Universidad Nacional Autónoma de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre los anillos semiprimos e isoartinianos izquierdos

T E S I S

que para obtener el título de:

Matemática

p r e s e n t a :

Inés López Paleta

Tutor:
Dr. Alejandro Alvarado García

Ciudad Universitaria, CD.MX 2021

Agradecimientos

Hubo un momento de mi vida en que estudiar una licenciatura en matemáticas era una idea que vagaba en mi cabeza. Obligada por la necesidad de decidir qué iba a hacer el resto de mi vida, pensaba únicamente en lo entretenido que sonaba. Evidentemente, mi visión tanto de las matemáticas como de mi futuro era muy limitada, pero al regresar a ese momento, soy consciente del camino que ya había recorrido para estar en una posición donde la opción era posible.

En ese entonces, no se me hubiera ocurrido que existía algo que yo no fuera capaz de lograr, así que el requisito de la diversión era el único que necesitaba llenar. Por darme esta libertad y las razones para sonreír cada día, tengo que agradecer a mi familia y, en particular a mi familia más cercana: mis padres, mi hermana y, más recientemente, mi sobrina.

También debo mencionar a los profesores de matemáticas que he tenido. Más allá de los contenidos que recibí de ellos, agradezco su compromiso de enseñar sus materias con empatía por sus alumnos. Aunque no los mencione por nombre, su trabajo fue primordial en mi desarrollo académico. En particular, agradezco a mis sinodales por leer, corregir y hacer observaciones a este trabajo, culminación de mis estudios de licenciatura.

En el mismo sentido, agradezco a mi tutor, quien me impartió clases durante tres años y medio y me guió durante la elaboración de esta tesis. Gracias por compartir sus conocimientos y por su amabilidad.

Índice general

Introducción

El estudio de anillos comenzó en el siglo XIX pero fue hasta inicios del siglo pasado que logró desarrollarse como una teoría abstracta, hecho al que contribuyeron fuertemente los matemáticos Emmy Noether y Emil Artin (Keiner, 2007). Así, sus nombres sirvieron para nombrar dos conceptos notables relativos a las condiciones de cadenas: si toda cadena ascendente de submódulos de un R-módulo M se estaciona, es decir si es finita como conjunto, entonces se dice que M es neteriano. Análogamente, si toda cadena descendente de submódulos de M se estaciona, entonces M se llamará artiniano.

El presente trabajo tiene por objetivo demostrar el teorema 3.15, que es una caracterización de los anillos semiprimos, neterianos izquierdos e isoartinianos izquierdos. Este último concepto es una generalización del término de anillo artiniano y cuenta con la respectiva generalización del término de anillo neteriano. Ambos fueron definidos por Facchini y Nazemian (2016) inspirados en las respectivas definiciones de anillos artinianos y neterianos pero utilizando también el concepto de isomorfismo. Así, un R-módulo M es isoartiniano si satisface una condición de cadenas descendentes que únicamente requiere que la cadena se estacione en submódulos isomorfos.

Puesto que el objetivo del trabajo es, como ya se mencionó, la demostración del teorema 3.15, los tres capítulos de los que consta están destinados a construir la teoría necesaria para poder hacer dicha demostración.

En el capítulo 1, buscamos obtener algunos resultados de anillos semiprimos. Con este fin, nos basamos en Lam (1991) para construir la teoría necesaria para definir el significado de que un anillo sea semiprimo. La última parte de la sección 1.3 nos otorga algunas afirmaciones relativas a todos los anillos semiprimos y la sección 1.4 se desvía ligeramente del tema para introducir algunos resultados de la parte singular de un anillo que serán de utilidad en el capítulo 3 y finalmente, para demostrar un teorema que relaciona los anillos semiprimos con los anillos no singulares. Estas últimas partes del capítulo, están basados en McConnell y Robson (1987) salvo 1.19, que es un resultado obtenido de Goodearl (1976).

El segundo capítulo tiene como tema principal dos posibles dimensiones definidas para un R-módulo. A saber, la dimensión de Krull y la dimensión uniforme o de Goldie. Para definir el primer concepto, necesitamos establecer previamente el significado de la desviación de un conjunto parcialmente ordenado que Rentschler y Gabriel (1967) definen como un natural pero que aquí definiremos como un ordinal tomando como guía el libro de McConnell y Robson (1987), de donde se inspira el capítulo a excepción de 2.9 y 2.19 que provienen del texto de Dung *et al.* (1994). Además, se consultaron el libro de Gordon y Robson (1973) para la sección de dimensión de Krull y el libro de Chatters y Hajarnavis (1980) para la sección dedicada a dimensión uniforme.

Finalmente, el capítulo tres concluye con la caracterización de los anillos semiprimos isoartinianos izquierdos y neterianos izquierdos. Para esto, a lo largo del capítulo seguimos los resultados de Facchini y Nazemian (2016).

Se incluye un anexo que explica algunos resultados de teoría de Morita necesarios en el capítulo tres, a saber: que existe un isomorfismo de retículas entre las retículas de submódulos entre un R-módulo M y la imagen de éste bajo un determinado funtor, que la propiedad de ser neteriano es Morita invariante y que un anillo R es Morita equivalente con el anillo de matrices cuadradas finitas con coeficientes en R. Estos resultados se obtuvieron del libro de Anderson y Fuller (1974).

Para concluir esta introducción, sólo resta señalar que trabajaremos, en general, con R-módulos e ideales izquierdos de un anillo asociativo R con elemento unitario, por lo que no usaremos notación especial cuando esto sea claro. En caso contrario, usaremos la notación usual para distinguir si son izquierdos, derechos o bilaterales.

Capítulo 1

Anillos semiprimos

1.1. Ideales primos

Definición 1.1. Sea $P \lneq R$ un ideal bilateral. Decimos que P es primo si cada vez que $AB \leq P$ para cualesquiera ideales bilaterales $A, B \leq R$, se satisface que $A \leq P$ o $B \leq P$.

Notemos que, para cualesquiera ideales bilaterales $I, A, B \leq R$, se satisface que

$$(I + A)(I + B) \leq I + AB$$

pues, si tomamos un elemento de $(I+A)(I+B)$, éste será de la forma $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ con $x_i \in I+A$ y $y_i \in I + B$. A su vez, tendremos que existen $p_i, q_i \in I$, $a_i \in A$ y $b_i \in B$ tales que

$$x_i = p_i + a_i \text{ y } y_i = q_i + b_i,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= \sum_{i=1}^{n} (p_i + a_i)(q_i + b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (p_i q_i + p_i b_i + a_i q_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \end{aligned}$$

donde el primer sumando es un elemento de I por ser un ideal bilateral y el segundo es un elemento de AB, que es justo lo que necesitábamos.

Ahora recordemos que todo ideal $I \lneq R$ está contenido en un ideal máximo $P \lneq R$. Si este ideal no fuera primo, entonces existirían $A, B \leq R$ tales que $AB \leq P$ pero $A \nleq P$ y

$B \not\leq P$. Así que $P + A = P + B = R$ porque P es máximo. En consecuencia

$$R = (P + A)(P + B) \leq P + AB = P,$$

lo cual es una clara contradicción al hecho de que P es un ideal máximo. La conclusión de esto es que todo ideal bilateral de R está contenido en un ideal primo.

Podemos demostrar, por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$, que si $P \leq R$ es primo y $A_1, \ldots, A_n$ son ideales bilaterales de R tales que $A_1 \cdots A_n \leq P$, entonces $A_i \leq P$ para alguna $i \in \{1, ..., n\}$.

La propiedad se satisface para $n = 2$, por definición de ideal primo. Además, si la afirmación es válida para n y $A_1 \cdots A_{n+1} \leq P$ entonces

$$A_1 \cdots A_n \leq P \ \text{ o bien } \ A_{n+1} \leq P$$

porque P es un ideal primo. En el primer caso, la hipótesis de inducción nos indica que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $A_i \leq P$. En consecuencia, al considerar ambos casos podemos afirmar que $A_i \leq P$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n + 1\}$.

Proposición 1.2. *Si $P < R$ es primo, entonces existe un ideal $I \leq P$ mínimo con la propiedad de ser primo.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{A} = \{I \leq R \mid I \text{ es primo e } I \leq P\}.$$

Es claro que $(\mathcal{A}, \geq)$ es un COPO y que $\mathcal{A} \neq \emptyset$ porque $P \in \mathcal{A}$. En consecuencia, vamos a usar el Lema de Zorn para demostrar la existencia de un mínimo en el conjunto $\mathcal{A}$.

Sea $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cadena de elementos de $\mathcal{A}$, $\bigcap\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un ideal de R que satisface que si $A, B \leq R$ son tales que $AB \leq \bigcap\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, entonces $AB \leq I_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Como todo I_λ es primo, obtenemos que

$$A \leq I_\lambda \ \text{ o bien } \ B \leq I_\lambda.$$

Ahora supongamos que $A, B \not\leq \bigcap\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, es decir que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tales que $A \not\leq I_{\lambda_1}$ y $B \not\leq I_{\lambda_2}$. Como $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cadena, podemos suponer, sin perder generalidad, que $I_{\lambda_1} \leq I_{\lambda_2}$. Sin embargo, esto implica que $B \leq I_{\lambda_2}$ debido a que si $A \not\leq I_{\lambda_1}$ entonces

$$B \leq I_{\lambda_1} \leq I_{\lambda_2}.$$

Esta contradicción nos muestra que al menos uno de los ideales A o B debe estar contenido en $\bigcap\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Por lo tanto, $\bigcap\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \in \mathcal{A}$ es una cota superior de la cadena con el orden $\geq$, por lo que podemos aplicar el Lema de Zorn para concluir la demostración.
$\therefore$ Existe $I \leq P$ mínimo con la propiedad de ser primo. $\square$

Diremos que $P < R$ es un primo mínimo si es un ideal primo que no contiene propiamente a otro ideal primo. De la proposición anterior, es inmediato que todo ideal primo contiene un ideal primo mínimo.

Proposición 1.3. *Sean $P < {}_RR_R$ y $a, b \in R$. Son equivalentes:*

1. *P es primo.*
2. *Si $(RaR)(RbR) \leq P$ entonces $a \in P$ o $b \in P$.*
3. *Si $aRb \leq P$, entonces $a \in P$ o $b \in P$.*
4. *Si $A, B \leq {}_RR$ son tales que $AB \leq P$, entonces $A \leq P$ o $B \leq P$.*
5. *Si $A, B \leq R_R$ son tales que $AB \leq P$, entonces $A \leq P$ o $B \leq P$.*

Demostración. Únicamente demostraremos las equivalencias de las afirmaciones 1, 2, 3 y 4. Esto se debe a que demostrar que las primeras tres afirmaciones son equivalentes a 5 se hace de manera análoga a la demostración de su equivalencia con 4. Dicha demostración la lograremos demostrando las implicaciones

$$1 \implies 2 \implies 3 \implies 4 \implies 1.$$

Sean P primo y supongamos que $(RaR)(RbR) \leq P$. Como RaR y RbR son ideales bilaterales de R, entonces

$$RaR \leq P \text{ o bien } RbR \leq P$$

por definición de ideal primo. Por lo tanto, $a \in P$ o $b \in P$.

Si se satisface el inciso 2 y $aRb \leq P$, entonces

$$(RaR)(RbR) = R(aRb)R \leq P$$

debido a que P es bilateral. En consecuencia, podemos usar el inciso 2 para obtener $a \in P$ o $b \in P$.

Supongamos que 3 es válido para P y tomemos $A, B \leq {}_RR$ tales que $AB \leq P$ y $A \nleq P$. Lo último implica que $A \setminus P \neq \emptyset$, así que podemos elegir $a \in A \setminus P$ y $b \in B$ arbitrarios. De este modo

$$a(Rb) \leq AB \leq P.$$

Por la afirmación 3, tenemos que $a \in P$ o $b \in P$, sin embargo habíamos seleccionado $a \notin P$, por lo que $b \in P$ para $b \in B$ arbitraria, lo que implica que $B \leq P$.
$\therefore A \leq P$ o bien $B \leq P$.

Finalmente, si se satisface la proposición 4, entonces 1 es válido porque todo ideal bilateral es, en particular, un ideal izquierdo. □

La proposición anterior nos otorga diversas maneras de determinar si P es un ideal primo, sin embargo todas ellas son muy parecidas entre sí, por lo que encontraremos situaciones en las que no podremos demostrar que un ideal es primo con ninguna de ellas. Para enfrentarnos a esta situación, necesitamos 1.5, 1.6 y el concepto que definimos a continuación.

Definición 1.4. Decimos que $\emptyset \neq S \subseteq R$ es m-sistema si para todo par de elementos $a, b \in S$ existe $r \in R$ tal que $arb \in S$.

Corolario 1.5. *Un ideal $P < R$ es primo si y sólo si $R \setminus P$ es un m-sistema.*

Demostración. Supongamos que P es primo y que $R \setminus P$ no es un m-sistema, de modo que podemos seleccionar $a, b \in R \setminus P$ tales que cada $r \in R$ satisface $arb \notin R\setminus P$. Dicho de otro modo, $arb \in P$ para toda $r \in R$, es decir que $aRb \leq P$.

Así que, por 1.3, $a \in P$ o $b \in P$. Sin embargo, ambas opciones contradicen la elección de a y b, por lo cual queda demostrada la implicación.
$\therefore$ Si $P < R$ es primo, entonces $R\setminus P$ es un m-sistema.

Recíprocamente, si $P < R$ no es primo, tendríamos la existencia de $a, b \in R$ tales que $aRb \leq P$ y a, $b \in R \setminus P$. Así, todo $r \in R$ satisface que $arb \notin R \setminus P$, es decir que $R \setminus P$ no es un m-sistema.
$\therefore$ Si $R \setminus P$ es un m-sistema, entonces $P < R$ es primo. □

Proposición 1.6. *Sean $S \subseteq R$ un m-sistema y $P < R$ un ideal máximo en R con la propiedad $P \cap S = \emptyset$, entonces P es primo.*

Demostración. Sean $P < R$ y $S \subseteq R$ como en la hipótesis, pero supongamos que P no es primo, es decir que existen $a, b \in R$ tales que

$$(RaR)(RbR) \leq P \ \text{ y } \ a, b \notin P.$$

Notemos que $(P + RaR) \cap S \neq \emptyset$ debido a que $a \notin P$ implica

$$P \lneq P + RaR \leq R$$

y a que P es máximo con la propiedad de tener intersección vacía con S. Análogamente, tendremos que $(P + RbR) \cap S \neq \emptyset$.

Tomemos $s \in (P + RaR) \cap S$ y $s' \in (P + RbR) \cap S$. Como $s, s' \in S$ y S es un m-sistema, entonces existe $r \in R$ tal que $srs' \in S$. Además, como P, RaR y RbR son ideales bilaterales, tenemos

$$srs' \in (P + RaR)R(P + RbR) \leq (P + RaR)(P + RbR).$$

Sin embargo, ya habíamos visto que, para cualesquiera ideales I, A, B se satisface $(I + A)(I + B) \leq I + AB$, en particular

$$(P + RaR)(P + RbR) \leq P + (RaR)(RbR),$$

por lo que podemos concluir las pertenencias

$$srs' \in P + (RaR)(RbR) \leq P \ \text{ y } \ srs' \in S.$$

Pero esto contradice la hipótesis $P \cap S = \emptyset$, así que no es posible que las suposiciones que hicimos inicialmente se satisfagan.
$\therefore P$ es primo. □

Finalicemos esta subsección viendo que el conjunto $\sqrt{A}$, definido en 1.7, es un ideal de R, lo cual es una consecuencia inmediata del teorema 1.8.

Definición 1.7. Sea $A \leq R$ un ideal bilateral. Si $A \neq 0$, definimos el radical de A como

$$\sqrt{A} \doteq \{s \in R \mid \forall S \text{ m-sistema } (s \in S \implies A \cap S \neq \emptyset)\}.$$

Teorema 1.8. *Para cualquier ideal $A \leq R$ distinto de cero se cumple la igualdad*

$$\sqrt{A} = \bigcap\{P \leq R \mid P \textit{ es primo y } A \leq P\}$$

Demostración. Sea $B = \bigcap\{P \leq R \mid P$ es primo y $A \leq P\}$. Demostraremos ambas contenciones.

Veamos que $\sqrt{A} \subseteq B$. Ya habíamos visto que todo ideal está contenido en un ideal primo, así que podemos tomar $s \in \sqrt{A}$ y $P \lneq R$ primo tal que $A \leq P$. Por 1.5, $R \setminus P$ es un m-sistema, así que $s \in R \setminus P$, implica

$$A \cap (R \setminus P) \neq \emptyset$$

por la definición de $\sqrt{A}$, lo cual contradice la suposición $A \leq P$.

Como no es posible $s \in R \setminus P$, entonces debe ocurrir $s \in P$. Sin embargo, la elección de P fue arbitraria salvo la propiedad $A \leq P$, de modo que $s \in P$ para cada $P \leq R$ primo que satisfaga $A \leq P$.
$\therefore \sqrt{A} \subseteq B$.

Para demostrar la segunda contención, supongamos que $s \notin \sqrt{A}$, es decir que existe un m-sistema $S \subseteq R$ que satisface $s \in S$ y $A \cap S = \emptyset$. Debido a que

$$\mathcal{A} = \{I \leq R \mid I \cap S = \emptyset\}$$

es un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión de conjuntos y $A \in \mathcal{A}$, entonces demostraremos que existe un ideal máximo en $\mathcal{A}$ mediante el lema de Zorn.

Sea $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{A}$ una cadena de elementos de $\mathcal{A}$. Es claro que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ es un ideal bilateral de R y que si existiera $s \in (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) \cap S$, entonces $s \in I_\lambda \cap S$ para alguna $\lambda \in \Lambda$, lo cual contradice que $I_\lambda \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ es una cota superior de la cadena. Podemos concluir que existe un ideal $P \lneq R$ máximo con la propiedad de que su intersección con S es vacía.

Gracias a 1.6, sabemos que P es primo. Además $s \notin P$ porque P es máximo en el conjunto $\mathcal{A}$. Así, existe un ideal primo P tal que $A \leq P$ pero $s \notin P$ o, lo que es lo mismo

$$s \notin \bigcap\{I \leq R \mid I \text{ es primo y } A \leq I\} = B.$$

$\therefore B \subseteq \sqrt{A}$

$\therefore \sqrt{A} = \bigcap\{P \leq R \mid P$ es primo y $A \leq P\}$. □

1.2. Ideales semiprimos

Definición 1.9. Decimos que $C \lneq R$ es un ideal semiprimo de R si para cualquier ideal $A \leq R$ se cumple que $A^2 \leq C$ implica $A \leq C$.

La definición de ideal semiprimo es, claramente, una generalización del concepto de ideal primo. En consecuencia, todo ideal primo es, en particular, un ideal semiprimo.

Proposición 1.10. *Sean $C \leq R$ y $a \in R$. Son equivalentes:*

1. *C es semiprimo.*
2. *Si $(RaR)^2 \leq C$ entonces $a \in C$.*
3. *Si $aRa \leq C$ entonces $a \in C$.*
4. *Si $A \leq {}_RR$ es tal que $A^2 \leq C$, entonces $A \leq C$.*
5. *Si $A \leq R_R$ es tal que $A^2 \leq C$, entonces $A \leq C$.*

Demostración. La similitud con 1.3 es evidente, así que tampoco necesitamos demostrar la equivalencia de las cuatro primeras afirmaciones con la quinta.

Sea $C \leq R$ semiprimo y supongamos que $(RaR)^2 \leq C$. Ya que RaR es un ideal bilateral de R, entonces $RaR \leq C$, en particular, $a \in C$. Por lo tanto, hemos demostrado que 1 implica 2.

Si ahora suponemos que se satisface el inciso 2 y que $aRa \leq C$, entonces

$$(RaR)^2 = R(aRa)R \leq C.$$

En consecuencia, $a \in C$, es decir que 3 es válido.

Ahora demostraremos que la tercera afirmación implica a la cuarta. Así, si $A \leq {}_RR$ es tal que $A^2 \leq C$, entonces podemos tomar $a \in A$. Si juntamos esto con el hecho de que A es un ideal izquierdo de R, obtenemos

$$a(Ra) \leq A^2 \leq C,$$

lo que implica, por 3, que $a \in C$. Como $a \in A$ es arbitraria, podemos concluir que $A \leq C$, es decir que se cumple 4.

Finalmente, 1 se sigue de 4 porque todo ideal bilateral de R es, en particular, un ideal izquierdo de R. $\square$

Análogamente a lo que hicimos con los ideales primos, ahora vamos a definir el concepto de n-sistema y veremos su relación con los ideales semiprimos.

Definición 1.11. Sea $S \subseteq R$. Decimos que S es un n-sistema si para todo $a \in S$ existe $r \in R$ tal que $ara \in S$.

Proposición 1.12. *Un ideal $C \lneq R$ es semiprimo si y sólo si $R \setminus C$ es un n-sistema.*

Demostración. Sea C semiprimo y supongamos que $R \setminus C \neq \emptyset$ no es un n-sistema. Esto último significa que existe $a \in R \setminus C$ tal que no hay ninguna $r \in R$ que satisfaga $ara \in R \setminus C$ o, dicho de otro modo, $aRa \leq C$. Como C es semiprimo, podemos usar las equivalencias de la proposición anterior para concluir que $a \in C$, lo cual no es posible.
$\therefore$ Si C es semiprimo, entonces $R \backslash C$ es un n-sistema.

Ahora supongamos que C no es semiprimo, de forma que existe $a \in R$ tal que $aRa \leq C$ pero $a \notin C$. Ya que $a \in R \setminus C$ y para todo $r \in R$ se cumple que $ara \in C$, entonces $R \setminus C$ no es un n-sistema.
$\therefore$ Si $R \backslash C$ es un n-sistema, entonces C es semiprimo. $\square$

Como mencionamos al principio, el objetivo de esta sección es establecer algunas propiedades de los anillos semiprimos. Veremos que este concepto se define a partir del concepto de ideal semiprimo. Así, para seguir avanzando, necesitamos relacionar las propiedades de ideales primos con el concepto de ideal semiprimo.

Ésta será la última parte de la subsección que concluirá con el teorema 1.14 pero antes necesitamos establecer una relación entre los n-sistemas y los m-sistemas, lo que haremos en el siguiente lema.

Lema 1.13. *Sean $N \subseteq R$ un n-sistema y $a \in N$, entonces existe un m-sistema $M \subseteq N$ tal que $a \in M$.*

Demostración. Sabemos que, como N es un n-sistema, entonces para cada $n \in N$ existe $r \in R$ tal que $nrn \in N$. Sea $a \in N$, definamos $M = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ recursivamente como

$$\begin{aligned} a_0 &= a \\ a_{n+1} &= a_n r_n a_n \end{aligned}$$

donde $r_n \in R$ es tal que $a_n r_n a_n \in N$. De este modo, es claro que $M \subseteq N$ y que $a \in M$, así que sólo falta demostrar que M es un m-sistema.

Sean $a_n, a_m \in M$. Por la construcción de M, $n = m$ implica que existe $r_n \in R$ tal que

$$a_n r_n a_m = a_n r_n a_n = a_{n+1} \in M.$$

Así que supondremos que $n \neq m$ y, en particular, que $n < m$.

Consideremos $a_m r a_m$ con $r \in R$ arbitrario. Notemos que podemos sustituir a_m de la siguiente manera

$$a_m r a_m = (a_{m-1} r_{m-1} a_{m-1}) r a_m.$$

Si $m - 1 \neq n$, podemos sustituir la primera incidencia de a_{m-1} en el segundo término de la igualdad anterior como

$$a_m r a_m = (a_{m-2} r_{m-1} a_{m-2}) r_{m-1} a_{m-1} r a_m.$$

Si seguimos así, eventualmente lograremos igualar $a_m r a_m$ a una expresión cuyo primer término sea a_n, es decir que tendremos

$$a_m r a_m = a_n (r a_{n+1} r_{n+1} a_{n+2} r_{n+2} \cdots a_m r_m) a_m \in a_n R a_m.$$

En resumen, $a_m R a_m \leq a_n R a_m$.

Por la construcción de M, es claro que $a_{m+1} \in a_m R a_m$. De esta manera, la contención anterior implica que existe $s \in R$ tal que

$$a_n s a_m = a_{m+1} \in M.$$

$\therefore$ M es un m-sistema. $\square$

Teorema 1.14. *Sea $C \leq R$. Son equivalentes:*

1. *C es semiprimo;*
2. *$C = \sqrt{C}$;*
3. *C es una intersección de ideales primos.*

Demostración. Supongamos que C es semiprimo y demostremos $C = \sqrt{C}$. La contención $C \leq \sqrt{C}$ se sigue de la igualdad obtenida en el teorema 1.8. Es decir

$$C \leq \bigcap \{P \leq R \mid P \text{ es primo y } C \leq P\} = \sqrt{C}.$$

La segunda contención la conseguiremos por contrapuesta. Sea $a \in R \setminus C$. Debido a que $N = R \setminus C$ es un n-sistema, entonces existe un m-sistema $M \subseteq R$ tal que $M \subseteq N$ y $a \in M$. Gracias a la contención de M en N obtenemos

$$M \cap C \subseteq N \cap C = \emptyset.$$

Es decir que existe un m-sistema M tal que $a \in M$ pero $M \cap C = \emptyset$. Usando la definición de $\sqrt{C}$, concluimos que $a \notin \sqrt{C}$.
$\therefore C = \sqrt{C}$.

Ahora notemos que si $C = \sqrt{C}$, entonces C es la intersección de los ideales primos que lo contienen. Por lo tanto, podemos afirmar que 2 implica 3.

Finalmente, si C es intersección de ideales primos, entonces $C = \bigcap\{P_i\}_{i\in I}$. Supongamos que $A \leq R$ es tal que $A^2 \leq C$. Para cada $i \in I$ se sigue que $A^2 \leq P_i$ y como P_i es primo, entonces $A \leq P_i$. Por lo tanto

$$A \leq \bigcap\{P_i\}_{i\in I} = C.$$

$\therefore C$ es semiprimo. $\square$

1.3. Anillos semiprimos

Definición 1.15. Decimos que el anillo R es semiprimo si $0 \leq R$ es un ideal semiprimo.

Es inmediato que la definición anterior es equivalente a afirmar que $I^2 = 0$ implica $I = 0$ para cualquier ideal $I \leq R$.

Dos ejemplos sencillos de anillos semiprimos son los dominios enteros y los anillos simples. En el primer caso, si tenemos $0 \neq I \leq D$ para un dominio D, entonces existe $a \in I$ distinto de cero que satisface $0 \neq a^2 \in I^2$, con lo que concluimos que D es semiprimo. Por otro lado, si R es un anillo simple, entonces $R^2 = R \neq 0$ para el único ideal de R distinto de cero.

Por otro lado, de acuerdo al teorema 1.14, si $0 \leq R$ es semiprimo, entonces es la intersección de un conjunto de ideales primos, $\{P_i\}_{i\in I}$. En consecuencia

$$\bigcap\{P \lneq R \mid P \text{ es primo}\} \leq \bigcap\{P_i\}_{i\in I} = 0,$$

es decir que si R es semiprimo, entonces $0 \leq R$ es la intersección de todos los ideales primos de R. Evidentemente, si 0 es la intersección de todos los ideales primos, entonces todo ideal $A \leq R$ tal que $A^2 = 0$ está contenido en cada ideal primo de R, es decir que 0 es un ideal semiprimo de R y, en consecuencia R es un anillo semiprimo. En conclusión,

$$R \text{ es semiprimo } \iff 0 = \bigcap\{P \lneq R \mid P \text{ es primo}\}.$$

De hecho, como todo ideal primo contiene un ideal primo mínimo, entonces

$$\bigcap\{P \lneq R \mid P \text{ es primo mínimo}\} = \bigcap\{P \lneq R \mid P \text{ es primo}\} = 0.$$

La siguiente proposición nos da algunas propiedades de los anuladores de los ideales bilaterales de un anillo semiprimo. Únicamente necesitamos recordar que los anuladores izquierdos son ideales izquierdos de R, que los anuladores derechos son ideales derechos de R y que los anuladores son ideales bilaterales de R. La notación que usaremos es $l.ann(A)$ (respectivamente $r.ann(A)$) para el anulador izquierdo (resp. derecho) de A y $ann(A)$ para el anulador bilateral de A.

Proposición 1.16. *Sean R un anillo semiprimo y $A \lneq R$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *$r.ann(A) = l.ann(A)$;*
2. *$ann(A)$ es el único seudocomplemento de A en R;*
3. *$ann(A) = \bigcap\{P \leq R \mid P$ es primo mínimo y $A \nleq P\}$;*
4. *${}_RA_R$ es uniforme si y sólo si $ann(A)$ es un ideal primo mínimo;*
5. *$A \subseteq_{es} R$ si y sólo si $ann(A) = 0$;*
6. *Si A no está contenido en ningún ideal primo mínimo de R entonces $A \subseteq_{es} R$.*

Demostración.

1. Sea $X = r.ann(A)$, de manera que $AX = 0$, luego

$$(XA)^2 = X(AX)A = 0.$$

Ya que $A \leq R$ es un ideal bilateral, entonces XA es un ideal derecho de R. Gracias a 1.10, sabemos que $0 \leq R$ es semiprimo si y sólo si $I^2 \leq 0$ implica $I \leq 0$ para cualquier ideal derecho $I_R \leq R_R$. Por lo tanto, $XA = 0$, así que concluimos

$$r.ann(A) = X \subseteq l.ann(A).$$

$\therefore r.ann(A) = X \subseteq l.ann(A)$.

Análogamente, obtendremos la segunda contención y, en consecuencia, la igualdad de ambos ideales.

Notemos que el inciso 1 indica que el anulador izquierdo y el anulador derecho de A son, en realidad, un único conjunto: el anulador de A. Por esta razón, a partir del inciso 2 hablaremos únicamente del ideal bilateral $ann(A) \leq R$.

2. Como A y $ann(A)$ son ideales bilaterales, entonces

$$(A)(ann(A)) \leq A \cap ann(A) = 0.$$

Por otra parte, si $I \leq R$ es un ideal bilateral tal que $A \cap I = 0$, entonces

$$IA \leq A \cap I = 0 \text{ y } AI \leq A \cap I = 0,$$

es decir que $I \leq ann(A)$. De este modo, cualquier ideal cuya intersección con A sea 0, debe estar contenido en $ann(A)$.

$\therefore ann(A)$ es el único seudocomplemento de A en R.

3. Sea $B = \bigcap\{P \lneq R \mid P$ es primo mínimo y $A \nleq P\}$. Ya que

$$A \leq \bigcap\{P \lneq R \mid P \text{ es primo mínimo y } A \leq P\},$$

entonces

$$\begin{aligned} A \cap B &\leq \bigcap\{P \lneq R \mid P \text{ es primo mínimo y } A \leq P\} \cap B \\ &= \bigcap\{P \lneq R \mid P \text{ es primo mínimo}\} = 0. \end{aligned}$$

De manera que $A \cap B = 0$, y como $ann(A)$ es el único seudocomplemento de A en R, obtenemos que $B \leq ann(A)$.

Por otra parte, $A\big(ann(A)\big) = 0 \leq P$ para cualquier ideal primo mínimo P; en consecuencia, si $A \nleq P$, se debe cumplir $ann(A) \leq P$. En particular, $ann(A)$ debe estar contenido en B, la intersección de los ideales primos mínimos que no contienen A.

$\therefore ann(A) = \bigcap\{P \leq R \mid P$ es primo mínimo y $A \nleq P\}$.

4. Supongamos que A es uniforme y que $A' \leq A$ es distinto de cero. Notemos que

$$ann(A)A' \leq ann(A)A = 0$$

implica $ann(A) \leq ann(A')$. Además, como A es uniforme y $A' \neq 0$, tenemos que

$$\big(A \cap ann(A')\big) \cap A' = 0,$$

así que $A \cap ann(A') = 0$ y, dado que $ann(A)$ es el único seudocomplemento de A en R, obtenemos la contención $ann(A') \leq ann(A)$. Es decir que los anuladores de A y de cualquiera de los ideales distintos de cero contenidos en A coinciden.

Ahora veamos que $ann(A)$ es un primo mínimo de R. Sean $B, C \leq R$ tales que $BC \leq ann(A)$. Si $AB = 0$ entonces $B \leq ann(A)$, así que vamos a suponer $AB \neq 0$ en lo que sigue. Por hipótesis, $A(BC) = 0$, de manera que $C \leq ann(AB)$ y $AB \leq A$. Gracias a la observación que acabamos de hacer, sabemos que $ann(AB) = ann(A)$, de manera que $C \leq ann(A)$. Así, $ann(A)$ es un ideal primo.

Finalmente, si tuviéramos un ideal primo $P_0 \leq ann(A)$, entonces $A \nleq P$ pues en caso contrario, $A \leq ann(A)$, es decir que $A^2 = 0$ y, en consecuencia $A = 0$, por lo que A no puede ser uniforme. Así, el inciso 3 implica

$$ann(A) = \bigcap\{P \leq R \mid P \text{ es primo y } A \nleq P\} \leq P_0.$$

$\therefore$ $ann(A)$ es un ideal primo mínimo de R.

Recíprocamente, sean $ann(A)$ un ideal primo mínimo y $0 \neq B \leq A$. Notemos que $B \nleq ann(A)$ pues, en ese caso,

$$B \leq ann(A) \leq ann(B)$$

implicaría $B^2 = 0$. Sin embargo, como R es semiprimo, tendríamos que $B = 0$, lo cual contradice la elección de este ideal. Además, sabemos que

$$ann(B) = \bigcap\{P \lneq R \mid P \text{ es primo mínimo y } B \nleq P\} \leq ann(A),$$

con lo que concluimos que $ann(A) = ann(B)$.

Ahora supongamos que $C \leq A$ es tal que $B \cap C = 0$. Debido a que $ann(B)$ es el único seudocomplemento de B en R, entonces $C \leq ann(B)$. Esto implica

$$C \leq A \cap ann(A) = 0,$$

es decir que $C = 0$.

$\therefore A$ es uniforme.

5. Como $ann(A)$ es el único seudocomplemento de A en R, entonces se sigue la doble implicación
$$A \subseteq_{es} R \iff ann(A) = 0.$$

6. Sabemos que $\bigcap\{P \lneq R \mid P \text{ es primo mínimo}\} = 0$ debido a que R es un anillo semiprimo. Además, por el inciso 3, también tenemos que
$$ann(A) = \bigcap\{P \lneq R \mid P \text{ es primo mínimo y } A \nleq P\}.$$
Si ahora suponemos que A no está contenido en ningún ideal primo mínimo de R, entonces
$$\{P \lneq R \mid P \text{ es primo mínimo}\} = \{P \lneq R \mid P \text{ es primo mínimo y } A \nleq R\},$$
lo que implica que las intersecciones de ambos conjuntos son iguales.

$\therefore ann(A) = 0.$

$\square$

Para finalizar, recordemos que todo ideal de $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $R_1, \ldots, R_n$ son anillos, es un producto directo de ideales de los anillos R_i. Es decir que
$$I \leq R \iff I = \prod_{i=1}^{n} I_i \text{ para } I_i \leq R_i.$$

Una consecuencia de esta propiedad es que todo producto directo finito de anillos semiprimos es un anillo semiprimo, pues si $I = \prod_{i=1}^{n} I_i$ es tal que $I^2 = 0$ y tomamos $\sum_{j=1}^{m} a_j b_j \in I_i^2$, entonces $\eta_i(a_j), \eta_i(b_j) \in I$ para cada j. Así que
$$\eta_i\left(\sum_{j=1}^{m} a_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \eta_i(a_j)\eta_i(b_j) \in I^2 = 0,$$
lo que implica que $I_i^2 = 0$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Sin embargo, como cada R_i es semiprimo, se sigue que $I_i = 0$ y, en consecuencia, $I = \prod_{i=1}^{n} I_i = 0$.

1.4. La parte singular de R

Recordemos que

$$Z(M) = \{x \in M \mid (0 : x) \underset{es}{\subseteq} R\}$$

es un submódulo de M que se conoce como la parte singular de M. Más aún

$$Z\colon R\text{-}Mod \longrightarrow R\text{-}Mod$$

es un prerradical en la categoría de los R-módulos izquierdos, así que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ Z(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f|"] & Z(N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

conmuta para cualesquiera $M, N \in R\text{-}Mod$ y $f \in Hom_R(M, N)$. Además decimos que M es singular si $Z(M) = M$ y que M es no singular si $Z(M) = 0$.

Si ahora definimos

$$\zeta(M) = \{x \in M \mid Ex = 0 \text{ para algún } E \underset{es}{\subseteq} R\}$$

y tomamos $m \in Z(M)$, entonces $(0 : m) \underset{es}{\subseteq} R$, de modo que

$$(0 : m) \underset{es}{\subseteq} R \;\text{ y }\; (0 : m)m = 0,$$

es decir que $m \in \zeta(M)$. Por otra parte, si tenemos $m \in \zeta(M)$, entonces existe $E \underset{es}{\subseteq} R$ tal que $Em = 0$ y, ya que

$$E \leq (0 : m) \leq R,$$

entonces $(0 : m) \underset{es}{\subseteq} M$. En consecuencia, $\zeta(M) \subseteq Z(M)$ y, por lo tanto, se da la igualdad

$$Z(M) = \{x \in M \mid Ex = 0 \text{ para algún } E \underset{es}{\subseteq} R\}.$$

El objetivo principal de esta última sección es obtener la proposición 1.18, pero también incluiremos la demostración de 1.19 que será de ayuda en capítulos posteriores.

Proposición 1.17. *Si R satisface CCA en anuladores izquierdos, entonces $Z(R)$ es nilpotente.*

Demostración. Para simplificar la notación, tomemos $A = Z(R)$ y notemos que

$$A \geq A^2 \geq A^3 \geq \cdots$$

genera la cadena ascendente de anuladores izquierdos

$$l.ann(A) \leq l.ann(A^2) \leq l.ann(A^3) \leq \cdots$$

Como R satisface CCA en anuladores izquierdos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que toda $k \geq n$ satisface $l.ann(A^n) = l.ann(A^k)$.

Si $A^{n+1} \neq 0$, existe $a \in A$ tal que $aA^n \neq 0$. Así que

$$\mathcal{X} = \{(0 : a) \leq R \mid aA^n \neq 0\} \neq \emptyset$$

está parcialmente ordenado por la inclusión de conjuntos. Además, si

$$\mathcal{C} = \{(0 : a_i)\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{X}$$

es una cadena, podemos asegurar la existencia de $(0 : a_j) \in \mathcal{C}$ tal que toda $i \in I$ cumple $(0 : a_j) \geq (0 : a_i)$ debido que, por hipótesis, R satisface CCA en anuladores izquierdos. Lo último significa que toda cadena está acotada superiormente por un elemento de $\mathcal{X}$. Por el Lema de Zorn, existe $a \in R$ tal que $(0 : a)$ es un elemento mayor del conjunto $\mathcal{X}$ y además $a \neq 0$ porque $aA^n \neq 0$.

Ahora trabajaremos con $b \in A$ arbitrario. Notemos que $(0 : a) \subseteq (0 : ab)$ porque si $x \in (0 : a)$, entonces $xab = 0 \cdot b = 0$ y que, por otro lado, $b \in A$ implica que $(0 : b) \underset{es}{\subset} R$.

Dado que $a \neq 0$, tenemos que $(0 : b) \cap Ra \neq 0$. En consecuencia, existe $r \in R$ tal que $ra \neq 0$ y $rab = 0$, entonces $r \notin (0 : a)$ pero $r \in (0 : ab)$, es decir que

$$(0 : a) \subsetneq (0 : ab).$$

La única manera de que esta contención propia no contradiga la elección de a es que $(ab)A^n = 0$, pero habíamos elegido $b \in A$ arbitrario, así que $aA^{n+1} = 0$, esto es que

$$a \in l.ann(A^{n+1}) = l.ann(A^n)$$

o, equivalentemente, que $aA^n = 0$, lo que también contradice la elección de a.

Puesto que la contradicción proviene de suponer que $A^{n+1} \neq 0$, sólo nos queda aceptar la igualdad, que es exactamente a lo que queríamos llegar.

$\therefore A = Z(R)$ es nilpotente. $\square$

Proposición 1.18. *Si R es semiprimo, entonces no contiene ideales nilpotentes distintos de 0. Más aún, si R también satisface CCA en anuladores izquierdos, entonces R es no singular.*

Demostración. Supongamos que R es semiprimo y que contiene un ideal nilpotente $A \neq 0$. Sea n el menor entero positivo que satisface $A^n = 0$. Como $A \neq 0$ entonces

$$2(n-1) = 2n - n = n \geq 2.$$

En consecuencia $(A^{n-1})^2 \leq A^n = 0$. Como R es semiprimo, esto significa que $A^{n-1} = 0$, lo cual es una contradicción a la elección de n.
$\therefore R$ no tiene ideales nilpotentes distintos de cero.

Ahora supongamos que R satisface CCA en anuladores izquierdos. Por la proposición anterior, sabemos que $Z(R)$ es nilpotente, pero el único ideal nilpotente de R es $0 \leq R$.
$\therefore Z(R) = 0$. $\square$

Proposición 1.19. *Sea*

$$0 \longrightarrow A \overset{f}{\rightarrowtail} B \overset{g}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta y f un monomorfismo esencial, entonces C es singular.

Demostración. Basta demostrar la contención $C \leq Z(C)$, así que comencemos tomando $c \in C$. Debido a que $g \in Hom_R(B, C)$ es suprayectivo, existe $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Ahora consideremos $(\_ \cdot b) \in Hom_R(R, B)$ y notemos que, como f es un monomorfismo esencial, $Im(f) \underset{es}{\subset} B$, así que

$$I \mathrel{\ddot{=}} (\_ \cdot b)^{-1}\big(Im(f)\big) = \{r \in R \mid rb \in Im(f)\} \underset{es}{\subset} R.$$

Notemos que $xb \in Im(f) = Ker(g)$ para toda $x \in I$, así que

$$xg(b) = g(xb) = 0,$$

de modo que $Ig(b) = 0$. Finalmente, como I es esencial en R, concluimos la pertenencia $c = g(b) \in Z(C)$.
$\therefore Z(C) = C$. $\square$

Consideremos el caso $N \underset{es}{\subseteq} M$, de modo que

$$0 \longrightarrow N \overset{i}{\hookrightarrow} M \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} {}^{M}/_{N} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta donde $i \in Hom_R(N, M)$ es un monomorfismo esencial. En consecuencia, la proposición 1.19 implica que, si N es esencial en M, entonces $Z({}^{M}/_{N}) = {}^{M}/_{N}$.

Capítulo 2

Dimensiones

2.1. Dimensión de Krull

Como veremos a lo largo de esta sección, la dimensión de Krull de un R-módulo se define a partir del concepto de desviación de un conjunto parcialmente ordenado.

Por esta razón, la primera parte de la sección se enfoca en demostrar algunas propiedades de la desviación de un COPO A. Ésta será la única parte del presente trabajo en el que supondremos que los objetos mencionados son conjuntos parcialmente ordenados o bien, elementos de estos conjuntos. Posteriormente seguiremos trabajando como hasta ahora.

Desviación de un COPO

Definición 2.1. Sea $(A, \leq)$ un COPO. Decimos que A satisface la condición de cadenas descendentes (resp. condición de cadenas ascendentes), abreviado CCD (CCA), si cualquier cadena descendente (ascendente) de elementos de A es constante después de una cantidad finita de elementos de la cadena.

Definición 2.2. Sean $(A, \leq)$ un COPO y $a, b \in A$ con $a \leq b$. El intervalo $[a, b]$ es el conjunto definido por

$$[a, b] = \{x \in A \mid a \leq x \leq b\}.$$

Parafrasearemos la primera definición diciendo que A satisface CCD si para toda cadena descendente de elementos de A,

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots,$$

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_k = a_n$ para toda $k \geq n$. Evidentemente, tendremos una afirmación análoga en el caso en que A satisfaga CCA.

Notemos que siempre podemos tomar los intervalos $[a_{n+1}, a_n]$ de la cadena descendente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Nos referiremos a $\big\{[a_{n+1}, a_n]\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ como el conjunto de intervalos de la cadena $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o, simplemente, como los intervalos de la cadena.

Es necesario resaltar que, como subconjuntos de A, todos estos intervalos son conjuntos parcialmente ordenados con la inclusión de conjuntos. Usaremos esto para hacer la siguiente definición.

Definición 2.3. Sea A un COPO. Definimos la desviación de A, denotada $dev(A)$, mediante los siguientes casos:

1. Si $A = \emptyset$, entonces $dev(A) = -1$.
2. Si $A \neq \emptyset$ satisface CCD, entonces $dev(A) = 0$.
3. Si $\alpha \neq 0$ es un ordinal, entonces $dev(A) = \alpha$ si se cumplen las dos siguientes condiciones:
   (a) $dev(A) \neq \beta$ para cualquier $\beta < \alpha$;
   (b) si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena descendente de elementos de A, entonces
   $$dev\big([a_{n+1}, a_n]\big) < \alpha$$
   para casi toda $n \in \mathbb{N}$.

Si $A \neq \emptyset$ y no existe un ordinal α tal que $dev(A) = \alpha$, diremos que A no tiene desviación.

Notemos que, si $A \neq \emptyset$ no satisface CCD pero satisface el inciso 3(a) de la definición anterior, entonces
$$dev(A) \geq \alpha,$$
aunque no podremos afirmar la igualdad sin más información.

En cambio, si A satisface el inciso 3(b), nos faltaría comprobar que no exista ningún ordinal $\beta < \alpha$ tal que $dev(A) = \beta$ para poder afirmar que $dev(A) = \alpha$. Lo único que podemos decir con certeza es
$$dev(A) \leq \alpha.$$
En particular, se sigue que A tiene desviación.

Ahora demostraremos las siguientes tres propiedades de la desviación de un COPO arbitrario.

Lema 2.4. *Si A tiene desviación y $B \subseteq A$, entonces $dev(B) \leq dev(A)$.*

Demostración. Supongamos que $dev(A) = \alpha$. Comenzaremos haciendo la demostración para los casos particulares $\alpha = -1$ y $\alpha = 0$ para después proceder por inducción sobre los ordinales.

Si $\alpha = -1$, entonces $A = \emptyset$ y, en consecuencia $B = \emptyset$. Así

$$dev(A) = -1 = dev(B).$$

Si $\alpha = 0$, entonces A satisface CCD. Si $B \neq \emptyset$, toda cadena de subconjuntos de B es una cadena de subconjuntos de A, por lo que B también satisface CCD. Esto implica que $dev(B) \in \{-1, 0\}$ para cualquier $B \subseteq A$, de donde se sigue la desigualdad que buscamos.

Ahora supongamos que todos los subconjuntos de un conjunto X con desviación menor que α tienen una desviación menor o igual a la de X.

Sea A tal que $dev(A) = \alpha$ y tomemos $B \subseteq A$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena descendente de elementos de B. Ya que

$$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B \subseteq A,$$

entonces estamos trabajando con una cadena descendente de elementos de A, de donde

$$dev\big([b_{n+1}, b_n]\big) < \alpha$$

para casi toda $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que B satisface el inciso 3(b) de la definición 2.3, así que $dev(B) \leq \alpha$.

$\therefore dev(B) \leq dev(A)$. □

Lema 2.5. *Sea A un COPO, entonces:*

1. $\sup\{dev\big([a, b]\big) \mid a, b \in A\} \leq dev(A) \leq \sup\{dev\big([a, b]\big) + 1 \mid a, b \in A\}$.
2. *Si $x \in A$, entonces*

$$dev(A) \leq \sup\{dev\big([a, b] + 1\big) \mid a, b \in A \text{ y } a \neq x\}.$$

Demostración. Comencemos con el primer inciso. Debido a que $[a, b] \subseteq A$, entonces

$$dev\big([a, b]\big) \leq dev(A)$$

para cualesquiera $a, b \in A$.

$\therefore \sup\{dev([a,b]) \mid a,b \in A\} \leq dev(A)$.

Por otro lado, cualquier cadena descendente $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ cumple la desigualdad

$$dev\big([a_{n+1},a_n]\big) < dev\big([a_{n+1},a_n]\big)+1 \leq \sup\{dev\big([a,b]\big)+1 \mid a,b \in A\}.$$

$\therefore dev(A) \leq \sup\{dev\big([a_{n+1},a_n]\big)+1 \mid a,b \in A\}$.

La última desigualdad completa la demostración del inciso 1, así que ahora procederemos a demostrar la segunda parte del lema. Notemos que si fijamos $x \in A$, entonces en toda cadena $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ existe a lo más un intervalo $[a_{m+1},a_m]$ tal que $a_{m+1}=x$ y $a_m \neq x$. En consecuencia, obtenemos que las desigualdades

$$\begin{aligned} dev\big([a_{n+1},a_n]\big) &< dev\big([a_{n+1},a_n]\big)+1 \\ &\leq \sup\{dev\big([a,b]\big)+1 \mid a,b \in A \text{ y } a \neq x\} \end{aligned}$$

son válidas para casi toda $n \in \mathbb{N}$.
$\therefore dev(A) \leq \sup\{dev\big([a,b]\big)+1 \mid a,b \in A \text{ y } a \neq x\}$. □

Proposición 2.6. *Si A satisface CCA entonces A tiene desviación.*

Demostración. Sea A un COPO que satisface CCA y supongamos que $[a,b]$ carece de desviación para algunos $a,b \in A$, de manera que

$$\mathcal{X} \ddot{=} \{x \in A \mid [x,b] \text{ no tiene desviación}\} \neq \emptyset.$$

Es claro que $\mathcal{X} \subseteq A$ está ordenado parcialmente por la inclusión de conjuntos. Además, si $\{a_i\}_{i\in I} \neq \emptyset$ es una cadena de elementos de $\mathcal{X}$ que carece de una cota superior, entonces podemos construir una cadena

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots,$$

situación que contradice la hipótesis de que A satisface CCA. Por el Lema de Zorn, $\mathcal{X}$ tiene un elemento máximo al que denotaremos a.

Notemos que cada intervalo $[x,y] \subseteq [a,b]$ con $a < x$ tiene desviación por la elección de a, así que podemos usar 2.5 para obtener la desigualdad

$$dev\big([a,b]\big) \leq \sup\{dev\big([x,y]\big)+1 \mid x \neq a\},$$

cuyo segundo término es un ordinal debido a que la desviación de cada intervalo $[x, y]$ con $x \neq a$ existe, lo que a su vez implica que $dev\big([a, b]\big)$ también existe.

Esta última aseveración, nos obliga a admitir que todo intervalo $[a, b] \subseteq A$ tiene desviación y, por lo tanto, también existe el supremo del conjunto de desviaciones de los intervalos de A. En conclusión,

$$dev(A) \leq \sup\{dev\big([a, b]\big) + 1 \mid a, b \in A\},$$

es decir que A tiene desviación. □

La dimensión de Krull

Recordemos que la retícula de submódulos de un R-módulo M,

$$\mathcal{L}(M) = \{N \subseteq M \mid N \text{ es submódulo de } M\},$$

es un conjunto parcialmente ordenado bajo la contención de conjuntos. De esta forma, es natural hacer la siguiente definición.

Definición 2.7. Sea $M \in R$-Mod. Definimos la dimensión de Krull de M como:

$$\mathcal{K}.dim(M) = dev\big(\mathcal{L}(M)\big).$$

Si $dev\big(\mathcal{L}(M)\big)$ no existe, entonces diremos que M no tiene dimensión de Krull o que la dimensión de Krull de M es infinita.

La definición que acabamos de dar nos permitirá demostrar fácilmente propiedades de la dimensión de Krull usando los previos resultados de la desviación. Así, si M tiene dimensión de Krull y $N \leq M$, entonces $dev\big(\mathcal{L}(M)\big)$ existe y

$$\mathcal{K}.dim(N) = dev\big(\mathcal{L}(N)\big) \leq dev\big(\mathcal{L}(M)\big) = \mathcal{K}.dim(M).$$

Esto implica que todo submódulo de M tiene dimensión de Krull menor o igual que la de M.

Además, es claro que M es neteriano si y sólo si $\mathcal{L}(M)$ satisface CCA como conjunto parcialmente ordenado. En consecuencia, la proposición 2.6 implica que todo R-módulo neteriano tiene dimensión de Krull.

Antes de continuar, notemos que podemos parafrasear la definición 2.3 para obtener una definición de dimensión de Krull de M que no utilice explícitamente el concepto de desviación. Sólo debemos recordar que, si $K \leq N \leq M$, entonces existe un isomorfismo de órdenes parciales

$$[K, N] \cong \mathcal{L}(N/K).$$

De esta forma, $\mathcal{K}.dim(M)$ queda definido con los siguientes incisos:

1. Si M es artiniano, entonces $\mathcal{K}.dim(M) = 0$.
2. Si $\alpha \neq 0$ es un ordinal, diremos que $\mathcal{K}.dim(M) = \alpha$ si se satisface:
   (a) $\mathcal{K}.dim(M) \neq \beta$ para cualquier $\beta < \alpha$.
   (b) Si $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena descendente se submódulos de M, entonces $\mathcal{K}.dim\left({}^{N_n}/_{N_{n+1}}\right) < \alpha$ para casi toda $n \in \mathbb{N}$.

Esta interpretación de la definición de dimensión de Krull nos permitirá demostrar con sencillez los siguientes dos resultados.

Lema 2.8. *Sean $M, N \in R$-Mod. Si $M \cong N$, entonces $\mathcal{K}.dim(M) = \mathcal{K}.dim(N)$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $\mathcal{K}.dim(M) = \alpha$ para demostrar que todo R-módulo isomorfo a M tiene dimensión de Krull menor o igual que α.

El caso $\alpha = 0$ es inmediato debido a que esta igualdad implica que M es artiniano. Puesto que esta propiedad se conserva bajo isomorfismos, entonces N también es artiniano y, en consecuencia,

$$\mathcal{K}.dim(N) = 0 = \alpha.$$

Supongamos ahora que la afirmación se cumple para todo ordinal menor que α. Como $\mathcal{K}.dim(M) = \alpha$, entonces cualquier cadena descendente $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de submódulos de M satisfará $\mathcal{K}.dim({}^{N_n}/_{N_{n+1}}) < \alpha$ para casi toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varphi \in Hom_R(M', M)$ un isomorfismo de R-módulos izquierdos y tomemos $\{N'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una cadena descendente de submódulos de M'. Notemos que

$$\varphi(N'_{n+1}) \leq \varphi(N'_n) \leq M,$$

de modo que $\{\varphi(N'_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena de submódulos de M tal que $\varphi(N'_n) \cong N'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia,

$$\mathcal{K}.dim\left({}^{\varphi(N'_n)}/_{\varphi(N'_{n+1})}\right) < \alpha$$

ocurre para casi toda $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, la asignación

$$x + N'_{n+1} \longmapsto \varphi(x) + \varphi(N'_{n+1})$$

es un isomorfismo entre ${N'_n}/{N'_{n+1}}$ y ${\varphi(N'_n)}/{\varphi(N'_{n+1})}$, de modo que podemos usar la hipótesis de inducción para obtener que

$$\mathcal{K}.dim({\varphi(N'_n)}/{\varphi(N'_{n+1})}) < \alpha$$

para casi toda $n \in \mathbb{N}$.

$\therefore \mathcal{K}.dim(M') \leq \alpha$.

Por lo anterior, si N y M son isomorfos, entonces se cumplen simultáneamente las desigualdades

$$\mathcal{K}.dim(N) \leq \mathcal{K}.dim(M) \text{ y } \mathcal{K}.dim(M) \leq \mathcal{K}.dim(N).$$

$\therefore \mathcal{K}.dim(M) = \mathcal{K}.dim(N)$. $\square$

Proposición 2.9. *Sean $M \in R$-Mod y $N \leq M$. Entonces M tiene dimensión de Krull si y sólo si N y ${M}/{N}$ tienen dimensión de Krull. Además,*

$$\mathcal{K}.dim(M) = \sup\{\mathcal{K}.dim(N), \mathcal{K}.dim({M}/{N})\}.$$

Demostración. Supongamos que M tiene dimensión de Krull. Ya vimos que esto implica que N también tiene dimensión de Krull y

$$\mathcal{K}.dim(N) \leq \mathcal{K}.dim(M).$$

Por otra parte, si $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena descendente de submódulos de ${M}/{N}$, entonces existe $\{K'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una cadena descendente de submódulos de M tal que cada $n \in \mathbb{N}$ satisface

$$N \leq K'_n \leq M \text{ y } K_n = {K'_n}/{N}.$$

Gracias al isomorfismo ${(K'_n/N)}/{(K'_{n+1}/N)} \cong {K'_n}/{K'_{n+1}}$, obtenemos

$$\mathcal{K}.dim({K_n}/{K'_{n+1}}) = \mathcal{K}.dim({K'_n}/{K'_{n+1}}) < \mathcal{K}.dim(M)$$

para casi toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, ${}^{M}/_{N}$ tiene dimensión de Krull y además

$$\mathcal{K}.dim({}^{M}/_{N}) \leq \mathcal{K}.dim(M).$$

$\therefore \sup\{\mathcal{K}.dim(N), \mathcal{K}.dim({}^{M}/_{N})\} \leq \mathcal{K}.dim(M)$.

Ahora supongamos que N y ${}^{M}/_{N}$ tienen dimensión de Krull. Sea

$$\alpha = sup\{\mathcal{K}.dim(N), \mathcal{K}.dim({}^{M}/_{N})\}$$

y tomemos $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una cadena descendente de submódulos de M. En consecuencia, $\{N \cap L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena descendente de submódulos de N y $\{{}^{(N+L_n)}/_{N}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena descendente de submódulos de ${}^{M}/_{N}$. Por lo tanto, las siguientes desigualdades ocurren simultáneamente para casi toda $n \in \mathbb{N}$:

(I) $\mathcal{K}.dim({}^{N\cap L_n}/_{N\cap L_{n+1}}) < \mathcal{K}.dim(N)$;

(II) $\mathcal{K}.dim({}^{(N+L_n/N)}/_{(N+L_{n+1}/N)}) < \mathcal{K}.dim({}^{M}/_{N})$.

También tenemos los siguientes isomorfismos e igualdades:

(III) ${}^{L_{n+1}+(N\cap L_n)}/_{L_{n+1}} \cong {}^{N\cap L_n}/_{L_{n+1}\cap N\cap L_n} = {}^{N\cap L_n}/_{N\cap L_{n+1}}$;

(IV) ${}^{L_n}/_{L_{n+1}+(N\cap L_n)} = {}^{L_n}/_{L_n\cap(N+L_{n+1})} \cong {}^{L_n+(N+L_{n+1})}/_{N+L_{n+1}} = {}^{N+L_n}/_{N+L_{n+1}}$
$\cong {}^{(N+L_n)/N}/_{(N+L_{n+1})/N}$.

Veamos que $\mathcal{K}.dim({}^{L_n}/_{L_{n+1}}) < \alpha$. Si $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una cadena descendente de submódulos de ${}^{L_n}/_{L_{n+1}}$, entonces existe $K'_m \leq M$ tal que

$$L_{n+1} \leq K'_m \leq L_n \ \text{ y } \ K_m = {}^{K'_m}/_{L_{n+1}}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Ya que $L_{n+1} \leq L_{n+1} + (N \cap L_n) \leq L_n$, entonces partimos la cadena en los conjuntos

$$\mathcal{A} = \{K'_m \mid K'_m \leq L_{n+1} + (N \cap L_n)\} \ \text{ y } \ \mathcal{B} = \{K'_m \mid L_{n+1} + (N \cap L_n) \leq K'_m\}.$$

Si $K'_m \in \mathcal{A}$, entonces

$$L_{n+1} \leq K'_{m+1} \leq K'_m \leq L_{n+1} + (N \cap L_n),$$

de manera que obtenemos el isomorfismo

$${}^{K_m}/_{K_{m+1}} = {}^{K'_m/L_{n+1}}/_{K'_{m+1}/L_{n+1}} \cong {}^{K'_m}/_{K'_{m+1}}$$

donde K_m, $K_{m+1} \leq {}^{L_{n+1} + (N \cap L_n)}/_{L_{n+1}}$, es decir que

$$\{K_m = {}^{K'_m}/_{L_{n+1}} \mid K'_m \leq L_{n+1}(N \cap L_n)\}$$

es una cadena de submódulos de ${}^{L_{n+1} + (N \cap L_n)}/_{L_{n+1}}$. En consecuencia, usamos la definición de la dimensión de Krull y la observación (**III**) para obtener que, para casi toda $m \in \mathbb{N}$, se cumplen las desigualdades

$$\begin{aligned}\mathcal{K}.dim({}^{K_m}/_{K_{m+1}}) &< \mathcal{K}.dim\left({}^{L_{n+1} + (N \cap L_n)}/_{L_{n+1}}\right)\\ &= \mathcal{K}.dim\left({}^{N \cap L_n}/_{N \cap L_{n+1}}\right) = \beta.\end{aligned}$$

Por otra parte, si $K'_m, K'_{m+1} \in \mathcal{B}$, tenemos

$$L_{n+1} + (N \cap L_n) \leq K'_{m+1} \leq K'_m \leq L_n,$$

de manera que existen los isomorfismos

$${}^{K_m}/_{K_{m+1}} = {}^{K'_m/L_{m+1}}/_{K'_{m+1}/L_{m+1}} \cong {}^{K'_m}/_{K'_{m+1}} \cong {}^{K'_m/(L_{n+1} + (N \cap L_n))}/_{(K'_{m+1}/L_{n+1} + (N \cap L_n))}$$

donde ${}^{K'_m}/_{L_{n+1} + (N \cap L_n)}$, ${}^{K'_{m+1}}/_{L_{n+1} + (N \cap L_n)} \leq {}^{L_n}/_{L_{n+1} + (N \cap L_n)}$. Ahora pocedemos de manera análoga al caso anterior pero utilizando la observación (**IV**) para obtener que las desigualdades

$$\begin{aligned}\mathcal{K}.dim\left({}^{K_m}/_{K_{m+1}}\right) &= \mathcal{K}.dim\left({}^{K'_m/(L_{n+1} + (N \cap L_n))}/_{K'_{m+1}/(L_{n+1} + (N \cap L_n))}\right)\\ &< \mathcal{K}.dim\left({}^{(N + L_n)/N}/_{(N + L_{n+1})/N}\right) = \gamma\end{aligned}$$

ocurren para casi toda $m \in \mathbb{N}$.

Notemos que el único caso que no se encuentra representado en los dos casos anteriores es cuando

$$K'_{m+1} < {}^{L_{n+1} + (N \cap L_n)}/_{L_{n+1}} < K'_m,$$

pero esto no afecta el hecho de que demostramos que

$$\mathcal{K}.dim\left({}^{K_m}/_{K_{m+1}}\right) < \sup\{\beta, \gamma\}$$

se da para casi toda $m \in \mathbb{N}$.

$\therefore \mathcal{K}.dim({}^{L_n}/_{L_{n+1}}) \leq \sup\{\beta, \gamma\}$ para casi toda $n \in \mathbb{N}$.

Sin embargo, las observaciones (**I**) y (**II**) implican que

$$\sup\{\beta, \gamma\} < \alpha.$$

Así que podemos concluir que $\mathcal{K}.dim(L_n/L_{n+1}) < \alpha$ para casi toda $n \in \mathbb{N}$, esto nos permite afirmar que $\mathcal{K}.dim(M)$ existe y

$$\mathcal{K}.dim(M) \leq \alpha.$$

Sin embargo, habíamos visto que la existencia de la dimensión de Krull implica la desigualdad $\alpha \leq \mathcal{K}.dim(M)$.
$\therefore \mathcal{K}.dim(M) = \sup\{\mathcal{K}.dim(N), \mathcal{K}.dim(M/N)\}$. □

Módulos críticos, módulos monoformes y módulos comprimibles

Cerraremos el tema de dimensión de Krull con algunos resultados que relacionan este concepto con los conceptos de R-módulos críticos, uniformes y comprimibles.

Definición 2.10. Sean M un R-módulo y α un ordinal.

Decimos que M es α-crítico si $\mathcal{K}.dim(M) = \alpha$ y, para todo cociente propio L de M, se tiene que $\mathcal{K}.dim(L) < \alpha$. Decimos que M es crítico si existe un ordinal α tal que M es α-crítico. Finalmente, un ideal izquierdo $I \leq R$ es crítico si I es crítico como R-módulo izquierdo.

Como todo cociente de M es isomorfo a M/N para algún $N \leq M$, entonces la condición de la existencia de un cociente propio cuya dimensión de Krull sea menor que α en la definición anterior es equivalente a la existencia de $N \leq M$ distinto de cero tal que $\mathcal{K}.dim(M/N) < \alpha$.

Es fácil ver que si M es α-crítico, y $M' \cong M$, entonces M' es α-crítico pues ya demostramos que el isomorfismo implica

$$\mathcal{K}.dim(M) = \alpha = \mathcal{K}.dim(M').$$

Por otro lado, si $N' \leq M'$ es distinto de cero, entonces podemos asegurar la existencia de $N \leq M$ tal que $N \cong N'$. En consecuencia, también obtenemos que $M/N \cong M'/N'$, así

$$\mathcal{K}.dim(M'/N') = \mathcal{K}.dim(M/N) < \alpha.$$

Ahora supongamos que M es α-crítico, de manera que todo $N \leq M$ distinto de cero cumple $\mathcal{K}.dim(M/N) < \alpha$. Sabemos que

$$\alpha = \mathcal{K}.dim(M) = sup\{\mathcal{K}.dim(N), \mathcal{K}.dim(M/N)\},$$

así que la desigualdad anterior implica que $\mathcal{K}.dim(N) = \alpha$. Por otra parte, si tomamos $K \leq N$ distinto de cero, entonces $N/K \leq M/K$. De este modo, tenemos

$$\mathcal{K}.dim(N/K) \leq \mathcal{K}.dim(M/K) < \alpha,$$

por lo cual, todo cociente propio de N tiene dimensión de Krull menor que α. En conclusión, todo submódulo de un módulo α-crítico también es α-crítico.

Finalmente, notemos que todo $S \in R\text{-}Mod$ simple es 0-crítico. Esto se debe a que $\mathcal{K}.dim(S) = 0$ por ser artiniano y a que el único cociente propio de S es $S/S = 0$ cuya dimensión de Krull es $\mathcal{K}.dim(0) = 0$. En consecuencia, todo módulo artiniano contiene un submódulo 0-crítico. Esta observación corresponde a un caso particular del siguiente teorema.

Teorema 2.11. *Todo módulo distinto de cero que tenga dimensión de Krull contiene un submódulo crítico.*

Demostración. Sea $M \neq 0$ con dimensión de Krull. Tomaremos α, el menor ordinal tal que existe $N_0 \leq M$ distinto de cero que satisface $\mathcal{K}.dim(N_0) = \alpha$.

Si N_0 no es α-crítico, entonces existe $0 \neq N_1 \leq N_0$ tal que $\mathcal{K}.dim(N_0/N_1) = \alpha$. Además,

$$\mathcal{K}.dim(N_1) \leq \mathcal{K}.dim(N_0) = \alpha$$

y la elección de α implican que $\mathcal{K}.dim(N_1) = \alpha$.

Si N_1 no es α-crítico, repetimos el procedimiento para hallar N_2 tal que

$$\mathcal{K}.dim(N_1/N_2) = \alpha \text{ y } \mathcal{K}.dim(N_2) = \alpha.$$

Repetimos este procedimiento para obtener la cadena descendente $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de submódulos de N_0. Por la definición de dimensión de Krull, debe existir una cantidad finita de $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\mathcal{K}.dim(N_{n+1}/N_n) = \alpha,$$

es decir que la cadena es finita.

$\therefore M$ tiene un submódulo $N \neq 0$ que es α-crítico. $\square$

Definición 2.12. Decimos que M es monoforme si todo $f \in Hom_R(N, M)$, con $N \leq M$, es monomorfismo o el morfismo cero.

Notemos que, para demostrar que M es monoforme, basta tomar $N \leq M$ distinto de cero y demostrar que todo $f \in Hom_R(N, M)$ es un monomorfismo o el morfismo cero. Esto se debe a que la implicación es inmediata cuando $N = 0$.

Concluiremos la sección de dimensión de Krull con la demostración de la proposición 2.15, para lo cual necesitaremos el siguiente teorema.

Teorema 2.13. *Todo R-módulo α-crítico es monoforme.*

Demostración. Sean M α-crítico y $N \leq M$ distinto de cero. Si $f \in Hom_R(N, M)$ no es el morfismo cero, entonces $Im(f) \neq 0$. En consecuencia, $Im(f)$ también es α-crítico y, en particular

$$\mathcal{K}.dim\big(Im(f)\big) = \alpha.$$

Ahora utilizamos el isomorfismo $Im(f) \cong {}^{M}/_{Ker(f)}$ para obtener las igualdades

$$\alpha = \mathcal{K}.dim\big(Im(f)\big) = \mathcal{K}.dim({}^{M}/_{Ker(f)}).$$

Ya que ${}^{M}/_{Ker(f)}$ es un cociente de M cuya dimensión de Krull es igual a α, entonces ${}^{M}/_{Ker(f)}$ no puede ser un cociente propio de M, pues eso contradiría la suposición de que M es α-crítico. La única manera de que esto ocurra es que $Ker(f) = 0$ o, equivalentemente, que f sea monomorfismo.
$\therefore M$ es monoforme. $\square$

Definición 2.14. Decimos que M es comprimible si para todo $N \leq M$ distinto de cero existe un monomorfismo $f \in Hom_R(M, N)$.

Proposición 2.15. *Si $M \neq 0$ es comprimible y tiene dimensión de Krull, entonces $End(M)$ es un dominio entero.*

Demostración. Comencemos viendo que si $M \neq 0$ es comprimible y tiene dimensión de Krull, entonces M es crítico.

Sabemos que $M \neq 0$ contiene un submódulo $N \neq 0$ que es α-crítico para algún ordinal α gracias a que M tiene dimensión de Krull. Por otra parte, el hecho de que M sea comprimible implica la existencia de un monomorfismo $f \in Hom_R(M, N)$, de forma que

$$M \cong Im(f) \leq N.$$

Así que podemos concluir que M es α-crítico.

Por el teorema anterior, tenemos que M también es monoforme, así que sólo resta demostrar que el anillo de endomorfismos de un módulo monoforme es un dominio entero. Sean $f, g \in End(M)$ distintos de cero, de modo que f y g son monomorfismos. En consecuencia, la composición fg también es monomorfismo y, en particiular, $fg \neq 0$ debido a que $M \neq 0$.
$\therefore End(M)$ es dominio entero. $\square$

2.2. Dimensión uniforme

Terminaremos el capítulo con algunos resultados sobre la dimensión uniforme o de Goldie. En particular, nos interesa la dimensión uniforme de los anillos semisimples, así que usaremos varios de los resultados del capítulo anterior.

Módulos con dimensión uniforme finita

Recordemos que M es uniforme si cada uno de sus submódulos distintos de cero es esencial en M. Y notemos que esta definición es equivalente a decir que M no contiene sumas directas de submódulos distintos de cero.

Esta observación motiva la definición de dimensión uniforme que veremos más adelante. Sin embargo, comenzaremos estudiando resultados del caso particular donde M tiene dimensión uniforme finita, concepto que definimos a continuación.

Definición 2.16. Diremos que M tiene dimensión uniforme finita (o dimensión de Goldie finita) si M no contiene ninguna suma directa infinita de submódulos de M distintos de cero. En caso contrario, diremos que M tiene dimensión uniforme infinita.

Notemos que la definición y la obsevación que la precede implican que todo módulo uniforme tiene dimensión uniforme finita.

Asimismo, si M es neteriano y $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} N_n \leq M$ es una suma directa de submódulos distintos de cero de M, podemos construir la cadena ascendente

$$N_0 \leq N_0 \oplus N_1 \leq N_0 \oplus N_1 \oplus N_2 \leq \cdots$$

que se detiene en algún natural n. Esto implica que toda suma directa de submódulos distintos de cero es finita y, por lo tanto, M tiene dimensión uniforme finita.

Para finalizar, si tomamos $N \leq M$ y M tiene dimensión uniforme finita, entonces N tiene dimensión uniforme finita debido a que toda suma directa de submódulos de N es una suma directa de submódulos de M.

Ahora veamos algunos resultados que necesitaremos para definir la dimensión uniforme de M.

Lema 2.17. *Si $M \neq 0$ tiene dimensión uniforme finita, entonces M contiene un submódulo uniforme distinto de cero.*

Demostración. Si M es uniforme entonces no hay nada que demostrar, así que supondremos que M no es uniforme. Esto quiere decir que existen N_1, $K_1 \leq M$ tales que

$$N_1, K_1 \neq 0 \;\; \text{y} \;\; N_1 \cap K_1 = 0.$$

Si algunos de los submódulos N_1 o K_1 es uniforme, hemos terminado; en caso contrario, continuamos.

Es claro que $N_1 \oplus K_1 \leq M$. Además, como K_1 no es uniforme, existen N_2, $K_2 \leq K_1$ tales que $N_2, K_2 \neq 0$ y $N_2 \cap K_2 = 0$. Por la construcción de N_2 y K_2, se sigue que $N_1 \cap N_2 = 0$ y $N_1 \cap K_2 = 0$, así que obtenemos la suma directa

$$N_1 \oplus N_2 \oplus K_2 \leq M.$$

Nuevamente podemos comprobar si alguno de los submódulos N_2 o K_2 es uniforme y, en caso contrario, repetir el procedimiento con $N_3, K_3 \leq K_2$ distintos de cero y tales que $N_3 \cap K_3 = 0$.

Si procedemos de esta manera, hallaremos $n \in \mathbb{N}$ tal que N_n o K_m es uniforme, pues en caso contrario, estaríamos construyendo una suma directa infinita de submódulos de M distintos de cero.

$\therefore$ M contiene un submódulo uniforme distinto de cero. □

Lema 2.18. *Si M tiene dimensión uniforme finita, entonces M contiene un submódulo esencial que es suma directa finita de submódulos uniformes.*

Demostración. Gracias al lema anterior, sabemos que M tiene un submódulo uniforme $M_1 \neq 0$. Si M_1 no es esencial en M, entonces existe $X \leq M$ tal que $X \neq 0$ pero $M_0 \cap X = 0$.

Debido a que $X \leq M$ y a que M tiene dimensión uniforme finita, X también tiene dimensión uniforme finita y, en consecuencia, contiene un submódulo uniforme $M_2 \neq 0$. Además

$$M_1 \cap M_2 \leq M_1 \cap X = 0,$$

así que obtenemos la suma directa $M_1 \oplus M_2 \leq M$.

Si $M_1 \oplus M_2$ no es esencial en M, repetimos el procedimiento anterior para obtener $M_3 \leq M$ y la suma $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \leq M$. Continuamos así hasta hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \underset{es}{\subseteq} M.$$

Dicha n debe existir porque M no contiene sumas directas infinitas debido a que su dimensión uniforme es finita y además $M_i \neq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ por la construcción de estos submódulos. □

En este lema ya podemos ver un candidato para definir la dimensión uniforme de M. Sin embargo, aún necesitamos ver que este natural es único, lo cual haremos en 2.20, haciendo uso del siguiente lema.

Lema 2.19. *Sea $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \underset{es}{\subseteq} M$ tal que cada $U_i \neq 0$ es un submódulo uniforme de M. Entonces, $N \leq M$ es esencial en M si y sólo si $N \cap U_i \neq 0$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.*

Demostración. Por definición de submódulo esencial, es inmediato que si $N \underset{es}{\subseteq} M$ entonces $N \cap U_i \neq 0$ para cada i.

Trabajemos entonces con $N \leq M$ tal que $N \cap U_i \neq 0$ para toda i. Usaremos inducción sobre n para demostrar que

$$N \cap (U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) \underset{es}{\subseteq} U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$$

para toda $n \in \mathbb{N}$.

El caso base es inmediato gracias a que $0 \neq N \cap U_1 \leq U_1$. Como U_1 es uniforme, se sigue que $N \cap U_1 \underset{es}{\subseteq} U_1$.

Ahora supongamos que la afirmación se cumple cuando la suma está compuesta de exactamente n sumandos. Sea $K \leq U_1 \oplus \cdots \oplus U_{n+1}$ distinto de cero y tomemos $k \in K$ con $k \neq 0$. Ya que podemos expresar a k como

$$k = u_1 + \cdots + u_{n+1}$$

con $u_i \in U_i$ para cada i, entonces debe existir $i \in \{1, ..., n+1\}$ tal que $u_i \neq 0$. Asumiremos $u_{n+1} \neq 0$ sin perder generalidad.

Esta propiedad de u_{n+1} implica que $Ru_{n+1} \neq 0$ con $Ru_{n+1} \leq U_{n+1}$ y U_{n+1} uniforme, por lo cual

$$Ru_{n+1} \underset{es}{\subseteq} U_{n+1}.$$

Por otro lado, sabemos que la intersección $N \cap U_{n+1} \leq U_{n+1}$ no es cero, así que

$$(N \cap U_{n+1}) \cap Ru_{n+1} \neq 0,$$

es decir que existe $r \in R$ tal que $ru_{n+1} \in N$ y $ru_{n+1} \neq 0$.

Consideremos ahora

$$rk = r(u_0 + \cdots + u_{n+1}) = ru_0 + \cdots + ru_{n+1}$$

y notemos que $rk \neq 0$ debido a que $ru_{n+1} \neq 0$ y a que la suma de los submódulos $U_i \leq M$ es directa. Tomemos $x = ru_0 + \cdots + ru_n$ para demostrar que $K \cap N \neq 0$ mediante los casos $x = 0$ y $x \neq 0$.

Si $x = 0$, entonces

$$0 \neq rk = x + ru_{n+1} = ru_{n+1}.$$

Como $k \in K$ y como elegimos $r \in R$ de tal manera que $ru_{n+1} \in N$, entonces $rk \in K \cap N$. En conclusión, $K \cap N \neq 0$.

Si $x \neq 0$, entonces el submódulo $Rx \leq U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ es distinto de cero. Por hipótesis de inducción, tenemos que

$$N \cap (U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) \underset{es}{\subseteq} U_1 \oplus \cdots \oplus U_n.$$

Por lo tanto, la intersección

$$N \cap Rx = N \cap \big((U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) \cap Rx\big)$$

tiene un elemento $y \neq 0$. Puesto que $y \in Rx$, podemos tomar $s \in R$ tal que $y = sx$ y así, llegamos a que sx, $ru_{n+1} \in N$ y $k \in K$, de forma que

$$srk = sx + sru_{n+1} \in K \cap N.$$

Además, $sx \neq 0$, por lo que $srk \neq 0$ gracias, otra vez, a que la suma de los submódulos U_i es directa. En resumen, $K \cap N \neq 0$ para cualquier $K \leq U_1 \oplus \cdots \oplus U_{n+1}$ distinto de cero.
$\therefore N \cap (U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) \underset{es}{\subseteq} U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sólo resta demostrar que N es esencial en M. Esto ocurre porque

$$N \cap (U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) \underset{es}{\subseteq} U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \underset{es}{\subseteq} M$$

implica $N \cap (U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) \underset{es}{\subseteq} M$. Y de esta afirmación, junto con la cadena de contenciones $N \cap (U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) \leq N \leq M$, se sigue lo que buscamos.
$\therefore N \underset{es}{\subseteq} M$ si y sólo si $N \cap U_i \neq 0$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. □

Teorema 2.20. *Sean $M \in R$-Mod con dimensión uniforme finita y*

$$U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \underset{es}{\subseteq} M$$

una suma directa finita de submódulos uniformes de M. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. *Cualquier suma directa de submódulos distintos de cero de M tiene a lo más n sumandos.*
2. *Una suma directa de submódulos uniformes de M es esencial en M si y sólo si tiene exactamente n sumandos.*

Demostración. Enfoquémonos en el primer inciso. Sea $\bigoplus_{j=1}^{k} N_j \leq M$ con $N_j \leq M$ distinto de cero para cada $j \in \{1, ..., k\}$. Sólo debemos demostrar que $k \leq n$ para llegar a lo que queremos.

Debido a que la suma de los submódulos $N_j \neq 0$ es directa, entonces

$$W_1 = N_2 \oplus \cdots \oplus N_k$$

no es esencial en M. De acuerdo al lema 2.19, esto significa que existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $W_1 \cap U_i = 0$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $i = 1$, de forma que obtenemos la suma directa

$$U_1 \oplus (N_2 \oplus \cdots \oplus N_k) = U_1 \oplus W_1 \leq M.$$

Ahora repetimos el mismo procedimiento para $U_1 \oplus N_3 \oplus \cdots \oplus N_k \leq M$. Es claro que $W_2 = N_3 \oplus \cdots \oplus N_k$ no es esencial en M debido a que $U_1 \cap W_2 = 0$, así que podemos suponer, utilizando el lema 2.19 y sin pérdida de generalidad, que $U_2 \cap W_2 = 0$. Obtenemos la suma directa

$$U_1 \oplus U_2 \oplus N_3 \oplus \cdots \oplus N_k \leq M.$$

Continuando de esta manera, notamos que podemos sustitur cada uno de los submódulos N_j por un U_j de manera que $j_1 \neq j_2$ implica $U_{j_1} \neq U_{j_2}$. En consecuencia, la cantidad de submódulos N_j es menor o igual a la cantidad de submódulos U_i.

$\therefore k \leq n$.

Ahora demostremos la doble implicación del inciso 2 tomando $\bigoplus_{j=1}^{k} N_j \leq M$ tal que cada $N_j \neq 0$ es uniforme.

Supongamos que $\bigoplus_{i=j}^{k} N_j$ es un submódulo esencial en M. Notemos que tanto $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ como $\bigoplus_{j=1}^{k} N_j$ satisfacen las hipótesis del inciso 1, así que cualquier otra suma directa de submódulos distintos de cero tendrá a lo más tantos sumandos como la cantidad de submódulos U_i y N_j. En particular, $k \leq n$ y $n \leq k$ y, por lo tanto, $n = k$.

Finalmente, supongamos que $\bigoplus_{j=1}^{n} N_j$ no es esencial en M. Esta afirmación implica que existe $X \leq M$ tal que

$$X \neq 0 \;\text{ pero }\; \left(\bigoplus_{j=1}^{n} N_j\right) \cap X = 0.$$

Así que obtuvimos la suma directa

$$N_1 \oplus \cdots \oplus N_n \oplus X \leq M$$

con $n+1$ sumandos, lo cual contradice el inciso 1. En consecuencia, $\bigoplus_{j=1}^{n} N_j$ es esencial en M.

$\therefore \bigoplus_{j=1}^{k} N_j \subseteq_{es} M$ si y sólo si $k = n$. $\square$

Tal como habíamos advertido, este teorema indica que, si M tiene dimensión uniforme finita, entonces el entero positivo n tal que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \subseteq_{es} M,$$

donde $U_i \neq 0$ son submódulos uniformes de M, no depende de la elección de los submódulos U_i. Gracias a esto, podemos hacer la siguiente definición.

Definición 2.21. Definimos la dimensión uniforme (o dimensión de Goldie) de M, denotada por $u.dim(M)$, como el entero positivo n tal que existen $U_1, \dots, U_n \leq M$ uniformes y distintos de cero que satisfacen

$$\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \subseteq_{es} M$$

Si dicho entero positivo no existe, diremos que M tiene dimensión uniforme infinita.

Para la siguiente proposición, necesitamos recordar que si $\bigoplus_{i\in I} M_i \leq M$ es una suma directa de submódulos de M y $\varphi \in Hom_R(M, N)$ es un monomorfismo, entonces $\varphi(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} \varphi(M_i)$.

Esto se debe a que las dobles implicaciones

$$\begin{aligned} x \in \varphi\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) &\iff x = \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} m_{i_k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(m_{i_k}) \text{ con } m_{i_k} \in M_{i_k} \text{ y } n \in \mathbb{N} \\ &\iff x \in \sum_{i\in I} \varphi\left(M_i\right) \end{aligned}$$

implican la igualdad $\varphi\big(\bigoplus_{i\in I} M_i\big) = \sum_{i\in I} \varphi(M_i)$.

Por otro lado, si fijamos $j \in I$ y tomamos $x \in \sum_{i\neq j} \varphi(M_i) \cap \varphi(M_j)$, obtenemos que $x = \varphi(\sum_{k=1}^{n} m_{i_k})$ para algunos $n \in \mathbb{N}$ y $m_{i_k} \in M_{i_k}$ con $i_k \neq j$ para $k \in \{1, ..., n\}$ y $x \in \varphi(M_j)$. En consecuencia

$$\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} m_{i_k} - m_j\right) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} m_{i_k}\right) - \varphi(m_j) = 0.$$

Puesto que φ es monomorfismo por hipótesis, esta última igualdad implica que

$$\sum_{k=1}^{m} m_{i_k} = m_j \in \Big(\bigoplus_{i\neq j} M_i\Big) \cap M_j = 0.$$

En consecuencia, $x = \varphi(m_j) = 0$, de donde se sigue que $\sum_{i\neq j} \varphi(M_i) \cap \varphi(M_j) = 0$ para $j \in I$ arbitrario. Por lo tanto, podemos concluir que la suma $\sum_{i\in I} \varphi(M_i)$ es directa.

Proposición 2.22. *Sean $M, M' \in R$-Mod con dimensión uniforme finita y $N \leq M$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. $u.dim(N) \leq u.dim(M)$.
2. $u.dim(N) = u.dim(M)$ *si y sólo si* $N \subseteq_{es} M$.
3. *Si* $M \cong M'$, *entonces* $u.dim(M) = u.dim(M')$.

Demostración. El primer inciso es sencillo de demostrar debido a que toda suma directa de submódulos de N distintos de cero es una suma directa de submódulos de M distintos de cero. En consecuencia, dicha suma es finita y, más aún, tiene a lo más $u.dim(M) \in \mathbb{Z}^+$ sumandos.
$\therefore u.dim(N) \leq u.dim(M)$.

Ahora veamos el segundo inciso. Si suponemos

$$u.dim(N) = u.dim(M) = n,$$

entonces toda suma directa de submódulos distintos de cero de N tiene a lo más n elementos. De hecho, si $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i$ es tal que $U_i \leq N$ es uniforme y distinto de cero para toda $i \in \{1, ..., n\}$, entonces

$$U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \subseteq_{es} M \ \text{ y } \ U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \leq N \leq M,$$

es decir que N es esencial en M.

Para la segunda implicación, recordemos que si $u.dim(N) = k$, existen $U_1, \ldots, U_k$ submódulos de N uniformes y distintos de cero tales que

$$U_1 \oplus \cdots \oplus U_k \subseteq_{es} N.$$

Ya que N es esencial en M, entonces

$$U_1 \oplus \cdots \oplus U_k \subseteq_{es} M.$$

Concluimos utilizando el teorema anterior, el cual nos indica que el hecho de que $\bigoplus_{i=1}^{k} U_i$ sea esencial en M implica que $k = n$.

$\therefore N \underset{es}{\subseteq} M$ si y sólo si $u.dim(N) = u.dim(M)$.

Demostremos el último inciso de la proposición. Si $\varphi \in Hom_R(M, M')$ es un isomorfismo, entonces toda suma directa de submódulos de M va a dar a una suma directa de submódulos de M' bajo φ. Además, el hecho de que φ es un isomorfismo también implica que

$$\varphi(N) = 0 \iff N = 0$$

para cualquier $N \leq M$.

De esta forma, si $\bigoplus_{i\in I} N_i \leq M$ es una suma directa de submódulos de M distintos de cero, entonces $\bigoplus_{i\in I} \varphi(N_i) \leq M'$ es una suma directa de submódulos distintos de cero de M'. Así, tenemos que $|I| \leq u.dim(M')$, es decir que toda suma directa de submódulos distintos de cero de M tiene a lo más $u.dim(M')$ sumandos.

Sin embargo, con el mismo argumento se puede justificar que toda suma directa de submódulos distintos de cero de M' tiene a lo más $u.dim(M)$ sumandos. En particular, obtenemos las desigualdades

$$u.dim(M') \leq u.dim(M) \ \text{ y } \ u.dim(M') \geq u.dim(M).$$

$\therefore u.dim(M) = u.dim(M')$. $\square$

Corolario 2.23. *Un R-módulo M tiene dimensión uniforme finita si y sólo si satisface CCA en seudocomplementos.*

Demostración. Sea M un R-módulo con dimensión uniforme finita. Supongamos que existe una cadena ascendente de seudocomplementos en M,

$$N_0 < N_1 < N_2 < \cdots$$

Notemos que si N_i es seudocomplemento de K_i en M, entonces N_i es seudocomplemento de $A_i = N_{i+1} \cap K_i$ en N_{i+1}. Esto se debe a que, por construcción, $A_i, N_i \leq N_{i+1}$ son tales que

$$A_i \cap N_i = (N_{i+1} \cap K_i) \cap N_i = 0.$$

Por otra parte, si $L \leq N_{i+1} \leq M$ es tal que $L \cap A_i = 0$ y $N_i \leq L$ entonces $L = N_i$ porque N_i es seudocomplemento de K_i en M.

Además, $A_i \neq 0$ porque, en caso contrario, tendríamos que

$$N_{i+1} \cap K_i = A_i = 0 \ \text{ y } \ N_i < N_{i+1},$$

contradiciendo la suposición de que N_i es seudocomplemento de K_i en M. Por lo tanto, $A_i \neq 0$ es seudocomplemento de N_i en N_{i+1}.

Ahora vamos a ver que M no tiene dimensión uniforme finita porque, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe una suma directa de submódulos de M distintos de cero, a saber:

$$A_1 \oplus \cdots \oplus A_{n+1} \leq M.$$

Esto lo demostramos por inducción sobre n. Ya que el caso base $n = 0$ es inmediato pues $A_1 \leq M$ es distinto de cero, supongamos que la suma de los primeros n submódulos A_i es directa. Por construcción, $A_i \leq N_{n+1}$ para toda $i \leq n$, así que $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \leq N_{n+1}$ y, en consecuencia,

$$(A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) \cap A_{n+1} \leq N_{n+1} \cap A_{n+1} = 0,$$

que es lo que queríamos y con lo que concluimos que M no tiene dimensión uniforme finita.

Recíprocamente, si M satisface CCA en seudocomplementos y $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}^+} N_i$ es una suma directa de submódulos de M, entonces podemos construir recursivamente una cadena ascendente de seudocomplementos

$$K_1 \leq K_2 \leq K_3 \leq \cdots$$

tomando K_1 un seudocomplemento de $\bigoplus_{i>1} N_i$ en M y K_{n+1} un seudocomplemento de $\bigoplus_{i>n+1} N_i$ que contenga a K_n.

En consecuencia, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $K_n = K_k$ para todo $k \geq n$, es decir que todas las sumas $\bigoplus_{i>k} N_i$ tienen un mismo seudocomplemento K_n. En particular, como $\left(\bigoplus_{i>n} N_i\right) \cap K_n = 0$, tenemos

$$\left(\bigoplus_{i>n+1} N_i\right) \cap (N_{n+1} \oplus K_n) = \left(\bigoplus_{i>n+1} N_i \cap N_{n+1}\right) + \left(\bigoplus_{i>n+1} N_i \cap K_n\right) = 0,$$

de donde se sigue que $N_{n+1} = 0$ debido a que $K_n \leq N_{n+1} \oplus K_n$ y K_n es seudocomplemento de $\bigoplus_{i>n+1} N_i$ en M.

Si ahora suponemos que $N_j = 0$ para toda $n < j < k$, entonces podemos usar los mismos argumentos para demostrar que $N_k = 0$, pues trabajaríamos con la suma directa $\bigoplus_{i>n} N_i = \left(\bigoplus_{i>k} N_i\right) \oplus N_k$. En conclusión, toda suma directa de submódulos distintos de cero es finita, con lo que obtenemos que M tiene dimensión uniforme finita.

$\therefore$ M tiene dimensión uniforme finita si y sólo si satisface CCA en seudocomplementos. $\square$

La dimensión uniforme de anillos semiprimos

En esta última parte del capítulo trabajaremos con ideales izquierdos y con ideales bilaterales de R. Esto se debe a que algunas propiedades se definen exclusivamente para un lado mientras que el concepto de anillo semiprimo se define, como ya vimos, a partir de ideales bilaterales.

En particular, en el siguiente teorema, sólo trabajaremos con ideales bilaterales pues los resultados de dimensión uniforme para R-módulos izquierdos se extienden para R-bimódulos tomando submódulos bilaterales en la definición. Por lo tanto, haremos uso de todos los resultados que ya vimos pero aplicados al bimódulo ${}_RR_R$ de dimensión uniforme finita.

Teorema 2.24. *Sea R un anillo semiprimo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *${}_RR_R$ tiene dimensión uniforme finita.*
2. *R tiene una cantidad finita de ideales primos mínimos.*
3. *R tiene un cantidad finita de anuladores.*
4. *R satisface CCA en anuladores.*

Demostración. Como R es un anillo semiprimo, usaremos constantemente las afirmaciones demostradas en la proposición 1.16.

Veamos que 1 implica 2. Sea n =u.dim$({}_RR_R) \in \mathbb{Z}^+$, de forma que existen ideales uniformes $U_1, \ldots, U_n \leq R$ tales que $\bigoplus_{i=1}^n U_i \underset{es}{\subseteq} R$. En consecuencia,

$$P_i = ann(U_i) \leq R$$

es un ideal primo mínimo y $ann(\bigoplus_{i=1}^n U_i) = 0$.

Vamos a demostrar que el producto $P_1 \cdots P_n = 0$. En primer lugar, notemos que

$$P_1 \cdots P_n \leq P_1 \cap \cdots \cap P_n$$

porque $P_1 \cdots P_n \leq P_i$ debido a que cada P_i es un ideal bilateral de R. Ya que esto ocurre para cada uno de los ideales P_i, entonces obtenemos la contención mencionada.

Por otra parte, $\bigcap_{i=1}^n P_i \leq ann(\bigoplus_{i=1}^n U_i)$ porque $x \in \bigcap_{i=1}^n P_i$ implica que $xU_i = 0$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Así que cualquier $u_1 + \cdots + u_n \in \bigoplus_{i=1}^n U_i$ satisface que

$$x(u_1 + \cdots + u_n) = xu_1 + \cdots + xu_n = 0,$$

es decir que $P_1 \cdots P_n \leq ann(\bigoplus_{i=1}^{n} U_i) = 0$.

Así, tenemos la contención $P_1 \cdots P_n = 0 \leq P$ para cualquier ideal primo mínimo $P < R$, por lo que existe $i \in \{1, .., n\}$ tal que $P_i \leq P$. Al ser P un ideal primo mínimo, se sigue que $P_i = P$. Esto significa que los únicos ideales primos mínimos de R son precisamente $P_1, ..., P_n$.
$\therefore$ R tiene una cantidad finita de ideales primos mínimos.

Ahora supongamos que R tiene $n \in \mathbb{N}$ ideales primos mínimos. y veamos que R tiene una cantidad finita de anuladores Debido a que, para cada ideal $A \leq R$, se cumple la igualdad

$$ann(A) = \bigcap\{P \leq R \mid P \text{ es primo mínimo y } A \nleq P\},$$

entonces sólo puede haber tantos anuladores como elementos en $\wp(\{P_i\}_{i=1}^{n})$, es decir que R tiene 2^n ideales anuladores.
$\therefore$ R tiene una cantidad finita de anuladores.

Para la penúltima implicación, notemos que cualquier cadena ascendente de anuladores de R tendrá a lo más tantos elementos como anuladores tenga R. Así, si R tiene una cantidad finita de anuladores, entonces R satisfará CCA en ideales anuladores.

Finalmente, recordemos que todo anulador $ann(A) \leq R$ es seudocomplemento de $A \leq R$, así que toda cadena ascendente de anuladores es, en particular, una cadena ascendente de seudocomplementos. Esto significa que si R satisface CCA en anuladores, entonces R satisface CCA en seudocomplementos y, por 2.23, ${}_RR_R$ tiene dimensión uniforme finita. □

Definición 2.25. Decimos que $x \in R$ es un elemento regular izquierdo (resp. derecho) de R si $rx = 0$ (resp. $xr = 0$) implica $r = 0$.

Diremos que x es regular si es regular izquierdo y regular derecho.

De acuerdo a la definición, $x \in R$ es regular izquierdo si y sólo si no es divisor derecho del cero y ocurre lo análogo cuando x es regular derecho y regular. Esta definición facilitará la demostración de los dos últimos resultados del capítulo.

Proposición 2.26. *Sea R un anillo semiprimo, no singular izquierdo y tal que ${}_RR$ tiene dimensión uniforme finita. Si $x \in R$ es regular izquierdo, entonces x es regular y además $Rx \subseteq_{es} R$.*

Demostración. Como $x \in R$ es regular izquierdo, entonces el R-morfismo

$$\begin{aligned}(\_ \cdot x)\colon R &\longrightarrow Rx \\ r &\longmapsto rx\end{aligned}$$

es inyectivo, por lo que $(\_ \cdot x)$ es un isomorfismo entre R y Rx. Por lo tanto

$$u.dim(R) = u.dim(Rx).$$

lo cual a su vez implica que $Rx \underset{es}{\subseteq} R$.

Por otra parte, si tomamos $y \in r.ann(x)$, entonces $rxy = 0$ para cualquier $r \in R$. Dicho de otro modo

$$Rx \underset{es}{\subseteq} R \ \text{ y } \ (Rx)y = 0,$$

por lo que $y \in Z(R) = 0$. En conclusión, $r.ann(x) = 0$.
$\therefore$ r es regular. $\square$

Notemos que si M es un R-módulo tal que $N \underset{es}{\subseteq} M$ y $x \in M$, entonces

$$(N : x) \ddot{=} \{r \in R \mid rx \in N\} \underset{es}{\subseteq} R.$$

Esto de debe a que si tenemos $I \leq R$ distinto de cero, entonces pueden darse dos distintos casos para $Ix \leq M$.

Si $Ix = 0$, entonces todo elemento $a \in I$ satisface $ax = 0 \in N$. Por lo tanto, $I \leq (N : x)$ y entonces

$$I \cap (N : x) = I \neq 0.$$

Por otra parte, si $Ix \neq 0$, entonces $Ix \cap N \neq 0$ debido a que N es esencial en M. Así que existe $a \in I$ tal que $a \neq 0$ y $ax \in N$, es decir que

$$I \cap (N : x) \neq 0.$$

Esto concluye la demostración de que el ideal $(N : x)$ es esencial en R. Usaremos esta afirmación para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.27. *Sea R un anillo semiprimo, no singular izquierdo y tal que ${}_RR$ tiene dimensión uniforme finita. Si ${}_RE \leq {}_RR$, entonces:*

1. *E tiene un elemento x tal que $l.ann(x) \cap E = 0$.*

2. $E \subseteq_{es} R$ *si y sólo si existe* $x \in E$ *regular en* R.

Demostración. Para demostrar el primer inciso, notemos que $E = 0$ satisface

$$l.ann(0) \cap E = 0.$$

Si $E \neq 0$, vamos a considerar el caso en el que E es uniforme y posteriormente lo utilizaremos para demostrar el caso en que E no es uniforme.

Supongamos que E es uniforme. Notemos que $E \neq 0$ implica $E^2 \neq 0$ porque R es semiprimo, de modo que existen $x, y \in E$ tales que $xy \neq 0$. Si $A = l.ann(y) \cap E \neq 0$, entonces $A \subseteq_{es} E$ debido a que E es uniforme, lo cual a su vez implica que

$$(A : x) = \{r \in R \mid rx \in A\} \subseteq_{es} R.$$

Por otra parte, $(A : x)xy = 0$ pues si tenemos $r \in (A : x)$, entonces

$$rx \in A \leq l.ann(y),$$

de donde se sigue que $rxy = 0$ para cualquier $r \in (A : x)$. En consecuencia obtenemos las contenciones $(A : x) \leq l.ann(xy) \leq R$, así que podemos utilizar el hecho de que $(A : x)$ es esencial en R para concluir que

$$l.ann(xy) \subseteq_{es} R.$$

Sin embargo, esto implica que $xy \in Z(R)$, pertenencia que genera una contradicción debido a que $xy \neq 0$ y $Z(R) = 0$.
$\therefore$ Si E es uniforme, entonces $l.ann(y) \cap E = 0$.

Para el caso general, notemos que ${}_RE \leq {}_RR$ tiene dimensión uniforme finita, de modo que contiene un ideal uniforme $U_1 \leq E$. Ya vimos que, bajo esta circunstancia, existe $a_1 \in U_1$ tal que $l.ann(a_1) \cap U_1 = 0$.

Si ocurriera que $l.ann(a_1) \cap E \neq 0$, entonces existirían un ideal uniforme

$$U_2 \leq l.ann(a_1) \cap E$$

y un elemento $a_2 \in U_2$ tal que $l.ann(a_2) \cap U_2 = 0$. Notemos que los ideales Ra_1 y Ra_2 son distintos de cero puesto que $a_1, a_2 \neq 0$ y veamos que la suma de Ra_1, Ra_2, e $I = l.ann(a_1) \cap l.ann(a_2) \cap E$ es directa. Por construcción, se dan las contenciones

$Ra_1 \leq U_1$, $Ra_2 \leq U_2 \leq l.ann(a_1)$ e $I \leq l.ann(a_1) \cap l.ann(a_2)$ así que

$$Ra_2 \cap I \leq l.ann(a_2) \cap U_2 = 0 \quad \text{y} \quad Ra_1 \cap (Ra_2 \oplus I) \leq U_1 \cap l.ann(a_1) = 0.$$

Por lo tanto, obtenemos $Ra_1 \oplus Ra_2 \oplus I \leq E$.

Si $I \neq 0$, continuamos con este procedimiento hasta encontrar $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$l.ann(a_1) \cap \cdots \cap l.ann(a_k) \cap E = 0.$$

La existencia del entero positivo k está garantizada gracias a que la desigualdad con cero para cada $k \in \mathbb{Z}^+$ implicaría que podemos hallar una suma de ideales distintos de cero con $k+1$ sumandos, lo cual contradice la hipótesis de que ${}_RR$ tiene dimensión uniforme finita.

Finalmente, definamos $x = \sum_{i=1}^{k} a_i \in U_1 \oplus \cdots \oplus U_k \leq E$, de tal manera que la igualdad

$$l.ann(x) = l.ann(a_1) \cap \cdots \cap l.ann(a_k),$$

que se satisface debido a que la suma es directa, implica lo que buscábamos.
$\therefore\ l.ann(x) \cap E = 0.$

Ahora vamos a demostrar el inciso 2. Si E es esencial en R, en particular es distinto de cero, por lo que podemos usar la primera parte de la proposición para encontrar $x \in E$ tal que

$$l.ann(x) \cap E = 0.$$

Sin embargo, esta igualdad implica $l.ann(x) = 0$ debido a que E es esencial en R. Ahora estamos en condiciones de usar 2.26 para concluir que x es regular.

Por otra parte, si $x \in E$ es regular, en particular es regular izquierdo. De esta manera, Rx es esencial en R y además $Rx \leq E \leq R$.
$\therefore\ E \underset{es}{\subseteq} R.$ □

Capítulo 3

Módulos isosimples, isoartinianos e isoneterianos

3.1. Propiedades básicas

Definición 3.1. Decimos que $M \neq 0$ es isosimple si $M \cong N$ para todo $N \leq M$ distinto de cero.

Decimos que M es isoartiniano (respectivamente isoneteriano) si para cualquier cadena descendente (resp. ascendente) de submódulos de M

$$M_0 \geq M_1 \geq M_2 \geq \cdots$$

existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_k \cong M_n$ para cada $k \geq n$.

Finalmente, diremos que un anillo R es isoartiniano izquierdo si ${}_RR$ es isoartiniano. Definimos análogamente los conceptos de isoneteriano izquierdo e isosimple izquierdo para el anillo R.

De esta definición, se sigue que si M es isosimple, entonces cada uno de los submódulos distintos de cero de M también es isosimple.

Además, si $N \leq M$ y M es isoartiniano, entonces N también es isoartiniano debido a que toda cadena descendente no vacía de submódulos de N es una cadena descendente no vacía de submódulos de M. El mismo argumento sirve para demostrar que si M es isoneteriano, entonces todos sus submódulos también lo son.

Una última observación antes de continuar es que, si existe un isomorfismo

$$M \overset{\varphi}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} M',$$

entonces cada $N \leq M$ satisface $N \cong \varphi(N)$. Así, si M' es isoartiniano y

$$N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq \cdots$$

es una cadena descendente de submódulos de M, obtenemos la cadena descendente de submódulos de M'

$$\varphi(N_0) \geq \varphi(N_1) \geq \varphi(N_2) \geq \cdots$$

En consecuencia, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(N_n) \cong \varphi(N_k)$ para cada $k \geq n$ y, por lo tanto,

$$N_n \cong \varphi(N_n) \cong \varphi(N_k) \cong N_k,$$

es decir que M también es isoartiniano.

Análogamente obtenemos que si M' es isoneteriano, entonces M es isoneteriano. Además, si M' es isosimple y $N \leq M$ entonces

$$N \cong \varphi(N) \cong M' \cong M,$$

por lo que la propiedad de ser isosimple también se conserva bajo isomorfismos.

Lema 3.2. *Para todo M son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *M es isoartiniano.*
2. *Si $\mathcal{F}$ es una familia no vacía de submódulos de M, entonces existe $N \in \mathcal{F}$ tal que si $K \in \mathcal{F}$ es tal que $K \leq N$, entonces $K \cong N$.*
3. *Si $\mathcal{C}$ es una cadena descendente no vacía de submódulos de M, entonces existe $N \in \mathcal{C}$ tal que si $K \in \mathcal{C}$ es tal que $K \leq N$, entonces $K \cong N$.*

Demostración. Para demostrar que el inciso 1 implica el 2, tomemos una familia $\mathcal{F} \neq \emptyset$ de submódulos de M. Supongamos que M no satisface el inciso 2, de modo que podemos encontrar $N_0, N_1 \in \mathcal{F}$ tales que $N_1 \leq N_0$ pero $N_1 \ncong N_0$.

Ya que M no satisface el inciso 2, entonces existe $N_2 \in \mathcal{F}$ tal que $N_2 \leq N_1$ y $N_2 \ncong N_1$. Procediendo de esta manera, construimos la cadena descendente

$$N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq \cdots$$

donde $N_{n+1} \ncong N_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir que M no es isoartiniano. En conclusión, si M es isoartiniano, entonces también satisface el segundo inciso.

La implicación del segundo al tercer inciso es inmediata considerando que toda cadena no vacía de submódulos de M es, en particular una familia no vacía de submódulos de M.

Finalmente, si M satisface el inciso 3 y

$$N_0 \geq N_1 \geq N_2 \geq \cdots$$

es una cadena descendente de submódulos de M, entonces existe un elemento N de la cadena tal que $K \cong N$ para todo $K \leq N$ que también sea un elemento de la cadena. Sin embargo, esto implica la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$N_n = N \cong K = N_k$$

para todo $k \geq n$. Por lo tanto, M es isoartiniano. $\square$

Este lema implica que, si M es isoartiniano, tenemos que la familia de submódulos de M

$$\mathcal{A} = \{N \leq M \mid N \neq 0\} \neq \emptyset$$

contiene un elemento N tal que $N \cong K$ para todo $K \in \mathcal{A}$ tal que $K \leq N$. Esto significa $N \cong K$ para todo $K \leq N$ distinto de cero o, de manera más concisa, N es isosimple. En consecuencia, todo R-módulo isoartiniano distinto de cero contiene un submódulo isosimple.

El lema puede reescribirse para obtener un resultado análogo para R-módulos isoneterianos. De hecho, estas equivalencias implican que todo $M \neq 0$ isoneteriano contiene un submódulo propio N tal que $N \cong K$ si $K \geq N$.

Proposición 3.3. *Si S es isosimple, entonces S es cíclico, neteriano y uniforme.*

Demostración. Supongamos que S es isosimple. Ya que S es isomorfo a cualquiera de sus submódulos distintos de cero, entonces $S \cong Rs$ para todo $s \in S \setminus 0$.
$\therefore$ S es cíclico.

Por otra parte, si $S \neq 0$, todo submódulo $S' \leq S$ distinto de cero satisface $S \cong S'$, es decir que todo submódulo de S es cíclico, en particular S' es finitamente generado.
$\therefore$ S es neteriano.

Ahora notemos que todo R-módulo neteriano $M \neq 0$ contiene un submódulo uniforme distinto de cero. La implicación es inmediata si M es uniforme, por lo que asumiremos que no lo es, de manera que M contiene submódulos distintos de cero que no son esenciales. De esta forma, el conjunto

$$\mathcal{X} = \{N \lneq M \mid N \text{ es seudocomplemento de un submódulo distinto de cero en } M\}$$

es no vacío, así que podemos usar que M es neteriano para encontrar un elemento máximo de $\mathcal{X}$ al que llamaremos N. Tomemos $U \leq M$ seudocomplemento de N en M que contenga al submódulo distinto de cero cuyo seudocomplemento es N. Afirmamos que $U \neq 0$ es uniforme.

Sean $U', K \leq U$ tales que $U' \neq 0$ y $U' \cap K = 0$. Si $u' \in U' \cap (N + K)$, entonces existen $n \in N$ y $k \in K$ tales que $u' = n + k$. Por lo tanto

$$n = k - u' \in N \cap (K + U') \leq N \cap U = 0,$$

por lo que $U' \cap (N + K) = 0$. Por la maximalidad de N en $\mathcal{X}$ y dado que $N \leq N + K$ y $U' \neq 0$, concluimos que $N = N + K$, en particular $K \leq N$, es decir

$$K \leq N \cap U = 0.$$

Por lo tanto, U' es esencial en U y U es uniforme, lo que concluye lo que queríamos ver.

Regresando al R-módulo isosimple S, sabemos que S contiene un submódulo $S' \neq 0$ uniforme por ser neteriano. Así, ya que $S \cong S'$, concluimos que S también es uniforme. □

Para demostrar la siguiente proposición, notemos que si D es un dominio entero y $x \in D$ es tal que $x \neq 0$, entonces el epimorfismo

$$\begin{aligned}(\_ \cdot x)\colon D &\longrightarrow Dx\\ d &\longmapsto dx\end{aligned}$$

es biyectivo porque la igualdad $dx = 0$ se satisface si y sólo si $d = 0$.

Proposición 3.4. *Son equivalentes para un domino D:*

1. *D es isoartiniano izquierdo.*

2. *D es isosimple.*

3. *D es un dominio de ideales principales.*

Demostración. Supongamos que D es isoartiniano izquierdo, por lo que existe $S \leq D$ isosimple. En consecuencia, para toda $x \in S$ distinta de cero tenemos los isomorfismos $S \cong Dx$ y $Dx \cong D$. Por lo tanto, $D \cong S$ y, en particular, D es isosimple.

Recíprocamente, sean D isosimple y

$$I_0 \geq I_1 \geq I_2 \geq \cdots$$

una cadena descendente de ideales de D. Es claro que si $I_n = 0$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$I_k = 0 = I_n$$

para cada $k \geq n$, lo cual implica el isomorfismo entre I_k e I_n. Sin embargo, $I_n \neq 0$ para cada n, implica

$$I_n \cong D \cong I_0.$$

En cualquiera de los dos casos, tenemos que la cadena se transforma en una cadena de ideales isomorfos entre sí después de una cantidad finita de elementos.
$\therefore$ D es isoartiniano si y sólo si es isosimple.

Para terminar, demostraremos las equivalencias entre 2 y 3. Si D es isosimple e $I \leq D$, entonces $I = 0$ o $I \cong Dx$ para cualquier $x \in I \setminus \{0\}$. En particular, todo ideal de D es cíclico, es decir que D es un dominio de ideales principales.

Por otro lado, si D es un dominio de ideales principales e $I \leq D$ es distinto de cero, tenemos que $I = Dx$ para alguna $x \in I \setminus \{0\}$. Ya que $(\_ \cdot x) \in Hom_D(D, Dx)$ es un isomorfismo, entonces $I = Dx \cong D$. Esto significa que D es isosimple.
$\therefore$ D es isosimple si y sólo si D es dominio de ideales principales. □

Para el siguiente lema, usaremos el concepto de anillos Morita equivalentes y, en particular que la retícula de submódulos de todo R-módulo izquierdo M es isomorfa a la retícula de submódulos del S-módulo izquierdo FM y que los funtores preservan isomorfismos. La construcción de la teoría de Morita necesaria para demostrar el lema puede encontrarse en el anexo.

Lema 3.5. *Ser isoartiniano (resp. isoneteriano o isosimple) es una propiedad Morita invariante.*

Demostración. Haremos únicamente la demostración para módulos isoartinianos pues la demostración para módulos isoneterianos y para módulos isosimples es análoga.

Sean R y S anillos Morita equivalentes y

$$F\colon R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod}$$
$$G\colon S\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$$

los funtores bajo los cuales las categorías R-Mod y S-Mod son equivalentes. Demostraremos que $M \in R\text{-}Mod$ es isoartiniano si y sólo si $FM \in S\text{-}Mod$ es isoartiniano.

Supongamos que M es isoartiniano y que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ es una familia de submódulos de FM. Si tomamos $i_{K\leq M}$, el morfismo inclusión de K en M, entonces

$$\begin{aligned} \Lambda\colon \mathcal{L}(M) &\longrightarrow \mathcal{L}(FM) \\ K &\longmapsto Im(Fi_{K\leq M}) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de retículas. De esta manera, el conjunto

$$\mathcal{G} = \{K \leq M \mid \Lambda(K) = N \text{ para alguna } N \in \mathcal{F}\}$$

es no vacío.

Ya que $\mathcal{G} \neq \emptyset$ es un conjunto de submódulos de M y M es isoartiniano, entonces existe $K \in \mathcal{G}$ tal que todo $K' \in \mathcal{G}$ con $K' \leq K$ satisface el isomorfismo $K' \cong K$.

Además, la pertenencia $K \in \mathcal{G}$ significa que existe $N \in \mathcal{F}$ tal que $N = \Lambda(K)$. Si $N' \in \mathcal{F}$ es tal que $N' \leq N$, entonces existe $K' \in \mathcal{G}$ tal que $\Lambda(K') = N'$. Debido a que Λ es un isomorfismo de retículas y $\Lambda(K') \leq \Lambda(K)$, entonces

$$K' \leq K \;\text{ y }\; K' \in \mathcal{F},$$

así que existe un isomorfismo $f \in Hom_M(K, K')$.

Como F preserva monomorfismos y epimorfismos, podemos afirmar que

$$Ff \in Hom_S(FK, FK')$$

es un isomorfismo y que

$$Fi_{K\leq M} \in Hom_S(FK, FM) \;\text{ y }\; Fi_{K'\leq M} \in Hom_S(FK', FM)$$

son monomorfismos. De esta manera

$$N = Im(Fi_{K\leq M}) \cong FK \cong FK' \cong Im(Fi_{K'\leq M}) = N'.$$

$\therefore FM$ es isoartiniano.

Recíprocamente, si FM es isoartiniano y $\mathcal{F} \neq \emptyset$ es una familia de submódulos de M, entonces

$$\mathcal{G} = \{\Lambda(K) \mid K \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$$

es una familia de submódulos de FM. En consecuencia, existe $K \in \mathcal{F}$ tal que

$$\Lambda(K) \cong \Lambda(K')$$

para toda $K' \in \mathcal{F}$ que satisfaga $\Lambda(K') \leq \Lambda(K)$.

Así, si $K' \in \mathcal{F}$ es tal que $K' \leq K$, usamos el hecho de que Λ es un isomorfismo de retículas para obtener $\Lambda(K') \leq \Lambda(K)$ y los isomorfismos

$$FK \cong Im(Fi_{K \leq M}) = \Lambda(K) \cong \Lambda(K') = Im(Fi_{K' \cong M}) \cong FK'.$$

Como G también preserva monomorfismos y epimorfismos y existe un isomorfismo natural $GF \longrightarrow 1_{R-Mod}$, entonces

$$K \cong GFK \cong GFK' \cong K'.$$

$\therefore M$ es isoartiniano.

$\therefore$ Ser isoartiniano es una propiedad Morita invariante. $\square$

Teorema 3.6. *Todo módulo isoartiniano M contiene un submódulo esencial que es suma de submódulos isosimples de M.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de las familias independientes de submódulos isosimples de M. Como M es isoartiniano, entonces contiene un submódulo isosimple S, de forma que $\{S\} \in \mathcal{S}$.

Entonces tenemos que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ está ordenado parcialmente por la inclusión de conjuntos. Además, si $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{S}$ es una cadena, entonces $\bigcup\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ es una cota superior de la cadena en $\mathcal{S}$. Para la demostración de esta afirmación, basta ver que $\bigcup\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ es una familia independiente de submódulos isosimples de M pues es evidente que $\mathcal{F}_i \subseteq \bigcup\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ para cada $i \in I$.

Por una parte, si $S \in \bigcup\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$, entonces existe $i \in I$ tal que $S \in \mathcal{F}_i$ y así concluimos que S es isosimple. Por otra parte, si tenemos $S, S' \in \{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ tales que $S \neq S'$, podemos hallar $i, j \in I$ tales que $S \in \mathcal{F}_i$ y $S' \in \mathcal{F}_j$. Ya que $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ es una cadena, tenemos que

$\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j$ o $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_i$, de manera que

$$S, S' \in \mathcal{F}_i \ \text{ o bien } \ S, S' \in \mathcal{F}_j.$$

Así, como $\mathcal{F}_i$ y $\mathcal{F}_j$ son familias independientes, concluimos que $S \cap S' = 0$ por la desigualdad de S y S'. De este modo, $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ tiene una cota superior en $\mathcal{S}$.

Usando el Lema de Zorn, podemos tomar $\mathcal{F} = \{S_i\}_{i \in I}$, un elemento máximo de $\mathcal{S}$. Si $\bigoplus_{i \in I} S_i \leq M$ no es esencial en M, existiría $N \leq M$ distinto de cero tal que

$$N \cap \bigoplus_{i \in I} S_i = 0.$$

Ya que $N \neq 0$ es isoartiniano por ser un submódulo de M, entonces contiene un submódulo $S \neq 0$ isosimple tal que

$$S \cap \left(\bigoplus_{i \in I} S_i \right) \leq N \cap \left(\bigoplus_{i \in I} S_i \right) = 0,$$

de manera que

$$\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F} \cup \{S\} \in \mathcal{S},$$

lo cual es una clara contradicción a la maximalidad de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{S}$.

$\therefore$ Existe $\bigoplus_{i \in I} S_i \underset{es}{\subseteq} M$ con cada $S_i \leq M$ isosimple. □

Notemos que el anillo de endomorfismos de un módulo isosimple es un dominio entero. Esto se debe a que, si S es isosimple, todos sus submódulos distintos de cero son isomorfos a S. En particular, para cada $S' \leq S$ distinto de cero, existe un monomorfismo

$$S' \rightarrowtail S,$$

es decir que S es un R-módulo comprimible. Además, S es neteriano y, por lo tanto, tiene dimensión de Krull. De este modo, S satisface las hipótesis de 2.15, y podemos concluir que $End_R(S)$ es un dominio entero.

Terminaremos esta sección con el siguiente lema.

Lema 3.7. *Un producto directo de anillos $R = \prod_{i \in I} R_i$ es isoartiniano izquierdo si y sólo si I es finito y cada R_i es isoartiniano izquierdo.*

Demostración. Demostraremos que I es finito por contrapuesta. Supongamos $I = \mathbb{N}$ y definamos

$$T_n = \prod_{t \geq n} R_t.$$

Veamos que $\{T_n\}$ es una familia de ideales de R tal que $T_n \ncong T_m$ si $n \neq m$ y que forman la cadena descendente

$$T_0 \geq T_1 \geq T_2 \geq \cdots$$

Notemos que podemos considerar a cada T_n y a cada R_n como R-módulos izquierdos usando como acción la correspondiente restricción del producto en R. Ahora consideremos la familia de anuladores

$$\begin{aligned} l.ann(T_n) =& \Big\{(a_i) \in R \mid \forall (x_i) \in T_n \, \big((a_i x_i) = 0\big)\Big\} \\ =& \Big\{(a_i) \in R \mid \forall t \geq n \, \big(a_t \in l.ann(R_t)\big)\Big\} \end{aligned}$$

y la familia de monomorfismos $\eta_n \in Hom_R(R_n, R)$.

Si tomamos $n < m$ y llamamos 1_n al neutro multiplicativo de R_n, entonces $\eta_n(1_n)$ es tal que

$$\eta_n(1_n)(x_t) = \eta_n(x_n)$$

para todo $(x_t) \in R$, es decir que $\eta_n(1_n)(x_t) = 0$ si y sólo si $x_n = 0$. En consecuencia,

$$\eta_n(1_n) \notin l.ann(T_n) \;\text{ pero }\; \eta_n(1_n) \in l.ann(T_m).$$

Ahora consideremos un morfismo arbitrario

$$f \colon T_n \longrightarrow T_m$$

y $(x_t) \in T_n$ tal que $x_n \neq 0$, entonces $\eta_n(1_n)(x_t) = \eta_m(x_n) \neq 0$ pero $f(x_t) \in T_m$ implica

$$f\big(\eta_n(1_n)(x_t)\big) = \eta_n(1_n) f(x_t) = 0,$$

es decir que no existe ningún monomorfismo de T_n a T_m y, en consecuencia, no existe ningún isomorfismo entre T_n y T_m.

$\therefore R$ no es isoartiniano.

Así que podemos concluir que, en cualquiera de las dos implicaciones, I es finito. Ahora procederemos a demostrar que R es isoartiniano si y sólo si cada R_i es isoartiniano.

Comencemos suponiendo que R es isoartiniano y que

$$I_0 \geq I_1 \geq I_2 \geq \cdots$$

es una una cadena descendente de ideales izquierdos de R_j para $j \in I$ arbitraria. Notemos que si $(x_i) \in \eta_j(I_{n+1})$, entonces $(x_i) = \eta_j(x)$ para alguna $x \in I_{n+1} \leq I_n$, así que $(x_i) \in \eta_j(I_n)$, es decir que obtenemos la siguiente cadena descendente de ideales izquierdos de R:

$$\eta_j(I_0) \geq \eta_j(I_1) \geq \eta_j(I_2) \geq \cdots$$

Ya que R es isoartiniano, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\eta_j(I_k) \cong \eta_j(I_n)$ para toda $k \geq n$.

Además, $I_k \cong \eta_j(I_k)$ porque η_j es monomorfismo. En consecuencia, si $k \geq n$ tenemos

$$I_n \cong \eta_j(I_n) \cong \eta_j(I_k) \cong I_k.$$

$\therefore$ Todo R_j es isoartiniano izquierdo.

Recíprocamente, supongamos que $R = \prod_{i=1}^n R_i$ para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$ y que cada R_i es isoartiniano. Sea

$$I_0 \geq I_1 \geq I_2 \geq \cdots$$

una cadena descendente de ideales izquierdos de R. Sabemos que cada I_k es un producto directo de ideales de los anillos R_i, es decir que $I_k = \prod_{i=1}^n I_{(k,i)}$ con

$$_{R_i}I_{(k,i)} = \eta_i(I_k) \leq {}_{R_i}R_i.$$

Notemos también que el conjunto $\{I_{(k,i)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ forma una cadena descendente de ideales de R_i, pues si $x \in I_{(k+1,i)}$, entonces existe $(x_t) \in I_{k+1} \leq I_k$ tal que $\eta_i(1_i)(x_t) = x$, por lo que $x \in I_{(k,i)}$. En resumen,

$$I_{(0,i)} \geq I_{(1,i)} \geq I_{(2,i)} \geq \cdots$$

es una cadena descendente de ideales izquierdos de R_i para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Como cada R_i es un anillo isoartiniano izquierdo, existen $m_1, ..., m_n \in \mathbb{N}$ tales que $I_{(k,i)} \cong I_{(m_i,i)}$ para cada $k \geq m_i$. Sea $m = \text{máx}\{m_1, ..., m_n\}$ y notemos que, si $k \geq m$

entonces existe una familia de isomorfismos $\varphi_i \in Hom_{R_i}(I_{(m,i)}, I_{(k,i)})$. Así que

$$\begin{aligned} \varphi\colon \prod_{i=1}^{n} I_{(m,i)} &\longrightarrow \prod_{i=1}^{n} I_{(k,i)} \\ (x_i) &\longmapsto \big(\varphi_i(x_i)\big) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de $I_m = \prod_{i=1}^{n} I_{(m,i)}$ a $I_k = \prod_{i=1}^{n} I_{(k,i)}$.
$\therefore$ R es isoartiniano izquierdo. □

3.2. Anillos semiprimos e isoartinianos izquierdos

Lema 3.8. *Sea R isoartiniano izquierdo, entonces R es semiprimo si y sólo si la intersección de los anuladores de los R-módulos isosimples es cero.*

Demostración. Sea R semiprimo e isoartiniano izquierdo. Si

$$I = \bigcap \{ann({}_RM) \leq R \mid {}_RM \text{ es isosimple}\} \neq 0,$$

entonces existe ${}_RS \leq {}_RI$ isosimple debido a que ${}_RI \leq {}_RR$ es isoartiniano. De esta manera, tenemos que

$${}_RS \leq \bigcap \{ann({}_RM) \leq R \mid {}_RM \text{ es isosimple}\} \leq ann({}_RS)$$

es decir que $S^2 = 0$. Pero el hecho de que R sea semiprimo implica que $S = 0$, lo cual es una contradicción a que ${}_RS$ sea isosimple.
$\therefore I = 0$.

Ahora supongamos que $I = 0$ y que R es isoartiniano izquierdo y tomemos $K \leq R$ tal que $K^2 = 0$. Vamos a demostrar que $K = 0$.

Sea S un R-módulo izquierdo isosimple. Si $KS \neq 0$, entonces $S \cong KS \leq S$ bajo un isomorfismo $\varphi \in Hom_R(S, KS)$. Definimos

$$\begin{aligned} \psi\colon \quad KS &\longrightarrow K^2S \\ \sum k_i s_i &\longmapsto \sum k_i \varphi(s_i) = \varphi\Big(\sum k_i s_i\Big) \end{aligned}$$

que es un monomorfismo debido a que φ también lo es. Además, si tomamos la suma $\sum k_i x_i \in K^2S$ con $k_i \in K$ y $x_i \in KS$, entonces existe $s_i \in S$ tal que $\varphi(s_i) = x_i$ para cada i; es decir que

$$\sum k_i x_i = \sum k_i \varphi(s_i) = \psi(\sum k_i s_i).$$

$\therefore \psi \in Hom_R(KS, K^2S)$ es isomorfismo.

Recordando que $K^2 = 0$, obtenemos que $S = 0$ mediante los isomorfismos

$$S \cong KS \cong K^2S = 0.$$

Pero esto no es posible porque S es isosimple, así que debe ocurrir que $KS \neq 0$. Y como esto ocurre para cualquier ideal isosimple izquierdo, entonces

$$K \leq \bigcap\{ann(M) \leq R \mid_R M \text{ es isosimple}\} = 0.$$

$\therefore R$ es semiprimo. $\square$

Sean $I \leq R$ y $x \in I$; consideremos el morfismo

$$\begin{aligned}(\_\cdot x)\colon I &\longrightarrow Ix\\ a &\longmapsto ax\end{aligned}$$

Ya que $Im(\_\cdot x) = Ix$ y que $Ker(\_\cdot x) = (0 : x) \cap I$, entonces $Ix \cong {}^{I}/_{(0\,\cdot\,x)\,\cap\,I}$. Usaremos este isomorfismo para demostrar el siguiente lema.

Lema 3.9. *Todo anillo semiprimo e isoartiniano izquierdo es no singular izquierdo.*

Demostración. Supongamos que $Z(_RR) \neq 0$. Como $Z(_RR) \leq R$ y R es isoartiniano izquierdo, entonces $Z(_RR)$ es isoartiniano, así que contiene un ideal isosimple $_RS$.

Como S es isosimple y R es semiprimo, tenemos que $S^2 \neq 0$. Así, existe $s \in S$ tal que $Ss \neq 0$, de modo que obtenemos los isomorfismos

$$S \cong Ss \cong {}^{S}/_{(0\,:\,s)\,\cap\,S},$$

por lo que podemos tomar el isomorfismo $\varphi \in Hom_R({}^{S}/_{(0\,:\,s)\,\cap\,S}, S)$.

Obtenemos el diagrama

$$S \xrightarrow{\ \rho\ } {}^{S}/_{(0\,:\,s)\,\cap\,S} \xrightarrow{\ \varphi\ } S$$

donde ρ es el epimorfismo natural. La composición $\varphi\rho \in End_R(S)$ es un epimorfismo pero, como S es neteriano por ser isosimple, esto implica que $\varphi\rho$ es un isomorfismo. Sin embargo, esto sólo es posible si ρ es un monomorfismo así que

$$\begin{aligned} x \in (0:s) \cap S &\iff \rho(x) = x + \big((0:s)\cap S\big) = 0 \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(0:s) \cap S = 0$. Pero esta última igualdad no es posible porque $S \neq 0$ por ser isosimple y $(0:s) \underset{es}{\subseteq} R$, debido a que $s \in {}_RS \leq Z({}_RR)$. Ya que la contradicción proviene de suponer que $Z({}_RR) \neq 0$, entonces hemos terminado.
$\therefore Z({}_RR) = 0$. □

Sea ${}_RS \leq {}_RR$ un ideal isosimple de R. Definamos

$$I_S = \sum \{{}_RI \leq_R R \mid I \cong S\}$$

y notemos que I_S es un ideal izquierdo de R por ser suma de ideales izquierdos de R. De hecho, I_S es una suma de ideales isosimples izquierdos de R debido a que todos los sumandos son isomorfos a S. El siguiente lema nos dará una condición suficiente para que I_S sea un ideal bilateral de R.

Lema 3.10. *Sean R un anillo no singular izquierdo y ${}_RS \leq {}_RR$ isosimple. Entonces I_S es un ideal bilateral de R.*

Demostración. Vamos a demostrar que para cualesquiera $x \in R$ e $I \leq R$ tal que $I \cong S$ se cumple que el ideal izquierdo $Ix \leq R$ está contenido en I_S. La contención es inmediata cuando $Ix = 0$, así que supondremos que $Ix \neq 0$.

En primer lugar, notemos que $(0:x) \cap I \neq 0$ implica que $(0:x) \cap I \underset{es}{\subseteq} I$ debido a que I es uniforme por ser un ideal isosimple de R. Por lo tanto, si $a \in I$, entonces

$$A = \big((0:x) \cap I : a\big) = \{r \in R \mid ra \in (0:x) \cap I\} \underset{es}{\subseteq} R.$$

Pero $r \in A$ si y sólo si $ra \in I$ y $r(ax) = 0$, es decir que $A \leq (0:ax)$ o, equivalentemente, $A(ax) = 0$ con $A \underset{es}{\subseteq} R$.

Sabemos que lo último implica que $ax \in Z(R)$ y, ya que R es no singular, entonces $ax = 0$ para todo $a \in I$. Así que $Ix = 0$, lo cual es una contradicción a lo que habíamos supuesto inicialmente.

Así, $(0:x) \cap I = 0$ e $Ix \cong {}^{I}/_{(0:x)\cap I}$. En consecuencia, $Ix \cong I \cong S$, es decir que Ix es un ideal isosimple izquierdo de R y entonces

$$I \leq \sum\{I \leq R \mid I \cong S\} = I_S.$$

En conclusión, para cada $x \in R$ y $\sum a_i \in I_S$, obtenemos

$$\left(\sum a_i\right) x = \sum a_i x \in I_S,$$

por lo que I_S es un ideal derecho de R. Sólo faltaría demostrar que, para toda $r, s \in R$ y $a \in I_S$ se satisface la igualdad $r(as) = (ra)s$, pero esto se sigue de la asociatividad del producto en R.
$\therefore I_S \leq {}_R R_R$. □

Lema 3.11. *Todo anillo semiprimo e isoartiniano izquierdo satisface CCA en anuladores.*

Demostración. Sea R un anillo semiprimo e isoartiniano izquierdo y tomemos una cadena ascendente de anuladores de R

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots,$$

de modo que también tenemos la cadena descendente de ideales

$$ann(A_1) \geq ann(A_2) \geq ann(A_3) \geq \cdots$$

Como R es isoartiniano izquierdo y cada $ann(A_i)$ es un ideal bilateral de R, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $ann(A_n) \cong ann(A_k)$ para toda $k \geq n$.

Veamos que $A_n = A_k$ si $k \geq n$. Sabemos que cada A_i es el anulador de un ideal de R, digamos $A_i = ann(B_i)$ para $B_i \leq R$. Así, para cada $b \in B_n$ se satisface la igualdad $A_n b = 0$. Por otra parte, conocemos la existencia de un isomorfismo $\varphi \in Hom_R\big(ann(A_k), ann(A_n)\big)$, de modo que existe $b' \in ann(A_k)$ tal que $b = \varphi(b')$. En consecuencia,

$$ab = a\varphi(b') = \varphi(ab') = 0$$

para cualquier $a \in A_k$, es decir que $b \in ann(A_k)$. Por lo tanto, $B_n \leq ann(A_k)$.

Se sigue que $B_n A_k = 0$, de donde inferimos que $A_k \leq ann(B_n) = A_n$. Además, por hipótesis, sabemos que $A_n \leq A_k$. Por lo que podemos concluir la igualdad $A_n = A_k$ para cualquier $k \geq n$.

$\therefore R$ satisface ACC en anuladores. $\square$

Para los últimos resultados, vamos a trabajar con un anillo R semiprimo e isoartiniano izquierdo. En primer lugar, veremos que si tomamos $S, S' \leq R$ isosimples y no isomorfos entre sí, entonces $I_S I_{S'} = 0$.

Comencemos notando que $SS' \neq 0$ pues, en caso contrario, podríamos hallar $s' \in S'$ tal que $Ss' \neq 0$. Sin embargo, bajo esta suposición, tenemos que $Ss' \cong S'$ debido a que $Ss' \leq S'$ y a que S' es isosimple. Por otro lado, sabemos que R es no singular gracias a 3.9, así que tenemos todas las hipótesis de 3.10. En la demostración de este último lema, vimos que $Ss' \leq I_S$, de manera que también tenemos el isomorfismo $Ss' \cong S$. En conclusión $S \cong S'$, lo cual contradice la suposición inicial.

Así que $SS' = 0$ para cualesquiera ideales isosimples S y S' no isomorfos entre sí. Si tomamos $x \in I_S I_{S'}$, entonces x es una suma finita de la forma

$$x = \sum a_i b_i \quad \text{con} \quad a_i \in I \cong S \quad \text{y} \quad b_i \in J \cong S'.$$

Como $I \not\cong J$, entonces $a_i b_i = 0$ para cada i, por lo que podemos concluir que $x = 0$ para cada $x \in I_S I_{S'}$, es decir

$$I_S I_{S'} = 0.$$

Otra propiedad importante que satisface R es el hecho de que, si $S_1, \ldots, S_n$ son ideales isosimples, entonces $\sum_{i=1}^{n} I_{S_i}$ es directa. Sin pérdida de generalidad, demostraremos que

$$N \mathrel{\ddot{=}} I_{S_1} \cap (I_{S_2} + \cdots + I_{S_n}) = 0.$$

Notemos que si la igualdad no se da, entonces $0 \neq N \leq {}_R R$ contiene un ideal isosimple S'.

Por un lado, $S' \leq I_{S_1}$ y $S' \leq I_{S'}$. Si $S' \not\cong S_1$, entonces

$$(S')^2 \leq I_{S_1} I_{S'} = 0,$$

de manera que $S' = 0$ porque R es semiprimo. Esto contradice el hecho de que $S' \leq N$ sea isosimple, así que debemos concluir que $S' \cong S_1$.

Por otra parte, $S' \leq I_{S_2} + \cdots + I_{S_n}$ así que, si S' no es isomorfo a ningún S_i con $i \in \{2, \ldots, n\}$, entonces

$$(S')^2 \leq (I_{S_2} + \cdots I_{S_n}) I_{S'} = I_{S_2} I_{S'} + \cdots + I_{S_n} I_{S'} = 0.$$

Ya que otra vez llegamos a una contradicción, entonces tenemos que $S' \cong S_i$ para alguna $i \in \{2, .., n\}$.

Sin embargo, ahora tenemos otra contradicción, a saber:

$$S_1 \cong S' \cong S_i \text{ con } i \neq 1.$$

Como este último absurdo proviene de suponer $N \neq 0$, entonces sólo nos queda admitir que $N = 0$ y que, en consecuencia, tenemos la suma directa finita

$$I_{S_1} \oplus \cdots \oplus I_{S_n}.$$

Finalmente, demostramos en 3.11 que todo anillo R semiprimo e isoartiniano izquierdo satisface CCA en anuladores. Pero esto es equivalente a que ${}_RR_R$ tenga dimensión uniforme finita (2.24). Así que podemos concluir que existe una cantidad finita de ideales I_S y, por lo tanto, también hay una cantidad finita de ideales isosimples salvo isomorfismo.

Para el próximo teorema, necesitamos tener en cuenta la siguiente definición.

Definición 3.12. Decimos que R es un anillo de Goldie izquierdo si satisface CCA en anuladores izquierdos y si ${}_RR$ tiene dimensión uniforme finita.

Teorema 3.13. *Sea R un anillo semiprimo e isoartiniano izquierdo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *R es neteriano izquierdo.*
2. *R es un anillo de Goldie izquierdo.*
3. *${}_RR$ tiene dimensión uniforme finita.*
4. *Si $S \leq {}_RR$ es isosimple, entonces existe $x \in I_S$ tal que $(0 : x) \cap I_S = 0$.*
5. *Si $S \leq {}_RR$ es isosimple, entonces I_S es suma directa finita de ideales isosimples izquierdos de R.*
6. *${}_RR$ es suma directa finita de ideales isosimples izquierdos.*

Demostración. Demostraremos, en primer lugar, las equivalencias de las cuatro primeras afirmaciones. Posteriormente, demostraremos que éstas son equivalentes al quinto inciso y finalizaremos demostrando la equivalencia con el inciso 6.

Supongamos que R es neteriano izquierdo, es decir que R satisface CCA en ideales izquierdos. En consecuencia, para toda suma directa de ideales izquierdos $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} I_n \leq R$, podemos construir la cadena ascendente

$$I_1 \leq I_1 \oplus I_2 \leq I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \leq \cdots$$

que se estaciona en un término $n \in \mathbb{Z}^+$, esto es que $\bigoplus_{i=1}^{n} I_i = \bigoplus_{i=1}^{k} I_i$ para toda $k \geq n$. Pero dicha igualdad sólo puede ocurrir si $I_k = 0$ para cada $k > n$, por lo que la suma directa sólo tiene $n \in \mathbb{Z}^+$ sumandos distintos de cero. Por lo tanto, ${}_RR$ tiene dimensión uniforme finita.

Por otra parte, todo anulador izquierdo en R es un anulador bilateral porque R es semiprimo así que R satisface CCA en anuladores izquierdos.
$\therefore$ R es anillo de Goldie izquierdo.

La implicación de 2 a 3 es inmediata pues, por defiinición, un anillo de Goldie izquierdo tiene dimensión uniforme finita como R-módulo izquierdo.
$\therefore$ ${}_RR$ tiene dimensión uniforme finita.

Si R es semiprimo, no singular y tal que ${}_RR$ tiene dimensión uniforme finita, entonces 2.27 asegura que todo ideal bilateral $E \leq R$ tiene un elemento x tal que $(0 : x) \cap E = 0$. En particular, si tomamos $E = I_S$, obtenemos la afirmación 4.
$\therefore$ Existe $x \in I_S$ tal que $(0 : x) \cap I_S = 0$.

Ahora veremos que 4 implica 1. Para esto, utilizaremos el hecho de que R tiene una cantidad finita de ideales isosimples salvo isomorfismos, digamos $S_1, \ldots, S_n$. Gracias al inciso 4, sabemos que para cada i, existe $x_i \in I_{S_i}$ tal que $(0 : x_i) \cap I_{S_i} = 0$, así que definimos

$$x = x_1 + \cdots + x_n.$$

Debido a que la suma de los ideales I_{S_i} es directa, entonces

$$(0 : x) = \bigcap_{i=1}^{n}(0 : x_i)$$

Además, si $(0 : x) \neq 0$, podríamos tomar $S \leq (0 : x)$ isosimple. Como $S_1, \ldots S_n$ son todos los ideales isosimples de R salvo isomorfismos, entonces S es isomorfo a algún S_i. En consecuencia,

$$S \leq \left(\bigcap_{i=1}^{n}(0 : x_i)\right) \cap I_{S_i} \leq (0 : x_i) \cap I_{S_i} = 0,$$

lo cual contradice el hecho de que S es isosimple. Por lo tanto, $(0 : x) = 0$.

Esta última igualdad implica que $(\_ \cdot x) \in Hom_R(R, Rx)$ es un isomorfismo, de manera que ${}_RR \cong {}_RRx$. Además con el mismo argumento tenemos que ${}_RT \cong {}_R(Tx)$ para $T = \bigoplus_{i=1}^{n} I_{S_i} \leq {}_RR$ y ${}_R(Tx) \leq {}_RRx$. Prosiguiendo de este modo, obtenemos la cadena descendente de ideales izquierdos

$$ {}_RR \geq {}_RT \geq {}_R(Rx) \geq {}_R(Tx) \geq {}_R(Rx^2) \geq {}_R(Tx^2) \geq \cdots $$

Observemos que la igualdad $(0 : x) = 0$ implica que

$$ (\_ \cdot x) \colon Ix^n \longrightarrow Ix^{n+1} $$

es un isomorfismo para cualesquiera ${}_RI \leq {}_RR$ y $n \in \mathbb{Z}^+$. Luego, debido a que R es isoartiniano izquierdo, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $Rx^n \cong Tx^n$ y entonces

$$ {}_RT \cong {}_RTx^n \cong {}_RRx^n \cong {}_RR $$

Entonces tenemos que ${}_RT \cong {}_RR$ y que

$$ T = I_{S_1} \oplus \cdots \oplus I_{S_n} = \sum \{ {}_RS \leq_R R \mid_R S \text{ es isosimple} \}, $$

así que concluimos que R también es suma de ideales isosimples izquierdos, digamos

$$ R = \sum_{j \in J} {}_RS_j \leq \sum \{ {}_RS \leq {}_RR \mid {}_RS \text{ es isosimple} \} = T \leq R. $$

Por lo tanto, $R = T$.

De hecho, dado que $1 = \sum_{j=1}^{k} s_j$ para alguna $k \in \mathbb{Z}^+$ y algunos $s_j \in S_j$, entonces R es una suma finita de ideales isosimples izquierdos. Y, puesto que cada S_j es neteriano izquierdo, entonces $R = \sum_{j=1}^{k} S_j$ es neteriano izquierdo.
$\therefore {}_RR$ es neteriano.

Ahora vamos a demostrar que las afirmaciones equivalentes 1 y 3 implican la 5. En primer lugar, recordemos que como ${}_RR$ es isoartiniano, entonces contiene un ideal ${}_RI \leq {}_RR$ esencial en R que es suma directa de ideales isosimples. Así, por 2.27, existe $x \in I$ regular en R.

De manera análoga a la demostración de la implicación anterior, existen tanto una cadena descendente

$$ R \geq I \geq Rx \geq Ix \geq Rx^2 \geq Ix^2 \geq \cdots $$

como $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $Rx^n \cong Ix^n$. Como x es regular, entonces $R \cong I$ y, por lo tanto, R es una suma directa de ideales isosimples izquierdos. Sin embargo, ${}_RR$ tiene dimensión uniforme finita, por lo que toda suma directa de ideales izquierdos de R es finita, es decir que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$R = \bigoplus_{j=1}^{m} T_j$$

para $T_1, \ldots, T_m$ ideales isosimples izquierdos de R.

Notemos que, para cualquier $j \in \{1, .., m\}$, $T_j \cong S_i$ para alguna $i \in \{1, .., n\}$ debido a que $S_1, ..., S_n$ son todos los ideales isosimples de R salvo isomorfismos. En consecuencia,

$$\sum \{T_j \mid T_j \cong S_i\} \leq I_{S_i},$$

así que veremos la otra contención para obtener la igualdad de ambos conjuntos. Para simplificar la notación, sólo demostraremos la contención para $i = 1$.

Si $x \in I_1 \leq R$, entonces x se escribe de manera única como suma finita de elementos de los ideales T_j, es decir

$$x = t_1 + \cdots + t_m.$$

Pero si $T_j \cong S_i$, entonces $t_j \in T_j \leq I_{S_i}$, de forma que podemos reescribir la suma anterior como

$$x = a_1 + \cdots + a_n$$

donde cada a_i es la suma de los elementos t_j tales que $T_j \cong S_i$, por lo cual $a_i \in I_{S_i}$. Sin embargo, x también se escribe de manera única como suma de elementos de los ideales I_{S_i} como

$$x = x + 0 + \cdots + 0,$$

por lo que $a_i = 0$ si $i \neq 1$. Puesto que la suma de los ideales T_j es directa, eso significa que cada $t_j = 0$ siempre que $T_j \ncong S_1$. Concluimos que $I_{S_1} \leq \{T_j \mid T_j \cong S_1\}$ y entonces

$$I_{S_i} = \sum \{T_j \mid T_j \cong S_i\}.$$

Finalmente, como sólo existe una cantidad finita de ideales T_j, entonces cada uno de los conjuntos $\{T_j \mid T_j \cong S_i\}$ también es finito, que es justo lo que queríamos demostrar.

$\therefore$ Cada I_{S_i} es una suma directa finita de ideales isosimples izquierdos de R.

Para terminar de demostrar la equivalencia de 4 con los incisos anteriores, veremos que si R satisface 4, entonces ${}_RR$ tiene dimensión uniforma finita. Nuevamente utilizaremos el hecho de que hay un conjunto finito de ideales isosimples izquierdos salvo isomorfismos $S_1, ..., S_n$ y un ideal esencial en R que es suma directa de ideales isosimples, digamos

$$\bigoplus_{j \in J} T_j \subseteq_{es} R.$$

Como tenemos la siguiente cadena de contenciones

$$\bigoplus_{j \in J} T_j \leq \sum \{ S \leq R \mid S \text{ es isosimple} \} = \bigoplus_{i=1}^{n} I_{S_i} \leq R,$$

entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} I_{S_i} \subseteq_{es} R$.

Por hipótesis sabemos que cada I_{S_i} es una suma directa finita de ideales isosimples izquierdos, es decir que existen $T_1, ..., T_m \leq R$ isosimples y tales que

$$T_1 \oplus \cdots \oplus T_m \subseteq_{es} R.$$

Ya que cada T_j es uniforme por ser isosimple, tenemos una suma finita de ideales uniformes esencial en R, lo cual implica que toda suma directa de ideales izquierdos distintos de cero es finita.

$\therefore {}_R R$ tiene dimensión uniforme finita.

Ahora sólo resta demostrar que las primeras cinco afirmaciones son equivalentes a la sexta. Para comenzar, si suponemos que R satisface 4 y 5, entonces $R = \bigoplus_{i=1}^{n} I_{S_i}$ y cada I_{S_i} es una suma finita de ideales isosimples. Así, $R = \bigoplus_{j=1}^{n} T_j$ para T_j isosimples.
$\therefore R$ es una suma finita de ideales isosimples izquierdos.

Por otra parte, si $R = \bigoplus_{j=1}^{m} T_j$ con cada $T_j \leq R$ isosimple izquierdo, entonces R es una suma finita de ideales neterianos izquierdos.
$\therefore R$ es neteriano izquierdo. □

Proposición 3.14. *Sea $R \neq 0$. Entonces*

$$\vartheta \colon M_{n \times n}\big(End_R(R)\big) \longrightarrow End_R\big(R^{(n)}\big)$$

donde $\vartheta(f_{ij})$ se define mediante la regla de correspondencia

$$\vartheta(f_{ij})(x) = \eta_1 \left(\sum_{j=1}^{n} f_{1j} \pi_j(x) \right) + \cdots + \eta_n \left(\sum_{j=1}^{n} f_{nj} \pi_j(x) \right)$$

es un isomorfismo de anillos.

Demostración. Sea $x \in R^{(n)}$. Notemos que $\vartheta(f_{ij})$ está bien definido debido a que $\pi_i(x) \in R$ implica $f_{ij}\pi_i(x) \in R$. De esta forma, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, tenemos $\sum_{i=1}^{n} f_{ij}\pi_i(x) \in R$ y, en consecuencia

$$\vartheta(f_{ij})(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\pi_j(x) \right) \in R^{(n)}.$$

Además, como π_j, f_{ij} y η_i son R-morfismos, entonces

$$\begin{aligned}
\vartheta\big((f_{ij}) + (g_{ij})\big)(x) =& \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{j=1}^{n} (f_{ij} + g_{ij})\pi_j(x) \right) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\pi_j(x) + g_{ij}\pi_j(x) \right) \\
=& \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\pi_j(x) \right) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\pi_j(x) \right) \\
=& \vartheta(f_{ij})(x) + \vartheta(g_{ij})(x)
\end{aligned}$$

$\therefore \vartheta\big((f_{ij}) + (g_{ij})\big) = \vartheta(f_{ij}) + \vartheta(g_{ij})$.

$$\begin{aligned}
\vartheta\big((f_{ij})(g_{ij})\big)(x) =& \vartheta \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj} \right) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ik}g_{kj} \right) \pi_j(x) \right) \\
=& \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} g_{kj}\pi_j(x) \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ik}\pi_k\eta_k \left(\sum_{j=1}^{n} g_{kj}\pi_j(x) \right) \right) \\
=& \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{k=1}^{n} f_{ik}\pi_k \left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k \left(\sum_{j=1}^{n} g_{kj}\pi_j(x) \right) \right) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} f_{ik}\pi_k\big(\vartheta(g_{kj})(x)\big) \right) \\
=& \vartheta(f_{ik})\big(\vartheta(g_{kj})(x)\big)
\end{aligned}$$

$\therefore \vartheta\big((f_{ij})(g_{ij})\big) = \vartheta(f_{ij})\vartheta(g_{ij})$.

Finalmente, debido a que $(I_n)_{ij} = 1$ si y sólo si $i = j$ y $(I_n)_{ij} = 0$ en cualquier otro caso. Entonces

$$\vartheta(I_n)(x) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{j=1}^{n} (I_n)_{ij}\pi_j(x) \right) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\pi_j(x) \right) = x.$$

$\therefore \vartheta$ es un morfismo de anillos.

De hecho, ϑ es un monomorfismo debido a que la igualdad $\vartheta(f_{ij}) = 0$ ocurre si para todo $x \in R^{(n)}$ se cumple que $\vartheta(f_{ij})(x) = 0$, es decir que cada $\eta_i\big((f_{ij})x\big) = 0$ para cada i. En particular, si $e_k \in R^{(n)}$ es tal que

$$\pi_j(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}.$$

entonces, para toda $i \in \{1, ..., n\}$, se satisface

$$0 = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\pi_j(e_k) = f_{ij}(1).$$

Es decir que toda f_{ij} es la función cero y, por lo tanto, $(f_{ij}) = 0$.

Más aún, si $f \in End_R\big(R^{(n)}\big)$, entonces podemos escribir $f(e_j) \in R^{(n)}$ como

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(a_{(i,j)}) \text{ para algunos } a_{(i,j)} \in R,$$

de manera que definimos $f_{ij}(m) = ma_{ij} \in R$ para cada $m \in R$. Ya que cada $x \in R^{(n)}$ es de la forma $x = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ para algunos $x_j \in R$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) =& f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i\big(a_{(i,j)}\big)\right) \\ =& \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \eta_i(x_j a_{(i,j)}) = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} \eta_i f_{ij}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \left(\sum_{j=1}^{n} f_{ij}\pi_j(x)\right) \end{aligned}$$

es decir que $f = \vartheta(f_{ij})$.

$\therefore$ ϑ es un isomorfismo de anillos. $\square$

Teorema 3.15. *Un anillo R es semiprimo, isoartiniano izquierdo y neteriano izquierdo si y sólo si R es un producto directo finito de anillos de matrices sobre dominios de ideales principales.*

Demostración. En primer lugar, veamos que $Hom_R(S, T) = 0$ si S y T son ideales isosimples izquierdos de R no isomorfos entre sí. Sea $f \in Hom_R(S, T)$, si $Ker(f) = 0$, entonces

$Im(f) \neq 0$ debido a que $S \neq 0$. Por lo tanto,

$$T \cong Im(f) \cong {}^{S}\!/_{Ker(f)} = {}^{S}\!/_{0} \cong S,$$

lo cual habíamos supuesto falso, así que $Ker(f) \neq 0$.

La desigualdad implica que

$$Ker(f) \underset{es}{\subsetneq} S$$

porque S es un ideal uniforme de R, así que ${}^{S}\!/_{Ker(f)}$ es un ideal singular de R, es decir que $Z({}^{S}\!/_{Ker(f)}) = {}^{S}\!/_{Ker(f)}$. Además, $Z(T) = 0$ debido a que ${}_RT \leq {}_RR$ y ${}_RR$ es no singular. Sabemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{}^{S}\!/_{Ker(f)} \arrow[r, two heads, tail, "\varphi"] & T \\
Z({}^{S}\!/_{Ker(f)}) \arrow[u, hook] \arrow[r, tail, "\varphi|"] & Z(T) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

conmuta y que $\varphi|$ es un monomorfismo, así que

$${}^{S}\!/_{Ker(f)} = Z({}^{S}\!/_{Ker(f)}) = 0.$$

Pero esta última igualdad implica que $S = Ker(f)$, es decir que $f = 0$.

$\therefore Hom_R(S, T) = 0$

Ahora veremos que $Hom_R(I_{S_i}, I_{S_j}) = 0$ si $i \neq j$. Gracias al teorema anterior, sabemos que

$$I_{S_i} = T_{(i,1)} \oplus \cdots \oplus T_{(i,m_i)} \quad \text{e} \quad I_{S_j} = T_{(j,1)} \oplus \cdots \oplus T_{(j,m_j)}$$

para $m_i, m_j \in \mathbb{Z}^+$ y ${}_RT_{(i,k)}, {}_RT_{(j,k)} \leq {}_RR$ ideales isosimples izquierdos tales que $T_{(i,k)} \cong S_i$ y $T_{(j,k)} \cong S_j$.

Si tomamos $f \in Hom_R(I_{S_i}, I_{S_j})$, podemos hacer la siguiente composición para cualesquiera $r \in \{1, ..., m_i\}$ y $s \in \{1, ..., m_j\}$:

$$T_{(i,r)} \overset{\eta_{(i,r)}}{\rightarrowtail} \bigoplus_{k=1}^{m_i} T_{(i,k)} \xrightarrow{f} \bigoplus_{k=1}^{m_j} T_{(j,k)} \overset{\pi_{(j,s)}}{\twoheadrightarrow} T_{(j,s)}.$$

Así, $\pi_{(j,s)} f \eta_{(i,r)} \in Hom_R\big(T_{(i,r)}, T_{(j,s)}\big) = 0$. En consecuencia, todo $x = \sum_{r=1}^{m_i} x_{(i,r)} \in I_{S_i}$ satisface

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{s=1}^{m_j} \pi_{(j,s)}\big(f(x)\big) = \sum_{s=1}^{m_j} \pi_{(j,s)} f\left(\sum_{r=1}^{m_i} x_{(i,r)}\right) \\
&= \sum_{s=1}^{m_j} \pi_{(j,s)} f\left(\sum_{r=1}^{m_i} \eta_{(i,r)}\big(x_{(i,r)}\big)\right) = \sum_{s=1}^{m_j}\sum_{r=1}^{m_i} \pi_{(j,s)} f \eta_{(i,r)}\left(x_{(i,r)}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

por lo que $f = 0$.

$\therefore$ La suma $End_R(I_{S_1}) + \cdots + End_R(I_{S_n})$ es directa.

Por otra parte, el hecho de que I_{S_i} sea una suma directa de ideales isomorfos a S_i implica la existencia de isomorfismos $\varphi_j \in Hom_R\big(T_{(i,j)}, S_i\big)$ para cada $j \in \{1, ..., m_i\}$. Definamos $\varphi \in Hom_R\big(I_{S_i}, S_i^{(m_i)}\big)$ como

$$
\varphi\left(\sum_{j=1}^{m_i} t_j\right) = \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_j(t_j),
$$

y notemos φ es un isomorfismo.

Si $\varphi\big(\sum_{j=1}^{n} t_j\big) = 0$, entonces $\varphi_j(t_j) = 0$ y, en consecuencia, $t_j = 0$ para cada j, de modo que $\sum_{j=1}^{m_i} t_j = 0$. Además, si $(x_j) \in S_i^{(m_i)}$, entonces para cada $x_j \in S_i$ existe $t_j \in T_{(i,j)}$ tal que $\varphi_j(t_j) = x_j$, es decir que

$$
(x_j) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{m_i} t_j\right) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{m_i} t_j\right).
$$

Gracias a la proposición anterior, tenemos los isomorfismos

$$
I_{S_i} \cong S_i^{m_i} \cong M_{m_i \times m_i}\big(End_R(S_i)\big),
$$

de forma que

$$
R = I_{S_1} \oplus \cdots \oplus I_{S_n} \cong M_{m_1\times m_1}\big(End_R(S_1)\big) \oplus \cdots \oplus M_{m_n \times m_n}\big(End_R(S_n)\big).
$$

Para terminar, recordemos que ya habíamos visto que el anillo de endomorfismos de cualquier módulo isosimple es, de hecho, un dominio, así que sólo resta ver que los ideales de $End_R(S_i)$ son principales. Para simplificar la notación, tomaremos

$$
R \cong M_{m_1\times m_1}(D_1) \times \cdots \times M_{m_n\times m_n}(D_n)
$$

con cada D_i un dominio entero. Sabemos que ${}_RR$ es isoartiniano, luego cada $M_{m_j \times m_j}(D_j)$ también es isoartiniano, como ya habíamos visto en 3.7. Finalmente, como ser isoartiniano es una propiedad Morita invariante, tenemos que cada D_i también es isoartiniano y, por 3.4, cada D_i es un dominio de ideales principales.
$\therefore R \cong M_{m_1 \times m_1}(D_1) \times \cdots \times M_{m_n \times m_n}(D_n)$ donde cada D_i es un DIP.

Ahora supongamos que

$$R \cong M_{m_1 \times m_1}(D_1) \times \cdots \times M_{m_n \times m_n}(D_n)$$

donde D_i es un dominio de ideales principales o, equivalentemente, D_i es isoartiniano izquierdo. Ya que todo ideal izquierdo de D_i es finitamente generado, entonces D_i también es neteriano izquierdo.

Sabemos que las propiedades de ser isoartiniano izquierdo y neteriano izquierdo son Morita invariantes y que también se conservan bajo productos directos finitos, así que llegamos a que cada $M_{m_i \times m_i}(D_i)$ es isoartiniano izquierdo y neteriano izquierdo y, en consecuencia, R es un anillo isoartiniano izquierdo y neteriano izquierdo.

Solamente resta ver que R es semiprimo. Para esto, demostraremos que cada $M_{m \times m}(D)$ es semiprimo para cualesquiera $m \in \mathbb{Z}^+$ y D dominio entero. Usaremos la caracterización que relaciona los ideales semiprimos con los m-sistemas.

Sea $(a_{ij}) \in M_{m \times m}(D)$ distinta de la matriz cero, es decir que existen al menos dos elementos $r, s \in \{1, ..., m\}$ tales que $a_{rs} \neq 0$. Definimos $(e_{ij}) \in M_{m \times m}(D)$ como

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = s \text{ y } j = r \\ 0 & \text{si } i \neq s \text{ o } j \neq r \end{cases}$$

De manera que, si $(x_{ij}) \in M_{m \times m}(D)$ es tal que $(x_{ij}) = (a_{ij})(e_{ij})(a_{ij})$, entonces

$$x_{rs} = \sum_{\substack{l=1 \\ k=1}}^{m} a_{rl} e_{lk} a_{ks} = a_{rs} \cdot 1 \cdot a_{rs} = a_{rs}^2$$

y $a_{rs}^2 \neq 0$ se sigue de que $a_{rs} \neq 0$ es un elemento del dominio D. En conclusión, $(x_{ij}) \neq 0$ por lo que $M_{m \times x}(D) \setminus 0$ es un n-sistema o, equivalentemente, $0 \leq M_{m \times m}(D)$ es un ideal semiprimo.

Entonces tenemos que cada $M_{m_i \times m_i}(D_i)$ es un anillo semiprimo y, por lo tanto, el producto directo de estos anillos y R también son anillos semiprimos.
$\therefore R$ es semiprimo, isoartiniano izquierdo y neteriano izquierdo. $\square$

Apéndice

Equivalencias de Morita

Para una categoría C, denotaremos por $Obj(C)$ a la colección de objetos de la categoría y por $C(A, B)$ al conjunto de morfismos entre los objetos A y B. Si C y D son dos categorías y $F\colon C \to D$ y $G\colon D \to C$ son dos funtores tales que existe un isomorfismo natural $\eta = \{\eta_A\colon FA \to GA \mid A \in Obj(C)\}$ con el que el diagrama

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & FB \arrow[d, "\eta_B"] \\ GA \arrow[r, "G(f)"] & GB \end{tikzcd}$$

conmuta para cualesquiera $A, B \in Obj(C)$ y $f \in C(A, B)$, entonces escribiremos $F \cong G$. Así, las categorías C y D son equivalentes si existen dos funtores

$$F\colon C \longrightarrow D \quad \text{y} \quad G\colon D \longrightarrow C$$

tales que $GF \cong 1_C$ y $FG \cong 1_D$.

Algunas propiedades de la categoría R-Mod

Para cada anillo asociativo con elemento unitario, definimos la categoría R-Mod cuyos objetos son los R-módulos izquierdos y cuyos morfismos son los R-morfismos. Notemos que, de esta manera, la categoría R-Mod satisface la siguiente definición.

Definición A.1. Sea C una categoría. Decimos que C es preaditiva si $C(A, B)$ es un grupo abeliano para cualesquiera $A, B \in Obj(C)$ y la composición de morfismos es bilinear.

Dada una colección de objetos $\{A_i\}_{i\in I}$ de la categoría C, un producto de la familia es un objeto A junto con una colección de morfismos $\{\pi_i\colon A\to A_i\}_{i\in I}$ que satisfacen, para cualquier $X\in Obj(C)$ y cualquier familia $\{f_i\colon X\to A_i\}_{i\in I}$, que existe un único morfismo $f\colon X\to A$ tal que $\pi_i f=f_i$ para cada $i\in I$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \\ X \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

Análogamente, un coproducto de una familia de objetos $\{B_i\}_{i\in I}$ es un objeto B junto con una colección de morfismos $\{\iota_i\colon B_i\to B\}_{i\in I}$ tal que, para toda familia $\{g_i\colon B_i\to Y\}_{i\in I}$, existe un único morfismo $g\colon B\to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} B_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & B \arrow[d, dashed, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Por otro lado, decimos que $f\colon A\to B$ es el morfismo cero si satisface simultáneamente las igualdades $fg_1=fg_2$, para cualesquiera $g_1,g_2\in C(B,Y)$, y $h_1f=h_2f$, para cualesquiera $h_1,h_2\in C(X,A)$. Si C es una categoría en la que cada conjunto $C(A,B)$ tiene un morfismo cero, denotaremos a éste por $0\colon A\to B$.

Un núcleo de $f\in C(A,B)$ es un objeto $Ker(f)=K$ junto con un morfismo $ker(f)=\kappa\colon K\to A$ que satisfacen:

1. $f\kappa=0$;
2. si $\xi\colon X\to A$ satisface $f\xi=0$, entonces existe un único $\gamma\colon X\to K$ tal que $\xi=\kappa\gamma$.

Dualmente, definimos el conúcleo de $f\colon A\to B$ como un objeto $Coker(f)=T$ junto con el morfismo $coker(f)=\tau\colon B\to T$ que satisfacen:

1. $\tau f=0$;
2. si $\xi\colon B\to Y$ satisface $\xi f=0$, entonces exite un único $\gamma\colon T\to Y$ tal que $\xi=\gamma\tau$.

Definición A.2. Decimos que C es una cateogoría abeliana si satisface las siguientes propiedades:

1. C es preaditiva;
2. toda familia finita de objetos tiene producto;
3. todo morfismo tiene núcleo y conúcleo;

4. $\overline{f}\colon Coker(ker(f)) \to Ker(coker(f))$ es un isomorfismo para toda flecha f.

Puesto que el producto categórico coincide con el producto directo en R-Mod, toda familia finita de R-módulos $\{M_i\}_{i=1}^n$ tiene un producto categórico dado por el R-módulo $\prod_{i=1}^n M_i$ y la familia de R-morfismos $\{\pi_j \in Hom_R(\prod_{i=1}^n M_i, M_j)\}_{j=1}^n$.

Por otra parte, el núcleo de $f \in Hom_R(M, N)$ es el R-módulo $Ker(f)$ junto con la inclusión $i \in Hom_R(Ker(f), M)$. Es clara la igualdad $fi = 0$ y además, si $\xi \in Hom_R(X, M)$ es tal que $f\xi = 0$, entonces $Im(\xi) \leq Ker(f)$, así que podemos considerar la correstricción

$$\xi \mid^{Ker(f)} \in Hom_R(X, Ker(f))$$

que satisface $\xi = i\xi \mid^{Ker(f)}$. La unicidad de $\xi \mid^{Ker(f)}$ se sigue del hecho de que la igualdad $\xi = ig$ para alguna $g \in Hom_R(X, Ker(f))$ implica que $g(x) = ig(x) = \xi(x)$ para cada $x \in X$. Esto demuestra que todo R-morfismo tiene núcleo.

Análogamente, para $f \in Hom_R(M, N)$, consideramos el R-módulo ${}^{N}/_{Im(f)}$ y el epimorfismo natural $\rho \in Hom_R(N, {}^{N}/_{Im(f)})$ que satisface $\rho f = 0$. Si $\xi \in Hom_R(N, Y)$ es tal que $\xi f = 0$, entonces $Im(f) \leq Ker(\xi)$. Consideramos la asignación

$$\begin{aligned} \gamma\colon \quad {}^{N}/_{Im(f)} &\longrightarrow Y \\ n + Im(f) &\mapsto \xi(n) \end{aligned}$$

que está bien definida como función gracias a la contención arriba señalada. Además, como cualquier R-morfismo $\gamma' \in Hom_R({}^{N}/_{Im(f)}, Y)$ que satisface $\xi = \gamma'\rho$ cumple

$$\gamma'(n + Im(f)) = \gamma'\rho(n) = \xi(n) = \gamma(n + Im(f)),$$

tenemos que γ es el único R-morfismo con las propiedades señaladas. Por lo tanto, todo R-morfismo tiene un conúcleo.

Finalmente, si tomamos $f \in Hom_R(M, N)$, el conúcleo de la inclusión $ker(f) = i \in Hom_R(Ker(f), M)$ es el R-módulo ${}^{M}/_{Ker(f)}$ y que el núcleo del epimorfismo natural $coker(f) = \rho \in Hom_R(N, {}^{N}/_{Im(f)})$ es el R-módulo $Im(f)$. Sabemos que siempre se da el isomorfismo

$${}^{M}/_{Ker(f)} \cong Im(f),$$

así que concluimos que R-Mod es una categoría abeliana.

Prosigamos con algunos conceptos de categorías. Diremos que una categoría I es pequeña si su colección de objetos es un conjunto. Así, si I es una categoría pequeña y

$F: I \to C$ es un funtor con C una categoría arbitraria, decimos que $\{\alpha_i : F(i) \to X\}_{i \in I}$, conjunto de morfismos de la categoría C, es una familia compatible si para cada $\lambda : i \to j$ se satisface la igualdad $\alpha_i = \alpha_j F(\lambda)$.

Si I es una categoría pequeña, un colímite para el funtor $F: I \to C$ es un objeto $\varinjlim F \in Obj(C)$ junto con una familia compatible $\{\psi_i : Fi \to \varinjlim F\}_{i \in I}$ que satisface que si $\{\xi_i : F(i) \to Y\}_{i \in I}$ es otra familia compatible, entonces existe una única flecha $\xi : \varinjlim F \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo par $i, j \in I$:

$$\begin{tikzcd} Fi \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[dr, "\xi_i"'] & \varinjlim F \arrow[d, dashed, "\xi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Un funtor $F: I \to C$, donde I es un conjunto parcialmente ordenado tal que, para cualesquiera $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$, se llama sistema directo y el colímite de un sistema directo se llama límite directo. Notemos que, si los sistemas directos siempre existen en una categoría C, entonces podemos definir el funtor $\varinjlim : Fun(I, C) \to C$, donde:

- $Fun(I, C)$ es la colección de sistemas directos $I \to C$;
- $F \mapsto \varinjlim F$;
- si $\eta : F \to G$ es una transformación natural entre los funtores $F, G: I \to C$ cuyos colímites constan de las familias compatibles $\{\psi_i : Fi \to \varinjlim F\}_{i \in I}$ y $\{\xi_i : Gi \to \varinjlim G\}_{i \in I}$ respectivamente, entonces $\varinjlim(\eta)$ es el morfismo que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} Fi \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & Gi \arrow[r, "\xi_i"] & \varinjlim G \\ & \varinjlim F \arrow[ur, dashed, "\varinjlim(\eta)"'] & \end{tikzcd}$$

La existencia de esta flecha se garantiza gracias a que $\{\xi_i \eta_i : F_i \to \varinjlim G\}$ es una familia compatible.

La demostración de que las asignaciones anteriores constituyen un funtor se sigue, en primer lugar, del hecho de que el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Fi \arrow[r, "1_{Fi}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & Fi \arrow[r, "\psi_i"] & \varinjlim F \\ & \varinjlim F \arrow[ur, dashed, "1_{\varinjlim F}"'] & \end{tikzcd}$$

implica que $\varinjlim(F1_{Fi}) = 1_{\varinjlim F}$. Además, si tenemos tres funtores $F, G, H \in Fun(I, C)$, cuyos colímites tienen respectivamente a las familias compatibles $\{\psi_i \colon Fi \to \varinjlim F\}_{i\in I}$, $\{\xi_i \colon Gi \to \varinjlim G\}_{i\in I}$ y $\{\varphi_i \colon Hi \to \varinjlim H\}_{i\in I}$, y las transformaciones naturales $\eta \colon F \to G$ y $\mu \colon G \to H$, entonces obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Fi \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & Gi \arrow[r, "\mu_i"] \arrow[dr, "\xi_i"'] & Hi \arrow[r, "\varphi_i"] & \varinjlim H \\
& & \varinjlim G \arrow[ur, dashed, "\varinjlim(\mu)"] & \\
& \varinjlim F \arrow[ur, dashed, "\varinjlim(\eta)"] \arrow[uurr, dashed, bend right, "\varinjlim(\mu\eta)"'] & &
\end{tikzcd}$$

que implica la igualdad $\varinjlim(\mu\eta) = (\varinjlim\mu)\,(\varinjlim\eta)$. Con esto concluimos que $\varinjlim$ es un funtor.

En una categoría abeliana C, decimos que $Z \in Obj(C)$ es un objeto cero si, para cada $A \in Obj(C)$ tenemos que $C(A, Z) = \{0\}$ y $C(Z, A) = \{0\}$. Denotaremos a los objetos cero como 0. Diremos además que

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\ f\ } A_2 \xrightarrow{\ g\ } A_3 \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta si $Im(f) = Ker(g)$, donde la imagen de f se define mediante la igualdad $Im(f) = Ker(coker(f))$. Finalmente, un límite directo $F : C \to D$ es exacto si cada vez que tenemos una sucesión exacta como la anterior, tenemos que

$$0 \longrightarrow FA_1 \xrightarrow{\ Ff\ } FA_2 \xrightarrow{\ Fg\ } FA_3 \longrightarrow 0$$

también es una sucesión exacta.

Decimos que $A \in Obj(C)$ es un generador para C si cualesquiera $B_1, B_2 \in Obj(C)$ y toda $g \in C(B_1, B_2)$, distinta de la flecha cero, satisfacen $fg \neq 0$ para alguna $f \in C(A, B_1)$.

Definición A.3. Sea C una categoría.

1. Decimos que C es cocompleta si $\varinjlim F$ existe para cualquier funtor $F \colon I \to C$ con I una categoría pequeña.

2. Decimos que C es de Grothendieck si C es cocompleta, tiene un generador y además satisface que todo límite directo es exacto.

Para ver que R-Mod es una categoría de Grothendieck, primero veamos que toda categoría en la que existen los coproductos y los conúcleos es cocompleta. Sean I una categoría pequeña y $F\colon I \to C$ un funtor. Consideramos el coproducto de la familia $\{Fi\}_{i\in I}$, que denotaremos como el objeto $\bigoplus_{i\in I} Fi$ y la familia de morfismos $\{\iota_j\colon Fj \to \bigoplus_{i\in I} Fi\}_{j\in I}$.

Notemos que cada morfismo λ pertenece a algún conjunto $C(A,B)$ para $A, B \in Obj(C)$; podemos suponer $s(\lambda) = A$ y $t(\lambda) = B$ para indicar a cuál de estos conjuntos pertenece λ. Definimos $\eta_\lambda = \iota_{t(\lambda)}F(\lambda) - \iota_{s(\lambda)}$ para cada flecha $\lambda\colon s(\lambda) \to t(\lambda)$ de la categoría I, de manera que obtenemos la familia $\{\eta_\lambda\colon F(s(\lambda)) \to \bigoplus_{i\in I} Fi\}$. En consecuencia, existe una única flecha $\eta\colon \bigoplus_\lambda F\big(s(\lambda)\big) \to \bigoplus_{i\in I} Fi$ tal que $\eta\iota_{s(\lambda)} = \eta_\lambda$.

Sean $K = Coker(\eta)$, $k = coker(\eta)\colon \bigoplus_{i\in I} Fi \to K$ y $\{\xi_i\colon Fi \to Y\}_{i\in I}$ una familia compatible. La propiedad universal del coproducto nos garantiza la existencia de una única flecha $\xi\colon \bigoplus_{i\in I} Fi \to Y$ tal que $\xi\iota_j = \xi_j$ para cada $j \in I$ y, por lo tanto, la propiedad universal del conúcleo asegura la existencia de una única $\gamma\colon K \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Fj \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[dr, "\xi_j"'] & \bigoplus_{i\in I} Fi \arrow[r, "k"] \arrow[d, dashed, "\xi"] & K \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

De la existencia de γ se sigue que $K = Coker(\eta)$ y $\{k\iota_j\colon Fj \to K\}_{j\in I}$ constituyen un colímite para $F\colon I \to C$. Concluimos que C es cocompleta.

Así, como R-Mod tiene coproductos y conúcleos, concluimos que R-Mod es cocompleta. Además, $R \in R$-Mod es un generador de la categoría pues, para todo $f \in Hom_R(M,N)$, con $f \neq 0$, existe $m \in M$ tal que que $f(m) \neq 0$; tomando el morfismo $(\_\cdot m) \in Hom_R(R,M)$, obtenemos que

$$f(\_\cdot m)(1) = f(m) \neq 0,$$

es decir que ${}_RR$ satisface la definición de generador.

Ahora vamos a ver que los límites directos son exactos en R-Mod. Primero, notemos que si $F\colon I \to R$-Mod es un sistema directo, entonces la colección $\{Fi \in R\text{-Mod} \mid i \in I\}$ puede verse como una familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de R-módulos. Además, todo morfismo $\lambda_{ij}\colon i \to j$ es la relación de orden, así que $F\lambda_{ij}\colon Fi \to Fj$ es un R-morfismo tal que $F\lambda_{ii} = Id_{M_i}$ o bien, existe $k \geq i, j$ que satisface $F\lambda_{ik} = F\lambda_{jk}F\lambda_{ij}$. En conclusión, podemos considerar que los R-morfismos que obtenemos al aplicar el funtor son de la forma $\alpha_{ij} = F\lambda_{ij}$ para $i \leq j$ con las propiedades señaladas anteriormente.

Consideramos la unión disjunta $\sqcup_{i\in I} M_i$ y, para $x \in M_i$ y $y \in M_j$, definimos la relación

$$x \sim y \iff \exists k \geq i, j\, (\alpha_{ik}(x) = \alpha_{jk})$$

que es de equivalencia. La reflexividad y la simetría se siguen de manera directa. Por otro lado, para $x \in M_i$, $y \in M_j$, $z \in M_l$ tales que $x \sim y$ y $y \sim z$, existen $k \geq i, j$ y $n \geq j, l$ que satisfacen las igualdades $\alpha_{ik}(x) = \alpha_{jk}(y)$, $\alpha_{jn}(y) = \alpha_{ln}(z)$; además, sabemos que existe $m \geq k, n$ y este elemento de I cumple:

$$\alpha_{im}(x) = \alpha_{km}\alpha_{ik}(x) = \alpha_{km}\alpha_{jk}(y) = \alpha_{jm}(y) = \alpha_{nm}\alpha_{jn}(y) = \alpha_{nm}\alpha_{ln}(z) = \alpha_{lm}(z);$$

es decir que $x \sim z$.

Definimos la suma de $x, y \in {}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim}$ a partir de los representantes. Si $x_i \in M_i$ es un representante de x y y_j es un representante de y, entonces existe $k \geq i, j$, de manera que

$$x + y = \left[\alpha_{ik}(x_i) + \alpha_{jk}(y_j)\right].$$

Notemos que la definición de la operación no depende de la elección de los representantes y basta ver que esto sucede cuando tomamos x_{i_1}, x_{i_2} representantes de x con $i_1 \leq i_2$ y y_j representante de y. Ya que $x_{i_1} \sim x_{i_2}$, entonces existe $i_3 \geq i_1, i_2$ tal que $\alpha_{i_1 i_3}(x_{i_1}) = \alpha_{i_2 i_3}(x_{i_2})$. Además, para $k_1 \geq i_1, j$ y $k_2 \geq i_2, j$, tenemos las igualdades

$$\begin{aligned}
\alpha_{k_1 k}(\alpha_{i_1 k_1}(x_{i_1}) + \alpha_{j k_1}(y_j)) &= \alpha_{i_1 k}(x_{i_1}) + \alpha_{jk}(y_j) \\
&= \alpha_{i_3 k}\alpha_{i_1 i_3}(x_{i_1}) + \alpha_{jk}(y_j) \\
&= \alpha_{i_3 k}\alpha_{i_2 i_3}(x_{i_2}) + \alpha_{jk}(y_j) \\
&= \alpha_{i_2 k}(x_{i_2}) + \alpha_{jk}(y_j) \\
&= \alpha_{k_2 k}(\alpha_{i_2 k_2}(x_{i_2}) + \alpha_{j k_2}(y_j))
\end{aligned}$$

para alguna $k \geq k_1, k_2, i_3, j$. Obtenemos que $({}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim}, +, 0)$ es un grupo abeliano donde $0 \in {}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim}$ es el elemento cuyos representantes $x_i \in M_i$ se caracterizan por la existencia de $k \geq i$ tal que $\alpha_{ik}(x_i) = 0$.

De hecho, ${}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim}$ es un R-módulo definiendo, para $r \in R$ y $x \in {}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim}$, el producto $rx = [rx_i]$ para un representante x_i de x. Esta operación tampoco depende de los representantes porque, si $x_i \in M_i$ y $x_j \in M_j$ son representantes de x, entonces existe $k \geq i, j$ tal que $\alpha_{ik}(x_i) = \alpha_{jk}(x_j)$. En consecuencia,

$$\alpha_{ik}(rx_i) = r\alpha_{ik}(x_i) = r\alpha_{jk}(x_j) = \alpha_{jk}(rx_j),$$

de manera que $[rx_i] = \left[rx_j\right]$. En particular, las funciones

$$\begin{aligned} \iota_j \colon M_j &\longrightarrow {}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim} \\ x_j &\longmapsto \left[x_j\right] \end{aligned}$$

son R-morfismos tales que $\iota_i = \iota_j \alpha_{ij}$ para cualesquiera $i, j \in I$, es decir que la familia $\left\{\iota_j \colon M_j \to {}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim}\right\}_{j\,\in I}$ es una familia compatible.

Si $\{\xi_j \colon M_j \to N\}_{j\,\in I}$ es otra familia compatible, definimos $\xi \colon {}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim} \to N$, de manera que, si x_i es un representante de $x \in {}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim}$, entonces $\xi(x) = \xi_i(x_i)$. Notemos que esta definición tampoco depende del representante pues si x_i y x_j son representantes de x, tenemos que

$$\xi_i(x_i) = \xi_k \alpha_{ik}(x_i) = \xi_k \alpha_{jk}(x_j) = \xi_j(x_j)$$

para alguna $k \geq i, j$. Debido a que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "\xi_i"'] & {}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim} \arrow[d, "\xi"] \\ & N \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces ${}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim}$ junto con la familia $\left\{\iota_i \colon M_j \to {}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim}\right\}_{j\,\in I}$ es el límite directo del funtor $F \colon I \to R$-Mod. En consecuencia, denotaremos $\varinjlim M_i = {}^{\sqcup_{i\in I} M_i}/_{\sim}$.

Finalmente, veamos que el límite directo es exacto. Supongamos que

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\ \varphi\ } G \xrightarrow{\ \psi\ } H \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de sistemas directos con $Fi = M_i$, $Gi = N_i$ y $Hi = K_i$ para cada $i \in I$. Como φ y ψ son transformaciones naturales, entonces

$$0 \longrightarrow M_i \xrightarrow{\ \varphi_i\ } N_i \xrightarrow{\ \psi_i\ } K_i \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de R-módulos para cada $i \in I$.

Definimos $\varinjlim \varphi_i \colon \varinjlim M_i \to \varinjlim N_i$ como $\varinjlim \varphi(x) = \varphi_i(x_i)$ para un representante $x_i \in M_i$ de $x \in \varinjlim M_i$. Nuevamente, esta definición no depende de los representantes debido a que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\alpha_{ik}"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & M_k \arrow[d, "\varphi_k"] \\ N_i \arrow[r, "\beta_{ik}"'] & N_k \end{tikzcd}$$

conmuta para cualesquiera $i \leq k$. Como $\varinjlim \psi_i \colon \varinjlim N_i \to \varinjlim K_i$ se define de manera análoga, obtenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow \varinjlim M_i \xrightarrow{\varinjlim \varphi_i} \varinjlim N_i \xrightarrow{\varinjlim \psi_i} \varinjlim K_i \longrightarrow 0$$

Veamos que $\varinjlim \varphi_i$ es monomorfismo. Supongamos que $\varinjlim \varphi_i(x) = 0$ y que $x_i \in M_i$ es un representante de x, de forma que existe $k \geq i$ tal que $\varphi_k \alpha_{ik}(x_i) = \beta_{ik}\varphi_i(x_i) = 0$. Puesto que cada φ_j es monomorfismo, se sigue que $\alpha_{ik}(x_i) = 0$, con lo que concluimos que $x = 0$.

Ahora, sea $z \in \varinjlim K_i$ con representante $z_i \in K_i$. Ya que $\psi_i \colon N_i \to K_i$ es epimorfismo, existe $y_i \in N_i$ tal que $z_i = \varphi_i(y_i)$, de manera que $\varphi([y]) = z$ y, por lo tanto $\varinjlim \psi_i$ es suprayectiva.

Para ver que $Im(\varinjlim \varphi_i) \subseteq Ker(\varinjlim \psi_i)$, sea $y \in Im(\varinjlim \varphi_i)$, de manera que existe $x_i \in M_i$ tal que $\varphi_i(x_i) = y_i$ para un representante y_i de y. En consecuencia, $y \in Im(\varphi_i) = Ker(\psi_i)$, así que $\psi_i(y_i) = 0$ y, por lo tanto $\varinjlim \psi_i(y) = 0$.

Por otra parte, si tenemos $y \in Ker(\varinjlim \psi_i)$, entonces $\psi_i(y_i) = 0$, lo que implica que existe $k \geq i$ tal que $\psi_k \beta_{ik}(y_i) = \gamma_{ik}\psi_i(y_i) = 0$. De esta manera, obtenemos

$$\beta_{ik}(y_i) \in Ker(\varinjlim \psi_k) = Im(\varinjlim \varphi_k),$$

de donde se sigue que $\alpha_{ik}(y_i) = \varphi_k(x_k)$ para alguna $x_k \in M_k$. Finalmente, concluimos que $\varinjlim \varphi_i([x_k]) = y$ y, por lo tanto, $Im(\varinjlim \varphi_i) = Ker(\varinjlim \psi_i)$. Esto termina la demostración de que la sucesión es exacta.

Teoría de Morita

Definición A.4. Decimos que los anillos R y S son Morita equivalentes si R-Mod y S-Mod son equivalentes como categorías bajo un par de funtores covariantes y aditivos.

Notemos que si $F \colon R\text{-}Mod \longrightarrow S\text{-}Mod$ es un funtor aditivo y $0 \in Hom_R(M, N)$ para $M, N \in R\text{-}Mod$, entonces $F(0) \in Hom_S(FM, FN)$ es el morfismo 0. Esto se debe a que la igualdad

$$F(f) + F(0) = F(f + 0) = F(f)$$

ocurre para cada $f \in Hom_R(M, N)$.

De la definición, se sigue que si R y S son anillos Morita equivalentes, entonces existen un par de funtores

$$F \colon R\text{-Mod} \longrightarrow S\text{-Mod} \;\text{ y }\; G \colon S\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$$

y un par de isomorfismos naturales

$$\eta\colon GF \longrightarrow 1_{R\text{-}Mod} \;\text{ y }\; \zeta\colon FG \longrightarrow 1_{S\text{-}Mod}$$

tales que los siguientes diagramas conmutan para cualesquiera $M, M' \in R$-Mod, $N, N' \in S$-Mod, $f \in Hom_R(M, M')$ y $g \in Hom_S(N, N')$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & M' \\ GFM \arrow[u, "\eta_M"] \arrow[r, "GF(f)"] & GFM' \arrow[u, "\eta_{M'}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[r, "g"] & N' \\ FGN \arrow[u, "\zeta_N"] \arrow[r, "FG(g)"] & FGN' \arrow[u, "\zeta_{N'}"'] \end{tikzcd}$$

En particular, podemos expresar a cualesquiera $f \in Hom_R(M, M‘)$ y $g \in Hom_S(N, N')$ como las composiciones

$$f = \eta_{M'} GFf \eta_M^{-1} \;\text{ y }\; g = \zeta_{N'} FGg \zeta_N^{-1}.$$

Finalmente, como η_N, η_M^{-1} y $G(g)$ son R-morfismos para cualesquiera R-módulos M, N y $g \in Hom_R(N, M)$, podemos definir las dos siguientes asignaciones:

$$\begin{aligned} \varphi\colon Hom_S(N, FM) &\longrightarrow Hom_R(GN, M) \\ g &\longmapsto \eta_M G(g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta\colon Hom_S(FM,N) &\longrightarrow Hom_R(M, GN) \\ f &\longmapsto G(f)\eta_M^{-1} \end{aligned}$$

Lema A.5. *Las asignaciones φ y θ son morfismos de grupos abelianos*

Demostración. Únicamente demostraremos la afirmación para φ pues la afirmación para θ se realiza de forma análoga. Comencemos recordando que $\big(Hom_R(M, M'), +, 0\big)$ y $\big(Hom_S(N, N'), +, 0\big)$ son grupos abelianos para cualesquiera $M, M' \in R\text{-}Mod$ y $N, N' \in S\text{-}Mod$.

Ya que $\varphi(g)$ está definida como la composición

$$GN \xrightarrow{G(g)} GFM \overset{\eta_M}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} M,$$

entonces $\varphi(g) \in Hom_R(GN, M)$ queda únicamente determinada.
$\therefore \varphi$ es función.

Por otra parte, si $g, g' \in Hom_S(N, FM)$, entonces

$$\varphi(g + g') = \eta_M G(g + g') = \eta_M\big(G(g) + G(g')\big)$$

porque G es un funtor aditivo. De hecho, si $x \in GN$, entonces las propiedades de R-módulos de η_M implican $G(g)(x), G(g')(x) \in GFM$ y las igualdades

$$\begin{aligned} \eta_M\big(G(g) + G(g')\big)(x) =& \eta_M\big(G(g)(x) + G(g')(x)\big) \\ =& \eta_M\big(G(g)(x)\big) + \eta_M\big(G(g')(x)\big) \\ =& \big(\eta_M G(g)\big)(x) + \big(\eta_M G(g')\big)(x). \end{aligned}$$

Es decir que $\eta_M(Gg + Gg') = (\eta_M Gg) + (\eta_m Gg')$. En conclusión

$$\varphi(g + g') = \varphi(g) + \varphi(g').$$

$\therefore\ \varphi$ es un $\mathbb{Z}$-morfismo. $\square$

A partir de aquí, asumiremos que los anillos R y S son Morita equivalentes y usaremos la notación F, G, η, ζ, φ y θ para referirnos, respectivamente, a los funtores, isomorfismos naturales y morfismos que usamos en las observaciones y en el lema anterior.

Proposición A.6. *Para todo par $M, M' \in R$-Mod, la restricción de F*

$$F|\colon Hom_R(M, M') \longrightarrow Hom_S(FM, FM')$$

es un isomorfismo de grupos abelianos. Además, f es monomorfismo (resp. epimorfismo) si y sólo si Ff también lo es.

Demostración. Para evitar complicar la notación, llameremos F a la restricción del funtor a $Hom_R(M, M')$. Ya que $Hom_R(M, M')$ y $Hom_S(FM, FM')$ son grupos abelianos, entonces F es un morfismo de grupos abelianos debido a que F es un funtor aditivo.

Definamos

$$\begin{aligned} H\colon Hom_S(FM, FM') &\longrightarrow Hom_R(M, M') \\ g &\longmapsto \eta_{M'} G(g) \eta_M^{-1} \end{aligned}$$

que es un $\mathbb{Z}$-morfismo debido a que

$$\begin{aligned} H(g+h)(x) =& \eta_{M'} G(g+h)\eta_M^{-1}(x) = \eta_{M'}\big(G(g)+G(h)\big)\big(\eta_M^{-1}(x)\big) \\ =& \eta_{M'}\big(G(g)\eta_M^{-1}(x) + G(h)\eta_M^{-1}(x)\big) = \eta_{M'}G(g)\eta_M^{-1}(x) + \eta_{M'}^{-1}G(h)\eta_M^{-1}(x) \\ =& \big(H(g)+H(h)\big)(x) \end{aligned}$$

es decir que $H(g+h) = H(g) + H(h)$.

Además, si suponemos que $H(g) = 0$, entonces $G(g) = 0$ se sigue del hecho de que $\eta_{M'}$ y η_M^{-1} son isomorfismos y de la definición de H. En consecuencia

$$g = \zeta_{FM'} FG(g)\zeta_{FM}^{-1} = 0,$$

por lo que H es monomorfismo. Por otra parte, si tomamos $f \in Hom_R(M, M')$, entonces $F(f) \in Hom_S(FM, FM')$ es tal que

$$H\big(F(f)\big) = \eta_{M'} GF(f)\eta_M^{-1} = f,$$

así que podemos concluir que H es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo cuyo morfismo inverso es F. Concluimos que F también es un isomorfismo.

$\therefore$ F es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo.

Gracias a la igualdad $f = \eta_{M'} GF(f)\eta_M^{-1}$, sabemos que f es monomorfismo (respectivamente epimorfismo) si y sólo si $GF(f)$ también lo es. Vamos a ver que $F(f)$ es monomorfismo demostrando que si $h \in Hom_S(K, FM)$ es tal que $F(f)h = 0$, entonces $h = 0$. Bajo la hipótesis,

$$GF(f)G(h) = G\big(F(f)h\big) = 0,$$

y ya que $GF(f)$ es un monomorfismo, entonces $G(h) = 0$. Por lo tanto,

$$h = \zeta_{FM} FG(h)\zeta_K^{-1} = 0.$$

Recíprocamente, $F(f)$ es monomorfismo si y sólo si $FGF(f)$ lo es; de manera que, para $h \in Hom_R(K, M)$, tenemos que

$$FGF(f)F(h) = F(GF(f)h) = 0$$

implica $F(h) = 0$. En consecuencia,

$$h = \eta_M GF(h)\eta_K^{-1} = 0.$$

$\therefore f$ es monomorfismo si y sólo si $F(f)$ es monomorfismo.

Análogamente se demuestra que f es un epimorfismo si y sólo si $F(f)$ también lo es, por lo que también podemos concluir que f es un isomorfismo si y sólo si $F(f)$ es biyectivo. □

La proposición anterior puede usarse para ver que, si $M \neq 0$, entonces

$$F\colon End_R(M) \longrightarrow End_S(FM)$$

es un isomorfismo de anillos. Sólo quedaría comprobar que $F(f)F(g) = F(fg)$ y $F(Id_M) = Id_{FM}$ pero estas dos propiedades se satisfacen debido a que F es un funtor covariante.

Lema A.7. *Si R y S son anillos equivalentes, entonces*

$$\varphi\colon Hom_S(N, FM) \longrightarrow Hom_R(GN, M)$$

es un isomorfismo de grupos abelianos para cualesquiera $M \in R$-Mod y $N \in S$-Mod. Además, si $M_1, M_2 \in R$-Mod y $N_1, N_2 \in S$-Mod, entonces para cualesquiera

$$\begin{aligned} \delta \in Hom_R(GN_1, M_1), &\qquad \gamma \in Hom_S(N_1, FM_1), \\ h \in Hom_R(M_1, M_2)\ , &\qquad k \in Hom_S(N_2, N_1) \end{aligned}$$

se cumplen la igualdades

$$\varphi\big(F(h)\gamma k\big) = h\varphi(\gamma)G(k) \ \text{ y } \ \varphi^{-1}\big(h\delta G(k)\big) = F(h)\varphi^{-1}(\delta)k.$$

Finalmente, $\gamma \in Hom_S(N, FM)$ es monomorfismo (resp. epimorfismo) si y sólo si $\varphi(\gamma)$ también lo es.

Análogamente,

$$\theta\colon Hom_S(FM, N) \longrightarrow Hom_R(M, GN)$$

es un morfismo de grupos abelianos que satisface las igualdades

$$\theta\big(k\gamma' F(h)\big) = G(k)\theta(\gamma')h \ \ y \ \ \theta^{-1}\big(G(k)\delta' h\big) = k\theta^{-1}(\delta')F(h)$$

para $\gamma' \in Hom_S(FM, N)$ *y* $\delta' \in Hom_R(M, GN)$.

Demostración. Sabemos, gracias a la proposición anterior, que

$$G\colon Hom_S(N, FM) \longrightarrow Hom_R(GN, GFM)$$

es un isomorfismo de grupos abelianos. Definamos

$$\begin{aligned} H\colon Hom_R(GN, GFM) &\to Hom_R(GN, M) \\ f &\longmapsto \eta_M f \end{aligned}$$

y notemos que H es un isomorfismo de grupos abelianos. En primer lugar,

$$\eta_M(f+g)(x) = \eta_M f(x) + \eta_M g(x)$$

implica $H(f+g) = H(f) + H(g)$, así que H es un $\mathbb{Z}$-morfismo. Además, como η_M es un isomorfismo, entonces $\eta_M f = 0$ implica $f = 0$, es decir que H es monomorfismo. Finalmente, si tomamos $f' \in Hom_R(GN, M)$, entonces $\eta_M^{-1} f' \in Hom_R(GN, GFM)$ es tal que

$$\eta_M(\eta_M^{-1} f') = f',$$

con lo que concluimos que H es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo.

Ahora notemos que

$$\varphi(g) = \eta_M G(g) = H\big(G(g)\big),$$

así que $\varphi = HG$ es un isomorfismo de grupos abelianos.

Tomemos ahora γ, δ, k y h como en la hipótesis. En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi\big(F(h)\gamma k\big) =& \eta_{M_2} G\big(F(h)\gamma k\big) = \eta_{M_2} GF(h)G(\gamma)G(h) \\ =& \big(\eta_{M_2} GF(h)\eta_{M_1}\big)\big(\eta_{M_1}^{-1} G(\gamma)\big)G(h) \\ =& h\varphi(\gamma)G(h). \end{aligned}$$

De esta igualdad, tenemos que

$$\varphi\big(F(h)\varphi^{-1}(\delta)k\big) = h\varphi\big(\varphi^{-1}(\delta)\big)G(k) = \varphi\big(\varphi^{-1}\big(h\delta G(k)\big)\big)$$

así que, por la inyectividad de φ, obtenemos

$$\varphi^{-1}\big(h\delta G(k)\big) = F(h)\varphi^{-1}(\delta)k.$$

Finalmente, queda demostrar que $\gamma \in Hom_R(GN, M)$ es un monomorfismo (respectivamente un epimorfismo) si y sólo si $\varphi(\gamma)$ también lo es. Esto se debe a que definimos $\varphi(\gamma) = \eta_M G(\gamma)$ donde η_M es un isomorfismo, así que $\varphi(\gamma)$ es monomorfismo si y sólo si $G(\gamma)$ es monomorfismo, lo cual, como ya vimos, es equivalente a que γ sea monomorfismo. El mismo argumento se sirve para demostrar la afirmación equivalente para epimorfismos.

La demostración de la afirmación para θ es análoga. □

Notemos que, al tomar el morfismo identidad en lugar de k o h en las igualdades del lema anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma k) =& \varphi\big(F(Id_M)\gamma k\big) = Id_M\varphi(\gamma)G(k) = \varphi(\gamma)G(k)\\ \varphi^{-1}(h\delta) =& \varphi^{-1}\big(h\delta G(Id_N)\big) = F(h)\varphi^{-1}(\delta)Id_N = F(h)\varphi^{-1}(\delta).\end{aligned}$$

Estas igualdades las usaremos constantemente en lo que resta del anexo.

Si $F\colon R\text{-}Mod \longrightarrow S\text{-}Mod$ es un funtor aditivo covariante y denotamos $i_{K\leq M}$ al morfismo inclusión de K en M, entonces

$$\begin{aligned}\Lambda\colon \mathcal{L}(M) &\longrightarrow \mathcal{L}(FM)\\ K &\longmapsto Im\big(F(i_{K\leq M})\big).\end{aligned}$$

es un morfismo de órdenes.

En primer lugar, notemos que Λ está bien definida como función debido a que $F(i_{K\leq M}) \in Hom_S(FK, FM)$. De esta forma, $Im\big(F(i_{K\leq M})\big) \leq FM$ y $F(i_{K\leq M})$ es un único S-morfismo de FK en FM, con lo cual $K = L$ implica

$$\Lambda(K) = Im(Fi_{K\leq M}) = Im(Fi_{L\leq M}) = \Lambda(L).$$

Por otra parte, si $L \leq K \leq M$, entonces $i_{L\leq M} = i_{K\leq M}i_{L\leq K}$, de forma que se conserva la igualdad cuando aplicamos el funtor F, es decir $F(i_{L\leq M}) = F(i_{K\leq M})F(i_{L\leq K})$. En consecuencia, obtenemos

$$Im(Fi_{L\leq M}) = Im(Fi_{K\leq M}Fi_{L\leq K}) = Fi_{K\leq M}\big(Im(Fi_{L\leq K})\big) \leq Im(Fi_{K\leq M}),$$

es decir que $\Lambda(L) \leq \Lambda(K)$.
$\therefore \Lambda$ es un morfismo de órdenes.

Proposición A.8. *Si R y S son anillos Morita equivalentes, entonces Λ es un isomorfismo de retículas.*

Demostración. Ya sabemos Λ es un morfismo de órdenes. Ahora definamos la función

$$\begin{aligned} \Gamma\colon \mathcal{L}(FM) &\longrightarrow \mathcal{L}(M) \\ N &\longmapsto Im\big(\varphi(i_{N\leq FM})\big) \end{aligned}$$

Vamos a ver que Γ es un morfismo de órdenes y que es inverso de Λ.

Notemos que Γ preserva el orden, pues si $K \leq N \leq FM$, entonces A.7 implica $\varphi(i_{K\leq FM}) = \varphi(i_{K\leq N} i_{N\leq FM}) = \varphi(i_{N\leq FM})G(i_{K\leq N})$, de modo que

$$\begin{aligned} \Gamma(K) =& Im\big(\varphi(i_{K\leq FM})\big) = Im\big(\varphi(i_{N\leq FM})G(i_{K\leq N})\big) \\ =& \varphi(i_{N\leq FM})\big(Im(G(i_{K\leq N}))\big) \leq Im\big(\varphi(i_{N\leq FM})\big) = \Gamma(N). \end{aligned}$$

Ahora trabajaremos con $K \leq M$ y con $\Lambda(K) \leq FM$. Ya que $i_{K\leq M}$ es un monomorfismo, entonces $F(i_{K\leq M}) \in Hom_S(FK, FM)$ también lo es. En consecuencia

$$FK \cong Im\big(F(i_{K\leq M})\big) = \Lambda(K) = Im\big(i_{\Lambda(K)\leq FM}\big),$$

por lo que existe un isomorfismo $h \in Hom_S\big(FK, Im(F(i_{K\leq M}))\big)$ tal que satisface la igualdad $F(i_{K\leq M}) = i_{\Lambda(K)\leq FM} h$, es decir que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} FK \arrow[rr, tail, "F(i_{K\leq M})"] \arrow[dr, dashed, tail, two heads, "h"'] & & FM \\ & \Lambda(K) \arrow[ur, tail, "i_{\Lambda(K)\leq FM}"'] & \end{tikzcd}$$

En consecuencia

$$\varphi(i_{\Lambda(K)\leq FM})G(h) = \varphi\big(F(i_{\Lambda(K)\leq FM})h\big) = \varphi\big(F(i_{K\leq M})Id_{FK}\big) = i_{K\leq M}\varphi(Id_{FK}),$$

donde $G(h) \in Hom_R\big(GFK, GIm(F(i_{K\leq M}))\big)$ y $\varphi(Id_K) \in Hom_R(GFK, K)$ son isomorfismos como resultado de que h e Id_K lo son. De esta manera, tenemos

$$
\begin{aligned}
\Gamma\Lambda(K) =& Im\big(\varphi(i_{\Lambda(K)\leq FM})\big) = Im\big(i_{K\leq M}\varphi(Id_{FK})G(h)^{-1}\big)\\
=& i_{K\leq M}\varphi(Id_{FK})\big(Im(G(h)^{-1})\big) = i_{K\leq M}\varphi(Id_{FK})(GFK)\\
=& i_{K\leq M}(K) = K.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, si tomamos $N \leq FM$, obtenemos el diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
GN \arrow[rr, tail, "\varphi(i_{N\leq FM})"] \arrow[dr, dashed, two heads, "k"'] & & M \\
& \Gamma(N) \arrow[ur, hook, "i_{\Gamma(N)\leq M}"'] &
\end{tikzcd}
$$

donde la inyectividad de $\varphi(i_{N\leq FM})$ implica que $GN \cong Im(\varphi(i_{N\leq FM})) = \Gamma(N)$, gracias a lo cual podemos inferir la existencia del isomorfismo k. En consecuencia, podemos aplicar la igualdad de la proposición A.7 para obtener

$$
\begin{aligned}
i_{N\leq FM} =& \varphi^{-1}\big(\varphi(i_{N\leq FM})\big) = \varphi^{-1}(i_{\Gamma(N)\leq M}k)\\
=& F(i_{\Gamma(N)\leq M})\varphi^{-1}(k)
\end{aligned}
$$

donde $\varphi^{-1}(k) \in Hom_S(N, F\Gamma(N))$ es un isomorfismo. Así

$$
\begin{aligned}
\Lambda\Gamma(K) =& Im\big(F(i_{\Gamma(K)\leq M})\big) = Im\big(i_{N\leq FM}(\varphi^{-1}(k))^{-1}\big)\\
=& i_{N\leq FM}\big(Im(\varphi^{-1}(k))^{-1}\big) = i_{N\leq FM}(N) = N.
\end{aligned}
$$

En conclusión, Γ es el morfismo de órdenes inverso de Λ. Por lo que podemos concluir que Λ es un isomorfismo de retículas. □

Corolario A.9. *Sean R y S anillos equivalentes y $M \in R$-Mod, entonces M es neteriano si y sólo si FM es neteriano.*

Demostración. Supongamos que M es neteriano y que

$$K_0 \leq K_1 \leq K_2 \leq \cdots$$

es una cadena ascendente de submódulos de FM, entonces existe una cadena ascendente de submódulos de M

$$N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \cdots$$

tal que $\Lambda(N_n) = K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N_n = N_k$ para toda $k \geq n$ y así

$$K_n = \Lambda(N_n) = \Lambda(N_k) = K_k$$

para toda $k \geq n$.

Recíprocamente, si FM es neteriano y

$$N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \cdots$$

es una cadena ascendente de submódulos de M, entonces

$$\Lambda(N_0) \leq \Lambda(N_1) \leq \Lambda(N_2) \leq \cdots$$

es una cadena ascendente de submódulos de FM. De este modo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $k \geq n$, se satisface $\Lambda(N_n) = \Lambda(N_k)$. Y ya que Λ es un isomorfismo de retículas, esto último implica que $N_n = N_k$ para toda $k \geq n$.
$\therefore$ M es neteriano si y sólo si FM es neteriano. □

A partir de este punto, el objetivo es demostrar que R y el anillo de matrices $M_{n\times n}(R)$ son anillos equivalentes para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ y cualquier anillo R. Comenzaremos haciendo algunas observaciones que no involucrarán los resultados previos en este capítulo.

Lema A.10. *Sean $F, G \colon R$-Mod $\to S$-Mod funtores aditivos covariantes. Si*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta que se escinde, entonces

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{Ff} FB \xrightarrow{Fg} FC \longrightarrow 0$$

también es una sucesión exacta que se escinde. Más aún, si $\eta \colon F \longrightarrow G$ es una transformación natural, entonces η_B es monomorfismo (resp. epimorfismo) si y sólo si η_A y η_C son monomorfismos (resp. epimorfirmos).

Demostración. Supongamos que

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta que se escinde, entonces existe $f_0 \in Hom_R(B, A)$ tal que $f_0 f = Id_A$. Por lo tanto $F(f_0) \in Hom_S(FB, FA)$ es tal que

$$F(f_0)F(f) = F(f_0 f) = F(Id_A) = Id_{FA}.$$

$\therefore\ 0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F(f)} FB \xrightarrow{F(g)} FC \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta que se escinde.

Ahora consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & FA \arrow[r, tail, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"] & FB \arrow[r, two heads, "F(g)"] \arrow[d, "\eta_B"] & FC \arrow[r] \arrow[d, "\eta_C"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & GA \arrow[r, tail, "G(f)"] & GB \arrow[r, two heads, "G(g)"] & GC \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Notemos que, ya que η es una transformación natural, el diagrama entero conmuta y que, gracias a lo anterior, sabemos que ambos renglones son sucesiones exactas.

Supongamos que η_B es un monomorfismo. Como $F(f)$ es un monomorfismo, entonces $\eta_B F(f) = G(f)\eta_A$ también lo es, así que podemos concluir que η_A es monomorfismo. Por otra parte, como la sucesión en R-Mod es exacta, existe un monomorfismo $g_0 \in Hom_R(C, B)$ tal que $gg_0 = Id_C$, de modo que obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} FB \arrow[d, tail, "\eta_B"] & FC \arrow[l, tail, "F(g_0)"'] \arrow[d, "\eta_C"] \\ GB & GC \arrow[l, tail, "G(g_0)"'] \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $\eta_B F(g_0) = G(g_0)\eta_C$ es un monomorfismo y, por lo tanto, η_C también lo es.

Recíprocamente, si η_A y η_C son monomorfismos y $b \in FB$ es tal que $\eta_B(b) = 0$, entonces

$$\eta_C F(g)(b) = G(g)\eta_B(b) = 0,$$

lo que implica que $F(g)(b) = 0$. Esto significa que $b \in Ker\big(F(g)\big) = Im\big(F(f)\big)$, así que existe $a \in FA$ tal que $F(f)(a) = b$, es decir que

$$G(f)\eta_A(a) = \eta_B F(f)(a) = \eta_B(b) = 0.$$

Por la inyectividad de $G(f)$ y de η_A, tenemos que $a = 0$. Así que concluimos que $b = F(f)(a) = 0$, es decir que η_B es monomorfismo.

La demostración para el caso para epimorfismos es análoga. $\square$

Para demostrar la siguiente proposición, recordemos que $G \in R$-Mod es un generador si genera a la categoría R-Mod. Usaremos además, que esta definición es equivalente a decir que G genera a ${}_RR$.

Proposición A.11. *Sean $P, G \in R$-Mod, entonces:*

1. *P es finitamente generado y proyectivo si y sólo si existen $P' \in R$-Mod y $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $R^{(n)} \cong P \oplus P'$.*
2. *G es un generador si y sólo si existen $R' \in R$-Mod y $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $G^{(n)} \cong R \oplus R'$.*

Demostración. Comencemos demostrando la doble implicación del primer enunciado. Como R es generador y P es finitamente generado, entonces existen $n \in \mathbb{Z}^+$ y un epimorfismo

$$R^{(n)} \overset{f}{\twoheadrightarrow} P.$$

Como P es proyectivo, la existencia de este epimorfismo implica que $Ker(f)$ es un sumando directo de $R^{(n)}$, es decir que $R^{(n)} = Ker(f) \oplus N$ para algún $N \leq R^{(n)}$ y, de hecho

$$P = Im(f) \cong N.$$

Por lo tanto $R^{(n)} = Ker(f) \oplus N \cong Ker(f) \oplus P$, lo que demuestra la afirmación.

Para la demostrar la segunda implicación, supongamos que existe un isomorfismo $f \in Hom_R(R^{(n)}, P \oplus P')$ para algún $P' \in R$-Mod. Así, la composición

$$R^{(n)} \overset{f}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} P \oplus P' \overset{\pi_P}{\twoheadrightarrow} P$$

es un epimorfismo, es decir que P es finitamente generado. Además, como R es proyectivo, $R^{(n)}$ también lo es y, finalmente, P comparte esta propiedad. Con esto queda demostrado el primer inciso.

Ahora demostremos la segunda afirmación recordando que si G es generador, entonces genera a R como R-módulo izquierdo. Así, como ${}_RR$ es finitamente generado, existen un entero positivo n y un epimorfismo $f \in Hom_S(G^{(n)}, R)$. La implicación se concluye de manera análoga al inciso 1 usando que R es proyectivo.

Recíprocamente, si $G^{(n)} \cong R \oplus R'$ para algún $R' \in R$-Mod, entonces la composición

$$G^{(n)} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow R \oplus R' \overset{\pi_R}{\twoheadrightarrow} R$$

es un epimorfismo. Por lo tanto, G genera a R y, en consecuencia, es un generador. $\square$

Antes de continuar con la siguiente proposición, definiremos algunos funtores que serán de utilidad.

Si tenemos ${}_RU_S$, $M, N \in R$-Mod y $f \in Hom_R(M,N)$, entonces $Hom_R(U,M)$ y $Hom_R(U,N)$ son S-módulos izquierdos definiendo $s\gamma$ mediante

$$(s\gamma)(u) = \gamma(us)$$

para $\gamma \in Hom_R(U,M)$ o bien $\gamma \in Hom_R(U,N)$. Así, la asignación

$$\begin{aligned} Hom_R(U,f)\colon Hom_R(U,M) &\longrightarrow Hom_R(U,N) \\ \gamma &\longmapsto f\gamma \end{aligned}$$

es un S-morfismo izquierdo porque, si tomamos $\gamma, \gamma' \in Hom_R(U,M)$, $s \in S$ y $u \in U$, se siguen las igualdades

- $Hom_R(U,f)(\gamma + \gamma') = f(\gamma + \gamma') = f\gamma + f\gamma' = Hom_R(U,f)(\gamma) + Hom_R(U,f)(\gamma')$,
- $sHom_R(U,f)(\gamma)(u) = s(f\gamma)(u) = f\gamma(us) = f(s\gamma)(u) = Hom_R(U,f)(s\gamma)(u)$, es decir que $sHom_R(U,f)(\gamma) = Hom_R(U,f)(s\gamma)$.

En consecuencia, las asignaciones

$$Hom_R(U,\_)(M) = Hom_R(U,M) \qquad \text{y} \qquad Hom_R(U,\_)(f) = Hom_R(U,f)$$

definen un funtor covariante de R-Mod en S-Mod. Además, este funtor es aditivo pues

$$Hom_R(U, f + f')(\gamma) = (f + f')(\gamma) = f\gamma + f'\gamma = \big(Hom_R(U,f) + Hom_R(U,f')\big)(\gamma).$$

Análogamente, $Hom_R(N,U)$ es un S-módulo derecho definiendo $(\gamma s)(n) = \gamma(n)s$ y $Hom_R(f,U)(\gamma) = \gamma f$ es un S-morfismo derecho. Por lo tanto, las asignaciones

$$Hom_R(\_,U)(M) = Hom_R(M,U) \qquad \text{y} \qquad Hom_R(\_,U)(f) = Hom_R(f,U)$$

definen un funtor contravariante aditivo de R-Mod a Mod-S. Nos referiremos a estos funtores como los funtores Hom. Notemos que, usando adecuadamente los funtores Hom y las igualdades de A.7, los isomorfismos de grupos abelianos φ y θ resultan transformaciones naturales.

Por otra parte, si tenemos ${}_SU_R$, $M, N \in R$-Mod y $f \in Hom_R(M,N)$, $U \otimes_R M$ es un S-módulo izquierdo bajo la acción $s(u \otimes m) = (su) \otimes m$ para $s \in S$, $u \in U$ y $m \in M$.

Además,

$$\begin{aligned} U \times M &\longrightarrow U \otimes_R N \\ (u, m) &\longmapsto u \otimes f(m) \end{aligned}$$

define un único $\mathbb{Z}$-morfismo

$$(Id_U \otimes f)\colon U \otimes_R M \longrightarrow U \otimes_R N$$

tal que $(Id_U \otimes f)(u \otimes m) = u \otimes f(m)$ para cada $u \in U$ y $m \in M$. Más aún, si tenemos $s \in S$, entonces

$$(Id_U \otimes f)\big(s(u \otimes m)\big) = (Id_U \otimes f)(su \otimes m) = su \otimes f(m) = s\big(u \otimes f(m)\big) = s(Id_U \otimes f)(u \otimes m),$$

por lo que $(Id_U \otimes f)$ es un S-morfismo izquierdo.

Considerando además que

$$\begin{aligned} \big(Id_U \otimes (f + f')\big)(u \otimes m) &= u \otimes (f + f')(m) = \big(u \otimes f(m)\big) + \big(u \otimes f'(m)\big) \\ &= (Id_U \otimes f)(u \otimes m) + (Id_U \otimes f')(u \otimes m), \end{aligned}$$

obtenemos que las asignaciones

$$(U \otimes_R \_)(M) = U \otimes_R M \quad \text{y} \quad (U \otimes_R \_)(f) = Id_U \otimes f$$

definen un funtor aditivo covariante de R-Mod en S-Mod.

Análogamente, $(\_ \otimes_S U)$ es un funtor aditivo covariante de Mod-S en Mod-R. Estos dos últimos funtores se conocen como los funtores tensor.

Finalmente, recordemos que existen isomorfismos

$$M \cong Hom_R(R, M) \qquad \text{y} \qquad M \cong R \otimes_R M$$

para toda $M \in R$-Mod. Los cuales están dados respectivamente por

$$\begin{aligned} &\xi(m) = (\_ \cdot m) \text{ con inverso } \xi^{-1}(\gamma) = \gamma(1) \quad \text{y} \\ &\chi(m) = 1 \otimes m \text{ con inverso } \chi^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i \otimes m_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i. \end{aligned}$$

Proposición A.12.

1. *Para cualesquiera P_R, ${}_SU_R$ y ${}_SN$, la función*

$$\nu\colon P \otimes_R Hom_S(U, N) \longrightarrow Hom_S\big(Hom_R(P, U), N\big),$$

definida por $\nu(p \otimes \gamma)(\delta) = \gamma\delta(p)$, es una transformación natural en cada variable. Además, si P_R es finitamente generado y proyectivo, ν es isomorfismo.

2. *Para cualesquiera ${}_RP$, ${}_RU_S$ y ${}_SN$, la asignación*

$$\mu\colon Hom_R(P, U) \otimes_S N \longrightarrow Hom_R\big(P, (U \otimes_S N)\big),$$

definida por $\mu(\gamma \otimes n)(p) = \gamma(p) \otimes n$, es una transformación natural en cada variable. Además, si ${}_RP$ es finitamente generado y proyectivo, μ es isomorfismo.

Demostración. Demostraremos únicamente el primer inciso puesto que la demostración de la segunda afirmación es análoga.

Para ver que ν es una transformación natural en la primera variable, tomemos $H = Hom_R(U, N)$, $f \in Hom_R(P, P')$ y definamos

$$\psi\colon Hom_S\big(Hom_R(P, U), N\big) \longrightarrow Hom_S\big(Hom_R(P', U), N\big)$$

mediante $\psi(h)(\gamma) = h(\gamma f) = h\big(Hom_R(f, U)(\gamma)\big)$. Notemos que ψ es un S-morfismo derecho debido a que

- $\psi(h + h')(\gamma) = (h + h')(\gamma f) = h(\gamma f) + h'(\gamma f)$ y
- $\psi(hs)(\gamma) = hs(\gamma f) = h(\gamma f s) = h(\gamma f)s = \psi(h)(\gamma)s$.

Ahora sólo resta demostrar que

$$\begin{array}{ccc}
P \otimes_R Hom_S(U, N) & \xrightarrow{f \otimes Id_H} & P' \otimes_R Hom_S(U, N) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \nu_P} & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu_{P'}} \\
Hom_S\big(Hom_R(P, U), N\big) & \xrightarrow{\psi_f} & Hom_S\big(Hom_R(P', U), N\big)
\end{array}$$

es un diagrama conmutativo, es decir que $\nu_{P'}(f \otimes Id_H) = \psi_f \nu_P$. Sean $p \in P$ y $\gamma \in Hom_S(U, N)$, entonces

$$\nu_{P'}(f \otimes Id_H)(p \otimes \gamma) = \nu_{P'}\big(f(p) \otimes \gamma\big);$$

de modo que, al evaluar este morfismo en $\delta \in Hom_R(P', U)$, tenemos

$$\nu_{P'}(f \otimes Id_H)(p \otimes \gamma)(\delta) = \gamma\delta\big(f(p)\big).$$

Por otro lado:

$$\psi_f \nu_P(p \otimes \gamma)(\delta) = \nu_P(p \otimes \gamma)(\delta f) = \gamma\delta f(p),$$

con lo que se concluye la igualdad.

Las demostraciones de que ν es transformación natural en la segunda y en la tercer variable se logran análogamente viendo que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} P \otimes_R Hom_S(U, N) \arrow[r, "Id_P \otimes (\_f)"] \arrow[d, "\nu_U"] & P \otimes_R Hom_S(U', N) \arrow[d, "\nu_{U'}"] \\ Hom_S\big(Hom_R(P, U), N\big) \arrow[r, "\psi_f"] & Hom_S\big(Hom_R(P, U'), N\big) \end{tikzcd}$$

con $\psi_f(h)(\delta) = h(f\delta)$ para $h \in Hom_S\big(Hom_R(P, U), N\big)$ y $\delta \in Hom_R(P, U')$ y

$$\begin{tikzcd} P \otimes_R Hom_S(U, N) \arrow[r, "Id_P \otimes Hom_S(U,f)"] \arrow[d, "\nu_N"] & P \otimes_R Hom_S(U, N') \arrow[d, "\nu_{N'}"] \\ Hom_S(Hom_R(P, U), N) \arrow[r, "Hom_S(H,f)"] & Hom_S(Hom_R(P, U), N') \end{tikzcd}$$

$\therefore$ ν es una transformación natural en las tres variables.

A partir de este punto, supondremos que P_R es finitamente generado y proyectivo, de modo que existe un isomorfismo

$$f \colon R \longrightarrow P \oplus P'$$

para algún $P' \in$Mod-R. Considerando el monomorfismo $\eta_P \in Hom_R(P, P \oplus P')$ y el epimorfismo $\pi_{P'} \in Hom_R(P \oplus P', P')$, obtenemos una sucesión exacta que se escinde:

$$0 \longrightarrow P \overset{\eta_P f^{-1}}{\rightarrowtail} R \overset{f\pi_{P'}}{\twoheadrightarrow} P' \longrightarrow 0.$$

Aplicando A.10, tenemos que ambos renglones del diagrama

$$\begin{tikzcd} P \otimes_R Hom_S(U, N) \arrow[r] \arrow[d, "\nu_P"] & R \otimes_R Hom_S(U, N) \arrow[r] \arrow[d, "\nu_R"] & P' \otimes_R Hom_S(U, N) \arrow[d, "\nu_{P'}"] \\ Hom_S\big(Hom_R(P, U), N\big) \arrow[r] & Hom_S\big(Hom_R(R, U), N\big) \arrow[r] & Hom_S\big(Hom_R(P', U), N\big) \end{tikzcd}$$

son sucesiones exactas cortas que se escinden.

Por otra parte, tenemos los $\mathbb{Z}$-isomorfismos derechos

$$R \otimes_R Hom_S(U,N) \cong Hom_S(U,N) \cong Hom_S\big(Hom_R(R,U),N\big),$$

donde el primer isomorfismo está dado por $r \otimes \gamma \mapsto r\gamma$ y el segundo por

$$\varkappa\colon Hom_S(U,N) \longrightarrow Hom_S\big(Hom_R(R,U),N\big)$$

donde $\varkappa(f)(\delta) = f\delta(1)$ para $f \in Hom_S(U,N)$ y $\delta \in Hom_R(R,U)$. Así que, si aplicamos ambos isomorfismos, obtenemos la composición

$$r \otimes \gamma \longmapsto \gamma r \longmapsto \varkappa(\gamma r)$$

que satisface

$$\varkappa(\gamma r)(\delta) = \gamma r\delta(1) = \gamma\delta(r) = \nu_R(r \otimes \gamma)(\delta).$$

Por lo tanto, ν_R es la composición de ambos isomorfismos. Con A.10, podemos concluir que ν_P y $\nu_{P'}$ también son isomorfismos.
$\therefore P \otimes_R Hom_S(U,N) \cong Hom_S\big(Hom_R(P,U),N\big)$. $\square$

La definición de que M sea un R-módulo izquierdo que hemos usado hasta este momento depende de la existencia de una acción de R en M. Esta definición es equivalente a la existencia de un morfismo de anillos

$$\lambda\colon R \longrightarrow End^l(M),$$

donde $End^l(M)$ denota a los endomorfismos izquierdos de M como grupo abeliano. Análogamente, M es un S-módulo derecho si existe un morfismo de anillos

$$\rho\colon S \longrightarrow End^r(M)$$

para $End^r(M)$ el anillo de endomorfismos derechos del grupo abeliano M. Con estas definiciones, son equivalentes las afirmaciones:

1. M es un (R,S)-bimódulo;
2. $\lambda\colon R \longrightarrow Hom(M_S)$ es un morfismo de anillos;
3. $\rho\colon R \longrightarrow Hom({}_RM)$ es un morfismo de anillos.

Decimos entonces que ${}_RM$ es fiel (resp. balanceado o bien fielmente balanceado) si λ es inyectivo (resp. suprayectivo o bien biyectivo). Análogamente se definen los tres concepto para R_S usando ρ y para ${}_RM_S$ usando ambos morfismos.

Sea $T = End({}_RM)$, de modo que M es un (R,T)-bimódulo a través del morfismo de anillos

$$Id_T \colon T \longrightarrow End({}_RM),$$

es decir que $m \cdot f = f(m)$. Definimos entonces $BiEnd({}_RM) = End(M_T)$, que satisface

$$\lambda(r)f(m) = rf(m) = f(rm) = f\big(\lambda(r)(m)\big) = f\lambda(r)(m),$$

para toda $f \in T$, de manera que $\lambda(r) \in BiEnd({}_RM)$. En consecuencia, $BiEnd({}_RM)$ es un R-módulo derecho.

Finalmente, recordemos que para todo par $M, N \in R$-Mod, la traza de N en M se define mediante

$$Tr_M(N) = \sum \{Im(h) \mid h \in Hom_R(N,M)\} \leq M.$$

Teorema A.13. *Sea $M = N \oplus K$ y definamos el morfismo de anillos*

$$\begin{aligned} Res \colon BiEnd({}_RM) &\longrightarrow BiEnd({}_RN) \\ g &\longmapsto g|_N \end{aligned}$$

entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "\lambda_1"'] \arrow[dr, "\lambda_2"] & \\ BiEnd({}_RM) \arrow[rr, "Res"] & & BiEnd({}_RN) \end{tikzcd}$$

conmuta. Más aún, si N genera a K, entonces Res es inyectiva.

Demostración. La conmutatividad del diagrama se sigue de que λ_2, el morfismo de anillos que hace a N un R-módulo izquierdo, es la restricción de λ_1 debido a que $N \leq M$. Entonces la igualdad

$$\lambda_2(r) = \lambda_1(r) = \lambda_1(r)|_N = Res\,\lambda_1(r)$$

se satisface para toda $r \in R$.

Ahora supongamos que N genera a K y sean $T = End({}_RM)$ y $b \in BiEnd({}_RM)$ tal que $Res(b) = b|_N = 0$. Debido a que N genera a K y a que $M = N \oplus K$, entonces N

genera a M, de modo que existe un epimorfismo $\varphi \in Hom_R(N, M)$ que satisface

$$M = Im(\varphi) \leq \sum\{Im(h) \mid h \in Hom_R(N, M)\} \leq M,$$

por lo que $M = Tr_M(N)$.

Vamos a demostrar que $Tr_M(N) = NT$. Si $m \in Tr_M(N)$ entonces existen $k \in \mathbb{Z}^+$, $h_1, \ldots, h_k \in Hom(N, M)$ y $n_1, \ldots, n_k \in N$ tales que $n = \sum_{i=1}^{k} h_i(n_i)$, así que podemos definir, para cada $i \in \{1, \ldots k\}$:

$$\begin{aligned} h_i' \colon M =& N \oplus K \longrightarrow M \\ & n + k \longmapsto h_i(n) \end{aligned}$$

que están bien definidos como R-morfismos gracias a que la suma es directa; de hecho, estos morfismos satisfacen

$$n = \sum_{i=1}^{k} h_i(n_i) = \sum_{i=1}^{k} h_i'(n_i) = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot h_i,$$

lo cual implica que $n \in NT$. Por otra parte, para $n \in NT$ se satisface la igualdad $n = \sum_{i=1}^{k} t_i(n_i)$ para algunos $k \in \mathbb{Z}^+$, $t_1, \ldots, t_k \in T$ y $n_1, \ldots n_k \in N$; de este modo

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot t_i|_N = \sum_{i=1}^{k} t_i(n_i)$$

para $t_i|_N \in Hom_R(N, M)$, es decir que $n \in Tr_M(N)$.

Finalmente, concluimos que $M = Tr_M(N) = NT$ y, en consecuencia, obtenemos las igualdades $b(M) = b(NT) = b(N)T = 0$. Por lo tanto $b = 0$.

$\therefore$ Res es inyectivo. $\square$

Lema A.14. *Sea $_RP_S$ fielmente balanceado. Entonces $_RP$ es generador si y sólo si P_S es finitamente generado y proyectivo.*

Demostración. Para demostrar las dos implicaciones, usaremos ambos incisos de la proposición A.11.

Supongamos que $_RP$ es generador. Como $_RP_S$ es fielmente balanceado, entonces

$$\rho \colon S \longrightarrow End(_RP)$$

es un isomorfismo de anillos. En particular, si tomamos $s, s' \in S$ entonces

$$\rho(ss') = \rho(s)\rho(s') = \rho(s) \cdot s',$$

por lo que ρ es un S-isomorfismo derecho, es decir que $S \cong Hom_R(P, P_S)$ como S-módulos derechos. Además, ya que ${}_RP$ es generador, existe $R' \in R$-Mod tal que $P^n \cong R \oplus R'$, así que obtenemos los siguientes isomorfismos de S-módulos derechos:

$$\begin{aligned} S^n &\cong Hom_R(P, P_S)^n \cong Hom_R(P^n, P_S) \\ &\cong Hom_R(R \oplus R', P_S) \cong Hom_R(R, P_S) \oplus Hom_R(R', P_S) \\ &\cong P_S \oplus Hom_R(R', P_S). \end{aligned}$$

$\therefore P_S$ es finitamente generado y proyectivo.

Ahora supongamos que P_S es finitamente generado y proyectivo, de modo que existe $S' \in$ Mod-S tal que $P^n \cong S \oplus S'$ para alguna $n \in \mathbb{Z}^+$. Por otra parte, para todo par $r, r' \in R$ se satisface $\lambda(rr') = \lambda(r)\lambda(r') = r\lambda(r')$, así que

$$\lambda \colon R \longrightarrow Hom(P_S)$$

es un isomorfismo de R-módulos izquierdos. En consecuencia, tenemos la cadena de R-isomorfismos izquierdos

$$\begin{aligned} {}_RP^n &\cong Hom_S(S, {}_RP)^n \cong Hom_S(S^n, {}_RP) \\ &\cong Hom_S(P \oplus P', P_S) \cong Hom_S(P, P_S) \oplus Hom_S(P', P_S) \\ &\cong R \oplus Hom_S(P', P_S). \end{aligned}$$

$\therefore {}_RP$ es generador. □

Notemos que la demostración de este lema es análoga a la que usaríamos para demostrar que, dado ${}_RP_S$ fielmente balanceado, entonces P_S es generador si y sólo si ${}_RP$ es finitamente generado y proyectivo. En particular, ${}_RP$ es un generador proyectivo y finitamente generado si y sólo si P_S también lo es.

Teorema A.15. *Sean $G \in R$-Mod y $T = End({}_RG)$, entonces ${}_RG$ es un generador si y sólo si*

1. *${}_RG$ es fielmente balanceado;*

2. *G_T es finitamente generado y proyectivo.*

Demostración. Sea ${}_RG$ un generador, de modo que existen $n \in \mathbb{Z}^+$, $R' \in R$-Mod y un isomorfismo $\varphi \in Hom_R\big(G^{(n)}, R \oplus R'\big)$. Definimos

$$\mu\colon BiEnd(G) \longrightarrow BiEnd(G^{(n)}) \quad \text{y} \quad \psi\colon BiEnd(G^{(n)}) \longrightarrow BiEnd(R \oplus R')$$

como $\mu(b)(x_i)_{i=1}^n = (b(x_i))_{i=1}^n$ y $\psi(b) = \varphi b \varphi^{-1}$ para $b \in BiEnd(G)$ y $(x_i) \in G^{(n)}$. Así, estas dos funciones son monomorfismos de anillos.

Ahora consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, two heads, tail, "Id_R"] \arrow[d, "\lambda_1"] & R \arrow[r, two heads, tail, "Id_R"] \arrow[d, "\lambda_2"] & R \arrow[r, two heads, tail, "Id_R"] \arrow[d, "\lambda_3"] & R \arrow[d, "\lambda_4"] \\
BiEnd(G) \arrow[r, tail, "\mu"] & BiEnd(G^{(n)}) \arrow[r, tail, "\psi"] & BiEnd(R \oplus R') \arrow[r, tail, "Res"] & BiEnd(R)
\end{tikzcd}$$

donde λ_i son los morfismos de anillos que definen a los anillos de bimorfismos como R-módulos izquierdos. Notemos que

$$\mu\lambda_1(r)(x_i) = \big(\lambda_1(r)(x_i)\big) = (rx_i) = r(x_i) = \lambda_2(r)(x_i),$$

de forma que el rectángulo izquierdo del diagrama conmuta. Respecto al rectángulo central, recordemos que todo biendomorfismo de $R \oplus R'$ es, en particular, un R-morfismo izquierdo; en consecuencia $\varphi b \varphi{-}1$ es un R-morfismo para todo $b \in BiEnd(R \oplus R')$ y

$$\psi\lambda_2(r)(b) = \varphi\lambda_2(r)(b) = \varphi\big(r\varphi^{-}1(b)\big) = r\big(\varphi\varphi^{-1}(b)\big) = rb = \lambda_3(r)b,$$

por lo que el segundo cuadrado conmuta. Finalmente, sabemos que el último rectángulo conmuta gracias a A.13.

De hecho, A.13 también implica que Res es inyectivo pues R genera a R' por ser generador, así que tenemos el monomorfismo $Res\,\psi\mu$ y el isomorfismo

$$R \overset{\lambda_4}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} BiEnd(R) = End({}_RR).$$

Se sigue que λ_1 es un monomorfismo debido a que la composición $Res\,\psi\mu\lambda_1 = \lambda_4$ lo es. Además, si tenemos $b \in BiEnd(G)$, entonces existe $r \in R$ tal que

$$Res\,\psi\mu\big(\lambda_1(r)\big) = \lambda_4(r) = Res\,\psi\mu(b),$$

porque λ_4 es suprayectiva, así que $\lambda_1(r) = b$.

De este modo, tenemos los isomorfismos

$$\lambda_1\colon R \longrightarrow End(G_{End({}_RG)}) \quad \text{e} \quad Id\colon End({}_RG) \longrightarrow End({}_RG),$$

por lo que podemos concluir que ${}_RG_{End({}_RG)}$ es fielmente balanceado. Finalmente, por A.14, tenemos que G_T es finitamente generado y proyectivo, Además, el primer isomorfismo implica que ${}_RG$ es fielmente balanceado.
$\therefore$ ${}_RG$ es fielmente balanceado y G_T es finitamente generado y proyectivo.

La segunda implicación es una consecuencia del lema anterior puesto que, por hipótesis ${}_RG$ es fielmente balanceado y el morfismo de anillos Id_T es biyectivo. Es decir que ${}_RG_T$ es fielmente balanceado. Así, el hecho de que G_T sea finitamente generado y proyectivo implica que ${}_RG$ es un generador. □

Proposición A.16. *Sean $F\colon R$-Mod $\to S$-Mod y $G\colon S$-Mod $\to R$-Mod funtores aditivos covariantes y $\eta\colon F \to G$ una transformación natural. Si tenemos*

$$f\colon {}_RU_T \longrightarrow {}_RV_T$$

para los (R,T)-bimódulos U y V, entonces las funciones $F(f)$ y η_U son morfismos de (S,T)-bimódulos.

Demostración. Notemos que, por la forma en la que están definidos F, G y ν_U, ya tenemos que U y V son (S,T)-bimódulos y que $F(f)$ y ν_U son S-morfismos izquierdos.

Veamos que U es un (S,T)-bimódulo. Para esto, sea $\rho\colon T \to End({}_RU)$ el morfismo de anillos que hace de U un T-módulo derecho. Entonces

$$\begin{aligned} \rho'\colon T &\longrightarrow End({}_SFU) \\ t &\longmapsto F\big(\rho(t)\big) \end{aligned}$$

es un morfismo de anillos debido a que ρ es morfismo de anillos y F es funtor aditivo covariante, con lo que concluimos que U es un (S,T)-bimódulo.

Para ver que $F(f)$ es un T-morfismo derecho, sean $t \in T$, $x \in {}_RFU_T$ y denotemos por ρ a los morfismos de anillos que definen como (R,T)-módulos a U y a V. Entonces f y $\rho(t)$ conmutan debido a que f es un T-morfismo y, en consecuencia:

$$F(f)(xt) = F(f)F\big(\rho(t)\big)(x) = F\big(f\rho(t)\big)(x) = F\big(\rho(t)f\big)(x) = F\big(\rho(t)\big)F(f)(x) = F(f)(x)t,$$

igualdad que implica que $F(f)$ es un T-morfismo derecho.

Finalmente, como ν_U es transformación natural, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FU \arrow[r, "F(\rho(t))"] \arrow[d, "\eta_U"'] & FU \arrow[d, "\eta_U"] \\
GU \arrow[r, "G(\rho(t))"'] & GU
\end{tikzcd}$$

conmuta para cada $t \in T$ y $x \in FU$. De esta manera, ν_U es un T-morfismo derecho porque satisface las igualdades

$$\eta_U(xt) = \eta_U F\big(\rho(t)\big)(x) = G\big(\rho(t)\big)\eta_U(x) = \big(\eta_U(x)\big)t.$$

Por lo tanto, η_U es un T-morfismo derecho. $\square$

A partir de este momento, retomaremos el trabajo con anillos Morita equivalentes. Así, cuando digamos que dos anillos R y S son equivalentes, tomaremos los funtores F y G, los isomorfismos naturales $\eta\colon GF \longrightarrow 1_{R\text{-Mod}}$ y $\zeta\colon FG \to 1_{S\text{-Mod}}$ y los $\mathbb{Z}$-morfismos φ y θ definidos al principio del anexo. En particular, la siguiente proposición establece algunas propiedades Morita equivalentes que necesitaremos.

Proposición A.17. *Sean R y S anillos equivalentes y $U \in R$-Mod. Entonces*

1. *Sean R y S anillos equivalentes, entonces*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en R-Mod si y sólo si

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F(f)} FB \xrightarrow{F(g)} FC \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en S-Mod.

2. *$(M, i_\alpha)_{\alpha\in A}$ es coproducto de $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ si y sólo si $(FM, Fi_\alpha)_{\alpha\in A}$ es coproducto de $(FM_\alpha)_{\alpha\in A}$.*
3. *U es proyectivo si y sólo si FU es proyectivo;*
4. *${}_RU$ es generador si y sólo si ${}_SFU$ es un generador.*
5. *U es finitamente generado si y sólo si FU es finitamente generado.*

Demostración.

1. Debido a que R y S son anillos equivalentes, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & GFA \arrow[r, "GF(f)"'] \arrow[u, "\eta_A"] & GFB \arrow[r, "GF(g)"'] \arrow[u, "\eta_B"] & GFC \arrow[r] \arrow[u, "\eta_C"] & 0
\end{tikzcd}$$

donde η_A, η_B y η_C son isomorfismos. Puesto que el renglón superior del diagrama es una sucesión exacta corta, entonces el renglón inferior también lo es.

Supongamos que la sucesión de arriba es exacta corta. En particular, f es un monomorfismo y g es un epimorfismo, así que $F(f)$ es monomorfismo y $F(g)$ es epimorfismo. Demostremos la igualdad $Im\big(F(f)\big) = Ker\big(F(g)\big)$. Ya que

$$F(g)F(f) = F(gf) = F(0) = 0,$$

tenemos que $Im\big(F(f)\big) \leq Ker\big(F(g)\big)$. Por otro lado, $K = Ker\big(F(g)\big) \leq FM$, satisface $F(g)i_{K \leq FM}(K) = F(g)(K) = 0$, entonces

$$g\varphi(i_{K \leq FM}) = \varphi\big(F(g)i_K\big) = \varphi(0) = 0.$$

Es decir que $Im\big(\varphi(i_K)\big) \leq Ker(g) = Im(f)$, donde f es un monomorfismo. Usemos el Teorema del Factor para obtener un monomorfismo $\delta \in Hom_R(A, GK)$ tal que $f\delta = \varphi(i_K)$, de modo que se dan las igualdades

$$i_K = \varphi^{-1}\varphi(i_K) = \varphi^{-1}(f\delta) = F(f)\varphi^{-1}(\delta),$$

considerando $\varphi^{-1}(\delta) \in Hom_S(K, FA)$, concluimos

$$\begin{aligned} Ker\big(F(g)\big) = Im(i_K) = Im\big(F(f)\varphi^{-1}(\delta)\big) = F(f)\big(Im(\varphi^{-1}(\delta))\big) \\ \leq F(f)(FA) = Im\big(F(f)\big). \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que $0 \to FA \to FB \to FC \to 0$ es una sucesión exacta corta.

Por otra parte, si

$$0 \longrightarrow FA \xrightarrow{F(f)} FB \xrightarrow{F(g)} FC \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, entonces la primera parte de esta demostración implica que

$$0 \longrightarrow GFA \xrightarrow{GF(f)} GFB \xrightarrow{GF(g)} GFC \longrightarrow 0$$

también lo es. Por lo tanto, obtenemos el mismo diagrama conmutativo y, de forma análoga, concluimos que $0 \to A \to B \to C \to 0$ es una sucesión exacta.

2. Supongamos que $(M, i_\alpha)_{\alpha\in A}$ es coproducto de $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ y que tenemos una familia de S-morfismos $g_\alpha \in Hom_S(FM_\alpha, N)$ para algún $N \in S$-Mod. De esta forma,

$$\theta(g_\alpha)\colon M_\alpha \longrightarrow GN$$

es una familia de R-morfismos, así que existe un único $f \in Hom_R(M, GN)$ tal que $\theta(g_\alpha) = fi_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. En consecuencia, $\theta^{-1}(f) \in Hom_S(FM, N)$ es tal que

$$g_\alpha = \theta^{-1}(fi_\alpha) = \theta^{-1}(f)F(i_\alpha).$$

Más aún, cualquier $h \in Hom_S(FM, N)$ tal que $g_\alpha = hF(i_\alpha)$ para cada $\alpha \in A$ debe satisfacer la igualdad

$$\theta(g_\alpha) = \theta\big(hF(i_\alpha)\big) = \theta(h)i_\alpha,$$

por lo que $h = \theta^{-1}\theta(h) = \theta^{-1}(f)$. Con esto concluimos que $\big(FM, F(i_\alpha)\big)_{\alpha\in A}$ es coproducto de $(FM_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Por otra parte, si $(FM, Fi_\alpha)_{\alpha\in A}$ es coproducto de $(FM_\alpha)_{\alpha\in A}$ y tenemos la familia de R-morfismos $f_\alpha\colon M_\alpha \to N$ para algún $N \in R$-Mod, entonces obtenemos la familia de S-morfismos

$$F(f_\alpha)\colon FM_\alpha \longrightarrow FN.$$

En consecuencia, existe un único $g \in Hom_S(FM, FN)$ tal que $gF(i_\alpha) = F(f_\alpha)$. Además, como

$$F\colon Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_S(FM, FN)$$

es un isomorfismo, existe $f \in Hom_R(M, N)$ tal que $F(f) = g$, es decir que $F(fi_\alpha) = F(f_\alpha)$, por lo que $fi_\alpha = f_\alpha$. Por lo tanto, $(M, i_\alpha)_{\alpha\in A}$ es coproducto de $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$.

3. Sean U proyectivo, $M, N \in S$-Mod, $f \in Hom_S(FU, N)$ y $g \in Hom_S(M, N)$ un epimorfismo. Para ver que FU es proyectivo, veamos que existe un morfismo $h \in Hom_S(FU, M)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & FU \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, two heads, "g"'] & N \end{tikzcd}$$

conmuta. Consideremos $\theta(f) \in Hom_R(U, GN)$ y $G(g) \in Hom_R(GM, GN)$ que es un epimorfismo debido a que g lo es. Ya que U es proyectivo, existe un R-morfismo

$\delta \in Hom_R(U, GN)$ tal que $G(g)\delta = \theta(f)$. De este modo, tenemos las igualdades

$$f = \theta^{-1}\theta(f) = \theta^{-1}\big(G(g)\delta\big) = g\theta^{-1}(\delta),$$

con las que inferimos que el diagrama anterior conmuta para $h = \theta^{-1}(\delta)$ y que FU es proyectivo.

Por otro lado, si FU es proyectivo y tenemos $f \in Hom_R(U, N)$ y un epimorfismo $g \in Hom_R(M, N)$ con $M, N \in R$-Mod, entonces $F(f) \in Hom_S(FU, FN)$ y el epimorfismo $F(g) \in Hom_S(FM, FN)$ son tales que $F(g)h = F(f)$ para algún $h \in Hom_S(FU, FM)$. Además, como

$$F\colon Hom_R(U, M) \longrightarrow Hom_S(FU, FM)$$

es un isomorfismo por A.7, existe $h' \in Hom_R(U, M)$ tal que $F(h') = h$, es decir que

$$F(f) = F(g)h = F(g)F(h') = F(gh'),$$

con lo que podemos concluir que $f = gh'$. Por lo tanto, U es proyectivo.

4. Supongamos que ${}_RU$ es un generador. Ya que tenemos $GS \in R$-Mod, existen un conjunto A y un epimorfismo $f \in Hom_R(U^{(A)}, GS)$. En consecuencia,

$$F(U^{(A)}) \xrightarrow{F(f)} FGS \xrightarrow{\zeta_S} S,$$

es un epimorfismo. Sin embargo, sabemos que $F(U^{(A)}) = FU^{(A)}$, así que concluimos que FU genera a R y que, por lo tanto, es un generador.

Recíprocamente, si ${}_SFU$ es generador, entonces existen un conjunto A y un epimorfismo $g \in Hom_S(FU^{(n)}, FR)$ porque $FR \in S$-Mod. Debido a que $FU^{(A)} = F(U^{(A)})$ y

$$F\colon Hom_R(U^{(A)}, R) \longrightarrow Hom_S(FU^{(A)}, FR)$$

es un isomorfismo, entonces existe $f \in Hom_R(U^{(A)}, R)$ tal que $F(f) = g$, es decir que f es un epimorfismo. Con esto se concluye que ${}_RU$ es generador.

5. Sea U finitamente generado y supongamos que $N \in S$-Mod genera a FU. De manera análoga al inciso anterior, obtenemos que GN genera a U, así que existen un conjunto finito A y un epimorfismo $f \in Hom_R(GN^{(A)}, U)$. Por lo tanto, la composición

$$N^{(A)} \xrightarrow{\zeta_N^{-1}} F(GN^{(A)}) = FGN^{(A)} \xrightarrow{F(f)} FU,$$

por lo que N genera finitamente a FU. Por lo tanto, FU es finitamente generado.

Además, si FU es finitamente generado, entonces GFU es finitamente generado como de la primera implicación. Ya que $U \cong GFU$, concluimos que U también es finitamente generado.

$\square$

Para los últimos resultados, diremos que ${}_RP$ (resp. P_S) es un progenerador si es un generador proyectivo y finitamente generado. Es inmediato que, para todo anillo R, ${}_RR$ y R_R son progeneradores. Notemos además que A.14 implica que si ${}_RP_S$ es fielmente balanceado, entonces ${}_RP$ es un progenerador si y sólo si P_S es un progenerador.

Teorema A.18. *Definamos $P = FR$ y $Q = GS$, entonces P es un (S, R)-bimódulo y Q es un (R, S)-bimódulo tales que*

1. *${}_SP_R$ y ${}_RQ_S$ son fielmente balanceados;*
2. *P_R, ${}_SP$, ${}_RQ$ y Q_S son progeneradores;*
3. *${}_SP_R \cong Hom_S(Q, S)$ y ${}_RQ_S \cong Hom_R(P, R)$;*
4. *$F \cong Hom_R(Q, \_)$ y $G \cong Hom_S(P, \_)$;*
5. *$F \cong (P \otimes_R \_)$ y $G \cong (Q \otimes_S \_)$.*

Demostración. Ya que las demostraciones son análogas, haremos únicamente la primera afirmación de cada inciso.

Sabemos, por A.16, que $P = FR$ es un (S, R)-bimódulo. Además, como el morfismo de anillos que define a R como un R-módulo derecho

$$\begin{aligned} \rho\colon R &\longrightarrow End({}_RR) \\ r &\longmapsto (\_ \cdot r) \end{aligned}$$

es biyectivo, entonces $\rho'\colon R \to End(P_R)$, definido por $\rho'(r) = F(\_ \cdot r)$ es la composición de los isomorfismos

$$R \overset{\rho}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} End({}_RR) \overset{F}{\rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow} End({}_SFR)$$

Es decir que P_R es fielmente balanceado.

Por otro lado, sabemos que ${}_RR$ es progenerador, así que ${}_SP$ es un generador proyectivo y finitamente generado por A.17, es decir que ${}_SP$ es progenerador. De aquí podemos concluir dos cosas: la primera, que ${}_SP$ es fielmente balanceado por A.16; y la segunda, que ${}_SP$ también es un progenerador por A.14. Con esto demostramos los dos primeros incisos.

Para el tercer inciso, tomemos $M \in R$-Mod y consideremos el isomorfismo de grupos abelianos

$$\varphi_S\colon Hom_S(S, FM) \longrightarrow Hom_R(GS, M).$$

Como $\varphi\colon Hom_S(\_, FM) \to Hom_R(G\_, M)$ es una transformación natural, entonces φ_S es un S-morfismo izquierdo. Tenemos entonces los S-isomorfismos izquierdos:

$$FM \cong Hom_S(S, FM) \cong Hom_R(Q, M).$$

Ahora consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FM \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[d, two heads, tail, "\xi_M"] & & FM' \arrow[d, two heads, tail, "\xi_{M'}"] \\
Hom_S(S, FM) \arrow[rr, "Hom_S(S, F(f))"] \arrow[d, two heads, tail, "\varphi_M"] & & Hom_S(S, FM') \arrow[d, two heads, tail, "\varphi_{M'}"] \\
Hom_R(Q, M) \arrow[rr, "Hom_R(Q, f)"] & & Hom_R(Q, M')
\end{tikzcd}$$

donde $\xi(x) = (\_ \cdot x)$. Notemos que éste conmuta debido a que el rectángulo superior satisface

$$\big(\_\_ \cdot F(f)(x)\big)(s) = sF(f)(x) = F(f)(sx) = F(f)(\_\_ \cdot x)(s),$$

para todo par $x \in FM$ y $s \in S$, y a que φ es una transformación natural. Con esto, tenemos el isomorfismo de funtores $F \cong Hom_R(Q, \_)$.

En particular, $\varphi\xi\colon F \to Hom_R(Q, \_)$ es una transformación natural, así que $(\varphi\xi)_R$ es un isomorfismo de (S, R)-bimódulos. Por lo tanto

$${}_SP_R \cong Hom_R(Q, R).$$

Para demostrar el isomorfismo del inciso 5, usaremos la proposición A.12 y el isomorfismo ${}_RQ_S \cong Hom_R(P, R)$, cuya demostración es análoga a la afirmación equivalente respecto a P. Así, para cada $M \in R$-Mod, tenemos los $\mathbb{Z}$-isomorfismos

$$\begin{aligned} FM &\cong Hom_R(Q, M) \cong Hom_R\big(Hom_R(P, R), M\big) \\ &\cong P \otimes_R Hom_R(R, M) \cong P \otimes_R M \end{aligned}$$

para cada $M \in R$-Mod. Por lo que concluimos $F \cong (P \otimes_R \_)$. $\square$

Teorema A.19. *Sean*

$$F\colon R\text{-}Mod \to S\text{-}Mod \quad y \quad G\colon S\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$$

funtores covariantes aditivos. Entonces F y G son inversos categóricos si y sólo si existe un bimódulo ${}_SP_R$ tal que

1. *${}_SP$ y P_R son progeneradores,*
2. *${}_SP_R$ es fielmente balanceado,*
3. *$F \cong (P \otimes \_)$ y $G \cong Hom_S(P, \_)$*

Demostración. La primera implicación se sigue directamente del teorema anterior, pues si F y G son inversos categóricos, entonces R y S son anillos Morita equivalentes. De este modo, $P = FR$ satisface las tres afirmaciones.

Si ${}_SP_R$ satisface los tres incisos anteriores, en particular tenemos los isomorfismos

$$\begin{aligned} P \otimes_R Hom_S(P, M) &\longrightarrow Hom_S(Hom_R(P, P), M) \\ Hom_S\big(P, P \otimes_R M\big) &\longrightarrow Hom_S(P, P) \otimes_R M \end{aligned}$$

por A.12. Además, si ${}_SP_R$ es fielmente balanceado, tenemos que $R \cong End(P)$. Por lo tanto, para $F \cong (P \otimes_R \_)$ y $G \cong Hom_S(P, \_)$, tenemos

$$\begin{aligned} FG(M) &\cong P \otimes_R Hom_S(P, M) \cong Hom_S\big(Hom_R(P, P), M\big) \\ &\cong Hom_R(R, M) \cong M \end{aligned}$$

por un lado y, por otro:

$$\begin{aligned} GF(M) &\cong Hom_S(P, P \otimes_R M) \cong Hom_S(P, P) \otimes_R M \\ &\cong R \otimes_R M \cong M. \end{aligned}$$

$\therefore$ F y G son inversos categóricos. $\square$

Corolario A.20. *Para dos anillos R y S, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *R y S son anillos Morita equivalentes;*

2. *existe un progenerador P_R tal que $S \cong End(P_R)$.*

Demostración. La implicación de 1 a 2 es inmediata por el teorema anterior.

Para el regreso, tomemos $End(P_R) = T$ y el isomorfismo de anillos garantizado por las hipótesis $\rho\colon S \to End(P_R)$. Si M es un (T, R)-bimódulo, entonces existe un morfismo de anillos $f\colon T \to End(M_R)$, de modo que $f\rho$ es un morfismo de anillos, es decir que M es un (S, T)-bimódulo. Además, todo T-morfismo f, es un S-morfismo porque

$$f(sx) = f\big(\rho(s)x\big) = \rho(s)f(x) = sf(x).$$

Si P_R es progenerador, entonces A.14 implica que P_R es fielmente balanceado y ${}_TP$ es finitamente generado y proyectivo. En consecuencia, ${}_SP$ también es finitamente generado y proyectivo por la observación del párrafo anterior. Finalmente, como ρ es un isomorfismo, entonces ${}_SP$ es fielmente balanceado.

En consecuencia, ${}_SP_R$ es fielmente balanceado y P_R es un progenerador y, por lo tanto, ${}_SP$ también es un progenerador. Para terminar, tomamos $F = (P \otimes_R \_)$ y $G = Hom_S(P, R)$, de modo que F y G son inversos categóricos tal como se vio en la demostración del teorema anterior. Por lo tanto, R y S son anillos Morita equivalentes. □

Este último teorema implica directamente lo que buscamos. Ya que R es un progenerador, entonces $R^{(n)}$ es un generador proyectivo y finitamente generado para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ que satisface el isomorfismo $M_{n\times n}(R) \cong End(R_R^{(n)})$. Por lo tanto, concluimos que R y $M_{n\times n}(R)$ son anillos Morita equivalentes.

Bibliografía

Anderson, F. W. y Fuller, K. R. (1974). *Rings and Categories of Modules*. Springer-Verlag.

Chatters, A. W. y Hajarnavis, C. R. (1980). *Rings with chain conditions*. Pitman Publishing Ltd.

Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F., y Wisbauer, R. (1994). *Extending Modules*. Longman Scientific & Technical.

Facchini, A. y Nazemian, Z. (2016). Modules with chain conditions up to isomorphism. *Journal of Algebra*, (453):578–601.

Goodearl, K. R. (1976). *Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules*. Marcel Dekker, Inc.

Gordon, R. y Robson, J. C. (1973). *Krull Dimension*. Número 133 en Memoirs of the American Mathematical Society. American Mathematical Society.

Keiner, I. (2007). *A History of Abstract Algebra*. Birkhäusser Boston.

Lam, T. Y. (1991). *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag.

McConnell, J. C. y Robson, J. C. (1987). *Noncommutative Noetherian Rings*. American Mathematical Society.

Rentschler, R. y Gabriel, P. (1967). Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Séries A et B, Sciences mathématiques et Sciences physiques*, (265):712–715.