UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ÁLGEBRAS CON INVOLUCIÓN Y LA CONDICIÓN C*.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

SARAHI RAMOS MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS
CIUDAD DE MÉXICO, 2021

Dedicado a mi familia: Hortensia, Raúl, Pavel, Itzel, keyla y shanti.

Agradecimientos:

A mi mamá Hortensia, por todo el amor y apoyo que siempre nos brindaste. Eres una excelente madre, llevo conmigo tus consejos y enseñanzas que siempre nos diste. Te quiero y te recuerdo todos los días con mucho cariño.
A mi papá Raúl, por estar siempre con nosotros y no dejarnos caer en los momentos más difíciles. Por todas esas pláticas y reflexiones que me das cuando desayunamos. También, por inculcarme el gusto por el deporte. Eres un buen padre y siempre te estaré agradecida.
A mi hermano Pavel, mi mejor amigo, gracias por todo el apoyo que me has dado siempre, en especial desde el primer día que entre a la facultad. También, por todas las risas y aventuras que hemos vivido en ella. Indiscutiblemente la facultad es más divertida contigo.
A mi hermana Itzel, gracias por todos los viajes que me has permitido compartir contigo, los recuerdo con mucha alegría. Por todo el apoyo que siempre me has brindado y por todas las cosas que hemos hecho juntas. Eres la mejor hermana.
A mi asesora Carmen, gracias por la paciencia y el tiempo dedicado a la elaboración de esta tesis. También, por darme la oportunidad de poder trabajar con usted como su ayudante.
A cada uno de mis sinodales, por el tiempo dedicado a leer y corregir este trabajo.
A todos los amigos que formé durante la carrera, especialmente a: Emma, mi mejor amiga, con quien he compartido tantas cosas, te quiero mucho. A Itzel, mi amiga desde la preparatoria, siempre es un gusto platicar contigo. A Carito por todos los consejos que siempre me das y por todas las platicas que hemos tenido.
A todos los profesores de los que he sido ayudante, gracias por creer y confiar en mi: Israel, León, Álvaro, Pavel y Carmen.
Por último agradezco al proyecto UNAM-DGAPA-PAPIIT IN405620 Matematización y Cambio Conceptual, por la beca otorgada para realizar este trabajo.

Índice general

Introducción

En el análisis matemático un álgebra-C^* es un álgebra de Banach $(E, \|\cdot\|)$ en la que está definida una función $* : E \mapsto E$, llamada involución que satisface las siguientes condiciones:

1. $(x+y)^* = x^* + y^*$ para todo $x, y \in E$.

2. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$ para todo $x, y \in E$.

3. $(xy)^* = y^* x^*$ para todo $x, y \in E$.

4. $x = (x^*)^*$ para todo $x \in E$.

5. $\|x\|^2 = \|x^* x\|$ para todo $x \in E$, esta condición conocida como la condición C^*.

El estudio de estas álgebras y su estructura algebraica y topológica es de importancia, debido a que se presentan varios ejemplos en el análisis matemático, como lo son:

a) $\mathcal{B}(H)$, el espacio de operadores lineales acotados en H, donde H es un espacio de Hilbert complejo con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathcal{B}(H)$ está dotado de la norma del operador y $x \mapsto x^*$ está dada por $\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para toda $x, y \in H$.

b) $M_n(\mathbb{C})$, el espacio de las matrices con las operaciones algebraicas usuales, con la norma del operador y $x \mapsto x^*$ dada por $A^* = \overline{A}^t$.

c) El espacio $C(X)_0 = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \textit{ es continua y se anula en el infinito}\}$, con X un espacio localmente compacto de Hausdorff con la norma del supremo y $x \mapsto x^*$ está dada por $f(x)^* = \overline{f(x)}$ para $x \in X$.

Más generalmente, decimos que un álgebra $(E, \|\cdot\|)$ con involución $x \mapsto x^*$ es un álgebra pre-C^* si $\|x\|^2 = \|x^* x\|$ para todo $x \in E$. Un ejemplo de esto es el álgebra normada $(\ell^2, \|\cdot\|_\infty)$, donde:

$$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{C} : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty \right\} \text{ y } \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Para toda $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^2$ la involución $x \mapsto x^*$ está dada por:

$$((x_n)_{n=1}^\infty)^* = (\overline{x}_n)_{n=1}^\infty.$$

Entonces, es fácil ver que $(\ell^2, \|\cdot\|_\infty)$ no es un álgebra de Banach, pero $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty^2 = \|((x_n)_{n=1}^\infty)^*(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty$ para todo $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^2$.
Por otro lado dada $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra normada con involución $x \mapsto x^*$, surge la siguiente pregunta: ¿Bajo qué condiciones topológicas y/o algebraicas existe una norma $|\cdot|$ para E equivalente a la original $\|\cdot\|$ que satisfaga la condición C^*, es decir $|x|^2 = |x^*x|$ para todo $x \in E$?
En este trabajo respondemos a esta pregunta, tomando como referencia el artículo [6] de G.R. Allan. Más precisamente, si $\mathcal{B}$ es la familia definida en [6] se prueban los siguientes resultados:

a) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e. Entonces, existe una norma $|\cdot|$ equivalente a la original tal que $(E, |\cdot|)$ es un álgebra pre-C^* si y sólo si

1. La colección $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo.
2. Para cada $x \in E$, existen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en E tal que $u_n(e + x^*x) \to e$ y $(e + x^*x)v_n \to e$.

b) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e. Entonces, existe una norma $|\cdot|$ equivalente a la original tal que $(E, |\cdot|)$ es un álgebra-C^* si y sólo si

1. La colección $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo.
2. E es simétrica.

Donde E es simétrica si para toda $x \in E$, $e + x^*x$ tiene inverso en E.

Se ha tratado que la tesis sea lo más autocontenida posible para lo cual se organiza de la siguiente manera: En el capítulo 1 se presentan resultados básicos sobre espacios vectoriales topológicos que son los que usaremos a lo largo de este trabajo. Se inicia definiendo el funcional de Minkowski y el concepto de seminorma para estudiar los espacios localmente convexos. Se presenta la definición de álgebra topológica y se mencionan conceptos como la continuidad del producto, el espectro de un elemento y su radio espectral, también se definen los espectros de un álgebra. Finalizamos el capítulo estudiando las álgebras topológicas cociente y el radical de Jacobson.

El capítulo 2 está dedicado al estudio de las álgebras de Banach. Se inicia dando ejemplos de álgebras de Banach y se mencionan algunos resultados básicos. Por ejemplo, se prueba que el conjunto de elementos invertibles $G(E)$ es abierto, la inversión $(\cdot)^{-1} : G(E) \to G(E)$ es una función continua, el espectro de un elemento es un conjunto compacto y no vacío de $\mathbb{C}$ y por último se estudia el espectro del álgebra $M^{\#}(E)$.

En el capítulo 3 nos enfocamos al estudio de las álgebras-C^* y sus propiedades básicas, como el Teorema de Gelfand-Naimark, el conjunto de elementos positivos, la propiedad de que toda álgebra-C^* es simétrica. También le dedicamos una sección completa a las representaciones-$*$, a las álgebras Hermitianas y Simétricas, además estudiamos el radical-$*$ y el concepto de álgebras-A^*.

Finalmente, el capítulo 4 está dedicado exclusivamente a probar los resultados del artículo de G.R. Allan, los cuales son el objetivo principal de esta tesis.

Capítulo 1

Preliminares.

En este capítulo presentamos nociones y resultados básicos sobre los espacios vectoriales topológicos y las álgebras topológicas.

1.1. Espacios vectoriales topológicos

Definición 1.1.1. *Un espacio vectorial topológico (e.v.t) es una pareja* (X, τ) *donde* X *es un espacio vectorial sobre los reales* $(\mathbb{R})$ *o los complejos* $(\mathbb{C})$ *y* τ *es una topología en* X *tal que las operaciones de este espacio vectorial son continuas con respecto a* τ.
En este caso a la topología τ *se le llama una topología lineal en* X.

Definición 1.1.2. *Sea* X *un espacio vectorial topológico. Una función* $\|\cdot\|_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una seminorma si cumple lo siguiente:*

(a) $\|x\|_\alpha \geq 0$ *para todo* $x \in X$.

(b) $\|\lambda x\|_\alpha = |\lambda| \|x\|_\alpha$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $x \in X$.

(c) $\|x + y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$ *para toda* $x, y \in X$.

Observación 1.1.3. *Una seminorma* $\|\cdot\|_\alpha$ *siempre satisface*

$$||x\|_\alpha - \|y\|_\alpha| \leq \|x - y\|_\alpha \tag{1.1}$$

para toda $x, y \in X$.

Ejemplos

1. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ donde $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ es un e.v.t. Para probarlo basta utilizar las propiedades de norma. Estos espacios con cualquier otra norma equivalente a la anterior, por ejemplo $\|x\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$, también son espacios vectoriales topológicos.

2. Sea K un conjunto compacto, denotamos por $C(K)$ al conjunto

$$\{f : K \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es continua}\},$$

entonces $C(K)$ es un espacio vectorial y con la topología generada por $\|f\| = \sup\limits_{t\in K} |f(t)|$ resulta ser un espacio vectorial topológico normado. Observemos que la norma está bien definida pues K es compacto y f es continua, por lo que el supremo existe.

3. Sea (X, Ω, μ) un espacio de medida. Para $1 \leq p < \infty$ consideremos el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$:
$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid f$ es $\Omega -$ medible y $\int\limits_X |f|^p d\mu < \infty\}$ con la seminorma definida por $\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. Consideremos al espacio cociente obteniendo de $\mathcal{L}_p(\mu)$ identificando a las funciones iguales casi donde quiera. Consideremos este conjunto que denotaremos por $L_p(\mu)$ con la topología generada por la norma $\|\hat{f}\|_p := \|f\|_p$ $(f \in [f] = \hat{f})$ inducida por la seminorma anterior. Con esta topología, $L_p(\mu)$ es un espacio vectorial topológico.

Definición 1.1.4. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$.*

1. *Decimos que A es convexo si para todo $x, y \in A$ y para todo $t \in [0, 1]$ se tiene que $tx + (1 - t)y \in A$.*

2. *Sea A un conjunto convexo, decimos que $x \in A$ es un punto extremo de A si $x = ty + (1-t)z$, con $y, z \in A$ y $t \in [0, 1]$, implica que $x = y = z$. Al conjunto de puntos extremos de A lo denotaremos por $Ext(A)$.*

3. *Decimos que A es balanceado si para todo $x \in A$ y para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \leq 1$, se tiene que $\alpha x \in A$.*

4. *Decimos que A es absorbente si para todo $x \in X$, existe $\alpha > 0$, tal que $\lambda x \in A$ para todo $|\lambda| \leq \alpha$.*

5. *Definimos la envolvente convexa de A como:*

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcap\{B \subseteq X : B \text{ es convexo}\}.$$

6. *Decimos que A es absolutamente convexo, si A es convexo y balanceado.*

7. *Decimos que A es un conjunto acotado, si para cada vecindad V de 0, existe $s > 0$ talque $A \subseteq tV$ para todo $t > s$.*

Proposición 1.1.5. *La intersección de un número finito de conjuntos absorbentes es absorbente.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de conjuntos absorbentes. Consideremos $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ y sea $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Como A_i es absorbente para toda i, existe $\alpha_i > 0$ tal que $x \in \lambda A_i$ siempre que $|\lambda| \leq \alpha_i$ para toda i. Sea $\alpha = \text{mín}\{\alpha_i : 1 \leq i \leq n\}$ y tomemos $|\lambda| \leq \alpha$, entonces $|\lambda| \leq \alpha_i$ para toda i, y así $x \in \lambda A_i$ para toda i y por tanto $x \in \lambda \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. □

Proposición 1.1.6. *La intersección de una familia arbitraria de conjuntos convexos o balanceados es un conjunto convexo o balanceado, respectivamente.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y consideremos $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Supongamos que cada A_i es convexo y sean $x, y \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ y $t \in [0,1]$, veamos que $tx + (1-t)y \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Como $x, y \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, entonces $x, y \in A_i$ para toda $i \in I$ y entonces $tx + (1-t)y \in A_i$ para toda i, así $tx + (1-t)y \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Supongamos ahora que cada A_i es balanceado. Sea $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| \leq 1$, entonces $x \in A_i$ para todo i, por lo que $\alpha x \in A_i$ para cada i, por tanto $\alpha x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$. □

Definición 1.1.7. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico.*

1. *X es localmente convexo (e.v.t.l.c o simplemente e.l.c), si el origen tiene un sistema fundamental de vecindades convexas (es decir, si $\mathcal{N}_0$ representa la familia de vecindades de 0 en X con la topología τ, entonces para toda $V \in \mathcal{N}_0$ existe $U \in \mathcal{N}_0$, tal que U es convexo y $U \subseteq V$).*

2. *X es metrizable si τ es compatible con alguna métrica d.*

3. *X es un F-espacio si su topología τ es inducida por una métrica completa e invariante d (es decir d, es invariante bajo traslaciones).*

4. *X es espacio de Fréchet si X es un F-espacio localmente convexo.*

Definición 1.1.8. *Sea X un conjunto. Si $\mathcal{B}$ es un conjunto no vacío de subconjuntos no vacíos de X tal que la intersección de dos conjuntos en $\mathcal{B}$ contiene un conjunto en $\mathcal{B}$, entonces se dice que $\mathcal{B}$ es una base de filtro en X.*

Teorema 1.1.9. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Las siguientes condiciones sobre una base de filtro $\mathcal{B}$ aseguran que $\mathcal{B}$ es una base de vecindades del cero para una topología lineal.*

a) Todo conjunto $V \in \mathcal{B}$ es balanceado y absorbente.

b) Para todo $V \in \mathcal{B}$, existe $U \in \mathcal{B}$ talque $U + U \subset V$.

Lema 1.1.10. *Sea $\|\cdot\|_\alpha$ una seminorma en un espacio vectorial X. Entonces, los conjuntos $V_1 = \{x : \|x\|_\alpha < 1\}$ y $V_2 = \{x : \|x\|_\alpha \leq 1\}$ son absorbentes y absolutamente convexos.*

Demostración. Sean $x, y \in V_1$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, entonces

$$\|\lambda x + \mu y\|_\alpha \leq |\lambda|\|x\|_\alpha + |\mu|\|y\|_\alpha \leq |\lambda| + |\mu| \leq 1.$$

Así $\lambda x + \mu y \in V_1$, y entonces V_1 es absolutamente convexo. Similarmente se tiene que V_2 es absolutamente convexo.
Ahora sea $x \in V_1$, entonces $\|x\|_\alpha < 1$, si tomamos $|\lambda| \leq 1$ se tiene que

$$\|\lambda x\|_\alpha = |\lambda|\|x\|_\alpha \leq |\lambda| \leq 1.$$

Así $\lambda x \in V_1$, y por tanto V_1 es absorbente. De manera análoga se tiene que V_2 es absorbente.

□

Lema 1.1.11. *Sea $\|\cdot\|_\alpha$ una seminorma en un espacio vectorial topológico X. Entonces $\|\cdot\|_\alpha$ es continua de X a $\mathbb{R}$ si y sólo si $V_2 = \{x : \|x\|_\alpha \leq 1\}$ es una vecindad de 0 en X.*

Demostración. Si $\|\cdot\|_\alpha$ es continua entonces el conjunto $V_1 = \|\cdot\|_\alpha^{-1}([0,1)) = \|\cdot\|_\alpha^{-1}((-1,1))$ es claramente abierto. Como $V_1 \subset V_2$, V_2 es una vecindad de 0.
Ahora si V_2 es una vecindad de 0, también lo es εV_2 para cada $\varepsilon > 0$. Es fácil ver que $\varepsilon V_2 = \{x : \|x\|_\alpha \leq \varepsilon\}$. Si $y \in \varepsilon V_2$, entonces $y = \varepsilon x$, con $x \in V_2$ y así $\|y\|_\alpha = \|\varepsilon x\|_\alpha = \varepsilon\|x\|_\alpha \leq \varepsilon$. Por otro lado, sea x tal que $\|x\|_\alpha \leq \varepsilon$, entonces $\frac{\|x\|_\alpha}{\varepsilon} \leq 1$. Ahora $\|\frac{x}{\varepsilon}\|_\alpha \leq 1$ y así $\frac{x}{\varepsilon} \in V_2$, es decir $\frac{x}{\varepsilon} = y$ para algún $y \in V_2$, por tanto $x = \varepsilon y$ con $y \in V_2$. De la desigualdad (1.1) se sigue que para cada $a \in X$ y cada $x \in a + \varepsilon V_2$, tenemos que $|\|x\|_\alpha - \|a\|_\alpha| \leq \|x - a\|_\alpha \leq \varepsilon$, ya que $x - a \in \varepsilon V_2$. Es decir $\|\cdot\|_\alpha$ es continua en a. □

Teorema 1.1.12. *Sea X un espacio vectorial y sea $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia no vacía de seminormas en X. Para cada $\|\cdot\|_\alpha \in \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ consideremos $V_{\|\cdot\|_\alpha} = \{x : \|x\|_\alpha < 1\}$. Sea $\mathcal{U} = \{\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_{\|\cdot\|_{\alpha_i}} : \varepsilon_i > 0, \|\cdot\|_\alpha \in \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}\}$, entonces $\mathcal{U}$ es una base en 0 para una topología que convierte a X en un espacio localmente convexo. Más aún, esta topología es la topología lineal más débil para X con respecto a la cual todas las seminormas en $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ son continuas.*

Demostración. Se sigue del Lema 1.1.10 que los elementos de $\mathcal{U}$ son absolutamente convexos y absorbentes. Más aún, si $U \in \mathcal{U}$, entonces $V = \frac{1}{2}U \in \mathcal{U}$. Esto último, pues si tomamos $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tales que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ y $x, y \in V$, entonces $x = \frac{1}{2}x_1$ y $y = \frac{1}{2}y_1$ con $x_1, y_1 \in U$ y así $\lambda x + \mu y = \lambda\frac{1}{2}x_1 + \mu\frac{1}{2}y_1 = \frac{1}{2}(\lambda x_1 + \mu y_1)$, y como U es absolutamente convexo entonces $\lambda x_1 + \mu y_1 \in U$ y por tanto $\lambda x + \mu y \in V$. Ahora sea $x \in V$, entonces $x = \frac{1}{2}x_1$ con $x_1 \in U$, y existe $\alpha > 0$ tal que para todo $|\lambda| \leq \alpha$ se tiene que $|\lambda|x_1 \in U$, entonces $|\lambda|x = |\lambda|\frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}(|\lambda|x_1) \in V$ y por tanto $V + V \subseteq U$.
Así $\mathcal{U}$ es una base de filtro para X ya que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ siempre que $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ y además satisface las condiciones del Teorema 1.1.9. De esta forma $\mathcal{U}$ determina una topología para X que convierte a X en un espacio localmente convexo que tiene a $\mathcal{U}$ como base en 0. Por el Lema 1.1.11, cada $\|\cdot\|_\alpha \in \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es continua con respecto a esta topología. Ahora sea τ una topología que hace a X un espacio vectorial topológico tal que cada $\|\cdot\|_\alpha \in \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es continua, entonces para $\varepsilon > 0$, los conjuntos $\varepsilon V_{\|\cdot\|_\alpha}$ son τ-vecindades de 0, y por tanto cada $U \in \mathcal{U}$ es una τ-vecindad de 0. Así la topología en X determinada por $\mathcal{U}$ es más débil que τ. □

Definición 1.1.13. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y sea $A \subseteq X$ absorbente. Definimos el funcional aditiva de Minkowski de A como:*

$$\mu_A(x) = \text{ínf}\{t > 0 : t^{-1}x \in A\} = \text{ínf}\{t > 0 : x \in tA\}$$

para cada $x \in X$.

Notemos que el *funcional de Minkowski* está bien definida, ya que como A es absorbente, entonces $\{t > 0 : t^{-1}x \in A\} \neq \emptyset$; por otro lado, por definición $0 \leq \mu_A(x) < \infty$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.1.14. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y $A \subseteq X$ absorbente y convexo. Entonces:*

1. *$\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$, para todo $x, y \in X$.*
2. *$\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$, con $t > 0$ y $x \in X$.*
3. *Si A es balanceado, entonces μ_A es una seminorma.*
4. *Si $B = \{x : \mu_A(x) < 1\}$ y $C = \{x : \mu_A(x) \leq 1\}$ entonces $B \subset A \subset C$ y $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.*
5. *Sea A un conjunto convexo, balanceado y absorbente y sea μ_A su funcional de Minkowski, entonces $int(A) \subset V_{\mu_A} \subset A$. Por tanto, V_{μ_A} es una vecindad del cero en X. Si A es abierto, entonces V_{μ_A} es abierto ya que en este caso $V_{\mu_A} = A$.*

Teorema 1.1.15. *Un espacio vectorial topológico (X, τ) es localmente convexo si y sólo si τ está generada por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$.*

Demostración. Si τ está generada por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, entonces para cada $\alpha \in \Delta$ $V_{\|\cdot\|_\alpha}$ es abierto, balanceado y convexo. Por el Teorema 1.1.12 $\mathcal{U} = \{\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_{\|\cdot\|_{\alpha_i}} : \varepsilon_i > 0, \|\cdot\|_\alpha \in \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}\}$ es una base local del cero con respecto a la topología generada por la familia de seminormas y por tanto es una base local del cero con respecto a τ y además esta base local del cero es convexa y balanceada. Por tanto X, es un espacio localmente convexo.

Ahora supongamos que X es un espacio localmente convexo, y denotemos por τ a su topología. Sea $\mathcal{U}$ la base de 0 que consiste de todas las vecindades absolutamente convexas de 0, y sea $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ la familia de las funcionales de Minkowski de los conjuntos en $\mathcal{U}$, por ser conjuntos absorbentes. Por el inciso 3 del Teorema 1.1.14 cada $\|\cdot\|_\alpha \in \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ define una seminorma, y entonces $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ determina una topología τ' en X. Dado $U_\alpha \in \mathcal{U}$, por el Teorema 1.1.14 se tiene que $U_\alpha \subseteq C = \{x : \|x\|_\alpha \leq 1\}$ y así C es una vecindad de 0 y por tanto $\|\cdot\|_\alpha$ es τ-continua para cada $\alpha \in \Delta$. Ahora, por el Teorema 1.1.12, τ' es más débil que τ. Si $U_\alpha \in \mathcal{U}$, entonces el funcional de Minkowski $\|\cdot\|_\alpha$ de U_α es τ'- continua. Así U debe de ser una τ'- vecindad de 0. Entonces τ es más débil que τ'. Por tanto $\tau = \tau'$.

□

Proposición 1.1.16. *Sea (X, τ) un espacio localmente convexo cuya topología está dada por una familia de seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Una red $(x_i)_{i\in I}$ en X converge a $x \in X$ si y sólo si $\|x_i - x\|_\alpha \to 0$ para cada $\| \ \|_\alpha \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. En particular si (x_i) converge a x, entonces $\|x_i\|_\alpha \to \|x\|_\alpha$ para todo $i \in I$.*

Demostración. Supongamos que $(x_i)_{i\in I}$ converge a x y sea $\| \ \|_\alpha \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, entonces $x_i - x \to 0$. Como $\| \ \|_\alpha$ es continua tenemos que $\|x_i - x\|_\alpha \to 0$. Ahora, como

$$|\|x_i\|_\alpha - \|x\|_\alpha| \leq \|x_i - x\|$$

podemos concluir que $\|x_i\|_\alpha \to \|x\|_\alpha$.

Inversamente si $\|x_i - x\|_\alpha \to 0$ para cada $\| \ \|_\alpha \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, entonces dado $\varepsilon > 0$ y $\| \ \|_{\alpha_1}, \| \ \|_{\alpha_2}, \ldots, \| \ \|_{\alpha_n} \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, existe $i_0 \in I$ talque

$$\|x_i - x\|_{\alpha_j} < \varepsilon$$

para todo $i \geq i_0$ y todo $1 \leq j \leq n$. Por consiguiente $x_i \in \{y \in X : \|y - x\|_{\alpha_j} < \varepsilon, 1 \leq j \leq n\}$ si $i \geq i_0$. Es decir, $x_i \to x$ en X. □

Proposición 1.1.17. *La función máximo de n seminormas, con $n \geq 1$, es una seminorma.*

Demostración. La prueba es sencilla. □

Definición 1.1.18. *Sean X un espacio vectorial y $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de seminormas en X. Se dice que $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ está saturada si para cada $n \geq 1$ y $\|\cdot\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\cdot\|_{\alpha_n} \in \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ se cumple que $\|\cdot\|_{\alpha_0} = \text{máx}\,(\|\cdot\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\cdot\|_{\alpha_n})$ pertenece a $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$.*

Definición 1.1.19. *Sean X un espacio vectorial y $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de seminormas en X. Se dice que $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ está dirigida si para cada $n \geq 1$ y $\|\cdot\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\cdot\|_{\alpha_n} \in \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ se cumple que existe $\|\cdot\|_{\alpha_0} \in \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ tal que $\text{máx}(\|\cdot\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\cdot\|_{\alpha_n}) \leq \|\cdot\|_{\alpha_0}$.*

Proposición 1.1.20. *Sean X un espacio vectorial y $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de seminormas en X. Definimos la saturación de $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ como la familia de seminormas $\mathcal{Q} = \{\text{máx}(\|\cdot\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\cdot\|_{\alpha_n}) : n \geq 1, \|\cdot\|_{\alpha_1}, \ldots, \|\cdot\|_{\alpha_n} \in$*

$\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}\}$. *Entonces* $\mathcal{Q}$ *es una familia saturada de seminormas que define la misma topología que* $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. *Se dice que la familia* $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ *es saturada si* $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} = \mathcal{Q}$.

Demostración. Sabemos que los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_{\|\cdot\|_{\alpha_i}}$ con $n \geq 1$, $\|\cdot\|_{\alpha_1}, \dots, \|\cdot\|_{\alpha_n} \in \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ y $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ escalares positivos, forman una base local del 0, para la topología definida por $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$. Sea $\| \ \|_{\alpha_0} = \text{máx}(\| \ \|_{\alpha_1}, \| \ \|_{\alpha_2}, \dots, \| \ \|_{\alpha_n}) \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ y $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$. Notemos que $V_{\|\cdot\|_{\alpha_0}} \subseteq V_{\|\cdot\|_{\alpha_i}}$ para todo $i = 1, \dots n$, pues si $x \in V_{\|\cdot\|_{\alpha_0}}$, entonces $\|x\|_{\alpha_i} \leq \|x\|_{\alpha_0} < 1$ y así $x \in V_{\alpha_i}$. De esto se sigue que $\varepsilon V_{\|\cdot\|_{\alpha_0}} \subseteq \varepsilon_i V_{\|\cdot\|_{\alpha_i}}$, pues si tomamos $x \in \varepsilon V_{\|\cdot\|_{\alpha_0}}$, entonces $\|x\|_{\alpha_i} \leq \|x\|_{\alpha_0} < \varepsilon < \varepsilon_i$, así $x \in \varepsilon_i V_{\|\cdot\|_{\alpha_i}}$. Por tanto $\varepsilon V_{\|\cdot\|_{\alpha_0}} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \varepsilon_i V_{\|\cdot\|_{\alpha_i}}$. Entonces toda vecindad básica de la topología generada por $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es vecindad en la topología generada por $\mathcal{Q}$. Por otra parte $\| \ \|_{\alpha_0} = \text{máx}(\|\cdot\|_{\alpha_1}, \dots, \|\cdot\|_{\alpha_n})$ es continua con la topología $\tau(\{\|\cdot\|_{\alpha\in\Delta}\})$ porque cada $\|\cdot\|_{\alpha_i}$lo es, entonces $V_{(\| \ \|_{\alpha_i}, \varepsilon)}$ es una vecindad del 0 para la topología $\tau(\{\| \ \|_{\alpha\in\Delta}\})$. Así, toda vecindad básica en $\tau(\mathcal{Q})$ es vecindad en $\tau(\{\| \ \|_{\alpha\in\Delta}\})$. Por consiguiente, la familia de vecindades del cero son las mismas y por tanto definen la misma topología. □

Consideremos la siguiente Proposición con respecto a las transformaciones lineales entre espacios localmente convexos.

Proposición 1.1.21. *Sean* $(X, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in I})$ *y* $(Y, \{\|\cdot\|_\beta\}_{\beta\in J})$ *espacios localmente convexos. Sea* $T : X \to Y$ *una transformación lineal, entonces* T *es continua si y sólo si para cada* $\beta \in J$ *existen* $\alpha_1, \dots \alpha_n \in I$ *y* $M > 0$ *tales que*

$$\|Tx\|_\beta \leq M \sum_{i=1}^{n} \|x\|_{\alpha_i} \tag{1.2}$$

para cada $x \in X$.

Demostración. Supongamos que se cumple la condición (1.2). Sea $(x_i)_{i\in\Lambda}$ una red en X que converge a un elemento $x \in X$ y sea $\beta \in J$, como $\|x_i - x\|_{\alpha_i} \to 0$ para toda $i = 1, \dots n$, entonces

$$\|Tx_i - Tx\|_\beta = \|T(x_i - x)\|_\beta \leq M \sum_{i=1}^{n} \|x_i - x\|_{\alpha_i} \to 0.$$

Así $\|Tx_i - Tx\| \to 0$ y entonces $Tx_i \to Tx$. Por tanto T es continua.
Supongamos ahora que T es continua y sea $\beta \in J$, en particular T es continua en 0, por tanto existen $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in I$, $\delta > 0$ y

$$V = \{x \in X : \|x\|_{\alpha_i} < \delta, i = 1, \ldots n\}$$

vecindad abierta del 0 tal que si $x \in V$, entonces $\|Tx\| < 1$. Es decir, si $\|x\|_i < \delta$ para cada $i = 1, \ldots n$, entonces $\|Tx\|_\beta < 1$.
Sea $x \in X$ y supongamos que $\|x\|_{\alpha_i}$ para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces para cada $r > 0$ se cumple que $\|rx\|_{\alpha_i} = 0 < \delta$. Por tanto $\|rTx\|_\beta < 1$, de donde $\|TX\|_\beta < \frac{1}{r}$ para cada $r > 0$ y así $\|Tx\|_\beta = 0$. De esta forma se satisface la condición 1.2.
Si existe $\|x\|_i \neq 0$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} \|x\|_i > 0$, definamos $y = \frac{\frac{\delta}{2}x}{\sum\limits_{i=1}^{n} \|x\|_i}$, entonces se cumple que $\|y\| < \delta$ para cada $i = 1, \ldots n$, de donde $\|Ty\|_\beta < 1$. Por tanto se cumple que $\|Tx\|_\beta \leq \frac{2}{\delta} \sum\limits_{i=1}^{n} \|x\|_i$ para cada $x \in X$.

□

Corolario 1.1.22. *Sean $(X, \{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in I})$ y $(Y, \{\|\cdot\|_\beta\}_{\beta \in J})$ espacios localmente convexos, donde $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia saturada. Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal, entonces T es continua si y sólo si para cada $\beta \in J$ existen $\alpha \in I$ y $M > 0$ tales que si $\|x\|_\alpha = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|x\|_{\alpha_i}$, entonces*

$$\|Tx\|_\beta \leq M\|x\|_\alpha \tag{1.3}$$

para cada $x \in X$.

Demostración. Claramente si se cumple (1.3), entonces T es continua. Ahora si T es continua, dada $\beta \in J$ por la Proposición 1.1.21 existen $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in I$ y $M > 0$ tales que si $\|x\|_\alpha = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|x\|_{\alpha_i}$, entonces

$$\|T\|_\beta \leq M \sum_{i=1}^{n} \|x\|_i \leq nM\|x\|_\alpha.$$

□

Proposición 1.1.23. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico, si $f : X \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal no cero, entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

1. *f es continua.*

2. *Existe U vecindad del cero tal que $f(U)$ es acotado en $\mathbb{C}$.*

3. $\ker(f)$ *es cerrado.*

4. $\ker(f)$ *no es denso en X.*

5. *f es continua en 0.*

6. *$x \to |f(x)|$ es una seminorma continua.*

1.2. Topología débil.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. El dual algebraico $X^{\#}$ es el espacio vectorial formado por todos los operadores lineales de X sobre el campo $\mathbb{K}$. En este caso dichos operadores son llamados funcionales lineales.*

Definición 1.2.2. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Se define el dual topológico X^* de X como el subespacio de $X^{\#}$ que está formado por las funcionales lineales que son continuas con respecto a la topología τ.*

Definición 1.2.3. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y sea $x \in X$. La siguiente familia de subconjuntos de X es una base para una topología sobre X*

$$B(x) = \{U_{x,f_1,\dots f_k,\varepsilon_1,\dots\varepsilon_k} : f_1, \dots f_k \in X^*, \varepsilon_1, \dots \varepsilon_k > 0, k \in \mathbb{N}\}.$$

Donde $U_{x,f_1,\dots f_k,\varepsilon_1,\dots\varepsilon_k} = \{y \in X : |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon_i, 1 \leq i \leq k\}$.
A la topología generada por $B(x)$ se le llama la topología débil para X y se denotará por $\sigma(X, X^*)$, también se dice que es la topología débil para X generada por X^*, sus vecindades son las vecindades débiles.

Observación 1.2.4. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico y sea el dual X^*, entonces*

1. *$\sigma(X, X^*)$ está contenida en la topología τ pues dado $x \in X$*

$$U_{x,f_1,\dots f_k,\varepsilon_1,\dots\varepsilon_k} = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(-\varepsilon_i + f_i(x), \varepsilon_i + f_i(x)).$$

   Que es abierto en X con respecto a τ, pues $f_i \in X^*$ para toda $i = 1, \dots, k$.

2. *$\sigma(X, X^*)$ es la topología más débil con la propiedad que hace a todo $f \in X^*$ continuo, esto es si τ' es una topología para X que hace cada $f \in X^*$ continua, entonces $\sigma(X, X^*) \subseteq \tau'$.*

3. *$(X, \sigma(X, X^*))$ es un espacio vectorial topológico de Hausdorff.*

Definición 1.2.5. *Sean (X, τ) un espacio vectorial topológico y $(x_i)_{i\in I}$ una red en X. Decimos que $(x_i)_{i\in I}$ converge débilmente a x_0 si para toda vecindad débil U_{x_0} de x_0 existe $i_0 \in I$ tal que si $i_0 \leq i$, entonces $x_i \in U_{x_0}$. Esta convergencia será denotada por*

$$x_i \rightharpoonup x_0.$$

Proposición 1.2.6. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Una red $(x_i)_{i\in I}$ en X converge débilmente a x_0 si y sólo si la red $(f(x_i))_{i\in I}$ converge a $f(x_0)$ para toda $f \in X^*$.*

Demostración. Observemos que $x_i \rightharpoonup x$ si y sólo si $x_i - x \rightharpoonup 0$, así que basta con suponer que $x_i \rightharpoonup 0$. Supongamos $x_0 = 0$.
Sea $(x_i)_{i\in I}$ tal que $x_i \rightharpoonup 0$ y sea $f \in X^*$, veamos que $f(x_i) \to 0$. Tomemos $\varepsilon > 0$, claramente $U_0 = \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon\}$ es una vecindad débil de 0, entonces por hipótesis existe $i_0 \in I$ tal que si $i_0 \leq i$, entonces $x_i \in U_0$, y se sigue que $|f(x_i)| < \varepsilon$. Por tanto $f(x_i) \to 0$.
Ahora sabemos que para toda $f \in X^*$ se tiene que $f(x_i) \to 0$. Sea U_0 una vecindad débil del 0 de la forma

$$U_0 = \{x \in X : |f_1(x)| < \varepsilon_1, \ldots, |f_k(x)| < \varepsilon_k\}$$

donde $f_r \in X^*$ y $\varepsilon_r > 0$ para toda $r = 1, \ldots k$. Por hipótesis existe i_r tal que si $i_r \leq i$, entonces $|f_r(x_i)| < \varepsilon_r$ para toda $r = 1, \ldots k$. Tomando $i_0 = \max\limits_{1\leq r\leq k}$ y $i_0 \leq i$ se deduce que $x_i \in U_0$. Es decir $x_i \xrightarrow{w} 0$. □

Corolario 1.2.7. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si $x_i \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, entonces $x_i \xrightarrow{w} x$.*

1.3. Álgebras topológicas

En esta sección presentaremos las definiciones y propiedades básicas de un álgebra y un álgebra topológica sobre un campo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

Definición 1.3.1. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, decimos que E es un álgebra si hay una operación $\bullet : E \times E \to E$, llamada producto, que cumple las siguientes propiedades. Dados $x, y, z \in E$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:*

(a) $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$.

(b) $(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$.

(c) $\alpha(x \bullet y) = (\alpha x) \bullet y = x \bullet (\alpha y)$.

Si también se cumple que:

(d) $x \bullet y = y \bullet x$, *entonces decimos que* E *es un álgebra conmutativa.*

Y si existe un elemento $e \in E$ *tal que:*

(e) $e \bullet x = x \bullet e$, *para todo* $x \in E$. *Entonces* E *es llamado álgebra con unidad, y el elemento* e *la unidad en* E.

Por comodidad, escribiremos xy *en lugar* $x \bullet y$ *y* xyz *en vez de* $x \bullet (y \bullet z)$ *y* $(x \bullet y) \bullet z$.

Observación 1.3.2. *Es fácil probar que la unidad es única, ya que si* e' *es una unidad, entonces:*

$$e' = e \bullet e' = e.$$

Definición 1.3.3. *Sea* E *un álgebra y sea* B *un subconjunto de* E. *Decimos que* B *es una subálgebra de* E *si* B *es un subespacio tal que si* $b, b' \in B$, *entonces* $bb' \in B$.

Definición 1.3.4. *Sea* E *un álgebra. La función* $\circ : E \times E \to E$ *dada por*

$$x \circ y = x + y - xy,$$

es llamada la operación bolita en E.

Definición 1.3.5. *Sea* E *un álgebra, no necesariamente con unidad. Un elemento* $x \in E$ *es llamado casi-regular derecho (izquierdo) si existe* $y \in E$ *tal que* $x \circ y = 0$ $(y \circ x = 0)$; *el elemento* $y \in E$ *es llamado el casi-inverso derecho (izquierdo) de* x. *Decimos que* $x \in E$ *es casi-regular si es casi-reglar derecho y casi-regular izquierdo. Al conjunto de todos los elementos casi-regulares en* E *se denota por* Q_E. *Si un elemento* $x \in E$ *no es casi-regular, decimos que* x *es casi-singular.* [1]

Observación 1.3.6. *Sea* E *un álgebra y sea* $x \in E$, *entonces* $x \circ 0 = x$ *y* $0 \circ x = x$. *Se sigue que si* $x \in E$ *tiene casi-inverso derecho y casi-inverso izquierdo, entonces estos elementos son iguales.*

[1] Para más teoría de los elementos casi-invertibles se puede ver [1].

Definición 1.3.7. *Sea E un álgebra con unidad e y sea $x \in E$. Si existe $w \in E$ tal que $xw = e$ ($wx = e$), entonces se dice que x es invertible por la derecha (por la izquierda) y w es llamado inverso derecho de x (inverso izquierdo de x). Si x es invertible por la derecha y por la izquierda, entonces es llamado un elemento invertible de E. Al conjunto de todos los elementos invertibles de E se le denota por $G(E)$.*

Lema 1.3.8. *Sea E un álgebra con unidad e. Si $x \in E$ es invertible, entonces tiene un único inverso derecho, que también es su único inverso izquierdo.*

Demostración. Esto se sigue pues si:

$$xw = xw' = e \quad y \quad zx = e \qquad \text{entonces}$$

$$w = ew = zxw = zxw' = ew' = w';$$

así

$$ze = zxw = ew = w.$$

Por lo que x es invertible si y sólo si existe un único elemento, que vamos a denotar por x^{-1} tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. □

De manera inductiva definimos x^n para $x \in E$ y para toda $n \geq 1$ como:

- $x^1 = x$
- $x^n = x^{n-1}x$, si $n \geq 2$.

Si el álgebra E tiene unidad e, se define $x^0 = e$, y por definición si $x \in G(E)$ definimos $x^{-n} = (x^{-1})^n$.

Teorema 1.3.9. *Sea E un álgebra entonces:*

1. $0x = x0 = 0$.
2. *Si E tiene más de un elemento y tiene unidad e, entonces $e \neq 0$ y el cero no es invertible.*
3. *Si x,y son invertibles y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$, entonces xy y αx son invertibles, de hecho, sus inversos son $y^{-1}x^{-1}$ y $\alpha^{-1}x^{-1}$, respectivamente.*
4. *Si x es invertible, entonces x^n también lo es, y $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$.*

Demostración.
1. Es claro, pues $0x = (0+0)x = 0x + 0x$ y así $0 = 0x$.

2. Supongamos que $e = 0$ y sea $x \in E$, entonces $x = xe = e = 0$ por lo que E tiene un sólo elemento, lo cual contradice la hipótesis. Ahora si 0 es invertible, entonces existe x talque $0 = 0x = e$, así $0 = e$, lo que contradice lo anterior.
3. Notemos que:

$$xyy^{-1}x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e$$

$$y^{-1}x^{-1}xy = y^{-1}ey = y^{-1}y = e$$

y

$$\alpha^{-1}x^{-1}\alpha x = \alpha^{-1}\alpha x^{-1}x = 1e = e$$

$$\alpha x\alpha^{-1}x^{-1} = \alpha\alpha^{-1}xx^{-1} = 1e = e.$$

4. Base de inducción: Para $n = 1$ es claro.
Hipótesis de inducción: Supongamos válido para n; es decir $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$.
Paso inductivo: Veamos que el resultado es cierto para $n+1$, es decir $(x^{n+1})^{-1} = (x^{-1})^{n+1}$. Ahora $(x^{n+1})^{-1} = (x^n \cdot x)^{-1} = x^{-1}(x^n)^{-1} = x^{-1} \cdot (x^{-1})^n = (x^{-1})^{n+1}$

□

Observación 1.3.10. *Sea E un álgebra con unidad e. Entonces x es casi-regular derecho (izquierdo) si y sólo si $e - x$ es invertible por la derecha (izquierda).*

En lo siguiente, a menos que se mencione lo contrario, trabajaremos con álgebras que tengan más de un punto.

Definición 1.3.11. *Sea E un álgebra con una topología τ. Se dice que la pareja (E, τ) es un álgebra topológica si (E, τ) es un espacio vectorial topológico y el producto definido en E es continuo con respecto a la topología τ.*

Proposición 1.3.12. *Sea E un álgebra con una topología vectorial τ en E. El producto en $E \times E$ es continuo si y sólo si es continuo en $(0,0) \in E \times E$.*

Demostración. Como el producto es continuo en E, en particular es continuo en $(0,0)$.
Para demostrar la otra implicación sean $(x_0, y_0) \in E \times E$ y V una vecindad de 0. Entonces sabemos que existe W' vecindad balanceada de 0 tal que $W' + W' \subseteq V$. Nuevamente sabemos que existen una vecindad balanceada W_1 tal que $W_1 + W_1 \subseteq W'$, además $W' \cap W_1 \subseteq W_1$ y $W' \cap W_1 \subseteq W'$. Si consideramos $W = W' \cap W_1$, entonces W es una vecindad balanceada y se cumple que $W + W + W \subseteq W' + (W_1 + W_1) \subseteq W' + W' \subseteq V$.

Tomemos $(x, y) \in E \times E$, entonces tenemos que

$$xy - x_0y_0 = (x - x_0)(y - x_0) + x_0(y - y_0) + (x - x_0)y_0.$$

Así, si $(x, y) \in (x_0 + \lambda U) \times (y_0 + \lambda U)$, entonces

$$x - x_0 = \lambda u_0, \qquad u_0 \in U$$

$$y - y_0 = \lambda u_1 \qquad u_1 \in U.$$

Luego $(x-x_0)(y-y_0) = \lambda^2 u_0u_1$, de donde $xy-x_0y_0 \in \lambda^2 UU+\lambda x_0U+\lambda Uy_0$, por tanto $xy - x_0y_0 \in W + W + W \subseteq V$, que es lo mismo que $xy \in x_0y_0 + V$ si $(x, y) \in (x_0+\lambda U)\times(y_0+\lambda U)$. Como λU es una vecindad de 0, concluimos que el producto es continuo en (x, y).

□

Definición 1.3.13. *Se dice que un álgebra topológica (E, τ) es localmente convexa, si (E, τ) es un espacio localmente convexo.*

Teorema 1.3.14. *Sean E un álgebra con una topología lineal τ localmente convexa y $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia saturada de seminormas que generan a τ. Entonces E es un álgebra localmente convexa, es decir, su producto es continuo, si y sólo si para cada $\| \ \|_{\alpha_0} \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, existen $\| \ \|_\beta \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ y $t > 0$ tales que:*

$$\|xy\|_{\alpha_0} \leq t\|x\|_\beta\|y\|_\beta \qquad\qquad \forall\ x, y \in E.$$

Demostración. Supongamos que el producto en $E\times E$ es continuo, entonces en particular es continuo en $(0,0)$, así dado $\| \ \|_{\alpha_0} \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ y $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ talque si $\|x\|_\beta < \delta$ y $\|y\|_\beta < \delta$, entonces $\|xy\|_{\alpha_0} < 1$.
Afirmamos que $\|xy\|_{\alpha_0} \leq \frac{4}{\delta^2}\|x\|_\beta\|y\|_\beta$ con $x, y \in E$.
Si $\|x\|_\beta \neq 0$ y $\|y\|_\beta \neq 0$, entonces $\left\|\frac{\delta x}{2\|x\|_\beta}\right\|_\beta < \delta$ y $\left\|\frac{\delta y}{2\|y\|_\beta}\right\|_\beta < \delta$. Luego

$$\left\|\frac{\delta x}{2\|x\|_\beta}\frac{\delta y}{2\|y\|_\beta}\right\|_{\alpha_0} = \frac{\delta^2}{4\|x\|_\beta\|y\|_\beta}\|xy\|_{\alpha_0} < 1,$$

y se sigue que $\|xy\|_{\alpha_0} < \frac{4}{\delta^2}\|x\|_\beta\|y\|_\beta$.
Si $\|x\|_\beta = 0$ y $\|y\|_\beta \neq 0$. Como $\|\lambda x\|_\beta = 0$ para toda $\lambda > 0$, entonces

$$\left\|\lambda x \frac{\delta y}{2\|y\|_\beta}\right\|_{\alpha_0} = \frac{\lambda\delta}{2\|y\|_\beta}\|xy\|_{\alpha_0} < 1.$$

Así obtenemos que $\|xy\|_{\alpha_0} < \frac{2}{\lambda\delta}\|y\|_\beta$, y si $\lambda \to \infty$, entonces $\|xy\|_{\alpha_0} = 0$, que es lo que queríamos demostrar. De manera análoga obtenemos el resultado si $\|x\|_\beta \neq 0$ y $\|y\|_\beta = 0$.
Finalmente si $\|x\|_\beta = 0$ y $\|y\|_\beta = 0$, entonces $\|\lambda x\|_\beta = 0$ y $\|\lambda y\|_\beta = 0$ para toda $\lambda > 0$, de donde

$$\|\lambda x \lambda y\|_{\alpha_0} = \lambda^2\|xy\|_{\alpha_0} < 1.$$

Nuevamente esto implica que $\|xy\|_{\alpha_0} < \frac{1}{\lambda^2}$. Si $\lambda \to \infty$, entonces $\|xy\|_{\alpha_0} = 0$.
Por tanto $\|xy\|_{\alpha_0} \leq \frac{4}{\delta^2}\|x\|_\beta\|y\|_\beta$ en todos los casos.

Inversamente, sea $\| \ \|_{\alpha_0} \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, por hipótesis existen $t > 0$ y $\| \ \|_\beta \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ tales que para toda $x, y \in E$, se tiene que

$$\|xy\|_{\alpha_0} \leq t\|x\|_\beta\|y\|_\beta.$$

Entonces, si $\|x\|_\beta < (\frac{\varepsilon}{t})^{\frac{1}{2}}$ y $\|y\|_\beta < (\frac{\varepsilon}{t})^{\frac{1}{2}}$, se tiene que

$$\|xy\|_{\alpha_0} \leq t\|x\|_\beta\|y\|_\beta < t\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

Así, el producto en E es continuo en $(0, 0)$ y por tanto en E. □

Corolario 1.3.15. *Un álgebra E con topología lineal τ es un álgebra localmente convexa si y sólo si su topología τ puede definirse por una familia saturada de seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ que satisface que para cada $\| \ \|_\alpha \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ existe una seminorma $\| \ \|_\beta \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ tal que*

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta\|y\|_\beta$$

si $x, y \in E$.

Demostración. Supongamos que hay una familia saturada de seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ que define la topología τ y satisface la desigualdad anterior, entonces $\{\| \ \|_\alpha\}\alpha \in \Delta$ satisface también la desigualdad del Teorema 1.3.14 y así (E, τ) es un álgebra localmente convexa.

Inversamente, si (E, τ) es un álgebra localmente convexa, entonces consideremos la familia $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de todas las seminormas en E continuas con respecto a la topología τ. Sabemos, por la Proposición 1.1.20, que es una familia saturada de seminormas que genera a la topología τ, y por el teorema anterior, dada $\| \ \|_\alpha \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, existen $\| \ \|_{\beta_0} \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ y $t > 0$ tales que

$$\|xy\|_\alpha \leq t\|x\|_{\beta_0}\|y\|_{\beta_0}$$

con $x, y \in E$.
Ahora bien, la función $\| \ \|_\beta = \sqrt{t}\| \ \|_{\beta_0}$ es una seminorma en E que es τ-continua, ya que $\| \ \|_{\beta_0}$lo es. De esta forma se cumple que $\| \ \|_\beta \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ y así

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta\|y\|_\beta$$

con $x, y \in E$.

□

Definición 1.3.16. *Un álgebra localmente convexa E es llamada m-convexa si su topología se puede se puede definir por una topología de seminormas $\{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ que satisface que*

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha\|y\|_\alpha$$

para $x, y \in E$ y $\| \ \|_\alpha \in \{\| \ \|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$.

Ejemplos de álgebras localemente convexas

Los espacios $C(X)$ y $C_b(X)$ de las funciones complejas continuas y de las funciones continuas acotadas, respectivamente, definidas en un conjunto no vacío X, son ejemplos de álgebras conmutativas con unidad, con las operaciones usuales de las funciones. La función constante 1 es la unidad de dichas álgebras.

1. Sea $C(X)$ con la topología *compacto-abierta* generada por la familia de seminormas $\|f\|_K = \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$, donde K es un subconjunto compacto no vacío de X. Esta topología hace a $C(X)$ un álgebra localmente convexa. Veamos que esta familia es saturada.
   Probaremos que $\text{máx}(\|f\|_{K_1}, \|f\|_{K_2}) = \|f\|_{K_1\cup K_2}$, con K_1 y K_2 compactos no vacíos de X. Sea $|f(x)| \in \{|f(x)| : x \in K_1 \cup K_2\}$, entonces $|f(x)| \in \{|f(x)| : x \in K_1\}$, si $x \in K_1$ o $|f(x)| \in \{|f(x)| : x \in K_2\}$ si $x \in K_2$, así $|f(x)| \leq \|f\|_{K_1} \leq \text{máx}(\|f\|_{K_1}, \|f\|_{K_2})$ o $|f(x)| \leq \|f\|_{K_2} \leq$

$\max(\|f\|_{K_1}, \|f\|_{K_2})$, por tanto $\|f\|_{K_1\cup K_2} \leq \max(\|f\|_{K_1}, \|f\|_{K_2})$. Observemos que $\|f\|_{K_1\cup K_2} \geq |f(x)|$, para todo $|f(x)| \in \{|f(x)| : x \in K_1 \cup K_2\}$, así si $x \in K_1$ entonces $\|f\|_{K_1\cup K_2} \geq \|f\|_{K_1}$, análogamente para $x \in K_2$, $\|f\|_{K_1\cup K_2} \geq \|f\|_{K_2}$, por tanto $\|f\|_{K_1\cup K_2} \geq \max(\|f\|_{K_1}, \|f\|_{K_2})$, se concluye que dicha familia es saturada.

De esta forma, $C(X)$ es un m-álgebra convexa, ya que

$$\|fg\|_K \leq \|f\|_K \|g\|_K.$$

Se dice que una función compleja φ definida sobre un espacio topológico X *se anula al infinito*, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \subset X$ compacto tal que

$$|\varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad x \notin K.$$

Las funciones continuas y positivas que se anulan al infinito y las funciones acotadas positivas que se anulan al infinito se denotan por C_0^+ y B_0^+, respectivamente.
Un ejemplo de este tipo de funciones son las funciones con *soporte compacto*. Recordamos que el soporte de una función compleja f definida en un espacio topológico X se define como

$$\text{sop} = \overline{\{x \in K : f(x) \neq 0\}}.$$

Y se tiene que si $\varepsilon > 0$, entonces existe $K = \text{sop}(f)$ tal que

$$0 = |f(x)| < \varepsilon \quad \text{si } x \notin K.$$

Las funciones continuas, positivas, con soporte compacto y las funciones acotadas, positivas, con soporte compacto, se denotan por C_{00}^+ y B_{00}^+, respectivamente.

2. Cuando X es un espacio topológico localmente compacto se define en $C_b(X)$ la *topología estricta de Buck* que hace a $C_b(X)$ un álgebra localmente convexa. Esta topología está generada por la familia saturada de seminormas definidas en $C_b(X)$ como

$$\|f\|_\varphi = \sup_{x\in X} |f(x)|\varphi(x)$$

donde $\varphi \in C_0^+(X)$.
Como $\varphi \in C_0^+(X)$ entonces $\sqrt{\varphi} \in C_0^+(X)$. Pues si tomamos $\varepsilon^2 > 0$, entonces existe $K \subseteq X$ compacto tal que $\varphi(x) < \varepsilon^2$, entonces $\sqrt{\varphi} < \varepsilon$ y así $|\sqrt{\varphi}| < \varepsilon$. Por tanto $\|fg\|_\varphi \leq \|f\|_{\sqrt{\varphi}}\|g\|_{\sqrt{\varphi}}$, así por el Teorema 1.3.14 se sigue que $C_b(X)$ es localmente convexa.

3. Sea $C_b(X)$ con la topología *uniforme* que está determinada por la *norma del supremo* $\|\cdot\|_\infty$. Recordemos que $C_b(X)$es un espacio de Banach con $\|\cdot\|_\infty$. Más aún, es un álgebra de Banach ya que
$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$
Cuando X es compacto $C(X) = C_b(X)$, y por tanto, $C(K)$ es un álgebra de Banach con la norma uniforme, si K es compacto.

4. El álgebra $B(E)$ de los operadores continuos acotados de un álgebra E normada en sí misma.

1.4. Los espectros de un álgebra.

Definición 1.4.1. *Sean E y F dos álgebras sobre el campo $\mathbb{K}$. Una transformación lineal $\varphi : E \longrightarrow F$ es un homomorfismo de álgebras si*
$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \textit{con } x, y \in E. \tag{1.4}$$
Un isomorfismo de álgebras es un homomorfismo biyectivo.

Cuando $F = \mathbb{C}$, también usaremos el nombre de *funcional lineal multiplicativa o carácter* . Si φ es cualquier función que cumple (1.4) es llamada una *función multiplicativa.*

Definición 1.4.2. *El espectro algebraico de un álgebra topológica E es el conjunto*
$$\mathcal{M}^{\#}(E) = \{\varphi : \varphi \textit{ es un carácter no nulo en } E\}.$$
Definimos el espectro (topológico) de E como
$$\mathcal{M}(E) = \{\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(E) : \varphi \textit{ es continuo}\}.$$

Definición 1.4.3. *Sea E un álgebra con unidad e. Un subespacio vectorial I de E es llamado ideal izquierdo (derecho) de E, si para cada $x \in E$ y $y \in I$ se tiene que $xy \in I$ ($yx \in I$). Y se dice que es un ideal bilateral si es ideal izquierdo y derecho. Un ideal izquierdo (derecho, bilateral) M es máximo izquierdo (derecho, bilateral), si $M \neq E$ no existe un ideal izquierdo (derecho, bilateral) I tal que $M \subsetneq I \subsetneq E$.*

Del Lema de Zorn se sigue que si E es un álgebra con unidad e, entonces cada ideal izquierdo (derecho, bilateral) I está contenido en algún ideal izquierdo (derecho, bilateral) máximo.

Observación 1.4.4. *Sea E un álgebra con unidad e, entonces la intersección de una familia arbitraria de ideales izquierdos (derechos, bilaterales), es un ideal izquierdo (derecho, bilateral).*

Demostración. Sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de conjuntos y consideremos $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$. Supongamos que cada I_α es un ideal izquierdo y sean $x \in E$ y $y \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$, veamos que $xy \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} I_i$. Como $y \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$, entonces $y \in I_\alpha$ para toda $\alpha \in \Lambda$, entonces $xy \in I_\alpha$ para toda α, así $xy \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$.
Análogamente si $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de ideales derechos (bilaterales). □

Teorema 1.4.5. *Sea E un álgebra con unidad e, entonces todo $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(E)$ satisface que:*

a) $\varphi(e) = 1$.

b) $\varphi(x) \neq 0$ *si x es invertible.*

c) $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ *si x es invertible.*

d) $\ker(\varphi)$ *es un ideal bilateral máximo.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(E)$.
a) Existe un elemento $y \in E$ tal que $\varphi(y) \neq 0$, ya que $\varphi \neq 0$. Entonces

$$\varphi(y) = \varphi(ey) = \varphi(e)\varphi(y),$$

de donde se concluye que $\varphi(e) = 1$.

Para demostrar *b*) y *c*) usaremos el inciso *a*). Sabemos que:

$$1 = \varphi(e) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}),$$

entonces $\varphi(x) \neq 0$ y así $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$.

d) El kernel de una funcional lineal es un subespacio vectorial. Por otra parte, si $x \in \ker(\varphi)$ y $y \in E$ entonces:

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = 0$$

y

$$\varphi(yx) = \varphi(y)\varphi(x) = 0.$$

Por tanto $xy, yx \in \ker(\varphi)$. Es decir, $\ker(\varphi)$ es un ideal bilateral. Por último demostraremos que $ker(\varphi)$ es un ideal máximo, de hecho probaremos que es un espacio lineal maximal.
Como φ es no nula, se tiene entonces que $\ker(\varphi) \neq E$. Sea S un subespacio lineal de E talque $\ker(\varphi) \subsetneq S$. Tomemos $x \in S \setminus \ker(\varphi)$ y llamemos N al subespacio generado por $\ker(\varphi)$ y x, entonces $N \subset S$.
Para $y \in E$ se tiene que:

$$y = \left(y - \frac{x}{\varphi(x)}y\right) + \frac{x}{\varphi(x)}y.$$

Se puede ver fácilmente que $\left(y - \frac{x}{\varphi(x)}y\right) \in \ker(\varphi)$ y el segundo sumando es un múltiplo de y; por lo que pertenece a N. Es decir, $E = N = S$ por lo que $\ker(\varphi)$ es un subespacio maximal y por consiguiente, por ser ideal, es máximo.

□

Corolario 1.4.6. *Sean E un álgebra con unidad e, $x \in E$ y $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(E)$, entonces el elemento $x - \varphi(x)e$ no es invertible.*

Demostración. Se tiene que

$$\varphi(x - \varphi(x)e) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(e) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0,$$

y por inciso b) del Teorema 1.4.5 se tiene que $x - \varphi(x)e$ es no invertible. □

Veamos ahora un ejemplo donde el espectro $\mathcal{M}^{\#}(E)$ de un álgebra compleja con unidad es vacío:

Ejemplo 1.4.7. *Sea E el álgebra de las matrices complejas de 2×2, consideremos*

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ M_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$M_{12}^2 = M_{21}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y$$

$$M_{12}M_{21} + M_{21}M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Supongamos que $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ *es una funcional lineal multiplicativa, no nula. Entonces*

$$\varphi(M_{12}^2) = \varphi(M_{12})^2 = 0 = \varphi(M_{21}^2) = \varphi(M_{21})^2.$$

Así $\varphi(M_{12}) = \varphi(M_{21}) = 0$, *de donde se tiene que*

$$\varphi(M_{12}M_{21} + M_{21}M_{12}) = \varphi(M_{12})\varphi(M_{21}) + \varphi(M_{21})\varphi(M_{12}) = 0.$$

Entonces $\varphi(I) = 0$, *y* $\varphi = 0$, *pues en caso contrario* $\varphi(I) = 1$. *Así* $\mathcal{M}^{\#}(E) = \emptyset$.

Definición 1.4.8. *Sea* E *un álgebra con unidad* e *y sea* $x \in E$. *El espectro* $\sigma(x)$ *de* x *se define como:*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G(E)\}.$$

El radio espectral de x *es*

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

si $\sigma(x) \neq \emptyset$, *en caso contrario se define como* $r(x) = 0$. *Por último definimos el conjunto resolvente de* x *en* E *como* $\rho(x) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.

Observación 1.4.9. *Sea* E *un álgebra con unidad* e *y sea* $x \in E$. *Entonces* $\sigma(x) = \{0\}$ *si y sólo si* $r(x) = 0$.

Observación 1.4.10. *Sea* E *un álgebra. Si* C *una subálgebra de* E, *entonces escribimos* $\sigma_C(x)$ *para todo* $x \in C$ *al espectro relativo a* C. *En particular, cuando* $C = E$ *escribimos simplemente* $\sigma(x)$.

Ejemplo 1.4.11. *a)* La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es un elemento del álgebra real con unidad, $M_{2x2}(\mathbb{R})$, de las matrices reales de 2×2.

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \{\lambda \in \mathbb{R} : A - \lambda I \text{ no tiene inverso}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \det(A - \lambda I) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda^2 + 1) = 0\} = \emptyset. \end{aligned}$$

b) En el campo $\mathbb{E}$ de funciones racionales $\frac{p(x)}{q(x)}$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ se cumple que $\left(\frac{p(x)}{q(x)} - \lambda\right)$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ tiene inverso, al menos que $\frac{p(x)}{q(x)} = \lambda$.
Así $\sigma\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \emptyset$, al menos que $\frac{p(x)}{q(x)} = \lambda$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorema 1.4.12. *[Teorema del mapeo espectral] Sea E un álgebra compleja. Para todo polinomio $p(z)$ no constante con coeficientes en $\mathbb{C}$ y cualquier $x \in E$ se tiene que*

$$\sigma(p(x)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}. \tag{1.5}$$

En particular, si p no es constante, entonces $\sigma(p(x)) = \emptyset$ si y sólo si $\sigma(x) = \emptyset$. Si $\sigma(x) \neq \emptyset$ la igualdad (1.5) es válida inclusive cuando p es constante.

Demostración. Sea $\mu = p(\lambda)$ con $\lambda \in \sigma(x)$. Consideremos $q(z) = p(z) - p(\lambda)$, entonces $q(\lambda) = 0$, factorizando a q en factores lineales tenemos que

$$q(z) = \gamma(z - \lambda)(z - \lambda_1)\cdots(z - \lambda_n),$$

para $\gamma, \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{C}$, con $\gamma \neq 0$. Entonces

$$q(x) = \gamma(x - \lambda e)(x - \lambda_1 e)\cdots(x - \lambda_n e).$$

Así $q(x) = p(x) - p(\lambda)e \notin G(E)$, ya que si $q(x) = p(x) - p(\lambda)e \in G(E)$, entonces existe $y \in E$ tal que

$$e = y(\gamma(x - \lambda e)(x - \lambda_1 e)\cdots(x - \lambda_n e))$$

y

$$e = (\gamma(x - \lambda e)(x - \lambda_1 e)\cdots(x - \lambda_n e)y,$$

lo cual implica que $x - \lambda e$ es invertible, lo cual contradice $\lambda \in \sigma(x)$.
Por otro lado sea $\mu \in \sigma(p(x))$ y sea $q(z) = p(z) - \mu$, entonces factorizando q tenemos que

$$q(z) = \gamma(z - \lambda_1)\cdots(z - \lambda_n),$$

para $\gamma, \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{C}$, con $\gamma \neq 0$. Entonces

$$q(x) = p(x) - \mu e = \gamma(z - \lambda_1)\cdots(z - \lambda_n).$$

Por hipótesis, como $p(x) - \mu e \notin G(E)$ se tiene que $x - \lambda_k e \notin G(E)$, para algún k, es decir $\lambda_k \in \sigma(x)$. Además $\mu = p(\lambda_k)$ para cualquier k, ya que $p(\lambda_k) - \mu = 0$. Entonces $\mu \in \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$. $\square$

Observación 1.4.13. *Sea E un álgebra compleja y sea $x \in E$. Supongamos que U es una vecindad abierta no vacía de $\sigma(x)$, que puede ser vacío. Si f es una funcional racional definida en U, entonces $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ con $p(z)$ y $q(z)$ funciones racionales. Además, $q(z)$ no tiene ceros en U. Entonces $q(x) \in G(E)$ si q es constante y cuando no lo es se sigue del Teorema 1.4.12 que $0 \notin \{q(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\} = \sigma(q(x))$ por lo que $q(x) \in G(E)$. Lo anterior nos permite definir el elemento $f(x) \in E$ como $f(x) = p(x)(q(x))^{-1}$. Denotaremos por $R(U)$ al espacio de funciones racionales definidas en U.*

Teorema 1.4.14. *Teorema del mapeo espectral para funciones racionales Sea E un álgebra compleja y sean $x \in E$ y U una vecindad no vacía de $\sigma(x)$. Entonces para todo $f \in R(U)$ se cumple que $f \to f(x)$ es un homomorfismo del espacio $R(U)$ de funciones racionales definidas en U al álgebra E y además:*

$$\sigma(f(x)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\}$$

Para toda $f \in R(U)$ no constante. Si $\sigma(x) \neq \emptyset$ la igualdad anterior es válida inclusive cuando f es constante.

Demostración. La prueba se puede encontrar en la [9, pág 13]. □

Lema 1.4.15. *Sea E un álgebra compleja con unidad e y sean $x, y \in E$. Entonces*

$$\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Supongamos que $\lambda \notin \sigma(xy)$, entonces existe $z \in E$ tal que

$$z(\lambda e - xy) = (\lambda e - xy)z = e.$$

Necesitamos ver que $\lambda \notin \sigma(xy)$. Para eso probemos que $\lambda^{-1}(e + yzx)$ es el inverso de $\lambda e - yx$, es decir

$$(e + yzx)(\lambda e - yx) = (\lambda e - yx)(e + yzx) = \lambda e.$$

Por un lado, tenemos que

$$(e + yzx)(\lambda e - yx) = \lambda e - yx + \lambda yzx - yzxyx$$

$$= \lambda e - yx + yz(\lambda e - xy)x$$

$$= \lambda e - yx + yx = \lambda e.$$

Análogamente, tenemos que

$$(\lambda e - yx)(e + yzx) = \lambda e - yx + \lambda yzx - yxyzx$$

$$= \lambda e - yx + y(\lambda e - xy)zx$$

$$= \lambda e - yx + yx = \lambda e.$$

Por tanto $\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}$. □

Corolario 1.4.16. *Sea E un álgebra compleja con unidad e y sean $x, y \in E$. Entonces $r(xy) = r(yx)$.*

Teorema 1.4.17. *Sea E un álgebra compleja y sea $x \in E$ un elemento invertible, entonces $\sigma(x^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(x)\}$.*

Demostración. Sea $\mu \in \sigma(x^{-1})$, entonces $x^{-1} - \mu e \notin G(E)$ y:

$$x^{-1} - \mu e = x^{-1}e - \mu(xx^{-1}) = x^{-1}\mu(\mu^{-1}e - x) \notin G(E)$$

por lo que $\mu^{-1}e - x \notin G(E)$ y así, $\mu^{-1} \in \sigma(x)$. Por tanto, $\mu \in \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(x)\}$.
Análogamente sea λ^{-1} tal que $\lambda \in \sigma(x)$, entonces, $x - \lambda e \notin G(E)$ y como

$$x - \lambda e = x - \lambda(xx^{-1}) = x\lambda(e\lambda^{-1} - x^{-1}) \notin G(E)$$

se sigue que, $e\lambda^{-1} - x^{-1} \notin G(E)$. Por tanto $\lambda^{-1} \in \sigma(x^{-1})$. □

Definición 1.4.18. *Sea I un ideal bilateral de un álgebra E, entonces el espacio cociente E/I es un álgebra, donde el producto se define como $\overline{x}\overline{y} = \overline{xy}$, para todo $\overline{x}, \overline{y} \in E/I$.*

Observemos que el producto está bien definido ya que si $\overline{x_1} = \overline{x_2}$ y $\overline{y_1} = \overline{y_2}$, entonces $x_1 - x_2, y_1 - y_2 \in I$ y por ser I un ideal bilateral $(x_1 - x_2)y_2$, $x_1(y_1 - y_2) \in I$, donde $x_1y_1 - x_2y_2 = (x_1 - x_2)y_2$, $x_1(y_1 - y_2) \in I$, por tanto $\overline{x_1x_2} = \overline{y_1y_2}$. Además si E es un álgebra con unidad, entonces $\overline{e}\,\overline{x} = \overline{ex} = \overline{x} = \overline{xe} = \overline{x}\,\overline{e}$, por lo que $\overline{e}$ es el neutro multiplicativo en E/I.

Proposición 1.4.19. *Si I es un ideal bilateral de un álgebra E, entonces la proyección canónica $\pi : E \longrightarrow E/I$, $x \longrightarrow \overline{x}$, es un homomorfismo de álgebras.*

Demostración. Sabemos que π es una transformación lineal, ya que $\pi(\lambda x + y) = \overline{\lambda x + y} = \lambda x + y + I = \lambda(x + I) + y + I = \lambda\overline{x} + \overline{y} = \lambda\pi(x) + \pi(y)$, con $x, y \in E$. Además $\pi(xy) = \overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y} = \pi(x)\pi(y)$. □

Observación 1.4.20. *Sean E un álgebra con unidad e, I un ideal bilateral y $x \in G(E)$. En en álgebra cociente E/I, se cumple $\overline{x}\,\overline{x^{-1}} = \overline{xx^{-1}} = \overline{e} = \overline{x^{-1}x} = \overline{x^{-1}}\,\overline{x}$, por tanto $\overline{x} \in G(E/I)$ y además $\overline{x}^{-1} = \overline{x^{-1}}$.*

Teorema 1.4.21. *Si E es un álgebra m-convexa con unidad e, entonces la función inversión $x \longrightarrow x^{-1}$, del grupo $G(E)$ de los elementos invertibles en sí mismo, es un homeomorfismo. En particular, esto es válido para álgebras normadas.*

Demostración. Sea $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia saturada de seminormas submultiplicativas que definen la topología de E.

Como la función inversa de la inversión es ella misma, basta probar que la inversión es continua. Veamos primero que dicha función es continua en e; es decir que si $(x_i)_{i\in I}$ es una red en $G(E)$ tal que $(x_i)_{i\in I} \to e$, entonces $(x_i)_{i\in I}^{-1} \to e$.
Sea $\beta \in \Delta$ y $\varepsilon > 0$. Para todo $x \in G(X)$, se cumple que

$$\|x^{-1}\|_\alpha - \|e\|_\alpha \leq \|x^{-1} - e\|_\alpha = \|(e-x)x^{-1}\|_\alpha \leq \|e-x\|_\alpha \|x^{-1}\|_\alpha$$

ya que $\|\cdot\|_\alpha$ es submultiplicativa. Por otra parte, existe $i_0 > 0$ tal que para todo $i > i_0$ sucede que $\|x_i - e\|_\alpha < \text{mín}\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2\|e\|_\alpha+1}\right)$. Entonces, si $i > i_0$ se tiene que

$$\|x_i^{-1}\|_\alpha - \|e\|_\alpha \leq \|e - x_i\|_\alpha \|x_i^{-1}\|_\alpha \leq \frac{1}{2}\|x_i^{-1}\|_\alpha$$

de donde $\frac{1}{2}\|x_i^{-1}\|_\alpha \leq \|e\|_\alpha$ y además:

$$\|x_i^{-1} - e\|_\alpha \leq \|e - x_i\|_\alpha \|x_i^{-1}\|_\alpha \leq \left(\frac{\varepsilon}{2\|e\|_\alpha + 1}\right)(2\|e\|_\alpha) < \varepsilon;$$

es decir $x_i^{-1} \to e$ en $(X, \|\cdot\|_\alpha)$. De acuerdo al Teorema 1.1.20, $x_i^{-1} \to e$ en el espacio localmente convexo E.

Si $x_0 \in G(E)$ y $(x_i)_{i\in I}^{\infty}$ es una red en $G(E)$ que converge en x_0, por la continuidad de la multiplicación se tiene que $x_i x_0^{-1} \to e$ en E y por tanto $(x_0 x_i^{-1}) = (x_i x_0^{-1})^{-1} \to e$. Así $x_i^{-1} \to x_0^{-1}$.

□

Definición 1.4.22. *Un álgebra topológica E es completa si lo es como espacio vectorial topológico; es decir si toda red de Cauchy es convergente. Si E es metrizable, entonces es completa si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

1.5. Álgebras topológicas cociente

Proposición 1.5.1. *Sea E un álgebra topológica, entonces la cerradura de todo ideal izquierdo (derecho, bilateral) de E es un ideal izquierdo (derecho, bilateral) de E.*

Demostración. Sea I un ideal izquierdo. Es claro que $\bar{I}$ es un subespacio vectorial de E. Tomemos $y \in \bar{I}$ y $x \in E$. Sea V_{xy} una vecindad de xy en

E. Veamos que $V_{xy} \cap I \neq \emptyset$; así quedará demostrado que $xy \in \bar{I}$. Por la continuidad del producto, sabemos que existen W_x y W_y vecindades de x y y respectivamente, talque $W_x W_y \subseteq V_{xy}$, en particular $xW_y \subseteq V_{xy}$. Como $y \in \bar{I}$, entonces $W_y \cap I \neq \emptyset$, así existe $w \in W_y \cap I$. Entonces $xw \in V_{xy}$ y por ser I ideal izquierdo $xw \in I$. Por tanto $xw \in V_{xy} \cap I$. □

Lema 1.5.2. *Si $\|\cdot\|$ es una seminorma submultiplicativa y continua en un álgebra topológica E, entonces $ker\|\cdot\| = \{x \in E : \|x\| = 0\}$ es un ideal bilateral y es cerrado.*

Demostración. Claramente $\ker\|\cdot\|$ es un subespacio de E, pues como $\|\cdot\|$ es una seminorma, se tiene que $0 \in \ker\|\cdot\|$, además si $x, y \in E$ entonces $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| = 0$, por lo que $\|x+y\| = 0$ y si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| = 0$. Sea $z \in E$, como $\|\cdot\|$ es submultiplicativa, se tiene $\|zx\| \leq \|z\|\|x\| = 0$ y $\|xz\| \leq \|x\|\|z\| = 0$. Por tanto $\ker\|\cdot\|$ es un ideal bilateral y es cerrado por ser la imagen inversa del cerrado $\{0\}$, bajo la función continua $\|\cdot\|$. □

Teorema 1.5.3. *Si $\|\cdot\|$ es una seminorma submultiplicativa en un álgebra E e I es un ideal bilateral de E, entonces la seminorma cociente $\|\cdot\|_I$ en E/I es submultiplicativa y si I es cerrado en $(E, \|\cdot\|)$ y $\|\cdot\|$ no nula, entonces $\|\cdot\|_I$ es una norma en E/I. Por tanto $(X/I, \|\cdot\|_I)$ es un álgebra seminormada en el primer caso y es normada en el segundo. Si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra p-normada e I es un ideal bilateral cerrado, entonces $(E/I, \|\cdot\|_I)$ es un álgebra p-normada. En todos los casos, el homomorfismo cociente*

$$\pi : (E, \|\cdot\|) \to (E/I, \|\cdot\|_I)$$

es continuo y abierto.

Demostración. Sabemos que I es un subespacio vectorial de E. Basta probar que $\|\bar{x}\bar{y}\|_I \leq \|\bar{x}\|_I \|\bar{y}\|_I$. Veamos que se cumple $\|\bar{x}\bar{y}\|_I \leq \|x+z\|\|y+w\|$ con $z, w \in I$:

$$\|x+z\|\|y+w\| \geq \|(x+z)(y+w)\| = \|xy+xw+zy+zw\| \geq \inf_{u \in I} \|xy+u\| = \|\bar{x}\bar{y}\|_I$$

Así al sacar ínfimos tenemos que $\|\bar{x}\|_I \|\bar{y}\|_I \geq \|\bar{x}\bar{y}\|_I$.
Si I es un ideal cerrado y $\|\cdot\|$ no nula, entonces $\|\overline{x}\| = 0$ si y sólo si $\inf\limits_{u \in I} \|x+u\| = 0$ si y sólo si $\inf\limits_{u \in I} \|x-u\| = 0$ si y sólo si $d(x, \overline{I}) = 0$ si y sólo si $x \in \overline{I} = I$ si y sólo si $\overline{x} = 0$. Por tanto $\|\cdot\|_I$ es norma en E/I y así

$(E/I, \|\cdot\|_I)$ es un álgebra normada.
Por último, si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra p-normada, e I es un ideal bilateral cerrado en E, $(E/I, \|\cdot\|_I)$ es un álgebra p-normada pues se vale la primera parte de la prueba. Ahora si $x \in E$ y $\lambda = 0$ entonces se vale claramente $\|\lambda\bar{x}\|_I = |\lambda|^p\|\bar{x}\|_I$ y si $\lambda \neq 0$, entonces

$$\|\lambda\bar{x}\|_I = \inf_{y\in I}\|\lambda x + y\| = \inf_{y\in I}\|\lambda(x + \lambda^{-1}y)\| = |\lambda|^p \inf_{y\in I}\|x + \lambda^{-1}y\| = |\lambda|^p\|\bar{x}\|_I.$$

□

1.6. Radical de Jacobson

Definición 1.6.1. *Sea E un álgebra con unidad e, definimos el radical de Jacobson de E como:*

$$Rad(E) = \bigcap\{M \subseteq E : M \textit{ es un ideal maximo izquierdo de } E\}.$$

Por la Observación 1.4.4, $Rad(E)$ es un ideal izquierdo. De hecho vamos a probar que es un ideal bilateral.

Lema 1.6.2. *Sean $x, y \in E$, si $e - xy$ tiene inverso izquierdo (derecho), entonces $e - yx$ tiene inverso izquierdo (derecho).*

Demostración. Supongamos que existe $z \in E$ tal que $e = z(e-xy) = z-zxy$. Sea $w = e + yzx$, entonces

$$w(e - yx) = e - yx + yzx - yzxyx = e - yx + y(z - zxy)x = e.$$

Por tanto $e - yx$ tiene inverso izquierdo. Para el caso cuando $e - xy$ tiene inverso derecho se procede de manera similar. □

Lema 1.6.3. *Sea I un ideal izquierdo de E tal que $e - x$ tiene inverso izquierdo para todo $x \in I$, entonces $e - x$ es invertible para todo $x \in I$.*

Demostración. Sea $x \in I$. Por hipótesis existe $y \in E$ tal que $e = y(e - x) = y - yx$, entonces $e - y = -yx \in I$, lo que implica que $y = e - (e - y)$ tiene inverso izquierdo digamos z. Por tanto, por el Lema 1.6.2 y tiene inverso derecho así $z = (e - x)$ y entonces $e = (e - x)y$. Es decir, $e - x$ es invertible y $y = (e - x)^{-1}$. □

Lema 1.6.4. $Rad(E) \subseteq \{x \in E : e - x$ *tiene inverso izquierdo*$\}$.

Demostración. Sea $x \in Rad(E)$, si $e - x$ no tiene inverso izquierdo, entonces el ideal izquierdo generado por $e - x$ es propio, es decir $E(e - x) \subsetneq E$. Entonces M es un ideal máximo de E tal que $E(e - x) \subset M$. Si $x \in M$, entonces $e = e + (e - x) \in M$, lo que contradice que M es un ideal máximo izquierdo de E, por tanto $x \notin M$. Así $x \notin Rad(E)$. □

Corolario 1.6.5. $Rad(E) \subseteq \{x \in E : e - x \in G(E)\}$.

Demostración. Por el Lema 1.6.4, $Rad(E)$ es un ideal izquierdo que cumple las hipótesis del Lema 1.6.3, así se tiene el resultado. □

Lema 1.6.6. $Rad(E) = \{x \in E : e - yx \in G(E)$ *para todo* $y \in E\}$.

Demostración. Sean $x \in Rad(E)$ y $y \in E$, entonces $yx \in Rad(E)$. Del Corolario 1.6.5 se sigue que $e - yx \in G(E)$. Recíprocamente, sea $x \in E$ tal que $e - yx \in G(E)$ para todo $y \in E$. Supongamos que $x \notin Rad(E)$, entonces existe M, un ideal máximo izquierdo, tal que $x \notin M$, lo cual implica que $Ex + M = E$, de donde $yx + m = e$, para algún $y \in E$, $m \in M$; pero por hipótesis $m = e - yx \in G(E)$, lo que contradice que M es un ideal máximo izquierdo de E. Por tanto $x \in Rad(E)$. □

Lema 1.6.7. $Rad(E) = \{x \in E : e - xy \in G(E)$ *para todo* $y \in E\}$.

Demostración. Por el Lema anterior, $x \in \mathrm{Rad}(E)$ si y sólo si $e - yx \in G(E)$. Debido al Lema 1.6.2, esto es equivalente a que $e - xy \in G(E)$, para todo $y \in E$. □

Lema 1.6.8. $Rad(E) = \{x \in E : e - xy, e - yx \in G(E)$ *para todo* $y \in E\}$.

Demostración. Se obtiene el resultado de los Lemas 1.6.6 y 1.6.7. □

Proposición 1.6.9. $Rad(E)$ *es un ideal bilateral.*

Demostración. Si definimos

$$Rad(E)_R = \bigcap \{M \subseteq E : M \text{ es un ideal máximo derecho de } E\},$$

entonces $Rad(E)_R$ es un ideal derecho de E, y además podemos obtener para $Rad(E)_R$ los resultados correspondientes a los obtenidos para $Rad(E)$, simplemente cambiando la palabra izquierdo por derecho. De modo que por el Lema 1.6.8, $Rad(E) = Rad(E)_R$. Esto nos dice que $Rad(E)$ es un ideal bilateral. □

Proposición 1.6.10. *Sean E un álgebra con unidad con unidad e y $x \in E$, se cumplen las siguientes propiedades:*

a) Si $x \in \mathrm{Rad}(E)$*, entonces* $r(x) = 0$*.*

b) Si $r(ax) = 0$ *para todo* $a \in E$*, entonces* $x \in \mathrm{Rad}(E)$*.*

Demostración.

a) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\lambda \neq 0$, entonces $\frac{1}{\lambda}x \in Rad(E)$, por el Lema 1.6.8 tenemos que $e - \frac{1}{\lambda}x = \frac{1}{\lambda}(\lambda e - x) \in G(E)$, es decir $\lambda e - x \in G(E)$, entonces $\lambda \notin \sigma(x)$. Luego $\sigma(x) = \{0\}$ y por tanto $r(x) = 0$.

b) Si $r(ax) = 0$ para toda $a \in E$, entonces $\sigma(ax) = \{0\}$, entonces $\lambda e - ax \in G(E)$ para toda $\lambda \neq 0$, en particular $e - ax \in G(E)$ y por tanto $x \in Rad(E)$.

□

Definición 1.6.11. *Sea* E *un álgebra con unidad* e*, entonces* E *es semi-simple si* $\mathrm{Rad}(E) = \{0\}$*.*

Capítulo 2

Álgebras de Banach.

2.1. Propiedades de Álgebras de Banach.

Definición 2.1.1. *Diremos que E es un álgebra normada si hay una norma $\|\cdot\|$ que define su topología y ésta es submultiplicativa; es decir dicha norma satisface la desigualdad*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \text{ para todo } x, y \in E.$$

Además si un álgebra normada $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio completo entonces es llamada un álgebra de Banach.

Ejemplo 2.1.2. *Sea X un espacio normado. Recordemos que $B(X)$ es un espacio normado, con la norma de operadores $\|T\|_{op} = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$. Además se cumple que $\|T(x)\| \leq \|T\|_{op}\|x\|$, para todo $x \in X$.*
Podemos definir un producto en $B(X)$ como la composición de funciones, y entonces es fácil ver que la composición de operadores lineales es un operador lineal y que la composición es asociativa y distributiva:

$$\begin{aligned}((S_1 + S_2) \circ T)(x) &= (S_1 \circ T(x) + S_2 \circ T(x)) \\ &= (S_1 \circ T + S_2 \circ T)(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T \circ (S_1 + S_2))(x) &= T \circ (S_1(x) + S_2(x)) \\ &= (T \circ S_1 + T \circ S_2)(x);\end{aligned}$$

y si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\lambda(S \circ T))(x) = \lambda(S \circ T(x)) = (\lambda S) \circ (x) = S \circ (\lambda T)(x).$$

Así $B(X)$ es un álgebra cuya unidad es el operador identidad I. Por último $B(X)$ es normada, pues:

$$\|ST\|_{op} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|ST(x)\| \leq \|S\|_{op} \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\| = \|S\|_{op}\|T\|_{op}. \tag{2.1}$$

Si X es un espacio de Banach, entonces $B(X)$ es completo y así es un álgebra de Banach.

Ejemplo 2.1.3. *Sea K un espacio de Hausdorff compacto no vacío, consideremos*

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}.$$

Entonces $C(K)$ es un álgebra con el producto $(fg)(x) = f(x)g(x)$, para toda $x \in K$ y con elemento unidad 1. Más aun, es un álgebra de Banach, con la norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$, pues

$$\|fg\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)g(x)| \leq \sup_{x\in K} |f(x)| \sup_{x\in K} |g(x)| = \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Ejemplo 2.1.4. *$M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es un álgebra normada con las operaciones comunes de matrices y con la norma $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$.*

En cualquier álgebra normada con unidad e se cumple que $\|e\| \neq 0$. Además como $\|e\| = \|e \cdot e\| \leq \|e\|\|e\|$, entonces $1 \leq \|e\|$. En $B(E)$ se cumple que $\|I\|_B = 1$, pues $\|I\|_B = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|I(x)\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|x\| = 1$. En el álgebra normada $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ la norma de la unidad 1, también es 1, pero esto no siempre se cumple en un álgebra normada.

Ejemplo 2.1.5. *$M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es un álgebra normada con la norma $\|A\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, pues si consideramos $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, entonces $C = AB = (c_{ij})$ con $c_{ij} = \sum\limits_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj}$, así:*

$$\begin{aligned}\|C\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} |a_{ir}b_{rj}|\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} |a_{ir}||b_{rj}|\right) \\ \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|\right) = \|A\|\|B\|,\end{aligned}$$

es decir $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. *Además, la matriz* I_n *es la unidad, pero es fácil ver que* $\|I_n\| \neq 1$.

La siguiente proposición nos dice que en un álgebra de Banach con unidad, siempre podemos suponer que la norma de la unidad es 1.

Proposición 2.1.6. *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *un álgebra de Banach con unidad* e. *Entonces, existe una norma* $|\cdot|$ *definida en* E *que es equivalente a* $\|\cdot\|$ *y cumple que:*

1. $|xy| \leq |x||y|$ *para cada* $x, y \in E$.

2. $|e| = 1$.

Demostración. Sea $x \in E$, definimos $T_x : E \to E$ dada por $T_x(y) = xy$ para todo $y \in E$. Es inmediato ver que T_x es lineal, además

$$\|T_x(y)\| = \|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

para cada $y \in E$, así pues T_x es contínuo.

Ahora, definimos

$$|x| = \|T_x\|_{op}$$

para cada $x \in E$, donde $\|T_x\|_{op}$ es la norma del operador de T_x. Veamos que $|\cdot|$ es una norma para E.

Primero si $x = 0$, es claro que el operador $T_x = 0$ y por tanto

$$|x| = \|T_x\|_{op} = 0.$$

Ahora, supongamos que $|x| = 0$, entonces $\|T_x\|_{op} = 0$, de donde $T_x = 0$, entonces $T_x(y) = 0$ para cada $y \in E$ y por tanto $xy = 0$ para cada $y \in E$, si hacemos $y = e$ obtenemos que $x = 0$. Una cuenta sencilla nos dice que para $x, y \in A$ y λ un escalar

$$T_{\lambda x} = \lambda T_x$$

y

$$T_{x+y} = T_x + T_y$$

por tanto, dado que ya sabemos que $\|\cdot\|_{op}$ es una norma, se tiene que

$$|\lambda x| = \|T_{\lambda x}\|_{op} = \|\lambda T_x\|_{op} = |\lambda|\|T_x\|_{op} = |\lambda||x|$$

y

$$|x + y| = \|T_{x+y}\|_{op} = \|T_x + T_y\|_{op} \leq \|T_x\|_{op} + \|T_y\|_{op} \leq |x| + |y|,$$

así pues $|\cdot|$ es una norma para E. Además como $T_{xy} = T_x T_y$, entonces como la norma del operador es submultiplicativa, se tiene que

$$|xy| = \|T_{xy}\|_{op} = \|T_x T_y\|_{op} \leq \|T_x\|_{op}\|T_y\|_{op} = |x||y|.$$

Observemos también que

$$|e| = \|T_e\|_{op} = \sup_{\|y\|\leq 1} \|ey\| = \sup_{\|y\|\leq 1} \|y\| = 1,$$

esto último es cierto pues $\|e\| \neq 0$ y entonces $1 = \left\| \frac{e}{\|e\|} \right\|$.

Veamos que las normas son equivalentes. Sea $x \in E$, como $\frac{e}{\|e\|}$ tiene norma 1, entonces

$$|x| = \|T_x\|_{op} = \sup_{\|y\|\leq 1} \|xy\| \geq \left\| x\left(\frac{e}{\|e\|}\right) \right\|$$

$$= \frac{1}{\|e\|}\|xe\| = \frac{1}{\|e\|}\|x\|,$$

de donde $\|x\| \leq \|e\||x|$. Probemos ahora que $(E, |\cdot|)$ es un espacio de Banach. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en E con respecto a la norma $|\cdot|$, entonces

$$\|x_n - x_m\| \leq \|e\||x_n - x_m| \to 0$$

cuando $n, m \to \infty$, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|$, por tanto como $(E, \|\cdot\|)$ es Banach se tiene que existe $x_0 \in E$ tal que

$$\|x_n - x_0\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Ahora, sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene que

$$\|x_n - x_0\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $y \in E$ tal que $\|y\| \leq 1$, entonces

$$\|T_{x_n - x_0}(y)\| = \|T_{x_n}(y) - T_{x_0}(y)\| = \|x_n y - x_0 y\|$$

$$= \|(x_n - x_0)y\| \leq \|x_n - x_0\|\|y\| \leq \|x_n - x_0\| < \frac{\epsilon}{2},$$

por tanto si $n \geq N$ y tomando supremo sobre $\|y\| \leq 1$ se tiene que

$$|x_n - x_0| = \|T_{x_n - x_0}\|_{op} = \sup_{\|y\|\leq 1} \|T_{x_n - x_0}(y)\| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

así pues

$$|x_n - x_0| \to 0$$

cuando $n \to \infty$, es decir $(E, |\cdot|)$ es Banach. Dado que la identidad $I : (E, |\cdot|) \to (E, \|\cdot\|)$ dada por $I(x) = x$ para cada $x \in E$, es continua, por el Teorema del mapeo abierto se tiene que I es un homeomorfismo, es decir $I : (E, \|\cdot\|) \to (E, |\cdot|)$ es continua, por tanto existe $m > 0$ tal que

$$\frac{1}{m}|x| \leq \|x\|$$

para cada $x \in E$, así pues las normas son equivalentes. □

Observación 2.1.7. *En adelante si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach con unidad e, supondremos que la norma satisface que $\|e\| = 1$.*

Lema 2.1.8. *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach con unidad e y $x \in E$ tal que $\|e - x\| < 1$, entonces $x \in G(E)$. Además, $G(E)$ es abierto.*

Demostración. Como $\|e - x\| < 1$, se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(e-x)^k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|e-x\|^k < \infty.$$

Por lo que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (e-x)^k$ es convergente, así $(e-x)^k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} x\left(\sum_{k=0}^{n}(e-x)^k\right) &= (e-(e-x))\left(\sum_{k=0}^{n}(e-x)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(e-x)^k - (e-x)\left(\sum_{k=0}^{n}(e-x)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(e-x)^k - \left(\sum_{k=1}^{n+1}(e-x)^k\right) \\ &= e - (e-x)^{n+1} \end{aligned}$$

para toda $n \geq 1$. Así $x\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(e-x)^k\right) = e$ y análogamente $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(e-x)^k\right)x = e$. Por tanto $x \in G(E)$ con $x^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(e-x)^k$.

Ahora sean $x \in G(E)$ y $y \in E$, con $\|y - x\| < \|x^{-1}\|^{-1}$, entonces

$$\|e - x^{-1}y\| = \|x^{-1}x - x^{-1}y\| \leq \|x^{-1}\|\|x - y\| < 1,$$

y por lo anterior $x^{-1}y \in G(E)$ y así $y \in G(E)$. Esto muestra que $G(E)$ es abierto en E. $\square$

Observación 2.1.9. *Sean E un álgebra de Banach con unidad e y $x \in E$ tal que $\|x\| < 1$, entonces $(e - x)$ es invertible y $(e-x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$.*

Demostración. Sea $x \in E$ tal que $\|x\| < 1$, lo que es equivalente a que $\|e - (e - x)\| < 1$, entonces por 2.1.8 $(e - x) \in G(E)$. Supongamos que $y = (e - x)^{-1}$ y definamos $S_m = \sum_{n=0}^{m} x^n$ para $m \geq 0$, con $x^0 = e$, entonces

$$\begin{aligned}\|S_m - y\| &= \|y(e - x)S_m - y\| \\ &\leq \|y\|\|(e - x)S_m - e\| \\ &= \|y\|\|x^{m+1}\| \leq \|y\|\|x\|^{m+1}.\end{aligned}$$

Como $\|x\| < 1$, entonces $\lim_{m\to\infty} \|x\|^{m+1} = 0$. Así $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = y$, que es lo mismo que $y = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$. $\square$

Proposición 2.1.10. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach con unidad e, la inversión $(\cdot)^{-1} : G(E) \to G(E)$ es una función continua.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos en $G(E)$ que converge a $x \in G(E)$. Supongamos primero que $x = e$, como $\lim_{n\to\infty} x_n = e$ para $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$\|e - x_n\| < \frac{1}{2}.$$

Por la Observación 2.1.9 se tiene que

$$x_n^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(e - x_n)^k$$

de donde

$$\|x_n^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|e - x_n\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$$

Por tanto si $n \geq N$ se tiene que

$$\|x_n^{-1} - e\| = \|x_n^{-1} - x_n^{-1}x_n\| = \|x_n^{-1}(e - x_n)\|$$

$$\leq \|x_n^{-1}\|\|e - x_n\| \leq 2\|e - x_n\| \to 0$$

cuando $n \to \infty$. Es decir $\lim_{n\to\infty} x_n^{-1} = e$, por tanto si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ con $x \in G(E)$, entonces $\lim_{n\to\infty} x^{-1}x_n = e$ y por lo anterior

$$\lim_{n\to\infty} (x^{-1}x_n)^{-1} = e$$

de donde $(\lim_{n\to\infty} x_n^{-1})x = e$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} x_n^{-1} = x^{-1}$. □

2.2. Propiedades del espectro.

Teorema 2.2.1. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach con unidad e. Entonces para todo $x \in E$, $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $x \in E$ y consideremos $f : \mathbb{C} \to E$ dada por $f(\lambda) = x - \lambda e$. Notemos que f es continua, pues si tomamos $|\mu - \lambda| < \varepsilon$, como $\|e\| = 1$ se tiene que $|-\mu + \lambda|\|e\| = \|-\mu e + \lambda e\| < \varepsilon$, así $\|x - \mu e - (x - \lambda e)\| < \varepsilon$, entonces $\|f(\mu) - f(\lambda)\| < \varepsilon$. Además $\lambda \in f^{-1}(G(E))$ si y sólo si $\lambda \notin \sigma(x)$; es decir $f^{-1}(G(E)) = \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Por el Lema 2.1.8, como $G(E)$ es abierto, $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ es abierto en $\mathbb{C}$, de donde $\sigma(x)$ es cerrado en $\mathbb{C}$. Veamos ahora que $\sigma(x)$ es acotado. Consideramos $|\lambda| > \|x\|$, entonces $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$, es decir $\|e - (e - \frac{x}{\lambda})\| < 1$ y por el Lema 2.1.8 se sigue que $e - \frac{x}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda}(x - \lambda)e$ es invertible, así $\lambda \notin \sigma(x)$. Por tanto si $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $|\lambda| \leq \|x\|$. □

Definición 2.2.2. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra normada y sea $x \in E$ tal que $\rho(x) \neq \emptyset$, definimos la función resolvente para x como $R : \rho(x) \to E$ dada por*

$$R_\lambda = (\lambda e - x)^{-1}$$

para cada $\lambda \in \rho(x)$.

Si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach, entonces para cada $x \in E$ se puede definir la función resolvente, pues en este caso como $\sigma(x)$ es compacto para cada $x \in E$, entonces $\rho(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in E$.

Teorema 2.2.3. *Sea $(E, |\cdot|)$ un álgebra de Banach con unidad e, y sea $x \in E$, entonces $\sigma(x) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $x \in E$y supongamos que $\sigma(x) = \emptyset$.Sea $\lambda \in \rho(x)$ fijo y $\mu \in \rho(x)$ tal que $|\lambda - \mu| < \frac{1}{2\|R_\lambda\|}$, denotemos por $w = (\lambda - \mu)R_\lambda$, entonces $\|w\| = \|(\lambda - \mu)R_\lambda\| < \frac{1}{2}$, por la Observación 2.1.9 se tiene que $e - w$ es invertible y

$$(e - w)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} w^j.$$

Por tanto,

$$\|(e-w)^{-1}-e-w\| = \left\|\sum_{j=0}^{\infty} w^j - e - w\right\| = \left\|\sum_{j=2}^{\infty} w^j\right\|$$

$$\leq \sum_{j=2}^{\infty} \|w\|^j = \sum_{j=0}^{\infty} \|w\|^j - 1 - \|w\| = \frac{1}{1-\|w\|} - 1 - \|w\|$$

$$= \frac{\|w\|^2}{1-\|w\|} \leq 2\|w\|^2.$$

Ahora,

$$\mu e - x = (\mu-\lambda)e - (x-\lambda e) = (x-\lambda e)((\mu-\lambda)(x-\lambda e)^{-1} - e)$$

$$= (\lambda e - x)((\lambda-\mu)(x-\lambda e)^{-1} + e) = (\lambda e - x)(e - (\lambda-\mu)(\lambda e - x)^{-1})$$

$$= (\lambda e - x)(e-w),$$

de donde tomando inversos, obtenemos que $R_\mu = (e-w)^{-1}R_\lambda$. Observemos que

$$\|R_\lambda - R_\mu + (\lambda-\mu)R_\lambda^2\| = \|R_\lambda - (e-w)^{-1}R_\lambda + wR_\lambda\|$$

$$= \|(e-(e-w)^{-1}+w)R_\lambda\| \leq \|(e-w)^{-1}-e-w\|\|R_\lambda\|$$

$$\leq 2\|w\|^2\|R_\lambda\| = 2|\lambda-\mu|\|R_\lambda\|^3,$$

dividiendo por $|\lambda-\mu|$ tenemos que

$$\left\|\frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda-\mu} - (-R_\lambda)^2\right\| \leq 2|\lambda-\mu|\|R_\lambda\|^3,$$

si $\mu \to \lambda$, concluimos que

$$\left\|\frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda-\mu} - (-R_\lambda^2)\right\| \to 0,$$

es decir

$$\frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda-\mu} \to -R_\lambda^2$$

cuando $\mu \to \lambda$.

Sea $f \in E^*$ y consideremos $g : \rho(x) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(\lambda) = f(R_\lambda)$$

para cada $\lambda \in \rho(x)$. Dado que f es continua, se tiene que

$$\lim_{\mu\to\lambda} \frac{g(\lambda)-g(\mu)}{\lambda-\mu} = \lim_{\mu\to\lambda} f\left(\frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda-\mu}\right) = -f(R_\lambda^2)$$

para cada $\lambda \in \rho(x)$, de aquí concluimos que g es holomorfa en $\rho(x) = \mathbb{C}$. Por tanto g es una función entera, por otro lado obeservemos que

$$R_\lambda = (\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1},$$

de esta forma, como en un álgebra de Banach la inversión es continua se tiene que

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \|R_\lambda\| = \lim_{|\lambda|\to\infty} |\lambda|^{-1}\|(e-\lambda^{-1}x)^{-1}\| = 0,$$

de aquí obtenemos que, existe $M > 0$ tal que si $|\lambda| > M$, entonces

$$|g(\lambda)| = |f(R_\lambda)| \leq \|f\|\|R_\lambda\| \leq \|f\|,$$

además es claro que g es acotada en $\overline{D(0,M)}$, por tanto g es acotada en $\mathbb{C}$, usando el teorema de Liouville, tendríamos que $g = 0$. Lo anterior nos dice que para cada $f \in E^*$, se tiene que $f(R_\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, por tanto $R_\lambda = 0$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, lo cual es una contradicción, de esta forma debemos tener que $\sigma(x) \neq \emptyset$. □

Proposición 2.2.4. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra normada. Si $x \in E$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ existe y además $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. Sea $\gamma = \inf\{\|x^n\|^{\frac{1}{n}} : n = 1, 2, ...\}$, ya que $\gamma \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ para todo n, tenemos que $\gamma \leq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un entero positivo m tal que $\|x^m\|^{\frac{1}{m}} < \gamma + \varepsilon$. Para cada entero positivo n, existe un entero no negativo a_n tal que $n = a_n m + b_n$, con $0 \leq b_n \leq m-1$. Además como $\frac{1}{n}b_n \leq \frac{1}{n}(m-1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n}b_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, así $\frac{ma_n}{n} = 1 - \frac{1}{n}b_n \to 1$ cuando $n \to \infty$. Ahora,

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x^{a_n m + b_n}\|^{\frac{1}{n}} = \|x^{a_n m}x^{b_n}\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^m\|^{\frac{a_n}{n}}\|x\|^{\frac{b_n}{n}} < (\gamma+\varepsilon)^{\frac{ma_n}{n}}\|x\|^{\frac{b_n}{n}}.$$

De donde $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} (\gamma+\varepsilon)^{\frac{ma_n}{n}}\|x\|^{\frac{b_n}{n}} = \gamma+\varepsilon$. Como ε fue arbitrario,

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \gamma.$$

Por tanto $\gamma = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. □

De ahora en adelante si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada denotaremos a $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ por $\nu(x)$.

Definición 2.2.5. *Sean E un álgebra y S un subconjuto no vacío de E. Definimos la subálgebra generada por S como*

$$[S] = \bigcap \{B : B \text{ es una subálgebra de } E \text{ y } S \subseteq B\}.$$

Si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada, la subálgebra cerrada generada por S, denotada por $E[S]$, es la subálgebra cerrada más pequeña que contiene a S.

Observación 2.2.6. *Sean E un álgebra y $S \subseteq E$ no vacío, entonces*

$$[S] = \{p(s_1, \dots, s_n) : p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], s_1, \dots, s_n \in S \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $S = \{s_1, s_2 \dots s_n\}$ con $s_i s_j = s_j s_i$ para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, entonces

$$[S] = \{p(s_1, \dots, s_n) : p \in \mathbb{C}[x_1, \dots x_n] \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $S = \{s\}$, entonces

$$[S] = \{\lambda_1 s + \lambda_2 s^2 + \dots \lambda_n s^n : \lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

Por último, si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada, es claro que $E[S] = \overline{[S]}$.

Proposición 2.2.7. *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach con unidad e y C una subálgebra maximal conmutativa de E, entonces $\sigma_C(x) = \sigma(x)$, con $x \in C$.*

Demostración. Sea $\lambda \notin \sigma_C(x)$, entonces $x - \lambda e$ tiene inverso en C; es decir existe $u \in C$ tal que $u(x - \lambda e) = (x - \lambda e)u = e$, pero como $C \subseteq E$ se sigue $u \in E$. Así $x - \lambda e$ tiene inverso en E, por lo que $\lambda \notin \sigma(x)$. Por tanto $\sigma(x) \subseteq \sigma_C(x)$.
Ahora tomemos $\mu \notin \sigma(x)$ entonces $x - \mu e$ es invertible en E, por lo que existe $y \in E$ tal que $y(x - \mu e) = (x - \lambda e)y = e$. Sea $z \in C$, entonces como C es conmutativa $z(x - \mu e) = (x - \mu e)z$ y multiplicando por y por la izquierda y por la derecha se sigue que $yz(x - \mu e)y = y(x - \mu e)zy$, así $yz = zy$. Consideremos $S = C \cup \{y\} \subseteq E$ y sea la subálgebra $C_0 = E[S]$, un cálculo sencillo nos dice que C_0 es también conmutativa y claramente $C \subseteq C_0$. Por tanto al ser C maximal se sigue que $C = C_0$, así $y \in C$. De esto se sigue que $x - \mu e$ es invertible en C y así $\mu \notin \sigma_C(x)$. Por tanto $\sigma_C(x) \subseteq \sigma(x)$. □

Teorema 2.2.8. *[Teorema del radio espectral] Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach con unidad e. Si $x \in E$, entonces $r(x) = \nu(x)$.*

Demostración. Sean $x \in E$ y $\lambda \in \sigma(x)$, entonces por la Observación 2.1.9 $|\lambda| \leq \|x\|$, así $r(x) \leq \|x\|$. Por el Teorema 1.4.12 se sigue que $\sigma(x^n) = \sigma(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$; esto implica que si $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $\lambda^n \in \sigma(x^n)$. Por tanto, $r(x^n) = r(x)^n$ y así $r(x) = r(x^n)^{\frac{1}{n}} \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$r(x) \leq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Para la otra desigualdad podemos suponer que x es no cero. Consideremos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| < \frac{1}{\|x\|}$, entonces $\|\lambda x\| < 1$, por el Lema 2.1.8 $e - \lambda x$ es invertible y por la Observación 2.1.9 $(e - \lambda x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x)^n$.
Consideremos al conjunto $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < |\lambda| < \frac{1}{r(x)}\}$. Si $\lambda \in D$, entonces $r(x) < \frac{1}{|\lambda|}$ y así $|\mu| < \frac{1}{|\lambda|}$ para toda $\mu \in \sigma(x)$; por tanto $\frac{1}{|\lambda|} \notin \sigma(x)$. Se sigue entonces que $(e - \lambda x)^{-1}$ existe para todo $\lambda \in D$. Si L es una funcional lineal acotada en E y $f : D \to \mathbb{C}$ está dada por $f(\lambda) = L((e - \lambda x)^{-1})$, entonces f es analítica en D. La continuidad de L implica que

$$f(\lambda) = L(e) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n L(x^n) \tag{2.2}$$

para toda λ que satisfaga $|\lambda| < \frac{1}{\|x\|} < \frac{1}{r(x)}$. Por tanto la serie en la ecuación 2.2 es la expansión de Taylor para f. Además como f es análitica se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n L(x^n)$ converge absolutamente en D, así:

$$\lim_{n\to\infty} |L(\lambda^n x^n)| = 0 \tag{2.3}$$

para toda $\lambda \in D$ y toda L en el espacio dual E^* de E.
Sea $\lambda \in D$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $L \in E^*$ definamos $\psi_n(L) = L(\lambda^n x^n)$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\|\psi_n\| = \|\lambda^n x^n\|. \tag{2.4}$$

De la ecuación (2.3) se tiene que $\sup\{|\psi_n(L) : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{|L(\lambda^n x^n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ para cada $L \in E^*$. Entonces existe $K > 0$ tal que $\|\psi_n\| \leq K$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por la ecuación (2.4) tenemos que $\|\lambda^n x^n\| \leq K$, así $\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{k^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{|\lambda|}$ para cada $\lambda \in D$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(x).$$

□

Proposición 2.2.9. *Sea $(E, (\|\cdot\|)$ un álgebra normada, entonces para $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple que:*

a) $0 \leq \nu(x) \leq \|x\|$.

b) $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$.

c) $\nu(x^k) = \nu(x)^k$ *para* $k = 1, 2, ...$

d) Si $xy = yx$, *entonces* $\nu(xy) \leq \nu(x)\nu(y)$ *y* $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$.

Demostración.

a) Se cumple claramente.

b) Se tiene que $\lim_{n\to\infty} \|(\lambda x)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|\lambda^n x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (|\lambda^n\|x\|)^{\frac{1}{n}} = |\lambda| \lim_{n\to\infty} \|x\|^{\frac{1}{n}}$. Esto implica que $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$.

c) Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\nu(x) - \varepsilon < \|x^m\|^{\frac{1}{m}} < \nu(x) + \varepsilon$. Luego

$$\nu(x) - \varepsilon < \nu(x) \leq \|x^{km}\|^{\frac{1}{km}} \leq \|x^k\|^{\frac{1}{k}} < \nu(x) + \varepsilon \text{ para toda } k \in \mathbb{N},$$

y por tanto, $(\nu(x) - \varepsilon)^k \leq \|(x^k)^m\|^{\frac{1}{m}} \leq (\nu(x) + \varepsilon)^k$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Haciendo $m \to \infty$, se tiene que $(\nu(x) - \varepsilon)^k \leq \nu(x^k) \leq (\nu(x) + \varepsilon)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como ε fue arbitraria, se cumple que $\nu(x)^k = \nu(x^k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

d) Supongamos $xy = yx$. Entonces por inducción sobre n: $(xy)^n = x^n y^n$.
Base inductiva: Para $n = 1$ se cumple trivialmente.
Hipótesis de inducción: Supongamos que se cumple para n; es decir $(xy)^n = x^n y^n$.
Paso inductivo: Veamos que se vale para $n + 1$. Se tiene que $(xy)^{n+1} = (xy)^n(xy) = x^n y^n (xy) = x^n y^n yx = x^n y^{n+1} x = x^n x y^{n+1} = x^{n+1} y^{n+1}$.
Así $\|(xy)^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x^n y^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \|y^n\|^{\frac{1}{n}}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \|(xy)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \|x^y\|^{\frac{1}{n}}$. Por tanto, $\nu(xy) \leq \nu(x)\nu(y)$.
Tomemos $\alpha > \nu(x)$ y $\beta > \nu(y)$. Sean $a = (\frac{1}{\alpha})x$ y $b = (\frac{1}{\beta})y$, entonces $\nu(a) < 1$ y $\nu(b) < 1$.
Como x y y conmutan, tenemos que

$$\|(x+y)^n\|^{\frac{1}{n}} = \left\| \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j y^{n-j} \right\|^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \alpha^j \beta^{n-j} \|a^j\| \|b^{n-j}\| \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Para cada n tomemos n' y n'' tal que $n' + n'' = n$ y $\|a^{n'}\| \|b^{n''}\| = \max_{0 \leq j \leq n} \|a^j\| \|b^{n-j}\|$. Con esta elección de n' y n'' tenemos que

$$\nu(x+y) = \lim_{n\to\infty} \|(x+y)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (\alpha+\beta) \liminf_{n\to\infty} \|a^{n'}\|^{\frac{1}{n}} \|b^{n''}\|^{\frac{1}{n}}.$$

Ahora tomemos la sucesión $(\frac{n'}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $0 \leq (\frac{n'}{n})_{n\in\mathbb{N}} \leq 1$, así tiene una subucesión convergente $(\frac{n'_k}{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ con límite γ. Si $\gamma \neq 0$, entonces $n'_k \to \infty$ y así

$$\lim_{k\to\infty} \|a^{n'_k}\|^{\frac{1}{n_k}} = \lim_{k\to\infty} (\|a^{n'_k}\|^{\frac{1}{n'_k}})^{\frac{n'_k}{n_k}} = \nu(a)^\gamma \leq 1.$$

Si $\gamma = 0$, entonces

$$\limsup_{k\to\infty} \|a^{n'_k}\|^{\frac{1}{n_k}} \leq \lim_{k\to\infty} \|a\|^{\frac{n'_k}{n_k}} \leq 1$$

Por tanto, en cualquier caso $\lim_{k\to\infty} \|a^{n'_k}\|^{\frac{1}{n_k}} \leq 1$.

De manera similar, ya que $(\frac{n''_k}{n_k})_{kIn\mathbb{N}}$ converge, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \|b^{n''_k}\|^{\frac{1}{n_k}} \leq 1.$$

Entonces $\nu(x+y) \leq \alpha+\beta$. Como esto es válido para todo $\alpha > \nu(x)$ y $\beta > \nu(y)$, se sigue que $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$.

□

Lema 2.2.10. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra normada. Para que $\nu(x)$ coincida con $\|x\|$ es necesario y suficiente que $\|x^2\| = \|x\|^2$, para cada $x \in E$.*

Demostración. Si $\nu(x) = \|x\|$, entonces $\|x^2\| = \|x\|^2$, ya que $\nu(x^2) = \nu(x)^2$ por inciso d de la Proposición 2.2.9.
Ahora supongamos que $\|x^2\| = \|x\|^2$. Entonces por inducción sobre n, probaremos que $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$.
Base inductiva: Para $n = 1$, se cumple por hipótesis.
Hipótesis de inducción: Supongamos válido para n; es decir $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$.

Paso inductivo: Veamos que se cumple para $n+1$; es decir $\|x^{2^{n+1}}\| = \|x\|^{2^{n+1}}$. Se tiene que $\|x^{2^{n+1}}\| = \|x^{2^n \cdot 2}\| = \|(x^{2^n})^2\| = \|x^{2^n}\|^2 = (\|x\|^{2^n})^2 = \|x\|^{2^n \cdot 2} = \|x\|^{2^{n+1}}$.
Por tanto $\nu(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (\|x\|^{2^n})^{\frac{1}{2^n}} = \|x\|$. □

2.3. Propiedades de $\mathcal{M}^{\#}(E)$.

Proposición 2.3.1. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach compleja con unidad e. Entonces $\mathcal{M}^{\#}(E) = \mathcal{M}(E)$.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{M}(E) \subseteq \mathcal{M}^{\#}(E)$. Ahora sea $\varphi \in \mathcal{M}^{\#}(E)$, entonces $\varphi : E \to \mathbb{C}$ es lineal, multiplicativa y no cero. Sea $x \in E$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, y sea $y = \varphi(x)e - x \in E$, entonces $y \in \ker(\varphi)$ puesto que:

$$\varphi(\varphi(x)e - x) = \varphi(x)\varphi(e) - \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0.$$

Ahora si $\varphi(x) \notin \sigma(x)$, entonces $\varphi(x)e - x$ es invertible, es decir, existe $y \in E$ tal que $y(\varphi(x)e - x) = (\varphi(x)e - x)y = e$, entonces

$$0 = \varphi(y(\varphi(x)e - x)) = \varphi(y)\varphi(\varphi(x)e - x) = \varphi(e) = 1.$$

Es decir $0 = \varphi(e) = 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\varphi(x) \in \sigma(x)$. Por lo que $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ para toda $x \in E$ y entonces $\varphi \in \mathcal{M}(E)$. Por tanto $\mathcal{M}^{\#}(E) = \mathcal{M}(E)$. □

Lema 2.3.2. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach conmutativa con unidad e. Para cada $x \in E$, la evaluación $\widehat{x} : \mathcal{M}(E) \to \sigma(x)$ dada por $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ es un mapeo continuo suprayectivo de $\mathcal{M}(E)$ en $\sigma(x)$. En particular*

$$\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{M}(E)\}.$$

A la función $\widehat{\ }$ se le conoce como la transformada de Gelfand.

Demostración. Veamos que $\widehat{\ }$ está bien definida. Sea $\varphi \in \mathcal{M}(E)$ y consideremos una red $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ en $\mathcal{M}(E)$ tal que $\varphi_\alpha \xrightarrow{w^*} \varphi$ [1] si y sólo si $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ para toda $x \in E$, entonces $\hat{x}(\varphi_\alpha) \to \hat{x}(\varphi)$ para toda $x \in E$. Por tanto $\hat{x}$ es continua para toda $x \in E$.
Sea $x \in E$ y $\lambda \in \sigma(x)$ veamos que existe $\varphi \in \mathcal{M}(E)$ tal que $\lambda = \varphi(x)$.

[1] Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ una red en X^* converge debilmente* a $\varphi \in X^*$ si $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ converge a φ con la topología debil*. Está convergencia es denotada por $\varphi_\alpha \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Como $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $\lambda e - x \notin G(E)$. Como E es un álgebra conmutativa se sigue que $\langle \lambda e - x \rangle = \{z(\lambda e - x) \ : z \in E\}$ es un ideal bilateral propio de E ya que $e \notin \langle \lambda e - x \rangle$ pues si no, existiría $z \in \langle \lambda e - x \rangle$ tal que $z(\lambda e - x) = (\lambda e - x)z = e$, entonces $\lambda e - x$ es invertible, lo cual es una contradicción. Por el Lema de Zorn $\langle \lambda e - x \rangle$ está contenido en un ideal bilateral maximal, digamos I. Sabemos que $\overline{I}$ es un ideal bilateral, además $I \leqslant \overline{I}$, entonces $I = \overline{I}$ o $\overline{I} = E$. Supongamos que $\overline{I} = E$, entonces $e \in \overline{I}$ y como $G(E)$ es abierto existe una vecindad $B_e \subseteq G(E)$ de e tal que $B_e \cap I \neq \emptyset$, es decir existe $y \in B_e \cap I$, así y es invertible por lo que existe $y^{-1} \in E$ tal que $y^{-1}y = e \in I$. Así, dada $z \in E$, $ze \in I$ y entonces $I = E$, lo cual es una contradicción. Por tanto $I = \overline{I}$. Consideramos ahora el espacio cociente E/I que también es un espacio de Banach usando la norma cociente. Sea $b \in E/I$, entonces $\sigma(b) \neq \emptyset$, así existe $\lambda \in \sigma(b)$ tal que $\lambda e - b$ es no invertible por lo que $\lambda e - b = 0$, entonces $\lambda e = b$. De esta manera, como $E/I \cong \mathbb{C}$, si tomamos $\varphi = \pi : E \to E/I$, dada por $\pi(x) = x + I$, sabríamos que es un homomorfismo y así $\pi(x) = x + I = \lambda e + I = \lambda$. Por tanto $\widehat{\ }$ es sobre. $\square$

Proposición 2.3.3. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach con unidad e. Entonces cada $\varphi : E \to \mathbb{C}$ lineal, mulltiplicativa y no cero, está acotada y $\|\varphi\| = 1$.*

Demostración. Como $\varphi(x) \in \sigma(x)$, entonces $|\varphi(x)| \leq r(x) \leq \|x\|$, de esto se sigue que $\|\varphi\| \leq 1$. Por otro lado como $\|e\| = 1$ y $\varphi(e) = 1$, entonces se tiene que $\|\varphi\| \geq |\varphi(e)| \geq 1$. $\square$

Capítulo 3

Álgebras-C^*.

3.1. Propiedades básicas de álgebras-C^*.

Esta sección está dedicada a estudiar los conceptos y resultados básicos de las álgebras C^*.

Definición 3.1.1. *Sea E un álgebra compleja. Una función $* : E \longrightarrow E$ es llamada involución si satisface las siguientes propiedades:*

1. $(x+y)^* = x^* + y^*$ *para todo* $x, y \in E$.

2. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$ *para todo* $x \in E$ *y para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. $(xy)^* = y^* x^*$ *para todo* $x, y \in E$.

4. $(x^*)^* = x$ *para todo* $x \in E$.

Un álgebra con involución es llamada un algebra-$*$.

Observación 3.1.2. *Sea E un álgebra-$*$, entonces* $0^* = 0$.

Demostración. Notemos que

$$0^* = (0+0)^* = 0^* + 0^*.$$

Entonces $0^* = 0$. Además si $x^* = 0$, como $(x^*)^* = 0^*$, se tiene que $x = 0$. $\square$

En está sección consideraremos álgebras complejas.

Definición 3.1.3. *Si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra-$*$ y normada, diremos que E es un álgebra-$*$ normada. Si además $\|x^*\| = \|x\|$ para toda $x \in E$, diremos que E es un álgebra normada-$*$. También si E es un álgebra-$*$ normada y* *completa, entonces diremos que E es un álgebra-$*$ de Banach. Finalmente si E es un álgebra normada-$*$ y completa diremos que E es un álgebra de Banach-$*$.*

Definición 3.1.4. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach. Decimos que E es un álgebra-C^* si cumple que:*

$$\|x\|^2 = \|xx^*\| \text{ para todo } x \in E.$$

A esta última igualdad se le conoce como la condición C^*.

Ejemplos de álgebras-C^*.

a) $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ con la operación $*$ dada por la conjugación de un número complejo, es un álgebra-C^* pues claramente $|z|^2 = |z\ \overline{z}|$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

b) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. El conjunto de operadores lineales y continuos de $\mathcal{H}$, denotado por $B(\mathcal{H})$ es un álgebra -C^*. El producto está dado por la composición de operadores. La operación $*$ es el adjunto, que está dada de la siguiente manera: para cualquier operador T en $B(\mathcal{H})$ su adjunto está definido por la relación $\langle T^*x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para todo $x, y \in H$. Finalmente la norma está dada por
$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in \mathcal{H},\ \|x\| \leq 1\}$$
para cualquier $T \in$. Consideremos $T \in B(\mathcal{H})$ y sea $x \in H$, entonces
$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \\ &\leq \|x\|\|T^*T\| = \|x\|^2\|T^*T\|,\end{aligned}$$
así $\left(\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\right)^2 \leq \|TT^*\|$ para toda $x \neq 0$. Por tanto $\|T\|^2 \leq \|TT^*\|$. Para la otra desigualdad se tiene que
$$\|TT^*\| \leq \|T\|\|T^*\| = \|T\|^2.$$
Por tanto $\|TT^*\| = \|T\|^2$.

c) $M_n(\mathbb{C})$, el conjunto de matrices complejas de $n \times n$, con $n \in \mathbb{N}$, es un álgebra-C^* con las operaciones usuales de las matrices. La operación $*$ está dada por $A^* = \overline{A^t}$. De manera análoga a nuestro ejemplo anterior definimos la norma como
$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2 : x \in \mathbb{C}^n, \|x\|_2 \leq 1\}$$
con $\|\cdot\|_2$ la norma usual en $\mathbb{C}^n$. Es claro que $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

d) Sea X un espacio compacto de Hausdorff y consideremos

$$C(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}.$$

La operación $*$ está dada de la siguiente manera: para cada $f \in C(X)$ se define f^* como $f^*(x) = \overline{f(x)}$ para cada $x \in X$. La norma es la norma usual del supremo.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| \text{ para toda } f \in C(X).$$

Es fácil ver que $\|ff^*\| = \|f\|^2$ para toda $f \in C(X)$.

e) Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. Una función $f : X \to \mathbb{C}$ se dice que se anula en infinito si para cada $\varepsilon > 0$, existe $K \subseteq X$ compacto tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \notin K$. Consideramos

$$C_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es continua y se anula en infinito }\},$$

entonces $C_0(x)$ es un álgebra-C^* conmutativa. Si X es un espacio localmente compacto, no compacto, $C_0(X)$ no tiene unidad. De manera análoga al inciso anterior la operación $*$ está dada por $f^* = \overline{f}$. Con la norma del supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)| \text{ para toda } f \in C_0(X).$$

Se cumple que $\|ff^*\| = \|f\|^2$ para toda $f \in C_0(X)$.

f) Sean A y B álgebras-C^*, podemos formar la suma directa

$$A \oplus B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Entonces $A \oplus B$ es un álgebra-C^* con las operaciones algebraicas de adición, multiplicación por escalar y multiplicación son realizadas coordenada a coordenada. La operación $*$ está dada por:

$$(a, b)^* = (a^*, b^*),$$

con $a \in A$ y $b \in B$.
Además, la norma está dada por

$$\|(a, b)\| = \text{máx}\{\|a\|, \|b\|\},$$

para cada $a \in A$ y $b \in B$.
Veamos que se cumple la condición C^*. Sea $(a, b) \in A \oplus B$, entonces

$$\begin{aligned}\|(a, b)(a, b)^*\| &= \|(aa^*, bb^*)\| = \text{máx}\{\|aa^*\|, \|bb^*\|\}\\ &= \text{máx}\{\|a\|^2, \|b\|^2\} = (\text{máx}\{\|a\|, \|b\|\})^2 = \|(a, b)\|^2.\end{aligned}$$

Definición 3.1.5. *Sea E una álgebra-$*$, entonces:*

1. *Un elemento $x \in E$ es hermitiano si $x^* = x$. El conjunto de los elementos hermitianos será denotado por $H(E)$.*

2. *Un elemento $x \in E$ es normal si $x^*x = xx^*$. El conjunto de los elementos normales será denotado por $N(E)$.*

3. *Si E es un álgebra con unidad e, un elemento x es unitario si $x^*x = e = xx^*$, esto es x es invertible y $x^{-1} = x^*$. El conjunto de los elementos unitarios será denotado por $U(E)$.*

Definición 3.1.6. *Sean E un álgebra-$*$ con unidad e, A es un subconjunto no vacío de E y $A^* = \{x^* : x \in A\}$. Una subálgebra auto adjunta A es llamada una subálgebra-$*$ de E.*

Observación 3.1.7. *Sean E un álgebra-$*$ y $A \subseteq E$ no vacío, A es auto adjunto si y sólo si $x \in A$, entonces $x^* \in A$ para toda $x \in A$.*

Proposición 3.1.8. *Sea E un álgebra-$*$ con unidad e. Consideremos $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subálgebras-$*$, entonces $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ es una subálgebra-$*$.*

Demostración. Sea $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, entonces $x \in A_i$ para todo $i \in I$, luego $x^* \in A_i$ para todo $i \in I$, así $x^* \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, y por tanto $x \in \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)^*$. Se tiene entonces que $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)^*$, es decir $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ es una subálgebra-$*$. $\square$

Definición 3.1.9. *Sean E un álgebra-$*$ con unidad e y S un subconjunto no vacío de E. Definimos la subálgebra-$*$ generada por S como*

$$\langle S \rangle_* = \bigcap \{A : A \text{ es una subálgebra-}* \text{ de } E \text{ y } S \subseteq A\}.$$

Observación 3.1.10. *Sean E un álgebra-$*$ y $S \subseteq E$ no vacío. Entonces, para toda subálgebra-$*$ A de E tal que $S \subseteq A$ se tiene que $\langle S \rangle_* \subseteq A$. Además, $\langle S \rangle_*$ consiste de todas las combinaciones lineales de elementos de la forma $x_1 \cdots x_n$ con $x_1, \dots x_n \in S \cup S^*$, es decir:*

$$\langle S \rangle_* = \{ \sum_{(i_1,\dots i_n)} \lambda_{(i_1,\dots i_n)} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \in E : \lambda_{(i_1,\dots i_n)} \in \mathbb{C}, x_{i_1}, \dots x_{i_n} \in S \cup S^*,$$

$$(i_1, \dots i_n) \in \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N} \text{ y la suma es finita } \}$$

Si todos los elementos de $S \cup S^*$ conmutan, entonces la subálgebra-$*$ $\langle S \rangle_*$ es conmutativa.

Definición 3.1.11. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e. Decimos que $B \subseteq E$ es una subálgebra-C^* con unidad e de E, si B es una subálgebra-$*$ de Banach de E y en B se cumple la condición C^*.*

Observación 3.1.12. *Si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra-C^* con unidad e. Dado $x \in E$ denotaremos por $E\langle x \rangle$ a la subálgebra-C^* con unidad e que contiene a x, esto es:*

$$E\langle x \rangle = \overline{\langle S \rangle_*} \text{ donde } S = \{x, e\}.$$

Claramente $E\langle x \rangle$ es conmutativa si y sólo si x es normal.

Proposición 3.1.13. *Sea E un álgebra-$*$. Para cada $x \in E$, existen únicos $h, k \in E$ hermitianos tal que $x = h + ik$.*

Demostración. Sea $x \in E$, consideremos

$$h = \frac{1}{2}(x + x^*) \text{ y } k = \frac{1}{2i}(x - x^*) \in E,$$

entonces es fácil ver que $h = h^*$, $k = k^*$ y $x = h + ik$. Si $h_1, k_1 \in E$ son elementos hermitianos tal que $x = h_1 + ik_1$, entonces $x^* = h_1 - ik_1$, entonces $x + x^* = 2h_1$, así $h_1 = \frac{1}{2}(x + x^*)$. Por tanto $h = h_1$. De manera análoga se puede probar que $k_1 = k$. Es decir, la descomposición $x = h + ik$ con $h = h^*$, $k = k^* \in E$ es única.

□

Proposición 3.1.14. *Sea E un álgebra-$*$ con unidad e, entonces*

a) $e = e^*$.

b) Sea $x \in E$, entonces x es invertible si y sólo si x^* es invertible. En tal caso $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

c) $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)}$, para cada $x \in E$. Si E es un álgebra-$*$ real entonces $\sigma(x^*) = \sigma(x)$.

Demostración.

a) Tenemos que, $e = (e^*)^* = (ee^*)^* = e^{**}e^* = ee^* = e^*$.

b) Suponemos primero que x es invertible. Entonces existe $x^{-1} \in E$ tal que $xx^{-1} = e$ y $x^{-1}x = e$. Al aplicar $x \to x^*$ se sigue que $(xx^{-1})^* = e$ y $(x^{-1}x)^* = e$, así $(x^{-1})^*x^* = e$ y $x^*(x^{-1})^* = e$. Como el inverso es único, entonces $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.
Ahora si suponemos que x^* es invertible, existe $(x^*)^{-1} \in E$ tal que $x^*(x^*)^{-1} = e$ y $(x^*)^{-1}x^* = e$. Al aplicar $x \to x^*$ se tiene $(x^*(x^*)^{-1})^* = e$ y $((x^*)^{-1}x^*)^* = e$, entonces $((x^*)^{-1})^*x = e$ y $x((x^*)^{-1})^* = e$. Por tanto x es invertible y $x^{-1} = ((x^*)^{-1})^*$.

c) Si $\lambda \notin \sigma(x^*)$, entonces $\lambda e - x^*$ es invertible, por el inciso b) se tiene que $(\lambda e - x)^* = \overline{\lambda}e - x$ es invertible, así $\overline{\lambda} \notin \sigma(x)$ y entonces $\lambda \notin \overline{\sigma(x)}$. Por tanto $\overline{\sigma(x)} \subseteq \sigma(x^*)$.
Si $\lambda \notin \overline{\sigma(x)}$, entonces $\overline{\lambda} \notin \sigma(x)$, así $\overline{\lambda}e - x$ es invertible, utilizando el inciso b) se tiene que $(\overline{\lambda}e - x)^* = \lambda e - x^*$ es invertible, entonces $\lambda \notin \sigma(x^*)$. Por tanto $\sigma(x^*) \subseteq \overline{\sigma(x)}$.

$\square$

Corolario 3.1.15. *Si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra-$*$ de Banach, entonces se cumple que $\nu(x^*) = \nu(x)$, para toda $x \in E$.*

Teorema 3.1.16. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e. Si $h \in E$ es un elemento hermitiano, entonces $\|h\| = r(h)$.*

Demostración. Por ser h hermitiano se tiene que $\|h^2\| = \|hh\| = \|h^*h\| = \|h\|^2$. Usando inducción sobre k, se sigue que $\|h^{2^k}\| = \|h\|^{2^k}$. De esta manera,

$$r(h) = \lim_{k\to\infty} \|h^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \|h\|.$$

$\square$

Proposición 3.1.17. *Sean $(E, \|\cdot\|)$ una álgebra-C^* con unidad e y $x \in E$. Si $x \neq 0$, entonces $\|x\| = \|x^*\|$.*

Demostración. Como E es un álgebra-C^*, entonces $\|x\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x\|\|x^*\|$, así $\|x\| \leq \|x^*\|$. Análogamente, como $\|x^*\|^2 = \|x^*(x^*)^*\| \leq \|x^*\|\|x\|$, entonces $\|x^*\| \leq \|x\|$. Por tanto se cumple que $\|x\| = \|x^*\|$. □

Observación 3.1.18. *La Proposición 3.1.17 sigue siendo cierta sin que el álgebra E sea completa.*

Lema 3.1.19. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* conmutativa con unidad e y sea $\phi \in \mathcal{M}(E)$. Entonces $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$, para cada $x \in E$.*

Demostración. Primero veamos que $\phi(h)$ es real para cada $h \in E$ hermitiano. Tomemos $z = h + ite$ con t real. Si $\phi(h) = \alpha + i\beta$ con α y β reales, entonces

$$\phi(z) = \phi(h + ite) = \phi(h) + it\phi(e) = \alpha + i\beta + it = \alpha + i(\beta + t),$$

además

$$z^*z = (h - ite)(h + ite) = h^2 + t^2 e.$$

Entonces

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\phi(z)|^2 \leq \|z\|^2 \leq \|z^*z\| \leq \|h^2\| + t^2,$$

es decir $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|h^2\|$ para todo real t. Así $\beta = 0$ y $\phi(h)$ es real. Ahora si $x \in E$, entonces $x = h + ik$, con $h = \frac{x+x^*}{2}$ y $k = \frac{x-x^*}{2i}$. Ya que $h = h^*$, $k = k^*$, y $x^* = h - ik$, para cada $\phi \in \mathcal{M}(E)$ tenemos que

$$\phi(x^*) = \phi(h - ik) = \varphi(h) - i\varphi(k) = \overline{\phi(h)} - i\overline{\phi(k)} = \overline{\phi(h + ik)} = \overline{\phi(x)}.$$

□

Teorema 3.1.20. *[Gelfand-Naimark] Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* conmutativa con unidad e. La función $x \to \hat{x}$ que va de $(E, \|\cdot\|)$ en $(C(\mathcal{M}(E)), \|\cdot\|_\infty)$, donde $\hat{x}$ está definida por*

$$\hat{x}(\phi) = \phi(x) \text{ con } \phi \in \mathcal{M}(E),$$

es un isomorfismo-$*$ isométrico de E a $C(\mathcal{M}(E))$.

Demostración. Para ver que $x \to \hat{x}$ es un homomorfismo-$*$ tomemos $x, y \in E$ y $\phi \in \mathcal{M}(E)$, entonces

$$\widehat{\lambda x + y}(\phi) = \phi(\lambda x + y) = \lambda\phi(x) + \phi(y) = \lambda\hat{x}(\phi) + \hat{y}(\phi),$$

es decir $\widehat{x+y} = \hat{x} + \hat{y}$. Además

$$\widehat{xy}(\phi) = \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = \hat{x}(\phi)\hat{y}(\phi),$$

por tanto $\widehat{xy} = \hat{x}\hat{y}$.
Por el inciso b) del Lema 3.1.19, $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$, es decir $\widehat{x^*}(\phi) = \overline{\hat{x}(\phi)}$. Es decir, $\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}} = \hat{x}^*$.
Además, es fácil ver que $\hat{x}$ es continua, pues si tomamos $\phi \in \mathcal{M}(E)$, entonces

$$|\hat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq r(x) \leq \|x\|.$$

Así $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$. Por tanto $\hat{x} \in C(\mathcal{M}(E))$ para cada $x \in E$.
Ahora, veamos que $x \to \hat{x}$ es continua. Sea $x_0 \in E$, $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\|\hat{x} - \hat{x_0}\| = \|\widehat{x - x_0}\| \leq \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

Además $x \to \hat{x}$ es una isometría, pues:

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = r(x^*x) = \|\widehat{x^*x}\|_\infty = \|\widehat{x^*}\hat{x}\|_\infty = \|\overline{\hat{x}}\hat{x}\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty^2,$$

es decir $\|x\| = \|\hat{x}\|_\infty$. Por tanto $x \to \hat{x}$ es inyectiva.
Sea B el rango $x \to \hat{x}$, es claro que B es una subálgebra de $C(\mathcal{M}(E))$ que es cerrada bajo conjugación compleja, es decir si $\hat{x} \in B$, entonces $(\hat{x})^* = \overline{\hat{x}} \in B$.
Además, $(B, \|\cdot\|_\infty)$ es completo pues si tomamos una sucesión de Cauchy $\{\hat{x}_n\}_n$ en $C(\mathcal{M}(E))$ y $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$$\|x_n - x_m\| = \|\widehat{x_n - x_m}\|_\infty = \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Así $\{x_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en E, y como $(E, \|\cdot\|)$ es de Banach, existen $x_0 \in E$ y $N' \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N'$, entonces

$$\|\hat{x}_n - \hat{x}_0\|_\infty = \|\widehat{x_n - x_0}\|_\infty = \|x_n - x_0\| < \varepsilon,$$

es decir $\hat{x}_n \to \hat{x}_0$. Así $(B, \|\cdot_\infty)$ es completo y por tanto cerrado. Por último sean $\varphi, \psi \in C(\mathcal{M}(E))$, con $\varphi \neq \psi$, entonces existe $x_0 \in E$ tal que $\varphi(x_0) \neq \psi(x_0)$, es decir $\widehat{x_0}(\varphi) \neq \widehat{x_0}(\psi)$ y por tanto $x \to \hat{x}$ separa puntos. Así utilizando el Teorema de Stone-Weierstass, $\overline{B} = C(\mathcal{M}(E))$, es decir $B = C(\mathcal{M}(E))$, y por tanto, $x \to \hat{x}$ es sobre. □

Proposición 3.1.21. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e. Si $h \in E$ es hermitiano, entonces $\sigma(h)$ es real.*

Demostración. Sea $E\langle h \rangle$ la subálgebra-C^* conmutativa con unidad e de E que contiene a h. Ya que $h = h^*$, entonces dada la transformada de Gelfand relativa a $E\langle h \rangle$ dada por $\hat{h} : \mathcal{M}(E) \to \sigma_B(h)$ satisface que $\hat{h} = \widehat{h^*} = \overline{\hat{h}}$, se sigue que $\hat{h}$ es una función real. Por el Lema 2.3.2 tenemos que $\sigma_B(h) = \{\varphi(h) : \varphi \in \mathcal{M}(B)\}$, así $\sigma_B(h)$ es real. Por tanto, como $\sigma_E(h) \subseteq \sigma_B(h)$ se sigue que $\sigma_E(h)$ es real. □

3.2. Elementos positivos

Definición 3.2.1. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ una álgebra-C^*, entonces un elemento $x \in E$ es llamado positivo, si x es hermitiano y $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$, denotado por $x \geq 0$. El conjunto de los elementos positivos en E será denotado por E^+. Escribimos $y \geq x$ si $y - x \in E^+$. Si $x \in E$ es tal que $-x \geq 0$, escribimos $x \leq 0$.*

Proposición 3.2.2. *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* conmutativa y $x \in E$. Entonces*

a) x es positivo si y sólo si $x = h^2$, con $h \in E$ y $h = h^*$.

b) Si E tiene unidad e, entonces x es positivo si y sólo si x es hermitiano y $\|(\|x\|e) - x\| \leq \|x\|$.

Demostración. a) Si $x \in E$ es positivo, entonces para toda $\phi \in \mathcal{M}(E)$ se cumple que $\hat{x}(\phi) = \phi(x) \geq 0$, es decir $\hat{x} \geq 0$. Tomemos $\sqrt{\hat{x}}$, claramente $\sqrt{\hat{x}} \in C(\mathcal{M}(E))$. Consideremos $h \in E$ tal que $\hat{h} = \sqrt{\hat{x}}$, si tomamos $h^* \in E$, entonces $\widehat{h^*} = \overline{\hat{h}} = \overline{\sqrt{\hat{x}}} = \sqrt{\hat{x}} = \hat{h}$ y como la transformada de Gelfand es inyectiva, se sigue que $h^* = h$. Ahora como $\hat{h} = \sqrt{\hat{x}}$, entonces $(\hat{h})^2 = \hat{x}$, es decir $\widehat{h^2} = \hat{x}$ y nuevamente como la transformada de Gelfand es inyectiva, se sigue que $h^2 = x$. Supongamos ahora que $x = h^2$ y $h = h^*$. Si $\hat{h}$ es la imagen de h con respecto a $x \to \hat{x}$ como $h = h^*$, entonces $\hat{h} = \widehat{h^*} = \overline{\hat{h}}$, por lo que $\hat{h}$ es real y $(\hat{h})^2 \geq 0$, es decir $\widehat{h^2} \geq 0$. Por último, como $h^2 = x$ se sigue que $\widehat{h^2} = \hat{x}$ y así $\hat{x} \geq 0$. Por tanto $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$, es decir, x es positivo.

b) Supongamos que E tiene unidad e y sea x un elemento hermitiano no cero de E. Si $x \in E^+$, entonces $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$, así para todo $\varphi \in \mathcal{M}(E)$ se tiene que $\hat{x}(\varphi) \geq 0$, entonces $1 - \frac{\hat{x}(\varphi)}{\|x\|} \leq 1$ para todo $\varphi \in \mathcal{M}(E)$, por lo que $\|1 - \left(\frac{\hat{x}}{\|x\|}\right)\|_\infty \leq 1$ y como $\|e - \left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| = \|1 - \left(\frac{\hat{x}}{\|x\|}\right)\|_\infty \leq 1$, entonces $\|(\|x\|e) - x\| \leq \|x\|$.
Supongamos que x es hermitiano y $\|(\|x\|e) - x\| \leq \|x\|$, notemos que $\|e - \left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| = \|1 - \left(\frac{\hat{x}}{\|x\|}\right)\|_\infty \leq 1$, entonces $1 - \frac{\hat{x}(\varphi)}{\|x\|} \leq 1$ para todo $\varphi \in \mathcal{M}(E)$, así $\hat{x}(\varphi) \geq 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{M}(E)$ y por el Lema 2.3.2 como $\sigma(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{M}(E)\}$, entonces $\sigma(x) \subseteq [0, \infty)$. Por tanto, $x \in E^+$. $\square$

Lema 3.2.3. *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e y $h \in E$ hermitiano. Entonces son equivalentes*

1. h *es positivo.*

2. $\|te - h\| \leq t$ *para cada* $t \geq \|h\|$.

3. $\|te - h\| \leq t$ *para algún* $t \geq \|h\|$.

Demostración. Veamos que $1 \Rightarrow 2$. Sea $t \geq \|h\|$, como h es hermitiano por el Teorema 3.1.16, $\|h\| = r(h)$, entonces dado $\lambda \in \sigma(h)$ se cumple que $0 \leq \lambda \leq \|h\|$. Consideremos $p(z) = t - z$. Por el Teorema 1.4.12,

$$\sigma(te - h) = \sigma(p(h)) = p(\sigma(h)) = \{t - \lambda : \lambda \in \sigma(h)\}.$$

Nuevamente utilizando el Teorema 3.1.16, como $te-h$ es hermitiano, entonces $\|te - h\| = r(te - h)$. Como $-\|h\| \leq -\lambda \leq 0$, entonces $0 \leq -\|h\| + t \leq -\lambda + t \leq t$ y de esto se sigue que $\|te - h\| \leq t$.
Es claro que $2 \Rightarrow 3$.
Por último $3 \Rightarrow 1$. Por lo anterior dado $\lambda \in \sigma(h)$ se cumple que $\|te - h\| = r(te - h)$ para todo t real, entonces $t - \lambda \in \sigma(te - h)$, así $0 \leq t - \lambda \leq \|te - h\| \leq t$, es decir $0 \leq t - \lambda \leq t$ si y sólo si $-t \leq \lambda - t \leq 0$ si y sólo si $0 \leq \lambda \leq t$. Por tanto $\lambda \geq 0$, es decir h es positivo. □

Proposición 3.2.4. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un álgebra-*C^* *con unidad* e. *Si* h, k *son elementos positivos en* E, *entonces* $h + k$ *es positivo en* E.

Demostración. Sean $h, k \in E$ elementos positivos en E. Tomemos $t = \|h\| + \|k\| \geq \|h + k\|$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\|te - (h + k)\| &= \|(\|h\|e - h) + (\|k\|e - k)\| \\ &\leq \|(\|h\|e - h)\| + \|(\|k\|e - k)\| \\ &\leq \|h\| + \|k\| = t,\end{aligned}$$

por el inciso (1) del Lema 3.2.3 se sigue que $\sigma(h + k) \subseteq [0, \infty)$. Entonces $h + k \geq 0$. □

Proposición 3.2.5. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un álgebra-*C^* *y sea* $x \in E$ *un elemento hermitiano. Entonces existen* $x^+, x^- \in E^+$ *tal que* $x = x^+ - x^-$ *y* $x^+x^- = x^-x^+ = 0$. *Más aún,* $\|x^+\| \leq \|x\|$, $\|x^-\| \leq \|x\|$.

Demostración. Como x es hermitiano, por lo escrito en la Proposición 3.1.21 $\hat{x}$ es real. Entonces escribimos $\hat{x}$ como la diferencia de sus partes positiva y negativa, es decir

$$\hat{x} = \hat{x}^+ - \hat{x}^-,$$

donde $\hat{x}^+ = \text{máx}\{\hat{x}, 0\} \geq 0$ y $\hat{x}^- = -\text{mín}\{\hat{x}, 0\} \geq 0$. Consideremos $E\langle x \rangle$ la subálgebra-C^* conmutativa con unidad e que contiene a x. Por el Teorema 3.1.20 existen únicos $x^+, x^- \in E\langle x \rangle \subseteq E$ tales que $\widehat{x^+} = \hat{x}^+$ y $\widehat{x^-} = \hat{x}^-$. Entonces, si tomamos $z = x^+ + x^-$ se tiene que $\hat{z} = \widehat{x^+ - x^-} = \widehat{x^+} - \widehat{x^-} = \hat{x}$ y como la transformada de Gelfand es inyectiva se sigue que, $z = x$, es decir $x = x^+ - x^-$. Para ver x^+, x^- son positivos primero apliquemos la representación de Gelfand al elemento $(x^+)^*$, tenemos que $\widehat{(x^+)^*} = (\widehat{x^+})^* = \overline{\widehat{x^+}} = \overline{\hat{x}^+} = \hat{x}^+ = \widehat{x^+}$, entonces como la transformada de Gelfand es inyectiva tenemos que $x^+ = (x^+)^*$, por tanto x^+ es hermitiano. De manera análoga se puede probar que x^- es hermitiano. Ahora, como $\sigma(x) \subseteq \sigma_B(x) \subseteq [0, \infty)$, por tanto x^+ es positivo. De manera análoga x^- es positivo. Por último, como $\widehat{x^+x^-} = \widehat{x^+}\widehat{x^-} = \hat{x}^+\hat{x}^- = 0$, entonces por ser inyectiva la transformada de Gelfand, $x^+x^- = 0$. Análogamente $x^-x^+ = 0$.

$\square$

Proposición 3.2.6. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* y sea $x \in E$, entonces:*

a) $\|x\| = \nu(x)$*, si x es normal.*

b) $\|x\| = \nu(x^*x)^{\frac{1}{2}}$

Demostración.

1. Como $xx^* = x^*x$, tenemos que

$$\|x^2\|^2 = \|(x^2)^*x^2\| = \|(x^*x)^*x^*x\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4.$$

Por tanto $\|x^2\| = \|x\|^2$. De manera iterada $\|x\| = \|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}$, entonces $\|x\| = \nu(x)$.

2. Aplicando $a)$ al elemento hermitiano x^*x tenemos que $\|x\|^2 = \|x^*x\| = \nu(x^*x)$.

$\square$

Definición 3.2.7. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e, E es llamada simétrica, si para toda $x \in E$, $e + x^*x$ tiene inverso en E.*

Teorema 3.2.8. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^*, entonces $E^+ = \{y^*y : y \in E\}$. En particular, E es simétrica.*

Demostración. Sea $x \in E^+$, entonces por el inciso a) de la Proposición 3.2.2 $x = h^2$, con h hermitiano. Por tanto, $E^+ \subseteq \{y^*y : y \in E\}$.
Supongamos ahora que $x = y^*y$, para alguna $y \in E$. Como x es hermitiano, por la Proposición 3.2.5 existen $u, v \in E^+$ tales que $x = y^*y = u - v$ con $uv = vu = 0$. Ahora $(yv)^*(yv) = v^*y^*yv = vy^*yv = v(u-v)v = -v^3$. Ya que $v \geq 0$, entonces por el Teorema del mapeo espectral 1.4.12 $(yv)^*(yv) = -v^3 \leq 0$. Como los elementos $(yv)^*(yv)$ y $(yv)(yv)^*$ tiene el mismo espectro no cero, entonces también se cumple $(yv)(yv)^* \leq 0$. Escribiendo $yv = h + ik$ con h y k hermitianos. Entonces h^2, $k^2 \in E^+$. Utilizando la Proposición 3.2.4 tenemos que:

$$0 \leq 2(h^2 + k^2) = h^2 + ihk - ikh + k^2 + h^2 - ihk + ikh + k^2$$

$$= (yv)^*(yv) + (yv)(yv)^* \leq 0.$$

Así, $\sigma(h^2 + k^2) = \{0\}$, entonces $r(h^2 + k^2) = \|h^2 + k^2\| = 0$, entonces $h^2 + k^2 = 0$. Como $h^2 = -k^2$ se tiene que $\sigma(h^2) = \sigma(-k^2)$ de esto se sigue que $0 \leq h^2 \leq 0$, así $\sigma(h) = \{0\}$ pero como $r(h) = \|h\| = 0$, entonces $h = 0$. De manera análoga se puede probar que $k = 0$, esto implica que $yv = 0$. Pero entonces $0 = (yv)^*(yv) = -v^3$, es decir $v^3 = 0$. Ahora, por la Proposición 2.2.9 se tiene que $\nu(v^3) = \nu(v)^3 = 0$ y como v es normal, entonces por la Proposición 3.2.6 $\|v\| = \nu(v)$, así

$$\|v\|^3 = \nu(v)^3 = \nu(v^3) = 0$$

entonces $v = 0$. Así $x = y^*y = u \in E^+$, es decir $\{y^*y : y \in E\} \subseteq E^+$. En particular si $x \in E$, como $x^*x \geq 0$, entonces $-1 \notin \sigma(x^*x)$,entonces $-e - x^*x$ es invertible. Por tanto $e + x^*x$ es invertible, y entonces E es simétrica. □

Teorema 3.2.9. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* y supongamos que I es un ideal cerrado bilateral. Entonces I es también cerrado bajo la operación $*$ y E/I, con la norma cociente, es un álgebra-C^*.*

Demostración. La demostración de este Teorema la podemos encontrar en [1], pág. 84. □

3.3. Representaciones-$*$

Definición 3.3.1. *Sea E y F álgebras-$*$. Un homomorfismo-$*$ de E en F, es un homomorfismo $\psi : E \to F$ tal que $\psi(x^*) = \psi(x)^*$ para cada $x \in E$. Un homomorfismo-$*$ biyectivo es llamado un isomorfismo-$*$.*

Definición 3.3.2. *Sea E un álgebra-$*$. Una representación-$*$ de E en un espacio de Hilbert H es un homomorfismo-$*$ $\pi : E \to B(H)$. Si* $\ker(\pi) = \{0\}$, *la representación π es llamada fiel.*

Definición 3.3.3. *Sean E un álgebra-$*$ y $\phi : E \to \mathbb{C}$, una funcional lineal. El adjunto de ϕ está definido como $\phi^*(x) = \overline{\phi(x^*)}$ para todo $x \in E$. Si $\phi^* = \phi$, es decir si $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$ para todo $x \in E$, entonces ϕ es hermitiana.*

Definición 3.3.4. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* y sea $\phi : E \to \mathbb{C}$ una funcional lineal, decimos que ϕ es positiva si $\phi(x^*x) \geq 0$ para cada $x \in E$.*

Definición 3.3.5. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e y sea $\phi : E \to \mathbb{C}$ una funcional lineal. Decimos que ϕ es un estado si es positiva y $\phi(e) = 1$. El conjunto de estados será denotado por $S(E)$.*

Teorema 3.3.6. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e y consideremos $\phi : E \to \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces*

1. *$\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$ para todo $x \in E$.*
2. *$|\phi(y^*x)|^2 \leq \phi(x^*x)\phi(y^*y)$ para todo $x, y \in E$.*

Demostración.

1. Sea $x, y \in E$. Consideremos $u = \lambda x + \mu y$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Entonces, por ser ϕ positiva, $\phi(u^*u) \geq 0$, es decir

$$0 \leq |\lambda|^2\phi(x^*x) + \overline{\lambda}\mu\phi(x^*y) + \overline{\mu}\lambda\phi(y^*x) + |\mu|^2\phi(y^*y).$$

Entonces

$$-|\lambda|^2\phi(x^*x) - |\mu|^2\phi(y^*y) \leq \overline{\lambda}\mu\phi(x^*y) + \overline{\mu}\lambda\phi(y^*x),$$

así $\overline{\lambda}\mu\phi(x^*y) + \overline{\mu}\lambda\phi(y^*x)$ es real para toda $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Si escogemos $\lambda = \mu = 1$, entonces $\phi(x^*y) + \phi(y^*x)$ es real. Análogamente tomando $\lambda = 1$ y $\mu = i$ se sigue que $i\phi(x^*y) - i\phi(y^*x)$ es real. Así,

$$\phi(x^*y) + \phi(y^*x) = \overline{\phi(x^*y)} + \overline{\phi(y^*x)} \tag{3.1}$$

y

$$i\phi(x^*y) - i\phi(y^*x) = -i\overline{\phi(x^*y)} + i\overline{\phi(y^*x)}. \tag{3.2}$$

De la ecuación (3.2) se sigue que

$$\phi(x^*y) - \phi(y^*x) = -\overline{\phi(x^*y)} + \overline{\phi(y^*x)}. \tag{3.3}$$

Sumando la ecuación (3.1) y la ecuación (3.3) obtenemos que $2\phi(x^*y) = 2\overline{\phi(y^*x)}$, entonces $\phi(x^*y) = \overline{\phi(y^*x)}$. Por tanto tomando $y = e$, se cumple que $\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$.

2. Nuevamente consideremos $u = \lambda x + \mu y$. Sean λ cualquier número real y $\mu = \phi(y^*x)$, entonces como $\phi(u^*u) \geq 0$ tenemos que

$$\lambda^2\phi(x^*x) + 2\lambda|\phi(y^*x)|^2 + |\phi(y^*x)|^2\phi(y^*y) \geq 0, \tag{3.4}$$

ya que esto pasa para cualquier λ real, se sigue que el discriminante de (3.4) es menor o igual a cero, es decir:

$$4|\phi(y^*x)|^4 - 4|\phi(y^*x)|^2\phi(x^*x)\phi(y^*y) \leq 0,$$

y entonces $|\phi(y^*x)|^2 \leq \phi(x^*x)\phi(y^*y)$. En particular, si tomamos $y = e$ se tiene que:

$$|\phi(x)|^2 \leq \phi(e)\phi(x^*x). \tag{3.5}$$

□

Lema 3.3.7. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach. Si $h \in E$ es hermitiano con $\nu(h) < 1$, entonces existe $k \in E$ un elemento casi-regular hermitiano tal que $hk = kh$ y $k \circ k = h$. Si E tiene unidad e y $h \in E$ es hermitiano tal que $\nu(e-h) < 1$, entonces existe $u \in E$ hermitiano invertible tal que $uh = hu$ y $u^2 = h$. Más aun si $\sigma(h) \subseteq [0, \infty)$, entonces $\sigma(u) \subseteq [0, \infty)$.*

Demostración. La demostración de este Lema se puede ver en la pág. 64 de [2]. □

Proposición 3.3.8. *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e y $\phi : E \to \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces*

$$|\phi(x^*hx)| \leq \nu(h)\phi(x^*x)$$

para $x, h \in E$, con h hermitiano.

Demostración. Sea h un elemento hermitiano con $\nu(h) < 1$. Por el Lema 3.3.7, existen $r, s \in E$ hermitianos tales que $r \circ r = h$ y $s \circ s = -h$, además $r \circ r = 2r - r^2$ y $s \circ s = 2s - s^2$. Para cada $x \in E$ sea $v = (e-r)x$ y $w = (e-s)x$, entonces

$$v^*v = x^*(e-r)^2x \quad w^*w = x^*(e-s)^2x,$$

es decir

$$v^*v = x^*(e-h)x \quad w^*w = x^*(e+h)x.$$

Entonces por ser ϕ positiva $\phi(x^*(e-h)x) \geq 0$ y $\phi(x^*(e+h)x) \geq 0$. Por ser ϕ lineal, $\phi(x^*x) - \phi(x^*hx) \geq 0$ y $\phi(x^*x) + \phi(x^*hx) \geq 0$. Ahora por ser ϕ

hermitiana $\phi(x^*hx) = \phi((x^*hx)^*) = \overline{\phi(x^*hx)}$, es decir $\phi(x^*hx)$ es real y así $\phi(x^*x) \geq \phi(x^*hx)$ y $\phi(x^*x) \geq -\phi(x^*hx)$. Por tanto si $\nu(h) < 1$, se tiene que $|\phi(x^*hx)| \leq \phi(x^*x)$.
Para cualquier h hermitiano, sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $h_\varepsilon = \frac{h}{\nu(h)+\varepsilon}$, claramente es hermitiano, como $\nu(h) < \nu(h) + \varepsilon$, entonces $\nu(h_\varepsilon) = \frac{\nu(h)}{\nu(h)+\varepsilon} < 1$. Así por lo anterior $|\phi(x^*h_\varepsilon x)| \leq \phi(x^*x)$. Entonces,

$$\left|\phi\left(x^*\left(\frac{h}{\nu(h)+\varepsilon}\right)x\right)\right| = \frac{|\phi(x^*hx)|}{\nu(h)+\varepsilon} \leq \phi(x^*x).$$

Por tanto $|\phi(x^*hx)| \leq \nu(h) + \varepsilon$. Por tanto como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario $|\phi(x^*hx)| \leq \nu(h)$. □

Corolario 3.3.9. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e. Si $\phi : E \to \mathbb{C}$ es una funcional positiva en E, entonces para cada $x \in E$*

a) $\phi(x^*x) \leq \phi(e)\nu(x^*x)$.

b) $|\phi(x)| \leq \phi(e)\nu(x^*x)^{\frac{1}{2}}$.

c) $|\phi(x)| \leq \phi(e)\nu(x)$ *para* $x \in N(E)$.

Demostración.

a) Sea $x \in E$, por la Proposición 3.3.8 $|\phi(y^*hy) \leq \nu(h)\phi(y^*y)$, para todo $y, h \in E$, con h hermitiano. Tomando $h = x^*x$ y $y = e$ tenemos que $\phi(x^*x) \leq \phi(e)\nu(x^*x)$.

b) Por la ecuación (3.5) sabemos que $|\phi(x)|^2 \leq \phi(e)\phi(x^*x)$ y multiplicando por $\phi(e)$ al inciso a) se tiene que $\phi(e)\phi(x^*x) \leq \phi(e)^2\nu(x^*x)$, entonces $|\phi(x)|^2 \leq \phi(e)^2\nu(x^*x)$.

c) Si $x \in N(E)$, entonces $xx^* = x^*x$. Así por inciso d) de la Proposición 2.2.9, $\nu(xx^*) \leq \nu(x)\nu(x^*) = \nu(x)^2$ y, entonces, $\nu(xx^*)^{\frac{1}{2}} \leq \nu(x)$. Por inciso b se sigue que $|\phi(x)| \leq \phi(e)\nu(x)$.

□

Lema 3.3.10. *Sea E un espacio de Banach. Supongamos que E_1 y E_2 son subespacios cerrados de E tal que $E = E_1 + E_2$, entonces existe $\beta > 0$ tal que para cada $x \in E$ se tiene que $x = x_1 + x_2$ para algunos $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ y $\|x_1\| + \|x_2\| \leq \beta\|x\|$.*

Demostración. Sea $X = E_1 \times E_2$ el espacio vectorial con operaciones algebraicas realizadas coordenada a coordenada y con norma

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\| + \|x_2\|, \quad (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2.$$

Como E_1 y E_2 son completos, entonces X es completo. Sea $T : X \to E$ la aplicación lineal definida por $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Entonces T es continua, pues claramente $\|x_1 + x_2\| \leq \|(x_1, x_2)\|$. Además, por hipótesis T es sobre. Por el Teorema del mapeo abierto, existe $\beta > 0$ tal que para cada $x \in E$, se tiene que $x = T(x_1, x_2)$ para algunos $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ y $\|(x_1, x_2)\| \leq \beta\|x\|$. □

Teorema 3.3.11. *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e y $\phi : E \to \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces, ϕ es continua.*

Demostración. Notemos que si ϕ es igual a cero, claramente el teorema es cierto. Supongamos que ϕ es no cero. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $\phi(e) = 1$, pues como $\phi(e) \geq 0$, entonces si $\phi(e) = 0$ por el inciso $c)$ del Corolario 3.3.9 $\phi(x) = 0$ para cada $x \in E$ y se cumple el teorema. Ahora si $\phi(e) > 0$, entonces claramente la funcional $\phi' = \frac{\phi}{\phi(e)}$ es positiva con $\phi'(e) = 1$. Ahora, sea $H = \overline{H(E)}$, es claro que $H(E)$ y $iH(E)$ son subespacios reales de E y además $E = H(E) + iH(E)$. Por el inciso $c)$ del Corolario 3.3.9 la restricción de ϕ a $H(E)$ es una funcional real de norma uno pues

$$|\phi(h)| \leq \phi(e)\nu(h) = \nu(h) \leq \|h\|.$$

Por tanto ϕ se extiende de la manera usual a una funcional real ψ en H también de norma uno.
Afirmamos que si $K = H \cap iH$, entonces

$$\psi(k) = 0 \text{ para cada } k \in K. \tag{3.6}$$

Si $k = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} h_n = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} ik_n$, con $(h_n)_n$ y $(k_n)_n$ sucesiones en $H(E)$, entonces $h_n^2 \to k^2$ y $k_n^2 \to -k^2$ cuando $n \to \infty$, así por el punto 2 del Teorema 3.3.6 y por inciso $c)$ del Corolario 3.3.9 tenemos que

$$|\phi(h_n)|^2 \leq \phi(h_n^2) \leq \phi(h_n^2 + k_n^2) \leq \|h_n^2 + k_n^2\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(h_n) = 0$, y como $\psi(k) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi(h_n) = 0$ se sigue que $\psi(k) = 0$. Ahora, sea $x \in E$ por el Lema 3.3.10 existe $\beta > 0$ tal que

$$x = x_1 + ix_2 \text{ con } x_1, x_2 \in H, \ \|x_1\| + \|x_2\| \leq \beta\|x\|.$$

Si $x = h + ik$, con $h, k \in H(E)$, se tiene que $x_1 - h$, $x_2 - k \in K$, entonces $\psi(x_1 - h) = 0$ y $\psi(x_2 - k) = 0$, es decir $\psi(x_1) = \psi(h)$ y $\psi(x_2) = \psi(k)$, por la ecuación (3.6) tenemos que

$$\phi(x) = \phi(h) + i\phi(k) = \psi(x_1) + i\psi(x_2).$$

Entonces,

$$|\phi(x)| \leq |\psi(x_1)| + |\psi(x_2)| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \leq \beta\|x\|.$$

Por tanto, ϕ es continua. □

En caso de que $(E, \|\cdot\|)$ sea un álgebra-C^* se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.12. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e y consideremos $\phi : E \to \mathbb{C}$ una funcional positiva. Entonces:*

1. *$\phi(y^*x^*xy) \leq \|x\|^2\phi(y^*y)$ para todo $x, y \in E$.*
2. *$\phi(e) = \|\phi\|$.*

Demostración.

1. Tomemos $y \in E$ fijo y sea $\phi : E \to \mathbb{C}$ una funcional lineal positiva. Definimos $\psi : E \to \mathbb{C}$, dada por $\psi(z) = \phi(y^*zy)$ para todo $z \in E$. Notemos que ψ es una funcional positiva, pues claramente es lineal y además dado $z \in E$

$$\psi(z^*z) = \phi(y^*z^*zy) = \phi((zy)^*zy) \geq 0.$$

Así haciendo $z = e$ se tiene que $\|\psi\| = \psi(e) = \phi(y^*y)$. Entonces si $z = x^*x$, tenemos que

$$\phi(y^*x^*xy) = \psi(x^*x) \leq \|\psi\|\|x^*x\| = \phi(y^*y)\|x\|^2.$$

2. Sabemos que $\|e\| = 1$. Entonces, $|\phi(e)| \leq \|\phi\|$. Ahora, si tomamos $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$ y $y = 1$, por el inciso 2 tenemos que:

$$|\phi(x)| \leq \phi(x^*x)^{\frac{1}{2}}\phi(e)^{\frac{1}{2}} \leq \|\phi\|^{\frac{1}{2}}\|x^*x\|^{\frac{1}{2}}\phi(e)^{\frac{1}{2}} = \|\phi\|^{\frac{1}{2}}\|x\||\phi(e)|^{\frac{1}{2}},$$

entonces tomando el supremo tenemos que

$$\|\phi\| \leq \|\phi\|^{\frac{1}{2}}\phi(e)^{\frac{1}{2}},$$

por tanto se sigue que $\|\phi\| \leq \phi(e)$.

□

Definición 3.3.13. *Sea $(H_i, \langle\cdot,\cdot\rangle)_{i\in I}$ una familia indexada de espacios de Hilbert. Consideramos*

$$\bigoplus_{i\in I} H_i = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} H_i : \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 < \infty \right\}.$$

Donde $\sum\limits_{i\in I} \|x_i\|^2 = \sup\limits_{J\subseteq I \text{ finito}} \sum\limits_{i\in J} \|x_i\|^2$. Entonces es un espacio vectorial con las operaciones:

1. $\lambda(x_i)_{i\in I} = (\lambda x_i)_{i\in I}$.

2. $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$.

Proposición 3.3.14. *Sea $A \subseteq [0,\infty)$ acotado superiormente. Entonces se cumple que* $\sup\sqrt{A} = \sqrt{\sup A}$.

Demostración. Sea $a \in A$, entonces $0 \leq a \leq \sup A$ y así $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{\sup A}$. Por tanto $\sup\sqrt{A} \leq \sqrt{\sup A}$.
Si $\sqrt{a} \in \sqrt{A}$ se sigue que $0 \leq \sqrt{a} \leq \sup\sqrt{A}$, entonces $0 \leq a \leq (\sup\sqrt{A})^2$ y $\sup A \leq (\sup\sqrt{A})^2$. Por tanto $\sqrt{\sup A} \leq \sup\sqrt{A}$. □

Proposición 3.3.15. *Definimos $\|\cdot\| : \bigoplus\limits_{i\in I} H_i \to [0,\infty)$ dada por*

$$\|(x_i)_i\| = \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces $\|\cdot\|$ es una norma en $\bigoplus\limits_{i\in I} H_i$.

Demostración. Sean $(x_i)_i$ y $(y_i)_i \in \bigoplus\limits_{i\in I} H_i$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

i) Supongamos que $\|(x_i)_i\| = 0$; es decir $\left(\sup\limits_{J\subseteq I} \sum\limits_{i\in J} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0$ para todo J finito, entonces $\sum\limits_{i\in J} \|x_i\|^2 = 0$ para todo J finito, así $\|x_i\| = 0$ para toda i y entonces $x_i = 0$ para toda i. Por tanto $(x_i)_i = 0$.
Si $(x_i)_i = 0$, entonces $x_i = 0$ para toda i, entonces $\|x_\imath\| = 0$ para toda i. Por tanto $\|(x_i)_i\| = 0$.

ii) $$\|\lambda(x_i)_i\| = \left(\sup_{J\subseteq I \text{ finito}} \sum_{i\in J} \|\lambda x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sup_{J\subseteq I \text{ finito}} \sum_{i\in J} |\lambda|^2\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(|\lambda|^2 \sup_{J\subseteq I \text{ finito}} \sum_{i\in J} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\lambda| \left(\sup_{J\subseteq I \text{ finito}} \sum_{I\in J} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\|(x_i)_i\|.$$

iii) Sea $J \subseteq I$ finito, por la desigualdad de Minkowski

$$\left(\sum_{i\in J} \|x_i + y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i\in J} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i\in J} \|y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Al considerar el supremo de ambos lados tenemos que

$$\sup_{J\subseteq I} \left(\sum_{i\in J} \|x_i + y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{J\subseteq I} \left(\sum_{i\in J} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sup_{J\subseteq I} \left(\sum_{i\in J} \|y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por la Proposición 3.3.14 tenemos que:

$$\left(\sup_{J\subseteq I} \sum_{i\in J} \|x_i + y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sup_{J\subseteq I} \sum_{i\in J} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sup_{J\subseteq I} \sum_{i\in J} \|y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por tanto, $\|(x_i)_i + (y_i)_i\| \leq \|(x_i)_i\| + \|(y_i)_i\|$.

□

Proposición 3.3.16. *Sea* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \bigoplus_{i\in I} H_i \to \mathbb{C}$ *dado por:*

$$\langle (x_i)_i, (y_i)_i \rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i \rangle,$$

entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es un producto interior en* $\bigoplus_{i\in I} H_i$.

Demostración. Sean $(x_i)_i, (y_i)_i \in \bigoplus_{i\in I} H_i$, entonces se cumple que $\langle (x_i)_i, (y_i)_i\rangle \in \mathbb{C}$. Para eso primero veamos que $\sum_{i\in I} | \langle (x_i)_i, (y_i)_i\rangle | \in \mathbb{R}$. Definamos

$$(x'_i)_{i\in I} = \begin{cases} x_i & \text{si } \|x_i\| \geq \|y_i\| \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces claramente $\|(x'_i)_i\| \leq \|(x_i)_i\|$. Análogamente considremos

$$(y'_i)_{i\in I} = \begin{cases} y_i & \text{si } \|y_i\| > \|x_i\| \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces $\|(y'_i)_i\| \leq \|(y_i)_i\|$. Tomemos $(x'_i + y'_i)_{i\in I}$,

$$(x'_i + y'_i)_{i\in I} = \begin{cases} x_i & \text{si } \|x_i\| \geq \|y_i\| \\ y_i & \text{si } \|y_i\| > \|x_i\|. \end{cases}$$

Por construcción de $(x'_i)_i, (y'_i)_i$, se tiene que $\|x_i\| \leq \|x'_i+y'_i\|$,$\|y_i\| \leq \|x'_i+y'_i\|$. Así como $(x_i)'_i + (y_i)'_i \in \bigoplus_{i\in I} H_i$, entonces

$$| \langle x_i, y_i\rangle | \leq \|x_i\|\|y_i\| \leq \|x'_i + y'_i\|^2, \text{ entonces} \sum_{i\in I} | \langle x_i, y_i\rangle | \leq \sum_{i\in I} \|x'_i + y'_i\|^2.$$

Además es claro que $\sum_{i\in I} | \langle x_i, y_i\rangle | < \infty$, así por el Teorema 7 pág. 130 de [5], tenemos que $\langle (x_i)_i, (y_i)_i\rangle \in \mathbb{C}$. Ahora veamos que se cumplen las propiedades de producto interior:

Sean $(x_i)_i, (y_i)_i \in \bigoplus_{i\in I} H_i$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

1. $\langle (x_i)_i, (x_i)_i\rangle \geq 0$.

$$\langle (x_i)_i, (x_i)_i\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, x_i\rangle \geq \sum_{i\in I} 0 = 0.$$

2. $\langle (x_i)_i, (x_i)_i\rangle = 0$ si y sólo si $(x_i)_i = 0$.

$$\langle (x_i)_i, (x_i)_i\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x_i, x_i\rangle = 0 \text{ para todo } i \in I$$
$$\Leftrightarrow x_i = 0 \text{ para todo } i \in I \Leftrightarrow (x_i)_i = 0.$$

3. $\langle (x_i)_i, (y_i)_i\rangle = \overline{\langle (y_i)_i, (x_i)_i\rangle}$.

$$\langle (x_i)_i, (y_i)_i\rangle = \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle = \sum_{i\in I} \overline{\langle y_i, x_i\rangle} = \overline{\sum_{i\in I} \langle y_i, x_i\rangle} = \overline{\langle (y_i)_i, (x_i)_i\rangle}.$$

4. $\langle \lambda(x_i)_i + (y_i)_i, (z_i)_i \rangle = \lambda \langle (x_i)_i, (z_i)_i \rangle + \langle (y_i)_i, (z_i)_i \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(x_i)_i + (y_i)_i, (z_i)_i \rangle &= \sum_{i\in I} \langle \lambda x_i + y_i, z_i \rangle = \sum_{i\in I} \lambda \langle x_i, z_i \rangle + \langle y_i, z_i \rangle \\
&= \lambda \sum_{i\in I} \langle x_i, z_i \rangle + \sum_{i\in I} \langle y_i, z_i \rangle \\
&= \lambda \langle (x_i)_i, (z_i)_i \rangle + \langle (y_i)_i, (z_i)_i \rangle .
\end{aligned}$$

□

Observación 3.3.17. *Para cada* $(x_i)_i \in \bigoplus_{i\in I} H_i$ *se cumple que:*

$$\|(x_i)_i\|^2 = \langle (x_i)_i, (x_i)_i \rangle .$$

Es decir en $\bigoplus_{i\in I} H_i$ *la norma está inducida por un producto punto.*

Demostración. Sea $(x_i)_i \in \bigoplus_{i\in I} H_i$, entonces

$$\|(x_i)_i\|^2 = \sup_{J\subseteq I \text{ finito}} \sum_{i\in J} \|x_i\|^2 = \sup_{J\subseteq I \text{ finito}} \sum_{i\in J} \langle x_i, x_i \rangle = \langle (x_i)_i, (x_i)_i \rangle .$$

□

Proposición 3.3.18. *Afirmamos que* $\left(\bigoplus_{i\in I} H_i, \|\cdot\|\right)$ *es Hilbert, donde*

$$\|(x_i)_i\| = \left(\sum_{i\in I} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Demostración. Sea $((x_i^n)_i)_n$ una sucesión de Cauchy en $\left(\bigoplus_{i\in I} H_i, \|\cdot\|\right)$. Veamos que $((x_i^n)_i)_n$ es convergente en $\left(\bigoplus_{i\in I} H_i, \|\cdot\|\right)$. Consideremos $\varepsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq N$ se cumple que

$$\left(\sup_{J\subseteq I \text{finito}} \sum_{i\in J} \|x_i^n - x_i^m\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(x_i^n)_i - (x_i^m)_i\| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

Por lo que si tomamos $J = \{i\}$, se tiene que $\|x_i^n - x_i^m\| < \varepsilon$. Por tanto $(x_i^n)_n$ es una sucesión de Cauchy en H_i para cada $i \in I$, entonces por ser H_i un espacio de Hilbert, existe $x_i \in H_i$ tal que $(x_i^n)_n \to x_i$ cuando $n \to \infty$. Veamos que $((x_i^n)_i)_n \to (x_i)_i$ cuando $n \to \infty$.
De (3.7) si fijamos $n \geq N$ y hacemos $m \to \infty$, entonces para todo $J \subseteq I$ finito se tiene que

$$\left(\sum_{i \in J} \|x_i^n - x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Entonces

$$\left(\sup_{J \subseteq I \text{ finito}} \sum_{i \in J} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sup_{J \subseteq I \text{ finito}} \sum_{i \in J} \|x_i - x_i^n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sup_{J \subseteq I \text{ finito}} \sum_{i \in J} \|x_i^n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Además, si $n \geq N$, entonces $\left(\sup\limits_{J \subseteq I \text{ finito}} \sum\limits_{i \in J} \|x_i^n - x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$. Por tanto $\|(x_i^n)_i - (x_i)_i\| < \varepsilon$. Entonces, si $n \geq N$ y $J \subseteq I$ finito, se tiene que

$$\left(\sum_{i \in J} \|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i \in J} \|x_i - x_i^n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i \in J} \|x_i^n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es decir, $\|(x_i)_i\| < \varepsilon + \|(x_i^n)_n\| < \infty$. Por tanto $(x_i)_i \in \left(\bigoplus\limits_{i \in I} H_i, \|\cdot\|\right)$. Así $\left(\bigoplus\limits_{i \in I} H_i, \|\cdot\|\right)$ es un espacio de Hilbert. □

Proposición 3.3.19. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach-$*$ y $(B, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^*. Si $\psi : E \to B$ es un homomorfismo-$*$, entonces $\|\psi(x)\| \leq \|x\|$ para cada $x \in E$. En particular, ψ es continua con $\|\psi\| \leq 1$.*

Demostración. Sea $x \in E$. Primero probemos que $\sigma_B(\psi(x)) \subseteq \sigma(x)$. Supongamos que $\lambda \notin \sigma(x)$, entonces $x - \lambda e$ es invertible en E, así existe $y \in E$ tal que $y(x - \lambda e) = e$ y $(x - \lambda e)y = e$, así aplicando ψ tenemos que $\psi(y)(\psi(x) - \lambda e) = e$ y $(\psi(x) - \lambda e)\psi(y) = e$, así $\lambda \notin \sigma_B(\psi(x))$. Entonces, ya que $\sigma_B(\psi(x)) \subseteq \sigma(x)$ se sigue que

$$r_B(\psi(x)) \leq r(x) \tag{3.9}$$

De (3.9) y (3.2.6) a) tenemos que

$$\|\psi(x)\|^2 = \|\psi(x)^*\psi(x)\| = r(\psi(x)^*\psi(x))$$

$$= r(\psi(x^*x)) \leq r(x^*x)$$
$$\leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2.$$

Entonces $\|\psi(x)\| \leq \|x\|$; por tanto $\|\psi\| \leq 1$. □

Definición 3.3.20. *Sea E un álgebra-$*$ y consideremos $\{\pi_i\}_{i\in I}$ una familia de representaciones-$*$ de E en el espacio de Hilbert H_i. Supongamos que para $x \in E$, existe k_x tal que*

$$\|\pi_i(x)\| \leq k_x \text{ para cada } i \in I.$$

Definimos la suma directa $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i : E \to B\left(\bigoplus_{i\in I} H_i\right)$, definida de la siguiente manera:

$$\text{Si } \xi = (\xi_i)_i \in \bigoplus_{i\in I} H_i, \text{ entonces } \pi(x)(\xi) = (\pi_i(x)(\xi_i))_i$$

para cada $x \in E$.

Observación 3.3.21. *Para cada $x \in E$ tenemos que $\pi(x)(\xi) \in \bigoplus_{i\in I} H_i$, con $\xi = (\xi_i)_i \in \bigoplus_{i\in I} H_i$.*

Demostración. Notemos que:

$$\|\pi(x)(\xi)\|^2 = \sum_{i\in I} \|\pi_i(x)(\xi_i)\|^2 = \sup_{J\subseteq I \text{ finito}} \sum_{i\in I} \|\pi_i(x)(\xi_i)\|^2$$

$$\leq \sup_{J\subseteq I \text{ finito}} \sum_{i\in I} \|\pi_i(x)\|^2 \|\xi_i\|^2$$

$$\leq k_x^2 \sum_{i\in I} \|\xi_i\|^2 < \infty.$$

□

Observación 3.3.22. *Sea $x \in E$, veamos que $\pi(x)$ es un operador lineal acotado en $\bigoplus_{i\in I} H_i$.*

Demostración.

$$\|\pi(x)(\xi)\|^2 = \sum_{i\in I} \|\pi_i(x)\xi_i\|^2 \le \sum_{i\in I} \|\pi_i(x)\|^2\|\xi_i\|^2$$

$$\le \sum_{i\in I} k_x^2\|\xi_i\|^2 = k_x^2 \sum_{i\in I} \|\xi_i\|^2 < \infty.$$

Si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach-$*$, por la Proposición 3.3.19 se tiene que $\|\pi_i(x)\| \le \|x\|$, es decir $k_x = \|x\|$. Además, es fácil ver que π es un homomorfisomo-$*$. Más aun, dados $\xi, \eta \in \bigoplus_{i\in I} H_i$.

$$\langle \pi(x)\xi, \eta\rangle = \sum_{i\in I} \langle \pi_i(x)\xi_i, \eta_i\rangle = \sum_{i\in I} \langle \xi_i, \pi_i(x^*)\eta_i\rangle = \langle \xi, \pi(x^*)\eta\rangle\,,$$

entonces $\pi(x)^* = \pi(x^*)$. Por tanto $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i$ es una representación-$*$. □

Definición 3.3.23. *Sean E un álgebra-$*$ y π una representación-$*$ de E en un espacio de Hilbert H. Entonces π es llamada cíclica si existe $\xi \in H$ tal que el subespacio $\pi(E)\xi = \{\pi(x)\xi : x \in E\}$ es denso en H. El vector ξ es llamado el vector cíclico de π.*

Definición 3.3.24. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach. La función $\rho : E \to [0, \infty)$ definida por $\rho(x) = r(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ para $x \in E$, es llamada la función de Pták.*

Teorema 3.3.25. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach, y sea π una representación-$*$ de E en un espacio de Hilbert H, entonces:*

a) $\|\pi(x)\| \le \rho(x)$ *para todo* $x \in E$.

b) Si E es un álgebra de Banach-$*$, entonces π es continua y $\|\pi\| \le 1$.

Demostración. a) Sea $x \in E$, por un argumento similiar a la ecuación (3.9) de la Proposición 3.3.19, tenemos que

$$\|\pi(x)\|^2 = \|\pi(x)\pi(x^*)\| = \|\pi(xx^*)\| = r(\pi(xx^*)) \le r(xx^*),$$

es decir, $\|\pi(x)\| \le \rho(x)$.

b) Se sigue de manera inmediata de la Proposición 3.3.19.

□

Teorema 3.3.26. *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e y $\phi : E \to \mathbb{C}$ un estado. Entonces existe una representación-$*$ cíclica π de E en un espacio de Hilbert H, con vector cíclico $\xi \in H$ de norma 1, tal que*

$$\phi(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi \rangle \text{ para todo } x \in E.$$

Más aun $\phi(x^*x)^{\frac{1}{2}} \leq \|\pi(x)\|$

Demostración. Consideremos $\langle x, y\rangle = \phi(y^*x)$, para todo $x, y \in E$. Notemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cumple con las siguientes propiedades de producto interior:

i) Si $x \in E$, entonces $\langle x, x\rangle = \phi(x^*x) \geq 0$.

ii) Si $x, y, z \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \phi(z^*(\lambda x + \mu y)) = \lambda\phi(z^*x) + \mu\phi(z^*y) = \lambda \langle x, z\rangle + \mu \langle y, z\rangle$$

y

$$\langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \phi((\lambda y + \mu z)^*x) = \overline{\lambda}\phi(y^*x) + \overline{\mu}\phi(z^*x) = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle + \overline{\mu} \langle x, z\rangle .$$

iii) Si $x, y \in E$, entonces

$$\langle x, y\rangle = \phi(y^*x) = \phi((x^*y)^*) = \overline{\phi(x^*y)} = \overline{\langle y, x\rangle}.$$

En general este producto es degenerado, es decir $\langle x, x\rangle = 0$ para algún $0 \neq x \in E$. Para solucionar esto consideremos $I = \{x \in E : \phi(y^*x) = 0 \text{ para toda } y \in E\}$. Veamos que I es un ideal izquierdo cerrado de E.
Sea $z \in E$ y $x \in I$ y veamos que $zx \in I$. Tomemos $y \in E$, entonces $\phi(y^*(zx)) = \phi((y^*z)x) = \phi((z^*y)^*x) = 0$, pues $z^*y \in E$. Luego I es un ideal izquierdo de E.
Ahora para ver que I es cerrado, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en I tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Veamos que $x_0 \in I$. Notemos que si $y \in E$, entonces $\lim_{n\to\infty} y^*x_n = y^*x_0$. Luego utilizando que ϕ es continua tenemos que:

$$\phi(y^*x_0) = \phi(y^* \lim_{n\to\infty} x_n) = \phi(\lim_{n\to\infty} y^*x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(y^*x_n) = 0.$$

Así $x_0 \in I$. Y por tanto I es cerrado. Ahora veamos que

$$I = \{x \in E : \phi(y^*x) = 0 \text{ para toda } y \in E\} = \{x \in E : \phi(x^*x) = 0\}.$$

Si $x \in I$, entonces $\phi(y^*x) = 0$ para todo $y \in E$, en particular para $y = x$. Luego, $\phi(x^*x) = 0$. Ahora, sea $x \in E$ tal que $\phi(x^*x) = 0$ y sea $y \in E$,

entonces utilizando el punto 2 del Teorema 3.3.6, se tiene que $|\phi(y^*x)| = 0$, y así $\phi(y^*x) = 0$ y $x \in I$.
Por tanto $X = E/I$ es un espacio vectorial con las operaciones

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I \qquad \lambda(x + I) = (\lambda x) + I.$$

Para ver que está bien definido, supongamos que $x_1 + I = x_2 + I$ y $y_1 + I = y_2 + I$. Entonces $x_1 - x_2 \in I$ y $y_1 - y_2 \in I$, y tenemos que

$$\phi(y_1^*x_1) - \phi(y_2^*x_2) = \phi(y_1^*(x_1 - x_2)) - \phi((y_1 - y_2)^*x_2) = 0.$$

Entonces, $\langle x_1 + I, y_1 + I\rangle = \langle x_2 + I, y_2 + I\rangle$.
Esto cumple que $x + I = 0$ si y solo si $x \in I$ si y solo si $\phi(x^*x) = 0$ si y solo si $\langle x + I, x + I\rangle = 0$.
Por todo lo anterior $\langle \cdot, \cdot\rangle$ es un producto interior para X y este define una norma dada por $\|x + I\|_\phi = \sqrt{\langle x + I, x + I\rangle}$.
Ahora para cada $x \in E$ definimos el operador lineal $\theta(x)$ en X por

$$\theta(x)(y + I) = xy + I.$$

Ya que I es un ideal izquierdo, cada $\theta(x)$ está bien definido. Más aun, el mapeo $x \mapsto \theta(x)$ tiene las siguiente propiedades: Para cada $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\theta(\lambda x + y) = \lambda\theta(x) + \theta(y)$, $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ y $\theta(e)$ es el operador identidad en X. También, para cada $x \in E$, $\theta(x^*) = \theta(x)^*$, ya que

$$\langle\theta(x)(y + I), z + I\rangle = \langle xy + I, z + I\rangle = p(z^*(xy))$$

$$= p((x^*z)^*y) = \langle y + I, x^*z + I\rangle$$
$$= \langle y + I, \theta(x^*)(z + I)\rangle$$

Por tanto, $x \mapsto \theta(x)$ es una representación-$*$ de E, en el espacio X. Veamos que $\theta(x)$ es un operador acotado en X, para cada $x \in E$. Sea $y \notin I$, por la Proposición 3.3.8 tenemos que

$$\frac{\|\theta(x)(y + I)\|_\phi^2}{\|y + I\|_\phi^2} = \frac{\|xy + I\|_\phi^2}{\|y + I\|_\phi^2} = \frac{\phi(y^*x^*xy)}{\phi(y^*y)} \leq \nu(x^*x) = r(x^*x).$$

Se sigue que $\theta(x)$ es acotado y $\|\theta(x)\| \leq \rho(x)$, para cada $x \in E$.
Sea H la compleción de X el cual es un espacio de Hilbert, y sea $\pi(x)$ la única extensión de $\theta(x)$ a un operador lineal acotado en H. Ya que X es denso en H, las propiedades algebraicas de $\theta(x)$ se extienden a $\pi(x)$ y por

tanto es una representación-$*$ de E en H. Sea $\xi = e + I \in X$, tenemos que $\|\xi\|_\phi = 1$ y para cada $x \in E$ se cumple que:

$$\phi(x) = \phi(e^*x) = \langle x + I, e + I\rangle = \langle \theta(x)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(x)\xi, \xi\rangle .$$

Veamos que $\overline{\pi(E)\xi} = H$. Sea $\eta \in H$, entonces $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n$ con $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, pero para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\eta_n = x_n + I = x_n e + I = \theta(x_n)(e + I) = \pi(x_n)\xi.$$

Así $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} \pi(x_n)\xi$ para alguna sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$. Por tanto $\pi(E)\xi$ es denso H, con $\xi = e + I$ el vector cíclico.
Por último para cada $x \in E$ se tiene que

$$\phi(x^*x) = \|x + I\|_\phi^2 = \|\theta(x)(e + I)\|_\phi^2 = \|\pi(x)\xi\|_\phi^2 \leq \|\pi(x)\|^2; \tag{3.10}$$

por tanto $\phi(x^*x)^{\frac{1}{2}} \leq \|\pi(x)\|$, para cada $x \in E$.
Por último es fácil ver que

$$ker(\pi) = \{x \in E : xy \in I \text{ para cada } y \in E\}. \tag{3.11}$$

$\square$

Observación 3.3.27. *Si $(E, \|\cdot\|)$ es una álgebra-$*$ de Banach con unidad e y $\phi \in S(E)$, la terna (π, H, ξ) construida en el Teorema 3.3.26 será denotada por $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$, y es llamada la terna-GNS asociada a ϕ.*

Definición 3.3.28. *Sean E un álgebra-$*$ y π una representación-$*$ de E en un espacio de Hilbert H. Decimos que un subespacio M de H es invariante bajo π si $\pi(x)(M) \subseteq M$ para toda $x \in E$.*

Definición 3.3.29. *Sea H un espacio de Hilbert y consideremos el espacio $B(H)$. Sea $B \subseteq B(H)$ no vacío, decimos que B es topológicamente irreducible si $\{0\}$ y H son los únicos subespacios cerrados de H que son invariantes bajo todos los operadores $T \in B$.*

Definición 3.3.30. *Sea E un álgebra-$*$ y sea π una representación-$*$ de E en un espacio de Hilbert H. Decimos que π es irreducible si el conjunto de operadores en H dado por $\pi(E) = \{\pi(x) : x \in E\}$ es topológicamente irreducible.*

El suigiente Teorema nos da ejemplos de representaciones irreducibles.

Teorema 3.3.31. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e y ϕ un estado en E. La representación π_ϕ es irreducible si y sólo si ϕ es una combinación convexa no trivial de otros dos estados. Esto es, si existen estados ϕ_0 y ϕ_1 y $0 < t < 1$ tal que $\phi = t\phi_0 + (1-t)\phi_1$.*

Demostración. La demostración de este Teorema la podemos encontrar en [2, 114]. □

Lema 3.3.32. *Sean $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e y $h \in E$ hermitiano. Entonces, existe una representación irreducible π de E en un espacio de Hilbert H tal que $\|\pi(h)\| = \|h\|$.*

3.4. Radical-$*$

Definición 3.4.1. *Sea E un álgebra-$*$. El Radical-$*$ de E, denotado por $Rad^*(E)$, es la intersección de los kernels de todas las representanciones-$*$ irreducibles de E en un espacio de Hilbert H. Si $Rad^*(E) = \{0\}$, entonces E es llamada semi-simple-$*$.*

Proposición 3.4.2. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e. Entonces el conjunto $S(E)$ es un subconjunto convexo débil-$*$ compacto de E^*. Más aun, π_ϕ la representación-$*$ asociada al estado ϕ, es irreducible si y sólo si ϕ es punto extremo de $S(E)$.*

Demostración. La demostración de esta Proposición la podemos encontrar en [2, 115]. □

Lema 3.4.3. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach y sea $h \in E$ un elemento hermitiano con la propiedad de que existe $\phi_0 \in S(E)$ tal que $\phi_0(h) \neq 0$. Entonces existe $\phi \in S(E)$ un punto tal que $\phi(h) \neq 0$.*

Demostración. La prueba de este Teorema se puede encontrar en [12, 225]. □

Teorema 3.4.4. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e. Entonces, el Radical-$*$ de E es la intersección de los kernels de todas las representaciones-$*$ de E en un espacio de Hilbert H.*

Demostración. Consideremos $J = \bigcap\{\ker(\pi) : \pi \text{ es una representación-}*\}$. Es claro que $J \subseteq Rad^*(E)$.
Sea $\pi : E \to B(H)$ una representación-$*$ de E en un espacio de Hilbert H. Necesitamos probar que el $Rad^*(E) \subseteq \ker(\pi)$. Esto es equivalente a probar

que si $x \notin \ker(\pi)$, entonces $x \notin Rad^*(E)$. Así, sea $x \in E$ tal que $x \notin \ker(\pi)$, entonces $\pi(x) \neq 0$ y como $\pi(x^*) = \pi(x)^* \neq 0$, entonces existe $\xi \in H$ unitario tal que $\pi(x^*)\xi \neq 0$. Definimos

$$\phi(y) = \langle \pi(y)\xi, \xi \rangle \text{ para cada } y \in E.$$

Entonces ϕ es un estado en E pues si $y \in E$:

$$\phi(y^*y) = \langle \pi(y^*y)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(y^*)\pi(y)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(y)\xi, \pi(y)\xi \rangle \geq 0.$$

Además:

$$\phi(e) = \langle \pi(e)\xi, \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle = 1.$$

Por tanto $\phi \in S(E)$ con $\phi(xx^*) = \|\pi(x^*)\xi\|^2 > 0$. Entonces por el Lema 3.4.3 tenemos que existe un estado ψ en E tal que ψ es punto extremo de $S(E)$ y $\psi(xx^*) \neq 0$. Sea π_ψ la representación-$*$ de E asociada a ψ. Por la Proposición 3.4.2 tenemos que π_ψ es irreducible. Sea

$$I_\psi = \{y \in E : \psi(y^*y) = 0\}.$$

Entonces se tiene que $x^* \notin I_\psi$. Ahora si pasara que $xx^* \in I_\psi$, entonces por la ecuación (3.5) del Teorema 3.3.6 tendríamos que $0 \leq \psi(xx^*)^2 \leq \psi(xx^*xx^*) = 0$, es decir $\psi(xx^*) = 0$, lo cual contradice que $\psi(xx^*) \neq 0$. Por tanto $xx^* \notin I_\psi$, entonces por la ecuación (3.11), $x \notin \ker(\pi_\psi)$, entonces se sigue que $x \notin Rad^*(E)$. □

Teorema 3.4.5. *Sea $(E\|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ Banach con unidad e tal que $Rad^*(E) \neq E$. Entonces existe una seminorma γ en E tal que para cada $x, y \in E$:*

a) Si π es una representación-$*$ de E, entonces $\|\pi(x)\| \leq \gamma(x)$.

b)
$$\begin{aligned}\gamma(x)^2 &= \sup\{\phi(x^*x) : \phi \in S(E)\}\\ &= \sup\{\|\pi_\phi(x)\|^2 : \phi \in S(E)\}\\ &= \sup\{\|\pi(x)\|^2 : \pi \textit{ es una representación-}* \textit{ de } E\}.\end{aligned}$$

Donde $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ es la terna-GNS asociada al estado ϕ.

c) Si ϕ es un estado en E, entonces $|\phi(x)| \leq \gamma(x)$.

d) $Rad^*(E) = \{x \in E : \gamma(x) = 0\}$.

e) $\gamma(x) \leq \rho(x)$.

f) $\gamma(xy) \leq \gamma(x)\gamma(y)$ *para todo* $x, y \in E$.

g) $\gamma(x^*x) = \gamma(x)^2$ *para cada* $x \in E$. *En particular* $\gamma(x^*) = \gamma(x)$.

Demostración. Supongamos que $Rad^*(E) \neq E$, entonces existe $x \in E$ distinto de 0 tal que $x \notin \bigcap\{\ker(\pi) : \pi \text{ es una representación-}*\}$, es decir, existe una representación-$*$ π tal que $\pi(x) \neq 0$, en particular π es no trivial. Para cualquier vector unitario ξ en H, la funcional $\phi_0(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi\rangle \in S(E)$, pues:

$$\phi_0(x^*x) = \langle \pi(x^*x)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(x^*)\pi(x)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(x)\xi, \pi(x)\xi\rangle \geq 0.$$

Además:

$$\phi_0(e) = \langle \pi(e)\xi, \xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle = 1.$$

Por tanto $S(E) \neq \emptyset$. Así, consideremos $\gamma(x) = \sup\{\phi(x^*x)^{\frac{1}{2}} : \phi \in S(E)\}$, entonces $\gamma(x)^2 = \sup\{\phi(x^*x) : \phi \in S(E)\}$, por el Teorema 3.3.26 este supremo existe. Veamos ahora que γ es una seminorma en E.

- Si $x = 0$, entonces $\phi(x) = \phi(x^*x) = 0$ para todo $\phi \in S(E)$, entonces $\gamma(x) = \sup\{\phi(x^*x) : \phi \in S(E)\} = 0$.

- Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in E$, entonces

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda x)^2 &= \sup\{\phi((\lambda x)^*\lambda x) : \phi \in S(E)\}\\ &= \sup\{\overline{\lambda}\lambda\phi(x^*x) : \phi \in S(E)\}\\ &= \sup\{|\lambda|^2\phi(x^*x) : \phi \in S(E)\}\\ &= |\lambda|^2\gamma(x)^2.\end{aligned}$$

- Sean $x, y \in E$, utilizando el punto 2 del Teorema 3.3.6 tenemos que

$$\begin{aligned}\phi((x+y)^*(x+y)) &= \phi(x^*x) + \phi(x^*y) + \phi(y^*x) + \phi(y^*y)\\ &= |\phi(x^*x) + \phi(x^*y) + \phi(y^*x) + \phi(y^*y)|\\ &\leq \phi(x^*x) + |\phi(x^*y)| + |\phi(y^*x)| + \phi(y^*y)\\ &\leq \phi(x^*x) + |\phi(x^*y)| + |\phi(y^*x)| + \phi(y^*y)|\\ &\leq \phi(x^*x) + 2\phi(x^*x)^{\frac{1}{2}}\phi(y^*y)^{\frac{1}{2}} + \phi(y^*y)\\ &\leq \gamma(x)^2 + 2\gamma(x)\gamma(y) + \gamma(y)^2,\end{aligned}$$

entonces tomando supremo $\gamma(x+y)^2 \leq (\gamma(x) + \gamma(y))^2$. Por tanto $\gamma(x+y) \leq \gamma(x) + \gamma(y)$.

a) Si π es una representación-$*$ de E en un espacio de Hilbert H, por lo mencionado anteriormente $\phi(x) = \langle \pi(x)\xi, \xi\rangle$ define un estado en E. Más aún, tomando $\xi \in H$ unitario:

$$\|\pi(x)\xi\|^2 = \langle \pi(x)\xi, \pi(x)\xi\rangle = \langle \pi(x^*x)\xi, \xi\rangle = \phi(x^*x) \leq \gamma(x)^2.$$

b) Sean ϕ un estado en E y $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ la terna construida en el Teorema 3.3.26, como $\|\pi_\phi(x)\|^2 = \sup\{\|\pi_\phi(x)\xi\|^2 : \|\xi\| = 1\}$, se tiene que:

$$\|\pi_\phi(x)\|^2 \geq \|\pi_\phi(x)\xi_\phi\|^2 = \langle \pi_\phi(x)\xi_\phi, \pi_\phi(x)\xi_\phi\rangle = \phi(x^*x),$$

entonces se sigue que

$$\begin{aligned}\gamma(x)^2 &\leq \sup\{\|\pi_\phi(x)\|^2 : \phi \in S(E)\}\\ &\leq \sup\{\|\pi(x)\|^2 : \pi \text{ es una representación-}* \text{ de } E\}\\ &\leq \gamma(x)^2 \text{ por el inciso a).}\end{aligned}$$

c) Si ϕ es un estado en E, entonces por la ecuación (3.5) del Teorema 3.3.6 se cumple que

$$|\phi(x)|^2 \leq \phi(e)\phi(x^*x) = \phi(x^*x) \leq \gamma(x)^2.$$

d) Por el Corolario 3.3.9 se tiene que

$$|\phi(x)| \leq \phi(e)\nu(x^*x)^{\frac{1}{2}} = r(x^*x)^{\frac{1}{2}} = \rho(x).$$

e) Tenemos que $x \in Rad^*(E)$ si y sólo si $x \in \bigcap\{\ker(\pi) : \pi$ es una representación-$*$ de $E\}$ si y sólo si $\pi(x) = 0$ para toda π representación-$*$ si y sólo si $\|\pi(x)\|^2 = 0$ para toda representación-$*$ si y sólo si $\gamma(x) = 0$.

f) Sean $x, y \in E$ y tomemos $\|\pi(xy)\|$ con π una representación-$*$ de E en un espacio de Hilbert H, se tiene que:

$$\|\pi(xy)\| = \|\pi(x)\pi(y)\| \leq \|\pi(x)\|\|\pi(y)\|,$$

y al tomar supremo,$\gamma(xy) \leq \gamma(x)\gamma(y)$.

g) Sea $x \in E$ y π una representación-$*$ de E en un espacio de Hilbert H, entonces

$$\|\pi(x)\|^2 = \|\pi(x)^*\pi(x)\| = \|\pi(x^*)\pi(x)\| = \|\pi(x^*x)\|.$$

Así, al tomar supremo tenemos que $\gamma(x)^2 = \gamma(x^*x)$.

□

Teorema 3.4.6. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e y tal que $S(E) \neq \emptyset$. Entonces existe un álgebra-C^* B y π una representación-$*$ de E sobre una subálgebra-$*$ densa de B tal que π es una isometría relativa a la seminorma γ en E.*

Demostración. Para cada estado $\phi \in S(E)$, sean π_ϕ la representación-$*$ de E en el espacio de Hilbert H_ϕ consideradas en el Teorema 3.3.26. Además usando la Definición 3.3.20 y el Teorema 3.3.25 podemos considerar la representación-$*$ $\pi = \bigoplus_{\phi \in S(E)} \pi_\phi$ y el espacio de Hilbert $H = \bigoplus_{\phi \in S(E)} H_\phi$. Queremos probar que $\gamma(x) = \|\pi(x)\|$ para cada $x \in E$. Por el inciso $b)$ del Teorema 3.4.5 es suficiente ver que:

$$\|\pi(x)\| = \sup\{\|\pi_\phi(x)\| : \phi \in S(E)\} = \gamma(x).$$

Por el inciso $a)$ del Teorema 3.4.5 se tiene que $\|\pi(x)\| \leq \gamma(x)$.
Ahora, sean $\phi_0 \in S(E)$ y $J = \{\phi_0\}$, tomemos $\xi' \in H_{\phi_0}$ tal que $\|\xi'\| \leq 1$. Si consideramos el vector $(\xi'_\phi)_\phi \in \bigoplus_{\phi \in S(E)} H_\phi$, dado por:

$$(\xi'_\phi)_\phi = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi \neq \phi_0 \\ \xi' & \text{si } \phi = \phi_0, \end{cases}$$

entonces claramente $\|(\xi'_\phi)_\phi\| \leq 1$. Además se cumple que

$$\begin{aligned} \|\pi_{\phi_0}(x)(\xi')\|^2 &\leq \sup_{J \subset S(E) \text{ finito}} \sum_{i \in J} \|\pi_{\phi_i}(x)\xi'_{\phi_i}\|^2 \\ &= \|\pi(x)(\xi'_\phi)_\phi\|^2 \\ &\leq \sup_{\|(\xi_\phi)_\phi\| \leq 1} \|\pi(x)(\xi_\phi)_\phi\|^2 \\ &= \|\pi(x)\|^2. \end{aligned}$$

Por tanto $\|\pi_{\phi_0}(x)\|^2 \leq \|\pi(x)\|^2$ y como $\phi_0 \in S(E)$ fue arbitrario se sigue que:

$$\gamma(x) = \sup\{\|\pi_\phi(x)\| : \phi \in S(E)\} \leq \|\pi(x)\|.$$

Por tanto, E con la seminorma γ es isométrica con $\pi(E)$, una subálgebra-$*$ de $B(H)$. Si tomamos $B = \overline{\pi(E)}$, entonces B es un álgebra-C^* que contiene a $\pi(E)$ y $\|\pi(x)\| = \gamma(x)$ para todo $x \in E$, como subálgebra-$*$ densa. $\square$

3.5. Álgebras-A^*.

Definición 3.5.1. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach, decimos que E es un álgebra-A^*, si existe una segunda norma $|\cdot|$ en E, no necesariamente completa, que satisface las siguientes condiciones:*

1. $|xy| \leq |x||y|$ *para todos* $x, y \in E$.

2. $|x|^2 = |x^*x|$ *para todo* $x \in E$.

Dicha norma $|\cdot|$ será llamada norma auxiliar.

Ejemplo 3.5.2. *Consideremos el álgebra de Banach $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, donde:*

$$\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\} \text{ y } \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para toda $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ definimos la involución $x \mapsto x^*$ dada por:

$$((x_n)_{n=1}^{\infty})^* = (\overline{x}_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Entonces este espacio es un álgebra-$*$ de Banach.
Como $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$. Por tanto $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ define una norma en ℓ^2. Además si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, entonces:

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^{\infty}(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n y_n| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} \|(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Por último si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, entonces:

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}^2 = \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \right)^2 &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} |\overline{x}_n||x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\overline{x}_n x_n| \\ &= \|(\overline{x}_n)_{n=1}^{\infty}(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \|((x_n)_{n=1}^{\infty})^*(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Por tanto $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ es un álgebra-A^* con norma auxiliar $\|\cdot\|_{\infty}$.

Observación 3.5.3. *Sea $(E, |\cdot|)$ un álgebra de Banach con unidad e y sea $B \subseteq E$ una subálgebra no necesariamente cerrada de E tal que $e \in B$ y además $(B, \|\cdot\|)$ es un álgebra de Banach bajo una segunda norma $\|\cdot\|$. Si $x \in B$, entonces $\sigma(x) \subseteq \sigma_B(x)$ y de esto se sigue que*

$$\nu(x) = r(x) \leq r_B(x) = \nu_B(x).$$

Esta observación será útil para la prueba del siguiente lema.

Lema 3.5.4. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-A^* con unidad e y con norma auxiliar $|\cdot|$. Entonces $|x|^2 \leq r(x^*x)$ para cada $x \in E$. En particular, si $r(x^*x) = 0$, entonces $x = 0$.*

Demostración. Sea $\widehat{E}$ la compleción de E con respecto a la norma $|\cdot|$. Entonces utilizando la Observación 3.5.3 tenemos que $\nu_{\widehat{E}}(x) \leq \nu_E(x)$ para cada $x \in E$. Ahora si $h \in E$ es un elemento hermitiano, por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $|h| = |h^{2^n}|^{\frac{1}{2^n}}$.
Base de inducción: para $n = 1$, es claro pues $|h|^2 = |h^*h| = |h^2|$, entonces $|h| = |h^2|^{\frac{1}{2}}$.
Hipótesis de inducción: Supongamos válido para n; es decir $|h| = |h^{2^n}|^{\frac{1}{2^n}}$.
Paso inductivo: Veamos que se cumple para $n+1$, es decir $|h| = |h^{2^{n+1}}|^{\frac{1}{2^{n+1}}}$.
Notemos que:

$$|h^{2^{n+1}}| = |h^{2^n+2^n}| = |h^{2^n}h^{2^n}| = |h^{2^n}|^2 = (|h|^{2^n})^2 = |h|^{2^{n+1}},$$

entonces $|h| = |h^{2^{n+1}}|^{\frac{1}{2^{n+1}}}$. Utilizando el Teorema 3.1.16 se sigue que:

$$|h| = \lim_{n\to\infty} |h^{2^n}|^{\frac{1}{2^n}} = \nu_{\widehat{E}}(h) \leq \nu_E(h).$$

En particular, para $x \in E$:

$$|x|^2 = |x^*x| = \nu_{\widehat{E}}(x^*x) \leq \nu_E(x^*x) = r(x^*x).$$

□

Proposición 3.5.5. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-A^* con unidad e y con norma auxiliar $|\cdot|$, entonces la involución es continua con ambas normas.*

Demostración. Como sabemos la norma auxiliar $|\cdot|$ satisface la condición $|x^*| = |x|$, para cada $x \in E$, entonces la involución es claramente continua respecto a $|\cdot|$. Ahora consideremos el espacio $(E_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|)$, el cual también es de Banach. Observemos que $* : E_{\mathbb{R}} \to E_{\mathbb{R}}$ está bien definida, pues $(\lambda x)^* = \lambda x^*$

para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in E$. Afirmamos que $* : E_{\mathbb{R}} \to E_{\mathbb{R}}$ es continua, esto se seguirá del Teorema de la gráfica cerrada. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E tal que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} a$ y $x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} b$ cuando $n \to \infty$, probaremos que $b = a^*$. Para eso notemos que

$$|b - a^*| \leq |b - x_n^*| + |x_n^* - a^*| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por el Lema 3.5.4 sabemos que $|x|^2 \leq r(x^*x) = \nu(x^*x) \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$ para todo $x \in E$. Así:

$$|b - x_n^*|^2 \leq \|b - x_n^*\| \cdot \|b^* - x_n\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \tag{3.12}$$

y

$$|x_n^* - a^*|^2 \leq \|x_n^* - a^*\| \cdot \|x_n - a\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Además, tenemos que:

$$\|x_n - b^*\| \leq \|x_n - a\| + \|a - b^*\| \to \|a - b^*\| \text{ cuando } n \to \infty$$

y

$$\|x_n^* - a^*\| \leq \|x_n^* - b\| + \|b - a^*\| \to \|b - a^*\| \text{ cuando } n \to \infty.$$

Entonces del lado derecho de las desigualdades (3.12) y (3.13), un factor está acotado mientras que el otro converge a cero cuando $n \to \infty$. Por tanto $|b - x_n^*| \to 0$ y $|x_n - a^*| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Esto implica que $|b - a^*| = 0$, entonces $b^* = a$. Así $x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} a^*$. Luego $x \to x^*$ es continua con respecto a $\|\cdot\|$.

□

Corolario 3.5.6. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-A^* con unidad e y con norma auxiliar $|\cdot|$. Entonces, existe una constante β tal que $|x| \leq \beta\|x\|$ para cada $x \in E$.*

Demostración. Sea $x \in E$. Por la Proposición 3.5.5, existe una constante $\alpha \geq 0$ tal que $\|x^*\| \leq \alpha\|x\|$. Utilizando el Lema 3.5.4 se sigue que:

$$|x|^2 \leq r(x^*x) = \nu(x^*x) \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq \alpha\|x\|^2,$$

tomando $\beta = \alpha^{\frac{1}{2}}$, tenemos que $|x| \leq \beta|\|x\|$.

□

Teorema 3.5.7. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e y sea $(B, \|\cdot\|_1)$ un álgebra de Banach tal que E es una subálgebra de B (no necesariamente cerrada), entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

a) $\sigma_E(c) = \sigma(c)$ *para cada elemento normal* $c \in E$.

b) $\|x\|^2 \leq \|x^*\|_1 \|x\|_1$ *para cada* $x \in E$.

c) $\nu_E(x) = \nu(x)$ *para cada* $x \in E$.

Demostración.

a) Sea $c \in E$ un elemento normal y sea U_c la subálgebra-$*$ maximal conmutativa de E que contiene a c, entonces por la Proposición 2.2.7 $\sigma_E(c) = \sigma_{U_c}(c)$. Más aún, por el Corolario 3.7.6 de [12] se tiene que $\sigma_{U_c}(c) = \sigma(c)$, y por tanto $\sigma_E(c) = \sigma(c)$. En particular $\nu_E(c) = \nu(c)$.

b) Sea $x \in E$, entonces

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \nu_E(x^*x) = \nu(x^*x) \leq \|x^*x\|_1 \leq \|x^*\|_1 \|x\|_1.$$

c) Sea $x \in E$ de *b)* se sigue que $\|x^n\|^2 \leq \|(x^*)^n\|_1 \|x^n\|_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomando raíz n-ésima y haciendo $n \to \infty$, obtenemos que

$$\nu_E(x)^2 \leq \nu(x^*)\nu(x).$$

Por otro lado, ya que E es una subálgebra de B, se cumple que $\sigma(x) \subseteq \sigma_E(x)$, entonces $\nu(x) \leq \nu_E(x)$ para cada $x \in E$. Así utilizando el Corolario 3.1.15,

$$\nu(x^*)\nu(x) \leq \nu_E(x^*)\nu_E(x) = \nu_E(x)^2.$$

Se sigue entonces que $\nu_E(x)^2 = \nu(x^*)\nu(x)$. Por último como $\nu(x^*) \leq \nu_E(x^*) = \nu_E(x)$ entonces

$$\nu_E(x)^2 = \nu(x^*)\nu(x) \leq \nu_E(x)\nu(x).$$

Entonces $\nu_E(x) \leq \nu(x)$. De esto se concluye que $\nu_E(x) = \nu(x)$.

□

Corolario 3.5.8. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un álgebra-*C^* *con unidad* e *y sea* $\|\cdot\|_0$ *una segunda norma tal que* $(E, \|\cdot\|_0)$ *es sólo un álgebra normada. Entonces* $\|x\|^2 \leq \|x^*\|_0 \|x\|_0$*. Además, si* $\|x^*\|_0 = \|x\|_0$*, entonces* $\|x\| \leq \|x\|_0$ *para cada* $x \in E$.

Demostración. Se sigue del Teorema 3.5.7 que si tomamos $B = \widehat{E}$ y $\|\cdot\|_1$ igual a la extensión de $\|\cdot\|_0$ en la compleción $\widehat{E}$, entonces $(\widehat{E}, \|\cdot\|_1)$ es un álgebra de Banach con unidad e y claramente E es una subálgebra de $\widehat{E}$. □

Teorema 3.5.9. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e. Si $(B, \|\cdot\|_1)$ es un álgebra-C^* que contiene a E como subálgebra-$*$, entonces $\|x\| = \|x\|_1$ para todo $x \in E$. Así, E es un álgebra cerrada de B.*

Demostración. Sea $x \in E$, entonces por ser x^*x hermitiano se sigue del Teorema 3.1.16 que:

$$\|x^*x\| = r_E(x^*x) = \nu_E(x^*x) \text{ y } \|x^*x\|_1 = r_B(x^*x) = \nu_B(x^*x).$$

Luego, utilizando el inciso c) del Teorema 3.5.7 y por ser E un álgebra-C^* se cumple que

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| = \nu_E(x^*x) = \nu_B(x^*x) = \|x^*x\|_1 = \|x\|_1^2.$$

Luego $\|x\| = \|x\|_1$ para $x \in E$.
Por último, como $(E, \|\cdot\|)$ es completo, entonces $(E, \|\cdot\|_1)$ es completo y por tanto $E \subseteq B$ es cerrado con respecto a la norma $\|\cdot\|_1$. □

Corolario 3.5.10. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-C^* con unidad e y sea $\|\cdot\|_0$ cualquier norma en E con la propiedad C^*. Entonces $\|x\|_0 = \|x\|$ para cada $x \in E$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 3.5.9 tomando $B = \widehat{E}$ y $\|\cdot\|_1$ igual a la extensión de la norma $\|\cdot\|_0$ en la compleción $\widehat{E}$, la cual es fácil ver que también cumple la condición C^* , pues basta recordar que si una norma satisface la condición C^*, entonces la involución $x \mapsto x^*$ es continua. □

3.6. Álgebras-$*$ Hermitianas y Simétricas

Definición 3.6.1. *Sea E un álgebra-$*$. Decimos que la involución $x \mapsto x^*$ en E es hermitiana si para todo $h \in E$ hermitiano se tiene que $\sigma(h)$ es real. Si E es un álgebra-$*$ con involución hermitiana, decimos que E es un álgebra hermitiana.*

Observación 3.6.2. *Si $(E, \|\cdot\|)$ es álgebra-C^*, entonces es un álgebra hermitiana.*

Proposición 3.6.3. *Sea E un álgebra-$*$ con unidad e. Entonces, E es hermitiana si y sólo si para todo $h \in E$ hermitiano, se tiene que $e + h^2$ es invertible.*

Demostración. Supongamos que E es hermitiana y sea $h \in E$ hermitiano. Entonces, $\sigma(h)$ es real. Consideremos $p(z) = z^2$, por el Teorema 1.4.12 se tiene que

$$\sigma(h^2) = \sigma(p(h)) = p(\sigma(h)) = \{\lambda^2 : \lambda \in \sigma(h)\}.$$

Entonces $\sigma(h^2) \subseteq [0, \infty)$. En particular, $-1 \notin \sigma(h^2)$, es decir $-e - h^2 \in G(E)$. Por tanto $e + h^2$ es invertible. Inversamente supongamos que $e + h^2$ es invertible para todo $h \in E$ hermitiano. Sea $h \in E$ hermitiano y sea $\lambda + i\mu \in \sigma(h)$, supongamos que $\mu \neq 0$. Consideremos el polinomio

$$p(z) = \mu^{-1}(\lambda^2 + \mu^2)^{-1}(\lambda z^2 + (\mu^2 - \lambda^2)z).$$

Si hacemos $k = p(h) = \mu^{-1}(\lambda^2 + \mu^2)^{-1}(\lambda h^2 + (\mu^2 - \lambda^2)h)$, entonces k es claramente un elemento hermitiano de E y por el Teorema 1.4.12 tenemos que

$$p(\lambda + i\mu) \in p(\sigma(h)) = \sigma(p(h)) = \sigma(k).$$

Pero

$$\begin{aligned} p(\lambda + i\mu) &= \mu^{-1}(\lambda^2 + \mu^2)^{-1}(\lambda(\lambda + i\mu)^2 + (\mu^2 - \lambda^2)(\lambda + i\mu)) \\ &= \mu^{-1}(\lambda^2+\mu^2)^{-1}((\lambda^3+2i\lambda\mu-\lambda\mu^2)+(\mu^2\lambda+i\mu^3-\lambda^3-i\lambda^2\mu)) \\ &= \mu^{-1}(\lambda^2 + \mu^2)^{-1}(i\lambda^2\mu + i\mu^3) = \frac{i(\lambda^2\mu + \mu^3)}{(\lambda^2\mu + \mu^3)} = i. \end{aligned}$$

Es decir, $i \in \sigma(k)$. Por tanto es claro que $-1 \in \sigma(k^2)$, entonces $-1e - k^2 \notin G(E)$, es decir $e + k^2$ es no invertible, que es una contradicción. Por tanto $\mu = 0$. $\square$

Corolario 3.6.4. *Sea E un álgebra-$*$ con unidad e. Si E es simétrica, entonces E es hermitiana.*

Demostración. Sea $h \in E$ hermitiano, como E es simétrica se tiene que $e + hh^* = e + h^2$ es invertible, así por la Proposición 3.6.3 se sigue que E es hermitiana. $\square$

Proposición 3.6.5. *Sea E un álgebra-$*$ con unidad e. Entonces E es simétrica si y sólo si $\sigma(x^*x) \subseteq [0, \infty)$, para todo $x \in E$.*

Demostración. Supongamos que E es simétrica, entonces por el Corolario 3.6.4, E es hermitiana. Sea $x \in E$, como x^*x es un elemento hermitiano de E se tiene que $\sigma(x^*x) \subseteq \mathbb{R}$. Supongamos que existe $\alpha < 0$ tal que $\alpha \in \sigma(x^*x)$. Tomando $\beta = (-\alpha)^{\frac{-1}{2}}$, tenemos que:

$$\alpha e - x^*x = \alpha(e - \alpha^{-1}x^*x) = \alpha(e + (\beta x)^*(\beta x)) \notin G(E).$$

Por tanto $e+(\beta x)^*(\beta x)$ no es invertible. Lo cual contradice el hecho de que E es simétrica.
Ahora, sea $x \in E$ y supongamos que $\sigma(x^*x) \subseteq [0,\infty)$, entonces $-1 \notin \sigma(x^*x)$, así $-e-x^*x$ es no invertible, es decir $e+x^*x$ es no invertible. Por tanto, E es simétrica. □

Proposición 3.6.6. *Sea E un álgebra-$*$ hermitiana (simétrica) con unidad e. Entonces toda subálgebra-$*$ maximal conmutativa B de E es hermitiana (simétrica).*

Demostración. La demostración se puede encontrar en [2, 131]. □

Teorema 3.6.7. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach hermitiana con unidad e. Entonces:*

a) $r(x) \leq \rho(x)$ para cada $x \in E$.

b) $r(x) = \rho(x)$ para cada $x \in E$ normal.

c) $r(hk) \leq r(h)r(k)$ para cada $h,k \in E$ hermitianos.

d) $\rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y)$, para cada $x,y \in E$.

e) $r(xy) \leq r(x)r(y)$ para $x,y \in E$ normales.

f) $Rad(E) = \rho^{-1}(\{0\})$.

g) Si $x \geq 0$, $y \geq 0$, entonces $x+y \geq 0$.

h) $r(h+k) \leq r(h)+r(k)$ para todo $h,k \in E$ hermitiano.

i) $r(\frac{1}{2}(x^*+x)) \leq \rho(x)$ para todo $x \in E$.

j) $\rho(x+y) \leq \rho(x)+\rho(y)$ para todo $x,y \in E$.

k) $\rho(x^*x) = \rho(x)^2$ para todo $x \in E$.

Demostración.

a) Supongamos que existe $x \in E$ tal que$r(x) > \rho(x)$, es decir, $r(x^*x)^{\frac{1}{2}} < r(x)$. Luego, existe $\lambda \in \sigma(x)$ tal que $|\lambda| > r(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ y entonces $|\lambda|^2 > r(x^*x)$. Si hacemos $z = \lambda^{-1}x$, entonces $e - z^*z$ es hermitiano y $r(e-(e-z^*z)) = r(z^*z) < 1$, así que por el Lema 3.3.7, existe $y \in E$ un elemento hermitiano invertible tal que $y^2 = e - z^*z$. Por otro lado,

$$(e+z^*)(e-z) = e + z^* - z - z^*z$$

$$= y^2 + z^* - z$$
$$= -iy(ie - iy^{-1}(z - z^*)y^{-1})y.$$

Como $w = iy^{-1}(z - z^*)y^{-1}$ es un elemento hermitiano, entonces $\sigma(w) \subseteq \mathbb{R}$. Así $i \notin \sigma(w)$, es decir $ie - w \in G(E)$ y por tanto $(e - z^*)(e - z) \in G(E)$, de este modo $(e - z)$ tiene inverso izquierdo.
Ahora, por el Corolario 3.1.15 $r(xx^*) = r(x^*x) < |\lambda|^2$, podemos repetir el argumento anterior para el elemento $e - zz^*$ y así $(e - z)$ tiene inverso derecho. Entonces

$$e - z \in G(E) \Leftrightarrow \lambda e - x \in G(E) \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(x),$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, $r(x) \leq \rho(x)$ para toda $x \in E$.

b) Si $x \in E$ es normal, entonces por la Proposición 2.2.9 y por el Corolario 3.1.15 tenemos que:

$$\rho(x)^2 = r(x^*x) \leq r(x^*)r(x) = r(x)^2 \leq \rho(x)^2.$$

Por tanto, $r(x) = \rho(x)$.

c) Si h, k son hermitianos, entonces por el inciso $a)$ y por el Corolario 1.4.16 tenemos que
$$r(hk) \leq \rho(hk) = r(h^2k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Por inducción sobre n se tiene que:

$$r(hk) \leq r(h^{2^n} n^{2^n})^{\frac{1}{2^n}} \leq \|h^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} \|n^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}.$$

Así haciendo $n \to \infty$ se sigue que $r(hk) \leq r(h)r(k)$.

d) Como x^*x y y^*y son hermitianos, entonces por el inciso $b)$ y por la Proposición 2.2.9 se tiene que

$$\rho(xy) = r(y^*x^*xy)^{\frac{1}{2}} = r(x^*xyy^*)^{\frac{1}{2}} \leq r(x^*x)^{\frac{1}{2}} r(y^*y)^{\frac{1}{2}} = \rho(x)\rho(y).$$

e) Sean $x, y \in E$ normales. Entonces, por los incisos $a)$, $b)$ y $d)$ se tiene que:

$$r(xy) \leq \rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y) = r(x)r(y),$$

es decir, $r(xy) \leq r(x)r(y)$.

f) Sea $x \in Rad(E)$, entonces $x^*x \in Rad(E)$ y por el inciso $a)$ de la Proposición 1.6.10 se tiene que $r(x^*x)^{\frac{1}{2}} = 0$, luego $\rho(x) = 0$. Por otro lado si $x \in \ker \rho$, entonces $\rho(x) = 0$ y por los incisos $a)$ y $d)$ se sigue que

$$r(ax) \leq \rho(ax) \leq \rho(a)\rho(x) = 0$$

para cada $a \in E$. Por tanto $r(ax) = 0$ para cada $a \in E$. Utilizando el inciso $b)$ de la Proposición 1.6.10 se sigue que $x \in Rad(E)$.

g) Consideremos $x, y \in E$ tal que $x \geq 0$ y $y \geq 0$; es decir x, y son elementos hermitianos y tienen espectro real positivo. Para probar que $x + y \geq 0$ es suficiente ver que $-1 \notin \sigma(x+y)$, es decir que $e+(x+y)$ es invertible. Notemos que $e+x$ y $e+y$ son invertibles. Entonces,

$$\begin{aligned} e + (x+y) &= (e+x)(e+y) - xy \\ &= (e+x)(e-ab)(e+y) \end{aligned}$$

donde $a = (e+x)^{-1}x$ y $b = y(e+y)^{-1}$, que son claramente elementos hermitianos. Por el Teorema 1.4.14 si consideramos $f(z) = \frac{z}{1+z}$, entonces

$$\sigma(p(a)) = \sigma(x(e+x)^{-1}) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(x)\} = \{\frac{\lambda}{1+\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Luego es claro que $r(a) < 1$. Análogamente, $r(b) < 1$ y por el inciso $c)$ se tiene que $r(ab) = r(a)r(b) < 1$. Entonces, $r(ab) < 1$. Por tanto $e - ab$ es invertible, y así $e+(x+y)$ es producto de elementos invertibles. Entonces $e+(x+y)$ es invertible.

h) Sean $r(h)e \pm h$ y $r(k)e \pm k \in E$. Es claro que $r(h)e \pm h$ es hermitiano y por el inciso $b)$ se tiene que $r(r(h)e \pm h) = \rho(r(h)e \pm h) \subseteq [0, \infty)$, entonces $r(h)e \pm h \geq 0$. Análogamente $r(k)e \pm k \geq 0$. Por el inciso $g)$ se sigue que $r(h)e + r(k)e \pm (h+k) \geq 0$. Veamos que:

$$|\lambda| \leq r(h) + r(k) \text{ para cada } \lambda \in \sigma(h+k).$$

Sea $\lambda \in \sigma(h+k)$, entonces $\lambda e - (h+k) \notin G(E)$, pero:

$$\lambda e - (h+k) = \lambda e + [r(h) + r(k)]e - [r(h) + r(k)]e - (h+k) \notin G(E).$$

Entonces

$$[\lambda + [r(h) + r(k)]]\, e - [[r(h) + r(k)]e + (h+k)] \notin G(E).$$

Así $\lambda+r(h)+r(k) \in \sigma(r(h)e+r(k)e+(h+k))$, luego $\lambda+r(h)+r(k) \geq 0$, es decir

$$\lambda \geq -r(h) - r(k). \tag{3.14}$$

Por otro lado como

$$\lambda e - (h+k) = -(-\lambda e + (h+k)) \notin G(E),$$

entonces

$$-\lambda e + [r(h) + r(k)]e - [r(h) + r(k)]e + (h+k) \notin G(E).$$

Así

$$[-\lambda + [r(h) + r(e)]]e - [[r(h) + r(k)]e - (h+k)].$$

Luego $-\lambda+r(h)+r(k) \in \sigma(r(h)e+r(k)e-(h+k))$ y $-\lambda+r(h)+r(k) \geq 0$, así

$$r(h) + r(k) \geq \lambda. \tag{3.15}$$

Por tanto de las ecuaciones (3.14) y (3.15) tenemos que $|\lambda| \leq r(h)+r(k)$. Así, $r(h+k) \leq r(h) + r(k)$.

i) Sea $x \in E$, entonces $x = h+ik$ con h, k hermitianos. Además $x^*x+xx^* = 2(h^2+k^2)$. Ahora por $b)$ es claro que $r(h^2+k^2)e-(h^2+k^2) \geq 0$ y $k^2 \geq 0$. Así, por $g)$, tenemos que

$$r(h^2 + k^2)e - h^2 = (r(h^2 + k^2)e - h^2 - k^2) + k^2 \geq 0.$$

Notemos que $r(h^2 + k^2) \geq r(h^2) = r(h)^2$, pues si $\lambda \in \sigma(h^2)$, entonces $\lambda e - h^2 \notin G(E)$, entonces $-\lambda e + h^2 \notin G(E)$. Así

$$r(h^2 + k^2)e - \lambda e - r(h^2 + k^2)e + h^2 \notin G(E).$$

Entonces

$$[r(h^2 + k^2) - \lambda]e - [r(h^2 + k^2)e - h^2] \notin G(E).$$

Luego $r(h^2 + k^2) - \lambda \in \sigma(r(h^2 + k^2)e - h^2)$, así $r(h^2 + k^2) - \lambda \geq 0$, es decir $r(h^2 + k^2) \geq \lambda = |\lambda|$. Por tanto $r(h^2 + k^2) \geq r(h^2) = r(h)^2$.

Así, por $h)$ se tiene que

$$\begin{aligned} r\left(\frac{1}{2}(x^* + x)\right)^2 = r(h)^2 &\leq \frac{1}{2}r(x^*x + xx^*) \\ &\leq \frac{1}{2}r(x^*x)+\frac{1}{2}r(xx^*) = r(x^*x) = \rho(x)^2. \end{aligned}$$

Por tanto $r(\frac{1}{2}(x^* + x)) \leq \rho(x)$.

j) Sea $x, y \in E$, entonces por h) tenemos que

$$\begin{aligned}\rho(x+y)^2 &= r((x+y)^*(x+y)) = r((x^*+y^*)(x+y)) \\ &= r(x^*x + y^*y + x^*y + y^*x) \\ &\leq r(x^*x) + r(y^*y) + r(x^*y + y^*x).\end{aligned}$$

Además, por i) y d) tenemos que

$$r(x^*y + y^*x) \leq 2\rho(y^*x) \leq 2\rho(y^*)\rho(x) = 2\rho(x)\rho(y).$$

Luego $\rho(x+y)^2 \leq r(x^*x) + r(y^*y) + 2\rho(x)\rho(y)$. Es decir, $\rho(x+y)^2 \leq (\rho(x)+\rho(y))^2$.

k) Para $x \in E$, tenemos que

$$\rho(x^*x)^2 = r(x^*xx^*x) = r((x^*x)^2) = r(x^*x)^2 = \rho(x)^4.$$

□

Teorema 3.6.8. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e. Entonces E es simétrica si y sólo si es hermitiana.*

Demostración. Si E es simétrica, por el Corolario 3.6.4 tenemos que E es hermitiana. Ahora supongamos que E es hermitiana y sea $\delta = \sup\{-\mu : \mu \in \sigma(x^*x), \rho(x) \leq 1\}$. Es suficiente probar que $\delta \leq 0$. Supongamos que $\delta > 0$. Entonces existe $x \in E$ y $\lambda \in \sigma(x^*x)$ con $-\lambda > \frac{1}{4}\delta$ y $\rho(x) < 1$. Sea $y = 2x(e - x^*x)^{-1}$, entonces $e - y^*y = (e - x^*x)^2(e + x^*x)^{-2}$. Consideremos la subálgebra-$*$ maximal conmutativa B que contiene a x^*x. Entonces, por la Proposición 2.2.7 tenemos que $\sigma_B(x^*x) = \sigma(x^*x) \subseteq \mathbb{R}$. Ahora si consideramos el polinomio $f(t) = \frac{(1-t)}{(1+t)}$, por el Teorema 1.4.14 tenemos que

$$\sigma(y^*y) = \sigma(e - f(x^*x)^2) = \{1 - f(t)^2 : t \in \sigma(x^*x)\}.$$

Así $\sigma(y^*y) \subseteq (-\infty, 1)$. Por tanto si consideramos el polinomio $p(z) = 1 - z$, entonces

$$\sigma(e - y^*y) = \sigma(p(y^*y)) = \{1 - \mu : \mu \in \sigma(y^*y)\} \geq 0.$$

Ahora, si $y = h + ik$, con h, k hermitianos, entonces

$$yy^* = 2h^2 + 2k^2 - y^*y.$$

Por el inciso g) del Teorema 3.6.7 tenemos que $2h^2 + 2k^2 + (e - y^*y) \geq 0$. Notemos que $\sigma(yy^*) \subseteq [-1, \infty)$ pues si tomamos $\lambda \in \sigma(yy^*)$, entonces

$$\lambda e - yy^* = \lambda e - (2h^2 + 2k^2 - y^*y) \notin G(E).$$

Entonces

$$(\lambda + 1)e - (e + 2h^2 + 2k^2 - y^*y) \notin G(E).$$

Así $\lambda + 1 \geq 0$, es decir $\lambda \geq -1$. Y por tanto $\sigma(yy^*) \subseteq [-1, \infty)$. Por el Lema 1.4.15 sabemos que $\sigma(y^*y) \setminus \{0\} = \sigma(yy^*) \setminus \{0\}$ y por tanto $\sigma(y^*y) \subset [-1, 1)$, de esto se sigue que $\rho(y) \leq 1$. Por como definimos δ tenemos que $-(1 - f(\lambda)^2) \leq \delta$, de donde $f(\lambda) \leq (1+\delta)^{\frac{1}{2}}$. Ahora como $f(f(t)) = t$ y f es decreciente en $(-1, \infty)$, tenemos que $\lambda = f(f(\lambda)) \geq f((1+\delta)^{\frac{1}{2}})$ y entonces

$$-\lambda \leq \frac{(1+\delta)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+\delta)^{\frac{1}{2}} + 1} \leq \frac{\delta/2}{2} = \frac{\delta}{4}.$$

Esto contradice la elección de λ. Por tanto como $\delta \leq 0$, entonces $\mu \geq 0$ para toda $\mu \in \sigma(x^*x)$ y $\rho(x) \leq 1$, es decir $\sigma(x^*x) \subseteq [0, 1]$ con $\rho(x) \leq 1$. Ahora para el caso general sea $x \in E$ y sea $t \in (0, \infty)$ tal que $\rho(x) \leq t$. Entonces $\rho(t^{-1}x) = t^{-1}\rho(x) \leq 1$. Por lo anterior $\sigma((t^{-1}x)^*(t^{-1}x)) \subseteq [0, 1]$. Pero:

$$\sigma((t^{-1}x)^*(t^{-1}x)) = \sigma(t^{-2}x^*x) = t^{-2}\sigma(x^*x).$$

Luego $\sigma(x^*x) \subseteq [0, t]$ para cada $x \in E$. Por la Proposición 3.6.5 tenemos que E es simétrica. $\square$

Definición 3.6.9. *Sea E un álgebra-$*$con unidad e. Una funcional lineal $\phi : E \to \mathbb{C}$ es llamada unitaria si $\phi(e) = 1$. Por otro lado, ϕ es llamada débilmente positiva si $\phi(h^2) \geq 0$ para todo $h \in E$ hermitiano.*

Proposición 3.6.10. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e. Sea $\phi : E \to \mathbb{C}$ una funcional lineal unitaria. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) ϕ es hermitiana y $|\phi(h)| \leq r(h)$ para toda $h \in E$ hermitiano.

b) ϕ es débilmente positiva.

c) ϕ es un estado en E.

d) $|\phi(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in E$.

e) $|\phi(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in N(E)$.

f) $|\phi(x)| \leq \rho(x)$ *para todo* $x \in H(E) + (ie)\mathbb{R}$.

Demostración. La demostración de esta Proposición se puede ver [2, 147]. □

Teorema 3.6.11. *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un álgebra-$*$ de Banach con unidad* e. *Entonces son equivalentes:*

a) E *es hermitiana.*

b) $S(E)$ *es no vacío y* $\rho(x) = \gamma(x)$ *para todo* $x \in E$.

c) $S(E)$ *es no vacío y* $r(x^*x) = \sup\{\phi(x^*x) : \phi \in S(E)\}$ *para todo* $x \in E$.

Demostración. Veamos que $a) \Rightarrow b)$. Sea $x \in E$ y sea B la subálgebra-$*$ cerrada maximal conmutativa que contiene a x^*x y e. Por la Proposición 2.2.7, por ser E simétrica y por la Proposición 3.6.5, se tiene que $\sigma_B(x^*x) = \sigma(x^*x) \subseteq [0, \infty)$. Además, por el Teorema 2.2.1, $\sigma(x^*x)$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{R}$ y $\lambda = r(x^*x) \in \sigma_B(x^*x)$. Por el Lema 2.3.2, existe $\psi \in \mathcal{M}(B)$ una funcional lineal multiplicativa no cero tal que $\psi(x^*x) = \lambda$. Ahora, como E es hermitiana y $\sigma_B(h) = \sigma(h) \subseteq \mathbb{R}$ para todo $h \in B$ hermitiano, se sigue que B es hermitiana. Por tanto para toda $\varphi \in \mathcal{M}(B)$ se tiene que $\varphi(h)$ es real para todo $h \in B$ hermitiano, en particular para $\psi \in \mathcal{M}(B)$. Sea $b \in B$, por el punto 1 del Teorema 3.3.6 tenemos que:

$$|\psi(b)|^2 = \overline{\psi(b)} \cdot \psi(b) = \psi(b^*)\psi(b) = \psi(b^*b) \leq r(b^*b) = \rho(b)^2.$$

De acuerdo a 3.6.7, $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ para cada $x, y \in E$. Entonces por el Teorema de Hahn-Banach existe una extensión ϕ de ψ de B a E tal que

$$|\phi(x)| \leq \rho(x) \text{ para cada } x \in E.$$

Como ψ es multiplicativa y ϕ extiende a ψ, por el inciso a) del Teorema 1.4.5, tenemos que $\psi(e) = \phi(e) = 1$. Además por la Proposición 3.6.10, ϕ es un estado y por inciso a) del Teorema 3.4.5, $\gamma(x) \geq \phi(x^*x)^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} = r(x^*x)^{\frac{1}{2}} = \rho(x)$. Por inciso e) del Teorema 3.4.5, $\gamma(x) \leq \rho(x)$ para cada $x \in E$. Entonces $\gamma(x) = \rho(x) = r(x^*x)^{\frac{1}{2}}$.
Veamos que $b) \Rightarrow c)$. Por hipótesis tenemos que $\gamma(x) = \rho(x) = r(x^*x)^{\frac{1}{2}}$, entonces $r(x^*x) = \gamma(x)^2$ y por el Teorema 3.4.5, $r(x^*x) = \sup\{\phi(x^*x) : \phi \in S(E)\}$.

c) $\Rightarrow$ *a)* Sean $x \in E$, $\mu = r(x^*x)$ y consideremos el elemento $u = \mu e - x^*x$, claramente u es hermitiano. Si $\phi \in S(E)$, entonces

$$\begin{aligned}\phi(u^2) &= \phi(\mu^2 e - 2\mu x^*x + x^*(xx^*)x) \\ &= \mu^2 - 2\mu\phi(x^*x) + \phi(x^*(xx^*)x). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Como $\phi \in S(E)$, por la Proposición 3.3.8 y usando que $r(x^*x) = r(xx^*)$, tenemos que:

$$\phi(x^*xx^*x) \leq r(x^*x)\phi(x^*x) = \mu\phi(x^*x) \tag{3.17}$$

A partir de las ecuaciones (3.16) y (3.17) se tiene que

$$\phi(u^2) \leq \mu^2 - \mu\phi(x^*x) \leq \mu^2 \tag{3.18}$$

y como $\phi \in S(E)$ fue arbitraria, por hipótesis y por la ecuación (3.18),

$$\begin{aligned} r(u^2) = r(uu^*) &= \sup\{\phi(uu^*) : \phi \in S(E)\} \\ &= \sup\{\phi(u^2) : \phi \in S(E)\} \leq \mu^2. \end{aligned}$$

Por tanto $r(u) \leq \mu$, es decir $r(\mu e - x^*x) \leq \mu$. Sea $\lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(x^*x)$. Si consideramos el polinomio $p(z) = \mu - z$, entonces $p(x^*x) = \mu e - x^*x$ y por el Teorema 1.4.12, $p(\lambda) = \mu - \lambda \in \sigma(p(x^*x)) = \sigma(\mu e - x^*x)$. Así,

$$|\mu - \alpha| \leq |\mu - \lambda| \leq r(\mu e - x^*x) \leq \mu$$

y entonces $0 \leq \alpha \leq 2\mu$ y, por inciso 11) del Teorema 33.7 de [2], se sigue que E es hermitiana. $\square$

Corolario 3.6.12. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach hermitiana con unidad e. Entonces*

$$Rad(E) = Rad^*(E) = \rho^{-1}(\{0\}).$$

Más aún, existe un espacio de Hilbert H y una representación-$*$ π tal que

1. $\pi^{-1}(\{0\}) = Rad(E)$.
2. $\|\pi(x)\| = \rho(x) = \gamma(x)$ *para cada* $x \in E$.

Si E es semi-simple, entonces (E, ρ) es un álgebra-$*$ normada que satisface la condición C^*, por tanto E es un álgebra-A^*.

Demostración. Primero, como E es un álgebra-$*$ hermitiana, por el inciso b) del Teorema 3.6.11 tenemos que $\gamma(x) = \rho(x)$ para cada $x \in E$. Ahora por el inciso d) del Teorema 3.4.5 sabemos que $Rad^*(E) = \gamma^{-1}(\{0\})$. También por el inciso f) del Teorema 3.6.7 se tiene sigue que $Rad(E) = \rho^{-1}(\{0\})$. Y por tanto:

$$Rad(E) = Rad^*(E) = \rho^{-1}(\{0\}).$$

Por otro lado, utilizando el Teorema 3.4.6 sabemos que existe un espacio de Hilbert H y una representación-$*$ π de E en H tal que $\|\pi(x)\| = \gamma(x)$ para cada $x \in E$. Entonces, utilizando nuevamente el inciso d) del Teorema 3.4.5 tenemos que:

$$\begin{aligned} Rad(E) &= \{x \in E : \gamma(x) = 0\} \\ &= \{x \in E : \|\pi(x)\| = 0\} \\ &= \{x \in E : \pi(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Es decir, $Rad(E) = \pi^{-1}(\{0\})$. Además por el inciso b) del Teorema 3.6.11 tenemos que:

$$\|\pi(x)\| = \rho(x) = \gamma(x) \text{ para toda } x \in E.$$

Por último, si E es semi-simple, entonces $Rad(E) = \{0\}$, es decir $\pi(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, entonces $\|\pi(x)\| = 0$ si y sólo si $x = 0$. Es decir $\rho(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Por tanto utilizando los incisos j) y k) tenemos que (E, ρ) es un álgebra-$*$ normada tal que $\rho(x)^2 = \rho(x^*x)$ para toda $x \in E$. Es decir, E es un álgebra-A^*. $\square$

Capítulo 4

La condición C^* en álgebras normadas.

En este capítulo estudiaremos algunos resultados de las álgebras normadas con involución $x \mapsto x^*$ y su relación con la condición C^*. Más precisamente si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada con involución $x \mapsto x^*$, veremos qué condiciones topológicas y/o algebraicas se necesitan para que exista una norma $|\cdot|$ en E equivalente a la original que satisfaga la condición C^*, es decir $|x|^2 = |xx^*|$ para cada $x \in E$.

4.1. La familia $\mathcal{B}$.

Definición 4.1.1. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada, E es llamada un álgebra pre-C^*, si $\|x\|^2 = \|xx^*\|$ para toda $x \in E$. Notemos que no se pide que E sea completo.*

Definición 4.1.2. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada. Denotaremos por $\mathcal{B}$ a la familia de todos los subconjuntos B de E tales que*

i) B es absolutamente convexo.

ii) $B^2 \subseteq B$, donde $B^2 = \{xy \in B : x, y \in B\}$.

iii) $B^* = B$, donde $B^* = \{x^* \in B : x \in B\}$.

iv) B es cerrado y acotado.

Proposición 4.1.3. *Si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra pre-C^*, entonces la bola unitaria $U = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es el elemento máximo de $\mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $U = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

i) U es convexo y balanceado. Para ver esto, sean $x, y \in U$ y $t \in [0,1]$, entonces

$$\|tx + (1-t)y\| \leq \|tx\| + \|(1-t)y\| = t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq 1.$$

Sean $x \in E$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \leq 1$ entonces $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \leq 1$.

ii) Veamos que $U^2 \subseteq U$. Sea $z \in U^2$, así $z = xy$ con $x, y \in U$ entonces

$$\|z\| = \|xy\| \leq \|x\|\|y\| = 1.$$

iii) Para ver que $U^* = U$, tomemos $x^* \in U^*$, con $x \in U$. Por ser E un álgebra pre-C^* se cumple que $\|x^*\| = \|x\| \leq 1$, así $x^* \in U$. Si $x \in U$ entonces por lo anterior $x^* \in U$ y como $x = (x^*)^*$, entonces $x \in U^*$.

iv) Claramente la bola unitaria es acotada y cerrada.

Veamos que para todo $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq U = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Sea $x \in B$, entonces $x^* \in B$, así $xx^* \in B$. Supongamos que $\|x\| > 1$ y sea $y = x^*x$, entonces $\|y\| = \|x\|^2 > 1$. Veamos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$, que $y^{2^n} \in B$.
Base inductiva: Para $n = 1$. Como $y \in B$, entonces $y^* \in B$, así $yy^* = y^2 \in B$.
Hipótesis de inducción: Supongamos que el resultado es válido para n; es decir $y^{2^n} \in B$.
Paso inductivo: Veamos que se cumple para $n+1$, es decir $y^{2^{n+1}} \in B$. Notemos que $y^{2^{n+1}} = y^{2^n} \cdot y^{2^n} \in B^2 \subseteq B$. Por tanto $y^{2^{n+1}} \in B$.
Claramente y^{2^n} es un elemento hermitiano de B y además $\|y^{2^n}\| = \|y\|^{2^n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \|y^{2^n}\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y\|^{2^n} = \infty$, por lo que $\{y^{2^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un subconjunto no acotado de B, lo cual contradice el hecho de que B es acotado. Por tanto $\|x\| \leq 1$, es decir $B \subseteq U$. Por tanto U es el elemento máximo de $\mathcal{B}$.

$\square$

Lema 4.1.4. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e. Sea E_1 una subálgebra-$*$ de E que contiene a e y tal que para todo $x \in E_1$, el elemento $(e + x^*x)^{-1}$ existe y está en E. Entonces:*

i) Si $h = h^* \in E_1$, $\sigma(h)$ es real.

ii) Si $x \in E_1$, $\sigma(x^*x)$ es real y no negativo.

Demostración.

i) Sea $h = h^* \in E_1$ y sea $\lambda = \alpha + i\beta$ un elemento de $\sigma(h)$ y supongamos que $\beta \neq 0$. Consideremos $p(z) = \beta^{-1}(\alpha^2+\beta^2)^{-1}(\alpha z^2 + (\beta^2-\alpha^2)z)$, si hacemos $k = p(h) = \beta^{-1}(\alpha^2+\beta^2)^{-1}(\alpha h^2 + (\beta^2-\alpha^2)h)$, entonces como $(h^2)^* = h^*h^* = hh = h^2$, se tiene que $k = k^*$. Por el Teorema 1.4.12 tenemos que $p(\lambda) \in \sigma(p(h)) = \sigma(k)$, pero:

$$p(\lambda) = \beta^{-1}(\alpha^2+\beta^2)^{-1}(\alpha(\alpha+i\beta)^2 + (\beta^2-\alpha^2)(\alpha+i\beta))$$

$$= \beta^{-1}(\alpha^2+\beta^2)^{-1}((\alpha^3+2i\alpha\beta-\alpha\beta^2)+(\beta^2\alpha+i\beta^3-\alpha^3-i\alpha^2\beta))$$

$$= \beta^{-1}(\alpha^2+\beta^2)^{-1}(i\alpha^2\beta+i\beta^3) = \frac{i(\alpha^2\beta+\beta^3)}{(\alpha^2\beta+\beta^3)} = i.$$

Por tanto $i \in \sigma(k)$, es decir $ie - k \notin G(E)$.
Ahora sea $q(z) = z^2$, entonces $q(i) = -1 \in \sigma(q(k)) = \sigma(k^2)$, así se tiene que $-e-k^2 = -(e+k^2) \notin G(E)$, que es lo mismo que $e + kk = e + k^*k \notin G(E)$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\sigma(h)$ es real.

ii) Sea $x \in E_1$, por el inciso anterior como x^*x es un elemento hermitiano de E, sólo falta ver que su espectro es positivo. Sea $\lambda \in \sigma(x^*x)$ con $\lambda < 0$. Consideremos $z = |\lambda|^{\frac{-1}{2}}x$, $z^* = |\lambda|^{\frac{-1}{2}}x^*$, claramente como $x, x^* \in E_1$, entonces $z, z^* \in E_1$. Haciendo $z^*z = |\lambda|^{-1}x^*x$, se cumple que $e + z^*z \in G(E)$, y entonces

$$e + z^*z = e + |\lambda|^{-1}x^*x = e - \lambda^{-1}x^*x = \lambda^{-1}(\lambda e - x^*x) \in G(E).$$

Así $\lambda e - x^*x \in G(E)$, que es una contradicción. Por tanto $\lambda \geq 0$. Luego $\sigma(x^*x)$ es real y no negativo.

□

Proposición 4.1.5. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e tal que $x \to x^*$ es continua. Si tomamos $\|x\|_1 = \text{máx}\{\|x\|, \|x^*\|\}$, entonces se cumple que:*

a) $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$.

b) $\|x\|_1 = \|x^*\|_1$ *para todo* $x \in E$.

c) $\|xy\|_1 \leq \|x\|_1\|y\|_1$ *para todas* $x, y \in E$.

Esto significa que $(E, \|\cdot\|_1)$ es un álgebra-$*$ normada en la que la involución $x \mapsto x^*$ es una isometría.

Demostración.

a) Sea $x \in E$, claramente $\|x\| \leq \|x\|_1$. Como $x \mapsto x^*$ es continua existe $M > 0$ tal que $\|x^*\| \leq M\|x\|$. Por lo que, al tomar $C = \max\{1, M\}$, se sigue que $\|x\|_1 \leq C\|x\|$. Por tanto $\|x\| \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|$. Es decir, $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1$.

b) Es claro.

c) Sean $x, y \in E$, si $\|xy\|_1 = \|xy\|$, entonces

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|\|y\| \leq \|x\|_1\|y\|_1.$$

Análogamente, si $\|xy\|_1 = \|(xy)^*\| = \|y^*x^*\|$, entonces

$$\|xy\|_1 \leq \|x^*\|\|y^*\| \leq \|x\|_1\|y\|_1.$$

Por tanto $\|xy\|_1 \leq \|x\|_1\|y\|_1$.

□

Observación 4.1.6. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e tal que la familia $\mathcal{B}$ de la Definición 4.1.2 tiene elemento máximo, digamos B_0. Como $U = \{x \in E : \|x\| \leq 1\} \subseteq B_0$, entonces podemos definir la funcional de Minkowski para B_0 de modo que, para $x \in B_0$,*

$$\mu_{B_0}(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B_0\}.$$

Proposición 4.1.7. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e. Sea $\mathcal{B}$ la familia de la Definición 4.1.2 y supongamos que $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo. Sea B_0 el elemento máximo de $\mathcal{B}$, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

a) La función $\|\cdot\|_{B_0} : E \to [0, \infty)$ dada por $\|x\|_{B_0} = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B_0\}$ define una norma en E.

b) $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_{B_0}$.

c) $\|xy\|_{B_0} \leq \|x\|_{B_0}\|y\|_{B_0}$ para todo $x, y \in E$.

d) $\|x\|_{B_0} = \|x^*\|_{B_0}$ para todo $x \in E$.

e) $U_{\|\cdot\|_{B_0}} = B_0$.

Por tanto $(E, \|\cdot\|_{B_0})$ es un álgebra-$*$ normada con unidad e tal que la involución $x \mapsto x^*$ es una isometría.

Demostración.

a) Sabemos que $\|\cdot\|_{B_0}$ es una seminorma. Ahora sea $x \in E$ con $\|x\|_{B_0} = 0$. Como B_0 es acotado, existe $M > 0$ tal que $\|y\| \leq M$ para toda $y \in B_0$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $\lambda \in \{\lambda > 0 : x \in \lambda B_0\}$ tal que $\|x\|_{B_0} < \lambda < \varepsilon$. Luego $\frac{x}{\lambda} \in B_0$ y así $\|\frac{x}{\lambda}\| \leq M$. Como $\varepsilon > 0$ fue arbitrario tenemos que $\|x\| \leq \lambda M < M\varepsilon$, entonces $\|x\| < M\varepsilon$. Por lo que $\|x\| = 0$ y como $\|\cdot\|$ es una norma, se sigue que $x = 0$.

b) Si $x \in E$, entonces $\frac{x}{2\|x\|} \in U = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$, pero $U \subseteq B_0$, entonces $\frac{x}{2\|x\|} \in B_0$ y así $x \in 2\|x\|B_0$, por lo que $\|x\|_{B_0} \leq 2\|x\|$. Por otro lado, por el punto 4 del Teorema 1.1.14 sabemos que $\frac{x}{2\|x\|_{B_0}} \in B_0$ y como B_0 es acotado existe $\alpha > 0$ tal que $\|\frac{x}{2\|x\|_{B_0}}\| \leq \alpha$, entonces $\|x\| \leq 2\alpha\|x\|_{B_0}$.

c) Sean $\mu > 0$ y $\alpha > 0$ tales que $x \in \mu B_0$ y $y \in \alpha B_0$, entonces $xy \in \mu\alpha B_0^2 \subseteq \mu\alpha B_0$ y así $\|xy\|_{B_0} \leq \mu\alpha$. Por tanto $\|xy\|_{B_0} \leq \|x\|_{B_0}\|y\|_{B_0}$.

d) Sea $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda B_0$, así $x = \lambda y$ con $y \in B_0$, entonces $x^* = \lambda y^*$ con $y^* \in B_0$, entonces $\|x^*\|_{B_0} \leq \lambda$. Por tanto $\|x^*\|_{B_0} \leq \|x\|_{B_0}$. Ahora sea $\mu > 0$ tal que $x^* \in \mu B_0$. Así $x^* = \mu z$, con $z \in B_0$, entonces $x = \mu z^*$ con $z^* \in B_0$, y $\|x\|_{B_0} \leq \mu$. Por tanto $\|x\|_{B_0} \leq \|x^*\|_{B_0}$. Es decir $\|x\| = \|x^*\|$.

e) Sea $x \in B_0$, entonces $1 \in \{\lambda > 0 : x \in \lambda B_0\}$, luego $\|x\|_{B_0} \leq 1$ y así $x \in U = \{x \in E : \|x\|_{B_0}\}$. Ahora tomemos $x \in \{x \in E : \|x\|_{B_0} < 1\}$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda B_0$ y $0 < \lambda < 1$, así pues $\lambda^{-1}x \in B_0$. Además, como $U_{\|\cdot\|} \subseteq B_0$, tenemos que $x = \lambda(\lambda^{-1}x) + (1-\lambda)0 \in B_0$. Por tanto $\{x \in E : \|x\|_{B_0} < 1\} \subseteq B_0$, así:

$$U_{\|\cdot\|_{B_0}} = \overline{\{x \in E : \|x\|_{B_0} < 1\}} \subseteq \overline{B_0} = B_0.$$

Luego $U_{\|\cdot\|_{B_0}} = B_0$.

□

Observación 4.1.8. *En lo sucesivo podemos suponer que si $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra-$*$ con unidad e tal que la familia $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo, digamos B_0, entonces la involución $x \mapsto x^*$ es una isometría. Además $B_0 = U = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.*

Proposición 4.1.9. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e tal que la involución $x \mapsto x^*$ es continua, entonces $x \to x^*$ se puede extender a la compleción $\widehat{E}$ de E, $* : \widehat{E} \to \widehat{E}$ la cuál también es una involución.*

Demostración. Como $*: E \to E$ es una isometría y por ser E denso en $\widehat{E}$, utilizando un argumento clásico de continuidad, podemos extender esta involución a la compleción $\widehat{E}$ de E, $*: \widehat{E} \to \widehat{E}$. Veamos que es una involución: Sean $x, y \in \widehat{E}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces existen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en E tales que $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Luego:

i) $$\begin{aligned}(x+y)^* &= (\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n))^* = \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)^* \\ &= \lim_{n\to\infty} x_n^* + \lim_{n\to\infty} y_n^* = x^* + y^*.\end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned}(\alpha x)^* &= (\lim_{n\to\infty} \alpha x_n)^* = \lim_{n\to\infty}(\alpha x_n)^* = \lim_{n\to\infty} \overline{\alpha} x_n^* \\ &= \overline{\alpha} \lim_{n\to\infty} x_n^* = \overline{\alpha} x^*.\end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned}(xy)^* &= (\lim_{n\to\infty} x_n y_n)^* = \lim_{n\to\infty}(x_n y_n)^* = \lim_{n\to\infty} y_n^* x_n^* \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n^* \lim_{n\to\infty} x_n^* = y^* x^*.\end{aligned}$$

iv) $$\begin{aligned}(x^*)^* &= ((\lim_{n\to\infty} x_n)^*)^* = (\lim_{n\to\infty} x_n^*)^* = \lim_{n\to\infty}(x_n^*)^* \\ &= \lim_{n\to\infty} x_n = x.\end{aligned}$$

□

Lema 4.1.10. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e tal que la involución $x \mapsto x^*$ es continua y sea $C \subseteq E$ tal que $C^2 \subseteq C$ y $C = C^*$, entonces $\overline{C}^2 \subseteq \overline{C}$ y $\overline{C}^* = \overline{C}$.*

Demostración. Sea $xy \in \overline{C}^2$ con $x, y \in \overline{C}$, entonces existen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en C tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ y por la continuidad del producto se cumple que $xy = \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$ con $(x_n y_n)_n \subseteq C$. Entonces $xy \in \overline{C}$. Por tanto $\overline{C}^2 \subseteq \overline{C}$. Sea $x^* \in \overline{C}^*$ con $x \in \overline{C}$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, pero como $x \mapsto x^*$ es continua $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* = x^*$ y como $C^* = C$ entonces $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$, por tanto $x^* \in \overline{C}$. Sea $x \in \overline{C}$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x$. Ahora como $x \mapsto x^*$ es continua se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* = x^*$. Y como $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^* = C$, se sigue que $x^* \in \overline{C}$. Así:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(x_n^*)^* = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^*\right)^* = (x^*)^*.$$

Luego $x \in \overline{C}^*$. Por tanto $\overline{C}^* = \overline{C}$ □

Lema 4.1.11. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e tal que la colección $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo. Si $h \in \widehat{E}$ es un elemento hermitiano, entonces $\|h\|_{\widehat{E}} = r_{\widehat{E}}(h)$. Donde $\|\cdot\|_{\widehat{E}}$ es la norma de la compleción $\widehat{E}$.*

Demostración. Usando la observación 4.1.8, bajo estas hipótesis podemos suponer que $x \mapsto x^*$ es una isometría y $B_0 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Sea $h \in E$ hermitiano. Primero veamos que $h \in B_0$ si y sólo si $h^2 \in B_0$. Si $h \in B_0$, entonces claramente $h^2 \in B_0^2$ pero como $B_0^2 \subseteq B_0$ se sigue que $h^2 \in B_0$. Ahora supongamos que $h^2 \in B_0$ y sea $\alpha > 1$ tal que $h \in \alpha B_0$. Por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ probaremos que $h^{2n} \in B_0^n \subseteq B_0 \subseteq \alpha B_0$.
Base de inducción: Para $n = 1$, $h^2 \in B_0^2 \subseteq B_0 \subseteq \alpha B_0$.
Hipótesis de inducción: Supongamos que es válido para n; es decir, $h^{2n} \in B_0^n \subseteq B_0 \subseteq \alpha B_0$.
Paso inductivo: Vamos a demostrar que se cumple para $n+1$; es decir $h^{2(n+1)} \in B_0^{n+1} \subseteq B_0 \subseteq \alpha B_0$. Por hipótesis de inducción sabemos que $h^{2n} \in B_0^n \subseteq B_0 \subseteq \alpha B_0$, entonces $h^{2(n+1)} = h^{2n} \cdot h^2 \in B_0^{n+1} = B_0^n \cdot B_0 \subseteq B_0^2 \subseteq B_0 \subseteq \alpha B_0$.
También por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ se puede probar que $h^{2n+1} \in \alpha B_0 B_0 \subseteq \alpha B_0$.
Base de inducción: Para $n = 1$, $h^3 = h \cdot h^2 \in \alpha B_0 B_0 \subseteq \alpha B_0$.
Hipótesis de inducción: Suponemos que se cumple para n; es decir $h^{2n+1} \in \alpha B_0 B_0 \subseteq \alpha B_0$.
Paso inductivo: Vamos a demostrar que se cumple para $n+1$; es decir $h^{2(n+1)+1} \in \alpha B_0 B_0 \subseteq \alpha B_0$. Por hipótesis de inducción $h^{2n+1} \in \alpha B_0 B_0 \subseteq \alpha B_0$, entonces $h^{2(n+1)+1} = h^{2n+1} \cdot h^2 \in \alpha B_0 B_0 \subseteq \alpha B_0$.
Sea $C = \{e, h, h^2, h^3, ...\}$. Por lo que se acaba de ver C es acotado, además $C^2 \subseteq C$ y como h es hermitiano $C^* = C$.
Vamos a demostrar ahora que $\overline{\Gamma(C)} \in \mathcal{B}$, donde

$$\Gamma(C) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_i \in C, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

i) No es difícil ver que $\overline{\Gamma(C)}$ es absolutamente convexo.

ii) Veamos que $\overline{\Gamma(C)}^2 \subseteq \overline{\Gamma(C)}$. Sea $xy \in \Gamma(C)^2$ entonces $x, y \in \Gamma(C)$ y así $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, con $x_i \in C$ para toda i y $y = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_i y_j$ con $y_j \in C$ para toda j, así:

$$xy = \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right] \left[\sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j \right] = \sum_{i,j}^{n,m} \lambda_i \mu_j \; x_i y_j \in \Gamma(C)$$

puesto que $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}|\lambda_i\mu_j| = \left[\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|\right]\left[\sum\limits_{j=1}^{m}|\mu_j|\right] \leq 1\cdot 1 = 1$ y como $C^2 \subseteq C$, $x_iy_j \in C$ para todo i,j. Entonces $xy \in \Gamma(C)$, es decir $\Gamma(C)^2 \subseteq \Gamma(C)$. Por tanto, utilizando el Lema 4.1.10, tenemos que $\overline{\Gamma(C)}^2 \subseteq \overline{\Gamma(C)}$.

iii) Veamos ahora que $\overline{\Gamma(C)}^* = \overline{\Gamma(C)}$. Sea $x \in \Gamma(C)^*$, entonces $x = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)^*$ con $x_i \in C$ para toda i y $\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i| \leq 1$. Se sigue que $x = \sum\limits_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i}x_i^* \in \Gamma(C)$, pues $x_i^* \in C^* = C$ para toda i y $\sum\limits_{i=1}^{n}|\overline{\lambda_i}| \leq 1$.

Sea $x \in \Gamma(C)$, entonces $x = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i$ con $x_i \in C$ para toda i y $\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i| \leq 1$, así $x = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i^*)^* = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i}x_i^*\right)^*$ con $x_i^* \in C = C^*$ para toda i y $\sum\limits_{i=1}^{n}|\overline{\lambda_i}| \leq 1$, entonces $x \in \Gamma(C)^*$. Por tanto $\Gamma(C)^* = \Gamma(C)$ y por el Lema 4.1.10 se sigue que $\overline{\Gamma(C)}^* = \overline{\Gamma(C)}$.

iv) Claramente $\overline{\Gamma(C)}$ es cerrado. Ahora, como C es acotado existe $M > 0$ tal que $\|x\|_{B_0} \leq M$ para toda $x \in C$. Sea $x \in \Gamma(C)$, entonces $x = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i$ con $x_i \in C$ para toda i y $\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i| \leq 1$. Luego,

$$\begin{aligned}\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\| &\leq \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\|x_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|M \leq M\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\right) \leq M.\end{aligned}$$

Así $\Gamma(C)$ es acotado. Por tanto se concluye que $\overline{\Gamma(C)}$ es acotado.

Entonces $\overline{\Gamma(C)} \in \mathcal{B}$. Ahora, como $C \subseteq \overline{\Gamma(C)} \subseteq B_0$ se sigue que $C \subseteq B_0$. En particular $h \in B_0$. Veamos que si $h \in E$ es hermitiano, entonces $\|h^2\| = \|h\|^2$. Como E es un álgebra-$*$ normada $\|h^2\| \leq \|h\|\|h\| = \|h\|^2$. Por otro lado sea $h^2 \in E$, entonces $\frac{h^2}{\|h^2\|} \in B_0$ pero $\frac{h^2}{\|h^2\|} = \left(\frac{h}{\|h^2\|^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \in B_0$, y entonces por lo visto anteriormente $\frac{h}{\|h^2\|^{\frac{1}{2}}} \in B_0$. Así $\left\|\frac{h}{\|h^2\|^{\frac{1}{2}}}\right\| \leq 1$, por tanto $\|h\|^2 \leq \|h^2\|$. Entonces $\|h^2\| = \|h\|^2$.

Sea $h \in \widehat{E}$ un elemento hermitiano. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_n \to h$. Como la involución $x \mapsto x^*$ es una isometría, en particular es continua, $x_n^* \to h^* = h$. Ahora, si tomamos $h_n = \frac{1}{2}(x_n + x_n^*)$ se sigue que $h_n = h_n^* \in E$ y $h_n = \frac{1}{2}(x_n + x_n^*) \to h$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\|h^2\|_{\widehat{E}} = \lim_{n\to\infty} \|h_n^2\| = \lim_{n\to\infty} \|h_n\|^2 = \|h\|_{\widehat{E}}^2.$$

Por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ veamos que si $h \in \widehat{E}$ es hermitiano, entonces $(h^{2n})^* = h^{2n}$.
Base de inducción: Para $n = 1$, tenemos que $(h^2)^* = (h \cdot h)^* = h^* h^* = h \cdot h = h^2$.
Hipótesis de inducción Suponemos válido para n, es decir $(h^{2n})^* = h^{2n}$.
Paso de inducción: Vamos a demostrar que se cumple para $n + 1$, es decir $h^{2(n+1)} = (h^{2(n+1)})^*$. Entonces $(h^{2(n+1)})^* = (h^{2n+2})^* = (h^2 \cdot h^{2n})^* = (h^{2n})^*(h^2)^* = h^{2n} \cdot h^2 = h^{2n+2} = h^{2(n+1)}$. Análogamente por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ se puede probar que $\|h^{2n}\|_{\widehat{E}} = \|h\|_{\widehat{E}}^{2n}$.
Ahora, por el Teorema 2.2.8 obtenemos:

$$r_{\widehat{E}}(h)^2 = \lim_{n\to\infty} \|h^n\|_{\widehat{E}}^{\frac{2}{n}} = \lim_{k\to\infty} \|h^{4k}\|_{\widehat{E}}^{\frac{2}{4k}} = \lim_{k\to\infty} \|h\|_{\widehat{E}}^2 = \|h\|_{\widehat{E}}^2,$$

que es lo que se quería probar. □

Lema 4.1.12. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e y supongamos que para cada $x \in E$, existen sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tales que $u_n(e + x^*x) \to e$ y $(e + x^*x)v_n \to e$.*
Entonces si $x \in E$, se tiene que $(e + x^*x)^{-1}$ existe y está en $\widehat{E}$.

Demostración. Sea $x \in E$ y sea $y = e + x^*x \in E$. Por hipótesis existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tal que $u_n y \to e$. Si tomamos $\varepsilon = 1$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n y - e\| < 1$, para toda $n \geq N_1$. Como $\widehat{E}$ es un espacio de Banach se sigue que $u_n y$ es invertible en $\widehat{E}$, para toda $n \geq N_1$, es decir, existe $w_n \in \widehat{E}$ tal que $w_n(u_n y) = (w_n u_n)y = e$ y $(u_n y)w_n = e$. Análogamente, existe una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tal que $yv_n \to e$. Si tomamos $\varepsilon = 1$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|yv_n - e\| < 1$, para toda $n \geq N_2$ y como $\widehat{E}$ es un espacio de Banach, yv_n es invertible, para toda $n \geq N_2$, es decir, existe $x_n \in \widehat{E}$ tal que $(yv_n)x_n = y(v_n x_n) = e$ y $xn(yv_n) = e$.
Así, si tomamos $N = \max\{N_1, N_2\}$ se tiene que

$$w_N(u_N y) = (w_N u_N)y = e \quad y \quad (u_N y)w_n = e \tag{4.1}$$

$$(yv_N)x_N = y(v_N x_N) = e \quad y \quad x_N(yv_N) = e. \tag{4.2}$$

Entonces y tiene inverso izquierdo $(w_N u_N)$ e inverso derecho $(v_N x_N)$.Veamos que son iguales. De 4.1 y 4.2 tenemos que $w_N^{-1} = (u_N y)$ y $x_N^{-1} = (yv_N)$. Ahora como $u_N(yv_N) = (uy_N)v_N$, se tiene que $u_N x_N^{-1} = w_N^{-1} v_N$, entonces $u_N = (w_N^{-1} v_N)x_N$, y $w_N u_N = v_N x_N$. Por tanto $y^{-1} = w_N u_N = v_N x_N \in \widehat{E}$. $\square$

Lema 4.1.13. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e que satisface las siguientes dos condiciones:*
i) La colección $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo.
ii) Para cada $x \in E$, existen sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tales que $u_n(e + x^*x) \to e$ y $(e + x^*x)v_n \to e$.
Entonces $\widehat{E}$ es un álgebra de Banach simétrica.

Demostración. Nuevamente usando la observación 4.1.8, bajo estas hipótesis podemos suponer que $x \mapsto x^*$ es una isometría y $B_0 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Como $x \mapsto x^*$ es una isometría, en particular es continua, entonces la podemos extender a $\widehat{E}$. Sea $x \in \widehat{E}$, demostraremos que $e + x^*x$ es invertible en $\widehat{E}$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E tal que $x_n \to x$ y sea $y = e + x^*x$. Definamos la sucesión $y_n = e + x_n^*x_n$ como $x \mapsto x^*$ es una isometría, en particular es continua y por tanto $y_n \to y$. Ahora como $x_n \in E$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por el Lema 4.1.12 se sigue que $y_n^{-1} = (e + x_n^*x_n)^{-1} \in \widehat{E}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 4.1.4 se cumple que $\sigma_{\widehat{E}}(x_n^*x_n)$ es real y no negativo.
Consideremos ahora el polinomio $p(z) = 1 + z$, se tiene que $p(x_n^*x_n) = e + x_n^*x_n$. Por lo que si $\lambda \in \sigma_{\widehat{E}}(x_n^*x_n)$, se sigue que:

$$p(\lambda) = 1 + \lambda \in \sigma_{\widehat{E}}(p(x_n^*x_n)) = \sigma_{\widehat{E}}(e + x_n^*x_n).$$

Pero como $0 \leq \lambda$, entonces $1 \leq \lambda + 1$ y por tanto $\sigma_{\widehat{E}}(e + x_n^*x_n) \subseteq [1, \infty)$. Así, por el Teorema 1.4.17, tenemos que $\sigma_{\widehat{E}}(y_n^{-1}) \subseteq (0, 1]$.
Utilizando la Proposición 3.1.14 se tiene que y_n^{-1} es un elemento hermitiano para todo $n \in \mathbb{N}$, esto pues:

$$(y_n^{-1})^* = (y_n^*)^{-1} = ((e + x_n^*x_n)^*)^{-1} = (e + x_n^*x_n)^{-1} = y_n^{-1},$$

y por el Lema 4.1.11 $\|y_n^{-1}\|_{\widehat{E}} = r_{\widehat{E}}(y_n^{-1}) \leq 1$.
Veamos ahora que (y_n^{-1}) es una sucesión de Cauchy. Como $y_n \to y$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m > N$, $\|y_m - y_n\| < \varepsilon$, así:

$$\|y_n^{-1} - y_m^{-1}\|_{\widehat{E}} = \|y_n^{-1}(y_m - y_n)y_m^{-1}\|_{\widehat{E}}$$

$$\leq \|y_m^{-1}\|_{\widehat{E}}\|y_m - y_n\|\|y_n^{-1}\|_{\widehat{E}}$$

$$\leq \|y_m - y_n\|_{\widehat{E}} < \varepsilon.$$

Por tanto (y_n^{-1}), es Cauchy.
Como $\widehat{E}$ es completo, existe $z \in \widehat{E}$ tal que la sucesión $(y_n^{-1}) \to z$. Claramente:

$$yz = (\lim_{n\to\infty} y_n)(\lim_{n\to\infty} y_n^{-1}) = \lim_{n\to\infty}(y_n y_n^{-1}) = \lim_{n\to\infty} e = e$$

y

$$zy = (\lim_{n\to\infty} y_n^{-1})(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n^{-1} y_n) = \lim_{n\to\infty} e = e.$$

Que es lo que queríamos probar. □

Lema 4.1.14. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e que satisface las siguientes dos condiciones:*

i) La colección $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo.

ii) Para cada $x \in E$, existen sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E tales que $u_n(e + x^*x) \to e$ y $(e + x^*x)v_n \to e$.

Entonces, cualquier subálgebra-$*$ maximal conmutativa de $\widehat{E}$ que contiene a e es un álgebra-C^*.

Demostración. Usando la observación 4.1.8 bajo estás hipótesis podemos suponer que $x \to x^*$ es una isometría y $B_0 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Como $x \to x^*$ es una isometría, en particular es continua, entonces la podemos extender a $\widehat{E}$. Sea C cualquier subálgebra-$*$ maximal conmutativa de $\widehat{E}$ que contiene a e. Por el Lema 4.1.13, $\widehat{E}$ es simétrica, veamos que C también lo es. Sea $x \in C$, entonces se tiene que $y = (e+x^*x)^{-1} \in \widehat{E}$. Ahora si tomamos $z \in C$ entonces $z(e + x^*x) = (e + x^*x)z$ y multiplicando por la derecha y por la izquierda por y, se tiene que

$$yz(e + x^*x)y = y(e + x^*x)zy, \text{ entonces } yz = zy.$$

Es decir, y conmuta con todo $z \in C$. Tomemos el conjunto $S = C \cup \{y\}$ y consideremos $\widehat{E}[S]$ la subálgebra-$*$ generada cerrada por S. Por lo anterior dicha subálgebra-$*$ es conmutativa, además $C \subseteq \widehat{E}[S]$. Por tanto, como C es maximal $\widehat{E}[S] = C$ y entonces $y \in C$, es decir C es simétrica. Además C es cerrada y por tanto es Banach.
Si $x \in C$, por la Proposición 2.2.7 tenemos que $r_C(x) = r_{\widehat{E}}(x)$, además como C es una subálgebra-$*$ podemos escribir a $x = h + ik$, con $h, k \in C$ hermitianos, donde $h = \frac{1}{2}(x + x^*)$ y $k = \frac{1}{2i}(x - x^*)$. Ahora por ser C

conmutativa tenemos que $\frac{1}{2}x\frac{1}{2}x^* = \frac{1}{2}x^*\frac{1}{2}x$. Análogamente $\left(\frac{1}{2i}x\right)\left(-\frac{1}{2i}x^*\right) = \left(-\frac{1}{2i}x^*\right)\left(\frac{1}{2i}x\right)$. Entonces utilizando el inciso $d)$ de la Proposición 2.2.9 y el Corolario 3.1.15 tenemos que:

$$r_{\widehat{E}}(h) = r_C(h) = r(\frac{1}{2}(x+x^*)) \leq \frac{1}{2}r_C(x) + \frac{1}{2}r_C(x^*) = r_C(x) = r_{\widehat{E}}(x).$$

Es decir, $r_{\widehat{E}}(h) \leq r_{\widehat{E}}(x)$. Análogamente para k se tiene que $r_{\widehat{E}}(k) \leq r_{\widehat{E}}(x)$. Luego, utilizando el Lema 4.1.11 tenemos que:

$$\begin{aligned} r_C(x) = r_{\widehat{E}}(x) &\leq \|x\|_{\widehat{E}} \leq \|h\|_{\widehat{E}} + \|k\|_{\widehat{E}} \\ &= r_{\widehat{E}}(h) + r_{\widehat{E}}(k) \leq 2r_{\widehat{E}}(x) = 2r_C(x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Afirmamos ahora que r es una norma en C. Sean $x, y \in C$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

i) Si $x = 0$ entonces $r_C(x) = \nu_C(x) = 0$. Por otro lado si $r_C(x) = 0$, veamos que $x = 0$. Sabemos que $x = h + ik$ con h y k hermitianos. Ahora utilizando la desigualdad 4.3 tenemos que:

$$0 = r_C(x) \leq r_{\widehat{E}}(h) + r_{\widehat{E}}(k) \leq 2r_C(x) = 0.$$

Es decir, $r_{\widehat{E}}(h) + r_{\widehat{E}}(k) = 0$, pero como $r_{\widehat{E}}(h) \geq 0$ y $r_{\widehat{E}}(k) \geq 0$, se tiene que $r(h)_{\widehat{E}} = 0$ y $r_{\widehat{E}}(k) = 0$, luego por el Lema 4.1.11 $r_{\widehat{E}}(h) = \|h\|_{\widehat{E}} = 0$ y $r_{\widehat{E}}(k) = \|k\|_{\widehat{E}} = 0$, entonces $h = 0$ y $k = 0$. Por tanto $x = 0$.

ii) Por inciso $c)$ de la Proposición 2.2.9 se tiene que:

$$r_C(\lambda x) = \nu_C(\lambda x) = |\lambda|\nu_C(x) = |\lambda| r_C(x).$$

iii) Por el inciso $e)$ de la Proposición 2.2.9 se sigue que:

$$r_C(x+y) = \nu_C(x+y) \leq \nu_C(x) + \nu_C(y) = r_C(x) + r_C(y).$$

Por tanto r es una norma en C. Además por el inciso $d)$ de la Proposición 2.2.9 tenemos que $r_C(xy) = \nu_C(xy) \leq \nu_C(x)\nu_C(y) = r_C(x)r_C(y)$. Luego (E, r) es un álgebra-$*$ de Banach.
Ahora, dada $\varphi \in \mathcal{M}(C)$ definimos $\varphi^* : E \to \mathbb{C}$ dada por: $\varphi^*(x) = \overline{\varphi(x^*)}$ para toda $x \in E$. Veamos que φ^* es un elemento en $\mathcal{M}(C)$.

i) Sean $x, y \in C$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi^*(\lambda x + y) = \overline{\varphi((\lambda x + y)^*)} &= \overline{\overline{\lambda}\varphi(x^*) + \varphi(y^*)} \\ &= \lambda\overline{\varphi(x^*)} + \overline{\varphi(y^*)} = \lambda\varphi^*(x) + \varphi^*(y). \end{aligned}$$

ii) Sean $x, y \in C$, entonces

$$\varphi^*(xy) = \overline{\varphi((xy)^*)} = \overline{\varphi(x^*y^*)} = \overline{\varphi(x^*)}\ \overline{\varphi(y^*)} = \varphi^*(x)\varphi^*(y).$$

iii) Como φ es no cero, existe $x_0 \neq 0 \in C$ tal que $\varphi(x_0) \neq 0$. Además $x_0^* \neq 0$, entonces $\varphi(x_0^*) \neq 0$, entonces $\overline{\varphi(x_0^*)}$. Luego φ^* es no cero. Y por tanto $\varphi^* \in \mathcal{M}(C)$.

Ahora como C cumple con las propiedades del Lema 2.3.2 se sigue que $r_C(x) = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in \mathcal{M}(C)\}$, para todo $x \in C$. Además como $(e + x^*x)^{-1} \in \widehat{E}$ para todo $x \in C$, entonces por $i)$ del Lema 4.1.4 dado $h \in C$ hermitiano se tiene que $\sigma_E(h) = \sigma_C(h)$ es real, es decir la involución en C es hermitiana, entonces dado $x \in C$ y $\varphi \in \mathcal{M}(C)$ se tiene que:

$$\varphi(x^*) = \varphi(h - ik) = \overline{\varphi(h + ik)} = \overline{\varphi(x)}.$$

Utilizando $ii)$ de la Proposición 4.1.4 $\sigma_E(xx^*) = \sigma_C(xx^*)$ es real y no negativo por lo que:

$$\varphi(x^*x) = \varphi(x^*)\varphi(x) = \overline{\varphi(x)}\varphi(x) = |\varphi(x)|^2.$$

Luego tomando supremo sobre $\varphi \in \mathcal{M}(C)$ se tiene que $r_C(x^*x) = r_C(x)^2$. Por tanto $(C, r_C(\cdot))$ es un álgebra-C^*. □

Lema 4.1.15. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e tal que la colección $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo. Entonces $\widehat{E}$ es semi-simple.*

Demostración. Usando la observación 4.1.8 bajo estás hipótesis podemos suponer que $x \to x^*$ es una isometría y $B_0 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Como $x \to x^*$ es una isometría, en particular es continua, entonces la podemos extender a $\widehat{E}$.
Vamos a probar que $Rad(\widehat{E}) = \{0\}$. Claramente $0 \in Rad(\widehat{E})$, pues dado $y \in \widehat{E}$, se sigue que $e - 0y = e \in G(\widehat{E})$. Ahora sea $x \in Rad(\widehat{E})$, entonces $x = h + ik$ con $h, k \in \widehat{E}$ hermitianos. Dado $y \in \widehat{E}$, se tiene que:

$$e - x^*y = e^* - x^*(y^*)^* = e^* - (y^*x)^* = (e - y^*x)^* \in G(\hat{E}).$$

Así, por el Lema 1.6.8 y por $b)$ de la Proposición 3.1.14 se sigue que $x^* \in Rad(\widehat{E})$.
Análogamente $\alpha x \in Rad(\widehat{E})$, pues $Rad(\widehat{E})$ es un subespacio de $\widehat{E}$. Por tanto se sigue que $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^* = \frac{1}{2}(x + x^*) \in Rad(\widehat{E})$ y $\frac{1}{2i}x - \frac{1}{2i}x^* = \frac{1}{2i}(x - x^*) \in Rad(\widehat{E})$, es decir, $h, k \in Rad(\widehat{E})$. De esto último podemos decir que si $\lambda \in$

$\sigma(h)$, entonces $\lambda = 0$. Pues si tomamos $\lambda \neq 0$, como $h \in Rad(\widehat{E})$ entonces $e - hy \in G(\widehat{E})$ para todo $y \in \widehat{E}$. Si tomamos $y = \frac{1}{\lambda}e$, se sigue que:

$$e - h\left(\frac{1}{\lambda}e\right) = \frac{1}{\lambda}(\lambda e - he) = \frac{1}{\lambda}(\lambda e - h) \in G(\widehat{E}).$$

Entonces $\lambda e - h \in G(\widehat{E})$. Por tanto $\sigma(h) = \{0\}$. De manera análoga se prueba que $\sigma(k) = \{0\}$. Por tanto $r_{\widehat{E}}(h) = r_{\widehat{E}}(k) = 0$ y utilizando el Lema 4.1.11 se tiene que $\|h\| = \|k\| = 0$, entonces $h, k = 0$. Y por tanto $x = 0$. Luego $Rad(\widehat{E}) = \{0\}$. □

4.2. Los Teoremas de Allan.

En esta sección se encuentran los principales resultados del trabajo, los cuales fueron publicados en [6] por G.B. Allan.

Teorema 4.2.1. *[Allan I] Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ normada con unidad e. Entonces, existe una norma $|\cdot|$ equivalente a la original tal que $(E, |\cdot|)$ es un álgebra pre-C^* si y sólo si*

1. *La colección $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo.*

2. *Para cada $x \in E$, existen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en E tales que $u_n(e + x^*x) \to e$ y $(e + x^*x)v_n \to e$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos primero que existe una norma $|\cdot|$ equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $(E, |\cdot|)$ es un pre-C^*, es decir $|x|^2 = |xx^*|$ para toda $x \in E$. En particular, $|x| = |x^*|$ para toda $x \in E$. Entonces, $x \to x^*$ es continua con respecto a $|\cdot|$. Y por tanto $x \to x^*$ la podemos extender a la compleción de $(E, |\cdot|)$ que denotaremos por $(\widehat{E}, |\cdot|_{\widehat{E}})$.

1. Como $(E, |\cdot|)$ es un álgebra-$*$ normada podemos considerar la familia $\mathcal{B}_{|\cdot|}$ de la definición 4.1.2. Por la Proposición 4.1.3 sabemos que $U_{|\cdot|} = \{x \in E : |x| \leq 1\}$ es el elemento máximo de la familia $\mathcal{B}_{|\cdot|}$. Notemos que para todo $B \in \mathcal{B}$ se tiene que $B \in \mathcal{B}_{|\cdot|}$, pues las propiedades $i)$, $ii)$ y $iii)$ se cumplen claramente. Ahora, como $\|\cdot\|$ es equivalente a $|\cdot|$, entonces B es cerrado y acotado en $\tau_{|\cdot|}$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Por tanto $B \subseteq \mathcal{B}_{|\cdot|}$, pero como U es el elemento máximo de $\mathcal{B}_{|\cdot|}$ tenemos que $B \subseteq U$. De manera análoga podemos ver que $U_{|\cdot|} \in \mathcal{B}$. Por tanto $U_{|\cdot|}$ es el elemento máximo de $\mathcal{B}$.

2. Notemos que $(\widehat{E}, |\cdot|_{\widehat{E}})$ es un álgebra-C^*, pues si $x \in \widehat{E}$, entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y como $x \to x^*$ es continua $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* = x^*$. Como $(\widehat{E}, |\cdot|_{\widehat{E}})$ es un álgebra-$*$ de Banach, tenemos que
$$|x^*x|_{\widehat{E}} = \lim_{n\to\infty} |x_n^*x_n| = \lim_{n\to\infty} |x_n|^2 = (\lim_{n\to\infty} |x_n|)^2 = |x|^2_{\widehat{E}}.$$
Por tanto $(\widehat{E}, |\cdot|_{\widehat{E}})$ es un álgebra-C^*. Sea $x \in E$ como $E \subseteq \widehat{E}$ utilizando el Teorema 3.2.8 tenemos que $\widehat{E}$ es simétrica, es decir $e + x^*x$ es invertible en $\widehat{E}$. Por tanto $y \in \widehat{E}$ tal que
$$y(e + x^*x) = e \text{ y } (e + x^*x)y = e.$$
Ahora, como $y \in \widehat{E}$ se tiene que $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ con $\{y_n\}_n \subseteq E$. Entonces:
$$y_n(e + x^*x) \xrightarrow{|\cdot|} e \text{ y } (e + x^*x)y_n \xrightarrow{|\cdot|} e, \text{ cuando } n \to \infty.$$
Y como $\|\cdot\|$ es equivalente a $|\cdot|$. Entonces
$$y_n(e + x^*x) \xrightarrow{\|\cdot\|} e \text{ y } (e + x^*x)y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} e, \text{ cuando } n \to \infty.$$

$\Leftarrow$] Ahora supongamos que se cumple los puntos 1 y 2. Nuevamente usando la Observación 4.1.8 bajo estás hipótesis podemos suponer que $x \to x^*$ es una isometría y si B_0 es el elemento máximo de $\mathcal{B}$, entonces $B_0 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Como $x \to x^*$ es una isometría, en particular es continua, por lo que la podemos extender a $\widehat{E}$.
Por los Lemas 4.1.13 y 4.1.15 sabemos que la compleción de E que denotaremos por $(\widehat{E}, \|\cdot\|_{\widehat{E}})$ es un álgebra-$*$ de Banach simétrica y semi-simple, en particular hermitiana. Así, por el Corolario 3.6.12 sabemos que existe una representación-$*$ π y un espacio de Hilbert H tal que $Rad(\widehat{E}) = \ker(\pi) = \{0\}$. Entonces, podemos considerar en $\widehat{E}$ la norma dada por $\|x\|_\pi = \|\pi(x)\|$ para toda $x \in \widehat{E}$.
Sea $h \in \widehat{E}$ hermitiano y sea $\widehat{E}\langle h\rangle$ la subálgebra-$*$ máximal conmutativa con unidad e que contiene a h, por el Lema 4.1.14 tenemos que $(\widehat{E}\langle h\rangle, r)$ es un álgebra-C^* bajo la norma r. Restringiendo $\pi : \widehat{E}\langle h\rangle \to B(H)$ se tiene que π es un isomorfismo-$*$ sobre su imagen y por el Corolario 3.5.10 se cumple $r(x) = \|x\|_\pi = \|\pi(x)\|$ para toda $x \in \widehat{E}\langle h\rangle$. En particular por el Lema 4.1.11 tenemos que:
$$r(h) = \|h\|_\pi = \|h\|_{\widehat{E}},$$

para cualquier h hermitiano en $\widehat{E}$. Así, si $x \in \widehat{E}$, entonces $x = h + ik$ con $h = \frac{1}{2}(x + x^*)$ y $k = \frac{1}{2i}(x - x^*)$ elementos hermitianos de $\widehat{E}$. Ahora, como $\|x\|_\pi^2 = \|x^*x\|_\pi$ para todo $x \in \widehat{E}$, en particular $\|x\|_\pi = \|x^*\|_\pi$. Entonces:

$$\|h\|_\pi = \|\frac{1}{2}(x + x^*)\|_\pi \leq \frac{1}{2}\|x\|_\pi + \frac{1}{2}\|x^*\|_\pi = \|x\|_\pi. \tag{4.4}$$

Es decir, $\|h\|_\pi \leq \|x\|_\pi$. Análogamente $\|k\|_\pi \leq \|x\|_\pi$. Una cuenta similar a la ecuación 4.4 y usando que $x \to x^*$ es una isometría en $\widehat{E}$, se sigue que $\|h\|_{\widehat{E}} \leq \|x\|_{\widehat{E}}$ y $\|h\|_{\widehat{E}} \leq \|x\|_{\widehat{E}}$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \|x\|_{\widehat{E}} \leq \|h\|_{\widehat{E}} + \|k\|_{\widehat{E}} = \|h\|_\pi + \|k\|_\pi \leq 2\|x\|_\pi \\ &\leq 2(\|h\|_\pi + \|k\|_\pi) \\ &= 2(\|h\|_{\widehat{E}} + \|k\|_{\widehat{E}}) \\ &\leq 4\|x\|_{\widehat{E}}. \end{aligned}$$

Por tanto tomando $|\cdot| = \|\cdot\|_\pi$ se tiene que es una norma en $\widehat{E}$ equivalente a la original $\|\cdot\|_{\widehat{E}}$ tal que $(E, |\cdot|)$ es un álgebra pre-C^*.
Más aun, ambas normas son iguales en E. Para eso consideremos el siguiente conjunto $B_\pi = \{x \in E : \|x\|_\pi \leq 1\}$. Vamos a probar que $B_0 = \overline{B}_\pi$. Primero sea $x \in E$ tal que $\|x\| \leq 1$ por la Observación 4.1.8 tenemos que $\|x\| = \|x^*\|$, entonces por inciso b) de la porposición 3.3.25 aplicado a $\widehat{E}$ se sigue que $\|\pi\| \leq 1$, así:

$$\|x\|_\pi = \|\pi(x)\| \leq \|\pi\|\|x\| \leq 1.$$

Es decir $\|x\|_\pi \leq 1$, entonces $B_0 \subseteq B_\pi$. Y por tanto $B_0 \subseteq \overline{B}_\pi$. Para la otra contención, veamos que $\overline{B}_\pi \in \mathcal{B}$.

i) No es difícil ver que $\overline{B}_\pi$ es absolutamente convexo.

ii) Veamos que $\overline{B}_\pi^2 \subseteq \overline{B}_\pi$. Para eso primero demostraremos que $B_\pi^2 \subseteq B_\pi$. Si $xy \in B_\pi^2$, entonces

$$\|\pi(xy)\| = \|\pi(x)\pi(y)\| \leq \|\pi(x)\|\|\pi(y)\| \leq 1.$$

Luego $xy \in B_\pi$ y por tanto $B_\pi^2 \subseteq B_\pi$. Utilizando el Lema 4.1.10 tenemos que $\overline{B}_\pi^2 \subseteq \overline{B}_\pi$.

iii) Veamos que $B_\pi^* = B_\pi$. Sea $x^* \in B_\pi^*$ con $x \in B_\pi$, entonces

$$\|\pi(x^*)\| = \|\pi(x)^*\| = \|\pi(x)\| \leq 1.$$

Y por tanto $x^* \in B_\pi$. Ahora, si $x \in B_\pi$ como $x = (x^*)^*$, entonces por lo anterior como $x^* \in B_\pi$ se sigue que $x \in B_\pi^*$. Por tanto $B_\pi^* = B_\pi$. Nuevamente utilizando el Lema 4.1.10 tenemos que $\overline{B}_\pi^* = \overline{B}_\pi$.

iv Claramente $\overline{B}_\pi$ es cerrado y acotado.

Por tanto $\overline{B}_\pi \in \mathcal{B}$ y como B_0 es el elemento máximo se sigue que $\overline{B}_\pi \subseteq B_0$. De esto tenemos que $B_0 = \overline{B}_\pi$. Por último si tomamos $x \in E$ con $x \neq 0$, entonces $\frac{x}{\|x\|} \in B_0$ y por lo anterior $\frac{x}{\|x\|} \in B_\pi$, luego $\left\|\frac{x}{\|x\|_{B_0}}\right\|_\pi \leq 1$. Así $\|x\|_\pi \leq \|x\|$. Análogamente si $x \in E$ con $x \neq 0$, entonces $\frac{x}{\|x\|_\pi} \in B_\pi$ y nuevamente por lo anterior $\frac{x}{\|x\|_\pi} \in B_0$, entonces $\|x\| \leq \|x\|_\pi$. Por tanto $\|x\|_T = \|x\|_{B_0}$ para toda $x \in E$.

□

Teorema 4.2.2. *[Allan II] Sea $(E, \|\cdot\|)$ un álgebra-$*$ de Banach con unidad e. Entonces, existe una norma $|\cdot|$ equivalente a la original tal que $(E, |\cdot|)$ es un álgebra-C^* si y sólo si*

1. *La colección $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo.*
2. *E es simétrica.*

Demostración. $\Leftarrow$] Supongamos que se satisfacen las condiciones $i)$ y $ii)$ del Teorema. Para cada $x \in E$ consideremos la norma dada por

$$|x| = \max\{\|x\|, \|x^*\|\}.$$

Si $x, y \in E$, entonces se cumple que $|xy| \leq |x||y|$, es decir $(E, |\cdot|)$ es un álgebra-$*$ normada. Además, para cada $x \in E$ se cumple que:

$$\|x\| \leq |x|, \quad \|x^*\| \leq |x|, \quad |x| = |x^*|.$$

Está última igualdad nos dice que la involución $x \to x^*$ es continua con respecto a $|\cdot|$.

Ahora probaremos que si tomamos $D \subseteq E$ con $D = D^*$, entonces D es $|\cdot|$-acotado si y sólo si es $\|\cdot\|$-acotado. Supongamos que D es $|\cdot|$-acotado. Si $x \in D$, entonces existe $M_1 > 0$ tal que $|x| \leq M_1$, pero $\|x\| \leq |x|$, entonces $\|x\| \leq M_1$. Por tanto D es $\|\cdot\|$-acotado. Supongamos que D es $\|\cdot\|$-acotado. Si $x \in D$, entonces existe $M_2 > 0$ tal que $\|x\| \leq M_2$ y como $D = D^*$, entonces $x^* \in D$ y $\|x^*\| \leq M_2$. Por tanto $|x| = \max\{\|x\|, \|x^*\|\} \leq M_2$. En particular, la colección $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{|\cdot|}$. Por lo que $\mathcal{B}_{|\cdot|}$ tiene elemento máximo, supongamos B_0, y así $(E, |\cdot|)$ cumple la hipótesis $i)$ del Teorema 4.2.1.

También, como E es simétrica, si $x \in E$, entonces $e + x^*x$ es invertible en E, es decir existe $y \in E$ tal que $y(e + x^*x) = e$ y $(e + x^*x)y = e$. Luego $(E, |\cdot|)$ satisface trivialmente la condición $ii)$ del Teorema 4.2.1. Por tanto $(E, |\cdot|)$ es un álgebra-$*$ normada que satisface las condiciones $i)$y $ii)$ del Teorema 4.2.1, entonces existe una norma $|\cdot|_0$ equivalente a $|\cdot|$ tal que $|x|_0^2 = |xx^*|_0$ para todo $x \in E$. Como las normas $|\cdot|$ y $|\cdot|_0$ son equivalentes, existen $a, b > 0$ tales que

$$a|x| \leq |x|_0 \leq b|x| \text{ para todo } x \in E.$$

Por tanto $(E, \|\cdot\|)$ es un álgebra-A^* con norma auxiliar $|\cdot|_0$, que además es equivalente a $|\cdot|$.
Veamos ahora que las normas $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ son equivalentes. Utilizando el Corolario 3.5.6 sabemos que existe $\beta \geq 0$ tal que $|x|_0 \leq \beta\|x\|$ para toda $x \in E$. Por tanto se tiene que:

$$\|x\| \leq |x| \leq \frac{\beta}{a}\|x\| \text{ para toda } x \in E.$$

Así $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ son normas equivalentes. También como $|\cdot|$ y $|\cdot|_0$ son equivalentes se sigue que $\|\cdot\|$ y $|\cdot|_0$ son equivalentes, de donde se sigue que $(E, |\cdot|_0)$ es un álgebra-C^*.
$\Rightarrow$] Supongamos ahora que existe una norma $|\cdot|$ equivalente a la original tal que $(E, |\cdot|)$ es un álgebra-C^*. Entonces

1. La prueba de que $\mathcal{B}$ tiene elemento máximo es igual a la demostración del inciso 1 del Teorema 4.2.1.

2. Como $(E, |\cdot|)$ es un álgebra-C^* por el Teorema 3.2.8 tenemos que E es simétrica.

$\square$

Bibliografía

[1] Bonsall, Frank F. y Duncan, John, *Complete normed algebras*, 1973.

[2] Doran, Robert Stuart y Belfi, Victor A., *Characteterizations of C*-algebras*, Taylor & Francis, 1986.

[3] Gardner Fell, James Michael y Doran, Robert Stuart, *Representations of $*$-algebras locally compact gropus and Banach $*$-Algebraic Bundles*, Academic Press, 1988.

[4] Fragoulopoulou, Maria, *Topological algebras with involution*, North Holland, 2005.

[5] Godement, Roger, *Analysis I. Convergence, elementary functions*, Springer, 2004.

[6] Graham, Robert Allan, *A note on B^*-algebras*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 61, 29-32, 1965.

[7] Graham, Robert Allan, *On a class of locally convex algebras*, Proc. London Math. Soc. 15, 399-421, 1965.

[8] Kaniuth, Eberhard, *A course in conmmutative Banach Algebras*, Springer, 2009.

[9] Morales, Lorena, *Las Q-álgebras y algunas de sus generalizaciones*, Tesis de licenciatura, 2014.

[10] Murphy, Gerald J., *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, UNAM, 2014.

[11] Naimark, Mark Aronovich, *Normed algebras*, Springer, 1972.

[12] Rickart, Charles Earl, *General theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, 1960.

[13] Sakai, Shoichiro, *C^*-algebras and W^*-algebras*, Springer, 1998.

[14] Upmeier, Harald, *Symmetric Banach Manifolds and Jordan C^*-Algebras*, North Holland, 1960.

[15] Zelazko, Wiesław, *Banach algebras*, Elsevier Publishing Company, 1973.