

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
FACULTAD DE CIENCIAS

ANOMALÍAS EN  
TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

Tesis que para obtener el grado de  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)  
presenta  
JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER

Agosto de 1989



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A MIS PADRES Y CUATRO HERMANOS  
POR HACER POSIBLE UN SUEÑO DE NIÑO:  
SER UN CIENTÍFICO**

## **AGRADECIMENTOS**

Este trabajo fue realizado en el Instituto de Ciencias Nucleares U.N.A.M., con el soporte de una beca del Programa de Superación del Personal Académico U.N.A.M., y una beca complementaria del CONACYT. Bajo la dirección del Dr. Luis F. Urrutia, al cual agradezco su apoyo constante, su gran paciencia y su pensamiento crítico que hizo posible mantenerme con los pies en la Tierra.

# PRÓLOGO

Las anomalías en la Teoría Cuántica de Campos (TCC) corresponden al rompimiento de alguna simetría clásica que se manifiesta en la no conservación de la corriente local asociada. Este hecho se produce debido a que en la definición cuántica de dichas corrientes aparecen infinitos que tienen que ser regulados mediante alguna prescripción. Sin embargo, no existe ninguna garantía que sea posible respetar todas las simetrías clásicas con la prescripción empleada y cuando esto ocurre aparecerá una anomalía.

Un ejemplo importante de las simetrías que deben preservarse a nivel cuántico son las asociadas a la invariancia de norma local que constituye uno de los principios básicos que permiten construir las teorías actuales que describen las interacciones fundamentales. En este caso la aparición de una anomalía de norma origina la inconsistencia de la teoría y por lo tanto es importante buscar mecanismos de cancelación que restauren la consistencia presente a nivel clásico.

Las observaciones anteriores ilustran la importancia que tiene el cálculo de anomalías. En la literatura existen publicados muchos métodos de cálculo de las anomalías que van desde los diagramas de Feynman hasta los muy sofisticados que emplean el teorema del índice de Atiyah-Singer. Un método alternativo a éstos es el de Fujikawa [F1]. Este procedimiento tiene la ventaja que está basado en una formulación de la TCC muy conocida como son las integrales de trayectoria. Además permite calcular las anomalías con relativa facilidad. Sin embargo, como está formulado originalmente este método tiene la desventaja que no permite calcular las anomalías vectoriales. Esta desventaja se manifiesta además en la aparición de severas incongruencias cuando se quiere calcular otras anomalías con un regulador diferente al construido con el operador de Dirac de la teoría. En esta tesis se propone un nuevo esquema de regularización, basado en el de Fujikawa, que resuelve las incongruencias antes mencionadas y que permite además efectuar algunos cálculos que no habían sido realizados con anterioridad en el contexto de integrales de trayectoria, como por ejemplo, la obtención de la familia de anomalías axial y vectorial abelianas.

La organización de la exposición en este trabajo es como sigue:

i) En el primer capítulo se da una introducción general a las anomalías axiales Abelianas y no-Abelianas poniendo énfasis en cómo podrían ser calculadas a partir del formalismo de la TCC con integrales de trayectoria. Se revisan las condiciones generales bajo las

cuales se anulan las anomalías de norma y se muestran dos métodos conocidos de cálculo de anomalías: el de diagramas de Feynman y el de separación de punto.

ii) En el segundo capítulo se analiza el método de cálculo de anomalías por medio de integrales de trayectoria (Método de Fujikawa) en el caso de la Electrodinámica Cuántica. En este contexto se hace notar que para reguladores del tipo  $f\left(\frac{\partial_\mu \delta^\mu}{M^2}\right)$  tanto la anomalía axial como la vectorial son cero, lo que esta en completo desacuerdo con otros cálculos. Para resolver esta y otras incongruencias se propone un nuevo esquema de regularización. En este nivel la metodología propuesta sufre de una ambigüedad que se resuelve poniendo una prescripción que por el momento no es única, pero que permite calcular la familia de anomalías axial y vectorial en dos dimensiones obteniendose plena concordancia con el método de separación de punto. En este capítulo se propone también una manera de entender este nuevo esquema como algo más que una simple prescripción de regularización. Esta se basa en suponer que al pasar al nivel cuántico son las transformaciones de fase asociadas a las simetrías las que deben regularse. Además dentro de este capítulo se incluye una breve exposición del teorema del índice de Atiyah-Singer y se establece su relación con la anomalía axial.

iii) En la sección 3.1 se calculan las anomalías axial y vectorial Abelianas en cuatro dimensiones para la Electrodinámica Cuántica usando un regulador con parámetro real dentro del esquema y la prescripción propuestos. Dentro del contexto de este cálculo se encuentra que es imposible hacer la anomalía axial cero para algún valor del parámetro. Con esta motivación se realiza el cálculo considerando que el parámetro puede ser complejo y se obtiene un valor para el cual la anomalía axial es cero. Como no existe en la literatura ningún otro resultado del cálculo de la anomalía vectorial dependiente de un parámetro en cuatro dimensiones se realiza el cálculo de ella utilizando el método de separación de punto con el objeto de tener un marco de comparación para el esquema propuesto en el capítulo 2. Al comparar ambos resultados se encuentra que la prescripción del capítulo 2 utilizada para desarrollar los cálculos rompe explícitamente la invariancia ante conjugación de carga. Al imponer esta simetría a nivel cuántico se encuentra que permite fijar en forma única la prescripción empleada para regularizar la anomalía en el caso de la Electrodinámica Cuántica. Esto muestra que las ambigüedades en la prescripción original pueden fijarse teniendo en cuenta simetrías adicionales que es necesario respetar. Al calcular en este nuevo esquema se encuentra que la anomalía axial es idéntica a la calculada en esquema anterior y la vectorial es completamente equivalente a la obtenida por el método de separación

de punto. Por último en este capítulo se extienden los resultados para el caso de la anomalía axial a seis dimensiones y se propone una generalización a  $2n$  dimensiones.

iv) En el capítulo cuatro se calculan las anomalías no-Abelianas para una teoría con acoplamiento vectorial y axial-vectorial con un grupo de norma de Lie semisimple. Se muestra explícitamente en dos dimensiones que el esquema propuesto contiene las formas covariante y consistente de la anomalía no-Abeliana y que obtener una u otra depende sólo del regulador empleado. En cuatro dimensiones, al ser los resultados muy similares a los calculados por otros autores, sólo se reportan estos.

v) El último capítulo presenta el formalismo básico para el estudio de las anomalías en presencia de acoplamientos gravitacionales con torsión. Empleando el formalismo de tetradas se estudia el acoplamiento gravitacional de las partículas de espín  $1/2$  a la torsión. Se encuentra que en dos dimensiones no la hay y que para cuatro el acoplamiento a la torsión es equivalente al de un campo axial. Tomando esto en cuenta se calcula la contribución gravitacional a la anomalía axial para la partícula de Dirac obteniéndose, como otros autores, que la torsión sólo contribuye con una derivada total la cual puede absorberse en una redefinición de la corriente. Con ayuda del teorema del índice de Atiyah-Singer se muestra que la anomalía axial es cero en  $4n + 2$  dimensiones y que en  $4n$  la torsión no contribuye a ésta. Por último se estudia el acoplamiento del tipo de Supergravedad de un campo gravitacional con torsión a partículas de espín  $3/2$ . Se demuestra que existe al menos una solución a las condiciones de consistencia y que por lo tanto es posible tener acoplamiento para una torsión diferente de cero. Se conjetura que para la solución encontrada tampoco hay contribución de la torsión a la anomalía axial.

# ÍNDICE

<b>i.</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
	1. Anomalías Abelianas	3
	2. Anomalías no-Abelianas	6
	3. Anomalías de Norma	13
	4. Método de diagramas de Feynman	17
	5. Método de separación de punto	19
<b>ii.</b>	<b>Anomalías con Integrales de trayectoria</b>	<b>23</b>
	1. Anomalías con el método de Fujikawa(MF)	23
	2. Teorema del índice de Atiyah-Singer	26
	3. Definición extendida del Jacobiano regulado	28
	4. Transformaciones de fase reguladas	34
<b>iii.</b>	<b>Anomalías axial y vectorial Abelianas en más de dos dimensiones</b>	<b>38</b>
	1. Anomalías en 4-dimensiones con parámetro real	38
	2. Anomalía axial Abeliana con parámetro complejo	49
	3. Método de separación de punto y comparación de resultados	56
	4. Anomalía axial en 6-dimensiones y $2n$ -dimensiones	66
<b>iv.</b>	<b>Anomalías no-Abelianas</b>	<b>72</b>
	1. Generalidades	72
	2. Cálculos Explícitos	74
<b>v.</b>	<b>Anomalías en espacio curvo con torsión</b>	<b>84</b>
	1. Espacio curvo con torsión (espacio de Riemann-Cartan)	84
	2. Anomalía axial para partículas de espín 1/2	93
	3. Acoplamiento de gravitinos a la torsión	102



<b>vi.</b>	<b>Conclusiones y Resultados</b>	<b>108</b>
<b>vii.</b>	<b>Referencias</b>	<b>113</b>
<b>viii.</b>	<b>Apendice A</b>	<b>117</b>

# I. INTRODUCCION

Las simetrías juegan un papel fundamental en Física, y muy frecuentemente uno de los primeros aspectos que es posible entender en el estudio de la dinámica de un sistema físico son sus propiedades de simetría a nivel clásico. Sin embargo, a nivel cuántico no necesariamente todas las simetrías clásicas serán preservadas, y por lo tanto es de gran importancia estudiar las condiciones bajo las cuales ésto sucede. Clásicamente el teorema de Noether asocia a cada simetría una corriente conservada, por lo cual técnicamente el problema se reduce a determinar la conservación o no conservación de los operadores cuánticos que representan a dichas corrientes.

A una simetría se le llama anómala, o se dice que existe una anomalía, si la simetría está presente en la teoría clásica pero se pierde después de la cuantización. Este hecho fue descrito en forma precisa por vez primera por Adler[A1], y Bell y Jackiw[B1] en 1969, aunque ya con anterioridad Fukuda y Miyamoto (1949), Steinberger (1949), y Schwinger (1951) habían calculado los diagramas de Feynman y las relaciones de conmutación que mostraban la existencia de la anomalía axial. Sin embargo, fue sólo hasta las artículos de Adler-Bell-Jackiw en que estos resultados fueron adecuadamente interpretados.

Desde su descubrimiento, las anomalías han jugado un papel importante en la Teoría Cuántica de Campos (TCC), así por ejemplo, la anomalía axial es la clave para entender la falla aparente del algebra de corrientes para predecir la correcta amplitud a bajas energías para el proceso  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  [A1]. La anomalía axial es también muy importante en la comprensión del famoso problema  $U(1)$  de la Cromodinámica Cuántica[T1]. No obstante, cuando las anomalías se presentan en una simetría de norma constituyen un serio peligro para la consistencia de la teoría. En estas circunstancias las ecuaciones de movimiento del sistema son inconsistentes, lo que ocasiona graves problemas tales como: la no conservación de la probabilidad y la pérdida de la renormalizabilidad. Una manera de evitar estos problemas es buscar un mecanismo de cancelación de anomalías. Esta idea es particularmente útil en la construcción de modelos de Gran Unificación o Super-Unificación, dado que permite en ciertos casos seleccionar el grupo de norma y/o la representación asociada a los campos de materia. Por ejemplo, en el modelo de Weinberg-Salam-Glashow la cancelación de las anomalías implica que debe existir un igual número de dobletes de quarks y leptones [G1].

Recientemente el estudio de las anomalías se ha visto considerablemente acrecentado, principalmente debido al descubrimiento de las anomalías gravitacionales por Alvarez-Gaumé y Witten[A2]. Estas se manifiestan como la no conservación covariante del tensor de energía momento, originando con ello severas constricciones sobre las teorías que intentan unificar todas las interacciones fundamentales en dimensiones  $D > 4$ . Un ejemplo representativo de la importancia de este hecho es que ocasionó el descubrimiento por Green y Schwarz[G2] de un mecanismo que permite la cancelación de las anomalías de la Supergravedad en  $D = 10$  si se impone la condición de una simetría de norma del tipo  $E_8 \times E_8$ ,  $SO(32)$ , ó  $O(16) \times O(16)$ . Como es bien conocido la publicación de este artículo originó la revolución de las Supercuerdas [S1].

Existen varios tipos de anomalías, las cuales se pueden englobar en dos clases, las llamadas **anomalías locales**, o perturbativas que tienen que ver con simetrías asociadas a transformaciones que pueden ser alcanzadas continuamente de la identidad; y las **anomalías globales**, o no-perturbativas[W1], las cuales están asociadas a la pérdida de invariancia de la acción efectiva bajo transformaciones de coordenadas o de norma que no están conectadas continuamente con la identidad.

Este trabajo se ocupará solamente de las anomalías locales, cuyos tipos principales se muestran a continuación

$$\text{Anomalías Locales} \left\{ \begin{array}{l} \text{Axiales} \left\{ \begin{array}{l} \text{Abelianas} \\ \text{No - Abelianas} \end{array} \right. \\ \text{Conformales} \\ \text{Gravitacionales} \end{array} \right.$$

Esta Tesis se encuentra enfocada principalmente al estudio las anomalías axiales por lo cual en esta introducción éstas se examinarán con mayor detalle comenzando por explicar a que simetrías se encuentran asociadas, utilizando para ello la formulación funcional de la TCC ya que ésta permite identificar a las anomalías con la no invariancia de la medida de la integral funcional, hecho que se utilizará en capítulos subsecuentes. El siguiente paso será explicar algunas de las características principales de las anomalías y por último se mostrarán dos de los métodos empleados para su cálculo, el que utiliza diagramas de Feynman y el de separación de punto.

La forma más conveniente de estudiar las anomalías es en términos de campos de norma tensoriales o pseudo-tensoriales junto con sus corrientes asociadas. Estos campos pueden ser parte de la dinámica del sistema, sin embargo, aquí se tomará un punto de vista más conservador y se considerará la TCC de una partícula de Dirac que interactúa con campos de norma externos número-c, del tal manera que la teoría

será renormalizable sin lugar a dudas. El sistema físico de interés se encuentra representado por densidad Lagrangiana

$$L = \bar{\chi} i \not{D} \chi \quad (1.1)$$

donde

$$\not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + ie A_\mu^a \lambda_a) \quad (1.2)$$

con  $\lambda_a$  el generador del grupo de norma G, en la representación a la cual pertenecen los fermiones. Aquí

$$A_\mu^a = V_\mu^a + \mathcal{A}_\mu^a \gamma_{D+1}, \quad (1.3)$$

con

$$\gamma_{D+1} = i^{D/2+1} \prod_{\mu=0}^{D-1} \gamma^\mu.$$

Las convenciones están dadas en el apéndice A.  $V_\mu^a$  y  $\mathcal{A}_\mu^a$  son respectivamente los campos de norma vectorial y axial-vectorial, mientras que  $\gamma_{D+1}$  es la generalización de  $\gamma_5$  a  $D$ -dimensiones.

## 1.1 ANOMALÍAS ABELIANAS.

La densidad Lagrangiana (1.1) es invariante ante dos transformaciones de fase abelianas en los fermiones: la generada por la identidad y la generada por la matriz  $\gamma_{D+1}$ . Esto significa por el teorema de Noether que existen asociadas dos corrientes conservadas. Sin embargo, en esta sección se va a mostrar, utilizando la formulación de la TCC con integrales de trayectoria [R1], que esto sucedera así siempre y cuando el Jacobiano asociado a las transformaciones de fase infinitesimales que generan las corrientes sea igual a uno. Si esto no ocurre se tiene una anomalía Abeliانا.

La transformación de fase que genera la identidad está dada por

$$\begin{aligned} \chi &\longrightarrow \exp(i\alpha)\chi, \\ \bar{\chi} &\longrightarrow \bar{\chi} \exp(-i\alpha), \end{aligned} \quad (1.4a)$$

mientras que la generada por la matriz  $\gamma_{D+1}$  es

$$\begin{aligned}\chi &\longrightarrow \exp(i\beta\gamma_{D+1})\chi, \\ \bar{\chi} &\longrightarrow \bar{\chi}\exp(i\beta\gamma_{D+1}),\end{aligned}\tag{1.4b}$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  independientes de la posición. La corriente de Noether asociada a la transformación (1.4a) está dada como

$$j^\mu = \bar{\chi}\gamma^\mu\chi.\tag{1.5a}$$

Análogamente para la transformación (1.4b) se obtiene

$$j_{D+1}^\mu = \bar{\chi}\gamma^\mu\gamma_{D+1}\chi.\tag{1.5b}$$

Ambas corrientes se conservan a nivel clásico ya que están asociadas a las simetrías (1.4a) y (1.4b).

Para investigar si lo anterior sigue siendo válido al nivel cuántico se hará uso de la formulación de la TCC por medio de integrales de trayectoria, en este caso se tiene que la acción efectiva  $\Gamma[A]$  está dada como

$$Z[A] = \exp(i\Gamma[A]) = \int \mathcal{D}\chi\mathcal{D}\bar{\chi} \exp\left(i\int d^Dx L\right),\tag{1.6}$$

donde no se integra sobre  $A_\mu^a$  ya que son campos externos. Si en (1.6) se realiza una transformación infinitesimal en las variables de integración fermiónicas de la forma

$$\begin{aligned}\chi(x) &= (1 + i\alpha(x))\psi(x), \\ \bar{\chi}(x) &= \bar{\psi}(x)(1 - i\alpha(x)),\end{aligned}\tag{1.7a}$$

se obtiene

$$Z[A] = J(\alpha) \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left[i\int d^Dx (\bar{\psi}i\mathcal{D}\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha)\right],$$

donde  $J(\alpha)$  es el Jacobiano asociado al cambio de variable (1.7a). Integrando por partes se tiene

$$Z[A] = J(\alpha) \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left[i\int d^Dx (\bar{\psi}i\mathcal{D}\psi + \alpha\partial_\mu j^\mu)\right],\tag{1.8a}$$

Análogamente para las transformaciones

$$\begin{aligned} \chi(x) &= (1 + i\beta(x)\gamma_{D+1})\psi(x), \\ \bar{\chi}(x) &= \bar{\psi}(x)(1 + i\beta(x)\gamma_{D+1}), \end{aligned} \quad (1.7b)$$

se obtiene

$$Z[A] = J(\beta) \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[ i \int d^D x (\bar{\psi} i \not{D} \psi + \beta \partial_\mu j_{D+1}^\mu) \right]. \quad (1.8b)$$

donde  $J(\beta)$  es el Jacobiano asociado al cambio de variable (1.7b).

Dado que la acción efectiva es invariante bajo un cambio de variables de integración se tiene en particular

$$\left. \frac{\delta \Gamma[A]}{\delta \alpha(x)} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad (1.9)$$

y lo mismo para  $\beta$ . Utilizando esta expresión en (1.8a) y (1.8b) se obtiene

$$0 = \left. \frac{\delta \ln J(\alpha)}{\delta \alpha(x)} \right|_{\alpha=0} + i \partial_\mu J^\mu, \quad (1.10a)$$

$$0 = \left. \frac{\delta \ln J(\beta)}{\delta \beta(x)} \right|_{\beta=0} + i \partial_\mu J_{D+1}^\mu. \quad (1.10b)$$

donde  $J^\mu(x) = \langle j^\mu(x) \rangle$  y  $J_{D+1}^\mu(x) = \langle j_{D+1}^\mu(x) \rangle$  son los valores promedio usuales de las corrientes.

Lo que muestran las ecuaciones (1.10a) y (1.10b) es que si los Jacobianos de las transformaciones (1.7a) y (1.7b) son diferentes de uno, las corrientes vectorial y axial no se conservarán. Más adelante se mostrará que es imposible lograr la conservación simultánea de ambas corrientes, pero si es posible imponer la conservación de una de ellas, a este fenómeno se le conoce como **anomalía Abellana** de una teoría de norma.

El caso de la Electrodinámica Cuántica(QED) corresponde a la versión abeliana de la teoría (1.1), donde el campo  $V_\mu$  con  $a = 1$  y  $\lambda^a = I$  es el campo de norma del fotón y por supuesto no existe  $A_\mu^a$ . La corriente asociada al campo de norma es  $j_\mu$  por lo que es requisito indispensable pedir su conservación a nivel cuántico, o sea que  $J(\alpha) = 1$ . Si ésto no sucede la QED es inconsistente. Sin embargo al imponer esta condición se obtiene que  $J(\beta) \neq 1$  con lo que se pierde la invariancia axial al nivel cuántico y  $J_{D+1}^\mu$

no se conservará. Para la QED este tipo de anomalías no es peligroso dado que  $J_{D+1}^\mu$  no tiene ningún campo de norma asociado.

## 1.2 ANOMALÍAS no-ABELIANAS.

En la sección anterior se consideraron transformaciones de fase abelianas en los campos fermiónicos, pero al ser la teoría (1.1) no-Abeliana estas transformaciones no son de norma. En esta sección se estudiará las corrientes asociadas a las dos transformaciones de norma de la teoría (1.1), y se encontrará bajo qué condiciones las correspondientes simetrías se preservan a nivel cuántico. A diferencia del caso Abeliano donde la conservación de las corrientes significaba que su divergencia era nula, en el caso no-Abeliano es necesario considerar la generalización covariante de dicha expresión. Esta divergencia covariante incluye a ambas corrientes, dado que para una transformación local en los fermiones la densidad Lagrangiana (1.1) será invariante sólo si se aplica simultáneamente tanto una transformación en el campo vectorial  $V_\mu^a$  como en el campo pseudovectorial  $A_\mu^a$ .

El valor promedio de la corriente de norma asociada al campo vectorial  $V_\mu^a$  se obtiene al derivar funcionalmente la acción efectiva con respecto al campo, o sea

$$-e J_V^{a\mu} = \frac{\delta\Gamma[A]}{\delta V_{a\mu}} = \frac{1}{Z[A]} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} (-e j_V^{a\mu}) \exp(i \int d^D x L), \quad (1.11)$$

donde

$$j^{a\mu}(x) = \bar{\psi}(x) \lambda^a \gamma^\mu \psi(x). \quad (1.12)$$

En forma similar para la corriente asociada al campo axial-vectorial  $A_\mu^a$  se tiene

$$-e J_A^{a\mu} = \frac{\delta\Gamma[A]}{\delta A_{a\mu}}, \quad (1.13)$$

con

$$j_A^{a\mu} = \bar{\psi}(x) \lambda^a \gamma^\mu \gamma_{D+1} \psi(x). \quad (1.14)$$

Clásicamente las corrientes (1.12) y (1.14) son covariantemente conservadas y es de interés investigar si lo mismo ocurre para los valores promedio (1.11) y (1.13).

Para que la densidad Lagrangiana (1.1) sea invariante ante las siguientes transformaciones de fase locales en los fermiones

$$\begin{aligned}\psi &\longrightarrow (1 + i\Theta^a \lambda_a)\psi, \\ \bar{\psi} &\longrightarrow \bar{\psi}(1 - i\Theta^a \lambda_a),\end{aligned}\tag{1.15}$$

donde éstas se han escrito en forma infinitesimal, se necesita aplicar las siguientes transformaciones en los campos de norma

$$\begin{aligned}A_\mu^a &\longrightarrow A_\mu^a + \delta A_\mu^a, \\ V_\mu^a &\longrightarrow V_\mu^a + \delta V_\mu^a,\end{aligned}\tag{1.16}$$

donde

$$\delta A_\mu^a = -if^{abc} A_{b\mu} \Theta_c,\tag{1.17}$$

$$\delta V_\mu^a = -(1/e)(\partial_\mu \Theta^a + ie f^{abc} V_{a\mu} \Theta_c).\tag{1.18}$$

A nivel clásico la densidad Lagrangiana (1.1) es invariante ante la aplicación simultánea de las transformaciones (1.15) y (1.16) con  $\Theta$  dependiente de la posición, lo que significa que (1.1) tiene una simetría de norma bajo (1.15) y (1.16). El punto importante aquí será averiguar si sucede lo mismo a nivel cuántico, o sea se desea investigar como cambia la acción efectiva  $\Gamma[A]$  ante las transformaciones de norma (1.16). Al aplicar éstas en (1.6) la acción clásica no es invariante. Sin embargo, por lo visto anteriormente se sabe que ésta puede hacerse invariante si además se realizan las transformaciones (1.15) en las variables de integración fermiónicas. Como resultado de esta operación el término correspondiente a la acción clásica en (1.6) es invariante, pero en la medida de la integral funcional aparece el Jacobiano de dichas transformaciones. De esta manera al derivar funcionalmente la acción efectiva con respecto al parámetro  $\Theta$  se obtiene

$$\left. \frac{\delta \Gamma[A_{\Theta\psi}]}{\delta \Theta_a(x)} \right|_{\Theta=0} = -i \left. \frac{\delta \ln J(\Theta)}{\delta \Theta_a(x)} \right|_{\Theta=0}.\tag{1.19}$$

El subíndice  $\Theta$  en la acción efectiva se refiere a que se han realizado las transformaciones (1.16) y el  $\psi$  a que se han realizado los cambios de variable (1.15) tomando la



acción efectiva como la integral funcional (1.6). La ecuación (1.19) muestra que si el Jacobiano de la transformación (1.15) es igual a uno la acción efectiva será invariante de norma. Para relacionar lo anterior con las anomalías, es conveniente realizar la transformación de norma (1.16) en la acción efectiva (1.6) sin efectuar los cambios de variables de integración, lo que significa que

$$\exp i\Gamma[A_\Theta] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^D x [\bar{\psi} i \not{D} \psi - \Theta_a (\partial_\mu j_V^{a\mu} + ie f^{abc} (V_{b\mu} j_V^\mu + A_{b\mu} j_{Ac}))] \right\}, \quad (1.20)$$

y al derivar funcionalmente esta ecuación con respecto a  $\Theta$  resulta

$$\left. \frac{\delta \Gamma[A_\Theta]}{\delta \Theta_a(x)} \right|_{\Theta_a=0} = - \left[ \partial_\mu j_V^{a\mu} + ie f^{abc} (V_{b\mu} j_V^\mu + A_{b\mu} j_{Ac}) \right] = -H^a(x). \quad (1.21)$$

La expresión anterior define a la anomalía  $H^a$  y muestra que si ésta es diferente de cero se tendrá una corriente vectorial  $J_V^{a\mu}$  "covariantemente no conservada", por lo que a esta anomalía se le ha dado el nombre de **anomalía no-Abellana vectorial**.

Para establecer la relación entre las ecuaciones (1.21) y (1.19) es necesario recordar que la integral funcional es invariante ante un cambio de variables de integración, lo que significa que

$$\Gamma[A_\psi] = \Gamma[A], \quad (1.22)$$

por lo que al comparar (1.19) y (1.21) se obtiene

$$H^a(x) = i \left. \frac{\delta \ln J(\Theta)}{\delta \Theta_a(x)} \right|_{\Theta_a=0}. \quad (1.23)$$

Esta ecuación muestra dos cosas: por una parte que si la anomalía es cero la acción efectiva es invariante ante las transformaciones de norma (1.17) y (1.18). Por otro lado también muestra que el cálculo de la anomalía de norma se reduce a calcular el Jacobiano de la transformación correspondiente.

Una forma alternativa de obtener la expresión (1.23) es realizar en la acción efectiva (1.6) únicamente las transformaciones sobre los campos fermiónicos (1.15), con lo que se obtiene

$$\exp i\Gamma[A_\psi] = J(\Theta) \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \int d^D x [\bar{\psi} i \not{D} \psi + \Theta_a (\partial_\mu j_V^{a\mu} + ie f^{abc} (V_{b\mu} j_V^\mu + A_{b\mu} j_{Ac}))] \right\}, \quad (1.24)$$

Tomando en cuenta la expresión (1.22) resulta evidente que la derivada funcional con respecto al parámetro de (1.24) es cero por lo que se tiene

$$\left. \frac{\delta \Gamma[A]}{\delta \Theta_a(x)} \right|_{\Theta_a=0} = -i \left. \frac{\delta \ln J(\Theta)}{\delta \Theta_a(x)} \right|_{\Theta_a=0} + \partial_\mu J_V^{a\mu} + ie f^{abc} (V_{b\mu} J_V^\mu + A_{b\mu} J_{Ac}^\mu) = 0 \quad (1.25).$$

La expresión anterior es precisamente una forma alternativa de escribir la ec.(1.23). Esta forma de derivar la expresión (1.25) mejor conocida como una de las identidades de Ward-Takahashi será muy útil en los proximos capítulos.

Los mismos pasos anteriores pueden llevarse a cabo para las transformaciones en los campos fermiónicos del tipo

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow (1 + i \Xi_a \lambda^a \gamma_{D+1}) \psi \\ \bar{\psi} &\longrightarrow \bar{\psi} (1 + i \Xi_a \lambda^a \gamma_{D+1}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

y en los de norma

$$\begin{aligned} A_\mu^a &\longrightarrow A_\mu^a - (1/e) (\partial_\mu \Xi^a + ie f^{abc} V_{b\mu} \Xi_c), \\ V_\mu^a &\longrightarrow V_\mu^a - i f^{abc} A_{b\mu} \Xi_c. \end{aligned} \quad (1.27)$$

obteniendo

$$\left. \frac{\delta \Gamma[A_\Xi]}{\delta \Xi_a(x)} \right|_{\Xi_a=0} = - [\partial_\mu J_A^{a\mu} + ie f^{abc} (V_{b\mu} J_{Ac}^\mu + A_{b\mu} J_V^\mu)] = -G^a(x), \quad (1.28)$$

$$G^a(x) = i \left. \frac{\delta \ln J(\Xi)}{\delta \Xi_a(x)} \right|_{\Xi_a=0} \quad (1.29)$$

La ecuación (1.28) define lo que se conoce como la **anomalía no-Abellana axial**  $G^a(x)$ .

Así, las expresiones (1.25) y (1.29) muestran que las anomalías de norma de la teoría (1.1) son diferentes de cero a menos que el Jacobiano asociado a la transformación fermiónica correspondiente sea igual a uno.

Es conveniente recordar que la acción efectiva  $\Gamma[A]$  se encuentra indeterminada hasta una función local  $P$  de los campos de norma, lo que significa que  $P$  es de la forma

$$P = \int d^D x p(\mathcal{A}(x), \partial \mathcal{A}(x), V(x), \partial V(x), \dots). \quad (1.30)$$

donde  $p$  es una función local de los campos  $\mathcal{A}_\mu$ ,  $V_\mu$  y sus derivadas hasta un orden finito.

Esta ambigüedad significa que anomalías de la forma

$$H^a(x) = e \left[ \partial_\mu \frac{\delta P}{\delta V_\mu^a(x)} + ie f^{abc} (V_{b\mu} \frac{\delta P}{\delta V_\mu^c(x)} + \mathcal{A}_{b\mu} \frac{\delta P}{\delta \mathcal{A}_\mu^c(x)}) \right], \quad (1.31)$$

$$G^a(x) = e \left[ \partial_\mu \frac{\delta P}{\delta \mathcal{A}_\mu^a(x)} + ie f^{abc} (V_{b\mu} \frac{\delta P}{\delta \mathcal{A}_\mu^c(x)} + \mathcal{A}_{b\mu} \frac{\delta P}{\delta V_\mu^c(x)}) \right], \quad (1.32)$$

son triviales. Para verificar esta afirmación puede sustituirse las ecs.(1.31) y (1.32) en (1.21) y (1.28) obteniéndose

$$\partial_\mu \frac{\delta(\Gamma + P)}{\delta V_\mu^a} + ie f^{abc} \left[ V_{b\mu} \frac{\delta(\Gamma + P)}{\delta V_\mu^c} + \mathcal{A}_{b\mu} \frac{\delta(\Gamma + P)}{\delta \mathcal{A}_\mu^c} \right] = 0, \quad (1.33)$$

$$\partial_\mu \frac{\delta(\Gamma + P)}{\delta \mathcal{A}_\mu^a} + ie f^{abc} \left[ V_{b\mu} \frac{\delta(\Gamma + P)}{\delta \mathcal{A}_\mu^c} + \mathcal{A}_{b\mu} \frac{\delta(\Gamma + P)}{\delta V_\mu^c} \right] = 0, \quad (1.34)$$

De esta manera se observa que si se redefinen las corrientes a partir de (1.11) y (1.13) al sustituir  $\Gamma$  por  $\Gamma + P$  se obtienen corrientes inducidas covariantemente conservadas. Las verdaderas anomalías no-Abelianas no pueden ser representadas como (1.31) y (1.32), y lo que se hace comunmente es seleccionar  $P$  de tal manera que  $H_a(x) = 0$  aunque  $G_a(x) \neq 0$ , entonces se tiene únicamente una anomalía no-Abeliana axial, y una corriente vectorial covariantemente conservada. Para la teoría (1.1) esta anomalía es peligrosa ya que el campo de norma  $\mathcal{A}_\mu^a$  está asociado a la corriente (1.13), lo que quiere decir que esta teoría es potencialmente inconsistente.

La estructura de grupo de la teoría de norma asociada a la densidad Lagrangiana (1.1) induce condiciones de consistencia sobre las anomalías no-Abelianas. Estas fueron descubiertas por Wess y Zumino [W2]. Con el objeto de obtener dichas condiciones se expresará el algebra del grupo en términos de los generadores asociados a las transformaciones de norma (1.16) y (1.27). Para obtener los generadores se observa como cambia la acción efectiva bajo dichas transformaciones. En general se tiene

$$\begin{aligned}\delta\Gamma[A] &= \Gamma[A + \delta A] - \delta\Gamma[A] = \int d^D x (\delta V_\mu^a \frac{\delta\Gamma}{\delta V_\mu^a} + \delta A_\mu^a \frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a}) = \\ &= \int d^D x (\Lambda^a / \epsilon) S_a \Gamma\end{aligned}\quad (1.35)$$

donde  $\Lambda^a$  es el parámetro asociado a la transformación y  $S_a$  es el correspondiente generador.

En el caso vectorial, que corresponde a las transformaciones (1.16), se tiene

$$\delta_V \Gamma[A] = \int d^D x (\Theta^a / \epsilon) X_a \Gamma, \quad (1.36)$$

donde el generador vectorial está dado por

$$X_a = \partial_\mu \frac{\delta}{\delta V_\mu^a} + i e f_{abc} (V_\mu^b \frac{\delta}{\delta V_{c\mu}} + A_\mu^b \frac{\delta}{\delta A_{c\mu}}). \quad (1.37)$$

Análogamente para las transformaciones (1.27) el cambio en la acción efectiva es

$$\delta_A \Gamma[A] = \int d^D x (\Xi^a / \epsilon) Y_a \Gamma, \quad (1.38)$$

con

$$Y_a = \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + i e f_{abc} (V_\mu^b \frac{\delta}{\delta A_{c\mu}} + A_\mu^b \frac{\delta}{\delta V_{c\mu}}). \quad (1.39)$$

De la definición de las corriente axial y vectorial (1.11) y (1.13) junto con las ecuaciones (1.21) y (1.28) se encuentra que las anomalías se obtienen por la aplicación de los generadores sobre la acción efectiva, o sea

$$X_a(x) \Gamma = -e H_a(x), \quad (1.40a)$$

$$Y_a(x) \Gamma = -e G_a(x). \quad (1.40b)$$

En otras palabras las anomalías norma son la respuesta de la acción efectiva bajo la correspondiente transformación.

El algebra que obedecen estos generadores es la siguiente

$$\int d^D x d^D y \Theta^a(x) \Theta^b(y) [X_a(x), X_b(y)] = \int d^D x d^D y \Theta^a(x) \Theta^b(y) (-i e f_{abc} \delta(x-y) X^c(x)), \quad (1.41)$$

la cual se obtiene por sustitución directa de (1.37) en el lado izquierdo de (1.41), utilizando la identidad de Jacobi para las constantes de estructura

$$f_{ade}f_{bc}^d + f_{bde}f_{ca}^d + f_{cde}f_{ab}^d = 0, \quad (1.42)$$

y realizando las integrales por partes pertinentes. Para todas las combinaciones posibles de los generadores se tiene

$$\begin{aligned} [X_a(x), X_b(y)] &= -ie f_{abc} \delta(x-y) X^c(x), \\ [X_a(x), Y_b(y)] &= -ie f_{abc} \delta(x-y) Y^c(x), \\ [Y_a(x), Y_b(y)] &= -ie f_{abc} \delta(x-y) X^c(x). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Si estas expresiones se multiplican por la derecha por  $\Gamma$  y se utilizan las ecuaciones (1.40) se obtienen las llamadas condiciones de consistencia de Wess-Zumino[W2] para las anomalías no-Abelianas que son:

$$\begin{aligned} X_a(x)H_b(y) - X_b(y)H_a(x) &= -ie f_{abc} \delta(x-y) H^c(x), \\ X_a(x)G_b(y) - Y_b(y)H_a(x) &= -ie f_{abc} \delta(x-y) G^c(x), \\ Y_a(x)G_b(y) - Y_b(y)G_a(x) &= -ie f_{abc} \delta(x-y) H^c(x). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Las anomalías que satisfacen estas identidades se conocen con el nombre de **anomalías consistentes**, sin embargo, existen otros métodos de cálculo que producen las llamadas **anomalías covariantes**, caracterizadas por tener una forma explícitamente covariante y por no obedecer las condiciones de consistencia (1.44). Una explicación de este hecho se dará en un capítulo posterior de este trabajo.

Una aplicación muy importante de las identidades de Wess-Zumino (1.44) es el hecho que permiten calcular las anomalías no-Abelianas en  $2n$ -dimensiones si se conoce la anomalía abeliana en  $2n + 2$ -dimensiones y se utilizan métodos de Geometría Diferencial[Z1].

Recapitulando acerca de la diferencia entre las anomalías axiales Abelianas y las anomalías de norma no-Abelianas, se tiene que la anomalía abeliana esta asociada a una transformación axial de los campos fermiónicos, mientras que la no-Abeliana está asociada a una transformación tanto de los campos fermiónicos como de los de norma.

### I.3 ANOMALÍAS DE NORMA.

A continuación se resumen algunas de las características conocidas de las anomalías locales [G2], [P1], [S2]. En particular se discute cuando pueden existir anomalías de norma, o sea aquellas anomalías que están asociadas a la no conservación de corrientes de norma.

Las anomalías locales se originan en las divergencias ultravioleta de las teorías de campo. Esto significa que cuando sea posible regularizar una teoría en forma tal que todas las simetrías clásicas se preserven, todas las prescripciones utilizadas en renormalización pueden ser llevadas a cabo sin ninguna pérdida de simetría y la teoría estará libre de anomalías. Por otra parte, si la regularización no preserva todas las simetrías, algunas corrientes regularizadas no se conservarán y puede no existir manera de efectuar subtracciones de forma tal que se restaure la conservación. Lo anterior refleja el hecho que es precisamente en el proceso de regularización donde las simetrías clásicas se pueden perder. Esto implica que si existiera una teoría que no necesitará ser regularizada, ésta estaría automáticamente libre de anomalías, es decir todas sus simetrías clásicas serían simetrías cuánticas.

Para dar una idea de como es posible anular las anomalías de norma se va tomar como ejemplo una teoría con fermiones de Weyl acoplados a un campo externo  $A_\mu$  (o en forma equivalente, fermiones de Dirac con acoplamiento de norma sólo a las componentes de quiralidad negativa). La densidad Lagrangiana correspondiente a este sistema es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i [\not{\partial} + ie\gamma^\mu A_\mu^a \lambda_a] \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \psi$$

Esta teoría tiene el tipo de acoplamiento utilizado en el modelo de Weinberg-Salam y en algunas teorías de Gran Unificación.

Asociada a las transformaciones simetría

$$\psi \rightarrow \left(1 + i\Lambda^a \lambda_a \frac{(1 - \gamma_5)}{2}\right) \psi$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \left(1 - i\Lambda^a \lambda_a \frac{(1 + \gamma_5)}{2}\right)$$

la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  posee la siguiente ley de conservación a nivel clásico

$$\partial_\mu j_{L\alpha}^\mu + ie f_{abc} A_\mu^b j_L^{c\mu} = 0$$

donde la corriente es

$$j_L^{a\mu} = \bar{\psi} \gamma^\mu \lambda^a \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \psi.$$

Para esta teoría se ha mostrado que la anomalía es de la forma

$$\partial_\mu J_{L\alpha}^\mu + ie f_{abc} A_\mu^b J_L^{c\mu} = \frac{-e^2}{8} d_{abc} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu [A_\nu^b (4\partial_\alpha A_\beta^c + e f_{cde} A_\alpha^d A_\beta^e)],$$

con

$$d_{abc} = \frac{1}{2} \text{Tr}[\lambda^a \{\lambda^b, \lambda^c\}].$$

Este resultado fue calculado por Gross y Jackiw en [G3]. De la expresión anterior se observa que el problema de investigar bajo que condiciones las anomalías se anulan se reduce por lo tanto a hallar en cuales representaciones del grupo de norma  $G$ ,  $d_{abc} = 0$ . Para el caso de grupos de Lie semisimples esto fue investigado por Georgi y Glashow en [G1] y aquí solamente se verán algunos ejemplos simples. Si  $\lambda^a$  pertenece a una representación real o pseudoreal de  $G$  (es decir si el conjugado de lambda puede ser escrito como  $\lambda^{a*} = -U^{-1} \lambda^a U$  con  $U$  una matriz simétrica para el caso real y antisimétrica en el pseudoreal),  $d_{abc}$  es idénticamente cero, ésto se sigue de las siguientes observaciones: i) Todas las representaciones irreducibles de grupos de Lie compactos son matrices Hermíticas finitas, o sea que satisfacen  $\lambda^a = \lambda^{a\dagger}$  y por lo tanto  $d_{abc}^* = d_{abc}$  donde se toma en cuenta que  $\text{Tr}(AB)^T = \text{Tr}AB$ . ii) Por otro lado considerando la propiedad que satisface el conjugado de una representación real o pseudoreal se obtiene  $d_{abc}^* = -d_{abc}$ , de donde se sigue que  $d_{abc} = 0$  para estas representaciones. Un ejemplo de un grupo que sólo tiene representaciones reales es  $SU(2)$  lo que muestra que para el modelo de Weinberg-Salam  $SU_L(2) \times U_Y(1)$  una anomalía diferente de cero solamente puede provenir de la parte correspondiente a la hipercarga  $Y$ . Esto se puede ver al notar que las únicas componentes diferentes de cero de  $d_{abc}$  para este modelo son proporcionales a

$$d_{abc} \propto \text{Tr}[Y \{\sigma_b, \sigma_c\}] = 2\delta_{bc} \text{Tr}Y = 2\delta_{bc} \sum Y = 2\delta_{bc} \left( \sum_{\text{leptones}} Y + \sum_{\text{quarks}} Y \right).$$

Considerando que la hipercarga de un doblete de leptones es  $(-1)$  y que la de un doblete de quarks al tomar en cuenta que existen tres colores es  $(+1)$ , se llega a la conclusión

que una anomalía nula sólo se tendrá en el caso que el número de dobletes de leptones sea igual al de quarks, lo que prueba un comentario realizado en la primera parte de esta introducción. Otros grupos que únicamente tienen representaciones reales o pseudoreales y por lo tanto anomalías nulas son [M1], [M2]

$$SU(2)$$

$$SO(2n + 1) \quad \text{para } n \geq 2$$

$$SO(4n) \quad \text{para } n \geq 2$$

$$Sp(2n) \quad \text{para } n \geq 3$$

$$G(2), F(4), E(7) \text{ y } E(8).$$

El argumento que para representaciones reales o pseudoreales del grupo de norma  $G$  las anomalías de norma son cero puede generalizarse para dimensiones  $D = 4n$  con  $n$  entero. Dado que en este caso la anomalía es proporcional al factor de grupo [P1]

$$d^{a_1 \dots a_l} = \frac{1}{l!} \sum_{\text{permutaciones}} \text{Tr}(\lambda^{a_1} \dots \lambda^{a_l}),$$

con  $l = 2n + 1$ , se tiene que el mismo argumento por el cual dicha traza fue cero en cuatro dimensiones se generaliza trivialmente.

En el caso de dimensiones impares no existen anomalías de norma, lo que se debe esencialmente a que en estas dimensiones no existe el equivalente a la matriz  $\gamma_5$  y por lo tanto no hay espinores de Weyl. Un ejemplo de esto se puede ver en 3-dimensiones, en donde el algebra de Clifford para las matrices gama es generada por las matrices de  $2 \times 2$  cuya base son las matrices de Pauli  $\sigma_i$ , por lo que las matrices de Dirac pueden seleccionarse como  $\gamma_i = \sigma_i$  con  $i = 1, 2, 3$ , luego entonces no hay manera de construir alguna matriz como  $\gamma_5$  que anticonmute con todas las matrices de Dirac y por lo mismo no es posible construir operadores de proyección quiral lo que significa que no hay espinores de Weyl. Al no haber matriz  $\gamma_5$  la teoría dada por  $\mathcal{L}$  se reduce a una teoría solamente con acoplamiento vectorial y por lo tanto sólo habrá una corriente de norma que es la vectorial, la cual siempre puede ser conservada como en el caso de la Electrodinámica Cuántica. En dimensiones impares si pueden existir anomalías globales por ejemplo las relacionadas con transformaciones de paridad [A3].

En  $4n + 2$ -dimensiones es necesario ser más cuidadoso para ver en que casos no existen anomalías de norma ya que las representaciones reales o pseudoreales si pueden dar contribución a las anomalías, puesto que el factor de grupo es  $d^{a_1 \dots a_l}$  con



$l = 2n + 2$ . Sin embargo, existen criterios para averiguar en que casos hay anomalías de norma [S2]. La base de éstos es reconocer, como se hizo al principio de esta sección, que cuando es posible regularizar la teoría sin romper todas las simetrías clásicas entonces no hay anomalías. Para encontrar cuales son estos casos se adopta un esquema de regularización conveniente como por ejemplo la regularización de Pauli-Villars que esencialmente consiste en sumar a la densidad Lagrangiana un término masivo en los fermiones. Si este término es invariante de Lorentz y ante el grupo de norma entonces no habrá anomalías.

Considerando a que las anomalías locales aparecen del mal igualamiento de las contribuciones fermiónicas quirales, y dado que los fermiones izquierdos y derechos  $\psi_L$  y  $\psi_R$  se encuentran apareados en teorías que conservan la paridad, se sigue que las anomalías pueden aparecer sólo en amplitudes que violan la paridad. Esto significa que las anomalías locales deben contener un factor pseudoescalar que debe ser proporcional al símbolo de Levi-Civita  $\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D}$ . Por lo tanto para que un diagrama de Feynman sea anómalo debe contener un mínimo de líneas externas. Para poder contraer los  $D$ -índices del símbolo de Levi-Civita, con  $N$  líneas externas dadas, se cuenta con  $N$  vectores de polarización y con  $N - 1$  momentos (debido a la restricción  $\sum_{i=1}^N p_{\mu}^i = 0$ ) por lo tanto se necesita que

$$N \geq \frac{D}{2} + 1. \quad (1.45)$$

Así se llega a la conclusión que para  $D = 4$  el primer diagrama anómalo será el triángulo.

#### I.4 MÉTODO DE DIAGRAMAS DE FEYNMAN.

La gráfica triangular es un bucle fermiónico con un vertice axial-vectorial, y dos vertices vectoriales como se muestra en la figura (I).

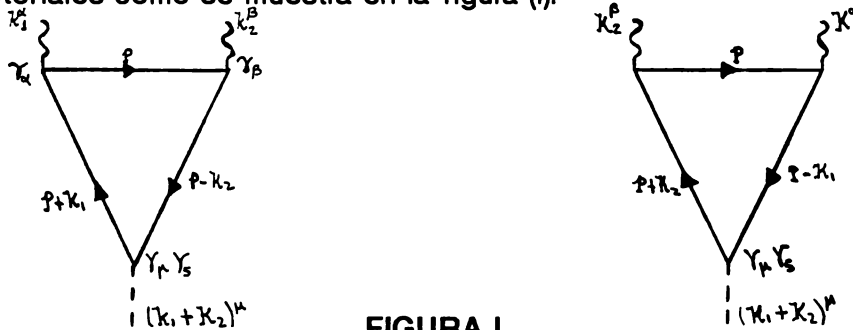


FIGURA I

Las dos gráficas difieren sólo en el etiquetamiento de los fotones externos y son referidas colectivamente como gráfica triangular.

La gráfica triangular puede presentarse en varias teorías físicas. En la electrodinámica cuántica, ésta es la descripción a orden más bajo de la creación de dos fotones por una fuente externa axial-vectorial. En el modelo de Weinberg-Salam, ésta da la amplitud a orden más bajo para el proceso virtual  $Z \rightarrow 2\gamma$ .

Omitiendo todas las constantes de acoplamiento y propagadores externos, la gráfica triangular puede denotarse como

$$t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = S_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) + S_{\beta\alpha\mu}(k_2, k_1), \quad (1.46)$$

donde

$$S_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right). \quad (1.47)$$

$S_{\beta\alpha\mu}(k_2, k_1)$  se obtiene de (1.47) intercambiando  $\alpha$  y  $\beta$ , junto con  $k_1$  y  $k_2$ . Un conteo de potencias muestra que  $S_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2)$  y  $S_{\beta\alpha\mu}(k_2, k_1)$  divergen linealmente, sin embargo, se va a mostrar a continuación que su suma es convergente.

Para que la amplitud (1.46) sea invariante de norma es necesario que

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = k_2^\beta t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = 0. \quad (1.48)$$

lo que refleja la conservación de la corriente vectorial. Por otro lado, si se utiliza la ecuación de Dirac para calcular la divergencia de la corriente axial  $j_5^\mu$  se obtiene

$$\partial_\mu j_s^\mu = 2imj_s, \quad (1.49)$$

donde

$$j_s = \bar{\psi}\gamma_s\psi. \quad (1.50)$$

La ecuación (1.49) muestra que la corriente axial se conservará en el caso que  $m = 0$ , por lo cual se podría pensar que para la gráfica triangular se cumpla

$$(k_1 + k_2)^\mu t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = 2m\nu_{\alpha\beta}(k_1, k_2). \quad (1.51)$$

Se mostrará, sin embargo, que es imposible mantener al mismo tiempo las igualdades (1.48) y (1.51).

Al reescribir el lado izquierdo de (1.48), sustituyendo (1.47) en (1.46) se obtiene,

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [F_{\beta\mu}(p + k_1) - F_{\beta\mu}(p + k_2)], \quad (1.52)$$

donde

$$F_{\beta\mu}(p) = Tr \left( \frac{1}{\not{p} + m} \gamma_\beta \frac{1}{\not{p} - \not{k}_2 + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right), \quad (1.53)$$

con  $\not{q} = \not{k}_1 + \not{k}_2$ . Si fuera posible realizar el cambio de variable  $\not{p} = \not{p} - \not{k}_2 + \not{k}_1$  en el segundo término en (1.52) se ve trivialmente que esta expresión es cero. Dado que este cambio de variable se puede realizar si la integral es a lo más logarítmicamente divergente, es necesario obtener cual es la forma asintótica de  $F_{\beta\mu}$ . Se encuentra que para  $p \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F_{\beta\mu}(p) = -4i\epsilon_{\nu\beta\alpha\mu} \frac{p^\nu q^\alpha}{p^4}, \quad (1.54)$$

lo que muestra que las integrales (1.52) son linealmente divergentes y no es posible realizar el cambio de variable mencionado anteriormente. Sin embargo, es posible realizar la siguiente expansión

$$\int d^4 p F_{\beta\mu}(p + a) = \int d^4 p [F_{\beta\mu}(p) + a^\lambda \frac{\partial F_{\beta\mu}(p)}{\partial p^\lambda} + \dots], \quad (1.55)$$

en cada término del integrando (1.52). Los términos que se omiten en (1.55) dan integrales de superficie nulas, ya que van como  $p^{-n}$  con  $n \geq 5$ . De esta manera se tiene que (1.52) queda como

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} (k_1 - k_2)^\lambda \int d^4 p \frac{\partial F_{\beta\mu}(p)}{\partial p^\lambda}. \quad (1.56)$$

La integral en la ecuación anterior se calcula pasando al espacio Euclideo de momentos, obteniéndose como resultado final

$$k_1^\alpha t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = \frac{-i}{4\pi^2} k_1^\alpha k_2^\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (1.57)$$

En forma similar se obtiene

$$k_2^\beta t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = \frac{+i}{4\pi^2} k_1^\nu k_2^\beta \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (1.58)$$

Así entonces se llega a la conclusión que la gráfica triangular definida como (1.46) viola la invariancia de norma. Tomando en cuenta este hecho se va a ajustar un polinomio en los momentos externos, de manera tal que la amplitud redefinida satisfaga el requerimiento de invariancia de norma, ésto se logra con la siguiente expresión,

$$T_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = t_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) - \frac{i}{4\pi^2} (k_1 - k_2)^\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (1.59)$$

Por otro lado la ec.(1.51) se modifica quedando como

$$(k_1 + k_2)^\mu T_{\alpha\beta\mu}(k_1, k_2) = 2m\nu_{\alpha\beta}(k_1, k_2) + \frac{i}{2\pi^2} k_1^\mu k_2^\nu \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (1.60)$$

Esta expresión no se anula en el límite  $m \rightarrow 0$  en contraposición con lo que sucedía en la situación clásica dada por (1.49). Esto muestra que la invariancia axial se viola en la gráfica triangular aún en el límite  $m \rightarrow 0$  si se impone la condición que ésta sea invariante de norma. El último término en (1.60) corresponde a la anomalía axial.

## 1.5 MÉTODO DE SEPARACIÓN DE PUNTO.

Otro método utilizado para calcular anomalías se conoce con el nombre de separación de punto (point splitting)[J1]. Para ilustrar la técnica se utilizará el modelo de Schwinger que corresponde al caso Abelian de la teoría dada en (1.1), tomando en cuenta sólo el acoplamiento vectorial y en dos dimensiones [S3]. El rompimiento de la simetría axial en este modelo fue descubierto por Johnson en 1963[J2]. La densidad Lagrangiana correspondiente es

$$L = \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu + i e A_\mu) \psi. \quad (1.61)$$

para la cual existen dos corrientes conservadas clásicamente

$$j_V^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x), \quad (1.62)$$

$$j_A^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x). \quad (1.63)$$

En las corrientes consideradas se ha escrito la dependencia explícita de los campos en las coordenadas del espacio-tiempo. A nivel clásico no existe ningún problema con esta definición. Sin embargo, a nivel cuántico el anticonmutador de  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  a tiempos iguales involucra una función delta unidimensional, por lo que se puede esperar que el  $\lim_{x \rightarrow y} \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(y)$  sea singular. Para regular esta posible singularidad se introducirá un pequeño intervalo de tipo espacio  $\epsilon_\mu$ , y se calculará el valor promedio de ambas corrientes, tomando el límite simétrico  $\epsilon_\mu \rightarrow 0$  al final del cálculo.

Las corrientes (1.62) y (1.63) se redefinen en la forma

$$j_V^\mu(x|\epsilon|a) = \bar{\psi}(x + \epsilon/2) \gamma^\mu \psi(x - \epsilon/2) \exp \left[ -i a e \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} A_\mu dx^\mu \right], \quad (1.64)$$

$$j_A^\mu(x|\epsilon|a) = \bar{\psi}(x + \epsilon/2) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x - \epsilon/2) \exp \left[ -i a e \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} A_\mu dx^\mu \right]. \quad (1.65)$$

Cuando  $a = 1$ , las exponenciales permiten que las corrientes sean invariantes ante las transformaciones de fase locales en los fermiones (1.4a), si a la vez se hace la transformación del campo de norma del tipo

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha, \quad (1.66)$$

que es equivalente a la transformación (1.18) en el caso abeliano. Calculando las divergencias de (1.64) y (1.65) se obtiene

$$\partial_\mu j_V^\mu(x|\epsilon|a) = i e j_V^\mu(x|\epsilon|a) \epsilon^\alpha [\partial_\alpha A_\mu(x) - a \partial_\mu A_\alpha(x)], \quad (1.67)$$

$$\partial_\mu j_A^\mu(x|\epsilon|a) = i e j_A^\mu(x|\epsilon|a) \epsilon^\alpha [\partial_\alpha A_\mu(x) - a \partial_\mu A_\alpha(x)]. \quad (1.68)$$

y el valor promedio de (1.68) está dado por

$$\partial_\mu J_A^\mu = \langle 0 | \partial_\mu j_A^\mu(x|\epsilon|a) | 0 \rangle = -ie\epsilon^\alpha \gamma^\mu \gamma_5 \langle 0 | T \psi(x - \epsilon/2) \bar{\psi}(x + \epsilon/2) | 0 \rangle [\partial_\alpha A_\mu(x) - a \partial_\mu A_\alpha(x)] \exp[.]. \quad (1.69)$$

La notación  $\exp[.]$  indica la exponencial presente en la definición de la corriente. Al escribir (1.69) se ha tomado en cuenta que los operadores que representan observaciones en puntos separados por un intervalo tipo espacio anticonmutan si son fermiones, y que los campos de norma son externos. El valor promedio que aparece al lado derecho de (1.69) es la función de Green del problema la cual puede calcularse exactamente en el caso de dos dimensiones, y perturbativamente en el caso de dimensión arbitraria.

El cálculo perturbativo de la función de Green se basa en la iteración de la siguiente ecuación integral que ésta satisface

$$G(x, y) = S_F(x, y) + e \int dz S_F(x, z) A(z) G(z, y), \quad (1.70)$$

donde  $S_F(x, y)$  es el propagador libre de Dirac

$$S_F(x, y) = \int \frac{dp}{(2\pi)^2} \exp[-i(x - y)] \frac{1}{\not{p} - m}. \quad (1.71)$$

Esta expansión perturbativa puede representarse gráficamente como

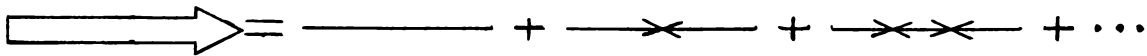


FIGURA II

donde la flecha corresponde a la función de Green total, las líneas indican propagadores libres y la cruz equivale a la interacción  $eA$ .

Volviendo al cálculo de la divergencia de la corriente vectorial en dos dimensiones se sustituye la expresión de la función de Green en (1.69). Antes de calcular se debe observar que en dos dimensiones la función de Green diverge a los más linealmente, esto significa que del desarrollo de la  $\exp[.]$  en (1.69) solamente puede contribuir el término de orden cero en  $\epsilon_\alpha$ , ya que el resto van a cero en el límite  $\epsilon_\alpha \rightarrow 0$ . Por la misma razón sólo es necesario considerar el término de orden cero en el desarrollo de la función de Green. Para calcular explícitamente la contribución del orden cero de la función de Green se sustituye la epsilon por una derivada con respecto a  $p$  utilizando la relación

$$\epsilon_\alpha \exp(ip\epsilon) = -i \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \exp(ip\epsilon). \quad (1.72a)$$

Integrando por partes, y considerando por último la identidad en dos dimensiones que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu} \gamma_5. \quad (1.72b)$$

Se obtiene

$$\partial_\mu J_A^\mu = \frac{-ie}{2\pi} (1 + a) \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu. \quad (1.73)$$

Para el caso de (1.64) se obtiene

$$\partial_\mu J_V^\mu = \frac{ie}{2\pi} (1 - a) g_{\mu\nu} \partial^\mu A^\nu. \quad (1.74)$$

Estas ecuaciones muestran explícitamente que es imposible mantener a nivel cuántico la conservación de ambas corrientes, y el hecho que para  $a = 1$  la corriente vectorial se conserve es el reflejo de que las ecuaciones (1.64) y (1.65) son invariantes ante transformaciones de norma, dado que en el modelo de Schwinger la corriente de norma es precisamente la vectorial.

Resumiendo se tiene que una anomalía es la pérdida de simetría ocasionada por efectos cuánticos, que se manifiesta por la no conservación de la corriente asociada. Como se vio en el caso de la formulación funcional de la TCC descrita en las secciones I.1 y I.2, este hecho se refleja en que la medida de la integral de trayectoria no es invariante ante todas las transformaciones que generan simetrías clásicas. En el capítulo siguiente se analizará como es posible calcular las anomalías tomando en cuenta esta observación.

## II. ANOMALÍAS CON INTEGRALES DE TRAYECTORIA

Como se mostró en el capítulo anterior el cálculo de anomalías que utiliza integrales de trayectoria se reduce a evaluar el Jacobiano asociado a las transformaciones fermiónicas de simetría en la acción efectiva. En este capítulo se revisa la manera usual de calcular dichos Jacobianos y se hace notar que existen ciertas incongruencias entre estos métodos y los cálculos perturbativos. Para resolver estas discrepancias se propone una nueva forma de regular el Jacobiano, con la cual es posible reproducir los cálculos perturbativos en el caso de dos dimensiones. Este método es susceptible de generalizarse a dimensiones arbitrarias, sin embargo, para dimensiones  $D > 4$  el número de cálculos a realizar para obtener un resultado se incrementa demasiado. Por último se muestra que el método propuesto puede justificarse en cierto sentido si se considera que las transformaciones de simetría deben regularse al pasar al nivel de una teoría cuántica.

### II.1 ANOMALÍAS CON EL MÉTODO DE FUJIKAWA(MF).

Durante bastante tiempo no fue posible encontrar una forma de calcular las anomalías a partir de la formulación de la TCC con integrales de trayectoria, principalmente debido a que siempre se suponía que la medida de la integral funcional era invariante ante transformaciones del tipo (1.4)[G3]. En 1979 Fujikawa[F1] mostró que esto no era verdad y con ello encontró un método muy poderoso para calcular anomalías. A continuación se ilustra el método de Fujikawa, tomando como ejemplo el cálculo de la anomalía axial en la Electrodinámica Cuántica.

La base del método es reconocer que la integral de trayectoria (1.6) es invariante ante un cambio de variables de integración. Lo que significa que si se realiza una transformación en las variables fermiónicas tal como (1.7b), ésta induce dos cambios. El primero es un cambio en la acción, y el segundo es un cambio en la medida de la integral funcional y estos dos cambios separados deben de compensarse uno a otro, como se mostró en la ec.(1.10b).

Para calcular el un cambio en la medida funcional, es decir el Jacobiano de la transformación asociada, se expanden  $\psi(x)$  y  $\bar{\psi}(x)$  como



$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x),$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_n \phi_n^\dagger(x) \bar{b}_n, \quad (2.1)$$

en términos de un conjunto completo de funciones propias del operador  $\not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + A_\mu)$ , en el cual se ha efectuado la rotación de Wick  $x^0 \rightarrow -ix^D$  y  $A_0 \rightarrow iA_D$ . De este modo el operador

$$\not{D} = i\gamma^0 D_D + \gamma^k D_k = \gamma^D D_D + \gamma^k D_k, \quad (2.2)$$

se transforma en operador auto adjunto en el espacio Euclideo, con autofunciones,

$$\not{D}\phi_n(x) = \lambda_n \phi_n(x). \quad (2.3)$$

Estas se normalizan de acuerdo a

$$\int \phi_n^\dagger(x) \phi_m(x) d^D x = \delta_{nm}, \quad (2.4)$$

y forman un conjunto completo. Los coeficientes  $a_n$  y  $\bar{b}_n$  en (2.1) son elementos del algebra de Grassmann, por lo que satisfacen  $\{a_n, a_m\} = \{\bar{b}_n, \bar{b}_m\} = 0$ .

Bajo la transformación (1.7b), los coeficientes en (2.1) cambian como,

$$\psi'(x) = \exp(i\beta(x)\gamma_{D+1}) \psi(x) = \sum_n a'_n \phi_n(x), \quad (2.5)$$

con

$$a'_n = \sum_m \int \phi_n^\dagger(x) \exp(i\beta(x)\gamma_{D+1}) \phi_m(x) d^D x a_m = \sum_m C_{n,m} a_m. \quad (2.6)$$

De la expresión anterior se obtiene que el producto de los coeficientes de la expansión de  $\psi(x)$  transforma de acuerdo a

$$a'_1 \dots a'_N = \det(C) a_1 \dots a_N. \quad (2.7)$$

Tomando en cuenta (2.1) la medida de la integral funcional se define como

$$d\mu = \prod_x \mathcal{D}\psi(x) \mathcal{D}\bar{\psi}(x) = \prod_{n,m} da_n d\bar{b}_m, \quad (2.8)$$

es por lo tanto necesario obtener la ley de transformación de  $\prod_n da_n$ . Con este fin se recuerda que la única integral no trivial para un espacio de Grassmann  $N$ -dimensional es

$$\int da_1 \dots da_N a_1 \dots a_N, \quad (2.9)$$

por lo que la integral sobre los elementos Grassmann en (2.8) es equivalente a una derivada izquierda, o sea que  $\prod_n da_n = \prod_n \frac{\partial}{\partial a_n}$ . Por lo consiguiente, comparando con la forma de transformación (2.7) se obtiene

$$\prod_i da'_i = \det(C_{k,l})^{-1} \prod_n da_n, \quad (2.10)$$

donde el factor Jacobiano es

$$(\det C_{k,l})^{-1} = \det \left( \delta_{kl} + i \int \beta(x) \phi_k^\dagger(x) \gamma_{D+1} \phi_l(x) d^D x \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

y se ha tomado en cuenta que  $\beta(x)$  es infinitesimal. Utilizando la expresión

$$\det(A) = \exp(\text{Tr} \ln A), \quad (2.12)$$

que es válida para cualquier matriz no singular, se obtiene

$$(\det C_{k,l})^{-1} = \exp \left[ -i \int \beta(x) \sum_k \phi_k^\dagger(x) \gamma_{D+1} \phi_k(x) d^D x \right]. \quad (2.13)$$

La evaluación de la suma sobre  $k$  es singular para  $k$  grande, por lo cual se necesita regular esta expresión. Esto usualmente se logra considerando un operador arbitrario  $S$  positivo definido y Hermítico. El operador que regula se define como  $R = f(-S/M^2)$  donde el límite  $M^2 \rightarrow \infty$  se toma al final del cálculo. La función  $f(z)$  debe satisfacer  $f(0) = 1$  y que tienda rápidamente a cero en  $z = \infty$ , ésto es  $f(\infty) = f'(\infty) = f''(\infty) = \dots = 0$ . Como ejemplos típicos se toman  $S = \not{D}^2$  para  $\not{D}$  Hermítico, o  $S = \not{D} \not{D}^\dagger$  en caso contrario. Tomando en cuenta que el Jacobiano para  $\mathcal{D}\bar{\psi}$  da lugar a una contribución idéntica a (2.13), se tiene que la medida de la integral funcional transforma como

$$d\mu \longrightarrow d\mu J(\beta), \quad (2.14)$$

con

$$J(\beta) = \exp \left[ -2i \int \beta(x) B(x) d^D x \right], \quad (2.15)$$

donde

$$B(x) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left( \sum_k \phi_k^\dagger(x) \gamma_{D+1} f(-S/M^2) \phi_k(x) \right). \quad (2.16)$$

se encuentra ya regulada en la forma indicada previamente.

Si se calcula (2.16) en 4-dimensiones utilizando como regulador  $R_1 = \exp(-\not{p}^2/M^2)$  y se emplean tecnicas similares a las que se van a mostrar más adelante resulta

$$d\mu \longrightarrow d\mu \exp \left[ i \int \beta(x) (1/8\pi^2) {}^* F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4 x \right] \quad (2.17)$$

Sustituyendo en (1.10b) se obtiene la anomalía axial

$$\partial_\mu J_5^\mu = -\frac{1}{8\pi^2} {}^* F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Este resultado coincide con los que se obtienen utilizando métodos perturbativos. Esto se puede mostrar escribiendo la forma funcional explícita de (2.18), derivando funcionalmente dos veces con respecto al campo externo y por último pasando al espacio de momentos. Realizando estas operaciones se obtiene la expresión (1.80) en el caso de masa nula.

## II.2 TEOREMA DEL ÍNDICE DE ATIYAH-SINGER

Una de las características importantes que tiene el MF es que muestra la relación que existe entre el índice analítico del operador de Dirac y las anomalías. En general el índice analítico de un operador elíptico  $\hat{O}$  (como es el caso del operador de Dirac), que actúa de algún haz fibrado  $E$  en otro  $F$  (cuyas fibras pueden ser espacios espinoriales, vectoriales, tensoriales, etc.)  $\hat{O} : E \rightarrow F$  y su adjunto  $\hat{O}^\dagger : F \rightarrow E$ , se define como

$$Ind \hat{O} = \dim \ker \hat{O} - \dim \ker \hat{O}^\dagger. \quad (2.19)$$

donde  $\ker \hat{O}$  indica el espacio de modos cero del operador  $\hat{O}$ . Para ser más específico, se utilizará como ejemplo el operador de Dirac definido sobre una variedad  $M_D$ , en la

presencia de algún campo de norma  $A$ , con grupo  $G$ . Como se está en un espacio de dimensión par, la quiralidad si está definida como se vio en el capítulo anterior, y entonces existe un operador  $P = \gamma_{D+1}$  que anticonmuta con  $\not{D}$ :  $\not{D}P = -P\not{D}$ . La existencia de  $P$  asegura la "degeneración" del espectro de  $\not{D}$ , o sea que  $\not{D}\phi = \lambda\phi \iff \not{D}(P\phi) = -\lambda(P\phi)$ . Así  $P$  transforma funciones propias de autovalor  $\lambda_n$  ( $\phi_n$ ) en funciones propias de autovalor  $-\lambda_n$  ( $\phi_{-n}$ ), y los modos con eigenvalor cero pueden seleccionarse como estados propios de  $P$ . De esta manera se obtiene lo siguiente

$$\int d^D x \phi_n^\dagger(x) P \phi_n(x) = 0 \quad E \neq 0. \quad (2.20)$$

$$\int d^D x \psi_0^\dagger(x) P \psi_0(x) = \pm 1 \quad \text{Quiralidad} \left\{ \begin{array}{l} \text{positiva} \\ \text{negativa} \end{array} \right\}, \quad (2.21)$$

Entonces la integral de la expresión (2.16) tomando el límite cuando  $M \rightarrow 0$  corresponde precisamente a:

$$N_+ - N_- = \nu, \quad (2.22)$$

donde  $N_+$  y  $N_-$  representan el número de vectores propios de energía cero con quiralidad positiva y negativa respectivamente. Es decir, los números  $N_\pm$  corresponden a la dimensión de los espacios  $\ker D_\pm$ , donde  $D_\pm$  son las proyecciones de quiralidad positiva y negativa de  $\not{D}$ . Que están definidas como

$$D_\pm = \not{D}P_\pm \quad P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_{D+1}) \quad (2.23)$$

Además se tiene que

$$\begin{aligned} D_+ &: E \longrightarrow F, \\ D_- &: F \longrightarrow E, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde en este caso  $E$  y  $F$  son espacios de quiralidad positiva y negativa respectivamente. Como  $D_-$  es el adjunto de  $D_+$  se tiene

$$Ind D = \dim \ker D_+ - \dim \ker D_- = \nu. \quad (2.25)$$

de acuerdo a (2.19) y (2.22)

Cuando los parámetros (las constantes de acoplamiento) del operador  $\not{D}$  se varían continuamente éste sigue anticonmutando con  $P$ , por lo que el número de modos cero

de  $\not{D}$  únicamente puede ser variado como el resultado de la aparición o desaparición de un par de vectores propios (uno con quiralidad positiva y uno con quiralidad negativa), como consecuencia el índice (2.25) permanece constante bajo una variación continua de los parámetros de  $\not{D}$ , ésta es una versión simplificada de lo que se conoce como el Teorema del índice de Atiyah-Singer [A4], el cual establece que el índice analítico (2.19) es un invariante topológico el cual depende sólo de  $E$ ,  $F$  y  $M_D$  que puede ser escrito como la integral de una clase característica la cual es sensitiva a la existencia de topología no trivial, es decir, a la presencia de funciones de transición homotópicamente no triviales. En el ejemplo de la anomalía axial considerado en la sección anterior  $\nu$  está dado por

$$\nu = (-1/16\pi^2) \int d^4x \cdot F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

que es precisamente una clase característica conocida como el índice de Pontryagin.

Uno de los logros del Teorema del índice es proporcionar explícitamente las clases características que determinan el índice del complejo elíptico  $(D_+, D_-, E, F)$  [A5], y el MF permite identificarlo con las anomalías, proporcionando así un método alternativo para su cálculo. El MF proporciona de esta manera un medio ideal para conectar el Teorema del índice (que puede considerarse que tiene un origen semiclásico dado que sólo se requiere de regularización), con las identidades de Ward-Takahashi ecuaciones (1.10a – b) que tienen un origen mecánico cuántico.

### II.3 DEFINICIÓN EXTENDIDA DEL JACOBIANO REGULADO

El MF en su versión original funciona perfectamente mientras no se quiera calcular la anomalía Abelian vectorial, ya que en este caso se tienen que aplicar las transformaciones (1.7a) en la medida de la acción efectiva, pero a diferencia del caso axial en que las contribuciones de  $\psi$  y de  $\bar{\psi}$  se sumaban en (2.15), ahora se restan implicando que la corriente vectorial se conserva independientemente del regulador. Esto está contraposición con método de separación de punto en donde se mostró que sólo en el caso de regular con  $\alpha = 1$  se tiene invariancia de norma en las corrientes reguladas, y solamente en este caso la anomalía vectorial es cero. Las discrepancias continúan si se toma por ejemplo el regulador  $R_2 = \exp(-\not{D}^2/M^2)$ . En este caso ambos Jacobianos  $J(\alpha)$  y  $J(\beta)$  son iguales a uno con la consiguiente conservación simultánea de tanto la corriente vectorial como la axial, lo que está en completo desacuerdo con el resultado

perturbativo[C1].

Para remediar lo anterior se propone un esquema alternativo para regular el Jacobiano [A6]. Si en la funcional generadora (1.6) se realizan transformaciones de simetría infinitesimales del tipo

$$\begin{aligned} \chi &= [1 + K(\eta)]\psi \\ \bar{\chi} &= \bar{\psi}[1 + L(\eta)], \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde  $K$  y  $L$  son operadores que dependen de un parámetro infinitesimal local, al cual se le da el nombre genérico de  $\eta = \eta(x)$ , se obtiene en el espacio Euclideo

$$Z[A] = J(\eta) \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[ \int d^D x \bar{\psi} i(\not{D} + \not{D}K + L\not{D})\psi \right], \quad (2.28)$$

en la expresión anterior se han considerado únicamente términos a primer orden en el parámetro. Lo que se necesita hacer ahora es calcular el Jacobiano  $J(\eta)$ , para lo cual se utilizará una técnica un poco diferente a la de Fujikawa que permite ver más claramente el origen de las discrepancias mencionadas anteriormente. Como punto clave se hará uso de la definición

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[ \int d^D x \bar{\psi} P \psi \right] = \det P. \quad (2.29)$$

Utilizando la propiedad de invariancia de la acción efectiva ante un cambio de variables de integración se obtiene de (2.28)

$$J(\eta) = \frac{\det(\not{D})}{\det(\not{D} + \not{D}K + L\not{D})}. \quad (2.30)$$

Tomando el logaritmo natural en ambos lados de (2.30) y utilizando (2.12) resulta

$$\ln J(\eta) = \text{Tr} \ln [1 - \not{D}^{-1}(\not{D}K + L\not{D})], \quad (2.31)$$

donde  $\not{D}^{-1}$  denota la función de Green del operador  $\not{D}$ . Como es usual, la traza en (2.31) está indefinida y necesita ser regularizada, lo que se logra como en el caso de Fujikawa introduciendo un regulador  $R = f(-S/M^2)$ . Sin embargo, existe la ambigüedad de donde colocar el regulador en la expresión (2.31), como una solución a esta ambigüedad se propone la siguiente forma de regular el Jacobiano

$$\ln J_R(\eta) = -\text{Tr}[\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{D}K + L\mathcal{D})R], \quad (2.32)$$

que así se transforma en una cantidad finita. La ec.(2.32) es la base de los resultados que se obtienen en este y los proximos capítulos. Es apropiado enfatizar que la forma de la definición (2.32) es independiente del número de dimensiones.

Antes de realizar algunos cálculos explícitos se tienen los siguientes comentarios acerca de (2.32). La primera característica que se nota en  $J_R(\eta)$  es que depende explícitamente del sistema  $\mathcal{D}$ , de las simetrías  $(K, L)$  y del regulador  $R$ ; mientras que en la ec.(2.15), que corresponde al Jacobiano de Fujikawa, la dependencia en el sistema  $\mathcal{D}$  no aparece en forma explícita. Por otra parte, rescribiendo la ec.(2.32) como

$$\ln J_R(\eta) = -\text{Tr}[\mathcal{D}^{-1}L[\mathcal{D}, R] + KR + LR]. \quad (2.33)$$

se puede ver claramente que en el caso

$$[\mathcal{D}, R] = 0, \quad (2.34)$$

la ec.(2.33) se reduce al resultado de Fujikawa

$$\ln J_{RF}(\eta) = -\text{Tr}(KR + LR). \quad (2.35)$$

En el caso de la anomalía axial ( $K = L = i\beta(x)\gamma_5$ ) la ec.(2.35) es idéntica a la ec.(2.15), lo que quiere decir que cuando la condición (2.34) se cumpla el cálculo de Fujikawa es correcto. Así tomando como regulador  $R_1$  la condición (2.34) se cumple y el resultado (2.18) es correcto. Sin embargo, si se utiliza como regulador  $R_2$  la condición (2.34) no se cumple y el resultado de aplicar la formula (2.15) es incorrecto.

La formula (2.35) se obtiene directamente de (2.31) utilizando primero la propiedad cíclica de la traza y regulando después. Ya que de esta manera se está perdiendo información se infiere que tal propiedad sólo puede ser utilizada en expresiones que ya esten adecuadamente reguladas. Un ejemplo de las ambigüedades que se presentan al aplicar esta propiedad sin regular previamente se puede observar en la Mecánica Cuántica cuando se toma la traza del conmutador  $[x, p] = i\hbar$ , del lado izquierdo se obtiene cero, mientras del lado derecho diverge. En este punto se puede notar que el haber colocado el regulador a la izquierda de la ec.(2.32) es totalmente equivalente a ponerlo del lado derecho ya que una vez regulada la traza si es posible utilizar la

identidad cíclica. En un capítulo posterior se mostrará, que la posición del regulador en (2.32) se fija sin ambigüedad pidiendo que esta relación conserve algún otro tipo de simetrías que tiene la teoría investigada.

Un segundo comentario se relaciona a la anomalía vectorial Abeliانا. En este caso las transformaciones (2.19) corresponden a  $K = -L = i\alpha(x)$  como se vió en (1.7a). Si se considera el resultado usual (2.35), el Jacobiano es uno, independientemente del regulador empleado. Sin embargo, si se utiliza (2.33), el Jacobiano será uno únicamente en el caso en que  $[\not{D}, R] = 0$ , lo que en principio concuerda con los resultados perturbativos en donde la anomalía vectorial es cero o no dependiendo del regulador empleado. En particular la expresión (2.35) es un punto de partida incorrecto para calcular las anomalías abelianas si se usa como regulador a  $R_2 = \exp(-\not{D}^2/M^2)$ . Por otra parte como se verá más adelante la ec.(2.33) da resultados que reproducen la familia de anomalías (1.73) y (1.74).

Teniendo en mente que la ec.(2.35) da un resultado nulo para la anomalía vectorial sin importar el regulador, en algunos trabajos como [D1] se propuso regular el Jacobiano de manera diferente en cada una de las contribuciones correspondientes a  $\mathcal{D}\bar{\psi}$  y  $\mathcal{D}\psi$ , definiendo

$$\ln \tilde{J}(\eta) = -\text{Tr}(KR_a + LR_b), \quad (2.36)$$

Esta expresión es diferente de cero para la anomalía vectorial, sin embargo de acuerdo con la prescripción que se propone en (2.33) este resultado es erróneo en general a menos que se seleccione

$$R_b = \not{D}R_a\not{D}^{-1}. \quad (2.37)$$

En la referencia [D1] éste es precisamente el caso que se toma sin dar alguna razón del porque.

Un último comentario está relacionado con la expresión (2.37) y tiene que ver con sistemas cuyo operador de Dirac no es Hermítico. Este es el caso en teorías con acoplamiento  $\gamma_5$  [F2], o en algunas discusiones recientes de la anomalía vectorial en el modelo de Schwinger que se escribe artificialmente como una teoría con acoplamiento  $\gamma_5$  [S4]. La elección  $R_a = \exp(-\not{D}^\dagger \not{D}/M^2)$  en la expresión general (2.33) junto con  $R_b = \not{D} \exp(-\not{D}^\dagger \not{D}/M^2) \not{D}^{-1} = \exp(-\not{D} \not{D}^\dagger/M^2)$  de acuerdo con (2.37) explica la selección específica utilizada en aquellas referencias.

Para mostrar la utilidad de la ec.(2.33) se van a calcular las anomalías abelianas



axial y vectorial en dos dimensiones utilizando diferentes reguladores. Para el caso vectorial se tiene que  $K = -L = i\alpha(x)$  y para el caso axial  $K = L = i\gamma_s\beta(x)$ . Sustituyendo en (2.33) se obtiene

$$\ln J_V(\alpha) = i\text{Tr}(\mathcal{D}^{-1}\alpha[\mathcal{D}, R]), \quad (2.38a)$$

$$\ln J_A(\beta) = -i\text{Tr}(\mathcal{D}^{-1}\beta\gamma_s[\mathcal{D}, R] + 2\beta\gamma_s R), \quad (2.38b)$$

En primer lugar se considerará el regulador  $R_2 = \exp(-\not{\partial}^2/M^2)$ . Como ya se había dicho, si se aplica directamente el método de Fujikawa se encuentra una contribución nula para las dos anomalías. Esto se puede ver fácilmente de la ec.(2.35) que implica que la anomalía vectorial es automáticamente cero porque  $K = -L$ , y la anomalía axial también es nula porque al tomar la traza en (2.35), ésta da cero debido a que  $\text{Tr}\gamma_s = 0$  y a que el regulador no contiene ninguna matriz  $\gamma$  dado que  $\not{\partial}^2 = \partial_\mu\partial^\mu$ . Así se tiene una contradicción con respecto a los resultados de (1.59), (1.58) y (1.60) en el caso del método de diagramas de Feynman y con respecto a (1.73) y (1.74) en el caso del método de separación de punto. Lo que se va a mostrar a continuación es que si se emplean las ecs.(2.38a - b) lo que se obtiene como resultado es un par de anomalías que pertenece a la familia de anomalías (1.73) y (1.74), y que corresponde a la elección  $a = 0$ .

Dado que el segundo término del lado derecho de (2.38b) es cero, lo que se necesita calcular es

$$X = \text{Tr}(\mathcal{D}^{-1}Q[\mathcal{D}, R]), \quad (2.39)$$

donde  $Q$  corresponde a  $i\alpha I$  ó a  $-i\beta\gamma_s$ . La traza sobre el espacio-tiempo se calcula fácilmente en la base de ondas planas ya que estos vectores son propios del regulador de este modo se tiene

$$X = \text{Tr} \int dx dy \frac{dk}{(2\pi)^2} \langle k|x \rangle \langle x|\mathcal{D}^{-1}|y \rangle \langle y|Q[\mathcal{D}, R]|k \rangle. \quad (2.40)$$

La única contribución del conmutador que aparece en (2.40) corresponde a la parte que depende del campo externo en el operador  $\mathcal{D}$ . Introduciendo la transformada de Fourier del campo externo y la función de Green  $\langle x|\mathcal{D}^{-1}|y \rangle = G(x, y)$  se obtiene

$$X = ie \int dx dy \frac{dk dq}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left( G(x, y) Q(y) \gamma^\mu A_\mu(q) \exp(-ikx) \exp[i(k - q)y] \right. \\ \left. \times \{ \exp(k^2/M^2) - \exp[(q - k)^2/M^2] \} \right). \quad (2.41)$$

Sustituyendo el desarrollo de la función de Green (1.70), y tomando en cuenta que se está en espacio Euclideo, se puede comprobar que la única contribución en el límite cuando  $M^2 \rightarrow \infty$  corresponde al orden cero en el desarrollo. Reescalando el momento  $k \rightarrow Mp$ , factorizando en las exponenciales entre llaves de (2.41) el término  $\exp(p^2)$ , que tiene por efecto regular la integral y desarrollando en serie de potencias el resto se obtiene

$$X = ie \int dy \frac{dp dq}{(2\pi)^4} \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr} \left( \frac{i}{M} \frac{(-\not{p} + m/M)}{(p^2 - m^2/M^2)} Q(y) \gamma^\mu A_\mu(q) \right. \\ \left. \times \exp(-iqy) \exp(p^2) [q^2 - 2q \cdot pM] \right). \quad (2.42)$$

Tomando el  $\lim_{M \rightarrow \infty}$ , integrando sobre  $p$ , introduciendo la transformada inversa Fourier de  $A_\mu(q)$ , calculando la traza y sustituyendo el resultado en las ecs.(1.10) se obtiene finalmente

$$\partial_\mu J_V^\mu = \frac{e}{2\pi} \partial_\mu A^\mu, \quad (2.43)$$

$$\partial_\mu J_A^\mu = \frac{-e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu. \quad (2.44)$$

En efecto estas expresiones corresponden a la versión Euclideo de las anomalías (1.74) y (1.73) con  $a = 0$ .

Como siguiente ejemplo se discutirá el regulador  $R = \exp(-\not{D}_a^2/M^2)$  con  $\not{D}_a = \not{D}_a^\dagger = \not{D} + ie a \not{A}$ , y se mostrará que éste reproduce directamente la familia de anomalías (1.73) y (1.74).

Para realizar este cálculo con facilidad se debe notar que el primer término en (2.38b) corresponde a un cálculo de Fujikawa usual con  $A_\mu \rightarrow a A_\mu$  y se reduce a

$$-2i \text{Tr}(\beta \gamma_5 R) = \frac{-ea}{\pi} \int dx \beta(x) \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu. \quad (2.45)$$

Las partes remanentes están incorporadas en la expresión para  $X$  previamente definida. Utilizando el hecho que  $\not{D} = \not{D}_a + (1 - a)ie \not{A}$ , se puede reescribir el conmutador en (2.39) como

$$[\not{D}, R] = i\epsilon(1 - a)[\not{A}, R]. \quad (2.46)$$

Utilizando nuevamente una base de ondas planas para evaluar la traza sobre el espacio-tiempo, se ve que la acción del regulador será producir el corrimiento usual  $\not{D}_a \rightarrow \not{D}_a - i\cancel{k}$  obteniéndose

$$X = i\epsilon(1 - a) \int dx dy \frac{dk}{(2\pi)^2} \exp[-ik(x - y)] \exp(k^2/M^2) \times \text{Tr} \left( G(x, y) Q(y) \left[ \exp \left( \frac{i\{k, \not{D}_a\} - \not{D}_a^2}{M^2} \right), A(y) \right] \right). \quad (2.47)$$

Una vez más la contribución finita a  $X$  viene de la parte del desarrollo de la función de Green a orden cero, junto con el término dominante en potencias de  $k/M$  en el desarrollo de la exponencial del conmutador. Después de reescalar  $k \rightarrow M p$  y tomar el límite  $M^2 \rightarrow \infty$  se tiene

$$X = \frac{i\epsilon(1 - a)}{4\pi} \int dx \text{Tr} [\gamma^\mu Q(x) \gamma^\nu] \partial_\mu A_\nu(x). \quad (2.48)$$

De esta ecuación es fácil obtener las contribuciones a las anomalías vectorial y axial vectorial. Sumando la contribución (2.45) a la que se tiene de (2.48) para el caso  $Q(x) = -i\beta(x)\gamma_5$  y sustituyendo el Jacobiano en la ec.(1.10b) se obtiene la versión Euclideana de la ecuación (1.73). Mientras que la versión Euclideana de la ecuación (1.74) se obtiene al sustituir en (1.10a) la contribución de (2.48) para  $Q(x) = i\alpha(x)I$ .

Así se llega a la conclusión que la ecuación (2.33) es una generalización a la expresión de Fujikawa para el Jacobiano regulado, que permite resolver los problemas asociados al cálculo de la familia de anomalías vectorial y axial para el modelo de Schwinger usando integrales de trayectoria. Se debe notar que se fue capaz de obtener los resultados correctos utilizando el regulador  $R = \exp(-\not{D}_a^2/M^2)$ , mostrando que no es necesario utilizar operadores no-Hermiticos como se propone en la referencia [S4].

## II.4 TRANSFORMACIONES DE FASE REGULADAS.

En la sección anterior se propuso una generalización para la expresión del Jacobiano regulado que permite el cálculo de las anomalías abelianas en el Modelo de Schwinger, evitando así el uso de reguladores no-Hermiticos complicados.

En esta sección se quiere entender la regularización del Jacobiano en el caso de las anomalías vectorial y axial Abelianas en términos de conceptos más básicos.

Se mostrará que el método de regularización propuesto puede entenderse como la regularización de las transformaciones de simetría en el sentido que se explica a continuación: En la teoría clásica la acción fermiónica es invariante bajo transformaciones de fase constantes (es decir independientes del espacio-tiempo), que pertenecen a representaciones de los grupos  $U_V(1)$  y  $U_A(1)$  generadas por  $I$  y  $\gamma_5$ . Si se pasa a la teoría cuántica a través de la integral de trayectoria de Feynman, se encuentra que los Jacobianos de las transformaciones son ambiguos (debido a las divergencias) y necesitan ser regulados. En vez de ésto se propone pasar a la teoría cuántica preservando la estructura de grupo de las transformaciones clásicas pero permitiendo que los generadores sean operadores generales que actúan como un regulador[A6]. En otras palabras al pasar a la teoría cuántica se puede cambiar la representación clásica del grupo, pero se sigue preservando la estructura de grupo. Las ventajas que se obtienen de este cambio de perspectiva son: i) Los Jacobianos de las transformaciones reguladas pueden calcularse ingenuamente como lo hizo Fujikawa y como resultado se obtienen los Jacobianos regulados en la forma que se propuso en la sección anterior. ii) Si se impone que las transformaciones reguladas sean una simetría de la acción fermiónica clásica, se deriva la relación correcta entre la regularización de  $\mathcal{D}\psi$  y  $\mathcal{D}\bar{\psi}$  que se obtuvo anteriormente en la ec.(2.37). iii) Si además se imponen las propiedades de grupo entre las transformaciones reguladas se encuentra una relación entre los reguladores de las transformaciones vectorial y axial, la cual es suficiente para garantizar la existencia de la familia de anomalías.

Tomando como modelo la Lagrangiana (1.61), se nota que ésta es invariante ante las siguientes transformaciones globales

$$\begin{aligned} \psi' &= \exp(i\alpha)\psi & \psi' &= \exp(i\beta\gamma_5)\psi, \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi}\exp(-i\alpha) & \bar{\psi}' &= \bar{\psi}\exp(i\beta\gamma_5). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Estas transformaciones forman un grupo:  $U(1)_V \times U(1)_A$ , generado por  $I$  y  $\gamma_5$ . Como se mencionó anteriormente el Jacobiano de estas transformaciones es ambiguo debido a las divergencias. La estrategia que se emplea comúnmente es regular el Jacobiano y a partir de éste derivar las identidades de Ward anomalas. En vez de ésto se propone regular las transformaciones (2.49) en una forma tal que se preserve la estructura de grupo permitiendo que el generador de la representación del grupo sea un operador que en último término actuará como un regulador del Jacobiano. Esto es se reemplaza (2.49) por

$$\begin{aligned}
\psi' &= \exp(i\alpha R_V)\psi & \psi' &= \exp(i\beta\gamma_5 R_A)\psi, \\
\bar{\psi}' &= \bar{\psi}\exp(-i\alpha\bar{R}_V) & \bar{\psi}' &= \bar{\psi}\exp(i\beta\gamma_5\bar{R}_A).
\end{aligned}
\tag{2.50}$$

Por supuesto, la acción debe seguir siendo invariante bajo estas transformaciones reguladas. Esto implica las siguientes relaciones

$$\bar{R}_V = \not{D}R_V\not{D}^{-1} \quad \bar{R}_A = \not{D}R_A\not{D}^{-1}.
\tag{2.51}$$

que son precisamente aquellas que se obtuvieron en la ec.(2.37) de la sección precedente y que eran las necesarias para obtener el Jacobiano regulado correcto. Insistiendo que los generadores de las transformaciones reguladas formen el grupo  $U(1)_V \times U(1)_A$  se debe tener que

$$[R_V, \gamma_5 R_A] = [I, \gamma_5] = 0.
\tag{2.52}$$

A continuación se aplica esta idea en el caso del modelo de Schwinger. Una primera verificación de lo dicho anteriormente se tiene en el cálculo de la sección previa, ya que éste corresponde al caso simple en que  $R_V = R_A = \exp(\not{D}^2/M^2)$ . Como un ejemplo más interesante se utilizará la siguiente familia de reguladores

$$\begin{aligned}
R_V &= \exp[-(1 + \rho\gamma_5)\not{D}^2/M^2], \\
R_A &= \exp(-\not{D}^2/M^2),
\end{aligned}
\tag{2.53}$$

donde  $\rho$  es una constante menor que uno. Estos satisfacen la relación (2.52) y se desea verificar que al calcular con ellos las anomalías se reproduzcan las ecs.(2.43) y (2.44). El cálculo de la anomalía axial con  $R_A$  es el mismo que se realizó en la sección anterior y dio como resultado la ecuación (2.44). Por lo tanto se espera que el resultado del cálculo de la anomalía vectorial con  $R_V$  sea la ecuación (2.43). Para efectuar este cálculo se necesita utilizar la expresión (2.38a), que se reduce a

$$\ln J_V(\alpha) = iTr \left( \int dx dy \frac{dk}{(2\pi)^2} G(x, y) \alpha(y) [\not{D}, \exp[-(1 + \rho\gamma_5)\not{D}^2/M^2] \exp[-ik(x - y)] \right).
\tag{2.54}$$

luego de sustituir el regulador  $R_V$ . La expresión (2.54) debe ser independiente de  $\rho$  lo cual parece a primera vista difícil de lograr, sin embargo, el resultado de evaluarla es precisamente (2.43). Para mostrar que efectivamente sucede así se desarrolla la

parte de la exponencial que contiene  $\rho$  en función del seno y el coseno hiperbólicos obteniéndose

$$\begin{aligned} \ln J_V(\alpha) = & iTr \left\{ \int dx dy \frac{dk}{(2\pi)^2} G(x, y) \alpha(y) \left( [\gamma^\mu \partial_\mu, -\exp(-\partial^\beta \partial_\beta / M^2) \gamma_5 \sinh(\rho \partial^\beta \partial_\beta / M^2)] + \right. \right. \\ & \left. \left. + ie [\gamma^\mu A_\mu(y), \exp(-\partial^\beta \partial_\beta / M^2) (\cosh(\rho \partial^\beta \partial_\beta / M^2) - \gamma_5 \sinh(\rho \partial^\beta \partial_\beta / M^2))] \right) \right. \\ & \left. \times \exp[-ik(x - y)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Al sustituir el desarrollo de la función de Green, se encuentra que la contribución de orden cero de la expansión es nula ya que después de hacer las integraciones pertinentes y tomar la traza queda el producto de un tensor simétrico por uno antisimétrico con los índices contraídos. Para el primer orden en el desarrollo se encuentra que después de algunas manipulaciones algebraicas que éste es idénticamente cero, y como en dos dimensiones los términos de mayor orden en el desarrollo de la función de Green son idénticamente cero se concluye que la contribución total de este término es cero.

El término con el coseno hiperbólico se reduce a

$$\begin{aligned} T_c = & -eTr \left( \int dx dy \frac{dk dq}{(2\pi)^4} G(x, y) \alpha(y) \exp[-ik(x - y)] \exp(-iqy) A_\mu(q) \right. \\ & \times \frac{1}{2} \left\{ \exp((1 + \rho)k^2 / M^2) [1 - \exp\{(1 + \rho)(-2k \cdot q + q^2) / M^2\}] + \right. \\ & \left. \left. + \exp((1 - \rho)k^2 / M^2) [1 - \exp\{(1 - \rho)(-2k \cdot q + q^2) / M^2\}] \right\} \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

en donde se introdujo la transformada de Fourier para  $A_\mu(y)$  y se reescribió el coseno en términos de exponenciales. Al sustituir el desarrollo de la función de Green se encuentra que sólo contribuye el término de orden cero. Al reescalar  $k \rightarrow Mp$ , y desarrollar cada uno de los términos entre parentesis cuadrados, tomando el límite  $M \rightarrow \infty$ , e integrando sobre  $p$  se obtiene un resultado independiente de  $\rho$  que es idéntico para cada uno de los términos y que al sumarse dan origen a la ec.(2.43). Entonces lo que resta por demostrar es que la parte del seno hiperbólico en (2.55) es idénticamente cero. El cálculo es muy similar al caso del coseno hiperbólico con la diferencia que los términos entre parentesis cuadrados se restan en lugar de sumarse y como son iguales el resultado es cero. Este resultado es muy interesante, ya que muestra que para obtener un miembro de la familia

de anomalías se pueden utilizar reguladores independientes para las transformaciones axial y vectorial, siempre y cuando los reguladores satisfagan (2.52).

Debe notarse que la condición (2.52) es suficiente pero no necesaria para obtener una anomalía correcta. La razón para esto es que la teoría original descrita por (1.61) sólo se recobra en el límite  $M \rightarrow \infty$  de los reguladores. Entonces bastará con imponer (2.52) solamente vecindad de este límite. Claramente, esto es menos restrictivo (pero más complicado de implementar) que la condición en la forma (2.52).

En este capítulo se propuso una nueva forma de regular el Jacobiano para calcular anomalías con integrales de trayectoria y se obtuvo plena concordancia entre los resultados obtenidos y los cálculos perturbativos en el caso de dos dimensiones. En capítulos siguientes se extenderá el método al cálculo de las anomalías vectorial y axial Abellana y no-Abelianas en más de dos dimensiones.

### III. ANOMALÍAS AXIAL Y VECTORIAL ABELIANAS EN MÁS DE DOS DIMENSIONES.

En dos dimensiones, utilizando la metodología propuesta en el capítulo anterior fue posible calcular las anomalías axial y vectorial abelianas usando el regulador

$$R = \exp(-\not{D}_a^2/M^2), \quad (3.1)$$

con

$$\not{D}_a = \gamma^\mu (\partial_\mu + ic_a A_\mu), \quad (3.2)$$

donde el parámetro real  $a$  permitió recuperar la familia completa de anomalías dada por (1.73) y (1.74). En este capítulo se quiere generalizar este cálculo en un mayor número de dimensiones y comparar los resultados con los obtenidos por el método de separación de punto. Esta generalización es directa siempre y cuando se considere que además de las simetrías axial y vectorial existen otras que también es necesario conservar.

Para el caso de la anomalía axial Abeliana se realiza el cálculo en cuatro dimensiones, utilizando primero al regulador (3.1) obteniéndose el resultado que dicha anomalía podría anularse sólo cuando el parámetro es imaginario. Como en este caso el cálculo es inconsistente se considera como siguiente punto la generalización a reguladores contruidos con operadores no Hermíticos  $\not{D}_a$  donde el parámetro  $a$  puede ser complejo. Se realiza también el cálculo con el regulador (3.1) en seis dimensiones y a partir de los resultados obtenidos se propone una generalización a  $2n$ -dimensiones. Para la anomalía vectorial utilizando el mismo regulador sólo se obtiene una expresión en cuatro dimensiones la cual es ya bastante complicada y que sin embargo sigue siendo una derivada total como en el caso de dos dimensiones. Este cálculo no se generaliza a  $2n$ -dimensiones debido a la enorme cantidad de términos que es necesario considerar en más de cuatro dimensiones.

#### III.1 ANOMALÍAS EN 4-DIMENSIONES CON PÁRAMETRO REAL.

Para calcular las anomalías se utilizarán las ecuaciones (2.38). Como primer paso se evaluará el segundo término de la ecuación (2.38b). El cálculo explícito de este



término en  $2n$ -dimensiones es relativamente simple y considerando que la evaluación de éste es equivalente a realizar el cálculo de Fujikawa en  $2n$ -dimensiones el resultado que se obtiene es interesante por derecho propio. Al calcular la traza sobre el espacio-tiempo para este término se obtiene

$$T_{A2} = -i \text{Tr}(2\beta \gamma_{D+1} R) = -2i \lim_{z \rightarrow y} \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr} \int dy \frac{dk}{(2\pi)^{2n}} \beta(y) \gamma_{D+1} \exp(-\not{D}_a^2/M^2) \exp[-ik(x-y)]. \quad (3.3)$$

Empleando el hecho que

$$\not{D}_a^2 = D_{a\mu} D_a^\mu + \frac{iae}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

y reescalando  $k \rightarrow Mp$  se tiene

$$T_{A2} = -2i \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr} \int dy \frac{dp}{(2\pi)^{2n}} M^{2n} \beta(y) \gamma_{D+1} \exp(p^2) \exp\left\{ \frac{-1}{M^2} [D_{a\mu} D_a^\mu + \frac{iae}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} + 2ip_\mu D_a^\mu M] \right\}. \quad (3.5)$$

Del desarrollo de la exponencial en (3.5) solamente pueden contribuir aquellos términos que vayan a lo más como  $1/M^{2n}$ . Además debido a la integración sobre  $p$  únicamente pueden contribuir aquellos que van multiplicados por una potencia par de  $M$ . Los que van multiplicados por una potencia impar se anulan por ser integrales impares en  $p$ . Por último, para que la traza sobre las matrices gama sea diferente de cero y dado que ésta contiene a la matriz  $\gamma_{D+1}$  es necesario que aparezcan cuando menos  $2n$ -matrices gama. Esto se logra considerando solamente el término  $\frac{iae}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}$  elevado a la potencia  $n$  en el desarrollo de la exponencial (3.5). Por lo tanto el único término que satisface estas condiciones es

$$\exp\left\{ -\frac{1}{M^2} [D_{a\mu} D_a^\mu + 2ip_\mu D_a^\mu M + \frac{iae}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}] \right\} \simeq \frac{(-1)^n}{n! M^{2n}} \left( \frac{iae}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} \right)^n. \quad (3.6)$$

Considerando que en  $2n$  ó  $2n+1$  dimensiones el algebra de Clifford asociada a los espinores de Dirac puede ser representada por matrices de dimensión  $2^n \times 2^n$  se obtiene que

$$\text{Tr}(\gamma_{D+1} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n}}) = 2^n \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2n}}. \quad (3.7)$$

Como

$$\int dp \exp(p^2) = \pi^n, \quad (3.8)$$

se obtiene

$$T_{A2} = \frac{-(-1)^n 2i(iac)^n}{n!(4\pi)^n} \int dy \beta(y) \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2n}} F_{\mu_1 \mu_2} \dots F_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}}, \quad (3.9)$$

al sustituir (3.6) en (3.5). Es fácil ver que la ecuación (3.9) concuerda con la (2.45) en el caso que  $n = 1$  (o sea en 2–dimensiones) y (2.17) en 4–dimensiones. Para dimensiones mayores el resultado concuerda con el de Frampton y Kephart [F3] y con el de Zumino, et al [Z1]. Esta es la primera parte del cálculo para obtener la anomalía axial empleando el regulador (3.1) con parámetro  $a$ . Aquí debe notarse un hecho importante: el parámetro aparece elevado a la potencia  $n$  lo que no ocurre cuando se emplea el método separación de punto, donde el parámetro queda elevado la primera potencia en el caso de cuatro dimensiones [J1]. Este hecho se va a ver fuertemente reflejado en el resultado final del cálculo de la anomalía axial abeliana.

Para evaluar la anomalía vectorial y el término restante de la axial es conveniente escribir éstos en forma unificada como

$$T_1 = i \text{Tr}(\not{D}^{-1} Q[\not{D}, R]), \quad (3.10)$$

donde

$$Q_V = \alpha I, \quad (3.11a)$$

$$Q_A = -\beta \gamma_5. \quad (3.11b)$$

Evaluando la traza sobre el espacio-tiempo Euclideo de  $2n$ –dimensiones en forma similar a como se hizo en 2–dimensiones se obtiene

$$\begin{aligned} T_1 = & -i(1-a)e \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr} \int dx dy \frac{dk dq}{(2\pi)^{4n}} \exp(-ikx) \exp[iy(k-q)] G(x, y) Q(y) A_\rho(q) \exp(k^2/M^2) \\ & \times \left\{ \gamma^\rho \exp \left[ \frac{-1}{M^2} (D_{\alpha\mu} D_\alpha^\mu + 2ik_\mu D_\alpha^\mu + \frac{iac}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}) \right] + \right. \\ & \left. - \exp \left[ \frac{-1}{M^2} (D_{\alpha\mu} D_\alpha^\mu - 2iq_\mu D_\alpha^\mu - q^2 + 2k_\mu q^\mu + 2ik_\mu D_\alpha^\mu + \frac{iac}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}) \right] \gamma^\rho \right\}. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Como primer paso se calculará la expresión (3.12) en 4–dimensiones. No obstante, muchas de las expresiones se escribirán en  $2n$ –dimensiones ya que se utilizarán posteriormente. Dado que la función de Green en 4–dimensiones diverge a lo más cúbicamente en el espacio de momentos, sólo es necesario considerar en el desarrollo de las exponenciales entre llaves en (3.12), términos que vayan a lo más como  $1/M^3$  una

vez que se haya hecho el rescalamiento  $k \rightarrow Mp$ . El resultado que se obtiene para este desarrollo es el siguiente

$$\begin{aligned} \{\}^\rho = & \left\{ \frac{1}{M} 2p_\mu q^\mu \gamma^\rho + \right. \\ & + \frac{1}{M^2} [iae(g^{\nu\rho} \gamma^\mu - g^{\rho\mu} \gamma^\nu) F_{\mu\nu} - (q^2 + 2iq_\mu D_\alpha^\mu + 2p_\mu p_\alpha q^\mu q^\alpha + 4ip_\mu p_\alpha q^\alpha D_\alpha^\mu) \gamma^\rho] + \\ & + \frac{1}{M^3} [ae p_\alpha (g^{\nu\rho} \gamma^\mu - g^{\rho\mu} \gamma^\nu) (F_{\mu\nu} D_\alpha^\alpha + D_\alpha^\alpha F_{\mu\nu}) - 2q_\alpha p_\mu (D_\alpha^\alpha D_\alpha^\mu + D_\alpha^\mu D_\alpha^\alpha) \gamma^\rho + 2iq^2 p_\mu D_\alpha^\mu \gamma^\rho + \\ & - 2p_\alpha q^\alpha (D_{\alpha\mu} D_\alpha^\mu + (iae/2) \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}) \gamma^\rho + 2p_\alpha q^\alpha (2iq_\mu D_\alpha^\mu + q^2) \gamma^\rho + \\ & \left. + \frac{4}{3} p_\mu p_\nu p_\alpha (q^\mu q^\nu q^\alpha + 3iq^\nu q^\alpha D_\alpha^\mu - 3q^\alpha D_\alpha^\mu D_\alpha^\nu) \gamma^\rho \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

El cálculo de la expresión (3.12) se llevará a cabo empleando la expansión de la función de Green en el espacio Euclideano

$$\begin{aligned} G(x, y) = & S_F(x - y) - ie \int dz S_F(x - z) A(z) S_F(z - y) + \\ & + (-ie)(-ie) \int dz dw S_F(x - z) A(z) S_F(z - w) A(w) S_F(w - y) + \dots, \end{aligned} \quad (3.14)$$

con

$$S_F(x - y) = i \int \frac{dp}{(2\pi)^{2n}} \exp[-ip(x - y)] S(p). \quad (3.15)$$

En primer lugar se considerará la contribución a orden cero

$$T_{10} = (1 - a) e \lim_{M \rightarrow \infty} Tr \int dy \frac{dp dq}{(2\pi)^{4n}} \exp(-iqy) \frac{-M^{2n}}{M\cancel{p} + m} Q(y) A_\rho(q) \exp(p^2) \{\}^\rho. \quad (3.16)$$

Para calcular (3.16) es necesario considerar el desarrollo de  $S(-Mp)$  en potencias de  $1/M$ , que es igual a

$$S(-Mp) = \frac{-1}{M\cancel{p} + m} = - \left[ \frac{\cancel{p}}{Mp^2} - \frac{m}{M^2 p^2} + \frac{m^2 \cancel{p}}{M^3 p^4} - \frac{m^3}{M^4 p^2} + \frac{m^4 \cancel{p}}{M^5 p^6} + \dots \right]. \quad (3.17)$$

cuyos términos no contienen productos de dos o más matrices gama.

En el caso de la anomalía axial, o sea cuando  $Q(y) = -\beta \gamma_5$ , se deben buscar términos en (3.13) que contengan cuando menos tres matrices gama, de tal manera que al sustituir en (3.16) y tomar la traza sea ésta diferente de cero. Haciendo ésto se encuentra

$$T_{10A} = \frac{ia(1-a)e^2}{2(4\pi)^2} \int dy \beta(y) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (3.18)$$

despues de integrar en  $p$  y  $q$ .

Para el caso de la anomalía vectorial, o sea cuando  $Q(y) = \alpha(y)I$  contribuyen los siguientes términos

$$\begin{aligned} T_{10V} = & -(1-a)e \lim_{M \rightarrow \infty} Tr \int dy \frac{dq dp}{(2\pi)^8} \exp(-iqy) \alpha(y) A_\rho(q) \exp(p^2) \times \\ & \times \left\{ 2 \frac{p_\alpha p_\mu}{p^2} (M^2 + m^2/p^2) q^\mu \gamma^\alpha \gamma^\rho + \right. \\ & + \frac{p_\alpha p_\mu}{p^2} [ae(g^{\nu\rho} \gamma^\mu - g^{\mu\rho} \gamma^\nu) (F_{\mu\nu} D_\alpha^\rho + D_\alpha^\rho F_{\mu\nu}) - 2q_\mu (D_\alpha^\mu D_\alpha^\rho + D_\alpha^\rho D_\alpha^\mu) \gamma^\rho + \\ & + 2iq^2 D_\alpha^\rho \gamma^\rho - q^\alpha (2D_{\alpha\mu} D_\alpha^\mu + ia e \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}) \gamma^\rho + 2q^\alpha (2iq_\mu D_\alpha^\mu + q^2) \gamma^\rho] \\ & \left. + (4/3) \frac{p_\eta p_\nu p_\alpha p_\mu}{p^2} (q^\mu q^\nu q^\alpha + 3iq^\nu q^\alpha D_\alpha^\mu - 3q^\alpha D_\alpha^\mu D_\alpha^\nu) \gamma^\eta \gamma^\rho \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Integrando sobre  $p$  y tomando las trazas respectivas se obtiene

$$\begin{aligned} T_{10V} = & -(1-a)e\pi^2 \lim_{M \rightarrow \infty} \int dy \frac{dq}{(2\pi)^8} \exp(-iqy) \alpha(y) A_\rho(q) \times \\ & \times \left\{ 2(M^2 - m^2) q^\rho + 2ae g^{\nu\rho} (F_{\mu\nu} D_\alpha^\mu + D_\alpha^\mu F_{\mu\nu}) - 2iae q_\beta F^{\beta\rho} \right. \\ & - 2q_\mu (D_\alpha^\mu D_\alpha^\rho + D_\alpha^\rho D_\alpha^\mu) + 2iq^2 D_\alpha^\rho - 2q^\rho D_{\alpha\mu} D_\alpha^\mu + 2q^\rho (2iq_\mu D_\alpha^\mu + q^2) + \\ & \left. - (4/9) (\delta_\nu^\rho g_{\alpha\mu} + \delta_\alpha^\rho g_{\nu\mu} + \delta_\mu^\rho g_{\nu\alpha}) (q^\mu q^\nu q^\alpha + 3iq^\nu q^\alpha D_\alpha^\mu - 3q^\alpha D_\alpha^\mu D_\alpha^\nu) \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Al tomar la transformada inversa de Fourier y calcular las contracciones en el último renglón de (3.20) se encuentra que es idéntico al tercer renglón de la misma expresión excepto por los coeficientes los multiplican siendo estos  $4/3$  y  $-2$  respectivamente. Al sumarlos resulta

$$\begin{aligned} T_{10V} = & \frac{-(1-a)e}{(4\pi)^2} \lim_{M \rightarrow \infty} \int dy \alpha(y) \left\{ 2(M^2 - m^2) \partial_\mu A^\mu - 2iae A^\nu (F_{\mu\nu} D_\alpha^\mu + D_\alpha^\mu F_{\mu\nu}) - 2iae \partial_\mu A_\nu F^{\mu\nu} + \right. \\ & - (2/3) [\partial_\mu A_\nu (D_\alpha^\mu D_\alpha^\nu + D_\alpha^\nu D_\alpha^\mu) + \partial_\mu \partial^\mu A_\nu D_\alpha^\nu + \partial_\mu A^\mu D_{\alpha\nu} D_\alpha^\nu + \\ & \left. + 2\partial^\mu \partial^\nu A_\nu D_{\alpha\mu} + \partial_\nu \partial^\nu \partial^\mu A_\mu] \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sustituyendo el valor de  $D_\alpha^\mu$  y considerando que este operador equivale a  $iae A_\mu$  cuando actua sobre la unidad se obtiene

$$T_{10V} = \frac{(1-a)e}{(4\pi)^2} \lim_{M \rightarrow \infty} \int dy \alpha(y) \partial_\mu \left\{ 2(m^2 - M^2) A^\mu + 2iae A_\nu F^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + (2/3) [\partial^\mu \partial^\nu A_\nu + iae [A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu (A^\mu A^\nu)] - a^2 e^2 A_\nu A^\nu A^\mu] \right\}. \quad (3.22)$$

después de ordenar adecuadamente.

Es relevante notar que a pesar de la regularización aún existe un término que va a infinito en el límite cuando  $M \rightarrow \infty$ , lo que no sucede con la anomalía axial. Este término será eliminado por un proceso de renormalización que se va a delinear más adelante. También debe observarse que esta parte de la anomalía vectorial Abelianas sigue siendo una derivada total como en el caso de dos dimensiones.

Como siguiente paso se considerará la función de Green a primer orden, sustituyéndola en (3.12) se obtiene

$$T_{11} = (1-a)e^2 \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr} \int dz dy \frac{dk dq dt}{(2\pi)^{6n}} \left\{ \exp[iy(k+t-q)] \exp[-iz(k+t)] \right. \\ \left. \times S(-k) A(z) S(t) Q(y) A_\rho(q) \exp(k^2/M^2) \right\}^\rho. \quad (3.23)$$

Con el cambio de variables  $r = -(k+t)$ ,  $k = k$ , tomando en cuenta que

$$A_\alpha(r) = -i \int dz A_\alpha(z) \exp(izr), \quad (3.24)$$

y reescalando  $k \rightarrow Mp$  se obtiene

$$T_{11} = (1-a)ie^2 \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Tr} \int dy \frac{dp dq dr}{(2\pi)^{6n}} M^{2n} \left\{ \exp[-iy(q+r)] \right. \\ \left. \times S(-Mp) \gamma^\alpha S(-Mp-r) Q(y) A_\alpha(r) A_\rho(q) \exp(p^2) \right\}^\rho. \quad (3.25)$$

Para evaluar (3.25) es necesario conocer el desarrollo en potencias de  $M$  de  $S(-Mp) \gamma^\alpha S(-Mp-r)$ , el cual está dado como

$$S(-Mp) \gamma^\alpha S(-Mp-r) = \frac{\cancel{p} \gamma^\alpha \cancel{p}}{M^2 p^4} + \frac{1}{M^3} \left[ \frac{\cancel{p} \gamma^\alpha r}{p^4} - \frac{2p^\alpha m}{p^4} - \frac{2(p \cdot r) \cancel{p} \gamma^\alpha \cancel{p}}{p^6} \right] + \\ + \frac{1}{M^4} \left[ \frac{(2m^2 - r^2) \cancel{p} \gamma^\alpha \cancel{p}}{p^6} - \frac{2p \cdot r \cancel{p} \gamma^\alpha \cancel{p}}{p^6} + \frac{4mp \cdot r p^\alpha}{p^6} + \frac{m^2 \gamma^\alpha - m \gamma^\alpha \cancel{r}}{p^4} \right] + \\ + \frac{1}{M^5} \left[ \frac{\cancel{p} \gamma^\alpha \cancel{p}}{p^4} \left( \frac{4(p \cdot r) r^2}{p^4} - \frac{6m^2 p \cdot r}{p^4} - \frac{2(p \cdot r)^3}{p^6} \right) + \frac{\cancel{p} \gamma^\alpha \cancel{p}}{p^4} \left( \frac{2m^2 - r^2}{p^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4(p \cdot r)^2}{p^4} \right) - \frac{2mp^\alpha}{p^4} \left( \frac{2m^2 - r^2}{p^2} + \frac{4(p \cdot r)^2}{p^4} \right) \right] + \dots \quad (3.26)$$

Sustituyendo el desarrollo (3.26) en (3.25) y considerando la expresión (3.13), se observa que en 4-dimensiones sólo hay contribuciones a (3.26) hasta el término que va como  $1/M^3$ . Ordenando conforme a los tensores generados por  $p_\alpha$  se tiene para (3.25) lo siguiente

$$\begin{aligned}
T_{11} = & (1-a)ie^2 Tr \int dy \frac{dq dp dr}{(2\pi)^{12}} \exp[-iy(q+r)] A_\alpha(r) A_\rho(q) \exp(p^2) \times \\
& \times \left\{ 2\gamma^\beta Q(y) [iae(g^{\nu\rho}\gamma^\mu - g^{\mu\rho}\gamma^\nu) F_{\mu\nu} - \gamma^\rho(2iq_\mu D_\alpha^\mu + q^2)] \frac{p^\alpha p^\beta}{p^4} + \right. \\
& - 2\gamma^\beta Q(y) \gamma^\rho (4iq^\eta D_\alpha^\mu + 2q^\mu q^\eta) \frac{p^\alpha p^\beta p^\mu p^\eta}{p^4} - \gamma^\alpha Q(y) [iae(g^{\nu\rho}\gamma^\mu - g^{\mu\rho}\gamma^\nu) F_{\mu\nu} + \\
& - \gamma^\rho(2iq_\mu D_\alpha^\mu + q^2)] \frac{1}{p^2} + \gamma^\alpha Q(y) \gamma^\rho (4iq^\eta D_\alpha^\mu + 2q^\mu q^\eta) \frac{p^\mu p^\eta}{p^2} + 2r_\eta q^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\eta Q(y) \gamma^\rho \frac{p^\beta p^\mu}{p^4} + \\
& \left. - 8r_\eta q^\mu \gamma^\beta Q(y) \gamma^\rho \frac{p^\alpha p^\eta p^\beta p^\mu}{p^6} + 4r^\eta q^\mu \gamma^\alpha Q(y) \gamma^\rho \frac{p^\eta p^\mu}{p^4} \right\}. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Integrando con respecto a  $p$  y reordenando resulta

$$\begin{aligned}
T_{11} = & (1-a)i(e\pi)^2 Tr \int dy \frac{dq dr}{(2\pi)^{12}} \exp[-iy(q+r)] A_\alpha(r) A_\rho(q) \left\{ (iae/2) \gamma^\alpha Q(y) (g^{\nu\rho}\gamma^\mu - g^{\mu\rho}\gamma^\nu) F_{\mu\nu} + \right. \\
& - \gamma^\alpha Q(y) \gamma^\rho r_\mu q^\mu - (1/12) \gamma^\beta Q(y) \gamma^\rho (4iq^\eta D_\alpha^\mu + 2q^\mu q^\eta - 4r^\eta q^\mu) (\delta_\beta^\alpha g_{\mu\eta} + \delta_\mu^\alpha g_{\beta\eta} + \delta_\eta^\alpha g_{\beta\mu}) + \\
& \left. - (1/2) r_\eta q_\beta \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\eta Q(y) \gamma^\rho \right\}. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

Para la anomalía axial se observa que la única contribución de (3.28) proviene del último término, dado que es el único que contiene cuatro matrices gama, con lo que se obtiene

$$T_{11A} = \frac{i(1-a)e^2}{2(4\pi)^2} \int dy \beta(y) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \tag{3.29}$$

Para la anomalía vectorial si hay contribución de todos los términos en (3.28). Tomando la traza se tiene

$$\begin{aligned}
T_{11V} = & i(1-a)(e\pi)^2 \int dy \frac{dq dr}{(2\pi)^{12}} \alpha(y) \exp[-iy(q+r)] A_\rho(q) A_\alpha(r) \left[ 4iae F^{\alpha\rho} + \right. \\
& \left. - (1/3) (g^{\rho\alpha} g^{\mu\nu} + g^{\rho\mu} g^{\alpha\nu} + g^{\rho\nu} g^{\alpha\mu}) (4iq_\nu D_{\alpha\mu} + 2q_\mu q_\nu + 2r_\nu q_\mu) \right]. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Calculando las transformadas inversas y reordenando se encuentra finalmente

$$T_{11V} = \frac{(1-a)e}{(4\pi)^2} \int dy \alpha(y) (2/3) \partial_\mu \{ 2ae^2 A_\nu A^\nu A^\mu - ie [A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu (A^\mu A^\nu)] \}. \quad (3.31)$$

Por último se calcula la contribución de segundo orden en el desarrollo de la función de Green (3.14) en la expresión (3.12). Al sustituir resulta

$$T_{12} = (1-a)e^3 \lim_{M \rightarrow \infty} \int dy dz dw \frac{dk dq dt dr}{(2\pi)^{8n}} \exp(k^2/M^2) \exp[iy(k+t-q)] \exp[-iz(k+r)] \times \\ \times \exp[iw(r-t)] S(-k) A(z) S(r) A(w) S(t) Q(y) A_\rho(q) \{ \}^\rho. \quad (3.32)$$

Realizando los cambios de variable  $b = -(k+r)$ ,  $c = r-t$ ,  $k = k$ , utilizando (3.24), y reescalando se obtiene

$$T_{12} = (1-a)e^3 \lim_{M \rightarrow \infty} \int dy \frac{dp dq db dc}{(2\pi)^{8n}} M^{2n} \exp(p^2) \exp[-iy(b+c+q)] A_\rho(q) A_\eta(b) A_\sigma(c) \\ S(-Mp) \gamma^\eta S(-Mp-b) \gamma^\sigma S(-Mp-b-c) Q(y) \{ \}^\rho. \quad (3.33)$$

Para calcular (3.33) es necesario conocer la expresión explícita de  $S_2^{\eta\sigma} = S(-Mp) \gamma^\eta S(-Mp-b) \gamma^\sigma S(-Mp-b-c)$  la cual está dada como

$$S_2^{\eta\sigma} = -\frac{1}{Mp+m} \gamma^\eta \frac{1}{Mp+b+m} \gamma^\sigma \frac{1}{Mp+b+\ell+m} \\ S_2^{\eta\sigma} = -\frac{M^3 p^\eta p^\sigma p + M^2 [p^\eta p^\sigma (b+\ell) - m p^\eta p^\sigma - m p^\eta \gamma^\sigma p]}{M^6 p^6 (1 - \frac{m^2}{M^2 p^2}) (1 + \frac{Mp \cdot b + b^2 - m^2}{M^2 p^2}) (1 + \frac{2M(p \cdot b + p \cdot c + c \cdot b) + a^2 + b^2}{M^2 p^2})} + \\ -\frac{M [p^\eta b \gamma^\sigma c + p^\eta b \gamma^\sigma b - m p^\eta b \gamma^\sigma - m p^\eta \gamma^\sigma (b+\ell) + m^2 p^\eta \gamma^\sigma]}{M^6 p^6 (1 - \frac{m^2}{M^2 p^2}) (1 + \frac{Mp \cdot b + b^2 - m^2}{M^2 p^2}) (1 + \frac{2M(p \cdot b + p \cdot c + c \cdot b) + a^2 + b^2}{M^2 p^2})}. \quad (3.34)$$

En 4-dimensiones el único término de (3.34) que puede contribuir a (3.33) es  $p^\eta p^\sigma p / M^3 p^6$ , ya que al sustituir el desarrollo (3.13) todos los otros términos van a cero en el límite cuando  $M \rightarrow \infty$ . De un análisis del mismo tipo se concluye que los términos de mayor orden en el desarrollo de la función de Green ya no van a contribuir a las anomalías axial y vectorial Abelianas en cuatro dimensiones, puesto que éstos van cuando menos como  $1/M^4$  y al ser multiplicados por (3.13) se anulan en el límite  $M \rightarrow \infty$ . Por lo tanto al sustituir (3.34) en (3.33) e integrar sobre  $p$  se obtiene

$$T_{12} = -(1-a)e^3 \pi^2 Tr \int dy \frac{dq db dc}{(2\pi)^{16}} \exp[-iy(b+c+q)] A_\rho(q) A_\eta(b) A_\sigma(c) \times \\ \times (1/12) q^\mu (g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) \gamma^\nu \gamma^\eta \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\beta Q(y) \gamma^\rho. \quad (3.35)$$

Tomando las transformadas inversas de Fourier se tiene

$$T_{12} = \frac{(1-a)e^3}{12(4\pi)^2} Tr \int dy A_\eta A_\sigma \partial^\mu A_\rho (g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) \gamma^\nu \gamma^\eta \gamma^\alpha \gamma^\sigma \gamma^\beta Q(y) \gamma^\rho. \quad (3.36)$$

Al realizar las contracciones indicadas y utilizar propiedades bien conocidas del algebra de Dirac se obtiene

$$T_{12} = \frac{(1-a)e^3}{12(4\pi)^2} Tr \int dy [-2A_\eta A^\eta \partial_\mu A_\nu \gamma^\mu Q(y) \gamma^\nu - 4A_\eta A_\alpha \partial^\alpha A_\rho \gamma^\eta Q(y) \gamma^\rho]. \quad (3.37)$$

De (3.37) se observa que la contribución a la anomalía axial es cero, dado que en este caso la traza es nula. Sin embargo, para la anomalía vectorial hay una contribución que está dada como

$$T_{12V} = \frac{-(1-a)e^3}{(4\pi)^2} \int dy \alpha(y) (2/3) \partial_\mu (A_\nu A^\nu A^\mu). \quad (3.38)$$

Finalmente, sumando las contribuciones (3.18), (3.29) y la correspondiente a cuatro dimensiones de (3.9) se obtiene para la anomalía axial el siguiente resultado

$$T_A = \frac{(a^2 + 1)ie^2}{2(4\pi)^2} \int dy \beta(y) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (3.39)$$

Analogamente sumando las contribuciones (3.22), (3.31), y (3.38) para la anomalía vectorial se obtiene

$$T_V = \frac{(1-a)e}{(4\pi)^2} \lim_{M \rightarrow \infty} \int dy \alpha(y) \partial_\mu \left\{ 2(m^2 - M^2) A^\mu + 2ia\epsilon A_\nu F^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + (2/3) [\partial^\mu \partial^\nu A_\nu - i\epsilon(1-a)(A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu (A^\mu A^\nu)) - \epsilon^2(1-a)^2 A_\nu A^\nu A^\mu] \right\}. \quad (3.40)$$

Si en las expresiones (3.39) y (3.40) se pone  $a = 1$ , la ecuación (3.39) da el resultado de Fujikawa (2.17) para la anomalía axial y la anomalía vectorial es cero, lo que muestra que el cálculo realizado es correcto al menos en estos límites. De la ec(3.40) para la anomalía vectorial se observa que el término infinito proveniente de la ec.(3.22) no se ha eliminado con las otras contribuciones, sin embargo éste puede ser cancelado sumando un contratérmino  $C_1$  a la densidad Lagrangiana original. Este método fue empleado por primera vez por Bardeen [B3] con el fin de eliminar infinitos en el cálculo



de las anomalías axial y vectorial no-Abelianas. El contratérmino que se debe utilizar para eliminar el término infinito en (3.40) es

$$C_1 = \frac{(1-a)e^2}{(4\pi)^2} \lim_{M \rightarrow \infty} \int dy (m^2 - M^2) A_\mu A^\mu. \quad (3.41)$$

Introducir el contratérmino  $C_1$  en una redefinición de la densidad Lagrangiana está permitido ya que éste es una funcional local del campo externo y corresponde al tipo de ambigüedades a que la acción efectiva  $\Gamma[A]$  está sujeta. Para mostrar explícitamente como el contratérmino (3.41) elimina el término infinito de (3.40) se debe recordar que  $\frac{\delta \hat{\Gamma}[A]}{\delta A_\mu} = -e J_V^\mu$ , en donde  $\hat{\Gamma}[A]$  es la acción efectiva a la que se le agregó el contratérmino y  $J_V^\mu$  es la corriente vectorial redefinida. Análogamente al cálculo efectuado en la sección 1.2 es posible mostrar que

$$\frac{\delta \hat{\Gamma}[(A + \delta A)_\psi]}{\delta \alpha} = \frac{\delta \hat{\Gamma}[(A + \delta A)]}{\delta \alpha} = -\partial_\mu J^\mu = -\frac{\delta \ln J(\alpha)}{\delta \alpha} + 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{e(1-a)(m^2 - M^2)}{(4\pi)^2} \partial_\mu A^\mu. \quad (3.41a)$$

en donde el subíndice  $\psi$  indica que se ha realizado el cambio (1.7a) en las variables fermiónicas. Como  $T_V = \ln J(\alpha)$ , al derivar funcionalmente (3.40), el término infinito es cancelado por el término extra en (3.41a), de modo que la identidad de Ward resultante es

$$\partial_\mu J_V^\mu = \frac{(1-a)e}{(4\pi)^2} \partial_\mu \{ 2ia\epsilon A_\nu F^{\mu\nu} + (2/3)[\partial^\mu \partial^\nu A_\nu - ie(1-a)(A_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu(A^\mu A^\nu)) - e^2(1-a)^2 A_\nu A^\nu A^\mu] \} \quad (3.42)$$

Por otra parte se podría pensar que el contratérmino (3.41) contribuye a la anomalía axial pero esto no sucede así. Una manera sencilla de demostrarlo es recordar como se obtuvo la identidad de Ward (1.10b) para esta anomalía. Lo que se realizó fue derivar funcionalmente con respecto al parámetro asociado a la transformación axial  $\beta$  en los fermiones y como este parámetro no corresponde a ninguna transformación de norma, el contratérmino  $C_1$  no cambia. Así su derivada funcional con respecto al parámetro es cero y por lo tanto no contribuye a la anomalía axial. Es posible agregar otros contratérminos para modificar la ec.(3.40), sin embargo se prefiere dejarla así para después comparar el resultado obtenido con el que se logra por el método de separación de punto. En todas las ecuaciones anteriores la carga  $e$  y la masa  $m$ , corresponden en realidad la carga y la masa desnudas respectivamente ya que todavía no se han renormalizado.

### III.2 ANOMALÍA AXIAL ABELIANA CON PARÁMETRO COMPLEJO

La ecuación (3.39) muestra que al estar el parámetro elevado al cuadrado no hay manera de anular esta anomalía dentro del intervalo de valores permitidos para éste. La única manera en que la anomalía axial abeliana calculada con el regulador (3.1) en 4-dimensiones se haga cero corresponde al caso  $\alpha = \pm i$ , lo que implicaría que el operador  $\mathcal{D}_\alpha$  deja de ser Hermítico. Por lo tanto  $\mathcal{D}_\alpha^2$  no es positivo definido y no se tiene la garantía que el regulador funcione adecuadamente. Esto motiva el estudio de la regularización con operadores no Hermíticos que ya han sido usados en contextos diferentes en la literatura [E1], [M3], [A8], [B2], [G4], [G5]. En algunos casos se ha utilizado una extensión analítica al cambiar  $A_\mu$  por  $iA_\mu$  obteniéndose resultados que concuerdan con otros métodos pero no con aquellos que son más cercanos al espíritu del cálculo de Fujikawa[F2], que requiere la necesidad de un operador de regularización semi-definido positivo de la forma  $\mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}$ . El tomar  $\alpha = \pm i$  en (3.39) está en el espíritu de hacer la extensión analítica, por lo cual es interesante ver que sucede al considerar un regulador de la forma

$$R_\alpha = \exp[-(\mathcal{D}_\alpha^\dagger \mathcal{D}_\alpha)/M^2], \quad (3.43)$$

con  $\alpha$  complejo y

$$\mathcal{D}_\alpha^\dagger = \gamma^\mu (\partial_\mu + ie\bar{\alpha}A_\mu), \quad (3.44)$$

donde se ha empleado el hecho que las matrices gama son anti-Hermíticas. Si al calcular la anomalía axial con el regulador (3.43) se encuentra que ésta es cero para  $\alpha = \pm i$  se podría concluir que la extensión analítica es válida para el método que se está utilizando en este trabajo y si sucede lo contrario significaría que regular con (3.43) implica que se está diagonalizando en una base diferente a la empleada al regular con (3.1) y que está dada por las funciones propias del operador  $\mathcal{D}_\alpha$  con  $\alpha$  real [F4]. Este tipo de problema va a ser analizado con mayor detenimiento en el siguiente capítulo en el contexto de las anomalías no-Abelianas.

Para realizar el cálculo de la anomalía axial con el regulador (3.43) se va a utilizar como punto de partida la expresión general (2.38b). Tomando la traza sobre el espacio-tiempo para el primer término de esta ecuación se obtiene, en  $2n$ -dimensiones,

$$F_1 = -i \lim_{M \rightarrow \infty} Tr \int dx dy \frac{dk}{(2\pi)^{2n}} G(x, y) \beta(y) \gamma_{D+1} [\gamma^\rho (\partial_\rho + ieA_\rho), R_\alpha] \exp[-ik(x - y)]. \quad (3.45)$$

$F_1$  tiene esencialmente dos partes las cuales son

$$F_{11} = -i \lim_{M \rightarrow \infty} Tr \int dx dy \frac{dk}{(2\pi)^{2n}} G(x, y) \beta(y) \gamma_{D+1} [\gamma^\rho \partial_\rho, R_a] \exp[-ik(x-y)]. \quad (3.46)$$

$$F_{12} = ie \lim_{M \rightarrow \infty} Tr \int dx dy \frac{dk dq}{(2\pi)^{4n}} G(x, y) \beta(y) A_\rho(q) \gamma_{D+1} [\gamma^\rho \exp(-iqy), R_a] \exp[-ik(x-y)]. \quad (3.47)$$

Tomando en cuenta el hecho que

$$\not{D}_a^\dagger \not{D}_a = D_{a\mu}^\dagger D_a^\mu + ie\sigma_{\mu\nu} [aF_{\mu\nu} + (a - \bar{a}) A_\nu \partial_\mu], \quad (3.48)$$

se tiene en (3.46) que la acción del regulador está dada como

$$[\gamma^\rho \partial_\rho, R_a] \exp(iky) = \exp(iky) (ik_\rho [\gamma^\rho, R_k] + \gamma^\rho \partial_\rho R_k), \quad (3.49)$$

donde

$$R_k = \exp(k^2/M^2) \exp\left\{ \frac{-1}{M^2} [D_{a\mu}^\dagger D_a^\mu + ie\sigma_{\mu\nu} (aF_{\mu\nu} + 2(a - \bar{a}) A_\nu \partial_\mu) + ik_\mu (D_a^\mu + D_a^{\dagger\mu}) - 2ek_\mu (a - \bar{a}) \sigma^{\mu\nu} A_\nu] \right\}. \quad (3.50)$$

Sustituyendo (3.49) en (3.46) se obtiene

$$F_{11} = -i \lim_{M \rightarrow \infty} Tr \int dx dy \frac{dk}{(2\pi)^{2n}} \exp[-ik(x-y)] G(x, y) \beta(y) \gamma_{D+1} \{ ik_\rho [\gamma^\rho, R_k] + \gamma^\rho \partial_\rho R_k \}. \quad (3.51)$$

Desarrollando el conmutador en  $F_{12}$  resulta lo siguiente

$$F_{12} = ie Tr \int dx dy \frac{dk dq}{(2\pi)^{4n}} \exp(-ikx) \exp[iy(k-q)] G(x, y) \beta(y) A_\rho(q) \gamma_{D+1} (\gamma^\rho R_k - R_{k-q} \gamma^\rho), \quad (3.52)$$

con

$$R_{k-q} = \exp(k^2/M^2) \exp\left\{ \frac{-1}{M^2} \left[ D_{a\mu}^\dagger D_a^\mu - q^2 - iq_\mu (D_a^\mu + D_a^{\dagger\mu}) + ie\sigma^{\mu\nu} [aF_{\mu\nu} + 2(a - \bar{a}) A_\nu (\partial_\mu - iq_\mu)] + ik_\mu (D_a^\mu + D_a^{\dagger\mu}) + 2k \cdot q - 2e(a - \bar{a}) k_\mu A_\nu \sigma^{\mu\nu} \right] \right\}. \quad (3.53)$$

Para calcular las expresiones (3.51) y (3.52) es necesario realizar el desarrollo de la función de Green (3.14). Aquí se tomarán en cuenta solamente términos hasta primer

orden, debido a que los términos de orden superior no contribuyen por razones similares a las del cálculo que se realizó en la sección anterior (ver ec.(3.37)). En los pasos intermedios del cálculo se encuentran expresiones que con términos cúbicos en  $A_\mu$ , sin embargo estos no van a contribuir al resultado final. La razón esencial es que las únicas posibilidades para obtener un término cúbico diferente de cero es que éste sea de la forma  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\gamma A^\gamma\partial_\mu A_\nu\partial_\alpha A_\beta$ , o  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A_\alpha\partial_\mu\partial^\mu A_\beta\partial_\gamma A_\delta$ . Sin embargo, al realizar el cálculo explícito de estos términos se encuentra que un gran número no tiene la estructura antes mencionadas, ya sea porque no tienen tres derivadas o éstas están distribuidas de manera diferente. El que no se tengan términos cúbicos concuerda con el teorema de Adler-Bardeen [A8] el cual establece que la anomalía axial renormalizada es de la forma (3.39) o sea que no hay contribuciones de mayor orden. Este teorema ha sido probado de muy diversas maneras [A8], [B4], [C2], [L1]. Inclusive el cálculo de la anomalía axial abeliana (3.39) se podría considerar como una prueba modesta de este teorema en la cual se toman en cuenta todos los reguladores que son función del parámetro  $a$ . En este punto habría que remarcar que existen diversas opiniones acerca de si el método de integrales de trayectoria puede o no representar una prueba del teorema de Adler-Bardeen. En primer lugar en la prueba perturbativa del teorema se toman en cuenta diagramas que incluyen fotones internos y dado que aquí se está considerando al campo electromagnético como un campo externo se podría concluir que este tipo de diagramas no son considerados en el cálculo que se realizó para obtener (3.39). Sin embargo se puede pensar que el teorema de Adler-Bardeen se sigue si la integración funcional sobre el campo electromagnético  $A_\mu$  y el límite cuando  $M \rightarrow \infty$  conmutan, no es evidente que este sea el caso, pero Fujikawa [F5] a mostrado que al menos para la anomalía ante transformaciones de escala locales esto si sucede. No obstante existen otros puntos de vista como el de Joglekar y Misra [J3] y [D2] que consideran que hay correcciones de mayor orden a la anomalía axial abeliana. Pero tomando en cuenta que existe una prueba del teorema de Adler-Bardeen que es independiente del esquema de regularización [L1] y que utiliza una metodología completamente diferente es razonable suponer que este teorema es correcto. En base a esto en los cálculos siguientes no se tomarán en cuenta explícitamente los términos cúbicos. Sustituyendo la expansión a primer orden de la función de Green (3.14) en (3.51) resulta

$$F_{110} = Tr \int dy \frac{d^p}{(2\pi)^{2n}} M^{2n} S(-Mp)\beta(y)\gamma_{D+1} (iMp_\rho[\gamma^\rho, R_p] + \gamma^\rho\partial_\rho R_p) \exp(p^2). \quad (3.54)$$

$$F_{111} = ieTr \int dy \frac{dr dp}{(2\pi)^{4n}} M^{2n} \exp(-iyr) A_\alpha(r) S(-Mp) \gamma^\alpha S(-Mp-r) \times \\ \times \beta(y) \gamma_{D+1} (iMp_\rho [\gamma^\rho, R_p] + \gamma^\rho \partial_\rho R_p) \exp(p^2). \quad (3.55)$$

Analogamente para  $F_{12}$  se tienen que evaluar las expresiones

$$F_{120} = -eTr \int dy \frac{dp dq}{(2\pi)^{4n}} M^{2n} \exp(-iyq) A_\rho(q) S(-Mp) \beta(y) \gamma_{D+1} (\gamma^\rho R_p - R_{p-q} \gamma^\rho) \exp(p^2). \quad (3.56)$$

$$F_{121} = -ie^2 Tr \int dy \frac{dp dq dr}{(2\pi)^{6n}} M^{2n} \exp[-iy(r+q)] A_\alpha(r) A_\rho(q) S(-Mp) \gamma^\alpha S(-Mp-r) \times \\ \times \beta(y) \gamma_{D+1} (\gamma^\rho R_p - R_{p-q} \gamma^\rho) \exp(p^2). \quad (3.57)$$

Por otra parte para el segundo término de (2.38b) se tiene

$$F_2 = -2iTr \int dy \frac{dp}{(2\pi)^{2n}} M^{2n} \beta(y) \gamma_{D+1} R_p \exp(p^2). \quad (3.58)$$

En las expresiones (3.54 – 57)  $R_p$  y  $R_{p-q}$  están dados por

$$R_p = \exp\left[\frac{-1}{M^2}(B + MC)\right]. \quad (3.59)$$

$$R_{p-q} = \exp\left\{\frac{-1}{M^2}[B + E + M(C + H)]\right\}. \quad (3.60)$$

donde

$$B = D_{\alpha\mu}^\dagger D_\alpha^\mu + ie\sigma^{\mu\nu} [aF_{\mu\nu} + 2(a - \bar{a})A_\nu \partial_\mu]. \quad (3.61)$$

$$C = ip_\mu (D_\alpha^\mu + D_\alpha^{\dagger\mu}) - 2e(a - \bar{a})p_\mu A_\nu \sigma^{\mu\nu}. \quad (3.62)$$

$$E = -q^2 - iq_\mu (D_\alpha^\mu + D_\alpha^{\dagger\mu}) + 2e(a - \bar{a})q_\mu A_\nu \sigma^{\mu\nu}. \quad (3.63)$$

$$H = 2p \cdot q. \quad (3.64)$$

Dado que al calcular  $F_{110}$ ,  $F_{111}$ ,  $F_{120}$ ,  $F_{121}$ , y  $F_2$  se debe tomar el límite cuando  $M \rightarrow \infty$ , sólo se tienen que considerar aquellos términos que contribuyan en este

límite, cuya traza sea diferente de cero y que sus integrales sobre  $p$  sean pares. Para identificar estos términos es necesario expandir  $R_p$  y  $R_{p-q}$  en potencias de  $(1/M)$ . En cuatro dimensiones, observando los desarrollos (3.17) para  $S(-Mp)$  y (3.26) para  $S(-Mp)\gamma^\alpha S(-Mp-r)$  se tiene que a lo más es necesario considerar términos que vayan como  $(1/M^4)$  para  $R_p$  y  $(1/M^3)$  para  $R_{p-q}$ , porque términos de mayor orden ya no contribuyen. El desarrollo para  $R_p$ , al orden considerado es

$$R_p = 1 - \frac{C}{M} + \frac{1}{M^2} \left( \frac{C^2}{2} - B \right) + \frac{1}{M^3} \left( \frac{-C^3}{3!} + \frac{CB + BC}{2} \right) + \frac{1}{M^4} \left( \frac{B^2}{2} - \frac{CBC + C^2B + BC^2}{3!} + \frac{C^4}{4!} \right). \quad (3.65)$$

El desarrollo para  $R_{p-q}$  se obtiene por sustituir en (3.65)  $B \rightarrow B + E$  y  $C \rightarrow C + H$ .

Sustituyendo (3.65), la expresión similar para  $R_{p-q}$ , y las expansiones (3.17) y (3.26); en las ecuaciones (3.54 – 58) se obtiene lo siguiente

$$F_{110} = -Tr \int dy \frac{dp}{(2\pi)^4} \beta(y) \frac{\not{p}}{p^2} \gamma_s \exp(p^2) \times \\ \times \left\{ ip_\rho \left[ \gamma_\rho, \frac{B^2}{2} - \frac{CBC + C^2B + BC^2}{3!} \right] + \gamma^\rho \partial_\rho \left( \frac{BC + CB}{2} - \frac{C^3}{3!} \right) \right\}. \quad (3.66)$$

$$F_{111} = -ieTr \int dy \frac{dpdr}{(2\pi)^8} \exp(p^2) \exp(-iyr) \beta(y) A_\alpha(r) \gamma_s \times \\ \left\{ \frac{p_\kappa p_\chi}{p^4} (2g^{\alpha\chi} \gamma^\kappa - g^{\kappa\chi} \gamma^\alpha) \left[ ip_\rho [\gamma^\rho, \frac{CB + BC}{2}] + \gamma^\rho \partial_\rho \left( \frac{C^2}{2} - B \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{p_\kappa r_\chi}{p^4} \gamma^\kappa \gamma^\alpha \gamma^\chi \left( ip_\rho [\gamma^\rho, \frac{C^2}{2} - B] - \gamma^\rho \partial_\rho C \right) + \right. \\ \left. + 2p \cdot r \frac{p_\kappa p_\chi}{p^6} (2g^{\alpha\chi} \gamma^\kappa - g^{\kappa\chi} \gamma^\alpha) \gamma^\rho \partial_\rho C \right\}. \quad (3.67)$$

$$F_{120} = -eTr \int dy \frac{dpdq}{(2\pi)^8} \exp(-iyq) \exp(p^2) \beta(y) A_\rho(q) \frac{p_\alpha}{p^2} \gamma_s \gamma^\alpha \times \\ \times \left\{ [\gamma^\rho, \frac{CB + BC}{2} - \frac{C^3}{3!}] + \frac{(CH^2 + C^2H) \gamma^\rho}{2} - \frac{(CE + EC + 2HB + 2HE) \gamma^\rho}{2} \right\}. \quad (3.68)$$

$$F_{121} = ie^2 Tr \int dy \frac{dpdqdr}{(2\pi)^{12}} \exp[-iy(q+r)] \exp(p^2) A_\alpha(r) A_\rho(q) \gamma_s \times \\ \left\{ \frac{p_\kappa p_\chi}{p^4} (2g^{\alpha\chi} \gamma^\kappa - g^{\kappa\chi} \gamma^\alpha) (E + B - CH) \gamma^\rho + \frac{p_\kappa r_\chi}{p^4} \gamma^\kappa \gamma^\alpha \gamma^\chi ([C, \gamma^\rho] + H \gamma^\rho) \right\}. \quad (3.69)$$

$$F_2 = -2iTr \int dy \frac{dp}{(2\pi)^4} \exp(p^2) \beta(y) \gamma_s \left( \frac{B^2}{2} - \frac{CBC + C^2B + BC^2}{3!} + \frac{C^4}{4!} \right). \quad (3.70)$$

Sustituyendo los valores de  $B, C, E,$  y  $H$  de las ecuaciones (3.61 – 64) en cada una de las expresiones anteriores y realizando una gran cantidad de algebra, donde se utilizan las relaciones

$$[\gamma^\rho, \sigma^{\mu\nu}] = g^{\mu\rho} \gamma^\nu - g^{\nu\rho} \gamma^\mu, \quad (3.71)$$

$$A_\nu A_\lambda p_\mu p_\eta \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\eta\lambda} = (1/4)[(A \cdot p)^2 - p^2 A^2], \quad (3.72)$$

$$p_\mu p_\alpha \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} = (1/4) p_\mu p_\alpha [2g^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} \gamma^\nu \gamma^\alpha - g^{\mu\alpha} \gamma^\nu \gamma^\beta]. \quad (3.73)$$

Se obtienen finalmente los resultados siguientes

$$F_{110} = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \int dy \beta(y) (-1/4) a(a + \bar{a}) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (3.74)$$

$$F_{111} = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \int dy \beta(y) (-a/2) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (3.75)$$

$$F_{120} = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \int dy \beta(y) (\bar{a}/2) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (3.76)$$

$$F_{121} = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \int dy \beta(y) (1/2) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (3.77)$$

$$F_2 = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \int dy \beta(y) (1/3) (a^2 + \bar{a}^2 + a\bar{a}) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (3.78)$$

Sumando todas las contribuciones se encuentra que la anomalía axial Abelian para el regulador (3.43) está dada como

$$F = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \int dy \beta(y) (1/12) (a^2 + a\bar{a} + 4\bar{a}^2 + 6\bar{a} - 6a + 6) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (3.79)$$

La dependencia en el parámetro de ecuación (3.79) es mucho más compleja que la (3.39) pero se reduce a ésta en el caso que  $a$  es real o sea cuando  $a = \bar{a}$ . Además en este caso se puede comprobar que la suma de (3.74) y (3.76) es igual a (3.18) y que la suma de (3.75) y (3.77) también se reduce a (3.29). El hecho que se cumplan todos estos límites da seguridad que el cálculo de (3.79) es correcto a pesar de ser tan poco

estético. Si en (3.79) se pone  $a = \pm i$  se encuentra un resultado diferente de cero en contraposición de lo que se podría esperar si se considera que el resultado (3.39) sigue siendo correcto para  $a$  complejo. Asumiendo que  $a$  es de la forma  $a = b + id$  con  $b$  y  $d$  reales se encuentran las siguientes ecuaciones que éstos deben satisfacer para el caso que se desee tener la anomalía axial Abeliiana igual a cero

$$6b^2 - 4d^2 + 6 = 0, \quad (3.80a)$$

$$bd + 2d = 0, \quad (3.80b).$$

La solución de este sistema es

$$a = -2 \pm i \frac{\sqrt{30}}{2}. \quad (3.81)$$

Resumiendo, se puede decir que para el caso del regulador (3.1) es imposible tener una anomalía axial Abeliiana igual a cero si se considera que este resultado solamente es válido cuando el parámetro  $a$  es real. Por otra parte para el regulador (3.43) la anomalía axial Abeliiana es cero para  $a$  dado por (3.81), un resultado mucho más complicado que el que se obtiene en dos dimensiones o en otro método de cálculo tal como separación de punto. Para poder comparar más claramente con éste método en la sección siguiente se va evaluar la anomalía vectorial Abeliiana con un parámetro utilizando separación de punto.



### III.3 MÉTODO DE SEPARACIÓN DE PUNTO Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Como la anomalía axial Abeliãna en 4-dimensiones ha sido evaluada en la literatura utilizando el método de separación de punto con parámetro arbitrario [J1], sólo se establece el resultado el cual es

$$\partial_{\mu} J_5^{\mu} = \frac{(1+a)e^2}{2(4\pi)^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (3.82)$$

El cálculo de la anomalía vectorial Abeliãna en 4-dimensiones con un parámetro no se encontró reportado en la literatura, sólo se encontró para  $a = 1$  en [H1]. Sin embargo, el cálculo realizado en [H1] por Hagen es muy poco cuidadoso; por lo cual aquí se va a realizar con todo detalle. Como punto de partida se toma la divergencia de la ec.(1.64) que está dada como

$$\partial_{\mu} j_V^{\mu}(x | \epsilon | a) = ie j_V^{\mu}(x | \epsilon | a) \left\{ A_{\mu}(x + \epsilon/2) - A_{\mu}(x - \epsilon/2) - a \partial_{\mu} \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} A^{\alpha}(y) dy_{\alpha} \right\}. \quad (3.83)$$

Para calcular (3.83) se utilizó la ec. de Dirac en un campo electromagnético externo para sustituir las derivadas con respecto a los campos fermiónicos. Todos los cálculos realizados en esta sección, así como el resultado (3.82), están en el espacio de Minkowski. Para comparar estos resultados con aquellos que se obtuvieron en el espacio Euclideoano lo único que se tiene que hacer es multiplicar a estos últimos por  $i$ .

Si se toma el valor promedio de la ec.(3.83) se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} J_V^{\mu} = & -ie \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{Tr} \gamma^{\mu} G(x - \epsilon/2, x + \epsilon/2) \times \\ & \times \left[ A_{\mu}(x + \epsilon/2) - A_{\mu}(x - \epsilon/2) - a \partial_{\mu} \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} A^{\alpha}(y) dy_{\alpha} \right] \exp \left[ -iae \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} A^{\alpha}(y) dy_{\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Lo que se hace normalmente en este punto es expandir a  $\mathcal{O}(\epsilon)$  los campos y resolver las integrales también a  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Sin embargo, al considerar sólo estos términos no se toma en cuenta que la función de Green a orden cero diverge cúbicamente y que por lo tanto es posible tener otras contribuciones finitas a mayores ordenes de la expansión en  $\epsilon$ . Para examinar todas las posibles contribuciones es necesario realizar los cálculos hasta  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ . Si se calcúa hasta  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ , la ec.(3.84) queda como

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_V^\mu = & -ie \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr \gamma^\mu G(x - \epsilon/2, x + \epsilon/2) \left\{ \epsilon^\alpha (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha) + \frac{\epsilon^\alpha \epsilon^\sigma \epsilon^\rho}{24} [\partial_\rho \partial_\sigma \partial_\alpha A_\mu - a \partial_\rho \partial_\sigma \partial_\mu A_\alpha] \right\} \times \\ & \times \left[ 1 - ia\epsilon \epsilon^\sigma A_\sigma - \frac{(a\epsilon)^2}{2} \epsilon^\sigma \epsilon^\chi A_\sigma A_\chi \right]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Para obtener (3.85) se toma en cuenta que a  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  la integral de línea que aparece en (3.84) está dada como

$$\int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} A^\alpha(y) dy_\alpha = \int_0^1 A_\alpha[x + (s-1/2)\epsilon] \epsilon^\alpha ds = \epsilon^\alpha A_\alpha(x) + (1/24)\epsilon^\eta \epsilon^\delta \epsilon^\alpha \partial_\eta \partial_\delta A_\alpha(x).$$

Al hacer el producto en (3.85) se tiene

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_V^\mu = & -ie \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr \gamma^\mu G(x - \epsilon/2, x + \epsilon/2) \left\{ (\epsilon^\alpha - ia\epsilon \epsilon^\sigma A_\sigma) (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha) + \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon^\alpha \epsilon^\sigma \epsilon^\rho}{2} [(1/12)\partial_\rho \partial_\sigma \partial_\alpha A_\mu - (a/12)\partial_\rho \partial_\sigma \partial_\mu A_\alpha - (a\epsilon)^2 A_\sigma A_\rho (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

A continuación se denota la divergencia de la corriente vectorial como  $H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots$ , donde el subíndice en cada término indica el orden de la función de Green empleada en el cálculo. A orden cero se obtiene

$$\begin{aligned} H_0 = & -ie \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \exp(ip\epsilon) \gamma^\mu \frac{(\not{p} - m)}{p^2 - m^2} \left\{ (\epsilon^\alpha - ia\epsilon \epsilon^\sigma A_\sigma) (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha) + \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon^\alpha \epsilon^\sigma \epsilon^\rho}{2} [(1/12)\partial_\rho \partial_\sigma \partial_\alpha A_\mu - (a/12)\partial_\rho \partial_\sigma \partial_\mu A_\alpha - (a\epsilon)^2 A_\sigma A_\rho (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Tomando la traza resulta

$$\begin{aligned} H_0 = & -4ie \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \exp(ip\epsilon) \frac{p^\mu}{p^2 - m^2} \left\{ (\epsilon^\alpha - ia\epsilon \epsilon^\sigma A_\sigma) (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha) + \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon^\alpha \epsilon^\sigma \epsilon^\rho}{2} [(1/12)\partial_\rho \partial_\sigma \partial_\alpha A_\mu - (a/12)\partial_\rho \partial_\sigma \partial_\mu A_\alpha - (a\epsilon)^2 A_\sigma A_\rho (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

El término que va como  $\epsilon$  en la expresión anterior y que diverge cuadráticamente en el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , se va a regular introduciendo un regulador de Pauli-Villars. De esta manera dicha divergencia se va a poner en forma semejante a la del término correspondiente en (3.40), obteniéndose

$$H_{01} = -4ie \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \exp(ip\epsilon) p^\mu \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} - \frac{1}{p^2 - M^2} \right] \epsilon^\alpha (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha). \quad (3.89)$$

Utilizando (1.72a) e integrando por partes se obtiene

$$H_{01} = 4e \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \exp(ip\epsilon) (m^2 - M^2) \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left[ \frac{p^\mu}{(p^2 - m^2)(p^2 - M^2)} \right] (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha). \quad (3.90)$$

Tomando en este momento el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , y observando que el integrando no se amortigua lo suficientemente rápido como para poder concluir por el teorema de Gauss que la integral es cero, se va a integrar sobre una superficie  $p = R$ . Utilizando el hecho que

$$\int_{r=R} \partial^\nu f(r) = 2i\pi^2 R^\nu R^2 f(R), \quad (3.91)$$

y tomándose después el límite simétrico ( $\lim_{R \rightarrow \infty, s} f(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{f(R) + f(-R)}{2} \right)$ ). Obtenién- dose el resultado

$$H_{01} = \frac{ie(1-a)}{(4\pi)^2} \lim_{M \rightarrow \infty} 2(m^2 - M^2) \partial_\mu A^\mu. \quad (3.92)$$

Para obtener (3.92) se utilizó que el límite simétrico cuando  $R \rightarrow \infty$  da en este caso

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{R^\alpha R^\mu R^2}{(R^2 - m^2)(R^2 - M^2)} \right] = \frac{g^{\alpha\mu}}{4}. \quad (3.93)$$

El resultado obtenido en (3.92) es idéntico al término divergente en (3.40). En forma similar a como se hizo con ese término, la contribución de (3.92) puede ser eliminada por la introducción de un contratérmino. Para el resto de los términos en (3.88), em- pleando la iteración de (1.72a) dos y tres veces para los términos que van como  $\epsilon^2$  y  $\epsilon^3$  respectivamente, e integrando por partes también dos y tres veces se tiene

$$H_{02} = -4ie \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \exp(ip\epsilon) \left\{ iae A_\sigma (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha) \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\sigma} \left( \frac{p^\mu}{p^2 - m^2} \right) + \right. \\ \left. - (i/24) [(\partial_\rho \partial_\sigma - 12(ac)^2 A_\sigma A_\rho) (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha)] \frac{\partial^3}{\partial p_\alpha \partial p_\sigma \partial p_\rho} \left( \frac{p^\mu}{p^2 - m^2} \right) \right\}. \quad (3.94)$$

Tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , y empleando (3.91) para integrar, se obtiene

$$H_{02} = \frac{8\epsilon\pi^2}{(2\pi)^4} \lim_{R \rightarrow \infty} R^\alpha R^2 \left\{ i a \epsilon A_\sigma (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha) \frac{\partial}{\partial R_\sigma} \left( \frac{R^\mu}{R^2 - m^2} \right) + \right. \\ \left. - (i/24) [(\partial_\rho \partial_\sigma - 12(a\epsilon)^2 A_\sigma A_\rho) (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha)] \frac{\partial^2}{\partial R_\sigma \partial R_\rho} \left( \frac{R^\mu}{R^2 - m^2} \right) \right\}. \quad (3.95)$$

Las derivadas con respecto a  $R_\sigma$  en (3.95) son

$$\frac{\partial}{\partial R_\sigma} \left( \frac{R^\mu}{R^{2n}} \right) = \frac{g^{\mu\sigma}}{R^{2n}} - (2n) \frac{R^\mu R^\sigma}{R^{2n+2}}, \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R_\sigma \partial R_\rho} \left( \frac{R^\mu}{R^{2n}} \right) = -2n \frac{R^\mu g^{\rho\sigma} + R^\rho g^{\mu\sigma} + R^\sigma g^{\mu\rho}}{R^{2n+2}} + 2n(2n+2) \frac{R^\mu R^\rho R^\sigma}{R^{2n+4}}. \quad (3.97)$$

Al tomar el límite simétrico  $R \rightarrow \infty$  en (3.95) empleando (3.96) se ve que el primer término es cero, ya que contiene un número impar de factores  $R_\sigma$ . Para el segundo término utilizando (3.93) y dado que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^\alpha R^\mu R^\rho R^\sigma}{R^4} = (1/24)(g^{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} + g^{\alpha\rho} g^{\mu\sigma} + g^{\alpha\sigma} g^{\mu\rho}), \quad (3.98)$$

se obtiene

$$H_{02} = \frac{2i\epsilon(1-a)}{3(4\pi)^2} \partial_\mu [(1/4)\partial_\alpha \partial^\alpha A^\mu - (a\epsilon)^2 A_\alpha A^\alpha A^\mu]. \quad (3.99)$$

Sumando las ecuaciones (3.92) y (3.99) se obtiene la contribución total para el orden cero de la función de Green

$$H_0 = \frac{2i\epsilon(1-a)}{(4\pi)^2} \lim_{M \rightarrow \infty} \partial_\mu [(m^2 - M^2)A^\mu + (1/12)\partial_\alpha \partial^\alpha A^\mu - (1/3)(a\epsilon)^2 A_\alpha A^\alpha A^\mu]. \quad (3.100)$$

El resultado (3.100) contiene parte de los sumandos que se encuentran en (3.40) con la excepción de los términos cuadráticos en  $A_\mu$ , y se anula para  $a = 1$  como es lo deseado.

Considerando que el término a primer orden en el desarrollo de la función de Green (1.70) diverge a lo más cuadráticamente, se tiene al sustituir en la ec.(3.86) que sólo es necesario considerar términos  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ , obteniéndose

$$H_1 = -i\epsilon^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr \int dz \frac{dk dp}{(2\pi)^8} \exp[-ik(x - \epsilon/2 - z)] \exp[-ip(z - x - \epsilon/2)] \gamma^\mu S(k) A(z) S(p) \times \\ \times [(\epsilon^\alpha - i a \epsilon \epsilon^\alpha \epsilon^\sigma A_\sigma) (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha)]. \quad (3.101)$$

Con los cambios de variable  $q = k - p$  y  $r = (1/2)(k + p)$ , utilizando el equivalente de (3.24) en el espacio de Minkowski para escribir la transformada de Fourier, haciendo uso de la ec.(1.72b) para sustituir  $\epsilon_\alpha$  por  $\frac{\partial}{\partial r_\alpha}$  e integrando por partes se obtiene

$$H_1 = -ie^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr \int \frac{dq dr}{(2\pi)^8} \exp(-ixq) \exp(i\epsilon r) A_\rho(q) (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha) \times \\ \times \left\{ i \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left[ \gamma^\mu S\left(\frac{2r+q}{2}\right) \gamma^\rho S\left(\frac{2r-q}{2}\right) \right] + iae A_\sigma \frac{\partial^2}{\partial r_\alpha \partial r_\sigma} \left[ \gamma^\mu S\left(\frac{2r+q}{2}\right) \gamma^\rho S\left(\frac{2r-q}{2}\right) \right] \right\}. \quad (3.102)$$

Tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , integrando y eliminando todos aquellos términos del desarrollo de  $S\left(\frac{2r+q}{2}\right) \gamma^\rho S\left(\frac{2r-q}{2}\right)$  que vayan evidentemente a cero cuando  $R \rightarrow \infty$ , o que tienen traza nula resulta

$$H_1 = 2(\epsilon\pi)^2 \lim_{R \rightarrow \infty} Tr \int \frac{dq}{(2\pi)^8} \exp(-ixq) A_\rho(q) (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha) R^\alpha R^2 \gamma^\mu \gamma^\eta \gamma^\rho \gamma^\chi \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{R_\eta R_\chi + (1/2)(R_\chi q_\eta - R_\eta q_\chi)}{R^4} \right] \left( 1 - \frac{R \cdot q}{R^2} \right) \left( 1 + \frac{R \cdot q}{R^2} \right) + iae A_\sigma \frac{\partial}{\partial R_\sigma} \left( \frac{R_\eta R_\chi}{R^4} \right) \right\}. \quad (3.103)$$

Como  $Tr(\gamma^\mu \gamma^\eta \gamma^\rho \gamma^\alpha - \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\eta) = 0$  y el término con  $R_\eta R_\chi$  sin derivadas no contribuye en el límite simétrico por ser impar, se tiene que no hay contribución de términos cuadráticos en  $A_\mu$ . Para el término que contiene  $\frac{\partial}{\partial R_\sigma}$  se obtiene, después de tomar el límite, la traza y la transformada inversa, lo siguiente

$$H_1 = \frac{4ie^3 a(1-a)}{3(4\pi)^2} \partial_\mu (A^\mu A^\nu A_\nu). \quad (3.104)$$

El cálculo de  $H_0$  y  $H_1$  muestra que no existen contribuciones cuadráticas en  $A_\mu$  a la anomalía vectorial. Estos cálculos son parte de la verificación explícita que el método de regularización por separación de punto es invariante ante conjugación de carga. Esta propiedad se puede verificar directamente de la expresión (3.84), ya que está ecuación transforma ante conjugación de carga como

$$H \rightarrow -ie \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Tr -\gamma^\mu G(x - \epsilon/2, x + \epsilon/2) \times \\ \times \left[ -A_\mu(x + \epsilon/2) + A_\mu(x - \epsilon/2) + a \partial_\mu \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} A^\alpha(y) dy_\alpha \right] \exp \left[ +iae \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} A^\alpha(y) dy_\alpha \right],$$

donde se ha utilizado que ante conjugación de carga  $C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu t}$ ,  $CS_F(x, y)C^{-1} = S_F^t(y, x)$  y  $A_\mu \rightarrow -A_\mu$ . Como el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  es simétrico es posible cambiar  $\epsilon \rightarrow -\epsilon$ .

Intercambiando los límites de las integrales se obtiene finalmente que  $H$  transforma de acuerdo a

$$H \rightarrow -H$$

siendo ésta la forma de transformación correcta ante conjugación de carga de la corriente vectorial. Lo mismo puede realizarse en el caso de la anomalía axial demostrando con ello que el método de separación de punto es invariante ante conjugación de carga.

Utilizando los argumentos anteriores de invariancia ante conjugación de carga Hagen [H1] elimina de partida la contribución del término de primer orden en el desarrollo de la función de Green. Sin embargo, se ve de (3.104) que existe una contribución de este término la anomalía con  $a \neq 1$ . Dicha contribución se hace cero para  $a = 1$  como debe de ser.

Para la contribución de segundo orden de la función de Green (1.70) en la ecuación (3.85), el único término que da un resultado no nulo es el lineal en  $\epsilon$ . Este hecho trae como consecuencia que los siguientes ordenes en el desarrollo de la función de Green ya no contribuyen porque van a cero en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . De esta manera se obtiene

$$H_2 = -i\epsilon^3 Tr \int dzdw \frac{dpdqdk}{(2\pi)^{12}} \exp[iz(p-q)] \exp[ix(k-p)] \exp[iw(q-k)] \exp[(i\epsilon/2)(k+p)] \times \quad (3.105)$$

$$\times \gamma^\mu S(p) A(z) S(q) A(w) S(k) \epsilon^\alpha (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha).$$

Usando los cambios de variable  $a = p-q$ ,  $b = q-k$ ,  $c = (k+p)/2$ , tomando las transformadas de Fourier de  $A_\delta(z)$  y  $A_\beta(w)$ , empleando la ec.(1.72a) para transformar la  $\epsilon$ , integrando por partes, y tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  resulta

$$H_2 = \epsilon^3 Tr \int \frac{dadbdc}{(2\pi)^{12}} \exp[-ix(a+b)] A_\delta(a) A_\beta(b) (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha) \times \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_\alpha} \left[ S\left(\frac{a+b+2c}{2}\right) \gamma^\delta S\left(\frac{b-a+2c}{2}\right) \gamma^\beta S\left(\frac{2c-a-b}{2}\right) \right].$$

Haciendo uso de la ec.(3.91) para integrar sobre  $\epsilon$  y eliminando todos los términos que van a cero en el límite simétrico  $R \rightarrow \infty$  se tiene

$$H_2 = 2i\pi^2 \epsilon^3 Tr \int \frac{dadbd}{(2\pi)^{12}} \exp[-ix(a+b)] A_\delta(a) A_\beta(b) (\partial_\alpha A_\mu - a \partial_\mu A_\alpha) \times \quad (3.107)$$

$$\times \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{R^2 R^\alpha R_\sigma R_\eta R_\rho}{R^6} \right) Tr \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\delta \gamma^\eta \gamma^\beta \gamma^\rho.$$

Utilizando (3.98) para calcular el límite, tomando la traza, sacando las transformadas inversas y reordenando se obtiene como resultado final para la contribución al término de segundo orden de la función de Green lo siguiente

$$H_2 = \frac{-2ie^3(1-a)}{3(4\pi)^2} \partial_\mu (A_\nu A^\nu A^\mu). \quad (3.108)$$

Sumando las contribuciones de (3.100), (3.104) y (3.108) resulta finalmente que la anomalía vectorial abeliana está dada por

$$\partial_\mu J_V^\mu = \frac{ie(1-a)}{(4\pi)^2} \lim_{M \rightarrow \infty} \partial_\mu [2(m^2 - M^2)A^\mu + (1/6)\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - (2/3)e^2(1-a)^2 A_\nu A^\nu A^\mu]. \quad (3.109)$$

Cuando se usa el método de separación de punto con parámetro arbitrario.

Las ecuaciones (3.82) y (3.109) representan los resultados para las anomalías axial y vectorial respectivamente que se obtienen en 4-dimensiones empleando el método de separación de punto. Las expresiones (3.39) y (3.40) son el resultado análogo del método de regularización que se propone en el capítulo 2 y que está basado en la formulación de la Teoría Cuántica de Campos en base a integrales de trayectoria. El empleo de ambos reguladores muestra explícitamente que es imposible mantener al nivel cuántico la conservación simultánea de las corrientes axial y vectorial. En la electrodinámica cuántica la corriente de norma es la vectorial lo que implica por motivos de consistencia en las ecuaciones de movimiento que es imprescindible exigir su conservación. Esto significa tomar  $a = 1$  en las ecuaciones antes mencionadas, y por lo tanto la corriente axial no se conserva ni aún en el límite de fermiones de masa cero. Para  $a = 1$  ambos métodos de regularización coinciden.

La diferencia en las ecuaciones (3.39) y (3.82) está en que la primera tiene el parámetro elevado al cuadrado. Esto implica que es imposible anular la anomalía axial para alguna elección de éste. Aún cuando esta situación no interesa físicamente es un tanto extraño que se pierda esta libertad que en principio se manifiesta en los cálculos hechos con reguladores alternativos como por ejemplo el método de separación de punto, donde la anomalía puede anularse para  $a = 1$ . Sin embargo, dicha libertad se recupera cuando se permite que el parámetro  $a$  sea complejo dando como resultado que la anomalía axial se anula para el valor en (3.81). Es interesante hacer notar que esta diferencia no se presenta en el caso de dos dimensiones donde ambos métodos de cálculo son totalmente equivalentes, ya que dan lugar a la misma familia de anomalías.

En el caso de la anomalía vectorial Abeliانا los resultados (3.40) y (3.109) muestran varias similitudes y una diferencia fundamental. Ambas ecuaciones tienen un término infinito idéntico, inclusive en el factor, que puede ser eliminado por la inclusión del contratérmino (3.41) a la densidad Lagrangiana. Los términos cúbicos de las dos expresiones son también idénticos. El término lineal finito en  $A_\mu$  tiene la misma forma en ambas ecuaciones pero difiere en el coeficiente. No obstante, éste puede ser eliminado por la adición del contratérmino

$$C_2 = \frac{-ce^2(1-a)}{(4\pi)^2} \int d^4y \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu. \quad (3.110)$$

con  $c = 1/3$  en el caso de la ecuación (3.40) y  $c = 1/12$  para (3.109). Por lo tanto este término no marca ninguna diferencia real entre las expresiones (3.40) y (3.109). La diferencia radica en la presencia de términos cuadráticos en la ecuación (3.40), mientras que (3.109) no los tiene. Este es un grave problema con la prescripción propuesta en el capítulo 2 de este trabajo, dado que la existencia de estos términos cuadráticos implica la no invariancia ante conjugación de carga de la expresión (3.10) en el caso de la anomalía vectorial abeliana. Si se compara la ecuación (3.10) con (3.84) se nota que ambas tienen una función de Green y el resto corresponde a la parte del regulador. Del cálculo realizado de ambas expresiones se puede notar una gran diferencia en el hecho que en la parte del regulador de (3.84) no hay momentos, mientras que aún para  $a = 0$  estos aparecen en la expresión explícita de (3.10) dada en la ecuación (3.12). Esto implica que términos impares en los momentos provenientes de la función de Green si contribuyan a (3.40), mientras que por ejemplo en la ecuación (3.103) no lo hacen. Esto origina una ruptura en la invariancia ante conjugación de carga de (3.40) incluso para  $a = 0$ . Por otra parte, en la demostración de la invariancia ante conjugación de carga del método de separación de punto tuvo gran importancia el hecho que el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  fuera simétrico. Esto hace pensar que lo que le falta a la expresión (3.10) para ser invariante ante conjugación de carga es algún tipo de simetrización. Ante esta situación es importante revisar el comportamiento de la expresión (2.33) bajo la operación de conjugación de carga, ya que esta ecuación es el punto de partida de todos los cálculos realizados anteriormente. Recordando que la operación de conjugación de carga implica reemplazar  $A_\mu \rightarrow -A_\mu$ ,  $\psi \rightarrow C\bar{\psi}^t$ ,  $\bar{\psi} \rightarrow \psi^t C^{-1}$  y utilizar el hecho que  $C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu t}$ . Esta última expresión permite mostrar que en  $D = 2n$ -dimensiones  $C\gamma_{D+1} C^{-1} = (-1)^n \gamma_{D+1}^t$ . Tomando ésto en cuenta se obtiene que las corrientes vectorial  $j_V^\mu$  y axial-vectorial  $j_A^\mu$  transforman ante conjugación de carga como



$$j_V^\mu \rightarrow -j_V^\mu, \quad (3.111a)$$

$$j_A^\mu \rightarrow (-1)^n j_A^\mu. \quad (3.111b)$$

Esta propiedad sigue siendo válida al nivel de la Electrodinámica Cuántica, por lo tanto las anomalías deben cumplirla. En esta teoría el operador de Dirac  $\not{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)$  transforma bajo conjugación de carga como

$$\not{D} \rightarrow \not{D}^T \quad (3.112)$$

donde el superíndice  $T$  indica la trasposición en las matrices gama y en el espacio-tiempo. En particular se tiene  $\partial_\mu^T = -\partial_\mu$ . Para estudiar el comportamiento de la expresión (2.33) ante conjugación de carga se considerará el regulador (3.1), que de acuerdo a (3.112) transforma como

$$\exp(-\not{D}_\alpha^2/M^2) \rightarrow [\exp(-\not{D}_\alpha^2/M^2)]^T. \quad (3.113)$$

Por último, como las simetrías  $K$  y  $L$  son  $K = L = i\beta(x)\gamma_{D+1}$  en el caso axial y  $K = -L = i\alpha(x)$  en el vectorial se tiene que en  $4n$  dimensiones

$$K \rightarrow K^T \quad (3.114a)$$

$$L \rightarrow L^T. \quad (3.114b)$$

En  $4n + 2$ -dimensiones en el caso axial  $K$  y  $L$  se transforman en  $-K^T$  y  $-L^T$  respectivamente y en el vectorial  $K$  y  $L$  se transforman de la misma manera que en (3.114). Tomando en cuenta que interesa principalmente el caso de cuatro dimensiones donde se satisfacen (3.114a-b), solamente se analizará éste. De las expresiones (3.112), (3.113) y (3.114) resulta que la ecuación (2.33) transforma bajo conjugación de carga como

$$\ln J_R(\eta) \rightarrow -\text{Tr}(LR + KR - L\not{D}^{-1}[\not{D}, R]). \quad (3.115)$$

Esta ecuación muestra que la parte correspondiente al conmutador de (2.33) no transforma adecuadamente bajo conjugación de carga, ya sea en el caso vectorial o axial-vectorial. Para resolver este problema, se debe recordar que la expresión (2.32) y a partir de ella la (2.33), se obtuvo bajo una prescripción de donde colocar el regulador, la cual

no era única. En realidad existen nueve posibilidades de donde colocar el regulador. Al examinar todas las alternativas se encuentra que cuatro dan origen a la expresión de Fujikawa (ec.(2.35)), que es invariante ante conjugación de carga, pero que adolece de otro tipo de dificultades como ya se menciono anteriormente. Otras dos posibilidades dan origen a la prescripción (2.33) y otras dos dan lugar a la expresión

$$\ln J_{R2}(\eta) = -\text{Tr}(LR + KR - K\mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}, R]). \quad (3.116)$$

Esta prescripción tampoco es invariante ante conjugación de carga.

Sin embargo, el promedio aritmético de las ecuaciones (2.33) y (3.116)

$$\ln J_{R3}(\eta) = -\text{Tr}\left(LR + KR + \frac{\mathcal{D}^{-1}L[\mathcal{D}, R] - K\mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}, R]}{2}\right). \quad (3.117)$$

si lo es. Esto se puede mostrar de la manera siguiente: La ecuación (3.117) transforma bajo conjugación de carga como

$$\ln J_{R3}(\eta) \rightarrow -\text{Tr}\left(LR + KR + \frac{-L\mathcal{D}^{-1}[\mathcal{D}, R] + \mathcal{D}^{-1}K[\mathcal{D}, R]}{2}\right). \quad (3.118)$$

En el caso específico de la anomalía para la corriente axial-vectorial  $K = L$ , por lo que al sustituir en (3.118) se encuentra que la expresión (3.117) es invariante ante conjugación de carga tal como lo es la corriente (3.11b) en  $4n$ -dimensiones. Para el caso de la anomalía vectorial  $K = -L$  y sustituyendo en (3.118) se encuentra que la ecuación (3.117) transforma tal como lo hace la corriente vectorial (3.11a). Así se llega a la conclusión que el el caso de la Electrodinámica Cuántica el punto de partida correcto para calcular las anomalías es la expresión (3.117). De todas las posibilidades de colocar el regulador en (2.32) sólo una da lugar a una ecuación equivalente a (3.117). Esto significa, que el preservar la invariancia ante conjugación de carga a nivel cuántico fija la posición del regulador en la expresión (2.32).

Para la anomalía axial abeliana tanto en dos como en cuatro dimensiones, los cálculos realizados con la prescripción (2.33) resultaron transformar correctamente ante conjugación de carga. Esto implica que en este caso los términos que rompen la invariancia ante conjugación de carga de la expresión (2.33) van a cero en el límite  $M \rightarrow \infty$ . Al utilizar la ecuación (3.117) como la prescripción adecuada lo único que se está realizando en  $4n$  dimensiones es sumar el término conjugado de carga de la parte correspondiente al conmutador en (2.33), el cual es idéntico al obtenido previamente, y dividir entre dos. Es decir, los resultados que se obtienen con (3.117) ó (2.33) son los

mismos para la anomalía axial. En  $4n+2$  dimensiones, al utilizar la ecuación (3.117) resulta que se resta el conjugado de carga, en lugar de sumarse. Pero tomando en cuenta que en  $4n+2$  dimensiones la anomalía axial es impar en los campos  $A_\mu$ , nuevamente se obtiene el mismo resultado al aplicar (3.117) ó (2.33).

Para la anomalía vectorial abeliana, la prueba que la ecuación (3.117) transforma adecuadamente bajo conjugación de carga es válida en  $2n$  dimensiones. Esto significa que al resultado obtenido en (2.33) siempre es necesario restarle el conjugado de carga, con lo que se obtiene que la anomalía vectorial abeliana únicamente contiene términos impares en los campos  $A_\mu$ . Por lo tanto, el resultado de calcular la anomalía vectorial en cuatro dimensiones, utilizando la ecuación (3.117) es

$$\partial_\mu J_V^\mu = \frac{-2(1-a)^3}{3(4\pi)^2} \partial_\mu (A_\nu A^\nu A^\mu). \quad (3.119)$$

Esta misma expresión se obtiene utilizando el método de separación de punto cuando se suman los contratérminos adecuados a la acción efectiva.

Así la expresión (3.117) que se obtuvo a partir de la formulación de la Teoría Cuántica de Campos con integrales de trayectoria da lugar a resultados para las anomalías abelianas vectorial y axial vectorial que son equivalentes a los obtenidos por el método de separación de punto, tanto en dos como en cuatro dimensiones.

### III.4 ANOMALÍA AXIAL EN 6-DIMENSIONES Y $2n$ -DIMENSIONES

Por último en este capítulo se va a calcular la anomalía axial en 6-dimensiones, este cálculo es interesante para investigar el comportamiento de las anomalías con respecto al parámetro en dimensiones mayores. Lo que se quiere mostrar es que en  $4k+2$ -dimensiones es posible tener una anomalía axial abeliana igual a cero para un parámetro real utilizando como método de cálculo la ecuación (2.38b), la cual da resultados equivalentes a la expresión (3.117) en lo que respecta a la anomalía axial. Como regulador se empleará (3.1).

En lo que corresponde al método de separación de punto se espera que siempre de lugar a un factor de  $(1+a)$  en la anomalía axial. Esta afirmación se fundamenta en el hecho que en  $D=2n$  dimensiones, una traza sobre las matrices gama que contenga a  $\gamma_{D+1}$  sólo es diferente de cero si por lo menos tiene  $2n$  matrices gama. Por otra parte, considerando que el término de orden  $n$  en el desarrollo de la función de Green tiene a lo más  $2n+1$  matrices gama se sigue que la primera contribución no nula puede provenir

del término de orden  $n - 1$ . Pero tomando en cuenta que el sumando que contiene este número de matrices diverge a lo más linealmente, se sigue que sólo es necesario considerar términos de  $\mathcal{O}(\epsilon)$  en el regulador. El término de orden  $n$  en el desarrollo de la función de Green da una contribución nula al considerar la invariancia ante conjugación de carga del método de separación de punto. Los términos de mayor orden se anulan en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Al únicamente contribuir términos de  $\mathcal{O}(\epsilon)$  la dependencia en el parámetro será de  $(1 + \alpha)$  y como sólo contribuye el orden  $n - 1$  en el desarrollo de la función de Green la anomalía axial tiene la forma (3.9) con  $n$  tensores de campo electromagnético.

Se va a ver ahora que sucede con el método que se propone en este trabajo. Una de las dos partes de que consta la ec.(2.38b) ya ha sido evaluada en  $2n$ -dimensiones, ésta es la ec.(3.9). A la contribución de esta ecuación en  $6$ -dimensiones es necesario sumarle la que se obtenga para  $6$ -dimensiones de (3.12). El primer paso para evaluar (3.12) es darse cuenta que en  $6$ -dimensiones la función de Green a lo más diverge a la quinta potencia en los momentos. Entonces es necesario considerar en el desarrollo de las exponenciales entre llaves de (3.12) únicamente los términos que vayan como  $1/M^5$  una vez realizado el reescalamiento.

Los términos en el desarrollo de la función de Green que pueden contribuir son los cero, primero y segundo ordenes. El término de tercer orden no contribuye por que ocurre algo similar a cuando se calculó la contribución a la anomalía axial del término de segundo orden: la traza sobre las matrices gama da cero. Los cálculos que se necesita realizar son muy similares a los llevados a cabo en cuatro dimensiones, por lo cual solamente se mostrarán unos pocos pasos intermedios.

A orden cero en la función de Green se tiene la expresión (3.16) con  $n = 3$ . Como  $S(-M_p)$  tiene a lo más una matriz gama (ver (3.17)), es necesario considerar en el desarrollo de  $\{\}$  sólo aquellos términos que a lo más vayan como  $1/M^5$  y que tengan cuando menos cinco matrices gama para que la traza sea diferentes de cero. El único término que tiene matrices gama en (3.12) es

$$A_F = \frac{-iae}{2M^2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}. \quad (3.120)$$

Por lo tanto la única manera de conseguir cinco matrices gama es que  $A_F$  vaya al cuadrado, ya que la otra matriz gama viene de la que está multiplicando a las exponenciales. Los únicos términos que tienen  $A_F^2$  y que van a lo más como  $1/M^5$  son precisamente aquellos que van como  $1/M^5$  lo que significa que en el desarrollo de

$S(-M_p)$  únicamente es necesario considerar el primer término de (3.17). La mayoría de los términos que llevan  $A_F^2$  aparecen en la forma de conmutadores con  $\gamma^\rho$  como por ejemplo  $[A_F^2 B_F, \gamma^\rho]$  donde  $B_F = 2ip_\mu D_\alpha^\mu$ . Sin embargo, al evaluar el conmutador de cuatro matrices gama con otra se encuentra

$$[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta, \gamma^\rho] = 2g^{\rho\nu} \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta + 2g^{\rho\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha - 2g^{\rho\mu} \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta - 2g^{\rho\alpha} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta, \quad (3.121)$$

lo que reduce a tres el número de matrices gama en los términos considerados. De esta manera su traza da cero al sustituirlo en (3.16) con  $n = 3$ .

El único término que contribuye a orden cero en el desarrollo de la función de Green es

$$T_{S0} = \frac{(1-a)a^2 e^3}{4} Tr \int dy \frac{dq dp}{(2\pi)^{12}} \exp(-iyq) \exp(p^2) \beta(y) A_\rho(q) \frac{p_\eta p_\beta}{p^2} q^\beta F_{\mu\nu} F_{\delta\lambda} \gamma_\tau \gamma^\eta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^\lambda \gamma^\rho, \quad (3.122)$$

donde la integral sobre  $p$  resulta

$$\int dp \exp(p^2) \frac{p_\eta p_\beta}{p^2} = \frac{g_{\eta\beta} \pi^3}{6}. \quad (3.123)$$

Sustituyendo (3.123) en (3.122), tomando la traza y la transformada inversa de Fourier se obtiene

$$T_{S0} = \frac{(1-a)a^2 e^3}{3!(4\pi)^3} \int dy \beta(y) F_{\mu_1 \mu_2} F_{\mu_3 \mu_4} F_{\mu_5 \mu_6} \epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6}. \quad (3.124)$$

Para evaluar el término que corresponde al primer orden en la función de Green, se puede tomar como punto de partida la ec.(3.25) con  $n = 3$ , que posee un factor de  $M^6$  en el numerador. Tomando en cuenta el desarrollo (3.26) se observa que a lo más se necesita considerar en el desarrollo de las exponenciales en (3.12) términos que vayan como  $1/M^4$ . Como ningún término que va como  $1/M^4$  tiene cinco matrices gama y como los términos que como  $1/M$ ,  $1/M^2$ ,  $1/M^3$  en el desarrollo de las exponenciales se calcularon explícitamente en (3.13) se puede llegar a las siguientes conclusiones. El primer término de (3.26) no contribuye ya que puede reescribirse como una expresión con solamente una matriz gama que para dar lugar a una traza diferente de cero debería ir multiplicado por un término que vaya como  $1/M^5$ . Sin embargo, esto es cero en el límite  $M \rightarrow \infty$  porque el primer término de (3.26) va como  $1/M^2$ . El término que va

como  $1/M^4$  en (3.26) tiene a lo más tres matrices gama y para que origine una traza no nula debe ser multiplicado por un término que tenga tres matrices gama. De (3.13) se observa que la única posibilidad es uno que va como  $1/M^3$  y por lo tanto en el límite  $M \rightarrow \infty$  no hay contribución. Para el término que va como  $1/M^5$  en (3.26) sucede algo similar. Análogamente puede verse que la única contribución posible proviene del primer elemento del término que va como  $1/M^3$  en (3.26). Por lo tanto al sustituir en (3.25) se obtiene

$$T_{S1} = (1-a)ae^3 Tr \int dy \frac{dpdqdr}{(2\pi)^{18}} \exp[-iy(q+r)] \exp(p^2)\beta(y) \frac{p\sigma p\eta}{p^4} r_\delta q^\eta A_\alpha(r) A_\rho(q) F_{\mu\nu}\gamma_\tau \gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\delta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho. \quad (3.125)$$

Tomando la traza, integrando sobre  $p$  y tomando las transformadas inversas resulta

$$T_{S1} = \frac{(1-a)ae^3}{3!(4\pi)^3} \int dy \beta(y) F_{\mu_1\mu_2} F_{\mu_3\mu_4} F_{\mu_5\mu_6} \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6}. \quad (3.126)$$

Para evaluar el término de segundo orden en el desarrollo de la función de Green se puede partir de la expresión (3.33) con  $n = 3$ . Del desarrollo para  $S_2^{\eta\sigma}$  en (3.34) se puede ver que los únicos términos que contribuyen son el primero del primer renglón y el primero del segundo renglón, multiplicados respectivamente por la parte del término que va como  $1/M^3$  que tiene tres gamas en (3.13) y por el término que va como  $1/M$  en (3.13), el resultado es

$$T_{S2} = (1-a)e^3 Tr \int dy \frac{dpdqdadbb}{(2\pi)^{24}} \exp[-iy(a+b+q)] \exp(p^2)\beta(y) A_\eta(b) A_\sigma(a) A_\rho(q) \gamma_\tau \times \\ \times \left[ -iae \frac{p\lambda p\alpha p\beta p\delta}{p^6} q^\lambda F_{\mu\nu}\gamma^\alpha \gamma^\eta \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\delta \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho + \frac{2p\mu p\alpha}{p^6} q^\mu b_\beta a_\delta \gamma^\alpha \gamma^\eta \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\delta \gamma^\rho \right]. \quad (3.127)$$

Rearreglando el primer término antes de tomar la traza, integrando en  $p$  y tomando las transformadas inversas se obtiene

$$T_{S2} = \frac{(1-a)e^3}{3!(4\pi)^3} \int dy \beta(y) F_{\mu_1\mu_2} F_{\mu_3\mu_4} F_{\mu_5\mu_6} \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6}. \quad (3.128)$$

Sumando las contribuciones (3.124), (3.126), (3.128), y la correspondiente a seis dimensiones de (3.9) se obtiene la anomalía axial en 6-dimensiones

$$T_{SA} = \frac{(1+a^3)e^3}{3!(4\pi)^3} \int dy \beta(y) F_{\mu_1\mu_2} F_{\mu_3\mu_4} F_{\mu_5\mu_6} \epsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\mu_6}. \quad (3.129)$$

donde se ha empleado el regulador (3.1) con parámetro arbitrario.

Observando la expresión obtenida en dos dimensiones para la anomalía axial en (1.73), la obtenida en cuatro dimensiones en (3.39) y la que se obtuvo en (3.129), se infiere que el parámetro aparece a la potencia  $\alpha^n$  para  $D = 2n$ -dimensiones. Tomando en cuenta el factor que aparece en la expresión (3.9) en  $2n$ -dimensiones en (3.9), se propone que una generalización a  $2n$ -dimensiones de la anomalía axial Abelianas calculada con el regulador (3.1) está dada por

$$T_{A2n} = \frac{(-i)^{n+1}(1 + \alpha^n)e^n}{n!(4\pi)^n} \int dy \beta(y) F_{\mu_1\mu_2} F_{\mu_3\mu_4} \dots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}} \epsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2n-1}\mu_{2n}}. \quad (3.130)$$

La expresión anterior concuerda con cada uno de los resultados obtenidos en dos, cuatro y seis dimensiones. Está ecuación también muestra que en el caso de  $4k + 2$  dimensiones con  $k$  entero, la anomalía axial puede hacerse cero para  $\alpha = -1$ .

La expresión (3.130) es importante dado que muestra que en  $2n$ -dimensiones es imposible mantener la conservación simultánea de las corrientes axial-vectorial y vectorial al nivel cuántico. Esto es porque de acuerdo al método de cálculo utilizado la anomalía vectorial siempre va a tener como factor a  $(1 - \alpha)$ .

En este capítulo se mostraron varias aplicaciones del método de cálculo de anomalías propuesto en el cap. 2. Primero se calcularon las anomalías Abelianas axial y vectorial en cuatro dimensiones con lo cual se demostró explícitamente que es imposible lograr la conservación simultánea de las corrientes axial y vectorial. Posteriormente tomando en cuenta el resultado (3.39) que mostraba que solamente era posible hacer anomalía axial igual a cero realizando una extensión analítica en el parámetro. Se procedió a calcular ésta utilizando un regulador que admitía un parámetro complejo. El resultado obtenido con este regulador mostró que la anomalía axial no podía hacerse cero para un parámetro imaginario, a diferencia de lo que se podía pensar de observar la expresión (3.39). Esto marca una diferencia entre los resultados obtenidos realizando una extensión analítica y aquellos que surgen de utilizar reguladores de la forma  $DD^\dagger$ . Esta diferencia es el reflejo en el caso abeliano de la encontrada en el no-Abeliano entre la forma consistente y covariante de las anomalías, problema que se estudiará en el siguiente capítulo. Como siguiente paso con el fin de comparar los resultados obtenidos con el método propuesto con aquellos que resultan del método de separación de punto, se calculó la anomalía vectorial Abelianas dependiente de un parámetro empleando este último método. Al comparar los resultados de ambos procedimientos se

encontró que la prescripción propuesta en el capítulo 2 rompía explícitamente la invariancia ante conjugación de carga. Para resolver este problema se analizaron todas las posibles prescripciones de donde colocar el regulador en la ecuación (2.32), encontrándose que existía una única posibilidad que cumplía a la vez la invariancia ante conjugación de carga de la Electrodinámica Cuántica y que daba los resultados correctos al comparar con el método de separación de punto. Es interesante resaltar que son otras simetrías de la teoría estudiada, además de la vectorial y axial las que resuelven la ambigüedad de donde colocar el regulador en (2.32). Esta observación es importante dado que generalmente en los artículos en donde se proponen nuevos métodos para calcular anomalías no se toma en cuenta que además de la simetría axial y la vectorial pueden existir otras que es imprescindible mantener a nivel cuántico. Un ejemplo de lo anterior ocurre en el trabajo [G4], donde al calcular la anomalía axial se encuentra un resultado que no es invariante ante conjugación de carga, simetría que posee la teoría clásica. Este resultado es modificado por la adición de un contratérmino a la densidad Lagrangiana para dar la anomalía correcta. Sin embargo, el contratérmino a sumar rompe la misma invariancia de la teoría en cuestión, por lo tanto no está permitido. Así en ese artículo se inicia con un método de regularización que no respeta invariancia ante conjugación de carga y que es arreglado al final por un contratérmino que tampoco la satisface. Por último se calculó en seis dimensiones la anomalía axial y se obtuvo una generalización a  $2n$  dimensiones. El resultado muestra dos cosas importantes una que es imposible en cualquier dimensión par mantener al nivel cuántico simultáneamente la simetría de norma y la axial, por otra parte se encontró que el método propuesto se asemeja más al de separación de punto para las dimensiones  $4k + 2$ .

Los resultados para las anomalías vectorial y axial vectorial dependientes de un parámetro no se habían obtenido en más de dos dimensiones por ningún otro método que utilice la formulación de la Teoría Cuántica de Campos en base a integrales de trayectoria. Esto establece la diferencia más importante entre el método que se propone en este trabajo y todos los demás que existen reportados en la literatura.

En el siguiente capítulo se van a calcular las anomalías no-Abelianas para la teoría (1.1). Como esta densidad Lagrangiana no es invariante ante conjugación de carga, se utilizará como prescripción a la ecuación (2.32) en vez de (3.117) y se mostrará que esta reproduce los resultados correctos obtenidos por otros métodos.



## IV. ANOMALÍAS NO-ABELIANAS

En el capítulo dos de este trabajo se propuso una modificación al método de cálculo de anomalías que utiliza integrales de trayectoria y se aplicó para obtener las anomalías axial y vectorial Abelianas en dos y más dimensiones. En capítulo anterior se mostró que si la teoría a estudiar es invariante ante conjugación de carga, la expresión adecuada para calcular las anomalías es la ecuación (3.117). En este capítulo se va a tomar como punto de partida la densidad Lagrangiana (1.1) la que no es invariante ante conjugación de carga. Por lo tanto se va a tomar como prescripción la ecuación (2.32) y se mostrará que con ésta se obtienen los resultados correctos producidos por otros métodos. Lo que se quiere encontrar en primer lugar es una generalización no-Abeliana de las ecuaciones (2.38) que son la base para el cálculo de las anomalías Abelianas. Como aplicación subsecuente se calcularán explícitamente las anomalías no-Abelianas en dos dimensiones y se establecerá la relación entre las anomalías consistentes y las covariantes. Finalmente, en cuatro dimensiones, sólo se muestran los resultados ya que estos son equivalentes a los encontrados por otros métodos reportados en la literatura.

### IV.1 GENERALIDADES

Como las expresiones (2.32) y (2.33) que definen el Jacobiano regulado, para una teoría no invariante ante conjugación de carga, son completamente generales dado que no se han especificado las transformaciones infinitesimales generadas por  $K$  y  $L$ . Es posible tomar estas ecuaciones como punto de partida para obtener las expresiones con que permitan calcular las anomalías no-Abelianas. La única diferencia que existe con el caso Abeliano es que la traza indicada en (2.32) y (2.33) no sólo incluye la traza sobre el espacio-tiempo y las matrices gama, sino también la traza sobre los generadores del grupo. Aquí se van a considerar grupos con algebra de Lie semisimple y compacta, lo que quiere decir que las constantes de estructura serán completamente antisimétricas bajo el intercambio de índices. Por lo tanto se puede escoger la normalización de los generadores  $\lambda_a$  como  $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) \propto \delta_{ab}$ .

En el caso de la anomalía vectorial no-Abeliana, de acuerdo a las transformaciones infinitesimales (1.15), se identifica a  $K = i\theta^a \lambda_a$  y  $L = -i\theta^a \lambda_a$ . De esta manera, a partir de (2.33) se obtiene

$$\ln J_{VN}(\Theta) = i \text{Tr}(\mathcal{D}^{-1} \Theta^a \lambda_a [\mathcal{D}, R]). \quad (4.1)$$

para esta anomalía.

Para la anomalía axial no-Abeliana se tiene de (1.26) que  $K = L = i\xi^a \lambda_a \gamma_{D+1}$ . Al utilizar (2.33) se encuentra

$$\ln J_{AN}(\Xi) = -i \text{Tr}(\not{D}^{-1} \Xi^a \lambda_a \gamma_{D+1} [\not{D}, R] + 2 \Xi^a \lambda_a \gamma_{D+1} R). \quad (4.2)$$

Para analizar las consecuencias de las ecuaciones (4.1) y (4.2) se considerará los dos tipos de reguladores que se originan naturalmente del hecho que el operador  $\not{D}$  no es Hermítico debido a la presencia de campos de norma axiales. En primer lugar se tiene el regulador

$$R_a = \exp(-\not{D}^\dagger \not{D} / M^2), \quad (4.3)$$

donde

$$\not{D} = \gamma^\mu [\partial_\mu + ie \lambda_a (V_\mu^a + A_\mu^a \gamma_{D+1})], \quad (4.4)$$

$$\not{D}^\dagger = \gamma^\mu [\partial_\mu + ie \lambda_a (V_\mu^a - A_\mu^a \gamma_{D+1})], \quad (4.5)$$

de acuerdo a las convenciones del apéndice A. El otro regulador que se quiere analizar, se define utilizando la continuación analítica  $A_\mu \rightarrow iA_\mu$ , con lo cual el operador

$$\not{D} = \gamma^\mu [\partial_\mu + ie \lambda_a (V_\mu^a + iA_\mu^a \gamma_{D+1})], \quad (4.6)$$

es Hermítico y entonces un regulador de la forma

$$R_b = \exp(-\not{D}^2 / M^2), \quad (4.7)$$

está permitido.

Al sustituir el regulador  $R_a$  en las ecuaciones (4.1) y (4.2), éstas se transforman en

$$\ln J_{VN_a} = i \text{Tr} [\Theta^a \lambda_a (\exp(-\not{D} \not{D}^\dagger / M^2) - \exp(-\not{D}^\dagger \not{D} / M^2))]. \quad (4.8)$$

$$\ln J_{AN_a} = i \text{Tr} [\Xi^a \gamma_{D+1} \lambda_a (\exp(-\not{D} \not{D}^\dagger / M^2) + \exp(-\not{D}^\dagger \not{D} / M^2))]. \quad (4.9)$$

Para obtener las ecuaciones (4.8) y (4.9) se empleó la identidad  $\not{D} \exp(-\not{D}^\dagger \not{D} / M^2) \not{D}^{-1} = \exp(-\not{D} \not{D}^\dagger / M^2)$ . La ecuación (4.8) es idéntica a la utilizada por

Fujikawa [F4], para calcular la anomalía vectorial. Sin embargo, su deducción de esta expresión se basa en la definición de dos operadores Hermíticos  $H_\psi = \not{D}^\dagger \not{D}$  y  $H_{\bar{\psi}} = \not{D} \not{D}^\dagger$ , que se emplean para regular la parte de las  $\psi$  con una función  $f(H_\psi/M^2)$  y la parte de  $\bar{\psi}$  con  $f(H_{\bar{\psi}}/M^2)$ , sin justificación alguna del por qué utilizar dos reguladores diferentes para cada una de las partes. En el caso del método que aquí se propone las ecuaciones (4.8) y (4.9) resultan inmediatamente de sustituir (4.3) en (4.1) y (4.2). La ventaja de estas expresiones es que muestran claramente el hecho que la anomalía vectorial no-Abeliana no es evidentemente cero como supuso Fujikawa en uno de sus artículos anteriores [F1]. Las ecuaciones (4.8) y (4.9) también fueron obtenidas por Reuter [R2] utilizando un método de regularización basado en la función zeta. Las anomalías obtenidas al calcular con las ecuaciones (4.8) y (4.9) se les ha dado el nombre de anomalías covariantes.

Si se utiliza el regulador (4.7) y también se realiza la prolongación analítica en la parte correspondiente al sistema físico en (4.1) y (4.2), se obtiene una anomalía vectorial nula en tanto que para la axial se encuentra

$$\ln J_{ANb} = -2i \text{Tr} [\Xi_a \lambda^a \gamma_{D+1} \exp(-\not{D}^2/M^2)]. \quad (4.10)$$

En este caso, nuevamente las ecs.(4.1) y (4.2) permiten mostrar con claridad por qué la anomalía vectorial es nula y por qué la axial puede calcularse a través de (4.10). Esta ecuación fue utilizada en las referencias [E1] y [H2] para calcular la anomalía axial no-Abeliana. Las anomalías calculadas con el regulador  $R_b$  son llamadas consistentes. En la siguiente sección se mostrará la relación entre los dos tipos.

## IV.2 CÁLCULOS EXPLÍCITOS DE ANOMALÍAS NO-ABELIANAS

Los cálculos de las anomalías no-Abelianas en 2 y 4 dimensiones empleando las ecs.(4.8) y (4.9) son muy similares a los realizados en capítulos anteriores, por lo cual no se expondrán en detalle.

Como siempre, el punto de partida es la expresión explícita, en función de los campos, de los operadores que aparecen en el regulador. En este caso se tiene

$$\not{D}^\dagger \not{D} = D_\mu D^\mu + 2ie\sigma^{\mu\nu} (V_{\mu\nu} + \gamma_{D+1} A_{\mu\nu}), \quad (4.11)$$

$$\not{D}\not{D}^\dagger = D_\mu^\dagger D^\mu + 2ie\sigma^{\mu\nu}(V_{\mu\nu} - \gamma_{D+1}A_{\mu\nu}), \quad (4.12)$$

donde

$$V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + ie[V_\mu, V_\nu] + ie[A_\mu, A_\nu], \quad (4.13)$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[V_\mu, A_\nu] + ie[A_\mu, V_\nu]. \quad (4.14)$$

En primer lugar se considerará el problema en dos dimensiones. De manera análoga a los cálculos realizados en el capítulo anterior, tomando el debido cuidado que ahora los campos no conmutan. Se obtienen los siguientes resultados

$$\ln J_{VN_a} = \frac{-e}{2\pi} \int dy \text{Tr} \Theta \epsilon^{\mu\nu} A_{\mu\nu}, \quad (4.15)$$

$$\ln J_{AN_a} = \frac{-e}{2\pi} \int dy \text{Tr} \Xi \epsilon^{\mu\nu} V_{\mu\nu}, \quad (4.16)$$

para las anomalías vectorial y axial no-Abelianas. Al ser las dos anomalías diferentes de cero y considerando que para la teoría dada en (1.1) tanto  $V_\mu$  como  $A_\mu$  son potenciales de norma, sus corrientes asociadas no se conservarán. Esto implica que la teoría es anómala y en principio puede no ser consistente. Sin embargo como mostraron Faddeev y Shateshvili [F5], y Jackiw y Rajaraman [J3], en el caso del modelo de Schwinger quiral, al incluir la integración funcional sobre los campos de norma la teoría puede hacerse consistente. Esto también fue demostrado para el caso no-Abeliano que se está tratando aquí por Babelon, et al [B5].

Las anomalías encontradas al calcular con las expresiones (4.8) y (4.9) fueron explícitamente covariantes. Pero de acuerdo al capítulo 1 las anomalías no-Abelianas deben satisfacer las condiciones de consistencia de Wess-Zumino ecs.(1.44). Lo que significa que al sustituir las ecs.(4.15) y (4.16) en (1.44) debe encontrarse una identidad. Sin embargo, esto no sucede así. ¿Cuál es la causa de que no se satisfagan estas condiciones? Se debe notar que para obtener las ecs.(1.44) a partir de las ecuaciones (1.43) se aplicó esta relación entre operadores a la acción efectiva  $\Gamma[A]$ . Considerando que la anomalía se encuentra en la medida de la acción efectiva, el que las ecuaciones (1.44) sigan siendo válidas implica que la propiedad de grupo de norma se mantiene aún en la presencia de las anomalías no-Abelianas. A priori no es claro si el cálculo

de las anomalías con integrales de trayectoria arruina o no la propiedad de grupo. Debe tomarse en cuenta que una de las formas en que se manifiesta la violación de esta propiedad es en la existencia de conmutadores anómalos entre las corrientes asociadas a las simetrías del sistema [J1]. Por lo tanto es necesario ser cuidadoso al afirmar que siempre deben de satisfacerse las identidades de Wess-Zumino, que de alguna manera preservan dicha propiedad de grupo.

Desde el punto de vista perturbativo, tomando en cuenta el hecho que la anomalía axial es finita, es posible lograr que la propiedad de grupo se cumpla cuando los vértices de norma axial-vectoriales (y también los vectoriales) se tratan en forma simétrica entre ellos (simetría de Bose)[F4]. Esto implica que las condiciones de consistencia (1.44) se cumplen siempre que se mantenga la simetría de Bose. Ahora bien, en el contexto de integrales de trayectoria, evaluar el Jacobiano significa que se transforma la información contenida en  $\mathcal{D}$  a las variables fermiónicas. Para calcularlo explícitamente en la aproximación de la Teoría Cuántica de Campos usual se intenta diagonalizar  $\mathcal{D}$  tanto como sea posible. Sin embargo, este proceso puede inducir un tratamiento asimétrico en los vértices de norma y de aquí ocasionar que las condiciones de Wess-Zumino se rompan.

Lo anterior da lugar a dos posibles formas de caracterizar las anomalías no-Abelianas. Una es considerar la pérdida explícita de la covariancia de norma mientras se mantiene la condición de Wess-Zumino y la otra es considerar la pérdida de la simetría de Bose generalizada mientras se mantiene la covariancia de norma a la máxima extensión [F4]. Estas dos posibilidades tienen importantes aplicaciones físicas.

A la forma de la anomalía no-Abeliana que mantiene la propiedad de grupo se le llama anomalía consistente. En este caso las divergencias covariantes de las corrientes axial-vectorial y vectorial se obtienen como la respuesta de la acción efectiva a una transformación de norma [B6]. Así, esta anomalía refleja directamente la dependencia en la norma de la acción efectiva.

Cuando se mantiene la covariancia de las corrientes se obtienen las llamadas anomalías covariantes. Redefiniendo adecuadamente las corrientes, los dos tipos de anomalías pueden relacionarse entre sí. Lo que se hace generalmente es sumar a la corriente una función local del potencial de norma [B6]. En el caso covariante la corriente resultante  $\tilde{J}_\mu$  se determina imponiendo precisamente la covariancia bajo transformaciones de norma locales, lo que implica que la divergencia covariante es también covariante. La forma covariante de la anomalía es en general más simple

y la corriente covariante asociada puede ser importante cuando se le utiliza para construir acoplamientos invariantes de norma a otros campos. Otra de las ventajas de la anomalía covariante es que se encuentra directamente relacionada al índice del operador de Dirac [A10], [A11]. Esto permite calcularla con facilidad si se conoce la herramienta matemática de clases características [C3].

Un punto importante es que las condiciones de cancelación de anomalías, o sea el hacer la anomalía cero seleccionando un determinado grupo de norma o una representación del grupo, son las mismas para ambas formas de la anomalía. Esto se sigue del hecho que una anomalía difiere de la otra por la derivada covariante de un tensor y al ser una cero la otra se hace cero por una redefinición de la corriente. Un ejemplo de lo anterior se da en el caso de las anomalías gravitacionales, en las cuales también existe una forma covariante y una consistente. En el artículo de Alvarez-Gaumé y Witten [A2] éstas anomalías fueron calculadas en forma covariante ya que como se dijo son mucho más fáciles de evaluar. Green y Schwarz [G2], descubrieron su mecanismo de cancelación utilizando este tipo de anomalías. No obstante, este mismo mecanismo funciona para la anomalía consistente.

Las anomalías (4.15) y (4.16) son explícitamente covariantes, y como se dijo anteriormente no satisfacen las condiciones de consistencia de Wess-Zumino. La pregunta inmediata que surge es: ¿Cómo se puede calcular la anomalía consistente en el formalismo de integrales de trayectoria?

Fujikawa mostro [F4] que es posible obtener una anomalía consistente si se pide como primer paso que la anomalía vectorial sea idénticamente nula. La esencia del argumento presentado por Fujikawa radica en que la única forma de diagonalizar el operador  $\mathcal{D}$  manteniendo intacta la simetría de Bose, es pedir una base en la cual la anomalía vectorial se anule. Esto significa que en la formulación dada por las ecs.(4.1) y (4.2) el regulador que es necesario utilizar debe conmutar con el operador  $\mathcal{D}$ . Como el operador  $\mathcal{D}$  no es Hermítico la única forma de lograr ésto es realizar la extensión analítica  $\mathcal{A}_\mu \rightarrow i\mathcal{A}_\mu$ , y pedir que el regulador sea función del operador (4.6). Esto explica de una manera simple, a partir de la ecuación (4.2) el hecho que mucha gente ha calculado las anomalías no-Abelianas en forma consistente utilizando funciones del operador (4.6) [A8], [B2], [E1], [G4], [H2], [R2].

Para mostrar un ejemplo explícito de lo dicho en los párrafos anteriores se va a tomar como regulador a (4.7) para calcular la anomalía consistente no-Abeliana en dos dimensiones. Como ya se mostró, para este regulador la anomalía vectorial es nula y

la axial está dada por (4.10). De esta ecuación se obtiene

$$\ln J_{ANb} = \frac{-i}{\pi} \int dy \text{Tr} \Xi \{ e \partial_\mu \mathcal{A}^\mu + ie^2 [V_\mu, \mathcal{A}^\mu] - (ie/2) \epsilon^{\mu\nu} V_{\mu\nu} \}. \quad (4.17)$$

Como primer paso para comparar con las anomalías obtenidas en (4.15) y (4.16) se va a agregar el contratérmino

$$C_{b1} = \frac{e^2}{2\pi} \int dy \text{Tr} \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}^\mu. \quad (4.18)$$

Debe tomarse en cuenta que para calcular como transforma el contratérmino (4.18) es necesario considerar en las transformaciones (1.17), (1.18), y (1.27) la continuación analítica  $\mathcal{A}_\mu \rightarrow i\mathcal{A}_\mu$ . Al agregar el contratérmino (4.18) a la acción efectiva  $\Gamma[\mathcal{A}]$ , la anomalía en (4.17) se ve modificada quedando solamente el último término, por lo cual las identidades de Ward para las corrientes resultan ser

$$\partial_\mu J_V^\mu + ie[V_\mu, J_V^\mu] + ie[\mathcal{A}_\mu, J_A^\mu] = 0, \quad (4.19)$$

$$\partial_\mu J_A^\mu + ie[V_\mu, J_A^\mu] + ie[\mathcal{A}_\mu, J_V^\mu] = \frac{-e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + ie[V_\mu, V_\nu] - ie[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]). \quad (4.20)$$

Las ecuaciones (4.19) y (4.20) se obtienen de (1.21) y (1.28) al poner éstas en forma matricial. En la anomalía dada por (4.20) se ha realizado el inverso de la prolongación analítica (o sea  $\mathcal{A}_\mu \rightarrow -i\mathcal{A}_\mu$ ) con el fin de comparar adecuadamente estos resultados con los de las anomalías (4.15) y (4.16). Se hace notar que en la ecuación (4.20) el lado derecho no es  $V_{\mu\nu}$ , dado que hay una diferencia de signo en el último término. Es interesante también resaltar que el contratérmino (4.18) no afecta a la anomalía vectorial ya que éste es invariante ante las transformaciones vectoriales (1.17) (4.16).

Antes de continuar es necesario enfatizar varios puntos acerca de las ecs.(4.19) y (4.20). Primero, si no se hubiera realizado el inverso de la prolongación analítica, los resultados parecerían covariantes ante las transformaciones (1.17), (1.18) y (1.27). Además el par de anomalías sería consistente, ya que puede probarse que éste satisface las condiciones (1.44) para los generadores de las transformaciones vectorial y axial dados por (1.37) y (1.39). El hecho que sucedan ambas cosas está en completo desacuerdo con una prueba realizada por Bardeen y Zumino [B6] que impide tener una anomalía

consistente que a su vez sea covariante. Lo que está pasando es que tanto la covariancia como la consistencia de estas anomalías no debe ser verificada a partir de las transformaciones (1.17), (1.18) y (1.27) sino bajo su correspondiente prolongación analítica. Como para obtener (4.19) y (4.20) ya se tomó el inverso de la prolongación analítica es posible utilizar las transformaciones directamente (1.17), (1.18) y (1.27) para probar la covariancia resultando que (4.20) no es covariante y el par de anomalías tampoco es consistente. Sin embargo, si es posible hacerlo consistente al agregar un contratérmino dado como

$$C_{b2} = \frac{-e^2}{2\pi} \int dy \text{Tr} \epsilon^{\mu\nu} A_\mu V_\nu. \quad (4.21)$$

Este contratérmino tiene la propiedad que bajo las transformaciones axiales (1.27) cambia como

$$C_{b2} \xrightarrow{A} \frac{-e^2}{2\pi} \int dy \text{Tr} \epsilon^{\mu\nu} \left\{ A_\mu V_\nu + \Xi \left( (1/e) \partial_\mu V_\nu + i[V_\mu, V_\nu] - i[A_\mu, A_\nu] \right) \right\}, \quad (4.22)$$

y bajo las transformaciones vectoriales (1.17) y (1.18) como

$$C_{b2} \xrightarrow{V} \frac{-e^2}{2\pi} \int dy \text{Tr} \epsilon^{\mu\nu} \left\{ A_\mu V_\nu - (1/e) \Theta \partial_\mu A_\nu \right\}. \quad (4.23)$$

Esto significa que al redefinir la densidad Lagrangiana sumando este contratérmino las ecuaciones (4.19) y (4.20) se transforman en

$$\partial_\mu J_V^\mu + ie[V_\mu, J_V^\mu] + ie[A_\mu, J_A^\mu] = \frac{-e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu, \quad (4.24)$$

$$\partial_\mu J_A^\mu + ie[V_\mu, J_A^\mu] + ie[A_\mu, J_V^\mu] = \frac{-e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu V_\nu. \quad (4.25)$$

Este par de anomalías satisface las condiciones de consistencia de Wess-Zumino (ecuaciones.(1.44)), pero no son covariantes lo que está de acuerdo con el trabajo de Bardeen y Zumino [B6]. Además, si se resta de (4.24) la ecuación (4.25) se obtiene

$$\partial_\mu J_L^\mu + ie[A_{L\mu}, J_L^\mu] = \frac{e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_{L\nu}, \quad (4.26)$$

donde

$$J_L^\mu = J_V^\mu - J_A^\mu \quad A_{L\mu} = V_\mu - A_\mu,$$



que es precisamente la anomalía no-Abeliana consistente obtenida por Zumino utilizando métodos de Geometría Diferencial [Z2].

Así empleando el formalismo de integrales de trayectoria fue posible encontrar la forma consistente de la anomalía no-Abeliana, la necesidad de agregar contratérminos se aparece también en dimensiones más altas lo que hace el cálculo de las anomalías consistentes más complicado que el de las covariantes.

El siguiente punto es ver cómo es posible pasar de las anomalías consistentes dadas en (4.24) y (4.25) a la forma covariante dada en (4.15) y (4.16). Se dijo anteriormente que pasar de una a otra implica una redefinición de las corrientes y en el caso que nos ocupa la redefinición necesaria está dada por

$$\tilde{J}_V^\mu = J_V^\mu - \frac{e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} A_\nu, \quad (4.27)$$

$$\tilde{J}_A^\mu = J_A^\mu - \frac{e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} V_\nu. \quad (4.28)$$

donde las corrientes con tilde se refieren al caso covariante. Con esta redefinición de las corrientes las ecs.(4.24) y (4.25) se transforman en

$$\partial_\mu \tilde{J}_V^\mu + ic[V_\mu, \tilde{J}_V^\mu] + ic[A_\mu, \tilde{J}_A^\mu] = \frac{-e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} A_{\mu\nu}, \quad (4.29)$$

$$\partial_\mu \tilde{J}_A^\mu + ic[V_\mu, \tilde{J}_A^\mu] + ic[A_\mu, \tilde{J}_V^\mu] = \frac{-e}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} V_{\mu\nu}. \quad (4.30)$$

Estas ecuaciones son precisamente las identidades de Ward que se obtienen de (4.15) y (4.16). Esto prueba que en este caso particular si es posible redefinir las corrientes y pasar de la forma consistente a la covariante y viceversa. En principio se podría pensar que existe la posibilidad de pasar de una forma de la anomalía a la otra por la adición de un contratérmino a la densidad Lagrangiana. Sin embargo, esto no es así ya que se puede mostrar que no existen contratérminos que generen la transformación deseada en dos dimensiones.

Si en las ecuaciones (4.24), (4.25), (4.29) y (4.30) se considera la parte con la potencia más baja en los campos de norma, se puede observar que la parte lineal de las anomalías covariantes es dos veces la parte lineal de las anomalías consistentes. Este factor será  $1 + \frac{D}{2}$  en el caso de  $D$ -dimensiones siempre y cuando las anomalías se escriban en forma tal que los campos izquierdos y derechos sean independientes,

como por ejemplo en (4.26). Este factor puede ser considerado como un factor de simetría de Bose para la anomalía linealizada.

En cuatro dimensiones la situación es analoga a la encontrada en 2 dimensiones y dado que los resultados que se obtienen utilizando (4.1) y (4.2) son muy similares a los calculados por otros autores estos sólo se dan por completitud.

En el caso covariante el resultado que se obtiene para las anomalías axial y vectorial es el siguiente

$$\ln J_{NAa4} = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \int dy \text{Tr} \{ \Xi \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (V_{\mu\nu} V_{\alpha\beta} + \mathcal{A}_{\mu\nu} \mathcal{A}_{\alpha\beta}) \}, \quad (4.31)$$

$$\ln J_{NVa4} = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \int dy \text{Tr} \{ \Theta \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\mathcal{A}_{\mu\nu} V_{\alpha\beta} + V_{\mu\nu} \mathcal{A}_{\alpha\beta}) \}. \quad (4.32)$$

Para el caso consistente el cálculo con la expresión (4.10) ya fue realizado en cuatro dimensiones en [E1] y [H2] obteniendose el resultado

$$\ln J_{NAb4} = \int dy \text{Tr} [\Xi (G^1 + G^2)], \quad (4.33)$$

donde

$$G^1 = \frac{ie^2}{(4\pi)^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left\{ V_{\mu\nu} V_{\alpha\beta} + (1/3) \mathcal{A}_{\mu\nu} \mathcal{A}_{\alpha\beta} + \right. \\ \left. + (8ie/3) [\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu V_{\alpha\beta} + \mathcal{A}_\mu V_{\nu\alpha} \mathcal{A}_\beta + V_{\mu\nu} \mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta] - (32e^2/3) \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\alpha \mathcal{A}_\beta \right\}, \quad (4.34)$$

el término  $G^2$  se encuentra reportado en [H2].

Al igual que en el caso de los dos primeros términos en (4.17) que podían ser eliminados en dos dimensiones, el término  $G^2$  puede ser cancelado por la inclusión de un contratérmino. Bajo transformaciones axiales éste da  $-G^2$  y bajo transformaciones vectoriales es invariante, por lo que no contribuye a la anomalía vectorial, lo que significa que ésta sigue siendo cero como en dos dimensiones. La anomalía encontrada en (4.34) es la misma que encontró Bardeen [B3] utilizando métodos perturbativos y Wess y Zumino [W2] probaron que es consistente.

Como se observa de las ecs.(4.31), (4.32) y (4.34), las anomalías covariantes tienen una estructura más simple y son verdaderamente mucho más fáciles de calcular.

Además tienen otras ventajas, una de ellas es que si se generaliza el tipo del acoplamiento dado en la densidad Lagrangiana (1.1) incluyendo campos escalares y pseudoescalares se puede mostrar explícitamente que éstos no contribuyen a las anomalías covariantes. Mientras que al realizar el cálculo para el caso consistente se encuentra una contribución, la cual por supuesto puede ser eliminada por la inclusión de un contratérmino, pero esto significa una mayor cantidad de trabajo. La introducción de los campos escalares y pseudoescalares es importante ya que muestra que los campos de Higgs no dan contribución a las anomalías en el caso de modelos como Weinberg-Salam. Esto también fue probado por Bardeen [B3] y Brown, et al [B7] con cálculos perturbativos. Este resultado es una versión simplificada de la prueba realizada por Lee y Minn [L2] que muestra que campos externos que no son de norma no contribuyen a las anomalías.

El hecho que es posible pasar de la forma consistente a la covariante y viceversa en  $2n$ -dimensiones fue probado por Bardeen y Zumino [B6]. Esto simplifica considerablemente el cálculo de las anomalías con integrales de trayectoria ya que sólo es necesario calcular las covariantes. Existen otras formas de calcular anomalías no-Abelianas consistentes, como el método de Zumino, et al, [Z1] y [Z2], o el de Alvarez-Gaumé y Ginsparg [A11]. En el método de [A11] se utiliza la formulación de integrales de trayectoria, pero es necesario modificar el operador de Dirac. Esta modificación no necesariamente es válida para otros tipos de acoplamiento, como por ejemplo con un campo gravitacional.

Es importante observar que, a diferencia de las anomalías abelianas que no imponen en realidad ninguna restricción sobre teorías como la Electrodinámica Cuántica, las anomalías no-Abelianas en general ponen fuertes restricciones sobre las representaciones permitidas de los grupos de norma tal como se vio en la sección 1.3 de este trabajo. El hecho que en dos dimensiones las anomalías puedan ser eliminadas al incluir la integración funcional sobre los campos de norma implica que en este caso tales restricciones no existen. El análisis de este hecho sigue siendo motivo de intenso trabajo [F7].

En este capítulo se ha mostrado que las dos versiones de las anomalías no-Abelianas la consistente y la covariante se encuentran incluidas en el método propuesto dentro de este trabajo. Esto se demostró con un ejemplo explícito en dos dimensiones donde se encontraron ambos tipos de anomalías. Es importante recalcar que las dos formas de las anomalías se obtienen directamente de la expresión (2.32) con una

selección adecuada del regulador y sin ninguna información adicional.

## V. ANOMALÍAS EN ESPACIO CURVO CON TORSIÓN

En los capítulos anteriores se estudiaron las anomalías axiales y vectoriales de partículas de espín  $1/2$  en campos externos vectoriales o axial-vectoriales, en un espacio-tiempo Euclideo. En este capítulo se quiere generalizar lo anterior al caso de espacio curvo con torsión, es decir, se considerará la anomalía axial de partículas de espín  $1/2$  en un campo gravitacional externo con torsión. En este contexto se prueba que en dos dimensiones la torsión no se acopla a las partículas de espín  $1/2$  y en cuatro el acoplamiento es equivalente al de un campo axial-vectorial Abelian. Esto permite calcular con facilidad las anomalías, obteniéndose como otros autores que la torsión no contribuye a la anomalía axial. Por último se estudian las condiciones de consistencia para un acoplamiento no mínimo de la torsión con partículas de espín  $3/2$  (gravitinos). Se encuentra que al menos existe una solución para estas condiciones, la cual no había sido obtenida con anterioridad. Se conjetura que para la solución descubierta tampoco habrá contribución de la anomalía axial para partículas de espín  $3/2$ . Esta conjetura se basa en el Teorema de Índice de Atiyah-Singer, para demostrarla falta aún análisis más cuidadoso del problema, lo cual se encuentra fuera del alcance de este trabajo.

### V.1 ESPACIO CURVO CON TORSIÓN (ESPACIO DE RIEMANN-CARTAN)

Desde su introducción por Cartan en 1922 [C4], el tensor de torsión ha despertado la curiosidad de varios grupos de investigación. Entre éstos se encuentran los que han intentado obtener la teoría de la Gravitación como una teoría de norma, es decir, producir la Gravitación por postular la invariancia de norma bajo transformaciones de Poincare locales. El éxito obtenido por estas teorías ha sido relativamente reducido, sin embargo, a la fecha aún se siguen estudiando [H3], [H4], [L2], [B8], [O1]. Por otra parte, el estudio de la torsión se vio fuertemente incrementado con el surgimiento de las teorías de Supergravedad, ya que en estas la torsión surge de manera natural [V1]. Además, con el resurgimiento de las teorías de Kaluza-Klein se han creado otro tipo de aplicaciones de la torsión. Tal como el permitir resolver uno de los grandes problemas de estas teorías como es el lograr la inclusión de fermiones de masa cero [W3], o generar los campos de Higgs de una forma totalmente geométrica [R3]. Inclusive en las teorías de Supercuerdas se ha estudiado la construcción de soluciones donde el espacio compactificado es un espacio curvo con torsión [B9]. (En este punto es

necesario distinguir entre el tensor de torsión que es del que se está discutiendo y los subgrupos de torsión de grupos abelianos que también son utilizados en las teorías de Supercuerdas particularmente en la discusión de anomalías globales [W4]).

La mayoría de los estudios realizados sobre torsión se han efectuado a nivel clásico, por lo que un primer paso hacia su extensión cuántica es considerar campos de materia cuantizados en un campo gravitacional externo con torsión. Los primeros cálculos realizados a este respecto son los de Goldthorpe en 1980 [G6], los cuales han sido continuados y mejorados por otros grupos. Para comprender estos resultados y posteriormente extender algunos de ellos al caso de partículas de espín  $3/2$ , se va introducir en esta sección lo que se define como un espacio de Riemann-Cartan utilizando para ello el formalismo de tetradas. Este permite mostrar con claridad que la torsión no es una complicación extra e innecesaria a las teorías de Gravitación sino que surge naturalmente dentro de la definición de transporte paralelo.

Para todo fin físico, una variedad diferenciable  $M$  ( $\dim M = d = 2n$ ) es un espacio topológico localmente Euclideo y diferenciable. En la geometría diferencial clásica es común definir un vector  $V$  en el punto  $p$  de  $M$  por sus propiedades de transformación bajo un cambio de coordenadas.  $V$  es una colección  $(V^1, \dots, V^d)$  la cual transforma de acuerdo a

$$V'^{\mu} = V^{\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}. \quad (5.1)$$

Esta definición tiene la desventaja que depende del sistema de coordenadas y es por lo tanto deseable modificarla. El punto de vista moderno, es definir un vector  $V$  simplemente como un operador diferencial de primer orden de la forma

$$V = V^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}. \quad (5.2)$$

Al pedir que  $V$  sea independiente del sistema de coordenadas se recobra la regla de transformación clásica para las componentes  $V^{\mu}$ .

En forma natural, en cada punto  $p$  de una variedad diferenciable  $M$  se tiene un espacio vectorial  $TM_p$ . Este consiste del conjunto de vectores tangentes a  $M$  en el punto  $p$ . Un campo vectorial  $\mathcal{V}$  sobre  $M$  es la asignación en cada punto  $p$  de  $M$  de un elemento  $V^{\mu}(p)$  de  $TM_p$ . Dados dos espacios vectoriales  $TM_p$  y  $TM_{p'}$ , en puntos diferentes de  $M$  son en principio espacios distintos. Uno es el espacio de vectores tangentes a  $p$  y  $TM_{p'}$  es el espacio de vectores tangentes a  $p'$ . Pero realmente en

que sentido son diferentes  $TM_p$  y  $TM_{p'}$ . Es bien conocido que vectores tangentes a  $p$  pueden compararse a vectores tangentes a  $p'$  por medio de transporte paralelo a lo largo de alguna trayectoria  $\eta$  que conduzca de  $p$  a  $p'$ . No obstante, este transporte paralelo depende de la elección arbitraria de la trayectoria de  $p$  a  $p'$  y no es en consecuencia una operación natural. Por otra parte, se conoce que dos cualesquiera espacios vectoriales  $T$  y  $\tilde{T}$  de la misma dimensión  $d$  son isomorfos, es decir, existe un mapeo lineal invertible  $\rho : T \rightarrow \tilde{T}$ . Hay muchos mapeos de este tipo y por lo tanto no existe una elección natural. Una selección natural del isomorfismo entre  $T$  y  $\tilde{T}$  puede hacerse si a estos espacios se les asignan elementos base  $e^a$ ,  $a = 1, \dots, d$  para  $T$  y  $\tilde{e}^a$  para  $\tilde{T}$ . Ya que, en este caso se puede definir un isomorfismo de  $T$  a  $\tilde{T}$  por  $\rho(e^a) = \tilde{e}^a$ . En general en Geometría Riemanniana no existe una forma natural de seleccionar bases para los espacios vectoriales  $TM_p$ . Así, por ejemplo se podría considerar a las derivadas  $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$  como una base, sin embargo es posible seleccionar una base más general  $\{e^a\}$  definida por

$$e_a = e_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (5.3)$$

donde se pide que  $\det e_a^\mu \neq 0$ . En cuatro dimensiones,  $e_a^\mu$  es una matriz de  $4 \times 4$  a la cual se le ha dado el nombre de tétrada. Claramente  $\mu = 1, \dots, d$  es un índice vectorial tangente a la variedad, mientras que  $a = 1, \dots, d$  es solamente el nombre del vector. Localmente, siempre es posible hacer corresponder esta base  $\{e_a\}$  a una base de un espacio vectorial  $U$  de dimensión  $d$ , con grupo de estructura  $SO(1, d - 1)$  de manera tal que las tétradas satisfagan

$$e_\mu^a(x) e^{b\mu}(x) = \eta^{ab}, \quad (5.4)$$

donde  $\eta^{ab}$  es la métrica de Lorentz. En forma equivalente

$$e_\mu^a(x) e_{a\nu}(x) = g_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

con  $g_{\mu\nu}$  el tensor métrico de  $M$ . En consecuencia, el índice de Lorentz  $a$  de la tétrada sube y baja con la métrica de Lorentz, mientras que el índice del espacio-tiempo  $\mu$  sube y baja con el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ .

Considerando que el índice  $a$  de la tétrada  $e_\mu^a(x)$  pertenece al grupo de Lorentz es posible aplicar sobre éste una transformación de Lorentz para obtener otra tétrada  $\tilde{e}_\mu^a(x) = \Lambda_b^a(x) e_\mu^b(x)$ . Esto origina cierta arbitrariedad en la elección de la tétrada, lo que

implica que si se desea tener una teoría con sus observables físicas independientes de la selección arbitraria de tétrada, es necesario requerir invariancia local ante transformaciones de Lorentz. Como en cualquier caso en que se desea invariancia de norma local, para lograr obtener invariancia de Lorentz local se requiere introducir un campo de norma  $\omega^a_{b\mu}(x)$  del grupo de Lorentz  $SO(1, 1-d)$ . El campo de norma  $\omega_\mu$  cambia bajo transformaciones locales de Lorentz como una conexión, es decir,

$$\omega_\mu \rightarrow \Lambda^{-1} \omega_\mu \Lambda + \Lambda^{-1} \partial_\mu \Lambda.$$

El campo de norma del grupo de Lorentz es comunmente llamado la conexión de espín.

En el contexto usual de la Relatividad General, la derivada covariante de un campo vectorial  $V^\mu(x)$  se define como

$$D_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\nu, \quad (5.6)$$

donde  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  es la conexión afín. Como se dijo anteriormente existen diversas maneras de definir el transporte paralelo y ésto implica que existen varias formas de elegir una conexión. Sin embargo, es conocido [H5], que existe sólo una conexión en M que satisface a la vez los dos requisitos siguientes: i) Que sea compatible con una métrica, es decir, se pide que el transporte paralelo preserve el producto interno sobre los espacios tangentes

$$D_\mu g_{\alpha\beta} = 0. \quad (5.7)$$

ii) Que la conexión sea simétrica en sus dos índices covariantes. La conexión que satisface ambas condiciones son los conocidos símbolos de Christoffel que en este trabajo se denotaran como  $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda}$ . Si se considera válida únicamente la primera condición, de las  $d^3$  componentes de  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  solamente quedan especificadas por (5.7)  $\frac{d^2(d+1)}{2}$  componentes que son las correspondientes a los simbolos de Christoffel, por lo cual quedan indeterminadas  $\frac{d^2(d-1)}{2}$  componentes que corresponden precisamente a la parte antisimétrica de la conexión afín y que se le ha dado el nombre de torsión

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^\lambda_{\nu\mu} - \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}. \quad (5.8)$$

El que estas componentes de la conexión afín no sean especificadas por la ecuación (5.6) quiere decir que son independientes del tensor métrico. Un punto importante que



debe observarse es que a diferencia de los simbolos de Christoffel que no son tensores, la torsión si lo es, como puede probarse directamente de su definición (5.8). Esta observación va a ser fundamental para probar que las anomalías axiales no dependen de la torsión.

Regresando al formalismo de tétradas, se quiere encontrar cual es el equivalente de la derivada covariante (5.6) y de las ecuaciones (5.7) y (5.8). Habiendo introducido una tétrada es posible trabajar con  $V^a(x) = e_a^\mu(x)V^\mu(x)$  en vez de  $V^\mu(x)$  dado que ambos contienen la misma información, o sea, siempre se puede reconstruir  $V^\mu(x) = e_a^\mu(x)V^a(x)$ . En términos de  $V^a$  la derivada covariante natural es

$$D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega^a_{b\mu} V^b. \quad (5.9)$$

Al contener  $V^a(x)$  la misma información que  $V^\mu(x)$  las dos nociones de derivada covariante de un vector  $V$  deben de ser equivalentes. Esto será así si ocurre que  $D_\mu V^a = e^\alpha_\nu D_\mu V^\nu$ , es decir, si

$$D_\mu e^\alpha_\nu = 0. \quad (5.10)$$

En este caso la derivada covariante de un campo  $e^\alpha_\nu$  con varios índices se define sumando un término de conexión a cada índice

$$D_\mu e^\alpha_\nu = \partial_\mu e^\alpha_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} e^\alpha_\lambda + \omega^a_{b\mu} e^\alpha_b. \quad (5.11)$$

La ecuación (5.10) es en cierto sentido equivalente a (5.7) ya que esta expresión se puede obtener a partir de (5.10) y (5.5). Sin embargo, la ecuación (5.10) es en realidad  $d^3$  ecuaciones lo que significa que contiene la suficiente información para determinar todas las componentes de la conexión afín en función de la tetra y la conexión de espín. Al despejar la conexión afín de (5.11) y sustituir en (5.8) se obtiene

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_\mu e^\alpha_\nu - \partial_\nu e^\alpha_\mu + \omega^a_{b\mu} e^\alpha_b - \omega^a_{b\nu} e^\alpha_b. \quad (5.12)$$

Utilizando la notación de formas diferenciales la ecuación anterior puede escribirse como

$$T^a = de^a + \omega^a_b \wedge e^b. \quad (5.13)$$

En todas las ecuaciones que se escriban a continuación en la notación de formas diferenciales, no se pondrá en forma explícita el producto  $\wedge$ .

Una vez definida la conexión de espín puede encontrarse como en cualquier teoría de norma el tensor de campo  $R^a_{b\mu\nu}$  dado por

$$R^a_{b\mu\nu} = \partial_\mu \omega^a_{b\nu} - \partial_\nu \omega^a_{b\mu} + [\omega_\mu, \omega_\nu]^a_b, \quad (5.14)$$

en formas

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b. \quad (5.15)$$

Las ecuaciones (5.13) y (5.15) son conocidas como las ecuaciones de estructura de Cartan [H5]. A partir de ellas es fácil obtener las identidades de Bianchi

$$dT^a + \omega^a_b T^b = R^a_b e^b, \quad (5.16)$$

$$dR^a_b + \omega^a_c R^c_b - R^a_c \omega^c_b = 0. \quad (5.17)$$

$R^a_{b\mu\nu}$  contiene la misma información que el tensor de Riemann  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = e^\alpha_a e^b_\beta R^a_{b\mu\nu}$  y de (5.14) es fácil ver que satisface la relación  $R^a_{b\mu\nu} = -R^a_{b\nu\mu}$ . Tomando en cuenta que la derivada covariante de la métrica de Lorentz  $\eta_{ab}$  es igual a cero se obtiene

$$\omega^{ab}_\mu = -\omega^{ba}_\mu. \quad (5.18)$$

Por lo tanto el hecho que la conexión de espín sea antisimétrica no depende de la torsión, a diferencia de la propiedad de simetría de la conexión afín que si depende de la existencia de la torsión. De la propiedad (5.18) se demuestra fácilmente que  $R_{ab\mu\nu} = -R_{ba\mu\nu}$ . Sin embargo, en el caso de torsión no nula  $R_{ab\mu\nu} \neq R_{\mu\nu ab}$  y en consecuencia el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu} = e^\alpha_a R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$  no es simétrico.

Con la ayuda de la conexión de espín, es fácil acoplar espinores a la Relatividad General. Como con cualquier campo de norma, la conexión de espín se acopla a un campo  $\psi(x)$  en la representación requerida del grupo de norma. En este caso, el grupo de norma es el grupo de Lorentz y se toma a  $\psi(x)$  como un campo en la representación espinorial del grupo de Lorentz. Considerando que  $\sigma_{ab} = \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]$  son los generadores del grupo de Lorentz en la representación espinorial, se sigue que la derivada covariante de  $\psi(x)$  está dada como

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{1}{2} \omega^{ab}{}_\mu \sigma_{ab} \psi, \quad (5.19a)$$

para  $\bar{\psi}$  se tiene

$$D_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{1}{2} \omega^{ab}{}_\mu \bar{\psi} \sigma_{ab}, \quad (5.19b)$$

Para definir la ecuación de Dirac, es necesario además definir las matrices gama en el espacio curvo. Esto se logra a partir de las matrices gama en el espacio plano  $\gamma_a$ , que obedecen  $\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}$ , definiendo  $\gamma_\mu(x) = e_\mu^a(x) \gamma_a$ . Estas matrices cumplen  $\{\gamma_\mu(x), \gamma_\nu(x)\} = 2g_{\mu\nu}(x)$ . Por virtud de la ecuación (5.10), las matrices  $\gamma_\mu(x)$  son covariantemente constantes en el sentido que  $D_\mu \gamma_\lambda = \gamma_\lambda D_\mu$ . De esta manera el operador de Dirac se define exactamente como en teorías de norma  $\mathcal{D} = \gamma^\mu D_\mu$ .

En las siguientes secciones será muy útil tener por separado la parte de la conexión correspondiente a los símbolos de Christoffel de aquella que sólo es función de la torsión. Esto se logra empleando la ecuación (5.7) de donde se obtiene

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu\alpha} + S_{\mu\nu\alpha}, \quad (5.20)$$

donde  $S_{\mu\nu\alpha}$  es la llamada "contorsión" definida como

$$S_{\mu\nu\alpha} = -\frac{1}{2}(T_{\mu\nu\alpha} + T_{\nu\alpha\mu} - T_{\alpha\mu\nu}). \quad (5.21)$$

La contorsión es antisimétrica en sus dos primeros índices a diferencia de la torsión que lo es en sus dos últimos. La conexión de espín, también puede separarse en dos partes. Despejando la conexión de espín de (5.10) y sustituyendo (5.20) se obtiene

$$\omega^{ab}{}_\mu = \tilde{\omega}^{ab}{}_\mu + S^{ab}{}_\mu. \quad (5.22)$$

De aquí en adelante se entenderá que todas las expresiones que tengan tilde no contendrán a la torsión. Para uso posterior será útil definir otro tipo de derivadas covariantes, tales como

$$D_\mu V^{\nu a} \equiv \partial_\mu V^{\nu a} + \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu V^{a\lambda} + \omega^a{}_{b\mu} V^{b\nu}, \quad (5.23a)$$

$$\tilde{D}_\mu V^{\nu a} \equiv \partial_\mu V^{\nu a} + \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu V^{a\lambda} + \tilde{\omega}^a{}_{b\mu} V^{b\nu}, \quad (5.23b)$$

$$\nabla_{\mu} V^{\nu\alpha} \equiv \partial_{\mu} V^{\alpha\nu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\nu} V^{\alpha\lambda}, \quad (5.23c)$$

$$\tilde{\nabla}_{\mu} V^{\nu\alpha} \equiv \partial_{\mu} V^{\alpha\nu} + \tilde{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\nu} V^{\alpha\lambda}, \quad (5.23d)$$

$$D_{\mu} V^{\nu\alpha} \equiv \partial_{\mu} V^{\alpha\nu} + \omega_{\delta\mu}^{\alpha} V^{\delta\nu} \quad (5.23e)$$

Utilizando la definición (5.23a) es posible reescribir el tensor de torsión como

$$T_{\mu\nu}^{\alpha} = D_{\mu} e_{\nu}^{\alpha} - D_{\nu} e_{\mu}^{\alpha}. \quad (5.24)$$

Usando la definición de la conexión (5.20) puede escribirse la derivada covariante total en función de (5.23b) obteniéndose

$$D_{\mu} V^{\alpha\nu} = \tilde{D}_{\mu} V^{\alpha\nu} + S_{\lambda\mu}^{\nu} V^{\alpha\lambda} + S_{\delta\mu}^{\alpha} V^{\delta\nu}. \quad (5.25)$$

Como convención se ha tomado que en todas las derivadas covariantes el índice de la derivada aparece como el último en la conexión.

El tensor de Riemann definido en términos de la conexión afín en la forma

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\eta\mu} \Gamma^{\eta}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\eta\nu} \Gamma^{\eta}_{\beta\mu}, \quad (5.26)$$

resulta ser, al emplear (5.20),

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \tilde{R}^{\alpha}_{\beta\mu\nu} + \tilde{\nabla}_{\mu} S^{\alpha}_{\beta\nu} - \tilde{\nabla}_{\nu} S^{\alpha}_{\beta\mu} + S^{\alpha}_{\eta\mu} S^{\eta}_{\beta\nu} - S^{\alpha}_{\eta\nu} S^{\eta}_{\beta\mu}. \quad (5.27)$$

Otro punto de interés en esta sección es lograr la descomposición de la torsión en sus partes irreducibles con respecto al grupo de Lorentz  $SO(1, d-1)$ . En términos de la traza de la torsión  $T_{\nu} = T^{\lambda}_{\lambda\nu}$ , éstas pueden escribirse como [B8]:

$$T_{\lambda\mu\nu} = \sum_{n=1}^3 {}^{(n)}T_{\lambda\mu\nu}, \quad (5.28)$$

con

$${}^{(1)}T_{\lambda\mu\nu} = \frac{2}{3}(T_{\lambda\mu\nu} - T_{[\mu\nu]\lambda}) - g_{\lambda[\mu} T_{\nu]}, \quad (\text{TENSOR}) \quad (5.29a)$$

$${}^{(2)}T_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda[\mu} T_{\nu]}, \quad (\text{TRATOR}) \quad (5.29b)$$

$${}^{(3)}T_{\lambda\mu\nu} = T_{[\lambda\mu\nu]} = \frac{1}{3}\epsilon^{\alpha}_{\lambda\mu\nu}A_{\alpha}. \quad (\text{AXITOR}) \quad (5.29c)$$

Esta descomposición será muy útil para estudiar las condiciones de consistencia del acoplamiento de la torsión a partículas de espín  $3/2$ . Así en esta sección se visto la herramienta básica que va ha ser utilizada más adelante.

## V.2 ANOMALÍA AXIAL PARA PARTÍCULAS DE ESPÍN 1/2

En esta sección se mostrará que la única parte irreducible de la torsión que se acopla con las partículas de espín 1/2 es la completamente antisimétrica. Posteriormente se hallarán las ecuaciones de conservación clásicas que satisfacen las corrientes vectorial y axial-vectorial para este tipo de acoplamiento. Por último se va a mostrar que existe una anomalía en la corriente axial-vectorial. Esta anomalía consiste de dos partes, una la correspondiente a la anomalía axial para partículas de espín 1/2 en un campo gravitacional sin torsión, más una derivada total de un tensor que contiene a la torsión y que por lo tanto puede ser absorbido en una redefinición de la corriente. Esto causa que la torsión no contribuya a la anomalía axial. Todos los cálculos que se van a realizar en esta sección y la siguiente son para un espacio-tiempo compacto  $M$  con signatura  $\eta_{ab} = (-1, \dots, -1)$ .

La acción clásica para un espinor de Dirac sin masa en un espacio de Riemann Cartan es de la forma

$$S = \int dx \frac{i}{2} \epsilon [\bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - (D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi], \quad (5.30)$$

donde  $\epsilon = \det e_\mu^a$ . Considerando que el segundo término en (5.30) puede reescribirse como

$$-(D_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi = -\partial_\mu (\epsilon \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + \epsilon \bar{\psi} T^\nu_{\mu\nu} \gamma^\mu \psi + \epsilon \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi, \quad (5.31)$$

la acción clásica (5.30) resulta ser

$$S = \int dx i \epsilon [\bar{\psi} \gamma^\mu (D_\mu + (1/2) T^\mu_{\mu\nu}) \psi]. \quad (5.32)$$

Tomando en cuenta que la conexión de espín puede escribirse separando la parte correspondiente a la torsión (ec.(5.22)) y empleando (5.23b) se obtiene

$$S = \int dx i \epsilon [\bar{\psi} \gamma^\mu (\tilde{D}_\mu + (1/2) S_{ab\mu} \sigma^{ab} + (1/2) T^\mu_{\mu\nu}) \psi]. \quad (5.33)$$

Reescribiendo  $\gamma^c \sigma^{ab}$  en la forma

$$\gamma^c \sigma^{ab} = (1/2) [\gamma^c, \sigma^{ab}] + (1/2) \{ \gamma^c, \sigma^{ab} \} = (1/2) (\gamma^b \eta^{ac} - \gamma^a \eta^{bc}) + (1/2) \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^c], \quad (5.34)$$

se encuentra para la ecuación (5.33) lo siguiente

$$S = \int dxie[\bar{\psi}(\gamma^\mu \tilde{D}_\mu + (1/4)S_{abc}\gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{c]})\psi]. \quad (5.35)$$

La expresión anterior muestra que en dos dimensiones la parte correspondiente a la contorsión es cero. Esto se sigue del hecho que  $\sigma^{ab} = (1/2)\epsilon^{ab}\gamma_s$ , por lo tanto el anticonmutador en (5.34) es cero en dos dimensiones. Esto demuestra que no existe acoplamiento de la torsión con partículas de espín 1/2 para dos dimensiones. La ecuación (5.35) también muestra que el único tipo de acoplamiento de la torsión a los espinores de Dirac es a través de su parte completamente antisimétrica. Esto se puede ver al tomar en cuenta el hecho que

$$S_{[abc]} = -(1/2)T_{[abc]}. \quad (5.36)$$

En las expresiones siguientes se entenderá que  $T_{[abc]} = T_{abc}$ . Al utilizar la ecuación (5.36) en (5.35) se obtiene

$$S = \int dxie[\bar{\psi}\gamma^\mu(\tilde{D}_\mu - (1/4)\sigma^{ab}T_{ab\mu})\psi]. \quad (5.37)$$

De la ecuación (5.37) puede observarse que la acción clásica para una partícula de Dirac en un campo externo gravitacional con torsión es equivalente a un campo gravitacional externo con la conexión de espín modificada como

$$\tilde{\omega}_{ab\mu} \rightarrow \tilde{\omega}_{ab\mu} - (1/2)T_{ab\mu}, \quad (5.38)$$

con la torsión completamente antisimétrica.

En cuatro dimensiones  $\gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{c]} = \epsilon^{abcd}\gamma_s\gamma_d$  lo que significa que (5.35) puede reescribirse con ayuda de (5.29c) como

$$S = \int dx ie\bar{\psi}\gamma^\mu[\tilde{D}_\mu - (1/4)\gamma_s A_\mu]\psi. \quad (5.39)$$

La expresión (5.39) muestra que el acoplamiento de la torsión en cuatro dimensiones a las partículas de espín 1/2 es muy similar al de un campo axial-vectorial en un espacio curvo sin torsión. La única diferencia es que en el caso del acoplamiento axial-vectorial el operador de Dirac es generalmente no Hermítico, mientras que (5.39) si lo es. Esto significa que el operador (5.39) es equivalente a realizar la prolongación

analítica  $A_\mu \rightarrow -iA_\mu$  en el acoplamiento axial-vectorial en un campo gravitacional externo. Se hace notar que la equivalencia entre el acoplamiento de la torsión y el de un campo axial vectorial solamente es válida en cuatro dimensiones.

Las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción clásica (5.29) son

$$D_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + (1/2) \bar{\psi} \gamma^\mu T^\nu_{\mu\nu} = 0, \quad (5.40a)$$

$$\gamma^\mu D_\mu \psi + (1/2) \gamma^\mu \psi T^\nu_{\mu\nu} = 0. \quad (5.40b)$$

Utilizando estas ecuaciones es fácil mostrar que las corrientes vectorial  $j_V^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  y axial-vectorial  $j_A^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$  satisfacen las siguientes ecuaciones de conservación

$$\tilde{D}_\mu j_V^\mu = 0, \quad (5.41a)$$

$$\tilde{D}_\mu j_A^\mu = 0, \quad (5.41b)$$

a nivel clásico. Se recuerda que  $\tilde{D}_\mu$  es la derivada covariante sin torsión. De las expresiones (5.41) se observa que el estudio de las anomalías axiales o vectoriales para una partícula de Dirac en un campo gravitacional externo con torsión se reduce a investigar las condiciones bajo las cuales estas ecuaciones se cumplen a nivel cuántico. Empleando el mismo procedimiento con que se calculó la ecuación (1.10) se obtiene que a nivel cuántico las ecuaciones (5.41) se transforman en

$$\tilde{D}_\mu J_V^\mu = \frac{\delta \ln J(\alpha)}{\delta \alpha(x)}, \quad (5.42a)$$

$$\tilde{D}_\mu J_A^\mu = \frac{\delta \ln J(\beta)}{\delta \beta(x)}. \quad (5.42b)$$

Así nuevamente el problema de obtener las anomalías se reduce a calcular el Jacobiano de la transformación asociada a la simetría de interés. Es importante notar que si la derivada funcional con respecto al parámetro en las ecuaciones (5.42) es la derivada covariante sin torsión de un tensor, éste puede absorberse en una redefinición de la corriente y en consecuencia no existe una anomalía real. Como un primer paso para evaluar el Jacobiano en las ecuaciones (5.42) se considerará un problema un poco más



simple, se tomará el caso de torsión cero en cuatro dimensiones (o sea,  $A_\mu = 0$ ). Para esta situación, utilizando la prescripción (3.117) con el regulador

$$R = \exp(-\tilde{D}^2/M^2), \quad (5.43)$$

se obtiene que la anomalía vectorial es cero y el Jacobiano de la axial se reduce a la expresión (2.35). Esta ecuación es idéntica a la del método de Fujikawa y en la referencia [F1] ya se calculó para este problema, es decir una partícula de Dirac en un campo gravitacional externo sin torsión. Como este cálculo es un poco diferente a los realizados en los otros capítulos se mostrarán algunos de sus pasos intermedios. Empleando una base de funciones propias del regulador que forman un conjunto completo y que son ortonormales, o sea

$$\tilde{D}\phi_m(x) = \lambda_m\phi(x),$$

$$\int dx e(x)\phi_i^\dagger(x)\phi_m(x) = \delta_{im},$$

$$\sum_m \phi_m^\dagger(x)\phi_m(y) = (1/e(x))\delta(x, y), \quad (5.44)$$

la traza sobre el espacio-tiempo para el Jacobiano resulta ser

$$\ln J(\beta) = -2i \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow y} \text{Tr} \int dy e(y)\gamma_5\beta(y) \exp(-\tilde{D}^2/M^2) \frac{1}{e(y)}\delta(x, y). \quad (5.45)$$

Para evaluar la expresión (5.45) Fujikawa toma la siguiente representación de la función delta en el espacio curvo

$$\frac{1}{e(y)}\delta(x, y) = \frac{1}{e(y)} \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \exp[ik_\mu \tilde{D}^\mu \sigma(x, y)], \quad (5.46)$$

donde  $\sigma(x, y)$  es el biescalar geodésico, también llamado función distancia [D3]. Este se define en base a

$$\frac{\sigma(x, x')}{\tau - \tau'} = \int_{x', \tau'}^{x, \tau} \mathcal{L} d\tau, \quad (5.47)$$

con  $\mathcal{L} = (1/2)g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ , donde los puntos denotan diferenciación con respecto al parámetro afín  $\tau$ . El biescalar geodésico satisface las siguientes relaciones

$$\tilde{D}_\mu \sigma \tilde{D}^\mu \sigma = \tilde{D}'_\mu \sigma \tilde{D}'^\mu \sigma$$

$$\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$$

$$\sigma(x, x) = 0$$

$$\lim_{x' \rightarrow x} \tilde{D}_\mu \tilde{D}_\nu \sigma = g_{\mu\nu}. \quad (5.48)$$

De su definición y de las relaciones anteriores se ve que  $\sigma(x, x')$  es la generalización de  $(1/2)(x - x')^2$  al espacio curvo.

Tomando en cuenta que

$$\tilde{p}^2 = \tilde{D}_\mu \tilde{D}^\mu + \frac{\tilde{R}}{4}, \quad (5.49)$$

donde  $\tilde{R}$  es el escalar de curvatura. Sustituyendo la expresión (5.46) en (5.45) y empleando (5.49) se obtiene

$$\ln J(\beta) = -2i \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow y} Tr \int dy \frac{dk}{(2\pi)^4} \gamma_s \beta(y) \exp \left\{ \frac{-1}{M^2} \left[ (i\tilde{\Delta}^\mu + \tilde{D}^\mu)(i\tilde{\Delta}_\mu + \tilde{D}_\mu) + \frac{\tilde{R}}{4} \right] \right\}, \quad (5.50)$$

donde  $\tilde{\Delta}^\mu(x, y) = k_\alpha \tilde{D}^\mu \tilde{D}^\alpha \sigma(x, y)$ . Reescalando  $k \rightarrow Mp$  y reordenando se obtiene

$$\begin{aligned} \ln J(\beta) = & -2i \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow y} Tr \int dy \frac{dp}{(2\pi)^4} M^4 \gamma_s \beta(y) \exp(\tilde{\Delta}^\mu \tilde{\Delta}_\mu) \times \\ & \times \left\{ \exp(-\tilde{\Delta}_\mu \tilde{\Delta}^\mu) \exp \left[ - \left( i\tilde{\Delta}^\mu + \frac{\tilde{D}^\mu}{M} \right) \left( i\tilde{\Delta}_\mu + \frac{\tilde{D}_\mu}{M} \right) - \frac{\tilde{R}}{4M^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Utilizando la formula de Baker-Cambell-Hausdorff en las exponenciales entre llaves, desarrollando en serie de potencias de  $1/M$  el resultado de esta aplicación, empleando las relaciones (5.48) para tomar el límite  $x \rightarrow y$  y tomando el límite  $M \rightarrow \infty$  se obtiene

$$\begin{aligned} \ln J(\beta) = & -2i Tr \int dy \frac{dp}{(2\pi)^4} \gamma_s \beta(y) \exp(p^2) \left\{ (1/2) \tilde{D}^\mu \tilde{D}_\mu \tilde{D}^\alpha \tilde{D}_\alpha + (2/3) p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta \tilde{D}^\mu \tilde{D}^\nu \tilde{D}^\alpha \tilde{D}^\beta + \right. \\ & \left. + (2/3) p_\alpha p_\beta [\tilde{D}^\alpha \tilde{D}^\mu \tilde{D}_\mu \tilde{D}^\beta + \tilde{D}^\mu \tilde{D}_\mu \tilde{D}^\alpha \tilde{D}^\beta + \tilde{D}^\alpha \tilde{D}^\beta \tilde{D}^\mu \tilde{D}_\mu] \right\}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Integrando en los momentos resulta

$$\ln J(\beta) = \frac{-2i}{192\pi^2} \text{Tr} \int dy \gamma_s \beta(y) [\tilde{D}^\mu, \tilde{D}^\nu] [\tilde{D}_\mu, \tilde{D}_\nu]. \quad (5.53)$$

Tomando la traza se obtiene finalmente

$$\ln J(\beta) = \frac{-i}{384\pi^2} \int dy \beta(y) \epsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} \tilde{R}^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \tilde{R}_{\mu\nu\lambda\rho}. \quad (5.54)$$

Este es resultado para la anomalía axial para una partícula de espín 1/2 en un campo gravitacional externo sin torsión. Este es el mismo que se obtiene por el método de diagramas de Feynman [K1].

Una vez calculada la parte gravitacional de la anomalía, ya es muy fácil evaluar la anomalía axial para una partícula de Dirac en un espacio-tiempo de Riemann-Cartan de cuatro dimensiones. Esto se sigue del hecho que de acuerdo a la expresión (5.39) la torsión se acopla como un campo axial. Entonces, considerando que el cálculo para este tipo de acoplamiento ya se ha llevado a cabo en  $2n$  dimensiones por varios autores [A11], [F8], [G5]. Es sólo necesario copiar su resultado en cuatro dimensiones, con una pequeña corrección debida a que como se dijo en el capítulo anterior, cuando se realiza la prologación analítica, como es el caso de la ecuación (5.39), existe un factor de simetría de Bose en la parte de la anomalía correspondiente al campo  $A_\mu$ , que en cuatro dimensiones es 1/3, por lo tanto la anomalía axial es

$$\tilde{D}_\mu J_A^\mu = \frac{1}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{48} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{R}^{\mu\nu}_{\gamma\delta} + \frac{1}{96} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right], \quad (5.55)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \tilde{D}_\mu A_\nu - \tilde{D}_\nu A_\mu$ . Esto implica que la única parte donde aparece la torsión es una derivada total de un tensor, él cual puede absorberse en una redefinición de la corriente y por lo tanto la torsión no modifica la anomalía axial encontrada en (5.54). Así la torsión, aunque se acopla a las partículas de espín 1/2, no contribuye a la anomalía. Otros autores han probado lo anterior por otros métodos. Un método directo implica evaluar el "Heat Kernel"  $K(y, x, t)$  el cual está dado por

$$K(y, x, t) = \sum_m \phi_m(x) \exp(-t\mathcal{D}^2) \phi_m(y). \quad (5.56)$$

Se recuerda que  $\mathcal{D}$  es el operador de Dirac con torsión. Se utiliza este operador como regulador ya que la torsión es completamente antisimétrica y en consecuencia el operador en (5.32) se reduce a  $\mathcal{D}$ . De la expresión (5.56) se ve que el  $\ln J_R(\beta)$  es

el límite  $t \rightarrow 0$  de  $K(y, y, t)$ . El "Heat Kernel" es la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\partial_t K(y, x, t) = -\mathcal{D}^2 K(y, x, t), \quad (5.57)$$

sujeto a la condición inicial

$$K(y, x, 0) = \delta(x, y). \quad (5.58)$$

El cálculo del "Heat Kernel" para el operador de Dirac con torsión en cuatro dimensiones ha sido realizado por varios autores utilizando diferentes técnicas algunos de ellos son: Goldthorpe (1980)[G6], Kimura (1981)[K2], Nieh y Yau (1981) [N1], Obukhov (1983)[O2], Yajima y Kimura (1985)[Y1] y Cognola y Zerbini (1987)[C5]. La inclusión de la torsión torna el cálculo del "Heat Kernel" algebraicamente complicado y ésto ha originado discrepancias en los resultados. Así por ejemplo el cálculo de Goldthorpe contiene varios errores, el de Kimura no llega a mostrar que la parte de la torsión que contribuye a la anomalía es solamente una derivada total por lo cual sus conclusiones son erróneas. Los resultados de [O2], [Y1] y [C5] coinciden en el caso de la anomalía axial obteniendo

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\mu J_A^\mu = \frac{1}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{48} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{R}_{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{R}^{\mu\nu}{}_{\gamma\delta} + \frac{1}{96} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \tilde{D}_\nu (\tilde{D}^\mu \tilde{D}_\mu A^\nu + (1/4) A^\mu A_\mu A^\nu + (1/2) \tilde{R} A^\nu) \right]. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Al comparar los resultados (5.55) y (5.59) se observa que difieren por una derivada covariante total sin torsión de un tensor, por lo que nuevamente puede absorberse en una redefinición de la corriente implicando que la torsión no afecta a la anomalía axial en cuatro dimensiones. Este resultado es un caso especial de teoremas más generales que están relacionados con el teorema del índice de Atiyah-Singer. Como se mencionó en el capítulo 2, la integral de la anomalía axial está directamente relacionada al índice del operador de Dirac ( $\int dx \partial_\mu J_A^\mu = 2(n^+ - n^-)$ ). El teorema del índice implica que esta integral es un invariante topológico y además por la fórmula del índice [A5] para el operador de Dirac se sabe que ésta es la integral de una función de clases características. Las clases características son los invariantes globales más simples, las cuales para un haz fibrado  $\zeta = (E, \pi, B, F, G)$ , donde  $E$  es llamado el espacio total,  $\pi$  la proyección,  $B$  el espacio base,  $F$  la fibra y  $G$  el grupo de estructura; miden la desviación de la estructura producto local de  $E$  de la estructura producto  $B \times F$ . En

el caso que se está trabajando aquí el haz fibrado que se tiene es un haz espinorial. Al absorber el último término en (5.55) por una redefinición de la corriente el resultado es precisamente una clase característica. Esta es conocida como la primera clase de Pontrjagin, la que se puede reescribir en formas diferenciales como

$$p_1 = \frac{1}{32\pi^2} \tilde{R}^{ab}{}_{\mu\nu} \tilde{R}_{ab\alpha\beta} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = \frac{-1}{8\pi^2} \tilde{R}^a{}_b R^b{}_a = \frac{-1}{8\pi^2} \text{Tr} R^2, \quad (5.60)$$

donde

$$\tilde{R}^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (5.61)$$

Las clases características son formas cerradas, pero no globalmente exactas y por el lema de Poincarè su propiedad de cerradura significa que ellas se pueden escribir localmente como formas exactas  $\alpha = d\phi_i$  sobre cada abierto  $U_{(i)}$  de la variedad  $M$ . De esta manera el teorema de Stokes  $\int_M d\phi = \int_{\partial M} \phi$  asegura que sus integrales sólo dependen de sus funciones de transición (funciones definidas en la intersección de dos abiertos de  $M$  tal que  $\phi_{(i)}(x) = \Lambda_{(ij)}(x)\phi_{(j)}(x)$  con  $x \in U_{(i)} \cap U_{(j)}$ ), es decir, son independientes de la conexión. Esto se probará más adelante. Si las formas  $\phi_{(i)}$  se agrupan en una sola para formar una forma global, el teorema de Stokes implicaría el anulamiento de sus integrales sobre cualquier variedad sin frontera  $M$ .

En este contexto, probar que la torsión no influye a las anomalías en  $2n$  dimensiones implica demostrar la formula del índice de Atiyah-Singer para el caso del operador de Dirac  $\mathcal{D}$ . Esto se puede realizar de diferentes maneras: (1) La primera sería demostrar tal como lo hicieron Atiyah y Singer [A2] pag.568, que el índice para el operador de Dirac definido sobre un haz espinorial, es directamente proporcional al llamado  $\hat{A}$  genus [E2].  $\hat{A}$  sólo es función de las clases características de Pontrjagin, lo que está de acuerdo con el resultado obtenido en (5.55). Considerando que las clases de Pontrjagin son diferentes de cero solamente en  $4n$  dimensiones el  $\hat{A}$  genus al ser únicamente función de éstas tiene la misma propiedad. Esto implica que la anomalía axial para una partícula de Dirac en un campo gravitacional externo, ya sea con torsión o sin ella es distinta de cero sólo en  $4n$  dimensiones. Si además existe un campo de norma esto ya no es verdad dado que el haz se modifica y el índice es el producto directo del  $\hat{A}$  genus con el número de Chern [A11]. La demostración de Atiyah y Singer se basa en una fórmula muy general válida para el índice de cualquier operador elíptico (el operador de Dirac es elíptico para métricas con signatura Euclidea tal como es el caso tratado aquí). La obtención de esta fórmula y su completo entendimiento requiere de

amplios conocimientos de Análisis Funcional y Topología Algebraica. (2) Una segunda alternativa sería calcular el "Heat Kernel". Realizar ésto en más de 4 dimensiones es algebraicamente casi imposible. Sin embargo, en el caso de un campo gravitacional externo con torsión junto con un campo de norma vectorial, ésto ya se ha hecho hasta seis dimensiones por Yajima [Y2] y su cálculo sigue verificando el teorema del índice. Existen demostraciones del teorema del índice que emplean esta técnica, ver por ejemplo [A5] o [G7]. Sin embargo, en la primera parte de la demostración se toma explícitamente un tensor de Riemann sin torsión y para hacer su generalización se utilizan argumentos topológicos los cuales son difíciles de comprender. (3) Otra alternativa es calcular como Mavromatos [M4], utilizando la técnica de coordenadas normales y una formulación del teorema del índice en base a Supersimetría [A12], [F9]. Con este procedimiento Mavromatos es capaz de demostrar la formula del índice del operador de Dirac en  $2n$  dimensiones en el caso de una torsión completamente antisimétrica (lo cual no es en realidad una restricción como ya se vio en la ecuación (5.35)) y con la restricción  $\partial_{[\mu} T_{\nu\rho\sigma]} = 0$ .

Si se acepta como válida la formula del índice del operador de Dirac y si el objetivo es mostrar que la anomalía axial no se ve afectada por la torsión en  $2n$  dimensiones lo único que resta por hacer es demostrar que estas clases características son independientes de la torsión modulo la derivada total de un tensor. Una demostración rigurosa que cualquier polinomio característico es independiente de la elección de conexión siempre y cuando se tengan las mismas funciones de transición puede encontrarse en [C3] pag.122. Aquí sera suficiente con demostrar que las clases de Pontrjagin satisfacen dicha condición. Para lograr ésto de una manera sencilla, se debe tomar en cuenta que todas las clases de Pontrjagin pueden obtenerse como sumas o productos de polinomios de la forma  $P_m = \text{Tr} R^m$  [E2]. Por lo tanto basta con considerar este tipo de polinomios. Como primer paso se va a mostrar la cerradura de los  $P_m$  es decir que  $dP_m = 0$ . Esto se puede demostrar fácilmente a través de la identidad de Bianchi (5.17)  $DR = dR + \omega R - R\omega = 0$ , ya que

$$\begin{aligned} dP_m &= d\text{Tr} R^m = m\text{Tr} dR R^{m-1} = \\ &= m\text{Tr}(dR + \omega R - R\omega)R^{m-1} = m\text{Tr}(DR)R^{m-1} = 0, \end{aligned} \tag{5.63}$$

la segunda línea resulta de la propiedad cíclica de la traza y del hecho que  $R$  es una dos forma. Como  $d^2 = 0$  el producto de cualquier número de  $P_m$  es también cerrado. Para demostrar que dos clases características de Pontrjagin con conexiones  $\omega_0$  y  $\omega_1$

(con las mismas funciones de transición) difieren a lo más por una derivada total se tomará la siguiente interpolación continua entre ellas

$$\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$$

$$R_t = d\omega_t + \omega_t^2, \quad (5.64)$$

para  $t \in [0, 1]$ . De la relación  $\frac{\partial R_t}{\partial t} = d(\omega_1 - \omega_0) + [\omega_t, \omega_1 - \omega_0] = D_t(\omega_1 - \omega_0)$ , donde se empleó que el conmutador de una  $p$ -forma  $\eta$  con una  $q$ -forma  $\theta$  se define como  $[\eta, \theta] = \eta\theta - (-1)^{pq}\theta\eta$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_m(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \text{Tr} R^m = m \text{Tr} \frac{\partial R_t}{\partial t} R_t^{m-1} = \\ &= m \text{Tr} D_t(\omega_1 - \omega_0) R_t^{m-1} = m D_t \text{Tr}(\omega_1 - \omega_0) R_t^{m-1} = \\ &= m d \text{Tr}(\omega_1 - \omega_0) R_t^{m-1}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Integrando (5.65) de 0 a 1 se obtiene la diferencia

$$P_m(R_1) - P_m(R_0) = m d \int_0^1 \delta t \text{Tr}(\omega_1 - \omega_0) R_t^{m-1}, \quad (5.66)$$

como una forma exacta. Los productos de  $P_m$  comparten esta propiedad ya que la sustitución repetida de (5.66) da términos cruzados los cuales son productos de formas exactas con los  $P_m$ , los que a su vez son exactos por la propiedad de cerradura (5.63).

En la ecuación (5.38) se mostró que considerar partículas de espín 1/2 en un espacio de Riemann-Cartan significa modificar la conexión por un tensor que es la torsión, así que en este caso

$$\omega_{1ab\mu} - \tilde{\omega}_{0ab\mu} = -(1/2)T_{ab\mu}$$

por lo que de (5.66) se observa que las dos clases características  $P_m(R_1)$  y  $P_m(R_0)$  difieren a lo más por la derivada covariante de un tensor. En consecuencia la anomalía axial es independiente de la torsión en  $2n$  dimensiones.

### V.3 ACOPLAMIENTO DE GRAVITINOS A LA TORSIÓN

En la sección anterior se mostró que existe un acoplamiento entre partículas de espín 1/2 y la torsión. En esta sección, considerando que en teorías supersimétricas ha resultado muy importante la introducción de partículas de espín 3/2 (gravitinos),

resulta interesante averiguar si es posible contruir un acoplamiento consistente entre la torsión y estas partículas. Se ha mostrado (ver por ejemplo [B10], [O3]), que no existe acoplamiento mínimo entre la torsión y los gravitinos si se pide que se satisfagan las dos condiciones siguientes: (i) Que se tenga una invariancia de norma en  $\psi_\alpha$  y (ii) que las ecuaciones de movimiento resulten de una densidad Lagrangiana. En esta sección se demostrará que si es posible tener un acoplamiento consistente entre la torsión y los gravitinos si se pide el tipo de acoplamiento no mínimo dado por la Supergravedad que es de la forma

$$S = \frac{1}{2} \int dx \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_\delta \gamma_\nu D_\rho \psi_\sigma, \quad (5.67)$$

donde se recuerda que  $D_\rho$  contiene únicamente la conexión de espín con torsión y esto es lo que marca la diferencia con el acoplamiento mínimo el cual también tiene conexión afín. La ecuación de movimiento que resulta de minimizar la acción es

$$E^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} [\gamma_\nu D_\rho \psi_\sigma + (1/4) \gamma_\alpha T^\alpha_{\rho\nu} \psi_\sigma] = 0, \quad (5.68)$$

En este punto vale la pena comentar que Obukhov en [O2] asegura que no hay acoplamiento entre la torsión y los gravitinos para la teoría dada por (5.67). Sin embargo, para llegar a esta conclusión el parte de la ecuación de movimiento (5.68) pero sin el término que contiene a la torsión independiente, por lo que es lógico que solamente pueda tener un acoplamiento consistente para torsión nula.

La ecuación de movimiento (5.68) puede reescribirse de diferentes maneras utilizando las propiedades de las matrices gama [F10]. Estas formas distintas se escriben a continuación dado que se utilizarán para el estudio de las condiciones de consistencia

$$(g_{\rho\sigma} - \gamma_\sigma \gamma_\rho) = \frac{-1}{8} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\mu \gamma_\delta \gamma^\eta T_\eta^{\rho\nu} \psi^\sigma, \quad (5.69a)$$

$$\gamma^\rho (D_\rho \psi_\mu - D_\mu \psi_\rho) = \frac{-1}{8} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma_\delta \gamma^\eta T_\eta^{\rho\nu} \psi^\sigma, \quad (5.69b)$$

$$\gamma_\alpha (D_\beta \psi_\delta - D_\delta \psi_\beta) + \gamma_\beta (D_\delta \psi_\alpha - D_\alpha \psi_\delta) + \gamma_\delta (D_\alpha \psi_\beta - D_\beta \psi_\alpha) = \frac{-1}{4} \epsilon_{\mu\alpha\beta\delta} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^\eta T_{\eta\rho\nu} \psi_\sigma, \quad (5.69c)$$



$$\begin{aligned} \gamma^\mu (D_\beta \psi_\alpha - D_\alpha \psi_\beta) + \epsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\lambda} \gamma_\delta \gamma_\lambda (D_\rho \psi_\mu - D_\mu \psi_\rho) = & \frac{1}{2} \epsilon_{\delta\alpha\beta\mu} \epsilon^{\delta\nu\rho\sigma} \gamma^\eta T_{\eta\rho\nu} \psi_\sigma + \\ & - \frac{1}{4} \epsilon_{\delta\nu\rho\sigma} \sigma_{\alpha\beta} \gamma^\delta \gamma_\mu \gamma_\delta \gamma^\eta T_{\eta}{}^{\rho\nu} \psi^\sigma. \end{aligned} \quad (5.69d)$$

Las condiciones de consistencia para el acoplamiento de la torsión resultan del hecho que  $E^\mu$  tiene un índice libre. Esto implica que se puede derivar una vez más, es decir  $D_\mu E^\mu$ . Como se desea que toda la dinámica este descrita completamente por  $E^\mu$  la expresión anterior no debe generar nuevas condiciones de diferenciabilidad sobre  $\psi_\sigma$  ya que esto puede originar inconsistencias. Un ejemplo de esto se presenta en el caso de la ecuación de campo  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\delta \gamma_\nu (\partial_\rho - ieV_\rho) \psi_\sigma = 0$  la cual representa el acoplamiento mínimo de un campo de norma al gravitino. Al derivar con  $(\partial_\mu - ieV_\mu)$  se obtiene la siguiente expresión  $F^{\mu\nu} \gamma_\mu \psi_\nu = 0$ . Esta impone una contricción extra a la consistencia, que puede ser  $\psi_\nu = 0$  o que el fotón sea una excitación de norma o sea  $F^{\mu\nu} = 0$ . Así, ningún campo de norma tiene acoplamiento mínimo con los gravitinos. Para ver que sucede con la torsión se deriva la expresión (5.68) con lo que se obtiene

$$D_\mu E^\mu = (1/2) \gamma_\delta \gamma^\mu G_{\mu\nu} \psi^\nu + (1/4) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\lambda T^\lambda{}_{\mu\nu} D_\rho \psi_\sigma, \quad (5.70)$$

para obtener (5.70) se emplearon las dos siguientes relaciones

$$[D_\mu, D_\nu] \psi_\sigma = (1/2) R^{\alpha b}{}_{\mu\nu} \sigma_{\alpha b} \psi_\sigma,$$

$$D_\mu T^\alpha{}_{\nu\rho} = R^\alpha{}_{\mu\nu\rho}, \quad (5.71)$$

$G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein ( $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ ). El segundo término en (5.70), al cual se le da el nombre de  $V$ , debe de transformarse de manera tal que desaparezcan las derivadas sobre  $\psi_\sigma$  en la constrictión. Por supuesto, la solución trivial a este problema es poner la torsión igual a cero, pero justamente se quiere explorar si existen otras alternativas. Con este objeto se utilizará la descomposición de la torsión en partes irreducibles dada en (5.28). Sustituyendo ésta en  $V$ , empleando para la parte multiplicada por  $T_\mu$  la ecuación (5.68), para la multiplicada por  $A_\mu$  la expresión (5.69c) y para la parte multiplicada por  ${}^{(1)}T_{\mu\nu\beta}$  la ecuación (5.69d). Resulta que el único término que tiene productos con derivadas es

$${}^{(1)}T^{\mu\rho\eta} \gamma_\delta \gamma_\eta (D_\rho \psi_\mu - D_\mu \psi_\rho). \quad (5.72)$$

La única posibilidad que existe para eliminar las derivadas de este término es que  $(1)T^{\mu\rho\eta}$  fuera simétrico en  $\mu$  y  $\rho$ , pero en este caso  $(1)T^{\mu\rho\eta}$  es idénticamente cero. De aquí se concluye que las 16 componentes de  $(1)T^{\mu\rho\eta}$  deben ser cero para que la torsión pueda tener un acoplamiento consistente con el campo de espín  $3/2$ . Tomando en cuenta lo anterior la ecuación (5.70) se reduce a

$$G_{\mu\nu} - (1/6)[A_\mu A_\nu + (1/2)g_{\mu\nu}A_\alpha A^\alpha] = 0. \quad (5.73)$$

Para analizar con más detalle la condición (5.73) es conveniente separar en la parte del tensor de Einstein la contribución de la torsión, para ello se emplea la ecuación (5.27). Con esta sustitución en (5.73) y separando las partes simétrica y antisimétrica se obtiene

$$\partial_\mu T_\nu - \partial_\nu T_\mu - (1/4)\epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0$$

$$\tilde{G}_{\mu\nu} - [\tilde{\nabla}_\mu T_\nu + \tilde{\nabla}_\nu T_\mu - g_{\mu\nu}A_\alpha A^\alpha - 2(g_{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\alpha A^\alpha + A_\mu A_\nu)] = 0. \quad (5.74)$$

Se hace notar que la identidad  $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} = 0$  impone restricciones adicionales sobre  $T_\mu$ . Aún cuando no se ha estudiado el sistema (5.74) en toda su generalidad, se puede ilustrar con un ejemplo sencillo que por lo menos existe un acoplamiento no trivial de espín  $3/2$  a la torsión en el contexto en que se está trabajando. Se trata del caso  $T_\mu = 0$ , que corresponde a la torsión completamente antisimétrica restringida además por  $A_\mu = \partial_\mu \phi$ . La segunda restricción (5.74) dice que la métrica debe corresponder a una solución de las ecuaciones de Einstein en vacío. Es interesante notar que aún en el caso de métrica plana, la torsión asociada a  $\partial_\mu \phi$  produce una curvatura diferente de cero, por lo que, a diferencia del caso electromagnético, esta elección de la torsión es no trivial y no corresponde a un campo de norma pura. Este tipo de torsión ha sido previamente estudiado y el campo  $\phi$  corresponde esencialmente al taplon [H5]. Otro punto interesante es que en el caso de torsión completamente antisimétrica, la interacción (5.67) posee una invariancia de norma fermiónica dada por

$$\delta\psi_\mu = [D_\mu - \gamma_5 A_\mu]\epsilon(x). \quad (5.75)$$

Esta invariancia difiere de la usual por el término de torsión.

Como se tiene un acoplamiento consistente entre la torsión y el campo de espín  $3/2$  surge de inmediato la pregunta si en este caso la torsión puede contribuir a la

anomalía axial. Existen dos razones para pensar que esto no es así: La primera se basa en el hecho que la solución encontrada a las condiciones de consistencia corresponde esencialmente a un campo escalar acoplado de una manera extraña al campo de espín  $3/2$ . Considerando que los campos escalares en general no contribuyen a la anomalía axial se puede conjeturar que éste sea el caso. Probar esta conjetura directamente es complicado dado que es necesario eliminar los grados de libertad redundantes que surgen de representar el campo de espín  $3/2$  por el producto directo de un vector y un espinor o sea  $\psi_\mu$ . Para el caso de una partícula masiva de espín  $3/2$  hay cuatro grados de libertad redundantes (cuatro estados de espín  $1/2$  que aparecen de la descomposición del vector-espinor  $\psi_\mu$  en componentes irreducibles), mientras que en el caso sin masa existen dos más, los cuales corresponden a los estados de helicidad  $\pm 1/2$  de las componentes irreducibles del campo de espín  $3/2$  puro [N2]. Eliminar estos grados de libertad extra implica introducir en el cálculo de la anomalía tres campos fantasmas reales y un término que fije la norma fermiónica (5.75). Esto representa una modificación importante en el esquema de cálculo que se está utilizando, ya que inclusive sin torsión y con el método de Fujikawa es necesario introducir ciertas modificaciones [E3]. Esta modificación puede ser una interesante extensión del esquema que se propuso dentro de este trabajo y se deja para estudios posteriores. La otra forma de conjeturar que la torsión no va a contribuir a la anomalía se basa en el teorema del índice. En la referencia [N2], se prueba que la anomalía axial para una partícula de espín  $3/2$  en un campo gravitacional sin torsión esta relacionada con el índice de un operador. La prueba de si existe este operador no es muy rigurosa y se basa solamente en el hecho que es posible formular consistentemente las ecuaciones de movimiento. Para hacer esta prueba en forma rigurosa sería necesario demostrar que existe una forma natural covariante de imponer las condiciones subsidiarias que eliminen los grados de libertad adicionales. La demostración de esto implica realizar un análisis cuidadoso del espacio de órbitas del grupo de norma asociado y en este estudio pueden encontrarse ambigüedades como las de Gribov [S3] las cuales podrían invalidar el empleo del teorema del índice de Atiyah-Singer. A pesar de estas inconveniencias los autores de la referencia [N2] encuentran el mismo resultado que se obtiene por otros métodos lo que hace pensar que la suposición de que en realidad existen las condiciones necesarias para aplicar el teorema de índice puede ser correcta. Para el problema de interés, con la torsión dada como  $T_{\mu\nu\alpha} = (1/3)\epsilon_{\beta\mu\nu\alpha}\partial^\alpha\phi$  y considerando la invariancia (5.70), la suposición es en principio semejante, ya que se encontró una formulación consistente de las ecuaciones de movimiento. Esto implica que al aplicar el teorema del índice se obtendría una clase

característica que es independiente de la torsión hasta una derivada total de un tensor y por lo tanto no habría contribución de la torsión a la anomalía axial para el campo de espín  $3/2$ . Esto necesariamente requiere de un análisis más cuidadoso, el cual se encuentra fuera del alcance de este trabajo.

Así en este capítulo se revisó el cálculo de anomalías para partículas de espín  $1/2$  y se obtuvo una solución para las ecuaciones de consistencia del acoplamiento no mínimo de un campo gravitacional con torsión a los gravitinos. En lo que respecta al cálculo de anomalías para partículas de espín  $3/2$  todavía resta mucho que hacer, pero se dieron las bases para estudios posteriores.

## VI. CONCLUSIONES Y RESULTADOS

Dentro del formalismo de la Teoría Cuántica de Campos que utiliza integrales de trayectoria, se presentó un nuevo esquema de regularización para calcular anomalías axiales y vectoriales Abelianas y no-Abelianas de partículas de espín  $1/2$  en varios campos externos.

La idea clave que dio origen a este nuevo método fue suponer que la propiedad cíclica de la traza no es válida mientras la traza no esté regularizada. Matemáticamente hablando esta suposición es correcta ya que la traza de operadores no regularizados no se encuentra bien definida, es decir, no es una funcional lineal acotada sobre la llamada "Clase Traza  $\mathfrak{p}_1$ " [S6] y por lo tanto no es posible probar la propiedad cíclica. Sin embargo, esta indefinición se resuelve introduciendo un regulador, dado que en este caso puede probarse que el conjunto de operadores ya regularizados sobre los que actúa la traza pertenecen a  $\mathfrak{p}_1$  (ver [S6] cap. 9). Como se introdujo el regulador antes de aplicar la propiedad cíclica esto dio origen a cierta ambigüedad en su colocación. Como una solución inicial a este problema se propuso la prescripción (2.33) con la cual fue posible, utilizando el regulador (3.1) que es función de un operador Hermítico  $D_a$ , calcular la familia de anomalías axial y vectorial Abeliana en dos dimensiones para el modelo de Schwinger. Vale la pena subrayar que en la referencia [S4] se argumentaba que esto no era posible.

Al calcular la misma familia de anomalías en cuatro dimensiones empleando la prescripción anterior se encontró que la anomalía vectorial resultante no transformaba adecuadamente bajo conjugación de carga. Para resolver este problema se impuso que esta simetría debía respetarse a nivel cuántico. Esto dio origen a una modificación en el esquema de cálculo (ec.(3.117)). En este sentido fue muy importante el hecho que al fijar esta simetría la ambigüedad en la colocación del regulador desaparece, ya que existe solamente una prescripción que da como resultado un  $\ln J_R(\eta)$  invariante ante conjugación de carga. Un punto que puede resultar interesante es que si en lugar de tomar directamente la ecuación (3.117) como el punto de partida para calcular la familia de anomalías, se toma esta expresión sin dividir entre dos en la parte de los conmutadores se obtiene como resultado de calcular con el regulador (3.1), que depende de un parámetro, una anomalía axial independiente del parámetro idéntica a la que resulta de calcular con el método de Fujikawa (2.18) y una anomalía vectorial

cero módulo contratérminos. Esta observación es interesante porque muestra que la conservación de una simetría discreta como es la invariancia ante conjugación de carga de la Electrodinámica Cuántica da lugar a la conservación de una simetría de norma local, independientemente del regulador empleado.

En general, los resultados más importante a que dio origen este nuevo esquema de regularización son:

1.- Permite calcular anomalías vectoriales en  $2n$  dimensiones dentro del contexto de integrales de trayectoria. Esto solamente había sido logrado en dos dimensiones utilizando otros esquemas.

2.- El esquema de cálculo es adecuado para obtener cualquier anomalía axial utilizando un regulador arbitrario, sin caer en inconsistencias con otros métodos de cálculo.

En lo que se refiere a las aplicaciones, el esquema de regularización propuesto dio lugar a los siguientes resultados:

i) En dos dimensiones se calculó con el regulador  $R = \exp(\not{D}^2/M^2)$  las anomalías vectorial y axial abelianas en el modelo de Schwinger y se obtuvo como resultado un miembro de la familia de anomalías axial y vectorial que correspondió a tomar el valor cero del parámetro. Este cálculo es importante porque muestra la solución a las inconsistencias que aparecen en el método de Fujikawa cuando se emplean reguladores diferentes a los construidos por el operador de Dirac de la teoría. Se encontró además la familia de anomalías más general que se conoce para el modelo de Schwinger. El hecho que para calcular esta familia se haya empleado la ec.(2.33) en vez de la (3.117) y que aún a pesar de esto se haya obtenido un resultado correcto se debe esencialmente a que los términos que rompen la invariancia ante conjugación de carga van a cero en el límite  $M \rightarrow \infty$ . En el capítulo dos también se intentó dar una interpretación a la prescripción empleada en base a suponer que las transformaciones de fase debían de ser reguladas al pasar al nivel cuántico y se pidió como condición extra que la acción clásica debía de ser invariante ante estas transformaciones reguladas para un parámetro independiente de la posición. El pedir esta condición lleva directamente a la ecuación (2.33) ó a la (3.116), pero no hay manera de llegar a una ecuación invariante ante conjugación de carga. Así, esta invariancia y aquélla ante las transformaciones reguladas se contraponen. Esto significa que es necesario estudiar con mayor detenimiento como introducir las transformaciones de fase reguladas. Sin embargo, en

dos dimensiones esta interpretación si funciona correctamente dado que los posibles términos que rompen la invariancia ante conjugación de carga van a cero en el límite  $M \rightarrow \infty$ .

ii) En cuatro dimensiones se calculó la familia de anomalías axial y vectorial para la Electrodinámica Cuántica. En el caso de la anomalía axial se empleó tanto un regulador dependiente de un parámetro real como de uno complejo. Los resultados obtenidos en cada caso difieren en que cuando el parámetro es real la anomalía axial podía hacerse cero realizando una extensión analítica de éste poniendo  $\alpha = \pm i$ . Sin embargo, al calcular con parámetro complejo se encontró que la anomalía axial podía hacerse cero para un valor diferente del que se pensaba por la extensión analítica, o sea  $\alpha$  dado por (3.81). Se piensa que esta discrepancia tiene un origen similar a la diferencia entre la anomalía no-Abeliana covariante y consistente. La base de esta suposición radica en el hecho que para calcular con el regulador (3.1) considerando que  $\alpha = i$ , se necesita realizar la extensión analítica  $A_\mu \rightarrow iA_\mu$  ya que de otra manera el regulador no sería Hermítico y por lo tanto no se podría asegurar que funcione adecuadamente. La extensión analítica  $A_\mu \rightarrow iA_\mu$  es la misma que se efectúa en el caso no-Abeliano para calcular la anomalía consistente en teorías con acoplamiento con  $\gamma_5$ . Por otra parte el hecho que al calcular con parámetro real se haya encontrado que es imposible hacer cero la anomalía axial Abeliana es interesante debido a que desde este punto de vista parecía haber cierta preferencia por conservar la corriente vectorial en vez de la axial. Este hecho se presenta de una manera más notoria al calcular con la ecuación (3.117) sin dividir entre dos como ya se dijo anteriormente. En el caso de la anomalía axial nuevamente sucedió que el cálculo con la expresión (2.33) o con la (3.117) es el mismo. Esto indica que para esta anomalía los términos que rompen la invariancia ante la conjugación de carga son eliminados por dos mecanismos: Por la traza sobre las matrices gama al existir una matriz  $\gamma_5$  y por ir a cero en el límite  $M \rightarrow \infty$ . Utilizando este hecho se calculó la anomalía axial en seis dimensiones. Además, tomando en cuenta que el cálculo para la parte de Fujikawa se realizó en  $2n$  dimensiones se propuso una generalización del cálculo de la anomalía axial para un regulador dependiente de un parámetro a  $2n$  dimensiones. Esta generalización mostró que en  $4k + 2$  dimensiones los resultados del método de separación de punto y del esquema tratado aquí son similares, en el sentido que la anomalía axial puede hacerse cero para un valor del parámetro igual a  $\alpha = -1$ . En lo que respecta a la anomalía vectorial se mostró que la forma adecuada de calcularla en el caso de la Electrodinámica Cuántica es con la expresión (3.117).

Esta ecuación es invariante ante conjugación de carga y da un resultado equivalente al del método de separación de punto. Al combinar los resultados de la anomalía axial y los de la vectorial se mostró explícitamente que en  $2n$  dimensiones es imposible tener la conservación simultánea de las corrientes axial-vectorial y vectorial. Este hecho, aunque conocido, no se había probado en forma explícita en más de dos dimensiones.

iii) Para una teoría no-Abeliana con acoplamiento vectorial y axial-vectorial se generalizó el esquema propuesto en el capítulo 2 al caso de anomalías no-Abelianas. Los resultados obtenidos dentro del esquema son correctos ya que fue posible reproducir las dos formas de la anomalía no-Abeliana la consistente y la covariante. Una sutileza en el cálculo explícito en dos dimensiones fue darse cuenta que en la ecuación (4.20) el resultado de la anomalía no era  $(-e/2\pi)\epsilon^{\mu\nu}V_{\mu\nu}$  y que por lo tanto ésta no era covariante, no obstante si podía hacerse consistente. En cuatro dimensiones se realizó el cálculo de la anomalía covariante incluyendo campos escalares. Sin embargo, como este resultado ya había sido reportado por Reuter [R2], solamente se dio la expresión final. Es interesante que las expresiones de punto de partida de Reuter para calcular las anomalías no-Abelianas (ecs.(4.8) y (4.9)) sean idénticas a las obtenidas en este trabajo, ya que él las obtuvo a partir de una metodología diferente como es la regularización con la función zeta.

iv) En el capítulo 5 se intentó dar una aplicación completamente nueva al método de cálculo desarrollado estudiando la contribución a la anomalía axial de los acoplamiento de campos de materia a la gravitación en presencia de torsión. Sin embargo, se encontró posteriormente que ya existía un número considerable de trabajos en este campo en el caso de espín  $1/2$ . Entonces, se trató de dar la mayor claridad posible a la exposición con el fin de esclarecer ciertos aspectos que aparecían en forma confusa en la literatura con el propósito de poder utilizarlos posteriormente. Entre estos aspectos se encuentran el hecho de mostrar que en dos dimensiones la torsión no se acopla a las partículas de espín  $1/2$  y que el acoplamiento en cuatro dimensiones es idéntico a de un campo axial una vez considerada la extensión analítica. Esto permitió obtener la anomalía axial en cuatro dimensiones y demostrar que la torsión no contribuye a la anomalía salvo por la derivada covariante de un tensor que se puede absorber en una redefinición de la corriente. Por último, empleando el teorema del índice de Atiyah-Singer se mostró que en general en  $2n$  dimensiones la torsión no contribuye a la anomalía axial. Aquí vale la pena aclarar que la demostración a través del teorema del índice consta esencialmente de dos partes: La primera es demostrar que el índice



del operador de Dirac es un invariante topológico dado en función de clases características de Pontrjagin. La segunda parte es la que se reprodujo en este trabajo y fue demostrar que estas clases características no dependen de la torsión salvo una derivada total. La primera parte es en la que se requieren amplios conocimientos de Topología Algebraica y generalmente no se menciona. Por ejemplo en [M4] se afirma que Chern en [C3] prueba que el teorema del índice no es afectado por la torsión y esto es falso ya que Chern lo único que realiza es una demostración que cualquier polinomio invariante no depende de la torsión. Como última parte del trabajo se consideró el caso de espín  $3/2$  donde se obtuvo las condiciones de consistencia para un acoplamiento del tipo de Supergravedad entre la torsión y dichos campos de materia.  $3/2$ . Se obtuvo una solución a estas condiciones de consistencia que corresponde a una torsión de la forma  $T_{\mu\nu\alpha} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\beta \phi$ . Para esta solución sólo fue posible conjeturar que no existe contribución a la anomalía axial para partículas de espín  $3/2$ .

Por último se mencionan algunas de las posibles extensiones de este trabajo:

A.- De acuerdo al trabajo realizado, la prescripción que es necesario tomar para fijar la posición del regulador en la ecuación (2.32) depende de las simetrías adicionales de la teoría. Por lo tanto sería interesante tener un método sistemático de seleccionar la prescripción dadas todas las simetrías de la teoría a estudiar.

B.- Podría valer la pena estudiar la relación entre el esquema propuesto y otros métodos alternativos de regularización, como por ejemplo el de la función zeta.

C.- Dado que dentro del esquema de regularización presentado aquí se da una forma de calcular la anomalía axial para un regulador arbitrario es interesante tratar de establecer una relación entre el esquema propuesto y el teorema de índice.

D.- Para calcular la anomalía axial para partículas de espín  $3/2$  en un campo gravitacional con torsión es necesario por una parte estudiar más a fondo como se implementan las constricciones en el esquema, o sea tener una prescripción adecuada para la introducción de fantasmas. Por otra parte si se quiere utilizar el teorema del índice es imprescindible investigar rigurosamente como es posible definir el operador para la partícula de espín  $3/2$  en el haz fibrado de manera tal que la proyección al espacio base de el resultado deseado.

## VII. REFERENCIAS

- [A1].- S.L. Adler; Phys.Rev.177 (1969)2426.
- [A2].- L. Alvarez-Gaumé, E. Witten; Nucl.Phys.B234 (1983)269.
- [A3].- L. Alvarez-Gaumé, S. della Pietra, G. Moore; Ann. Phys.163(1985)288.
- [A4].- M.F. Atiyah, I.M. Singer; Ann.Math.87 (1968)485.  
M.F. Atiyah, G.B. Segal; Ann.Math.87 (1968)531.  
M.F. Atiyah, I.M. Singer; Ann.Math.87 (1968)546.  
M.F. Atiyah, I.M. Singer; Ann.Math.93 (1971)119.
- [A5].- M.F. Atiyah, R. Bott, V.K. Patodi; Invent.Math.19 (1973)279.  
(E) Invent. Math.28 (1975)277.
- [A6].- J. Alfaro, L.F. Urrutia, J.D. Vergara; Phys.Lett.B202 (1988)121.
- [A7].- J. Alfaro, L.F. Urrutia, J.D. Vergara; Proceedings of the Meeting on Quantum Mechanics of Fundamental Systems II. Ed. by C. Teitelboin, Plenum Press (1989).
- [A8].- A. Andrianov, L. Bonora; Nucl.Phys.B233(1984)247.
- [A9].- S.L. Adler, W.A. Bardeen; Phys.Rev.182(1969)1517.
- [A10].- M.F. Atiyah, I.M. Singer; Proc.Natl.Acad.Sci.USA;81(1984)449.
- [A11].- L. Alvarez-Gaumé, P. Ginsparg; Nucl.Phys.B243(1984)449.
- [A12].- L. Alvarez-Gaumé; Commun.Math.Phys.90(1983)161.
- [B1].- J. Bell, R. Jackiw; Il Nuovo Cim.A60 (1969)47.
- [B2].- A. Balachandran, G.Marmo, V.P. Nair, C.G. Trahern; Phys.Rev.D25(1982)2713.
- [B3].- W.A. Bardeen; Phys.Rev.184(1969)1848.
- [B4].- G. Bandelloni, C. Becchi, A. Blasi, R. Collina; Commun.Math.Phys.72(1980)239.
- [B5].- O. Babelon, F.A. Schaposnik, C.M. Viallet; Phys.Lett.B177(1986)385.
- [B6].- W.A. Bardeen, B. Zumino; Nucl.Phys.B244(1984)421.
- [B7].- R.W. Brown, C.-C. Shih, B.-L. Young; Phys.Rev.186(1969)1491.
- [B8].- R. Baekler, F.W. Hehl, E.W. Mielke; en "Marcel Grossmann Meeting on General Relativity 1985", ed. por R. Ruffini, North Holland (1986).
- [B9].- I. Bars, D. Nemeschansky, S. Yankielowicz; Nucl. Phys.B278(1986)632.
- [B10].- N. H. Barth, S. M. Christensen; J.Phys.A.Math.Gen.16(1983)543.
- [C1].- G.A. Christos; Z.Phys.C18 (1983)155.

- [C2].- G. Costa, T. Marinucci, M. Tonin, J. Julve; *Il Nuovo Cim.*A38(1977)373.
- [C3].- S. Chern; "Complex Manifolds Without Potential Theory". Springer-Verlag (1979).
- [C4].- E. J. Cartan; *Comptes Rendus.* 174(1922)437.
- [C5].- G. Cognola, S. Zerbini; *Phys. Lett.*B195(1987)435.
- [D1].- A. Das, V.S. Mathur; *Phys.Rev.*D33 (1986)489.
- [D2].- L.L. DeRaad,Jr., K.A. Milton, W. Tsai; *Phys.Rev.*D6(1972)1766.
- [D3].- B.S. De Witt; "Dynamical Theory of Grups and Fields". Gordon and Breach (1965).
- [E1].- M. Einhorn, D. Jones; *Phys.Rev.*D29(1984)331.
- [E2].- T. Eguchi, P.B. Gilkey, A.J. Hanson; *Phys.Rep.*66(1980)213.
- [E3].- R. Endo, T. Kimura; *Prog. Theor. Phys.*63(1980)683.
- [F1].- K. Fujikawa; *Phys.Rev.Lett.*42(1979)1195.  
K. Fujikawa; *Phys.Rev.*D21(1980)2848.
- [F2].- K. Fujikawa; *Phys.Rev.*D29(1984)285.
- [F3].- P.H. Frampton, T.W. Kephart; *Phys.Rev.Lett.*50(1983)1343, 1347.
- [F4].- K. Fujikawa; *Phys.Rev.*D31(1985)341.
- [F5].- K. Fujikawa; en "Festschrift for Professor K. Nishijima", World Scientific(1985).
- [F6].- L.D. Faddeev, S.L. Shatashvili; *Phys.Lett.*B167(1986)225.
- [F7].- T. Fujiwara, J. Kitakado; Preprint Ibaraki Univ. IU-1988-2.
- [F8].- K. Fujikawa, S. Ojima, S. Yajima; *Phys.Rev.*D34(1986)3223.
- [F9].- D. Friedan, P. Windey; *Nucl. Phys.*B235(1984)395.
- [F10].- D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen; *Phys. Rev.*D14(1976)912.
- [G1].- H. Georgi, S. Glashow; *Phys. Rev.*D6(1972)429.
- [G2].- M.B. Green, J.H. Schwarz; *Phys.Lett.*B149 (1984)117.
- [G3].- D.J. Gross, R. Jackiw; *Phys.Rev.*D6 (1972)477.
- [G4].- R.E. Gamboa-Saravi, M.A. Muschietti, F.A. Schaposnik, J.E. Solomin;  
*Ann.Phys.*157(1984)285.
- [G5].- J.M. Gipson; *Phys.Rev.*D33(1986)1061.
- [G6].- W.H. Goldthorpe; *Nucl. Phys.*B170(1980)307.
- [G7].- P.B. Gilkey; "The Index Theorem and the Heat Equation".  
Publish or Perish. Inc.(1974).
- [H1].- C.R. Hagen; *Phys.Rev.*188(1969)2416.
- [H2].- S.-H. Hu, B.-L. Young, D.W. McKay; *Phys.Rev.*D30(1984)836.

- [H3].- F.W. Hehl, P.von der Heyde, G.D. Kerlick, J.H. Nester; Rev.Mod.Phys.48(1976)393.
- [H4].- F.W. Hehl; Found.Phys.15(1985)451.
- [H5].- S. Helgason; "Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces",  
Academic Press (1978).
- [H6].- S. Hojman, M. Rosenbaum, M. Ryan, L. Shapley; Phys.Rev.D17(1978) 3141.
- [I1].- C. Itzykson, J.-B. Zuber; "Quantum Field Theory", McGraw-Hill(1980).
- [J1].- R. Jackiw, K. Johnson; Phys.Rev.182 (1969)1459.  
R. Jackiw; en "Current Algebra and Anomalies", ed. por S.B. Treiman,  
R. Jackiw, B. Zumino, E. Witten, World Scientific(1985).
- [J2].- K. Johnson; Phys.Lett.5 (1963)253.
- [K1].- T. Kimura; Prog.Theor.Phys.42(1969)1191.
- [K2].- T. Kimura; Prog.Theor.Phys.66(1981)2011.
- [L1].- C. Lucchesi, O. Piguet, K. Sibold; Int.J.Mod.Phys.A2(1987)385.
- [L2].- C. Lee, J. Minn; Phys. Rev.D33(1986)3777.
- [L3].- C.P. Luehr, M. Rosenbaum; J.Math.Phys.21(1980)1432.  
C.P. Luehr, M. Rosenbaum; J.Math.Phys. 25(1984)380.
- [M1].- M.L. Mehta; J.Math.Phys.7(1966)1824.
- [M2].- M.L. Mehta, P.K. Srivastava; J. Math. Phys.7(1966)1833.
- [M3].- D. Mc Kay, B.L. Young; Phys.Rev.D28(1983)1039.
- [M4].- N.E. Mavromatos; J.Phys.A.Math.Gen.21(1988)2279.
- [N1].- H.T. Nieh, M.L. Yau; Ann.Phys.138(1982)237.
- [N2].- N.K. Nielsen, M.T. Grisaru, H. Römer, P. van Nieuwenhuizen;  
Nucl.Phys.B140(1978)477.
- [O1].- Y. N. Obukhov, P.I. Pronin; Acta Phys.Pol.B19(1988)341.
- [O2].- Y. N. Obukhov; Nucl.Phys.B212(1983)237.
- [O3].- Y. N. Obukhov; J.Phys.A. Math.Gen.16(1983)3795.
- [P1].- J. Preskill, P.H. Frampton, H. van Dam; Phys.Lett.B124(1983)209.
- [R1].- P. Ramond; "Field Theory. A Modern Primer".  
Benjamin/Cummings, Reading Massachusetts (1981).
- [R2].- M. Reuter; Phys.Rev.D31(1985)1374.
- [R3].- M. Rosenbaum, J.C. D'Olivo, E. Nahmad-Achar, R. Bautista, J. Muciño.  
Preprint ICN-1988.

- [S1].- J.H. Schwarz; Int.J.Mod.Phys.A2 (1987)593.  
 J.H. Schwarz; CALTEC preprint CALT-68-1481.
- [S2].- J. Strathdee; Int.J.Mod.Phys.A1 (1986)1.
- [S3].- J. Schwinger; Phys.Rev.125 (1962)397.  
 J. Schwinger; Phys.Rev.128 (1962)2425.
- [S4].- A. Samailagic, R.E. Gamboa-Saravi; Phys.Lett.B192 (1987)145.
- [S5].- I.M. Singer; Commun.Math.Phys.60 (1978)7.
- [S6].- B. Simon; "Trace Ideals and their Applications", Cambridge Univ. Press(1979).
- [T1].- G.'t Hooft; Phys.Rev.Lett.37 (1976)8.
- [V1].- P. van Nieuwenhuizen; Phys. Rep.68(1981)189.
- [W1].- E. Witten; Commun.Math.Phys.100 (1985)197.
- [W2].- J. Wess, B. Zumino; Phys.Lett.B37 (1971)95.
- [W3].- J.-S. Wu, A. Zee; J.Math.Phys.25(1984)2696.
- [W4].- E. Witten; en "Symposium on Anomalies, Geometry, and Topology",  
 ed.por W. Bardeen, A. White. World Scientific (1985).
- [Y1].- S. Yajima, T. Kimura; Prog.Theor.Phys.74(1985)866.
- [Y2].- S. Yajima; Prog.Theor.Phys.79(1988)535.
- [Z1].- B. Zumino, Y.-S. Wu, A. Zee; Nucl.Phys.B239 (1984)477.
- [Z2].- B. Zumino; en "Relativity, Groups and Topology II, Les Houches, Sesi3n XL 1983.  
 Ed. por B.S. De Witt, R. Stora. Elsevier (1984).

# VIII. APENDICE A

## CONVENCIONES

- 1.- En Minkowski la métrica del espacio plano es  $\eta_{ab} = (1, -1, \dots, -1)$ , en Euclideo  $\eta_{ab} = (-1, -1, \dots, -1)$ .
- 2.- Los generadores de grupos de Lie se toman Hermíticos  $\lambda_a = \lambda_a^\dagger$ .
- 3.- En el espacio Euclideo en  $2n$  dimensiones las matrices gama satisfacen

$$\gamma_\mu^\dagger = -\gamma_\mu \quad \gamma_{D+1}^\dagger = \gamma_{D+1} \quad \gamma_\mu^2 = -1 \quad \gamma_{D+1}^2 = 1$$

En cuatro dimensiones una representación que satisface estas condiciones es la siguiente

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.-  $\epsilon^{123\dots D} = 1$

- 5.- Algunas integrales útiles en  $D$  dimensiones en espacio Euclideo

$$I_1 = \int \frac{d^D p}{\pi^{D/2}} \exp(-p^2) = 1$$

$$I_2 = \int \frac{d^D p}{\pi^{D/2}} \exp(-p^2) p_\mu p_\nu = \frac{-1}{2} g_{\mu\nu}$$

$$I_3 = \int \frac{d^D p}{\pi^{D/2}} \exp(-p^2) p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta = \frac{1}{4} (g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha})$$