



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**“MEDICIÓN DE LA INTENSIDAD VERTICAL Y LA
DISTRIBUCIÓN ANGULAR DE MUONES ATMOSFÉRICOS CON
UN DETECTOR DE CENTELLEO”**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:
BRYAN OLMOS YÁÑEZ

TUTOR PRINCIPAL
DR. ALEXIS ARMANDO AGUILAR ARÉVALO
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. LUKAS NELLEN FILLA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

DR. HERMES LEÓN VARGAS
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., MARZO, 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado

Dr. Alexis Armando Aguilar Arévalo

Dr. Eleazar Cuautle Flores

Dra. Libertad Barrón Palos

Dr. Luis Armando Acosta Sánchez

Dr. Ricardo López Fernández

Datos del trabajo escrito

Título: Medición de la intensidad vertical y la
distribución angular de muones atmosféricos
con un detector de centelleo

Número de páginas: 61

Año: 2021

Bryan Olmos Yáñez
Instituto de Ciencias Nucleares (UNAM)
olmos.bryan@ciencias.unam.mx

Resumen

En este trabajo se presenta un método para la medición de la intensidad vertical integral y la distribución angular de muones atmosféricos utilizando un detector estacionario de plástico centelleador con PMTs acoplados en sus extremos, con muestras de 5 horas en el laboratorio. Se desarrollaron tres algoritmos generadores de muones, implementando uno de ellos en una simulación que incluyera los efectos de la resolución del detector y la saturación de los PMTs, así como efectos de la cubierta del edificio del laboratorio. Usando las mediciones de 5 orientaciones azimutales diferentes, se midió un exponente promedio, de la distribución omnienergética $\cos^n \theta$, de $n = (1.90 \pm 0.06(\text{stat}) \pm 0.10(\text{syst}))$, y una intensidad vertical promedio $I_0 = (101.2 \pm 1.8(\text{stat}) \pm 5.5(\text{syst})) \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ en la ubicación con coordenadas geográficas $19.33^\circ\text{N } 99.19^\circ\text{W}$, a una altitud de 2268 m sobre el nivel del mar y una rigidez geomagnética de 8.2 GV. Finalmente, se describen con detalle tres modelos generadores de muones desarrollados, el primero construyendo una semiesfera sobre el detector, el segundo con un plano horizontal, y el último generando muones tales que todos incidan sobre la superficie del detector, probando la equivalencia entre los tres.

Agradecimientos

Agradezco a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGA-PA), UNAM, por el apoyo recibido a través del proyecto PAPIIT-IN108917. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) a través de los proyectos CB-2009/131598 y CB-2014/240666 y por la beca recibida durante los estudios de maestría.

A los miembros del Comité Tutor, Alexis Aguilar Arévalo, Lukas Nellen Filla y Hermes León Vargas, por su orientación y tiempo brindado a lo largo de mis estudios de maestría.

A los miembros del jurado Eleazar Cuautle, Libertad Barrón, Luis Armando Acosta y Ricardo López.

A mi familia y amigos.

Agradezco, también, al personal del Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, Sr. José Rangel del Taller de Manufactura Avanzada por la fabricación de una pieza utilizada para acoplar los PMTs al plástico centelleador y al Ing. Mauricio Martínez Montero por su apoyo técnico con la instrumentación del Laboratorio de Detectores.

Bryan Olmos Yáñez

Índice general

Resumen	5
Agradecimientos	7
Introducción	11
1. Aspectos teóricos	13
1.1. Muones atmosféricos	13
1.2. Modelo de Smith-Duller	15
2. Simulación	19
2.1. Generador de muones atmosféricos	19
2.2. Simulación	20
3. Experimento	25
3.1. Montaje experimental	25
4. Resultados	29
4.1. Ajuste a los datos	29
4.2. Intensidad vertical integral de muones y distribución angular	33
4.3. Pruebas de cerradura	37
4.4. Variación de la orientación azimutal	39
5. Otros modelos de generadores de muones	43
5.1. Modelo de semiesfera	43
5.2. Modelo de plano horizontal	44
5.3. Modelo de superficie	46
5.4. Equivalencia entre los 3 modelos	49
Conclusiones	53

A. Flujo de muones en el modelo de superficie	55
B. Componente electromagnética y neutrones	57
Referencias	59

Introducción

Los muones atmosféricos son las partículas cargadas más numerosas en la superficie terrestre, producidos principalmente en el decaimiento de piones y kaones, los cuales se crean en la interacción de rayos cósmicos primarios (protones y núcleos más pesados) con la atmósfera terrestre a grandes altitudes. Los muones alcanzan la superficie con distribuciones angulares y de energía que han sido medidas y calculadas teóricamente en diferentes ubicaciones alrededor de la Tierra.

En esta tesis se presenta un método para estimar la intensidad vertical integral de muones y la distribución angular utilizando una barra estacionaria de plástico centelleador con tubos fotomultiplicadores en sus extremos y una electrónica adecuada al experimento. Este método, a diferencia de otros, tiene la ventaja de que no requiere orientarse durante las mediciones.

Este trabajo se construye sobre el que fue realizado en la tesis de licenciatura, en el cual se presentó el método para la medición de I_0 , estudiando los efectos sistemáticos debidos a considerar diferentes modelos del flujo de muones atmosféricos y variaciones en la cobertura del edificio del laboratorio. También se han incorporado los resultados de pruebas de cerradura que muestran que los métodos de ajuste son capaces de recuperar los parámetros esperados en simulaciones. Se describe, además, una forma de estimar el exponente en la distribución angular de muones y se muestran los resultados de orientar el detector a diferentes direcciones.

Se estudian, además, tres diferentes algoritmos para la generación de muones en la simulación y la eficiencia de cada uno para generar muones que penetran en el detector. En el modelo utilizado por defecto se generan muones desde un plano tangente a una semiesfera, en cuyo interior se localiza el detector. En un segundo modelo, se generan muones desde la superficie de un plano horizontal construido sobre el detector. En el último modelo considerado, se generan muones tales que todos entren al detector.

Este trabajo ha sido publicado en la revista Nuclear Instruments & Methods in Phy-

sics Research, A [1].

Esta tesis está organizada como sigue. En el Capítulo 1 se da una explicación de la producción de muones en la atmósfera y del modelo de intensidad de muones de Smith-Duller utilizado en este trabajo. En el Capítulo 2 se describe el modelo generador de muones utilizado así como su implementación en una simulación en Geant4. En el Capítulo 3 se da una descripción del desarrollo experimental con el cual se realizó la detección de muones en el laboratorio. En el Capítulo 4 se presenta el método de ajuste a los datos experimentales y el procedimiento utilizado para la medición de la intensidad integral vertical y del exponente en la distribución angular, mostrando también las pruebas de cerradura y los resultados de las diferentes orientaciones del detector. Finalmente, en el Capítulo 5 se introducen los dos modelos adicionales para generar muones.

Capítulo 1

Aspectos teóricos

En este capítulo se da una explicación de la producción de muones en la atmósfera y se describe el modelo fenomenológico de la intensidad de muones en la superficie terrestre de Smith-Duller.

1.1. Muones atmosféricos

Los muones atmosféricos son producidos en el decaimiento de partículas secundarias (en su mayoría piones y kaones), creadas en la interacción de rayos cósmicos primarios (como protones y núcleos pesados) con la atmósfera de la Tierra a grandes altitudes, típicamente del orden de 15 km.

A nivel del mar, los muones (μ^+ , μ^-) son las partículas cargadas más abundantes en las cascadas atmosféricas extensivas creadas por los rayos cósmicos (figura 1-1), y alcanzan la superficie con una energía media de aproximadamente 4 GeV. A diferentes latitudes y altitudes, se ha observado que la distribución angular de muones se describe correctamente por $I(\theta) = I_0 \cos^n \theta$, donde I_0 es la intensidad integral del flujo vertical (en unidades de $\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$), y θ es el ángulo cenital del muón incidente. Ambas cantidades, I_0 y el exponente n , dependen de muchos factores, como la altitud, la latitud, la rigidez geomagnética, y, sobre escalas de tiempo más cortas, de la actividad solar y de las condiciones atmosféricas. En [2] se puede encontrar un resumen de algunas mediciones.

Para muones con energías por arriba de 1 GeV, en ubicaciones típicas con una altitud a nivel del mar, la intensidad integral vertical tiene un valor aproximado de $70 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$ [3, 4], aunque algunas mediciones sugieren un valor 10-15 % más bajo [5, 6, 7]. Se han reportado valores significativamente más altos [8] dentro de la

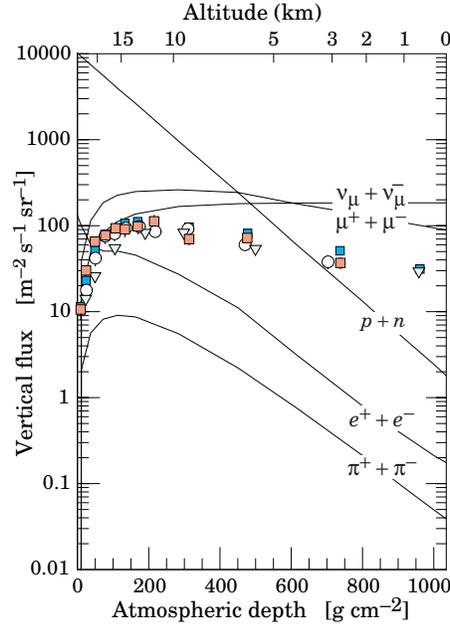


Figura 1-1: Flujos verticales de rayos cósmicos en la atmósfera con $E > 1$ GeV.

Anomalía del Atlántico Sur [9], donde el campo magnético terrestre se reduce considerablemente. En la aproximación de una atmósfera plana, se puede mostrar que el exponente n disminuye en una unidad respecto al que se supone en el espectro de rayos cósmicos primarios ($\sim E^{-(n+1)}$) [10], y se espera que tenga un valor alrededor de 2 para energías > 1 GeV.

Para $E > 200$ MeV, existen datos confiables de las distribuciones angular y de energías de muones atmosféricos en diferentes ubicaciones geográficas [11, 12]. Estos datos, en conjunto con una gran cantidad de mediciones de otras componentes de la radiación cósmica que llegan a la Tierra, han sido utilizados para validar simulaciones de la producción de cascadas atmosféricas, las cuales pueden ser utilizadas para estimar el flujo de muones en prácticamente cualquier ubicación sobre la superficie terrestre [13, 14, 15, 16, 17].

Los muones cosmogénicos han sido utilizados o propuestos para muchas aplicaciones, por ejemplo: para buscar cámaras ocultas en las pirámides de Egipto [18], en la evaluación no destructiva de materiales radiactivos almacenados en contenedores sellados [19], para determinar la localización de materiales de alta densidad en fusiones de un reactor como en Chernóbil y Fukushima [20, 21] o para captar la imagen del interior de volcanes y estudiar la evolución de su estructura interna [22]. La tomo-

grafía con muones (muografía) ofrece un gran potencial como una nueva tecnología para la evaluación y revisión de materiales y estructuras, además de las técnicas convencionales con rayos X y gamma [23].

1.2. Modelo de Smith-Duller

El modelo de Smith-Duller [24] describe la intensidad diferencial de muones atmosféricos en la superficie, la cual reproduce las principales características de las distribuciones angular y de energías de muones cosmogénicos medidas experimentalmente en la superficie terrestre, y previamente ha sido utilizado para propósitos similares [25]. La fórmula para la intensidad se obtiene estableciendo el cambio en el número de piones, dN_π , por segundo y por centímetro cuadrado con energía cinética E_π a una profundidad atmosférica y (en g/cm²) viajando a un ángulo cenital θ , como

$$dN_\pi = \underbrace{K E_\pi^{-\gamma} e^{-\frac{y/\cos\theta}{\lambda_P}}}_{\text{Producción}} (dy/\cos\theta) - \underbrace{N_\pi \frac{dy/\cos\theta}{\lambda_\pi}}_{\text{Absorción}} - \underbrace{N_\pi \frac{dt}{\tau}}_{\text{Decaimiento de piones}}, \quad (1.1)$$

donde K es un parámetro de normalización, γ es el índice espectral heredado de la producción de piones, λ_P y λ_π son la trayectoria libre media de absorción de los nucleones primarios y de los piones, respectivamente, y τ la vida media de los piones desde el sistema de referencia del laboratorio.

En la figura 1-2, se muestra la trayectoria de un pión a lo largo de la atmósfera, con densidad $\rho(y)$, a partir de la cual se puede deducir la siguiente relación para la densidad de columna a lo largo de la trayectoria

$$(c dt)\rho(y) = \frac{dy}{\cos\theta}. \quad (1.2)$$

Dado que la energía cinética del pión es mucho mayor que su masa en reposo, su vida media se puede escribir como

$$\tau = \tau_0 \frac{E_\pi}{m_\pi c^2}, \quad (1.3)$$

con lo cual, usando la Ec. (1.2), se obtiene

$$\frac{dt}{\tau} = \frac{dy}{\cos\theta} \frac{m_\pi c^2}{\rho(y)(c\tau_0)E_\pi}. \quad (1.4)$$

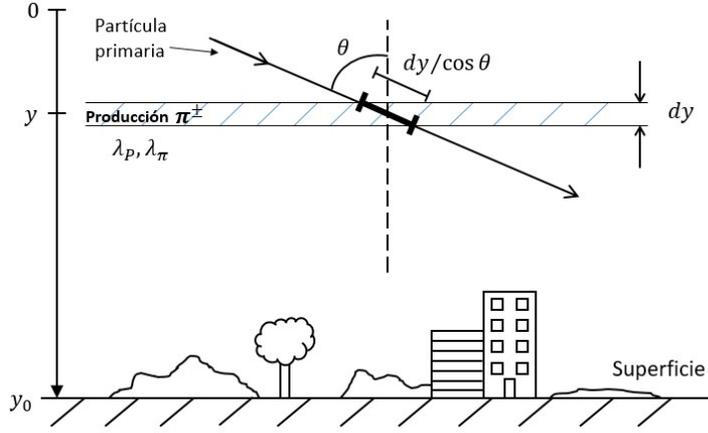


Figura 1-2: Producción de piones a una profundidad atmosférica y .

con $m_\pi = 139.6 \text{ MeV}/c^2$ y $\tau_0 = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ como la masa en reposo y la vida media del pión, respectivamente. De este modo, la Ec. (1.1) resulta

$$\frac{dN_\pi}{dy} = \frac{K E_\pi^{-\gamma}}{\cos \theta} e^{-\frac{y/\cos \theta}{\lambda_P}} - \frac{N_\pi}{\cos \theta} \left(\frac{1}{\lambda_\pi} + \frac{m_\pi c}{\rho(y)\tau_0 E_\pi} \right). \quad (1.5)$$

En la ecuación anterior, $N_\pi = N_\pi(E_\pi, y, \theta)$ y, por tanto, $N_\pi(E_\pi, y, \theta)dE_\pi d\Omega$ representa el número de piones por segundo por centímetro cuadrado, con energía cinética entre E_π y $E_\pi + dE_\pi$ a una profundidad atmosférica y , viajando dentro de un ángulo sólido $d\Omega$ con un ángulo cenital θ .

La intensidad diferencial de muones, $dN_\mu/(dA d\Omega dt dE_\mu)$, en la superficie (profundidad atmosférica y_0) se puede encontrar calculando

$$\frac{dN_\mu}{dA d\Omega dt dE_\mu} = \int_0^{y_0} P_\mu(E_\pi, y, \theta) N_\pi(E_\pi, y, \theta) \frac{dt}{dy} \frac{dy}{\tau}, \quad (1.6)$$

donde A es una unidad de área, E_μ la energía cinética del muón, y P_μ es la probabilidad de que un muón, viajando a un ángulo θ , alcance la superficie terrestre sin decaer, aproximada por

$$P_\mu = \left[0.100 \cos \theta \left(1 - \frac{a(y_0 \sec \theta - 100 \text{ g/cm}^2)}{r E_\pi} \right) \right]^{\frac{B_\mu}{[r E_\pi + (100 \text{ g/cm}^2) a] \cos \theta}}, \quad (1.7)$$

donde $r = 0.76$ es la fracción de la energía del pión padre tomada por el muón (que se supone constante), $B_\mu = b_\mu y_0 m_\mu c / \tau_{\mu 0} \rho_0$, $y_0 = 1000 \text{ g/cm}^2$ (profundidad atmosférica

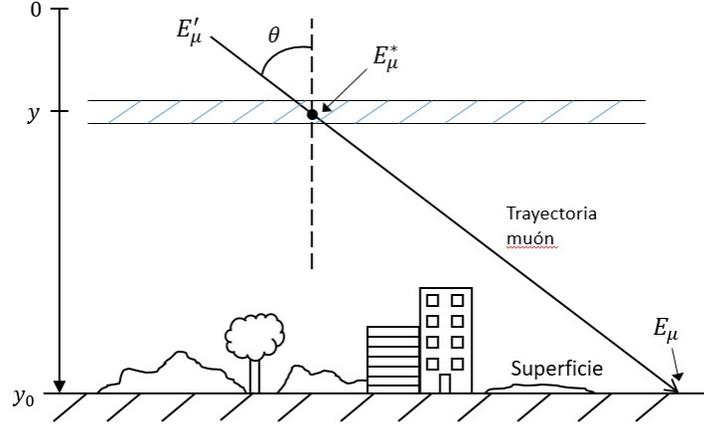


Figura 1-3: Trayectoria de un muón a través de la atmósfera, con energía cinética: E_μ en la superficie ($y = y_0$); E_μ^* en y ; y E'_μ en lo alto de la atmósfera ($y = 0$).

a nivel del mar), $m_\mu = 105.7 \text{ MeV}/c^2$ y $\tau_{\mu 0} = 2.2 \times 10^{-6} \text{ s}$ como la masa del muón y su vida media, respectivamente, $\rho_0 = 0.00129 \text{ g}/\text{cm}^3$ (densidad atmosférica a nivel del mar), $b_\mu = 0.8$ una constante introducida para corregir el modelo (para los muones) de una atmósfera isotérmica, y $a = \cos \theta (dE_\mu/dy) = 2.5 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$ es la pérdida de energía mínima por ionización del muón a lo largo de su trayectoria a través de la atmósfera, que se asume constante. En la Ec.(1.7), Smith y Duller suponen que la dependencia de P_μ en $y/\cos \theta$ puede ser sustituida por el promedio $\langle y/\cos \theta \rangle = 100 \text{ g}/\text{cm}^2$. Dentro de las suposiciones del modelo, la energía del pión padre está dada por

$$E_\pi = \frac{1}{r} [E_\mu + ay_0(\sec \theta - 0.100)]. \quad (1.8)$$

En la figura 1-3 se observa la trayectoria de un muón que alcanza la superficie terrestre con una energía cinética E_μ , producido a una profundidad y con una energía cinética E_μ^* (asumida como $E_\mu^* = rE_\pi$). De igual manera, se muestra la energía cinética E'_μ que el muón habría tenido en lo alto de la atmósfera ($y = 0$).

Asumiendo un error despreciable al integrar de $y = 0$ a $y = \infty$ (y no hasta $y = y_0$), se obtiene, finalmente,

$$\frac{dN_\mu}{dA d\Omega dt dE_\mu}(E_\mu, \theta) = \frac{K E_\pi^{-k} P_\mu \lambda_\pi b j_\pi}{E_\pi \cos \theta + b j_\pi}, \quad (1.9)$$

con $b = 0.771$ como un factor numérico para corregir la aproximación de una atmósfera isotérmica a grandes altitudes, $j_\pi \equiv y_0 m_\pi c / \tau_0 \rho_0$, $\gamma = 8/3$ y $\lambda_\pi = 120 \text{ g}/\text{cm}^2$.

El modelo en la Ec. (1.9) calcula el número de muones (N_μ) por unidad de tiempo (t), área (A), energía cinética (E_μ), y ángulo sólido (Ω), que alcanzan la superficie, a una profundidad atmosférica y_0 y una densidad del aire ρ_0 .

Al establecer las ecuaciones (1.9), (1.7) y (1.8), se han hecho algunas suposiciones y aproximaciones [24]: los piones son producidos con una multiplicidad promedio constante, tomando una fracción constante de la energía del nucleón primario, y son atenuados exponencialmente con la trayectoria libre media de absorción del nucleón primario, λ_π ; las partículas producidas mantienen la dirección en la que avanza el nucleón primario; se desprecia la curvatura de la atmósfera y se utiliza la aproximación de una atmósfera isotérmica incluyendo, para ello, factores de corrección en la razón y_0/ρ_0 para cada uno de los tipos de partículas; sólo se consideran los muones producidos por piones, aunque se ha probado que el decaimiento de kaones contribuye en el orden del 20 % al flujo total de muones atmosféricos [26].

El modelo de Smith-Duller incorpora una distribución angular omnienergética, que es, con una excelente aproximación, $\propto \cos^n \theta$, con $n = 2$.

Capítulo 2

Simulación

En este capítulo se describe la geometría del generador de muones utilizado en la simulación y también su implementación en Geant4. Asimismo, se da una validación de la simulación haciendo una comparación de las distribuciones angulares generadas con las esperadas teóricamente.

2.1. Generador de muones atmosféricos

El generador de muones atmosféricos está basado en la construcción geométrica de la figura 2-1, y, por defecto, utiliza el modelo de Smith-Duller. Se coloca una semiesfera de radio $R = 4.5$ m sobre el plano XY, con el detector situado en el origen del sistema de coordenadas a lo largo de la dirección Y. Se inicia seleccionando aleatoriamente los ángulos cenital y azimutal del muón, θ y φ , de la distribución angular omnienergética $dP(\theta, \varphi) = A \cos^2 \theta d\Omega$, con θ en $[0, \pi/2]$ y φ en $[0, 2\pi)$. La dirección del muón generado estará dada por el vector con coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional

$$\hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{r}} = -\sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} - \cos \theta \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.1)$$

Centrado en el punto $R\hat{\mathbf{r}}$, se construye un plano de forma cuadrada de dimensiones $l \times l$ ($l = 1.5$ m), tangente a la esfera. Sobre ese plano se selecciona un punto \mathbf{p} eligiendo aleatoriamente dos números a y b de una distribución uniforme en el intervalo $[-l/2, l/2]$, tal que

$$\mathbf{p} = a\hat{\boldsymbol{\theta}} + b\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (2.2)$$

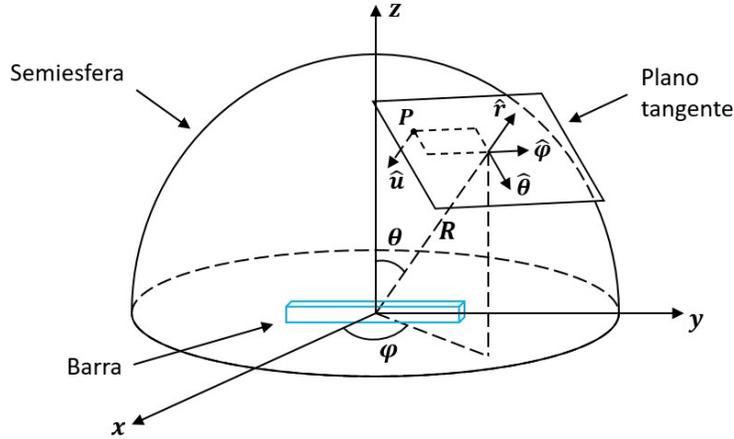


Figura 2-1: Geometría para el algoritmo generador de muones.

donde

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z}, \quad (2.3)$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}. \quad (2.4)$$

El punto \mathbf{p} sobre el plano tangente será la posición inicial del muón. Se selecciona aleatoriamente la energía del muón de la distribución de energías que corresponde al ángulo θ de acuerdo al modelo de Smith-Duller. En este algoritmo, muones generados con los mismos ángulos (θ, φ) forman una cascada de rayos paralelos que llueven sobre el área del detector, por tanto, las dimensiones del plano tangente se escogen tales que cubran completamente al detector desde todos los posibles puntos sobre la esfera. Con la finalidad de explorar variaciones sistemáticas debidas al modelo del flujo de muones, se implementó la capacidad de hacer el muestreo con otras distribuciones angulares y de energías.

2.2. Simulación

El algoritmo generador de muones y la geometría del detector fueron implementados en una simulación en GEANT4 utilizando la lista de física electromagnética estándar, y la lista de física QGSP_BIC_HP para interacciones hadrónicas. De igual manera, se activaron en la simulación todos los procesos electromagnéticos y de decaimiento de partículas, incluyendo el decaimiento de muones. La geometría del detector incluyó el volumen de plástico centelleador, con densidad de 1.032 g/cm^3 , con una capa gruesa de 0.08 cm de PVC alrededor de todas las caras, a excepción de las caras

pequeñas de $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$, donde se encuentran los PMTs. Por completez, en cada extremo de la barra se añadió un modelo simple de los PMTs, con sus correspondientes escudos de mu-metal.

El universo que contiene a la semiesfera y donde los muones son generados se llenó con aire. La corrección de Birks en la energía se activó con una constante de Birks $K_B = 1.26 \times 10^{-2} \text{ gMeV}^{-1}\text{cm}^{-2}$, correspondiente al material PVT. Únicamente el volumen de plástico centelleador se definió como un volumen sensible donde se registró la energía depositada por las partículas que pasaban a través de él.

Los efectos de la respuesta del PMT, tales como efectos no lineales, ruido del sistema de adquisición de datos (DAQ) y saturación, fueron implementados en términos de una convolución del espectro simulado de energías depositadas con una función de respuesta gaussiana genérica y una conversión no lineal de energía (en MeV) a unidades digitalizadas (ADC). Los parámetros de la función de respuesta y de la no linealidad se determinaron con un ajuste a un espectro experimental, y después fueron incorporados a la simulación con la finalidad de incluir esos efectos en cada evento. Esto se consiguió añadiendo a la energía depositada de un evento dado una fluctuación gaussiana aleatoria dependiente del valor de la energía depositada, y aplicando la conversión de MeV a ADC de acuerdo al modelo no lineal.

La simulación fue comprobada comparando las distribuciones angulares y de energías de los muones que entraron a través de las caras del detector con predicciones teóricas basadas en el modelo de la fuente y en la geometría del detector. Las gráficas superiores de la figura 2-2 muestran la distribución de las variables de entrada del algoritmo generador de muones: (a) energía, (b) ángulo cenital, y (c) ángulo azimutal, comparadas con los espectros de energía de la parametrización, y de la distribución angular $dP \propto \cos^2 \theta d\Omega$. Por construcción, la distribución del ángulo cenital es proporcional a $\sin \theta \cos^2 \theta$, y la distribución de φ es uniforme. Las gráficas (d), (e) y (f) de la figura muestran las distribuciones correspondientes para muones que depositan energía en la barra. Como es de esperarse, la distribución de energías de muones prácticamente no se ve afectada por la condición de que entren en la barra, mientras que las distribuciones angulares reflejan el hecho de que el flujo de muones que entra por cada cara depende de la orientación que estas últimas tengan (horizontal o vertical).

Para las distribución angular considerada, se puede mostrar que las distribuciones de los ángulos cenital y azimutal de los muones que entran en la barra tienen la

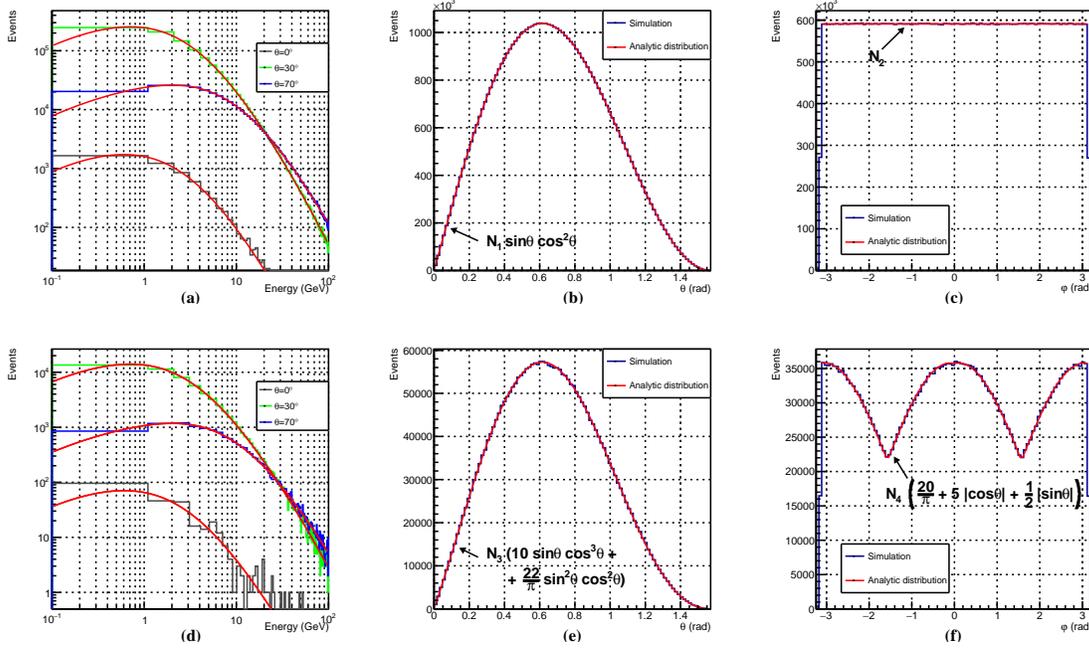


Figura 2-2: Comprobaciones de la simulación en GEANT4. Las gráficas superiores muestran las distribuciones de (a) energía, (b) ángulo cenital, y (c) ángulo azimutal de los muones generados. Las gráficas inferiores muestran las distribuciones de (d) energía, (e) ángulo cenital, y (f) ángulo azimutal de los muones simulados que entran a través de alguna de las caras del detector. Las líneas continuas muestran el comportamiento analítico esperado en cada caso.

forma exacta

$$\Theta(\theta) \propto A \sin \theta \cos^3 \theta + B \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (2.5)$$

$$\Phi(\varphi) \propto C + D |\cos \varphi| + E |\sin \varphi|, \quad (2.6)$$

donde $(A, B, C, D, E) = (10, 22/\pi, 20/\pi, 5, 1/2)$. Este comportamiento se verifica en las gráficas (e) y (f) de la figura 2-2. Para la distribución de θ en la Ec. (2.5), el primer término corresponde a la cara horizontal, mientras que el segundo término corresponde a la contribución de las 4 caras verticales. Para la distribución de φ en la Ec. (2.6), el término constante corresponde a la cara horizontal, el término $|\cos \theta|$ corresponde a las caras verticales grandes perpendiculares al eje X, y el término $|\sin \theta|$ corresponde a las caras verticales pequeñas perpendiculares al eje Y. Para esta barra, el área de las caras pequeñas cuadradas es una décima parte de las caras rectangulares grandes.

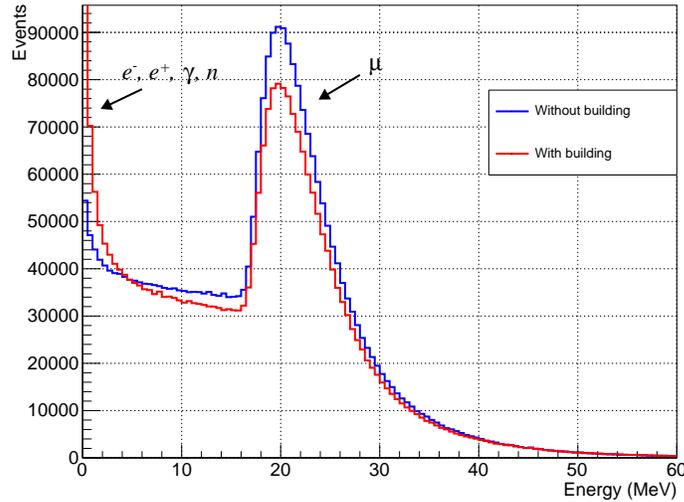


Figura 2-3: Distribuciones de la energía depositada E_d por los muones en la barra, de acuerdo a la simulación con y sin edificio (en rojo y azul, respectivamente). El histograma se calcula hasta 100 MeV (0.5 MeV/bin), aquí se muestra hasta 60 MeV.

En este modelo, se implementó una geometría aproximada del edificio para generar espectros que fueran comparados con los datos experimentales. El laboratorio donde se llevó a cabo el experimento tiene paredes de 4.4 m de largo y 4 m de altura, por tanto, el edificio se modeló como una caja con estas dimensiones, con paredes de concreto verticales de 20 cm de grosor y un techo con 28 cm de concreto. Se añadió una capa adicional de ladrillo de 40 cm por encima del techo para simular el material adicional de los dos pisos arriba del laboratorio. Este modelo del edificio se adaptó para estar totalmente contenido dentro del domo semiesférico utilizado en el algoritmo generador de muones.

Las distribuciones de las energías depositadas por los muones en la simulación con y sin la estructura del edificio se comparan en la figura 2-3. El edificio tiene dos efectos considerables: *i*) reduce el número de muones en el pico de Landau a 20 MeV, correspondiente a la energía depositada por las partículas verticales de mínima ionización (MIPs) viajando ~ 10 cm en el material y depositando ~ 2 MeV/cm, y *ii*) incrementa la parte de bajas energías del espectro debido a partículas de cascadas electromagnéticas y a neutrones.

El número de muones simulados por unidad de tiempo se puede calcular integrando

la distribución angular omnienergética de muones que alcanzan la superficie,

$$\frac{dN}{dA_{\perp} d\Omega dt} = I_0 \cos^2 \theta, \quad (2.7)$$

sobre el ángulo sólido del hemisferio superior por encima del detector, y sobre el área del plano tangente desde donde los muones se originan. La intensidad integral vertical de muones en la simulación se fijó arbitrariamente al valor de referencia a nivel del mar para muones con energías > 1 GeV de $I_0^{\text{sim}} = 70 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$ (ver Sección 1.1). La integración produce

$$\frac{dN}{dt} = \frac{2\pi}{3} I_0^{\text{sim}} t^2 = 329.87\text{s}^{-1} = 1\,187\,532 \text{ h}^{-1}. \quad (2.8)$$

En total, se simularon 50,000,000 muones, correspondiendo al tiempo de simulación $T_{\text{sim}} = 42.10$ h. Para distribuciones angulares con $n \neq 2$, el cálculo en la Ec. (2.8) se efectúa reemplazando $3 \rightarrow n + 1$ en el denominador.

De acuerdo a la simulación y a los parámetros ajustados de la respuesta del detector, solamente aquellos muones con $E \gtrsim 110$ MeV producen pulsos con una carga integrada > 100 ADC ($E_d > 2.6$ MeV).

Capítulo 3

Experimento

En este capítulo se describe el montaje experimental para la detección de muones en el laboratorio.

3.1. Montaje experimental

En la figura 3-1 se muestra un diagrama del experimento, el cual consiste en una barra de plástico centelleador de PVT (Rexon RP-408) de dimensiones $100\text{ cm} \times 10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ con un tubo fotomultiplicador (PMT) de 3" (Rexon-R1200P) recubierto con un escudo de mu-metal, y fijado en cada extremo de la barra. La barra se envolvió en una cubierta reflectante de papel de aluminio, una capa intermedia de cinta de teflón, y una capa externa de cinta negra de PVC.

La suma analógica de las dos señales de los PMTs se procesa en un modo de disparo automático. Una copia del pulso sumado se envía a un módulo discriminador cuya salida dispara la apertura de un pulso de 160 ns de ancho en un generador de compuertas, el cual es, entonces, recibido como la señal "Gate" en un módulo integrador de carga (CAEN V965 QDC). Una segunda copia de la suma analógica de las señales de los PMTs, producida simultáneamente con la primera, se envía a través de un módulo de retraso ajustado para que la señal esté contenida en la compuerta de integración, para después enviarla a uno de los canales de entrada del QDC. Finalmente, se utiliza un puente (CAEN V1718 USB) para establecer la comunicación con la computadora del DAQ donde se acumula el espectro de la carga integrada del pulso sumado.

Con el nivel del discriminador configurado en 50 mV, se promedió una frecuencia de disparos de $\sim 450\text{ Hz}$. A esta frecuencia, la probabilidad de tener dos eventos en

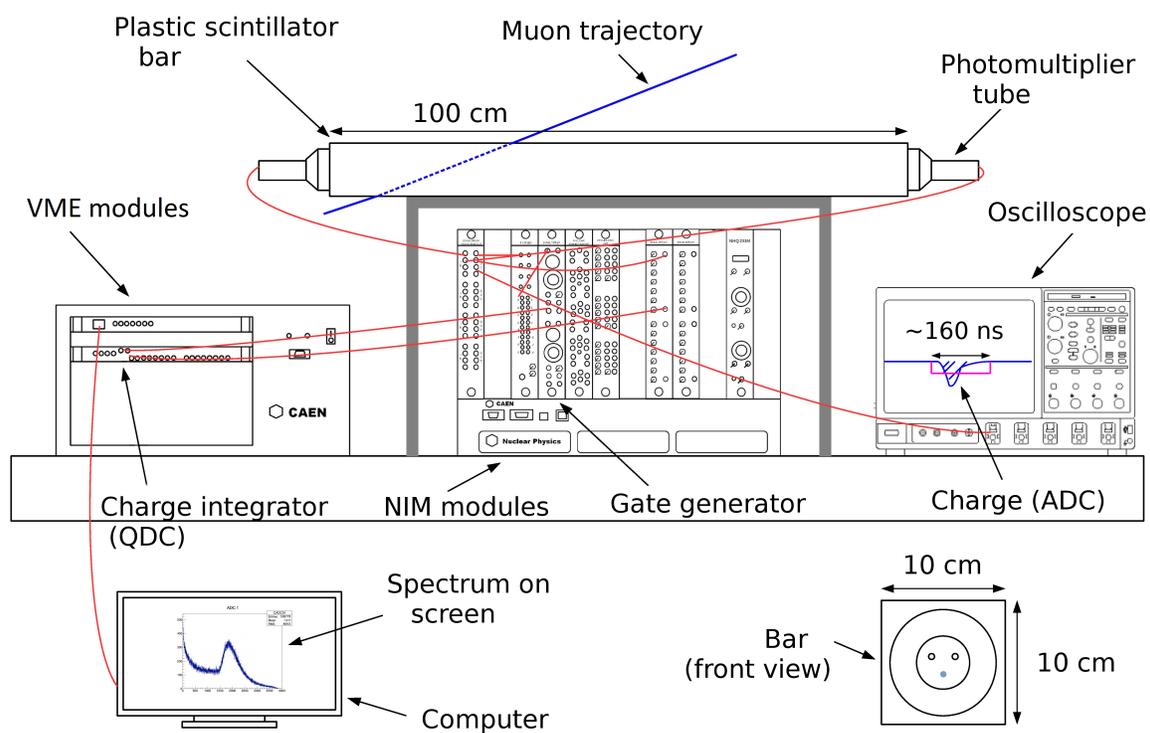


Figura 3-1: Diagrama del montaje experimental.

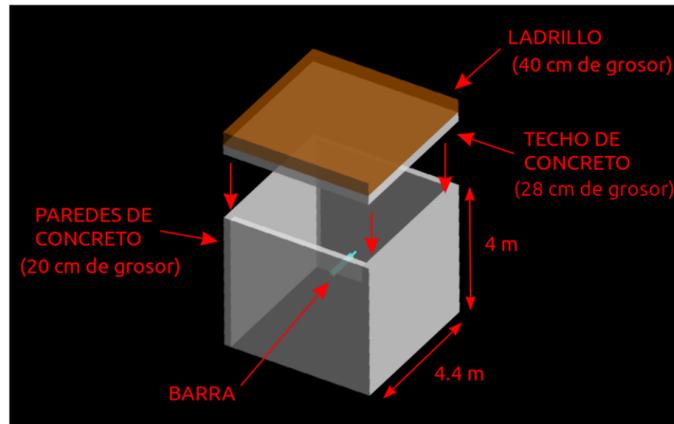


Figura 3-2: Diagrama del edificio implementado en la simulación en Geant4.

la misma ventana de disparo es $< 10^{-6}$. La eficiencia del DAQ que se midió fue de $\epsilon = 0.998 \pm 0.003\%$ para pulsos con frecuencias por debajo de 1 kHz. Esta eficiencia se midió enviando pulsos cuadrados al DAQ, los cuales fueron digitalizados a 2200 ADC (cerca de la posición del pico del espectro de muones).

El experimento se realizó en el interior del Laboratorio de Detectores en el ICN-UNAM en la Ciudad de México (latitud 19.33° , longitud 99.19° , 2,268 m sobre el nivel del mar, rigidez geomagnética de 8.2 GV [27, 28]), bajo una cubierta efectiva de ~ 28 cm de concreto y 40 cm de ladrillo en el techo, y ~ 20 cm de concreto en las paredes que conforman el edificio. En la figura 3-2 se muestra un diagrama del edificio utilizado en la simulación en Geant4. Los espectros fueron adquiridos durante 5 horas con el detector orientado $\sim 10^\circ$ respecto a la dirección N-S (en el sentido de las manecillas del reloj, visto desde arriba).

Adicionalmente, se tomaron espectros de 5 horas con el detector orientado en las direcciones geográficas Norte-Sur, Este-Oeste, Noreste-Suroeste y Noroeste-Sureste. En la figura 3-3 se muestra un diagrama de las orientaciones del detector en el laboratorio.

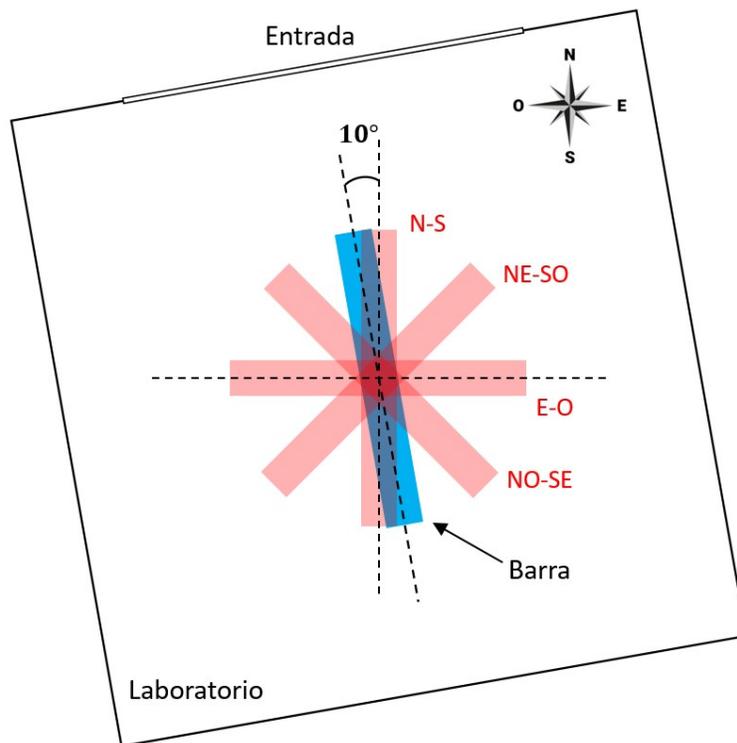


Figura 3-3: Diagrama de las orientaciones del detector en el laboratorio para el desarrollo del experimento.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se describe el método del ajuste del modelo a los datos experimentales y los resultados obtenidos. También, se da una estimación de la intensidad vertical integral de muones y del exponente en la distribución angular. Por último, se muestra una prueba de cerradura del funcionamiento del método así como los resultados de la medición con diferentes orientaciones del detector.

4.1. Ajuste a los datos

Con el objetivo de combinar el espectro de energías depositadas de la simulación de Geant4 y los efectos de las fluctuaciones aleatorias y de la no linealidad en la respuesta de la energía del detector, se construyó una función de convolución que lograra un ajuste al espectro experimental. La función tiene nueve parámetros: la normalización del espectro de muones (N_μ), las normalizaciones de dos espectros de fondo de bajas energías que decaen exponencialmente (N_{b_1} y N_{b_2}), las constantes de decaimiento exponencial de los espectros de fondo de baja energía (ε_1 y ε_2), la resolución de la energía fraccionaria a 20 MeV respecto a la energía depositada (f), y los tres parámetros del modelo no lineal para la respuesta del detector (a_0 , a_1 y a_2). La función del ajuste está dada por

$$\mathcal{F}(E_a) = \frac{1}{(dE_a/dE_v)} \int_0^{E_{\max}} (N_\mu F_\mu(E_d) + N_{b_1}(1/\varepsilon_1)e^{-E_d/\varepsilon_1} + N_{b_2}(1/\varepsilon_2)e^{-E_d/\varepsilon_2}) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(E_v-E_d)^2}{2\sigma^2}} dE_d. \quad (4.1)$$

En la función de convolución (Ec. (4.1)), E_a es la energía en unidades digitalizadas (ADC), E_d es la energía depositada (en MeV) por la partícula en el volumen sensible

de plástico centelleador de acuerdo a la simulación de Geant4, y E_v es la energía “visible”, en MeV, que resulta de una respuesta total gaussiana a una energía depositada E_d . Todos los efectos no lineales y de saturación, independientemente de su origen (detector o electrónica), son considerados en términos de la conversión del espectro de unidades de MeV a ADC, dada por el factor $(dE_a/dE_v)^{-1}$. Se utilizan, además, las definiciones

$$\sigma = f\sqrt{E_0 E_d}, \quad \text{con } E_0 = 20 \text{ MeV}, \quad (4.2)$$

y

$$\frac{dE_a}{dE_v} = \frac{a_1}{(1 + a_2 E_v)^2}, \quad \text{con } E_v = \frac{E_a - a_0}{a_1 + a_0 a_2 - a_2 E_a}. \quad (4.3)$$

Asimismo, $F_\mu(E_d) = (1/\mathcal{N}_\mu^{\text{sim}}) d\mathcal{N}_\mu/dE_d$, es el espectro de energías depositadas normalizado a 1 obtenido al dividir el espectro simulado de Geant4 de la figura 2-3 (con edificio) por el ancho del bin (0.5 MeV/bin) y por el número total de entradas en el histograma simulado; su integral desde 0 a E_{max} es, por definición, fijada a 1. La forma del espectro en la parte de bajas energías, debida a neutrones y cascadas electromagnéticas, no está incluida en la simulación y es modelada por dos exponenciales, $(1/\varepsilon_{1,2}) e^{-E_d/\varepsilon_{1,2}}$, con constantes de decaimiento $\varepsilon_{1,2}$, en MeV (Apéndice B). Ambos tipos de espectros (de muones y espectros de fondo de baja energía) son tratados de igual forma respecto a la respuesta modelada del detector. Como se puede notar, la Ec. (4.2) establece que el ancho de la gaussiana se escala como la raíz cuadrada de la energía E_d .

La función $\mathcal{F}(E_a) = dN/dE_a$ representa el número de eventos por intervalo de energía visible (eventos por ADC), y fue ajustada al espectro experimental en el intervalo de 100 a 3500 ADC, como se muestra en la figura 4-1. En el ajuste, la constante a_0 del modelo de la no linealidad se mantuvo fija a un valor consistente con el pedestal del DAQ. En la integral de la convolución, dada la dependencia del ancho de la gaussiana en la Ec. (4.2), el efecto de truncar la función de respuesta gaussiana a $E_d = 0$ es despreciable, para pulsos con $E_a > 100$ ADC. La tabla 4.1 muestra los valores de los valores ajustados y sus incertidumbres.

La posición y la forma del pico en el espectro son determinadas por los últimos cuatro parámetros de la tabla 4.1. La respuesta total en la energía es consistente con una resolución del $\sim 5\%$ a 20 MeV (parámetro f). La ecuación (4.3) implica que

$$E_a = a_0 + \frac{a_1 E_v}{1 + a_2 E_v}, \quad (4.4)$$

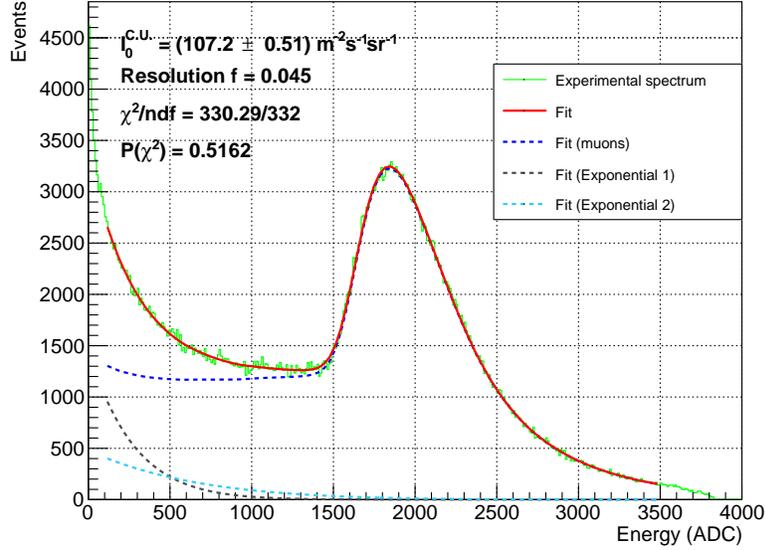


Figura 4-1: Espectro experimental (en verde) comparado con el espectro ajustado en la integral de convolución de la Ec. (4.1), en el rango de 100-3500 ADC (en rojo). La componente de muones cósmogénicos se muestra en azul oscuro.

Parámetro	Smith-Duller	EXPACS ($\cos^2 \theta$)	EXPACS ($f(\theta)$)	Reyna	Unidades
f	4.51 ± 0.18	4.39 ± 0.18	5.20 ± 0.15	4.55 ± 0.17	$(\times 10^{-2})$
N_μ	5.36 ± 0.03	5.29 ± 0.03	5.14 ± 0.03	5.34 ± 0.03	$(\times 10^5)$
N_{b_1}	0.88 ± 0.30	0.91 ± 0.26	0.97 ± 0.06	1.00 ± 0.10	$(\times 10^5)$
ε_1	2.20 ± 0.42	2.15 ± 0.39	2.08 ± 0.15	2.30 ± 0.19	MeV
N_{b_2}	4.10 ± 3.15	4.22 ± 2.75	5.27 ± 0.59	3.06 ± 1.02	$(\times 10^4)$
ε_2	4.97 ± 2.01	5.18 ± 2.02	7.28 ± 1.11	6.61 ± 2.01	MeV
a_0	-2.175	-2.175	-2.175	-2.175	$(\times 10^2)$ ADC
a_1	1.24 ± 0.004	1.24 ± 0.004	1.26 ± 0.006	1.24 ± 0.005	$(\times 10^2)$ ADC/MeV
a_2	1.07 ± 0.02	1.07 ± 0.02	1.12 ± 0.03	1.03 ± 0.02	$(\times 10^{-2})$ MeV $^{-1}$
I_0	107.2 ± 0.51	112.6 ± 0.60	110.0 ± 0.74	103.7 ± 0.61	$\text{m}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1}$
χ^2/ndf	330.3/332	326.4/332	348.5/332	329.7/332	

Tabla 4.1: Parámetros de la función de convolución, Ec. (4.1), ajustados al espectro experimental para diferentes modelos del flujo. La última fila muestra el valor extraído de la intensidad vertical de muones. Los errores son de la estadística del ajuste.

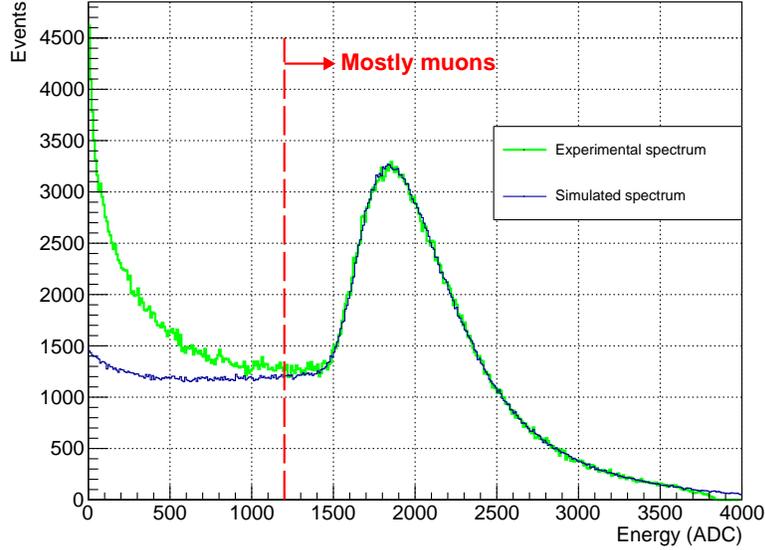


Figura 4-2: Espectro simulado con efectos de resolución y de no linealidad incluidos en cada evento (en azul) comparado con el espectro experimental (en verde). La simulación utilizó los parámetros f , a_0 , a_1 y a_2 de la tabla 4.1.

de donde se observa que el parámetro $a_0 = -217.5$ ADC (fijo) indica la posición del cero de energía en la escala del histograma (pedestal). El parámetro $a_1 \approx 124$ ADC/MeV representa la parte lineal del factor de conversión de energía a unidades digitalizadas, y el parámetro $a_2 \approx 1\%$ /MeV representa la no linealidad en la respuesta del detector, la cual es significativa ($> 10\%$) para energías mayores a 10 MeV, y, por tanto, para la mayor parte del espectro. Sin embargo, se esperaba una no linealidad de esa magnitud dado que los PMTs operaban cerca del voltaje máximo recomendado, esto con el fin de hacer más visible la parte plana del espectro de muones.

Como comprobación de que la función de convolución, Ec. (4.1), representa los efectos físicos de las fluctuaciones y los efectos de la no linealidad correctamente, se completó la simulación en Geant4 añadiendo estos efectos a cada evento. A la energía depositada E_d en un evento, se le añadió una fluctuación gaussiana con σ dada por la Ec. (4.2), obteniendo una energía $E'_d = E_d + \delta E_d$, y la energía en unidades digitalizadas se determinó utilizando la Ec. (4.4). La figura 4-2 muestra la comparación del espectro simulado, incorporando la resolución y la no linealidad en cada evento, con el espectro experimental, demostrando la equivalencia con el método de convolución.

4.2. Intensidad vertical integral de muones y distribución angular

El parámetro de normalización de muones (N_μ) en la tabla 4.1 es proporcional a la intensidad vertical integral de muones en la ubicación del lugar donde se llevó a cabo el experimento (I_0^{lab}), y al tiempo de ejecución (T), así

$$I_0^{\text{lab}} = I_0^{\text{sim}} \left(\frac{N_\mu}{\mathcal{N}_\mu^{\text{sim}}} \right) \left(\frac{T_{\text{sim}}}{T} \right) \times \left(\frac{1}{\epsilon} \right), \quad (4.5)$$

donde I_0^{sim} es la intensidad vertical integral de muones utilizada en el generador de muones de la sección 2.1, T_{sim} es el tiempo de simulación, y ϵ es una eficiencia de detección efectiva, la cual se tomó como la eficiencia del DAQ de la sección 3.1. Dado que es una pequeña corrección, de aquí en adelante se aproximó por $\epsilon \approx 1$; sin embargo, sí se consideró el efecto en el error sistemático para I_0 . Para una muestra de 5 h, se produjo una medición de la intensidad vertical integral de muones de $I_0 = (107.2 \pm 0.51) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$ utilizando como referencia el modelo del flujo de Smith-Duller, el cual se considerará como resultado nominal para $n = 2$.

Como un intento de evaluar el error sistemático en I_0 que surge del modelo del flujo de muones atmosféricos, se consideraron tres modelos alternativos. El primero utilizó la distribución de energías calculada con la herramienta EXPACS [14, 15] en las coordenadas geográficas de la Ciudad de México, pero forzando una distribución angular $\cos^2 \theta$. Un segundo modelo utilizó ambos, las distribuciones angular y de energías como lo calcula EXPACS, forzando la distribución angular a que tuviera la misma normalización que en el caso $\cos^2 \theta$. El tercer modelo considerado fue el de Reyna [29], el cual además produce una distribución angular proporcional a $\cos^2 \theta$.

La tabla 4.1 muestra el resultado de los ajustes de la función de convolución (Ec. (4.1)) para cada uno de los modelos. Los parámetros extraídos son, en general, muy consistentes, y concuerdan razonablemente con los esperados, derivados de mediciones anteriores a diferentes altitudes, para ubicaciones alejadas de anomalías geomagnéticas intensas [30]. La tabla 4.2 resume los errores sistemáticos que fueron considerados para la medición de I_0 . El efecto del modelo del flujo sobre I_0 con respecto al nominal es del 5.4% (RMS sobre el nominal). Adicionalmente, se estudiaron variaciones en el grosor efectivo del edificio en la simulación ($\pm 50\%$) y se observó que produjeron una variación del 2.6% en I_0 . Incluyendo el error del 0.2% en la ineficiencia del DAQ, se estimó un error sistemático total del 5.4%. Considerando estas variaciones sistemáticas, para $n = 2$ fijo, la intensidad vertical integral nominal de muones resulta

Fuente	Error ($\text{m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$)	(%)
Modelo del flujo	5.0	4.6
Cubierta del edificio ($\pm 50\%$)	2.8	2.6
Eficiencia del DAQ	0.2	0.2
Total	5.8	5.4

Tabla 4.2: Resumen de errores sistemáticos para $n = 2$ fijo. El error porcentual es relativo al valor nominal de $I_0 = 107.2 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-2}\text{sr}^{-1}$.

$$I_0 = (107.2 \pm 0.51(\text{stat}) \pm 5.8(\text{syst})) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}.$$

Aunque una distribución angular con $n = 2$ ofrece una buena descripción del espectro observado en la figura 4-1, los datos mostraron una preferencia por un valor ligeramente mayor. El exponente preferido en la distribución angular de muones se midió construyendo un conjunto de simulaciones con diferentes valores de n y realizando, para cada uno, un ajuste para los 8 parámetros libres de la Ec. (4.1). Las simulaciones se construyeron aplicando un factor de repesamiento $\cos^n \theta / \cos^2 \theta$ a cada evento generado con el modelo de Smith-Duller. Esto modifica la altura del pico de Landau y la región plana a su izquierda (el *plateau*) en la distribución de energías depositadas. En la figura 4-3 se muestra el efecto de variar n en la distribución de energías observadas (en unidades ADC). Una n mayor produce un espectro con más muones verticales, añadiendo esos eventos a la población en el pico, relativos a aquellos que entran con ángulos cenitales grandes, los cuales contribuyen al *plateau* (muones que entran al detector y salen por alguna cara adyacente o *corner clipping muons*). La magnitud de este efecto es particular de la geometría del arreglo utilizado en este trabajo. Si el detector fuera, por ejemplo, un bloque muy grueso de plástico centelleador, los muones que emergen por caras adyacentes a las que entraron podrían llegar a ser comparables o incluso dominar sobre el pico de Landau, diluyendo el efecto. Además, para geometrías más generales de detectores, muones verticales podrían emerger por caras adyacentes y cambiar la forma del espectro drásticamente.

La gráfica en la esquina superior derecha de la figura 4-3 muestra la razón entre la altura del pico y la altura del *plateau* a 600 ADC (*razón pico-plateau* o *rpp*), como función de n , demostrando la sensibilidad en la forma del espectro en relación al exponente en la distribución angular.

En la figura 4-4 se gráfica el valor de χ^2 como función de n , para cada ajuste de la función de convolución. Se muestra, además, el mínimo de χ^2 correspondiente al conjunto de valores obtenidos, así como el intervalo a 1σ ($\Delta\chi^2 = 1$). El valor medido del expo-

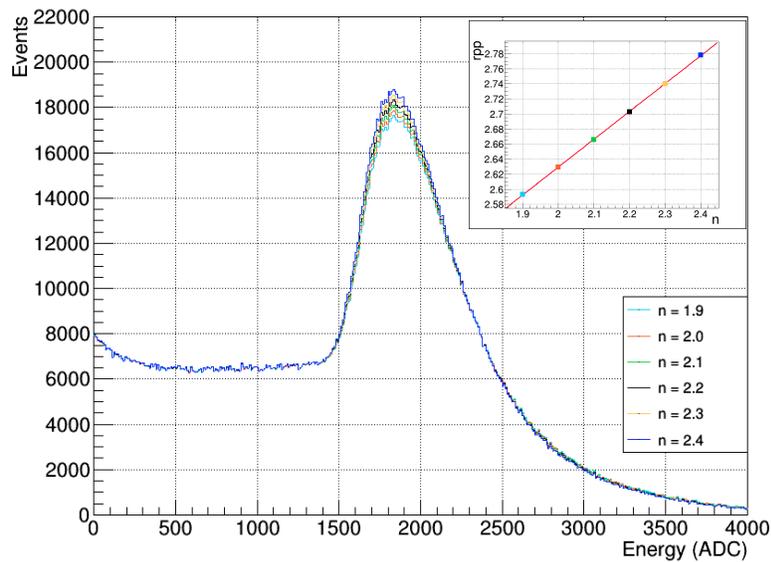


Figura 4-3: Espectros de energía simulados de muones para diferentes valores del exponente en la distribución angular. Los espectros fueron normalizados arbitrariamente para hacerlos coincidir en la región del *plateau* (< 1500 ADC). La gráfica superior a la derecha muestra que la *razón pico-plateau* crece linealmente con n .

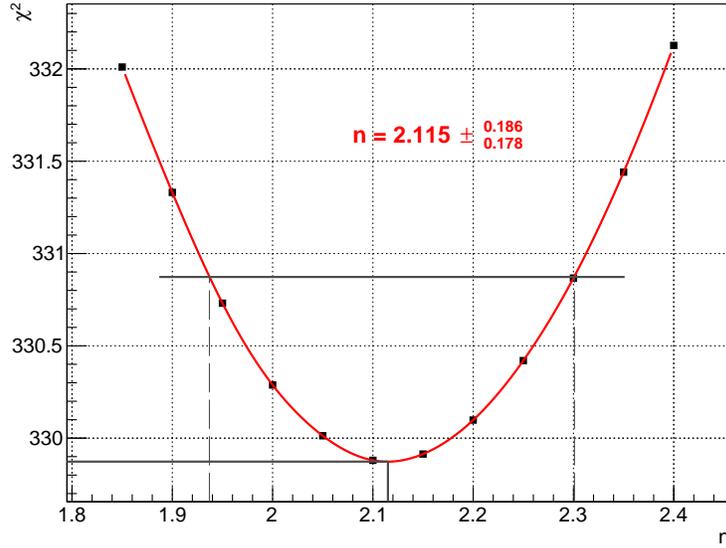


Figura 4-4: Mínimo de χ^2 obtenido de los ajustes de la función de convolución, Ec. (4.1), a los datos experimentales, utilizando diferentes valores de n en el espectro simulado de energías depositadas $F_\mu(E_d)$. El mínimo y el intervalo a 1σ ($\Delta\chi^2 = 1$) representan la marginación sobre los 8 parámetros libres en el ajuste.

nente en la distribución angular, obtenido del mínimo en la gráfica, es $n = 2.12^{+0.19}_{-0.18}$ (sólo errores estadísticos). Repitiendo el mismo ejercicio utilizando los modelos del flujo de EXPACS y de Reyna, y variando el grosor del edificio en $\pm 50\%$, resultó en una variación RMS del 5% sobre el valor de n , comparable al error estadístico. Combinando ambos efectos, se reporta un valor medido de $n = 2.12 \pm 0.19(\text{stat}) \pm 0.11(\text{syst})$.

En el valor preferido de n , el tiempo de simulación T_{sim} debe ser recalculado, como se describe en la sección 2.2. Tomando esto en cuenta, la intensidad vertical integral medida resulta $I_0 = (114.9 \pm 12.9(\text{stat}) \pm 6.2(\text{syst})) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$, donde la magnitud del error estadístico ($\sim 11\%$) surge de la variación de n dentro del intervalo a 1σ derivado de la figura 4-4, y calculando I_0 con el tiempo T_{sim} correcto en cada valor. Dentro de los errores, esto es consistente con la medición reportada suponiendo un valor $n = 2$. Ambas mediciones concuerdan razonablemente con las esperadas para el flujo de μ^+ y μ^- a esta altitud (ver por ejemplo la figura 29.4 en [30]), en la ausencia de anomalías geomagnéticas intensas.

4.3. Pruebas de cerradura

Con el objetivo de evaluar la robustez del procedimiento de ajuste y la validez de las incertidumbres estimadas en I_0 y en n , se realizaron ajustes al espectro con parámetros de entrada $I_0 = 70 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$, y $n = 2$ (el resto de los parámetros se establecieron como los de la segunda columna en la tabla 4.1) en dos escenarios.

En el escenario I se consideró una simulación donde sólomente muones impactaban en el detector sin la estructura del edificio y sin las componentes de fondo exponenciales ($N_{b_1} = N_{b_2} = 0$). El espectro de energías depositadas utilizado en esta simulación corresponde al modelo de Smith-Duller y se muestra como el espectro azul en la figura 2-3. El ajuste a la función de convolución se realizó permitiendo variar los parámetros f , N , a_1 , a_2 y también n en la manera descrita en la sección 4.2. El ajuste produjo valores $I_0 = (70.1 \pm 3.6) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$, y $n = (2.01 \pm 0.08)$ (sólamente errores estadísticos), los cuales son consistentes con los valores de entrada dentro de los errores.

Es interesante ver cuál es el resultado de ajustar al espectro de datos de la figura 4-1 sin la cubierta del edificio, pero dejando libres los parámetros que describen los espectros de fondo de baja energía. Los resultados fueron $I_0 = (101.9^{+15.3}_{-12.6}) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$ y $n = (1.95^{+0.25}_{-0.21})$ (sólamente errores estadísticos), los cuales son $\sim 11\%$ (I_0) y $\sim 8\%$ (n) menores que los valores obtenidos considerando el edificio; sin embargo, están todavía dentro de 1σ (1 desviación estándar) una de la otra.

En el escenario II se consideró la simulación completa con la estructura del edificio y los espectros de fondo a bajas energías, aplicado de la misma forma al espectro experimental descrito en la sección 4.1. El ajuste se realizó como en el escenario I pero permitiendo variar, adicionalmente, los parámetros N_{b_1} , ε_1 , N_{b_2} y ε_2 . La figura 4-5 muestra la distribución de los valores ajustados de I_0 y de n , de una colección de 20 espectros simulados estadísticamente independientes. Estas distribuciones se describen correctamente por distribuciones gaussianas con las siguientes medias y desviaciones estándar:

$$\begin{aligned} I_0 : \text{ media} &= 72.5 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1} \\ &\sigma = 7.9 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n : \text{ media} &= 2.08 \\ &\sigma = 0.20 \end{aligned}$$

Las medias de las distribuciones, con sus intervalos de error a 1σ mostrados por las bandas grises, son cercanamente consistentes con los parámetros de entrada, mos-

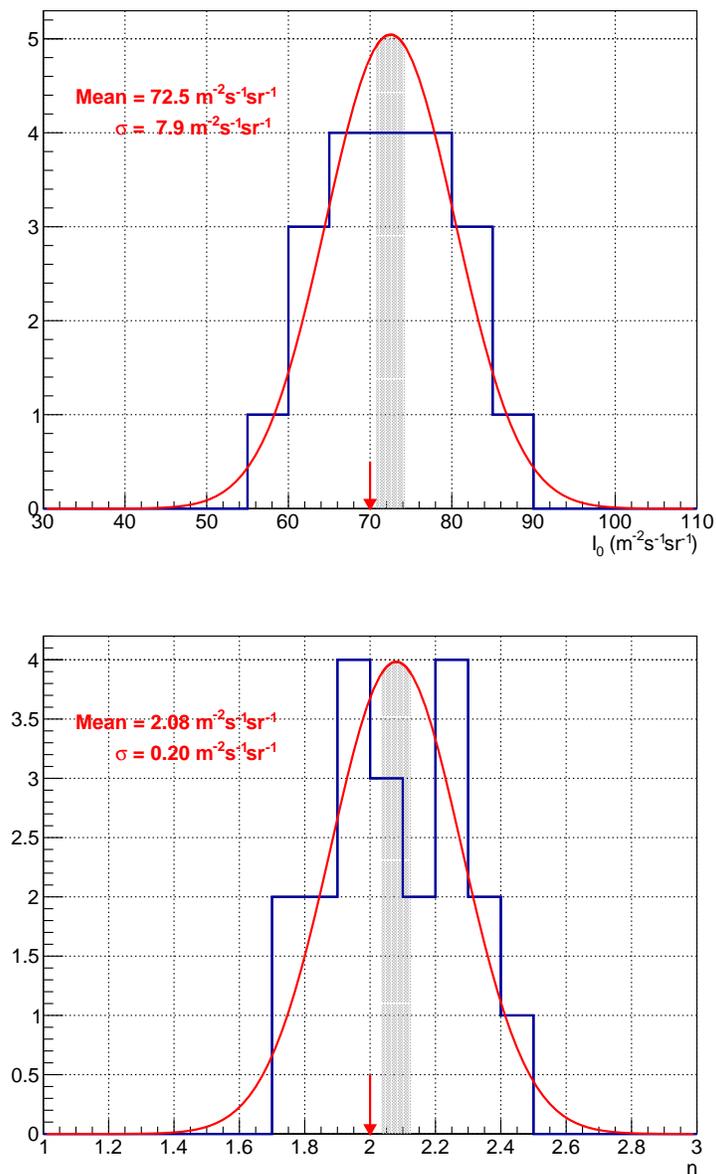


Figura 4-5: Distribuciones de los resultados de los ajustes para I_0 (arriba) y n (abajo) de la prueba de cerradura en el escenario II (ver el texto). Las flechas indican la ubicación de los parámetros de entrada ($I_0 = 70 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$, y $n = 2$) y las regiones sombreadas indican el error a 1σ en las medias de las muestras. Las curvas rojas son ajustes gaussianos a las distribuciones.

trados por las flechas rojas, con un pequeño *offset* ($\sim 4\%$) hacia valores mayores, lo cual no es inesperado dado el tamaño relativamente pequeño de la muestra. Con una estadística grande, el error podría corregirse o agregarse al conjunto de errores; por ahora, no se incluirá en los resultados. Las medias y las desviaciones estándar de estas distribuciones indican que el error estadístico esperado sobre I_0 y sobre n de un ajuste a cualquier espectro dado debería ser del orden de 10-11%. Esto es consistente con los errores estimados del ajuste al espectro de datos de la figura 4-1.

En todos los ajustes involucrados en estas pruebas, se permitió que los otros parámetros de ajuste, incluyendo aquellos relacionados a la respuesta del detector f , a_1 y a_2 , variaran libremente (a_0 es un *offset* fijo de la escala de energías establecido en el DAQ y no se le permitió variar). Se inspeccionaron cuidadosamente los valores ajustados y se encontró que estaban dentro de fluctuaciones razonables de los valores esperados.

4.4. Variación de la orientación azimutal

El espectro de la figura 4-1 se produjo con la barra centelleadora alineada a 10° respecto a la dirección N-S. Adicionalmente, se tomaron cuatro espectros orientando la barra centelleadora a lo largo de las direcciones N-S, NE-SO, E-O y NO-SE (como se describe en el capítulo 3), cada uno tomado durante 5 hr a aproximadamente la misma hora del día y con menos de una semana de diferencia del espectro de datos inicial. Las condiciones climatológicas variaron cada día, desde lluvioso a soleado y con temperaturas en un rango de 20 a 25°C . Las mediciones de n fueron obtenidas en la forma descrita en la sección 4.2. La gráfica superior en la figura 4-6 muestra los valores medidos de n para las 5 orientaciones, con un promedio $\langle n \rangle = 1.90 \pm 0.06$.

El ajuste se realizó de nuevo sobre el espectro de energías de cada orientación manteniendo n fijo al valor promedio, esto con el fin de obtener una nueva medición de I_0 para cada caso. Las incertidumbres en los valores de I_0 para cada orientación se obtuvieron realizando el ajuste con n fijado en los límites superior e inferior del intervalo para $\langle n \rangle$. Los valores medidos se muestran en la gráfica inferior de la figura 4-6.

Se puede observar que las fluctuaciones en las mediciones de n son consistentes con la variación del $\sim 10 - 11\%$ esperada de la prueba de cerradura del escenario II estudiada en la sección 4.3, y que las incertidumbres estimadas para cada uno de los ajustes también son consistentes con las medias de las 5 mediciones y con sus errores. La precisión de las mediciones individuales no provee una sensibilidad ante anisotropías azimutales.

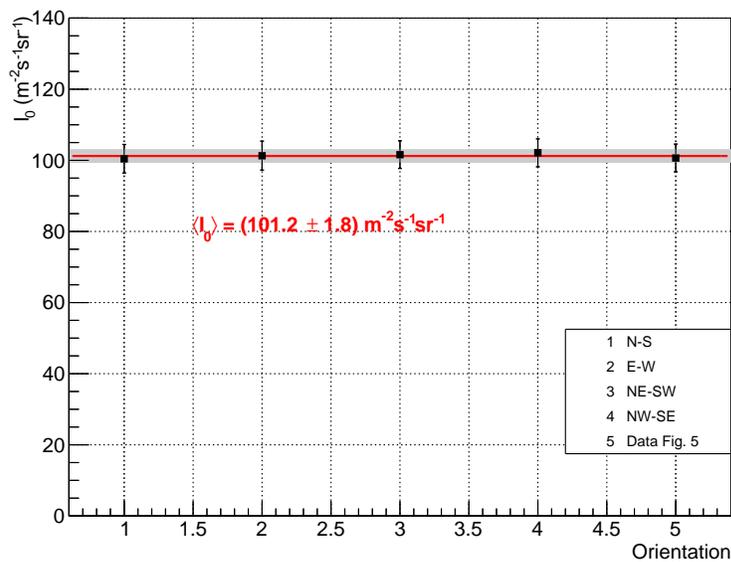
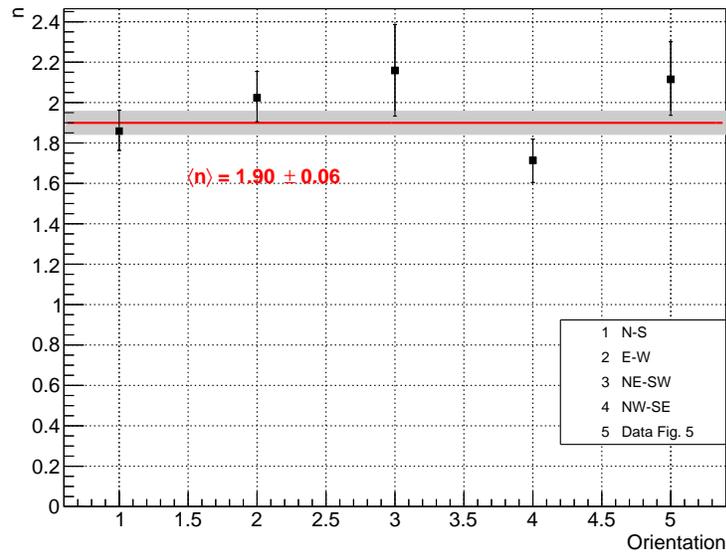


Figura 4-6: Conjunto de mediciones para diferentes orientaciones azimutales. El punto con la leyenda “Data Fig. 5” corresponde a la orientación de 10° con respecto a la dirección N-S. La línea roja es un ajuste constante a las 5 mediciones, y la banda gris es el error en este ajuste. En la gráfica inferior, I_0 se calcula con la misma $\langle n \rangle$ para todas las orientaciones.

Los valores de I_0 obtenidos con n fijo son altamente consistentes para todas las orientaciones. Promediando estas 5 mediciones, se obtiene $I_0 = (101.2 \pm 1.8(\text{stat}) \pm 5.5(\text{syst})) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$, donde se utilizó el error sistemático del 5.4% de la tabla 4.2. Usando el error sistemático del 5% encontrado previamente a la medición de n , se reporta, finalmente, $n = (1.90 \pm 0.06(\text{stat}) \pm 0.10(\text{syst}))$.

Capítulo 5

Otros modelos de generadores de muones

En este capítulo se introducen dos modelos adicionales al utilizado previamente para generar muones en la simulación, uno en el que se generan muones desde un plano horizontal sobre el detector y otro generando muones desde la superficie del detector. Se muestra el tiempo de simulación para cada uno de los 3 modelos y la eficiencia en cada caso. Finalmente, se da una prueba de la equivalencia entre los 3 modelos.

5.1. Modelo de semiesfera

El modelo de semiesfera (el cual fue utilizado por defecto en el generador de muones), se basa en la construcción de un plano tangente a una semiesfera, con el detector en su interior, como se describió en la sección 2.1, eligiendo las posiciones iniciales de los muones aleatoria y uniformemente sobre el plano, el cual debe ser suficientemente grande para cubrir al detector en su totalidad.

De la distribución angular, con un exponente n , dada por

$$\frac{dN}{dt dA_{\perp} d\Omega} = I_0 \cos^n \theta, \quad (5.1)$$

se puede encontrar, para este modelo, el número de partículas por unidad de tiempo, a través de un área determinada, como

$$\frac{dN}{dt} = I_0 \int_A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \sin \theta d\theta d\varphi dA = \frac{2\pi}{n+1} I_0 A. \quad (5.2)$$

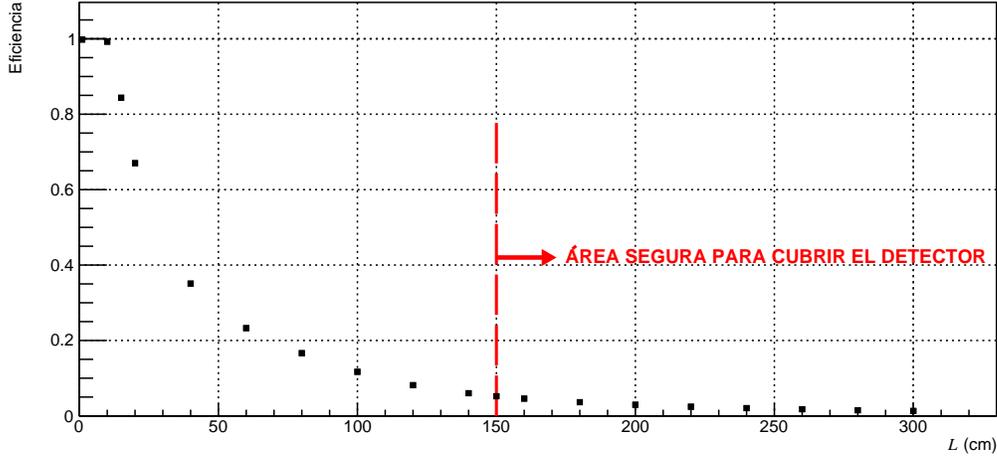


Figura 5-1: Eficiencia en el modelo de semiesfera. La línea roja indica la longitud de L que se utilizó en el modelo.

Integrando de 0 a T_{sim} , el tiempo de simulación en el que N muones atraviesan un área A estará dado por

$$T_{\text{sim}}(n) = \frac{N}{2\pi I_0 A} (n + 1). \quad (5.3)$$

Dado un número N de muones generados en la simulación, el número de ellos que entrarán al detector, N_{eff} , dependerá del área del plano tangente a la semiesfera. Si el plano es muy grande, sólo entrará en la barra una fracción pequeña de los muones generados, es decir, la eficiencia, $\epsilon = N_{\text{eff}}/N$, del modelo dependerá del área del plano y tenderá a 0 para $L \rightarrow \infty$. Por otro lado, si el área del plano es demasiado pequeña, a pesar de que la eficiencia se aproxima al 100 %, la simulación no representaría de manera fidedigna lo que ocurre en la realidad. En la figura 5-1 se muestra la gráfica de la eficiencia de este modelo como función del tamaño de uno de los lados, L , del plano. Para $L \gtrsim 150$ cm, el plano cubre de manera completa al detector, situación que se asemeja a lo que ocurre realmente.

5.2. Modelo de plano horizontal

En este modelo, se construye un plano horizontal sobre el detector, sobre el cual se seleccionan aleatoria y uniformemente las posiciones iniciales de las partículas generadas en la simulación (figura 5-2). Las dimensiones del plano deben ser grandes comparadas con las del detector; en este caso, el plano tiene forma cuadrada de di-

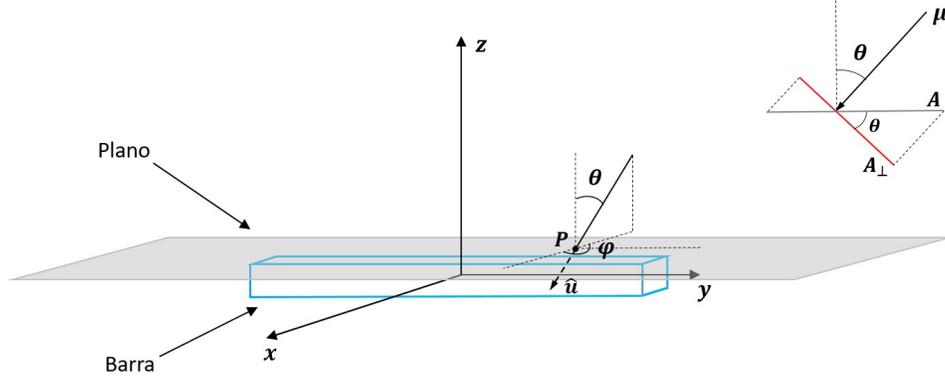


Figura 5-2: Geometría del modelo generador de muones con un plano horizontal. En la parte superior a la derecha, se muestra la proyección del área del plano sobre un elemento de área perpendicular a la trayectoria de la partícula generada.

mensionen $L \times L$, con $L = 5$ m, y está a una distancia $d = 0.5$ cm de la superficie horizontal superior de la barra. El detector se coloca centrado en el origen y orientado a lo largo del eje Y.

La dirección de las partículas se determinará eligiendo aleatoriamente ángulos θ y φ de la distribución angular $dP(\theta, \varphi) = \cos^{n+1} \theta d\Omega$, con θ en un intervalo $[0, \pi/2]$ y φ en $[0, 2\pi)$. El factor extra $\cos \theta$ en la distribución proviene de considerar la proyección del área de la superficie del plano sobre un elemento de área perpendicular a la trayectoria de la partícula (diagrama superior a la derecha en la figura 5-2). El vector de dirección, $\hat{\mathbf{u}}$, estará dado por la Ec. (2.1).

La distribución angular (Ec. (5.1)), en este caso, produce un número de muones que atraviesan un área A por unidad de tiempo dado por

$$\frac{dN}{dt} = I_0 \int_A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} \theta \sin \theta d\theta d\varphi dA = \frac{2\pi}{n+2} I_0 A. \quad (5.4)$$

Integrando de 0 a T_{sim} y de 0 a N , el tiempo de simulación como función de n resulta

$$T_{\text{sim}} = \frac{N}{2\pi I_0 A} (n+2). \quad (5.5)$$

Al igual que en el modelo de semiesfera, muchos de los muones generados pueden no entrar en el detector. El número de los muones, N_{eff} , que entren en la barra dependerá del área del plano horizontal. A medida que se incrementa el área, la eficiencia, $\epsilon = N_{\text{eff}}/N$, se reduce notablemente, tendiendo a 0 para $L \rightarrow \infty$. Esto se puede observar

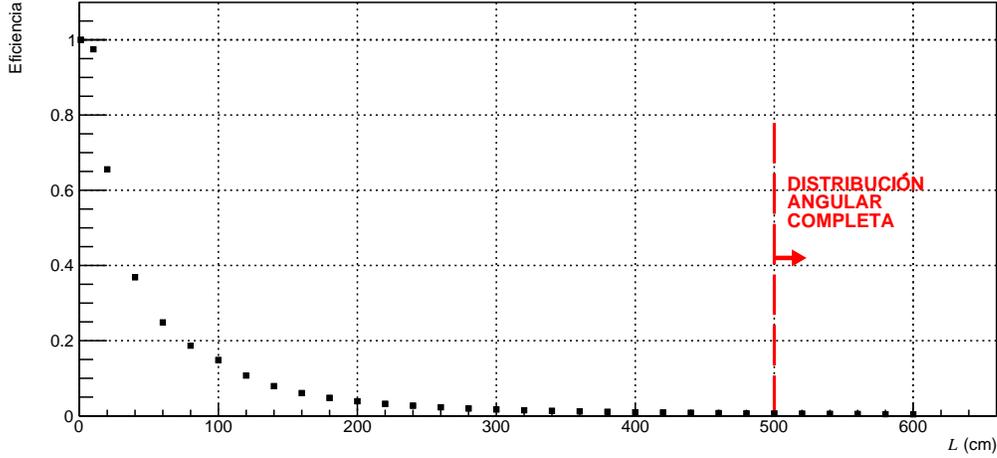


Figura 5-3: Eficiencia en el modelo del plano horizontal. La línea roja indica el tamaño de L que se utilizó en el modelo.

en la gráfica de la figura 5-3. A pesar de que la eficiencia se aproxima al 100 % para L pequeña, la distribución angular no se estaría muestreando de manera correcta, entrarían más muones con ángulos pequeños; mientras que si el plano es grande, hay más libertad de que entren ángulos mayores cercanos a $\pi/2$ si las posiciones iniciales se seleccionan lejos del detector. En la figura 5-4 se muestra una vista lateral de la geometría del detector y del plano, para una L dada, y se ilustra que muones con ángulos mayores a θ_m , y que provinieran desde posiciones iniciales que excedieran el tamaño de L , se estarían suprimiendo en la simulación. A partir de este ángulo, dado por

$$\theta_m = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2(l_z + d)}{L - l_y}\right), \quad (5.6)$$

la distribución en θ , para los muones que entran en el detector, estaría incompleta. Para $L \geq 500$ cm, correspondiente a $\theta_m \geq 85.7^\circ$, la fracción de muones que se estarían suprimiendo sería $\leq 0.004\%$ (figura 5-5), con lo cual se puede asumir que la simulación se aproxima razonablemente a la situación real.

5.3. Modelo de superficie

En este modelo, las posiciones y las direcciones iniciales de los muones se seleccionan tales que el muón entre al detector por cualquier punto de su superficie (con excepción de la cara horizontal inferior), en base a la probabilidad que tienen de in-

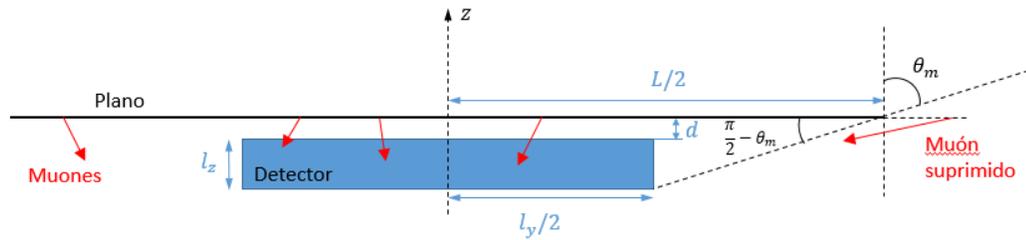


Figura 5-4: Diagrama de muones generados desde la superficie del plano (vista lateral). Se muestra un muón con un ángulo mayor a θ_m que no se generaría en la simulación (al exceder el tamaño del plano) y que, sin embargo, entraría al detector.

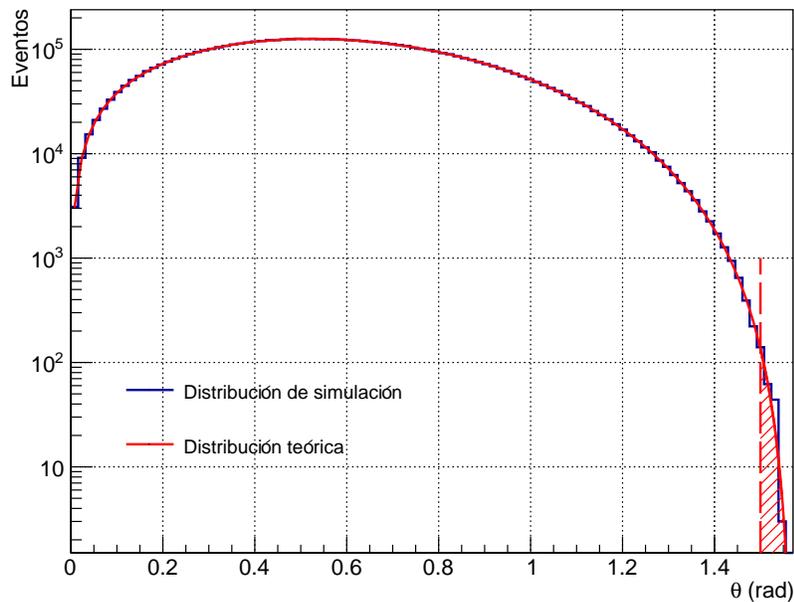


Figura 5-5: Distribución θ de los muones generados. La línea roja vertical muestra el ángulo θ_m a partir del cual la distribución angular para muones que entran en el detector es incompleta, el área sombreada representa el 0.004% de los muones generados.

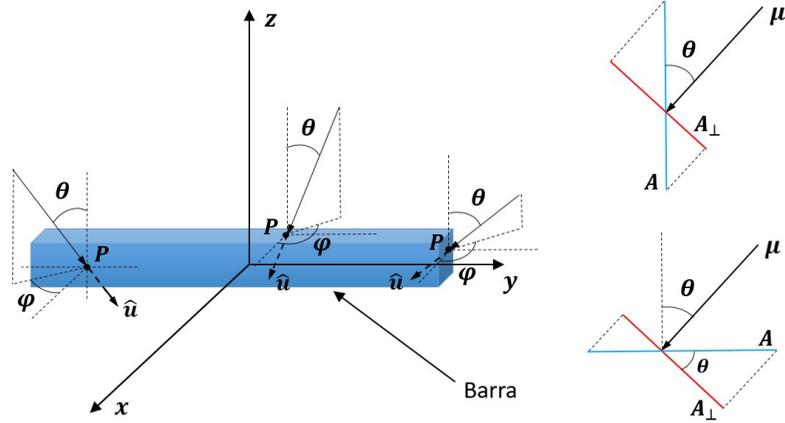


Figura 5-6: Geometría del modelo generador de muones que pasan por cualquier punto de la superficie del detector. A un costado se muestran las proyecciones de la superficie sobre un elemento de área perpendicular a la trayectoria de la partícula generada.

Cara	Probabilidad	Distribución dP	Rango θ	Rango φ
Horizontal	40/62	$\cos^3 \theta d\Omega$	$[0, \pi/2]$	$[0, 2\pi]$
Vertical grande	10/62	$\cos^2 \theta \sin \theta \cos \varphi d\Omega$	$[0, \pi/2]$	$[-\pi/2, \pi/2] (x > 0)$ $[\pi/2, 3\pi/2] (x < 0)$
Vertical chica	1/62	$\cos^2 \theta \sin \theta \sin \varphi d\Omega$	$[0, \pi/2]$	$[0, \pi] (y > 0)$ $[\pi, 2\pi] (y < 0)$

Tabla 5.1: Probabilidades y distribuciones angulares, dP , del modelo de superficie, para $n = 2$.

cidir sobre alguna de las caras (figura 5-6). La distribución angular, dP , depende de la cara por la que entra el muón, debido a la proyección del área de la superficie de la barra sobre un elemento de área perpendicular a la trayectoria de la partícula. Las distribuciones angulares y las probabilidades de los muones de incidir sobre cualquiera de las caras se resumen en la tabla 5.1 (para $n = 2$), en la cual $x, y > 0$ indica la cara localizada en la región positiva del eje correspondiente, caso análogo para $x, y < 0$. El vector de dirección, $\hat{\mathbf{u}}$, se determina por medio de la Ec. (2.1).

Se puede demostrar (Apéndice A) que el número total de muones que entran por la superficie del detector por unidad de tiempo, para un exponente n , es

$$\frac{dN}{dt} = \frac{2\pi I_0(10a)}{n+2} + \frac{4\sqrt{\pi} I_0(10a)}{n(n+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + \frac{4\sqrt{\pi} I_0 a}{n(n+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (5.7)$$

Modelo	T_{sim} (hr)	Eficiencia (%)	L (m)
Semiesfera	42.1	5.2	1.5
Plano horizontal	5.1	0.63	5
Superficie	814.9	100	-

Tabla 5.2: Tiempos de simulación correspondientes a la generación de 50 millones de muones emitidos por la fuente, y eficiencias para producir muones que entran en el volumen sensible del detector, para los tres algoritmos estudiados.

donde a es el área de la superficie de alguno de los extremos de la barra. En la ecuación anterior, el primer término corresponde a la contribución de la cara superior, el segundo es la contribución de las caras verticales grandes, mientras que el último de las caras verticales pequeñas. Así, el tiempo de simulación, T_{sim} , se obtiene integrando de 0 a T_{sim} y de 0 a N ,

$$T_{\text{sim}} = N \left(\frac{2\pi I_0(10a)}{n+2} + \frac{4\sqrt{\pi} I_0(10a)}{n(n+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + \frac{4\sqrt{\pi} I_0 a}{n(n+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right)^{-1} \quad (5.8)$$

La figura 5-7 muestra las gráficas del tiempo de simulación, T_{sim} , de 50 000 000 de muones para cada modelo como función del exponente n . Para el modelo de semiesfera se usó $A = L^2$, con $L = 1.5$ m, para el modelo de plano horizontal $A = L^2$, con $L = 5$ m, y para el de superficies $a = l^2$, con $l = 0.1$ m; en todos los casos $I_0 = 70 \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$. En esas gráficas se puede ver que el tiempo de simulación es diferente para cada algoritmo. Para $n = 2$, el tiempo corresponde a $T_{\text{sim}} \approx 42$ hr para el modelo de semiesfera (gráfica superior), $T_{\text{sim}} \approx 5$ hr, para el modelo de plano horizontal (gráfica central), y $T_{\text{sim}} \approx 800$ hr para el modelo de superficies (gráfica inferior). Claramente, el algoritmo más eficiente es el de superficies, seguido por el modelo de semiesfera; el modelo más ineficiente es el de plano horizontal.

En la tabla 5.2 se resumen los tiempos de simulación y las eficiencias para cada modelo.

5.4. Equivalencia entre los 3 modelos

Una manera de probar que los tres modelos generadores de muones descritos son equivalentes entre sí, es mostrar que la fracción del número total de muones que entran por alguna cara determinada es el mismo en todos los modelos o, en otras palabras,

que la probabilidad de que entren por alguna cara en particular es la misma en todos ellos.

En la figura 5-8, se muestra un histograma con las probabilidades calculadas teóricamente para el modelo de superficie (tabla 5.1), usando el exponente $n = 2$ en la distribución angular. En la misma gráfica, se muestran las fracciones del número total de muones que entraron por las caras del detector para los modelos de semiesfera y de plano horizontal. En la figura 5-9 se muestran esquemáticamente las caras numeradas del detector. Como se puede observar, las probabilidades coinciden en los tres casos, lo cual prueba la equivalencia de los modelos estudiados. Aunque la gráfica incluye barras de error, no se aprecian debido a su magnitud.

Aunque los 3 algoritmos son equivalentes, pueden tener diferentes dominios de aplicación, por ejemplo, el modelo de superficie puede no resultar adecuado si el detector se encuentra dentro de alguna edificación, aún cuando es el más eficiente en términos de tiempo de simulación.

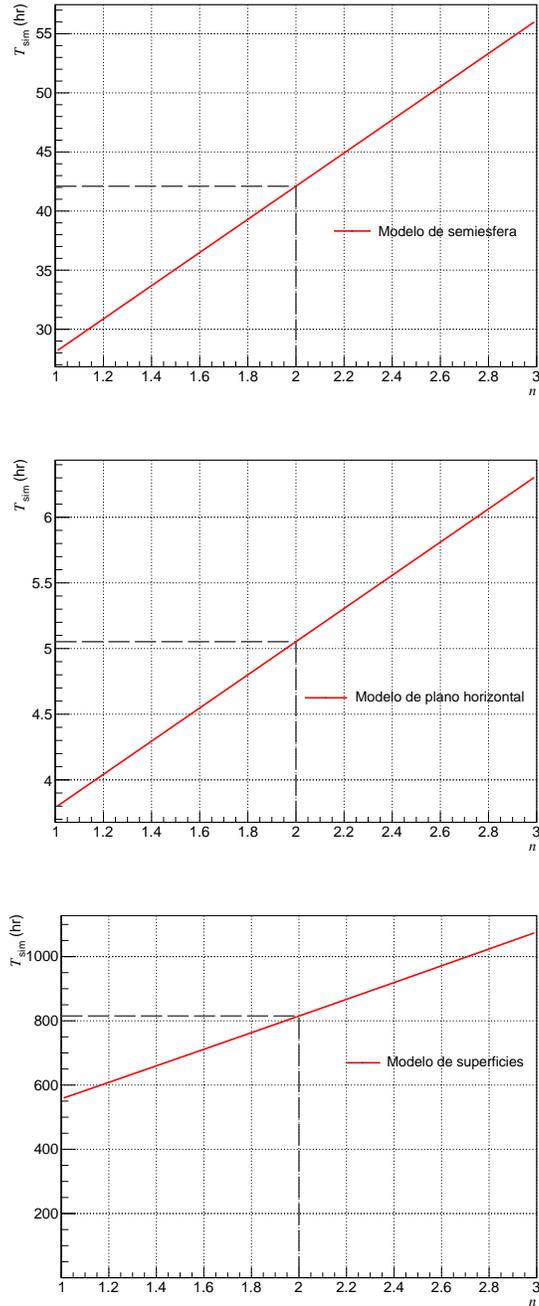


Figura 5-7: Gráficas del tiempo de simulación (T_{sim}) como función del exponente n para los tres generadores: Semiesfera (sup.), Plano horizontal (cent.) y Superficies (inf.), para 50 000 000 de muones.

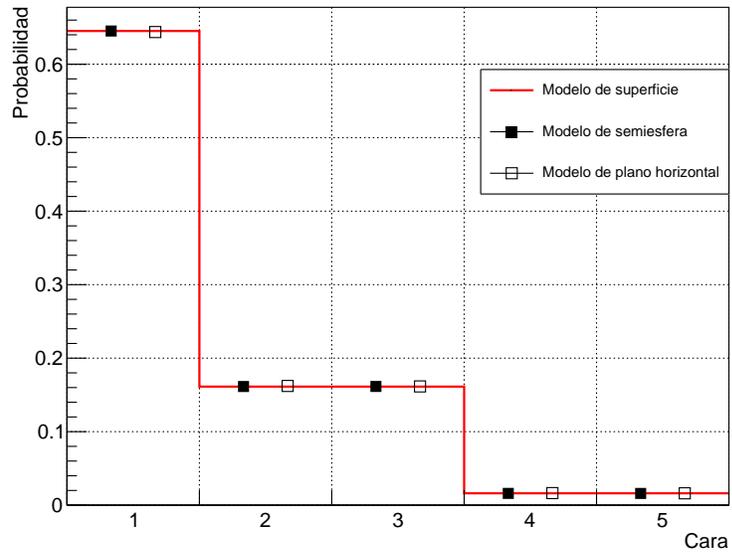


Figura 5-8: Probabilidades calculadas teóricamente (modelo de superficie) y obtenidas (modelos de semiesfera y de plano horizontal) de que los muones generados pasen por cualquiera de las caras del detector.

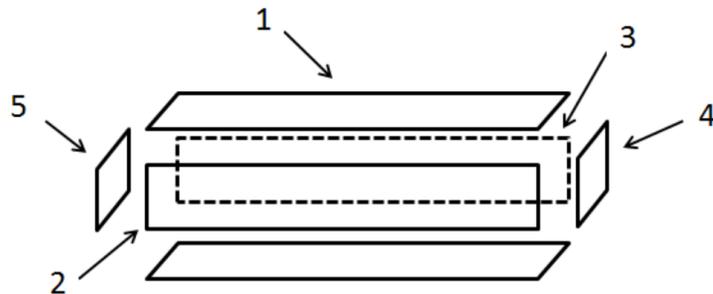


Figura 5-9: Diagrama esquemático de las caras numeradas del detector.

Conclusiones

Se presentó un método para extraer la intensidad vertical integral y la distribución angular de muones atmosféricos en una ubicación dada sobre la superficie de la Tierra utilizando una barra de plástico centelleador. El método se basa en la simulación de la distribución observada de energía depositada por muones atmosféricos en el detector, para lo cual se desarrolló un algoritmo generador de muones y se implementó en una simulación en GEANT4 de la respuesta del detector, la cual incluyó los efectos de la resolución en la energía y la saturación del PMT, así como una descripción aproximada de la cubierta del edificio del laboratorio. El espectro simulado de energía de muones se ajustó a un espectro medido experimentalmente, considerando además dos componentes de espectros de fondo que decaen exponencialmente representando a los neutrones y a las cascadas electromagnéticas que entran al detector, esto para que hubiera una correspondencia con la región a bajas energías.

Se realizaron dos pruebas de cerradura para verificar la robustez del procedimiento de ajuste y evaluar la validez de las incertidumbres estimadas sobre I_0 y n . En la primera prueba, se utilizó un modelo simple sin la cubierta del edificio ni los espectros de fondo de bajas energías. En la segunda prueba, se utilizó la simulación completa con la cubierta del edificio y las dos componentes del espectro de fondo de bajas energías. Con la baja estadística de las pruebas, el ajuste regresó los parámetros de entrada dentro de los errores estimados. Sin embargo, no fue posible eliminar un pequeño *offset* sistemático del orden del $\sim 4\%$ que hacía tender I_0 y n hacia valores más grandes, lo cual se esperaba debido a la baja estadística de las pruebas. El ajuste del espectro de datos con el modelo simplificado sin el edificio, incluyendo los espectros de fondo de bajas energías, produjo valores de I_0 y de $n \sim 8 - 11\%$ menores que los que se obtuvieron incluyendo la cobertura del edificio.

Usando los datos tomados para 5 diferentes orientaciones azimutales durante 5 horas cada uno, y asumiendo que la distribución angular sigue una ley de $\cos^n \theta$, se obtuvieron valores promedio de $n = (1.90 \pm 0.06(\text{stat}) \pm 0.10(\text{syst}))$ e $I_0 = (101.2 \pm 1.8(\text{stat}) \pm 5.5(\text{syst})) \text{ m}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$ en la Ciudad de México, con coordenadas geográficas 19.33°N

99.19°W, altitud de 2 268 m sobre el nivel del mar y rigidez geomagnética de 8.2 GV. Estos valores concuerdan razonablemente bien con los esperados para una ubicación con esta altitud, y lejos de anomalías geomagnéticas intensas. Los ajustes individuales con un valor fijo de n producen una incertidumbre estadística pequeña en I_0 , lo cual indica que este método puede ser usado para registrar variaciones del orden del 0.5 % o mayores en esta cantidad, en periodos de muestra de 5 hr, y también que es una buena opción para aplicaciones de monitoreo.

Estas mediciones sirven como constatación del método y muestran que podría tener un mayor desarrollo combinándolo con otras técnicas de medición.

Finalmente, se describieron otros dos modelos generadores de muones, uno de ellos generando muones desde un plano horizontal fijado sobre el detector, y otro, el más eficiente de todos, en el cual todos los muones generados entran al detector por cualquier punto de su superficie. Si bien se probó la equivalencia entre los tres modelos, pueden tener diferentes aplicaciones dependiendo las características del experimento.

Apéndice A

Flujo de muones en el modelo de superficie

La intensidad diferencial, con un exponente n , está dada por

$$\frac{dN}{dt dA_{\perp} d\Omega} = I_0 \cos^n \theta. \quad (\text{A.1})$$

Esta ecuación, al integrarla en A_{\perp} y Ω , da el número de muones que atraviesan un área A_{\perp} dentro de un ángulo sólido Ω por unidad de tiempo. Para el modelo de superficie, las áreas de interés son la cara horizontal y las 4 verticales y los ángulos θ y φ están en intervalos como se indican en la tabla 5.1.

Para la cara horizontal, la proyección del área de la superficie del detector sobre un elemento de área perpendicular a la trayectoria del muón (figura 5-6) produce

$$dA_{\perp} = dA \cos \theta, \quad (\text{A.2})$$

con lo cual se tiene, entonces,

$$\frac{dN_h}{dt} = I_0 \int_A \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi dA = \frac{2\pi I_0 (10a)}{n+2}, \quad (\text{A.3})$$

donde a es el área de uno de las caras verticales pequeñas.

Para las caras verticales grandes, el elemento de área dA_{\perp} se transforma como

$$dA_{\perp} = dA \sin \theta |\cos \varphi|, \quad (\text{A.4})$$

y, así,

$$\frac{dN_{v,g}}{dt} = I_0 \int_A \int_{\varphi_{1g}}^{\varphi_{2g}} \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \sin \theta \sin \theta |\cos \varphi| d\theta d\varphi dA = \frac{2\sqrt{\pi}I_0(10a)}{n(n+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad (\text{A.5})$$

donde $\varphi_{1g} = -\pi/2, \pi/2$ y $\varphi_{2g} = \pi/2, 3\pi/2$ para las caras en $x > 0$ y $x < 0$, respectivamente (dando, en ambos casos, el mismo resultado en la integral).

Para las caras verticales pequeñas, la proyección transforma el elemento dA_{\perp} como

$$dA_{\perp} = dA \sin \theta |\sin \varphi|, \quad (\text{A.6})$$

con lo cual,

$$\frac{dN_{v,c}}{dt} = I_0 \int_A \int_{\varphi_{1c}}^{\varphi_{2c}} \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \sin \theta \sin \theta |\sin \varphi| d\theta d\varphi dA = \frac{2\sqrt{\pi}I_0a}{n(n+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad (\text{A.7})$$

donde $\varphi_{1c} = 0, \pi$ y $\varphi_{2c} = \pi, 2\pi$, para las caras en $y > 0$ y en $y < 0$, respectivamente. De este modo, el número total de muones por unidad de tiempo que entran en la barra es

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_h}{dt} + 2\frac{dN_{v,g}}{dt} + 2\frac{dN_{v,c}}{dt} \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{2\pi I_0(10a)}{n+2} + \frac{4\sqrt{\pi}I_0(10a)}{n(n+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + \frac{4\sqrt{\pi}I_0a}{n(n+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (\text{A.9})$$

donde los factores de 2 se deben al número de caras correspondiente a ese flujo de muones.

Para $n = 2$, las probabilidades que tienen los muones de entrar por cualquiera de las caras resultan

$$P_h = \frac{40}{62}, \quad P_{v,g} = \frac{10}{62}, \quad P_{v,c} = \frac{1}{62} \quad (\text{A.10})$$

Apéndice B

Componente electromagnética y neutrones

Las componentes electromagnética (electrones, positrones y fotones) y de neutrones en el flujo de partículas que llueven sobre el detector depositan energía que está asociada con la región de bajas energías del espectro de datos de la figura 4-1. Esto se puede ver al simular el paso de estas partículas a través del detector, tomando los flujos en la ubicación y la altitud de la Ciudad de México dados por la herramienta EXPACS. En la figura B-1 se muestran los espectros normalizados de energía depositada en el detector. Estas normalizaciones se realizaron pesando cada histograma por el correspondiente número de eventos en cada flujo dado por EXPACS. Todas las simulaciones se realizaron generando el mismo número de eventos (1 000 000).

En la figura B-2 se muestran los espectros de simulación de energía depositada incluyendo efectos de resolución y de no linealidad, implementando estas variaciones a cada evento generado, y tomando los parámetros a_0 , a_1 , a_2 y f de la primera columna de la tabla 4.1. También, se muestra la suma de todos los espectros y un ajuste a este último, de la forma $N_1e^{-E/b_1} + N_2e^{-E/b_2}$. Se observa que, a partir del valor de ajuste en la figura 4-1 (100 ADC), la función propuesta se ajusta razonablemente bien al espectro total simulado.

Aún cuando el espectro real de energías depositadas fuera una función de potencias, el modelo exponencial se ajustó al modelo en la región de bajas energías y fue implementado de esta forma en la función de convolución (Ec. (4.1)).

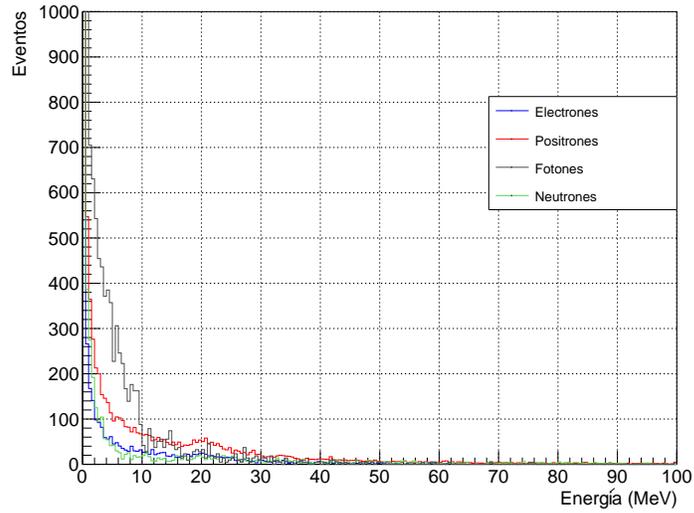


Figura B-1: Espectros de energía depositada en el detector por electrones, positrones, fotones y neutrones, normalizados al número de eventos dados por los flujos de EXPACS.

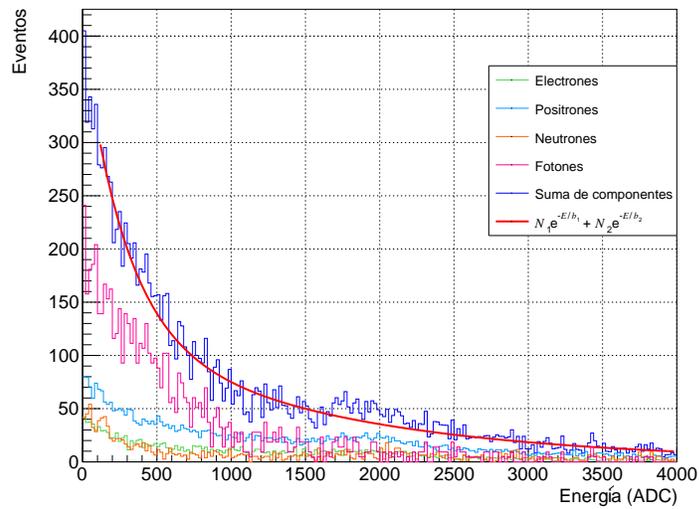


Figura B-2: Espectros simulados de energía depositada por las componentes electromagnética y de neutrones, con efectos de resolución y no linealidad incluidos (en azul), y función de tipo exponencial ajustada al espectro total (en rojo).

Referencias

- [1] B. Olmos Yáñez and A. A. Aguilar-Arevalo, A method to measure the integral vertical intensity and angular distribution of atmospheric muons with a stationary plastic scintillator bar detector, *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research*, A 987 (2021) 164870, doi:<https://doi.org/10.1016/j.nima.2020.164870>.
- [2] S. Pethuraj, V. Datar, G. Majumder, N. Mondal, K. Ravindran, B. Satyanarayana, Measurement of cosmic muon angular distribution and vertical integrated flux by 2 m \times 2 m RPC stack at IICHEP-Madurai, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2017 (021) (2017), doi:<https://doi.org/10.1088/1475-7516/2017/09/021>
- [3] M. De Pascale, et al., Absolute spectrum and charge ratio of cosmic ray muons in the energy region from 0.2 GeV to 100 GeV at 600 m above sea level, *J. Geophys. Res.* 98 (3501) (1993).
- [4] P. Grieder, et al., *Cosmic rays at Earth*, Elsevier Science (2001).
- [5] J. Kremer, et al., Measurements of ground-level muons at two geomagnetic locations, *Phys. Rev. Lett.* 83 (21) (1999) 4241.
- [6] S. Haino, et al., Measurements of primary and atmospheric cosmic-ray spectra with the BESS-TeV spectrometer, *Physics Letters B* 594 (1) (2004) 35-46. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.05.019>.
- [7] P. Archard, et al., Measurement of the atmospheric muon spectrum from 20 to 3000 GeV, *Physics Letters B* 598 (2004) 15-32. doi:<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.08.003>.
- [8] A. Fauth, J. Penereiro, E. Kemp, W. Grizolli, D. Consalter, L. González, Experimental demonstration of time dilatation and space contraction of cosmic-ray muons, *Rev. Bras. Ensino Fís.* 29 (4) (2007) 585-591. doi:<http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172007000400017>.

- [9] C. Augusto, C. Navia, K. Tsui, H. Shigueoka, P. Miranda, R. Ticona, A. Velarde, O. Saavedra, Simultaneous observation at sea level and at 5200 m.a.s.l. of high energy particles in the South Atlantic Anomaly, *Astroparticle Physics* 34 (1) (2010) 40-47. doi:<https://doi.org/10.1016/j.astropartphys.2010.04.005>.
- [10] P. Shukla, S. Sankrith, Energy and angular distributions of atmospheric muons at the Earth, *Int. Jour. Mod. Phys. A* 33 (30) (2018) 1-12. doi:[10.1142/S0217751X18501750](https://doi.org/10.1142/S0217751X18501750).
- [11] M. Boezio, et al., Energy spectra of atmospheric muons measured with the CAPRICE98 balloon experiment, *Physical Review D* 67 (072003). doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.072003>.
- [12] Y. Liu, L. Derome, M. Buénerd, Atmospheric muon and neutrino flux from 3-dimensional simulation, *Physical Review D* 67 (073022) (2003). doi:<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.073022>.
- [13] D. Heck, J. Knapp, J. N. Capdevielle, G. Schatz, T. Thouw, CORSIKA: a Monte Carlo code to simulate extensive air showers, TIB Hannover, 1998.
- [14] T. Sato, Analytical model for estimating the zenith angle dependence of terrestrial cosmic ray fluxes, *PLOS ONE* 11(8): e0160390 (2016).
- [15] T. Sato, Analytical model for estimating terrestrial cosmic ray fluxes nearly anytime and anywhere in the world: Extension of PARMA/EXPACS, *PLOS ONE* 10(12): e0144679 (2016).
- [16] F. Lei, S. Clucas, C. Dyer, P. Truscott, An atmospheric radiation model based on response matrices generated by detailed Monte Carlo simulations of cosmic rays interactions, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 51 (6) (2004) 3442-3451. doi:[10.1109/TNS.2004.839131](https://doi.org/10.1109/TNS.2004.839131).
- [17] F. Lei, A. Hands, S. Clucas, C. Dyer, P. Truscott, Improvement to and validations of the QinetiQ Atmospheric Radiation Model (QARM), *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 53 (4) (2006) 1851-1858. doi:[10.1109/TNS.2006.880567](https://doi.org/10.1109/TNS.2006.880567).
- [18] L. W. Alvarez, J. A. Anderson, F. E. Bedwei, J. Burkhard, A. Fakhry, A. Girgis, A. Goneid, F. Hassan, D. Iverson, G. Lynch, Z. Miligy, A. H. Moussa, M. Sharkawi, L. Yazolino, Search for hidden chambers in the pyramids, *Science* 167 (3919) (1970) 832-839. doi:[10.1126/science.167.3919.832](https://doi.org/10.1126/science.167.3919.832).
- [19] S. Chatzidakis, P. Hausladen, S. Croft, J. Chapman, J. Jarrell, J. Scaglione, C. Choi, L. Tsoukalas, Exploring the use of muon momentum for detection of

- nuclear material within shielded spent nuclear fuel dry casks, *Transactions of the American Nuclear Society* 116 (131185) (2017) 190-193.
- [20] J. Perry, *Advanced applications of cosmic-ray muon radiography* (Thesis dissertation), University of New Mexico (2013).
- [21] H. Miyadera, et al., *Imaging Fukushima Daiichi reactors with muons*, *AIP Advances* 3 (052133) (2013). doi:<https://doi.org/10.1063/1.4808210>.
- [22] V. Tioukov, et al., *First muography of Stromboli volcano*, *Scientific Reports* 9 (6695) (2019).
- [23] C. Morris, et al., *Tomographic imaging with cosmic ray muons*, *Science & Global Security* 16 (2008) 37-53. doi:<https://doi.org/10.1080/08929880802335758>.
- [24] J. A. Smith, N. M. Duller, *Effects of pi meson decay-absorption phenomena on the high-energy mu meson zenithal variation near sea level*, *Journal of Geophysical Research* 64 (12) (1959) 2297-2305. doi:[10.1029/JZ064i012p02297](https://doi.org/10.1029/JZ064i012p02297).
- [25] S. Chatzidakis, S. Chrysikopoulou, L. Tsoukalas, *Developing a cosmic ray muon sampling capability for muon tomography and monitoring applications*, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 804 (2015) 33-42. doi:<https://doi.org/10.1016/j.nima.2015.09.033>.
- [26] B. C. Rastin, *An accurate measurement of the sea-level muon spectrum within the range 4 to 3000 GeV/c*, *Journal of Physics G: Nuclear Physics* 10 (11) (1984) 1609.
- [27] B. Vargas-Cárdenas, J. Valdés-Galicia, *An estimate of the rigidity spectrum of the high-energy particles present in the impulsive phase of GLE 54*, *Proceedings of the 33rd International Cosmic Ray Conference (ICRC2013)* (2013).
- [28] D. Smart, M. Shea, *Fifty years of progress in geomagnetic cutoff rigidity determinations*, *Advances in Space Research* 44 (10) (2009) 1107-1123, *Cosmic Rays From Past to Present*. doi:<https://doi.org/10.1016/j.asr.2009.07.005>.
- [29] D. Reyna, *A simple parameterization of the cosmic-ray muon momentum spectra at the surface as a function of zenith angle*, arXiv:hep-ph/0604145v2 (2006).
- [30] M. Tanabashi, et al., *Review of Particle Physics*, *Phys. Rev. D* 98 (2018) 030001. doi:[10.1103/PhysRevD.98.030001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.030001).