



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Clasificación y estructura de superficies K3

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Joaquin Torres Henestroza

TUTOR

Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez



Ciudad de México

2021

1. Datos del alumno

Torres

Henestroza

Joaquin

5558620180

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

312150293

2. Datos del tutor

Dr

Saúl Noé

Ramos

Sánchez

3. Datos de sinodal 1

Dr

Hernando

Quevedo

Cubillos

4. Datos de sinodal 2

Dr

Jerónimo Alonso

Cortez

Quezada

5. Datos del sinodal 3

Dr

José David

Vergara

Oliver

6. Datos del sinodal 4

Dr

Miguel Arturo

Ballesteros

Montero

7. Datos del trabajo escrito

Clasificación y estructura de superficies K3

82 p

2021

A la memoria de mi padre

Quiero agradecer a los profesores que me inculcaron el amor por mi carrera. Quiero destacar al Dr. Fermin Heberlein, la Mtra. Jaqueline Cañetas, el Dr. Valente Santiago, la Dra. María Sandoval, el Dr. Yaxk'in Coronado, el Dr. Omar Ávila, el Dr. Alejandro Reyes, el Dr. Atahualpa Solórzano, y la Dra. Teresa Oteyza. Igualmente quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Saúl Ramos, y a los sinodales: el Dr. Hernando Quevedo, el Dr. Jerónimo Cortez, el Dr. José Vergara, y el Dr. Miguel Ballesteros.

Como no recorrí este trayecto sin ayuda, quiero agradecer a las personas que se mantuvieron a mi lado a través de los años. Especialmente, quiero agradecer a las personas que se volvieron parte de mi familia: Felipe de Quesada, Mitzi Urquiza, Enri Noriega, Amalinalli Armendáriz y Juan González. Su apoyo y cariño es invaluable.

Finalmente, quiero agradecer a mi madre, mi hermana, y a nuestro perro Boston, que siempre estuvieron conmigo y me apoyaron en los buenos y en los malos momentos, y nunca dejaron de confiar en mi.

Índice general

1 Geometría y física	1
2 Elementos de geometría compleja	7
2.1 De variedades diferenciables a variedades complejas	7
2.1.1 Ejemplos de variedades complejas	9
2.2 Estructura compleja J y complejificación del espacio tangente	12
2.3 Formas diferenciables complejas	14
2.4 Geometría simpléctica	17
2.4.1 Descomposición de tensores y operadores característicos en geometría de Riemann en variedades complejas	20
2.5 Cohomología en variedades complejas	24
2.5.1 Diamante de Hodge	26
2.6 Variedades de Kähler	27
2.6.1 Ejemplos de variedades de Kähler	28
3 Elementos de geometría algebraica	31
3.1 Variedades algebraicas	31
3.2 Espacio proyectivo complejo	34
3.3 Principio GAGA y teorema de Chow	36
3.4 Curvas elípticas complejas	38
4 Superficies $K3$	41
4.1 Breve visita a la conjetura de Calabi	41
4.2 Definiciones y primeros resultados	42
4.3 Cohomología en superficies $K3$	43
4.4 Un ejemplo de una superficie $K3$	45
5 El problema de clasificación y primeros resultados	47
5.1 El problema de clasificación	47
5.2 Primera clasificación del toro	48

5.3	Clasificación de superficies $K3$	55
6	Discusión	61
A	Orientabilidad en variedades complejas	65
B	Definiciones y algunos resultados	69
B.1	Álgebra	69
B.2	Topología	72
C	Métrica de Fubini-Study	75
	Bibliografía	79

Capítulo 1

Geometría y física

La teoría de cuerdas propone una nueva manera de entender la física, con ciertas ventajas (y desventajas) sobre otras teorías de campos. Para empezar, consigue de manera natural una teoría (clásica) que contiene la relatividad general. Simultáneamente, aparecen teorías de norma de Yang-Mills que contienen las simetrías del modelo estándar. Finalmente, es una teoría que, en la mayoría de los escenarios estudiados, requiere la existencia de supersimetría en el espacio-tiempo, una de las propuestas más prometedoras en la física de partículas. Sin embargo, la teoría es únicamente consistente en un espacio-tiempo de diez dimensiones. De estas dimensiones, cuatro corresponderían al espacio-tiempo que experimentamos diariamente, mientras que se propone que las dimensiones extra adquirieron en la historia del cosmos la estructura de distintos espacios compactos y un tamaño diminuto que escapa a toda detección. El objetivo del presente trabajo es el estudio de algunos de estos espacios de compactificación, cuya caracterización completa es fundamental para poder entender las construcciones provenientes de la teoría de cuerdas y cuyas consecuencias podrían ser detectables [BBS07].

Los espacios de compactificación en la teoría de cuerdas pueden ser variedades (diferenciables o algebraicas) o espacios con un número finito de singularidades de curvatura (como los orbifolios). Entre las opciones usuales para compactificar se encuentran \mathbb{S}^1 y productos de estos, también llamados toros \mathbb{T}^6 . Sin embargo, no son las únicas. Debido a su simplicidad, los orbifolios toroidales [DHVW85], resultado de cocientes $\mathbb{T}^6/\mathbb{Z}_N$, $N \in \{3, 4, 6, 7, 8, 12\}$, han sido objeto de una intensa actividad científica en búsqueda de modelos capaces de reproducir las observaciones en la física de partículas elementales (ver e.g. refs. [FIQS90, KRZ05, KKK07, NRSRV09, OTPMRS18]). Sin embargo, también debido a su simplicidad, sus variaciones geométricas y topológicas son (tal vez demasiado) limitadas, lo cual podría repercutir negativamente en las consecuencias fenomenológicas que emergen de ellas.

En escenarios que incluyen supersimetría, se sabe que los espacios de compactificación conocidos como *variedades de Calabi-Yau* (CY) son quizá las estructuras geométricas más prometedoras en el contexto de la fenomenología de cuerdas [CHSW85]. Además, también es conocido que los orbifolios toroidales, prolíficos fenomenológicamente, son límites singulares de estas variedades. Por lo tanto,

desde el punto de vista matemático, una caracterización y clasificación completa de estas variedades representarían una contribución importante a la física.

De manera relativamente técnica, las variedades de CY son variedades con tres estructuras compatibles (una estructura compleja, una estructura de Riemann y una estructura simpléctica), cuyo tensor de curvatura de Ricci es nulo en todo punto. Es decir, una CY es un espacio suave en D dimensiones complejas, con una métrica definida localmente en cada punto (o, más precisamente, en el espacio tangente asociado a cada punto) con la cual $R_{\mu\nu} = 0$, y dotado de una 2-forma diferencial ω cerrada y no degenerada. Estas cualidades, así enunciadas, nos recuerdan el lenguaje de geometría diferencial de la relatividad general, pero la tecnología matemática para comprenderlas adecuadamente está por encima de los conocimientos básicos que ahí aprendemos, aunque sus aplicaciones sean similares. Uno de los propósitos de esta tesis es precisamente proporcionar un compendio de los elementos de geometría analítica y geometría algebraica que están detrás de la definición de una variedad de CY.

Quizá el ejemplo clásico más sencillo¹ de una variedad de CY es la superficie cuártica de Fermat. Este ejemplo pertenece a una cierta familia de superficies: las superficies $K3$, nombradas por A. Weil en honor a Kodaira, Kummer y Kähler [Kod64]. Estos espacios ocupan dos dimensiones complejas o cuatro dimensiones reales. Este tipo de superficies tiene la característica de contener elementos que no sólo tienen estructura de variedad diferenciable, sino que también tienen estructura de variedad algebraica [MS99, GH94]. De hecho, se le llama “cuártica” porque esta superficie puede expresarse como el conjunto de ceros de: un polinomio de orden 4 en las variables de un espacio de cuatro dimensiones (complejas).

Las variedades $K3$, a pesar de ser las variedades de CY (no triviales) más sencillas, son de gran interés en la física. Como en el caso del toro, las superficies $K3$ igualmente aparecen como parte de las compactificaciones de teorías de cuerdas. Por ser espacios bidimensionales complejos, permiten compactificar consistentemente cuatro de las diez dimensiones de la teoría de cuerdas, i.e. conducen a teorías efectivas de campos en seis dimensiones, como un primer paso hacia la fenomenología observable. Usando este esquema, por ejemplo, se ha llegado a establecer conexiones o dualidades a través de compactificaciones en distintas $K3$ entre las diferentes cuerdas heteróticas con grupos de norma $SO(32)$ y $E_8 \times E_8$ [AG96]. De similar relevancia es su utilidad para revelar en qué sentido las compactificaciones de dichas teorías de cuerdas en variedades $K3$ se relacionan con compactificaciones en orbifolios del tipo $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_N$ [HT07]. Asimismo, de forma relativamente más reciente, las $K3$ también se han empleado para establecer la dualidad entre compactificaciones de cuerdas tipo IIA y heteróticas compactificadas en espacios fibrados con base \mathbb{P}^1 y fibra $K3$ en la tipo IIA y T^4 en la heterótica [AL96]. El potencial de esta última dualidad no ha sido del todo conseguido debido, en parte, a que no todos los detalles de las variedades $K3$ son conocidos. Por ello, en búsqueda de entender mejor estas superficies, aquí se estudia su clasificación y sus equivalencias como superficies *algebraicas* o *analíticas*.

Por el otro lado, ambos ejemplos de variedades CY no sólo presentan estructura de variedad

¹El toro en una dimensión compleja es un ejemplo de CY aun más sencillo, pero varias de sus propiedades son triviales, por lo que no es posible apreciar en este las cualidades de las CY.

compleja, sino que, en ciertos casos, admiten estructura de variedad *algebraica*. Las herramientas de geometría algebraica se construyen sobre el lenguaje del álgebra abstracta, donde los anillos de polinomios, ideales y campos tienen un papel fundamental, y donde los espacios de estudio son los conjuntos de ceros de un número finito de polinomios, llamados *conjuntos algebraicos*. Estos conjuntos se pueden considerar como curvas y superficies algebraicas, como lo son las cónicas, elipsoides, hiperboloides, paraboloides, así como sus análogos de dimensión superior, y se genera una topología τ_Z donde los cerrados son conjuntos algebraicos. Además, se introduce el concepto de *gavilla* en el lenguaje de teoría de categorías, que permite asignar a cada espacio topológico una estructura algebraica y preserva *equivalencias*. Por ejemplo, si dos espacios topológicos son homeomorfos, sus espacios de funciones continuas respectivas son isomorfos, y de la misma manera, con espacios de funciones diferenciables y funciones homeomorfas, así como sus grupos de cohomología. Con estas herramientas, se pueden introducir dos teoremas de relación: el primer teorema de *Geometrie algebraique et geometrie analytique* (abreviado usualmente como GAGA) que establece un isomorfismo entre grupos de cohomología de un mismo espacio considerando su estructura de variedad algebraica y variedad diferenciable compleja, y el teorema de Chow, que establece que una subvariedad diferenciable compleja cerrada del espacio proyectivo tiene estructura de variedad algebraica [Ser56]. De esta manera, el toro \mathbb{T}^2 hereda una estructura de variedad algebraica, por el teorema de Chow, y una superficie *K3* algebraica puede ser tratada como una variedad algebraica, por el primer teorema GAGA. Estas herramientas se presentan en el capítulo 3.

Considerando las distintas estructuras de una variedad de CY, es necesario entender las relaciones entre las mismas. Es aquí donde entra el problema de clasificación dependiendo de la estructura que se considere. Es decir, es posible que dos espacios sean difeomorfos entre sí, pero que dicho difeomorfismo no sea un holomorfismo. Con esta idea, se aportan en este trabajo dos ejemplos clásicos de clasificación de variedades complejas: la clasificación del toro y la clasificación de las superficies *K3*.

En el primer caso, se sabe que la clasificación de estructura topológica y estructura diferenciable real están bien estudiadas y son triviales. Sin embargo, el estudio de su estructura compleja tiene gran importancia. Por un lado, desde el punto de vista matemático, el toro complejo tiene estructura de variedad algebraica y se identifica con una curva elíptica, a partir de donde surgen las variedades algebraicas abelianas [Kob93]. Por el otro lado, desde el punto de vista físico, el estudio de los módulos τ que generan la estructura compleja del toro aparecen naturalmente, por ejemplo, en el estudio de simetrías de sabor en modelos de teorías de cuerdas con dimensiones compactificadas en toros [NRSV20b, NRSV20c, NRV20, NRSV20a, BKN⁺20a].

El segundo caso es similar: las estructuras topológicas y diferenciables de las superficies *K3* ya están clasificadas, pero la estructura compleja y la estructura algebraica aún no han sido estudiadas completamente. En este caso, existen diferentes teoremas de clasificación, como lo es el teorema de Kodaira y los teoremas de Torelli que serán discutidos con detalle en la sección 5.3.

De manera más específica, esta tesis se enfoca en el estudio de las distintas clasificaciones de estos dos ejemplos concretos de variedades de CY. Con este fin, se introducen herramientas de geometría compleja y geometría algebraica, las definiciones necesarias para entender a las superficies *K3* y

se estudian los problemas de clasificación mencionados. La organización de la misma se presenta a continuación.

Organización de la tesis

El capítulo 2 introduce herramientas de geometría diferencial compleja. La sección 2.1 generaliza la noción de variedad diferenciable a variedad compleja, presenta la noción de biholomorfismo y en la subsección 2.1.1 se presentan ejemplos clásicos de variedades complejas, como las superficies de Riemann y el espacio proyectivo complejo. La sección 2.2 presenta la estructura compleja de un espacio vectorial de dimensión par y lo extiende a los espacios tangentes. De esta manera se introduce un haz complejo sobre la variedad y los campos holomorfos y anti-holomorfos. En la sección 2.3 se complejifica los espacios de formas para generar formas complejas y en la sección 2.4 se utiliza esa complejificación para entender la estructura simpléctica y extender tensores de geometría diferencial a geometría compleja en la sección 2.4.1. Una herramienta de clasificación importante es la cohomología de una variedad, por lo que en la sección 2.5 se introducen los grupos de cohomología de de Rham y de Dolbeault, junto con algunos resultados como el teorema de isomorfismo de de Rham, así como algunos caracteres numéricos. Para terminar el capítulo, en la sección 2.6 se introduce la noción de variedad de Kähler, y en la sección 2.6.1 se muestra que los ejemplos mencionados en la sección 2.1.1 tienen estructura de variedad de Kähler.

En el capítulo 3 se construyen herramientas de geometría algebraica. Los conceptos generales como conjunto algebraico, gavilla, variedad algebraica y variedad algebraica afín, así como la noción de isomorfismo, se introducen en la sección 3.1. La sección 3.2 se encarga de un ejemplo importante en el estudio de superficies $K3$: el espacio proyectivo complejo es una variedad algebraica y se estudia su estructura. En la sección 3.3 se introducen teoremas que relacionan variedades algebraicas y variedades analíticas, por lo que el cálculo de los grupos de cohomología se simplifica. Finalmente, en la sección 3.4 se presenta un ejemplo en el que se utilizan las herramientas presentadas hasta ahora: la curva elíptica compleja es una variedad algebraica difeomorfa al toro, que además hereda una estructura de grupo abeliano.

Con estas herramientas, en el capítulo 4 se introducen las superficies $K3$. Para esto, en la sección 4.1 se explica brevemente en qué consiste la conjetura de Calabi y en la sección 4.2 se definen dichas superficies. En la sección 4.3 se estudian sus grupos de cohomología construyendo su diamante de Hodge y notando que el segundo grupo de cohomología tiene un producto interno. Este capítulo concluye con la sección 4.4 mostrando un ejemplo de una superficie $K3$, la superficie cuártica de Fermat.

En el Capítulo 5 se introduce el problema de clasificación y la clasificación de las dos variedades de Calabi-Yau presentadas. En la sección 5.1 se introduce el problema de clasificación, recurriendo a herramientas de teoría de categorías. En la sección 5.2 se muestra la clasificación de las estructuras complejas en el toro mediante el estudio de los módulos y la construcción del espacio de módulos. En la sección 5.3 se introducen los principales teoremas de clasificación de superficies $K3$, como lo son el teorema de Kodaira, y dos teoremas, usualmente conocidos como teoremas de Torelli.

Finalmente, se incluye tres apéndices, donde se introducen algunas definiciones y resultados que se utilizan frecuentemente. El Apéndice A introduce la noción de orientabilidad en variedades, donde se prueban dos resultados acerca de la orientabilidad de variedades complejas. El Apéndice B está dividido en una sección de álgebra y una de topología, con la finalidad de auxiliar al lector no especializado en el estudio de este trabajo. Por último, el Apéndice C presenta el cálculo explícito de la métrica de Fubini-Study, mencionada en la sección 2.6.1.

Capítulo 2

Elementos de geometría compleja

Este capítulo es dedicado a la construcción de las herramientas necesarias para poder entender las superficies $K3$ desde el punto de vista analítico. Algunos resultados importantes de las variedades y relaciones entre distintos puntos de vista de estas variedades son presentados. Además, se generalizan nociones de geometría diferencial real, como la métrica riemanniana y el tensor de curvatura de Ricci, y se introducen nuevos operadores, incluidos la estructura semi-compleja, las formas simplécticas y métricas hermitianas. Finalmente, se introducen variedades de Kähler, utilizando los ejemplos que se introducen en las secciones anteriores.

Una aclaración en cuanto a la notación es necesaria. Se utilizará la convención utilizada por John Lee [Lee13]: los elementos de una base para un espacio vectorial V serán denotadas con índice abajo, e_j , mientras que las componentes del espacio dual V^* serán denotadas con un índice arriba e^j . Los índices i, j, k, l toman valores en $\{1, \dots, n\}$. Las dimensiones de una variedad se denotan por n y m .

2.1 De variedades diferenciables a variedades complejas

Para poder iniciar el estudio de geometría compleja, se necesita primero definir las variedades complejas. Éstas surgen como una generalización de variedades diferenciables y heredan propiedades de ellas. Entonces, primero, se define una variedad diferenciable [Lee13].

Definición de variedad diferenciable. Una variedad diferenciable M de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff y que cumple el segundo axioma de numerabilidad (ver Apéndice B.2), junto con una colección de pares $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, donde $\{U_\alpha\}_\alpha$ es una cubierta abierta (ver Apéndice B.2) y $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, para cada α , tales que

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\beta \cap U_\alpha) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (2.1)$$

es infinitamente diferenciable y con inversa infinitamente diferenciable, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

A partir de esta definición se llega a diversos resultados de interés. Por ejemplo, las variedades son localmente compactas; esto es, para cada punto existe un sistema de vecindades que son compactas¹. Además, a partir de esta definición se llega igualmente al siguiente resultado:

Proposición. Toda variedad diferenciable es paracompacta.

Este resultado es útil, dado que ser paracompacto implica a su vez la existencia de una partición de la unidad. Además, esta partición de la unidad es suave, lo que permite *pegar suavemente* campos vectoriales y tensoriales. Estos teoremas de extensión se pueden consultar, por ejemplo, en [Lee13].

Hay que notar que en libros de referencia como Milnor [MS17], no se pide que las variedades cumplan el segundo axioma de numerabilidad, lo cual implicaría que existen variedades diferenciables que no son paracompactas. Al momento de querer introducir campos tensoriales, esto presenta un problema, dado que aun estando definidos tensores en una vecindad, sin una partición de la unidad no necesariamente se puede *pegarlos* suavemente.

Utilizando esta definición como base, se define primero un mapeo *holomorfo*. Así como en el análisis complejo de una variable, se tiene la siguiente definición [Nak03].

Definición. Un mapeo $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfo, si para cada z_j (la j -ésima entrada de \mathbb{C}^n), f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad (2.2)$$

donde u y v representan la descomposición en la parte real y la parte imaginaria de la función f , respectivamente, y $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$. Entonces, se define un mapeo holomorfo de \mathbb{C}^n a \mathbb{C}^m como un mapeo cuyas coordenadas f_i son holomorfas, en el sentido explicado anteriormente, para cada $i = 1, \dots, m$ [Nak03].

Ya con estas definiciones, la noción de variedad compleja se extiende de la definición de variedad diferenciable [SD09].

Definición. Una variedad compleja M de dimensión compleja n es un espacio topológico de Hausdorff que cumple el segundo axioma de numerabilidad, junto con una cubierta abierta y mapeos $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, donde $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^n$ son homeomorfismos, tales que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\alpha \neq \beta$, entonces

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (2.3)$$

son biholomorfos; esto es, son holomorfos en el sentido antes establecido y con inversa holomorfa. A los pares (U_α, ϕ_α) al igual que en geometría diferencial real, se les conoce como *cartas holomorfas*.

Como a los mapeos ϕ_α se les pide que sean homeomorfismos, se evita así que las entradas de ϕ_α sean constantes, y por tanto, la matriz jacobiana no se anula y tiene rango máximo. Entonces, una variedad compleja tiene una estructura de variedad diferenciable subyacente, mientras que una variedad diferenciable no necesariamente tiene la estructura de variedad compleja. Como se muestra en *Complex Manifolds and Contact Manifolds* [SD09], para que una variedad diferenciable admita una estructura de variedad compleja, es necesario que la dimensión real de la misma sea par.

¹Note que \mathbb{R}^n es localmente compacto por el teorema de Heine-Borel.

Definición. Un mapeo entre variedades, $F : M \rightarrow N$, es un mapeo holomorfo si, para todas las cartas (V_β, ψ_β) en M y (U_α, ϕ_α) en N , el mapeo

$$\phi_\alpha \circ F \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(V_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \tag{2.4}$$

es holomorfo, dada la definición anterior. Se nota inmediatamente que la característica de ser holomorfos no depende de las cartas elegidas. Si F tiene un mapeo inverso F^{-1} tal que F^{-1} es un mapeo holomorfo, entonces F es un *biholomorfismo*.

Dadas las definiciones, es necesario introducir la noción de equivalencia en el caso de variedades complejas. Esta noción se discutirá más a fondo en los capítulos siguientes, pero para poder empezar a entenderlo, se tiene el siguiente resultado, del cual se da una prueba.

Teorema. Dadas dos variedades complejas, M y N , con M compacta, y un mapeo holomorfo $F : M \rightarrow N$, entonces F es constante.

Demostración: Sean M y N como en la hipótesis y F holomorfo. Dado que M es compacta, entonces, para cualquier mapeo $f : N \rightarrow \mathbb{C}$, se tiene que $h = |f \circ F| : M \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza su máximo. Luego, si h alcanza su máximo en el interior de M , entonces h es constante, por el teorema del módulo máximo. Como f es cualquier mapeo, entonces F es constante.

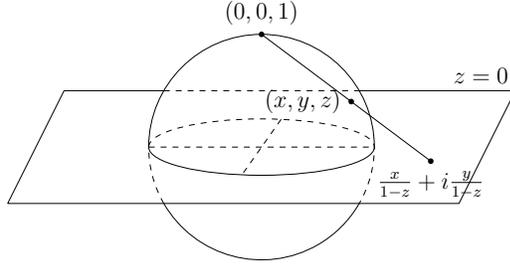
2.1.1 Ejemplos de variedades complejas

Ejemplo 0. El ejemplo inmediato de una variedad compleja es \mathbb{C}^n , donde la carta está dada por (\mathbb{C}^n, Id) . La verificación de que esta es una carta holomorfa es inmediata.

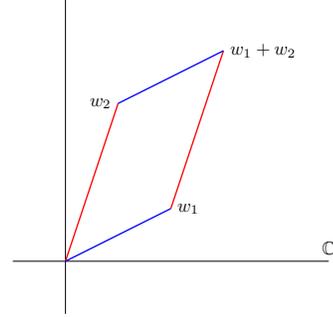
Ejemplo 1. Como se muestra en [Nak03, cap.8], la esfera \mathbb{S}^2 admite estructura de variedad diferenciable, y, aunque hay varias maneras de demostrar que es variedad, en este caso se utiliza la proyección estereográfica para construir la estructura de variedad compleja. Para esto, sea $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$. Cualquier punto $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ representa un punto en \mathbb{C} , dado por $X + iY = (X, Y) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$, mientras que un punto $(x', y', z') \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ representa otro punto (no necesariamente distinto) $X' + iY' = (X', Y') = \left(\frac{x'}{1+z'}, \frac{-y'}{1+z'}\right)$. Esta proyección se muestra en la figura 2.1a y se puede estudiar desde un curso básico de geometría analítica. Sin embargo, el punto interesante, dada la representación compleja de los puntos, es el siguiente: $X' + iY'$ es una función holomorfa de $X + iY$. Efectivamente, definiendo $Z = X + iY$ y $W = X' + iY'$, primero se recuerda que estos son los puntos que representan coordenadas en la esfera, y pueden ser distintos. Sin embargo, como se está tratando a la intersección de las dos cartas (ya que se quiere verificar que los mapeos son holomorfos), los puntos representados son los mismos. Entonces

$$\begin{aligned} W = X' + iY' &= \frac{x - iy}{1 + z} = \frac{x - iy}{1 + z} \frac{1 - z}{1 - z} = \frac{x - iy}{1 - z} \frac{1 - z}{1 + z} = \bar{Z} \frac{1 - z}{1 + z} \\ &= \bar{Z} \frac{(1 - z)^2}{1 - z^2} = \bar{Z} \frac{(1 - z)^2}{x^2 + y^2} = \bar{Z} \frac{1}{X^2 + Y^2} = \frac{1}{Z} \end{aligned}$$

que claramente es holomorfo.



(a) Proyección estereográfica.



(b) Representación del toro complejo 2D.

Figura 2.1: (a) La proyección estereográfica asigna a un punto (x, y, z) de \mathbb{S}^2 un punto $\frac{x}{1-z} + i\frac{y}{1-z}$ en el plano complejo, y asigna al polo norte $(0, 0, 1)$ el punto al infinito ∞ . (b) Los números complejos $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ generan una rejilla $\Lambda(w_1, w_2) \subseteq \mathbb{C}$. Los puntos $0, w_1, w_2$ y $w_1 + w_2$ son los vértices de un paralelogramo, llamado *paralelogramo fundamental* de la rejilla $\Lambda(w_1, w_2)$. Para todo punto $z \in \mathbb{C}$, existe w en el paralelogramo tal que $z \sim w$. En particular, los lados del paralelogramo están relacionados con los lados del mismo color.

Ejemplo 2. El toro complejo. El ejemplo clásico de una variedad compleja, y que sirve para explicar qué es un espacio de módulos, es el toro 2-dimensional. Primero, se recuerda que el toro hereda una topología cociente bajo una identificación, donde $\mathbb{S}^1 \times I / \sim \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, con $I = [0, 1]$ el intervalo unitario con la topología de subespacio. Sin embargo, el espacio bajo el que se hace la identificación original resulta que se puede representar, nuevamente, como un cuadrado unitario, módulo la relación de equivalencia, dada por la regla $(s, t) \sim (x, y)$ si y sólo si $(e^{2i\pi s}, e^{2i\pi t}) = (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$. Es decir, $I \times I / \sim \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (ver Apéndice B.1). Sin embargo, lo que se quiere es poder trabajar con cualquier rejilla generada en el plano complejo. Para esto, sean $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ dos elementos linealmente independientes sobre \mathbb{R} . Se define la rejilla generada por estos dos elementos como $\Lambda(\omega_1, \omega_2) = \{n\omega_1 + m\omega_2 | n, m \in \mathbb{Z}\}$. Nótese que en la construcción topológica se realizaron dos identificaciones, que corresponde a los bordes del cuadrado unitario, pero se trabaja únicamente en este espacio. Se define, entonces, el toro complejo como $\mathbb{C} / \Lambda(\omega_1, \omega_2)$. Esto resulta en una identificación similar a la hecha anteriormente, con el gran cambio que ahora se trabaja con todo el espacio, y es generado a partir de dos elementos. Se hace notar que $z \sim w$ si y sólo si $z - w = n\omega_1 + m\omega_2$, $n, m \in \mathbb{Z}$. De esto, se genera un paralelogramo, que tiene como vértices a $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$. Es fácil notar que cualquier punto del plano se identifica con algún punto dentro del paralelogramo. Más aun, resulta que los bordes del paralelogramo se identifican con los bordes opuestos. En la figura 2.1b se muestra cómo se hace esta identificación, identificando lados opuestos del paralelogramo.

Entonces, el espacio generado al identificar los bordes del cuadrado unitario es *topológicamente* el mismo espacio generado al identificar todo el espacio con el paralelogramo, dada la relación de equivalencia anterior. Sin embargo, la palabra *topológicamente* es la clave del problema. Este

problema se abordará más adelante.

Por ello, se debe estudiar la estructura compleja que hereda el toro al generarlo de esta manera. Como ya se sabe que cada punto del espacio se identifica con algún punto en ese paralelogramo, basta encontrar los mapeos que van de $\mathbb{C}/\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ a algún subconjunto abierto de \mathbb{C} . Sin embargo, esto resulta trivial dado que, como se discutió, esta forma de generar al toro resulta similar a la forma de generarlo utilizando identificaciones en el sentido topológico.

Ejemplo 3. El espacio proyectivo. Para el propósito de este trabajo, este ejemplo es de gran utilidad. Por tanto, se hace un estudio minucioso de su estructura como en [Nak03].

El espacio proyectivo complejo, denotado por $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, se genera de la siguiente manera: sea $\mathbb{C}^{n*} = \mathbb{C}^n \setminus \{\bar{0}\}$. Dos elementos, $x, y \in \mathbb{C}^{(n+1)*}$ están relacionados si existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $x = \lambda y$. Naturalmente, este espacio hereda una topología cociente usual y una estructura de variedad diferenciable usual. Sin embargo, esta estructura no necesariamente debe de ser una estructura compleja.

Si $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, se denotará a su clase de equivalencia por $[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. En particular, a las z_i se les nombra las coordenadas *homogéneas*. En la construcción, se pide que $z \neq \bar{0}$, sin embargo, cada una de las z_i puede valer 0 en algún punto. Entonces, defínase $U_i = \{[z_0, \dots, z_i, \dots, z_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n : z_i \neq 0\}$. Como, en particular, $z_i \in \mathbb{C}$, y dado que $[z_0, \dots, z_n] = [\lambda z_0, \dots, \lambda z_n]$, entonces se puede definir las coordenadas *inhomogéneas* como $\xi_i^j = \frac{z_j}{z_i}$. Aunque se puede trabajar de manera indistinta dada la relación de equivalencia, es preferible trabajar con las coordenadas inhomogéneas. En este caso, un elemento en U_i se escribe como $[\xi_i^0 : \dots : 1 : \dots : \xi_i^n]$. Por simplicidad, se denota estas coordenadas como $[\xi_i^0 : \dots : \xi_i^n]$. Entonces, la carta consiste de U_i como conjunto abierto y el mapeo

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n \tag{2.5}$$

$$[\xi_i^0 : \dots : \xi_i^n] \rightarrow (z_0/z_i, \dots, z_n/z_i). \tag{2.6}$$

Basta entonces demostrar que los mapeos de transición son holomorfos. Esto es, se quiere demostrar que el mapeo

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

es holomorfo, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Sea $p \in \phi_i(U_i \cap U_j)$. Entonces, p es de la forma $(z_0/z_i, \dots, z_n/z_i)$. Por tanto, $\phi_i^{-1}(p) = [\xi_i^0 : \dots : \xi_i^n] \in U_i \cap U_j$. Como $\phi_i^{-1}(p) \in U_j$, se puede reescribir como $[\xi_j^0 : \dots : \xi_j^n]$, por lo que $\phi_j(\phi_i^{-1}(p)) = (z_0/z_j, \dots, z_n/z_j)$. Por tanto, cada entrada se puede ver como $(z_k/z_i)(z_i/z_j)$. Claramente, estos mapeos son holomorfos. Por tanto, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es una variedad compleja.

Notamos lo siguiente: \mathbb{C}/\sim consiste únicamente de un punto, que equivale a todo el plano complejo. En efecto, sea $z \in \mathbb{C}$. Sin pérdida de generalidad, $|z| = 1$. Entonces, existe $\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $ze^{i\phi}([0, 2\pi]) = \mathbb{S}^1$. Se sigue que \mathbb{C}/\sim corresponde a un solo punto porque todo el plano se puede identificar con cualquier punto. El mismo caso sucede si se considera \mathbb{R}/\sim .

El primer caso no trivial es $\mathbb{C}\mathbb{P} = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. La siguiente afirmación es necesaria: $\mathbb{C}\mathbb{P} \simeq \mathbb{S}^2$, es decir, existe un biholomorfismo $\phi : \mathbb{C}\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Demostración de la afirmación. Sea $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ y sea $[z_1, z_2] \in \mathbb{CP}$. Utilizando las cartas propuestas, sea $U_1 \subseteq \mathbb{CP}$, tal que $z_1 \neq 0$. Entonces, $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\phi_1 [z_2/z_1] = z_2/z_1$ es biyectiva. Análogamente con U_2 y ϕ_2 . Estos mapeos se pueden reescribir como $\bar{\phi} : \mathbb{CP} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dado por $\bar{\phi} [z_1/z_2] = z_1/z_2$ si $z_2 \neq 0$ y $\bar{\phi} [z_1/z_2] = \infty$ si $z_2 = 0$. Nuevamente, esta función es biyectiva. La continuidad está dada por la topología de \mathbb{CP} y de \mathbb{C} . Por tanto, $\mathbb{CP} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que es la esfera de Riemann.

Ejemplo 4. Superficies de Riemann. Las superficies de Riemann tienen algunas características interesantes que merece la pena discutir en este trabajo. Ya se han presentado dos ejemplos, el toro complejo y la esfera de Riemann. Para comenzar su estudio, se tiene la definición de Farkas y Kra [FK92].

Definición. Una superficie de Riemann es una variedad compleja conexa M , de dimensión compleja $\dim_{\mathbb{C}} = 1$.

Este ejemplo es importante ya que el toro y la esfera de Riemann son complejos.

En particular, como las superficies de Riemann son variedades de dimensión real 2, se pueden estudiar desde el punto de vista de la geometría diferencial real. Para superficies compactas, se puede definir una triangulación y la característica de *Euler-Poincaré*. Entonces, conociendo la relación entre la característica de Euler-Poincaré y el género de una superficie compacta se puede llegar a algunos resultados que serán de utilidad más adelante. En particular, si Σ es una superficie de Riemann compacta, se define el género de la superficie como $g(\Sigma) = \frac{2-\chi(\Sigma)}{2}$, donde $\chi(\Sigma)$ es la característica de *Euler-Poincaré*. De esta manera, la esfera tiene género 0, el toro 1, el n -toro n, \dots . Al momento de discutir *cohomología* y la conjetura de *Calabi*, se notará que esta fórmula clasifica inmediatamente al toro como una variedad de *Calabi-Yau*.

2.2 Estructura compleja J y complejificación del espacio tangente

Una herramienta importante para poder entender variedades de Kähler es la estructura semi-compleja J . En esta sección se habla acerca del primer planteamiento de esta estructura, así como una manera de entender al espacio tangente de una variedad compleja como un espacio vectorial complejo.

Se inicia, entonces, estudiando el caso de \mathbb{R}^{2n} . Se sabe que este espacio es topológicamente equivalente a \mathbb{C}^n , haciendo la identificación $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) \mapsto (z_1, \dots, z_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$.

En el caso concreto $n = 1$, se sabe: $(x, y) \mapsto z = x + iy$. En este caso, las rotaciones en \mathbb{R}^2 en el sentido contrario de las manecillas del reloj, están dadas por $R_\theta(x, y) = (\cos \theta x - \sin \theta y, \sin \theta x + \cos \theta y)$. En el caso de \mathbb{C} , las rotaciones están dadas por la multiplicación compleja por $e^{i\theta} z$. Un simple cálculo demuestra que las rotaciones, aunque estén representadas por distintos operadores, resultan en el mismo vector. Si se toma la rotación con $\theta = \frac{\pi}{2}$, $e^{i\theta} z = iz = -y + ix$, resultando en la identificación

$$R_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = (-y, x) \mapsto -y + ix. \quad (2.7)$$

Para poder introducir las complejificaciones de espacios vectoriales, se introduce la matriz $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en el caso de \mathbb{R}^2 , mientras que en el plano complejo resulta en la multiplicación por i .

Esta matriz se puede generalizar a

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

para \mathbb{R}^{2n} , donde $-Id$ es la matriz identidad en n dimensiones.

Nótese entonces cómo actúa esta matriz en un vector dado en \mathbb{R}^{2n}

$$J_0(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = (-y_1, \dots, -y_n; x_1, \dots, x_n). \quad (2.9)$$

En la identificación hecha anteriormente, es importante notar el orden de la parte real y la parte imaginaria. Entonces, la identificación en este caso, queda de la siguiente manera:

$$(-y_1, \dots, -y_n; x_1, \dots, x_n) \mapsto (-y_1 + ix_1, \dots, -y_n + ix_n) = i(z_1, \dots, z_n), \quad (2.10)$$

donde $z_j = x_j + iy_j$. Así, se entiende a la estructura J_0 como multiplicación por la unidad imaginaria. Más aún, existe una generalización de esta forma J a espacios vectoriales [MS99].

Definición. Dado un espacio vectorial real V , una estructura compleja J es un mapeo $J : V \rightarrow V$, tal que $J^2 = -Id$, donde Id es el mapeo identidad en V .

Así, J_0 recibe el nombre de estructura compleja del espacio euclidiano, pero se nota que no es única, sino que existen distintas J que satisfacen $J^2 = -Id$. En este caso particular, igualmente existen variaciones de J_0 que satisfacen la definición.

En particular, se quiere entender a los espacios tangentes como espacios vectoriales sobre \mathbb{C} . Para llegar a eso, primero se define la multiplicación por un complejo.

Definición. Dado un espacio vectorial real V con una estructura compleja J , la multiplicación por un número complejo $a + ib$ se define por la regla

$$(a + ib)w = aw + bJw \quad (2.11)$$

donde w es un vector cualquiera en el espacio V .

El caso de interés es el espacio tangente a una variedad compleja en un punto. Para esto, considérese el espacio tangente a la variedad desde el punto de vista diferenciable. En este caso, localmente, se ve al espacio tangente T_pM como un espacio expandido por el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}; \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}. \quad (2.12)$$

A partir de esta base, se define los vectores siguientes, que corresponden a tomar la parte real e imaginaria de la coordenada para construir un vector tangente:

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i \frac{\partial}{\partial y^j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{\partial}{\partial y^j} \right). \quad (2.13)$$

Se hace notar que estos vectores son linealmente independientes. Además, el conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n} \right\}, \quad (2.14)$$

es una base para el *espacio tangente complejo*, que se denota como $T_p M^{\mathbb{C}}$.

En este caso, se imponen las relaciones que cumple el operador J en $T_p M$. Esto es, se pide que el operador cumpla

$$J \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad J \frac{\partial}{\partial y^j} = -\frac{\partial}{\partial x^j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Así como se definió J , se nota que es una estructura compleja sobre el espacio $T_p M$. Ahora, para extenderla a $T_p M^{\mathbb{C}}$, nótese cómo actúa en $\frac{\partial}{\partial z^j}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$

$$J \frac{\partial}{\partial z^j} = i \frac{\partial}{\partial z^j}, \quad J \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.16)$$

Esto indica que los eigenvalores de J son $\pm i$. Con estas condiciones, se define una descomposición del espacio tangente complejo como

$$T_p M^{\mathbb{C}} = T_p M^+ \oplus T_p M^-, \quad (2.17)$$

donde $T_p M^{\pm} = \{Z \in T_p M^{\mathbb{C}} : JZ = \pm iZ\}$. A un vector en $T_p M^+$ se le llama un vector holomorfo, mientras que a un vector en $T_p M^-$ se le llama vector antiholomorfo.

De esta manera, se construye un haz tangente, pero como un haz vectorial complejo, utilizando una partición de la unidad para pegar suavemente los campos. Entendiendo entonces a estos haces tangentes complejos, se puede obtener más información. En las siguientes secciones se utiliza este tipo de complejificaciones para poder entender aspectos topológicos utilizando herramientas de los grupos de cohomología complejos. Sin embargo, un resultado que se utiliza a partir de este momento se puede encontrar en Milnor [MS17] (ver Apéndice A).

Teorema. Dada una variedad compleja con haz vectorial complejo, este tiene una orientación en el haz tangente real.

2.3 Formas diferenciables complejas

Al igual que en el caso real, para poder estudiar formas complejas primero se debe de encontrar la base del espacio tangente, y a partir de ella, encontrar el espacio dual. Así, se definen las formas complejas como sigue:

$$dz^j = dx^j + idy^j, \quad d\bar{z}^j = dx^j - idy^j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Se cumplen, entonces, las siguientes relaciones:

$$\left\langle dz^j, \frac{\partial}{\partial z^i} \right\rangle = \delta_i^j \quad \left\langle d\bar{z}^j, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} \right\rangle = \delta_i^j \quad (2.19)$$

$$\left\langle dz^j, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} \right\rangle = 0 \quad \left\langle d\bar{z}^j, \frac{\partial}{\partial z^i} \right\rangle = 0 \quad (2.20)$$

donde $\langle \alpha, v \rangle = \alpha(v)$, con α una 1-forma y v un vector.

Uno de los aspectos a estudiar es el comportamiento global de vectores y tensores, por lo que se generaliza utilizando el haz tangente y el haz cotangente. Sea TM el haz tangente de la variedad. Como la variedad es riemanniana, se puede construir un marco ortogonal para esta variedad (usando el método de Gram-Schmidt para variedades de Riemann [Lee13]), y se define el marco

$$\{Z^1, \dots, Z^n, \bar{Z}^1, \dots, \bar{Z}^n\}, \quad (2.21)$$

con representación local definida como en (2.14) de la sección anterior. Usando esto, se define el haz cotangente como el espacio dual del haz tangente. En este caso, las secciones se definen como los elementos duales al marco ortogonal; localmente, estas formas tienen la estructura definida en (2.18). Nótese lo siguiente: en el caso de formas diferenciales reales, el espacio producto tensorial tiene un cierto rango, que se puede ver como el número de multiplicandos. En el caso de formas diferenciales complejas, este rango depende de las formas holomorfas y antiholomorfas que componen el producto.

En el caso de una 1-forma compleja, se nota que se puede descomponer como

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dz^i + \sum_{j=1}^n \beta_j d\bar{z}^j, \quad (2.22)$$

con $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \dots, n$, donde se nota que la 1-forma se descompone en una parte holomorfa y una antiholomorfa. Entonces el producto tensorial se puede descomponer en q 1-formas holomorfas y s 1-formas antiholomorfas, tales que se tiene la descomposición para un (q, s) -tensor

$$\beta = \beta_{i_1, \dots, i_q; j_1, \dots, j_s} dz^{i_1} \otimes \dots \otimes dz^{i_q} \otimes d\bar{z}^{j_1} \otimes \dots \otimes d\bar{z}^{j_s}, \quad (2.23)$$

$\beta_{q,s} \in \mathbb{C}$, $i, j, q, s = 1, \dots, n$. Nótese que la definición no excluye la posibilidad $dz^{i_r} = dz^{i_t}$ si $i_r \neq i_t$. De esta manera, si γ es un tensor de rango p , entonces se puede descomponer como

$$\gamma = \sum_{\substack{i_l, j_r \in \{1, \dots, n\} \\ s+q=p}} \gamma_{i_1, \dots, i_q; j_1, \dots, j_s} dz^{i_1} \otimes \dots \otimes dz^{i_q} \otimes d\bar{z}^{j_1} \otimes \dots \otimes d\bar{z}^{j_s}. \quad (2.24)$$

Recordemos que en álgebra tensorial, el producto tensorial de tensores antisimétricos no siempre resulta en un tensor antisimétrico, siendo el clásico ejemplo la representación local de una métrica riemanniana, que consiste en la suma de productos tensoriales de 1-formas, pero que resulta ser

simétrico [Lee13]. Por tanto, es importante utilizar en este caso, como en el caso real, el producto cuña.

Para lograr esto, primero se debe entender cómo está descrito el espacio de formas complejas. Este estudio será relevante más adelante, al estudiar grupos de cohomología. Por lo pronto, se tiene la siguiente definición:

Definición. Dada una variedad compleja M de dimensión compleja n , una (q, s) -forma compleja es un (q, s) -tensor γ que es antisimétrico en el sentido real. Es decir, γ satisface

$$\gamma(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_{q+s}) = \text{sgn}(\sigma)\gamma(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_{q+s}), \quad (2.25)$$

con $v_l \in TM$, $i, j, l = 1, \dots, q+s$, y σ la permutación que manda $v_i \mapsto v_j$ y $v_j \mapsto v_i$, y deja los demás elementos fijos. El espacio $\Omega^{(q,s)}(M)$ es el espacio de todas las (q, s) -formas complejas y tiene estructura de espacio vectorial, bajo la adición puntual. Esto es, si $p \in M$ y γ_1, γ_2 son dos (q, s) -formas, el par $(p, \gamma_j) \in \Omega^{(q,s)}(M)$, $j = 1, 2$, y la suma y la multiplicación por escalares están definidas por

$$\lambda(p, \gamma_1) + (p, \gamma_2) = (p, \lambda\gamma_1 + \gamma_2). \quad (2.26)$$

El producto cuña de formas complejas resulta de la generalización del producto cuña de formas reales. Esto es, se hace el producto tensorial de dos formas complejas, y luego se le aplica el operador alternante. Descrito de una mejor manera.

Definición. Dadas una (r, s) -forma α y una (p, q) -forma β , el producto cuña se define como

$$\begin{aligned} \wedge : \Omega^{r,s}(M) \times \Omega^{p,q}(M) &\rightarrow \Omega^{p+r, q+s}(M) \\ \alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{r+s}, w_1, \dots, w_{p+q}) & \\ = \frac{(r+s+p+q)!}{(r+s)!(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s+p+q}} &\alpha(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(r+s)}) \beta(u_{\sigma(r+s+1)}, \dots, u_{\sigma(r+s+p+q)}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde $u_{\sigma(i)} \in \{v_1, \dots, v_{r+s}, w_1, \dots, w_{p+q}\}$, $i = 1, \dots, r+s+p+q$, y $S_{r+s+p+q}$ es el grupo simétrico o grupo de permutaciones.

Además, se deben notar, dado que se está trabajando con formas complejas, los siguientes hechos:

Definición. El espacio $\Omega^{r,s}(M)$ es el espacio de (r, s) formas definidas sobre la variedad M , donde una forma α en ese espacio se descompone como un producto cuña de r 1-formas holomorfas y s 1-formas antiholomorfas, y tiene estructura de haz vectorial considerando la adición puntual definida en (2.26).

Por la descomposición hecha anteriormente, se puede expresar a una p -forma como una combinación lineal de (r, s) -formas, sujetas a la restricción $r+s=p$. Siguiendo con este argumento, se nota que el único elemento que tienen en común es la forma 0, por lo que se sigue el siguiente resultado [Nak03].

Proposición. Dada una variedad compleja M , el espacio de p -formas se puede descomponer como la suma directa de espacios de formas complejas, como sigue

$$\Omega^p(M) = \bigoplus_{r+s=p} \Omega^{(r,s)}(M) \quad (2.28)$$

Los últimos dos conceptos que se necesitan para introducir las herramientas utilizadas de teoría de cohomología, son la derivada exterior y los operadores de Dolbeault.

Definición. Dada una variedad diferenciable M , y el espacio de p -formas $\Omega^p(M)$, la derivada exterior se define como

$$d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M) \quad (2.29)$$

$$\alpha = \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \mapsto d\alpha = \left(\frac{\partial \alpha_{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \quad (2.30)$$

Utilizando esta definición y la descomposición dada en la proposición anterior, se debe de llegar a una descomposición adecuada del operador d , de tal manera que actúe sobre la parte holomorfa y sobre la parte antiholomorfa.

Definición. Dada una variedad compleja M y el espacio de (q, r) -formas sobre M , $\Omega^{q,r}(M)$, los operadores de Dolbeault se definen como

$$\begin{aligned} \partial : \Omega^{q,r}(M) &\rightarrow \Omega^{q+1,r}(M) \\ \alpha = \alpha_{i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_r} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_q} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_r} \\ &\mapsto \frac{\partial \alpha_{i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_r}}{\partial z^l} dz^l \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_q} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_r}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

y

$$\begin{aligned} \bar{\partial} : \Omega^{q,r}(M) &\rightarrow \Omega^{q,r+1}(M) \\ \alpha = \alpha_{i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_r} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_q} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_r} \\ &\mapsto \frac{\partial \alpha_{i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_r}}{\partial \bar{z}^l} d\bar{z}^l \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_q} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_r} \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde los índices $i, j, l \in \{1, \dots, n\}$ y se utiliza la convención de suma de Einstein. Por la descomposición de una p -forma en (q, s) -formas, es claro que los operadores de Dolbeault están definidos igualmente en $\Omega^p(M)$.

2.4 Geometría simpléctica

Una herramienta importante para entender a las variedades de Kähler es la geometría simpléctica, una rama de la geometría, que, en un principio, parecerá no tener una relación con lo que se ha construido hasta este momento. Sin embargo, como se mostrará al final de la sección, la geometría compleja y la geometría simpléctica tienen una relación muy estrecha, por lo que se podrá trabajar tanto con una como con otra geometría. Para esto, primero se introduce las herramientas básicas de este tipo de geometría, y se empieza a construir, a partir de esto, la geometría hermitiana, de donde la geometría de Kähler se sigue con unas pocas condiciones extra.

Se empieza, entonces, con una definición sencilla.

Definición. Dado un espacio vectorial V , se define una forma simpléctica ω como un operador bilineal que satisface

- Antisimetría: $\omega(x, y) = -\omega(y, x)$ para cualesquiera $x, y \in V$,
- No degeneración: para $x \in V$, $\omega(x, y) = 0 \quad \forall y \in V$ implica $x = 0$.

Al par (V, ω) se le conoce como espacio vectorial simpléctico [MS99]. En el caso en el que la forma sea conocida, se puede omitir y se habla únicamente de V como un espacio vectorial simpléctico.

Usando esto como base, se extiende el concepto al espacio tangente en un punto de una variedad. Se debe de notar lo siguiente: la estructura compleja J únicamente se puede construir en espacios vectoriales de dimensión par. Por tanto, como $T_p M$ hereda la dimensión de la variedad M , se le pide a M que sea de dimensión par.

Nótese que en la definición en un espacio vectorial ya se utiliza el término *forma*, aunque no necesariamente se pueda hablar de diferenciabilidad. Por tanto, la definición de una forma simpléctica suave en una variedad diferenciable debe cumplir tanto la definición de forma en el sentido geométrico, como en el sentido algebraico.

Definición. Una forma diferenciable simpléctica ω en M es una forma diferenciable, no degenerada, *cerrada*. Esto es, satisface:

- $\omega(X, Y) = -\omega(Y, X)$,
- $\omega(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in TM$ entonces $X = 0$,
- $d\omega = 0$,

donde X, Y son campos vectoriales definidos en la variedad y la tercera condición es la definición de una forma cerrada [MS99].

Nótese lo siguiente: dada la 2-forma ω , se nota que el producto cuña de n veces ω , $\omega \wedge \dots \wedge \omega$, no se anula, por lo que una variedad M es orientable [MS99]. Este resultado es análogo al mencionado en la sección 2.2.

Estas formas simplécticas están definidas localmente. Dada la existencia de una partición de la unidad en la variedad, se puede definir globalmente una forma simpléctica. A su vez, se puede construir, sin considerar la métrica intrínseca de la variedad, una métrica riemanniana. Considérese una variedad con una estructura semi-compleja J . Se dice que la forma simpléctica ω es compatible con la estructura semi-compleja J , si se satisface

- $\omega(X, Y) = \omega(JX, JY)$,
- $\omega(X, JX) > 0$.

A partir de esta definición, se nota que la segunda condición indica la existencia de una métrica riemanniana. El siguiente resultado además establece la existencia no sólo de métricas riemannianas,

de manera local, sino de métricas hermitianas, que son parte fundamental de la geometría de Kähler introducida más adelante.

Proposición. Dada una vecindad U de un punto p en M , con una estructura simpléctica ω y J una estructura semi-compleja, las siguientes condiciones son equivalentes

1. J es compatible con ω ,
2. La forma $g : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ es simétrica, positiva definida y J -invariante,
3. La forma $H : TM \times TM \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $H(X, Y) = \omega(X, JY) + i\omega(X, Y)$ es compleja lineal en Y y compleja anti-lineal en X , satisfaciendo $H(X, Y) = \overline{H(Y, X)}$ y la parte real es positivo definida.

La construcción, sin embargo, de una una estructura simpléctica y una estructura semi-compleja en la variedad parece ser un resultado poco trivial. Sin embargo, la siguiente proposición resuelve este problema.

Proposición. Dada una variedad $2n$ dimensional M , se satisface

- Para cada 2-forma no degenerada ω en M , existe una estructura semi-compleja J que es compatible con ω .
- Para cada estructura semi-compleja J en M , existe una 2-forma no degenerada ω que es compatible con J .

Esta proposición es un resultado importante por la siguiente situación. La primera afirmación indica que, dada una estructura simpléctica ω en M , M hereda una estructura de variedad semi-compleja. Es decir, existe una estructura semi-compleja J sobre M , que además es compatible. Sin embargo, nótese la segunda afirmación: dado que una variedad compleja tiene una estructura semi-compleja J intrínseca, entonces una variedad compleja es necesariamente una variedad simpléctica.

Dado que muchos resultados deben entenderse no sólo de manera local, sino también de manera general, se debe introducir la noción de haz vectorial simpléctico. Este simplemente es una generalización, y, dado que la variedad ya se considera que tiene una forma simpléctica ω definida, sólo es una formalización de esta noción.

Definición. Dada una variedad M , un haz vectorial simpléctico, denotado (E, ω) sobre M es un haz vectorial real $\pi : E \rightarrow M$ con una forma simpléctica definida ω_p en cada fibra E_p , tal que ω varía suavemente con $p \in M$.

Dada esta definición, se nota que una forma simpléctica global, ω , es una sección del espacio total $E^* \wedge E^*$. Además, la noción de isomorfismo resulta natural: dos haces simplécticos son isomorfos si y sólo si existe un mapeo lineal $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ tal que $\psi^*(\omega_2) = \omega_1$, donde ψ^* es el *pull-back* (ver Apéndice B.2, ecuación B.6) asociado a ψ .

Como ya se sabe por la proposición anterior, existe una estructura semi-compleja J definida en la variedad. Entonces, el siguiente teorema establece inmediatamente la relación entre dos haces simplécticos.

Teorema. Dos haces simplécticos (E_1, ω_1) y (E_2, ω_2) son isomorfos si y sólo si sus haces vectoriales complejos son isomorfos.

Finalmente, antes de entrar a la definición de variedad de Kähler, se introduce la noción de integrabilidad de la estructura semi-compleja.

Definición de integrabilidad. Una estructura semi-compleja J en M se dice que es *integrable* si, dado un atlas (U_α, ϕ_α) , J se puede representar como la matriz J_0 en coordenadas locales, esto es

$$T\phi(q) \circ J_q = J_0 \circ T\phi(q) : T_q M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad (2.33)$$

o, en otras palabras, los mapeos de transición son holomorfos. En este caso, se llega nuevamente a la relación que ya se obtuvo anteriormente. Es necesaria hacer la siguiente distinción: como se mencionó anteriormente, el tensor $J : TM \rightarrow TM$ se conoce como estructura semi-compleja, donde M es una variedad diferenciable, no necesariamente compleja. Por el otro lado, si M es una variedad compleja, al atlas que se definió anteriormente en la Sección 2.2, $\{(V_\beta, \phi_\beta)\}$ se le conoce como estructura compleja. Cuando M es una variedad compleja, el tensor J se conoce como estructura compleja. Sin embargo, dada N cualquier otra variedad diferenciable, la existencia de $I : TN \rightarrow TN$ una estructura semi-compleja, no implica que N sea una variedad compleja. Por eso, la noción de integrabilidad es importante al querer distinguir entre variedades complejas y semi-complejas.

El siguiente teorema da un resultado que facilita la verificación de si una estructura semi-compleja es o no integrable. Para esto, supóngase que se tiene la forma ω y la estructura J asociada a la forma simpléctica.

Teorema de integrabilidad. Dada una variedad simpléctica (M, ω) , una estructura semi-compleja J es integrable si y sólo si el *tensor de Nijenhuis*

$$N_J : TM \times TM \rightarrow TM \quad (2.34)$$

$$(X, Y) \mapsto [JX, JY] - [X, Y] - J([JX, Y] + [X, JY]), \quad (2.35)$$

se anula, donde $[\cdot, \cdot] : TM \times TM \rightarrow TM$ es el bracket de Lie usual, y X y Y son cualesquiera dos campos tensoriales.

Claramente, en una variedad compleja esta condición se satisface trivialmente. Se sigue que una variedad es compleja si el tensor de Nijenhuis se anula. Además, se nota que este tensor es antisimétrico, por lo que los términos a calcular se reducen.

2.4.1 Descomposición de tensores y operadores característicos en geometría de Riemann en variedades complejas

Para poder descomponer la métrica, se recuerda nuevamente que, utilizando una partición de la unidad, se puede extender una métrica de Riemann local a toda la variedad, de tal manera que varíe suavemente. Esto es, se puede escribir a la métrica como

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (2.36)$$

donde $i, j = 1, \dots, 2n$ y se usa la convención de suma de Einstein. Entonces, sea $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^\nu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} \right\}_{\mu, \nu=1}^n$ una base local para el espacio tangente complejo, de tal manera que g actúa como

$$g_{\mu\nu}(p) = g_p \left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu} \right) \quad (2.37)$$

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(p) = g_p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu} \right) \quad (2.38)$$

$$g_{\bar{\mu}\nu}(p) = g_p \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu} \right) \quad (2.39)$$

$$g_{\mu\bar{\nu}}(p) = g_p \left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu} \right) \quad (2.40)$$

de donde, dada la simetría de la métrica riemanniana, se sigue la simetría de los índices complejos.

Ahora, dada g no sólo métrica riemanniana, sino también hermitiana (es decir, que es invariante ante el operador J : $g(JX, JY)(p) = g(X, Y)(p)$ [Nak03]), se siguen fácilmente los siguientes resultados:

Afirmación: 1. Dado X campo vectorial, JX es ortogonal a X bajo una métrica hermitiana.

Prueba. Dada g métrica hermitiana, entonces

$$g(JX, X) = g(J^2X, JX) = -g(JX, X), \quad (2.41)$$

de donde se sigue que $g(JX, X) = 0$.

2. Dada la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu} \right\}$, $g_{\mu\nu} = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$.

Prueba. Como $g_{\mu\nu} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right)$, entonces

$$g_{\mu\nu} = g\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = g\left(J\frac{\partial}{\partial z^\mu}, J\frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = g\left(i\frac{\partial}{\partial z^\mu}, i\frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = -g\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right), \quad (2.42)$$

donde se utilizó el hecho que $J\frac{\partial}{\partial z^\mu} = i\frac{\partial}{\partial z^\mu}$. La demostración en el caso $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ es análoga, ahora considerando el eigenvalor $-i$. Por tanto, una métrica hermitiana se puede escribir, utilizando las coordenadas complejas, como

$$g = g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \otimes dz^{\bar{\nu}} + g_{\bar{\mu}\nu} dz^{\bar{\mu}} \otimes dz^\nu. \quad (2.43)$$

Otra de las cosas que interesan estudiar es cómo derivar en una variedad. En este caso, como la derivada de Lie de un campo con respecto a otro está dada por los corchetes de Lie, basta con estudiar el caso de la derivada covariante, de donde, como se sabe, surgen las nociones de curvatura.

De geometría riemanniana real, se recuerda que la derivada covariante, con respecto a un campo, debe satisfacer ciertas condiciones ([Lee97, cap.4, cap.5]). En este caso, se utiliza únicamente la derivada covariante de un campo con respecto a otro y se considera que está dada por la conexión de Levi-Civita. Entonces, clásicamente, utilizando la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^n$, se tiene

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.44)$$

Siguiendo esta idea, se tiene, utilizando la base compleja de campos vectoriales, que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial z^\mu}} \frac{\partial}{\partial z^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial}{\partial z^\lambda}. \quad (2.45)$$

Entonces, el problema de derivar covariantemente en variedades complejas resulta en el mismo problema de derivar covariantemente en variedades riemannianas, que es calcular los símbolos de Christoffel. Como menciona Nakahara [Nak03], esto se puede realizar como se explica a continuación. Primero, se nota que, dado que $\frac{\partial}{\partial z^\mu} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}$, entonces $\Gamma_{\mu\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}}$ se define de manera análoga a $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ y, por lo mismo, $\overline{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda} = \Gamma_{\mu\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}}$. Además, los coeficientes de Christoffel con índices holomorfos y anti-holomorfos mezclados se anulan. Para probar esto, se encuentra una fórmula para calcular los mismos y se nota que $\Gamma_{\mu\bar{\nu}}^\lambda$ depende de $g_{\mu\bar{\nu}}$, y por la simetría, $\Gamma_{\mu\bar{\nu}}^\lambda$ igual se anula. Entonces basta encontrar dicha fórmula para terminar la demostración. Esto se hace como sigue.

Como en geometría riemanniana real, se debe pedir a la conexión que cumpla la condición de *compatibilidad con la métrica*. Esto es, se debe satisfacer

$$\nabla_\kappa g_{\mu\bar{\nu}} = 0, \quad \nabla_{\bar{\kappa}} g_{\mu\bar{\nu}} = 0, \quad (2.46)$$

donde ya se considera que las componentes que no se anulan de una métrica hermitiana tienen términos cruzados. De acuerdo a John Lee [Lee97, cap.5], la condición de compatibilidad con la métrica puede reescribirse, en el caso real, como

$$\nabla g(X, Y) = g(\nabla X, Y) + g(X, \nabla Y), \quad (2.47)$$

por lo que se puede reescribir la condición de compatibilidad como

$$\frac{\partial}{\partial z^\kappa} g_{\mu\bar{\nu}} = \nabla_\kappa g_{\mu\bar{\nu}} = \nabla_\kappa g \left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu} \right) \quad (2.48)$$

$$= g \left(\nabla_\kappa \frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \nabla_\kappa \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu} \right) \quad (2.49)$$

$$= g \left(\Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \frac{\partial}{\partial z^\lambda}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu} \right), \quad (2.50)$$

donde la primera igualdad se da ya que $g_{\mu\bar{\nu}}$ es una función con valores en M . Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial z^\kappa} g_{\mu\bar{\nu}} - \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda g_{\lambda\bar{\nu}} = 0. \quad (2.51)$$

Y, análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\kappa} g_{\mu\bar{\nu}} - \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}} g_{\mu\bar{\lambda}} = 0. \quad (2.52)$$

A partir de estas dos ecuaciones se puede calcular los símbolos de Christoffel. Entonces, lo último que falta traducir del lenguaje de la geometría riemanniana real a la geometría riemanniana

sobre variedades complejas son los criterios de curvatura. Para poder entender qué es la curvatura, se puede recurrir a Lee [Lee97] en cuanto a la construcción de estos tensores.

Con base en [Lee97], el endomorfismo de curvatura se define como el operador

$$\mathcal{R}(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.53)$$

La idea de este operador es la siguiente: dado un campo vectorial cualquier, Z , al transportarlo paralelamente a lo largo de un campo, por ejemplo, Y , y luego transportarlo a lo largo de X , en un espacio euclideo, debe igualar al mismo vector transportado, pero primero a lo largo de X , y luego de Y . El término final, es conocido como el término de *torsión*. Dado que usualmente X y Y son campos conjugados, este término desaparece. Entonces, el endomorfismo de curvatura usualmente se escribe considerando únicamente los dos primeros términos. Otro resultado, mostrado en [Lee97], refiere a la multilinealidad de este operador, por lo que es un tensor. Como este tensor se evalúa en tres campos vectoriales, puede considerarse como un vector con tres componentes covariantes y una contravariante. Es decir,

$$R = R_{jkl}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l, \quad (2.54)$$

que, además, cumple las condiciones de simetría y antisimetría conocidas. La construcción del tensor de curvatura de Riemann es inmediata de este tensor. El tensor de curvatura de Riemann, comúnmente denotado por R es un tensor $R : TM \times TM \times TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$, definido por la siguiente regla de correspondencia:

$$R(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y, Z), W), \quad X, Y, Z, W \in TM, \quad (2.55)$$

de donde se sigue la siguiente observación: el endomorfismo de curvatura y el tensor de Riemann **no** son el mismo tensor, sin embargo, sus componentes están relacionadas por la ecuación

$$R_{ijkl} = g_{is} R_{jkl}^s, \quad (2.56)$$

por lo que, para evitar confusión, se utilizará, de ahora en adelante, \mathcal{R} para denotar indistintamente al tensor de Riemann.

Dadas las relaciones anteriores para la métrica y para los símbolos de Christoffel, Nakahara [Nak03] muestra que las únicas componentes que no se anulan son

$$R_{\lambda\bar{\mu}\nu}^{\kappa} = \partial_{\bar{\mu}} \Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa}, \quad (2.57)$$

$$R_{\lambda\mu\bar{\nu}}^{\bar{\kappa}} = \partial_{\mu} \Gamma_{\bar{\nu}\lambda}^{\bar{\kappa}}. \quad (2.58)$$

Finalmente, definiendo $G = \det(g_{\mu\bar{\nu}})$, se define la *forma de Ricci* como

$$Ric = -i \partial_{\bar{\nu}} \partial_{\mu} \log(G) dz^{\mu} \wedge dz^{\bar{\nu}}, \quad (2.59)$$

a partir de lo cual suele denotarse como $Ric(g)$, dada su dependencia en la métrica. En caso de que la métrica sea fija, entonces no se hará explícita la dependencia.

2.5 Cohomología en variedades complejas

El uso de herramientas de topología algebraica es de vital importancia, por lo que en esta sección se estudian algunas que se utilizan cuando se clasifican los objetos que son de interés para este trabajo.

Primero, se hace una breve visita a los grupos de cohomología singular. Para una explicación detallada de la construcción de los mismos, se puede referir a Milnor y Stasheff [MS17], Apéndice A. Brevemente, estos grupos de cohomología se construyen, al igual que otros grupos de cohomología, utilizando simplejos euclidianos singulares (ver Apéndice B.2), y se considera que tienen coeficientes sobre un grupo. Milnor y Stasheff construyen de esta manera distintas clases características. En particular, las clases de Chern, como se verá más adelante, serán importantes en el estudio de variedades de Calabi-Yau, y por tanto en la superficies $K3$. Para entender la construcción de la primera clase de Chern, debe primero tenerse en cuenta la estructura de haz vectorial complejo.

Siguiendo las ideas de [MS17], un haz vectorial complejo se define como un haz vectorial sobre un espacio base, B , tal que cada fibra tiene la estructura de un espacio vectorial complejo. Como se ha *complejificado* el haz tangente anteriormente, para los casos en que interesa que son las variedades diferenciales complejas, sin perder generalidad las clases de Chern estarán definidas sobre las variedades en las que se trabaja.

Sin embargo, para facilitar el estudio de los grupos de cohomología y entenderse desde un punto de vista geométrico, se deben introducir los grupos de cohomología de de Rham y de Dolbeault. Para esto, se recuerda que una forma diferencial α es cerrada si $d\alpha = 0$ y exacta si existe f tal que $\alpha = df$. Un resultado fácil de verificar implica que $d^2 = 0$, por lo que toda forma exacta es cerrada.

Entonces, uno de los objetivos de estudiar el grupo de cohomología de de Rham es estudiar *qué tan no exacta es una forma*. Esto se verá de manera más precisa al entender la siguiente definición:

Definición. Dado $\mathcal{Z}^p(M) = \text{kernel de } d : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ y $\mathcal{B}^p(M) = \text{imagen de } d : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$, se define el p -ésimo grupo de cohomología de de Rham como el espacio vectorial cociente (ver Apéndice B.1)

$$H_{dR}^p(M) = \mathcal{Z}^p(M) / \mathcal{B}^p(M). \quad (2.60)$$

Para entender de forma *intuitiva* esta definición, se puede considerar cualquier forma α , cerrada. Cualquier otra forma, β , cerrada, relacionada con α (suele decirse que α y β son *cohomólogas*), hará que α sea exacta. Además, el grupo de cohomología de de Rham no sólo es un grupo, sino que es un espacio vectorial expandido sobre los reales.

Dado que muchas características topológicas interesantes residen en los grupos de cohomología singulares, bastaría encontrar alguna relación entre los grupos de cohomología singulares y el grupo de cohomología de de Rham para poder estudiar la topología de la variedad desde un punto de vista geométrico. De manera inversa, se puede entender la geometría y las formas definidas en dicha variedad al estudiarlo desde un punto de vista topológico.

Siguiendo la línea de pensamiento propuesta en [Lee13], se recuerda el teorema de Stokes para variedades con frontera y formas con soporte compacto (es decir, que el dominio donde no se anulan

es compacto), con el propósito de esbozar la demostración del teorema de de Rham. En la sección 4.3 nuevamente se utiliza este teorema, por lo que es importante enunciarlo.

Teorema de Stokes. Dada M una variedad suave, orientada, de dimensión n con frontera, y ω una $(n - 1)$ -forma con soporte compacto en M , entonces se satisface

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (2.61)$$

Este teorema se puede particularizar a diferentes casos, como lo son los resultados clásicos del cálculo multivariable, comunmente conocidos como teorema de Gauss, de Stokes y de Green. Sin embargo, se puede reformular, por ejemplo, para variedades esquinadas (cornered manifolds), así como a cadenas. Para esto, se piensa en las cadenas utilizadas en la construcción de p -simplejos en un espacio topológico cualquiera, y se busca que tenga extensiones suaves. Haciendo esto, se puede definir, entonces, una cadena suave como una cadena con una extensión suave. En este contexto, se reformula el teorema de Stokes para cadenas suaves [Lee13].

Teorema de Stokes para cadenas suaves. Si c es una p -cadena suave en una variedad suave M , y ω es una $(p - 1)$ -forma en M , entonces

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega. \quad (2.62)$$

Dado que la teoría de cohomología con formas está en relación con la teoría de integración en variedades, puede, en principio, que este teorema parezca fuera de lugar en esta sección. Sin embargo, utilizando este teorema se puede definir un homomorfismo de la siguiente manera

$$\mathcal{J} [\omega] [c] = \int_c \omega, \quad (2.63)$$

donde $\int_c d\omega$ es la integral de $d\omega$ a lo largo de c , $[\omega] \in H_{dR}^p(M)$ y $[c] \in H_p(M, \mathbb{R})$, el p -ésimo grupo de homología. Es claro que $\mathcal{J} : H_{dR}^p(M) \rightarrow H_p(M, \mathbb{R})$ es un homomorfismo, llamado *homomorfismo de de Rham*. Aunque varios resultados interesantes se pueden mencionar sobre este homomorfismo, el principal resultado que se utilizará en este trabajo expresa la respuesta al problema propuesto en un principio.

Teorema de de Rham. El homomorfismo de de Rham es un isomorfismo.

Es decir, ya se puede trabajar indistintamente con el p -ésimo grupo de cohomología de de Rham o con el p -ésimo grupo de homología singular con coeficientes reales. Esto significa que los objetos que en un principio únicamente daban nociones geométricas (volumen, área, distancias) ahora están proporcionando información acerca de la topología de la misma variedad. Y viceversa. Si se tiene información acerca del grupo de homología singular, como conexidad y paralelizabilidad, entonces se tiene información acerca de cómo trabajar con las formas complejas, y se recupera la geometría.

Como ya se empezó a trabajar no sólo con formas diferenciales reales sino también con formas complejas, debe intentar entenderse, igualmente, si se puede construir un grupo de cohomología

de formas complejas, así como su relación con los grupos de cohomología singular y grupos de de Rham.

En el caso complejo, como se expuso la sección anterior, existen dos operadores, cuya suma resulta en el operador derivada exterior. Como se mencionó, estos operadores de Dolbeault representan una derivada exterior holomorfa y una anti-holomorfa. La elección entre qué operador utilizar para generar el grupo de cohomología deseado parece ser indiferente, pero por convención se utiliza el operador anti-holomorfo.

Definición. Dados los espacios de formas complejas, $\Omega^{r,s}(M)$, se define $Z_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ como el Kernel de $\bar{\partial} : \Omega^{r,s}(M) \rightarrow \Omega^{r,s+1}(M)$ y a $B_{\bar{\partial}}^{r,s}(M)$ como la imagen de $\bar{\partial} : \Omega^{r,s-1}(M) \rightarrow \Omega^{r,s}(M)$. Entonces, se define el (r, s) -grupo de cohomología como

$$H_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) = Z_{\bar{\partial}}^{r,s}(M) / B_{\bar{\partial}}^{r,s}(M). \quad (2.64)$$

Como se mencionó anteriormente, el espacio de p -formas reales expandidas sobre los complejos (es decir, que se tiene una base considerando la estructura subyacente de variedad diferenciable) se puede descomponer en espacios de (q, r) -formas complejas. De la misma manera, el grupo de cohomología de de Rham se puede descomponer como la suma directa de los grupos de cohomología complejos subyacentes. Esto es:

Proposición. Dada una variedad compleja M , el grupo de cohomología de de Rham se descompone como

$$H_{dR}^p(M) = \bigoplus_{q+r=p} H_{\bar{\partial}}^{q,r}(M). \quad (2.65)$$

De esta manera, ya se puede trabajar indistintamente con grupos de cohomología de de Rham, singulares, o de Dolbeault. Esto será una herramienta muy útil al momento de querer entender la clasificación, en donde se entenderá a estos grupos como rejillas, y se buscará encontrar relaciones con otras rejillas de un rango similar.

2.5.1 Diamante de Hodge

Un último punto a discutir para finalmente pasar a geometría de Kähler son los números de Hodge y los números de Betti, así como el diamante de Hodge. Para esto, se supone que se tiene una variedad compleja M de dimensión n .

Definición. Los números de Hodge se definen como

$$h^{p,q} = \dim H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M), \quad (2.66)$$

y los números de Betti como

$$b_k = \dim H_{dR}^k(M). \quad (2.67)$$

También se define la característica topológica de Euler-Poincaré como $\chi(M) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i b_i$. El número $h^{1,0}$ suele nombrarse igualmente la *irregularidad* de M y $p_g(M) = h^{n,0}$ el género geométrico [GH94].

Además, debe notarse que una forma de volumen definida en las variedades de Kähler es

$$\Omega = \omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega, \quad (2.70)$$

donde n es la dimensión compleja de la variedad de Kähler. Como se muestra en el Apéndice A, $\omega^n \neq 0$. Es importante notar de la demostración presentada que se requiere del uso de la compatibilidad de ω , g y J , por lo que, dada cualquier otra 2-forma η que no cumpla las condiciones de compatibilidad de la sección 2.4 puede cumplir $\eta^n = 0$.

Se notará en la siguiente sección un ejemplo útil de una variedad compleja y compacta que, sin embargo, no es Kähler. Además, por completez, se notará la estructura de Kähler del espacio complejo n -dimensional, ya que las estructuras de Kähler impuestas en el toro complejo y en el espacio proyectivo complejo resultará de utilizar en cierta medida estos resultados.

2.6.1 Ejemplos de variedades de Kähler

Al principio de esta sección se dieron dos ejemplos sin su demostración. Para los siguientes ejemplos, que ya se desarrollaron anteriormente como variedades complejas, se dará una estructura de variedad de Kähler. La construcción de estos ejemplos se puede consultar en [Nak03].

Ejemplo: el espacio complejo n -dimensional. Este espacio hereda la estructura compleja dada por la acción de J_0 , definido en (2.8). La métrica es la métrica usual del espacio plano. La forma simpléctica es $\omega = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dx^j \wedge dy^j = \frac{i}{2} \sum_{\mu=1}^n dz^\mu \wedge d\bar{z}^\mu$. Con esta estructura y utilizando la métrica usual heredada de \mathbb{R}^{2n} , (\mathbb{C}^n, J_0, g) es una variedad de Kähler.

Ejemplo: la variedad de Hopf $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ como variedad compleja, compacta, riemanniana, que no admite métricas de Kähler.

Se sabe que tanto \mathbb{S}^1 como \mathbb{S}^3 son paralelizables, por lo que su producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ es paralelizable. Esto es, existen campos vectoriales definidos en la variedad que no se anulan y son linealmente independientes. Por esto, se puede elegir una base linealmente independiente $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ del haz $T(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3)$, donde E_1 es un campo definido en \mathbb{S}^1 , y E_2, E_3, E_4 son los campos en \mathbb{S}^3 . Con estos campos, se define un operador J de la siguiente manera

$$\begin{aligned} J &: TM \rightarrow TM, \\ JE_1 &= E_2 & JE_2 &= -E_1, \\ JE_3 &= E_4 & JE_4 &= -E_3. \end{aligned}$$

Además, se satisface

$$[E_2, E_3] = E_4, \quad (2.71)$$

$$[E_3, E_4] = E_2, \quad (2.72)$$

$$[E_4, E_2] = E_3, \quad (2.73)$$

$$[E_1, E_i] = 0. \quad (2.74)$$

Entonces, como N_J , el tensor de Nijenhuis definido en (2.35), es multilineal sobre $C^\infty(M)$, basta con ver cómo se comporta en la base para probar que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ es una variedad compleja. Esto es

$$N_J(E_i, E_j) = [JE_i, JE_j] - [E_i, E_j] - J([E_i, JE_j] + [JE_i, E_j]),$$

para cada $i, j = 1, 2, 3, 4$. Es claro por las propiedades del bracket de Lie que si $i = j$, entonces el resultado es trivialmente 0. Por otro lado, si $i = 1$ o $j = 1$, entonces, el tensor se reduce a

$$N_J(E_1, E_j) = [E_2, JE_j] - J[E_2, E_j], \quad (2.75)$$

donde se supone sin pérdida de generalidad que $i = 1$. Si $j = 2$, trivialmente se satisface $N_J(E_1, E_2) = 0$. Si $j = 3$, el primer término resulta $-E_3$ y el segundo $+E_3$, por lo que nuevamente se anula. De la misma manera, si $j = 4$, entonces el primer término es $-E_4$, mientras que el segundo resulta en E_4 , por lo que, nuevamente, el tensor se anula. La antisimetría del mismo da los resultados inversos. Análogamente, si $i = 2$, como $JE_2 = -E_1$, el cálculo es similar (dado que, por construcción, $[E_1, E_j] = 0$). Por tanto, falta verificar el caso $i = 3$ y $j = 4$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} N_J(E_3, E_4) &= [JE_3, JE_4] - [E_3, E_4] - J([JE_3, E_4] + [E_3, JE_4]) \\ &= -[E_4, E_3] - [E_3, E_4] - J([E_4, E_4] + [E_3, -E_3]) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.76)$$

por lo que, finalmente, J es integrable y $H = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ es compleja. Además, por su paralelizabilidad, se puede escoger un marco $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$, por el cual se puede construir una métrica riemanniana. Sin embargo, como se resalta en [DSKZ16], este tipo de variedades no admite una estructura de Kähler.

Ejemplo: el toro complejo \mathbb{C}^n/Λ . Como se hizo en la demostración de su estructura compleja (ver sección 2.1.1), el toro es localmente holomorfo a pequeños dominios abiertos en \mathbb{C}^n . De esta manera, la estructura de variedad de Kähler se hereda al toro. Esto se muestra a continuación en el caso $n = 1$. Para esto, nótese lo siguiente: como $\mathbb{C}/\Lambda(w_1, w_2) \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, entonces es paralelizable y existen dos campos E_1 y E_2 linealmente independientes y que no se anulan. Como $T_p\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$, para toda $p \in \mathbb{C}$, existen dos campos \tilde{E}_1 y \tilde{E}_2 en $T\mathbb{C}$ tales que $\langle \tilde{E}_1(p), \tilde{E}_2(p) \rangle = T_p\mathbb{C}$ y $\tilde{E}_i(p) \equiv E_i(p) \bmod \Lambda(w_1, w_2)$, con $i = 1, 2$. De la misma manera, la estructura riemanniana g , la estructura simpléctica ω , y la estructura compleja J de \mathbb{C} se heredan a $\mathbb{C}/\Lambda(w_1, w_2)$, por lo que $\mathbb{C}/\Lambda(w_1, w_2)$ es una variedad de Kähler.

En general, como muestra McDuff [MS99], toda superficie de Riemann es de Kähler.

Ejemplo: el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Utilizando las coordenadas homogénea introducidas en la sección 2.1.1, se define un potencial de Kähler de la manera

$$\mathcal{H}_i = \sum_{j=0}^n \left| \frac{z_j}{z_i} \right|^2, \quad (2.77)$$

donde, usando el cambio de coordenadas, se nota que los potenciales, en cartas traslapadas, se transforman de forma que

$$\partial\bar{\partial}\log\mathcal{K}_i = \partial\bar{\partial}\log\mathcal{K}_k, \quad i \neq k, \quad i, k = 0, \dots, n, \quad (2.78)$$

por lo que definen a la misma métrica y a la misma forma de Kähler

$$\omega = i\partial\bar{\partial}\mathcal{K}, \quad (2.79)$$

donde ya no es necesario el uso del subíndice. El cálculo realizado en el Apéndice C muestra que esta forma está dada de la siguiente manera:

$$\omega = i \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j\right)^2} \left[\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \sum_{k=0}^n d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^k - \sum_{k,l=0}^n \xi_i^l \bar{\xi}_i^k d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^l \right], \quad (2.80)$$

y la métrica asociada, llamada *métrica de Fubini-Study* [Nak03], es positiva definida y está dada por

$$g = H \sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \sum_{a=0}^n \left(d\xi_i^a \otimes d\bar{\xi}_i^a + d\bar{\xi}_i^a \otimes d\xi_i^a \right) - H \sum_{a,b=0}^n \xi_i^b \bar{\xi}_i^a \left[d\xi_i^a \otimes d\bar{\xi}_i^b + d\bar{\xi}_i^b \otimes d\xi_i^a \right], \quad (2.81)$$

donde $H = \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j\right)^2}$.

La importancia de esta métrica se debe a que en este trabajo se estudian subvariedades N del espacio proyectivo complejo, por lo que heredan la estructura de Kähler y la métrica de Fubini-Study, dado el pull-back (ver Apéndice B.2) asociado a la inclusión $i : N \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Capítulo 3

Elementos de geometría algebraica

Como se mencionó anteriormente, las superficies $K3$ pueden estudiarse desde dos puntos de vista distintos, la geometría diferencial compleja y la geometría algebraica. En este capítulo se introducen conceptos y resultados básicos de geometría algebraica, se presentan brevemente dos teoremas importantes que relacionan estas dos ramas, y se construyen dos ejemplos clásicos: el espacio proyectivo complejo y las curvas elípticas complejas.

Para un estudio más profundo de geometría algebraica puede referirse al primer libro de Kenji Ueno [Uen00] y al libro digital de Milne [Mil17]. Para los conceptos de álgebra abstracta y algunos resultados básicos se puede referir al Apéndice B.1.

3.1 Variedades algebraicas

La idea de variedades algebraicas es similar a la de las variedades diferenciables: dado un conjunto X , para cada punto $x \in X$ se encuentra una vecindad abierta U y una función $f : U \rightarrow V \subset \mathbb{K}^n$, donde \mathbb{K} es un campo arbitrario. Al igual que para las variedades diferenciables, f debe cumplir biyectividad y ser una función *birregular* o *birrational*, V es un conjunto algebraico y U se dice que es una variedad algebraica afín. Entonces, para entender el concepto de variedad algebraica, primero se debe entender qué es una variedad algebraica afín, para lo cual es necesario introducir el concepto de conjunto algebraico. A partir del estudio de estos conjuntos, se definen funciones polinomiales, regulares, birregulares, y se construyen anillos de coordenadas.

Definición de conjunto algebraico. Sea \mathbb{K} un campo y \mathbb{K}^n el espacio resultante de hacer el producto cartesiano de \mathbb{K} n veces. Sea $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios con coeficientes en \mathbb{K} . Sean $f_1, \dots, f_l \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, l un índice. Se define el conjunto algebraico $V(f_1, \dots, f_l)$ como el subconjunto de \mathbb{K}^n tal que los polinomios f_1, \dots, f_l se anulan en los elementos de ese subconjunto [Uen00]. Esto es

$$V(f_1, \dots, f_l) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n : f_\alpha(z_1, \dots, z_n) = 0, \alpha = 1, \dots, l\}. \quad (3.1)$$

Dado un ideal I generado por estos polinomios (ver Apéndice B.1), es decir, $I = \langle f_1, \dots, f_l \rangle =$

$\{g_1 f_1 + \dots + g_l f_l : g_j \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], j = 1, \dots, l\}$, el conjunto algebraico con el que se trabaja, denotado $V(I)$ coincide con el grupo algebraico construido anteriormente.

Dos teoremas que son de importancia son los teoremas de ceros de Hilbert. El primero, llamado el teorema débil, asegura la no vacuidad de los conjuntos algebraicos, mientras que el segundo, llamado únicamente teorema de Hilbert, asegura la relación entre ideales [Uen00].

Teorema Débil de Ceros de Hilbert. Si el ideal I no contiene a la identidad (es decir, $I \neq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$), entonces $V(I) \neq \emptyset$.

Un corolario, que igualmente recibe el nombre de teorema débil de ceros, establece la forma en la que un ideal maximal se genera: dado $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, un ideal maximal se genera como $\mathfrak{M} = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$. Se nota que $V(\mathfrak{M}) = \{(a_1, \dots, a_n)\}$ [Uen00].

Siguiendo algunos resultados concernientes a los conjuntos algebraicos, se propone lo siguiente: si V es un conjunto algebraico, entonces V es un conjunto cerrado. Con esto como premisa, entonces, se define la topología de Zariski.

Definición de topología de Zariski. La topología de Zariski de \mathbb{K}^n está dada por los complementos de conjuntos algebraicos. Un subconjunto X de \mathbb{K}^n hereda la topología de subespacio.

Hay dos resultados interesantes: la topología de Zariski no es Hausdorff y la topología no se conserva bajo producto topológico. El primer resultado es inmediato, dado que en \mathbb{K} , los cerrados consisten de puntos finitos, por lo que los abiertos son infinitos y su intersección nunca será nula. Los casos para dimensiones mayores son similares. El segundo se sigue del hecho de que cualesquiera productos finitos de conjuntos finitos no puede ser infinito. Entonces, por ejemplo, una parábola es un conjunto algebraico en \mathbb{R}^2 , pero nunca podremos encontrar dos conjuntos algebraicos en \mathbb{R} cuyo producto sea igual al descrito por la parábola.

Como se explicará más adelante, el estudio de la relación entre variedades algebraicas y variedades diferenciables depende de unos objetos conocidos como gavillas¹. Para entender el caso particular de las variedades algebraicas, se debe de entender primero el ideal de un conjunto.

Definición. Dado un conjunto cualquiera $U \subseteq \mathbb{K}^n$, se define $\mathbb{I}U$ como el subconjunto de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ que se anula en U .

Un resultado inmediato es $\mathbb{I}U$ es un ideal. En particular, es un ideal radical. Esto significa que para cada $g^N \in \mathbb{I}U$, con N un entero positivo, entonces $g \in \mathbb{I}U$. Varios resultados concernientes a este tipo de ideales se encuentra en [Uen00]. Un resultado que se mencionará por su importancia es el siguiente

Teorema de Ceros de Hilbert. Dado K un campo algebraicamente cerrado (ver Apéndice B.1), $L \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal y $V = V(L)$, entonces

$$\sqrt{L} = \mathbb{I}V(L), \quad (3.2)$$

donde \sqrt{L} es el radical de L . Esto significa que, si $f \in \sqrt{L}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \in L$.

Antes de proceder a algunos ejemplos que ayudarán a entender a las variedades algebraicas, se darán algunas definiciones que igualmente serán de utilidad para entender el enfoque de este capítulo. Para estas construcciones, se puede consultar [Mil17].

¹Hay que notar que en inglés existe la diferencia entre variedad *algebraica* (variety) y *diferenciable* (manifold).

Definición. Dados dos conjuntos algebraicos $U \subseteq \mathbb{K}^m, V \subseteq \mathbb{K}^n$, una función $\phi : U \rightarrow V$ se dice polinomial si, para todo $p \in U$, existen $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ tales que $\phi(p) = (f_1(p), \dots, f_n(p))$.

Definición. Dado un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{K}^n$, una función $\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$ se dice que es regular si para todo $p \in V$ existe $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\phi(p) = f(p)$. Al conjunto de funciones regulares se le denota por \mathcal{O}_V .

Se nota que \mathcal{O}_V es un subanillo (ver Apéndice B.1) del conjunto de todas las funciones al campo.

Definición. El anillo de coordenadas de un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{K}^n$ se define como $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathbb{I}_V$.

De teoría de categorías (ver Apéndice B.1), se puede definir una categoría sobre un espacio topológico (X, τ) , denotada $Top(X)$, donde los objetos son abiertos de X , y los morfismos son $f : U \rightarrow V$, definidos por

$$Mor(U, V) := \begin{cases} \{f : U \rightarrow V\} & \text{si } U \subseteq V, \\ \emptyset & \text{si } U \not\subseteq V \end{cases}$$

Usando esto como preámbulo, se define una *pregavilla* como un funtor contravariante $F : Top(X) \rightarrow Ab$, donde Ab es la categoría de grupos abelianos. Esto permite la siguiente definición.

Definición. Sea X un espacio topológico y F una pregavilla con valores en Ab . F es una gavilla si se satisface lo siguiente:

- Si U es abierto, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, y $f \in F(U)$, tal que $F(i_{U_i}^U) : F(U) \rightarrow F(U_i)$ satisface $F(i_{U_i}^U)(f) = 0, \forall i$, entonces $f = 0$.
- Sea $U = \bigcup_{i \in I} U_i, \{f_i \in F(U_i)\}$, que satisface $F(i_{U_i \cap U_j}^{U_i}) : F(U_i) \rightarrow F(U_i \cap U_j)$ tal que

$$F(i_{U_i \cap U_j}^{U_i})(f_i) = F(i_{U_i \cap U_j}^{U_j})(f_j) \quad \forall i, j \quad (3.3)$$

entonces, existe $f \in F(U)$ tal que $F(i_{U_i}^U)(f) = f_i$, para toda i .

Continuando con esta definición, un espacio anillado es un par (X, \mathcal{O}_X) , donde X es un espacio topológico y \mathcal{O}_X es una gavilla sobre X con valores en anillos conmutativos [Vai16].

En particular, la relación entre el anillo de funciones regulares está relacionado con el anillo de coordenadas por el siguiente teorema.

Teorema. El anillo de coordenadas de V y el anillo de funciones regulares sobre V son isomorfos.

Se nota que el anillo de coordenadas de un conjunto algebraico define una gavilla sobre ese conjunto. Entonces, para entender relaciones entre conjuntos algebraicos, se debe entender a la categoría de espacios algebraicos. Con este fin, se define el isomorfismo en la categoría de espacios anillados.

Definición. En la categoría de espacios anillados, (X, \mathcal{O}_X) y (Y, \mathcal{O}_Y) son isomorfos si existen $(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ y $(g, g^*) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ morfismos de espacios anillados, tales que $(g, g^*) \circ (f, f^*) = (i_X, i_X^*)$ y $(f, f^*) \circ (g, g^*) = (i_Y, i_Y^*)$.

Con estas definiciones en mano, se define finalmente el objeto de estudio de este capítulo.

Definición. Una variedad algebraica *afín* es un espacio anillado (X, \mathcal{O}_X) , tal que existe $V \subseteq \mathbb{K}^n$ algebraico, para $n \geq 1$, tal que $(X, \mathcal{O}_X) \simeq (V, \mathcal{O}_V)$.

Sin embargo, normalmente se habla de variedades algebraicas y no sólo variedades algebraicas afines, así que falta pedirle una condición extra. Además, como se mencionó, un conjunto cualquier con la topología de Zariski no es Hausdorff. Este axioma de separabilidad es indispensable para poder construir variedades topológicas, por lo que se le debe de pedir una condición adicional a este tipo de conjuntos y variedades algebraicas afines para poder trabajar. A diferencia de Ueno [Uen00], se utiliza la definición dada por Milne [Mil17], que ofrece una construcción más técnica.

Definición. Una prevariedad algebraica es un espacio anillado (V, \mathcal{O}) con V compacto tal que cada punto de V tiene una vecindad U tal que $(U, \mathcal{O}_V(U))$ es isomorfo al espacio anillado de funciones regulares sobre el campo. A los U se les conoce como subvariedades algebraicas. Una prevariedad algebraica V se dice que es separable si se satisface el siguiente axioma de separación: para cada par de mapeos regulares $\phi_1, \phi_2 : Z \rightarrow V$, Z una variedad algebraica afín, el subconjunto de Z donde estos coinciden es cerrado. Finalmente, una *variedad algebraica* es una prevariedad separable.

Se nota que estas definiciones retoman la noción de localidad utilizadas al construir variedades topológicas. Aunque el problema de no ser Hausdorff sigue presente, la compacidad y la separabilidad cumplen un análogo. Es fácil notar que muchas variedades son espacios algebraicos. Los siguientes ejemplos, análogos a las variedades complejas, arrojan un poco de luz sobre la definición. El caso trivial, como siempre, es \mathbb{C}^n . Como $\mathbb{I}\mathbb{C} = \langle 0 \rangle$, entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. En este caso, el isomorfismo está dado por $(f, f^*) = (Id, Id^*)$, con $Id : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función identidad. La demostración se sigue fácilmente.

Los ejemplos usuales están dados por los mismos ejemplos que se estudian en un curso de geometría analítica. Estos son, la parábola, la elipse, la hipérbola, en el caso del plano, mientras que en el espacio euclidiano tridimensional se recurre a sus análogos: paraboloides, elipsoides, etc. Por su importancia en este trabajo, se introduce primero el ejemplo del espacio proyectivo complejo como variedad algebraica y más adelante se introduce el ejemplo de las curvas elípticas complejas.

3.2 Espacio proyectivo complejo

En la siguiente sección se mostrará una manera, en algunos casos más sencilla, de calcular grupos de cohomología de variedades algebraicas, así como la relación entre variedades algebraicas y analíticas. Para esto, se tiene que entender la estructura del espacio proyectivo como variedad algebraica, así como sus subvariedades.

En este contexto, se muestra de la misma manera que en el caso analítico que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica [Uen00]. Sean U_i los subconjuntos de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ tales que, si $[z_0, \dots, z_n] \in U_i$, entonces $z_i \neq 0$. Entonces los mapeos $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ son biyecciones, como se sabe². Por tanto, se induce

²En [Uen00] se utiliza la convención $\phi_i : \mathbb{C}^n \rightarrow U_i$, pero para ser consistentes con la convención usada en el capítulo

una topología en cada U_i , de tal manera que se puede considerar a cada U_i como el espacio afín \mathbb{C}^n . Con este mapeo, se debe entender cómo se comportan en las intersecciones, con el propósito de entender la gavilla de esta variedad algebraica.

Para $i = 0, \dots, n$, el mapeo $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ es biyectivo y es una función regular, entonces $\phi_i^* : \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] \rightarrow \mathbb{C}(U_i)$, el *pull-back* de ϕ_i (ver Apéndice B.2) es un isomorfismo de anillos, donde $\mathbb{C}(U_i)$ es el anillo de coordenadas, y actúa como

$$\phi_i^*(f(z_1, \dots, z_n)) = f(\xi_i^0, \xi_i^1, \dots, \xi_i^n), \quad (3.4)$$

donde ξ_i^j , $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$, son las coordenadas inhomogéneas definidas en la sección 2.1.1. Entonces $\mathbb{C}(U_i) \simeq \mathbb{C}[\xi_i^0, \dots, \xi_i^{i-1}, \xi_i^{i+1}, \dots, \xi_i^n]$.

Ya que se tiene la construcción del espacio complejo como variedad algebraica, es necesario mostrar cómo se pueden encajar variedades algebraicas de un espacio afín \mathbb{C}^{n+1} en el espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Dado $f \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ un monomio (es decir, $f = az_0^{m_0}z_1^{m_1}\dots z_n^{m_n}$), el grado de f se define como $\text{grad}(f) = m_0 + m_1 + \dots + m_n$. Dado un polinomio cualquiera $g \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$, se dice que

$$g = \sum_{i_1, \dots, i_n} \alpha_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n} \quad (3.5)$$

es un polinomio homogéneo si todos los monomios $\alpha_{j_1, \dots, j_n} x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_n^{j_n}$ tienen el mismo grado m , y el grado de g es $\text{grad}(g) = m$. De la misma manera se puede *homogeneizar* un polinomio añadiendo una variable extra, como se muestra en el caso de las curvas elípticas en [Kob93].

Entonces, considérese el conjunto algebraico $V(g)$ donde g es un polinomio homogéneo. Sea $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n) \in V(g)$. Por definición, esto significa que $g(\mathbf{z}) = 0$. Como g es homogéneo, se puede escribir como

$$g(\mathbf{z}) = \sum_{m_0 + \dots + m_n = m} \alpha_{m_0 \dots m_n} z_0^{m_0} \dots z_n^{m_n}, \quad (3.6)$$

donde $\alpha_{m_0 \dots m_n} \in \mathbb{C}$. Ahora, sea $w \in [z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Evaluando el polinomio g en w se tiene

$$\begin{aligned} g(w) &= \sum_{m_0 + \dots + m_n = m} \alpha_{m_0 \dots m_n} (\lambda z_0)^{m_0} \cdot \dots \cdot (\lambda z_n)^{m_n} \\ &= \sum_{m_0 + \dots + m_n = m} \alpha_{m_0 \dots m_n} \lambda^{m_0} \cdot z_0^{m_0} \cdot \dots \cdot \lambda^{m_n} \cdot z_n^{m_n} \\ &= \sum_{m_0 + \dots + m_n = m} \alpha_{m_0 \dots m_n} \lambda^m \cdot z_0^{m_0} \cdot \dots \cdot z_n^{m_n} \\ &= \lambda^m \sum_{m_0 + \dots + m_n = m} \alpha_{m_0 \dots m_n} z_0^{m_0} \cdot \dots \cdot z_n^{m_n} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

anterior, se utilizará $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$.

ya que $z \in V(g)$. Por tanto, $w \in V(g)$, que a su vez implica $[z_0 : \dots : z_n] \subseteq V(g)$. Entonces se dice que $V(g)$ es un conjunto algebraico proyectivo. Utilizando el anillo de coordenadas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ se induce un anillo de coordenadas en $V(g)$, por lo que resulta en una variedad algebraica [Mil17].

3.3 Principio GAGA y teorema de Chow

Como en el capítulo anterior, es necesario estudiar la estructura de los grupos de cohomología de las variedades algebraicas. En general, calcular los grupos de cohomología, y en particular los de Rham (como se menciona en [Lee13]), puede resultar complicado. Las variedades algebraicas no son la excepción. Sin embargo, existe una manera en la que se pueden calcular indirectamente. Por esto, en esta sección se enuncia este principio, así como un resultado casi inmediato del mismo, que es el teorema de Chow [Ser56].

En su artículo *Géométrie algébrique et géométrie analytique* [Ser56] (que de ahora en adelante se nombrará simplemente *GAGA*), Jean-Pierre Serre presenta diversos resultados que permiten estudiar en general a las variedades algebraicas desde un punto de vista analítico, utilizando espacios auxiliares. El primer lema que postula es el siguiente.

Lema (1 de GAGA).

- La topología usual de \mathbb{C}^n es más fina que la topología de Zariski. Esto es, denotando la topología usual como τ y a la topología de Zariski como τ_Z , se satisface que $\tau_Z \subseteq \tau$.
- Los conjuntos cerrados en la topología de Zariski son variedades analíticas.
- Si $U \subset \mathbb{C}^n$, $U' \subset \mathbb{C}^m$ y $f : U \rightarrow U'$ es un mapeo regular, entonces f es holomorfa.
- Con las hipótesis de el punto anterior, si f es un isomorfismo regular, entonces es un isomorfismo analítico.

Demostración:

- Dado que $U \in \tau_Z$ implica que $U = V(g_1, \dots, g_r)^c$, entonces, por continuidad de las funciones polinomiales, U es abierto en la topología τ .
- Análogamente, considerando la topología usual en un conjunto cerrado, un polinomio es holomorfo, y por tanto, el conjunto algebraico es analítico.
- Como toda función polinomial es analítica, se sigue, por lo que el último punto se demuestra igual.

Además, se recuerda que una variedad algebraica se construye al igual que una variedad compleja, probando que para todo punto existe una vecindad U_α y una función $\phi : U_\alpha \rightarrow V$ racional y con inversa racional, donde V es un conjunto algebraico. Como en el caso diferencial, a los pares (U_α, ϕ_α) se les nombra *cartas algebraicas* y se tiene la siguiente proposición.

Proposición (2 de GAGA). Sobre una variedad algebraica X existe una única estructura de espacio analítico, tal que para toda carta $\phi : V \rightarrow U$, el conjunto V abierto en la topología de Zariski es abierto en la topología usual y ϕ es un isomorfismo analítico de V , con la topología inducida de X , sobre U , con la estructura analítica definida en el lema anterior.

A este espacio dotado de una estructura analítica se le denota X^{an} . Por el Lema 1, la topología de X^{an} es más fina que la topología de X . Pensando a an como operador, se nota que conserva productos, se comporta bien en los subespacios cerrados y *convierte* a las funciones regulares entre variedades algebraicas en funciones analíticas entre variedades analíticas [Ser56].

Se debe recordar y siempre tener en cuenta que, aun así, el espacio X es distinto que el espacio X^{an} , aunque tengan el mismo conjunto subyacente.

Con la construcción de este nuevo espacio se puede empezar, en este mismo, a utilizar herramientas construidas anteriormente en geometría diferencial compleja. Para poder calcular grupos de cohomología, sin embargo, faltan algunas herramientas. Dada la nueva topología en el espacio analitificado X^{an} , se debe *analitificar* a la gavilla. Así, considérese a la gavilla \mathcal{F} sobre X . La topología dada a \mathcal{F} es la topología débil inducida por las proyecciones $\pi : \mathcal{F} \rightarrow X$. Entonces, \mathcal{F}' será dotado de la topología débil, dada por $\pi' : \mathcal{F}' \rightarrow X^{an}$. Por tanto, se define la *analitificación de \mathcal{F}* como la extensión de la gavilla \mathcal{F}' en todas las funciones holomorfas sobre X^{an} . Se denota por

$$\mathcal{F}^{an} = \mathcal{F}' \otimes \mathcal{H}. \quad (3.8)$$

Con las definiciones de espacio y gavillas analitificadas, se propone un homomorfismo entre grupos de cohomología de la siguiente manera: dada una sección $s : U \rightarrow \mathcal{F}$ con U un abierto (en la topología de Zariski), se puede considerar como una sección s' en \mathcal{F}' . Se define la aplicación $\alpha(s) = s' \otimes 1 \in \mathcal{F}^{an}$. La aplicación ϵ se define como $\epsilon(s) = \alpha(s)$. Resulta que, de esta manera, $\epsilon : H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F}^{an})$ es un homomorfismo. Mas aún, el siguiente teorema asegura la biyectividad.

Teorema 1 (de GAGA). Para toda gavilla algebraica coherente \mathcal{F} sobre X , y para todo entero $p \geq 0$, el homomorfismo

$$\epsilon : H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X^{an}, \mathcal{F}^{an}), \quad (3.9)$$

es un isomorfismo.

Este teorema asegura que, para realizar cálculos, ya no es necesario calcular los grupos de cohomología de una variedad algebraica, sino que basta calcular su analitificación, calcular la analitificación de la gavilla y calcular los grupos de cohomología de estos pares analitificados.

Antes de enunciar los teoremas importantes adicionales, nótese que una gavilla coherente puede ser un espacio de formas, un espacio de funciones continuas, algebraicas u holomorfas. Entonces, considérese una variedad algebraica X , dos gavillas sobre X , \mathcal{F} y \mathcal{G} , y sus analitificaciones correspondientes.

Teorema 2 (de GAGA). Dadas \mathcal{F} y \mathcal{G} , todo homomorfismo analítico de \mathcal{F}^{an} sobre \mathcal{G}^{an} proviene de un homomorfismo algebraico de \mathcal{F} sobre \mathcal{G} .

Teorema 3 (de GAGA). Para toda gavilla analítica coherente \mathcal{M} sobre X , existe una gavilla algebraica coherente \mathcal{F} sobre X tal que \mathcal{F}^{an} es isomorfa a \mathcal{M} . Más aun, esta gavilla es única, salvo isomorfismo.

Estos dos teoremas, a diferencia del primero, no serán tan recurridos durante el texto, sin embargo, una aplicación directa es el siguiente teorema³.

Teorema de Chow. Una subvariedad analítica X en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica.

El resultado que prueba Chow requiere que X sea compacta, lo cual es inmediato si únicamente se le pide que sea cerrado, ya que la compacidad se hereda a espacios cerrados. Por otro lado, en la prueba de Serre es donde entran los teoremas 2 y 3. Además, presenta otros resultados que se derivan de sus resultados, como la invarianza de los números de Betti.

El teorema 1 y el teorema de Chow se utilizan en la construcción de superficies $K3$ y para demostrar la relación entre su estructura algebraica y analítica, como se muestra en el siguiente capítulo.

Antes de proceder a dicha construcción se construye aquí el siguiente ejemplo, en el que se utilizan algunas herramientas que se han discutido.

3.4 Curvas elípticas complejas

La discusión en esta sección está basada en [Kob93] y pretende mostrar la relación entre las herramientas de geometría analítica y geometría algebraica. Considérese el polinomio $f \in \mathbb{C}[x, y]$ definido como

$$f(x, y) = y^2 - ax^3 - bx - c, \quad (3.10)$$

con $a, b, c \in \mathbb{C}$. El conjunto algebraico correspondiente se denotará por $E = V(f)$ y se denominará *curva elíptica compleja*. Es claro que $E \subseteq \mathbb{C}^2$. Sin embargo, en el estudio de curvas elípticas suele utilizarse preferentemente el espacio proyectivo como espacio ambiente para poder entender el comportamiento de la misma al infinito. Por esto se propone el polinomio $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$ dado por $F(x, y, z) = z^m f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, donde $m = 3$, por ser el máximo de los grados de los monomios de f . En este caso se tiene

$$F(x, y, z) = zy^2 - ax^3 - bxz^2 - cz^3, \quad (3.11)$$

de modo que $F(x, y, 1) = f(x, y)$. Es claro, por la discusión hecha en la sección 3.2, que $\tilde{E} = V(F)$ es un subconjunto algebraico de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, por lo que analizar el comportamiento de las soluciones de F permite entender el comportamiento de f en puntos al infinito. Se nota que para cualquier $z \neq 0$ tal que $[x : y : z] \in \tilde{E}$, se tiene $[x/z : y/z : 1] \in \tilde{E}$ y $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = F[x/z : y/z : 1]$, ya que

$$F[x/z : y/z : 1] = F(x/z, y/z, 1) = \left(\frac{y}{z}\right)^2 - a\left(\frac{x}{z}\right)^3 - b\frac{x}{z} - c = f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right). \quad (3.12)$$

³El primero en demostrar el teorema, y por el cual recibe el nombre, fue Wei-Liang Chow en su artículo *On Compact Complex Analytic Varieties* [Cho49] en 1949. Jean-Pierre Serre lo demostró en [Ser56] cuatro años después.

Por el otro lado, si $z = 0$, entonces $[x : y : 0] \in \tilde{E}$ si y sólo si $-ax^3 = 0$. Esto es, $[x : y : 0] = [0 : y : 0] = [0 : 1 : 0]$ corresponde al punto al infinito. Esto abarca los dos casos de análisis para z .

Ahora, considérese nuevamente la rejilla $L = \Lambda(w_1, w_2)$ que se introdujo en el capítulo anterior. Se dice que una función h meromorfa en \mathbb{C} es una *función elíptica* relativa a L si $h(z + l) = h(z)$, donde $l \in L$. Es decir, es una función doblemente periódica. Claramente, una función elíptica está determinada completamente en el paralelogramo fundamental generado por w_1 y w_2 .

Se define la función $\mathcal{P} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ llamada \mathcal{P} -función de Weierstrass, como

$$\mathcal{P}(z) := \mathcal{P}(z : L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq l \in L} \left(\frac{1}{(z-l)^2} - \frac{1}{l^2} \right), \quad (3.13)$$

donde sin perder generalidad, $L = \Lambda(w_1, w_2)$. Son importantes entonces las siguientes proposiciones.

Proposición. La \mathcal{P} -función converge absoluta y uniformemente para $z \in K \subseteq \mathbb{C} \setminus L$, donde K es compacto.

Proposición. \mathcal{P} es una función elíptica relativa a L y su único polo es un polo doble en cada punto de la rejilla L .

A partir de esto se introduce el espacio de funciones elípticas relativas a una rejilla L , denotado por \mathcal{E}_L , y Koblitz [Kob93] muestra algunos resultados concernientes a su estructura algebraica. Por ejemplo, el subespacio de funciones elípticas pares es generado por la \mathcal{P} -función como el anillo $\mathcal{E}^+ = \mathbb{C}(\mathcal{P})$

Antes de mostrar la importancia y la razón por la que se introdujo el concepto de funciones elípticas, se debe notar cómo se comporta la derivada total de la \mathcal{P} -función. Como mostró Koblitz [Kob93], la \mathcal{P} -función converge uniformemente, por lo que la derivada de la misma está bien definida. A partir de esto, la derivada total de \mathcal{P} es

$$\mathcal{P}'(z) = - \sum_{l \in L} \frac{2}{(z-l)^3}. \quad (3.14)$$

de donde \mathcal{P}'^2 es una función par elíptica y se representa como un polinomio cúbico en $\mathcal{P}(z)$ [Kob93]. Para finalizar, nótese que $\mathcal{P}(w_1/2)$, $\mathcal{P}(w_2/2)$ y $\mathcal{P}(w_1/2 + w_2)$ son raíces de $\mathcal{P}'^2(z)$, por lo que

$$\mathcal{P}'^2(z) = c \left(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}\left(\frac{w_1}{2}\right) \right) \left(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}\left(\frac{w_2}{2}\right) \right) \left(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(w_1/2 + w_2) \right), \quad (3.15)$$

con $c \in \mathbb{C}$. Entonces, se define el mapeo $\psi : \mathbb{C}/L = \mathbb{C}/\Lambda(w_1, w_2) \rightarrow \mathbb{CP}^2$ con la siguiente regla de correspondencia

$$z \mapsto [\mathcal{P}(z) : \mathcal{P}'(z) : 1], \quad (3.16)$$

$$0 \mapsto [0 : 1 : 0], \quad (3.17)$$

y los siguientes parámetros

$$g_2(L) = 60 \sum_{0 \neq l \in L} l^{-4}, \quad (3.18)$$

$$g_3(L) = 140 \sum_{0 \neq l \in L} l^{-6}, \quad (3.19)$$

donde $l = nw_1 + mw_2$, $n, m \in \mathbb{N}$. Los coeficientes $g_2(L)$ y $g_3(L)$ se calculan explícitamente en la sección 6 del capítulo 1 del libro de Koblitz [Kob93]. Dadas estas expresiones, se obtiene la ecuación diferencial

$$\mathcal{P}'(z)^2 = f(\mathcal{P}(z)), \quad (3.20)$$

donde

$$f(x) = 4x^3 - g_2(L)x - g_3(L) \in \mathbb{C}[x]. \quad (3.21)$$

Como $\mathcal{P}(z)$ satisface la ecuación diferencial, se llega al siguiente resultado, que da la importancia del estudio de curvas elípticas complejas.

Proposición. El mapeo $\psi : \mathbb{C}/L \rightarrow E$ es biyectivo y analítico, donde

$$E = V(y^2 - 4x^3 + g_2(L)x + g_3(L)). \quad (3.22)$$

Además existe el mapeo inverso y está bien definido.

De esta proposición se destacan dos implicaciones inmediatas. Primero, dado que \mathbb{C}/L es un grupo abeliano bajo la suma módulo L , entonces E hereda una operación binaria que le da estructura de grupo abeliano, donde la suma de dos puntos se da geoméricamente y el neutro es el punto al infinito. Por esta razón, se dice que una curva elíptica es una *variedad abeliana*. La construcción de esta operación se detalla en la sección 7 del primer capítulo de Koblitz [Kob93].

El segundo hecho importante se da como resultado del teorema de Chow: dado que se encajó una curva elíptica en el espacio proyectivo y el mismo tiene estructura de variedad algebraica, entonces por el mapeo ψ , se puede encajar el toro en el espacio proyectivo. Además, es cerrado y como $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ es compacto, aplicando el teorema de Chow, se sigue que el toro es una variedad algebraica. Por su estructura de grupo, entonces es una variedad algebraica abeliana.

Capítulo 4

Superficies $K3$

Con las herramientas construidas hasta este momento, se puede, finalmente, introducir a los espacios de interés de este trabajo. Como se ha repetido, se pueden ver desde dos distintos puntos de vista, los cuales están estrechamente relacionados. Entonces, se introducirán algunos ejemplos de superficies $K3$, desde estos dos puntos de vista, y luego se introducirán herramientas necesarias para su clasificación.

4.1 Breve visita a la conjetura de Calabi

Estudiando variedades complejas, así como se ha hecho con las variedades riemannianas, se ha buscado un invariante ante transformaciones. Este invariante puede estar dado por distintos objetos o características, dependiendo de la noción que se quiera estudiar. Por ejemplo, en superficies compactas, el género resulta un invariante topológico, así como los axiomas de separación. Como se mencionará en el siguiente capítulo, estos invariantes permiten construir la clasificación. Se sabe que el invariante, bajo isometrías, en geometría diferencial de superficies, resulta la curvatura gaussiana. Entonces, surge la duda: ¿habrá, en el análogo n -dimensional, alguna cantidad que se conserve? Se sabe que el tensor de Riemann se conserva bajo isometrías, pero entonces, ¿el tensor de Ricci se debe de conservar bajo estas isometrías?

De acuerdo a Yau [Yau77], la idea de la conjetura de Calabi es la siguiente: dada una variedad de Kähler M , dada su métrica y su tensor de Ricci, g y Ric , entonces $\frac{i}{2\pi} Ric$ es $\bar{\partial}$ -cerrada, y además representa a la primera clase de Chern $c_1(M) \in H^2(M, \mathbb{Z})$. Dada esta construcción, la conjetura es la pregunta inversa: dada una $(1,1)$ -forma cerrada $\mathcal{R} = \frac{i}{2\pi} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$ que representa a la primera clase de Chern, ¿se puede encontrar una métrica g tal que $-2\pi i \mathcal{R}$ sea el tensor de Ricci asociado a dicha métrica?

Conjetura (de Calabi). Dada una variedad de Kähler compacta, existe una métrica de Kähler g tal que $Ric(g) \in 2\pi c_1(M)$. Es decir, el tensor de Ricci asociado a la métrica representa a la primera clase de Chern.

De aquí surge entonces la noción de variedades de Calabi-Yau, por ser Yau el primero en mostrar esta conjetura. Primero, hay que notar en la conjetura, la hipótesis que se impuso: de acuerdo a Yau [Yau77], la conjetura de Calabi es la enunciada anteriormente, pero sin imponer la hipótesis de compacidad. Como en este trabajo se utilizan superficies $K3$, la hipótesis de la compacidad sobre M es por completitud.

Con esto en mente, una *variedad de Calabi-Yau* es una variedad de Kähler con curvatura de Ricci $\text{Ric} = 0$. Una definición análoga consiste en pedir a la primera clase de Chern que se anule, por la conjetura de Calabi.

Sin embargo, hay que notar que este teorema es un teorema de existencia de una métrica hermitiana, pero no dice cómo calcular explícitamente dicha métrica. Por lo tanto, en el caso de las variedades de Calabi-Yau con parametrización conocida, como el toro, se puede calcular la métrica y el tensor de Ricci y puede resultar que no se anule.

4.2 Definiciones y primeros resultados

La siguiente definición citada por Kodaira en [Kod64] es la que se usa a lo largo del trabajo, y se muestra su relación con una definición utilizada más frecuentemente.

Definición. Una *superficie $K3$* es una superficie S compacta, compleja, sin singularidades, con primera clase de Chern $c_1(S) = 0$.

Entonces, por definición, es claro que una superficie $K3$ es inmediatamente una variedad de Calabi-Yau.

Además, siguiendo el trabajo de Kodaira, dado un elemento $F \in H^1(S, \mathcal{O}^*)$, este elemento representa un haz lineal complejo sobre S , donde \mathcal{O}^* es la gavilla multiplicativa de funciones holomorfas sobre S . Si uno revisa la construcción de Milnor de las clases de Chern, se nota que se hace la construcción utilizando clases de Euler [MS17]. Por el otro lado, en el texto de McDuff y Salamon se deben verificar algunos axiomas anteriormente, pero el cálculo de la primera clase de Chern para variedades de dimensión real 2 resulta un cálculo simple [MS99]. En general, el cálculo de clases características resulta técnica y en pocos textos elementales se explica. Sin embargo, se puede considerar el siguiente homomorfismo de grupos de cohomología [Vai16]

$$c_1 : H^1(S, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z}), \quad (4.1)$$

donde \mathcal{O}^* representa la misma gavilla multiplicativa de funciones holomorfas. Entonces, se tiene el siguiente resultado:

Proposición. Una superficie $K3$ es una superficie S , compacta, compleja, sin singularidades, y con primer grupo de cohomología $H^1(M, \mathcal{O}^*) = 0$.

Demostración. Dado que c_1 es un homomorfismo de grupos, entonces $c_1(F) = c_1(0) = 0$.

La importancia en este trabajo de los teoremas GAGA citados anteriormente se muestra en el siguiente resultado. Para esto, considérese que S es una superficie y \mathcal{O} su gavilla de funciones regulares, y S^{an}, \mathcal{O}^{an} sus analitificaciones.

Proposición. Si (S, \mathcal{O}) es una superficie $K3$ en el sentido algebraico, entonces $(S^{an}, \mathcal{O}^{an})$ es una superficie $K3$ en el sentido analítico.

Demostración. Dado que $H^1(S, \mathcal{O}) = 0$, por el primer teorema de GAGA se sigue que $H^1(S^{an}, \mathcal{O}^{an}) = H^1(S, \mathcal{O}) = 0$, por lo que se sigue que $(S^{an}, \mathcal{O}^{an})$ es una superficie $K3$.

Sin embargo, el inverso no necesariamente es cierto. Como menciona Huybrechts [Huy15], existen construcciones de ejemplos de superficies $K3$ analíticas que no necesariamente tienen una representación algebraica.

4.3 Cohomología en superficies $K3$

Los resultados concernientes a la clasificación de superficies $K3$ utilizan invariantes topológicos. Como se mostrará en el siguiente capítulo, el problema de clasificación puede interpretarse como un problema de teoría de categorías, ya que H^p es un funtor contravariante en la primera entrada y covariante en la segunda [Vai16]. En esta sección se presentan algunos resultados que serán de utilidad en el ejemplo de la siguiente sección, y además se calcula el diamante de Hodge para una superficie $K3$ arbitraria.

Como se mencionó en el capítulo 2, el diamante de Hodge para una variedad compleja es el siguiente arreglo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h^{0,0} & & \\
 & & & & \\
 & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\
 h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2}, \\
 & h^{1,2} & & h^{2,1} & \\
 & & h^{2,2} & &
 \end{array} \tag{4.2}$$

donde $h^{p,q}$ representa la dimensión del grupo de cohomología $H_{\mathbb{Q}}^{p,q}(M)$.

El teorema de clasificación de Kodaira-Enriques [GH94] distingue distintas superficies por tres invariantes topológicos: su *irregularidad* $q = h^{1,0}$, su *género geométrico* $p_g = h^{2,0}$ y su número de Kodaira κ . Dicho teorema establece que una superficie $K3$ satisface $q = 0$, $p_g = 1$ y $\kappa = 0$.

Por definición de superficie $K3$, se tiene que $h^{1,0} = h^{0,1} = 0$. El siguiente teorema es una versión, en cierto aspecto, más débil que el teorema de dualidad de Poincaré. Sin perder generalidad, el siguiente resultado se nombrará igualmente dualidad de Poincaré.

Teorema de dualidad de Poincaré. Sea M una variedad compacta y orientable de dimensión n . Si k es un natural menor que n , entonces existe un isomorfismo

$$H_k(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{n-k}(M, \mathbb{Q}), \tag{4.3}$$

entre el k -ésimo grupo de homología de M con coeficientes en los racionales y el $n - k$ -ésimo grupo de cohomología de M con coeficientes en los racionales.

A partir de este teorema, se deduce que $b^k = b^{n-k}$, por lo que $h^{2,1} = h^{1,2} = 0$. Esto se entiende de la siguiente manera: toda 1-forma cerrada es exacta, así como toda 3-forma cerrada es exacta. Por el otro lado, esto no necesariamente es cierto para las 2-formas y para las 4-formas.

El caso del grupo $H^0(M)$ es inmediato. Dado que no existen -1 -formas, entonces el grupo $\mathcal{B}^0 = 0$. Por el otro lado, el conjunto de funciones f tales que $df = 0$ es el espacio \mathbb{C} , por lo que $H_{dR}^0(M) = \mathbb{C}$, y por tanto, $h^{0,0} = h^{2,2} = 1$.

El último caso es para el segundo grupo de cohomología. Por el teorema de Kodaira-Enriques, $p_g = h^{2,0} = h^{0,2} = 1$ y $K_M \equiv 0$. Por definición, la característica de Euler-Poincaré está dada por

$$\chi(M) = \dim H_{dR}^0(M) + \dim H_{dR}^2(M) + \dim H_{dR}^4(M) = 2 + 2 + h^{1,1} = 4 + h^{1,1}, \quad (4.4)$$

por lo que basta calcular dicha característica χ para completar la construcción. Por la fórmula de Noether [GH94]

$$\chi(\mathcal{O}_M) = \frac{1}{12}K\dot{K} + \frac{1}{12}\chi(M) = \frac{1}{12}\chi(M), \quad (4.5)$$

ya que $K_M \equiv 0$, mientras que, por Riemann-Roch [GH94]

$$2 = \chi(\mathcal{O}_M), \quad (4.6)$$

de donde $\chi(M) = 24$. Por tanto, $h^{1,1} = 20$. Entonces, el diamante de Hodge está dado por

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 20 & 1. \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 1 \end{array} \quad (4.7)$$

Entre los teoremas de clasificación destacan los teoremas de Torelli, que consideran que el segundo grupo de cohomología tiene estructura de R -módulo con un producto interno definido. Para esto, el producto propuesto es el producto *cup*, definido de la siguiente manera.

Definición de producto cup. Sean $[\alpha], [\beta] \in H_{dR}^2(M)$. El producto *cup* es la asignación bilineal $\smile: H_{dR}^2(M) \times H_{dR}^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$, con regla de correspondencia [Kod64]

$$([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha] \smile [\beta] = \int_M \alpha \wedge \beta, \quad (4.8)$$

de donde se siguen las siguientes condiciones por propiedades de la integral y el producto cuña.

Proposición. El producto *cup* \smile satisface las siguientes condiciones:

- El producto *cup* \smile no depende del representante,
- El producto *cup* \smile es bilineal y simétrico,
- El producto *cup* \smile es no singular.

Demostración. Sean $[\alpha], [\beta] \in H_{dR}^2(M)$ y $\gamma \in [\alpha], \eta \in [\beta]$. Por definición, existen ξ, θ 1-formas tales que $\gamma = \alpha + d\xi$ y $\eta = \beta + d\theta$. Entonces

$$\begin{aligned} [\gamma] \smile [\eta] &= \int_M \gamma \wedge \eta = \int_M (\alpha + d\xi) \wedge (\beta + d\theta) \\ &= \int_M \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge d\theta + d\xi \wedge \beta + d\xi \wedge d\theta \\ &= \int_M \alpha \wedge \beta \\ &= [\alpha] \smile [\beta], \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde los términos cuyos factores son formas exactas desaparecen por el teorema de Stokes. Efectivamente, nótese el primer caso

$$\int_M \alpha \wedge d\theta = - \int_M d\theta \wedge \alpha = - \int_M d(\theta \wedge \alpha) = - \int_{\partial M} \theta \wedge \alpha = - \int_{\emptyset} \theta \wedge \alpha = 0. \tag{4.10}$$

La condición de bilinealidad y simetría se siguen de las propiedades del producto cuña y la integral. En efecto, notemos que $\alpha \wedge \beta = (-1)^{2+2} \beta \wedge \alpha$ y $\int_S \lambda \alpha \wedge \beta = \lambda \int_M \alpha \wedge \beta$.

Finalmente, la no singularidad del producto cup se sigue del teorema de dualidad de Poincaré (4.3): como $H_{dR}^2(M) \simeq H^2(M, \mathbb{R}) \simeq H_2(M, \mathbb{R}) \simeq H^2(M, \mathbb{R})^*$, entonces $H^2(M) \simeq H^2(M)^*$ y \smile es no singular (consultar [BT82, cap.1, sec.5]).

4.4 Un ejemplo de una superficie $K3$

Utilizando la idea del último teorema de Fermat, una superficie de Fermat en $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ se define mediante el polinomio [Mil17]

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^d + x_2^d + x_3^d + x_4^d, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}, \tag{4.11}$$

donde a $d \geq 3$ se le denomina el rango de la superficie, y la superficie se denotará por $S_F^d = V(f)$. Utilizando la hipótesis de $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, este polinomio tiene solución no trivial para d par.

Concentrémonos en el caso más sencillo con $d = 4$. El espacio resultante se conoce como la *superficie cuártica de Fermat*. Para demostrar que ésta se trata de una superficie $K3$, se utilizará la estructura analítica. Es decir, se utilizará el espacio analítico $((S_F^4)^{an}, \mathcal{O}^{an})$. Como $S_F^4 \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^3$, desde un punto de vista puramente conjuntista, entonces $(S_F^4)^{an}$ hereda una métrica de *Fubini-Study* (ecuación (2.81)) inducida por el *pull-back* (ver Apéndice B.2, ecuación (B.6)) de la inclusión $i : (S_F^4)^{an} \hookrightarrow (\mathbb{C}\mathbb{P}^3)^{an}$. Por tanto, es una variedad de Kähler. Además, como S_F^4 es cerrada en la topología de Zariski, es cerrada en la topología usual y como $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ es compacto y la compacidad se conserva por cerrados, entonces $(S_F^4)^{an}$ es compacta. Hasta el momento, se tiene entonces que $(S_F^4)^{an}$ es una variedad de Kähler y es compacta.

Para finalizar la demostración, se debe considerar un teorema debido a Lefschetz [GH94]. Para poderlo enunciar, recordemos que un haz de línea positivo L es un haz vectorial de rango 1, tal que existe una métrica en L con curvatura R y satisface que $(\frac{i}{2\pi})R$ es una $(1, 1)$ -forma positiva.

Teorema de hiperplano de Lefschetz. Sea M una variedad compleja, compacta de dimensión compleja n y $V \subset M$ una hipersuperficie suave con un haz de línea positivo L , entonces el mapeo

$$H^q(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H^q(V, \mathbb{Q}) \quad (4.12)$$

inducido por la inclusión $i : V \hookrightarrow M$ es un isomorfismo para $q \leq n - 2$ y es inyectivo para $q = n - 1$.

Este teorema ayuda directamente a calcular los números de Betti de hipersuperficies. Nótese que $\dim(S_F^4)^{an} = 2 = \dim(\mathbb{CP}^3) - 1$, y por tanto es una hipersuperficie. Entonces, por el teorema del hiperplano de Lefschetz, se satisface que $q(S_F^4)^{an} = q(\mathbb{CP}^3) = 0$. Es claro, por lo tanto, que $c_1(S_F^4)^{an} = 0$. Esto prueba finalmente que S_F^4 es una variedad compacta de Kähler en 2 dimensiones complejas con primera clase de Chern nula; es decir, es una superficie $K3$.

Capítulo 5

El problema de clasificación y primeros resultados

En los capítulos anteriores se han construido las herramientas necesarias para entender el problema de clasificación de superficies $K3$, incluidas las mismas superficies. Para poder construir y entender cómo se pueden clasificar estas superficies, primero se presenta el problema de clasificación en general. Para entender mejor este problema, se estudia la clasificación del 2-toro desde un punto de vista clásico y con esta idea, se procede a la clasificación de las superficies.

5.1 El problema de clasificación

En varias teorías matemáticas, dos objetos A, B son *indistinguibles* si existe una relación de equivalencia \sim tal que $A \sim B$. De esta manera, se pueden construir diferentes equivalencias entre dos objetos que, en un principio, pueden ser diferentes. Por ejemplo, la igualdad $=$ representa una relación de equivalencia. Como otro ejemplo, sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Dos puntos en X , por ejemplo, x_1, x_2 , son equivalentes si $f(x_1) = f(x_2)$. Es claro que la relación es de equivalencia. Igualmente, bajo la acción de un grupo se puede encontrar relaciones de equivalencia (como se hizo en los Capítulos 2 y 3). En el trabajo presente se utilizará la noción de equivalencia dada por *isomorfismos*.

Es claro que la noción de un isomorfismo (como fue planteada en el apéndice B.1 y no sólo en el sentido de conjuntos con estructura algebraica) representa una relación de equivalencia. No sólo eso, sino que la siguiente proposición relaciona isomorfismos en una categoría con isomorfismos en otra categoría.

Proposición. Dadas dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} y un funtor covariante o contravariante (ver Apéndice B.1) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, si A y B son dos objetos isomorfos en \mathcal{C} , entonces $F(A)$ y $F(B)$ son isomorfos en \mathcal{D} .

Demostración. Como A y B son isomorfos, existe $f : A \rightarrow B$ isomorfismo. Sea $g : B \rightarrow A$ tal que

$f \circ g = 1_B$ y $g \circ f = 1_A$. Como F es funtor covariante, $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(1_B) = 1_{F(B)}$ y $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(1_A) = 1_{F(A)}$. Es claro que $F(f)$ y $F(g)$ son inversas mutuamente. Por tanto, $F(A)$ y $F(B)$ son isomorfos en \mathcal{D} . La demostración cuando F es contravariante es análoga.

En el caso cuando una de las categorías es, por ejemplo, Top^{*1} , dos espacios topológicos con punto base (X, x_0) y (Y, y_0) y dado un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$, con $f(x_0) = y_0$, el grupo fundamental π_1 representa un funtor covariante y $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(Y, y_0)$. Este ejemplo es útil para la siguiente afirmación.

Afirmación. Dados X y Y dos objetos en una categoría \mathcal{C} y un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, si $F(X) \simeq_{\mathcal{D}} F(Y)$, entonces no necesariamente $X \simeq_{\mathcal{C}} Y$.

Aquí se presenta un contraejemplo. Considérese entonces $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (1, 0))$. Es decir, el grupo fundamental del plano euclidiano, perforado en el origen. Se sabe que

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, (1, 0)) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)), \quad (5.1)$$

pero $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \not\cong \mathbb{S}^1$.

Se debe además notar que existen nociones de equivalencia más fuertes o con más información que otras. Por ejemplo, considerando variedades diferenciables M y N de dimensión finita n , se puede tener tres equivalencias: la equivalencia como espacios topológicos (dada por homeomorfismo), la equivalencia como variedades diferenciables (dada por difeomorfismos) y la equivalencia geométrica (dada por isometrías). Se hace notar que, si M y N son difeomorfas, entonces inmediatamente son homeomorfas. Además, si son isométricas, dado que las isometrías se definen como funciones diferenciables, entonces es claro que son difeomorfas.

Con esto en mente, como se mostrará en este y el siguiente capítulo, el estudio del toro y de las superficies $K3$ se tiene que enfocar en resolver distintas preguntas

- ¿Bajo qué noción son equivalentes?
- ¿Dados dos objetos, X y Y en alguna categoría, que puede ser de variedades diferenciables, algebraicas, complejas, simplécticas o riemannianas, qué condiciones tengo que poner a los objetos que puedo asociarles mediante un funtor, $F(X)$ y $F(Y)$, para que X y Y sean isomorfos en esa categoría?

5.2 Primera clasificación del toro

Como se mencionó anteriormente, el problema de clasificación depende de la categoría en la que se está trabajando. Dicho de otra manera, depende de la estructura que se les dé a los espacios y a los mapeos entre ellos. En el caso del toro, la clasificación topológica y la clasificación geométrica² son inmediatas a partir de los siguientes resultados.

¹Los espacios topológicos con un punto base, es decir, (X, x) , donde $x \in X$.

²A partir de este capítulo se referirá como estructura geométrica o clasificación geométrica cuando se refiera al sentido diferenciable real, y estructura compleja o clasificación compleja cuando se trate del sentido diferencial complejo.

Proposición. Toda variedad topológica compacta M de dimensión real $\dim = 2$ admite una triangulación.

Por consiguiente, se puede considerar a la característica de Euler-Poincaré χ en esa variedad, y la clasificación topológica de superficies compactas queda completamente determinada de esta manera, dada la siguiente proposición.

Proposición. Dadas dos superficies compactas, M y N , si $\chi(M) = \chi(N)$, entonces $M \simeq N$, topológicamente.

Resulta que, entonces, cualesquiera dos toros complejos son homeomorfos. Como en el caso de las superficies $K3$, igualmente se puede calcular la primera clase de Chern. Siguiendo la fórmula dada por McDuff [MS99], la primera clase de Chern está dada por $c_1(M) = \frac{2-\chi(M)}{2}$. Se nota que esta fórmula corresponde al género de una superficie compacta, por lo que, si T es el toro complejo, entonces $c_1(T) = 0$. Es decir, el toro T , dada su estructura compleja, admite estructura de variedad de *Calabi-Yau*. Más aun, la clasificación de variedades diferenciables puede forzarse al tener una variedad y un conjunto cualquiera. Considérese la siguiente construcción: sea M una variedad diferenciable y X un conjunto, tal que existe $f : X \rightarrow M$. Entonces, la topología τ_f generada por las intersecciones finitas de imágenes inversas de abiertos en M , $\bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ tal que $U_i \in \tau_M$ e I es un conjunto de índices, hace a (X, τ_f) en una variedad diferenciable difeomorfa a M .

Demostración. Considerando las cartas (diferenciables) (U_i, ϕ_i) de M , sea

$$f^*(U_i, \phi) = (f^{-1}(U_i), \phi_i \circ f), \quad (5.2)$$

llamado el *pull-back* de (U_i, ϕ_i) . Claramente, $\{f^{-1}(U_i)\}$ es una cubierta abierta de X y si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \neq \emptyset$ y

$$\phi_i \circ f \circ (\phi_j \circ f)^{-1} = \phi_i \circ f \circ f^{-1} \phi_j^{-1} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}, \quad (5.3)$$

que es diferenciable. Además, dada ϕ_i y ϕ_j , si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el mapeo

$$\phi_j \circ f \circ (\phi_i \circ f)^{-1} = \phi_j \circ f \circ f^{-1} \phi_i^{-1} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}, \quad (5.4)$$

que es diferenciable. Esto termina la demostración.

Aunque la carta *pull-back* no es necesaria para probar que un mapeo es difeomorfo, se sigue el siguiente resultado.

Corolario. Sea M una variedad diferenciable y $\{(U_i, \phi_i)\}$ un atlas diferenciable. Dado un mapeo biyectivo $f : M \rightarrow M$, entonces $(M, \{(U_i, \phi_i)\})$ es difeomorfa a $(M, \{f^*(U_i, \phi_i)\})$.

Esta discusión sirve para motivar el siguiente paso en la clasificación, que a su vez refina la clasificación geométrica. Recuértese que dados $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tales que $w_2/w_1 \notin \mathbb{R}$, se construye un \mathbb{Z} -módulo (ver Apéndice B.1) como $\Lambda(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$. Es decir,

$$\Lambda(w_1, w_2) = \{nw_1 + mw_2 \in \mathbb{C} : n, m \in \mathbb{Z}\}, \quad (5.5)$$

de tal manera que $\mathbb{T}(w_1, w_2) = \mathbb{C}/\Lambda(w_1, w_2)$. Esta construcción ya se dio en la sección 2.1.1. El interés de esta sección reside en la siguiente pregunta: ¿qué condiciones se deben imponer sobre w'_1 y w'_2 para que generen un toro *biholomorfo* al generado por w_1 y w_2 ? La respuesta se conoce y se da a continuación [Nak03].

Considérese el *módulo* $\tau = \frac{w_2}{w_1}$ tal que $Im(\tau) > 0$. Se considera el siguiente grupo que actúa sobre \mathbb{C}

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \wedge \det(A) = 1 \right\} \quad (5.6)$$

llamado el grupo *especial lineal* de orden 2 y coeficientes enteros y el grupo cociente $\{\pm Id_{\mathbb{C}}\}$

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm Id_{\mathbb{C}}\}. \quad (5.7)$$

Proposición. Dados dos pares de generadores w_1, w_2 y w'_1, w'_2 , entonces es equivalente

- Los módulos $\Lambda(w_1, w_2)$ y $\Lambda(w'_1, w'_2)$ coinciden;
- Existe $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ tal que

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Demostración. Como en [Nak03], supóngase que existe $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ tal que

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

por lo que $w'_1 = aw_1 + bw_2 \in \Lambda(w_1, w_2)$ y $w'_2 = cw_1 + dw_2 \in \Lambda(w_1, w_2)$. Entonces $\Lambda(w'_1, w'_2) \subseteq \Lambda(w_1, w_2)$. De manera análoga, como $\det(A) = 1$, existe la inversa $A^{-1} \in PSL(2, \mathbb{Z})$, y $\Lambda(w_1, w_2) \subseteq \Lambda(w'_1, w'_2)$. Por tanto, $\Lambda(w'_1, w'_2) = \Lambda(w_1, w_2)$.

Por el otro lado, si $\Lambda(w_1, w_2) = \Lambda(w'_1, w'_2)$, entonces a w_1 y w_2 se les considera combinaciones lineales con coeficientes enteros de w'_1 y w'_2 , y viceversa. Esto es,

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad a, a', b, b', c, c', d, d' \in \mathbb{Z}, \quad (5.10)$$

de donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ son inversas y $\det(A) = 1$, lo que concluye la demostración.

Entonces ¿cuál es la relación entre el toro $T(w_1, w_2)$ y $T(1, \tau)$? Para poder responder esta pregunta, se consideran mapeos entre dos toros no necesariamente similares, $h : T(w_1, w_2) \rightarrow T(w'_1, w'_2)$, y su levantamiento entre los espacios cubrientes $h^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que estos mapeos conmutan con las proyecciones. El teorema siguiente que cuenta como un caso particular para superficies de Riemann de un teorema expuesto en la sección 2.1 aclara el panorama de esta pregunta.

Teorema. Dado un mapeo holomorfo $f : M \rightarrow N$ entre superficies de Riemann, si M es compacta, entonces f es constante o suprayectiva.

Demostración. Como los holomorfismos son abiertos, entonces $f(M)$ es abierto en la topología de N . Además, como M es compacta, la compacidad se conserva bajo funciones continuas, por lo que $f(M)$ es compacto, y por tanto, cerrado. Como N es conexo, por ser superficie de Riemann, entonces $f(M) = N$, lo que concluye la demostración.

Continuando con la discusión, se nota que este último teorema señala ya dos condiciones para que dos toros (que son superficies de Riemann compactas) sean equivalentes: *i*) que la función sea holomorfa y *ii*) que el toro sea compacto. Falta entonces verificar la condición de inyectividad y que haya una inversa continua. Esta línea lógica se puede entender como lo muestra Tromba [Tro92]: dado un mapeo holomorfo h entre dos toros, con diferente estructura compleja, se puede levantar a un mapeo h^* entre los espacios cubrientes (que no es otra cosa que \mathbb{C}) tal que h y h^* conmutan con las proyecciones asociadas a cada toro. Sin embargo, dado que hay una infinidad continua de paralelogramos, estos no necesariamente son biholomorfos. Por tanto, se propone la siguiente afirmación:

Afirmación. Dos toros $T(w_1, w_2) = T(w'_1, w'_2)$ son equivalentes si y sólo si $\frac{w_1}{w_2} = \frac{w'_1}{w'_2}$.

Antes de pasar a la demostración, se hacen notar dos características importantes de este resultado: primero, demostrar esta afirmación inmediatamente implica las equivalencias entre toros generados por w_1 y w_2 y aquellos generados por 1 y el módulo τ (ver figura 5.1). Segundo, esta afirmación es distinta a la proposición demostrada anteriormente que implica la existencia de una matriz invertible que relaciona a dos pares distintos de generadores.

Demostración de la afirmación. Dado $\tau = w_2/w_1$ y $\tau' = w'_2/w'_1$, si $\tau = \tau'$, entonces $\Lambda(1, \tau) = \Lambda(1, \tau')$, por lo que los toros generados son equivalentes. Ahora, si dos toros son biholomorfos $T(\tau) \simeq T(\tau')$, entonces existe un mapeo $h : T(\tau) \rightarrow T(\tau')$ que se levanta a $h^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Como

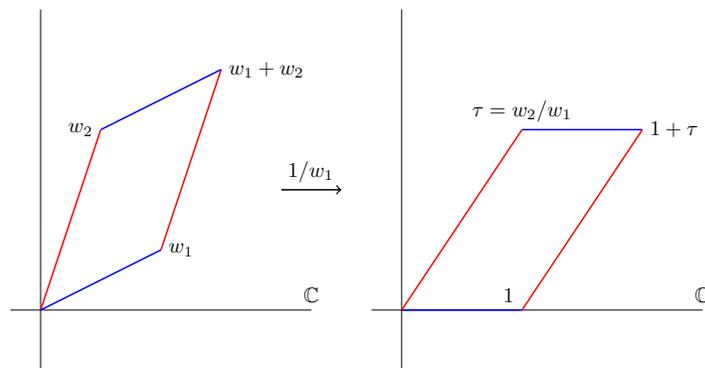


Figura 5.1: La transformación $z \mapsto z/w_1$ preserva ángulos y escala longitudes. Los generadores w_1 y w_2 se transforman en 1 y w_2/w_1 , respectivamente. Se define el *módulo* como $\tau = w_2/w_1$. El paralelogramo con vértices 0 , w_1 , w_2 y $w_1 + w_2$ es equivalente al paralelogramo con vértices 0 , 1 , τ y $1 + \tau$. Por ello, generan el mismo toro.

h^* es biyectiva, entonces $h^*(z) = az + b$, por lo que, aplicando sin pérdida de generalidad una traslación, $h^* = az$. Más aún, como debe conservar los bordes del paralelogramo, se tiene $h^*z = z$, por lo que $\tau = \tau'$.

Dada la proposición anterior, dos módulos generadores en principio distintos generarán al mismo toro si existe $A \in PSL(2, \mathbb{Z})$ tal que

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad (5.11)$$

con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Como se eligió τ con $Im(\tau) > 0$, $\tau \in \mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. A este punto se reduce el problema del espacio de módulos del toro. Ya se tiene qué condiciones se deben imponer sobre τ y τ' para que generen al mismo toro, entonces el espacio modular del toro, que se denotará por \mathcal{M}_T , está dado por:

$$\mathcal{M}_T = \mathbb{H} / PSL(2, \mathbb{Z}). \quad (5.12)$$

Este espacio se piensa como las clases de equivalencia de todos los módulos que generan al toro que son equivalentes por una transformación de Möbius con coeficientes enteros.

El problema, claramente, no acaba en este punto. El siguiente tema a estudiar es la estructura de este espacio, ya que \mathbb{H} es una variedad diferenciable, y $PSL(2, \mathbb{Z})$ actúa sobre \mathbb{H} . Es claro que un teorema de variedad cociente [Lee13] no aplica en este caso, dado que $PSL(2, \mathbb{Z})$ es discreto y por tanto no es de Lie. Sin embargo, el razonamiento siguiente, explicado por Koblitz [Kob93] muestra gráficamente cómo se comporta el espacio \mathcal{M}_T .

Proposición. El espacio de módulos \mathcal{M}_T está dado por

$$\mathcal{M}_T = \left\{ z \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{1}{2} \wedge 1 \leq |z| \right\}. \quad (5.13)$$

Este espacio también se llama *dominio fundamental* (ver figura 5.2).

Demostración. Siguiendo la idea de Koblitz [Kob93, pág.100] considérese las siguientes transformaciones

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \tau \mapsto \tau + 1, \quad (5.14)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}, \quad (5.15)$$

que son generadores de $SL(2, \mathbb{Z})$. La idea de la demostración se divide en dos partes. La primera es mostrar que cualquier punto $\tau^* \in \mathbb{H}$ se mapea a la región propuesta \mathcal{M}_T bajo una serie finita de transformaciones, y por tanto está identificado con algún $\tau \in \mathcal{M}_T$. La segunda es demostrar que, dados dos $\tau, \tau' \in \mathcal{M}_T$, $\tau \not\sim \tau'$.

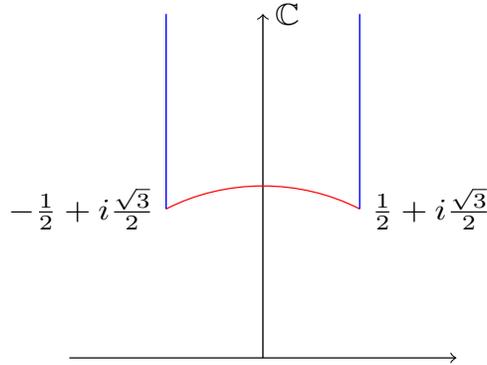


Figura 5.2: Todo módulo $\tau \in \mathbb{H}$ se relaciona con un punto τ_0 en el dominio fundamental \mathcal{M}_T , y los elementos del interior de \mathcal{M}_T no se relacionan entre sí. Las fronteras marcadas de color azul en el primer cuadrante se relacionan con las fronteras azules del segundo cuadrante, y los segmentos rojos del primer cuadrante con los segmentos rojos del segundo cuadrante.

Sea $\tau \in \mathbb{H}$ y $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z})$. Entonces, $\gamma\tau = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ y

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Im}(\gamma\tau) &= \operatorname{Im}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \operatorname{Im}\left[\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\left(\frac{c\bar{\tau}+d}{c\bar{\tau}+d}\right)\right] \\
 &= \operatorname{Im}\left(\frac{ac\tau\bar{\tau}+ad\tau+bc\bar{\tau}+bd}{|c\tau+d|^2}\right) \\
 &= \operatorname{Im}\left(\frac{ad\tau+bc\bar{\tau}}{|c\tau+d|^2}\right) \\
 &= \left(\frac{ad-bc}{|c\tau+d|^2}\right) \operatorname{Im}(\tau) \\
 &= \frac{\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}, \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

de donde, por un lado, $\operatorname{Im}(\gamma\tau)$ está acotado superior e inferiormente, por lo que existe γ' tal que $\operatorname{Im}(\gamma'\tau)$ es maximal. Es claro que existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(T^j\gamma'\tau) \leq \frac{1}{2}$. Sin pérdida de generalidad, supóngase de una vez que $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\gamma'\tau) \leq \frac{1}{2}$. Supóngase además, por contradicción, que $|\gamma'\tau| < 1$. Entonces

$$\operatorname{Im}(M\gamma'\tau) = \operatorname{Im}\frac{\gamma'\tau}{|\gamma'\tau|^2} > \operatorname{Im}(\gamma'\tau), \tag{5.17}$$

que contradice que $\operatorname{Im}(\gamma'\tau)$ sea maximal.

Para terminar la demostración, basta probar que si $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}_T$, entonces $\tau_1 \not\sim \tau_2$, o $\tau_1 \sim \tau_2$ para puntos en la frontera. Primero, notemos que, para cualquier τ en el interior de \mathcal{M}_T , dada una traslación, $T^a\tau \notin \mathcal{M}_T$. De la misma manera, para τ en el interior de \mathcal{M}_T , dada S , tenemos $|S\tau| = 1/|\tau| < 1$. Ahora, para generar contradicción, supóngase que existe $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$ tal que $\gamma\tau_1 = \tau_2$ y, sin pérdida de generalidad, supóngase que $\text{Im}(\tau_2) \geq \text{Im}(\tau_1)$. Por esta hipótesis, se sigue la siguiente desigualdad $|c\tau_1 + d| \leq 1$, ya que

$$\text{Im}(\gamma\tau_1) = \frac{\text{Im}(\tau_1)}{|c\tau_1 + d|^2} \quad (5.18)$$

$$\leq \frac{\text{Im}(\tau_2)}{|c\tau_1 + d|^2} \quad (5.19)$$

$$= \frac{\text{Im}(\gamma\tau_1)}{|c\tau_1 + d|^2}, \quad (5.20)$$

de donde se sigue la desigualdad propuesta. Ahora, nótese que, dado que

$$|c\tau_1 + d|^2 = (c\text{Re}(\tau_1) + d + ic\text{Im}(\tau_1))(c\text{Re}(\tau_1) + d - ic\text{Im}(\tau_1)) = (c\text{Re}(\tau_1) + d)^2 + (c\text{Im}(\tau_1))^2, \quad (5.21)$$

se deduce $|c| < 2$, puesto que $\text{Im}(\tau_1) \geq 1$. A partir de aquí, se desprenden distintos casos:

1. $c = 0$ y $d = \pm 1$. En este caso, la transformación γ es la identidad o $\gamma = \pm \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, de donde $\gamma\tau_1 = \tau_2$ si $\text{Re}(\tau_1) = \pm 1/2$.
2. $c = \pm 1$ y $d = 0$. Para satisfacer la desigualdad $|c\tau_1| = |\tau_1| \geq 1$, entonces $\gamma = T^a S$, con T y S dados por las ecuaciones (5.14) y (5.15), respectivamente. Si $a = 0$, entonces $\tau_2 = 1/\tau_1$ y $|\tau_2| = 1/|\tau_1| = 1$, por lo que τ_2 vive en el segmento de círculo. Si, por el otro lado, $a = \pm 1$ (ya que, si $|a| > 1$, entonces $\gamma\tau_1$ no se encontraría en el dominio fundamental), entonces $\tau_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, y

$$\tau_2 = \gamma\tau_1 = T^1 S \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = T \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \tau_1, \quad (5.22)$$

y, de la misma manera, si $\tau_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $a = -1$.

3. $c = d = \pm 1$, y $\tau_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. En este caso, γ es de la forma $\gamma = T^a S T = T^a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si $a = 1$, entonces

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-1}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \tau_1, \quad (5.23)$$

mientras que si $a = 1$ y $\tau_2 = T\tau_1 = \tau_1 + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $c = -d = \pm 1$ y $\tau_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Para el último caso, notamos que $\gamma = T^a \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si $a = 0$, entonces

$$\tau_2 = \gamma \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-1}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \tau_1, \quad (5.24)$$

mientras que, si $a = -1$, entonces $\tau_2 = \gamma\tau_1 = T^{-1}\tau_1 = \tau_1 - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esto prueba la proposición.

Como se mencionó anteriormente, este es un primer acercamiento a la clasificación del toro, en la que se muestran equivalencias entre estructuras complejas. Al principio de esta sección se probó que la primera clase de Chern se anula, además de que, como se mostró en el segundo capítulo, el toro obtiene una estructura de variedad de Kähler, por lo que la clasificación de únicamente la estructura compleja no engloba todas las estructuras a estudiar en este caso, pero termina con la clasificación de variedades de Calabi-Yau de dimensión compleja 1.

5.3 Clasificación de superficies $K3$

El ejemplo de la superficie cuártica de Fermat presentado en la sección 4.4 establece la estructura geométrica diferenciable real de cualquier superficie $K3$. Esto se sigue ya que cualesquiera dos superficies $K3$ son difeomorfas entre sí. Sin embargo, como se ha enfatizado a lo largo de este trabajo, las distintas estructuras generan distintas clasificaciones. Esta sección se encarga de enunciar estos resultados y sus espacios de módulos.

Esta sección se inicia entonces notando que usando los términos de Kodaira [Kod64], si S es deformación de una superficie S_0 , entonces S y S_0 son difeomorfas [KS58]. Nótese el siguiente resultado.

Proposición. Si S_0 es una superficie $K3$ y S es una variedad diferenciable difeomorfa a S_0 , entonces S es una superficie $K3$.

Demostración. Como S_0 y S son difeomorfas, entonces son homeomorfas y los grupos de cohomología se conservan. Además, la estructura de Kähler se conserva. Por tanto, se sigue que S es una superficie $K3$, demostrando la proposición.

Este resultado únicamente establece cómo distinguir una superficie compleja y concluir que es una superficie $K3$. Sin embargo, no establece la relación entre dos superficies $K3$ cualesquiera. Para esto, el siguiente resultado debido a Kodaira y conjeturado por Weil y Andreotti [Kod64] es fundamental estableciendo dicha relación.

Teorema de Kodaira. Toda superficie compleja $K3$ es una deformación de una superficie cuártica en un espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$.

La demostración presentada por Kodaira de este resultado consiste en la construcción de dicha superficie y resulta, por lo que se mencionó anteriormente, en el siguiente corolario.

Corolario. Cualesquiera dos superficies $K3$ son difeomorfas entre sí.

De esta manera, la clasificación diferenciable de las superficies $K3$ está completamente dada.

Antes de proceder a refinar la clasificación como se hizo en el caso del toro, es conveniente mostrar la importancia de este teorema de clasificación de Kodaira. Para esto, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Considérense tres polinomios de seis variables complejas, $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_6]$, con grado 2. Entonces $V(f_i) \subseteq \mathbb{CP}^5$, $i = 1, 2, 3$, de donde $V_{IC} = V(f_1, f_2, f_3) = V(f_1) \cap V(f_2) \cap V(f_3) \subseteq \mathbb{CP}^3$. Además, supongamos que $I(V_{IC}) = \langle F_1, F_2 \rangle$ con $F_1, F_2 \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_6]$. Entonces V_{IC} es una superficie $K3$.

Demostración. Recurriendo a la analitificación, V_{IC}^{an} es una variedad de Kähler. Además, dadas las siguientes inclusiones

$$V_{IC} \subseteq V(f_1, f_2) \subseteq V(f_1) \subseteq \mathbb{CP}^5, \quad (5.25)$$

se tienen los siguientes homomorfismos de grupos de cohomología

$$H^1(\mathbb{CP}^5, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(V(f_1), \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(V(f_1, f_2), \mathcal{O}^*) \rightarrow H^1(V_{IC}, \mathcal{O}^*), \quad (5.26)$$

de donde se sigue que es isomorfismo, por el teorema del hiperplano de Lefschetz.

A V_{IC} se le conoce como la intersección completa de tres cuádricas en el espacio proyectivo [GH94]. Por el Teorema de Kodaira y su corolario, entonces, V_{IC} es equivalente a la superficie cuártica de Fermat. Sin embargo, esta equivalencia se da como variedades diferenciables, no necesariamente como variedades complejas o como variedades algebraicas. Por ello, el estudio de estas dos estructuras y sus equivalencias se debe refinar. Para esto, se utilizan los teoremas de Torelli que se enuncian a continuación.

Al estudiar la clasificación de superficies de Riemann, Torelli probó que su estructura estaba determinada completamente de la siguiente manera: si X es una superficie de Riemann y $J(X)$ su variedad jacobiana (ver Apéndice B.2), entonces X queda completamente determinada por $J(X)$ [Wei09].

Es notable, a diferencia de la construcción con interpretación geométrica presentada en la sección anterior, que este resultado se basa en la cohomología de las variedades. Como se definió, una superficie $K3$ es compleja, compacta, sin singularidades y además $c_1 = 0$. Por el teorema de Calabi-Yau, se puede reinterpretar utilizando la curvatura de Ricci. Sin embargo, un contraejemplo usual es el siguiente: considérese el toro como variedad diferenciable y su parametrización usual (θ, ϕ) . Al calcular la métrica riemanniana y la curvatura de Ricci, uno se da cuenta de que, al contrario de lo que se espera por ser una variedad de Calabi-Yau, ésta última no se anula. Por tanto, es necesario poner dichas hipótesis en términos del invariante topológico en lugar de la curvatura. De esta manera, las hipótesis de los teoremas de clasificación de superficies $K3$ consisten en analizar la estructura de los grupos de cohomología. Por ejemplo, el teorema de Kodaira y su corolario tienen como hipótesis que la clase característica c_1 se anula. Dado el teorema de clasificación de Kodaira-Enriques, diferentes superficies complejas no singulares pueden tener primera clase de Chern no nula [GH94], por lo que esa hipótesis es bastante restrictiva.

Por otro lado, nótese que una superficie $K3$ tiene primer y tercer grupo de cohomología triviales, por lo que no aportan un refinamiento a la clasificación. Mientras, los grupos de cohomología H^0

y H^4 tienen dimensión 1, por lo que, como espacios vectoriales, son isomorfos. Entonces, el grupo de ayuda en la clasificación es el segundo grupo de cohomología H^2 , en los llamados teoremas de Torelli.

Estos dos teoremas, divididos en el teorema *algebraico* y el teorema *analítico*, se basan en el teorema de Torelli, y consideran distintas estructuras adicionales sobre el segundo grupo de cohomología $H^2(S, \mathbb{Z})$. Como se mostró en la sección 4.3, existe una forma bilineal y simétrica en este grupo, dada por el *producto cup*. Por ello, si S es una superficie $K3$, se dice que $(H^2(S, \mathbb{Z}), \smile)$ es una *retícula*. De esta manera, se propone una retícula modelo, llamada *retícula característica*, denotada por Λ_{K3} . Esta retícula se construye usando tres copias del hiperplano superior y dos de la retícula E_8 , de donde $\Lambda_{K3} = \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus (-E_8) \oplus (-E_8)$, por lo que la forma bilineal asociada tiene una signatura $(3, 19)$ [PSS71]. Esto es, para la matriz asociada a la forma bilineal en Λ_{K3} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$, existe una matriz invertible (no necesariamente ortogonal), tal que existen 3 elementos $v_1, v_2, v_3 \in \Lambda_{K3}$ con $\langle v_i, v_i \rangle > 0$, y 19 elementos, w_j , con $\langle w_j, w_j \rangle < 0$ [Lan02].

Sea S una superficie $K3$ y consideremos el segundo grupo de cohomología singular con coeficientes enteros $H^2(S, \mathbb{Z})$. Se dice que (S, ϕ) es una *superficie marcada* si $\phi : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \Lambda_{K3}$ es una isometría de retículas. Es decir, si $[\alpha]$ y $[\beta]$ son elementos de $H^2(S, \mathbb{Z})$, entonces

$$[\alpha] \smile [\beta] = \langle \phi[\alpha], \phi[\beta] \rangle, \quad (5.27)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la forma bilineal de Λ_{K3} .

En la sección 2.5, se descompuso el operador d en los operadores de Dolbeault, de forma que $d = \partial + \bar{\partial}$. En particular, para todo elemento $[\alpha] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ se tiene $d[\alpha] = 0$. Por ello, para la forma de Kähler ω , se tiene $[\omega] \in H^2(S, \mathbb{Z})$. De esta manera, el estudio del grupo de cohomología $H^2(M, \mathbb{Z})$ se puede emprender desde el estudio de la forma ω .

Con esto, se formula el siguiente teorema, debido a Sapiro y Safarevi [PSS71].

Teorema de Torelli algebraico. Sea (S, ϕ) una superficie $K3$ algebraica marcada. Esta superficie está determinada únicamente por sus periodos.

En otras palabras, se tiene que el estudio de la clasificación de las superficies $K3$ marcadas dependen únicamente de la estructura de Hodge sobre el segundo grupo de cohomología. Dado que las superficies $K3$ son variedades de Kähler, entonces esta estructura de Hodge está dada por el isomorfismo dado en la sección 2.5

$$H_{dR}^2(S) \simeq H_{\bar{\partial}}^{2,0}(S) \oplus H_{\bar{\partial}}^{1,1}(S) \oplus H_{\bar{\partial}}^{0,2}(S), \quad (5.28)$$

donde S es la superficie, H_{dR}^2 es el segundo grupo de cohomología de de Rham, y $H^{p,q}$ es el p, q -ésimo grupo de cohomología de Dolbeault, con $p, q \in \{0, 1, 2\}$.

Con este resultado en mente, se propone un espacio de módulos de superficies $K3$ marcadas. Para ello, se dice que dos superficies marcadas (S, ϕ) y (S', ϕ') son equivalentes si existe un biholomorfismo $g : S \rightarrow S'$, de acuerdo a la definición en 2.1, tal que

$$\phi \circ g^* = \phi', \quad (5.29)$$

donde $g^* : H^2(S', \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S, \mathbb{Z})$ es el *pull-back* de g (ver Apéndice B.2). Dada esta relación de equivalencia, se tiene que el espacio de módulos está dado por

$$N = \{(S, \phi)\} / \sim. \quad (5.30)$$

La estructura de este espacio se estudia detalladamente en las notas de Huybrechts [Huy15], en donde utiliza herramientas como el *mapeo periódico* y dominios de periodos. Sin embargo, se notan dos hechos importantes con respecto a este espacio: primero, N es un espacio que no es Hausdorff. Este fue el mismo problema encontrado al estudiar variedades algebraicas en un principio, donde recurrimos al principio GAGA (ver sección 3.3) para conseguir espacios analitificados que sí cumplieran el segundo axioma de separación. Por ello, se podrían aplicar en este caso las mismas herramientas para volverlo una variedad. Segundo, y más importante, es que N (o N^{an}) es un espacio de dimensión 20.

Así como se entendió el espacio de módulos del toro, donde cada punto representaba una estructura compleja distinta, de la misma manera se entiende este espacio de módulos: cada punto $p = [(S, \phi)] \in N$ representa una superficie $K3$ S y una isometría $\phi : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \Lambda_{K3}$. En otras palabras, N contiene a todas las superficies $K3$ marcadas.

Como se notó en la sección 4.2, como toda superficie $K3$ algebraica es analítica, entonces la clasificación dada por el teorema de Torelli algebraico igual aplica a un subconjunto de las superficies $K3$ analíticas. Sin embargo, la clasificación de las superficies $K3$ analíticas requiere otras hipótesis sobre el segundo grupo de cohomología $H^2(S, \mathbb{Z})$. La formulación y demostración del siguiente teorema se deben a Burns y Rapoport [BR75], y los detalles de estas hipótesis adicionales se pueden encontrar, por ejemplo, en las notas de Huybrechts [Huy15].

Teorema de Torelli analítico. Sean S y S' dos superficies $K3$ y ϕ^* un isomorfismo

$$\phi^* : H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(S', \mathbb{Z}), \quad (5.31)$$

tal que ϕ^*

- preserva las estructuras de Hodge en las extensiones sobre los complejos,
- manda el cono $V^+(S)$ en el cono $V^+(S')$, y
- manda la clase de un divisor efectivo en un ciclo efectivo.

Entonces ϕ^* es inducido por un único isomorfismo $\phi : S' \rightarrow S$.

La segunda hipótesis requiere una estructura adicional sobre $H^2(S, \mathbb{Z})$. En general, se define el cono de un espacio vectorial con un tensor bilineal definido como todos aquellos vectores x que satisfacen $\langle x, x \rangle > 0$. En el caso de las superficies $K3$, se define el cono $V^+(S)$ como la componente conexa de $H^{1,1}(S)$ que satisface $\langle x, x \rangle > 0$, $x \in H^{1,1}(S)$. Por el otro lado, la tercera hipótesis establece relaciones entre los grupos libres generados por las subvariedades de las respectivas superficies [Huy15].

Se debe notar lo siguiente: en el teorema de Torelli analítico *no* se pide que las superficies $K3$ sean marcadas. Al no pedir esta hipótesis, se piden las hipótesis adicionales sobre los conos, los divisores y ciclos. Por ello, la relativa facilidad que uno obtiene al pasar de $K3$ algebraicas a analíticas usando el principio GAGA, se pierde al momento de clasificarlas. Por lo mismo, las herramientas de geometría algebraica son, igual que las técnicas usuales que conocemos de geometría diferencial, indispensables y deben ser consideradas más seguidas en el estudio de teoría de cuerdas y sus compactificaciones.

Capítulo 6

Discusión

En este trabajo se presentaron distintas herramientas y resultados. Algunos de ellos se encuentran en libros de referencia para estudiantes de física, como el texto de Nakahara [Nak03], aunque frecuentemente se omiten las pruebas o detalles de las mismas. Otras herramientas, tales como las construcciones de geometría algebraica, suelen no abordarse en este tipo de libros. En especial para jóvenes con interés en compactificaciones de la teoría de cuerdas, los detalles omitidos resultan de gran relevancia con el objetivo de resolver las preguntas abiertas de esa área de estudio (estabilización de módulos, métricas inducidas, clasificación de modelos, etc.). Hagamos un recuento de lo que se logró en este trabajo.

En el capítulo 2 se introdujeron primero las variedades diferenciables complejas partiendo de la idea de variedad diferenciable, y se probó un teorema de funciones holomorfas. En la sección 2.1.1 se completaron detalles de la demostración de que ciertos espacios son variedades complejas. En el caso del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}$, se mostró que es equivalente a la esfera de Riemann \mathbb{S}^1 , y se introdujo el concepto de *superficie de Riemann*, crucial e.g. en el estudio de las interacciones en teoría de cuerdas [MS95, BKN⁺20b].

En la sección 2.2 se discutió por qué se construye un operador J , que se denomina estructura compleja, utilizando como punto de partida el ejemplo conocido $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$, y se extendió a espacios vectoriales de dimensión par. A diferencia del enfoque, por ejemplo, de Shaikh y De [SD09], este enfoque permite entender al operador J no sólo como multiplicación por la unidad imaginaria i , sino que igualmente permite entenderse como una rotación de π radianes en el subespacio generado por dos vectores complejos linealmente independientes.

En la sección 2.3 se introduce un enfoque de las formas diferenciables complejas desde el punto de las formas diferenciables reales, traduciendo las operaciones algebraicas del álgebra tensorial real, y construyendo los haces de formas Ω^p y esbozando la idea de la demostración de la descomposición de un grupo de p -formas reales en términos de (r, s) -formas complejas, con la condición $r + s = p$.

La sección 2.4 introduce un nuevo concepto de la geometría de Kähler: la geometría simpléctica. La geometría simpléctica ofrece un nuevo enfoque a través de una 2-forma cerrada, y además está estrechamente relacionada con la geometría compleja y la geometría de Riemann. Esto se prueba

en la primera proposición. Además, utilizando una estructura compleja J , se introduce el concepto de integrabilidad y un teorema que establece esta condición.

En la sección 2.4.1 se traducen los tensores de la geometría riemanniana real a la geometría diferencial compleja. Para ello, se prueban algunas afirmaciones y se completan algunos detalles faltantes en la demostración de Nakahara [Nak03].

En algunas referencias consultadas (por ejemplo, las notas de Huybrechts [Huy15]) se hacen referencias implícitas a teoremas de relación entre grupos de cohomología singulares, por lo que en la sección 2.5 se mencionan explícitamente dichos teoremas. De igual manera, se explica la importancia de los números de Hodge y de Betti como invariantes topológicos y por qué son importantes al estudiar el problema de clasificación.

Finalmente, en la sección 2.6 se introducen las variedades de Kähler desde los puntos de vista de geometría compleja y de geometría simpléctica. Al construir algunos ejemplos, se hacen las pruebas completas y se muestra la importancia del teorema de integrabilidad en un contraejemplo: una variedad compleja y compacta que, sin embargo, no es de Kähler.

Como se mostró a lo largo del trabajo, la introducción de la geometría algebraica permite dar un diferente enfoque a las variedades de Kähler. El libro de referencia de Nakahara [Nak03], desafortunadamente, no las introduce. Por ello, el capítulo 3 inicia introduciendo las herramientas básicas de geometría algebraica, utilizando las nociones de conjunto algebraico de Kenji Ueno [Uen00], pero construyendo las variedades algebraicas de acuerdo a la definición de James Milne [Mil17]. Esto constituye una contribución importante para los físicos interesados en esta área de estudio.

Dada la importancia del espacio proyectivo complejo, en la sección 3.2 se prueba que, así como es una variedad compleja, también es una variedad algebraica. Igualmente se prueba que si un punto es elemento de un conjunto algebraico generado por un polinomio homogéneo, entonces la clase de equivalencia es subconjunto del mismo conjunto algebraico, introduciendo así los conjuntos algebraicos del espacio proyectivo complejo.

Dos teoremas fundamentales en el trabajo se presentan en la sección 3.3. La misma importancia de los mismos es tal que permite trabajar, hasta cierto punto, indistintamente con variedades complejas o variedades algebraicas. Esto se muestra primero en la sección 3.4, en donde, siguiendo la idea de Koblitz [Kob93], se prueba que un toro tiene estructura de variedad algebraica, por un lado, o que una variedad algebraica tiene estructura de grupo abeliano.

En el capítulo 4 se discute primero la conjetura de Calabi en la sección 4.1, enfatizando que es un teorema de existencia, más no establece la construcción de una métrica que cumpla las consecuencias del teorema. Esto representa una pregunta abierta que podría explorarse en el futuro.

Con la definición de Kodaira [Kod64], se introducen finalmente las superficies $K3$. Dada la dificultad para calcular clases de Chern a la manera de Milnor [MS17] y McDuff [MS99], se considera a la primera clase de Chern como un homomorfismo de grupos de cohomología, siguiendo a Vaisman [Vai16]. Con ello, se prueban dos proposiciones: primero, si S es una superficie, basta pedirle que su primer grupo de cohomología sea trivial para que sea $K3$, y segundo, si S es una variedad $K3$ en el sentido algebraico, entonces su analitificación S^{an} igualmente es una variedad $K3$.

En la sección 4.3 se calcula el diamante de Hodge a la manera de Griffiths [GH94] y se muestra

que el segundo grupo de cohomología tiene un producto interno definido como la integral del producto cuña de dos formas.

Para finalizar el capítulo 4, se prueba que un conjunto algebraico definido por un polinomio de grado 4 es una superficie $K3$. Para ello, se utiliza el teorema 1 de GAGA y se nota que dicho conjunto es una variedad de Kähler, y utilizando el teorema del hiperplano de Lefschetz, resulta en una superficie $K3$, que además es de Calabi-Yau.

Una vez introducidas todas las herramientas matemáticas necesarias, en el capítulo 5 se empieza a estudiar el problema de clasificación, objetivo de esta tesis. Para ello, utilizando relaciones de equivalencia, se prueba un resultado utilizando herramientas de teoría de categorías: si dos objetos son isomorfos en una categoría y existe un funtor a otra categoría, entonces sus imágenes son isomorfas. De la misma manera, se da un contraejemplo de por qué el inverso no es cierto.

En la sección 5.2 se explica el problema de la clasificación del toro, y se prueban los resultados fundamentales de la clasificación de los toros complejos, completando los detalles de las pruebas de Nakahara [Nak03] y utilizando las ideas presentadas por Tromba [Tro92]. Suele darse por hecho la estructura del espacio de módulos del toro, por lo que se prueba que el espacio de módulos del toro está dado como una franja delimitada por un segmento de arco y dos rectas verticales.

Finalmente, se introduce el problema de clasificación de las superficies $K3$, y se nota que dada una superficie $K3$, S_0 , cualquier otro espacio difeomorfo a S_0 igualmente es una superficie $K3$. Como estas superficies tienen estructura de variedad riemanniana, variedad compleja, simpléctica y además algebraica, se delimitan los distintos casos. Para ello, se mencionan tres teoremas de clasificación. Primero, el teorema debido a Kodaira establece la clasificación a nivel diferenciable, concluyendo que cualesquiera dos superficies $K3$ son difeomorfas. Los siguientes dos teoremas, conocidos como teoremas de Torelli, establecen la clasificación en los casos algebraicos y complejos. Se discuten entonces brevemente dichos teoremas, notando las ventajas y desventajas de los mismos en el caso algebraico y en el caso complejo.

Extensiones de este trabajo

Utilizando las herramientas estudiadas en la elaboración de este trabajo, ya que entendemos mejor la estructura de las superficies $K3$, se pueden emplear distintas expresiones de estas variedades como espacios de compactificación de una teoría de cuerdas 10-dimensional. Presumiblemente, esto conduciría a diferentes teorías cuánticas de campos en 6 dimensiones espacio-temporales. Explorando la equivalencia de las $K3$, uno debería ser capaz de llegar a condiciones de consistencia relacionados tal vez con la cancelación de anomalías [Erl94].

Otra extensión natural de este trabajo, más ligada al formalismo desarrollado, es la clasificación de variedades de Calabi-Yau en 3 dimensiones complejas, fundamentales para conectar las teorías de cuerdas con su fenomenología 4-dimensional supersimétrica. En particular, algunos de los resultados mostrados son invariantes dimensionales. Por ello, sería interesante explorar extender los resultados de GAGA a variedades de Calabi-Yau de intersección completa (CICYs, por su abreviación en inglés), como el ejemplo mostrado en la sección 5.3.

Apéndice A

Orientabilidad en variedades complejas

El concepto de orientabilidad es fundamental en el estudio de variedades diferenciables, en particular en la teoría de integración. Este concepto surge del estudio de espacios vectoriales. En este apéndice se describen brevemente estos conceptos y se dan dos demostraciones acerca de la orientabilidad de las variedades complejas y de Kähler, que se mencionan en el trabajo.

Definición de espacio vectorial orientable. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión n y β una base. Se dice que una base β' de V tiene la misma orientación que β si existe $T \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $T\beta = \beta'$. Si $\det(T) > 0$, se dice que V con la base β está positivamente orientado, y si $\det(T) < 0$, negativamente orientado.

Dado que $GL(n, \mathbb{R})$ es disconexo, se tienen únicamente dos orientaciones posibles, la positiva o negativa. Además, la orientación se puede definir a partir de una n -forma [Lee13].

Proposición. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y una n -forma $\Omega \in V^* \wedge \dots \wedge V^*$. El conjunto de las bases ordenadas $\{(v_1, \dots, v_n)\}$ tales que $\Omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ determinan una orientación para V .

De manera análoga, se define una orientación para una variedad diferenciable M : se dice que M es puntualmente orientable si para todo $p \in M$ existe una orientación para $T_p M$. De la misma manera que en la proposición anterior, se puede definir una orientación en una vecindad de $p \in M$ mediante n -formas [Lee13].

Proposición. Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n \geq 1$. Cualquier n -forma no nula Ω en M determina una orientación, tal que Ω_p determina una orientación para $T_p M$, $p \in M$.

La relación fundamental entre la geometría de una variedad riemanniana y su orientación está dada por el siguiente resultado.

Proposición. Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión n . Existe una única n -forma Ω que determina la orientación de M , tal que

$$\Omega(E_1, \dots, E_n) = 1, \tag{A.1}$$

donde $(E_i)_i$ es un marco ortonormal para M .

Esta n -forma Ω se llama *forma riemanniana de volumen*, o *elemento de volumen riemanniano*. Este resultado asegura que para cualquier variedad de Riemann orientada, dicha forma existe. Ahora, se proponen y muestran los casos de interés.

Proposición. Una variedad compleja M de dimensión n con haz tangente complejo $TM^{\mathbb{C}}$ es orientable en el haz real subyacente TM .

Demostración. Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión $\dim_{\mathbb{C}}(V)$. Sea $\{a_1, \dots, a_n\}$ una \mathbb{C} -base de V . Entonces $\beta = \{a_1, ia_1, \dots, a_n, ia_n\}$ es una \mathbb{R} -base de V , que representa una orientación para V como \mathbb{R} -espacio vectorial. Como $GL(n, \mathbb{C})$ es conexo (notemos que $\det(GL(2, \mathbb{C})) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$), tenemos

$$GL(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (\text{A.2})$$

donde la segunda función está dada por la norma. Por tanto, $GL(n, \mathbb{C}) \sim GL^+(2n, \mathbb{R})$, esto es, la base β determina una orientación positiva. Y esto es válido para cada \mathbb{C} -espacio vectorial.

Ahora, sea (E_1, \dots, E_n) un marco local para $TM^{\mathbb{C}}$. Entonces $(E_1, \bar{E}_1, \dots, E_n, \bar{E}_n)_p$ es una base orientada positivamente para T_pM . Como cada T_pM es un espacio positivamente orientado, entonces la variedad real M con haz tangente real TM es orientable.

Proposición. Una variedad de Kähler es orientable.

Demostración. Recordamos que en una variedad de Kähler tenemos una *forma de Kähler*, ω . En este caso, tenemos una variedad de dimensión real $2n$, y la 2-forma que determinará la orientación será ω . Para ello, hay que notar que ω^n es una $2n$ -forma que satisface $\omega^n \neq 0$. Esto se hace para cada fibra T_pM .

La demostración se sigue de los dos lemas siguientes. Considérese entonces $V = T_pM$ un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión real $2n$, y ω una forma simpléctica en V . Se considera la estructura compleja J compatible con ω en V , de donde $\omega(u, v) = g(Ju, v)$.

Lema 1. Existe una base $\{e_i, f_j\}$ tal que $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_l, f_k) = 0$, y

$$\omega(e_i, f_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

para $i, j, k, l = 1, \dots, n$.

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre la dimensión de V . Sea $n = 1$. Sea $e_1 \in V$ un vector normal ($g(e_1, e_1) = 1$) y $f_1 = Je_1$. Entonces $\{e_1, f_1\}$ es base de V . De aquí, se tiene

$$0 = \omega(e_1, e_1) = \omega(Je_1, Je_1) = \omega(f_1, f_1),$$

lo que prueba la primera condición. Además, se tiene

$$\omega(e_1, f_1) = \omega(e_1, Je_1) = g(e_1, e_1) = 1,$$

que prueba la base de inducción.

Supóngase que es válido para $n - 1$. Sea n tal que $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$. Sea $W \subset V$ un subespacio propio de dimensión $2n - 2$. Por hipótesis de inducción, existe una base $\{e_1, \dots, e_{n-1}, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ ortonormal de W tal que $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$, y $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n - 1$, y δ la delta de Kronecker.

Sea W^\perp el espacio ortogonal a W , y sea $\{g_1, h_1\}$ una base ortonormal para W^\perp , tal que $Jg_1 = h_1$. (De esta manera, esta base satisface las implicaciones del teorema). Como $\{g_1, h_1\}$ satisfacen $\omega(g_1, h_1) = 1$, para terminar la demostración basta mostrar que $\omega(e_i, g_1) = \omega(f_j, h_1) = \omega(e_i, h_1) = \omega(f_j, g_1) = 0$, $\forall i, j = 1, \dots, n - 1$. Para ello, nótese que

$$0 = g(e_i, g_1) = \omega(e_i, Jg_1) = \omega(e_i, h_1),$$

de donde $\omega(e_i, h_1) = 0$. Los otros tres casos son similares. Esto prueba el lema 1.

Con este resultado, entonces $\omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^*$. El siguiente lema finalmente prueba que $\omega^n \neq 0$.

Lema 2. Dada la expresión local de la forma simpléctica ω , se tiene

$$\omega^k = k! \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} e_{i_1}^* \wedge f_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge f_{i_k}^*. \quad (\text{A.4})$$

Demostración. Nuevamente, se hace inducción, pero sobre k . En el caso en el que $k = 1$, $\omega^k = \omega^1 = \omega$, y no aclara la idea de la demostración. Sea $k = 2$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^* \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^* \right) = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^* \wedge e_1^* \wedge f_1^* + \dots + \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^* \wedge e_n^* \wedge f_n^* \\ &= \sum_{i=2}^n e_1^* \wedge f_1^* \wedge e_i^* \wedge f_i^* + e_1^* \wedge f_1^* \wedge e_2^* \wedge f_2^* + \sum_{i=3}^n e_2^* \wedge f_2^* \wedge e_i^* \wedge f_i^* + \dots + \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^* \wedge e_n^* \wedge f_n^* \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} e_i^* \wedge f_i^* \wedge e_j^* \wedge f_j^*. \end{aligned}$$

Esto prueba la base de inducción.

Se supone que es válido para $k - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega^k &= \omega^{k-1} \wedge \omega = (k-1)! \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} e_{i_1}^* \wedge f_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}}^* \wedge f_{i_{k-1}}^* \right) \wedge \sum_{j=1}^n e_j^* \wedge f_j^* \\ &= (k-1)! \left(k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < j < \dots < i_{k-1} \leq n} e_{i_1}^* \wedge f_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_j^* \wedge f_j^* \wedge \dots \wedge e_{i_{k-1}}^* \wedge f_{i_{k-1}}^* \right) \\ &= k! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} e_{i_1}^* \wedge f_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge f_{i_k}^*. \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

En particular, si $k = n$, se tiene $\omega^n = n! e_1^* \wedge f_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \wedge f_n^*$. Por tanto, $\omega^n(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n) = n! \neq 0$.

Apéndice B

Definiciones y algunos resultados

En esta tesis, se utilizan de manera recurrente algunos conceptos y resultados que no se definen explícitamente. El propósito de este apéndice es proporcionar algunas de las definiciones, proposiciones y teoremas de álgebra y topología relevantes en este trabajo para facilitar la lectura del trabajo. Estos elementos son expuestos aquí sin demostración, refiriendo al lector, en algunos casos, a libros de consulta.

B.1 Álgebra

Las definiciones de grupos y anillos presentadas en esta sección se pueden encontrar en los libros de Laveaga [GL14] y de Avella [AMCS17]. Las definiciones de ideales, morfismos, módulos y teoremas de isomorfismo, así como las definiciones de teorías de categorías se pueden consultar en el libro de Lang [Lan02].

Definición de relación de equivalencia. Dado un conjunto A , una *relación de equivalencia* en A , denotada por \sim , satisface

- Si $a \in A$, $a \sim a$ (reflexividad),
- Si $a, b \in A$ si $a \sim b$, entonces $b \sim a$ (simetría),
- Si $a, b, c \in A$, $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$ (transitividad).

Dado $a \in A$, se denota $[a]$ su *clase de equivalencia* que consiste de $b \in A$ tal que $a \sim b$. Se define A/\sim el *espacio de partición* dado por $A/\sim = \{[a] : a \in A\}$.

Definición de grupo. Sea un conjunto G con una operación $*$. $(G, *)$ es un grupo si

- $a * (b * c) = (a * b) * c$ (asociatividad)
- $\exists e \in G : a * e = e * a = a, \forall a \in G$ (existencia del neutro)

- Dada $a \in G$, $\exists b \in G : a * b = b * a = e$ (existencia del inverso)

Kernel e imagen de función entre grupos. Dada f una función entre dos grupos, G y H , se define el kernel de f como $ker(f) = \{g \in G : f(g) = e_H\}$, y la imagen de f como $Im(f) = \{h \in H : (\exists g \in G)(f(g) = h)\}$.

Definición de anillo. Un anillo $(R, +, *)$ es un conjunto R junto con dos operaciones binarias, llamadas *suma* y *producto*, denotadas $+$ y $*$, respectivamente, que satisfacen las siguientes propiedades, para cualesquiera $x, y, z \in R$:

- $(x + y) + z = x + (y + z)$,
- $x + y = y + x$,
- $\exists 0 \in R : x + 0 = 0 + x = x$,
- $\forall x \in R \exists w \in R : w + x = x + w = 0$,
- $(x * y) * z = x * (y * z)$,
- $x * (y + z) = x * y + x * z$.

Anillo conmutativo. Si la operación producto $*$ es conmutativa, se dice que el anillo es conmutativo.

Un anillo conmutativo se llama *dominio entero* en el caso de que, para cualesquiera $x, y \in R$, si $x * y = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.

Teorema. Un anillo conmutativo R es un dominio entero si y sólo si para toda $x, y, z \in R$, si $x * y = x * z$, entonces $y = z$, con $x \neq 0$.

Definición de homomorfismo de anillos. Dada $\phi : R \rightarrow S$, $x, y \in R$. ϕ es un homomorfismo de anillos si

- $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$.
- $\phi(x * y) = \phi(x) \circ \phi(y)$
- $\phi(1_R) = 1_S$.

Si ϕ es una función biyectiva, se dice que ϕ es un isomorfismo de anillos. Si S y R son dos anillos, se dice que S es un subanillo de R si es un subconjunto de R y es un anillo bajo las operaciones inducidas. La intersección arbitraria de subanillos es un anillo. La noción de kernel e imagen de la función ϕ se definen análogamente a la noción en el caso de grupos.

Definición de kernel de un homomorfismo. El kernel de un homomorfismo ϕ es el subconjunto de R : $ker(\phi) = \{r \in R : \phi(r) = 0_S\}$; y la imagen de ϕ es el subconjunto de S : $Im(\phi) = \{s \in S : \exists r \in R : \phi(r) = s\}$.

Definición de ideal. Dado un anillo R , un ideal $I \subset R$ es un subconjunto que es subgrupo bajo la suma y es cerrado bajo multiplicación por la izquierda y la derecha.

Definición de anillo cociente un ideal. Una relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si $x^{-1} + y \in I$ si $x, y \in R$. Entonces, R/I (definido como las clases de equivalencia o cosets derechos) tiene una estructura natural de grupo, bajo la suma. Definiendo a la suma como

$$(a + I) \times (b + I) = ab + I \quad \forall a, b \in R.$$

Proposición. R/I es un anillo bajo las operaciones naturales, y se llamará el anillo cociente.

Primer Teorema de Isomorfismo. Sea $\phi : R \rightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Entonces, el mapeo inducido

$$\begin{aligned} \phi : R/\ker(\phi) &\rightarrow \text{Im}(\phi) \\ a + \ker(\phi) &\mapsto \phi(a) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de anillos.

Definición de campo algebraicamente cerrado. Un campo \mathbb{K} se dice *algebraicamente cerrado* si cualquier polinomio $f \in \mathbb{K}[x]$ tiene al menos una raíz en \mathbb{K} . Por ejemplo, \mathbb{C} es algebraicamente cerrado. \mathbb{R} no es algebraicamente cerrado ya que el polinomio $x^2 - 1$ no tiene raíz en \mathbb{R} .

Definición de R -módulo. Un módulo izquierdo sobre un anillo R ¹ (usualmente R -módulo) es un grupo abeliano M que satisface los axiomas

- Si $r, s \in R, a \in M$, entonces $(r + s)a = ra + sb$,
- Si $r, s \in R, a \in M$, entonces $(rs)a = r(sa)$,
- Si $r \in R, a, b \in M$, entonces $r(a + b) = ra + rb$,
- Para toda $a \in M, 1_R a = a$, con 1_R la identidad multiplicativa de R .

A menos que se diga lo contrario, siempre se utilizan R -módulos izquierdos, y se dicen simplemente R -módulos.

Definición de categoría. Una categoría \mathcal{C} consiste de dos clases, llamadas objetos Obj y clases ajenas para cualesquiera dos objetos A, B llamados los morfismos y denotado por $\text{Mor}(A, B)$ con una ley de composición

$$\circ : \text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C) \rightarrow \text{Mor}(A, C), \quad (\text{B.1})$$

que satisface los siguientes axiomas

¹Un R -módulo derecho se define de manera análoga y cuando R es abeliano con respecto a la multiplicación, ambos R -módulos coinciden.

- La composición \circ está bien definida y es asociativa,
- Para cada objeto A existe $1_A \in \text{Mor}(A, A)$ tal que

$$\circ(f, 1_A) = f, \quad \circ(1_A, g) = g, \quad (\text{B.2})$$

con $f \in \text{Mor}(B, A)$ y $g \in \text{Mor}(A, B)$.

Ejemplos de categorías son las categorías de espacios topológicos Top donde los morfismos son funciones continuas, las categorías de grupos Gps y grupos abelianos Ab donde los morfismos son homomorfismos de grupos y homomorfismos de grupos abelianos, respectivamente. Se define un isomorfismo f en una categoría \mathcal{C} como una función tal que, si $f \in \text{Mor}(A, B)$, existe $g \in \text{Mor}(B, A)$ de modo que $\circ(f, g) = 1_A$ y $\circ(g, f) = 1_B$. En los ejemplos anteriores, el isomorfismo en Top son los homeomorfismos, en Gps son los isomorfismos de grupos, etcétera.

Definición de funtor. Un funtor covariante es una aplicación F entre dos categorías, \mathcal{C} y \mathcal{D} , denotado $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ tal que, si A es un objeto de \mathcal{C} , $F(A)$ es un objeto de \mathcal{D} y si $g : A \rightarrow B$, entonces $F(g) : F(A) \rightarrow F(B)$ sujeto a las siguientes condiciones

- Si $g : A \rightarrow B$ y $h : B \rightarrow C$ entonces $F(h \circ g) = F(h) \circ F(g)$,
- Para todo A , $F(1_A) = 1_{F(A)}$

En el contexto de la definición anterior, un funtor contravariante G revierte las flechas: Si $g : A \rightarrow B$, entonces $G(g) : G(B) \rightarrow G(A)$, con la primera condición reescrita como

- Si $g : A \rightarrow B$ y $h : B \rightarrow C$, entonces $G(h \circ g) = G(g) \circ G(h)$.

B.2 Topología

Las definiciones de topología general presentadas en este apéndice se pueden consultar en el libro de Casarrubias y Tamariz [CSTM15].

Axiomas de separación en espacios topológicos. Dado un espacio topológico (X, τ) , U, V abiertos, F, G cerrados, $x, y \in X$, se dice que un espacio es

- T_0 si $|U \cap \{x, y\}| = 1$,
- T_1 si $\{x\}$ es cerrado para toda $x \in X$,
- T_2 (o de Hausdorff) si $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$,
- T_3 si dado F cerrado y $x \in X \setminus F$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U, F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$, y además es T_0 ,
- $T_{3,5}$ si dadas las hipótesis anteriores, existe $g : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $g(x) = 0$ y $g|_F = 1$, y además es T_0 ,

- T_4 si para cualesquiera F, G cerrados con $F \cap G = \emptyset$, existen $U, V \in \tau$ tales que $F \subseteq U, G \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$, y además es T_1 .

Definición de base y segundo axioma de numerabilidad. Dado un espacio topológico (X, τ) , una *base* para la topología es un subconjunto $\mathcal{B} \subset \tau$ tal que para cualquier $A \in \tau$, existe $\mathcal{B}_A \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcap \mathcal{B}_A$. El *peso* de un espacio topológico es el cardinal

$$W(X, \tau) = \sup \{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es base para } (X, \tau)\}. \quad (\text{B.3})$$

Si $W(X, \tau) < |\mathbb{N}|$, se dice que (X, τ) cumple el *segundo axioma de numeración* (denotado por $2AN$ usualmente).

Definición de conexidad, conexidad por trayectorias y componente conexa. Un espacio topológico X se dice *conexo* si no existen $U, V \in \tau$, $U, V \neq \emptyset$ y $U \cap V = \emptyset$ tales que $X = U \cup V$. Un espacio topológico se dice *conexo por trayectorias* si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe $\phi : [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que $\phi(0) = x$ y $\phi(1) = y$. Un subconjunto Y se dice que es una *componente conexa* en X si Y es conexo y si V es conexo y $Y \subseteq V$, entonces $Y = V$.

Definición de compacidad y paracompacidad. Un espacio topológico se dice *compacto* si para cualquier cubierta abierta \mathcal{U} existe una subcubierta abierta $\mathcal{U}^* \subseteq \mathcal{U}$ finita. Un espacio topológico es *paracompacto* si toda cubierta abierta \mathcal{U} tiene un refinamiento localmente finito \mathcal{V} . Es decir, para todo punto $x \in X$, existe U abierto, $x \in U$, tal que $|\{W \in \mathcal{V} : W \cap U \neq \emptyset\}|$ es finito.

Definición de pull-back. (Consultar [Lee13]). Sean dos variedades diferenciables M y N , un difeomorfismo $F : M \rightarrow N$, una función $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$, un campo vectorial $X : N \rightarrow TN$ y un campo tensorial $A : N \rightarrow T^p(TN)$.

- El *pull-back* de f por F se define como $F^*(f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ con regla de correspondencia

$$F^*(f) = f \circ F, \quad (\text{B.4})$$

que es continua y diferenciable.

- El *pull-back* de X por F se define como $F^*(X) : M \rightarrow TM$ y tiene regla de correspondencia

$$F^*(X) = dF^{-1} \circ X \circ F, \quad (\text{B.5})$$

que está bien definida y es suave.

- El *pull-back* de A por F se define como $F^*(A) \in T^p(TM)$ con regla de correspondencia

$$F^*A(v_1, \dots, v_p) = A(dF(v_1), \dots, dF(v_p)), \quad (\text{B.6})$$

donde $dF : TM \rightarrow TN$ representa el mapeo tangente de F .

Definición de simplejo euclidiano singular. (Consultar [MS17]). El n -simplejo estandar es el conjunto convexo $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$\Delta = \{(t_0, \dots, t_n) : t_i \geq 0, i = 0, \dots, n, t_0 + \dots + t_n = 1\}. \quad (\text{B.7})$$

Si X es un espacio topológico, cualquier aplicación *continua* $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ se llama un n -simplejo *singular*.

Definición de grupo de Picard y variedad jacobiana. (Consultar [?, cap.17]). Dada una variedad diferenciable M , el grupo de Picard se define como el primer grupo de cohomología de M con coeficientes en la gavilla multiplicativa, y se denota por $\text{Pic}(M) = H^1(M, \mathcal{O}^*)$. La variedad jacobiana de M , $J(M)$, es la componente conexa que satisface $0 \in J(M) \subseteq H^1(M, \mathcal{O}^*)$.

Apéndice C

Métrica de Fubini-Study

Como se mencionó en la sección 2.6.1, el potencial, la forma y la métrica de Kähler no dependen de las coordenadas. Por ello, el potencial introducido en la sección 2.6 se utiliza sin el subíndice i : $\mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}$.

Dado $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, existe i con $0 \leq i \leq n$ tal que $p \in U_i$, y dado el potencial \mathcal{K} de la sección 2.6, podemos reescribirlo como

$$\mathcal{K} = \log \sum \left| \xi_i^j \right|^2 = \log \sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j, \quad (\text{C.1})$$

donde $\xi_i^j = \frac{z_j}{z_i}$ son las coordenadas inhomogéneas definidas en la sección 2.1.1. Por definición de potencial de Kähler, tenemos que la forma de Kähler es

$$\omega = i\partial\bar{\partial}\mathcal{K}.$$

Para calcular ω , aplicamos ∂ y $\bar{\partial}$ por pasos. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\mathcal{K} &= \sum_{l=0}^n \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_i^l} \left(\log \sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \right) d\bar{\xi}_i^l \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j} \xi_i^j \sum_{l=0}^n \delta_{jl} d\bar{\xi}_i^l \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j} \sum_{l=0}^n \xi_i^l d\bar{\xi}_i^l, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

y aplicamos ∂ como

$$\begin{aligned}
\partial\bar{\partial}\mathcal{K} &= \partial \frac{1}{\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j} \sum_{l=0}^n \xi_i^l d\bar{\xi}_i^l \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i^k} \frac{1}{\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j} \sum_{l=0}^n \xi_i^l d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^l \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j\right)^2} \left[\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \sum_{k=0}^n \delta_{kl} d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^l - \sum_{k,l=0}^n \xi_i^l \bar{\xi}_i^k d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^l \right] \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j\right)^2} \left[\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \sum_{k=0}^n d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^k - \sum_{k,l=0}^n \xi_i^l \bar{\xi}_i^k d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^l \right], \tag{C.3}
\end{aligned}$$

de donde, finalmente, tenemos

$$\omega = i \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j\right)^2} \left[\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \sum_{k=0}^n d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^k - \sum_{k,l=0}^n \xi_i^l \bar{\xi}_i^k d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^l \right]. \tag{C.4}$$

Como $U_i \simeq \mathbb{C}^n$, entonces podemos considerar los campos E_a y \bar{E}_b que son duales a $d\xi_i^a$ y $d\bar{\xi}_i^b$, respectivamente. Como notamos en la sección 2.3, $d\xi_i^a(\bar{E}_b) = 0$, para cualesquiera dos valores de a y b , y $d\bar{\xi}_i^a(E_t) = 0$, igualmente para cualesquiera dos valores de a y b .

Más aun, recordemos que $JE_a = iE_a$ y $J\bar{E}_s = -i\bar{E}_s$. Con esto, calculamos las componentes de la métrica de Fubini-Study. Primero notamos

$$g_{ab} = g(E_a, E_b) = \omega(E_a, JE_b) = i\omega(E_a, E_b) = 0, \tag{C.5}$$

por la observación de una forma antiholomorfa actuando en un vector holomorfo. De la misma manera, $g_{\bar{a}\bar{b}} = 0$. Esto ya lo esperábamos dado que queremos que g sea hermitiana.

Para concluir, calculamos las componentes con índices mixtos. Sea $H = \frac{1}{\left(\sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j\right)^2}$. Entonces

$$\begin{aligned}
g_{a\bar{b}} &= \omega(E_a, J\bar{E}_b) = -i\omega(E_a, \bar{E}_b) \\
&= H \sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \sum_{k=0}^n d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^k (E_a, \bar{E}_b) - H \sum_{k,l=0}^n \xi_i^l \bar{\xi}_i^k d\xi_i^k \wedge d\bar{\xi}_i^l (E_a, \bar{E}_b) \\
&= H \sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \delta_{a\bar{b}} - H \sum_{k,l=0}^n \xi_i^l \bar{\xi}_i^k \delta_{\bar{k}a} \delta_{l\bar{b}} \\
&= H \sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \delta_{a\bar{b}} - H \xi_i^b \bar{\xi}_i^a, \tag{C.6}
\end{aligned}$$

y de manera análoga

$$g_{\bar{a}b} = H \sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \delta_{\bar{a}b} - H \xi_i^a \bar{\xi}_i^b, \quad (\text{C.7})$$

por lo que la métrica de Fubini-Study queda dada por

$$\begin{aligned} g &= \sum_{a,b=0}^n g_{a\bar{b}} d\xi_i^a \otimes d\bar{\xi}_i^b + \sum_{a,b=0}^n g_{\bar{a}b} d\bar{\xi}_i^a \otimes d\xi_i^b \\ &= H \sum_{j=0}^n \xi_i^j \bar{\xi}_i^j \sum_{a=0}^n \left(d\xi_i^a \otimes a\bar{\xi}_i^a + d\bar{\xi}_i^a \otimes d\xi_i^a \right) - H \sum_{a,b=0}^n \xi_i^b \bar{\xi}_i^a \left[d\xi_i^a \otimes d\bar{\xi}_i^b + d\bar{\xi}_i^b \otimes d\xi_i^a \right] \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Bibliografía

- [AG96] Paul S. Aspinwall and Mark Gross. The $so(32)$ heterotic string on a k3 surface. *Physics Letters B*, 387(4):735–742, Oct 1996.
- [AL96] Paul S. Aspinwall and Jan Louis. On the ubiquity of K3 fibrations in string duality. *Phys. Lett. B*, 369:233–242, 1996.
- [AMCS17] Diana Avella, Octavio Mendoza, Sáenz Corina, and María José Souto. *Grupos I. Papirhos*: Instituto de Matemáticas de la UNAM, 3 edition, 2017.
- [BBS07] Katrix Becker, Melanie Becker, and John H. Schwarz. *String Theory and M-Theory. A Modern Introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [BKN⁺20a] Alexander Baur, Moritz Kade, Hans Peter Nilles, Saúl Ramos-Sánchez, and Patrick K.S. Vaudrevange. Siegel modular flavor group and CP from string theory. 12 2020.
- [BKN⁺20b] Alexander Baur, Moritz Kade, Hans Peter Nilles, Saul Ramos-Sánchez, and Patrick K.S. Vaudrevange. Siegel modular flavor group with CP from string theory. 12 2020.
- [BR75] Dan Burns and Michael Rapoport. On the Torelli problem for Kählerian k3 surfaces. *Annales scientifiques de l'É.N.S 4e série*, 8:235–273, 1975.
- [BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [Cho49] Wei-Liang Chow. *On Compact Complex Analytic Varieties*, 1949.
- [CHSW85] P. Candelas, Gary T. Horowitz, Andrew Strominger, and Edward Witten. Vacuum Configurations for Superstrings. *Nucl. Phys. B*, 258:46–74, 1985.
- [CSTM15] Fidel Casarrubias Segura and Ángel Tamariz Mascarúa. *Elementos de Topología General*. Sociedad Matemática Mexicana, 2015.

- [DHVW85] Lance J. Dixon, Jeffrey A. Harvey, C. Vafa, and Edward Witten. Strings on Orbifolds. *Nucl. Phys. B*, 261:678–686, 1985.
- [DSKZ16] Antonio J. Di Scala, Naohiko Kasuya, and Daniele Zuddas. *Non-Kähler Complex Structures on \mathbb{R}^4* . 2016.
- [Erl94] Jens Erler. Anomaly cancellation in six-dimensions. *J. Math. Phys.*, 35:1819–1833, 1994.
- [FIQS90] A. Font, Luis E. Ibáñez, F. Quevedo, and A. Sierra. The Construction of 'Realistic' Four-Dimensional Strings Through Orbifolds. *Nucl. Phys. B*, 331:421–474, 1990.
- [FK92] Hershel M. Farkas and Irwin Kra. *Riemann Surfaces*. Springer, 2 edition, 1992.
- [GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley and Sons, Inc., 1994.
- [GL14] Carmen Gómez Laveaga. *Álgebra Superior: Curso Completo*. Las Prensas de Ciencias, 1 edition, 2014.
- [HT07] Gabriele Honecker and Michele Trapletti. Merging Heterotic Orbifolds and K3 Compactifications with Line Bundles. *JHEP*, 01:051, 2007.
- [Huy15] Daniel Huybrechts. Lectures on k3 surfaces, 2015. <https://www.math.uni-bonn.de/people/huybrech/K3Global.pdf>.
- [KKK07] Jihn E. Kim, Ji-Hun Kim, and Bumseok Kyaе. Superstring standard model from $Z(12-I)$ orbifold compactification with and without exotics, and effective R-parity. *JHEP*, 06:034, 2007.
- [Kob93] Neal Koblitz. *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*. Springer-Verlag, 2 edition, 1993.
- [Kod64] Kunihiko Kodaira. *On the Structure of Compact Complex Analytic Surfaces, I*, 1964.
- [KRZ05] Tatsuo Kobayashi, Stuart Raby, and Ren-Jie Zhang. Searching for realistic 4d string models with a Pati-Salam symmetry: Orbifold grand unified theories from heterotic string compactification on a $Z(6)$ orbifold. *Nucl. Phys. B*, 704:3–55, 2005.
- [KS58] Kunihiko Kodaira and D.C. Spencer. *On Deformations of Complex Analytic Structures, I*, 1958.
- [Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 1. Springer, 3 edition, 2002.
- [Lee97] John M. Lee. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer-Verlag, 1997.

- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2 edition, 2013.
- [Mil17] James S. Milne. Algebraic geometry, 2017. www.jmilne.org/math/.
- [MS95] P. Mayr and S. Stieberger. Moduli dependence of one loop gauge couplings in (0,2) compactifications. *Phys. Lett. B*, 355:107–116, 1995.
- [MS99] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford, 2 edition, 1999.
- [MS17] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Clases características*. Papirhos, 1 edition, 2017.
- [Nak03] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. IOP Publishing Ltd, 2 edition, 2003.
- [NRSRV09] Hans Peter Nilles, Saul Ramos-Sánchez, Michael Ratz, and Patrick K.S. Vaudrevange. From strings to the MSSM. *Eur. Phys. J. C*, 59:249–267, 2009.
- [NRSV20a] Hans Peter Nilles, Saúl Ramos-Sánchez, and Patrick K.S. Vaudrevange. Eclectic flavor scheme from ten-dimensional string theory – II. Detailed technical analysis. 10 2020.
- [NRSV20b] Hans Peter Nilles, Saúl Ramos-Sánchez, and Patrick K.S. Vaudrevange. Eclectic Flavor Groups. *JHEP*, 02:045, 2020.
- [NRSV20c] Hans Peter Nilles, Saúl Ramos-Sánchez, and Patrick K.S. Vaudrevange. Lessons from eclectic flavor symmetries. *Nucl. Phys. B*, 957:115098, 2020.
- [NRV20] Hans Peter Nilles, Saúl Ramos-Sánchez, and Patrick K.S. Vaudrevange. Eclectic flavor scheme from ten-dimensional string theory – i. basic results. *Physics Letters B*, 808:135615, Sep 2020.
- [OTPMRS18] Yessenia Olguin-Trejo, Ricardo Pérez-Martínez, and Saul Ramos-Sánchez. Charting the flavor landscape of MSSM-like Abelian heterotic orbifolds. *Phys. Rev. D*, 98(10):106020, 2018.
- [PSS71] I. Pjatecki-Sapiro and I. R. Safarevi. A Torelli theorem for algebraic surfaces of type $k3$. *Math. USSR Izv.*, 5:547–588, 1971.
- [SD09] A.A. Shaikh and U.C. De. *Complex Manifolds and Contact Manifolds*. Alpha Science International Ltd., 2009.
- [Ser56] Jean-Pierre Serre. *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, 1956.

-
- [Tro92] Anthony J. Tromba. *Teichmüller Theory in Riemannian Geometry: based on lecture notes by Jochen Denzler*. Birkhäuser, 1992.
- [Uen00] Kenji Ueno. *Algebraic Geometry 1: From Algebraic Varieties to Schemes*. American Mathematical Society, 2000.
- [Vai16] Izu Vaisman. *Cohomology and Differential Forms*. Dover Publications, Inc., 2016.
- [Wei09] André Weil. *Oeuvres Scientifiques / Collected Papers: Volume 2 (1951-1964)*, volume 2. Springer, 1st ed. 1979. 2nd printing edition, 2009.
- [Yau77] Shing-Tung Yau. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, 1977.