UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CLUBES Y ESTACIONARIOS GENERALIZADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JESÚS MIGUEL MARTÍNEZ CAMARENA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA
CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., 2021

1.Datos del alumno:

Apellido paterno	Martínez
Apellido materno	Camarena
Nombre(s)	Jesús Miguel
Teléfono	(55) 40 36 20 79
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	412004797

2. Datos del tutor:

Grado	Dr.
Nombre(s)	Roberto
Apellido paterno	Pichardo
Apellido materno	Mendoza

3. Datos del sinodal 1:

Grado	Dra.
Nombre(s)	Gabriela
Apellido paterno	Campero
Apellido materno	Arena

4. Datos del sinodal 2:

Grado	Dr.
Nombre(s)	Alejandro
Apellido paterno	Dorantes
Apellido materno	Aldama

5. Datos del sinodal 3:

Grado	Dra.
Nombre(s)	Luz María
Apellido paterno	García
Apellido materno	Ávila

6. Datos del sinodal 4:

Grado	M. en C.
Nombre(s)	Rodrigo Edmundo
Apellido paterno	Cepeda
Apellido materno	Morales

7. Datos del trabajo escrito:

Título	Clubes y estacionarios generalizados
Número de páginas	68
Año	2021

“El orgullo no es el opuesto de la vergüenza sino su fuente; la humildad pura es el único antídoto para la vergüenza.”

Avatar: la leyenda de Aang.

Agradecimientos

A mis maestros, quienes siempre compartieron con nosotros la profunda belleza de las matemáticas.

A mis amigos, porque sin ustedes no habría llegado a este punto. Por reír conmigo. Por soportar todas mis manías. Por el llanto que me han visto derramar para encontrar mi camino. Por enseñarme tanto. Porque han sido partícipes de todos mis pequeños triunfos y mis grandes errores.

A mis hermanos, aquellos de nacimiento y aquellos que fui encontrando a lo largo del camino. Los primeros que han compartido una vida conmigo; a quienes siempre he adorado y admirado. Los segundos que me abrieron las puertas de su hogar y que me dan los ánimos de vivir la vida. Ambos están siempre en mi corazón.

A Roberto. Por compartirnos la pasión y belleza de las matemáticas, siempre con simpleza y alegría. Por todos tus cursos que tanto disfruté. Por toda la paciencia y la disposición que has tenido conmigo. Por ser un ejemplo para mí.

A quienes lo debo todo, a mis padres. Por la confianza que me han dado. Por hacer de mí la persona que soy.

Resumen

El concepto tradicional de estacionario aparece por primera vez en la década de 1950 y se atribuye al matemático francés Gérard Bloch (1920-1987). Sin embargo, dicho concepto ya se encuentra implícito en el trabajo de Paul Mahlo tan temprano como inicios de la década de 1910.

Tal concepto ha mostrado un rol fundamental en el desarrollo de la teoría de conjuntos y se incluye entre las herramientas básicas que un conjuntista debe tener a su disposición. Es en 1956 el año en que el matemático húngaro Géza Fodor (1927-1977) publica un artículo en que aparece la prueba de su reputado lema, considerado como el teorema fundamental de los conjuntos estacionarios.

Los conceptos clásicos de club y estacionario han sido extendidos de distintas formas, adecuadas a las necesidades específicas de quienes toman parte y provecho de estos. En el presente trabajo, nos damos a la tarea de desarrollar la teoría básica de una de estas extensiones. Al igual que presentar algunos resultados que nos servirán para tomar conciencia de la amplitud e importancia de estos.

El primer capítulo nos servirá principalmente para establecer un lenguaje común y funge como un pequeño almacén de aquellas herramientas que estaremos ocupando ocasionalmente a lo largo de nuestro trabajo sin pertenecer necesariamente a un tema o capítulo en particular.

Consideramos el capítulo 2 como central en el presente trabajo. Desarrollaremos la teoría básica de clubes y estacionarios sobre la familia $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Todo esto cimentado en la teoría clásica de los estacionarios. Veremos cómo nuestra nueva noción generaliza de manera natural a la noción clásica y a sus resultados originales. Finalmente, el Teorema de Kuecker (2.26) plantea no sólo una herramienta útil para trabajar con estacionarios, sino que abre las puertas a otras extensiones del mismo concepto.

En el capítulo 3, desarrollaremos una noción clásica muy importante, la preservación de estacionarios en extensiones genéricas. Mostraremos que existen algunas nociones de forcing que preservan estacionarios y algunas que no. Esta distinción cobra fuerza en el capítulo 4,

al motivar la formación de la clase de nociones de forcing *PROPER*.

Por último, el capítulo 5 ofrecerá una aplicación interesante del concepto clásico de club, el cual podemos considerar en este punto como un caso particular de nuestra nueva noción. Este capítulo sirve para ilustrar las cualidades que poseen los clubes como herramienta demostrativa y ejemplificar las técnicas con las que hacemos esto. Se prueban dos interesantes teoremas relacionados con el área de combinatoria infinita, tema cuya relación con los clubes no resulta obvia a primera vista.

Indice

Capítulo 1: Preliminares

En este capítulo discutiremos algunos conceptos y resultados preliminares que serán utilizados a lo largo de la tesis. Asimismo, nos pondremos de acuerdo en la notación que emplearemos en el presente trabajo. En caso de no definirse explicitamente algún concepto en este capítulo, deberá enterse como en [4].

1.1 Notación y resultados previos

Suponga que f es una función de X en Y.

1. Si $A \subseteq X$, la *imagen directa* de A bajo f es $f[A] = f``A = \{f(d) : d \in A\}$.
2. Si $B \subseteq Y$, la *imagen inversa* de B bajo f es $f^{-1}[B] = \{c \in X : f(c) \in B\}$.
3. Si $b \in Y$, la fibra de b bajo f será denotada por $f^{-1}\{b\} = \{c \in X : f(c) = b\}$.
4. Y^X denotará a la colección de todas las funciones de X en Y. Para evitar confusiones con respecto a la exponenciación cardinal, dicha colección será denotada por ${}^X Y$, cuando X o Y sean cardinales.
5. El símbolo $\subset$ nos servirá para denotar a la contención propia.
6. El símbolo $f : X \twoheadrightarrow Y$ denotará que f es una función suprayectiva de X en Y.

Definición 1.1. Dados I, un conjunto de índices, y $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$, una familia de conjuntos, el producto cartesiano de $\mathcal{A}$ será la familia

$$\prod \mathcal{A} = \prod_{i \in I} A_i = \left\{ f \in \left(\bigcup \mathcal{A} \right)^I : \forall i \in I (f(i) \in A_i) \right\}.$$

Definición 1.2. Dado un cardinal infinito κ y un conjunto A, definimos $\mathscr{P}_\kappa(A) := \{a \subseteq A : |a| < \kappa\}$, esto es, la familia de todos los subconjuntos de A con cardinalidad estrictamente menor a κ. De manera similar, denotaremos por $[A]^\kappa := \{a \subseteq A : |a| = \kappa\}$.

Dado un orden parcial $(X, \leqslant)$ y $a \in X$, llamaremos *segmento final de X determinado por a* a la colección $(a, \rightarrow) := \{x \in X : a < x\}$. Similarmente, *el segmento inicial en X determinado por a* es el conjunto $(\leftarrow, a) := \{x \in X : x < a\}$.

Lema 1.3. *Sean $(A, <)$ un orden total y κ un cardinal infinito tales que para todo $a \in A$, se cumple que $|(\leftarrow, a)| \leqslant \kappa$. Entonces, $|A| \leqslant \kappa^+$.*

Demostración. Buscando una contradicción, supongamos que $\kappa^+ < |A| = \theta$. Construyamos recursivamente una sucesión estrictamente creciente $(a_\xi)_{\xi<\theta} \subseteq A$. Para esto, supongamos que para algún $\alpha < \theta$, hemos construido $(a_\xi)_{\xi<\alpha} \subseteq A$, estrictamente creciente. De esta forma, $\left|\bigcup_{\xi<\alpha} (\leftarrow, a_\xi) \cup \{a_\xi : \xi < \alpha\}\right| \leqslant |\alpha| \cdot \kappa < \theta$. Así, $A \setminus \left(\bigcup_{\xi<\alpha} (\leftarrow, a_\xi) \cup \{a_\xi : \xi < \alpha\}\right) \neq \emptyset$. Sea $a_\alpha \in A \setminus \left(\bigcup_{\xi<\alpha} (\leftarrow, a_\xi) \cup \{a_\xi : \xi < \alpha\}\right)$, tendremos que para cada $\xi < \alpha$, $a_\alpha \notin (\leftarrow, a_\xi)$ y $a_\alpha \neq a_\xi$. Al ser $(A, <)$ un orden total, esto implica que $a_\xi < a_\alpha$ para todo $\xi < \alpha$. Lo cual concluye la recursión.

Sin embargo, como $\kappa^+ < \theta$ y $(a_\xi)_{\xi<\theta}$ es estrictamente creciente, entonces $\{a_\xi : \xi < \kappa^+\} \subseteq (\leftarrow, a_{\kappa^+})$. Con lo que $\kappa^+ = \left|\{a_\xi : \xi < \kappa^+\}\right| \leqslant \left|(\leftarrow, a_{\kappa^+})\right|$, lo que contradice nuestra hipótesis. $\square$

Definición 1.4. Dado un conjunto X, diremos que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es un *filtro*, si cumple las siguientes tres propiedades:

1. $\emptyset \notin \mathscr{F}$ y $F \neq \emptyset$.

2. Si $a, b \in \mathscr{F}$, entonces $a \cap b \in \mathscr{F}$.

3. Para todo $a \in \mathscr{F}$ y $b \subseteq X$ tales que $a \subseteq b$, se cumple que $b \in \mathscr{F}$.

Más aún, si κ es un cardinal infinito, diremos que un filtro $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es κ-completo si $\bigcap C \in \mathscr{F}$, para cualquier $C \in \mathscr{P}_\kappa(\mathscr{F}) \setminus \{\emptyset\}$.

1.2 Aritmética cardinal

En este trabajo, ω representará al conjunto de los números naturales y al primer ordinal infinito. Además, denotaremos por ω_1 al primer ordinal no numerable. Si α es un ordinal, denotaremos por $\mathrm{Lim}(\alpha)$ a la familia de los ordinales límite en α y por $\lim(\alpha)$ al enunciado de primer orden "*α es un ordinal límite*". A lo largo de este trabajo, 0 no será considerado un ordinal límite. Cometiendo un abuso de notación, llamaremos OR a la clase de todos los ordinales. Así, enunciados como $\alpha \in OR$ y $f : \omega \to OR$ deben ser entendidos como "α es un ordinal" y "f es una sucesión de ordinales".

Definición 1.5. Diremos que un conjunto A es *contable* si y sólo si $|A| \leqslant \omega$.

El siguiente lema nos será de utilidad más adelante.

Lema 1.6. *Existe $g : \omega \to \omega \times \omega$ tal que para cada $(k, m) \in \omega \times \omega$ se tiene que $\left|g^{-1}\{(k, m)\}\right| = \omega$.*

Demostración. Como $|\omega \times \omega| = \omega$, entonces existe $f : \omega \to \omega \times \omega$ biyectiva. Para todo $n \in \omega$, sea $E_n = f^{-1}[\{n\} \times \omega]$. Así, como f es biyectiva, tenemos que cada E_n es infinito numerable, que $E_m \cap E_n = \emptyset$ siempre que $m < n < \omega$ y que $\omega = \bigcup_{n \in \omega} E_n$.

Usando que para todo $n \in \omega$, $|E_n| = \omega = |\omega \times \omega|$, fijemos una biyección $f_n : E_n \to \omega \times \omega$. Sea $g := \bigcup_{n \in \omega} f_n$. Así, g es una función cuyo domino es $\bigcup_{n \in \omega} dom(f_n) = \bigcup_{n \in \omega} E_n = \omega$. Mostremos que g satisface la propiedad enunciada.

Para cualquier $(k, m) \in \omega \times \omega$ tendremos que $g^{-1}\{(k, m)\} = \bigcup_{n \in \omega} f_n^{-1}\{(k, m)\}$, donde cada $f_n^{-1}\{(k, m)\}$ es no vacía . Si $j \neq n$, la condición $E_j \cap E_n = \emptyset$ implica que las fibras $f_j^{-1}\{(k, m)\}$ y $f_n^{-1}\{(k, m)\}$ son ajenas, por lo que $\left|g^{-1}\{(k, m)\}\right| = \left|\bigcup_{n \in \omega} f_n^{-1}\{(k, m)\}\right| = \omega$, con lo que conluimos que g es como se requiere. $\square$

Lema 1.7. *Sean $\delta \leqslant \theta$ dos ordinales. Si $h : \delta \to \theta$ es una función estrictamente creciente, entonces $\alpha \leqslant h(\alpha)$, para cualquier $\alpha < \delta$.*

Demostración. Probemos esto por inducción. Supongamos que $\alpha < \delta$ satisface que $\beta \leqslant h(\beta)$ siempre que $\beta < \alpha$. Ahora, dado $\beta < \alpha$, tenemos que $\beta \leqslant h(\beta) < h(\alpha)$ y, por ende, $\alpha \subseteq h(\alpha)$, es decir, $\alpha \leqslant h(\alpha)$. $\square$

Lema 1.8. *Si κ es un cardinal infinito y singular, entonces para todo $\alpha < \kappa$ tenemos que $|\alpha|^+ < \kappa$.*

Demostración. Sean α y κ como se enuncian arriba. Entonces $|\alpha| \leqslant \alpha < \kappa$. Por lo tanto, $|\alpha|^+ \leqslant \kappa$. Además, todo cardinal sucesor infinito es regular. Como κ es infinito y singular, lo anterior implica que $\kappa \neq |\alpha|^+$. Así, $|\alpha|^+ < \kappa$. □

Dado un ordinal δ, denotaremos por $\mathrm{cf}(\delta)$ a su cofinalidad. La prueba de nuestro resultado siguiente puede encontrarse en [6, Lema 10.31, p. 33].

Teorema 1.9. *Sea δ un ordinal. Existe una sucesión $g : \mathrm{cf}(\delta) \to \delta$ estrictamente creciente y cofinal en δ.*

Definición 1.10. Dados dos ordinales α y β, una función $f : \alpha \to \beta$ es llamada *normal* si

1. es estrictamente creciente y
2. cuando $\delta < \alpha$ es límite, se sigue que $f(\delta) = \sup\{f(\xi) : \xi < \delta\}$.

La prueba de nuestro siguiente resultado se encuentra en [4, Teorema 10.16, p. 264].

Teorema 1.11 (Koenig)**.** *Sea I un conjunto no vacío de índices y sean $\{\kappa_i : i \in I\}$ y $\{\lambda_i : i \in I\}$ dos sucesiones tales que $\lambda_i < \kappa_i$ para toda $i \in I$. Así,*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i < \prod_{i \in I} \kappa_i.$$

Corolario 1.12 (Koenig)**.** *Para cualquier cardinal infinito κ, se cumple que $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.*

Demostración. Sea $(\lambda_i)_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)}$ una sucesión cofinal en κ. Usando el teorema 1.11, concluimos que

$$\kappa = \sum_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_i < \prod_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

□

Una prueba sucinta del siguiente resultado puede encontrarse en el párrafo anterior a [5, Fórmula 5.22, p. 57].

Teorema 1.13 (Fórmula de Hausdorff)**.** *Sean ν y δ cardinales infinitos. Así,*

$$\left(\nu^+\right)^\delta = \nu^\delta \cdot \nu^+.$$

Teorema 1.14. *Sea θ un cardinal infinito. Para cualquier cardinal $\kappa > \theta$ que satisfaga $\lambda^\theta < \kappa$, siempre que λ sea un cardinal con $\lambda < \kappa$, se tiene lo siguiente.*

1. *Si $\theta < \mathrm{cf}(\kappa)$, entonces $\kappa^\theta = \kappa$.*

2. *Si $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \theta$, entonces $\kappa^\theta = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.*

Demostración. Analicemos primero el caso en que κ es un cardinal sucesor, digamos $\kappa = \nu^+$. Entonces $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Por lo tanto, $\theta < \mathrm{cf}(\kappa)$. De acuerdo al teorema 1.13, $\kappa^\theta = \left(\nu^+\right)^\theta = \nu^\theta \cdot \nu^+$; luego, según nuestra hipótesis, $\nu^\theta < \kappa$, por lo que $\kappa^\theta = \nu^\theta \cdot \nu^+ = \nu^+ = \kappa$.

Supongamos que κ es un cardinal límite. Primeramente, mostremos que $A := \{|\alpha|^\theta : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto cofinal en κ.

Dado $\xi < \kappa$, hagamos $\alpha := |\xi|^+$ para obtener $\alpha < \kappa$ y, en consecuencia, $\xi < \alpha = |\alpha| \leqslant |\alpha|^\theta < \kappa$.

Si $\theta < \mathrm{cf}(\kappa)$, entonces cualquier función $f : \theta \to \kappa$ es acotada. Así, podemos pensar cada función $f \in {}^\theta\kappa$ como un elemento de ${}^\theta\alpha(f)$, para algún $\alpha(f) < \kappa$. De esta forma, $\kappa^\theta = \left|{}^\theta\kappa\right| = \left|\bigcup_{\alpha<\kappa} {}^\theta\alpha\right| = \sup A = \kappa$.

En el caso de que $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \theta$, tomemos $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$, una sucesión cofinal en κ. Así (ver teorema 1.11),

$$\kappa^\theta = \left(\sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha\right)^\theta \leqslant \left(\prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha\right)^\theta = \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha^\theta$$

Ahora, si $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, se sigue que $\kappa_\alpha < \kappa$ y, consecuentemente, $\kappa_\alpha^\theta < \kappa$. Luego,

$$\kappa^\theta \leqslant \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha^\theta \leqslant \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \kappa^\theta$$

Es decir, $\kappa^\theta = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. □

1.3 Cerrados no-acotados

Sea α un ordinal límite. Note que si $\beta < \gamma < \alpha$, entonces $\gamma \setminus (\beta + 1)$ es igual al conjunto $\{\xi < \gamma : \beta < \xi\}$, esto es, el intervalo abierto cuyos extremos son β y γ. Ahora, se verifica con rapidez que la colección $\{\beta : \beta < \alpha\} \cup \{\alpha \setminus (\beta + 1) : \beta < \alpha\}$ es subbase para alguna topología en α, a la que llamaremos *la topología del orden en α* (nuestro texto base para nociones y resultados topológicos es [2]). En este trabajo, cada vez que hablemos de α como espacio topológico, estaremos pensando en la topología del orden.

Proposición 1.15. *Sean α un ordinal límite y $\beta < \alpha$. Entonces se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *Si β es sucesor ó $\beta = 0$, entonces $\{\beta\}$ es abierto en α.*

2. *Cuando β es límite, el conjunto $\{(\beta+1) \setminus (\gamma+1) : \gamma < \beta\}$ es base local para α en β.*

Demostración. Para ver que $\{0\}$ es abierto en α, basta recordar que $1 < \alpha$ y $1 = \{0\}$. La hipótesis "β es sucesor" implica que tanto $\beta + 1$ como $\alpha \setminus \beta$ son abiertos en α. Luego, la igualdad $\{\beta\} = (\beta+1) \cap (\alpha \setminus \beta)$ comprueba el primer inciso.

Supongamos por el resto del argumento que β es límite y fijemos U, un abierto en α, con $\beta \in U$. Se sigue que existen $m, n \in \omega$ y $\{\beta_i : i < m\} \cup \{\gamma_j : j < n\} \subseteq \alpha$ de tal suerte que $\mathscr{U} := \{\beta_i : i < m\} \cup \{\alpha \setminus (\gamma_j + 1) : j < n\}$ no es vacío y $\beta \in \bigcap \mathscr{U} \subseteq U$. Consideraremos dos posibilidades.

Caso 1. $n = 0$. Aquí, se verifica que $(\beta+1) \setminus 1 \subseteq \bigcap_{i<m} \beta_i = \bigcap \mathscr{U} \subseteq U$.

Caso 2. $n \neq 0$. Hagamos $\gamma = \max\{\gamma_j : j < n\}$ para obtener que $(\beta+1) \setminus (\gamma+1) \subseteq \bigcap \mathscr{U}$.

Esto prueba el segundo inciso de nuestra proposición. □

Definición 1.16. Dados α, un ordinal límite, y $A \subseteq \alpha$ decimos que:

1. A está *acotado* en α si hay $\beta \in \alpha$ tal que para todo $\gamma \in A$ se cumple que $\gamma \leqslant \beta$.

2. A es *no-acotado* en α si para todo $\beta \in \alpha$ hay $\xi \in A$ tal que $\beta < \xi$.

3. A es *cerrado* en α si es *cerrado* en α equipado con la topología del orden.

Así, diremos que A es un *club* en α (del inglés *closed unbounded*) si es *cerrado* y *no-acotado* en α; además, $S \subseteq \alpha$ será llamado *estacionario* en α si $S \cap A \neq \emptyset$ para cualquier club A en α.

Ahora emplearemos los resultados de la proposición 1.15 para obtener una equivalencia de que un conjunto $A \subseteq \alpha$ sea cerrado en α en términos de subconjuntos no-acotados de A. De forma precisa, tenemos lo siguiente.

Lema 1.17. *Sean α un ordinal límite y $A \subseteq \alpha$. Así, los enunciados siguientes son equivalentes.*

1. *A es cerrado en α.*

2. *Para todo ordinal límite $\gamma \in \alpha$, si $\gamma \cap A$ no es acotado en γ, entonces $\gamma \in A$.*

Demostración. Primero supongamos que A es cerrado en α y que γ es un ordinal límite en α tal que $\gamma \cap A$ es *no-acotado* en γ. Veamos que $\gamma \in A$ probando que es un elemento de su cerradura. Gracias a la proposición 1.15, sabemos que $B = \{(\gamma + 1) \setminus (\beta + 1) : \beta \in \gamma\}$ es base local de γ. Así, basta probar que A interseca a cualquier elemento de B. Sea $\beta \in \gamma$. Como $A \cap \gamma$ es no-acotado en γ, hay $\eta \in A \cap \gamma$ tal que $\beta + 1 \leqslant \eta$ y, por lo tanto, $\eta \in A \cap (\gamma + 1) \setminus (\beta + 1)$.

Ahora bien, supongamos que A cumple la propiedad enunciada en el inciso (2) del lema y demostremos que $\alpha \setminus A$ es abierto en α. Si tomamos $\delta \in \alpha \setminus A$, se cumplirá alguno de los siguientes casos.

Caso 1. $\delta = 0$. Tenemos que $0 \in \{0\} = 1 \subseteq \alpha \setminus A$.

Caso 2. δ es sucesor. En esta situación, el inciso (1) de la proposición 1.15 nos dice que $\{\delta\}$ es un abierto contenido en $\alpha \setminus A$.

Caso 3. $\lim(\delta)$. Como sabemos que $\delta \notin A$, nuestra hipótesis implica que $\delta \cap A$ está acotado en δ. Por lo tanto, hay $\beta \in \delta$ tal que para todo $\xi \in \delta \cap A$ se tiene que $\xi \leqslant \beta$, y entonces $(\delta + 1) \setminus (\beta + 1) \subseteq \alpha \setminus A$.

De este modo, todo $\delta \in \alpha \setminus A$ es punto interior de dicho conjunto, por lo que $\alpha \setminus A$ es abierto, o equivalentemente, A es cerrado en α. □

El lema anterior muestra la equivalencia entre nuestra definición de cerrado en α y aquella propuesta en [3, Definición 1.21, p. 10]. De ahí que coincidan también nuestras definiciones de club en α.

Más aún, como consecuencia de los párrafos posteriores a [3, Definición 1.24, p. 11], obtenemos que la colección de todos los clubes en α tiene la propiedad de la intersección finita y, por ende, genera un filtro en α al que denotaremos por $\mathrm{Cub}(\alpha)$; en otras palabras: $A \in \mathrm{Cub}(\alpha)$ si y sólo si existe C, un club en α, tal que $C \subseteq A \subseteq \alpha$.

Veamos una aplicación no trivial del resultado anterior.

Ejemplo 1.18. *Si α es un ordinal de cofinalidad mayor a ω, entonces* $\mathrm{Lim}(\alpha)$ *es un club en α.*

Demostración. Veamos que $\mathrm{Lim}(\alpha)$ es no-acotado en α. Si $\beta \in \alpha$, entonces $\beta + \omega$ es un ordinal límite. Además, como la cofinalidad de α es mayor a ω, tendremos que $\beta + \omega < \alpha$, con lo que $\beta < \beta + \omega \in \mathrm{Lim}(\alpha)$.

Además, la condición (2) del lema 1.17 se cumple trivialmente. $\square$

Capítulo 2: Clubes generalizados

Para los propósitos de este capítulo, κ siempre representará a un cardinal regular no numerable.

Definición 2.1. Si A es un conjunto tal que $\kappa \leqslant |A|$ y $X \subseteq \mathscr{P}_\kappa(A)$, diremos que:

1. X es *cerrado* en $\mathscr{P}_\kappa(A)$ si para todo $\alpha \in \kappa \setminus 1$ y cualquier sucesión $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$ en X que sea $\subseteq$-creciente, se tiene que $\bigcup\limits_{\xi<\alpha} x_\xi \in X$.

2. X es *no-acotado* en $\mathscr{P}_\kappa(A)$ si para todo $y \in \mathscr{P}_\kappa(A)$ hay $x \in X$ tal que $y \subseteq x$.

3. X es un *club* en $\mathscr{P}_\kappa(A)$ si es *cerrado* y *no-acotado* en $\mathscr{P}_\kappa(A)$.

De este modo, un subconjunto de $\mathscr{P}_\kappa(A)$ será llamado *estacionario en* $\mathscr{P}_\kappa(A)$ si tiene intersección no vacía con cada uno de los clubes de $\mathscr{P}_\kappa(A)$.

Ahora estamos interesados en visualizar el parentezco entre los cerrados tradicionales y el concepto que acabamos de definir. Tradicionalmente (véase el lema 1.17), un conjunto C es cerrado en un ordinal límite α si para todo $\gamma \in \mathrm{Lim}(\alpha)$ tal que $\gamma \cap C$ es no acotado en γ se tiene que $\gamma \in C$. Denotemos por β al tipo de orden del conjunto bien ordenado $C \cap \gamma$, notemos que $\beta \leqslant \gamma < \alpha$ y fijemos una enumeración creciente de $C \cap \gamma$, digamos $\{x_\xi : \xi \in \beta\} = \{x_\xi\}_{\xi<\beta}$; claramente, $\bigcup\limits_{\xi<\beta} x_\xi = \gamma$. En este sentido, nuestra noción de ser cerrado en $\mathscr{P}_\kappa(A)$ es una generalización natural de la correspondiente para ordinales. De manera similar, dados dos ordinales α y β, sabemos que $\alpha \leqslant \beta$ si y sólo si $\alpha \subseteq \beta$, con lo que la nueva noción de no-acotado también generaliza de manera natural a aquella utilizada para ordinales.

Será cosa común para los fines de esta tesis que al probar resultados sobre clubes en $\mathscr{P}_\kappa(A)$ se reemplace al conjunto A con algún otro que sea más conveniente. Con esto en mente, notemos que todas las nociones que aparecen en la definición 2.1 están dadas en términos de la estructura de orden de $(\mathscr{P}_\kappa(A), \subseteq)$.

Proposición 2.2. *Si A y B son conjuntos con $|A| = |B| = \lambda$, entonces $\mathscr{P}_\kappa(A)$ y $\mathscr{P}_\kappa(B)$ son isomorfos como órdenes parciales.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ una biyección. Definimos $F : \mathscr{P}_\kappa(A) \to \mathscr{P}_\kappa(B)$ mediante $F(a) = f``a$, para cualquier $a \in \mathscr{P}_\kappa(A)$. Veamos que $F$ es un isomorfismo de orden entre $(\mathscr{P}_\kappa(A), \subseteq)$ y $(\mathscr{P}_\kappa(B), \subseteq)$. Obsérvese primero que $F$ está bien definida, pues como $f$ es una biyección, tenemos que $|f``a| = |a| < \kappa$ y así $F(a) \in \mathscr{P}_\kappa(B)$. Ahora bien, si tomamos $a \subset b$ con $a, b \in \mathscr{P}_\kappa(A)$, al ser f biyectiva, tenemos que $F(a) = f``a \subset f``b = F(b)$, con lo cual F es *estrictamente creciente* y por consiguiente, *inyectiva*.

Si ahora tomamos $b \in \mathscr{P}_\kappa(B)$ y llamamos $c = f^{-1}[b] \subseteq A$, síguese que $|c| = |b| < \kappa$; de este modo $c \in \mathscr{P}_\kappa(A)$ y además $F(c) = f[f^{-1}[b]] = b$ (dado que f es biyectiva), por lo que F es *suprayectiva*.

Por último, si $x, y \in \mathscr{P}_\kappa(B)$ satisfacen que $x \subseteq y$, entonces $F^{-1}(x) = f^{-1}[x] \subseteq f^{-1}[y] = F^{-1}(y)$. Así, concluímos que F es en efecto un *isomorfismo de orden*. $\square$

Argumentos rutinarios muestran que si F es el isomorfismo que se empleó en la prueba de la proposición anterior, entonces, para cualquier $E \subseteq \mathscr{P}_\kappa(A)$,

1. E es un club en $\mathscr{P}_\kappa(A)$ si y sólo si $F[E]$ es un club en $\mathscr{P}_\kappa(B)$, y

2. E es un estacionario en $\mathscr{P}_\kappa(A)$ si y sólo si $F[E]$ es un estacionario en $\mathscr{P}_\kappa(B)$.

De esta forma, en lo que sigue hablaremos exclusivamente de $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$, donde λ es un número cardinal con $\lambda \geqslant \kappa$.

Para nuestro siguiente resultado notemos que si $\alpha < \kappa$, entonces $|\alpha| < \kappa$, esto es, $\alpha \in \mathscr{P}_\kappa(\kappa)$. Equivalentemente, κ es un subconjunto de $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$.

Proposición 2.3. *κ es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$.*

Demostración. Veamos que κ es no-acotado en $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$. Tomemos $x \in \mathscr{P}_\kappa(\kappa)$. Tenemos que $x \subseteq \kappa$ y $|x| < \kappa$, además, como κ es regular, sabemos que $\eta := \sup x = \bigcup x < \kappa$, con lo que $x \subseteq \eta + 1 \in \kappa$. Así, κ es *no-acotado* en $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$.

Por último, note que κ es *cerrado* pues si tomamos $\alpha \in \kappa \setminus 1$ y $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$, una sucesión $\subseteq$-creciente en κ, tenemos que $x := \bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi$ es unión de menos de κ ordinales en κ y, al ser éste regular, $x \in \kappa$. $\square$

El siguiente resultado fue demostrado por T. Jech.

Teorema 2.4. *Sea $\lambda \geqslant \kappa$ un cardinal. Si $0 < \beta < \kappa$ y $\{c_\xi : \xi < \beta\}$ es una sucesión de clubes en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$, entonces $\bigcap\limits_{\xi<\beta} c_\xi$ es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$.*

Demostración. Veamos primero que $\bigcap\limits_{\xi<\beta} c_\xi$ es cerrado en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Para esto, tomemos $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$, una sucesión $\subseteq$-creciente en $\bigcap\limits_{\xi<\beta} c_\xi$ con $\alpha \in \kappa \setminus 1$. Tenemos que, en particular, $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha} \subseteq c_\delta$ para cualquier $\delta < \beta$ y como dichos conjuntos son cerrados, se deduce que $\bigcup\limits_{\xi<\alpha} x_\xi \in c_\delta$ para todo $\delta < \beta$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{\xi<\alpha} x_\xi \in \bigcap\limits_{\xi<\beta} c_\xi$.

Ahora veamos que $\bigcap\limits_{\xi<\beta} c_\xi$ es no-acotado en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Sea $\xi < \beta$. El que c_ξ sea no-acotado en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ garantiza que existe $f_\xi : \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \to c_\xi$ de tal modo que $d \subseteq f_\xi(d)$, para cada $d \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$.

Definimos $g : \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \to \mathscr{P}(\lambda)$ mediante $g(d) = \bigcup\limits_{\xi<\beta} f_\xi(d)$ y notemos que la regularidad de κ nos da $\left|\bigcup\limits_{\xi<\beta} f_\xi(d)\right| < \kappa$, esto es, $g : \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \to \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Ahora, produciremos una sucesión de funciones $\{g^i : 1 \leqslant i \leqslant \omega\}$ como sigue: $g^1 = g$; para cada $n \in \omega \setminus 1$, $g^{n+1} := g \circ g^n$ y $g^\omega : \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \to \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ estará dada por $g^\omega(d) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} g^n(d)$. Note que la regularidad de κ, sumada al hecho que $\omega < \kappa$, nos asegura que $g^\omega : \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \to \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$.

Sean $d \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ y $\xi < \beta$. Con la idea en mente de probar que $g^\omega(d) \in c_\xi$, fijemos $n \in \omega \setminus 1$ y observemos que la pertenencia $g^n(d) \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ nos da que $g^n(d) \subseteq f_\xi(g^n(d))$. Por otro lado, $g^{n+1}(d) = g(g^n(d)) = \bigcup\limits_{\eta<\beta} f_\eta(g^n(d))$; en especial, $f_\xi(g^n(d)) \subseteq g^{n+1}(d)$. De este modo, deducimos que $g^n(d) \subseteq f_\xi(g^n(d)) \subseteq g^{n+1}(d)$, para cualquier $n \in \omega \setminus 1$. Así, obtenemos dos consecuencias importantes: primero, $g^\omega(d) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} g^n(d) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f_\xi(g^n(d))$ y, segundo, $\{f_\xi(g^n(d)) : n \in \omega \setminus 1\}$ es una sucesión $\subseteq$-creciente en c_ξ. Luego, la desigualdad $\omega < \kappa$ nos da $g^\omega(d) \in c_\xi$.

De lo hecho en el párrafo anterior se deduce que para cada $d \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$, $g^\omega(d) \in \bigcap\limits_{\xi<\beta} c_\xi$ y además, $d \subseteq g(d) \subseteq g^\omega(d)$, es decir, $\bigcap\limits_{\xi<\beta} c_\xi$ es *no-acotado* en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. $\square$

Como κ es infinito, del teorema anterior se desprende que el conjunto de todos los clubes en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ tiene la propiedad de la intersección finita, así que la colección $\mathrm{CUB}(\mathscr{P}_\kappa(\lambda))$ formada por todos aquellos x para los que existe c, un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$, tal que $c \subseteq x \subseteq \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ es un filtro en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. De hecho, $\mathrm{CUB}(\mathscr{P}_\kappa(\lambda))$ tiene propiedades muy interesantes, tal y como lo muestra nuestro siguiente resultado.

Proposición 2.5. *Si* $\lambda \geqslant \kappa$ *es un cardinal, entonces* $\mathrm{CUB}(\mathscr{P}_\kappa(\lambda))$ *es un filtro* κ*-completo en* $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$*.*

Demostración. Por lo mencionado en el párrafo anterior, sólo hará falta mostrar que $\mathrm{CUB}(\mathscr{P}_\kappa(\lambda))$ cumple la propiedad en el párrafo posterior a la definición 1.4.

Si tomamos $\{d_\xi\}_{\xi<\beta} \subseteq CUB(\mathscr{P}_\kappa(\lambda))$, para algún $\beta \in \kappa\backslash 1$, entonces $\bigcap_{\xi<\beta} d_\xi \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Alegremente esta afirmación es de hecho corolario al teorema anterior, ya que por la definición de $\mathrm{CUB}(\mathscr{P}_\kappa(\lambda))$, sabemos que para cada $\xi < \beta$ existe un club c_ξ en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ tal que $c_\xi \subseteq d_\xi$; fijando dichos clubes y aplicando el teorema 2.4 a $\{c_\xi\}_{\xi<\beta}$ tenemos que $\bigcap_{\xi<\beta} c_\xi$ vuelve a ser un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Finalmente, la contención $\bigcap_{\xi<\beta} c_\xi \subseteq \bigcap_{\xi<\beta} d_\xi$ nos garantiza que $\bigcap_{\xi<\beta} d_\xi \in \mathrm{CUB}(\mathscr{P}_\kappa(\lambda))$.

□

Lema 2.6. *Para cualquier* $c \subseteq \kappa$*, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. c *es un club en* κ*.*
2. c *es un club en* $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$*.*

Demostración. Probemos primero que todo club en κ es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$. Sea c un club en κ. Si $x \in \mathscr{P}_\kappa(\kappa)$, entonces la regularidad de κ nos da $\eta \in \kappa$ tal que $x \subseteq \eta$ y como c es no-acotado en κ, hay $\xi \in c$ con $\eta < \xi$. Así, $x \subseteq \xi$ y, por lo tanto, c es *no-acotado en* $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$.

Argumentemos que c es cerrado en $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$. Para esto, sean $\alpha \in \kappa \setminus 1$ y $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$ una sucesión $\subseteq$-creciente en c. Hagamos $\beta := \bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi$ y notemos que $\beta = \sup\{x_\xi : \xi < \alpha\}$. Luego, si $\beta \notin \{x_\xi : \xi < \alpha\}$, se sigue que β es un ordinal límite y, consecuentemente, $c \cap \beta$ es no-acotado en β; por el lema 1.17, esto implica que $\beta \in c$. Cuando $\beta \in \{x_\xi : \xi < \alpha\}$, es inmediado que $\beta \in c$. De esta forma, c es *cerrado* en $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$.

Para la implicación restante, supongamos que $c \subseteq \kappa$ es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$. Dicho subconjunto es no-acotado en κ porque si tomamos $\eta < \kappa$, entonces existe $\xi \in c$ con $\eta \subseteq \xi$, esto es, $\eta \leqslant \xi$. Verifiquemos que c es cerrado en κ mediante el lema 1.17. Sea $\gamma < \kappa$ un ordinal límite tal que $c \cap \gamma$ es no-acotado en γ. Sea μ el tipo de orden de $c \cap \gamma$ y sea $\{y_\xi : \xi < \mu\}$

una enumeración de $c \cap \gamma$ de tal forma que $y_\xi < y_\eta$ siempre que $\xi < \eta < \mu$. El que c sea cerrado en $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$ junto con las desigualdades $\mu \leqslant \gamma < \kappa$ nos garantiza que $\gamma = \bigcup_{\xi<\mu} y_\xi \in c$. $\square$

Corolario 2.7. $\mathrm{Cub}(\kappa) = \{x \in \mathrm{CUB}(\mathscr{P}_\kappa(\kappa)) : x \subseteq \kappa\}$.

Demostración. Si $x \in \mathrm{Cub}(\kappa)$, existe c, un club en κ, con $c \subseteq x \subseteq \kappa$. De este modo, c es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\kappa)$ con $c \subseteq x \subseteq \kappa$ y, por lo tanto, $x \in \{x \in \mathrm{CUB}(\mathscr{P}_\kappa(\kappa)) : x \subseteq \kappa\}$. Similarmente se verifica la contención opuesta. $\square$

2.1 Construcciones clásicas

Como el título lo indica, la presente sección tiene por fin presentar algunas formas en las que uno puede producir clubes y conjuntos estacionarios. Comenzaremos con *la intersección diagonal de clubes*.

Definición 2.8. Si A es un conjunto cualquiera y $X = \{X_a\}_{a\in A}$ es una familia de subconjuntos de $\mathscr{P}_\kappa(A)$, entonces $\Delta X := \left\{x \in \mathscr{P}_\kappa(A) : x \in \bigcap_{a\in x} X_a\right\}$ es llamada la *intersección diagonal* de X.

Lema 2.9. *Si $\lambda \geqslant \kappa$ es un cardinal y $\{C_\delta : \delta \in \lambda\}$ es una familia de clubes en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$, entonces su intersección diagonal es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$.*

Demostración. Llamemos D a dicha intersección diagonal y veamos primero que D es cerrado. Tomemos una sucesión $\subseteq$-creciente $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$ en D con $\alpha \in \kappa \setminus 1$ y sea $x = \bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi$. Por definición, demostrar que $x \in D$ equivale a mostrar que si $\gamma \in x$, entonces $x \in C_\gamma$. Con esto en mente, fijemos $\gamma \in x$. Como $\gamma \in x$, tendremos que $\gamma \in x_\psi$ para algún $\psi < \alpha$ y así, como $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$ es $\subseteq$-creciente, se deduce que $\gamma \in x_\xi$ para todo $\xi \geqslant \psi$. Más aún, como dichos x_ξ son elementos de D, tenemos que $x_\xi \in \bigcap_{a\in x_\xi} C_a$. En particular, para cada $\xi \geqslant \psi$, se verifica que $x_\xi \in C_\gamma$. De esta forma, $\{x_\xi\}_{\psi\leqslant\xi<\alpha}$ es una sucesión $\subseteq$-creciente en C_γ de menos de κ elementos y como C_γ es cerrado, $x = \bigcup_{\psi\leqslant\xi<\alpha} x_\xi \in C_\gamma$.

Ahora veamos que D es no-acotado. Tomemos $x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \setminus 1$. Construiremos recursivamente una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega} \subseteq \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ de tal modo que se cumplan las siguientes propiedades para toda $n < \omega$.

1. $x_0 = x$.

2. $x_n \subseteq x_{n+1}$.

3. $x_{n+1} \in E_n := \bigcap_{a \in x_n} C_a$.

Definamos x_0 como en (1) y supongamos que para alguna $n \in \omega$ hemos obtenido $\{x_i : i \leqslant n\}$ satisfactoriamente. Hagamos $E_n = \bigcap_{a \in x_n} C_a$ y notemos que el teorema 2.4 nos garantiza que E_n es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$; así, existe $x_{n+1} \in E_n$ con $x_n \subseteq x_{n+1}$, y esto completa la recursión.

Ahora probaremos que $x_\omega := \bigcup_{n<\omega} x_n$ es un elemento de D. Para esto, sea $\xi \in x_\omega$, arbitrario. Entonces existe $j \in \omega$ con $\xi \in x_j$. Para cada $i \in \omega \setminus (j+1)$ se sigue de las condiciones (3) y (2) que $x_i \in E_{i-1} \subseteq E_j \subseteq C_\xi$, esto es, $\{x_i\}_{j<i<\omega}$ es un sucesión numerable y $\subseteq$-creciente en C_ξ, por lo que $x_\omega = \bigcup_{j<i<\omega} x_i \in C_\xi$. De lo anterior, se concluye que $x_\omega \in D$ y $x \subseteq x_\omega$. $\square$

Suponga que δ es un ordinal límite. Tradicionalmente, dados $C \subseteq \delta$ y $f : C \to \delta$, decimos que f es una *función regresiva* sobre C si para todo $\beta \in C \setminus 1$ se cumple que $f(\beta) < \beta$. Para los propósitos de esta tesis y de manera más general, dados un cardinal $\lambda \geqslant \kappa$, $C \subseteq \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ y $f : C \to \lambda$, decimos que f es una *función regresiva* sobre C si para todo $c \in C \setminus 1$ se tiene que $f(c) \in c$. Observe que la presente definición generaliza de forma natural al concepto tradicional de función regresiva en cardinales dado que, como se mencionó en el párrafo previo a la proposición 2.3, $\kappa \subseteq \mathscr{P}_\kappa(\kappa)$ y el orden en los ordinales está dado por la pertenencia.

Lema 2.10 (Fodor)**.** *Si $S \subseteq \kappa$ y f es una función regresiva sobre S, entonces existe $\gamma < \kappa$ tal que $f^{-1}\{\gamma\}$ es estacionario en κ.*

El resultado anterior fue demostrado en 1956 por el matemático húngaro Géza Fodor, de ahí que sea conocido popularmente como lema de Fodor. A continuación presentaremos una generalización a dicho lema, una prueba al original se puede encontrar en [5, Teorema 1.39, p. 20].

Antes que nada, observe que en el contexto del teorema 2.4, se deduce que dados un club C en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ y un estacionario S en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$, se tiene que $C \cap S$ es estacionario en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$.

Así, dado que $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)\setminus 1$ es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$, entonces se cumple que $S\cap\mathscr{P}_\kappa(\lambda)\setminus 1 = S\setminus 1$ es un estacionario en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$.

Teorema 2.11 (Jech)**.** *Sea $\lambda \geqslant \kappa$ un cardinal y sea S un subconjunto estacionario de $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Si $f : S \to \lambda$ es una función regresiva, entonces existe $\gamma \in \lambda$ de tal forma que $f^{-1}\{\gamma\}$ es estacionario en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$.*

Demostración. Buscando una contradicción, supongamos que para todo $\xi \in \lambda$ se tiene que $f^{-1}\{\xi\}$ no es estacionario. De esta forma, para todo $\xi < \lambda$ hay un club c_ξ tal que $f^{-1}\{\xi\}\cap c_\xi = \emptyset$. De acuerdo al lema 2.9, si D es la intersección diagonal de $\{c_\xi : \xi < \lambda\}$, entonces D es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Así, como S es estacionario, existe $b \in D\cap S\setminus 1$. En particular, $f(b) \in b$. Ahora bien, como $b \in D$, se sigue que $b \in c_{f(b)}$ y, claramente, $b \in f^{-1}\{f(b)\}$; una contradicción a nuestra elección de $c_{f(b)}$. □

Definición 2.12. Sean A un conjunto y $n \in \omega$.

1. Si $0 < n$, una función $f : A^n \to A$ será llamada de *aridad* n sobre A. Así, una función *finitaria* sobre A es una función de aridad m sobre A, para algún $m \in \omega\setminus 1$, o un elemento de A (más específcamente, a los elementos de A los llamaremos funciones finitarias de aridad 0).

2. Si f es una función de aridad n sobre A, diremos que $B \subseteq A$ es *cerrado bajo* f si $f``B \subseteq B$, en el caso en que $0 < n$, o bien, $f \in B$ cuando $n = 0$.

3. Si L es una familia de funciones finitarias sobre A, diremos que $B \subseteq A$ es *cerrado bajo* L si y sólo si B es cerrado con respecto a cada $f \in L$

4. Dados un conjunto de funciones finitarias L sobre A, y $B \subseteq A$, definimos la *cerradura de* B *bajo* L como el menor subconjunto, respecto a la contención, C de A tal que $B \subseteq C$ y C es cerrado bajo todas las funciones de L.

Suponga que A, B y L son como en el inciso (4) de la definición previa. Más aún, tome $B' \subseteq A$ y denote por $G[B]$ y $G[B']$ a las cerraduras de B bajo L y de B' bajo L, respectivamente. De este modo, se deduce directamente de la definición que si $B' \subseteq B$, entonces $G[B'] \subseteq G[B] \subseteq A$. Este hecho será usado más abajo en la prueba del lema 2.16.

Teorema 2.13. *Sea θ un cardinal infinito. Sea L un conjunto de funciones finitarias sobre un conjunto A, tal que $|L| \leqslant \theta$ y sea B un subconjunto de A, tal que $|B| \leqslant \theta$. Entonces la cerradura de B bajo L existe y tiene cardinalidad menor o igual a θ.*

La prueba del teorema anterior se puede encontrar en [3, Teorema 1.8, p. 4] y en el párrafo que le precede.

Lema 2.14. *Sea L un conjunto de funciones finitarias sobre κ tal que $|L| < \kappa$. Entonces $C = \{\lambda < \kappa : \lambda$ es cerrado bajo $L\}$ es un club en κ.*

El lema anterior es un resultado clásico sobre clubes tradicionales que será utilizado en el siguiente capítulo. Su prueba puede encontrarse en [3, Lema 1.26, p. 12].

Definición 2.15. Sea A un conjunto aribitrario. Si $D \subseteq \mathscr{P}_\kappa(A)$, entonces diremos que D es *dirigido* si y sólo si para todo par de elementos x y y en D hay $z \in D$ tal que $x \cup y \subseteq z$.

Mostremos que si $D \subseteq \mathscr{P}_\kappa(A)$ es un conjunto dirigido, finito y no vacío, entonces $\bigcup D \in D$. Para esto, hagamos $m := |D|$ y enumeremos a D como $D = \{x_i : i < m\}$. Afirmamos que existe $f : m \to m$ de tal modo que $x_i \cup x_{f(i)} \subseteq x_{f(i+1)}$ siempre que $i + 1 < m$. Para probar nuestra afirmación usaremos recursión: sea $f(0) = 0$ y supongamos que $i < m$ es tal que $i+1 < m$ y $f_{\restriction(i+1)}$, la restricción de f al ordinal $i+1$, ha sido definida satisfactoriamente. Entonces $x_i, x_{f(i)} \in D$ y, por ende, existe $f(i+1) < m$ de tal modo que $x_i \cup x_{f(i)} \subseteq x_{f(i+1)}$. Esto completa la recursión. Resta notar que $x_{f(m-1)} \subseteq \bigcup D \subseteq x_{f(m-1)}$, esto es, $\bigcup D = x_{f(m-1)} \in D$.

Lema 2.16. *Sea A un conjunto arbitrario. Si $C \subseteq \mathscr{P}_\kappa(A)$ es cerrado y $D \in \mathscr{P}_\kappa(C)$ es dirigido y no vacío, entonces $\bigcup D \in C$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $\mu := |D|$. Si $\mu < \omega$, el párrafo anterior a este teorema nos garantiza que $\bigcup D \in D \subseteq C$.

Ahora demos por hecho que $\mu \geqslant \omega$ y que si $D^* \in \mathscr{P}_\kappa(C)$ es un conjunto dirigido con $|D^*| < \mu$, entonces $\bigcup D^* \in C$. Esta será nuestra hipótesis inductiva.

Tomemos $D \in \mathscr{P}_\kappa(C)$ de tal modo que $|D| = \mu$ y fijemos $\{x_\xi : \xi < \mu\}$ una enumeración sin repeticiones de D. Las funciones $f : \mu \times \mu \to \mu$ y $F : D \times D \to D$ dadas por

$f(\alpha,\beta) = \min\{\xi < \mu : x_\alpha \cup x_\beta \subset x_\xi\}$ y $F(x_\alpha, x_\beta) = x_{f(\alpha,\beta)}$ serán empleadas a lo largo de nuestro argumento. Note que si $(x, y) \in D \times D$, entonces $x \cup y \subseteq F(x, y)$.

Analicemos el caso $\mu = \omega$. La sucesión $\{y_i\}_{i\in\omega}$ definida mediante $y_0 := x_0$ y $y_{i+1} := F(y_i, x_i)$ para cada $i < \omega$, es $\subseteq$-creciente y satisface que $\bigcup D = \bigcup\limits_{i<\omega} y_i$. Luego, el que C sea cerrado nos da $\bigcup D \in C$.

Supongamos por el resto de la prueba que $\mu > \omega$.

Para cada $B \subseteq D$, denotamos por $G[B]$ a la cerradura de B bajo F (note que F es una función de aridad 2 sobre D). Entonces, definimos recursivamente la sucesión $\{D_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ mediante $D_\alpha = G\left[\bigcup\limits_{\beta<\alpha} D_\beta \cup \{x_\alpha\}\right]$, para cada $\alpha < \mu$. Observe que si $\alpha < \beta < \mu$, se sigue que

$$x_\alpha \in D_\alpha \subseteq D_\beta \subseteq D. \tag{2.1}$$

Más aún, el que D_α sea cerrado bajo F implica que para cualesquiera $x, y \in D_\alpha$ se tenga que $F(x, y) \in D_\alpha$, y como $x \cup y \subseteq F(x, y)$, concluimos que cada D_α es dirigido.

Probemos por inducción transfinita que $|D_\alpha| \leqslant |\alpha| + \omega$ para todo $\alpha < \mu$. En vista de que $D_0 = G[\{x_0\}]$ y $|\{x_0\}| \leqslant \omega$, el teorema 2.13 nos da $|D_0| \leqslant 0 + \omega$. Ahora supongamos que para algún $\alpha < \mu$ se tiene que $|D_\xi| \leqslant |\xi| + \omega$, siempre que $\xi < \alpha$. Entonces,

$$\left|\{x_\alpha\} \cup \bigcup_{\xi<\alpha} D_\xi\right| \leqslant |\alpha|(|\alpha| + \omega) = |\alpha| + \omega.$$

Por el teorema 2.13, concluimos que $|D_\alpha| \leqslant |\alpha| + \omega$.

Sea $\alpha < \mu$. De acuerdo al párrafo previo, $|D_\alpha| < \mu$, así que la hipótesis inductiva produce que $y_\alpha := \bigcup D_\alpha \in C$. Por otro lado, (2.1) garantiza que $x_\alpha \subseteq y_\alpha \subseteq \bigcup D$. Luego, $\bigcup\limits_{\xi<\mu} y_\xi = \bigcup D$ y como $\{y_\xi\}_{\xi<\mu}$ es $\subseteq$-creciente (ver (2.1)), concluimos que $\bigcup D \in C$. $\square$

Estamos interesados en presentar una forma de producir clubes en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ a partir de funciones que van de $\mathscr{P}_\omega(\lambda)$ en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Para esto, necesitaremos de la siguiente noción.

Definición 2.17. Sea A un conjunto con $|A| \geqslant \kappa$. Dados $f : \mathscr{P}_\omega(A) \to \mathscr{P}_\kappa(A)$ y $x \in \mathscr{P}_\kappa(A)$, diremos que x es un punto cerrado de f si y sólo si para todo conjunto finito $e \subseteq x$, se tiene que $f(e) \subseteq x$.

Nuestros dos siguientes resultados establecen que los conjuntos de puntos cerrados de funciones generan al filtro $\mathrm{CUB}(\mathscr{P}_\kappa(\lambda))$.

Proposición 2.18. *Si $\lambda \geqslant \kappa$ es un cardinal, entonces, para cualquier $g : \mathscr{P}_\omega(\lambda) \to \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$, el conjunto de todos los puntos cerrados de g, que denotaremos por C_g, es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$.*

Demostración. Sea $g : \mathscr{P}_\omega(\lambda) \to \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ arbitraria. Veamos que C_g es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Para ver que es no-acotado, tomemos $a \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$. Buscamos $x \in C_g$ tal que $a \subseteq x$. Definimos recursivamente la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ mediante:

1. $x_0 = \bigcup\{g(e) \cup a : e \in \mathscr{P}_\omega(a)\}$ y

2. $x_{n+1} = \bigcup\{g(e) \cup x_n : e \in \mathscr{P}_\omega(x_n)\}$ para cada $n \in \omega$.

Note que cada x_n es unión de menos de κ subconjuntos de λ de tamaño menor a κ, por lo cual $\{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ y además, $\{x_n\}_{n<\omega}$ es $\subseteq$-creciente. Sea $x = \bigcup\limits_{n\in\omega} x_n$. Tenemos que $a \subseteq x_0 \subseteq x$. Veamos que $x \in C_g$.

Sea $e \in \mathscr{P}_\omega(x)$. Para cada $\xi \in e$ fijemos $i(\xi) < \omega$ de tal modo que $\xi \in x_{i(\xi)}$. Ahora, si $m \in \omega$ es una cota superior de $\{i(\xi) : \xi \in e\}$, entonces $e \subseteq x_m$, pues $\{x_n\}_{n<\omega}$ es $\subseteq$-creciente. Por lo tanto, $g(e) \subseteq x_{m+1} \subseteq x$. Así, x es un punto cerrado de g.

Para ver que C_g es cerrado, tomemos $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$, una sucesión $\subseteq$-creciente en C_g, con $\alpha \in \kappa \setminus 1$. Sean $x = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} x_\xi$ y $e \in \mathscr{P}_\omega(x)$. Como e es finito, un argumento similar al dado en el párrafo previo muestra que existe $\eta < \alpha$ tal que $e \subseteq x_\eta$ y como $x_\eta \in C_g$, tendremos que $g(e) \subseteq x_\eta \subseteq x$ y, por lo tanto, $x \in C_g$. $\square$

A continuación, mostraremos que los clubes definidos en la proposición previa forman una base para el filtro de todos los clubes, esto es, que todo club contiene un club de la forma C_g.

Proposición 2.19. *Sea $\lambda \geqslant \kappa$ un cardinal. Si C es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ y $B \in [\lambda]^\omega$, entonces existe $f : \mathscr{P}_\omega(\lambda) \to C$ de tal modo que*

1. $B \subseteq f(\emptyset)$,

2. $e \cup \bigcup\{f(d) : d \subset e\} \subseteq f(e)$, para cualquier $e \in \mathscr{P}_\omega(\lambda)$, *3.* f *es* $\subseteq$*-creciente y*

4. $C_f \subseteq C$*.*

Demostración. Observe, en primer lugar, que (2) implica (3), pues si $a, b \in \mathscr{P}_\omega(\lambda)$ son tales que $a \subseteq b$, entonces, $a = b$ implica que $f(a) = f(b)$, mientras que la relación $a \subset b$ nos lleva a $f(a) \subseteq b \cup \bigcup\{f(d) : d \subset b\} \subseteq f(b)$.

Definiremos $f(e)$ mediante recursión sobre $|e|$ y mostraremos que cumple (1), (2) y (4).

Cuando $e = \emptyset$, la desigualdad $\omega < \kappa$ implica que $B \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ y, por ende, existe $f(\emptyset) \in C$ con $B \subseteq f(\emptyset)$.

Ahora supongamos que $n \in \omega$ es tal que hemos definido $f(d)$ satisfactoriamente para todo $d \subseteq \lambda$ con $|d| \leqslant n$. Sea $e \subseteq \lambda$ tal que $|e| = n + 1$. Entonces, $d \subset e$ nos da $|d| \leqslant n$ y, en consecuencia, $f(d)$ ya ha sido definido. Así, $e \cup \bigcup\{f(d) : d \subset e\} \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ y por ende, existe $f(e) \in C$ de tal forma que la condición (2) es satisfecha. Esto completa la recursión.

Sólo debemos probar que $C_f \subseteq C$. Sea $x \in C_f$ y definamos $D := \{f(e) : e \in \mathscr{P}_\omega(x)\}$. Mostremos que $D \subseteq \mathscr{P}_\kappa(C)$ es dirigido. Dados $d, e \in \mathscr{P}_\omega(\lambda)$, el que $d \subseteq d \cup e$ implica, junto con la condición (3), que $f(d) \subseteq f(d \cup e)$; similarmente, $f(e) \subseteq f(d \cup e)$ y así, $f(d) \cup f(e) \subseteq f(d \cup e) \in D$.

Por otro lado, según (2), $e \in \mathscr{P}_\omega(\lambda)$ nos da $e \subseteq f(e) \subseteq x$ (recuerde que $x \in C_f$). De este modo, $x = \bigcup \mathscr{P}_\omega(x) = \bigcup D$. Finalmente, el lema 2.16 nos da $x \in C$. □

Empleando la notación presentada en la proposición 2.18, tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.20. *Sea* A *un conjunto con al menos* κ *elementos. Si* $f : \mathscr{P}_\omega(A) \to \mathscr{P}_\kappa(A)$ *y* $e \in \mathscr{P}_\omega(A)$*, entonces* $X_e := \{s \in C_f : e \subseteq s\}$ *no es vacío y* $\bigcap X_e \in C_f$*.*

Demostración. Por la proposición 2.18, C_f es no-acotado y así, $X_e \neq \emptyset$. Ahora, para simplificar notación, hagamos $x := \bigcap X_e$.

Sea $a \in \mathscr{P}_\omega(x)$. Estamos interesados en comprobar que $f(a) \subseteq x$, pues esto nos permitiría concluir que $x \in C_f$.

Si $s \in X_e$, entonces $a \subseteq x \subseteq s$, con lo que $a \in \mathscr{P}_\omega(s)$. Luego, como $s \in C_f$, tenemos que $f(a) \subseteq s$. Así, para todo $s \in X_e$, tenemos que $f(a) \subseteq s$, con lo que $f(a) \subseteq \bigcap X_e = x$. □

Continuando con la idea de generar clubes, tenemos lo siguiente.

Definición 2.21. Sean $A \subseteq B$ con $\kappa < |A|$ y $X \subseteq \mathscr{P}_\kappa(B)$.

1. La *proyección* de X en A es el conjunto $X_{\restriction A} := \{x \cap A : x \in X\}$.

2. Si $Y \subseteq \mathscr{P}_\kappa(A)$, entonces la *elevación* (o *lifting*) de Y a B es el conjunto

$$l_B(Y) := \{x \in \mathscr{P}_\kappa(B) : x \cap A \in Y\}.$$

Notemos que si A, B, X y Y son como en la definición previa, entonces argumentos rutinarios muestran que

$$l_B(Y)_{\restriction A} \subseteq Y \qquad \text{y} \qquad X \subseteq l_B(X_{\restriction A}).$$

Teorema 2.22 (T. K. Menas)**.** *Sean $A \subseteq B$ con $\kappa < |A|$.*

1. *Cuando D es un club en $\mathscr{P}_\kappa(A)$, $l_B(D)$ es un club en $\mathscr{P}_\kappa(B)$.*

2. *Si C es un club en $\mathscr{P}_\kappa(B)$, entonces hay un club en $\mathscr{P}_\kappa(A)$ que está contenido en $C_{\restriction A}$.*

3. *$l_B(S)$ es estacionario en $\mathscr{P}_\kappa(B)$ siempre que S es estacionario en $\mathscr{P}_\kappa(A)$.*

4. *El que R sea estacionario en $\mathscr{P}_\kappa(B)$ implica que $R_{\restriction A}$ es estacionario en $\mathscr{P}_\kappa(A)$.*

Demostración. Comencemos por el inciso (1). Sea $y \in \mathscr{P}_\kappa(B)$. Entonces $x = y \cap A \in \mathscr{P}_\kappa(A)$. Como D es no-acotado en $\mathscr{P}_\kappa(A)$, hay $d \in D$ tal que $x \subseteq d$. Sea $b = d \cup (y \setminus A)$. Así, $b \subseteq B$, tiene menos de κ elementos y $b \cap A = d$ por lo que $b \in l_B(D)$. Además, $y = (y \cap A) \cup (y \setminus A) = x \cup (y \setminus A) \subseteq d \cup (y \setminus A) = b$. Por lo tanto, $l_B(D)$ es *no-acotado* en $\mathscr{P}_\kappa(B)$.

Veamos que $l_B(D)$ es cerrado. Tomemos $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$, una sucesión $\subseteq$-creciente en $l_B(D)$, con $\alpha \in \kappa \setminus 1$. Sea $x = \bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi$. Tenemos que $\{x_\xi \cap A\}_{\xi<\alpha} \subseteq D$ es $\subseteq$-creciente y, como D es cerrado, $x \cap A = \left(\bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi\right) \cap A = \bigcup_{\xi<\alpha} (x_\xi \cap A) \in D$. De esta forma, $x \in l_B(D)$.

Con esto, estamos listos para probar el inciso (4). Si tomamos C, un club cualquiera en $\mathscr{P}_\kappa(A)$, tendremos que $l_B(C)$ es un club en $\mathscr{P}_\kappa(B)$ y, por lo tanto, hay $r \in R \cap l_B(C)$. De esta manera, $r \cap A \in R_{\restriction A} \cap C$, con lo que $R_{\restriction A} \cap C \neq \emptyset$. Por lo tanto, $R_{\restriction A}$ es *estacionario* en $\mathscr{P}_\kappa(A)$.

Ahora demostraremos el inciso (2). Por la proposición 2.19, sabemos que existe $f : \mathscr{P}_\omega(B) \to \mathscr{P}_\kappa(B)$ de tal suerte que $C_f \subseteq C$. Empleemos la notación del lema 2.20 para definir $g : \mathscr{P}_\omega(A) \to \mathscr{P}_\kappa(A)$ mediante $g(e) := A \cap \bigcap X_e$. En vista de que C_g es un club en $\mathscr{P}_\kappa(A)$ y $C_f \subseteq C$, bastará con ver que $(C_f)_{\restriction A} = C_g$ para finalizar la prueba de (2).

Veamos que $(C_f)_{\restriction A} = C_g$. Si $y \in (C_f)_{\restriction A}$, entonces hay $x \in C_f$ tal que $x \cap A = y$. Si $a \in \mathscr{P}_\omega(y)$, entonces $a \subseteq y \subseteq x$ y, por ende, $x \in X_a$; luego, $\bigcap X_a \subseteq x$. En consecuencia, $g(a) = A \cap \bigcap X_a \subseteq A \cap x = y$ y así, $y \in C_g$. De esta forma, tenemos que $(C_f)_{\restriction A} \subseteq C_g$.

Ahora bien, sea $x \in C_g$ y definamos $y = \bigcup\{\bigcap X_a : a \in \mathscr{P}_\omega(x)\}$. Afirmamos que $x = A \cap y$ y $y \in C_f$. Empecemos por notar que si $a \in \mathscr{P}_\omega(x)$, entonces $a \subseteq \bigcap X_a$ y por esta razón, $x = \bigcup \mathscr{P}_\omega(x) \subseteq y$; luego, $x \subseteq A \cap y$. Por otro lado,

$$A \cap y = \bigcup \left\{ A \cap \bigcap X_a : a \in \mathscr{P}_\omega(x) \right\} = \bigcup \{g(a) : a \in \mathscr{P}_\omega(x)\}$$

y, como $x \in C_g$, deducimos que $A \cap y \subseteq x$. En resumen, $x = A \cap y$. Con lo que sólo hace falta comprobar que $y \in C_f$.

Tomemos $r \in \mathscr{P}_\omega(y)$. Para cada $\xi \in r$, existe $a(\xi) \in \mathscr{P}_\omega(x)$ de tal modo que $\xi \in \bigcap X_{a(\xi)}$. Hagamos $a := \bigcup\{a(\xi) : \xi \in r\} \in \mathscr{P}_\omega(x)$ para obtener $\bigcap X_a \subseteq y$. Nuestra definición de X_a implica que $X_a \subseteq X_{a(\xi)}$ siempre que $\xi \in r$. Entonces, $r \subseteq \bigcup \left\{\bigcap X_{a(\xi)} : \xi \in r\right\} \subseteq \bigcap X_a$ y como $\bigcap X_a \in C_f$ (ver lema 2.20), concluimos que $f(r) \subseteq \bigcap X_a \subseteq y$.

De esta forma, $x \in (C_f)_{\restriction A}$ y, por lo tanto, $C_g \subseteq (C_f)_{\restriction A}$.

Finalmente, probemos el inciso (3). Tomemos C, un club en $\mathscr{P}_\kappa(B)$. Por el inciso (2), tenemos que hay un club D en $\mathscr{P}_\kappa(A)$ contenido en $C_{\restriction A}$. Así, $D \cap S \neq \emptyset$. Fijando $d \in D \cap S$ tendremos que $d = c \cap A$, para algún $c \in C$, y en consecuencia, $c \in l_B(S) \cap C$. Por lo que $l_B(S)$ es *estacionario* en $\mathscr{P}_\kappa(B)$. □

Ahora nos concentraremos en generar clubes empleando operaciones:

Definición 2.23. Sea A un conjunto infinito. A las funciones de $\mathscr{P}_\omega(A)$ en A les llamaremos *operaciones en A*. Además, si F es una operación en A y $x \subseteq A$, entonces diremos que x es *cerrado bajo F* si $F(e) \in x$, para cualquier $e \in \mathscr{P}_\omega(x)$.

Teorema 2.24. *Sea $\lambda \geqslant \omega_1$ un cardinal y sea $F : \mathscr{P}_\omega(\lambda) \to \lambda$ una operación. Entonces, el conjunto $C_F := \{x \in [\lambda]^\omega : x$ es cerrado bajo $F\}$ es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$.*

Demostración. Veamos primero que C_F es cerrado en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$. Sea $\alpha \in \omega_1 \setminus 1$ y sea $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha} \subseteq C_F$, una sucesión $\subseteq$-creciente. Tenemos que $x = \bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi \in [\lambda]^\omega$, pues es unión contable de conjuntos infinitos numerables. Tomemos $e \in \mathscr{P}_\omega(x)$. Como $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha}$ es $\subseteq$-creciente, existe $\xi < \alpha$ tal que $e \subseteq x_\xi$. Además, como $x_\xi \in C_F$, tenemos que $F(e) \in x_\xi \subseteq x$. Por lo tanto, $x \in C_F$. Así, C_F es *cerrado* en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$.

Veamos que C_F es no-acotado en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$. Tomemos un $x \in \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$ arbitrario. Fijemos $y \in [\lambda]^\omega$ y definamos recursivamente la siguiente sucesión de longitud $\omega + 1$.

1. $x_0 = x \cup y$.

2. $x_{n+1} = x_n \cup \{F(e) : e \in \mathscr{P}_\omega(x_n)\}$ para cada $n < \omega$.

3. $x_\omega = \bigcup_{n<\omega} x_n$.

Como para toda $n < \omega$ tenemos que $x_n \subseteq x_{n+1}$, entonces $\{x_n\}_{n\leqslant\omega}$ es $\subseteq$-creciente. Además, $x \subseteq x_\omega$ y la elección de y nos da $x_\omega \in [\lambda]^\omega$. Más aún, probaremos que $x_\omega \in C_F$. Para esto, sea $e \in \mathscr{P}_\omega(x_\omega)$. De nueva cuenta, como e es finito y $\{x_n\}_{n<\omega}$ es $\subseteq$-creciente, tendremos que hay $n \in \omega$ tal que $e \in \mathscr{P}_\omega(x_n)$. Con lo que $F(e) \in x_{n+1} \subseteq x_\omega$. Por lo tanto, $x_\omega \in C_F$. Esto prueba que C_F es *no-acotado* en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$. □

Corolario 2.25. *Sea F una operación en ω_1. Así, $C_F^* := \{\lambda < \omega_1 \setminus \omega : \lambda$ es cerrado bajo $F\}$ es un club en ω_1.*

Demostración. Comencemos por notar que $C_F^* = C_F \cap \omega_1 \setminus \omega$. Argumentos rutinarios muestran que $\omega_1 \setminus \omega$ es un club en ω_1. El resto es aplicar el lema 2.6 dos veces. □

Finalizamos el capítulo con la demostración de que las operaciones en un cardinal no numerable λ generan una base para los clubes en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$. Para esto se empleará dentro del argumento el siguiente hecho (cuya prueba omitimos por ser rutinaria): la colección $[\lambda]^\omega$ es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$.

Teorema 2.26 (D. W. Kueker). *Sea $\lambda \geqslant \omega_1$ un cardinal. Si C_0 es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$, entonces hay una operación F en λ tal que $C_F := \{x \in \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda) : x$ es cerrado bajo $F\} \subseteq C_0$.*

Demostración. Hagamos, en primer lugar, $C := C_0 \cap [\lambda]^\omega$. Como C es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$, sabemos, por la proposición 2.19, que hay una función $\subseteq$-creciente, $f : \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda) \to C$, tal que $C_f \subseteq C$.

Ahora bien, para cada $y \in \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$ se tiene que $f(y) \in C \subseteq [\lambda]^\omega$, esto es, $|f(y)| = \omega$; fijemos una enumeración sin repeticiones de $f(y)$, digamos $f(y) = \{f(y)_i : i < \omega\}$. Sea, además, g como en lema 1.6, es decir, $g : \omega \to \omega \times \omega$ es tal que para toda $(k,m) \in \omega \times \omega$, se tiene que $|g^{-1}\{(k,m)\}| = \omega$.

Para cada $n \in \omega$, convengamos en denotar por $k(n)$ y $m(n)$ a las coordenadas de $g(n)$, esto es, $g(n) = (k(n), m(n))$; además, sea $\ell(n) := \min\{n, m(n)\}$.

Emplearemos todo lo anterior para definir nuestra operación $F : \mathscr{P}_\omega(\lambda) \to \lambda$. Dado $e \in \mathscr{P}_\omega(\lambda)$, definimos $F(e)$ como sigue.

1. $F(e) = f(e)_0$ si $e = \emptyset$.

2. $F(e) = \alpha + 1$ cuando $e = \{\alpha\}$.

3. Si $n \in \omega \setminus 1$ y $e = \{\alpha_i : i \leqslant n\}$, donde $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ para cualquier $i < n$, entonces $F(e) := f(\{\alpha_i : i \leqslant \ell(n)\})_{k(n)}$.

De esta forma, $F : \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda) \to \lambda$ es una operación en λ.

Sea $x \in C_F$. Haremos un par de observaciones sobre x que serán empleadas más adelante. Primero, como $\emptyset \in \mathscr{P}_\omega(x)$ y x es cerrado bajo F, se sigue que $F(\emptyset) \in x$, esto es, $x \neq \emptyset$. En segundo lugar, para cada $\alpha \in x$, tenemos que $\{\alpha\} \in \mathscr{P}_\omega(x)$ y, por ende, $\alpha+1 = F(\{\alpha\}) \in x$; en otras palabras, x es cerrado bajo la operación de tomar sucesor.

Mostremos ahora que $x \in C_f$, es decir, que para cualquier $e \in \mathscr{P}_\omega(x)$ se tiene que $f(e) \subseteq x$. Empezaremos por suponer que $e \in \mathscr{P}_\omega(x)$ satisface que $e \neq \emptyset$. Para probar que $f(e) \subseteq x$, tomemos $s \in \omega$ y argumentemos que $f(e)_s \in x$. Como $e \neq \emptyset$, existe $r \in \omega$ de tal modo que $e = \{\alpha_i : i \leqslant r\}$, donde $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ siempre que $i < r$. Fijemos $n \in \omega \setminus (r+1)$ de tal forma que $g(n) = (s, r)$, esto es, $k(n) = s$ y $m(n) = r < n$. En particular, $\ell(n) = r$. Observe que $p := n - r \in \omega \setminus 1$ y defina, para cada $0 < i \leqslant p$, $\alpha_{r+i} := \alpha_r + i$ (naturalmente, estamos hablando aquí de suma ordinal). Dado que $\alpha_r \in x$ y x es cerrado bajo la operación de tomar sucesor, obtenemos que $\{\alpha_i : i \leqslant n\} \subseteq x$. Así,

$$f(e)_s = f(\{\alpha_i : i \leqslant \ell(n)\})_{k(n)} = F(\{\alpha_i : i \leqslant n\}) \in x.$$

Ahora, si $e = \emptyset$, usemos la condición $x \neq \emptyset$ para fijar $d \in \mathscr{P}_\omega(x) \setminus 1$. Entonces, $e \subseteq d$ y como f es $\subseteq$-creciente, $f(e) \subseteq f(d)$; además, por el párrafo previo, $f(d) \subseteq x$ y en consecuencia, $f(e) \subseteq x$. $\square$

Una generalización natural del Teorema de Kueker es el enunciado siguiente: si λ es un cardinal con $\lambda \geqslant \kappa > \omega_1$ y R es un club en $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$, entonces hay una operación F en λ de tal manera que $\{x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) : x \text{ es cerrado bajo } F\} \subseteq R$. El resultado final del presente capítulo es que dicho enunciado es falso.

Proposición 2.27. *Si $\omega_1 < \kappa$ y $\lambda \geqslant \kappa$ es un cardinal, entonces $R := \{x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) : \aleph_1 \leqslant |x|\}$ es un club y para toda operación $F : \mathscr{P}_\omega(\lambda) \to \lambda$ hay un conjunto contable x cerrado bajo F.*

Demostración. Veamos primero que R es no-acotado. Tomemos $x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ y notemos que $x \cup \omega_1$ es un elemento de R que contiene como subconjunto a x.

Para demostrar que R es cerrado, sea $\{x_\xi\}_{\xi<\alpha} \subseteq R$ una sucesión $\subseteq$-creciente con $\alpha \in \kappa \setminus 1$. Así, $\aleph_1 \leqslant |x_0| \leqslant \left|\bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi\right| < \kappa$ y, por lo tanto, R es *cerrado*.

Para la segunda parte de la afirmación, tomemos $F : \mathscr{P}_\omega(\lambda) \to \lambda$ una operación en λ. Buscamos $x \in C_F$ de tal suerte que x sea contable. Para construir dicho x, definiremos recursivamente la siguiente sucesión:

1. $x_0 = \{F(\emptyset)\}$.

2. $x_{n+1} = x_n \cup \{F(e) : e \in \mathscr{P}_\omega(x_n)\}$ siempre que $n < \omega$.

Probemos por inducción que para toda $n \in \omega$ se tiene que $|x_n| \leqslant \omega$. Note que $|x_0| = |\{F(\emptyset)\}| = 1 \leqslant \omega$. Además, si para algún $n \in \omega$ suponemos que $|x_n| \leqslant \omega$, entonces $|\mathscr{P}_\omega(x_n)| \leqslant \omega$, de donde se desprende que $|x_{n+1}| \leqslant |x_n| + |\mathscr{P}_\omega(x_n)| \leqslant \omega + \omega = \omega$. Además, que $\{x_n\}_{n\in\omega}$ sea $\subseteq$-creciente se sigue de la condición (2).

Por último, definamos $x := \bigcup_{n\in\omega} x_n$. Gracias al párrafo anterior, podemos concluir que $|x| \leqslant \omega$. Veamos que $x \in C_F$. Sea $e \in \mathscr{P}_\omega(x) \setminus 1$. El que $\{x_n\}_{n<\omega}$ sea creciente nos garantiza que hay $m < \omega$ con $e \subseteq x_m$. De este modo, $F(e) \in x_{m+1} \subseteq x$. Concluimos que x es un *punto cerrado* contable de F. $\square$

Así, toda operación sobre λ tendrá un punto cerrado fuera de R, con lo que no podremos generalizar el resultado de Kueker cuando $\omega_1 < \kappa$.

Capítulo 3: Estacionarios y forcing

En este capítulo y el siguiente haremos construcciones que involucrarán la técnica de forcing. A continuación presentaremos un brevísimo resumen de ésta, pero le comentamos al lector que nuestro texto base para este tema será [6]; de forma específica, el material correspondiente al séptimo capítulo de dicho libro.

3.1 Preliminares de forcing

Empecemos este sumario con el concepto básico.

Definición 3.1. Sean $\mathbb{P}$ un conjunto, $\leqslant$ una relación binaria en $\mathbb{P}$ y $1_{\mathbb{P}}$ un elemento de $\mathbb{P}$. Decimos que $(\mathbb{P}, \leqslant, 1_{\mathbb{P}})$ es una *noción de forcing* si y sólo si para cualesquiera $p, q, r \in \mathbb{P}$ se satifacen:

1. $1_{\mathbb{P}}$ es un elemento de $\mathbb{P}$ que satisface $p \leqslant 1_{\mathbb{P}}$, para cada $p \in \mathbb{P}$.

2. $p \leqslant p$.

3. Si $p \leqslant q$ y $q \leqslant r$, entonces $p \leqslant r$.

En el contexto de la definición anterior, llamaremos *condiciones* a los elementos de $\mathbb{P}$. Si $p, q \in \mathbb{P}$ son tales que $q \leqslant p$, diremos que q *extiende* a (o *es una extensión de*) p.

De ahora en adelante, consideraremos V, un modelo transitivo y numerable de ZFE (los axiomas de Zermelo-Fraenkel para la Teoría de Conjuntos), y $(\mathbb{P}, \leqslant, 1_{\mathbb{P}}) \in V$, una noción de forcing.

Definición 3.2. Sean $p, q \in \mathbb{P}$.

1. Decimos que p y q *son compatibles* (en símbolos, $p \mid q$), si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$.

2. p y q serán *incompatibles* (en símbolos, $p \perp q$) si no son compatibles, es decir, si no existe $r \in \mathbb{P}$ que los extienda simultáneamente.

Definición 3.3. Sean $A, X \subseteq \mathbb{P}$.

1. A es una *anticadena* si cualesquiera dos elementos distintos de A son incompatibles.

2. A es una *anticadena maximal* en X si $A \subseteq X$ es anticadena y ninguna otra anticadena contenida en X la contiene propiamente.

La equivalencia siguiente es útil, en ocasiones, para demostrar la maximalidad de una anticadena.

Proposición 3.4. *Sea $X \subseteq \mathbb{P}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para cualquier anticadena $A \subseteq X$.*

1. *A es maximal en X.*

2. *Para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que x y a son compatibles.*

Demostración. Mostremos la contrarrecíproca en ambas direcciones. Sea $A \subseteq X$ una anticadena. Supongamos que hay $x \in X$ tal que $x \perp a$ para todo $a \in A$. De lo anterior, se tiene que $x \notin A$. Así, $A \cup \{x\}$ es una anticadena que contiene propiamente a A y por lo tanto, A no es maximal.

Supongamos que A no es maximal en X. Entonces existe $B \subseteq X$ una anticadena tal que $A \subset B$. Sea $b \in B \setminus A$. Como B es anticadena, se tiene entonces que $a \perp b$ para cada $a \in A$. □

Definición 3.5. Sean $D \subseteq \mathbb{P}$ y $p_0 \in \mathbb{P}$.

1. D es un subconjunto *denso* de $\mathbb{P}$ si para todo $p \in \mathbb{P}$, existe $d \in D$ tal que $d \leqslant p$.

2. D es *denso bajo* p_0 si para todo $r \leqslant p_0$, existe $d \in D$ tal que $d \leqslant r$.

3. D es *predenso bajo* p_0 si para todo $r \leqslant p_0$, existe $d \in D$ tal que $d \mid r$.

4. $p_0^{\downarrow} := \{p \in \mathbb{P} : p \leqslant p_0\}$.

Lema 3.6. *Si $B \subseteq X \subseteq \mathbb{P}$ y B es una anticadena, entonces existe una anticadena maximal en X que contiene a B.*

Demostración. Nos interesa ver que B se puede extender a una anticadena maximal en X. Consideremos al siguiente conjunto:

$$\Sigma = \{A \subseteq X : A \text{ es una anticadena y } B \subseteq A\}.$$

Veamos que el orden parcial $(\Sigma, \subseteq)$ cumple las hipótesis del Lema de Zorn. Primero, $\Sigma \neq \emptyset$, pues $B \in \Sigma$.

Sea $\mathcal{C}$ cualquier cadena no vacía de Σ. Veamos que $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior en Σ para $\mathcal{C}$. Para cualquier $A \in \mathcal{C}$, $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Además, $\mathcal{C}$ únicamente tiene como elementos subconjuntos de X por lo que $\bigcup \mathcal{C} \subseteq X$. Ahora bien, $\bigcup \mathcal{C}$ es anticadena pues si $x, y \in \bigcup \mathcal{C}$ son distintos, entonces existen $A_0, A_1 \in \mathcal{C}$ tales que $x \in A_0$ y $y \in A_1$. Como $\mathcal{C}$ es cadena, $A_0 \subseteq A_1$ ó $A_1 \subseteq A_0$. Supongamos que $A_0 \subseteq A_1$, por ende x y y son ambos elementos de A_1, la cual es una anticadena y por lo tanto $x \perp y$. Si $A_1 \subseteq A_0$, el argumento es análogo.

Para verificar que $\bigcup \mathcal{C}$ contiene a B notemos que como $\mathcal{C} \neq \emptyset$, existe $A \in \mathcal{C}$ de modo que $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Así, $A \in \Sigma$, de donde $B \subseteq A$ y, por tanto, $B \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

En resumen, hemos visto que cualquier cadena no vacía en Σ admite una cota superior en Σ, entonces, por el Lema de Zorn, existe $A \subseteq D$ tal que A es un elemento maximal de $(\Sigma, \subseteq)$. Es decir, A es una anticadena maximal en X. $\square$

Corolario 3.7. *Todo subconjunto denso de $\mathbb{P}$ contiene una anticadena maximal en $\mathbb{P}$.*

Demostración. Suponga que D es un subconjunto denso de $\mathbb{P}$ y note que, por vacuidad, $\emptyset$ es una anticadena contenida en D. Usando el lema 3.6, existe una anticadena maximal A en D que contiene a $\emptyset$. Emplearemos la proposición 3.4 para ver que A es maximal en $\mathbb{P}$.

Sea $p \in \mathbb{P}$. El que D sea denso en $\mathbb{P}$ implica que hay $d \in D$ tal que $d \leqslant p$. Como A es maximal en D, existe $a \in A$ de tal suerte que $a \mid d$. Por lo tanto, $a \mid p$. Lo que demuestra que A es anticadena maximal en $\mathbb{P}$. $\square$

Definición 3.8. Sea $G \subseteq \mathbb{P}$ no vacío. Decimos que G es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico si se satisfacen:

1. Para cualesquiera $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$, $p \leqslant q$ implica que $q \in \mathbb{P}$.

2. Si $p, q \in G$, entonces existe $r \in G$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$.

3. Siempre que $D \in V$ sea un subconjunto denso de $\mathbb{P}$, se tiene que $D \cap G \neq \emptyset$.

Proposición 3.9. *Sean $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, $D \subseteq \mathbb{P}$ y $p \in G$. Si D es denso bajo p y $D \in V$, entonces $G \cap D \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que D es un denso bajo p y $D \in V$. Definimos $E = \{q \in \mathbb{P} : q \perp p\} \cup D$. Al mostrar que E es un conjunto denso de $\mathbb{P}$ en V, concluiremos que $E \cap G \neq \emptyset$. Más aún, como todos los elementos de G deben ser compatibles, G debe tocar a E en un punto de D.

Con la idea en mente de probar que E es denso, fijemos $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \mid p$. Hay $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant q$ y $r \leqslant p$. Como D es denso bajo p, existe $s \in D \subseteq E$ tal que $s \leqslant r$. Usando la transitividad de $\mathbb{P}$, concluimos que $s \leqslant q$. En el caso en que $q \perp p$, tenemos que $q \in E$ y $q \leqslant q$. Es decir, E es denso, como se buscaba. $\square$

Proposición 3.10. *Sean $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico y $A \in V$, una anticadena maximal en $\mathbb{P}$. Así, $G \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $A^{\downarrow} = \bigcup_{a \in A} a^{\downarrow}$. La maximalidad de A implica (ver proposición 3.4) que $A^{\downarrow}$ es denso en $\mathbb{P}$. Sea $q \in A^{\downarrow} \cap G$. Luego, existe $a \in A$ tal que $q \leqslant a$ y como G es un filtro, esto implica que $a \in G \cap A$. $\square$

Se espera que el lector esté familiarizado con los conceptos de $\mathbb{P}$-nombre y de *valuación* de un $\mathbb{P}$-nombre con respecto a un filtro. Denotaremos por $V^{\mathbb{P}}$ a la colección de todos los $\mathbb{P}$-nombres que son elementos de V y dado $x \in V$, $\check{x}$ representará al $\mathbb{P}$-nombre canónico de x. Sean $G \subseteq \mathbb{P}$, un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, y $\dot{x} \in V^{\mathbb{P}}$. Usaremos $\dot{x}_G$ para referirnos a la valuación de $\dot{x}$ bajo G. Además, $V[G]$ será la extensión genérica correspondiente.

Teorema 3.11. *Si G es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces $V[G]$ es un modelo transitivo numerable de ZFE tal que $V \subseteq V[G]$.*

Este resultado es de suma importancia. A veces es conocido como teorema (fundamental) de forcing y es la piedra angular en que se desarrolla esta teoría.

Teorema 3.12. *Para cualquier filtro* $(V, \mathbb{P})$*-genérico* G *y cualquier ordinal* α *se tiene que* $\alpha \in V$ *si y sólo si* $\alpha \in V[G]$*. En otras palabras,* $OR^V = OR^{V[G]}$*.*

Este teorema es tan útil como bello y nos muestra que cualquier extensión genérica compartirá los mismos ordinales que el modelo base del que fue obtenida.

Definición 3.13. Sea $n \in \omega \setminus 1$ y sea $\varphi(y_1, ..., y_n)$ una fórmula cuyas variables libres son $y_1, ..., y_n$. Dados $\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$ y $p \in \mathbb{P}$, decimos que p *fuerza* $\varphi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$ (denotado por $p \Vdash$ "$\varphi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$") si y sólo si para cualquier filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico G tal que $p \in G$, $V[G] \models \varphi((\dot{x}_1)_G, ..., (\dot{x}_n)_G)$.

Es posible definir una noción equivalente a $\Vdash$, que denotaremos por $\Vdash^*$, y la cual puede ser definida mediante una fórmula que admite una relativización a V (para nuestros fines es fundamental que ningún filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico sea elemento de V). El primer inciso del siguiente teorema ilustra dicha posibilidad y por ende, es llamado "Lema de Definibilidad". El segundo inciso es a veces conocido como el "Lema del Destino" y puede ser entendido como el hecho de que todo lo que ocurre en $V[G]$ debió ser forzado por alguna noción p en G.

Teorema 3.14. *Sea* $\phi(y_1, ..., y_n)$ *una fórmula cuyas variables libres son* $y_1, ..., y_n$*. Sean* $\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n \in V^{\mathbb{P}}$*. Se tiene lo siguiente.*

1. *Para cada* $p \in \mathbb{P}$*,* $p \Vdash \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$ *si y sólo si* $(p \Vdash^* \phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n))^V$ *(aquí, el supraíndice* V *significa "relativización a* V*").*

2. *Para cualquier* G*, filtro* $(V, \mathbb{P})$*-genérico,*

$$\phi((\dot{x}_1)_G, ..., (\dot{x}_n)_G)^{V[G]} \text{ equivale a que exista } p \in G \text{ tal que } p \Vdash \text{“}\phi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)\text{”}.$$

La prueba a los 3 últimos teoremas excede los propósitos de este capítulo, pero puede ser encontrada en el tercer capítulo de [6].

Los resultados que presentamos a continuación nos serán de gran utilidad en lo que resta del presente capítulo y del siguiente. Note que estamos usando la expresión $p \Vdash$ "φ" como una abreviatura.

Lema 3.15. *Sea $p \in \mathbb{P}$ y φ una fórmula. Así, $q \leqslant p$ y $p \Vdash$ "φ" implican que $q \Vdash$ "φ".*

El lema anterior puede encontrarse en [6, VII, Lemma 3.2].

Definición 3.16. Sean $A, B \in V$ y $\dot{f} \in V^{\mathbb{P}}$. Suponga que $p \in \mathbb{P}$ satisface que $p \Vdash$ "$\dot{f} : \check{A} \to \check{B}$" y fije $a \in A$. En estas circunstancias, diremos que la condición $q \leqslant p$ *decide* $\dot{f}(a)$ (en símbolos, $q \parallel \dot{f}(a)$) si existe $b \in B$ de tal forma que $q \Vdash$ "$\dot{f}(a) = b$".

A continuación mostraremos que, con la notación de la definición previa, siempre hay extensiones de p que deciden $\dot{f}(a)$.

Lema 3.17. *Si A, B, $\dot{f}$, p y a son como en la definición 3.16, entonces existe $q \leqslant p$ con $q \parallel \dot{f}(a)$.*

Demostración. En [6, Lemma 2.17, p.191] se explica que para cualesquiera $\dot{x}, \dot{y} \in V^{\mathbb{P}}$, existe $\mathrm{op}(\dot{x}, \dot{y}) \in V^{\mathbb{P}}$ de tal forma que si G es cualquier filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, entonces $(\mathrm{op}(\dot{x}, \dot{y}))_G = (\dot{x}_G, \dot{y}_G)$ (esto es, la pareja ordenada $(\dot{x}_G, \dot{y}_G)$).

Ahora notemos que las hipótesis $a \in A$ y $p \Vdash$ "$\dot{f} : \check{A} \to \check{B}$" nos garantizan que

$$p \Vdash \text{“}\exists x \ (x \in \check{B} \ \wedge \ \mathrm{op}(\check{a}, x) \in \dot{f})\text{”}.$$

Empleemos entonces [6, Corollary 3.7, p.201] para deducir la existencia de $\dot{y} \in dom(\check{B})$ y $q \leqslant p$ con $q \Vdash$ "$\mathrm{op}(\check{a}, \dot{y}) \in \dot{f}$". Como $\check{B}$ es el nombre canónico de B, se sigue que hay $b \in B$ de tal manera que $\dot{y} = \check{b}$. En resumen, $q \Vdash$ "$\mathrm{op}(\check{a}, \check{b}) \in \dot{f}$" o, equivalentemente, $q \Vdash$ "$\dot{f}(a) = b$". □

3.2 Un teorema de Devlin

Al igual que en la sección previa, $\mathbb{P}$ será una noción de forcing que es elemento del modelo base V.

Suponga que $C, \delta \in V$ son tales que $V \models$ "δ es un ordinal límite y C es un club en δ". Tomemos G, un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico. En vista de que la fórmula $\lim(\delta)$ es absoluta entre modelos transitivos de la teoría de conjuntos, se sigue que $V[G] \models$ "δ es un ordinal límite". Más aún, el que $V \models$ "C es no-acotado en δ" nos da $\bigcup C = \delta$ y, consecuentemente, $V[G] \models$ "C es no-acotado en δ".

Por otro lado, si $\alpha \in C$ satisface que $V[G] \models$ "$\lim(\alpha)$ y $\alpha \cap C$ es no-acotado en α", entonces $V \models$ "$\lim(\alpha)$" y $\bigcup(\alpha \cap C) = \alpha$. Luego, $V \models$ "$\lim(\alpha)$ y $\alpha \cap C$ es no-acotado en α". En consecuencia, $\alpha \in C$.

Una forma de resumir lo hecho en los párrafos previos es decir que cualquier noción de forcing preserva clubes. Ahora, esta frase puede malinterpretarse fácilmente. Por ejemplo, si $V \models$ "C es un club en ω_1", es tentador pensar que, entonces, $V[G] \models$ "C es un club en ω_1", pero como ω_1 no es una noción absoluta, esta implicación no siempre se da. Expliquemos esto con un poco más de detalle.

Convengamos en denotar por ω_1^V (ó $\aleph_1^V$) al único elemento de V que satisface $V \models$ "ω_1^V es el primer ordinal no-numerable". En el párrafo que le sigue a [6, Lemma 5.2, p.205] se exhibe una noción de forcing $\mathbb{P}$ que colapsa ω_1, esto es, que posee la propiedad de que, para cualquier filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico G, hay $f \in V[G]$ de tal modo que f es una función suprayectiva de ω en ω_1^V. De esta manera, $\omega_1^{V[G]}$, la relativización del primer ordinal no-numerable a $V[G]$, satisface la desigualdad $\omega_1^V < \omega_1^{V[G]}$ (pues $V[G] \models$ "ω_1^V es numerable").

Con las hipótesis del párrafo previo, note que la frase $V \models$ "C es un club en ω_1" significa que C es un club en el ordinal ω_1^V y como los clubes son preservados por cualquier noción de forcing, deducimos que $V[G] \models$ "C es un club en ω_1^V", pero no es cierto que $V[G] \models$ "C es un club en ω_1" porque, de hecho, C es un subconjunto acotado de $\omega_1^{V[G]}$ (claramente, para cada $\alpha \in C$, $\alpha < \omega_1^V$).

Definición 3.18. Diremos que $\mathbb{P}$ *preserva* $\aleph_1$ si para cualquier G, filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, se tiene la igualdad $\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$.

Ya nos encontramos listos para enunciar el resultado central del presente capítulo (cuya demostración es obra de K. J. Devlin):

Teorema 3.19. *Sean V, un modelo transitivo numerable de ZFE, y $E \in V \cap \mathscr{P}(\omega_1)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$V \models$ "E es estacionario en ω_1".*

2. *Existe $\mathbb{P} \in V$, una noción de forcing, de tal modo que:*

   (a) *$\mathbb{P}$ preserva a $\aleph_1$.*

(b) *Si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, existe $C \in V[G]$ tal que $V[G] \models$ "C es un club en ω_1 y $C \subseteq E$".*

Si logramos encontrar una noción de forcing como aquella enunciada en la propiedad 2 del teorema anterior, diremos "coloquialmente" que dicha noción dispara un club a través de E.

Para probar que (1) implica (2) comenzaremos por argumentar que hay nociones de forcing que preservan $\aleph_1$ y que no preservan estacionarios.

Definición 3.20. Decimos que $S \subseteq \omega_1$ es *coestacionario* si tanto S como $\omega_1 \setminus S$ son estacionarios en ω_1.

Mostraremos que dado cualquier subconjunto estacionario S de ω_1 en el modelo base, existe una noción de forcing que preserva $\aleph_1$ y que agrega genéricamente un club C en ω_1 tal que $C \subseteq S$. De esta forma, si S es coestacionario en ω_1, forzar con dicha noción provocará que $\omega_1 \setminus S$ deje de ser estacionario en ω_1.

Lema 3.21. *Si $A \subseteq \omega_1$ es no vacío, cerrado y acotado en ω_1, entonces A tiene máximo.*

Demostración. Sea $\alpha = \sup(A)$. Veamos que $\alpha \in A$. Como A es acotado en ω_1, se deduce que $\alpha < \omega_1$. Consideremos los 3 casos posibles para α.

1. $\alpha = 0$. Como A es no-vacío, esto implica que $A = \{0\}$. Por lo tanto, $\alpha \in A$.

2. α es un ordinal sucesor. Digamos que $\alpha = \beta + 1$. Como $\alpha = \bigcup A$, tendremos que hay $\xi \in A$ tal que $\beta \in \xi$, es decir, $\beta < \xi$. Esto último, junto con el hecho de que α es cota superior de A, nos da $\alpha = \beta + 1 \leqslant \xi \leqslant \alpha$, es decir, $\alpha = \xi \in A$.

3. α es límite. Si sucediese que $\alpha \notin A$, por el inciso (2) del lema 1.15, tendríamos que existe $\beta < \alpha$ con $A \cap \alpha \setminus (\beta + 1) = \emptyset$. Por otro lado, la definición de α nos da $\gamma \in A$ de tal suerte que $\beta + 1 < \gamma < \alpha$, esto es, $\gamma \in A \cap \alpha \setminus (\beta + 1)$; que es la contradicción buscada.

De todo lo anterior se deduce que $\sup(A) \in A$. Por lo tanto, $\sup(A) = \max(A)$. $\square$

A continuación definiremos la noción de forcing que nos servirá para probar que (2) es consecuencia de (1) en el teorema 3.19. Con esto en mente, fijemos, de aquí a la proposición 3.29, un conjunto estacionario S en ω_1.

Definición 3.22. Denotemos por $\mathbb{P}_S$ al conjunto de todos los subconjuntos cerrados y acotados de S. Además, para cada $p \in \mathbb{P}_S \setminus 1$ definamos $s_p := \max(p) + 1$ y $s_\emptyset := 0$. De esta forma, ordenaremos a $\mathbb{P}_S$ como sigue:

$$\text{para cualesquiera } p, q \in \mathbb{P}_S, p \leqslant q \text{ si } q = p \cap s_q.$$

Observe que si $p, q \in \mathbb{P}_S$ son tales que $p \leqslant q$, entonces $q \subseteq p$; y esto último, a su vez, implica que $s_q \leqslant s_p$ (esta desigualdad es obvia cuando $q = \emptyset$).

Proposición 3.23. $(\mathbb{P}_S, \leqslant)$ *es una noción de forcing.*

Demostración. Comencemos viendo que $\leqslant$ es reflexiva. Sea $p \in \mathbb{P}_S$. Nuestra definición de s_p nos da $p \subseteq s_p$ y, por lo tanto, $p = p \cap s_p$. Luego, $p \leqslant p$.

Probemos que $\leqslant$ es transitiva. Sean $p, q, r \in \mathbb{P}_S$ tales que $p \leqslant q$ y $q \leqslant r$. El párrafo anterior a nuestra proposición nos garantiza que $s_r \leqslant s_q$, por lo que $s_r \cap s_q = s_r$. Con esto en mente, observe que

$$r = q \cap s_r = (p \cap s_q) \cap s_r = p \cap (s_q \cap s_r) = p \cap s_r.$$

Por lo tanto, $p \leqslant r$.

Por último, tomemos $p \in \mathbb{P}_S$. Entonces $\emptyset = p \cap \emptyset = p \cap s_\emptyset$. Por lo tanto, $p \leqslant \emptyset$. Con esto, comprobamos que $\emptyset$ es el máximo de $\mathbb{P}_S$. □

Ahora definiremos una familia de subconjuntos de $\mathbb{P}_S$ y nos concentraremos en probar que estos son densos en $\mathbb{P}_S$.

Definición 3.24. Para cualquier $\alpha < \omega_1$, definimos $D_\alpha := \{p \in \mathbb{P}_S : \alpha < s_p\}$.

Lema 3.25. *Cada D_α es denso en $\mathbb{P}_S$.*

Demostración. Fijemos $\alpha < \omega_1$ y $p \in \mathbb{P}_S$. Veamos que hay $q \in D_\alpha$ tal que $q \leqslant p$. Como S es no-acotado en ω_1, hay $\xi \in S$ tal que $\alpha \leqslant \xi$ y $s_p \leqslant \xi$. Observe que $\{\xi\}$ es cerrado en ω_1. Así, $q = p \cup \{\xi\}$ es cerrado en ω_1, pues es unión finita de cerrados. Además, ξ

es cota superior de q, es decir, $q \in \mathbb{P}_S$. Más aún, como $s_p \leqslant \xi$, entonces $\xi \notin s_p$. Así, $q \cap s_p = (p \cup \{\xi\}) \cap s_p = p$. En otras palabras, $q \leqslant p$. Por otro lado, $\alpha \leqslant \xi < \xi + 1 = s_q$ y, en consecuencia, $q \in D_\alpha$. □

Una noción de forcing es ω-distributiva si el forzar con ella no añade nuevas sucesiones numerables de ordinales. En términos formales, tenemos lo siguiente.

Definición 3.26. Diremos que $\mathbb{P}$ es ω-distributiva si para cualquier $G \subseteq \mathbb{P}$, filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, y para toda $f \in V[G]$ con $V[G] \models f : \omega \to OR$ se tiene que $f \in V$.

Una de las razones por las que estamos interesados en las nociones de forcing ω-distributivas es la siguiente.

Lema 3.27. *Si $\mathbb{P}$ es ω-distributiva, entonces $\mathbb{P}$ preserva a $\aleph_1$.*

Demostración. Sea G un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico. Como V y $V[G]$ tienen los mismos ordinales (teorema 3.12), obtenemos que $\omega_1^{V[G]} \in V$. Más aún, el que $V[G] \models$ "no existe una función suprayectiva de ω en $\omega_1^{V[G]}$", nos lleva a que $V \models$ "$\omega_1^{V[G]}$ no es numerable". De esta forma, $\omega_1^V \leqslant \omega_1^{V[G]}$. Ahora, si mostramos que

$$V[G] \models \text{“}\omega_1^V \text{ no es numerable”}, \tag{3.1}$$

entonces tendríamos que, de hecho, $\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$.

La prueba de (3.1) es rutinaria: si $f \in V[G]$ es tal que $f : \omega \to \omega_1^V$, entonces $f \in V$ y, por ende, f no es suprayectiva. □

Por el resto del capítulo supondremos que $S \in V$ y que $V \models$ "S es un subconjunto estacionario de ω_1". Más aún, emplearemos los símbolos $\mathbb{P}_S$ y D_α para representar, respectivamente, a las relativizaciones a V de la noción de forcing dada en la definición 3.22 y del denso dado en la definición 3.24.

Lema 3.28. *$\mathbb{P}_S$ es ω-distributiva.*

Demostración. Iniciemos por suponer que G es un filtro $(V, \mathbb{P}_S)$-genérico y que $f \in V[G]$ es una función de ω en OR. Por el teorema 3.14, esto implica que existe $p_0 \in G$ y $\dot{f}$, un $\mathbb{P}_S$-nombre, de tal forma que $\dot{f}_G = f$ y $p_0 \Vdash$ "$\dot{f} : \omega \to OR$".

Trabajando en V, hagamos $D := \{q \in \mathbb{P}_S : \exists g(q \Vdash \text{“}g = \dot{f}\text{”})\}$. La prueba de nuestro lema concluye en cuanto probemos que D es denso por debajo de p_0 (proposición 3.9). Con esta idea en mente, fijemos $p \in \mathbb{P}_S$ con $p \leqslant p_0$. Note que $p \Vdash \text{“}\dot{f} : \omega \to OR\text{”}$.

Afirmamos que, en V, existe $\{A_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$, una sucesión de subconjuntos contables de $\mathbb{P}_S$, que cumple con las siguientes propiedades para cualquier $\alpha < \omega_1$.

1. $A_0 = \{p\}$.

2. Si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $A_\alpha \subseteq A_\beta$.

3. Para cada $q \in A_\alpha,\ q \leqslant p$.

4. Si $h(\alpha) = \sup\{s_q : q \in A_\alpha\}$, entonces para toda $q \in A_\alpha$ y para toda $n < \omega$, existe $r(q, n) \in A_{\alpha+1}$ tal que $r(q, n)$ decide $\dot{f}(n)$, $r(q, n) \leqslant q$ y $h(\alpha) < s_{r(q,n)}$.

Trabajando en V, construyamos dicha sucesión de manera recursiva. Para el caso base, definimos $A_0 = \{p\}$. Para el caso límite, hagamos $A_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$, en donde suponemos que para toda $\beta < \alpha$, A_β cumple las propiedades enunciadas anteriormente. Tenemos que A_α es unión numerable de conjuntos contables, por lo que es contable. Además, 2 y 3 se siguen de la hipótesis inductiva y la definición de A_α. Por otro lado, la condición 4 no aplica en este caso.

Analicemos, finalmente, el caso sucesor. Supongamos que $\{A_\beta\}_{\beta\leqslant\alpha}$ cumple las propiedades enunciadas y sea $h(\alpha) = \sup\{s_q : q \in A_\alpha\}$. Como A_α es contable, $h(\alpha) < \omega_1$. Para cada $q \in A_\alpha$, sabemos que $q \leqslant p$, por lo que $q \Vdash \text{“}\dot{f} : \omega \to OR\text{”}$. Dado $n \in \omega$, fijemos $t_n \leqslant q$ que decida $\dot{f}(n)$ (lema 3.17). Como $D_{h(\alpha)}$ es denso, existe $r(q, n) \in D_{h(\alpha)}$ tal que $r(q, n) \leqslant t_n \leqslant q \leqslant p$. Así, $r(q, n)$ decide $\dot{f}(n)$ y $h(\alpha) < s_{r(q,n)}$. Fijando dichas condiciones para cada $q \in A_\alpha$ y para cualquier $n < \omega$, definimos $A_{\alpha+1} := A_\alpha \cup \{r(q, n) : (q \in A_\alpha) \wedge (n \in \omega)\}$.

De esta forma, $A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1}$ y esto, junto con nuestra hipótesis inductiva, garantiza que la propiedad 2 es satisfecha. Además, como A_α es contable, $\{r(q, n) : (q \in A_\alpha) \wedge (n \in \omega)\}$ también lo es, y en consecuencia, $|A_{\alpha+1}| \leqslant \omega$. Por otro lado, 3 y 4 se siguen de la hipótesis inductiva y la elección de $r(q, n)$. Esto completa la recursión.

Ahora bien, si para todo $\alpha < \omega_1$, $h(\alpha)$ es como se definió en la condición 4, entonces $h : \omega_1 \to \omega_1$ será una función finitaria de aridad 1 sobre ω_1. Argumentemos que h es estrictamente creciente. Si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces la propiedad 2 y la desigualdad $\alpha + 1 \leqslant \beta$ nos dan $h(\alpha + 1) \leqslant h(\beta)$. Ahora, por 4 deducimos que $h(\alpha) < h(\alpha + 1) \leqslant h(\beta)$.

El lema 2.14 nos garantiza que $C = \{\lambda \in \omega_1 : \forall\alpha < \lambda(h(\alpha) < \lambda)\}$ es un club en ω_1. Más aún, del ejemplo 1.18, concluimos que $\mathrm{Lim}(\omega_1)$ es un club en ω_1. Por último, usando el teorema 2.4, tenemos que $\mathrm{Lim}(C) = C \cap \mathrm{Lim}(\omega_1)$ será un club en ω_1.

Con la idea en mente de producir una condición $q \in D$ que satisfaga $q \leqslant p$, fijemos $\lambda \in \mathrm{Lim}(C) \cap S$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$, una sucesión estrictamente creciente y cofinal en λ. Como h es estrictamente creciente y $\lambda \in C$, obtenemos (ver lema 1.7) que $\alpha_n \leqslant h(\alpha_n) < \lambda$, para cada $n \in \omega$. Luego, $\bigcup\limits_{n<\omega} h(\alpha_n) = \lambda$.

Ahora construiremos recursivamente una sucesión $\{q_n\}_{n\in\omega}$, de tal modo que lo siguiente sea cierto para cualquier $n \in \omega$.

(a) $q_0 = p$.

(b) $q_n \in A_{\alpha_n}$.

(c) q_{n+1} es una extensión de q_n que decide $\dot{f}(n)$ y además $h(\alpha_n) < s_{q_{n+1}}$.

El paso base queda expresado en (a) (observe que la pertenencia $p \in A_{\alpha_0}$ es consecuencia de la condición 2). Ahora bien, si $q_n \in A_{\alpha_n}$ ya fue construido, entonces la condición 4 nos garantiza que $q_{n+1} = r(q_n, n)$ es un elemento de A_{α_n+1} que satisface la propiedad (c). Por otro lado, la desigualdad $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ nos da $\alpha_n + 1 \leqslant \alpha_{n+1}$ y por 2, $q_{n+1} \in A_{\alpha_{n+1}}$. Así, la recursión está completa.

Hagamos $q = \{\lambda\} \cup \bigcup\limits_{n\in\omega} q_n$ y notemos que $q \subseteq S$. Estamos interesados en probar que $q \in \mathbb{P}_S$.

Empecemos por observar que la definición de h y las condiciones (b) y (c) implican que $h(\alpha_{n+1}) \geqslant s_{q_{n+1}} > h(\alpha_n)$, para cualquier $n \in \omega$. Luego, $\{s_{q_n} : n \in \omega\}$ es cofinal en λ.

Mostremos que q es cerrado en ω_1. Para esto, sea $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ tal que $\alpha \cap q$ no está acotado en α. Analicemos las posibilidades.

Primero, si $\alpha < \lambda$, entonces existe $m \in \omega$ de tal forma que $\alpha < s_{q_m}$. En aras de verificar que $\alpha \cap q_m$ no está acotado en α, tomemos $\xi < \alpha$. Sea $\beta \in \alpha \cap q$ tal que $\xi < \beta$. Hay $n \in \omega$ con $\beta \in q_n$. En el caso en que $n \leqslant m$, deducimos por la condición (c) que $q_n \subseteq q_m$ y, en particular, $\beta \in \alpha \cap q_m$. Ahora, si sucede que $m < n$, la desigualdad $q_n \leqslant q_m$ (condición (c)) nos dice que $q_n \cap s_{q_m} = q_m$, luego, $\beta \in \alpha \cap q_n \subseteq s_{q_m} \cap q_n = q_m$. En resumen, $\alpha < \lambda$ implica que $\alpha \cap q_m$ no está acotado en α; consecuentemente, $\alpha \in q_m \subseteq q$.

Por otro lado, cuando $\alpha = \lambda$, claramente $\alpha \in q$. Con esto se concluye que q es cerrado. Además, se tiene que $q_n \subseteq s_{q_n} \subseteq \lambda$ y, por ende, λ es una cota superior de q.

Como q es un subconjunto de S que es cerrado y acotado, $q \in \mathbb{P}_S$. Más aún, $q \leqslant q_n$, para cada $n \in \omega$, y por esta razón, la colección

$$g := \{(n, \alpha) : n \in \omega \wedge \alpha \in OR \wedge q \Vdash \text{“}\dot{f}(n) = \alpha\text{”}\}$$

(recuerde (c)) es una función de ω en OR. Así, $q \in D$ y $q \leqslant p$, tal y como se necesitaba.

$\square$

En particular, $\mathbb{P}_S$ preserva $\aleph_1$.

Proposición 3.29. $\mathbb{P}_S$ *agrega genéricamente un club* C *en* ω_1 *tal que* $C \subseteq S$.

Demostración. Sea G un filtro $(V, \mathbb{P}_S)$-genérico. Definimos $C := \bigcup G$. Así, $C \subseteq S$. Veremos que C es el club que buscamos.

De los lemas 3.28 y 3.27 podemos concluir que $\mathbb{P}_S$ preservará a $\aleph_1$, es decir, $\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$. Así, en esta prueba bastará hablar de ω_1, independientemente de si nos encontramos en V o $V[G]$.

Veamos que C es no-acotado en ω_1. Si $\alpha \in \omega_1$, entonces (lema 3.24) existe $p \in G \cap D_\alpha$; así, $\alpha < s_p$. Como $0 \leqslant \alpha < s_p$, se tiene que $p \neq \emptyset$ y en consecuencia, $\alpha \leqslant \max(p) \in p \subseteq C$. Por lo tanto, C es no-acotado en ω_1.

Argumentemos ahora que C es cerrado en ω_1. Para esto, supongamos que $\gamma \in \operatorname{Lim}(\omega_1)$ es tal que $C \cap \gamma$ es no-acotado en γ. Fijemos $q \in G \cap D_\gamma$ y mostremos que $C \cap \gamma \subseteq q$.

Dado $\xi \in C \cap \gamma$, nuestra definición de C nos produce $p \in G$ de tal modo que $\xi \in p$. Como G es filtro, existe $r \in G$ con $r \leqslant q$ y $r \leqslant p$. Así, $\xi \in p = r \cap s_p$; por otro lado, el que s_q sea un ordinal, junto con la desigualdad $\gamma < s_q$, nos da $\gamma \subseteq s_q$ y, en consecuencia, $\xi \in r \cap \gamma \subseteq r \cap s_q = q$.

De lo anterior se sigue que $q \cap \gamma$ es no-acotado en γ y, por ende, $\gamma \in q \in G$. En conclusión,

$\gamma \in C$, tal y como se deseaba. $\square$

Con el material desarrollado hasta el momento, podemos concluir que 1 implica 2 en el teorema 3.19. Enfoquémonos ahora en la implicación restante.

Teorema 3.30. *Sean V, un modelo transitivo numerable de ZFE y $E \in V \cap \mathscr{P}(\omega_1)$, tal que existe $\mathbb{P} \in V$, una noción de forcing que cumpla:*

(a) *$\mathbb{P}$ preserva a $\aleph_1$.*

(b) *Si G es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico, existe $C \in V[G]$ tal que $V[G] \models$ "C es un club en ω_1 y $C \subseteq E$".*

Entonces $V \models$ "E es estacionario en ω_1".

Demostración. Sean $E, \mathbb{P}$ y C como se enuncian arriba. Dado que $\mathbb{P}$ preserva a $\aleph_1$, no hará falta relativizar a ω_1 a lo largo de esta prueba (es decir, $\omega_1 := \omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$ para cualquier filtro genérico $G \subseteq \mathbb{P}$).

Sea $D \in V \cap \mathscr{P}(\omega_1)$ tal que $V \models$ "D es un club en ω_1". Sea $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico cualquiera. Lo explicado en los primeros párrafos de esta sección y el inciso (a) nos garantiza que $V[G] \models$ "D es un club en ω_1". De esta forma, $\emptyset \neq D \cap C \subseteq D \cap E$. Por lo tanto, dado que D fue un club cualquiera, concluimos que E *es estacionario en* ω_1. $\square$

Esto concluye la prueba del teorema 3.19.

3.3 Preservación de estacionarios

En la sección previa, observamos que existen nociones de forcing que no preservarán todos los estacionarios de ω_1 (en particular, aquellas que disparen un club a través de un coestacionario). Cabe preguntarnos por aquellas nociones que sí preservan a todos los estacionarios de ω_1. A continuación, desarrollamos esta idea.

Definición 3.31. Decimos que $\mathbb{P}$ es σ-cerrada si y sólo si para cualquier sucesión decreciente $\{q_n\}_{n<\omega}$ de $\mathbb{P}$, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leqslant q_n$ para toda $n < \omega$.

La propiedad que define a las nociones de forcing σ-cerradas es muy flexible, tal y como se ve en nuestro resultado de abajo.

Lema 3.32. *Suponga que $\mathbb{P}$ es σ-cerrada y que $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$. Si $\{p_\beta\}_{\beta<\alpha}$ es una sucesión en $\mathbb{P}$ que es decreciente (es decir, $p_\beta \leqslant p_\gamma$, siempre que $\gamma < \beta < \alpha$), entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que, para cada $\beta < \alpha$, $p \leqslant p_\beta$.*

Demostración. La condición $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ nos produce $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$, una sucesión de ordinales estrictamente creciente y cofinal en α. De este modo, $\{p_{\alpha_n}\}_{n<\omega}$ es una sucesión decreciente de condiciones en $\mathbb{P}$ y, por ende, hay $p \in \mathbb{P}$ con $p \leqslant p_{\alpha_n}$, para cualquier $n < \omega$. Finalmente, note que si $\beta < \alpha$, entonces existe $m < \omega$ de tal manera que $\beta < \alpha_m$ y, en consecuencia, $p \leqslant p_{\alpha_m} \leqslant p_\beta$. □

A continuación presentamos una conexión interesante entre los conceptos de ω-distributivo y σ-cerrado.

Proposición 3.33. *En V, si $\mathbb{P}$ es σ-cerrada, entonces $\mathbb{P}$ es ω-distributiva.*

Demostración. Sean $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico y $f \in V[G]$ una función de ω en OR. Así, hay $p \in G$ y $\dot{f} \in V^{\mathbb{P}}$ tales que $\dot{f}_G = f$ y $p \Vdash$ "$\dot{f} : \omega \to OR$".

Trabajando en V, mostremos que $D = \{q \in \mathbb{P} : \exists g(q \Vdash \text{“}g = \dot{f}\text{”})\}$ es denso por debajo de p (note que, en vista de la proposición 3.9, esto concluirá la prueba). Tomemos $r \leqslant p$ arbitrario. Construiremos de manera recursiva una sucesión $\{q_n\}_{n<\omega}$ de tal forma que para toda $n < \omega$ se cumple que:

1. $q_n \leqslant r$.
2. Si $n < m < \omega$, entonces $q_m \leqslant q_n$.
3. q_n decide $\dot{f}(n)$.

Usando el lema 3.17, tenemos que hay $q_0 \leqslant r$ de tal suerte que q_0 decide $\dot{f}(0)$ ($r \leqslant p$ implica $r \Vdash$ "$\dot{f} : \omega \to OR$), lo cual concluye el caso base. Suponiendo que hemos construido $\{q_k\}_{k\leqslant n}$ que cumple 1, 2 y 3, usamos nuevamente el lema 3.17 para encontrar $q_{n+1} \leqslant q_n$ que decida $\dot{f}(n+1)$. Gracias a la hipótesis inductiva y la elección de q_{n+1}, $\{q_k\}_{k\leqslant n+1}$ cumplirá 1, 2 y 3, lo cual concluye la recursión.

Usando que $\mathbb{P}$ es σ-cerrada, obtenemos $q \in \mathbb{P}$ que extiende a cada q_n. Definimos

$$g = \{(n, \alpha) : n < \omega \wedge \alpha \in OR \wedge q \Vdash \text{“}\dot{f}(n) = \alpha\text{”}\}.$$

Dado que q extiende a cada q_n, se sigue que $dom(g) = \omega$. Además, $q \Vdash$ "$g = \dot{f}$" y $q \leqslant q_0 \leqslant r$. Es decir, $q \in D$ y extiende a r, como buscábamos. $\square$

Definición 3.34. Decimos que $\mathbb{P}$ *tiene la propiedad de la cadena contable* si toda anticadena contenida en $\mathbb{P}$ es a lo más numerable.

Para simplificar, si $\mathbb{P}$ tiene la propiedad de la cadena contable, diremos que $\mathbb{P}$ es c.c.c. (del inglés countable chain condition).

La demostración del resultado siguiente puede hallarse en [3, Lema 3.30, p. 55].

Proposición 3.35. *Si $V \models$ "$\mathbb{P}$ es c.c.c", entonces $\mathbb{P}$ preserva a $\aleph_1$.*

El siguiente Lema nos será de utilidad para demostrar el teorema final de este capítulo. Omitimos su demostración dado que esta puede encontrarse en [3, Lema 3.28, p. 53]

Lema 3.36. *Sean $A, B \in V$ y sea $f \in V[G]$ una función de A en B. Entonces existe una función $F : A \to \mathscr{P}(B)$ tal que $F \in V$ y para cada $a \in A$ se tiene que $f(a) \in F(a)$ y $V \models |F(a)| \leqslant \omega$.*

Convengamos en que la frase *la noción de forcing $\mathbb{P}$ preserva estacionarios en ω_1* significa que para cualquier filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico G, y para cada $S \in V$ que satisfaga $V \models$ "S es un subconjunto estacionario de ω_1" se tiene que $V[G] \models$ "S es un subconjunto estacionario de ω_1".

Teorema 3.37. *Sea $\mathbb{P}$ una noción de forcing y sea G un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico.*

1. *Si $V \models$ "$\mathbb{P}$ es c.c.c." y $C \in V[G]$ satisface que $V[G] \models$ "C un club en ω_1", entonces existe $D \in V$ con $D \subseteq C$ y $V \models$ "D es un club en ω_1". En particular, $\mathbb{P}$ preserva estacionarios en ω_1.*

2. *Si $\mathbb{P}$ es σ-cerrado, entonces $\mathbb{P}$ preserva estacionarios en ω_1.*

Demostración. Verifiquemos el primer inciso. En $V[G]$, empleemos el hecho de que C es no-acotado para fijar una función $f : \omega_1 \to \omega_1$ de tal modo que $\alpha < f(\alpha) \in C$, siempre que $\alpha < \omega_1$. Entonces, tenemos lo siguiente: $V \models$ "$\mathbb{P}$ es c.c.c.", $f \in V[G]$ y $\omega_1 \in V$; luego, de acuerdo al lema 3.36, debe existir $F \in V$ de tal forma que $F : \omega_1 \to \mathscr{P}(\omega_1)$ y, para cada $\alpha < \omega_1$, $f(\alpha) \in F(\alpha)$ y $V \models$ "$|F(\alpha)| \leqslant \omega$".

En V, definamos $g : \omega_1 \to \omega_1$ mediante $g(\alpha) = \sup F(\alpha)$, para cualquier $\alpha < \omega_1$. Note que

$$\text{la desigualdad } f(\alpha) \leqslant g(\alpha) \text{ es cierta para cada } \alpha < \omega_1. \tag{3.2}$$

Ahora, produzcamos recursivamente una sucesión de funciones de ω_1 en ω_1 como sigue: $g^0 := g$ y $g^{n+1} = g \circ g^n$, para cualquier $n < \omega$. Así, dado $\alpha < \omega_1$, se tiene que la fórmula $g^\omega(\alpha) := \sup\{g^n(\alpha) : n < \omega\}$ nos da una función $g^\omega : \omega_1 \to \omega_1$ en V. Luego, $X := \{g^\omega(\xi) : \xi < \omega_1\}$ es un elemento de V.

Afirmamos que $X \subseteq C$ y que X no es no-acotado en ω_1. Empecemos mostrando la contención. Sea $\alpha \in X$. Por definición, hay $\xi < \omega_1$ con $\alpha = g^\omega(\xi)$. Nuestra elección de f y (3.2) implican que, para cada $n < \omega$,

$$g^n(\xi) < f(g^n(\xi)) \leqslant g(g^n(\xi)) = g^{n+1}(\xi).$$

De esto se deduce que α es límite y que $\alpha = \sup\{f(g^n(\xi)) : n < \omega\}$; más aún, la inclusión $\{f(g^n(\xi)) : n < \omega\} \subseteq C \cap \alpha$ nos garantiza que $C \cap \alpha$ es no-acotado en α. Así, $\alpha \in C$, tal y como se quería.

Con la idea en mente de argumentar que X es no-acotado en ω_1, tomemos $\alpha < \omega_1$, arbitrario, y observemos que

$$\alpha < f(\alpha) \leqslant g(\alpha) \leqslant g^\omega(\alpha) \in X.$$

Finalmente, en V, denotemos por D a la cerradura topológica de X en ω_1. Naturalmente, $V \models$ "D es un club en ω_1". Sólo nos resta mostrar que $D \subseteq C$ y para esto, sea $\alpha \in D \setminus X$. Si α fuese sucesor, podríamos usar la proposición 1.15 para deducir que $\{\alpha\}$ es un abierto que contiene a α y es ajeno con X, es decir, α no sería elemento de la cerradura topológica de X. Consecuentemente, α es límite. Ahora, si $\alpha \cap X$ fuese acotado en α, habría $\beta < \alpha$ con $\alpha \cap X \subseteq \beta + 1 < \alpha$. De esta forma, $(\alpha + 1) \setminus (\beta + 1)$ sería un abierto en ω_1 (proposición

1.15) que contiene a α y es ajeno con X; lo cual es un absurdo. Así, $\alpha \cap X$ es no-acotado en α y como $\alpha \cap X \subseteq \alpha \cap C$, deducimos que $\alpha \in C$.

Con respecto a la segunda parte del teorema, fije $S \in V$ tal que $V \models$ "S es un subconjunto estacionario de ω_1". Sean $r \in G$ y $\dot{C} \in V^{\mathbb{P}}$ tales que $r \Vdash$ "$\dot{C}$ es un club en ω_1". Mostremos que $\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash \text{“}\check{S} \cap \dot{C} \neq \emptyset\text{”}\}$ es denso bajo r. En otras palabras, fijando $p \leqslant r$, concluiremos la prueba al mostrar que existe $q \leqslant p$ tal que $q \Vdash$ "$\check{S} \cap \dot{C} \neq \emptyset$".

Trabajando en V, construyamos recursivamente una sucesión $\{(p_\alpha, \gamma_\alpha)\}_{\alpha<\omega_1} \subseteq \mathbb{P} \times \omega_1$ que cumpla las siguientes propiedades para cualquier $\alpha < \omega_1$.

1. $p_\alpha \leqslant p$.

2. Si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $\gamma_\alpha < \gamma_\beta$ y $p_\beta \leqslant p_\alpha$.

3. Si α es límite, entonces $\gamma_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \gamma_\beta$.

4. $p_\alpha \Vdash$ "$\check{\gamma}_\alpha \in \dot{C}$".

Como $p \Vdash$ "$\dot{C}$ es no-acotado en ω_1", podemos encontrar $p_0 \leqslant p$ y $\gamma_0 \in \omega_1 \setminus 1$, tales que $p_0 \Vdash$ "$\check{\gamma}_0 \in \dot{C}$". Para el caso sucesor, supongamos que hemos definido $\{(p_\beta, \gamma_\beta)\}_{\beta\leqslant\alpha}$, para algún $\alpha < \omega_1$, que satisfaga las propiedades enunciadas. Así, como $p_\alpha \leqslant p$, se tiene que $p_\alpha \Vdash$ "$\dot{C}$ es no-acotado en ω_1". Por lo tanto, $p_\alpha \Vdash$ "$\exists\, x\ (x \in \check{\omega}_1 \wedge\ x \in \dot{C}\ \wedge\ \check{\gamma}_\alpha < x)$". Empleemos [6, Corollary 3.7, p. 201] para obtener $\dot{\gamma} \in dom(\check{\omega}_1)$ y $p_{\alpha+1} \leqslant p_\alpha$ tales que $p_{\alpha+1} \Vdash$ "$\dot{\gamma} \in \dot{C}\ \wedge\ \check{\gamma}_\alpha < \dot{\gamma}$". Como $\check{\omega}_1$ es un $\mathbb{P}$-nombre canónico, existe $\gamma_{\alpha+1} < \omega_1$ con $\dot{\gamma} = \check{\gamma}_{\alpha+1}$. De esta forma, $p_{\alpha+1} \Vdash$ "$\check{\gamma}_{\alpha+1} \in \dot{C}\ \wedge\ \check{\gamma}_\alpha < \check{\gamma}_{\alpha+1}$".

Por último, sea $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ y supongamos que hemos definido $\{(p_\beta, \gamma_\beta)\}_{\beta<\alpha}$, que satisface las propiedades enunciadas. Como $\mathbb{P}$ es σ-cerrada y $\{p_\beta\}_{\beta<\alpha}$ es decreciente, el lema 3.32 nos da una condición $p_\alpha \in \mathbb{P}$ tal que $p_\alpha \leqslant p_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Sea además $\gamma_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \gamma_\beta$. De esta forma, $p_\alpha \Vdash$ "$\{\check{\gamma}_\beta\}_{\beta<\alpha} \subseteq \dot{C}$". Además, como $p_\alpha \leqslant p$, se tiene que $p_\alpha \Vdash$ "$\dot{C}$ es cerrado en ω_1". Con lo cual, $p_\alpha \Vdash$ "$\check{\gamma}_\alpha \in \dot{C}$". Así, $\{(p_\beta, \gamma_\beta)\}_{\beta\leqslant\alpha}$ satisface 1 a 4. Lo cual concluye nuestra recursión.

Sea $D = \{\gamma_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. La propiedad 3 garantiza que D es cerrado en ω_1. La propiedad 2, en conjunción con el lema 1.7, garantiza que D es no-acotado en ω_1. Por lo tanto (note que $D \in V$), $S \cap D \neq \emptyset$. Sea $\xi < \omega_1$ tal que $\gamma_\xi \in S \cap D$. Gracias a 4, concluimos que

$p_\xi \Vdash$ "$\check{\gamma}_\xi \in \check{S} \cap \dot{C}$". Por último, 1 nos asegura que $p_\xi \leqslant p$, como necesitábamos.

$\square$

Capítulo 4: Nociones de forcing propias

En el capítulo anterior observamos que existen algunas nociones de forcing que preservan estacionarios (en el sentido de la última sección del capítulo 1). A continuación, ampliaremos este concepto para considerar aquellas nociones que preservan estacionarios en el sentido desarrollado en el capítulo 2. A una noción de forcing que cumple con esta propiedad se le llama *propia* (el término en inglés es *proper*). Nos damos a la tarea de mostrar algunos ejemplos, a la vez que enunciar una serie de equivalencias que nos serán de utilidad.

4.1 Primer ejemplo de un forcing propio

A lo largo de esta sección, consideremos un modelo transitivo numerable V de ZFE, $\mathbb{P}_0 \in V$ una noción de forcing cualquiera tal que ($\mathbb{P}_0$ tiene la condición de la cadena contable)^V y $G \subseteq \mathbb{P}_0$ un filtro $(V, \mathbb{P}_0)$-genérico.

En [6, Theorem 5.10, p. 207] se prueba que $\mathbb{P}_0$ *preserva cardinales*, esto es, que para cualquier ordinal μ los enunciados siguientes son equivalentes.

1. $\mu \in V$ y $V \models$ "μ es un cardinal".

2. $\mu \in V[G]$ y $V[G] \models$ "μ es un cardinal".

En vista de esto, dados $\lambda, S \in V$ con $V \models$ "λ es un cardinal con $\lambda \geqslant \omega_1$ y S es un estacionario en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$", se sigue que $V[G] \models$ "λ es un cardinal y $\lambda \geqslant \omega_1$" (note que $\omega_1^V = \omega_1^{V[G]}$). Luego, tiene sentido preguntarse si $V[G] \models$ "S es un estacionario en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$" (es importante recordar que, en general, $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)^V \subseteq \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)^{V[G]}$ y esta contención podría ser propia). Por otro lado, tenemos

$$\mathscr{P}_{\omega}(\lambda) = \mathscr{P}_{\omega}(\lambda)^V = \mathscr{P}_{\omega}(\lambda)^{V[G]}.$$

Este hecho se empleará en el siguiente resultado.

Lema 4.1. *Sea $\lambda \in V$ de tal modo que $V \models$ "λ es un cardinal con $\lambda \geqslant \omega_1$". Entonces, todo $C \in V[G]$ tal que $V[G] \models$ "C es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$", existe $D \in V$ tal que $V \models$ "D es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$" y $D \subseteq C$.*

Demostración. Sean λ y C como en el enunciado. Por el Teorema de Kueker (teorema 2.26), existe $F \in V[G]$ de tal modo que $F : \mathscr{P}_{\omega}(\lambda) \to \lambda$ y, si

$$C_F := (\{x \in \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda) : \forall\, e \in \mathscr{P}_{\omega}(x)\ (F(e) \in x)\})^{V[G]},$$

entonces $C_F \subseteq C$ y $V[G] \models$ "C_F es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$". En vista de que $\mathscr{P}_{\omega}(\lambda), \lambda \in V$, podemos invocar el lema 3.36 para producir $f \in V$ con $f : \mathscr{P}_{\omega}(\lambda) \to \mathscr{P}(\lambda)$, de tal suerte que, para cualquier $e \in \mathscr{P}_{\omega}(\lambda)$, $F(e) \in f(e)$ y $V \models$ "$|f(e)| \leqslant \omega$". Así, $V \models$ "$f : \mathscr{P}_{\omega}(\lambda) \to \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$". Por la proposición 2.18, el hacer

$$D := (\{x \in \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda) : \forall\, e \in \mathscr{P}_{\omega}(x)\ (f(e) \subseteq x)\})^{V}$$

nos da $V \models$ "D es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$".

De esta forma, únicamente nos resta comprobar que $D \subseteq C_F$. Sea $x \in D$. Claramente, $x \in (\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda))^{V[G]}$. Ahora, si $e \in \mathscr{P}_{\omega}(x)$, la definición de D implica que $f(e) \subseteq x$ y nuestra elección de f garantiza que $F(e) \in f(e)$; luego, $F(e) \in x$. En otras palabras, $x \in C_F$. □

Este resultado tiene como corolario directo que, en el caso de nuestro $\mathbb{P}_0$, la respuesta a la pregunta que hicimos al principio de la sección es afirmativa. Antes de argumentar lo anterior, nos conviene formalizar el concepto de noción de forcing propia.

Definición 4.2. Una noción de forcing $\mathbb{P} \in V$ será llamada *propia* si para cualesquiera G, λ y S que satisfagan

1. G es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico,

2. $\lambda, S \in V$ y

3. $V \models$ "λ es un cardinal no numerable y S es un subconjunto estacionario de $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$",

se tiene que $V[G] \models$ "S es un subconjunto estacionario de $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$".

Mostremos que, en la definición de forcing propio, podemos reemplazar λ por un conjunto no numerable cualquiera. Formalmente, tenemos lo siguiente.

Proposición 4.3. *Si $\mathbb{P} \in V$ es una noción de forcing, entonces los enunciados siguientes son equivalentes.*

1. *$\mathbb{P}$ es propia.*

2. *Para cualesquiera G, A y S que satisfagan*

   (a) G es un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico,

   (b) $A, S \in V$ y

   (c) $V \models$ "A es un conjunto no numerable y S es un subconjunto estacionario de $\mathscr{P}_{\omega_1}(A)$",

   se tiene que $V[G] \models$ "S es un subconjunto estacionario de $\mathscr{P}_{\omega_1}(A)$"

Demostración. Claramente, (2) implica (1). Ahora supongamos que (1) es cierta y que G, A y S son como dicen las hipótesis del inciso (2). Trabajando en V, hagamos $\lambda := |A|$ y fijemos una función biyectiva $f : A \to \lambda$.

En $V[G]$ se tiene lo siguiente: f es una función biyectiva de A en λ y, de acuerdo a la prueba de la proposición 2.2, $F : \mathscr{P}_{\omega_1}(A) \to \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$ dada por $F(x) = f[x]$ es un isomorfismo de orden entre $(\mathscr{P}_{\omega_1}(A), \subseteq)$ y $(\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda), \subseteq)$.

Por otro lado, la pertenencia $f \in V$ nos garantiza que la restricción $H := F \restriction (\mathscr{P}_{\omega_1}(A))^V$ es un elemento de V. Más aún, para cualquier $x \in (\mathscr{P}_{\omega_1}(A))^V$ se tiene que $H(x) = f[x]$; en consecuencia, $V \models$ "$E := H[S]$ es un subconjunto estacionario de $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$".

El que $\mathbb{P}$ sea propia nos garantiza que, en $V[G]$, E es un subconjunto estacionario de $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$; luego, $S = F^{-1}[E]$ resulta ser estacionario en $\mathscr{P}_{\omega_1}(A)$, tal y como se requería. $\square$

Corolario 4.4. *Si $V \models$ "$\mathbb{P}$ es una noción de forcing c.c.c.", entonces $\mathbb{P}$ es propia.*

Demostración. Suponga que G, λ y S son como en los incisos (1)-(3) de la definición 4.2 y fije $C \in V[G]$ de tal modo que $V[G] \models$ "C es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$".

Usando el lema 4.1, obtenemos $D \in V$ tal que $D \subseteq C$ y (D es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda))^V$. Así, $\emptyset \neq D \cap S \subseteq C \cap S$. Como esto se cumple para cualquier club C, concluimos que S es estacionario en $V[G]$. $\square$

4.2 Algunas propiedades de las nociones de forcing propias

Proposición 4.5. *Sea $\mathbb{P} \in V$ una noción de forcing propia y sea G un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico. Si $x \in V[G]$ satisface $x \subseteq OR$ y $V[G] \models$ "$|x| \leqslant \omega$", entonces existe $y \in V$ con $x \subseteq y \subseteq OR$ y $V \models$ "$|y| \leqslant \omega$".*

Demostración. En $V[G]$, la hipótesis $|x| \leqslant \omega$ nos da un ordinal $\delta \geqslant \omega_1$ de tal modo que $x \subseteq \delta$; en particular, $\delta \in V$.

Ahora, en V, existe un cardinal $\lambda \geqslant \delta$ y, como δ no es numerable, deducimos que $\lambda \geqslant \omega_1$. Hagamos $S := (\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda))^V$ y empleemos que $\mathbb{P}$ es propio para obtener $V[G] \models$ "S es un subconjunto estacionario de $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$".

Regresando a $V[G]$, un argumento rutinario muestra que la colección

$$C := \{a \in \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda) : x \subseteq a\}$$

es un club en $\mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda)$, así que existe $y \in C \cap S$. Nuestra definición de S implica que: $y \in V$, $y \subseteq \lambda \subseteq OR$ y $V \models$ "$|y| \leqslant \omega$". Por otro lado, la pertenencia $y \in C$ nos da $x \subseteq y$, tal y como se necesitaba. $\square$

Corolario 4.6. *Toda noción de forcing propia preserva a $\aleph_1$.*

Demostración. Mostraremos la contrapuesta de nuestro enunciado. Sea $\mathbb{P} \in V$ una noción de forcing que no preserva $\aleph_1$, esto es, existe G, un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico de tal modo que $V[G] \models$ "$|\omega_1^V| \leqslant \omega$". Luego, $x := \omega_1^V$ es un conjunto que satisface todas las hipótesis de la proposición 4.5, pero, por definición de ω_1^V, no existe $y \in V$ con $x \subseteq y$ y $V \models$ "$|y| \leqslant \omega$". En resumen, $\mathbb{P}$ no es propia. $\square$

Suponga que $\mathbb{P} \in V$ es una noción de forcing. El resto de la sección está dedicado a presentar una equivalencia lógica del enunciado $\mathbb{P}$ *es propio*. Ésta se relaciona con un juego infinito. De forma específica, dado $p \in \mathbb{P}$, definimos el *juego propio numerable para* $\mathbb{P}$ *bajo* p (en símbolos, $\Game(\mathbb{P}, p)$) como sigue.

En primer término, habrá dos jugadores, I y II, que alternarán turnos (I será el primero en tirar). $\Game(\mathbb{P}, p)$ finalizará después de ω turnos y no habrá empates: I ganará siempre que II no lo haga. Ahora, las reglas son: para cada $n < \omega$, en su n-ésimo turno

(R1) I produce $\dot{\alpha}_n \in V^{\mathbb{P}}$ con $p \Vdash$ "$\dot{\alpha}_n$ es un ordinal" y

(R2) II contesta con $B_n \in V$ de tal manera que $B_n \subseteq OR$ y $V \models$ "$|B_n| \leqslant \omega$".

Al final, II gana si existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $q \leqslant p$ y

$$q \Vdash \text{“}\forall\, n < \omega\ \exists\, k < \omega\ (\dot{\alpha}_n \in \check{B}_k)\text{”}.$$

Intuitivamente, el propósito de II en nuestro juego es *adivinar* los ordinales que I va nombrando en cada una de sus tiradas.

Precisamos de un par de conceptos más antes de establecer la equivalencia anunciada. Primeramente, una *estrategia para II en* $\Game(\mathbb{P}, p)$ es una función σ que satisface las propiedades enunciadas abajo.

1. Si $\dot{\alpha}_0$ fue seleccionado de acuerdo a (R1), entonces $B_0 := \sigma(\dot{\alpha}_0)$ satisfará (R2).

2. Dado $n < \omega$, si en el $(n+1)$-ésimo turno de I, éste ya ha seleccionado $\dot{\alpha}_0, \ldots, \dot{\alpha}_{n+1}$ en concordancia con (R1) y II ha tirado $B_0, \ldots, B_n$ como lo dicta (R2), entonces el hacer
$$B_{n+1} := \sigma(\dot{\alpha}_0, B_0, \ldots, \dot{\alpha}_n, B_n, \dot{\alpha}_{n+1})$$
nos dará una tirada válida para II.

Así, diremos que la estrategia σ es *ganadora* si el usarla en todas y cada una de las tiradas de II produce siempre una partida que I pierde.

Teorema 4.7. *Para cualquier noción de forcing* $\mathbb{P} \in V$*, los enunciados siguientes son equivalentes.*

1. $\mathbb{P}$ *es propia.*

2. Si $p \in \mathbb{P}$, entonces hay una estrategia ganadora para II en $\Game(\mathbb{P}, p)$.

La única prueba que conocemos de este resultado involucra el empleo de submodelos elementales (ver, por ejemplo, [5, Exercise 31.2, p. 613]). Como consideramos que dicho material excede los alcances que nos hemos propuesto para el presente trabajo, no la incluiremos, pero sí exhibiremos algunas aplicaciones del teorema en la siguiente sección.

4.3 Axioma A

Iniciemos la sección con el concepto central.

Definición 4.8. Sea $(\mathbb{P}, \leqslant)$ una noción de forcing. Decimos que $\mathbb{P}$ *satisface el Axioma A* si existe una colección $\{\leqslant_n\}_{n<\omega}$ de órdenes parciales de $\mathbb{P}$ tales que para todo $n < \omega$ y para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$ se cumple lo siguiente.

1. $\leqslant_0$ es el orden original de $\mathbb{P}$.

2. $p \leqslant_{n+1} q$ implica que $p \leqslant_n q$.

3. Si $\langle p_k : k < \omega \rangle$ es una sucesión tal que $p_0 \geqslant_0 p_1 \geqslant_1 p_2 \geqslant_2 \ldots \geqslant_i p_{i+1} \geqslant_{i+1} \ldots$, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ tal que para toda $k \in \omega$, $r \leqslant_k p_k$.

4. Para cualquier $\mathbb{P}$-nombre $\dot{\alpha}$, si $p \Vdash$ "$\dot{\alpha}$ es un ordinal" y $k < \omega$, entonces existen $r \leqslant_k p$ y un conjunto contable de ordinales B tal que $r \Vdash$ "$\dot{\alpha} \in B$".

En la prueba de que toda noción de forcing que satisface el Axioma A es propia se usará el siguiente resultado.

Lema 4.9. *Sean $(\mathbb{P}, \leqslant)$ una noción de forcing y $\{\leqslant_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de órdenes parciales en $\mathbb{P}$ tales que para todo $n < \omega$ y para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$ se cumple que:*

1. $\leqslant_0$ es el orden original de $\mathbb{P}$ y

2. $p \leqslant_{n+1} q$ implica que $p \leqslant_n q$.

Entonces, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$ y cualquier $n \in \omega$, se cumple que $p \leqslant_n q$ implica que $p \leqslant q$.

Demostración. La haremos por inducción. El caso $k = 0$ es trivial dado que $\leqslant_0 = \leqslant$. Supongamos que $p \leqslant_k q$ implica que $p \leqslant q$ para algún $k \in \omega$. Si $p \leqslant_{k+1} q$, entonces por la propiedad 2 de $\{\leqslant_n\}_{n<\omega}$ tenemos que $p \leqslant_k q$. La hipótesis inductiva nos devuelve que $p \leqslant q$. □

Teorema 4.10. *Sea $\mathbb{P} \in V$ una noción de forcing. Si $V \models$ "$\mathbb{P}$ satisface el Axioma A", entonces $\mathbb{P}$ es propia.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}$ y fijemos $\{\leqslant_n\}_{n<\omega}$ como se enuncia en la definción 4.8. Bastará encontrar una estrategia ganadora del juego $\partial(\mathbb{P}, p)$ para el jugador II (teorema 4.7).

En aras de producir nuestra estrategia, supongamos que I tiró, en su 0-ésimo turno, $\dot{\alpha}_0 \in V^{\mathbb{P}}$ y empleemos la propiedad 4 de la definición 4.8 (relativizada a V) para hallar $p_0 \in \mathbb{P}$ y $B_0 \in V$ con $p_0 \leqslant_0 p$, $V \models$ "B_0 es una colección numerable de ordinales" y $p_0 \Vdash$ "$\dot{\alpha} \in B_0$". Ahora fijemos $n < \omega$ y supongamos que lo siguiente es cierto para cualquier $k \leqslant n$.

(a) En su $(k + 1)$-ésimo turno, I elegió $\dot{\alpha}_k$.

(b) Similarmente, la k-ésima tirada de II fue B_k.

(c) Existe $p_k \in \mathbb{P}$ con $p_k \Vdash$ "$\dot{\alpha}_k \in B_k$".

(d) Cuando $k + 1 < n$, se sigue que $p_{k+1} \leqslant_k p_k$.

Con estos antecendetes, en el $(n+1)$-ésimo turno de II, apliquemos el inciso 4 de la definición 4.8 a p_n, $\dot{\alpha}_{n+1}$ y $n + 1$ para producir $p_{n+1} \in \mathbb{P}$ y $B_{n+1} \in V$ con $p_{n+1} \leqslant_{n+1} p_n$, $V \models$ "B_{n+1} es un conjunto numerable de ordinales" y $p_{n+1} \Vdash$ "$\dot{\alpha}_{n+1} \in B_{n+1}$". En particular, B_{n+1} es una tirada válida para II.

Sólo nos resta confirmar que si II responde, en el turno correspondiente, con cada B_n, entonces gana la partida de $\partial(\mathbb{P}, p)$ en cuestión.

De acuerdo a la propiedad 3 de la definición 4.8, podemos tomar $q \in \mathbb{P}$ de tal manera que $q \leqslant_k p_k$, siempre que $k < \omega$. Fijemos $n < \omega$. Por el lema 4.9, $q \leqslant p_n$ y así, por la condición (c) de arriba, $q \Vdash$ "$\dot{\alpha}_n \in B_n$". Con lo cual se comprueba que nuestra estrategia es ganadora. □

Con el objetivo de preparar el camino para mostrar que las nociones de forcing σ-cerradas satisfacen el Axioma A, incluimos el resultado de abajo.

Lema 4.11. *Sea $\mathbb{P} \in V$ una noción de forcing. Si $p \in \mathbb{P}$ y $\dot{\alpha} \in V^{\mathbb{P}}$ satisfacen $p \Vdash$ "$\dot{\alpha}$ es un número ordinal", entonces existen $q \in \mathbb{P}$ y un ordinal $\beta \in V$ con $q \Vdash$ "$\dot{\alpha} = \check{\beta}$".*

Demostración. En V, definamos $D := \{q \in \mathbb{P} : \exists \xi \ (q \Vdash \text{"}\check{\xi} = \dot{\alpha}\text{"})\}$. Únicamente debemos verificar que D es denso bajo p.

Fijemos $r \in \mathbb{P}$ y G de tal modo que $r \leqslant p$ y G sea un filtro $(V, \mathbb{P})$-genérico con $r \in G$. Entonces, $p \in G$ y, por ende, $\xi := \dot{\alpha}_G$ es un ordinal. Luego, $\xi \in V$ y, naturalmente, $\check{\xi}_G = \dot{\alpha}_G$. Así, por el inciso 2 del teorema 3.14, para algún $r' \in G$, $r' \Vdash$ "$\check{\xi} = \dot{\alpha}$". Tomemos $q \in G$ con $q \leqslant r'$ y $q \leqslant r$ para concluir que $q \in D$ y $q \leqslant r$. □

Ejemplo 4.12. *Si $\mathbb{P} \in V$ es una noción de forcing con $V \models$ "$\mathbb{P}$ es σ-cerrada", entonces $\mathbb{P}$ satisface el Axioma A.*

Demostración. Para todo $n \in \omega$, definamos $\leqslant_n$ como el orden original de $\mathbb{P}$. Mostraremos las 4 condiciones enunciadas en la definición 4.8. Los incisos 1 y 2 se cumplirán trivialmente dada la elección de $\{\leqslant_n\}_{n \in \omega}$.

Ahora bien, cualquier sucesión $\{p_n\}_{n<\omega}$ que cumpla $p_0 \geqslant_0 p_1 \geqslant_1 p_2 \geqslant_2 \ldots \geqslant_k p_{k+1}$ para toda $k \in \omega$, será en realidad una sucesión decreciente en $\mathbb{P}$. Como $\mathbb{P}$ es σ-cerrada, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que para toda $k < \omega$ se tiene que $q \leqslant p_k$, equivalentemente $q \leqslant_k p_k$. Esto muestra que la propiedad 3 se satisface.

Por último, mostremos el inciso 4. Sean $p \in \mathbb{P}$ y $\dot{\alpha} \in V^{\mathbb{P}}$ con $p \Vdash$ "$\dot{\alpha}$ es un número ordinal". El lema que precede a nuestro ejemplo nos da $q \leqslant p$ y un ordinal $\beta \in V$ de tal forma que $q \Vdash$ "$\dot{\alpha} = \check{\beta}$". Dado $k < \omega$, el conjunto $B := \{\beta\}$ es numerable, es elemento de V y satisface $q \Vdash$ "$\dot{\alpha} \in \check{B}$"; además, es claro que $q \leqslant_k p$. □

Ejemplo 4.13. *Si $\mathbb{P} \in V$ y $V \models$ "$\mathbb{P}$ es c.c.c.", entonces $\mathbb{P}$ satisface el Axioma A.*

Demostración. Para cualquier $n > 0$, definamos $\leqslant_n = \{(p, p) : p \in \mathbb{P}\}$. Además, sea $\leqslant_0$ el orden parcial original de $\mathbb{P}$. Mostremos las 4 condiciones de la definición 4.8. La elección de $\leqslant_0$ concuerda con la condición 1. Si $n \in \omega$ y $p, q \in \mathbb{P}$, tendremos que $p \leqslant_{n+1} q$ implica que $p = q$ y con esto, $p \leqslant_n q$. Esto prueba la condición 2.

Motremos la condición 3. Sea $\{p_k\}_{k<\omega}$ una sucesión en $\mathbb{P}$ de tal suerte que $p_0 \geqslant_0 p_1 \geqslant_1 p_2 \geqslant_2 ... \geqslant_n p_{n+1}$ para cualquier $n \in \omega$. Para todo $n \in \omega \setminus 1$ se cumple que $p_n = p_{n+1}$. Por lo tanto, $p_1 = p_n$. Así, $p_1 \leqslant_n p_n$ para todo $n < \omega$.

Finalmente, mostremos 4: sean $p \in \mathbb{P}$ y $\dot{\alpha} \in V^{\mathbb{P}}$ tales que $p \Vdash$ "$\dot{\alpha}$ es un ordinal".

En V, hagamos $D := \{q \in \mathbb{P} : \exists \beta \; (q \Vdash \text{"}\dot{\alpha} = \check{\beta}\text{"}\}$ y notemos que el lema 4.11 implica que D es denso bajo p. Ahora elijamos (ver definición 3.3) A, una anticadena maximal en D. Nuestra hipótesis sobre $\mathbb{P}$ implica que A es numerable, así que podemos enumerarla, posiblemente con repeticiones, como $A = \{q_n : n < \omega\}$. Dado $n < \omega$, sea β_n un ordinal con $q_n \Vdash$ "$\dot{\alpha} = \check{\beta}_n$". Definamos, entonces, $B := \{\beta_n : n < \omega\}$. Si logramos demostrar que

$$\{q \in \mathbb{P} : q \Vdash \text{"}\dot{\alpha} \in \check{B}\text{"}\} \text{ es denso bajo } p, \tag{4.1}$$

entonces obtendríamos que $p \Vdash$ "$\dot{\alpha} \in \check{B}$" y, dada nuestra definición de $\{\leqslant_n\}_{n<\omega}$, con esto concluiríamos la prueba del ejemplo.

Mostremos, pues, que el enunciado (4.1) es cierto: si $r \leqslant p$, la proposición 3.4, nos da $n < \omega$ con $q_n \mid r$ y, en consecuencia, hay una condición q que satisface $q \leqslant q_n$ y $q \leqslant r$. Luego, $q \Vdash$ "$\dot{\alpha} = \check{\beta}_n \in \check{B}$" y $q \leqslant r$, tal y como se necesitaba. $\square$

Observe que el ejemplo previo nos da un prueba alterna del corolario 4.4.

Capítulo 5: Dos teoremas de Silver

El propósito de este capítulo será mostrar dos teoremas de Silver, utilizando en dichas pruebas los conceptos de club y estacionario. Esperamos con esto, proveer una pequeña muestra de las aplicaciones y capacidades que tienen dichos conceptos. Consideremos κ un cardinal singular de cofinalidad más que numerable por el resto de este capítulo.

A continuación, enunciamos las definiciones alrededor de las cuales se centran los teoremas antes mencionados.

Definición 5.1. Llamaremos *Hipótesis Generalizada del Continuo* (denotada *GCH* por sus siglas en inglés) al siguiente enunciado:

$$\text{Para todo cardinal infinito } \alpha, \text{ se cumple que } 2^\alpha = \alpha^+.$$

El primer teorema de Silver que mostraremos, nos dice que el primer cardinal en el que "falle" la hipótesis generalizada del continuo, no puede ser un cardinal singular de cofinalidad más que numerable.

Teorema 5.2 (Silver)**.** *Si $2^\alpha = \alpha^+$ para todos los cardinales $\alpha < \kappa$, entonces $2^\kappa = \kappa^+$.*

La demostración de dicho resultado se llevará a cabo en la penúltima sección del presente capítulo.

Definición 5.3. Llamaremos *Hipótesis del Cardinal Singular* (abreviada *SCH* por sus siglas en inglés) al siguiente enunciado:

$$\text{Para cualquier cardinal singular infinito } \lambda, \text{ si } 2^{\mathrm{cf}(\lambda)} < \lambda, \text{ entonces } \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^+.$$

Suponga que λ es un cardinal infinito. Entonces las desigualdades $2 < \lambda < 2^\lambda$ implican que

$$2^\lambda \leqslant \lambda^\lambda \leqslant \left(2^\lambda\right)^\lambda = 2^\lambda,$$

es decir, $\lambda^\lambda = 2^\lambda$. Por otro lado, el corolario 1.12 nos da $\lambda^+ \leqslant \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$ y, en consecuencia,

$$\lambda^+ \leqslant \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} \leqslant \lambda^\lambda = 2^\lambda.$$

De este modo, SCH es consecuencia de GCH.

Más aún, un segundo teorema de Silver, que enunciamos a continuación, asegura que para corroborar la validez de la Hipótesis del Cardinal Singular, es suficiente mostrar que todo cardinal singular de cofinalidad numerable λ cumple la propiedad enunciada en la definición 5.1.

Teorema 5.4 (Silver)**.** *Si la hipótesis del cardinal singular se sigue para todos los cardinales singulares de cofinalidad ω, entonces se sigue para todos los cardinales singulares.*

La demostración del teorema recien enunciado será desarrollada en la sección final del presente capítulo.

5.1 Preliminares

Ahora, mostraremos una serie de lemas, el último de los cuales nos proveerá con la herramienta necesaria para probar nuestros teoremas.

Lema 5.5. *Existe $h : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *$h(0) = \omega$.*
2. *$h(\alpha)$ es un cardinal para todo $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$.*
3. *h es normal (ver definición 1.10).*
4. *h es cofinal en κ.*

Demostración. Usando el teorema 1.9, obtenemos $g : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$, una sucesión estrictamente creciente y cofinal en κ. Definiremos recursivamente $h : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$, una sucesión que cumpla 1, 2 y 3 y tal que para cualquier $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ se satisfaga que:

$$g(\alpha + 1) \leqslant h(\alpha + 1). \qquad (*)$$

Sea $h(0) = \omega$. Supongamos que, para algún $\beta < \mathrm{cf}(\kappa)$, hemos definido $h(\alpha)$ para todo $\alpha \leqslant \beta$, de tal suerte que $h_{\restriction \beta+1}$ sea una sucesión normal de cardinales en κ y cumpla la propiedad $(*)$ para todos los elementos de β. Hagamos $h(\beta{+}1) = \max\{|h(\beta)|^+, |g(\beta{+}1)|^+\}$. Como κ es un cardinal singular e infinito, tanto $|h(\beta)|^+$ como $|g(\beta{+}1)|^+$ deben ser elementos de κ (lema 1.8). Además, $h(\beta) < |h(\beta)|^+ \leqslant h(\beta+1)$ y $g(\beta+1) < |g(\beta+1)|^+ \leqslant h(\beta+1)$. Así, $h(\beta+1)$ es un cardinal y las propiedades 3 y $(*)$ se siguen cumpliendo.

Para el caso límite, supongamos que $\beta \in \mathrm{Lim}(\mathrm{cf}(\kappa))$ y que hemos definido $h(\alpha)$ para todo $\alpha < \beta$ de tal suerte que $h_{\restriction \beta}$ cumpla 1, 2, 3 y $(*)$ en su dominio. Definimos $h(\beta) = \sup\{h(\xi) : \xi < \beta\}$. Así, $h(\beta)$ es un cardinal, al ser el supremo de una sucesión de cardinales. Además, $h(\beta)$ es el límite de una sucesión en κ de longitud menor a $\mathrm{cf}(\kappa)$, es decir, $h(\beta) < \kappa$. Para cualquier $\alpha < \beta$, se tiene que $h(\alpha) < h(\alpha+1) \leqslant h(\beta)$. De esta forma, tenemos que $h_{\restriction \beta+1}$ cumple 1, 2, 3 y $(*)$, lo que concluye la recursión.

Dado $\alpha < \kappa$, como g es cofinal en κ, existe $\xi < \theta$ tal que $\alpha < g(\xi) < g(\xi+1)$. La propiedad $(*)$ nos garantiza que $\alpha < h(\xi+1)$, lo que comprueba que h es cofinal en κ. $\square$

Le recordamos al lector que, para nosotros, los elementos del producto cartesiano son funciones de elección.

Definición 5.6. Sea $\{A_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ una familia de conjuntos y sea F un subconjunto del producto cartesiano $\prod\limits_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\alpha$.

1. Dadas $f, g \in F$, diremos que f y g son *casi ajenas* si y sólo si $|f \cap g| < \mathrm{cf}(\kappa)$; equivalentemente,
$$\big|\{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : f(\alpha) = g(\alpha)\}\big| < \mathrm{cf}(\kappa).$$

2. Diremos que F es *casi ajena* si para cualesquiera $f, g \in F$ que satisfagan $f \neq g$, se sigue que f y g son casi ajenas.

Los resultados que siguen son de índole técnica y, tal y como lo dijimos al principio del capítulo, tienen por propósito el preparar el camino para la demostración de los teoremas de Silver.

Lema 5.7. *Sea* $\{A_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ *una familia de conjuntos y sea* $F \subseteq \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\alpha$ *una familia casi ajena. Así, existe* $G \subseteq \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} |A_\alpha|$, *una familia casi ajena de tal suerte que* $|G| = |F|$.

Demostración. Para cada $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, llamemos $\lambda_\alpha = |A_\alpha|$ y fijemos un biyección $h_\alpha : A_\alpha \to \lambda_\alpha$. Tomemos $f \in F$. Para cada $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, se tiene que $f(\alpha) \in A_\alpha$, así que tiene sentido tomar $h_\alpha(f(\alpha))$ para obtener un elemento de λ_α. En otras palabras, dada $f \in F$, la función $\overline{f} : \mathrm{cf}(\kappa) \to \bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\alpha$ dada por

$$\overline{f}(\alpha) = h_\alpha(f(\alpha)), \text{ siempre que } \alpha < \mathrm{cf}(\kappa),$$

satisface que $\overline{f} \in \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\alpha$.

Veamos que $G = \{\overline{f} : f \in F\}$ es una familia como la que buscamos. Para empezar, si $f, g \in F$ son dos funciones distintas, entonces existe $\beta < \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $f(\beta) \neq g(\beta)$. Como h_β es una biyección, tendremos que $\bar{f}(\beta) = h_\beta(f(\beta)) \neq h_\beta(g(\beta)) = \bar{g}(\beta)$. Por lo tanto, $\bar{f} \neq \bar{g}$. Así, la función $^{-} : F \to G$ que asigna $\bar{f}$ a cada $f \in F$, será un biyección entre F y G.

Por último, sean $f, g \in F$ dos funciones distintas. Mostremos que $\bar{f}$ y $\bar{g}$ serán funciones casi ajenas. Para esto, observe que para toda $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, como h_α es una biyección, entonces $\bar{f}(\alpha) = h_\alpha(f(\alpha)) = h_\alpha(g(\alpha)) = \bar{g}(\alpha)$ si y sólo si $f(\alpha) = g(\alpha)$. Por lo tanto, $\{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : \bar{f}(\alpha) = \bar{g}(\alpha)\} = \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : f(\alpha) = g(\alpha)\}$. Así,

$$\big|\{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : \bar{f}(\alpha) = \bar{g}(\alpha)\}\big| = \big|\{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : f(\alpha) = g(\alpha)\}\big| < \mathrm{cf}(\kappa),$$

con lo que concluimos que $\bar{f}$ y $\bar{g}$ son casi ajenas. □

A partir de este momento, la frase $(\beta_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$ *es una sucesión normal en* κ significará que la función $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ dada por $f(\alpha) := \beta_\alpha$ es normal (en el sentido de la definición 1.10).

Lema 5.8. *Sea* $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$ *una sucesión de cardinales normal y cofinal en* κ *tal que* $\kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$, *para cualquier* $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$. *Si* $\{A_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ *es una familia de conjuntos para la cual*

$$E = \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : |A_\alpha| \leqslant \kappa_\alpha\}$$

es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$ *y* $F \subseteq \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\alpha$ *es casi ajena, entonces* $|F| \leqslant \kappa$.

Demostración. Para cada $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, nombremos $\lambda_\alpha = |A_\alpha|$. Usando el lema 5.7, basta suponer que $F \subseteq \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\alpha$. Así, por hipótesis $E = \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : \lambda_\alpha \subseteq \kappa_\alpha\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Tenemos que $E_0 = E \cap \mathrm{Lim}(\mathrm{cf}(\kappa))$ será un conjunto estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$ (ver ejemplo 1.18). Fijemos $f \in F$ y $\alpha \in E_0$. Dado que α es un ordinal límite y $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ es normal, tenemos que $\kappa_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \kappa_\xi$. Además, $\alpha \in E$, por lo que $f(\alpha) \in \lambda_\alpha \subseteq \kappa_\alpha$. Es decir, $f(\alpha) \in \bigcup_{\xi<\alpha} \kappa_\xi$. Por lo tanto, existe $s(\alpha) < \alpha$ tal que $f(\alpha) \in \kappa_{s(\alpha)}$. De esta forma, la función que envía $\xi \longmapsto s(\xi)$ para cada $\xi \in E_0$, es una función regresiva sobre un estacionario. Usando el lema de Fodor (lema 2.10), podemos concluir que existe $\gamma < \mathrm{cf}(\kappa)$, de tal suerte que $E_f = s^{-1}(\{\gamma\})$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$.

Por lo anterior, para cada $f \in F$ existe E_f, un subconjunto estacionario de $\mathrm{cf}(\kappa)$, de tal modo que el contradominio de $f_{\restriction E_f}$ es κ_γ para algún $\gamma < \mathrm{cf}(\kappa)$. Definamos $Z : F \to \mathscr{P}(\mathrm{cf}(\kappa)) \times \bigcup \big\{ {}^S\kappa_\alpha : \big(S \in \mathscr{P}(\mathrm{cf}(\kappa))\big) \wedge (\alpha < \mathrm{cf}(\kappa))\big\}$ mediante

$$Z(f) = (E_f, f_{\restriction E_f}).$$

Mostremos que Z es una función inyectiva. Para esto, tomemos f y g en F y supongamos que $(E_f, f_{\restriction E_f}) = (E_g, g_{\restriction E_g})$. Como $\mathrm{cf}(\kappa)$ es regular y todo estacionario es no-acotado, tenemos que $|E_f| = \mathrm{cf}(\kappa)$. Por otro lado, la igualdad $f_{\restriction E_f} = g_{\restriction E_g}$ implica que $\big|\{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : f(\alpha) = g(\alpha)\}\big| \geqslant |E_f| = \mathrm{cf}(\kappa)$. Así, f y g no son funciones casi ajenas. Ya que F es una familia casi ajena, esto implica que $f = g$.

Concluimos que $|F| \leqslant \big|\mathscr{P}(\mathrm{cf}(\kappa)) \times \bigcup \big\{ {}^S\kappa_\alpha : \big(S \in \mathscr{P}(\mathrm{cf}(\kappa))\big) \wedge (\alpha < \mathrm{cf}(\kappa))\big\}\big|$. Como $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$ es una sucesión estrictamente creciente, $2 \leqslant \kappa_2$ (lema 1.7). De esto, $\big|\mathscr{P}(\mathrm{cf}(\kappa))\big| = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \kappa_2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$. Además, para cualesquiera $S \in \mathscr{P}(\mathrm{cf}(\kappa))$ y $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, se tiene que $\big|{}^S\kappa_\alpha\big| \leqslant \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Con lo cual, $\left|\bigcup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \big\{{}^S\kappa_\alpha : S \in \mathscr{P}(\mathrm{cf}(\kappa))\big\}\right| \leqslant \sum_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \sup_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} (\kappa_\alpha)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa$. Por lo tanto, $|F| \leqslant 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} \cdot \kappa = \kappa$. □

En nuestro siguiente resultado emplearemos el siguiente hecho: si S es un subconjunto estacionario de $\mathrm{cf}(\kappa)$ y $\mathrm{Cub}(\mathrm{cf}(\kappa))$ es el filtro que fue definido en el párrafo que aparece inmediatamente después de la definición 1.16, entonces la colección $\mathrm{Cub}(\mathrm{cf}(\kappa)) \cup \{S\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, así que hay un ultrafiltro en $\mathrm{cf}(\kappa)$ que la contiene.

Lema 5.9. *Sea $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$ una sucesión de cardinales normal y cofinal en κ tal que $\kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$, para cualquier $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$. Sean $\{A_\alpha : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$, una familia de conjuntos, y $F \subseteq \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} A_\alpha$, una familia casi ajena, de tal suerte que el conjunto*

$$S = \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : |A_\alpha| \leqslant \kappa_\alpha^+\}$$

es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Entonces, $|F| \leqslant \kappa^+$.

Demostración. Para cada $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, nombremos $\lambda_\alpha = |A_\alpha|$. Gracias al lema 5.7, podemos suponer que $F \subseteq \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\alpha$. Así, $S = \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : \lambda_\alpha \subseteq \kappa_\alpha^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Además, para cada par de elementos $f, g \in F$, llamemos $R(f,g) := \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : f(\alpha) < g(\alpha)\}$.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro que extienda a $\mathrm{Cub}(\mathrm{cf}(\kappa)) \cup \{S\}$. Observe que, al tener $\mathcal{U}$ la propiedad de la intersección finita, todo elemento de $\mathcal{U}$ es un estacionario. Definimos la relación $<$ en F mediante $f < g$ si y sólo si $R(f,g) \in \mathcal{U}$. Veamos que $(F, <)$ es un orden total estricto.

Tomemos, $f, g, h \in F$ tales que $f < g$ y $g < h$. Luego, $R(f,g), R(g,h) \in \mathcal{U}$. Además, si $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ es tal que $f(\alpha) < g(\alpha)$ y $g(\alpha) < h(\alpha)$, entonces $f(\alpha) < h(\alpha)$. Así, $R(f,g) \cap R(g,h) \subseteq R(f,h)$. De esta forma, dado que $\mathcal{U}$ es un filtro, tendremos que $R(f,h) \in \mathcal{U}$, es decir, $f < h$. Concluimos que $<$ es transitiva.

Mostremos ahora que para cada $f, g \in F$ distintos, se tiene que $f < g$ ó $g < f$; equivalentemente, supongamos que $R(f,g) \notin \mathcal{U}$ y verifiquemos que $R(g,f) \in \mathcal{U}$. En primer término, el que $\mathcal{U}$ sea un ultrafiltro, implica que $\mathrm{cf}(\kappa) \setminus R(f,g) \in \mathcal{U}$. Ahora note que si hacemos $A := \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : f(\alpha) = g(\alpha)\}$, entonces

$$\mathrm{cf}(\kappa) \setminus R(f,g) = A \cup R(g,f)$$

y como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, se deduce que $A \in \mathcal{U}$ ó $R(g,f) \in \mathcal{U}$. Para descartar la primera posibilidad, recuerde que los elementos de $\mathcal{U}$ son estacionarios y, en particular, todos tienen cardinalidad $\mathrm{cf}(\kappa)$; por otro lado, el que f y g sean casi ajenas nos da $|A| < \mathrm{cf}(\kappa)$. En resumen, $R(g,f) \in \mathcal{U}$ o, en otras palabras, $g < f$.

Para concluir que $|F| \leqslant \kappa^+$, emplearemos el lema 1.3 y la notación presentada en el párrafo previo a éste, esto es, fijemos $f \in F$ y argumentemos que $|(\leftarrow, f)| \leqslant \kappa$. Para cada $E \in \mathcal{U}$, definimos la sucesión $(\kappa_\alpha^E)_{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)}$, donde,

$$\kappa_\alpha^E = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } \alpha \in E \\ \lambda_\alpha & \text{si } \alpha \notin E. \end{cases}$$

Así mismo, definimos

$$P_E = \prod_{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\alpha^E.$$

Verifiquemos que $(\leftarrow, f) \subseteq \bigcup_{E \in \mathcal{U}} P_E$. Sea $g \in (\leftarrow, f)$ y hagamos $E := R(g, f)$. Entonces, $E \in \mathcal{U}$ y $g \in F$. En aras de probar que $g \in P_E$, tomemos $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$. Si $\alpha \in E$, se sigue que $g(\alpha) < f(\alpha) = \kappa_\alpha^E$; cuando $\alpha \notin E$, basta con recordar la contención $F \subseteq \prod_{\xi < \mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\xi$ para obtener $g(\alpha) < \lambda_\alpha = \kappa_\alpha^E$.

Para cada $E \in \mathcal{U}$, hagamos $F_E := P_E \cap (\leftarrow, f)$. De lo dicho en el párrafo previo se deduce que

$$|(\leftarrow, f)| \leqslant |\mathcal{U}| \cdot \sup\{|F_E| : E \in \mathcal{U}\}.$$

Ahora, la inclusión $\mathcal{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathrm{cf}(\kappa))$ y la desigualdad $2 \leqslant \kappa_2$ nos dan

$$|\mathcal{U}| \leqslant 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant (\kappa_2)^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa.$$

De este modo, todo se reduce a argumentar que cada F_E tiene, a lo sumo, κ elementos. Para esto, usaremos el lema 5.8.

Fijemos $E \in \mathcal{U}$. En vista de que $F_E \subseteq F$, se sigue que F_E es una familia casi ajena que está contenida en el producto P_E. Como ya habíamos mencionado, todo elemento de $\mathcal{U}$ es un estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$ y, por ende, $E \cap S$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Luego, para concluir nuestra prueba, es suficiente con mostrar que si $\alpha \in E \cap S$, entonces $\left|\kappa_\alpha^E\right| \leqslant \kappa_\alpha$.

De hecho, $\alpha \in E \cap S$ implica que $\kappa_\alpha^E = f(\alpha) \in \lambda_\alpha \subseteq \kappa_\alpha^+$ y, así, se sigue la desigualdad requerida. Como esto se cumple para cualquier $f \in F$, concluimos que $|F| \leqslant \kappa^+$ $\square$

Lema 5.10. *Supongamos que para todo cardinal* $\lambda < \kappa$ *se cumple que* $\lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$. *Si* $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$ *es una sucesión normal de cardinales, que es cofinal en* κ *y el conjunto* $T = \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^+\}$ *es estacionario en* $\mathrm{cf}(\kappa)$*, entonces* $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$.

Demostración. El corolario 1.12 nos garantiza que $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, es decir, $\kappa^+ \leqslant \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Sólo hace falta mostrar que $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \kappa^+$. Para esto, construiremos una familia casi ajena F, tal que $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant |F| \leqslant \kappa^+$.

Para cada $h \in {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$, definiremos $\overline{h} \in \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \left({}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\alpha\right)$ como sigue: dado $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, sea $\overline{h}(\alpha)$ la función de $\mathrm{cf}(\kappa)$ en κ_α, cuya regla de correspondencia es

$$\overline{h}(\alpha)(\xi) = \begin{cases} h(\xi), & \text{si } h(\xi) < \kappa_\alpha \\ 0, & \text{si } \kappa_\alpha \leqslant h(\xi). \end{cases}$$

Cuando nos parezca conveniente, emplearemos subíndices para simplificar nuestra notación, de forma específica, el símbolo h_α será usado para referirnos a $\overline{h}(\alpha)$.

Sea $F = \{\bar{h} : h \in {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa\}$. Mostremos que F es una familia casi ajena. Tomemos $f, g \in {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$, dos funciones distintas. Existe $\alpha_0 < \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $f(\alpha_0) \neq g(\alpha_0)$. Dado que $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$ es cofinal en κ, existe $\beta < \mathrm{cf}(\kappa)$ de tal suerte que $\max\{f(\alpha_0), g(\alpha_0)\} < \kappa_\beta$. Para todo $\xi > \beta$, se cumple que $\max\{f(\alpha_0), g(\alpha_0)\} < \kappa_\beta < \kappa_\xi$. Así, $f_\xi(\alpha_0) = f(\alpha_0) \neq g(\alpha_0) = g_\xi(\alpha_0)$. Por lo tanto, $\bar{f}(\xi) = f_\xi \neq g_\xi = \bar{g}(\xi)$. Así $\left|\{\xi < \mathrm{cf}(\kappa) : \bar{f}(\xi) = \bar{g}(\xi)\}\right| \leqslant |\beta| < \mathrm{cf}(\kappa)$. Es decir, $\bar{f}$ y $\bar{g}$ son casi ajenas.

El párrafo previo también muestra que la función ${}^{-} : {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa \to F$, que asigna a cada $f \in {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$ la sucesión $\bar{f}$ correspondiente, es una función biyectiva. Luego, $|F| = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

Empleemos el lema 5.9 para probar que $|F| \leqslant \kappa^+$. Por hipótesis, sabemos que para cada $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, se cumple que $\kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$. Sólo nos hace falta mostrar que $S = \{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : \left|{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\alpha\right| \leqslant \kappa_\alpha^+\}$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. Para esto, sea $C = \{\alpha \in \mathrm{Lim}(\mathrm{cf}(\kappa)) : \forall\, \lambda < \kappa_\alpha\ (\lambda = |\lambda| \to \lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_\alpha)\}$. Mostremos que C es un club en $\mathrm{cf}(\kappa)$.

Con la idea de probar que C es no-acotado, fijemos $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$. Recursivamente, construimos la sucesión $f : \omega \to \mathrm{cf}(\kappa)$ que cumpla las siguientes propiedades para toda $n < \omega$:

1. $\xi = f(0)$.

2. $\kappa_{f(n)}^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_{f(n+1)}$.

Supongamos que para alguna $n < \omega$, hemos construido $f(m) \in \mathrm{cf}(\kappa)$ para toda $m \leqslant n$ y tal que 1 y 2 se cumplan por debajo de n. Como $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$ es cofinal en κ y $\left(\kappa_{f(n)}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$, existe $f(n+1) < \mathrm{cf}(\kappa)$ tal que $\left(\kappa_{f(n)}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_{f(n+1)}$. Lo cual concluye la inducción.

Dado que $\omega < \mathrm{cf}(\kappa)$ y $\mathrm{cf}(\kappa)$ es regular, $\alpha = \bigcup\limits_{n<\omega} f(n) \in \mathrm{cf}(\kappa)$. Además, $\xi = f(0) \leqslant \alpha$. Al ser $(\kappa_\xi)_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$ una sucesión normal, tenemos que $\kappa_\alpha = \bigcup\limits_{n<\omega} \kappa_{f(n)}$. Si tomamos un cardinal $\lambda < \kappa_\alpha$, existe $n < \omega$ tal que $\lambda < \kappa_{f(n)}$. Con lo cual, $\lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \left(\kappa_{f(n)}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_{f(n+1)} \leqslant \kappa_\alpha$. Es decir, $\alpha \in C$, lo que muestra que C es no-acotado en $\mathrm{cf}(\kappa)$.

Ahora argumentemos que C es cerrado: sea $\gamma \in \mathrm{Lim}(\mathrm{cf}(\kappa))$ tal que $C \cap \gamma$ es no-acotado en γ. Tomemos un cardinal $\lambda \in \kappa_\gamma$. Por las hipótesis sobre $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$, se tiene que $\kappa_\gamma = \bigcup\limits_{\xi<\gamma} \kappa_\xi$. Luego, existe $\delta < \gamma$ tal que $\lambda \in \kappa_\delta$. Al ser $C \cap \gamma$ no-acotado en γ, hay $\xi \in C \cap \gamma \setminus (\delta + 1)$. Así, $\lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_\xi < \kappa_\gamma$. Por lo tanto, $\gamma \in C$. Así, C es cerrado en $\mathrm{cf}(\kappa)$.

De lo anterior se deduce que $C \cap T$ es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$. En consecuencia, bastará verificar la contención $C \cap T \subseteq S$. Sea $\beta \in C \cap T$. Como β es un ordinal límite y la sucesión $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$ es normal, $\kappa_\beta \geqslant \kappa_3 \geqslant 3 > 2$ (véase lema 1.7); de esta forma, $\mathrm{cf}(\kappa) < 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa_\beta$. Usando el teorema 1.14, concluimos que (recuerde que $\beta \in T$):

1. Si $\mathrm{cf}(\kappa) < \mathrm{cf}(\kappa_\beta)$, entonces $\kappa_\beta^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa_\beta$.

2. Si $\mathrm{cf}(\kappa_\beta) \leqslant \mathrm{cf}(\kappa)$, entonces $\kappa_\beta^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa_\beta^{\mathrm{cf}(\kappa_\beta)} = \kappa_\beta^+$.

En cualquier caso, $\left|{}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\beta\right| = \kappa_\beta^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \kappa_\beta^+$. En resumen, $\beta \in S$, tal y como se deseaba. $\square$

Con estas herramientas, estamos en posición de probar los teoremas de Silver mencionados al comienzo del capítulo.

5.2 Demostración del teorema 5.2

Para esta sección, supondremos que si $\alpha < \kappa$ es un cardinal, entonces $2^\alpha = \alpha^+$ y nos concentraremos en probar que $\kappa^+ = 2^\kappa$.

Usando el lema 5.5, obtenemos $(\kappa_\alpha)_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)}$, una sucesión de cardinales normal y cofinal en κ. Probemos que las condiciones del lema 5.10 se satisfacen. Sea $\lambda < \kappa$ un cardinal arbitrario.

1. Cuando $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, se tiene que $\lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \lambda < \kappa$.

2. Si $1 < \lambda \leqslant \mathrm{cf}(\kappa)$, entonces las desigualdades $\omega < \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ nos dan $\mathrm{cf}(\kappa)^+ \leqslant 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \mathrm{cf}(\kappa)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \mathrm{cf}(\kappa)^+$. Así, $\lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \mathrm{cf}(\kappa)^+ < \kappa$.

3. Si $\mathrm{cf}(\kappa) < \lambda$, entonces $\lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \lambda^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+ < \kappa$.

En resumen, para cualquier cardinal $\lambda < \kappa, \lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$.

Sea $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$. El corolario 1.12 nos asegura que $\kappa_\alpha^+ \leqslant \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)}$. Además,

$$\kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} \leqslant \left(2^{\kappa_\alpha}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = 2^{\kappa_\alpha \cdot \mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = 2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+.$$

Por lo tanto, $\kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^+$. Así, $\{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa) : \kappa_\alpha^{\mathrm{cf}(\kappa_\alpha)} = \kappa_\alpha^+\} = \mathrm{cf}(\kappa)$, que, claramente, es estacionario en $\mathrm{cf}(\kappa)$.

Con lo anterior, concluimos que $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$.

Ahora, como $\kappa^+ \leqslant 2^\kappa$, sólo nos resta comprobar que

$$2^\kappa \leqslant \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}. \tag{5.1}$$

Haremos esto en tres pasos.

Primeramente, sea $\lambda := \sup\{2^{\kappa_\alpha} : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa)\}$. Dado $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, se tiene que $\kappa_\alpha < \kappa$ y por nuestras hipótesis, $2^{\kappa_\alpha} = \kappa_\alpha^+ < \kappa$. De este modo, $\lambda \leqslant \kappa$ y, por ende,

$$\lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}. \tag{5.2}$$

Ahora, para cada $E \subseteq \kappa$, definamos $\varphi(E) : \mathrm{cf}(\kappa) \to \bigcup\limits_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \mathscr{P}(\kappa_\alpha)$ mediante $\varphi(E)(\alpha) = E \cap \kappa_\alpha$, siempre que $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$. Claramente, $\varphi(E)$ es un elemento del producto cartesiano $\prod\limits_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \mathscr{P}(\kappa_\alpha)$, así que hemos producido una función $\varphi : \mathscr{P}(\kappa) \to \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \mathscr{P}(\kappa_\alpha)$. Comprobemos que φ es inyectiva: si $E, F \subseteq \kappa$ satisfacen la igualdad $\varphi(E) = \varphi(F)$, entonces, para cualquier $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$, $E \cap \kappa_\alpha = E \cap \kappa_\alpha$ y, como $\kappa = \bigcup\limits_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$, concluimos que $E = F$.

El párrafo previo muestra que

$$2^\kappa = |\mathscr{P}(\kappa)| \leqslant \left| \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} \mathscr{P}(\kappa_\alpha) \right| = \prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} (2^{\kappa_\alpha}). \tag{5.3}$$

Por otro lado, nuestra definición de λ nos garantiza que $2^{\kappa_\alpha} \leqslant \lambda$, para cada $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$. Luego,

$$\prod_{\alpha<\mathrm{cf}(\kappa)} (2^{\kappa_\alpha}) \leqslant \lambda^{\mathrm{cf}(\kappa)}. \tag{5.4}$$

Finalmente, (5.1) es consecuencia de concatenar las desigualdades establecidas en (5.3), (5.4) y (5.2).

5.3 Demostración del teorema 5.4

Para esta última sección supondremos que si ν es un cardinal singular con $\mathrm{cf}(\nu) = \omega$ y $2^\omega < \nu$, entonces $\nu^\omega = \nu^+$.

Naturalmente, estamos interesados en probar que el enunciado

$$\mu \text{ es un cardinal singular infinito y } 2^{\mathrm{cf}(\mu)} < \mu \tag{$\star^0_\mu$}$$

implica la igualdad

$$\mu^{\mathrm{cf}(\mu)} = \mu^+. \tag{$\star^1_\mu$}$$

Hagamos esto por inducción, esto es, fijemos λ que satisfaga $(\star^0_\lambda)$ y demos por hecho que para cualquier $\mu < \lambda$ se tiene que la implicación $(\star^0_\mu) \to (\star^1_\mu)$ es cierta. Concentrémonos en probar $(\star^1_\lambda)$

Sea $\delta := \mathrm{cf}(\lambda)$. Cuando $\delta = \omega$, nuestras hipótesis garantizan que $(\star^1_\kappa)$ se da. Así, supongamos por el resto del argumento que $\delta \geqslant \omega_1$.

Nuestra intención es emplear el lema 5.10 (con $\kappa := \lambda$ y $\mathrm{cf}(\kappa) := \delta$), así que fijemos (ver lema 5.5) $(\lambda_\alpha)_{\alpha<\delta}$, una sucesión normal de cardinales, cofinal en λ y tal que $\lambda_0 = \omega$. Hay dos hipótesis de dicho resultado que debemos comprobar. Haremos eso en los lemas siguientes.

Lema 5.11. *Para cualquier cardinal $\mu < \lambda$, $\mu^\delta < \lambda$.*

Demostración. La prueba será por inducción sobre λ: fije un cardinal $\mu < \lambda$ y dé por hecho que para cada cardinal $\nu < \mu$ tenemos la desigualdad $\nu^\delta < \lambda$.

Si existiese un cardinal $\nu < \mu$ tal que $\mu \leqslant \nu^\delta$, tendríamos que

$$\mu^\delta \leqslant \left(\nu^\delta\right)^\delta = \nu^{\delta\cdot\delta} = \nu^\delta < \lambda.$$

Así, supondremos que

$$\text{para cualquier cardinal } \nu < \mu,\ \nu^\delta < \mu. \tag{5.5}$$

Note que si tuviésemos $\mu \leqslant 2^\delta$, se seguiría que (recuerde la hipótesis $(\star^0_\lambda)$)

$$\mu^\delta \leqslant \left(2^\delta\right)^\delta = 2^{\delta\cdot\delta} = 2^\delta = 2^{\mathrm{cf}(\lambda)} < \lambda.$$

Luego, podemos suponer, sin pérdida de la generalidad, que

$$\delta < 2^\delta < \mu. \tag{5.6}$$

Esta suposición, en conjunto con (5.5), nos permite aplicar el teorema 1.14 (con $\kappa := \mu$ y $\theta := \delta$) para obtener las conclusiones siguientes.

En el caso en que $\delta < \mathrm{cf}(\mu)$, deducimos que $\mu^\delta = \mu < \lambda$.

Ahora, si $\mathrm{cf}(\mu) \leqslant \delta$, obtenemos que $\mu^\delta = \mu^{\mathrm{cf}(\mu)}$. De este modo (recuerde (5.6)), el enunciado $(\star^0_\mu)$ es cierto y, en consecuencia, $(\star^1_\mu)$ también lo es. Finalmente, como λ es singular,

$$\mu^\delta = \mu^{\mathrm{cf}(\mu)} = \mu^+ < \lambda,$$

con lo cual terminamos la inducción. □

Lema 5.12. *El conjunto $T := \{\alpha < \delta : \lambda_\alpha^{\mathrm{cf}(\lambda_\alpha)} = \lambda_\alpha^+\}$ es estacionario en δ.*

Demostración. Empecemos por fijar C, un club en δ, y construyamos recursivamente una sucesión $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ de tal modo que los incisos siguientes sean ciertos para cualquier $n < \omega$.

1. $2^\omega < \lambda_{\alpha_0}$.

2. $\alpha_n \in C$.

3. $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

Como $\omega < \delta < \lambda$, se tiene que $2^\omega \leqslant 2^\delta < \lambda$ y, por ende, hay $\alpha_0 < \delta$ con $2^\omega < \lambda_{\alpha_0}$. Ahora supongamos que para alguna $n < \omega$ hemos construido $\{\alpha_m\}_{m \leqslant n}$ de tal suerte que las propiedades 1, 2 y 3 se satisfacen por debajo de n. Empleemos que C es no-acotado en δ y la desigualdad $\alpha_n < \delta$ (inciso 2) para hallar $\alpha_{n+1} \in C$ con $\alpha_n < \alpha_{n+1}$. Así, la recursión está completa.

Hagamos $\alpha := \sup\{\alpha_n : n < \omega\}$. La condición 3 nos garantiza que α es límite y por 2, $C \cap \alpha$ es no-acotado en α. Consecuentemente, $\alpha \in C$. Sólo nos resta probar que $\alpha \in T$.

Como ya observamos, α es un ordinal límite y, más aún, $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ es cofinal en α. Entonces, podemos emplear que $(\lambda_\xi)_{\xi<\delta}$ es normal para deducir que

$$\lambda_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \lambda_\beta = \bigcup_{n<\omega} \lambda_{\alpha_n};$$

por ende, $\mathrm{cf}(\lambda_\alpha) \leqslant \omega$. Además, las desigualdades $\lambda_\alpha \geqslant \lambda_{\alpha_0} > 2^\omega$ nos garantizan que λ_α es infinito y, en consecuencia, $\mathrm{cf}(\lambda_\alpha) = \omega < 2^\omega < \lambda_\alpha$, o sea, λ_α es un cardinal singular de cofinalidad numerable que satisface $2^\omega < \lambda_\alpha$. Por la hipótesis establecida en el primer párrafo de la presente sección, obtenemos la pertenencia $\alpha \in T$, tal y como deseábamos. $\square$

El paso final es invocar el lema 5.10 para concluir que $(\star^1_\lambda)$ es cierta.

Conclusiones

Concluimos el presente trabajo con algunas anotaciones con respecto a los temas desarrollados.

Con respecto a los capítulos 3 y 4, nos gustaría recalcar la importancia del concepto de noción de forcing propia, ya que ésta resulta central en el desarrollo de los llamados "axiomas de forcing". Un axioma de forcing es un principio combinatorio, diseñado para expresar aquello que puede ser alcanzado usando ciertas construcciones obtenidas bajo iteraciones de forcing. En otras palabras, los axiomas de forcing nos servirán como una especie de caja negra para esconder dichas construcciones, pero obtener los respectivos resultados; en lugar de mostrar que un enunciado puede ser forzado por una construcción tal, uno deriva dicho enunciado usando un principio combinatorio.

En este marco se presenta el principio conocido como Axioma de Martin. Enunciado en 1970 por Donald A. Martin y Robert M. Solovay, este principio se convirtió en el primer y más usado axioma de forcing. De manera informal, dicho axioma nos dice que todo cardinal menor al continuo ($\mathfrak{c}$) se comporta, en un sentido tosco, como $\aleph_0$. Dicho principio, se fundamenta en aquello que podemos forzar usando nociones de forcing que cumplen la condición de la cadena contable. Después de lo trabajado, no debe sorprendernos que un significativo reforzamiento de dicho axioma, conocido como *Proper Forcing Axiom (PFA)*, tenga lugar al reemplezar la clase de aquellas nociones de forcing que satisfacen la condición de la cadena contable, por la clase *PROPER*.

Finalmente, con respecto al capítulo 5, notamos la importancia de la herramienta que nos presentan los conceptos de club y estacionario en el desarrollo moderno de la Teoría de Conjuntos. El concepto desarrollado en el capítulo 2, más amplio en principio que la noción clásica, trae consigo herramientas y técnicas nuevas que amplian el abanico de posibilidades a utilizar al enfrentarnos a los desafíos actuales de las Matemáticas y la Teoría de Conjuntos.

BIBILIOGRAFÍA

[1] A. L. Celis Martínez, *Encajes entre Nociones de Forcing*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.

[2] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[3] J. A. Gallardo Quiroz, *El Principio Combinatorio de Jensen*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.

[4] F. Hernández Hernández, *Teoría de conjuntos:* una introducción. Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[5] T. Jech, *Set Theory.* The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997, 2003

[6] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.