UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

METODOS ALGEBRAICOS SOBRE SUPERFICIES DE RIEMANN

TESIS

QUE PARA OBTENER LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS,
PRESENTA

LUIS MANUEL SANGINES GARCIA.

1976

A MI MADRE

A MIS HERMANOS

A MARIA FERNANDA

I N D I C E

INTRODUCCION

Esta tesis esta dividida en tres capítulos. En el primer capítulo se estudia el funtor M de la categoría de superficies de Riemann Compactas en la categoría de campos de funciones algebraicas, para estudiar este funtor definimos las siguientes funciones, la función que a cada superficie de Riemann Compacta le asociamos su campo de funciones meromorfas, se demuestra en este capítulo que es un campo de funciones algebraicas. La otra función que se estudia es la de asociar a cada punto de nuestra superficie un anillo de valuación discreto y se demuestra que esta función es biyectiva. En este capítulo le asociamos a cada superficie su género, y mediante la fórmula de Hurwitz relacionamos el género de dos superficies.

En el segundo capítulo se da la prueba de A. Weil del teorema de Riemann Roch, cuya principal referencia está dada por el líbro de Serge Lang, Introduction to Algebraic and Abelian Functions. Entre los conceptos que se definen son los siguientes. El divisor de una curva y alguna de sus propiedades, y como a cada divisor se le asocia un espacio vectorial, a nosotros nos va a interesar encontrar la dimensión de este espacio vectorial, para encontrarla definimos el anillo de los adeles que nos va a permitir encontrar que la dimensión de este espacio está relacionada con el grado de nuestro divisor y otra función de nuestro divisor asociado a la curva y con el género de nuestro campo, el cual se define algebraicamente.

En el tercer capítulo se demostrará que el género algebraico es igual al género topológico, que toda superficie de Riemann Compacta se puede sumergir en un espacio proyectivo de dimensión $2g + 1$, se ve también que a todo campo de funciones algebraicas proviene de una superficie de Riemann.

Durante la elaboración de este trabajo me fue otorgada una beca del Programa de Formación de Personal Académico de la U.N.A.M., con apoyo del Instituto de Matemáticas.

C A P I T U L O I

FUNCIONES MEROMORFAS EN UNA SUPERFICIE DE RIEMANN COMPACTA.

I. 1 SUPERFICIES DE RIEMANN COMPACTAS

DEFINICION 1: Una superficie de Riemann Compacta es una 2-variedad S Hausdorff compacta con atlas (U, α) tal que las funciones de transición son holomorfas.

DEFINICION 2: Una función f de una superficie de Riemann S_1 en otra superficie de Riemann S_2 es holomorfa si la composición $h = \beta \circ f \circ \alpha^{-1}$ es holomorfa, es decir si tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ U & \xrightarrow{h} & V \end{array}$$

donde α y β son cartas coordenadas y h es holomorfa

TEOREMA 1: La esfera de Riemann $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ es una superficie de Riemann cuyas cartas coordenadas son $\mathcal{U}_1 = S^2 - (0, 0, 1)$

$$\alpha_1 : \mathcal{U}_1 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \alpha_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3} = z$$

$$\mathcal{U}_2 = S^2 - (0, 0, -1)$$

$$\alpha_2 : \mathcal{U}_2 \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \alpha_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - i x_2}{1 + x_3} = w$$

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2} \qquad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)} \qquad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

$$\beta \circ \alpha^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\beta \circ \alpha^{-1}(z) = \beta\left(\frac{z + z}{1 + |z|^2}, \frac{z - z}{i(1 + |z|)}, \frac{|z^2| - 1}{1 + |z|^2}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{z + z}{1 + |z|} - \dfrac{i(z - z)}{i(1 + |z|}}{1 + \dfrac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}}$$

$$= \frac{2z}{2|z|^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{z} = w$$

de donde $\beta \circ \alpha^{-1}$ es holomorfa.

DEFINICION 3. El campo de funciones meromorfas de una superficie de Riemann Compacta S es el conjunto de funciones f holomorfas de S en S^2.

TEOREMA DE EXISTENCIA DE RIEMANN. 2: Para cualesquiera dos puntos p y q de una superficie de Riemann compacta S existe una función meromorfa f tal que $f(p) \neq f(q)$

NOTA: En el presente trabajo no se demostrará este teorema.

TEOREMA 3: Toda función $f : S_1 \longrightarrow S_2$ no constante se comporta localmente como z^n.

Sean $(\mathcal{U}, \alpha)$ y (V, β) las cartas coordenadas respectivas de S_1 y S_2 de donde se obtiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & V \arrow[d, "\beta"] \\ \Delta \arrow[r, "h"] & \Delta \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} h = \beta \circ f \circ \alpha^{-1} \\ h(z) = z^n \end{array}$$

donde $\Delta = \{ z \mid |z| < 1, z \in \mathbb{C} \}$

DEFINICION 4: El indice de ramificaciones analítico de un punto $z \in S$ es el exponente que se necesita para hacer que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} S_1 \supset \mathcal{U}_{z_i} & \xrightarrow{f} & f(\mathcal{U}_{z_i}) \subset S_2 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \Delta & \xrightarrow{z^{e_i}} & \Delta \end{array}$$

DEFINICION 4': También se puede definir a e como el $\mathrm{ord}_p \; f$.

TEOREMA 4: La cardinalidad de la imagen inversa de un punto w de S_2 es constante contando multiplicidades

Demostración : Sea $R = \{ w \mid w = f(z_i) \;\; y \;\; f'(z_i) = 0 \}$ Sea $\# f^{-1} : S_2 - R \longrightarrow \mathbb{Z}$, probaremos que $\# f^{-1}$ es localmente constante y de aquí concluimos que es constante en $S_2 - R$ ya que es conexo.

La $\# f^{-1}(w) < \infty$ ya que las imágenes inversas de w son aisladas y están en un compacto de donde se tiene que $\# f^{-1}(w) = n$.

Sea V una vecindad de w tal que sus vecindades difeomorfas

$\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ en S_1 no se intersecten dos a dos. Si $x \in V$ entonces $f^{-1}(x) \in \mathcal{U}_i$ y de aqui $\# f^{-1}(x) = \# f^{-1}(w) = n$ en V. Si $w \in R$ sea $f^{-1}(w) = \{y_1, \ldots, y_r\}$ entonces $\sum_{i=1}^{r} e(y_i) = n$, para ver esto consideremos vecindades $\mathcal{U}_i$ de y_i tales que $f(\mathcal{U}_i) = V$ vecindad de w y sea $x \in V$ $x \neq w$ entonces existen exactamente $e(y_i)$ puntos que estan en $f^{-1}(x) \in \mathcal{U}_i$ de donde concluimos que $\sum_{i=1}^{r} e(y_i) = n$. Lo que demuestra el teorema.

DEFINICION 5: El grado de una función holomorfa de S_1 en S_2 es igual a la cardinalidad de la imagen inversa de cualquier punto S_2 contando sobre sus îndices de ramificación.

1.2 FORMULA DEL GENERO DE HURWITZ.

DEFINICION 6: Sea Π una triangulación cualquiera de S y sean

n_0 = número de vértices

n_1 = número de aristas

n_2 = número de caras

definimos el género de S como el entero g que satisface la siguiente relación

$2 - 2g = n_0 - n_1 + n_2$.

Encontremos en primer término el género de la esfera mediante la siguiente triangulación. Sea un tetraedro inscrito en la esfera y proyectemoslo y así obtenemos para este caso.

$$n_0 = 4 \qquad n_1 = 6 \qquad n_2 = 4$$

de donde concluimos que el género de la esfera es cero.

TEOREMA 5. Sea f una función de S en S^2 y sean $\{w_1, \ldots, w_r\} = \{w \mid w = f(z_i)$ y $f'(z_i) = 0\} = R$ entonces $2g_s - 2 = n(2g_{s^2} - 2) + \sum_{i=1}^{r} (e(z_i) - 1)$ donde n es el grado de f.

Demostración: Sea una triangulación suficientemente fina de la esfera tal que los puntos $w_i \in R$ sean vértices de la triangulación y la imagen inversa del interior de las caras y de los aristas no se intersecten dos a dos de donde concluimos que

$$n_2^s = n\, n_2^{s^2} \qquad n_1^s = n\, n_1^{s^2}$$

y la imagen inversa de cada punto que no este en R es n. Si w es un punto de R entonces la cardinalidad de la imagen inversa de w es $\ell = \sum_{i=1}^{r} (e(y_i) - 1)$ y sumando esto obtenemos $n_0^s = n\ n_0^{s^2} - \sum_{i=1}^{r} (e(z_i) - 1)$, lo que nos dá

$$n_0^s - n_1^s + n_2^s = n\ (n_0^{s^2} - n_1^{s^2} + n_2^{s^2}) - \sum_{i=1}^{r} (e(z_i) - 1)$$

por lo tanto $2g_s - 2 = n(2g_{s^2} - 2) + \nu\ (f)$ donde $\nu\ (f) = \sum_{i=1}^{r} (e(z_i) - 1)$. Q.E.D.

Un resultado análogo se obtiene si se tiene una función $f : S_1 \longrightarrow S_2$ y una triangulación de S_2 y es el siguiente.

TEOREMA 6: Sea $f : S_1 \longrightarrow S_2$ una función holomorfa, sea $n = \partial^\circ f$ y si el género de S_2 lo concocemos entonces el género de S_1 se conoce y se obtiene la siguiente fórmula

$$2g_{s_1} - 2 = n\,(2g_{s_2} - 2) + \nu\ (f).$$

TEOREMA 7: Si w es una diferencial meromorfa sobre una superficie de Riemann Compacta S entonces w tiene un número finito de polos y la suma de sus residuos es igual a cero.

Demostración. Si w tiene un número infinito de polos tendría un punto de acumulación en S y w no podría ser una diferencial meromorfa en ese punto. Ahora triangulemos S e integremos $\int w$ alrededor de cada triángulo y sumemos los resultados. De aquí se sigue que la suma de w fue hecha a traves de cada triangulo dos veces, una en cada dirección, de donde se obtiene el resultado.

COROLARIO: Si f es una función meromorfa no constante sobre una superficie de Riemann compacta entonces f toma todo valor el mismo número de veces en particular f tiene tantos ceros como polos.

Demostración. Usando el teorema 7 para $w = \frac{d\,f}{f}$ y por el principio del argumento vemos que f tiene tantos ceros como polos. Si escribimos $f - c$ vemos que f toma el valor c tantas veces como el valor de sus polos. Q.E.D.

1.3 CAMPO DE FUNCIONES MEROMORFAS.

TEOREMA 8: Sea $f \in m(S^2)$ una función no constante, entonces f es una función racional.

<u>Demostración</u>. Sean $z_1, \ldots, z_m$ los polos de f y $e(z_1), \ldots, e(z_n)$ sus indices de ramificación entonces $f(z)(z-z_1)^{e(z_1)}$ es una función meromorfa que no tiene polo en z_1, entonces en una vecindad de z_1 es holomorfa y tiene un desarrollo en series de Taylor.

$$f(z)(z-z_1)^{e(z_1)} = a_{-e(z_1)} + \cdots + a_0 (z-z_1)^{e(z_1)} + \cdots$$

de donde

$$f(z) = \frac{a_{-e(z_1)}}{(z-z_1)^{e(z_1)}} + \cdots + a_0 + a_1(z-z_1) + \cdots$$

de donde $f(z) = R\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + h(z)$ con $h(z)$ meromorfa y un polo menos siguiendo este proceso se obtiene $f(z) = R_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + \cdots + R_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) + h(z)$ con $h(z)$ holomorfa sin polos por lo tanto constante, de donde $f(z) \in \text{Frac } \mathbb{C}[z] = \mathbb{C}(z) = m(S^2)$.

TEOREMA 9: Sea S una superficie de Riemann Compacta $f \in m(S)$, $\partial^\circ f = n$ entonces para cualquier función $g \in m(S)$ existe un polinomio

$P(X,Y) \in \mathbb{C}(X, Y)$ en dos variables de grado a lo mas n en la segunda variable y tal que $P(f, g) = 0$. El polinomio $P(f, g)$ es una función meromorfa bien definida sobre la superficie de Riemann S.

<u>Demostración.</u> La función $f : S \longrightarrow S^2$, sabemos que es un cubrimiento ramificado de grado n con puntos de ramificación $z_1, \ldots, z_r$, entonces para todo punto $w \in S^2$ que no este en la imagen de los z_i proviene exactamente de n puntos distintos. Sea V un abierto contractible de w y sea $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ donde los U_i son difeomorfos a V y no se intersectan dos a dos y sean $\phi_i : V \longrightarrow U_i$ los difeomorfismos holomorfos tales que $\phi_i \circ f : U_i \longrightarrow U_i$ es la identidad en U_i para todo i. Entonces para cualquier función meromorfa $g \in m(S)$ introducimos la siguiente función:

$$(1)\quad F(X, Y) = \prod_{i=1}^{n} (Y - g) \circ \phi_i (X))$$

esta función es un polinomio de grado n en Y y sus coeficientes en X son meromorfas para $w \in V$, por construcción cuando $P \in U_i$ para alguna i,

$F_V\ (f(P), g(P)) = \prod_{i=1}^{n} (g\ (P) - g \circ \phi_i \circ f\ (P)) = 0$ esta misma construcción se hace para cualquier otro abierto W de S^2 dandonos otra función $F_W\ (X, Y)$ de forma similar.

En la intersección de V y W las funciones ϕ_{iV} y ϕ_{iW} coinciden en el mismo orden, los coeficientes de (1) son las funciones elementales simétricas de los valores $g \circ \phi_i\ (X)$ y de aquí son independientes del orden, de donde se sigue que

$F_V\ (X, Y) = F_W(X, Y)$ para toda $x \in V \cap W$ de aquí es una función bien definida $F\ (X, Y)$ y es un polinomio de grado n en Y con coeficiente que son funciones meromorfas sobre $S - K$ y tal que $F\ (f\ (P), g(P)) = 0$ en $S - K$.

Si la función g es holomorfa en los puntos de K entonces los coeficientes del polinomio $F\ (X, Y)$ son funciones holomorfas acotadas de z en un disco con centro z_i y de aquí por el teorema de las singularidades removibles de Riemann los coeficientes holomorfos permanecen en los puntos z_i de K. Si los coeficientes de $F(X, Y)$ son meromorfos en los puntos z_i de K tienen polos de g entonces multiplicando por un polinomio conveniente en S nos da un polinomio $F_1(X, Y)$ en dos variables, si el polinomio $F_1(X, Y)$ no es irreducible lo descomponemos en producto de irreducibles y nos fijamos en el factor irreducible $P(X, Y)$ tal que $P(f, g) = 0$ lo cual demuestra el teorema

COROLARIO 1: El campo de funciones meromorfas de una superficie de Riemann Compacta es un campo de funciones algebraicas en una variable sobre los números complejos es decir es una extensión algebraica finita de una extensión simple trascendente de $\mathbb{C}$ es decir

$$m(S) = \frac{\mathbb{C}(X, Y)}{P(X, Y)}$$

<u>Demostración</u>. Si $f \in m(S)$ y f es no constante entonces el campo $\mathbb{C}(f)$ es una extensión trascendente sobre $\mathbb{C}$ si no f sería raíz de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ y de aquí f sería constante.

Si $m(S) \neq \mathbb{C}(f)$ entonces existe $g_1 \in m(S) = \mathbb{C}(f)$. Sea $E_1 = \mathbb{C}(f)[g_1], E_1$ es una extensión algebraica de grado al menos dos de $\mathbb{C}(f)$ y de grado a lo mas n que es el grado de f si $E_1 \neq m(S)$ sea $g_2 \in m(S) - E_1$ y $E_2 = \mathbb{C}(f)[g_1, g_2]$, E_2 es una extensión de E_1 de grado al menos dos y de grado a lo mas n de $\mathbb{C}(f)$ y ya que este proceso pue de continuar, se tiene que parar para una $m \in \mathbb{N}$ como $m < n$, ya que $2^n > n$. Entonces $E_m = \mathbb{C}(f)[g_1, g_2, \ldots, g_m]$ es una extensión algebraica de $\mathbb{C}(f)$ y puede ser generada por un elemento simple $g = c_1 g_1 + \cdots + c_m g_m$ con $c_i \in \mathbb{C}$ esto se puede hacer ya que se cumplen las hipótesis del teorema del elemento primitivo, del teorema anterior tenemos que existe un polinomio irreducible de grado a lo mas n en dos variables tal que $P(f, g) = 0$ probaremos que el grado en este caso es exactamente n.

Como $m(S) = \dfrac{\mathbb{C}(f, g)}{P(f, g)}$ y $m(S)$ separa puntos f y g deben separar puntos, de aqui como existen n puntos z que bajo f van al mismo w

es decir $f(z_1) = f(z_2) = \cdots = f(z_n)$ entonces $g(z_i) \neq g(z_j)$ para toda $i \neq j$ de aquí el grado en Y es n exactamente de donde se obtiene el siguiente

COROLARIO 2: El $\partial^\circ f$ es igual al grado de la extensión algebraica, es decir

$$\partial^\circ f = n = [\, m(S) : m(S^2)\,].$$

COROLARIO 3: Si f es una función holomorfa de S_1 en S_2, entonces

$\partial^\circ f = (\, m(S_1) : m(S_2))$

<u>Demostración</u>. Sea ϕ una función meromorfa de grado m de S_2 en S^2 entonces $\partial^\circ f$ es una función meromorfa de grado $n\,m$ y

$$n\,m = [m(S_1) : m(S^2)] = [\, m(S_1) : m(S_2)\,]\,[m(S_2) : m(S^2)\,] =$$

$$= [\,m(S_1) : m(S_2)\,]\, m$$

de donde $\partial^\circ f = [m(S_1) : m(S_2)]$.

1.4 ANILLOS DE VALUACION DISCRETOS.

DEFINICION 7: Un anillo $\mathcal{D} \subset K$ es de valuación si para todo elemento del campo $x \in K$ satisface alguna de las dos condiciones, $x \in \mathcal{D}$ ó $x^{-1} \in \mathcal{D}$

DEFINICION 8: Un anillo de valuación $\mathcal{D}$ es discreto si tiene un parámetro local t ,es decir si para todo $x \in K$, x se puede expresar como $\mu x = t^r$ con $r \in \mathbb{Z}$ y μ es una unidad de $\mathcal{D}$.

DEFINICION 9: El ord_a $x = r$ si $x = t^r \mu$ donde μ es unidad.

LEMA 1: Si $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ son dos anillos de valuaciones discretos con campo cociente k y tal que $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ entonces $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$

<u>Demostración</u>: probaremos primero que si P_1 y P_2 son sus ideales máximales entonces $P_2 \subset P_1$, sea $y \in P_2$ si $y \notin P_1$ entonces $\frac{1}{y} \in P_1$ y de aquí $\frac{1}{y} \in \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$ lo cual es una contradicción de aquí $P_2 \subset P_1$. Toda unidad de $\mathcal{D}_1$ es unidad de $\mathcal{D}_2$, un elemento $y \in P_2$ se puede escribir como $y = t_1^{e_1} \mu$ donde μ es una unidad de $\mathcal{D}_1$ y t_1 es un elemento de

orden 1 en P_1. Si $t_1 \notin P_2$ es una unidad de $\mathcal{D}_2$ lo cual es una contradicción ya que $\frac{1}{t_1}$ es unidad y $(\frac{1}{t_1})^{e} = \frac{1}{t_1^{e}} \in \mathcal{D}_2$ de aquí $t_1 \in P_2$ y de aquí también $P_1 = \mathcal{D}_1 t_1$ y esto prueba que $P_2 = P_1$ finalmente si μ es una unidad un $\mathcal{D}_2$ y no lo es en $\mathcal{D}_1$ entonces $\frac{1}{\mu} \in P_1$ y no puede ser unidad en $\mathcal{D}_2$ y esto prueba nuestro lema.

LEMA 2: Si $P_1 \subset P_2$ entonces $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ si μ es unidad de $\mathcal{D}_2$ entonces esta en $\mathcal{D}_1$, si $\mu \notin \mathcal{D}_1$, entonces $\frac{1}{\mu} \in \mathcal{D}_1$ y $\frac{1}{\mu} \in P_1$ entonces $\frac{1}{\mu} \in P_2$ y por lo tanto no es unidad en $\mathcal{D}_2$ si $x \in P_2$ y $x \notin \mathcal{D}_1$ entonces $\frac{1}{x} \in P_2$ contradicción por lo tanto $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$ y por el lema 1 $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1$.

DEFINCION 10: Sea $a \in S$ entonces definimos los siguientes conjuntos de funciones asociados al punto a como sigue.

$$A_a = \{ f \mid f \in m(S) \text{ y } \operatorname{ord}_a f \geq 0 \}$$

$$n_a = \{ f \mid f \in m(S) \text{ y } \operatorname{ord}_a f > 0 \}$$

LEMA 3. El conjunto A_a es un anillo de valuación discreto y su ideal máximo es n_a

Demostración. A_a es un anillo de valuación discreto. Si $h \in m(S)$ entonces ó $h(z) < \infty$ ó $h(z) = \infty$ y esto implica que $\frac{1}{h(z)} = 0$ por lo tanto A_a es anillo de valuación.

Sea $g \in n_a$ de orden mínimo, entonces $(g) = n_a$ si $h \in n_a$ entonces $ord_a\ h = m\ ord_a\ g$ con $m \in \mathbb{N}$ si esto no pasara entonces.

$$(m-1)\,ord_a g < ord_a\ h < m\ ord_a\ g$$

de donde $0 < m\,ord_a\ g - ord_a\ h < ord_a\ g$. Por lo tanto $\frac{g^m}{h} \in n_a$ y es de orden menor en a que g, por lo tanto A_a es un anillo de valuación discreto.

TEOREMA 10: Sea S una superficie de Riemann Compacta y sea $m(S)$ su campo de funciones meromorfas entonces la función $\phi : S \longrightarrow \{$anillos de valuación de $m(S)\}$, tal que $\phi(a) = A_a$ es biyectiva.

<u>Demostración</u>. Si $a \neq b$ entonces existe una función $f \in m(S)$ tal que $f(a) = 0$ y $f(b) = \infty$ y esto implica que $A_a \neq A_b$ si $a \neq b$ por lo tanto ϕ es inyectiva. Si $A \subset m(S)$ sea $n \subset A$ su ideal maximal n está generado por $(h) = n$, h tiene un cero en a es decir $h(a) = 0$ y esto implica que $n \subset n_a$ y esto por el lema 2 $A = A_a$.

COROLARIO: En el caso de S^2 tenemos que el ideal maximal m_a está generado por el polinomio $x - a$ y cualquier elemento h de $m(S^2)$ se puede escribir como

$$h(z) = (z - a)^r g(z) \quad \text{donde} \quad g(a) \neq 0.$$

Sea k un campo algebraicamente cerrado, y sea K un campo de funciones en una variable sobre k (brevemente un campo de funciones).

DEFINICION 11: Un campo de funciones K es una extensión finita de una extensión puramente trascendente $k(x)$ de k.

DEFINICION 12: Al campo k lo llamamos el campo constante.

DEFINICION 13: A los elementos de K los llamamos funciones.

DEFINICION 14: Por un punto de K sobre k entendemos un anillo de valuación discreta de K que contiene a k. (o sobre k).

El campo de la clase residual de este anillo es entonces k mismo

DEFINICION 15: Una curva cuyo campo de funciones es K es el conjunto de todos los anillos de valuación discretos es decir es el conjunto de todos los puntos sobre K.

CAPITULO II

TEOREMA DE RIEMANN-ROCH

2.1 DIVISORES

DEFINICION 1: Por un divisor sobre la curva ($\mathcal{O}$ de K sobre k) entendemos un elemento del $\mathbb{Z}$ - módulo libre abeliano generado por los puntos.

De aquí un divisor es una suma formal.

$$\mathcal{R} = \Sigma\, n_i\, P_i = \Sigma\, n_p P$$

donde los P_i son puntos y n_i son enteros, donde casi todos son cero.

DEFINICION 2: El grado de $\mathcal{R}$ es igual a $\Sigma\, n_i$

DEFINICION 3: El orden de $\mathcal{R}$ en P_i es $n_i = \mathrm{ord}_{P_i} \mathcal{R}$

TEOREMA 1. Si $x \in K$ y $x \neq 0$ entonces existen solamente un número finito de puntos P_i tales que $\mathrm{ord}_{P_i} x \neq 0$.

Demostración: Si x es constante entonces, el $\mathrm{ord}_p\, x = 0$ para toda P.

Si x no es constante entonces existe un punto de $k(x)$ en el cual x tiene un polo y x tiene un cero; cada uno de estos puntos se extiende solamente a un número finito de K, ya que K es una extensión finita de $k(x)$. Q.E.D.

De aquí asociamos un divisor con x llamado

$$(x) = \Sigma\, n_p P$$

donde $n_p = \mathrm{ord}_p\,(x)$

DEFINICION 4: Dos divisor $\mathcal{R}$ y b son linealmente equivalentes si $\mathcal{R} - b$ es el divisor de una función.

DEFINICION 5: Si $\mathcal{R} = \Sigma\, n_p P$ y $b = \Sigma\, m_p P$ son dos divisores definimos $\mathcal{R} > b$ si y solo si $n_p \geq m_p$ para todo P.

Esto define un orden parcial entre divisores, decimos que $\mathcal{R}$ es positivo si $\mathcal{R} > 0$.

DEFINICION 5': Si $\mathcal{R}$ es un divisor $L(\mathcal{R})$ es el conjunto de todos los elementos $x \in K$ tales que $(x) > - \mathcal{R}$.

TEOREMA 2: Si $\mathcal{R}$ es un divisor positivo, entonces $L(\mathcal{R})$ consiste de todas las funciones en K que tienen polos solamente en $\mathcal{R}$ con multiplicidades a lo mas la que tienen en $\mathcal{R}$, la demostración se sigue de la definición de $L(\mathcal{R})$.

Es claro que $L(\mathcal{R})$ es un k–espacio vectorial para cualquier divisor $\mathcal{R}$. Denotamos por $\ell(\mathcal{R})$ su dimensión.

Nuestra intención es estudiar mas detenidamente la dimensión $\ell(\mathcal{R})$ del espacio vectorial $L(\mathcal{R})$ asociado con el divisor $\mathcal{R}$ de la curva.

2.2 A D E L E S.

Sea $\mathcal{D}$ un anillo de valuación discreta de K (es decir un punto P de K) y sea P su ideal maximal generado por t sabemos que $\mathcal{D}/_P = k$.

TEOREMA 3: Todo elemento $x \in \mathcal{D}$ tiene un desarrollo en serie de potencias.

Demostración. Si $x \in \mathcal{D}$ entonces para alguna constante $a_0 \in k$ podemos escribir $x = a_0 \mod \mathcal{P}$ la función $x - a_0 \in \mathcal{P}$ tiene un cero en $\mathcal{D}$, por consiguiente podemos escribir $x - a_0 = t\, y_0$ con $y_0 \in \mathcal{D}$ pocediendo en forma similar obtenemos $y_0 = a_1 + t y_1$ con $y_1 \in \mathcal{D}$ y $x = a_0 + a_1 t + y_1 t^2$, continuando con este procedimiento obtenemos la expansión de x en series de potencias.

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \qquad \text{Q.E.D.}$$

si todos los coeficientes $a_i = 0$ entonces $x = 0$

COROLARIO El campo de cocientes K de $\mathcal{D}$ esta contenido en el campo de series de potencias $k((t))$.

Demostración: Si $x \in K$ entonces para alguna potencia t^s la función $t^s x \in \mathcal{D}$ y de aquí x puede ser escrito como

$$x = a_{-s} t^{-s} + \cdots + a_{-1} t^{-1} + a_0 + a_1 t + \cdots$$

Si u es otro generador de $\mathcal{P}$ entonces $k((t)) = k((u))$ ya que $t = u \cdot \nu$

con ν unidad en $\mathcal{D}$ y de aquí nuestra serie de potencias depende solamente de $\mathcal{D}$ que es un punto P de nuestra curva.

Denotamos por K_p a este campo de series de potencias en P entonces si $\xi_p \in K_p$ puede ser escrito como $\xi_p = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu t^\nu$ con $a_m \neq 0$. Si $m > 0$ decimos que ξ_p tiene un cero de orden m. Si $m < 0$ decimos que ξ_p tiene un polo de orden $-m$. Sea $m = \mathrm{ord}_p \, \xi_p$. Sea A^* el producto cartesiano de todos los K_p tomado sobre todos los puntos P. Un elemento ξ de A^* puede ser visto como un vector infinito $\xi = (\ldots, \xi_p, \ldots)$ donde $\xi_p \in K_p$. Si definimos la suma y multiplicación componente a componente, A^* es un anillo. Este anillo es demasiado grande para nuestro propósito y para esto encontramos un anillo $A \subset A^*$ mas pequeño.

DEFINICION 6: El anillo de los Adeles A es un subanillo de A^* tal que consiste de todos los vectores ξ_p tales que para casi todo ξ_p no tiene polo en P. Nótese que nuestro campo de funciones K esta contenido en A bajo la transformación

$$x \longrightarrow (\ldots, x, x, x, \ldots)$$

es decir en la P -componente x puede ser visto como una serie de potencias en K_p. En particular el campo constante k también está contenido en A, A puede ser visto como una k-algebra (de dimensión infinita).

Sea $\mathcal{R}$ un divisor sobre nuestra curva, denotamos por $\Lambda(\mathcal{R})$ el subconjunto de A que consiste de todos los Adeles ξ tales que $\mathrm{ord}_p\, \xi_p \geq -\mathrm{ord}_p\, \mathcal{R}$ entonces $\Lambda(\mathcal{R})$ es un k-subespacio de A.

El conjunto de funciones x tales que $(x) \geq -\mathcal{R}$ es nuestro antiguo espacio vectorial $L(\mathcal{R})$ y es igual a $\Lambda(\mathcal{R}) \cap K$.

Demos algunas fórmulas sobre las cuales basaremos nuestros cálculos.

Si B y C son los k-subespacios de A y $C \subseteq B$ entonces denotamos por $(B : C)$ la dimensión del espacio cociente B mod C sobre k.

PROPOSICION 1: Sean $\mathcal{R}$ y b divisores entonces $\Lambda(\mathcal{R}) \supset \Lambda(b)$ si y solo si $\mathcal{R} \geq b$ si este es el caso, entonces.

1) $(\Lambda(\mathcal{R}) : \Lambda(b)) = \deg(\mathcal{R}) - \deg(b)$

2) $(\Lambda(\mathcal{R}) : \Lambda(b)) = (\Lambda(\mathcal{R}) + K : \Lambda(b) + K) + (\Lambda(\mathcal{R}) \cap K : \Lambda(b) \cap K)$

Demostración: La primera afirmación se sigue de la definición 2.6, la fórmula uno se prueba como sigue: Si un punto P aparece en $\mathcal{R}$ con multiplicidad d y en b con multiplicidad e entonces $d \geq e$. Si t es un elemento de orden uno en P en K_p entonces el índice $(t^{-d}K_p : t^{-e}K_p) = d - e$ y el índice de la fórmula (1) es la suma de los númeroos de los índices locales de este tipo.

La fórmula (2) es una consecuencia inmediata de los teoremas de homomorfismos de espacios vectoriales.

De esta proposición obtenemos la siguiente.

FORMULA FUNDAMENTAL 1:

$$\deg(\mathcal{R}) - \deg(b) = (\Lambda(\mathcal{R}) + K : \Lambda(b) + K) + \ell(\mathcal{R}) - \ell(b)$$

para dos divisores $\mathcal{R}$ y b tales que $\mathcal{R} \geq b$

Por el momento no podemos separar el índice de enmedio en dos funciones de

$\mathcal{R}$ y b porque no sabemos que $(A : \Lambda(b) + K)$ sea finito, esto será probado después.

2.3 CONTRIBUCION DE RIEMANN

Sea y una función no constante de K. Sea C el divisor de sus polos y escribimos $C = \Sigma\, e_i P_i$ los puntos P_i en C inducen el mismo punto Q de la curva racional que tiene el campo de funciones $k(y)$, que se llama el punto correspondiente al polo de y en $k(y)$ y los e_i son por definición los índices de ramificación del grupo de valores discretos en $k(y)$ asociado al punto Q y a las extensiones de estos grupos de valores a K. Estas extensiones corresponden a los puntos P_i.

PROPOSICION 2. El grado de C que es $\Sigma\, e_i$ es igual a $[K : k(y)] = n$

Demostración. Sean $z_1, \ldots, z_n$ una base lineal de K sobre $k(y)$, después de multiplicar cada z_i por un polinomio conveniente de $k[y]$ podemos suponer que son enteros sobre $k[y]$ es decir que ningún lugar de K que es finito sobre $k[y]$ es un polo de algún z_i por consiguiente todos los polos de z_i estan entre los P_i que aparecen en C y de aquí existe un entero μ_o tal que $z_i \in L(\mu_o C)$. Sea μ un entero positivo suficientemente grande tal que para cualquier entero s que satisface $0 \leq s \leq \mu - \mu_o$ se obtiene $y^s z_i \in L(\mu C)$ y también $\ell(\mu C) > (\mu - \mu_o + 1) n$.

Sea $(\Lambda(\mu C) + K : \Lambda(0) + K) = N_\mu \geq 0$ haciendo $b = 0$ y $R = \mu C$ en la fórmula fundamental 1 obtenemos

$$\begin{aligned} \mu\,(\Sigma e_i) &= N_\mu + \ell(\mu C) - 1 \\ &\geq N_\mu + (\mu - \mu_o + 1) n - 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

dividiendo esta última desigualdad por μ y haciendola tender a infinito obtenemos $\Sigma e_i > n$, tomando en cuenta el teorema 4 del apéndice se obtiene el resultado.

COROLARIO 1: El grado del divisor de una función es igual a cero (es decir tiene tantos ceros como polos).

Demostración. Si $\mathcal{C}'$ es el divisor de los ceros de y entonces $\mathcal{C}'$ es el divisor de los polos de $1/y$ y $[K : k(1/y)] = n$.

COROLARIO 2: El $\deg(\mathcal{R})$ es una función de las clases de equivalencias lineales de $\mathcal{R}$.

DEFINICION 7: Una función de clase es una función que depende solamente de sus clases lineales de equivalencia. De aquí vemos que el grado es una función de clase, regresando a (1) podemos escribir

$$\mu n > N_\mu + \mu n - \mu_o n + n - 1$$

y de aquí $$N_\mu \leq \mu_o n - n + 1$$

y esto prueba que N_μ es uniformemente acotado y de aquí para una μ suficientemente grande, N_μ es constante ya que N_μ es un entero positivo.

Ahora definimos una nueva función de divisores $r(\mathcal{R}) = \deg(\mathcal{R}) - \ell(\mathcal{R})$ ambas $\deg(\mathcal{R})$ y $\ell(\mathcal{R})$ son funciones de clase, por el corolario 1 de la proposición 2 la transformación $z \to y\, z$ para $z \in L(\mathcal{R})$ es un k-isomorfismo entre $L(\mathcal{R})$ y $L(\mathcal{R} - (y))$, de aquí la fórmula fundamental 1 puede ser escrita como

$$0 \leq (\Lambda(\mathcal{R}) + K : \Lambda(0) + K) = r(\mathcal{R}) - r(b) \cdots (2)$$

para dos divisores $\mathcal{R}$ y b tales que $\mathcal{R} \geq b$ poniendo $b = 0$ y $\mathcal{R} = \mu C$

$$(\Lambda(\mu C) + K : \Lambda(0) + K) = r(\mu C) - r(0)$$

esto y el resultado anterior muestran que $r(\mu C)$ es uniformemente acotado para cualquier μ suficientemente grande.

Sea b cualquier divisor, tomamos $z \in k[y]$ que tiene ceros de orden grande en todos los puntos de b exepto en aquellos comunes con C (es decir polos de y) entonces para alguna μ, $(z) + \mu C \geq b$ poniendo $\mathcal{R} = \mu C$ en (2) y usando el hecho de que $r(\mathcal{R})$ es una función de clase obtenemos

$$r(b) \leq r(\mu C) = r((z) + \mu C)$$

y esto prueba que para un divisor arbitrario b el entero $r(b)$ es acotado y esto nos muestra que $\deg(b)$ y $\ell(b)$ tienen el mismo orden de magnitud, por el momento nótese que si dejamos b fijo y hacemos variar R en 2 entonces $\Lambda(R)$ puede ser incrementado tanto como para incluir cualquier otro elemento de A, por otro lado hemos visto que el índice de esta fórmula es acotado porque $r(R)$ es acotado y de aquí para algún divisor R alcanza su máximo y para este divisor se deberá tener $A = \Lambda(R) + K$ y se puede establecer el siguiente

TEOREMA 4: Existe un divisor R tal que $A = \Lambda(R) + K$.

Este resultado nos lleva a separar el índice de la fórmula fundamental 1 denotamos la dimensión de $(A : \Lambda(R) + K) = \delta(R)$ que hemos probado que es finito y obtenemos

$$\deg(R) - \deg(b) = \ell(R) - \ell(b) + \delta(R) - \delta(b) \qquad (3)$$

en otras palabras

$$\ell(R) - \deg(R) - \delta(R) = \ell(b) - \deg(b) - \delta(b) \qquad (4)$$

y esto se tiene si $R \geq b$, y ya que dos divisores tienen un supremo este resultado si tiene para cualesquiera dos divisores R y b

DEFINICION 8: El género de K está definido como el entero g tal que

$$\ell(R) - \deg(R) - \delta(R) = 1 - g$$

de aquí el género es un invariante de K, poniendo $R = 0$ en esta definición vemos que $g = \delta(0)$ y de aquí g es un entero mayor o igual que cero, $g = (A : \Lambda(0) + K)$, resumiento tenemos el

TEOREMA DE RIEMANN: 5 : Existe un entero $g \geq 0$ que depende solamente de K tal que para cualquier divisor R tenemos

$$\ell(R) = \deg(R) + 1 - g + \delta(R)$$

donde $\delta(R) \geq 0$

2.4 CONTRIBUCION DE ROCH

DEFINICION 9: Por una diferencial λ entendemos una k-funcional lineal de A que se anula sobre algún $\Lambda(R)$ y también se anula sobre K (considerado este contenido en A)

Habiendo probado que $(A : \Lambda(\mathcal{R}) + K)$ es finito vemos que una diferencial que se anula sobre $\Lambda(\mathcal{R})$ puede ser vista como una funcional sobre el espacio cociente

$$A \bmod \Lambda(\mathcal{R}) + K$$

y que el conjunto de tales diferenciales es el espacio dual de nuestro espacio cociente y su dimensión sobre k es por consiguiente $\delta(\mathcal{R})$

Nótese en suma que las diferenciales forman un espacio vectorial sobre K. Es decir si λ es una diferencial que se anula sobre $\Lambda(\mathcal{R})$, si ξ es un elemento de A y y es un elemento de K se define $y\lambda$ como $y\lambda(\xi) = \lambda(y\xi)$, la funcional $y\lambda$ es siempre una diferencial ya que se anula sobre K y se anula sobre $\Lambda(\mathcal{R} + (y))$

DEFINICION 10: Un paralelotopo es el conjunto $\Lambda(\mathcal{R})$

TEOREMA 6: Si λ es una diferencial entonces existe un paralelotopo maximal $\Lambda(\mathcal{R})$ sobre el cual λ se anula

<u>Demostración</u>: Si λ se anula sobre $\Lambda(R_1)$ y $\Lambda(R_2)$ sea $R = \sup(R_1, R_2)$ y de aquí λ se anula sobre $\Lambda(R)$, entonces para probar el teorema lo que necesitamos probar es que el grado de R es acotado.

Sea b un divisor arbitrario si $y \in L(b)$ se tiene que $(y) \succ -b$ y de aquí $y\lambda$ se anula en $\Lambda(R + (y))$ el cual contiene a $\Lambda(R-b)$ porque $R + (y) > R - b$. Si $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes sobre k entonces también lo son $y_1\lambda, \ldots, y_n\lambda$, y de aquí obtenemos que

$$\delta(R-b) \geq \ell(b)$$

y usando el teorema 5 obtenemos

$$\delta(R-b) = \ell(R-b) - \deg(R) + \deg(b) - 1 + g \geq \ell(b)$$

$$\geq \deg(b) + 1 - g + \delta(b)$$

y de aquí vemos que

$$\deg(R) \leq \ell(R-b) + 2g - 2 - \delta(b)$$

si tomamos a b como un divisor positivo de grado suficientemente grande, entonces

$L(\mathcal{R}-b)=0$ ya que una función no constante no puede tener mas ceros que polos; ya que $\delta(b)>0$ vemos que $\deg(\mathcal{R})\leq 2g-2$ y por lo tanto acotado y esto demuestra el teorema.

TEOREMA 7: Las diferenciales forman un K-espacio vectorial de dimensión uno.

Demostración: Supongamos que tenemos dos diferenciales λ y μ linealmente independientes sobre K, supongamos que $x_1,\ldots,x_n$ y $y_1,\ldots,y_n$ son dos conjuntos de elementos de K linealmente independientes sobre k entonces las diferenciales $x_1\lambda,\ldots,x_n\lambda, y_1\mu,\ldots,y_n\mu$ son linealmente independientes sobre k si no fuera ésto se tendría la relación

$$\Sigma\, a_i x_i \lambda + \Sigma\, b_i y_i \mu = 0$$

y si $x=\Sigma\, a_i x_i$ y $y=\Sigma\, b_i y_i$ tendríamos $x\lambda+y\mu=0$ contradiciendo la independencia de λ y μ sobre K, de aquí λ y μ sè anulan sobre algún paralelotopo $\Lambda(\mathcal{R})$, si λ se anula sobre $\Lambda(\mathcal{R}_1)$ y μ se anula sobre $\Lambda(\mathcal{R}_2)$, haciendo $\mathcal{R}=\inf(\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2)$ y $\Lambda(\mathcal{R})=\Lambda(\mathcal{R}_1)\cap\Lambda(\mathcal{R}_2)$.

Sea b un divisor arbitrario, si $y \in L(b)$ se tiene que $(y) \geq -b$ de aquí $y\lambda$ se anula sobre $\Lambda(R+(y))$ que contiene a $\Lambda(R-b)$ porque $R+(y) \geq R-b$, similarmente y se anula sobre $\Lambda(R-b)$ de donde se obtiene por la observación hecha al principio de la prueba y por la definición de $\delta(R)$ concluimos que

$$\delta(R-b) \geq 2\,\ell(b)$$

y usando el teorema 5 obtenemos

$$\ell(R-b) - \deg(R) + \deg(b) - 1 + g \geq 2\,\ell(b)$$

$$\geq 2\,(\deg(b) + 1 - g + \delta(b))$$

$$\geq 2\deg(b) + 2 - 2g$$

y si tomamos a b como un divisor positivo suficientemente grande, entonces $L(R-b)$ consiste del cero solamente ya que una función no puede tener mas ceros que polos. y ya $\deg(R)$ es constante en la desigualdad de arriba se obtiene una contradicción y esto prueba nuestro teorema.

COROLARIO 1. Si λ es una diferencial distinta de cero, entonces todas las diferenciales son del tipo $y\lambda$.

COROLARIO 2. Si $\Lambda(R)$ es el paralelotopo maximal sobre el cual se anula λ entonces $\Lambda(R + (y))$ es el paralelotopo maximal sobre el cual se anula $y\lambda$

COROLARIO 3. Los divisores forman una clase de equivalencia lineal.

DEFINCION 11: El divisor (λ) asociado con λ es R y de aquí el divisor asociado a $y\lambda$ es $R + (y)$

Esta clase divisores se llama la Clase Canónica de K, y un divisor se llama el Divisor Canónico.

El teorema 7 nos lleva a completar la prueba del teorema 4 dándonos mas información sobre $\delta(R)$ y esta información es precisamente la contribución de Roch

TEOREMA 8 (RIEMANN-ROCH). Sea R un divisor arbitrario de K entonces

$$\ell(R) = \deg(R) + 1 - g + \ell(C - R)$$

donde $\mathcal{C}$ es cualquier divisor de la clase canónica, en otras palabras

$$\delta(\mathcal{R}) = \ell(\mathcal{C} - \mathcal{R}) \qquad \text{(contribución de Roch)}$$

Demostración: Sea $\mathcal{C}$ un divisor tal que $\Lambda(\mathcal{C})$ es el paralelotopo maximal sobre el cual una diferencial λ no cero se anula. Si b es un divisor arbitrario y $y \in L(b)$, entonces sabemos que y se anula sobre $\Lambda(\mathcal{C} - b)$, inversamente por el toerema 7 sabemos que cualquier diferencial que se anula sobre $\Lambda(\mathcal{C} - b)$ es del tipo $z\lambda$ para alguna $z \in K$, y el paralelotopo maximal sobre el cual $z\lambda$ se anula es $(z) + \mathcal{C}$, que deberá contener a $\Lambda(\mathcal{C} - b)$. Esto implica que $(z) \geq -b$ es decir $z \in L(b)$. De aquí probamos que $\delta(\mathcal{C} - b)$ es igual a $\ell(b)$ y ya que el divisor b fue arbitrario lo podemos reemplazar por $\mathcal{C} - \mathcal{R}$ que prueba nuestro teorema.

CAPITULO III

APLICACIONES DEL TEOREMA DE RIEMANN-ROCH

La notación que usamos para los teoremas uno y dos es la siguiente:

e = índice de ramificación de f en P

$\hat{e}$ = índice de ramificación de A_p sobre $B_{f(p)}$

TEOREMA 1. Sea S una superficie de Riemann Compacta y $P \in S$ entonces existe una función $t \in m(S)$ tal que

a) $t(p) = 0$

b) $\text{ord}_p\, t = 1$

esto es t es un homeomorfismo local.

Demostración. Por el capítulo uno tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
S_1 & \xrightarrow{\ \phi\ } & \{\text{anillos de valuación de } m(S_1)\} \\
h\big\downarrow & & \big\uparrow h^* \\
S^2 & \xrightarrow{\ \psi\ } & \{\text{anillos de valuación de } m(S_2)\}
\end{array}$$

$$\phi\ (P) = A_p \supset m_p = (t)$$

$$\psi\ (h\ (P)\ ) = A_p \cap m\ (S^2) = B_{h(p)} \supset n_{h(p)} = (s)$$

sea $\hat{d} = ord_p\ t$ y sabemos que $ord_{f(p)}\ s = 1$ y $h^*\ (s) = s \circ h = u\ t^{\hat{e}}$ de donde $e = ord_p\ h = \hat{e}\ ord_p\ t = \hat{e}\hat{d}$ y ya que $n = \Sigma\ e_i = \Sigma \hat{e}_i\ \hat{d}_i \geq \Sigma \hat{e}_i = n$ tenemos el resultado deseado.

TEOREMA 2: Sea f una función holomorfa no constante de S_1 en S_2 y si $P \in S_1$ y A_p es su anillo de valuación discreto, entonces $e = \hat{e}$

Demostración. Por el teorema 1 tenemos que $e = \hat{e}\hat{d}$ y ya que también se demostró que $\hat{d} = 1$ se obtiene el resultado deseado.

TEOREMA 3: Sea S una superficie de Riemann Compacta, entonces

a) $A\ '(S, m) \neq 0$ donde $A\ '(S, m)$ son las formas diferenciales meromorfas de S.

b) Si $\omega \in A'(S, m)$ sea

$$\lambda_\omega : A \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{definida como}$$

$$\lambda_\omega\ (\xi) = \sum_p\ res\ \xi_p\ \omega$$

entonces $\lambda\,\omega$ es una diferencial

c) La función $\omega \longrightarrow \lambda\,\omega$ es una biyección entre las formas diferenciales mero-morfas en S y las diferenciales en A

d) $(\omega) = (\lambda\ \omega)$

Demostración. a) se sigue ya que si $f : S \longrightarrow S^2$ $d\,f \in A'(S, m)$.

Para demostrar b) veremos que λ_ω se anula sobre algún $\Lambda(R)$ y sobre K. Por otro lado λ_ω es una función lineal de A en k y puede ser visto como un elemento de K_p, es claro que casi todos los términos de nuestra suma son ceros porque la forma diferencial tiene un número finito de polos y de aquí se anula en algún $\Lambda(R)$ y también se anula en K ya que se demostró que la $\sum_p \operatorname{res}_p \omega = 0$, y de aquí λ_ω es una diferencial.

Para ver c) tenemos una inmersión del K-espacio vectorial de las formas diferenciales en el K-espacio vectorial de las diferenciales y ya que ambos tienen dimensión uno se obtiene el resultado ya que esta inmersión es suprayectiva.

Para demostrar d), sea ω una forma diferencial de K y definimos el $\mathrm{ord}_p \, \omega$ en la siguiente manera. Sea t un elemento de orden uno en P y sabemos que ω en $K_p = k((t))$ tiene un desarrollo en series de potencias con un cierto orden m_p independiente de la elección del elemento t y de aquí el divisor de ω es

$$(\omega) = \Sigma\, m_p P.$$

Supongamos que $\mathrm{ord}_p(\omega) = m_p$, si $\mathrm{ord}_p(\xi_p) \geq -m_p$ entonces $\mathrm{ord}_p(\xi_p \omega) \geq 0$ y el residuo $\mathrm{res}_p(\xi_p \omega)$ es cero, de aquí la diferencial $\lambda\omega$ se anula sobre $\Lambda(R)$ donde $R = (\omega)$ por otro lado si $\Lambda(b)$ es el paralelotopo maximal sobre el cual λ se anula entonces $\Lambda(b) \supset \Lambda(R)$ y $b \geq R$. Si $b > R$ entonces para algún P el coeficiente de P en b es mayor que m_p y de aquí el adele

$$(\ldots,0,0,1/_{t}\; p+1,\ 0,\ 0,\ldots)$$

pertenece a $\Lambda(b)$ y uno ve inmediatamente que $\mathrm{res}_p(t^{-p+1}\,\omega) \neq 0$ y de aquí

λ no se anula sobre $\Lambda(b)$

COROLARIO 1 Sea S una superficie de Riemann Compacta entonces

a) $\ell(k) = g$ donde k es un divisor canónico

b) $A'(S, O) = g$ donde $A'(S, O)$ son las formas diferenciales holomorfas

c) $\deg(k) = 2g - 2$

d) Si $\deg(R) > 2g - 2$ entonces $\delta(R) = 0$

Demostración.

a) Sea $R = 0$ en el teorema de Riemann Roch entonces $L(0)$ consiste de las constantes solamente y de aquí $\ell(0) = 1$ y ya que $\deg(0) = 0$ tenemos que

$$\ell(0) = \deg(0) + 1 - g + \ell(k) \quad \text{de donde} \quad \ell(k) = g$$

b) Por el teorema anterior tenemos que las formas diferenciales meromorfas las asociamos con las diferenciales de A y ya que $\ell(k) = g$ entonces las formas diferenciales holomorfas de S forman un espacio vectorial de dimensión g.

c) El $\deg(k) = 2g - 2$ sea $R = k$ en el teorema de Riemann Roch, entonces

$$\ell(k) = \deg(k) + 1 - g + \ell(0) \quad \text{de donde} \quad \deg(k) = 2g - 2$$

d) Si $\deg(R) > 2g - 2$ entonces $\delta(R) = 0$ esto se tiene porque una fun_ción no puede tener mas ceros que polos y $L(k - R) = 0$ si $\deg(R) > 2g - 2$

LEMA 1. El género algebraico de la esfera S^2 es igual a cero.

Demostración. Sea $dz \in A'(S^2, m)$ y el $\deg(dz) = -2$ ya que dz no tiene ceros y tiene un polo doble en ∞, ya que en infinito $z = \frac{1}{w}$ entonces

$$dz = -\frac{dw}{w^2} \quad \text{y} \quad \deg(dz) = 2g - 2 \quad \text{por lo tanto} \quad g = 0$$

TEOREMA DE HURWITZ 4: Sea $f : S_1 \longrightarrow S_2$ una función holomorfa no constante si $\omega \in A'(S_2, m)$ y $f^*\omega \in A'(S_1, m)$ entonces

$\deg f^*\omega = \deg f \deg \omega + \nu(f)$ esto es $2g_1 - 2 = n(2g_2 - 2) + \nu(f)$

Demostración. Ya que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[d, "z^{e} = w"'] & U \arrow[l, "\phi"'] \arrow[d, "f"] & \subset & S_1 \arrow[d, "f"] \\
\Delta & V \arrow[l, "\psi"'] & \subset & S_2
\end{tikzcd}$$

y $\omega \in A'(S_2, m)$ entonces $f^*(\omega) \in A'(S_1, m)$ donde $\omega = F(w)\,dw$ y

$\mathrm{ord}_{f(p)}\,\omega = \mathrm{ord}_{f(p)}\,F(\omega)\,d\omega$, $f^*(\omega) = F(z^{e})\,z^{e-1}\,dz$, de donde

$\mathrm{ord}_p\, f^*(\omega) = e_{(p)}\,\mathrm{ord}_{f(p)}\,\omega + e_{(p)} - 1$ y sumando sobre los puntos P obtenemos

$$2\hat{g}_1 - 2 = n(2\hat{g}_2 - 2) + \nu(f)$$

de aquí se obtiene el resultado deseado.

COROLARIO 2 . a) del teorema anterior se sigue que $\nu(f)$ es par.

b) Sea $f : S \longrightarrow S^2$ un homeomorfismo local, entonces f es un homeomorfismo.

<u>Demostración</u>. Como $2\hat{g} - 2 = n(-2)$ se obtiene $n = 1$ y $g = 0$.

COROLARIO 3: Sea S una superficie de Riemann Compacta

g = género topológico de S

$\hat{g}$ = género algebraico de S

entonces $g = \hat{g}$

<u>Demostración</u>. Sea $f : S \longrightarrow S^2$ una función no constante por el teorema

2 y 4 y el lema 1 obtenemos que

$$2\hat{g}_1 - 2 = n\,(2\hat{g}_2 - 2) + \nu(f)$$

$$= 2\hat{g}_1 - 2 = n\,(-2) + \nu(f) = 2g_1 - 2$$

por lo tanto $\hat{g} = g$.

TEOREMA 5: S es una superficie de Riemann de género cero si y solo si S es holomorfamente equivalente a S^2 si y solo si $m\,(S) \approx \mathbb{C}\,(T)$

Demostración. Si S es una superficie de Riemann de género cero, sea P un punto de S por el teorema de Riemann Roch existe una función no constante f en $L(P)$ ya que $\ell(P) = 1 + 1 - 0 + 0 = 2$ y las constantes forman un subespacio de $L(P)$ de dimensión uno, de aquí f tiene un polo de orden uno en P y esta función es biyectiva a S^2 las otras propiedades ya se demostraron anteriormente.

TEOREMA DE LUROTH 6: Sea $f : S^2 \longrightarrow S$ una función holòmorfa no constante entonces S tiene género cero.

Demostración. Por el teorema de Hurwitz sabemos que

$$-2 = n(2g-2) + \nu(f)$$

y como $\nu(f) \geq 0$ tenemos que $-2 \geq n(2g-2)$ y ya que $n > 0$ y $g \geq 0$ la única posibilidad que se cumpla la fórmula de Hurwitz es que S tenga género cero.

TEOREMA 7: DESCOMPOSICION EN FRACCIONES PARCIALES: Sea $f \in m(S^2)$ entonces

$$f = P_0(z) + P_1\left(\frac{1}{z-Q_1}\right) + \cdots + P_k\left(\frac{1}{z-Q_s}\right)$$

donde $P_i \in \mathbb{C}[T]$

Demostración. Sea R el divisor de los polos de f es decir $R = \sum_{i=1}^{s} r_i Q_i$ con $r_i > 0$ entonces $\ell(R) = \sum_{i=1}^{s} r_i + 1$, en $L(R)$ el conjunto de funciones

$$1, \frac{1}{z-Q_1}, \frac{1}{(z-Q_1)^2}, \ldots, \frac{1}{(z-Q_1)^{r_1}}, \ldots, \frac{1}{(z-Q_s)}, \ldots, \frac{1}{(z-Q_s)^{r_s}}$$

son linealmente independientes y de aquí forman una base de $L(R)$, de aquí si $f \in L(R)$, f se puede expresar como combinación lineal de esta base, lo que demuestra el teorema.

LEMA 2 Sea S una superficie de Riemann Compacta y $\mathcal{R}$ un divisor tal que $\ell(\mathcal{R}) = n+1 > 0$ y $L(\mathcal{R}) = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ y sea $A = \bigcup_{i=0}^{n} f_i^{-1}(\infty) \cup (\bigcap_{i=0}^{n} f_i^{-1}(0)) \subset S$ entonces existe $\phi_{\mathcal{R}} : S \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ holomorfa.

<u>Demostración</u>. Para toda $P \in S - A$ tenemos que $\phi_{\mathcal{R}}(P) = (f_0(P), \ldots, f_n(P))$ es holomorfa si $P \in A$ entonces $(f_0(P), \ldots, f_n(P)) \notin \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ Sea $g \in m(S)$ tal que $\operatorname{ord}_p g = 1$ y sea $k = \min \operatorname{ord}_p f_i$ entonces para toda $z \neq P$ tenemos que $(f_0(z), \ldots, f_n(z)) = g^{-k}(z)\,(f_0(z), \ldots, f_n(z))$ en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ y el $\operatorname{ord}_p g^{-k} f_i \geq 0$ para toda i y existe j tal que $\operatorname{ord}_p g^{-k} f_j = 0$ entonces $\phi_{\mathcal{R}}(P) = (f_0(P)\,g^{-k}(P), \ldots, f_n(P)\,g^{-k}(P))$ es holomorfa en P y por lo tanto es holomorfa en todo S.

LEMA 3: Sea S una superficie de Riemann Compacta y $\mathcal{R} = \Sigma\, n_p P$ un divisor de grado igual que $2g+1$ entonces.

a) Para toda $A \subset S$ y la $\# A < \infty$ entonces existe $f \in L(\mathcal{R})$ tal que si $P \in A$ entonces $\operatorname{ord}_p f = -n_p$

b) Para toda $p \in S$ existe $f \in L(\mathcal{R})$ tal que $\operatorname{ord}_p f = -n_p + 1$

c) Para toda p y $q \in S$ con $p \neq q$ existe $f \in L(\mathcal{R})$ tal que

$$\operatorname{ord}_p f > -n_p \qquad \text{y}$$

$$\operatorname{ord}_q f = -n_q$$

<u>Demostración</u>. Ya que $\deg(\mathcal{R}) = 2g+1$ entonces $\ell(\mathcal{C} - \mathcal{R}) = 0$

por el corolario 1, y también $\ell(\mathcal{R}) - 2g + 1 + 1 - g = g + 2$

$$\ell(\mathcal{R} - P) = g + 1$$

$$\ell(\mathcal{R} - 2P) = g$$

$$\ell(\mathcal{C} - \mathcal{R} - 2P) = 0$$

de donde se obtiene

1) $L(\mathcal{R} - 2P) \subsetneq L(\mathcal{R} - P) \subsetneq L(\mathcal{R})$

2) $L(\mathcal{R} - P - q) \subsetneq L(\mathcal{R} - P) \subsetneq L(\mathcal{R})$

a) Se sigue ya que $L(\mathcal{R} - P) = \{ g \in L(\mathcal{R}) \mid \operatorname{ord}_p f > -n_p \}$ y es un subespacio de codimensión uno

b) Se sigue de 1 ya que existe $f \in L(R)$ tal que $ord_p f = -n_p + 1$

c) Se sigue de 2.

DEFINICION 1: Un divisor R de S se dice que es suficientemente amplio si $\phi_R : S \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es un encaje.

TEOREMA 8: Sea S una superficie de Riemann Compacta y R un divisor de grado mayor o igual que $2g+1$ entonces R es suficientemente amplio.

<u>Demostración.</u> Por el lema 2 tenemos que

$$\phi_R : S \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

$$\phi_R(P) = (f_0(P), \ldots, f_n(P))$$

es holomorfa, falta ver que es inyectiva en S usando el lema 3 podemos suponer que si P y q son dos puntos distintos entonces $ord_p f_0 = -n_p$ y $ord_p f_1 > -n_p$ y $ord_q f_i = -n_q$, de aquí $\phi_R(z) = (\frac{f_1}{f_0}(z), \ldots, \frac{f_n}{f_0}(z))$.

y $\frac{f_1}{f_0}$ (P) = ∞ y $\frac{f_1}{f_0}$ (q) = 0 , por el inciso b del lema 3 tenemos que existe $f \in L(R)$ tal que $\mathrm{ord}_p(f) = -n_{p+1}$ y $f = \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n$ de aquí

$\frac{f}{f_0} = \lambda_0 + \lambda_1 \frac{f_1}{f_0} + \dots + \lambda_n \frac{f_n}{f_0}$ y $d_p\left(\frac{f}{f_0}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, dp\left(\frac{f_i}{f_0}\right)$ y es distinto de cero ya que existe $i \geq 1$ tal que $d_p\left(\frac{f_i}{f_0}\right) \neq 0$ y de aquí

$d_p \phi_R = \left(d_p\left(\frac{f_1}{f_0}\right), \dots, d_p\left(\frac{f_n}{f_0}\right)\right) \neq 0$ y de aquí es un encaje lo que demuestra el teorema.

COROLARIO 4: Sea S una superficie de Riemann Compacta de género g entonces

a) Si $g = 0$ entonces $S \to \mathbb{P}'(\mathbb{C}) = S^2$

b) Si $g = 1$ entonces $S \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

TEOREMA 9: Sea S una superficie de Riemann Compacta de género uno, entonces existen g_1 y $g_2 \in \mathbb{C}$ tales que

$$m(S) = \frac{\mathbb{C}(x)[y]}{(y^2 - 4x^3 - g_2 x - g_3)}$$

<u>Demostración.</u> Sea $P \in S$ y ya que $2g - 2 = 0$ el teorema de Riemann Roch nos muestra que $L(P)$ consta de las constantes solamente si nuestro divisor es $2P$ entonces $\ell(2P) = 2$ ya que $\deg(2P) = 2$ y existe una función x en $m(S)$ que tiene un polo de orden 2 en P y ningún otro polo, también $\ell(3P) = 3$ y existe $y \in m(S)$ tal que tiene un polo orden tres en P.

En $L(6P)$ las siete funciones $1, x, x^2, x^3, xy, y, y^2$ deben ser linealmente dependientes ya que $\ell(6P) = 6$, y en la relación de dependencia lineal el coeficiente de y^2 no puede ser 0 porque sino $y \in \mathbb{C}(x)$ y esto es imposible por la paridad de los polos de las funciones de $k(x)$ en P y ya que el grado del divisor de los polos en x es dos tenemos $[m(S) : \mathbb{C}(x)] = 2$ y similarmente $[m(S) : \mathbb{C}(y)] = 3$

De aquí no hay ningún campo intermedio entre $m(S)$ y $\mathbb{C}(x)$ y ya que y no esta en $\mathbb{C}(x)$ tenemos que $m(S) = \mathbb{C}(x, y)$ además la relación de dependencia lineal entre las siete funciones de arriba se puede escribir como

$$y^2 = c_1 y + c_2 xy + c_3 x^3 + c_4 x^2 + c_s x + c_6$$

y por medio de transformaciones lineales en las variables x y y obtenemos la ecuación $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$

TEOREMA 10: Toda superficie de Riemann Compacta S es holomorfamente equivalente a una curva proyectiva C no singular sobre $\mathbb{C}$ además

$$m(S) \approx \mathbb{C}(S)$$

Demostración. Sea $S \longrightarrow m(S) = \mathbb{C}(f, g)/_{P(f, g)}$ y sea $V(P)$ la curva algebraica inducida por $P(f, g)$ entonces existe una función ϕ de S en $V(P)$ con las siguientes propiedades:

a) ϕ es holomorfa

b) Existe $A \subset S$ y $B \subset V(P)$ conjuntos finitos tales que $\phi : S - A \longrightarrow V(P) - B$ es biyectiva donde B es el conjunto de puntos singulares de $V(P)$

c) Por la geometria algebraica sabemos que existe la normalización de $V(P)$

y denotémosla por $NV(P)$ y de aquí existe una función $\psi : NV(P) - A' \longrightarrow V(P) - B$ que es biholomorfa y biyectiva de donde componiendo las funciones ϕ y ψ^{-1} obtenemos una función $\phi \circ \psi^{-1} : S - A \longrightarrow NV(P) - A'$ biholomorfa y biyectiva de donde la podemos extender a todo S biholomorfamente con lo que se demuestra la primera parte y como claramente $\mathbb{C}(NV(P)) \approx \mathbb{C}(N(P)) \approx m(S)$ se obtiene el segundo resultado.

Para concluir de la geometria algebraica, sabemos también que dadas dos curvas S_1 y S_2 no singulares son birregularmente equivalentes si y solo si $m(S_1) \approx m(S_2)$ de aquí S_1 y S_2 son holomorfamente equivalentes si y solo si $m(S_1) = m(S_2)$, de aquí se sigue que para el caso de género uno existen una infinidad de campos de género uno que no son isomorfos.

APENDICE

VALUACIONES

TEOREMA 1. Sea K un subcampo de L. Entonces una valuación sobre K tiene una extensión a una valuación sobre L.

<u>Demostración</u>: Sea $\mathcal{D}$ el anillo de valuación sobre K correspondiente a la valuación dada. Sea $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}/_m$ el homomorfismo canónico sobre el campo de la clase residual, y extendemos ϕ a un homomorfismo de un anillo de valuación E de L. Sea n el ideal maximal de E. Ya que $n \cap \mathcal{D} \supseteq m$ pero no cintiene a 1, se sigue que $n \cap \mathcal{D} = m$. Sea U' el grupo de unidades de E. Entonces $U' \cap K = U$ que es el grupo de unidades de $\mathcal{D}$. De aquĩ tenemos la inyección canónica $K^*/_U \longrightarrow L^*/_{U'}$ el cual preserva el orden si identificamos $K^*/_U$ en $L^*/_{U'}$ obtenemos el resultado.

TEOREMA 2. Sea L una extensión finita de K, de grado n, sea w una valuación de L con grupo de valores Γ', sea Γ el grupo de valores de K. Entonces $(\Gamma' : \Gamma) \leq n$.

Demostración. Sean $y_1, \ldots, y_n$ elementos de L cuyos valores representan distintas clases laterales de Γ en Γ', probaremos que las y_i son linealmente independientes sobre K. En la relación $a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = 0$ con $a_i \in K$, $a_i \neq 0$ dos términos deben tener el mismo valor, digamos:

$$|a_i y_i| = |a_j y_j| \quad \text{con} \quad i \neq j \quad \text{y de aquí}$$

$$|y_i| = |a_i^{-1} a_j| \, |y_j|$$

y esto contradice la suposición de que los valores de y_i y y_j con $i \neq j$ representan distintas clases laterales de Γ en Γ' y prueba nuestro teorema.

COROLARIO. Existe un entero $e \geq 1$ tal que la función $\gamma \longrightarrow \gamma^e$ induce un homomorfismo inyectivo de Γ' en Γ.

Demostración. Tome e como el índice de $(\Gamma' : \Gamma)$

DEFINICION 1. El índice de Ramificación de E sobre D es el entero

$e = (\Gamma' : \Gamma)$.

TEOREMA 3. Sea L una extensión finita de grado n de un campo K, y sea $\mathcal{E}$ un anillo de valuación de L. Sea $\mathcal{N}$ su idel maximal, sea $\mathcal{D} = \mathcal{E} \cap K$, y m el idal maximal de $\mathcal{D}$, es decir $m = n \cap \mathcal{D}$. Entonces el grado de las clases residuales $(\mathcal{E}/_n : \mathcal{D}/_m)$ es finito. Si lo denotamos por d, y si e es el índice de ramificación, entonces $e\,d \leq n$.

<u>Demostración</u>: Sean $y_1, \ldots, y_e$ elementos de L^* que representan distintas clases laterales de $\Gamma'/_\Gamma$ y sean $z_1, \ldots, z_s$ elementos de $\mathcal{E}$ cuyas clases residuales mod n son linealmente independientes sobre $\mathcal{D}/_m$, considerando la relación $\sum_{i,j} a_{ij}\, z_i\, y_j = 0$ con $a_{ij} \in K$ con alguna $a_{ij} \neq 0$. En nuestra suma $\sum_{i=1}^{s} a_{ij}\, a_i\, z_i$ dividiendo por el coeficiente a_{ir} que tiene la valuación mas alta. Obtenemos una combinación lineal de $z_i, \ldots, z_s$ con coeficientes en $\mathcal{D}$, y al menos un coeficiente es una unidad. Y ya que los $z_1, \ldots, z_s$ son linealmente independientes mod n sobre $\mathcal{D}/_m$, se sigue que nuestra combinación lineal es una unidad. De aquí $\left| \sum_{j=1}^{s} a_{ij}\, z_j \right| = | a_{ir} |$ para algún índice

r . En la suma $\sum_{i=1}^{e} (\sum_{j=1}^{s} a_{ij} z_j) y_i = 0$ puede ser vista como una suma sobre i en la cual al menos dos términos tienen el mismo valor, y esto contradice la independencia de $|y_1|, \ldots, |y_e|$ mod Γ como en la prueba del teorema 2.

TEOREMA 4. Sea L una extensión finita de K. Sea Γ su grupo de valores de una valuación discreta de K, y Γ_i los grupos de valores de un número finito de valuaciones discretas de L, extendidas de K, sean e_i los índices de Γ en Γ_i . Entonces $\sum_i e_i = (L : K)$.

La demostración es análoga a las anteriores. (ver [3] pag 3 y 4)

B I B L I O G R A F I A

[1] Gunning, R.C. Lectures on Riemann surfaces. Princeton Mathematical Notes. 1966.

[2] Lang, Serge Algebra. Addison Wesley. 1971

[3] Lang, Serge Introduction to algebraic and abelian functions. Addison Wesley. 1972.

[4] Shafarevich, I.R. Basic algebraic geometry. Springer-Verlag. 1974.

[5] Swinnerton-Dyer Analytic theory of abelian varieties. Cambridge University Press. 1974.