando el factor de sobre – resistencia con base en la ecuación:

$$R = k_1 R_0 + k_2$$

Con base en las NTC – Sismo (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 60) se selecciona $R_0 = 1.75$ por ser una estructura con $Q = 2$ y $k_1 = 0.8$ por ser una estructura que tiene menos de tres crujías resistentes a sismo en la dirección de análisis.

Para calcular k_2 se hará con la fórmula:

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_a}} \right) \quad (16.47)^{16.2}$$

Los periodos naturales de la estructura son menores que el valor del inicio de la meseta del espectro de diseño por lo que k_2 se calcula conforme al reglamento:

^{16.2} Ecuación 3.5.2 del RCCDMX.

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{0.26 \text{ s}}{0.35 \text{ s}}} \right) = 0.069 \quad (16.48)$$

Calculando el factor de sobre – resistencia conocidos k_1 , k_2 y R_0 :

$$R = (0.8)(1.75) + 0.069 = 1.469 \quad (16.49)$$

Al no incluir el valor que agrega k_2 , el valor del factor de sobrerresistencia es de 1.4. Como sólo existe una diferencia del 4.697% al compararlo con la ecuación 16.49 se deja $R = 1.4$ como valor final de sobrerresistencia.

Los desplazamientos finales se determinan mediante:

$$\{d_{nj}\} = \frac{Q R T_j^* A_{sj}}{\omega_j^2} \{\Phi_{nj}\} \quad (16.50)$$

Calculo para el primer modo de vibrar ($j = 1$):

$$\begin{aligned} \{d_{n1}\} &= \frac{Q R T_1^* A_{s1}}{\omega_1^2} \{\Phi_{n1}\} \\ \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix} &= \frac{Q R T_1^* A_{s1}}{\omega_1^2} \begin{pmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{pmatrix} \\ \therefore &= \frac{(2) (1.4) (0.127) (1.619)}{585.0693753} \begin{pmatrix} 1 \\ 2.970 \\ 10.603 \end{pmatrix} \\ \therefore &= (0.000984014 \text{ m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2.970 \\ 10.603 \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.000984014 \\ 0.002922522 \\ 0.0104335 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} 0.0984014 \\ 0.2922522 \\ 1.04335 \end{pmatrix} \text{ cm} = \begin{pmatrix} 0.984014 \\ 2.922522 \\ 10.4335 \end{pmatrix} \text{ mm} \quad (16.51) \end{aligned}$$

Calculo para el segundo modo de vibrar ($j = 2$):

$$\{d_{n2}\} = \frac{Q R T_2^* A_{s2}}{\omega_2^2} \{\Phi_{n2}\}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{Bmatrix} &= \frac{Q R T_2^* A_{s2}}{\omega_2^2} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{(2) (1.4) (0.340) (1.305)}{2,645.108610} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.393 \\ -1.061 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= (0.000469682 \text{ m}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.469 \\ -1.049 \end{Bmatrix} \\
 \therefore \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.000469682 \\ 0.001159645 \\ -0.000492696 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.0469682 \\ 0.1159645 \\ -0.0492696 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 0.469682 \\ 1.159545 \\ -0.492696 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (16.52)
 \end{aligned}$$

Calculo para el tercer modo de vibrar ($j = 3$):

$$\begin{aligned}
 \{d_3\} &= \frac{Q R T_3^* A_{s3}}{\omega_3^2} \{\Phi_{n3}\} \\
 \begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{Bmatrix} &= \frac{Q R T_3^* A_{s3}}{\omega_3^2} \begin{Bmatrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{(2) (1.4) (0.533) (1.089)}{1.245986009 \cdot 10^4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.357 \\ 0.025 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= (0.000130437 \text{ m}) \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.357 \\ 0.025 \end{Bmatrix} \\
 \therefore \begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.000130437 \\ -0.000046566 \\ 0.000003261 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.0130437 \\ -0.0046566 \\ 0.0003261 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 0.130437 \\ -0.046566 \\ 0.003261 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (16.53)
 \end{aligned}$$

Como cada periodo de la estructura varía entre sí por lo menos un 10 %, el RCCDMX permite utilizar el método del SRSS para calcular el desplazamiento de cada entrepiso mediante:

$$d_{F-j} = \sqrt{\sum d_{jn}^2}$$

Donde:

$[d_{F-j}]$ = desplazamiento final de cada entrepiso.

$[\sqrt{\sum d_{jn}^2}]$ = suma de los cuadrados de cada renglón asociado al j-ésimo entrepiso de cada uno de los vectores $\{d_{nj}\}$

Para el entrepiso 1:

$$\begin{aligned}
 d_{F-1} &= \sqrt{\sum d_{1n}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{13}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{(0.984014 \text{ mm})^2 + (0.469682 \text{ mm})^2 + (0.130437 \text{ mm})^2} \\
 &\quad \quad \quad \therefore d_{F-1} \cong 1.098 \text{ mm} \tag{16.54}
 \end{aligned}$$

Para el entrepiso 2 (en mm):

$$\begin{aligned}
 d_{F-2} &= \sqrt{\sum d_{2n}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{d_{21}^2 + d_{22}^2 + d_{23}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{(2.922522 \text{ mm})^2 + (1.159545 \text{ mm})^2 + (-0.046566 \text{ mm})^2} \\
 &\quad \quad \quad \therefore d_{F-2} \cong 3.144 \text{ mm} \tag{16.55}
 \end{aligned}$$

Para el entrepiso 3 (en mm):

$$\begin{aligned}
 d_{F-3} &= \sqrt{\sum d_{3n}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{d_{31}^2 + d_{32}^2 + d_{33}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{(10.4335 \text{ mm})^2 + (-0.492696 \text{ mm})^2 + (0.003261 \text{ mm})^2} \\
 &\quad \quad \quad \therefore d_{F-3} \cong 10.445 \text{ mm} \tag{16.56}
 \end{aligned}$$

Los desplazamientos relativos se calculan al restan al desplazamiento de la masa superior, el de la masa inferior. Los desplazamiento relativos se ejemplifican por medio de $\{d_{nj}^*\}$.

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 1:

$$\begin{Bmatrix} d_{11}^* \\ d_{21}^* \\ d_{31}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000984014 \\ 0.002922522 - 0.000984014 \\ 0.0104335 - 0.002922522 \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} 0.000984014 \\ 0.001938508 \\ 0.007510978 \end{Bmatrix} m$$

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 2:

$$\begin{Bmatrix} d_{12}^* \\ d_{22}^* \\ d_{32}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000469682 \\ 0.001159645 - 0.000469682 \\ -0.000492696 - 0.001159645 \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} 0.000469682 \\ 0.000689963 \\ -0.001652341 \end{Bmatrix} m$$

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 3:

$$\begin{Bmatrix} d_{13}^* \\ d_{23}^* \\ d_{33}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000130437 \\ -0.000046566 - 0.000130437 \\ 0.000003261 - (-0.000046566) \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} 0.000130437 \\ -0.000177003 \\ 0.000049827 \end{Bmatrix} m$$

16.7 Revisión de los Desplazamientos Laterales (Distorsión de Entrepiso)

De acuerdo con el RCCDMX en sus NTC – Sismo, las distorsiones de entrepiso son la diferencia entre los desplazamientos laterales de los pisos consecutivos que lo delimitan entre la diferencia de elevaciones correspondiente (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 51).

La distorsión para el tercer entrepiso se calcula con:

$$\gamma_3 = \frac{d_{F-3}}{h_3} = \frac{10.445 \text{ mm}}{5,000 \text{ mm}} = 0.002 \quad (16.57)$$

La distorsión para el segundo entrepiso se calcula con:

$$\gamma_2 = \frac{d_{F-3} - d_{F-2}}{h_2} = \frac{10.445 \text{ mm} - 3.144 \text{ mm}}{3,500 \text{ mm}} = 0.002 \quad (16.58)$$

La distorsión para el primer entrepiso se calcula con:

$$\gamma_1 = \frac{d_{F-2} - d_{F-1}}{h_1} = \frac{3.144 \text{ mm} - 1.098 \text{ mm}}{3,000 \text{ mm}} = 0.001 \quad (16.59)$$

Los valores de la distorsión máxima ($\gamma_{\text{máx}}$) para estructuras de concreto vienen dados en el RCCDMX en su apartado 4.2 *Valores de Q y γ_{max}* de las NTC – Sismo (Gobierno de la CDMX, 2017, págs. 61 - 63). En ese apartado se estipula que la distorsión máxima con estructuración a base de marcos, para un $Q = 2$ es $\gamma_{\text{máx}} = 0.015$.

Como las distorsiones γ_1 , γ_2 y γ_3 son menores que $\gamma_{\text{máx}}$ se acepta la revisión de la estructura por distorsión de entrepisos.

16.8 Calculo de las Fuerzas Cortantes (Cortantes Basales)

Las fuerzas cortantes se determinan por medio de la ecuación:

$$\{V_{nj}\} = k_j \{d_{nj}^*\} \quad (16.60)$$

Donde:

$\{V_{nj}\}$ = vector de fuerzas cortantes.

$[k_j]$ = rigidices denotadas en la matriz de rigidez para análisis dinámico [K].

$\{d_{nj}^*\}$ = vector de desplazamientos relativos.

Para $j = 1$:

$$\{V_{n1}\} = k_1 \{d_{n1}^*\}$$

$$\begin{Bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{Bmatrix} = k_1 \begin{Bmatrix} d_{11}^* \\ d_{21}^* \\ d_{31}^* \end{Bmatrix}$$

$$\left(36,558.620 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \right) \begin{Bmatrix} 0.000984014 \\ 0.001938508 \\ 0.007510978 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \begin{pmatrix} 35.974 \\ 70.869 \\ 274.591 \end{pmatrix} \text{ ton} \\ &\therefore \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35.974 \\ 70.869 \\ 274.591 \end{pmatrix} \text{ ton} \end{aligned} \quad (16.61)$$

Para $j = 2$:

$$\begin{aligned} \{V_{n2}\} &= k_2 \{d_{n2}^*\} \\ \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} &= k_2 \begin{pmatrix} d_{12}^* \\ d_{22}^* \\ d_{32}^* \end{pmatrix} \\ \vdots &= \left(17,133.545 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \right) \begin{pmatrix} 0.000469682 \\ 0.000689963 \\ -0.001652341 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 8.047 \\ 11.822 \\ -28.310 \end{pmatrix} \text{ ton} \\ &\therefore \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.047 \\ 11.822 \\ -28.310 \end{pmatrix} \text{ ton} \end{aligned} \quad (16.62)$$

Para $j = 3$:

$$\begin{aligned} \{V_{n3}\} &= k_3 \{d_{n3}\} \\ \begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{pmatrix} &= k_3 \begin{pmatrix} d_{13}^* \\ d_{23}^* \\ d_{33}^* \end{pmatrix} \\ \vdots &= \left(3,169.535 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \right) \begin{pmatrix} 0.000130437 \\ -0.000177003 \\ 0.000049827 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 0.413 \\ -0.561 \\ 0.158 \end{pmatrix} \text{ ton} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.413 \\ -0.561 \\ 0.158 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad (16.63)$$

Aplicando el SRSS para determinar los cortantes sobre los grados de libertad donde se concentran las masas con:

$$V_{F-j} = \sqrt{\sum V_{jn}^2} \quad (16.64)$$

Donde:

$[V_{F-j}]$ = cortante final de cada entrepiso.

$[\sqrt{\sum V_{jn}^2}]$ = suma de los cuadrados de cada renglón asociado al j-ésimo entrepiso de cada uno de los vectores $\{V_{nj}\}$

Para el entrepiso 1 (en ton):

$$\begin{aligned} V_{F-1} &= \sqrt{\sum V_{1n}^2} \\ &= \sqrt{V_{11}^2 + V_{12}^2 + V_{13}^2} \\ &= \sqrt{(35.974 \text{ ton})^2 + (8.047 \text{ ton})^2 + (0.413 \text{ ton})^2} \\ &\therefore V_{F-1} = 36.865 \text{ ton} \cong 37 \text{ ton} \end{aligned} \quad (16.65)$$

Para el entrepiso 2 (en ton):

$$\begin{aligned} V_{F-2} &= \sqrt{\sum V_{2n}^2} \\ &= \sqrt{V_{21}^2 + V_{22}^2 + V_{23}^2} \\ &= \sqrt{(70.869 \text{ ton})^2 + (11.822 \text{ ton})^2 + (-0.561 \text{ ton})^2} \\ &\therefore V_{F-2} = 71.850 \text{ ton} \cong 72 \text{ ton} \end{aligned} \quad (16.66)$$

Para el entrepiso 3 (en ton):

$$\begin{aligned}
 V_{F-3} &= \sqrt{\sum V_{3n}^2} \\
 &\therefore = \sqrt{V_{31}^2 + V_{32}^2 + V_{33}^2} \\
 &\therefore = \sqrt{(274.591 \text{ ton})^2 + (-28.310 \text{ ton})^2 + (0.158 \text{ ton})^2} \\
 &\therefore V_{F-3} = 276.047 \text{ ton} \cong 277 \text{ ton} \tag{16.67}
 \end{aligned}$$

16.9 Revisión por Cortante Basal Mínimo

Dentro del RCCDMX se estipula, en las NTC – Sismo, que el cortante basal obtenido en la dirección del análisis modal no sea menor que $a_{\text{mín}}W_0$, donde $a_{\text{mín}}$ se tomará igual a 0.03 cuando $T_s < 0.5$ seg o 0.05 si $T_s \geq 1$ seg, siendo T_s el periodo dominante más largo del terreno en el sitio de interés (parámetro obtenido en el espectro de diseño del SASID). Para valores de T_s comprendidos entre 0.5 y 1.0, $a_{\text{mín}}$ se hará variar linealmente entre 0.03 y 0.05 (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 51).

$$V_{F-j} \geq a_{\text{mín}}W_0 \tag{16.68}$$

W_0 = es el peso de la estructura que actúa en la base del sistema estructural.

Para la estructura en estudio $T_s = 0.485$ seg, por lo tanto, $a_{\text{mín}} = 0.03$. Calculando $a_{\text{mín}}W_0$:

$$\begin{aligned}
 a_{\text{mín}}W_0 &= (0.03) \left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} + 5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} + 3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\
 &\therefore a_{\text{mín}}W_0 = 4.179 \text{ ton} \tag{16.69}
 \end{aligned}$$

Como todos los valores V_{F-j} son mayores que $a_{\text{mín}}W_0$ se acepta la revisión por cortante basal mínimo.

16.10 Determinación de Cargas Debidas a Acciones Permanentes, Variables y Accidentales

Los factores de carga^{16.3}, establecidos en las NTC – Edificaciones, se establece que el factor de carga es $F_c = 1.1$ cuando la estructura en estudio esté sujeta a acciones permanentes, variables y accidentales (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 692). Lo anterior mencionado puede entenderse como cargas debido a sismo.

Las cargas laterales de la estructura serán cargas puntuales en cada uno de los entrepisos donde fue concentrada la masa; mientras que las cargas gravitacionales se ejemplificarán como cargas distribuidas uniformemente (cargas rectangulares) sobre cada una de las vigas de la estructura.

La carga lateral de la estructura para la azotea es:

$$\begin{aligned} F_{u-3}(t) &= F_C V_{F-3} \\ \vdots &= (1.1)(277 \text{ ton}) \\ &\therefore F_{u-3}(t) = 304.7 \text{ ton} \end{aligned} \quad (16.70)$$

La carga lateral para el entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned} F_{u-2}(t) &= F_C (V_{F-2} - V_{F-3}) \\ \vdots &= (1.1)(72 \text{ ton} - 277 \text{ ton}) \\ &\therefore F_{u-2}(t) = -225.5 \text{ ton} \end{aligned} \quad (16.71)$$

La carga lateral para el entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned} F_{u-1}(t) &= F_C [V_{F-1} - (V_{F-2} - V_{F-3})] \\ \vdots &= (1.1)[37 \text{ ton} - (72 \text{ ton} - 277 \text{ ton})] \\ &\therefore F_{u-1}(t) = 266.2 \text{ ton} \end{aligned} \quad (16.72)$$

La carga gravitacional de la azotea es:

$$W_{u-3} = F_C \left(\frac{m_3 g}{L} \right)$$

^{16.3} Definición sustraída del RCCDMX: Factor de seguridad parcial mayor que la unidad que se aplica a las cargas calculadas para cubrir la incertidumbre que se tiene para su determinación (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 684).

$$\begin{aligned} \therefore &= 1.1 \left[\frac{\left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{10 \text{ m}} \right] \\ \therefore &W_{u-3} = 4.208 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \end{aligned} \quad (16.73)$$

La carga gravitacional del entrespacio 2 es:

$$\begin{aligned} W_{u-2} &= F_C \left(\frac{m_2 g}{L} \right) \\ \therefore &= 1.1 \left[\frac{\left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{10 \text{ m}} \right] \\ \therefore &W_{u-2} = 5.935 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 6 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \end{aligned} \quad (16.74)$$

La carga gravitacional del entrespacio 1 es:

$$\begin{aligned} W_{u-1} &= F_C \left(\frac{m_2 g}{L} \right) \\ \therefore &= 1.1 \left[\frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{10 \text{ m}} \right] \\ \therefore &W_{u-1} = 5.180 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \end{aligned} \quad (16.75)$$

La representación de cargas laterales y gravitacionales en la estructura son:

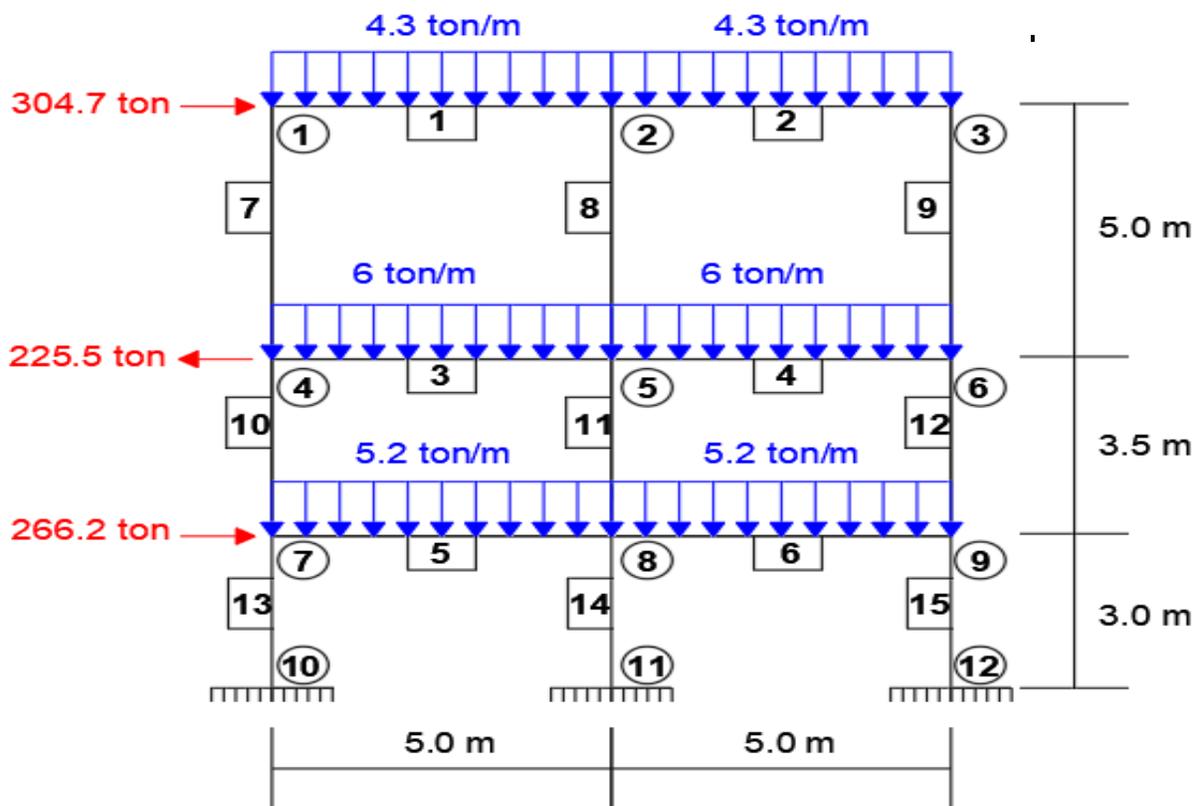


Figura XVI.5. Representación gráfica de las cargas por caso sísmico.

16.11 Determinación de Cargas Debidas a Acciones permanentes y Variables

El lector pudo haber notado que para el caso sísmico, las cargas laterales de la estructura cambiaron, aunque no significativamente, mientras que las cargas sobre las vigas (cargas gravitacionales) se mantuvieron iguales. Por lo tanto, las cargas gravitacionales del caso estático serán las mismas que las del capítulo XV (figura XV.12 de la página 484).

16.12 Análisis Estructural para el Caso Sísmico

El análisis estructural se realizará al marco de la figura XVI.5.

Todas las matrices de rigidez para análisis dinámico $[K]$ fueron encontradas a partir de la matriz de la estructura $[k_{ij}]$

Esta misma matriz de la cual su condensación estática arrojó $[K]$ como resultado permite establecer mediante $[k_{ij}]\{\Delta\} + \{P\} = \{0\}$ los valores de las rotaciones angulares y desplazamientos lineales a partir de $\{\Delta\} = -[k_{ij}]^{-1}\{P\}$.

Siendo:

$\{\Delta\}$ = vector de desplazamientos que contiene desplazamientos lineales y rotaciones angulares.

$\{P\}$ = vector de fuerzas que contiene los momentos de empotramiento perfecto y fuerzas laterales u horizontales dentro de una estructura.

$[k_{ij}]$ = matriz de rigidez de la estructura en coordenadas globales.

Los casos de análisis estructural por resolver serán únicamente los casos con cargas laterales provenientes del análisis modal, dado que si se presenta la solución de estos casos el lector podrá resolver los casos estáticos sin menor dificultad dado que no presenta cargas laterales.

La matriz de rigidez de la estructura $[k_{ij}]$ se encuentra en la página 507, así que para encontrar el vector $\{\Delta\}$ es necesario definir el vector de fuerza $\{P\}$.

La ventaja de haber considerado las cargas gravitacionales sobre las vigas como cargas uniformemente distribuidas, permite tomar los momentos de empotramiento perfecto con el mismo valor que al considerar únicamente deformación debida a flexión^{16.4}, sin embargo, las fuerzas P_1 , P_2 y P_3 cambian dentro del vector de cargas $\{P\}$.

^{16.4} En el capítulo XX se dan formulas con las cuales el lector podrá determinar los momentos de empotramiento considerando deformación por cortante en vigas.

Como la estructura no presenta condiciones de asentamiento y/o desplazamiento en los apoyos, ni está sobre algún tipo de apoyo elástico, el vector de fuerzas es un vector columna con 12 filas que se muestra a continuación:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\left(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} \\ \frac{\left(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} - \frac{\left(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} \\ \frac{\left(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} \\ -\frac{\left(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} \\ \frac{\left(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} - \frac{\left(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} \\ \frac{\left(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} \\ \frac{\left(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} \\ -\frac{\left(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} \\ \frac{\left(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} - \frac{\left(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} \\ \frac{\left(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) (5\text{m})^2}{12} \\ -304.7 \text{ ton} \\ 225.5 \text{ ton} \\ -266.2 \text{ ton} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{215}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{215}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -\frac{25}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{25}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -\frac{65}{6} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{65}{6} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -304.7 \text{ ton} \\ 225.5 \text{ ton} \\ -266.2 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

Al realizar la operación $\{\Delta\} = -[k_{ij}]^{-1}\{P\}$ se obtiene:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02397 \text{ rad} \\ 0.01913 \text{ rad} \\ 0.02347 \text{ rad} \\ 0.01664 \text{ rad} \\ 0.01453 \text{ rad} \\ 0.01642 \text{ rad} \\ 0.01012 \text{ rad} \\ 0.00886 \text{ rad} \\ 0.00991 \text{ rad} \\ 0.19957 \text{ m} \\ 0.07092 \text{ m} \\ 0.02320 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (16.76)$$

Los elementos mecánicos se obtienen mediante la fórmula:

$$\{F_i\} = [k_i]\{\delta_i\} + \{P_0^{(i)}\} \quad (16.77)^{16.5}$$

Calculando cortantes y momentos en las vigas y columnas (se utilizan unidades en toneladas y metro):

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= [k_1]\{\delta_1\} + \{P_0^{(1)}\} \\ \vdots &= \frac{27(140,000\sqrt{280})}{1,275,920} \begin{bmatrix} 100.5184 & 49.4816 & -30 & 30 \\ 49.4816 & 100.5184 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.02397 \\ 0.01913 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -215/24 \\ 215/24 \\ 43/4 \\ 43/4 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} 157.3996 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 163.0721 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -53.3443 \text{ ton} \\ 74.8443 \text{ ton} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_2\} &= [k_2]\{\delta_2\} + \{P_0^{(2)}\} \\ \vdots &= \frac{27(140,000\sqrt{280})}{1,275,920} \begin{bmatrix} 100.5184 & 49.4816 & -30 & 30 \\ 49.4816 & 100.5184 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01913 \\ 0.02347 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -215/24 \\ 215/24 \\ 43/4 \\ 43/4 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

^{16.5} Los componentes de esta fórmula se explican en las páginas 487 – 488.

$$\vdots = \begin{pmatrix} 143.9310 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 172.8290 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -52.6020 \text{ ton} \\ 74.1020 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_3\} = [k_3]\{\delta_3\} + \{P_0^{(3)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401(140,000\sqrt{280})}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01664 \\ 0.01453 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25/2 \\ 25/2 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} 205.5807 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 220.6594 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -70.2480 \text{ ton} \\ 100.2480 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_4\} = [k_4]\{\delta_4\} + \{P_0^{(4)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401(140,000\sqrt{280})}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01453 \\ 0.01642 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -25/2 \\ 25/2 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} 194.6787 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 228.5771 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -69.6511 \text{ ton} \\ 99.6511 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_5\} = [k_5]\{\delta_5\} + \{P_0^{(5)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401(140,000\sqrt{280})}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01012 \\ 0.00886 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -65/6 \\ 65/6 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} 121.8843 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 137.6501 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -38.9069 \text{ ton} \\ 64.9069 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_6\} = [k_6]\{\delta_6\} + \{P_0^{(6)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401(140,000\sqrt{280})}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.00886 \\ 0.00991 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -65/6 \\ 65/6 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} 115.0309 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 141.6049 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -38.3272 \text{ ton} \\ 64.3272 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_7\} = [k_7]\{\delta_7\} + \{P_0^{(7)}\}$$

$$\vdots = \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{155,927,040} \begin{bmatrix} 100.98784 & 49.01216 & -30 & 30 \\ 49.01216 & 100.98784 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01664 \\ 0.02397 \\ 0.07092 \\ 0.19957 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} -253.5526 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -157.3996 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -82.1904 \text{ ton} \\ 82.1904 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_8\} = [k_8]\{\delta_8\} + \{P_0^{(8)}\}$$

$$\vdots = \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{155,927,040} \begin{bmatrix} 100.98784 & 49.01216 & -30 & 30 \\ 49.01216 & 100.98784 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01453 \\ 0.01913 \\ 0.07092 \\ 0.19957 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} -367.4208 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -307.0031 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -134.8848 \text{ ton} \\ 134.8848 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_9\} = [k_9]\{\delta_9\} + \{P_0^{(9)}\}$$

$$\vdots = \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{155,927,040} \begin{bmatrix} 100.98784 & 49.01216 & -30 & 30 \\ 49.01216 & 100.98784 & -30 & 30 \\ -30 & -30 & 12 & -12 \\ 30 & 30 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01642 \\ 0.02347 \\ 0.07092 \\ 0.19957 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} -265.2949 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -172.8290 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -87.6248 \text{ ton} \\ 87.6248 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_{10}\} = [k_{10}]\{\delta_{10}\} + \{P_0^{(10)}\}$$

$$\vdots = \frac{49(140,000\sqrt{280})}{162,096} \begin{bmatrix} 49.98784 & 23.51216 & -21 & 21 \\ 23.51216 & 49.98784 & -21 & 21 \\ -21 & -21 & 12 & -12 \\ 21 & 21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01012 \\ 0.01664 \\ 0.02320 \\ 0.07092 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} -74.3429 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 47.9719 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -7.5346 \text{ ton} \\ 7.5346 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_{11}\} = [k_{11}]\{\delta_{11}\} + \{P_0^{(11)}\}$$

$$\vdots = \frac{49(140,000\sqrt{280})}{162,096} \begin{bmatrix} 49.98784 & 23.51216 & -21 & 21 \\ 23.51216 & 49.98784 & -21 & 21 \\ -21 & -21 & 12 & -12 \\ 21 & 21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.00886 \\ 0.01453 \\ 0.02320 \\ 0.07092 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} -154.1504 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -47.9173 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -57.7336 \text{ ton} \\ 57.7336 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_{12}\} = [k_{12}]\{\delta_{12}\} + \{P_0^{(12)}\}$$

$$\vdots = \frac{49(140,000\sqrt{280})}{162,096} \begin{bmatrix} 49.98784 & 23.51216 & -21 & 21 \\ 23.51216 & 49.98784 & -21 & 21 \\ -21 & -21 & 12 & -12 \\ 21 & 21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.00991 \\ 0.01642 \\ 0.02320 \\ 0.07092 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} -85.4792 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 36.7179 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -13.9318 \text{ ton} \\ 13.9318 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_{13}\} = [k_{13}]\{\delta_{13}\} + \{P_0^{(13)}\}$$

$$\vdots = \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{35,956,224} \begin{bmatrix} 36.98784 & 17.01216 & -18 & 18 \\ 17.01216 & 36.98784 & -18 & 18 \\ -18 & -18 & 12 & -12 \\ 18 & 18 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01012 \\ 0 \\ 0.02320 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} -268.8674 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -47.5414 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -105.4696 \text{ ton} \\ 105.4696 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_{14}\} = [k_{14}]\{\delta_{14}\} + \{P_0^{(14)}\}$$

$$\vdots = \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{35,956,224} \begin{bmatrix} 36.98784 & 17.01216 & -18 & 18 \\ 17.01216 & 36.98784 & -18 & 18 \\ -18 & -18 & 12 & -12 \\ 18 & 18 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.00886 \\ 0 \\ 0.02320 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} -292.3193 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -98.5305 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -130.2833 \text{ ton} \\ 130.2833 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{F_{15}\} &= [k_{15}]\{\delta_{15}\} + \{P_0^{(15)}\} \\ \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{35,956,224} \begin{bmatrix} 36.98784 & 17.01216 & -18 & 18 \\ 17.01216 & 36.98784 & -18 & 18 \\ -18 & -18 & 12 & -12 \\ 18 & 18 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.00991 \\ 0 \\ 0.02320 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} -272.8157 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -56.1258 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -109.6471 \text{ ton} \\ 109.6471 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La distribución de momentos y fuerzas cortantes se exhibe en la siguiente página. Los diagramas de elementos mecánicos se dejan al lector. Fácilmente podrá corroborar que tienen la misma forma de graficación que los ilustrados en el capítulo XV pero con los valores que se presentan en la figura XVI.6.

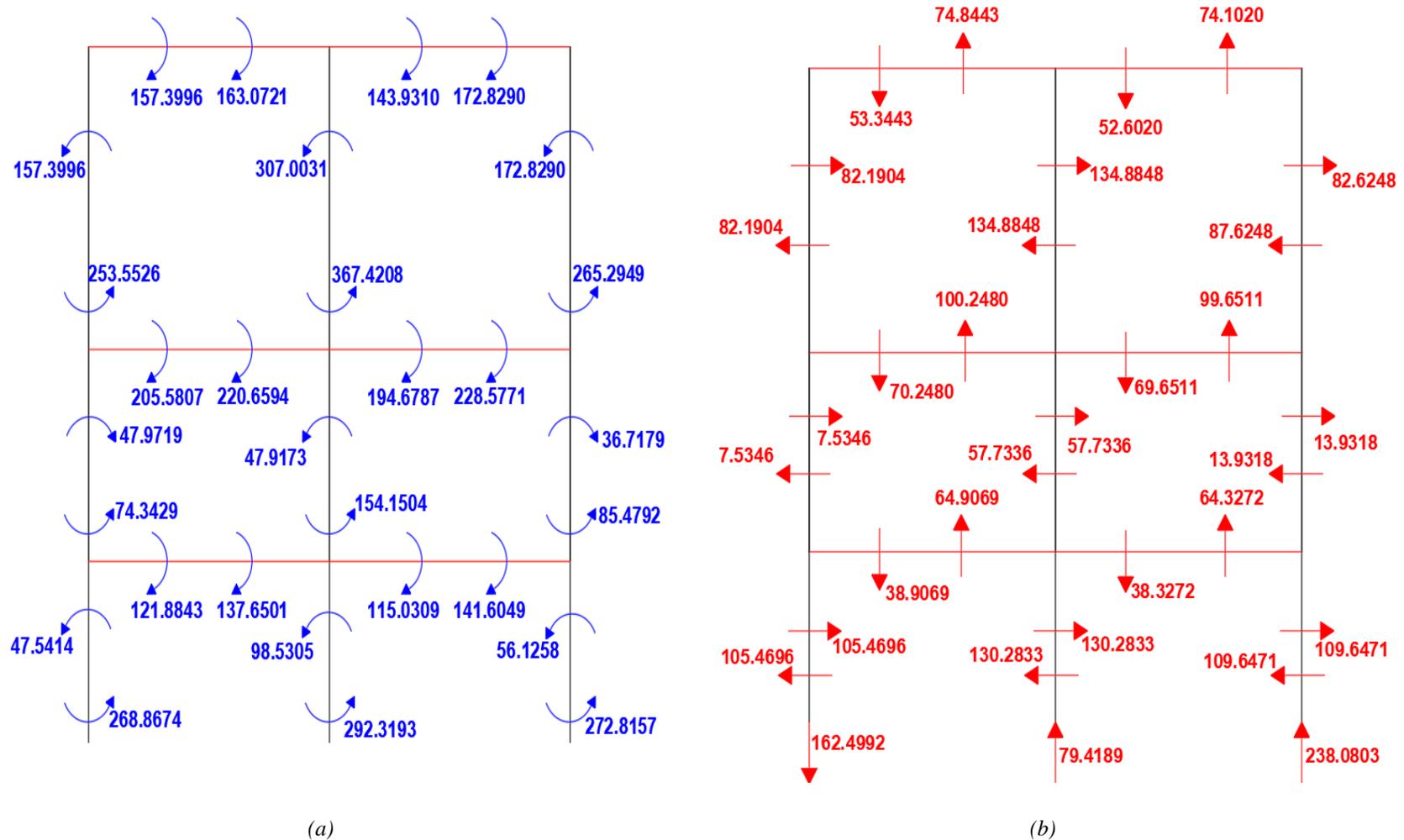


Figura XVI.6. Distribución de (a) momentos (ton-m) y (b) cortantes (ton)

Capítulo XVII:

**Análisis Dinámico Modal Espectral
Y Análisis Estructural de Marcos
Perimetrales Considerando Deformación
Por Flexión y Axial en Columnas**

- 17.1 Determinación de la Matriz de Rigidez para Análisis Dinámico [K]
- 17.2 Calculo de la Frecuencia y Periodo a Través de Eigenvalores
- 17.3 Calculo de los Modos de Vibrar a Través de Eigenvectores
- 17.4 Factor de Participación de Masas
- 17.5 Aceleraciones a Considerar con Base en los Periodos de la Estructura
- 17.6 Calculo de los Desplazamientos Relativos y Finales
- 17.7 Revisión de los Desplazamientos Laterales (Distorsión de Entrepiso)
- 17.8 Calculo de las Fuerzas Cortantes (Cortantes Basales)
- 17.9 Revisión por Cortante Basal Mínimo
- 17.10 Determinación de Cargas Debidas a Acciones Permanentes, Variables y Accidentales
- 17.11 Determinación de Cargas Debidas a Acciones Permanentes y Variables
- 17.12 Análisis Estructural para el Caso Sísmico

XVII. Análisis Dinámico Modal Espectral y Análisis Estructural de Marcos Perimetrales Considerando Deformación por Flexión y Axial en Columnas

17.1 Determinación de la Matriz de Rigidez para Análisis Dinámico [K]

Al considerar deformación axial en columnas, la numeración de los grados de libertad aumenta en comparación del total que se tiene al considerar efectos de deformación por flexión o de flexión con cortante. El número de grados de libertad que deben ser agregados es uno por cada nodo de entrepiso. Para la estructura que se ha venido estudiando se debe agregar nueve grados de libertad quedando la siguiente numeración:

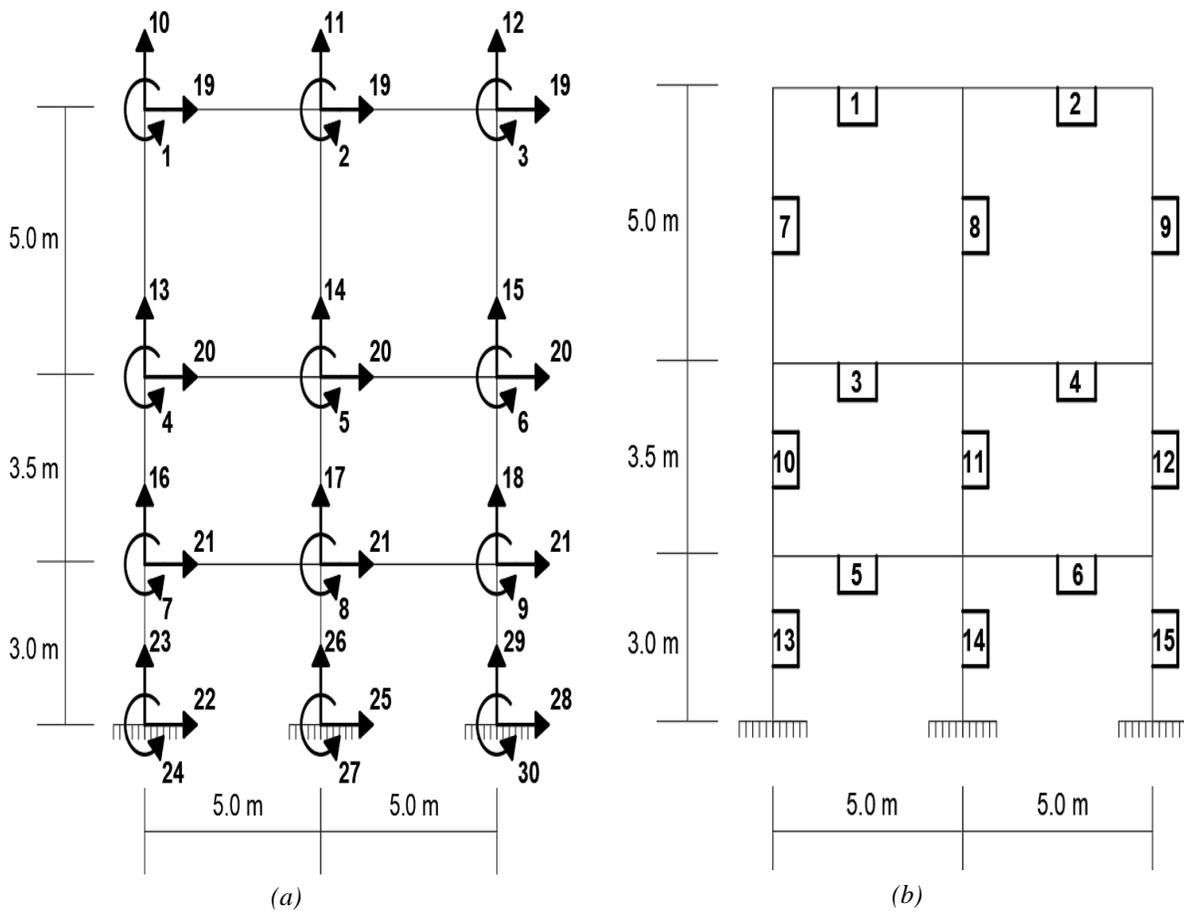


Figura XVII.1. (a) Numeración de los grados de libertad (b) numeración de los elementos discretizados.

Antes de calcular las matrices de rigidez en coordenadas locales, es necesario hacer una aclaración importante la cual permitirá reducir la matriz de rigidez de las vigas. Como se asignó a la estructura la condición de diafragma rígido, se supondrá un único valor de desplazamiento por cada entrepiso. Bajo esta condición (para las vigas) tomaremos sólo la parte de la matriz que considera la rigidez axial, es decir:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

Que llevado al planteamiento matricial para conocer fuerzas axiales se tendría:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{x1} \\ \Delta_{x2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Bajo la condición de diafragma rígido ocurre que $\Delta_{x1} = \Delta_{x2}$, entonces:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{x1} \\ \Delta_{x1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} \Delta_{x1} - \frac{EA}{L} \Delta_{x1} + F_{x1} = 0 \quad \therefore \quad F_{x1} = 0$$

$$\frac{EA}{L} \Delta_{x1} - \frac{EA}{L} \Delta_{x1} + F_{x2} = 0 \quad \therefore \quad F_{x2} = 0$$

Como se presenta que $F_{x1} = F_{x2} = 0$, en el sentido estricto del método de la rigidez matricial, las vigas no presentarían carga axial, sin embargo, como se vio en capítulos anteriores, los cortantes en columnas se traspasan como carga axial a las vigas.

Con lo mencionado anteriormente, la ecuación 12.59, despreciando la deformación cortante ($c = 0$) arroja la siguiente matriz de rigidez en coordenadas locales:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de una viga
 considerando deformación a flexión

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez de una columna
 considerando deformación a flexión, pero sólo
 deforción axial en columnas

Para determinar todas las matrices de rigidez, L está dada en metros, y como el modulo de elasticidad es constante para toda la estructura ($140,000\sqrt{280}$ ton / m²) se denota únicamente como E. Los valores de rigidez debido a flexión resultarán ser los mismos que los del capítulo XV.

Para el elemento 1 se tiene (se omiten unidades):

$$[k_1] = \begin{bmatrix} \frac{4E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5} & \frac{2E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5} & -\frac{6E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5^2} & \frac{6E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5^2} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \frac{2E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5} & \frac{4E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5} & -\frac{6E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5^2} & \frac{6E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5^2} & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ \frac{6E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5} & -\frac{6E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5} & \frac{12E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5^2} & -\frac{12E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5^2} & 0 & 0 & \mathbf{11} \\ \frac{6E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5^2} & -\frac{6E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5^2} & -\frac{12E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5^3} & \frac{12E(0.5)\left(\frac{0.3 \cdot 0.6^3}{12}\right)}{5^3} & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ \frac{5^2}{0} & \frac{5^2}{0} & \frac{5^3}{0} & \frac{5^3}{0} & 0 & 0 & \mathbf{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{19} \end{bmatrix}$$

$$\therefore [k_1] = \begin{bmatrix} \frac{27E}{12,500} & \frac{27E}{25,500} & -\frac{81E}{125,000} & \frac{81E}{125,000} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \frac{27E}{25,500} & \frac{27E}{12,500} & -\frac{81E}{125,000} & \frac{81E}{125,000} & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ \frac{81E}{125,000} & -\frac{81E}{125,000} & \frac{81}{312,500} & -\frac{81}{312,500} & 0 & 0 & \mathbf{10} \\ \frac{81E}{125,000} & \frac{81E}{125,000} & \frac{81}{312,500} & \frac{81}{312,500} & 0 & 0 & \mathbf{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{19} \end{bmatrix}$$

Como la sección 1 y 2 tienen la misma longitud y sección transversa, la matriz de rigidez del elemento 2 será:

$$[k_2] = \begin{bmatrix} \frac{27E}{12,500} & \frac{27E}{25,500} & -\frac{81E}{125,000} & \frac{81E}{125,000} & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ \frac{27E}{25,500} & \frac{27E}{12,500} & -\frac{81E}{125,000} & \frac{81E}{125,000} & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ \frac{81E}{125,000} & -\frac{81E}{125,000} & \frac{81}{312,500} & -\frac{81}{312,500} & 0 & 0 & \mathbf{11} \\ \frac{81E}{125,000} & \frac{81E}{125,000} & \frac{81}{312,500} & \frac{81}{312,500} & 0 & 0 & \mathbf{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{19} \end{bmatrix}$$

Para el elemento 3 se tiene (se omiten unidades):

$$[k_3] = \begin{bmatrix} \frac{4E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5} & \frac{2E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5} & -\frac{6E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^2} & \frac{6E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^2} & 0 & 0 \\ \frac{2E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5} & \frac{4E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5} & -\frac{6E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^2} & \frac{6E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^2} & -\frac{6E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^2} & \frac{12E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^3} & -\frac{12E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^3} & 0 & 0 \\ \frac{6E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^2} & \frac{6E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^2} & -\frac{12E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^3} & \frac{12E(0.5)\left(\frac{0.35 \cdot 0.7^3}{12}\right)}{5^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 13 \\ 14 \\ 20 \\ 20 \end{matrix}$$

$$\therefore [k_3] = \begin{bmatrix} \frac{2401E}{600,000} & \frac{2401E}{1,200,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401E}{1,200,000} & \frac{2401E}{600,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & 0 & 0 \\ -\frac{2401E}{2,000,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{5,000,000} & -\frac{2401E}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & -\frac{2401E}{5,000,000} & \frac{2401E}{5,000,000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 13 \\ 14 \\ 20 \\ 20 \end{matrix}$$

Los elementos 4, 5 y 6 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$[k_4] = \begin{bmatrix} \frac{2401E}{600,000} & \frac{2401E}{1,200,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401E}{1,200,000} & \frac{2401E}{600,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & 0 & 0 \\ -\frac{2401E}{2,000,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{5,000,000} & -\frac{2401E}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & -\frac{2401E}{5,000,000} & \frac{2401E}{5,000,000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 14 \\ 15 \\ 20 \\ 20 \end{matrix}$$

$$[k_5] = \begin{bmatrix}
 \frac{2401E}{600,000} & \frac{2401E}{1,200,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & 0 & 0 \\
 \frac{2401E}{1,200,000} & \frac{2401E}{600,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & 0 & 0 \\
 -\frac{2401E}{2,000,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{5,000,000} & -\frac{2401E}{5,000,000} & 0 & 0 \\
 \frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & -\frac{2401E}{5,000,000} & \frac{2401E}{5,000,000} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 16 \\ 17 \\ 21 \\ 21 \end{matrix}$$

$$[k_6] = \begin{bmatrix}
 \frac{2401E}{600,000} & \frac{2401E}{1,200,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & 0 & 0 \\
 \frac{2401E}{1,200,000} & \frac{2401E}{600,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & 0 & 0 \\
 -\frac{2401E}{2,000,000} & -\frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{5,000,000} & -\frac{2401E}{5,000,000} & 0 & 0 \\
 \frac{2401E}{2,000,000} & \frac{2401E}{2,000,000} & -\frac{2401E}{5,000,000} & \frac{2401E}{5,000,000} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \begin{matrix} 8 \\ 9 \\ 17 \\ 18 \\ 21 \\ 21 \end{matrix}$$

Para el elemento 7 se tiene (se omiten unidades):

$$[k_7] = \begin{bmatrix}
 \frac{4E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5} & \frac{2E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5} & \frac{6E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^2} & -\frac{6E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^2} & 0 & 0 \\
 \frac{2E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5} & \frac{4E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5} & \frac{6E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^2} & -\frac{6E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^2} & 0 & 0 \\
 \frac{6E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^2} & \frac{6E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^2} & \frac{12E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^3} & -\frac{12E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^3} & 0 & 0 \\
 -\frac{6E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^2} & -\frac{6E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^2} & -\frac{12E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^3} & \frac{12E(0.7) \left(\frac{0.7^4}{12}\right)}{5^3} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E(0.7^2)}{5} & -\frac{E(0.7^2)}{5} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E(0.7^2)}{5} & \frac{E(0.7^2)}{5}
 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 20 \\ 19 \\ 13 \\ 10 \end{matrix}$$

$$\therefore [k_7] = \begin{bmatrix} \frac{16,807E}{1,500,000} & \frac{16807 E}{3,000,000} & \frac{16,807 E}{5,000,000} & -\frac{16,807 E}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{16807 E}{3,000,000} & \frac{16,807E}{1,500,000} & \frac{16,807 E}{5,000,000} & -\frac{16,807 E}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{5,000,000}{16,807 E} & \frac{5,000,000}{16,807 E} & \frac{12,500,000}{16,807 E} & -\frac{12,500,000}{16,807 E} & 0 & 0 \\ -\frac{5,000,000}{16,807 E} & -\frac{5,000,000}{16,807 E} & -\frac{12,500,000}{16,807 E} & \frac{12,500,000}{16,807 E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49 E}{500} & -\frac{49 E}{500} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49 E}{500} & \frac{49 E}{500} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 1 \\ 20 \\ 19 \\ 13 \\ 10 \end{matrix}$$

Los elementos 8 y 9 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$[k_8] = \begin{bmatrix} \frac{16,807E}{1,500,000} & \frac{16807 E}{3,000,000} & \frac{16,807 E}{5,000,000} & -\frac{16,807 E}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{16807 E}{3,000,000} & \frac{16,807E}{1,500,000} & \frac{16,807 E}{5,000,000} & -\frac{16,807 E}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{5,000,000}{16,807 E} & \frac{5,000,000}{16,807 E} & \frac{12,500,000}{16,807 E} & -\frac{12,500,000}{16,807 E} & 0 & 0 \\ -\frac{5,000,000}{16,807 E} & -\frac{5,000,000}{16,807 E} & -\frac{12,500,000}{16,807 E} & \frac{12,500,000}{16,807 E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49 E}{500} & -\frac{49 E}{500} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49 E}{500} & \frac{49 E}{500} \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 20 \\ 19 \\ 14 \\ 11 \end{matrix}$$

$$[k_9] = \begin{bmatrix} \frac{16,807E}{1,500,000} & \frac{16807 E}{3,000,000} & \frac{16,807 E}{5,000,000} & -\frac{16,807 E}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{16807 E}{3,000,000} & \frac{16,807E}{1,500,000} & \frac{16,807 E}{5,000,000} & -\frac{16,807 E}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{5,000,000}{16,807 E} & \frac{5,000,000}{16,807 E} & \frac{12,500,000}{16,807 E} & -\frac{12,500,000}{16,807 E} & 0 & 0 \\ -\frac{5,000,000}{16,807 E} & -\frac{5,000,000}{16,807 E} & -\frac{12,500,000}{16,807 E} & \frac{12,500,000}{16,807 E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49 E}{500} & -\frac{49 E}{500} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49 E}{500} & \frac{49 E}{500} \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 20 \\ 19 \\ 15 \\ 12 \end{matrix}$$

Para el elemento 10 se tiene (se omiten unidades):

$$[k_{10}] = \begin{bmatrix} \frac{4E(0.7)}{3.5} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{2E(0.7)}{3.5} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{6E(0.7)}{3.5^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & -\frac{6E(0.7)}{3.5^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & 0 & 0 \\ \frac{2E(0.7)}{3.5} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{4E(0.7)}{3.5} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{6E(0.7)}{3.5^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & -\frac{6E(0.7)}{3.5^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & 0 & 0 \\ \frac{6E(0.7)}{3.5^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{6E(0.7)}{3.5^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{12E(0.7)}{3.5^3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & -\frac{12E(0.7)}{3.5^3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & 0 & 0 \\ \frac{6E(0.7)}{3.5^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & -\frac{6E(0.7)}{3.5^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & -\frac{12E(0.7)}{3.5^3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{12E(0.7)}{3.5^3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E(0.7^2)}{3.5} & -\frac{E(0.7^2)}{3.5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E(0.7^2)}{3.5} & \frac{E(0.7^2)}{3.5} \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 4 \\ 21 \\ 20 \\ 16 \\ 13 \end{matrix}$$

$$\therefore [k_{10}] = \begin{bmatrix} \frac{2401 E}{150,000} & \frac{2401 E}{300,000} & \frac{343 E}{50,000} & -\frac{343 E}{50,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401 E}{300,000} & \frac{2401 E}{150,000} & \frac{343 E}{50,000} & -\frac{343 E}{50,000} & 0 & 0 \\ \frac{343 E}{50,000} & \frac{343 E}{50,000} & \frac{49 E}{12,500} & -\frac{49 E}{12,500} & 0 & 0 \\ -\frac{343 E}{50,000} & -\frac{343 E}{50,000} & -\frac{49 E}{12,500} & \frac{49 E}{12,500} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7 E}{50} & -\frac{7 E}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7 E}{50} & \frac{7 E}{50} \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 4 \\ 21 \\ 20 \\ 16 \\ 13 \end{matrix}$$

Los elementos 11 y 12 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix}
 \frac{2401 E}{150,000} & \frac{2401 E}{300,000} & \frac{343 E}{50,000} & -\frac{343 E}{50,000} & 0 & 0 & \mathbf{8} \\
 \frac{2401 E}{300,000} & \frac{2401 E}{150,000} & \frac{343 E}{50,000} & -\frac{343 E}{50,000} & 0 & 0 & \mathbf{5} \\
 \frac{343 E}{50,000} & \frac{343 E}{50,000} & \frac{49 E}{12,500} & -\frac{49 E}{12,500} & 0 & 0 & \mathbf{21} \\
 -\frac{343 E}{50,000} & -\frac{343 E}{50,000} & \frac{49 E}{12,500} & \frac{49 E}{12,500} & 0 & 0 & \mathbf{20} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7 E}{50} & -\frac{7 E}{50} & \mathbf{17} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7 E}{50} & \frac{7 E}{50} & \mathbf{14}
 \end{bmatrix}$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix}
 \frac{2401 E}{150,000} & \frac{2401 E}{300,000} & \frac{343 E}{50,000} & -\frac{343 E}{50,000} & 0 & 0 & \mathbf{9} \\
 \frac{2401 E}{300,000} & \frac{2401 E}{150,000} & \frac{343 E}{50,000} & -\frac{343 E}{50,000} & 0 & 0 & \mathbf{6} \\
 \frac{343 E}{50,000} & \frac{343 E}{50,000} & \frac{49 E}{12,500} & -\frac{49 E}{12,500} & 0 & 0 & \mathbf{21} \\
 -\frac{343 E}{50,000} & -\frac{343 E}{50,000} & \frac{49 E}{12,500} & \frac{49 E}{12,500} & 0 & 0 & \mathbf{20} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7 E}{50} & -\frac{7 E}{50} & \mathbf{18} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7 E}{50} & \frac{7 E}{50} & \mathbf{15}
 \end{bmatrix}$$

Para el elemento 13 se tiene (se omiten unidades):

$$[k_{13}] = \begin{bmatrix}
 \frac{4E(0.7)}{3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{2E(0.7)}{3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{6E(0.7)}{3^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & -\frac{6E(0.7)}{3^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & 0 & 0 \\
 \frac{2E(0.7)}{3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{4E(0.7)}{3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{6E(0.7)}{3^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & -\frac{6E(0.7)}{3^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & 0 & 0 \\
 \frac{6E(0.7)}{3^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{6E(0.7)}{3^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{12E(0.7)}{3^3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & -\frac{12E(0.7)}{3^3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & 0 & 0 \\
 \frac{6E(0.7)}{3^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{6E(0.7)}{3^2} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{12E(0.7)}{3^3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & \frac{12E(0.7)}{3^3} \left(\frac{0.7^4}{12}\right) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E(0.7^2)}{3} & -\frac{E(0.7^2)}{3} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E(0.7^2)}{3} & \frac{E(0.7^2)}{3}
 \end{bmatrix} \begin{matrix}
 \mathbf{24} \\
 \mathbf{7} \\
 \mathbf{22} \\
 \mathbf{21} \\
 \mathbf{23} \\
 \mathbf{16}
 \end{matrix}$$

$$\therefore [k_{13}] = \begin{bmatrix}
 \frac{16,807 E}{900,000} & \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{1,800,000} & -\frac{16,807 E}{1,800,000} & 0 & 0 \\
 \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{900,000} & \frac{343 E}{50,000} & -\frac{16,807 E}{1,800,000} & 0 & 0 \\
 \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{2,700,000} & -\frac{16,807 E}{2,700,000} & 0 & 0 \\
 \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{2,700,000} & \frac{16,807 E}{2,700,000} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49 E}{300} & -\frac{49 E}{300} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49 E}{300} & \frac{49 E}{300}
 \end{bmatrix} \begin{matrix}
 \mathbf{24} \\
 \mathbf{7} \\
 \mathbf{22} \\
 \mathbf{21} \\
 \mathbf{23} \\
 \mathbf{16}
 \end{matrix}$$

Los elementos 14 y 15 tienen la misma longitud y sección transversal por lo que:

$$[k_{14}] = \begin{bmatrix}
 \frac{16,807 E}{900,000} & \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{1,800,000} & -\frac{16,807 E}{1,800,000} & 0 & 0 \\
 \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{900,000} & \frac{343 E}{50,000} & -\frac{16,807 E}{1,800,000} & 0 & 0 \\
 \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{2,700,000} & -\frac{16,807 E}{2,700,000} & 0 & 0 \\
 -\frac{16,807 E}{1,800,000} & -\frac{16,807 E}{1,800,000} & -\frac{16,807 E}{2,700,000} & \frac{16,807 E}{2,700,000} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49 E}{300} & -\frac{49 E}{300} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49 E}{300} & \frac{49 E}{300}
 \end{bmatrix} \begin{matrix}
 27 \\
 8 \\
 25 \\
 21 \\
 26 \\
 17
 \end{matrix}$$

$$[k_{15}] = \begin{bmatrix}
 \frac{16,807 E}{900,000} & \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{1,800,000} & -\frac{16,807 E}{1,800,000} & 0 & 0 \\
 \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{900,000} & \frac{343 E}{50,000} & -\frac{16,807 E}{1,800,000} & 0 & 0 \\
 \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{1,800,000} & \frac{16,807 E}{2,700,000} & -\frac{16,807 E}{2,700,000} & 0 & 0 \\
 -\frac{16,807 E}{1,800,000} & -\frac{16,807 E}{1,800,000} & -\frac{16,807 E}{2,700,000} & \frac{16,807 E}{2,700,000} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49 E}{300} & -\frac{49 E}{300} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49 E}{300} & \frac{49 E}{300}
 \end{bmatrix} \begin{matrix}
 30 \\
 9 \\
 28 \\
 21 \\
 29 \\
 18
 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales se enlista en la siguiente página contemplando la numeración de los grados de libertad en orden ascendente del 1 al 21. Todos los elementos fueron multiplicados por el módulo de elasticidad $E = 140000\sqrt{280}$ ton/m² .

31,308.711	2530.060	0	13,124.295	0	0	0	0	0	-1518.036	1518.036	0	0	0	0	0	0	0	0	-7874.577	7874.577	0
2,530.060	36,368.830	2530.060	0	13,124.295	0	0	0	0	-1518.036	0	1518.036	0	0	0	0	0	0	0	-7874.577	7874.577	0
0	2530.060	31,308.711	0	0	13,124.295	0	0	0	0	-1518.036	1518.036	0	0	0	0	0	0	0	-7874.577	7874.577	0
13,124.295	0	0	73,121.074	4687.248	0	18,748.993	0	0	0	0	0	-2812.349	2812.349	0	0	0	0	0	-7874.577	-8195.989	16,070.566
0	13,124.295	0	4687.248	82,495.571	4687.248	0	18748.993	0	0	0	0	-2812.349	0	2812.349	0	0	0	0	-7874.577	-8195.989	16,070.566
0	0	13,124.295	0	4687.248	73,121.074	0	0	18,748.993	0	0	0	0	-2812.349	2812.349	0	0	0	0	-7874.577	-8195.989	16,070.566
0	0	0	18,748.993	0	0	90,620.135	4687.248	0	0	0	0	0	0	0	-2812.349	2812.349	0	0	0	-16,070.566	-5803.260
0	0	0	0	18,748.993	0	4,687.248	99,994.632	4687.248	0	0	0	0	0	0	-2812.349	0	2812.349	0	0	-16,070.566	-5803.260
0	0	0	0	0	18,748.993	0	4,687.248	90,260.135	0	0	0	0	0	0	0	-2812.349	2812.349	0	0	-16,070.566	-5803.260
-1518.036	-1518.036	0	0	0	0	0	0	0	230,186.726	-607.214	0	-229,579.511	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1518.036	0	-1518.036	0	0	0	0	0	0	-607.214	230,793.940	-607.214	0	-229,579.511	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1518.036	1518.036	0	0	0	0	0	0	0	-607.214	230,186.726	0	0	-229,579.511	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-2812.349	-2812.349	0	0	0	0	-229,579.511	0	0	558,675.511	-1124.940	0	-327,970.730	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2812.349	0	-2812.349	0	0	0	0	-229,579.511	0	-1124.940	559,800.121	-1124.940	0	-327,970.730	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2812.349	2812.349	0	0	0	0	0	-229,579.511	0	-1124.940	558,675.181	0	0	0	-327,970.730	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-2812.349	-2812.349	0	0	0	0	-327,970.730	0	0	711,278.189	-1124.940	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	2812.349	0	-2812.349	0	0	0	0	0	-327,970.730	0	-1124.940	712,853.128	-1124.940	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	2812.349	2812.349	0	0	0	0	0	0	-327,970.730	0	-1124.940	711,728.189	0	0	0
-7874.577	-7874.577	-7874.577	-7874.577	-7874.577	-7874.577	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9449.493	-9449.493	0
7874.577	7874.577	7874.577	-8195.989	-8195.989	-8195.989	-16070.566	-16070.566	-16,070.566	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9449.493	36,999.034	-27,549.541
0	0	0	16,070.566	16070.566	16,070.566	-5803.260	-5803.260	-5,803.260	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-27,549.541	71,297.193

Aplicando la condensación estática para determinar la matriz de rigidez con los grados de libertad 19 a 21 se tiene:

$$[k_{ij}^*] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{19} & \mathbf{20} & \mathbf{21} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{19} \\ \mathbf{20} \\ \mathbf{21} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3,251.419 & -5,908.556 & 3,493.069 \\ -5,908.556 & 21,377.185 & -24,697.814 \\ 3,493.069 & -24,697.814 & 58,203.884 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (17.1)$$

De la ecuación 17.1 se deduce que las rigideces asociadas a las masas concentradas de la estructura son:

$$[k_{ij}^*] = \begin{bmatrix} k_3 & [k_v] \\ [k_v] & k_2 + k_3 \\ [k_v] & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,251.419 & -5,908.556 & 3,493.069 \\ -5,908.556 & 21,377.185 & -24,697.814 \\ 3,493.069 & -24,697.814 & 58,203.884 \end{bmatrix}$$

De los elementos de la diagonal principal se determinan las rigideces de los entrepisos:

$$k_3 = 3,251.419 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (17.2)$$

$$k_2 + k_3 = 21,377.185 \quad \therefore \quad k_2 = 18,125.766 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (17.3)$$

$$k_1 + k_2 = 58,203.884 \quad \therefore \quad k_1 = 40,078.118 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (17.4)$$

Conocidas las rigideces de los entrepisos k_1 , k_2 y k_3 se puede ensamblar la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$:

$$\begin{aligned} [K] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \begin{bmatrix} 40,078.118 + 18,125.766 & -18,125.766 & 0 \\ -18,125.766 & 18,125.766 + 3,251.419 & -3,251.419 \\ 0 & -3,251.419 & 3,251.419 \end{bmatrix} \frac{\text{ton}}{\text{m}} \\ \therefore [K] &= \begin{bmatrix} 58,203.884 & -18,125.766 & 0 \\ -18,125.766 & 21,377.185 & -3,251.419 \\ 0 & -3,251.419 & 3,251.419 \end{bmatrix} \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (17.5) \end{aligned}$$

Conocidas las matrices de masa concentrada y de rigidez para análisis dinámico, el modelo masa – resorte es el siguiente:

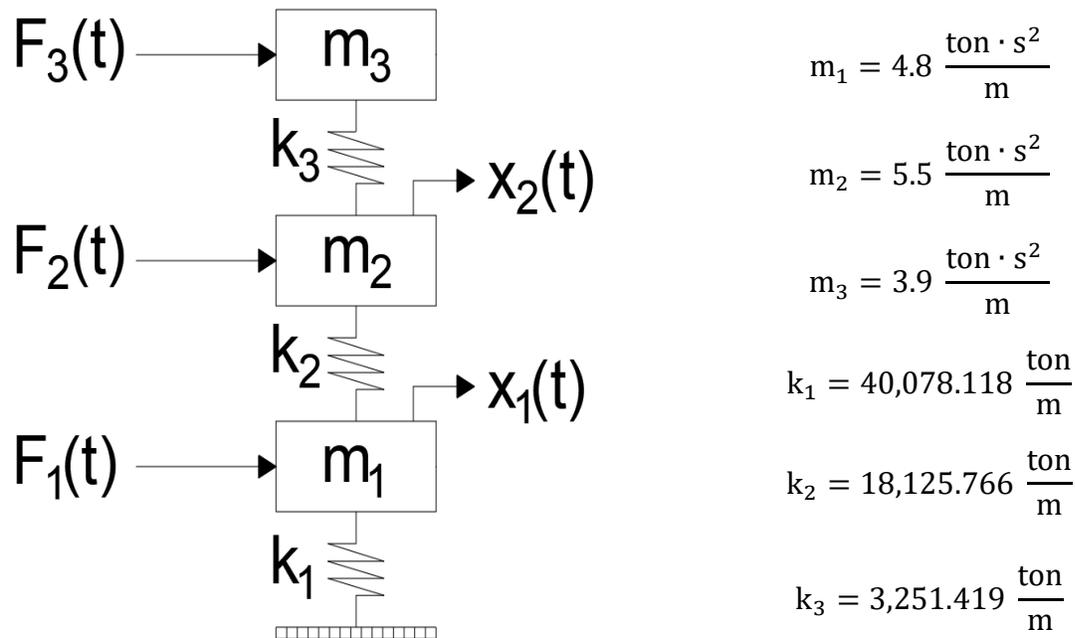


Figura XVII.2. Modelo masa – resorte del marco externo de la estructura en estudio.

17.2 Cálculo de la Frecuencia y Periodo a Través de Eigenvalores

Partiendo del problema de eigenvalores con $[[K] - \omega^2[M]]$, se tiene:

$$\left| \begin{bmatrix} 58,203.884 & -18,125.766 & 0 \\ -18,125.766 & 21,377.185 & -3,251.419 \\ 0 & -3,251.419 & 3,251.419 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (17.6)$$

A fin de evitar errores muy grandes de truncamiento, se hace uso del software derive 6® para calcular los valores de λ . La siguiente imagen muestra las operaciones hechas:

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ANÁLISIS DINÁMICO
[K]

$$\begin{bmatrix} 58203.884 & -18125.766 & 0 \\ -18125.766 & 21377.185 & -3251.459 \\ 0 & -3251.459 & 3251.419 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE MASA CONCENTRADA
[M]

$$\begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix}$$

CÁLCULO DE $|[K]-\lambda[M]|$ CON $\lambda=\omega^2$

$$\text{DET} \left(\begin{bmatrix} 58203.884 & -18125.766 & 0 \\ -18125.766 & 21377.185 & -3251.419 \\ 0 & -3251.419 & 3251.419 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right) = 0$$

POLINOMIO CARACTERÍSTICO $p(\lambda)=0$

$$\lambda \cdot (2.21342121 \cdot 10^{12} \cdot \lambda^2 - 3.728788525 \cdot 10^{16} \cdot \lambda + 1.052306388 \cdot 10^{20}) = 5.077759896 \cdot 10^{22}$$

RAÍCES DEL POLINOMIO

$$\lambda = 609.3464266 \vee \lambda = 2802.330859 \vee \lambda = 1.343458996 \cdot 10^4$$

Figura XVII.3. Cálculo de los valores de λ utilizando derive 6®.

Teniendo los valores de λ se puede calcular las frecuencias ω :

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = 609.3464269 \quad \therefore \quad \omega_1 \cong 24.685 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (17.7)$$

$$\omega_2^2 = \lambda_2 = 2802.330859 \quad \therefore \quad \omega_2 \cong 52.937 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (17.8)$$

$$\omega_3^2 = \lambda_3 = 1.343458996 \cdot 10^4 \quad \therefore \quad \omega_3 \cong 115.908 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (17.9)$$

Y teniendo las frecuencias ω es posible determinar los periodos de la estructura:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{24.685 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_1 \cong 0.255 \text{ s} \quad (17.10)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{52.937 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_2 \cong 0.119 \text{ s} \quad (17.11)$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{115.908 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_3 \cong 0.054 \text{ s} \quad (17.12)$$

17.3 Calculo de los Modos de Vibrar a Través de Eigenvectores

Calculando el modo de vibrar número 1 asociado a ω_1 :

$$\begin{bmatrix} 58,203.884 & -18,125.766 & 0 \\ -18,125.766 & 21,377.185 & -3,251.419 \\ 0 & -3,251.419 & 3,251.419 \end{bmatrix} - 609.3464269 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17.13)$$

Desarrollando con $\phi_{11} = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 55,279.021 & -18,125.766 & 0 \\ -18,125.766 & 18,025.780 & -3,251.419 \\ 0 & -3,251.419 & 874.968 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17.14)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones cualesquiera entre sí, del sistema de ecuaciones lineales anterior, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.050 \\ 11.333 \end{Bmatrix} \quad (17.15)$$

Al normalizarlo se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(3.050)^2 + (3.9)(11.333)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.050 \\ 11.333 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.042 \\ 0.129 \\ 0.480 \end{Bmatrix} \quad (17.16)$$

Calculando el modo de vibrar número 2 asociado a ω_2 :

$$\left[\begin{bmatrix} 58,203.884 & -18,125.766 & 0 \\ -18,125.766 & 21,377.185 & -3,251.419 \\ 0 & -3,251.419 & 3,251.419 \end{bmatrix} - 2802.330857 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17.17)$$

Desarrollando con $\Phi_{12} = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 44,752.696 & -18,125.766 & 0 \\ -18,125.766 & 5,964.365 & -3,251.419 \\ 0 & -3,251.419 & -7,677.671 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17.18)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones entre sí se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.469 \\ -1.046 \end{Bmatrix} \quad (17.19)$$

Donde al normalizarlo se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(2.469)^2 + (3.9)(-1.046)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.469 \\ -1.046 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.153 \\ 0.378 \\ -0.160 \end{Bmatrix} \quad (17.20)$$

Calculando el modo de vibrar número 3 asociado a ω_3 :

$$\left[\begin{bmatrix} 58,203.884 & -18,125.766 & 0 \\ -18,125.766 & 21,377.185 & -3,251.419 \\ 0 & -3,251.419 & 3,251.419 \end{bmatrix} - 1.343458996 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17.22)$$

Desarrollando con $\Phi_{13} = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} -6,282.148 & -18,125.766 & 0 \\ -18,125.766 & -52,513.060 & -3,251.419 \\ 0 & -3,251.419 & -49,143.482 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17.23)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones entre sí se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.347 \\ 0.023 \end{Bmatrix} \quad (17.24)$$

Donde al normalizarlo se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(-0.347)^2 + (3.9)(0.023)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.347 \\ 0.023 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.428 \\ -0.148 \\ 0.010 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz modal del sistema es:

$$[\phi_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.042 & 0.153 & 0.428 \\ 0.129 & 0.378 & -0.148 \\ 0.480 & -0.160 & 0.010 \end{bmatrix}$$

Comprobando las relaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} [\phi_{ij}]^T [M] [\phi_{ij}] &= [I] \\ \vdots &= \begin{bmatrix} 0.042 & 0.153 & 0.428 \\ 0.129 & 0.378 & -0.148 \\ 0.480 & -0.160 & 0.010 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.042 & 0.153 & 0.428 \\ 0.129 & 0.378 & -0.148 \\ 0.480 & -0.160 & 0.010 \end{bmatrix} \\ \vdots &\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comprobando que los modos de vibrar cumplen con la ortogonalidad, se verifica que el cálculo de estos es correcto.

Las siguientes figuras representan los modos de vibrar de la estructura en estudio:

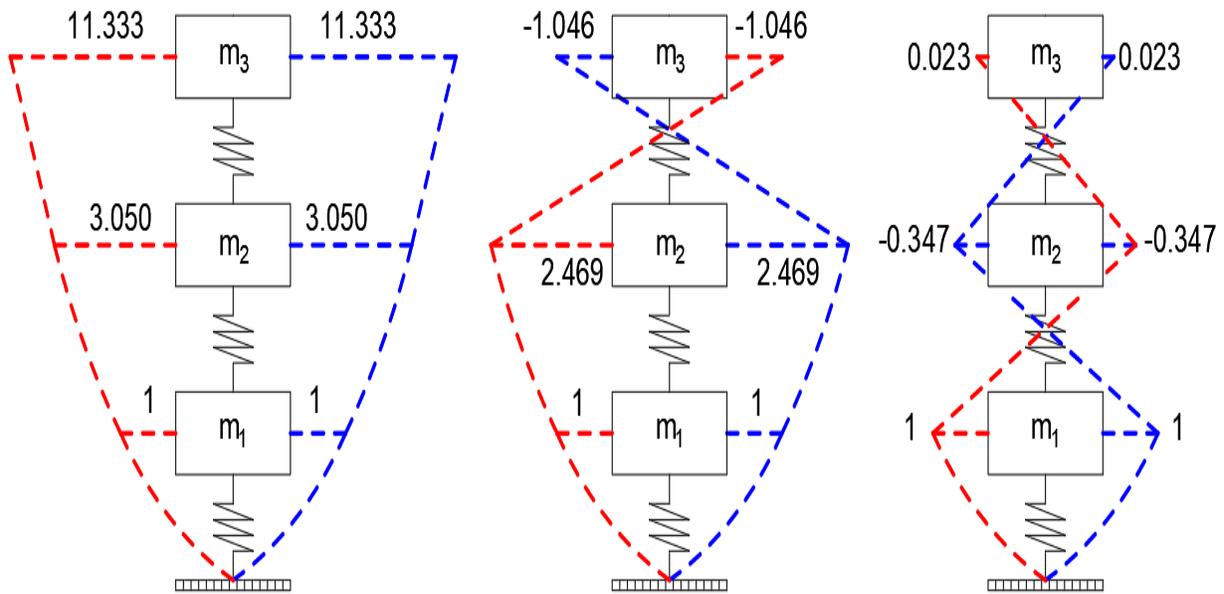


Figura XVII.4. Representación gráfica de los modos de vibrar de los marcos externos de la estructura.

17.4 Factor de Participación de Masas

El valor de la participación de masas se realiza con:

$$T_j^* = \frac{\{\phi_{nj}\}^T [M] \{1\}}{\{\phi_{nj}\}^T [M] \{\phi_{nj}\}} = \frac{\sum m_n \phi_{nj}}{\sum m_n \phi_{nj}^2} \quad (17.25)^{17.1}$$

Para el entrepiso 1 se tiene:

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{\sum m_n \phi_{n1}}{\sum m_n \phi_{n1}^2} \\ &= \frac{m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21} + m_3 \phi_{31}}{m_1 \phi_{11}^2 + m_2 \phi_{21}^2 + m_3 \phi_{31}^2} \\ &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right) (1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right) (3.050) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right) (11.333)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right) (1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right) (3.050)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right) (11.333)^2} \end{aligned}$$

^{17.1} {1} es un vector columna de igual número de renglones que de columnas del vector renglón $\{\phi_{nj}\}^T$. Así mismo

$$\begin{aligned} \therefore &= \frac{65.774 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{556.868 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \\ \therefore & T_1^* = 0.118 \end{aligned} \quad (17.26)$$

Para el entrepiso 2 se tiene:

$$\begin{aligned} T_2^* &= \frac{\sum m_n \phi_{n2}}{\sum m_n \phi_{n2}^2} \\ \therefore &= \frac{m_1 \phi_{12} + m_2 \phi_{22} + m_3 \phi_{32}}{m_1 \phi_{12}^2 + m_2 \phi_{22}^2 + m_3 \phi_{32}^2} \\ \therefore &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.469) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-1.046)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.469)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-1.046)^2} \\ \therefore &= \frac{14.300 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{42.595 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \\ \therefore & T_2^* = 0.336 \end{aligned} \quad (17.27)$$

Para el entrepiso 3 se tiene:

$$\begin{aligned} T_3^* &= \frac{\sum m_n \phi_{n3}}{\sum m_n \phi_{n3}^2} \\ \therefore &= \frac{m_1 \phi_{13} + m_2 \phi_{23} + m_3 \phi_{33}}{m_1 \phi_{13}^2 + m_2 \phi_{23}^2 + m_3 \phi_{33}^2} \\ \therefore &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-0.347) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(0.023)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-0.347)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(0.023)^2} \\ \therefore &= \frac{2.981 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{5.464 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \end{aligned}$$

$$\therefore T_3^* = 0.546 \quad (17.28)$$

Para verificar que la participación de masas sea de por lo menos 90% debe cumplirse que $\sum T_j^* \geq 0.9$. Al efectuar $T_1^* + T_2^* + T_3^*$ se obtiene exactamente 1.0 lo cual implica que participa el 100% de la masa total de la estructura en el análisis modal.

17.5 Aceleraciones a Considerar con Base en los Periodos de la Estructura

Recordando que los periodos de la estructura asociados a los modos de vibrar son:

$$T_1 \cong 0.255 \text{ s}$$

$$T_2 \cong 0.119 \text{ s}$$

$$T_3 \cong 0.054 \text{ s}$$

El valor de la aceleración asociada se calcula con:

$$A_{sn} = a_n g \quad (17.29)$$

Donde:

$[A_{sn}]$ = valor de la aceleración asociada a los modos de vibrar.

$[a_n]$ = coeficiente de reducción de la gravedad obtenido del espectro de diseño de sitio.

$[g]$ = aceleración de la gravedad igual a $9.81 \text{ m} / \text{s}^2$.

Para calcular a_1 asociado a un periodo $T_1 \cong 0.255$ seg, se tiene una un valor $a = 0.173$ para $T = 0.3$ seg y un valor $a = 0.152$ para $T = 0.2$ seg. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_1 \cong 0.255$ s le corresponde un $a_1 = 0.164$.

$$\therefore A_{s1} = a_1 g = (0.164) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.609 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (17.30)$$

Para calcular a_2 asociado a un periodo $T_2 \cong 0.119$ seg, se tiene un valor $a = 0.127$ para $T = 0.1$ seg y un valor $a = 0.152$ para $T = 0.2$ seg. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_2 \cong 0.119$ s le corresponde un $a_2 = 0.132$.

$$\therefore A_{s2} = a_2 g = (0.132) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 1.295 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (17.31)$$

Para calcular a_3 asociado a un periodo $T_3 \cong 0.056$ seg, se tiene un valor $a = 0.09$ para $T = 0$ s y un valor $a = 0.127$ para $T = 0.1$ s. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_3 \cong 0.056$ s le corresponde un $a_3 = 0.111$.

$$\therefore A_{s3} = a_3 g = (0.111) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 1.089 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (17.32)$$

17.6 Calculo de los Desplazamientos Relativos y Finales

Calculando el factor de sobre – resistencia con base en la ecuación:

$$R = k_1 R_0 + k_2$$

Con base en las NTC – Sismo (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 60) se selecciona $R_0 = 1.75$ por ser una estructura con $Q = 2$ y $k_1 = 0.8$ por ser una estructura que tiene menos de tres crujiás resistentes a sismo en la dirección de análisis.

Para calcular k_2 se hará con la fórmula:

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_a}}\right) \quad (17.33)$$

Los periodos naturales de la estructura son menores que el valor del inicio de la meseta del espectro de diseño por lo que k_2 se calcula conforme al reglamento:

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{0.255 \text{ s}}{0.35 \text{ s}}}\right) = 0.073 \quad (17.34)^{17.2}$$

^{17.2} Para T_2 y T_1 al ser menores que T_a y por tener menos de dos crujiás sismo resistentes, se hace $k_2 = 0$.

Calculando el factor de sobre – resistencia conocidos k_1 , k_2 y R_0 :

$$R = (0.8)(1.75) + 0.073 = 1.473 \quad (17.35)$$

Al no incluir el valor que agrega k_2 , el valor del factor de sobrerresistencia es de 1.4. Como sólo existe una diferencia del 4.956 % al compararlo con la ecuación 17.35 se deja $R = 1.4$ como valor final de sobrerresistencia.

Los desplazamientos finales se determinan mediante:

$$\{d_{nj}\} = \frac{Q R T_j^* A_{sj}}{\omega_j^2} \{\Phi_{nj}\} \quad (17.36)$$

Calculo para el primer modo de vibrar ($j = 1$):

$$\begin{aligned} \{d_{n1}\} &= \frac{Q R T_1^* A_{s1}}{\omega_1^2} \{\Phi_{n1}\} \\ \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{Bmatrix} &= \frac{Q R T_1^* A_{s1}}{\omega_1^2} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} \\ \therefore &= \frac{(2) (1.4) (0.118) (1.609)}{609.3667235} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.050 \\ 11.333 \end{Bmatrix} \\ \therefore &= (0.000872403 \text{ m}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.050 \\ 11.333 \end{Bmatrix} \\ \therefore \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.000872403 \\ 0.002660829 \\ 0.009886943 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.0872403 \\ 0.2660829 \\ 0.9886943 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 0.872403 \\ 2.660829 \\ 9.886943 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (17.37) \end{aligned}$$

Calculo para el segundo modo de vibrar ($j = 2$):

$$\begin{aligned} \{d_{n2}\} &= \frac{Q R T_2^* A_{s2}}{\omega_2^2} \{\Phi_{n2}\} \\ \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{Bmatrix} &= \frac{Q R T_2^* A_{s2}}{\omega_2^2} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vdots &= \frac{(2) (1.4) (0.336) (1.295)}{2,802.333117} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.469 \\ -1.046 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= (0.000434758 \text{ m}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.469 \\ -1.046 \end{Bmatrix} \\
 \therefore \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.000434758 \\ 0.001073418 \\ -0.000454757 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.0434758 \\ 0.1073418 \\ -0.0454757 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 0.434758 \\ 1.073418 \\ -0.454757 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (17.38)
 \end{aligned}$$

Calculo para el tercer modo de vibrar ($j = 3$):

$$\begin{aligned}
 \{d_3\} &= \frac{Q R T_3^* A_{s3}}{\omega_3^2} \{\Phi_{n3}\} \\
 \begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{Bmatrix} &= \frac{Q R T_3^* A_{s3}}{\omega_3^2} \begin{Bmatrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{(2) (1.4) (0.546) (1.089)}{1.343458997 \cdot 10^4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.347 \\ 0.023 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= (0.000123924 \text{ m}) \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.347 \\ 0.023 \end{Bmatrix} \\
 \therefore \begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.000123924 \\ -0.000043002 \\ 0.00000285 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.0123924 \\ -0.0043002 \\ 0.000285 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 0.123924 \\ -0.043002 \\ 0.00285 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (17.39)
 \end{aligned}$$

Como cada periodo de la estructura varía entre sí por lo menos un 10 %, el RCCDMX permite utilizar el método del SRSS para calcular el desplazamiento de cada entrepiso mediante:

$$d_{F-j} = \sqrt{\sum d_{jn}^2}$$

Donde:

$[d_{F-j}]$ = desplazamiento final de cada entrepiso.

$\left[\sqrt{\sum d_{jn}^2} \right]$ = suma de los cuadrados de cada renglón asociado al j-ésimo entrepiso de cada uno de los vectores $\{d_{nj}\}$

Para el entrepiso 1:

$$\begin{aligned}
 d_{F-1} &= \sqrt{\sum d_{1n}^2} \\
 &= \sqrt{d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{13}^2} \\
 &= \sqrt{(0.872403 \text{ mm})^2 + (0.434758 \text{ mm})^2 + (0.123924 \text{ mm})^2} \\
 &\therefore d_{F-1} \cong 0.983 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{17.40}$$

Para el entrepiso 2 (en mm):

$$\begin{aligned}
 d_{F-2} &= \sqrt{\sum d_{2n}^2} \\
 &= \sqrt{d_{21}^2 + d_{22}^2 + d_{23}^2} \\
 &= \sqrt{(2.660829 \text{ mm})^2 + (1.073418 \text{ mm})^2 + (-0.043002 \text{ mm})^2} \\
 &\therefore d_{F-2} \cong 2.870 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{17.41}$$

Para el entrepiso 3 (en mm):

$$\begin{aligned}
 d_{F-3} &= \sqrt{\sum d_{3n}^2} \\
 &= \sqrt{d_{31}^2 + d_{32}^2 + d_{33}^2} \\
 &= \sqrt{(9.886943 \text{ mm})^2 + (-0.454757 \text{ mm})^2 + (0.00285 \text{ mm})^2} \\
 &\therefore d_{F-3} \cong 9.897 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{17.42}$$

Los desplazamientos relativos se calculan al restan al desplazamiento de la masa superior, el de la masa inferior. Los desplazamiento relativos se ejemplifican por medio de $\{d_{nj}^*\}$.

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 1:

$$\begin{Bmatrix} d_{11}^* \\ d_{21}^* \\ d_{31}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000872403 \\ 0.002660829 - 0.000872403 \\ 0.009886943 - 0.002660829 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.000872403 \\ 0.001788426 \\ 0.007226114 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 2:

$$\begin{Bmatrix} d_{12}^* \\ d_{22}^* \\ d_{32}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000434758 \\ 0.001073418 - 0.000434758 \\ -0.000454757 - 0.001073418 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.000434758 \\ 0.00063866 \\ -0.001528175 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 3:

$$\begin{Bmatrix} d_{13}^* \\ d_{23}^* \\ d_{33}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000123924 \\ -0.000043002 - 0.000123924 \\ 0.00000285 - (-0.000043002) \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.000123924 \\ -0.000166926 \\ 0.000045852 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

17.7 Revisión de los Desplazamientos Laterales (Distorsión de Entrepiso)

De acuerdo con el RCCDMX en sus NTC – Sismo, las distorsiones de entrepiso son la diferencia entre los desplazamientos laterales de los pisos consecutivos que lo delimitan entre la diferencia de elevaciones correspondiente (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 51).

La distorsión para el tercer entrepiso se calcula con:

$$\gamma_3 = \frac{d_{F-3}}{h_3} = \frac{9.897 \text{ mm}}{5,000 \text{ mm}} = 0.002 \quad (17.43)$$

La distorsión para el segundo entrepiso se calcula con:

$$\gamma_2 = \frac{d_{F-3} - d_{F-2}}{h_2} = \frac{9.897 \text{ mm} - 2.870 \text{ mm}}{3,500 \text{ mm}} = 0.002 \quad (17.44)$$

La distorsión para el primer entrepiso se calcula con:

$$\gamma_1 = \frac{d_{F-2} - d_{F-1}}{h_1} = \frac{2.870 \text{ mm} - 0.983 \text{ mm}}{3,000 \text{ mm}} = 0.001 \quad (17.45)$$

Los valores de la distorsión máxima ($\gamma_{m\acute{a}x}$) para estructuras de concreto vienen dados en el RCCDMX en su apartado 4.2 *Valores de Q y γ_{max}* de las NTC – Sismo (Gobierno de la CDMX, 2017, págs. 61 - 63). En ese apartado se estipula que la distorsión máxima con estructuración a base de marcos, para un $Q = 2$ es $\gamma_{m\acute{a}x} = 0.015$.

Como las distorsiones γ_1 , γ_2 y γ_3 son menores que $\gamma_{m\acute{a}x}$ se acepta la revisión de la estructura por distorsión de entrepisos.

17.8 Calculo de las Fuerzas Cortantes (Cortantes Basales)

Las fuerzas cortantes se determinan por medio de la ecuación:

$$\{V_{nj}\} = k_j\{d_{nj}^*\} \quad (17.46)$$

Donde:

$\{V_{nj}\}$ = vector de fuerzas cortantes.

$[k_j]$ = rigidices denotadas en la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$.

$\{d_{nj}^*\}$ = vector de desplazamientos relativos.

Para $j = 1$:

$$\{V_{n1}\} = k_1\{d_{n1}^*\}$$

$$\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} d_{11}^* \\ d_{21}^* \\ d_{31}^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 40,078.118 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.000872403 \\ 0.001788426 \\ 0.007226114 \end{pmatrix}$$

$$\therefore = \begin{pmatrix} 34.964 \\ 71.677 \\ 289.609 \end{pmatrix} \text{ ton}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34.964 \\ 71.677 \\ 289.609 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad (17.47)$$

Para $j = 2$:

$$\{V_{n2}\} = k_2 \{d_{n2}^*\}$$

$$\begin{Bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{Bmatrix} = k_2 \begin{Bmatrix} d_{12}^* \\ d_{22}^* \\ d_{32}^* \end{Bmatrix}$$

$$\therefore = \left(18,125.766 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \right) \begin{Bmatrix} 0.000434758 \\ 0.00063866 \\ -0.001528175 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore = \begin{Bmatrix} 7.880 \\ 11.576 \\ -27.699 \end{Bmatrix} \text{ ton}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.880 \\ 11.576 \\ -27.699 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad (17.48)$$

Para $j = 3$:

$$\{V_{n3}\} = k_3 \{d_{n3}\}$$

$$\begin{Bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{Bmatrix} = k_2 \begin{Bmatrix} d_{13}^* \\ d_{23}^* \\ d_{33}^* \end{Bmatrix}$$

$$\therefore = \left(3,251.419 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \right) \begin{Bmatrix} 0.000123924 \\ -0.000166926 \\ 0.000045852 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore = \begin{Bmatrix} 0.403 \\ -0.543 \\ 0.149 \end{Bmatrix} \text{ ton}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.403 \\ -0.543 \\ 0.149 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad (17.49)$$

Aplicando el SRSS para determinar los cortantes sobre los grados de libertad donde se concentran las masas con:

$$V_{F-j} = \sqrt{\sum V_{jn}^2} \quad (17.50)$$

Donde:

$[V_{F-j}]$ = cortante final de cada entrepiso.

$[\sqrt{\sum V_{jn}^2}]$ = suma de los cuadrados de cada renglón asociado al j-ésimo entrepiso de cada uno de los vectores $\{V_{nj}\}$

Para el entrepiso 1 (en ton):

$$\begin{aligned} V_{F-1} &= \sqrt{\sum V_{1n}^2} \\ \therefore &= \sqrt{V_{11}^2 + V_{12}^2 + V_{13}^2} \\ \therefore &= \sqrt{(34.964 \text{ ton})^2 + (7.880 \text{ ton})^2 + (0.403 \text{ ton})^2} \\ \therefore & V_{F-1} = 35.843 \text{ ton} \cong 36 \text{ ton} \end{aligned} \quad (17.51)$$

Para el entrepiso 2 (en ton):

$$\begin{aligned} V_{F-2} &= \sqrt{\sum V_{2n}^2} \\ \therefore &= \sqrt{V_{21}^2 + V_{22}^2 + V_{23}^2} \\ \therefore &= \sqrt{(71.677 \text{ ton})^2 + (11.576 \text{ ton})^2 + (-0.543 \text{ ton})^2} \\ \therefore & V_{F-2} = 72.608 \text{ ton} \cong 73 \text{ ton} \end{aligned} \quad (17.52)$$

Para el entrepiso 3 (en ton):

$$\begin{aligned}
 V_{F-3} &= \sqrt{\sum V_{3n}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{V_{31}^2 + V_{32}^2 + V_{33}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{(289.609 \text{ ton})^2 + (-27.699 \text{ ton})^2 + (0.149 \text{ ton})^2} \\
 &\therefore V_{F-3} = 290.931 \text{ ton} \cong 291 \text{ ton} \tag{17.53}
 \end{aligned}$$

17.9 Revisión por Cortante Basal Mínimo

Dentro del RCCDMX se estipula, en las NTC – Sismo, que el cortante basal obtenido en la dirección del análisis modal no sea menor que $a_{\text{mín}} W_0$, donde $a_{\text{mín}}$ se tomará igual a 0.03 cuando $T_s < 0.5$ seg o 0.05 si $T_s \geq 1$ seg, siendo T_s el periodo dominante más largo del terreno en el sitio de interés (parámetro obtenido en el espectro de diseño del SASID). Para valores de T_s comprendidos entre 0.5 y 1.0, $a_{\text{mín}}$ se hará variar linealmente entre 0.03 y 0.05 (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 51).

$$V_{F-j} \geq a_{\text{mín}} W_0 \tag{17.54}$$

W_0 = es el peso de la estructura que actúa en la base del sistema estructural.

Para la estructura en estudio $T_s = 0.485$ seg, por lo tanto, $a_{\text{mín}} = 0.03$. Calculando $a_{\text{mín}} W_0$:

$$\begin{aligned}
 a_{\text{mín}} W_0 &= (0.03) \left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} + 5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} + 3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\
 &\therefore a_{\text{mín}} W_0 = 4.179 \text{ ton} \tag{17.55}
 \end{aligned}$$

Como todos los valores V_{F-j} son mayores que $a_{\text{mín}} W_0$ se acepta la revisión por cortante basal mínimo.

17.10 Determinación de Cargas Debidas a Acciones Permanentes, Variables y Accidentales

Los factores de carga^{17.3}, establecidos en las NTC – Edificaciones, se establece que el factor de carga es $F_C = 1.1$ cuando la estructura en estudio esté sujeta a acciones permanentes, variables y accidentales (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 692). Lo anterior mencionado puede entenderse como cargas debido a sismo.

Las cargas laterales de la estructura serán cargas puntuales en cada uno de los entrepisos donde fue concentrada la masa; mientras que las cargas gravitacionales se ejemplificarán como cargas distribuidas uniformemente (cargas rectangulares) sobre cada una de las vigas de la estructura.

La carga lateral de la estructura para la azotea es:

$$\begin{aligned} F_{u-3}(t) &= F_C V_{F-3} \\ \vdots &= (1.1)(291 \text{ ton}) \\ &\therefore F_{u-3}(t) = 320.1 \text{ ton} \end{aligned} \quad (17.56)$$

La carga lateral para el entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned} F_{u-2}(t) &= F_C (V_{F-2} - V_{F-3}) \\ \vdots &= (1.1)(73 \text{ ton} - 291 \text{ ton}) \\ &\therefore F_{u-2}(t) = -239.8 \text{ ton} \end{aligned} \quad (17.57)$$

La carga lateral para el entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned} F_{u-1}(t) &= F_C [V_{F-1} - (V_{F-2} - V_{F-3})] \\ \vdots &= (1.1)[36 \text{ ton} - (73 \text{ ton} - 291 \text{ ton})] \\ &\therefore F_{u-1}(t) = 279.4 \text{ ton} \end{aligned} \quad (17.58)$$

La carga gravitacional de la azotea es:

^{17.3} Definición sustraída del RCCDMX: Factor de seguridad parcial mayor que la unidad que se aplica a las cargas calculadas para cubrir la incertidumbre que se tiene para su determinación (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 684).

$$\begin{aligned}
 W_{u-3} &= F_C \left(\frac{m_3 g}{L} \right) \\
 \therefore &= 1.1 \left[\frac{\left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-3} &= 4.208 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (17.59)
 \end{aligned}$$

La carga gravitacional del entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-2} &= F_C \left(\frac{m_2 g}{L} \right) \\
 \therefore &= 1.1 \left[\frac{\left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-2} &= 5.935 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 6 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (17.60)
 \end{aligned}$$

La carga gravitacional del entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-1} &= F_C \left(\frac{m_1 g}{L} \right) \\
 \therefore &= 1.1 \left[\frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-1} &= 5.180 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (17.61)
 \end{aligned}$$

La representación de cargas laterales y gravitacionales en la estructura son:

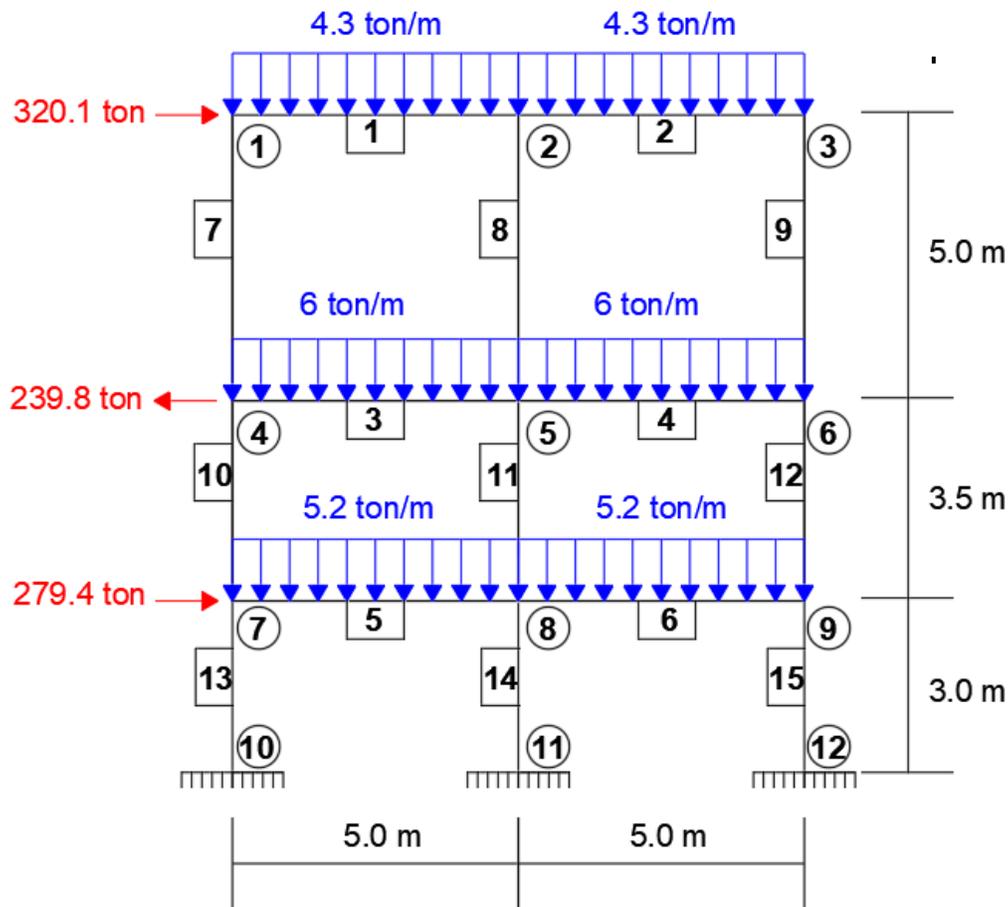


Figura XVII.5. Representación gráfica de las cargas por caso sísmico.

17.11 Determinación de Cargas Debidas a Acciones Permanentes y Variables

El lector pudo haber notado que para el caso sísmico, las cargas laterales de la estructura cambiaron muy poco en comparación al caso que contempla únicamente flexión, aunque no significativamente, mientras que las cargas sobre las vigas (cargas gravitacionales) se mantuvieron iguales. Por lo tanto, las cargas gravitacionales del caso estático serán las mismas que las del capítulo XV (figura XV.12 de la página 484).

17.12 Análisis Estructural para el Caso Sísmico

El análisis estructural se realizará al marco de la figura XVII.5.

Todas las matrices de rigidez para análisis dinámico $[K]$ fueron encontradas a partir de la matriz de la estructura $[k_{ij}]$

Esta misma matriz de la cual su condensación estática arrojó $[K]$ como resultado permite establecer mediante $[k_{ij}]\{\Delta\} + \{P\} = \{0\}$ los valores de las rotaciones angulares y desplazamientos lineales a partir de $\{\Delta\} = -[k_{ij}]^{-1}\{P\}$.

Siendo:

$\{\Delta\}$ = vector de desplazamientos que contiene desplazamientos lineales y rotaciones angulares.

$\{P\}$ = vector de fuerzas que contiene los momentos de empotramiento perfecto y fuerzas laterales u horizontales dentro de una estructura.

$[k_{ij}]$ = matriz de rigidez de la estructura en coordenadas globales.

Los casos de análisis estructural por resolver serán únicamente los casos con cargas laterales provenientes del análisis modal, dado que si se presenta la solución de estos casos el lector podrá resolver los casos estáticos sin menor dificultad dado que no presenta cargas laterales.

La matriz de rigidez de la estructura $[k_{ij}]$ se encuentra en la página 551, así que para encontrar el vector $\{\Delta\}$ es necesario definir el vector de fuerza $\{P\}$.

Para realizar el análisis estructural que contempla deformación axial en columnas, es necesario aumentar el vector de fuerza $\{P\}$ añadiendo los cortantes generados por las cargas presentes en las vigas debidas a momentos de empotramiento perfecto. Así mismo las fuerzas P_1 , P_2 y P_3 cambiarán dentro del vector de cargas $\{P\}$. El vector de fuerzas es el siguiente:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \\ P_{1y} \\ P_{2y} \\ P_{3y} \\ P_{4y} \\ P_{5y} \\ P_{6y} \\ P_{7y} \\ P_{8y} \\ P_{9y} \\ P_{1x} \\ P_{2x} \\ P_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ -\frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} + \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} + \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} + \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ -320.1 \text{ ton} \\ 239.8 \text{ ton} \\ -279.4 \text{ ton} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{215}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{215}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -\frac{25}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{25}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -\frac{65}{6} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{65}{6} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ \frac{43}{4} \text{ ton} \\ \frac{43}{2} \text{ ton} \\ \frac{43}{4} \text{ ton} \\ 15 \text{ ton} \\ 30 \text{ ton} \\ 15 \text{ ton} \\ 13 \text{ ton} \\ 26 \text{ ton} \\ 13 \text{ ton} \\ -320.1 \text{ ton} \\ 239.8 \text{ ton} \\ -279.4 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

Al realizar la operación $\{\Delta\} = -[k_{ij}]^{-1}\{P\}$ se obtiene:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{4y} \\ \Delta_{5y} \\ \Delta_{6y} \\ \Delta_{7y} \\ \Delta_{8y} \\ \Delta_{9y} \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02488 \text{ rad} \\ 0.01993 \text{ rad} \\ 0.02347 \text{ rad} \\ 0.01713 \text{ rad} \\ 0.01504 \text{ rad} \\ 0.01691 \text{ rad} \\ 0.01034 \text{ rad} \\ 0.00913 \text{ rad} \\ 0.01014 \text{ rad} \\ 0.00109 \text{ m} \\ -0.00046 \text{ m} \\ -0.00154 \text{ m} \\ 0.00085 \text{ m} \\ -0.00036 \text{ m} \\ -0.00120 \text{ m} \\ 0.00045 \text{ m} \\ -0.00021 \text{ m} \\ -0.00065 \text{ m} \\ 0.20427 \text{ m} \\ 0.07185 \text{ m} \\ 0.02303 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (17.62)$$

Los elementos mecánicos se obtienen mediante la fórmula:

$$\{F_i\} = [k_i]\{\delta_i\} + \{P_0^{(i)}\} \quad (17.63)$$

Siendo:

$[F_i]$ = vector de elementos mecánicos por elemento.

$[k_i]$ = matriz de rigidez en coordenadas locales.

$\{\delta_i\}$ = vector de desplazamientos sustraídos de $\{\Delta\}$ correspondiente a los grados de libertad de $[k_i]$.

$\{P_0^{(i)}\}$ = vector de fuerzas y momentos iniciales, dentro de la barra analizada, obtenidas por los momentos de empotramiento perfecto.

Al desarrollar la ecuación 17.63 se tiene:

$$\begin{Bmatrix} M_I^{(i)} \\ M_{II}^{(i)} \\ V_I^{(i)} \\ V_{II}^{(i)} \\ N_I^{(i)} \\ N_{II}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_I^{(i)} \\ \theta_{II}^{(i)} \\ \Delta_{IY}^{(i)} \\ \Delta_{IIY}^{(i)} \\ \Delta_{IX}^{(i)} \\ \Delta_{IIX}^{(i)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_I^{(i)} \\ m_{II}^{(i)} \\ v_I^{(i)} \\ v_{II}^{(i)} \\ n_I^{(i)} \\ n_{II}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (17.64)$$

Para la ecuación 17.64, el superíndice (i) se asocia al elemento analizado, el subíndice I al nodo inicial y el nodo II el nodo final.

$[M_I^{(i)} \ \& \ M_{II}^{(i)}]$ = son los momentos finales.

$[V_I^{(i)} \ \& \ V_{II}^{(i)}]$ = son los cortantes finales.

$[N_I^{(i)} \ \& \ N_{II}^{(i)}]$ = son las cargas axiales finales.

$[\theta_I^{(i)} \ \& \ \theta_{II}^{(i)}]$ = son los valores de las rotaciones angulares tomados del vector $\{\Delta\}$.

$[\Delta_{IY}^{(i)} \ \& \ \Delta_{IIY}^{(i)}]$ = son los valores de los desplazamiento lineales verticales tomados del vector $\{\Delta\}$.

$[\Delta_{IX}^{(i)} \ \& \ \Delta_{IIX}^{(i)}]$ = son los valores de los desplazamiento lineales horizontales tomados del vector $\{\Delta\}$.

$[m_I^{(i)} \ \& \ m_{II}^{(i)}]$ = son los momentos de empotramiento perfecto.

$[v_I^{(i)} \quad v_{II}^{(i)}]$ & son los cortantes de empotramiento perfecto.

$[n_I^{(i)} \quad n_{II}^{(i)}]$ = son las cargas axiales dentro del elemento que coinciden con el grado de libertad. Para asignar estas cargas debe tenerse en cuenta lo siguiente:

- ✚ Los cortantes que se asocian a los elementos $v_I^{(i)}$ y $v_{II}^{(i)}$ cuando se trate de vigas, no se colocan coincidente con $n_I^{(i)}$ o $n_{II}^{(i)}$ de los elementos columna.
- ✚ Cuando la estructura sea analizada como diafragma rígido $n_I^{(i)} = n_{II}^{(i)} = 0$.

El lector comprenderá de manera eficaz estas consideraciones, que deben tomarse cuando se considera la deformación axial en columnas, para calcular los elementos mecánicos cuando observe como debe aplicarse a la estructura en estudio. A continuación se calculan los elementos mecánicos viga por viga (elementos 1 a 6) y columna por columna (elementos 7 a 15) y el lector podrá notar que no difieren significativamente de los calculados en capítulos anteriores:

$$\{F_1\} = [k_1]\{\delta_1\} + \{P_0^{(1)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} 27 & 27E & -81E & 81E & 0 & 0 \\ 12,500 & 25,500 & -125,000 & 125,000 & 0 & 0 \\ 27E & 27E & 81E & 81E & 0 & 0 \\ 25,500 & 12,500 & -125,000 & 125,000 & 0 & 0 \\ 81E & 81E & 81 & 81 & 0 & 0 \\ -125,000 & -125,000 & 312,500 & -312,500 & 0 & 0 \\ 81E & 81E & 81 & 81 & 0 & 0 \\ 125,000 & 125,000 & -312,500 & 312,500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.02488 \\ 0.01993 \\ 0.00109 \\ -0.00046 \\ 0.20427 \\ 0.20427 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -215/24 \\ 215/24 \\ 43/4 \\ 43/4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 164.9941 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 170.3891 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -56.3266 \text{ ton} \\ 77.8266 \text{ ton} \\ 0 \text{ ton} \\ 0 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_2\} = [k_2]\{\delta_2\} + \{P_0^{(2)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{27}{12,500} & \frac{27E}{25,500} & -\frac{81E}{125,000} & \frac{81E}{125,000} & 0 & 0 \\ \frac{27E}{25,500} & \frac{27E}{12,500} & -\frac{81E}{125,000} & \frac{81E}{125,000} & 0 & 0 \\ \frac{81E}{125,000} & \frac{81E}{125,000} & \frac{81}{312,500} & \frac{81}{312,500} & 0 & 0 \\ -\frac{125,000}{81E} & -\frac{125,000}{81E} & \frac{312,500}{81} & -\frac{312,500}{81} & 0 & 0 \\ \frac{81E}{125,000} & \frac{81E}{125,000} & \frac{81}{312,500} & \frac{81}{312,500} & 0 & 0 \\ \frac{125,000}{81E} & \frac{125,000}{81E} & -\frac{312,500}{81} & \frac{312,500}{81} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01993 \\ 0.02437 \\ -0.00046 \\ -0.00154 \\ 0.20427 \\ 0.20427 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -215/24 \\ 215/24 \\ 43/4 \\ 43/4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} 151.9119 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 181.0712 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -55.8466 \text{ ton} \\ 77.3466 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_3\} = [k_3]\{\delta_3\} + \{P_0^{(3)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{2401}{600,000} & \frac{2401}{1,200,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{1,200,000} & \frac{2401}{600,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & \frac{5,000,000}{2401} & -\frac{5,000,000}{2401} & 0 & 0 \\ -\frac{2,000,000}{2401} & -\frac{2,000,000}{2401} & \frac{5,000,000}{2401} & -\frac{5,000,000}{2401} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & -\frac{5,000,000}{2401} & \frac{5,000,000}{2401} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01713 \\ 0.01504 \\ 0.00085 \\ -0.00036 \\ 0.07185 \\ 0.07185 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -25/2 \\ 25/2 \\ 15 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} 215.1579 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 230.3728 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -74.1061 \text{ ton} \\ 104.1061 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_4\} = [k_4]\{\delta_4\} + \{P_0^{(4)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{2401}{600,000} & \frac{2401}{1,200,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{1,200,000} & \frac{2401}{600,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & 0 & 0 \\ -\frac{2401}{2,000,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{5,000,000}{2401} & -\frac{5,000,000}{2401} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & -\frac{5,000,000}{2401} & \frac{5,000,000}{2401} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01504 \\ 0.01691 \\ -0.00036 \\ -0.00120 \\ 0.07185 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -25/2 \\ 25/2 \\ 15 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 205.4204 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 239.2029 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -73.9247 \text{ ton} \\ 103.9247 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_5\} = [k_5]\{\delta_5\} + \{P_0^{(5)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{2401}{600,000} & \frac{2401}{1,200,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{1,200,000} & \frac{2401}{600,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & 0 & 0 \\ -\frac{2401}{2,000,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{5,000,000}{2401} & -\frac{5,000,000}{2401} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & -\frac{5,000,000}{2401} & \frac{5,000,000}{2401} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01504 \\ 0.01691 \\ -0.00036 \\ -0.00120 \\ 0.07185 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -65/6 \\ 65/6 \\ 13 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 127.0792 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 143.0948 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -41.0348 \text{ ton} \\ 67.0348 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_6\} = [k_6]\{\delta_6\} + \{P_0^{(6)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{2401}{600,000} & \frac{2401}{1,200,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{1,200,000} & \frac{2401}{600,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & 0 & 0 \\ -\frac{2401}{2,000,000} & -\frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{5,000,000} & -\frac{2401}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{2,000,000} & \frac{2401}{2,000,000} & -\frac{2401}{5,000,000} & \frac{2401}{5,000,000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00913 \\ 0.01014 \\ -0.00021 \\ -0.00065 \\ 0.02303 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -65/6 \\ 65/6 \\ 13 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 121.0758 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 147.4496 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -40.7051 \text{ ton} \\ 66.7051 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_7\} = [k_7]\{\delta_7\} + \{P_0^{(7)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{16,807}{1,500,000} & \frac{16,807}{3,000,000} & \frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{3,000,000} & \frac{16,807}{1,500,000} & \frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{5,000,000} & \frac{16,807}{5,000,000} & \frac{16,807}{12,500,000} & -\frac{16,807}{12,500,000} & 0 & 0 \\ -\frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{5,000,000} & \frac{16,807}{12,500,000} & \frac{16,807}{12,500,000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49}{500} & -\frac{49}{500} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{500} & \frac{49}{500} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01713 \\ 0.02488 \\ 0.07185 \\ 0.24427 \\ 0.00085 \\ 0.00109 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -266.7113 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -164.9941 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -86.3411 \text{ ton} \\ 86.3411 \text{ ton} \\ -56.3266 \text{ ton} \\ 56.3266 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_8\} = [k_8]\{\delta_8\} + \{P_0^{(8)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{16,807}{1,500,000} & \frac{16,807}{3,000,000} & \frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{3,000,000} & \frac{16,807}{1,500,000} & \frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{5,000,000} & \frac{16,807}{5,000,000} & \frac{16,807}{12,500,000} & -\frac{16,807}{12,500,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{12,500,000} & \frac{16,807}{12,500,000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49}{500} & -\frac{49}{500} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{500} & \frac{49}{500} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01504 \\ 0.01993 \\ 0.07185 \\ 0.20427 \\ -0.00036 \\ -0.00046 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -386.4620 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -322.3010 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -141.7526 \text{ ton} \\ 141.7526 \text{ ton} \\ 21.9800 \text{ ton} \\ -21.9800 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_9\} = [k_9]\{\delta_9\} + \{P_0^{(9)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{16,807}{1,500,000} & \frac{16,807}{3,000,000} & \frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{3,000,000} & \frac{16,807}{1,500,000} & \frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{5,000,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{5,000,000} & \frac{16,807}{5,000,000} & \frac{16,807}{12,500,000} & -\frac{16,807}{12,500,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{5,000,000} & -\frac{16,807}{12,500,000} & \frac{16,807}{12,500,000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49}{500} & -\frac{49}{500} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{500} & \frac{49}{500} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01691 \\ 0.02437 \\ 0.07185 \\ 0.20427 \\ -0.00120 \\ -0.00154 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -278.9605 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -181.0712 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -92.0063 \text{ ton} \\ 92.0063 \text{ ton} \\ 77.3466 \text{ ton} \\ -77.3466 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{10}\} = [k_{10}]\{\delta_{10}\} + \{P_0^{(10)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{2401}{150,000} & \frac{2401}{300,000} & \frac{343}{50,000} & -\frac{343}{50,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{300,000} & \frac{2401}{150,000} & \frac{343}{50,000} & -\frac{343}{50,000} & 0 & 0 \\ \frac{343}{50,000} & \frac{343}{50,000} & \frac{49}{12,500} & -\frac{49}{12,500} & 0 & 0 \\ \frac{343}{50,000} & \frac{343}{50,000} & \frac{49}{12,500} & -\frac{49}{12,500} & 0 & 0 \\ -\frac{50,000}{50,000} & -\frac{50,000}{50,000} & -\frac{12,500}{12,500} & \frac{12,500}{12,500} & \frac{7}{50} & -\frac{7}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{50} & \frac{7}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{50} & -\frac{7}{50} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01034 \\ 0.01713 \\ 0.02303 \\ 0.07185 \\ 0.00045 \\ 0.00085 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -75.7068 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 51.5534 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -6.9010 \text{ ton} \\ 6.9010 \text{ ton} \\ -130.4328 \text{ ton} \\ 130.4328 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{11}\} = [k_{11}]\{\delta_{11}\} + \{P_0^{(11)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{2401}{150,000} & \frac{2401}{300,000} & \frac{343}{50,000} & -\frac{343}{50,000} & 0 & 0 \\ \frac{2401}{300,000} & \frac{2401}{150,000} & \frac{343}{50,000} & -\frac{343}{50,000} & 0 & 0 \\ \frac{343}{50,000} & \frac{343}{50,000} & \frac{49}{12,500} & -\frac{49}{12,500} & 0 & 0 \\ \frac{343}{50,000} & \frac{343}{50,000} & \frac{49}{12,500} & -\frac{49}{12,500} & 0 & 0 \\ -\frac{50,000}{50,000} & -\frac{50,000}{50,000} & -\frac{12,500}{12,500} & \frac{12,500}{12,500} & \frac{7}{50} & -\frac{7}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{50} & \frac{7}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{50} & -\frac{7}{50} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00913 \\ 0.01504 \\ 0.02303 \\ 0.07185 \\ -0.00021 \\ -0.00036 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -160.0552 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -49.3312 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -59.8247 \text{ ton} \\ 59.8247 \text{ ton} \\ 52.1615 \text{ ton} \\ -52.1615 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{12}\} = [k_{12}]\{\delta_{12}\} + \{P_0^{(12)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} 2401 & 2401 & 343 & -343 & 0 & 0 \\ 150,000 & 300,000 & 50,000 & -50,000 & 0 & 0 \\ 2401 & 2401 & 343 & -343 & 0 & 0 \\ 300,000 & 150,000 & 50,000 & -50,000 & 0 & 0 \\ 343 & 343 & 49 & -49 & 0 & 0 \\ 50,000 & 50,000 & 12,500 & -12,500 & 0 & 0 \\ 343 & 343 & 49 & -49 & 0 & 0 \\ 50,000 & -50,000 & -12,500 & 12,500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{50} & -\frac{7}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{50} & \frac{7}{50} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01014 \\ 0.01691 \\ 0.02300 \\ 0.07185 \\ -0.00065 \\ -0.00120 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -87.2678 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 39.7576 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -13.5743 \text{ ton} \\ 13.5743 \text{ ton} \\ 181.2713 \text{ ton} \\ -181.2713 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{13}\} = [k_{13}]\{\delta_{13}\} + \{P_0^{(13)}\}$$

$$\vdots = (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} 16,807 & 16,807 & 16,807 & -16,807 & 0 & 0 \\ 900,000 & 1,800,000 & 1,800,000 & -1,800,000 & 0 & 0 \\ 16,807 & 16,807 & 343 & -16,807 & 0 & 0 \\ 1,800,000 & 900,000 & 50,000 & -1,800,000 & 0 & 0 \\ 16,807 & 16,807 & 16,807 & -16,807 & 0 & 0 \\ 1,800,000 & 1,800,000 & 2,700,000 & -2,700,000 & 0 & 0 \\ 16,807 & 16,807 & 16,807 & 16,807 & 0 & 0 \\ -1,800,000 & -1,800,000 & -2,700,000 & 2,700,000 & \frac{49}{300} & -\frac{49}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49}{300} & -\frac{49}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{300} & \frac{49}{300} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01034 \\ 0 \\ 0.02303 \\ 0 \\ 0.00045 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -277.5514 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -51.3724 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -109.6413 \text{ ton} \\ 109.6413 \text{ ton} \\ 171.4676 \text{ ton} \\ 171.4676 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{14}\} = [k_{14}]\{\delta_{14}\} + \{P_0^{(14)}\}$$

$$\begin{aligned}
 \vdots &= (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{16,807}{900,000} & \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{1,800,000} & -\frac{16,807}{1,800,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{900,000} & \frac{343}{50,000} & -\frac{16,807}{1,800,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{2,700,000} & -\frac{16,807}{2,700,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{2,700,000} & \frac{16,807}{2,700,000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49}{300} & -\frac{49}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{300} & \frac{49}{300} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00913 \\ 0 \\ 0.02303 \\ 0 \\ -0.00021 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \begin{Bmatrix} -303.9229 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -104.1154 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -136.0128 \text{ ton} \\ 136.0128 \text{ ton} \\ 78.4912 \text{ ton} \\ -78.4912 \text{ ton} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\{F_{15}\} = [k_{15}]\{\delta_{15}\} + \{P_0^{(15)}\}$$

$$\begin{aligned}
 \vdots &= (140,000\sqrt{280}) \begin{bmatrix} \frac{16,807}{900,000} & \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{1,800,000} & -\frac{16,807}{1,800,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{900,000} & \frac{343}{50,000} & -\frac{16,807}{1,800,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{2,700,000} & -\frac{16,807}{2,700,000} & 0 & 0 \\ \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{1,800,000} & \frac{16,807}{2,700,000} & \frac{16,807}{2,700,000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{49}{300} & -\frac{49}{300} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{49}{300} & \frac{49}{300} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01014 \\ 0 \\ 0.02303 \\ 0 \\ -0.00065 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \begin{Bmatrix} -281.9561 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -60.1818 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -114.0460 \text{ ton} \\ 114.0460 \text{ ton} \\ 247.9763 \text{ ton} \\ -247.9763 \text{ ton} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

La distribución de momentos y fuerzas cortantes se exhibe en la siguiente página. Los diagramas de elementos mecánicos se dejan al lector. Fácilmente podrá corroborar que tienen la misma forma de graficación que los ilustrados en el capítulo XV pero con los valores que se presentan en la figura XVII.6.

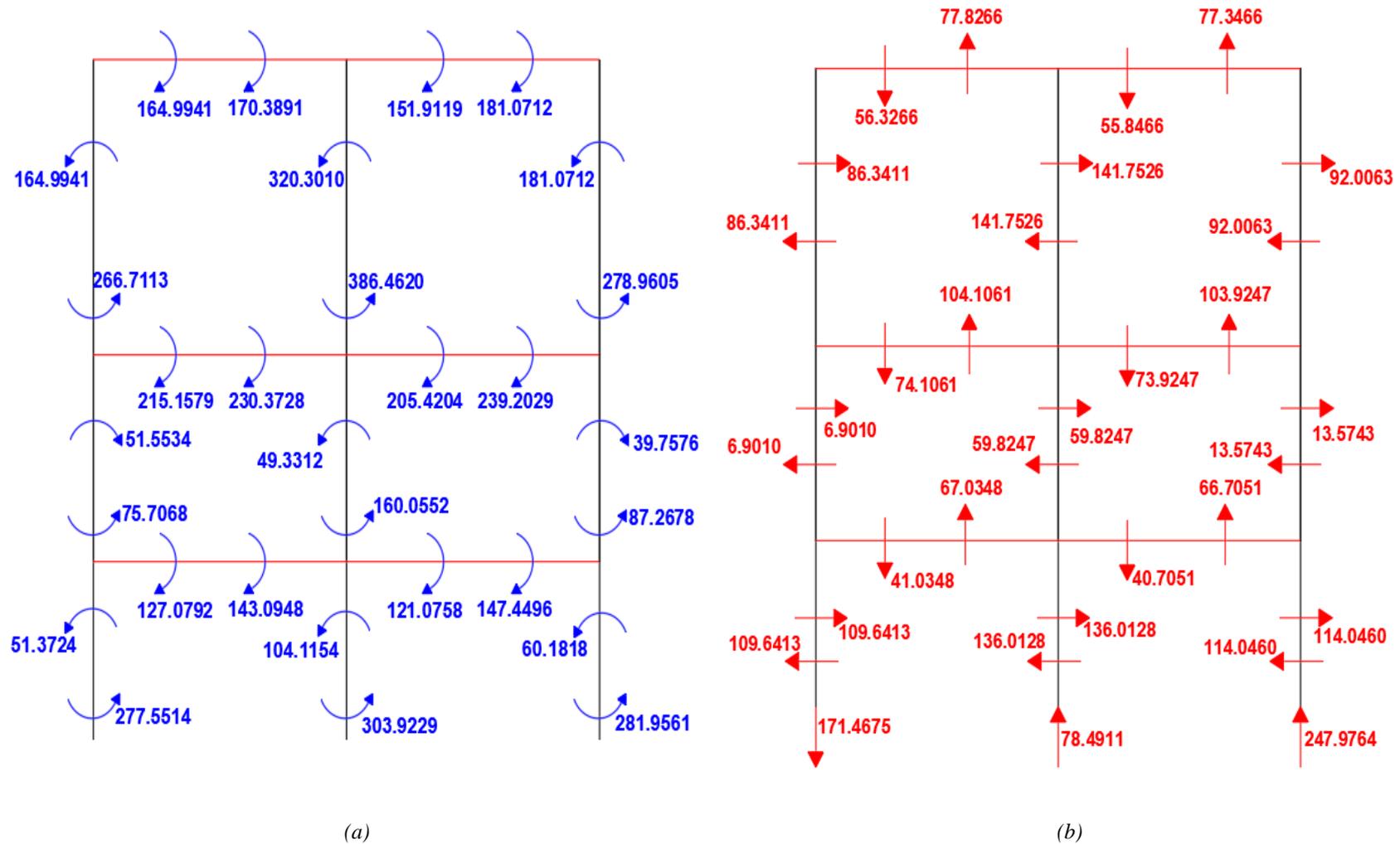


Figura XVII.6. Distribución de (a) momentos (ton-m) y (b) cortantes (ton).

Capítulo XVIII:

**Análisis Dinámico Modal Espectral
Y Análisis Estructural de Marcos
Perimetrales Considerando Deformación
Por Flexión, Cortante y Axial en Columnas**

- 18.1 Determinación de la Matriz de Rigidez para Análisis Dinámico [K]
- 18.2 Calculo de la Frecuencia y Periodo a Través de Eigenvalores
- 18.3 Calculo de los Modos de Vibrar a Través de Eigenvectores
- 18.4 Factor de Participación de Masas
- 18.5 Aceleraciones a Considerar con Base en los Periodos de la Estructura
- 18.6 Calculo de los Desplazamientos Relativos y Finales
- 18.7 Revisión de los Desplazamientos Laterales (Distorsión de Entrepiso)
- 18.8 Calculo de las Fuerzas Cortantes (Cortantes Basales)
- 18.9 Revisión por Cortante Basal Mínimo
- 18.10 Determinación de Cargas Debidas a Acciones Permanentes, Variables y Accidentales
- 18.11 Determinación de Cargas Debidas a Acciones Permanentes y Variables
- 18.12 Análisis Estructural para el Caso Sísmico

XVIII. Análisis Dinámico Modal Espectral y Análisis Estructural de Marcos Perimetrales Considerando Deformación por Flexión y Axial en Columnas

18.1 Determinación de la Matriz de Rigidez para Análisis Dinámico [K]

Para calcular la matriz de rigidez $[k_{ij}]$ se toma la misma numeración de grados de libertad que se consideró para el capítulo XVII:

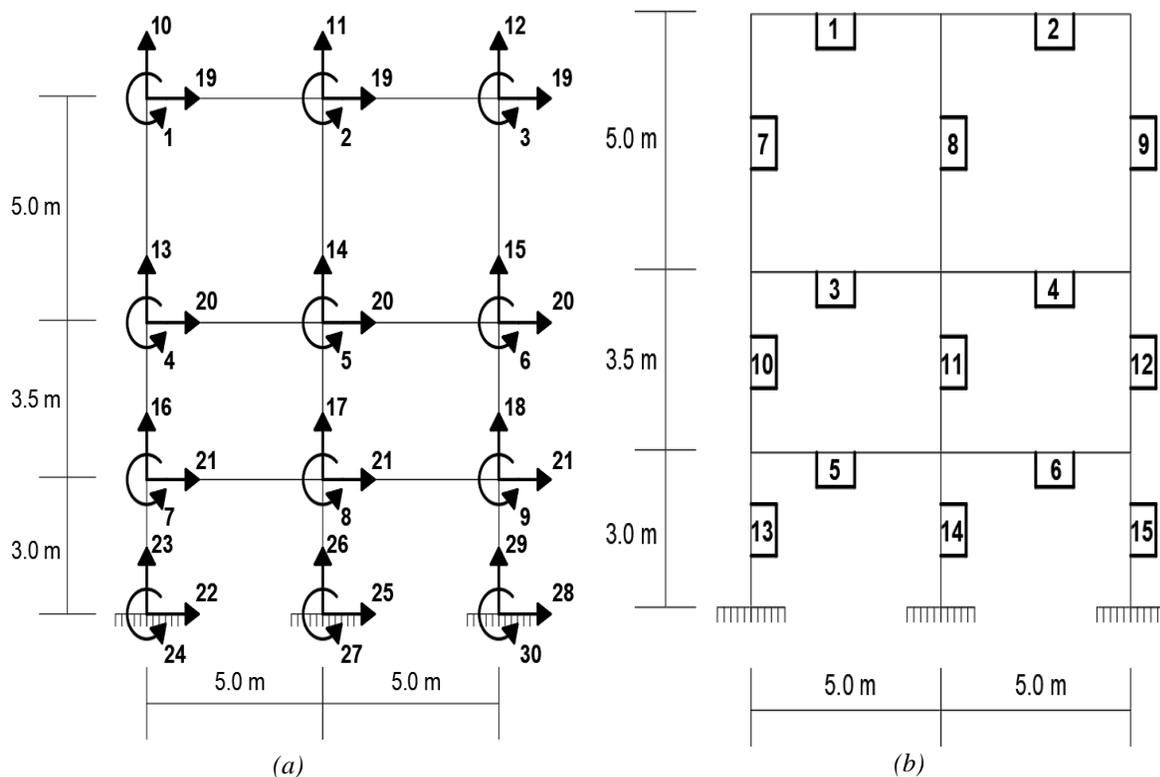


Figura XVIII.1. (a) Numeración de los grados de libertad (b) numeración de los elementos discretizados.

Se calculan las matrices de rigidez, en coordenadas locales, pero ahora no se desprecia ningún efecto de deformación en las mismas, por lo cual se toman tal cual las ecuaciones 12.59^{18.1} y 12.60:

^{18.1} En el capítulo referente al análisis dinámico modal espectral, donde se consideró las deformaciones axiales en columnas, se explicó porque $EA/L = 0$ en las vigas.

$$\left[k_{ij} \right] = \begin{bmatrix}
 \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de una viga considerando deformación a flexión

$$\left[k_{ij} \right] = \begin{bmatrix}
 \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{6EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & -\frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & \frac{12EI}{L^3} \left(\frac{1}{1+4c} \right) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L}
 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de una columna considerando deformación a flexión, pero sólo deformación axial en columnas

Es evidente que los términos que se agrupan en la región comprendida entre los elementos (1,1), (1,4), (4,1) y (4,4), en las matrices de rigidez para vigas y columnas, son los mismos coeficientes de rigidez calculados en el capítulo XVI. Los términos (5,5), (5,6), (6,5) y (6,6) serán cero para las vigas, mientras que para las columnas son $\pm EA/L$ (positivo para los elementos de la diagonal principal y negativos para los términos (5,6) y (6,5)). Bajo esta observación, basta con sumar los términos de la rigidez axial a las matrices que consideran deformaciones por flexión y cortante.

Las matrices de los elementos 1 y 2 son:

$$\therefore [k_1] = \frac{27E}{1,275,920} \begin{bmatrix} 100.5184 & 49.4816 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.4816 & 100.5184 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{19} \\ \mathbf{19} \end{matrix} \quad (18.1)$$

$$\therefore [k_2] = \frac{27E}{1,275,920} \begin{bmatrix} 100.5184 & 49.4816 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.4816 & 100.5184 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{11} \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{19} \\ \mathbf{19} \end{matrix} \quad (18.2)$$

Las matrices de los elementos 3 a 6 son:

$$\therefore [k_3] = \frac{2401 E}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{13} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{20} \\ \mathbf{20} \end{matrix} \quad (18.3)$$

$$\therefore [k_4] = \frac{2401 E}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{15} \\ \mathbf{20} \\ \mathbf{20} \end{matrix} \quad (18.4)$$

$$\therefore [k_5] = \frac{2401 E}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{16} \\ \mathbf{17} \\ \mathbf{21} \\ \mathbf{21} \end{matrix} \quad (18.5)$$

$$\therefore [k_6] = \frac{2401 E}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{17} \\ \mathbf{18} \\ \mathbf{21} \\ \mathbf{21} \end{matrix} \quad (18.6)$$

Las matrices de los elementos 7 a 9 son:

$$\therefore [k_7] \cong E \begin{bmatrix} 0.0109 & 0.0053 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0053 & 0.0109 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0032 & 0.0032 & 0.0013 & -0.0013 & 0 & 0 \\ -0.0032 & -0.0032 & -0.0013 & 0.0013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0980 & -0.0980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0980 & 0.0980 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{20} \\ \mathbf{19} \\ \mathbf{13} \\ \mathbf{21} \end{matrix} \quad (18.7)$$

$$\therefore [k_8] \cong E \begin{bmatrix} 0.0109 & 0.0053 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0053 & 0.0109 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0032 & 0.0032 & 0.0013 & -0.0013 & 0 & 0 \\ -0.0032 & -0.0032 & -0.0013 & 0.0013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0980 & -0.0980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0980 & 0.0980 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{20} \\ \mathbf{19} \\ \mathbf{14} \\ \mathbf{11} \end{matrix} \quad (18.8)$$

$$\therefore [k_9] \cong E \begin{bmatrix} 0.0109 & 0.0053 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0053 & 0.0109 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0032 & 0.0032 & 0.0013 & -0.0013 & 0 & 0 \\ -0.0032 & -0.0032 & -0.0013 & 0.0013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0980 & -0.0980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0980 & 0.0980 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{20} \\ \mathbf{19} \\ \mathbf{15} \\ \mathbf{12} \end{matrix} \quad (18.9)$$

Las matrices de los elementos 10 a 12 son:

$$\therefore [k_{10}] \cong E \begin{bmatrix} & \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{21} & \mathbf{20} & \mathbf{16} & \mathbf{13} & \\ 0.0151 & 0.0071 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 & & \mathbf{7} \\ 0.0071 & 0.0151 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 & & \mathbf{4} \\ 0.0063 & 0.0063 & 0.0036 & -0.0036 & 0 & 0 & & \mathbf{21} \\ -0.0063 & -0.0063 & -0.0036 & 0.0036 & 0 & 0 & & \mathbf{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1400 & -0.1400 & & \mathbf{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1400 & 0.1400 & & \mathbf{13} \end{bmatrix} \quad (18.10)$$

$$\therefore [k_{11}] \cong E \begin{bmatrix} & \mathbf{8} & \mathbf{5} & \mathbf{21} & \mathbf{20} & \mathbf{17} & \mathbf{14} & \\ 0.0151 & 0.0071 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 & & \mathbf{8} \\ 0.0071 & 0.0151 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 & & \mathbf{5} \\ 0.0063 & 0.0063 & 0.0036 & -0.0036 & 0 & 0 & & \mathbf{21} \\ -0.0063 & -0.0063 & -0.0036 & 0.0036 & 0 & 0 & & \mathbf{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1400 & -0.1400 & & \mathbf{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1400 & 0.1400 & & \mathbf{14} \end{bmatrix} \quad (18.11)$$

$$\therefore [k_{12}] \cong E \begin{bmatrix} & \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{21} & \mathbf{20} & \mathbf{18} & \mathbf{15} & \\ 0.0151 & 0.0071 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 & & \mathbf{9} \\ 0.0071 & 0.0151 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 & & \mathbf{6} \\ 0.0063 & 0.0063 & 0.0036 & -0.0036 & 0 & 0 & & \mathbf{21} \\ -0.0063 & -0.0063 & -0.0036 & 0.0036 & 0 & 0 & & \mathbf{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1400 & -0.1400 & & \mathbf{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1400 & 0.1400 & & \mathbf{15} \end{bmatrix} \quad (18.12)$$

Las matrices de los elementos 13 a 15 son:

$$\therefore [k_{13}] \cong E \begin{bmatrix} & \mathbf{24} & \mathbf{7} & \mathbf{22} & \mathbf{21} & \mathbf{23} & \mathbf{16} & \\ 0.0173 & 0.0080 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 & & \mathbf{24} \\ 0.0080 & 0.0173 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 & & \mathbf{7} \\ 0.0084 & 0.0084 & 0.0056 & -0.0056 & 0 & 0 & & \mathbf{22} \\ -0.0084 & -0.0084 & -0.0056 & 0.0056 & 0 & 0 & & \mathbf{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1633 & -0.1633 & & \mathbf{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1633 & 0.1633 & & \mathbf{16} \end{bmatrix} \quad (18.13)$$

$$\therefore [k_{14}] \cong E \begin{bmatrix} & \mathbf{27} & \mathbf{8} & \mathbf{25} & \mathbf{21} & \mathbf{26} & \mathbf{17} & \\ 0.0173 & 0.0080 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 & & \mathbf{27} \\ 0.0080 & 0.0173 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 & & \mathbf{8} \\ 0.0084 & 0.0084 & 0.0056 & -0.0056 & 0 & 0 & & \mathbf{25} \\ -0.0084 & -0.0084 & -0.0056 & 0.0056 & 0 & 0 & & \mathbf{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1633 & -0.1633 & & \mathbf{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1633 & 0.1633 & & \mathbf{17} \end{bmatrix} \quad (18.14)$$

$$\therefore [k_{15}] \cong E \begin{bmatrix} & \mathbf{30} & \mathbf{9} & \mathbf{28} & \mathbf{21} & \mathbf{29} & \mathbf{18} & \\ 0.0173 & 0.0080 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{30} \\ 0.0080 & 0.0173 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{9} \\ 0.0084 & 0.0084 & 0.0056 & -0.0056 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{28} \\ -0.0084 & -0.0084 & -0.0056 & 0.0056 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1633 & -0.1633 & 0 & \mathbf{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1633 & 0.1633 & 0 & \mathbf{18} \end{bmatrix} \quad (18.15)$$

En la siguiente página se ensambla la matriz de rigidez en coordenadas globales $[k_{ij}]$ con $E = 140000\sqrt{280}$ ton/m² contemplando los grados de libertad 1 a 21:

30,483.301	2,452.964	0	12,375.982	0	0	0	0	0	-1,487.197	1,487.197	0	0	0	0	0	0	0	0	-7,575.252	7,575.252	0
2,452.964	35,466.324	2,452.964	0	12,375.982	0	0	0	0	-1,487.197	0	1,487.197	0	0	0	0	0	0	0	-7,575.252	7,575.252	0
0	2,452.964	30,483.301	0	0	12,375.982	0	0	0	0	-1,487.197	1,487.197	0	0	0	0	0	0	0	-7,575.252	7,575.252	0
12,375.982	0	0	70,081.125	4,494.256	0	16,650.345	0	0	0	0	0	-2,735.152	2,735.152	0	0	0	0	0	-7,575.252	-7,296.089	14,871.341
0	12,375.982	0	4,494.256	79,262.629	4,494.256	0	16,650.345	0	0	0	0	-2,735.152	0	2,735.152	0	0	0	0	-7,575.252	-7,296.089	14,871.341
0	0	12,375.982	0	4,494.256	70,081.125	0	0	16,650.345	0	0	0	0	-2,735.152	2,735.152	0	0	0	0	-7,575.252	-7,296.089	14,871.341
0	0	0	16,650.350	0	0	85,083.377	44,494.256	0	0	0	0	0	0	0	-2,735.152	2,735.152	0	0	0	-14,871.341	-4,839.070
0	0	0	0	16,650.350	0	4,494.256	94,264.881	4,494.256	0	0	0	0	0	0	-2,735.152	0	2,735.152	0	0	-14,871.341	-4,839.070
0	0	0	0	0	16,650.345	0	4,494.256	85,083.347	0	0	0	0	0	0	0	-2,735.152	2,735.152	0	0	-14,871.341	-4,839.070
-1487.197	-1487.197	0	0	0	0	0	0	0	230,174.390	-594.879	0	-229,579.511	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1487.197	0	-1487.197	0	0	0	0	0	0	-594.879	230,769.269	-594.879	0	-229,579.511	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1487.197	1487.197	0	0	0	0	0	0	0	-594.879	230,174.390	0	0	-229,579.511	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-2,735.152	-2,735.152	0	0	0	0	-229,579.511	0	0	558,644.303	-1,094.061	0	-327,970.730	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2,735.152	0	-2,735.152	0	0	0	0	-229,579.511	0	-1,094.061	559,738.363	-1,094.061	0	-327,970.730	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2,735.152	2,735.152	0	0	0	0	0	-229,579.511	0	-1,094.061	558,644.303	0	0	-327,970.730	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-2,735.152	-2,735.152	0	0	0	0	-327,970.730	0	0	711,697.310	-1,094.061	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	2,735.152	0	-2,735.152	0	0	0	0	-327,970.730	0	-1,094.061	712,791.3718	-1,094.061	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	2,735.152	2,735.152	0	0	0	0	0	-327,970.730	0	-1,094.061	711,697.310	0	0	0	0
-7575.252	-7575.252	-7575.252	-7575.252	-7,575.252	-7,575.252	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9,090.302	-9,090.302	0
7575.252	7575.252	7575.252	-7,269.089	-7,296.089	-7,296.089	-14,871.341	-14,871.341	-14,871.341	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-9,090.302	34,584.029	-25,493.727
0	0	0	14,871.341	14,871.341	14,871.341	-4,839.070	-4,839.070	-4,839.070	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-25,493.727	64,914.549

Aplicando la condensación estática para determinar la matriz de rigidez con los grados de libertad 19 a 21 se tiene:

$$[k_{ij}^*] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 19 & 20 & 21 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 19 \\ 20 \\ 21 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3,158.052 & -5,678.946 & 3,240.212 \\ -5,678.946 & 20,296.691 & -22,911.955 \\ 3,420.212 & -22,911.955 & 53,685.194 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (18.16)$$

De la ecuación 18.16 se deduce que las rigideces asociadas a las masas concentradas de la estructura son:

$$[k_{ij}^*] = \begin{bmatrix} k_3 & [k_v] \\ & k_2 + k_3 \\ [k_v] & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,158.052 & -5,678.946 & 3,240.212 \\ -5,678.946 & 20,296.691 & -22,911.955 \\ 3,420.212 & -22,911.955 & 53,685.194 \end{bmatrix}$$

De los elementos de la diagonal principal se determinan las rigideces de los entrepisos:

$$k_3 = 3,158.052 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (18.17)$$

$$k_2 + k_3 = 20,296.691 \quad \therefore \quad k_2 = 17,138.639 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (18.18)$$

$$k_1 + k_2 = 53,685.194 \quad \therefore \quad k_1 = 36,564.555 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (18.19)$$

Conocidas las rigideces de los entrepisos k_1 , k_2 y k_3 se puede ensamblar la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$:

$$\begin{aligned} [K] &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \\ \therefore &= \begin{bmatrix} 36,564.555 + 17,138.639 & -17,138.639 & 0 \\ -17,138.639 & 17,138.639 + 3,158.052 & -3,158.052 \\ 0 & -3,158.052 & 3,158.052 \end{bmatrix} \frac{\text{ton}}{\text{m}} \\ \therefore [K] &= \begin{bmatrix} 53,703.194 & -17,138.639 & 0 \\ -17,138.639 & 20,296.691 & -3,158.052 \\ 0 & -3,158.052 & 3,158.052 \end{bmatrix} \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (18.20) \end{aligned}$$

Conocidas las matrices de masa concentrada y de rigidez para análisis dinámico, el modelo masa – resorte es el siguiente:

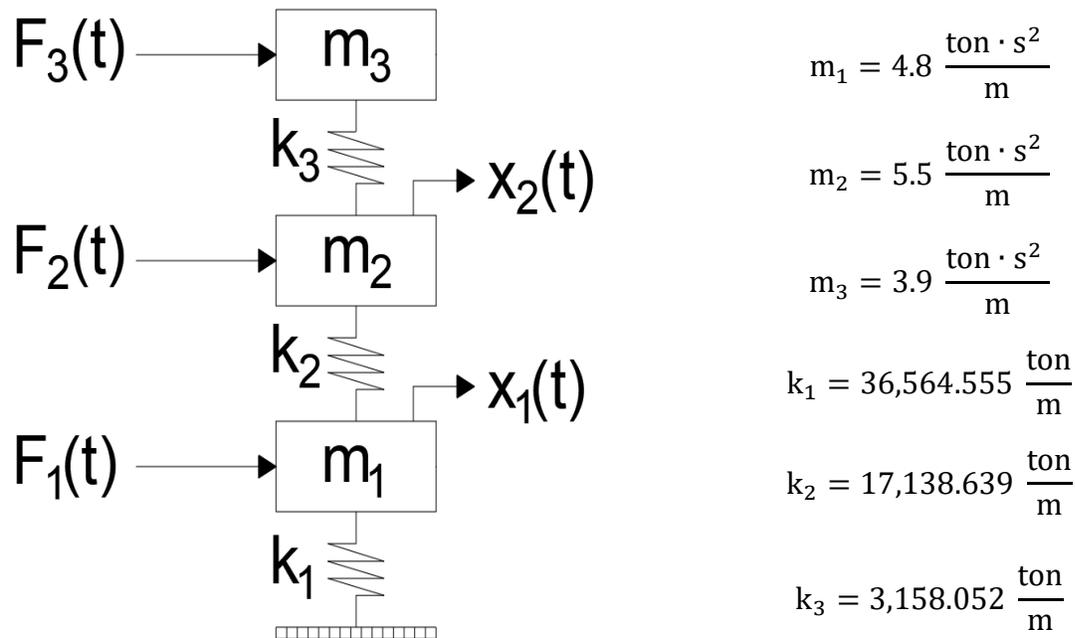


Figura XVIII.2. Modelo masa – resorte del marco externo de la estructura en estudio.

18.2 Cálculo de la Frecuencia y Periodo a Través de Eigenvalores

Partiendo del problema de eigenvalores con $[[K] - \omega^2[M]]$, se tiene:

$$\left| \begin{bmatrix} 53,703.194 & -17,138.639 & 0 \\ -17,138.639 & 20,296.691 & -3,158.052 \\ 0 & -3,158.052 & 3,158.052 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (18.21)$$

A fin de evitar errores muy grandes de truncamiento, se hace uso del software derive 6® para calcular los valores de λ . La siguiente imagen muestra las operaciones hechas:

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA ANÁLISIS DINÁMICO
[K]

$$\begin{bmatrix} 53703.194 & -17138.639 & 0 \\ -17138.639 & 20296.691 & -3158.052 \\ 0 & -3158.052 & 3158.052 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE MASA CONCENTRADA
[M]

$$\begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix}$$

CÁLCULO DE $|[K]-\lambda[M]|$ CON $\lambda=\omega^2$

$$\text{DET} \left(\begin{bmatrix} 53703.194 & -17138.639 & 0 \\ -17138.639 & 20296.691 & -3158.052 \\ 0 & -3158.052 & 3158.052 \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right) = 0$$

POLINOMIO CARACTERÍSTICO $p(\lambda)=0$

$$\lambda \cdot (5.9670468 \cdot 10^{12} \cdot \lambda^2 - 9.361240139 \cdot 10^{16} \cdot \lambda + 2.490914645 \cdot 10^{20}) = 1.146956139 \cdot 10^{23}$$

RAÍCES DEL POLINOMIO

$$\lambda = 583.7585171 \vee \lambda = 2642.132422 \vee \lambda = 1.246233885 \cdot 10^4$$

Figura XVIII.3. Cálculo de los valores de λ utilizando derive 6®.

Teniendo los valores de λ se puede calcular las frecuencias ω :

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = 583.7585171 \quad \therefore \quad \omega_1 \cong 24.161 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (18.22)$$

$$\omega_2^2 = \lambda_2 = 2642.132422 \quad \therefore \quad \omega_2 \cong 51.402 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (18.23)$$

$$\omega_3^2 = \lambda_3 = 1.246233885 \cdot 10^4 \quad \therefore \quad \omega_3 \cong 111.635 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (18.24)$$

Y teniendo las frecuencias ω es posible determinar los periodos de la estructura:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{24.161 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_1 \cong 0.260 \text{ s} \quad (18.25)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{51.402 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_2 \cong 0.122 \text{ s} \quad (18.26)$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{111.635 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_3 \cong 0.056 \text{ s} \quad (18.27)$$

18.3 Calculo de los Modos de Vibrar a Través de Eigenvectores

Calculando el modo de vibrar número 1 asociado a ω_1 :

$$\left[\begin{array}{ccc} 53,703.194 & -17,138.639 & 0 \\ -17,138.639 & 20,296.691 & -3,158.052 \\ 0 & -3,158.052 & 3,158.052 \end{array} \right] - 583.7585171 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18.28)$$

Desarrollando con $\phi_{11} = 1$ se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc} 50,901.153 & -17,138.639 & 0 \\ -17,138.639 & 17,086.019 & -3,158.052 \\ 0 & -3,158.052 & 881.394 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18.29)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones cualesquiera entre sí, del sistema de ecuaciones lineales anterior, se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.970 \\ 10.641 \end{Bmatrix} \quad (18.30)$$

Al normalizarlo se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(2.970)^2 + (3.9)(10.641)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.970 \\ 10.641 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.045 \\ 0.134 \\ 0.478 \end{Bmatrix} \quad (18.31)$$

Calculando el modo de vibrar número 2 asociado a ω_2 :

$$\left[\begin{bmatrix} 53,703.194 & -17,138.639 & 0 \\ -17,138.639 & 20,296.691 & -3,158.052 \\ 0 & -3,158.052 & 3,158.052 \end{bmatrix} - 2642.132422 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18.32)$$

Desarrollando con $\phi_{12} = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 41,020.958 & -17,138.639 & 0 \\ -17,138.639 & 5,764.963 & -3,158.052 \\ 0 & -3,158.052 & -7,146.264 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18.33)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones entre sí se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.393 \\ -1.058 \end{Bmatrix} \quad (18.34)$$

Donde al normalizarlo se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(2.393)^2 + (3.9)(-1.058)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.393 \\ -1.058 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.157 \\ 0.375 \\ -0.166 \end{Bmatrix} \quad (18.35)$$

Calculando el modo de vibrar número 3 asociado a ω_3 :

$$\left[\begin{bmatrix} 53,703.194 & -17,138.639 & 0 \\ -17,138.639 & 20,296.691 & -3,158.052 \\ 0 & -3,158.052 & 3,158.052 \end{bmatrix} - 1.246233885 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18.36)$$

Desarrollando con $\phi_{13} = 1$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} -6,116.032 & -17,138.639 & 0 \\ -17,138.639 & -48,246.173 & -3,158.052 \\ 0 & -3,158.052 & -45,445.070 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18.37)$$

Al resolver simultáneamente dos ecuaciones entre sí se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.357 \\ 0.025 \end{Bmatrix} \quad (18.38)$$

Donde al normalizarlo se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(4.8)(1)^2 + (5.5)(-0.357)^2 + (3.9)(0.025)^2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.357 \\ 0.025 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.426 \\ -0.152 \\ 0.011 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz modal del sistema es:

$$[\phi_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.045 & 0.157 & 0.426 \\ 0.134 & 0.375 & -0.152 \\ 0.478 & -0.166 & 0.011 \end{bmatrix}$$

Comprobando las relaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} [\phi_{ij}]^T [M] [\phi_{ij}] &= [I] \\ \vdots &= \begin{bmatrix} 0.045 & 0.157 & 0.426 \\ 0.134 & 0.375 & -0.152 \\ 0.478 & -0.166 & 0.011 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.045 & 0.157 & 0.426 \\ 0.134 & 0.375 & -0.152 \\ 0.478 & -0.166 & 0.011 \end{bmatrix} \\ \vdots &\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comprobando que los modos de vibrar cumplen con la ortogonalidad, se verifica que el cálculo de los mismos es correcto.

Las siguientes figura representan los modos de vibrar de la estructura en estudio:

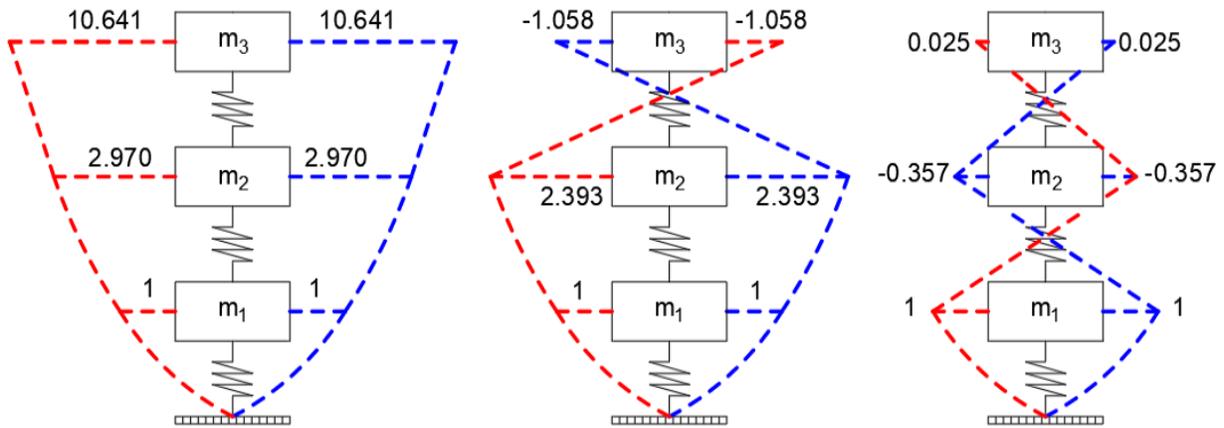


Figura XVIII.4. Representación gráfica de los modos de vibrar de los marcos externos de la estructura.

18.4 Factor de Participación de Masas

El valor de la participación de masas se realiza con:

$$T_j^* = \frac{\{\phi_{nj}\}^T [M] \{1\}}{\{\phi_{nj}\}^T [M] \{\phi_{nj}\}} = \frac{\sum m_n \phi_{nj}}{\sum m_n \phi_{nj}^2} \quad (18.39)^{18.2}$$

Para el entrespiso 1 se tiene:

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{\sum m_n \phi_{n1}}{\sum m_n \phi_{n1}^2} \\ &\vdots = \frac{m_1 \phi_{11} + m_2 \phi_{21} + m_3 \phi_{31}}{m_1 \phi_{11}^2 + m_2 \phi_{21}^2 + m_3 \phi_{31}^2} \\ &\vdots = \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.970) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(10.641)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.970)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(10.641)^2} \\ &\vdots = \frac{62.635 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{494.915 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \end{aligned}$$

^{18.2} {1} es un vector columna de igual número de renglones que de columnas del vector renglón $\{\phi_{nj}\}^T$. Así mismo

$$\therefore T_1^* = 0.126 \quad (18.40)$$

Para el entrepiso 2 se tiene:

$$\begin{aligned} T_2^* &= \frac{\sum m_n \phi_{n2}}{\sum m_n \phi_{n2}^2} \\ \therefore &= \frac{m_1 \phi_{12} + m_2 \phi_{22} + m_3 \phi_{32}}{m_1 \phi_{12}^2 + m_2 \phi_{22}^2 + m_3 \phi_{32}^2} \\ \therefore &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.393) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-1.058)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(2.393)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-1.058)^2} \\ \therefore &= \frac{13.835 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{40.661 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \\ \therefore T_2^* &= 0.341 \quad (18.41) \end{aligned}$$

Para el entrepiso 3 se tiene:

$$\begin{aligned} T_3^* &= \frac{\sum m_n \phi_{n3}}{\sum m_n \phi_{n3}^2} \\ \therefore &= \frac{m_1 \phi_{13} + m_2 \phi_{23} + m_3 \phi_{33}}{m_1 \phi_{13}^2 + m_2 \phi_{23}^2 + m_3 \phi_{33}^2} \\ \therefore &= \frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-0.357) + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(0.025)}{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(1) + \left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(-0.357)^2 + \left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}\right)(0.025)^2} \\ \therefore &= \frac{2.934 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}}{5.503 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}} \\ \therefore T_3^* &= 0.533 \quad (18.42) \end{aligned}$$

Para verificar que la participación de masas sea de por lo menos 90% debe cumplirse que $\sum T_j^* \geq 0.9$. Al efectuar $T_1^* + T_2^* + T_3^*$ se obtiene exactamente 1.0 lo cual implica que participa el 100% de la masa total de la estructura en el análisis modal.

18.5 Aceleraciones a Considerar con Base en los Periodos de la Estructura

Recordando que los periodos de la estructura asociados a los modos de vibrar son:

$$T_1 \cong 0.260 \text{ s}$$

$$T_2 \cong 0.122 \text{ s}$$

$$T_3 \cong 0.056 \text{ s}$$

El valor de la aceleración asociada se calcula con:

$$A_{sn} = a_n g \quad (18.43)$$

Donde:

$[A_{sn}]$ = valor de la aceleración asociada a los modos de vibrar.

$[a_n]$ = coeficiente de reducción de la gravedad obtenido del espectro de diseño de sitio.

$[g]$ = aceleración de la gravedad igual a $9.81 \text{ m} / \text{s}^2$.

Para calcular a_1 asociado a un periodo $T_1 \cong 0.260$ seg, se tiene un valor $a = 0.173$ para $T = 0.3$ seg y un valor $a = 0.152$ para $T = 0.2$ seg. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_1 \cong 0.260$ s le corresponde un $a_1 = 0.165$.

$$\therefore A_{s1} = a_1 g = (0.165) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.619 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (18.44)$$

Para calcular a_2 asociado a un periodo $T_2 \cong 0.122$ seg, se tiene un valor $a = 0.127$ para $T = 0.1$ seg y un valor $a = 0.152$ para $T = 0.2$ seg. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_2 \cong 0.119$ s le corresponde un $a_2 = 0.133$.

$$\therefore A_{s2} = a_2 g = (0.133) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 1.305 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (18.45)$$

Para calcular a_3 asociado a un periodo $T_3 \cong 0.056$ seg, se tiene un valor $a = 0.09$ para $T = 0$ s y un valor $a = 0.127$ para $T = 0.1$ s. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_3 \cong 0.056$ s le corresponde un $a_3 = 0.111$.

$$\therefore A_{s3} = a_3 g = (0.111) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 1.089 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (18.46)$$

18.6 Calculo de los Desplazamientos Relativos y Finales

Calculando el factor de sobre – resistencia con base en la ecuación:

$$R = k_1 R_0 + k_2$$

Con base en las NTC – Sismo (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 60) se selecciona $R_0 = 1.75$ por ser una estructura con $Q = 2$ y $k_1 = 0.8$ por ser una estructura que tiene menos de tres crujiás resistentes a sismo en la dirección de análisis.

Para calcular k_2 se hará con la fórmula:

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_a}} \right) \quad (18.47)^{18.3}$$

Los periodos naturales de la estructura son menores que el valor del inicio de la meseta del espectro de diseño por lo que k_2 se calcula conforme al reglamento:

^{18.3} Ecuación 3.5.2 del RCCDMX.

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{0.26 \text{ s}}{0.35 \text{ s}}} \right) = 0.069 \quad (18.48)$$

Calculando el factor de sobre – resistencia conocidos k_1 , k_2 y R_0 :

$$R = (0.8)(1.75) + 0.069 = 1.469 \quad (18.49)$$

Al no incluir el valor que agrega k_2 , el valor del factor de sobrerresistencia es de 1.4. Como sólo existe una diferencia del 4.697 % al compararlo con la ecuación 18.49 se deja $R = 1.4$ como valor final de sobrerresistencia.

Los desplazamientos finales se determinan mediante:

$$\{d_{nj}\} = \frac{Q R T_j^* A_{sj}}{\omega_j^2} \{\Phi_{nj}\} \quad (18.50)$$

Calculo para el primer modo de vibrar ($j = 1$):

$$\begin{aligned} \{d_{n1}\} &= \frac{Q R T_1^* A_{s1}}{\omega_1^2} \{\Phi_{n1}\} \\ \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix} &= \frac{Q R T_1^* A_{s1}}{\omega_1^2} \begin{pmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{pmatrix} \\ \therefore &= \frac{(2) (1.4) (0.126) (1.619)}{583.7585171} \begin{pmatrix} 1 \\ 2.970 \\ 10.641 \end{pmatrix} \\ \therefore &= (0.000978458 \text{ m}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2.970 \\ 10.641 \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.000978458 \\ 0.002906020 \\ 0.010411772 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} 0.0978458 \\ 0.2906020 \\ 1.0411772 \end{pmatrix} \text{ cm} = \begin{pmatrix} 0.978458 \\ 2.906020 \\ 10.411772 \end{pmatrix} \text{ mm} \quad (18.51) \end{aligned}$$

Calculo para el segundo modo de vibrar ($j = 2$):

$$\{d_{n2}\} = \frac{Q R T_2^* A_{s2}}{\omega_2^2} \{\Phi_{n2}\}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{Bmatrix} &= \frac{Q R T_2^* A_{s2}}{\omega_2^2} \begin{Bmatrix} \Phi_{12} \\ \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{(2) (1.4) (0.341) (1.305)}{2,642.132422} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.393 \\ -1.058 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= (0.000471594 \text{ m}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.393 \\ -1.058 \end{Bmatrix} \\
 \therefore \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.000471594 \\ 0.001128524 \\ -0.000498946 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.0471594 \\ 0.1128524 \\ -0.0498946 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 0.471594 \\ 1.128524 \\ -0.498946 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (18.52)
 \end{aligned}$$

Calculo para el tercer modo de vibrar (j = 3):

$$\begin{aligned}
 \{d_3\} &= \frac{Q R T_3^* A_{s3}}{\omega_3^2} \{\Phi_{n3}\} \\
 \begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{Bmatrix} &= \frac{Q R T_3^* A_{s3}}{\omega_3^2} \begin{Bmatrix} \Phi_{13} \\ \Phi_{23} \\ \Phi_{33} \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \frac{(2) (1.4) (0.533) (1.089)}{1.246233885 \cdot 10^4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.357 \\ 0.025 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= (0.000130411 \text{ m}) \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.357 \\ 0.025 \end{Bmatrix} \\
 \therefore \begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0.000130411 \\ -0.000046557 \\ 0.000003260 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.0130411 \\ -0.0046557 \\ 0.0003260 \end{Bmatrix} \text{ cm} = \begin{Bmatrix} 0.130411 \\ -0.046557 \\ 0.003260 \end{Bmatrix} \text{ mm} \quad (18.53)
 \end{aligned}$$

Como cada periodo de la estructura varía entre sí por lo menos un 10 %, el RCCDMX permite utilizar el método del SRSS para calcular el desplazamiento de cada entrepiso mediante:

$$d_{F-j} = \sqrt{\sum d_{jn}^2}$$

Donde:

$[d_{F-j}]$ = desplazamiento final de cada entrepiso.

$[\sqrt{\sum d_{jn}^2}]$ = suma de los cuadrados de cada renglón asociado al j-ésimo entrepiso de cada uno de los vectores $\{d_{nj}\}$

Para el entrepiso 1:

$$\begin{aligned}
 d_{F-1} &= \sqrt{\sum d_{1n}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{d_{11}^2 + d_{12}^2 + d_{13}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{(0.978458 \text{ mm})^2 + (0.471594 \text{ mm})^2 + (0.130411 \text{ mm})^2} \\
 &\quad \quad \quad \therefore d_{F-1} \cong 1.094 \text{ mm} \tag{18.54}
 \end{aligned}$$

Para el entrepiso 2 (en mm):

$$\begin{aligned}
 d_{F-2} &= \sqrt{\sum d_{2n}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{d_{21}^2 + d_{22}^2 + d_{23}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{(2.906020 \text{ mm})^2 + (1.128524 \text{ mm})^2 + (-0.046557 \text{ mm})^2} \\
 &\quad \quad \quad \therefore d_{F-2} \cong 3.118 \text{ mm} \tag{18.55}
 \end{aligned}$$

Para el entrepiso 3 (en mm):

$$\begin{aligned}
 d_{F-3} &= \sqrt{\sum d_{3n}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{d_{31}^2 + d_{32}^2 + d_{33}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{(10.411772 \text{ mm})^2 + (-0.498946 \text{ mm})^2 + (0.003260 \text{ mm})^2} \\
 &\quad \quad \quad \therefore d_{F-3} \cong 10.424 \text{ mm} \tag{18.56}
 \end{aligned}$$

Los desplazamientos relativos se calculan al restan al desplazamiento de la masa superior, el de la masa inferior. Los desplazamiento relativos se ejemplifican por medio de $\{d_{nj}^*\}$.

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 1:

$$\begin{Bmatrix} d_{11}^* \\ d_{21}^* \\ d_{31}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000978458 \\ 0.002906020 - 0.000978458 \\ 0.010411772 - 0.002906020 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.000978458 \\ 0.001927562 \\ 0.007505752 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 2:

$$\begin{Bmatrix} d_{12}^* \\ d_{22}^* \\ d_{32}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000471594 \\ 0.001128524 - 0.000471594 \\ -0.000498946 - 0.001128524 \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.000471594 \\ 0.000656930 \\ -0.001627470 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 3:

$$\begin{Bmatrix} d_{13}^* \\ d_{23}^* \\ d_{33}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000130411 \\ -0.000046557 - 0.000130411 \\ 0.000003260 - (-0.000046557) \end{Bmatrix} \text{ m} = \begin{Bmatrix} 0.000130411 \\ -0.000176968 \\ 0.000049817 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

18.7 Revisión de los Desplazamientos Laterales (Distorsión de Entrepiso)

De acuerdo con el RCCDMX en sus NTC – Sismo, las distorsiones de entrepiso son la diferencia entre los desplazamientos laterales de los pisos consecutivos que lo delimitan entre la diferencia de elevaciones correspondiente (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 51).

La distorsión para el tercer entrepiso se calcula con:

$$\gamma_3 = \frac{d_{F-3}}{h_3} = \frac{10.424 \text{ mm}}{5,000 \text{ mm}} = 0.002 \quad (18.57)$$

La distorsión para el segundo entrepiso se calcula con:

$$\gamma_2 = \frac{d_{F-3} - d_{F-2}}{h_2} = \frac{10.424 \text{ mm} - 3.118 \text{ mm}}{3,500 \text{ mm}} = 0.002 \quad (18.58)$$

La distorsión para el primer entrepiso se calcula con:

$$\gamma_1 = \frac{d_{F-2} - d_{F-1}}{h_1} = \frac{3.118 \text{ mm} - 1.094 \text{ mm}}{3,000 \text{ mm}} = 0.001 \quad (18.59)$$

Los valores de la distorsión máxima ($\gamma_{\text{máx}}$) para estructuras de concreto vienen dados en el RCCDMX en su apartado 4.2 *Valores de Q* y γ_{max} de las NTC – Sismo (Gobierno de la CDMX, 2017, págs. 61 - 63). En ese apartado se estipula que la distorsión máxima con estructuración a base de marcos, para un $Q = 2$ es $\gamma_{\text{máx}} = 0.015$.

Como las distorsiones γ_1 , γ_2 y γ_3 son menores que $\gamma_{\text{máx}}$ se acepta la revisión de la estructura por distorsión de entrepisos.

18.8 Calculo de las Fuerzas Cortantes (Cortantes Basales)

Las fuerzas cortantes se determinan por medio de la ecuación:

$$\{V_{nj}\} = k_j \{d_{nj}^*\} \quad (18.60)$$

Donde:

$\{V_{nj}\}$ = vector de fuerzas cortantes.

$[k_j]$ = rigidices denotadas en la matriz de rigidez para análisis dinámico [K].

$\{d_{nj}^*\}$ = vector de desplazamientos relativos.

Para $j = 1$:

$$\{V_{n1}\} = k_1 \{d_{n1}^*\}$$

$$\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} d_{11}^* \\ d_{21}^* \\ d_{31}^* \end{pmatrix}$$

$$\left(36,564.555 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\right) \begin{pmatrix} 0.000978458 \\ 0.001927562 \\ 0.007505752 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \begin{pmatrix} 35.777 \\ 70.480 \\ 274.444 \end{pmatrix} \text{ ton} \\ &\quad \therefore \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35.777 \\ 70.480 \\ 274.444 \end{pmatrix} \text{ ton} \end{aligned} \quad (18.61)$$

Para $j = 2$:

$$\begin{aligned} \{V_{n2}\} &= k_2 \{d_{n2}^*\} \\ \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} &= k_2 \begin{pmatrix} d_{12}^* \\ d_{22}^* \\ d_{32}^* \end{pmatrix} \\ \vdots &= \left(17,138.639 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \right) \begin{pmatrix} 0.000471594 \\ 0.000656930 \\ -0.001627470 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 8.082 \\ 11.259 \\ -27.893 \end{pmatrix} \text{ ton} \\ &\quad \therefore \begin{pmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.082 \\ 11.259 \\ -27.893 \end{pmatrix} \text{ ton} \end{aligned} \quad (18.62)$$

Para $j = 3$:

$$\begin{aligned} \{V_{n3}\} &= k_3 \{d_{n3}\} \\ \begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{pmatrix} &= k_2 \begin{pmatrix} d_{13}^* \\ d_{23}^* \\ d_{33}^* \end{pmatrix} \\ \vdots &= \left(3,158.052 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \right) \begin{pmatrix} 0.000130411 \\ -0.000176968 \\ 0.000049817 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 0.412 \\ -0.559 \\ 0.157 \end{pmatrix} \text{ ton} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.412 \\ -0.559 \\ 0.157 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad (18.63)$$

Aplicando el SRSS para determinar los cortantes sobre los grados de libertad donde se concentran las masas con:

$$V_{F-j} = \sqrt{\sum V_{jn}^2} \quad (18.64)$$

Donde:

$[V_{F-j}]$ = cortante final de cada entrepiso.

$[\sqrt{\sum V_{jn}^2}]$ = suma de los cuadrados de cada renglón asociado al j-ésimo entrepiso de cada uno de los vectores $\{V_{nj}\}$

Para el entrepiso 1 (en ton):

$$\begin{aligned} V_{F-1} &= \sqrt{\sum V_{1n}^2} \\ &= \sqrt{V_{11}^2 + V_{12}^2 + V_{13}^2} \\ &= \sqrt{(35.777 \text{ ton})^2 + (8.082 \text{ ton})^2 + (0.412 \text{ ton})^2} \\ &\therefore V_{F-1} = 36.681 \text{ ton} \cong 37 \text{ ton} \end{aligned} \quad (18.65)$$

Para el entrepiso 2 (en ton):

$$\begin{aligned} V_{F-2} &= \sqrt{\sum V_{2n}^2} \\ &= \sqrt{V_{21}^2 + V_{22}^2 + V_{23}^2} \\ &= \sqrt{(70.480 \text{ ton})^2 + (11.259 \text{ ton})^2 + (-0.559 \text{ ton})^2} \\ &\therefore V_{F-2} = 71.376 \text{ ton} \cong 72 \text{ ton} \end{aligned} \quad (18.66)$$

Para el entrepiso 3 (en ton):

$$\begin{aligned}
 V_{F-3} &= \sqrt{\sum V_{3n}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{V_{31}^2 + V_{32}^2 + V_{33}^2} \\
 &\vdots = \sqrt{(274.444 \text{ ton})^2 + (-27.893 \text{ ton})^2 + (0.157 \text{ ton})^2} \\
 &\therefore V_{F-3} = 275.858 \text{ ton} \cong 276 \text{ ton} \quad (18.67)
 \end{aligned}$$

18.9 Revisión por Cortante Basal Mínimo

Dentro del RCCDMX se estipula, en las NTC – Sismo, que el cortante basal obtenido en la dirección del análisis modal no sea menor que $a_{\text{mín}}W_0$, donde $a_{\text{mín}}$ se tomará igual a 0.03 cuando $T_s < 0.5$ seg o 0.05 si $T_s \geq 1$ seg, siendo T_s el periodo dominante más largo del terreno en el sitio de interés (parámetro obtenido en el espectro de diseño del SASID). Para valores de T_s comprendidos entre 0.5 y 1.0, $a_{\text{mín}}$ se hará variar linealmente entre 0.03 y 0.05 (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 51).

$$V_{F-j} \geq a_{\text{mín}}W_0 \quad (18.68)$$

W_0 = es el peso de la estructura que actúa en la base del sistema estructural.

Para la estructura en estudio $T_s = 0.485$ seg, por lo tanto, $a_{\text{mín}} = 0.03$. Calculando $a_{\text{mín}}W_0$:

$$\begin{aligned}
 a_{\text{mín}}W_0 &= (0.03) \left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} + 5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} + 3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \\
 &\therefore a_{\text{mín}}W_0 = 4.179 \text{ ton} \quad (18.69)
 \end{aligned}$$

Como todos los valores V_{F-j} son mayores que $a_{\text{mín}}W_0$ se acepta la revisión por cortante basal mínimo.

18.10 Determinación de Cargas Debidas a Acciones Permanentes, Variables y Accidentales

Los factores de carga^{18.4}, establecidos en las NTC – Edificaciones, se establece que el factor de carga es $F_C = 1.1$ cuando la estructura en estudio esté sujeta a acciones permanentes, variables y accidentales (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 692). Lo anterior mencionado puede entenderse como cargas debido a sismo.

Las cargas laterales de la estructura serán cargas puntuales en cada uno de los entrepisos donde fue concentrada la masa; mientras que las cargas gravitacionales se ejemplificarán como cargas distribuidas uniformemente (cargas rectangulares) sobre cada una de las vigas de la estructura.

La carga lateral de la estructura para la azotea es:

$$\begin{aligned} F_{u-3}(t) &= F_C V_{F-3} \\ \vdots &= (1.1)(276 \text{ ton}) \\ &\therefore F_{u-3}(t) = 303.6 \text{ ton} \end{aligned} \quad (18.70)$$

La carga lateral para el entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned} F_{u-2}(t) &= F_C (V_{F-2} - V_{F-3}) \\ \vdots &= (1.1)(72 \text{ ton} - 276 \text{ ton}) \\ &\therefore F_{u-2}(t) = -224.4 \text{ ton} \end{aligned} \quad (18.71)$$

La carga lateral para el entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned} F_{u-1}(t) &= F_C [V_{F-1} - (V_{F-2} - V_{F-3})] \\ \vdots &= (1.1)[37 \text{ ton} - (72 \text{ ton} - 276 \text{ ton})] \\ &\therefore F_{u-1}(t) = 265.1 \text{ ton} \end{aligned} \quad (18.72)$$

La carga gravitacional de la azotea es:

^{18.4} Definición sustraída del RCCDMX: Factor de seguridad parcial mayor que la unidad que se aplica a las cargas calculadas para cubrir la incertidumbre que se tiene para su determinación (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 684).

$$\begin{aligned}W_{u-3} &= F_C \left(\frac{m_3 g}{L} \right) \\ \vdots &= 1.1 \left[\frac{\left(3.9 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\ \therefore W_{u-3} &= 4.208 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\end{aligned}\tag{18.73}$$

La carga gravitacional del entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned}W_{u-2} &= F_C \left(\frac{m_2 g}{L} \right) \\ \vdots &= 1.1 \left[\frac{\left(5.5 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\ \therefore W_{u-2} &= 5.935 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 6 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\end{aligned}\tag{18.74}$$

La carga gravitacional del entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned}W_{u-1} &= F_C \left(\frac{m_1 g}{L} \right) \\ \vdots &= 1.1 \left[\frac{\left(4.8 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\ \therefore W_{u-1} &= 5.180 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}}\end{aligned}\tag{18.75}$$

La representación de cargas laterales y gravitacionales en la estructura son:

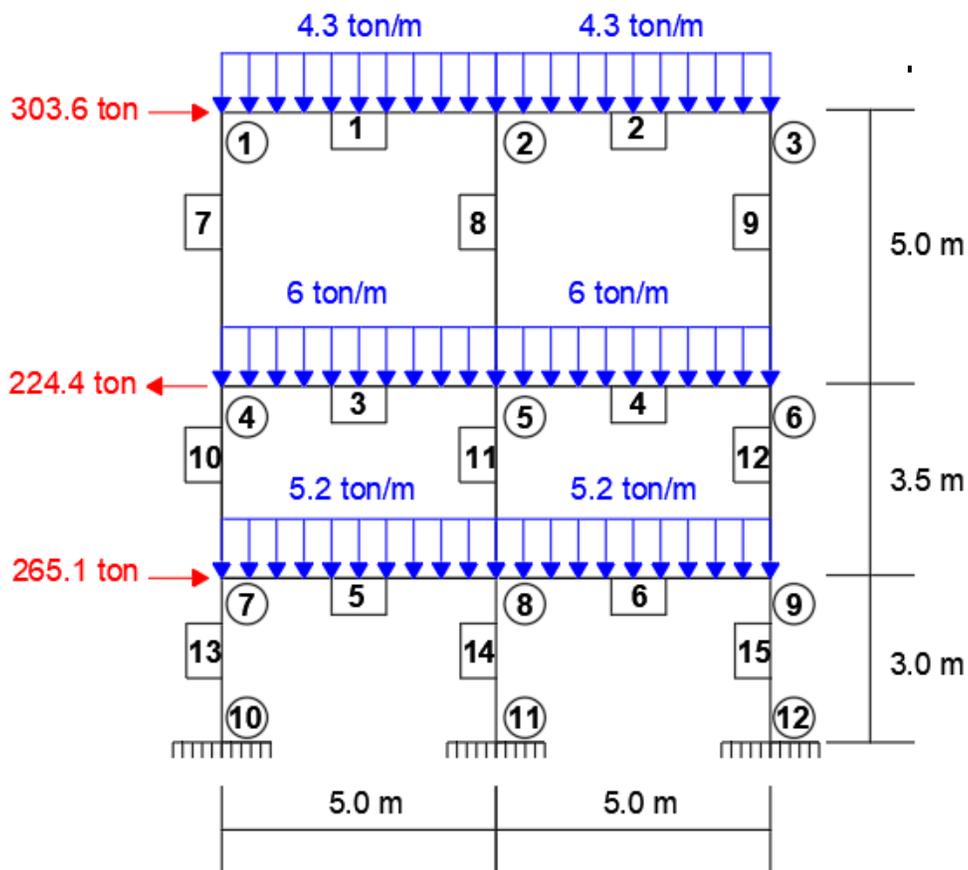


Figura XVIII.5. Representación gráfica de las cargas por caso sísmico.

18.11 Determinación de Cargas Debidas a Acciones Permanentes y Variables

El lector pudo haber notado que para el caso sísmico, las cargas laterales de la estructura disminuyeron un promedio de 15 ton por nivel en comparación con el análisis realizado al considerar deformación por flexión y axial en columnas, mientras que las cargas sobre las vigas (cargas gravitacionales) se mantuvieron iguales. Por lo tanto, las cargas gravitacionales del caso estático serán las mismas que las del capítulo XV (figura XV.12 de la página 484).

18.12 Análisis Estructural para el Caso Sísmico

El análisis estructural se realizará al marco de la figura XVIII.5.

Todas las matrices de rigidez para análisis dinámico $[K]$ fueron encontradas a partir de la matriz de la estructura $[k_{ij}]$

Esta misma matriz de la cual su condensación estática arrojó $[K]$ como resultado permite establecer mediante $[k_{ij}]\{\Delta\} + \{P\} = \{0\}$ los valores de las rotaciones angulares y desplazamientos lineales a partir de $\{\Delta\} = -[k_{ij}]^{-1}\{P\}$.

Siendo:

$\{\Delta\}$ = vector de desplazamientos que contiene desplazamientos lineales y rotaciones angulares.

$\{P\}$ = vector de fuerzas que contiene los momentos de empotramiento perfecto y fuerzas laterales u horizontales dentro de una estructura.

$[k_{ij}]$ = matriz de rigidez de la estructura en coordenadas globales.

Los casos de análisis estructural por resolver serán únicamente los casos con cargas laterales provenientes del análisis modal, dado que si se presenta la solución de estos casos el lector podrá resolver los casos estáticos sin menor dificultad dado que no presenta cargas laterales.

La matriz de rigidez de la estructura $[k_{ij}]$ se encuentra en la página (), así que para encontrar el vector $\{\Delta\}$ es necesario definir el vector de fuerza $\{P\}$.

Para determinar los momentos de empotramiento perfecto, y hacer un análisis estructural donde se considere la deformación por cortante en las estructuras, debe considerarse el efecto de deformación por cortante en los casos de empotramiento perfecto. La ventaja de haber considerado las cargas gravitacionales sobre las vigas como cargas uniformemente distribuidas, permite tomar los momentos de empotramiento perfecto con el mismo valor que al considerar únicamente

deformación debida a flexión, sin embargo, las fuerzas P_1 , P_2 y P_3 cambiaran dentro del vector de cargas $\{P\}$.

Además, como fue incluido el efecto de deformación axial en columnas, los cortantes asociados al vector de cargas $\{P\}$ deben ser los cortantes que son resultado de los momentos de empotramiento perfecto al considerar deformación por cortante en los elementos.

Como la estructura no presenta condiciones de asentamiento y/o desplazamiento en los apoyos, ni está sobre algún tipo de apoyo elástico, el vector de fuerzas es un vector columna con 21 filas que se muestra a continuación:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \\ P_{1y} \\ P_{2y} \\ P_{3y} \\ P_{4y} \\ P_{5y} \\ P_{6y} \\ P_{7y} \\ P_{8y} \\ P_{9y} \\ P_{1x} \\ P_{2x} \\ P_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ -\frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ -\frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} + \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(4.3 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} + \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(6 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} + \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ \frac{(5.2 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})}{2} \\ -303.6 \text{ ton} \\ 224.4 \text{ ton} \\ -265.1 \text{ ton} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{215}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{215}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -\frac{25}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{25}{2} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -\frac{65}{6} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{65}{6} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ \frac{43}{4} \text{ ton} \\ \frac{43}{2} \text{ ton} \\ \frac{43}{4} \text{ ton} \\ 15 \text{ ton} \\ 30 \text{ ton} \\ 15 \text{ ton} \\ 13 \text{ ton} \\ 26 \text{ ton} \\ 13 \text{ ton} \\ -303.6 \text{ ton} \\ 224.4 \text{ ton} \\ -265.1 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

Al realizar la operación $\{\Delta\} = -[k_{ij}]\{P\}$ se obtiene:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{4y} \\ \Delta_{5y} \\ \Delta_{6y} \\ \Delta_{7y} \\ \Delta_{8y} \\ \Delta_{9y} \\ \Delta_{1x} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.02411 \text{ rad} \\ 0.01928 \text{ rad} \\ 0.02359 \text{ rad} \\ 0.01676 \text{ rad} \\ 0.01465 \text{ rad} \\ 0.01654 \text{ rad} \\ 0.01018 \text{ rad} \\ 0.00893 \text{ rad} \\ 0.00997 \text{ rad} \\ 0.00103 \text{ m} \\ -0.00046 \text{ m} \\ -0.00147 \text{ m} \\ 0.00079 \text{ m} \\ -0.00036 \text{ m} \\ -0.00115 \text{ m} \\ 0.00042 \text{ m} \\ -0.00021 \text{ m} \\ -0.00062 \text{ m} \\ 0.20049 \text{ m} \\ 0.07131 \text{ m} \\ 0.02327 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (18.76)$$

Los elementos mecánicos se obtienen mediante la fórmula:

$$\{F_i\} = [k_i]\{\delta_i\} + \{P_0^{(i)}\} \quad (18.77)^{18.5}$$

Los elementos mecánicos se calculan como en el capítulo anterior.

$$\{F_1\} = [k_1]\{\delta_1\} + \{P_0^{(1)}\}$$

$$\therefore = \frac{27(140,000\sqrt{280})}{1,275,920} \begin{bmatrix} 100.5184 & 49.4816 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.4816 & 100.5184 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.02411 \\ 0.01928 \\ 0.00103 \\ -0.00046 \\ 0.20049 \\ 0.20049 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -215/24 \\ 215/24 \\ 43/4 \\ 43/4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

^{18.5} La explicación de esta fórmula se encuentra en el capítulo anterior (págs. 575 – 577).

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 156.2807 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 161.9870 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -52.9036 \text{ ton} \\ 74.4036 \text{ ton} \\ 0 \text{ ton} \\ 0 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_2\} = [k_2]\{\delta_2\} + \{P_0^{(2)}\}$$

$$\vdots = \frac{27(140,000\sqrt{280})}{1,275,920} \begin{bmatrix} 100.5184 & 49.4816 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.4816 & 100.5184 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01928 \\ 0.02359 \\ -0.00046 \\ -0.00147 \\ 0.20049 \\ 0.20049 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -215/24 \\ 215/24 \\ 43/4 \\ 43/4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 143.5048 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 173.3207 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -52.4151 \text{ ton} \\ 73.9151 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_3\} = [k_3]\{\delta_3\} + \{P_0^{(3)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401(140,000\sqrt{280})}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01676 \\ 0.01465 \\ 0.00079 \\ -0.00036 \\ 0.07131 \\ 0.07131 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -25/2 \\ 25/2 \\ 15 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 204.1050 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 219.2034 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -69.6617 \text{ ton} \\ 99.6617 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_4\} = [k_4]\{\delta_4\} + \{P_0^{(4)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401(140,000\sqrt{280})}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01465 \\ 0.01654 \\ -0.00036 \\ -0.00115 \\ 0.07131 \\ 0.07131 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -25/2 \\ 25/2 \\ 15 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 194.2011 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 228.0325 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -69.4467 \text{ ton} \\ 99.4467 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_5\} = [k_5]\{\delta_5\} + \{P_0^{(5)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401(140,000\sqrt{280})}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01018 \\ 0.00893 \\ 0.00042 \\ -0.00021 \\ 0.02327 \\ 0.02327 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -65/6 \\ 65/6 \\ 13 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 121.0677 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 136.8440 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -38.5823 \text{ ton} \\ 64.5823 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_6\} = [k_6]\{\delta_6\} + \{P_0^{(6)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401(140,000\sqrt{280})}{61,693,440} \begin{bmatrix} 100.7056 & 49.2944 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ 49.2944 & 100.7056 & -30 & 30 & 0 & 0 \\ -30 & -30 & 12 & -12 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & -12 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00893 \\ 0.00997 \\ -0.00021 \\ -0.00062 \\ 0.02327 \\ 0.02327 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -65/6 \\ 65/6 \\ 13 \\ 13 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 114.7801 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 141.3211 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -38.2202 \text{ ton} \\ 64.2202 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_7\} = [k_7]\{\delta_7\} + \{P_0^{(7)}\}$$

$$\vdots = E \begin{bmatrix} 0.0109 & 0.0053 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0053 & 0.0109 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0032 & 0.0032 & 0.0013 & -0.0013 & 0 & 0 \\ -0.0032 & -0.0032 & -0.0013 & 0.0013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0980 & -0.0980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0980 & 0.0980 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01676 \\ 0.02411 \\ 0.07131 \\ 0.20049 \\ 0.00079 \\ 0.00103 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -252.6916 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -156.2807 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -81.7945 \text{ ton} \\ 81.7945 \text{ ton} \\ -52.9036 \text{ ton} \\ 52.9036 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_8\} = [k_8]\{\delta_8\} + \{P_0^{(8)}\}$$

$$\vdots = E \begin{bmatrix} 0.0109 & 0.0053 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0053 & 0.0109 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0032 & 0.0032 & 0.0013 & -0.0013 & 0 & 0 \\ -0.0032 & -0.0032 & -0.0013 & 0.0013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0980 & -0.0980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0980 & 0.0980 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01465 \\ 0.01928 \\ 0.07131 \\ 0.20049 \\ -0.00036 \\ -0.00046 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -366.2878 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -305.4918 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -134.3559 \text{ ton} \\ 134.3559 \text{ ton} \\ 21.9885 \text{ ton} \\ -21.9885 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_9\} = [k_9]\{\delta_9\} + \{P_0^{(9)}\}$$

$$\vdots = E \begin{bmatrix} 0.0109 & 0.0053 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0053 & 0.0109 & 0.0032 & -0.0032 & 0 & 0 \\ 0.0032 & 0.0032 & 0.0013 & -0.0013 & 0 & 0 \\ -0.0032 & -0.0032 & -0.0013 & 0.0013 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0980 & -0.0980 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0980 & 0.0980 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01654 \\ 0.02359 \\ 0.07131 \\ 0.20049 \\ -0.00115 \\ -0.00147 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -264.9274 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -172.3207 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -87.4496 \text{ ton} \\ 87.4496 \text{ ton} \\ 73.9151 \text{ ton} \\ -73.9151 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{10}\} = [k_{10}]\{\delta_{10}\} + \{P_0^{(10)}\}$$

$$\vdots = E \begin{bmatrix} 0.0151 & 0.0071 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 \\ 0.0071 & 0.0151 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 \\ 0.0063 & 0.0063 & 0.0036 & -0.0036 & 0 & 0 \\ -0.0063 & -0.0063 & -0.0036 & 0.0036 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1400 & -0.1400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1400 & 0.1400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01018 \\ 0.01676 \\ 0.02327 \\ 0.07131 \\ 0.00042 \\ 0.00079 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -74.8107 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 48.5867 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -7.4926 \text{ ton} \\ 7.4926 \text{ ton} \\ -122.5652 \text{ ton} \\ 122.5652 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{11}\} = [k_{11}]\{\delta_{11}\} + \{P_0^{(11)}\}$$

$$\vdots = E \begin{bmatrix} 0.0151 & 0.0071 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 \\ 0.0071 & 0.0151 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 \\ 0.0063 & 0.0063 & 0.0036 & -0.0036 & 0 & 0 \\ -0.0063 & -0.0063 & -0.0036 & 0.0036 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1400 & -0.1400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1400 & 0.1400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00893 \\ 0.01465 \\ 0.02327 \\ 0.07131 \\ -0.00021 \\ -0.00036 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -154.4689 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -47.1167 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -57.5959 \text{ ton} \\ 57.5959 \text{ ton} \\ 52.2034 \text{ ton} \\ -52.2034 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{12}\} = [k_{12}]\{\delta_{12}\} + \{P_0^{(12)}\}$$

$$\vdots = E \begin{bmatrix} 0.0151 & 0.0071 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 \\ 0.0071 & 0.0151 & 0.0063 & -0.0063 & 0 & 0 \\ 0.0063 & 0.0063 & 0.0036 & -0.0036 & 0 & 0 \\ -0.0063 & -0.0063 & -0.0036 & 0.0036 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1400 & -0.1400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1400 & 0.1400 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00997 \\ 0.01654 \\ 0.02327 \\ 0.07131 \\ -0.00062 \\ -0.00115 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -86.2852 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 36.8949 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -14.1115 \text{ ton} \\ 14.1115 \text{ ton} \\ 173.3618 \text{ ton} \\ -173.3618 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{13}\} = [k_{13}]\{\delta_{13}\} + \{P_0^{(13)}\}$$

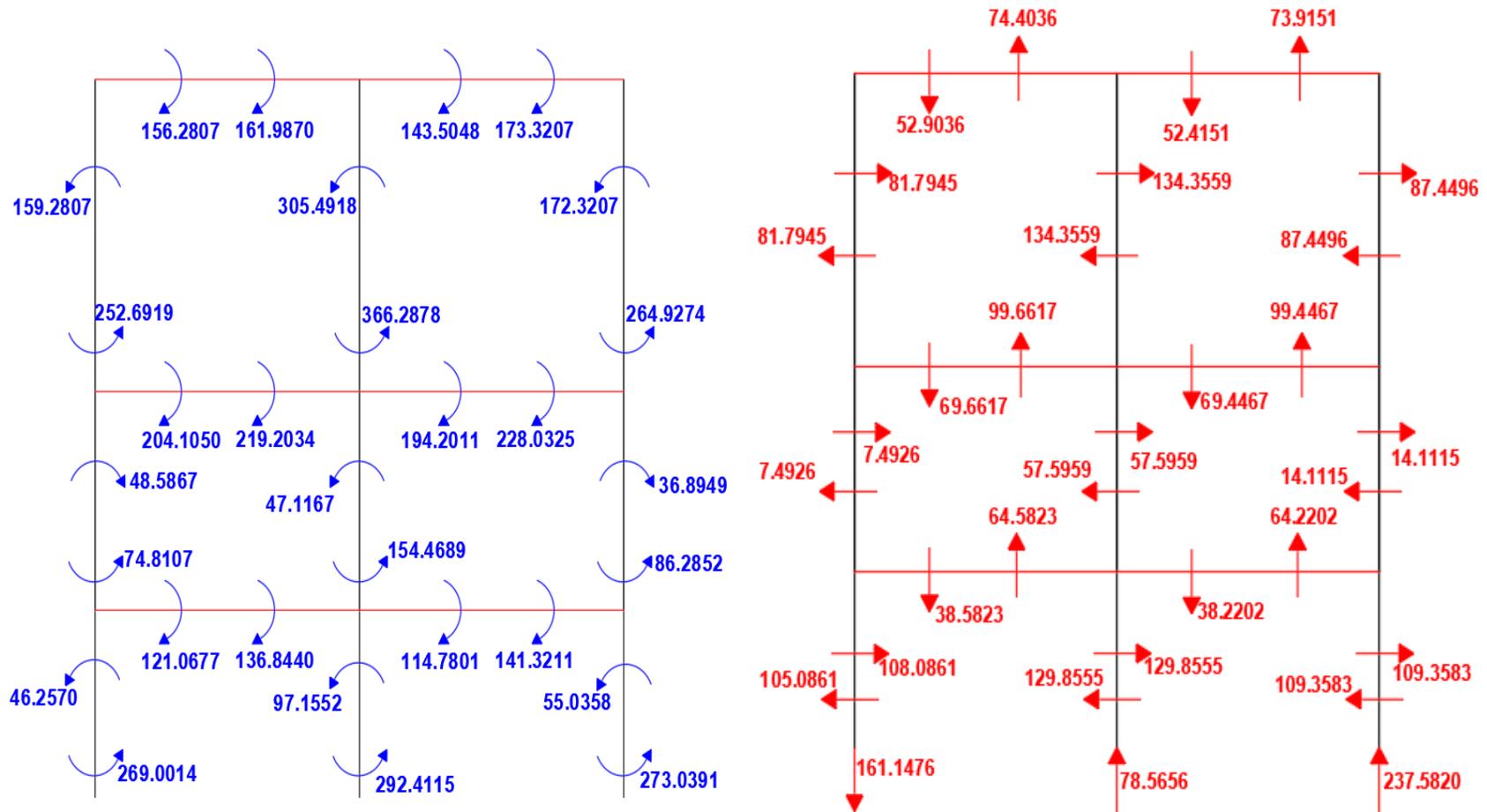
$$\vdots = E \begin{bmatrix} 0.0173 & 0.0080 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 \\ 0.0080 & 0.0173 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 \\ 0.0084 & 0.0084 & 0.0056 & -0.0056 & 0 & 0 \\ -0.0084 & -0.0084 & -0.0056 & 0.0056 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1633 & -0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1633 & 0.1633 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01018 \\ 0 \\ 0.02327 \\ 0 \\ 0.00042 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -269.0014 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -46.2570 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -105.0861 \text{ ton} \\ 105.0861 \text{ ton} \\ -161.1476 \text{ ton} \\ 161.1476 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \{F_{14}\} &= [k_{14}]\{\delta_{14}\} + \{P_0^{(14)}\} \\
 \vdots &= E \begin{bmatrix} 0.0173 & 0.0080 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 \\ 0.0080 & 0.0173 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 \\ 0.0084 & 0.0084 & 0.0056 & -0.0056 & 0 & 0 \\ -0.0084 & -0.0084 & -0.0056 & 0.0056 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1633 & -0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1633 & 0.1633 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00893 \\ 0 \\ 0.02327 \\ 0 \\ -0.00021 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \begin{Bmatrix} -292.4115 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -97.1552 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -129.8555 \text{ ton} \\ 129.8555 \text{ ton} \\ 78.5655 \text{ ton} \\ -78.5655 \text{ ton} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{F_{15}\} &= [k_{15}]\{\delta_{15}\} + \{P_0^{(15)}\} \\
 \vdots &= E \begin{bmatrix} 0.0173 & 0.0080 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 \\ 0.0080 & 0.0173 & 0.0084 & -0.0084 & 0 & 0 \\ 0.0084 & 0.0084 & 0.0056 & -0.0056 & 0 & 0 \\ -0.0084 & -0.0084 & -0.0056 & 0.0056 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1633 & -0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1633 & 0.1633 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00997 \\ 0 \\ 0.02327 \\ 0 \\ -0.00062 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \vdots &= \begin{Bmatrix} -273.0391 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -55.0358 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -109.3583 \text{ ton} \\ 109.3583 \text{ ton} \\ 237.5820 \text{ ton} \\ -237.5820 \text{ ton} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

La distribución de momentos y fuerzas cortantes se exhibe en la siguiente página. Los diagramas de elementos mecánicos se dejan al lector. Fácilmente podrá corroborar que tienen la misma forma de graficación que los ilustrados en el capítulo XV pero con los valores que se presentan en la figura XVIII.6.



(a)

(b)

Figura XVIII.6. Distribución de (a) momentos (ton-m) y (b) cortantes (ton).

Capítulo XIX:
Análisis Dinámico Modal Espectral
Y Análisis Estructural de Marcos
Internos Considerando Deformación
Por Flexión

- 19.1 Calculo de la Matriz de Masa Concentrada
- 19.2 Determinación de la Matriz de Rigidez para Análisis Dinámico [K]
- 19.3 Calculo de la Frecuencia y Periodo a Través de Eigenvalores
- 19.4 Calculo de los Modos de Vibrar a Través de Eigenvectores
- 19.5 Factor de Participación de Masas
- 19.6 Aceleraciones por Considerar con Base en los Periodos de la Estructura
- 19.7 Calculo de los Desplazamientos Relativos y Finales
- 19.8 Revisión de los Desplazamientos Laterales (Distorsión de Entrepiso)
- 19.9 Calculo de las Fuerzas Cortantes (Cortantes Basales)
- 19.10 Revisión por Cortante Basal Mínimo
- 19.11 Determinación de Cargas Debido a Acciones Permanentes, Variables y Accidentales (Caso Sísmico)
- 19.12 Determinación de Cargas Debido a Acciones Permanentes y Variables (Caso Estático)
- 19.13 Análisis Estructural para el Caso Sísmico

XVI. Análisis Dinámico Modal Espectral y Análisis Estructural de Marcos Internos Considerando Deformación por Flexión

A diferencia de los casos anteriores, en este capítulo sólo se calculará con detalle la matriz de masa concentrada y el resto de los datos (modos de vibrar, cortantes basales, elementos mecánicos, etc..) únicamente serán presentados dado que se infiere que el lector, de haber seguido el desarrollo de los ejemplos de análisis dinámico modal espectral anteriores, es capaz de replicar los mismos resultados.

Así mismo únicamente se presentará el caso debido a flexión y se espera que el lector pueda realizar los casos considerando deformación por cortante y deformación axial en columnas.

19.1 Cálculo de la Matriz de Masa Concentrada

La matriz de masa concentrada para este capítulo será del mismo tamaño que la de los marcos perimetrales dado que presenta igual número de entrepisos, es decir, se espera una matriz cuadrada de dimensiones 3 x 3, donde los únicos elementos no nulos se localizan en la diagonal principal.

Para calcular las masas de ejes internos se consideran los mismos elementos (vigas, columnas, dalas, castillos, etc.) con la diferencia de que la distribución de área tributaria cambia. Para la determinación de masas en los marcos internos de la estructura de concreto reforzado, el edificio se divide en los siguientes marcos:

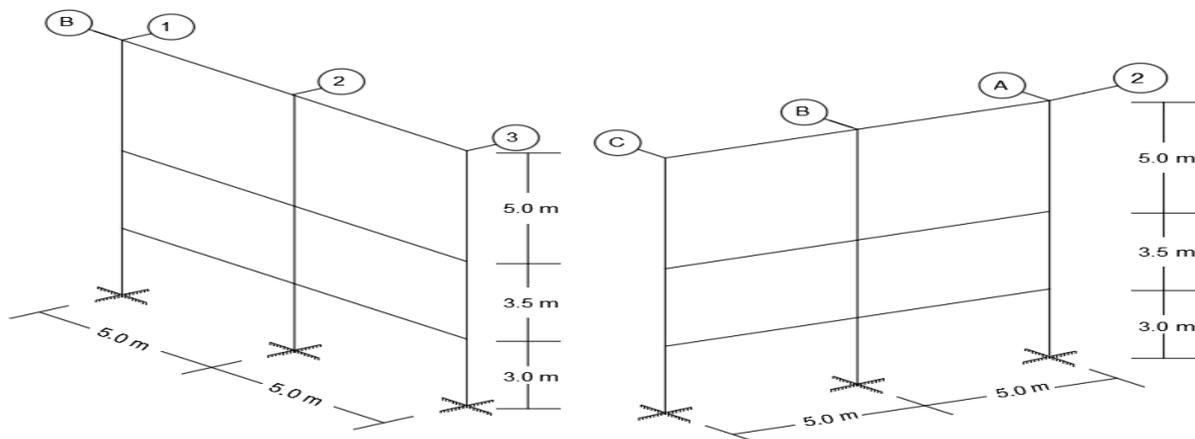


Figura XIX.1. Marcos internos vistos desde la perspectiva isométrica.

La distribución de área tributaria para los marcos internos es la siguiente:

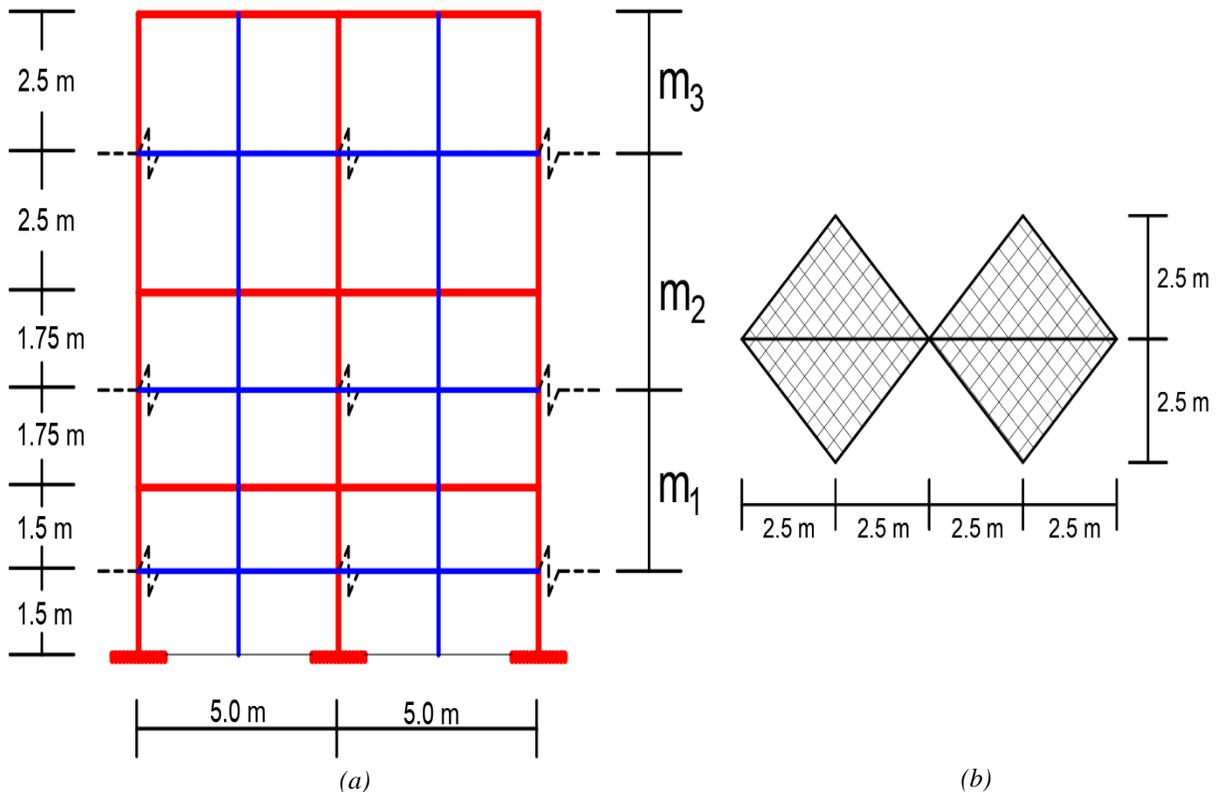


Figura XIX.2. (a) Nomenclatura de masas para la elevación de ejes (b) áreas tributarias para cálculo de masas.

Calculando masa m_1 :

$$P_{\text{columnas}} = (3)(1.75 \text{ m} + 1.5 \text{ m})(0.7 \text{ m})(0.7 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 11,466 \text{ kg} = 11.466 \text{ ton}$$

$$P_{\text{vigas}} = (2)(5 \text{ m})(0.35 \text{ m})(0.7 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 5,880 \text{ kg} = 5.88 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa}} = (8) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2} \right] \left(1,040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) = 26,000 \text{ kg} = 26 \text{ ton}$$

por área tributaria de la CM

$$P_{\text{influencia de losa}} = (8) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2} \right] \left(250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) = 6,250 \text{ kg} = 6.25 \text{ ton}$$

por área tributaria de la CV

$$P_{\text{castillos}} = (2)(1.75 \text{ m} + 1.5 \text{ m})(0.15 \text{ m})(0.4 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 936 \text{ kg} = 0.936 \text{ ton}$$

$$P_{\text{dalas}} = (4)(5 \text{ m})(0.15 \text{ m}) \left(\frac{0.3}{2} \text{ m} \right) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 1,080 \text{ kg} = 1.08 \text{ ton}$$

$$P_{\text{muro de tabimax 15}} = (2)(5 \text{ m})(1.75 \text{ m} + 1.5 \text{ m}) \underbrace{\left(\frac{0.15 \text{ m}}{\text{espesor del muro}} \right)}_{\text{espesor del muro}} \left(1,800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 8,775 \text{ kg} = 8.775 \text{ ton}$$

$$P_{\text{aplanado}} = \underbrace{(2)(0.02 \text{ m})}_{\substack{2 \text{ cm de} \\ \text{aplanado en} \\ \text{ambos lados} \\ \text{del muro}}} (2)(5 \text{ m})(1.75 \text{ m} + 1.5 \text{ m}) \left(1,500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 1,950 \text{ kg} = 1.95 \text{ ton}$$

$$\sum P = 62.337 \text{ ton}$$

$$m_1 = \frac{\sum P}{g} = \frac{62.337 \text{ ton}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 6.354 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \cong 6.4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$\therefore m_1 = 6.4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \quad (19.1)$$

Calculando masa m_2 :

$$P_{\text{columnas}} = (3)(1.75 \text{ m} + 2.5 \text{ m})(0.7 \text{ m})(0.7 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 14,994 \text{ kg} = 14.994 \text{ ton}$$

$$P_{\text{vigas}} = (2)(5 \text{ m})(0.35 \text{ m})(0.7 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 5,880 \text{ kg} = 5.88 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa por área tributaria de la CM}} = (8) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2} \right] \left(1,040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) = 26,000 \text{ kg} = 26 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa por área tributaria de la CV}} = (8) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2} \right] \left(250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right) = 6,250 \text{ kg} = 6.25 \text{ ton}$$

$$P_{\text{castillos}} = (2)(1.75 \text{ m} + 2.5 \text{ m})(0.15 \text{ m})(0.4 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 1,224 \text{ kg} = 1.224 \text{ ton}$$

$$P_{\text{dalas}} = (4)(5 \text{ m})(0.15 \text{ m}) \left(\frac{0.3}{2} \text{ m} \right) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) = 1,080 \text{ kg} = 1.08 \text{ ton}$$

$$P_{\text{muro de tabimax 15}} = (2)(5 \text{ m})(1.75 \text{ m} + 2.5 \text{ m}) \underbrace{(0.15 \text{ m})}_{\text{espesor del muro}} \left(1,800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 11,475 \text{ kg} = 11.475 \text{ ton}$$

$$P_{\text{aplanado}} = \underbrace{(2)(0.02 \text{ m})}_{\substack{2 \text{ cm de} \\ \text{aplanado en} \\ \text{ambos lados} \\ \text{del muro}}} (2)(5 \text{ m})(1.75 \text{ m} + 2.5 \text{ m}) \left(1,500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 2,550 \text{ kg} = 2.55 \text{ ton}$$

$$\sum P = 69.453 \text{ ton}$$

$$m_2 = \frac{\sum P}{g} = \frac{69.453 \text{ ton}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 7.080 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \cong 7.1 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$\therefore m_2 = 7.1 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \quad (19.2)$$

Calculando masa m_3 :

$$P_{\text{columnas}} = (3)(2.5 \text{ m})(0.7 \text{ m})(0.7 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 8,820 \text{ kg} = 8.820 \text{ ton}$$

$$P_{\text{vigas}} = (2)(5 \text{ m})(0.3 \text{ m})(0.6 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 4,320 \text{ kg} = 4.32 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa por área tributaria de la CM}} = (8) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2} \right] \left(1,040 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right) = 26,000 \text{ kg} = 26 \text{ ton}$$

$$P_{\text{influencia de losa por área tributaria de la CV}} = (8) \left[\frac{(2.5 \text{ m})(2.5 \text{ m})}{2} \right] \left(100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right) = 2,500 \text{ kg} = 2.5 \text{ ton}$$

$$P_{\text{castillos}} = (2)(2.5 \text{ m})(0.15 \text{ m})(0.4 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 720 \text{ kg} = 0.72 \text{ ton}$$

$$P_{\text{dalas}} = (2)(5 \text{ m})(0.15 \text{ m}) \left(2,400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(\frac{0.3}{2} \text{ m} + 0.3 \text{ m}\right) = 1,620 \text{ kg} = 1.62 \text{ ton}$$

$$P_{\text{muro de tabimax 15}} = (2)(5 \text{ m})(2.5 \text{ m}) \underbrace{(0.15 \text{ m})}_{\text{espesor del muro}} \left(1,800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 6,750 \text{ kg} = 6.75 \text{ ton}$$

$$P_{\text{aplanado}} = \underbrace{(2)(0.02 \text{ m})}_{\substack{2 \text{ cm de} \\ \text{aplanado en} \\ \text{ambos lados} \\ \text{del muro}}} (2)(5 \text{ m})(2.5 \text{ m}) \left(1,500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 1,500 \text{ kg} = 1.5 \text{ ton}$$

$$\sum P = 52.230 \text{ ton}$$

$$m_3 = \frac{\sum P}{g} = \frac{52.230 \text{ ton}}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5.324 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \cong 5.4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}}$$

$$\therefore m_3 = 5.4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \quad (19.3)$$

Por lo tanto, la matriz de masa concentrada es:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.4 & 0 & 0 \\ 0 & 7.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.4 \end{bmatrix} \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \quad (19.4)$$

19.2 Determinación de la Matriz de Rigidez para Análisis Dinámico [K]

Como las dimensiones de las vigas y columnas son las mismas que en los marcos perimetrales, la matriz de rigidez $[k_{ij}]$ es la misma para los marcos internos y, por lo tanto, también la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$ será la misma. Por lo anterior mencionado la matriz $[K]$ es:

$$\therefore [K] = \begin{bmatrix} 58,211.848 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & 21,384.213 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & 3,263.507 \end{bmatrix} \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (19.5)$$

Conocidas las matrices de masa concentrada y de rigidez para análisis dinámico se tienen los elementos necesarios para proseguir con el análisis dinámico modal espectral.

19.3 Cálculo de la Frecuencia y Periodo a Través de Eigenvalores

El planteamiento de eigenvalores se realiza a partir de resolver $|[K] - \lambda[M]| = 0$ (donde $\lambda = \omega^2$) para obtener el polinomio característico $p(\lambda)$ con el cual se determinarán las frecuencias naturales de la estructura ω , y posteriormente, los modos de vibrar de la misma.

Para los marcos de ejes internos, conocida la matriz de masa concentrada $[M]$ y la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$ se tiene:

$$\left| \begin{bmatrix} 58,211.848 & -18,120.706 & 0 \\ -18,120.706 & 21,384.213 & -3,263.507 \\ 0 & -3,263.507 & 3,263.507 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 6.4 & 0 & 0 \\ 0 & 7.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.4 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (19.6)$$

Al calcular los valores de λ (como se hizo en los capítulos anteriores) se puede calcular las frecuencias ω :

$$\omega_1^2 = \lambda_1 = 444.0208097 \quad \therefore \quad \omega_1 \cong 21.072 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (19.7)$$

$$\omega_2^2 = \lambda_2 = 2,150.932954 \quad \therefore \quad \omega_2 \cong 46.378 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (19.8)$$

$$\omega_3^2 = \lambda_3 = 1.011686161 \cdot 10^4 \quad \therefore \quad \omega_3 \cong 100.583 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (19.9)$$

Y teniendo las frecuencias ω es posible determinar los periodos de la estructura:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{21.072 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_1 \cong 0.298 \text{ s} \quad (19.10)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{46.378 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_2 \cong 0.135 \text{ s} \quad (19.11)$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{100.583 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad \therefore \quad T_3 \cong 0.062 \text{ s} \quad (19.12)$$

19.4 Cálculo de los Modos de Vibrar a Través de Eigenvectores

Para calcular los modos de vibrar se sustituyen las frecuencias ω_1 , ω_2 y ω_3 en $[[K] - \omega_j^2[M]]\{\phi_{nj}\}$, donde los elementos $\{\phi_{1j}\}$ serán igual a 1 para resolver un sistema no homogéneo y obtener una solución que no sea la trivial, es decir, $\phi_{1j} = \phi_{2j} = \dots = \phi_{nj} = 0$.

Los modos de vibrar obtenidos son:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.056 \\ 11.518 \end{Bmatrix} \quad (19.13)$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.453 \\ -0.958 \end{Bmatrix} \quad (19.14)$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.361 \\ 0.023 \end{Bmatrix} \quad (19.15)$$

Al obtener la matriz modal del sistema se obtiene:

$$[\phi_{ij}] = \begin{bmatrix} 0.036 & 0.136 & 0.369 \\ 0.109 & 0.334 & -0.133 \\ 0.410 & -0.130 & 0.008 \end{bmatrix}$$

Comprobando las relaciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned} [\phi_{ij}]^T [M] [\phi_{ij}] &= [I] \\ \vdots &= \begin{bmatrix} 0.036 & 0.136 & 0.369 \\ 0.109 & 0.334 & -0.133 \\ 0.410 & -0.130 & 0.008 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 6.4 & 0 & 0 \\ 0 & 7.1 & 0 \\ 0 & 0 & 5.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.036 & 0.136 & 0.369 \\ 0.109 & 0.334 & -0.133 \\ 0.410 & -0.130 & 0.008 \end{bmatrix} \\ \vdots &\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comprobando que los modos de vibrar cumplen con la ortogonalidad, se verifica que el cálculo de estos es correcto.

La siguientes figura representan los modos de vibrar de la estructura en estudio:

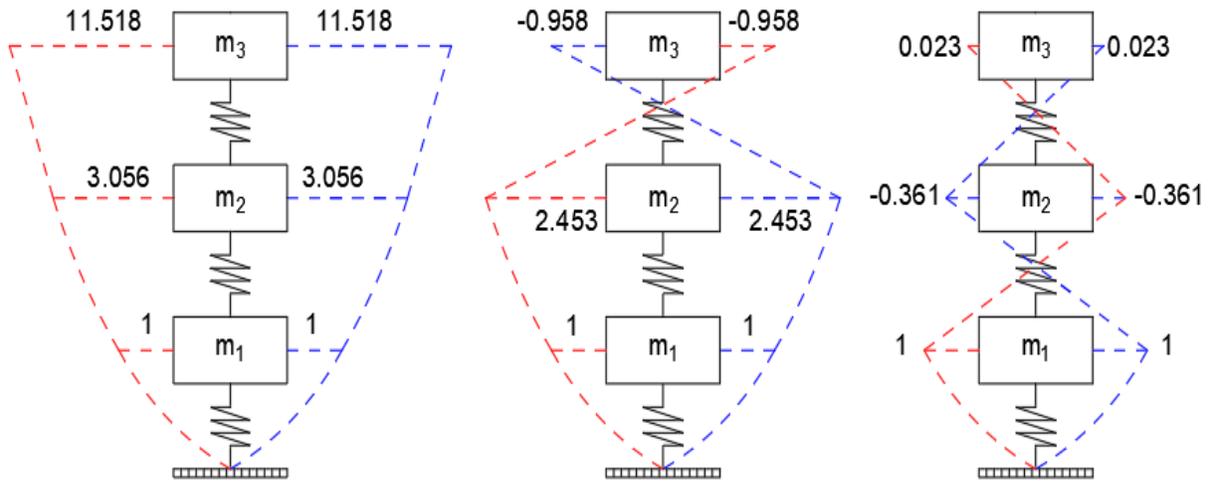


Figura XIX.3. Representación gráfica de los modos de vibrar de los marcos externos de la estructura.

19.5 Factor de Participación de Masas

De acuerdo con el RCCDMX, dentro de las NTC – Sismo, se estipula que al realizar un análisis modal dentro del rango elástico debe incluirse el efecto de los modos naturales de vibrar, ordenados de mayor a menor conforme a su relación con sus frecuencias naturales, asegurando por lo menos un 90% de la participación de masas (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 66).

El valor de la participación de masas se realiza con:

$$T_j^* = \frac{\{\phi_{nj}\}^T [M] \{1\}}{\{\phi_{nj}\}^T [M] \{\phi_{nj}\}} = \frac{\sum m_n \phi_{nj}}{\sum m_n \phi_{nj}^2} \quad (19.16)^{19.1}$$

Al calcular todas los T_j^* posibles se obtiene:

$$T_1^* = 0.114 \quad (19.17)$$

$$T_2^* = 0.345 \quad (19.18)$$

$$T_3^* = 0.541 \quad (19.19)$$

^{19.1} {1} es un vector columna de igual número de renglones que de columnas del vector renglón $\{\phi_{nj}\}^T$. Así mismo

Para verificar que la participación de masas sea de por lo menos 90% debe cumplirse que $\sum T_j^* \geq 0.9$. Al efectuar $T_1^* + T_2^* + T_3^*$ se obtiene exactamente 1.0 lo cual implica que participa el 100% de la masa total de la estructura en el análisis modal.

19.6 Aceleraciones por Considerar con Base en los Periodos de la Estructura

Recordando que los periodos de la estructura asociados a los modos de vibrar son:

$$T_1 \cong 0.298 \text{ s}$$

$$T_2 \cong 0.135 \text{ s}$$

$$T_3 \cong 0.062 \text{ s}$$

El valor de la aceleración asociada se calcula con:

$$A_{sn} = a_n g \quad (19.20)$$

Donde:

$[A_{sn}]$ = valor de la aceleración asociada a los modos de vibrar.

$[a_n]$ = coeficiente de reducción de la gravedad obtenido del espectro de diseño de sitio.

$[g]$ = aceleración de la gravedad igual a $9.81 \text{ m} / \text{s}^2$.

Para calcular a_1 asociado a un periodo $T_1 \cong 0.298$ seg, se tiene un valor $a = 0.173$ para $T = 0.3$ seg y un valor $a = 0.152$ para $T = 0.2$ seg. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_1 \cong 0.298$ s le corresponde un $a_1 = 0.173$.

$$\therefore A_{s1} = a_1 g = (0.173) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.697 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (19.21)$$

Para calcular a_2 asociado a un periodo $T_2 \cong 0.135$ seg, se tiene un valor $a = 0.127$ para $T = 0.1$ seg y un valor $a = 0.152$ para $T = 0.2$ seg. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_2 \cong 0.135$ s le corresponde un $a_2 = 0.136$.

$$\therefore A_{s2} = a_2 g = (0.136) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.334 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (19.22)$$

Para calcular a_3 asociado a un periodo $T_3 \cong 0.062$ seg, se tiene un valor $a = 0.09$ para $T = 0$ s y un valor $a = 0.127$ para $T = 0.1$ s. Haciendo una extrapolación simple se deduce que para $T_3 \cong 0.062$ s le corresponde un $a_3 = 0.113$.

$$\therefore A_{s3} = a_3 g = (0.113) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 1.109 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (19.23)$$

19.7 Calculo de los Desplazamientos Relativos y Finales

Calculando el factor de sobre – resistencia con base en la ecuación:

$$R = k_1 R_0 + k_2$$

Con base en las NTC – Sismo (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 60) se selecciona $R_0 = 1.75$ por ser una estructura con $Q = 2$ y $k_1 = 0.8$ por ser una estructura que tiene menos de tres crujiás resistentes a sismo en la dirección de análisis.

Para calcular k_2 se hará con la fórmula:

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{T}{T_a}} \right) \quad (19.24)^{19.2}$$

Los periodos naturales de la estructura son menores que el valor del inicio de la meseta del espectro de diseño por lo que k_2 se calcula conforme al reglamento:

$$k_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{0.298 \text{ s}}{0.35 \text{ s}}} \right) = 0.039 \quad (19.25)$$

^{19.2} fórmula 3.5.2 del RCCDMX.

Calculando el factor de sobre – resistencia conocidos k_1 , k_2 y R_0 :

$$R = (0.8)(1.75) + 0.039 = 1.439 \quad (19.26)$$

Al no incluir el valor que agrega k_2 , el valor del factor de sobrerresistencia es de 1.4. Como sólo existe una diferencia del 2.710 % al compararlo con la ecuación 19.26 se deja $R=1.4$ como valor final de sobrerresistencia.

Los desplazamientos finales se determinan mediante:

$$\{d_{nj}\} = \frac{Q R T_j^* A_{sj}}{\omega_j^2} \{\Phi_{nj}\} \quad (19.27)$$

Calculo para el primer modo de vibrar ($j = 1$):

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.001219948 \\ 0.003728161 \\ 0.014051361 \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} 0.1219948 \\ 0.3728161 \\ 1.4051361 \end{Bmatrix} cm = \begin{Bmatrix} 1.219948 \\ 3.728161 \\ 14.051361 \end{Bmatrix} mm \quad (19.28)$$

Calculo para el segundo modo de vibrar ($j = 2$):

$$\begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000599109 \\ 0.001469614 \\ -0.000573946 \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} 0.0599109 \\ 0.1469614 \\ -0.0573946 \end{Bmatrix} cm = \begin{Bmatrix} 0.599109 \\ 1.469614 \\ -0.573946 \end{Bmatrix} mm \quad (19.29)$$

Calculo para el tercer modo de vibrar ($j = 3$):

$$\begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.000166051 \\ -0.000059944 \\ 0.000003819 \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} 0.0166051 \\ -0.0059944 \\ 0.0003819 \end{Bmatrix} cm = \begin{Bmatrix} 0.166051 \\ -0.059944 \\ 0.003819 \end{Bmatrix} mm \quad (19.30)$$

Como cada periodo de la estructura varía entre sí por lo menos un 10 %, el RCCDMX permite utilizar el método del SRSS para calcular el desplazamiento de cada entrepiso mediante:

$$d_{F-j} = \sqrt{\sum d_{jn}^2}$$

Donde:

$[d_{F-j}]$ = desplazamiento final de cada entrepiso.

$\left[\sqrt{\sum d_{jn}^2} \right]$ = suma de los cuadrados de cada renglón asociado al j-ésimo entrepiso de cada uno de los vectores $\{d_{nj}\}$

Para el entrepiso 1:

$$d_{F-1} \cong 1.369 \text{ mm} \quad (19.31)$$

Para el entrepiso 2 (en mm):

$$d_{F-2} \cong 4.008 \text{ mm} \quad (19.32)$$

Para el entrepiso 3 (en mm):

$$d_{F-3} \cong 14.063 \text{ mm} \quad (19.33)$$

Los desplazamientos relativos se calculan al restan al desplazamiento de la masa superior, el de la masa inferior. Los desplazamiento relativos se ejemplifican por medio de $\{d_{nj}^*\}$.

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 1:

$$\begin{pmatrix} d_{11}^* \\ d_{21}^* \\ d_{31}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.001219948 \\ 0.003728161 - 0.001219948 \\ 0.014051361 - 0.003728161 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} 0.001219948 \\ 0.002508213 \\ 0.0103232 \end{pmatrix} \text{ m}$$

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 2:

$$\begin{pmatrix} d_{12}^* \\ d_{22}^* \\ d_{32}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000599109 \\ 0.001469614 - 0.000599109 \\ -0.000573946 - 0.001469614 \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} 0.000599109 \\ 0.000870505 \\ -0.00204356 \end{pmatrix} \text{ m}$$

El desplazamiento relativo del modo de vibrar 3:

$$\begin{pmatrix} d_{13}^* \\ d_{23}^* \\ d_{33}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000166051 \\ -0.000059944 - 0.000166051 \\ 0.000003819 - (-0.000059944) \end{pmatrix} \text{ m} = \begin{pmatrix} 0.000166051 \\ -0.000225995 \\ 0.000063763 \end{pmatrix} \text{ m}$$

19.8 Revisión de los Desplazamientos Laterales (Distorsión de Entrepiso)

De acuerdo con el RCCDMX en sus NTC – Sismo, las distorsiones de entrepiso son la diferencia entre los desplazamientos laterales de los pisos consecutivos que lo delimitan entre la diferencia de elevaciones correspondiente (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 51).

La distorsión para el tercer entrepiso se calcula con:

$$\gamma_3 = \frac{d_{F-3}}{h_3} = \frac{14.063 \text{ mm}}{5,000 \text{ mm}} = 0.003 \quad (19.34)$$

La distorsión para el segundo entrepiso se calcula con:

$$\gamma_2 = \frac{d_{F-3} - d_{F-2}}{h_2} = \frac{14.063 \text{ mm} - 4.008 \text{ mm}}{3,500 \text{ mm}} = 0.003 \quad (19.35)$$

La distorsión para el primer entrepiso se calcula con:

$$\gamma_1 = \frac{d_{F-2} - d_{F-1}}{h_1} = \frac{4.008 \text{ mm} - 1.369 \text{ mm}}{3,000 \text{ mm}} = 0.001 \quad (19.36)$$

Los valores de la distorsión máxima ($\gamma_{\text{máx}}$) para estructuras de concreto vienen dados en el RCCDMX en su apartado 4.2 *Valores de Q* y γ_{max} de las NTC – Sismo (Gobierno de la CDMX, 2017, págs. 61 - 63). En ese apartado se estipula que la distorsión máxima con estructuración a base de marcos, para un $Q = 2$ es $\gamma_{\text{máx}} = 0.015$.

Como las distorsiones γ_1 , γ_2 y γ_3 son menores que $\gamma_{\text{máx}}$ se acepta la revisión de la estructura por distorsión de entrepisos.

19.9 Calculo de las Fuerzas Cortantes (Cortantes Basales)

Las fuerzas cortantes se determinan por medio de la ecuación:

$$\{V_{nj}\} = k_j \{d_{nj}^*\} \quad (19.37)$$

Donde:

$\{V_{nj}\}$ = vector de fuerzas cortantes.

$[k_j]$ = rigidices denotadas en la matriz de rigidez para análisis dinámico $[K]$.

$\{d_{nj}^*\}$ = vector de desplazamientos relativos.

Para $j = 1$:

$$\therefore \begin{Bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 48.909 \\ 100.557 \\ 413.869 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad (19.38)$$

Para $j = 2$:

$$\therefore \begin{Bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \\ V_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10.856 \\ 15.774 \\ -37.031 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad (19.39)$$

Para $j = 3$:

$$\therefore \begin{Bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.542 \\ -0.738 \\ 0.208 \end{Bmatrix} \text{ ton} \quad (19.40)$$

Aplicando el SRSS para determinar los cortantes sobre los grados de libertad donde se concentran las masas con:

$$V_{F-j} = \sqrt{\sum V_{jn}^2} \quad (19.41)$$

Donde:

$[V_{F-j}]$ = cortante final de cada entrepiso.

$\left[\sqrt{\sum V_{jn}^2} \right]$ = suma de los cuadrados de cada renglón asociado al j -ésimo entrepiso de cada uno de los vectores $\{V_{nj}\}$

Para el entrepiso 1 (en ton):

$$V_{F-1} = 50.102 \text{ ton} \cong 51 \text{ ton} \quad (19.42)$$

Para el entrepiso 2 (en ton):

$$V_{F-2} = 101.789 \text{ ton} \cong 102 \text{ ton} \quad (19.43)$$

Para el entrepiso 3 (en ton):

$$V_{F-3} = 415.522 \text{ ton} \cong 416 \text{ ton} \quad (19.44)$$

19.10 Revisión por Cortante Basal Mínimo

Dentro del RCCDMX se estipula, en las NTC – Sismo, que el cortante basal obtenido en la dirección del análisis modal no sea menor que $a_{\text{mín}}W_0$, donde $a_{\text{mín}}$ se tomará igual a 0.03 cuando $T_s < 0.5 \text{ seg}$ o 0.05 si $T_s \geq 1 \text{ seg}$, siendo T_s el periodo dominante más largo del terreno en el sitio de interés (parámetro obtenido en el espectro de diseño del SASID). Para valores de T_s comprendidos entre 0.5 y 1.0, $a_{\text{mín}}$ se hará variar linealmente entre 0.03 y 0.05 (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 51).

$$V_{F-j} \geq a_{\text{mín}}W_0 \quad (19.45)$$

W_0 = es el peso de la estructura que actúa en la base del sistema estructural.

Para la estructura en estudio $T_s = 0.485 \text{ seg}$, por lo tanto, $a_{\text{mín}} = 0.03$. Calculando $a_{\text{mín}}W_0$:

$$a_{\text{mín}}W_0 = (0.03) \left(6.4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} + 7.1 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} + 5.4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

$$\therefore a_{\text{mín}}W_0 = 5.562 \text{ ton} \quad (19.46)$$

Como todos los valores V_{F-j} son mayores que $a_{\text{mín}}W_0$ se acepta la revisión por cortante basal mínimo.

19.11 Determinación de Cargas Debido a Acciones Permanentes, Variables y Accidentales (Caso Sísmico)

Los factores de carga^{19.3}, establecidos en las NTC – Edificaciones, se establece que el factor de carga es $F_c = 1.1$ cuando la estructura en estudio esté sujeta a acciones permanentes, variables y

^{19.3} Definición sustraída del RCCDMX: Factor de seguridad parcial mayor que la unidad que se aplica a las cargas calculadas para cubrir la incertidumbre que se tiene para su determinación (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 684).

accidentales (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 692). Lo anterior mencionado puede entenderse como cargas debido a sismo.

Las cargas laterales de la estructura serán cargas puntuales en cada uno de los entrepisos donde fue concentrada la masa; mientras que las cargas gravitacionales se ejemplificarán como cargas distribuidas uniformemente (cargas rectangulares) sobre cada una de las vigas de la estructura.

La carga lateral de la estructura para la azotea es:

$$\begin{aligned}
 F_{u-3}(t) &= F_C V_{F-3} \\
 \vdots &= (1.1)(416 \text{ ton}) \\
 &\therefore F_{u-3}(t) = 457.6 \text{ ton} \quad (19.47)
 \end{aligned}$$

La carga lateral para el entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned}
 F_{u-2}(t) &= F_C (V_{F-2} - V_{F-3}) \\
 \vdots &= (1.1)(102 \text{ ton} - 416 \text{ ton}) \\
 &\therefore F_{u-2}(t) = -345.4 \text{ ton} \quad (19.48)
 \end{aligned}$$

La carga lateral para el entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned}
 F_{u-1}(t) &= F_C [V_{F-1} - (V_{F-2} - V_{F-3})] \\
 \vdots &= (1.1)[51 \text{ ton} - (102 \text{ ton} - 416 \text{ ton})] \\
 &\therefore F_{u-1}(t) = 401.5 \text{ ton} \quad (19.49)
 \end{aligned}$$

La carga gravitacional de la azotea es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-3} &= F_C \left(\frac{m_3 g}{L} \right) \\
 \vdots &= 1.1 \left[\frac{\left(5.4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 &\therefore W_{u-3} = 5.827 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 5.9 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (19.50)
 \end{aligned}$$

La carga gravitacional del entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-2} &= F_c \left(\frac{m_2 g}{L} \right) \\
 \therefore &= 1.1 \left[\frac{\left(7.1 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-2} &= 7.662 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 7.7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (19.51)
 \end{aligned}$$

La carga gravitacional del entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-1} &= F_c \left(\frac{m_1 g}{L} \right) \\
 \therefore &= 1.1 \left[\frac{\left(6.4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-1} &= 6.906 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (19.52)
 \end{aligned}$$

La representación de cargas laterales y gravitacionales en la estructura son:

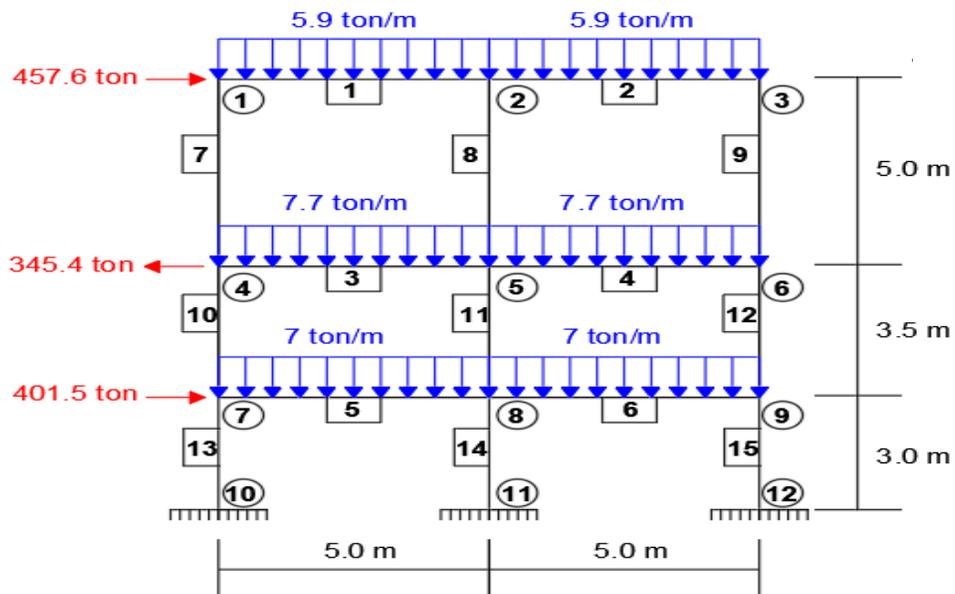


Figura XIX.4. Representación gráfica de las cargas por caso sísmico

19.12 Determinación de Cargas Debido a Acciones Permanentes y Variables (Caso Estático)

Los factores de carga, establecidos en las NTC – Edificaciones, se establece que el factor de carga es $F_C = 1.3$ para acciones permanentes^{19.4} y $F_C = 1.5$ para cargas variables^{19.5} (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 692). Lo anterior mencionado puede entenderse como acciones debido a cargas gravitacionales.

De igual forma las cargas laterales de la estructura serán cargas puntuales en cada uno de los entrepisos donde fue concentrada la masa; mientras que las cargas gravitacionales se ejemplificarán como cargas distribuidas uniformemente (cargas rectangulares) sobre cada una de las vigas de la estructura.

La carga gravitacional de la azotea es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-3} &= F_C \left(\frac{m_3 g - A_T CV}{L} \right) + F_C \left(\frac{A_T CV}{L} \right) \\
 \therefore &= 1.3 \left[\frac{\left(5.4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) - (25 \text{ m}^2) \left(0.1 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] + 1.5 \left[\frac{(25 \text{ m}^2) \left(0.1 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\
 \therefore W_{u-3} &= 6.937 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 7 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (19.53)
 \end{aligned}$$

La carga gravitacional para el entrepiso 2 es:

$$\begin{aligned}
 W_{u-2} &= F_C \left(\frac{m_2 g - A_T CV}{L} \right) + F_C \left(\frac{A_T CV}{L} \right) \\
 \therefore &= 1.3 \left[\frac{\left(7.1 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) - (25 \text{ m}^2) \left(0.25 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] + 1.5 \left[\frac{(25 \text{ m}^2) \left(0.25 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right]
 \end{aligned}$$

^{19.4} Si la estructura se cataloga dentro del grupo A el factor de carga permanente aumenta a 1.5.

^{19.5} Si la estructura se cataloga dentro del grupo A el factor de carga variable aumenta a 1.7.

$$\therefore W_{u-2} = 9.180 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 10 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (19.54)$$

La carga gravitacional para el entrepiso 1 es:

$$\begin{aligned} W_{u-1} &= F_C \left(\frac{m_1 g - A_T CV}{L} \right) + F_C \left(\frac{A_T CV}{L} \right) \\ \therefore &= 1.3 \left[\frac{\left(6.4 \frac{\text{ton} \cdot \text{s}^2}{\text{m}} \right) \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) - (25 \text{ m}^2) \left(0.25 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] + 1.5 \left[\frac{(25 \text{ m}^2) \left(0.25 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2} \right)}{10 \text{ m}} \right] \\ \therefore W_{u-1} &= 8.287 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \cong 9 \frac{\text{ton}}{\text{m}} \quad (19.55) \end{aligned}$$

La representación de cargas laterales y gravitacionales en la estructura son:

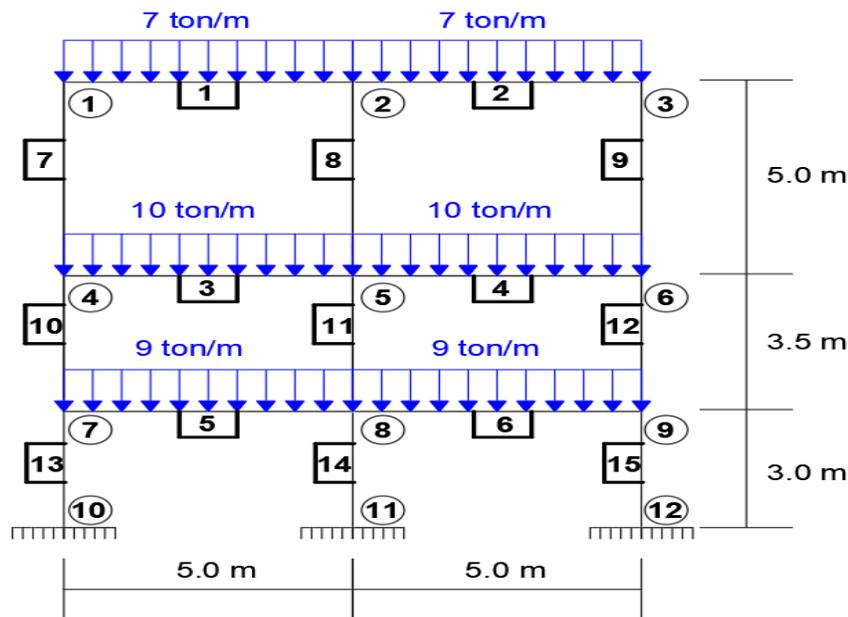


Figura XIX.5. Representación gráfica de las cargas por caso gravitacional.

De igual forma que para los macos perimetrales se considerará que predominaran los elementos del análisis estructural sísmico.

La matriz de rigidez en coordenadas globales está dada por (el cálculo de esta matriz se realizó en el capítulo XV):

$$[k_{ij}] = \begin{array}{cccccccccccc|cccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} & & \\
 \left[\begin{array}{l}
 31,308.711 & 2,530.060 & 0 & 13,124.295 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -7,874.577 & 7,874.577 & 0 & \mathbf{1} \\
 2,530.060 & 36,368.830 & 2,530.060 & 0 & 13,124.295 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -7,874.577 & 7,874.577 & 0 & \mathbf{2} \\
 0 & 2,530.060 & 31,308.711 & 0 & 0 & 13,124.295 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -7,874.577 & 7,874.577 & 0 & \mathbf{3} \\
 13,124.295 & 0 & 0 & 73,121.074 & 4,687.248 & 0 & 18,748.993 & 0 & 0 & 0 & | & -7,874.577 & -8,195.989 & 16,070.566 & \mathbf{4} \\
 0 & 13,124.295 & 0 & 4,687.248 & 82,495.571 & 4,687.248 & 0 & 18,748.993 & 0 & 0 & | & -7,874.577 & -8,195.989 & 16,070.566 & \mathbf{5} \\
 0 & 0 & 13,124.295 & 0 & 4,687.248 & 73,121.074 & 0 & 0 & 18,748.993 & 0 & | & -7,874.577 & -8,195.989 & 16,070.566 & \mathbf{6} \\
 0 & 0 & 0 & 18,748.993 & 0 & 0 & 90,620.135 & 4,687.248 & 0 & 0 & | & 0 & -16,070.566 & -5,803.260 & \mathbf{7} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 18,748.993 & 0 & 4,687.248 & 99,994.632 & 4,687.248 & 0 & | & 0 & -16,070.566 & -5,803.260 & \mathbf{8} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18,748.993 & 0 & 4,687.248 & 90,620.135 & 0 & | & 0 & -16,070.566 & -5,803.260 & \mathbf{9} \\
 \hline
 -7,874.577 & -7,874.577 & -7,874.577 & -7,874.577 & -7,874.577 & -7,874.577 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 9,449.493 & -9,449.493 & 0 & \mathbf{10} \\
 7,874.577 & 7,874.577 & 7,874.577 & -8,195.989 & -8,195.989 & -8,195.989 & -16,070.566 & -16,070.566 & -16,070.566 & -16,070.566 & | & -9,449.493 & 36,999.034 & -27,549.541 & \mathbf{11} \\
 0 & 0 & 0 & 16,070.566 & 16,070.566 & 16,070.566 & -5,803.260 & -5,803.260 & -5,803.260 & -5,803.260 & | & 0 & -27,549.541 & 71,297.193 & \mathbf{12}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Las unidades para los coeficientes de rigidez están en ton y m

19.13 Análisis Estructural para el Caso Sísmico

El análisis estructural se realizará al marco de la figura XIX.4.

Todas las matrices de rigidez para análisis dinámico $[K]$ fueron encontradas a partir de la matriz de la estructura $[k_{ij}]$

Esta misma matriz de la cual su condensación estática arrojó $[K]$ como resultado permite establecer mediante $[k_{ij}]\{\Delta\} + \{P\} = \{0\}$ los valores de las rotaciones angulares y desplazamientos lineales a partir de $\{\Delta\} = -[k_{ij}]^{-1}\{P\}$.

Siendo:

$\{\Delta\}$ = vector de desplazamientos que contiene desplazamientos lineales y rotaciones angulares.

$\{P\}$ = vector de fuerzas que contiene los momentos de empotramiento perfecto y fuerzas laterales u horizontales dentro de una estructura.

$[k_{ij}]$ = matriz de rigidez de la estructura en coordenadas globales.

Los casos de análisis estructural por resolver serán únicamente los casos con cargas laterales provenientes del análisis modal, dado que si se presenta la solución de estos casos el lector podrá resolver los casos estáticos sin menor dificultad dado que no presenta cargas laterales.

La matriz de rigidez de la estructura $[k_{ij}]$ se encuentra en la página 648, así que para encontrar el vector $\{\Delta\}$ es necesario definir el vector de fuerza $\{P\}$.

Como la estructura no presenta condiciones de asentamiento y/o desplazamiento en los apoyos, ni está sobre algún tipo de apoyo elástico el vector de fuerzas es un vector columna con 12 filas que se muestra a continuación:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_9 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{(5.9 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(5.9 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(5.9 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(5.9 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ -\frac{(7.7 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(7.7 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(7.7 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(7.7 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ -\frac{(7.7 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(7 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ -\frac{(7 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(7 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} - \frac{(7 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ \frac{(7 \frac{\text{ton}}{\text{m}})(5\text{m})^2}{12} \\ -457.6 \text{ ton} \\ 345.4 \text{ ton} \\ -401.5 \text{ ton} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{295}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{295}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -\frac{385}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{385}{24} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -\frac{175}{12} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ \frac{175}{12} \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -457.6 \text{ ton} \\ 345.4 \text{ ton} \\ -401.5 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

Al realizar la operación $\{\Delta\} = -[k_{ij}]^{-1}\{P\}$ se obtiene:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.03519 \text{ rad} \\ 0.02813 \text{ rad} \\ 0.03451 \text{ rad} \\ 0.02413 \text{ rad} \\ 0.02118 \text{ rad} \\ 0.02388 \text{ rad} \\ 0.01457 \text{ rad} \\ 0.01286 \text{ rad} \\ 0.01430 \text{ rad} \\ 0.28901 \text{ m} \\ 0.10140 \text{ m} \\ 0.03261 \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Los elementos mecánicos se obtienen mediante la fórmula (está ecuación se describe en el capítulo XV en las páginas 487 - 488):

$$\{F_i\} = [k_i]\{\delta_i\} + \{P_0^{(i)}\} \quad (19.56)$$

Calculando cortantes y momentos en las vigas y columnas (se utilizan unidades en toneladas y metro):

$$\begin{aligned} \{F_1\} &= [k_1]\{\delta_1\} + \{P_0^{(1)}\} \\ \vdots &= \frac{27(140,000\sqrt{280})}{625,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.03519 \\ 0.02813 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -295/24 \\ 295/24 \\ 59/4 \\ 59/4 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 236.9561 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 243.6715 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -81.3755 \text{ ton} \\ 110.8755 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_2\} &= [k_2]\{\delta_2\} + \{P_0^{(2)}\} \\ \vdots &= \frac{27(140,000\sqrt{280})}{625,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.02813 \\ 0.03451 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -295/24 \\ 295/24 \\ 59/4 \\ 59/4 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} 217.3636 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 258.0902 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -80.3408 \text{ ton} \\ 109.8408 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_3\} = [k_3]\{\delta_3\} + \{P_0^{(3)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401 (140,000\sqrt{280})}{30,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.02413 \\ 0.02118 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -385/24 \\ 385/24 \\ 77/4 \\ 77/4 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} 309.4557 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 327.7160 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -108.1844 \text{ ton} \\ 146.6844 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_4\} = [k_4]\{\delta_4\} + \{P_0^{(4)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401 (140,000\sqrt{280})}{30,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.02118 \\ 0.02388 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -385/24 \\ 385/24 \\ 77/4 \\ 77/4 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} 294.4750 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 339.2236 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -107.4897 \text{ ton} \\ 145.9897 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_5\} = [k_5]\{\delta_5\} + \{P_0^{(5)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401 (140,000\sqrt{280})}{30,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01457 \\ 0.01286 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -175/12 \\ 175/12 \\ 35/2 \\ 35/2 \end{pmatrix}$$

$$\vdots = \begin{pmatrix} 182.3263 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 203.4792 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -59.6611 \text{ ton} \\ 94.6611 \text{ ton} \end{pmatrix}$$

$$\{F_6\} = [k_6]\{\delta_6\} + \{P_0^{(6)}\}$$

$$\vdots = \frac{2401 (140,000\sqrt{280})}{30,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & -15 & 15 \\ 25 & 50 & -15 & 15 \\ -15 & -15 & 6 & -6 \\ 15 & 15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01286 \\ 0.01430 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -175/12 \\ 175/12 \\ 35/2 \\ 35/2 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} 173.0435 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 208.9548 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -58.8996 \text{ ton} \\ 93.8996 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_7\} = [k_7]\{\delta_7\} + \{P_0^{(7)}\}$$

$$\vdots = \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{75,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & 15 & -15 \\ 25 & 50 & 15 & -15 \\ 15 & 15 & 6 & -6 \\ -15 & -15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.02413 \\ 0.03519 \\ 0.10140 \\ 0.28901 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -382.1309 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -236.9561 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -123.8174 \text{ ton} \\ 123.8174 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_8\} = [k_8]\{\delta_8\} + \{P_0^{(8)}\}$$

$$\vdots = \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{75,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & 15 & -15 \\ 25 & 50 & 15 & -15 \\ 15 & 15 & 6 & -6 \\ -15 & -15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.02118 \\ 0.02813 \\ 0.10140 \\ 0.28901 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vdots = \begin{Bmatrix} -552.2271 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -461.0351 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -202.6524 \text{ ton} \\ 202.6524 \text{ ton} \end{Bmatrix}$$

$$\{F_9\} = [k_9]\{\delta_9\} + \{P_0^{(9)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{75,000,000} \begin{bmatrix} 50 & 25 & 15 & -15 \\ 25 & 50 & 15 & -15 \\ 15 & 15 & 6 & -6 \\ -15 & -15 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.02388 \\ 0.03451 \\ 0.10140 \\ 0.28901 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} -397.5605 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -258.0902 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -131.1301 \text{ ton} \\ 131.1301 \text{ ton} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_{10}\} &= [k_{10}]\{\delta_{10}\} + \{P_0^{(10)}\} \\ \vdots &= \frac{49(140,000\sqrt{280})}{150,000} \begin{bmatrix} 49 & 24.5 & 30 & -21 \\ 24.5 & 49 & 21 & -21 \\ 21 & 21 & 12 & -12 \\ -21 & -21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01457 \\ 0.02413 \\ 0.03261 \\ 0.10140 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} -106.5209 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 72.6752 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -9.6702 \text{ ton} \\ 9.6702 \text{ ton} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_{11}\} &= [k_{11}]\{\delta_{11}\} + \{P_0^{(11)}\} \\ \vdots &= \frac{49(140,000\sqrt{280})}{150,000} \begin{bmatrix} 49 & 24.5 & 30 & -21 \\ 24.5 & 49 & 21 & -21 \\ 21 & 21 & 12 & -12 \\ -21 & -21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.01286 \\ 0.02118 \\ 0.03261 \\ 0.10140 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \vdots &= \begin{Bmatrix} -225.9227 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -69.9639 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -84.5390 \text{ ton} \\ 84.5390 \text{ ton} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_{12}\} = [k_{12}]\{\delta_{12}\} + \{P_0^{(12)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{49(140,000\sqrt{280})}{150,000} \begin{bmatrix} 49 & 24.5 & 30 & -21 \\ 24.5 & 49 & 21 & -21 \\ 21 & 21 & 12 & -12 \\ -21 & -21 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.01430 \\ 0.02388 \\ 0.03261 \\ 0.10140 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} -121.3046 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 58.3369 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -17.9908 \text{ ton} \\ 17.9908 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_{13}\} &= [k_{13}]\{\delta_{13}\} + \{P_0^{(13)}\} \\ \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{5,400,000} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01457 \\ 0 \\ 0.03261 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} -394.5749 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -75.8053 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -156.7934 \text{ ton} \\ 156.7934 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{F_{14}\} &= [k_{14}]\{\delta_{14}\} + \{P_0^{(14)}\} \\ \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{5,400,000} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01286 \\ 0 \\ 0.03261 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} -431.9723 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -150.6 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -194.1907 \text{ ton} \\ 194.1907 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\{F_{15}\} = [k_{15}]\{\delta_{15}\} + \{P_0^{(15)}\}$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \frac{16,807(140,000\sqrt{280})}{5,400,000} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01430 \\ 0 \\ 0.03261 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vdots &= \begin{pmatrix} -400.4973 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -87.6502 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -162.7158 \text{ ton} \\ 162.7158 \text{ ton} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Al trazar la distribución de momentos y cortantes, así como los diagramas de elementos mecánicos se tiene:

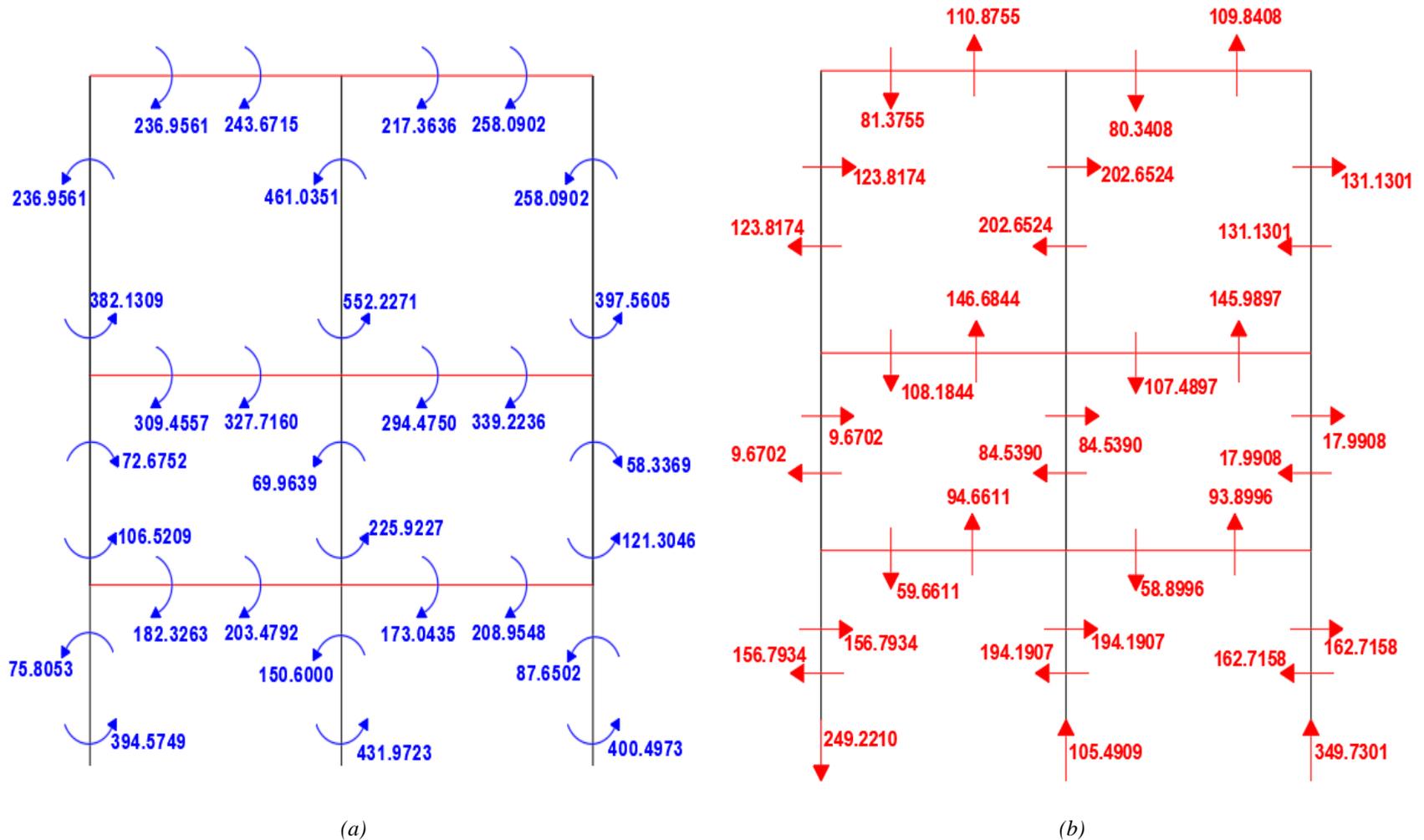


Figura XIX.6. Distribución de (a) momentos (ton-m) y (b) cortantes (ton).

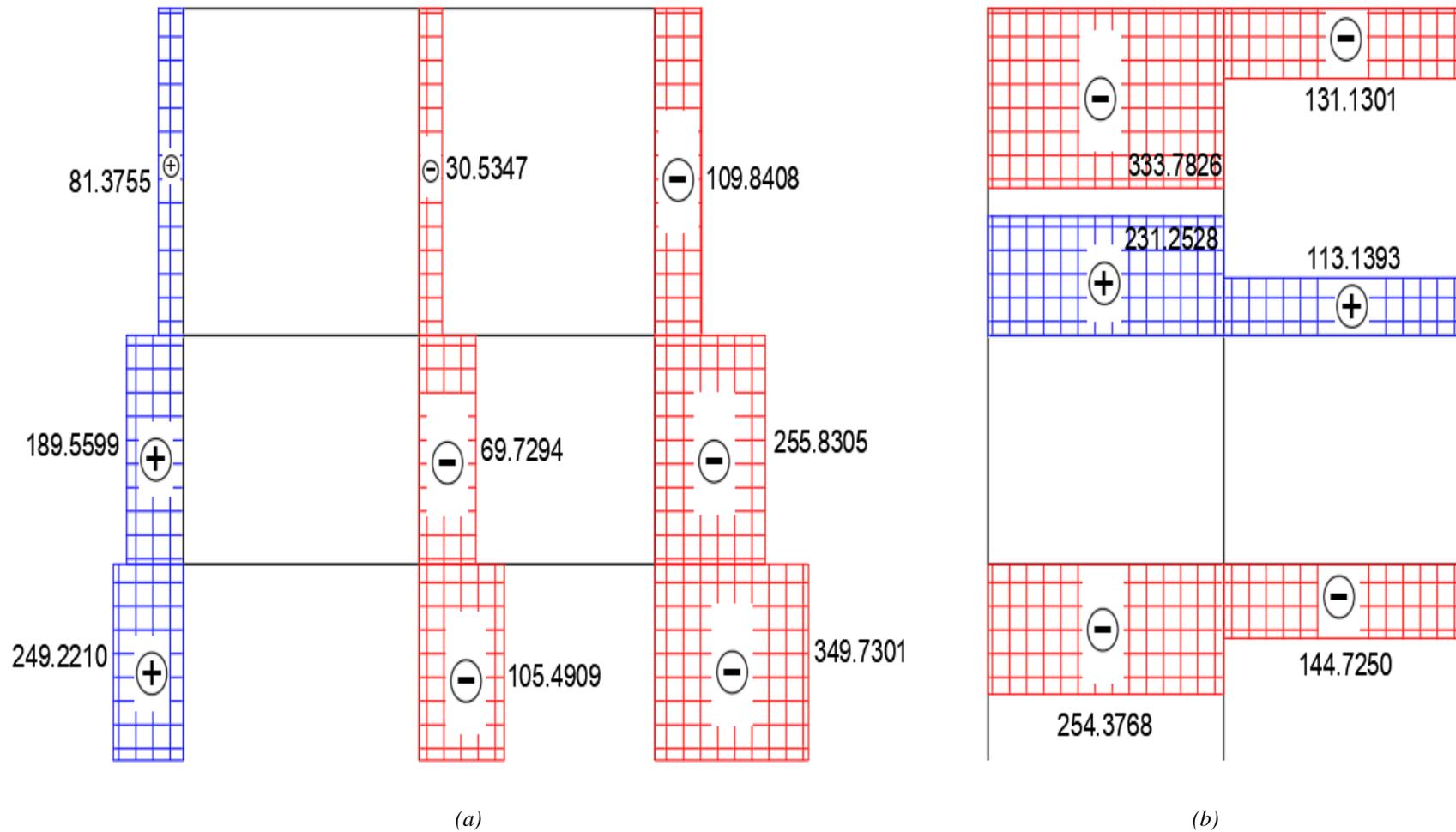


Figura XVI.8 Diagrama de fuerza axial (ton) en (a) columnas y (b) vigas.

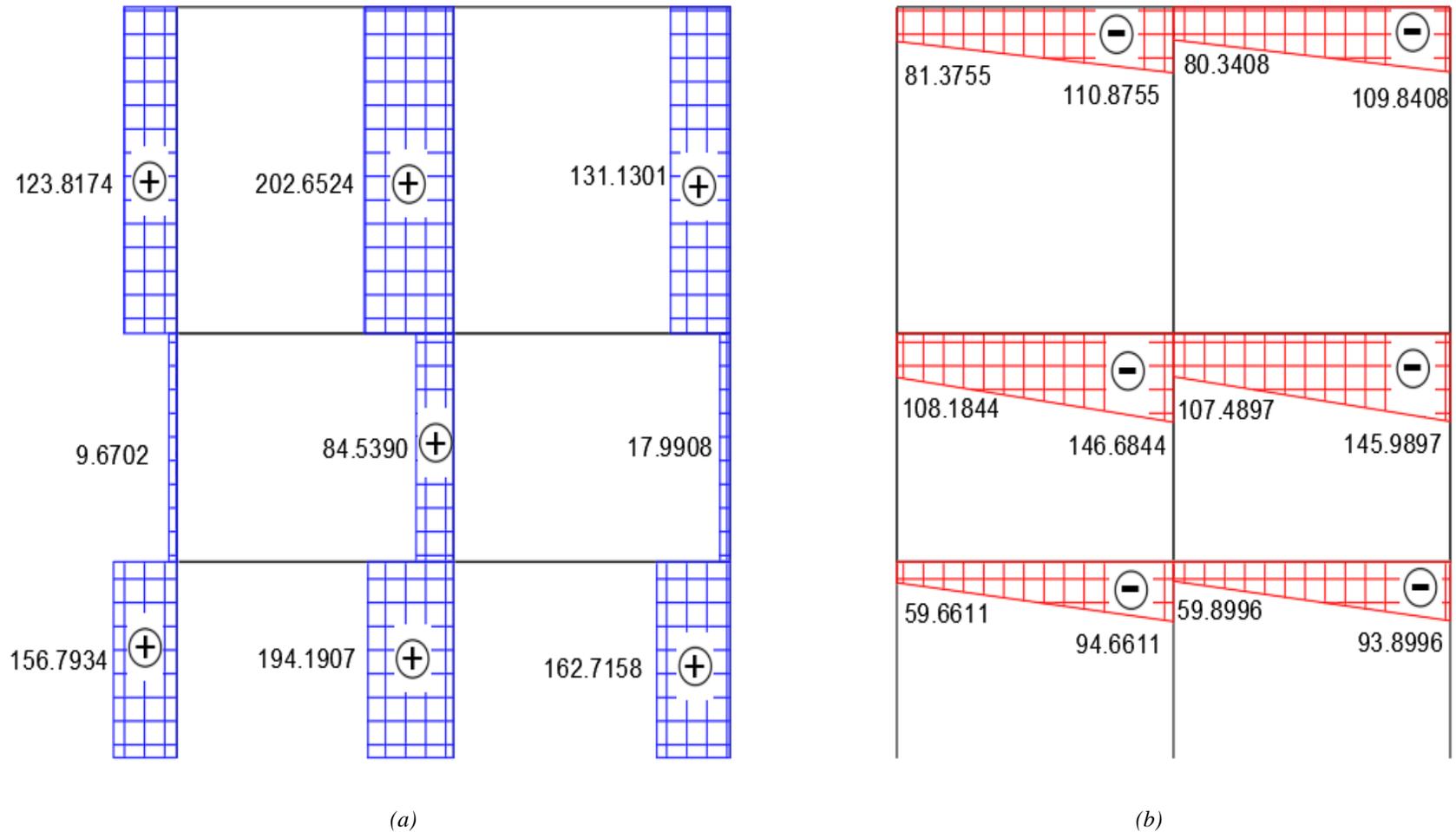


Figura XIX.7. Diagrama de fuerza cortante (ton) en (a) columnas y (b) vigas.

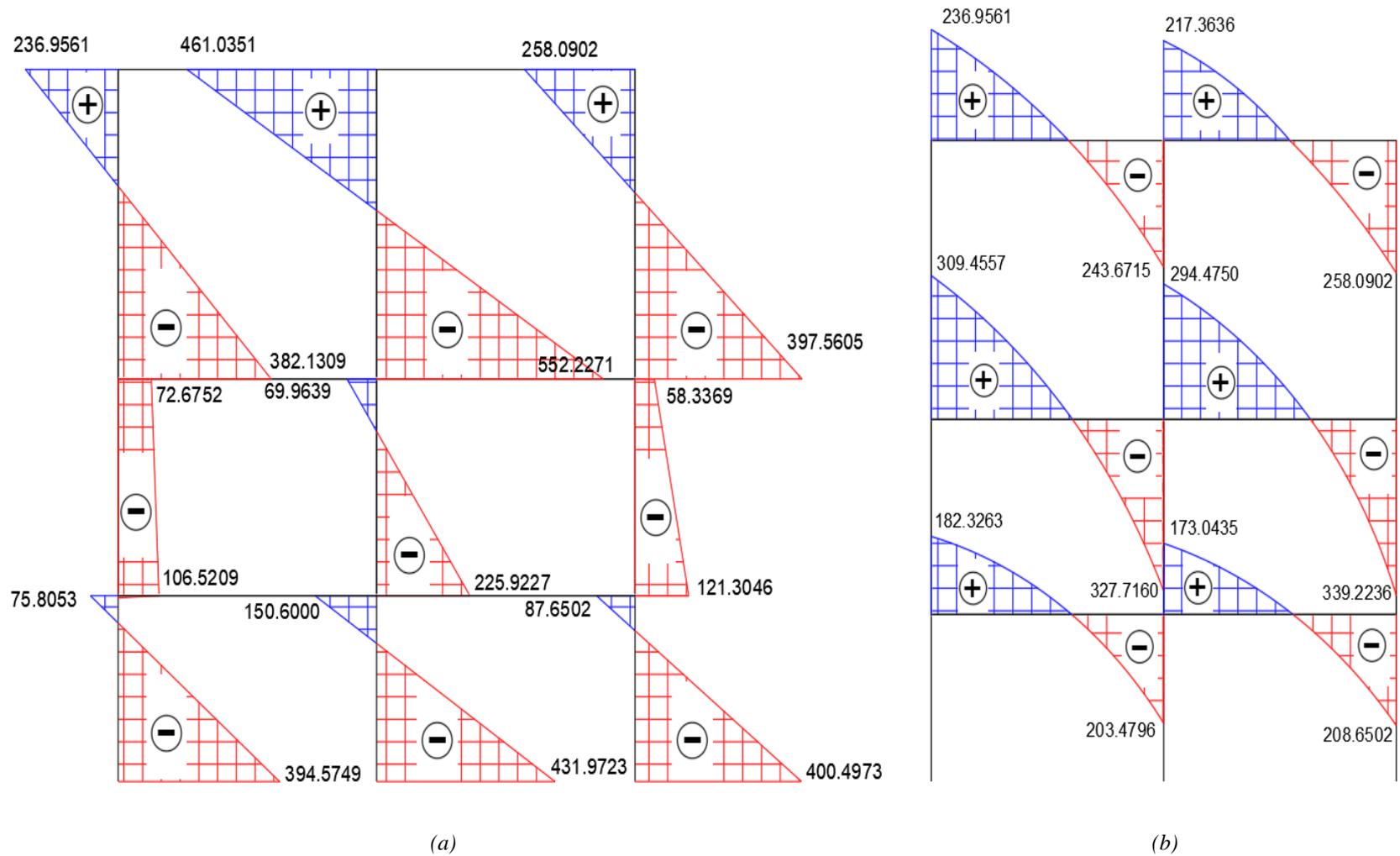


Figura XIX.8. Diagrama de momento flector (ton-m) en (a) columnas y (b) vigas.

PARTE
VII

ANÁLISIS ESTRUCTURAL
MATRICIAL DE ELEMENTOS DE
SECCIÓN VARIABLE,
CONTRAVENTEOS Y APOYOS
ELÁSTICOS

CONCLUSIONES

REFERENCIAS

Capítulo XX: Análisis Estructural con Elementos de Sección Variable, Contraventeos y Apoyos Elásticos por el Método de la Rigidez Matricial

20.1 Introducción

20.2 Alcances

20.3 Matriz de Rigidez de un Elemento Viga de Sección Variable en el Plano

20.3.1 Matriz para una sección prismática

20.3.2 Matriz para un muro de corte (modelado de zona de rigidez infinita)

20.3.3 Transformación de coordenadas locales a globales

20.3.4 Cálculo de momentos flectores en elementos de sección variable

20.5 Matriz de Rigidez de un Contraventeo

20.5.1 Transformación de coordenadas locales a globales

20.6 Ejemplos de Aplicación de Elementos Viga - Columna

20.6.1 Ejemplo 1: determinación de la matriz de rigidez de una columna de sección variable

20.6.2 Ejemplo 2: cálculo de elementos mecánicos de una columna de sección variable

20.6.3 Ejemplo 3: obtención de elementos mecánicos de una columna de sección variable a través del ensamble de elementos de sección prismática

20.6.4 Implementación de los métodos de integración numérica para resolver problemas de sección variable

20.6.5 Ejemplo 4: cálculo de elementos mecánicos de una viga cuya base y peralte varían en forma lineal

20.6.6 Ejemplo 5: cálculo de elementos mecánicos de una viga cuya base y peralte varían en forma parabólica

20.6.7 Inconveniencia del uso de elementos de sección prismática para idealizar una sección transversal como la del ejemplo 4 o 5

20.7 Ejemplos de Aplicación de Marcos con Contraventeos y Muros Cortante

20.7.1 Ejemplo 1: marco de dos crujiás y un nivel sometido a carga lateral

20.7.2 Ejemplo 2: marco de dos crujiás y un nivel con contraventeos concéntricos sometido a carga lateral

20.7.3 Inclusión de efectos térmicos y errores de fabricación a contraventeos

20.7.4 Inclusión de efectos térmicos en elementos tipo viga
20.7.5 Ejemplo 3: marco de dos crujiás y un nivel con contraventeos concéntricos sometido a carga lateral y efectos térmicos

20.7.6 Ejemplo 4: marco de dos crujiás y un nivel con contraventeos concéntricos que presentan errores de fabricación sometido a carga lateral

20.7.7 Ejemplo 5: marco de dos crujiás y un nivel con considerando muros de cortante para idealizar el modelo esquelético

20.8 Ejemplos de Aplicación Sobre Apoyos Elásticos

20.8.1 Ejemplo 1: resolver el siguiente marco

20.8.2 Ejemplo 2: resolver el marco del ejemplo anterior considerando el sistema de contraventeos presentado en la página 744

20.9 Uso de los elementos de rigidez infinita para la modelación de muros de mampostería

20.9.1 Ejemplo: comparar mediante el uso del método de la columna ancha equivalente los resultados obtenidos por el doctor Tena Colunga al considerar deformaciones axiales en columnas

20.10 Uso de diagonal equivalente para la modelación de muros de mampostería

20.10.1 Ejemplo: determinar la rigidez lateral por el método de la diagonal equivalente de la siguiente estructura de mampostería confinada y comparar los resultados obtenidos por el método de la columna ancha

XX. Análisis Estructural con Elementos de Sección Variable, Contraventeos y Apoyos Elásticos por el Método de la Rigidez Matricial

20.1 Introducción

Muchas veces la estructuración en edificios no se construye únicamente con sistemas de marcos de vigas y columnas con sección transversal prismática, sino que la sección transversal puede variar a lo largo de toda su longitud.

Otras veces, las estructuras necesitan soportar cargas laterales de gran importancia (como sísmicas o eólicas) por lo cual se recurre a sistemas de contraventeo, marcos con muros o sistemas mixtos donde se recurre a marcos convencionales con muros y/o contraventeos (Tena Colunga, 2007, pág. 205).

20.2 Alcances

Durante este capítulo se pretende que el lector pueda entender, de la manera más clara y precisa posible, como es que se establece el método de la rigidez matricial^{20.1} y cómo puede ser llevado a los siguientes tipos de elementos:

-  Vigas y columnas de sección transversal prismática y variable.
-  Muros de cortante (modelación como elementos con zona de rigidez infinita).
-  Muros de mampostería (modelación como elementos de zona de rigidez infinita y diagonal equivalente).
-  Contraventeos.
-  Inclusión de apoyos elásticos

^{20.1} Aunque en el capítulo anterior fue establecida la matriz de rigidez para elementos de sección constante, la convención utilizada de momentos flectores (+ \cup) es distinta a la utilizada en muchos libros de análisis estructural (+ \mathcal{C}), sin embargo, el cambio de convención no cambia el valor de los elementos mecánicos finales. Para este capítulo los momentos serán positivos en sentido antihorario, aunque el lector podrá realizar, al término de este capítulo, las respectivas deducciones de las matrices tomando los momentos positivos en sentido horario si es que así lo requiere.

20.3 Matriz de Rigidez de un Elemento Viga de Sección Variable en el Plano

Sea una sección variable como la mostrada en la siguiente ilustración:

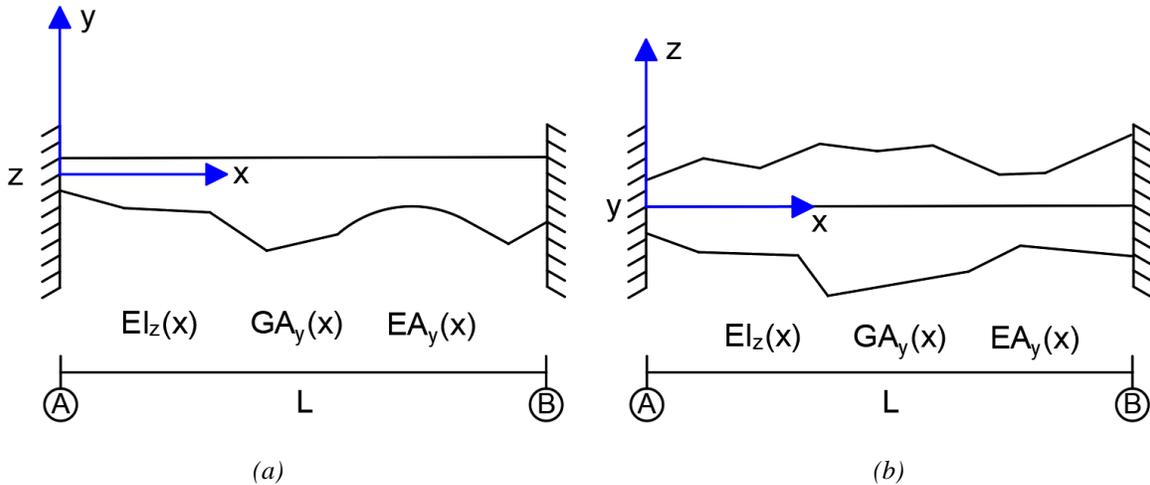
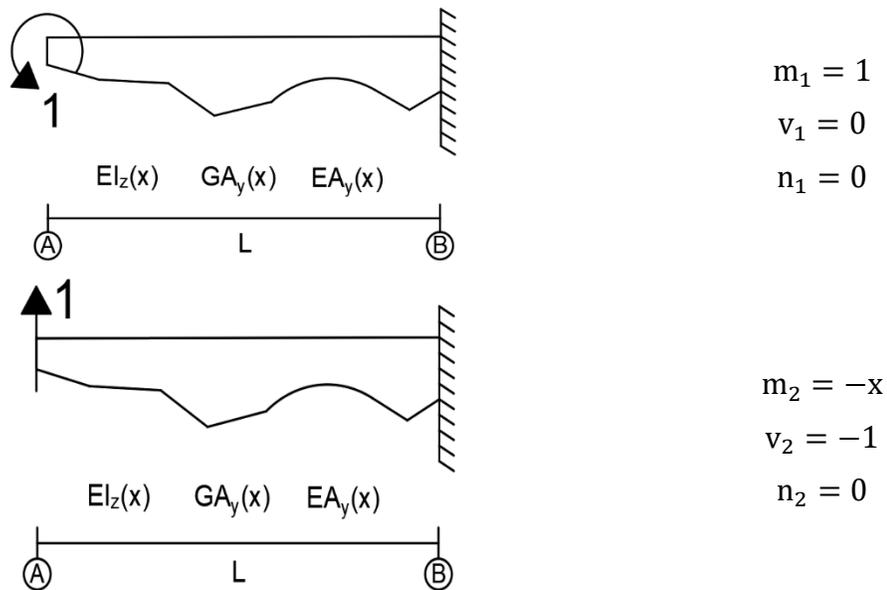
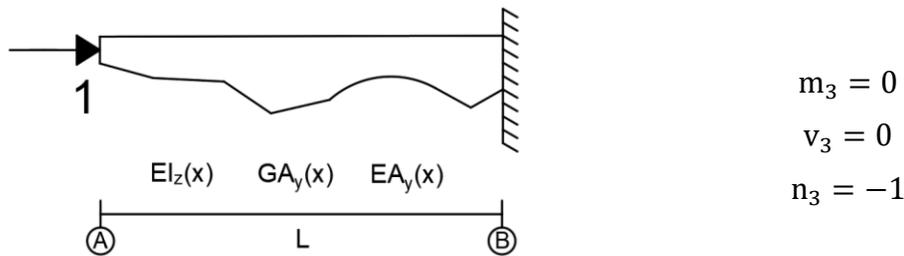


Figura XX.1. Representación de una viga de sección variable donde (a) representa la variación del peralte y (b) la variación de la base.

Para obtener la matriz de rigidez de un elemento tipo viga de sección variable, se recurre al método de las flexibilidades planteando los siguientes casos de viga con carga unitaria:





Los coeficientes de flexibilidad (f_{ij}) de la diagonal principal son:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{m_1^2}{EI_z(x)} dx + \underbrace{\int_0^L \frac{kv_1^2}{GA_y(x)} dx}_0 + \underbrace{\int_0^L \frac{n_1^2}{EA_y(x)} dx}_0 = \int_0^L \frac{dx}{EI_z(x)} \quad (20.1)$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{m_2^2}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{kv_2^2}{GA_y(x)} dx + \underbrace{\int_0^L \frac{n_2^2}{EA_y(x)} dx}_0 = \int_0^L \frac{x^2}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{k}{GA_y(x)} dx \quad (20.2)$$

$$f_{33} = \underbrace{\int_0^L \frac{m_3^2}{EI_z(x)} dx}_0 + \underbrace{\int_0^L \frac{kv_3^2}{GA_y(x)} dx}_0 + \int_0^L \frac{n_3^2}{EA_y(x)} dx = \int_0^L \frac{dx}{EA_y(x)} \quad (20.3)$$

Los coeficientes de flexibilidad (f_{ij}) restantes son:

$$f_{21} = f_{12} = \int_0^L \frac{m_1 m_2}{EI_z(x)} dx + \underbrace{\int_0^L \frac{kv_1 v_2}{GA_y(x)} dx}_0 + \underbrace{\int_0^L \frac{n_1 n_2}{EA_y(x)} dx}_0 = - \int_0^L \frac{x}{EI_z(x)} dx \quad (20.4)$$

$$f_{31} = f_{13} = \underbrace{\int_0^L \frac{m_1 m_2}{EI_z(x)} dx}_0 + \underbrace{\int_0^L \frac{kv_1 v_2}{GA_y(x)} dx}_0 + \underbrace{\int_0^L \frac{n_1 n_2}{EA_y(x)} dx}_0 = 0 \quad (20.5)$$

$$f_{23} = f_{32} = \underbrace{\int_0^L \frac{m_2 m_3}{EI_z(x)} dx}_0 + \underbrace{\int_0^L \frac{k v_2 v_3}{GA_y(x)} dx}_0 + \underbrace{\int_0^L \frac{n_2 n_3}{EA_y(x)} dx}_0 = 0 \quad (20.6)$$

Conocidos los coeficientes de flexibilidad, se introducen en la ecuación 12.46 para obtener:

$$[f_{ij}^{(1,1)}] = \begin{bmatrix} f_{11} & -f_{12} & 0 \\ -f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{bmatrix} \quad (20.7)^{20.2}$$

Invirtiendo esta matriz se tiene:

$$[k_{ij}^{(1,1)}] = [f_{ij}^{(1,1)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} & \frac{f_{12}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} & 0 \\ \frac{f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} & \frac{f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} \end{bmatrix} \quad (20.8)$$

Por simplificación es posible escribir la matriz de rigidez como:

$$[k_{ij}^{(1,1)}] = [f_{ij}^{(1,1)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}}{|f|} & 0 \\ \frac{f_{21}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} \end{bmatrix} \quad (20.9)$$

Donde:

$$|f| = f_{11}f_{12} - f_{12}f_{21} = f_{11}f_{12} - f_{12}^2 \quad (20.10)$$

Como es bien sabido, la matriz de rigidez de un elemento tipo viga es la matriz inversa de la matriz de flexibilidades, no obstante, como define el doctor Tena Colunga en su libro “Análisis Estructural con Matrices”:

^{20.2} Los coeficientes de flexibilidad deben representar un valor positivo dentro de esta matriz, así que los elementos de la diagonal principal son positivos, mientras que los coeficientes f_{21} y f_{12} deben cambiar de signo.

La matriz de rigidez se puede obtener invirtiendo la matriz de flexibilidades, sin embargo, debido a la porosidad de ésta y a que los coeficientes de flexibilidad están desacoplados, la matriz de rigidez se calcula invirtiendo submatrices de flexibilidades, por lo que sus términos se definen implícitamente (Tena Colunga, 2007, pág. 104).

Bajo esta descripción, hasta el momento se ha calculado sólo una parte de la matriz de rigidez la cual se representan mediante (a partir de aquí sólo se anotará f_{12}):

$$\begin{aligned}
 [k_{ij}] = \begin{bmatrix} [k_{ij}^{(1,1)}] & [k_{ij}^{(1,2)}] \\ [k_{ij}^{(2,1)}] & [k_{ij}^{(2,2)}] \end{bmatrix} &= \begin{array}{ccccccc} \theta_A & d_y^A & d_x^A & & \theta_B & d_y^B & d_x^B \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}}{|f|} & 0 & | & & & \\ \frac{f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & 0 & | & [k_{ij}^{(1,2)}] & & \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} & | & & & \\ - & - & - & + & - & - & - \\ & [k_{ij}^{(2,1)}] & & | & & & \\ & & & | & [k_{ij}^{(2,2)}] & & \\ & & & | & & & \end{array} \right] & \begin{array}{l} M_A \\ F_y^A \\ F_x^A \\ \\ M_B \\ F_y^B \\ F_x^B \end{array} \end{array} \quad (20.11)
 \end{aligned}$$

El conocer $[k_{ij}^{(1,1)}]$ significa que se han calculado los elementos mecánicos en el nodo A, al aplicar una rotación angular lineal unitaria, así como un desplazamiento vertical y horizontal unitario en el nodo A, lo cual permite conocer $[k_{ij}^{(2,1)}]$ realizando una suma de fuerzas verticales y horizontales, así como una suma de momentos alrededor del eje z:

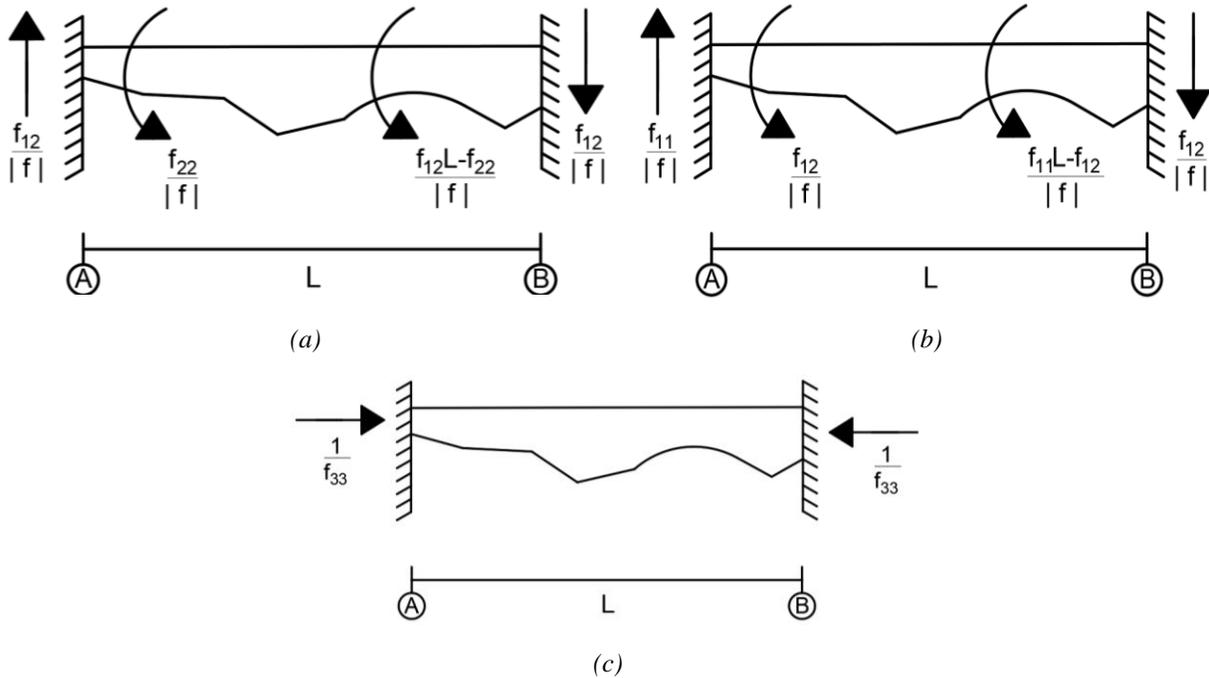


Figura XX.2. Cálculo de elementos mecánicos cuando (a) se aplica una rotación unitaria en el nodo A, (b) un desplazamiento vertical en A y (c) un desplazamiento horizontal en A.

Al conocer los elementos mecánicos se procede a llenar la parte correspondiente a $[k_{ij}^{(2,1)}]$:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} [k_{ij}^{(1,1)}] & [k_{ij}^{(1,2)}] \\ [k_{ij}^{(2,1)}] & [k_{ij}^{(2,2)}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_A & d_y^A & d_x^A & \theta_B & d_y^B & d_x^B \\ \frac{f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}}{|f|} & 0 & | & & \\ \frac{f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & 0 & | & [k_{ij}^{(1,2)}] & \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} & | & & \\ - & - & - & + & - & - \\ \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & 0 & | & & \\ -\frac{f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & 0 & | & [k_{ij}^{(2,2)}] & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{f_{33}} & | & & \end{bmatrix} \begin{matrix} M_A \\ F_y^A \\ F_x^A \\ M_B \\ F_y^B \\ F_x^B \end{matrix} \quad (20.12)$$

Como debe existir simetría en la matriz $[k_{ij}^{(1,2)}] = [k_{ij}^{(2,1)}]^T$ y por lo tanto, la matriz de rigidez se llena con:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} [k_{ij}^{(1,1)}] & [k_{ij}^{(1,2)}] \\ [k_{ij}^{(2,1)}] & [k_{ij}^{(2,2)}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_A & d_y^A & d_x^A & \theta_B & d_y^B & d_x^B \\ \frac{f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}}{|f|} & 0 & \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & -\frac{f_{12}}{|f|} & 0 \\ \frac{f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & 0 & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} & 0 & 0 & -\frac{1}{f_{33}} \\ - & - & - & - & - & - \\ \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & 0 & & & \\ -\frac{f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & 0 & & [k_{ij}^{(2,2)}] & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{f_{33}} & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} M_A \\ F_y^A \\ F_x^A \\ M_B \\ F_y^B \\ F_x^B \end{matrix} \quad (20.13)$$

Conocer $[k_{ij}^{(1,2)}]$ significa que se determinaron los valores de los elementos mecánicos en el nodo A, al realizar una rotación angular lineal unitaria, un desplazamiento vertical unitario y un desplazamiento horizontal unitario pero ahora en el nodo B. Realizando una suma de fuerzas verticales y momentos alrededor del eje z permite obtener los valores de $[k_{ij}^{(2,2)}]$:

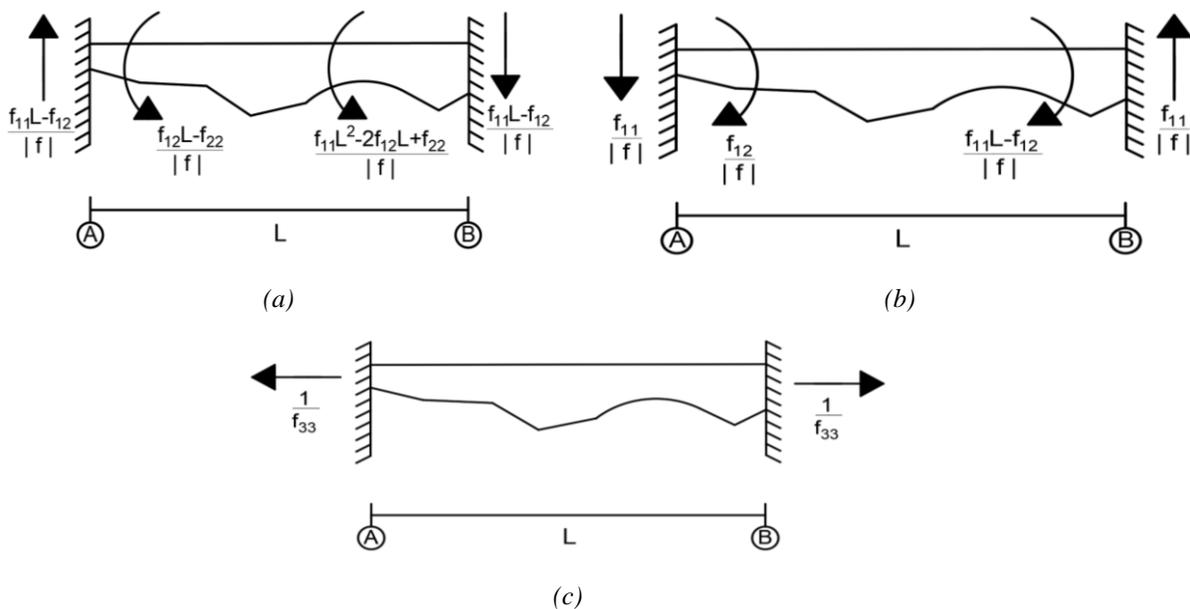


Figura XX.3. Cálculo de elementos mecánicos cuando (a) se aplica una rotación unitaria en el nodo B, (b) un desplazamiento vertical en B y (c) un desplazamiento horizontal en B.

Al conocer todos las submatrices de rigidez, se determina que la matriz de rigidez en coordenadas locales para un elemento tipo viga de sección variable es:

$$[k_{ij}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} \theta_A & d_y^A & d_x^A & \theta_B & d_y^B & d_x^B \\ \hline \frac{f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}}{|f|} & 0 & \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & -\frac{f_{12}}{|f|} & 0 \\ \frac{f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & 0 & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} & 0 & 0 & -\frac{1}{f_{33}} \\ \hline \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & 0 & \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & 0 \\ -\frac{f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & 0 & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{f_{33}} & 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} \end{array} \\ + \\ \begin{array}{ccc|ccc} \theta_A & \theta_B & d_y^A & d_y^B & d_x^A & d_x^B \\ \hline \frac{f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{12}}{|f|} & 0 & 0 \\ \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & 0 & 0 \\ \frac{f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & 0 & 0 \\ -\frac{f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} & -\frac{1}{f_{33}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{f_{33}} & \frac{1}{f_{33}} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} M_A \\ F_y^A \\ F_x^A \\ M_B \\ F_y^B \\ F_x^B \end{array} \quad (20.14)$$

Al acomodar la matriz en el orden $\theta_A, \theta_B, d_y^A, d_y^B, d_x^A$ y d_x^B se tiene:

$$[k_{ij}] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|cc} \theta_A & \theta_B & d_y^A & d_y^B & d_x^A & d_x^B \\ \hline \frac{f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{12}}{|f|} & 0 & 0 \\ \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & 0 & 0 \\ \frac{f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & 0 & 0 \\ -\frac{f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} & -\frac{1}{f_{33}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{f_{33}} & \frac{1}{f_{33}} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} M_A \\ M_B \\ F_y^A \\ F_y^B \\ F_x^A \\ F_x^B \end{array} \quad (20.15)$$

De donde se determina que la matriz de rigidez angular es:

$$f_{22} = \int_0^L \frac{x^2}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{k}{GA_y(x)} dx = \frac{x^3}{3EI} \Big|_0^L + \frac{kx}{GA} \Big|_0^L = \frac{L^3}{3EI} + \frac{kL}{GA} = \frac{L^3}{3EI} (1 + c) \quad (20.18)$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{1}{EA_y(x)} dx = \frac{x}{EA} \Big|_0^L = \frac{L}{EA} \quad (20.19)$$

Calculando el resto de los coeficientes:

$$f_{21} = f_{12} = - \int_0^L \frac{x}{EI_z(x)} dx = - \frac{x^2}{2EI} \Big|_0^L = - \frac{L^2}{2EI} \quad (20.20)$$

$$f_{31} = f_{13} = 0 \quad (20.21)$$

$$f_{23} = f_{32} = 0 \quad (20.22)$$

Calculando el valor de $|f|$ (se recuerda que para calcular los coeficientes de rigidez, todos los coeficientes de flexibilidad deben tomarse con signo positivo):

$$\begin{aligned} |f| &= f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \\ \therefore &= \left(\frac{L}{EI}\right) \left(\frac{L^3}{3EI} (1 + c)\right) - \left(\frac{L^2}{2EI}\right)^2 \\ \therefore &= \frac{L^4}{3E^2I^2} (1 + c) - \frac{L^4}{4E^2I^2} \\ \therefore &= \frac{4L^4}{12E^2I^2} (1 + c) - \frac{3L^4}{12E^2I^2} \\ \therefore &= \frac{L^4}{12E^2I^2} [4(1 + c) - 3] \\ \therefore \quad |f| &= \frac{L^4(1 + 4c)}{12E^2I^2} \quad (20.23) \end{aligned}$$

Calculando los siete coeficientes de rigidez que están en función de los coeficientes de flexibilidad:

$$\begin{aligned} \frac{f_{22}}{|f|} &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\frac{L^3}{3EI} (1+c) \right] \\ \vdots &= \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) \\ \therefore \frac{f_{22}}{|f|} &= \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) \end{aligned} \quad (20.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\left(\frac{L^2}{2EI} \right) L - \frac{L^3}{3EI} (1+c) \right] \\ \vdots &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\frac{3L^3}{6EI} - \frac{2L^3}{6EI} (1+c) \right] \\ \vdots &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\frac{L^3}{6EI} \right] [3 - 2(1+c)] \\ \vdots &= \frac{2EI}{L(1+4c)} (1-2c) \\ \therefore \frac{f_{21}L - f_{22}}{|f|} &= \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) \end{aligned} \quad (20.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{f_{12}}{|f|} &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\frac{L^2}{2EI} \right] \\ \vdots &= \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \\ \therefore \frac{f_{12}}{|f|} &= \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \end{aligned} \quad (20.26)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\left(\frac{L}{EI} \right) L^2 - 2 \left(\frac{L^2}{2EI} \right) L + \frac{L^3}{3EI} (1+c) \right] \\
 \vdots &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\frac{L^3}{EI} - \frac{L^3}{EI} + \frac{L^3}{3EI} (1+c) \right] \\
 \vdots &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\frac{L^3}{3EI} (1+c) \right] \\
 \vdots &= \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) \\
 \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} &= \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) \tag{20.27}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\left(\frac{L}{EI} \right) L - \frac{L^2}{2EI} \right] \\
 \vdots &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\frac{L^2}{EI} - \frac{L^2}{2EI} \right] \\
 \vdots &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\frac{L^2}{2EI} \right] \\
 \vdots &= \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \\
 \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} &= \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \tag{20.28}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{11}}{|f|} &= \left[\frac{12E^2I^2}{L^4(1+4c)} \right] \left[\frac{L}{EI} \right] \\
 \vdots &= \frac{12EI}{L^3(1+4c)}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f_{11}}{|f|} = \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \quad (20.29)$$

$$\therefore \frac{1}{f_{33}} = \frac{EA}{L} \quad (20.30)$$

Teniendo los coeficientes de rigidez es posible determinar la matriz de rigidez a partir de la ecuación 20.15 sustituyendo los valores calculados (ecuaciones 20.24 a 20.30):

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} \theta_A & \theta_B & d_y^A & d_y^B & d_x^A & d_x^B \\ \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & -\frac{12EI}{L^3(1+4c)} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} M_A \\ M_B \\ F_y^A \\ F_y^B \\ F_x^A \\ F_x^B \end{matrix} \quad (20.31)$$

20.3.2 Matriz para un muro de corte^{20.3} (modelado de zona de rigidez infinita)

Algunas ocasiones, cuando se requiere otorgar más rigidez a una estructura para que ésta sea capaz de resistir acciones laterales importantes, se recurre al uso de muros de corte dado que aumenta la masa de la estructura (Tena Colunga, 2007, pág. 225). Otras formas de aumentar rigidez a la estructura es rellenar las crujías de los marcos de concreto con el uso de muros de mampostería (Bazán & Meli, 1990, pág. 67).

La manera de idealizar un muro (de cortante o de mampostería) se logra al otorgarle a ciertas columnas, dentro de los sistemas de muros o muro – marco, la rigidez de la sección transversal de

^{20.3} También conocido como método del marco equivalente o de columna ancha.

muro; esta columna recibirá el nombre de columna ancha (Bazán & Meli, 1990, pág. 69). Este método es aceptable aceptando la hipótesis de comportamiento elástico lineal (Bazán & Meli, 1990, pág. 67),

Otras ventajas y desventajas de sistemas estructurales a base de muros de cortante son las siguientes (Tolentino López, 2019):

Tabla XX
Ventajas y desventajas de los muros de cortante

Ventajas	Desventajas
<ul style="list-style-type: none"> ✚ Reducción de secciones transversales de elementos principales. ✚ Ayuda a resolver problemas de torsión. ✚ Útiles para edificios de 30 a 80 niveles. ✚ Solución viable para áreas de construcción pequeña en edificios catalogados como medio o alto. 	<ul style="list-style-type: none"> ✚ El mal uso de este sistema genera efectos significativos de torsión. ✚ Transmite cortante excesivo a la cimentación. ✚ Son caros de construir.

Para determinar la matriz de rigidez de un muro como el mostrado a continuación:

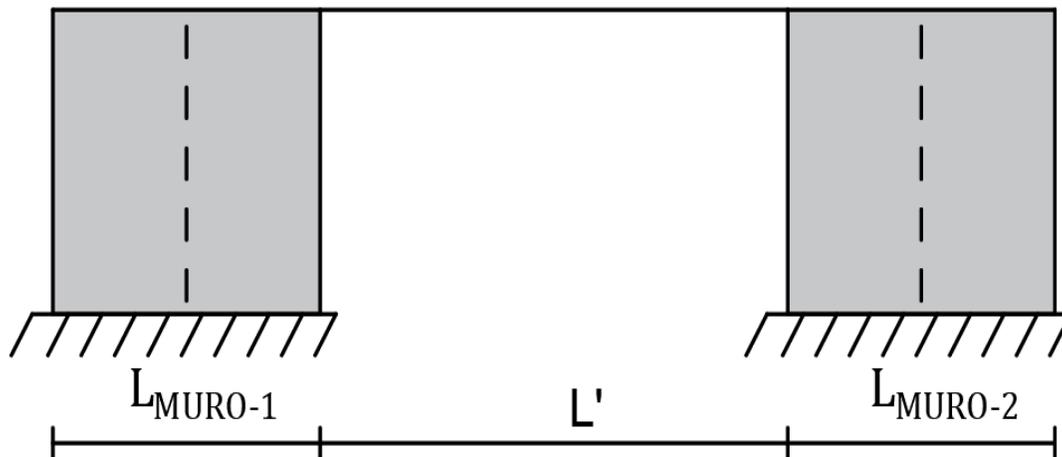


Figura XX.4. Representación de un muro de cortante antes de pasarse a un modelo esquelético.

Puede modelarse una zona de rigidez infinita a partir de un modelo esquelético como el que siguiente:

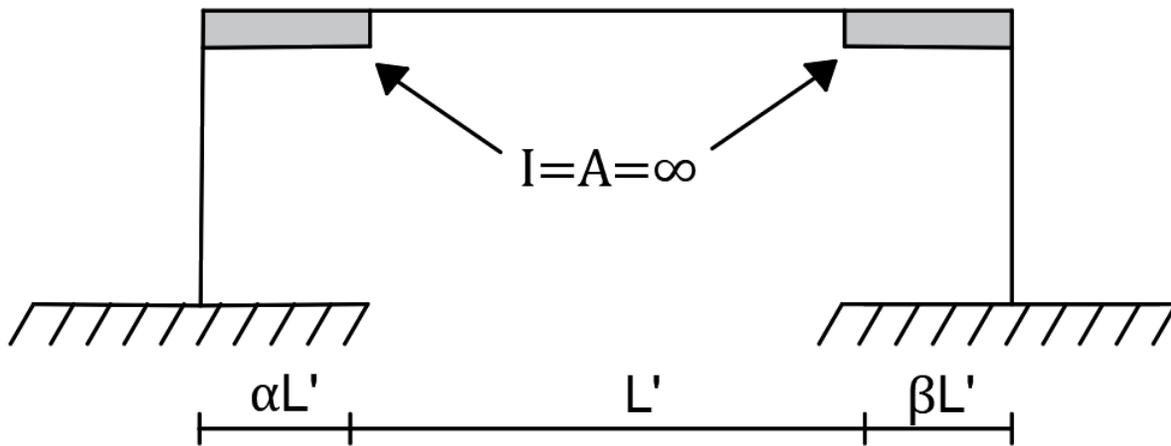


Figura XX.4. Modelo esquelético de un muro de cortante (columna ancha equivalente).

Donde las relaciones $\alpha L'$ y $\beta L'$ se establecen a partir de un porcentaje de la longitud total del muro (figura XX.4). Lo más común es considerar un 50% del total de muro para edificios de mediana y gran altura que serán sometidos a cargas laterales importantes (Tena Colunga, 2007, pág. 118). Al determinar este porcentaje puede establecerse el valor de las relaciones de rigidez infinita:

$$\alpha = \frac{a}{L'} = \frac{0.5 L_{\text{MURO}-1}}{L'} \quad (20.32)$$

$$\beta = \frac{b}{L'} = \frac{0.5 L_{\text{MURO}-2}}{L'} \quad (20.33)$$

Dentro de la conexión viga – columna, en un sistema de muros sólidos, debe considerarse en los nodos donde exista rigidez infinita, los efectos de deformación por cortante para los elementos (Tena Colunga, 2007, pág. 225).

Para determinar la matriz de rigidez de una viga con zonas de rigidez infinita debe hacerse uso de la matriz de rigidez en coordenadas locales para elementos de sección variable (ecuación 20.15).

Dentro de los ejemplos de aplicación se realizará la comparativa entre un marco sin ningún sistema que ayude a la restricción lateral, después se analizará introduciendo un sistema de contraventeos y posteriormente se analizará al sustituir los contraventeos por muros de cortante. No se analiza la comparativa con un muro de mampostería dado que se incluyen otros casos como el suponer a la estructura sobre apoyos elásticos y considerar al sistema de contraventeos bajo efectos térmicos y errores de fabricación.

No obstante, para retroalimentación del lector, se analizará el ejemplo presentado por el doctor Tena sobre análisis de muros de mampostería confinada utilizando el método de la columna ancha equivalente en su libro *Análisis de Estructuras con Métodos Matricial* (2007, págs. 241-245) pero considerando efectos de deformación axial y se hará una comparativa de los resultados.

Para comenzar a deducir la matriz de rigidez (en coordenadas locales) de un muro es preciso considerar la viga resultado del modelo esquelético (figura XX.4) y calcular los coeficientes f_{11} , f_{22} , f_{33} y f_{12} :

$$f_{11} = \int_0^L \frac{dx}{EI_z(x)}$$
$$f_{22} = \int_0^L \frac{x^2}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{k}{GA_y(x)} dx$$
$$f_{33} = \int_0^L \frac{n_3^2}{EA_y(x)} dx$$

Cuya longitud L se expresa en tres límites de integración:

- i. $0 \leq x \leq \alpha L'$
- ii. $\alpha L' \leq x \leq \alpha L' + L'$
- iii. $\alpha L' + L' \leq x \leq \alpha L' + L' + \beta L'$

Para los límites de integración i y iii, la inercia y el área de la sección son infinitas en comparación con los valores presentes en el tramo comprendido entre $\alpha L'$ y $\beta L'$, por lo que los coeficientes de rigidez pueden establecerse mediante:

$$f_{11} = \int_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} \frac{dx}{EI_z(x)} \quad (20.34)$$

$$f_{22} = \int_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} \frac{x^2}{EI_z(x)} dx + \int_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} \frac{k}{GA_y(x)} dx \quad (20.35)$$

$$f_{33} = \int_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} \frac{dx}{EA_y(x)} \quad (20.36)$$

$$f_{21} = f_{12} = \int_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} \frac{x}{EI_z(x)} dx \quad (20.37)$$

Para los casos presentados en este capítulo, la sección transversal de L' es prismática lo cual permite establecer:

$$I_z(x) = I \quad \& \quad A_y(x) = A$$

Calculando los coeficientes de flexibilidad:

$$f_{11} = \left. \frac{x}{EI} \right|_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} = \frac{\alpha L' + L' - \alpha L'}{EI} = \frac{L'}{EI}$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{x^2}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{k}{GA_y(x)} dx$$

$$\begin{aligned}
 \vdots &= \frac{x^3}{3EI} \Big|_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} + \frac{kx}{GA} \Big|_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} \\
 \vdots &= \frac{(L')^3 \overbrace{(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1)}^{(\alpha+1)^3} - (\alpha L')^3}{3EI} + \frac{k(\alpha L' + L' - \alpha L')}{GA} \\
 \vdots &= \frac{(L')^3 (3\alpha^2 + 3\alpha + 1)}{3EI} + \frac{kL'}{GA} \\
 \vdots &= \frac{(L')^3}{3EI} \left[3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + \underbrace{\left(\frac{3EI}{(L')^3} \right) \left(\frac{kL'}{GA} \right)}_c \right] \\
 \vdots &= \frac{(L')^3}{3EI} (3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + c)
 \end{aligned}$$

$$f_{33} = \int_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} \frac{n_3^2}{EA_y(x)} dx = \frac{dx}{EA} \Big|_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} = \frac{\alpha L' + L' - \alpha L'}{EA} = \frac{L'}{EA}$$

$$\begin{aligned}
 f_{12} &= \int_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'} \frac{x}{EI_z(x)} dx \\
 &= \frac{x^2}{2EI} \Big|_{\alpha L'}^{\alpha L' + L'}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(L')^2 \overbrace{(\alpha^2 + 2\alpha + 1)}^{(\alpha+1)^2} - (\alpha L')^2}{2EI}$$

$$\frac{(L')^2 (2\alpha + 1)}{2EI}$$

Los coeficientes de rigidez necesarios para determinar la matriz de rigidez en coordenadas locales son:

$$f_{11} = \frac{L'}{EI}$$

$$f_{22} = \frac{(L')^3}{3EI} (3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + c)$$

$$f_{33} = \frac{L'}{EA}$$

$$f_{12} = \frac{(L')^2 (2\alpha + 1)}{2EI}$$
(20.38)^{20.4}

Calculando el valor $|f|$:

$$|f| = f_{11}f_{22} - f_{12}^2$$

$$\therefore = \left(\frac{L'}{EI}\right) \left(\frac{(L')^3}{3EI} (3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + c)\right) - \left(\frac{(L')^2 (2\alpha + 1)}{2EI}\right)^2$$

$$\therefore = \frac{(L')^4}{3E^2I^2} (3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + c) - \frac{(L')^4}{4E^2I^2} (4\alpha^2 + 4\alpha + 1)$$

$$\therefore = \frac{(L')^4}{12E^2I^2} [4(3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + c) - 3(4\alpha^2 + 4\alpha + 1)]$$

^{20.4} Es interesante notar que si la estructura no presenta muros, las zonas de rigidez infinita sería cero ($\alpha = \beta = 0$) provocando que $L' = L$ y que los coeficientes de flexibilidad para muros de corte tengan el mismo valor para elementos viga de sección prismática.

$$\begin{aligned}
 \therefore &= \frac{(L')^4}{12E^2I^2} (12\alpha^2 + 12\alpha + 4 + 4c - 12\alpha^2 - 12\alpha - 3) \\
 \therefore &= \frac{(L')^4}{12E^2I^2} (1 + 4c) \\
 \therefore &|f| = \frac{(L')^4(1 + 4c)}{12E^2I^2} \tag{20.39}
 \end{aligned}$$

Calculando los siete coeficientes de rigidez que están en función de los coeficientes de flexibilidad:

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{22}}{|f|} &= \left[\frac{12E^2I^2}{(L')^4(1 + 4c)} \right] \left[\frac{(L')^3}{3EI} (3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + c) \right] \\
 \therefore &= \frac{4EI}{L'} \left(\frac{3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + c}{1 + 4c} \right) \\
 \therefore &\frac{f_{22}}{|f|} = \frac{4EI}{L'} \left(\frac{3\alpha + 3\alpha^2 + 1 + c}{1 + 4c} \right) \tag{20.40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} &= \left[\frac{12E^2I^2}{(L')^4(1 + 4c)} \right] \left[\left(\frac{(L')^2(2\alpha + 1)}{2EI} \right) (L')(\alpha + 1 + \beta) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(L')^3}{3EI} (3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + c) \right] \\
 \therefore &= \left[\frac{12E^2I^2}{(L')^4(1 + 4c)} \right] \left[\frac{(L')^3}{6EI} \right] [3(2\alpha + 1)(\alpha + 1 + \beta) - 2(3\alpha^2 + 3\alpha + 1 + c)] \\
 \therefore &= \left[\frac{2EI}{L'(1 + 4c)} \right] [(6\alpha + 3)(\alpha + 1 + \beta) - 6\alpha^2 - 6\alpha - 2 - 2c] \\
 \therefore &= \frac{2EI}{L'(1 + 4c)} (6\alpha^2 + 6\alpha + 6\alpha\beta + 3\alpha + 3 + 3\beta - 6\alpha^2 - 6\alpha - 2 - 2c) \\
 \therefore &\frac{f_{21}L - f_{22}}{|f|} = \frac{2EI}{L'} \left(\frac{3\alpha + 6\alpha\beta + 3\beta + 1 - 2c}{1 + 4c} \right) \tag{20.41}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} &= \left[\frac{12E^2I^2}{(L')^4(1+4c)} \right] \left[\left(\frac{L'}{EI} \right) (L')^2(\alpha+1+\beta)^2 - 2 \left(\frac{(L')^2(2\alpha+1)}{2EI} \right) L'(\alpha+1+\beta) + \frac{(L')^3}{3EI} (3\alpha^2+3\alpha+1+c) \right] \\
 \vdots &= \left[\frac{12E^2I^2}{(L')^4(1+4c)} \right] \left[\frac{(L')^3}{EI} \right] \left[(\alpha+1+\beta)^2 - (2\alpha+1)(\alpha+1+\beta) + \frac{1}{3}(3\alpha^2+3\alpha+1+c) \right] \\
 \vdots &= \left[\frac{12E^2I^2}{(L')^4(1+4c)} \right] \left[\frac{(L')^3}{3EI} \right] \left[3(\alpha+1+\beta)^2 - 3(2\alpha+1)(\alpha+1+\beta) + 3\alpha^2+3\alpha+1+c \right] \\
 \vdots &= \left[\frac{4EI}{L'(1+4c)} \right] \left[3(\alpha^2+\beta^2+1+2\alpha+2\beta+2\alpha\beta) - (6\alpha+3)(\alpha+1+\beta) + 3\alpha^2+3\alpha+1+c \right] \\
 \vdots &= \left[\frac{4EI}{L'(1+4c)} \right] \left[3\alpha^2+3\beta^2+3+6\alpha+6\beta+6\alpha\beta - (6\alpha+3)(\alpha+1+\beta) + 3\alpha^2+3\alpha+1+c \right] \\
 \vdots &= \frac{4EI}{L'(1+4c)} (6\alpha^2+9\alpha+4+c+3\beta^2+6\beta+6\alpha\beta-6\alpha^2-6\alpha-6\alpha\beta-3\alpha-3-3\beta) \\
 \vdots &= \frac{4EI}{L'(1+4c)} (1+c+3\beta^2+3\beta) \\
 \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} &= \frac{4EI}{L'} \left(\frac{3\beta+3\beta^2+1+c}{1+4c} \right) \tag{20.42}
 \end{aligned}$$

Los coeficientes de rigidez anterior conforman la matriz de rigidez angular:

$$\begin{aligned}
 &\theta_A \qquad \qquad \qquad \theta_B \\
 [k_{\text{angular}}] &= \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L'} \left(\frac{3\alpha+3\alpha^2+1+c}{1+4c} \right) & \frac{2EI}{L'} \left(\frac{3\alpha+6\alpha\beta+3\beta+1-2c}{1+4c} \right) \\ \frac{2EI}{L'} \left(\frac{3\alpha+6\alpha\beta+3\beta+1-2c}{1+4c} \right) & \frac{4EI}{L'} \left(\frac{3\beta+3\beta^2+1+c}{1+4c} \right) \end{bmatrix} \begin{matrix} M_A \\ M_B \end{matrix} \tag{20.43}
 \end{aligned}$$

Para calcular estos coeficientes se utilizó toda la longitud de la viga, incluyendo las zonas de rigidez infinita, sin embargo, al simplificar y obtener el resultado final los momentos de $[k_{\text{angular}}]$ se observa que en el denominador L' no ésta en función de α o β , por lo que el resto de los coeficientes no se determinará por medio de las fórmulas de sección variable, sino partir de los coeficientes de $[k_{\text{angular}}]$ de la siguiente manera:

$$\frac{f_{12}}{|f|} = \frac{f_{22}}{|f|L'} + \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|L'}$$

$$\begin{aligned}
 \vdots &= \frac{4EI}{(L')^2} \left(\frac{3\alpha + 3\alpha^2 + 1 + c}{1 + 4c} \right) + \frac{2EI}{(L')^2} \left(\frac{3\alpha + 3\beta + 6\alpha\beta + 1 - 2c}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{EI}{(L')^2} \left(\frac{12\alpha + 12\alpha^2 + 4 + 4c}{1 + 4c} \right) + \frac{EI}{(L')^2} \left(\frac{6\alpha + 6\beta + 12\alpha\beta + 2 - 4c}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{EI}{(L')^2} \left(\frac{12\alpha + 12\alpha^2 + 4 + 4c + 6\alpha + 6\beta + 12\alpha\beta + 2 - 4c}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{EI}{(L')^2} \left(\frac{18\alpha + 12\alpha^2 + 6\beta + 12\alpha\beta + 6}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{3\alpha + 2\alpha^2 + \beta + 2\alpha\beta + 1}{1 + 4c} \right) \\
 \therefore \quad \frac{f_{21}}{|f|} &= \frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{3\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta + 1}{1 + 4c} \right) \tag{20.44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{11}L - f_{21}}{|f|} &= \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|L'} + \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|L'} \\
 \vdots &= \frac{2EI}{(L')^2} \left(\frac{3\alpha + 3\beta + 6\alpha\beta + 1 - 2c}{1 + 4c} \right) + \frac{4EI}{(L')^2} \left(\frac{3\beta + 3\beta^2 + 1 + c}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{EI}{(L')^2} \left(\frac{6\alpha + 6\beta + 12\alpha\beta + 2 - 4c}{1 + 4c} \right) + \frac{EI}{(L')^2} \left(\frac{12\beta + 12\beta^2 + 4 + 4c}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{EI}{(L')^2} \left(\frac{6\alpha + 6\beta + 12\alpha\beta + 2 - 4c + 12\beta + 12\beta^2 + 4 + 4c}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{EI}{(L')^2} \left(\frac{6\alpha + 18\beta + 12\alpha\beta + 12\beta^2 + 6}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{\alpha + 3\beta + 2\alpha\beta + 2\beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) \\
 \frac{f_{11}L - f_{21}}{|f|} &= \frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{\alpha + 2\alpha\beta + 3\beta + 2\beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) \tag{20.45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{11}}{|f|} &= \frac{f_{12}}{|f|L'} + \frac{f_{11}L - f_{21}}{|f|L'} \\
 \vdots &= \frac{6EI}{(L')^3} \left(\frac{3\alpha + \beta + 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1}{1 + 4c} \right) + \frac{6EI}{(L')^3} \left(\frac{\alpha + 3\beta + 2\alpha\beta + 2\beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{6EI}{(L')^3} \left(\frac{3\alpha + \beta + 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 1 + \alpha + 3\beta + 2\alpha\beta + 2\beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{6EI}{(L')^3} \left(\frac{4\alpha + 4\beta + 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 4\alpha\beta + 2}{1 + 4c} \right) \\
 \vdots &= \frac{12EI}{(L')^3} \left(\frac{2\alpha + 2\beta + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + 1}{1 + 4c} \right) \\
 \frac{f_{11}}{|f|} &= \frac{12EI}{(L')^3} \left(\frac{2\alpha + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta + \beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) \tag{20.46}
 \end{aligned}$$

Teniendo los coeficientes de rigidez es posible determinar la matriz de rigidez de una viga con zonas de rigidez infinita a partir de la ecuación 20.15 sustituyendo los valores calculados (ecuaciones 20.40 a 20.46). Esta matriz se ilustra en la siguiente página.

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix}
 \frac{4EI}{L'} \left(\frac{3\alpha + 3\alpha^2 + 1 + c}{1 + 4c} \right) & \frac{2EI}{L'} \left(\frac{3\alpha + 6\alpha\beta + 3\beta + 1 - 2c}{1 + 4c} \right) & \frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{3\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta + 1}{1 + 4c} \right) & -\frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{3\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta + 1}{1 + 4c} \right) & 0 & 0 \\
 \frac{2EI}{L'} \left(\frac{3\alpha + 6\alpha\beta + 3\beta + 1 - 2c}{1 + 4c} \right) & \frac{4EI}{L'} \left(\frac{3\beta + 3\beta^2 + 1 + c}{1 + 4c} \right) & \frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{\alpha + 2\alpha\beta + 3\beta + 2\beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) & -\frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{\alpha + 2\alpha\beta + 3\beta + 2\beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) & 0 & 0 \\
 \frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{3\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta + 1}{1 + 4c} \right) & \frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{\alpha + 2\alpha\beta + 3\beta + 2\beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) & \frac{12EI}{(L')^3} \left(\frac{2\alpha + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta + \beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) & -\frac{12EI}{(L')^3} \left(\frac{2\alpha + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta + \beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) & 0 & 0 \\
 -\frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{3\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta + 1}{1 + 4c} \right) & -\frac{6EI}{(L')^2} \left(\frac{\alpha + 2\alpha\beta + 3\beta + 2\beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) & -\frac{12EI}{(L')^3} \left(\frac{2\alpha + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta + \beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) & \frac{12EI}{(L')^3} \left(\frac{2\alpha + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta + \beta^2 + 1}{1 + 4c} \right) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L'} & -\frac{EA}{L'} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L'} & \frac{EA}{L'}
 \end{bmatrix} \begin{matrix} M_A \\ M_B \\ F_y^A \\ F_y^B \\ F_x^A \\ F_x^B \end{matrix}$$

Donde:

$$\alpha = \frac{a}{L'} = \frac{0.5 L_{\text{MURO-1}}}{L'}$$

$$\beta = \frac{b}{L'} = \frac{0.5 L_{\text{MURO-2}}}{L'}$$

20.3.3 Transformación de coordenadas locales a globales

Hasta el momento se han calculado las matrices de rigidez en coordenadas locales para los elementos tipo viga (sección variable, sección prismática y muros de cortante) y cada una de ellas tiene su eje de coordenadas locales coincidente con el eje de coordenadas globales, sin embargo, no siempre los elementos estructurales presentan esta coincidencia.

Para que las coordenadas locales coincidan con las coordenadas globales se debe recurrir a los que se conoce como matrices de transformación ($[T]$) para que al operar una multiplicación matricial de tres elementos se produzca el cambio de coordenadas buscado. Esta matriz establece valor de rotación (senos y cosenos) que transforman coordenadas del eje de referencia local del elemento ($x'y'$) al eje de referencia global (xy).

Primeramente, se empieza mediante un elemento tipo viga que está rotada cierta inclinación θ como se observa en la siguiente figura:

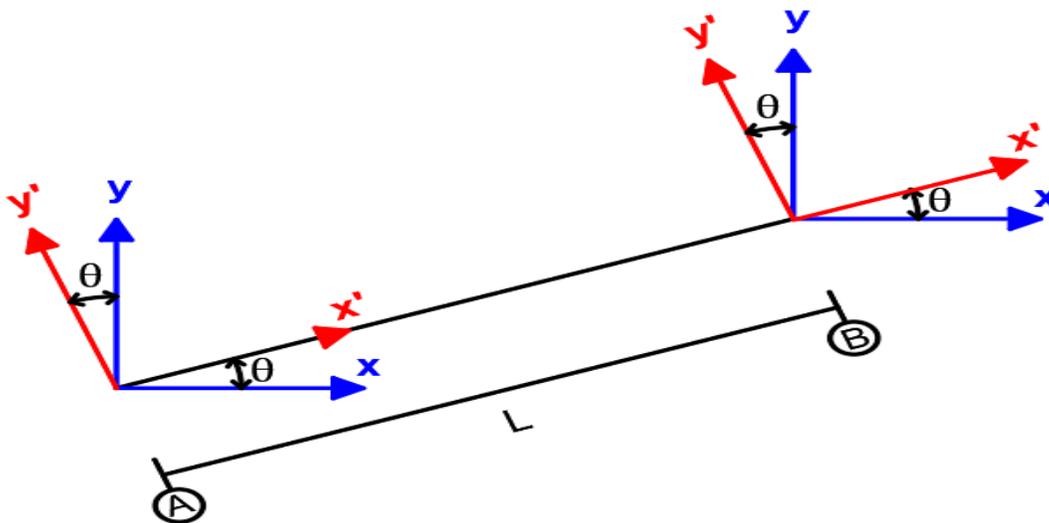


Figura XX.5. Representación de los ejes de coordenadas locales ($x'y'$) y globales (xy).

Al presentarse dicha inclinación las cargas axiales y cortantes deberán ser multiplicados por algún valor de proyección ($\sin\theta$ o $\cos\theta$) que permitan transformar del sistema local al global. Los momentos simplemente se multiplicarán por 1 dado que su valor es el mismo tanto en el sistema global como el local.

Los elementos mecánicos presentes en un elemento tipo viga en el plano son los siguientes:

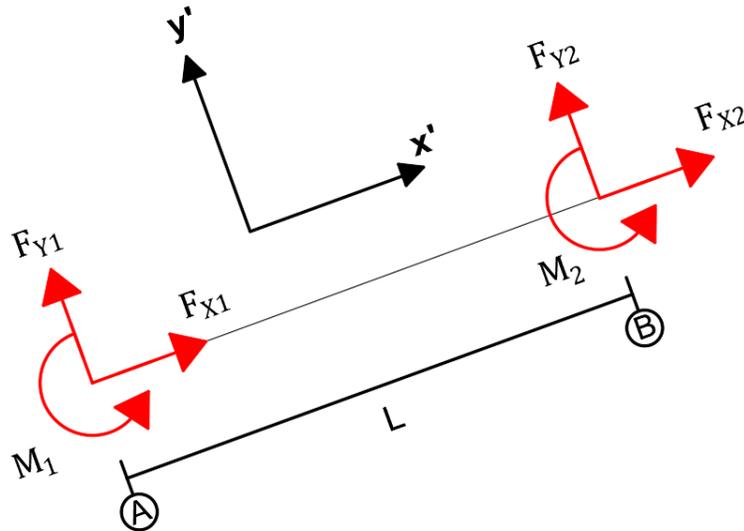


Figura XX.6. Elementos mecánicos presentes en un elemento tipo en el plano.

Es notable que la orientación para los nodos A y B es la misma para los elementos mecánicos, así que bastará con calcular las proyecciones para el nodo A y replicarlas para B. Las proyecciones entonces son las siguientes:

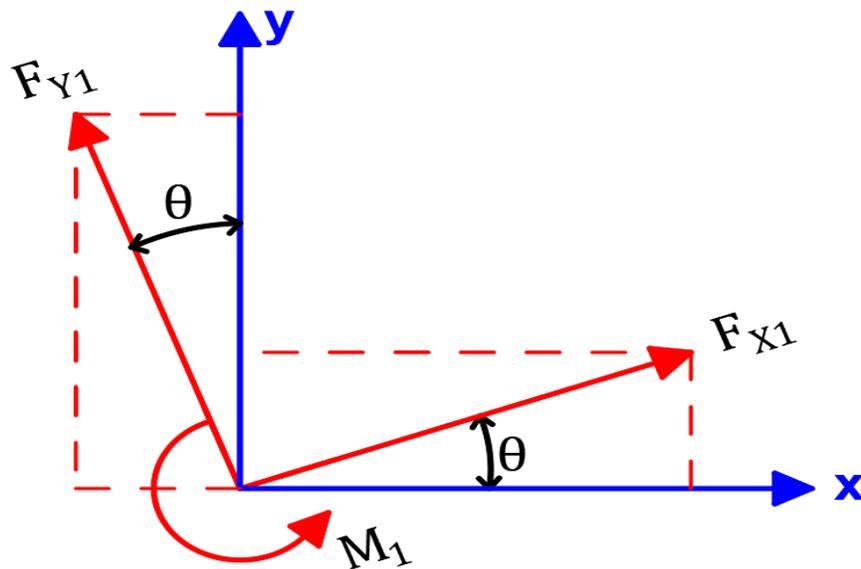


Figura XX.7. Proyecciones de los elementos mecánicos a los ejes globales.

Expresado de forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ F_Y^{(A)} \\ F_X^{(A)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ F_{Y1} \cos(\theta) - F_{X1} \sin(\theta) \\ F_{Y1} \sin(\theta) + F_{X1} \cos(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ F_{Y1} \\ F_{X1} \end{Bmatrix} \quad (20.47)$$

Replicando para el nodo B:

$$\begin{Bmatrix} M_B \\ F_Y^{(B)} \\ F_X^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ F_{Y2} \cos(\theta) - F_{X2} \sin(\theta) \\ F_{Y2} \sin(\theta) + F_{X2} \cos(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_2 \\ F_{Y2} \\ F_{X2} \end{Bmatrix} \quad (20.48)$$

Agrupando en una sola matriz:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} M_1 \\ F_{Y1} \\ F_{X1} \\ \hline M_2 \\ F_{Y2} \\ F_{X2} \end{Bmatrix}}_{\{F'\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{[T]} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_A \\ F_Y^{(A)} \\ F_X^{(A)} \\ \hline M_B \\ F_Y^{(B)} \\ F_X^{(B)} \end{Bmatrix}}_{\{F\}} \quad (20.49)$$

Donde:

$\{F'\}$ = vector de fuerzas en el sistema local del elemento \overline{AB} .

$\{F\}$ = vector de fuerzas en el sistema global del elemento \overline{AB}

$[T]$ = Matriz de transformación.

Como la matriz de transformación es ortogonal, su inversa es igual a la matriz transpuesta, es decir, $[T]^{-1} = [T]^T$ lo cual permite expresar, de ser requerido, las fuerzas en coordenadas globales al sistema local mediante $\{F\} = [T]^T\{F'\}$.

Finalmente, por teoría de la elasticidad (ecuaciones de Navier), se puede comprobar que la matriz de rigidez en coordenadas globales se relaciona con la de coordenadas locales al realizar la operación:

$$[k_{ij}] = [T]^T [k_{ij}^{(i,j)}] [T] \quad (20.50)$$

De la ecuación 20.50 es notable que cada $[k_{ij}^{(i,j)}]$ está expresada en forma de:

$$[k_{ij}^{(i,j)}] = \begin{bmatrix} A^{(i,j)} & C^{(i,j)} & 0 \\ B^{(i,j)} & D^{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & E^{(i,j)} \end{bmatrix} \quad (20.51)$$

Al desarrollar se tiene:

$$\begin{aligned} [T]^T [k_{ij}^{(i,j)}] [T] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^{(i,j)} & C^{(i,j)} & 0 \\ B^{(i,j)} & D^{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & E^{(i,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \vdots &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{(i,j)} & C^{(i,j)} & 0 \\ B^{(i,j)} & D^{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & E^{(i,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \vdots &= \begin{bmatrix} A^{(i,j)} & C^{(i,j)} & 0 \\ B^{(i,j)} & D^{(i,j)} & E^{(i,j)} \\ -B^{(i,j)} & -D^{(i,j)} & E^{(i,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \vdots &= \begin{bmatrix} A^{(i,j)} & C^{(i,j)} \cos(\theta) & -C^{(i,j)} \text{sen}(\theta) \\ B^{(i,j)} \cos(\theta) & D^{(i,j)} \cos^2(\theta) + E^{(i,j)} \text{sen}^2(\theta) & (E^{(i,j)} - D^{(i,j)}) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) \\ -B^{(i,j)} \text{sen}(\theta) & (E^{(i,j)} - D^{(i,j)}) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) & E^{(i,j)} \cos^2(\theta) + D^{(i,j)} \text{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} \\ [T]^T [k_{ij}^{(i,j)}] [T] &= \begin{bmatrix} A^{(i,j)} & C^{(i,j)} \cos(\theta) & -C^{(i,j)} \text{sen}(\theta) \\ B^{(i,j)} \cos(\theta) & D^{(i,j)} \cos^2(\theta) + E^{(i,j)} \text{sen}^2(\theta) & (E^{(i,j)} - D^{(i,j)}) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) \\ -B^{(i,j)} \text{sen}(\theta) & (E^{(i,j)} - D^{(i,j)}) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) & E^{(i,j)} \cos^2(\theta) + D^{(i,j)} \text{sen}^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (20.52) \end{aligned}$$

Entonces al desarrollar la ecuación 20.50 por multiplicación de submatrices se expresa:

$$[k_{ij}] = \begin{bmatrix} [\tau]^T [k_{ij}^{(1,1)}] [\tau] & [\tau]^T [k_{ij}^{(1,2)}] [\tau] \\ [\tau]^T [k_{ij}^{(2,1)}] [\tau] & [\tau]^T [k_{ij}^{(2,2)}] [\tau] \end{bmatrix} \quad (20.53)$$

Desarrollando todas las $[\tau]^T [k_{ij}^{(i,j)}] [\tau]$ a partir de la matriz de rigidez de sección variable:

$$\begin{aligned}
 [\tau]^T [k_{ij}^{(1,1)}] [\tau] &= \begin{bmatrix} \frac{f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & -\frac{f_{12}}{|f|} \sin(\theta) \\ \frac{f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & \frac{f_{11}}{|f|} \cos^2(\theta) + \frac{1}{f_{33}} \sin^2(\theta) & \left(\frac{1}{f_{33}} - \frac{f_{11}}{|f|}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ -\frac{f_{12}}{|f|} \sin(\theta) & \left(\frac{1}{f_{33}} - \frac{f_{11}}{|f|}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{1}{f_{33}} \cos^2(\theta) + \frac{f_{11}}{|f|} \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \\
 [\tau]^T [k_{ij}^{(2,1)}] [\tau] &= \begin{bmatrix} \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \sin(\theta) \\ -\frac{f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & -\frac{f_{11}}{|f|} \cos^2(\theta) - \frac{1}{f_{33}} \sin^2(\theta) & \left(\frac{f_{11}}{|f|} - \frac{1}{f_{33}}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \frac{f_{12}}{|f|} \sin(\theta) & \left(\frac{f_{11}}{|f|} - \frac{1}{f_{33}}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) & -\frac{1}{f_{33}} \cos^2(\theta) - \frac{f_{11}}{|f|} \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \\
 [\tau]^T [k_{ij}^{(1,2)}] [\tau] &= \begin{bmatrix} \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & -\frac{f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & \frac{f_{12}}{|f|} \sin(\theta) \\ \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & -\frac{f_{11}}{|f|} \cos^2(\theta) - \frac{1}{f_{33}} \sin^2(\theta) & \left(\frac{f_{11}}{|f|} - \frac{1}{f_{33}}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \sin(\theta) & \left(\frac{f_{11}}{|f|} - \frac{1}{f_{33}}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) & -\frac{1}{f_{33}} \cos^2(\theta) - \frac{f_{11}}{|f|} \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \\
 [\tau]^T [k_{ij}^{(2,2)}] [\tau] &= \begin{bmatrix} \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \sin(\theta) \\ -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & \frac{f_{11}}{|f|} \cos^2(\theta) + \frac{1}{f_{33}} \sin^2(\theta) & \left(\frac{1}{f_{33}} - \frac{f_{11}}{|f|}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \sin(\theta) & \left(\frac{1}{f_{33}} - \frac{f_{11}}{|f|}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{1}{f_{33}} \cos^2(\theta) + \frac{f_{11}}{|f|} \sin^2(\theta) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Finalmente, al ensamblar la matriz de rigidez en coordenadas globales de un elemento de sección variable se determina mediante:

$$\begin{array}{cccccc}
 \theta_A & \Delta_Y^{(A)} & \Delta_X^{(A)} & \theta_B & \Delta_Y^{(B)} & \Delta_X^{(B)} \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 \frac{f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & -\frac{f_{12}}{|f|} \sin(\theta) & \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & -\frac{f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & \frac{f_{12}}{|f|} \sin(\theta) \\
 \frac{f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & \frac{f_{11}}{|f|} \cos^2(\theta) + \frac{1}{f_{33}} \sin^2(\theta) & \left(\frac{1}{f_{33}} - \frac{f_{11}}{|f|}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & -\frac{f_{11}}{|f|} \cos^2(\theta) - \frac{1}{f_{33}} \sin^2(\theta) & \left(\frac{f_{11}}{|f|} - \frac{1}{f_{33}}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\
 -\frac{f_{12}}{|f|} \sin(\theta) & \left(\frac{1}{f_{33}} - \frac{f_{11}}{|f|}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{1}{f_{33}} \cos^2(\theta) + \frac{f_{11}}{|f|} \sin^2(\theta) & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \sin(\theta) & \left(\frac{f_{11}}{|f|} - \frac{1}{f_{33}}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) & -\frac{1}{f_{33}} \cos^2(\theta) - \frac{f_{11}}{|f|} \sin^2(\theta) \\
 \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \sin(\theta) & \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \sin(\theta) \\
 -\frac{f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & -\frac{f_{11}}{|f|} \cos^2(\theta) - \frac{1}{f_{33}} \sin^2(\theta) & \left(\frac{f_{11}}{|f|} - \frac{1}{f_{33}}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \cos(\theta) & \frac{f_{11}}{|f|} \cos^2(\theta) + \frac{1}{f_{33}} \sin^2(\theta) & \left(\frac{1}{f_{33}} - \frac{f_{11}}{|f|}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\
 \frac{f_{12}}{|f|} \sin(\theta) & \left(\frac{f_{11}}{|f|} - \frac{1}{f_{33}}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) & -\frac{1}{f_{33}} \cos^2(\theta) - \frac{f_{11}}{|f|} \sin^2(\theta) & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} \sin(\theta) & \left(\frac{1}{f_{33}} - \frac{f_{11}}{|f|}\right) \cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{1}{f_{33}} \cos^2(\theta) + \frac{f_{11}}{|f|} \sin^2(\theta)
 \end{array} \right] \begin{array}{l} M_A \\ F_Y^{(A)} \\ F_X^{(A)} \\ M_B \\ F_Y^{(B)} \\ F_X^{(B)} \end{array} \quad (20.54)
 \end{array}$$

$$\cos(\theta) = \frac{X_B - X_A}{L} = \frac{X_B - X_A}{\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}}$$

$$\sin(\theta) = \frac{Y_B - Y_A}{L} = \frac{Y_B - Y_A}{\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}}$$

Ordenando de forma que se distingan la matriz $[k_{\text{angular}}]$:

$$\begin{bmatrix}
 \theta_A & \theta_B & \Delta_Y^{(A)} & \Delta_Y^{(B)} & \Delta_X^{(A)} & \Delta_X^{(B)} & \\
 \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \cos(\theta) & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \cos(\theta) & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \text{sen}(\theta) & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \text{sen}(\theta) & M_A \\
 \frac{2EI}{L} \left(\frac{1-2c}{1+4c} \right) & \frac{4EI}{L} \left(\frac{1+c}{1+4c} \right) & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \cos(\theta) & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \cos(\theta) & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \text{sen}(\theta) & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \text{sen}(\theta) & M_B \\
 \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \cos(\theta) & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \cos(\theta) & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \cos^2(\theta) + \frac{EA}{L} \text{sen}^2(\theta) & -\frac{12EI}{L^3(1+4c)} \cos^2(\theta) - \frac{EA}{L} \text{sen}^2(\theta) & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \right) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) & \left(\frac{12EI}{L^3(1+4c)} - \frac{EA}{L} \right) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) & F_Y^{(A)} \\
 -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \cos(\theta) & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \cos(\theta) & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \cos^2(\theta) - \frac{EA}{L} \text{sen}^2(\theta) & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \cos^2(\theta) + \frac{EA}{L} \text{sen}^2(\theta) & \left(\frac{12EI}{L^3(1+4c)} - \frac{EA}{L} \right) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \right) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) & F_Y^{(B)} \\
 -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \text{sen}(\theta) & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \text{sen}(\theta) & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \right) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) & \left(\frac{12EI}{L^3(1+4c)} - \frac{EA}{L} \right) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) & \frac{EA}{L} \cos^2(\theta) + \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \text{sen}^2(\theta) & -\frac{EA}{L} \cos^2(\theta) - \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \text{sen}^2(\theta) & F_X^{(A)} \\
 \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \text{sen}(\theta) & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \text{sen}(\theta) & \left(\frac{12EI}{L^3(1+4c)} - \frac{EA}{L} \right) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \right) \cos(\theta) \text{sen}(\theta) & -\frac{EA}{L} \cos^2(\theta) - \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \text{sen}^2(\theta) & \frac{EA}{L} \cos^2(\theta) + \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \text{sen}^2(\theta) & F_X^{(B)}
 \end{bmatrix} \quad (20.56)$$

$$\cos(\theta) = \frac{X_B - X_A}{L} = \frac{X_B - X_A}{\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}}$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{Y_B - Y_A}{L} = \frac{Y_B - Y_A}{\sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}}$$

20.3.4 Cálculo de momentos flectores en elementos de sección variable

Para el cálculo de momentos de empotramiento en elementos de sección variable debe conocerse el valor de las rotaciones θ_A y θ_B teniendo en cuenta que en todos los tramos debe considerarse una ecuación de momento $M(x)$ que corresponde a la viga real por resolver; esta ecuación debe multiplicar a todos los valores de rotaciones obtenidos:

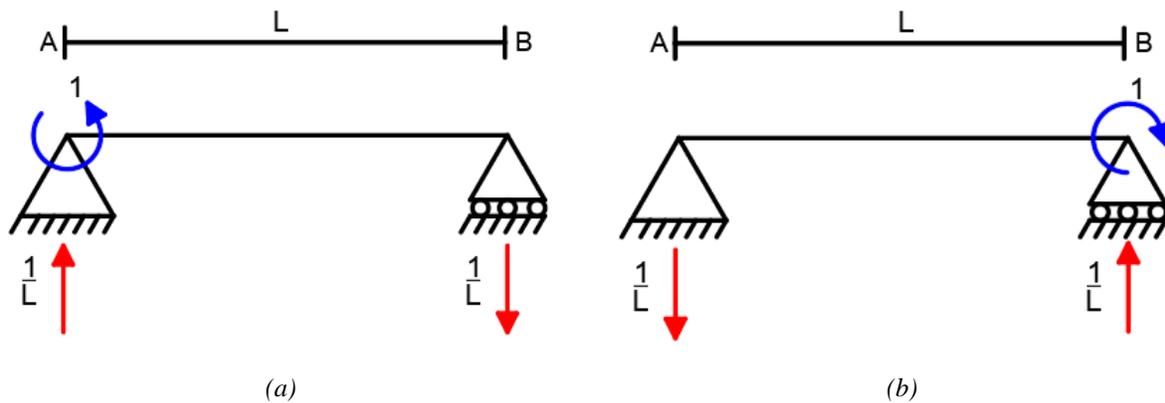


Figura XX.8. Elementos mecánicos generados al aplicar (a) una rotación unitaria en el nodo A y (b) al aplicar una rotación unitaria en el nodo B.

Los valores de las rotaciones θ_A y θ_B se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$\theta_B = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x}{EI_z(x)} dx + \frac{k}{L} \int_0^L \frac{dx}{GA_y(x)}$$

$$\theta_A = \int_0^L \frac{\left(1 - \frac{x}{L}\right)}{EI_z(x)} dx - \frac{k}{L} \int_0^L \frac{dx}{GA_y(x)} = \int_0^L \frac{dx}{EI_z(x)} - \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x}{EI_z(x)} dx - \frac{k}{L} \int_0^L \frac{dx}{GA_y(x)}$$

Recordando que estas ecuaciones son calculadas para determinar momentos de empotramiento, se debe incluir la ecuación de momento y fuerza cortante de la viga hiperestática que se desea resolver obteniéndose así:

$$\theta_B = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x M(x)}{EI_z(x)} dx + \frac{k}{L} \int_0^L \frac{V(x) dx}{GA_y(x)} \quad (20.57)$$

$$\theta_A = \int_0^L \frac{M(x) dx}{EI_z(x)} - \theta_B \quad (20.58)$$

Conociendo el valor de las rotaciones es posible determinar el valor de los momentos mediante:

$$\{M\} = [k_{\text{angular}}^*] \{\theta_i\} \quad (20.59)$$

Siendo

$\{M\}$ = los momentos de empotramiento de un elemento de sección variable.

$[k_{\text{angular}}^*]$ = la matriz de rigidez angular con los elementos de la diagonal secundaria con signo negativo.

$\{\theta_i\}$ = vector columna con el valor de las rotaciones obtenidas en las ecuaciones 20.57 y 20.58.

Al desarrollar la ecuación 20.59 se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_{22}}{|f|} & -\frac{f_{21}L - f_{22}}{|f|} \\ -\frac{f_{21}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} \quad (20.60)^{20.5}$$

Al conocer los momentos de empotramiento, puede determinarse el cortante sumando ambos momentos y dividiéndolos entre la distancia, es decir:

$$V_A = -\frac{M_A + M_B}{L} \quad (20.61)$$

^{20.5} Cuando se calculan los momentos de empotramiento, al realizar la respectiva multiplicación indica, el momento M_A está en sentido antihorario (valor positivo) cuando el valor dentro de $\{M\}$ lo es también, sin embargo, el momento M_B está en sentido antihorario (valor positivo) cuando es negativo dentro de $\{M\}$.

$$V_B = -V_A \quad (20.62)$$

Estos cortantes no son los finales dado que debe sumarse por superposición a los cortantes generados al considerar a la viga como una simplemente apoyada respetando la misma condición de carga.

20.5 Matriz de Rigidez de un Contraventeo

En páginas anteriores fue detallada la matriz de rigideces, en coordenadas locales, de un muro de cortante, y se habló de las ventajas que aportan a las estructuras para soportar cargas laterales y contribuir a dar mayor rigidez a los sistemas estructurales a base de marcos.

Otro sistema que puede adoptarse para dotar de mayor rigidez a la estructura y contribuir a la disminución de desplazamientos laterales es con el uso de contraventeos. Los contraventeos son elementos estructurales cuyo único elemento mecánico presente en él son cargas axiales, por lo que su matriz de rigidez coincide con los valores asociados a la rigidez axial de los elementos tipo viga, es decir:

$$[k_{axial}] = \begin{matrix} & d_x^A & d_x^B \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{f_{33}} & -\frac{1}{f_{33}} \\ -\frac{1}{f_{33}} & \frac{1}{f_{33}} \end{bmatrix} & \begin{matrix} F_x^A \\ F_x^A \end{matrix} \end{matrix} ; \quad f_{33} = \int_0^L \frac{1}{EA_y(x)} dx$$

Por lo general los contraventeos son de sección prismática resultando su matriz en:

$$[k_{axial}] = \frac{EA}{L} \begin{matrix} & d_x^A & d_x^B \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} F_x^A \\ F_x^A \end{matrix} \end{matrix} \quad (20.63)$$

20.5.1 Transformación de coordenadas locales a globales

Podría hacerse en este apartado una deducción, como la descrita con anterioridad, para calcular la matriz de transformación de un elemento tipo viga, pero ahora aplicado a contraventeos, sin embargo, como se mencionó que los contraventeos trabajan exclusivamente a carga axial, la matriz de transformación representada por la ecuación 20.49 puede reducirse de la siguiente manera al eliminar dos grados de libertad dado que estos elementos estructurales no presentan momento de ningún tipo:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} M_1 = 0 \\ F_{Y1} \\ F_{X1} \\ \hline M_2 = 0 \\ F_{Y2} \\ F_{X2} \end{Bmatrix}}_{\{F'\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{[T]} \underbrace{\begin{Bmatrix} M_A = 0 \\ F_Y^{(A)} \\ F_X^{(A)} \\ \hline M_B = 0 \\ F_Y^{(B)} \\ F_X^{(B)} \end{Bmatrix}}_{\{F\}}$$

Finalmente se obtiene:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} F_{Y1} \\ F_{X1} \\ \hline F_{Y2} \\ F_{X2} \end{Bmatrix}}_{\{F'\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & | & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & | & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{[T]} \underbrace{\begin{Bmatrix} F_Y^{(A)} \\ F_X^{(A)} \\ \hline F_Y^{(B)} \\ F_X^{(B)} \end{Bmatrix}}_{\{F\}} \quad (20.64)$$

La transformación de coordenadas locales a globales se obtiene de igual forma que a los elementos tipo viga mediante la fórmula: $[k_{ij}] = [T]^T [k_{ij}^{(i,j)}] [T]$. Para un contraventeo todas las submatrices de rigidez son iguales, es decir:

$$[k_{ij}^{(i,j)}] = \begin{bmatrix} A^{(i,j)} & C^{(i,j)} & 0 \\ B^{(i,j)} & D^{(i,j)} & 0 \\ 0 & 0 & E^{(i,j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(i,j)} \end{bmatrix} \quad (20.65)$$

Calculando las submatrices de coordenadas globales:

$$[\tau]^T [k_{ij}^{(1,1)}] [\tau] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \frac{1}{f_{33}} \begin{bmatrix} \text{sen}^2(\theta) & \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$[\tau]^T [k_{ij}^{(2,1)}] [\tau] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = -\frac{1}{f_{33}} \begin{bmatrix} \text{sen}^2(\theta) & \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$[\tau]^T [k_{ij}^{(1,2)}] [\tau] = [\tau]^T [k_{ij}^{(2,1)}] [\tau] = -\frac{1}{f_{33}} \begin{bmatrix} \text{sen}^2(\theta) & \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$[\tau]^T [k_{ij}^{(2,2)}] [\tau] = [\tau]^T [k_{ij}^{(1,1)}] [\tau] = \frac{1}{f_{33}} \begin{bmatrix} \text{sen}^2(\theta) & \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) \end{bmatrix}$$

Ensamblando la matriz de rigidez en coordenadas globales se tiene:

$$[k_{ij}] = \frac{1}{f_{33}} \begin{bmatrix} \Delta_Y^{(A)} & \Delta_X^{(A)} & \Delta_Y^{(B)} & \Delta_X^{(B)} \\ \text{sen}^2(\theta) & \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & -\text{sen}^2(\theta) & -\text{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) & -\text{sen}(\theta) \cos(\theta) & -\cos^2(\theta) \\ -\text{sen}^2(\theta) & -\text{sen}(\theta) \cos(\theta) & \text{sen}^2(\theta) & \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) \cos(\theta) & -\cos^2(\theta) & \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{matrix} F_Y^{(A)} \\ F_X^{(A)} \\ F_Y^{(B)} \\ F_X^{(B)} \end{matrix} \quad (20.66)$$

Adaptando la matriz a su ensamble detallando fuerzas verticales primero y horizontales después se tiene:

$$[k_{ij}] = \frac{1}{f_{33}} \begin{bmatrix} \Delta_Y^{(A)} & \Delta_Y^{(B)} & \Delta_X^{(A)} & \Delta_X^{(B)} \\ \text{sen}^2(\theta) & -\text{sen}^2(\theta) & \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ -\text{sen}^2(\theta) & \text{sen}^2(\theta) & -\text{sen}(\theta) \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \cos(\theta) & \cos^2(\theta) & -\cos^2(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \cos(\theta) & -\cos^2(\theta) & \cos^2(\theta) \end{bmatrix} \begin{matrix} F_Y^{(A)} \\ F_Y^{(B)} \\ F_X^{(A)} \\ F_X^{(B)} \end{matrix} \quad (20.67)$$

20.6 Ejemplos de Aplicación de Elementos Viga - Columna

Con anterioridad ha sido descrito como generar la matriz de rigidez en coordenadas globales para:

- ✚ Elementos tipo viga de sección prismática.
- ✚ Elementos tipo viga de sección variable.
- ✚ Elementos con zonas de rigidez infinita (muros de cortante).
- ✚ Elementos que trabajan únicamente a carga axial (contraventeos).

En esta sección se pretende resolver varios ejercicios para que el lector se familiarice con estos tipos de elementos estructurales.

20.6.1 Ejemplo 1: determinación de la matriz de rigidez de una columna de sección variable

Instrucciones: determinar la matriz de rigidez de la siguiente columna cuyos nodos A y C están empotrados. Considere todas las deformaciones (debida a flexión, carga axial y cortante). La sección \overline{AB} tiene dimensiones 90 x 90 cm, mientras que la sección \overline{BC} es de 70 x 70 cm. La relación de poisson es $\nu = 0.2$ y el modulo de elasticidad es el mismo para toda la sección.

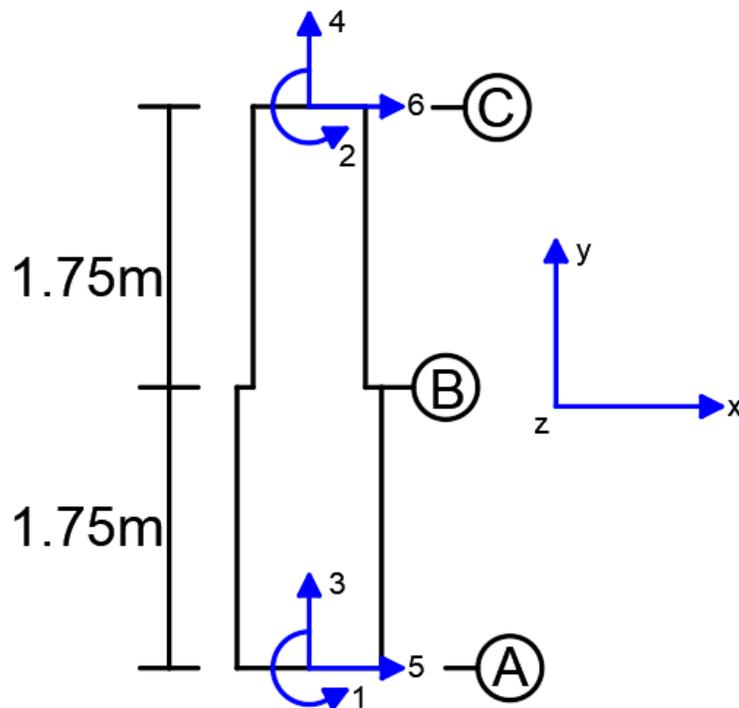


Figura XX.9. Ejemplo 1 de elemento de sección variable.

Se empieza determinando los coeficientes de flexibilidad asociados a esta sección:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \int_0^L \frac{dx}{EI_z(x)} \\
 \vdots &= \frac{1}{E \left(\frac{0.9^4}{12}\right)} \int_0^{1.75} dx + \frac{1}{E \left(\frac{0.7^4}{12}\right)} \int_{1.75}^{3.5} dx \\
 \vdots &= \frac{32.007315958}{E} + \frac{87.463556851}{E} \\
 &f_{11} = \frac{119.470872809}{E}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{22} &= \int_0^L \frac{x^2}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{k}{GA_y(x)} dx \\
 \vdots &= \frac{1}{E \left(\frac{0.9^4}{12}\right)} \int_0^{1.75} x^2 dx + \frac{1}{E \left(\frac{0.7^4}{12}\right)} \int_{1.75}^{3.5} x^2 dx + \frac{1.2}{2(1+0.2)E(0.9)^2} \int_0^{1.75} dx + \frac{1.2}{2(1+0.2)E(0.7)^2} \int_{1.75}^{3.5} dx \\
 \vdots &= \frac{32.67413504}{E} + \frac{625}{E} + \frac{6.222222222}{E} + \frac{10.285714286}{E} \\
 &f_{22} = \frac{674.182071548}{E}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{33} &= \int_0^L \frac{1}{EA_y(x)} dx \\
 \vdots &= \frac{1}{E(0.9)^2} \int_0^{1.75} dx + \frac{1}{E(0.7)^2} \int_{1.75}^{3.5} dx \\
 \vdots &= \frac{2.160493827}{E} + \frac{3.571428571}{E}
 \end{aligned}$$

$$f_{33} = \frac{5.731922399}{E}$$

$$\begin{aligned} f_{12} &= \int_0^L \frac{x}{EI_z(x)} dx \\ &= \frac{1}{E \left(\frac{0.9^4}{12}\right)} \int_0^{1.75} x dx + \frac{1}{E \left(\frac{0.7^4}{12}\right)} \int_{1.75}^{3.5} x dx \\ &= \frac{28.006401463}{E} + \frac{229.591836735}{E} \\ f_{12} &= \frac{257.598238198}{E} \end{aligned}$$

Teniendo los coeficientes puede determinarse $|f|$:

$$\begin{aligned} |f| &= f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \\ &= \left(\frac{119.470872809}{E}\right) \left(\frac{674.182071548}{E}\right) - \left(\frac{257.598238198}{E}\right)^2 \\ &= \frac{14188.268197306}{E^2} \\ |f| &= \frac{14188.268197306}{E^2} \end{aligned}$$

Ahora se procede a calcular los coeficientes de rigidez que dependen de los coeficientes de flexibilidad:

$$\begin{aligned} \frac{f_{22}}{|f|} &= \frac{\frac{674.182071548}{E}}{\frac{14188.268197306}{E^2}} = 0.047516868 E \\ \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} &= \frac{\frac{257.598238198}{E}(3.5) - \frac{674.182071548}{E}}{\frac{14188.268197306}{E^2}} = 0.016028155 E \end{aligned}$$

$$\frac{f_{12}}{|f|} = \frac{\frac{257.598238198}{E}}{\frac{14188.268197306}{E^2}} = 0.018155721 E$$

$$\frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} = \frac{\frac{119.470872809}{E}(3.5)^2 - 2\left(\frac{257.598238198}{E}\right)(3.5) + \frac{674.182071548}{E}}{\frac{14188.268197306}{E^2}}$$

$$= 0.023576704 E$$

$$\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} = \frac{\left(\frac{119.470872809}{E}\right)(3.5) - \frac{257.598238198}{E}}{|f|} = 0.011315674 E$$

$$\frac{f_{11}}{|f|} = \frac{\frac{119.470872809}{E}}{\frac{14188.268197306}{E^2}} = 0.008420399 E$$

$$\frac{1}{f_{33}} = \frac{1}{\frac{5.731922399}{E}} = 0.174461538 E$$

Como estos coeficientes están en coordenadas locales debe de calcularse los valores de transformación al sistema global:

$$\cos(\theta) = \frac{X_B - X_A}{L} = \frac{0 - 0}{\sqrt{(0 - 0)^2 + (3.5 - 0)^2}} = 0$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{Y_B - Y_A}{L} = \frac{3.5 - 0}{\sqrt{(0 - 0)^2 + (3.5 - 0)^2}} = 1$$

Conocido el valor los valores de transformación del sistema local al global y los valores de rigidez que están en función de los coeficientes de flexibilidad, al sustituirlos en la ecuación 20.55 se tiene la matriz de rigidez en coordenadas globales del sistema:

	1	2	3	4	5	6	
E	0.047516868	0.016028155	0	0	-0.018155721	0.018155721	1
	0.016028155	0.023576704	0	0	-0.011315674	0.011315674	2
	0	0	0.174461538	-0.174461538	0	0	3
	0	0	-0.174461538	0.174461538	0	0	4
	-0.018155721	-0.011315674	0	0	0.008420399	-0.008420399	5
	0.018155721	0.011315674	0	0	-0.008420399	0.008420399	6

20.6.2 Ejemplo 2: cálculo de elementos mecánicos de una columna de sección variable

Instrucciones: determinar la matriz de rigidez de la siguiente columna cuyos nodos A y C están empotados. Considere todas las deformaciones (debida a flexión, carga axial y cortante). La sección \overline{AB} tiene dimensiones 70 x 70 cm, mientras que la sección \overline{BC} es de 90 x 90 cm. La relación de poisson es $\nu = 0.2$ y el modulo de elasticidad es el mismo para toda la sección.

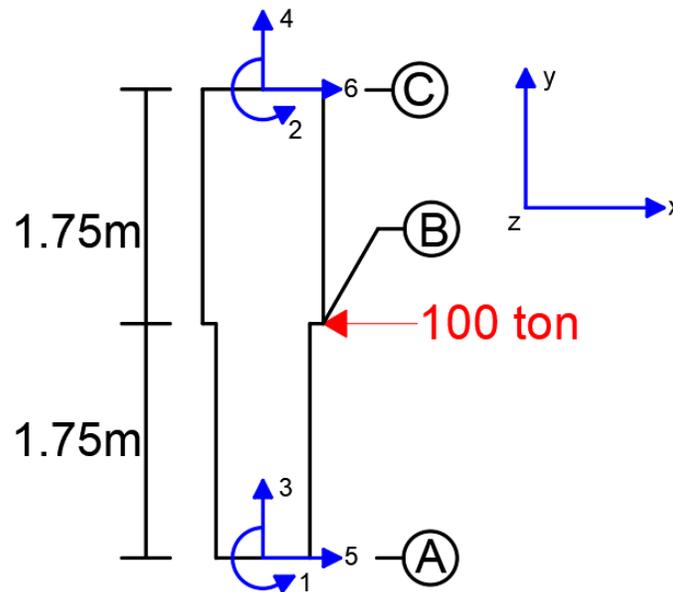


Figura XX.10. Ejemplo 2 de elemento de sección variable.

Se empieza determinando los coeficientes de flexibilidad asociados a esta sección:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \int_0^L \frac{dx}{EI_z(x)} \\
 \therefore &= \frac{1}{E \left(\frac{0.7^4}{12}\right)} \int_0^{1.75} dx + \frac{1}{E \left(\frac{0.9^4}{12}\right)} \int_{1.75}^{3.5} dx \\
 \therefore &= \frac{87.463556851}{E} + \frac{32.007315958}{E} \\
 f_{11} &= \frac{119.470872809}{E}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{22} &= \int_0^L \frac{x^2}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{k}{GA_y(x)} dx \\
 &\vdots \quad \frac{1}{E \left(\frac{0.7^4}{12}\right)} \int_0^{1.75} x^2 dx + \frac{1}{E \left(\frac{0.9^4}{12}\right)} \int_{1.75}^{3.5} x^2 dx + \frac{1.2}{2(1+0.2)E(0.7)^2} \int_0^{1.75} dx + \frac{1.2}{2(1+0.2)E(0.9)^2} \int_{1.75}^{3.5} dx \\
 &\vdots \quad \frac{89.285714286}{E} + \frac{228.718945283}{E} + \frac{10.285714286}{E} + \frac{6.222222222}{E} \\
 &\quad f_{22} = \frac{334.512596076}{E}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{33} &= \int_0^L \frac{1}{EA_y(x)} dx \\
 &\vdots \quad = \frac{1}{E(0.7)^2} \int_0^{1.75} dx + \frac{1}{E(0.9)^2} \int_{1.75}^{3.5} dx \\
 &\vdots \quad = \frac{3.571428571}{E} + \frac{2.160493827}{E} \\
 &\quad f_{33} = \frac{5.731922399}{E}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{12} &= \int_0^L \frac{x}{EI_z(x)} dx \\
 &\vdots \quad = \frac{1}{E \left(\frac{0.7^4}{12}\right)} \int_0^{1.75} x dx + \frac{1}{E \left(\frac{0.9^4}{12}\right)} \int_{1.75}^{3.5} x dx \\
 &\vdots \quad = \frac{76.530612245}{E} + \frac{84.01920439}{E}
 \end{aligned}$$

$$f_{12} = \frac{160.549816634}{E}$$

Teniendo los coeficientes puede determinarse $|f|$:

$$\begin{aligned} |f| &= f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \\ &= \left(\frac{119.470872809}{E}\right)\left(\frac{334.512596076}{E}\right) - \left(\frac{160.549816634}{E}\right)^2 \\ &= \frac{14188.268197593}{E^2} \end{aligned}$$

$$|f| = \frac{14188.268197593}{E^2}$$

Ahora se procede a calcular los coeficientes de rigidez que dependen de los coeficientes de flexibilidad:

$$\frac{f_{22}}{|f|} = \frac{\frac{334.512596076}{E}}{\frac{14188.268197593}{E^2}} = 0.023576704 E$$

$$\frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} = \frac{\frac{160.549816634}{E}(3.5) - \frac{334.512596076}{E}}{\frac{14188.268197593}{E^2}} = 0.016028155 E$$

$$\frac{f_{12}}{|f|} = \frac{\frac{160.549816634}{E}}{\frac{14188.268197593}{E^2}} = 0.011315674 E$$

$$\frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} = \frac{\frac{119.470872809}{E}(3.5)^2 - 2\left(\frac{160.549816634}{E}\right)(3.5) + \frac{334.512596076}{E}}{\frac{14188.268197593}{E^2}} = 0.047516868 E$$

$$\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} = \frac{\left(\frac{119.470872809}{E}\right)(3.5) - \frac{160.549816634}{E}}{\frac{14188.268197593}{E^2}} = 0.018155721 E$$

$$\frac{f_{11}}{|f|} = \frac{\frac{119.470872809}{E}}{\frac{14188.268197593}{E^2}} = 0.008420399 E$$

$$\frac{1}{f_{33}} = \frac{1}{\frac{5.731922399}{E}} = 0.174461538 E$$

Como estos coeficientes están en coordenadas locales debe de calcularse los valores de transformación al sistema global:

$$\cos(\theta) = \frac{X_B - X_A}{L} = \frac{0 - 0}{\sqrt{(0 - 0)^2 + (3.5 - 0)^2}} = 0$$

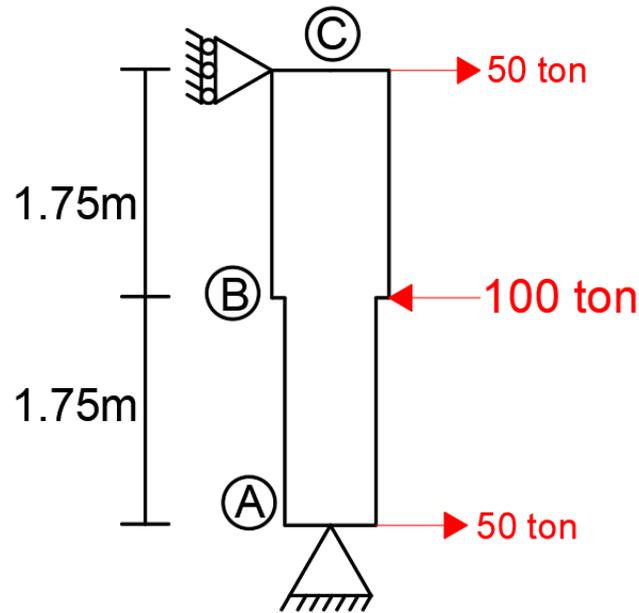
$$\text{sen}(\theta) = \frac{Y_B - Y_A}{L} = \frac{3.5 - 0}{\sqrt{(0 - 0)^2 + (3.5 - 0)^2}} = 1$$

Conocido el valor los valores de transformación del sistema local al global y los valores de rigidez que están en función de los coeficientes de flexibilidad, al sustituirlos en la ecuación 20.55 se tiene la matriz de rigidez en coordenadas globales del sistema^{20.6}:

	1	2	3	4	5	6	
E	0.023576704	0.016028155	0	0	-0.011315674	0.011315674	1
	0.016028155	0.047516868	0	0	-0.018155721	0.018155721	2
	0	0	0.174461538	-0.174461538	0	0	3
	0	0	-0.174461538	0.174461538	0	0	4
	-0.011315674	-0.018155721	0	0	0.008420399	-0.008420399	5
	0.011315674	0.018155721	0	0	-0.008420399	0.008420399	6

Conocida la matriz de rigidez de la columna, debe determinarse la ecuación de momento considerándola como columna simplemente apoyada, es decir, se representa de la siguiente forma:

^{20.6} Se deja al lector el reflexionar la comparación entre las matrices de rigidez de este ejercicio con la del ejercicio anterior.



Las ecuaciones de elementos mecánicos para el tramo \overline{AB} son:

$$\begin{aligned} M_1(x) &= -50x \\ V_1(x) &= -50 \end{aligned} \quad (20.68)$$

Las ecuaciones de elementos mecánicos para el tramo \overline{BC} son:

$$\begin{aligned} M_2(x) &= -50x + 100(x - 1.75) = 50x - 175 \\ V_2(x) &= 50 \end{aligned} \quad (20.69)$$

Calculando los momentos mediante $\{M\} = [k_{\text{angular}}^*]\{\theta_i\}$:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x M(x)}{EI_z(x)} dx + \frac{k}{L} \int_0^L \frac{V(x) dx}{GA_y(x)} \\ \therefore &= \frac{1}{3.5} \left[\frac{1}{E \left(\frac{0.7^4}{12} \right)} \int_0^{1.75} x (-50x) dx + \frac{1}{E \left(\frac{0.9^4}{12} \right)} \int_{1.75}^{3.5} x (50x - 175) dx \right] \end{aligned}$$

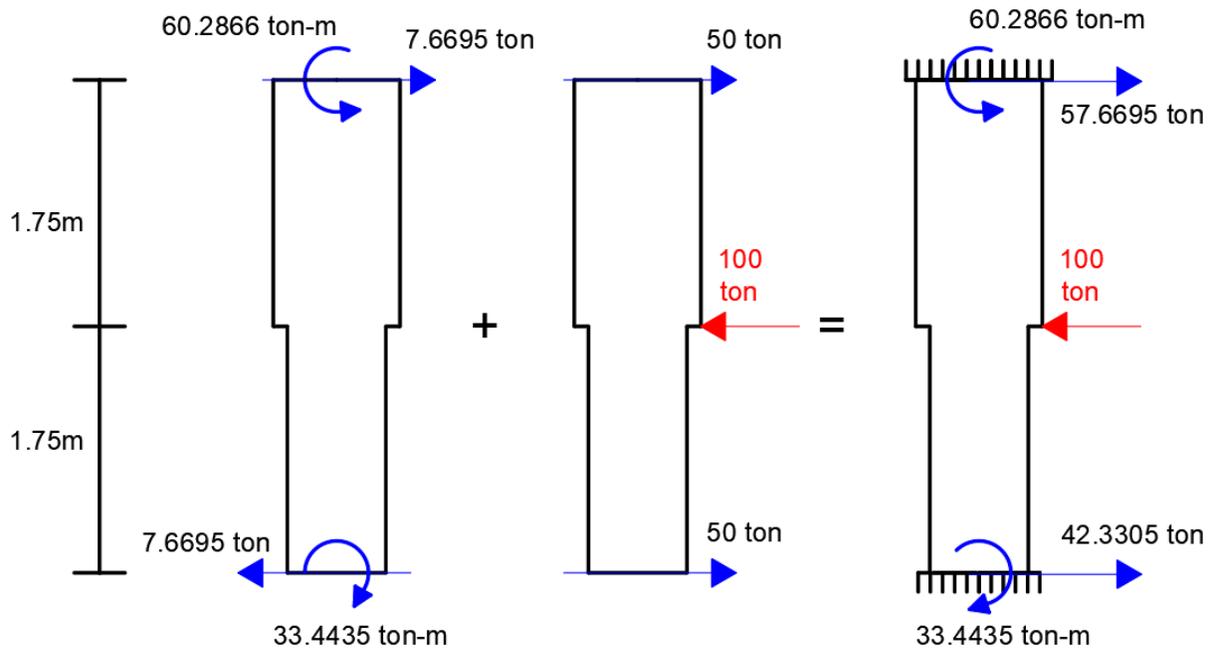
$$\begin{aligned}
 & + \frac{1.2}{3.5} \left[\frac{1}{\frac{E}{2(1+0.2)}(0.7^2)} \int_0^{1.75} -50 \, dx + \frac{1}{\frac{E}{2(1+0.2)}(0.9^2)} \int_{1.75}^{3.5} 50 \, dx \right] \\
 \therefore & = \frac{1}{3.5} \left[-\frac{4464.285714286}{E} - \frac{3267.413504039}{E} \right] + \frac{1.2}{3.5} \left[-\frac{428.571428571}{E} + \frac{259.259259259}{E} \right] \\
 \theta_B & = -\frac{2267.106806143}{E}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_A & = \int_0^L \frac{M(x) \, dx}{EI_z(x)} - \theta_B \\
 \therefore & = \frac{1}{E \left(\frac{0.7^4}{12} \right)} \int_0^{1.75} -50x \, dx + \frac{1}{E \left(\frac{0.9^4}{12} \right)} \int_{1.75}^{3.5} (50x - 175) \, dx - \left(-\frac{2267.106806143}{E} \right) \\
 \therefore & = \frac{-3826.530612245}{E} - \frac{1400.320073160}{E} - \left(-\frac{2267.106806143}{E} \right) \\
 \theta_A & = -\frac{2959.743879262}{E}
 \end{aligned}$$

De la matriz de rigidez en coordenadas globales se extra $[k_{\text{angular}}^*]$ y se calculan los momentos finales:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 0.023576704 & -0.016028155 \\ -0.016028155 & 0.047516868 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2959.743879262 \\ -2267.106806143 \end{Bmatrix} \frac{1}{E} = \begin{Bmatrix} -33.4435 \\ -60.2866 \end{Bmatrix} \quad (\text{ton} \cdot \text{m})$$

Los elementos mecánicos finales se pueden obtener mediante superposición como se ilustra en la siguiente imagen:



20.6.3 Ejemplo 3: obtención de elementos mecánicos de una columna de sección variable a través del ensamble de elementos de sección prismática

Instrucciones: determinar los elementos mecánicos del ejemplo anterior a partir del ensamble de matrices de rigidez de sección prismática.

Para determinar la matriz de rigidez de la columna a partir de secciones prismáticas debe aumentarse el número de grados de libertad que permita conectar las matrices \overline{AB} con \overline{BC} a fin de resolver la estructura \overline{ABC} como se ilustra a continuación:

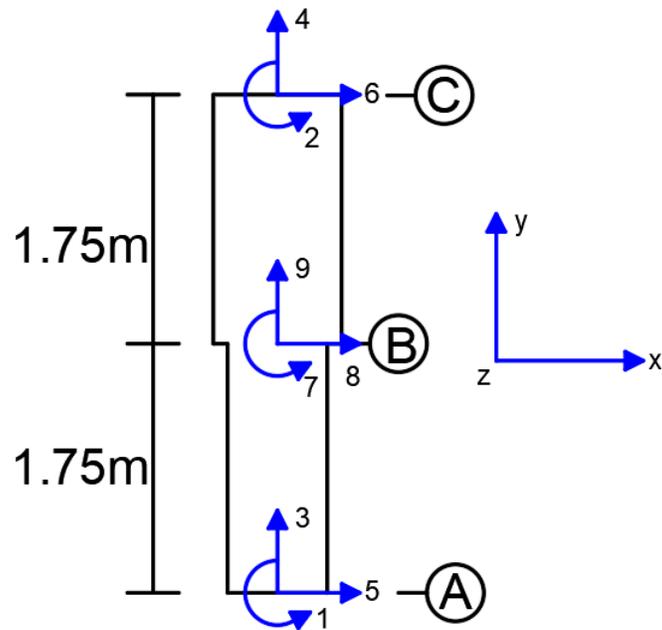


Figura XX.11. Ejemplo 3 de elemento de sección variable.

Como las secciones son prismáticas puede hacerse uso de la ecuación 20.56 para realizar el ensamble. Así para los elementos \overline{AB} y \overline{BC} el lector podrá comprobar que las matrices de rigidez en coordenadas globales son:

$$E \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & 9 & 5 & 8 \\ 0.034913618 & 0.012046951 & 0 & 0 & -0.026834611 & 0.026834611 \\ 0.012046951 & 0.034913618 & 0 & 0 & -0.026834611 & 0.026834611 \\ 0 & 0 & 0.28 & -0.28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.28 & 0.28 & 0 & 0 \\ -0.026834611 & -0.026834611 & 0 & 0 & 0.030668127 & -0.030668127 \\ 0.026834611 & 0.026834611 & 0 & 0 & -0.030668127 & 0.030668127 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 7 \\ 3 \\ 9 \\ 5 \\ 8 \end{matrix}$$

$$E \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 & 4 & 8 & 6 \\ 0.084445413 & 0.021959699 & 0 & 0 & -0.060802921 & 0.060802921 \\ 0.021959699 & 0.084445413 & 0 & 0 & -0.060802921 & 0.060802921 \\ 0 & 0 & 0.462857143 & -0.462857143 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.462857143 & 0.462857143 & 0 & 0 \\ -0.060802921 & -0.060802921 & 0 & 0 & 0.069489053 & -0.069489053 \\ 0.060802921 & 0.060802921 & 0 & 0 & -0.069489053 & 0.069489053 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 2 \\ 9 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{matrix}$$

Ensamblando la matriz de rigidez:

$$E \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \hline 0.1194 & -0.0340 & 0 & 0.0120 & 0.0220 & 0 & 0 & -0.0268 & 0.0608 \\ -0.0340 & 0.1002 & 0 & 0.0268 & -0.0608 & 0 & 0 & -0.0307 & -0.0695 \\ 0 & 0 & 0.7429 & 0 & 0 & -0.28 & -0.4629 & 0 & 0 \\ \hline 0.0120 & 0.0268 & 0 & 0.0349 & 0 & 0 & 0 & -0.0268 & 0 \\ 0.0220 & -0.0608 & 0 & 0 & 0.0844 & 0 & 0 & 0 & 0.0608 \\ 0 & 0 & -0.28 & 0 & 0 & 0.28 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4629 & 0 & 0 & 0 & 0.4629 & 0 & 0 \\ -0.0268 & -0.0307 & 0 & -0.0268 & 0 & 0 & 0 & 0.0307 & 0 \\ 0.0608 & -0.0695 & 0 & 0 & 0.0608 & 0 & 0 & 0 & 0.0695 \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{7} \\ \mathbf{8} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{array}$$

Como se mencionó con anterioridad, el planteamiento matricial de rigideces se basa en la operación matricial: $[k_{ij}]\{\Delta\} + \{P\} = \{0\}$, sin embargo, deberá centrarse la atención en plantear el método de las rigideces a los grados de libertad desconocidos (7, 8 y 9) de la estructura dado que son los grados de libertad no restringidos:

$$E \begin{bmatrix} 0.1194 & -0.0340 & 0 \\ -0.0340 & 0.1002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7429 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.70)$$

Para determinar el vector $\{\delta_7 \ \delta_8 \ \delta_9\}^T$ se despeja mediante álgebra de matrices obteniendo:

$$\begin{Bmatrix} \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \end{Bmatrix} = -E^{-1} \begin{bmatrix} 0.1194 & -0.0340 & 0 \\ -0.0340 & 0.1002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7429 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -314.4978 \\ -1105.0925 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{E} \quad (20.71)^{20.7}$$

Los elementos mecánicos se obtienen multiplicando cada una de las matrices de rigidez en coordenadas globales por el vector columna de desplazamientos asociado a los grados de libertad de la matriz de rigidez.

Para el elemento \overline{AB} :

^{20.7} Aunque se consideraron los efectos por deformación axial, como no se presentan cargas axiales en la columna su desplazamiento es cero.

$$E \begin{bmatrix} 0.034913618 & 0.012046951 & 0 & 0 & -0.026834611 & 0.026834611 \\ 0.012046951 & 0.034913618 & 0 & 0 & -0.026834611 & 0.026834611 \\ 0 & 0 & 0.28 & -0.28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.28 & 0.28 & 0 & 0 \\ -0.026834611 & -0.026834611 & 0 & 0 & 0.030668127 & -0.030668127 \\ 0.026834611 & 0.026834611 & 0 & 0 & -0.030668127 & 0.030668127 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -314.4976 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1105.0925 \end{Bmatrix} \frac{1}{E}$$

Para el elemento \overline{BC} :

$$E \begin{bmatrix} 0.084445413 & 0.021959699 & 0 & 0 & -0.060802921 & 0.060802921 \\ 0.021959699 & 0.084445413 & 0 & 0 & -0.060802921 & 0.060802921 \\ 0 & 0 & 0.462857143 & -0.462857143 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.462857143 & 0.462857143 & 0 & 0 \\ -0.060802921 & -0.060802921 & 0 & 0 & 0.069489053 & -0.069489053 \\ 0.060802921 & 0.060802921 & 0 & 0 & -0.069489053 & 0.069489053 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -314.4976 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1105.0925 \end{Bmatrix} \frac{1}{E}$$

Desarrollando se tienen los elementos mecánicos finales:

$$\{F_{AB}\} = \begin{Bmatrix} -33.4435 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -40.6350 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 42.3305 \text{ ton} \\ -42.3305 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.72)$$

$$\{F_{BC}\} = \begin{Bmatrix} 40.6350 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 60.2866 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ -57.6695 \text{ ton} \\ 57.6695 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.73)$$

La siguiente imagen representa la configuración de elementos mecánicos dados $\{F_{AB}\}$ y $\{F_{BC}\}$:

Como puede observarse se obtuvo los mismos elementos mecánicos que los obtenidos al analizar la columna como un elemento de sección variable y eso es por el hecho de que al hacer uso de la condensación estática a la matriz de rigidez, preservando los grados de libertad 1 a 6, se obtiene exactamente la matriz obtenida por análisis de sección variable (véase la matriz en la página 709).

20.6.4 Implementación de los métodos de integración numérica para resolver problemas de sección variable

Hoy en día los avances tecnológicos han permitido la creación de mejores y más poderosas computadoras capaces de realizar mayores cálculos, con mayor precisión y a un menor tiempo, por lo que con el uso de hojas de cálculo como Excel o lenguajes de programación como MATLAB®; o inclusive con el uso de calculadoras graficadoras (capaces de programar en ellas) es posible mecanizar, dentro de la computadora o calculadora, el método de rigideces ensamblando matrices de coordenadas locales a una única matriz de coordenadas globales.

Sin embargo, aun con el poder computacional existente, requeriría mucho tiempo y uso de memoria interna computacional para realizar el cálculo de la matriz de rigidez de un elemento estructural (para este ejemplo una viga) que varíe en su base, en su peralte, o inclusive, que varíen los dos.

Con el fin de ahorrar tiempo buscando una solución cerrada a una integral definida, es preferible hacer uso de la computadora para realizar integraciones de funciones mediante métodos numéricos tales como:

- ✚ Regla de los trapecios: simple y de aplicación múltiple.
- ✚ Reglas de Simpson: Simpson 1/3, Simpson 3/8 y sus variantes con el mismo nombre pero de aplicación múltiple.
- ✚ Regla de Boole.
- ✚ Integración de Romberg.
- ✚ Cuadratura de Gauss.

 Etc.

La precisión de los resultados dependerá del tipo de computadora y método de integración utilizado.

Los siguientes ejercicios por resolver son dos vigas. La primera es una viga I cuya base se mantiene constante mientras que el peralte cambia a lo largo de la longitud del claro. El segundo ejercicio es una viga de sección transversal rectangular que varía tanto en su base como en su peralte a lo largo de toda su longitud

Muchas ocasiones lo más complicado de los elementos de sección variable resulta ser el determinar la matriz de rigidez y momentos de empotramiento de los elementos y no tanto el ensamblar la matriz de rigidez global de la estructura por lo que, a partir de los ejemplos de vigas, se espera que el lector sea capaz de resolver marcos a través de conocer los coeficientes de rigidez y hacer uso de las matrices de transformación de coordenadas del sistema local al global.

Se ha decidido no enfatizar en resolver más estructuras tipo marco que persigan únicamente el objetivo de calcular elementos mecánicos, sino de resolver marcos para discutir los beneficios y desventajas de algunos sistemas estructurales que ayuden a restringir el desplazamiento lateral.

Sin embargo, los ejemplos de ensamble de matrices de rigidez que se utilizaron para los casos de análisis modal espectral, así como los que se verán más adelante, retroalimentarán al lector para llevar el conocimiento de vigas de sección variable a marcos de sección variable.

20.6.5 Ejemplo 4: cálculo de elementos mecánicos de una viga cuya base y peralte varían en forma lineal

Instrucciones: determinar la matriz de rigidez así como los elementos mecánicos de la siguiente viga mostrada. Considere todas las deformaciones (debida a flexión, carga axial y cortante). La sección \overline{AB} varía en su peralte como lo muestra la figura XX.12. La relación de poisson es $\nu = 0.3$ y el modulo de elasticidad es el mismo para toda la sección.

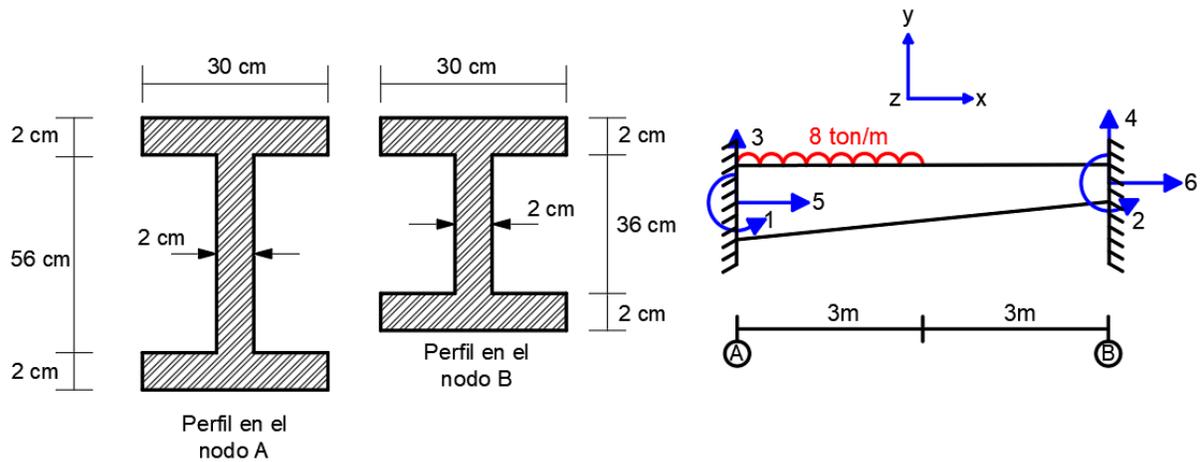


Figura XX.12. Ejemplo 4 de elemento de sección variable.

Para determinar la ecuación del peralte se propone una ecuación del tipo $d(x) = a_1x + a_2$, conocidos los puntos $(x_0, y_0) = (0, -0.6)$ y $(x_1, y_1) = (6, -0.4)$, formulando un sistema de ecuaciones 2×2 de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -0.6 \\ -0.4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{30} \\ -\frac{3}{5} \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto la ecuación que determina el área del peralte es la siguiente:

$$d(x) = \frac{1}{30}x - \frac{3}{5}$$

Sin embargo, a fin de que los coeficientes de rigidez sean positivos en la diagonal principal se toma como ecuación $d(x)$ a:

$$d(x) = \frac{3}{5} - \frac{1}{30}x$$

Puede demostrarse que la inercia (I_z) y el área (A_y) de una sección I, con base (b_f) y peralte establecido (d), así como con valores de espesor de alma (t_w) y patines (t_f) iguales ($t = t_w = t_f$) son:

$$I_z = \frac{b d^3}{12} - \frac{(b - t)(d - 2t)^3}{12} \quad (20.74)$$

$$A_y = bd - (b - t)(d - 2t) \quad (20.75)$$

Como el peralte varía a lo largo de su longitud conforme lo hace $d(x)$ se tiene que:

$$I_z(x) = \frac{b \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{30}x \right)^3}{12} - \frac{[b - t] \left[\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{30}x \right) - 2t \right]^3}{12}$$

$$A_y(x) = b \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{30}x \right) - [b - t] \left[\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{30}x \right) - 2t \right]$$

Establecido que $b = 0.3\text{m}$ y $t = 0.02\text{ m}$ se obtiene:

$$I_z(x) = \frac{\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{30}x \right)^3}{40} - \frac{7 \left[\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{30}x \right) - \frac{1}{25} \right]^3}{300} \quad (20.76)$$

$$A_y(x) = \frac{3}{10} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{30}x \right) - \frac{7}{25} \left[\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{30}x \right) - \frac{1}{25} \right] = \frac{174 - 5x}{7500} \quad (20.77)$$

Al desarrollar estas expresiones puede expresarse la inercia como un polinomio de tercer grado y el área como una ecuación de primer grado para obtener:

$$I_z(x) = -\frac{125x^3 - 13050x^2 + 340740x - 2637144}{202500000} \quad (20.78)$$

$$A_y(x) = \frac{174 - 5x}{7500} \quad (20.79)$$

Como se considera el efecto de deformación por cortante debe considerarse el factor de forma k (página 386):

$$k = \frac{A_{\text{sección}}}{A_{\text{alma}}} \quad (20.80)$$

Como estas áreas variaran a lo largo de toda la longitud de la viga debe poder establecerse una ecuación que establezca el valor de k a lo largo de x . Se conoce que $A_y(x)$ es la ecuación que gobierna el área de la sección a lo largo de toda la longitud de la viga, por lo que restaría determinar el área del alma.

Se puede determinar que el área del alma se determina mediante:

$$A_{\text{alma}} = (d - 2t)(t) \quad (20.81)$$

Por lo que la variación a lo largo de la viga es:

$$A_{\text{alma}} = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{30}x - 2t \right) (t) \quad (20.82)$$

Simplificando con $t = 0.02\text{m}$:

$$A_{\text{alma}}(x) = \frac{1}{50} \left(\frac{14}{25} - \frac{1}{30}x \right) \quad (20.83)$$

Al establecer el factor de forma se tiene:

$$k(x) = \frac{A_{\text{sección}}}{A_{\text{alma}}} = \frac{A_y(x)}{A_{\text{alma}}(x)} = \frac{\frac{174 - 5x}{7500}}{\frac{1}{50} \left(\frac{14}{25} - \frac{1}{30}x \right)} = \frac{5x - 174}{5x - 84} \quad (20.84)$$

Se tiene todo lo necesario para determinar los coeficientes de flexibilidad:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{dx}{EI_z(x)}$$

$$\vdots = \frac{1}{E} \int_0^6 \frac{dx}{-\frac{125x^3 - 13050x^2 + 340740x - 2637144}{2025000000}}$$

$$\vdots = \frac{7396.663521829}{E}$$

$$f_{11} = \frac{7396.663521829}{E}$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{x^2}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{k}{GA_y(x)} dx$$

$$\vdots = \frac{1}{E} \int_0^6 \frac{x^2}{-\frac{125x^3 - 13050x^2 + 340740x - 2637144}{2025000000}} dx + \frac{1}{E} \int_0^6 \frac{\frac{5x - 174}{5x - 84}}{\frac{174 - 5x}{7500}} dx$$

$$\vdots = \frac{110247.287247269}{E} + \frac{172.314773389}{E}$$

$$f_{22} = \frac{110419.602020658}{E}$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{1}{EA_y(x)} dx$$

$$\vdots = \frac{1}{E} \int_0^6 \frac{1}{\frac{174 - 5x}{7500}} dx$$

$$\vdots = \frac{283.862999458}{E}$$

$$f_{33} = \frac{283.862999458}{E}$$

$$f_{12} = \int_0^L \frac{x}{EI_z(x)} dx$$

$$\therefore = \frac{1}{E} \int_0^6 \frac{x^2}{-\frac{125x^3 - 13050x^2 + 340740x - 2637144}{202500000}} dx$$

$$\therefore = \frac{25620.504121835}{E}$$

$$f_{12} = \frac{25620.504121835}{E}$$

Teniendo los coeficientes puede determinarse $|f|$:

$$|f| = f_{11}f_{22} - f_{12}^2$$

$$= \left(\frac{7396.663521829}{E}\right)\left(\frac{110419.602020658}{E}\right) - \left(\frac{25620.504121835}{E}\right)^2$$

$$= \frac{160326410.904112000}{E^2}$$

$$|f| = \frac{160326410.904112000}{E^2}$$

Ahora se procede a calcular los coeficientes de rigidez que dependen de los coeficientes de flexibilidad:

$$\frac{f_{22}}{|f|} = \frac{\frac{110419.602020658}{E}}{\frac{160326410.904112000}{E^2}} = 0.000688717 E$$

$$\frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} = \frac{\frac{25620.504121835}{E}(6) - \frac{110419.602020658}{E}}{\frac{160326410.904112000}{E^2}} = 0.000270095 E$$

$$\frac{f_{12}}{|f|} = \frac{\frac{25620.504121835}{E}}{\frac{160326410.904112000}{E^2}} = 0.000159802 E$$

$$\frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} = \frac{\frac{7396.663521829}{E}(6)^2 - 2\left(\frac{25620.504121835}{E}\right)(6) + \frac{110419.602020658}{E}}{\frac{160326410.904112000}{E^2}} = 0.000431953 E$$

$$\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} = \frac{\left(\frac{7396.663521829}{E}\right)(6) - \frac{25620.504121835}{E}}{\frac{160326410.904112000}{E^2}} = 0.000117008 E$$

$$\frac{f_{11}}{|f|} = \frac{\frac{1273.886867231}{E}}{\frac{160326410.904112000}{E^2}} = 0.000046135 E$$

$$\frac{1}{f_{33}} = \frac{1}{\frac{283.862999458}{E}} = 0.003522826 E$$

Como estos coeficientes están en coordenadas locales debe de calcularse los valores de transformación al sistema global:

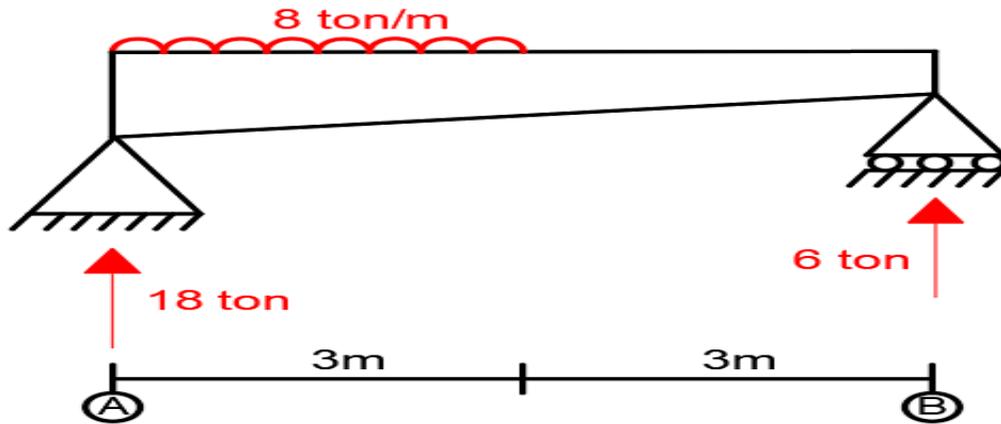
$$\cos(\theta) = \frac{X_B - X_A}{L} = \frac{6 - 0}{\sqrt{(5 - 0)^2 + (0 - 0)^2}} = 1$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{Y_B - Y_A}{L} = \frac{0 - 0}{\sqrt{(5 - 0)^2 + (0 - 0)^2}} = 0$$

Conocido el valor los valores de transformación del sistema local al global y los valores de rigidez que están en función de los coeficientes de flexibilidad, al sustituirlos en la ecuación 20.55 se tiene la matriz de rigidez en coordenadas globales del sistema:

	1	2	3	4	5	6	
E	0.000688717	0.000270095	0.000159802	-0.000159802	0	0	1
	0.000270095	0.000431953	0.000117008	-0.000117008	0	0	2
	0.000159802	0.000117008	0.000046135	-0.000046135	0	0	3
	-0.000159802	-0.000117008	-0.000046135	0.000046135	0	0	4
	0	0	0	0	0.003522826	-0.003522826	5
	0	0	0	0	-0.003522826	0.003522826	6

Conocida la matriz de rigidez de la columna, debe determinarse la ecuación de momento considerándola como viga simplemente apoyada, es decir, se representa de la siguiente forma:



Las ecuaciones de elementos mecánicos para el tramo \overline{AB} dentro de $0 \leq x \leq 3$ son:

$$\begin{aligned} M(x) &= 18x - 4x^2 \\ V(x) &= 18 - 8x \end{aligned} \quad (20.85)$$

Las ecuaciones de elementos mecánicos para el tramo \overline{AB} dentro de $3 \leq x \leq 6$ son:

$$\begin{aligned} M(x) &= 18x - 8(3) \left(x - 3 + \frac{3}{2} \right) = -6x + 36 \\ V(x) &= -6 \end{aligned} \quad (20.86)$$

Calculando los momentos mediante $\{M\} = [k_{\text{angular}}^*] \{\theta_i\}$:

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x M(x)}{EI_z(x)} dx + \frac{1}{L} \int_0^L \frac{k(x)V(x) dx}{GA_y(x)} \\ &= \frac{1}{6E} \left[\int_0^3 \frac{x(18x - 4x^2)}{\frac{125x^3 - 13050x^2 + 340740x - 2637144}{2025000000}} dx + \int_3^6 \frac{x(-6x + 36)}{\frac{125x^3 - 13050x^2 + 340740x - 2637144}{2025000000}} dx \right] \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{1}{E} \right) \left[\int_0^3 \frac{\left(\frac{5x - 174}{5x - 84} \right) (18 - 8x) dx}{\frac{174 - 5x}{7500}} + \int_3^6 \frac{\left(\frac{5x - 174}{5x - 84} \right) (-6) dx}{\frac{174 - 5x}{7500}} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore = \frac{1}{6E} [83395.695754180 + 153004.482026329] + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\frac{E}{2(1+0.3)}} \right) [1654.382624639 - 2206.102122297]$$

$$\frac{39400.029630085}{E} - \frac{239.078448985}{E}$$

$$\theta_B = \frac{39160.951181100}{E}$$

$$\theta_A = \int_0^L \frac{M(x) dx}{EI_z(x)} - \theta_B$$

$$\therefore = \int_0^3 \frac{18x - 4x^2}{-\frac{125x^3 - 13050x^2 + 340740x - 2637144}{2025000000}} dx + \int_3^6 \frac{-6x + 36}{-\frac{125x^3 - 13050x^2 + 340740x - 2637144}{2025000000}} dx - \frac{39160.951181100}{E}$$

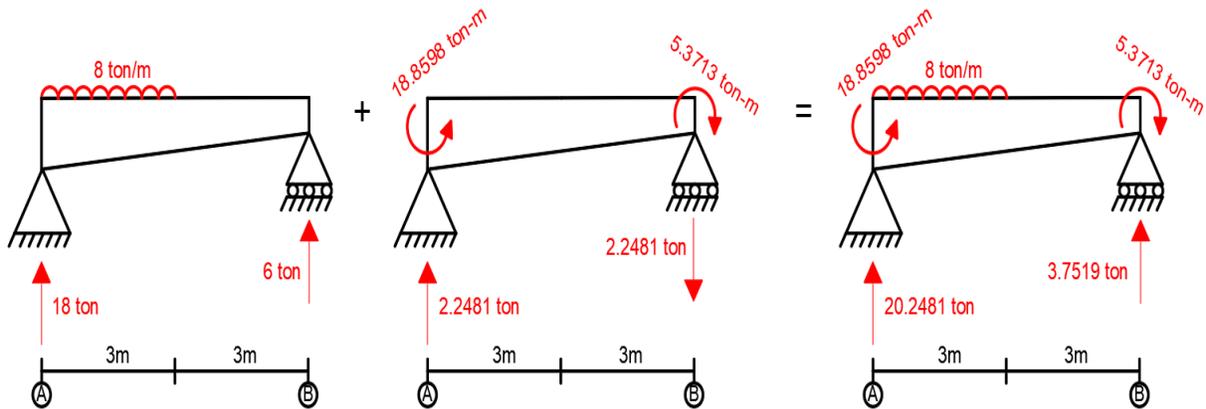
$$\therefore = \frac{44460.413798595}{E} + \frac{37442.322224159}{E} - \frac{39160.951181100}{E}$$

$$\theta_A = \frac{42741.784841654}{E}$$

De la matriz de rigidez en coordenadas globales se extra $[k_{\text{angular}}^*]$ y se calculan los momentos finales:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 0.000688717 & -0.000270095 \\ -0.000270095 & 0.000431953 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 42741.784841654 \\ 39160.951181100 \end{Bmatrix} \frac{1}{E} = \begin{Bmatrix} 18.8598 \\ 5.3713 \end{Bmatrix} \quad (\text{ton} \cdot \text{m})$$

Los elementos mecánicos finales se pueden obtener mediante superposición como se ilustra en la siguiente imagen:



20.6.6 Ejemplo 5: cálculo de elementos mecánicos de una viga cuya base y peralte varían en forma parabólica

Instrucciones: determinar la matriz de rigidez así como los elementos mecánicos de la siguiente viga mostrada. Considere todas las deformaciones (debida a flexión, carga axial y cortante). La sección \overline{AB} varía en su base como en su peralte en forma parabólica. La relación de poisson es $\nu = 0.2$ y el módulo de elasticidad es el mismo para toda la sección.

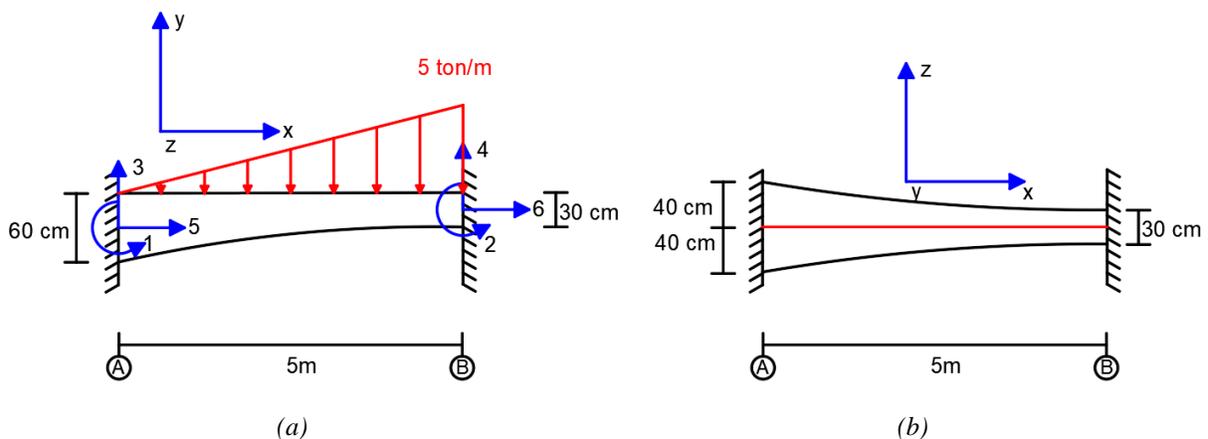


Figura XX.13. Ejemplo 5 de elemento de sección variable donde (a) representa la variación del peralte y (b) la variación de la base.

Antes de determinar los coeficientes de flexibilidad es necesario encontrar una función que describa tanto la variación del peralte como de la base.

Para determinar la ecuación del peralte se propone una ecuación del tipo $h(x) = ax^2 + c$, conocidos los puntos $(x_0, y_0) = (0, -0.6)$ y $(x_1, y_1) = (5, -0.3)$, formulando un sistema de ecuaciones 2 x 2 de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} a \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^2 & 1 \\ 5^2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -0.6 \\ -0.3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{250} \\ -\frac{3}{5} \end{Bmatrix}$$

Análogamente para determinar la ecuación de la variación de la base de la sección se propone una función del tipo $b(x) = dx^2 + f$ dado que se conocen los puntos $(x_0, z_0) = (0, -0.4)$ y $(x_1, z_1) = (5, -0.15)$, formando un sistema de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} d \\ f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^2 & 1 \\ 5^2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -0.4 \\ -0.15 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{100} \\ \frac{2}{5} \end{Bmatrix}$$

Entonces las ecuaciones que definen la variación del peralte y de la base son las siguientes^{20.8}:

$$h(x) = ax^2 + c = \frac{3}{250}x^2 - \frac{3}{5}$$

$$b(x) = 2 \left(\frac{1}{100}x^2 - \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{50}x^2 - \frac{4}{5}$$

La ecuación de $b(x)$ se multiplicó por dos para poder representar que la ecuación que gobierna el cambio de base en forma parabólica se repite dos veces por ser simétrica con respecto al eje x .

Calculando los coeficientes de flexibilidad:

^{20.8} A fin de respetar el que los coeficientes de rigidez sean positivos en la diagonal principal se consideró calcular la funciones para que éstas fuesen crecientes a lo largo de la longitud de la viga.

$$f_{11} = \int_0^L \frac{dx}{EI_z(x)}$$

$$\therefore = \frac{1}{E} \int_0^5 \frac{dx}{\frac{\left(\frac{1}{50}x^2 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{250}x^2 - \frac{3}{5}\right)^3}{12}}$$

$$\therefore = \frac{1273.886867231}{E}$$

$$f_{11} = \frac{1273.886867231}{E}$$

$$f_{22} = \int_0^L \frac{x^2}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{k}{GA_y(x)} dx$$

$$\therefore = \frac{1}{E} \int_0^5 \frac{x^2}{\frac{\left(\frac{1}{50}x^2 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{250}x^2 - \frac{3}{5}\right)^3}{12}} dx + \frac{1.2}{2(1+0.2)E} \int_0^5 \frac{dx}{\left(\frac{1}{50}x^2 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{250}x^2 - \frac{3}{5}\right)}$$

$$\therefore = \frac{20157.989548907}{E} + \frac{54.003569642}{E}$$

$$f_{22} = \frac{20211.993118549}{E}$$

$$f_{33} = \int_0^L \frac{1}{EA_y(x)} dx$$

$$\therefore = \frac{1}{E} \int_0^5 \frac{dx}{\left(\frac{1}{50}x^2 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{250}x^2 - \frac{3}{5}\right)}$$

$$\therefore = \frac{18.751239459}{E}$$

$$f_{33} = \frac{18.751239459}{E}$$

$$f_{12} = \int_0^L \frac{x}{EI_z(x)} dx$$

$$\therefore = \frac{1}{E} \int_0^5 \frac{x}{\frac{\left(\frac{1}{50}x^2 - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{250}x^2 - \frac{3}{5}\right)^3}{12}} dx$$

$$\therefore = \frac{4805.915356212}{E}$$

$$f_{12} = \frac{4805.915356212}{E}$$

Teniendo los coeficientes puede determinarse $|f|$:

$$\begin{aligned} |f| &= f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \\ &= \left(\frac{1273.886867231}{E}\right)\left(\frac{20211.993118549}{E}\right) - \left(\frac{4805.915356212}{E}\right)^2 \\ &= \frac{2650970.183217400}{E^2} \end{aligned}$$

$$|f| = \frac{2650970.183217400}{E^2}$$

Ahora se procede a calcular los coeficientes de rigidez que dependen de los coeficientes de flexibilidad:

$$\frac{f_{22}}{|f|} = \frac{\frac{20211.993118549}{E}}{\frac{2650970.183217400}{E^2}} = 0.007624376 E$$

$$\frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} = \frac{\frac{4805.915356212}{E}(5) - \frac{20211.993118549}{E}}{\frac{2650970.183217400}{E^2}} = 0.001440070 E$$

$$\frac{f_{12}}{|f|} = \frac{\frac{4805.915356212}{E}}{\frac{2650970.183217400}{E^2}} = 0.001812889 E$$

$$\frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} = \frac{\frac{1273.886867231}{E}(5)^2 - 2\left(\frac{4805.915356212}{E}\right)(5) + \frac{20211.993118549}{E}}{\frac{2650970.183217400}{E^2}} = 0.001508886 E$$

$$\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} = \frac{\left(\frac{1273.886867231}{E}\right)(5) - \frac{4805.915356212}{E}}{\frac{2650970.183217400}{E^2}} = 0.000589791 E$$

$$\frac{f_{11}}{|f|} = \frac{\frac{1273.886867231}{E}}{\frac{2650970.183217400}{E^2}} = 0.000480536 E$$

$$\frac{1}{f_{33}} = \frac{1}{\frac{18.751239459}{E}} = 0.053329808 E$$

Como estos coeficientes están en coordenadas locales debe de calcularse los valores de transformación al sistema global:

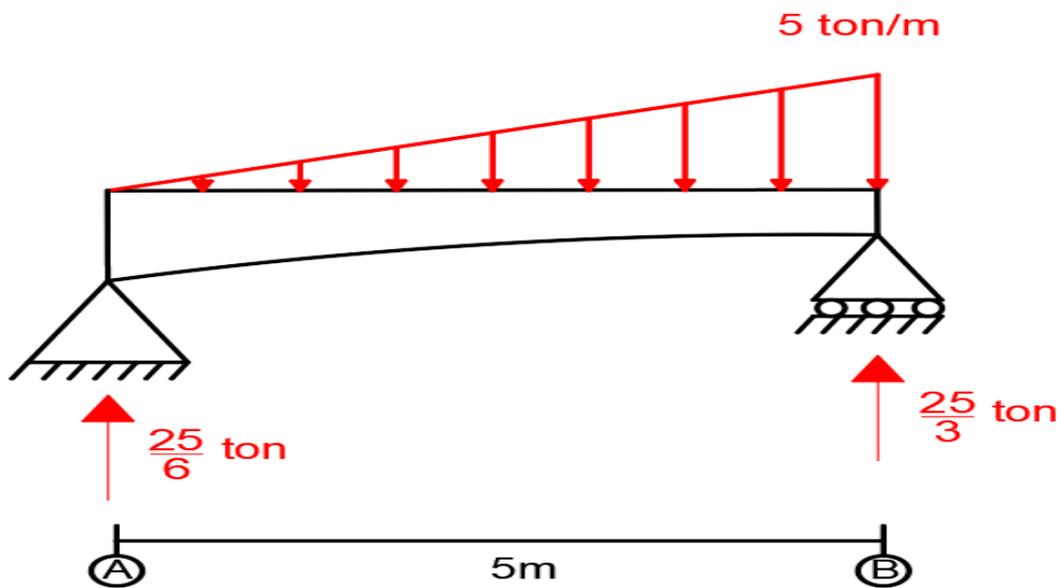
$$\cos(\theta) = \frac{X_B - X_A}{L} = \frac{5 - 0}{\sqrt{(5 - 0)^2 + (0 - 0)^2}} = 1$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{Y_B - Y_A}{L} = \frac{0 - 0}{\sqrt{(5 - 0)^2 + (0 - 0)^2}} = 0$$

Conocido el valor los valores de transformación del sistema local al global y los valores de rigidez que están en función de los coeficientes de flexibilidad, al sustituirlos en la ecuación 20.55 se tiene la matriz de rigidez en coordenadas globales del sistema:

	1	2	3	4	5	6	
E	0.007624376	0.001440070	0.001812889	-0.001812889	0	0	1
	0.001440070	0.001508886	0.000589791	-0.000589791	0	0	2
	0.001812889	0.000589791	0.000480536	-0.000480536	0	0	3
	-0.001812889	-0.000589791	-0.000480536	0.000480536	0	0	4
	0	0	0	0	0.053329808	-0.053329808	5
	0	0	0	0	-0.053329808	0.053329808	6

Conocida la matriz de rigidez de la columna, debe determinarse la ecuación de momento considerándola como viga simplemente apoyada, es decir, se representa de la siguiente forma:



Las ecuaciones de elementos mecánicos para el tramo \overline{AB} son:

$$M(x) = \frac{25}{6}x - \frac{x^3}{6} \tag{20.87}$$

$$V(x) = \frac{25}{6} - \frac{x^2}{2}$$

Calculando los momentos mediante $\{M\} = [k_{\text{angular}}^*]\{\theta_i\}$:

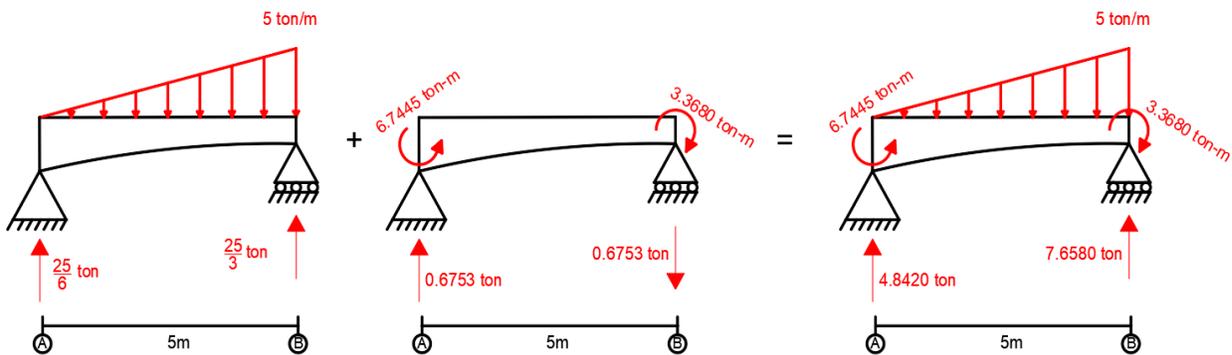
$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{L} \int_0^L \frac{x M(x)}{EI_z(x)} dx + \frac{k}{L} \int_0^L \frac{V(x) dx}{GA_y(x)} \\ \therefore &= \frac{1}{5E} \int_0^5 \frac{x \left(\frac{25}{6}x - \frac{x^3}{6} \right)}{\frac{\left(\frac{1}{50}x^2 - \frac{4}{5} \right) \left(\frac{3}{250}x^2 - \frac{3}{5} \right)^3}{12}} dx + \frac{1}{5} \left(\frac{1.2}{\frac{E}{2(1+0.2)}} \right) \int_0^5 \frac{\left(\frac{25}{6} - \frac{x^2}{2} \right) dx}{\left(\frac{1}{50}x^2 - \frac{4}{5} \right) \left(\frac{3}{250}x^2 - \frac{3}{5} \right)} \\ \therefore &= \frac{3675.488789533}{E} + \frac{77.400815295}{E} \\ \theta_B &= \frac{3752.889604828}{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_A &= \int_0^L \frac{M(x) dx}{EI_z(x)} - \theta_B \\ \therefore &= \int_0^5 \frac{\frac{25}{6}x - \frac{x^3}{6}}{\frac{\left(\frac{1}{50}x^2 - \frac{4}{5} \right) \left(\frac{3}{250}x^2 - \frac{3}{5} \right)^3}{12}} dx - \frac{3752.889604828}{E} \\ \therefore &= \frac{5346.322720582}{E} - \frac{3752.889604828}{E} \\ \theta_A &= \frac{1593.433115753}{E} \end{aligned}$$

De la matriz de rigidez en coordenadas globales se extra $[k_{angular}^*]$ y se calculan los momentos finales:

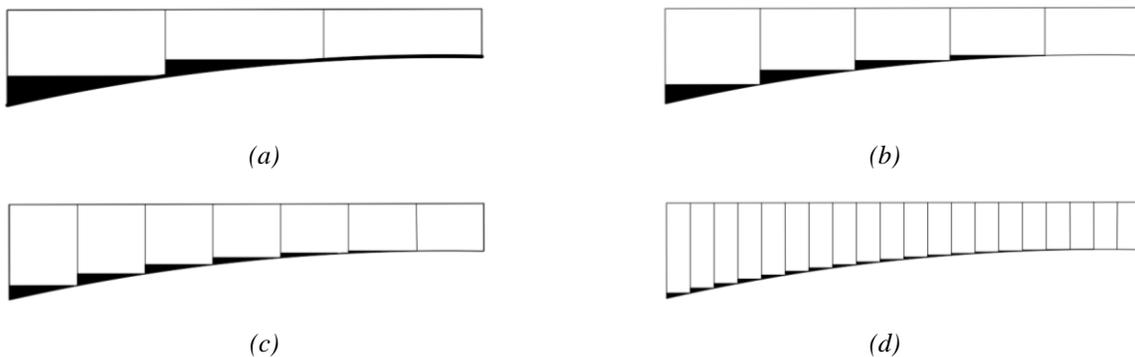
$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 0.007624376 & -0.001440070 \\ -0.001440070 & 0.001508886 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1593.433115753 \\ 3752.889604828 \end{Bmatrix} \frac{1}{E} = \begin{Bmatrix} 6.7445 \\ 3.3680 \end{Bmatrix} \text{ (ton} \cdot \text{m)}$$

Los elementos mecánicos finales se pueden obtener mediante superposición como se ilustra en la siguiente imagen:



20.6.7 Inconveniencia del uso de elementos de sección prismática para idealizar una sección transversal como la del ejemplo 4 o 5

Sería muy laborioso tratar de establecer la matriz de rigidez a partir del ensamble de varias matrices de rigidez de sección prismática y posteriormente recurrir a la condensación estática con el objetivo de calcular la matriz obtenida por análisis de sección variable como se hizo en el ejemplo 3. Para ejemplificar piense en analizar la estructura a partir de las siguientes figuras:



Respectivamente para (a), (b), (c) y (d) la estructura se contempla como el ensamble de 3, 5, 7 y 20 elementos de sección prismática. Es evidente que a mayor número de elementos de sección prismática, la aproximación a la viga real será más precisa.

Los grados de libertad necesarios, en función del número de elementos discretizados, puede ser representado por medio de las funciones:

$$f(x) = 3(x + 1) \quad (20.88)$$

$$g(x) = 2(x + 1) \quad (20.89)$$

Donde:

$[f(x)]$ = numero de grados de libertad incluyendo la deformación axial.

$[g(x)]$ = numero de grados de libertad despreciando la deformación axial.

$[x]$ = numero de elementos de sección prismática.

La siguiente tabla muestra algunos valores para $f(x)$ y $g(x)$.

Tabla XX.2

Tabla de relación de grados de libertad con elementos discretizados

Número de elementos (x)	Grados de libertad incluyendo deformación axial (f(x))	Grados de libertad despreciando deformación axial (g(x))
3	12	8
5	18	12
7	24	16
20	63	42
50	153	102
100	303	202

Es evidente que utilizar una gran cantidad de elementos tipo viga de sección prismática para representar una sección variable provee una mejor aproximación, sin embargo, la cantidad de grados de libertad que deben utilizarse para la condensación estática aumenta.

Aun despreciando los efectos de deformación axial sería muy poco práctico recurrir a ensamblar varias matrices de rigidez para posteriormente hacer uso de la condensación estática a fin de conseguir la misma matriz que se pudo obtener realizando un análisis estructural con sección variable, y a pesar de todo ello, no se asegura la misma precisión que se obtuvo como en el ejemplo 3 dado que en cada discretización existe una pérdida de inercia.

Por lo anteriormente mencionado, cuando se tiene secciones que puedan variar en su peralte y/o base de tal forma que pueda ser representada por una función (lineal, parabólica o de otro tipo) que no sea $y = \text{cte}$, es preferible utilizar un análisis estructural de sección variable y, refinar en la medida de lo posible, el método preferido de integración numérica a realizar el ensamble de muchas matrices de rigidez de sección prismática y realizar la condensación estática.

Obtener la matriz de rigidez de un elemento de sección variable (contemplando únicamente los grados de libertad en sus nodos extremos) mediante el desarrollo de los coeficientes de flexibilidad, y la obtención de los de rigidez asociados a dichos coeficientes f_{11} , f_{22} , f_{33} y f_{12} , resulta muy conveniente sobre todo cuando un elemento de sección variable se encuentra contenido en otro sistema estructural (como por ejemplo un marco) y se requiere obtener la matriz de rigidez de toda la estructura para después obtener por condensación estática la matriz de rigidez lateral, necesaria para realizar un análisis dinámico modal espectral como el de los capítulos anteriores.

20.7 Ejemplos de Aplicación de Marcos con Contraventeos y Muros Cortante

20.7.1 Ejemplo 1: marco de dos crujeas y un nivel sometido a carga lateral

Instrucciones: resolver el siguiente marco mostrado considerando deformaciones por cortante, flexión, carga axial y la condición de diagrama rígido. Las secciones 1-2 son cuadradas de dimensiones 30 x 30 cm, la sección 3 es una sección cuadrada de 40 x 40 y las secciones 4 a 6 son secciones rectangulares de 15 x 30 cm. Considere un módulo de elasticidad de $E = 140000\sqrt{300}$ ton/m² y una relación de poisson de $\nu = 0.2$.

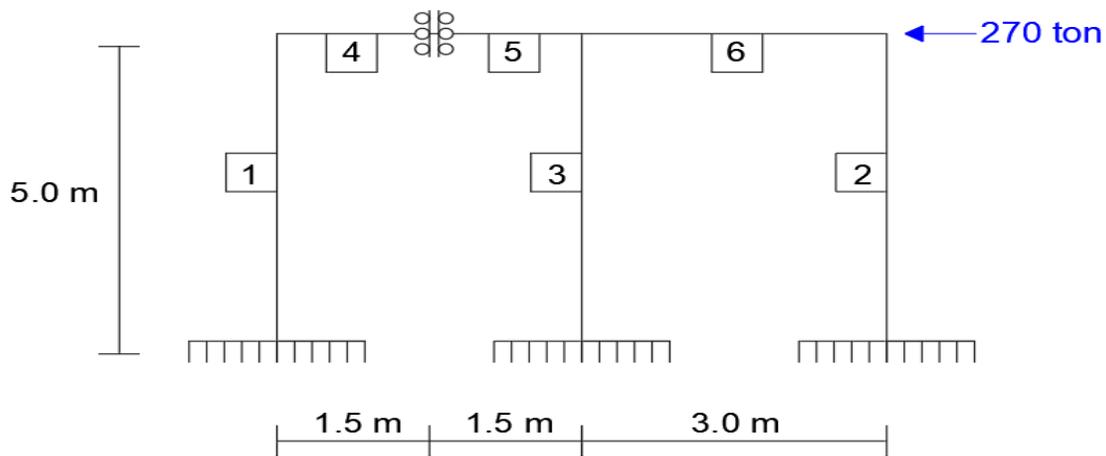
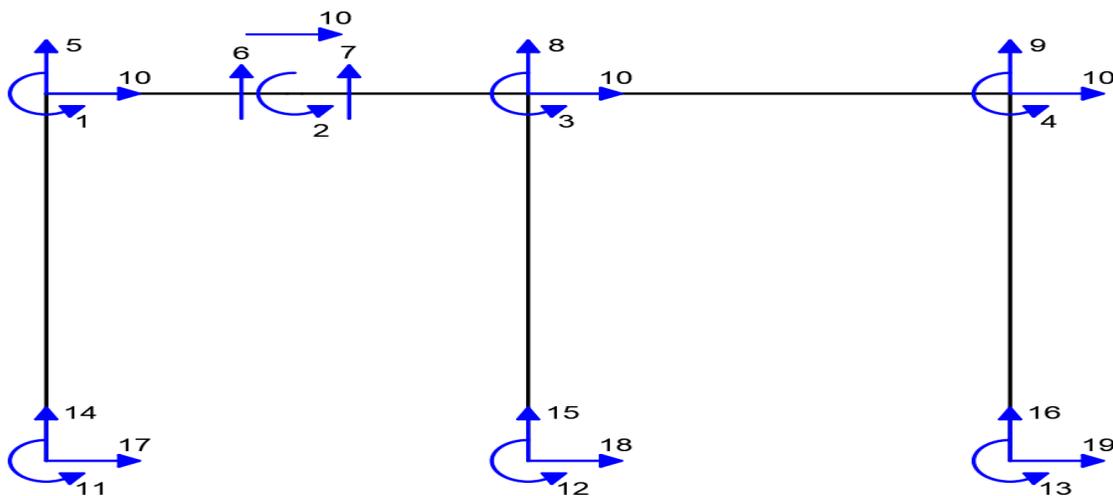


Figura XX.14. Ejemplo 1 de elemento de sección de marcos con sistema de contraventeos o muros de cortante.

Generando la siguiente numeración de grados de libertad:



Todas las secciones son prismáticas por lo que utilizando la ecuación 20.56 se obtienen las matrices de rigidez en coordenadas globales de todas las barras:

$$[k_1] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 11 & 1 & 14 & 5 & 17 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1299.35276 & 644.63756 & 0 & 0 & -388.79807 & 388.79807 \\ 644.63756 & 1299.35276 & 0 & 0 & -388.79807 & 388.79807 \\ 0 & 0 & 43647.68035 & -43647.68035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -43647.68035 & 43647.68035 & 0 & 0 \\ -388.79807 & -388.79807 & 0 & 0 & 155.51923 & -155.51923 \\ 388.79807 & 388.79807 & 0 & 0 & -155.51923 & 155.51923 \end{matrix} & \begin{matrix} 11 \\ 1 \\ 14 \\ 5 \\ 17 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[k_2] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 13 & 4 & 16 & 9 & 19 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1299.35276 & 644.63756 & 0 & 0 & -388.79807 & 388.79807 \\ 644.63756 & 1299.35276 & 0 & 0 & -388.79807 & 388.79807 \\ 0 & 0 & 43647.68035 & -43647.68035 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -43647.68035 & 43647.68035 & 0 & 0 \\ -388.79807 & -388.79807 & 0 & 0 & 155.51923 & -155.51923 \\ 388.79807 & 388.79807 & 0 & 0 & -155.51923 & 155.51923 \end{matrix} & \begin{matrix} 13 \\ 4 \\ 16 \\ 9 \\ 19 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[k_3] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 12 & 3 & 15 & 8 & 18 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 4082.27225 & 2013.04889 & 0 & 0 & -1219.06423 & 1219.06423 \\ 2013.04889 & 4082.27225 & 0 & 0 & -1219.06423 & 1219.06423 \\ 0 & 0 & 77595.87618 & -77595.87618 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -77595.87618 & 77595.87618 & 0 & 0 \\ -1219.06423 & -1219.06423 & 0 & 0 & 487.62569 & -487.62569 \\ 1219.06423 & 1219.06423 & 0 & 0 & -487.62569 & 487.62569 \end{matrix} & \begin{matrix} 12 \\ 3 \\ 15 \\ 8 \\ 18 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[k_4] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 10 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2013.30405 & 922.11204 & 1956.94406 & -1956.94406 & 0 & 0 \\ 922.11204 & 2013.30405 & 1956.94406 & -1956.94406 & 0 & 0 \\ 1956.94406 & 1956.94406 & 2609.25875 & -2609.25875 & 0 & 0 \\ -1956.94406 & -1956.94406 & -2609.25875 & 2609.25875 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 72746.1339 & -72746.1339 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -72746.1339 & 72746.1339 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[k_5] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 7 & 8 & 10 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2013.30405 & 922.11204 & 1956.94406 & -1956.94406 & 0 & 0 \\ 922.11204 & 2013.30405 & 1956.94406 & -1956.94406 & 0 & 0 \\ 1956.94406 & 1956.94406 & 2609.25875 & -2609.25875 & 0 & 0 \\ -1956.94406 & -1956.94406 & -2609.25875 & 2609.25875 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 72746.1339 & -72746.1339 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -72746.1339 & 72746.1339 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} 3312.6568 & 922.1120 & 0 & 0 & 1956.9441 & -1956.9441 & 0 & 0 & 0 & 388.7981 \\ 922.1120 & 4026.6081 & 922.1120 & 0 & 1956.9441 & -1956.9441 & 1956.9441 & -1956.9441 & 0 & 0 \\ 0 & 922.1120 & 7163.8584 & 522.6861 & 0 & 0 & 1956.9441 & -1426.6214 & -530.3227 & 1219.06423 \\ 0 & 0 & 522.6861 & 2367.6348 & 0 & 0 & 0 & 530.3227 & -530.3227 & 388.798065 \\ 1956.9441 & 1956.9441 & 0 & 0 & 46256.9391 & -2609.2588 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1956.9441 & -1956.9441 & 0 & 0 & -2609.2587 & 2609.2588 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1956.9441 & 1956.9441 & 0 & 0 & 0 & 2609.2588 & -2609.2588 & 0 & 0 \\ 0 & -1956.9441 & -1426.6214 & 530.3227 & 0 & 0 & -2609.2588 & 80558.6834 & -353.5485 & 0 \\ 0 & 0 & -530.3227 & -530.3227 & 0 & 0 & 0 & -353.5485 & 44001.2288 & 0 \\ 388.7981 & 0 & 1219.0642 & 388.7981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 798.6641 \end{bmatrix}$$

$$[k_{21}] = \begin{bmatrix} 664.6376 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 388.7981 \\ 0 & 0 & 2013.0489 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1219.0642 \\ 0 & 0 & 0 & 644.6376 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 388.7981 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -43647.6804 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -77595.8762 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -43647.6804 & 0 \\ -388.7981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -155.5192 \\ 0 & 0 & -1219.0642 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -487.6257 \\ 0 & 0 & 0 & -388.7981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -155.5192 \end{bmatrix}$$

$$[k_{12}] = [k_{21}]^T$$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} 1299.3528 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -388.7981 & 0 & 0 \\ 0 & 4082.2723 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1219.0642 & 0 \\ 0 & 0 & 1299.3528 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -388.7981 \\ 0 & 0 & 0 & 43647.6804 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 77595.8762 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 43647.6804 & 0 & 0 & 0 \\ -388.7981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 155.5192 & 0 & 0 \\ 0 & -1219.0642 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 487.6257 & 0 \\ 0 & 0 & -388.7981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 155.5192 \end{bmatrix}$$

Al no tenerse condiciones de asentamiento o rotaciones en los apoyos, se calculan los desplazamientos mediante $\{\delta_D\} = -[k_{11}]^{-1}\{F_C\}$ lo cual, al desarrollar se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} = -[k_{11}]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 270 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.21320 \text{ rad} \\ 0.19157 \text{ rad} \\ 0.16933 \text{ rad} \\ 0.08555 \text{ rad} \\ 0 \text{ m} \\ 0.30358 \text{ m} \\ -0.27285 \text{ m} \\ -0.00172 \text{ m} \\ 0.00307 \text{ m} \\ -0.74288 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (20.90)$$

Los elementos mecánicos obtenidos son los siguientes:

$$\{F_1\} = [k_1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.21320 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.74288 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -151.3923 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -11.8042 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 32.6393 \text{ ton} \\ -32.6393 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.91)$$

$$\{F_2\} = [k_2] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.08555 \\ 0 \\ 0.00307 \\ 0 \\ -0.74288 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -233.6835 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -177.6729 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -133.7951 \text{ ton} \\ 133.7951 \text{ ton} \\ 82.2713 \text{ ton} \\ -82.2713 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.92)$$

$$\{F_3\} = [k_3] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.16993 \\ 0 \\ -0.00172 \\ 0 \\ -0.74288 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -563.5388 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -211.9083 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 133.7951 \text{ ton} \\ -133.7951 \text{ ton} \\ 155.0894 \text{ ton} \\ -155.0894 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.93)$$

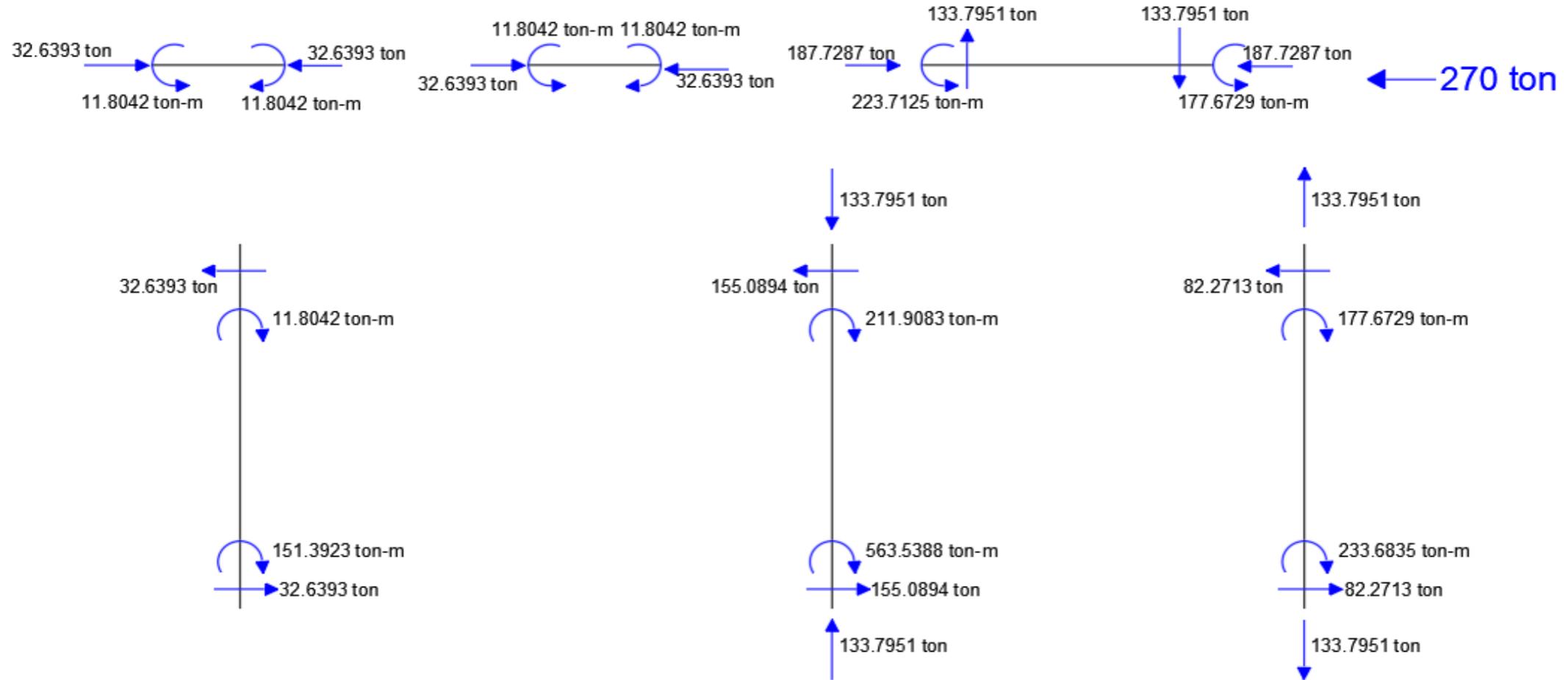
$$\{F_4\} = [k_4] \begin{Bmatrix} 0.21320 \\ 0.19157 \\ 0 \\ 0.30358 \\ -0.74288 \\ -0.74288 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.8042 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -11.8042 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.94)$$

$$\{F_5\} = [k_5] \begin{Bmatrix} 0.19157 \\ 0.16993 \\ -0.27285 \\ -0.00172 \\ -0.74288 \\ -0.74288 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.8042 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -11.8042 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.95)$$

$$\{F_6\} = [k_6] \begin{Bmatrix} 0.16993 \\ 0.08555 \\ -0.00172 \\ 0.00307 \\ -0.74288 \\ -0.74288 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 223.7125 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 177.6729 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 133.7951 \text{ ton} \\ -133.7951 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.96)$$

En la siguiente página se representan los elementos mecánicos por barra.

Los elementos mecánicos finales son:



20.7.2 Ejemplo 2: marco de dos crujeías y un nivel con contraventeos concéntricos sometido a carga lateral

Instrucciones: resolver el marco del ejemplo anterior adicionando un sistema de contraventeo concéntrico usando un perfil tipo PTE cuadrado con designación OR 51 x 3.2 (mm x mm) cuya área es de 5.42 cm². Considere un módulo de elasticidad del acero igual a $E = 2.1 \times 10^7$ ton/m².

El marco mostrado se muestra a continuación:

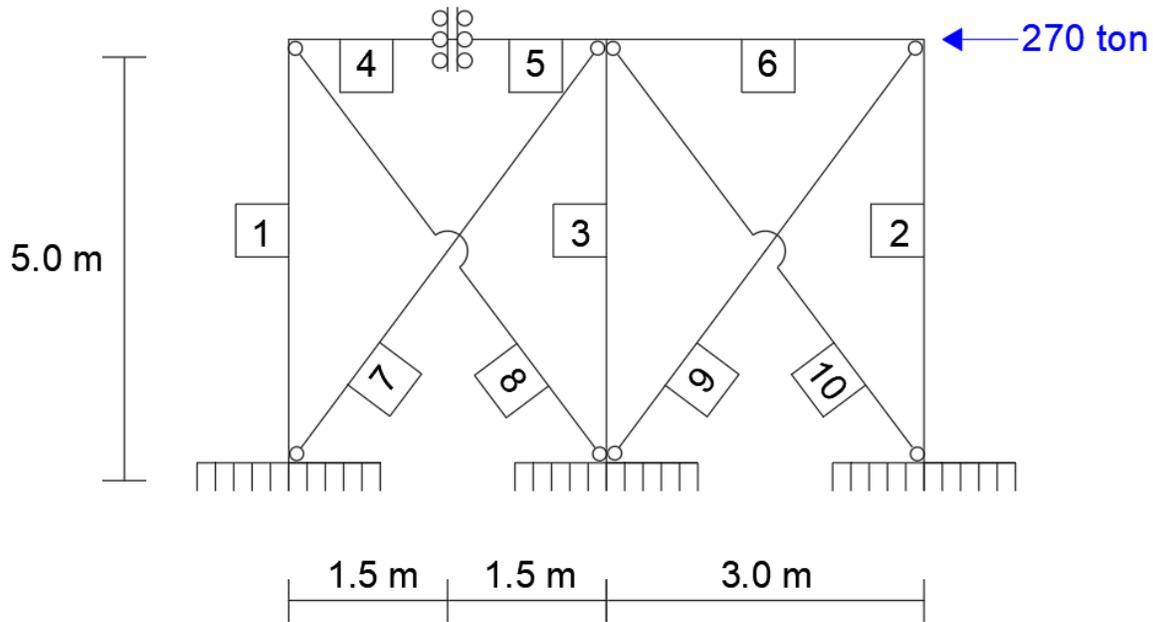


Figura XX.15. Ejemplo 2 de elemento de sección de marcos con sistema de contraventeos o muros de cortante.

Como se mantiene la misma dimensión para las vigas y columnas, así como la misma numeración de grados de libertad, es necesario calcular únicamente las matrices de rigidez de los contraventeos utilizando a ecuación 20.67. Dichas matrices son:

$$[k_7] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 14 & 8 & 17 & 10 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1435.2918 & -1435.2918 & 861.1751 & -861.1751 \\ -1435.2918 & 1435.2918 & -861.1751 & 861.1751 \\ 861.1751 & -861.1751 & 516.7051 & -516.7051 \\ -861.1751 & 861.1751 & -516.7051 & 516.7051 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 14 \\ 8 \\ 17 \\ 10 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{15} & \mathbf{5} & \mathbf{18} & \mathbf{10} \\
 [\mathbf{k}_8] = & \left[\begin{array}{cccc}
 \mathbf{1435.2918} & \mathbf{-1435.2918} & \mathbf{-861.1751} & \mathbf{861.1751} \\
 \mathbf{-1435.2918} & \mathbf{1435.2918} & \mathbf{861.1751} & \mathbf{-861.1751} \\
 \mathbf{-861.1751} & \mathbf{861.1751} & \mathbf{516.7051} & \mathbf{-516.7051} \\
 \mathbf{861.1751} & \mathbf{-861.1751} & \mathbf{-516.7051} & \mathbf{516.7051}
 \end{array} \right] & \begin{array}{l}
 \mathbf{15} \\
 \mathbf{5} \\
 \mathbf{18} \\
 \mathbf{10}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{15} & \mathbf{9} & \mathbf{18} & \mathbf{10} \\
 [\mathbf{k}_9] = & \left[\begin{array}{cccc}
 \mathbf{1435.2918} & \mathbf{-1435.2918} & \mathbf{861.1751} & \mathbf{-861.1751} \\
 \mathbf{-1435.2918} & \mathbf{1435.2918} & \mathbf{-861.1751} & \mathbf{861.1751} \\
 \mathbf{861.1751} & \mathbf{-861.1751} & \mathbf{516.7051} & \mathbf{-516.7051} \\
 \mathbf{-861.1751} & \mathbf{861.1751} & \mathbf{-516.7051} & \mathbf{516.7051}
 \end{array} \right] & \begin{array}{l}
 \mathbf{15} \\
 \mathbf{9} \\
 \mathbf{18} \\
 \mathbf{10}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{16} & \mathbf{8} & \mathbf{19} & \mathbf{10} \\
 [\mathbf{k}_{10}] = & \left[\begin{array}{cccc}
 \mathbf{1435.2918} & \mathbf{-1435.2918} & \mathbf{-861.1751} & \mathbf{861.1751} \\
 \mathbf{-1435.2918} & \mathbf{1435.2918} & \mathbf{861.1751} & \mathbf{-861.1751} \\
 \mathbf{-861.1751} & \mathbf{861.1751} & \mathbf{516.7051} & \mathbf{-516.7051} \\
 \mathbf{861.1751} & \mathbf{-861.1751} & \mathbf{-516.7051} & \mathbf{516.7051}
 \end{array} \right] & \begin{array}{l}
 \mathbf{16} \\
 \mathbf{8} \\
 \mathbf{19} \\
 \mathbf{10}
 \end{array}
 \end{array}$$

Al ensamblar las matrices para:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_D \\ \delta_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_C \\ F_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se tiene:

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} 3312.6568 & 922.1120 & 0 & 0 & 1956.9441 & -1956.9441 & 0 & 0 & 0 & 388.7981 \\ 922.1120 & 4026.6081 & 922.1120 & 0 & 1956.9441 & -1956.9441 & 1956.9441 & -1956.9441 & 0 & 0 \\ 0 & 922.1120 & 7163.8584 & 522.6861 & 0 & 0 & 1956.9441 & -1426.6214 & -530.3227 & 1219.06423 \\ 0 & 0 & 522.6861 & 2367.6348 & 0 & 0 & 0 & 530.3227 & -530.3227 & 388.798065 \\ 1956.9441 & 1956.9441 & 0 & 0 & 47692.2309 & -2609.2588 & 0 & 0 & 0 & -861.1751 \\ -1956.9441 & -1956.9441 & 0 & 0 & -2609.2587 & 2609.2588 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1956.9441 & 1956.9441 & 0 & 0 & 0 & 2609.2588 & -2609.2588 & 0 & 0 \\ 0 & -1956.9441 & -1426.6214 & 530.3227 & 0 & 0 & -2609.2588 & 83429.2671 & -353.5485 & 0 \\ 0 & 0 & -530.3227 & -530.3227 & 0 & 0 & 0 & -353.5485 & 45436.5207 & 861.1751 \\ 388.7981 & 0 & 1219.0642 & 388.7981 & -861.1751 & 0 & 0 & 0 & 861.175101 & 2685.4844 \end{bmatrix}$$

$$[k_{21}] = \begin{bmatrix} 664.6376 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 388.7981 \\ 0 & 0 & 2013.0489 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1219.0642 \\ 0 & 0 & 0 & 644.6376 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 388.7981 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -43647.6804 & 0 & 0 & -1435.29184 & 0 & -861.1751 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1435.2918 & 0 & 0 & -77595.8762 & -1435.29184 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1435.2918 & -43647.6804 & 861.1751 \\ -388.7981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -861.1751 & 0 & -672.2243 \\ 0 & 0 & -1219.0642 & 0 & 861.1751 & 0 & 0 & 0 & -861.1751 & -1521.0358 \\ 0 & 0 & 0 & -388.7981 & 0 & 0 & 0 & 861.1751 & 0 & -672.2243 \end{bmatrix}$$

$$[k_{12}] = [k_{21}]^T$$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} 1299.3528 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -388.7981 & 0 & 0 \\ 0 & 4082.2723 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1219.0642 & 0 \\ 0 & 0 & 1299.3528 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -388.7981 \\ 0 & 0 & 0 & 45082.9722 & 0 & 0 & 861.1751 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 80466.4598 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45082.9722 & 0 & 0 & -861.1751 \\ -388.7981 & 0 & 0 & 861.1751 & 0 & 0 & 672.2243 & 0 & 0 \\ 0 & -1219.0642 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1521.0358 & 0 \\ 0 & 0 & -388.7981 & 0 & 0 & -861.1751 & 0 & 0 & 672.2243 \end{bmatrix}$$

Al no tenerse condiciones de asentamiento o rotaciones en los apoyos, se calculan los desplazamientos mediante $\{\delta_D\} = -[k_{11}]^{-1}\{F_C\}$ lo cual, al desarrollar se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} = -[k_{11}]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 270 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.03244 \text{ rad} \\ 0.02922 \text{ rad} \\ 0.02600 \text{ rad} \\ 0.01344 \text{ rad} \\ -0.00216 \text{ m} \\ 0.04409 \text{ m} \\ -0.04167 \text{ m} \\ -0.00025 \text{ m} \\ 0.00260 \text{ m} \\ -0.11294 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (20.97)$$

Los elementos mecánicos obtenidos son los siguientes:

$$\{F_1\} = [k_1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.03244 \\ 0 \\ -0.00216 \\ 0 \\ -0.11294 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -22.9979 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -1.7571 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 94.1667 \text{ ton} \\ -94.1667 \text{ ton} \\ 4.9510 \text{ ton} \\ -4.9510 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.98)$$

$$\{F_2\} = [k_2] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01344 \\ 0 \\ 0.00260 \\ 0 \\ -0.11294 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -35.2453 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -26.4432 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -113.4454 \text{ ton} \\ 113.4454 \text{ ton} \\ 12.3377 \text{ ton} \\ -12.3377 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.99)$$

$$\{F_3\} = [k_3] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.02600 \\ 0 \\ -0.00025 \\ 0 \\ -0.11294 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -85.3412 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -31.5376 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 19.2023 \text{ ton} \\ -19.2023 \text{ ton} \\ 23.3758 \text{ ton} \\ -23.3758 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.100)$$

$$\{F_4\} = [k_4] \begin{Bmatrix} 0.03244 \\ 0.02922 \\ -0.00216 \\ 0.04409 \\ -0.11294 \\ -0.11294 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.7571 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -1.7571 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.101)$$

$$\{F_5\} = [k_5] \begin{Bmatrix} 0.02922 \\ 0.02600 \\ -0.04167 \\ -0.00025 \\ -0.11294 \\ -0.11294 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.7571 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -1.7571 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.102)$$

$$\{F_6\} = [k_6] \begin{Bmatrix} 0.02600 \\ 0.01344 \\ -0.00025 \\ 0.00260 \\ -0.11294 \\ -0.11294 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33.2947 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 26.4432 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 19.9126 \text{ ton} \\ -19.9126 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.103)$$

Para las barras 7 a 10 se tiene:

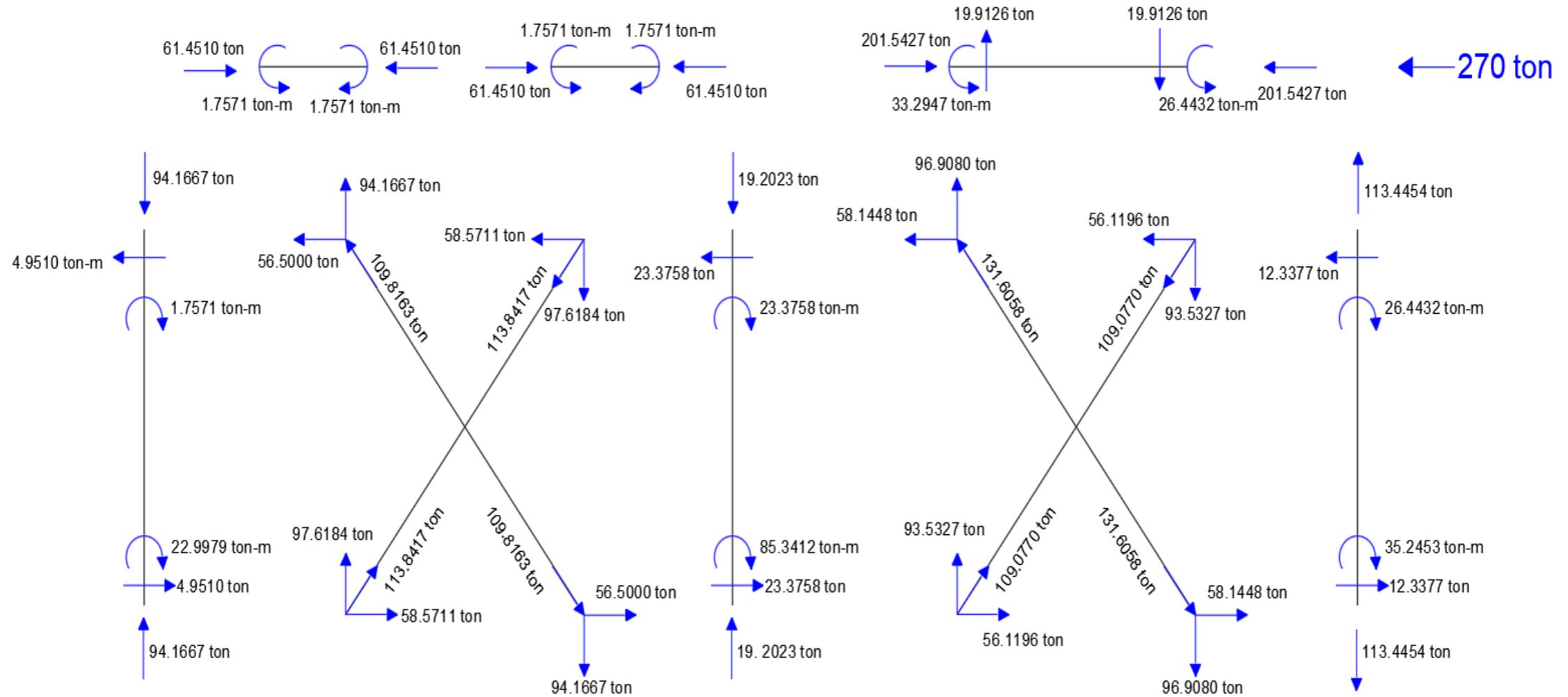
$$\{F_7\} = \begin{bmatrix} 1435.2918 & -1435.2918 & 861.1751 & -861.1751 \\ -1435.2918 & 1435.2918 & -861.1751 & 861.1751 \\ 861.1751 & -861.1751 & 516.7051 & -516.7051 \\ -861.1751 & 861.1751 & -516.7051 & 516.7051 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.00025 \\ 0 \\ -0.11294 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 97.6184 \\ -97.6184 \\ 58.5711 \\ -58.5711 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_8\} = \begin{bmatrix} 1435.2918 & -1435.2918 & -861.1751 & 861.1751 \\ -1435.2918 & 1435.2918 & 861.1751 & -861.1751 \\ -861.1751 & 861.1751 & 516.7051 & -516.7051 \\ 861.1751 & -861.1751 & -516.7051 & 516.7051 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.00216 \\ 0 \\ -0.11294 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -94.1667 \\ 94.1667 \\ 56.5000 \\ -56.5000 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_9\} = \begin{bmatrix} 1435.2918 & -1435.2918 & 861.1751 & -861.1751 \\ -1435.2918 & 1435.2918 & -861.1751 & 861.1751 \\ 861.1751 & -861.1751 & 516.7051 & -516.7051 \\ -861.1751 & 861.1751 & -516.7051 & 516.7051 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00260 \\ 0 \\ -0.11294 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 93.5327 \\ -93.5327 \\ 56.1196 \\ -56.1196 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{10}\} = \begin{bmatrix} 1435.2918 & -1435.2918 & -861.1751 & 861.1751 \\ -1435.2918 & 1435.2918 & 861.1751 & -861.1751 \\ -861.1751 & 861.1751 & 516.7051 & -516.7051 \\ 861.1751 & -861.1751 & -516.7051 & 516.7051 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.00025 \\ 0 \\ -0.11294 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -96.9080 \\ 96.9080 \\ 58.1448 \\ -58.1448 \end{Bmatrix}$$

Los elementos mecánicos se representan en la siguiente página.



Como puede notarse, el hecho de poner un contraventeo, de sección transversal cajón cuadrado de 5 cm con 0.3 cm de espesor^{20.9}, fue suficiente para disminuir el desplazamiento de entrepiso de -0.74288 m a 0.11294 lo cual significó una disminución aproximada del 84.8 % del desplazamiento lateral.

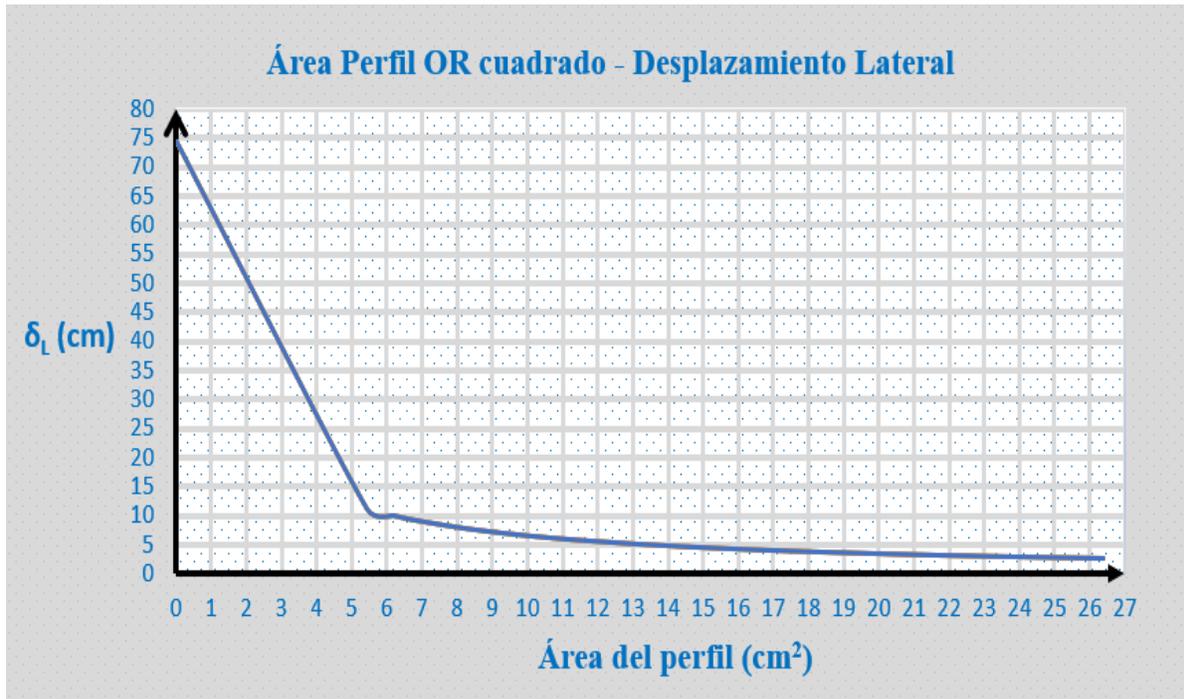
Para fines de diseño estructural sería muy complicado que una sección de un área de 4.4 cm² soporté hasta una carga máxima en compresión de 131.6058 ton y una carga en tensión de 113.8417 ton, por lo que tenga que aumentarse el área de los contraventeos lo suficientemente para que estos puedan soportar debidamente una carga axial de diseño generada después de realizar el análisis estructural con esta nueva área, pero cuidando que no sea tan grande para que los elementos tipo viga – columna no trabajen, porque como fue evidente, los contraventeos aminoran los elementos mecánicos del resto de la estructura.

Las figuras de la siguiente página muestran:

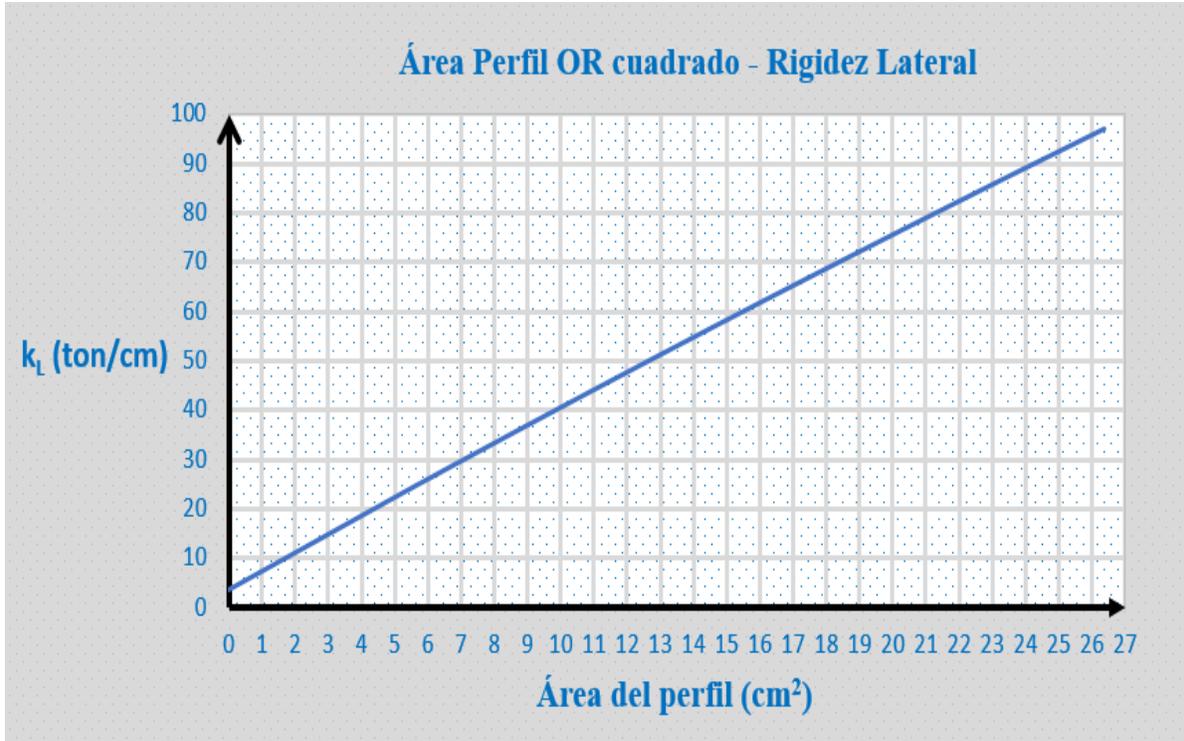
(a) la relación que existe entre el desplazamiento y diferentes perfiles OR dados en el Manual del IMCA y

(b) la rigidez lateral obtenida al dividir la carga lateral entre el valor calculado del desplazamiento en (a).

^{20.9} Medidas con mayor aproximación al perfil OR cuadrado más pequeño presentado en el Manual de Construcción en Acero del IMCA (2019, pág. I-90) cuya designación es 51 x 3.2 (mm x mm)



(a)



(b)

Los perfiles considerados, así como la captura de los datos de las figuras anteriores, se ilustran en la siguiente tabla:

Perfil PTE cuadrado				Desplazamiento lateral δ_L (cm)	Rigidez lateral k_L (ton/cm)
Denominación (mm x mm)		Área (cm ²)			
51	x	3.2	5.42	-11.294	3.634
57	x	3.2	6.17	-10.127	23.906
64	x	3.2	6.90	-9.205	26.662
76	x	3.2	8.39	-7.770	29.333
89	x	3.2	9.94	-6.693	34.751
102	x	3.2	11.42	-5.916	40.341
114	x	3.2	12.90	-5.306	45.635
127	x	3.2	14.39	-4.810	50.889
139	x	3.2	15.87	-4.404	56.137
152	x	3.2	17.42	-4.049	61.311
178	x	3.2	20.39	-3.512	66.689
203	x	3.2	23.35	-3.107	76.880
229	x	3.2	26.39	-2.782	86.895

Es observable la ventaja de utilizar un sistema estructural a base de marcos con contraventeos concéntricos, inclusive al colocar contraventeos de la denominación más pequeña dada por el manual IMCA (OR 5.1 mm x 3.2 mm) se logra disminuir el desplazamiento lateral un 84.8 % en comparación con el sistema de marcos compuesto únicamente por vigas y columnas que es de -0.74288 m; con el perfil con mayor denominación cuyo espesor es de 3.2 mm (OR 229 mm x 3.2 mm) se logra aminorar el desplazamiento lateral hasta un 96.3 %.

Inclusive si el perfil propuesto soportará la carga axial de diseño y pudiera diseñarse lo que conlleva un contraventeo, éste no significa que siempre sea aceptable visto desde la perspectiva del diseño estructural dado que, según el RC-CDMX en sus NTC-Sismo, para verificar la distorsión límite para estructuras de concreto (distorsión de entrepiso) con sistema dual formado por marcos de concreto y contraventeos (concéntricos) metálicos, debe cumplirse una distorsión no mayor a $\gamma_{\max} = 0.01$ cuando $Q = 2$ (Gobierno de la CDMX, 2017, pág. 62).

Para el perfil OR 51 x 3.2 la distorsión es $\gamma = 11.294 \text{ cm}/500 \text{ cm} \cong 0.0226 > \gamma_{\max} = 0.01$, entonces no es aceptable al revisarlo por distorsión de entrepiso, sin embargo, al utilizar un perfil OR 127 x 3.2 se tendría $\gamma = 4.810 \text{ cm}/500 \text{ cm} \cong 0.0096 < \gamma_{\max} = 0.01$ y se aceptaría por distorsión de entrepiso.

Aunque se advirtió que las condiciones de apoyos sin asentamiento son perfectamente idealizados, la condición de contraventeos también lo fueron para el ejercicio anterior dado que hay ocasiones que deben considerarse los efectos térmicos y/o errores de fabricación que pueden presentar los contraventeos como se verá en los siguientes ejemplos.

20.7.3 Inclusión de efectos térmicos y errores de fabricación a contraventeos

Con anterioridad se realizó un análisis estructural con contraventeos, sin embargo, como presenta Hibbeler (Análisis Estructural, 2012, págs. 564-565), los elementos que trabajan únicamente a carga axial (como contraventeos o barras de armaduras) pueden presentar cambios térmicos y/o errores de fabricación provocando un cambio en el vector $\{\delta\}$.

Bajo estas condiciones es posible considerar el aumento o disminución de la longitud de un contraventeo sometido a efectos térmicos mediante:

$$\begin{Bmatrix} F_Y^{(A)} \\ F_Y^{(B)} \\ F_X^{(A)} \\ F_Y^{(B)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} AE\alpha\Delta T \\ -AE\alpha\Delta T \end{Bmatrix} = AE\alpha\Delta T \begin{Bmatrix} \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{Bmatrix} \quad (20.104)$$

Mientras que por errores de fabricación se tiene:

$$\begin{Bmatrix} F_Y^{(A)} \\ F_Y^{(B)} \\ F_X^{(A)} \\ F_Y^{(B)} \end{Bmatrix} = \frac{AE\Delta L}{L} \begin{Bmatrix} \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{Bmatrix} \quad (20.105)$$

La inclusión de estas condiciones se realiza adicionando estas fuerzas al planteamiento matricial conocido de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_D \\ \delta_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_C + F_C^* \\ F_D + F_D^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.106)$$

Siendo:

$\{F_C\}$ = fuerzas generadas asociadas a los grados de libertad debido a errores de fabricación o cambios de temperatura.

$\{F_D\}$ = fuerzas generadas asociadas a los grados de libertad restringidos por un apoyo debido a errores de fabricación o cambios de temperatura.

De igual forma que como se ha hecho en los ejercicios anteriores, es necesario despejar por operaciones de algebra de matrices, el vector δ_D consiguiendo:

$$\{\delta_D\} = -[k_{11}]^{-1} \{ \{F_C\} + \{F_C^*\} + [k_{12}]\{\delta_C\} \} \quad (20.107)$$

A continuación se presentará como cambian los elementos mecánicos del ejemplo 2 (página 744) primero al ser sometida la armadura a errores de fabricación y posteriormente a cambios de temperatura.

20.7.4 Inclusión de efectos térmicos en elementos tipo viga

El doctor Tena Colunga expresa que para los elemento tipo viga los efectos térmicos se presentan en las relaciones existentes entre esfuerzos y deformaciones axiales, así como en los momentos flexionantes (Análisis de Estructuras con Métodos Matriciales, 2007, pág. 125). Bajo

esta mención es posible expresar en el orden $\theta_A, \theta_B, d_y^A, d_y^B, d_x^A$ y d_x^B la inclusión de efectos

térmicos para conseguir $\{M_1 \quad M_2 \quad F_Y^{(A)} \quad F_Y^{(B)} \quad F_X^{(A)} \quad F_X^{(B)}\}^T$ de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{12}}{|f|} & 0 & 0 \\ \frac{f_{12}L - f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L^2 - 2f_{12}L + f_{22}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & 0 & 0 \\ \frac{f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & 0 & 0 \\ -\frac{f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}L - f_{12}}{|f|} & -\frac{f_{11}}{|f|} & \frac{f_{11}}{|f|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{f_{33}} & -\frac{1}{f_{33}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{f_{33}} & \frac{1}{f_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ d_y^A \\ d_y^B \\ d_x^A \\ d_x^B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -M_{TZ} \\ M_{TZ} \\ 0 \\ 0 \\ P_{TX} \\ -P_{TX} \end{Bmatrix} \quad (20.108)$$

Siendo para este caso:

$$M_{TZ} = \alpha E \Delta T \int_A y \, dA \quad (20.109)$$

$$P_{TX} = \alpha E \Delta T \int_A dA \quad (20.110)$$

Para una sección transversal rectangular, como la que se tratara en el siguiente ejemplo, se obtiene la siguiente matriz con efectos térmicos:

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} \frac{(1+c)}{(1+4c)} & \frac{2EI}{L} \frac{(1-2c)}{(1+4c)} & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} \frac{(1-2c)}{(1+4c)} & \frac{4EI}{L} \frac{(1+c)}{(1+4c)} & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & -\frac{12EI}{L^3(1+4c)} & 0 & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & -\frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ d_y^A \\ d_y^B \\ d_x^A \\ d_x^B \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{\alpha E \Delta T b h^2}{2} \\ \frac{\alpha E \Delta T b h^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \alpha E \Delta T b h \\ -\alpha E \Delta T b h \end{Bmatrix} \quad (20.111)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad A = bh$$

20.7.5 Ejemplo 3: marco de dos crujiás y un nivel con contraventeos concéntricos sometido a carga lateral y efectos térmicos

Instrucciones: resolver el marco del ejemplo 2 (pág. 744) considerando efectos de deformación térmica. Considere un coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 1.2 \times 10^{-5} \text{°C}^{-1}$ para el acero y el concreto, además tome en cuenta un cambio de temperatura de $\Delta T = 30 \text{°C}$ (por lo tanto $\alpha \Delta T = 0.00036$).

Hasta este punto se conoce la matriz de rigidez, por lo que debe modificarse el vector de desplazamientos para considerar los efectos térmicos en la estructura.

Como se recuerda, es posible determinar los desplazamientos mediante $\{\delta_D\} = -[k_{11}]^{-1}\{\{F_C\} + \{F_C^*\} + [k_{12}]\{\delta_C\}\}$ de presentarse errores de fabricación y/o efectos térmicos. Entonces la expresión para calcular los desplazamientos de la estructura en estudio es:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} = -[k_{11}]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 270 \end{Bmatrix} + \{F_C^*\} + [k_{12}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.112)$$

Para determinar $\{F_C^*\}$ y $\{\delta_C\}$ debe considerarse las fuerzas y momentos provocadas por efectos térmicos dadas las ecuaciones 20.104 y 20.111. Al desarrollar, sabiendo que el módulo de elasticidad del acero es $5\sqrt{3}$ veces mayor que el módulo de elasticidad del concreto se tiene:

$$\{F_C^*\} = \alpha\Delta TE \left\{ \begin{array}{c} \frac{(0.3)(0.3)^2}{2} - \frac{(0.15)(0.3)^2}{2} \\ \frac{(0.15)(0.3)^2}{2} - \frac{(0.15)(0.3)^2}{2} \\ \frac{(0.4)(0.4)^2}{2} + \frac{(0.15)(0.3)^2}{2} - \frac{(0.15)(0.3)^2}{2} \\ \frac{(0.3)(0.3)^2}{2} + \frac{(0.15)(0.3)^2}{2} \\ -(0.3)(0.3) - 5\sqrt{3}(0.000542) \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) \\ 0 \\ 0 \\ -(0.4)(0.4) - (2)5\sqrt{3}(0.000542) \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) \\ -(0.3)(0.3) - 5\sqrt{3}(0.000542) \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) \\ 0 \end{array} \right\} = \alpha\Delta TE \left\{ \begin{array}{c} 0.00675 \\ 0 \\ 0.032 \\ 0.02025 \\ -0.09402 \\ 0 \\ 0 \\ -0.16805 \\ -0.09402 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (20.113)$$

Desarrollando con $\alpha\Delta T = 0.00036$ y $E = 140000\sqrt{300}$:

$$\{F_C^*\} = \left\{ \begin{array}{c} 5.8924 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 27.9345 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 17.6773 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -82.0745 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \\ -146.6999 \text{ ton} \\ -82.0751 \text{ ton} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (20.114)$$

Finalmente el valor del vector de desplazamientos desconocidos es:

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{array} \right\} = -[k_{11}]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 270 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 5.8924 \\ 0 \\ 27.9345 \\ 17.6773 \\ -82.0745 \\ 0 \\ 0 \\ -146.6999 \\ -82.0751 \\ 0 \end{array} \right\} + [k_{12}] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0.02664 \text{ rad} \\ 0.02344 \text{ rad} \\ 0.02024 \text{ rad} \\ 0.00648 \text{ rad} \\ -0.00026 \text{ m} \\ 0.03730 \text{ m} \\ -0.03110 \text{ m} \\ 0.00166 \text{ m} \\ 0.00419 \text{ m} \\ -0.10866 \text{ m} \end{array} \right\} \quad (20.115)$$

Al calcular los elementos mecánicos con los desplazamientos y rotaciones obtenidos se obtiene:

$$\{F_1\} = [k_1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.02664 \\ 0 \\ -0.00026 \\ 0 \\ -0.10866 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -11.7849 \\ 11.7849 \\ 78.5658 \\ -78.5658 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -36.8622 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 4.1469 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 89.7037 \text{ ton} \\ -89.7037 \text{ ton} \\ 6.5431 \text{ ton} \\ -6.5431 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.116)$$

$$\{F_2\} = [k_2] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00648 \\ 0 \\ 0.00419 \\ 0 \\ -0.10866 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -11.7849 \\ 11.7849 \\ 78.5658 \\ -78.5658 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -49.8577 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -22.0471 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -104.3455 \text{ ton} \\ 104.3455 \text{ ton} \\ 14.3810 \text{ ton} \\ -14.3810 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.117)$$

$$\{F_3\} = [k_3] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.02024 \\ 0 \\ 0.00166 \\ 0 \\ -0.10866 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -27.9345 \\ 27.9345 \\ 139.6726 \\ -139.6726 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -119.6628 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -21.9169 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 11.0050 \text{ ton} \\ -11.0050 \text{ ton} \\ 28.3159 \text{ ton} \\ -28.3159 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.118)$$

$$\{F_4\} = [k_4] \begin{Bmatrix} 0.02664 \\ 0.02344 \\ -0.00026 \\ 0.03730 \\ -0.10866 \\ -0.10866 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5.8924 \\ 5.8924 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.1469 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 4.1469 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.119)$$

$$\{F_5\} = [k_5] \begin{Bmatrix} 0.02344 \\ 0.02024 \\ -0.03110 \\ 0.00166 \\ -0.10866 \\ -0.10866 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5.8924 \\ 5.8924 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.1469 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 4.1469 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.120)$$

$$\{F_6\} = [k_6] \begin{Bmatrix} 0.02024 \\ 0.00648 \\ 0.00166 \\ 0.00419 \\ -0.10866 \\ -0.10866 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -5.8924 \\ 5.8924 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17.7700 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 22.0471 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 13.2724 \text{ ton} \\ -13.2724 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.121)$$

Para las barras 7 a 10 se tiene:

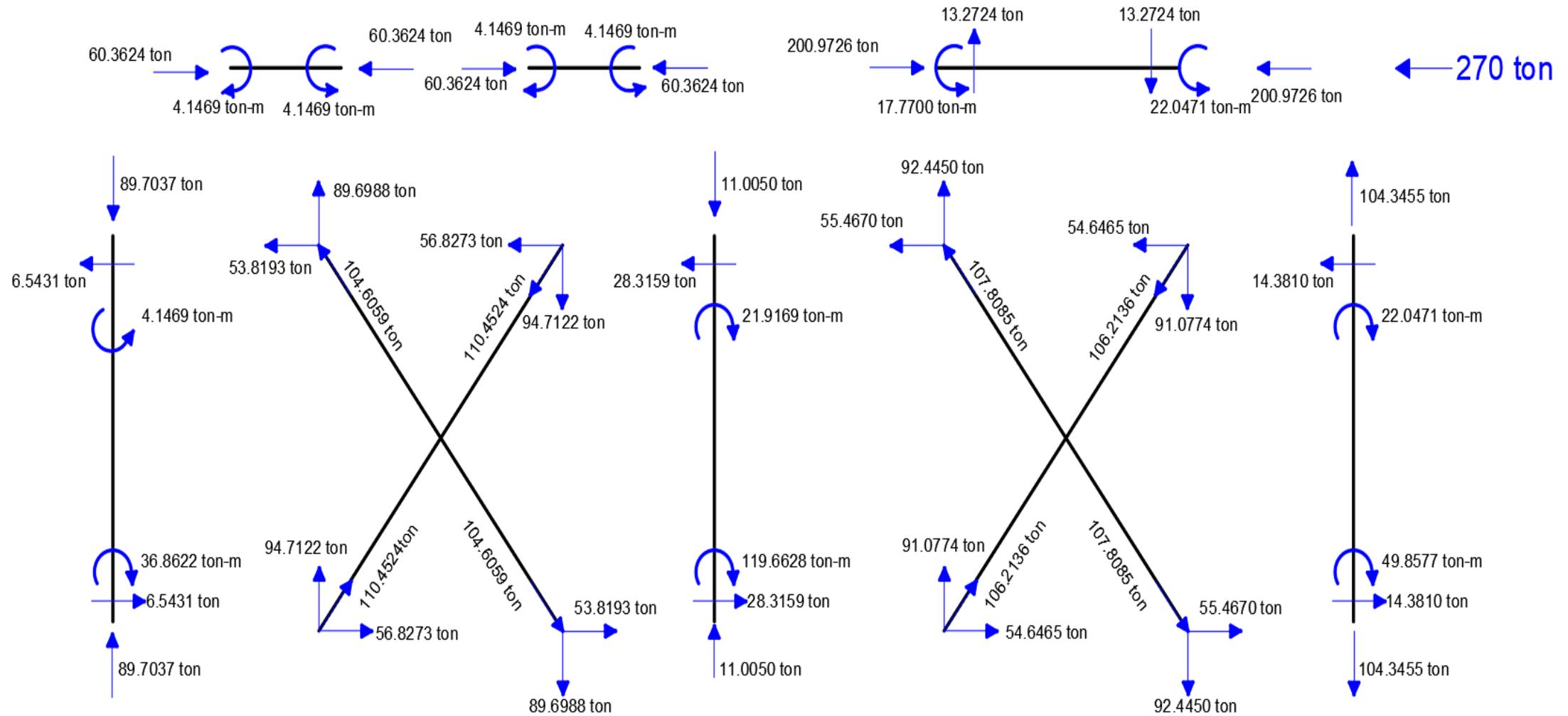
$$\{F_7\} = [k_7] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00166 \\ 0 \\ -0.10866 \end{Bmatrix} + (1.2 \times 10^{-5} \text{°C}^{-1})(30 \text{°C})(0.001936)(2.1 \times 10^7) \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 5 \\ -\frac{5}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 94.7122 \\ -94.7122 \\ 56.8273 \\ -56.8273 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_8\} = [k_8] \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.00026 \\ 0 \\ -0.10866 \end{Bmatrix} + (1.2 \times 10^{-5} \text{°C}^{-1})(30 \text{°C})(0.001936)(2.1 \times 10^7) \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 5 \\ -\frac{5}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -89.6988 \\ 89.6988 \\ 53.8193 \\ -53.8193 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_9\} = [k_9] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00419 \\ 0 \\ -0.10866 \end{Bmatrix} + (1.2 \times 10^{-5} \text{°C}^{-1})(30 \text{°C})(0.001936)(2.1 \times 10^7) \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 5 \\ -\frac{5}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 91.0774 \\ -91.0774 \\ 54.6465 \\ -54.6465 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{10}\} = [k_{10}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00166 \\ 0 \\ -0.10866 \end{Bmatrix} + (1.2 \times 10^{-5} \text{°C}^{-1})(30 \text{°C})(0.001936)(2.1 \times 10^7) \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 5 \\ -\frac{5}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -92.4450 \\ 92.4450 \\ 55.4670 \\ -55.4670 \end{Bmatrix}$$

Los elementos mecánicos finales se representan en la siguiente página.



20.7.6 Ejemplo 4: marco de dos crujiás y un nivel con contraventeos concéntricos que presentan errores de fabricación sometido a carga lateral

Instrucciones: resolver el marco del ejemplo 2 (página 744) considerando que los elementos tipo contraventeo se hicieron 2 cm más chicos de lo estipulado ($\Delta L = -0.02\text{cm}$).

Hasta este punto se conoce la matriz de rigidez, por lo que debe modificarse el vector de desplazamientos para considerar los efectos de acortamiento en las barras.

Como se recuerda, es posible determinar los desplazamientos mediante $\{\delta_D\} = -[k_{11}]^{-1}\{\{F_C\} + \{F_C^*\} + [k_{12}]\{\delta_C\}\}$ de presentarse errores de fabricación y/o efectos térmicos. Entonces la expresión para calcular los desplazamientos de la estructura en estudio es:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} = -[k_{11}]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 270 \end{Bmatrix} + \{F_C^*\} + [k_{12}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.122)$$

Para determinar $\{F_C^*\}$ y $\{\delta_C\}$ debe considerarse las fuerzas axiales debidas a errores de fabricación (ecuación 20.105):

$$\{F_C^*\} = \frac{(0.000542)(2.1 \times 10^7)(-0.02)}{\sqrt{34}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) \\ 0 \\ 0 \\ -\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) - \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) \\ -\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 33.4765 \\ 0 \\ 0 \\ 66.9529 \\ 33.4765 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.123)$$

Finalmente el valor del vector de desplazamientos desconocidos es:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} = -[k_{11}]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 270 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 33.4765 \\ 0 \\ 0 \\ 66.9529 \\ 33.4765 \\ 0 \end{Bmatrix} + [k_{12}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.03245 \text{ rad} \\ 0.02923 \text{ rad} \\ 0.02601 \text{ rad} \\ 0.01346 \text{ rad} \\ -0.00290 \text{ m} \\ 0.04336 \text{ m} \\ -0.04251 \text{ m} \\ -0.00108 \text{ m} \\ 0.00186 \text{ m} \\ -0.11295 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (20.124)$$

Al calcular los elementos mecánicos con los desplazamientos y rotaciones obtenidos se obtiene:

$$\{F_1\} = [k_1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.03245 \\ 0 \\ -0.00290 \\ 0 \\ -0.11295 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -22.9985 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -1.7556 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 126.5829 \text{ ton} \\ -126.5829 \text{ ton} \\ 4.9508 \text{ ton} \\ -4.9508 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.125)$$

$$\{F_2\} = [k_2] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.01346 \\ 0 \\ 0.00186 \\ 0 \\ -0.11295 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -35.2355 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -26.4209 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -81.0239 \text{ ton} \\ 81.0239 \text{ ton} \\ 12.3313 \text{ ton} \\ -12.3313 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.126)$$

$$\{F_3\} = [k_3] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.02601 \\ 0 \\ -0.00108 \\ 0 \\ -0.11295 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -85.3321 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -31.5109 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 83.7505 \text{ ton} \\ -83.7505 \text{ ton} \\ 23.3686 \text{ ton} \\ -23.3686 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.127)$$

$$\{F_4\} = [k_4] \begin{Bmatrix} 0.03245 \\ 0.02923 \\ -0.00290 \\ 0.04336 \\ -0.11295 \\ -0.11295 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.7556 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -1.7556 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.128)$$

$$\{F_5\} = [k_5] \begin{Bmatrix} 0.02923 \\ 0.02601 \\ -0.04251 \\ -0.00108 \\ -0.11295 \\ -0.11295 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.7556 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -1.7566 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.129)$$

$$\{F_6\} = [k_6] \begin{Bmatrix} 0.02601 \\ 0.01346 \\ -0.00108 \\ -0.00186 \\ -0.11295 \\ -0.11295 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 33.2666 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 26.4209 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 19.8958 \text{ ton} \\ -19.8958 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.130)$$

Para las barras 7 a 10 se tiene:

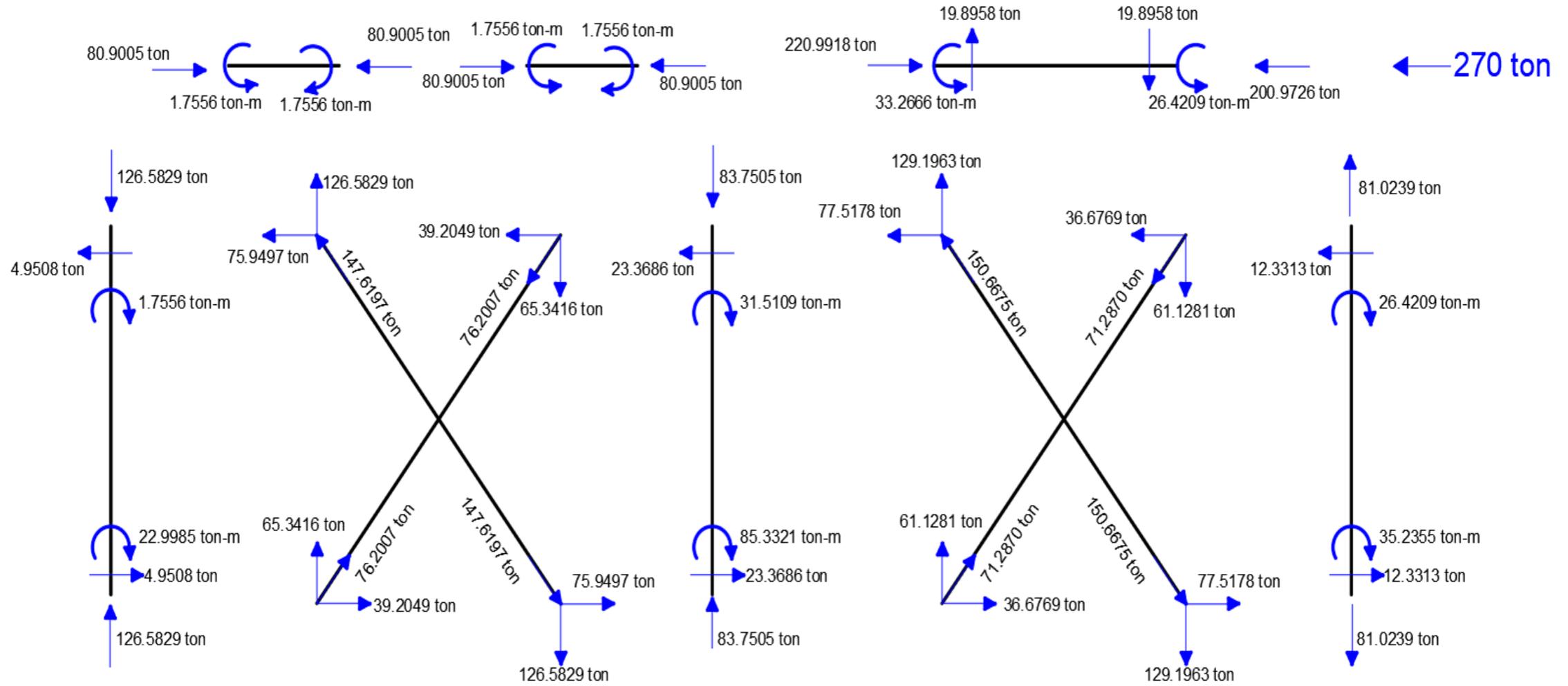
$$\{F_7\} = [k_7] \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.00108 \\ 0 \\ -0.11295 \end{Bmatrix} + \frac{(0.000542)(2.1 \times 10^7)(-0.02)}{\sqrt{34}} \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 5 \\ -\frac{5}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 65.3416 \\ -65.3416 \\ 39.2049 \\ -39.2049 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_8\} = [k_8] \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.00290 \\ 0 \\ -0.11295 \end{Bmatrix} + \frac{(0.000542)(2.1 \times 10^7)(-0.02)}{\sqrt{34}} \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 5 \\ -\frac{5}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -126.5829 \\ 126.5829 \\ 75.9497 \\ -75.9497 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_9\} = [k_9] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00186 \\ 0 \\ -0.11295 \end{Bmatrix} + \frac{(0.000542)(2.1 \times 10^7)(-0.02)}{\sqrt{34}} \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ 5 \\ -\frac{5}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 61.1281 \\ -61.1281 \\ 36.6769 \\ -36.6769 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{10}\} = [k_{10}] \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.00108 \\ 0 \\ -0.11295 \end{Bmatrix} + \frac{(0.000542)(2.1 \times 10^7)(-0.02)}{\sqrt{34}} \begin{Bmatrix} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ -\frac{5}{\sqrt{34}} \\ 3 \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -129.1963 \\ 129.1963 \\ 77.5178 \\ -77.5178 \end{Bmatrix}$$

Los elementos mecánicos se representan en la siguiente página.



20.7.7 Ejemplo 5: marco de dos crujeías y un nivel con considerando muros de cortante para idealizar el modelo esquelético

Instrucciones: resolver el marco del ejemplo 4 planteando las columnas 1 y 2 como muros de 1.5 y la columna 3 como un muro de 1 metro. Considere módulo de elasticidad de $E = 140000\sqrt{300}$ ton/cm² y una relación de poisson con valor de $\nu = 0.2$.

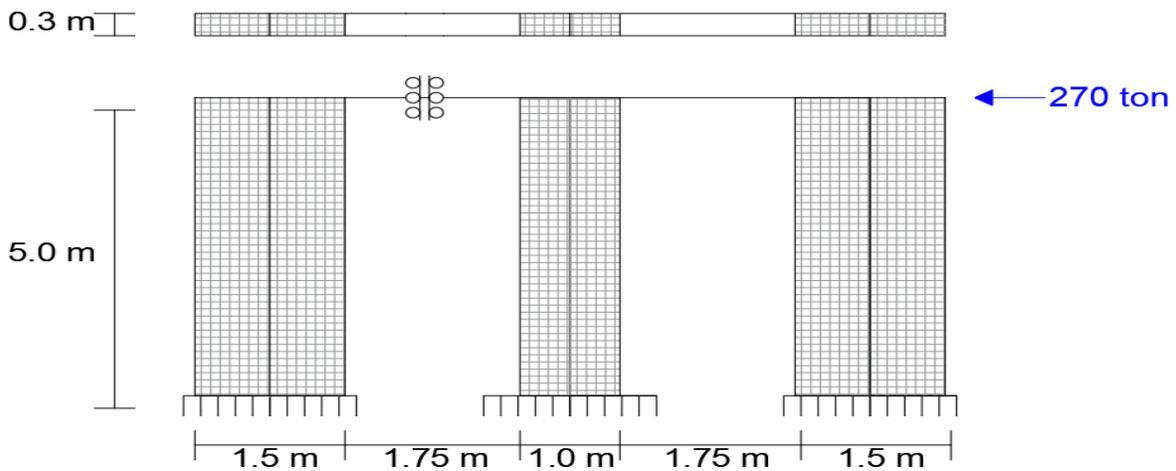
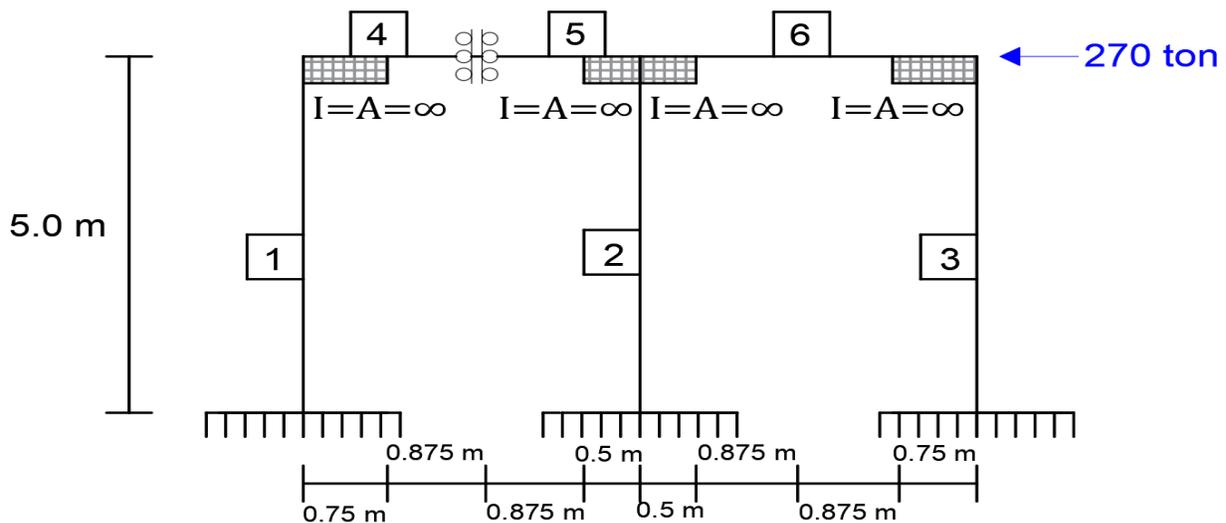


Figura XX.15. Ejemplo 5 de elemento de sección de marcos con sistema de contraventeos o muros de cortante

Se plantea el siguiente modelo esquelético con la misma numeración de grados de libertad de los ejercicios anteriores:



Para las matrices de rigidez de los elementos 1 y 3 se utilizan los siguientes valores alusivos a las secciones:

$$I = \frac{(0.3\text{m})(1.5\text{m})^3}{12} = 0.08438\text{m}^4 \qquad A = (0.3\text{m})(1.5\text{m}) = 0.45\text{m}^2$$

$$c = \frac{6(1 + \nu)kI}{AL^2} = \frac{6(1 + 0.2)(1.2)(0.08438\text{m}^4)}{(0.45\text{m}^2)(5\text{m})^2} = 0.06480$$

$$[k_1] = \begin{array}{cccccc} \begin{array}{c} 11 \\ 1 \\ 14 \\ 5 \\ 17 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 14 \\ 5 \\ 17 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 14 \\ 1 \\ 14 \\ 5 \\ 17 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 14 \\ 5 \\ 17 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 17 \\ 1 \\ 14 \\ 5 \\ 17 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 10 \\ 1 \\ 14 \\ 5 \\ 17 \\ 10 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 138409.45651 & 56570.05585 & 0 & 0 & -38995.90247 & 38995.90247 \\ 56570.05585 & 138409.45651 & 0 & 0 & -38995.90247 & 38995.90247 \\ 0 & 0 & 218238.40175 & -218238.40175 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -218238.40175 & 218238.40175 & 0 & 0 \\ -38995.90247 & -38995.90247 & 0 & 0 & 15598.36099 & -15598.36099 \\ 38995.90247 & 38995.90247 & 0 & 0 & -15598.36099 & 15598.36099 \end{array} \right] \end{array}$$

$$[k_2] = \begin{array}{cccccc} \begin{array}{c} 13 \\ 4 \\ 16 \\ 9 \\ 19 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 16 \\ 9 \\ 19 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 16 \\ 4 \\ 16 \\ 9 \\ 19 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 9 \\ 4 \\ 16 \\ 9 \\ 19 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 19 \\ 4 \\ 16 \\ 9 \\ 19 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 10 \\ 4 \\ 16 \\ 9 \\ 19 \\ 10 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 138409.45651 & 56570.05585 & 0 & 0 & -38995.90247 & 38995.90247 \\ 56570.05585 & 138409.45651 & 0 & 0 & -38995.90247 & 38995.90247 \\ 0 & 0 & 218238.40175 & -218238.40175 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -218238.40175 & 218238.40175 & 0 & 0 \\ -38995.90247 & -38995.90247 & 0 & 0 & 15598.36099 & -15598.36099 \\ 38995.90247 & 38995.90247 & 0 & 0 & -15598.36099 & 15598.36099 \end{array} \right] \end{array}$$

Para la sección 3:

$$I = \frac{(0.3\text{m})(1\text{m})^3}{12} = 0.025\text{m}^4 \qquad A = (0.3\text{m})(1\text{m}) = 0.3\text{m}^2$$

$$c = \frac{6(1 + \nu)kI}{AL^2} = \frac{6(1 + 0.2)(1.2)(0.025\text{m}^4)}{(0.3\text{m}^2)(5\text{m})^2} = 0.02880$$

$$[k_3] = \begin{array}{cccccc} \begin{array}{c} 12 \\ 3 \\ 15 \\ 8 \\ 18 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 15 \\ 8 \\ 18 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 15 \\ 3 \\ 15 \\ 8 \\ 18 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 8 \\ 3 \\ 15 \\ 8 \\ 18 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 18 \\ 3 \\ 15 \\ 8 \\ 18 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{c} 10 \\ 3 \\ 15 \\ 8 \\ 18 \\ 10 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 44740.09001 & 20491.37871 & 0 & 0 & -13046.29374 & 13046.29374 \\ 20491.37871 & 44740.09001 & 0 & 0 & -13046.29374 & 13046.29374 \\ 0 & 0 & 145492.26784 & -145492.26784 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -145492.26784 & 145492.26784 & 0 & 0 \\ -13046.29374 & -13046.29374 & 0 & 0 & 5218.51750 & -5218.51750 \\ 13046.29374 & 13046.29374 & 0 & 0 & -5218.51750 & 5218.51750 \end{array} \right] \end{array}$$

Para la sección 4:

$$I = \frac{(0.3\text{m})(0.15\text{ m})^3}{12} = 0.00034\text{ m}^4 \qquad A = (0.3\text{m})(0.15\text{m}) = 0.045\text{ m}^2$$

$$c = \frac{6(1 + \nu)kI}{A(L')^2} = \frac{6(1 + 0.2)(1.2)(0.00034\text{ m}^4)}{(0.045\text{ m}^2)(0.875\text{m})^2} = 0.08526$$

$$\alpha = \frac{0.75\text{m}}{0.875\text{m}} = 0.85714 \qquad \beta = \frac{0}{0.875\text{m}} = 0$$

$$[k_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 10 & 10 \\ 16379.07151 & 4757.50038 & 24152.65359 & -24152.65359 & 0 & 0 \\ 4754.50038 & 3031.55242 & 8898.34606 & -8898.34606 & 0 & 0 \\ 24152.65359 & 8898.34606 & 37772.57103 & -37772.57103 & 0 & 0 \\ -24152.65359 & -8898.34606 & -37772.57103 & 37772.57103 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 124707.65814 & -124707.65814 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -124707.65814 & 124707.65814 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \\ 10 \end{matrix}$$

Para la sección 5:

$$I = \frac{(0.3\text{m})(0.15\text{ m})^3}{12} = 0.00034\text{ m}^4 \qquad A = (0.3\text{m})(0.15\text{m}) = 0.045\text{ m}^2$$

$$c = \frac{6(1 + \nu)kI}{A(L')^2} = \frac{6(1 + 0.2)(1.2)(0.00034\text{ m}^4)}{(0.045\text{ m}^2)(0.875\text{m})^2} = 0.08526$$

$$\alpha = \frac{0}{0.875\text{m}} = 0 \qquad \beta = \frac{0.5\text{ m}}{0.875\text{m}} = 0.57143$$

$$[k_5] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 8 & 10 & 10 \\ 3031.55242 & 3556.64610 & 7529.36974 & -7529.36974 & 0 & 0 \\ 3556.64610 & 10560.92217 & 16134.36374 & -16134.36374 & 0 & 0 \\ 7529.36974 & 16134.36374 & 27044.26683 & -27044.26683 & 0 & 0 \\ -7529.36974 & -16134.36374 & -27044.26683 & 27044.26683 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 124707.65814 & -124707.65814 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -124707.65814 & 124707.65814 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 10 \end{matrix}$$

$[k_{11}]$

$$= \begin{bmatrix} 154788.5280 & 4754.5004 & 0 & 0 & 24152.6536 & -24152.6536 & 0 & 0 & 0 & 38995.9025 \\ 4754.5004 & 6063.1048 & 3556.6461 & 0 & 8898.3461 & -8898.3461 & 7529.3697 & -7529.3697 & 0 & 0 \\ 0 & 3556.6461 & 58962.7815 & 3307.2102 & 0 & 0 & 16134.3637 & -12152.0898 & -3982.2740 & 13046.2937 \\ 0 & 0 & 3307.2102 & 143338.3130 & 0 & 0 & 0 & 4706.3238 & -4706.3238 & 38995.9025 \\ 24152.6536 & 8898.3461 & 0 & 0 & 256010.9728 & -37772.5710 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24152.6536 & -8898.3461 & 0 & 0 & -37772.5710 & 37772.5710 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7529.3697 & 16134.3637 & 0 & 0 & 0 & 27044.2668 & -27044.2668 & 0 & 0 \\ 0 & -7529.3697 & -12152.0898 & 4706.3238 & 0 & 0 & -27044.2668 & 177501.4477 & -4964.9130 & 0 \\ 0 & 0 & -3982.2740 & -4706.3238 & 0 & 0 & 0 & -4964.9130 & 223203.3148 & 0 \\ 38995.9025 & 0 & 13046.2937 & 38995.9025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36415.2395 \end{bmatrix}$$

$$[k_{21}] = \begin{bmatrix} 56570.0559 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38995.9025 \\ 0 & 0 & 20491.3787 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13046.2937 \\ 0 & 0 & 0 & 56570.0559 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38995.9025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -218238.4018 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -145492.2678 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -218238.4018 & 0 \\ -38995.9025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15598.3610 \\ 0 & 0 & -13046.2937 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5218.5175 \\ 0 & 0 & 0 & -38995.9025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15598.3610 \end{bmatrix}$$

$$[k_{12}] = [k_{21}]^T$$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} 138409.4565 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -38995.9025 & 0 & 0 \\ 0 & 44740.0900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13046.2937 & 0 \\ 0 & 0 & 138409.4565 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -38995.9025 \\ 0 & 0 & 0 & 218238.4018 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 145492.2678 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 218238.4018 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -38995.9025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15598.3610 & 0 & 0 \\ 0 & -13046.2937 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5218.5175 & 0 \\ 0 & 0 & -38995.9025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15598.3610 \end{bmatrix}$$

La determinación de los valores de los grados de libertad se determina únicamente con $\{\delta_D\} = -[k_{11}]^{-1}\{F_C\}$ dado que no existen $\{\delta_C\} = \{0\}$. Al desarrollar se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} = -[k_{11}]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 270 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.00649 \text{ rad} \\ 0.00617 \text{ rad} \\ 0.00585 \text{ rad} \\ 0.00616 \text{ rad} \\ 0.00000 \text{ m} \\ 0.00561 \text{ m} \\ -0.00555 \text{ m} \\ -0.00034 \text{ m} \\ 0.00023 \text{ m} \\ -0.02305 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (20.131)$$

Los elementos mecánicos obtenidos son los siguientes:

$$\{F_1\} = [k_1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00649 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.02305 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -531.7063 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -0.3025 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 106.4018 \text{ ton} \\ -106.4018 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.132)$$

$$\{F_2\} = [k_2] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00616 \\ 0 \\ 0.00023 \\ 0 \\ -0.02305 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -550.7966 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -47.0106 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -49.4410 \text{ ton} \\ 49.4410 \text{ ton} \\ 119.5615 \text{ ton} \\ -119.5615 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.133)$$

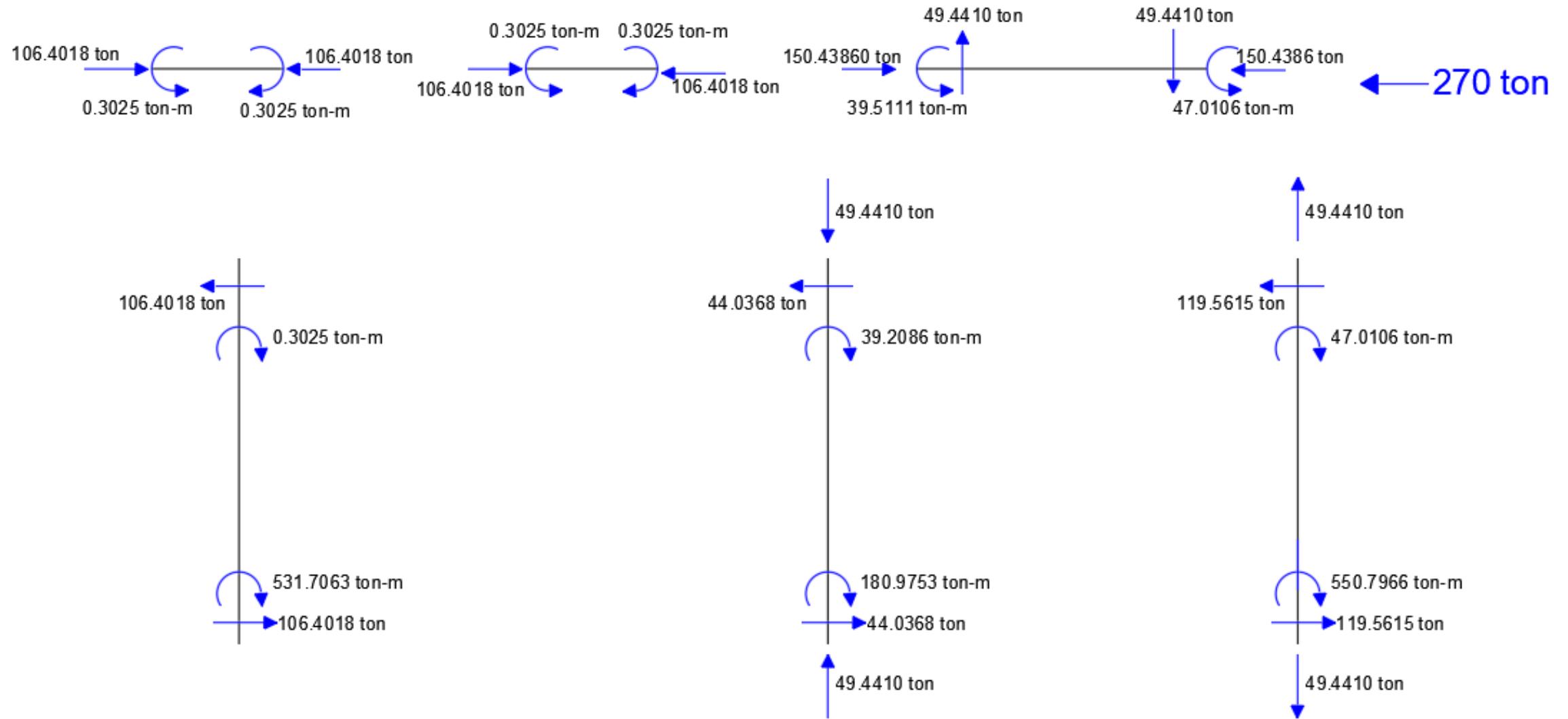
$$\{F_3\} = [k_3] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.00585 \\ 0 \\ -0.00034 \\ 0 \\ -0.02305 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -180.9753 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -39.2086 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 49.4410 \text{ ton} \\ -49.4410 \text{ ton} \\ 44.0368 \text{ ton} \\ -44.0368 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.134)$$

$$\{F_4\} = [k_4] \begin{Bmatrix} 0.00649 \\ 0.00617 \\ 0 \\ 0.00561 \\ -0.02305 \\ -0.02305 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3025 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -0.3025 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.135)$$

$$\{F_5\} = [k_5] \begin{Bmatrix} 0.00617 \\ 0.00585 \\ -0.00555 \\ -0.00034 \\ -0.02305 \\ -0.02305 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3025 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -0.3025 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.136)$$

$$\{F_6\} = [k_6] \begin{Bmatrix} 0.00585 \\ 0.00616 \\ -0.00034 \\ 0.00023 \\ -0.02305 \\ -0.02305 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 39.5111 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 47.0106 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 49.4410 \text{ ton} \\ -49.4410 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.137)$$

Los elementos mecánicos se representan en la siguiente página.



Como es observable los elementos mecánicos de mayor magnitud se concentraron en las columnas que idealizan los muros, dentro del modelo esqueleto, de mayores proporciones además de que ayudó favorablemente a disminuir el desplazamiento lateral, en comparación con el marco del ejemplo 1 en un 96.9 %.

Para revisión de distorsión de entrepiso se acepta dentro del RC-CDMX dentro de las NTC – Sismo que un sistema dual formado por marcos de concreto y muros de concreto (para este caso muro cortante) tenga una $\gamma_{\max} = 0.01$. Con el uso de muro de cortante para este ejercicio se cumple este parámetro dado que $\gamma = 0.02305 \text{ m}/5 \text{ m} = 0.0046 < \gamma_{\max} = 0.01$.

Aunque los muros de cortante son una opción para aminorar el desplazamiento lateral y disminuir el valor de los elementos mecánicos en otros elementos estructurales como vigas, columnas o contraventeos debe considerar que, además de las desventajas mencionadas con anterioridad (página 678), desde el punto de vista del diseño estructural la magnitud de los momentos y fuerzas cortantes y axiales hacen una tarea difícil el tener que diseñar estos elementos para permanecer dentro del rango elástico (Tena Colunga, 2007, pág. 238).

20.8 Ejemplos de Aplicación Sobre Apoyos Elásticos

20.8.1 Ejemplo 1: resolver el siguiente marco

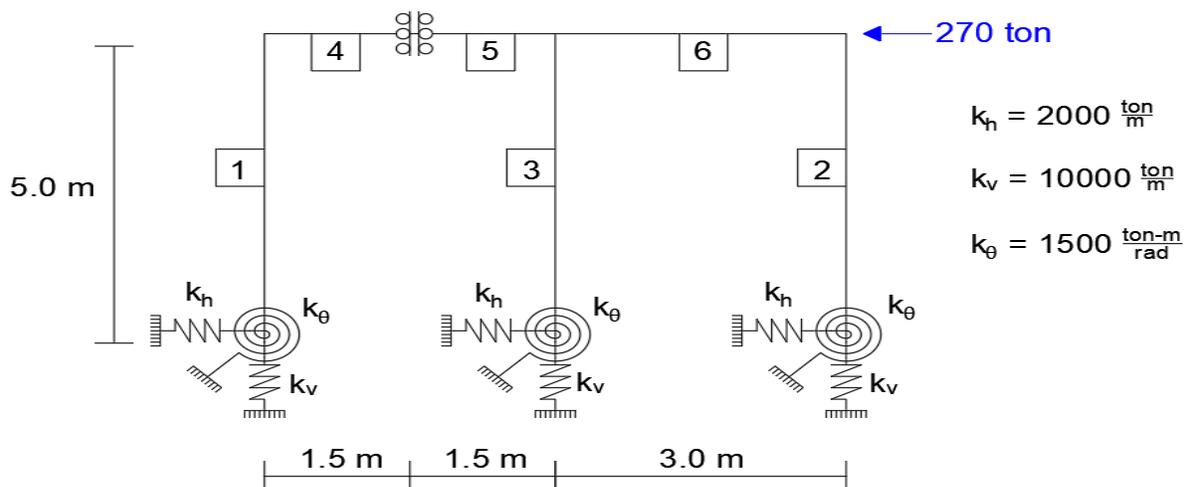


Figura XX.16. Ejemplo 1 de marcos sobre apoyos elásticos.

Este marco es la estructura del ejemplo 1 de marcos con contraventeos o muros de cortante, por lo cual es conocida su matriz de rigidez en coordenadas globales (página 740).

Para considerar la rigidez de los apoyos elásticos es necesario sumar el valor de k_h , k_v y k_θ , en coordenadas globales de tal forma que su valor sea añadido al grado de libertad correspondiente, es decir, k_θ , debe sumarse a los G.D.L. 11 a 13; k_v se añade en los G.D.L. 14 a 16 y k_h se añade en los G.D.L. 17 a 19. De acuerdo con lo mencionado las matrices de rigidez $[k_{11}]$, $[k_{21}]$ y $[k_{12}]$ son las mismas mientras que $[k_{22}]$ se cambia a:

$$\begin{bmatrix} 2799.3528 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -388.7981 & 0 & 0 \\ 0 & 5582.2722 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1219.0642 & 0 \\ 0 & 0 & 2799.3528 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -388.7981 \\ 0 & 0 & 0 & 53647.6804 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 87595.8762 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 53647.6804 & 0 & 0 & 0 \\ -388.7981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2155.5192 & 0 & 0 \\ 0 & -1219.0642 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2487.6257 & 0 \\ 0 & 0 & -388.7981 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2155.5192 \end{bmatrix}$$

Para determinar el vector de desplazamientos, aun cuando no existe asentamiento directo en los nodos, debe considerarse la matriz que contiene a todas las submatrices para resolver el planteamiento $[k]\{\Delta\} + \{F\} = \{0\}$ por el hecho de que un apoyo elastico provee un valor de asentamiento. Por lo descrito con anterioridad el vector de desplazamiento se obtiene mediante:

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_D \\ \delta_C \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_C \\ F_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.138)$$

De lo cual se deduce que los desplazamientos se obtienen con:

$$\begin{Bmatrix} \delta_D \\ \delta_C \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_C \\ F_D \end{Bmatrix} \quad (20.139)$$

Al desarrollar la operación anterior se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \delta_{13} \\ \delta_{14} \\ \delta_{15} \\ \delta_{16} \\ \delta_{17} \\ \delta_{18} \\ \delta_{19} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.35751 \text{ rad} \\ 0.30250 \text{ rad} \\ 0.24748 \text{ rad} \\ 0.14751 \text{ rad} \\ 0.00000 \text{ m} \\ 0.495 \text{ m} \\ -0.43431 \text{ m} \\ -0.02183 \text{ m} \\ 0.02377 \text{ m} \\ -1.49658 \text{ m} \\ 0.12256 \text{ rad} \\ 0.22397 \text{ rad} \\ 0.16677 \text{ rad} \\ 0.00000 \text{ m} \\ -0.01934 \text{ m} \\ 0.01934 \text{ m} \\ -0.02139 \text{ m} \\ -0.06232 \text{ m} \\ -0.05129 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (20.140)$$

Las matrices $[k_1]$ a $[k_6]$ son las mismas que en el ejemplo 1 de marcos con contraventeos o muros (página 737) por lo que los elementos mecánicos son calculados mediante:

$$\{F_1\} = [k_1] \begin{Bmatrix} 0.12256 \\ 0.35751 \\ 0.00000 \\ 0.00000 \\ -0.02139 \\ -1.49658 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -183.8394 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -30.0145 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 42.7708 \text{ ton} \\ -42.7708 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.141)$$

$$\{F_2\} = [k_2] \begin{Bmatrix} 0.16677 \\ 0.14751 \\ 0.01934 \\ 0.02377 \\ -0.05129 \\ -1.49658 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -250.1483 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -262.7570 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -193.3537 \text{ ton} \\ 193.3537 \text{ ton} \\ 102.5811 \text{ ton} \\ -102.5811 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.142)$$

$$\{F_3\} = [k_3] \begin{Bmatrix} 0.22397 \\ 0.24748 \\ -0.01934 \\ -0.02183 \\ -0.06232 \\ -1.49658 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -335.9511 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -287.2896 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 193.3537 \text{ ton} \\ -193.3537 \text{ ton} \\ 124.6482 \text{ ton} \\ -124.6482 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.143)$$

$$\{F_4\} = [k_4] \begin{Bmatrix} 0.35751 \\ 0.30250 \\ 0.00000 \\ 0.49500 \\ -1.49658 \\ -1.49658 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30.0145 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -30.0145 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.144)$$

$$\{F_5\} = [k_5] \begin{Bmatrix} 0.30250 \\ 0.24748 \\ -0.43431 \\ -0.02183 \\ -1.49658 \\ -1.49658 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30.0145 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -30.0145 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.145)$$

$$\{F_6\} = [k_6] \begin{Bmatrix} 0.24748 \\ 0.14751 \\ -0.02183 \\ 0.02377 \\ -1.49658 \\ -1.49658 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 317.3042 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 262.7570 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 193.3537 \text{ ton} \\ -193.3537 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.146)$$

Para una estructura con apoyos elásticos debe comprobarse que la relación que existe entre la fuerza o momento con el desplazamiento obtenido por medio de la ecuación 20.140 debe resultar en los valores de las rigideces k_θ , k_v y k_h , es decir, deben cumplirse las siguientes ecuaciones:

$$k_\theta = \frac{F_{11}}{\delta_{11}} = \frac{F_{12}}{\delta_{12}} = \frac{F_{13}}{\delta_{13}} \quad (20.147)$$

$$k_v = \frac{F_{14}}{\delta_{14}} = \frac{F_{15}}{\delta_{15}} = \frac{F_{16}}{\delta_{16}} \quad (20.148)$$

$$k_h = \frac{F_{17}}{\delta_{17}} = \frac{F_{18}}{\delta_{18}} = \frac{F_{19}}{\delta_{19}} \quad (20.149)$$

Donde las F_i representan momentos y fuerzas extraídos del cálculo de elemento mecánicos. Sustituyendo estas fórmulas se obtiene:

$$k_{\theta} \cong \frac{183.8394 \text{ ton} \cdot \text{m}}{0.12256 \text{ rad}} \cong \frac{335.9511 \text{ ton} \cdot \text{m}}{0.22397 \text{ rad}} \cong \frac{250.1483 \text{ ton} \cdot \text{m}}{0.16677 \text{ rad}} \cong 1500 \frac{\text{ton} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

$$k_v \neq \frac{0}{0} \neq \frac{167.5041 \text{ ton}}{0.016750 \text{ m}} \neq \frac{167.5041 \text{ ton}}{0.16750 \text{ m}} \neq 10000 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

$$k_h \cong \frac{42.7708 \text{ ton}}{0.02139 \text{ m}} \cong \frac{102.5811 \text{ ton}}{0.06232 \text{ m}} \cong \frac{124.6482 \text{ ton}}{0.05129} \cong 2000 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$$

De lo cual se observa que al hacer F_{14}/δ_{14} el valor es indeterminado lo cual puede deberse a que el desplazamiento lateral $\delta_{10} = -1.49658 \text{ m}$ puede considerarse fuera del rango elástico por no cumplir con la condición de pequeñas deformaciones o porque la rótula a cortante hace inestable a la estructura.

Este es un ejemplo de que, con fines didácticos, el ejemplificar una estructura sobre apoyos idealizados perfectamente empotrados está bien para iniciarse en la ingeniería estructural, más específicamente en la materia de análisis estructural, sin embargo, como manifestó este ejemplo muchas de las estructuras se vuelven inestables dependiendo de varios factores como irregularidades geométricas o condiciones del suelo.

La inclusión de apoyos elásticos es una idealización muy básica de la iteración suelo – estructura, tema que escapa de los límites de esta tesis, dada la complejidad del tema, sin embargo es de suma importancia que el ingeniero estructural tenga el conocimiento necesario para diseñar modelos en softwares de diseño estructural (como lo serían SAP 2000, ETABS, STAAD Pro, CYPECAD, etc.) considerando la iteración suelo – estructura y asemejarse lo más posible a la realidad del suelo.

20.8.2 Ejemplo 2: resolver el marco del ejemplo anterior considerando el sistema de contraventeos presentado en la página 744

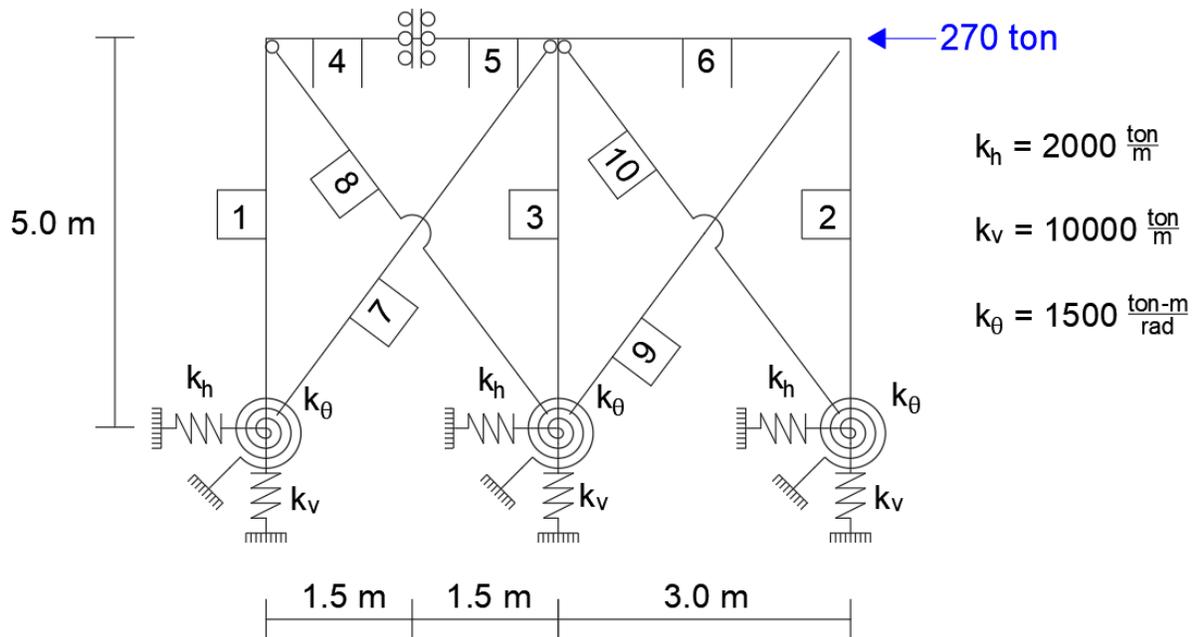


Figura XX.17. Ejemplo 2 de marcos sobre apoyos elásticos

De igual forma que en el ejercicio anterior las submatrices $[k_{11}]$, $[k_{12}]$ y $[k_{22}]$ que conforman la matriz de rigidez de la estructura son las mismas (página 746), mientras que $[k_{22}]$ cambia en su diagonal principal obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} 2799.3528 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -388.7981 & 0 & 0 \\ 0 & 5582.2723 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1219.0642 & 0 \\ 0 & 0 & 2799.3528 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -388.7981 \\ 0 & 0 & 0 & 55082.9722 & 0 & 0 & 861.1751 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 90466.4598 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 55082.9722 & 0 & 0 & -861.1751 \\ -388.7981 & 0 & 0 & 861.1751 & 0 & 0 & 2672.2243 & 0 & 0 \\ 0 & -1219.0642 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3521.0358 & 0 \\ 0 & 0 & -388.7981 & 0 & 0 & -861.1751 & 0 & 0 & 2672.2243 \end{bmatrix}$$

De lo cual se deduce que los desplazamientos se obtienen con:

$$\begin{Bmatrix} \delta_D \\ \delta_C \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_C \\ F_D \end{Bmatrix} \quad (20.150)$$

Al desarrollar la operación anterior se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \delta_{13} \\ \delta_{14} \\ \delta_{15} \\ \delta_{16} \\ \delta_{17} \\ \delta_{18} \\ \delta_{19} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.04015 \text{ rad} \\ 0.03337 \text{ rad} \\ 0.02659 \text{ rad} \\ 0.02203 \text{ rad} \\ -0.02287 \text{ m} \\ 0.03277 \text{ m} \\ -0.04593 \text{ m} \\ -0.00097 \text{ m} \\ 0.02398 \text{ m} \\ -0.20377 \text{ m} \\ 0.01391 \text{ rad} \\ 0.02185 \text{ rad} \\ 0.01792 \text{ rad} \\ -0.02075 \text{ m} \\ -0.00081 \text{ m} \\ 0.02156 \text{ m} \\ -0.03702 \text{ m} \\ -0.05980 \text{ m} \\ -0.03819 \text{ m} \end{Bmatrix} \quad (20.151)$$

Los elementos mecánicos obtenidos son los siguientes:

$$\{F_1\} = [k_1] \begin{Bmatrix} 0.01391 \\ 0.04015 \\ -0.02075 \\ -0.02287 \\ -0.03702 \\ -0.20377 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20.8724 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -3.6991 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 92.3250 \text{ ton} \\ -92.3250 \text{ ton} \\ 4.9143 \text{ ton} \\ -4.9143 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.152)$$

$$\{F_2\} = [k_2] \begin{Bmatrix} 0.01792 \\ 0.02203 \\ 0.02156 \\ 0.02398 \\ -0.03819 \\ -0.20377 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -26.8869 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -24.2004 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -105.3693 \text{ ton} \\ 105.3693 \text{ ton} \\ 10.2175 \text{ ton} \\ -10.2175 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.153)$$

$$\{F_3\} = [k_3] \begin{Bmatrix} 0.02185 \\ 0.02659 \\ -0.00081 \\ -0.00097 \\ -0.05980 \\ -0.20377 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -32.7800 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -22.9880 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 12.0216 \text{ ton} \\ -12.0216 \text{ ton} \\ 11.1536 \text{ ton} \\ -11.1536 \text{ ton} \end{Bmatrix} \quad (20.154)$$

$$\{F_4\} = [k_4] \begin{Bmatrix} 0.04015 \\ 0.03337 \\ -0.02287 \\ 0.03227 \\ -0.20377 \\ -0.20377 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.6991 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -3.6991 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.155)$$

$$\{F_5\} = [k_5] \begin{Bmatrix} 0.03337 \\ 0.02659 \\ -0.04593 \\ -0.00097 \\ -0.20377 \\ -0.20377 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.6991 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ -3.6991 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.156)$$

$$\{F_6\} = [k_6] \begin{Bmatrix} 0.02659 \\ 0.02203 \\ -0.00097 \\ 0.02398 \\ -0.20377 \\ -0.20377 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26.6871 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 24.2004 \text{ ton} \cdot \text{m} \\ 16.9625 \text{ ton} \\ -16.9625 \text{ ton} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20.157)$$

Para las barras 7 a 10 se tiene:

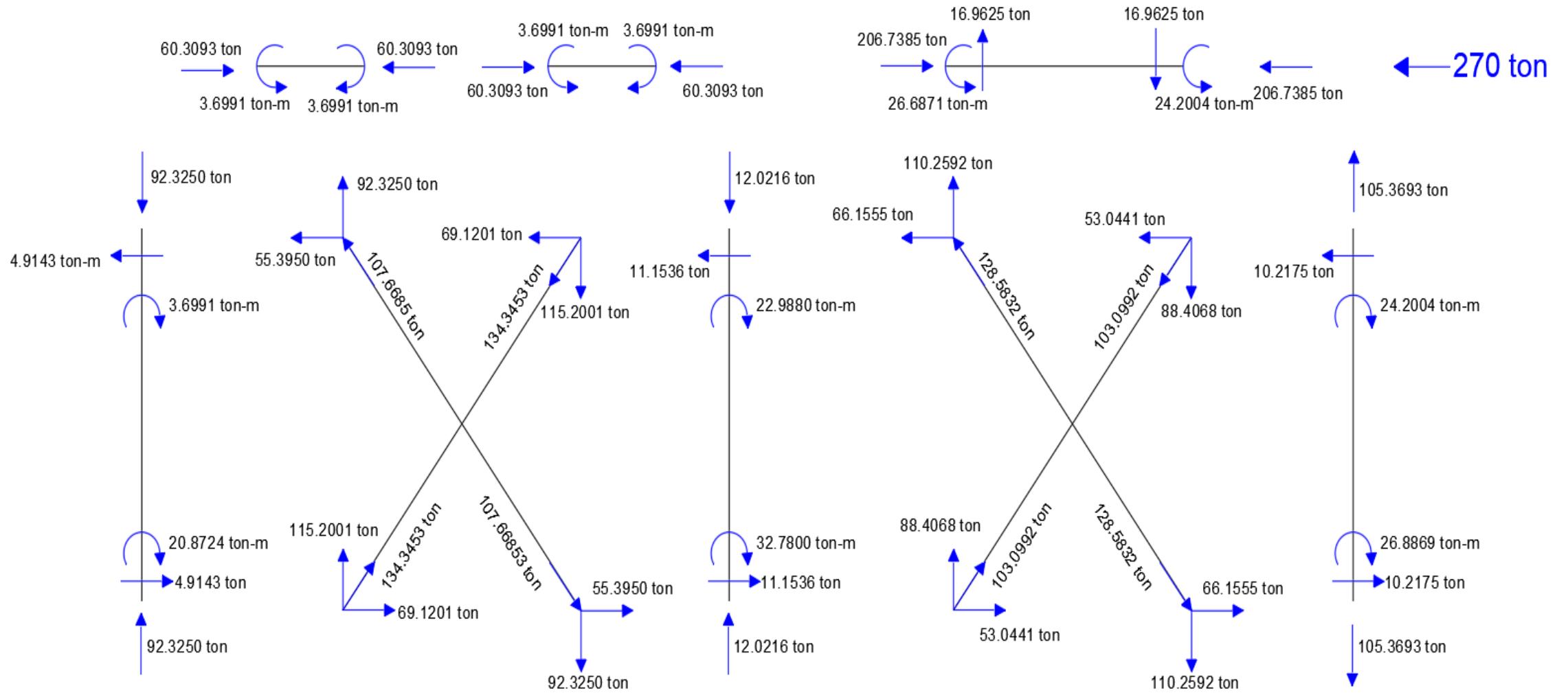
$$\{F_7\} = \begin{bmatrix} 1435.2918 & -1435.2918 & 861.1751 & -861.1751 \\ -1435.2918 & 1435.2918 & -861.1751 & 861.1751 \\ 861.1751 & -861.1751 & 516.7051 & -516.7051 \\ -861.1751 & 861.1751 & -516.7051 & 516.7051 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.02075 \\ -0.00097 \\ -0.03702 \\ -0.20377 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 115.2001 \\ -115.2001 \\ 69.1201 \\ -69.1201 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_8\} = \begin{bmatrix} 1435.2918 & -1435.2918 & -861.1751 & 861.1751 \\ -1435.2918 & 1435.2918 & 861.1751 & -861.1751 \\ -861.1751 & 861.1751 & 516.7051 & -516.7051 \\ 861.1751 & -861.1751 & -516.7051 & 516.7051 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00081 \\ -0.02287 \\ -0.05980 \\ -0.20377 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -92.3250 \\ 92.3250 \\ 55.3950 \\ -55.3950 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_9\} = \begin{bmatrix} 1435.2918 & -1435.2918 & 861.1751 & -861.1751 \\ -1435.2918 & 1435.2918 & -861.1751 & 861.1751 \\ 861.1751 & -861.1751 & 516.7051 & -516.7051 \\ -861.1751 & 861.1751 & -516.7051 & 516.7051 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.00081 \\ 0.02398 \\ -0.05980 \\ -0.20377 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 88.4068 \\ -88.4068 \\ 53.0441 \\ -53.0441 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_{10}\} = \begin{bmatrix} 1435.2918 & -1435.2918 & -861.1751 & 861.1751 \\ -1435.2918 & 1435.2918 & 861.1751 & -861.1751 \\ -861.1751 & 861.1751 & 516.7051 & -516.7051 \\ 861.1751 & -861.1751 & -516.7051 & 516.7051 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.02156 \\ -0.00097 \\ -0.03819 \\ -0.20377 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -110.2592 \\ 110.2592 \\ 66.1555 \\ -66.1555 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas finales se representan mediante:



Como pudo observarse las condiciones de apoyo elástico para la estructura pueden modificar notablemente el valor del desplazamiento lateral de la estructura. Para el caso de empotramiento perfecto el desplazamiento fue de -0.11294 m mientras que para el caso presentado fue de -0.20377 m lo cual significa que el desplazamiento lateral aumentó en un 80%.

El aumento de desplazamiento debido a las condiciones elásticas del suelo obliga a que la estructura analizada tenga que aumentar el perfil del contraventeo para poder ser aceptable por revisión de distorsión de entrepiso. Mientras que para la estructura con empotramiento perfecto se necesitaba un perfil OR 127 x 3.2 para obtener apenas una distorsión apenas por debajo de lo establecido ($\gamma = 0.0096$), para este caso ni siquiera el perfil OR de mayores dimensiones con espesor de 3.2 mm (OR 229 x 3.2) ayudaría a estar por debajo de la distorsión máxima permitida dado que se tendría un desplazamiento de 11.0740 cm y esto arrojaría una distorsión de $\gamma = 0.0221$

Por lo anteriormente mencionado debe proponerse un aumento en las secciones transversales de las vigas o columnas y/o contraventeos, o en su defecto usar otro tipo de estructuración capaz de disminuir el desplazamiento lateral como el visto de sistema de muros de cortante, una combinación de los anteriores o de otro tipo como los aisladores de base o disipadores de energía.

20.9 Uso de los elementos de rigidez infinita para la modelación de muros de mampostería

Al conocer la matriz de rigidez de un elemento tipo viga, con longitudes $\alpha L'$ y $\beta L'$ de rigidez infinita, es posible modelar los muros de mampostería confinada considerando ciertos factores para las propiedades geométricas (A e I) y mecánicas (E y G).

Dichas modificaciones se realizan con (Tena Colunga, 2007, pág. 238):

$$I_{eq} = \frac{Ab^2}{2} \quad (20.158)$$

$$A_{ceq} = (0.37 - 0.12\zeta + 0.023\lambda)(A_m + 2A_c) \quad (20.159)$$

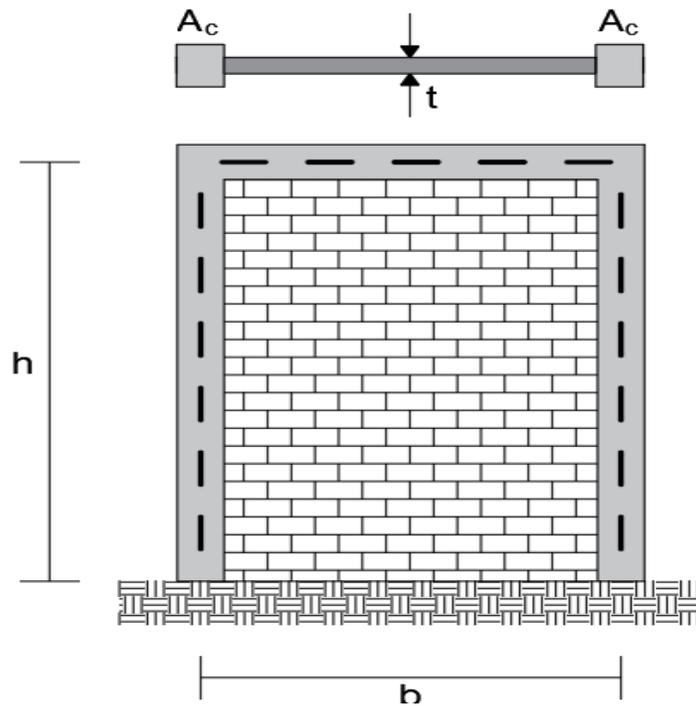
Siendo:

$[A_c]$ = área de la sección transversal de las cada columna o castillo sin transformarse.

$[A_m]$ = área de la sección transversal del muro sin transformarse.

$[E_c]$ = modulo de elasticidad de los elementos de confinamiento (muros o castillos).

Lo anterior se representa en la siguiente figura:



Los valores de I_{eq} y A_{ceq} son validas para los valores:

$$0.75 \leq \zeta = \frac{b}{h} \leq 2.5 \quad (20.160)$$

$$0.9 \leq \lambda = \frac{E_c A_c}{G_m A_m} \leq 11 \quad (20.161)$$

Donde:

$[E_m]$ = módulo de elasticidad de los muros de mampostería.

Así mismo las cargas axiales de tensión (T) y compresión están dadas por (C):

$$T = \frac{M}{zb} \quad (20.162)$$

$$C = z \frac{M}{b} \quad (20.163)$$

Donde:

$$z = 1.15 - 0.2\zeta \quad (20.164)$$

Adicionalmente las propiedades mecánicas para la mampostería estar relacionadas por deben ser:

$$G_m = 0.4E_m \quad (20.165)$$

20.9.1 Ejemplo: comparar mediante el uso del método de la columna ancha equivalente los resultados obtenidos por el doctor Tena Colunga al considerar deformaciones axiales en columnas

Instrucciones: determinar el desplazamiento y rigidez lateral de entrepiso sometido ante una carga de 25 ton como se muestra en la siguiente imagen:

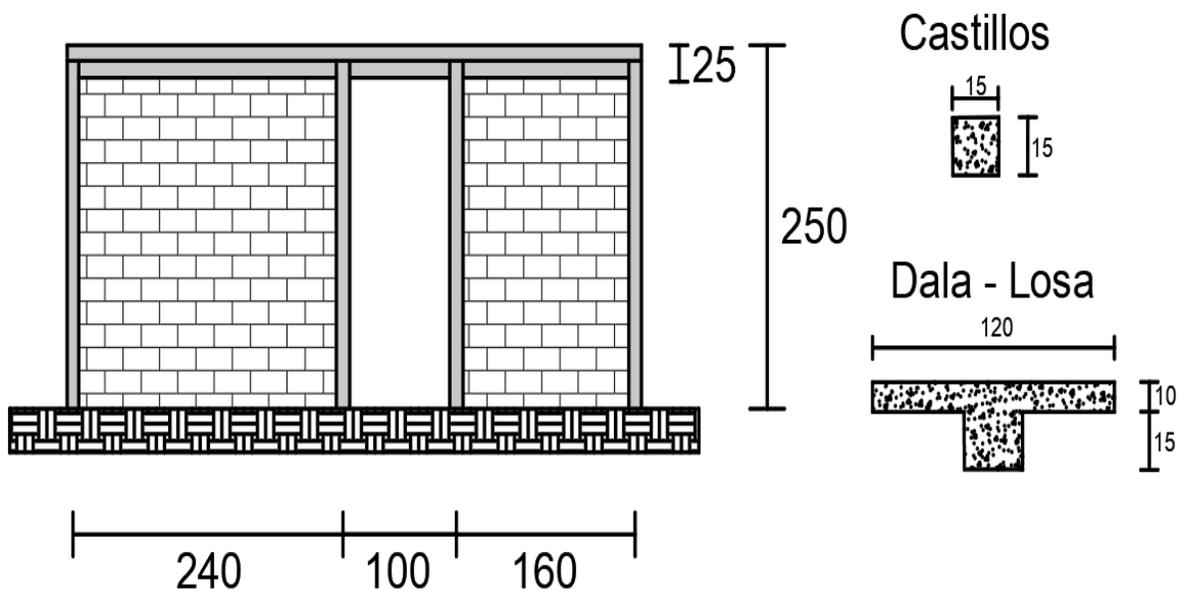
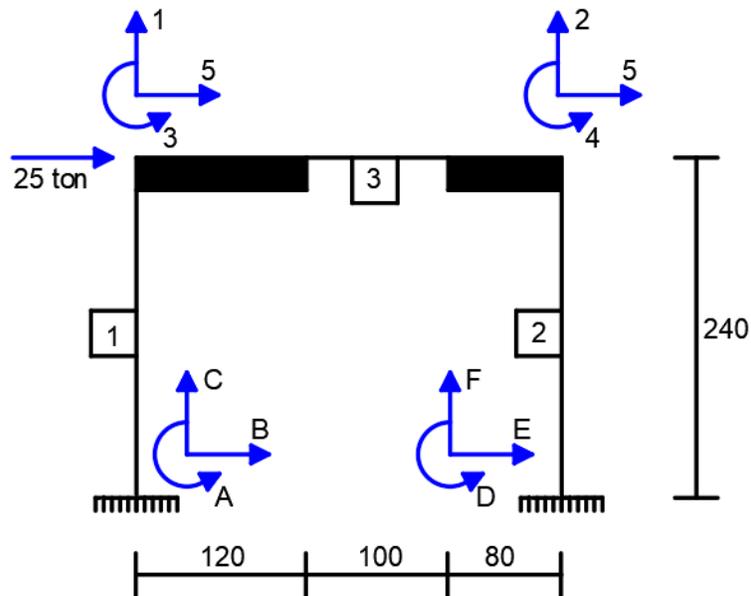


Figura XX.18. Ejemplo 1 de muro de mampostería por el método de la columna ancha equivalente.

El módulo de elasticidad de los castillos es $E_c = 115931.01 \text{ kg/cm}^2$ mientras que el del muro es de $E_m = 21600 \text{ kg/cm}^2$ y $G_m = 9000 \text{ kg/cm}^2$. El espesor del muro es $t = 15 \text{ cm}$.

El modelo esquelético de partida es el siguiente:



Matriz de rigidez del elemento 1:

$$b = L_{\text{muro}} - 2 \left(\frac{L_{\text{castillo}}}{2} \right) = 240 \text{ cm} - 2 \left(\frac{15 \text{ cm}}{2} \right) = 225 \text{ cm}$$

$$h = h_{\text{total}} - h_{\text{dala-losa}} = 250 \text{ cm} - 25 \text{ cm} = 225 \text{ cm}$$

$$A_c = (L_{\text{castillo}})^2 = (15 \text{ cm})^2 = 225 \text{ cm}^2$$

$$A_m = (L_{\text{muro}} - 2L_{\text{castillo}})t_{\text{muro}} = (240 \text{ cm} - 2(15 \text{ cm}))(15 \text{ cm}) = 3150 \text{ cm}^2$$

$$\lambda = \frac{E_c A_c}{G_m A_m} = \frac{(115931.01 \text{ kg/cm}^2)(225 \text{ cm}^2)}{(9000 \text{ kg/cm}^2)(3150 \text{ cm}^2)} = 0.92009$$

$$\zeta = \frac{b}{h} = \frac{225 \text{ cm}}{225 \text{ cm}} = 1$$

$$A_{eq}^{(1)} = [0.37 - 0.12(1) + 0.023(0.92009)][3150\text{cm}^2 + 2(225\text{cm}^2)] = 976.18345 \text{ cm}^2$$

$$I_{eq} = \frac{(225\text{cm}^2)(225 \text{ cm})^2}{2} = 5,695,312.5 \text{ cm}^4$$

$$c_{eq} = \frac{6(1 + \nu)kI}{A_{eq}^{(1)}L^2} = \frac{3E_m I_{eq}}{G_m A_{eq}^{(1)}L^2} = \frac{3(21600 \text{ kg/cm}^2)(5,695,312.5 \text{ cm}^4)}{(9000 \text{ kg/cm}^2)(976.18345 \text{ cm}^2)(240 \text{ cm})^2} = 0.72928$$

Al ensamblar la matriz mediante la ecuación () se obtiene:

$$[k_1] = E \begin{matrix} & \begin{matrix} A & 3 & C & 1 & B & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ 3 \\ C \\ 1 \\ B \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 41904.89441 & -5556.04309 & 0 & 0 & -3151.45355 & 151.45355 \\ -5556.04309 & 41904.89441 & 0 & 0 & -151.45355 & 151.45355 \\ 0 & 0 & 4.06743 & -4.06743 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.06743 & 4.06743 & 0 & 0 \\ -151.45355 & -151.45355 & 0 & 0 & 1.26211 & -1.26211 \\ 151.45355 & 151.45355 & 0 & 0 & -1.26211 & 1.26211 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez del elemento 2:

$$b = L_{muro} - 2\left(\frac{L_{castillo}}{2}\right) = 160\text{cm} - 2\left(\frac{15\text{cm}}{2}\right) = 145\text{cm}$$

$$h = h_{total} - h_{dala-1osa} = 250\text{cm} - 25\text{cm} = 225\text{cm}$$

$$A_c = (L_{castillo})^2 = (15\text{cm})^2 = 225\text{cm}^2$$

$$A_m = (L_{muro} - 2L_{castillo})t_{muro} = (160\text{cm} - 2(15\text{cm}))(15\text{cm}) = 1950\text{cm}^2$$

$$\lambda = \frac{E_c A_c}{G_m A_m} = \frac{(115931.01 \text{ kg/cm}^2)(225\text{cm}^2)}{(9000 \text{ kg/cm}^2)(1950\text{cm}^2)} = 1.48660$$

$$\zeta = \frac{b}{h} = \frac{145\text{cm}}{225\text{cm}} = 0.64444$$

$$A_{eq}^{(2)} = [0.37 - 0.12(0.64444) + 0.023(1.48660)][1950\text{cm}^2 + 2(225\text{cm}^2)] = 784.46160 \text{ cm}^2$$

$$I_{eq} = \frac{(225\text{cm}^2)(145 \text{ cm})^2}{2} = 2,365,312.5 \text{ cm}^4$$

$$c_{eq} = \frac{6(1 + \nu)kI}{A_{eq}^{(2)}L^2} = \frac{3E_m I_{eq}}{G_m A_{eq}^{(2)}L^2} = \frac{3(21600 \text{ kg/cm}^2)(2,365,312.5 \text{ cm}^4)}{(9000 \text{ kg/cm}^2)(784.46160 \text{ cm}^2)(240 \text{ cm})^2} = 0.37690$$

$$[k_2] = E \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{D} & 4 & \text{F} & 2 & \text{E} & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 21646.18747 & 1935.24997 & 0 & 0 & -98.25599 & 98.25599 \\ 1935.24997 & 21646.18747 & 0 & 0 & -98.25599 & 98.25599 \\ 0 & 0 & 3.26859 & -3.26859 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.26859 & 3.26859 & 0 & 0 \\ -98.25599 & -98.25599 & 0 & 0 & 0.81880 & -0.81880 \\ 98.25599 & 98.25599 & 0 & 0 & -0.81880 & 0.81880 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{D} \\ 4 \\ \text{F} \\ 2 \\ \text{E} \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Matriz de rigidez del elemento 3:

$$I = 43824.01316 \text{ cm}^4$$

$$A = 1425 \text{ cm}^2$$

$$A_c = (b_{dala})(h_{dala} + h_{losa}) = (15 \text{ cm})(15 \text{ cm} + 10 \text{ cm}) = 375 \text{ cm}^2$$

$$c = \frac{6(1 + \nu)kI}{AL^2} = \frac{3EI}{GA(L')^2} = \frac{3E(43824.01316 \text{ cm}^4)}{0.4E(375 \text{ cm}^2)(100 \text{ cm})^2} = 0.08765$$

$$\alpha = \frac{120 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 1.2$$

$$\beta = \frac{80 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = 0.8$$

$$[k_3] = \frac{1}{E} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 11691.14089 & 8166.91927 & 198.58060 & -198.58060 & 0 & 0 \\ 8166.91927 & 7018.65615 & 151.85575 & -151.85575 & 0 & 0 \\ 198.58060 & 151.85575 & 3.50436 & -3.50436 & 0 & 0 \\ -198.58060 & -151.85575 & -3.50436 & 3.50436 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14.25 & -14.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -14.25 & 14.25 \end{array} \right] \begin{array}{l} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{array} \end{array}$$

Al desarrollar el planteamiento matricial se obtiene:

$$E \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.57179 & -3.50436 & 198.58060 & 151.85575 & 0 \\ -3.50436 & 6.77285 & -198.58060 & -151.85575 & 0 \\ 198.58060 & -198.58060 & 53596.03530 & 8166.91927 & 151.45355 \\ 151.85575 & -151.85575 & 8166.91927 & 28664.84361 & 98.25599 \\ 0 & 0 & 151.45355 & 98.25599 & 2.08091 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Al despejar el vector de desplazamientos se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{E} \begin{bmatrix} 7.57179 & -3.50436 & 198.58060 & 151.85575 & 0 \\ -3.50436 & 6.77285 & -198.58060 & -151.85575 & 0 \\ 198.58060 & -198.58060 & 53596.03530 & 8166.91927 & 151.45355 \\ 151.85575 & -151.85575 & 8166.91927 & 28664.84361 & 98.25599 \\ 0 & 0 & 151.45355 & 98.25599 & 2.08091 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

Resolviendo esta operación se obtiene como resultado final:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} 1.97413 \\ -2.45660 \\ -0.06163 \\ -0.07453 \\ 20.01872 \end{Bmatrix} = \frac{1}{115.93101 \frac{\text{ton}}{\text{cm}^2}} \begin{Bmatrix} 1.97413 \\ -2.45660 \\ -0.06163 \\ -0.07453 \\ 20.01872 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.01703 \text{ cm} \\ -0.02119 \text{ cm} \\ -0.00053 \text{ rad/cm} \\ -0.00064 \text{ rad/cm} \\ 0.17268 \text{ cm} \end{Bmatrix}$$

Determinando la rigidez lateral:

$$k_L = \frac{25 \text{ ton}}{\delta_5} = \frac{25 \text{ ton}}{0.17268 \text{ cm}} = 144.77647 \frac{\text{ton}}{\text{cm}}$$

El doctor Tena Colunga determinó que al despreciar efectos de deformación axial la rigidez lateral es de 167.58 ton/cm (Tena Colunga, 2007, pág. 245), mientras que en este ejercicio se determinó que la rigidez lateral es de 144.77647 ton/cm por lo que, como era de esperarse, el resultado obtenido al considerar la deformación axial en columnas otorga un valor más cercano al valor obtenido experimentalmente que fue de 150 ton/cm lo cual estima un error de solo 3.4824% en comparación con el 11.72 % al despreciar las deformaciones axiales.

A continuación se determinará la rigidez lateral por el método de la diagonal equivalente considerando la deformación axial en columnas y se comparará los resultados con los obtenidos por el método de la columna ancha equivalente para la mampostería.

20.10 Uso de diagonal equivalente para la modelación de muros de mampostería

Otro método utilizado para poder determinar elementos mecánicos de muros de mampostería es por medio del método de la diagonal equivalente. Esta diagonal es un elemento que trabaja a compresión y cuyas medidas de área $A = bh = wt_{\text{muro}}$ están dadas por:

$$w = (0.35 + 0.222\lambda)h \quad ; \quad \lambda = \frac{E_c A_c}{G_m A_m} \quad (20.166)$$

Aquí h representa la altura a eje centroidal donde se proyectan las cargas laterales a nivel de entrepiso.

Entonces, con lo expresado se determina la rigidez axial equivalente mediante:

$$k_{\text{eq}} = \frac{E_m A_{\text{eq}}}{L_{\text{diag}}} = \frac{E_m w t_{\text{muro}}}{L_{\text{diag}}} \quad (20.167)$$

Donde E_m y L_{diag} eson el modulo de elasticidad y longitud de la diagonal equivalente.

20.10.1 Ejemplo: determinar la rigidez lateral por el método de la diagonal equivalente de la siguiente estructura de mampostería confinada y comparar los resultados obtenidos por el método de la columna ancha

Para idealizar el marco por el método de la diagonal equivalente se hace la siguiente esquematización:

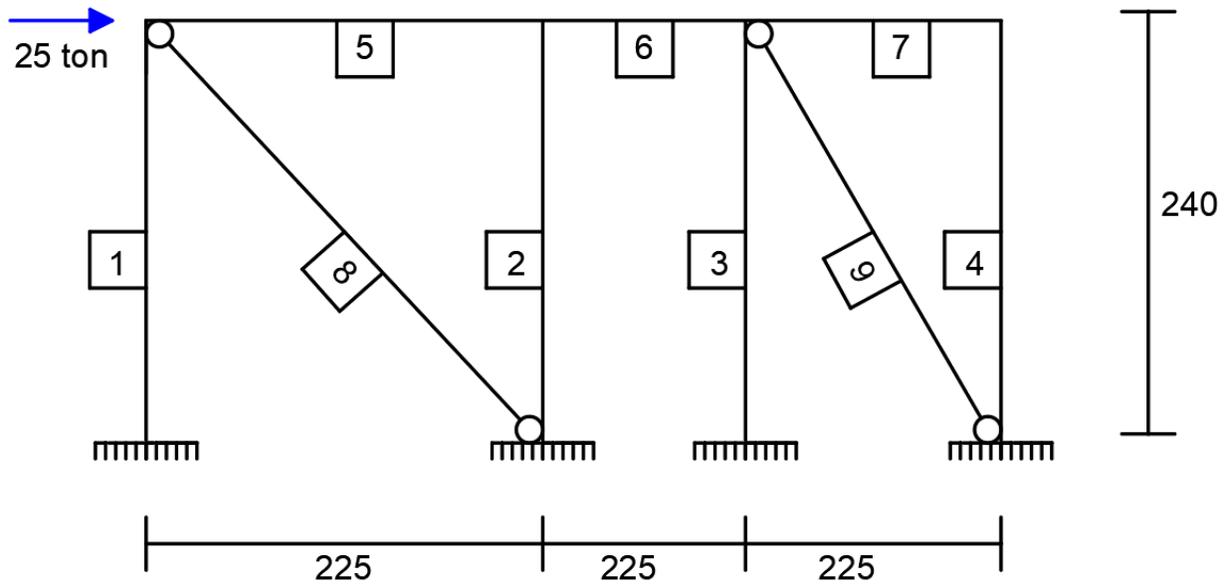
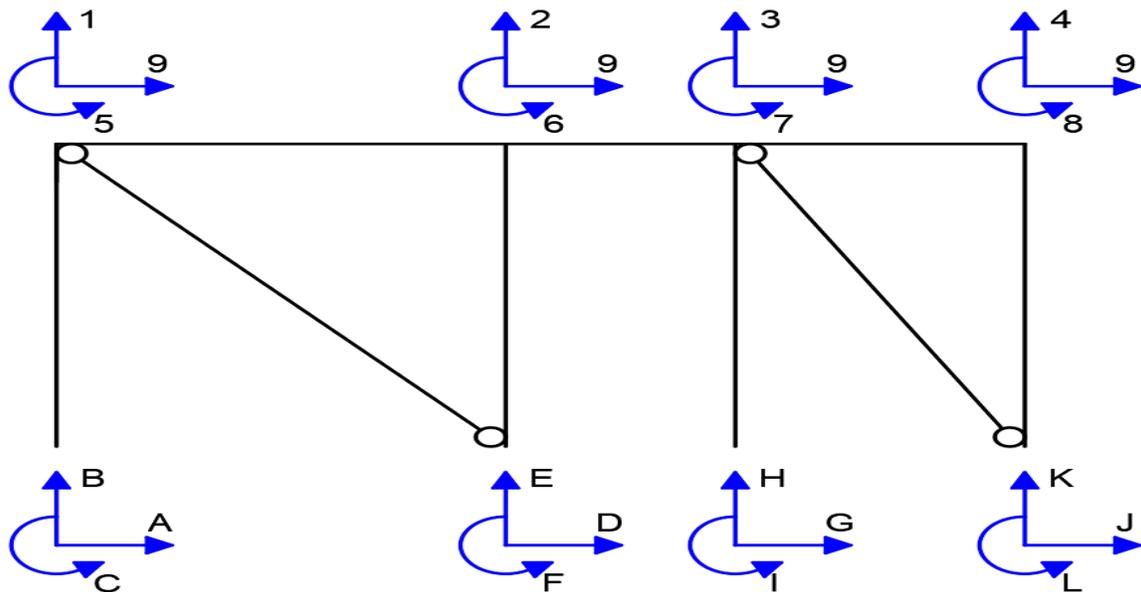


Figura XX.19. Ejemplo 2 de muro de mampostería por el método de la diagonal equivalente.

Al tener más elementos es claro que el número de grados de libertad aumenta cinco cuando se desprecia deformaciones axiales en columnas y a nueve cuando se consideran en el análisis. La numeración con la que se realizara el ensamble de las matrices es el siguiente:



Matriz de rigidez de los elementos 1 a 4 como sección prismática:

$$A = 225 \text{ cm}^2$$

$$k = 1.2 \quad \nu = 0.2$$

$$I = 4218.75 \text{ cm}^4$$

$$E_c = 115.93101 \frac{\text{ton}}{\text{cm}^2}$$

$$[k_1] = \begin{array}{cccccc} \text{C} & 5 & \text{B} & 1 & \text{A} & 9 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 8083.38685 & 4007.68728 & 0 & 0 & -50.37948 & 50.37948 \\ 4007.68728 & 8083.38685 & 0 & 0 & -50.37948 & 50.37948 \\ 0 & 0 & 108.68532 & -108.68532 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -108.68532 & 108.68532 & 0 & 0 \\ -50.37948 & -50.37948 & 0 & 0 & 0.41983 & -0.41983 \\ 50.37948 & 50.37948 & 0 & 0 & -0.41983 & 0.41983 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{C} \\ 5 \\ \text{B} \\ 1 \\ \text{A} \\ 9 \end{array} \end{array}$$

$$[k_2] = \begin{array}{cccccc} \text{F} & 6 & \text{E} & 2 & \text{D} & 9 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 8083.38685 & 4007.68728 & 0 & 0 & -50.37948 & 50.37948 \\ 4007.68728 & 8083.38685 & 0 & 0 & -50.37948 & 50.37948 \\ 0 & 0 & 108.68532 & -108.68532 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -108.68532 & 108.68532 & 0 & 0 \\ -50.37948 & -50.37948 & 0 & 0 & 0.41983 & -0.41983 \\ 50.37948 & 50.37948 & 0 & 0 & -0.41983 & 0.41983 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{F} \\ 6 \\ \text{E} \\ 2 \\ \text{D} \\ 9 \end{array} \end{array}$$

$$[k_3] = \begin{array}{cccccc} \text{I} & 7 & \text{H} & 3 & \text{G} & 9 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 8083.38685 & 4007.68728 & 0 & 0 & -50.37948 & 50.37948 \\ 4007.68728 & 8083.38685 & 0 & 0 & -50.37948 & 50.37948 \\ 0 & 0 & 108.68532 & -108.68532 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -108.68532 & 108.68532 & 0 & 0 \\ -50.37948 & -50.37948 & 0 & 0 & 0.41983 & -0.41983 \\ 50.37948 & 50.37948 & 0 & 0 & -0.41983 & 0.41983 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{I} \\ 7 \\ \text{H} \\ 3 \\ \text{G} \\ 9 \end{array} \end{array}$$

$$[k_4] = \begin{array}{cccccc} \text{L} & 8 & \text{K} & 4 & \text{J} & 9 \\ \left[\begin{array}{cccccc} 8083.38685 & 4007.68728 & 0 & 0 & -50.37948 & 50.37948 \\ 4007.68728 & 8083.38685 & 0 & 0 & -50.37948 & 50.37948 \\ 0 & 0 & 108.68532 & -108.68532 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -108.68532 & 108.68532 & 0 & 0 \\ -50.37948 & -50.37948 & 0 & 0 & 0.41983 & -0.41983 \\ 50.37948 & 50.37948 & 0 & 0 & -0.41983 & 0.41983 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{L} \\ 8 \\ \text{K} \\ 4 \\ \text{J} \\ 9 \end{array} \end{array}$$

Matriz de rigidez de los elementos 5 y 7 como sección prismática:

$$A = 1425 \text{ cm}^2$$

$$k = \frac{A_{\text{sección}}}{A_{\text{alma}}} = \frac{1425 \text{ cm}^2}{(15\text{cm})(25\text{cm})} = 3.8 \quad \nu = 0.2$$

$$I = 43824 \text{ cm}^4$$

$$E_c = 115.93101 \frac{\text{ton}}{\text{cm}^2}$$

$$L_5 = 225 \text{ cm}$$

$$L_6 = 115 \text{ cm}$$

$$L_7 = 145 \text{ cm}$$

$$[k_5] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 5 & 6 & 1 & 2 & 9 & 9 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 86098.23550 & 40937.69699 & 564.60414 & -564.60414 & 0 & 0 \\ 40937.69699 & 86098.23550 & 564.60414 & -564.60414 & 0 & 0 \\ 564.60414 & 564.60414 & 5.01870 & -5.01870 & 0 & 0 \\ -564.60414 & -564.60414 & -5.01870 & 5.01870 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 734.22973 & -734.22973 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -734.22973 & 734.22973 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k_6] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 6 & 7 & 2 & 3 & 9 & 9 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 149828.04754 & 61470.47220 & 1837.37843 & -1837.37843 & 0 & 0 \\ 61470.47220 & 149828.04754 & 1837.37843 & -1837.37843 & 0 & 0 \\ 1837.37843 & 1837.37843 & 31.95441 & -31.95441 & 0 & 0 \\ -1837.37843 & -1837.37843 & -31.95441 & 31.95441 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1436.53643 & -1436.53643 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1436.53643 & 1436.53643 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[k_7] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 & 3 & 4 & 9 & 9 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 9 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 125648.51483 & 55571.81714 & 1249.79539 & -1249.79539 & 0 & 0 \\ 55571.81714 & 125648.51483 & 1249.79539 & -1249.79539 & 0 & 0 \\ 1249.79539 & 1249.79539 & 17.23856 & -17.23856 & 0 & 0 \\ -1249.79539 & -1249.79539 & -17.23856 & 17.23856 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1139.32199 & -1139.32199 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1139.32199 & 1139.32199 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Matriz de rigidez del elemento 8 como contraventeo:

$$\lambda = 0.92009$$

$$E_m = 21.6 \frac{\text{ton}}{\text{cm}^2}$$

$$t_{\text{muro}} = 15 \text{ cm}$$

$$w = (0.35 + 0.22\lambda)h = [0.35 + 0.22(0.92009)](240 \text{ cm}) = 132.58075 \text{ cm}$$

$$k_{\text{eq}} = \frac{E_m w t_{\text{muro}}}{L_{\text{diag}}} = \frac{\left(21.6 \frac{\text{ton}}{\text{cm}^2}\right) (132.58075 \text{ cm})(15 \text{ cm})}{15\sqrt{481} \text{ cm}} = 130.57550 \frac{\text{ton}}{\text{cm}}$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{240}{15\sqrt{481} \text{ cm}} = 0.72954$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{225}{15\sqrt{481} \text{ cm}} = 0.68394$$

E	1	D	9	
69.49548	-69.49548	65.15201	-65.15201	E
-69.49548	69.49548	-65.15201	65.15201	1
65.15201	-65.15201	61.08001	-61.08001	D
-65.15201	65.15201	-61.08001	61.08001	9

$$[k_8] = \begin{bmatrix} 69.49548 & -69.49548 & 65.15201 & -65.15201 \\ -69.49548 & 69.49548 & -65.15201 & 65.15201 \\ 65.15201 & -65.15201 & 61.08001 & -61.08001 \\ -65.15201 & 65.15201 & -61.08001 & 61.08001 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez del elemento 9 como contraventeo:

$$\lambda = 1.48660$$

$$E_m = 21.6 \frac{\text{ton}}{\text{cm}^2}$$

$$t_{\text{muro}} = 15 \text{ cm}$$

$$w = (0.35 + 0.22\lambda)h = [0.35 + 0.22(1.48660)](240 \text{ cm}) = 162.49248 \text{ cm}$$

$$k_{eq} = \frac{E_m w t_{muro}}{L_{diag}} = \frac{\left(21.6 \frac{\text{ton}}{\text{cm}^2}\right) (162.49248 \text{ cm})(15 \text{ cm})}{5\sqrt{3145} \text{ cm}} = 187.75778 \frac{\text{ton}}{\text{cm}}$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{240}{5\sqrt{3145} \text{ cm}} = 0.85592$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{145}{5\sqrt{3145} \text{ cm}} = 0.51712$$

K	3	J	9	
137.54974	-137.54974	128.95288	-128.95288	K
-137.54974	137.54974	-128.95288	128.95288	3
128.95288	-128.95288	120.89333	-120.89333	J
-128.95288	128.95288	-120.89333	120.89333	9

$$[k_9] = \begin{bmatrix} 137.54974 & -137.54974 & 128.95288 & -128.95288 \\ -137.54974 & 137.54974 & -128.95288 & 128.95288 \\ 128.95288 & -128.95288 & 120.89333 & -120.89333 \\ -128.95288 & 128.95288 & -120.89333 & 120.89333 \end{bmatrix}$$

El planteamiento matricial con el que se determinan los valores de rotación y desplazamientos se logra mediante:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.200 & -5.019 & 0 & 0 & 564.604 & 564.604 & 0 & 0 & 65.152 \\ -5.019 & 145.658 & -31.954 & 0 & -564.604 & 1272.774 & 1837.378 & 0 & 0 \\ 0 & -31.954 & 295.428 & -17.239 & 0 & -1837.378 & -587.583 & 1249.795 & 128.953 \\ 0 & 0 & -17.239 & 125.924 & 0 & 0 & -1249.795 & -1249.795 & 0 \\ 564.604 & -564.604 & 0 & 0 & 94181.622 & 40937.697 & 0 & 0 & 50.379 \\ 564.604 & 1272.774 & -1837.378 & 0 & 40937.697 & 244009.670 & 61470.472 & 0 & 50.379 \\ 0 & 1837.378 & -587.583 & -1249.795 & 0 & 61470.472 & 283559.949 & 55571.817 & 50.379 \\ 0 & 0 & 1249.795 & -1249.795 & 0 & 0 & 55571.817 & 133731.902 & 20.379 \\ 65.152 & 0 & 128.953 & 0 & 50.379 & 50.379 & 50.379 & 50.379 & 183.653 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

Al desarrollar se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.09073 \text{ cm} \\ -0.01805 \text{ cm} \\ -0.12317 \text{ cm} \\ -0.00885 \text{ cm} \\ 0.00061 \text{ rad/cm} \\ -0.00071 \text{ rad/cm} \\ -0.00028 \text{ rad/cm} \\ 0.00109 \text{ rad/cm} \\ 0.25461 \text{ cm} \end{Bmatrix}$$

Al calcular la rigidez lateral se tiene:

$$k_L = \frac{25 \text{ ton}}{\delta_5} = \frac{25 \text{ ton}}{0.25461 \text{ cm}} = 98.18939 \frac{\text{ton}}{\text{cm}}$$

El resultado obtenido presenta un error de 34.54 % para este caso de estudio al calcular la rigidez por el método de la diagonal equivalente. Este valor se asemeja mucho al que calculó el doctor Tena que fue $k_L = 75.37 \text{ ton/cm}$.

Conclusiones

Como podrá haberse dado cuenta el lector a lo largo de 20 capítulos, el tener una fuerte formación en cuanto a matemáticas, teoría de la elasticidad, mecánica de materiales y otras materias a fines, es indispensable para un ingeniero estructurista. Sin conocimiento suficiente en dichas materias le sería muy complicado abordar materias de aplicación como lo sería el análisis estructural o la dinámica estructural.

Las matemáticas jugaron un papel muy importante en el desarrollo de esta tesis, porque una parte de su contenido se enfocó a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, dado que éstas y las respectivas soluciones $x(t)$ que se obtuvieron, aportaron los principios para saber el comportamiento que podría tener una estructura debido a cargas laterales. Fue importante saber resolver estas ecuaciones, dado que en el proceso analítico de solución surgieron conceptos como el de resonancia, decremento logarítmico, amortiguamiento y otros conceptos que deben tenerse en cuenta al modelar estructuras en programas de ingeniería y cálculo estructural.

Así mismo, el análisis estructural desempeñó un papel muy importante porque sin el conocimiento de saber aplicar el método de las rigideces (clásico o matricial), no hubiera sido posible desarrollar el análisis dinámico modal espectral.

Como se podrá haber inferido, para edificios como el presentado en esta tesis en los casos de análisis dinámico modal espectral, los casos que consideraron deformación por flexión hasta los casos que consideraron deformaciones a flexión, a cortante y axiales, son aceptablemente similares, sin embargo, esto no siempre ocurrirá así sobre todo cuando se añaden elementos de restricción lateral como los vistos en el capítulo XX, o inclusive, al analizar edificios altos no será posible despreciar las deformaciones axiales o cortantes de los elementos.

Como fue notable, el poder combinar los conocimientos del análisis estructural con los de la dinámica estructural permitió obtener las cargas y posteriormente, los elementos mecánicos necesarios. Al conocer los elementos mecánicos de la estructura, el ingeniero estructurista puede

determinar, mediante conocimientos de diseño estructural, la implementación de los tipos de refuerzo que hagan a los elementos sismorresistentes.

Por lo anteriormente mencionado, el diseño de una estructura es un proceso cíclico de análisis y diseño estructural, donde la dinámica estructural es el nexo entre esas materias para poder crear una edificación capaz de soportar las cargas a las cuales será expuesta durante su vida útil.

Hoy en día con el desarrollo de las nuevas tecnologías ha sido posible la implementación de softwares de diseño estructural que facilitan muchísimo el poder modelar estructuras, inclusive en tres dimensiones, ahorrando el tener que desarrollar procesos exhaustivos de análisis estructural a mano o inclusive, teniendo que alimentar un programa de algún lenguaje de programación para obtener los resultados buscados. Sin embargo, como muchos de los conocimientos que utilizan esos softwares se basan en normativas de construcción y conocimientos teóricos desarrollados a lo largo de años, se consideró importante dotar al lector de buenas bases para que pueda incursionar en conocimientos más profundos de ingeniería estructural.

Se tiene presente la limitación que fue exponer sólo el análisis dinámico modal espectral habiendo otros métodos como el análisis dinámico paso a paso, no obstante, se espera que con lo referido en esta tesis, el lector considere que lo contenido a lo largo de estas páginas le haya sido de utilidad para retroalimentación de bases teóricas.

Referencias

- ✚ Anton , H. (1984). *Introducción al Álgebra Lineal*. México : Limusa .
- ✚ Ávila Rosas , A. (2019). *Apuntes de Clase "Técnicas de Análisis Numérico"*. Ciudad de México, IPN ESIA-Zacatenco.
- ✚ Ayres Jr., F. (1978). *Matrices*. México: Mc Graw Hill.
- ✚ Bazán, E., & Meli, R. (1990). *Diseño Sísmico de Edificios*. México: Limusa.
- ✚ Chapra, S. C. (2015). *Métodos Numérico para Ingenieros* (Séptima ed.). México D.F.: Mc Graw Hill Education.
- ✚ Chopra , A. K. (2014). *Dinámica de Estructuras* (Cuarta ed.). México: Pearson.
- ✚ De la Colina Martínez, J., Valdés González, J., & González Pérez , C. A. (2016). *Dinámica de Estructuras*. México: Limusa.
- ✚ Díaz Guerra, F. A. (2019). *Apuntes de Clase Matemáticas "Álgebra Lineal"*. Ciudad de México, IPN ESIA-Zacatenco.
- ✚ Flores Méndez, E. (2019). *Apuntes de Clase "Matemáticas"*. Ciudad de México, IPN ESIA-Zacatenco.
- ✚ Gobierno de la CDMX. (2017). *Normas Técnicas Complementarias*. Ciudad de México: Gaceta Oficial de la Ciudad de México.
- ✚ Gómez Chávez , S. I. (2007). *Análisis Sísmico Moderno: Ética Aplicada*. México: Trillas.
- ✚ González Cuevas, Ó. M. (2017). *Análisis Estructural*. México: Limusa.
- ✚ González Villanueva , N. (2007). *Análisis Estructural. Apuntes y Porblemas. CIV 204*. Potosí, Bolivia : Universidad Autónoma Tomás Frías.
- ✚ Grossman , S. I. (1996). *Álgebra Lineal* . México : Mc Graw Hill .
- ✚ Hibbeler, R. C. (2012). *Análisis Estructural*. Ciudad de México: Pearson.
- ✚ Huang, T. C. (1976). *Mecánica para Ingenieros Tomo II: Dinámica*. México: Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A. .

-
- ✚ Instituto Mexicano de la Construcción en Acero, A.C. (2019). *Manual de Construcción en Acero* (Quinta ed.). México: Limusa.
 - ✚ Jean Perrilliat , R. (2018). *Ponencia: Espectros para Diseño Sísmico* . México : Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural. Curso: "Taller de las NTC Diseño por Sismo 2017 (4-5 septiembre)".
 - ✚ Magdalena Domínguez , C. (2018). *Análisis Matricial de Estructuras* . México : Trillas
 - ✚ Majewski Szymiec, T. (2016). *Vibraciones en Sistemas Físicos* . México: Alfaomega .
 - ✚ Mase , G. E. (1977). *Mecánica del Medio Continuo* . Edo. de México : Mc Graw Hill .
 - ✚ Matias Domínguez, A. I. (2012). *Análisis Matricial de Estructuras*. México: IPN.
 - ✚ Meli Piralla , R. (2011). *Diseño Estructural* (Segunda ed.). México: Limusa.
 - ✚ Molina Elvira, M. (2017). *Apuntes de Mecánica de Materiales I*. Estado de México, México: Apuntes Tomados en Clase.
 - ✚ Molina Elvira, M. (2019). *Dinámica Estructural*. Estado de México: Apuntes Tomados en Clase.
 - ✚ Molina Elvira, M. (Desconocido). *Apuntes de Dinámica Estructural*. D. F. : Material No Publicado.
 - ✚ Nava, A. (2011). *Terremotos*. D. F., México: FCE.
 - ✚ Newmark, N. M., & Rosenbluth Deutsch, E. (1976). *Fundamentos de ingeniería sísmica*. México: Editorial Diana.
 - ✚ Pavón Rodríguez, V. M. (1998). *Causas y Orígenes de los Sismos*. D. F., México: IMCYC.
 - ✚ Paz, M. (1992). *Dinámica Estructural: Teoría y Cálculo*. España: Reverté.
 - ✚ Popov, E. P. (2000). *Mecánica de Sólidos*. Estado de México, México: Pearson Educación.
 - ✚ Rainville , E. D. (2016). *Ecuaciones Diferenciales Elementales* (Segunda ed.). México: Editorial F. Trillas, S. A.

- ✚ Rao, S. (2012). *Vibraciones Mecánicas* (Quinta ed.). México: Pearson Educación.
- ✚ Roca Vila, R., & León L, J. (1985). *Vibraciones Mecánicas* . México: Limusa .
- ✚ Rodríguez Rocha , R. (2019). Apuntes de Clase "Seminario I". Ciudad de México, IPN ESIA-Zacatenco.
- ✚ Rojas Rojas , R. M., & Padilla , P. H. (2009). *Análisis Estructural con Matrices*. México: Trillas .
- ✚ Rosenblueth Deutsch, E. (1991). *Diseño de Estructuras Resistentes a Sismos*. D.F., México: Noriega Limusa.
- ✚ Seely, F. B., & Ensign, N. E. (1977). *Mecánica Analítica para Ingenieros*. México: UTEHA.
- ✚ Serway, R. A., & Jewett, Jr., J. W. (2008). *Física para Ciencias e Ingeniería vol. 1* (Septima ed.). México: Cengage Learning.
- ✚ Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural. (2018). *Ponencia: Espectros Para Diseño Sísmico*. México: Curso: "Taller de las NTC Diseño por Sismo (2017)" (4-5 de septiembre 2018).
- ✚ Sociedad Mexicana de Ingeniería Estructural, A. C. (2019). *Edificaciones de Mampostería*. (B. Gómez González, R. Jean Perrilliat, J. Á. Pérez Gómez , & E. L. Treviño Treviño, Edits.) México: Limusa.
- ✚ Spiegel, M. R. (1981). *Transformadas de Laplace* . México: McGraw Hill .
- ✚ Spiegel, M. R., Lipschutz, S., & Liu, J. (2010). *Fórmulas y Tablas de Matemática aplicada* (Tercera ed.). México: Mc Graw Hill.
- ✚ Tena Colunga, A. (2007). *Análisis de Estructuras con Métodos Matriciales*. México: Limusa.
- ✚ Timoshenko, S. P. (1979). *Mecánica de Materiales* . México: UTEHA.
- ✚ Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N. (1975). *Teoría de la Elasticidad*. Bilbao, España: Ediciones Urmo.
- ✚ Tolentino López, D. (2019). *Apuntes de Análisis Estructural*. Ciudad de México: IPN ESIA Zacatenco

-
- ✚ Vieira Chaves, E. W. (2015). *Problemas Resueltos de Mecánica del Medio Continuo*. España: Centro Internacional del Método.
 - ✚ Zill, D. G. (2000). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado* (Sexta ed.). México: International Thomson Editores.
 - ✚ Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2008). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones Diferenciales* (Tercera ed.). México: Mc Graw Hill.

**PARTE
VIII**

ANEXOS

Anexo A: Escala de Magnitud Sísmica MM¹

- I. No es sentido. Sólo lo registran los sismógrafos.
- II. Es sentido por personas que se hallan en reposo, en edificios altos o en lugares que favorecen la percepción.
- III. Es sentido en el interior de las habitaciones. Los objetos colgantes se balancean. La vibración es parecida al paso de un camión ligero. Es posible estimar su duración. Puede no ser considerado como un sismo.
- IV. Los objetos colgantes se balancean. Vibración, semejante al paso de camiones pesados, o se percibe una sensación como si una pelota pesada golpeará las paredes. Los carros estacionados se mecen. Las ventanas, los platos y las puertas traquetean. Los vasos tintinean. Los cacharros chocan. En el rango superior de IV las paredes y armazones de madera rechinan.
- V. Es sentido fuera de las casas; puede estimarse su dirección. Las personas dormidas despiertan. Los líquidos experimentan alteraciones; algunos se derraman. Los objetos inestables y pequeños se mueven, así como las celosías y los cuadros. Los relojes de péndulo se detienen, echan a andar o cambian de velocidad.
- VI. Es sentido por todos. Muchas personas se asustan y salen corriendo de sus casas. Se dificulta caminar. Las ventanas, platos y objetos de vidrio se rompen. Adornos, libros, etc., caen de los estantes. Los cuadros se desprenden de las paredes. El mobiliario se mueve o cae. Se agrieta el yeso débil y las construcciones tipo D. Suenan las campanas pequeñas (iglesias, escuela). Los árboles y los arbustos se sacuden (visiblemente) o se escucha la agitación de sus ramas y hojas.
- VII. Es difícil permanecer de pie. Los automovilistas sienten cómo se agita el piso. Los objetos colgantes vibran. Se rompen los muebles. Daños a construcciones tipo D, incluyendo grietas. Las chimeneas débiles se parten al nivel del techo. Se produce caída de yeso, de ladrillos sueltos, de piedras, de tejas, de cornisas, de parapetos sin apoyo y de ornamentos arquitectónicos. Se abren algunas grietas en las construcciones tipo C. Se

¹ Escala de Mercalli modificada tomada del libro Terremotos (págs. 156-158) de Alejandro Nava, 2011.

observan olas en los estanques; el agua se enturbia con lodo. Hay derrumbes y aludes en los bancos de arena o grava. Tañen las campanas grandes. Los canales de irrigación quedan dañados.

- VIII. Se dificulta conducir un vehículo y quizá hasta se pierde el control del auto. Daños a las construcciones tipo C; colapso parcial. Algunos deterioros en las construcciones B; ninguno en las construcciones A. Caída de estuco y de algunas paredes de ladrillo. Torcedura y caída de chimeneas (casas y fábricas), monumentos, torres, tanques elevados. Las casas de armazón son movidas de sus cimientos si no están aseguradas a ellos. Se rompen las ramas de los árboles. Cambios en el flujo o la temperatura de manantiales y pozos. Grietas en terreno húmedo y en pendientes empinadas.
- IX. Pánico general. Las construcciones son destruidas: las de tipo C quedan gravemente dañadas o, a veces, se caen del todo y las de tipo B quedan dañadas seriamente. Averías generales a los cimientos, y muy serias a las cisternas y presas. Las tuberías subterráneas quedan rotas. Grietas conspicuas en el terreno. En las zonas aluviales, la arena y el lodo son arrojados a las orillas, surgen las llamadas fuentes de terremoto y se abren cráteres de arena.
- X. La mayor parte de las construcciones de mampostería y de armazón, así como sus cimientos son destruidos. Algunas estructuras y puentes, cuidadosamente contruidos caen. Hay daños serios en presas, diques y terraplenes. Se producen grandes aludes. El agua es arrojada a la orilla de canales, ríos, lagos, etc. La arena y el lodo son desplazados horizontalmente en playas y terrenos planos. Los rieles de las vías de ferrocarril se doblan levemente.
- XI. Los rieles quedan doblados considerablemente, y las tuberías subterráneas completamente fuera de servicio.
- XII. La destrucción es casi total. Grandes masas de roca son desplazadas. Las líneas de nivel quedan distorsionadas. Los objetos son arrojados al aire.

Tipos de construcción

- Construcciones A: Trabajo, concreto y diseño buenos; reforzadas, en especial lateralmente, y amarradas usando acero, concreto, etc.; diseñadas para resistir fuerzas laterales.
- Construcciones B: Trabajo y concreto buenos; reforzadas, pero no diseñadas especialmente para resistir fuerzas laterales.
- Construcciones C: Trabajo y concreto ordinarios; sin debilidades extremas, como falta de amarres en las esquinas, pero tampoco reforzadas ni diseñadas contra fuerzas horizontales.
- Construcciones D: Materiales débiles como adobe; concreto pobre; baja calidad de mano de obra; débiles horizontalmente.

Anexo B: Escala de Magnitud Sísmica MSK²

- I. La sacudida no es percibida por los sentidos humanos, siendo detectada y registrada solamente por los sismógrafos.
- II. La sacudida es perceptible solamente por algunas personas en reposo, en particular en los pisos superiores de los edificios.
- III. La sacudida es percibida por algunas personas en el interior de los edificios y sólo en circunstancias muy favorables en el exterior de los mismo. La vibración percibida es semejante a la causada por el paso de un camión ligero. Observadores muy atentos pueden notar ligeros balanceos de objetos colgados, más acentuados en los pisos altos de los edificios.
- IV. El sismo es percibido por muchas personas en el interior de los edificios y por algunas en el exterior. Algunas personas que duermen se despiertan, pero nadie se atemoriza. La vibración es comparable a la producida por el paso de un camión pesado con carga. Las ventanas, puertas y vajillas vibran. Los pisos y muros producen chasquidos. El mobiliario comienza a moverse. Los líquidos contenidos en recipientes abiertos se agitan ligeramente. Los objetos colgados se balancean ligeramente.
- V.
 - a) El sismo es percibido en el interior de los edificios por la mayoría de las personas y por muchas en el exterior. Muchas personas que duermen se despiertan y algunas huyen. Los animales se ponen nerviosos. Las construcciones se agitan con una vibración general. Los objetos colgados se balancean ampliamente. Los cuadros golpean sobre los muros o son lanzados fuera de su emplazamiento. En algunos casos los relojes de péndulo se paran. Los objetos ligeros se desplazan o vuelcan. Las puertas o ventanas abiertas baten con violencia. Se vierten en pequeña cantidad los líquidos contenidos en recipientes abiertos y llenos. La vibración se siente en la construcción como producida por un objeto pesado arrastrándose.
 - b) En las construcciones de tipo A son posibles ligeros daños (clase 1).

² Escala de Medvédev-Sponheuer-Kárník tomada del libro *Dinámica Estructural: Teoría y Cálculo* (págs. 624-627) de Mario Paz, 1992.

- c) En ciertos casos se modifica el caudal de los manantiales.
- VI.
- a) Lo sienten la mayoría de las personas, tanto dentro como fuera de los edificios. Muchas personas salen a la calle atemorizadas. Algunas personas llegan a perder el equilibrio. Los animales domésticos huyen de los establos. En algunas ocasiones, la vajilla y la cristalería se rompen, los libros caen de sus estantes, los cuadros se mueven y los objetos inestables vuelcan. Los muebles pesados pueden llegar a moverse. Las campanas pequeñas de torres y campanarios pueden sonar.
 - b) Se producen daños moderados (clase 2) en algunas construcciones del tipo A. Se producen daños ligeros (clase 1) en algunas construcciones del tipo B y en muchas del tipo A.
 - c) En ciertos casos pueden abrirse grietas de hasta un centímetro de ancho en suelos húmedos. Pueden producirse deslizamientos en las montañas. Se observan cambios en el caudal de los manantiales y en el nivel de agua de los pozos.
- VII.
- a) La mayoría de las personas se aterroriza y corre a la calle. Muchas tienen dificultad para mantenerse en pie. Las vibraciones son sentidas por personas que conducen automóviles. Suenan las campanas grandes.
 - b) Muchas construcciones del tipo A sufren daños graves (clase 3) y algunas incluso destrucción (clase 4). Muchas construcciones del tipo B sufren daños moderados (clase 2). Algunas construcciones del tipo C experimentan daños ligeros (clase 1).
 - c) En algunos casos, se producen deslizamientos en las carreteras que transcurren sobre laderas con pendientes acusadas; se producen daños en las juntas de las canalizaciones y aparecen fisuras en muros de piedra.
Se aprecia oleaje en las lagunas y el agua se enturbia por remoción del fango. Cambia el nivel los pozos y el caudal de los manantiales. En algunos casos, vuelven a manar manantiales que estaban secos y se secan otros que manaban. En ciertos casos se producen derrames en taludes de arena o de grava.

- VIII. a) Miedo y pánico general, incluso en las personas que conducen automóviles. En algunos casos se desgajan las ramas de los árboles. Los muebles, incluso los pesados, se desplazan o vuelcan. Las lámparas colgadas sufren daños parciales.
- b) Muchas construcciones de tipo A sufren destrucción (clase 4) y algunas colapso (clase 5). Muchas construcciones de tipo B sufren daños graves (clase 3) y algunas destrucción (clase 4). Muchas construcciones de tipo C sufren daños moderados (clase 2) y algunas graves (clase 3). En ocasiones, se produce la rotura de algunas juntas de canalizaciones. Las estatuas y monumentos se mueven y giran. Se derrumban muros de piedra.
- c) Pequeños deslizamientos en las laderas de los barrancos y en las trincheras y terraplenes con pendientes pronunciadas. Grietas en el suelo de varios centímetros de ancho. Se enturbia el agua de los lagos. Aparecen nuevos manantiales. Vuelven a tener agua pozos secos y se secan pozos existentes. En muchos casos cambia el caudal y el nivel de agua de los manantiales y pozos.
- IX. a) Pánico general. Daños considerables en el mobiliario. Los animales corren confusamente y emiten sus sonidos peculiares.
- b) Muchas construcciones de tipo A sufren colapso (clase 5). Muchas construcciones de tipo B sufren destrucción (clase 4) y algunas colapso (clase 5). Muchas construcciones del tipo C sufren daños graves (clase 3), y algunas destrucción (clase 4). Caen monumentos y columnas. Daños considerables en depósitos de líquidos. Se rompen parcialmente las canalizaciones subterráneas. En algunos casos, los carriles del ferrocarril se curvan y las carreteras quedan fuera de servicio.
- c) Se observa con frecuencia que se producen extrusiones de agua, arena y fango en los terrenos saturados. Se abren grietas en el terreno de hasta 10 centímetros de ancho y de más de 10 centímetros en las laderas y en las márgenes de los ríos. Aparecen, además, numerosas grietas pequeñas en el suelo. Desprendimientos de rocas y aludes. Muchos deslizamientos de tierras. Grandes olas en lagos y embalses. Se renuevan pozos secos y se secan otros existentes.
- X. b) La mayoría de las construcciones del tipo A sufren colapso (clase 5). Muchas construcciones del tipo B sufren colapso (clase 5). Muchas construcciones de tipo C

sufren destrucción (clase 4) y algunas colapso (clase 5). Daños peligrosos en presas; daños serios en puentes. Los carriles de las vías férreas se desvían y a veces se ondulan. Las canalizaciones subterráneas son retorcidas o rotas. El pavimento de las calles y el asfalto forman grandes ondulaciones.

- c) Grietas en el suelo de algunos decímetros de ancho que pueden llegar a un metro. Se producen anchas grietas paralelamente a los cursos de agua. Deslizamientos de tierras sueltas en las laderas con fuertes pendientes. En los ribazos de los ríos y en laderas escarpadas se producen considerables deslizamientos. Desplazamientos de arenas y fangos en las zonas litorales. Cambio de nivel de agua en los pozos. El agua de canales y ríos es lanzada fuera de su cauce normal. Se forman nuevos lagos.
- XI. b) Daños importantes en construcciones, incluso en las bien realizadas, en puentes, presas y líneas de ferrocarril. Las carreteras importantes quedan fuera de servicio. Las canalizaciones subterráneas quedan destruidas.
- c) El terreno queda considerablemente deformado tanto por desplazamientos horizontales como verticales y con anchas grietas. Muchos deslizamientos de terrenos y caídas de rocas.
- Para determinar la intensidad de las sacudidas sísmicas se precisan investigaciones especiales.
- XII. b) Prácticamente se destruyen o quedan gravemente dañadas todas las estructuras, incluso las subterráneas.
- c) La topografía cambia. Grandes grietas en el terreno con importantes desplazamientos horizontales y verticales. Caída de rocas y hundimientos en los escarpes de los valles, producidas en vastas extensiones. Se cierran valles y se transforman en lagos. Aparecen cascadas y se desvían los ríos.

Tipos de construcciones.

Tipo A: Con muros de mampostería en seco o con barro, de adobes, de tapial.

Tipo B: Con muros de fábrica de ladrillo, de bloques de mortero, de mampostería con mortero, de sillarejo, de sillería, entramados de madera.

Tipo C: Con estructura metálica o de hormigón armado.

Anexo C: Nociones de Ecuaciones Diferenciales

C.1 Introducción

Es evidente que al hacer referencia al término “ecuaciones diferenciales” se presentan los conceptos de *ecuación* y *diferencial*. La mención de tales conceptos nos induce a pensar, sin duda, que las ecuaciones a resolver contienen como incógnitas derivadas.

A diferencia del cálculo diferencial donde el problema principal radica en encontrar la primera, segunda, tercera o inclusive, hasta la n -ésima derivada; en las ecuaciones diferenciales ocurre todo lo contrario: a partir de una ecuación, cuyas incógnitas son derivadas, lo que nos importa es encontrar dicha función que satisfaga la igualdad planteada.

La importancia de este apéndice es mucha ya que, para principios de dinámica estructural, es necesario la resolución de ecuaciones diferenciales.

Es bien sabido que existen distintos métodos de solución para resolver ecuaciones diferenciales; inclusive una ecuación diferencial, puede ser resuelta por más de un método, sin embargo, antes hay que entender cómo se clasifican.

De manera simple este apéndice tiene la finalidad de explicar, para las ecuaciones diferenciales, conceptos como la notación de las derivadas, su definición y su clasificación, curva solución, soluciones implícita y explícita, problemas de valor inicial, soluciones general y particular, y una breve definición de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

C.2 Notaciones para Derivadas

En general existen 5 principales formas de denotar las derivadas ordinarias³:

³ Las notaciones se escribirán con base en cómo se usaría para resolver las ecuaciones diferenciales en esta tesis, es decir, la variable independiente es ‘ x ’ y la variable dependiente es ‘ t ’.

✚ Notación de Leibniz⁴:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, \frac{d^4x}{dt^4}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}$$

✚ Notación de Lagrange⁵:

$$x', x'', x''', x^{(4)}, \dots, x^{(n)}$$

✚ Notación de Euler⁶:

$$D_t x, D_{tt} x, D_{ttt} x, D_{tttt} x, \dots$$

✚ Notación del operador diferencial:

$$Dx, D^2x, D^3x, D^4x, \dots, D^nx$$

✚ Notación de Newton:

$$\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \dots$$

La notación de Newton también es conocida como “notación de manchas”, es la de mayor utilidad (generalmente) para denotar derivadas de ‘x’ con respecto al tiempo ‘t; además de ser la notación más usada para ingeniería y ciencias físicas (Zill & Cullen, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones Diferenciales, 2008, pág. 6).

Para el caso de las derivadas parciales se suele recurrir a dos notaciones principales⁷:

✚ Notación de Jacobi⁸ para derivadas con respecto a la misma variable:

⁴Llamada así, en honor, por el filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).

⁵Llamada así, en honor, el físico, matemático y astrónomo italiano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

⁶Llamada así, en honor, al físico, matemático y filósofo suizo Leonhard Paul Euler (1707-1783)

⁷La letra z representa una variable dependiente; las letras x & y representan variables independientes.

⁸Llamada así, en honor, al matemático pruso (hoy en día Alemania) Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851)

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}$$

✚ Notación de Jacobi para derivas con respecto a diferentes variables:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x}, \text{ etc}$$

✚ Notación por medio de subíndices:

$$z_{xx}, z_{xy}, z_{yxx}, \text{ etc}$$

C.3 Definición y Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales

Llamamos ecuación diferencial a aquella ecuación que engloba las derivadas de una o más variables dependientes con relación a una o más variables independientes. Su clasificación es con base en su tipo, orden y linealidad.

Clasificación por su tipo. Esta clasificación cataloga a las ecuaciones diferenciales en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP).

Una ecuación diferencial ordinaria es aquella donde únicamente está presente las derivadas ordinarias de una o más variables dependientes. Como ejemplos se presenta⁹:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x} \quad xy' - y - xy^3(1 + \ln|x|) = 0 \quad y''' + y' = \sec(x)$$

⁹ Las variables dependiente e independiente se representan, respectivamente, por x & y.

A diferencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, en las ecuaciones diferenciales parciales, la ecuación presenta derivadas parciales de una o más variables dependientes. Como ejemplos se presenta¹⁰:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad U_{xx} + y^2 u = y \sin(2x) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 4xy$$

Clasificación por su orden. Referimos como orden de una ecuación diferencial, sea ecuación diferencial ordinaria o ecuación diferencial en derivadas parciales, a la derivada de sucesiva mayor, es decir, su orden.

Como ejemplos de derivadas de primer orden:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xy^2 \quad x^2 y' + y^2 = xy \quad x^2 + y^2 + y - x \frac{dy}{dx} = 0$$

Como ejemplos de derivadas de orden superior¹¹:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 36y = -2 \sin(x) \quad x''' - 6x'' + 11x' - 6x = e^t$$

Clasificación por su linealidad. Las ecuaciones diferenciales son lineales o no lineales, dependiendo si en la ecuación se cumplen las siguientes dos condiciones:

- ✚ La variable dependiente tiene grado 1, es decir, no está elevada a ningún exponente (ni negativo, ni positivo) que no sea uno.
- ✚ Cada coeficiente sólo depende de la variable independiente.

La manera formal de denotar una ecuación diferencial es:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = h(t)$$

¹⁰ La variable dependiente se representa con la letra 'u', mientras que las variables independientes por las letras x & y.

¹¹ Llamadas a aquellas ecuaciones de segundo orden en adelante

Si $n = 1$ la ecuación diferencial es de primer orden; si $n = 2$ la ecuación diferencial es de segundo orden y así sucesivamente.

Con $n = 1$:

$$a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t)$$

Con $n = 2$:

$$a_2(t) \frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = g(t)$$

Como ejemplos de ecuaciones lineales:

$$tx' + x = t \quad x'' - 2x' + x = 0 \quad \frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^2x}{dt^2} = \text{sen}(t)$$

Como ejemplos de ecuaciones no lineales:

$$(1 - x)x' + 4x = e^{2t} \quad x'' + \cos(x) = 0 \quad \frac{d^4x}{dt^4} = -x^2$$

C.4 Curva Solución

Para esta tesis, la curva solución es denotada como $x(t)$ y representa la respuesta dinámica, es decir, la solución de las ecuaciones diferenciales (ordinarias) presentadas cuando se resuelven casos de vibraciones. Dicha función $x(t)$ es diferenciable, para todos los casos vistos en los casos de vibración aquí mostrados para el intervalo solución $[0, \infty)$.

C.5 Solución Implícita y Explícita

Una solución se denomina implícita cuando ésta no puede expresarse como una función de una variable dependiente, en términos de la variable independiente. Para ejemplificar pensemos en una función f que dependa de los valores x y t donde ambos representan la variable dependiente e

independiente, respectivamente. En consecuencia, la función solución a una ecuación diferencial ordinaria, donde no es posible expresar una curva solución del tipo $x(t)$, se expresa como $f(x, t) = 0$

Caso contrario, llamamos solución explícita de una ecuación diferencial ordinaria, a aquella ecuación del tipo $x(t)$, es decir, la curva solución representa una función fácil de evaluar dado que el valor de la variable dependientes está en función de la variable independiente. Una solución explícita, que es igual a cero en todo un intervalo determinado, se llama solución trivial.

C.6 Problemas de Valor Inicial

A menudo las ecuaciones diferenciales, cuyas soluciones pueden ser de los tipos $f(x, t)$ y $x(t)$ necesitan cumplir condiciones especiales a las que se someten valores numéricos¹² sobre las incógnitas mencionadas y sus derivadas sucesivas.

Los valores iniciales que se aplican en los problemas de vibraciones suelen iniciar cuando $t = 0$ y como se presentan ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, es necesario tener el conocimiento de dos condiciones de frontera, es decir, dos valores iniciales. Los valores mencionados son x_0 y v_0 , es decir:

$$x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad \dot{x}(0) = v_0$$

En general para una ecuación diferencial lineal no homogénea:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = h(t)$$

O para una ecuación diferencial lineal homogénea¹³:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = 0$$

¹² Para las ecuaciones diferenciales comúnmente se imponen valores numéricos iniciales, mientras para las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se imponen funciones.

¹³ Nótese que la ecuación homogénea es aquella donde $h(t) = 0$

Ambas están sujetas, si se trata de un problema de valor inicial, valores iniciales:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

C.7 Solución General y Particular

Se mencionó que las ecuaciones diferenciales de orden n , tiene que estar sometidas a $n-1$ condiciones de valor inicial para determinar una solución libre de constantes de integración. Esta solución libre de dichas constantes es denominada solución particular.

El caso contrario a la solución particular ocurre cuando no se somete la ecuación solución $f(x, t)$ o $x(t)$ a valores iniciales, por lo que una ecuación diferencial de orden n poseerá un número de constante de integración C_n . Dicha solución es conocida como solución general.

Para los casos donde exista una sola constante de integración (C_1) se determina entonces, una familia de soluciones proveniente del conjunto $H(x, t, c)$ denominado familia monoparamétrica de soluciones. No obstante, una ecuación de orden n , que presente C_n constantes de integración forma un conjunto $H(x, t, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n)$ de soluciones llamado familia n -paramétrica de soluciones.

C.8 Sistema de Ecuaciones Diferenciales

Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se define como el sistema conformado por dos o más ecuaciones que comprendan las derivadas de dos o más funciones desconocidas de una única variable independientes. (Zill & Cullen, Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones Diferenciales, 2008, pág. 10).

C.9 Métodos de Solución para EDO de Orden Superior

Existen diferentes métodos de solución para ecuaciones diferenciales de orden superior. Esta parte tiene como objetivo darlos a conocer, sin embargo, sólo se hablará a profundidad de tres de

ellos en los apéndices subsecuentes: coeficientes indeterminados, variación de parámetros y transformada de Laplace.

Sólo por mencionar los más conocidos, se tiene:

- ✚ Resolución como una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes.
- ✚ Resolución por el método de coeficientes indeterminados.
- ✚ Resolución por el método de variación de parámetros.
- ✚ Resolución de la ecuación de Cauchy- Euler o ecuación equidimensional.
- ✚ Resolución en forma de series de potencias.
- ✚ Resolución por medio de la transformada de Laplace
- ✚ Resolución usando métodos numéricos.

Anexo D: Generalidades de las EDO Lineales

D.1 Introducción

Antes de explicar los métodos de coeficientes indeterminados, variación de parámetros y transformada de Laplace, para resolver una EDO de orden superior, es necesario explicar algunos conceptos básicos antes detallados en este apéndice.

D.2 Principio de Superposición para EDO Homogéneas

Se recuerda que una ecuación diferencial homogénea presenta el modelo:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = 0 \quad (\text{D.1})$$

El principio de superposición para las ecuaciones diferenciales homogéneas es un teorema que indica que la suma de dos o más soluciones a una ecuación diferencial lineal homogénea también puede representar una solución, es decir, si se tienen x_n funciones que satisfagan la ecuación diferencial por separado, entonces, existe una solución que contenga a todas ellas de la siguiente manera¹⁴:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) \quad (\text{D.2})$$

Donde los valores C_1, C_2, \dots, C_n representan las constantes arbitrarias.

Un ejemplo de esto es la solución a la ecuación diferencial de vibración libre sin amortiguamiento $m\ddot{x} + kx = 0$, cuya transformación en términos únicamente de la frecuencia natural ω es $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

¹⁴ Para las ecuaciones homogéneas es importante resaltar que debe encontrarse una solución no trivial, ya que $x=0$, aunque representa una solución, ésta es indeseable en la mayoría de los casos.

La solución general presenta la forma $x(t) = H_1 \cos(\omega t) + H_2 \text{sen}(\omega t)$. La sustitución de los valores iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$ dan como solución particular la ecuación: $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + (v_0 / \omega) \text{sen}(\omega t)$.

Por teorema de superposición, las ecuaciones:

$$x_1 = x_0 \cos(\omega t) \quad (\text{D.3})$$

$$x_2 = \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t) \quad (\text{D.4})$$

Satisfacen por separada la ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Comprobando para la ecuación D.3:

$$x_1 = x_0 \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}_1 = -\omega x_0 \text{sen}(\omega t) \quad (\text{D.5})$$

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t) \quad (\text{D.6})$$

Sustituyendo las ecuaciones D.3 y D.6 en la ecuación $\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$ debe demostrarse la igualdad planteada.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= 0 \\ -\omega^2 x_0 \cos(\omega t) + \omega^2 x_0 \cos(\omega t) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Comprobando ahora para D.4

$$x_2 = \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t)$$

$$\dot{x}_2 = v_0 \cos(\omega t) \quad (\text{D.7})$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega v_0 \text{sen}(\omega t) \quad (\text{D.8})$$

Sustituyendo las ecuaciones D.4 y D.8 en la ecuación $\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 0$ debe demostrarse la igualdad planteada.

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = 0$$

$$-\omega v_0 \operatorname{sen}(\omega t) + \omega^2 \left[\frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) \right] = 0$$

$$-\omega v_0 \operatorname{sen}(\omega t) + \omega v_0 \operatorname{sen}(\omega t) = 0$$

$$0 = 0$$

D.3 Independencia y Dependencia Lineal en las EDO

El concepto parte del modelo solución de una ecuación diferencial homogénea:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t)$$

Si ninguna constante ni función es igual a otra, se dice que la solución es linealmente independiente; caso contrario, la solución se hace linealmente dependiente de dos formas posibles:

✚ Sí $C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_n = 0$

✚ Si del conjunto de funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ... $x_n(t)$ al menos una función es capaz de ser denotada como la combinación lineal de las funciones restantes, es decir, si dos funciones son linealmente dependientes, se da por entendido que una de ellas es un múltiplo constante de la otra.

D.4 El Wronskiano¹⁵

Las soluciones que importa determinar para una ecuación diferencial son las linealmente independientes para toda ecuación diferencial lineal (Zill, Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado, 2000, pág. 120).

Una manera analítica muy usada para determinar la linealidad (dependiente o independiente) de un conjunto de x_n soluciones es por medio del determinante llamado *wronskiano*. El wronskiano se forma a partir de colocar en el primer renglón, y en cada columna de tal renglón

¹⁵ El wronskiano debe su nombre, a su creador, el matemático polaco Józef Hoene-Wroński (1776-1853).

sólo una función del conjunto x_n , partiendo de x_1 , continuando con x_2, x_3, x_{n-1} y finalizando en la última columna con x_n .

Posteriormente, debajo de cada función x_n , en los renglones siguientes, se colocan todas las derivadas sucesivas de la función x_n ; el número de derivadas sucesivas a calcular para el determinante es igual al número de funciones que tenga el conjunto x_n menos uno.

El wronskiano en cuestión se denota como:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1' & x_2' & \dots & x_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (D.9)$$

Los criterios de linealidad, con base en el wronskiano $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se determinan a partir de su resultado:

- ✚ Si $W(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ las soluciones son linealmente independientes entre sí.
- ✚ Si $W(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ por lo menos dos soluciones son linealmente dependientes entre sí.

D.5 Principio de Superposición para EDO no Homogéneas

Recordando que una ecuación diferencial no homogénea presenta el modelo:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = h(t) \quad (D.10)$$

El principio de superposición para las ecuaciones diferenciales no homogéneas funciona de forma igual al de las ecuaciones homogéneas, con la diferencia de que es necesario contemplar una solución que satisfaga la parte $h(t)$.

Es incuestionable, que existe una solución que resuelve la parte que contempla todas las constantes arbitrarias C_n , así como el conjunto de funciones x_n asociadas a ellas y recibe el nombre, en el principio de superposición de las EDO no homogéneas, de *solución complementaria*.

A su vez, la solución que resuelve la parte $h(t)$ recibe el nombre de *solución particular*. Para esta tesis las soluciones particulares serán obtenidas por tres métodos específicos: coeficientes indeterminados, variación de parámetros y transformada de Laplace.

Sea la solución complementaria:

$$x_C = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \cdots + C_n x_n(t) \quad (D.11)$$

Y la solución particular:

$$x_P = \sum_{n=1}^{\infty} x_{P_n}(t) = x_{P_1}(t) + x_{P_2}(t) + \cdots + x_{P_n}(t) \quad (D.12)^{16}$$

La solución general obtenida por principio de superposición es:

$$x(t) = x_C + x_P = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} x_{P_n}(t) \quad (D.13)$$

Para idealizar este principio de superposición piense en la EDO $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$. Es observable que $h(t) = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$. La solución particular a $h(t)$ que se obtuvo en el capítulo IX es $x_P = [\mu_0 / (1 - r^2)] \text{sen}(\Omega t)$.

Se comprueba que $\ddot{x}_P + \omega^2 x_P = \mu_0 \omega^2 \text{sen}(\Omega t)$ derivando la solución particular y sustituyendo x_P , \dot{x}_P y \ddot{x}_P en esta igualdad.

¹⁶ Hay que hacer denotar que la solución particular no presenta constantes arbitrarias.

Anexo E: Método de Coeficientes Indeterminados

Para resolver ecuaciones del tipo:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = h(t)$$

Este método necesita resolver dos etapas para aplicar el principio de superposición:

- ✚ Establecer la solución complementaria (x_C) que satisfaga la ecuación.
- ✚ Establecer una solución particular (x_P) por el método de coeficientes indeterminados con base en la función $h(t)$ cuidando que ésta no presente dependencia lineal con la solución complementaria.

Los tipos de funciones que pueden incluirse dentro de la solución particular son los siguientes:

- ✚ k (constante)
- ✚ $e^{\alpha t}$ (función exponencial). Siendo α un número real.
- ✚ t^n (funciones polinomiales). Siendo n un número entero no negativo.
- ✚ $\text{sen}(\beta t)$ o $\text{cos}(\beta t)$ (exclusivamente estas dos). Siendo β un número real.

El conjunto de funciones que se forma cuenta con la propiedad de que las derivadas de sus sumas y productos son, de igual manera, sumas y productos del mismo tipo de funciones. La solución particular formada se escribe de la siguiente forma:

$$x_P = \sum_{n=1}^{\infty} x_{P_n}(t) = x_{P_1}(t) + x_{P_2}(t) + \dots + x_{P_n}(t)$$

A continuación se muestran algunos ejemplos de cómo proponer la solución particular a partir de una función $h(t) \neq 0$

Función $h(t)$	Función particular x_p
1	A
$13t + 4$	$At + B$
$7t^2 - 2$	$At^2 + Bt + C$
$4t^3 - 6t^2 + 9t + 20$	$At^3 + Bt^2 + Ct + D$
$\text{sen}(2t)$	$A \cos(2t) + B \text{sen}(2t)$
$\cos(2t)$	$A \cos(2t) + B \text{sen}(2t)$
e^{4t}	Ae^{4t}
$(3t - 13)e^{-5t}$	$(At + B)e^{-x}$
$t^4 e^{-5t}$	$(At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E)e^{-5t}$
$t^2 e^{3x} \text{sen}(2t)$	$(At^2 + Bt + C)e^{3t} \text{sen}(2t) + (Dt^2 + Et + F)e^{3t} \text{sen}(2t)$

Los valores A, B, C, etcétera son calculados resolviendo un sistema de ecuaciones lineales de tamaño igual al número de letras mayúsculas utilizadas para representar los coeficientes de la solución particular x_p .

Anexo F: Método de Variación de Parámetros

Se empieza por el hecho de que conocemos el modelo de una ecuación diferencial lineal no homogénea con el modelo (ecuación D.10):

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = h(t)$$

Para la demostración de este método partiremos de una ecuación de segundo orden, es decir, con $n = 2$ obteniendo:

$$a_2(t)\ddot{x}(t) + a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x = h(t) \quad (\text{F.1})$$

Posteriormente es necesario dejar la derivada de segundo orden con factor de 1 dividiendo toda la ecuación F.1 entre $a_2(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{a_2(t)}{a_2(t)} \ddot{x}(t) + \frac{a_1(t)}{a_2(t)} \dot{x}(t) + \frac{a_0(t)}{a_2(t)} x &= \frac{h(t)}{a_2(t)} \\ \ddot{x}(t) + \underbrace{\frac{a_1(t)}{a_2(t)}}_{P(t)} \dot{x}(t) + \underbrace{\frac{a_0(t)}{a_2(t)}}_{Q(t)} x &= \underbrace{\frac{h(t)}{a_2(t)}}_{f(t)} \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

$$\ddot{x}(t) + P(t)\dot{x}(t) + Q(t)x = f(t) \quad (\text{F.3})$$

Para este método, la función $f(t)$, a diferencia del método de coeficientes indeterminados, admite funciones de tipo logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas, exponenciales, entre otras. Así mismo también acepta las funciones que se usan para el método de coeficientes indeterminados. Lo único que debe tenerse en cuenta, es que tales funciones sean continuas.

Prosiguiendo con la demostración, al tener una ecuación de segundo orden, su solución será entonces:

$$x_C(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \quad (\text{F.4})$$

Por suposición, es necesario plantear la ecuación particular, con el hecho de que no debe manejarse en términos de constantes arbitrarias C_1 y C_2 , sino de funciones desconocidas $u_1(t)$ y $u_2(t)$ generándose así:

$$x_P(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t) \quad (\text{F.5})$$

Para simplificar la notación, se expresa esta misma ecuación como:

$$x_p(t) = u_1x_1 + u_2x_2 \quad (\text{F.6})$$

Derivando F.6 con respecto a t

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \frac{dx_p}{dt} = \frac{d}{dt}(u_1x_1 + u_2x_2) \\ &:: = \frac{d}{dt}(u_1x_1) + \frac{d}{dt}(u_2x_2) \\ &:: = \left[x_1 \frac{d}{dt}(u_1) + u_1 \frac{d}{dt}(x_1) \right] + \left[x_2 \frac{d}{dt}(u_2) + u_2 \frac{d}{dt}(x_2) \right] \\ &\therefore \dot{x}_p(t) = \dot{u}_1x_1 + u_1\dot{x}_1 + \dot{u}_2x_2 + u_2\dot{x}_2 \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Derivando una segunda ocasión con respecto a t:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_p &= \frac{d\dot{x}_p}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{u}_1x_1 + u_1\dot{x}_1 + \dot{u}_2x_2 + u_2\dot{x}_2) \\ &:: = \frac{d}{dt}(\dot{u}_1x_1) + \frac{d}{dt}(u_1\dot{x}_1) + \frac{d}{dt}(\dot{u}_2x_2) + \frac{d}{dt}(u_2\dot{x}_2) \\ &:: = \left[x_1 \frac{d}{dt}(\dot{u}_1) + \dot{u}_1 \frac{d}{dt}(x_1) \right] + \left[\dot{x}_1 \frac{d}{dt}(u_1) + u_1 \frac{d}{dt}(\dot{x}_1) \right] + \left[x_2 \frac{d}{dt}(\dot{u}_2) + \dot{u}_2 \frac{d}{dt}(x_2) \right] \\ &\quad + \left[\dot{x}_2 \frac{d}{dt}(u_2) + u_2 \frac{d}{dt}(\dot{x}_2) \right] \\ &\therefore \ddot{x}_p(t) = \ddot{u}_1x_1 + \dot{u}_1\dot{x}_1 + \dot{u}_1\dot{x}_1 + u_1\ddot{x}_1 + \ddot{u}_2x_2 + \dot{u}_2\dot{x}_2 + \dot{u}_2\dot{x}_2 + u_2\ddot{x}_2 \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Ahora teniendo la función particular $x_p(t)$, $\dot{x}_p(t)$ y $\ddot{x}_p(t)$ se sustituyen en $\ddot{x}_p(t) + P(t)\dot{x}_p(t) + Q(t)x_p = f(t)$.

$$\ddot{x}_p(t) + P(t)\dot{x}_p(t) + Q(t)x_p = f(t)$$

$$\begin{aligned} &[\ddot{u}_1x_1 + \dot{u}_1\dot{x}_1 + \dot{u}_1\dot{x}_1 + u_1\ddot{x}_1 + \ddot{u}_2x_2 + \dot{u}_2\dot{x}_2 + \dot{u}_2\dot{x}_2 + u_2\ddot{x}_2] \\ &+ P(t)[\dot{u}_1x_1 + u_1\dot{x}_1 + \dot{u}_2x_2 + u_2\dot{x}_2] + Q(t)[u_1x_1 + u_2x_2] = f(t) \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Factorizando los términos que contengan u_1 y u_2 de F.9 se podrá observar que son cero los siguientes términos:

$$u_1[\ddot{x}_1 + P(t)\dot{x}_1 + Q(t)x_1] = 0 \quad \text{y} \quad u_2[\ddot{x}_2 + P(t)\dot{x}_2 + Q(t)x_2] = 0 \quad (\text{F.10})$$

La razón de que sean cero es considerando que una solución de una ecuación diferencial no homogénea necesita ser, por principio de superposición, la suma de una ecuación complementaria con una particular. Por lo tanto, x_1 y x_2 resultan ser esa solución complementaria si consideramos las ecuaciones F.10. Por tal motivo, es obvio que la ecuación F.10 se reduce a:

$$\ddot{u}_1x_1 + \dot{u}_1\dot{x}_1 + \ddot{u}_2x_2 + \dot{u}_2\dot{x}_2 + P(t)[\dot{u}_1x_1 + \dot{u}_2x_2] + \dot{u}_1\dot{x}_1 + \dot{u}_2\dot{x}_2 = f(t) \quad (\text{F.11})$$

Y recordando que, por derivación de la multiplicación de dos funciones de la misma variable independiente:

$$\ddot{u}_1x_1 + \dot{u}_1\dot{x}_1 = \frac{d}{dt}(\dot{u}_1x_1) \quad (\text{F.12})$$

$$\ddot{u}_2x_2 + \dot{u}_2\dot{x}_2 = \frac{d}{dt}(\dot{u}_2x_2) \quad (\text{F.13})$$

Es posible expresar F.11, en términos de F.12 y F.13 como:

$$\frac{d}{dt}(\dot{u}_1x_1 + \dot{u}_2x_2) + P(t)[\dot{u}_1x_1 + \dot{u}_2x_2] + \dot{u}_1\dot{x}_1 + \dot{u}_2\dot{x}_2 = f(t) \quad (\text{F.14})$$

Como es necesario conocer las funciones desconocidas u_1 y u_2 , se planean dos hipótesis

✚ Las funciones u_1 y u_2 satisfacen que $\dot{u}_1x_1 + \dot{u}_2x_2 = 0$

✚ Si $\dot{u}_1\dot{x}_1 + \dot{u}_2\dot{x}_2$ entonces $\dot{u}_1\dot{x}_1 + \dot{u}_2\dot{x}_2 = f(t)$

Habiendo planteado esto, se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1\dot{u}_1 + x_2\dot{u}_2 = 0 \\ \dot{x}_1\dot{u}_1 + \dot{x}_2\dot{u}_2 = f(t) \end{cases}$$

Donde la solución, utilizando el método de Cramer para sistemas de ecuaciones resulta ser:

$$\dot{u}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2 \\ f(t) & \dot{x}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}} \quad (\text{F.15})$$

$$\dot{u}_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ \dot{x}_1 & f(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}} \quad (\text{F.16})$$

De estas ecuaciones se observan tres cosas:

- ✚ El denominador de F.15 y F.16 es el wronskiano de x_1 y x_2 .
- ✚ Es común, además denotar el numerador de F.15 como W_1 y el de F.16 como W_2 .
- ✚ El sistema encuentra la solución como la primer derivada de las funciones u_1 y u_2 .

Las soluciones finales resultan ser la integral de F.15 y F.16, es decir:

$$u_1 = \int \dot{u}_1 dt = \int \frac{W_1}{W} dt \quad (\text{F.17})$$

$$u_2 = \int \dot{u}_2 dt = \int \frac{W_2}{W} dt \quad (\text{F.18})$$

F.17 y F.18 son las soluciones buscadas para $x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$

El método no se limita a las ecuaciones de segundo orden, puede expandirse a un orden superior si consideramos que tendríamos el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \dot{u}_1 + x_2 \dot{u}_2 + \dots + x_n \dot{u}_n = 0 \\ \dot{x}_1 \dot{u}_1 + \dot{x}_2 \dot{u}_2 + \dots + \dot{x}_n \dot{u}_n = 0 \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)} \dot{u}_1 + x_2^{(n-1)} \dot{u}_2 + \dots + x_n^{(n-1)} \dot{u}_n = f(t) \end{array} \right.$$

Entonces por regla de Cramer se obtendría:

$$u_k = \int \frac{W_k}{W} dt \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{F.19})$$

Siendo

$[u_k]$ = el número de soluciones buscadas; se encontrarán tantas como sea el orden de la ecuación.

$[W_k]$ = el determinante obtenido al sustituir la k -ésima columna del wronskiano en la columna:

$$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{array}$$

$[W]$ = wronskiano de las soluciones x_1, x_2, \dots, x_n .

Anexo G: Transformada de Laplace¹⁷

La transformada de Laplace proporciona grandes ventajas cuando se requiere resolver ecuaciones diferenciales lineales. Con el uso de la transformada de Laplace es posible que las funciones exponenciales, senoidales y cosenoidales (entre otras) se conviertan en funciones algebraicas de una variable 's' (Ogata, 1998, pág. 13).

Otra ventaja importante es que al utilizar el método de la transformada de Laplace es posible determinar la solución de la ecuación diferencial en sus respuestas estacionaria y transitoria.

Este apéndice se limitará explicar las definiciones de la transformada de Laplace, transformada inversa de Laplace y algunas propiedades básicas de las mismas. Adicionalmente se dará una tabla de las principales transformadas de Laplace.

G.1 Transformada de Laplace

Sea una función $f(t)$ definida para un intervalo cuando $t \rightarrow 0$, la transformada de Laplace es:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (\text{G.1})$$

La transformada de Laplace para una función $F(t)$, siendo $t > 0$, existe si la integral de Laplace por la función $F(t)$ converge, de otra manera se dice que no existe (Spiegel, Transformadas de Laplace, 1981, pág. 1).

G.1.1 Propiedad de linealidad

Si k_1 y k_2 son constantes de las funciones $F_1(t)$ y $F_2(t)$, y respectivamente sus transformadas de Laplace son $f_1(s)$ y $f_2(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{k_1 F_1(t) + k_2 F_2(t)\} = k_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + k_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) \quad (\text{G.2})^{18}$$

¹⁷ Recibe este nombre en honor al físico, matemático y astrónomo francés Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

¹⁸ Es posible utilizar esta función hasta $k_n F_n(t)$ y sus respectivas transformadas de Laplace $k_n f_n(t)$.

G.1.2 Primera propiedad de traslación

Si $F(t)$ presenta transformada de Laplace $f(s)$, entonces la transformada de Laplace $e^{at}F(t)$ se calcula mediante:

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}F(t) dt = f(s-a) \quad (\text{G.3})$$

La multiplicación de la función $F(t)$ por e^{at} provoca que la variable s sea sustituida por el valor de $s - a$ en la transformada de Laplace.

G.1.3 Segunda propiedad de traslación

Sea

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) \quad \text{y} \quad G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{G(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}G(t) dt \\ &: = \underbrace{\int_0^a e^{-st}(0) dt}_0 + \int_a^{\infty} e^{-st}F(t-a) dt \\ &: = \int_a^{\infty} e^{-st}F(t-a) dt \end{aligned}$$

Haciendo $t = u + a$ y $dt = du$

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \int_a^{\infty} e^{-st}F(t-a) dt = \int_a^{\infty} e^{-s(u+a)}F(u) du = e^{-sa} \int_a^{\infty} e^{-su}F(u) du$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-sa}f(s) \quad (\text{G.4})$$

G.1.4 Propiedad del cambio de escala

Sea $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}F(at) dt$$

Haciendo $t = u/a$ y $dt = du/a$ en el lado derecho de la ecuación

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-s(u/a)}F(u) du}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-(s/a)u}F(u) du$$

Resulta en:

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (\text{G.5})$$

G.1.5 Transformada de Laplace para derivadas

Para $F'(t)$

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}F'(t) dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st}F'(t) dt$$

Haciendo uso del método de integración por partes $\int u dv = uv - \int v du$ donde:

$$u = e^{-st} \quad \rightarrow \quad du = -se^{-st} dt$$

$$dv = F'(t) dt \quad \rightarrow \quad v = F(t)$$

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P e^{-st}F'(t) dt &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ e^{-st}F(t) \Big|_0^P + s \int_0^P e^{-st}F(t) dt \right\} \\ \vdots &= \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ \underbrace{e^{-sP}}_0 F(P) - \underbrace{e^{-0}}_1 F(0) + s \int_0^P e^{-st}F(t) dt \right\} \\ \vdots &\equiv \lim_{P \rightarrow \infty} \left\{ s \int_0^{\infty} e^{-st}F(t) dt - F(0) \right\} = sf(s) - F(0) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}F(t)\right\} = sf(s) - F(0) \quad (\text{G.6})$$

Para $F''(t)$

Sea $\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = sg(s) - G(0)$ y $G(t) = F'(t)$

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s\mathcal{L}\{F'(t)\} - F'(0) = s\left[\overbrace{sf(s) - F(0)}^{\text{Ecuación G.7}}\right] - F'(0) = s^2f(s) - sF(0) - F'(0)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}F(t)\right\} = s^2f(s) - sf(0) - f'(0) \quad (\text{G.7})$$

Consecuencialmente es posible extender esta fórmula hasta la n -ésima derivada mediante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}F(t)\right\} \\ &= s^{(n)}f(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Es notable que, si todos los valores de las condiciones iniciales son cero, es decir $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-2)}(0) = f^{(n-1)}(0) = 0$ la ecuación G.8 se reduce a:

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}F(t)\right\} = s^n f(s) \quad (\text{G.9})$$

G.1.6 Multiplicación por t^n

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s) \quad (\text{G.10})$$

G.1.7 División por t

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty f(u) du \quad (\text{G.11})$$

G.1.8 Transformada de Laplace de integrales

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(\tau) d\tau\right\} = \frac{f(s)}{s} \quad (\text{G.12})$$

G.2 Transformada Inversa de Laplace

Por definición la transformada de Laplace de la función $F(t)$ es $f(s)$ por medio de $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, por lo tanto, para calcular la función $F(t)$ a partir de $f(s)$ se utiliza la transformada inversa de Laplace mediante:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t) \quad (\text{G.13})$$

En general, para obtener las propiedades de la transformada de Laplace, basta con aplicar el operador \mathcal{L}^{-1} a cada una de ellas dado que éstas se relacionan.

G.2.1 Propiedad de linealidad

$$\mathcal{L}^{-1}\{k_1 f_1(s) + k_2 f_2(s)\} = k_1 \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + k_2 \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} = k_1 F_1(t) + k_2 F_2(t) \quad (\text{G.14})^{19}$$

G.2.2 Primera propiedad de traslación

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s - a)\} = e^{at} F(s) \quad (\text{G.15})$$

G.2.3 Segunda propiedad de traslación

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = \begin{cases} F(t - a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \quad (\text{G.16})$$

¹⁹ Es posible utilizar esta función hasta $k_n F_n(t)$ y sus respectivas transformadas de Laplace $k_n f_n(s)$.

G.2.4 Propiedad del cambio de escala

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{t}{k}\right) \quad (\text{G.17})$$

G.2.5 Transformada inversa de Laplace de derivadas

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n} f(s)\right\} = (-1)^n t^n F(t) \quad (\text{G.18})$$

G.2.6 Multiplicación por s^n

$$\mathcal{L}^{-1}\{s f(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{s f(s) - F(0)\} = F'(t) \quad (\text{G.19})^{20}$$

G.2.7 División por s

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u) du \quad (\text{G.20})$$

G.3 Teorema de Convolución

Si $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$, entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s) g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u) du \quad (\text{G.21})$$

Similarmente:

$$\mathcal{L}^{-1}\{g(s) f(s)\} = \int_0^t G(u)F(t-u) du \quad (\text{G.22})$$

²⁰ Multiplicar por s produce el efecto de derivar a $F(t)$.

G.4 Principales Transformadas de Laplace

$f(s)$	$F(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (n = 1, 2, 3, ...)
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t e^{at}$
$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$t^n e^{at}$ (n = 1, 2, 3, ...)
$\frac{1}{s(s-a)^2}$	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	sen(ωt)
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	cos(ωt)
$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	senh(ωt)
$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	cosh(ωt)
$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \text{sen}(\omega t)$

$$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2} \quad e^{at} \cos(\omega t)$$

$$\frac{\omega}{(s - a)^2 - \omega^2} \quad e^{at} \sinh(\omega t)$$

$$\frac{s - a}{(s - a)^2 - \omega^2} \quad e^{at} \cosh(\omega t)$$

$$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)} \quad \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} [\cos(\Omega t) - \cos(\omega t)] \quad (\Omega^2 \neq \omega^2)$$

$$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + \Omega^2)} \quad \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \left[\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right] \quad (\Omega^2 \neq \omega^2)$$

$$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad \frac{\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)}{2\omega^3}$$

$$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad \frac{t \sin(\omega t)}{2\omega}$$

La lista puede hacerse más grande, sin embargo, estas transformadas de Laplace son más que suficientes para resolver las ecuaciones diferenciales planteadas en esta tesis.

Anexo H: Matrices y Determinantes

H.1 Definición de Matriz

Una matriz se define como un arreglo de números posicionados de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{H.1})$$

Siendo para todos sus elementos a_{ij} :

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, m && \text{(renglones)} \\ j &= 1, 2, \dots, n && \text{(columnas)} \end{aligned}$$

Donde a_{mn} representa el tamaño de la matriz (n renglones y m columnas). Si A es una matriz $m \times n$ con $m = n$, entonces A se denomina *matriz cuadrada*. Una matriz $m \times n$ con todos los elementos iguales a cero se le llama *matriz cero* de $m \times n$.

H.2 Matriz Transpuesta

La matriz transpuesta de una matriz A de tamaño $m \times n$ es una matriz de tamaño de tamaño $n \times m$ que se obtiene cambiando las columnas a filas, es decir, los elementos presentes en la matriz a_{ij} pasan a ser los elementos a_{ji} en la matriz transpuesta. Para denominar una matriz transpuesta se puede optar por las siguientes don notaciones:

$$A'_{m \times n} = A_{n \times m} \quad (\text{H.2})^{21}$$

$$A^t_{m \times n} = A_{n \times m} \quad (\text{H.3})^{22}$$

Las matrices transpuestas cumplen con las siguientes propiedades:

$$(A^t_{m \times n})^t = A_{m \times n} \quad (\text{H.4})$$

$$(kA_{m \times n})^t = kA^t_{m \times n} \quad ; \quad k \text{ es un escalar} \quad (\text{H.5})$$

²¹ (Ayres Jr., 1978, pág. 11)

²² (Anton, 1984, pág. 82)

$$(A_{m \times n} + B_{m \times n})^t = A_{m \times n}^t + B_{m \times n}^t \quad (\text{H.6})$$

$$(A_{m \times n} B_{n \times p})^t = B_{n \times p}^t A_{m \times n}^t \quad (\text{H.7})$$

H.3 Matrices Especiales

H.3.1 Matriz triangular

Una matriz cuadrada A cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$ se llama *triangular superior*; una matriz cuadrada A cuyos elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$ se llama *triangular inferior*. Respectivamente matrices se representan como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{H.8})$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{H.9})^{23}$$

H.3.2 Matriz diagonal

Cuando se presenta que una matriz es triangular superior e inferior al mismo tiempo, ésta se denomina *matriz diagonal*. Su representación es:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{H.10})$$

Otra manera de representar a la ecuación H.10 es mediante:

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \quad (\text{H.11})$$

²³ Es interesante notar que la matriz escalonada es una matriz triangular inferior.

H.3.3 Matriz escalar

Cuando todos los elementos de la matriz diagonal son iguales a un cierto valor k ($a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$) la matriz diagonal es llamada *matriz escalar*. Su representación es:

$$D = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix} \quad (\text{H.12})$$

H.3.4 Matriz unidad

El caso especial cuando $k = 1$ hace que la matriz escalar sea llamada *matriz unidad* y se representa mediante $I_{nn} = I_n$. Su representación es:

$$I_{nn} = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{H.13})$$

H.3.5 Matriz nula

Una matriz que contenga ceros en todos sus elementos se llama *matriz nula*, es decir, en la matriz escalar $k = 0$. Cuando no exista confusión en el orden de una matriz simplemente se puede escribir $A = 0$, o en su lugar:

$$A_{nn} = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{H.14})$$

O, si se trata de una matriz de tamaño $m \times n$:

$$A_{mn} = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{H.15})$$

H.4 Matrices Cuadradas Especiales

H.4.1 Matrices conmutativas y anticonmutativas

Posteriormente se detallará que el producto de dos matrices cuadradas A y B no siempre cumple con $AB = BA$, pero cuando dichas matrices cumplan la propiedad de conmutatividad en la multiplicación éstas se denominaban *matrices conmutativas permutables* o simplemente se dice que *conmutan*, Una matriz A siempre conmuta consigo misma o con la matriz unidad I_n (Ayres Jr., 1978, pág. 10).

Cuando dos matrices cuadradas A y B cumple con $AB = -BA$, las matrices son *antipermutables* o *anticonmutativas*.

H.4.2 Matrices periódica, idempotente, nilpotente e involutiva

Si una matriz cuadrada A satisface $A^{k+1} = A$, siendo k un número entero positivo, se llama *matriz periódica*. Cuando el menor número positivo y entero satisfaga $A^{k+1} = A$ se dirá que la matriz A presenta *periodo k*.

Cuando $A^2 = A$ al ser $k = 1$ la matriz es denominada como *idempotente*. Una matriz A que sea $A^p = 0$, donde p es un número entero y positivo se llama *nilpotente*. Si p es el menor número entero y positivo para el cual $A^p = 0$ la matriz es *nilpotente de índice p*.

Si se cumple con que $A^2 = I_n$ se le asigna el nombre de *matriz involutiva*.

H.4.3 Matriz inversa

Sean dos matrices cuadradas A y B que cumplan con $AB = BA = I_n$ se dice que la matriz B es la matriz inversa de la matriz A y se denota como: $B = A^{-1}$; del mismo modo, es deducible que $A = B^{-1}$.

En los siguientes capítulos se observará que no todas las matrices poseen matriz inversa, más aquellas que si la tengan, ésta es única y no se repite para otra matriz.

H.4.4 Matriz simétrica y antisimétrica

Una matriz cuadrada A cuya transpuesta sea la misma matriz A , es decir, $A^t = A$ se llama *matriz simétrica* donde todos sus elementos $a_{ij} = a_{ji}$.

Cuando una matriz cuadrada A cuya transpuesta cumpla con $A^t = -A$ se llama *matriz antisimétrica* o *matriz hemisimétrica* donde todos sus elementos $a_{ij} = -a_{ji}$. Además, todos los elementos a_{ii} deben ser cero.

H.5 Matrices que Involucran Números Complejos

H.5.1 Matriz conjugada

Sean a y b números reales, i la cantidad imaginaria con un valor $\sqrt{-1}$ y z un número complejo definido como $z = a + bi$ cuyo número conjugado se define mediante $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$. Como ejemplo (Ayres Jr., 1978, pág. 12), la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 2i & i \\ 3 & 2 - 3i \end{bmatrix} \quad (\text{H.16})$$

Presenta la siguiente matriz conjugada:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2i & -i \\ 3 & 2 + 3i \end{bmatrix} \quad (\text{H.17})$$

H.5.2 Matrices hermítica y antihermítica

Una matriz cuadrada A con elementos a_{ij} se conoce como *matriz hermítica* o *matriz autoadjunta* cuando se cumpla que $\bar{A}^t = A$.

Si se tiene una matriz cuadrada A tal que $\bar{A}^t = -A$ esta se llama *matriz hemihermítica* o *antihermítica*. Para todos los elementos de la matriz se debe cumplir que $a_{ij} = -a_{ji}$ y que los elementos de la diagonal principal sean cero, o en su defecto, cantidades imaginarias puras (sin parte real).

H.6 Álgebra de Matrices

H.6.1 Suma y resta de matrices

Sean las matrices A y B dos matrices de tamaño $m \times n$, con elementos a_{ij} y b_{ij} , entonces la suma de A y B genera $A \pm B$, donde ambas matrices deben coincidir en tamaño para poder sumarse. La suma está dada por:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{H.18})$$

H.6.2 Propiedades para la suma de matrices

Sean tres matrices A , B y C de tamaño $m \times n$ y dos escalares α y β , entonces:

$$\oplus A + 0 = A$$

$$\oplus 0A = 0$$

$$\oplus A + B = BA \quad (\text{ley conmutativa para suma de matrices})$$

$$\oplus (A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{ley asociativa para suma de matrices})$$

$$\oplus \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad (\text{ley distributiva para multiplicación por escalar})$$

$$\oplus 1A = A$$

$$\oplus (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

H.6.3 Multiplicación de matrices

Sean las matrices A de tamaño $m \times n$, con elementos a_{ij} y B de tamaño $n \times p$, con elementos b_{ij} , entonces el producto de A con B es una matriz C de tamaño $m \times p$ con elementos c_{ij} , en donde:

$$c_{ij} = (\text{renglon } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B) \quad (\text{H.19})$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, A y B son compatibles bajo la multiplicación; caso contrario si el número de renglones de A es diferente al número de renglones B, las matrices son incompatibles bajo la multiplicación y su producto no está definido (Grossman , 1996, pág. 64).

Otro hecho que hay que destacar es que el producto de dos matrices no siempre es conmutativo, es decir, $AB \neq BA$ sin embargo, aquellos casos donde $AB = BA$ es porque las matrices A y B conmutan. Muchas veces ocurre que el producto AB esté definido pero BA no, y otras veces ocurre que el producto esté definido para AB y BA pero su producto dé como resultado matrices de diferentes tamaños (Grossman , 1996, pág. 42).

La ley asociativa para la multiplicación de matrices establece que:

$$A_{m \times n}(B_{n \times p}C_{p \times q}) = (A_{m \times n}B_{n \times p})C_{p \times q} = D_{n \times q} \quad (\text{H.20})$$

La ley distributiva para la multiplicación de matrices establece que:

$$A_{m \times n}(B_{n \times p} + C_{n \times q}) = A_{m \times n}B_{n \times p} + A_{m \times n}C_{n \times q} \quad (\text{H.21})$$

H.6.4 Multiplicación de matrices por bloques

Muchas ocasiones resulta demasiado tedioso realizar el producto de matrices elemento por elemento, por lo que resulta conveniente manejar una matriz, de tamaño $m \times n$, en bloques utilizando un proceso llamado *partición de matrices*. los bloques resultantes arrojan matrices más pequeñas con el nombre de *submatrices*.

Para ejemplificación, suponga el producto de dos matrices $A_{4 \times 4}$ y $B_{4 \times 4}$ como:

$$A_{4 \times 4}B_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{H.22})$$

Cuando se dividen matrices en bloque, es necesario que las submatrices que se quieran multiplicar tengan producto definido, para este caso, como las matrices son del mismo tamaño, es válido crear submatrices de tamaño 2×2 . Dividendo en bloques la ecuación H.22 se obtiene que:

$$A_{4 \times 4} B_{4 \times 4} = \begin{array}{cc|cc|cc|cc} a_{11} & a_{12} & | & a_{13} & a_{14} & b_{11} & b_{12} & | & b_{13} & b_{14} \\ a_{21} & a_{22} & | & a_{23} & a_{24} & b_{21} & b_{22} & | & b_{23} & b_{24} \\ - & - & + & - & - & - & - & + & - & - \\ \hline a_{31} & a_{32} & | & a_{33} & a_{34} & b_{31} & b_{32} & | & b_{33} & b_{34} \\ a_{41} & a_{42} & | & a_{43} & a_{44} & b_{41} & b_{42} & | & b_{43} & b_{44} \end{array} \quad (\text{H.23})$$

Por simplificación se denotan las matrices en la ecuación H.23 como:

$$A_{4 \times 4} B_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} A_{11} & | & A_{12} \\ - & + & - \\ A_{21} & | & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & | & B_{12} \\ - & + & - \\ B_{21} & | & B_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{H.24})$$

Donde:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

Operando bloque por bloque se obtiene:

$$A_{4 \times 4} B_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12} + B_{21} & | & A_{11}B_{12} + A_{12} + B_{22} \\ - & - & - & - & - & + & - & - & - & - \\ A_{21}B_{11} + A_{22} + B_{21} & | & A_{21}B_{12} + A_{22} + B_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{H.25})$$

Esta forma de multiplicación por bloques no sólo es válida para producto entre matrices cuadradas, si no que puede ser utilizado para el producto de matrices donde las dimensiones de A

y B sean distintas. La operación por bloques debe ser utilizada siempre y cuando el producto entre dos matrices esté definido.

H.7 Matriz Inversa

Un sistema de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas que de ecuaciones, del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Puede ser representado en forma matricial mediante:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_n \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_b$$

Cuya solución está dada cuando

$$x = A^{-1}b$$

Expresada explícitamente la solución:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{-1}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_b$$

A la matriz A^{-1} se le asigna el nombre de *matriz inversa*. Una matriz inversa cuenta con la siguiente característica (Ayres Jr., 1978, pág. 11): La inversa de un producto de dos matrices que, que tengan matriz inversa, es igual al producto de sus inversas pero en orden contrario:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Además si una matriz A es inversible, se tiene que (Anton , 1984, pág. 51):

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

Cabe aclarar que una matriz cuadrada no siempre presenta matriz inversa, a estas matrices se les asigna como *matriz singular*. Una manera sencilla de saber si una matriz es o no invertible es por medio de calcular el determinante de la matriz; si el determinante es igual a cero la matriz no es invertible.

A continuación se detallan dos métodos utilizados en esta tesis para obtener la matriz inversa de una matriz cuadrada A. Tales métodos son los siguientes:

- ✚ Eliminación Gauss-Jordan.
- ✚ Cálculo por la adjunta.

H.7.1 Matriz inversa usando eliminación Gauss-Jordan

En esta sección del capítulo, se exhibe un algoritmo básico que, por medio de operaciones elementales o gaussianas, para encontrar la inversa de una matriz invertible (Grossman , 1996, pág. 103):

- i. Se escribe la matriz aumentada convencional, con la diferencia de que el lado izquierdo representa la matriz de la cual se desea calcular su inversa y del lado derecho la matriz identidad del mismo tamaño que la matriz izquierda. La matriz aumentada se representa por: $[A_{n \times n} \mid I_{n \times n}]$.
- ii. Se utilizan las operaciones elementales por renglones para poner la matriz $A_{n \times n}$ a su forma escalonada reducida por renglones.
- iii. Se decide si la matriz $A_{n \times n}$ es invertible dependiendo de la ocurrencia de los siguientes casos:

- a) Si la forma escalonada reducida por renglones de $A_{n \times n}$ es la matriz identidad $I_{n \times n}$, entonces $A_{n \times n}^{-1}$ es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical obteniéndose así $[I_{n \times n} \mid A_{n \times n}]$.
- b) Si la reducción de $A_{n \times n}$ conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces $A_{n \times n}$ es singular.

H.7.2 Matriz inversa usando la definición de la adjunta

La definición de cómo obtener la matriz inversa de una matriz cuadrada por medio de la adjunta es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{\overbrace{[C_{ij}]^t}^{\text{adj}(A)}}{\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} C_{nj}}_{\det(A)}} = \frac{\overbrace{[C_{ij}]^t}^{\text{adj}(A)}}{\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{in} C_{in}}_{\det(A)}}$$

Siendo:

$[\det(A)]$ = determinante de la matriz.

$[\text{adj}(A)]$ = matriz adjunta de A.

$[C_{ij}]$ = matriz de cofactores

$\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} C_{nj} \right]$ = desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna

$\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{in} C_{in} \right]$ = desarrollo por cofactores a lo largo del i-ésimo renglón:

Los valores C_{ij} son denominados *cofactores de la matriz A* y los elementos M_{ij} reciben el nombre de *menor elemento de la matriz A*. El menor elemento de una matriz queda definido como el determinante de la submatriz que se forma al suprimir el renglón i y la columna j de la matriz A

(Anton , 1984, pág. 89). Cada elemento C_{ij} tienen un valor igual a $(-1)^{i+j}M_{ij}$. Es necesario destacar dos cosas importantes:

- ✚ La matriz adjunta es la matriz transpuesta de la matriz de cofactores.
- ✚ El desarrollo por cofactores es la sumatoria de las multiplicaciones de los cofactores C_{ij} con los elementos de la matriz a_{ij} de la matriz A .

A continuación se presenta el caculo de la matriz inversa por la adjunta para una matriz de dimensiones 2×2 :

Al tener una matriz A de dimensión 2×2 :

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Es necesario tener una matriz de menores elementos:

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

Y una de cofactores respetando $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Calculando todos los M_{ij} :

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22} & M_{12} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{21} \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12} & M_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \end{aligned}$$

Entonces las matrices de menores elementos y cofactores asociadas a la matriz A de dimensiones 2×2 son:

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Y

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Cuya transpuesta es:

$$[C_{ij}]^t = \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Al existir 2 filas y dos columnas en una matriz de tamaño 2 x 2 se tendrá cuatro formas posibles de calcular $\det(A)$:

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} = (a_{11})(a_{22}) + (a_{12})(-a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\vdots = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} = (a_{21})(-a_{12}) + (a_{22})(a_{11}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\vdots = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} = (a_{11})(a_{22}) + (a_{21})(-a_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\vdots = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} = (a_{12})(-a_{21}) + (a_{22})(a_{11}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Observe como todos los resultados arrojan el mismo valor.

Finalmente la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Este mismo procedimiento puede expandirse a matrices de dimensiones superiores, advirtiéndose que para matrices de tamaño 3 x 3 habrá que resolver determinantes de 2 x 2; para matrices de tamaño 4 x 4 se resolverán determinantes de tamaño 3 x 3 y así sucesivamente.

H.8 Breve Descripción de Permutaciones

Para comenzar a entender lo que es el determinante de una matriz es necesario tener en cuenta dos cosas importantes:

- ✚ Los determinantes sólo se aplican en matrices cuadradas.
- ✚ Los determinantes parten de la idea de un concepto conocido como *permutaciones*.

Una permutación queda definida como el arreglo posible de enteros, sin repeticiones, que se pueden formar a partir del conjunto de números $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ (Anton, 1984, pág. 69). En general dicho conjunto presentará $n!$ permutaciones posibles.

Teniendo presente el concepto de permutación, otro concepto utilizado para la definición del determinante es el de *inversión*. El concepto de inversión queda definido en una permutación (j_1, j_2, \dots, j_n) siempre que un entero se encuentre precedido por un entero mayor. Desarrollando esta definición, es posible calcular las inversiones posibles haciendo lo siguiente:

- i. Cunte el número de enteros que aparecen después de j_1 en la permutación, y que son menores que j_1 .
- ii. Cunte el número de enteros que aparecen después de j_2 en la permutación, y que son menores que j_2 .
- iii. Continúe este proceso hasta j_{n-1} .

Se dice que una permutación inversa es par e impar, cuando respectivamente, el número de permutaciones es un dígito del mismo tipo.

H.9 Producto Elemental en una Matriz Cuadrada

Un producto elemental de una matriz cuadrada queda definido como cualquier producto de n elementos de A , donde todos los factores corresponden a diferentes renglones y columnas.

Una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$ presenta $n!$ productos elementales enumerados de la forma $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$, donde (j_1, j_2, \dots, j_n) es una permutación de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. El *producto elemental con signo* asociado a un producto elemental será 1 cuando la permutación presente una inversión par, y será -1 cuando presente inversión impar.

Así para los casos de matrices $A_{2 \times 2}$ y $A_{3 \times 3}$ se presentan los siguientes productos elementales con signo.

$$\text{Para } A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Producto elemental	Permutación asociada	Par/impar	Producto elemental con signo
$a_{11}a_{22}$	(1,2)	Par	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2,1)	Impar	$-a_{12}a_{21}$

Para $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Producto elemental	Permutación asociada	Par/impar	Producto elemental con signo
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1,2,3)	Par	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1,3,2)	Impar	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2,1,3)	Impar	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2,3,1)	Par	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3,1,2)	Par	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3,2,1)	Impar	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

H.10 Definición de Determinante

Cuando se definió la forma de obtener la inversa de una matriz por la adjunta se hizo mención del concepto de determinante, sin embargo, no fue definido su concepto.

El determinante de una matriz es la suma de todos los productos elementales con signo. Es común utilizar las notaciones $\det(A)$ o $|A|$ y no debe confundirse esta notación con barras con el uso de valor absoluto.

Para las matrices $A_{2 \times 2}$ y $A_{3 \times 3}$ su determinante queda definido como:

$$\det(A_{2 \times 2}) = |A_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det(A_{3 \times 3}) = |A_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\vdots = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

H.11 Regla de Sarrus

La regla de Sarrus es una forma nemotécnica con la cual es posible calcular el determinante de una matriz de tamaño 3 x 3. Para reproducir este método, existen dos formas:

- ✚ Repetir las últimas dos columnas a la derecha de la matriz original y posteriormente sumar los productos de las diagonales descendentes (en línea continua) y restarle los productos de las diagonales ascendentes (en trazos)²⁴.

$$\det(A_{3 \times 3}) = |A_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & | & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & | & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & | & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- ✚ Repetir los últimos dos renglones por debajo de la matriz original y posteriormente sumar los productos de las diagonales descendentes (en línea continua) y restarle los productos de las diagonales ascendentes (en trazos).

$$\det(A_{3 \times 3}) = |A_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

²⁴ Esta suma y resta de diagonales sigue el mismo sentido que en los determinantes de 2 x 2.