[illegible] SPLINES

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

# SPLINES CUADRATICOS Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

## TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA: JOSE RAFAEL SANCHEZ PEREZ

MEXICO D.F. 1985

a mis padres

ANTONIO SANCHEZ H.

y

SOLEDAD PEREZ R.

porque a ellos les
debo lo que soy.

a la mujer que amo

MARGARITA GOMEZ CASTILLO

porque su amor es el
impulso mas grande en
mi vida.

a mis hermanos

ANTONIO

LEOPOLDO

IRMA

JOSE

MARICELA

CARMELA

a ERICA y MIGUEL.

INDICE

# INTRODUCCION

En el presente trabajo se hace un estudio de los splines cuadráticos cuya importancia estriba en ser una herramienta poderosa tanto para interpolación como para aproximación. En el primer capítulo se tratan los espacios vectoriales spline y el cálculo de su dimensión. En el segundo capítulo se trata el problema de interpolación spline parabólica dando un tratamiento diferente a la interpolación usual, esto es, la interpolación se efectua en puntos que no son de quiebre. El alisamiento de un histograma por medio de splines cuadráticos se analisa en el tercer capítulo, haciendo énfacis en la determinación de bases idoneas para condiciones de frontera diferentes.

Por último en el cuarto capítulo se discute el diseño de algorítmos para interpolar un conjunto de datos usando splines cuadráticos, de manera que la convexidad, concavidad y/o monotonía de los datos sea preservada.

Hago patente mi especial agradecimiento al Dr. Pablo Barrera Sánchez por su apoyo y estímulo constantes, que hicieron posible la culminación de éste trabajo. Quiero agradecer también a los profesores y amigos por las sugerencias y ayuda recibida.

# I ESPACIOS VECTORIALES SPLINE

En este capítulo se analizan los espacios de funciones polinomiales por pedazos llamadas "Espacios Vectoriales Spline". Estos son de gran utilidad en teoría de aproximación e interpolación como se verá en los siguientes capítulos.

## ESPACIOS SPLINE LINEALES

Sea $\mathbb{P}_n$ una partición arbitraria en $I=[a,b]$ contenido en $\mathbb{R}$, tal que $a=z_1<\cdots<z_n=b$. y se denotará $[z_i, z_{i+1}]$ por $I_i$.

Sea $\mathcal{A}(z)$ una función "construida continuamente" por pedazos de polinomios de grado menor o igual a 1 en cada $I_i$, $i=1,\ldots,n-1$. Así

1.1 $S_{1,0}(\mathbb{P}_n(z))=\{\mathcal{A}:I\to\mathbb{R} \mid \mathcal{A}\in C^0[I],\ \mathcal{A}|_{I_i}=P_i$ pol. de grado $\leq 1,\ i=1,\ldots,n-1\}$

son espacios spline lineales que dependen de la partición; para una partición $\mathbb{P}_n$ la gráfica del espacio es como en la fig. 1.1.

Para demostrar que los espacios spline son espacios vectoriales se siguen razonamientos análogos a los que se siguen para demostrar que el espacio de funciones continuas es un espacio vectorial.

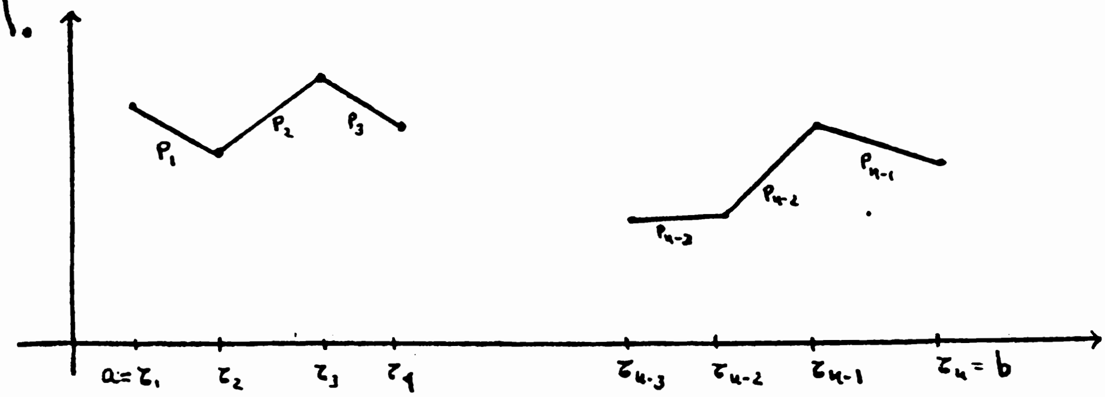



fig. 1.1 Espacio Spline Lineal dado por $\mathbb{P}_n$.

La dimensión del espacio 1.1 se determina como sigue:

Dado que $s|_{I_i}$ $i=1,\dots,n-1$ es de la forma $\alpha_i\tau+\beta_i$ y por continuidad de $s$ en $\tau_2,\dots,\tau_{n-1}$ se tiene

1.2 $$\alpha_i\tau_{i+1}+\beta_i = \alpha_{i+1}\tau_{i+1}+\beta_{i+1}$$

y

$$\alpha_i\tau_{i+1}+\beta_i-\alpha_{i+1}\tau_{i+1}-\beta_{i+1}=0$$

este sistema de ecuaciones puede expresarse matricialmente como $Ax=0$, donde

$$A=\begin{bmatrix} \tau_2 & 1-\tau_2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 1-\tau_3 & -1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tau_{n-1} & 1-\tau_n & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$x^t=[\alpha_1\ \beta_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \ldots\ \alpha_{n-1}\ \beta_{n-1}\ \alpha_n\ \beta_n]$$

$$\therefore\quad \mathcal{A}\in S_{1,0} \iff \mathcal{A}(\tau)\big|_{I_i}=P_i \quad 1\le i\le n-1$$

1.3

$$\iff A\cdot X=0$$

es decir existe una correspondencia biunívoca entre $S_{1,0}$ y el nucleo de A, por lo tanto

$$\dim(S_{1,0})=\dim(N(A))$$

A es una matríz de orden $(n-2)\times 2(n-1)$ y rango $n-2$

$$\Rightarrow\quad \dim(S_{1,0}) = \dim(N(A))$$

1.4

$$= 2n-2-n+2$$

$$= n$$

por tanto la dimensión del espacio 1.1 para $\mathbb{P}_n$ dada, es $n$.

## ESPACIOS SPLINE CUADRATICOS

El espacio de splines cuadráticos

1.5 $S_{2,0}(\mathbb{P}_n(\tau))=\{s: I\to\mathbb{R} \mid s\in C^0[I],\ s|_{I_i}=P_i$ pol. de grado $\leq 2$, $i=1,\dots,n-1\}$

esta formado por pedazos de polinomios de grado a lo mas 2, y $s$ es continua en $\tau_i$, $i=2,\dots,n-1$. Ver fig. 1.2.

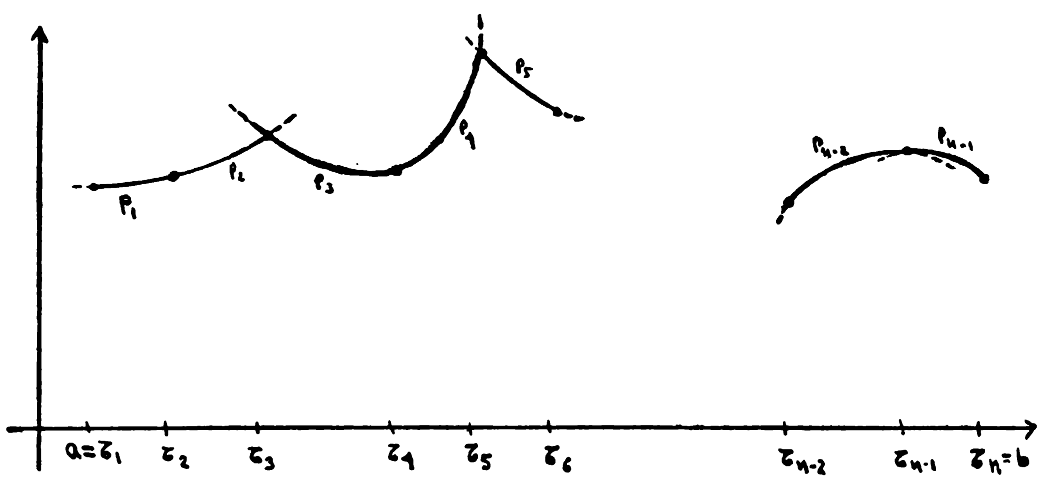



fig. 1.2

Espacio de splines cuadráticos dado por $\mathbb{P}_n$. Observese que en los nodos "puntos de unión" de los $P_i$ no se pegan suavemente.

cada $P_i$ es de la forma $\alpha_i\tau^2+\beta_i\tau+\gamma_i$

por lo que se requiere determinar 3 parámetros por cada pedazo de polinomio $P_i$ $i=1,\dots,n-1$, y por la condición de continuidad en $\tau_i$

$$\alpha_i \tau_{i+1}^2 + \beta_i \tau_{i+1} + \gamma_i = \alpha_{i+1}\tau_{i+1}^2 + \beta_{i+1}\tau_{i+1} + \gamma_{i+1}$$

1.6 $\qquad$ $i=1,\dots,n-2$

$$\alpha_i \tau_{i+1} + \beta_i \tau_{i+1} + \gamma_i - \alpha_{i+1}\tau_{i+1}^2 - \beta_{i+1}\tau_{i+1} - \gamma_{i+1} = 0$$

este sistema de ecuaciones puede expresarse en forma matricial $AX=0$, donde

1.7
$$A = \begin{bmatrix} \tau_2^2 & \tau_2 & 1 & -\tau_2^2 & -\tau_2 & -1 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_3^2 & \tau_3 & 1 & -\tau_3^2 & -\tau_3^2 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \tau_{n-1}^2 & \tau_{n-1} & 1 & -\tau_{n-1}^2 & -\tau_{n-1} \; -1 \end{bmatrix}$$

A es de orden $(n-2)\times 3(n-1)$, y

$$X^t = [\alpha_1 \; \beta_1 \; \gamma_1 \; \alpha_2 \; \beta_2 \; \gamma_2 \; \cdot \; \cdots \; \alpha_{n-1} \; \beta_{n-1} \; \gamma_{n-1}]$$

es el vector de los $3(n-1)$ parámetros por determinar.

Ahora bien

$$\mathcal{A} \in S_{2,0}(\mathbb{P}_n(\tau)) \iff \mathcal{A}\big|_{I_i} = P_i \qquad i=1,\dots,n-1$$

1.8
$$\iff AX = 0$$

por lo tanto la dimensión del spline cuadrático 1.5 es :

$$\begin{aligned} \dim(S_{2,0}) &= \dim(N(A)) \\ &= 3(n-1)-(n-2) \\ &= 2n-1 . \end{aligned}$$

Hay subespacios del espacio 1.5 que por sus características son de gran utilidad en aplicaciones. Así el subespacio de spline parabólicos

1.9 $S_{2,1}(\mathbb{P}_n(\tau))=\{\mathcal{A}:I\to\mathbb{R} \mid \mathcal{A}\in C^1[I],\ \mathcal{A}|_{I_i}=P_i \text{ pol. de grado} \leq 2,\ i=1,\ldots,n-1\}$

está formado por pedazos de polinomios y en los puntos de unión, $\tau_i$ $i=2,\ldots,n-1$ el spline es diferenciable. Ver fig. 1.3.

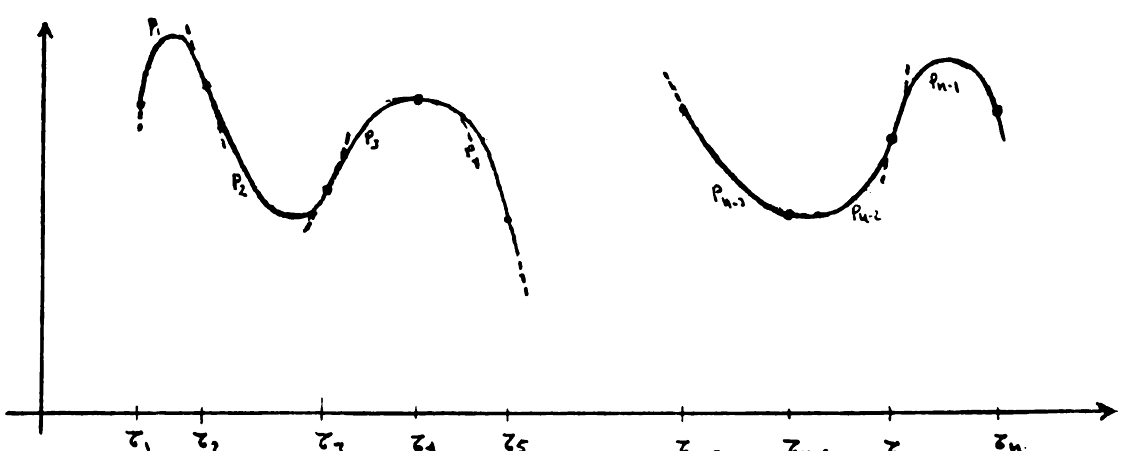


fig. 1.3

Cada pedazo de polinomio $P_i$ es de la forma $\alpha_i \tau^2 + \beta_i \tau + \gamma_i \quad i=1,\ldots,n-1$, por tanto se requiere determinar $3(n-1)$ parámetros.

Por la condición de continuidad 1.6 debe cumplirse. Además para la condición de la continuidad en la derivada

$$\Lambda'(\tau) = 2\tau\alpha_i + \beta_i \qquad \tau \in I_i \quad i=1,\ldots,n-1$$

y

$$2\alpha_i \tau_{i+1} + \beta_i = 2\alpha_{i+1}\tau_{i+1} + \beta_{i+1}$$

1.10 $\qquad i=1,\ldots,n-1$

de donde $\quad 2\alpha_i \tau_{i+1} + \beta_i - 2\alpha_{i+1}\tau_{i+1} - \beta_{i+1} = 0$

sistema que puede expresarse en forma matricial $A_1 X = 0$ donde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2\tau_2 & 1 & 0 & -2\tau_2 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\tau_3 & 1 & 0 & -2\tau_3 & -1 & 0 & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & 0 & 2\tau_{n-1} & 1 & 0 & -2\tau_{n-1} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

es de orden $(n-2) \times 3(n-1)$ y

$$X^t = [\alpha_1 \; \beta_1 \; \gamma_1 \; \alpha_2 \; \beta_2 \; \gamma_2 \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \alpha_{n-1} \; \beta_{n-1} \; \gamma_{n-1}].$$

de los sistemas 1.6 y 1.10 para la continuidad de $\Lambda$ y $\Lambda'$ formamos la matriz B intercalando un renglón del sistema 1.6 y uno del sistema 1.10 de manera que B es la matriz de coeficientes generada por las condiciones del espacio 1.9. La matriz B explícita es

$$
1.11 \quad B = \begin{bmatrix}
z_2^2 & z_2 & 1 & -z_2^2 & -z_2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2z_2 & 1 & 0 & -2z_2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & z_3^2 & z_3 & 1 & -z_3^2 & -z_3 & -1 & 0 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & 0 & 2z_3 & 1 & 0 & -2z_3 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
0 & & & & & & & & & & & 0 & 2z_{n-1} & 1 & 0 & -2z_{n-1} & -1 & 0
\end{bmatrix}
$$

cuyo orden es $2(n-2) \times 6(n-1)$.

La dimensión del espacio de spline parabolicos es

$$
\begin{aligned}
\dim(S_{2,1}) &= \dim(N(B)) \\
&= 3(n-1) - 2(n-2) \\
&= n+1
\end{aligned}
$$

**Observacion 1:** La dimensión del espacio es el número de parámetros por determinar menos el número de condiciones.

## ESPACIOS SPLINE CUBICOS.

El espacio de splines cúbicos, denotado por

1.12 $S_{3,0}(\mathbb{P}_n(\tau)) = \{A : I \to \mathbb{R} \mid A \in C^0[I],\ A|_{I_i} = P_i \text{ pol. de grado} \leq 3, i=1,\dots,n-1\}$

también llamado espacio de polinomios cúbicos de Lagrange por pedazos, queda completamente establecido si cada polinomio $P_i$, $i=1,\dots,n-1$ es determinado por 4 parámetros, pues $P_i = \alpha_i \tau^3 + \beta_i \tau^2 + \gamma_i \tau + \varphi_i$ por tanto se requieren $4(n-1)$ parámetros por determinar.

Por la observacion 1

$$\begin{aligned} \dim(S_{3,0}) &= (\#\text{ de parámetros por determinar}) - (\#\text{ de condiciones}) \\ &= 4(n-1) - (n-2) \\ &= 3n-2. \end{aligned}$$

El espacio 1.12 para una $\mathbb{P}_n$ dada se vería como en la fig. 1.4.

El subespacio generado al pedir que también la 1ª derivada sea continua en $\tau_i$, $i=2,\dots,n-1$ es llamado espacio de Hermite polinomial cúbico por pedazos. Que denotamos por

1.13 $S_{3,1}(\mathbb{P}_n(\tau))=\{s: I\to\mathbb{R} \mid s\in C^1[I],\ s|_{I_i}=p_i \text{ pol. de grado } \leq 3,\ i=1,\dots,n-1\}$

y su dimensión es

$$\dim(S_{3,1}) = 4(n-1)-2(n-2)$$
$$= 2n.$$

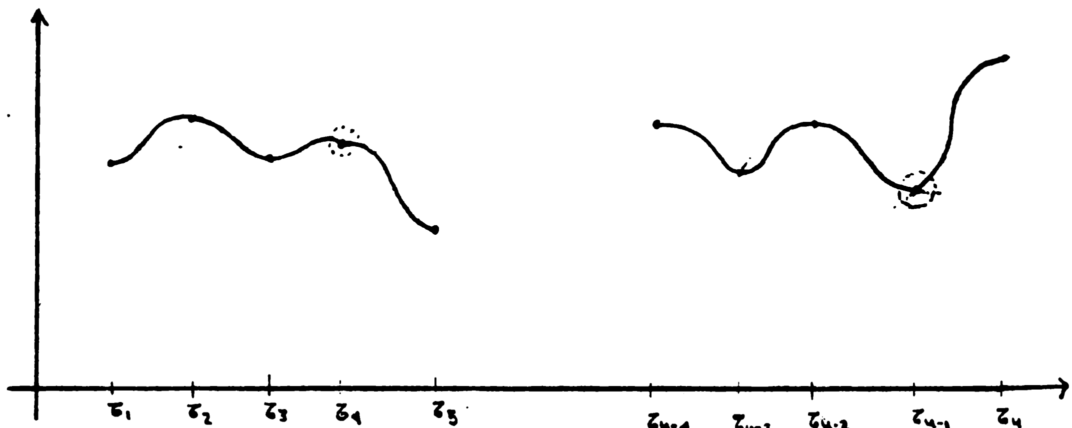



fig. 1.4
En este espacio sólo se pide $s\in C^0[I]$ y puede haber picos.

Aun cuando el espacio 1.13 es suave en los nodos, la 2ª derivada puede no ser continua. Por lo que construimos el subespacio

1.14 $S_{3,2}(\mathbb{P}_n(\tau))=\{s: I\to\mathbb{R} \mid s\in C^2[I],\ s|_{I_i}=p_i \text{ pol. de grado } \leq 3,\ i=1,\dots,n-1\}$

llamado Espacio Spline Cúbico Polinomial. Por sus cualidades de suavidad es muy útil en aplicaciones, su dimensión es

$$\dim(S_{32}) = 4(n-1) - 3(n-2)$$
$$= n+2$$

gráficamente el subespacio 1.14 se ve en la fig. 1.5.

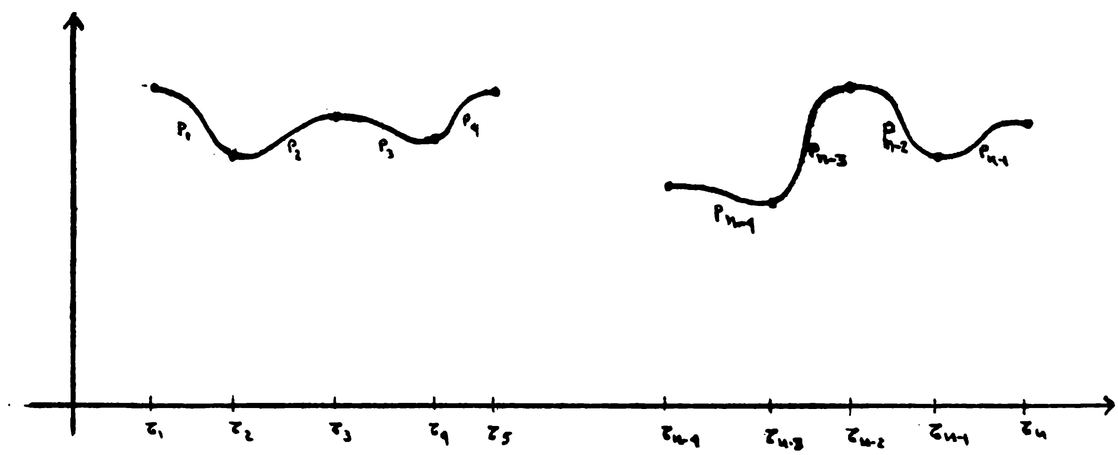



fig. 1.5

En este espacio los polinomios $p_i$ se pegan suavemente.

## ESPACIOS SPLINE DE GRADO m

En general se pueden construir espacios spline cuyos componentes sean pedazos de polinomios de grado $\leq m$. Por ejemplo

1.15 $S_{m,0}(\mathbb{P}_n(z))=\{s:I\to\mathbb{R} \mid s\in C^0[I],\ s|_{I_i}=P_i$ pol. de grado $\leq m,\ i=1,\dots,n-1\}$

es un espacio de splines con $s$ continuo en $I$, y restringido a cada $I_i$, $i=1,\dots,n-1$, es un polinomio de grado no mayor que $m$.

Dado que cada polinomio es de la forma $\alpha_m z^m+\alpha_{m-1}z^{m-1}+\cdots+\alpha_1 z+\alpha_0$ hay $(m+1)\times(n-1)$ parámetros por determinar para establecer el espacio, con $\mathbb{P}_n$ dada.

La dimensión del espacio 1.15 es

$$\begin{aligned}\dim(S_{m,0})&=(m+1)(n-1)-(n-2)\\&=m(n-1)+1\,.\end{aligned}$$

Un subespacio de 1.15 que sea $k$ veces diferenciable en los nodos y cada pedazo de polinomio tenga grado a lo mas $m$ es

1.16 $S_{m,k}(\mathbb{P}_n(\tau))=\{\Delta:I\to\mathbb{R}\mid\Delta\in C^k[I],\ \Delta|_{I_i}=P_i$ pol. de grado $\leq m,\ i=1,\dots,n-1\}$

con dimensión

$$\dim(S_{m,k})=(m+1)(n-1)-(k+1)(n-2).$$

Hasta el momento la condicion de diferenciabilidad ha sido indistintamente igual en todos los nodos. Sin embargo puede elegirse diferentes grados de diferenciabilidad en nodos diferentes. Una de las razones por las cuales surge este tipo de condiciones, es debido a que, para algunos problemas no se requiere igual diferenciabilidad en todo el intervalo de interes.

Para indicar los diferentes grados de diferenciabilidad en nodos diferentes se usará un vector $\nu$ de dimensión n-2.

En general en el espacio

1.17 $S_{m,(k_2,\dots,k_{n-1})}(\mathbb{P}_n(\tau))=\{\Delta:I\to\mathbb{R}\mid\Delta$ en $\tau_i$ es $k_i$ veces diferenciable, $i=2,\dots,n-1;$

$\Delta|_{I_i}=P_i$ pol. de grado $\leq m,\ i=1,\dots,n-1\}$

la diferenciabilidad de $s$ en el $i$-esimo nodo se especifica en el $i$-esimo elemento del vector $v=(K_2,\ldots,K_{n-1})$.

Ejemplo: Un espacio particular, es

$$1.18 \quad S_{2,(0,1)}(\mathbb{P}_1(z))=\Big\{s:I\to\mathbb{R}\,\Big|\, s \text{ en } z_i \text{ es } K_i \text{ veces diferenciable}, i=2,3;\; s\big|_{I_i}=P_i \text{ pol. de grado} \leq 2, i=1,2,3\Big\}$$

las condiciones de continuidad en 1.18 permiten obtener

$$\alpha_1 z_2^2+\beta_1 z_2+\gamma_1 = \alpha_2 z_2^2+\beta_2 z_2+\gamma_2$$
$$\alpha_2 z_3^2+\beta_2 z_3+\gamma_2 = \alpha_3 z_3^2+\beta_3 z_3+\gamma_3$$

de donde

$$1.19 \quad \begin{aligned}&\alpha_1 z_2^2+\beta_1 z_2+\gamma_1-\alpha_2 z_2^2-\beta_2 z_2-\gamma_2=0\\ &\alpha_2 z_3^2+\beta_2 z_3+\gamma_2-\alpha_3 z_3^2-\beta_3 z_3-\gamma_3=0\end{aligned}$$

matricialmente el sistema 1.19 es $A_1X=0$ siendo

$$1.20 \quad A_1=\begin{bmatrix} z_2^2 & z_2 & 1 & -z_2^2 & -z_2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & z_3^2 & z_3 & 1 & -z_3^2 & -z_3 & -1\end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes, y

$$x^t = [\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3]$$

es el vector de parámetros por determinar

Además $\Lambda'$ en $\tau_3$ debe ser continua. Puesto que $P_i' = 2\alpha_i\tau_i + \beta_i$, $i=1,2,3$, entonces

$$2\alpha_2\tau_3 + \beta_2 = 2\alpha_3\tau_3 + \beta_3$$

1.21 $$\therefore\ 2\alpha_2\tau_3 + \beta_2 - 2\alpha_3\tau_3 - \beta_3 = 0$$

integramos ésta condición en 1.19, colocandola en seguida de la condición de continuidad de $\Lambda$ en $\tau_3$, obteniendo

1.22 $$A_2 = \begin{bmatrix} \tau_2^2 & \tau_2 & 1 & -\tau_2^2 & -\tau_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_3^2 & \tau_3 & 1 & -\tau_3^2 & -\tau_3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\tau_3 & 1 & 0 & -2\tau_3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que es de orden $3(3)\times 3$. y su dimensión

$$\dim(S_{2,(0,1)}(\mathbb{P}_1(\tau))) = 3(3) - 3$$
$$= 6$$

Ejemplo: aquí se analiza otro espacio particular

$$1.23 \quad S_{2,(0,\dots,0,1,1,1,0,\dots,0)}(\mathbb{P}_n(\tau)) = \{ s : I \to \mathbb{R} \mid s \text{ es } k_i \text{ veces diferenciable en } \tau_i, \; i=2,\dots,n-1;\; s|_{I_i} = p_i \text{ pol. de grado} \leq 2,\; i=1,\dots,n-1 \}$$

En el espacio 1.23, $s'$ debe ser una vez diferenciable, digamos en $\tau_\ell, \tau_{\ell+1}, \tau_{\ell+2}$ y $s$ continua en todos los nodos.

Las condiciones de continuidad de $s$ y diferenciabilidad de $s'$ se integran en un sistema constituido por los $\ell$ renglones de la condición de continuidad de $s$, en $\tau_2,\dots,\tau_\ell$. En seguida el renglón con la condición de continuidad de $s'$ en $\tau_\ell$, luego el renglón con la condición de continuidad de $s$ en $\tau_{\ell+1}$ y se continua intercalando una condición de $s'$ y y una condición de $s$ hasta agotar las condiciones de $s'$ y posteriormente se escriben los renglones con el resto de condiciones de continuidad de $s$. La matriz del sistema es

$$
\begin{bmatrix}
z_2^2 & z_2 & 1 & -z_2^2 & -z_2 & -1 & 0 & \cdots & & & & & & & & & & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & z_3^2 & z_3 & 1 & -z_3^2 & -z_3 & -1 & 0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & \cdots & & 0 & z_\ell^2 & z_\ell & 1 & -z_\ell^2 & -z_\ell & -1 & 0 & \cdots & & & & & & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & & & 0 & 0 & 0 & 2z_\ell & 1 & 0 & -2z_\ell & -1 & 0 & 0 & & & & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & 0 & 0 & 0 & z_{\ell+1}^2 & z_{\ell+1} & 1 & -z_{\ell+1}^2 & -z_{\ell+1} & -1 & 0 & & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 2z_{\ell+1} & 1 & 0 & -2z_{\ell+1} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & z_{\ell+2}^2 & z_{\ell+2} & 1 & -z_{\ell+2}^2 & -z_{\ell+2} & -1 \; 0 \cdots 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 2z_{\ell+2} & 1 & 0 & -2z_{\ell+2} \; -1 \; 0 \cdots 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & & & & & \cdots & 0 & z_{n-1}^2 & z_{n-1} & 1 & -z_{n-1}^2 & -z_{n-1} \; -1
\end{bmatrix}
$$

y la dimensión del espacio 1.23 es

$$
\begin{aligned}
\dim(S_{2,(0,\dots,0,1,1,1,0,\dots,0)}(\mathbb{P}_n(z)) &= [3(n-1)] - [(n-2)+3] \\
&= 2n-4.
\end{aligned}
$$

Para calcular la dimensión de un subespacio

$$
S_{m,(k_2,\dots,k_{n-1})}(\mathbb{P}_n(z)) = \{ A : I \to \mathbb{R} \mid A \text{ en } z_i \text{ es } k_i \text{ veces diferenciable}, i=2,\dots,n-1; \; A|_{I_i} = p_i \text{ Pol. de grado} \le m, i=1,\dots,n-1 \}
$$

procedemos de la siguiente manera:

Dado que hay $n-1$ polinomios de grado menor o igual que $m$, cuyos coeficientes deben determinarse en total son $(n-1)\times(m+1)$ incognitas. Por otra parte las condiciones de diferenciabilidad en cada nodo $z_i, i=2, \ldots, n-1$ es $k_i$ además de la continuidad de $s$ en cada nodo. Por tanto se tienen en total $\sum_{i=2}^{n-1}(k_i+1)$ condiciones. Entonces

$$\boxed{\dim\left(S_{m,(k_2,\ldots,k_{n-1})}(\mathbb{P}_n(z))\right)=(n-1)\times(m+1)-\sum_{i=2}^{n-1}(k_i+1)}$$

# II INTERPOLACION SPLINE PARABOLICA

Una de las aplicaciones mas importantes de las funciones polinomiales por pedazos, es, en los problemas de interpolación.

En un problema de interpolación, a un conjunto de datos $\{(x_i, f(x_i))\}$ $i=1,\ldots,n$. se desea ajustar una función polinomial por pedazos, digamos $s$, de modo que los puntos $(x_i, f(x_i))$ $i=2,\ldots,n-1$ se toman como la unión de los pedazos de polinomios $p_i$ y $p_{i+1}$ $i=1,n-2$. En este caso se dice que la interpolación es en los puntos de quiebre. Ver fig. 2.1

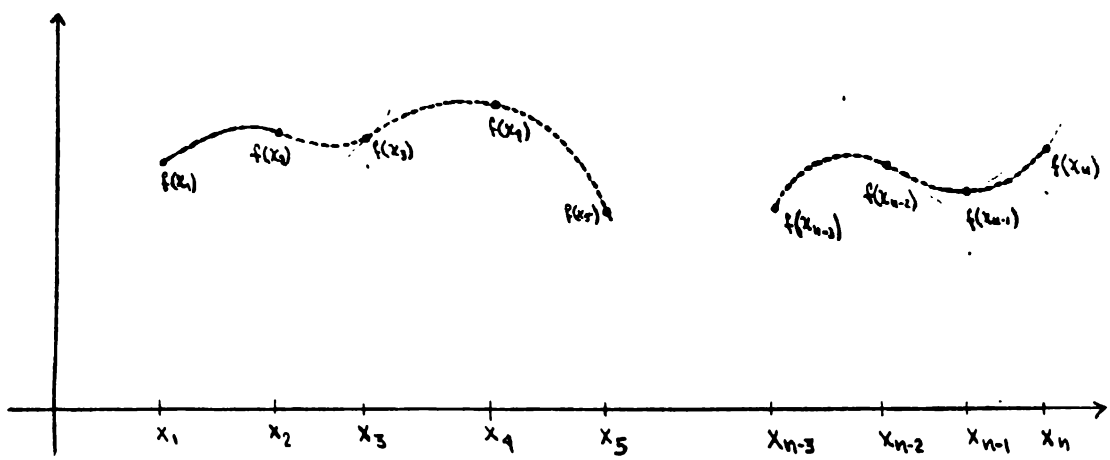



fig. 2.1

Esta forma de interpolación ha sido utilizada por mucho tiempo, sin embargo no hay nada queimpida interpolar en cualquier otro punto que no sea de quiebre. Este tipo de interpolación es la que interesa analizar en éste capítulo y ver que se pueden obtener ventajas interpolando de esta manera.

## INTERPOLACION EN LOS PUNTOS DE QUIEBRE.

Sean $\{(\tau_i, f(\tau_i))\}, i=1,\ldots,n$ datos conocidos, en donde $a=\tau_1<\cdots<\tau_n=b$, $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Se elige la interpolante $s$ a $f$ consistiendo de pedazos de polinomios cuadráticos, de modo que si $I_i=[\tau_i,\tau_{i+1}]$, $i=1,\ldots,n-1$, entonces $s|_{I_i}=p_i$ es un polinomio cuadrático. Por lo tanto

2.1 $$p_i(\tau)=\alpha_i\tau^2+\beta_i\tau+\gamma_i,\quad i=1,\ldots,n-1$$

entonces

2.2 $$\begin{aligned} f(\tau_i) &= p_i(\tau_i) \\ f(\tau_{i+1}) &= p_i(\tau_{i+1}) \end{aligned} \qquad i=1,\ldots,n-1$$

constituyen dos condiciones para cada polinomio $p_i$, $i=1,\ldots,n-1$. Dado que son 3 parámetros por determinar por cada polinomio, disponemos de un grado de libertad para cada pedazo de polinomio a ser determinado.

Se elige éste grado de libertad de la siguiente manera:

se toma $\tau_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2}$

2.3 $\qquad i = 1, \ldots, n-1$

y $\quad P_i(\tau_{i+\frac{1}{2}}) = v_{i+1}$

donde $v_2, v_3, \ldots, v_n$ pueden ser elegidos de varias maneras:

a) De consideraciones locales puede hacerse $v_{i+1} = f(\tau_{i+\frac{1}{2}})$ si se dispone de información para interpolar también en $\tau_{i+\frac{1}{2}}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

b) Siguiendo el proceso para hacer de $s$ un spline parabólico se puede determinar $v_i$, $i = 2, \ldots, n-1$.

Para generar el sistema lineal resultante para los parámetros $V_i$ se escribe el $i$-esimo polinomio en la forma de newtón.

2.4 $$P_i(x) = P_i(\tau_i) + (x-\tau_i)\,P_i[\tau_i,\tau_{i+\frac{1}{2}}] + (x-\tau_i)(x-\tau_{i+\frac{1}{2}})\,P_i[\tau_i,\tau_{i+\frac{1}{2}},\tau_{i+1}].$$

para simplificar, sea

2.5 $$D_i^{+} = P_i[\tau_i,\tau_{i+\frac{1}{2}}] = (P_i[\tau_{i+\frac{1}{2}}] - P_i[\tau_i])/(\tau_{i+\frac{1}{2}}-\tau_i)$$

$$= (V_{i+1} - f(\tau_i))/(\Delta\tau_i/2)$$

y

2.6 $$D_{i+1}^{-} = P_i[\tau_{i+\frac{1}{2}},\tau_{i+1}] = (P_i[\tau_{i+1}] - P_i[\tau_{i+\frac{1}{2}}])/(\tau_{i+1}-\tau_{i+\frac{1}{2}})$$

$$= (f(\tau_{i+1}) - V_{i+1})/(\Delta\tau_i/2)$$

expresando $P_i[\tau_i,\tau_{i+\frac{1}{2}},\tau_{i+1}]$ en términos de 2.5 y 2.6 se obtiene

2.7 $$P_i[\tau_i,\tau_{i+\frac{1}{2}},\tau_{i+1}] = (P_i[\tau_{i+\frac{1}{2}},\tau_{i+1}] - P_i[\tau_i,\tau_{i+\frac{1}{2}}])/(\tau_{i+1}-\tau_i)$$

$$= (D_{i+1}^{-} - D_i^{+})/\Delta\tau_i.$$

reescribiendo 2.1 en terminos de 2.5, 2.6 y 2.7

2.8 $$P_i(x) = P_i(\tau_i) + (x-\tau_i)D_i^+ + (x-\tau_i)(x-\tau_{i+\frac{1}{2}})(D_{i+1}^- - D_i^+)/\Delta\tau_i$$

y su derivada con respecto a $x$ es

$$P_i'(x) = D_i^+ + [(D_{i+1}^- - D_i^+)/\Delta\tau_i][(x-\tau_i)+(x-\tau_{i+\frac{1}{2}})]$$

$$= D_i^+ + [(D_{i+1}^- - D_i^+)/\Delta\tau_i][2x-\tau_i-\tau_{i+\frac{1}{2}}]$$

y

2.9 $$P_i'(\tau_i) = D_i^+ + [(D_{i+1}^- - D_i^+)/\Delta\tau_i][\tau_i-\tau_{i+\frac{1}{2}}]$$

en 2.9 se sustituye $\Delta\tau_i$ por una expresión semejante, para obtener

$$P_i'(\tau_i) = D_i^+ + [(D_{i+1}^- - D_i^+)/-2(\tau_i-\tau_{i+\frac{1}{2}})][\tau_i-\tau_{i+\frac{1}{2}}]$$

$$= D_i^+ - (D_{i+1}^- - D_i^+)/2$$

$$= (2D_i^+ - D_{i+1}^- + D_i^+)/2$$

$\therefore$

2.10 $$P_i'(\tau_i) = (3D_i^+ - D_{i+1}^-)/2$$

dado que ésta es la derivada del i-ésimo polinomio, se necesita la derivada del (i-1)-ésimo polinomio para establecer la condición de continuidad de la primera derivada de $P_i$ en $\tau_i$, $i=2,\ldots,n-1$.

De 2.8 se obtiene

$$2.11 \qquad P_{i-1}(x)=P_{i-1}(\tau_{i-1})+(x-\tau_{i-1})D_{i-1}^{+}+(x-\tau_{i-1})(x-\tau_{i-\frac{1}{2}})[D_i^{-}-D_{i-1}^{+}]/\Delta\tau_{i-1}$$

$$\therefore \qquad P_{i-1}'(x)=D_{i-1}^{+}+[(D_i^{-}-D_{i-1}^{+})/\Delta\tau_{i-1}][(x-\tau_{i-1})+(x-\tau_{i-\frac{1}{2}})]$$

$$=D_{i-1}^{+}+[(D_i^{-}-D_{i-1}^{+})/\Delta\tau_{i-1}][2x-\tau_{i-1}-\tau_{i-\frac{1}{2}}]$$

evaluando $P_{i-1}'$ en $\tau_i$

$$P_{i-1}'(\tau_i)=D_{i-1}^{+}+[(D_i^{-}-D_{i-1}^{+})/\Delta\tau_{i-1}][2\tau_i-\tau_{i-1}-\tau_{i-\frac{1}{2}}]$$

$$=D_{i-1}^{+}+[(D_i^{-}-D_{i-1}^{+})/\Delta\tau_{i-1}][\Delta\tau_{i-1}+\Delta\tau_{i-1}/2]$$

$$=D_{i-1}^{+}+[(D_i^{-}-D_{i-1}^{+})/\Delta\tau_{i-1}][3\tau_{i-1}/2]$$

$$=D_{i-1}^{+}+3(D_i^{-}-D_{i-1}^{+})/2$$

por tanto

2.12 $$P'_{i-1}(\tau_i)=(3D_i^- - D_{i-1}^+)/2$$

de modo que la condición de continuidad para la 1ª derivada de $p_i$ en $\tau_i$, $i=2,\dots,n-1$ implica que

2.13 $$P'_{i-1}(\tau_i)= P'_i(\tau_i)$$

por 2.10 y 2.12

$$(3D_i^- - D_{i-1}^+)/2 = (3D_i^+ - D_{i+1}^-)/2$$

$\therefore$

2.14 $$3D_i^- - D_{i-1}^+ = 3D_i^+ - D_{i+1}^-$$

por 2.5 y 2.6

$$3\,P_{i-1}[\tau_{i-\frac{1}{2}},\tau_i]-P_{i-1}[\tau_{i-1},\tau_{i-\frac{1}{2}}]=3P_i[\tau_i,\tau_{i+\frac{1}{2}}]-P_i[\tau_{i+\frac{1}{2}},\tau_i]$$

$\therefore$

$$3[f(\tau_i)-V_i]/(\Delta\tau_{i-1}/2)-[V_i-f(\tau_{i-1})]/(\Delta\tau_{i-1}/2)=3[V_{i+1}-f(\tau_i)]/(\Delta\tau_i/2)-[f(\tau_{i+1})-V_{i+1}]/(\Delta\tau_i/2)$$

$$3[f(\tau_i)-V_i]/\Delta\tau_{i-1}-[V_i-f(\tau_{i-1})]/\Delta\tau_{i-1}=3[V_{i+1}-f(\tau_i)]/\Delta\tau_i-[f(\tau_{i+1})-V_{i+1}]/\Delta\tau_i$$

simplificando obtenemos

2.15 $$4V_i/\Delta\tau_{i-1}+4V_{i+1}/\Delta\tau_i=(3f(\tau_i)+f(\tau_{i-1}))/\Delta\tau_{i-1}+(3f(\tau_i)+f(\tau_{i+1}))/\Delta\tau_i$$

que es un sistema de $n-2$ ecuaciones y $n-1$ incognitas $v_i$, $i=2,\ldots,n$, el cual se escribe como

2.16 $$4v_i/\Delta z_{i-1} + 4v_{i+1}/\Delta z_i = b_i \qquad i=2,\ldots,n-1$$

donde $b_i = (3f(z_i)+f(z_{i-1}))/\Delta z_{i-1} + (3f(z_i)+f(z_{i+1}))/\Delta z_i$

el sistema 2.16 tiene solución única si alguna de las incognitas, digamos $v_2$ puede ser dada por una condición adicional. Además como 2.16 puede expresarse en la forma recursiva

2.17 $$v_{i+1}=b_i[\Delta z_i/4] - v_i[\Delta z_i/\Delta z_{i-1}] \qquad i=2,\ldots,n-1$$

las incognitas restantes son deteminadas también.

Para entender más el grado de libertad disponible, se consideran dos splines parabólicos de interpolación $s$ y $\tilde{s}$ establecidos por 2.16, con los mismos datos pero con diferentes elecciones de $v_2$. Así la diferencia

2.18 $$s_d = s - \tilde{s}$$

es un spline parabólico en [a,b] que vale cero en sus puntos de quiebre y en a y b. De manera que de 2.17 resulta

2.19 $$\mathcal{A}_d(\tau_{i+\frac{1}{2}}) = -(\Delta\tau_i/\Delta\tau_{i-1})\,\mathcal{A}_d(\tau_{i-\frac{1}{2}}).$$

si $V_2$ es dado, entonces $i=1$, de modo que, de la definición 2.2 se tiene

2.20 $$V_2 = \mathcal{A}_d(\tau_{3/2})$$

y utilizando la formula de recurrencia 2.19

2.21 $$\mathcal{A}_d(\tau_{i+\frac{1}{2}}) = (-1)^{i-1}\mathcal{A}_d(\tau_{3/2})\,(\Delta\tau_i/\Delta\tau_1) \qquad i=2,\ldots,n-1$$

Ahora bien si todos los datos estan uniformemente espaciados, i.e..

$$h=(b-a)/n-1$$

2.22 $$\text{y} \qquad \tau_i = a+(i-1)h \qquad i=1,\ldots,n.$$

los splines interpolantes quedan expresados en la forma de newtón

2.23 $$s(x) = P_i(z_i) + (x-z_i)D_i^+ + (x-z_i)(x-z_{i+\frac{1}{2}})(D_{i+1}^- - D_i^+)/\Delta z_i$$

$$= P_i(z_i) + (x-z_i)[(V_{i+1} - s(z_i))/(h/2)] + (x-z_i)(x-z_{i+\frac{1}{2}})[(s(z_{i+1}) - - V_{i+1} - V_{i+1} + s(z_i))/(h/2)]$$

$$\therefore \quad s(x) = P_i(z_i) + (2/h)(x-z_i)V_{i+1} - (2/h)(x-z_i)s(z_i) + (2\alpha/h^2)s(z_{i+1}) - -(4\alpha/h^2)V_{i+1} + (2\alpha/h^2)s(z_i)$$

y

$$\tilde{s}(x) = \tilde{P}_i(z_i) + (2/h)(x-z_i)\tilde{V}_{i+1} - (2/h)(x-z_i)\tilde{s}(z_i) + (2\alpha/h^2)\tilde{s}(z_{i+1}) - -(4\alpha/h^2)V_{i+1} + (2\alpha/h^2)\tilde{s}(z_i)$$

tomando su diferencia

2.24 $$s(x) - \tilde{s}(x) = 2(x-z_i)[V_{i+1} - \tilde{V}_{i+1}]/h - 4\alpha[V_{i+1} - \tilde{V}_{i+1}]/h^2$$

$$= [V_{i+1} - \tilde{V}_{i+1}][2(x-z_i)/h - 4(x-z_i)(x-z_{i+\frac{1}{2}})/h^2]$$

$$= [V_{i+1} - \tilde{V}_{i+1}]\,2(x-z_i)[1 - 2(x-z_{i+\frac{1}{2}})/h]/h$$

$$= [V_{i+1} - \tilde{V}_{i+1}]\,2(x-z_i)[1 - 2(x-z_i-h/2)/h]/h$$

$$= [V_{i+1} - \tilde{V}_{i+1}]\,2(x-z_i)[1 - 2(x-z_i)/h + h/h]/h$$

$$= [s(z_{3/2}) - \tilde{s}(z_{3/2})](-1)^{(i-1)}\,2(x-z_i)[2 - 2(x-z_i)/h]/h$$

2.25 $$\therefore \quad s_d(x) = [s(z_{3/2}) - \tilde{s}(z_{3/2})](-1)^{(i-1)}\,P((x-z_i)/h)$$

donde

$$P((x-z_i)/h) = 4(x-z_i)[1 - (x-z_i)/h]/h$$

tiene características muy interesantes como se observa en el siguiente

Lema 2.1.- Sea $P$ un polinomio de grado 2 con ceros reales distintos $\alpha$ y $\beta$.
Entonces

$$P(z) = P((\alpha+\beta)/2)4t(1-t)$$

donde $t=(z-\alpha)/(\beta-\alpha)$.

Demostración

Sea $P(z)=A(z-\alpha)(z-\beta)$ y $h=\beta-\alpha$

$$P((\alpha+\beta)/2) = A(h/2)(-h/2)$$

$$= -Ah^2/4$$

$$\therefore \qquad A = -4P((\alpha+\beta)/2)/h^2$$

$$\Rightarrow \qquad P(z) = P((\alpha+\beta)/2)[-4ht(h(t-1))/h]$$

$$= P((\alpha+\beta)/2)4t(1-t) \qquad t=(z-\alpha)/h$$

$\blacksquare$

Una observación importante es que sí la diferencia entre dos polinomios cuadráticos es un polinomio con dos raices reales y distintas $\alpha_0$ y $\alpha_1$ entonces

$$d(z) = d(z_{1/2})\,4t(1-t) \qquad t = (x-\alpha_0)/(\alpha_1-\alpha_0)$$

es un polinomio cuadrático con su maximo en el punto medio. Ver fig. 2.2.

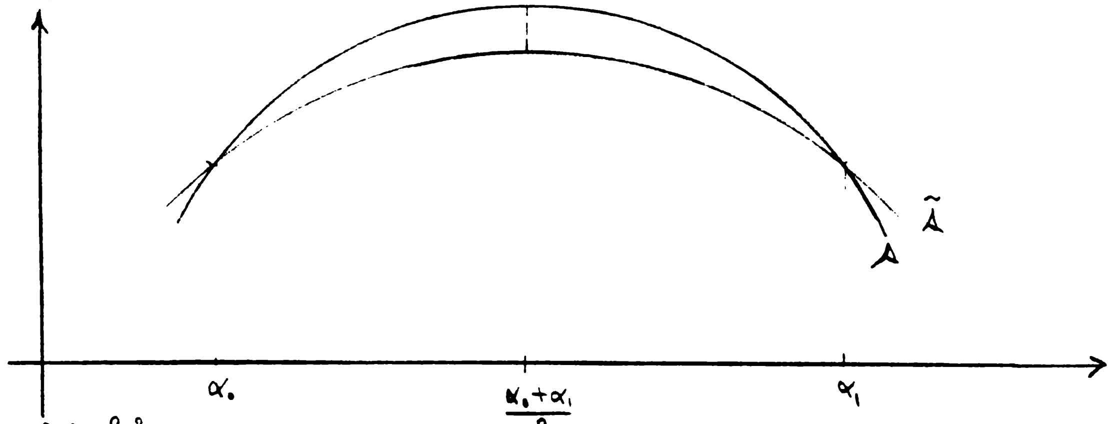



fig. 2.2

Si aplicamos lo anterior a nuestro caso, esto muestra que la elección de $V_2$ afecta al interpolante $\lambda$ mas o menos igualmente en todo el intervalo. Por lo tanto si $V_2$ está basado en un dato local, digamos como el valor de $f$ en un punto adicional, ésta elección afectará globalmente al interpolante $\lambda$.

Ver fig. 2.3

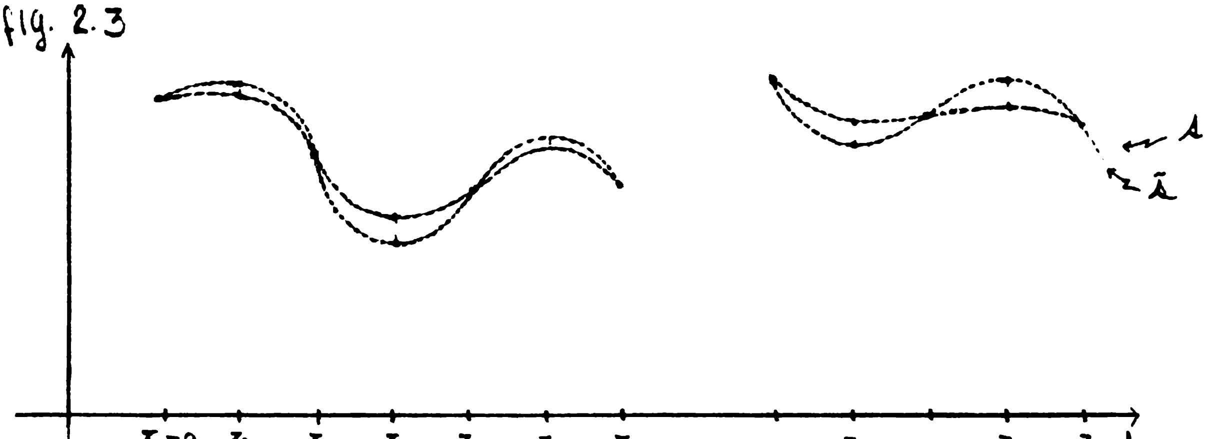



fig. 2.3

INTERPOLACION EN PUNTOS QUE NO SON DE QUIEBRE.

Ahora se analiza una forma de interpolación que evade los problemas que se presentaron en el método anterior.

Sean $\{(\tau_i, f(\tau_i))\}_{i=1,\ldots,n}$, datos conocidos y sea $\mathbb{P}_n(\xi_i)$ una partición tal que

2.26 $\xi_1 \leq a = \tau_1 < \xi_2 < \tau_2 < \xi_3 < \cdot \cdot \cdot < \tau_{n-1} < \xi_n < \tau_n = b \leq \xi_{n+1}$

de modo que

$$s(x) = P_i(x) \qquad \xi_i \leq x \leq \xi_{i+1}$$

para algún polinomio cuadrático $P_i$, $i=1,\ldots,n-1$, donde los puntos $\xi_i$ son los puntos de quiebre, elegidos de la manera indicada en 2.26 y $\tau_i$ son los datos conocidos.

Una forma de elegir los puntos de quiebre, es, cómo los puntos medios de los datos dados, i.e.

2.27 $\xi_i = \tau_{i-1/2} = (\tau_i + \tau_{i+1})/2 \qquad i=1,\ldots,n$

en cada pedazo de polinomio se impone una condición de interpolación, de donde

2.28 $$f(\tau_i)=P_i(\tau_i) \qquad i=1,\dots,n-1$$

por lo tanto hay libertad de elegir dos condiciones adicionales por cada polinomio $P_i$ $i=1,\dots,n-1$. se eligen tales condiciones en la siguiente forma:

2.29 $$\begin{aligned} P_i(\xi_i)&=V_i \\ P_i(\xi_{i+1})&=V_{i+1} \end{aligned} \qquad i=1,\dots,n$$

que aseguran la continuidad del interpolante $\Delta$.

Se considera primero el caso $\xi_1 < a$ y $b<\xi_{n+1}$. Si se eligen los parámetros libres $V_1, V_2, \dots, V_{n+1}$ por interpolación, es decir $V_i=f(\xi_i)\ \forall i$, entonces se está en el esquema de la regla de simpsón. En vez de hacerlo de esa manera, se eligen $V_2,\dots,V_n$ tomando nuevamente $\Delta$ como un spline parabólico, i.e. de tal manera que $\Delta'$ sea continua. Por lo tanto, el objetivo en lo que sigue, es determinar los parámetros $V_i$, $i=2,\dots,n$.

La formula de Newton es expresada como

sigue

2.30 $$P_i(x) = P_i(\xi_i) + (x-\xi_i)P_i[\xi_i,\tau_i] + (x-\xi_i)(x-\tau_i)P_i[\xi_i,\tau_i,\xi_{i+1}]$$

de 2.28 y 2.29 se obtiene la tabla de diferencias divididas para $P_i$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\xi_i$ | $V_i$ | | |
| | | $P_i[\xi_i,\tau_i]$ | |
| $\tau_i$ | $f(\tau_i)$ | | $(P_i[\tau_i,\xi_{i+1}] - P_i[\xi_i,\tau_i])/\Delta\tau_i$ |
| | | $P_i[\tau_i,\xi_{i+1}]$ | |
| $\xi_{i+1}$ | $V_{i+1}$ | | |

abreviando

$$D_i^+ = P_i[\xi_i,\tau_i] = (f(\tau_i) - V_i)/(\tau_i - \xi_i)$$

2.31

y $$D_{i+1}^- = P_i[\tau_i,\xi_{i+1}] = (V_{i+1} - f(\tau_i))/(\xi_{i+1} - \tau_i)$$

reescribiendo 2.30 en terminos de 2.31

$$P_i(x) = V_i + (x-\xi_i)D_i^+ + (x-\xi_i)(x-\tau_i)(D_{i+1}^- - D_i^+)/\Delta\xi_i$$

cuya derivada es

$$P_i'(x) = D_i^+ + [(D_{i+1}^- - D_i^+)/\Delta\xi_i][(x-\xi_i)+(x-\tau_i)]$$

$$= D_i^+ + [(D_{i+1}^- - D_i^+)/\Delta\xi_i][2x-\xi_i-\tau_i]$$

$\therefore$

2.32 $$P_i'(\xi_i) = D_i^+ + [(D_{i+1}^- - D_i^+)/\Delta\xi_i][\xi_i-\tau_i]$$

analogamente

$$P_{i-1}(x) = Y_{i-1} + (x-\xi_{i-1})D_{i-1}^+ + (x-\xi_{i-1})(x-\tau_{i-1})[D_i^- - D_{i-1}^+]/\Delta\xi_{i-1}$$

y

$$P_{i-1}'(x) = D_{i-1}^+ + [(D_i^- - D_{i-1}^+)/\Delta\xi_{i-1}][2x-\xi_{i-1}-\tau_{i-1}]$$

$\therefore$ $$P_{i-1}'(\xi_i) = D_{i-1}^+ + [(D_i^- - D_{i-1}^+)/\Delta\xi_{i-1}][2\xi_i-\xi_{i-1}-\tau_{i-1}]$$

$$= D_{i-1}^+ + [(\ _i^- - \ _{i-1}^+)/\Delta\xi_{i-1}](\xi_i-\xi_{i-1}) + [(D_i^- - D_{i-1}^+)/\Delta\xi_{i-1}](\xi_i-\tau_{i-1})$$

$$= D_{i-1}^+ + D_i^-(\xi_i-\xi_{i-1})/\Delta\xi_{i-1} - D_{i-1}^+(\xi_i-\xi_{i-1})/\Delta\xi_{i-1} + D_i^-(\xi_i-\tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1} -$$
$$- D_{i-1}^+(\xi_i-\tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1}$$

$$= D_{i-1}^+[1-(\xi_i-\xi_{i-1})/\Delta\xi_{i-1} - (\xi_i-\tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1}] + D_i^-\,\Delta\xi_i/\Delta\xi_i +$$
$$+ D_i^-(\xi_i-\tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1}$$

$\therefore$

2.33 $$P_{i-1}'(\xi_i) = D_i^- + [D_i^- - D_{i-1}^+](\xi - \tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1}$$

por la condición de continuidad se debe tener

$$P_i'(\xi_i) = P_{i-1}'(\xi_i) \qquad i = 2, \ldots, n-1$$

de 2.32 y 2.33

$$D_i^+ + [(D_{i+1}^- - D_i^+)/\Delta\xi_i](\xi_i - \tau_i) = D_i^- + [(D_i^- - D_{i-1}^+)/\Delta\xi_{i-1}](\xi_i - \tau_{i-1})$$

$$-D_i^+ - (D_{i+1}^- - D_i^+)(\xi_i - \tau_i)/\Delta\xi_i + D_i^- + (D_i^- - D_{i-1}^+)(\xi_i - \tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1} = 0$$

$$D_i^+[1 - (\xi_i - \tau_i)/\Delta\xi_i] - D_i^-[1 - (\xi_i - \tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1}] + D_{i+1}^-(\xi_i - \tau_i)/\Delta\xi_i + D_{i-1}^+(\xi_i - \tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1} = 0$$

$$(f(\tau_i) - V_i)[1 - (\xi_i - \tau_i)/\Delta\xi_i]/(\tau_i - \xi_i) - (V_i - f(\tau_{i-1}))[1 - (\xi_i - \tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1}]/(\xi_i - \tau_{i-1}) +$$
$$+ (V_{i+1} - f(\tau_i))[(\xi_i - \tau_i)/\Delta\xi_i]/(\xi_{i+1} - \tau_i) + (f(\tau_{i-1}) - V_{i-1})[(\xi_i - \tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1}]/(\tau_{i-1} - \xi_{i-1}) = 0$$

haciendo $\alpha_i = \tau_i - \xi_i$ y $\beta_i = \xi_i - \tau_{i-1}$ se tiene

$$f(\tau_i)[1 + \alpha_i/\Delta\xi_i]/\alpha_i - V_i[1 + \alpha_i/\Delta\xi_i]/\alpha_i - V_i[1 + \beta_i/\Delta\xi_{i-1}]/\beta_i + f(\tau_{i-1})[1 + \beta_i/\Delta\xi_{i-1}]/\beta_i +$$
$$+ V_{i+1}[(\xi_i - \tau_i)/\Delta\xi_i]/\beta_{i+1} - f(\tau_i)[(\xi_i - \tau_i)/\Delta\xi_i]/\beta_{i+1} + f(\tau_{i-1})[(\xi_i - \tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1}]/\alpha_{i-1} - V_{i-1}[(\xi_i - \tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1}]/$$
$$/\alpha_{i-1} = 0$$

$$-V_{i-1}[(\xi_i - \tau_{i-1})/\Delta\xi_{i-1}]/\alpha_{i-1} - V_i[1/\alpha_i + 1/\Delta\xi_i + 1/\beta_i + 1/\Delta\xi_{i-1}] + V_{i+1}[(\xi_i - \tau_i)/\Delta\xi_i]/\beta_{i+1} =$$
$$-f(\tau_i)[1 + \alpha_i/\Delta\xi_i]/\alpha_i + f(\tau_i)[(\xi_i - \tau_i)/\Delta\xi_i]/\beta_{i+1} - f(\tau_{i-1})[(1 + \beta_i/\Delta\xi_{i-1}]/\beta_i -$$
$$- V_{i+1}[(\xi_i - \tau_i)/\Delta\xi_{i-1}]/\alpha_{i-1}$$

$\therefore$

$$-V_{i-1}[1/(\tau_{i-1} - \xi_{i-1}) - 1/\Delta\xi_{i-1}] - V_i[1/\alpha_i + 1/\beta_i + 1/\Delta\xi_i + 1/\Delta\xi_{i-1}] - V_{i+1}[1/(\xi_{i+1} - \tau_i) - 1/\Delta\xi_i] =$$

$$= -f(\tau_i)[1/\alpha_i + 1/\Delta\xi_i] - f(\tau_i)[1/(\xi_{i+1}-\tau_i) - 1/\Delta\xi_i] - f(\tau_{i-1})[1/\beta_i + 1/\Delta\xi_{i-1}] -$$
$$- f(\tau_{i-1})[1/(\tau_{i-1}-\xi_{i-1}) - 1/\Delta\xi_{i-1}]$$

de aqui se obtiene

$$[1/\alpha_{i-1} - 1/\Delta\xi_{i-1}]V_{i-1} + [1/\alpha_i + 1/\beta_i + 1/\Delta\xi_i + 1/\Delta\xi_{i-1}]V_i + [1/\beta_{i+1} - 1/\Delta\xi_i]V_{i+1}$$

$$= f(\tau_i)[1/\alpha_i + 1/\Delta\xi_i + 1/\beta_{i+1} - 1/\Delta\xi_i] + f(\tau_{i-1})[1/\beta_i + 1/\Delta\xi_{i-1} + 1/\alpha_{i-1} - 1/\Delta\xi_{i-1}]$$

y por ultimó el sistema resultante es

2.34 $$[1/\alpha_{i-1} - 1/\Delta\xi_{i-1}]V_{i-1} + [1/\alpha_i + 1/\beta_i + 1/\Delta\xi_i + 1/\Delta\xi_{i-1}]V_i + [1/\beta_{i+1} - 1/\Delta\xi_i]V_{i+1}$$

$$= f(\tau_i)[1/\alpha_i + 1/\beta_{i+1}] + f(\tau_{i-1})[1/\beta_i + 1/\alpha_{i-1}] \quad . \quad i=2,\dots,n$$

Por la forma de los coeficientes en el sistema 2.34 puede notarse que el sistema es estrictamente diagonal dominante y por tanto una vez que se han determinado los parámetros adicionales $V_1$ y $V_{n+1}$ (pues el sistema consta de n-1 ecuaciones y n+1 incognitas), el sistema puede ser resuelto por eliminación gausiana sin pivoteo.

Para demostrar el contraste prometido con el anterior esquema de interpolación spline parabólica en puntos de quiebre, se considera el efecto de una elección particular para $v_1$ y $v_{n+1}$ en el interpolante obtenido de 2.34.

Nuevamente se toman los datos igualmente espaciados y se eligen como puntos de quiebre los puntos medios entre éstos datos. Ver fig. 2.3.

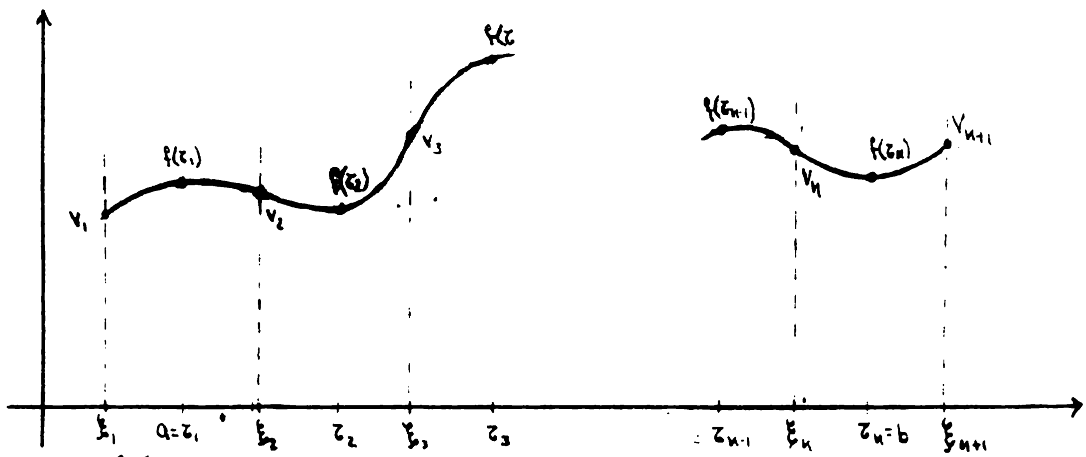



fig. 2.4

En esta figura se muestran los datos $(z_i, f(z_i))\ i=1,\ldots,n$. El spline cuadrático interpolante tiene sus puntos de unión en $(\xi_i, v_i)$, $i=1,\ldots,n+1$.

$$z_i = a+(i-1)h \qquad i=1,\ldots,n$$

2.35 $$\qquad\qquad\qquad\qquad i=1,\ldots,n+1$$

$$\& \qquad \xi_i = a+(i-3/2)h$$

donde $h=(b-a)/(n-1)$.

posteriormente se verá que el sistema 2.34 tiene la forma de las ecuaciones en diferencias, por lo que se aplicaran los mismos criterios para resolver el sistema.

En el capítulo I se determinó que la dimensión del espacio de splines cuadráticos $S_{2,1}(\mathbb{P}_n(\tau))$ es $n+1$, de éste espacio se toma el subespacio

$$2.36 \quad V=\{s\in S_{2,1}(\mathbb{P}_n(\tau)) \mid s(\tau_1)=s(\tau_2)=\cdots=s(\tau_{n-1})=0\}$$

con dimensión 2.

Para saber como son los elementos del subespacio 2.36 se busca una base de éste.

Evaluando el sistema 2.34 en $\tau_i$, $i=2,\ldots,n$ se obtiene, para $i=2$

$$2.37 \quad [1/\alpha_1-1/\Delta\xi_1]V_1+[1/\alpha_2+1/\beta_2+1/\Delta\xi_2+1/\Delta\xi_1]V_2+[1/\beta_3-1/\Delta\xi_2]V_3$$

$$=f(\tau_2)[1/\alpha_2+1/\beta_3]+f(\tau_1)[1/\beta_2+1/\alpha_1]$$

$$=0$$

puesto que

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= z_1 - \xi_1\\ &= a+(1-1)h-[a+(1-3/2)h]\\ &= -h/2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Delta\xi_1 &= \xi_2 - \xi_1\\ &= a+(2-3/2)h-[a+(1-3/2)h]\\ &= h\end{aligned}$$

por tanto el coeficiente de $V_1$ es

$$\begin{aligned}1/\alpha_1 - 1/\Delta\xi_1 &= 2/h - 1/h\\ &= 1/h\end{aligned}$$

el cálculo del coeficiente de $V_2$ es

$$\alpha_2 = z_2 - \xi_2 = a+(2-1)h-[a+(2-3/2)h] = h - h/2 = h/2$$

$$\beta_2 = \xi_2 - z_1 = a+(2-3/2)h-[a+(1-1)h] = a+h/2-a = h/2$$

$$\Delta\xi_2 = \xi_3 - \xi_2 = a+(3-3/2)h-[a+(2-3/2)h] = h3/2 - h/2 = h$$

y $\Delta\xi_1 = h$

$\therefore$

$$1/\alpha_2 + 1/\beta_2 + 1/\Delta\xi_2 + 1/\Delta\xi_1 = 2/h + 2/h + 1/h + 1/h$$

$$= 6/h$$

el coeficiente de $V_3$

$$\begin{aligned}\beta_3 &= \xi_3 - \tau_2 \\ &= a + (3 - 3/2)h - [a + (2-1)h] \\ &= h/2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\xi_2 &= \xi_3 - \xi_2 \\ &= a + (3-3/2)h - [a + (2-3/2)h] \\ &= h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1/\beta_3 - 1/\Delta\xi_2 &= 2/h - 1/h \\ &= 1/h\end{aligned}$$

sustituyendo estos coeficientes en 2.37

$$V_1/h + 6V_2/h + V_3/h = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_1 + 6V_2 + V_3 = 0$$

analogamente se obtienen

$$V_2+6V_3+V_4=0$$

2.38
$$\vdots$$
$$V_{n-1}+6V_n+V_{n+1}=0$$

y por 2.36

$$f(z_1)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad P_1(z_1)=0$$
$$f(z_n)=0 \qquad\qquad P_n(z_n)=0$$

del sistema 2.38 se obtiene la función que en ecuaciones en diferencias es llamada la ecuación característica. En este caso es $\lambda^2+6\lambda+1=0$.

Primero queremos que

$$V_1=1$$

ya que la solución general es

2.39 $$V_k=c_1\lambda^k+c_2/\lambda^k$$

donde $\lambda$ es la raiz mas grande de $\lambda^2+6\lambda+1=0$. Si elegimos $c_1=0$ y $c_2=\lambda$, se obtiene la solución

$$V_k^{(1)}=\lambda/\lambda^k=1/\lambda^{k-1}$$

para ésta solución encontramos el spline interpolante asociado como sigue:

Dado que el interpolante evaluado en $\xi_K$ debe ser $V_K$, entonces

$$P_K(\xi_K) = 1/\lambda^{K-1} \qquad K=1,\ldots,n-1.$$

y por 2.36

2.40 $$P_K(\tau_K) = 0 = P_K(\xi_K + h/2)$$

y $\qquad K=1,\ldots,n-1$

2.41 $$P_K(\xi_{K+1}) = 1/\lambda^K = P_K(\xi_K + h)$$

además la evaluación del polinomio

2.42 $$P_K(x) = \alpha_K + \beta_K(x-\xi_K) + \gamma_K(x-\xi_K)^2$$

en $\xi_K$, $\xi_K + h/2$ y $\xi_{K+1}$ es

2.43 $$P_K(\xi_K) = \alpha_K = 1/\lambda^{K-1};$$

2.44 $$P_K(\xi_K + h/2) = 1/\lambda^{K-1} + \beta_K h/2 + \gamma_K h^2/4$$
$$= 0\ ;$$

y

2.45 $$P_K(\xi_{K+1}) = 1/\lambda^{K-1} + \beta_K h + \gamma_K h^2 =$$

$$= 1/\lambda^k$$

despejando $\beta_k h$ y $\gamma_k h$ de 2.44 y 2.45

2.46 $$2\beta_k h + \gamma_k h^2 = -4/\lambda^{k-1}$$

2.47 $$\beta_k h + \gamma_k h^2 = 1/\lambda^k - 1/\lambda^{k-1}$$

restando 2.47 de 2.46

$$\beta_k h = -3/\lambda^{k-1} - 1/\lambda^k$$

$$= -(3\lambda+1)/\lambda^k$$

substituyendo $\beta_k h$ en 2.47

$$\gamma_k h^2 = 1/\lambda^k - 1/\lambda^{k-1} + 3/\lambda^{k-1} + 1/\lambda^k$$

$$= 2/\lambda^k + 2/\lambda^{k-1}$$

$$= (2+2\lambda)/\lambda^k$$

por tanto sustituyendo $\alpha_k$, $\beta_k h$ y $\gamma_k h^2$ en el polinomio 2.42, se obtienen los polinomios interpolantes

2.48 $$P_k(x) = \lambda/\lambda^k - (3\lambda+1)(x-\xi_k)/\lambda^k h + (2+2\lambda)(x-\xi_k)^2/\lambda^k h^2$$

De manera que el spline cuadrático de interpolación está constituido por los polinomios $P_k$, dados por 2.48 y se denotará por

2.49 $$\Lambda_1(x) = P_k(x)\ ; \quad \xi_k \leq x \leq \xi_{k+1},\ k=1,\dots,n\ .$$

Ahora, en la solución general 2.39 tomando $k=n+1$ se tiene

2.50 $$V_{n+1} = C_1\lambda^{n+1} + C_2/\lambda^{n+1}$$

si ahora se quiere que

$$V_{n+1} = 1$$

se puede elegir $C_1 = 1/\lambda^{n+1}$ & $C_2 = 0$, que sustituidos en 2.39 dan

$$V_k^{(2)} = \lambda^k/\lambda^{n+1} = 1/\lambda^{n-k+1} \qquad k=2,\dots,n+1$$

para esta segunda solución se determina su spline de interpolación como sigue:

por 2.36

2.51 $$\tilde{P}_k(z_k) = 0 \qquad k=1,\dots,n.$$
$$= P_k(\xi_{k+1} - h/2)$$

2.52 $$\& \quad \tilde{P}_k(\xi_{k+1} - h) = 1/\lambda^{n+1-k} \qquad k=1,\dots,n.$$

evaluando el polinomio

2.53 $$\tilde{P}_k(x) = \alpha_k + \beta_k(\xi_{k+1} - x) + \gamma_k(\xi_{k+1} - x)^2 \qquad k=1,\dots,n.$$

en $\xi_k$, $\xi_{k+1} - h/2$ y $\xi_{k+1} - h$ se tiene

2.54 $$\tilde{P}_k(\xi_k) = \alpha_k = 1/\lambda^{n-k} \qquad k=1,\dots,n.$$

2.55 $$\tilde{P}_k(\xi_{k+1} - h/2) = \alpha_k + \beta_k(\xi_{k+1} - \xi_{k+1} + h/2) + \gamma_k(\xi_{k+1} - \xi_{k+1} + h)^2 \qquad k=1,\dots,n.$$
$$= 1/\lambda^{n-k} + \beta_k h/2 + \gamma_k h^2/4$$
$$= 0$$

2.56 $$\tilde{P}_k(\xi_{k+1} - h) = \alpha_k + \beta_k(\xi_{k+1} - \xi_{k+1} + h) + \gamma_k(\xi_{k+1} - \xi_{k+1} + h)^2 =$$

$$= 1/\lambda^{n+1-k} \qquad k=1,\dots,n$$

de 2.54 y 2.55

2.56 $$2\beta_k h + \gamma_k h^2 = -1/\lambda^{n-k}$$

2.57 $$\beta_k h + \gamma_k h^2 = 1/\lambda^{n+1-k} - 1/\lambda^{n-k}$$

restando 2.57 de 2.56

$$\beta_k h = -3/\lambda^{n-k} - 1/\lambda^{n+1-k}$$
$$= -(3\lambda+1)/\lambda^{n+1-k}$$

sustituyendo en 2.57

$$\gamma_k h^2 = 1/\lambda^{n+1-k} - 1/\lambda^{n-k} + (3\lambda+1)/\lambda^{n+1-k}$$
$$= (1-\lambda+3\lambda+1)/\lambda^{n+1-k}$$
$$= (2\lambda+2)/\lambda^{n+1-k}$$

por tanto sustituyendo $\alpha_k$, $\beta_k h$ y $\gamma_k h^2$ en 2.53 se obtienen los polinomios de interpolación

2.58 $$\tilde{P}_k(x) = \lambda/\lambda^{n+1-k} - (3\lambda+1)(\xi_{k+1}-x)/\lambda^{n+1-k}h + (2\lambda+2)(\xi_{k+1}-x)^2/\lambda^{n+1-k}h^2$$

para el caso $v_{n+1}=1$, y son los que constituyen el spline cuadrático de interpolación

2.59 $$s_{n+1}(x) = \tilde{P}_k(x); \quad \xi_k \le x \le \xi_{k+1},\ k=1,\dots,n.$$

Como $|\lambda|$ es la solución mas grande de la ecuación característica $\lambda^2+6\lambda+1=0$ i.e. $|\lambda|=|-5.8|$, el spline cuadrático de interpolación decae exponencialmente conforme $x$ crece. (fig. 2.5)

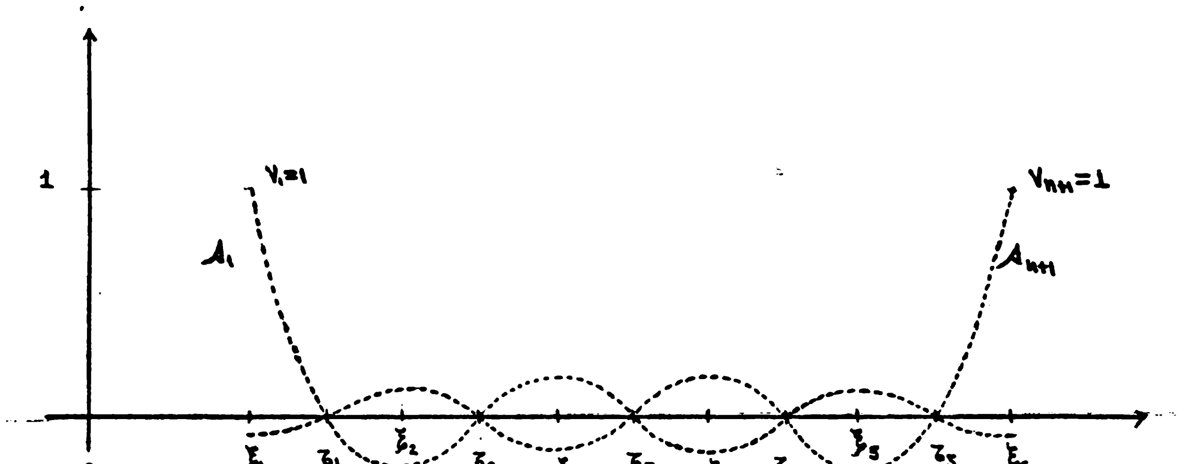



fig. 25

2.60 REFORMULACION

Hasta el momento se encontraron los elementos para una base del subespacio 2.36, ellos son:

$$A_1(x)=\lambda/\lambda^k-(3\lambda+1)(x-\xi_k)/\lambda^k h+(2+2\lambda)(x-\xi_k)^2/\lambda^k h^2$$

&

$$A_{n+1}(x)=\lambda/\lambda^{n+1-k}-(3\lambda+1)(\xi_{k+1}-x)/\lambda^{n+1-k}h+(2+2\lambda)(\xi_{k+1}-x)^2/\lambda^{n+1-k}h^2.$$

Ejemplo 1: Obtener los splines cuadráticos interpolantes a partir de los elementos de la base del subespacio 2.36. Para $n=5$, $\mathbb{P}_n(z)=\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ y supongase que $\xi_1 < z_1 = 0$, $1 = z_5 < \xi_6$, son dados como en la tabla 1.

Sea $V_k = 1/\lambda^{k-1}$ donde $\lambda$ es la raiz mas grande de $\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$. i.e. $\lambda = -3-\sqrt{8} \simeq -5.8$ sustituyendo $\lambda$ en el polinomio interpolante 2.18 con $h = 1/4$ y demás datos dados se obtiene

| $\xi_1$ | $z_1$ | $\xi_2$ | $z_2$ | $\xi_3$ | $z_3$ | $\xi_4$ | $z_4$ | $\xi_5$ | $z_5$ | $\xi_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $3/8$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{8}$ | $3/4$ | $\frac{7}{8}$ | 1 | $1+\frac{1}{8}$ |

tabla 1.

para $k=1$

$$P_1(x) = 1 - [3(-5.8)+1][x+1/8]/(-5.8)(1/4) + [2(-5.8)+2][x+1/8]^2/(-5.8)(1/4)$$

$$= 1 - 11.31(x + 1/8) + 26.18(x + 1/8)^2$$

$\therefore$ $$P_1(x) = 0 - 4.71x + 26.4x^2$$

para $k=2$

$$P_2(x) = -5.8/(-5.8)^2 - (3(-5.8)+1)(x-1/8)/(-5.8)^2(1/4) + (2(-5.8)+2)(x-1/8)^2/(-5.8)^2(1/16)$$

$$= -.17 + 1.95(x-1/8) - 4.56(x-1/8)^2$$

$\therefore$

$$P_2(x) = -.484 + 3.09x - 4.56x^2$$

para $k=3$

$$P_3(x) = -5.8/(-5.8)^3 - (3(-5.8)+1)(x-3/8)/(-5.8)^3(1/4) + (2(-5.8)+2)(x-3/8)^2/(-5.8)^3(1/16)$$

$\therefore$

$$P_3(x) = .265 - .926x + .787x^2$$

para $k=4$

$$P_4(x) = -5.8/(-5.8)^4 - (3(-5.8)+1)(x-5/8)/(-5.8)^4(1/4) + (2(-5.8)+2)(x-5.8)^2/(-5.8)^4(1/16)$$

$$= -.099 + .228x - .136x^2$$

para $k=5$

$$P_5(x) = -5.8/(-5.8)^5 - (3(-5.8)+1)(x-7/8)/(-5.8)^5(1/4) + (2(-5.8)+2)(x-7/8)^2/(-5.8)^5(1/16)$$

$\therefore$

$$P_5(x) = .027 - .050x + .023x^2$$

Ahora tomando $V_{n+1} = 1$ se obtiene el spline interpolante $A_{n+1}$ simétrico al anterior $A_1$ constituido por $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4$ y $\tilde{P}_5$.

Procedemos ahora a sustituir en **2.58**:

para $K=1$

$$\tilde{P}_1(x) = -5.8/(-5.8)^5 - (3(-5.8)+1)(1/8-x)/(-5.8)^5(1/4) + (2(-5.8)+2)(1/8-x)^2/(-5.8)^5(1/16)$$

$$= .0008 - .009(1/8-x) + .023(1/8-x)^2$$

$\therefore$

$$\tilde{P}_1(x) = .00003 + .00325x + .023x^2$$

para $K=2$

$$\tilde{P}_2(x) = -5.8/(-5.8)^4 - (3(-5.8)+1)(3/8-x)/(-5.8)^4(1/4) + (2(-5.8)+2)(3/8-x)^2/(-5.8)^4(1/16)$$

$$= -.005 + .058(3/8-x) - .136(3/8-x)^2$$

$\therefore$

$$\tilde{P}_2(x) = -.002 + .044x - .136x^2$$

para $K=3$

$$\tilde{P}_3(x) = -5.8/(-5.8)^3 - (3(-5.8)+1)(5/8-x)/(-5.8)^3(1/4) + (2(-5.8)+2)(5/8-x)^2/(-5.8)^3(1/16)$$

$$= .030 - .336(5/8-x) + .787(5/8-x)^2$$

$\therefore$

$$\tilde{P}_3(x) = .127 - .698x + .787x^2$$

para $k=4$

$$\tilde{P}_4(x) = -5.8/(-5.8)^2 - (3(-5.8)+1)(7/8-x)/(-5.8)^2(1/4) + (2(-5.8)+2)(7/8-x)^2/(-5.8)^2(1/16)$$

$$= -.172 + 1.95(7/8-x) - 4.56(7/8-x)^2$$

$\therefore$

$$\tilde{P}_4(x) = -1.956 + 6.03x - 4.56x^2$$

para $k=5$

$$\tilde{P}_5(x) = -5.8/-5.8 - (3(-5.8)+1)(9/8-x)/(-5.8)(1/4) + (2(-5.8)+2)(9/8-x)^2/(-5.8)(1/16)$$

$$= 1 - 11.31(9/8-x) + 26.48(9/8-x)^2$$

$\therefore$

$$\tilde{P}_5(x) = 21.79 - 48.27x + 26.48x^2$$

estos cinco polinomios integran el spline cuadrático $A_{n+1}$ para los cinco puntos dados.

Problema: Construir una base donde $V_1$ tenga cualquier valor, digamos 1/2 y $V_2$ tenga el valor 1. Analizar el comportamiento de los elementos de ésta base.

Como queremos que $V_1=1/2$ para $V_k$ dada en 2.39 que es la solución general, si elegimos $c_1=0$ y $c_2=\lambda/2$ se obtiene la solución

$$V_k^{(1)}=\lambda/2\lambda^k=1/2\lambda^{k-1}$$

para ésta solución determinamos el spline asociado en la siguiente forma: evaluando el polinomio 2.42 en $\xi_k$, $\xi_k+h/2$ y $\xi_k+h$ se tiene

① $$P_k(\xi_k)=\alpha_k$$
$$=1/2\lambda^{k-1}$$

② $$P_k(\xi_k+h/2)=1/2\lambda^{k-1}+\beta_k h/2+\gamma_k h^2/4$$
$$\therefore \quad =0$$

③ $$2\beta_k h+\gamma_k h^2=-4/2\lambda^{k-1}$$

④ $$\beta_k h+\gamma_k h^2=1/2\lambda^k-1/2\lambda^{k-1}=$$

$$= (1-\lambda)/2\lambda^k$$

restando ① de ②

$$\beta_k h = -1/2\lambda^{k-1} - (1-\lambda)/2\lambda^k$$
$$= (-1\lambda - 1 + \lambda)/2\lambda^k$$
$$= -(3\lambda+1)/2\lambda^k$$

sustituyendo en ①

$$\gamma_k h^2 = (1-\lambda)/2\lambda^k + (3\lambda+1)/2\lambda^k$$
$$= (2\lambda+2)/2\lambda^k$$

por tanto los polinomios interpolantes para éste valor de $V_1$ son

$$⑤ \quad P_k(x) = \lambda/2\lambda^k - (3\lambda+1)(x-\xi_k)/2\lambda^k h + (2\lambda+2)(x-\xi_k)^2/2\lambda^k h^2$$

$\xi_k \le x \le \xi_{k+1}$ ; $k = 1, \ldots, n.$

Para el caso $V_{n+1} = 1$ los polinomios interpolantes son los obtenidos en 2.58.

Sometiendo el ejemplo 1 a la base obtenida aqui, la única variante para los polinomios dados por ⑤, es que sus coefientes deben aparecer divididos entre 2, lo cual significa que su gráfica esta contraida hacia el eje $x$.

Como el segundo elemento de esta base es exatamente 2.58 entonces la variación que sufren los elementos de la base en $[a, b]$ sigue siendo mas sensible alrededor de los extremos, pues en la parte media aún habiendo contracción o elongación las gráficas no difieren demasiado como en los extremos.

En general si $\lambda$ y $\tilde{\lambda}$ son dos splines parabólicos interpolantes, obtenidos de 2.31 con los mismos datos pero con posiblemente diferentes valores para $V_1$ y $V_{n+1}$, entonces su diferencia es de la forma

$$\lambda-\tilde{\lambda}=\alpha\lambda_1+\beta\lambda_{n+1}$$

por ser $\lambda_1$ y $\lambda_{n+1}$ los elementos de la base, con $\alpha$ y $\beta$ satisfaciendo

$$\alpha \Lambda_1(\xi_1)+\beta\Lambda_{n+1}(\xi_1)=\delta V_1$$
$$=\Lambda(\xi_1)-\tilde{\Lambda}(\xi_1)$$

$$\alpha \Lambda_1(\xi_{n+1})+\beta\Lambda_{n+1}(\xi_{n+1})=\delta V_{n+1}$$
$$=\Lambda(\xi_{n+1})-\tilde{\Lambda}(\xi_{n+1}).$$

Como en la base formada por 2.48 y 2.58 se tomaron $V_1=V_{n+1}=1$ entonces

$$\Lambda_1(\xi_1)=\Lambda_{n+1}(\xi_{n+1})=1$$

&

$$\Lambda_{n+1}(\xi_1)=\Lambda_1(\xi_{n+1})=1/\lambda^{n+1}$$

de donde $\alpha=\delta V_1$ y $\beta=\delta V_{n+1}$. Esto muestra que la elección de $V_1$ y $V_{n+1}$ solamente afecta al interpolante $\Lambda$ cerca de a y b, respectivamente. Por lo tanto tiene sentido elegir esos parámetros de consideraciones locales.

Típicamente, uno puede elegir $V_1$ como el valor de f en $\xi_1$, aún cuando $\xi_1$ se aproxima al extremo $a=\tau_1$, en este caso un punto extremo és interpolado por $f$ en valor y pendiente en $a = z_1$.

## III HISTOSPLINE PARABOLICOS

Una de las aplicaciones de los splines parabólicos se da en el siguiente problema: un histograma es la representación gráfica de un fenómeno particular por medio de barras, sin embargo en el presente capítulo se verá como construir un spline parabólico, de modo que sea una representación alisada del histograma.

Sean $\mathbb{P}_n(\tau)$ una partición dada en la siguiente forma

$$0=\tau_1<\tau_2<\cdot \quad \cdot \quad \cdot<\tau_n<\tau_{n+1}=1$$

y $h_i$ la i-esima altura del i-esimo rectangulo; Ver fig. 3.1. Así pues, explicitamente el problema es: Dada la partición $\mathbb{P}_n$ y el área $H_i$ del i-esimo rectangulo $i=1,\ldots,n.$ se requiere determinar una función spline parabólica $s$ tal que

3.1] $s$ es de clase $C^1$ en $I$, y

3.2] $$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} s(\tau)\, d\tau = H_i , \quad i=1,\dots,n .$$

Para resolver éste problema faltan las condiciones en la frontera para $s$, las cuales pueden ser de tres típos diferentes y esas condiciones son

3.3] $s(0)=0$ , $s(1)=0$. El histospline dado por estas condiciones es llamado $h_1$.

3.4] $s'(0)=0$ , $s'(1)=0$. Estas condiciones generan el histospline $h_2$.

3.5] $s(0)=s(1)$ & $s'(0)=s'(1)$. Con estas condiciones se genera el histospline periódico $h_3$.

Una primera forma de determinar los histosplines es tomando la representación de Newtón para los polinomios cuadráticos, es decir

$$s(\tau)=f[\tau_i] + (\tau-\tau_i)f[\tau_i,\tau_{i+1}] + (\tau-\tau_i)^2 f[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1}] , \quad i=1,\dots,n$$

el cual se escribe como

3.6] $$s(\tau) = \alpha_i + (\tau-\tau_i)\,\beta_i + (\tau-\tau_i)^2\gamma_i \qquad i=1,\dots,n.$$

para $\alpha_i = f[\tau_i]$ , $\beta_i = f[\tau_i,\tau_{i+1}]$ , $\gamma_i = f[\tau_i,\tau_i,\tau_{i+1}]$ . Se generan los sistemas resultantes, aplicando las condiciones especificadas a 3.6 y se integran en uno sólo. Se procede de igual manera para los

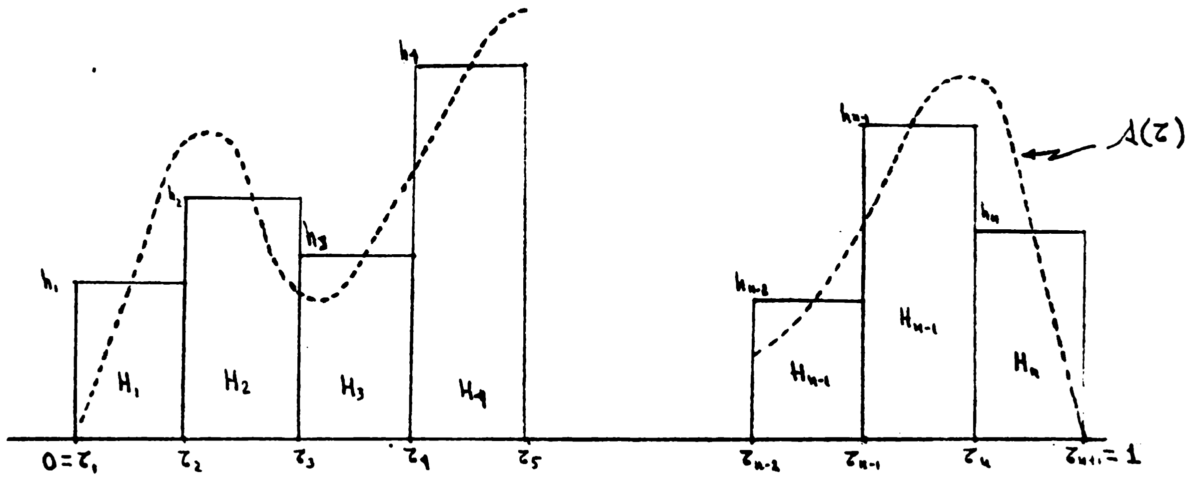



fig. 3.1 Histograma dado por $\pi_n$ y $h_i$, $i=1,\dots,n$. $H_i$ es el área del i-esimo rectangulo. $\Delta(\tau)$ es el spline buscado.

tres histosplines. Así pues para el primer problema (i.e con las condiciones 3.1, 3.2 y 3.3), tomando la integral de 3.6 en $I_i=[\tau_i,\tau_{i+1}]$ , $i=1,\dots,n$. Se obtiene

3.7 $$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Delta(\tau)d\tau = \alpha_i[\tau_{i+1}-\tau_i] + \beta_i[\tau_{i+1}^2-2\tau_{i+1}\tau_i+\tau_i^2]/2 + \gamma_i[\tau_{i+1}^3-3\tau_{i+1}^2\tau_i+3\tau_i^2\tau_i-\tau_i^3]/3$$

$$= \alpha_i\Delta\tau_i + \beta_i\Delta\tau_i^2/2 + \gamma_i\Delta\tau_i^3/3$$

donde por la condición 3.2 se debe tener

3.8 $$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Delta(\tau)d\tau = h_i\Delta\tau_i$$

por lo tanto de 3.7 y 3.8

3.9 $$\alpha_i + \beta_i \Delta\tau_i/2 + \gamma_i \Delta\tau_i^2/3 = h_i \qquad i=1,\ldots,n$$

Ahora considerando la condición de continuidad de $s$ en $\tau_2,\ldots,\tau_n$, y por 3.6 se obtiene el sistema

3.10 $$\begin{aligned} &\alpha_1 + \beta_1 \Delta\tau_1 + \gamma_1 \Delta\tau_1^2 - \alpha_2 = 0 \\ &\alpha_2 + \beta_2 \Delta\tau_2 + \gamma_2 \Delta\tau_2^2 - \alpha_3 = 0 \\ &\vdots \\ &\alpha_n + \beta_n \Delta\tau_n + \gamma_n \Delta\tau_n^2 - \alpha_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Derivando 3.6 y aplicando la condición de continuidad de $s'$ en $\tau_1,\ldots,\tau_n$ resulta

3.11 $$\begin{aligned} &\beta_1 + 2\gamma_1 \Delta\tau_1 - \beta_2 = 0 \\ &\beta_2 + 2\gamma_2 \Delta\tau_2 - \beta_3 = 0 \\ &\vdots \\ &\beta_n + 2\gamma_n \Delta\tau_n - \beta_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Entonces, el sistema que permitirá determinar el spline que alisa el histograma queda integrado por las condiciones 3.1, 3.2 y 3.3 expresadas en 3.9, 3.10 y 3.11, en la siguiente forma

3.12

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1 & = 0 \\
\alpha_1 + \beta_1 \Delta z_1/2 + \gamma_1 \Delta z_1^2/3 & = h_1 \\
\alpha_1 + \beta_1 \Delta z_1 + \gamma_1 \Delta z_1^2 - \alpha_2 & = 0 \\
\qquad \beta_1 + 2\gamma_1 \Delta z_1 - \beta_2 & = 0 \\
\quad \vdots \qquad \ddots & \vdots \\
\alpha_n + \beta_n \Delta z_n + \gamma_n \Delta z_n^2/3 & = h_n \\
\alpha_n + \beta_n \Delta z_n/2 + \gamma_n \Delta z_n^2 - \alpha_{n+1} & = 0 \\
\beta_n + 2\gamma_n \Delta z_n - \beta_{n+1} & = 0 \\
\alpha_n + \beta_n \Delta z_n + \gamma_n \Delta z_n^2 & = 0
\end{array}
$$

por tanto el histospline $h_1$ queda determinado resolviendo el sistema 3.12, y $h_1$ es

3.13 $$h_1(z) = \alpha_i + \beta_i(z-z_i) + \gamma_i(z-z_i)^2 \qquad i=1,\dots,n.$$

con $\alpha_i$, $\beta_i$ y $\gamma_i$ dados como solución del sistema.

Para el segundo problema, esto es con las condiciones 3.1, 3.2 y 3.4 derivando $\mathcal{A}$ dado por 3.6 y evaluando $\mathcal{A}'$ en $\tau_1$ y $\tau_{n+1}$ se obtiene $\beta_1 = 0$ y $\beta_n + 2\gamma_n \Delta\tau_n = 0$, por tanto el sistema resultante con esta condición es semejante al sistema 3.12 excepto, porque la primera y última ecuación se cambian por $\beta_1 = 0$ y $\beta_n + 2\gamma_n \Delta\tau_n = 0$ respectivamente. El histospline determinado por el nuevo sistema es denotado por $h_2$, cuya forma es análoga a la de $h_1$.

En el tercer problema las condiciones son 3.1, 3.2 y 3.5 determinan un histospline periódico que se denotará por $h_3$. El sistema para determinar $h_3$ se forma igual que el sistema 3.9, excepto que como primero y último renglón deben ser $\alpha_1 - \alpha_n - \beta_n\Delta\tau_n - \gamma_n\Delta\tau_n^2 = 0$ y $\beta_1 - \beta_n - 2\gamma_n \Delta\tau_n = 0$ respectivamente.

Los sistemas 3.12 y los que se forman para $h_2$ y $h_3$ son sistemas banda en los cuales no se observa alguna estructura, por lo cual es difícil establecer si tienen o no solución única, que determine el histospline requerido en cada uno de los tres casos.

En lo que sigue se darán bases idoneas para los polinomios cuadráticos, de manera que se tengan representaciones mas adecuadas y evitar los problemas que se presentaron con la representación de Newtón.

Por comodidad se restringiran los cálculos al intervalo $I=[0,1]$, para lo cual se hace el cambio de variable $x=(\tau-\tau_i)/\Delta\tau_i$ para $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ ; $i=1,\dots,n$.

Para el primer caso cuyas condiciones son:

a).- $r_1(0)=1$ , $r_1(1)=0$ & $\int_0^1 r_1(x)\,dx=0$

b).- $r_2(0)=0$ $r_2(1)=1$ & $\int_0^1 r_2(x)\,dx=0$

c).- $r_3(0)=0$ $r_3(1)=0$ & $\int_0^1 r_3(x)\,dx=1$

es natural dar los polinomios $r_1(x) = (1-x)(1-3x)$, $r_2(x) = x(3x-2)$ y $r_3(x) = 6x(1-x)$ como elementos de una base, pues satisfacen las condiciones a, b y c respectivamente, y de sus gráficas se observa que son polinomios independientes ver fig. 3.2.

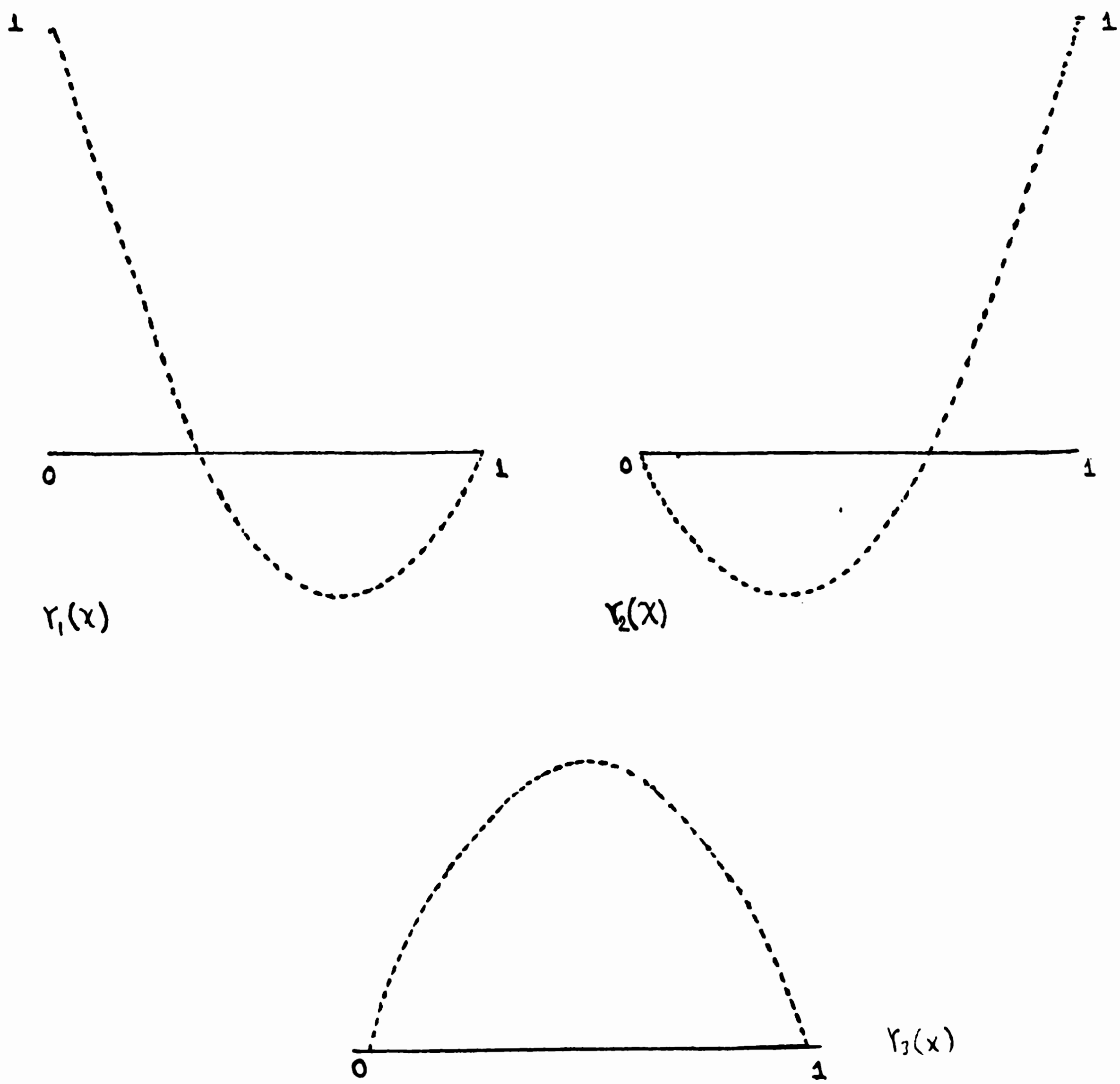



fig. 3.2 Los polinomios $r_1$, $r_2$ y $r_3$ son independientes

Así pues con ésta base se da una representación para los polinomios cuadráticos, llamada histospline cuadrática y se denotará por

$$3.17 \qquad h_1(x(\tau)) = f(\tau_i)r_1(x) + f(\tau_{i+1})r_2(x) + r_3(x)H_i/\Delta\tau_i$$

Ahora bien, como $f(\tau_i)$, $i=1,\dots,n+1$ son parámetros por determinar, a continuación se aplican las condiciones de diferenciabilidad a $h_1$ para obtener el sistema correspondiente.

De 3.17, haciendo $f(\tau_i)=f_i$ y sustituyendo el valor de $x$ se obtiene

$$3.18 \qquad h_1(\tau) = f_i[3(\tau-\tau_i)/\Delta\tau_i - 4(\tau-\tau_i)/\Delta\tau_i + 1] + f_{i+1}[3(\tau-\tau_i)^2/\Delta\tau_i^2 - 2(\tau-\tau_i)/\Delta\tau_i]$$

$$+ 6[1/\Delta\tau_i - 2(\tau-\tau_{i+1})/\Delta\tau_i^2]H_i/\Delta\tau_i \qquad i=1,\dots,n$$

derivando 3.18

$$3.19 \qquad h_1'(\tau) = f_i[6(\tau-\tau_i)/\Delta\tau_i^2 - 4/\Delta\tau_i] + f_{i+1}[6(\tau-\tau_i)/\Delta\tau_i^2 - 2/\Delta\tau_i] +$$

$$+ 6[1/\Delta\tau_i - 2(\tau-\tau_i)/\Delta\tau_i^2]H_i/\Delta\tau_i \qquad i=1,\dots,n$$

rámetros por determinar, a continuación se aplican las condiciones de diferenciabilidad a $h$, para obtener el sistema correspondiente.

De 3.17, haciendo $f(z_i) = f_i$ y sustituyendo el valor de $x$ se obtiene

$$3.18 \quad h_1(z) = f_i\left[3(z-z_i)/\Delta z_i - 4(z-z_i)/\Delta z_i + 1\right] + f_{i+1}\left[3(z-z_i)^2/\Delta z_i^2 - 2(z-z_i)/\Delta z_i\right]$$

$$+ 6\left[(z-z_i)/\Delta z_{i+1} - (z-z_i)^2/\Delta z_{i+1}^2\right] H_{i+1}/\Delta z_i$$

derivando 3.18

$$3.19 \quad h_1'(z) = f_i\left[6(z-z_i)/\Delta z_i^2 - 4/\Delta z_i\right] + f_{i+1}\left[6(z-z_i)/\Delta z_i^2 - 2/\Delta z_i\right] +$$

$$+ 6\left[1/\Delta z_i - 2(z-z_{i+1})/\Delta z_i^2\right] H_{i+1}/\Delta z_i \qquad i=1,\ldots,n.$$

Dado que se requiere la continuidad de 3.19 en $z_i$, $i=2,\ldots,n$. Tomando

$$g_i(z) = f_i\left[6(z-z_i)/\Delta z_i^2 - 4/\Delta z_i\right] + f_{i+1}\left[6(z-z_i)/\Delta z_i^2 - 2/\Delta z_i\right] + 6\left[1/\Delta z_i - 2(z-z_{i+1})/\Delta z_i^2\right] H_{i+1}/\Delta z_i$$

se debe tener $g_i(z_{i+1}) = g_{i+1}(z_{i+1}) \qquad i=1,\ldots,n.$

3.22 $$a_i f_i + 2 f_{i+1} + (1-a_i) f_{i+2} = 3\left[a_i H_{i+1}/\Delta z_i + (1-a_i) H_{i+2}/\Delta z_{i+1}\right]$$

$i=1,\ldots,n-1$, éste es un sistema banda en el cual $f_1$ y $f_{n+1}$ son dados. Por simplificación se toma el miembro derecho de 3.22 igual a $u_i$, así, el sistema puede expresarse en la forma matricial $Ax=u$, que explícitamente es

3.23 $$\begin{bmatrix} 2 & (1-a_1) & & & & \\ a_2 & 2 & (1-a_2) & & & \\ & a_3 & 2 & (1-a_3) & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot & \\ & & & a_{n-2} & 2 & (1-a_{n-2}) \\ & & & & a_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - a_1 f_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} - (1-a_{n-1}) f_{n+1} \end{bmatrix}$$

La matriz A es diagonal dominante porque la suma de los elementos fuera de la diagonal es a lo más la unidad. Así, A es no singular y puede ser resuelta de manera estable, con solución única. Se puede usar eliminación gausiana sin pivoteo.

Para resolver 3.23 se da el siguiente

Algoritmo 3.1 Dados los coeficientes $a_i, c_i, d_i$ y el miembro de la derecha $b_i$ del sistema tridiagonal $a_i x_{i-1} + d_i x_i + c_i x_{i+1} = b_i$, $i=1,\ldots,n$; $a_1=0$, $c_n=0$

Para $k=2,\ldots,n$ hacer:

si $d_{k-1}=0$, emitir error y termina

de otro modo $m = a_k/d_{k-1}$

$d_k = d_k - m * c_{k-1}$

$b_k = b_k - m * b_{k-1}$

si $d_n=0$, emitir error y termina

de otro modo $x_n = b_n/d_n$

Para $k=N-1,\ldots,1$ hacer:

$x_k=(b_k - \varepsilon_k * x_{k+1})/d_k$

En esta forma el caso con las condiciones 3.2. queda resuelto.

En forma similar al problema con las condiciones 3.3, ahora para las condiciones 3.4 se procede a buscar una base idonea para los polinomios cuadráticos, de tal manera que se tenga una representación adecuada para poder determinar el histospline $h_2$. Asi pues, para $h_2$ las condiciones son

a).- $r_1'(0) = 0$ $\quad$ $r_1'(1) = 0$ & además

$$\int_0^1 r_1(x) = 1$$

b).- $r_2'(0) = 0$ , $r_2'(1) = 1$ y

$$\int_0^1 r_2(x)\,dx = 0$$

c).- $r_3'(0) = 1$ , $r_3'(1) = 0$ y

$$\int_0^1 r_3(x)\,dx = 0$$

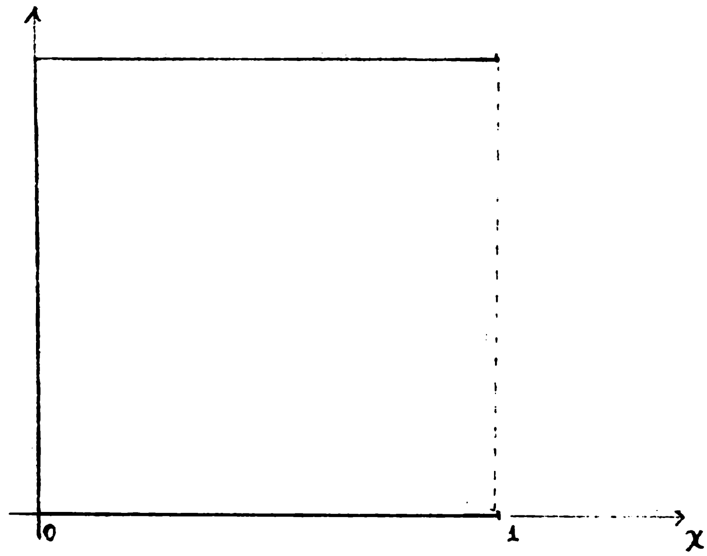
entonces es adecuado elegir los tres polinomios

$$r_1(x) = 1$$

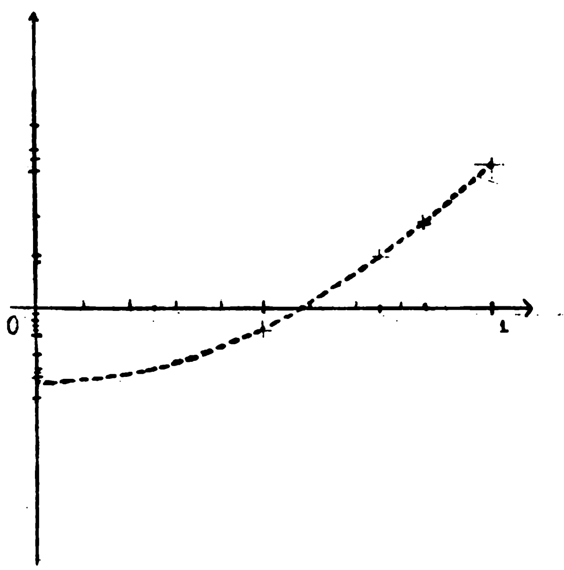
$$r_2(x) = (3x^2 - 1)/6$$

$$r_3(x) = -(3x^2 - 6x + 2)/6$$

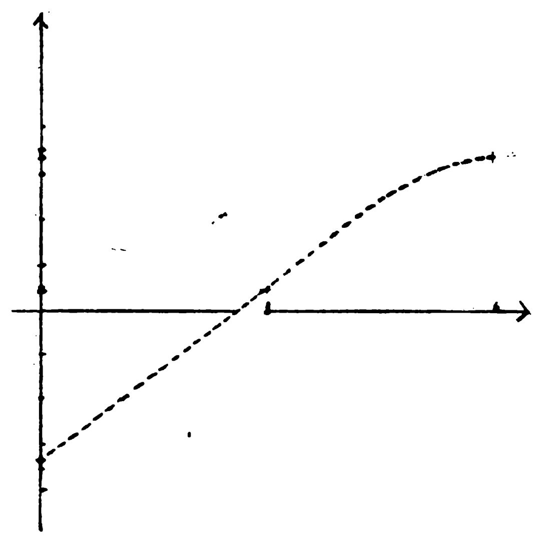
ya que cumplen con las condiciones a, b y ~~c respectivamente. Las gráficas~~ de estos polinomios se dan en la figura 3.3



1) $r_1(x) = 1$



2) $r_2(x) = (3x^2-1)/6$



3) $r_3(x) = -(3x^2-6x+2)/6$

fig. 3.3. gráfica de los elementos de la base.

Por tanto, de las condiciones a, b, c y de las gráficas de la fig. 3.3 se observa que los polinomios son independientes, por lo tanto $r_1(x)$ $r_2(x)$ y $r_3(x)$ son los elementos de una base y se forma la representación para los polinomios cuadráticos. Esto es

3.25 $$P(x) = \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) + \alpha_3 P_3(x)$$

que es una combinación de los elementos de la base.

Los coeficientes de 3.25 se derminan en la siguiente forma:

por ser $x$ función de $\tau$ i.e. $x = (\tau - \tau_i)/\Delta\tau_i$, se tiene que $d\tau = dx \cdot \Delta\tau_{i+1}$, de 3.25 y 3.2 se tiene

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} P(x(\tau))\,d\tau = \int_0^1 P(x)\,dx \cdot \Delta\tau_i$$
$$= \alpha_1 \cdot \Delta\tau_i$$
$$= H_i$$

de esta última igualdad

3.26 $$\alpha_1 = H_i/\Delta\tau_i$$

por otra parte

$$P'(\tau) = P_1'(x(\tau))x'(\tau)\alpha_1 + P_2'(x(\tau))x'(\tau)\alpha_2 + P_3'(x(\tau))x'(\tau)\alpha_3$$
$$= x(\tau)\alpha_2/\Delta\tau_i + (1 - x(\tau))\alpha_3/\Delta\tau_i$$

evaluando en $\tau_i$

$P'(\tau_i) = \alpha_3/\Delta\tau_i$ tomando $m_i = P'(\tau)$ se tiene

3.27 $$\alpha_3 = m_i \Delta\tau_i$$

analogamente evaluando en $\tau_{i+1}$ se obtiene

3.28 $$\alpha_2 = m_{i+1} \Delta\tau_i$$

así pues, reescribiendo 3.25 que corresponde a $h_2$ en términos de 3.26, 3.27 y 3.28 se tiene

3.29 $$h_2(x) = H_i/\Delta\tau_i + \Delta\tau_i\,[m_{i+1}(3x^2-1) - m_i(3x^2-6x+2)]/6$$

siendo $x$ función de $\tau$.

El histospline 3.29 queda determinado si $m_i$ $i=1,n-1$, son conocidas. Como esta implicita la derivada en $h_2$, imponemos la condición de continuidad directamente en ella para generar el sistema que permita determinar las incognitas $m_i$. Entonces, sea

$$g_i(\tau) = H_i/\Delta\tau_i + \Delta\tau_i\,[m_{i+1}(3(\tau-\tau_i)^2/\Delta\tau_i^2 - 1) - m_i(3(\tau-\tau_i)^2/\Delta\tau_i^2 - 6(\tau-\tau_i)/\Delta\tau_i + 2)]/6$$

por la condición de continuidad se requiere que $g_i(\tau_{i+1}) = g_{i+1}(\tau_{i+1})$, $i=1,\ldots,n-1$. de donde

$$H_i/\Delta\tau_i + \Delta\tau_i\,[m_{i+1}(3(\tau_{i+1}-\tau_i)^2/\Delta\tau_i^2 - 1) - m_i(3(\tau_{i+1}-\tau_i)^2/\Delta\tau_i^2 - 6(\tau_{i+1}-\tau_i)/\Delta\tau_i + 2)]/6 = H_{i+2}/\Delta\tau_{i+1} - \Delta\tau_{i+1}\,[m_{i+2} + 2m_{i+1}]$$

$i=1,n-1.$

reduciendo y reacomodando términos se obtiene

$$\Delta z_i\, m_i + 2(\Delta z_i + \Delta z_{i+1})\, m_{i+1} + \Delta z_{i+1}\, m_{i+2} = H_{i+2}/\Delta z_{i+1} - H_{i+1}/\Delta z_i$$

dividiendo esta expresión entre $\Delta z_i + \Delta z_{i+1}$ se obtiene

$$3.26 \quad (1-a_i)m_i + 2\, m_{i+1} + a_i\, m_{i+2} = [6/(\Delta z_i + \Delta z_{i+1})][H_{i+2}/\Delta z_{i+1} - H_{i+1}/\Delta z_i]$$

$i = 1, n-1$. Este sistema y las dos condiciones en la frontera se pueden expresar en forma matricial como $AX = w$ donde $w$ es el lado derecho de 3.26, en forma explícita

$$\begin{bmatrix} 2 & a_1 & & & & \\ (1-a_2) & 2 & a_2 & & & \\ & (1-a_3) & 2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & (1-a_{n-2}) & 2 & a_{n-2} \\ & & & & a_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{bmatrix}$$

que es nuevamente un sistema tridiagonal, con diagonal dominante y se procede como en el caso anterior.

Para el tercer problema, esto es con las condiciones 3.5, la base del primer problema es adecuada, por lo que en la ecuación matricial 3.23 sólo se cambian las condiciones en la frontera para $i=1$, e $i=n+1$, pues se conocen las evaluaciones en $z_1$ y $z_{n+1}$ las cuales deben coincidir así $f_1=f_{n+1}$. Igualando miembro a miembro.

$$2f_2+(1-a_1)f_3=2f_n+(1-a_{n-1})f_{n+1}$$

además $$2f_2+(1-a_1)f_3=u_1-a_1f_{n+1}$$

por lo tanto

$$u_1-a_1f_{n+1}=2f_n+(1-a_{n-1})f_{n+1}$$

reduciendo

$$2f_n+(1+a_1-a_{n-1})f_{n+1}=u_1$$

por último haciendo $1+a_1-a_{n-1}=a^*$ se tiene

3.27 $$2f_n+a^*f_{n+1}=u_1$$

por 3.22 y 3.27 se obtiene

$$
\begin{bmatrix}
2 & (1-a_1) & & & & & a_1 \\
a_2 & 2 & (1-a_2) & & & & \\
 & a_3 & 2 & (1-a_3) & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & a_{n-2} & 2 & (1-a_{n-2}) & 0 \\
 & & & & a_{n-1} & 2 & (1-a_{n-1}) \\
 & & & & 0 & 2 & a^{*}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ \\ u_1 \end{bmatrix}
$$

el cual es un sistema casi diagonal dominante que puede ser resuelto por eliminación gausiana con pivoteo. y por tanto el tercer problema queda resuelto.

# IV PRESERVACION DE LA FORMA DE SPLINES CUADRATICOS DE INTERPOLACION

El objetivo en esta parte, es implementar algoritmos para el problema de inter--polación, usando splines cuadráticos. La importancia de estos algorítmos es que preservan la forma de los datos, es decir que en los intervalos donde los datos están en forma monotona creciente o decreciente, el spline tiene la misma propiedad. En forma análoga para el caso de convexidad o concavidad.

## PRESERVACION DE LA CONVEXIDAD

Supongase que se tiene un conjunto de datos $\{(\tau_i, f(\tau_i))\}$, $i=1,\ldots,n$, de una función convexa. Entonces se requiere determinar un spline cuadrático convexo tal que

1.1 $$\lambda(\tau_i) = f(\tau_i) \qquad i=1,\ldots,n.$$

se analiza el caso especial para dos puntos, que puede generalizarse al resto de los datos.

Dados $\tau_1 < \tau_2$ y $f(\tau_1)$, $f(\tau_2)$, $f'(\tau_1)$, $f'(\tau_2)$ se quiere determinar un spline cuadrático $\lambda(\tau)$ tal que

1.2 $$\lambda(\tau_i) = f(\tau_i) \quad \& \quad \lambda'(\tau_i) = f'(\tau_i) \qquad i=1,2.$$

Notación: $f(\tau_i) = f_i$.

El siguiente lema indica que podemos construir tal spline proporcionando el nodo $\xi$ en el intervalo $(\tau_1, \tau_2)$.

Lema 1.1. Sea $I=[\tau_1,\tau_2]$. Para todo $\tau_1<\xi<\tau_2$ existe un spline cuadrático $\lambda$ con nodo simple $\xi$ que resuelve el problema 1.2. Sea

4.3 $$s(\tau)=\begin{cases} A_1+B_1(\tau-\tau_1)+C_1(\tau-\tau_1)^2 & \tau_1<\tau<\xi \\ A_2+B_2(\tau-\xi)+C_2(\tau-\xi)^2 & \xi\le\tau\le\tau_2 \end{cases}$$

siendo $A_1=f_1$, $B_1=s_1$, $C_1=(s_2-\tilde{s})/2\beta$

$$A_2=A_1+B_1\alpha+C_1\alpha^2,\quad B_2=\tilde{s},\quad C_2=(s_2-\tilde{s})/2\beta$$

&

4.4 $$\tilde{s}=s'(\xi)=[2(f_2-f_1)-(\alpha s_1+\beta s_2)]/(\tau_2-\tau_1)$$

$$\alpha=\xi-\tau_1\qquad \beta=\tau_2-\xi$$

Prueba.

Para probar que $s$ es un spline cuadrático se debe checar que $s$ y $s'$ son continuas en $\xi$.

como

$$\lim_{\tau\to\xi^+}s(\tau)=A_2=\lim_{\tau\to\xi^-}s(\tau)$$

$s$ es continua en $\xi$.

Por otra parte, se requiere que

$$\lim_{\tau\to\xi^+}s'(\tau)=\lim_{\tau\to\xi^-}s'(\tau)$$

derivando $s$

$$s'(\tau) = \begin{cases} B_1 + 2C_1(\tau-\tau_1) & \tau_1 < \tau < \xi \\ B_2 + 2C_2(\tau-\xi) & \xi \leq \tau < \tau_2 \end{cases}$$

$$\lim_{\tau\to\xi^+} s'(\tau) = B_2 = \tilde{s}$$

$$\lim_{\tau\to\xi^-} s'(\tau) = B_1 + 2C_1(\xi-\tau_1)$$

$$= B_1 + 2(\tilde{s}-s_1)(\xi-\tau_1)/2(\xi-\tau_1)$$

$$= \tilde{s}$$

$\therefore$ $s'$ es continua en $\xi$.

Por tanto $s$ es un spline cuadrático.

Un primer paso para atacar el proble- ma 4.2 se da en el

Lema 4.2. Si $s_1 < s_2$. Entonces el spline 4.3 es convexo en I si y solo si

4.5 $$s_1 \leq \tilde{s} \leq s_2$$

Prueba. Por el criterio de segunda derivada.

$$4.6 \qquad \mathcal{A}''(\tau)=\begin{cases}(\tilde{\mathcal{A}}-\mathcal{A}_1)/(\xi-\tau_1) & \tau_1\leq\tau\leq\xi\\ (\mathcal{A}_2-\tilde{\mathcal{A}})/(\tau_2-\xi) & \xi\leq\tau\leq\tau_2\end{cases}$$

como $\mathcal{A}''(\tau)>0$ en $I$, $\mathcal{A}$ es convexa en $I$.

Aunque el lema 4.2 da una solución para un nodo colocado arbitrariamente, no siempre se cumple la condición 4.5. Por lo tanto, en seguida se hace un análisis en base a la condición 4.5, para determinar la relación entre $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\delta=(f_2-f_1)/(\tau_2-\tau_1)$ y $\xi$ para poder obtener un spline convexo.

En primer lugar observese que para poder obtener un spline convexo $\mathcal{A}$, las derivadas de $\mathcal{A}$ en los extremos $\tau_1, \tau_2$ deben tener las posiciones de la fig. 4.1

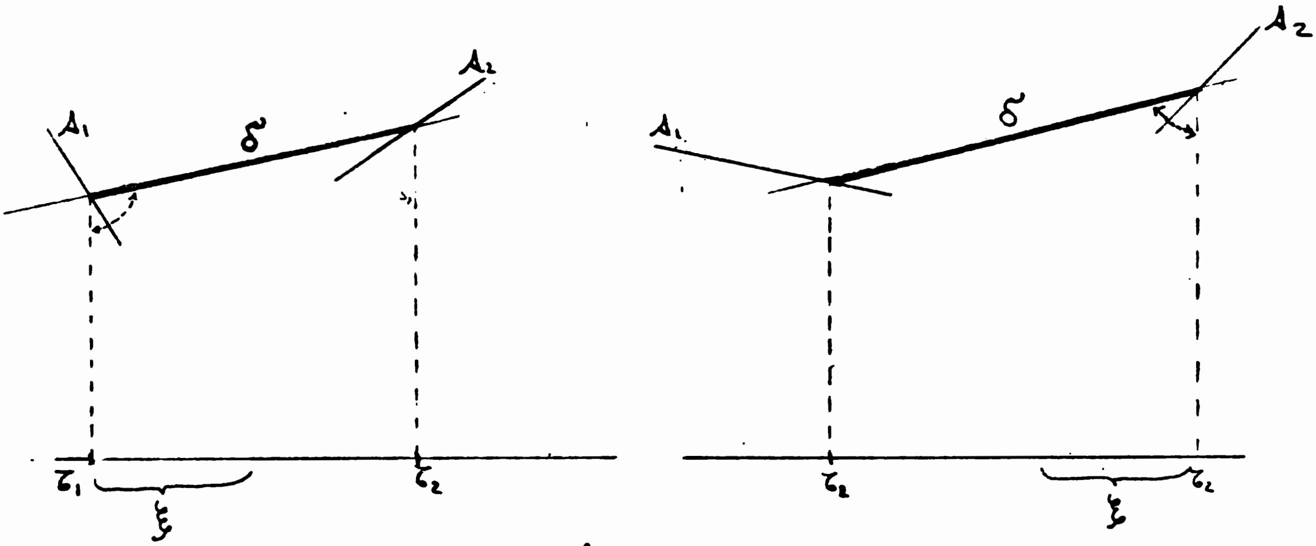



fig. 1.1 a). $\xi$ debe ser elegida a la izquierda para poder construir el spline convexo. En este caso $|\Delta_2-\delta|<|\Delta_1-\delta|$.

b). $\xi$ debe ser elegida a la derecha para poder construir el spline convexo. Corresponde a $|\Delta_2-\delta|>|\Delta_1-\delta|$.

las flechas indican las pendientes que pueden ser elegidas en uno de los extremos cuando la otra pendiente se ha dado y por tanto el nodo solo puede tomarse de cierta manera.

Cuando las derivadas en $\tau_1$ y $\tau_2$ se toman como en la fig. 1.2 es imposible construir un spline convexo.

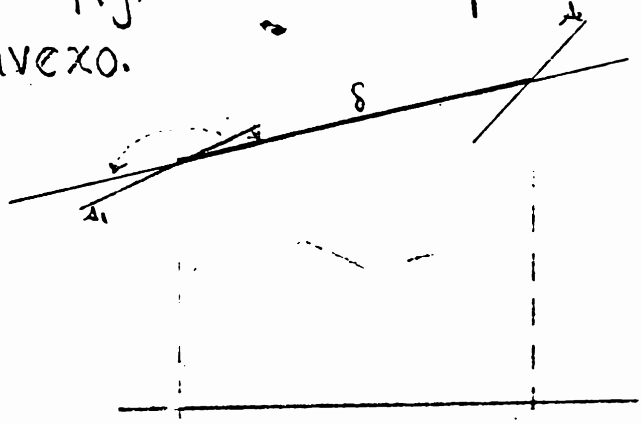



fig. 1.2 $\Delta_1>\delta$ y $\delta<\Delta_2$, es también imposible construir el spline convexo cuando $\Delta_1<\delta$ y $\delta>\Delta_2$.

Ahora bien de la condición 4.5, i.e

$$\Delta_1 \leq [2(f_2-f_1)-(\xi-\tau_1)\Delta_1-(\Delta_2-\xi)\Delta_2]/(\tau_2-\tau_1) \leq \Delta_2$$

se tiene

$$*] \qquad \Delta_1 \leq 2\delta-[(\xi-\tau_1)\Delta_1+(\tau_2-\xi)\Delta_2]/(\tau_2-\tau_1) \leq \Delta_2$$

donde $\delta = (f_2-f_1)/(\tau_2-\tau_1)$

en la expresión * se puede ver que el 2° término del miembro intermedio es lineal con respecto a $\xi$, de donde se puede escribir

$$\ell(\xi,\delta) = 2\delta-[(\xi-\tau_1)\Delta_1+(\tau_2-\xi)\Delta_2]/(\tau_2-\tau_1)$$

entonces

$$\Delta_1 \leq \ell(\xi,\delta) \leq \Delta_2 .$$

---

Con éstos elementos podemos construir un modelo gráfico del comportamiento de las derivadas $\Delta_1$, $\Delta_2$ y el nodo $\xi$ para pre ducir un splain convexo.

La recta $\ell(\xi,\delta)$ es una familia de rectas paralelas como función de $\delta$, para $\delta=0$ obtenemos la pendiente de ésta familia que resulta

$$m=[\ell(\tau_2,0)-\ell(\tau_1,0)]/(\tau_2-\tau_1)$$
$$=[\lambda_2-\lambda_1]/(\tau_2-\tau_1).$$

la desigualdad $\lambda_1 \leq \ell(\xi,\delta) \leq \lambda_2$ para $\tau_1 \leq \xi \leq \tau_2$ puede visualizarse geométricamente como se ve en la figura.

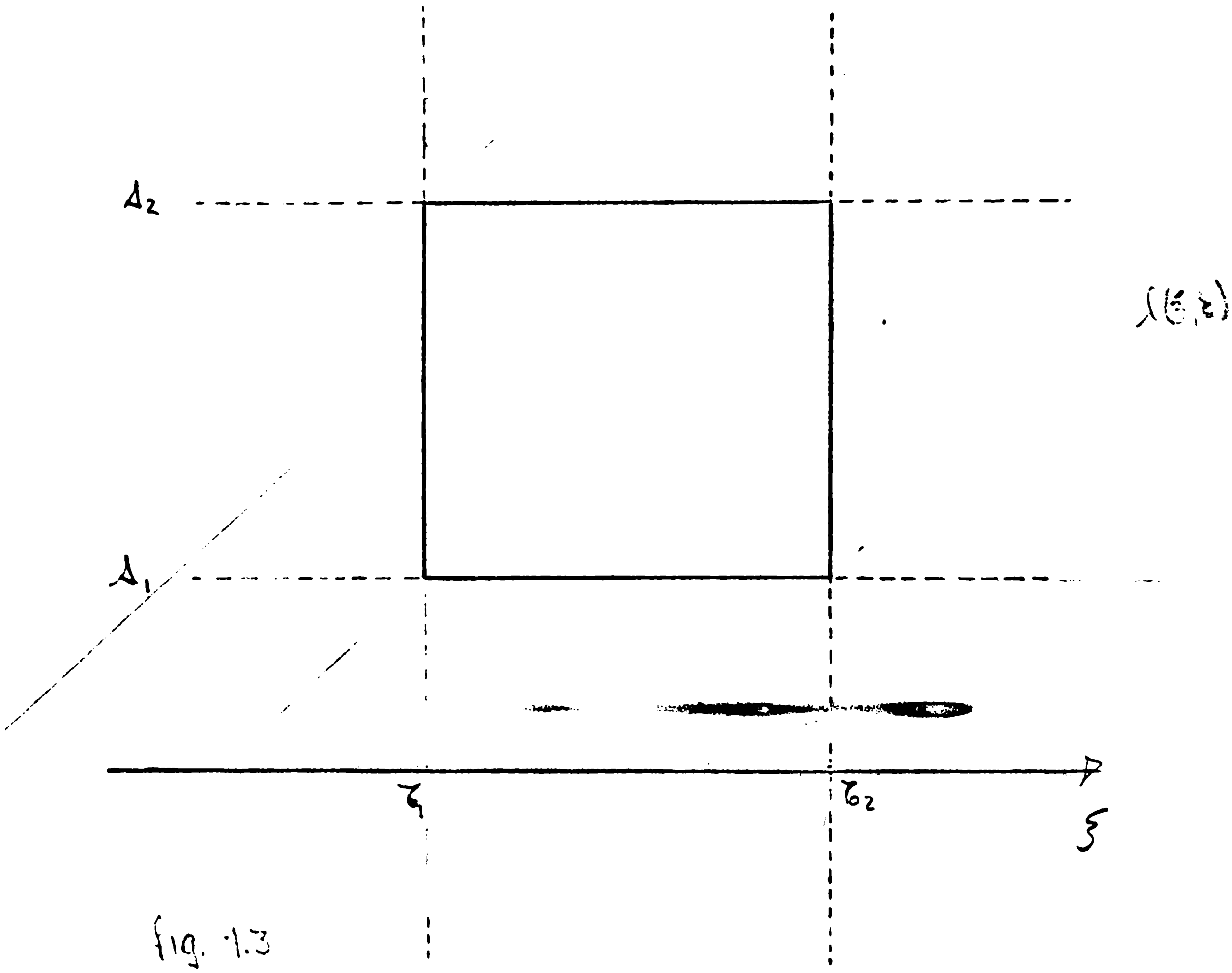



fig. 1.3

de esta gráfica se desprende lo siguiente:

Es posible escoger $\xi$ solo si la recta $\ell(\xi,\delta)$ intersecta al rectangulo de la figura.

Primer caso. Si la recta $\ell$ intersecta a la recta $z_1=0$ por debajo de $A_1$, entonces para que el spline resulte convexo, $\ell$ debe intersectar a la recta $z_2=0$ por arriba de $A_1$, intersectando el cuadrado y garantizando con ello que $A$ sea convexo. Algebraicamente, si $2\delta-A_2<A_1$ es necesario que

$$2\delta-A_1>A_1$$

de donde

$$2\delta>2A_1$$

$$\therefore \qquad \delta>A_1$$

$$\Rightarrow \qquad \delta-A_1>0$$

y $\therefore \qquad \delta-A_2>\delta-A_1>0$

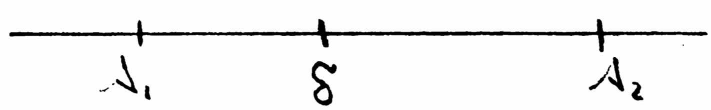



fig. 1.1.

Segundo caso. Si ahora $\ell$ intersecta a la recta $z_2=0$ arriba de $\lambda_2$, entonces para que el spline resulte convexo, $\ell$ debe cortar a la recta $z_1=0$ por abajo de $\lambda_2$, de modo que intersecte al cuadrado y garantizar así la convexidad del spline.

Entonces si

$$2\delta - \lambda_1 > \lambda_2$$

es necesario que

$$2\delta - \lambda_2 < \lambda_2$$

$$2\delta < 2\lambda_2$$

y $\therefore$ $\quad \delta < \lambda_2$

de donde $\quad 0 < \lambda_2 - \delta$

entonces $\quad 0 < \lambda_2 - \delta < \delta - \lambda_1 \Rightarrow 0 < \delta - \lambda_1$

y $\therefore$ $\quad \lambda_1 < \delta$

$\Rightarrow$

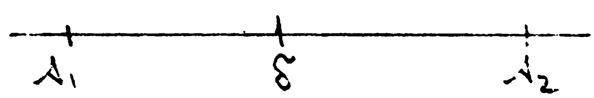



fig. 1.5

en cada uno de estos casos, si se toman las derivadas de acuerdo a las condiciones impuestas el spline cuadrático es convexo.

Tercer caso. Cuando la recta $\ell$ es diagonal del cuadrado, el problema puede resolverse por un polinomio cuadrático pues

$$2\delta - \Delta_2 = \Delta_1$$

$$\Rightarrow \quad 2\delta = \Delta_1 + \Delta_2$$

$$y \therefore (\Delta_1 + \Delta_2)/2 = \delta$$

De hecho de la fig. 4.1 se puede observar que la condicion de convexidad $\Delta_1 < \delta < \Delta_2$ implica $(\Delta_2 - \delta)(\Delta_1 - \delta) < 0$.

Lema 4.3. Sea $\delta = (f_2 - f_1)/(\tau_2 - \tau_1)$. Si $(\Delta_2 - \delta)\cdot(\Delta_1 - \delta) < 0$. Entonces la condición $|\Delta_2 - \delta| < |\Delta_1 - \delta|$ implica que para toda $\xi$ satisfaciendo

4.7 $$\tau_1 < \xi < \bar{\xi} \quad \text{con} \quad \bar{\xi} = \tau_1 + 2(\tau_2 - \tau_1)(\Delta_2 - \delta)/(\Delta_2 - \Delta_1)$$

el spline de interpolación dado por 4.3

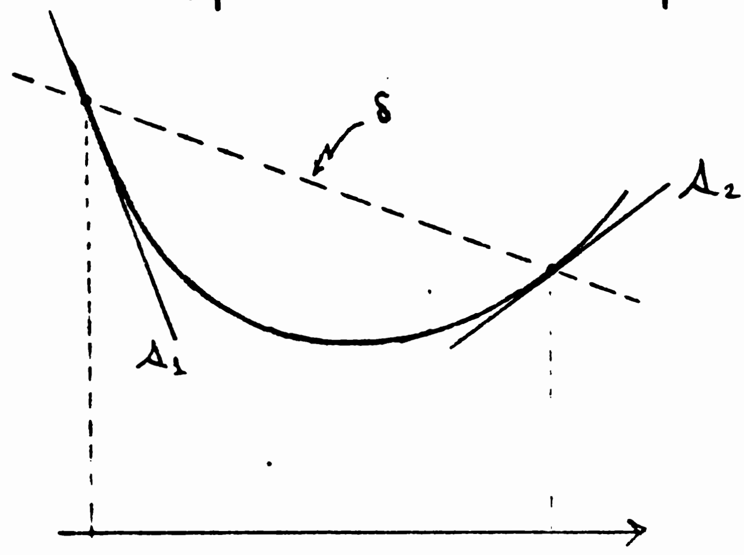



fig. 4.1

es convexo si $\Delta_1 < \Delta_2$ ... ver fig. 4.1

Prueba. Sean $\Delta_1 < \Delta_2$, $|\Delta_2-\delta|<|\Delta_1-\delta|$ y $(\Delta_2-\delta)(\Delta_1-\delta)<0$. Además $\Delta_2-\delta>0$ y $\Delta_1-\delta<0$.

Por la condición 4.5

$$\Delta_1 \le [2(f_2-f_1)-(\xi-\tau_1)\Delta_1-(\tau_2-\xi)\Delta_2]/(\tau_2-\tau_1) \le \Delta_2$$

tomando la desigualdad de la derecha, se tiene

$$2\delta-[(\xi-\tau_1)\Delta_1+(\tau_2-\xi)\Delta_2]/(\tau_2-\tau_1) \le \Delta_2$$

$$\delta(\tau_2-\tau_1)-(\xi-\tau_1)\Delta_1-(\tau_2-\xi)\Delta_2 \le (\Delta_2-\delta)(\tau_2-\tau_1)$$

$$\xi + [\delta(\tau_2-\tau_1) + \tau_1 A_1 - \tau_2 A_2]/(A_2-A_1) \leq (A_2-\delta)(\tau_2-\tau_1)$$

$$\xi - \tau_1 + [\delta(\tau_2-\tau_1) + \tau_1 A_1 - \tau_2 A_2 + \tau_1(A_2-A_1)]/(A_2-A_1) \leq (A_2-\delta)(\tau_2-\tau_1)/(A_2-A_1)$$

$$\xi - \tau_1 + [\delta(\tau_2-\tau_1) - \tau_2 A_2 + \tau_1 A_2]/(A_2-A_1) \leq (A_2-\delta)(\tau_2-\tau_1)/(A_2-A_1)$$

$$\xi - \tau_1 - (A_2-\delta)(\tau_2-\tau_1)/(A_2-A_1) \leq (A_2-\delta)(\tau_2-\tau_1)/(A_2-A_1)$$

$\therefore$

4.8 $$\xi \leq \tau_1 + 2(A_2-\delta)(\tau_2-\tau_1)/(A_2-A_1)$$

$$= \bar{\xi}$$

En seguida se hace ver que si $\bar{\xi} \geq \tau_2$ entonces una solución esta dada por un polinomio cuadrático y carece de sentido la introdución del nodo $\xi$.

Observese en 4.8 que si

4.9 $$2(A_2-\delta)/(A_2-A_1) = 1$$

entonces

$\bar{\xi} = \tau_2$. Además

4.10 $$\Delta_2 + \Delta_1 = 2\delta$$

y $\therefore$ $$(\Delta_2 + \Delta_1)/2 = (f_2 - f_1)/(\tau_2 - \tau_1)$$

así pues, si $\bar{\xi} = \tau_2$ y se cumple 4.10 entonces se checa facilmente que una solución esta dada por

4.11 $$s(\tau) = f_1 + \Delta_1(\tau - \tau_1) + (\Delta_2 - \Delta_1)(\tau - \tau_1)^2 / 2(\tau_2 - \tau_1)$$

Ahora bien, si $(\Delta_2 - \delta)/(\Delta_2 - \Delta_1) < 1/2$ entonces

$$\xi \leq \bar{\xi} < \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) = \tau_2$$

i.e. $\bar{\xi}$ cae en I, y tiene sentido introducir el nodo $\xi$.

Lema 4.4. Sea $\delta = (f_2 - f_1)/(\tau_2 - \tau_1)$. Si $(\Delta_2 - \delta)(\Delta_1 - \delta) < 0$. Entonces la condi $|\Delta_1 - \delta| < |\Delta_2 - \delta|$ implica que para toda satisfaciendo $\hat{\xi} \leq \xi < \tau_2$ con $\hat{\xi} = \tau_2 + 2(\tau_2 - \tau_1)(\Delta_2 - \delta)/(\Delta_2 - \Delta_1)$, el spline de interpolación dado por 4.3 es convexo si $\Delta_1 < \Delta_2$.

En seguida se dará el algorítmo 1 que calcula los coeficientes de una representación polinomial por pedazos de un spline cuadrático resolviendo 4.2. En particular, si se tienen N datos $(\tau_i, f_i)$, y K nodos $x_i$ el spline es

$$\mathcal{A}(\tau) = A_i + B_i(\tau - x_i) + C_i(\tau - x_i)^2$$

donde $x_i \leq \tau \leq x_{i+1}$, $i=1,K$. $A_i$, $B_i$ y $C_i$ $i=1,\ldots,N-1$ son los coeficientes calculados.

Los lemas 4.2 y 4.3 pueden ser utilizados para que el algorítmo produsca un spline localmente convexo en $I_i$. Con $(\Delta_i - \delta_i)(\Delta_{i+1} - \delta_i) < 0$. En particular para que eso suceda se necesita asegurar que $\Delta_i \leq \tilde{\Delta}_i \leq \Delta_{i+1}$. Esta condición se puede garantizar eligiendo el nodo $\xi_i$ en la forma

$$\tau_i < \xi_i \leq \tau_i + 2(\tau_{i+1} - \tau_i)(\Delta_{i+1} - \delta)/(\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad \text{si} \quad |\Delta_{i+1} - \delta_i| < |\Delta_i - \delta_i|$$

$$\tau_{i+1} + 2(\tau_{i+1} - \tau_i)(\Delta_i - \delta_i)/(\Delta_{i+1} - \Delta_i) \leq \xi_i < \tau_{i+1} \quad \text{si} \quad |\Delta_i - \delta_i| < |\Delta_{i+1} - \delta_i|$$

Si los datos son globalmente convexos, es decir $\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n$ entonces se eligen las derivadas $s_i$ en la forma $s_1 < \delta_1 < s_2 < \delta_2 < \cdots < s_{n-1} < \delta_{n-1} < s_n < \delta_n < s_{n+1}$ de modo que $s$ sea localmente convexo en $I_i$, $i=1,n-1$, y por lo tanto $s$ sera globalmente convexo.

Datos en posicion lineal. cuando en un conjunto de datos, algunos de ellos estan en linea recta (i.e. $\delta_j = \delta_{j+1} = \cdots = \delta_r = \delta$), se necesita asegurar no solo que $s$ pase por los puntos $(\tau_i, f_i)$, $i=j,\ldots,r$ sino que también asegurar que $s$ sea lineal en $[\tau_j, \tau_r]$; esto se hace eligiendo las pendientes $s_j = \cdots = s_r = \delta$.

otras propiedades del algoritmo 1 son inherentes a la naturaleza local de los splines cuadráticos, cuya importancia estriba en ser constructivas son:

1] Cuando se ha calculado un spline

para un conjunto de datos $(\tau_i, f_i)$, $i=1,\ldots,n$ y se quiere cambiar el i-esimo punto (ya sea que $f_i$ cambie de valor ó $\tau_i$ tome una nueva posición en $[\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$), no es necesario volver a calcular todos los coeficientes del nuevo spline, sino que sólo se resuelve el problema de interpolación en $[\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$ y se integran los nuevos nodos y coeficientes con los que ya se tenían.

2) En algunas aplicaciones los datos son producidos en flujo continuo, en éste caso no se puede esperar hasta que todos los datos esten en forma ejecutable, sino que se debe efectuar una corrida adecuada.

El algoritmo 1 es adecuado para tales propositos. Pues si se han hecho los cálculos para n datos se pueden introducir datos sin volver a recalcular los nodos y coeficientes del spline que ya habian sido calculados.

Así pues el algoritmo 1 determina una

curva general para resolver el problema de interpolación 4.2, además del de convexidad por medio de splines cuadráticos. Cabe aclarar que en el algorítmo las derivadas $s_i$ puede darse en lectura o bién ser calculadas internamente por diferencias divididas.

## ALGORITHMO 1

1. LECTURA DE

   1.1 N      % NUMERO DE DATOS

   1.2 $(\tau_i, f_i)$, $i=1,N$      % DATOS

2. SI ES LECTURA

   2.1.1 LEER $s_i$, $i=1,N$      % DERIVADA DE f EN $\tau_i$,

   2.1.2 IR A 3      % $i=1,N$

   2.2 DE OTRO MODO

   $s_i = f[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i=1, N-1$      % SE CALCULA POR

   % DIFERENCIAS DIVIDIDAS

3. PARA $i=1, N-1$

   3.1 $\delta = (f_{i+1}-f_i)/(\tau_{i+1}-\tau_i)$

   3.2 % SE RESUELVE EL PROBLEMA POR UN

   % POLINOMIO CUADRATICO

3.4 SI $s_i + s_{i+1} = 2\delta$ ENTONCES $s(\tau) = f_i + s_i(\tau - \tau_i)$

3.4.1 $+ (s_{i+1} - s_i)(\tau - \tau_i)^2 / 2(\tau_{i+1} - \tau_i)$

3.4.2 IR A 3

3.5 SI $(s_2 - \delta)(s_1 - \delta) < 0$ & %SE RESUELVE

3.6 $abs(s_2 - \delta) < abs(s_1 - \delta)$ ENTONCES % POR SPLINES

3.7 $\bar{\xi} = \tau_1 + 2(\tau_2 - \tau_1)(s_2 - \tau)/(s_2 - s_1)$

3.8 $\xi = (\tau_1 + \bar{\xi})/2$

% CALCULO DE LOS COEFICIENTES DEL SPLINE

3.9 $\alpha = \xi - \tau_i$ ; $\beta = \tau_{i+1} - \xi$

3.10 $\bar{s} = [2(f_{i+1} - f_i) - (\alpha s_i + \beta s_{i+1})]/(\tau_{i+1} - \tau_i)$

3.11 $C_{i+1} = (s_{i+1} - \bar{s})/2\beta$

3.12 $B_{i+1} = \bar{s}$

3.13 $A_i = f_i$

3.14 $B_i = s_i$

3.15 $C_i = (\bar{s} - s_i)/2\alpha$

3.16 $A_{i+1} = A_i + B_i\alpha + C_i\alpha^2$

3.17 SI $\tau_i < \tau < \xi$ ENTONCES

$s(\tau) = A_i + B_i(\tau - \tau_i) + C_i(\tau - \tau_i)^2$

3.18 SI (3.17 NO SE EJECUTA y $\xi \leq \tau < \tau_{i+1}$)

ENTONCES $s(\tau) = A_{i+1} + B_{i+1}(\tau - \xi) + C_{i+1}(\tau - \xi)^2$

3.19 $\chi_i = \xi$

3.20 CONTINUE % CIERRA CICLO DE 3

4. IPRESION DE RESULTADOS

4.1 K % NUMERO DE NODOS

4.2 $x_i, i=1,K$

4.3 $A_i, B_i, C_i, i=1,N-1$ % COEFICIENTES DE LOS % POLINOMIOS $P_i$

5. FIN

## SPLINE CONCAVO

Para el caso de la concavidad se dan algunos resultados sin demostración por ser análogos a los de convexidad, ya demostrados. Así como tambien el algoritmo 1 puede ser modificado para que produsca un spline local o globalmente concavo de acuerdo a la forma que tengan los datos.

Lema 4.5. Supongase que $\Delta_1 \cdot \Delta_2 \geq 0$ y que $(\Delta_1 + \Delta_2)/2 = (f_2 - f_1)/(z_2 - z_1)$ y si $\Delta_1 > \Delta_2$ entonces el spline se reduce a un polinomio que es concavo.

Lema 4.6. Supongase que $\Delta_1 > \Delta_2$, entonces el spline $s$ en 4.3 es concavo en I si y solo si

$$\Delta_2 \leq s'(\xi) \leq \Delta_1 .$$

Lema 4.7. Sea $\delta = (f_2 - f_1)/(\tau_2 - \tau_1)$. y $(\Delta_2 - \delta) \cdot (\Delta_1 - \delta) < 0$ entonces la condición $|\Delta_2 - \delta| < |\Delta_1 - \delta|$ implica que para toda $\xi$ satisfaciendo

$$\tau_1 < \xi \leq \bar{\xi} \text{ con } \bar{\xi} = \tau_1 + 2(\tau_2 - \tau_1)(\Delta_2 - \delta)/(\Delta_2 - \Delta_1)$$

el spline de interpolación dado en 4.3 es concavo en I, si $\Delta_1 > \Delta_2$.

un lema análogo para la concavidad, es con la condición $|\Delta_1 - \delta| < |\Delta_2 - \delta|$, donde $\xi$ debe satisfacer

$$\hat{\xi} \leq \xi < \tau_2 \text{ con } \hat{\xi} = \tau_2 + 2(\tau_2 - \tau_1)(\Delta_1 - \delta)/(\Delta_2 - \Delta_1).$$

# BIBLIOGRAFIA


* A GUIDE PRACTICAL TO SPLINE
  Carl de Boor
  P. Hall

* ELEMENTARY NUMERICAL ANALYSIS
  S. D. Conte
  Carl de Boor

* INTRODUCTION TO MATRIX COMPUTATIONS
  G. W. Stewart
  Academic Press.

* ON SHAPE PRESERVING QUADRATIC SPLINE INTERPOLATION
  Larry L. Schumaker
  SIAM J. NUMER. ANAL. Vol. 20, No. 4 August [illegible]