



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

División de Estudios de Posgrado

"MODELOS DEL ESPACIO DE TEICHMULLER

DE

UNA SUPERFICIE COMPACTA"

T E S I S

para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS
(M A T E M A T I C A S)

P r e s e n t a :

Mat. Ernesto Rosales González



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres Paula y Rodolfo y a mis

hermanos Rodolfo, Julio, Nora, María y Miguel



Quisiera agradecer:

A mi maestro y amigo Mike Porter por haberme introducido en el mundo de la Geometría Hiperbólica. Así como la comprensión e infinita paciencia que me tuvo durante el desarrollo del presente trabajo, también le agradezco sus valiosos comentarios e ideas que me transmitió en el transcurso del trabajo.

A mis amigos y Maestras así como al Instituto de Matemáticas, los cuales han aportado mucho de lo que se y de lo que soy.

Al Dr Guillermo Torres por todas sus enseñanzas y por haber aceptado escucharme y revisar el presente trabajo.

A mi amigo y maestro Xavier Gomez-Mont por el apoyo y entusiasmo que me ha dado durante toda mi carrera.

A Laura Ortiz por su cariño y amistad el cual me ha motivado para seguir adelante. da

A...



INDICE.

INTRODUCCION

LISTA DE SIMBOLOS IV

CAPITULO I...Topología de superficies 1

Clasificación de Superficies.....	1.1
Grupo Fundamental.....	1.2
Producto Libre de Grupos.....	1.3
Grupo fundamental de superficies de signatura (g,m)	1.4
Espacios Cubrientes.....	1.5

CAPITULO II...Geometría Hiperbólica y Superficies Hiperbólicas..... PP. 30

Geometría Hiperbólica.....	2.1
El plano complejo extendido y Transformaciones de Moebius....	2.1.2
Razón Cruzada.....	2.1.16
Modelos del Plano Hiperbólico.....	2.1.20
Modelo del disco de Poincaré.....	2.1.21
Modelo del semiplano.....	2.1.37
Modelo de Klein.....	2.1.45
Isometrías de \mathbb{H}^2	2.2
Isometrías Parabólicas.....	2.2.5
Isometrías Hiperbólicas.....	2.2.6

Isometrías Elípticas.....	2.2.7
Grupos Fuchsianos.....	2.3
Superficies Hiperbólicas.....	2.4
CAPITULO III...Espacio de Teichmuller	85
Definición y equivalencias.	
CAPITULO IV...Modelo de Fricke del Espacio de Teichmuller.....	95
Construcción del Polígono de Fricke asociado a un grupo marcado de signatura (g,m)	4.1
Parámetros del Modelo de Fricke.....	4.2
Construcción de (G, \mathcal{B}) con signatura $(0,3)$	4.2.2
Construcción de (G, \mathcal{B}) con signatura $(0,4)$	4.4
Construcción de (G, \mathcal{B}) con signatura $(0,m)$	4.5
Construcción de (G, \mathcal{B}) con signatura (g,m)	4.6
CAPITULO V...Modelo de Thurston del espacio de Teichmuller de una superficie compacta.....	145
Introducción.....	5.0
Estructuras Hiperbólicas Relativas en $(\mathbb{H}^2, S^1_\infty)$	5.1
Sismos en el Plano Hiperbólico.....	5.2
Teorema de los sismos.....	5.3

CAPITULO VI...Otros Modelos del Espacio de Teichmuller

Modelo de Thurston.....6.1
Modelo de Teichmuller.....6.2
Modelo de Bers.....6.3

BIBLIOGRAFIA..... p. 182

INDICE ALFABETICO..... p. 184

INTRODUCCION

En el siglo XIX, Riemann conjeturó que toda superficie simplemente conexa es o bien conformemente equivalente a la esfera S^2 (si la superficie es compacta), o bien al plano complejo \mathbb{C} , o bien al disco unitario Δ (si la superficie es no compacta), este resultado fue demostrado mas tarde por Koebe y Poincaré y es conocido como el teorema de uniformización [Ahlfors 2 pp 181].

Un problema mas general consiste en tomar en lugar de una superficie simplemente conexa, considerar una superficie compacta S con estructura conforme de genero g y parametrizar todas las estructuras conformes distintas que se le pueden dar a S .

Cuando g es mayor que uno, S se puede obtener como el cociente del disco unitario módulo la acción de un grupo de transformaciones de Moebius cuya acción en el disco es propiamente discontinua.

A fines del siglo XIX, Fricke probó que, si marcamos cada grupo G (tal que Δ/G es homeomorfa a S) con un conjunto de generadores \mathcal{B} con ciertas propiedades, e identificando a los grupos marcados donde dos grupos marcados (G, \mathcal{B}) , (G, \mathcal{B}') son equivalentes si hay una transformación de Moebius equivariante de Δ en Δ , que conjuga \mathcal{B} en \mathcal{B}' . Entonces el espacio de clases de equivalencia (llamado de Teichmüller) es homeomorfo a \mathbb{R}^{6g-6} (ver teorema 4.6.10). Los parámetros usados por Fricke eran obtenidos de los elementos de la marca \mathcal{B} . Mas tarde L. Keen y S. Wolpert, retomaron este problema, atacandolo con técnicas de geometría hiperbólica, con la cual se le da una interpretación geometrica a los parámetros de Fricke.

W. Thurston, trabajó en este problema, interpretando los puntos

del espacio de Teichmüller como clases laterales derechas de $PSL(2, \mathbb{R})$ visto (por restricción) como un subgrupo del grupo de homeomorfismos de S^1 en S^1 (ver teorema 5.1.4). Asoció a cada una de estas clases laterales, una única aplicación de Δ en Δ llamada sismo y probó que dados dos puntos del espacio de Teichmüller de la superficie S , entonces existe un único sismo, el cual manda uno en el otro (ver teorema 5.3.1).

Lo anterior se desarrolla en este trabajo como sigue:

Los capítulos I y II son casi en su totalidad preliminares utilizados en el transcurso del trabajo. En el capítulo I, se da, como una superficie S de género g , se puede obtener de un polígono identificando sus lados por medio de homeomorfismos, de tal forma que los lados se proyectan en la superficie en curvas cerradas simples las cuales generan al grupo fundamental de S , este conjunto de generadores constituirán una marca para la superficie S . Este grupo es determinado por los generadores y las relaciones entre ellos inducidas por la identificación, esto se hace en las secciones 1.1, ..., 1.4. En la sección 1.5 se prueba que el grupo fundamental es isomorfo al grupo de transformaciones cubrientes G el cual actúa en la cubierta universal de S , además S resulta ser el cociente de la cubierta universal de S módulo G .

En el capítulo II, se dan los elementos de la geometría hiperbólica y los modelos del plano hiperbólico que se utilizan en el trabajo así como algunas propiedades de las isometrías del plano hiperbólico. También se dan los elementos de grupos Fuchsianos requeridos en la tesis. En la sección 2.4 se define lo que se entiende por una superficie hiperbólica y se prueba que cuando la superficie tiene una superficie hiperbólica (de Riemann), entonces su cubierta universal es isométrica al plano hiperbólico, además su grupo

fundamental es isomorfo a un subgrupo G del grupo de isometrías del plano hiperbólico (el cual es isomorfo a $PSL(2, \mathbb{R})$). Aquí G resulta fuchsiano y la marca de la superficie induce una marca \mathcal{B} en el grupo G (esto último se da en el capítulo III).

En el capítulo III se da la definición del espacio de teichmüller y algunas equivalencias de esta.

En el capítulo IV se dan los parámetros de Fricke de acuerdo a los trabajos [Keen 3], [Wolpert 1].

En el capítulo V se da el modelo de Thurston y se prueba el teorema de los sismos (5.3.1).

En el capítulo VI se da una breve introducción a otros modelos del espacio de teichmüller.

LISTA DE SÍMBOLOS

z_{ij}	1.1.6	$T_v(z)$	2.1.29
$S_1 \# S_2$	1.1.10	R_θ	2.1.30
\mathbb{R}_+^2	1.1.11	\mathbb{P}^+	2.1.38
$p: P \longrightarrow P/\sim$	1.1.15	$Q(z)$	2.1.38
(g, m)	1.1.16	$d_2(z, w)$	2.1.39
$\mathcal{E}^0(I, X, x_0)$	1.2.1	$\text{Aut}(\mathbb{P}^+)$	2.1.40
$f_0 \sim_A f_1$	1.2.1	$\text{SL}(2, \mathbb{R})$	2.1.41
$\alpha \sim_x \beta$	1.2.1	$\text{PSL}(2, \mathbb{R})$	2.1.41
$f_0 \sim f_1$	1.2.1	Δ_K	2.1.46
$[\alpha]$	1.2.2	$\partial\Delta_K$	2.1.46
f_*	1.2.7	$d_K(z, w)$	2.1.48
\mathcal{A}	1.4.7	\mathbb{H}^2, S_∞^1	2.1.49
$p: \bar{X} \longrightarrow X$	1.5.1	$d_H(z, w)$	2.1.49
(\bar{X}, p)	1.5.1	$\text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$	2.1.49
$\bar{\alpha}$	1.5.2	$\Lambda(G)$	2.3.1
$\text{Aut}(\bar{X}, p)$	1.5.14	$A(s, s')$	2.3.16
$R(G)$	1.5.15	$D: S \longrightarrow \mathbb{H}^2$	2.4.9
$J: \Pi_1(X, x) \longrightarrow \text{Aut}(\bar{X}, p)$	1.5.17	(\mathbb{H}^2, p)	2.4.11
$\hat{\mathbb{C}}$	2.1.2	\mathbb{H}^2/G	2.4.14
$E: S^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$	2.1.3	λ	2.4.16
$d_0(z, w)$	2.1.4	$\hat{\alpha}$	2.4.18
$\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$	2.1.7	$\alpha * \beta$	3.1.2
$\text{GL}(2, \mathbb{C})$	2.1.7	$[\mathcal{A}]$	3.1.4
$\text{SL}(2, \mathbb{C})$	2.1.9	$(S, [\mathcal{A}])$	3.1.5
$\text{PSL}(2, \mathbb{C})$	2.1.9	$[S, [\mathcal{A}]]$	3.1.7
Δ	2.1.22	\mathcal{B}	3.1.12
$\partial\Delta$	2.1.22	(G, \mathcal{B})	3.1.15
$d_1(z, w)$	2.1.25	$\Psi_{(0, 3)}$	4.2.11
$\text{Aut}(\Delta)$	2.1.27		

$\mathbb{P}_{(0,4)}$	4.4.10
$\mathbb{P}_{(0,m)}$	4.5.8
$\mathbb{P}_{(g,m)}$	4.6.10
$\text{Hom}(S^1)$	5.0
\mathbb{H}	5.0
$\mathbb{H} \circ f$	5.1.0
$\mathbb{H} \setminus \text{Hom}(S^1)$	5.1.3
\mathbb{E}	5.1.4
$\Gamma: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$	5.2.2
λ -sismo.....	5.2.3
$\Gamma _A$	5.2.2
$\text{comp}(A, B)$	5.2.3
$(T, \lambda_s, \lambda_t)$	5.2.4
$\sigma(\ell, m)$	5.2.12
\bar{T}	5.2.16
∂T	5.2.16
\mathcal{P}_x	5.3.2
\mathcal{R}	5.3.2
XL	5.3.3
$\eta: XL \longrightarrow \mathbb{H}^2$	5.3.5
$\text{fix}(g \circ f)$	5.3.6
$\mathcal{K}(g \circ f)$	5.3.6
$N(\delta, \varepsilon)$	5.3.11
$\bar{\mathcal{K}}$	5.3.13
$h(g_x \circ f)$	5.3.14
β_ε	5.3.14
$\beta_\varepsilon * h$	5.3.14

CAPITULO ITopología de Superficies.1.1 Clasificación de Superficies.

En esta sección se dará la definición de superficie y de superficie con frontera, se dará también un teorema de clasificación de éstas en el caso de ser compactas.

1.1.1 Considérese el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología inducida por la norma usual y la distancia inducida por ésta, dada por

$$\| (x, y) \| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d(z, w) = \| w - z \|$$

1.1.2 Definición: Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de \mathbb{R}^2 , decimos que la pareja de vectores $\{v_1, v_2\}$ con $v_i \in \mathbb{R}^2$ es positivamente orientada, si existe una transformación lineal $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $A(e_i) = v_i$ y tal que el determinante de A es mayor que cero. Decimos que $\{v_1, v_2\}$ es negativamente orientada si $\{v_2, v_1\}$ es positivamente orientada.

1.1.3 Nota: observe que dada una pareja de vectores $\{v_1, v_2\}$ positivamente orientada, ésta, determina un sentido de recorrido alrededor del origen, por ejemplo la curva $C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $C(\theta) = re^{i\theta}$ recorre su imagen en el sentido del ángulo

medido de v_1 a v_2 (éste es menor que π). Si $\{v_1, v_2\}$ está negativamente orientada, entonces la curva $-C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $-C(\theta) = C(-\theta)$, recorre su traza en el sentido del ángulo de v_1, v_2 menor que π medido desde v_1 , ver figura 1.1.3.



fig. 1.1.3

Esto se puede extender a cualquier curva simple cerrada en $\mathbb{R}^2 - 0$ que rodee al origen, ya que ésta, se puede deformar continuamente a solo una de las curvas C o $-C$.

1.1.4 **Definición:** Decimos que una función diferenciable $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ preserva orientación en un punto $x \in \mathbb{R}^2$ si su derivada en x $D_x f$ es tal que la pareja $(D_x f(e_1), D_x f(e_2))$ es positivamente orientada.

Nota: ésto es equivalente a pedir que la función $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(z) = f(z+x) - f(x)$, en una vecindad del origen mapee curvas positivamente orientadas en curvas positivamente orientadas.

1.1.5 **Definición:** Una superficie topológica es un espacio topológico S conexo, Hausdorff, 2-numerable y una familia de abiertos

$\{(U_i, z_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ donde U_i es abierto de S y $z_i: U_i \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una función que cumple con las siguientes condiciones:

- i) $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$.
- ii) z_i es un homeomorfismo sobre su imagen para toda $i \in \mathbb{N}$.
- iii) $z_i(U_i) \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto de \mathbb{R}^2 para toda $i \in \mathbb{N}$.

A cada pareja (U_i, z_i) se le denomina carta cordenada y a la familia $\{(U_i, z_i)\}$ se le llama atlas de S .

1.1.6 En 1.1.5 cuando $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ definimos la función de transición $z_{ji}: z_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow z_j(U_i \cap U_j)$ como $z_j \circ z_i^{-1} |_{z_i(U_i \cap U_j)}$.

1.1.7 Cuando todas las funciones de transición son diferenciables decimos que la superficie es diferenciable. Pensando a \mathbb{R}^2 como en \mathbb{C} , si las funciones de transición son holomorfas decimos que la superficie es analítica, llamada también superficie de Riemann.

1.1.8 Decimos que S es orientable si las funciones de transición preservan orientación. Cuando S es diferenciable, entonces S es orientable si y solo si para cada función de transición z_{ji} y cada $p \in z_i(U_i \cap U_j)$ se tiene que el jacobiano de z_{ji} en p es positivo. Por ésto, si S es analítica entonces S es orientable.

1.1.9 Ejemplos de superficies compactas orientables:

- i) la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- ii) el toro $T_1 = S^1 \times S^1$.
- iii) la superficie compacta de género g denotada por $T_g =$ suma conexa de g toros (ver 1.1.10 para la definición),

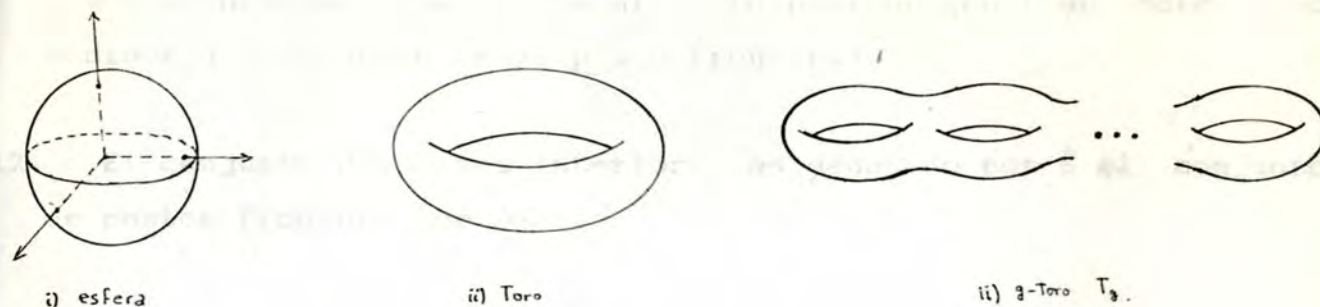


fig. 1.1.9

1.10 Definición: La suma conexa de dos superficies S_1, S_2 denotada por $S_1 \# S_2$ se define como sigue:

- i) se extrae el interior de un disco topológico a cada una de las superficies denotados por \hat{D}_1, \hat{D}_2 donde $\hat{D}_i \subset S_i \quad i=1, 2$.
- ii) se identifican las fronteras de los agujeros de $S_1 - \hat{D}_1$ y $S_2 - \hat{D}_2$ por un homeomorfismo h

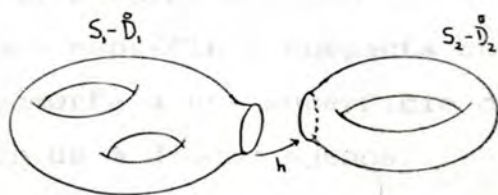


fig. 1.1.10

para más detalles consultar [Massey pg. 8].

1.11 Definición: Una superficie topológica con frontera es un espacio topológico Hausdorff S , tal que cada punto $p \in S$ tiene un entorno abierto homeomorfo a un disco abierto (en este caso decimos que el punto es interior), o bien homeomorfo al espacio

$$\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \mid y > 0\}$$

donde el homeomorfismo mapea al punto p al origen (en este caso decimos que el punto es un punto frontera).

1.1.12 El conjunto de puntos interiores es denotado por \mathring{S} el conjunto de puntos frontera por ∂S .

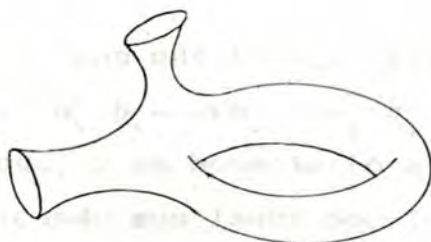


fig 1.1.12

1.1.13 **TEOREMA:** (Clasificación de superficies compactas orientables).

- 1) Sea S una superficie compacta orientable sin frontera entonces S es homeomorfa o bien a una esfera o a un toro o a una suma conexa de g toros con $g \in \mathbb{N}$.
- 2) Sea S una superficie compacta con frontera orientable. Entonces S es homeomorfa a una superficie compacta sin frontera menos el interior de m discos ajenos.

Demostración: [Massey].

■

1.1.14 En la demostración de este teorema se usa el hecho de que toda superficie compacta es triangulable. Con base en ésto, se prueba que toda superficie compacta se puede obtener módulo homeomorfismo a partir de una región poligonal cuyos lados son identificados por medio de homeomorfismos, lo cual se precisa a continuación.

1.1.15 Sea S una superficie compacta orientable con frontera. Entonces existe una región plana $P \subset \mathbb{R}^2$, con frontera poligonal orientada de $4g+3m$ lados orientados (ver fig. 1.1.15), los cuales recorridos ciclicamente están denominados como sigue:

$$a_1, b_1, a'_1, b'_1, \dots, a_g, b_g, a'_g, b'_g, c_1, e_1, c'_1, \dots, c_m, e_m, c'_m.$$

Además para cada i, j , con que $1 \leq i \leq g$, $1 \leq j \leq m$, existen homeomorfismos $f_i: a_i \rightarrow a'_i$ y $h_i: b_i \rightarrow b'_i$; $k_j: c_j \rightarrow c'_j$ que invierten la orientación y tales que, S es homeomorfo al espacio P/\sim , que se obtiene de P identificando sus lados por los homeomorfismos. Sea $\mathcal{P}: P \rightarrow P/\sim$ la proyección que me define la identificación. (ver fig. 1.1.15).

Nota: La pareja (g, m) determina a la superficie salvo por homeomorfismo. Es decir si S y S' son dos superficies obtenidas de polígonos de $4g+3m$ y $4g'+3m'$ lados respectivamente identificando sus lados de manera análoga a 1.1.15. Entonces S, S' son homeomorfas si y solo si $g=g'$ y $m=m'$.

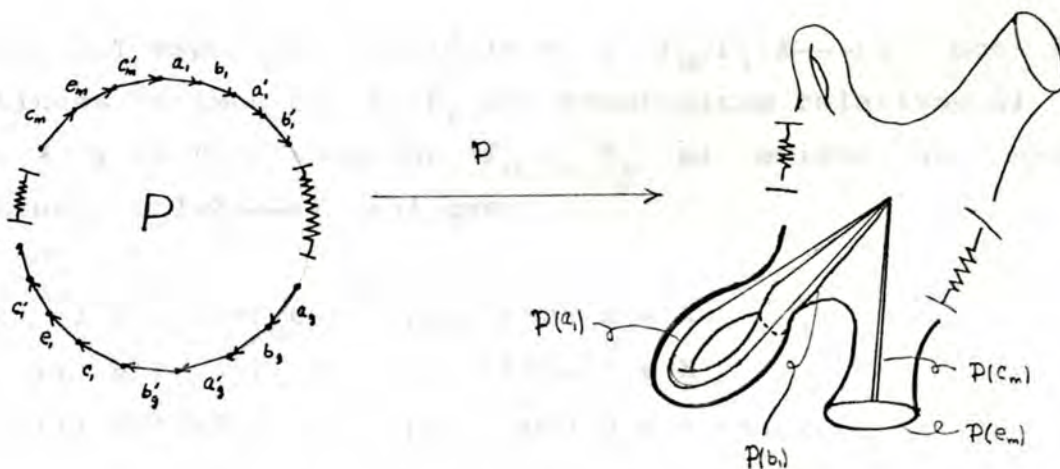


fig. 1.1.15

1.1.16 Sea S como en 1.1.15, a la pareja (g, m) se le denomina *signatura*

de S . Al número g se le llama el género de S . Cuando la superficie no es compacta pero es del mismo tipo de una superficie compacta \hat{S} de signatura (g, m) , entonces definimos la signatura de S como (g, m) . (ver

1.1.17 Al número $2-2g-m$ se le llama la característica de Euler de S y es denotada por

$$\chi(S) = 2 - 2g - m$$

se tiene que si S, S' son homeomorfos, entonces $\chi(S) = \chi(S')$ (ver nota de 1.1.15).

1.2 Grupo Fundamental

Para todo espacio topológico X y un punto x_0 en X , definiremos un grupo llamado el grupo fundamental de X basado en x_0 denotado por $\Pi_1(X, x_0)$ el cual sera muy útil para el estudio de superficies. Empezaremos con algunas definiciones que estaremos usando.

2.2.1 Sean X, Y espacios topológicos y $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ dos funciones continuas. Decimos que f_0, f_1 son homotópicas relativas al conjunto A de X , y la denotamos por $f_0 \sim_A f_1$ si existe una aplicación continua $H: I \times X \rightarrow Y$ tal que:

- i) $H(0, x) = f_0(x)$ para toda $x \in X$
- ii) $H(1, x) = f_1(x)$ para toda $x \in X$
- iii) $H(t, a) = f_i(a)$ para toda $a \in A$ $i = 1, 2$.

A la función H se le denomina homotopía. Cuando $A = \emptyset$, decimos simplemente que f_0, f_1 son homotópicas y lo denotaremos por

$$f_0 \sim f_1$$

Sea X un espacio topológico y x_0 un punto en X , sea $I=[0,1]$ y considérese el siguiente conjunto:

$$\mathcal{E}^0(I, X, x_0) = \{ \alpha: I \rightarrow X \mid \alpha \text{ es continua y } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \}$$

este conjunto consta de los caminos o lazos que empiezan y terminan en x_0 .

1.2.2 Definimos la siguiente relación en \mathcal{E}^0 :

Decimos que dos lazos $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^0$ están relacionados si $\alpha \sim_{(x_0)} \beta$ esto lo denotaremos por $\alpha \sim_{x_0} \beta$, en este caso diremos que son homotópicas y mencionaremos, en caso de ser necesario que la homotopía es relativa.

Esta relación es de equivalencia y al conjunto de clases de equivalencia lo denominaremos el grupo fundamental de X basado en x_0 el cual es denotado por $\Pi_1(X, x_0)$. A la clase de equivalencia de la curva α la denotaremos como $[\alpha]$.

A continuación definiremos un producto en $\Pi_1(X, x_0)$:

1.2.3 Definición: Dados $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$, definimos su producto como la clase de equivalencia de la curva denotada por $\alpha \cdot \beta$ la cual es definida como sigue:

$$\alpha \cdot \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

al producto de $[\alpha], [\beta]$ lo denotamos por $[\alpha] \cdot [\beta]$ y está dado por

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta]$$

Se puede ver que este producto está bien definido es decir no depende de los representantes elegidos para $[\alpha]$ y $[\beta]$. Además, tiene las siguientes propiedades:

1.2.4 i) Es asociativo, es decir, dados $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in \Pi_1(X, x_0)$ se tiene que $([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$.

ii) Denotemos por e , a la clase de equivalencia del lazo constante igual a x_0 entonces para toda $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$ se satisface:

$$e \cdot [\alpha] = [\alpha] \cdot e = [\alpha]$$

iii) Dado $\alpha \in \mathcal{C}^0$, denotaremos por α^{-1} a la curva definida por:

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$$

entonces se cumple que $[\alpha] \cdot [\alpha^{-1}] = e$.

1.2.5 El conjunto $\Pi_1(X, x_0)$ junto con el producto definido en 1.2.3 forma un grupo llamado el grupo fundamental de X basado en x_0 . Este grupo cumple con las siguientes afirmaciones cuyas demostraciones pueden consultarse en [Singer pp. 51, 52].

1.2.6 1) Si X es arcoconexo y $x_0, x_1 \in X$, entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\Pi_1(X, x_1)$.

1.2.7 2) Dados dos espacios topológicos X, Y , sean x_0, y_0 en X, Y respectivamente y sea $f: X \rightarrow Y$. Si $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^0(I, X, x_0)$ son tales que $\alpha \sim_{x_0} \beta$ (por lo tanto también $f \circ \alpha \sim_{f(x_0)} f \circ \beta$) entonces

$$f \circ \alpha \cdot f \circ \beta \sim_{f(x_0)} f \circ (\alpha \cdot \beta).$$

Esto induce un homomorfismo $f_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$ definido por

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

1.2.8 y es tal que si $g: Y \rightarrow Z$ es otra función continua entonces:

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

1.2.9 Además se cumple que si $f, g: X \rightarrow Y$ son homotópicas relativas a $\{x_0\} \subseteq X$, entonces $f_* = g_*$.

Con ésto estamos en posibilidades de determinar el grupo fundamental de un espacio producto a partir de los grupos fundamenteales de cada factor.

1.2.10 Sean X, Y dos espacios topológicos y sea $X \times Y$ su producto cartesiano. Entonces un mapeo $\alpha: I \rightarrow X \times Y$ definido por

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

es continuo si y solo si α_1, α_2 son continuas. Esto proporciona una biyección entre $\mathcal{E}^0(I, X \times Y, (x_0, y_0))$ y el conjunto:

$$\mathcal{E}^0(I, X, x_0) \times \mathcal{E}^0(I, Y, y_0)$$

1.2.11 Además, si $\alpha, \beta \in \mathcal{E}^0(I, X \times Y, (x_0, y_0))$ están dados por

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2); \quad \beta = (\beta_1, \beta_2)$$

y si $z_0 = (x_0, y_0)$, entonces $\alpha \sim_{z_0} \beta$ si y solo si $\alpha_1 \sim_{x_0} \beta_1$ y $\alpha_2 \sim_{y_0} \beta_2$. También, si $(\sigma_1, \sigma_2) = \alpha \cdot \beta$ entonces $\sigma_1 = \alpha_1 \cdot \beta_1, \sigma_2 = \alpha_2 \cdot \beta_2$. Con lo anterior se tiene el siguiente teorema:

1.2.12 TEOREMA: Sean X, Y, x_0, y_0, z_0 como en el párrafo anterior. Entonces el grupo fundamental de $X \times Y$ basado en z_0 es isomorfo al producto de grupos $\Pi_1(X, x_0) \times \Pi_1(Y, y_0)$. El isomorfismo asigna a cada $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$ la pareja $(p_*([\alpha]), q_*([\alpha]))$, donde p, q son las proyecciones de $X \times Y$ en X, Y respectivamente. ■

1.2.13 Corolario: $\Pi_1(T_1, z_0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Demostración: Es consecuencia del hecho de que $\Pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ y que $T_1 = S^1 \times S^1$ y del teorema 1.2.12. ■

Para el resto de las superficies compactas, el grupo fundamental tiene una estructura algebraica más complicada, lo cual detallaremos en las secciones 1.3 y 1.4. Antes daremos algunos conceptos que necesitaremos más adelante.

1.2.14 Definición: Decimos que dos espacios topológicos son del mismo tipo de homotopía, si existen aplicaciones continuas (llamadas equivalencias homotópicas) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow X$, tales que :

$$g \circ f \sim \text{Id}_X \quad \text{y} \quad f \circ g \sim \text{Id}_Y$$

1.2.15 TEOREMA: Sean X, Y dos espacios topológicos del mismo tipo de homotopía; sean f, g las equivalencias homotópicas, sea $x_0 \in X$. Si $y_0 = f(x_0)$ entonces la función

$$f_* : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$$

es un isomorfismo.

Demostración: Se sigue de la definición y de 1.2.9. ■

1.2.16 Definición: Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$, decimos que A es un retracto de X si existe una aplicación continua $r: X \rightarrow A$ llamada retracción, tal que $r(a) = a$ para toda a en A .

1.2.17 Definición: Decimos que A es un retracto por deformación de X si existe una retracción $r: X \rightarrow A$ tal que si $i: A \rightarrow X$ es la inclusión entonces $i \circ r = \text{Id}_A$.

1.2.18 TEOREMA: Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un retracto por deformación de X , sea $r: X \rightarrow A$ la retracción. Entonces r_* es un isomorfismo con inversa i_* .

Demostración: se sigue de 1.2.15. ■

1.2.19 Definición: Decimos que un espacio topológico X es simplemente conexo si su grupo fundamental es $\{e\}$.

13 Producto Libre de Grupos.

En esta sección definiremos en que consiste el producto libre

de una familia de grupos.

1.3.1 Definición: Dados dos grupos G_1, G_2 , el producto directo de G_1 y G_2 denotado por $G_1 \times G_2$ es el grupo cuyos elementos son los del producto cartesiano de G_1, G_2 y la multiplicación es definida como sigue:

$$(g_1, g_2) \cdot (g'_1, g'_2) = (g_1 \cdot g'_1, g_2 \cdot g'_2)$$

Esta definición se puede generalizar a una familia arbitraria de grupos de la siguiente manera:

1.3.2 Definición: Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos indexada por el conjunto de índices I , el producto de los elementos de la familia denotada por $\prod_{i \in I} G_i$, consiste en el producto cartesiano de la familia junto con la multiplicación definida coordenada a coordenada es decir: si $g, g' \in \prod_{i \in I} G_i$ entonces $(g \cdot g')_i = g_i \cdot g'_i$.

1.3.3 Definición: El producto débil de la familia de grupos $\{G_i\}_{i \in I}$ es el subgrupo de $\prod_{i \in I} G_i$ formado por los elementos $g \in \prod_{i \in I} G_i$ tales que todas las entradas menos un número finito son el elemento neutro del grupo correspondiente. A este grupo lo denotaremos por :

$$\prod_{i \in I} G_i$$

Además para cada $i \in I$ considerese la inclusión $i_i: G_i \longrightarrow \prod_{i \in I} G_i$ definidos por:

$$[i_i(g_i)]_j = \begin{cases} g_j & \text{si } i=j \\ e_i & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

El producto débil y los morfismos $\{i_i\}_{i \in I}$ están caracterizados por la siguiente propiedad denominada propiedad universal del producto débil:

- 1.3.4 Dado un grupo arbitrario G y una colección de homomorfismos $\{j_i\}_{i \in I}$ donde $j_i: G_i \rightarrow G$ $i \in I$. Entonces existe un único homomorfismo de grupos $f: \coprod_{i \in I} G_i \rightarrow G$ tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 G_i & \xrightarrow{i_i} & \coprod_{i \in I} G_i \\
 & \searrow j_i & \downarrow f \\
 & & G
 \end{array}$$

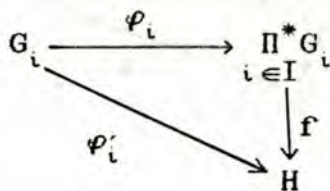
al homomorfismo f se le llama el coproducto de $\{j_i\}$ y suele denotarse por $\coprod_{i \in I} j_i$.

Esta forma de caracterizar grupos nos permitirá definir en general lo que llamaremos el producto libre de una familia de grupos :

- 1.3.5 Definición: Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos, definimos un producto libre de la familia y lo denotaremos por $\prod_{i \in I}^* G_i$, al grupo y una familia de morfismos $\{\varphi_i: G_i \rightarrow G\}_{i \in I}$ los cuales satisfacen la siguiente propiedad (llamada propiedad universal del producto libre):

- 1.3.6 Para todo grupo H y toda colección de homomorfismos $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ donde $\varphi_i: G_i \rightarrow G$ para toda $i \in I$, existe un único homomorfismo $f: \prod_{i \in I}^* G_i \rightarrow H$ el cual hace conmutar el siguiente diagrama para toda $i \in I$.

.3.7



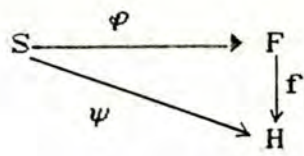
Nota: La propiedad 1.3.6 caracteriza al grupo $\prod_{i \in I}^* G_i$ en el sentido siguiente: si G' , $\{\varphi'_i\}$ son un grupo y una familia de morfismos $\varphi'_i: G_i \longrightarrow G'$ que cumplen con la propiedad descrita en 1.3.6, con G' en lugar de $\prod_{i \in I}^* G_i$ y φ'_i en lugar de φ_i entonces hay un único isomorfismo $f: \prod_{i \in I}^* G_i \longrightarrow G'$ el cual hace conmutar el diagrama de 1.3.7 con G' en lugar de H . Por esta razón es común hablar de el producto libre en lugar de un producto libre.

Más adelante probaremos que dada cualquier familia de grupos $\{G_i\}_{i \in I}$ entonces existe el producto libre de la familia. Por el momento nos ocuparemos de casos particulares y de algunos elementos necesarios

para probar la existencia de $\prod_{i \in I}^* G_i$ en general.

.3.8 Definición: Dado un conjunto S definimos un grupo abeliano libre generado por S como un grupo F junto con una función $\varphi: S \longrightarrow F$ tales que satisfacen la siguiente propiedad llamada propiedad universal del producto abeliano libre:

.3.9 Para todo grupo abeliano H y toda función $\psi: S \longrightarrow H$ existe un único homomorfismo $f: F \longrightarrow H$ tal que conmuta el siguiente diagrama:



3.10 Lema: Sea S un conjunto, entonces el grupo $F = \coprod_{s \in S} \mathbb{Z}$ es un grupo abeliano libre generado por S donde $\varphi: S \rightarrow F$ es definida para cada $s \in S$ por:

$$(\varphi(s))_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq s \\ 1 & \text{si } x = s \end{cases}$$

Demostración: es consecuencia inmediata de como se define F y φ . ■

3.11 Si identificamos cada elemento s con su imagen $\varphi(s)$, se tiene que todo elemento $z \in F$ se escribe de manera única, salvo por el orden de los factores como:

$$z = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_k^{m_k}$$

donde $\{x_i\}_{i=1}^k \subset S$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y $m_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos ajenos dos a dos, definiremos el producto libre de la familia mediante el proceso descrito a continuación:

3.12 Sea \mathcal{P} el conjunto de palabras formadas por elementos de la familia $\{G_i\}_{i \in I}$ es decir:

$$\mathcal{P} = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \bigcup_{j \in I} G_j \text{ y } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$$

a la palabra $()$ la llamaremos palabra vacía. Sea $G \subset \mathcal{P}$ el subconjunto de \mathcal{P} que consta de las palabras $p \in \mathcal{P}$ que satisfacen alguna de las dos siguientes propiedades:

1.3.13 i) $p = ()$, o bien

ii) si $p = (x_1, \dots, x_n)$ con $n \geq 1$ entonces dos términos consecutivos no pertenecen al mismo grupo G_i y ningún término es el elemento neutro de algún G_i .

1.3.14 Definimos en G el producto de dos elementos p, p' denotado por $p \cdot p'$ de la manera siguiente:

i) si $p' = ()$ entonces $p \cdot p' = p' \cdot p = p$.

ii) si $p = (x_1, \dots, x_n)$, $p' = (x'_1, \dots, x'_m)$ entonces se define el producto de p, p' en forma recursiva como sigue:

$$p \cdot p' = \begin{cases} (x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m), & \text{si } x_n, x'_1 \text{ no pertenecen al mismo } G_i \\ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \cdot x'_1, x'_2, \dots, x'_m), & \text{si } x_n, x'_1 \in G_i \text{ y } x_n \cdot x'_1 \neq e_i \\ (x_1, \dots, x_{n-1}) \cdot (x'_2, \dots, x'_m), & \text{si } x_n, x'_1 \in G_i \text{ y } x_n \cdot x'_1 = e_i \end{cases}$$

1.3.15 Este producto cumple con las siguientes propiedades:

i) es asociativo

ii) para todo $p \in G$ $() \cdot p = p \cdot () = p$.

iii) para toda $p \in G - \{()\}$, con $p = (x_1, \dots, x_n)$ el elemento denotado por $p^{-1} = (x_n^{-1}, \dots, x_1^{-1})$ es tal que $p \cdot p^{-1} = p^{-1} \cdot p = ()$.

1.3.16 Por lo anterior el conjunto G con el producto 1.3.14 es un

grupo. Además, se tiene la familia de morfismos $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ donde para cada $i \in I$ $\varphi_i: G_i \longrightarrow G$ es tal que $\varphi_i(x) = (x)$ para $x \in G_i$.

Identificando cada elemento $x \in G_i$ con $(x) \in G$, se tiene que si $p \in G$ esta dado por $p = (x_1, \dots, x_n)$ entonces p se escribe como :

$$p = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$$

Nota: Sea (x_1, \dots, x_n) en \mathcal{P} una palabra arbitraria, si multiplicamos los elementos consecutivos que pertenecen al mismo grupo, y eliminamos los productos que resulten el elemento neutro, hasta obtener un elemento en G llamada palabra reducida de \mathcal{P} , entonces esta es única es decir, si $z = (z_1, \dots, z_k)$ es tal que al reducir obtenemos las palabras (x_1, \dots, x_n) y (y_1, \dots, y_n) en G , entonces $m = n$ y $y_i = x_i$ para $i = 1, \dots, n$.

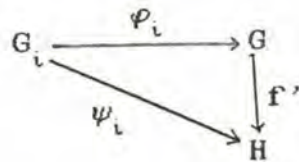
1.3.17 **TEOREMA:** El grupo G con el producto 1.3.14, y la familia de morfismos $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ dada en 1.3.16 son un producto libre de la familia $\{G_i\}_{i \in I}$.

Demostración: Tomese un grupo arbitrario H y una familia arbitraria de de homomorfismos $\{\psi_i\}_{i \in I}$. Definase $f: G \longrightarrow H$ de la siguiente manera:

Para cada $g \in G$ dado por $g = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ con $x_i \in G_{k_i}$ sea

$$f(g) = \psi_{k_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \psi_{k_n}(x_n)$$

si $f': G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos el cual hace conmutar el siguiente diagrama para cada $i \in I$:



entonces para toda $x \in G_i$ se tiene que:

$$f'(x) = f'(\varphi_i(x)) = \psi_i(x) = f(x)$$

de donde si $g = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ con $x_k \in G_{i_k}$, se tiene que:

$$f'(g) = f'(x_1) \cdot \dots \cdot f'(x_n) = \psi(x_1) \cdot \dots \cdot \psi(x_n) = f(g)$$

por lo tanto $f' = f$. Con lo que el grupo G y los morfismos $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ satisfacen la propiedad 1.3.6 .

■

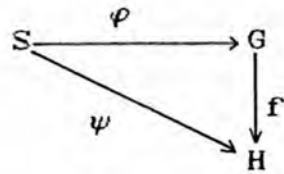
Al grupo G lo denotaremos como $\prod_{i \in I}^* G_i$ y lo llamaremos el producto libre de la familia.

A continuación definiremos un grupo libre generado por un conjunto S y lo que se entiende por una presentación de un grupo.

1.3.18 Sea S un conjunto arbitrario cuyos elementos están indexados por el conjunto I es decir $S = \{x_i\}_{i \in I}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Considerese para cada $i \in I$ el grupo cíclico $F_i = \mathbb{Z}$, denotaremos al $1 \in F_i$ por x_i . Sea $G = \prod_{i \in I}^* F_i$ y sea $\varphi: S \rightarrow G$ la función definida por $\varphi(x_i) = x_i$. Entonces el grupo G y la función φ satisfacen la siguiente propiedad:

1.3.19 Sea H un grupo arbitrario y $\psi: S \rightarrow H$ una función, entonces existe un único homomorfismo $f: G \rightarrow H$, el cual hace conmutar el

siguiente diagrama:



Esta propiedad es llamada comunmente propiedad universal del grupo libre generado por S y caracteriza al grupo G junto con el morfismo φ .

Con lo anterior estamos en condiciones de probar el siguiente teorema:

1.3.20 TEOREMA: Todo grupo H es la imagen de un homomorfismo definido en un grupo libre.

Demostración: Sea S un conjunto arbitrario de generadores del grupo H . Sea F el grupo libre generado por S , entonces la inclusión de S en H determina un epimorfismo de F sobre H .

■

1.3.21 Sea $S \subseteq G$ un conjunto de generadores del grupo G , sea F el grupo libre generado por S y sea $\varphi: S \rightarrow F$ como en 1.3.18. Sea $i: S \rightarrow G$ la inclusión y sea $f: F \rightarrow G$ el único homomorfismo tal que $f \circ \varphi = i$. Entonces todo elemento $r \neq e$ del nucleo de f es por definición una relación entre los elementos de S . De 1.3.16 cada relación r , se escribe de manera única como una palabra reducida formada por los elementos de S . Esta palabra vista en G coincide con el elemento

neutro.

- 1.3.22 Definición: Sea $\mathcal{F} = \{r_i\}_{i \in I}$ una familia de relaciones, decimos que una relación es dependiente de \mathcal{F} si r pertenece al subgrupo normal N de F generado por \mathcal{F} :

$$N = \langle \{f r_i f^{-1} \mid f \in F \text{ y } r_i \in \mathcal{F}\} \rangle$$

Cuando N es el núcleo de f , entonces N está determinado por \mathcal{F} , si esto pasa diremos que \mathcal{F} es un conjunto completo de relaciones. En este caso el grupo G está determinado salvo isomorfismo por el conjunto de generadores y el conjunto de relaciones \mathcal{F} .

- 1.3.23 Definición: Una presentación de un grupo G es una pareja (S, \mathcal{F}) con S un conjunto de generadores de G y \mathcal{F} es un conjunto completo de relaciones. La presentación es finita si tanto S como \mathcal{F} son finitos.

Con esto tenemos la herramienta algebraica necesaria para calcular los grupos fundamentales de las superficies de tipo (g, m) lo cual haremos en la siguiente sección.

1.4 Grupo fundamental de superficies de signatura (g, m)

El grupo fundamental de una superficie de tipo (g, m) es un grupo libre con relaciones llamado también grupo libre con amalgamamiento. Para dar una descripción de este grupo necesitaremos el siguiente resultado mismo que no probaremos, una demostración puede consultarse en el libro [Massey pp.113]

1.4.1 TEOREMA: (Seifert-Van Kampen). Sea X un espacio topológico arcoconexo, y sean U_1 y U_2 abiertos arcoconexos de X tales que $X=U_1 \cup U_2$ y $U_1 \cap U_2$ es arcoconexo y no vacío. Sea $x_0 \in U_1 \cap U_2$ y considerese las siguientes inclusiones:

$$r_1: U \longrightarrow X$$

$$r_2: U_2 \longrightarrow X$$

$$r_3: U_1 \cap U_2 \longrightarrow X$$

$$f_1: U_1 \cap U_2 \longrightarrow U_1$$

$$f_2: U_1 \cap U_2 \longrightarrow U_2$$

estas funciones inducen los homomorfismos entre los grupos fundamentales denotados como sigue:

$$\rho_1: \Pi_1(U, x_0) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)$$

$$\rho_2: \Pi_1(U_2, x_0) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)$$

$$\rho_3: \Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)$$

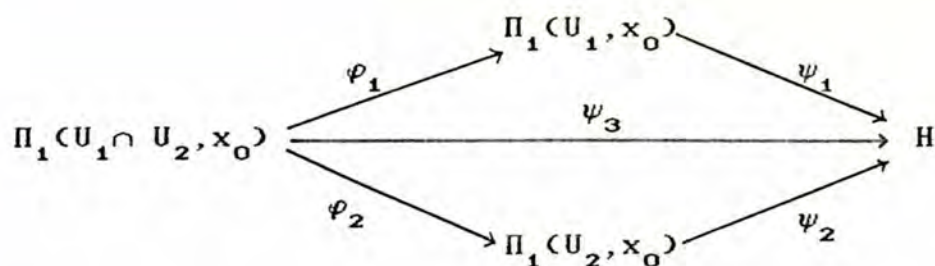
$$\varphi_1: \Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \longrightarrow \Pi_1(U_1, x_0)$$

$$\varphi_2: \Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \longrightarrow \Pi_1(U_2, x_0)$$

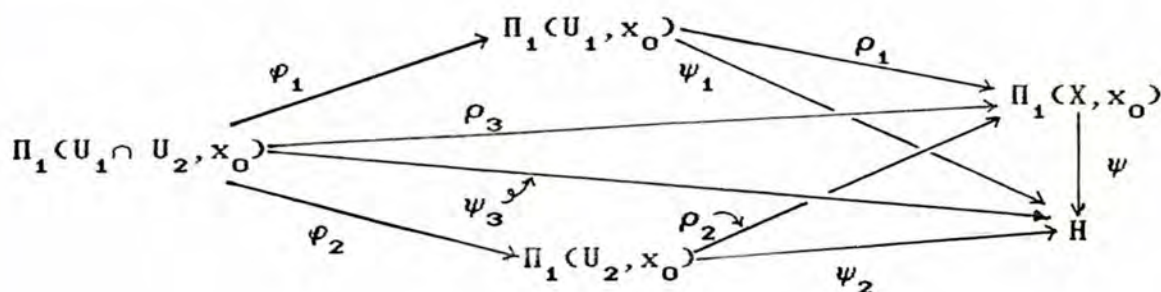
los cuales hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \Pi_1(U_1, x_0) & & \\
 & \nearrow \varphi_1 & & \searrow \rho_1 & \\
 \Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & & & & \Pi_1(X, x_0) \\
 & \xrightarrow{\rho_3} & & & \\
 & \searrow \varphi_2 & & \nearrow \rho_2 & \\
 & & \Pi_1(U_2, x_0) & &
 \end{array}$$

1.4.2 Si H es un grupo arbitrario y ψ_1, ψ_2, ψ_3 son homomorfismos tales que hacen conmutar el siguiente diagrama:



entonces existe un único homomorfismo $\psi: \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow H$ tal que conmuta el siguiente diagrama:



Una primera consecuencia de este teorema es la siguiente:

- 1.4.3 **TEOREMA:** Si $U_1 \cap U_2$ es simplemente conexo, entonces $\Pi_1(X, x_0), \{\rho_1, \rho_2\}$ es el producto libre de los grupos $\Pi_1(U_1, x_0), \Pi_1(U_2, x_0)$.

Demostración: Ya que $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) = \{e\}$, ψ_1 y ψ_2 pueden ser cualquiera, por lo tanto la condición 1.4.2 es equivalente a 1.3.6 de donde $\Pi_1(X, x_0), \{\rho_1, \rho_2\}$ es un producto libre de $\Pi_1(U_1, x_0), \Pi_1(U_2, x_0)$

- 1.4.4 **Corolario:** Si el espacio X es la unión de dos círculos C, C' identificados en un punto x_0 , entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es libre con dos

generadores.

Demostración: Tomese $U_1 = X - \{x\}$, $U_2 = X - \{y\}$ donde $x \in X - C'$, $y \in X - C$. Entonces $U_1 \cap U_2 = X - \{x, y\}$ es simplemente conexo. Además U_1 y U_2 tienen el mismo tipo de homotopía de C' y C respectivamente por lo que $\Pi_1(U_1, x_0) = \langle [\alpha] \rangle$ y $\Pi_1(U_2, x_0) = \langle [\alpha'] \rangle$ donde α, α' son parametrizaciones simples de C y C' respectivamente que empiezan en x_0 . Aplicando el teorema 1.4.3 concluimos que $\Pi_1(X, x_0)$ es un grupo libre generado por $\{[\alpha], [\alpha']\}$.

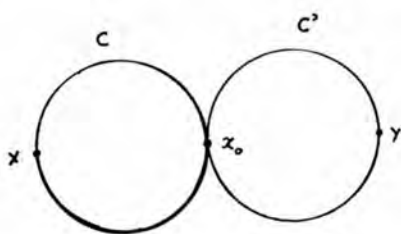


fig 1.4.4

■

Si X' es homeomorfo a S^2 menos dos puntos o a S^2 menos dos discos ajenos, (espacios que tienen el mismo tipo de homotopía que el espacio X), se sigue que $\Pi_1(X', x')$ es un grupo libre con dos generadores.

1.4.5 Por inducción se puede ver que el grupo fundamental de una esfera menos m puntos (o menos m discos ajenos) es un grupo libre con m generadores $\{[\alpha_1], \dots, [\alpha_m]\}$ donde cada α_i es una curva simple cerrada que rodea sólo una vez a uno y sólo un punto o disco que se extrajo.

4.7 1) Para $(g, m) = (1, 0)$, ya teníamos por 1.2.13 que $\Pi_1(S, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Para ilustrar demostraremos este hecho utilizando los resultados de esta sección.

Recordemos que en este caso se tiene que $S = T_1$ el cual se obtiene de un cuadrado P identificando los lados como se indica en la figura 1.4.7 (ver 1.1.15). Donde $\mathcal{P}: P \longrightarrow S$ es la proyección.

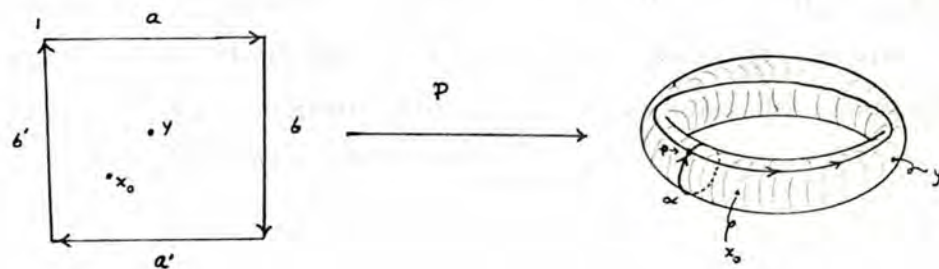


fig. 1.4.7

Sea y el centro de P . Sea $\bar{y} = \mathcal{P}(y)$ y sea $U_1 = S - \{\bar{y}\}$. Si U_2 es la imagen del interior de P , entonces $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ son abiertos arcoconexos y U_2 es simplemente conexo. De 1.4.6 se obtiene que el homomorfismo $\rho_1: \Pi_1(U_1, x_0) \longrightarrow \Pi_1(S, x_0)$ es sobre y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene a la imagen de ρ_1 . Además si α, β son las imágenes de a, b respectivamente bajo la proyección \mathcal{P} , entonces $\alpha\beta$ es un retracto por deformación de U_1 de donde $\Pi_1(U_1, x_0)$ es un grupo libre con dos generadores: $[\alpha], [\beta]$. Como $U_1 \cap U_2$ tiene el tipo de homotopía de S^1 , entonces $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ es un grupo cíclico generado por una curva que rodea una vez al punto y , la cual llamaremos γ . Esta curva cumple con $\rho_1([\gamma]) = [\alpha] \cdot [\beta] \cdot [\alpha^{-1}] \cdot [\beta^{-1}]$. Por lo que $\Pi_1(S, x_0)$ es isomorfo al grupo libre generado por $[\alpha], [\beta]$ los cuales satisfacen la

relación $[\alpha] \cdot [\beta] \cdot [\alpha^{-1}] \cdot [\beta^{-1}] = e$. Esto determina una presentación finita para el grupo $\Pi_1(S, x_0)$.

2) Para la superficie de signatura (g, m) se procede de manera análoga:

Sea P el polígono de $4g+3m$ lados y $p: P \longrightarrow S$ la proyección dados en 1.1.15, sea y el centro de P y sea $U_1 = p(P - \{y\})$, sea $U_2 = p(\hat{P})$ y $x_0 \in U_1 - \{p(y)\}$. Entonces $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ satisfacen las condiciones del teorema 1.4.6, por lo tanto el grupo fundamental $\Pi_1(U_1, x_0)$ es libre generado por las clases de homotopía de las curvas del siguiente conjunto:

$$\mathcal{A} = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_j) \text{ con } 1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq m$$

donde $\alpha_i = p(a_i)$; $\beta_i = p(b_i)$; $\gamma_j = p(c_j \cdot e_j \cdot c'_j)$.

1.4.8 Definición: Al conjunto \mathcal{A} lo llamaremos base canónica de $\Pi_1(S, x_0)$.

Por otra parte $\Pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$ es un grupo cíclico generado por la clase de homotopía de la curva:

$$\gamma = \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_1^{-1} \cdot \beta_1^{-1} \cdot \dots \cdot \alpha_g \cdot \beta_g \cdot \alpha_g^{-1} \cdot \beta_g^{-1} \cdot \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_m$$

y por 1.4.6 el grupo fundamental de S es un grupo libre con relaciones generado por \mathcal{A} , cuyos elementos satisfacen la relación siguiente:

1.4.9

$$\left[\prod_{i=1}^g (\alpha_i \cdot \beta_i \cdot \alpha_i^{-1} \cdot \beta_i^{-1}) \right] \cdot \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_m = e.$$

5 Espacios cubrientes

En esta sección definiremos lo que es un espacio cubriente y algunos resultados relacionados con estos, además se estudiarán algunas consecuencias en superficies orientables de tipo de homotopía finito.

Supondremos que todos los espacios topológicos mencionados son arcoconexos y localmente arcoconexos.

5.1 Definición: Sea X un espacio topológico. Un espacio cubriente de X es una pareja (\bar{X}, p) donde \bar{X} es un espacio topológico y $p: \bar{X} \rightarrow X$ es una aplicación continua tal que todo punto $x \in X$, tiene una vecindad U arcoconexa con la propiedad de que cada componente de $p^{-1}(U)$ es aplicada homeomorfamente por p en U . A la aplicación p se le llama proyección o proyección cubriente.

Una de las propiedades más importantes de este tipo de espacios es la dada por el siguiente lema:

5.2 Lema: Sea (\bar{X}, p) un espacio cubriente de X y $\bar{x}_0 \in \bar{X}$ tal que $x_0 = p(\bar{x}_0)$. Entonces para toda curva continua $\alpha: I \rightarrow X$ que empieza en x_0 , existe una única curva $\bar{\alpha}: I \rightarrow \bar{X}$, la cual empieza en \bar{x}_0 y es tal que $p \circ \bar{\alpha} = \alpha$.

Demostración: ver [Singer pp 1.

5.3 Definición: A la curva $\bar{\alpha}$ del lema anterior le llamaremos

levantamiento de α a partir de x_0 .

Algunas consecuencias de 1.5.2 son las siguientes, donde $X, (\bar{X}, p)$ son como antes (las demostraciones vienen en [Singer pp 58, 59]):

1.5.4 Teorema: Si f, g son funciones continuas de un espacio topológico Y en \bar{X} , tales que $p \circ f = p \circ g$, entonces $f = g$ o $\{y \in Y \mid f(y) = g(y)\} = \emptyset$.

■

1.5.5 Teorema: Sea Y un espacio topológico compacto y sea $f: Y \rightarrow \bar{X}$, continua. Si $F: I \times Y \rightarrow X$ es una homotopía tal que $F(0, y) = p \circ f(y)$ para toda $y \in Y$. Entonces existe una homotopía $\bar{F}: I \times Y \rightarrow \bar{X}$ que satisface lo siguiente:

- i) $\bar{F}(0, y) = f(y)$ para toda $y \in Y$.
- ii) $p \circ \bar{F} = F$.

■

Nota: En 1.5.5 \bar{F} se puede elegir de tal forma que $\bar{F}(t, y)$ es constante en cada intervalo de la variable t donde $F(t, y)$ es constante.

Algunas consecuencias importantes de lo anterior son las siguientes cuyas demostraciones pueden consultarse en [Singer pp 60]:

1.5.6 Proposición: Sea $\bar{x} \in \bar{X}$ y $x = p(\bar{x})$. Entonces $p_*: \Pi_1(\bar{X}, \bar{x}) \rightarrow \Pi_1(X, x)$ es inyectiva.

1.5.7 Proposición: Para todo $x \in X$, $p^{-1}(x)$ tiene la misma cardinalidad. ■

1.5.8 Corolario: Sea $\bar{x} \in \bar{X}$, $x \in X$ tales que $p(\bar{x}) = x$. Entonces hay una biyección entre $Q = p^{-1}(x)$ y el conjunto de clases laterales de $\Pi_1(X, x)$ módulo $p_*(\Pi_1(\bar{X}, \bar{x}))$.

Demostración: Sea $\bar{y} \in Q$. Como \bar{X} es arcoconexo, sea $\bar{\gamma}$ un lazo de \bar{x} al punto \bar{y} . Sea $\gamma = p \circ \bar{\gamma}$ y sea $y = p(\bar{y})$. La biyección estará dada por la siguiente función:

$$q: Q \longrightarrow \Pi_1(X, x) / p_*(\Pi_1(\bar{X}, \bar{x}))$$

$$q(\bar{y}) = [\gamma] \cdot p_*(\Pi_1(\bar{X}, \bar{x}))$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

i) Está bien definida: esto es porque si $\bar{\gamma}'$ es otro lazo de \bar{x} a \bar{y} implica que $\bar{\gamma}^{-1} \cdot \bar{\gamma}'$ es cerrada y $[\bar{\gamma}^{-1} \cdot \bar{\gamma}'] \in \Pi_1(\bar{X}, \bar{x})$. Si $\gamma' = p \circ \bar{\gamma}'$ entonces

$$[\gamma^{-1}] \cdot [\gamma'] = p_*([\bar{\gamma}^{-1} \cdot \bar{\gamma}'])$$

por lo tanto $[\gamma'] \in q(\bar{y})$.

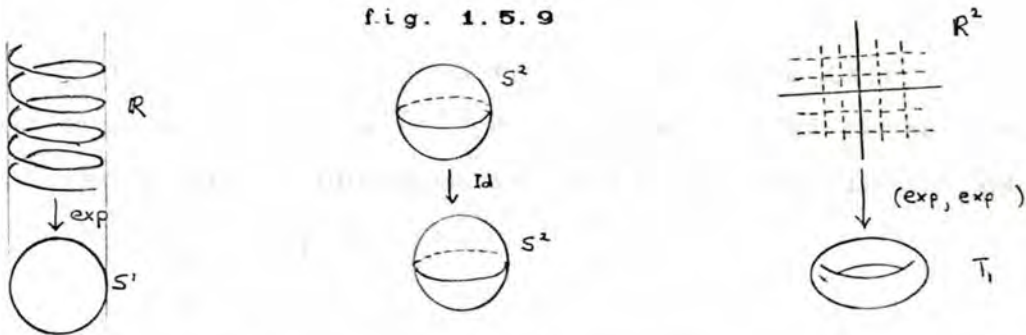
ii) Es sobre: ya que \bar{X} es arcoconexo.

iii) Es inyectiva: para ver esto, sean $\bar{y}, \bar{y}' \in Q$ y $\bar{\gamma}, \bar{\gamma}'$ curvas que unen a \bar{x} con \bar{y}, \bar{y}' respectivamente, y sea $\gamma = p \circ \bar{\gamma}, \gamma' = p \circ \bar{\gamma}'$ tales que $[\gamma'] \in q(\bar{y})$, implica que existe una curva cerrada α basada en x tal que $\gamma' \simeq_x \gamma \cdot \alpha$, por lo que los levantamientos respectivos $\bar{\gamma}', \bar{\gamma} \cdot \bar{\alpha}$ son homotópicos relativos al conjunto $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ esto por 1.5.5 por lo tanto $y' = \bar{\gamma}'(1) = \bar{\gamma} \cdot \bar{\alpha}(1) = \bar{\gamma}(1) = \bar{y}$

lo que concluye la demostración. ■

5.9 Algunos ejemplos de espacios cubrientes son:

- i) para $X=S^1$, $(\bar{X}, p) = (\mathbb{R}, \exp)$ donde $\exp(t) = e^{it}$.
- ii) para $X=S^2$, $(\bar{X}, p) = (S^2, \text{Id})$.
- iii) para $X=T_1$, $(\bar{X}, p) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, (\exp, \exp))$.



5.10 Definición: Sea X un espacio topológico y sea (\bar{X}, p) un espacio cubriente de X . Si \bar{X} es simplemente conexo (ie. $\Pi_1(\bar{X}, \bar{x}) = \{e\}$), entonces a (\bar{X}, p) se le denomina cubierta universal de X .

5.11 Teorema: Sea X un espacio topológico tal que todo punto $x \in X$ tiene una vecindad simplemente conexa. Si H es un subgrupo de $\Pi_1(X, x_0)$, con $x_0 \in X$. Entonces existe un espacio cubriente (\bar{X}, p) de X tal que $p_*(\Pi_1(\bar{X}, \bar{x})) = H$, donde $\bar{x} \in \bar{X}$ es tal que $p(\bar{x}) = x$.

Demostración: ver [Singer pp 62]. ■

5.13' Corolario: Dado X un espacio topológico localmente simplemente

conexo existe una cubierta universal de X .

Demostración: Tomemos $H=\{e\}$ en 5.1.11. ■

1.5.13" Definición: Decimos que dos espacios cubrientes $(\bar{X}_1, p_1), (\bar{X}_2, p_2)$ del espacio X son isomorfos si existe un homeomorfismo $h: \bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}_2$ tal que $p_1 = p_2 \circ h$.

1.5.13" Teorema: Sea X un espacio topológico, sean $(\bar{X}, p), (\bar{X}', p')$ cubiertas del espacio X y sean \bar{x}, \bar{x}' elementos de \bar{X}, \bar{X}' respectivamente tales que $x=p(\bar{x})=p'(\bar{x}')$. Entonces $(\bar{X}, p), (\bar{X}', p')$ son isomorfos si y sólo si $p(\pi_1(\bar{X}, \bar{x})) = p'(\pi_1(\bar{X}', \bar{x}'))$.

Demostración: ver [Singer pp 67]. ■

Corolario: Cualquier par de cubiertas universales del espacio X son isomorfas.

Demostración: es consecuencia inmediata del teorema 1.5.13". ■

1.5.14 Definición: Sea X un espacio topológico. Una transformación de cubierta en un espacio cubriente (\bar{X}, p) de X , es un homeomorfismo $h: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ tal que $p \circ h = p$. Al conjunto de transformaciones de cubierta de (\bar{X}, p) lo denotaremos por $\text{Aut}(\bar{X}, p)$.

Es inmediato de la definición que $\text{Aut}(\bar{X}, p)$ junto con la composición forma un grupo, el cual actúa sobre \bar{X} tiene además otras propiedades importantes pero antes de darlas veamos las siguientes definiciones:

1.5.15 Definición: Sea X un espacio topológico, al conjunto de homeomorfismos de X en X lo denotaremos por $\text{Aut}(X)$. Sea $G \subset \text{Aut}(X)$:

- i) El grupo G actúa libremente sobre X si para toda $g \in G$ tal que existe $x \in X$ con la propiedad de que $g(x) = x$ implica que $g = \text{Id}$.
- ii) El grupo G actúa discontinua en X si para todo compacto K en X se tiene que $g(K) \cap K = \emptyset$ salvo para un número finito de elementos $g \in G$.
- iii) Decimos que un punto $x \in X$ es regular si existe una vecindad $U \subset X$ de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$ para toda $g \in G$ distinto de Id . El conjunto de puntos regulares se denotará por $R(G)$. Decimos que G actúa discontinua en X si $R(G) = X$.
- iv) Cuando G es un grupo topológico decimos que G es discreto si $\{\text{Id}\}$ es abierto.
- v) G actúa transitivamente en X si para todo $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$.
- vi) G actúa propriadamente discontinua en un punto $x \in X$ si existe una vecindad U de x con la propiedad de que $g(U) \cap U = \emptyset$ para toda $g \in G - \text{Id}$.

1.5.16 Teorema: Sea X un espacio topológico y (X, p) la cubierta universal. Entonces para toda $x \in X$, el grupo $\text{Aut}(\bar{X}, p)$ actúa libremente y

transitivamente en $p^{-1}(x)$.

Demostración: Sea $\bar{x}, \bar{y} \in p^{-1}(x)$, definiremos el homeomorfismo $h: X \longrightarrow X$ mediante el siguiente proceso:

i) Sea $\bar{z} \in \bar{x}$, sea $\bar{\gamma}$ una curva continua que une a \bar{x} con \bar{z} , sea $\gamma = p \circ \bar{\gamma}$. Sea $\bar{\gamma}_1$ el levantamiento de γ a partir de \bar{y} . Entonces definase $h(\bar{z}) = \bar{\gamma}_1(1)$.

ii) h esta bien definida: si $\bar{\gamma}'$ es otra curva de \bar{x} al punto \bar{z} y $\gamma' = p \circ \bar{\gamma}'$, entonces la curva $\bar{\gamma}^{-1} \cdot \bar{\gamma}'$ es homotópica a la curva constante. Por consiguiente las curvas γ, γ' son homotópicas relativo al conjunto $\{x, z\}$ donde $z = p(\bar{z})$ y por lo tanto sus levantamientos a partir del punto \bar{y} son homotópicos relativo al conjunto $\{\bar{y}, \bar{\gamma}(1)\}$. Esto implica que $\bar{\gamma}(1) = \bar{\gamma}'(1)$.

iii) La función h es continua: para ver esto considere U una vecindad regular (ver 1.5.1) del punto z , sea \bar{U}_1, \bar{U}_2 las componentes de $p^{-1}(U)$ que contienen a los puntos $\bar{z}, h(\bar{z})$ respectivamente. Entonces se tiene lo siguiente:

$$h|_{\bar{U}_1} = (p|_{\bar{U}_2})^{-1} \circ p|_{\bar{U}_1} : \bar{U}_1 \longrightarrow \bar{U}_2$$

iv) La función h es homeomorfismo: intercambiando los papeles de \bar{x}, \bar{y} en i) se puede definir la inversa de h .

v) La función h es única: esto se sigue de que si $h' \in \text{Aut}(X, p)$ es tal que $h'(\bar{x}) = \bar{y}$, como $p \circ h = p \circ h' = \text{Id}$, se sigue de 1.5.4 que $h = h'$.

Con ésto tenemos el siguiente resultado:

5.17 Teorema: Sea X un espacio topológico y (\bar{X}, p) la cubierta universal de X , sea $x \in X$, $\bar{x} \in \bar{X}$. Entonces los grupos $\Pi_1(X, x)$ y $\text{Aut}(\bar{X}, p)$ son isomorfos, al isomorfismo lo denotaremos por:

$$J: \Pi_1(X, x) \longrightarrow \text{Aut}(\bar{X}, p)$$

Demostración: Definamos J como sigue:

(1) Sea $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$, considerese $\bar{\alpha}$ el levantamiento de α a partir de \bar{x} ; de 1.5.16 existe un único homeomorfismo denotado por $h_{[\alpha]} \in \text{Aut}(\bar{X}, p)$ con la propiedad de que $h_{[\alpha]}(\bar{\alpha}(1)) = \bar{\alpha}(1)$, definimos entonces $J([\alpha]) = h_{[\alpha]}$.

(2) La función J definida en (1) es una biyección: esto es por la unicidad del homeomorfismo $J([\alpha])$, por lo que resulta inyectiva, y es sobre porque $\text{Aut}(\bar{X}, p)$ actúa transitivamente y \bar{X} es arcoconexo.

(3) La función J es isomorfismo: para ver esto considerese $[\alpha], [\beta]$ elementos del grupo $\Pi_1(X, x)$, denotemos por $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\beta}', \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ a las siguientes curvas:

$\bar{\alpha}$ es el levantamiento de α a partir del punto \bar{x} .

$\bar{\beta}$ es el levantamiento de β a partir del punto \bar{x} .

$\bar{\beta}'$ es el levantamiento de β' a partir del punto $\bar{\alpha}(1)$

$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ es el levantamiento de $\alpha \cdot \beta$ a partir del punto \bar{x} .

estas curvas satisfacen lo siguiente:

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}' ; \quad \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}(1) = \bar{\beta}'(1).$$

sean h_1, h_2, h_3 , los elementos únicos de $\text{Aut}(\bar{X}, p)$ determinados

en 1.5.16 los cuales satisfacen las siguientes propiedades:

h_1 manda \bar{x} en $\bar{\alpha}(1)$.

h_2 manda \bar{x} en $\bar{\beta}(1)$.

h_3 manda \bar{x} en $\bar{\alpha \cdot \beta}(1)$.

por definición de J se tiene que $h_1 = J([\alpha])$; $h_2 = J([\beta])$; $h_3 = J([\alpha \cdot \beta])$; como $h_1 \circ h_2(\bar{x}) = h_1(\bar{\beta}(1)) = \bar{\beta}'(1) = \bar{\alpha \cdot \beta}(1)$ lo cual implica que $h_1 \circ h_2 = h_3$ y por lo tanto $J([\alpha]) \circ J([\beta]) = J([\alpha \cdot \beta])$. ■

1.5.18 Corolario: La acción del grupo $\text{Aut}(\bar{X}, p)$ en X es libre, transitiva, y propiamente discontinua.

Demostración: Se sigue de que p es un mapeo cubriente y del teorema 1.5.16. ■

1.5.19 Teorema: Sean S, S' superficies y sea $h: S \longrightarrow S'$ un homeomorfismo. Sean $(\bar{S}, p), (\bar{S}', p')$ cubiertas universales de S, S' respectivamente. Sea $\bar{x} \in \bar{X}, x = p(\bar{x}), x' = h(x)$, sea $\bar{x}' \in \bar{X}'$ tal que $x' = p'(\bar{x}')$, entonces:

i) Existe un único homeomorfismo $\bar{h}: \bar{X} \longrightarrow \bar{X}'$ con la propiedad de que $p' \circ \bar{h} = h \circ p$ y $\bar{h}(\bar{x}) = \bar{x}'$.

ii) Existe un único isomorfismo de grupos denotado por

$$h^*: \text{Aut}(X, p) \longrightarrow \text{Aut}(X', p')$$

con la propiedad de que $\bar{h} \circ g = h^*(g) \circ \bar{h}$.

Demostración: denotemos por $G = \text{Aut}(\bar{X}, p)$ y $G' = \text{Aut}(\bar{X}', p')$. Sean $J: \Pi_1(X, x) \longrightarrow G$, $J': \Pi_1(X', x') \longrightarrow G'$ los isomorfismos dados por 1.5.17. Definase $h^* = J' \circ h_* \circ J^{-1}$, como h es homeomorfismo se tiene que h^* es un isomorfismo de grupos.

Definase ahora \bar{h} por el siguiente proceso:

Sea $\bar{z} \in \bar{X}$, sea $\bar{\gamma}$ una curva que une a \bar{x} con \bar{z} , sea $\gamma = p \circ \bar{\gamma}$, $\gamma' = h \circ \gamma$ y sea $\bar{\gamma}'$ el levantamiento de γ' a partir de \bar{x}' con esto definase por fin $\bar{h}(\bar{z}) = \bar{\gamma}'(1)$. Claramente se tiene que $p' \circ \bar{h}(\bar{z}) = h \circ p(\bar{z})$. Para ver que está bien definida, que es continua que tiene inversa continua y que es única los argumentos son análogos a los utilizados en la demostración de 1.5.16 ii), iii), iv), v).

Solo resta verificar que se satisface que para todo $g \in G$, $\bar{h} \circ g$ es igual a $h^*(g) \circ \bar{h}$, para esto basta ver que se cumple para un sólo punto, ya que

$$\begin{aligned} p' \circ \bar{h} \circ g &= h \circ p \circ g \\ &= h \circ p = p' \circ \bar{h} \\ &= p' \circ h^*(g) \circ \bar{h} \end{aligned}$$

para ver ésto, sea $[\gamma] = J^{-1}(g)$, entonces si $\bar{\gamma}$ es el levantamiento de γ a partir de \bar{x} , se cumple que $\bar{\gamma}(1) = g(\bar{x})$. Sea $\gamma' = h \circ \gamma$ y sea $\bar{\gamma}'$ su levantamiento a partir de \bar{x}' . De la definición de \bar{h} se tiene que:

$$\bar{h}(g(x)) = \bar{\gamma}'(1) = J'([\gamma'])(\bar{x}')$$

pero $[\gamma'] = h_*([\gamma])$ y $\bar{x}' = \bar{h}(\bar{x})$ por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{h}(g(x)) &= J' \circ h_* \circ J^{-1}(g)(\bar{h}(\bar{x})) \\ &= h^*(g) \circ \bar{h}(\bar{x}). \end{aligned}$$

con lo cual queda probado el teorema.

CAPITULO IIGeometría Hiperbólica y
Superficies Hiperbólicas2.1 Geometría Hiperbólica.

En esta sección estudiaremos algunos resultados importantes acerca del plano hiperbólico y definiremos lo que es una estructura hiperbólica en una superficie. También probaremos que toda superficie de signatura (g,m) con $2-2g-m < 0$, admite una estructura hiperbólica.

2.1.1 Una geometría es un espacio X junto con varios tipos de conjuntos distinguidos (puntos, líneas, planos, círculos etc.), los cuales satisfacen ciertas relaciones entre ellos, llamados axiomas o postulados. Un ejemplo de este tipo de estructuras es el de la geometría euclídeana, estudiada a fondo por los griegos y recopilada por Euclides en su libro Los Elementos. Aquí, el espacio X consiste en el plano, los conjuntos distinguidos son puntos, líneas y círculos y las relaciones entre ellos consta de 5 postulados.

En el transcurso de los años este conjunto de axiomas se fue completando hasta que Hilbert estableció un conjunto completo de axiomas, los cuales se dividen en 5 grupos (se pueden consultar con más detalle en [Wolfe pp 13]). Estos grupos son los siguientes:

I Postulados de incidencia.

- II Postulados de orden.
- III Postulados de Congruencia.
- IV Postulado de paralelismo.
- V Postulados de continuidad.

Los postulados del Grupo I dan relaciones de incidencia entre los conjuntos distinguidos, por ejemplo:

- dos puntos determinan una y solo una recta.
- cada recta tiene al menos 2 puntos.

Los postulados del grupo II dan un orden a cada recta, lo que permite orientarlas.

Los del grupo III determinan cuando dos segmentos son congruentes lo cual provee de una métrica al espacio X .

Los del grupo V dan un orden arquimideano a cada recta el cual, junto con el principio de continuidad [Wolfe pp 10], dan una estructura de espacio métrico completo al espacio X .

El grupo IV consta sólo de un postulado comunmente conocido como el 5° postulado o postulado de las paralelas, el cual dice lo siguiente:

5°: "Dada una recta ℓ y un punto $x \in X - \ell$, entonces existe una única recta que pasa por x y no corta a ℓ ".

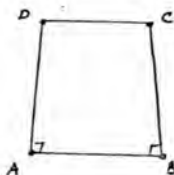
Hay muchas maneras equivalentes de enunciar este postulado, algunas de las cuales fueron utilizadas para tratar de probar el 5° postulado a partir de los otros cuatro enunciados por Euclides en su libro.

Algunos de estos enunciados equivalentes son por ejemplo:

- "la suma de los ángulos interiores de un triángulo es π ."
- "existen triángulos semejantes que no son congruentes."

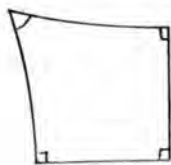
No fué sino hasta el siglo XVIII en que Sacchieri en Italia y Lambert en Alemania, supusieron hechos aparentemente absurdos equivalentes a la negación del 5° postulado. Hicieron ésto sin darse cuenta de que estaban trabajando en una geometría valida pero no-euclideana.

La idea de Sacchieri era suponer la existencia de un cuadrilátero con vértices A,B,C,D con $\angle ABC = \angle DAB = 90^\circ$ y tal que $\overline{DA} = \overline{BC}$. Este cuadrilátero es llamado cuadrilátero de Sacchieri.



Sin usar el 5° postulado se puede probar que el ángulo en los vértices C,D son iguales. El supuso que este ángulo era o bien obtuso o bien agudo. e investigó las consecuencias de esta suposición.

Lambert en forma parecida introdujo un cuadrilátero llamado cuadrilátero de Lambert el cual tiene la propiedad de que tres de sus ángulos son rectos y Lambert supuso que el 4° ángulo es o bien agudo o bien obtuso.



Legendre supuso que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que π .

En el siglo XIX fueron Gauss, Lobachewsky y Bolyai quienes se dieron cuenta de la posibilidad de una geometría distinta de la euclídeana.

Cada una de las suposiciones "absurdas" resulta equivalente a una y sólo una de los siguientes enunciados:

5°' : "dada una recta ℓ y un punto $x \in X - \ell$, entonces todas las líneas que pasan por x intersectan a ℓ ."

5°" : "dada una recta ℓ y un punto $x \in X - \ell$, entonces existen dos o más rectas que pasan por x y que no cortan a ℓ ."

En el 1° caso se trata de la geometría elíptica y en el segundo de la GEOMETRIA HIPERBOLICA.

En lo que sigue nos enfocaremos más al estudio de los modelos de la geometría Hiperbólica de Poincaré o del Disco, del Semiplano y el modelo de Klein. También estudiaremos algunas propiedades de sus isometrías.

21.2 El plano complejo extendido y Transformaciones de Moebius.

Sea \mathbb{C} el plano complejo. El plano complejo extendido denotado por $\hat{\mathbb{C}}$, consiste en el conjunto \mathbb{C} junto con el punto al infinito " ω " ie. $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\omega\}$.

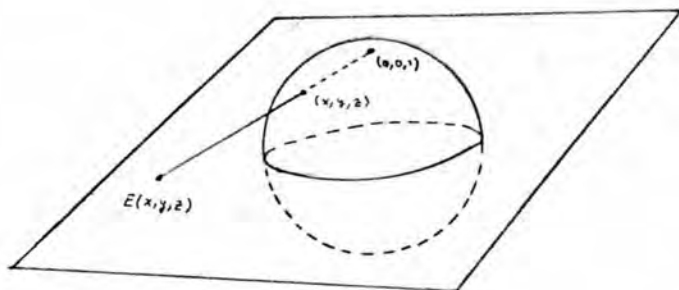
1.3 La topología en $\hat{\mathbb{C}}$ es la inducida por la proyección estereográfica de la esfera unitaria S^2 al plano complejo extendido la cual es definida como sigue:

$$E: S^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$E(x, y, z) = \begin{cases} \infty & \text{si } z = -1 \\ \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) & \text{si } z \neq -1 \end{cases}$$

La inversa esta dada por el mapeo $E^{-1}: \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2$ tal que

$$E^{-1}(z) = \begin{cases} (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty \\ \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right) & \text{si } z = x+iy \end{cases}$$



La restricción de E al conjunto $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ es un homeomorfismo conforme sobre su imagen.

21.4 Para el punto ∞ , se define el sistema fundamental de vecindades por la familia de complementos de círculos centrados en el origen. Esto da al conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ una topología que hace de E un homeomorfismo. Hay una métrica en $\hat{\mathbb{C}}$ que induce esta topología, la cual esta dada por: $d_0: \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ donde $d_0(z, w) = \|E^{-1}(z) - E^{-1}(w)\|$, aqui $\| \cdot \|$ denota la norma usual en \mathbb{R}^3 . Una fórmula explícita para esta métrica es la siguiente [Beardon pp 22]:

$$d_0(z, w) = \begin{cases} \frac{2\|z-v\|}{(1+\|z\|^2)^{1/2}(1+\|v\|^2)^{1/2}} & \text{Si } z, w \neq \infty \\ \frac{2}{(1+\|z\|^2)^{1/2}} & \text{Si } w = \infty \end{cases}$$

2.1.5 Una función $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ es una transformación de Moebius si existen números $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad-bc \neq 0$ y f esta dada por:

$$f(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{aw+b}{cw+d} \quad z \in \hat{\mathbb{C}}, w \in \mathbb{C}.$$

Denotaremos a $f(z)$ simplemente por $\frac{az+b}{cz+d}$. Con esto f es invertible y la inversa esta dada por $f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. Al conjunto de transformaciones de Moebius lo denotaremos por $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.

2.1.8 Considerese el conjunto de matrices invertibles con entradas en los complejos dado por

$$GL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad-bc \neq 0 \right\}$$

Hay una función denotada por $F: GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ la cual es definida de la siguiente manera:

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = f \text{ donde } f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

La función F es un homomorfismo de grupos cuyo kernel es:

$$\ker(F) = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{C} - \{0\} \right\}$$

2.1.9 Por lo que el conjunto denotado por $PSL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C}) / \ker(F)$ es isomorfo a $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$.

Si $SL(2, \mathbb{C})$ denota al subconjunto de elementos de $GL(2, \mathbb{C})$ cuyo determinante es uno, entonces se tiene que:

2.1.10
$$PSL(2, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm Id\}$$

- 2.1.11 El grupo $GL(2, \mathbb{C})$ tiene una topología natural si lo consideramos como un subconjunto de \mathbb{C}^4 , esta es inducida por la norma:

$$\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}$$

- 2.1.12 Con esta topología $GL(2, \mathbb{C})$ es un grupo topológico ya que el producto de matrices depende continuamente de las entradas. Por lo que una sucesión $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $GL(2, \mathbb{C})$ converge a una matriz M si y solo si la sucesión $\{M^{-1}M_n\}$ converge a la matriz identidad.

- 2.1.13 Esta topología induce otra en $PSL(2, \mathbb{C})$ en donde una sucesión $\{f_n\}$ converge a la Id si y solo si para cada n existe una matriz $M_n \in SL(2, \mathbb{C})$ tal que $\lim M_n = Id$, y $F(M_n) = f_n$.

- 2.1.14 Por otro lado $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ tiene una topología natural dada por la distancia entre dos funciones continuas $f, g: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida como sigue:

$$D_0(f, g) = \sup_{z \in \hat{\mathbb{C}}} \{ d_0(f(z), g(z)) \}$$

- 2.1.15 esta topología es conocida como la topología uniforme en el conjunto de funciones continuas definidas en $\hat{\mathbb{C}}$. Con esto, resulta que el mapeo F es una función continua y el isomorfismo que induce de $PSL(2, \mathbb{C})$ en $Aut(\hat{\mathbb{C}})$ es un homeomorfismo.

- 2.1.16 Razon Cruzada.

- 2.1.17 Definición: La razon cruzada de $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ es el número denotado

por $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ y definido como:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}$$

la cual se extiende a todo $\hat{\mathbb{C}}$ considerando las siguientes relaciones como definicion:

$$\frac{c}{0} = \infty ; c \cdot \infty = \infty \quad \text{si } c \neq 0$$

$$\frac{0}{c} = 0 ; c \pm \infty = \infty \quad \text{si } c \neq \infty$$

La razón cruzada de cuatro puntos tiene dos propiedades que estaremos usando y las cuales las damos en los siguientes lemas.

1.18 Lema: Sea $g \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ y $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$. Sea $w_i = g(z_i)$ $i=1, 2, 3, 4$. Entonces $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.

Demostración: Basta probarlo considerando a g de la forma $g(z) = az + b$ $a \neq 0$, o bien de la forma $g(z) = \frac{1}{z}$ ya que los elementos de esta forma generan $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, para el primer caso se tiene que: $w_i = az_i + b$ $i=1, 2, 3, 4$ substituyendo en la definición de razón cruzada se obtiene $[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$. Para el caso en que $g = \frac{1}{z}$ se procede de manera analoga.

■

1.19 Lema: Si $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ entonces $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ si y solo si z_1, z_2, z_3, z_4 están en un mismo círculo (aquí pensamos en la recta como un círculo de radio infinito junto con el punto al infinito).

Demostración: Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$. El conjunto de puntos z que satisfacen $[z_1, z_2, z_3, z] = r$ con r en los reales, coincide con el

conjunto de puntos z que cumplen con la siguiente igualdad:

$$(z-z_3)(\bar{z}-\bar{z}_2)(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_3)=(z-z_2)(\bar{z}-\bar{z}_3)(z_1-z_3)(\bar{z}_1-\bar{z}_2).$$

Claramente z_1, z_2, z_3 están en este conjunto el cual coincide con el conjunto de soluciones de la ecuación:

$$Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+D=0$$

donde $A=2\operatorname{Re}(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_3)$; $B=\bar{z}_3(\bar{z}_1-\bar{z}_2)(z_1-z_3)-\bar{z}_2(z_1-z_3)(\bar{z}_1-\bar{z}_3)$ y $C=2\operatorname{Re}(\bar{z}_2 z_3(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_3))$. Esta ecuación es de un círculo si $A \neq 0$ y de una recta si $A=0$. Con lo que queda probada el lema. ■

2.1.20 Modelos del plano hiperbólico.

En esta sección determinaremos varios modelos para la Geometría Hiperbólica, es decir definiremos un espacio X y una familia de subconjuntos distinguidos los cuales satisfacen los postulados de la geometría hiperbólica (2.1.1).

2.1.21 Modelo del disco o Modelo de Poincaré

En este modelo el espacio X consiste en el conjunto que denotaremos por Δ y es definido como:

$$2.1.22 \quad \Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

definimos también la frontera de Δ como :

$$\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Aquí una línea o recta hiperbólica es la parte en Δ de un círculo euclideo en \mathbb{C} , ortogonal a la frontera de Δ (pueden ser de radio infinito en cuyo caso es un diámetro de Δ).

2.1.23 El ángulo entre dos líneas que se intersectan en un punto x se define como el ángulo que forman sus vectores tangentes en el punto x .

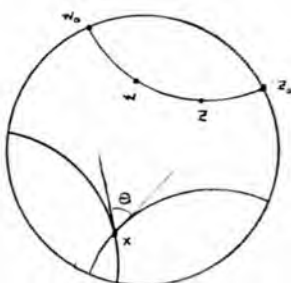


fig 2.1.23

En Δ se define la siguiente distancia:

2.1.24 Sean $z, w \in \Delta$ y sea C el círculo euclideo ortogonal a la frontera que pasa por z, w . Sea $\{z, w\} = C \cap \partial\Delta$, donde z, w son de tal forma que el arco de $C \cap \Delta$ que va de z_0 a z no contiene a w . Con estas condiciones y por 2.1.19 la razón cruzada $[z, w_0, z_0, w]$ es positiva o cero (en este último caso $z=w$). Definimos entonces la distancia (llamada hiperbólica) entre dos puntos z, w como:

$$2.1.25 \quad d_1(z, w) = \frac{1}{2} \ln([z, w_0, z_0, w])$$

Es fácil verificar que el conjunto Δ con las rectas definidas y la distancia dada, cumplen con los postulados de la geometría hiperbólica. Constituyendo así un modelo para la geometría Hiperbólica.

A continuación describiremos el conjunto de isometrías que preservan orientación el cual denotaremos por:

$$2.1.26 \quad I_1^+ = \{g \in \Delta \mid d_1(g(z), g(w)) = d(z, w), z, w \in \mathbb{C}, \text{ y } g \text{ preserva orientación}\}.$$

Si g es una isometría implica que g preserva el ángulo entre dos curvas y además si compongo con la función $\frac{1}{z}$, g se extiende a una función conforme de $\hat{\mathbb{C}}$ en $\hat{\mathbb{C}}$, de donde g es la restricción de un elemento de $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ al conjunto Δ .

$$2.1.27 \quad \text{Definición: Denotamos como } \text{Aut}(\Delta) = \{g \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \mid g(\Delta) = \Delta\}.$$

De lo expuesto en 2.1.26 se tiene que $\text{Aut}(\Delta) \subset I_1^+$. Ahora bien de la proposición 2.1.18 y de la definición de la distancia d_1 en 2.1.25 podemos concluir que $\text{Aut}(\Delta) = I_1^+$. Además se puede determinar explícitamente al conjunto $\text{Aut}(\Delta)$, lo cual se hace en el siguiente teorema. En donde L denota al conjunto:

$$\{g \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \mid g(z) = \frac{az+b}{bz+a} \text{ con } |a|^2 - |b|^2 = 1\}$$

$$2.1.28 \quad \text{Teorema: } \text{Aut}(\Delta) = L.$$

Demostración: Sea $g \in L$, con $g(z) = \frac{az+b}{bz+a}$. Si $z \in \partial\Delta$ se tiene entonces que

$$|g(z)| = \left| \frac{az+b}{bz+a} \right| = \left| \frac{a+bz}{bz+a} \right| \quad |z|=1$$

por lo tanto g aplica $\partial\Delta$ en si misma. Como $g(0) = \frac{b}{a} \in \Delta$ implica que $g(\Delta) = \Delta$ y por lo tanto $L \subset \text{Aut}(\Delta)$.

Para probar la otra contención, sea $g \in \text{Aut}(\Delta)$ y sea $w = g(0)$.

Definimos la transformación $T_v \in L$ como:

$$2.1.29 \quad T_v(z) = \frac{z-v}{-\bar{v}z+1} = \frac{(1-|v|^2)^{1/2}}{(1-|v|^2)^{1/2}} \frac{(z-v)}{(-\bar{v}z+1)}$$

entonces la función $T_v \circ g \in \text{Aut}(\Delta)$ y manda al 0 en el 0. Del Lema de Schwarz [Ahlfors 1 pp 135] se tiene que $T_v \circ g(z) = e^{-i\theta} z$ para toda $z \in \hat{\mathbb{C}}$, donde $\theta \in [0, 2\pi]$ es constante, por lo tanto $g(z) = T_v^{-1} \circ (e^{-i\theta} z) \in L$. Esto prueba que $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \subset L$. ■

A continuación daremos una fórmula explícita para la distancia entre dos puntos.

2.1.30 Sea $R_\phi \in \text{Aut}(\Delta)$ definida por $R_\phi(z) = e^{i\phi} z$, donde $\phi \in \mathbb{R}$. Entonces:

Dado $z, w \in \Delta$ y z_0, w_0 como en 2.1.25. Sea T_v como en 2.1.29, sea θ el argumento de $T_v(z)$, se tiene que

$$d_1(z, w) = d_1(R_{-\theta} \circ T_v(z), R_{-\theta} \circ T_v(w)) = d_1(R_{-\theta} \circ T_v(z), 0)$$

como $R_{-\theta} \circ T_v(z) = r$ con $r = |T_v(z)|$, también se tiene que $R_{-\theta} \circ T_v(z_0) = 1$ y $R_{-\theta} \circ T_v(v_0) = -1$. Por lo tanto:

$$d_1(z, w) = \frac{1}{2} \ln(|r, -1, 1, 0|)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

por lo que $d_1(z, w)$ se expresa por la siguiente fórmula:

$$2.1.31 \quad d_1(z, w) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{|-\bar{v}z+1| + |z-v|}{|-\bar{v}z+1| - |z-v|}\right)$$

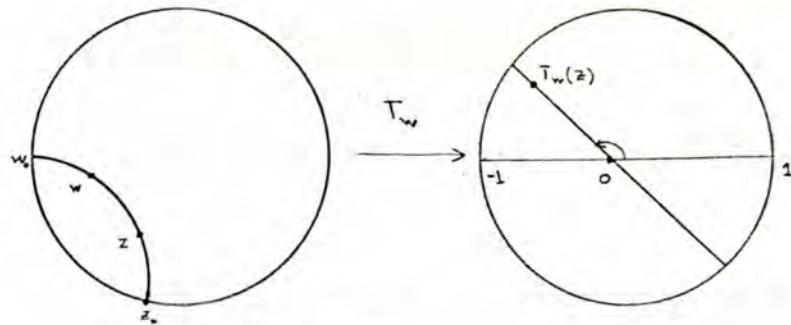


fig. 2.1.30

En términos de geometría diferencial este modelo se describe como sigue:

Para toda $z \in \Delta$ sea $T_z \Delta$ el espacio tangente a Δ en el punto z . Definimos un producto escalar en $T_z \Delta$ de la manera siguiente:

$$1.32 \quad \langle v_1, v_2 \rangle_z = \frac{v_1 \cdot v_2}{(1 - |z|^2)^2}$$

donde $v_1, v_2 \in T_z \Delta$, y $v_1 \cdot v_2$ denota el producto escalar usual en \mathbb{R}^2 .

Sea $\gamma: [0, 1] \longrightarrow \Delta$ una curva diferenciable, definimos la longitud hiperbólica de γ como:

$$1.33 \quad |\gamma|_1 = \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt$$

en donde $\frac{\|\gamma'(t)\|}{1 - |\gamma(t)|^2} = (\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)})^{1/2}$.

Con esto tenemos el siguiente teorema:

1.34 Teorema: Sea $g \in \text{Aut}(\Delta)$ y $\bar{\gamma} = g \circ \gamma$. Entonces $|\gamma|_1 = |\bar{\gamma}|_1$.

Demostración: Si $g(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, implica que

$$\frac{\|\bar{\gamma}'(t)\|}{1-|\gamma(t)|^2} = \frac{\|(g \circ \gamma)'(t)\|}{1-|g \circ \gamma(t)|^2}$$

pero $\|(g \circ \gamma)'(t)\| = \left\| \frac{dg}{dz}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right\| = \frac{\|\gamma'(t)\|}{\|b\gamma(t) + \bar{a}\|^2}$

de donde
$$\frac{\|(g \circ \gamma)'(t)\|}{1-|g \circ \gamma(t)|^2} = \frac{\|\gamma'(t)\|}{|b\gamma(t) + \bar{a}|^2 \left(1 - \left| \frac{a\gamma(t) + b}{b\gamma(t) + \bar{a}} \right|^2\right)}$$

$$= \frac{\|\gamma'(t)\|}{1-|\gamma(t)|^2}$$

En estos términos podemos definir una distancia entre dos puntos $z, w \in \Delta$ como sigue:

2.1.35 $d'_1(z, w) = \inf \{ |\gamma|_1 \mid \gamma: [0, 1] \longrightarrow \Delta, \gamma(0) = z, \gamma(1) = w \}$

la cual es invariante bajo la acción de $\text{Aut}(\Delta)$. Con esto tenemos que si $z, w \in \Delta$ y R_θ, T_ν, r son definidos como en 2.1.30, entonces:

$$d'_1(z, w) = d'_1(R_{-\theta} \circ T_\nu(z), 0) = d'_1(r, 0)$$

de donde podemos obtener una expresión para $d'_1(z, w)$ de la siguiente manera:

$$d'_1(z, w) = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{\|\gamma'(t)\|}{1-|\gamma(t)|^2} dt \mid \gamma: [0, 1] \longrightarrow \Delta, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = r \right\}$$

2.1.36 tomando $\gamma(t) = rt$

$$= \int_0^r \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2} (\ln(1+r) - \ln(1-r))$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \left| \frac{z-\nu}{-\bar{\nu}z+1} \right|}{1 - \left| \frac{z+\nu}{-\bar{\nu}z+1} \right|}\right)$$

$$=d_1(z, w)$$

De 2.1.36 se tiene que la curva que une a z con w , y que tiene la mínima longitud es el arco del círculo ortogonal a $\partial\Delta$ (puede ser un diámetro de Δ) y que pasa por z, w . A estas curvas que minimizan longitud son llamadas geodésicas las cuales coinciden con las rectas hiperbólicas.

Nota: con la notación de 2.1.32, se define el ángulo hiperbólico entre dos vectores tangentes v_1, v_2 como el valor $\theta \in [0, \pi]$ que satisface:

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle_z}{(\langle v_1, v_1 \rangle_z \langle v_2, v_2 \rangle_z)^{1/2}} = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

de donde θ concide con el ángulo euclideano entre v_1, v_2 .

Mas adelante estudiaremos con mas detalle el grupo $\text{Aut}(\Delta)$. Por ahora continuaremos con los modelos de la geometria hiperbolica.

2.1.37 Modelo del semiplano

2.1.38 Considérese el conjunto $\mathbb{P}^+ = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{Im}(z) > 0\} \cup \{\infty\}$. Tomese la siguiente transformación $Q \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ definida por:

$$Q(z) = \frac{iz + i}{-z + 1}$$

Esta transformación mapea al disco unitario cerrado denotado por $\bar{\Delta}$ en el conjunto $\bar{\mathbb{P}}^+ = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$, además si $z \in \partial\Delta$, entonces $\text{Im}Q(z) = 0$. Por lo que Q aplica biyectivamente a Δ en \mathbb{P}^+ y a $\partial\Delta$ en el eje real unión el punto al infinito.

Denotemos por d_2 la distancia en \mathbb{P}^+ inducida por Q , es decir:

$$\begin{aligned} 2.1.39 \quad d_2(z, w) &= d_1(Q^{-1}(z), Q^{-1}(w)) \\ &= \frac{1}{2} \ln([Q^{-1}(z), w', z', Q^{-1}(w)]) \end{aligned}$$

donde z', w' son los extremos del círculo ortogonal a $\partial\Delta$ que pasa por $Q^{-1}(z), Q^{-1}(w)$ ver 2.1.24.

Del lema 2.1.18 se tiene que

$$2.1.40 \quad d_2(z, w) = \frac{1}{2} \ln([z, w_0, z_0, w])$$

donde z_0, w_0 son los extremos del círculo ortogonal a $\partial\mathbb{P}^+$ que pasa por z, w en el orden que indica la figura 2.1.40.

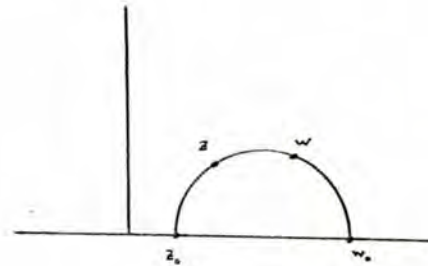


fig 2.1.40

De 2.1.23 y 2.1.18, se sigue

que las isometrías que preservan orientación están dadas por el conjunto $\text{Aut}(\mathbb{P}^+)$, el cual coincide con el conjunto:

$$Q \circ \text{Aut}(\Delta) \circ Q^{-1} = \{Q \circ g \circ Q^{-1} \mid g \in \text{Aut}(\Delta)\}$$

2.1.41 Se puede ver que este conjunto coincide con el conjunto:

$$\{g \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \mid g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad-bc=1\}$$

además el morfismo F definido en 2.1.18 induce por restricción, uno del conjunto $\text{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \right\}$, sobre el conjunto $\text{Aut}(\mathbb{P}^+)$. De esto se obtiene un isomorfismo entre $\text{Aut}(\mathbb{P}^+)$ y el conjunto

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}\}$$

En términos de geometría diferencial, tenemos que el producto

escalar definido en 2.1.32 en $T_z \Delta$ induce uno en $T_v \mathbb{P}^+$ con $w=Q(z)$, el cual esta dado como sigue:

Sean $u_1, u_2 \in T_v \mathbb{P}^+$ y sean $v_1, v_2 \in T_z \Delta$ tales que $v_i = \frac{dQ^{-1}}{dw}(v) \cdot u_i$, $i=1, 2$. Entonces el producto escalar de u_1, u_2 denotado por $\langle\langle u_1, u_2 \rangle\rangle_v$ se obtiene de la siguiente manera:

$$1.42 \quad \langle\langle u_1, u_2 \rangle\rangle_v = \langle v_1, v_2 \rangle_z$$

haciendo las substituciones necesarias se verifica que 2.1.42 está dado por:

$$1.43 \quad \langle\langle u_1, u_2 \rangle\rangle_v = \frac{u_1 \cdot u_2}{(\operatorname{Im} w)^2}$$

Analogamente a como se definió la longitud hiperbólica de una curva en 2.1.33, en este modelo ésta, estará dada por:

$$1.44 \quad |\gamma|_2 = \int_0^1 \frac{\|\gamma'(\tau)\|}{\operatorname{Im} \gamma(\tau)} d\tau$$

de 2.1.34 esta longitud es invariante bajo la acción de $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^+)$. También si definimos la distancia entre dos puntos $z, w \in \mathbb{P}^+$ como:

$$d_2'(z, w) = \inf \{ |\gamma|_2 \mid \gamma: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{P}^+, \gamma(0) = z, \gamma(1) = w \}$$

se obtiene de manera análoga a como se probó en 2.1.36 que $d_2(z, w) = d_2'(z, w)$.

Como en el modelo del disco, aquí, el ángulo hiperbólico coincide con el ángulo euclideo. Por esta razón a los modelos $(\Delta, d_1), (\mathbb{P}^+, d_2)$ se les denomina modelos conformes de la geometría hiperbólica.

2.1.45 Modelo de Klein

2.1.46 En este modelo el conjunto de puntos es el mismo disco unitario de \mathbb{C} (lo denotaremos por Δ_K cuando nos refiramos a este modelo), y se obtiene a partir del modelo de Poincaré de la forma siguiente:

2.1.47 Las líneas o rectas hiperbólicas son las imágenes de las rectas hiperbólicas en el modelo de Poincaré del siguiente homeomorfismo:

$$k: \Delta \longrightarrow \Delta_K$$

$$k(x+iy) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1} \right)$$

Este homeomorfismo resulta de componer la inversa de la proyección estereográfica ver 2.1.3, con la proyección $p_2: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $p_2(x, y, z) = (x, y)$.

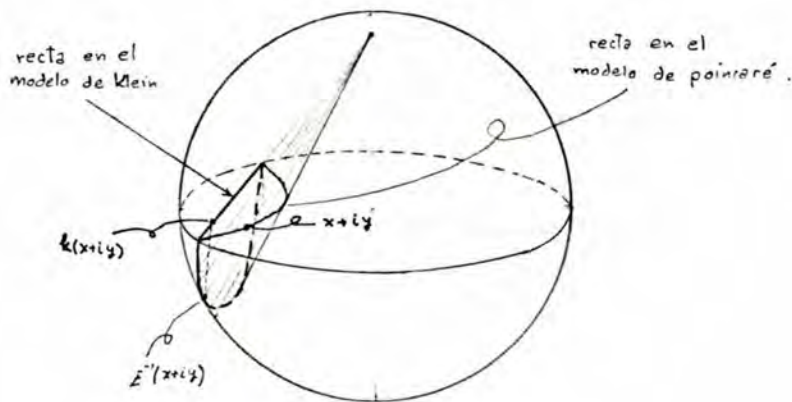


fig 2.1.47

2.1.48 La distancia en el modelo de Klein denotada por $d_k: \Delta_K \times \Delta_K \longrightarrow \mathbb{R}^+$ se define como:

$$d_k(z, w) = d_1(k^{-1}(z), k^{-1}(w))$$

Este modelo tiene la particularidad de que las rectas hiperbólicas coinciden con segmentos de rectas euclidianas. La razón de esto es la siguiente.

Si ℓ es una recta hiperbólica en Δ , entonces ℓ es la intersección de un círculo C (euclidiano) ortogonal a S^1 , y el conjunto Δ . Como E^{-1} preserva ángulos y mapea círculos en círculos dejando fijo a S^1 , se sigue que $E^{-1}(C)$ está en un plano vertical por lo que $p_2 \circ E^{-1}(C)$ es un segmento euclidiano con los mismos extremos en $\partial\Delta (= \partial\Delta_K)$ que ℓ .

Este modelo no es conforme ya que el ángulo hiperbólico entre dos líneas no necesariamente coincide con el ángulo euclidiano.

1.49 Notación: Denotaremos por $\mathbb{H}^2, \partial\mathbb{H}^2 = S^1_\infty, \bar{\mathbb{H}}^2, d_H, \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ a lo siguiente:

\mathbb{H}^2 es cualquiera de los modelos $(\Delta, d_1), (\mathbb{P}^+, d_2), (\Delta_K, d_K)$.

S^1_∞ es cualquiera de los conjuntos correspondientes $\partial\Delta, \partial\mathbb{P}^+, \partial\Delta_K$.

$\bar{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{H}^2 \cup S^1_\infty$.

d_H representa la distancia correspondiente d_1, d_2, d_K .

$\text{Iso}^+\mathbb{H}^2$ representa a $\text{Aut}(\Delta), \text{Aut}(\mathbb{P}^+), \text{Aut}(\Delta_K)$ respectivamente.

Siempre que sea necesario se especificará a que modelo se está refiriendo.

2.2 Isometrías de \mathbb{H}^2

En general se tiene que para cada $g \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ $g \neq \text{Id}$, si $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc=1$, el conjunto de puntos fijos de g denotado por $\text{fix}(g)$ coincide con el conjunto de puntos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ que satisfacen la ecuación:

$$2.1 \quad cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

por lo que el conjunto de puntos fijos esta dado por:

$$2.2 \quad i) \quad \text{si } c=0, d \neq a \quad \text{fix}(g) = \left\{ \frac{b}{d-a}, \infty \right\}$$

$$ii) \quad \text{si } c \neq 0 \quad \text{fix}(g) = \left\{ \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2 - 4b}}{2c} \right\}$$

de esto se sigue que g tiene uno o dos puntos fijos en $\hat{\mathbb{C}}$ segun se tenga que $(a+d)^2 = 4$, $(a+d)^2 \neq 4$ respectivamente. Si denotamos por $\text{Tr}(g) = a+d$, se tiene que $|\text{Tr}(g)|$ esta bien definida y es invariante bajo conjugación por elementos de $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Por lo tanto si $g \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ ($= \text{Aut}(\Delta), \text{Aut}(\mathbb{P}^+)$) entonces la traza de cualquier elemento de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ asociado a g es real. y se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:

2.3 i) Si $|\text{Tr}(g)| = 2$ entonces g tiene solo un punto fijo en $\hat{\mathbb{C}}$ el cual esta en S_∞^1 .

ii) Si $|\text{Tr}(g)| > 2$ entonces g tiene dos puntos fijos en $\hat{\mathbb{C}}$ y ambos estan en S_∞^1 .

iii) Si $|\text{Tr}(g)| < 2$ entonces g tiene 2 puntos fijos en $\hat{\mathbb{C}}$ y solo uno de ellos esta en $\bar{\mathbb{H}}^2$

2.4 Definición: Diremos que g es parabólica, hiperbólica o elíptica si $|\text{Tr}(g)|$ satisface i), ii), iii) respectivamente.

2.2.5 Isometrías parabólicas

Una isometría $g \in \text{Iso}^+(\mathbb{H}^2)$ es parabólica cuando $|\text{Tr}(g)| = 2$. En este

caso si $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc=1$, entonces g tiene un solo punto fijo z_0 y esta dado por $z_0 = \frac{a-d}{2c}$. El cual se encuentra en S_∞^1 .

Asociado a g se tienen dos familias de círculos euclidianos, invariantes bajo g , denotadas por $\mathcal{P}, \mathcal{P}^\perp$ las cuales son:

$\mathcal{P} = \{\text{círculos tangentes a } S_\infty^1 \text{ en } z_0\}$

$\mathcal{P}^\perp = \text{la familia ortogonal a } \mathcal{P}$

la transformación g aplica a cada elemento de \mathcal{P} en si mismo e intercambia los elementos de la familia \mathcal{P}^\perp (ver fig. 2.2.5).

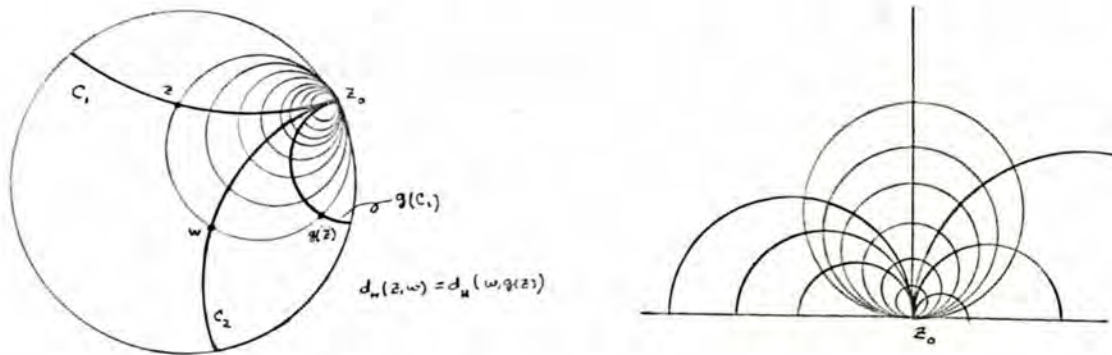


fig 2.2.5

Los elementos de la familia \mathcal{P} son llamados Horociclos y los elementos de la familia \mathcal{P}^\perp son rectas hiperbólicas tangentes en z_0 llamadas paralelas.

También g se puede escribir como la composición de dos inversiones $\sigma_1 \circ \sigma_2$, donde σ_i invierte con respecto al círculo C_i $i=1,2$ los cuales pertenecen a la familia \mathcal{P}^\perp , y C_2 es la bisectriz de C_1 y $g(C_1)$.

Además si $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^+)$, entonces g es conjugado a $h(z) = z+t$ con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$

.6 Isometrias Hiperbólicas

Un elemento $g \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad-bc=1$, es hiperbólico si $|\text{Tr}(g)| > 2$ por lo tanto, g tiene dos puntos fijos z_1, z_2 los cuales se encuentran en S_∞^1 y están dados por:

$$z_1 = \frac{a-d + \sqrt{(\text{Tr}(g))^2 - 4}}{2c}$$

$$z_2 = \frac{a-d - \sqrt{(\text{Tr}(g))^2 - 4}}{2c}$$

La transformación g deja invariantes todos los círculos que pasan por z_1, z_2 la cual denotaremos por \mathcal{P} , e intercambia los elementos de la familia ortogonal \mathcal{P}^\perp .

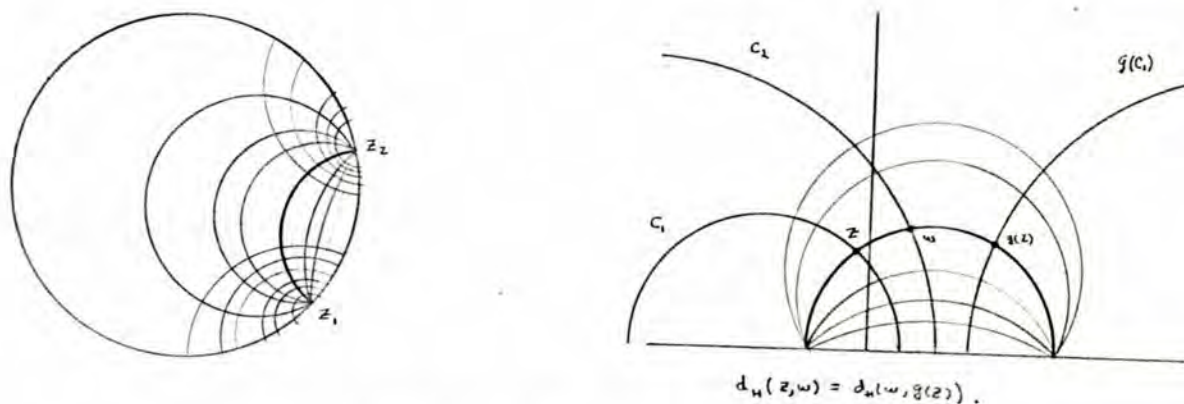


fig 2.2.6

En este caso g se escribe como la composición de dos inversiones $\sigma_1 \circ \sigma_2$, donde el círculo de inversión de σ_i denotado por C_i $i=1,2$ está en la familia \mathcal{P}^\perp .

Definimos el eje de g como la recta hiperbólica ℓ cuyos extremos en S_∞^1 son los puntos fijos de g . Si $z = C_1 \cap \ell$ entonces C_2 es

la mediatriz del segmento hiperbólico que une z con $g(z)$.

Definimos la distancia de traslación de g como el valor de:

$$T = \inf\{d_H(w, g(w)) \mid w \in \mathbb{H}^2\}$$

este valor coincide con $d_H(z, g(z))$ y cumple la siguiente igualdad (ver [Beardon pp 173]):

$$\dots\dots\dots \cosh\left(\frac{1}{2}T\right) = \frac{1}{2} |\text{Tr}(g)|$$

..... Asociado a g se tiene un elemento distinguido de \mathcal{P}^1 llamado el círculo isométrico de g denotado por I_g , el cual consiste en el conjunto de puntos $w \in \hat{\mathbb{C}}$ tales que $\left\| \frac{dg}{dz}(w) \right\| = 1$. Cuando $g \in \text{Aut}(\Delta)$ i.e. $g(z) = \frac{az+b}{bz+a}$, entonces $I_g = \{w \in \hat{\mathbb{C}} \mid |w - \frac{a}{b}|^2 = \frac{1}{|b|^2}\}$

Si $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^+)$ entonces g es conjugado a la transformación $h(z) = \lambda^2 z$ con $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Por lo que $|\text{Tr}(g)| = \left|\lambda + \frac{1}{\lambda}\right|$.

2.2.7 Isometrías elípticas

Un elemento $g \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ es elíptico, con $g = g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $ad-bc=1$, si $|\text{Tr}(g)| < 2$ y por lo tanto g tiene un punto fijo z_0 en \mathbb{H}^2 dado por:

$$z_0 = \frac{a-d + \sqrt{(\text{Tr}(g))^2 - 4}}{2c}$$

En este caso \mathcal{P}^1 es la familia de círculos euclidianos que pasan por z_0 (la cual consta solo de rectas hiperbólicas), g intercambia a los elementos de esta familia. \mathcal{P} es la familia de círculos

ortogonales a \mathcal{P}^\perp , la cual consta de los círculos hiperbólicos concéntricos en z_0 . Cada elemento de esta familia es invariante bajo g .



fig 2.2.7

En este caso g es la composición de dos inversiones $\sigma_1 \circ \sigma_2$ donde el círculo de inversión de cada σ_i es un elemento de la familia \mathcal{P}^\perp y C_2 bisecta al ángulo θ que forman $C_1, g(C_1)$.

Si $g \in \text{Aut}(\Delta)$ entonces g es conjugado a la transformación R_θ donde $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$. Si $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}^+)$ entonces g es conjugado a la transformación

$$h(z) = \frac{\cos \frac{\theta}{2} z - \text{sen} \frac{\theta}{2}}{\text{sen} \frac{\theta}{2} z + \cos \frac{\theta}{2}}$$

la cual es una rotación hiperbólica alrededor del punto i . Al valor θ se le llama el ángulo de rotación y satisface la siguiente relación:

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \text{Tr}(g).$$

3 Grupos Fuchsianos

- 3.1 Sea $G \subseteq \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ y sea $R(G)$ el conjunto de puntos regulares de G (ver 1.5.15).
- 3.2 Definición: El conjunto limite de G , denotado por $\Lambda(G)$ es el conjunto $\hat{\mathbb{C}} - R(G)$.
- 3.3 Definición: Decimos que G es un grupo Kleiniano si $R(G) \neq \emptyset$.
- 3.4 Definición: Sea G un grupo Kleiniano, si además $G \subseteq \text{Aut}(\mathbb{H}^2)$ entonces decimos que G es Fuchsiano.

Definición: Sea $G \subseteq \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Decimos que G es elemental si G tiene alguna orbita finita (aquí se considera la orbita en \mathbb{H}^3 el cual no hemos definido ya que no se volverá a usar en el resto del trabajo).

- 3.5 Si G un grupo Fuchsiano elemental, Entonces G es ciclico o es conjugado al grupo $\langle g, h \rangle$ donde $g(z) = \lambda z$ con $\lambda > 1$ y $h(z) = -\frac{1}{z}$, ver [Beardon pp 189]. Por lo que si G es un grupo fuchsiano no conmutativo sin elementos elípticos entonces G no es elemental (por ejemplo los grupos isomorfos al grupo fundamental de una superficie compacta de género mayor que 1).
- 3.6 Teorema: Sea G un subgrupo de $\text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ no elemental, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:
- i) G es fuchsiano
 - ii) G es discreto
 - iii) Los puntos fijos de los elementos elípticos de G no se acumulan en \mathbb{H}^2 .

- iv) Los elementos elípticos de G no se acumulan a la Id .
- v) Todo elemento elíptico de G es de orden finito.
- vi) Todo subgrupo cíclico de G es discreto.
- vii) G actúa discontinuamente en \mathbb{H}^2 .

Demostración: ver [Beardon teor. 8.4.1].

3.7 Teorema: i) Si G es un subgrupo fuchsiano tal que G actúa propiamente discontinua en \mathbb{H}^2 , entonces G no contiene elementos elípticos.

ii) Si G tiene algún elemento parabólico g , entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $x \in \mathbb{H}^2$ con la propiedad de que $d_{\mathbb{H}}(x, g(x)) < \varepsilon$.

Demostración: i) se sigue de que G actúa propiamente discontinua lo que implica que G es libre por lo tanto solo la identidad tiene puntos fijos en \mathbb{H}^2 y por lo tanto no tiene elementos elípticos.

ii) en el modelo del semiplano podemos suponer que g fija al ∞ . Por lo que g es de la forma $g(z) = z + t$, con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si $z = x + iy \in \mathbb{P}^+$ implica que la distancia de z a $g(z)$ cumple

$$d_{\mathbb{H}}(z, g(z)) = d_2(z, z+t)$$

de 2.1.44

$$d_{\mathbb{H}}(z, g(z)) \leq \int_{\gamma} \frac{|dz|}{\text{Im}z} \quad \text{donde } \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^+ \\ \gamma(\tau) = z + \tau t$$

$$\leq \frac{1}{y}$$

por lo que si elegimos z de tal forma que $\text{Im}z > \frac{1}{\epsilon}$ se sigue la afirmación. ■

Sea G un grupo fuchsiano. A continuación se define lo que es un conjunto fundamental para el grupo G .

2.3.8 Definición: Un conjunto $F \subseteq \mathbb{H}^2$ es un conjunto fundamental parcial para G si:

i) $F \neq \emptyset$ con $F \subseteq R(G)$.

ii) si $x, y \in F$ y $g \in G$ son tales que $g(x) = y$, entonces $x = y$ y $g = \text{Id}$.

El conjunto F es un conjunto fundamental si además de i), ii) se satisface que:

iii) para todo $z \in R(G)$ existe $y \in F$ y $g \in G$ tal que $g(y) = z$.

2.3.9 Una región cerrada R es una region fundamental si R es la cerradura de un conjunto fundamental.

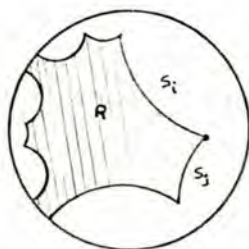
Un abierto D es un dominio fundamental si D es conexo, D es un conjunto fundamental Parcial y si la cerradura de D es una region fundamental.

2.3.10 Definición: Si R es una region fundamental para G , y su frontera ∂R consiste segmentos hiperbolicos o subarcos de S_{∞}^1 , entonces decimos que R es un poligono fundamental para G .

En otras palabras R es un poligono fundamental si ∂R es una union numerable de segmentos (o semirectas) hiperbolicos o

arcos en S^1_∞ llamados lados $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con la propiedad de que cada compacto K de $\bar{\mathbb{H}}^2$ intersecta solo un numero finito de lados de R . Además si $s_i \cap s_j \neq \emptyset$, entonces esta intersección es solo un punto llamado vertice, el cual es extremo de ambos lados. Finalmente, para cualquier lado con un punto final finito z , hay exactamente un lado s_j con $j \neq i$ que tiene a z como extremo.

fig 2.3.10



3.11 Sea G un grupo fuchsiano, y sea $w \in \mathbb{H}$ un punto el cual no es fijado por ningun elemento eliptico de G . Para cada $g \in G - \{Id\}$ definase el conjunto $L_g(w), H_g(w)$ como:

$$L_g(w) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}}(z, w) = d_{\mathbb{H}}(z, g(w))\}$$

$$H_g(w) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}}(z, w) \leq d_{\mathbb{H}}(z, g(w))\}$$

$$= \{z \in \mathbb{H}^2 \mid d_{\mathbb{H}}(z, w) = d_{\mathbb{H}}(z, g(w))\}$$

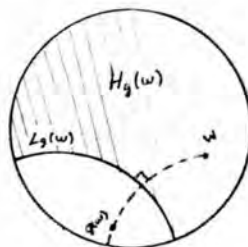


fig 2.3.11

Entonces $L_g(w)$ es la mediatriz del segmento que une a w con $g(w)$ y

$H_g(w)$ es el semiplano Hiperbólico de $\mathbb{H}^2 - L_g(w)$ que contiene a w .

2.3.13 Definición: El polígono de Dirichlet para G con centro en w es denotado por $D(w)$ se define como sigue:

$$D(w) = \bigcap_{g \in G - \text{Id}} H_g(w)$$

Note que $z \in H_g(w)$ si y sólo si $w \in H_g(z)$. Además para toda $h \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ entonces

$$h(H_g(w)) = H_{hgh}(h(w))$$

de donde $z \in D(w)$ si y solo si $w \in D(z)$

y $h(D(w)) = D(h(w))$

De ésto se desprende el siguiente teorema:

2.3.14 Teorema: Sea G un grupo fuchsiano y $w \in \mathbb{H}^2$ como 2.3.11 entonces el polígono de Dirichlet $D(w)$ es un polígono fundamental convexo.

Demostración: ver [Beardon pp 226].

■

2.3.15 Se tiene también que si G es fuchsiano finitamente generado entonces G tiene un polígono fundamental convexo con un número finito de lados [].

Para saber cuando un polígono dado es el polígono fundamental de algún grupo fuchsiano, considérese lo siguiente:

2.3.16 Sea P un polígono en \mathbb{H}^2 y D su interior, una identificación sobre P es una correspondencia que asigna a cada par de lados s, s' una isometría $A(s, s') \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$, la cual satisface lo siguiente:

a) $A(s, s')$ mapea s en s'

b) $(s')' = s$ y $A(s, s') = (A(s', s))^{-1}$

c) Si $s = s'$, entonces $A(s, s')$ deja invariante a s .

d) para cualquier lado s , sea $A = A(s, s')$. Entonces existe una vecindad V de s tal que $A(V \cap D) \cap D = \emptyset$.

2.3.17 Si para algun lado s se tiene que $s' = s$ entonces la isometría $A(s, s')$ es de orden 2.

2.3.18 A este tipo de relaciones en los lados los llamaremos relaciones de reflexión.

2.3.19 Dado un polígono P y una identificación en el, denotamos por P^* al conjunto que resulta de identificar los lados de P según la identificación.

2.3.20 Sea $p: P \rightarrow P^*$ la proyección (aquí $p(x) = p(x')$ si y sólo si hay un generador A tal que $A(x) = x'$).

2.3.21 Definase en $P^* \times P^*$ la siguiente función:

$$d^*(x, x') = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n d_H(x_i, x'_i) \mid n \in \mathbb{N}, x_i, x'_i \in P, \text{ con } p(x_1) = x, p(x'_n) = x' \right. \\ \left. \text{y } p(x'_i) = p(x_{i+1}) \right\}$$

2.3.22 Decimos que la identificación es completa si se satisfacen las siguientes condiciones:

e) Para cada $x \in P^*$, $p^{-1}(x)$ es un conjunto finito

f) P^*, d^* es un espacio métrico completo.

Sea P, A un polígono y una identificación completa en él, sea $z_1 \in P$ un vértice de P , sea s_1 un lado con extremo z_1 . Asociado a s_1 hay un lado s'_1 y una isometría $A_1 = A(s_1, s'_1)$. Sea $z_2 = A_1(z_1)$, entonces existe un único lado $s_2 \neq s'_1$ con z_2 como extremo, sean s'_2 y $A_2 = A(s_2, s'_2)$ el lado y la isometría correspondientes. Continuando este proceso se obtiene una sucesión $\{z_i\}$ de vértices de P , una sucesión de parejas de lados de P $\{(s_i, s'_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ y una sucesión de isometrías $\{A_i\}$, los cuales cumplen las siguientes condiciones:

2.2.23 i) $p(z_i) = p(z_j)$ para toda $i, j \in \mathbb{N}$.

ii) La sucesión de puntos $\{z_i\}$ es periódica (ya que $p^{-1}(p(z_i))$ es finito).

iii) La sucesión $\{(s_i, s'_i)\}$ y la sucesión $\{A_i\}$ son periódicas.

2.3.24 Sea k el menor entero positivo tal que las sucesiones $\{z_i\}$, $\{(s_i, s'_i)\}$, $\{A_i\}$ son periódicas de periodo k , entonces al conjunto (z_1, \dots, z_k) se le llama un ciclo de vértices. La transformación $B = A_k \circ \dots \circ A_1$ es llamada una transformación ciclo de z_1 . Para cada vertice z_i en el ciclo (z_1, \dots, z_k) sea $\theta(z_i)$ el ángulo interior a P que hacen los lados s'_{i-1}, s_i . Decimos que la identificación en P satisface la condición de ciclo si:

2.3.25 g) para cada ciclo (z_1, \dots, z_k) hay un entero ν tal que

$$\nu \sum_{i=1}^k \theta(z_i) = 2\pi$$

Considere el siguiente orden de D y sus transformados:

$$D, A_1^{-1}(D), A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}(D), \dots, B^{-1}(D), A_1^{-1} \cdot B^{-1}(D), A_2^{-1} \cdot A_1^{-1} \cdot B^{-1}(D), \dots, B^{-\nu}(D)$$

entonces la condición $g)$ de 2.3.25 implica que $B^{-\nu} = \text{Id}$. A esta relación la llamaremos relación ciclo.

2.3.36 Definición: Sea P es un polígono con una identificación completa, sea D el interior de P , si se satisface la condición ciclo, entonces decimos que P es un polígono de Poincaré.

2.3.37 Teorema: (de Poincaré). Sea P un polígono de Poincaré, sea G el grupo generado por las isometrías de la identificación. Si D es el interior de P , entonces D es un dominio fundamental para G y las relaciones ciclo junto con las relaciones reflexión forman un conjunto completo de relaciones para G (ver 1.3.23).

Demostración: ver [Maskit 3].

■

2.4 Superficies Hiperbólicas

2.4.1 Definición: Una superficie hiperbólica S es una superficie topológica junto con un atlas $\{(z_i, U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

i) $z_i(U_i) \subseteq \mathbb{H}^2$.

ii) cada función de transición z_{ij} es la restricción a $z_j(U_i \cap U_j)$ de una isometría de \mathbb{H}^2 .

4.2 Para una superficie hiperbólica S , podemos definir los siguientes conceptos por medio de las cartas coordenadas.

1) Curva diferenciable.

2) Arco de geodésica.

3) Longitud de una curva denotada por $len(\gamma)$.

4) Arco circular.

5) Angulo entre dos curvas diferenciables que se intersectan.

De 3) podemos definir la siguiente métrica en S llamada hiperbólica.

4.3 $\rho(z, w) = \inf\{len(\gamma) \mid \gamma: [0, 1] \longrightarrow S, \gamma(0)=z, \gamma(1)=w\}$

4.4 Definición: Sea S_1, S_2 dos superficies hiperbólicas, decimos que un homeomorfismo $f: S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría si para toda $x, y \in S_1$, se cumple que $\rho_1(x, y) = \rho_2(f(x), f(y))$. Cuando esto pasa decimos que S_1 y S_2 son isométricas.

Un mapeo $h: S_1 \longrightarrow S_2$ es una isometría local si para toda $x \in S_1$ tiene una vecindad abierta U tal que la restricción $h|_U$ es isometría.

4.5 Proposición: Sean S_1, S_2 dos superficies hiperbólicas, ρ_1, ρ_2 las métricas hiperbólicas correspondientes, sea $f: S_1 \longrightarrow S_2$ un mapeo

continuo. Entonces

- i) Para cada carta coordenada de S , (U, z) el mapeo z es una isometría.
- ii) La aplicación f es una isometría local si y sólo si para cada par de cartas $(U_{1,i}, z_{1,i}), (U_{2,k}, z_{2,k})$ de S_1, S_2 respectivamente con $f(U_{1,i}) \cap U_{2,k} \neq \emptyset$ se tiene que el mapeo $z_{1,i} \circ f \circ z_{2,k}^{-1}$ es la restricción de una isometría de \mathbb{H}^2 al conjunto $z_{1,i}(f^{-1}(U_{2,k}))$

Demostración: se sigue directamente de las definiciones. ■

El siguiente teorema nos proporciona muchos ejemplos de superficies hiperbólicas.

1.4.6 Teorema: Toda superficie compacta de género $g > 1$ (característica de Euler negativa) admite una estructura hiperbólica.

Demostración: Daremos sólo la idea de la demostración. Ésta consiste en construir un polígono regular P en \mathbb{H}^2 (en el modelo del disco) de $4g$ lados y centrado en 0 , con la propiedad de que la suma de los ángulos interiores sea 2π , ésto es posible hacerlo cuando $g > 1$. Etiquetando los lados de P en orden cíclico por

$$a_1, b_1, a'_1, b'_1, \dots, a_g, b_g, a'_g, b'_g$$

definase la siguiente identificación en P :

$A(a_i, a'_i)$ = la isometría que mapea a a_i en a'_i^{-1}

$A(b_i, b'_i)$ = la isometría que mapea a b_i en b'_i^{-1}



Estas isometrías resultan ser hiperbólicas, ya que ningún par de lados (a_i, a'_i) o (b_i, b'_i) se intersectan, si por ejemplo (a_i, a'_i) se intersectaran, se tendría el triángulo formado por los lados a_i, b_i, a'_i , el cual o es finito o es ideal. En ambos casos se tienen dos ángulos interiores mayores que $\pi/2$, esto porque los ángulos interiores del polígono miden $2\pi/4g$.

Estas isometrías definen una identificación en P con un solo ciclo, y satisface la relación ciclica (la suma de los ángulos interiores es 2π). Entonces por el teorema 2.3.27 se tiene que el grupo G generado por estas isometrías es un polígono fundamental para G . El cociente denotado por P/G es una superficie de genero g .

■

Para el caso de superficies con frontera de signatura (g, m) se hará en el próximo capítulo una construcción general del polígono de Poincaré. En este caso se tendrán lados que son semirectas hiperbólicas y subarcos de S^1_∞ .

4.7 Definición: Sea S una superficie hiperbólica, sea ρ la métrica hiperbólica correspondiente definida en 2.4.3. Decimos que S es completa si S con la métrica ρ es un espacio métrico completo.

Un resultado importante es que si S es simplemente conexa y

completa, entonces S es isométrica a \mathbb{H}^2 . Para probar esto necesitaremos la siguiente definición y el siguiente lema.

Definición: Sea $\gamma: [-a, a] \rightarrow S$ una parametrización de un arco de geodésica ℓ en una superficie hiperbólica S , decimos que ℓ se extiende infinitamente en la dirección positiva, si existe una parametrización por longitud de arco $\bar{\gamma}: [0, \infty) \rightarrow S$, cuya imagen es localmente una geodésica y tal que $\bar{\gamma}|_{[0, a]} = \gamma$

- 4.8 Lema (Hopf-Rinow): Sea S una superficie Hiperbólica completa, entonces toda geodesica se extiende infinitamente en ambas direcciones.

Demostración: Sea $\gamma: [a, b) \rightarrow S$ una parametrización de un arco de geodésica por longitud de arco, supongamos que $b \in \mathbb{R}$ es tal que γ ya no se puede extender en la dirección positiva. Sea $\{t_n\}$ una sucesión que converge a b . Como S es completa y como $\{\gamma(t_n)\}$ es sucesión de Cauchy, sea $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma(t_n))$, sea (U, z) una vecindad coordenada de x , sea $\varepsilon > 0$ tal que $\gamma(\varepsilon, b) \subseteq U$, entonces se tiene que $z \circ \gamma(\varepsilon, b)$ es un segmento hiperbólico de una recta ℓ' en \mathbb{H}^2 y $\lim_{n \rightarrow \infty} (z \circ \gamma(t_n)) = z(x)$, por lo tanto $z \circ \gamma$ se extiende a un intervalo (ε, δ) con $\delta > b$, cuya imagen esta en $\ell' \cap z(U) = m$ lo que implica que γ se extiende a $[a, \delta)$. Esto contradice el hecho de que γ no se podía extender. ■

- 4.9 Teorema: Toda superficie hiperbólica S simplemente conexa y completa es isométrica a \mathbb{H}^2 .

Demostración: Sea $x_0 \in S$ un punto cualquiera. Considere el mapeo

$D: S \longrightarrow \mathbb{H}^2$ definido como sigue:

Sea (U_0, z_0) una carta coordenada con $x_0 \in U_0$. Sea $x \in S$, definiremos $D(x)$ mediante una curva, sea $\alpha: [0,1] \longrightarrow S$ que empieza en x_0 y termina en x . Sea $\mathcal{F} = \{(U_i, z_i)\}_{i=1}^n$ donde cada (U_i, z_i) es una carta coordenada y $\{t_0, \dots, t_n\}$ partici3n de $[0,1]$ tales que $\{U_0, \dots, U_n\}$ es una cubierta de la imagen de α , y para cada $i=0, \dots, n-1$ $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$.

Remplazaremos la familia \mathcal{F} por otra $\mathcal{F}' = \{(U'_i, z'_i)\}_{i=1}^n$ la cual cumple con:

$$a) U'_i = U_i \quad i=1, \dots, n.$$

$$b) z'_0 = z_0$$

$$c) z'_i|_W = z'_{i-1}|_W \quad i > 0, \quad W \text{ es la componente conexa que contiene a } \alpha([t_i])$$

Las funciones z'_i se obtienen por el siguiente proceso:

$z'_0 = z_0$, luego por inducci3n para cada $i=1, \dots, n$ definase $z'_i: U_i \longrightarrow \mathbb{H}^2$ como:

$$z'_i = (z'_{i-1} \circ z_i^{-1}) \circ z_i \quad \text{aqu\u00ed } z'_{i-1} \circ z_i^{-1} \text{ es considerada como un elemento de } \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2 \text{ ver 2.4.1 ii).}$$

con esto se puede ver que las aplicaciones asi definidas satisfacen las condiciones b) y c). Finalmente definase el valor de D en x como $D(x) = z'_n(x)$

Tenemos que verificar lo siguiente:

D esta bien definida: para ver esto hay que probar que: i) no depende de la cubierta ii) no depende de la curva α .

i) Para ver que no depende de la cubierta considerese lo siguiente:

Sea $\mathcal{F}_1 = \{V_i, w_i\}_{i=0}^m$ otra cubierta de cartas coordenadas de la curva α , con $(V_0, w_0) = (U_0, z_0)$, refinando si es necesario podemos suponer que \mathcal{F}_1 refina a la cubierta \mathcal{F} y es tal que existen enteros j_0, \dots, j_n tales que $j_0 = 0 \leq j_1 \leq \dots \leq j_n = m$ y que se cumple que $\bar{V}_k \subset U_i$ para k con $j_i \leq k \leq j_{i+1}$, $\{s_0, \dots, s_m\}$ es otra partición de $[0, 1]$, podemos suponer que refina a $\{t_0, \dots, t_n\}$ y es tal que $\alpha([s_i, s_{i+1}]) \subset \bar{V}_i$ $i=0, \dots, m-1$ (repetiendo si es necesario elementos de la cubierta \mathcal{F}_1 y reetiquetando). Podemos suponer también que $s_j = t_j$. Supongamos además que $\{w_i\}$ satisfacen ya las condiciones b) y c) del paso 2). Entonces para cada $k=0, \dots, j_1$ se tiene que:

$w_k|_{w'_k} = z_0|_{w'_k}$ donde w'_k es la componente conexa de V_k que contiene al punto $\alpha(s_k)$.

esto es porque $w_0 = z_0$,

$$w_1|_{w'_1} = w_0|_{w'_1} = z_0|_{w'_1}$$

por inducción $w_k|_{w'_k} = w_{k-1}|_{w'_k} = z_0|_{w'_k}$

haciendo inducción sobre $i=1, \dots, n$ se tiene que para toda k con $j_{i-1} \leq k \leq j_i$ se satisface que:

$w_k|_{w'_k} = z_{i-1}|_{w'_k}$ donde w'_k es la componente conexa de V_k que contiene al punto $\alpha(s_k)$.

por lo que $w_m(x) = z_n(x)$.

ii) Para ver que no depende de la curva, se tiene que si $\beta: [0, 1] \rightarrow S$ es otra curva que une a x_0 con x , entonces β es homotópica a α relativa al conjunto $\{x_0, x\}$. Sea $H: I \times I \rightarrow S$ la homotopía correspondiente entre α y β tal que $H(0 \times I) = x_0$ y $H(1 \times I) = x$. Sea $\{U_1, \dots, U_n\}$ una cubierta de vecindades coordenadas de la imagen de H , sea $m \in \mathbb{N}$ y $t_i = \frac{i}{m}$ con $i=1, \dots, m$ tales que H aplica cada rectángulo $R_{i,j} = [t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ en algún elemento de la cubierta.

Sea $\alpha_i: I \rightarrow S$ definida por $\alpha_i(t) = H(t, t_i)$. Reenumerando y

repetiendo elementos de la cubierta, denotemos por U_{i_1}, \dots, U_{i_n} a los elementos tales que

$$H(R_{i_j}) \subset U_{i_j} \text{ con } i=1, \dots, m; j=1, \dots, m,$$

por lo tanto, para cada i , U_{i_1}, \dots, U_{i_n} cubren a las imágenes de α_i y α_{i+1} por lo que $D(x)$ no depende de cual de las dos curvas se usen para definirlo. Por inducción se sigue que que la definición de $D(x)$ es la misma si utilizamos α_0 o $\alpha_n = \beta$ por lo que D esta bien definida.

Por la construcción que dimos se tiene que $D(y) = z'_n(y)$ para toda y en U_n . Además D es una isometría local. Repitiendo el proceso se construye la inversa de D . Como S es simplemente conexo se tiene que D es una isometría.

■

4.10 Proposición: Sea S una superficie hiperbólica completa, y sea (\bar{S}, p) su cubierta universal. Entonces \bar{S} admite una estructura hiperbólica tal que p es una isometría local. Además si $\bar{\rho}$ es la métrica hiperbólica correspondiente entonces esta es completa.

Demostración: la primera parte de la proposición es consecuencia de que p es un homeomorfismo local. Por esta razón para toda $x, y \in \bar{S}$ se tiene que $\rho(x, y) \leq \bar{\rho}(x, y)$ donde $x = p(x)$; $y = p(y)$. ρ es la métrica hiperbólica en S . Por lo tanto si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{x_n = p(x_n)\}$ es también de Cauchy y converge a un punto $x_0 \in S$. Sea U una vecindad coordenada de x_0 la cual es también regular (1.5.1) y sea N tal que $x_n \in U$. Si $n > N$, entonces $\{x_n\}$ esta en la misma componente de $p^{-1}(U)$, llamémosle W . Sea $x_0 = (p|_W)^{-1}(x_0)$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

■

2.4.11 Corolario: Sea S una superficie hiperbolica completa. Entonces existe $P: \mathbb{H}^2 \longrightarrow S$ una isometria local, tal que (\mathbb{H}^2, p) es una cubierta universal de S .

Demostracion: es consecuencia de 2.4.9 y 2.4.10. ■

2.4.12 Con esto se tiene que todo elemento g de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2, p)$ (el grupo de transformaciones de cubierta) es una isometria local y por lo tanto es subgrupo de $\text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$. Ademas el isomorfismo J definido en 1.5.16 da un isomorfismo del grupo fundamental de S en un subgrupo de isometrias de \mathbb{H}^2 .

2.4.13 Definicion: Sea S una superficie hiperbolica y $x \in S$, sea $G = J(\Pi_1(S, x))$. Entonces decimos que G representa a S . Ademas si S es de signatura (g, m) entonces decimos que G es de signatura (g, m) .

2.4.14 Observacion: Si G representa a una superficie hiperbolica completa, entonces se sigue de 1.5.18 y de 2.3.6 que G no tiene elementos elipticos.

Ademas, de 1.5.18 se tiene que G actua propiamente discontinua en \mathbb{H}^2 . El espacio que resulta de identificar las orbitas bajo la accion de G , denotado por \mathbb{H}^2/G , es isometrico a S .

2.4.15 Teorema: Sea S una superficie hiperbolica compacta, sea $G \subseteq \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ un grupo el cual representa a S . Entonces todo elemento de G distinto de la identidad es hiperbolico.

Demostracion: Sea (\mathbb{H}^2, p) la cubierta universal de S . Basta probar que G no tiene elementos parabolicos. Como S es compacta

existe una cubierta finita de vecindades regulares $\{U_i\}_{i=1}^n$ sea ε el número de Lebesgue de la cubierta. Entonces, el diámetro de cada elemento de la cubierta es mayor que ε . Sea $x \in \mathbb{H}^2$ y $g \in G - \{\text{Id}\}$, supongamos que $p(x) \in U_1$, como $x, g(x)$ están en componentes distintas de $p^{-1}(U_1)$, implica que $d_{\mathbb{H}}(x, g(x)) > \frac{\varepsilon}{2}$. De 2.3.7 se sigue la afirmación. ■

A continuación daremos algunas propiedades importantes de las geodésicas en una superficie hiperbólica S .

4.16 Definición: i) Una curva β , es una geodésica completa si para toda $x \in \beta$ y vecindad coordenada (U, z) de x , $z(U \cap \beta)$ es un segmento hiperbólico en \mathbb{H}^2 . Además β se puede parametrizar por longitud de arco por $\bar{\beta}: \mathbb{R} \rightarrow \beta$.

Decimos que β es simple si el mapeo $\bar{\beta}$ es inyectivo. β es periódica de periodo T si el mapeo $\bar{\beta}$ es periódico de periodo T y si $\bar{\beta}$ es inyectivo en cada intervalo $(t, t+T)$.

ii) Una laminación geodésica en una superficie hiperbólica es un conjunto cerrado $\lambda \subseteq S$ el cual consiste en una unión ajena de geodésicas completas. A cada geodésica completa ℓ de λ se le denomina hoja de la laminación.

4.17 Proposición: Sean $\beta, \beta': \mathbb{R} \rightarrow S$ dos geodésicas completas. Sea (\mathbb{H}^2, p) la cubierta universal de S . Entonces

i) β, β' son ajenas si y solo si cualesquiera dos de sus levantamientos $\bar{\beta}, \bar{\beta}': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ son ajenos.

ii) β es simple si y solo si sus levantamientos son ajenos.

Demostración: i) \Rightarrow si $\bar{\beta}, \bar{\beta}'$ no fueran ajenos, el punto de

intersección se proyecta en un punto de intersección para β, β' .
 \Leftarrow si β, β' se intersectan en un punto x , considerando sus levantamientos a partir de cualquier punto en $p^{-1}(x)$ se tiene una contradicción.

ii) \Rightarrow si β es simple y $\bar{\beta}, \bar{\beta}'$ son dos levantamientos distintos que se intersectan en un punto x , sea θ el ángulo que forman en el punto de intersección ($\theta \neq \pi, 0$). Como p es una isometría local se sigue que las proyecciones forman ese mismo ángulo en $p(x)$.

■

2.4.18 Teorema: Sea S una superficie hiperbólica completa, sea (\mathbb{H}^2, p) su cubierta universal. Supongamos que $G = \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p)$ es finitamente generado y tiene solo elementos hiperbólicos. (por ejemplo si S es compacta). Sea $x \in S$ y $[\alpha] \in \Pi_1(S, x) - \{e\}$. Entonces:

- i) existe una única geodésica cerrada $\hat{\alpha}$ la cual es libremente homotópica a α .
- ii) si α es simple, entonces $\hat{\alpha}$ también lo es.
- iii) si α, α' son curvas cerradas simples ajenas, entonces $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}'$ son ajenas si y solo si α, α' no son libremente homotópicas.

Demostración: i) sea $\bar{\alpha}$ una componente de $p^{-1}(\alpha)$ sea $x \in \bar{\alpha}$ tal que $p(x) = x$, ie. $\bar{\alpha}(0) = x$. Entonces de 1.5.16 existe $g \in G - \{e\}$ tal que $g(x) = \bar{\alpha}(1)$, el cual es hiperbólico. Sea $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ una parametrización de su eje de traslación y T la longitud de traslación de g . Sea $H: I \times I \rightarrow \mathbb{H}^2$ definido por:

$H(s, t) =$ el punto en el segmento hiperbólico que pasa por $\alpha(t)$
 que es ortogonal a a y que divide a éste, en la razón $\frac{s}{1-s}$,

definimos $\hat{\alpha}: I \rightarrow S$ como $\hat{\alpha}(s) = p \circ H(0, s)$. $\hat{\alpha}$ es una geodésica ya que $H(0, I) \subseteq a$. La homotopía se proyecta en una homotopía de $\hat{\alpha}$ a α . Ppa la unicidad basta probar que si dos geodésicas β, β' en S son libremente homotópicas, entonces $p^{-1}(\beta) = p^{-1}(\beta')$.

Sea $H: I \times \mathbb{R} \rightarrow S$ una homotopía libre de β a β' donde $H(0, I) = \beta$ $H(1, I) = \beta'$. Sea $\bar{\beta}$ un levantamiento de β , cuyos extremos en S_{∞}^1 son x, y . Del teorema 1.5.5, H se levanta a una homotopía $\bar{H}: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2$ de tal forma que $\bar{H}(0, \mathbb{R}) = \bar{\beta}$, como $p \circ \bar{H}(1, \mathbb{R}) = \beta'$, implica que si $\varepsilon = \sup\{\text{long}(H(I, t)) \mid t \in \mathbb{R}\} + 1$, se tiene que

$$d(H(0, t), H(1, t)) < \varepsilon \quad \text{para toda } t \in \mathbb{R}$$

de aquí, implica que la distancia euclídeana de $\bar{H}(0, t)$ a $\bar{H}(1, t)$ tiende a cero (en el modelo del disco) y por lo tanto los extremos del levantamiento de β' coinciden con x, y .

ii) si α es simple entonces dos levantamientos distintos $\bar{\alpha}, \bar{\alpha}'$ determinan, por la construcción dada en i), dos parejas de extremos $(a, b), (a', b')$ respectivamente. Estos satisfacen que $\{a, b\}$ están en una sola componente de $S_{\infty}^1 - \{a', b'\}$, además si por ejemplo $a = a'$, si $b \neq b'$ se tendría que los elementos de G que tienen a $\bar{\alpha}, \bar{\alpha}'$ como ejes de traslación generarían un elemento parabólico. Por lo tanto se tiene que $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}'$ o $\bar{\alpha} \cap \bar{\alpha}' = \emptyset$ en \mathbb{P}^2 .

iii) es análogo. ■

Ahora probaremos que dada una superficie de Riemann S , con $\chi(S) < 0$ entonces S admite una estructura hiperbólica completa determinada por la estructura conforme de S .

Para esto necesitaremos el siguiente teorema el cual no

probaremos.

2.4.19 Teorema(de Uniformizacion). Sea S una superficie de Riemann simplemente conexa entonces existe un homeomorfismo conforme, de S a una y solo una de las siguientes superficies.

- | | |
|-----------------------------------|---------------------|
| i) $\hat{\mathbb{C}}$ (ver 2.1.3) | si S es compacta. |
| ii) \mathbb{C} | } |
| iii) Δ | |

Demostracion: ver [Ahlfors 2 pp]

■

2.4.20 Teorema: Si S es una superficie de Riemann de signatura (g, m) tal $\chi(S) < 0$ entonces su cubierta universal es isomorfa a (\mathbb{H}^2, p) donde p es localmente conforme.

Demostracion: Sea S es una superficie de Riemann, sea (\bar{S}, p) una cubierta universal, la estructura conforme de S se levanta a una en \bar{S} por medio de p , como \bar{S} es simplemente conexa de 2.4.19 existe un homeomorfismo conforme h en alguna de las superficies $(\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \Delta)$ llamemosle M , entonces (M, p') con $p' = p \circ h^{-1}$ es isomorfa a (\bar{S}, p) ademas $\text{Aut}(M, p') = h \circ \text{Aut}(\bar{S}, p) \circ h^{-1}$. Como $\chi(S) < 0$ se tiene que su grupo fundamental no es conmutativo y por lo tanto $\text{Aut}(M, p')$ es no conmutativo. Como $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}), \text{Aut}(\mathbb{C})$ no tienen subgrupos no conmutativos que actuan propia y discontinuamente implica que $M = \Delta$. lo que finaliza la demostracion.

■

Los resultados que daremos a continuación los usaremos en el capítulo 5.

4.21 Teorema: Sean S, S' dos superficies hiperbólicas (de Riemann) compactas, sean $(\mathbb{H}^2, p), (\mathbb{H}^2, p')$ las cubiertas universales respectivas. Sea $h: S \rightarrow S'$ un homeomorfismo. Sea $\bar{h}: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ un levantamiento de h (ver 1.5.19), entonces \bar{h} se extiende a un homeomorfismo continuo a todo $\bar{\mathbb{H}}^2$. Denotaremos por ∂h a la restricción de la aplicación \bar{h} a S_∞^1 .

Demostración: Ver [Casson pp 35].

■

4.31 Teorema: Sean S_1, S_2 dos superficies de Riemann compactas de género $g > 1$, sean $h_1, h_2: S_1 \rightarrow S_2$ homeomorfismos tales que h_1, h_2 son homotópicos. Sean \bar{h}_1, \bar{h}_2 los levantamientos respectivos a las cubiertas universales $(\mathbb{H}^2, p_1), (\mathbb{H}^2, p_2)$ de S_1, S_2 respectivamente. Entonces existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p_2)$ tal que

$$\bar{h}_1|_{S_\infty^1} = g \circ \bar{h}_2|_{S_\infty^1}$$

Demostración: Sea $G: I \times S_1 \rightarrow S_2$ la homotopía entre h_1, h_2 sea $\bar{G}: I \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ el levantamiento de G tal que $\bar{G}|_{0 \times \mathbb{H}^2} = \bar{h}_1$. Como $p_2 \circ \bar{G}|_{1 \times \mathbb{H}^2} = h_2 \circ p_1 = p_2 \circ \bar{h}_2$, entonces se tiene que $\bar{G}|_{1 \times \mathbb{H}^2} = g \circ \bar{h}_2$ con $g \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p_2)$ (ver 1.5.19). Además como G es uniformemente continua, se tiene que $d_{\mathbb{H}}(\bar{G}(0, x), \bar{G}(1, x)) < \epsilon$ para toda $x \in \mathbb{H}^2$, esto por ser I compacto. Por lo tanto, la distancia euclídeana $d(\bar{h}_1(x), g \circ \bar{h}_2(x))$ tiende a cero cuando x tiende a S_∞^1 , de lo cual se desprende el teorema.

■

Para terminar este capítulo daremos el siguiente teorema.

4.32 Teorema: Sea $h: S \longrightarrow S'$ un homeomorfismo entre superficies compactas de género $g > 1$. Sean $(\mathbb{H}^2, p), (\mathbb{H}^2, p')$ las cubiertas universales de S, S' respectivamente. Sea \bar{h} un levantamiento de h (ver 1.5.19), sea \hat{h} la extensión de \bar{h} a $\bar{\mathbb{H}}^2$ dada por el teorema 2.4.21. Si $\hat{h}|_S$ coincide con $g|_S$, donde $g \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$, entonces existe $G: S \longrightarrow S'$ tal que $G \circ p = p' \circ g$.

Demostración: Basta ver que si $x, y \in \mathbb{H}^2$ son tales que $p(x) = p(y)$ entonces $g(x), g(y)$ satisfacen $p'(g(x)) = p'(g(y))$. Para ver ésto, se tiene que si $p(x) = p(y)$, entonces existe $f \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p)$ tal que $y = f(x)$ ver 1.5.16. Sea h^* como en 1.5.19, y sea $f' = h^*(f)$ entonces $f'(\bar{h}(x)) = \bar{h}(y)$. Como S y S' son compactas se tiene que f, f' son hiperbólicos (ver 2.4.15). Sean $z, w; z', w'$ los puntos fijos repulsor y atractor de f y f' respectivamente, se tiene que:

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x)) \qquad w' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'^n(\bar{h}(x)))$$

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{-n}(x)) \qquad z' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'^{-n}(\bar{h}(x)))$$

Como \hat{h} es continua en $\bar{\mathbb{H}}^2$ y como $\bar{h} \circ f^n = h^*(f^n) \circ \bar{h}$, se sigue que $\hat{h}(w) = w', \hat{h}(z) = z'$ por lo que $g(w) = w'$ y $g(z) = z'$ y por lo tanto f' y $g \circ f \circ g^{-1}$ tienen los mismos puntos fijos. Además si $z \in S_\infty^1$ es tal que $f(z) \neq z$ es el punto fijo atractor de algún $f_1 \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p)$ entonces $f \circ f_1 \circ f^{-1}$ es elemento de $\text{Aut}(\mathbb{H}^2, p)$ y fija a $f(z)$, por lo tanto, $\hat{h}(f(z)) = g(f(z))$. Además como

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f \circ f_1 \circ f^{-1}(x), \text{ con } x \in \mathbb{H}^2,$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{h}(f(z)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{h}(f \circ f_1^n \circ f^{-1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(\hat{h}(f_1^n \circ f^{-1}(x))) \\ &= f' \circ \hat{h}(\lim_{n \rightarrow \infty} (f_1^n \circ f^{-1}(x))) \\ &= f'(\hat{h}(z)). \end{aligned}$$

De aquí, $g(f(z)) = f'(g(z))$, por lo que f' y $g \circ f \circ g^{-1}$ coinciden en tres puntos y, por lo tanto, son iguales.

CAPITULO III

Espacio de Teichmuller

1.0 En este capítulo definiremos lo que es el espacio de Teichmuller de una superficie de Riemann de signatura (g,m) el cual denotaremos por $T_{(g,m)}$.

Este espacio consistirá (en terminos vagos) en el conjunto de estructuras conformes marcadas con una base del grupo fundamental, que admite una superficie topológica de signatura (g,m) . Además veremos que si S admite una estructura hiperbólica, este espacio se puede ver como una clase de equivalencia de grupos fuchsianos marcados los cuales representan a la superficie S junto con la marca. En este último caso, las superficies de Riemann de signatura (g,m) serán tales que si $m=0$, entonces $g>1$. Si $m\neq 0$ entonces los grupos que las representan serán de puros elementos hiperbólicos, esto es equivalente a pedir que cada superficie tenga contenida otra superficie con frontera geodésica con el mismo tipo de homotopía.

Sea S una superficie de Riemann de signatura (g,m) . Sea $x_0 \in S$.

3.1.2 Definición: Dadas dos curvas cerradas $\alpha, \beta: I \longrightarrow S$ definimos el numero de interseccion geometrica de α, β denotado por $\alpha * \beta$, como el minimo numero de interseccion de curvas α', β' donde α', β' varian en las clases libres de homotopía de α, β respectivamente.

3.1.3 Sea $x \in S$, sea $\mathcal{A} = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_j)_{i=1, \dots, g}^{j=1, \dots, m}$ una base canónica del grupo fundamental basado en x (1.4.8). Entonces los elementos de \mathcal{A}

satisfacen las siguientes igualdades:

$$\alpha_i * \alpha_j = \beta_i * \beta_j = \delta_i * \delta_j = 0$$

$$\alpha_i * \beta_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Definimos en el conjunto de base canónicas la siguiente relación de equivalencia:

3.1.4 Sean $x' \in S$ y $\mathcal{A}' = (\alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i)$ una base canónica de $\Pi_1(S, x')$, decimos que $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ son equivalentes, y la denotamos por $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}'$, si existe una curva $\delta: [0, 1] \rightarrow S$ que empieza en x y termina en x' tal que para cada i, j con $1 \leq i \leq g, 1 \leq j \leq m$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta^{-1} \cdot \alpha'_i \cdot \delta &\sim_x \alpha_i \\ \delta^{-1} \cdot \beta'_i \cdot \delta &\sim_x \beta_i \\ \delta^{-1} \cdot \gamma'_i \cdot \delta &\sim_x \gamma_i \end{aligned}$$

esta relación es de equivalencia y denotaremos la clase de equivalencia de \mathcal{A} por $[\mathcal{A}]$.

3.1.5 Definición: A la pareja $(S, [\mathcal{A}])$ la llamaremos superficie de Riemann marcada con marca $[\mathcal{A}]$.

3.1.6 Sea $h: S \rightarrow S'$ un homeomorfismo donde S' es otra superficie de Riemann. Denotamos por $h(\mathcal{A})$ a la base canónica de $\Pi_1(S', h(x))$ siguiente:

$$h(\mathcal{A}) = (h \circ \alpha_i, h \circ \beta_i, h \circ \gamma_j)$$

Ahora definiremos una relación de equivalencia en el conjunto de superficies de Riemann marcadas como sigue:

3.1.7 Decimos que las superficies de Riemann marcadas $(S, [\mathcal{A}]), (S, [\mathcal{A}'])$ están relacionadas si existe un homeomorfismo conforme $h: S \longrightarrow S'$ tal que $h(\mathcal{A}) \in [\mathcal{A}']$. A la clase de equivalencia de $(S, [\mathcal{A}])$ la denotaremos por $[S, [\mathcal{A}]]$.

3.1.8 Definición: Sea S una superficie de Riemann de signatura (g, m) . El espacio de Teichmüller de S denotado por $T_{(g, m)}$ es el conjunto de clases de equivalencia de superficies de Riemann marcadas.

La definición de 3.1.4 es equivalente a la siguiente:

3.1.9 Sea S una superficie de Riemann de signatura (g, m) . Sean $x, x' \in S$ y sean $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ dos bases canónicas basadas en x, x' respectivamente, entonces éstas están relacionadas si y sólo si existe un homeomorfismo homotópico a la identidad que manda x en x' y es tal que $h(\mathcal{A}) = h(\mathcal{A}')$.

El siguiente teorema lo usaremos mas adelante:

3.1.10 Teorema: Sea $h_i: S \longrightarrow S'$ $i=1, 2$ dos homeomorfismos entre superficies de Riemann, sean x, x' en S, S' respectivamente tales que $h_i(x) = x'$. Sean $\Pi_1(S, x), \Pi_1(S', x')$ los grupos fundamentales de S y S' basados en x, x' respectivamente. Entonces $h_1 \sim h_2$ si y solo si $h_{1*} = h_{2*}$.

Demostración: Sean $(\mathbb{H}^2, p), (\mathbb{H}^2, p')$ las cubiertas universales respectivas, y sean \bar{h}_1, \bar{h}_2 los levantamientos respectivos a la cubierta universal, tales que $\bar{h}_1(x) = \bar{h}_2(x) = x'$ donde x, x' son tales que $p(x) = x, p'(x') = x'$. Sea h_1^*, h_2^* los isomorfismos correspondientes de $G = \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p)$ en $G' = \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p')$, ver 1.5.19. Entonces $h_1^* = h_2^*$. Definase la siguiente homotopía entre \bar{h}_1, \bar{h}_2 :

$$\bar{H}: I \times \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$$

$\bar{H}(t, z) =$ al punto que divide al segmento hiperbólico cuyos extremos son $\bar{h}_1(z), \bar{h}_2(z)$ en la razón $\frac{t}{1-t}$; con esto se tiene que si $g \in G$ $g' = h_1^*(g)$ entonces $g'(H(t, z)) = H(t, g(z))$ por lo que esta homotopía induce otra $H: I \times S \longrightarrow S'$ la cual es tal que $H(t, p(z)) = p' \circ H(t, z)$ y además satisface que $H(0, _) = h_1, H(1, _) = h_2$.
 Observe que $H(t, x) = x'$ para toda t ya que $\bar{H}(t, g(x)) = g'(\bar{H}(t, x))$ para toda $g \in G$ y $g' = h_1^*(g)$. ■

A continuación daremos una definición equivalente para $T_{(g, m)}$ cuando $2g - m - 2 > 0$.

3.1.11 Sea S una superficie de Riemann de signatura (g, m) tal que $\chi(S) < 0$. Sea $x \in S$ y $\Pi_1(S, x)$ el grupo fundamental de S basado en x . Sea (\mathbb{H}^2, p) una cubierta universal de S (2.4.11), considere en S la estructura hiperbólica inducida por p la cual es completa. Supongase además que el grupo $G = \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p)$ tiene solo elementos hiperbólicos (si $m=0$ esto no es necesario suponerlo ver 2.4.15). Sea $x \in \mathbb{H}^2$ tal que $p(x) = x$, sea $J: \Pi_1(S, x) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p)$ el isomorfismo definido en 1.5.17. Sea \mathcal{A} una base canónica de $\Pi_1(S, x)$, Defínase la siguiente base de G :

$$\mathcal{B} = J(\mathcal{A}) = (J[\alpha_i], J[\beta_i], J[\gamma_j])_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, g}}$$

defínase $A_i = J([\alpha_i]), B_i = J([\beta_i]), C_j = J([\gamma_j])$

entonces el conjunto \mathcal{B} genera al grupo G y además A_i, B_i, C_j satisfacen la siguiente relación:

3.1.13
$$C_m \circ C_{m-1} \circ \dots \circ C_1 \circ B_g^{-1} \circ A_g^{-1} \circ B_g \circ A_g \circ \dots \circ B_1^{-1} \circ A_1^{-1} \circ B_1 \circ A_1 = \text{Id}$$

Denotemos por $a_i, b_i, c_j \subset \mathbb{H}^2$ ($i=1, \dots, g; j=1, \dots, m$), los ejes de A_i, B_i, C_j respectivamente (ver 2.2.6). Entonces las geodésicas cerradas en S $(p(a_i), p(b_i), p(c_j)) = (\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\gamma}_j)$ son, respectivamente, libremente homotópicas a $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_j)$ ver (2.4.18). Como $\hat{\alpha}_1 * \hat{\beta}_1 = 1$ implica que $\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1$ se intersectan en un solo punto $\{x\}$, si elegimos este punto como punto base entonces la base \mathcal{B} tiene las siguientes propiedades:

- 3.1.14 i) \mathcal{B} genera a G y consta de puros elementos hiperbólicos.
 ii) Los elementos de \mathcal{B} satisfacen la relación 3.1.13.
 iii) si a_1, b_1 son los ejes de A_1, B_1 respectivamente, entonces $a_1 \cap b_1$ es un punto $\{x\}$ el cual es tal que $p(x) = x$.

3.1.15 Definición: A la base \mathcal{B} definida en 3.1.12 la cual satisface 3.1.14 la llamaremos base canónica del grupo G . A la pareja (G, \mathcal{B}) la denominaremos por grupo fuchsiano marcado, y a la pareja (g, m) la llamaremos la signatura de G (esta es la signatura de la superficie que representa). En este caso decimos que (G, \mathcal{B}) representa a la superficie de Riemann marcada $(S, [\mathcal{A}])$.

Ahora daremos una definición equivalente del espacio de Teichmüller en términos de grupos fuchsianos marcados. Para ésto, definiremos primero una relación de equivalencia en el conjunto de grupos fuchsianos marcados.

3.1.16 Definición: Decimos que dos grupos fuchsianos marcados $(G, \mathcal{B}), (G', \mathcal{B}')$ son equivalentes si existe un elemento $h \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ tal que $G' = h \circ G \circ h^{-1}, \mathcal{B}' = h \circ \mathcal{B} \circ h^{-1}$.

Denotaremos por $[G, \mathcal{B}]$ a la clase de equivalencia de (G, \mathcal{B}) inducida por esta relación.

1.18 Proposición: Si dos superficies marcadas $(S, [\mathcal{A}]), (S', [\mathcal{A}'])$ son equivalentes 3.1.7 entonces los grupos fuchsianos marcados también son equivalentes 3.1.16.

Demostración: Sean $(\mathbb{H}^2, p), (\mathbb{H}^2, p')$ las cubiertas universales de S, S' respectivamente, sean $G = \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p), G' = \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p')$, por hipótesis hay un homeomorfismo $h: S \rightarrow S'$ conforme con la propiedad de que $h(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$. Sea \bar{h} un levantamiento de h , implica que \bar{h} es un homeomorfismo conforme y por lo tanto $\bar{h} \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$. De 1.5.19 ii) se tiene que para toda $g \in G$, $\bar{h} \circ g \circ \bar{h}^{-1} = h^*(g)$ por lo tanto $G' = \bar{h} \circ G \circ \bar{h}^{-1}$ y $\mathcal{B}' = \bar{h} \circ \mathcal{B} \circ \bar{h}^{-1}$. Lo que completa la demostración. ■

Con la misma notación que en la proposición anterior se deduce el siguiente teorema.

1.20 Teorema: Hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de clases de equivalencia de grupos fuchsianos marcados de signatura (g, m) y el conjunto $T_{(g, m)}$. Inducida por la siguiente relación:

$$(S, [\mathcal{A}]) \longmapsto (G, \mathcal{B}) \text{ donde } (G, \mathcal{B}) \text{ representa a } (S, [\mathcal{A}])$$

Demostración: De 3.1.19 se tiene que si dos superficies de Riemann marcadas $(S, [\mathcal{A}]), (S', [\mathcal{A}'])$ son equivalentes entonces los grupos fuchsianos marcados que las representan también son equivalentes. El converso se da por lo siguiente:

El grupo fuchsiano marcado (G, \mathcal{B}) de signatura (g, m) representa a la superficie $(\mathbb{H}^2/G, p(\mathcal{B}))$ donde p es la proyección natural de \mathbb{H}^2 en \mathbb{H}^2/G . Sea (G', \mathcal{B}') tal que

$$(G', \mathcal{B}') = (\bar{h} \circ G \circ \bar{h}^{-1}, \bar{h} \circ \mathcal{B} \circ \bar{h}^{-1})$$

y sea $p': \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2/G'$, la proyección natural. Entonces $\bar{\pi}$ induce un homeomorfismo $h: \mathbb{H}^2/G \longrightarrow \mathbb{H}^2/G'$, el cual hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{H}^2 \\
 p \downarrow & & \downarrow p' \\
 \mathbb{H}^2/G & \xrightarrow{h} & \mathbb{H}^2/G'
 \end{array} ;$$

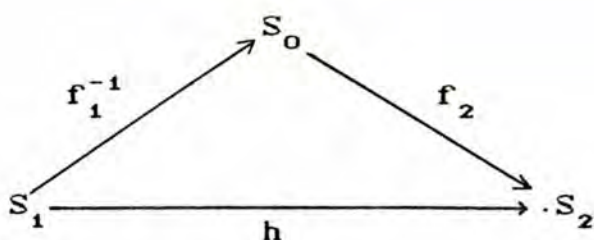
además el homeomorfismo h es conforme con lo que queda probada la afirmación. ■

1.1.21 Lo anterior puede considerarse como una definición alternativa para el espacio $T_{(g,m)}$.

Otra forma equivalente de definir el espacio de Teichmüller es la siguiente.

Sea S_0 una superficie de Riemann fija de tipo (g,m) , considérese el conjunto \mathcal{T} formado por las parejas $(S, [f])$ donde S es una superficie de Riemann, $f: S_0 \longrightarrow S$ es un homeomorfismo y $[f]$ denota la clase de homotopía del morfismo f .

1.1.22 En \mathcal{T} definimos la siguiente relación de equivalencia: decimos que $(S_1, [f_1])$ está relacionada con $(S_2, [f_2])$ si existe un homeomorfismo conforme $h: S_1 \longrightarrow S_2$ el cual es homotópico a $f_2 \circ f_1^{-1}$ i.e. el siguiente diagrama conmuta módulo homotopía:



Sea $[S, [f]]$ la clase de equivalencia de $(S, [f])$. Si denotamos por $\mathcal{T}_{(g, m)}$ al conjunto de clases de equivalencia determinadas por esta relación, entonces hay una biyección entre $\mathcal{T}_{(g, m)}$ y $T_{(g, m)}$, la cual está dada como sigue

1.23

$$K: \mathcal{T}_{(g, m)} \longrightarrow T_{(g, m)}$$

$$[S, [f]] \longmapsto [S, [f(\mathcal{A}_0)]]$$

en donde \mathcal{A}_0 es una base canónica fija de $\Pi_1(S_0, x_0)$.

1.24 Teorema: La función K es una biyección.

Demostración: Primero probaremos que K está bien definida, para ésto supongamos que $(S, [f]), (S', [f'])$ están relacionados según la definición 3.1.22; entonces, existe un homeomorfismo conforme $h: S \longrightarrow S'$ el cual es homotópico a $f' \circ f^{-1}$, esto implica que las superficies de Riemann marcadas $(S, [f(\mathcal{A}_0)]), (S', [f'(\mathcal{A}_0)])$ están relacionadas según 3.1.7, por lo tanto K está bien definida.

Para ver que K es inyectivo, supongamos que

$$(S, [f(\mathcal{A}_0)]), (S', [f'(\mathcal{A}_0)])$$

están relacionadas según 3.1.7, por lo tanto existe un homeomorfismo conforme $h: S \longrightarrow S'$ tal que

$$[h \circ f(\mathcal{A}_0)] = [f'(\mathcal{A}_0)]$$

.....Ahora bien si $x \in S$ es el punto en el cual esta basado $f(\mathcal{A}_0)$ podemos suponer sin perdida de la generalidad que $x' = h(x) = f' \circ f^{-1}(x)$ es el punto base de $f'(\mathcal{A}_0)$ (en caso de que no sucediera se compone f' con un homeomorfismo homotópico a la identidad $\varphi': S' \rightarrow S'$ tal que $\varphi'(f' \circ f^{-1}(x)) = h(x)$.) Con esto se cumple que $[\varphi'(f'(\mathcal{A}_0))] = [f'(\mathcal{A}_0)]$ lo cual implica que $h(f(\mathcal{A}_0)) \approx f'(\mathcal{A}_0)$, por lo tanto existe una curva cerrada $\delta: I \rightarrow S'$ basada en x y tal que

$$\delta \circ f'(\mathcal{A}_0) \circ \delta^{-1} \sim_x h \circ f(\mathcal{A}_0)$$

Sea (\mathbb{H}^2, p') una cubierta universal de S' y sea $x' \in S'$ tal que $p'(x') = x$, sea $g \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p')$ tal que $J([\delta]) = g$ ver 5.1.17 y sea $G: S' \rightarrow S'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{H}^2 \\ \downarrow p' & & \downarrow p' \\ S' & \xrightarrow{G} & S' \end{array}$$

Puesto que $G \circ f'(\mathcal{A}_0) = \delta \circ f'(\mathcal{A}_0) \circ \delta^{-1}$, el homeomorfismo $G^{-1} \circ h$ es conforme y es tal que $G^{-1} \circ h(f(\mathcal{A}_0)) \approx f'(\mathcal{A}_0)$. Por lo tanto $(G^{-1} \circ h)_* = (f' \circ f^{-1})_*$ y, por el teorema 3.1.10 implica que $(S, [f])$, $(S', [f'])$ son equivalentes en el sentido 3.1.2. y por lo tanto K es inyectiva.

Para ver que K es sobre se tiene que, si $(S, [\mathcal{A}])$ es una superficie de Riemann marcada, se puede construir un homeomorfismo de S_0 a S de tal forma que $h(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$. Esto se explica en lo que sigue.

Sea P_0 un polígono plano y $\mathcal{P}_0: P_0 \longrightarrow S$ la proyección que resulta de identificar sus lados como en 1.1.5. Sea $\mathcal{P}: P \longrightarrow S$ la correspondiente para S , entonces es fácil construir un homeomorfismo de P_0 en P que manda lados correspondientes en lados correspondientes. Esto se ilustra en la figura 3.1.24. Por lo tanto K es sobre y se concluye el teorema. ■

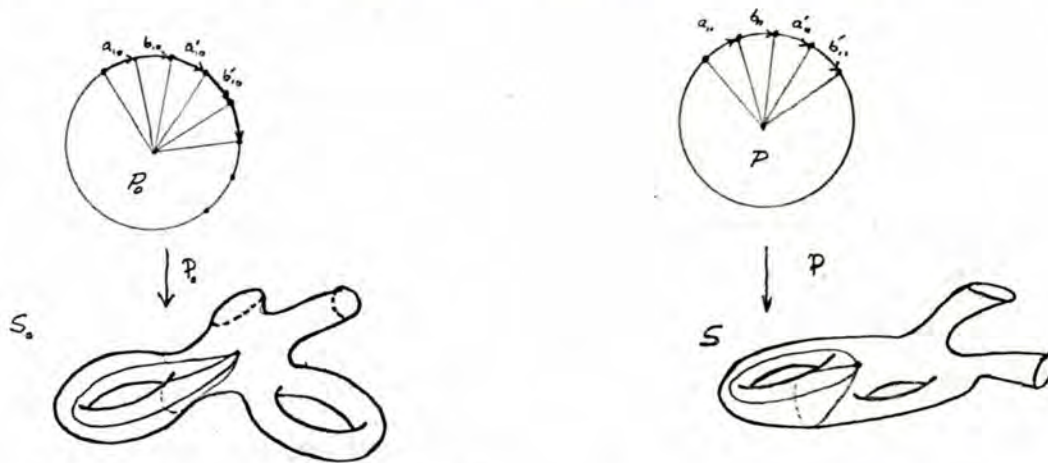


fig. 3.1.24

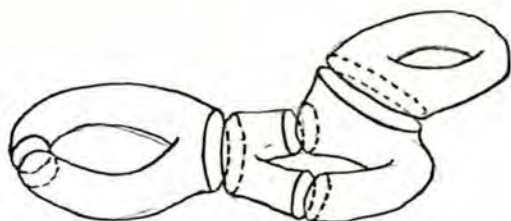
En los capítulos siguientes cuando nos refiramos a $T_{(g,m)}$ este consistirá en cualquiera de las definiciones dadas en este capítulo.

CAPITULO IV

Modelo de Fricke del Espacio
de
Teichmuller

Dada una superficie de Riemann S de signatura (g,m) , como vimos en el capítulo anterior, hay varias definiciones equivalentes para $T_{(g,m)}$ una de las cuales consistía en considerar el conjunto de clases de equivalencia (conforme) de superficies de Riemann marcadas. Riemann conjeturo (cuando $m=0$) que $T_{(g,0)}$ puede ser parametrizado por $3g-3$ parametros complejos. En 1960 se probo que $T_{(g,0)}$ tiene estructura de variedad analitica compleja de dimension $3g-3$. Este resultado depende fundamentalmente de los trabajos de Fricke y Teichmuller. Fricke (1897) dió una parametrización de los grupos de transformaciones de cubierta los cuales representan superficies de signatura (g,m) ($\chi(S) < 0$). Mas adelante (1966,1970) L. Keen y S. Wolpert desarrollaron la teoría de coordenadas de Fricke, usando tecnicas modernas. La idea basica consiste en, dado un grupo fuchsiano, considerar subgrupos marcados de G , los cuales representan superficies de signatura $(0,3)$. Estos son tales que el grupo original se obtiene de estos haciendo el producto libre de ellos con relaciones.

Geométricamente esto se puede interpretar como dividir la superficie original en superficies de signatura $(0,3)$ y luego identificar los hoyos por medio de isometrías.



Para amalgamar los grupos fuchsianos marcados necesitaremos conocer sus regiones fundamentales. Para ello describiremos en la siguiente sección la construcción de un polígono fundamental llamado polígono de Fricke el cual solo depende de la marca del grupo.

4.1 Construcción del polígono de Fricke asociado a un grupo marcado de signatura (g, m) .

4.1.1 Sea (G, \mathcal{B}) un grupo fuchsiano de signatura (g, m) . R. Fricke definió una clase de polígonos fundamentales para el grupo marcado (G, \mathcal{B}) , los cuales dependen de la base \mathcal{B} y de la elección de un punto $x \in \mathbb{H}^2$. Denotemos por $P(x, \mathcal{B})$ al polígono correspondiente. Fricke probó que que el punto $x \in \mathbb{H}^2$ se puede elegir de tal forma que $\partial P(x, \mathcal{B})$ sea una curva poligonal de $4g - 3m$ lados y que $P(g, m)$ sea convexo. Posteriormente L. Keen [Keen 1] probó que, imponiendo condiciones al punto x que dependen de la base \mathcal{B} , el polígono resultante se encuentra determinado unicamente por los elementos de \mathcal{B} . A este polígono lo llamaremos polígono canónico de Fricke.

A continuación describiremos la construcción general de $\partial P(x, \mathcal{B})$ y al final determinaremos (determinaremos) condiciones para el punto x , con lo cual obtendremos el polígono canónico de Fricke.

Antes daremos unas definiciones:

4.1.2 Definición: Sea (G, \mathcal{B}) un grupo fuchsiano marcado de signatura

(g, m) , con $\mathcal{B} = (A_i, B_i, C_j)$ $1 \leq i \leq g; 1 \leq j \leq m$. Decimos que P es una region poligonal estandar para (G, \mathcal{B}) si se satisfacen las siguientes condiciones:

i) P es un polígono fundamental para G (2.3.10). ∂P consta de $4g+3m$ lados los cuales consisten de segmentos de geodésica, semi-rectas o arcos en S_∞^1 . Tambien ∂P esta orientada en sentido de las manecillas del reloj.

ii) Los lados de ∂P son etiquetados en orden cíclico de la siguiente manera:

$$a_1, b_1, a'_1, b'_1, \dots, a_g, b_g, a'_g, b'_g, c_1, e_1, c'_1, \dots, c_m, e_m, c'_m.$$

y cumplen las siguientes relaciones para cada i, j con $1 \leq i \leq g; 1 \leq j \leq m$

$$\begin{aligned} A_i(a_i) &= -a'_i \\ B_i^{-1}(b_i) &= -b'_i \\ C_j(c_i) &= -c'_i, \end{aligned}$$

donde $-a', -b', -c'$ significa considerar las parametrizaciones de los arcos a', b', c' en sentido inverso.

iii) Los lados $a_i, b_i, a'_i, b'_i, c_j, c'_j$, son segmentos de rectas hiperbólicas en \mathbb{H}^2 y los lados e_j, e'_j son arcos en S_∞^1 .

Con esto podemos empezar con la construcción:

3 Sea (G, \mathcal{B}) como en el parrafo anterior. Sea $x_0 \in \mathbb{H}^2$ un punto arbitrario, la curva poligonal la construiremos determinando sus

vértices en la cerradura de \mathbb{H}^2 (aquí usaremos los modelos Δ, \mathbb{P}^+). Los vértices, que definiremos a continuación estarán etiquetados en el orden en que habrán de ser recorridos los lados de ∂P con la orientación respectiva y usaremos la siguiente notación.

$$\begin{aligned}
 \text{1.1.4 en } \mathbb{H}^2: & \quad x_1^1, x_1^2, x_0, x_1^3, x_1^4, \\
 & \quad x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4, \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad x_g^1, x_g^2, x_g^3, x_g^4.
 \end{aligned}$$

y definimos $x_1 = x_1^4, \dots, x_g = x_g^4$.

Se tienen además los siguientes vértices:

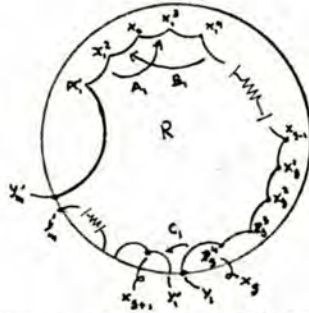
$$\begin{aligned}
 y_1, y_1' & \in S_\infty^1 \quad ; \quad x_{g+1} \in \mathbb{H}^2. \\
 y_2, y_2' & \in S_\infty^1 \quad ; \quad x_{g+2} \in \mathbb{H}^2. \\
 & \quad \vdots \\
 y_m, y_m' & \in S_\infty^1 \quad ; \quad x_{g+m} \in \mathbb{H}^2.
 \end{aligned}$$

Una vez definidos estos puntos denotaremos los lados del polígono como sigue:

$$\begin{aligned}
 \text{1.1.5} \quad a_1 & = \overrightarrow{x_1^1 x_1^2} \quad ; \quad b_1 = \overrightarrow{x_1^2 x_0} \quad ; \quad a_1' = \overrightarrow{x_0 x_1^3} \quad ; \quad b_1' = \overrightarrow{x_1^3 x_1^4} \quad (= \overrightarrow{x_1^3 x_1}) \quad ; \\
 a_i & = \overrightarrow{x_{i-1}^1 x_i^1} \quad ; \quad b_i = \overrightarrow{x_i^1 x_i^2} \quad ; \quad a_i' = \overrightarrow{x_i^2 x_i^3} \quad ; \quad b_i' = \overrightarrow{x_i^3 x_i^4} \quad (= \overrightarrow{x_i^3 x_{i+1}}) \\
 c_j & = \overrightarrow{x_{g+j} x_{g+j}'} \quad ; \quad e_j = \overrightarrow{y_j y_j'} \quad ; \quad c_j' = \overrightarrow{y_j' x_{g+j}} \quad ;
 \end{aligned}$$

aquí $\overrightarrow{z w}$ denota el segmento de recta (hiperbólico) dirigido que va de z al punto w . Y $\overrightarrow{z w}$ denota el arco orientado en S_∞^1 que va de z al punto w .

Esto se ilustra en la siguiente figura:

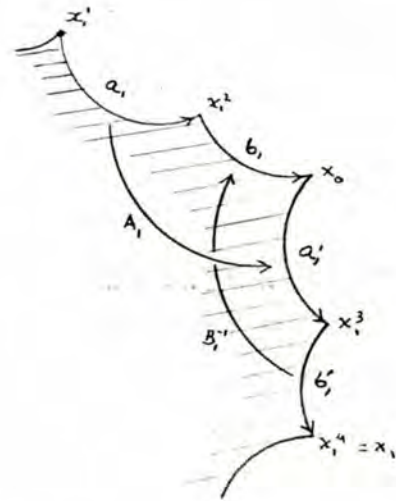


Lo que haremos en seguida será definir cada uno de los vértices del polígono a partir de x_0 y de los elementos de \mathcal{B} . De tal forma que los lados cumplan las relaciones dadas en 4.1.2 ii).

.1.6 1º Para definir los lados a_1, b_1, a'_1, b'_1 , como estos deberán cumplir con 3.1.2 ii), se tiene entonces que $A_1(a_1) = -a'_1$; $B_1^{-1}(b_1) = -b'_1$ de donde se obtienen las siguientes relaciones:

a... $A_1(\overrightarrow{x_1^1 x_1^2}) = \overrightarrow{x_1^3 x_0}$.
 b... $B_1^{-1}(\overrightarrow{x_1^2 x_0}) = \overrightarrow{x_1^4 x_1^3}$.

de a) se obtiene que
 $A_1(x_1^1) = x_1^3$; $A_1(x_1^2) = x_0$
 y de b se obtiene que
 $B_1^{-1}(x_1^2) = x_1^4$; $B_1^{-1}(x_0) = x_1^3$
 de donde resulta lo siguiente:



.1.7 $x_1^1 = A_1 B_1^{-1}(x_0)$; $x_1^2 = A_1^{-1}(x_0)$;
 $x_1^3 = B_1^{-1}(x_0)$; ; $x_1 = x_1^4 = B_1^{-1} A_1^{-1}(x_0)$.

Estas relaciones las tomaremos como definiciones de los puntos $x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4 = x_1$.

.1.8 2º Supongamos que tenemos definidos para toda j con $1 \leq j < i$ los

puntos $x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4 = x_j$ y los segmentos a_j, b_j, a'_j, b'_j tales que se satisfacen las relaciones correspondientes dadas en la definición 3.1.2 ii).

4.1.9 Para definir los puntos $x_i^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4 = x_i$ y los lados a_i, b_i, a'_i, b'_i los cuales deberán satisfacer $A_i(a_i) = -a'_i$; $B_i^{-1}(b_i) = -b'_i$ por lo que si definimos los puntos $x_i^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4 = x_i$ como sigue:

$$x_i^1 = A_i^{-1} B_i^{-1} A_i(x_{i-1}) \quad ; \quad x_i^2 = B_i A_i(x_{i-1});$$

$$x_i^3 = A_i(x_{i-1}) \quad ; \quad x_i^4 = x_i = B_i^{-1} \circ A_i^{-1} \circ B_i \circ A_i(x_{i-1}).$$

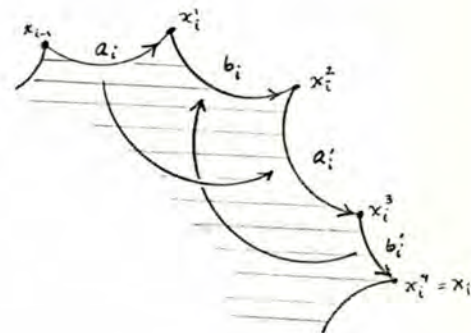
Así los puntos $x_i^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4$ quedan definidos en términos de \mathcal{B} y x_0 como sigue:

$$x_i^1 = A_i^{-1} \circ B_i \circ A_i \circ \left(\prod_{j=1}^{i-1} B_j^{-1} \circ A_j^{-1} \circ B_j \circ A_j \right) (A_1^{-1} B_1^{-1}(x_0))$$

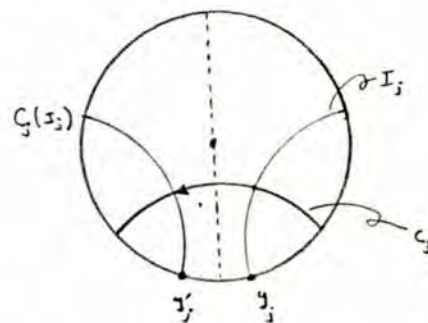
$$x_i^2 = B_i \circ A_i \circ \left(\prod_{j=1}^{i-1} B_j^{-1} \circ A_j^{-1} \circ B_j \circ A_j \right) (A_1^{-1} B_1^{-1}(x_0))$$

$$x_i^3 = A_i \circ \left(\prod_{j=1}^{i-1} B_j^{-1} \circ A_j^{-1} \circ B_j \circ A_j \right) (A_1^{-1} B_1^{-1}(x_0))$$

$$x_i^4 = \left(\prod_{j=1}^{i-1} B_j^{-1} \circ A_j^{-1} \circ B_j \circ A_j \right) (A_1^{-1} B_1^{-1}(x_0))$$



4.1.9 3º Para determinar los lados c_j, c'_j considérese I_j el círculo isométrico de la transformación C_j (2.2.6). Sea c_j el eje de C_j . Como $\mathbb{H}^2 - c_j$ consta de dos componentes y la dirección de traslación determina un lado izquierdo y uno derecho del eje, entonces sea y_j el extremo del arco de $I_j \cap \mathbb{H}^2$ que está en la componente izquierda de $\mathbb{H}^2 - c_j$ y sea $y'_j = C_j(y_j)$. Como las componentes de $\mathbb{H}^2 - C_j$ son invariantes bajo C_j implica que y_j, y'_j están en la misma componente



4.1.10 4^o Para cada j con $0 \leq j \leq m$ definamos x_{g+j} como sigue:

$$x_{g+j} = \left(\prod_{k=1}^j C_k \right) (x_g) = \left(\prod_{k=1}^j C_k \right) \left(\prod_{j=1}^{i-1} B_j^{-1} \circ A_j^{-1} \circ B_j \circ A_j \right) (A_1^{-1} B_1^{-1} (x_0))$$

Con lo anterior se tienen definidos todos los vértices de $P(x_0, \mathcal{B})$ y se tiene que $x_{g+m} = x_1^1$, esto por ser \mathcal{B} una base canónica y sus elementos satisfacen 3.1.14 ii).

4.1.11 Definidos los puntos, los lados están determinados a partir de estos por 4.1.5 los cuales por construcción cumplen 4.1.2 ii) y la curva poligonal $\partial P(x_0, \mathcal{B})$ resulta de unir los arcos en el siguiente orden:

$$4.1.12 \quad \partial P(x_0, \mathcal{B}) = a_1 \cdot b_1 \cdot a_1' \cdot b_1' \cdot \dots \cdot a_g \cdot b_g \cdot a_g' \cdot b_g' \cdot c_1 \cdot e_1 \cdot c_1' \cdot \dots \cdot c_m \cdot e_m \cdot c_m'$$

la cual es cerrada ya que $x_{g+m} = x_1^1$

4.1.13 Para determinar el polígono canónico de Fricke basta pedir que x_0 esté dado por la siguiente relación:

i) si $g \geq 1$ entonces $\{x_0\} = \text{eje } A_1 \cap \text{eje } B_1$

ii) si $g = 0$ entonces $\{x_0\} = C_1^{-1}(\text{eje } C_1 \circ C_2^{-1}) \cap \text{eje } C_1^{-1} \circ C_2$

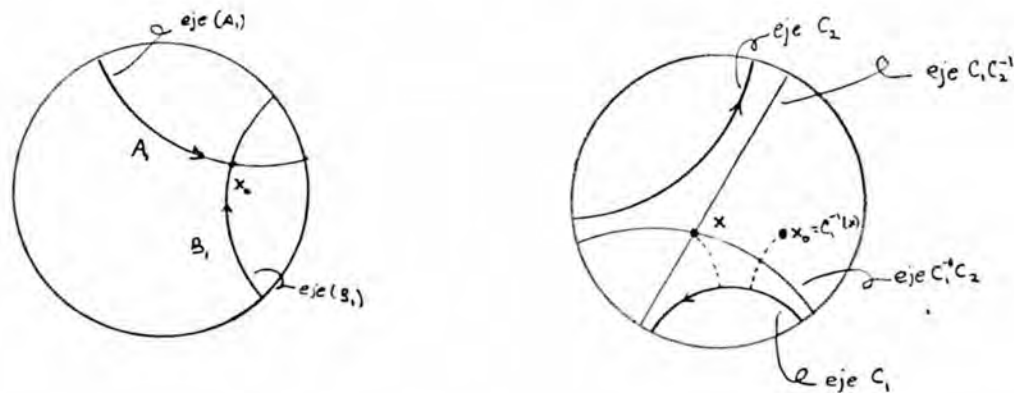


fig 4.1.3

4.2 Parametros del modelo de Fricke.

En esta seccion nos ocuparemos de dar los parametros que determinan un punto de $T_{(g,m)}$ visto como las clases de equivalencia de grupos fuchsianos marcados ver 3.1.16. Estos parámetros corresponden a las longitudes de ciertas geodesicas cerradas de la superficie que representa, las cuales dividen a la superficie en superficies mas simples.

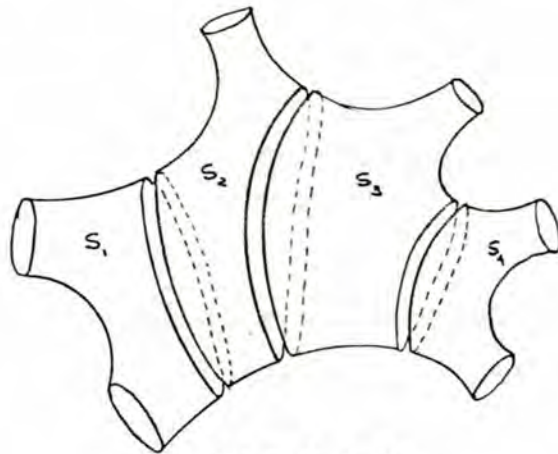


fig 4.2.0

Se darán primero los parámetros para determinar un grupo fuchsiano de signatura $(0,3)$, con esto y utilizando tecnicas para amalgamar grupos, se ira se iran construyendo grupos de signatura (g,m) .

4.2.1 Definición: Sea (G, \mathcal{B}) un grupo fuchsiano marcado de signatura (g,m) con $2g+m-2 > 0$ y $\mathcal{B} = (A_i, B_i, c_j)_{\substack{i=1, \dots, g \\ j=1, \dots, m}}$. Decimos que (G, \mathcal{B}) está normalizado si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

i) $g=0$ ($m > 2$) entonces el punto fijo repulsor de C_2 es 1 y los puntos fijos repulsor y atractor de $C_2 \circ C_1$ son $\infty, 0$ respectivamente.

ii) Si $g=1, m=1$, entonces 1 es el punto fijo repulsor de A_1 , y los puntos fijos repulsor y atractor de $A_1 \circ C_1$ son $\infty, 0$ respectivamente. respectivamente.

iii) Si $g \geq 2$ entonces 1 es el punto fijo repulsor de A_1 y los puntos fijos repulsor y atractor de $B_1 \circ A_1 \circ B_1^{-1} \circ A_1^{-1}$ son $\infty, 0$.

con se tiene que para cada punto de $T_{(g, m)}$ hay un único grupo fuchsiano marcado que la representa.

4.2.2 Contrucción de (G, \mathcal{B}) con signatura $(0, 3)$.

Para determinar el grupo marcado normalizado primero haremos una discusión geométrica de los elementos geometricos con los cuales obtendremos como estan dispuestos los ejes de los generadores. Luego probaremos que los puntos fijos satisfacen ciertas desigualdades (4.2.7), las cuales determinan al grupo (4.2.8). Con ésto, probaremos al final que todo grupo fuchsiano está determinado por tres parámetros, los cuales coinciden con la mitad de sus trazas (4.2.11).

Sea (G, \mathcal{B}) un grupo fuchsiano marcado normalizado de signatura $(0, 3)$ con solo elementos hiperbólicos. Este representa a una superficie hiperbólica marcada (S, \mathcal{A}) de tipo $(0, 3)$, donde $\mathcal{A} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ es una base canónica de $\Pi_1(S, x)$ con $x \in S$. Sea J el isomorfismo definido en 1.5.17, tal que $J(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, Si denotamos por (C_1, C_2, C_3) a la base \mathcal{B} , y c_1, c_2, c_3 son los ejes de traslación respectivos, entonces éstos se proyectan en geodésicas cerradas simples (2.4.18) $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3$ las cuales son libremente homotópicas a

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ respectivamente (2.4.18) y son tales que $\hat{\gamma}_i \cap \hat{\gamma}_j = \emptyset$ ya que $\gamma_i * \gamma_j = 0$ ver (3.1.3).

4.2.3 Las curvas $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3$ acotan una superficie compacta $\hat{S} \subset S$ con frontera geodésica de tipo (0,3). Si extraemos de \hat{S} el conjunto $\cup \gamma_i$, obtenemos una región simplemente conexa, la cual se levanta a \mathbb{H}^2 en una región simplemente conexa cuya frontera intersecta a los ejes c_1, c_2, c_3 ver fig 4.2.3.

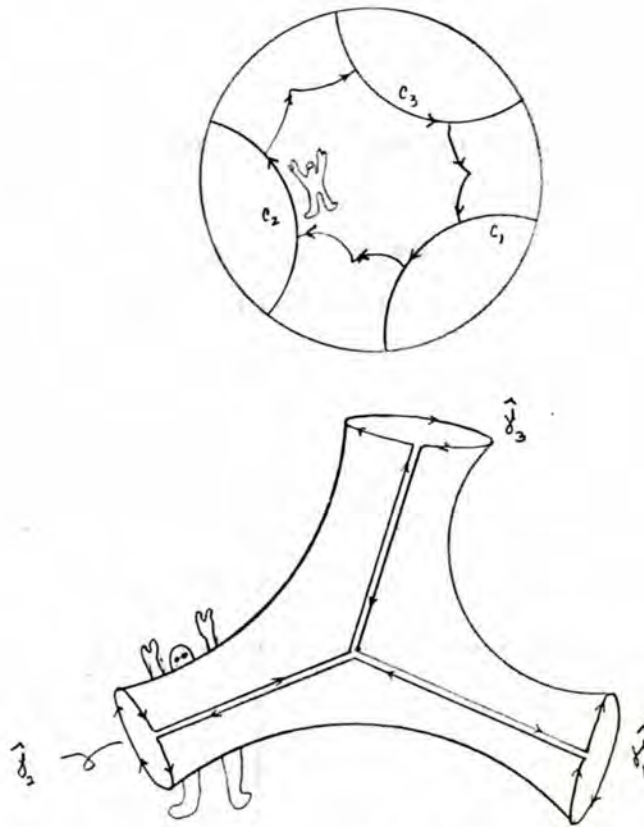


fig. 4.2.3

4.2.4 Con esto tenemos que la disposición de los ejes c_1, c_2, c_3 , así como la orientación de los mismos es como se ilustra en la fig. 4.2.4. Además ninguno de los extremos de los ejes coincide, ya que entonces las transformaciones C_1, C_2, C_3 generarían elementos parabólicos.

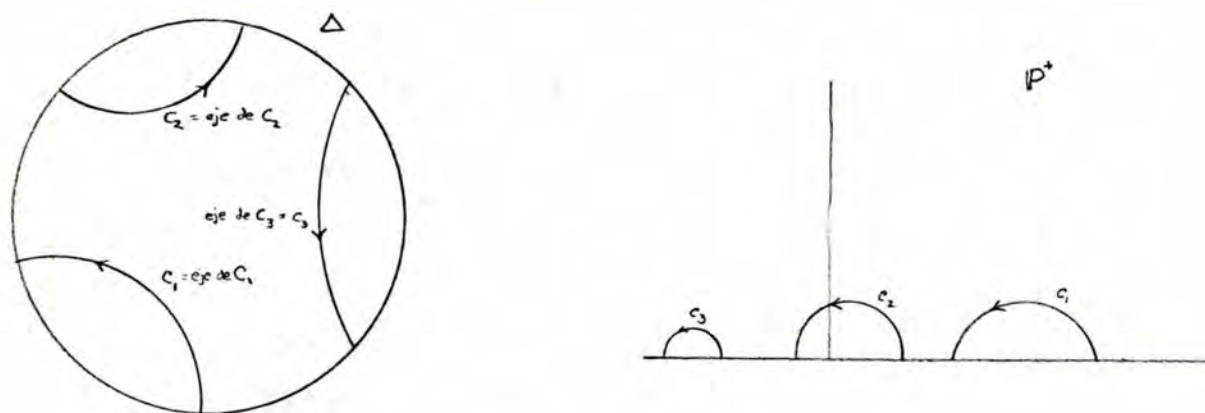


fig. 4.2.4

- 2.5 Denotaremos por z_i, w_i los puntos fijos repulsor y atractor de la transformación C_i $i=1,2,3$. Como (G, \mathcal{B}) ^{está normalizado} se tiene que $z_2=1$. Como $C_3 \circ C_2 \circ C_1 = \text{Id}$ se sigue que $z_3=0$ y $w_3=\infty$. Por lo que en el modelo del semiplano los ejes tienen la siguiente disposición y orientación:

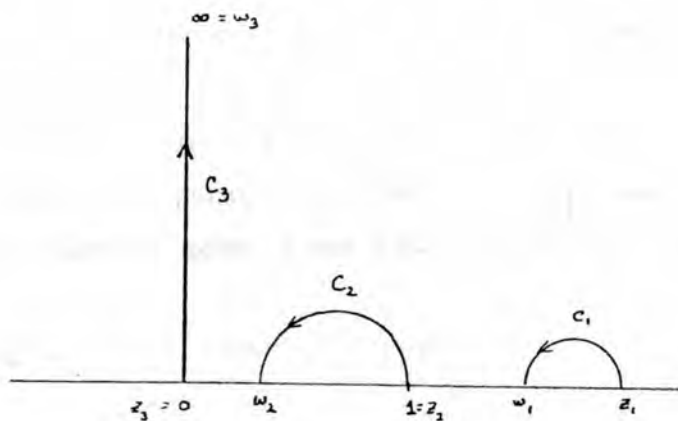


fig. 4.2.5

- 2.6 **Proposición:** Sea (G, \mathcal{B}) un grupo fuchsiano marcado normalizado y de signatura $(0,3)$, tal que $\mathcal{B}=(C_1, C_2, C_3)$ entonces existen números

reales a, b, c, d, λ tales que se cumplen las siguientes condiciones:

2.7 C.1... i) $C_3^{-1} = C_2 \circ C_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$
 ii) $C_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $ad - bc = 1$
 iii) $C_1 = \begin{pmatrix} d\lambda & -b/\lambda \\ -c\lambda & a/\lambda \end{pmatrix}$

C.2... i) $0 < -\lambda < 1$

ii) $a + b = c + d$

iii) $|\lambda + \frac{1}{\lambda}| > 2$; $|a + d| > 2$; $|d\lambda + \frac{a}{\lambda}| > 2$.

iv) $0 < -\frac{b}{c} < 1$.

v) $0 < \frac{a}{c} < \frac{b}{d} < -\frac{b}{c} < 1 < -\frac{d}{c} < -\frac{b}{a} < \frac{\lambda d - a/\lambda \pm \sqrt{(d\lambda + a/\lambda)^2 - 4}}{-2c\lambda}$

Demostración: C.1 i) se sigue de que $C_2 \circ C_1$ fija al $0, \infty$ por lo tanto $C_2 \circ C_1(z) = \lambda^2 z$ para alguna $\lambda \in \mathbb{R}$, (el signo de λ no esta determinado por lo que lo eligiremos negativo).

C.2 i) resulta de ser 0 el punto fijo atractor de $C_2 \circ C_1$ lo que implica que $|\lambda| < 1$.

C.2 ii) resulta de que $C_2(1) = 1$ lo que implica que $a + b = c + d$.

C.2 iii) se sigue de que los elementos de G son hiperbólicos, y de 2.2.6, implica que $|\text{Tr}(C_i)| > 2$ $i = 1, 2, 3$.

C.2 iv) Como los puntos fijos de C_2 satisfacen la ecuación $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ y como 1 es raíz ($C_2(1) = 1$) implica que

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0 = c(z-1)(z + \frac{b}{c})$$

de lo que $-\frac{b}{c}$ es el punto fijo atractor de C_2 y por lo tanto

..... $0 < -\frac{b}{c} < 1$

C.2 v) Como los puntos fijos de C_1 estan a la derecha de 1, y estos estan dados por

$$z_1 = \frac{-a/\lambda + d\lambda - \sqrt{(d\lambda + a/\lambda)^2 - 4}}{-2c\lambda}$$

$$w_1 = \frac{-a/\lambda + d\lambda + \sqrt{(d\lambda + a/\lambda)^2 - 4}}{-2c\lambda}$$

.....Por lo que $1 < w_1 < z_1$. Además, como w_1 es atractor, se tiene que $C_1(\infty)$ y $C_1(0)$ están a la izquierda de w_1 , con $C_1(\infty) = -\frac{d}{c}$, $C_1(0) = -\frac{b}{a}$ y $C_1(\infty) < C_1(0)$; por lo tanto se tiene que

..... $-\frac{d}{c} < -\frac{b}{a}$.

Como 1 es el punto fijo atractor de C_2^{-1} y $C_2(c_3)$ no intersecta al eje de $C_2 \circ C_1 (= C_3^{-1})$, se tiene que $1 < C_2^{-1}(\infty) < C_2^{-1}(0)$, con $C_2^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$, $C_2^{-1}(0) = -\frac{b}{a}$, por lo que

..... $1 < -\frac{d}{c} < -\frac{b}{a}$

Combinando 2,3,4 se tiene que

..... $1 < -\frac{d}{c} < -\frac{b}{a} < w_1 < z_1$

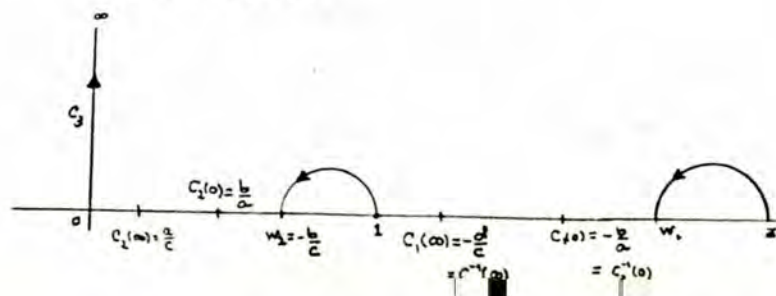
Para el resto, observese que $C_2(c_3) \cap c_3 = \emptyset$, y como $0 < C_2(0) < -\frac{b}{c}$, se tiene que $0 < C_2(\infty) < C_2(0) < -\frac{b}{c}$, donde $C_2(\infty) = \frac{a}{c}$ y $C_2(0) = \frac{b}{d}$. Con ésto, y la desigualdad 1, se obtiene

$$0 < \frac{a}{c} < \frac{b}{d} < -\frac{b}{c} < 1$$

lo que completa la demostracion de C.2 v).

Lo anterior se ilustra en la fig. 4.2.7.

fig. 4.2.7



El recíproco de la anterior proposición se da en la siguiente:

2.8 Proposición: Sean a, b, c, d, λ números reales tales que $ad - bc = 1$, y tales que satisfacen las condiciones C.2 de 4.2.7. Sean C_1, C_2, C_3 definidos por las relaciones C.1 de 4.2.7, sea $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3)$ y G el grupo generado por \mathcal{B} . Entonces (G, \mathcal{B}) es un grupo fuchsiano de signatura $(0, 3)$.

Demostración: La demostración consistirá en contruir un polígono asociado a \mathcal{B} por el proceso dado en 4.1.3, el cual satisface las condiciones necesarias para ser un polígono de Poincaré (ver 2.3.26) y, con el teorema de Poincaré (ver 2.3.27), se podrá concluir la demostración.

1) de la forma en que están definidos C_1, C_2, C_3 , se tiene que los puntos fijos de éstos (con la notación de 4.2.7) están dispuestos en \mathbb{P}^+ como se ilustró en la figura 4.2.7. Por consiguiente, $C_1^{-1} \circ C_2$ tiene un punto fijo en el intervalo $(1, w_1)$ y otro en $(-\infty, w_2)$ o en (z_1, ∞) . Se tiene lo análogo para $C_1 \circ C_2^{-1}$.

2) Si llamamos z'_1, w'_1 a los puntos fijos repulsor y atractor de $C_1^{-1} \circ C_2$ y z''_1, w''_1 a los puntos fijos repulsor y atractor de $C_1 \circ C_2^{-1}$, se tiene lo siguiente:

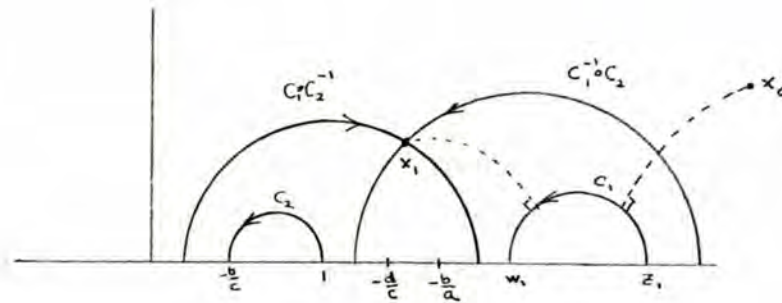
a) $z'_1 \in (1, -\frac{d}{c})$. Esto se debe a que $C_2((1, -\frac{d}{c})) = (1, \infty)$ y $C_1^{-1}(1, \infty) = C_1^{-1}(1, -\frac{d}{c}) \cup C_1^{-1}(-\frac{d}{c}, \infty) \supset (-\infty, C_1^{-1}(\infty))$, donde $C_1^{-1}(\infty) > z_1$ (= punto fijo repulsor de C_1). Por lo tanto

$$C_1^{-1} \circ C_2((1, -\frac{d}{c})) \supset (-\infty, C_1^{-1}(\infty))$$

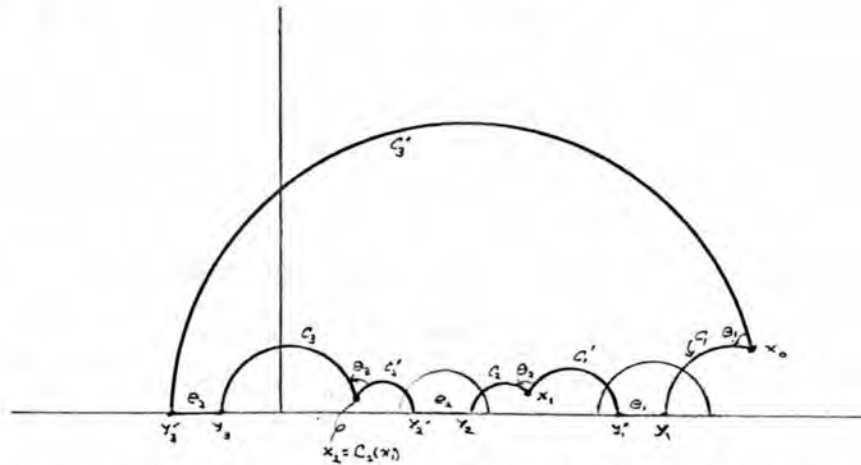
lo que implica que $C_1^{-1} \circ C_2$ fija un punto en $(1, -\frac{d}{c})$, el cual es atractor.

b) Análogamente se verifica que $w'_1 \in (z_1, \infty)$.

c) Procediendo como en a) y b) se tiene que los puntos fijos de $C_1 \circ C_2^{-1}$ son tales que $z''_1 \in (0, -\frac{b}{c})$ y $w''_1 \in (-\frac{b}{a}, w_1)$



3) Lo anterior implica que el eje de $C_1 \circ C_2^{-1}$ y el de $C_1^{-1} \circ C_2$ se intersectan en un punto x_1 . Sea $x_0 = C_1^{-1}(x_1)$ y procedase como en 4.1.3 para la construcción de $\partial P(x_0, \mathcal{B})$.



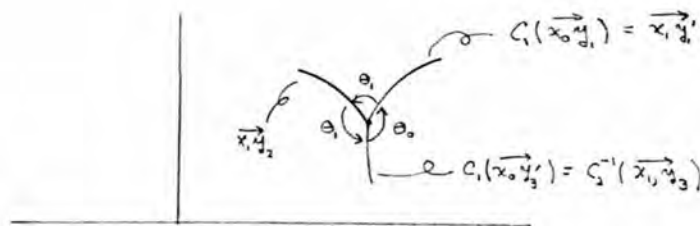
4) Sean $x_0, x_1, x_2, y_1, y_1', y_2, y_2', y_3, y_3', c_1, c_2, c_3, e_1, e_2, e_3, c'_1, c'_2, c'_3$, los elementos que integran el polígono $\partial P(x_0, \mathcal{B})$ definidos por el proceso descrito en 4.1.3. Sean $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, los ángulos interiores en los vértices x_0, x_1, x_2 , respectivamente, medidos en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

5) En este caso los vértices (x_0, x_1, x_2) forman un ciclo y las parejas de lados $((c_1, c'_1), (c_2, c'_2), (c_3, c'_3))$ forman un ciclo de lados. La sucesión (C_1, C_2, C_3) es un ciclo de transformaciones los tres ciclos con periodo tres (ver 2.3.23).

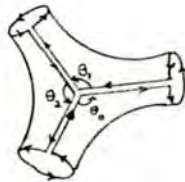
Como $C_1 \circ C_2 \circ C_3 = \text{Id}$, se tiene que $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\pi$. Esto se puede ver tomándose en el vértice x_1 los ángulos, medidos en sentido contrario al de las manecillas del reloj, de:

$$(C_1(c'_3), C_1(c_1)) = (C_1(c'_3), c'_1), (c'_1, c_2), ((C_2^{-1}(c'_2), C_2^{-1}(c_3)) = (c'_2, C_2^{-1}(c_3)) = (c'_2, C_1(c'_3))).$$

Esta última igualdad se debe a que $C_2^{-1}(c_3) = C_1 \circ C_3(c_3) = C_1(c'_3)$. Los ángulos mencionados coinciden con $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ respectivamente, lo cual se ilustra en la fig. 4.2.8.



Del teorema 2.3.7 se sigue que (G, \mathcal{B}) es un grupo fuchsiano marcado con P como región fundamental. Además de las relaciones entre los lados, implica que (G, \mathcal{B}) representa una superficie de signatura $(0, 3)$.



En la proposición 4.2.7 las condiciones C.1, C.2 no determinan los signos de las trazas de $C_i, i=1, 2, 3$. Sin embargo, estos signos no son totalmente independientes. El siguiente lema describe la forma en que están relacionados.

4.2.9 **Lema:** Sea (G, \mathcal{B}) como en 4.2.7 y supongamos que el producto de $\text{Tr}C_2$

$\text{Tr}C_3$ es mayor que cero, entonces $\text{Tr}C_1 < 0$.

Demostración: Por 4.2.7 (C.2 v), sea tiene que $-ab > 0$, $cd < 0$ y $ac > 0$, de donde se cumple uno y sólo uno de los siguientes casos:

Caso I) $a > 0$, $b < 0$ y $c > 0$, $d < 0$.

Caso II) $a < 0$, $b > 0$ y $c < 0$, $d > 0$.

Probaremos la afirmación solo en el caso I, pues la demostración para el II es análoga.

De C.2 v) se sigue que $\frac{a}{c} < -\frac{d}{c}$, por lo tanto $a+d < 0$. Supongamos ahora que $\text{Tr}C_2 < 0$, Como $\text{Tr}C_3 < 0$ y $\text{Tr}C_2 = a+d < -2$, se tiene, de C.2 v, que $-\frac{d}{c} < \frac{\lambda d - a/\lambda}{-2\lambda c}$, lo que implica que $-2\lambda c > 0$. Así, $2d\lambda < \lambda d - a/\lambda$, es decir, $d\lambda + a/\lambda < 0$

■

4.2.10 Del lema anterior se sigue que una de las trazas de C_1, C_2, C_3 esta obligada a ser negativa, por esto eligiaremos siempre el signo negativo para $\text{Tr}C$.

Además se tiene que como C_i es hiperbólico, entonces se cumple la fórmula

$$\text{Tr}C_i = -2\cosh\left(\frac{1}{2}T_i\right)$$

donde $T_i = \inf_{z \in H^1} \{d_H(z, C_i(z))\}$ (ver 2.2.6). Por lo que si $z \in C_i$, entonces el segmento que va de z a $C_i(z)$ se proyecta sobre una geodésica cerrada simple cuya longitud es T_i la cual hemos denotado por $\hat{\gamma}_i$.

Con lo anterior y considerando la misma notación, se tiene el siguiente teorema.

4.2.11 Teorema: Existe una biyección entre el conjunto $(-\infty, -1)^3$ y $T_{(0,3)}$. Esta función está dada por la siguiente función la cual es denotada por $\Psi_{(0,3)}$:

$$\Psi_{(0,3)}: T_{(0,3)} \longrightarrow (-\infty, -1)^3$$

$$(G, (C_1, C_2, C_3)) \longmapsto (\frac{1}{2}\text{Tr}C_1, \frac{1}{2}\text{Tr}C_2, \frac{1}{2}\text{Tr}C_3)$$

Demotración: Basta ver que $\Psi_{(0,3)}$ tiene inversa la cual se define con el siguiente proceso:

La idea de la construcción consiste en ir determinando los valores para que se satisfagan las condiciones del te 4.2.7, obteniendo al final C_1, C_2, C_3 los cuales cumplen en éstas.

Sean $k_1, k_2, k_3 \in (-\infty, -1)$. Definase $K_i = \sqrt{k_i^2 - 1}$ y definanse C_3, C_2 como sigue:

$$C_3^{-1} = \begin{pmatrix} k_3 + K_3 & 0 \\ 0 & k_3 - K_3 \end{pmatrix} ; \quad C_2 = \begin{pmatrix} k_2 + J & L \\ M & k_2 - J \end{pmatrix} ;$$

Además como $\det(C_2) = 1$, se sigue que

$$\dots\dots\dots (k_2 - J)(k_2 + J) - ML = 1$$

como debe cumplirse que $C_1 = C_2^{-1} \circ C_3^{-1}$ implica que

$$2k_1 = \text{Tr}C_1 = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} k_2 - J & -L \\ -M & k_2 + J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_3 + K_3 & 0 \\ 0 & k_3 - K_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= (k_3 + K_3)k_2 + (k_3 - K_3)k_2 - 2JK_3$$

despejando J obtenemos

$$\dots\dots\dots J = \frac{-k_1 + k_2 k_3}{K_3} > 0$$

para que se cumpla C.2 ii) ($C_2(1) = 1$) se tiene la siguiente igualdad:

$$k_2 - J + L = k_2 + J + M \quad \text{por lo que}$$

$$\dots\dots\dots L=M+2J$$

sustituyendo (3) en (1) ($k_2^2 - J^2 - ML = 1$) se obtiene:

$$\dots\dots\dots M(M+2J) + J^2 + 1 - k_2^2 = 0$$

por lo que $(M+J-k_2)(M+J+k_2) = 0$ y por lo tanto

$$\dots\dots\dots M = -J \pm k_2$$

$$L = J \pm k_2$$

para que se satisfaga C.2 v) se debe cumplir que $0 < C_2(\infty) = \frac{k_1 - J}{M}$, como $J > 0$, implica que $M < 0$ y por tanto $-J \pm k_2 < 0$, además para que se cumpla C.2 iv), se debe satisfacer $0 < -\frac{L}{M} < 1$ lo que implica que

$$-\frac{J \pm k_2}{-J \pm k_2} < 1$$

por lo tanto $-J \mp k_2 < -J \pm k_2$, la única manera de que se satisfaga esta desigualdad es eligiendo el signo superior en ambos miembros. De lo que se obtiene que

$$M = -J + k_2$$

$$L = J + k_2$$

Con esto quedan completamente determinados C_2, C_3^{-1} y $C_1 = C_2^{-1} \cdot C_3^{-1}$. Estos están dados por:

$$C_1 = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 K_3 + k_3 \left(\frac{-k_1 + k_2 k_3}{K_1} \right) & (K_3 - k_3) \left(\frac{k_1 - k_2 k_3}{K_3} + k_2 \right) \\ (k_3 + K_3) \left(\frac{k_1 - k_2 k_3}{K_3} - k_2 \right) & k_1 - k_2 k_3 + k_3 \frac{k_1 - k_2 k_3}{K_3} \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \left(\begin{array}{cc} k_2 + \frac{-k_1 + k_2 k_3}{K_3} & \frac{-k_1 + k_2 k_3}{K_3} + k_2 \\ \frac{k_1 - k_2 k_3}{K_3} - k_2 & k_2 + \frac{k_1 - k_2 k_3}{K_3} \end{array} \right)$$

$$G_3 = \left(\begin{array}{cc} k_3 - K_3 & 0 \\ 0 & k_3 + K_3 \end{array} \right)$$

Estas fórmulas por construcción satisfacen las condiciones G.1, G.2 de 4.2.7. De 4.2.8 se sigue que el grupo marcado que generan el cual esta normalizado, es fuchsiano de signatura (0,3).

4.3 Construcción de (G, \mathcal{B}) de signatura arbitraria.

Para las superficies de signatura arbitraria, determinaremos los grupos que las representan, amalgamando grupos de signatura (0,3), para ésto necesitaremos los siguientes teoremas los cuales dan una forma de obtener un grupo Kleiniano a partir de otros dos.

4.3.1 Teorema: Sean G_1, G_2 dos grupos kleinianos y sea H un subgrupo comun de G_1 y G_2 . Sean D_1, D_2, Γ conjuntos fundamentales parciales (ver 2.3.8) de G_1, G_2, H , respectivamente. Sea $E_i = \bigcup_{g \in H} g(D_i)$, para $i=1, 2$, y suponga que $D' = \text{Interior}(E_1 \cap E_2 \cap \Gamma) \neq \emptyset$, además suponga que $E_1 \cup E_2 = R(G_1) \cup R(G_2)$. Entonces el grupo G generado por G_1, G_2 es kleiniano y D' es un conjunto fundamental parcial de G

Demostracion: [Maskit 1]

4.3.2 Teorema: Sean G_1 y G_2 grupos kleinianos y H un subgrupo común de G_1 y G_2 tal que H es cíclico. Sean D_1, D_2, Γ conjuntos fundamentales para G_1, G_2, H , respectivamente. Sea $E_i = \bigcup_{h \in H} h(D_i)$, $i=1, 2$. Suponga que $E_1 \cup E_2 = R(H)$ y que $\text{Interior}(E_1 \cap E_2 \cap \Gamma) \neq \emptyset$. Además suponga que hay una curva γ simple (cerrada en $\hat{\mathbb{C}}$) contenida en $\text{Interior}(E_1 \cup E_2) \cup \Lambda(H)$ tal que Γ es invariante bajo H , y la cerradura de $\gamma \cap \Gamma$ está contenida en $\text{Interior}(E_1 \cup E_2)$, y γ separa $E_1 - E_2$ de $E_2 - E_1$. Entonces el grupo G generado por G_1, G_2 es kleiniano y $D = E_1 \cap E_2 \cap \Gamma$ es un conjunto fundamental para G .

Demostración: [Maskit 2]

■

4.4 Construcción y parametrización de (G, \mathcal{B}) con signatura $(0, 4)$.

4.4.1 Sea (S, \mathcal{A}) una superficie hiperbólica completa (de Riemann) marcada de tipo $(0, 4)$, donde $\mathcal{A} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ es una base canónica de $\Pi_1(S, x)$, $x \in S$. Sea (G, \mathcal{B}) el grupo fuchsiano marcado normalizado que la representa, el cual consta solo de elementos hiperbólicos. Entonces, en forma análoga al caso de signatura $(0, 3)$, se tiene que $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3, C_4) = J(\mathcal{A})$, con J como en 1.5.17. Sean c_1, c_2, c_3, c_4 los ejes de C_1, C_2, C_3, C_4 , respectivamente, los cuales se proyectan en geodésicas cerradas simples $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_4$ libremente homotópicas a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ respectivamente (ver 2.4.8). Estas últimas son ajenas entre si ya $\gamma_i * \gamma_j = 0$ (ver 3.1.3).

4.4.2 Las curvas $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_4$ acotan una superficie compacta $\hat{S} \subseteq S$ con frontera geodésica de signatura $(0, 4)$. Considerando que las curvas $\{\gamma_j\}_{j=1, \dots, 4}$ contienen como parte de su traza a las curvas $\{\hat{\gamma}_j\}$

respectivamente, Si se extrae de \hat{S} el conjunto $\cup \gamma_i$, obtenemos una region simplemente conexa N , la cual se levanta a \mathbb{H}^2 (su cubierta universal) en una region simplemente conexa \bar{N} cuya frontera intersecta los ejes c_1, c_2, c_3, c_4

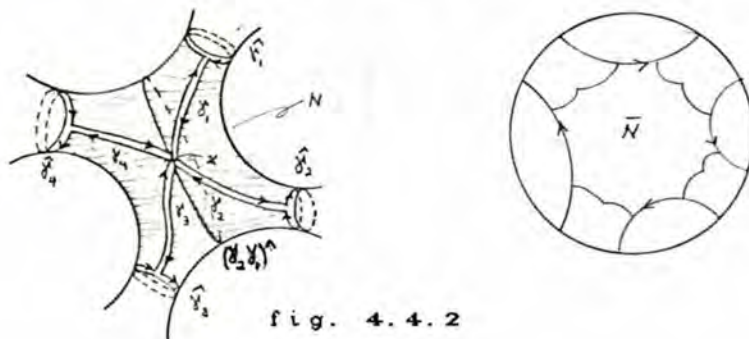


fig. 4.4.2

La orientación de las curvas γ_i induce una orientación en los ejes c_i en la dirección de traslación de la transformación C_i . Así, tanto la disposición de los ejes c_1, c_2, c_3, c_4 como su orientación es como se ilustra en la figura 4.4.2 ii). Además ninguno de los extremos de éstos coincide, ya que G consta solo de elementos hiperbólicos.

4.3 Por otra parte, la geodésica en la cual se proyecta el eje de $C_2 \circ C_1$ corresponde a $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)^\wedge$, y divide a S en dos superficies S_1, S_2 de tipo $(0,3)$. Así, si elegimos el punto $x \in S$ de tal forma que $x \in (\gamma_1 \cdot \gamma_2)^\wedge$ y si definimos las bases canónicas $\mathcal{A}_1 = (\gamma_1, \gamma_2, (\gamma_2^{-1} \cdot \gamma_1^{-1})^\wedge)$, $\mathcal{A}_2 = (\gamma_3, \gamma_4, (\gamma_4^{-1} \cdot \gamma_3^{-1})^\wedge)$, entonces (S_1, \mathcal{A}_1) y (S_2, \mathcal{A}_2) son superficies de Riemann marcadas de tipo $(0,3)$, las cuales son representadas por los grupos fuchsianos marcados $(G_1, \mathcal{B}_1), (G_2, \mathcal{B}_2)$, donde $\mathcal{B}_1 = (C_1, C_2, (C_2 \circ C_1)^{-1})$, $\mathcal{B}_2 = (C_3, C_4, (C_4 \circ C_3)^{-1})$ y $G_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle$.

Como por hipótesis (G, \mathcal{B}) está normalizado, (G_1, \mathcal{B}_1) también lo está y además $G = \langle G_1, G_2 \rangle$.

Por lo anterior se tiene, que los ejes de las transformaciones

$C_1, C_2, C_2 \circ C_1, C_3, C_4$ están dispuestos en \mathbb{P}^+ en el orden que muestra la figura 4.4.3

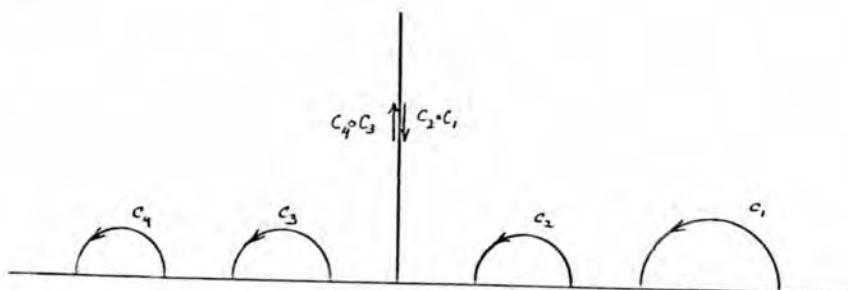


fig. 4.4.3

4.4.4 Cabe aclarar que el eje de $C_2 \circ C_1$ divide a \mathbb{P}^+ en dos componentes ajenas, cada una de las cuales contiene a solo uno de los conjuntos $\{c_1, c_2\}, \{c_3, c_4\}$; esto se debe a que la geodesica cerrada $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)^\wedge$, en la cual se proyecta el eje de $C_2 \circ C_1$, divide a S en dos superficies ajenas de tipo $(0,3)$.

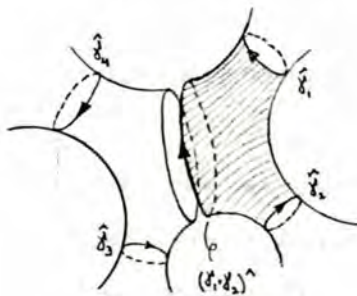


fig. 4.4.4

A continuación determinaremos los parámetros necesarios para construir el grupo fuchsiano marcado normalizado de signatura $(0,4)$.

4.4.5 Sea (G, \mathcal{B}) un grupo fuchsiano marcado normalizado de signatura

$(0,4)$, donde $\mathcal{B}=(C_1, C_2, C_3, C_4)$ es una base canónica de G . Sean c_1, c_2, c_3, c_4 los ejes respectivos de los elementos de G , los cuales están dispuestos como se estableció en 4.4.3. Además se tiene que $C_2 \circ C_1 = (C_4 \circ C_3)^{-1}$. Sea $\mathcal{B}_1 = (C_1, C_2, (C_2 \circ C_1)^{-1})$; $\mathcal{B}_2 = ((C_4 \circ C_3)^{-1}, C_3, C_4)$, y sean $G_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle$ $i=1, 2$. Entonces los grupos fuchsianos marcados $(G_1, \mathcal{B}_1), (G_2, \mathcal{B}_2)$ tienen signatura $(0,3)$ y (G_1, \mathcal{B}_1) está normalizado.

Definamos k_1^i, k_2^i, k_3^i $i=1, 2$ a los números tales que

$$\Psi_{(0,3)}(G_i, \mathcal{B}_i) = k_1^i, k_2^i, k_3^i$$

entonces se cumple que $k_1^2 = k_3^1$. Si (G'_i, \mathcal{B}'_i) $i=1, 2$, son dados por:

$$(G'_i, \mathcal{B}'_i) = \Psi_{(0,3)}^{-1}(k_1^i, k_2^i, k_3^i) = (C_1^i, C_2^i, (C_2^i \circ C_1^i)^{-1}),$$

entonces $(G_1, \mathcal{B}_1) = (G'_1, \mathcal{B}'_1)$. Además (G'_2, \mathcal{B}'_2) es el grupo fuchsiano normalizado que representa al mismo punto de $T_{(0,3)}$ determinado por (G_2, \mathcal{B}_2) . Por consiguiente, existe $h_2 \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ tal que $(G'_2, \mathcal{B}'_2) = h_2^{-1} \circ (G_2, \mathcal{B}_2) \circ h_2$, estando la transformación h_2 determinada unívocamente por las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} h_2(z_2) &= 1 && \text{(donde } z_2 \text{ es el punto fijo repulsor de } C_4) \\ h_2(0) &= \infty && \text{(0 es el punto fijo atractor de } (C_4 \circ C_3)^{-1}) \\ h_2(\infty) &= 0 && \text{(}\infty \text{ es el punto fijo repulsor de } (C_4 \circ C_3)^{-1}); \end{aligned}$$

entonces se tiene el siguiente lema que determina h_2

4.7 Lema: Sean $(G, \mathcal{B}), (G_1, \mathcal{B}_1), (G_2, \mathcal{B}_2), (G'_2, \mathcal{B}'_2), h_2$ como en el párrafo anterior, entonces

- i) $h_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/t_2 \\ t_2 & 0 \end{pmatrix}$, donde $t_2 > 0$
- ii) $C_2^1 \circ C_2^1 = C_2 \circ C_1$

Demostración: Como $(C_4 \circ C_3)^{-1} = C_2 \circ C_1$, se tiene que los puntos fijos repulsor y atractor de $C_3^{-1} \circ C_4^{-1}$ son $0, \infty$ respectivamente, por lo que al conjugar por h_2 , los puntos fijos repulsor y atractor de $C_2^2 \circ C_1^2$ son $h_2(0) = \infty, h_2(\infty) = 0$. Además, si $h_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces manda el 0 a ∞ y ∞ al 0 ; si $h \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ tiene la misma propiedad, entonces $h_1^{-1} \circ h$ es una transformación que fija al 0 y al ∞ , por lo que existe $t > 0$ tal que

$$h_1^{-1} \circ h(z) = t^2 z.$$

Por esta razón, $h_1^{-1} \circ h = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$ y por lo tanto $h = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$, de lo cual se concluye el lema. ■

De lo anterior se tiene que el grupo marcado (G_2, \mathcal{B}_2) determina un único grupo fuchsiano marcado normalizado y una transformación $h_2 \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ dada por $h_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ donde $-t^2$ es el punto fijo repulsor de C_4 .

En resumen tenemos lo siguiente:

- 1.4.8 i) Dado un grupo fuchsiano marcado normalizado (G, \mathcal{B}) , de signatura $(0, 4)$, con $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$, se tienen los grupos fuchsianos marcados (G_1, \mathcal{B}_1) y (G_2, \mathcal{B}_2) de signatura $(0, 4)$, definidos por:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= (C_1, C_2, (C_2 \circ C_1)^{-1}), & G_1 &= \langle \mathcal{B}_1 \rangle \\ \mathcal{B}_2 &= ((C_4 \circ C_3)^{-1}, C_3, C_4), & G_2 &= \langle \mathcal{B}_2 \rangle, \end{aligned}$$

se tienen además los ^{numeros} negativos dados por las siguientes igualdades

$$k_1^1 = \text{Tr}C_1, k_2^1 = \text{Tr}C_2, k_3^1 = \text{Tr}C_2 \circ C_1$$

$$k_1^2 = \text{Tr}C_3 \circ C_4 = k_3^1; k_2^2 = \text{Tr}C_3, k_3^2 = \text{Tr}C_4$$

y al número $t_2 > 0$ tal que $-t_2^2$ es el punto fijo repulsor de C_4 . Además, estos números determinan \mathcal{B} de la manera siguiente

- 4.4.9 i) $\mathcal{B}_1 = \Psi_{(0,3)}^{-1}(k_1^1, k_2^1, k_3^1) = (C_1^1, C_2^1, C_3^1)$, donde $\Psi_{(0,3)}$ es como en 4.2.11
 ii) Sea $\mathcal{B}^1 = (C_1^2, C_2^2, C_3^2) = \Psi_{(0,3)}^{-1}(k_3^1, k_2^2, k_3^2)$
 iii) Sean $h_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/t_2 \\ t_2 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathcal{B}_2 = h_2^{-1} \circ \mathcal{B}_1 \circ h_2$, por lo tanto se satisfacen las siguientes igualdades

$$C_3 = h_2^{-1} \circ C_2^2 \circ h_2; C_4 = h_2^{-1} \circ (C_2^2 \circ C_1^2)^{-1} \circ h_2; C_1 = C_1^1; C_2 = C_2^1$$

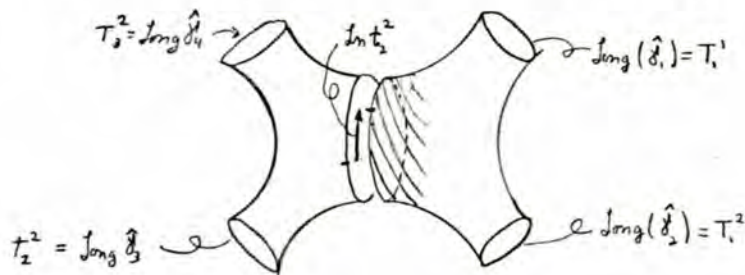
iv) Entonces $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ es la base de la cual partimos.

Estos parámetros tienen la siguiente interpretación:

sean $T_1^1, T_2^1, T_3^1; T_1^2, T_2^2, T_3^2$ las longitudes de las geodésicas cerradas $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, (\gamma_1 \cdot \gamma_2)^\wedge, (\gamma_3 \cdot \gamma_4)^\wedge, \hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_4$, respectivamente, entonces

$$\text{Tr}C_i^j = -2\cosh\left(\frac{1}{2}T_i^j\right)$$

y $\ln(t_2^2)$ se puede interpretar como una distancia de rotación a lo largo de la geodésica $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)^\wedge$ por la cual se identifican las dos superficies S_1, S_2 en que se divide $S = (\gamma_1 \cdot \gamma_2)^\wedge$.



En el siguiente teorema probaremos que dados 6 números

$(k_1^1, k_2^1, k_3^1, k_2^2, k_3^2, t_2) \in (-\infty, -1)^5 \times \mathbb{R}^+$, estos determinan de manera única, mediante las fórmulas de 4.4.9, un grupo fuchsiano marcado (G, \mathcal{B}) de signatura $(0, 4)$ normalizado.

4.4.10 Teorema: Existe una biyección entre $T_{(0, 4)}$, visto como el conjunto de clases de equivalencia de grupos fuchsianos marcados y el conjunto $(-\infty, -1)^5 \times \mathbb{R}^+$. Además, si (G, \mathcal{B}) es el representante normalizado de un punto de $T_{(0, 4)}$ con $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$, entonces la biyección esta dada por

$$\Psi_{(0, 4)}((G, \mathcal{B})) = (\frac{1}{2}\text{Tr}C_1, \frac{1}{2}\text{Tr}C_2, \frac{1}{2}\text{Tr}C_2 \circ C_1, \frac{1}{2}\text{Tr}C_3, \frac{1}{2}\text{Tr}C_4, t_2),$$

donde t_2 es tal que $-t_2^2$ es el punto fijo repulsor de C_4 .

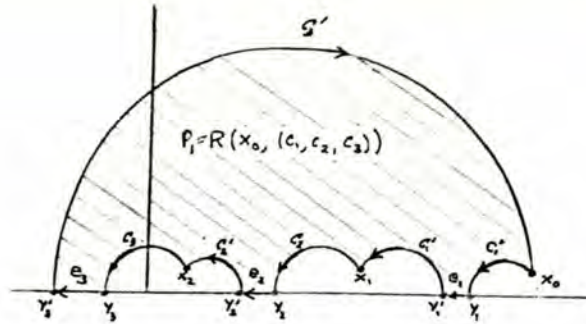
Demostración: Sea $w = (k_1^1, k_2^1, k_3^1, k_2^2, k_3^2, t_2) \in (-\infty, -1)^5 \times \mathbb{R}^+$ y sea $k_1^2 = k_3^1$. Definase $(G_1, \mathcal{B}_1), (G_2, \mathcal{B}_2), (G'_2, \mathcal{B}'_2)$ con las fórmulas y la notación de 4.4.9 y $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$; Si $G = \langle \mathcal{B} \rangle$, entonces por construcción se satisface que

$$\Psi_{(0, 4)}((G, \mathcal{B})) = (k_1^1, k_2^1, k_3^1, k_2^2, k_3^2, t_2)$$

Definase $\Psi_{(0, 4)}^{-1}(w)$ como (G, \mathcal{B}) . Basta probar que (G, \mathcal{B}) es fuchsiano y representa una superficie de signatura $(0, 4)$.

(1). (G_1, \mathcal{B}_1) es un grupo fuchsiano marcado de signatura $(0, 3)$ y normalizado; además, su polígono fundamental es como se ilustra en la figura siguiente (dado por la construcción en 4.1.3 donde

$$x_0 = C_1^{-1}(\circ_j \circ (C_1^{-1} \circ C_2) \cap \circ_j \circ C_1 \circ C_2^{-1})$$

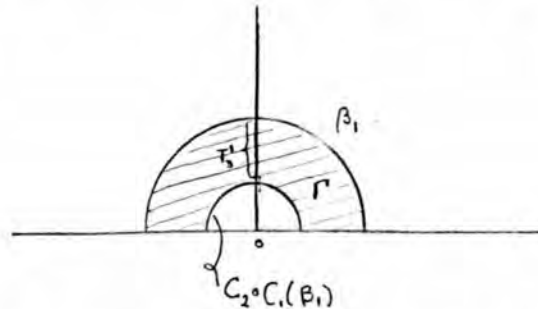


(2)Analogamente (G', \mathcal{B}') es un grupo fuchsiano marcado normalizado de signatura $(0,3)$ y por tanto (G_2, \mathcal{B}_2) es fuchsiano marcado, además sus polígonos fundamentales P'_2, P_2 son como muestra la figura:



(3)Entonces G_1, G_2 satisfacen las siguientes condiciones:

- i) Sea $H = \langle C_2 \circ C_1 \rangle$, por lo que $H \subset G_1 \cap G_2$.
- ii) Sea $E_i = \bigcup_{h \in H} h(P_i)$. Entonces $E_1 \cup E_2 = \mathbb{P}^+$.
- iii) Sea Γ una region fundamental del grupo H . Sea $T_3^1 = 2 \cosh(-\frac{1}{2}k_3^1)$ y sea β_1 un circulo centrado en el origen. Entonces Γ se puede elegir acotada por β_1 y por $C_2 \circ C_1(\beta_1)$



(4)Denotaremos por \mathbb{P}_-^+ el semiplano hiperbolico $\{z \in \mathbb{P}^+ \mid \text{Re}z \leq 0\}$ y $\mathbb{P}_+^+ = \{z \in \mathbb{P}^+ \mid \text{Re}z \geq 0\}$, denotaremos tambien por $P_{i-} = P_i \cap \mathbb{P}_-^+$; $P_{i+} = P_i \cap \mathbb{P}_+^+$;

entonces se tiene que

$$E_1 \cap E_2 = \bigcup_{h \in H} P_+^- \cap h(P_{2+}) \cup \bigcup_{h \in H} P_+^+ \cap h(P_{1-})$$

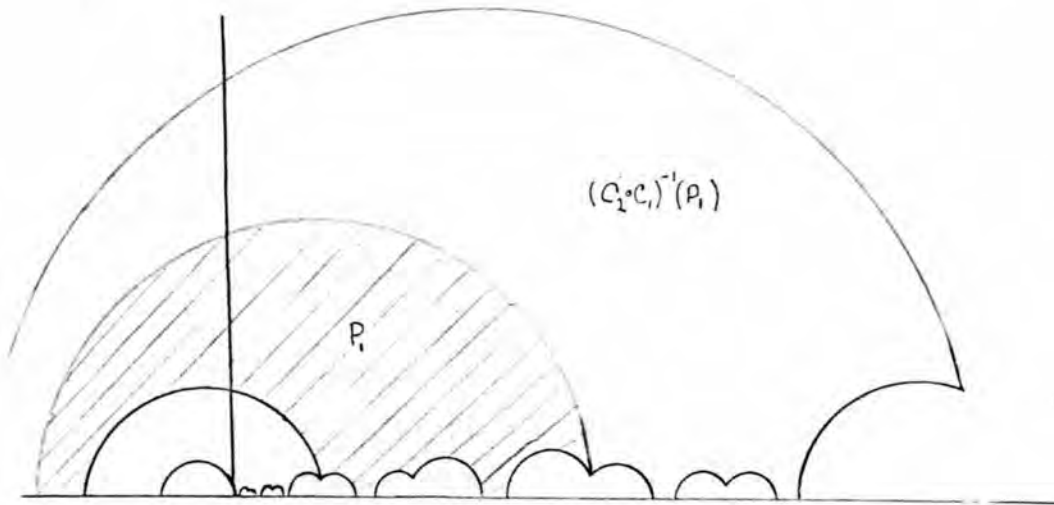


fig. 4.4.10. 4

Por lo tanto $E_1 \cap E_2 \cap \Gamma \neq \emptyset$. Si definimos E_3 como $E_3 = \bigcup_{h \in H} h(\Gamma)$, entonces, el eje imaginario de \mathbb{P}^+ está contenido en $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ y es invariante bajo la acción de H ; además $\gamma \cap \Gamma$ está contenido en el interior de $E_1 \cap E_2$.

(5) Por otra parte, γ separa a los conjuntos $E_1 - E_2$ y $E_2 - E_1$, es decir $E_1 - E_2 \subseteq \mathbb{P}_+^+ - \gamma$, $E_2 - E_1 \subseteq \mathbb{P}_-^+ - \gamma$. Por lo anterior se tiene que $G_1, G_2, H, P_1, P_2, \Gamma$ satisfacen las condiciones del teorema 4.3.1, por lo que el grupo $G = \langle G_1, G_2 \rangle$ es fuchsiano y $E_1 \cap E_2 \cap \Gamma$ es un conjunto fundamental de G . La base $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ satisface que $C_4 \circ C_3 \circ C_2 \circ C_1 = \text{Id}$ por lo que el grupo marcado (G, \mathcal{B}) es fuchsiano y está normalizado.

La región fundamental P se describe en la siguiente figura donde $y'_0 = C_2 \circ C_1(x'_0)$, $y_0 = C_2^{-1} \circ C_4^{-1}(x_0)$ y $\beta_2 = C_3 \circ C_4(\beta_1)$

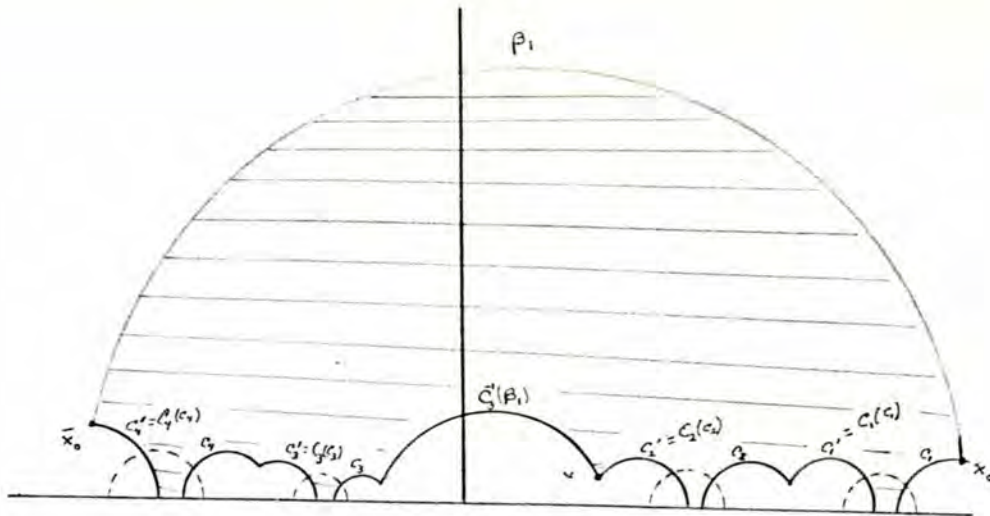


fig. 5

(6) Los lados de P están identificados por los elementos de \mathcal{B} y por $C_4 \circ C_3$ ($\beta_2 = C_4 \circ C_3(\beta_1)$) de tal forma que la superficie P/G es una superficie de tipo $(0,4)$.

Con lo que se concluye la demostración de 4.4.10. ■

1.5 Construcción y parametrización de un grupo marcado normalizado (G, \mathcal{B}) de signatura $(0, m)$.

1.5.1 En esta sección nos ocuparemos de los parámetros necesarios para determinar un punto de $T_{(0, m)}$. Sin embargo, haremos antes algunas observaciones, a partir de las cuales daremos un significado geométrico a dichos parámetros e introduciremos la notación que se usará más adelante.

Sea (S, \mathcal{A}) una superficie hiperbólica completa (de Riemann) marcada de tipo $(0, m)$, con $\mathcal{A} = (\gamma_j)_{1 \leq j \leq m}$ una base canónica de $\Pi_1(S, x)$ donde $x \in S$. Sea (\mathbb{H}^2, p) una cubierta universal de S . Sea

(G, \mathcal{B}) el grupo fuchsiano marcado normalizado que representa a (S, \mathcal{A}) , el cual consta sólo de elementos hiperbólicos donde $\mathcal{B} = (C_j)_{1 \leq j \leq m}$, $m \geq 3$, está dada por $\mathcal{B} = J(\mathcal{A})$ (ver 1.5.17). Sean c_1, \dots, c_m los ejes de C_1, \dots, C_m respectivamente, y $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_m$ las geodésicas cerradas simples ajenas sobre las que se proyectan por p , se tiene que $\gamma_j \sim \hat{\gamma}_j$.

5.2 — Analogamente a 4.4.4, las curvas $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_m$ acotan una superficie compacta $\hat{S} \subset S$ de tipo $(0, m)$ con frontera geodésica la cual es homotópicamente equivalente a S . Las curvas γ_j se pueden elegir de tal forma que ellas contengan en su imagen a las curvas $\hat{\gamma}_j$, respectivamente (ver fig. 4.5.2 ii).

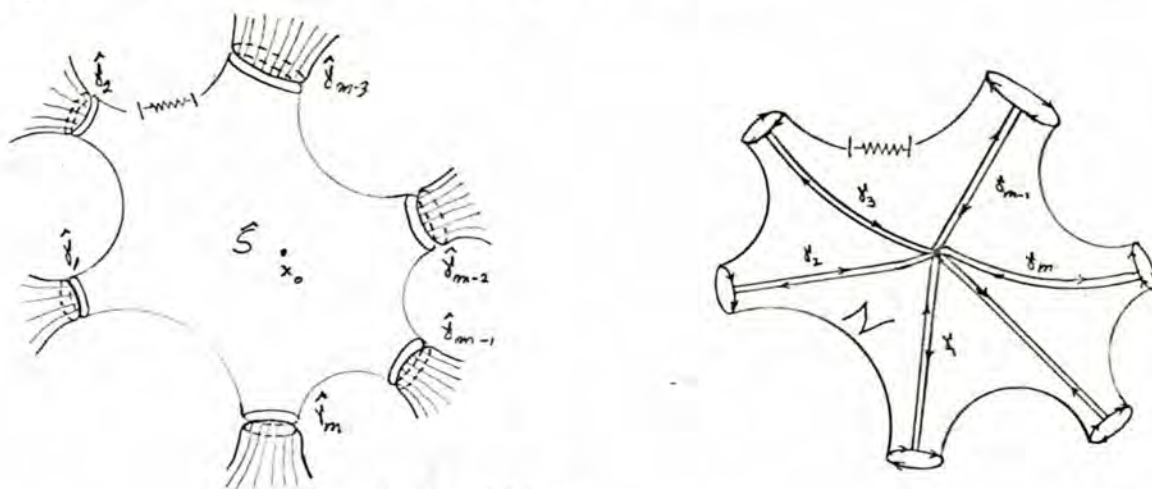
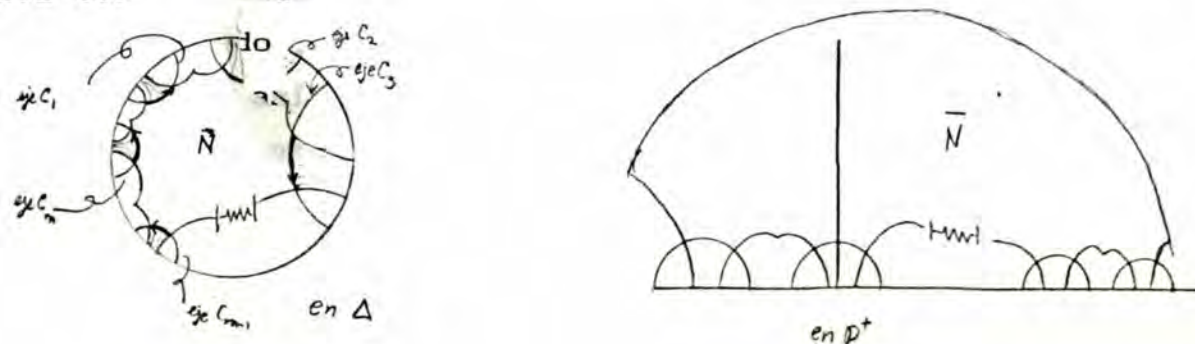


fig. 4.5.2

La region $N = \hat{S} - \cup \gamma_j$ es simplemente conexa y se levanta a la cubierta universal de S en una region \bar{N} simplemente conexa, cuya frontera intersecta a $\{c_j\}_{1 \leq j \leq m}$. Este hecho induce una orientación a cada c_j que coincide con la dirección de traslación de C_j (ver fig 4.5.2 iv)



4.5.3 Por otro lado, para cada i , $1 \leq i \leq m-2$, denotemos por $(\gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_i)^\wedge$ a la geodesica sobre la cual se proyecta el eje de la transformacion $C_i \circ \dots \circ C_1$ (denotado por $c_{i \dots 1}$) y que es libremente homotopica a $\gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_i$. Sea $\hat{\mathcal{A}}_i$ el conjunto definido por

$$\hat{\mathcal{A}}_i = ((\gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_i)^\wedge, \hat{\gamma}_{i+1}, ((\gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_{i+1})^{-1})^\wedge)$$

entonces para cada i , $\hat{\mathcal{A}}_i$ acota una superficie \hat{S}_i compacta con frontera geodesica de tipo (0,3), cuyos interiores son ajenos dos a dos y ademas se tiene que $\hat{S} = \cup \hat{S}_i$

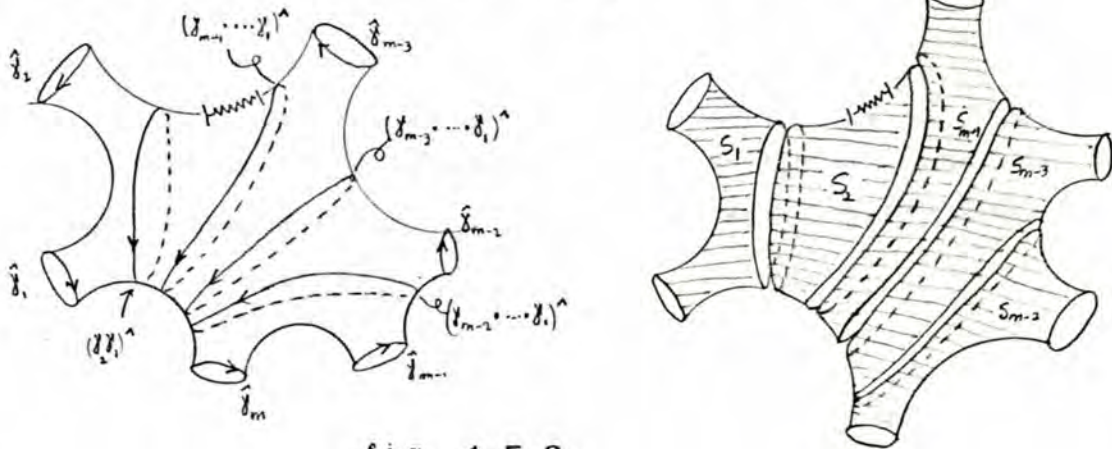


fig. 4.5.3

Definamos para cada i con $1 \leq i \leq m-2$ el grupo fuchsiano marcado (G_i, \mathcal{B}_i) como sigue:

$$\mathcal{B}_i = (C_i \circ \dots \circ C_1, C_{i+1}, (C_{i+1} \circ \dots \circ C_1)^{-1})$$

$$G_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle$$

Como (G, \mathcal{B}) está normalizado, se tiene que (G_i, \mathcal{B}_i) también está normalizado, además la disposición de los ejes de los elementos de \mathcal{B} así como su orientación se ve en \mathbb{P}^+ como se ilustra en la figura siguiente:

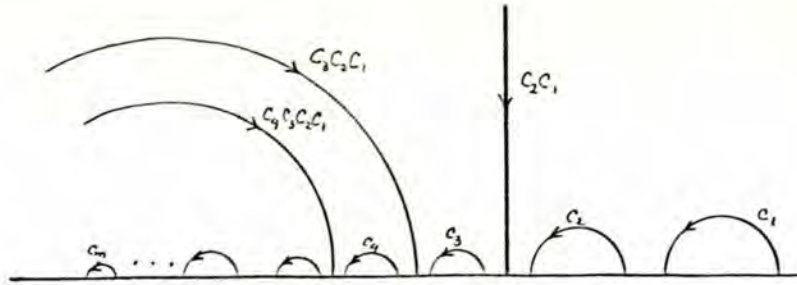


fig. 4.5.3

Los parametros que usaremos estaran dados por las trazas de los elementos de cada \mathcal{B}_i los cuales corresponden a las longitudes de las geodesicas de $\hat{\mathcal{A}}_i$ y ciertos valores que se determinaran en el parrafo que sigue. La notacion introducida en este parrafo sera usada en el teorema 4.5.8.

4.5.4 1) Sea (G, \mathcal{B}) un grupo fuchsiano marcado normalizado de signatura $(0, m)$, donde $\mathcal{B} = (C_1, \dots, C_m)$. Como en 4.5.3 definanse los grupos marcados $\{(G_i, \mathcal{B}_i)\}_{1 \leq i \leq m-2}$

$$\mathcal{B}_i = (C_i \circ \dots \circ C_1, C_{i+1}, (C_{i+1} \circ \dots \circ C_1)^{-1}) \quad ||$$

$$G_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle$$

2) Para cada i , con $1 \leq i \leq m-2$ se tiene $g_i \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$, con la propiedad de que $g_i(G_i, \mathcal{B}_i)g_i^{-1}$ esta normalizado. Por lo que g_i esta determinado por las siguientes propiedades

- g_i transforma al punto fijo repulsor de C_{i+1} al 1.
- g_i transforma al punto fijo atractor de $(C_{i+1} \circ \dots \circ C_1)^{-1}$ al ∞ ,
- g_i transforma al punto fijo repulsor de $(C_{i+1} \circ \dots \circ C_1)^{-1}$ al 0

observe que $g_1 = \text{Id}$ ya que (G_1, \mathcal{B}_1) esta ya normalizado.

3) Para cada i con $1 \leq i \leq m-2$, definase el grupo fuchsiano marcado normalizado (G'_i, \mathcal{B}'_i) como

$$\mathcal{B}'_i = g_i \circ \mathcal{B}_i \circ g_i^{-1} \quad ; \quad G'_i = \langle \mathcal{B}'_i \rangle$$

y denótese los elementos de \mathcal{B}'_i por (C_1^i, C_2^i, C_3^i) , donde C_3^i satisface $C_3^i = (C_2^i \circ C_1^i)^{-1}$.

4) Para cada i con $2 \leq i \leq m-2$, considérese el grupo fuchsiano marcado $(\bar{G}_i, \bar{\mathcal{B}}_i)$ definido por:

$$(\bar{G}_i, \bar{\mathcal{B}}_i) = g_{i-1} \circ (G_i, \mathcal{B}_i) \circ g_{i-1}^{-1}$$

y denótese por los elementos de $\bar{\mathcal{B}}_i$ por $(\bar{C}_1^i, \bar{C}_2^i, \bar{C}_3^i)$ donde \bar{C}_3^i satisface $\bar{C}_3^i = (\bar{C}_2^i \circ \bar{C}_1^i)^{-1}$. Además como $\bar{C}_1^i = g_{i-1} \circ C_i \circ \dots \circ C_1 \circ g_{i-1}^{-1}$ tenemos que $\bar{C}_1^i = (C_3^{i-1})^{-1}$.

5) Para cada i con $2 \leq i \leq m-2$, sea $t_i > 0$ tal que $-t_i^2$ es el punto fijo repulsor de \bar{C}_2^i . Sea $h_i = \begin{pmatrix} 0 & -1/t_i \\ t_i & 0 \end{pmatrix} \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$. Esta transformación aplica a la terna $(-t_i^2, 0, \infty)$ en $(1, \infty, 0)$. Componiendo por una transformación $f_i \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$, la cual lleva al $(1, \infty, 0)$ en (∞, w_1^i, z_1^i) , donde w_1^i, z_1^i son los puntos fijos atractor y repulsor de C_1^i , se tiene que $f_i \circ h_i \circ (\bar{G}_i, \bar{\mathcal{B}}_i) \circ (f_i \circ h_i)^{-1} = (G'_i, \mathcal{B}'_i)$. Se observa que f_i esta determinada por \mathcal{B}'_i .

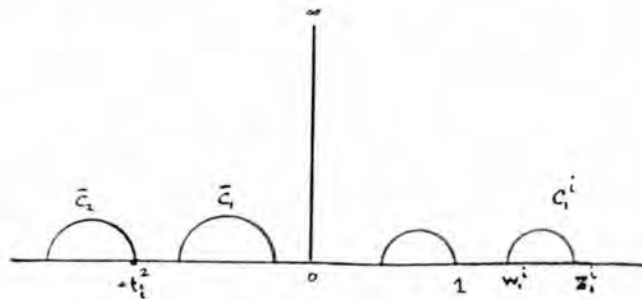


fig. 5

6) Definanse los números k_i^j , con $1 \leq j \leq 3$, $1 \leq i \leq m-2$, por las siguientes igualdades

$$k_1^1 = \frac{1}{2} \text{Tr} C_1, \quad k_2^1 = \frac{1}{2} \text{Tr} C_2, \quad k_3^1 = \frac{1}{2} \text{Tr} C_2 \circ C_1$$

$$k_1^i = \frac{1}{2} \text{Tr} C_i \circ \dots \circ C_1, \quad k_2^i = \frac{1}{2} \text{Tr} C_{i+1}, \quad k_3^i = \frac{1}{2} \text{Tr} C_i \circ \dots \circ C_1$$

(donde $\text{Tr} C$ está definida con el signo negativo). — Observe que

$$(k_1^i, k_2^i, k_3^i) = \Psi_{(0,3)}(G_i, \mathcal{B}_i) = \Psi_{(0,3)}(G'_i, \mathcal{B}'_i) = \Psi_{(0,3)}(\bar{G}_i, \bar{\mathcal{B}}_i);$$

además, para cada $i=2, \dots, m-2$, se tiene que $k_3^{i-1} = k_1^i$

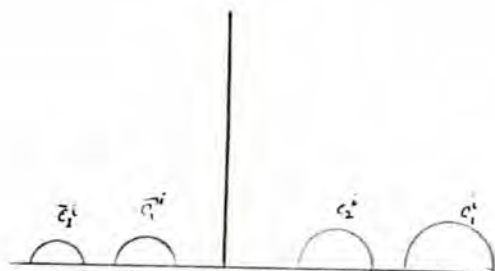


fig. 6

7) Para cada $i=1, \dots, m-2$, sea $T_i^j > 0$ tal que $k_i^j = -\cosh(\frac{1}{2} T_i^j)$.

4.5.7 Con lo anterior se probará el teorema 4.5.8 que los números $\{k_i^j\}_{1 \leq i \leq m-2}$ y $\{t_i\}_{i=1, \dots, m-2}$ determinan el grupo (G, \mathcal{B}) . Además dichos números tienen la siguiente interpretación geométrica:

Sean $\{T_i^j\}$ como en 4.5.4.7); entonces T_i^1, T_i^2, T_i^3 son las longitudes de las geodésicas $((\gamma_1 \dots \gamma_i)^{-1})^\wedge, \hat{\gamma}_{i+1}, (\gamma_1 \dots \gamma_{i+1})^\wedge$, sobre las cuales se proyectan los ejes $c_{i+1}, c_{i+1}, c_{i+1}$. Además, $\text{Ln}(t_i^2)$ es la longitud hiperbólica orientada del desplazamiento de

\hat{S}_i a lo largo de la geodésica $(\gamma_1 \cdots \gamma_i)^\wedge$, donde el signo de $\ln(t_i^2)$ determina una dirección de deslizamiento, a partir de una superficie fija (con $t_i=1$ $i=2, \dots, m-2$).

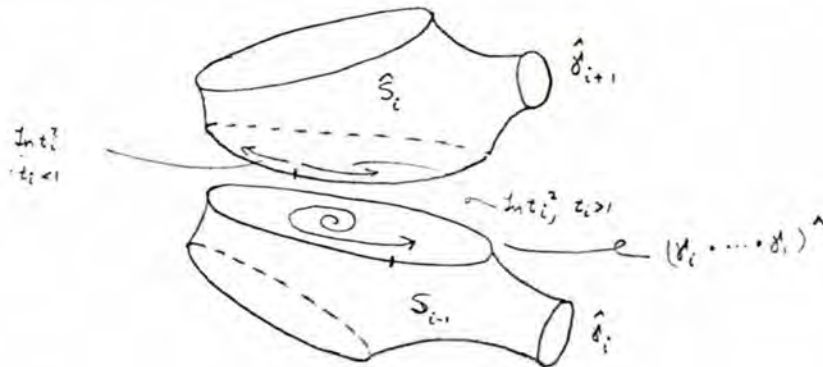


fig. 4.5.7

4.5.8 Teorema: Existe una biyección entre $T_{(0,m)}$ (visto como el conjunto de clases de equivalencia de grupos fuchsianos marcados (G, \mathcal{B}) de signatura $(0, m)$) y el conjunto $(-\infty, -1)^3 \times [(-\infty, -1)^2 \times (0, \infty)]^{m-3} \cong \mathbb{R}^{3m-6}$. Además, si (G, \mathcal{B}) es el (único) representante normalizado de un punto de $T_{(0,m)}$, con $\mathcal{B}=(C_1, \dots, C_m)$, entonces la biyección está dada por

$$\Psi_{(0,m)}(G, \mathcal{B}) = (k_1^1, k_2^1, k_3^1, k_2^2, k_3^2, t_2, \dots, k_2^{m-2}, k_3^{m-2}, t_{m-2}),$$

donde k_i^j, t_j están definidos como en 4.5.4.

Demostración: Dado $\mathcal{B}=(C_1, \dots, C_m)$, los grupos fuchsianos marcados $(G_i, \mathcal{B}_i), (G'_i, \mathcal{B}'_i), (\bar{G}_i, \bar{\mathcal{B}}_i)$, $i=1, \dots, m-2$ (con $(\bar{G}_1, \bar{\mathcal{B}}_1) = (G_1, \mathcal{B}_1)$), están determinados por las expresiones de 4.5.4 1) 3) lo mismo sucede con los morfismos g_i, h_i y los números t_i , $i=2, \dots, m-2$ (recordando que $g_1 = \text{Id}$) como en 4.5.4 2), 5). Por consiguiente, los números

$$k_1^1, k_2^1, k_3^1, k_1^2, k_2^2, k_3^2, \dots, k_1^{m-2}, k_2^{m-2}, k_3^{m-2}, t_2, \dots, t_{m-2}$$

se encuentran univocamente determinados por el proceso descrito en 4.5.4.

Definiremos ahora la inversa de $\Psi_{(0,m)}$ mediante el siguiente proceso:

(1) Dados $(k_1^1, k_2^1, k_3^1, k_2^2, k_3^2, t_2, \dots, k_2^{m-2}, k_3^{m-2}, t_{m-2}) \in (-\infty, -1)^3 \times [(-\infty, -1) \times (0, \infty)]^{m-3}$, definase $k_1^i = k_3^{i-1}$, para $i=2, \dots, m-2$.

(2) Para cada $i=1, \dots, m-2$, definase el grupo (G'_i, \mathcal{B}'_i) por la formula

$$(G'_i, \mathcal{B}'_i) = \Psi_{(0,3)}^{-1}(k_1^i, k_2^i, k_3^i),$$

con $\mathcal{B}'_i = (C_1^i, C_2^i, C_3^i)$.

(3) Para cada $i=2, \dots, m-2$, sea $f_i \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ tal que $(1, \infty, 0)$ es aplicado en $(0, w_1^i, z_1^i)$, donde w_1^i, z_1^i son los puntos fijos atractor y repulsor de C_1^i . Sea $h_i = \begin{pmatrix} 0 & -1/t_i \\ t_i & 0 \end{pmatrix}$ y definase $(\bar{G}_i, \bar{\mathcal{B}}_i) = f_i \circ h_i \circ (G'_i, \mathcal{B}'_i) \circ (f_i \circ h_i)^{-1}$; a los elementos de $\bar{\mathcal{B}}_i$ los denotaremos como $(\bar{C}_1^i, \bar{C}_2^i, \bar{C}_3^i)$.

(4) Definiremos por inducción a los grupos (G_i, \mathcal{B}_i) , $i=1, \dots, m-2$, y a los elementos C_1, \dots, C_m , los cuales determinan un grupo fuchsiano marcado normalizado de signatura $(0, m)$, (G, \mathcal{B}) .

a) Sea $C_1 = C_1^1$, $C_2 = C_2^1$, $\mathcal{B}_1 = (C_1, C_2, (C_2 \circ C_1)^{-1})$, $G_1 = \langle \mathcal{B}_1 \rangle$.

b) Sea $g_1 = \text{Id}$, $\mathcal{B}_2 = g_1^{-1} \circ \bar{\mathcal{B}}_2 \circ g_1$, $G_2 = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ y definase $C_3 = g_1^{-1} \circ \bar{C}_1^2 \circ g_1$.

c) Para simplificar haremos solo el siguiente paso, ya que el

paso de inducción es análogo:

Definase g_2 de tal forma que el grupo marcado $g_2 \circ (G_2, \mathcal{B}_2) \circ g_2^{-1}$ esta normalizado, es decir g_2 aplica al punto fijo repulsor y atractor de $C_3 \circ C_2 \circ C_1$ en $\infty, 0$ respectivamente, ademas $g_2^{-1}(1) = z_1^2$ (es el punto fijo repulsor de C_3).

Sea $\mathcal{B}_3 = g_2 \circ \bar{\mathcal{B}}_3 \circ g_2^{-1}$, $G_3 = \langle \mathcal{B}_3 \rangle$, y $C_4 = g_2^{-1} \circ \bar{C}_2^3 \circ g_2$, entonces se tiene que, \bar{C}_1^3 tiene puntos fijos atractor y repulsor a $0, \infty$ respectivamente y $\text{Tr} \bar{C}_1^3 = \text{Tr} C_1^3 = k_1^3 = k_3^2 = \text{Tr} C_3 \circ C_2 \circ C_1$, implica que $g_2^{-1} \circ \bar{C}_1^3 \circ g_2 = C_3 \circ C_2 \circ C_1$. Por lo tanto $g_2^{-1} \circ \bar{C}_3^1 \circ g_2 = g_2^{-1} \circ (\bar{C}_2^3 \circ \bar{C}_1^3)^{-1} \circ g_2 = (C_4 \circ C_3 \circ C_2 \circ C_1)^{-1}$. Lo anterior implica que

$$\mathcal{B}_3 = (C_3 \circ C_2 \circ C_1, C_4, (C_4 \circ C_3 \circ C_2 \circ C_1)^{-1})$$

Para terminar sólo falta probar que el grupo marcado (G, \mathcal{B}) , donde $G = \langle \mathcal{B} \rangle$ y $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3, C_4, (C_4 \circ C_3 \circ C_2 \circ C_1)^{-1})$ es fuchsiano de signatura $(0, 5)$.

d) Por construcción (G_1, \mathcal{B}_1) es fuchsiano marcado de signatura $(0, 3)$. También, del teorema 4.4.10, el grupo

$$\langle G_1 \cup G_2 \rangle = \langle C_1, C_2, C_3 \rangle$$

es fuchsiano de signatura $(0, 4)$ y un polígono fundamental es el que se muestra en la figura siguiente: (ver 4.4.10 fig 5).

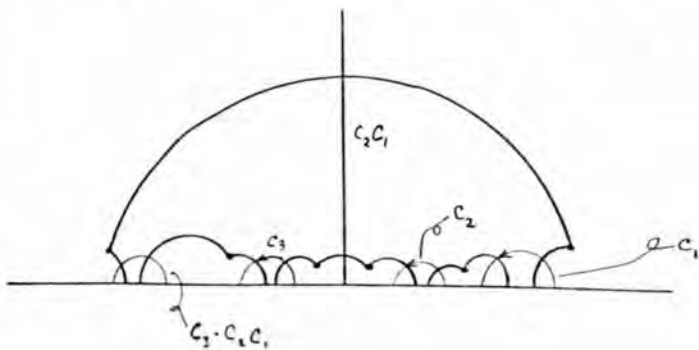
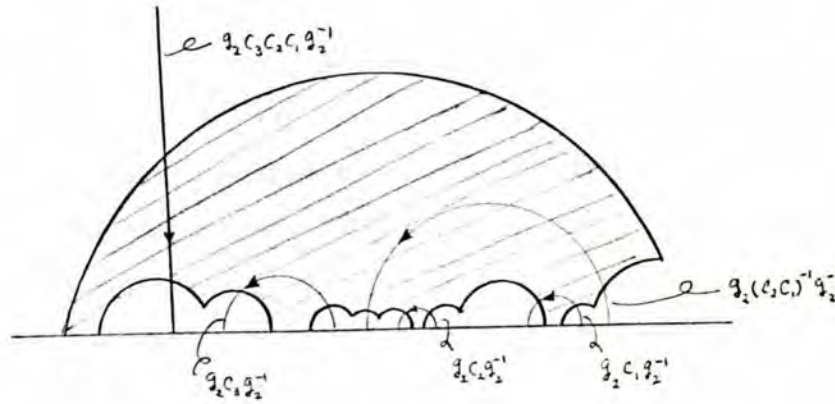


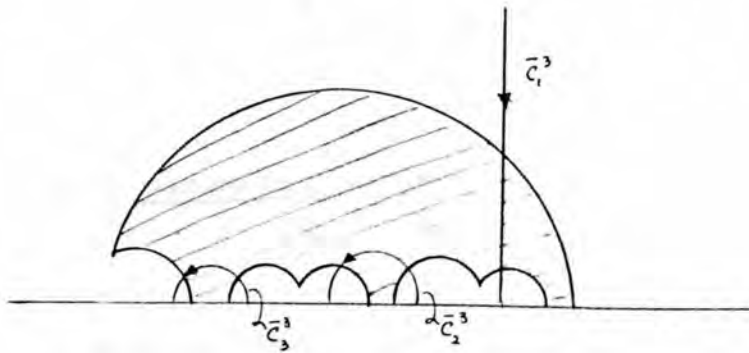
fig. 4.d

como $g_2 \circ (G_2, \mathcal{B}_2) \circ g_2^{-1}$ esta normalizado, el eje de la transformación $g_2 \circ C_3 \circ C_2 \circ C_1 \circ g_2^{-1}$ es el eje imaginario (en \mathbb{P}^+) con ∞ como punto fijo repulsor. Además, en $(\bar{G}_2, \bar{\mathcal{B}}_2)$, \bar{C}_1^2 tiene traza $k_1^2 = k_3^1$, y su eje, y dirección de traslación coincide con la de $g_2 \circ C_3 \circ C_2 \circ C_1 \circ g_2^{-1}$. Por lo tanto $\bar{C}_1^2 = g_2 \circ C_3 \circ C_2 \circ C_1 \circ g_2^{-1}$. Con ésto se tienen las siguientes condiciones:

- i) Sea $H_2 = \langle \bar{C}_1^2 \rangle$, entonces $H_2 \subset g_2 \circ \langle C_1, C_2, C_3 \rangle \circ g_2^{-1} \cap \bar{G}_3$.
- ii) Una región fundamental de \bar{G}_3 y de $g_2 \circ \langle C_1, C_2, C_3 \rangle \circ g_2^{-1}$ se ilustran en las siguientes figuras



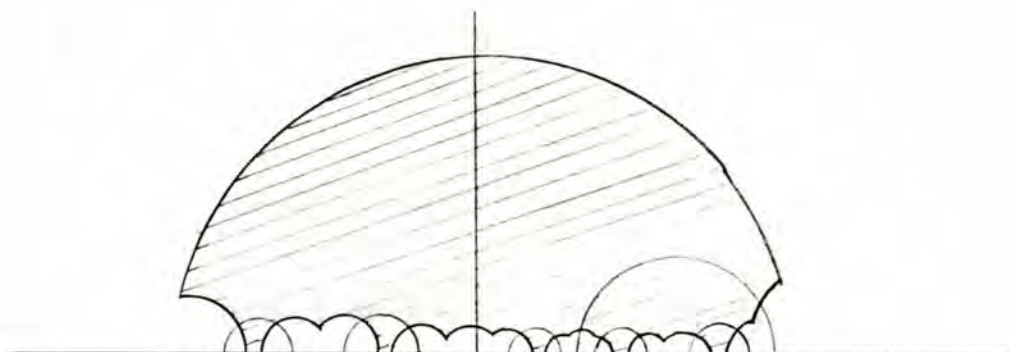
region fundamental de $g_2 \circ \langle C_1, C_2, C_3 \rangle \circ g_2^{-1}$



region fundamental de \bar{G}_2

con ésto y el teorema 4.3.2 se tiene que el grupo G generado por \bar{G}_3 y $g_2 \circ \langle C_1, C_2, C_3 \rangle \circ g_2^{-1}$ es fuchsiano y un polígono

fundamental para G es el mostrado en la siguiente figura:



poligono fundamental de G

además los lados quedan identificados por los elementos de $\langle \bar{G}_2, g_2 \circ \langle C_1, C_2, C_3 \rangle \circ g_2^{-1} \rangle$ de tal forma que el polígono identificado tiene signatura $(0,5)$.

Con esto tenemos que el grupo G generado por $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ es fuchsiano de signatura $(0,5)$ y $\langle C_1, C_2, C_3, C_4, (C_4 \circ C_3 \circ C_2 \circ C_1)^{-1} \rangle$ es una marca para G .

Repitiendo este proceso hasta determinar C_m , se obtiene un grupo fuchsiano marcado de signatura $(0,m)$. Con ésto se concluye la demostración del teorema. ■

Construcción y parametrización de un grupo de signatura (g,m)

Para la construcción general del grupo de signatura (g,m) seguiremos los siguientes pasos

- 1) Construiremos un grupo de signatura $(1,1)$ a partir de uno de signatura $(0,3)$.

2) Amalgamando éste con uno de signatura $(0, m+g)$ se obtendrá un grupo de signatura $(1, m+g-1)$, repitiendo este proceso g veces para obtener al final un grupo de signatura (g, m) .

Para el paso 1) necesitaremos el siguiente teorema

6.1 Teorema: Sea G un grupo kleiniano y H_1, H_2 subgrupos cíclicos de G . Sea F un dominio fundamental de G , sea $f \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Sea B_1, B_2 dominios de Jordan ajenos con curvas frontera c_1, c_2 , respectivamente. Sea $B_3 = \hat{\mathbb{C}} - (\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2)$ y supongase que

- i) $\text{interior}(B_3 \cap F) \neq \emptyset$
- ii) $\bigcup_{h \in H_i} h(F \cap \bar{B}_i) = \bar{B}_i \cap R(G) = \bar{B}_i \cap R(H_i) \quad i=1, 2.$
- iii) $\overline{F \cap c_i} \subseteq R(G).$
- iv) $F^* = B_3 \cup c_1$ es un conjunto fundamental del grupo generado por f .
- v) $f^{-1} \circ H_2 \circ f = H_1.$
- vi) $f(c_1) = c_2.$

entonces:

- 1) El grupo $G' = \langle G \cup \{f\} \rangle \subseteq \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ es kleiniano.
- 2) $F' = F \cap F^*$ es un conjunto fundamental para G' .

Demostración: [Maskit 2].

6.2 Considerese ahora un grupo fuchsiano marcado (G, \mathcal{B}) de signatura $(0, 3)$, donde $\mathcal{B} = (C_1, C_2, C_3)$, suponga además que (G, \mathcal{B}) está normalizado. Si \mathbb{H}^2 es el modelo \mathbb{P}^+ , sea $w_2 \in \mathbb{R}$ el punto fijo atractor de C_2 y supongase que $\text{Tr}C_2 = \text{Tr}C_3$.

4.6.3 Sea $f_1 \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ el cual corresponde a la matriz

$$f_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-w_1)^{1/2}} & \frac{w_1}{(1-w_1)^{1/2}} \\ \frac{1}{(1-w_1)^{1/2}} & \frac{1}{(1-w_1)^{1/2}} \end{pmatrix}$$

entonces $f_1(0)=w_1$, $f_1(\infty)=1$. Por lo tanto f_1 mapea al eje de C_3 en el eje de C_2 . Además cualquier isometría que tenga estas propiedades, está depende de un parametro t como se precisa en el siguiente lema.

4.6.4 Lema: Sea $f \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ tal que f aplica a 0 en w_2 y a ∞ en 1 . Entonces f es dado como sigue

$$f = \begin{pmatrix} \frac{t}{(1-w_1)^{1/2}} & \frac{w_1}{t(1-w_1)^{1/2}} \\ \frac{t}{(1-w_1)^{1/2}} & \frac{1}{t(1-w_1)^{1/2}} \end{pmatrix}$$

a esta función la denotaremos por f_t .

Demostración: Como $f_1^{-1} \circ f$ fija al $\infty, 0$ entonces que $f_1^{-1} \circ f = t^2 z$.

Por lo tanto

$$f_t := f = f_1 \circ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$$

sustituyendo f_1 en esta expresión se obtiene el lema. ■

4.6.5 Sea $B_1 = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \text{Re} z < 0\}$, sea $B_2 = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z - \frac{w_1+1}{2}| < \frac{1-w_1}{2}\}$ (∂B_2 es el círculo ortogonal a $\partial \mathbb{P}^+$ que pasa por $1, w_2$). Sea $B_3 = \hat{\mathbb{C}} - B_1 \cup B_2$, sea F un conjunto fundamental de G . Sea $c_1 = \partial B_1$, $c_2 = \partial B_2$ sea $F^* = B_3 \cup c_1$. Esto se ilustra en la siguiente figura:

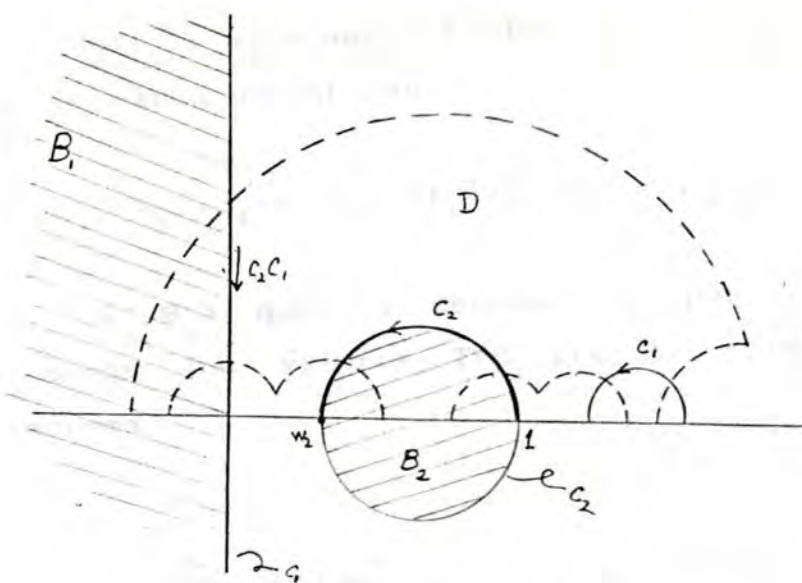


fig. 4.6.5

Sea H_1 el grupo cíclico generado por C_2 y sea H_2 el grupo generado por C_2 . Entonces $G, f_t, c_1, B_1, c_2, B_2, H_1, H_2$ satisfacen las condiciones del teorema 4.6.1, por lo que el grupo G' generado por $G \cup \{f\}$ es fuchsiano, y $F' = F^* \cap F$ es un conjunto fundamental para G' ($\overline{F \cap F^*}$ es un polígono fundamental para G'). Además se puede ver que los elementos de G' identifican los lados de $\partial F'$ de tal forma que la superficie $\overline{F'} / G'$ tiene signatura $(1,1)$.

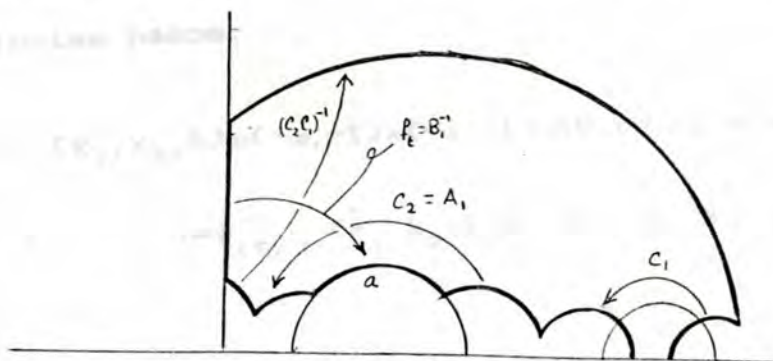


fig. n

Por lo anterior el grupo fuchsiano marcado $(G', (A_1, B_1, C_1))$

donde $A_1=C_2$; $B_1=f_t^{-1}$, está normalizado (ver 4.2.0) ya que los elementos de la marca satisfacen

$$C_1 \circ B_1^{-1} \circ A_1^{-1} \circ B_1 \circ A_1 = C_1 \circ ((f_t^{-1} \circ C_2 \circ f_t)^{-1} \circ C_2 = \text{Id}$$

El grupo (G', \mathcal{B}') quedará determinado por la construcción anterior si damos los valores $\text{Tr}C_1, \text{Tr}C_2, t$. Esto queda en el siguiente teorema

- 6.5 Teorema: Hay una biyección entre $T_{(1,1)}$ y el conjunto $(-\infty, -1)^2 \times \mathbb{R}^+$, donde $T_{(1,1)}$ es considerado como en la definición 3.1.16. Sea (G, \mathcal{B}) un grupo fuchsiano marcado normalizado de signatura $(1,1)$, con $\mathcal{B} = (A_1, B_1, C_1)$, entonces la biyección esta dada por

$$\Psi_{(1,1)}(G, \mathcal{B}) = (\frac{1}{2}\text{Tr}C_1, \frac{1}{2}\text{Tr}A_1, t)$$

donde t es la raíz positiva de la ecuación $t + \frac{1}{t} = -\text{Tr}(B_1 \circ f_1)$ (ver 4.6.3 para la def. de f_1).

Demostración: Daremos la inversa explícitamente con los siguientes pasos:

1) Sea $(k_1, k_2, t) \in (-\infty, -1) \times (-\infty, -1) \times (0, \infty)$. Sea $k_3 = k_2$.

2) Sea $(G', \mathcal{B}') = \Psi_{(0,3)}^{-1}(k_1, k_2, k_3)$, donde \mathcal{B}' será denotado por (C_1, C_2, C_3) .

3) Sea $A_1 = C_2$ y sea w_2 el punto fijo atractor de A_1 . Sea f_t dado por la fórmula dada en el lema 4.6.4.

sea $B_1 = f_t^{-1}$, si $\mathcal{B} = (A_1, B_1, C_1)$ y $G = \langle \mathcal{B} \rangle$. Se sigue de lo expuesto en 4.6.3, 4.6.4 y 4.6.5 que (G, \mathcal{B}) es fuchsiano marcado normalizado y de signatura $(1,1)$. Con lo que queda

demostrado el teorema. ■

Los parámetros usados en el teorema anterior se pueden interpretar geoméricamente como sigue

6.7 Si (S, \mathcal{A}) es una superficie de Riemann marcada de signatura $(1,1)$ a la cual representa (G, \mathcal{B}) , donde $\mathcal{A}=(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ es una base canónica del grupo fundamental de S basado en un punto $x \in S$, entonces si $\hat{\mathcal{A}}=(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1)$ denota a las geodésicas cerradas sobre las cuales se proyectan los ejes de (A_1, B_1, C_1) respectivamente, éstas son libremente homotópicas a los elementos respectivos de \mathcal{A} . Además si $(\gamma_1 \cdot \alpha_1)^\wedge$ denota la geodésica sobre la que se proyecta el eje de $A_1 \cdot C_1 = B_1 \cdot A_1 \cdot B_1^{-1}$, ésta es libremente homotópica a $\gamma_1 \cdot \alpha_1$ y a α_1 , por lo tanto $\hat{\alpha}_1 = (\gamma_1 \cdot \alpha_1)^\wedge$. Con lo anterior se tiene lo siguiente:

1) $\hat{\gamma}_1$ acota una superficie de Riemann con frontera geodesica $\hat{S} \subset S$ de signatura $(1,1)$.

2) $\hat{S} - (\gamma_1 \cdot \alpha_1)^\wedge$ es una superficie de signatura $(0,3)$.

3) Si denotamos por T_1, T_2 a las longitudes de $\hat{\alpha}_1, \hat{\gamma}_1$ entonces

$$\begin{aligned} -\text{Tr}C_1 &= 2 \cdot \cosh \frac{1}{2} T_2 \\ -\text{Tr}A_1 &= 2 \cdot \cosh \frac{1}{2} T_1 \end{aligned}$$

4) El valor de $\mathcal{L}n(t^2)$ se puede interpretar como un deslizamiento a lo largo de la geodesica $\hat{\alpha}_1$ en una dirección determinada por el signo de $\mathcal{L}n(t^2)$.

Lo anterior se ilustra en la siguiente figura.

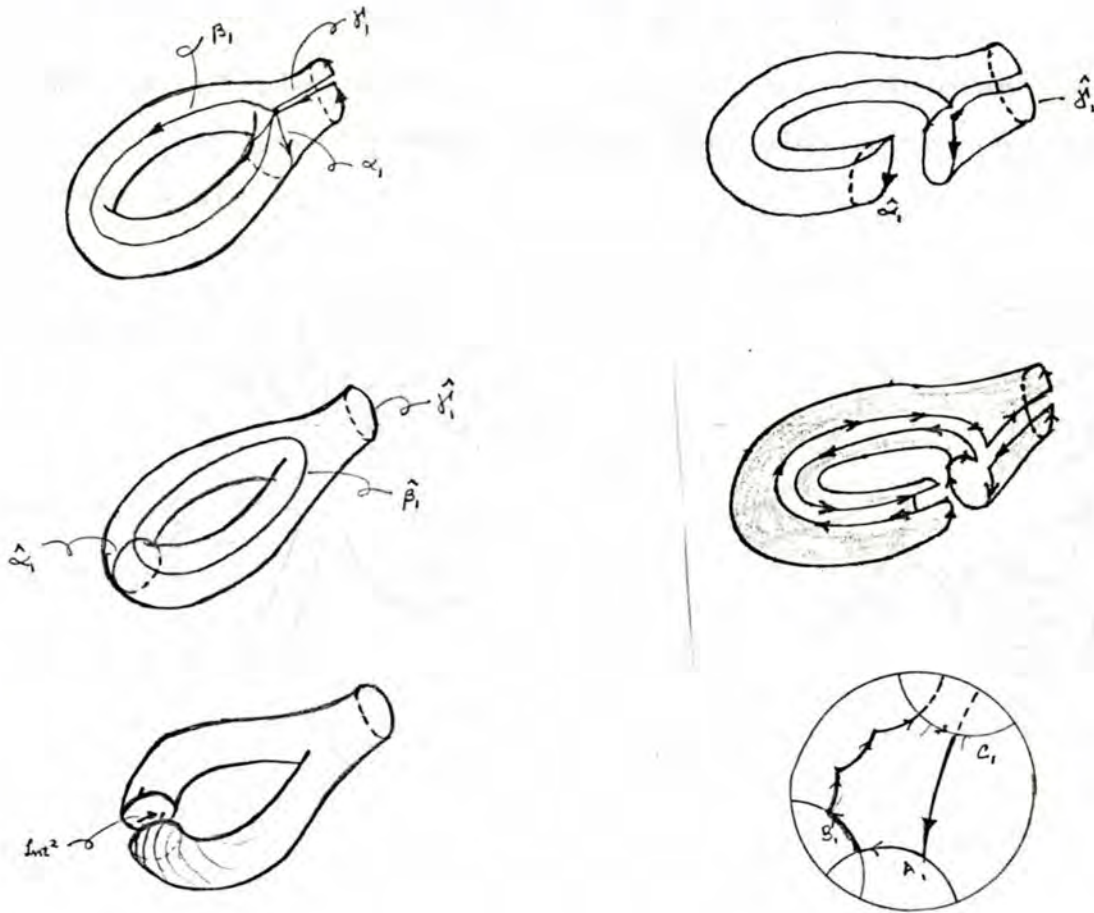


fig. 4.6.7

Para el caso general, en el que (G, \mathcal{B}) es fuchsiano marcado de signatura (g, m) , con $g > 0$ se procederá análogamente a los casos anteriores, amalgamando grupos de los ya construidos. Los parámetros usados para determinar el grupo marcado tendrán también una interpretación geométrica análoga. Eso se describe en el siguiente párrafo.

- 6.7 Sea (S, \mathcal{A}) una superficie de Riemann marcada de signatura (g, m) , con $\mathcal{A} = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_j)$ $1 \leq i \leq g < j \leq m+g$ una base canónica de $\Pi_1(S, x)$, $x \in S$. Sea (G, \mathcal{B}) un grupo fuchsiano marcado el cual representa a (S, \mathcal{A}) y

tal que (G, \mathcal{B}) está normalizado. Denotemos por $(A_i, B_i, C_j)_{\substack{1 \leq i \leq g \\ 1 \leq j \leq m+g}}$ los elementos de \mathcal{B} .

Para cada i, j con $1 \leq i \leq g < j \leq m+g$, sean $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\gamma}_j$ las geodésicas cerradas simples sobre las cuales se proyectan los ejes de A_i, B_i, C_j respectivamente, éstas, son libremente homotópicas a las curvas $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j$.

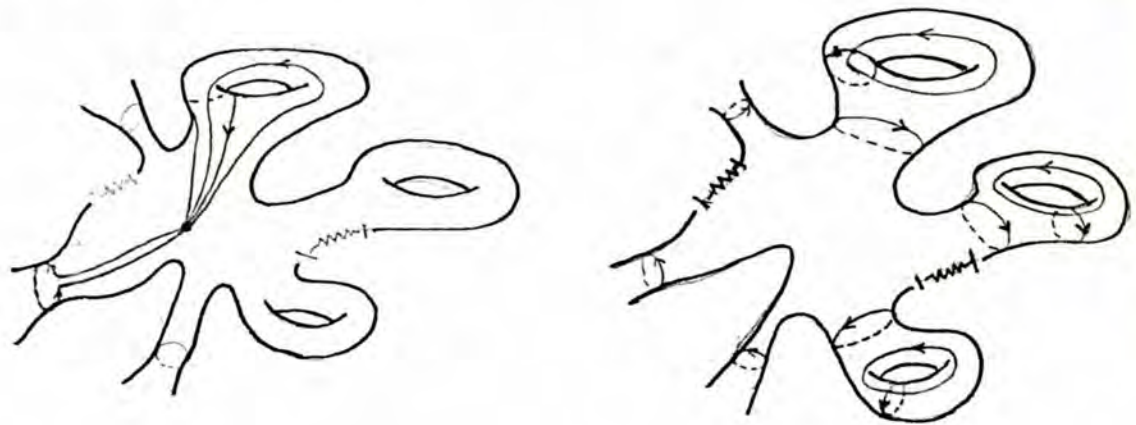


fig. 4.6.7

6.8 Para cada i con $1 \leq i \leq g$ sea $C_j = ([B_i, A_i])^{-1} = (B_i^{-1} \cdot A_i^{-1} \cdot B_i \cdot A_i)^{-1}$. Su eje se proyecta sobre la geodésica denotada por $\hat{\gamma}_i$ la cual es libremente homotópica a la curva $\gamma_i = \alpha_i \cdot \beta_i \cdot \alpha_i^{-1} \cdot \beta_i^{-1}$. El conjunto $\hat{\mathcal{A}}_0 = \{\hat{\gamma}_i\}_{1 \leq i \leq m+g}$ acotan una superficie cerrada con frontera $\hat{S}_0 \subset S$ de signatura $(0, m+g)$.

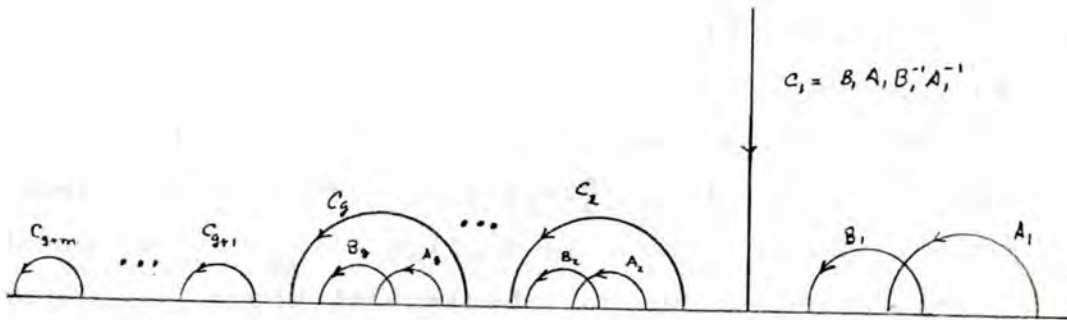
Por otro lado, para cada i con $1 \leq i \leq g$, $\hat{\gamma}_i$ acota una superficie \hat{S}_i con frontera geodésica y de signatura $(1, 1)$. Con ésto, S se divide en superficies $\hat{S}_0, \{\hat{S}_i\}$, cuyos interiores son ajenos y tales que la superficie $\hat{S} = \hat{S}_0 \cup (\cup \hat{S}_i)$ tiene el mismo tipo de homotópia de S .

Con ésto, partiendo de (G, \mathcal{B}) obtenemos los siguientes grupos fuchsianos:

(G_0, \mathcal{B}_0) donde $\mathcal{B}_0 = (C_1, \dots, C_{m+g})$.
 para $i=1, \dots, g$ (G_i, \mathcal{B}_i) donde $\mathcal{B}_i = (A_i, B_i, C_i)$

los cuales representan a las superficies $\hat{S}_0, \{\hat{S}_i\}_{i=1, \dots, g}$, respectivamente.

De estos (G_i, \mathcal{B}_i) esta normalizado. Además, por un razonamiento análogo a los casos anteriores los ejes de los elementos de \mathcal{B} están dispuestos en \mathbb{P}^+ como se ilustra en la figura.



Para introducir los parámetros necesarios para determinar a (G, \mathcal{B}) , utilizaremos la notación y el proceso siguiente.

- 6.9 1) Dado (G, \mathcal{B}) como antes, con $\mathcal{B} = (A_i, B_i, C_j)$ con $1 \leq i \leq g$, $g < j \leq m+g$. Considerense los siguiente grupos fuchsianos marcados:

$$(G_0, \mathcal{B}_0) \text{ con } \mathcal{B}_0 = (C_1, \dots, C_{m+g}) \text{ y } G_0 = \langle \mathcal{B}_0 \rangle$$

para $i=1, \dots, g$ (G_i, \mathcal{B}_i) donde $\mathcal{B}_i = (A_i, B_i, C_i)$

aquí $C_i = [B_i, A_i]^{-1}$ para $i=1, \dots, g$. Sean $(k_1^i, k_2^i, k_3^i)_{1 < i < m+g-2}$ y t_2, \dots, t_{m+g-2} tales que

$$w_0 = (k_1^1, k_2^1, k_3^1, k_2^2, k_3^2, t_2, \dots, k_2^{m+g-2}, k_3^{m+g-2}, t_{m+g-2}) = \Psi_{(0, m+g-2)}(G_0, \mathcal{B}_0)$$

y tales que $k_1^i = k_3^{i-1}$ $i=2, \dots, m+g-2$.

Sea $(G'_0, \mathcal{B}'_0) = \Psi_{(0, m+g-2)}$ donde los elementos de \mathcal{B}'_0 son denotados por $(C_1^0, \dots, C_{m+g}^0)$, sea $g_0 \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ tal que $(G'_0, \mathcal{B}'_0) = g_0 \circ (G_0, \mathcal{B}_0) \circ g_0^{-1}$.

2) Para cada $i=1, \dots, g$ sea $g_i \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ tal que el grupo marcado $(G'_i, \mathcal{B}'_i) = g_i \circ (G_i, \mathcal{B}_i) \circ g_i^{-1}$ esta normalizado. Los elementos de \mathcal{B}'_i seran denotados por (A^i, B^i, C^i) . Sean $(l_1^i, l_2^i, l_3^i) = \Psi_{(1, 1)}(G'_i, \mathcal{B}'_i)$.

3) Para cada $i=1, \dots, g$ sea $h_i \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ la transformación que mapea los puntos fijos repulsor y atractor de C_i en $\infty, 0$ respectivamente. Esta transformación está determinada salvo composición por una transformación de la forma $h'_i = \begin{pmatrix} s_i & 0 \\ 0 & 1/s_i \end{pmatrix}$, por lo que si pedimos ademas que $(h'_i \circ h_i)^{-1}$ aplique al 1 en el punto fijo repulsor de A^i , entonces s_i queda determinado con estas condiciones.

4) Como $l_1^i = \text{Tr} C_1^i = \text{Tr} C_i = \begin{cases} k_1^1 & \text{si } i=1 \\ k_2^i & \text{si } i=2, \dots, g. \end{cases}$

con esto tenemos en total $6g+3m-6$ parámetros independientes

$k_1^1, k_2^1, k_3^1, k_2^2, k_3^2, t_2, \dots, k_2^{m+g-2}, k_3^{m+g-2}, t_{m+g-2}, l_2^1, l_3^1, s_1, \dots, l_2^g, l_3^g, s_g$

los cuales determinan a (G, \mathcal{B}) .

Lo anterior queda resumido en el siguiente teorema.

6.10 Teorema: Hay una biyección entre $T_{(g, m)}$ y el conjunto $(-\infty, -1)^3 \times ((-\infty, -1)^2 \times (0, \infty))^{m-2} \times ((-\infty, -1) \times (0, \infty)^2)^g$. Además si (G, \mathcal{B}) es el representante normalizado de un punto de $T_{(g, m)}$ y si (G_i, \mathcal{B}_i) son definidos como en 4.6.9 1), 2) se tiene que la biyección está dada por

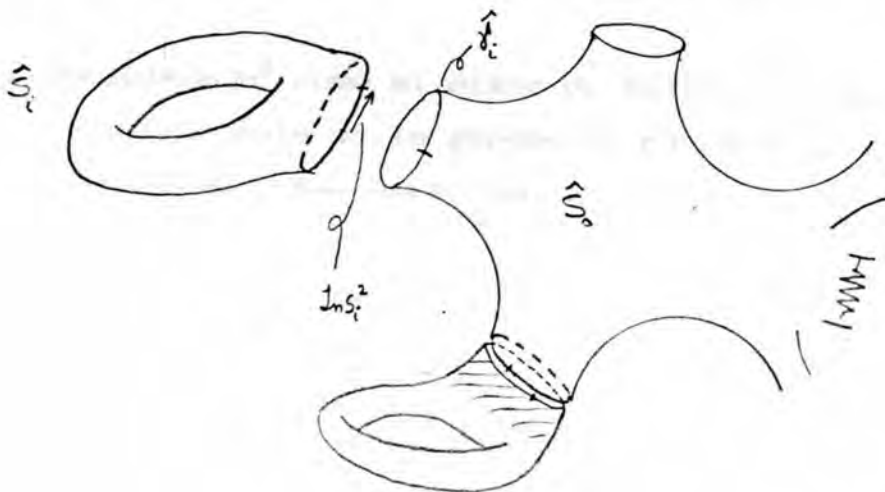
$$\Psi_{(g, m)} : T_{(g, m)} \longrightarrow (-\infty, -1)^3 \times ((-\infty, -1)^2 \times (0, \infty))^{m-2} \times ((-\infty, -1) \times (0, \infty)^2)^g$$

$$\Psi_{(g, m)}(G, \mathcal{B}) = (\Psi_{(g, m)}(G_0, \mathcal{B}_0), (p_2(\Psi_{(g, m)}(G_i, \mathcal{B}_i)), s_i)_{i=1}^g)$$

donde $p_2: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la proyección sobre las últimas dos coordenadas y s_i es como se definió en 4.6.9 3).

Demostración: De forma análoga a los casos anteriores, amalgamando por medio del teorema 4.3.1, por inducción los grupos G_0, G_i y $H_i = \langle G_i \rangle$, se obtiene el resultado. ■

La interpretación de todos los parámetros es la misma dada anteriormente, salvo los parámetros $\{s_i\}_{i=1}^g$ que son nuevos. Estos son tales que $\ell n(s_i^2)$ corresponde a un desplazamiento a lo largo de la geodésica $\hat{\gamma}_i$ de la superficie \hat{S}_i con respecto a la superficie \hat{S}_0 , y en la dirección determinada por el signo de $\ell n(s_i^2)$.



CAPITULO V

Modelo de Thurston
del espacio de Teichmuller
de una superficie compacta

.0 Introducción

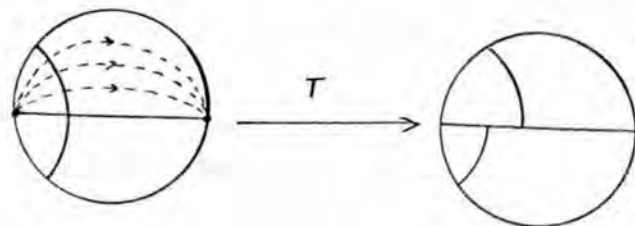
En este capítulo presentaremos una parametrización del espacio de Teichmuller de una superficie compacta por medio de objetos matemáticos llamados sismos los cuales definiremos mas adelante.

A grandes rasgos, un sismo consiste en una función biyectiva de \mathbb{H}^2 en \mathbb{H}^2 , que es discontinua en un subconjunto cerrado λ de \mathbb{H}^2 , el cual es una laminacion geodesica (ver 2.4.16). Además en cada componente de $\mathbb{H}^2 - \lambda$, el sismo es la restricción de una isometría de \mathbb{H}^2 . Al conjunto λ se le llama tambien zona de fallas. Un ejemplo de este tipo de funciones es el siguiente.

Considere \mathbb{H}^2 como el disco de Poincaré, Sea $\lambda \subseteq \Delta$ el conjunto que consiste solo de la geodesica cuyos extremos son 1, -1 y defina la aplicacion $T: \Delta \longrightarrow \Delta$ como

$$T(z) = \begin{cases} z & \text{si } \text{Im}z < 0 \\ \frac{az+b}{bz+a} & \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a^2 - b^2 = 1$ y $|a| > 1$



Probaremos primero que una estructura hiperbólica en una superficie compacta se puede interpretar como una clase lateral derecha del subgrupo $H = \{g|_S, | g \in \text{Aut}(\Delta)\}$ del grupo $\text{Hom}(S^1) = \{h | h \text{ es homeomorfismo de } S^1 \text{ en } S^1 \text{ que preserva orientacion}\}$.

Posteriormente se probará que a una clase lateral derecha $H \cdot f$ se le puede asociar un sismo el cual estara unicamente determinado por algún representante salvo por composición por elementos de $\text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$.

Estructuras hiperbólicas relativas en $(\mathbb{H}^2, S_\infty^1)$

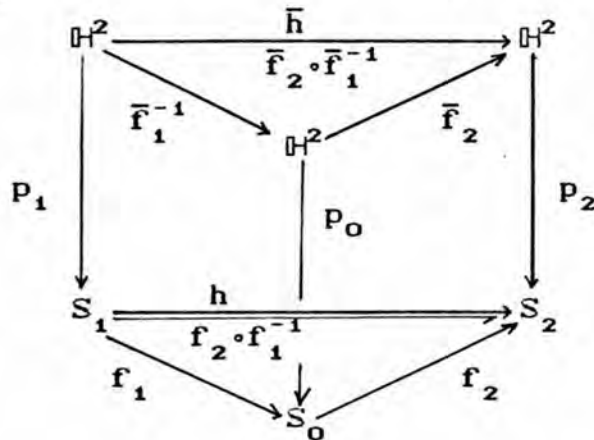
Sea S_0 una superficie de Riemann compacta de genero $g > 1$. Consideremos $T_g (= T_{(g, 0)})$ el espacio de Teichmuller asociado a S_0 visto como el conjunto de clases de equivalencia de parejas de la forma $(S, [f])$, donde $f: S_0 \rightarrow S$ es un homeomorfismo y $[f]$ es la clase de homotopía de f (ver 3.1.22).

Sea (\mathbb{H}^2, p_0) una cubierta universal fija de S_0 , sea $[(S, [f])] \in T_g$ y sean $(S_1, [f_1]), (S_2, [f_2]) \in [(S, [f])]$. Sea $h: S_1 \rightarrow S_2$ el homeomorfismo conforme que relaciona $(S_1, [f_1]), (S_2, [f_2])$ según la relacion dada en 3.1.22. Sean $(\mathbb{H}^2, p_1), (\mathbb{H}^2, p_2)$ las cubiertas universales respectivas de S_1, S_2 . Sean $\bar{h}, \bar{f}_1, \bar{f}_2$ los levantamientos respectivos de h, f_1, f_2 . Por el teorema 2.4.21, estos se extienden continuamente a $\bar{\mathbb{H}}^2 = \Delta \cup S^1$ y del teorema 2.4.31 existe $g \in \text{Aut}(\mathbb{H}^2, p_2)$ tal que

$$\bar{h}|_S = g \circ \bar{f}_2 \circ \bar{f}_1^{-1}|_S$$

como h es conforme, $\bar{h} \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ y por lo tanto $\bar{f}_2 \circ \bar{f}_1^{-1}|_S \in H$ y por lo

tanto $\bar{f}_1 \in H \circ f_2$. Esto conforma el siguiente diagrama conmutativo



Si ahora consideramos una estructura hiperbólica arbitraria en Δ , considerese también la métrica hiperbólica que induce (ver 2.4.3), entonces, por el teorema 2.4.1, existe un homeomorfismo de \mathbb{H}^2 en Δ que es isometría. Además, dado un homeomorfismo $h: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \Delta$, se puede dar una estructura hiperbólica en Δ de tal forma que h sea una isometría.

Considérense ahora aquellas estructuras hiperbólicas en Δ definidas por homeomorfismos que se extienden a la frontera de Δ (como las determinadas por homeomorfismos entre superficies compactas). Lo anterior motiva la siguiente definición:

1.1 **Definición:** Decimos que dos métricas hiperbólicas completas son equivalentes si existe una isometría Φ entre ellas, la cual es homotópica a un elemento $g \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ y se cumple lo siguiente:

i) Si $G: I \times \Delta \longrightarrow \Delta$ es la homotopía respectiva, entonces ésta, se extiende continuamente a $I \times \partial \Delta$ como la aplicación $\text{Id} \times g|_{S^1}$.

Observación: la condición ii) implica que Φ se extiende continuamente a $\partial \Delta$ como $g|_{S^1}$.

5.1.2 Definición: A una clase de equivalencia de la relación definida en 5.1.1, la denominaremos estructura hiperbólica relativa en $(\mathbb{H}^2, \partial\mathbb{H}^2)$ y denotaremos por EH al conjunto de estructuras hiperbólicas relativas.

5.1.3 Proposición: Existe una biyección entre el conjunto de estructuras hiperbólicas relativas y el conjunto de clases laterales derechas

$$H \backslash \text{Hom}(S^1) = \{H \circ f \mid f \in \text{Hom}(S^1)\}$$

Demostración: Considérese la siguiente función $B: H \backslash \text{Hom}(S^1) \rightarrow \text{EH}$ definida por el siguiente proceso:

- i) Si $h \circ f \in H \backslash \text{Hom}(S^1)$, considérese la extensión radial $\bar{f}: \mathbb{H}^2 \rightarrow \Delta$ de f a Δ definida por $\bar{f}(x) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$.
- ii) Definase en Δ la métrica hiperbólica que hace de \bar{f} una isometría, entonces su clase de equivalencia es $B(H \circ f)$.

El hecho de que B este bien definida y sea una biyección es consecuencia de la definición de métrica hiperbólica relativa.

■

5.1.4 Teorema: Existe un encaje de T_g en $H \backslash \text{Hom}(S^1)$.

Demostración: Considerese la transformación $E: T_g \rightarrow H \backslash \text{Hom}(S^1)$ definida como sigue:

- i) Si $(S, [f])$ representa un punto en T_g , considerese $\bar{f}: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$

un levantamiento de f a las cubiertas universales de S_0, S respectivamente; por el teorema 2.4.21, \bar{f} se extiende continuamente a S^1 , por lo que definimos $E(S, [f])$ como $H \circ \bar{f}|_{S^1}$.

ii) La transformacion E esta bien definida ya que, si $(S_1, [f_1])$ es equivalente a $(S_2, [f_2])$, se tiene que los levantamientos correspondientes de f_1 y f_2 satisfacen que $\bar{f}_1 \circ \bar{f}_2^{-1}|_{S^1}$ es elemento de H (pues como se vio 5.1.0, si $h: S_1 \longrightarrow S_2$ es conforme y homotópico a $f_1 \circ f_2^{-1}$, su levantamiento \bar{h} está en $\text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ y además, $\bar{f}_1 \circ \bar{f}_2^{-1}|_{S^1}$ coincide con $\bar{h}|_{S^1}$).

iii) La inyectividad de E es consecuencia de que si $(S_1, [f_1])$, $(S_2, [f_2])$ son equivalentes (según 3.1.22) entonces sus levantamientos a las cubiertas universales, \bar{f}_1, \bar{f}_2 , cumplen que $g = \bar{f}_1 \circ \bar{f}_2^{-1}|_{S^1}$ está en H , entonces por el teorema 2.4.32, existe $G: S_1 \longrightarrow S_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{H}^2 \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\
 S_1 & \xrightarrow{G} & S_2
 \end{array}$$

Además, considerando la homotopía $\bar{F}: I \times \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $\bar{F}(t, x)$ es el punto que divide al segmento de $\bar{f}_2 \circ \bar{f}_1^{-1}(x)$ a $g(x)$, en la razón $\frac{t}{1-t}$, se tiene que existe $F: I \times S_1 \longrightarrow S_2$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

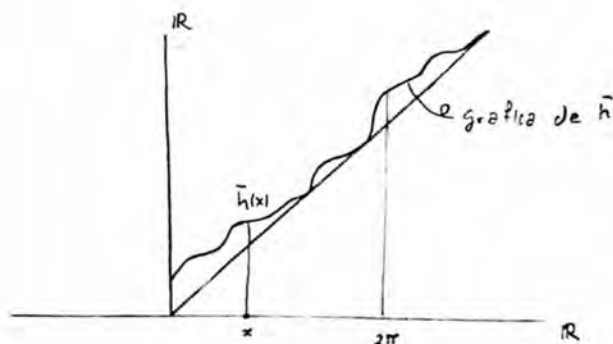
$$\begin{array}{ccc}
 I \times \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathbb{H}^2 \\
 \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\
 I \times S_1 & \xrightarrow{F} & S_2
 \end{array}$$

Esta homotopía es tal que $F(0, x) = f_2 \circ f_1^{-1}(x)$ y $F(1, x) = G(x)$, por lo que $f_2 \circ f_1^{-1}$ y G son homotópicas. Como G es una transformación conforme entonces $(S_1, [f_1])$ y $(S_2, [f_2])$ representan al mismo punto de T_g . Por consiguiente, E es inyectiva.

6.2 Sismos en el plano hiperbólico

En esta sección definiremos lo que es un sismo izquierdo, haciendo uso de las siguientes definiciones:

2.1 Definición: Sea (\mathbb{R}, \exp) la cubierta universal de S^1 , donde $\exp(t) = e^{it}$. Sea $h \in \text{Hom}(S^1)$. Decimos que h es extremo izquierdo si para algun levantamiento $\bar{h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a la cubierta universal, se tiene que $\bar{h}(x) \geq x$ para toda $x \in \mathbb{R}$, y $\text{fix}(\bar{h}) \neq \emptyset$.



Intuitivamente, lo anterior significa que h mueve todos los puntos de S^1 en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a los puntos fijos de h .

De manera analoga se define lo que es un homeomorfismo extremo derecho.

1.2 Antes de dar la definición precisa de lo que es un sismo izquierdo (ver 5.2.3), introduciremos algunos elementos que estaremos usando.

Como veremos, todo sismo en \mathbb{H}^2 será una transformación $T: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, junto con una zona de fallas que consiste en una laminación geodésica (ver 2.4.16) y una estratificación de \mathbb{H}^2 (en donde "tiembla"). La estratificación consta de fallas y de sus complementos llamados gaps. A las hojas de la laminación y a los gaps los denominaremos estratos.

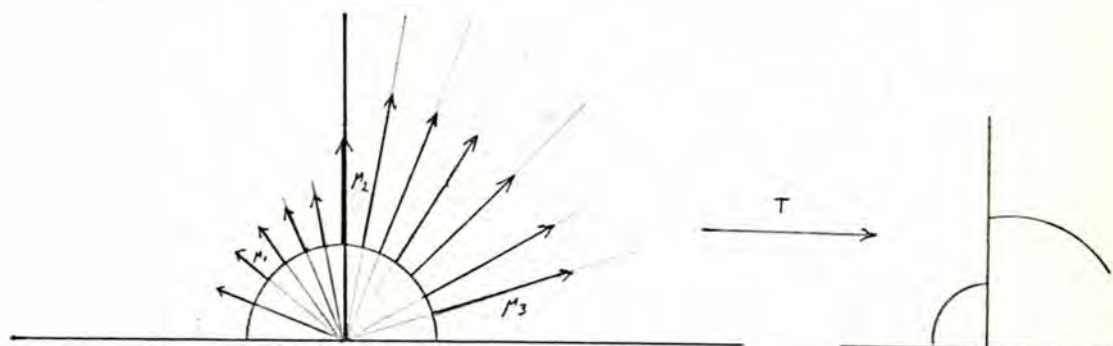
El sismo deslizará a los estratos conservando la longitud en cada componente conexa de \mathbb{H}^2 menos la zona de fallas, (hiperbólica). Es decir, la restricción de T a cada estrato A , denotada por $T|_A$, es la restricción de un elemento de $\text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$. De aquí en adelante, $T|_A$ denotará a la isometría que define la restricción del sismo a A . Además, si A, B son estratos ajenos pedimos que $T|_A^{-1} \circ T$ fije A y mueva B a la izquierda visto desde A .

Un ejemplo sencillo es el siguiente:

Considerando \mathbb{H}^2 como el semiplano superior, sea λ la laminación en \mathbb{H}^2 que consiste solo del eje imaginario y definase $T: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ como sigue:

$$T(x) = \begin{cases} \mu_1 x & \text{si } \text{Re} x < 0 \\ \mu_2 x & \text{si } \text{Re} x = 0 \\ \mu_3 x & \text{si } \text{Re} x > 0 \end{cases} ,$$

con $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}^+$, $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$.



Si bien un sismo no es un homeomorfismo, ya que no es continuo en la zona de fallas, en el ejemplo (de hecho siempre, ver 5.2.16) el sismo define un homeomorfismo de S_∞^1 en S_∞^1 , que determina una estructura hiperbólica relativa.

La definición formal de un sismo izquierdo (derecho) se basa en la siguiente:

3.2.3 Definición: i) Sea λ una laminación geodesica en \mathbb{H}^2 (ver 2.4.16). Un λ -sismo-izquierdo T es una transformación biyectiva $T: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ la cual es una isometría en cada estrato de λ . Además se requiere que, para cada pareja de estratos ajenos A, B , el homeomorfismo

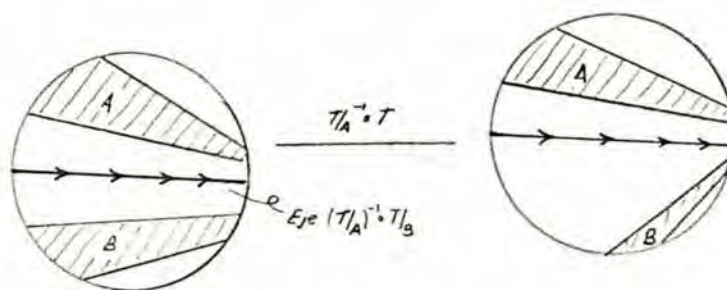
$$(T|_A)^{-1} \circ T|_B: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

sea una transformación hiperbólica cuyo eje m , sea tal que A y B se hallen en distintas componentes de $\mathbb{H}^2 - m$. En otras palabras, la transformación

$$(T|_A)^{-1} \circ T: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

fija A y mueve a B a la izquierda con respecto a A . Esto se

ilustra en la siguiente figura



A la isometría $(T|_A)^{-1} \cdot T|_B: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ la denotaremos por $\text{comp}(A,B)$; ésta, es una transformación hiperbólica cuyo eje separa A de B y mueve a B a la izquierda visto desde A.

5.2.3 ii) Se define de manera análoga un λ -sismo-derecho con la diferencia de que $(T|_A)^{-1} \cdot T|_B$ fija a A y mueve a B a la derecha visto desde A.

5.2.4 Definición: Un sismo izquierdo (derecho) es una terna $(T, \lambda_s, \lambda_t)$, donde λ_s, λ_t son laminaciones geodesicas en \mathbb{H}^2 y $T: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ es un λ_s -sismo-izquierdo (derecho) que aplica a cada estrato de λ_s en un estrato de λ_t .

En la siguiente proposición demostraremos que el inverso de un sismo izquierdo es un sismo derecho, para ello necesitaremos el siguiente lema el cual es un caso particular.

5.2.5 Lema: Sea $(T, \lambda_s, \lambda_t)$ un sismo izquierdo con $\lambda_s = \{\ell\}$, donde ℓ es una geodésica. Sea $\ell' = T(\ell)$ y $\lambda_t = \{\ell'\}$. Si definimos la transformación $T^{-1}: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ como el inverso de T, entonces $(T^{-1}, \lambda_t, \lambda_s)$ es un sismo derecho.

Demostración: Sean A, B los estratos de $\mathbb{H}^2 - \ell$ y $A' = T(A), B' = T(B)$.

Demostraremos que $\text{comp}(A', B')$ es tal que su eje separa a A' de B' y traslada a B' a la derecha con respecto a A' . Para esto observe que el eje de $\text{comp}(A, B)$ es \mathcal{L} .

$$\text{Como } \text{comp}(A', B') = T|_A \circ (T|_B)^{-1} = T|_B \circ \text{comp}(B, A) \circ (T|_B)^{-1}$$

$$\text{y } \text{comp}(B', A') = T|_A \circ \text{comp}(A, B) \circ (T|_A)^{-1}$$

entonces $\text{eje}(\text{comp}(A', B')) = T|_A(\mathcal{L}) = T|_B(\mathcal{L})$. Además $T(\mathcal{L}) = T|_A(\mathcal{L}) = T|_B(\mathcal{L})$, ya que $T(\mathcal{L}) = \mathbb{H}^2 - (A' \cup B')$, $T|_A(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{H}^2 - T|_A(A)$ y $T|_B(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{H}^2 - T|_B(B)$, de donde $T|_A(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{H}^2 - (T|_A(A) \cup T|_B(B))$.

De lo anterior, se deduce que $\text{eje}(\text{comp}(A', B')) = \mathcal{L}'$ y, por lo tanto, separa a A' de B' .

Para ver que T^{-1} es un sismo derecho se observa que:

$T|_B^{-1} \circ T|_A$ mueve a B a la derecha visto desde A . Por lo tanto $T|_B \circ ((T|_B)^{-1} \circ T|_A) \circ T|_B^{-1}$ mueve a $T|_B(B)$ a la derecha visto desde $T|_A(A)$. Como $T|_B(A) = T|_A(A)$ se sigue que $\text{comp}(A', B')$ mueve a B' visto desde A' lo que concluye con la demostración. ■

2.6 **Proposición:** Sea λ_s una laminación en \mathbb{H}^2 y $T: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ un λ_s -sismo izquierdo. Sea $\lambda_t = E(\lambda_s)$. Entonces

- i) $(E, \lambda_s, \lambda_t)$ es un sismo izquierdo y
- ii) $(E^{-1}, \lambda_t, \lambda_s)$ es un sismo derecho.

Demostración: la parte i) es por definición. Para ii) sean A, B dos estratos ajenos de λ_s , y sean $A' = T(A), B' = T(B)$ dos estratos correspondientes de λ_t , se tiene que

$$\text{comp}(A', B') = T|_A \circ T|_B^{-1} = T|_B \circ \text{comp}(B, A) \circ T|_B^{-1}$$

Con esto se puede definir un sismo T' con una sola hoja, el cual coincide con T en los estratos A, B , del lema 5.2.5, se tiene que, el eje de $\text{comp}(A', B')$ (el cual coincide para T y T') separa A' de B' y mueve a B' a la derecha visto desde A' .



fig. 5.2.6

5.2.7 Definición: i) Decimos que un sismo izquierdo $(T, \lambda_s, \lambda_t)$ es simple si la laminación λ_s es finita.

ii) Dos estratos A, B de λ_s son adyacentes si $\bar{A} \cap \bar{B}$ es una geodésica de la laminación.

5.2.8 Proposición: Sea λ una laminación finita y $T: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ una biyección la cual es una isometría en cada estrato de λ . Entonces T es un λ -sismo-izquierdo si y solo si para cada par de estratos adyacentes A, B , la aplicación $\text{comp}(A, B)$ es una transformación hiperbólica cuyo eje separa A de B y traslada a B a la izquierda visto desde A .

Demostración: Si T es un λ -sismo izquierdo, por definición se tiene la implicación \Rightarrow .

\Leftarrow) Sean A, B dos estratos ajenos, entonces existe una sucesión de estratos $A_0 = A, A_1, \dots, A_n = B$ tales que A_i, A_{i+1} son adyacentes para toda $i=0, \dots, n-1$. Además, como la isometría $\text{comp}(A, B)$ es

igual a

$$\text{comp}(A_0, A_1) \circ \text{comp}(A_1, A_2) \circ \dots \circ \text{comp}(A_{n-1}, A_n)$$

entonces probaremos por inducción la afirmación.

1) Se tiene por hipótesis que el eje de $\text{comp}(A_i, A_{i+1})$ por m_i separa A_i de A_{i+1} y traslada a A_{i+1} a la izquierda de visto desde A_i , ésto para $i=0, \dots, n-1$.

2) Supongamos que $\text{comp}(A_0, A_i)$ es tal que su eje m_i separa A_0 de A_i y traslada a A_i a la izquierda visto desde A_0 . Esto para i con $1 \leq i < n$.

3) Sea n_i el eje de $\text{comp}(A_i, A_{i+1})$ entonces se tiene lo siguiente

a) $m_i \cap n_i = \emptyset$ si A_{i+1}, A_{i-1} no son adyacentes.

b) $m_i = n_i$ si A_{i+1}, A_{i-1} son adyacentes.

c) la orientación de m_i, n_i es la misma (ver fig. c).

fig. c

Sean z_i, w_i $i=1, 2$ los puntos fijos repulsor y atractor de $\text{comp}(A_0, A_i)$, $\text{comp}(A_i, A_{i+1})$ respectivamente, sea a el arco de S^1 con extremos z_1, z_2 que no contiene a w_1, w_2 ; sea b el arco en S^1 con extremos w_1, w_2 que no contiene a z_1, z_2 . Entonces la composición $g = \text{comp}(A_0, A_i) \circ \text{comp}(A_i, A_{i+1})$ mapea al intervalo b dentro de si mismo, y g^{-1} aplica al intervalo a en si mismo, por lo tanto g tiene su punto fijo atractor en b y a su punto fijo repulsor en a . Por lo que g es hiperbólico cuyo eje separa

n_i de m_i y está orientado en la misma dirección que estos (ver fig 5.2.8).

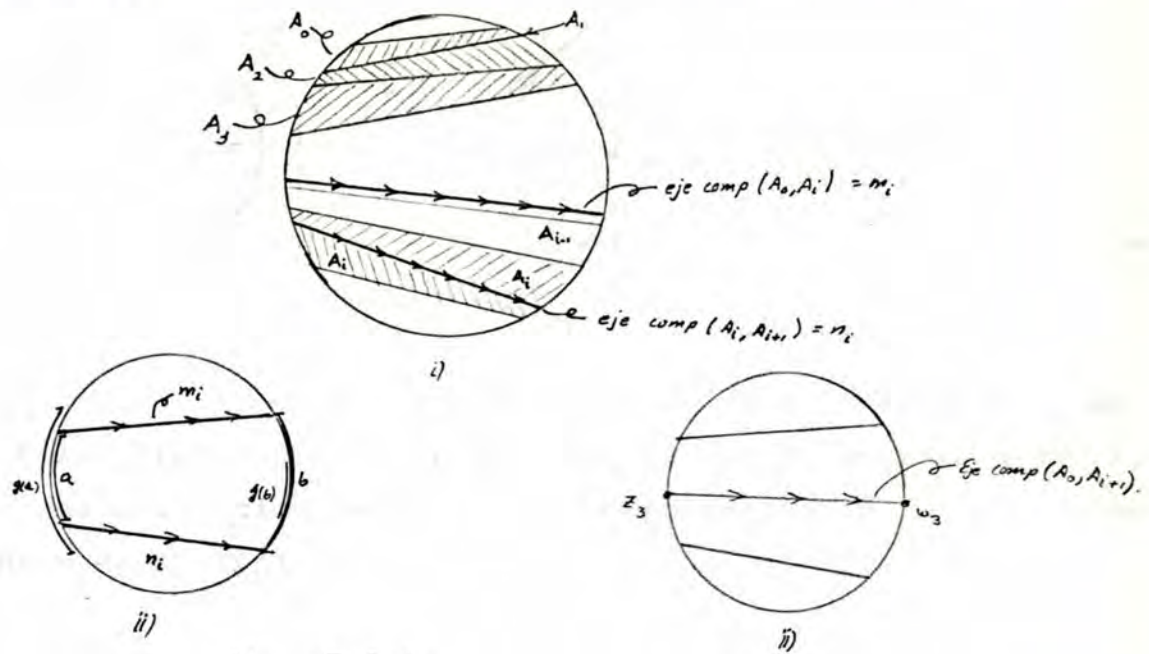


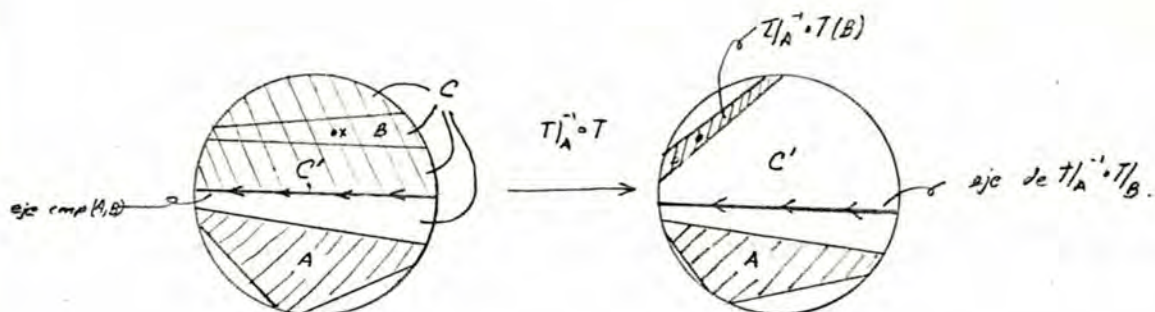
fig. 5.2.8

2.9 Proposición: Sea λ una laminación en \mathbb{H}^2 , sea $T: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ un λ -sismo (izquierdo o derecho). Sea A un estrato arbitrario de λ . Entonces $T|_A^{-1} \circ T$ deja invariante cada componente conexa de $\mathbb{H}^2 - A$.

Demostración: En efecto ya que si $x \in C$, con C una componente de $\mathbb{H}^2 - A$, sea B el estrato de λ que contiene a x , éste se encuentra también en C . Como el eje de $\text{comp}(A, B) = m$ separa A de B , entonces m está en la misma componente de $\mathbb{H}^2 - A$ en que se encuentra B , por lo tanto se tiene

$$T|_A^{-1} \circ T(B) = T|_A^{-1} \circ T|_B(B) \subseteq C$$

por lo que $T|_A^{-1} \circ T(x) \in C$ lo que concluye la demostración.

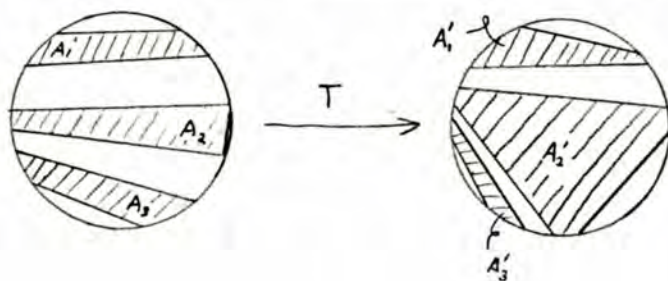


2.10 Corolario: Sea λ una laminación y $T: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ un λ -sismo-(izquierdo o derecho), entonces para todo estrato A de λ , T induce una biyección entre las componentes de $\mathbb{H}^2 - A$ y las componentes de $\mathbb{H}^2 - T(A)$.

Demostración: Esto es consecuencia de que si T es un λ -sismo-izquierdo, entonces T^{-1} es un $T(\lambda)$ -sismo-derecho y por la proposición 5.2.9. La correspondencia es tal que a C le asocia $T(C)$, donde C es una componente de $\mathbb{H}^2 - A$.

2.11 Proposición: Sea λ una laminación en \mathbb{H}^2 y $T: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ un λ -sismo-izquierdo (derecho). Sean A_1, A_2, A_3 estratos ajenos de λ tales que A_1 y A_3 están en componentes ajenas de $\mathbb{H}^2 - A_2$. Entonces $A'_1 = T(A_1), A'_3 = T(A_3)$ están en componentes ajenas de $\mathbb{H}^2 - T(A_2)$.

Demostración: Es consecuencia del corolario 5.2.12.

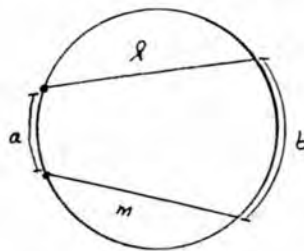


5.2.12 Definición: Sea λ una laminación geodesica en \mathbb{H}^2 , sea ℓ, m dos geodesicas contenidas en λ , sean $a, b \subseteq S_\infty^1$ los subarcs cerrados de S_∞^1 determinados por las siguientes propiedades:

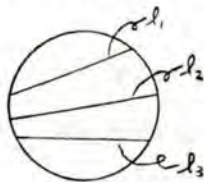
- (i) $a \cap b = \emptyset$.
(ii) las intersecciones $a \cap \ell, a \cap m; b \cap \ell, b \cap m$, constan cada una de un solo punto.

Definimos una distancia σ en el conjunto de hojas de λ , donde

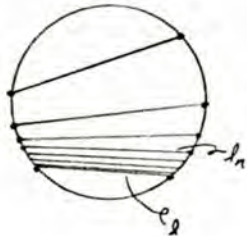
$$\sigma(\ell, m) = \max\{\ell \cap a, \ell \cap b\}$$



5.2.13 Observación: i) σ es una métrica en el conjunto de hojas.



- ii) Si ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 son hojas distintas de λ , entonces ℓ_1, ℓ_3 están en componentes ajenas de $\mathbb{H}^2 - \ell_2$ si y sólo si $\sigma(\ell_1, \ell_2) < \sigma(\ell_3, \ell_2)$.



- iii) Sea $\{\ell_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de hojas de λ , tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\ell, \ell_n) = 0$ donde ℓ puede ser un elemento de λ o un punto en S_∞^1 (ésto se ilustra en la fig 5.2.3). Entonces los extremos de ℓ_n se aproximan a los de ℓ .

fig 5.2.3

5.2.14 Proposición: Sea $(T, \lambda_s, \lambda_t)$ un sismo (izquierdo o derecho). Sea T'

el mapeo inducido de el conjunto de hojas de λ_s en el conjunto de hojas de λ_t , sean σ_s, σ_t las métricas correspondientes definidas en 5.2.13. Entonces T' es homeomorfismo.

Demostración: Basta probar que T' es continua ya que T^{-1} es también un sismo.

Supongamos que no es continua entonces existe una sucesión de hojas $\{\ell_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de λ_s que converge a ℓ , y tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\ell_n) \neq T(\ell) ;$$

extrayendo una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $\sigma(\ell, \ell_n) < \sigma(\ell, \ell_{n+1})$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y tal que $\cup \ell_n$ esta en la misma componente de $\mathbb{H}^2 - \ell$.

Sea $\ell'_n = T'(\ell_n)$ y $\ell' = T'(\ell)$. De las proposiciones 5.2.10 y 5.2.11 y de la observacion 5.2.13 ii) se tiene lo siguiente

- 1) $\{\ell'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ esta en la misma componente de $\mathbb{H}^2 - \ell'$.
- 2) para toda $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_t(\ell', \ell'_n) < \sigma_t(\ell', \ell'_{n+1})$

Por lo tanto si $a, b \in S^1_\infty$ denotan los puntos a los que convergen los extremos de ℓ'_n , estos son extremos de una hoja ℓ'_0 de λ_t a la cual converge $\{\ell'_n\}$, además ℓ'_0 separa a ℓ' de $\{\ell'_n\}$. Sea $\ell_0 = T'^{-1}(\ell'_0)$, si $\ell_0 \neq \ell$ entonces ℓ_0 separa ℓ de $\{\ell_n\}$, esto se sigue de que T^{-1} es un sismo derecho y de 5.2.10. Lo anterior contradice el hecho de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_s(\ell, \ell_n) = 0$. ■

5.2.15 Proposición: Sea λ una laminación de \mathbb{H}^2 y $T: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ un λ -sismo- (izquierdo o derecho). Entonces T aplica a conjuntos acotados de \mathbb{H}^2 en conjuntos acotados de \mathbb{H}^2 .

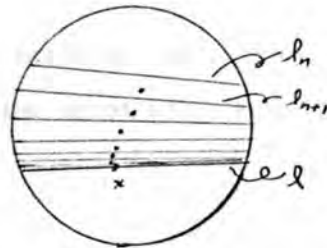
Demostración: Basta probar que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{H}^2$ es una sucesión la cual converge a $x \in \mathbb{H}^2$, entonces $E(\{x_n\})$ es un conjunto acotado

Para probarlo consideraremos los siguientes dos casos (que son todos).

- 1) $\{x_n\}$ esta en un numero finito de estratos.
- 2) $\{x_n\}$ esta en un numero infinito de estratos.

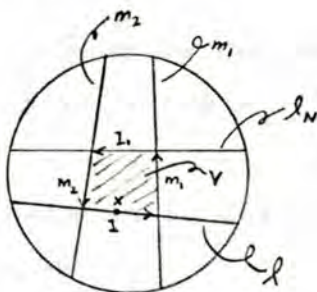
1) En este caso se tiene que la imagen de $\{x_n\}$, está en una unión finita de $T(A_i)$ donde A_i es tal que $A_i \cap \{x_n\} \neq \emptyset$ $i=1, \dots, k$. Por lo que $T(\{x_n\}) \subseteq \bigcup_{i=1}^k T|_A(\{x_n\})$ el cual es compacto. Lo anterior implica que $T(\{x_n\})$ es acotado.

2) Este caso lo probaremos por contradicción. Para esto observe lo siguiente: primero, existe una hoja ℓ de λ , tal que $x \in \ell$. Luego podemos suponer que $\{x_n\}$ esta en una sola componente de $\mathbb{H}^2 - \ell$ (si no pasa ésto, se toma una subsucesión que lo cumpla). Ahora bien existe una sucesión $\{\ell_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = \ell$. Además podemos suponer (tomando una subsucesion si es necesario) que $\{x_i\}_{i > N}$ está en la misma componente conexa de $\mathbb{H}^2 - \ell_n \cap \mathbb{H}^2 - \ell$.



Con esto, considere una vecindad V de $\{x_n\}_{n > N}$ limitada

por segmentos de geodesica orientados m_1, m_2, l, l_N , donde $m_i \subseteq m_i$, $l \subseteq \ell, l_N \subseteq \ell_N$, con m_1, m_2 son rectas hiperbólicas perpendiculares a ℓ , las cuales limitan al segmento l de longitud 2 y con centro en x . Además N es tal que ℓ_N intersecta a m_1, m_2 .



Consideramos la orientacion en cada segmento de tal forma que $\partial V = m_1 \cup l_N \cup m_2 \cup l$ es una curva de Jordan orientada en el sentido contrario de las manecillas del reloj. Se tiene que, si T es izquierdo (el caso en que T es derecho es casi igual), entonces por (5.2.14) el mapeo inducido en las hojas de λ es continuo; así, si la sucesion $T(\{x_n\})$ no es acotada tiene como punto de acumulacion a uno de los extremos de $T(\ell)$. Además,

- $T|_{\ell}^{-1} \circ T(\{x_n\})$ esta a la izquierda de m_1 .
- $T|_{\ell}^{-1} \circ T(\{x_n\})$ esta a la izquierda de m_2 .

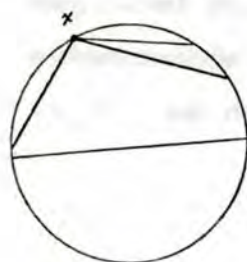
lo cual es imposible si $T(\{x_n\})$ no es acotada. Por lo tanto $T(\{x_n\})$ es acotada, por lo que se sigue el lema. ■

2.16 Teorema: Sea $(T, \lambda_s, \lambda_t)$ un sismo (izquierdo o derecho), entonces existe una transformación $\bar{T}: \bar{H}^2 \longrightarrow \bar{H}^2$, continua en S_{∞}^1 , tal que

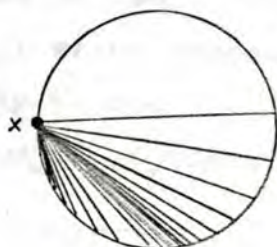
$\bar{T}|_{\partial\bar{T}} = T$. A la extensión de T a S^1_∞ la denotaremos por ∂T .

Demostración: Supondremos que T es sismo izquierdo ya que el otro caso es similar. Para definir \bar{T} distinguimos 3 clases de puntos en S^1_∞ :

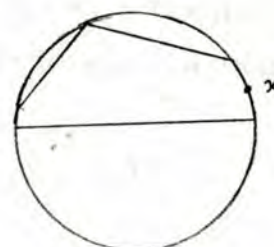
- a) $x \in S^1_\infty$ tal que x está en la cerradura, en \bar{H}^2 , de un número finito no cero, de hojas de λ_s .
- b) $x \in S^1_\infty$ tal que x está en la cerradura, en \bar{H}^2 , de un número infinito de hojas de λ_s .
- c) $x \in S^1_\infty$ tal que x no está en la cerradura, en \bar{H}^2 , de ninguna hoja de λ_s . Distinguimos dos casos
- i) $x \in S^1_\infty$ tal que x está en la cerradura, en \bar{H}^2 , de un estrato abierto de λ_s .
- ii) x no pertenece a la cerradura, en \bar{H}^2 , de A para todo estrato A de λ .



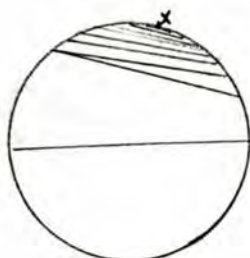
a)



b)



c) i)



c-ii)

Para definir \bar{T} en los puntos de tipo a y b, observese que para todo estrato A de λ , cuya cerradura en \bar{H}^2 contiene a x , el eje de $\text{comp}(A, \ell)$ separa a A de ℓ , donde ℓ es una hoja de λ que contiene a x . Por consiguiente, x está en el eje de $\text{comp}(A, \ell)$ y $(T|_A)^{-1} \circ T|_\ell(x) = x$, de donde $T|_A(x) = T|_\ell(x)$. Con ésto podemos definir $\bar{T}(x)$ como $T|_A(x)$, donde A contiene a x .

Para el caso c-i), $\bar{T}(x)$ se define como $T|_A(x)$ donde A es el único estrato cuya cerradura en \bar{H}^2 contiene a x .

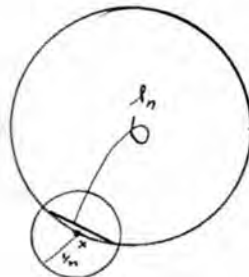
Para el caso c-ii) probaremos lo siguiente:

1) Existe una sucesión $\{\ell_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de hojas de λ tal que $\{\ell_n\}$ es una sucesión de Cauchy con la métrica definida en 5.2.12, y es tal que esta converge a un punto $x \in S_\infty^1$.

2) La sucesión $\{T(\ell_n)\}$ converge también a un punto el cual será $\bar{T}(x)$.

1) Como x no está en la cerradura de ningún estrato, para toda n existe ℓ_n hoja de λ , tal que ℓ_n está en una vecindad euclídeana de radio $1/n$ centrada en x . Tomando una subsucesión de $\{\ell_n\}$ si es necesario, se tiene que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy ya que:

$$\sigma_s(\ell_n, \ell_m) \leq \max\{\sigma_s(x, \ell_n), \sigma_s(x, \ell_m)\}.$$



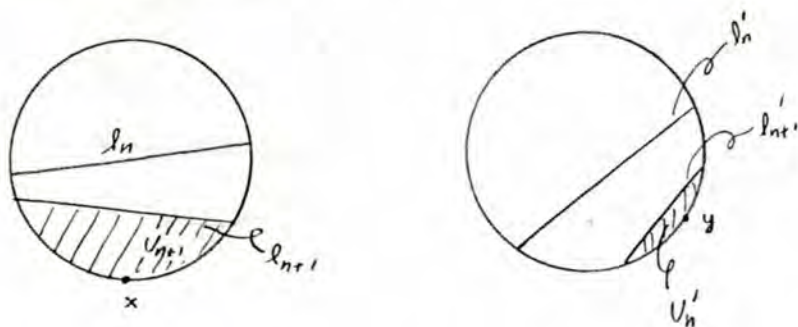
Para demostrar la parte 2 supongamos que $\{\ell'_n = T(\ell_n)\}$ no converge a un punto, por lo tanto existe una hoja ℓ' de λ_t y una subsucesion de $\{\ell'_n\}$ que converge a ℓ' , pero esto implica que $T^{-1}(\ell'_n)$ converge a $T^{-1}(\ell')$. Lo anterior contradice la parte (1). Por lo tanto existe $y \in S^1_\infty$ tal que $\lim \ell'_n = y$.

Con esto podemos entonces definir $\bar{T}(x)$ igual al punto y .

Para ver que \bar{T} es continua en S^1_∞ , consideraremos los siguientes casos:

i) Si x es del tipo (a) o (c-i) ie, si x esta en la cerradura de un numero finito de estratos, entonces la afirmacion es clara.

ii) Si x es del tipo (c-ii), por (1), ℓ_n se puede elegir de tal forma que, para toda n , $\sigma_\theta(x, \ell_n) < \sigma_\theta(x, \ell_{n+1})$ y ℓ_n separa ℓ_j de ℓ_i , con $1 \leq i < n, n < j$. En otras palabras, $\{\ell_n\}$ acota a un sistema de vecindades de x denotado por $\{U_n\}$. Asi, por la proposicion 5.2.11, si $\ell'_n = T(\ell_n)$, ℓ'_n separa ℓ'_i de ℓ'_j para toda $i=1, \dots, n-1, j > n$. Como ℓ'_n converge a $\bar{T}(y)$, se tiene que $\{\ell'_n\}$ acota a un sistema fundamental de vecindades $\{U'_n\}$. De lo que se concluye el caso (c-ii).



Para los puntos de la forma (b), sea $\varepsilon > 0$ y considerese una vecindad de $y = \bar{T}(x)$ de radio ε .

Considerese una hoja ℓ de λ , con extremos en x, z , tal que satisface una de las siguientes condiciones:

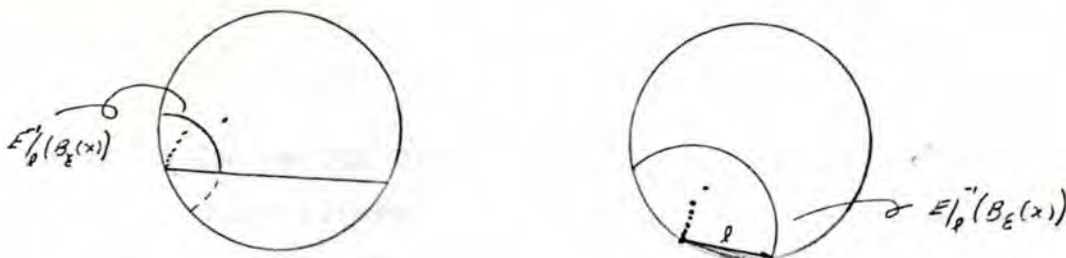
(a) La longitud del arco que une a y con $\bar{T}(z)$, orientado en sentido contrario al de las manecillas del reloj, es menor que ε

(b) La componente de $\mathbb{H}^2 - \ell'$ ($\ell' = T(\ell)$) que contiene al arco que une a x con z (orientado en el sentido contrario al de las manecillas del reloj), contiene solo un numero finito de elementos de la sucesion $\{y_n\}$, donde $y_n = T(x_n)$.

En ambos casos, $(T|_{\ell})^{-1} \circ T$ transforma a la sucesion $\{x_n\}$, (salvo un numero finito de elementos caso (b)), en el interior de la vecindad de x , $(T|_{\ell})^{-1}(B_{\varepsilon}(y))$. Por consiguiente, si N es tal que $(T|_{\ell})^{-1} \circ T(x_n) \in (T|_{\ell})^{-1}(B_{\varepsilon}(y))$, para $n > N$, entonces

$$(T|_{\ell})^{-1} \circ T(\{x_n\}) \subset (T|_{\ell})^{-1}(B_{\varepsilon}(y)).$$

Por lo tanto, $T(\{x_n\}) \subset B_{\varepsilon}(y)$

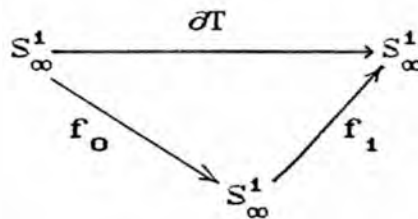


Esto concluye la demostracion de que \bar{T} es continua en S_{∞}^1 .

3 Teorema de los Sismos

Hemos probado (ver sección 5.1) que T_g se puede encajar en el conjunto $H \setminus \text{Hom}(S^1)$ (el conjunto de clases laterales derechas de $H = \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ en el grupo $\text{Hom}(S^1)$). También, en la sección (5.2), definimos lo que es un sismo (izquierdo o derecho) en \mathbb{H}^2 y se probó que cada sismo T determina un único mapeo ∂T de S_∞^1 en S_∞^1 al cual se extiende continuamente. En esta sección nos encargaremos de el siguiente teorema el cual asigna a cada estructura hiperbólica relativa en $(\mathbb{H}^2, S_\infty^1)$ un sismo.

- 3.1 Teorema: Dadas dos estructuras hiperbólicas relativas $H \circ f_0, H \circ f_1$ en $(\mathbb{H}^2, S_\infty^1)$ existe un único sismo izquierdo (derecho) $(T, \lambda_s, \lambda_t)$ (salvo por la elección de T en cada hoja de λ) tal que ∂T hace conmutar el siguiente diagrama



Para la demostración del teorema la haremos en varias etapas. Dado $H \circ f$ una clase lateral derecha donde $f: S^1 \longrightarrow S^1$ es un homeomorfismo. Se le asociará a f un subconjunto de H denominado XL que es tal que el conjunto $XL \circ f$ consta solo de homeomorfismos extremos izquierdos (derechos) (ver 5.2.1), después a cada elemento $g \circ f$ de $XL \circ f$ le asociamos la envoltura convexa en \mathbb{H}^2 del conjunto de puntos fijos de $g \circ f$ (ver 5.3.6). Probaremos que éstas

últimas, tienen interiores ajenos, y que cuando dos de ellas se intersectan, lo hacen en un punto, o en una geodésica (ver 5.3.10). Después se probará que el conjunto de envolturas convexas cubre a todo \mathbb{H}^2 (ver 5.3.18), con ésto las hojas de la laminación serán dadas por los conjuntos frontera de envolturas convexas de $\text{fix}(g \circ f)$ que no son un punto y las isometrías que definen al mismo estarán dadas en cada estrato por los elementos $g \in \text{XL}$ ver 5.3.19.

3.2 Observe que el conjunto H es una 3-variedad, además se tiene que para cada $x \in \mathbb{H}^2$ el conjunto $\mathcal{P}_x = \{g \in H \mid g(0) = x\}$ es una subvariedad homeomorfa a S^1 , ya que si $g_1, g_2 \in \mathcal{P}_x$, entonces $g_2^{-1} \circ g_1$ fija al 0 y por lo tanto $g_2^{-1} \circ g_1 \in \mathcal{R} = \{R_\theta \mid R_\theta(z) = e^{i\theta}z, \theta \in [0, 2\pi)\} \cong S^1$. Por consiguiente $\mathcal{P}_x = g_2 \circ \mathcal{R}$, es isomorfo a S^1 .

3.3 Definición: Denotaremos por XL al conjunto $\{g \in H \mid g \circ f \text{ es extremo izquierdo}\}$.

Probaremos que el conjunto XL es homeomorfo a \mathbb{H}^2 (proposición 5.1.5), para esto necesitaremos el siguiente lema:

3.4 Lema: Para todo $x \in \mathbb{H}^2$ existe un unico $g_x \in \mathcal{P}_x$ tal que $g_x \in \text{XL}$.

Demostración: Si $g \in \mathcal{P}_x$ entonces $\mathcal{P}_x = \mathcal{R} \circ g$. Ahora, si consideramos (\mathbb{R}, \exp) la cubierta universal de S^1 , se tiene lo siguiente:

Cualquier levantamiento de $\gamma = R_\theta \circ g \circ f$ es de la forma

$$\bar{\gamma} = \theta + 2k\pi + \bar{g} \circ \bar{f}$$

donde \bar{g}, \bar{f} son levantamientos de g, f respectivamente. Como $\bar{\gamma} - \text{Id}$ es periódica, existe $\theta_x \in \mathbb{R}$ tal que $(\bar{\gamma} - \text{Id})(t) + \theta_x$ es positiva para

toda $t \in \mathbb{R}$ y existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(\bar{\gamma} - \text{Id})(t_0) + \theta_x = 0$, es decir $\bar{\gamma}(t_0) + \theta_x = t_0$. Por consiguiente, $R_{\theta} \circ g \circ f$ es un homeomorfismo extremo izquierdo que fija a e^{it} . Además, θ_x es el único con esta propiedad, denotaremos por g_x a la función $R_{\theta} \circ g$. Con lo que se prueba el lema. ■

5.3.5 Proposición: La función denotada por $\rho: XL \longrightarrow \mathbb{H}^2$ la cual asocia a $g_x \longmapsto x$, es un homeomorfismo. (la topología en XL es la inducida como subespacio de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ver 2.1.11).

Demostración: Del lema 5.3.4, la función ρ resulta biyección, para ver que es continua, se tiene que: como la función que manda a g en g^{-1} con $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ es continua, y la función evaluación $e: \mathcal{C}(\bar{\mathbb{H}}^2) \times \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ definida por $e(f, x) = f(x)$ es continua. Esto porque $\bar{\mathbb{H}}^2$ es localmente compacto y Hausdorff (ver [Munkres pp 287]), implica que la función $g \longmapsto g^{-1}(0)$ es continua, la cual al restringirla a XL coincide con la función ρ . Para ver que la inversa es continua, resulta de que el valor θ_x (5,3,4) depende continuamente de x . ■

5.3.6 Para toda $g \in XL$, denotamos por $\text{fix}(g \circ f) \subset S_{\infty}^1$ el conjunto de puntos fijos de la función $g \circ f$. Denotaremos por $\mathcal{K}(g \circ f)$ la envoltura convexa en $\bar{\mathbb{H}}^2$ de $\text{fix}(g \circ f)$ (esta coincide con la envoltura convexa euclídeana si consideramos \mathbb{H}^2 como el modelo de Klein).

Observación: Dado $g \in XL$, si $y \in \text{fix}(g \circ f)$, entonces componiendo a $g \circ f$ con una transformación parabólica h que fija y , y que mueve todos los puntos de S_{∞}^1 en sentido contrario al de las manecillas del

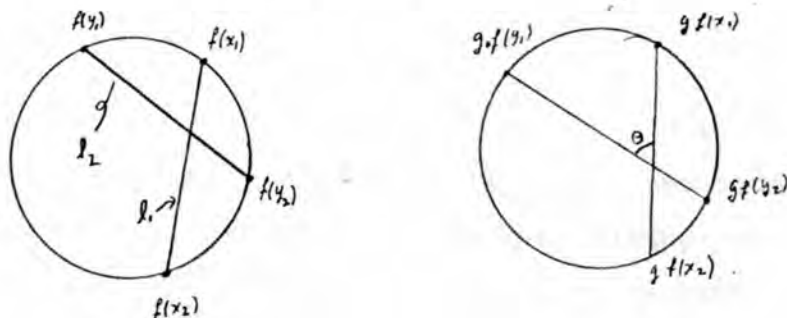
reloj tenemos que $h \circ g \circ f$ es extremo izquierdo y fija sólo al punto y , por lo que $h \circ g \in XL$. Además $\mathcal{K}(h \circ g \circ f)$ es el conjunto $\{y\}$.

Si $\text{fix}(g \circ f)$ consta de dos puntos, $\mathcal{K}(f)$ es una geodésica junto con sus extremos en $\bar{\mathbb{H}}^2$, por último, si $\text{fix}(g \circ f)$ tiene un número infinito de puntos, entonces $\mathcal{K}(g \circ f)$ es un polígono con un número infinito de lados cuyos vértices son $\text{fix}(g \circ f)$.

A continuación probaremos que si g_1, g_2 son distintos, entonces $\mathcal{K}(g_1 \circ f)$ y $\mathcal{K}(g_2 \circ f)$ son distintos y si, $\mathcal{K}(g_1 \circ f) \cap \mathcal{K}(g_2 \circ f) \neq \emptyset$ entonces la intersección es, o un punto, o una geodésica. Para ésto necesitaremos los siguientes lemas.

- 3.7 Lema: Sean $\ell, \ell' \subset \mathbb{H}^2$ dos geodésicas cuyos extremos en S_∞^1 son x, y ; x', y' respectivamente, y tales que $\ell \cap \ell' = \emptyset$. Entonces para toda $g \in XL$, el ángulo hiperbólico que forman las geodesicas ℓ_1, ℓ_2 que unen respectivamente los puntos $g \circ f(x), g \circ f(y)$; $g \circ f(x'), g \circ f(y')$ es independiente de g .

Demostración: En efecto ya que si llamamos ℓ'_1, ℓ'_2 a las geodésicas que unen a los puntos $f(x), f(y)$; $f(x'), f(y')$, respectivamente, entonces $\ell_1 = g(\ell'_1), \ell_2 = g(\ell'_2)$ y por lo tanto el ángulo entre ℓ_1, ℓ_2 es el mismo que el ángulo entre ℓ'_1, ℓ'_2 , éste ultimo es independiente de g .



3.3.8 Lema: Sea $g, g' \in XL$ y $x, y \in \text{fix}(g \circ f)$. Sea ℓ la geodésica en \mathbb{H}^2 que une a los puntos x, y . Si $\ell \cap \mathcal{H}(g' \circ f) \neq \emptyset$, entonces $\ell \subset \mathcal{H}(g' \circ f)$.

Demostración: $\ell \cap \mathcal{H}(g' \circ f) \neq \emptyset$, implica que existen $x', y' \in \text{fix}(g' \circ f)$, tales que la geodésica $\ell' \subset \mathbb{H}^2$ con extremos x', y' intersecta a ℓ . Si $\ell \neq \ell'$, sea θ el ángulo hiperbólico (orientado y medido de ℓ' a ℓ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj). Sea ℓ_1 la geodésica con extremos $g \circ f(x), g \circ f(y)$. Como $g \circ f$ es homeomorfismo extremo, cumple lo siguiente: $g \circ f$ fija a ℓ , y el ángulo de ℓ_1 a ℓ es menor o igual a θ . Análogamente, si ℓ'_1 es la geodésica que une los puntos $g' \circ f(x), g' \circ f(y)$; entonces el ángulo de ℓ' a ℓ'_1 es mayor o igual a θ . Además del lema 5.3.7, se tiene que el ángulo de ℓ_1 a ℓ , es igual al ángulo de ℓ' a ℓ'_1 por lo tanto es igual a θ .

■

3.3.9 Lema: Sean $g, g' \in XL$, si $L = \text{fix}(g \circ f) \cap \text{fix}(g' \circ f)$ tiene 3 o más puntos, entonces $g = g'$.

Demostración: Sean $x, y, z \in L$, son diferentes, implica que la transformación $g' \circ g^{-1}$ fija a x, y, z . Como $g' \circ g^{-1} \in \text{Iso}^+ \mathbb{H}^2$ fija 3 puntos tiene que ser la identidad, por lo que $g' = g$.

■

3.3.10 Proposición: Sean $g, g' \in XL$ tales que $g \neq g'$, entonces $\mathcal{H}(g \circ f)$ está en la cerradura de una y sólo una de las componentes de $\bar{\mathbb{H}}^2 - \mathcal{H}(g' \circ f)$ (\mathbb{H}^2 será alguno de los modelos Δ, Δ_k). Si además $\text{fix}(g \circ f)$ tiene 3 o más puntos, entonces $\mathcal{H}(g \circ f) \cap \mathcal{H}(g' \circ f) = \emptyset$.

Demostración: Basta con probar que $\text{fix}(g \circ f)$ está contenida en la cerradura de una de las componentes de $S_{\infty}^1 - \mathcal{K}(g' \circ f)$. Si $\text{fix}(g \circ f)$ consta de un sólo punto, el resultado es inmediato. Si tiene 2 puntos x, y , y estos están también en $\text{fix}(g' \circ f)$, entonces $\mathcal{K}(g \circ f)$ es un lado de $\mathcal{K}(g' \circ f)$ de lo que se sigue la proposición.

Si $\text{fix}(g \circ f)$ tiene 2 puntos x, y (o más) y supongamos que existe $z \in \text{fix}(g \circ f) - \text{fix}(g' \circ f)$ tal que z no está en la cerradura de la misma componente de $\mathbb{H}^2 - \text{fix}(g \circ f)$ implica que la recta ℓ en \mathbb{H}^2 que une a x, z , interseca a $\mathcal{K}(g' \circ f)$, se sigue del lema 5.3.8 que $\ell \subset \mathcal{K}(g' \circ f)$ lo que contradice que $z \notin \mathcal{K}(g' \circ f)$, por lo tanto $\text{fix}(g \circ f)$ está en la misma componente que x, y . El resto de la proposición es consecuencia de el lema 5.3.9. ■

3.11 Definición: Sea M el conjunto de subconjuntos cerrados de S_{∞}^1 , definimos en M la topología generada por los sistemas fundamentales de vecindades definidos para cada $\delta \in M$ donde una vecindad de radio ε se define como

$$\mathcal{N}(\delta, \varepsilon) = \{ \delta' \in M \mid \sup \{ \inf \{ d(s, s') \mid s \in \delta \} \mid s' \in \delta' \} < \varepsilon \}$$

Esta topología induce una en el conjunto de polígonos convexos (con un número de lados arbitrario) con vértices en S_{∞}^1 , donde dos polígonos son ε -cercanos si sus vértices distan menos que ε .

Con esto tenemos que el mapeo $\mathcal{K}: XL \longrightarrow M$ que asocia a cada $g \in XL$ el conjunto $\mathcal{K}(g \circ f)$ es semicontinuo, esto se precisa en la siguiente proposición.

5.3.12 Proposición: Sea $x \in \mathbb{H}^2$ y sea $g_x = \rho(x) \in XL$, entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda $y \in \mathbb{H}^2$ con $d(x, y) < \delta$, se tiene que

$$\text{fix}(\rho(y) \circ f) \in \mathcal{N}(\text{fix}(g_x \circ f), \varepsilon).$$

Demostración: Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ definido por $\mathcal{A} = \{z \in S_\infty^1 \mid d(z, \text{fix}(g_x \circ f)) \geq \varepsilon\}$ entonces $\mathcal{A} \cap \text{fix}(g_x \circ f) = \emptyset$. Por lo que el número

$$\delta = \inf\{d(g_x \circ f(s), s) \mid s \in \mathcal{A}\}$$

es mayor que cero. Si consideramos la siguiente vecindad de g_x

$$\mathcal{V}(g_x, \delta) = \{g \in XL \mid \sup\{d(g_x \circ f(z), g \circ f(z)) \mid z \in \bar{\mathbb{H}}^2\} < \delta\},$$

se tiene entonces que para toda $g \in \mathcal{V}(g_x, \delta)$, si $y \in \text{fix}(g \circ f)$ se cumple que

$$d(g \circ f(y), g_x \circ f(y)) = d(y, g_x \circ f(y)) < \delta$$

por lo tanto $y \in \mathcal{A}$ y $\text{fix}(g \circ f) \subset \mathcal{N}(\text{fix}(g_x \circ f), \varepsilon)$. lo que completa la demostración. ■

Con la identificación de XL con \mathbb{H}^2 dada por 5.3.5, podemos pensar a \mathbb{H}^2 como el dominio de la función \mathcal{K} , en la siguiente proposición probaremos que la función \mathcal{K} tiene una extensión a todo $\bar{\mathbb{H}}^2$ denotada por $\bar{\mathcal{K}}$, la cual es además continua.

5.3.13 Proposición: Sea $\bar{\mathcal{K}}: \mathbb{H}^2 \longrightarrow M$ definida como sigue

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in S_{\infty}^1 \\ h(x) & \text{si } x \in \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Entonces \bar{h} es continua en los puntos de S_{∞}^1 .

Demostración: Lo probaremos por contradicción. Supongase que existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$, con $0 < \varepsilon < 1$, y una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($\{g_n = \rho(x_n)\}$) tal que $\lim x_n = x$ con $x \in S_{\infty}^1$, y tal que para toda $m \in \mathbb{N}$ existe $y_m \in \text{fix}(g_n \circ f)$ con la propiedad de que $d(y_m, x) \geq \varepsilon$. Sea τ_n la transformación hiperbólica cuyo eje es la recta hiperbólica que une al 0 con x_n , y tal que $\tau_n(0) = x_n$. Sea T_n la distancia de traslación. Existe $\rho_n \in \mathbb{R}$ (ver 5.3.2) tal que $g_n = \tau_n \circ \rho_n$. Sean a_n, r_n los puntos fijos atractor y repulsor de τ_n . Como $x_n \rightarrow x$, implica que $T_n \rightarrow \infty$, $a_n \rightarrow x$, $r_n \rightarrow -x$. Además se tiene lo siguiente:

- (a) Existe N_1 tal que si $n \geq N_1$, implica que $d(r_n, -x) < \varepsilon/4$ y $d(a_n, x) < \varepsilon/4$.
- (b) Como f^{-1} es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $d(z, w) < \delta$, implica que $d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) < \varepsilon/4$.
- (c) Existe $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que si $n > N_2$ y K es un compacto en el complemento de la vecindad

$$V = \{z \in S^1 \mid d(z, x) < \varepsilon/2\}$$

Entonces la distancia de $\tau^{-1}(K)$ al punto x igual $\inf\{d(x, k) \mid k \in K\}$, es menor que $\delta/2$. Con esto el diámetro de $\tau^{-1}(K)$ es menor que δ .

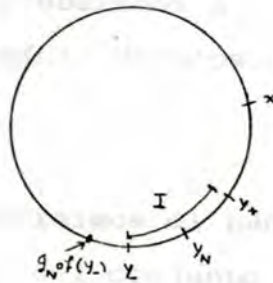
- (d) Con lo anterior, el diámetro de $\rho_n^{-1} \circ \tau_n^{-1}(K)$ es igual al diámetro de $\tau_n^{-1}(K)$.

(e) Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, y sea $y_N \in \text{fix}(g_N \circ f)$ tal que $d(y_N, x) \geq \varepsilon$.

Sea I el intervalo en S^1_∞ definido por:

$$I = \{z \in S^1 \mid d(z, y) \leq \varepsilon/2\}$$

sean $y_-, y_+ \in S^1$ los extremos de I en el sentido de las manecillas del reloj y en el sentido contrario respectivamente.



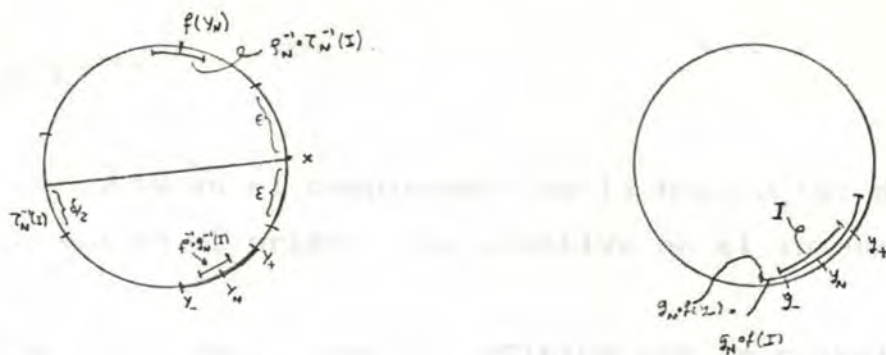
De (c) y (d) se sigue que el diámetro de $\rho_N^{-1} \circ \tau_N^{-1}(I)$ es menor que δ . Como $y_N \in I$, implica que $f(y_N) = \rho_N^{-1} \circ \tau_N^{-1}(y_N) \in \rho_N^{-1} \circ \tau_N^{-1}(I)$, por lo tanto $y_N \in f^{-1} \circ \rho_N^{-1} \circ \tau_N^{-1}(I)$.

De (b) se tiene que el diámetro de $f^{-1} \circ \rho_N^{-1} \circ \tau_N^{-1}(I)$ es menor que $\varepsilon/4$. Como $f^{-1} \circ g_N^{-1} = f^{-1} \circ \rho_N^{-1} \circ \tau_N^{-1}$, se tiene que

$$f^{-1} \circ g_N^{-1}(I) \subset I - \{y_-, y_+\}$$

por lo que..... $I \subset g_N \circ f(I - \{y_-, y_+\})$.

Por lo tanto, $g_N \circ f$ aplica a y_- en un punto localizado en sentido de las manecillas del reloj con respecto al punto fijo y_N . Esto contradice el hecho de que $g_N \circ f$ es un homeomorfismo extremo izquierdo. Por lo que no existe la sucesión $\{x_n\}$ con las propiedades dadas, entonces $\bar{\mathcal{K}}$ es continua en x .



A continuación probaremos que \mathbb{H}^2 es cubierto por la familia de conjuntos $\{\mathcal{K}(g \circ f) \mid g \in XL\}$. Para esto necesitaremos los siguientes conceptos.

3.14 Para cada $x \in \mathbb{H}^2$ definimos el punto $h(g_x \circ f) \in \mathbb{H}^2$ como el "centro de masa" o el centroide del conjunto $\mathcal{K}(g_x \circ f)$. Aquí \mathbb{H}^2 se piensa como Δ_k .

Para cada $\varepsilon > 0$ y $r \in (0, 1)$ definase la función chipote como sigue

$$\beta_\varepsilon: \bar{\Delta} \longrightarrow [0, 1]$$

es dada por el siguiente proceso:

$$i) \text{ Sea } h_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > r \\ e^{-1/(r^2 - |x|^2)} & \text{si } |x| < r \end{cases}$$

$$ii) \text{ Sea } K = \iint_{\Delta} h_1 dA.$$

$$iii) \beta_\varepsilon = \frac{1}{K} h_1.$$

Entonces β_ε tiene las siguiente propiedades:

$$(a) \iint_{\mathbb{R}^2} \beta_\varepsilon dA = 1.$$

(b) β_ε se anula en el complemento de la bola $B_\varepsilon(0)$ de radio ε y centrada en el origen y es positiva en el interior.

Si consideramos la función definida por la convolución de β_ε y h , dada por la siguiente fórmula:

$$3.15. \dots \beta_\varepsilon * h(z) = \iint_{\Delta} \beta_\varepsilon(z-w) \cdot h(w) dw$$

Esta función resulta continua ya que h es acotada y β_ε es continua. Además, $\beta_\varepsilon * h(z)$ da el promedio de los valores que toma h en la vecindad de z , $B_\varepsilon(z)$, pesados por la función β_ε . También tiene las siguientes propiedades:

3.16 i) Como h es la identidad en S^1 , implica que $\beta_\varepsilon * h$ es cercano a la identidad en puntos de S^1 , es decir, para toda δ con $0 < \delta < \frac{1}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ y $z \in S^1$, entonces $d(\beta_{1/n} * h(z), z) < \delta$ ($< 1/2$)

ii) Si $n > N$ entonces $\beta_{1/n} * h(z) \neq 0$ para toda $z \in S^1$.

iii) Se tiene la siguiente homotopía:

$$G^n: [0, 1] \times \Delta \longrightarrow \Delta$$

$$G_t^n(z) = G^n(t, z) = tz + (1-t)\beta_{1/n} * h(z),$$

esta cumple con (a) $G_0^n = \beta_{1/n} * h$

(b) $G_1^n = \text{Id}$

(c) para toda $t \in [0, 1]$ y $w \in B_{1-\delta}(0)$, $d(G_t^n(z), w) > 1 - 2\delta$

Por lo tanto el grado de la función $\beta_{1/n} * h$ es igual al grado de la Id el cual es 1. Esto es para toda $w \in B_{1-\delta}(0)$ (ver [Dold Vol III pp 371].

De lo anterior, se sigue que $B_{1-\delta}(0)$ esta contenida en la imagen de $\beta_{1/n} * h$ para toda $n > N$. Además se tiene el siguiente lema.

3.17 Lema: Sea \bar{h} la función dada en 5.3.13. Sea $g_x \in \overline{XL} (= \overline{H^2})$. Sea $\delta > 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que la vecindad $B_\varepsilon(x)$, de x , es aplicada por $\beta_{\varepsilon/2} * h(z)$, en la vecindad $N(\bar{h}(x), \delta)$.

Demostración: Como \bar{h} es semicontinua, implica que existe una vecindad de x de radio ε $N(g_x \circ f, \varepsilon)$, tal que $\bar{h}(N(g_x \circ f, \varepsilon)) \subset N(\bar{h}(g_x \circ f), \delta)$. Por lo tanto el centro de masa de $N(g_y \circ f)$ esta en $N(\bar{h}(g_x \circ f), \delta)$ para toda $g_y \in N(g_x \circ f, \varepsilon)$.

Por lo tanto $\beta_{\varepsilon/2} * h(y)$ esta contenida en $N(\bar{h}(g_x \circ f), \delta)$ para toda $y \in B_{\varepsilon/2}(x)$. ■

Con esto estamos en condiciones de probar la siguiente proposición:

3.18 Proposición: Sea \bar{h} como en 5.3.13, entonces $H^2 \subset \bigcup_{g \in XL} \bar{h}(g \circ f)$.

Demostración: Sea $x \in H^2$, de 5.3.16 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ la imagen de $\beta_{1/n} * h$ cubre al disco centrado en 0 y de radio $\delta = \frac{1+|x|}{2}$. El valor de N se puede elegir de tal forma que para toda $z \in S^1$, $d(\beta_{1/n} * h(z), z) < \frac{1-|x|}{2}$ (ver 5.3.16..i). Por lo tanto

existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\beta_{1/n} * h(x_n) = x$. Sea y un punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$ y considerese una subsucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a y . Sea $\{\beta_{\varepsilon_n} * h\}_{\varepsilon_n}$ las funciones correspondientes a la subsucesión, entonces del lema 5.3.7. existe N' tal que si $n > N'$, implica que $\beta_{\varepsilon_n} * h(y_n) = x$ esta en una $1/k$ vecindad de $\bar{K}(y)$, el cual es cerrado. Por lo que x tiene que estar en $K(y)$. Con lo que se concluye la demostración. ■

3.19 Demostración de 5.3.1

Definase λ como la unión de las geodésicas que son frontera de $K(g \circ f)$ con $g \in XL$ tales que $\text{fix}(g \circ f)$ tiene por lo menos 2 puntos.

Los estratos de λ son los interiores de $K(g \circ f)$ tales que $g \in XL$, junto con las hojas de λ .

Para cada estrato A , sea $g_A \in XL$ tal que $A \subset K(g_A \circ f)$ y definase el sismo $T|_A = g_A^{-1}|_A$.

Si A es un estrato con interior no vacío, implica que g_A está únicamente determinado ya que ∂A tiene mas de dos puntos.

Si A es uno-dimensional, $A \subset K(g \circ f)$ implica que $g^{-1} \circ g_A$ fija los extremos de A y $g(A) = g_A(A)$.

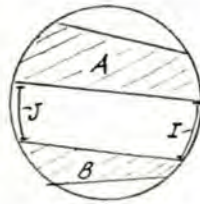
Por lo anterior, $T: \mathbb{H}^2 \longrightarrow \mathbb{H}^2$ es una correspondencia biyectiva.

Para ver que T coincide en S^1 , ^{con f} considerese $x \in \bar{A} \cap S^1$, entonces $f^{-1} \circ T|_A(x) = f^{-1} \circ g_A^{-1}(x) = (g_A \circ f)^{-1}(x) = x$ (ya que x es un vértice de

$\mathcal{H}(g_A \circ f)$ y por lo tanto x es un punto fijo de $g_A \circ f$). Así, $T|_A(x) = f(x)$.

Considerense ahora, A, B dos estratos distintos de λ , Entonces la isometría $\text{comp}(A, B) = g_A \circ g_B^{-1}$ es hiperbólica y traslada a B a la izquierda visto desde A ; lo anterior se sigue de lo siguiente:

Como $A \neq B$, existen dos intervalos I, J de longitud mayor o igual a cero, que separan A de B (ver fig m)



Sean a, b los extremos de I , con $a \in A, b \in B$ y tal que el arco I recorrido en sentido contrario al de las manecillas del reloj empieza en b y termina en a . Entonces,

i) $g_A \circ f \circ (g_B \circ f)^{-1}(I) \subseteq I$. Esto por ser $g_A \circ f, g_B \circ f$ extremos izquierdos que fijan un extremo de I .

ii) $g_B \circ f \circ (g_A \circ f)^{-1}(J) \subseteq J$. Esto por un razonamiento análogo al caso anterior.

De i, ii , se sigue que la isometría $\text{comp}(A, B) = g_A \circ f \circ (g_B \circ f)^{-1} = g_A \circ g_B^{-1}$ tiene un punto fijo en I y otro en J ; además, como contrae el intervalo I , se tiene que en este intervalo se encuentra el punto fijo atractor. Por consiguiente, $\text{comp}(A, B)$ mueve a B a la izquierda visto desde A .

Para la unicidad, sea T' un sismo izquierdo que coincide en S^1 con f . Sea $g_{A'} = T'|_A$, entonces $g_{A'}^{-1} \circ f$ es extremo izquierdo ya que $e = g_{A'}^{-1} \circ f = g_{A'} \circ T'|_{A'}$. Como T' es izquierdo se sigue que e

mueve todos los puntos en el complemento de A' a la izquierda visto desde A' . Por lo tanto $g_{A'} \in XL$ de donde A' es un estrato de T con lo que se concluye la demostración de 5.3.1. ■

Fin .

BIBLIOGRAFIA

Ahlfors L. V.

- 1....Complex Analysis, 1979, McGraw-Hill.
- 2....Riemann Surfaces, 1974, Princeton University Press.
- 3....Lectures on Quasiconformal Mappings,

Abikoff W.

- 1....The Real Analytic theory of Teichmüller Space, 1980, Lecture Notes in Mathematics 820, Springer Verlag.

Beardon A. F.

- 1....The Geometry of Discrete Groups, 1983, Springer Verlag.

Casson

- 1....Automorphisms of surfaces, Notas.

Dold A.

- 1....Teoría de punto Fijo, 1984, Monografías del Instituto de Matemáticas de la U.N.A.M. 18 vol. III. Trad. C. Prieto.

Harvey W. J.

- 1....Discrete Groups and Automorphic functions, 1977, Academic Press.

Kelly P.

- 1....The non-Euclidean, Hiperbolic Plane, 1981, Springer Verlag.

Keen L.

- 1....Canonical Polygons for finitely generated Fuchsian groups, 1966, Acta Math (115).
- 2....Intrinsic moduli on Riemann surfaces, 1966, Ann. Math. (84).

- 3....On Fricke Moduli, Advances theory of Riemann surfaces, 1971, Annals of Mathematics Studies 66 pp 205-224, Princeton University Press.

Lehner J.

- 1....Discontinuous groups and Automorphics functions, 1964, Am. Math. Society.

Magnus W.

- 1....Noneuclidean tessalations and their groups, 1974, Academic Press.

Maskit B.

- 1....On Klein's combination theorem, 1965, Trans. Am. Math. Soc. 120 PP 499-509.
- 2....On Klein's combination theorem II, 1968, Trans. Am. Math. Soc. 131 pp 32-39.
- 3....On Poincare's Theorem for fundamental polygons, 1971, Advances in Mathematics 7 pp 219-230.

Massey W. S.

- 1....Introduccion a la topologia Algebraica, 1967, Reverte.

Munkres J. R.

- 1....Topology a first course, 1975,

Rudin W.

- 1....Analysis Real y Complejo, 1979, Alhambra.

Schwerdtleger H.

- 1....Geometry of complex numbers, 1979, Dover.

Singer

- 1....Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, 1967,

Scott, Foresman and Company.

Thurston W.

- 1....Earthquakes in two-dimensional hiperbolic geometry, 1984, version distribuida por la universidad de Warwick.
- 2....On the geometry and dynamic of diffeomorphisms of surfaces. Notas,

Verjovsky A.

- 1....Introduccion a la geometria y variedades hiperbolicas, 1982, sexta E.L.A.M., Centro de Estudios Avanzados del I.P.N.

Wolfe H. E.

- 1....Introduction to non-Euclidean Geometry, 1945, Holt. Reinehart and Winston.

Wolpert S.

- 1....The length spectra as moduli for compact Riemann surfaces. Annals of Mathematics 109 pp 323-351.

Zieschang H.

- 1....Surfaces and Planar Discontinuous Groups, 1980, Lecture Notes in Mathematics 835, Springer Verlag.

INDICE ALFABETICO

- ccion discontinua.....1.5.15
 libre1.5.15
 propiamente discon-
 tinua.....1.5.15
 transitiva.....1.5.15
- se canonica de $\Pi_1(X, x_0)$...1.4.8
 de un grupo fuchsiano de tipo (g, m)3.1.15
- rta coordenada.....1.1.5
 clo de vertices.....2.3.24
 rculo isometrico.....2.2.6
 ndicion de ciclo.....2.3.25
njunto completo de rela-
 ciones.....1.3.14
 fundamental.....2.3.8
 fundamental parcial...2.3.8
 bierta universal.....1.5.10
 rva cerrada positivamente
 orientada.....1.1.4
- minio fundamental.....2.3.8
- e de una transformacion
 hiperbolica.....2.2.6
uivalencia de bases cano-
 nicas.....3.1.14
 de estructuras hiperbo-
 licas completas en Δ ...5.1.1
 de grupos fuchsianos
 marcados.....3.1.16
 homotopica.....1.2.14
 de superficies de Riemann
 marcadas.....3.1.7
- espacio cubriente.....1.5.1
estratos de una laminacion.5.2.2
 adyacentes.....5.2.7
estructura hiperbolica....2.4.1
 relativa.....5.1.2
- funciones de transicion...1.1.6
 homotopicas relativas
 a un conjunto A.....1.2.1
fundamental dominio.....2.3.8
 poligono.....2.3.10
 region.....2.3.9
- geodesica2.1.36
 completa.....2.4.16
 simple.....2.4.16
 periodica.....2.4.16
grupo abeliano libre.....1.3.8
 discreto.....1.5.15
grupo fuchsiano.....2.3.4
 elemental.....2.3.4
 marca de un.....3.1.15
 marcado.....3.1.15
 marcado normalizado...4.2.0
 que representa a una
 superficie.....2.4.13
 signatura de un.....3.1.15
 grupo fundamental.....1.2.5
 grupo kleiniano.....2.3.3
 conjunto limite de....2.3.2
- homeomorfismo extremo
 izquierdo.....5.2.1
 homotopia relativa.....1.2.1

- identificación en un polígono.....2.3.10
- completa.....2.3.22
- isomorfismo de espacios cubrientes.....1.5.13
- isometrias de H^22.2
- parabólicas.....2.2.5
- hiperbólicas.....2.2.6
- elípticas.....2.2.7
- isometrias de superficies
- hiperbólicas.....2.4.4
- local.....2.4.4
- isometría de comparación.....5.2.2
- laminación geodésica.....2.4.16
- hojas de.....2.4.16
- levantamiento de una curva.1.5.3
- línea o recta hiperbólica..2.1.22
2.1.36
- longitud hiperbólica de curva.....2.1.33
- marca de un grupo.....3.1.5
- de una superficie....3.1.15
- modelo del plano hiperbólico
- conforme.....2.1.44
- de Klein.....2.1.45
- del disco de Poincaré..2.1.21
- del semiplano.....2.1.37
- número de intersección geométrica.....3.1.2
- orientación del plano.....1.1.2
- de una superficie.....1.1.8
- palabra vacía.....1.3.12
- plano complejo extendido....2.1.2
- plano hiperbólico.....2.1.49
- isometrias del.....2.1.49
- frontera del.....2.1.49
- polígono de Dirichlet.....2.3.12
- polígono de Poincaré.....2.3.36
- de Fricke.....4.1.1
- canónico de Fricke.4.1.13
- presentación de un grupo...1.3.15
- finita.....1.3.15
- producto débil.....1.3.3
- de una fam. de grupos...1.3.2
- directo.....1.3.2
- libre.....1.3.5
- proyección estereográfica...2.1.3
- pseudoisometría.....2.4.23
- punto interior de una superficie con borde.....1.1.11
- frontera.....1.1.11
- regular.....1.5.15
- recta hiperbólica.....2.1.22
2.1.36
- región fundamental estándar.4.1.2
- relación dependiente.....1.3.14
- de reflexión.....2.3.18
- retracto.....1.2.16
- retracción.....1.2.16
- retracto por deformación...1.2.17
- signatura de una superficie.1.1.16
- de un grupo fuchsiano...3.1.15
- sismo izquierdo.....5.0
5.2.4
- derecho.....5.2.4
- simple.....5.2.7
- suma conexa.....1.1.10
- superficie1.1.5
- con frontera.....1.1.11
- de Riemann.....1.1.7

diferenciable.....	1.1.7
marcada.....	3.1.5
orientable.....	1.1.8
<u>superficie</u>	
característica de Euler.....	1.1.17
genero de.....	1.1.16
superficie, signatura de....	1.1.16
Reichmuller, espacio de....	3.1.8
<u>Teorema de clasificación de</u>	
una superficie compacta.....	1.1.13
del círculo límite de	
Poincaré.....	2.4.6
uniformización.....	2.4.19
de Seifert-Van Kampen.....	1.4.1
de los Sismos.....	5.3.1
tipo de homotopía.....	1.2.14
<u>transformación ciclo.....</u>	2.3.24
de cubierta.....	1.5.14
de Moebius.....	2.1.6
elíptica.....	2.2.7
hiperbólica.....	2.2.6
parabólica.....	2.2.5
traza de una transformación	
de Moebius.....	2.2.2
vecindad regular.....	1.5.1