UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNICIDAD DE SOLUCIONES A UN PROBLEMA DE TIPO YAMABE SOBRE LA ESFERA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

CARLOS ALBERTO OCHOA FLORES

DIRECTORA DE TESIS:
Dra. Mónica Alicia Clapp Jimenez Labora

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

Agradecimientos

A mis padres Teresa y Alberto por el constante apoyo, las múltiples enseñanzas y la fe, simepre presente, de que el mundo puede ser distinto. A mi hermana Karla y a su pareja Carolina por los martes de alitas, los días de cine y las complicidades bobas.

A mis amigos de la carrera, Érick, Braulio, Jesús y Brandon por los recuerdos, las risas; sobre todo, por hacer de las matemáticas algo mucho más divertido.

A Gaby y a los demás miembros del cubículo por las pláticas largas y variadas, por el cariño y el apoyo.

A Mónica Clapp por ser mi asesora de tesis pero sobre todo por contagiarme su amor por la materia. A Judith Campos y Alberto Saldaña por todas las pláticas sobre matemáticas y por su constanto orientación durante mi proceso de titulación.

A Lisieux por mostrar entusiasmo ante mis divagaciones y porque de todos los clichés el amor es, sin duda, el más increíble.

Esta tesis de licenciatura fue realizada con el apoyo de una beca de titulación otorgada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM, a través del proyecto UNAM-DGAPA-PAPAIITIN100718.

Índice general

Introducción **5**

1. Un resultado de simetría en la bola **9**
1.1. Los principios del máximo y los principios de comparación 9
1.2. Un teorema de Gidas, Ni y Nirenberg 12

2. Un problema elíptico en la esfera **19**
2.1. El operador de Laplace-Beltrami 19
2.2. El problema en el espacio euclidiano 23

3. Demostración del teorema principal **29**
3.1. El caso $\lambda < \frac{n(n-2)}{4}$ 29
3.2. El caso $\lambda = \frac{n(n-2)}{4}$ 33

Introducción

Como una consecuencia del teorema de uniformización de Riemann, es posible demostrar que cualquier 2-variedad riemanniana cerrada posee una métrica que es conformemente equivalente a la original y cuya curvatura es constante.

Recordemos que la conjetura de Poincaré dice que toda variedad de dimensión 3 que sea simplemente conexa es homeomorfa a la esfera. Si bien, no es cierto que cualquier variedad cerrada de dimensión mayor a 2 posee una métrica con curvatura constante, la posibilidad de probar la conjetura de Poincaré por medio de la construcción de métricas de Einstein (consultar el capítulo V de [10]), llevó a Hideiko Yamabe a hacerse la siguiente pregunta: ¿Bajo qué condiciones puede asegurarse que una variedad diferenciable posee una métrica riemanniana cuya curvatura escalar es constante? En 1960, Yamabe publicó una demostración del siguiente resultado:

Teorema 0.1. *Sea (M, g) una variedad riemanniana compacta de dimensión $n \geq 3$. Entonces, M posee una métrica riemanniana con curvatura escalar constante que es conforme a g.*

La estrategia de Yamabe fue reinterpretar el problema como una ecuación diferencial parcial que después identificó como la ecuación de Euler-Lagrange de cierto funcional. El ínfimo de este funcional es conocido como invariente de Yamabe y se denota como $\lambda(M)$. Abordar el problema desde esta perspectiva permitió que Yamabe usara técnicas de análisis.

En 1968, Neil S. Trudinger descubrió un error serio en la demostración de Yamabe. Yamabe notó de manera correcta que el problema que quería resolver era un problema de exponenete crítico en el sentido del teorema de encaje de Sobolev, lo cual implicaba que la existencia de mínimos para el funcional que estaba estudiando no podía concluirse por medio del método directo. Trató de darle la vuelta al problema una vez más, definiendo y minimizando una familia de funcionales asociados al original y fue aquí fue donde cometió algunos errores.

Trudinger fue capaz de arreglar la demostración de Yamabe para los casos en los que $\lambda(M) \leq 0$. De hecho, demostró la existencia de una constante positiva $\alpha(M)$ tal que el Teorema 0.1 es cierto siempre que $\lambda(M) \leq \alpha(M)$. En 1976, Thierry Aubin extendió el resultado de Trudinger al demostrar que $\alpha(M) = \lambda(\mathbb{S}^n)$. Más aun, Aubin demostró que el Teorema 0.1 es cierto cuando $n \geq 6$ y M no es localmente conformemente plana. En 1984, Richard Schoen dio una solución definitica a la conjetura de Yamabe demostrando el Teorema 0.1 en los casos restantes por medio del teorema de la positividad de la masa. Para una discusión detallada y accesible de la demostración del Teorema 0.1, el lector puede consultar el artículo [9] de Lee y Parker.

Por lo demostrado por Trudinger y Aubin, entender el problema de Yamabe en la esfera fue esencial para resolver el caso más general. En la esfera, el problema de Yamabe es equivalente a resolver la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta_g u + \frac{n(n-2)}{4} u = |u|^{2^*-2} u & \text{sobre } \mathbb{S}^n, \\ u > 0 & \text{sobre } \mathbb{S}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Una pregunta interesante desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales parciales, es la siguiente. ¿Cómo se ven las soluciones al problema (1) si sustituimos $\frac{n(n-2)}{4}$ por un coeficiente arbitrario? En 2006, Brezis y Li demostraron que las soluciones a ciertos problemas elípticos no lineales en variedades riemannianas siempre son constantes, ver [3]. En particular, demostraron el siguiente teorema.

Teorema 0.2. *Sea* $\lambda < \frac{n(n-2)}{4}$. *Si* $u \in C^2(\mathbb{S}^n)$ *es una solución de*

$$\begin{cases} -\Delta_g u + \lambda u = |u|^{2^*-2} u & \textit{sobre } \mathbb{S}^n, \\ u > 0 & \textit{sobre } \mathbb{S}^n, \end{cases} \tag{2}$$

entonces u *es constante.*

El objetivo de esta tesis es dar una prueba del Teorema 0.2. La posibilidad de hacer cálculos explícitos permite ilustrar algunas de las ideas principales del análisis geométrico sin tener que recurrir a conceptos típicos de la geometría riemanniana, como lo son los tensores o las formas diferenciales.

Con las ideas de Brezis y Li en mente, el esquema de la demostración es el siguiente. Por medio de la proyección estereográfica reinterpretamos el problema (2) como un problema en $\mathbb{R}^n$ y vemos que una solución de (2) induce una solución del nuevo problema. Luego probamos que la solución en $\mathbb{R}^n$ es radialmente simétrica. Esto último es suficiente para concluir que la solución al problema (2) es constante.

Una herramienta útil para probar la simetría de soluciones a ecuaciones diferenciales parciales es el método de los planos móviles. Este método fue introducido por Alexandrov en [1], quien lo utilizó para estudiar superficies con curvatura media constante. Más tarde, en [11] Serrin reinterpretó el método de una manera adecuada para su uso en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales y lo utilizó en la solución de su problema sobredeterminado. En, 1979 y 1981 Gidas, Ni y Nirenberg publicaron [5] y [6] respectivamente. En estos trabajos generalizaron el método a dominios con cierto tipo de singularidades en la frontera e incluso a dominios no acotados.

En el primer capítulo de esta tesis, con el objetivo de ilustrar las ideas principales del método de los planos móviles, probamos un resultado de simetría en la bola. Hacemos énfasis, sobre todo, en el papel fundamental que tiene el principio del máximo.

En el segundo capítulo, revisamos algunos de los conceptos básicos para el análisis geométrico, como lo son el gradiente, la divergencia y el laplaciano en una variedad riemanniana arbitraria. Además, demostramos lo siguiente.

Proposición 0.3. *Si $u \in C^2(\mathbb{S}^n)$ es solución de (2), entonces la función v dada por $v(x) := \xi(x)u(\sigma^{-1}(x))$ es solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta v - (\frac{n(n-2)}{4} - \lambda)\xi(x)^{2^*-2}v = |v|^{2^*-2}v & \text{en } \mathbb{R}^n, \\ v > 0 & \text{en } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3}$$

donde σ es la proyección estereográfica desde el polo norte $(0,\dots,0,1)$ y

$$\xi(x) := \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}. \tag{4}$$

Con lo anterior en mente, en el tercer y último capítulo de este trabajo, usamos un resultado de simetría que nos permite concluir que cualquier solución de (3) es radialmente simétrica. Vemos que eso implica que una solución del problema (2) siempre es constante. Como un corolario de esto, obtenemos la unicidad de soluciones para (2). Finalmente estudiamos las soluciones del problema (1) que corresponden al caso en el que $\lambda = \frac{n(n-2)}{4}$.

Es importante mencionar que la demostración del resultado de simetría que utilizamos no se basa en el método de los planos móviles, sino en una variante de éste, conocida como el método de las esferas móviles. En [3] Brezis y Li sugieren que es posible utilizar las ideas de Gidas, Ni y Nirenberg para probar un resultado de simetría adecuado, sin embargo, no dan detalles de la prueba. Es posible que tuvieran en mente una generalización del Teorema 4 de [5] al caso en donde el operador diferencial depende también de una variable espacial. Este teorema garantiza la simetría radial de soluciones positivas a problemas dados por cierta clase de operadores elípticos no lineales, siempre que la solución y sus primeras derivadas parciales cumplan cierta expansión asintótica. Como en esta tesis decidimos no adentrarnos en la prueba de un resultado de simetría para todo $\mathbb{R}^n$, por completitud, hemos decidido utilizar la Proposición 2.1 de [7] que sí cuenta con una demostración bastante detallada.

Capítulo 1

Un resultado de simetría en la bola

Una pregunta importante en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales parciales es si hay una relación entre el tipo de simetría del dominio de una solución y la simetría de la solución misma. Más específicamente, cuando tanto el dominio como el problema que se busca resolver son invariantes bajo algún grupo de simetrías, ¿bajo qué condiciones se puede garantizar que las soluciones también lo son?.

El objetivo de este capítulo es probar un resultado clásico de Gidas, Ni y Nirenberg que aparece en [5]. Para la prueba se utiliza una técnica conocida como el método de los planos móviles. En la prueba, los principios del máximo tienen un papel fudamental. Por lo anterior, en la primera sección de este capítulo enunciamos la versión de los principios del máximo que utilizaremos. Dedicamos la segunda sección del capítulo a probar el resultado de simetría que nos interesa.

1.1. Los principios del máximo y los principios de comparación

Los principios del máximo son una herramienta de gran importancia en el estudio de ecuaciones elípticas de segundo orden, ya que permiten obtener una gran cantidad de información sobre cómo se ven la soluciones de algunos problemas.

Para poder enunciar los principios del máximo en la generalidad en la que los utilizaremos, primero es necesario recordar la defininción de solución débil.

Definición 1.1. Sea Ω un abierto contenido en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$, es una solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

si para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

De manera análoga, $u \in H_0^1(\Omega)$ satisface

$$-\Delta u \leq f \text{ en } \Omega$$

si para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ se tiene que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \leq \int_\Omega f\varphi.$$

Observación 1.2. Sean $m \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}$ y $f = f(r,s) : A \times B \to \mathbb{R}$. Diremos que f es localmente Lipschitz en s uniformemente respecto a r, si para cada $s \in B$ existe una vecindad U de s y $\alpha > 0$ tal que para $s_1, s_2 \in U$

$$|f(r,s_1) - f(r,s_2)| \leq \alpha |(r,s_1) - (r,s_2)| \quad \forall r \in A. \tag{1.1}$$

A lo largo de esta sección hacemos referencia al espacio H^1 de Sobolev en el enunciado de los teoremas. Dado que los espacios de Sobolev no son de importancia central para el desarrollo de este trabajo, no decimos mucho acerca de estos. Para más información, el lector puede consultar, por ejemplo, el primer capítulo de [4].

El primer principio del máximo que enunciaremos y su correspondiente corolario, nos permitirá garantizar que en subdominios suficientemente pequeños se cumple un principio de comparación.

Teorema 1.3. *(Principio débil del máximo en dominios pequeños). Sea $n \geq 2$, Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha \geq 0$. Sea $c \in L^\infty$, $\|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \alpha$. Entonces existe $\delta > 0$, que depende de α, tal que se cumple lo siguiente:*

Si $\Omega' \subset \Omega$ es un subdominio de Ω, $v \in H^1(\Omega') \cap C^0(\overline{\Omega'})$, $|\{x \in \Omega' : v(x) > 0\}| < \delta$ y además v satisface

$$\begin{cases} -\Delta v + c(x)v \leq 0 & \text{en } \Omega', \\ v \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega', \end{cases} \tag{1.2}$$

entonces $v \leq 0$ en Ω'.

Demostración. Para la demostración consulte el Teorema 1.20 de [4]. □

Corolario 1.4 (Principio débil de comparación en dominios pequeños)**.** *Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$. Sea $f = f(r,s) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que es localmente Lipschitz en s uniformemente respecto a r. Si u y v están en $H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ y cumplen que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < A, \text{ para algún } A > 0,$$

entonces existe $\delta > 0$, que depende de f y de A, tal que se cumple lo siguiente: Si $\Omega^{'} \subset \Omega$ es un subdominio de Ω para el cual $|\{x \in \Omega : u(x) > v(x)\} \cap \Omega^{'}| < \delta$ y

$$\begin{cases} -\Delta u \leq f(x,u); -\Delta v \geq f(x,v) & \textit{en } \Omega', \\ u \leq v & \textit{sobre } \partial\Omega', \end{cases} \tag{1.3}$$

entonces $u \leq v$ en $\Omega^{'}$.

Demostración. Definamos $c : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$c(x) := \begin{cases} \frac{f(x,v(x)) - f(x,u(x))}{u(x)-v(x)} & \text{si } u(x) \neq v(x), \\ 0 & \text{si } u(x) = v(x). \end{cases} \tag{1.4}$$

Notemos que, como f es Lipschitz continua para $s \in [-A, A]$, tenemos que $c \in L^{\infty}(\Omega)$ con $\|c\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq B$ donde B es una constante de Lipschitz para f en $[-A, A]$.

Si $\Omega' \subset \Omega$ es un subdomino en el cual u y v satisfacen (1.2), entonces $u - v$ satisface

$$\begin{cases} -\Delta(u-v) + c(x)(u-v) \leq 0 & \text{en } \Omega', \\ u - v \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega'. \end{cases} \tag{1.5}$$

El resultado se sigue de manera inmediata al aplicar el principio débil del máximo en dominios pequeños (1.3). □

El segundo principio del máximo nos permite garantizar que se da una desigualdad estricta entre funciones.

Teorema 1.5. *(Principio fuerte del máximo). Sea Ω un dominio (no necesariamente acotado) en $\mathbb{R}^N$, sea $c \in L^{\infty}(\Omega)$ y sea $v \in H^1_{loc}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ una solución débil de*

$$\begin{cases} -\Delta v + c(x)v \geq 0 & \textit{en } \Omega, \\ v \geq 0 & \textit{en } \Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

entonces $v \equiv 0$ en Ω o $v > 0$ en Ω.

Más aún, si $v > 0$ en Ω, $x_0 \in \partial\Omega$ es un punto donde $v(x_0) = 0$ y la condición de esfera interior se satisface, entonces, para cualquier dirección interior ν,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Demostración. Para la demostración consulte el Teorema 1.28 de [4]. □

Corolario 1.6 (Principio fuerte de comparación)**.** *Sea Ω un dominio (no necesariamente acotado) de $\mathbb{R}^N$. Sea $f = f(r,s) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua que es localmente Lipschitz en s uniformemente respecto a r. Si u, $v \in H^1_{loc}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ satisfacen*

$$\begin{cases} -\Delta u \leq f(x,u); -\Delta v \geq f(x,v) & \textit{en } \Omega, \\ u \leq v & \textit{en } \Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

entonces $u = v$ *en* Ω *o* $u < v$ *en* Ω*. En el segundo caso, si* $x_0 \in \partial\Omega$ *es un punto que satisface la condición de la esfera interior y* $u(x_0) = v(x_0)$ *entonces* $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0)$*, donde* ν *es una dirección interior de* B*.*

Demostración. La prueba es totalmente análoga a la del Lema 1.4, usando el Teorema 1.5. □

1.2. Un teorema de Gidas, Ni y Nirenberg

Estamos interesados en soluciones del siguiente problema en la bola, $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u) & \text{en } B, \\ u > 0 & \text{en } B, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

Veremos que bajos ciertas condiciones de regularidad sobre f y sobre u, es posible garantizar que u es radialmente simétrica y que además su derivada radial es decreciente.

El siguiente teorema es una pequeña generalización del resultado probado por Gidas, Ni y Nirenberg en [5]. Aparece en el Capítulo 6 de [4], que también es una buena referencia para consultar más acerca de resultados de simetría.

Teorema 1.7. *Sea* $B = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$*,* $R > 0$ *y* $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *una función continua tal que* $f(r, s)$ *es localmente Lipschitz en* s *uniformemente respecto a* r *y tal que es decreciente en* r *para* s *fija. Si* $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ *satisface*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(|x|, u) & \textit{en } B, \\ u > 0 & \textit{en } B, \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial B, \end{cases} \tag{1.8}$$

entonces u *es radialmente simétrica y la derivada radial es negativa.*

La idea de la demostración es ver que para una dirección e arbitraria, la función u es invariante respecto a la reflexión sobre el hiperplano ortogonal a esa dirección. Para simplificar las cosas, nos fijamos primero en la dirección canónica e_1 y por medio del método de los planos móviles demostramos la simetría de u con respecto a este hiperplano. La simetría con respecto a cualquier otra dirección se sigue de observar que el problema en el que estamos interesados es invariante bajo transformaciones ortogonales.

El método de los planos móviles consiste en fijar una dirección arbitraria y considerar todos los planos afines ortogonales a ésta y que intersecan al dominio en el que se está trabajando. Luego, mediante un proceso límite, en el que se usan los principios de comparación, obtenemos dos desigualdades que nos llevan a concluir la simetría de la función con respecto al hiperplano que pasa por el origen y es ortogonal a la direción fijada.

Primero demostraremos que el problema (1.8) es invariante bajo tranformaciones ortogonales. Para esto utilizaremos la invariancia del laplaciano bajo transformaciones ortogonales y que la traza de una matriz es invariante bajo cambios de coordenadas.

Sea $\mathcal{M}_{n\times n}$ el espacio de matrices reales de $n \times n$. Recordemos que si A, $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ entonces decimos que A y B son semejantes si existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que

$$A = P^{-1}BP.$$

Proposición 1.8. *Sean A, $B \in M_n(\mathbb{R})$ dos matrices semejantes, entonces se cumple que*

$$tr(A) = tr(B).$$

Demostración. Para una demostración de este resultado consulte, por ejemplo, el Corolario 10.10 de [2]. □

Si $v \in C^2(B)$, denotamos por $\mathcal{H}v$ al Hessiano de v, es decir, $\mathcal{H}v$ es la derivada de la funcion $\nabla v : B \to \mathbb{R}^n$ dada por $x \mapsto \nabla v(x)$.

Lema 1.9. *(invariancia del laplaciano bajo transformaciones ortogonales). Si $u \in C^2(B)$ y $T \in O(n)$, entonces*

(a) $\nabla(u \circ T) = T^{-1} \circ \nabla u \circ T$, *i.e.,*

$$\nabla(u \circ T)(x) = T^{-1}[\nabla u(Tx)] \quad \forall x \in B.$$

(b)$\mathcal{H}(u \circ T)(x) = T^{-1} \circ \mathcal{H}u(Tx) \circ T$ *para cada* $x \in B$.

(c)$\Delta(u \circ T)(x) = \Delta u(Tx)$ *para cada* $x \in B$.

Demostración. (a) Sabemos que, para toda y en $\mathbb{R}^n$, $\nabla(u \circ T)(x)$ es el único vector tal que:

$$\langle \nabla(u \circ T)(x), y\rangle = D(u \circ T)(x)[y].$$

Por la regla de la cadena y dado que T es ortogonal, obtenemos

$$\begin{aligned} D(u \circ T)(x)[y] &= Du(Tx)[Ty] \\ &= \langle \nabla u(Tx), Ty\rangle \\ &= \langle T^{-1} \circ \nabla u(Tx), y\rangle, \end{aligned}$$

así

$$\nabla(u \circ T) = T^{-1} \circ \nabla u \circ T,$$

como queríamos probar.
(b) Por (a), tenemos que $\nabla(u \circ T)(x) = (T^{-1} \circ \nabla u \circ T)(x)$, para todo $x \in B$. Así, aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(u \circ T)(x) &= D(T^{-1})_{\nabla u(Tx)} \circ \mathcal{H}u(Tx) \circ D(T)_x \\ &= T^{-1} \circ \mathcal{H}u(Tx) \circ T, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque tanto T como su inversa son funciones lineales.
(c) Por (b) las matrices $\mathcal{H}(u \circ T)(x)$ y $\mathcal{H}(u)(Tx)$ son semejantes. Esto implica que tienen la misma traza. Así

$$\begin{aligned}\Delta(u \circ T)(x) &= tr[\mathcal{H}(u \circ T)(x)] \\ &= tr[\mathcal{H}u(Tx)] = \Delta u(Tx).\end{aligned}$$

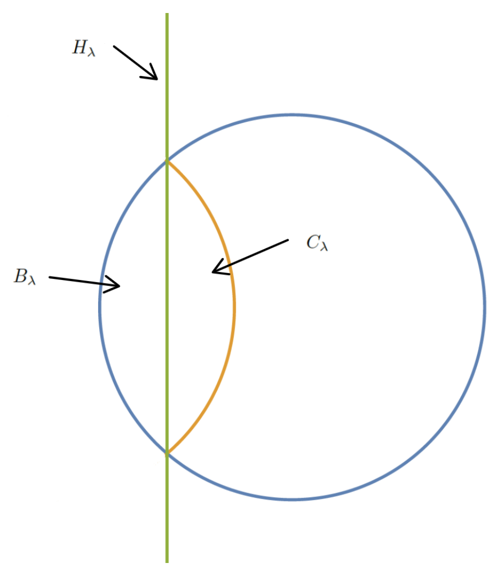
□

Proposición 1.10. *Sea $T \in O(n)$, si $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ es una solución del problema (1.8), entonces $u \circ T$ también lo es.*

Demostración. Por el lema anterior,

$$-\Delta(u \circ T)(x) = -\Delta u(Tx) = f(|Tx|, u(Tx)) = f(|x|, (u \circ T)(x)) \quad \forall x \in B. \tag{1.9}$$

Por otro lado, como $Tx \in \partial B$ si $x \in \partial B$. Se tiene que $u \circ T = 0$ sobre ∂B. Así, $u \circ T$ es solución de (1.8). □



Pasaremos ahora a la demostración del Teorema 1.7

Demostración. (Teorema 1.7) Primero definamos lo siguiente para $-R < \lambda \leq 0$:

$$\begin{aligned} H_\lambda &= \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_1 = \lambda\}, \\ B_\lambda &= \{x \in B : x_1 < \lambda\}, \\ x_\lambda &= (2\lambda - x_1, x_2, ..., x_N), \\ C_\lambda &= \{y \in B : y = x_\lambda \text{ para algún } x \in B_\lambda\}, \\ u_\lambda &: B_\lambda \to \mathbb{R}, \quad u_\lambda(x) := u(x_\lambda). \end{aligned}$$

Notemos que x_λ es el reflejado de x con respecto al hiperplano H_λ. Si consideramos $\varphi \in C_0^\infty(B_\lambda)$, como u es solución de (1.8) entonces, por el teorema de cambio de variable, u_λ satisface:

$$\begin{aligned}\int_{B_\lambda} \nabla u_\lambda \cdot \nabla\varphi &= \int_{C_\lambda} \nabla u(x_1, ..., x_N) \cdot \nabla\varphi(2\lambda - x_1, ..., x_N) \\ &= \int_{C_\lambda} f(|x|, u)\varphi(2\lambda - x_1, ..., x_N) = \int_{B_\lambda} f(|x_\lambda|, u_\lambda)\varphi.\end{aligned}$$

Además, como $0 = u < u_\lambda$ sobre $\partial B_\lambda \setminus H_\lambda$ y $u = u_\lambda$ en $H_\lambda \cap \overline{B}$, tenemos que $u \leq u_\lambda$ en ∂B_λ. Dado que $f(|x|, u)$ es decreciente en $|x|$ y $|x| \geq |x_\lambda|$, entonces $-\Delta u_\lambda = f(|x_\lambda|, u_\lambda) \geq f(|x|, u_\lambda)$.

En resumen, para $\lambda \in (-R, 0)$,

$$\begin{cases} -\Delta u \leq f(|x|, u); -\Delta u_\lambda \geq f(|x|, u_\lambda) & \text{en } B_\lambda, \\ u \leq u_\lambda & \text{sobre } \partial B_\lambda. \end{cases} \tag{1.10}$$

Veamos que $u \leq u_\lambda$ en B_λ para todo $\lambda \in (-R, 0)$. Sea $A = \|u\|_{L^\infty(B)}$. Para $\lambda \in (-R, 0)$, se cumple que

$$\|u\|_{L^\infty(B_\lambda)} \leq A, \qquad \|u_\lambda\|_{L^\infty(B_\lambda)} \leq A.$$

Ahora bien, tomando λ suficientemente cercano a $-R$ podemos garantizar que $|B_\lambda|$ es tan pequeña como queramos. En particular, podemos aplicar el principio débil de comparación en dominios pequeños a f, u y u_λ. Sea δ dada por el Corolario 1.4 y λ de manera que $|B_\lambda| \leq \delta$. Por (1.10) y el Corolario 1.4, podemos concluir que existe $\alpha > 0$ tal que si

$$\lambda \in (-R, -R + \alpha), \text{ entonces en } u \leq u_\lambda \text{ en } B_\lambda.$$

Definamos

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda \in (-R, 0) : u \leq u_\mu \text{ en } B_\mu, \forall \mu \in (-R, \lambda)\}. \tag{1.11}$$

Este supremo existe por lo demostrado en el párrafo anterior. Queremos ver que $\lambda_0 = 0$. Por contradicción, supongamos que $\lambda_0 < 0$. Para $\mu \in (\lambda, \lambda_0]$ y para $x \in B_\lambda$, consideremos $u_\mu(x)$. Haciendo tender λ a λ_0 concluimos que $u(x) \leq u_{\lambda_0}(x)$. Haciendo esto para cada $\lambda \in (-R, \lambda_0)$, tenemos que $u \leq u_{\lambda_0}$ en B_{λ_0}.

Para $\lambda \in (-R, \lambda_0]$, f, u y u_λ satisfacen las hipótesis del principio fuerte de comparación. Así, se cumple que $u < u_\lambda$ o bien $u = u_\lambda$ en B_λ. Como para los puntos en $\partial B \cap \partial B_\lambda$, $0 = u < u_\lambda$, entonces $u < u_\lambda$ en B_λ, ya que tanto u como u_λ son continuas hasta la frontera. Además, para $x_0 \in H_\lambda \cap B$, se tiene $u(x_0) = u_\lambda(x_0)$. Entonces podemos deducir del principio fuerte de comparación que

$$\nabla u(x_0) \cdot (-e_1) < \nabla u_\lambda(x_0) \cdot (-e_1) \tag{1.12}$$

es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) > \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1}(x_0) \tag{1.13}$$

y como $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1}(x_0) = -\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0)$ podemos concluir que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) > 0. \tag{1.14}$$

Consideremos un compacto $K \subset B_{\lambda_0}$ tal que $|B_{\lambda_0} \setminus K| < \frac{\delta}{2}$. Con δ nuevamente dada por el Corolario 1.4. Como $u_{\lambda_0} - u$ es continua y positiva en K, entonces existe $m > 0$ tal que $\min_K(u_{\lambda_0} - u) = m$. Por continuidad, para $\lambda > \lambda_0$ y cercana a λ_0, se tiene que

$$|B_\lambda \setminus K| < \delta, \quad \min_K(u_\lambda - u) \geq \frac{m}{2} > 0.$$

Denotando $B'_\lambda = B_\lambda \setminus K$, tenemos que $u \leq u_\lambda$ en $\partial B'_\lambda$. Podemos aplicar el principio débil de comparación en dominios pequeños para deducir que en B'_λ se tiene $u \leq u_\lambda$ y como en K se tiene la misma desigualdad entonces $u \leq u_\lambda$ en B_λ. Esto contradice la definición de λ_0. Por lo tanto, $\lambda_0 = 0$.

Hasta ahora hemos visto que

$$u \leq u_\lambda \quad \text{en} \quad B_\lambda \quad \forall \lambda \in (-R, 0). \tag{1.15}$$

Usando el principio fuerte de comparación como hicimos previamente, podemos ver que

$$u < u_\lambda \quad en \quad B_\lambda, \quad \forall \lambda \in (-R, 0) \tag{1.16}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) > 0 \quad \forall x \in H_\lambda \cap B \quad \forall \lambda \in (-R, 0). \tag{1.17}$$

Por continuidad, podemos concluir que $u \leq u_0$ en B_0. Mediante un procedimiento análogo, pero ahora considerando $\lambda \in (0, R)$ y definiendo

$$\begin{aligned}
H'_\lambda &= \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_1 = \lambda\}, \\
B'_\lambda &= \{x \in B : x_1 > \lambda\}, \\
x_\lambda &= (2\lambda - x_1, x_2, ..., x_N), \\
C'_\lambda &= \{y \in B : y = x_\lambda \text{ para algún } x \in B'_\lambda\}, \\
u_\lambda &: B'_\lambda \to \mathbb{R}, \quad u_\lambda(x) := u(x_\lambda).
\end{aligned}$$

obtenemos que

$$u < u_\lambda \quad en \quad B'_\lambda, \quad \forall \lambda \in (0, R), \tag{1.18}$$

y también

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0 \quad \forall x \in H'_\lambda \cap B \quad \forall \lambda \in (0, R). \tag{1.19}$$

Así, juntando (1.16) y (1.18) concluimos que u es simétrica con respecto a H_0.

Para demostrar que u es invariante respecto a la reflexión sobre cuaqluier hiperplano que pasa por el origen, consideremos lo siguiente. Sea $e \in S^{N-1}$ una dirección arbitraria y T una transformación ortogonal que lleve e_1 en e. Por la Proposición 1.10 el problema (1.8) es invariante con respecto a transformaciones ortogonales. Asi, $u \circ T$ es solución del problema (1.8) y podemos aplicar un razonamiento análogo al anterior para concluir que $u \circ T$ es simétrica con respecto a H_0. Por ende, u es simétrica con respecto al hiperplano ortogonal a e que pasa por el origen. Como e es arbitraria, esto implica que u es simétrica con respecto a cualquier hiperplano que pasa por el origen, es decir, u es radial. Finalmente, notemos que por la regla de la cadena, la derivada direccional de u en una dirección e cumple lo siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial e}(x) = \nabla u(x) \cdot e = \frac{\partial (u \circ T)}{\partial x_1}(x') \quad para \quad x = T(x').$$

Esto, junto con los análogos de (1.17) y (1.19) para $u \circ T$, nos permite concluir que la derivada de u en la dirección radial es decreciente. □

Capítulo 2

Un problema elíptico en la esfera

Sea $\mathbb{S}^n$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{n+1}$ con la métrica inducida, a la que denotamos por g. Estamos interesados en el comportamiento de las soluciones del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_g u + \lambda u = |u|^{2^*-2} u & \text{sobre } \mathbb{S}^n, \\ u > 0 & \text{sobre } \mathbb{S}^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $-\Delta_g$ es el operador de Laplace-Beltrami, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $2^* := \frac{2n}{n-2}$, $n \geq 3$, es el exponente crítico de Sobolev.

En la primera sección de este capítulo definimos el operador de Laplace-Beltrami y obtenemos una expresión sencilla de este operador en coordenadas locales. En la segunda sección usamos la proyección estereográfica para traducir el problema (2.1) a un problema equivalente en $\mathbb{R}^n$.

A lo largo del capítulo hacemos uso de diversas nociones de geometría riemanniana como lo son las variedades riemannianas y las conexiones riemannianas. Para la defnición de estos conceptos el lector puede consultar, por ejemplo, [8].

2.1. El operador de Laplace-Beltrami

Sea (M, g) una variedad Riemanniana y sean X y Y campos vectoriales en M.

Definición 2.1. La divergencia de X, a la que se denota $divX$, se define como la traza de la función lineal dada por

$$Y \longmapsto \nabla_Y X.$$

Para obtener una expresión de la divergencia en coordenadas locales requerimos el siguiente lema.

Sean $\mathcal{M}_{n\times n}$ el espacio de matrices reales de $n \times n$ y

$$det : \mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.2}$$

la función que a cada matriz le asocia su determinante. Identificando a $\mathcal{M}_{n\times n}$ con $\mathbb{R}^{n^2}$ resulta claro que esta función es diferenciable. Denotamos por det' a su derivada.

Lema 2.2. *(Fórmula de Jacobi). Si A es una matriz invertible, entonces*

$$det'(A)[T] = (detA)tr(A^{-1}T) \quad \forall T \in \mathcal{M}_{n\times n}, \tag{2.3}$$

donde tr denota a la traza. De aquí se deduce inmediatamente que, si además $detA > 0$, entonces

$$(\ln \circ\, det)'(A)[T] = tr(A^{-1}T). \tag{2.4}$$

Demostración. Dividimos la demostración en dos pasos.
Paso 1 Veamos que $det'(I) = tr$ donde I es la matriz identidad

Recordemos que si $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ entonces $detB = \sum_{\sigma\in S_n} B_{1\sigma(1)} \dots B_{n\sigma(n)}$. Donde S_n es el grupo de permutaciones de n elementos. Tenemos entonces que

$$det(I+\epsilon T) = (1+\epsilon T_{11})\dots(1+\epsilon T_{nn}) + \sum_{\sigma\in S_n\setminus\{Id\}} (I+\epsilon T)_{1\sigma(1)}\dots(I+\epsilon T)_{n\sigma(n)}.$$

Es sencillo ver que el segundo sumando es $o(\epsilon)$ y por inducción podemos ver que el primero es $1 + tr(T)\epsilon + o(\epsilon)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} det'(I)[T] &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{det(I+\epsilon T) - det(I)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1 + (trT)\epsilon + o(\epsilon) - 1}{\epsilon} \\ &= trT. \end{aligned}$$

Paso 2 Veamos el caso en el que A es una matriz invertible.

Notemos que para cualquier matriz X, podemos escribir

$$detX = det(AA^{-1}X) = det(A)det(A^{-1}X)$$

Usando la regla de la cadena obtenemos

$$det'(X)[T] = det(A)det'(A^{-1}X)[A^{-1}T].$$

Tomando $X = A$ y aplicando el Paso 1 concluimos que

$$det'(A)[T] = detAdet'(I)[A^{-1}T] = detAtr(A^{-1}T),$$

como queríamos demostrar. □

En la demostración de la siguiente proposición utilizaremos los símbolos de Christoffel. Recordemos que dada una variedad M, coordenadas locales $\partial_1, \ldots, \partial_n$ y una conexión ∇ los simbolos de Christoffel son las funciones suaves Γ_{ji}^k que cumplen

$$\nabla_{\partial_j}\partial_i = \sum \Gamma_{ji}^k \partial_k.$$

Proposición 2.3. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Sean ∂_1,...,∂_n coordenadas locales. Si X es un campo vectorial en M, entonces*

$$divX = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_j \partial_j(\sqrt{|g|}X^j), \tag{2.5}$$

donde $|g| := det(g_{ij})$.

Demostración. Expresamos $X = \sum_i X^i \partial_i$. Calculemos primero $\nabla_{\partial_j} X$.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_j} X &= \sum_i \partial_j X^i \partial_i + \sum_i X^i \nabla_{\partial_j} \partial_i \\
&= \sum_i \partial_j X^i \partial_i + \sum_{i,k} X^i \Gamma_{ji}^k \partial_k.
\end{aligned}$$

De lo anterior podemos concluir que para $\nabla_{\partial_j} X$, el coeficiente de ∂_j es

$$\partial_j X^i + \sum_i X^i \Gamma_{ji}^j.$$

Así,

$$divX = \sum_j (\partial_j X^j + \sum_i X^i \Gamma_{ji}^i). \tag{2.6}$$

Por otro lado, sabemos que (consultar el Teorema 5.10 de [8])

$$\Gamma_{ji}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl}(\partial_j g_{li} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ji}),$$

donde $(g^{kl}) = g^{-1}$. Tomando $k = j$ y sumando sobre j

$$\begin{aligned}
\sum_j \Gamma_{ji}^j &= \frac{1}{2} \sum_{j,l} g^{jl}(\partial_j g_{li} + \partial_i g_{lj} - \partial_l gji) \\
&= \frac{1}{2}(\sum_{j,l} g^{jl} \partial_j g_{li} + \sum_{j,l} g^{jl} \partial_i g_{lj} - \sum_{j,l} g^{jl} \partial_l g_{ji}).
\end{aligned}$$

Usando la simetría de la métrica, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_j \Gamma_{ji}^j &= \frac{1}{2} \sum_{j,l} g^{jl} \partial_i g_{lj} \\
&= \frac{1}{2} tr(g^{-1} \partial_i g) \\
&= \frac{1}{2} \partial_i \ln |g|,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del Lema 2.2 aplicando la regla de la cadena. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.6), obtenemos

$$\begin{aligned}
div\, X &= \sum_j (\partial_j X^j + \sum_i X^i \Gamma^j_{ji}) \\
&= \sum_j \partial_j X^j + \sum_{j,i} X^i \Gamma^j_{ji} \\
&= \sum_j \partial_j X^j + \sum_i X^i (\sum_j \Gamma^j_{ji}) \\
&= \sum_j \partial_j X^j + \frac{1}{2} \sum_j X^j \partial_j ln|g| \\
&= \sum_j \partial_j X^j + \frac{1}{2} \sum_j X^j \frac{\partial_j |g|}{|g|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_j \left(\sqrt{|g|} \partial_j X^j + \frac{1}{2} X^j \frac{\partial_j |g|}{\sqrt{|g|}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_j \partial_j (\sqrt{|g|} X^j),
\end{aligned}$$

como afirma el enunciado. □

Definición 2.4. Sea $u \in C^2(M)$. El gradiente de u es el único campo vectorial $grad_g u$ que satisface

$$g(grad_g u, Y) = Yu$$

para cualquier campo vectorial Y en M.

El operador de Laplace-Beltrami de u se define como

$$\Delta_g u = div(grad_g u).$$

La Proposición 2.3 proporciona una expresión sencilla para el operador de Laplace-Beltrami en coordenadas locales.

Corolario 2.5. *Sea (M, g) una variedad riemanniana. Sean ∂_1,...,∂_n coordenadas locales. Si $u \in C^2(M)$, entonces*

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{j,i} \partial_j (g^{ij} \sqrt{|g|} \partial_i u). \tag{2.7}$$

Demostración. Si escribimos $grad\, u = \sum_j X^j \partial_j$, de la definición del gradiente obtenemos

$$\sum_j X^j g_{ji} = \sum_j X^j g(\partial_j, \partial_i) = \partial_i u,$$

para cada i. Ahora fijamos l y multiplicamos la expresión anterior por g^{il}, luego sumamos sobre i para obtener

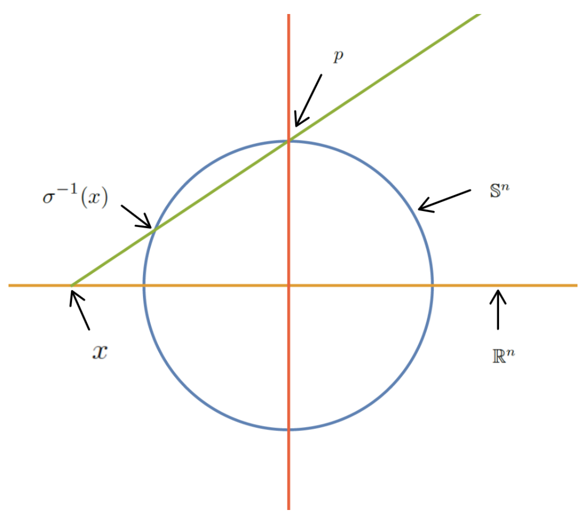
$$\begin{aligned}\sum_i g^{il}\partial_i u &= \sum_{j,i} X^j g_{ji} g^{il}\\ &= \sum_j \left(\sum_i X^j g_{ji} g^{il}\right)\\ &= \sum_j X^j \delta_{jl}\\ &= X^l.\end{aligned}$$

Aplicando la identidad (2.6) concluimos que

$$\begin{aligned}\Delta_g u &= div\left(\sum_j \left(\sum_i g^{ij}\partial_i u\right)\partial_j\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{j,i}\partial_j(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_i u)\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

2.2. El problema en el espacio euclidiano



Sea $p \in \mathbb{S}^n$. Usaremos la proyección estereográfica $\sigma : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ para traducir el problema (2.1) a un problema en $\mathbb{R}^n$. Sin perder generalidad podemos suponer que $p = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, la inversa de la proyección estereográfica, a la que denotaremos por ψ, está dada por

$$\begin{aligned}\psi(x) &= (0,\dots,0,1) + \frac{2}{|(x_1,\dots,x_{n+})|^2+1}(x_1,\dots,x_n,-1)\\ &= \left(\frac{2x}{|x|^2+1}, \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}\right),\end{aligned}$$

donde $x=(x_1,\dots,x_n)$. Ésta es una parametrización local de $\mathbb{S}^n$.

Definimos

$$\xi(x) := \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

Nuestro objetivo es demostrar la siguiente afirmación.

Proposición 2.6. *Si $u \in C^2(\mathbb{S}^n)$ es solución de (2.1), entonces la función v dada por $v(x) := \xi(x)u(\psi(x))$ es solución del problema*

$$\begin{cases} -\Delta v - (\frac{n(n-2)}{4} - \lambda)\xi(x)^{2^*-2}v = |v|^{2^*-2}v & \text{en } \mathbb{R}^n,\\ v > 0 & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Observación 2.7. Aunque no lo probamos, más adelante usamos que la Proposición 2.6 es un si y sólo si en el siguiente sentido; si v es solución del problema (2.8) entonces $u := \xi(x)^{-1}v(x)$ es solución de (2.1) en las coordenadas locales dadas por la proyección estereográfica.

Si bien, la prueba de este resultado no es complicada, sí involucra cálculos bastante largos. Por claridad, presentamos varios resultados previos. Primero calculamos los coeficientes de la métrica con respecto a la proyección esterográfica. Luego, probamos algunas identidades técnicas.

Lema 2.8. *Si g es la métrica estándar de $\mathbb{S}^n$, inducida por la de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, en la parametrización local dada por ψ, se cumple que*

$$g_{ij}(x) = \varphi(x)\delta_{ij},$$

donde $\varphi := \xi^{2^*-2}$.

Demostración. Si $\psi = (\psi^1, ..., \psi^{n+1})$, entonces g_{ij} está dada por

$$g_{ij} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{\partial\psi^k}{\partial x_i}\frac{\partial\psi^k}{\partial x_j}. \tag{2.9}$$

Calculemos primero $\frac{\partial\psi}{\partial x_i}$ para obtener

$$\begin{aligned}\psi(x) &= (0,1) + \frac{2}{|x|^2+1}(x,-1)\\ &= e_{n+1} + \frac{2}{|x|^2+1}\sum_{i=1}^n x_ie_i + \frac{2}{|x|^2+1}e_{n+1}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \sum_{i\neq k,n+1} \frac{-4x_i x_k}{(|x|^2+1)^2} e_i + \frac{2(|x|^2+1)-4x_k^2}{(|x|^2+1)^2} e_k + \frac{4x_k}{(|x|^2+1)^2} e_{n+1}$$

Ahora consideramos dos casos. Caso 1:
$i = j$

$$\begin{aligned} g_{ii} &= \frac{1}{(|x|^2+1)^4} \\ &\left(16 \sum_{k\neq i} x_k^2 x_i^2 + (2(|x|^2+1) - 4x_i^2)^2 + 16x_i^2\right) \\ &= \frac{1}{(|x|^2+1)^4} \\ &(16x_i^2|x|^2 - 16x_i^4 + 4(|x|^2+1)^2 - 16x_i^2(|x|^2+1) + 16x_i^4 + 16x_i^2) \\ &= \frac{1}{(|x|^2+1)^4}(4|x|^4 + 8|x|^2 + 4) \\ &= \frac{4}{(|x|^2+1)^4}(|x|^2+1)^2 \\ &= \frac{4}{(|x|^2+1)^2} \\ &= \varphi\delta_{ii} \end{aligned}$$

Caso 2:
$i \neq j$

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{1}{(|x|^2+1)^4}\left(16 \sum_{k\neq i,j} x_k^2 x_i x_j - 8x_i x_j(2|x|^2+1) + 16x_i^3 x_j - 8x_i x_j(2|x|^2+1) + 16x_i x_j^3 + 16x_i x_j\right) \\ &= \frac{1}{(|x|^2+1)^4}(16x_i x_j|x|^2 - 16x_i^3 x_j - 16x_i x_j^3 - 16x_i x_j|x|^2 - 16x_i x_j + 16x_i x_j + 16x_i^3 x_j + 16x_i x_j^3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$g_{ij}(x) = \left(\frac{2}{|x|^2+1}\right)^2 \delta_{ij} = \xi(x)^{2^*-2}\delta_{ij},$$

como afirma el enunciado. □

Lema 2.9. *Si u es solución de (2.1), en las coordenadas locales dadas por ψ se cumplen las siguientes identidades:*
i)

$$\Delta_g u = \xi^{2^*-2}\Delta\overline{u} + 2\xi^{1-2^*}\nabla\xi\cdot\nabla\overline{u}; \tag{2.10}$$

ii)

$$-\Delta\xi = \frac{n(n-2)}{4}\xi^{2^*-1}; \tag{2.11}$$

iii)

$$-\xi^{-(2^*-1)}\Delta(\xi\overline{u}) = -\Delta_g u + \frac{n(n-2)}{4}\overline{u}. \tag{2.12}$$

Donde $\overline{u} = u \circ \psi$.

Demostración. Por el Lema (2.8), tenemos que

$$\sqrt{|g|} = \varphi^{\frac{n}{2}} \quad y \quad g^{ij} = \varphi^{-1}\delta_{ij}.$$

donde $\varphi := \xi^{2^*-2}$.

i) Usando el Corolario 2.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta_g u &= \varphi^{-\frac{n}{2}} \sum_{j,i} \partial_j(\varphi^{\frac{n}{2}}\varphi^{-1}\delta_{ij}\partial_i u) \\
&= \varphi^{-\frac{n}{2}} \sum_j \partial_j(\varphi^{\frac{n-2}{2}}\partial_j u) \\
&= \varphi^{-\frac{n}{2}} \sum_j (\partial_j(\varphi^{\frac{n-2}{2}})\partial_j u + \varphi^{\frac{n-2}{2}}\partial_j u) \\
&= \frac{n-2}{2}\varphi^{-2}\sum_j \partial_j\varphi\partial_j u + \varphi^{-1}\sum_j \partial_{jj}u.
\end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$\partial_j\varphi = \partial_j(\xi^{2^*-2}) = \frac{4}{n-2}\xi^{2^*-3}\partial_j\xi. \tag{2.13}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior,

$$\begin{aligned}
\Delta_g u &= \frac{n-2}{n}\xi^{-2(2^*-2)}\sum_j \partial_j(\xi^{2^*-2})\partial_j u + \xi^{2-2^*}\sum_j \partial_{jj}u \\
&= 2\xi^{1-2^*}\sum \partial_j\xi\partial_j u + \xi^{2-2^*}\sum_j \partial_{jj}u \\
&= 2\xi^{1-2^*}\nabla\xi \cdot \nabla\overline{u} + \xi^{2^*-2}\Delta\overline{u}.
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

ii) Comencemos por calcular $\partial_j \xi$.

$$\begin{aligned}
\partial_j \xi &= \partial_j \left(\left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right) \\
&= \frac{n-2}{2} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-4}{2}} \partial_j \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right) \\
&= -\frac{n-2}{2} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-4}{2}} \frac{4x_j}{(1+|x|^2)^2} \\
&= -\frac{(n-2)2^{\frac{n+2}{2}}}{4} \frac{x_j}{(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}}}.
\end{aligned}$$

Ahora calculemos $\partial_{jj}\xi$.

$$\begin{aligned}
\partial_{jj}\xi &= \partial_j \left(-\frac{(n-2)2^{\frac{n+2}{2}}}{4} \frac{x_j}{(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}}} \right) \\
&= -\frac{(n-2)2^{\frac{n+2}{2}}}{4} \left(\frac{(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}} - nx_i^2(1+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}{(1+|x|^2)^n} \right) \\
&= -\frac{(n-2)2^{\frac{n+2}{2}}}{4} \frac{1+|x|^2 - nx_i^2}{(1+|x|^2)^{\frac{n+2}{2}}}.
\end{aligned}$$

Sumando sobre j obtenemos

$$\begin{aligned}
-\Delta\xi &= \frac{(n-2)2^{\frac{n+2}{2}}}{4} \frac{n(1+|x|^2) - n|x|^2}{(1+|x|^2)^{\frac{n+2}{2}}} \\
&= \frac{n(n-2)}{4} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n+2}{2}} \\
&= \frac{n(n-2)}{2} \xi^{2^*-1},
\end{aligned}$$

que es la identidad deseada.

iii) Recordemos que el laplaciano del producto de dos funciones, $f, h \in C^2(\mathbb{R}^n)$ satisface la identidad

$$\Delta(fh) = h\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla h + f\Delta h.$$

Teniendo en cuenta i) y ii), obtenemos

$$\begin{aligned}
-\xi^{1-2^*}\Delta(\xi\overline{u}) &= -\xi^{1-2^*}(\overline{u}\Delta\xi + 2\nabla\xi \cdot \nabla\overline{u} + \xi\Delta\overline{u}) \\
&= -\xi^{1-2^*}(\xi\Delta\overline{u} + 2\nabla\xi \cdot \nabla\overline{u} - \frac{n(n-2)}{2}\overline{u}\xi^{2^*-1}) \\
&= -\xi^{2-2^*}\Delta\overline{u} - 2\xi^{1-2^*}\nabla\xi \cdot \nabla\overline{u} + \frac{n(n-2)}{2}\overline{u} \\
&= -\Delta_g u + \frac{n(n-2)}{2}\overline{u}
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

Procederemos ahora a probar la Proposición 3.6

Demostración de la Proposición 2.6. Supongamos que u es solución del problema (2.1). Consideremos $v = \xi(u \circ \psi)$ como en el enunciado de la proposición. Entonces

$$\begin{aligned}
|v|^{2^*-2}v &= |\xi u|^{2^*-2}\xi u \\
&= \xi^{2^*-1}|u|^{2^*-2}u \\
&= \xi^{2^*-1}(-\Delta_g u + \lambda u) \\
&= \xi^{2^*-1}(-\xi^{1-2^*}\Delta(\xi u) - \frac{n(n-2)}{2}u + \lambda u) \\
&= -\Delta(\xi u) - \left(\frac{n(n-2)}{2} - \lambda\right)\xi^{2^*-2}\xi u \\
&= -\Delta v - \left(\frac{n(n-2)}{2} - \lambda\right)\xi^{2^*-2}v.
\end{aligned}$$

Para ver que $v \geq 0$ basta con notar que tanto ξ como $u \circ \psi$ son mayores o iguales a cero en $\mathbb{R}^n$.

Así, v es solución del problema (2.8). □

Observación 2.10. Notemos que un resultado similar al anterior se cumple si usamos la proyección esteroegráfica con respecto a cualquier punto p en la esfera. Esto porque la proyección escrita en términos de una base ortonormal en la que uno de los vectores esté dado por p, es exactamente la misma que la que usamos arriba.

Capítulo 3

Demostración del teorema principal

Sea $\mathbb{S}^n$ la esfera unitaria y g su métrica usual. Recordemos que estamos interesados en el problema

$$\begin{cases} -\Delta_g u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u & \text{sobre } \mathbb{S}^n, \\ u > 0 & \text{sobre } \mathbb{S}^n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Cuando $\lambda = \frac{n(n-2)}{4}$ el problema (3.1) es el problema de Yamabe en la esfera. En este capítulo investigamos qué pasa con las soluciones del problema (3.1) cuando el valor de λ varía. En la primera sección probamos que, cuando $\lambda < \frac{n(n-2)}{4}$, toda solución de (3.1) es constante. En la segunda sección vemos que en el caso correspondiente al problema de Yamabe hay una infinidad de soluciones positivas no constantes.

3.1. El caso $\lambda < \frac{n(n-2)}{4}$

La estrategia para probar el resultado que nos interesa es la siguiente. Fijamos un punto p en $\mathbb{S}^n$ y consideramos la proyección estereográfica, σ_p, con respecto a ese punto. Usando los resultados del capítulo anterior concluimos que $v = u \circ \sigma_p^{-1}$ es una solución del problema (2.8) en $\mathbb{R}^N$ del Capítulo 2. Si pudiéramos probar que en este caso v es radialmente simétrica entonces terminaríamos, pues esto implicaría que u es constante en los paralelos y, como p es arbitrario, esto garantizaría que u es constante en $\mathbb{S}^n$.

Dicho lo anterior, es claro que requerimos algún resultado análogo al del Capítulo 1, pero que garantice la radialidad de una solución en $\mathbb{R}^n$. En [6], Gidas, Ni y Nirenberg probaron un resultado de este tipo para soluciones del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{en } \mathbb{R}^n, \\ u > 0 & \text{en } \mathbb{R}^n, \\ \lim_{|x|\to\infty} u = 0. \end{cases}$$

Notemos, sin embargo, que en el problema (2.8) f no depende sólo de u sino también de $|x|$. Esto significa que necesitamos un resultado un poco más general. A lo largo de los años se ha generalizado el resultado de Gidas, Ni y Nirenberg en varias direcciones. En nuestro caso usaremos un resultado de Jin, Li y Xu que aparece en [7]. Este resultado parece estar pensado para solución con singularidades en el origen, sin embargo, las hipótesis que requiere son ideales para aplicarlas en el problema que nos concierne.

Teorema 3.1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función continua tal que para cualquier $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $0 < \lambda < |x|$, $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $|z| > \lambda$ y $a \leq b$*

$$\left(\frac{\gamma}{|z|}\right)^{n+2} f\left(x + \frac{\gamma^2 z}{|z|^2}, \left(\frac{|z|}{\gamma}\right)^{n-2} a\right) < f(x+z, b). \tag{3.2}$$

Entonces si $v \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta v + f(x, v) = 0 & \textit{en } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ v > 0 & \textit{en } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \end{cases}$$

v es radialmente simétrica respecto al origen y la derivada radial cumple $\frac{\partial v}{\partial r} < 0$.

La prueba de este tipo de resultados de simetría en dominios no acotados, requiere de estimaciones bastante delicadas que se salen de los objetivos de este trabajo, por lo que no la incluimos aquí. Por está razón, la omitimos.

Por claridad, previo a demostrar el teorema que nos interesa, probamos un lema auxiliar.

Lema 3.2. *Sean $\lambda < \frac{n(n-2)}{4}$ y $f(r,s) : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida como*

$$f(r,s) := \left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda\right)\left(\left(\frac{2}{1+r^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right)^{2^*-2} s + s^{2^*-1}.$$

Entonces $f(|x|, v)$ satisface la condición (3.2).

Demostración. Sean $x \neq 0$, $0 < \gamma < |x|$, $|z| > \gamma$, $a \leq b$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\gamma}{|z|}\right)^{n+2} f\left(x + \frac{\gamma^2 z}{|z|^2}, \left(\frac{|z|}{\gamma}\right)^{n-2} a\right) \\
&= \left(\frac{\gamma}{|z|}\right)^{n+2} \left[\left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda\right)\left(\frac{2}{1 + |x + \frac{\gamma^2 z}{|z|}|^2}\right)\left(\frac{|z|}{\gamma}\right)^{n-2} a + \left(\frac{|z|}{\gamma}\right)^{n+2} a^{\frac{n+2}{n-2}}\right] \\
&= \left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda\right)\left(\frac{\gamma^4}{|z|^4}\right)\left(\frac{2}{1 + |x + \frac{\gamma^2 z}{|z|^2}|^2}\right)^2 a + a^{\frac{n+2}{n-2}} \\
&= \left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda\right)\frac{4\gamma^4 a}{|z|^4(|x + \frac{\gamma^2 z}{|z|^2}|^2 + 1)^2} + a^{\frac{n+2}{n-2}}.
\end{aligned}
$$

También

$$
f(x+z, b) = \left(\frac{n(n-2)}{4} - \lambda\right)\frac{4b}{(|x+z|^2+1)^2} + b^{\frac{n+2}{n-2}}.
$$

Como $a \leq b$, basta con ver que

$$
\frac{4\gamma^4 a}{|z|^4(|x + \frac{\gamma^2 z}{|z|^2}|^2 + 1)^2} < \frac{4b}{(|x+z|^2+1)^2}.
$$

Notemos que, como,

$$
0 < |x|^2(|z|^2 - \gamma^2) + (\gamma^4 - \gamma^2|z|^2) + (|z|^2 - \gamma^2),
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
0 &< |x|^2(|z|^2 - \gamma^2) + (\gamma^4 - \gamma^2|z|^2) + (|z|^2 - \gamma^2) + 2\gamma^2 x \cdot z - 2\gamma^2 x \cdot z \\
&< |z|^2\left(|x|^2 + \tfrac{2\gamma^2}{|z|^2} z \cdot x + \tfrac{\gamma^4}{|z|^4}|z|^2 + 1\right) - \gamma^2(|x|^2 + 2z \cdot x + |z|^2 + 1) \\
&\qquad < |z|^2\left(|x + \tfrac{\gamma^2}{|z|^2} z|^2 + 1\right) - \gamma^2(|x+z|^2 + 1).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\frac{\gamma^2}{|z|^2\left(|x + \frac{\gamma^2}{|z|^2} z|^2 + 1\right)} < \frac{1}{(|x+z|^2+1)}
$$

Esto implica que

$$\frac{\gamma^4}{|z|^4\left(|x+\frac{\gamma^2}{|z|^2}z|^2+1\right)^2} < \frac{1}{(|x+z|^2+1)^2}$$

y, entonces

$$\frac{4\gamma^4 a}{|z|^4\left(|x+\frac{\gamma^2}{|z|^2}z|^2+1\right)^2} < \frac{4b}{(|x+z|^2+1)^2}.$$

Esto es lo que necesitabamos probar para obtener el resultado. □

Es importante mencionar que el siguiente resultado es un caso particular del Teorema 1 de [3].

Teorema 3.3. *Sea $\lambda < \frac{n(n-2)}{4}$. Si $u \in C^2(\mathbb{S}^n)$ es una solución de*

$$\begin{cases} -\Delta_g u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u & \textit{sobre } \mathbb{S}^n, \\ u > 0 & \textit{sobre } \mathbb{S}^n, \end{cases} \tag{3.3}$$

entonces u es constante.

Demostración. Sea $p \in \mathbb{S}^n$, sea $\sigma_p : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección estereográfica desde p. Denotemos $\psi_p = \sigma_p^{-1}$. Por la Proposición 2.6, sabemos que $v := \xi(u \circ \psi_p)$ es una solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta v - (\frac{n(n-2)}{4} - \lambda)\xi(x)^{2^*-2}v = |v|^{2^*-2}v & \text{en } \mathbb{R}^n, \\ v > 0 & \text{en } \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.4}$$

Por el Lema 3.2, el problema (3.4) satisface las condiciones del Teorema 3.1. Esto nos permite concluir que $v = \xi(u \circ \psi_p)$ es radialmente simétrica con respecto al origen. Como ξ también es radialmente simétrica con respecto al origen, entonces $u \circ \psi_p$ igualmente lo es. Esto implica que u es constante en los paralelos determinados por

$$\{x \in \mathbb{S}^n : |x - p| = c\}, \text{ para cada } c \in [0, \pi].$$

Como esto es cierto para cualquier p en la esfera, entonces u es constante. □

Como un corolario, obtenemos la unicidad de soluciones al problema (3.1).

Corolario 3.4. *Si $0 < \lambda < \frac{n(n-2)}{4}$, la única solución no trivial de (3.1) es la función constante $u = \lambda^{\frac{1}{2^*-2}}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.3 si u es una solución no trivial de (3.1) entonces $u = c$ para alguna $c > 0$. Así,

$$\lambda c = c^{2^*-1}$$

es decir,

$$c = \lambda^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Esto es lo que queríamos probar. □

3.2. El caso $\lambda = \frac{n(n-2)}{4}$

En la Proposición 3.5, probamos que en el caso en el que $\lambda = \frac{n(n-2)}{4}$ el problema (3.5) tiene una infinidad de soluciones positivas no constantes.

Proposición 3.5. *La ecuación*

$$-\Delta_g u + \frac{n(n-2)}{4} u = |u|^{2^*-2} u \quad \textit{sobre } \mathbb{S}^n \tag{3.5}$$

tiene una infinidad de soluciones positivas no constantes.

Demostración. Por la Proposición 2.6, v es solución de

$$-\Delta v = |v|^{2^*-2} v \text{ en } \mathbb{R}^n, \tag{3.6}$$

si y sólo si $u := \xi^{-1} v$ es solución de (3.5) en las coordenadas locales dadas por la proyección estereográfica. Como en el Corolario 3.4, podemos ver que la única solución positiva y constante de (3.5) es

$$u_0 \equiv \left(\frac{n(n-2)}{4}\right)^{\frac{1}{2^*-2}} = \left(\frac{n(n-2)}{4}\right)^{\frac{n-2}{4}}. \tag{3.7}$$

Por la Proposición 2.6, la correspondiente solución de 3.6 está dada por

$$\begin{aligned} \xi u_0(x) &= \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{n(n-2)}{4}\right)^{\frac{n-2}{4}} \\ &= a_n \left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}, \end{aligned}$$

que es precisamente la burbuja estandar, U.

Es fácil ver que el problema (3.6) es invariante bajo dilataciones y traslaciones. Es decir, si v es solución de (3.6) y consideramos $\varepsilon > 0$ y $\zeta \in \mathbb{R}^n$, entonces la función dada por

$$V_{\varepsilon,\zeta}(x) := \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} V\left(\frac{x-\zeta}{\varepsilon}\right),$$

también es solución de (3.6). Así, considerando las dilataciones y traslaciones de la burbuja estandar, obtenemos las siguientes soluciones

$$U_{\varepsilon,\zeta}(x) := a_n \left(\frac{\delta}{\delta^2 + |x-\zeta|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}},$$

al problema (3.6).

Recurriendo una vez más a la Proposición 2.6, sabemos que las funciones $U_{\varepsilon,\zeta}$ inducen soluciones del problema (3.5) que se ven de la siguiente manera en las coordenadas locales dadas por la proyección estereográfica

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,\zeta}(x) &= (\xi^{-1} U_{\varepsilon,\zeta})(x) \\ &= a_n \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{-\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\delta}{\delta^2 + |x-\zeta|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \\ &= a_n \left(\frac{1+|x|^2}{2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{\delta}{\delta^2 + |x-\zeta|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \\ &= a_n \left(\frac{\delta}{2} \frac{1+|x|^2}{\delta^2 + |x-\zeta|^2} \right), \end{aligned}$$

de donde obtenemos una infinidad de soluciones positivas no constantes, pues el único caso en el que una función de este tipo es constante es cuando $\delta = 1$ y $\zeta = 0$. $\square$

Bibliografía

[1] Aleksandrov, A. D. Uniqueness theorems for surfaces in the large. *I. Amer. Math. Soc. Transl.(2) 21* (1962), 341–354.

[2] Axler, S. *Linear Algebra Done Right*, second ed. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1997.

[3] Brezis, H., and Li, Y. Some nonlinear elliptic equations have only constant solutions. *J Partial Differential Equations 19*, no. 3 (2006), 208–217.

[4] Damascelli, L., and Pacella, F. *Morse Index of Solutions of Nonlinear Elliptic Equations*, vol. 30. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2019.

[5] Gidas, B., Ni, W.-M., and Nirenberg, L. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Communications in Mathematical Physics 68*, 3 (1979), 209–243.

[6] Gidas, B., Ni, W.-M., and Nirenberg, L. Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$. *Mathematical analysis and applications 7a* (1981), 369–402.

[7] Jin, Q., Li, Y., and Xu, H. Symmetry and asymmetry: the method of moving spheres. *Advances in Differential Equations 13*, 7-8 (2008), 601–640.

[8] Lee, J. M. *Introduction to Riemannian manifolds*, second ed. Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer, 2018.

[9] Lee, J. M., and Parker, T. H. The yamabe problem. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 17*, 1 (1987), 37–91.

[10] Schoen, R., and Yau, S.-T. *Lectures on differential geometry.* Conference Proceddings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I. International Press, Cambridge, MA, 1994.

[11] Serrin, J. A symmetry problem in potential theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis 43*, 4 (1971), 304–318.