



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**Análisis cinemático del sistema de  
suspensión para un prototipo FSAE  
mediante la ecuación de Freudenstein.  
Comparación con ADAMS**

**TESIS**

Que para obtener el título de  
**Ingeniero Mecánico**

**P R E S E N T A**

Trejo Sánchez Alan Alexis

**DIRECTOR DE TESIS**

M.C. Ledezma Rubio Yahvé Abdul



**Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice

Agradecimiento .....	5
.....	5
CAPÍTULO 1: Introducción.....	7
1.1. Marco histórico.....	7
1.2. Hipótesis .....	8
1.3. Objetivo .....	9
1.4. Antecedentes.....	9
CAPÍTULO 2: Marco teórico .....	11
2.1. Formula SAE .....	11
2.1.1. Proyecto.....	11
2.1.2. UNAM Motorsports .....	11
2.2. Suspensión.....	12
2.2.1. Marco de referencia.....	13
2.2.2. Llanta.....	14
2.2.3. Fuerza normal ( $F_z$ ).....	15
2.2.4. Fuerza lateral ( $F_y$ ).....	16
2.2.5. Yaw moment ( $\psi$ ) .....	16
2.2.6. Roll moment ( $\phi$ ).....	17
2.2.7. Cinemática de la suspensión .....	17
2.1.2. Suspensión push-rod y pull-rod.....	35
2.1.3. Rigidez.....	36
2.1.4. Amortiguación.....	45
2.2. Ecuación de Freudenstein.....	47
CAPÍTULO 3: Desarrollo .....	49
3.1. Diseño de la suspensión UNAM Motorsports .....	49
3.1.1. Criterios de diseño .....	49
3.1.1. Parámetros generales de diseño.....	51
3.2. Wolfram Mathematica, versión 11.3 .....	53
3.2.1. Ecuación de Freudenstein: suspensión delantera.....	53
3.2.2. Ecuación de Freudenstein: suspensión trasera. ....	58
3.2.3. Ubicación del IC y RC.....	60
3.2.4. Análisis .....	61
3.3. WinGeo.....	63
3.3.1. Análisis .....	63

3.4.	ADAMS.....	64
3.4.1.	Análisis.....	65
CAPÍTULO 4: Resultados.....		67
4.1.	Wolfram Mathematica.....	67
4.1.1.	Resultados en ride.....	67
4.1.2.	Resultados en roll.....	69
4.2.	WinGeo.....	70
4.2.1.	Resultados en ride.....	70
4.2.2.	Resultados en roll.....	72
4.3.	ADAMS.....	74
4.3.1.	Resultados en ride.....	74
4.3.2.	Resultados en roll.....	76
4.4.	Análisis de resultados.....	77
4.4.1.	Resultados generales en ride.....	77
4.4.2.	Resultados generales en roll.....	82
4.4.3.	Tiempo de procesamiento.....	86
4.4.4.	Resultados de transferencia de carga.....	87
CAPÍTULO 5: Conclusiones.....		91
5.1.	Trabajo a futuro.....	94
Material extra.....		95
6.1.	Glosario.....	95
6.2.	Anexos.....	100
6.2.1.	Anexo 1: Fuerza longitudinal (Fx).....	100
6.2.2.	Anexo 2: Efectos generados por la fuerza lateral (Fy).....	103
6.2.3.	Anexo 3: Pitch ( $\Theta$ ).....	107
6.2.4.	Anexo 4: Factores que afectan al desempeño de la llanta.....	109
6.2.5.	Anexo 5: Yaw Moment: understeer, oversteer y neutral steer.....	111
6.2.6.	Anexo 11: Aerodinámica.....	115
6.2.7.	Anexo 7: Anti Roll Bar (ARB).....	116
6.1.1.	Anexo 9: Ajuste del amortiguador.....	117
2.3.	Bibliografía.....	119

## *Agradecimiento*

Hacen falta palabras para expresar mis agradecimientos a las personas que creyeron en mí, no sólo durante el desarrollo de este trabajo, sino, durante esta difícil etapa. Les estaré eternamente agradecido a mis amigos, los cuales nunca me dejaron caer y estuvieron ahí para escuchar. A aquellos maestros y entrenadores que buscaron siempre enseñarme y guiarme de la manera más asertiva en sus respectivas disciplinas, así como en la vida. Al proyecto FSAE, el cual ayudó a despertar mi pasión por la ingeniería, a conocer excelentes personas, y darme cuenta de mi potencial como ingeniero y como persona. Además, me ayudó a formar un pensamiento más concreto y ambicioso sobre mis aspiraciones profesionales. Y finalmente a mis padres, que siempre estuvieron ahí para apoyarme de todas las maneras posibles. Si no fuera por ellos, yo no sería nada de lo que soy ahora; yo no habría conseguido nada de lo que hasta ahora he conseguido.

*“Una vez que encuentras tu propósito en la vida, esta sigue siendo tan difícil como lo era antes, pero esta vez todo tiene sentido: las personas que conociste y las personas que se marcharon, cada decisión que tomaste y los momentos en que dudaste, cada golpe que diste y cada golpe que recibiste. “*

*Alan Alexis Trejo Sánchez*



# CAPÍTULO 1: Introducción

## 1.1. Marco histórico

Se puede hablar de un antes y después de los autos, siendo el suceso que marca esta división la implementación de motores de combustión interna. Los primeros vehículos desarrollados fueron carretas jaladas por caballos. Sin embargo, estas eran diseñadas para rodar a bajas velocidades; su suspensión no era lo bastante comfortable para las altas velocidades que un vehículo motorizado de hoy en día puede alcanzar. La transición de la implementación del motor de combustión interna en los autos se dio a finales del siglo XIX por parte de Goettlieb Daimler y Carl Benz, ambos trabajando independientemente en 1886 (1).

El uso del motor de combustión interna generó un aumento de peso en la nueva generación de autos, trayendo consigo no sólo el rediseño del sistema de suspensión, sino también el rediseño del vehículo completo. El primer tipo de suspensión que requirió habilidades metalúrgicas fue la que contenía muelles, siendo estos un par de vigas con cierta rigidez, los cuales van montados en cada cuarto del auto y se encuentran fijos en el chasis. Fue Obadiah Elliott quien patentó esta idea en 1804. Para inicios de 1900 la mayoría de las carretas contaban con muelles (1). Hoy en día, la mayoría de los vehículos de carga pesada continúan usando este tipo de suspensión en la parte trasera debido a su bajo costo.

Conforme los autos se hacían más poderosos, rápidos y pesados, el sistema del tren de potencia de estos también sufrió un rediseño, lo que generó un aumento en el peso del *sprung mass*. Esto demandaba un nuevo diseño para la suspensión, trayendo consigo la implementación de resortes tipo helicoidal para la parte trasera, con lo que se mejoraba el amortiguamiento, maniobrabilidad y espacio del automóvil. En 1906 esta configuración apareció en la producción en masa de vehículos en la parte trasera. Fue en el año 1920 que *Leyland Motors* implementó la barra de torsión en sus autos, buscando mejorar la rigidez y maniobrabilidad de los mismo. De esta manera, para el año 1923, la mayoría de los carros contaban con un eje sólido, teniendo muelles en la parte delantera y resortes helicoidales en la parte trasera, siendo el *Lancia Lambda* el primer auto en aplicar esta configuración. En 1931 se presentaron las primeras suspensiones independientes, es decir, se dejó de tomar un eje sólido que conectaba a cada rueda con su opuesta. Para el año 1933 se presentaron los primeros automóviles con suspensión independiente y un resorte helicoidal por llanta. En 1948 *Standar Motor Company* sacó a la venta el *Triumph Mayflower*, auto cuyo sistema de suspensión introdujo la combinación del resorte helicoidal y el amortiguador en una sola pieza, así como el *strut* tipo telescopio. Con ello, en 1950, *FORD* adoptó la suspensión tipo *McPherson strut* en la parte delantera del *MK I Consul* (1).

Actualmente, el diseño del sistema de suspensión para autos de uso común se ha mantenido igual, con cambios en el mecanismo de este o cambios en los materiales utilizados. En donde se ha visto mayor innovación es en la automatización de este sistema para vehículos deportivos, donde la precarga del resorte y la constante de amortiguación se

pueden configurar de forma automática. Todo esto con el propósito de conseguir el ajuste apropiado para el tipo de camino.

## **1.2. Hipótesis**

Como se ha visto, el diseño de la suspensión ha avanzado considerablemente. A veces a grandes pasos, otras veces en pequeños detalles que generan una gran diferencia en el comportamiento del mismo. De igual manera, se han visto cambios importantes en autos de pista o competencia, donde el sistema de suspensión toma un papel crucial para generar la mejor respuesta en maniobrabilidad de este, buscando lograr el menor tiempo posible por vuelta. Sin embargo, el sistema de suspensión no es el único que ha presentado avances, sino también la manera en que este se diseña.

¿Cómo ha avanzado la manera en que se diseña y se valida una suspensión hasta hoy en día? Como la mayoría de las cosas que percibimos y entendemos ahora, esto empezó con una idea plasmada en papel y lápiz; tanto el diseño como la validación del sistema de suspensión se remontaba al conocido “prueba y error”. Esto consistía en diseñar un prototipo y probarlo bajo diferentes condiciones a las cuales estaría sometido en su vida útil. Cuando este pasaba con éxito las pruebas se consideraba un diseño bien hecho, de lo contrario, este sufría un rediseño para volver a ser probado de nuevo. Esta metodología prevaleció por bastante tiempo, teniendo modificaciones en las pruebas que se les hacían a las suspensiones.

Tras un sin número de pruebas hechas a nuevos diseños, esta metodología se hacía más específica, ahorrando dinero y tiempo invertido. Sin embargo, se seguía representando un gran gasto de recursos. Conforme la tecnología avanzó, la manera en la que se diseñaba y se validaba el sistema de suspensión también lo hizo. Esto abrió paso para el uso de programas en computadora, lo cual generaba cálculos más certeros y una manera más ordenada de trabajar, aunque prevalecía el problema de diseñar bajo “prueba y error”. El avance de la tecnología poco a poco abrió paso a lo que ahora se tiene como respuesta a dicho problema: simulaciones computacionales. Las simulaciones representan la actual manera en que se diseña y se prevalece el diseño. A partir de una representación en computadora, contemplando antecedentes de trabajos pasados y las condiciones a las cuales el auto trabajará, se llega a una etapa de “obra negra”, es decir, el primer diseño en bruto del auto. Este se modela por computadora en programas CAD (*Computer Aided Design*), contemplando dimensiones reales y materiales, para después colocarlo en un programa que simule el comportamiento de este bajo las condiciones dinámicas deseadas. Este tipo de programas pueden lanzar resultados sobre la cinemática del carro, análisis de esfuerzos, análisis de fatiga, análisis en frecuencia, así como pueden generar simulaciones en pista que indiquen el comportamiento del vehículo dependiendo de su configuración. Actualmente hay simulaciones de prototipos F1 que permiten al usuario configurar diferentes parámetros de este, esto con la finalidad de poder generar un tiempo menor en pista.

Es así como las simulaciones por computadora dejaron atrás la metodología de “prueba y error”, lo que generaba un ahorro de recursos en la validación del auto. Esto no quiere decir que un automóvil, después de la etapa de simulación, se deje de probar. Después de esta etapa viene la fase de validación, en la que se somete al carro a distintas pruebas para verificar que este puede trabajar acorde a lo previsto en diseño. Sin embargo, estos no siempre cumplen los estándares de diseño, forzando a un rediseño de este. No obstante, las simulaciones hechas llevan al prototipo a aproximarse a el que será el diseño final.

Pero ¿hay algún problema con las simulaciones? o ¿cómo es que trabajan? Este tipo de programas generan iteraciones a partir de ciertos datos de entrada. Cuando se desea un resultado más preciso se genera un mayor número de iteraciones con las mismas condiciones iniciales. Sin embargo, esto genera un tiempo de cómputo más grande. La mayoría de las simulaciones requieren de un tiempo relativamente largo, las cuales pueden tardar hasta horas. No obstante, este tipo de programas arrastran un par de errores debido a la capacidad de la computadora para generar memoria de cálculo, la no linealidad del sistema, errores numéricos en la solución, entre otros. La mayoría de los programas de simulación tratan de simplificar el sistema cuando este se torna un tanto complicado de trabajar. Esto con la finalidad de ahorrar tiempo.

¿Hay alguna manera de llegar a un resultado del comportamiento del sistema de la suspensión con un menor margen de error?

El presente trabajo busca reducir ese error generado por las singularidades del sistema, como lo es, la no linealidad. Para ello se desarrolla un modelo 2-D de una suspensión tipo *push*, buscando comparar los resultados obtenidos del auto con los que generan simulaciones hechas en computadora. Con esto se ataca el problema desde el modelado de la cinemática de la suspensión. De esta forma, se puede llegar al origen del problema causado por la no linealidad del sistema y dar mejores aproximaciones para llegar a un resultado más certero. Por otra parte, se busca mejorar la metodología de diseño usada por universidades, poniendo al alcance de las diferentes escuderías de la competencia FSAE (*Formula Society of Automotive Engineers*) un programa más preciso para el diseño de la suspensión, con lo que se trata de conseguir un mejor diseño del sistema, así como un mejor entendimiento de este.

### 1.3. Objetivo

- Desarrollar un programa para el diseño cinemático de la suspensión de un prototipo FSAE, buscando obtener resultados más precisos al realizar el análisis no lineal de la misma, tomando como punto de comparación los resultados obtenidos por *ADAMS*.

A continuación, se enlistan los objetivos específicos que nos conducen a cumplir con el propósito principal:

- Generar un modelo 2-D de la cinemática de la suspensión mediante la ecuación de Freudenstein.
- Obtener las condiciones de carga que el carro presenta durante la prueba de *skidpad*.
- Mostrar la manera en que los softwares de dinámica vehicular generan análisis cuasi estáticos en la suspensión.
- Comparar los resultados obtenidos en el programa desarrollado contra los datos obtenidos de programas comerciales, como lo es *ADAMS*.

### 1.4. Antecedentes

El comportamiento de un auto en pista se rige por el diseño que presenta en el sistema de suspensión, tomando en cuenta que este contempla a los demás sistemas del vehículo. Un factor que toma vital importancia para esto es la cinemática que el sistema presenta. No obstante, el comportamiento del carro también dependerá otros factores, como los son, los

efectos que genera la aerodinámica en el mismo, la correcta elección de la llanta para soportar las fuerzas generadas, entre otros.

Tomando en cuenta lo anterior, ¿qué innovaciones o mejoras ha habido en el sistema de suspensión en orden de mejorar el desempeño del carro y sus diferentes usos en pista? El sistema de suspensión moderno, por sí mismo, ha presentado cambios tanto en autos de uso común como en autos de competencia. Un ejemplo en vehículos de uso común es el *eROT* de *Audi*, el cual reemplaza amortiguadores hidráulicos por amortiguadores con rotadores electromecánicos. Con esto, se mejora el confort del vehículo ante cualquier alteración de la pista (2). Además, este tipo de amortiguador es capaz de generar energía durante el *jounce* y *rebound* de la llanta, la cual es convertida en energía eléctrica. En el mundo de los autos de competencia, la existencia de reglas ha evitado cambios abruptos en los diferentes sistemas. Pese a esto, los equipos siempre logran burlar a las reglas en orden de poder tomar ventaja en la pista. El claro ejemplo de esto es la escudería de la Fórmula 1 *Mercedes Benz*, cuyo piloto, Lewis Hamilton, es el más reciente campeón de la competencia. Los ingenieros de la escudería crearon un sistema mecánico para regular el *toe* mientras el auto continúa corriendo. De esta manera, el carro sigue generando su mejor desempeño en las curvas, pero a su vez, genera el mejor desempeño en los tramos en línea recta.

Ahora bien, ¿hay propuestas de innovación en el área de los autos de competencia FSAE? Al igual que en la Fórmula 1, las competencias de SAE se rigen por un reglamento, sin embargo, al ser una competencia de menor escala, las reglas son menos estrictas. Esto da la oportunidad a los estudiantes de innovar en sus respectivos campos mediante la mejora en sus procesos de manufactura, metodología de diseño, implementación de nuevos materiales, etcétera. Tomando en cuenta el diseño en este tipo de prototipos, así como la forma en que estos se validan, uno de los factores que toma relevancia es la antigüedad del equipo, ya que, con la experiencia ganada en softwares y en competencias, se va modificando la metodología de diseño. Por ejemplo, universidades de élite, en esta competencia optan por simulaciones hechas en programas como *ADAMS* o *Matlab/Simscape*, obteniendo con ello resultados tan completos como lo son simulaciones en pistas. Por otra parte, equipos jóvenes, al no tener un amplio conocimiento de estos softwares, optan por desarrollar sus propios programas en diferentes plataformas, logrando obtener resultados cuasi estáticos de las condiciones extremas en las que actuará el carro. De cualquier manera, ambos caminos llevan a la misma metodología de diseño, aunque, la primera es más precisa, más completa y rápida.

Esta tesis propone mejorar la metodología de diseño para suspensiones tipo *push*, con el fin de obtener un resultado más preciso eliminando el error generado por las no linealidades del sistema. Para esto, se presenta un modelo 2-D de una suspensión de un prototipo FSAE, basado en la compresión y extensión del amortiguador como dato de entrada. El desarrollo de este modelo parte del análisis cinemático de mecanismos basado en la ecuación de Freudenstein. La finalidad es comparar los datos del programa desarrollado con datos obtenidos con simulaciones, así como observar la discrepancia entre ambas.

# CAPÍTULO 2: Marco teórico

## 2.1. Formula SAE

### 2.1.1. Proyecto

Se trata de un proyecto que reta a estudiantes de universidades y graduados a: diseñar, desarrollar y competir con un prototipo Fórmula 1. El propósito es que los participantes demuestren su creatividad y habilidades ingenieriles compitiendo contra otros equipos alrededor del mundo.

La competencia va más allá del desarrollo de un prototipo; se trata también de que los equipos asuman que son una empresa en desarrollo. Aunque este proyecto toma como prioridad el desempeño en pista del carro, también se califican otros aspectos que tienen un gran impacto en los resultados finales, como lo son la presentación de diseño, el reporte de costos y la manera en que el equipo vende su idea y su imagen. Es aquí donde se puede ver que se evalúan los siguientes aspectos:

#### Eventos estáticos:

- |                                     |            |
|-------------------------------------|------------|
| • Presentación de diseño.           | 150 puntos |
| • Costos y análisis de manufactura. | 100 puntos |
| • Presentación general del auto.    | 75 puntos  |

#### Eventos dinámicos:

- |   |            |
|---|------------|
| • <i>Acceleration</i>                   | 75 puntos  |
| • <i>Skidpad</i>                        | 50 puntos  |
| • <i>Autocross</i>                      | 100 puntos |
| • <i>Endurance</i>                      | 275 puntos |
| • Prueba de rendimiento de combustible. | 100 puntos |

### 2.1.2. UNAM Motorsports

Escudería mexicana cuya filosofía es “*aprender haciendo*”. Con más de 10 años de experiencia (iniciando en 2009), esta escudería se encarga de formar futuros ingenieros, reforzando habilidades analíticas, de organización y de construcción vistas o no en el aula.

La escudería ha tenido un crecimiento importante en toda su trayectoria, generando un trabajo cada vez más serio y profesional en todos y cada uno de los aspectos que forman el equipo: organización, trabajo en equipo, diseño, procesos de manufactura, criterios de costo, entre otros. Año con año el sistema de suspensión y dirección también ha ido creciendo e innovando, tanto en la teoría aplicada y herramientas, como en sus métodos de manufactura. Los participantes del equipo son los encargados de lograr esto y en ocasiones de dejar pruebas de esa información. Enseguida se presenta parte de esta información generada:

2009-2010: UM-311 “El novato del año”

- Primer auto desarrollado. No se tiene registro de información.

2011: UM-362 “El Potente”

- Tesis: Córdoba Breña, J. *Método de diseño del sistema de suspensión de un vehículo de competencia “Fórmula SAE”*. Ciudad de México: UNAM, 2012.
- Tesis: Vázquez Trevilla, N. I. *Diseño del sistema de suspensión del vehículo Fórmula SAE UNAM 2011*. Ciudad de México: UNAM, 2014.

2012: UM-513 “El estético”

- Reporte de temporada: Guerrero Gonzalo y Pliego Vinajeras Alejandro.

2013: UM-524 “El dinámico”

- Reporte de temporada: Becerril González Paulo y Espejel Arroyo Aldo.

2014: UM-515 “El Innovador”

- Reporte de temporada: Espejel Arroyo Aldo.
- Tesis: Espejel Arroyo, A. *Rediseño de un sistema de suspensión para un auto de competencia mediante ADAMS/Car y Matlab*. Ciudad de México: UNAM, 2015.

2015: UM-426 “El Barato”

- No se tiene registro de información.

2016: UM-467 “El Vistoso”

- Reporte de temporada: Adriana

2017: UM-248 “El Europeo”, UME-1 “El Eléctrico”

- Reporte de temporada: Trejo Sánchez Sarahí, Sagaceta David y Vázquez Orlando.

2018: UM-389 “El Subcampeón servicial”, UME-2 “El Campeón ausente”

- Reporte de temporada: García Matzayani, Sagaceta David, Trejo Alan y Vázquez Orlando.

2019: UM-510 “El Az de Oros”, UME-3 “El Bambú”

- Reporte de temporada: Landeros Víctor, Martínez Guillermo, Romero América y Trejo Alan.
- Tesis (presente trabajo): Trejo Sánchez, A.A. *Análisis cinemático del sistema de suspensión para un prototipo FSAE mediante la ecuación de Freudenstein. Comparación con ADAMS/Car*. Ciudad de México: UNAM, 2021.

2020: UM-10 “El As de Oros”, UME-3 “El Bambú”

- Reporte de temporada: Ávila Aldo, Landeros Víctor, Martínez Guillermo y Romero América.

## ***2.2. Suspensión***

Se puede definir a la suspensión como “aquello que une a las llantas con el cuerpo del vehículo y le permite un movimiento relativo con respecto al mismo”. Sus principales funciones son:

- Proveer un movimiento vertical para que las llantas puedan seguir las irregularidades del camino, aislando al *sprung mass* de estas mismas.
- Mantener a las llantas en la dirección y orientación adecuada con la superficie del camino.
- Reaccionar a las fuerzas producidas en la pista: fuerzas longitudinales (aceleración y frenado), fuerzas laterales (generadas en curva), pares de frenado y las reacciones producidas debido a la maniobrabilidad.
- Resistir a la rotación del chasis.
- Mantener las llantas en contacto con el camino, tratando de generar las mínimas variaciones de fuerza posible.

Las características más importantes durante el diseño del sistema de suspensión son: el desempeño de su cinemática y la respuesta a las fuerzas y pares que se transmiten de las llantas al chasis. De igual manera, otras características que se deben tener en cuenta son los costos, peso, empaquetamiento, manufacturabilidad, facilidad de ensamblaje, etcétera.

El diseño de la geometría del sistema de suspensión consiste en primero escoger el tipo de suspensión que se va a emplear, definir los puntos críticos de anclaje (*hard points*), el largo e inclinación absoluta y relativa de los eslabones y por último, la dimensión de los *tracks* y *wheelbase*. Esto resulta en la mejor ubicación de los centros de rotación y en la forma en que la llanta se posicionará para que esta genere su mejor desempeño.

### 2.2.1. Marco de referencia

El sistema de ejes de referencia que se ocupará para el desarrollo de la presente tesis es una variación del sistema de referencia usado por el equipo *UNAM motorsports*, el cual está rotado 180° en el eje Z con respecto al de la presente tesis. Se decidió usar este sistema de referencia porque la dirección + del eje X corresponde a la dirección del carro cuando este avanza en línea recta. En tanto, la dirección – del eje Z, corresponde a la dirección del peso del auto y de las fuerzas desarrolladas debido a la aerodinámica.

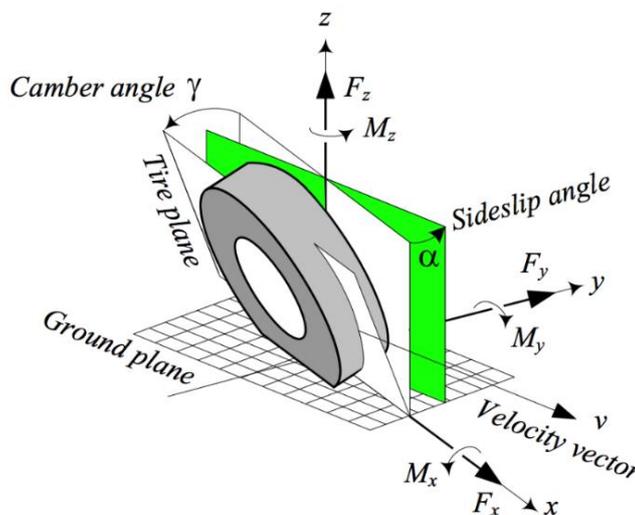


IMAGEN 2.1. EJE DE REFERENCIA (3).

En la imagen 2.1 se pueden ver los tres principales ejes, sus fuerzas y sus respectivos pares. Estos se presentan también en la tabla 2.1.

Eje	Fuerza coincidente al eje	Par referente a la llanta	Par referente al vehículo
Eje Z	Fuerza normal $F_Z$	Aligning moment $M_Z$ (anexo 2)	Yaw moment $\psi$
Eje Y	Fuerza lateral $F_Y$	Rolling resistance moment $M_Y$ (anexo 1)	Pitch moment $\theta$ (anexo 3)
Eje X	Fuerza longitudinal $F_X$ (anexo 1)	Overturning moment $M_X$ (anexo 2)	Roll moment $\Phi$

TABLA 2.1. PARES Y FUERZAS QUE ACTÚAN EN LA LLANTA.

### 2.2.2. Llanta.

La llanta ocupa un lugar muy importante en la dinámica vehicular, ya que es el único elemento del auto que está en contacto con el suelo, por ende, esta mostrará el comportamiento de este. Es importante tener en cuenta los factores que la afectan, como lo son: la temperatura, el compuesto, la presión, entre otros, ya que un ligero cambio en ellos puede impactar de manera importante en el desempeño del carro en pista (anexo 4).

Una llanta se modela como pequeños resortes y amortiguadores actuando en los tres ejes; estos tienen una constante de rigidez y una constante de amortiguamiento diferente en cada eje, cuyas propiedades varían con la presión, la temperatura, compuesto, tiempo de uso, etcétera. (imagen 2.2).

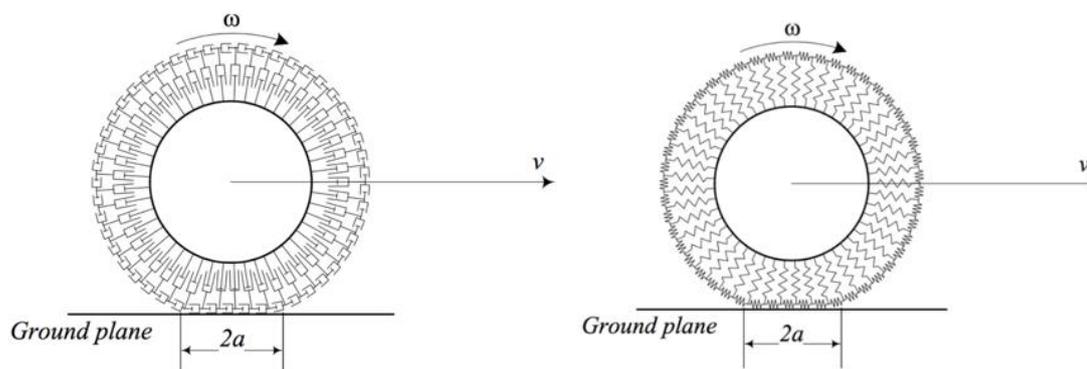


IMAGEN 2.2. MODELADO DE UNA LLANTA (3).

Generalmente la rigidez es mayor en la dirección longitudinal y menor en la lateral.

$$k_x > k_z > k_y \quad (1)$$

Donde:

$k_z$  = Rigidez en la llanta en el eje Z [N/m].

$k_y$  = Rigidez en la llanta en el eje Y [N/m].

$k_x$  = Rigidez en la llanta en el eje X [N/m].

Como se puede observar, se necesitan tomar varios factores para generar un adecuado modelo de la llanta. Es por eso por lo que en algunos análisis esta se llega a tomar como un sólido rígido, donde se sacrifica exactitud en los resultados, pero se tienen un ahorro en tiempo de cómputo y recursos.

### 2.2.3. Fuerza normal ( $F_z$ )

Se trata de la fuerza vertical que actúa sobre cada una de las llantas. Tomando el caso de un auto estático, donde la distribución del peso es simétrica en el eje Y, la forma de obtener dicha fuerza se expresa en las ecuaciones 2 y 3.

$$F_{Z1} = F_{Z3} = \frac{1}{2}mg \frac{a_2}{l} \quad (2)$$

$$F_{Z2} = F_{Z4} = \frac{1}{2}mg \frac{a_1}{l} \quad (3)$$

Donde:

$F_{Z1}$  = Fuerza normal que actúa en la llanta delantera izquierda, vista trasera [N].

$F_{Z2}$  = Fuerza normal que actúa en la llanta trasera izquierda, vista trasera [N].

$F_{Z3}$  = Fuerza normal que actúa en la llanta delantera derecha, vista trasera [N].

$F_{Z4}$  = Fuerza normal que actúa en la llanta trasera derecha, vista trasera [N].

$m$  = Masa total del auto [Kg].

$g$  = Fuerza de gravedad [ $m/s^2$ ].

$a_1$  = Distancia del centro de masa al eje delantero [m].

$a_2$  = Distancia del centro de masa al eje trasero [m].

$l$  = *Wheelbase* [m].

$$l = a_1 + a_2 \quad (4)$$

Esto se ve representado en la imagen 2.3. En esta se puede ver que el peso total en la parte delantera es la suma del peso en las dos llantas delanteras, mientras que, para la parte trasera, el peso total es la suma del peso actuando en las dos llantas traseras. De igual manera se puede ver la representación del *wheelbase*.

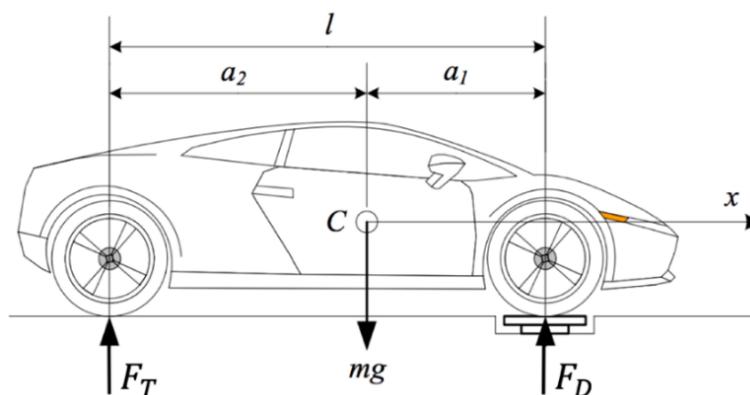


IMAGEN 2.3. PESO EN CADA EJE (3).

Donde:

$F_T$  = Fuerza normal que actúa en la parte trasera [N].

$F_D$  = Fuerza normal que actúa en la parte delantera [N].

### 2.2.4. Fuerza lateral ( $F_y$ )

Se trata de la fuerza tangente al suelo y ortogonal a  $F_x$  y  $F_z$ , la cual actúa por detrás del centro del *contact patch* (imagen 2.4). La fuerza lateral se produce durante condiciones de curva, en la cual, las fuerzas inerciales intentan empujar al auto fuera de esta. En este caso, la suma de la fuerza lateral desarrollada en cada llanta se opondrá a estas fuerzas inerciales.

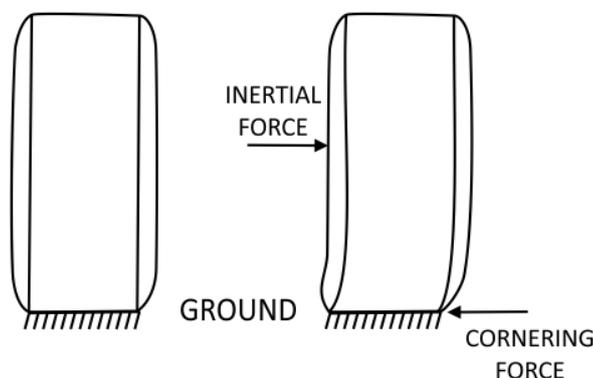


IMAGEN 2.4. ACCIÓN DE LA FUERZA LATERAL (4).

Durante la curva, la llanta estará actuando bajo el efecto de la fuerza lateral, la fuerza longitudinal y la fuerza normal. La combinación de las tres causará deformaciones en la llanta, lo cual se verá reflejado en el comportamiento del carro; este girará con un ángulo diferente al que apunta la dirección, las llantas tenderán a alinearse con el eje X del carro, etcétera (*anexo 2*). Es por eso que la correcta elección de la llanta se vuelve un factor de relevancia en el sistema de suspensión.

### 2.2.5. Yaw moment ( $\psi$ )

*Yaw moment* es la rotación del auto sobre su eje Z (imagen 2.5). Este movimiento se genera por un desbalance de la fuerza lateral en las llantas delanteras y traseras. Al igual que los demás pares y fuerzas actuando en el auto y la llanta, este sólo se desarrolla a altas velocidades.

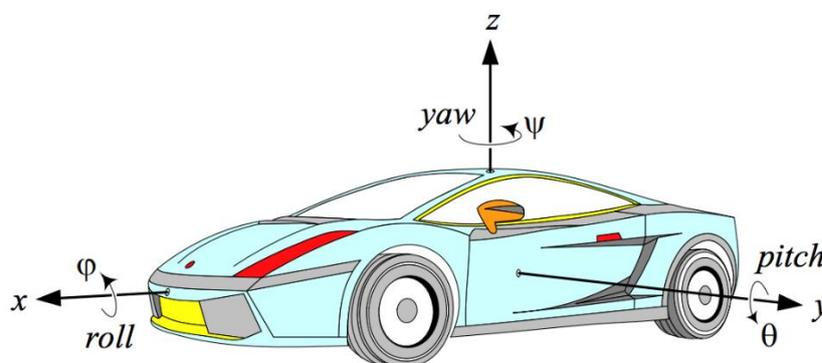


IMAGEN 2.5. PARES REFERENCIADOS AL AUTO (3).

Cuando las llantas delanteras, así como las traseras, presentan un incremento idéntico en la fuerza lateral, es decir, ambos pares de llantas generan el mismo incremento de *slip angle* (*anexo 2*), se le conoce como *neutral steer*. Cuando las llantas delanteras generan más *slip angle* que las traseras se le conoce como *understeer*. Por el contrario, cuando las llantas delanteras generan más agarre que las traseras se le conoce como *oversteer* (*anexo 5*).

### 2.2.6. Roll moment ( $\phi$ )

*Roll moment* es la rotación del auto sobre el eje X, la cual se presenta en curva. Cuando un vehículo gira existe una transferencia de carga lateral de las llantas internas a las llantas externas (Imagen 2.6).

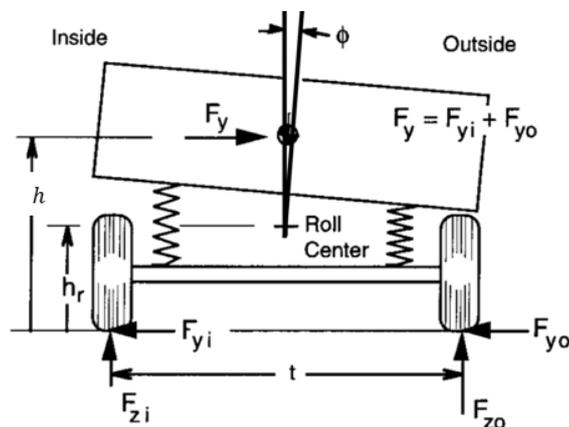


IMAGEN 2.6. ROLL MOMENT (5).

En la imagen 2.6 se presenta un modelo 2-D de un vehículo en curva, en donde:

$F_{ZO}$  = Fuerza normal en las llantas externa [N].

$F_{ZI}$  = Fuerza normal en las llantas interna [N].

$F_{YO}$  = Fuerza lateral en las llantas externa [N].

$F_{YO}$  = Fuerza lateral en las llantas interna [N].

$F_Y$  = Fuerza lateral total [N].

$h_r$  = Altura del *roll center* [m].

$t$  = *Track* [m].

$h$  = Altura del centro de gravedad (CG) [m].

$\phi$  = *Roll angle* [°].

Como se puede ver, el *roll moment* depende de la transferencia de carga y a su vez, esta depende de diversos factores (tema que se estudiará con más detalle en capítulos adelante). La manera de cuantificar el *roll moment* es mediante los grados de *roll* que el auto presenta.

### 2.2.7. Cinemática de la suspensión

Para comprender a fondo el funcionamiento de la suspensión se debe entender la cinemática bajo la cual se rige esta. Así mismo, es necesario comprender a detalle todos y cada uno de los conceptos que a continuación se abordarán, ya que, es fundamental tenerlos en cuenta durante la selección del tipo de suspensión y el diseño de esta. Dependiendo de la sollicitación, estos parámetros tomarán una importancia relevante en el desempeño, con lo que se podrá observar cómo es que la mínima modificación en cada uno de ellos puede generar un cambio significativo.

#### 2.2.7.1. Wheelbase y track

El *wheelbase* se define como la distancia entre ejes. La fuerza normal y la fuerza longitudinal, en presencia de transferencia de carga, dependerán del *wheelbase*; mientras más grande sea este, la transferencia de carga longitudinal disminuirá. Cuando las llantas

delanteras giran para tomar la curva, la reacción de las llantas traseras dependerá del *wheelbase* también; mientras este brazo de palanca sea más grande la forma en la que las llantas traseras actúan será con más control, generando confort y estabilidad. Cuando esta distancia es más pequeña la forma en que las llantas traseras actúan será con menor control, generando menor estabilidad, pero más maniobrabilidad. Por otra parte, el *wheelbase* afecta directamente el ángulo de Ackerman (*anexo 5*), es decir, el ángulo que necesitan girar las llantas delanteras para lograr que el auto tome la curva. Un *wheelbase* más pequeño requerirá un menor ángulo de giro en las llantas delanteras. Cuando una llanta toma un amplio ángulo de giro genera más agarre lateral. Sin embargo, cuando este ángulo es demasiado, se genera mucho *slip angle*, provocando que la llanta deslice completamente. Otro factor importante que hay que tomar en cuenta para el diseño del *wheelbase*, es el empaquetamiento del auto.

El *track* se define como la distancia que hay del centro del *contact patch* de una llanta al centro del *contact patch* de su opuesta, siendo paralelo al eje Y del carro. Esta toma relevancia durante la transferencia de carga lateral; mientras más grande el *track*, la transferencia de carga será menor.

Al igual que el *wheelbase*, el *front track* debe estar diseñado contemplando la condición de Ackerman. Conforme el *track* crece, esta relación exigirá girar más a la llanta interna que a la externa.

El *rear track* debe ser diseñado conforme al *front track*; debe de haber una diferencia de longitud entre estos, siendo el delantero ligeramente más grande. Cuando el *front track* es más grande, la transferencia de carga lateral será menor en las llantas delanteras. Esto ocasionará que la fuerza normal se reparta de mejor forma en ambas llantas y no sólo en la externa, con lo que se aprovechan mejor las dos llantas y se reduce el *slip angle* total de la parte delantera. El *slip angle* es proporcional a la fuerza lateral, y esta es proporcional a la fuerza normal. Cuando hay más transferencia de carga hacia la llanta externa, esta experimentará mayor fuerza lateral y, por lo tanto, genera más *slip angle*. Cuando la transferencia de carga disminuye, la fuerza lateral lo hará también y con ella el *slip angle*, con lo que se generará un ligero efecto de *oversteer* en el auto. Lo que se busca en la transición de la curva es que el auto presente un ligero efecto de *oversteer*, esto para tomar de mejor forma y más rápido la misma.

### 2.2.7.2. Ride

Se trata del desplazamiento hacia arriba y hacia abajo que presenta la llanta durante transferencias de carga, irregularidades en la pista y las vibraciones del motor. Cuando la llanta está viajando hacia arriba, el movimiento recibe el nombre de *jounce*. Si esta viaja hacia abajo, el movimiento se llama *rebound* (imagen 2.7). Este movimiento es controlado por las medidas del amortiguador y la rigidez del resorte.

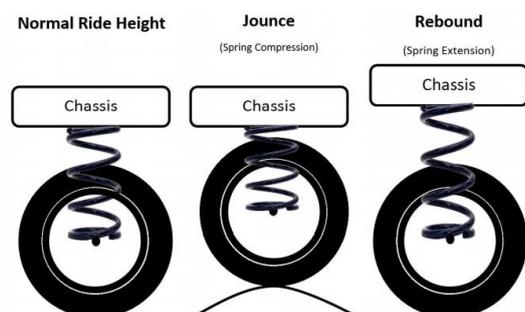


IMAGEN 2.7. RIDE: JOUNCE Y REBOUND (6).

### 2.2.7.3. *Toe*

Viendo el auto sobre el plano X-Y, en una vista superior, se puede observar que las llantas presentan un ángulo que puede o no mantenerlas paralelas con respecto a el eje X. Ese ángulo es conocido como *toe*. Dependiendo de su configuración, puede ser *toe in* (llantas mirando hacia dentro), *toe out* (llantas mirando hacia afuera) o *neutral toe* (llantas paralelas al eje X). Esta clasificación se puede ver con más detalle en la imagen 2.8.

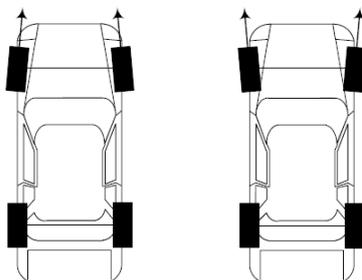


IMAGEN 2.8. *TOE IN Y TOE OUT, RESPECTIVAMENTE (3).*

La correcta forma de medir el *toe* es tomando como referencia un plano paralelo al plano X-Z, el cual hará contacto con la cara externa del *rim*; el punto pivote será la esquina trasera del *rim*, mientras que el ángulo de *toe* estará definido por la separación del plano paralelo antes definido con un plano generado en el borde extremo del *rim* (imagen 2.9). La forma empírica usada para referirse al aumento de *toe* es “+ *toe*” refiriéndose al *toe in*, mientras que “- *toe*” se refiere al aumento de *toe out*.

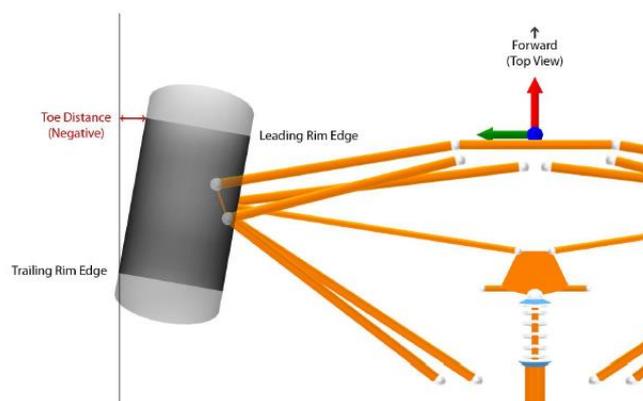


IMAGEN 2.9. *FORMA EN LA QUE SE MIDE EL ÁNGULO DE TOE (7).*

Es importante tener en cuenta los efectos del *toe* sobre el sistema, ya que estos pueden afectar al desgaste de las llantas, la estabilidad en línea recta y la maniobrabilidad en curva. Diferentes configuraciones cambiarían los efectos sobre el vehículo.

Dado que el auto se encuentre corriendo en línea recta, la mejor configuración para evitar el desgaste de las llantas será un *neutral toe*, ya que demasiado *toe in* causa un desgaste acelerado en los bordes externos de la llanta. Por su parte, demasiado *toe out* causará un desgaste acelerado en los bordes internos. Para un caso de frenado brusco (el caso de la prueba de *brakes*) la mejor configuración será *toe in*, ya que este le dará estabilidad a la trayectoria rectilínea del auto. Supóngase que se extienden un par de líneas proyectadas, las cuales son paralelas a las llantas. Cuando estas tienen *toe in*, las líneas se cruzarán por delante del auto, y durante el frenado, las llantas tenderán a cerrarse siguiendo esas líneas, haciendo que el auto mantenga una trayectoria estable hacia adelante. Lo contrario pasa con el *toe out*,

esas líneas no se intersecarán en ningún punto adelante del vehículo, haciendo que las llantas tiendan a seguir trayectorias opuestas, generando inestabilidad en el frenado. En el caso del *neutral toe*, la estabilidad de las llantas dependerá de otros factores del diseño y de la pista. Sin embargo, este tiende a desestabilizar el auto.

El *toe in* mejora la estabilidad del vehículo, sin embargo, hará lenta la respuesta en el cambio de dirección en curvas. El *toe out* incrementará la velocidad de respuesta en el cambio de dirección en curva, sin embargo, hará inestable el auto. Por esta razón es común configurar autos de uso común con *toe in*, mientras que los autos de competencia comúnmente se configuran con *toe out*, sacrificando un tanto la estabilidad.

La configuración del *toe*, para autos de competencia, va más allá de lo que en teoría se debe de hacer. La finalidad es que el vehículo logre el menor tiempo posible en pista, por lo que una retroalimentación del piloto será clave, ya que de presentarse *oversteer* o *understeer* durante una curva, se tendrá que decidir qué configuración tomar; cuando el auto presenta *understeer*, habrá que agregar más *toe in* en la parte delantera o agregar *toe out* en la parte trasera, ya que la zona que tenga más *toe in* generará más agarre. El caso contrario pasa al presentarse *oversteer*, pues se tendrá que agregar más *toe in* en la parte trasera o más *toe out* en la delantera, esto para que la parte trasera genere más agarre.

Por otra parte, hay que tener en cuenta el tipo de tracción que tiene el auto. El tener un auto de tracción trasera tiende a abrir las llantas delanteras, por lo que hay que compensar con *toe in*. Un auto con tracción delantera tiende a cerrar las llantas delanteras, por lo que hay que compensar con *toe out*.

#### 2.2.7.4. Ángulo de *camber*

El ángulo de *camber* es el ángulo definido entre el plano medio de la llanta y el plano vertical Z-X. Cuando la parte superior de la llanta se inclina hacia el chasis se denomina *negative camber*. Si la parte superior de las llantas se inclina hacia fuera se denomina *positive camber* (imagen 2.10).

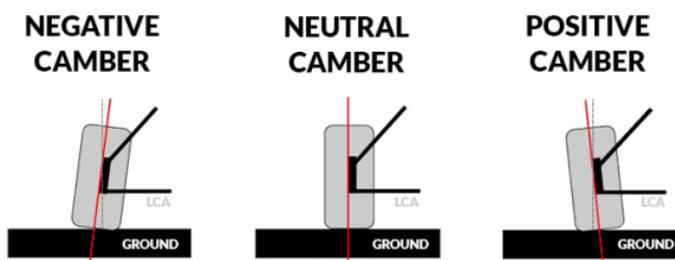


IMAGEN 2.10. CAMBER. VISTA FRONTAL DEL AUTO (6).

Las fuerzas laterales que el auto desarrolla se deben en gran parte al *slip angle*, sin embargo, el ángulo de *camber* también ayuda al incremento de la fuerza lateral, así como al *aligning moment*  $M_z$ . Lo que se busca en un auto es que, durante una curva, la llanta externa presente una posición de *neutral camber*, ya que, de este modo, la llanta genera la máxima fuerza lateral aprovechando completamente el *contact patch* (zona de la llanta que tiene contacto con el suelo). Para poder saber si se tiene un *negative camber*, se debe hacer una toma de temperaturas en cada sección de la llanta, y a partir de ella, agregar o quitar más *camber*. *Positive camber* es una configuración inicial que en ninguna circunstancia debe usarse, ya que reduce la fuerza lateral.

Hay que tener dos cosas en cuenta. La primera es que cada piloto tiene un estilo de conducir, lo que significa una forma diferente de tomar las curvas. Esto es importante, porque con cada piloto el ángulo de *camber* inicial debe ser diferente. Por otra parte, hay que considerar que el *camber* sólo beneficia al desempeño del auto en curvas, afectando el desempeño en línea recta.

### 2.2.7.5. Caster

Se trata del ángulo en el cual el *steering axis* (eje sobre el cual gira la llanta, visto en el plano X-Y) es inclinado hacia delante o hacia atrás con respecto al eje Z de la llanta (eje  $Z_w$  o *wheel center line*).

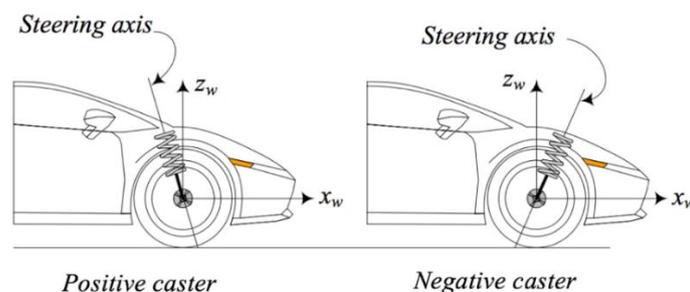


IMAGEN 2.11. CASTER ANGLE (3).

En la imagen 2.11 se puede observar un auto de perfil con las dos configuraciones de *caster*. Cuando la parte inferior del *steering axis* apunta hacia +X, se le denomina *positive caster*. Si la parte inferior del *steering axis* apunta hacia -X, se le denomina *negative caster*. Cuando el *steering axis* no presenta inclinación se le denomina *neutral caster*.

Los efectos del *caster* repercuten en la estabilidad y maniobrabilidad del auto. Cuando un vehículo tiene *positive caster*, este se vuelve estable, pero es más difícil de maniobrar. Cuando un carro tiene *neutral caster*, este se vuelve más fácil de maniobrar, pues la proyección del *wheel center line* y el *steering axis* convergen en el mismo punto, sin embargo, presenta inestabilidad a la menor perturbación. Si el auto presenta *negative caster* se vuelve inestable y presenta mala maniobrabilidad, ya que las llantas quieren tomar una posición de *positive caster*. El ejemplo más claro que se tiene es en las motos, donde se puede comparar una moto *Chopper* con una moto de pista. En el primer caso, el gran ángulo de *caster* vuelve estable a la moto, pero difícil de maniobrar; en el segundo caso, el reducido ángulo de *caster* vuelve a la moto más inestable, pero fácil de maniobrar.

El *positive caster* presenta ventajas en curva. Cuando la llanta rota sobre el *steering axis* genera *camber*, el cual le ayuda al desempeño en curva del auto. Es esa misma inclinación la que genera un ligero movimiento hacia arriba y hacia abajo en la llanta cuando gira, lo que hará que esta se apoye en sus bordes, ayudando a la auto alineación de esta.

El *caster* es un valor que se decide de manera iterativa a través de simulaciones, buscando el mejor desempeño del auto. Una vez establecidos los *hard points* (siendo los del *caster* parte de ellos) estos no se pueden modificar. La mayoría de los autos FSAE presentan un *positive caster* de 6 [°] (7).

Para tener claro cómo es que el *caster* logra más estabilidad, hay que entender el fenómeno llamado *mechanical trail*.

### 2.2.7.5.1. Mechanical trail $S_a$

El *mechanical trail* es la distancia que se genera entre el *wheel centerline* y la proyección del *steering axis*, ambos a la altura del suelo. Este se puede ver representado en la imagen 2.12.

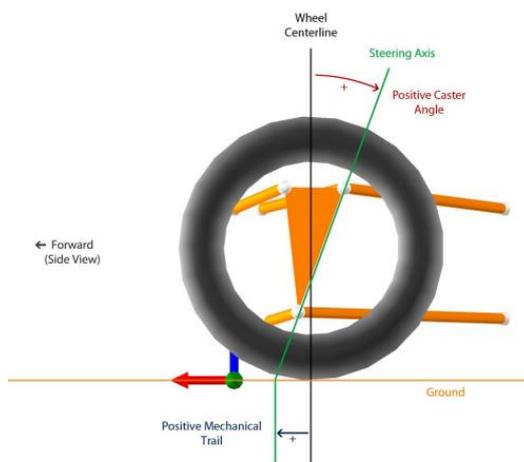


IMAGEN 2.12. MECHANICAL TRAIL (7).

Durante la curva, la distancia entre el punto donde actúa la fuerza lateral  $F_Y$  y el punto pivote de la llanta crecerá, es decir,  $a_{x\alpha}$  aumentará, lo que incrementará el efecto del *aligning moment* (imagen 2.13). Es este fenómeno el que ayuda a que la llanta tome su posición inicial. Cuando no hay *caster*, el momento autoalimente se sigue desarrollando, pues la fuerza lateral sigue actuando por detrás del *wheel centerline*, sin embargo, este es menor en magnitud.

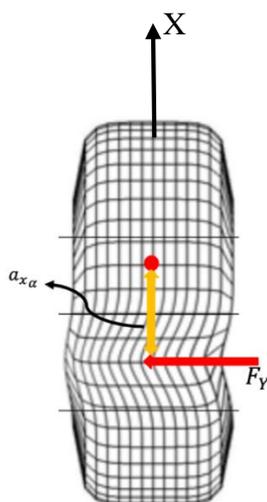


IMAGEN 2.13. EFECTOS DEL CASTER Y EL MECHANICAL TRAIL EN EL CONTACT PATCH. VISTA INFERIOR (3).

### 2.2.7.6. King pin

*King pin* es el ángulo definido entre el *steering axis* y el *wheel centerline* visto en el plano Y-Z. Cuando la parte superior del *steering axis* se inclina hacia el chasis se le denomina *positive king pin*. Cuando la parte superior se inclina para el lado opuesto se denomina *negative king pin*. Cuando el *steering axis* no presenta inclinación, y tampoco está alineado con el *wheel centerline*, se le conoce como *king pin offset* (imagen 2.14).

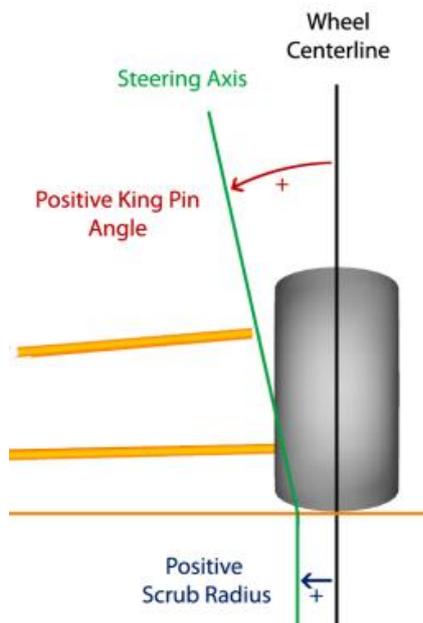


IMAGEN 2.14. KING PIN (7).

Dependiendo de su configuración, *king pin* genera estabilidad o inestabilidad durante el frenado. Además, este ángulo ayuda a la auto alineación de la llanta también, no porque altere al *aligning moment*, sino, porque al rotar sobre un eje inclinado, esta se apoya en sus bordes (imagen 2.15), lo cual la obliga a alinearse, tal como pasa con el *caster*.

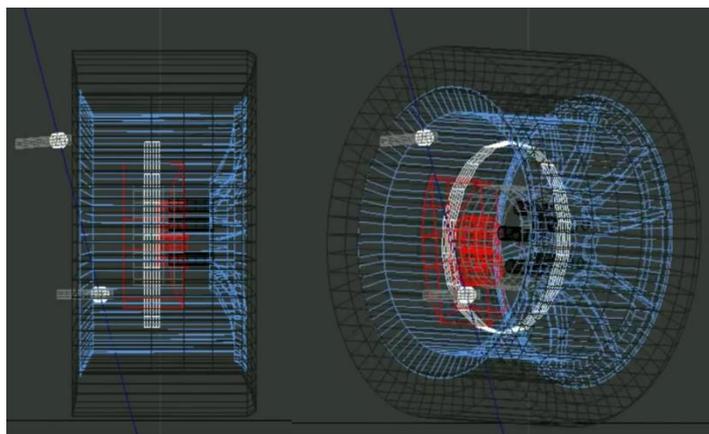


IMAGEN 2.15. ALINEACIÓN DE LA LLANTA DEBIDO AL KING PIN (8).

#### 2.2.7.6.1. *Scrub Radius* $S_p$

El *Scrub radius* es la distancia que hay entre las proyecciones del *steering axis* (bajo efectos de *king pin*) y el *wheel centerline*, a nivel del suelo. Cuando esta distancia va del *wheel centerline* hacia el chasis se le denomina *positive scrub radius*. Cuando esta distancia se aleja del chasis se le denomina *negative scrub radius*.

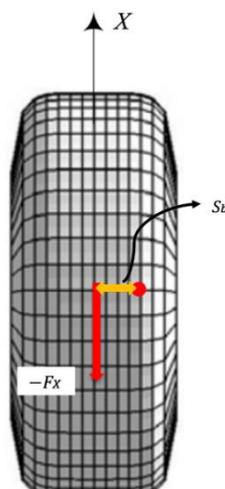


IMAGEN 2.16. EFECTOS DEL KING PIN Y SCRUB RADIUS EN EL CONTACT PATCH. VISTA INFERIOR DE LA LLANTA (3).

En la imagen 2.16, se presenta la vista inferior de la llanta durante el frenado con efectos de *negative scrub radius*. En ella se puede ver que se genera una fuerza longitudinal  $F_x$  en  $-X$ , alejada del *steering axis* a una distancia dada por el *scrub radius*  $S_b$ . Esto generará un momento que hará cerrar a las llantas durante el frenado. Por el contrario, un *positive scrub radius* generará inestabilidad en las llantas durante el frenado.

El *king pin*, al igual que el *caster*, es un valor que se decide de manera iterativa a través de simulaciones, buscando el mejor desempeño del auto. Los autos tipo FSAE presentan un *positive king pin* de alrededor de  $4 [^\circ]$  (7).

#### 2.2.7.7. Instant center of rotation (IC)

Considérese un cuerpo rígido bidimensional que se encuentra rotando sobre el plano, donde cada uno de sus puntos se desplaza con cierta velocidad sobre un eje perpendicular a dicho plano. Ese punto será entonces el IC, el cual posee una velocidad cero. La forma de encontrar dicho punto es al prolongar una línea perpendicular a dos vectores velocidad de dicho cuerpo (imagen 2.17 a). La intersección de estas líneas mostrará la ubicación del IC. Por otro lado, si los vectores velocidad son paralelos, el IC estará definido por la intersección de la prolongación de dos líneas, las cuales estarán formadas por los extremos de dichos vectores velocidad (imagen 2.17 b).

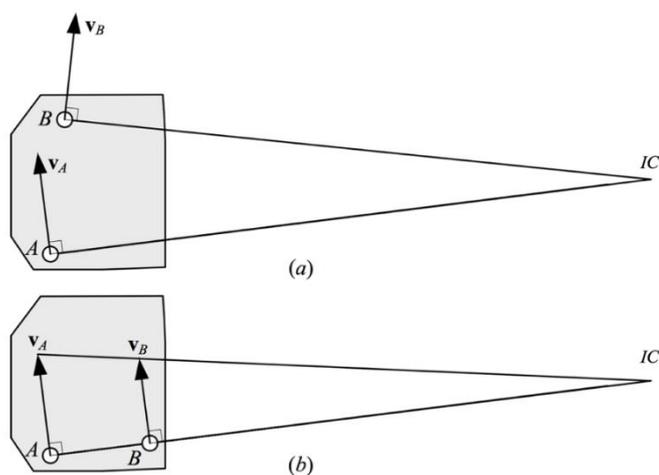


IMAGEN 2.17. UBICACIÓN DEL IC (3).

Teniendo claro lo que es el IC, llevemos este concepto a un mecanismo de cuatro barras. En la imagen 2.18, se presenta el modelo de una suspensión *double A-arm*. El eslabón B-A (*up right*), está conectado al chasis (tierra) por el eslabón B-N (*upper A-arm*) y por el eslabón A-M (*lower A-arm*). Los puntos N y M son los IC de dichos eslabones con respecto al chasis. En este caso A se desplazará con una cierta velocidad distinta a B, donde la prolongación de la línea perpendicular a los vectores velocidad de esos puntos definirá el IC.

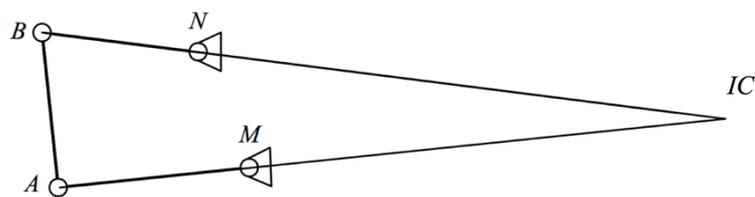


IMAGEN 2.18. UBICACIÓN DEL IC EN UNA SUSPENSIÓN(3).

Para entender los efectos del IC, así como sus ventajas y desventajas dependiendo de su configuración, se definirán algunos conceptos.

### 2.1.1.1.1. *Front View Swing Arm Geometry (FVSA)*

Se trata de la distancia que hay del centro del *contact patch* al IC (imagen 2.19). De este parámetro dependerá la altura del *roll center* y el *camber change rate*. El FVSA puede estar por dentro de la llanta o por fuera, así como puede estar por arriba del suelo o por debajo de este. Todo depende de los requerimientos del diseño.

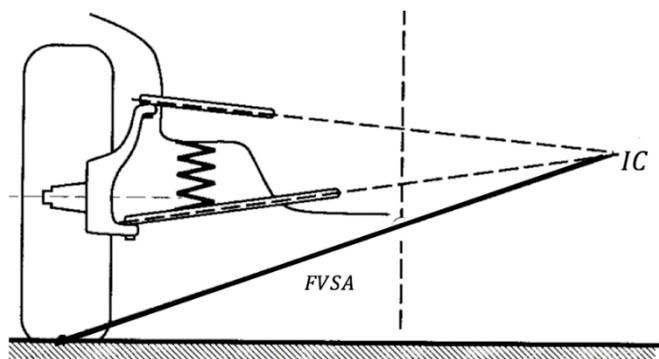


IMAGEN 2.19. FVSA. VISTA FRONTAL (5).

### 2.1.1.1.2. *Camber change rate*

Cuando la suspensión sufre un movimiento de *ride* se modifican diversos parámetros en la cinemática, siendo el ángulo de *camber* uno de ellos. En un movimiento de *ride* la relación del largo del brazo superior con el inferior hará más grande o pequeño el ángulo de *camber*. Esta variación en el ángulo de *camber* se conoce como *camber change rate*. Mientras el brazo superior se acorte, la variación del ángulo de *camber* aumentará. Es recomendable que el brazo superior sea apenas más corto que el inferior, esto, por el ángulo de *king pin*. El *camber change rate* no sólo depende de la relación de los brazos, depende también de la longitud del FVSA; mientras más larga sea la longitud del FVSA, la tasa de cambio será menor, y mientras más corta, la tasa será mayor (imagen 2.20).

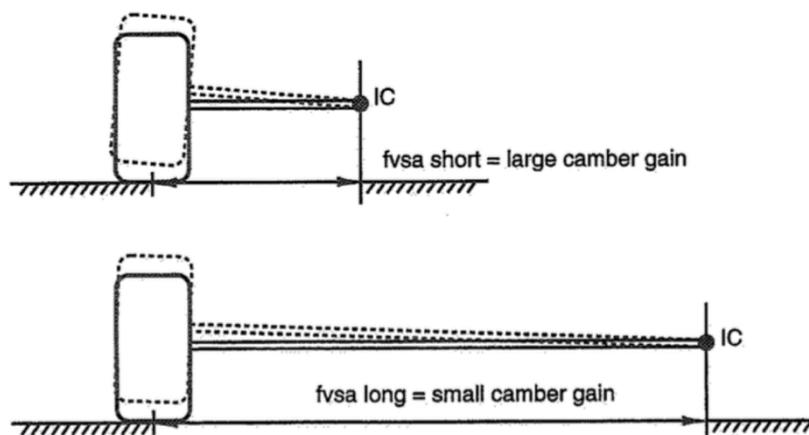


IMAGEN 2.20. REPRESENTACIÓN DEL FVSA Y CAMBER CHANGE RATE (9).

El *camber change rate* se expresa como la variación del ángulo de *camber* por la distancia del viaje de la llanta ( $[\text{°}/\text{mm}]$ ). La forma analítica de obtenerlo se muestra en la ecuación 5.

$$C_c = \text{AngTan} \left( \frac{1}{FVSA} \right) \quad (5)$$

### 2.1.1.1.3. Side View Swing Arm Geometry (SVSA)

Analizando el auto de manera lateral, el SVSA es la distancia que hay del centro del *contact patch* al IC lateral (imagen 2.21), el cual está dado por la intersección de las proyecciones de los brazos.

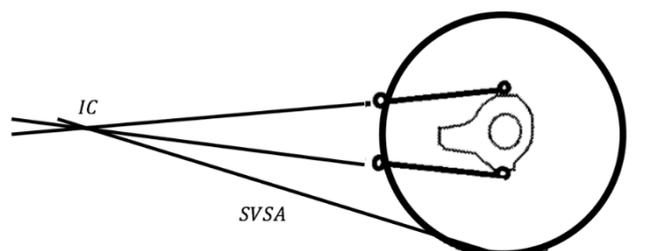


IMAGEN 2.21. REPRESENTACIÓN DEL SVSA. VISTA LATERAL (5).

El SVSA puede ir arriba o abajo del suelo y adelante o atrás del centro de la llanta, dependiendo de los requerimientos de diseño. A partir de su configuración se pueden reducir o eliminar los efectos del *dive* y *squat* (anexo 3).

### 2.1.1.1.4. IC en el espacio

La forma en que los puntos de suspensión se sujetan al chasis y a la llanta generará un IC lateral y un IC frontal. Esto para suspensiones independientes. Si se extiende una línea que vaya desde un IC al otro, se generará un eje llamado *instant axis*, el cual describe la manera en que cada llanta se moverá bajo condiciones de *ride* (imagen 2.22).

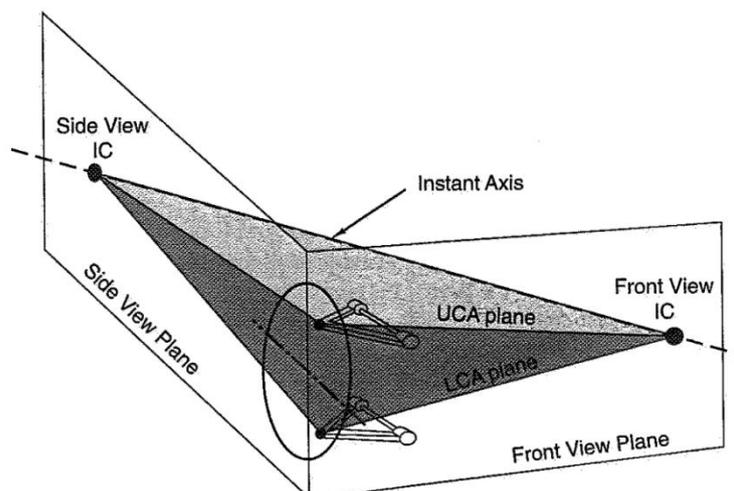


IMAGEN 2.22. INSTANT AXIS (9).

### 2.1.1.1.5. *Bump steering*

Se trata de un movimiento indeseado de la llanta durante un movimiento de *ride*. Cuando la llanta viaja hacia arriba o hacia abajo tenderá a girar sobre su eje Z. Como resultado a esto, el auto tendrá variaciones en la dirección con respecto a la que el piloto apunta. Este fenómeno ocurre cuando la proyección del brazo de dirección no converge con el IC de los brazos de suspensión. Por lo tanto, en un movimiento de *ride*, la suspensión y el mecanismo de dirección rotarán en diferentes IC.

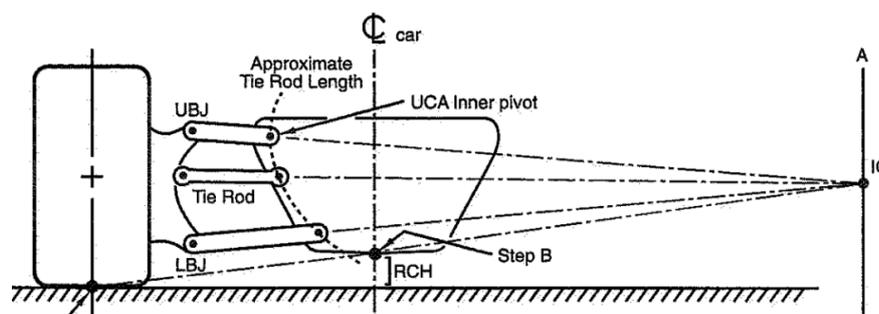


IMAGEN 2.23. VEHÍCULO SIN BUMP STERING (9).

En la imagen 2.23 se muestra la forma en que se puede evitar el efecto del *bump steering*, la cual, es hacer coincidir la proyección del brazo de dirección con el IC de los brazos de suspensión.

### 2.1.1.2. *Roll center (RC)*

Se trata del punto localizado en el plano Y-Z, el cual se forma con la intersección de los FVSA de cada par de llantas (imagen 2.24).

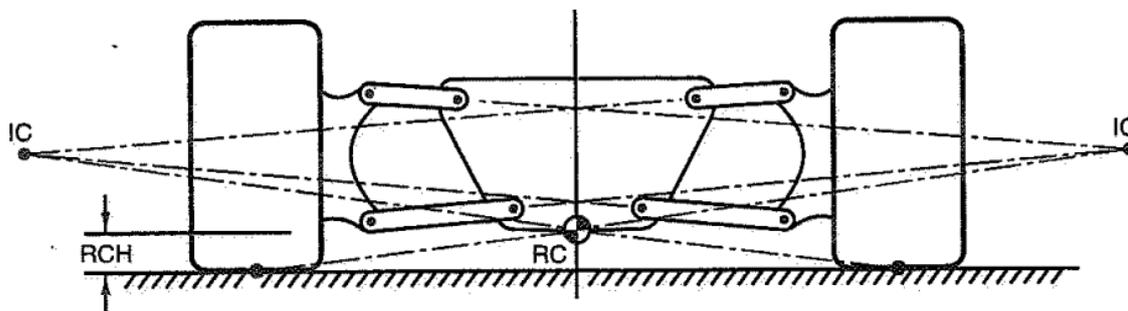


IMAGEN 2.24. LOCALIZACIÓN DEL ROLL CENTER (9).

El RC es el punto a través del cual la fuerza lateral, transmitida del *contact patch* de la llanta, actuará sobre el *sprung mass*. Este punto afecta el desempeño en curva del *sprung mass* y de USM. Además, es el punto a través del cual el vehículo girará bajo la influencia de las fuerzas inerciales.

La altura del RC, con respecto al suelo, toma gran importancia en el diseño de la suspensión. Recordemos que el *roll moment* es la rotación del auto en el eje X, la cual está dada por la distancia que hay entre el CG y el RC. Cuando el RC se acerca más al CG se reduce el *roll moment*. Cuando este se aleja el *roll moment* crece. Si el RC converge con el CG, durante una curva, no se presentaría deflexión en la suspensión. Por lo tanto, se presentaría un pequeño *roll moment* dado por la deflexión de las llantas. Sin embargo, los brazos absorberían toda la transferencia de carga lateral, eliminando los efectos del amortiguador y el resorte.

#### 2.1.1.2.1. *Jacking*.

Un factor que hay que tener en cuenta con respecto a la posición del IC es el efecto del *jacking*. Durante una curva se generará un momento con respecto al IC debido a la fuerza lateral. Dependiendo de la configuración del IC (por arriba o por abajo) este momento levantará o bajará al *sprung mass*.

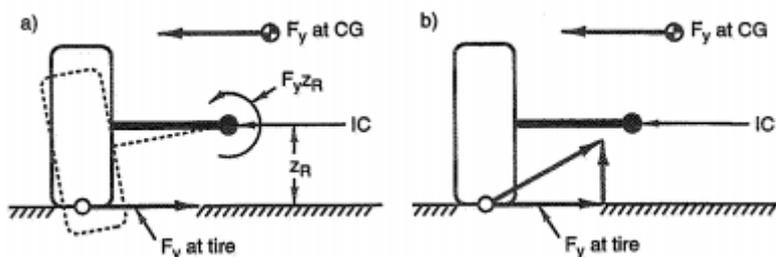


IMAGEN 2.25. EFECTO DE JACKING CON EL ROLL CENTER POR ARRIBA DEL SUELO (9).

Analicemos la imagen 2.25a. Se muestra la configuración con el IC por arriba del suelo y por dentro del carro. Cuando en la llanta se presenta una fuerza lateral, ésta actuará a una cierta altura del IC, lo que generará un momento tomando como pivote al mismo. En este caso la llanta buscará bajar, sin embargo, como esta se encuentra en contacto con el suelo provocará que el *sprung mass* se levante. Esto se ve reflejado en los brazos de suspensión; cuando este momento actúa, tiende a jalar el brazo inferior hacia adentro y empujará al brazo superior hacia fuera, lo cual provocará que el *sprung mass* suba. Una forma diferente en que se puede analizar esto, se muestra en la imagen 2.25b. La fuerza lateral desarrollada en la llanta será dirigida hacia el IC, lo que generará una componente vertical y una horizontal; es esta componente vertical la que levantará al *sprung mass* (9).

**2.1.1.2.2. Efectos del jacking con respecto a la ubicación del IC y el RC**

Existe una estrecha relación entre el IC y el RC, puesto que la configuración del segundo depende del primero. Dependiendo de la ubicación IC, la cinemática del carro se comportará de manera diferente. A continuación, se explicarán las posibles configuraciones del IC y la manera en que el *jacking* se comporta.

**2.1.1.2.2.1. Positive Swing Arm Geometry**

En esta configuración, el IC está por dentro del auto (imagen 2.26). Se denomina “positive” porque esta configuración coloca al RC por arriba del suelo.

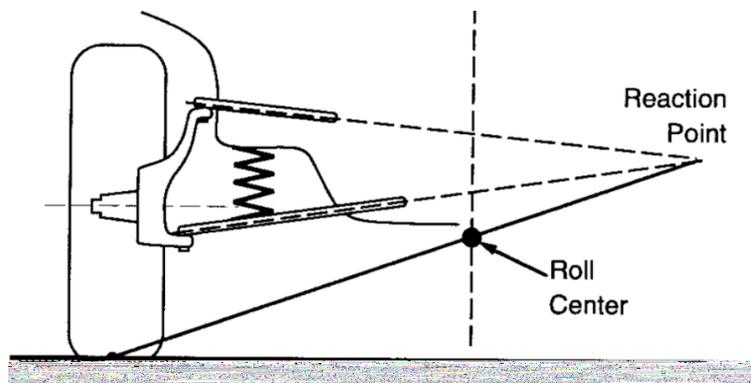


IMAGEN 2.26. POSITIVE SWING ARM GEOMETRY (5).

Cuando un auto toma una curva, el IC de la llanta externa se moverá hacia abajo por el movimiento de *jounce* de la llanta. Con respecto a la llanta interna, al tener un movimiento de *rebound*, su IC se moverá hacia arriba. Esto provocará que el RC se acerque al suelo y se recargue más a la zona de la llanta interna. Con esta configuración, para la llanta externa, la componente vertical tenderá a levantar el auto. En tanto, para la llanta interna, su componente vertical tenderá a bajar el carro (imagen 2.27). En consecuencia, a esta configuración, se presenta menos *roll moment* en el vehículo.

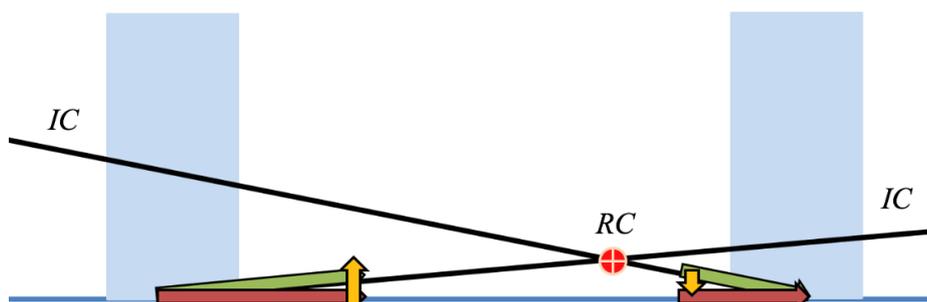


IMAGEN 2.27. DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS EN CURVA. POSITIVE SWING ARM GEOMETRY. VISTA FRONTAL CON EL VEHÍCULO GIRANDO A LA DERECHA.

**2.1.1.2.2.2. Negative Swing Arm Geometry**

Para esta configuración, el IC se ubica por fuera del auto. Esto generará que la intersección de los *FVSA* se dé por debajo del suelo, lo cual, da como resultado un RC negativo (imagen 2.28).

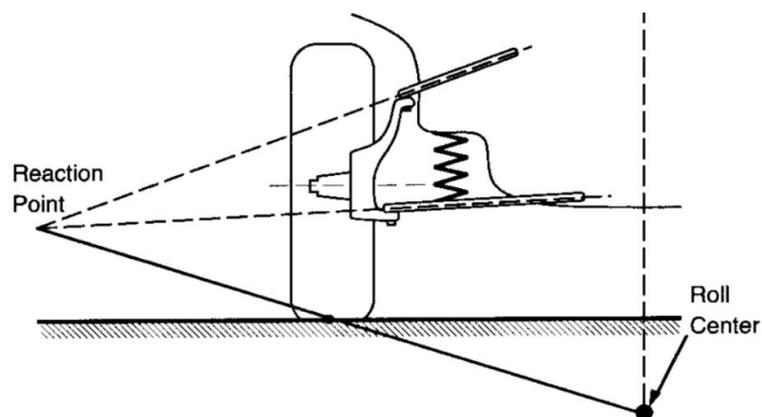


IMAGEN 2.28. NEGATIVE SWING ARM GEOMETRY (5).

En este caso, cuando el auto toma una curva, el IC de la llanta externa se moverá hacia arriba dado por el movimiento de *jounce*. Para la llanta interna, al tener un movimiento de *rebound*, el IC se moverá hacia abajo. Esto causará que el RC baje y se recargue más a la zona de la llanta externa (imagen 2.29). Bajo estas condiciones, cuando la fuerza lateral actúa en la llanta externa, la componente vertical tenderá a bajar el auto. Para el caso de la fuerza lateral en la llanta interna, su componente vertical tenderá a levantar al carro. En consecuencia, a esta configuración, se presentará más *roll moment* en el vehículo.

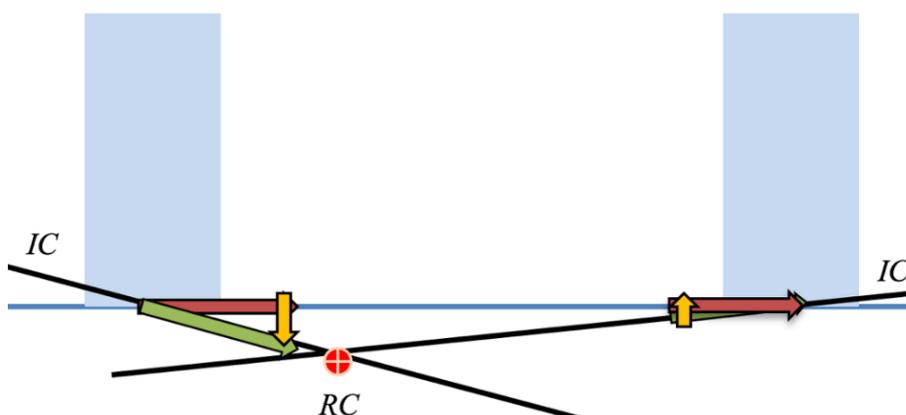


IMAGEN 2.29. DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS EN CURVA. NEGATIVE SWING ARM GEOMETRY. VISTA FRONTAL CON EL VEHÍCULO GIRANDO A LA DERECHA.

#### 2.1.1.2.2.3. Parallel Swing Arm Geometry

Bajo esta configuración la intersección del IC se extiende al infinito. Los brazos de suspensión se mantienen paralelos y con ellos el FVSA. Cuando estos están paralelos al suelo el RC se encontrará también al nivel del mismo. Dependiendo de la inclinación que estos tomen con respecto al chasis, el *roll center* se ubicará por debajo o por arriba del suelo (imagen 2.30).

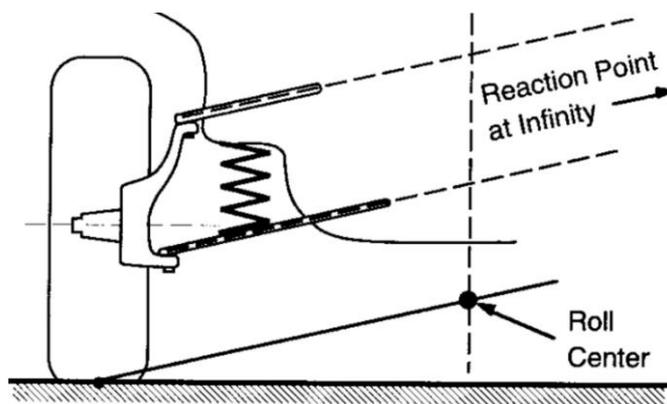


IMAGEN 2.30. PARALLEL SWING ARM GEOMETRY (5).

En esta configuración hay dos posibles casos:

1) *Parallel. Equal A-arms.*

Cuando los brazos de la suspensión miden lo mismo, la llanta no tendrá variaciones de *camber* en *jounce* y *rebound*, esto cuando el auto se encuentra corriendo en línea recta. Sin embargo, en una curva, bajo transferencia de carga, la llanta externa tendrá una ganancia excesiva de *positive camber* dado por el *roll moment* del carro. Además, al no haber un punto de convergencia entre ambos brazos, se generarán efectos de *bump steering*, haciendo inestable a la dirección (5).

2) *Parallel. Inequal A-arms.*

Para eliminar la ganancia de *positive camber* que la *parallel equal A-arms suspension* crea, el brazo superior se diseña más pequeño que el inferior. Sin embargo, cuando la llanta está en *jounce* y *rebound*, los brazos dejarán de ser paralelos. De igual manera, la inestabilidad de la dirección continuará por los efectos del *bump steering* (5).

Una de las ventajas del *Parallel Swing Arm Geometry*, es que el RC se mantiene cerca de su ubicación original cuando el auto presenta *roll moment*. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, tanto el *up right* como los puntos de anclaje con el chasis, deben estar a la misma altura, pudiendo traer problemas con el empaquetamiento o el diseño.

Durante el diseño de la cinemática de la suspensión se busca que el RC no se aleje demasiado del CG, así como que se mantenga lo más pegado al suelo con las mínimas variaciones posibles. Cuando el RC se encuentra pegado al suelo, la fuerza lateral aplicada en las llantas generará el mejor comportamiento para el auto, ya que la componente vertical no se desarrollará, mientras que la magnitud de la componente horizontal será la mayor. En otras palabras, al no haber diferencia de alturas entre el IC y la fuerza lateral, no se generará ningún momento que cree el efecto del *jacking*.

### 2.1.1.2.3. *Tyre scrub*

El *tyre scrub* es el movimiento lateral que tiene la llanta con respecto al suelo en un movimiento de *ride*. Este depende de la longitud del *FVSA* y la altura del IC. Cuando el IC es coincidente con el suelo, la cantidad de *tyre scrub* será la mínima. Si el IC está por dentro del auto y por arriba del suelo, la llanta se moverá hacia afuera a medida que suba. Si el IC está por adentro y por debajo del suelo, la llanta se moverá hacia adentro durante el *jounce* (imagen 2.31).

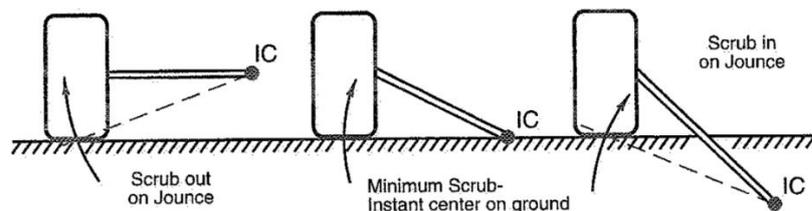


IMAGEN 2.31. TYRE SCRUB (9).

Suponiendo que un auto corre en línea recta, cuya pista tiene muchas irregularidades, una llanta con un gran *scrub* no se mantendrá en línea recta. La llanta, dependiendo de la localización del IC, se moverá hacia adentro o hacia afuera (imagen 2.32) (9).

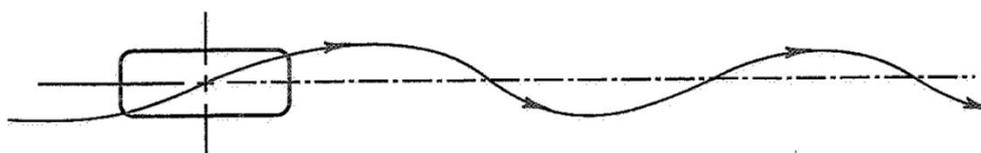


IMAGEN 2.32. TRAYECTORIA DE LA LLANTA CON EFECTOS DE SCRUB (9).

Estos cambios laterales de la llanta generarán una velocidad lateral en el *contact patch*, la cual, al actuar con la fuerza lateral y la fuerza longitudinal en la curva, modificarán el *sideslip angle* de la misma. Esto afectará a la estabilidad del auto en las curvas.

### 2.1.1.3. Roll axis

Se trata de la línea instantánea definida entre el RC trasero y RC delantero. Es este eje sobre el cual el *sprung mass* girará (imagen 2.3). Se denomina ‘instantáneo’, porque este se desplazará junto con los RC cada vez que el auto tome una curva.

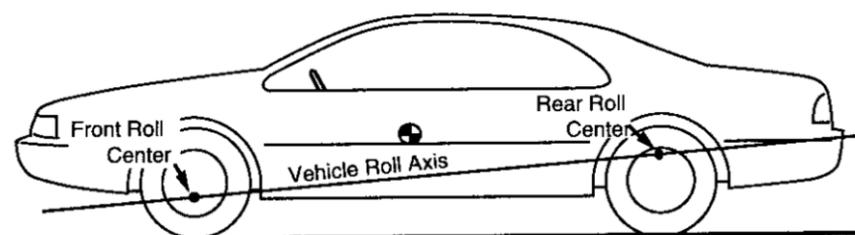


IMAGEN 2.33. ROLL AXIS. VISTA LATERAL (5).

Cuando el RC trasero es más alto que el RC delantero se le conoce como *positive roll axis*. Cuando el delantero es más alto que el trasero se le denomina *negative roll axis*. Se busca que el *roll axis* sea paralelo al eje formado por el CG de la parte delantera y el CG de la parte trasera, llamado *CG axis* (imagen 2.34). Cuando estos dos ejes son paralelos, se presentará un desempeño similar entre la parte delantera y la parte trasera de la suspensión y con ello, un desempeño más neutro en el auto.

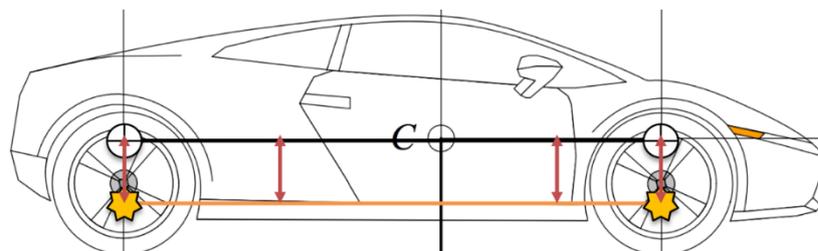


IMAGEN 2.34. CG AXIS. VISTA LATERAL (3).

En algunos diseños se opta por un *positive roll axis*, ya que, de esta forma, la distancia entre el *CG axis* y el *roll axis* de la parte trasera incrementa. Esto generará más transferencia de carga hacia la llanta externa y con ello más *slip angle*, creando un efecto de *oversteer*. Sin embargo, hay que tener en cuenta diferentes factores para elegir la configuración del *roll axis*, como lo es la distribución del peso y la ubicación del *CG axis*.

#### 2.1.1.4. Motion ratio/ Installation ratio

El *motion ratio* (*MR*) es la relación del desplazamiento del centro de la llanta con respecto al desplazamiento del amortiguador/ resorte (*II*). Esto se toma en consideración previo a la selección de amortiguador, ya que, a partir del recorrido en *ride* que la llanta tendrá, se escoge un amortiguador con un recorrido un tanto más grande. La forma de obtener el *motion ratio* se muestra en la ecuación 6.

$$MR = \frac{\Delta Shock\ displacement}{\Delta Wheel\ displacement} \quad (6)$$

El inverso multiplicativo del *motion ratio* se llama *installation ratio* (*IR*). Este relaciona el desplazamiento entre el amortiguador/ resorte y el centro de la llanta. El *IR* se calcula mediante las ecuaciones 7 y 8.

$$IR = \frac{\Delta Wheel\ displacement}{\Delta Shock\ displacement} \quad (7)$$

$$IR = \frac{1}{MR} \quad (8)$$

Para autos FSAE se recomienda un *MR* ligeramente menor o igual a 1 (*II*). El tener un *MR* menor a 1, sirve como factor de seguridad para que cualquier sobrepaso en el desplazamiento de la llanta no dañe el amortiguador. Esto se emplea cuando el desplazamiento del amortiguador es muy limitado. Otra manera de controlar el desplazamiento de la llanta es incrementando la rigidez del resorte, contemplando que esto modificará el desempeño en pista del auto. Sin embargo, la forma correcta de escoger el *MR* óptimo, es calcular el desplazamiento máximo en *jounce* que la llanta tendrá bajo condiciones dinámicas, esto es, bajo transferencias de carga.

Cuando se tiene un *MR* de 1 el desplazamiento de la llanta como el del amortiguador/ resorte será el mismo. Cuando este es diferente a 1, no sólo el desplazamiento se altera, sino que las fuerzas que llegan al resorte y la velocidad con la que el amortiguador se comprime, también.

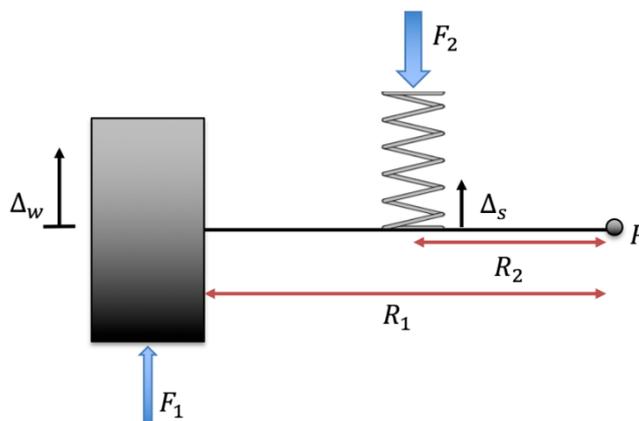


IMAGEN 2.35. MOTION RATIO

Analicemos la imagen 2.35. En ella se puede ver la relación del movimiento de la llanta con respecto al del resorte. Dado el punto pivote P, se genera un brazo de palanca  $R_1$  sobre el cual viajará la llanta, así como un brazo de palanca  $R_2$  sobre el cual se comprimirá el resorte. En este caso, el desplazamiento de la llanta  $\Delta_w$  será mayor con respecto al desplazamiento del resorte  $\Delta_s$  ( $MR < 1$ ). Ahora, analicemos qué pasa con las fuerzas.

Dadas las condiciones de equilibrio:

$$\sum M_x = 0 \quad (9)$$

Se llega a la ecuación 10.

$$F_1 R_1 - F_2 R_2 = 0 \quad (10)$$

Por lo tanto:

$$F_2 = \frac{R_1}{R_2} F_1 \quad (11)$$

$$F_2 = (MR) F_1 \quad (12)$$

Cuando un auto presenta un bajo MR, es decir, la llanta viaja más de lo que el resorte recorre, la fuerza que llegará al resorte será mayor que la fuerza que la llanta recibe. Por otra parte, el amortiguador viajará con menor velocidad. Cuando un auto presenta un alto MR, es decir, la llanta viaja menos de lo que el resorte recorre, la fuerza que llega al resorte será menor de la que la llanta recibe y el amortiguador viajará con mayor velocidad. En la imagen 2.36 se muestra una tabla comparativa con bajos valores de MR.

Motion Ratio	1:1	0.75:1	0.5:1
Wheel Travel	25 mm	25 mm	25 mm
Shock/Spring Travel	25 mm	18.8 mm	12.5 mm
Wheel Velocity	50 mm/sec	50 mm/sec	50 mm/sec
Shock Velocity	50 mm/sec	37.5 mm/sec	25 mm/sec
Wheel Rate	25 N/mm	25 N/mm	25 N/mm
Spring Rate Required	25 N/mm	44 N/mm	100N/mm
Spring Preload	50 kg	67 kg	100 kg

IMAGEN 2.36. TABLA COMPARATIVA DE INSTALLATION RATIO (11).

*Spring preload* ( $b_s$ ) es la carga inicial que se le agrega al resorte previo a que el carro corra. Este no modifica la constante del resorte (tratándose de un resorte lineal) ni modifica el *ride* total del auto. Este modifica la fuerza necesaria para que el resorte empiece a comprimir, así como restringirá el *ride* total del carro, lo cual, durante una curva, disminuirá el *roll moment* del mismo. El aumento del *spring preload* hará que el auto se levante. Esto se traduce como un aumento en la energía potencial.

### 2.1.2. Suspensión push-rod y pull-rod

Las suspensiones independientes permiten que cada llanta logre un movimiento de *ride* sin afectar a la llanta opuesta (caso contrario a las suspensiones dependientes, donde el movimiento de una llanta afectará a la otra). Actualmente los autos de uso común y de carga ligeros usan este tipo de suspensión. Esto por las ventajas que proveen con el empaquetamiento del motor, el fácil control de la ubicación de los RC, un mejor desempeño en pista por el *jounce* y el *rebound* y la mejora en la resistencia a las grandes frecuencias que se dan en la parte delantera (suponiendo un motor ubicado adelante). En general, este tipo de suspensión genera una mejor rigidez para controlar el *roll moment*. Sin embargo, estas son más caras que las suspensiones dependientes.

La relación de la masa del *sprung mass* con la de USM se denomina *unsprung to sprung mass ratio* ( $\mu$ ). La manera de obtenerla se muestra en la ecuación 13.

$$\mu = \frac{m_u}{m_s} \quad (13)$$

Donde:

$m_s$  = Masa del *sprung mass* [Kg].

$m_u$  = Masa de USM [Kg].

Se define como USM a todo aquello que tiene movimiento relativo con respecto al chasis (llanta, *rim*, frenos, etcétera). *Sprung mass* es aquello que la suspensión soporta (chasis, motor, pasajeros, etcétera). Los elementos que unen al *sprung mass* con USM como lo son resortes, brazos, amortiguador y demás, se toman como 1/3 *sprung mass* y 2/3 USM.

La mayoría de los autos comerciales tienen un *mass ratio* de 0.1. Mientras esta relación sea más pequeña se presentará mayor confort, mejor maniobrabilidad y mejor desempeño en

*ride* para el auto. Una desventaja se presenta con respecto a las vibraciones desarrolladas en el *sprung mass*, ya que, al haber menos masa, la frecuencia natural aumentará. Sin embargo, esto se puede controlar con el resorte y la configuración del amortiguador.

Otra de las ventajas de las suspensiones independientes sobre las dependientes, es que presentan un *mass ratio* menor, con lo que se genera un buen desempeño en *ride* y mejora la maniobrabilidad del carro.

Las suspensiones *push-rod* y *pull-rod* son un par de variaciones de una suspensión *double A-arm*. En este tipo de suspensiones se agregan dos eslabones extra, uno de ellos llamado *rocker* o *balancín*, cuya función es convertir el movimiento de *jounce* y *rebound* de la llanta en compresión y extensión del amortiguador. El otro elemento se llama *push-rod* o *pull-rod* (dependiendo de la configuración), el cual es el elemento que conecta a los brazos de suspensión con el *rocker*. Aunque ambas configuraciones parten del mismo principio, la diferencia más significativa es que, mientras la suspensión *push-rod* empuja al eslabón extra para que este comprima el amortiguador cada vez que la llanta suba, la suspensión *pull-rod* jalará a el eslabón para que el amortiguador se comprima cada vez que la llanta suba (imagen 2.37). Esto se logra por el *rocker* y la posición de este en el chasis.

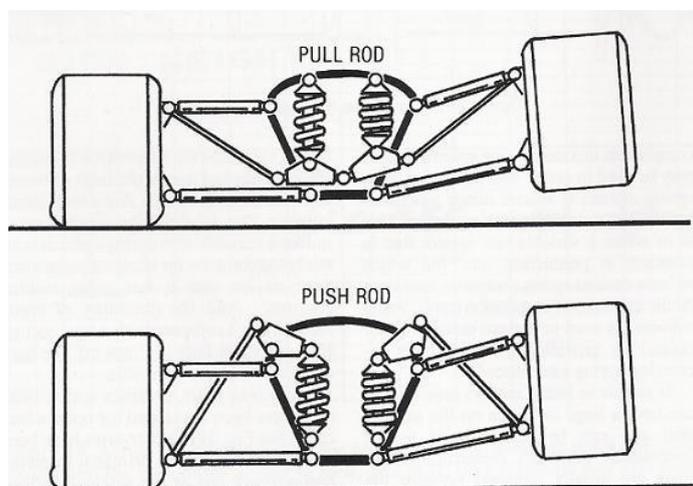


IMAGEN 2.37. ARRIBA: SUSPENSIÓN TIPO PULL-ROD; ABAJO: SUSPENSIÓN TIPO PUSH-ROD (10).

Aunque ambas suspensiones funcionan bajo el mismo principio y con las mismas piezas, hay desventajas de una *push-rod* con respecto a una *pull-rod*. La principal es que la *push-rod*, al sobresalir de la carrocería, generará arrastre. Además, una suspensión tipo *pull-rod* ayudará a que el CG del carro se ubique más abajo. En cuanto a las desventajas, se puede encontrar que la suspensión tipo *pull-rod* presentará dificultades en cuestiones de ensamblaje y empaquetamiento.

De manera general, este tipo de diseños es muy ocupado en autos de competencia F1 y FSAE por el poco empaquetamiento que requieren, el fácil acceso a ellas y la manera rápida para poder configurarlas. Una desventaja es que trae consigo la implementación del balancín, lo cual, para el proceso de diseño, involucra más tiempo en el procesamiento de resultados, dado a que el mecanismo estará sometido a varios movimientos no lineales.

### 2.1.3. Rigidez

Cuando un auto se encuentra acelerando, frenando o se encuentra en una curva, se genera transferencia de carga de unas llantas a otras. Esto genera diferentes fuerzas en las

llantas, las cuales, les ayudarán a generar su mejor comportamiento en la pista, logrando el mejor desempeño para el auto. Sin embargo, para poder lograr esto de una manera óptima, la suspensión debe contar con cierta rigidez; lo que se busca es que las 4 llantas generen su mejor desempeño. Esto, como se vio en temas anteriores, se logra desde la cinemática. La rigidez lograda por los resortes y las llantas se encarga de limitar la transferencia de carga y los momentos generados en el auto, lo cual ayudará a mantener los parámetros cinemáticos iniciales con las menores variaciones. Por otra parte, hay que tener en cuenta la rigidez del chasis, ya que este debe de soportar la rigidez de la suspensión. Por otro lado, la elección del resorte modificará la frecuencia natural del sistema.

### 2.1.3.1. Ride frequency

Una de las ventajas de trabajar con una suspensión independiente, es que cada cuarto del auto se puede analizar de manera separada. Esta se puede representar como un modelo de dos DOF (*degree of freedom*) (imagen 2.38).

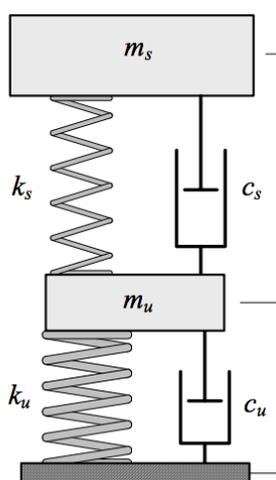


IMAGEN 2.38. MODELO DE UN CUARTO DEL AUTO (3)

Donde:

$m_s$  = Sprung mass [Kg].

$k_s$  = Spring rate [N/m].

$c_s$  = Damping coefficient [Ns/m].

$m_u$  = Unsprung mass [Kg].

$k_u$  = Tyre rate [N/m].

$c_u$  = Tyre damping coefficient [Ns/m].

*Ride frequency* se refiere a la frecuencia natural que se presenta tanto en *sprung mass* como en el USM. Esto es lo mismo que la frecuencia a la cual el sistema entrará en resonancia (11). Esta depende de la masa del sistema, la rigidez del resorte y el coeficiente de amortiguación. Para entender con detalle este subtema, se dejarán claros algunos conceptos antes. La imagen 2.38 será el modelo del cual se partirá para comprender los conceptos mejor.

#### 2.1.3.1.1. Spring rate ( $k_s$ )

Se trata de la fuerza  $F_s$  por unidad de deformación  $x_s$  en el resorte. Para resortes helicoidales esta se mide axialmente a lo largo de su línea central. Este valor puede ser lineal (la fuerza es directamente proporcional a la deformación) o no lineal (la fuerza no es

proporcional a la deformación, pudiendo incrementar o disminuir su pendiente). Sus unidades típicas son [N/m] y [lbf/in]. La ecuación 14, muestra la manera de calcularlo.

$$k_s = \frac{F_s - b_s}{x_{sp}} \quad (14)$$

Donde:

$F_s$  = Fuerza aplicada al resorte [N].

$b_s$  = Spring preload [N].

$x_{sp}$  = Desplazamiento del resorte [m].

En la imagen 2.39 se presenta la gráfica de un resorte con *preload* y uno sin *preload*. Como se puede ver, la *preload* no modifica la constante  $k_s$  (siendo un resorte lineal), sólo modifica la fuerza inicial para que el resorte comience a trabajar.

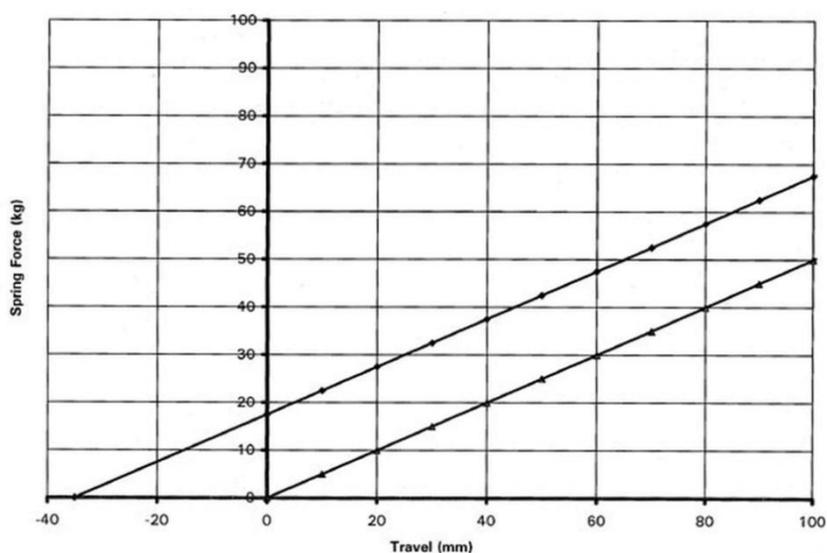


IMAGEN 2.39. PRELOAD. GRÁFICA SPRING FORCE VS SPRING TRAVEL. (13)

### 2.1.3.1.2. Wheel center rate ( $k_w$ )

Se trata de la relación de fuerza vertical por unidad vertical de desplazamiento en el centro de la llanta. Sus unidades típicas son [N/m] y [lbf/in] (14).

El IR tiene un papel importante para este cálculo. Cuando el IR se comporta de manera constante, el *wheel center rate* estará definido por la ecuación 15.

$$k_w = k_s(IR)^2 \quad (15)$$

En la mayoría de las suspensiones este comportamiento no es constante. Es necesario saber cómo es que el IR varía, pues este tendrá consecuencias en la fuerza que recibe el resorte. La ecuación 16 muestra una forma en la que se puede cuantificar el *wheel center rate* teniendo en cuenta estas variaciones de IR.

$$k_w = F_s \left( \frac{\Delta IR}{\Delta \delta} \right) + k_s(IR)^2 \quad (16)$$

Donde:

$\frac{\Delta IR}{\Delta \delta}$  = Relación de cambio entre el IR y el desplazamiento de la llanta [1/m].

La primera parte de la ecuación se conoce como *geometric rate*.

### 2.1.3.1.3. Tyre rate ( $k_u$ )

Es la relación de la fuerza aplicada en la llanta por unidad de deformación de la misma. Esta depende de la presión, temperatura, compuesto, *camber*, etcétera. Sus unidades típicas son [N/m] y [lbf/in] (14).

### 2.1.3.1.4. Ride rate $k_R$

Se trata de la relación de la fuerza aplicada al neumático por unidad de deformación del *contact patch* con el piso. Su valor depende de  $k_w$  y de  $k_T$  (14). Dado que el *tyre rate* y el *wheel center rate* actúan como dos resortes en línea, la forma de calcular  $k_R$  se muestra en la ecuación 17.

$$k_R = \frac{k_w k_u}{k_w + k_u} \quad (17)$$

Si se asume la rigidez de la llanta como infinita  $k_u \rightarrow \infty$ , entonces  $k_R = k_w$ . Sus unidades típicas son [N/m] o [lbf/in].

### 2.1.3.1.5. Roll rate ( $k_{Roll}$ )

Se trata de la relación del momento con el cual se resiste el carro al girar en el eje X con respecto a los grados de giro del mismo. Sus unidades son [Nm/°] o [lbf/°]. Este se puede calcular con la ecuación 18.

$$k_{Roll} = \frac{12 k_R t^2}{2} \quad (18)$$

Donde:

$k_{Roll} = Roll\ rate$  [Nm/°].

$k_R = Ride\ rate$  [N/m].

$t = Track$  [m].

### 2.1.3.1.6. Frecuencia natural

La frecuencia natural se define como el número de ciclos de oscilación de un sistema en un determinado tiempo. Esta es propia de cada sistema y es dependiente de la rigidez y de la masa del mismo. Si se eliminan los efectos de la fricción, el sistema tenderá a oscilar eternamente tras una excitación. Sus unidades son [rad/s]. La manera de calcularla se muestra en la ecuación 19.

$$\omega_n = 2\pi fr = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (19)$$

$fr$  es otra forma de expresar a la frecuencia, la cual toma como unidades los [Hz].

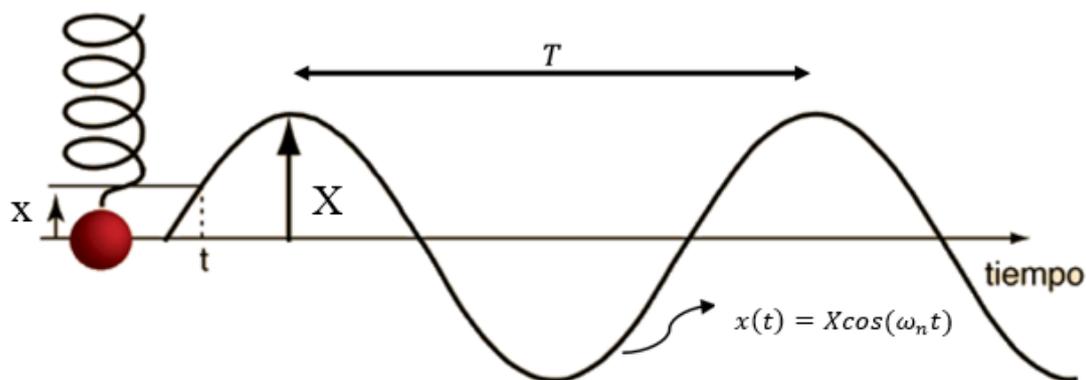


IMAGEN 2.40. MODELADO DE UN SISTEMA MASA-RESORTE DE UN DOF (15).

Analicemos la imagen 2.40. Considérese un sistema masa-resorte de un DOF bajo un movimiento armónico simple (función sinusoidal), siendo esta definida por  $x(t) = X \cos(\omega_n t)$ . Este, a partir de una perturbación, comenzará a oscilar generando un recorrido máximo por arriba y por debajo de la posición de equilibrio. Estos recorridos máximos se conocen como cresta y valle, respectivamente. La amplitud  $X$  será entonces la máxima distancia medida de la línea de equilibrio a la cresta o al valle. Un ciclo representa una oscilación en el sistema, esto es, haber completado un desplazamiento de cresta a cresta. El periodo es el tiempo que le toma al sistema completar un ciclo. Este se determina mediante la ecuación 20.

$$\tau = \frac{1}{f_r} = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (20)$$

Ahora, considérese un modelo de suspensión de dos DOF. En él se presentan dos frecuencias naturales, una para *sprung mass* y otra para USM. Las ecuaciones 21 y 22, muestran como calcular dichas frecuencias naturales, respectivamente.

$$f_r(s) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_R}{m_s}} \quad (21)$$

$$f_r(us) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_w + k_u}{m_u}} \quad (22)$$

Donde:

$f_r(s)$  = Frecuencia natural *sprung mass* [Hz].

$k_R$  = Ride rate [N/m].

$m_s$  = Masa del *sprung mass* [Kg].

$f_r(us)$  = Frecuencia natural USM [Hz].

$m_u$  = Masa de USM [Kg].

$k_w$  = Wheel center rate [N/m].

$k_t$  = Tyre rate [N/m].

Las típicas frecuencias no amortiguadas para *sprung mass* y USM se enlistan en la tabla 2.2.

<i>Car type</i>	<i>Frecuencia de sprung mass [Hz]</i>	<i>Frecuencia de unsprung mass [Hz]</i>
<i>FSAE vehicle</i>	2.5 – 3.5	15 – 19
<i>Passenger car</i>	1 – 2	10 – 12
<i>Nascar Cup car</i>	1.5 – 4	15 – 17
<i>Indy Car</i>	5 – 7	23 – 27

TABLA 2.2. FRECUENCIAS NATURALES EN DIFERENTES VEHÍCULOS (11).

La suspensión frontal y la suspensión trasera oscilan a diferentes frecuencias, las cuáles presentarán un retraso angular  $\varphi_x$ , así como con una amplitud diferente. Esto ayuda al auto a reducir el tiempo para estabilizarse después de presentarse un *pitch moment*. Comúnmente, la frecuencia de la parte trasera es más grande que la de la parte delantera. De esta manera, después que las llantas presentan un movimiento de *ride*, la frecuencia de la parte trasera “intersecará” a la frecuencia de la parte delantera, ayudando a la estabilización del auto (imagen 2.41) (11).

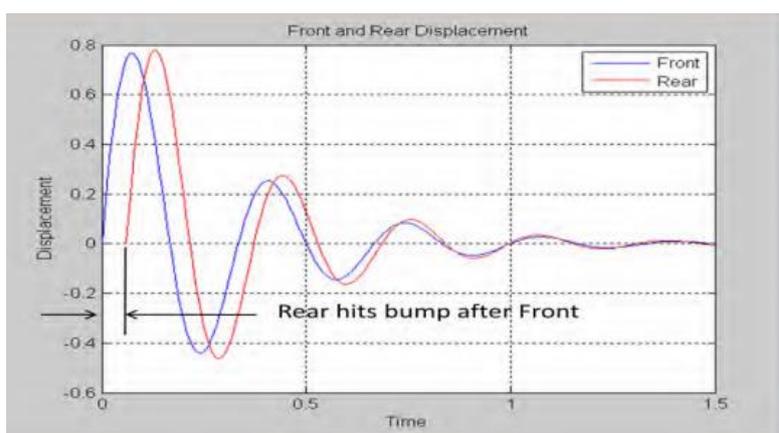


IMAGEN 2.41. FRECUENCIAS DELANTERA Y TRASERA (11).

En autos de competencia, esto pasa cuando el vehículo entra a la curva; las llantas delanteras entrarán primero que las traseras, es decir, las llantas delanteras comenzarán a oscilar antes que las traseras. Esto, aunado a la diferencia de amplitud entre la suspensión trasera y la delantera, ayudará a disminuir el tiempo de oscilación creado por el *pitch moment*, generando buena estabilidad y maniobrabilidad en el auto durante las curvas.

### 2.1.3.2. *Transferencia de carga lateral*

Cuando el carro se encuentra acelerando, frenando o tomando curvas, se presentará una transferencia de carga de un par de llantas a otras. Durante la aceleración, se transferirá carga de las llantas delanteras a las traseras, mientras que, en el frenado, se transferirá carga de las llantas traseras a las delanteras (*anexo 6*). En el caso de la curva, se presenta una transferencia de carga lateral de las llantas internas a las llantas externas debido a las fuerzas inerciales. Como se ha estado viendo en este capítulo, la cinemática de la suspensión controlará el desempeño del auto en pista, siendo la transferencia de carga lateral dependiente de la cinemática también.

Para poder entender cómo es que esta transferencia lateral actúa y los factores de los cuales depende, se definirán algunos conceptos.

### 2.1.3.2.1. Roll gradient ( $K_{\phi}$ )

Se define al *roll gradient* como los grados de *roll* que gira el vehículo bajo una aceleración lateral. Así como se diseña para una frecuencia natural, se debe diseñar para un *roll gradient*, es decir, se deben escoger los grados de *roll* a los cuales se desea que gire el auto. Sus unidades son [ $^{\circ}/g's$ ]. Otra forma en que se le conoce al *roll gradient* es *roll stiffness*, cuyas unidades son [ $Nm/^{\circ}$ ]. Los valores típicos de *roll gradient* se muestran abajo (16).

0.2 – 0.7 [ $^{\circ}/g's$ ] para autos con altos valores de *downforce*.

1.0 – 1.8 [ $^{\circ}/g's$ ] para autos con bajos valores de *downforce*.

Cuando un auto presenta altos valores de *downforce* (anexo 7), el *roll gradient* debe de ser pequeño, ya que el *roll* del *sprung mass* involucra un movimiento en el paquete aerodinámico. El que el paquete aerodinámico tome cierta inclinación, genera un descontrol en el centro de carga de alerón, afectando la distribución del *downforce*; esto puede generar un exceso de peso en las llantas, haciéndolas deslizar.

La manera de controlar el *roll* que el carro desarrolla en curva es mediante la rigidez que este presenta en la suspensión. Cuando se tiene un valor objetivo de *roll gradient*, dado por ciertos grados de *roll* a lograr y una aceleración lateral tomados como condición inicial, se llega a un valor de rigidez el cual no se puede obtener únicamente con resortes comerciales. Estos ya tienen un valor establecido y diseñar unos que cumplan con la rigidez para lograr los grados de *roll* requeridos es demasiado caro. Se puede definir entonces a este valor de *roll gradient* deseado como  $K_{\phi DES}$ . Bajo esto, hay dos posibles soluciones: colocar un valor de resorte cuya rigidez este por debajo o por arriba del valor establecido, modificando los *grados de roll*, o implementar una *anti roll bar* (ARB) (anexo 8).

### 2.1.3.2.2. Casos de transferencia de carga

La transferencia de carga lateral se da por 4 diferentes casos.

- Transferencia de carga lateral debido a USM ( $\Delta W_{uf}, \Delta W_{ur}$ ) (14).

Esta describe la manera en que un neumático transfiere carga a su opuesto. Para este caso, se requiere saber la altura del CG de USM, así como el peso del mismo. La manera más fácil de obtener estos datos es mediante softwares CAD. Las ecuaciones 23 y 24, muestran la manera de calcularla.

$$\Delta W_{uf} = \frac{m_{uf} \cdot a_y \cdot h_{fCu}}{t_f} \quad (23)$$

$$\Delta W_{ur} = \frac{W_{ur} \cdot a_y \cdot h_{rCu}}{t_r} \quad (24)$$

Donde:

$W_{uf}, W_{ur}$  = Peso de USM delantero/trasero [N].

$h_{fCu}, h_{rCu}$  = Altura del CG de USM delantero/trasero [m].

$a_y$  = Aceleración lateral [ $g's$ ].

$t_f$  = *Front track* [m].

$t_r$  = *Rear track* [m].

- Transferencia de carga lateral geométrica debido a *sprung mass* ( $\Delta W_{gf}, \Delta W_{gr}$ ) (14).

Esta recae en la ubicación de los RC y la manera en que la fuerza lateral, generada en las llantas, actúa sobre el *sprung mass*. Las ecuaciones 25 y 26, muestran la forma de obtenerla.

$$\Delta W_{gf} = \frac{W_{sf} \cdot a_y \left(\frac{a_2}{l}\right) h_{rf}}{t_f} \quad (25)$$

$$\Delta W_{gr} = \frac{W_{sr} \cdot a_y \left(\frac{a_1}{l}\right) h_{rr}}{t_r} \quad (26)$$

Donde:

$W_{sf}, W_{sr}$  = Peso de *sprung mass* delantero/ trasero [N].

$h_{rf}, h_{rr}$  = Altura del RC delantero/ trasero [m].

$a_1$  = Distancia del CG al eje delantero [m].

$a_2$  = Distancia del CG al eje trasero [m].

$l$  = *Wheelbase* [m].

- Transferencia de carga lateral debido a *sprung mass* ( $\Delta W_{sf}, \Delta W_{sr}$ ) (14).

Esta se da por la manera en que el CG del auto gira sobre el *roll axis*. Su valor depende del *roll gradient distribution* (anexo 8) entre la parte trasera y la parte delantera. La manera de calcularla se muestra en las ecuaciones 27 y 28.

$$\Delta W_{sf} = \frac{W_s \cdot a_y \cdot h_{Roll}}{t_f} q \quad (27)$$

$$\Delta W_{sr} = \frac{W_s \cdot a_y \cdot h_{Roll}}{t_r} (1 - q) \quad (28)$$

Donde:

$W_s$  = Peso del *sprung mass* [N].

$h_{Roll}$  = Distancia del CG al *roll axis* [m].

$q$  = *Roll Gradient Distribution* [%].

- Transferencia de carga lateral debido al efecto giroscópico en USM ( $\Delta W_{GRf}, \Delta W_{GRr}$ ) (17).

Hay un caso extra que algunos libros de dinámica vehicular no toman en cuenta. Este aparece cuando un cuerpo gira alrededor de un eje que también gira alrededor de otro eje, siendo conocido como el efecto giroscópico. La manera de calcularla se expresa en las ecuaciones 29 y 30.

$$\Delta W_{GRf} = \frac{4I\omega\Omega}{2t_f} \quad (29)$$

$$\Delta W_{GRr} = \frac{4I\omega\Omega}{2t_r} \quad (30)$$

Donde:

$I$  = Momento de inercia de USM, contemplando sólo a los elementos que giran. El cual se calcula de la siguiente forma:

$$\underline{I} = m_w R_w^2 \quad (31)$$

Donde:

$m_w$  = Masa de la llanta, el *rim*, la masa y demás objetos que se mantienen girando [kg].

$R_w$  = Radio efectivo de la llanta [m].

$\omega$  = Velocidad angular de la llanta [rad/s].

$\Omega$  = Velocidad de precesión [rad/s]. La cual se calcula con la ecuación 32.

$$\Omega = \frac{v_x}{\rho} \quad (32)$$

Donde:

$v_x$  = Velocidad del auto [m/s].

$\rho$  = Radio de la curva [m], medido del centro del auto al eje de rotación.

- Transferencia de carga total.

La transferencia de carga que se genera durante una curva a velocidad constante se define con las ecuaciones 33 y 34 para la parte delantera y trasera, respectivamente.

$$\Delta W_{\alpha y f} = \Delta W_{u f} + \Delta W_{g f} + \Delta W_{s f} + \Delta W_{G R f} \quad (33)$$

$$\Delta W_{\alpha y r} = \Delta W_{u r} + \Delta W_{g r} + \Delta W_{s r} + \Delta W_{G R r} \quad (34)$$

Dado que el auto se encuentre tomando una curva hacia la derecha del piloto, el peso en cada llanta estará definida como:

$$W_1 = F_{Z1} + \Delta W_{\alpha y f} \quad (35)$$

$$W_2 = F_{Z2} + \Delta W_{\alpha y r} \quad (36)$$

$$W_3 = F_{Z3} - \Delta W_{\alpha y f} \quad (37)$$

$$W_4 = F_{Z4} - \Delta W_{\alpha y r} \quad (38)$$

Donde:

$F_{Z1}$  = Fuerza normal en la llanta delantera izquierda en estático, vista desde atrás.

$F_{Z2}$  = Fuerza normal en la llanta trasera izquierda en estático, vista desde atrás.

$F_{Z3}$  = Fuerza normal en la llanta delantera derecha en estático, vista desde atrás.

$F_{Z4}$  = Fuerza normal en la llanta trasera derecha en estático, vista desde atrás.

$W_1$  = Fuerza normal en la llanta delantera izquierda en curva.

$W_2$  = Fuerza normal en la llanta trasera izquierda en curva.

$W_3$  = Fuerza normal en la llanta delantera derecha en curva.

$W_4$  = Fuerza normal en la llanta trasera derecha en curva.

La implementación de un paquete aerodinámico tiene una gran relevancia sobre el sistema de suspensión. Este busca generar una carga extra en las curvas, de esta forma, se le puede sacar más provecho a las llantas con el incremento de la fuerza normal  $F_Z$ , lo cual dará

oportunidad a las mismas de generar más fuerza lateral  $F_Y$ . Por lo tanto, se puede tomar más rápido la curva (*anexo 7*).

Durante el diseño se debe contemplar que la carga extra debido al *down force* afecta al sistema completo de suspensión, así como a la transferencia de carga que se genera. De igual manera, se debe asegurar que esta carga extra no supere la carga máxima que soporta la llanta. Así mismo, se debe saber si el carro puede generar el suficiente torque vectorial para mover esa carga extra.

### 2.1.3.3. Rigidez del chasis

El chasis de un carro se debe de diseñar para que soporte la rigidez torsional (principalmente sobre el eje X). Una manera de modelar al chasis es como un resorte en torsión que conecta la suspensión trasera con la delantera (9). Suponiendo que la rigidez del chasis es baja, este, durante las curvas, se comportará como un resorte extra presentando grandes flexiones, con lo que la maniobrabilidad del carro será mala, además de que llevará a una falla por fatiga. Por otro lado, cuando la rigidez del chasis es alta, la maniobrabilidad mejorará.

La principal razón para tener un chasis lo suficientemente rígido es proveer una base sólida para la suspensión. De esta manera, las fuerzas laterales pueden ser distribuidas adelante y atrás en proporción a la rigidez del chasis. Este debe de resistir aproximadamente la diferencia entre el *roll rate* delantero y el trasero. La rigidez torsional de un chasis para prototipos FSAE está alrededor de los 13350 [N/°]. Para este tipo de autos, se recomienda tener un factor de seguridad de 3 en la rigidez torsional del chasis con respecto a la rigidez torsional de la suspensión (9).

### 2.1.4. Amortiguación

La amortiguación en el sistema de suspensión tiene dos funciones: evita que el auto salga volando después de un sobresalto, así como absorber el movimiento de *sprung mass* y de USM. Una función secundaria en carros de uso común, pero primordial en carros de competencia, es que controla la manera en que se transfiere la carga, mejorando el confort del auto y la maniobrabilidad.

Un sistema sin amortiguación, tras una excitación, tenderá a vibrar en su frecuencia natural eternamente (eliminando los efectos de la fricción). Conforme el *damping ratio* ( $\zeta$ ) comience a incrementar, las oscilaciones comenzarán a disminuir hasta llegar a un estado estable. El amortiguamiento, en este caso, sólo cambia la cantidad de tiempo que el auto necesita para volver a ese estado estable después de un sobresalto.

El *critical damping* ( $C_{cr}$ ) se define como la cantidad de amortiguamiento que le permite a la masa regresar a un estado estable de la manera más rápida y sin sobresalto (11). El *damping ratio* determina la relación entre el *critical damping* y el *damping coefficient* ( $C_s$ ). Este último es un valor propio del amortiguador.

Autos de pasajeros presentan *damping ratios* de  $\zeta = 0.2$ . Esta cantidad de *damping ratio* busca confort y estabilidad en el vehículo. Para carros de competencia con bajos valores de *down force*, el valor común está entre 0.65 – 0.7, ya que provee mejor control que en los autos de pasajeros (menor sobrepaso) y una mejor respuesta que el *critical damping*. Escuderías cuyos carros generan altos valores de *down force*, optan por un *damping ratio* de hasta 1, ya que, con esta configuración, el vehículo no presenta oscilaciones (11). Esta

condición se llama *critically damped* (imagen 2.42). Esto genera un mayor control del *roll* y el *pitch*, pero menor confort y pérdida de agarre en las llantas.

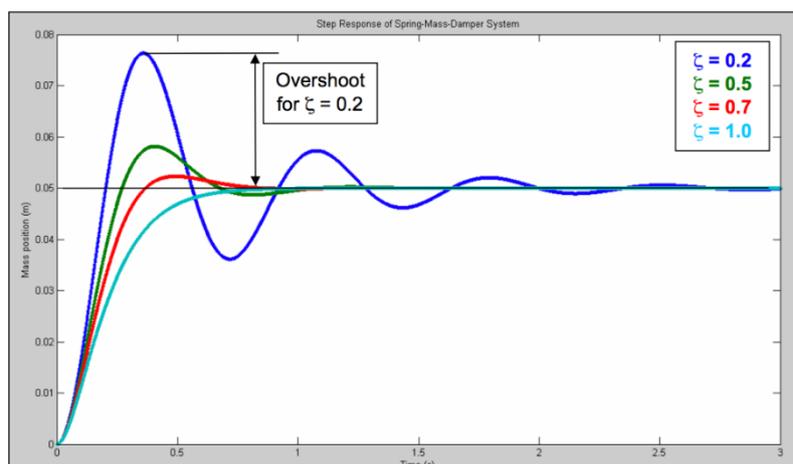


IMAGEN 2.42. DAMPING RATIO (11).

En autos de competencia, la relación *jounce – rebound* se diseña para que el amortiguador sea dos veces más rápido en *rebound* que en *jounce*. Esto es, porque cuando un auto toma una curva, se busca que la transición con la que actúa la transferencia de carga sobre las llantas externas sea lenta. De esta forma, la llanta evitará tener sobrepaso, con lo que se tendrá un mejor control en el *roll*, generando una mejor maniobrabilidad. Cuando las llantas se encuentran en *rebound*, este movimiento debe ser lo suficientemente rápido para que lleguen a su estado estable sin provocar sobrepaso. Otra cosa que hay que tener en cuenta, es que, en autos de competencia, se produce el doble de *damping force* en *rebound* que en *jounce*; cuando la suspensión se comprime, la energía se almacenará en el resorte y durante el *rebound*, el resorte liberará esa energía. El amortiguador absorbe la energía con el propósito de disminuir la frecuencia. Sin embargo, en esta configuración, menos *damping force* es requerida en el *jounce*, dado que a esta la retiene el resorte. En el caso de *rebound*, se requerirá más *damping force* para absorber la energía que el resorte libera. De cierta forma, para autos de competencia, el amortiguador se comporta como un resorte dinámico en *jounce* (18).

Si bien, la llanta genera una pequeña parte del amortiguamiento (2%), lo demás será generado por el amortiguador de la suspensión. El amortiguador produce fuerza basada en que tan rápido se mueve este. Esta fuerza es proporcional a la velocidad. Los autos de competencia FSAE trabajan a bajas velocidades. Las bajas velocidades van de 0 – 50.8 [mm/s]. Las medias velocidades van de 50.8 – 203.2 [mm/s]. Las altas velocidades son mayores a 203.2 [mm/s] (11).

Cuando se ha diseñado la cinemática, y posteriormente se ha diseñado para cierto comportamiento en estado estable, el amortiguamiento será la clave para generar el mejor desempeño en pista, ya que este modificará el desempeño durante las transiciones en las curvas (*anexo 9*).

## 2.2. Ecuación de Freudenstein

Se trata del método que fue especialmente desarrollado para el análisis de posición, velocidad y aceleración para mecanismos, siendo parte del modelado para el balance de energías por el método de Lagrange. Este tiene sus inicios en el análisis y diseño de mecanismos 4 barras. Posterior a la implementación de este método, los mecanismos se analizaban de manera gráfica, como se muestra en la imagen 2.43.

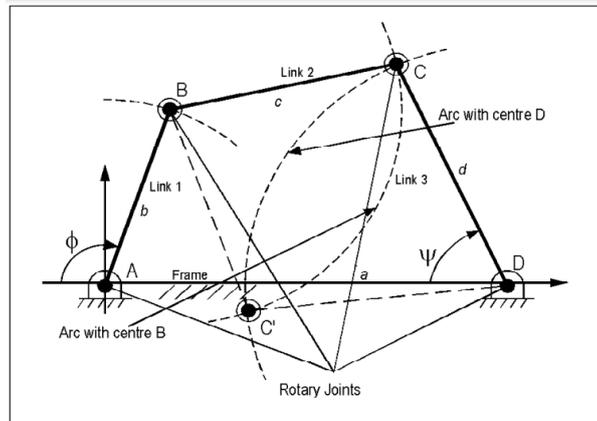


IMAGEN 2.43. ANÁLISIS DE MECANISMO DE MANERA GRÁFICA (19).

De la imagen anterior, a partir del uso de geometría, se muestra que, teniendo la longitud de cada uno de los eslabones y conociendo un ángulo de entrada, se puede conocer la posición y orientación de cada uno de los elementos. Conociendo el ángulo de entrada  $\phi$ , se pueden seguir los siguientes pasos: con A como centro, se dibujará un arco de radio b. Con C como centro, se dibuja un arco de radio d. Con AB definida por  $\phi$ , se toma como centro a B y se dibuja un círculo de radio c. Los dos círculos con centro B y D, se intersecarán en 2 puntos, C y C'. Las dos posibles soluciones generadas a partir de las condiciones dadas son, ABCD y ABC'D. De esta manera se obtiene un mecanismo de 1 DOF, con lo que, teniendo como ángulo de entrada  $\phi$ , dado por el eslabón AB, se puede obtener el ángulo de salida  $\psi$ , dado por el eslabón DC (19). Esto es un ejemplo de cómo se aborda el análisis de mecanismo de manera gráfica. Con el tiempo llegaron métodos más precisos, sin embargo, se seguían obteniendo un número limitado de soluciones con una gran cantidad de tiempo.

Freudenstein propone una ecuación escalar que relaciona las condiciones del ensamble del mecanismo a partir de un ángulo de entrada, generando un ángulo de salida. A partir de la imagen 2.44, se seguirá el procedimiento desarrollado por Ferdinand Freudenstein (19).

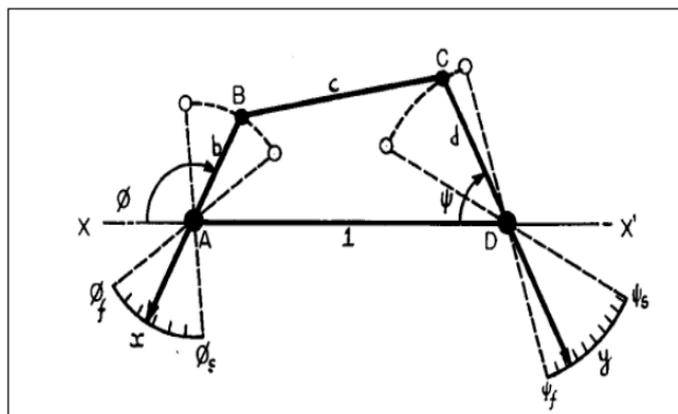


IMAGEN 2.43. ANÁLISIS DE MECANISMOS HECHO POR LAS ECUACIONES DE FREUDENTEIN (25).

La tierra es tomada como la unidad y las otras longitudes son tomadas como  $a$ ,  $b$  y  $c$ , mientras que la entrada y salida son los ángulos  $\phi$  y  $\Psi$ , respectivamente. El punto B, con respecto a A, es localizado con el vector  $AB$ , el cual, se puede obtener a partir de  $b$  y  $\phi$ . De igual manera, el vector  $AC = AD + DC$ , se puede obtener en términos de  $1$ ,  $d$  y el ángulo  $\Psi$ . Ahora, dado que la ecuación vectorial  $AB + BC = AD + DC$  debe cumplirse, Freudenstein escribe la ecuación escalar 39:

$$BC \cdot BC = (AB + CD + AD) \cdot (AB + CD + AD) \quad (39)$$

Donde los vectores  $CD$  y  $DA$  son iguales a los negativos  $DC$  y  $AD$ . Mediante la simplificación de la ecuación 39, Freudenstein obtuvo una simple ecuación escalar:

$$R1\cos(\phi) - R2\cos(\Psi) + R3 = \cos(\phi - \Psi) \quad (40)$$

Donde:

$$R1 = \frac{1}{d} \quad (41)$$

$$R2 = \frac{1}{b} \quad (42)$$

$$R3 = \frac{1+b^2-c^2+d^2}{2bd} \quad (43)$$

La ecuación 40 representa la ecuación de Freudenstein. Mediante el uso de las fórmulas trigonométricas de la tangente de ángulo medio para el seno y coseno del ángulo  $\Psi$ , se pueden obtener dos posibles ángulos  $\Psi$ 's para un valor de entrada  $\phi$ .

La principal ventaja del método de Freudenstein es que es sumamente fácil de programar, mientras que, en el método gráfico, el desarrollo es muy laborioso, toma bastante tiempo y genera un número finito de soluciones.

# CAPÍTULO 3: Desarrollo

## 3.1. Diseño de la suspensión UNAM Motorsports

La metodología de diseño para la suspensión de la escudería *UNAM Motorsports*, se basa en el análisis estático en la prueba de *skidpad*, es decir, en el momento en el que el carro presenta una velocidad constante en curva. Esto, aunado al comportamiento que se requiere que el auto presente, dará las condiciones iniciales de diseño. Es importante mencionar lo anterior, porque durante el diseño de la cinemática de la suspensión se deben de tener claras las condiciones para las cuales se diseña.

Tras una primera propuesta de puntos, habiendo considerado el empaquetamiento del carro, se llega a una primera configuración. Es ahí cuando los softwares de diseño como *WinGeo*, *ADAMS/Car*, *Matlab/Simscape*, etcétera, se empiezan a usar. Estos generan un cierto número de iteraciones, dando como salida los parámetros cinemáticos que se desean obtener, con los cuales se puede justificar el diseño de la suspensión.

En este capítulo se presenta la forma en la que el programa hecho en *Wolfram Mathematica* fue desarrollado, dando una idea más profunda al lector de cómo es que los softwares comerciales de este tipo trabajan. Esto contempla la selección de los *hard points* conseguidos para el diseño del prototipo FSAE de la escudería *UNAM Motorsports* en el 2019.

### 3.1.1. Criterios de diseño

Durante el diseño de la suspensión hay que tener en cuenta ciertos criterios, siendo estos las condiciones de pista y los tiempos que el equipo quiere lograr. Por otra parte, hay que basarse en el reglamento, ya que este restringe la libertad del diseño buscando la seguridad del piloto.

#### 3.1.1.1. Condiciones de pista

El evento *skidpad* evalúa el desempeño del automóvil en curva en una superficie plana, donde se considera que, en cierto punto, el auto corre a velocidad constante. Es esta la prueba en la que se le exige a la dinámica y sobre todo al sistema de suspensión. Se trata de una pista en forma de “∞”, en donde los centros de los círculos tienen una separación de 18.25 [m], el diámetro interno es de 15.25 [m], el diámetro externo es de 21.25 [m] y el ancho de pista es de 3 [m]. La imagen 3.1 muestra las características de la pista.

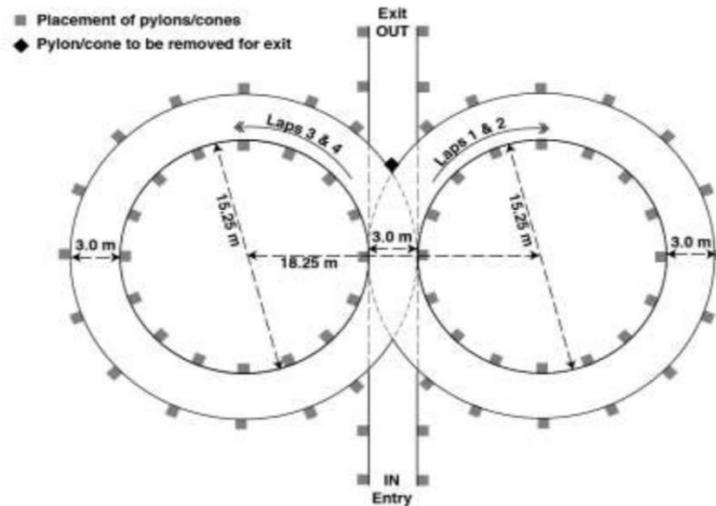


IMAGEN 3.1. EVENTO SKIDPAD (20).

En la tabla 3.1 se muestra el top 5 de la competencia *Formula SAE 2019*, así como el tiempo logrado por la escudería de la UNAM.

Posición	Universidad	Tiempo [s]
1	Rutgers Univ.	5.031
2	Missouri University of Science and Tech	5.035
3	Ecole Polytechnique Montreal	5.083
4	Univ. of Michigan - Ann Arbor	5.191
5	California Polytechnic State Univ-SLO	5.248
18	Universidad Nacional Autónoma de México	5.850

TABLA 3.1. TOS 5 SKIDPAD FORMULA SAE (20).

El objetivo de la escudería es posicionarse en el top 5, con lo que el tiempo a lograr se toma como el promedio de este top, siendo este 5.117 [s]. Sin embargo, para el desarrollo del presente trabajo, el tiempo de diseño será de 5.850 [s], que es la marca lograda en dicha competencia por la escudería de la UNAM.

### 3.1.1.2. Reglamento (20)

La competencia se rige bajo un reglamento que año con año se modifica, siendo validado por SAE, por lo que cada temporada hay que modificar el desarrollo del auto. Las reglas bajo las que se diseña el sistema de suspensión, y las que involucran a las llantas para el año 2019, son las siguientes:

#### T.1.5 Suspensión

**T.1.5.1** El vehículo debe estar equipado con un sistema de suspensión completamente funcional, la cual debe contener amortiguadores, estando presentes atrás y adelante, con un viaje total de la llanta de al menos 50.8 [mm]. Así mismo, este le debe de dar la libertad al piloto de permanecer sentado.

**T.1.5.2** Los oficiales pueden descalificar a los equipos que no presenten un diseño serio y completamente funcional en el sistema de suspensión, o los cuales demuestren un inapropiado comportamiento para *autocross*.

**T.1.5.3** Todos los puntos de montaje de la suspensión deben estar visibles para la inspección técnica, ya sea de forma directa o removiendo alguna cubierta.

**T.1.5.4** Los tornillos deben de ser de sujeción por rosca grado SAE 5 u 8.8.

**T.1.5.5** Todas las *rod ends* y rodamientos esféricos en las suspensión y dirección deben de:

- Estar montados con doble sujeción.
- Estar sujetos por una rosca o rondana cuyo diámetro externo sea más grande que el diámetro interno de la cubierta del rodamiento esférico.

**T.1.7 Llantas**

**T.1.7.1** Las llantas deben de ser de un diámetro de 204.2 [mm] o mayor.

**T.1.7.2** Cualquier sistema de montaje de las llantas que implique el uso de un retenedor de tuerca simple, deberá incorporar un dispositivo para retener la tuerca y la llanta en el momento en que ambas comiencen a aflojarse.

**T.1.7.3** Los equipos que usen pernos modificados o diseños personalizados, deberán probar un buen uso de técnicas ingenieriles durante su desarrollo.

**T.1.7.4** De usarse tuercas de aluminio para las llantas, estas deberán estar anodizadas y en condiciones impecables.

Como se puede observar, las reglas permiten mucha libertad de diseño a la suspensión y a USM, permitiendo iterar con diferentes modelos cinemáticos acorde a lo que el diseño requiere. Por otro lado, se debe de contemplar el chasis, ya que esta toma un papel importante en el diseño de la suspensión, generando un empaquetamiento mínimo a partir del cual se pueden generar los *hard points* de la suspensión.

**3.1.1. Parámetros generales de diseño**

En orden de conseguir el diseño óptimo para el sistema de suspensión, se debe de tomar en cuenta si se trata de un primer diseño o un rediseño. Si se trata de un rediseño, lo mejor será trabajar sobre el mismo buscando innovar y mejorar en ciertas áreas de oportunidad. Si es la primera vez en que se diseña un vehículo, previa experiencia por parte de otras escuderías será de gran ayuda para conseguir un mejor trabajo. En el caso de la escudería *UNAM Motorsports*, al tener más de 11 años, se ha logrado juntar información con el fin de evitar cometer los mismos errores y seguir innovando.

En las tablas 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5, se enlistan los datos del prototipo del 2019

<b>GENERAL</b>		
<b>PARÁMETRO</b>	<b>CANTIDAD</b>	<b>NOTAS</b>
<i>CG en X</i>	0.8276 [m]	CG tomado de forma física
<i>CG en Y</i>	0 [m]	
<i>CG en Z</i>	0.2384 [m]	
<i>Distribución del peso en X</i>	0.5171 [%]	Distribución de peso en la parte trasera.
<i>Ride</i>	-30, 30 [mm]	Viaje de la llanta acorde a el reglamento.

**Diseño de la suspensión UNAM Motorsports**

<i>Wheelbase</i>	1.625 [m]	<i>Wheelbase</i> mínimo permitido por el reglamento.
<i>Front track</i>	1.2446 [m]	
<i>Rear track</i>	1.2192 [m]	
<i>Masa total</i>	278.56 [Kg]	Masa total del carro considerando un piloto de 70 [kg]

TABLA 3.2. PARÁMETROS GENERALES DE DISEÑO

<b>USM</b>		
<b>PARÁMETRO</b>	<b>CANTIDAD</b>	<b>NOTAS</b>
Tipo de llanta	<i>Hoosier R25B 18x6 rim 10</i>	Llanta <i>rim</i> 10 [in].
Temperatura	37.8 – 60 [°C]	Información obtenida del <i>Test Tyre Consortium</i> (TTC).
$K_s$ en Z	109 [KN/m]	
Radio efectivo	0.22352 [m]	
CG en Z	0.23235 [m]	Obtenido en CAD.
USM frontal por cuarto	8.8735 [Kg]	Contemplando 2/3 de la masa de suspensión.
USM trasero por cuarto	9.2727 [Kg]	

TABLA 3.3. PARÁMETROS DE DISEÑO EN USM

<b>AMORTIGUADOR (21) Y RESORTE (22)</b>		
<b>PARÁMETRO</b>	<b>CANTIDAD</b>	<b>NOTAS</b>
Longitud máxima del amortiguador	0.18026 [m]	Amortiguadores <i>ÖHLINS TTX25</i> .
Longitud mínima del amortiguador	0.12326 [m]	
Longitud del resorte	0.122 - 0.140 [m]	Varía de acuerdo con la constante de rigidez.
Viaje del resorte	0.05715 [m]	

TABLA 3.4. PARÁMETROS DEL AMORTIGUADOR Y RESORTE

<b>CONDICIONES EN SKIDPAD</b>		
<b>PARÁMETRO</b>	<b>CANTIDAD</b>	<b>NOTAS</b>
Perímetro de la pista	57.33 [m]	Considerando que el auto va en medio de la pista
Tiempo	5.85 [s]	Mejor tiempo de <i>UNAM Motorsports</i> en <i>skidpad</i> .
Radio de pista	9.125 [m]	Considerando que el auto va en medio de la pista
Aceleración lateral	1.6265 [G's]	
Grados de roll a lograr	-1.2, 1.2 [°]	

TABLA 3.5. CONDICIONES DE DISEÑO EN SKIDPAD

Por otro lado, en la tabla 3.6 se presentan los *hard points* definidos por la escudería, en donde la llanta tiene un desplazamiento de al menos 25.4 [mm] en *jounce* y 25.4 [mm] en *rebound*, así como un ángulo de *camber* neutral. De igual manera, se presenta la nomenclatura que se usa en el programa generado en *Wolfram Mathematica*.

<b>HARD POINTS</b>								
<b>Front suspension</b>					<b>Rear suspension</b>			
#	X[mm]	Y[mm]	Z[mm]	NAME	X[mm]	Y[mm]	Z[mm]	#
P0	115	-220	136	Lower innerA arm, F	-1356.7	-245	143	P20
P0'	-115	-220	136	Lower innerA arm, R	-1556.7	-235	143	P20'
P1	0	-584.217	174.828	Lower outerA arm	-1605.6	-574.795	178.334	P21
P2	-6.1	-559.692	329.931	Upper outerA arm	-1605.6	-574.751	343.434	P22
P3	115	-240	301	Upper innerA arm, F	-1356.7	-262	309	P23
P3'	-115	-240	301	Upper innerA arm, R	-1556.7	-262	309	P23'
P4	0	-502.426	358.355	Push to UpperA arm	-1605.6	-481.11	358.716	P24
P5	0	-278.802	573.509	Push to Rocker	-1605.6	-262.712	434.098	P25
P6	0	-220	528	Rocker to chasis	-1605.6	-275.06	350	P26
P7	0	-219.417	610.578	Rocker to damper	-1605.6	-191.133	418.535	P27
P8	0	-63.93	586.48	Chasis to damper	-1605.6	-26.96	387.94	P28
P9L	0	-620.674	29.679	Lower center wheel	-1605.6	-607.775	29.293	P29L
P9U	0	-620.674	476.719	Upper center wheel	-1605.6	-607.775	476.163	P29U
	0	-620.674	253.199	Wheel center	-1605.6	-607.775	252.623	

TABLA 3.6. HARD POINTS

## 3.2. Wolfram Mathematica, versión 11.3

Wolfram Mathematica es uno de los lenguajes de programación más populares junto a Matlab. Este presenta una clara interfaz, así como facilidad para ser manipulado. Además, Mathematica logra una gran precisión en sus resultados, los cuales dependen, en parte, del poder computacional del ordenador. Para poder manipular este software se necesita conocer la teoría de lo que se desea programar, los comandos y símbolos que se pueden usar (los cuales se pueden encontrar en la página de Wolfram Mathematica (23)), y la habilidad del usuario.

El modelo 2-D desarrollado se basa en la ecuación de Freudenstein, con la cual se puede obtener la posición de cada uno de los eslabones en función de una entrada, es decir, conocer el ángulo de cada uno de los eslabones en función de un único ángulo.

### 3.2.1. Ecuación de Freudenstein: suspensión delantera.

Para el análisis de la suspensión de un prototipo FSAE push y pull, se requiere de un mecanismo de dos barras y corredera y dos mecanismos de cuatro barras, donde el ángulo de salida del primer mecanismo es el dato de entrada para el segundo, y la salida de este, es el dato de entrada del tercer mecanismo. En la imagen 3.2 se muestra el esquema que ejemplifica lo dicho anteriormente para la suspensión delantera, cuya nomenclatura fue utilizada para en el desarrollo del programa.

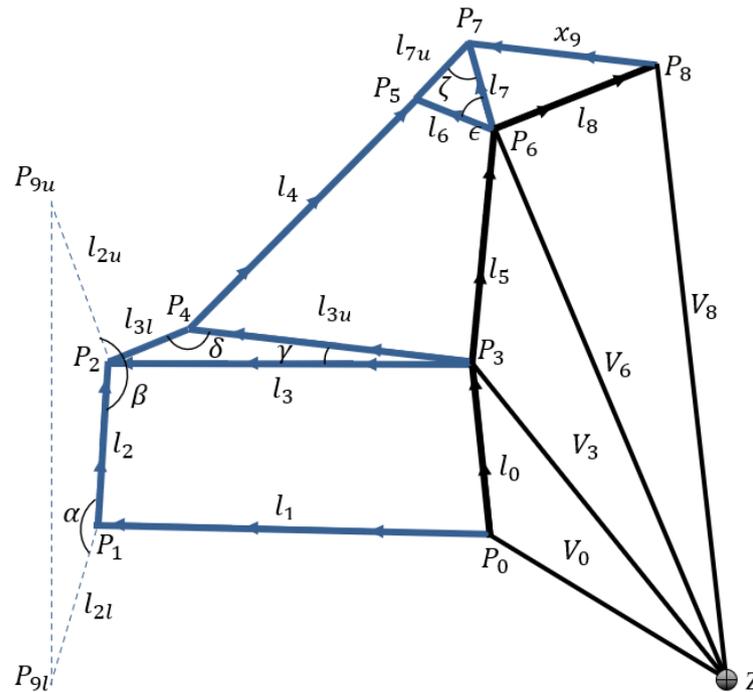


IMAGEN 3.2. ESQUEMA DE LA SUSPENSIÓN DELANTERA USADO PARA EL DESARROLLO DEL PROGRAMA.

En el esquema, las líneas de color negro representan vectores fijos, entre ellos el chasis. Las líneas azules representan los elementos que conforman la suspensión, los cuales se encuentran en movimiento. Finalmente, las líneas punteadas representan los vectores que definen el *wheel center line*.

### 3.2.1.1. Primer mecanismo

Este se define por un elemento tierra, una manivela y una biela que también se comporta como corredera (imagen 3.3), donde esta última representa la elongación del amortiguador, siendo esta, el dato de entrada.

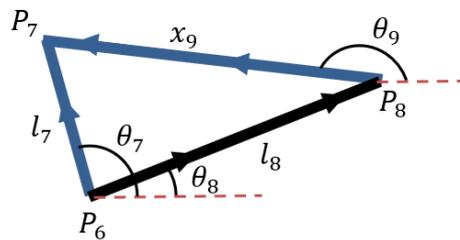


IMAGEN 3.3. ESQUEMA DE LAZOS DEL PRIMER MECANISMO.

Empezando por escribir las ecuaciones de lazo cerrado del mecanismo y reordenándolas para eliminar \$\theta\_9\$, se llega a las ecuaciones 44 y 45.

$$x_9 C \theta_9 = l_7 C \theta_7 - l_8 C \theta_8 \tag{44}$$

$$x_9 S \theta_9 = l_7 S \theta_7 - l_8 S \theta_8 \tag{45}$$

Al elevar al cuadrado las ecuaciones 46 y 47, se obtiene:

$$x_9^2 C\theta_9^2 = l_7^2 C\theta_7^2 - 2l_7 l_8 C\theta_7 C\theta_8 + l_8^2 C\theta_8^2 \quad (46)$$

$$x_9^2 S\theta_9^2 = l_7^2 S\theta_7^2 - 2l_7 l_8 S\theta_7 S\theta_8 + l_8^2 S\theta_8^2 \quad (47)$$

Sumando las ecuaciones anteriores se llega a:

$$S\theta_7(-2l_7 l_8 S\theta_8) + C\theta_7(-2l_7 l_8 C\theta_8) + l_7^2 + l_8^2 - x_9^2 = 0 \quad (48)$$

La ecuación 48 también se puede expresar como:

$$S\theta_7 K_1[\theta_8] + C\theta_7 K_2[\theta_8] + K_3[\theta_8] = 0 \quad (49)$$

Donde  $K_{1i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) están en función de  $\theta_8$ .

$$K_{11}[\theta_8] = -2l_7 l_8 S\theta_8 \quad (50)$$

$$K_{12}[\theta_8] = -2l_7 l_8 C\theta_8 \quad (51)$$

$$K_{13}[\theta_8] = l_7^2 + l_8^2 - x_9^2 \quad (52)$$

La ecuación 49 representa la ecuación de Freudenstein, la cual permite obtener el valor de  $\theta_7$  en función de  $\theta_8$ . Para poder resolverla se define la ecuación 53, también conocida como la ecuación de la tangente del ángulo medio

$$t = \tan \frac{\theta_7}{2} \quad (53)$$

Correspondientemente:

$$S\theta_7 = \frac{2t}{1+t^2} \quad (54)$$

$$C\theta_7 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (55)$$

Sustituyendo 54 y 55 en 49, se llega a una ecuación en términos de t:

$$(K_{13} - K_{12})t^2 + (2K_{11})t + (K_{13} + K_{12}) = 0 \quad (56)$$

Haciendo uso de la fórmula general para resolver la ecuación 56 se llega a:

$$t = \frac{-K_{11} \pm \sqrt{K_{11}^2 + K_{12}^2 - K_{13}^2}}{K_{13} - K_{12}} \quad (57)$$

Sustituyendo 53 en 57 se obtiene:

$$\theta_7 = 2 \operatorname{ArcTan} \left( \frac{-K_{11} \pm \sqrt{K_{11}^2 + K_{12}^2 - K_{13}^2}}{K_{13} - K_{12}} \right) \quad (58)$$

Finalmente, dividiendo la ecuación 45 entre la ecuación 44 se llega a:

$$\theta_9 = \operatorname{ArcTan} \left( \frac{l_7 S \theta_7 - l_8 S \theta_8}{l_7 C \theta_7 - l_8 C \theta_8} \right) \quad (59)$$

La ecuación 58 expresa a  $\theta_7$  en función de  $\theta_8$ , donde la solución positiva da como resultado la ecuación de lazo de la parte izquierda, mientras que, la solución negativa, muestra la ecuación de lazo del lado derecho. Por su parte, la ecuación 59 expresa  $\theta_9$  en función de  $\theta_7$  y  $\theta_8$ .

### 3.2.1.2. Segundo mecanismo

El segundo mecanismo se compone de un elemento tierra, dos manivelas y una biela. El ángulo de entrada de este es el ángulo de salida del primer lazo más un ángulo constante definido por el *rocker*. La imagen 3.4 muestra el esquema del mecanismo.

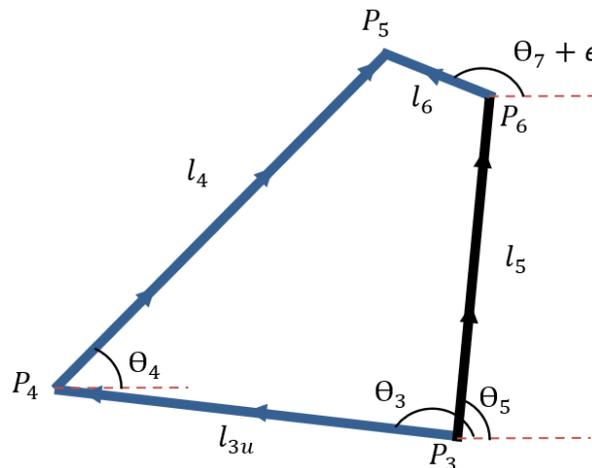


IMAGEN 3.4. ESQUEMA DE LAZOS DEL SEGUNDO MECANISMO.

Empezando por escribir las ecuaciones de lazo cerrado del mecanismo y reordenándolas para eliminar  $\theta_4$ , se llega a las ecuaciones 60 y 61.

$$l_4 C \theta_4 = l_6 C \theta_6 + l_5 C \theta_5 - l_{3u} C \theta_{3u} \quad (60)$$

$$l_4 S \theta_4 = l_6 S \theta_6 + l_5 S \theta_5 - l_{3u} S \theta_{3u} \quad (61)$$

Para el caso de un mecanismo de 4 barras, la suma de los cuadrados de las ecuaciones anteriores queda de la siguiente manera:

$$S \theta_{3u} [-2l_{3u} (l_6 S \theta_6 + l_5 S \theta_5)] + C \theta_{3u} [-2l_{3u} (l_6 C \theta_6 + l_5 C \theta_5)] + l_6^2 + l_5^2 + l_{3u}^2 - l_4^2 + 2l_5 l_6 (C \theta_6 C \theta_5 + S \theta_6 S \theta_5) \quad (62)$$

Con lo que la ecuación de Freudenstein se define como:

$$S(\Theta_{3u})K_{21}[\Theta_6] + C(\Theta_{3u})K_{22}[\Theta_6] + K_{23}[\Theta_6] = 0 \quad (63)$$

Donde:

$$K_{21}[\Theta_6] = -2l_{3u}(l_6S\Theta_6 + l_5S\Theta_5) \quad (64)$$

$$K_{22}[\Theta_6] = -2l_{3u}(l_6C\Theta_6 + l_5C\Theta_5) \quad (65)$$

$$K_{23}[\Theta_6] = l_6^2 + l_5^2 + l_{3u}^2 - l_4^2 + 2l_5l_6(C\Theta_6C\Theta_5 + S\Theta_6S\Theta_5) \quad (66)$$

Entonces, para obtener  $\Theta_{3U}$ , se llega a la siguiente ecuación:

$$\Theta_{3U} = 2 \text{ArcTan} \left( \frac{-K_{21} \pm \sqrt{K_{21}^2 + K_{22}^2 - K_{23}^2}}{K_{23} - K_{22}} \right) \quad (67)$$

Mientras que, para obtener  $\Theta_4$ , se llega a:

$$\Theta_4 = \text{ArcTan} \left( \frac{l_6S\Theta_6 + l_5S\Theta_5 - l_{3u}S\Theta_{3u}}{l_6C\Theta_6 + l_5C\Theta_5 - l_{3u}C\Theta_{3u}} \right) \quad (68)$$

### 3.2.1.3. Tercer mecanismo

El tercer mecanismo se comporta como el segundo: un elemento tierra, dos manivelas y una biela. El ángulo de entrada de este es el ángulo de salida del segundo, sumando un ángulo constante definido por el anclaje de la *push* al brazo superior. La imagen 3.5 muestra el esquema del tercer mecanismo.

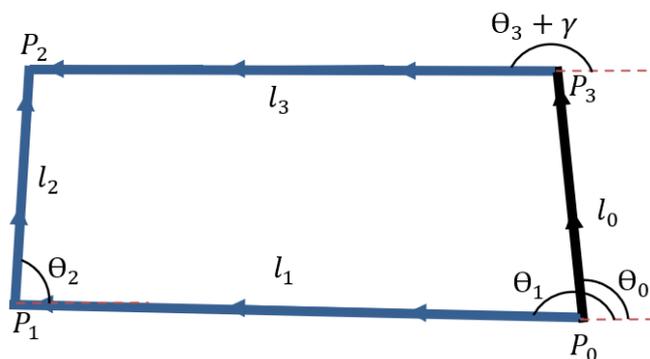


IMAGEN 3.5. ESQUEMA DE LAZOS DEL TERCER MECANISMO.

Empezando por escribir las ecuaciones de lazo cerrado del mecanismo y reordenándolas para eliminar  $\Theta_2$ , se llega a las ecuaciones 69 y 70.

$$l_2C\Theta_2 = l_3C\Theta_3 + l_0C\Theta_0 - l_1C\Theta_1 \quad (69)$$

$$l_2S\Theta_2 = l_3S\Theta_3 + l_0S\Theta_0 - l_1S\Theta_1 \quad (70)$$

Para este caso la ecuación de Freudenstein se define como:

$$S(\theta_1)K_{31}[\theta_3] + C(\theta_1)K_{32}[\theta_3] + K_{33}[\theta_3] = 0 \quad (71)$$

Donde:

$$K_{31}[\theta_1] = -2l_1(l_3S\theta_3 + l_0S\theta_0) \quad (72)$$

$$K_{32}[\theta_1] = -2l_1(l_3C\theta_3 + l_0C\theta_0) \quad (73)$$

$$K_{33}[\theta_1] = l_0^2 + l_1^2 + l_3^2 - l_2^2 + 2l_0l_3(C\theta_0C\theta_3 + S\theta_0S\theta_3) \quad (74)$$

Para obtener  $\theta_1$  se llega a la siguiente ecuación:

$$\theta_1 = 2 \text{ArcTan} \left( \frac{-K_{31} \pm \sqrt{K_{31}^2 + K_{32}^2 - K_{33}^2}}{K_{33} - K_{32}} \right) \quad (75)$$

Mientras que, para obtener  $\theta_2$ , se llega a:

$$\theta_2 = \text{ArcTan} \left( \frac{l_3S\theta_3 + SC\theta_0 - l_1S\theta_1}{l_3C\theta_3 + l_0C\theta_0 - l_1C\theta_1} \right) \quad (76)$$

### 3.2.2. Ecuación de Freudenstein: suspensión trasera.

La suspensión trasera, al tener la misma configuración que la suspensión delantera, se define de la misma manera. Por lo tanto, en este subtema únicamente se mostrarán los resultados para obtener el valor de los ángulos de salida.

En la imagen 3.6 se presenta el esquema completo de la suspensión trasera, cuya nomenclatura se ocupa para el desarrollo del programa en *Wolfram Mathematica*.

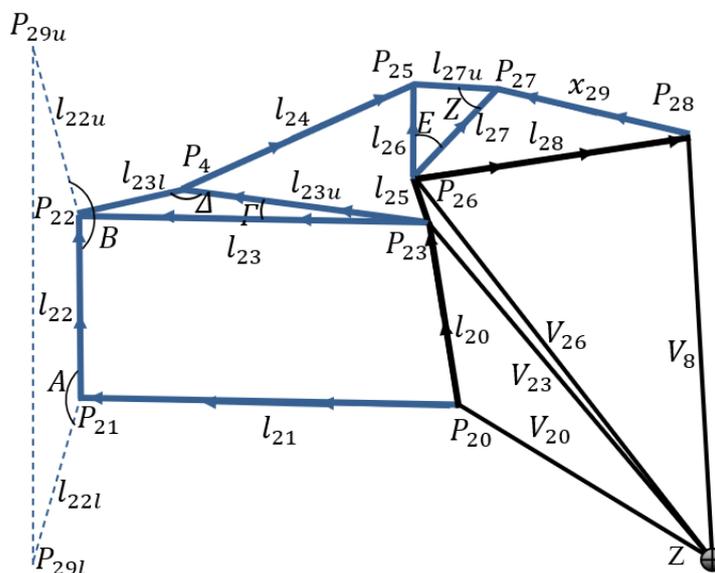


IMAGEN 3.6. ESQUEMA DE LA SUSPENSIÓN TRASERA USADO PARA EL DESARROLLO DEL PROGRAMA

### 3.2.2.1. Primer mecanismo

Para obtener el ángulo  $\Theta_{27}$  se llega a la siguiente expresión:

$$\Theta_{27} = 2 \operatorname{ArcTan} \left( \frac{-K_{71} \pm \sqrt{K_{71}^2 + K_{72}^2 - K_{73}^2}}{K_{73} - K_{72}} \right) \quad (77)$$

Donde:

$$K_{71}[\Theta_{28}] = -2l_{27}l_{28}S\Theta_{28} \quad (78)$$

$$K_{72}[\Theta_{28}] = -2l_{27}l_{28}C\Theta_{28} \quad (79)$$

$$K_{73}[\Theta_{28}] = l_{27}^2 + l_{28}^2 - x_{29}^2 \quad (80)$$

Por otro lado, para obtener el ángulo  $\Theta_{29}$ , se llega a la siguiente ecuación:

$$\Theta_{29} = \operatorname{ArcTan} \left( \frac{l_{27}S\Theta_{27} - l_{28}S\Theta_{28}}{l_{27}C\Theta_{27} - l_{28}C\Theta_{28}} \right) \quad (81)$$

### 3.2.2.2. Segundo mecanismo

Para obtener  $\Theta_{23U}$  se hace uso de la siguiente ecuación:

$$\Theta_{23U} = 2 \operatorname{ArcTan} \left( \frac{-K_{81} \pm \sqrt{K_{81}^2 + K_{82}^2 - K_{83}^2}}{K_{83} - K_{82}} \right) \quad (82)$$

Donde:

$$K_{81}[\Theta_{26}] = -2l_{23u}(l_{26}S\Theta_{26} + l_{25}S\Theta_{25}) \quad (83)$$

$$K_{82}[\Theta_{26}] = -2l_{23u}(l_{26}C\Theta_{26} + l_{25}C\Theta_{25}) \quad (84)$$

$$K_{83}[\Theta_{26}] = l_{26}^2 + l_{25}^2 + l_{23u}^2 - l_{24}^2 + 2l_{25}l_{26}(C\Theta_{26}C\Theta_{25} + S\Theta_{26}S\Theta_{25}) \quad (85)$$

Entonces, para obtener  $\Theta_{24}$ , se define la siguiente expresión:

$$\Theta_{24} = \operatorname{ArcTan} \left( \frac{l_{26}S\Theta_{26} + l_{25}S\Theta_{25} - l_{23u}S\Theta_{23u}}{l_{26}C\Theta_{26} + l_{25}C\Theta_{25} - l_{23u}C\Theta_{23u}} \right) \quad (86)$$

### 3.2.2.3. Tercer lazo

Para obtener  $\Theta_{21}$  se llega a la siguiente ecuación:

$$\Theta_{21} = 2 \operatorname{ArcTan} \left( \frac{-K_{91} \pm \sqrt{K_{91}^2 + K_{92}^2 - K_{93}^2}}{K_{93} - K_{92}} \right) \quad (87)$$

Donde:

$$K_{91}[\Theta_{21}] = -2l_{21}(l_{23}S\Theta_{23} + l_{20}S\Theta_{20}) \quad (88)$$

$$K_{92}[\Theta_{21}] = -2l_{21}(l_{23}C\Theta_{23} + l_{20}C\Theta_{20}) \quad (89)$$

$$K_{93}[\Theta_{21}] = l_{20}^2 + l_{21}^2 + l_{23}^2 - l_{22}^2 + 2l_{20}l_{23}(C\Theta_{20}C\Theta_{23} + S\Theta_{20}S\Theta_{23}) \quad (90)$$

Mientras que, para obtener  $\Theta_{22}$ , se llega a:

$$\Theta_{22} = \operatorname{ArcTan} \left( \frac{l_{23}S\Theta_{23} + SC\Theta_{20} - l_{21}S\Theta_{21}}{l_{23}C\Theta_{23} + l_{20}C\Theta_{20} - l_{21}C\Theta_{21}} \right) \quad (91)$$

### 3.2.3. Ubicación del IC y RC

El primer paso para obtener la localización del IC es encontrar la pendiente que forma el brazo superior y la pendiente que forma el brazo inferior, lo cual se expresa en las ecuaciones 92 y 93, respectivamente (24).

$$GR1 = \frac{P3_Z - P2_Z}{P3_Y - P2_Y} \quad (92)$$

$$GR2 = \frac{P0_Z - P1_Z}{P0_Y - P1_Y} \quad (93)$$

Donde los subíndices representan las coordenadas Y-Z de los puntos P3, P2, P1 y P0.

A partir de las pendientes, las ecuaciones 94 y 95 son usadas para encontrar el IC en Y y Z, respectivamente.

$$ICY = \frac{GR1 * P2_Y - GR2 * P1_Y + P1_Z - P2_Z}{GR1 - GR2} \quad (94)$$

$$ICZ = P2_Z + GR1 * (ICY - P2_Y) \quad (95)$$

Ahora, para la ubicación del RC, hay que recordar que este se da entre la intersección de los FVSA, con lo que, mediante determinantes (25), este punto de intersección puede ser encontrado en Y y Z con las ecuaciones 96 y 97, respectivamente:

$$YR = \frac{\begin{vmatrix} LIC_Y & LIC_Z & LIC_Y - P9_LY \\ P9_LY & P9_LZ & \\ P19_LY & P19_LZ & P19_LY - RIC_Y \\ RIC_Y & RIC_Z & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} LIC_Y - P9_LY & LIC_Z - P9_LZ \\ P19_LY - RIC_Y & P19_LZ - RIC_Z \end{vmatrix}} \quad (96)$$

$$Z R = \begin{vmatrix} LIC_Y & LIC_Z & LIC_Z - P9L_Z \\ P9L_Y & P9L_Z & \\ P19L_Y & P19L_Z & P19L_Z - RIC_Z \\ RIC_Y & RIC_Z & \\ LIC_Y - P9L_Y & LIC_Z - P9L_Z & \\ P19L_Y - RIC_Y & P19L_Z - RIC_Z & \end{vmatrix} \quad (97)$$

Donde:

$LIC_Y, LIC_Z$  = Coordenadas Y-Z del IC izquierdo.

$RIC_Y, RIC_Z$  = Coordenadas Y-Z del IC derecho.

$P9L_Y, P9L_Z$  = Coordenadas Y-Z de PL9.

$P19L_Y, P19L_Z$  = Coordenadas Y-Z de PL19.

La imagen 3.7 muestra el resultado de los eslabones ensamblados mediante la ecuación de Freudenstein en el programa desarrollado, así como el RC, el CG, el suelo y los puntos que representan a la llanta.

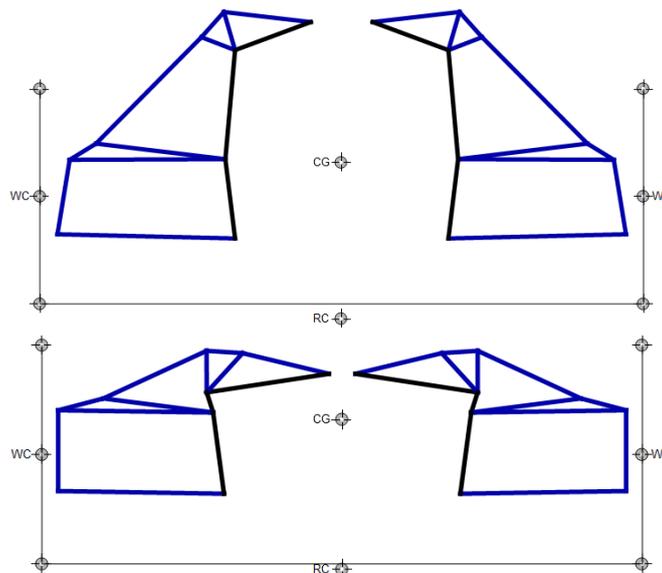


IMAGEN 3.7. RESULTADO DEL ENSAMBLE DEL MECANISMO; ARRIBA: SUSPENSIÓN DELANTERA; ABAJO: SUSPENSIÓN TRASERA.

### 3.2.4. Análisis

El programa desarrollado en *Mathematica* genera el análisis en *ride* considerando que ambas llantas se desplazan en *jounce* y *rebound* de forma paralela. La suspensión presenta una elongación inicial en el amortiguador delantero de 157.261 [mm], mientras que, para el trasero, esta es de 167.1 [mm]. Lo que se busca es que, en *ride*, la llanta presente un desplazamiento en intervalos de 6 [mm].

El análisis de *roll* se basa en un movimiento opuesto de las llantas, donde el amortiguador comienza su desplazamiento con la misma elongación inicial con la que se hace el análisis de *ride*. Para este caso, un amortiguador se comprime mientras el otro se expande, buscando generar un desplazamiento de la llanta en incrementos de 3 [mm]. En este análisis lo que define los grados de *roll* que el auto presenta, es el ángulo que el suelo genera con respecto al eje horizontal Y. Por ende, hay que tener en cuenta que una vez que el suelo se inclina y el RC se desplaza, la altura del RC con respecto al suelo ya no es la distancia vertical perpendicular al eje Y. Es por eso que se define una línea ortogonal al piso

inclinado, la cual pasa por el punto del RC. Así mismo, la distancia horizontal del RC al eje Z, sufre un pequeño cambio dado por la inclinación, por lo que, para obtener la distancia deseada, se genera una línea paralela al piso inclinado que pasa por el RC e interseque al eje Z. Esto dará la distancia horizontal a la que se encuentra el RC.

El programa se desarrolla contemplando que el chasis permanece fijo, mientras que los elementos que componen a la suspensión y USM, así como el suelo, se encuentran en movimiento. De igual manera, la llanta se considera como un elemento infinitamente rígido.

A partir de los análisis de *ride* y *roll* generados, se pueden obtener diferentes salidas, como lo son: la variación del ángulo de *camber*, la ubicación del RC, el comportamiento del MR y la longitud del *track*, así como animaciones del movimiento generado. Como se mencionó antes, el programa toma como entrada el desplazamiento absoluto del amortiguador, por lo que el *ride* de cada llanta y los grados de *roll* del carro se convierten en salidas.

El programa genera un análisis de carga en *ride* cuando el carro permanece estático, en el que se permite saber la manera en que se comprime el amortiguador, la manera en que los parámetros cinemáticos cambian y la frecuencia natural que se tiene para el *sprung mass* y USM. Para esto, se considera el peso total del carro con el piloto, la manera en la que el CG se distribuye y diferentes valores de rigidez en los resortes. Hay que tener en cuenta que Öhlins (22), la marca con la cual se decidió comprar los amortiguadores, maneja resortes con cierta cantidad de rigidez ya establecida. Estos van desde los 150 [lbf/in] a los 750 [lbf/in].

Para el análisis de carga en *roll*, se toman como condiciones iniciales las obtenidas con el resorte de 600 [lbf/in] en el análisis de *ride*, dado que fue el resorte elegido en el diseño la temporada 2019 de la escudería. En el caso de la transferencia de carga en curva, se considera que el carro logra una velocidad constante durante la misma, lo cual significa que el amortiguador no tiene ningún efecto. Por lo tanto, los resortes y las llantas serán los elementos que estarán trabajando.

Finalmente, hay que remarcar que para el análisis hecho en *Mathematica* como en los otros softwares, se considera que la suspensión trabaja en un plano 2-D. Por lo tanto, los puntos que generan el ángulo de *caster* se modificaron, obteniendo un *neutral caster*. Por su parte, el ángulo de *camber* se mantiene como neutro cuando no hay desplazamiento en *ride*. Por otro lado, el diseño de la escudería no presenta geometría *anti-dive* ni *anti-squad*, así como tampoco se presenta ARB, ni se toman en cuenta los efectos considerados por el paquete aerodinámico. Para el caso del chasis, este no presenta errores acumulativos por una baja rigidez.

La principal ventaja que presenta el programa es que el análisis se resuelve de manera no lineal, con lo que se consiguen resultados más precisos. Sin embargo, esto lleva a su principal desventaja: el tiempo de cómputo; para correr todo el código se necesita una cantidad de tiempo mayor que cualquier software comercial. Por otro lado, el software sólo puede resolver el análisis para suspensiones tipo *push* con la misma anclada en el brazo superior. Si se desea cambiar esta característica, hay que reconfigurar las soluciones de lazo. En cuanto a las gráficas, éstas no se pueden manipular, por lo que sólo muestran el comportamiento que se presenta en el análisis hecho.

### 3.3. WinGeo

WinGeo es un software usado para el diseño cinemático en el sistema de suspensión y dirección de automóviles. Este trabaja a partir de platillas predeterminadas, las cuales permiten el ajuste de los *hard points* para obtener la geometría deseada. Por otro lado, WinGeo da la libertad de meter dos datos de entrada para el análisis de la suspensión: los grados de *roll* y el desplazamiento en *ride*, pudiendo ser este último de manera independiente en cada llanta o de manera paralela. En la imagen 3.8 se presenta la interfaz del mismo.

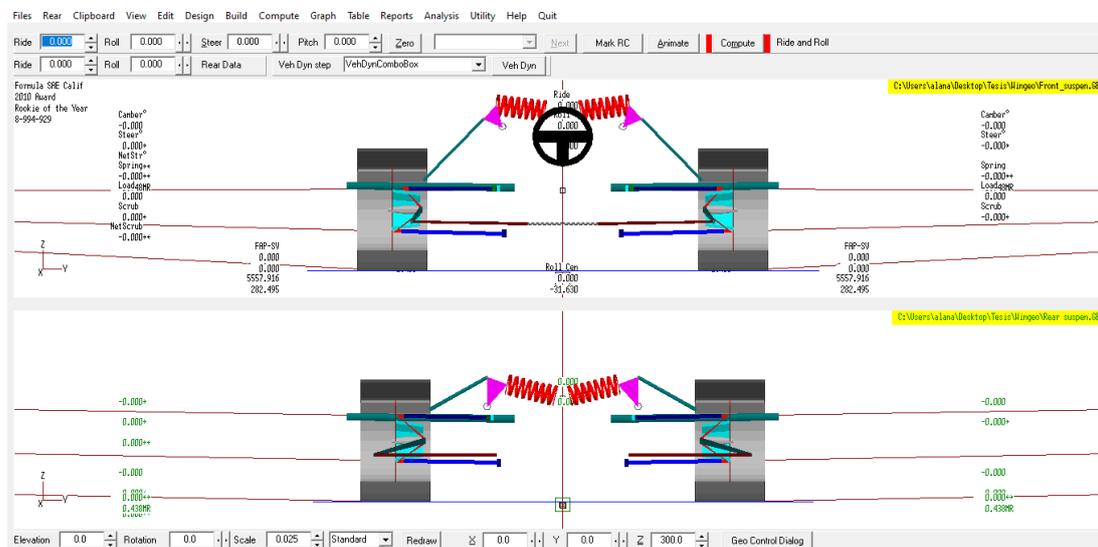


IMAGEN 3.8. INTERFAZ DE WINGEO

El menú de diseño de la suspensión que este software maneja es muy versátil, permitiendo la fácil sustitución de los *hard points*. Además, el poder cambiar la forma en que los lazos se resuelven, es decir, la manera en que los elementos están conectados es sumamente fácil, ya que WinGeo despliega un menú de opciones permitiendo configurar esta opción.

Por otra parte, el programa da la libertad de escoger las características del análisis, siendo la más importante optar si se desea que el chasis se mantenga inmóvil, mientras la suspensión y las llantas se mueven alrededor de él o de forma inversa, es decir, que las llantas se mantengan pegadas al suelo, mientras el chasis y la suspensión se desplazan alrededor de ellas.

#### 3.3.1. Análisis

WinGeo genera resultados para movimientos de *ride*, *roll* o la combinación de ambos, pudiendo dar diferentes salidas, como lo son: la variación del ángulo de *camber*, la ubicación del RC, la ubicación de los IC, el MR, la compresión del resorte, etcétera. Además, los resultados se muestran tanto en tablas como en gráficas.

Una de las consideraciones a tomar en cuenta es que, en el análisis de *roll*, el software no especifica cómo es que controla el *ride* inicial de cada llanta. Así mismo, las gráficas generadas no se pueden manipular, por lo que sólo se muestran los valores extremos de la entrada y de la salida. En cuanto a la manera en que el software resuelve el sistema, no se muestra información respecto a ello. Por otro lado, WinGeo sí considera la distancia del *track* variable.

### 3.4. ADAMS

Se trata de un software creado por la empresa estadounidense *MSC software*, el cual se enfoca en simulaciones dinámicas. De igual manera, este posee módulos especializados en ciertos análisis, siendo uno de ellos *ADAMS/Car*, el cual genera simulaciones de dinámica vehicular, contemplando el análisis de la suspensión, dirección, aerodinámica, etcétera. Además, este puede generar análisis de frecuencias y simulaciones en pista. En la imagen 3.9 se presenta la interfaz del software.

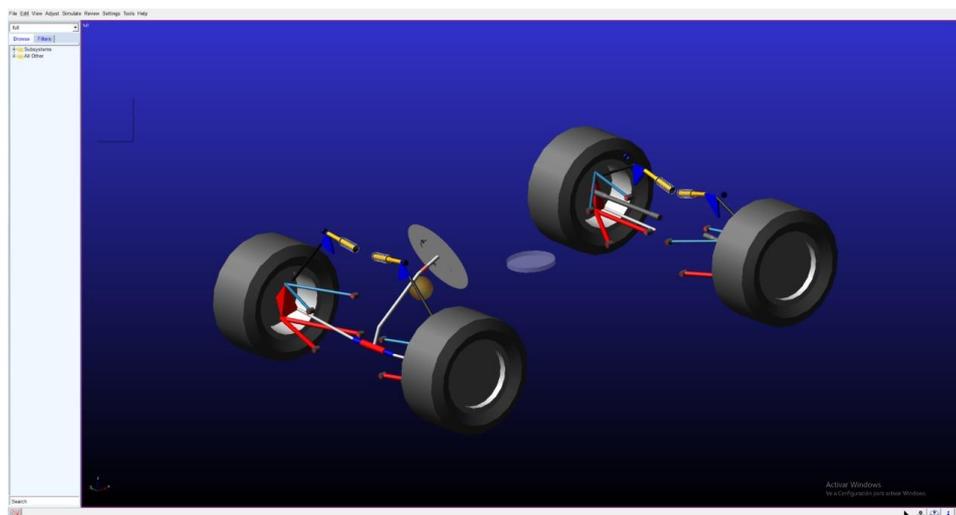


IMAGEN 3.9. INTERFAZ DE ADAMS/CAR.

*ADAMS* es uno de los softwares más populares en la industria y en universidades para el desarrollo de simulaciones dinámicas en vehículos, dado al gran rango de datos de salida que se pueden obtener de este, así como la precisión en los mismos.

El programa posee una interfaz gráfica muy completa, ya que este permite la importación de archivos de dibujo 3-D, los cuales pueden ser configurados en material, momento de inercia y peso, con lo que se puede obtener un mejor resultado. Además, el software trabaja con modelos no lineales y considera la distancia del *track* variable, con lo que se consiguen resultados más precisos.

El problema con *ADAMS* es que, al ser tan completo en los resultados que genera, se vuelve difícil de entender y de usar, por lo que, si algo no está bien definido en el sistema, mandará errores y no terminará la simulación o mandará resultados erróneos. En otras palabras, se debe entender de manera precisa lo que el software requiere, saber manipular el mismo y saber interpretar los datos de salida para poder aprovechar este de la mejor manera.

La forma de configurar los datos de entrada es muy completa, ya que se pueden cambiar las condiciones de pista, las características de la llanta, el comportamiento del amortiguador, la solución de los lazos y más. En otros casos se requiere configurar el *template*, esto es, la plantilla de origen del archivo que establece las conexiones entre elementos, lo cual no es fácil de interpretar y tampoco de realizar.

La página web oficial de *MSC software* (26) provee la licencia de *ADAMS* para estudiantes, así como el acceso a diferentes *templates*, como lo es el de un prototipo FSAE, el cual está listo para crear ensambles y correr simulaciones. Sin embargo, si se desean modificar los parámetros iniciales de este, hay que modificar el archivo de origen, como se mencionó previamente.

### 3.4.1. Análisis

Los resultados que *ADAMS* puede generar son muy completos, pudiendo ser mostrados como gráficas o en forma de tablas. Además, el software genera animaciones, con lo que se puede observar si el resultado es el deseado.

*ADAMS* basa la manera en que resuelve el mecanismo en el método gráfico, es decir, toma captura de los eslabones a cierta posición, y a partir de un dato de entrada calcula el ángulo y desplazamiento que toman los otros eslabones en dicha posición. Esto lo hace para cada iteración que se desee obtener. Los datos de salida cinemáticos que se generan tienen como dato de entrada el *ride*. El programa puede hacer el análisis considerando el viaje de las llantas de manera paralela, opuesto o modificando el viaje de una llanta mientras la otra se queda en un valor fijo. Además, este puede generar análisis de desplazamiento del resorte con respecto a una fuerza de entrada en el neumático. Para que el programa tome a la llanta como un elemento infinitamente rígido, se debe especificar que el análisis que se desea hacer es únicamente cinemático, con lo que también elimina la flexión que se presenta en los elementos de la suspensión (excluyendo el resorte y el amortiguador). Por otro lado, se permite escoger los elementos que estarán fijos durante la simulación, es decir, si se desea que el chasis permanezca fijo y los demás componentes alrededor se mueva, o viceversa.

Las simulaciones de pista que el programa genera permiten obtener datos de salida relevantes, como el *slip angle* de cada llanta en curva, la manera en que los amortiguadores se comportan en cierto tramo, la carga de peso debida a la aerodinámica, entre otros. Mucha de la información del carro que el software requiere se consigue de programas CAD (*Computer Aided Design*), por lo que, en la medida que estos datos puedan ser más exactos, los resultados de salida lo serán también.



# CAPÍTULO 4: Resultados

## 4.1. Wolfram Mathematica

### 4.1.1. Resultados en ride

La imagen 4.1 muestra a ambas suspensiones actuando bajo movimiento de *ride*, esto con un desplazamiento paralelo en ambas llantas.

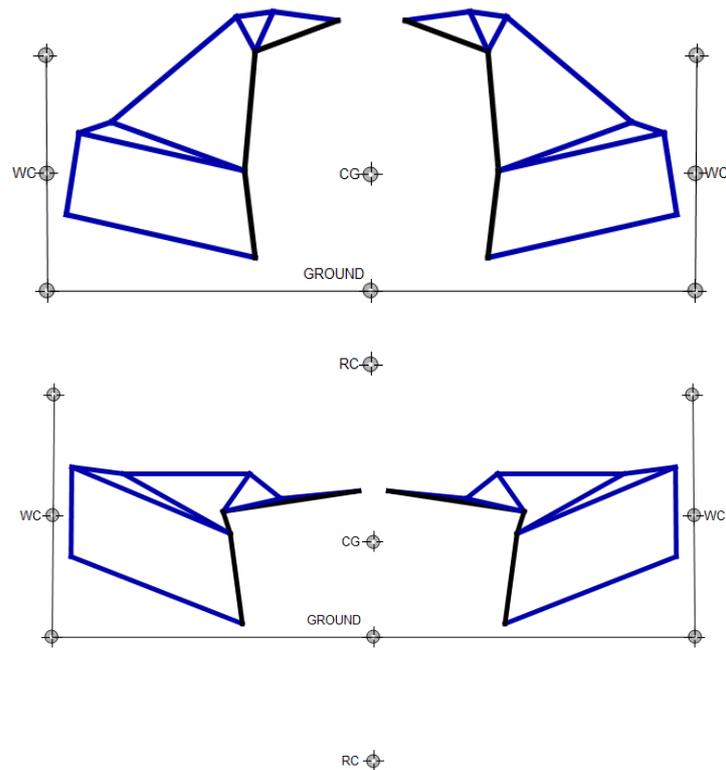


IMAGEN 4.1. MATHEMATICA. ARRIBA: SUSPENSIÓN DELANTERA; ABAJO: SUSPENSIÓN TRASERA; AMBAS BAJO MOVIMIENTO DE RIDE.

Dado a que la entrada del programa desarrollado es la longitud del amortiguador, el mecanismo presenta fallas debido a singularidades seriales a valores altos de *ride*, esto es, cuando los eslabones que representan al amortiguador y al *rocker* se alinean. En la imagen 4.2 se muestra la manera en que *Mathematica* representa esta falla.

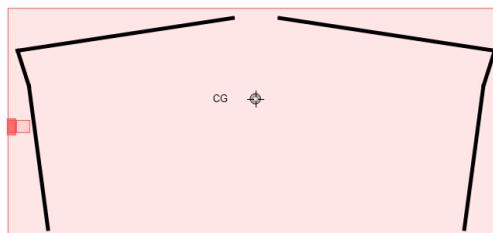


IMAGEN 4.2. MATHEMATICA. REPRESENTACIÓN DE LA FALLA DEL MECANISMO DE LA SUSPENSIÓN TRASERA.

En la tabla 4.1 se presentan los resultados en *ride* para la suspensión delantera. Por su parte, en la tabla 4.2 se muestran los resultados para la suspensión trasera.

<i>Left ride [mm]</i>	<i>Left damper [mm]</i>	<i>Left camber [°]</i>	<i>MR</i>	<i>RC Height [mm]</i>	<i>Half track [mm]</i>
30.3044	133.362	90.1109	-0.7957	-120.352	615.875
24.2131	138.209	90.0991	-0.7933	-111.216	617.008
18.1398	143.027	90.0821	-0.7895	-102.218	618.05
12.0796	147.812	90.0599	-0.78488	-93.3494	619.005
6.03411	152.557	90.0325	-0.7795	-84.6134	619.871
0	157.391	89.999	-0.7738	-75.7687	620.669
-6.023	161.922	89.9611	-0.7678	-67.5272	621.358
-12.039	166.542	89.918	-0.7619	-59.175	621.961
-18.0463	171.12	89.8695	-0.7562	-50.9553	622.476
-24.0475	175.659	89.8156	-0.7506	-42.8645	622.906
-30.449	180.5905	89.7521	-0.7446	-34.9079	623.27

TABLA 4.1. MATHEMATICA. SUSPENSIÓN DELANTERA: RESULTADOS EN RIDE.

<i>Left ride [mm]</i>	<i>Left damper [mm]</i>	<i>Left camber [°]</i>	<i>MR</i>	<i>RC Height [mm]</i>	<i>Half track [mm]</i>
30.291	155.803	89.9186	-0.3376	-113.575	603.514
24.2041	157.858	89.9406	-0.3565	-102.93	604.576
18.1323	160.023	89.9596	-0.3742	-92.3708	605.535
12.075	162.29	89.9758	-0.3907	-81.8944	606.392
6.0322	164.651	89.9892	-0.4059	-71.4976	607.146
0	167.1	89.9996	-0.42	-61.5825	607.776
-6.0202	169.629	90.008	-0.433	-50.9135	608.353
-12.0333	172.233	90.0134	-0.445	-40.7168	608.805
-18.0351	174.904	90.0144	-0.4558	-30.584	609.161
-24.033	177.638	90.0142	-0.4655	-20.5045	609.413
-30.0277	180.429	90.0138	-0.4746	-10.4775	609.559

TABLA 4.2. MATHEMATICA. SUSPENSIÓN TRASERA: RESULTADOS EN RIDE.

En ambas tablas se observa que el desplazamiento del amortiguador es expresado como la distancia absoluta del mismo, mientras que el ángulo de *camber* se muestra como la variación que se tiene a partir del suelo con el plano X-Z de la llanta. Un detalle que hay que tener en cuenta es que, para el punto en el que aún no se presenta desplazamiento en *ride*, la distancia del *track* y el ángulo de *camber* sufren una variación debida a los errores que el programa va arrastrando.

Como se mencionó antes, el dato de entrada para este software es el desplazamiento del amortiguador, por lo que, el *ride* que se genera como salida, será utilizado como entrada para los otros programas.

En la imagen 4.3 se presenta el tipo de gráficas que el software genera, siendo estas las que muestran el comportamiento del MR para ambas suspensiones. Aunque las gráficas que muestra el programa no se pueden manipular, ni muestran valores específicos, se puede observar el comportamiento de la suspensión.

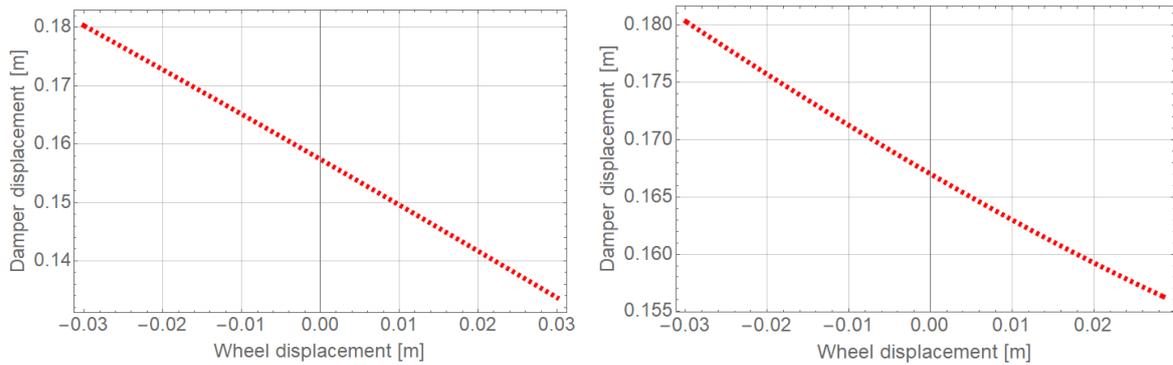


IMAGEN 4.3. MATHEMATICA. GRÁFICA DEL MR; IZQUIERDA: SUSPENSIÓN DELANTERA; DERECHA: SUSPENSIÓN TRASERA.

#### 4.1.2. Resultados en roll

La imagen 4.4 muestra la posición de ambas suspensiones cuando el amortiguador izquierdo presenta compresión, mientras el derecho se encuentra en expansión. Por otro lado, se presentan los puntos con los que la altura y el desplazamiento lateral del RC, en el movimiento de *roll*, son medidos; para la altura se tiene el punto “Orthogonal”, mientras que, para el desplazamiento lateral, se tiene el punto “Parallel”.

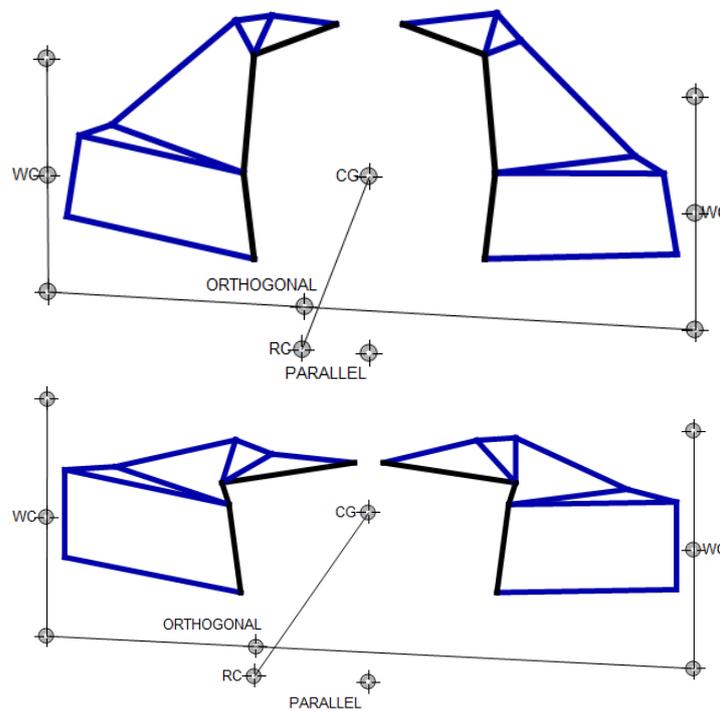


IMAGEN 4.4. MATHEMATICA. ARRIBA: SUSPENSIÓN DELANTERA; ABAJO: SUSPENSIÓN TRASERA; AMBAS BAJO MOVIMEINTO DE ROLL.

En la tabla 4.3 y 4.4 se muestra el comportamiento de la cinemática de la suspensión en *roll* para la suspensión delantera y la suspensión trasera, respectivamente. Para este análisis, el amortiguador izquierdo comienza en compresión, mientras el derecho comienza en expansión.

Left ride [mm]	Left damper [mm]	Left camber [°]	Right ride [mm]	Right damper [mm]	Right camber [°]	Roll [°]	RC location [mm]
30.108	133.628	92.8811	-30.2172	180.395	93.0159	-2.7707	(-101.649, -75.1095)
27.0995	136.023	92.5985	-27.1884	178.125	92.7079	-2.4934	(-91.894, -75.2314)
24.0916	138.415	92.3147	-24.1606	175.848	92.4014	-2.2162	(-82.0107, -75.3461)
21.0827	140.804	92.0297	-21.1358	173.565	92.0964	-1.9391	(-72.0138, -75.4496)
18.0729	143.189	91.7434	-18.1115	171.274	91.7928	-1.6619	(-61.9134, -75.5423)
15.0622	145.569	91.4558	-15.0895	168.976	91.4906	-1.3849	(-51.7271, -75.722)
12.0509	147.943	91.167	-12.0686	166.67	91.1899	-1.1078	(-41.4677, -75.6888)
9.0395	150.31	90.877	-9.0502	164.357	90.8906	-0.8308	(-31.1532, -75.7412)
6.0274	152.67	90.5857	-6.0319	162.035	90.5926	-0.5538	(-20.7926, -75.7799)
3.0139	155.023	90.293	-3.0147	2.337	90.296	-0.2769	(-10.4021, -75.8033)

TABLA 4.3. MATHEMATICA. SUSPENSIÓN DELANTERA: RESULTADOS EN ROLL.

Left ride [mm]	Left damper [mm]	Left camber [°]	Right ride [mm]	Right damper [mm]	Right camber [°]	Roll [°]	RC location [mm]
30.1172	155.86	92.7445	-30.151	180.487	92.8114	-2.8251	(-211.153, -54.2479)
27.1073	156.863	92.473	-27.133	179.034	92.5273	-2.5425	(-190.451, -55.492)
24.0948	157.896	92.2007	-24.1154	177.676	92.2455	-2.2597	(-169.626, -56.7231)
21.0858	158.956	91.928	-21.0989	176.293	91.9633	-1.9772	(-148.684, -57.7616)
18.0721	160.045	91.6544	-18.0839	174.926	91.6803	-1.6946	(-127.63, -58.6611)
15.0624	161.159	91.3805	-15.0708	173.576	91.397	-1.4123	(-106.498, -59.4261)
12.0488	162.3	91.1056	-12.0561	172.243	91.1164	-1.1297	(-85.2834, -60.0515)
9.037	163.456	90.8302	-9.0414	170.928	90.8363	-0.8473	(-64.0313, -60.0133)
6.0247	164.654	90.5541	-6.0273	169.632	90.5569	-0.5648	(-42.6992, -60.8898)
3.0122	165.866	90.277	-3.0141	168.356	90.2781	-0.2824	(-21.3585, -61.0992)

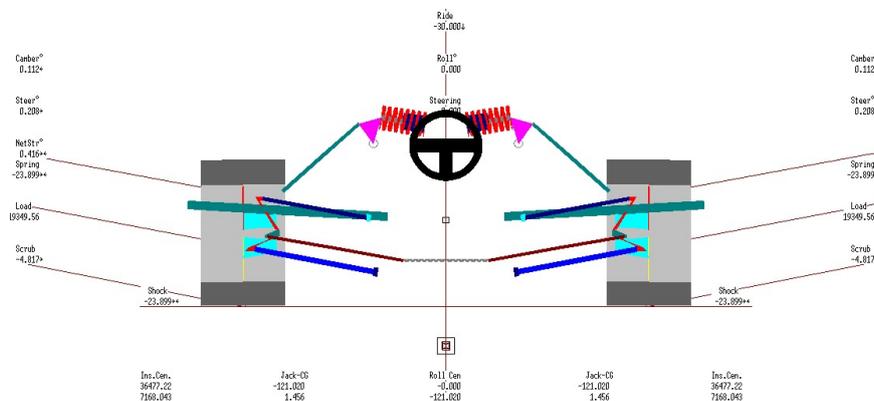
TABLA 4.4. MATHEMATICA. SUSPENSIÓN TRASERA: RESULTADOS EN ROLL.

En este caso, es la diferente elongación en los amortiguadores la que genera la rotación del carro en el eje X. Para el ángulo de *roll*, por su signo negativo, se observa que el carro está girando en +X, donde el ángulo de *camber* de cada llanta concuerda con dicho giro. Así mismo, el RC presenta un desplazamiento lateral negativo.

## 4.2. WinGeo

### 4.2.1. Resultados en ride

En la imagen 4.5 se muestran ambas suspensiones bajo movimiento de *ride*.



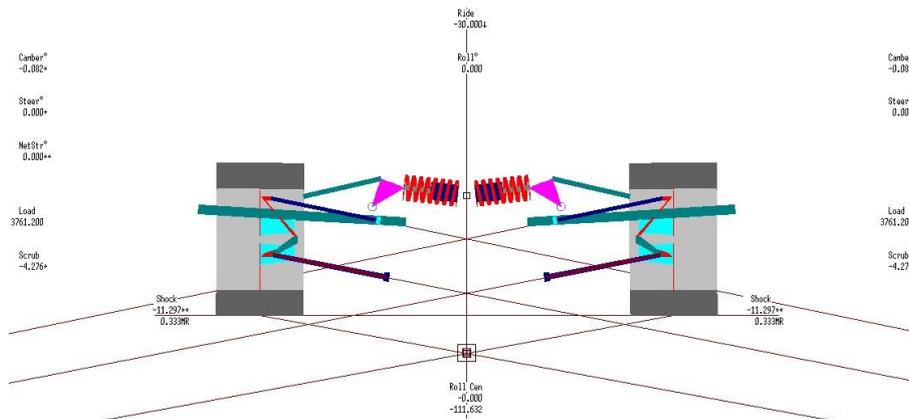


IMAGEN 4.5. WINGEO. ARRIBA: SUSPENSIÓN DELANTERA; ABAJO: SUSPENSIÓN TRASERA; AMBAS BAJO MOVIMIENTO DE RIDE.

Dado que WinGeo toma como entrada el ride, no es capaz de reconocer fallas en el mecanismo hasta que se alcanzan valores excesivos del mismo. Cuando esto pasa, se lanza un mensaje de advertencia. Además, el programa no reconoce cuando los brazos de suspensión han bajado tanto que tocan el suelo. Esto se puede ver en la imagen 4.6, en la que se introduce un ride de -150 [mm]. En esta posición WinGeo aún no reconoce la falla en el sistema, sin embargo, se puede observar que se presenta una deformación en el neumático.

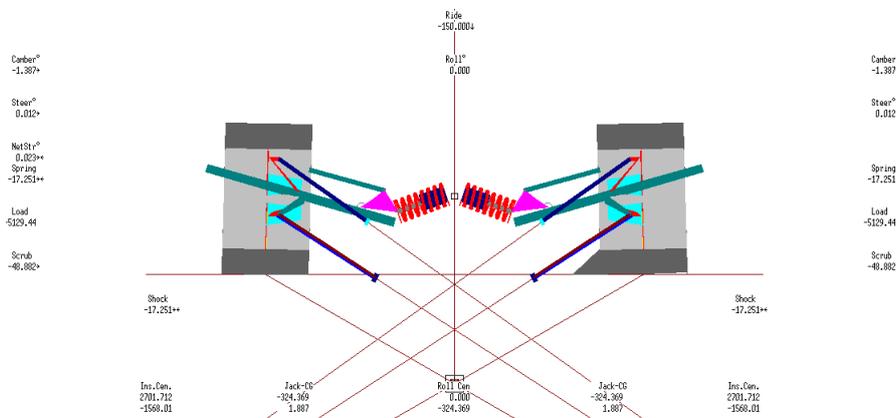


IMAGEN 4.6. WINGEO. REPRESENTACIÓN DE LA FALLA DE LA SUSPENSIÓN TRASERA.

En las tablas 4.5 y 4.6 se muestran los resultados obtenidos con diferentes valores de ride en jounce y rebound.

Left ride [mm]	Left damper [mm]	Left camber [°]	MR	RC Height [mm]	Half track [mm]
-30.3044	-24.135	0.112	0.81	-121.464	616.236
-24.2131	-19.217	0.1	0.806	-112.603	617.346
-18.1398	-14.339	0.083	0.801	-103.787	618.343
-12.0796	-9.509	0.061	0.794	-95.01	619.229
-6.03411	-4.729	0.033	0.788	-86.273	620.005
0	0	0	0.78	-77.57	620.674
6.023	4.677	-0.038	0.773	-68.9	621.235
12.039	9.306	-0.081	0.766	-60.258	621.619
18.0463	13.885	-0.13	0.76	-51.644	622.042
24.0475	18.434	-0.184	0.753	-43.057	622.288
30.449	23.238	-0.248	0.748	-33.915	622.434

TABLA 4.5. WINGEO. SUSPENSIÓN DELANTERA: RESULTADOS EN RIDE.

Left ride [mm]	Left damper [mm]	Left camber [°]	MR	RC Height [mm]	Half track [mm]
-30.291	-11.394	-0.083	0.332	-112.125	603.12
-24.2041	-9.314	-0.061	0.351	-101.829	604.286
-18.1323	-7.126	-0.041	0.369	-91.583	605.333
-12.075	-4.839	-0.025	0.386	-81.382	606.262
-6.0322	-2.462	-0.011	0.401	-71.2222	607.075
0	0	0	0.415	-61.094	607.775
6.0202	2.538	0.008	0.428	-50.997	608.362
12.0333	5.147	0.014	0.44	-40.921	608.837
18.0351	7.782	0.017	0.451	-30.868	609.202
24.033	10.553	0.017	0.461	-20.824	609.458
30.0277	13.342	0.014	0.47	-10.784	609.604

TABLA 4.6. WINGEO. SUSPENSIÓN TRASERA: RESULTADOS EN RIDE.

Como se puede observar en ambas tablas, *WinGeo* toma como negativo el movimiento de *jounce* y positivo el de *rebound*. Además, el desplazamiento del amortiguador es tomado como el incremento y no como el valor absoluto del mismo. El ángulo de *camber*, por su parte, se muestra como la variación que se tiene a partir de los 90 [°]. Para el *MR*, a diferencia de *Mathematica*, este se presenta de manera positiva, lo cual es sólo cuestión de interpretación, pues para *WinGeo*, el *ride* comparte el mismo signo que el incremento en la longitud del amortiguador. Por otro lado, el software no presenta variaciones en el ángulo de *camber* ni en la distancia del *track* cuando aún no se presenta desplazamiento en *ride*.

En la imagen 4.7 se muestra el tipo de gráficas que *WinGeo* genera, las cuales muestran el comportamiento del *MR*.

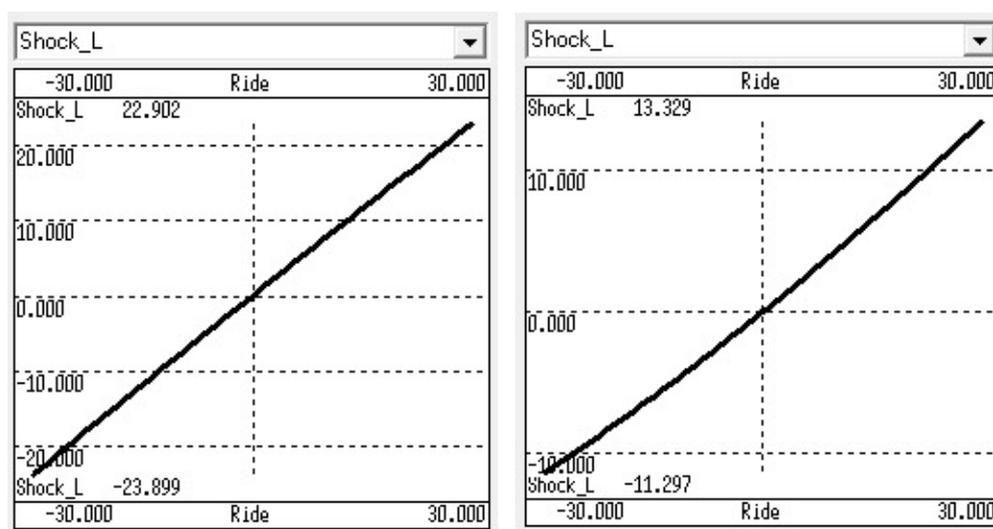


IMAGEN 4.7. WINGEO. GRÁFICA DEL MR; IZQUIERDA: SUSPENSIÓN DELANTERA; DERECHA: SUSPENSIÓN TRASERA.

Aunque las gráficas de *WinGeo* no presentan la misma orientación que las que presenta *Mathematica*, el comportamiento de las curvas entre ambos softwares es el mismo.

#### 4.2.2. Resultados en roll

En la imagen 4.8 se presentan ambas suspensiones bajo movimiento de *roll*, donde el amortiguador izquierdo presenta compresión, mientras el derecho se encuentra en expansión.

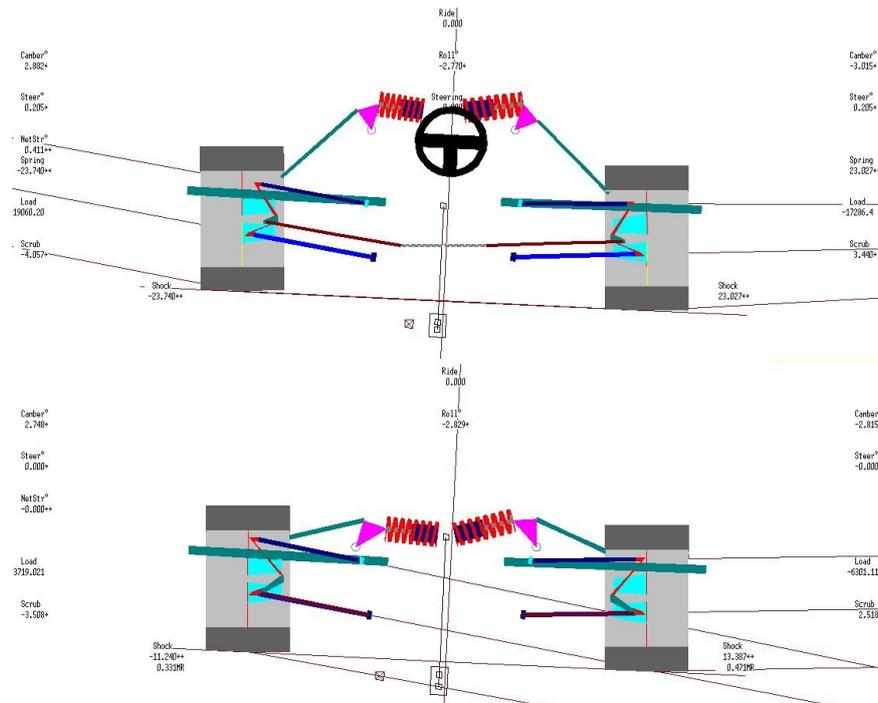


IMAGEN 4.8. WINGEO. ARRIBA: SUSPENSIÓN DELANTERA; ABAJO: SUSPENSIÓN TRASERA; AMBAS BAJO MOVIMIENTO DE ROLL.

En la tabla 4.7 y 4.8 se muestran los datos de salida para la suspensión delantera y la suspensión trasera, respectivamente. El punto para resaltar aquí es que el software marca uno de los datos del ángulo de *camber* positivo para una llanta, mientras que el otro lo marca negativo. Sin embargo, *WinGeo* se apoya de su interfaz gráfica para señalar cómo es que cada llanta presenta ese ángulo de *camber*.

Left ride [mm]	Left damper [mm]	Left camber [°]	Right ride [mm]	Right damper [mm]	Right camber [°]	Roll [°]	RC location [mm]
-30.108	-23.826	2.897	30.2172	23.191	-3.032	-2.785	(-102.463, -75.187)
-27.0995	-21.425	2.613	27.1884	20.899	-2.722	-2.507	(-92.238, -75.638)
-24.0916	-19.026	2.328	24.1606	18.609	-2.414	-2.228	(-82.027, -76.036)
-21.0827	-16.629	2.041	21.1358	16.3	-2.107	-1.949	(-71.769, -76.4)
-18.0729	-14.237	1.753	18.115	13.994	-1.802	-1.671	(-61.532, -76.708)
-15.0622	-11.848	1.464	15.0895	11.677	-1.498	-1.392	(-51.276, -76.972)
-12.0509	-9.466	1.174	12.0686	9.355	-1.195	-1.113	(-41.024, -77.187)
-9.0395	-7.089	0.882	9.0502	7.027	-0.894	-0.835	(-30.771, -77.354)
-6.0274	-4.72	0.589	6.0319	4.692	-0.595	-0.557	(-20.515, -77.474)
-3.0139	-2.356	0.295	3.0147	2.349	-0.297	-0.278	(-10.256, -77.546)

TABLA 4.7. WINGEO. SUSPENSIÓN DELANTERA: RESULTADOS EN ROLL.

Left ride [mm]	Left damper [mm]	Left camber [°]	Right ride [mm]	Right damper [mm]	Right camber [°]	Roll [°]	RC location [mm]
-30.1172	-11.278	2.758	30.151	13.442	-2.826	-2.84	(-200.252, -54.123)
-27.1073	-10.273	2.487	27.133	12.037	-2.542	-2.558	(-180.363, -55.419)
-24.0948	-9.237	2.213	24.1154	10.63	-2.256	-2.273	(-160.28, -56.611)
-21.0858	-8.174	1.939	21.0989	9.238	-1.972	-1.989	(-140.217, -57.665)
-18.0721	-7.082	1.664	18.0839	7.864	-1.688	-1.704	(-120.164, -58.574)
-15.0624	-5.964	1.388	15.0708	6.507	-1.405	-1.42	(-100.134, -59.343)
-12.0488	-4.819	1.112	12.0561	5.167	-1.123	-1.136	(-80.095, -59.972)
-9.037	-3.65	0.835	9.0414	3.846	-0.841	-0.85	(-60.065, -60.463)
-6.0247	-2.456	0.557	6.0273	2.544	-0.56	-0.568	(-40.04, -60.813)
-3.0122	-1.239	0.227	3.0141	1.262	-0.28	-0.284	(-20.02, -61.023)

TABLA 4.8. WINGEO. SUSPENSIÓN TRASERA: RESULTADOS EN ROLL.

## 4.3. ADAMS

### 4.3.1. Resultados en ride

En la imagen 4.9 se presentan ambas suspensiones actuando en movimiento de *ride*.

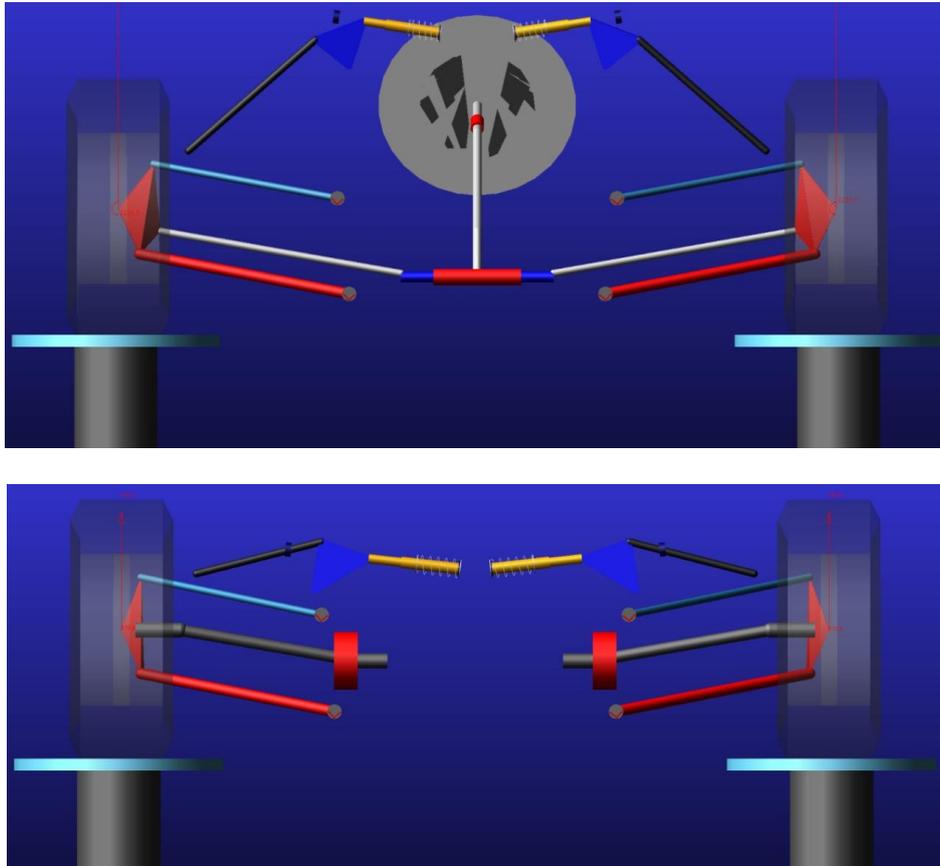


IMAGEN 4.9. ADAMS. ARRIBA: SUSPENSIÓN DELANTERA; ABAJO: SUSPENSIÓN TRASERA; AMBAS BAJO MOVIMIENTO DE RIDE.

ADAMS no presenta advertencias de error incluso en valores altos de *ride*, tampoco cuando los brazos tocan el suelo. Esto se puede observar en la imagen 4.10, donde se tiene un *ride* de 150 [mm].

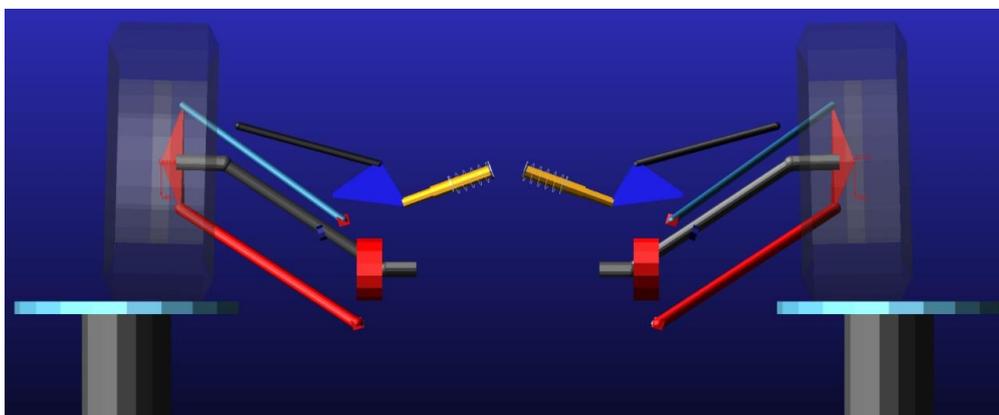


IMAGEN 4.10. ADAMS. MOMENTO EN QUE LOS BRAZOS TOCAN EL SUELO.

En la tabla 4.9 y 4.10 se muestran los resultados en *ride* obtenidos por ADAMS para ambas suspensiones.

Left ride [mm]	Left damper [mm]	Left camber [°]	MR	RC Height [mm]	Track [mm]
30.3044	133.2197	0.1164	-0.7966	-120.8748	1231.7522
24.2131	138.1401	0.1042	-0.7938	-111.6729	1234.0494
18.1398	143.0176	0.0867	-0.7907	-102.529	1236.1553
12.0796	147.8494	0.064	-0.7873	-93.4324	1238.0746
6.03411	152.6301	0.0361	-0.7838	-84.3824	1239.8095
0	157.3599	0.003	-0.7821	-75.3712	1241.3634
-6.023	162.0381	-0.0352	-0.7767	-66.3958	1242.7384
-12.039	166.6683	-0.0787	-0.7732	-57.4473	1243.9372
-18.0463	171.2507	-0.1275	-0.7698	-48.526	1244.961
-24.0475	175.7896	-0.1815	-0.7664	-39.6258	1245.8114
-30.449	180.5922	-0.2452	-0.763	-30.1426	1246.5294

TABLA 4.9. ADAMS. SUSPENSIÓN DELANTERA: RESULTADOS EN RIDE.

Left ride [mm]	Left damper [mm]	Left camber [°]	MR	RC Height [mm]	Half track [mm]
30.291	155.6335	-0.0712	-0.3758	-113.5654	1206.735
24.2041	157.7136	-0.0491	-0.3845	-103.1463	1208.9194
18.1323	159.9013	-0.0303	-0.3927	-92.7742	1210.886
12.075	162.187	-0.0145	-0.4004	-82.4453	1212.6379
6.0322	164.5628	-0.0018	-0.4077	-72.157	1214.1777
0	167.0222	0.0081	-0.3966	-61.8999	1215.509
-6.0202	169.5573	0.0151	-0.4211	-51.674	1216.6334
-12.0333	172.1636	0.0193	-0.4272	-41.4684	1217.5535
-18.0351	174.8324	0.0209	-0.433	-31.2876	1218.2704
-24.033	177.5615	0.0198	-0.4385	-21.1165	1218.7861
-30.0277	180.3455	0.016	-0.4436	-10.9513	1219.1013

TABLA 4.10. ADAMS. SUSPENSIÓN TRASERA: RESULTADOS EN RIDE.

En este caso el desplazamiento del amortiguador se muestra como la distancia total. Por su parte, el ángulo de *camber* es medido a partir de los 90 [°], mientras que el *track* se muestra como la distancia total y no como la mitad de este. Al igual que *Mathematica*, *ADAMS* presenta variaciones en el ángulo de *camber* y en el *track* cuando aún no hay desplazamiento en *ride*.

En la imagen 4.11 se observan las gráficas generadas por *ADAMS*, las cuales muestran el comportamiento del MR para ambas llantas.

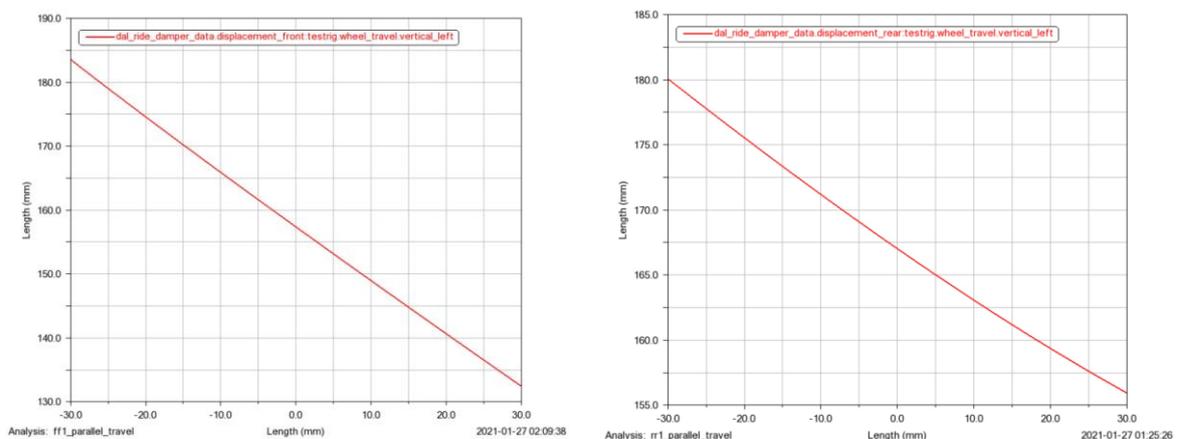


IMAGEN 4.11. ADAMS: GRÁFICA DEL MR. IZQUIERDA: SUSPENSIÓN DELANTERA. DERECHA: SUSPENSIÓN TRASERA.

*ADAMS* posee una enorme ventaja en la generación de sus gráficas sobre los otros softwares, ya que provee la libertad de escoger el diseño de estas, así como permite

manipular la información que se desean graficar. Además, tiene más datos de salida que *WinGeo*. Lo único que se torna difícil durante este paso, es saber el tipo de gráfica que se requiere, pues algunos valores sólo toman sentido sabiendo la manera en que se hizo el análisis.

### 4.3.2. Resultados en roll

La imagen 4.12 muestra a la suspensión delantera y trasera en movimiento de *roll*, donde el amortiguador derecho está en expansión y el izquierdo se encuentra en compresión.

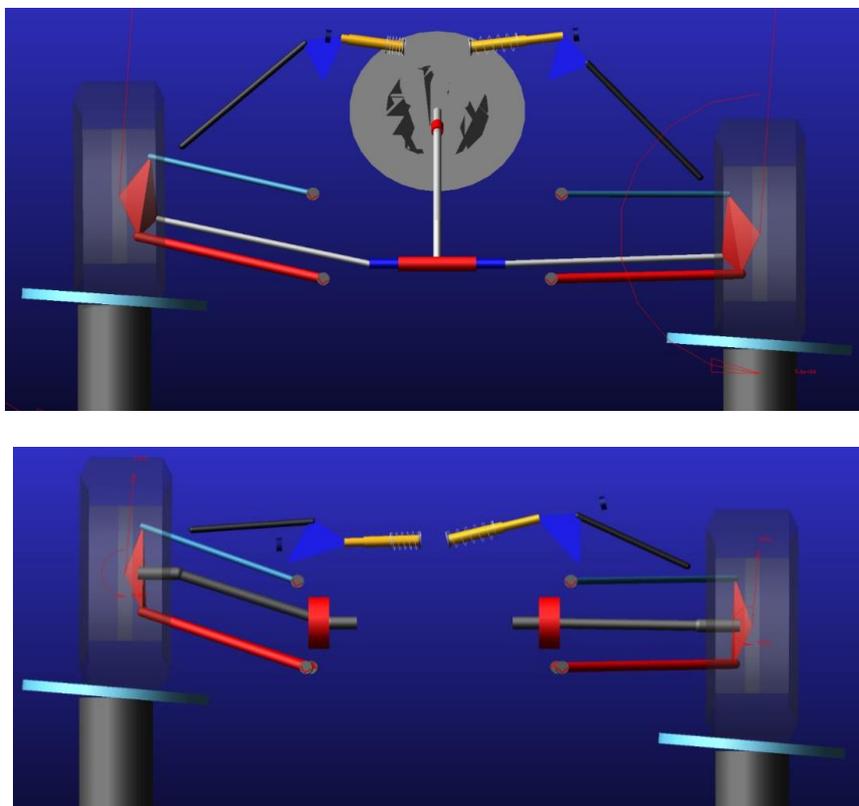


IMAGEN 4.12. ADAMS. ARRIBA: SUSPENSIÓN DELANTERA; ABAJO: SUSPENSIÓN TRASERA; AMBAS BAJO MOVIMIENTO DE ROLL.

En las tablas 4.11 y 4.12 se puede encontrar el análisis en *roll* para ambas suspensiones. Como se puede ver, la manera de mostrar los datos de salida entre *ADAMS* y *Mathematica* es el mismo, a excepción del ángulo de *camber*.

Left ride [mm]	Left damper [mm]	Left camber [°]	Right ride [mm]	Right damper [mm]	Right camber [°]	Roll [°]	RC location [mm]
30.108	133.3783	-3.0043	-30.2172	180.4191	-3.1298	-2.7882	(-109.932, -73.0897)
27.0995	135.8112	-2.7097	-27.1884	178.1509	-2.8101	-2.5085	(-98.9584, -73.5599)
24.0916	138.2376	-2.414	-24.1606	175.8749	-2.4919	-2.2291	(-87.978, -73.9809)
21.0827	140.6579	-2.117	-21.1358	173.5922	-2.1752	-1.9499	(-76.9954, -74.3502)
18.0729	143.0709	-1.8189	-18.115	171.303	-1.86	-1.6711	(-66.0133, -74.6675)
15.0622	145.4759	-1.5192	-15.0895	169.0004	-1.5459	-1.3921	(-55.0106, -74.94)
12.0509	147.8721	-1.2184	-12.0686	166.6911	-1.2333	-1.1135	(-44.0119, -75.1606)
9.0395	150.2585	-0.9165	-9.0502	164.3733	-0.9223	-0.835	(-33.0132, -75.3316)
6.0274	152.6353	-0.6133	-6.0319	162.045	-0.6125	-0.5566	(-22.0097, -75.4546)
3.0139	155.0028	-0.3087	-3.0147	159.7069	-0.304	-0.2783	(-11.0034, -75.5283)

TABLA 4.11. ADAMS. SUSPENSIÓN DELANTERA: RESULTADOS EN ROLL.

Left ride [mm]	Left damper [mm]	Left camber [°]	Right ride [mm]	Right damper [mm]	Right camber [°]	Roll [°]	RC location [mm]
30.1172	155.6919	-2.8785	-30.151	180.4032	-2.9326	-2.845	(-192.2715, -55.4915)
27.1073	156.7077	-2.5948	-27.133	178.9943	-2.6355	-2.5597	(-173.0994, -56.7177)
24.0948	157.7529	-2.3103	-24.1154	177.5992	-2.339	-2.2746	(-153.9021, -57.8136)
21.0858	158.8243	-2.0252	-21.0989	176.2189	-2.0433	-1.9898	(-134.6961, -58.7826)
18.0721	159.9239	-1.7392	-18.0839	174.8542	-1.7482	-1.7051	(-115.4755, -59.618)
15.0624	161.0476	-1.4526	-15.0708	173.506	-1.454	-1.4209	(-96.2571, -60.3261)
12.0488	162.1974	-1.1651	-12.0561	172.1734	-1.1602	-1.1365	(-77.0133, -60.9045)
9.037	163.3702	-0.8769	-9.0414	170.8578	-0.8671	-0.8522	(-57.765, -61.3559)
6.0247	164.5659	-0.588	-6.0273	169.5603	-0.5747	-0.5681	(-38.512, -61.6781)
3.0122	165.7836	-0.2984	-3.0141	168.2817	-0.283	-0.2841	(-19.258, -61.871)

TABLA 4.12. ADAMS. SUSPENSIÓN TRASERA: RESULTADOS EN ROLL.

### 4.4. Análisis de resultados

En orden de poder hacer una correcta comparación de los datos de salida, se generarán gráficas que contengan los resultados de los tres softwares. Por otra parte, los valores serán configurados para que estén en el mismo intervalo de números; el ángulo de *camber* se considerará como la variación a partir de los 90 [°], mientras que el desplazamiento del amortiguador contempla el incremento y no la distancia total. Finalmente, los signos con los que trabajan los programas serán tomados como positivos para el caso del *jounce* y negativos para el *rebound*. En el caso del MR, este también será tomado como negativo.

Para saber cómo es que varían los resultados de un software con respecto a los otros, se hará un cálculo del porcentaje de error, tomando como valores base los obtenidos en *Mathematica*.

#### 4.4.1. Resultados generales en ride

La comparación más importante que se puede obtener del movimiento en *ride* es el MR, pues este representa un parámetro de diseño crítico en vehículos FSAE. En la imagen 4.13 y 4.14 se muestra las curvas del comportamiento del desplazamiento del amortiguador y del MR para la suspensión delantera.

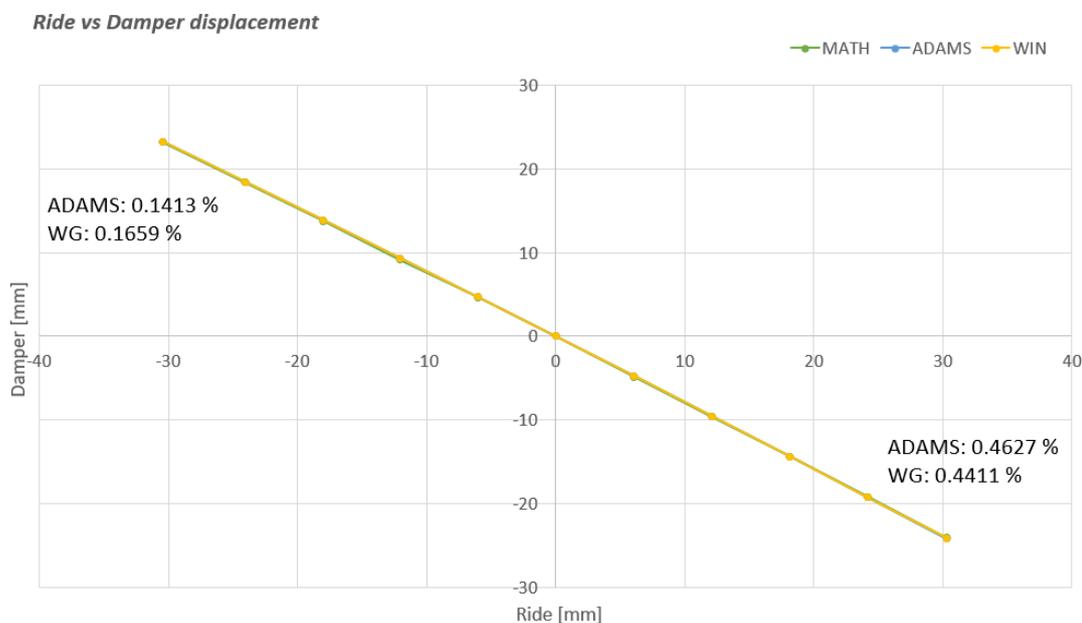


IMAGEN 4.13. SUSPENSIÓN DELANTERA: RIDE VS DAMPER DISPLACEMENT.

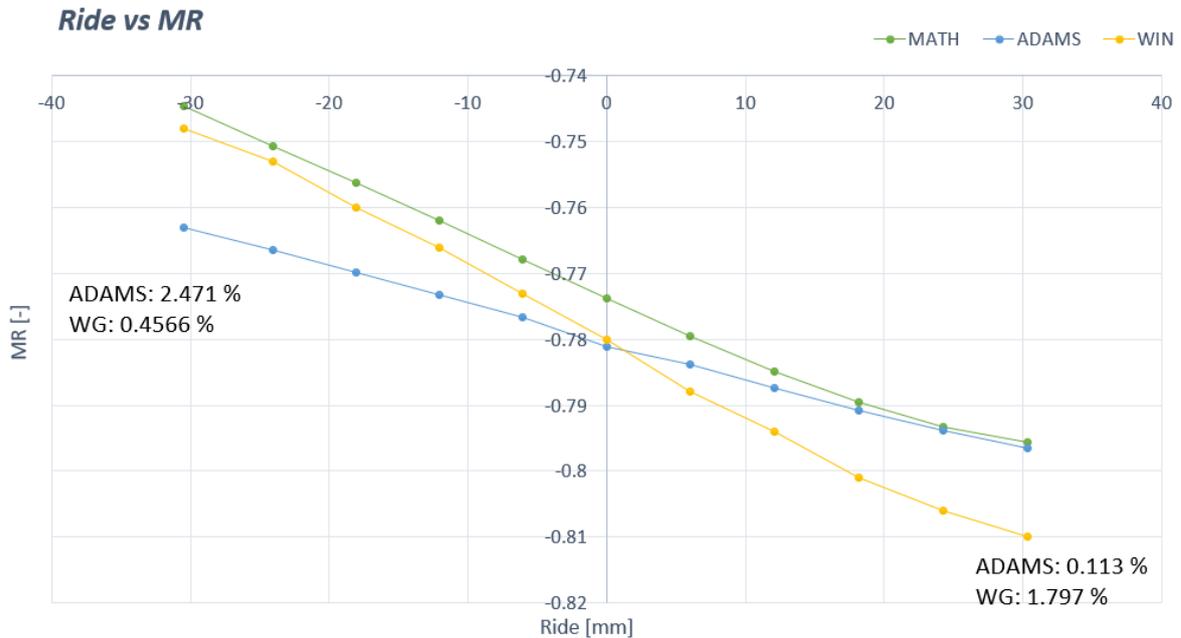


IMAGEN 4.14. SUSPENSIÓN DELANTERA: RIDE VS MOTION RATIO.

Como se puede ver en la primera gráfica, los tres softwares manejan el mismo comportamiento, donde *ADAMS* y *WinGeo* presentan un porcentaje de error por debajo del 0.2 % a valores altos de *rebound*, y por debajo del 0.5 % para valores altos de *jounce*. Ahora, el MR es otra forma de representar el comportamiento del desplazamiento del amortiguador con respecto al *ride*, pues la pendiente de la primera gráfica es el valor de este. Al observar la imagen 4.14, el comportamiento del porcentaje de error que presenta *WinGeo* es parecido al de la imagen 4.13 (bajo porcentaje de error en *rebound*, pero alto en *jounce*), mientras que *ADAMS* presenta un comportamiento invertido en sus gráficas. Por otro lado, de la gráfica del MR, *ADAMS* mantiene un comportamiento prácticamente lineal, mientras que los otros softwares presentan un comportamiento no lineal.

En la imagen 4.15 y 4.16 se presentan las gráficas del comportamiento del desplazamiento del amortiguador y el MR para la suspensión trasera, respectivamente.

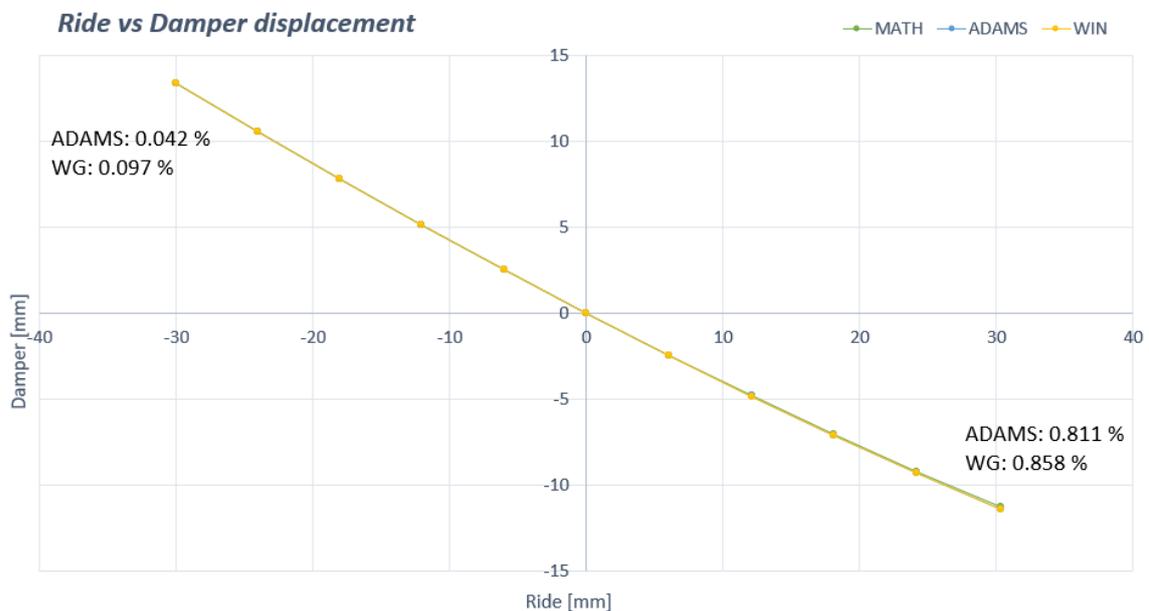


IMAGEN 4.15. SUSPENSIÓN TRASERA: RIDE VS DAMPER DISPLACEMENT.

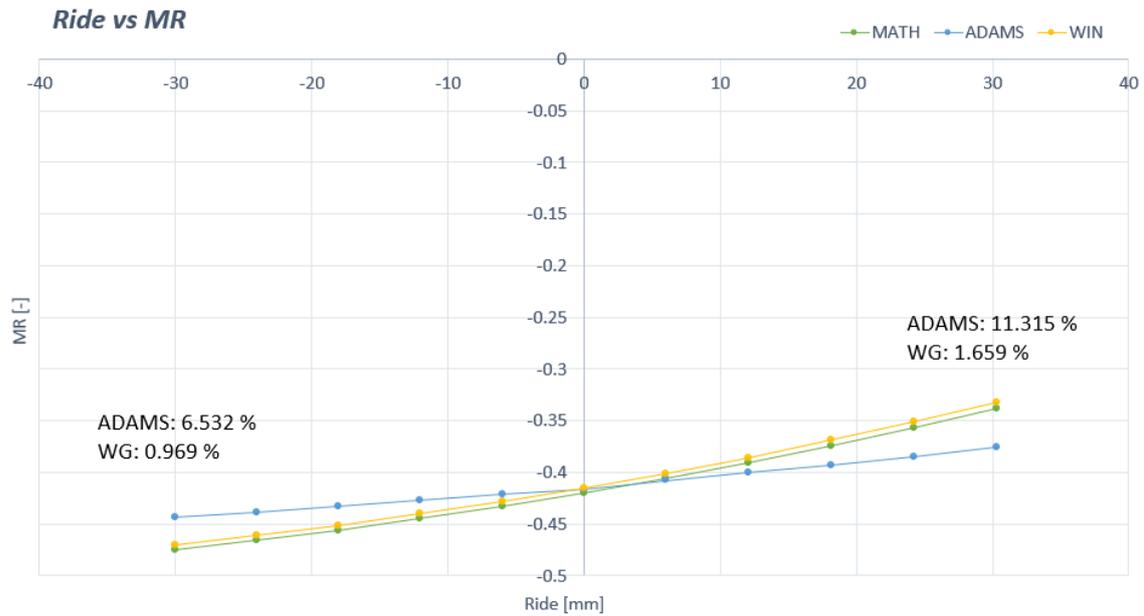


IMAGEN 4.16. SUSPENSIÓN TRASERA: RIDE VS MOTION RATIO.

Para el caso de la suspensión trasera, los valores del desplazamiento del amortiguador presentan un porcentaje de error por debajo del 0.9 %, siendo máximo a valores altos de *jounce*. Sin embargo, para el MR, es *ADAMS* el que maneja un comportamiento diferente, tendiendo a ser lineal y con un porcentaje de error grande a valores altos de *jounce* y *rebound*. En esta última gráfica, *Mathematica* y *WinGeo* son los que presentan un comportamiento semejante. De igual manera, se mantiene un porcentaje de error bajo entre ambos.

En la imagen 4.17 y 4.18 se presenta el comportamiento en el ángulo de *camber* para la suspensión delantera y la suspensión trasera, respectivamente.

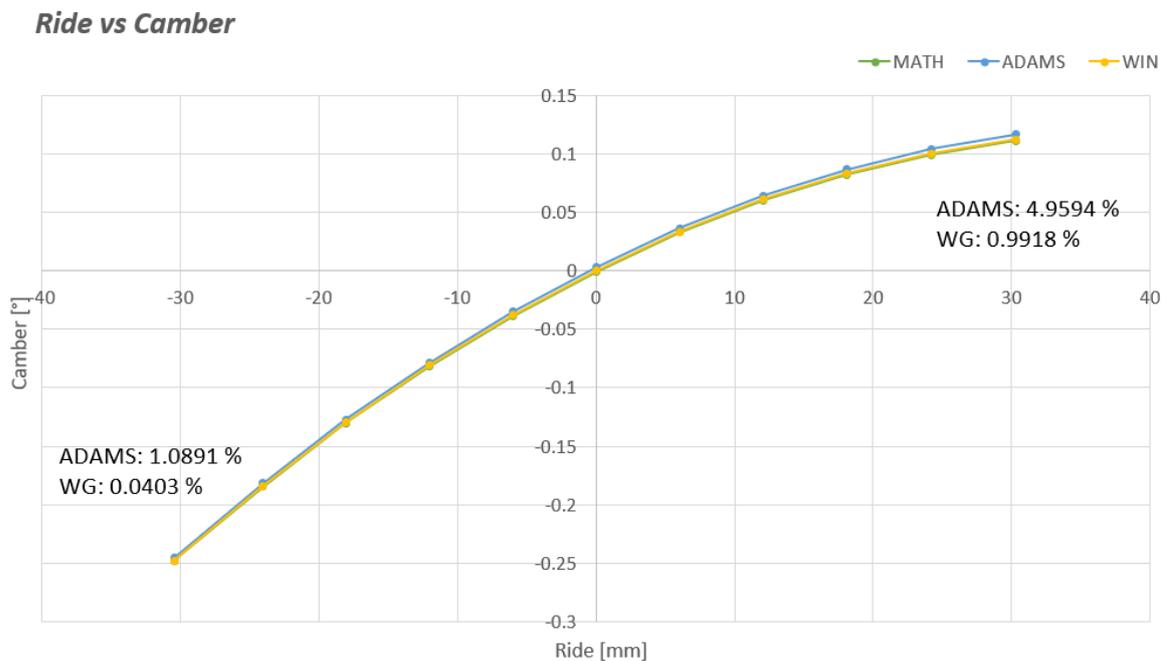


IMAGEN 4.17. SUSPENSIÓN DELANTERA: RIDE VS ÁNGULO DE CAMBER.

Ride vs Camber

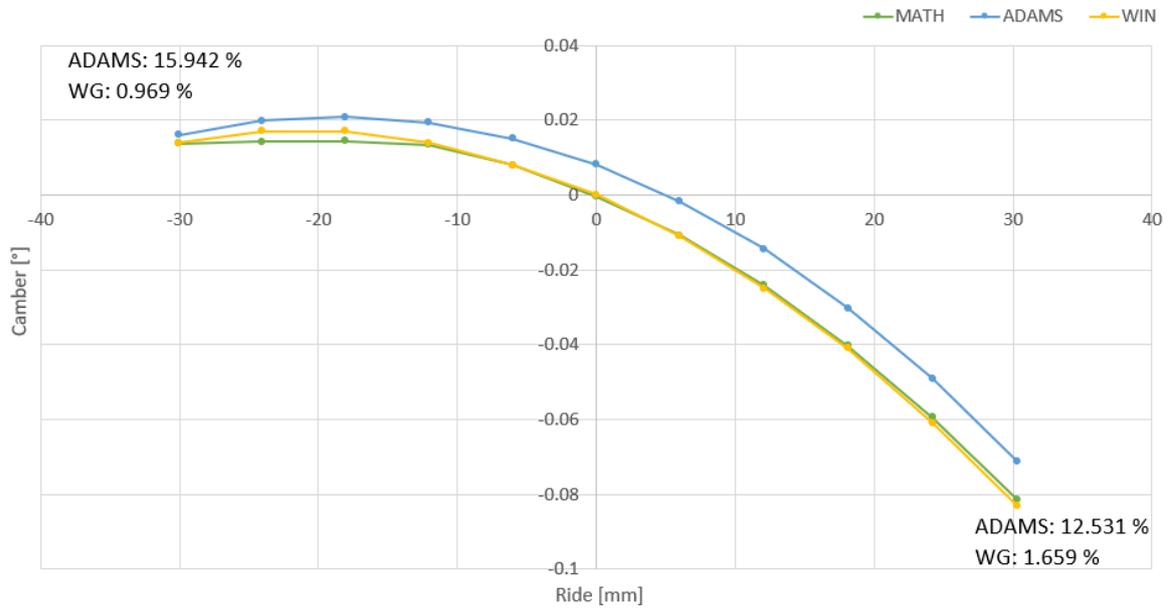


IMAGEN 4.18. SUSPENSIÓN TRASERA: RIDE VS ÁNGULO DE CAMBER.

Para este análisis se tienen el mismo comportamiento para los tres softwares. Sin embargo, *ADAMS* es el que presenta valores alejados con respecto a los otros, siendo el caso de la suspensión trasera más severo, donde se tiene un porcentaje de error por arriba del 15 % para el caso de *rebound*.

En las imágenes 4.19 y 4.20 se presenta el comportamiento de la altura del RC para la suspensión delantera y la suspensión trasera, respectivamente.

Ride vs RC height

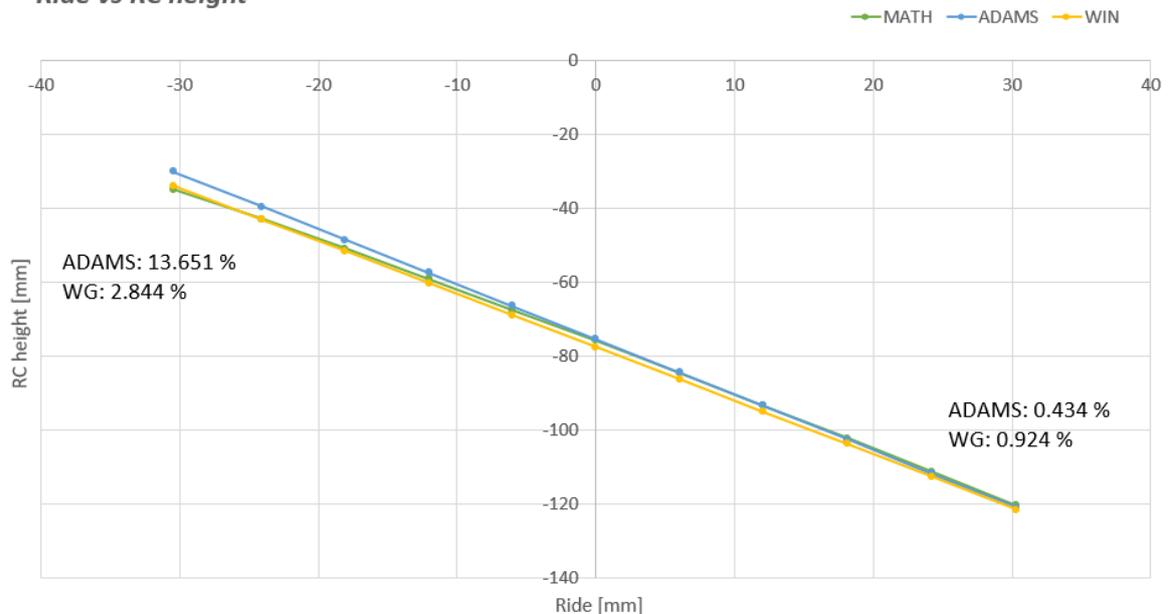


IMAGEN 4.19. SUSPENSIÓN DELANTERA: RIDE VS ALTURA DEL RC.

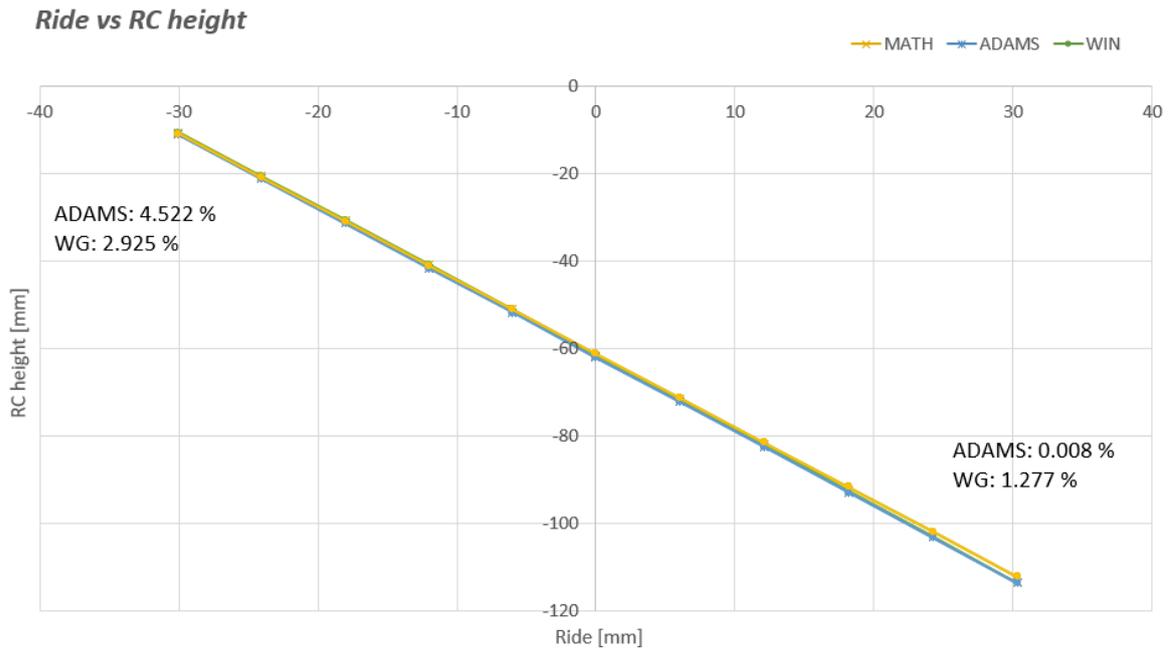


IMAGEN 4.20. SUSPENSIÓN TRASERA: RIDE VS ALTURA DEL RC.

La altura del RC mantiene un comportamiento similar para los tres programas. En este caso, es *ADAMS* el que presenta las variaciones más grandes en valores altos de *rebound*, llegando a un porcentaje de error por arriba del 13.6 % en la suspensión delantera, mientras que *WinGeo* presenta un porcentaje de error por debajo del 3% para valores altos de *rebound* en ambas suspensiones. En el caso del *jounce*, el porcentaje de error es mínimo, siendo el caso de *WinGeo* el más crítico, estando por debajo del 1.3 %.

En las imágenes 4.21 y 4.22 se presenta la variación del *halftrack* de los tres softwares con respecto al *ride* de la llanta izquierda.

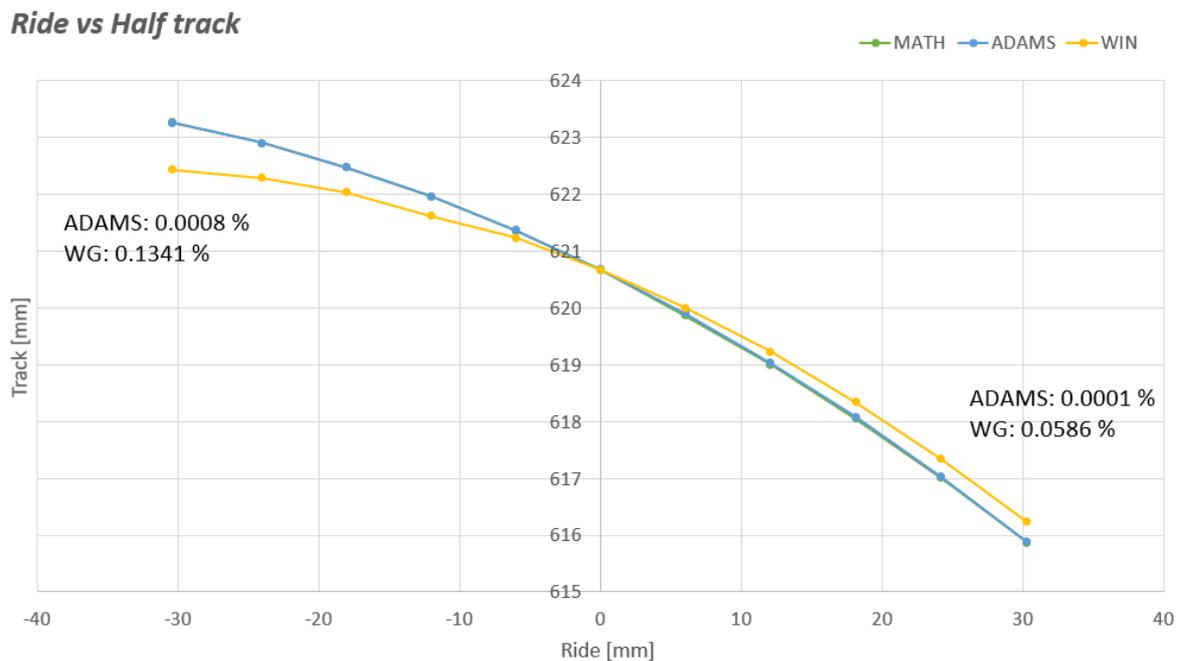


IMAGEN 4.21. SUSPENSIÓN DELANTERA: RIDE VS HALF TRACK.

Ride vs Half track

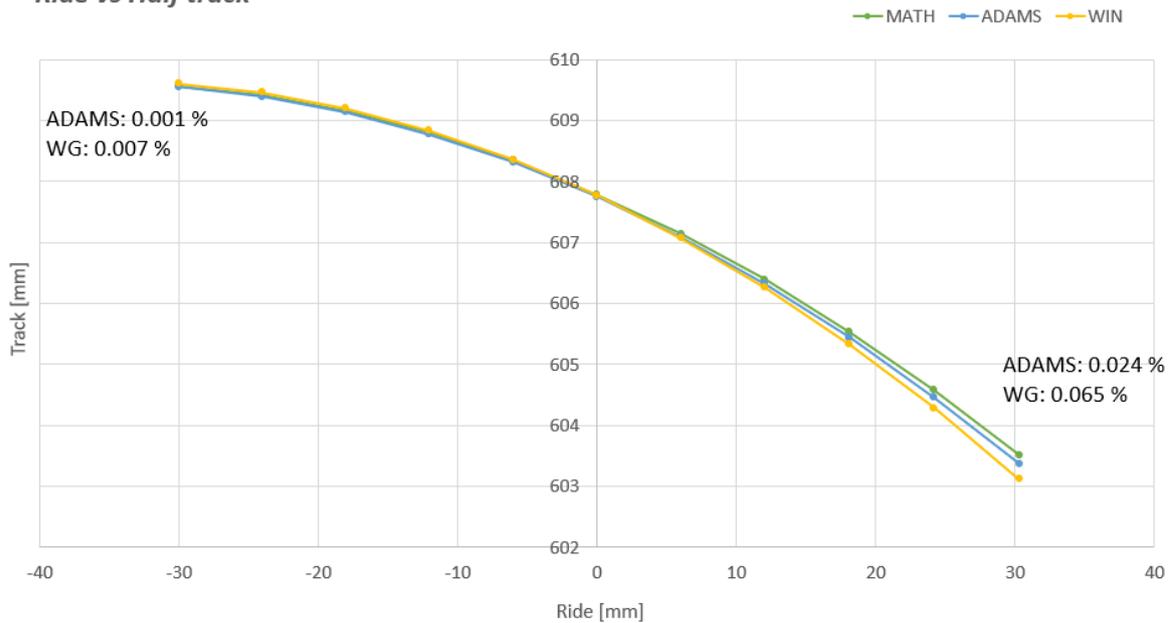


IMAGEN 4.22. SUSPENSIÓN DELANTERA: RIDE VS HALF TRACK

En el caso del *half track*, son *ADAMS* y *Mathematica* los que presentan el menor porcentaje de error, teniendo prácticamente los mismos valores. Hay que tener presente que ambos softwares presentan variaciones en esta salida cuando aún no hay desplazamiento en *ride*, por lo que pueden estar arrastrando con el mismo error. *WinGeo*, por su parte, es el que presenta discrepancias en sus valores. Sin embargo, estas se mantienen por debajo de un porcentaje de error del 0.13%.

4.4.2. Resultados generales en roll

En la imagen 4.23 y 4.24 se presenta el comportamiento del ángulo de *camber* de ambas llantas para la suspensión delantera y la suspensión trasera, respectivamente.

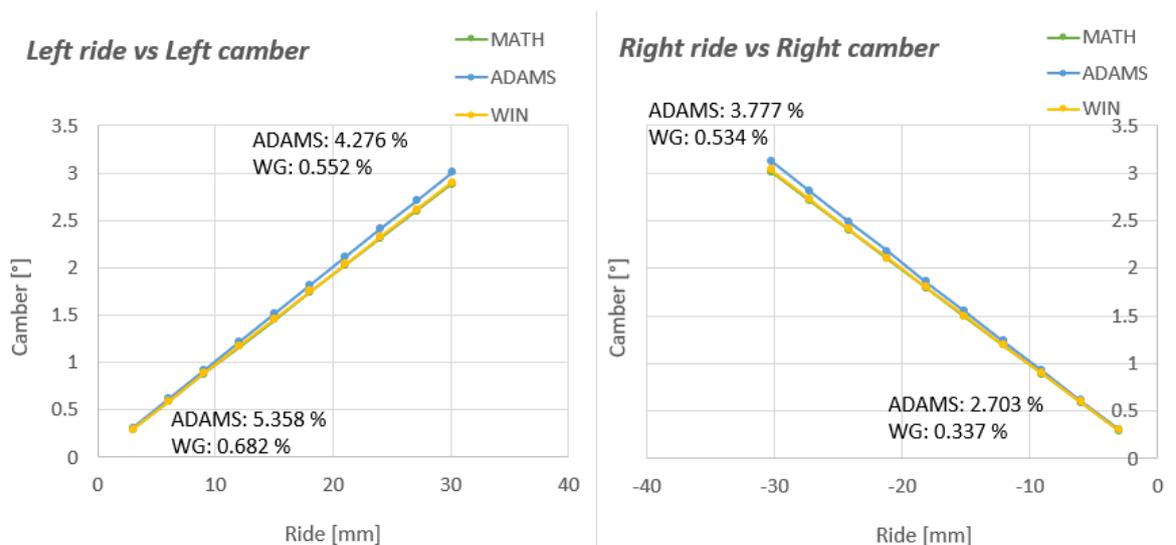


IMAGEN 4.23. SUSPENSIÓN DELANTERA. IZQUIERDA: RIDE IZQUIERDO VS ÁNGULO DE CAMBER IZQUIERDO; DERECHA: RIDE DERECHO VS ÁNGULO DE CAMBER DERECHO.

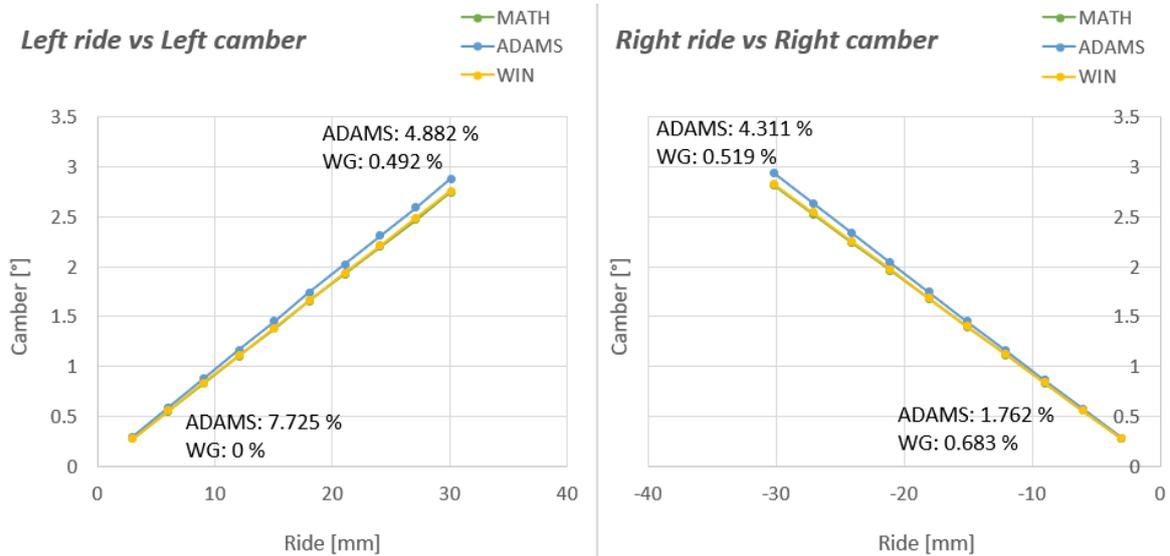


IMAGEN 4.24. SUSPENSIÓN TRASERA. IZQUIERDA: RIDE IZQUIERDO VS ÁNGULO DE CAMBER IZQUIERDO; DERECHA: RIDE DERECHO VS ÁNGULO DE CAMBER DERECHO.

Con respecto al ángulo de *camber*, WinGeo y Mathematica presentan prácticamente los mismos valores, cuyo porcentaje de error se mantiene por debajo del 0.7 %. ADAMS, por su parte, es el que presenta una diferencia más grande en sus resultados, siendo máxima para la llanta izquierda trasera, donde se muestra un porcentaje de error del 7.725 %.

En la imagen 4.25 y 4.26 se presenta el comportamiento del ángulo de *roll* para la suspensión delantera y la suspensión trasera, respectivamente.

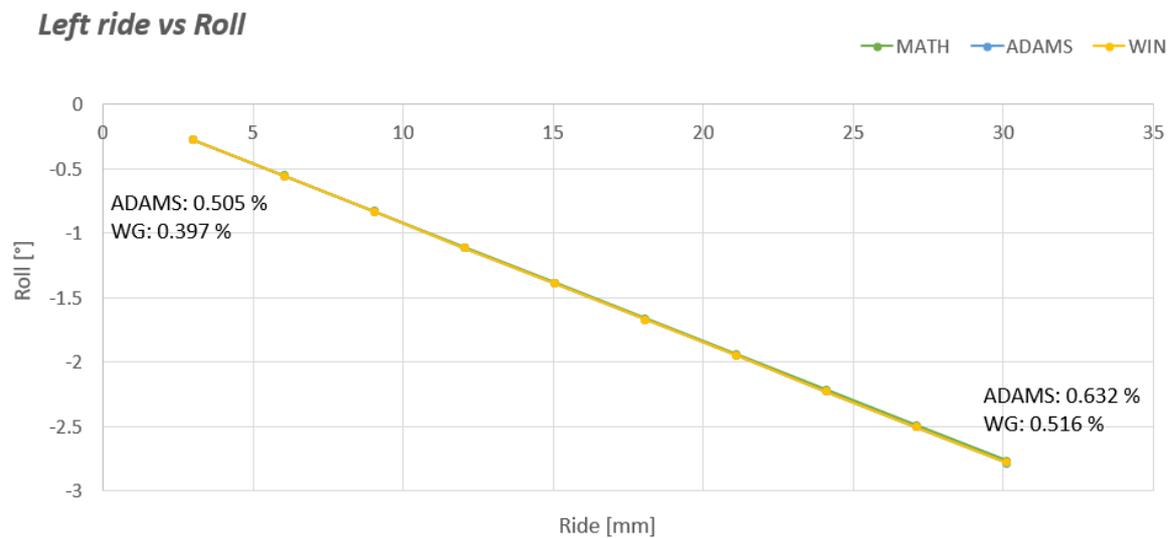


IMAGEN 4.25. SUSPENSIÓN DELANTERA: RIDE IZQUIERDO VS ROLL.

**Left ride vs Roll**

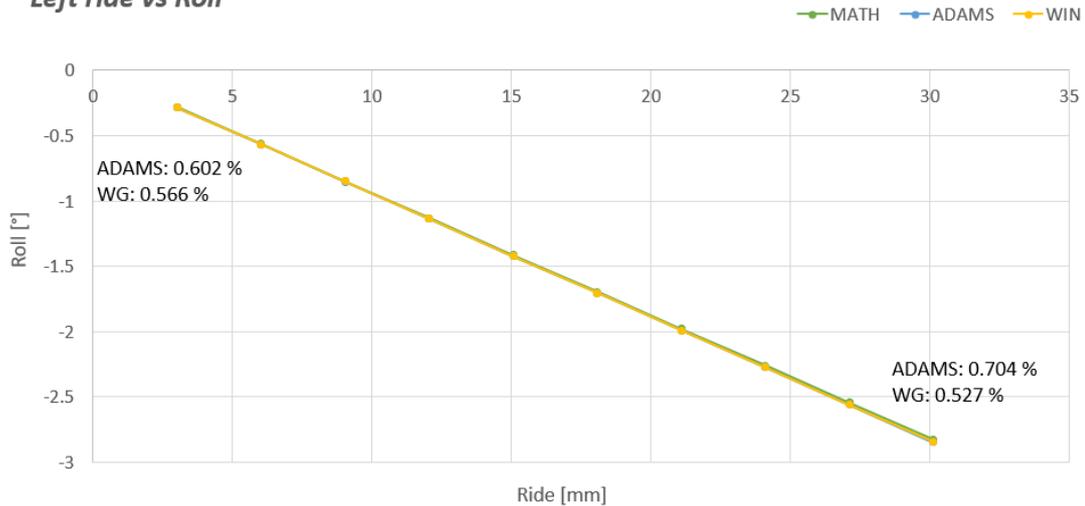


IMAGEN 4.26. SUSPENSIÓN TRASERA: RIDE IZQUIERDO VS ROLL.

Dado un movimiento de *ride*, se observa que el comportamiento del *roll* es igual para los tres softwares, cuyos valores de salida son muy parecidos. Para este caso, el porcentaje de error máximo que se tiene es del 0.704 %, siendo este entre *ADAMS* y *Mathematica*.

En las imágenes 4.27 y 4.28 se presentan las gráficas que muestran el comportamiento del desplazamiento lateral del RC para la suspensión delantera y la suspensión trasera, respectivamente.

**Left ride vs RC width**

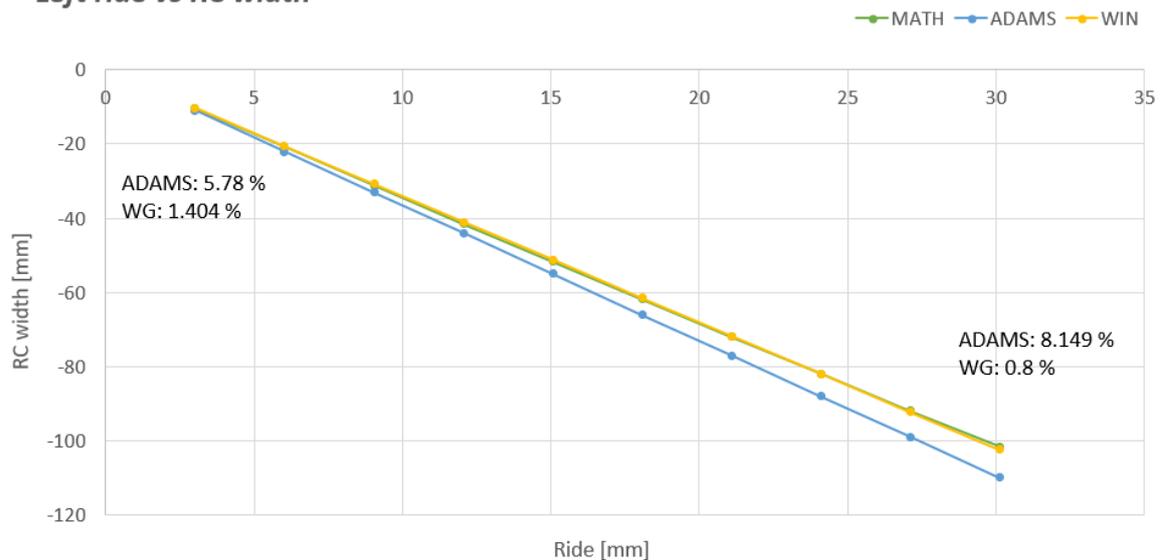


IMAGEN 4.27. SUSPENSIÓN DELANTERA: RIDE IZQUIERDO VS DESPLAZAMIENTO LATERAL RC.

Left ride vs RC width

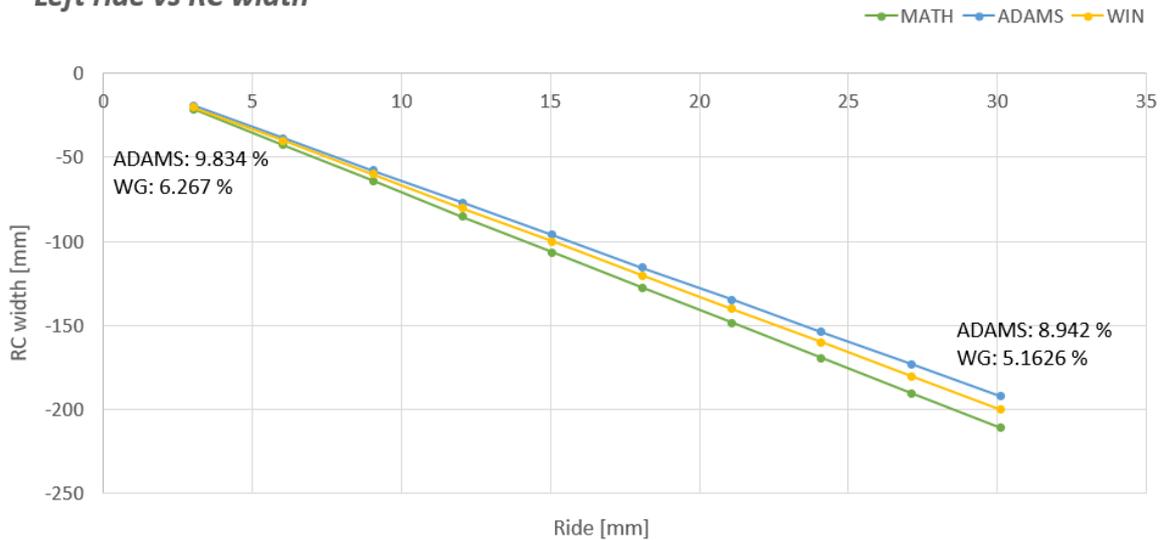


IMAGEN 4.28. SUSPENSIÓN TRASERA: RIDE IZQUIERDO VS DESPLAZAMIENTO LATERAL RC.

Para el caso de la suspensión delantera, se observa que *WinGeo* mantiene un mínimo porcentaje de error, teniendo su pico a valores bajos de *jounce*. Por el contrario, *ADAMS* presenta un porcentaje de error elevado a lo largo de todo el recorrido de *jounce*, estando este por arriba del 8 %. En el caso de la suspensión trasera, aunque se tiene un comportamiento similar, los tres softwares presentan valores distintos durante toda la curva, donde *ADAMS* presenta el porcentaje de error más grande, siendo este de 9.834 %.

En la imagen 4.30 y 4.31 se presentan las gráficas que muestran el comportamiento de la altura del RC en la suspensión delantera y la suspensión trasera.

Left ride vs RC height

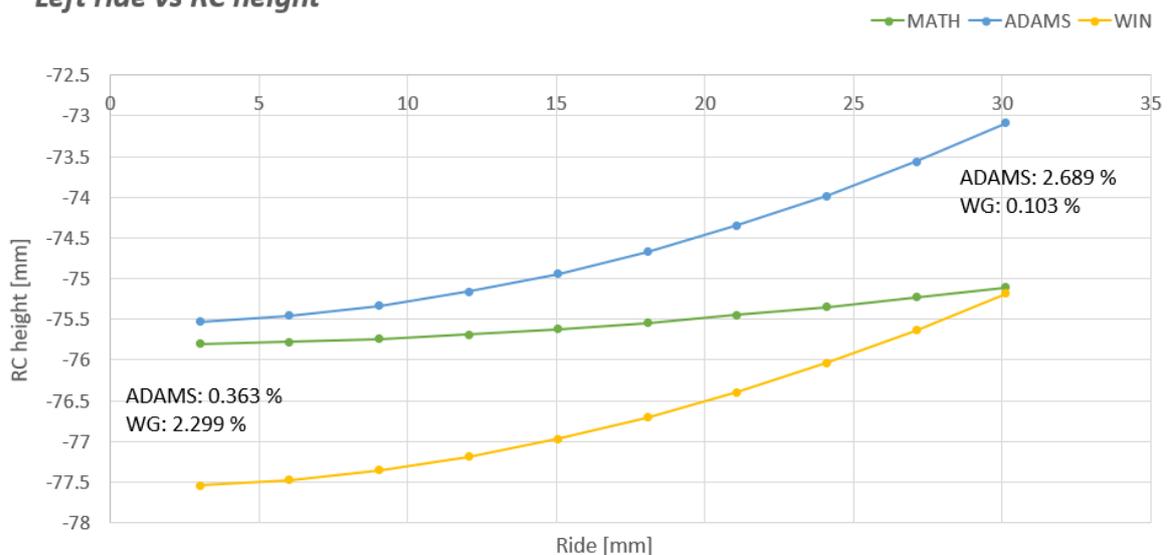


IMAGEN 4.30. SUSPENSIÓN DELANTERA: RIDE IZQUIERDO VS ALTURA RC.

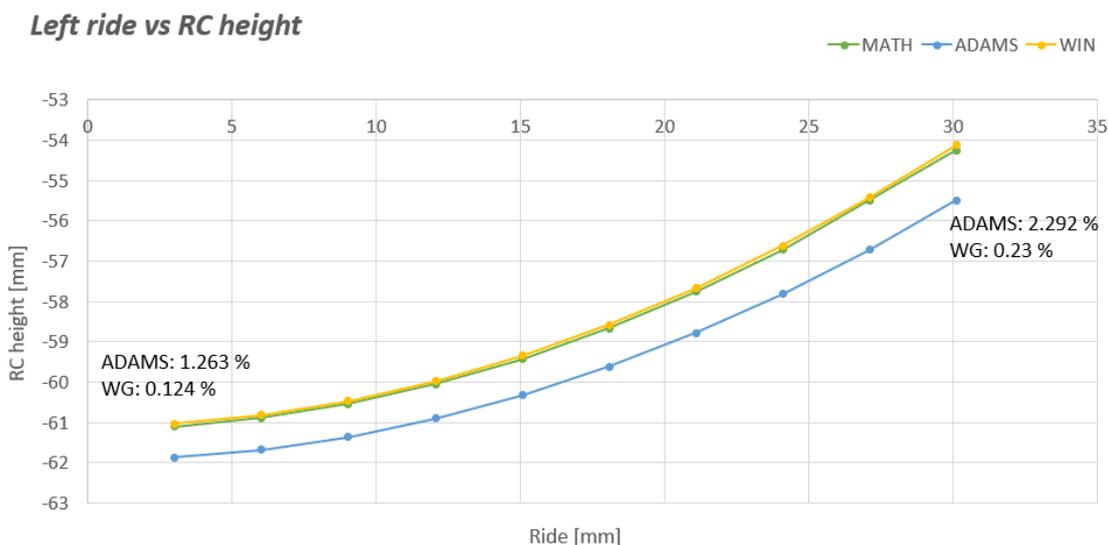


IMAGEN 4.31. SUSPENSIÓN TRASERA: RIDE IZQUIERDO VS ALTURA RC.

Para el caso de la suspensión delantera, se presenta un comportamiento más parecido entre *ADAMS* y *WinGeo*. El porcentaje de error que se tiene para esta salida es por debajo del 2.7 % con respecto a *ADAMS*, siendo este máximo a valores de *jounce* altos, mientras que, para números de *jounce* bajos, se tiene un porcentaje de error por debajo del 2.3 % con respecto a *WinGeo*. Para la suspensión trasera, los tres softwares mantienen el mismo comportamiento, donde los valores obtenidos por *WinGeo* y *Mathematica* son más similares, presentando un porcentaje de error máximo del 0.23 %. Con respecto a *ADAMS*, aunque su comportamiento es similar, sus valores presentan un desfase, con lo que se tiene un porcentaje de error máximo del 2.292 % a valores altos de *jounce*.

#### 4.4.3. Tiempo de procesamiento.

Uno de los datos de interés que se propuso obtener en el presente trabajo es el tiempo de procesamiento. Como se mencionó antes, el linealizar el sistema genera un tiempo de procesamiento menor. Para el caso del programa desarrollado en *Mathematica*, así como *ADAMS*, estos trabajan con la solución no lineal del sistema. *WinGeo* por su parte, no especifica si resuelve la solución lineal o no lineal. Sin embargo, al tener algunas salidas cuyo comportamiento se parece al de *ADAMS* y otras al de *Mathematica*, se genera un indicador de que *WinGeo* también ejecuta la solución no lineal.

En la tabla 4.13 se muestra el tiempo de cómputo que toman los tres diferentes softwares al cargar el archivo de la suspensión delantera, así como para obtener los resultados en *ride* y *roll*. El caso de la suspensión trasera no se muestra, pues los tiempos son parecidos a los de la suspensión delantera para los tres programas.

	<i>Mathematica</i>	<i>WinGeo</i>	<i>ADAMS</i>
Tiempo de inicialización [s]	45.99	0.08	2.31
Iteración en <i>ride</i> [s]	5.20	0.07	1.05
Iteración en <i>roll</i> [s]	19.05	0.07	0.77

TABLA 4.13. COMPARACIÓN DE TIEMPOS EN LA SUSPENSIÓN DELANTERA.

El tiempo generado en *Mathematica* es superior con respecto al que los otros softwares presentan, siendo mayor el que se requiere para iniciar el programa. La principal razón, es porque *Mathematica* necesita llamar a las diferentes librerías con las que trabajará para resolver el problema, consumiendo así, muchos recursos. Por su parte, *WinGeo* y *ADAMS*

trabajan con lenguajes de programación como *C++* o *Java* para resolver sus análisis, lo cual significa un ahorro de recursos y por lo tanto de tiempo. Otro factor que también afecta es la manera en que los softwares tratan con la solución del mecanismo; como se mencionó, el linealizar un sistema genera un gran ahorro de tiempo.

Cuando se comparan los tiempos por iteración, *WinGeo* es el más rápido, pudiendo ser esto porque es un programa que sólo se encarga de realizar análisis cinemáticos, así como por tener una sencilla interfaz. Además, *WinGeo* no genera animaciones, sólo muestra la posición actual del mecanismo. *ADAMS* por su parte, genera análisis más elaborados y con más salidas que *WinGeo*, también como animaciones del mismo, siendo estas las razones por las que procesa en más tiempo. En el caso de *Mathematica*, su tiempo de cómputo está muy por encima de los otros; su principal problema es que, como se mencionó antes, se apoya de las librerías que ocupará para el análisis. Otra cosa que hay que tomar en cuenta son los resultados asociados al RC; en el caso de *Mathematica*, este análisis es el que lleva más tiempo de realizar y el que mayor error arrastra, dado que para este se trabaja con memoria de cálculo anidada, es decir, se debe de obtener la posición de todo el mecanismo de la suspensión para llegar a este valor. Por su parte, *WinGeo* y *ADAMS*, al tomar el *ride* de la llanta como dato de entrada, no necesitan resolver todo el mecanismo, sólo obtener la posición de la llanta y los brazos para obtener los valores asociados al RC.

#### 4.4.4. Resultados de transferencia de carga

El programa desarrollado en *Mathematica* genera un análisis de carga cuando el carro se encuentra estático, así como cuando viaja a velocidad constante en *skidpad*, donde se presenta transferencia de carga. El propósito del análisis es identificar el comportamiento que tendrá el carro con distintos valores de rigidez. En este se toma como condición inicial el punto en el que los amortiguadores están en *full extension*, con lo que las llantas presentan su máximo desplazamiento en *rebound*. Por lo tanto, esta condición será tomada como *ride* cero. De igual manera, se toma en cuenta el peso de un piloto de 70 [kg], así como no se consideran valores de *preload*.

En la tabla 4.14 y 4.15 se muestran los resultados de carga cuando el carro permanece estático, tanto para la suspensión delantera como para la suspensión trasera. Para este caso, en cada llanta delantera se desarrollan 659.804 [N] de fuerza normal. Dado a la variación del MR, la fuerza que recibe el resorte está en un rango entre los 840.634 [N] y los 872.526 [N]. Para la suspensión trasera, en cada llanta se desarrollan 706.533 [N] de fuerza normal. En este caso, el resorte trabaja en un rango de fuerza entre los 1740.66 [N] y los 2092.811 [N].

$K_s$ [lbf/in]	Left damper [mm]	Left ride [mm]	RC Height [mm]	Left camber [°]	Natural Frequency Sprung mass [Hz]	Natural Frequency USM [Hz]
150	148.1654	41.6754	-92.688	90.058	3.645761	20.84035
250	160.7713	25.6185	-69.618	89.9721	4.361524	22.83724
300	163.917	21.5425	-639086	89.9443	4.61924	23.82367
350	166.2442	18.5242	-59.719	89.9222	4.831032	24.78835
400	167.8963	16.3561	-56.73	89.9055	4.992066	25.63963
450	169.2803	14.5484	-54.251	89.891	5.13064	26.47277
500	170.3745	13.1171	-52.297	89.8792	5.248768	27.27164
550	171.2027	12.0253	-50.811	89.87	5.367783	28.17557
600	171.9554	11.0241	-49.452	89.8614	5.457889	28.93838
650	172.5991	10.1798	-48.309	89.8541	5.538704	29.69013
700	173.1446	9.4666	-47.346	89.8477	5.610061	30.41527
750	173.568	8.8982	-46.579	89.8427	5.674217	31.12351

TABLA 4.14. ANÁLISIS DE CARGA EN ESTÁTICO. SUSPENSIÓN DELANTERA.

$K_s$ [lbf/in]	Left damper [mm]	Left ride [mm]	RC Height [mm]	Left camber [°]	Natural Frequency Sprung mass [Hz]	Natural Frequency USM [Hz]
300	143.0912	118.871	-226.13	89.5203	5.979778	39.49359
350	148.384	85.3663	-160.76	89.7885	6.063241	42.05954
400	152.3574	70.4691	-133.26	89.8709	6.128245	44.4777
450	155.4808	60.5241	-115.31	89.9148	6.180838	46.79613
500	160.1325	47.2941	-91.864	89.9604	6.136455	44.81576
550	162.7296	40.4603	-79.92	89.9786	6.140427	44.98228
600	164.7883	35.2594	-70.9	89.9899	6.145143	45.18256
650	165.9877	32.3037	-65.799	89.9955	6.180393	46.77486
700	167.4489	28.7727	-59.728	90.0012	6.210732	48.29753
750	169.2398	24.5312	-52.467	90.0069	6.237402	49.77364

TABLA 4.15. ANÁLISIS DE CARGA EN ESTÁTICO. SUSPENSIÓN TRASERA.

Lo primero que se puede notar, es que para valores de rigidez por debajo de 300 [lbf/in], la suspensión trasera presenta fallas en el mecanismo, por lo que el programa deja de ejecutar la simulación. Por otro lado, dado que el MR de ambas suspensiones está por debajo de 1 (siendo el caso de la suspensión trasera más severo), se presenta un desplazamiento excesivo en *ride*, así como en la altura del RC. En el caso de las frecuencias, éstas son mayores a los valores promedio para este tipo de carros, debido principalmente al MR, sin embargo, la masa del *sprung mass* y USM también tiene impacto en el comportamiento de estas. Para el ángulo de *camber*, dada la lejanía de los IC's, este se mantiene con una mínima variación.

En las tablas 4.16 y 4.17 se muestran los resultados de carga durante la prueba *skidpad* para ambas suspensiones. En este análisis se toma como altura del RC inicial la que se consigue con el resorte de 600 [lbf/in]. Para este caso se presenta una transferencia de carga de las llantas del lado derecho a las llantas del lado izquierdo (vista frontal). En la llanta delantera externa se presenta una fuerza normal de 1068.74 [N], donde la fuerza que recibe el resorte va de los 1361.66 [N] a los 1413.303 [N]. En el caso de la llanta delantera interna, se presentan 250.865 [N] de fuerza normal, con un rango que va de los 331.744 [N] a los 334.219 [N] de fuerza actuando en el resorte. Por su parte, en la llanta trasera externa se generan 1084.14 [N], donde la fuerza que recibe el resorte varía entre los 2503.788 [N] y los 3211.315 [N]. Mientras que, en la llanta trasera interna, se generan 328.93 [N], donde el rango de fuerza aplicada a el resorte está entre los 706.617 [N] y los 759.654 [N].

$K_s$ [lbf/in]	Left damper [mm]	Left ride [mm]	Right damper [mm]	Right ride [mm]	Roll [°]	RC location [mm]
150	128.274	66.3945	167.594	16.7557	-2.2985	(-76.2441, -92.2479)
250	148.923	40.7259	172.678	10.0772	-1.4137	(-55.5297, -69.1803)
300	153.993	34.3025	173.951	8.3944	-1.1941	(-49.4113, -63.539)
350	157.734	29.5237	174.809	7.2582	-1.0257	(-44.2332, -59.4587)
400	160.387	26.1119	175.488	6.3571	-0.9097	(-40.5086, -56.5011)
450	162.612	23.2381	176.023	5.6481	-0.8098	(-37.0855, -54.0565)
500	164.371	20.9571	176.445	5.0869	-0.7304	(-34.2388, -52.1249)
550	165.699	18.2293	176.791	4.6272	-0.672	(-32.0865, -50.6425)
600	166.909	17.6513	177.079	4.2437	-0.6169	(-29.9662, -49.317)
650	167.944	16.2987	177.326	3.9156	-0.5697	(-28.0936, -48.1838)
700	168.821	15.1503	177.535	3.6374	-0.5296	(-26.4608, -47.2237)
750	169.501	14.2588	177.716	3.3956	-0.4997	(-25.2314, -46.4622)

TABLA 4.16. ANÁLISIS DE CARGA EN SKIDPAD. SUSPENSIÓN DELANTERA.

$K_s$ [lbf/in]	Left damper [mm]	Left ride [mm]	Right damper [mm]	Right ride [mm]	Roll [°]	RC location [mm]
500	143.603	113.037	171.589	19.0951	-4.484	(-178.056, -117.107)
550	146.927	91.8951	172.587	16.8234	-3.5656	(-165.496, -98.0741)
600	149.695	80.0626	173.225	15.3839	-3.06479	(-157.937, -87.4034)
650	152.064	71.4738	173.77	14.1597	-2.7116	(-152.422, -79.528)
700	156.633	57.0948	174.375	12.809	-2.0908	(-138.137, -67.1795)
750	161.199	44.4443	174.881	11.6847	-1.5442	(-121.059, -56.4273)

TABLA 4.17. ANÁLISIS DE CARGA EN SKIDPAD. SUSPENSIÓN TRASERA.

En el caso de la rigidez en *roll*, la suspensión trasera presenta fallas en el mecanismo con resortes por debajo de los 500 [lbf/in]. Por otro lado, se puede ver que la suspensión trasera presenta un ángulo de *roll* mayor que la delantera. Para la mayoría de los resortes, la suspensión delantera se mantiene por debajo del valor objetivo de *roll* (1.2 [°]). Sin embargo, esto no pasa con la suspensión trasera, pues ese número objetivo es superado sin importar la rigidez que se tenga. Esto provocará que el carro este sometido a un par de torsión excesivo durante *skidpad*, pudiendo generar una mala maniobrabilidad, un mal control del *Yaw moment* y problemas con el chasis. Finalmente, se ve una diferencia grande con respecto al desplazamiento del RC, pues la suspensión trasera presenta condiciones más críticas que la suspensión delantera.



# CAPÍTULO 5: Conclusiones

Durante los más de 10 años de historia de la escudería *UNAM Motorsports*, se ha avanzado e innovado en el diseño y la manufactura del carro, sin embargo, la forma en que este se valida, ha sido descuidada. En un inicio, este trabajo fue desarrollado con el objetivo de obtener la validación del sistema de suspensión mediante la ecuación de Lagrange, tomando como dato de entrada la elongación de los amortiguadores. Sin embargo, por causas externas, no fue posible obtener los datos requeridos. No obstante, aún quedaban muchos temas por tratar con respecto al sistema de suspensión, como lo son, los problemas causados por la cinemática del mismo.

En la temporada del año 2017 de la escudería, el análisis de la suspensión hecho demandaba un resorte de 250 [lbf/in] en cada cuarto del carro, esto contemplando un MR cercano a 1 para el sistema completo, el cual se obtuvo de *ADAMS*. Una vez terminada la manufactura del auto y habiendo sido probado en pista, este se comportó acorde a lo que en diseño se esperaba. En la temporada 2018, se decidió seguir la misma metodología de diseño, sin embargo, esta vez se determinó que la *push* se sujetaría del brazo superior (estando sujeto en el brazo inferior en la temporada 2017). Con un MR cercano a 1 para la suspensión trasera y la delantera, el diseño demandaba un resorte de 250 [lbf/in] para poder desempeñarse de manera exitosa en pista. Cuando el prototipo final logró ponerse sobre cuatro ruedas, sin piloto, los resortes seleccionados no eran lo suficientemente rígidos para soportar el peso; las espiras de los resortes traseros estaban a punto de juntarse. Para corregir esto, se optó por usar un resorte de 600 [lbf/in], más del doble de lo obtenido en la etapa de diseño. El prototipo desarrollado en el 2019, así como el del actual diseño, continúa siendo el mismo que se ocupó en el 2018, con apenas pequeñas modificaciones. Se pensaba que el problema era la ubicación de los RC's o la configuración que presentan los IC's. No fue hasta el desarrollo del presente trabajo que se mostró el verdadero problema: el MR. Como se puede ver en los resultados, el MR que presenta este carro está por debajo de 1 y no se comporta de manera lineal, siendo el caso de la suspensión trasera más severo que el de la delantera. Esto trajo problemas con los demás sistemas de la dinámica: el alerón delantero raspaba con el suelo en las curvas y los tubos del chasis que sostienen a la suspensión comenzaron a pandearse.

En la imagen 5.1 se muestra el carro de la temporada 2019 en la prueba de *skidpad*, donde se puede observar que se desarrolla un ángulo excesivo de *roll*, siendo mayor en la parte trasera. Esto representa un problema severo, pues se somete al vehículo a un exceso de torsión pura, así como se pierde maniobrabilidad en el mismo. Además, el análisis de la aerodinámica pierde fundamentos, pues este es diseñado considerando grados de *roll* pequeños.



IMAGEN 5.1. PROTOTIPO 2019 DE LA ESCUDERÍA UNAM MOTORSPORTS EN SKIDPAD. LINCOLN NEBRASKA.

Año con año la escudería ha ido indagando en el uso de nuevos softwares, buscando generar más y mejores resultados. En el caso de la suspensión, se comenzó con el uso de *WinGeo*, para después tomar a *ADAMS* como programa base. Al no tener conocimientos suficientes de este último, se decidió cambiar a *Lotus*. Sin embargo, prevalece el mismo problema: si un software no se conoce bien, no se tiene una correcta idea de lo que se está obteniendo. Esta tesis no sólo logra obtener resultados tan buenos o mejores que los obtenidos por *ADAMS*, sino que consigue encontrar una respuesta a un problema con el que se ha ido arrastrando por más de dos años, y que, de no tratarse, hubiera seguido por más tiempo.

Como se mencionó antes, la ecuación de Freudenstein es la manera en la que actualmente se analiza el comportamiento cinemático de mecanismos. Sin embargo, el método gráfico, aunque más complejo de programar, sigue manteniendo alta precisión. Por lo anterior, es normal que se hayan obtenido resultados parecidos entre los tres softwares. Por otro lado, aunque se haya obtenido un comportamiento similar entre *Mathematica* y *WinGeo* en la mayoría de sus salidas, no se puede decir cuál de los tres programas consigue resultados más precisos, dado a que no se sabe la manera exacta en que los softwares comerciales generan sus resultados. Lo que sí se sabe, es la forma en que el programa desarrollado trabaja, así como la teoría bajo la cual se consiguen sus datos de salida. Si bien, este toma un dato de entrada diferente con respecto a los otros softwares, esto sólo representa una manera diferente de resolver el análisis.

En la tabla 5.1 se muestra una comparación de los softwares utilizados, tomando en cuenta los aspectos más relevantes en el análisis de la cinemática de la suspensión.

Rubro	<i>Mathematica</i>	<i>WinGeo</i>	<i>ADAMS</i>
Tiempo de procesamiento	Alto	Bajo	Bajo
Dificultad de uso	Bajo	Bajo	Alto
Dificultad al entender la interfaz	Alto	Bajo	Alto
Disponibilidad al usuario	Alto	Bajo	Medio
Precisión en resultados	Alto	Alto	Alto
Variedad de resultados	Bajo	Medio	Alto
¿Trabaja con la solución no lineal?	Sí	No disponible	Sí

TABLA 5.1. COMPARACIÓN ENTRE SOFTWARES.

*WinGeo* es un programa bastante útil para el diseño cinemático de la suspensión y dirección en este tipo de competencias, pues trabaja rápido y tiene una gran variedad de datos

de salida, así como es fácil de usar. Como se puede notar en los resultados, los valores obtenidos son semejantes a los generados con los otros softwares, donde se tiene un porcentaje de error bajo con respecto a los datos de salida obtenidos por *Mathematica*. Sin embargo, conforme un equipo continúe creciendo y necesite de más información para validar su diseño, *WinGeo* comienza a ser un tanto obsoleto, pues no se tiene la información suficiente de cómo es que este trabaja. Además, no es un software fácil de conseguir y no genera simulaciones dinámicas.

*ADAMS* es uno de los softwares más completos en la industria automotriz para el diseño de la dinámica vehicular, teniendo su enfoque principal en el sistema de suspensión. Aunque su comportamiento en los datos obtenidos es similar al de los generados por *WinGeo* y *Mathematica*, este fue el que presentó los porcentajes de error más grandes. Sin embargo, como se mencionó antes, no se puede decir cuál está bien o mal, cuál es más o menos preciso, hasta que se pueda generar una validación de la suspensión. Por otro lado, *ADAMS* trabaja con la solución no lineal, con lo que se puede inferir que genera resultados precisos bajo un corto periodo de tiempo. El problema con *ADAMS* es que el usuario, al no tener el conocimiento suficiente del mismo, el utilizarlo podría ser algo que lo perjudique. El claro ejemplo se presenta con el análisis del MR que se hizo en la temporada 2018, pues no se tenía el conocimiento suficiente para manipular los *templates*, así como no se sabía la forma en la que estos programas trabajan con los mecanismos. Fue por ello que, durante más de dos años, se creía que el resultado obtenido por el software estaba bien, tratando de encontrar el problema en otros factores. Con esto no se quiere decir que se deje de usar *ADAMS* como programa base en el diseño de la suspensión, sino que se tiene que indagar y practicar más con este tipo de programas para poder sacarle el máximo provecho.

El programa desarrollado en *Mathematica* presenta una interfaz difícil de entender al tratarse de un código de programación. Además, si no se está familiarizado con el lenguaje y con la teoría del tema, este se hará más difícil de comprender. Por otro lado, al programa le toma un gran tiempo de procesamiento comparado con los otros softwares, y la variedad en sus resultados es muy baja. Pese a esto, es un programa que genera resultados con alta precisión, pues se trabaja con la solución no lineal. El código generado no reemplaza a *ADAMS* o *WinGeo*, pues aún es muy básico y no tan fácil de manipular. Sin embargo, con el desarrollo del mismo se logra entender más sobre el tema, así como se logra saber cómo es que los softwares comerciales tratan con estos análisis. Con esto, se puede generar un mejor diseño del carro, así como un mejor papel durante la competencia.

A medida que un equipo desarrolle sus propias herramientas, habrá mejor entendimiento del tema y menos dependencia de otros softwares. Si bien, el código desarrollado aún no tiene un alcance muy grande, este construye las bases para buscar crear un programa más complejo a futuro, buscando no sólo la validación del sistema, sino, simulaciones de la dinámica del carro en pista.

Como se mencionó antes, se pensaba que el problema que tenía el prototipo del 2018 era la ubicación de los RC's o de los IC's. Cuando se diseñó el sistema de suspensión, el principal objetivo en la cinemática era obtener las mínimas variaciones en el ángulo de *camber*, con lo que se descuidaron otros factores, como la ubicación del RC. El no tener conocimientos suficientes de la cinemática de la suspensión, generó que no se les diera mucha importancia a estas características del sistema. Con el presente trabajo, se logra recopilar información sobre la suspensión, así como de la dinámica vehicular. Con esto se logra obtener un conocimiento más claro, con lo que se puede generar un mejor diseño del

sistema, así como una manera óptima en la puesta a punto del carro durante la etapa de pruebas, buscando el mejor rendimiento en pista.

## **5.1. Trabajo a futuro**

Aunque la presente tesis cubre una variedad de temas que acercan a la escudería a la mejora del diseño de la suspensión, aún hay mucho con lo que se debe trabajar para seguir creciendo. En este apartado se enlista algunos de esos puntos.

- **Validación del sistema:** El no tener la validación del sistema de suspensión, mantiene al equipo estancado en la búsqueda del crecimiento del mismo. Se pueden tener buenos conocimientos en el proceso de diseño y buenos procesos de manufactura. Sin embargo, si no se tiene la validación del mismo, no se sabe si el carro trabaja como se esperaba en la etapa de diseño. El modelo ocupado en el presente trabajo sirve como una buena base para obtener esa validación. Entonces, entender cómo aplicar la ecuación de Lagrange, así como el obtener los datos de entrada requeridos, se convierten en el propósito principal del equipo para obtener esa validación.
- **Uso de ADAMS:** El tener acceso a un programa tan completo como lo es *ADAMS*, da la posibilidad de no sólo obtener los parámetros de la cinemática del carro, sino que, además, permite obtener análisis de frecuencias y simulaciones en pista. Esto se vuelve de suma importancia, pues al tener más de diez años compitiendo, la escudería requiere de análisis más serios para defender su trabajo de diseño. Por lo tanto, cálculos hechos a mano y análisis en programas como *WinGeo*, se vuelven insuficientes. Es por eso que, a medida que se logre un entendimiento claro en programas como *ADAMS*, el equipo podrá seguir creciendo.
- **Mejora en el modelado:** El modelo desarrollado en esta tesis, aunque es muy simple, genera las bases para seguir buscando la creación de propias herramientas. Una de las principales tareas es buscar la mejora del programa desarrollado. Esto se puede lograr de diferentes formas, por ejemplo, tomar como dato de entrada el desplazamiento de *ride* en lugar del desplazamiento del amortiguador, así como llevar el modelo 2-D a un ambiente 3-D. Con el tiempo y el conocimiento suficiente, se puede seguir trabajando en este programa hasta poder lograr una simulación en pista del carro.
- **Conceptos de diseño:** Es importante entender los conceptos que se usan durante el diseño de la suspensión y no sólo aplicarlos. El poder dominar los temas relacionados a la dinámica vehicular, traerá un mejor resultado en el diseño del auto, así como facilitará el uso de los softwares de diseño. El entender cómo funciona la llanta y los amortiguadores, saber si se necesita un paquete aerodinámico o una ARB, así como la implementación de resortes no lineales en el sistema, son ejemplos de temas en los que se debe de indagar más, pues estos crean una gran diferencia en la dinámica del carro. Además, el saber aplicar estos conceptos en los programas utilizados, se vuelve importante para obtener resultados más completos.

# Material extra

## 6.1. Glosario

SÍMB	SIGNIFICADO	DESCRIPCIÓN
$a_x$	Aceleración longitudinal	Aceleración desarrollada cuando el carro avanza en línea recta. Este valor se obtiene al dividir la aceleración resultante entre la aceleración de la gravedad, siendo expresada en [g's].
$a_{x\alpha}$	<i>Pneumatic trail</i>	Distancia a la que actúa la fuerza lateral $F_Y$ con respecto al <i>sliding line</i> . Esta se expresa en [m].
$a_y$	Aceleración lateral	Aceleración desarrollada cuando el carro toma una curva. Este valor se obtiene al dividir la aceleración resultante entre la aceleración de la gravedad, siendo expresada en [g's].
$a_1, a_2$		Distancia del CG al eje delantero/ trasero expresada en [m]
$b_s$	<i>Spring preload</i>	Fuerza inicial que se le agrega a el resorte para que comience a trabajar. Esta depende de la compresión inicial del resorte y se mide en [N].
$C_{cr}$	<i>Critical damping</i>	Cantidad de amortiguamiento que le permite a la masa regresar a un estado estable de la manera más rápida y sin sobresalto. Este es adimensional
$C_C$	<i>Camber change rate</i>	Variación del ángulo de <i>camber</i> con respecto al <i>ride</i> . Este se expresa en [°/m].
$C_s$	<i>Damping coeficient</i>	Valor que relaciona la fuerza generada en el amortiguador con la velocidad con la que se comprime y expande. Sus unidades son [Ns/m].
$C_u$	<i>Tyre damping coeficient</i>	Valor que relaciona la fuerza generada en la llanta con la velocidad con la que se comprime y expande. Sus unidades son [Ns/m].
$C_\alpha$	<i>Cornering stiffness</i>	Relación de la fuerza lateral aplicada y el <i>sideslipe angle</i> de la llanta, expresado en [N/°].
$C_{\alpha f}$		<i>Cornering stiffness</i> para la parte delantera.
$C_{\alpha r}$		<i>Cornering stiffness</i> para la parte trasera.
$f_r$	Frecuencia	Número de ciclos de oscilación de un sistema en un determinado tiempo, expresada en [Hz].
$fr(s)$	Frecuencia <i>sprung mass</i>	Número de ciclos de oscilación del <i>sprung mass</i> en un determinado tiempo, expresada en [Hz].
$fr(us)$	Frecuencia <i>unsprung mass</i>	Número de ciclos de oscilación de USM en un determinado tiempo, expresada en [Hz].
$F_D$	Fuerza normal delantera	Fuerza normal que actúa en la parte delantera en [N].
$F_r$	<i>Rolling resistance</i>	Fuerza longitudinal desarrollada en la llanta, la cual es opuesta a la dirección del movimiento de la misma, expresada en [N].
$F_s$	Fuerza generada por el resorte	Fuerza que genera el resorte cuando este se comprime. Esta se expresa en [N].

$F_T$	Fuerza normal trasera	Fuerza normal que actúa en la parte trasera expresada en [N]
$F_X$	Fuerza longitudinal	Fuerza desarrollada en el eje X. Esta se presenta cuando el auto está acelerando o frenando, siendo expresada en [N]
$F_Y$	Fuerza lateral	Fuerza que se presenta en curvas. Esta es paralela al eje Y de la llanta y se expresa en [N].
$F_{Yf}$ $F_{Yr}$		Fuerza lateral en las llantas delanteras/ traseras, expresada en [N].
$F_{YI}$ $F_{YO}$		Fuerza lateral en: I= llantas internas, O= llantas externas. Esta se expresa en [N].
$F_{YM}$	Fuerza lateral máxima	Valor máximo de fuerza lateral que alcanza la llanta antes de presentar derrape. Esta se expresa en [N].
$F_Z$	Fuerza normal	Reacción generada con respecto al peso del carro en cada una de las llantas expresada en [N].
$F_{ZI}$ $F_{ZO}$	Fuerza normal en curva.	Fuerza normal en: I= llantas internas, O= llantas externas. Esta se expresa en [N].
$F_{Z1}$ $F_{Z2}$ $F_{Z3}$ $F_{Z4}$	Fuerza normal en estático de cada llanta	1= Llanta delantera izquierda, vista desde atrás. 2= Llanta trasera izquierda, vista desde atrás. 3= Llanta delantera derecha, vista desde atrás. 4= Llanta trasera derecha, vista desde atrás.
$h$	Altura del CG	Altura del CG medida a partir del suelo en [m].
$h_{fCu}$ $h_{rCu}$	Altura del CG de USM delantero/ trasero	Altura medida a partir del suelo. Esta se obtiene de programas CAD, expresada en [m].
$h_{rf}$ $h_{rr}$	Altura del <i>roll center</i> delantero/ trasero	Altura del <i>roll center</i> medida a partir del suelo. Este depende de la cinemática de la suspensión y se expresa en [m].
$h_{Roll}$	Altura entre el CG y el <i>roll axis</i>	Distancia del CG al <i>roll axis</i> , medido en [m]. Esta es paralela al eje Z.
$h_{SVSA}$	Altura del SVSA	Altura definida por la intersección de la proyección del SVSA con la línea perpendicular del suelo al CG, expresada en [m].
$H$	Altura de la llanta delantera	Altura a la que se eleva la llanta delantera cuando se desea saber la altura del CG, expresada en [m].
$\bar{I}$	Momento de inercia de USM	Define la forma en que la masa de un cuerpo está distribuida, contemplando la geometría del mismo, visto desde un punto. Sus unidades son [ $Kg\ m^2$ ].
IR	<i>Installation ratio</i>	Relación del desplazamiento del amortiguador con respecto al de la llanta. Este es adimensional.
$k_p$		Valor definido por el tipo de llanta (radial o no-radial), siendo adimensional.
$k_R$	<i>Ride rate</i>	Relación de la fuerza aplicada al neumático por unidad de deformación del <i>contact patch</i> . Este se mide en [N/m].
$k_{Roll}$	<i>Roll rate</i>	Relación de la fuerza aplicada al neumático por unidad de deformación del <i>contact patch</i> . Este se mide en [N/m].
$k_s$	<i>Spring rate</i>	Fuerza $F_s$ por unidad de deformación $x_{sp}$ en el resorte, expresada en [N/m].

$k_u$	<i>Tyre rate</i>	Relación de la fuerza aplicada al neumático por unidad de deformación de la misma. Este se mide en [N/m].
$k_w$	<i>Wheel center rate</i>	Relación de la fuerza vertical por unidad vertical de desplazamiento en el centro de la llanta medida en [N/m].
$k_{wf}$ $k_{wr}$		<i>Wheel center rate</i> delantero/ trasero.
$k_x, k_y,$ $k_z$	Constante de rigidez de la llanta	Rigidez que presenta la llanta en el eje X, Y y Z respectivamente. Esta se mide en [N/m].
$K_\delta$	<i>Understeer gradient</i>	Tasa de cambio del <i>understeer</i> u <i>oversteer</i> con respecto a la aceleración lateral del carro. Este se mide en [°/g's].
$k_\phi$	<i>Roll gradient</i>	Grados de roll que girará el vehículo bajo una aceleración lateral. Este se mide en [°].
$k_{\phi f}$ $k_{\phi r}$		<i>Front/rear roll gradient.</i>
$p$	<i>Presión en las llantas</i>	Presión inicial de las llantas (tomada en frío). Esta se mide en [Pa].
$l$	<i>Wheelbase</i>	Distancia definida entre el <i>track</i> trasero y delantero del auto. Esta es paralela al eje X y se mide en [m].
$m$	Masa total del auto	Masa total del auto tomada en estático.
$m_s$	Masa total del <i>sprung mass</i> .	Masa de todo aquello que la suspensión soporta (chasis, motor, pasajeros, etc.) medida en [Kg].
$m_{sf}$ $m_{sr}$		Masa del <i>sprung mass</i> delantero/ trasero medido en [Kg].
$m_u$	Masa total de USM	Masa de aquello que tiene movimiento relativo con respecto al chasis (llanta, rim, frenos, etc.) medido en [Kg].
$m_{uf}$ $m_{ur}$		Masa de USM delantero/ trasero medido en [Kg].
$m_w$		Masa de los elementos de USM que se mantienen girando con la llanta. Esta se mide en [Kg].
$M_X$	<i>Overturning moment</i>	Momento que experimenta la llanta sobre el eje X. Este mantiene la llanta con <i>neutral camber</i> y se mide en [Nm].
$M_Y$	<i>Rolling resistance moment</i>	Momento generado a causa del <i>rolling resistance</i> , el cual actúa en contra del movimiento de la llanta. Este se mide en [Nm].
$M_Z$	<i>Aligning moment</i>	Momento de alineación de la llanta, creado por la fuerza lateral en la llanta y el <i>camber torque</i> . Este se mide en [Nm].
MR	<i>Motion ratio</i>	Relación del desplazamiento del amortiguador con respecto al del centro de la llanta. Este es adimensional.
$q$	<i>Roll gradient distribution</i>	Distribución que debe tener la rigidez total, con respecto a la parte delantera y la parte trasera. Este se mide en [%]
R	Radio de la curva	Radio que se presenta en la curva de estudio en [m].
$R_g$	Radio geométrico de la llanta	Radio que presenta la llanta sin condiciones de carga. Se trata del radio máximo que puede tener la llanta, y se expresa en [m].
$R_h$	Radio bajo la carga máxima	Radio que presenta la llanta en su carga máxima, expresado en [m].

$R_w$	Radio efectivo de la llanta	Radio medio entre $R_h$ y $R_g$ . Este da una relación entre la velocidad angular que lleva la llanta con respecto a la velocidad lineal. Sus unidades de medida son [m].
$s$	<i>Slip ratio</i>	Define al deslizamiento de la llanta. Este compara la distancia con la que la llanta viaja ( $d_A$ ) y la distancia en giro libre ( $d_F$ ). Es un factor adimensional.
$S_a$	<i>Mechanical trail</i>	Distancia que se genera entre la intersección del <i>wheel centerline</i> con la proyección del <i>steering axis</i> , ambos a la altura del suelo. Este se mide en [m].
$S_b$	<i>Scrub radius</i>	Distancia entre las proyecciones del <i>steering axis</i> (bajo efectos de <i>king pin</i> ) y el <i>wheel centerline</i> , a nivel del suelo. Este se mide en [m].
$t_f, t_r$	<i>Front/rear track</i>	Distancia del plano medio de una llanta a su opuesta medido en [m].
$v_x$	Velocidad lineal del auto	Velocidad lineal que lleva el auto. Esta también es la misma para las llantas. Sus unidades de medida son [m/s].
$W_f$ $W_r$	Peso parte delantera/ trasera	Peso de la parte delantera/ trasera del auto, considerando ambas llantas. Esta se mide en [N].
$W_T$	Peso total del auto.	Peso total del auto, tomado en estático. Este se expresa en [N].
$W_s$	Peso de <i>sprung mass</i>	Peso de todo aquello que la suspensión soporta (chasis, motor, pasajeros, etc.) medido en [N].
$W_{sf}$ $W_{sr}$		Peso del <i>sprung mass</i> delantero/ trasero medido en [N].
$W_u$	Peso de USM	Peso de aquello que tiene movimiento relativo con respecto al chasis (llanta, rim, frenos, etc.) medido en [N].
$W_{uf}$ $W_{ur}$		Peso de USM delantera/ trasera medido en [N]
$W_1$ $W_2$ $W_3$ $W_4$	Fuerza normal aplicada en cada llanta en curva	1= Llanta delantera izquierda, vista desde atrás. 2= Llanta trasera izquierda, vista desde atrás. 3= Llanta delantera derecha, vista desde atrás. 4= Llanta trasera derecha, vista desde atrás.
$x_{sp}$	<i>Deflexión del resorte</i>	Distancia de expansión o compresión del resorte al aplicar una fuerza $F_s$ , expresada en [m].
$X$	Amplitud	Considerando un sistema masa-resorte-amortiguador de un DOF, bajo un movimiento armónico simple, la amplitud será la máxima distancia medida de la línea de equilibrio a la cresta o al valle. Esta se mide en [m].
$\alpha$	<i>Sideslip angle</i>	Ángulo generado entre el plano medio X-Z de la llanta y el <i>contact patch</i> de la misma expresado en [°].
$\alpha_f$ $\alpha_r$		<i>Sideslip angle</i> delantero/ trasero.
$\Delta W_{gf}$ $\Delta W_{gr}$	Transferencia de carga lateral geométrica	Esta recae en la ubicación de los <i>roll center</i> y la manera en que la fuerza lateral, generada en las llantas, actuará sobre <i>sprung mass</i> delantero/ trasero. Su unidad de medida es [N].
$\Delta W_{GRf}$ $\Delta W_{GRr}$	Transferencia de carga lateral	Esta se genera debido a que las llantas giran sobre un eje fijo, el cual gira sobre otro eje fijo. Para el cálculo de este factor se

	debido al efecto giroscópico.	toma en cuenta la velocidad con la que viaja el carro y la velocidad angular de las llantas. Su unidad de medida es [N].
$\Delta W_{sf}$ $\Delta W_{sr}$	Transferencia de carga lateral por <i>sprung mass</i>	Esta se da por la rotación del CG <i>axis</i> con respecto al <i>roll axis</i> . Este factor contempla la distribución de la rigidez en el carro. Su unidad de medida es [N]
$\Delta W_{uf}$ $\Delta W_{ur}$	Transferencia de carga lateral debido a USM	Describe la manera en que un neumático transfiere carga a su opuesto, dado por la localización del CG de USM. Su unidad de medida es [N].
$\Delta W_{\alpha f}$ $\Delta W_{\alpha r}$	Transferencia de carga total	Transferencia de carga total en curva para la parte delantera y trasera del carro, medida en [N].
$\frac{\Delta IR}{\Delta \delta}$		Relación de cambio entre el IR y el desplazamiento de la llanta usado cuando el IR no es lineal. Este se mide en [1/m].
$\delta$	Ángulo de Ackerman.	Ángulo ideal que deben de tomar las llantas para poder dar la vuelta en curva. Este se mide en [°].
$\delta'$	Ángulo de Ackerman bajo efectos de <i>slip angle</i>	Ángulo real que deben de tomar las llantas para lograr dar la vuelta en una curva. Para este se contemplan tres posibles comportamientos debido al <i>slip angle</i> : <i>neutral steer</i> , <i>understeer</i> y <i>oversteer</i> . Este se expresa en [°].
$\delta_y$		Distancia lateral a la que actúa la fuerza normal $F_z$ expresada en [m]. Esta se genera por el <i>sideslip angle</i> y el <i>camber</i> .
$\zeta$	<i>Damping ratio</i>	Define la relación del <i>damping coefficient</i> y el <i>critical damping</i> . Es un factor adimensional.
$\Theta$	<i>Pitch moment</i>	Momento que experimenta el auto sobre su eje Y. Este se genera cuando se transfiere carga de un eje a otro. Su unidad de medida es [°].
$\mu$	<i>Unsprung to sprung mass ratio</i>	Relación se la masa de <i>sprung mass</i> y <i>unsprung mass</i> . Mientras esta relación sea más pequeña, se presentará mayor confort, mejor maniobrabilidad y mejor desempeño en <i>ride</i> para el auto. Este es adimensional.
$\mu_0$		Valor experimental del cual depende el <i>rolling friction coefficient</i> . Este está en función del tipo del suelo y es adimensional.
$\mu_1$		Valor experimental del cual depende el <i>rolling friction coefficient</i> . Este incrementa con el cuadrado de la velocidad lineal y es dependiente de la aerodinámica. Es un valor adimensional.
$\mu_{dp}$		Valor del <i>longitudinal friction coefficient</i> máximo antes de que la llanta derrape. Este es adimensional.
$\mu_{ds}$		Valor del <i>longitudinal friction coefficient</i> en el que la llanta se mantiene derrapando. Este es adimensional.
$\mu_r$	<i>Rolling friction coefficient</i>	Coefficiente de fricción entre la llanta y el suelo. Este no es constante y es proporcional a la velocidad del giro del neumático. Es un factor adimensional.
$\mu_x(s)$	<i>Longitudinal friction coefficient</i>	Coefficiente de fricción longitudinal que se presenta entre el suelo y la llanta cuando esta se encuentra acelerando o frenando. Este está en función del <i>slip ratio</i> y es adimensional.
$\mu_y(\alpha)$	<i>Lateral friction coefficient</i>	Coefficiente de fricción lateral que se presenta entre el suelo y la llanta cuando se toma una curva. Este está en función del <i>slip angle</i> y es adimensional.

$\sigma_z$		Esfuerzo normal en el <i>contact patch</i> medido en $[N/m^2]$ .
$\tau$	Periodo	Tiempo en el que el sistema completa un ciclo medido en [s].
$\tau_y$		Esfuerzo generado en el <i>contact patch</i> causado por la fuerza lateral. Este es medido en $[N/m^2]$ .
$\varphi_x$	Retraso angular.	Retraso del desplazamiento de la masa con respecto al desplazamiento de la base. Este se mide en [rad].
$\Phi$	<i>Roll moment</i>	Momento que experimenta el auto sobre su eje X debido a la transferencia de carga en curva. Este se mide en $[^\circ]$ .
$\emptyset$	<i>Roll angle</i>	Grados de <i>roll</i> que gira el auto sobre el eje X en una curva. Este se expresa en $[^\circ]$ .
$\emptyset_r$	Ángulo de inclinación	Ángulo con el cual se inclina el auto. Este se ocupa para poder obtener la altura del CG del auto. Su unidad de medida es $[^\circ]$ .
$\Psi$	<i>Yaw moment</i>	Momento que experimenta el auto sobre su eje Z. Este se genera cuando hay una diferencia de agarre entre las llantas delanteras y las llantas traseras. Su unidad de medida es $[^\circ]$ .
$\omega$	Velocidad angular de la llanta.	Velocidad angular que genera la llanta expresada en [rad/se.g].
$\omega_n$	Frecuencia natural	Número de ciclos de oscilación de un sistema en un determinado tiempo. Esta depende de la masa y de la rigidez del sistema. Su unidad de medida es [rad/s].
$\Omega$	Velocidad de precesión.	Velocidad angular que presenta el carro cuando toma una curva. Esta se expresa en [rad/s].

## 6.2. Anexos

### 6.2.1. Anexo 1: Fuerza longitudinal ( $F_x$ )

Se trata de la fuerza desarrollada en el eje X. Si el auto se encuentra acelerando la resultante es  $F_x > 0$ . Si el auto se encuentra en un caso de frenado, la resultante es  $F_x < 0$ . Para poder entender este concepto hay que dejar claros algunos términos.

#### 6.2.1.1. Radio efectivo

Dado que una llanta se encuentre bajo una fuerza normal y avanzando hacia adelante, cada parte de la circunferencia será aplastada al pasar por el *contact patch*. El radio efectivo  $R_w$ , da una media entre el radio geométrico  $R_g$  y el radio bajo la carga máxima  $R_h$  (3) (imagen 6.1).

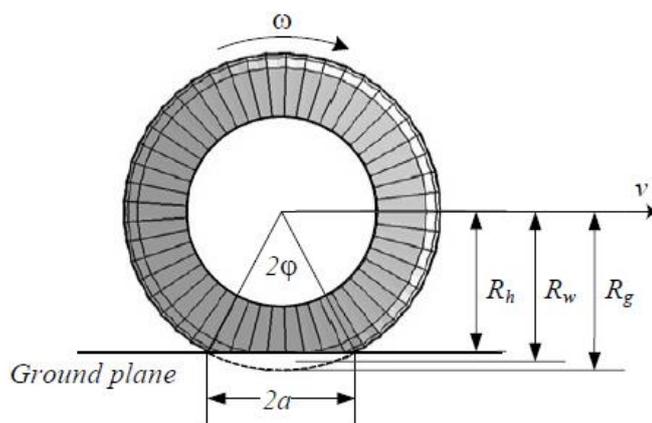


IMAGEN 6.1. RADIO EFECTIVO (3)

Donde:

$\varphi$  = Rotación angular [°].

$\Omega$  = Velocidad angular de la llanta [rad/s].

$2a$  = Largo del *contact patch* [m].

El radio efectivo expresa la relación entre la velocidad angular que lleva la llanta con respecto a la velocidad lineal (3). Una llanta, bajo su radio geométrico, genera la mayor velocidad lineal con respecto a su velocidad angular, pues este representa el radio ideal de la llanta.

El radio bajo la carga máxima representa entonces, la mínima velocidad lineal con respecto a la velocidad angular. Esto se define en la ecuación 98:

$$R_h = R_g - \frac{F_z}{k_z} \quad (98)$$

Donde:

$k_z$  = Constante de rigidez de la llanta en el eje Z [N/m].

### 6.2.1.2. *Rolling resistance moment* ( $M_Y$ )

Cuando una llanta comienza a rodar, presenta una fuerza longitudinal al nivel del suelo, la cual se opone a la dirección del movimiento y es proporcional a la fuerza normal  $F_z$ . Dicha fuerza se conoce como *rolling resistance* (3):

$$F_r = \mu_r F_z \quad (99)$$

Donde:

$\mu_r$  = Rolling friction coefficient [-].

$F_z$  = Fuerza normal aplicada en la llanta [N].

El parámetro  $\mu_r$  no es contante y depende de la velocidad de la llanta, presión, *sideslip*, *camber*, compuesto, temperatura, fuerzas, tamaño y condiciones de pista. Este es proporcional a la velocidad lineal de la llanta y se calcula con la ecuación 100.

$$\mu_r = \mu_0 + \mu_1 v_w^2 \quad (100)$$

$\mu_0$  y  $\mu_1$  son valores experimentales, los cuales son propios de cada llanta.  $\mu_0$  depende del tipo de suelo, en tanto  $\mu_1$  depende de la aerodinámica de la llanta.

Cuando la llanta se encuentra estática, se genera un esfuerzo normal  $\sigma_z$  en el *contact patch*, el cual se distribuye de manera uniforme. En el momento en que la llanta empieza a rodar ese esfuerzo se distribuye, siendo mayor en la parte delantera (imagen 6.2). El *rolling resistance* es causado por esa deformación y la distribución del esfuerzo  $\sigma_z$  en la llanta.

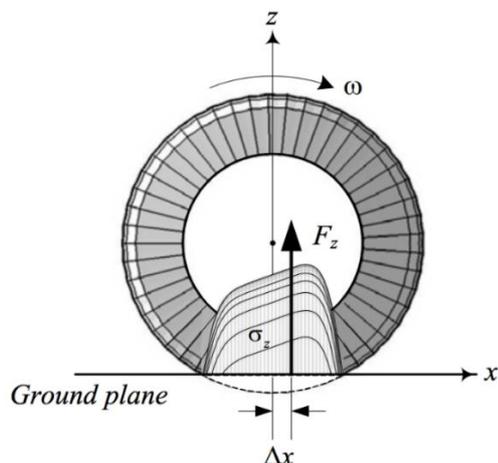


IMAGEN 6.2. DISTRIBUCIÓN DEL ESFUERZO  $\sigma_z$  CON EL AUTO AVANZANDO HACIA ADELANTE (3).

A causa de la distribución del esfuerzo normal  $\sigma_z$ , la fuerza normal  $F_Z$  se desarrollará a una distancia  $\Delta_x$  por delante del centro de la llanta, generando un momento  $M_Y$  en  $-Y$ . Este momento se conoce como *rolling resistance moment* y es proporcional a  $F_Z$  y a la velocidad lineal del carro. Es este momento desarrollado el que se opone a la rotación hacia adelante de la llanta. La ecuación 101 muestra la manera de calcularlo.

$$M_Y = F_Z \Delta_x \quad (101)$$

### 6.2.1.3. Slip Ratio

Se define al *slip ratio* como la diferencia entre la velocidad lineal  $v_w$  de la llanta y su equivalente velocidad  $R_g \omega$ , conocida como giro libre (3). Las ecuaciones 102 y 103 muestran la manera de calcular el *slip ratio*.

$$s = \frac{R_g \omega}{v_x} - 1 \quad (102)$$

$$s = 1 - \frac{v_w}{R_g \omega} \quad (103)$$

El *slip ratio* se desarrolla entre el suelo y el *contact patch*. Este ocurre en el momento en que la flecha transmite la potencia a la llanta, lo que generará la fuerza longitudinal  $F_X$ . Esta fuerza es proporcional a  $F_Z$ , como se puede ver en la ecuación 104.

$$F_X = \mu_X(s) F_Z \quad (104)$$

Donde:

$F_X$  = Fuerza longitudinal actuando en una llanta [N].

$F_Z$  = Fuerza normal actuando en una llanta [N].

$\mu_X(s)$  = Longitudinal friction coefficient en función del *slip ratio* [-].

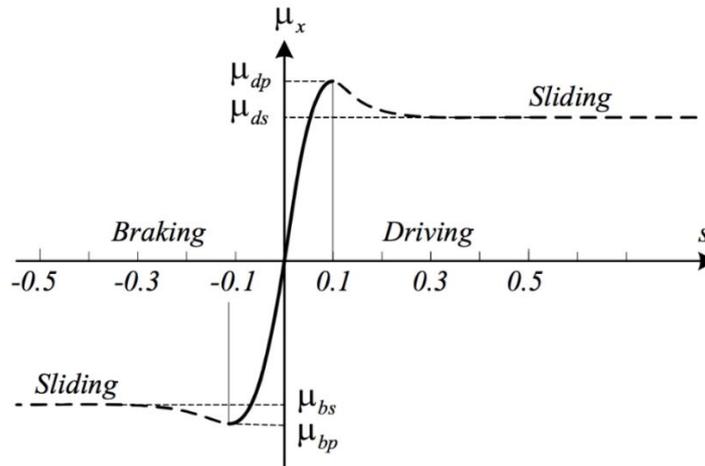


IMAGEN 6.3. COEFICIENTE DE FRICCIÓN LONGITUDINAL EN FUNCIÓN DEL SLIP RATIO (3).

En la imagen 6.3 se muestra la relación que hay entre  $\mu_x$  y  $s$ . Como se puede ver, se mantiene un comportamiento lineal, hasta que el *longitudinal friction coefficient* alcanza un valor pico  $\mu_{dp}$ , para después caer a un valor constante  $\mu_{ds}$ . Es en ese valor pico en el cual la rueda comenzará a deslizar. Lo mismo pasa en el caso de frenado, con los valores  $\mu_{bp}$  y  $\mu_{bs}$ , respectivamente.

En el caso de frenado, se presenta un momento de frenado en la flecha, el cual puede ser lo suficientemente grande para bloquear la llanta. En este caso  $\omega = 0$  y por lo tanto  $s = -1$ , momento en el que el auto sigue avanzando, pero las llantas no giran. Por otra parte, en el caso de aceleración, se presenta un momento aplicado a la flecha, el cual puede ser lo suficientemente grande como para superar la fricción, haciendo que la llanta gire sin que el auto avance. En este caso  $v_w = 0$  y, por lo tanto,  $s = \infty$  (3).

**6.2.2. Anexo 2: Efectos generados por la fuerza lateral ( $F_y$ )**

**6.2.2.1. Sideslip angle ( $\alpha$ )**

Cuando la llanta está bajo una fuerza normal  $F_z$  y una fuerza lateral  $F_y$ , se genera un ángulo  $\alpha$  entre el *contact patch* y el plano de la misma, llamado *sideslip angle* o *slip angle* (imagen 6.4). Este se da por las propiedades elásticas de la llanta.

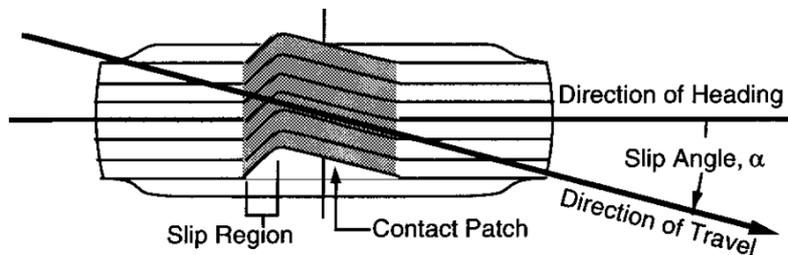


IMAGEN 6.4. SIDESLIP ANGLE. VISTA INFERIOR (9).

El *slip angle* describe la dirección real que sigue la llanta con respecto a la dirección a la que apunta. Este es proporcional a la fuerza lateral  $F_y$  (ecuación 105).

$$F_y = C_\alpha \alpha \tag{105}$$

Donde:  
 $C_\alpha$  = Cornering stiffness [N/°].

En la imagen 6.5 se puede ver la gráfica de fuerza lateral  $F_Y$  vs *slip angle*.

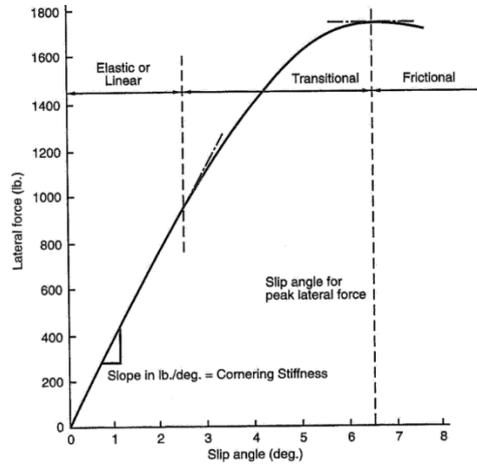


IMAGEN 6.5. GRÁFICA FUERZA LATERAL  $F_Y$  VS SLIP ANGLE (9)

En el momento que la llanta comienza a desarrollar fuerza lateral, se presenta un comportamiento lineal, cuya pendiente es  $C_\alpha$ . Para cuestiones de diseño, es en esta zona donde se trabaja, pues es difícil predecir qué pasa en su estado transitorio. Finalmente, la gráfica llega a un máximo, y posterior a ello la curva presenta una caída. Ese valor máximo se conoce como  $F_{YM}$ , donde la llanta supera su fuerza lateral máxima y comienza a derrapar. La ecuación 106 muestra la forma de obtener este valor.

$$F_{YM} = \mu_y(\alpha)F_Z \tag{106}$$

Donde:  
 $\mu_y(\alpha)$  = Lateral friction coefficient [-]

**6.2.2.2. Aligning Moment ( $M_Z$ )**

La fuerza lateral  $F_Y$  actúa a una distancia  $a_{x\alpha}$  por detrás de la línea media de la llanta, lo cual genera un momento  $M_Z$  actuando sobre el eje Z. Este se muestra en la ecuación 107.

$$M_Z = F_Y a_{x\alpha} \tag{107}$$

El momento  $M_Z$  tiende a hacer girar a la llanta hasta alinear el eje X de la misma con el vector velocidad  $\vec{v}_x$  del carro. Este par de auto alineamiento tiende a reducir el  $\alpha$ .

Para entender con más detalle este efecto se analizará la imagen 6.6.

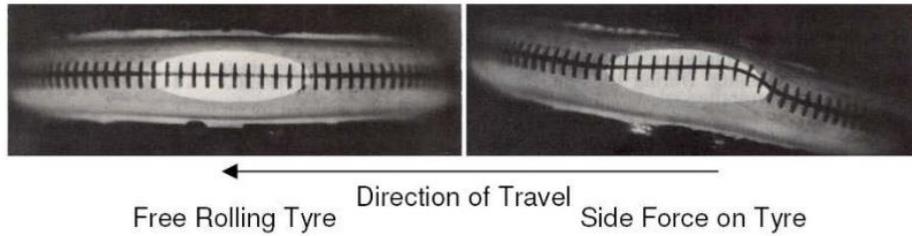


IMAGEN 6.6. DEFLEXIÓN EN LA LLANTA DURANTE UNA CURVA. VISTA INFERIOR (27).

Se muestra la vista inferior de la llanta tomando una curva, cuya deflexión de la misma se desarrolla únicamente en la zona de contacto de la llanta con el suelo. Esta deflexión sucede tanto lateral como longitudinalmente, y se recorre hacia la parte trasera del *contact patch*, en donde crece lateralmente hasta antes de llegar al borde final del mismo. Al salir de la zona de contacto, la fuerza normal  $F_z$  disminuye, permitiéndole a la llanta recuperar su forma. El punto donde la deflexión lateral alcanza su máximo se llama *sliding line*.

La deflexión lateral del *contact patch* tiene como resultado un esfuerzo tangencial  $\tau_y$  (3), el cual se puede ver en la imagen 6.7.

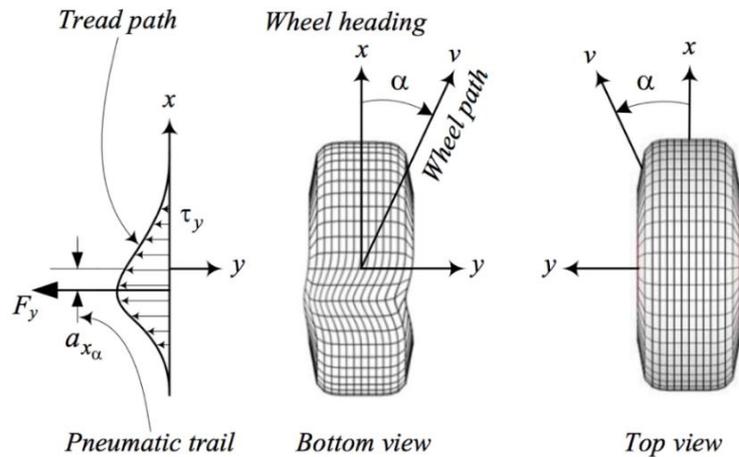


IMAGEN 6.7. EFECTOS DE LA DEFLEXIÓN EN LA LLANTA (3).

Donde:

$\tau_y$  = Esfuerzo en el *contact patch* [N/m<sup>2</sup>].

$a_{x\alpha}$  = *Pneumatic trail* [m].

Como se muestra,  $F_y$  se desarrolla por detrás de la línea media de la llanta a una distancia  $a_{x\alpha}$ , lo cual genera un par  $M_z$ .

El generar un par  $M_z$  provocará una oposición contra el ángulo  $\alpha$ , teniendo como efecto la auto alineación de la llanta con el vector  $\bar{v}_x$  (imagen 6.8).

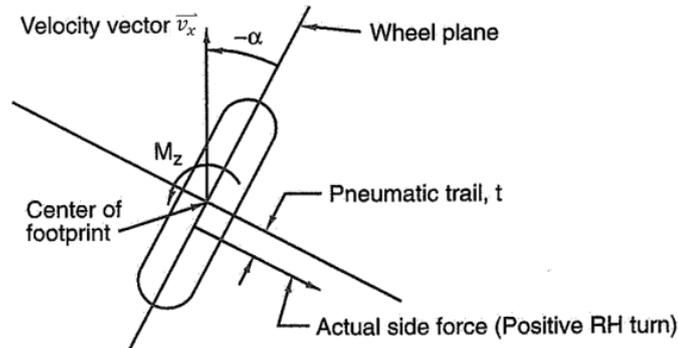


IMAGEN 6.8. MOMENTO AUTO ALIENANTE. VISTA SUPERIOR (5).

$F_Y$  y  $\alpha$  mantienen una relación directamente proporcional para valores pequeños de  $\alpha$ . Sin embargo,  $F_Y$  tiende a decrecer para valores grandes de  $\alpha$ ; en el momento que  $\alpha$  llega a su valor pico, el auto comienza a deslizar, anulando los efectos de  $M_Z$ . En algunos casos  $M_Z$ , para grandes valores de  $\alpha$ , puede llegar a ser negativo, es decir, no ayuda a la auto alineación de la llanta, sino que desestabiliza a la misma (3) (imagen 6.9).

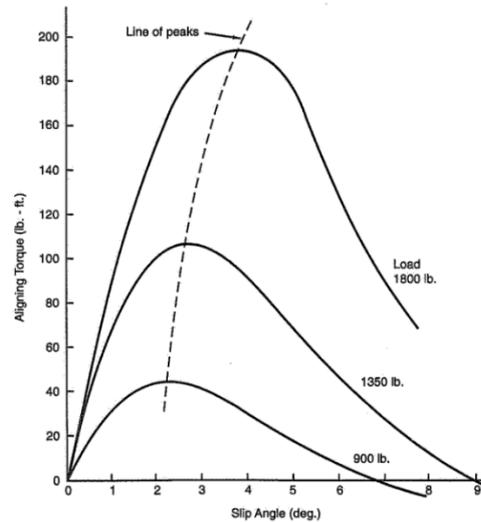


IMAGEN 6.9. GRÁFICA  $M_Z$  vs  $\alpha$  (9).

### 6.2.2.3. Overturning Moment ( $M_X$ )

Cuando el carro toma una curva, se genera un desplazamiento lateral  $\delta_y$  de la fuerza normal  $F_Z$ , dado por el *sideslip angle* y el *camber*, lo cual genera un momento  $M_X$  (imagen 6.10).

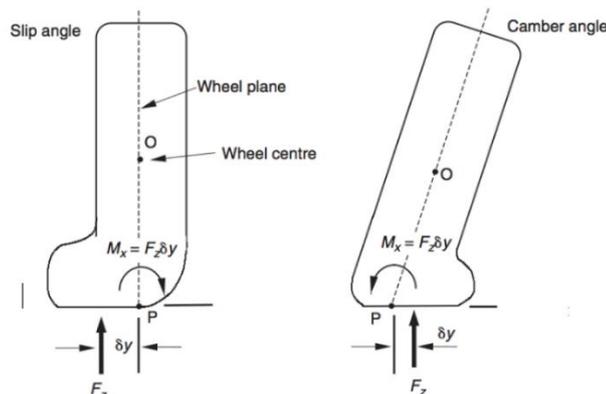


IMAGEN 6.10. OVERTURNING MOMENT BAJO CONDICIONES DE SLIP ANGLE Y CAMBER (24).

$M_x$  se define como el par sobre el eje X de la llanta, el cual, queda expresado por la ecuación 108.

$$M_x = F_z \delta_y \quad (108)$$

$M_x$  tiende a hacer girar a la llanta sobre el eje X, alineando el plano de la llanta con el plano X-Z del carro. Es este momento el que ayudará a conseguir una alineación de *neutral camber* en la llanta externa, consiguiendo su mejor desempeño.

### 6.2.3. Anexo 3: Pitch ( $\Theta$ )

*Pitch moment* es la rotación del auto sobre el eje Y, la cual se presenta durante el frenado y aceleración del mismo. Este describe la transferencia de carga de un eje al otro. A partir de *pitch moment* surgen dos efectos llamados *dive* y *squat*.

#### 6.2.3.1. Dive

En el momento que el auto se encuentra frenando, hay una transferencia de carga longitudinal del eje trasero al delantero (imagen 6.11).

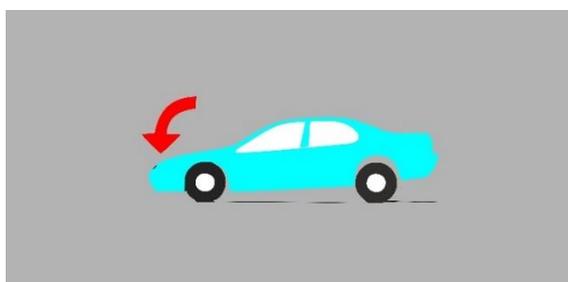


IMAGEN 6.11. PITCH MOMENT: DIVE (28).

En este caso, el peso se transfiere a las llantas y al eje delantero a través de la suspensión. Por ende, el diseño de esta toma un papel importante en la manera que se transfiere la carga. La manera en la que los frenos reaccionarán a esta transferencia de carga se llama "*Brake dive*" (29).

#### 6.2.3.2. Pitch

Cuando el carro acelera, se produce una transferencia de carga del eje delantero al trasero, lo cual genera *pitch moment*. (Imagen 6.12).

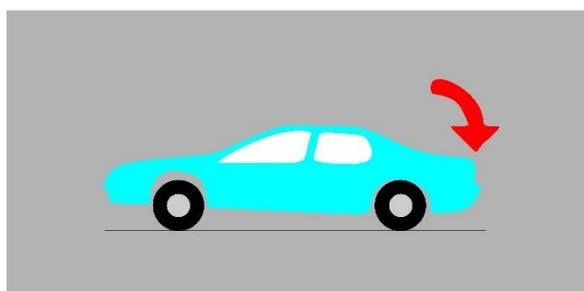


IMAGEN 6.12. PITCH MOMENT: SQUAT (28).

Del mismo modo que el *dive*, el diseño de la suspensión toma un papel importante para el *squat*. Para el caso de autos con transmisión trasera, esto recibe el nombre de “*Power squat*” (29).

Una manera de evitar el exceso de *dive* o *squat*, es mediante la configuración de los amortiguadores o la selección del resorte, sin embargo, esto afectará el comportamiento del auto en pista. Es por ello que la suspensión debe de ser diseñada para contrarrestar o minimizar estos efectos.

### 6.2.3.3. *Anti-dive suspension*

Cuando los puntos de los brazos de suspensión son paralelos en el plano Z-X y no presentan inclinación con respecto al eje X, su *SVSA* será coincidente con el suelo y paralelo al eje X. A esta configuración se le conoce como *0 % anti-dive*. Esto quiere decir que, de toda la transferencia de carga que recibe el eje delantero, el 100 % actuará sobre los resortes, el amortiguador y las llantas, generando *pitch moment*. Cuando los brazos presentan cierta inclinación con respecto al eje X, se generará un IC y con ello un *SVSA* coincidente a ese IC. Si la proyección del *SVSA* interseca al CG, se tendrá una geometría *100 % anti-dive* (imagen 6.13). Esto significa que la transferencia de carga la recibirán las sujeciones de los brazos con el chasis, generando apenas un pequeño *pitch moment* dado por las llantas. Cuando los brazos toman cierto ángulo de inclinación, la transferencia de carga actúa de acuerdo con esa inclinación. Cuando el porcentaje de *dive* es menor que 100 %, parte de la transferencia irá a los brazos y parte a los resortes y amortiguadores. Es importante remarcar que, cualquier configuración que se tenga no altera la carga que llega a la llanta, sólo altera la manera en que la suspensión la recibe.

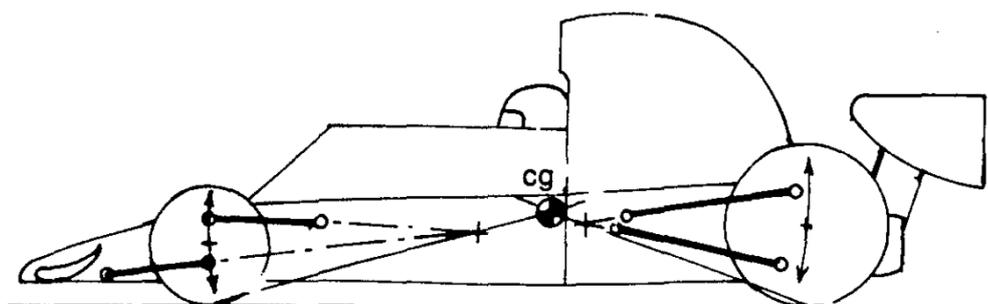


IMAGEN 6.13. GEOMETRÍA 100 % ANTI-DIVE, 100 % ANTI-SQUAT. VISTA LATERAL (29).

La ecuación 109 muestra la manera de obtener el % de *anti-dive* que se tiene.

$$\% \text{ anti-dive} = \frac{h_{SVSA}}{h} 100\% \quad (109)$$

Donde:

$h$  = Altura del CG [m].

$h_{SVSA}$  = Altura de la intersección de la proyección del *SVSA* con la línea perpendicular del suelo al CG [m].

### 6.2.3.4. *Anti-squat suspension*

Para la parte trasera pasa exactamente lo mismo que con el *anti-dive*. Para este caso se le denomina % de *anti-squat*. La manera de obtener el % de *anti-squat* se muestra en la ecuación 110.

$$\% \text{ anti-squat} = \frac{h_{SVSA}}{h} 100\% \quad (110)$$

Cuando el carro presenta 0 % de geometría *anti-squat*, al acelerar, la transferencia longitudinal recaerá en el resorte y el amortiguador, lo cual generará un movimiento de *ride* en las llantas. Esto modificará el ángulo de *camber*, el cual, si el auto corre en línea recta teniendo una configuración de *zero camber* inicial, hará que la llanta genere menos agarre. Por otra parte, al tener una configuración 100 % *anti-squat*, la suspensión experimentará una pequeña deflexión dada por la rigidez de la llanta.

Es poco usual ver geometrías con un 100 % de *anti-dive* y *anti-squat*. La mayoría de los autos de competencia se manejan a porcentajes menores a 30 %, ya que el tener un 100 % vuelve a la suspensión más rígida y menos sensible a la pista. Esto causa también que toda la carga la absorba el chasis, los brazos de suspensión y la llanta, dejando afuera a los amortiguadores y el resorte. Además, el tener una geometría 100 % *anti-dive*, genera un comportamiento distinto en las llantas durante el frenado, pudiendo provocar el descontrol del auto a causa del exceso de rigidez. De manera experimental, se ha determinado que en un 20% de geometría *anti-squat*, el carro genera su mejor comportamiento cuando la carga se transfiere hacia el eje trasero (29).

## 6.2.4. Anexo 4: Factores que afectan al desempeño de la llanta

### 6.2.4.1. Temperatura

Es importante tener la llanta en su temperatura óptima, ya que es bajo esa condición en la que generará el máximo agarre. Sin embargo, esta distribución de temperatura debe ser la misma sobre todo su ancho de banda (imagen 6.14).



IMAGEN 6.14. ZONAS EN LAS QUE SE DIVIDE LA LLANTA.

Lo que se busca en una puesta a punto de un auto, es que las tres zonas de la llanta tengan la misma temperatura, lo cual se puede controlar configurando el ángulo de *camber* y la presión en estas. La forma correcta de hacerlo es, después de unas corridas en pista, acercarse a tomar la temperatura de las 4 llantas en las tres diferentes zonas con un pirómetro. Dependiendo de los datos de la lectura que se tome, se optará por el ajuste que se deba hacer. Cuando la temperatura en la zona media diverge con respecto a la de los extremos, se trata de un problema en la presión. Ahora, si la temperatura toma valores por encima o por debajo del rango en cualquiera de los extremos, se trata de un problema de *camber*.

Hay una relación entre la temperatura y el *rolling resistance*. Cuando el auto comienza a correr con las llantas en frío, se presenta un menor *rolling resistance*. Mientras estas comiencen a calentarse, el *rolling resistance* comenzará a crecer.

#### 6.2.4.2. Presión

La presión en las llantas es uno de los cambios más comunes que se pueden hacer en la puesta a punto de un auto de competencia. Como se explicó antes, lo que se busca es tener la misma temperatura en todo el *contact patch*. Es ahí donde la presión toma un papel importante.

Un aumento en la presión incrementa la rigidez de la llanta, lo cual causa disminución de la temperatura, reduce el confort del auto y genera un aumento en las vibraciones. Cuando las llantas están sobre infladas el *contact patch* y la tracción se reducen, lo cual también reduce la capacidad de la llanta para soportar las fuerzas desarrolladas en curva.

Una llanta con baja presión reduce su rigidez, lo cual causa que esta se caliente de más. Bajo estas condiciones, la llanta trabaja sobrecargada, lo que genera grandes deflexiones, dando un mal rendimiento de gasolina.

El *aligning moment* se ve afectado también. Cuando hay baja presión, el *contact patch* se hace más grande, y el centro donde la fuerza lateral actúa se recorre para atrás. Esto afecta la maniobrabilidad, ya que el manipular el volante en curvas involucrará la aplicación de una fuerza más grande. Además, por el decremento de la rigidez en el eje Y de la llanta, la respuesta de esta con la dirección será más lenta en curva.

En la imagen 6.15 se muestra los efectos de la presión en el *contact patch*.

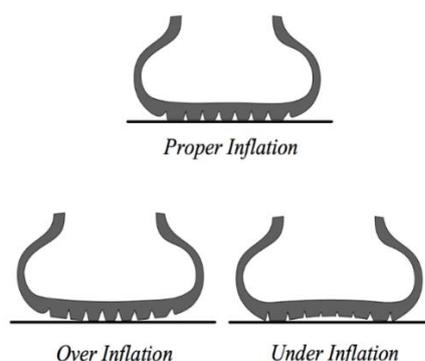


IMAGEN 6.15. EFECTOS DE LA PRESIÓN EN LAS LLANTAS (3).

La presión tiene un efecto inversamente proporcional con el *rolling resistance* (imagen 6.16). La ecuación 111 muestra los efectos de la presión y la fuerza normal  $F_z$  en el *rolling friction coefficient* (3).

$$\mu_r = \frac{k_p}{1000} \left( 5.1 + \frac{5.5 \times 10^5 + 90 F_z}{p} + \frac{1000 + 0.0388 F_z}{p} v_x^2 \right) \quad (111)$$

Donde:

$k_p = 0.8$  para llantas radiales y 1 para no radiales [-].

$p =$  Presión en las llantas [Pa].

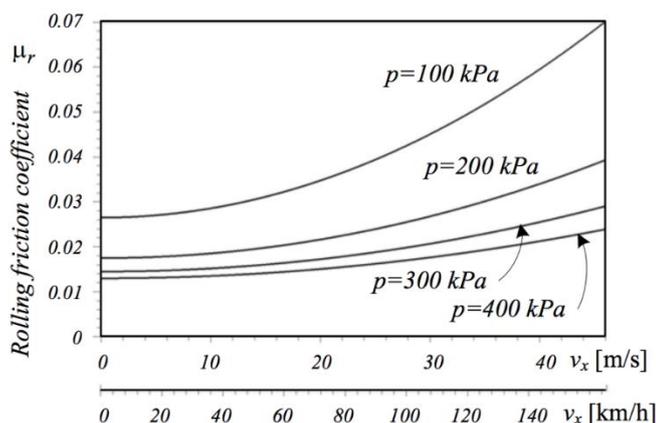


IMAGEN 6.16. RELACIÓN PRESIÓN - ROLLING RESISTANCE (3).

La presión y la temperatura tienen una estrecha relación. La presión varía dependiendo de la temperatura a la que se encuentre el neumático, por lo tanto, es predecible esperar un cambio en la presión después de unas cuantas corridas.

#### 6.2.4.3. Ancho de banda

Un factor que afecta a la temperatura de las llantas es el ancho de banda de las mismas. Mientras más anchas la banda, las llantas disipan calor más rápido. Sin embargo, una llanta más ancha significa más peso a USM, siendo un parámetro importante para el diseño de la suspensión.

#### 6.2.4.4. Dibujo

El dibujo de una llanta tiene diferentes efectos en la misma. El más importante, es que sirve para calentar la llanta debido a la pérdida de rigidez en estas. Por otra parte, cuando el auto corre por superficies mojadas, el dibujo sirve para expulsar el agua que se encuentra debajo del *contact patch*, evitando el hidro planeo.

#### 6.2.4.5. Compuesto

Las llantas son fabricadas con diferentes compuestos dependiendo su uso. Para autos de competencia se tienen llantas para piso seco y mojado. Las llantas para piso seco varían en compuesto, dependiendo de las condiciones de la pista. Las llantas de compuesto blando, al ser menos rígidas, se calientan más rápido.

#### 6.2.5. Anexo 5: Yaw Moment: understeer, oversteer y neutral steer

Una forma de hacer el análisis de *yaw moment* más sencillo, es suponiendo al auto como una bicicleta coincidente el plano Z-X. Para ello se contempla el radio que el CG debe describir para que el auto logre tomar la curva (imagen 6.17).

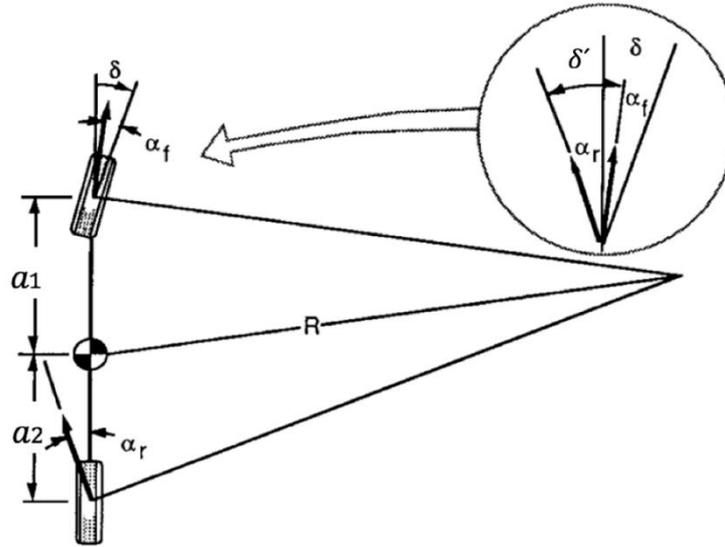


IMAGEN 6.17. MODELO DE LA BICICLETA EN CURVA (5).

Para un vehículo tomando una curva a una velocidad constante  $v_x$ , la suma de las fuerzas laterales en las cuatro llantas debe ser igual a la masa del carro multiplicando a la aceleración lateral, como se muestra en la ecuación 112 (5).

$$\sum F_Y = F_{Yf} + F_{Yr} = \frac{mv_x^2}{R} \quad (112)$$

Donde:

$F_{Yf}$  = Fuerza lateral en las llantas delanteras [N].

$F_{Yr}$  = Fuerza lateral en las llantas traseras [N].

$m$  = Masa del auto [Kg].

$v_x$  = Velocidad lineal del auto [m/s].

$R$  = Radio de la curva [m].

Además, para que el auto se encuentre en un equilibrio de momentos sobre su centro de gravedad, se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$F_{Yf}a_1 - F_{Yr}a_2 = 0 \quad (113)$$

Donde:

$a_1$  = Distancia del CG al eje delantero [m].

$a_2$  = Distancia del CG al eje trasero [m].

A partir de las ecuaciones 112 y 113, se llega a la siguiente ecuación:

$$F_{Yr} = m \frac{a_1}{l} \left( \frac{v_x^2}{R} \right) = \frac{W_r}{g} \left( \frac{v_x^2}{R} \right) \quad (114)$$

Donde:

$l$  = Wheelbase [m].

$W_r$  = Peso parte trasera [N].

$g$  = Fuerza de gravedad [ $m/s^2$ ].

Con base en la ecuación 114 y la ecuación 106, la cual es usada para obtener la fuerza lateral, se llega a las ecuaciones 115 y 116, las cuales describen el *slip angle* en cada eje.

$$\alpha_f = \frac{W_f}{g} \left( \frac{v_x^2}{R \cdot C_{\alpha f}} \right) \quad (115)$$

$$\alpha_r = \frac{W_r}{g} \left( \frac{v_x^2}{R \cdot C_{\alpha r}} \right) \quad (116)$$

Analizando la imagen 6.17, se llega a la ecuación 117 para obtener el ángulo que debe de tomar la llanta para lograr dar la vuelta.

$$\delta' = \text{Arctan} \left( \frac{R}{l} \right) + \alpha_r - \alpha_f \quad (117)$$

Entonces, sustituyendo 115 y 116 en, 117 se llega a la ecuación 118.

$$\delta' = \text{Arctan} \left( \frac{R}{l} \right) + \left( \frac{W_r}{C_{\alpha r}} - \frac{W_f}{C_{\alpha f}} \right) \frac{v_x^2}{R \cdot g} \quad (118)$$

$$\delta' = \delta + K_{\delta} \cdot a_y \quad (119)$$

Donde:

$W_f$  = Peso de la parte delantera [N].

$C_{\alpha f}$  = *Cornering stiffness* de la llanta delantera [N/°].

$C_{\alpha r}$  = *Cornering stiffness* de la llanta trasera [N/°].

$K_{\delta}$  = *Understeer gradient* [°/g's].

$a_y$  = Aceleración lateral [g's].

$\delta$  = Ángulo de Ackerman [°].

$\delta'$  = *Steering angle* bajo efectos de *slip angle* [°].

$K_{\delta}$  consta de dos valores, donde cada uno da la relación de carga en los ejes contemplando el *cornering stiffness* de las llantas. Este cuantifica la tasa de cambio del *understeer* u *oversteer* con respecto a la aceleración lateral del carro.  $K_{\delta}$  puede tener 3 posibles resultados: *neutral steer*, *understeer* y *oversteer* (5).

#### 6.2.5.1. *Neutral steer*

$$\frac{W_f}{C_{\alpha f}} = \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \rightarrow K_{\delta} = 0 \rightarrow \alpha_f = \alpha_r$$

En una vuelta de radio continuo a velocidad constante, bastará con el ángulo de Ackerman  $\delta = \text{Arctan} \left( \frac{R}{l} \right)$  para lograr la dar la vuelta requerida. Físicamente, este caso corresponde a un balance de la fuerza lateral con respecto a la aceleración lateral del CG, lo cual causa un incremento idéntico del *slip angle* en las llantas delanteras y traseras (5). En otras palabras, tanto las llantas traseras como delanteras generan el mismo agarre.

6.2.5.2. Understeer

$$\frac{W_f}{C_{\alpha f}} > \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \rightarrow K_{\delta} > 0 \rightarrow \alpha_f > \alpha_r$$

En una vuelta de radio continuo y velocidad constantes,  $\delta$  incrementará con respecto a la aceleración lateral y el cuadrado de la velocidad. Para este caso, la aceleración lateral del CG causa que las llantas delanteras generen más *slip angle* que las traseras, es decir, que las llantas delanteras generen menos agarre que las traseras. Entonces, para desarrollar la fuerza lateral necesaria en las llantas delanteras y poder dar la vuelta, las llantas deben de girar con un mayor ángulo (5).

6.2.5.3. Oversteer

$$\frac{W_f}{C_{\alpha f}} < \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \rightarrow K_{\delta} < 0 \rightarrow \alpha_f < \alpha_r$$

En una vuelta de radio continuo y velocidad constante,  $\delta$  tenderá a decrecer con la velocidad. En este caso, la aceleración lateral del CG causa un *slip angle* mayor en las llantas traseras que en las delanteras. El que la parte delantera genere más agarre, sirve como pivote para que la parte trasera gire hacia fuera y la parte delantera gire hacia adentro, reduciendo el radio de giro. Esto ocasionará que el auto comience a derrapar de la parte trasera, a menos que se reduzca  $\delta$  para mantener el radio de giro (5).

En la imagen 6.18 se puede observar la manera en que el ángulo de la dirección cambia con respecto a la velocidad para los tres casos antes mencionados.

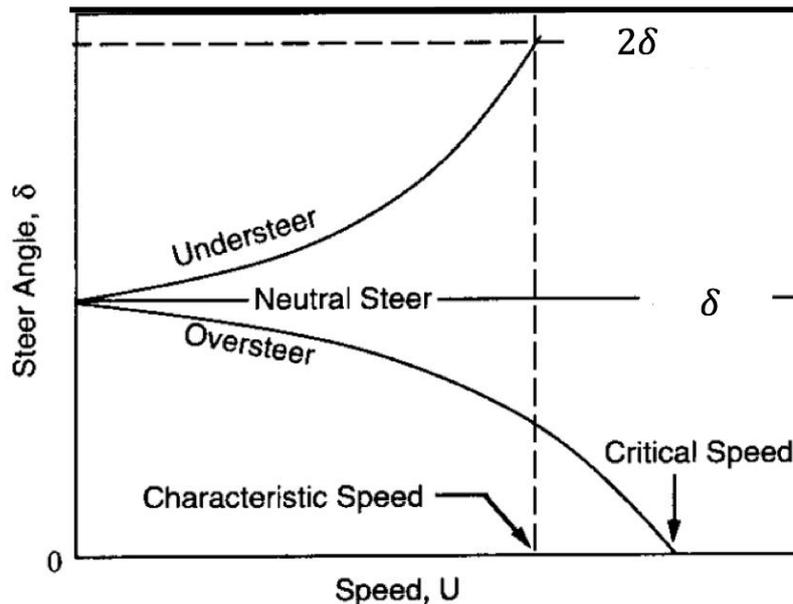


IMAGEN 6.18. VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE DIRECCIÓN CON RESPECTO A LA VELOCIDAD (6).

Bajo efectos de *understeer*, el *steer angle* incrementa con el cuadrado de la velocidad, hasta que se alcanza un valor en el que se requiere el doble del ángulo de la dirección para lograr dar la vuelta requerida. A esta condición se le conoce como *characteristic speed* (6). Cuando se supera este valor, el auto pierde control de la dirección y las llantas delanteras

comienzan a deslizar. Efecto conocido como “irse de trompa”. La ecuación 120 expresa la forma para obtener dicho valor.

$$V_{char} = \sqrt{\frac{1}{K_{\delta}}} \quad (120)$$

Con efectos de *oversteer*, el *steer angle* decrece con la velocidad al cuadrado hasta llegar al valor de cero. A esta condición se le llama *critical speed*, en la cual el auto pierde estabilidad (6). Comúnmente a esto se le conoce como “colear”. La ecuación 121, expresa la manera para obtener el *critical speed*.

$$V_{crit} = \sqrt{-\frac{1}{K_{\delta}}} \quad (121)$$

Para el caso del *neutral steer*, la manera en que el auto toma la curva a cualquier velocidad es simplemente el *Ackerman angle*.

### 6.2.6. Anexo 11: Aerodinámica

La aerodinámica tiene gran relevancia para el desempeño de la suspensión y sobre todo para el de las ruedas. El paquete aerodinámico tiene dos funciones importantes: desviar el flujo que llega al auto para generar menos *drag* y generar más *down force* durante las curvas.

El *drag* es la fuerza del aire que se opone al movimiento del auto. En otras palabras, es la fuerza aerodinámica que frena al carro. El *down force*, también conocido como sustentación negativa, es la fuerza aerodinámica que mantiene al auto pegado al suelo. Esta tiene vital importancia en las curvas, ya que genera un peso extra en las ruedas. Este peso desarrollado por la aerodinámica le permitirá al auto tomar las curvas de manera más rápida, generando más fuerza lateral que se oponga a las fuerzas inerciales que empujan al carro fuera de la pista.

Hay una relación entre estas dos fuerzas aerodinámicas; un paquete aerodinámico se diseña pensando en crear el *down force* necesario para el auto, intentando crear el menor *drag* posible. Cuando un auto viaja a grandes velocidades, se generan mayores fuerzas debido a la aerodinámica. El controlar estas fuerzas se vuelve un punto clave en la dinámica vehicular, pues un desbalance en estas puede generar un agarre excesivo en la parte delantera o trasera del carro, haciendo que este derrape. Esto se logra, como se vio previamente, controlando los grados de *roll* del vehículo con la rigidez de la suspensión.

El hacer un análisis de cómo es que la aerodinámica actúa en el auto, se restringe a simulaciones en computadora. De manera ideal, el *down force* creado por el alerón delantero actuará en la parte delantera, mientras que el *down force* creado por el alerón trasero actuará en la parte trasera del auto. Cuando el carro avanza en línea recta, el *down force* se reparte 50% - 50% sobre el eje Y. Para una curva, la forma en la que el *down force* se reparte en cada llanta, se da por las siguientes ecuaciones (5):

$$\Delta W_{DF1} = \frac{LF}{2} + q \left( \frac{RM}{t_f} \right) \quad (122)$$

$$\Delta W_{DF2} = \frac{LR}{2} + (1 - q) \left( \frac{RM}{t_r} \right) \quad (123)$$

$$\Delta W_{DF3} = \frac{LF}{2} - q \left( \frac{RM}{t_f} \right) \quad (124)$$

$$\Delta W_{DF4} = \frac{LR}{2} - (1 - q) \left( \frac{RM}{t_r} \right) \quad (125)$$

Donde:

$\Delta W_{DF1}$  = Peso del *down force* que actúa en la llanta delantera izquierda [N].

$\Delta W_{DF2}$  = Peso del *down force* que actúa en la llanta trasera izquierda [N].

$\Delta W_{DF3}$  = Peso del *down force* que actúa en la llanta delantera derecha [N].

$\Delta W_{DF4}$  = Peso del *down force* que actúa en la llanta trasera derecha [N].

$LF$  = *Front lift* [N].

$LR$  = *Rear lift* [N].

$q$  = *Roll gradient distribution* [%].

$RM$  = *Rolling moment* creado por efectos aerodinámicos en curva [Nm].

Las fuerzas aerodinámicas son proporcionales a la velocidad. Hay que tomar en cuenta que el motor del auto genera la potencia y el par vectorial necesario para mover al vehículo, considerando los efectos del *drag* y *down force*. De no tener el par vectorial necesario, el paquete aerodinámico significará una desventaja en lugar de una ventaja.

### 6.2.7. Anexo 7: Anti Roll Bar (ARB)

La ARB únicamente tiene efecto durante el movimiento de *roll*, es decir, cuando una llanta presenta más *ride* que la otra. Cuando ambas tienen el mismo desplazamiento vertical en *ride*, esta no tiene efecto. La ARB tiene dos funciones: generar más rigidez al sistema y aportar estabilidad al auto. Esto se logra ya que la ARB conecta a cada llanta con su opuesta, haciéndolas dependientes en curvas. Analicemos la imagen 6.19 para ver cómo es que esta funciona.

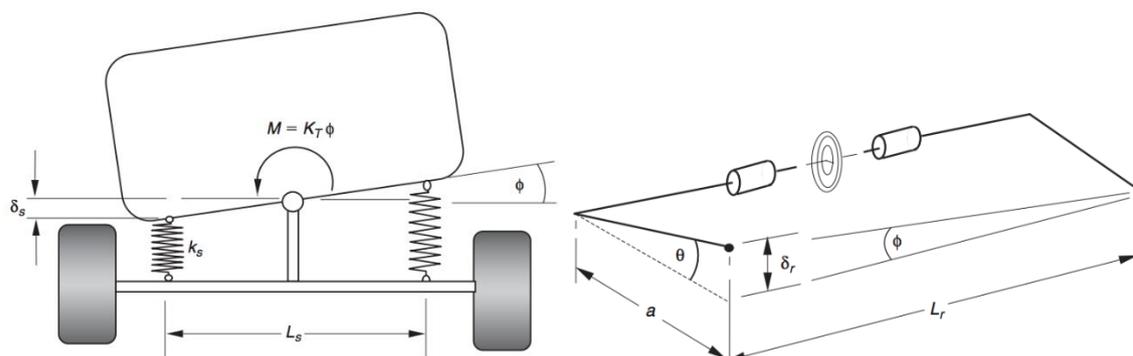


IMAGEN 6.19. A LA IZQUIERDA, AUTO TOMANDO UNA CURVA. A LA DERECHA, ARB ACTUANDO CON EL MOVIMIENTO DE ROLL (24).

Cuando un auto toma una curva se presenta *roll moment*. Esto ocasiona que un amortiguador se comprima y otro se expanda. Los brazos laterales de la ARB van sujetos de amortiguador a amortiguador, mientras que la parte media se sujeta al chasis. Cuando los amortiguadores tienen un desfase de desplazamiento entre ellos, estos tuercen la ARB. De la imagen 6.19, el lado que presenta más compresión torcerá a la ARB en  $+Y$ , mientras que el lado que presenta menos compresión la torcerá en  $-Y$ . La ARB, al contar con cierta rigidez, evitará que los resortes del lado externo se compriman demasiado. En cuanto a los resortes del lado interno, esta evitará el incremento en la expansión. En otras palabras, se reducirán los grados de *roll*. Esto ayudará a que la fuerza lateral no se desarrolle más en las llantas

externas que en las internas, sino que esta se distribuya de manera más equitativa entre las cuatro llantas. De esta forma, se reduce el *slip angle* total y se les puede exigir más a las llantas antes de llegar a la condición de deslizamiento. De igual manera, se evitará que el RC tenga un desplazamiento lateral alto, con lo que se mejorará la estabilidad del vehículo.

La rigidez total del auto debe distribuirse entre la parte delantera y la parte trasera; se recomienda que la parte delantera sea un poco más rígida que la parte trasera. De esta forma se obtiene más maniobrabilidad, ya que la parte delantera es la que dirige a el auto. Como se mencionó antes, en presencia de *pitch*, la oscilación de la parte trasera se intersecará con la oscilación de la delantera, estabilizando el auto más rápido. Sin embargo, cuando la suspensión tiene más rigidez, ya sea en la parte delantera o trasera, esta perderá agarre en las llantas. De esta forma, al hacer más rígida la parte delantera, está generará menos agarre en las llantas, generando *understeer*, siendo esta la desventaja de tener la suspensión más rígida adelante.

La distribución que debe tener la rigidez total, con respecto a la parte delantera y la parte trasera, se da por un factor llamado *roll gradient distribution* ( $q$ ). *Optimun G* (16) nombra este factor como *Magic number*, mientras *Milliken* (9) lo nombra como *TLLTD* (*Total Lateral Load Transfer Distribution*). El *Roll gradient distribution* depende de varios factores: la posición del CG, la distribución del peso en el auto, los *tracks*, la fuerza lateral generada en las llantas, etcétera. *Optimun G* ha generado una calculadora en Excel para obtener esta distribución, así como Aldo Espejel Arroyo, exintegrante de *UNAM Motorsports*, generó un programa en *Matlab* que calcula el *roll gradient distribution*.

### 6.1.1. Anexo 9: Ajuste del amortiguador

El ajuste del amortiguador depende de las condiciones de la pista y de la manera en que cada piloto conduce, siendo la retroalimentación de este último parte importante para el mismo. Recordemos que la configuración del amortiguador debe hacerse para que la llanta consiga el mejor agarre sobre el suelo, aprovechando de la mejor manera el neumático.

La imagen 6.20 muestra las diferentes etapas que un auto atraviesa antes, durante y después de una curva. Basado en la bibliografía (11), se explicará el comportamiento que el carro puede presentar en cada sección de la curva y cómo es que se puede corregir.

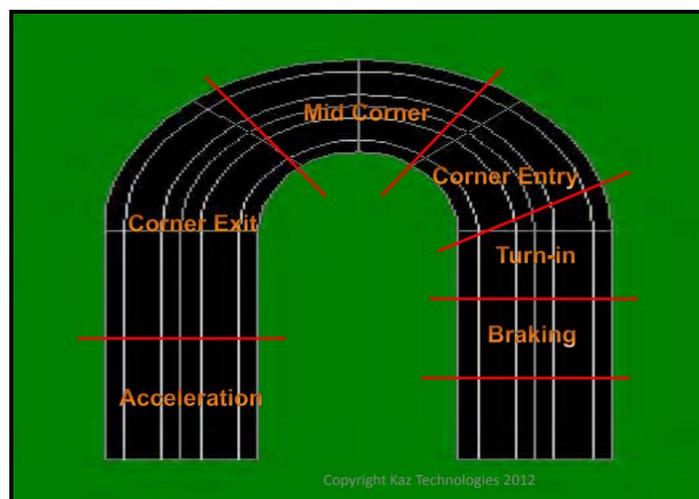


IMAGEN 6.20. ZONAS EN UNA CURVA (11).

**Braking:** Es en esta zona de la curva donde se tiene la transferencia de peso de las llantas traseras a las delanteras. Cuando este se da de manera rápida, las llantas pueden perder agarre por el repentino incremento. En cambio, cuando esta es muy lenta, el frenado no será el óptimo y el piloto perderá tiempo para entrar a la curva. Por otro lado, cuando se configuran los amortiguadores traseros con un mal *rebound damping* (*damping coefficient* en *rebound*), el carro se puede desestabilizar; cuando esté es mucho, el carro tenderá a levantarse y por lo tanto perderá agarre con el suelo. Cuando este es poco, la parte trasera puede brincar, lo cual también ocasionará pérdida de agarre.

**Turn in:** Durante esta sección, al entrar primero la parte delantera, será la llanta externa la que esté en compresión, mientras que la llanta interna estará en expansión. El amortiguador se encargará de conseguir que la transferencia de carga se haga de manera óptima a medida que el carro presenta más *roll moment*. Lo que se busca, es que la llanta externa se cargue de la manera más rápida para tener una buena respuesta cuando se toma la curva.

En este caso, cuando se tiene poco *jounce damping* (*damping coefficient* en *jounce*), la llanta se puede sobrecargar. Esta sobrecarga de manera descontrolada en la llanta delantera puede generar efectos de *understeer*. Por otro lado, cuando la transferencia de carga es lenta, el carro no tomará las curvas de manera rápida.

**Corner entry:** En esta sección la transferencia de carga de las llantas traseras a la delantera estará casi completa, mientras que las llantas internas continúan transfiriendo carga a las llantas externas. Cuando la transferencia de carga de las llantas internas a las externas no es la deseada, lo primero que se debe de hacer es configurar la compresión en las llantas externas; si se desea acelerar la transferencia de carga se debe reducir el *jounce damping*. Ahora, si se está perdiendo agarre y por lo tanto control, el aumentar el *rebound damping* en las llantas internas será la mejor opción.

**Mid corner:** En esta etapa se alcanza el estado estable del auto, es decir, los amortiguadores no tendrán efecto en la maniobrabilidad de este. Por lo tanto, el carro girará de acuerdo con la configuración que presente en su rigidez.

**Corning exit:** En esta etapa la transferencia empieza a darse de las llantas externas a las internas, así como de las llantas delantera a las traseras, particularmente de la llanta delantera externa a la llanta trasera interna. Cuando las llantas traseras tienen mucho *jounce damping*, esto se puede convertir en mucha rigidez para la parte trasera, generando *oversteer* en el auto. Este es el comportamiento más común en esta fase.

Cuando un auto presenta *oversteer*, lo mejor es disminuir el *jounce damping* en la parte trasera, esto reducirá el comportamiento de resorte dinámico en el amortiguador y hará más rápida la transferencia de carga a la llanta trasera. El reducir el *rebound damping* en la parte delantera también hará que la transferencia de carga a la parte trasera sea más rápida.

Cuando el auto presenta *understeer*, significa que la transferencia de carga es muy rápida, lo que ocasionará la pérdida de agarre en la parte delantera. Lo primero que se debe de hacer es incrementar el *rebound damping* de la parte delantera. Si el problema continúa, se necesitará incrementar el *jounce damping* de la parte trasera. Sin embargo, se debe de tener cuidado con ambos ajustes, ya que demasiado *jounce damping* puede incrementar el comportamiento del resorte dinámico de los amortiguadores traseros, generando *oversteer*.

Ahora, si se tiene demasiado *rebound damping*, el carro se puede levantar de la parte delantera, generando *understeer*.

**Acceleration:** En este tramo la transferencia va de las llantas delanteras a las traseras. Lo que se busca es que esa transferencia sea lo suficientemente rápida para generar la mejor tracción en la parte trasera. Sin embargo, si esta es demasiado rápida, el auto responderá de manera lenta. Por el contrario, si esta es demasiado lenta, las llantas traseras pueden perder tracción. Para controlar la transferencia de carga de la parte delantera a la trasera, se debe empezar configurando el *jounce damping* de la parte trasera. Si se da la pérdida de agarre por demasiado *jounce damping* en la parte trasera, habrá que aumentar el *rebound damping* en la parte delantera.

Previo a configurar los amortiguadores hay que alinear el *camber* y *toe* del auto, así como hay que equilibrar la forma en que el peso se reparte en las cuatro llantas. De igual manera, hay que dejar lista la rigidez que se definió previamente para conseguir el *roll* deseado. Lo que se busca es que las llantas trabajen en su temperatura óptima, así como tratar que el auto tenga un buen desempeño en el estado estable. Posterior a ello, hay que iniciar con la configuración “teórica” para los amortiguadores, es decir, aquella que se obtuvo mediante análisis y simulaciones. Con esto hecho, el auto debe ser corrido por el piloto. Con base en la retroalimentación del mismo, se tendrá una idea de lo que hay que configurar. Hay que tener en cuenta que estas configuraciones deben de ser simples y hacerse una por una después de un par de pruebas. Cuando se hacen varias configuraciones, no se puede saber qué fue lo que mejoró o lo que no ayudó el desempeño del carro. Además, hay que tener en cuenta que, repetidamente, se tiene que volver a la base de la configuración con la que empezó a correr el auto, buscando cuál es el ajuste que da el mejor desempeño. Cuando se hace un ajuste de los amortiguadores, este no debe ser de forma brusca. De manera empírica, se ha determinado que el ajuste en el *damping force* para los amortiguadores debe ser con incrementos del 20%, esto para amortiguadores que trabajan a bajas velocidades (11).

### 2.3. Bibliografía

- [1] Daimler. *History of suspension: from independent to active suspension*. [En línea] Octubre de 2020. <https://www.daimler.com/company/tradition/company-history/1886-1920.html>
- [2] Clavero, D. Diariomotor. *Audi eROT ya está aquí*. [En línea] Enero de 2021. <https://www.diariomotor.com/2016/08/10/audi-erot/>
- [3] Jazar, N. *Vehicle Dynamics: Theory and Application*. NY, Riverdale: Springer, 2007.
- [4] De Oliveira Santos, Rodrigo. *Racing car dynamics. The absolute guide to the racing tyres – Part 1: lateral force*. [En línea] Enero de 2021. <http://racingcardynamics.com/racing-tires-lateral-force/>
- [5] Gillespie, T. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. PA, Warrandale: SAE, 1992.
- [6] Darius, J. M. *The design of and Innovate Automotive Suspension for Formula SAW Racing Applications*. Liberty University: s.n., 2019.

- [7] Optimum G. *OptimumKinematics*. [En línea] Octubre de 2020. <https://optimumg.com/product/optimumkinematics/>
- [8] YouTube. *Suspension Geometry – Part 1 (Camber, Toe, Caster, KPI, Scrub radius)*. [En línea] Octubre de 2020. <https://www.youtube.com/watch?v=VbReLNi2JP4&t=00s>
- [9] Milliken, W.F. & Milliken, D.L. *Race Car Vehicle Dynamics*. s.l.: SAE, 1995.
- [10] García-Pozuelo, D. (2014). *Diseño del sistema de suspensión para un vehículo fórmula student*. España, Madrid.
- [11] Giaraff, M. (s.f.). *Tech Tip: Understanding your dampers*. Optimum G.
- [12] Cycle world. *Technicalities*. [En línea] Octubre de 2020. <https://www.cycleworld.com/sport-rider/technicalities-spring-rate-and-preload/>
- [13] Cycle world. *Technicalities*. [En línea] Octubre de 2020. <https://www.cycleworld.com/sport-rider/technicalities-spring-rate-and-preload/>
- [14] Espejel Arroyo, A. (2015). *Rediseño de un sistema de suspensión para un auto de competencia mediante ADAMS/Car y Matlab*. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- [15] Canal de Física y Química. *Obtenido de Problemas de movimientos armónicos simples (M.A.S.)*. [En línea] Enero de 2021. <https://serendiphia.es/2017/04/11/problemas-de-movimientos-armonicossimples-m-a-s/>
- [16] Giaraff, M. *Tech Tip: Spring & dampers, part two. Attack of the units*. s.l.: Optimum G.
- [17] L. Singer, F. *Engineering Mechanics Dynamics*. NY: s.n., 1954.
- [18] Giaraff, M. *Tech Tip: Spring & dampers, part four. A new understanding*. s.l.: Optimum G.
- [19] Ghosal, A. *The Freudenstein Equation. Design of Four-Link Mechanism*. s.l.: s.n., 2010.
- [20] SAE International. *Formula SAE*. [En línea] Octubre de 2020. <https://www.fsaeonline.com/>
- [21] Öhlins. *TTX35 MKII*. [En línea] Octubre de 2020. <https://www.ohlinsusa.com/>
- [22] Öhlins. *db\_springs.pdf*. [En línea] Octubre de 2020. [https://www.ohlinsusa.com/files/files/db\\_springs.pdf](https://www.ohlinsusa.com/files/files/db_springs.pdf)
- [23] Wolfram. *Wolfram Mathematica*. [En línea] Octubre de 2020. <https://www.wolfram.com/?source=nav>

- [24] Blundell, M. y Harty, D. *The multibody System Approach to Vehicle Dynamics*. s.l.: s.n., 2004.
- [25] WolframMathWorld. *Line-Line Intersection*. [En línea] Octubre de 2020. <https://mathworld.wolfram.com/Line-LineIntersection.html>
- [26] Hexagon. *MSC Software*. [En línea] Octubre de 2020. <https://www.mscsoftware.com/page/adams-student-edition>
- [27] De Oliveira Santos, Rodrigo. *Racing car dynamics. The absolute guide to the racing tyres – Part 1: lateral force*. [En línea] Enero de 2021. <http://racingcardynamics.com/racing-tires-lateral-force/>
- [28] CarPartsNigeria. *Role of shock absorbers in car suspension*. [En línea] Octubre de 2020. <https://www.carpartsnigeria.com/blogdetails/109>
- [29] Smith, C. *Tune To Win*. s.l.: Carroll Smith Consulting, 1978.