

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

CATEGORIAS ULTRADIOFANTICAS

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias
(Matemáticas)
presenta:

Leopoldo Román Cuevas



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Fuiste en mi vida el vuelo de más largo horizonte.
Se quedan en mi vida tus ojos solitarios.
Nuestras dos soledades -música en la noche- ligan
a las estrellas los inegables actos.

- C. Pellicer -

A Laura Elisa

INTRODUCCION	<i>i</i>
NOTACION	<i>v</i>
CAPITULO 1: PRELIMINARES	1
1.1 La Definición de la Clase R'	1
1.2 Predicados Ultradifánticos y la Definición de U. D.	3
1.3 Propiedades de U. D.	12
1.4 U. D. no es cartesianamente cerrada	28
1.5 Teorema (U. D.)	30
CAPITULO 2: LA CATEGORIA $\underline{C}_{U.D.}$ Asociada a \underline{C}	32
2.1 Introducción	32
2.2 Lógica de \underline{C}	34
2.3 Aritmética en \underline{C}	47
2.4 Interpretación de los Predicados Ultradifánticos	74
2.5 La Categoría $\underline{C}_{U.D.}$	84
2.6 Propiedades de $\underline{C}_{U.D.}$	101
2.7 La Imagen de un $\underline{C}_{U.D.}$ -morfismo	117
2.8 Teorema $\underline{C}_{U.D.}$	128
CAPITULO 3: EL CASO DE LAS CATEGORIAS CONN "TIPICO"	129
3.1 Definición	129
3.2 $\underline{C}_{U.D.}$ es una Categoría bien Punteada	136
3.3 Teorema (U.D. VS. $\underline{C}_{U.D.}$)	151

INTRODUCCION

Sea \underline{C} una categoría que cumple las siguientes condiciones:

C.1)- \underline{C} tiene límites finitos

C.2)- \underline{C} tiene clasificador de subobjetos, Ω

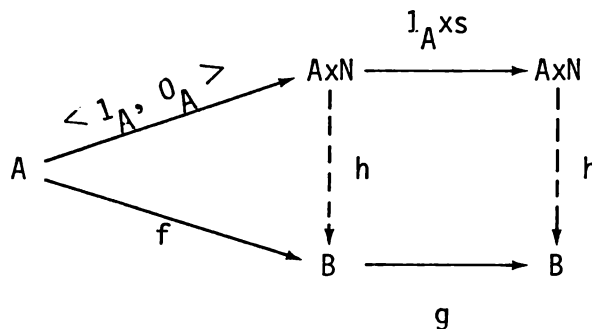
C.3)- \underline{C} tiene un objeto de números naturales

C.4)- \underline{C} tiene un objeto inicial estricto

C.5)- \underline{C} es una (epimorfismos, monomorfismos) -categoría

C.6)- Ω es el coproducto de $1 \xrightarrow{v} \Omega$ y $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$

C.7)- \underline{C} satisface el principio de recursión primitiva; es decir, si $f: A \longrightarrow B$ $g: B \longrightarrow B$ son dos \underline{C} -morfismos arbitrarios, entonces existe un único \underline{C} -morfismo $h: A \times \mathbb{N} \longrightarrow B$ tal que hace conmutativo el diagrama



donde $0_A = A \xrightarrow{\quad} 1 \xrightarrow{\quad} \mathbb{N}$.

Así, como los topoi bien puntuados corresponden a modelos de la teoría de conjuntos¹, uno de los propósitos de este trabajo es asociarle a una categoría \underline{C} , que satisface las condiciones del párrafo anterior, una subcategoría $\underline{C}_{U.D.}$, generada por los "predicados aritméticos" (los predicados "aritméticos" se obtienen a partir del cálculo de predicados y predicados del tipo $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, donde f es un polinomio con coeficientes enteros), cuyos objetos se pueden pensar como los objetos aritméticos de \underline{C} .

El interés de esto último puede justificarse, al hacer notar que con los predicados aritméticos, se puede desarrollar la aritmética usual. La subcategoría $\underline{C}_{U.D.}$ se obtiene al dar una interpretación en \underline{C} de los predicados aritméticos; dicha interpretación está inspirada en el lenguaje que le asocia Mitchell en $[M_1]$, a un topos \underline{E} . En el segundo capítulo se expondrá con detalle dicha interpretación.

Durante el desarrollo del trabajo se nombrarán a los predicados aritméticos, "predicados ultradiofánticos"; este último nombre apareció en un artículo de F. Tomás, $[T_0]$, en donde se usaban tales predicados para dar una caracterización de cierta clase R' , de funciones $f: \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, que contiene a las funciones recursivas. Cabe mencionar que con la clase R' se puede desarrollar también la aritmética usual.

La exposición del trabajo está dividida en tres capítulos. En el capítulo uno, se introducen la clase R' , los predicados ultradiofánticos, se construye la categoría $\text{Set}_{U.D.}$ que en este caso se denotará por $U.D.$, y se da una lista de las propiedades categorías que cumple $U.D.$ En el capítulo dos, se toma una categoría \underline{C} que satisface las condiciones mencionadas al principio de la introducción, se construye la subcategoría $\underline{C}_{U.D.}$ y se da una lista de las

¹ Véase por ejemplo, $[J_0]$, capítulo 9.

propiedades categóricas que tiene; desde luego, esta lista es semejante a la que se dió para U.D. En el capítulo tres, se comparan las categorías $\underline{C}_{U.D.}$ y U.D.; se demuestra que si el objeto de números naturales de \underline{C} es típico y $|\text{hom}_{\underline{C}}(1, \Omega)| = 2$ entonces $\underline{C}_{U.D.}$ y U.D son isomorfas.

Agradecimientos

*Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß
man schweigen.*

- L. Wittgenstein -

Deseo agradecer al M. en C. Alejandro Odgers, director de esta tesis, la amistad y ayuda que me ofreció durante estos años.

También, al Dr. Francisco Tomás, codirector de esta tesis, los consejos y ayuda que me brindó durante el desarrollo de este trabajo.

Por último, a la Srita. Lourdes Araiza por su excelente trabajo mecanográfico y al Sr. Jesús Espinoza por su trabajo gráfico, mi más sincero agradecimiento.

NOTACION

Los símbolos \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} , \underline{D} , etc. denotarán siempre a una categoría

Set denota a la categoría de los conjuntos.

\mathbb{N} es el objeto de números naturales de Set

$A \times B$ denota el producto de dos objetos

$p_i^n: A^n \rightarrow A$ denota a la i -ésima proyección del producto A^n

Si $f: A \rightarrow B$ es un morfismo de una categoría \underline{C} , entonces $f: A \rightarrow B$
(resp. $f: A \rightarrow B$) denota a un monomorfismo (resp. epimorfismo) de \underline{C} .

Si el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ D & \longrightarrow & C \end{array}$$

es un producto fibrado en una categoría \underline{C} entonces se denotará por:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \text{P.F.} & \downarrow \\ D & \longrightarrow & B \end{array}$$

1. PRELIMINARES

En esta sección no se intentará dar un desarrollo extenso de la clase de las funciones y los predicados ultradiofánticos. Sólo se mencionará lo estrictamente necesario, para desarrollar el trabajo.

1.1 La Definición de la Clase R'

Para definir la clase R' se procederá como en $[T_0]$.

1.1.1 Definición

R' es la mínima clase de funciones de N^n en N , con n no fijo, que satisface:

R'1).- Las funciones constantes, las proyecciones, la función identidad de N y la función sucesor pertenecen a R' .

R'2).- Si $f: N^n \rightarrow N$ y $g: N^{n+2} \rightarrow N$ pertenecen a R' y la función $h: N^{n+1} \rightarrow N$ se obtiene por *recursión primitiva* de f y g ; i.e.; h satisface

$$h(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$h(x_1, \dots, x_n, s(y)) = g(x_1, \dots, x_n, y, h(x_1, \dots, x_n, y))$$

entonces h pertenece a R'

R'3).- Si $f: N^n \rightarrow N$ pertenece a R' y $g_1, \dots, g_n: N^m \rightarrow N$ es una sucesión de funciones que pertenece a R' entonces la función composición $f \langle g_1, \dots, g_n \rangle: N^m \rightarrow N$ pertenece a R' .

R'4).- Si $f: \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ pertenece a R' , $f_E: \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ es la función definida por

$$f_E(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists y) (f(x_1, \dots, x_n, y) = 0) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y $f_E(x_1, \dots, x_n) = 1$ para toda n -ada (x_1, \dots, x_n) entonces la función

$$f_M(x_1, \dots, x_n) = \text{mín } \{y \mid f(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$$

pertenece a R'

R'5).- Si $f: \mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ pertenece a R' entonces f_E también pertenece a R' .

La mínima clase de funciones que satisface las tres primeras condiciones es llamada la clase de las funciones recursivas primitivas. La mínima clase que satisface las cuatro primeras condiciones es la clase de funciones recursivas o diofánticas. La mínima clase que satisface las cinco condiciones es la clase de las funciones ultradiofánticas.

Como se mencionó en la introducción, la clase R' permite desarrollar la aritmética usual. No se intentará hacer un desarrollo de esta última, sólo se harán algunos ejemplos para mostrar como se obtiene la aritmética.

1.12 Lema

Las funciones suma $\oplus: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, producto $\cdot: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pertenecen a R' .

Demostración

$\oplus: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ se obtiene por recursión primitiva de las siguientes funciones:

$1_N: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ y $sp_3^3: \mathbb{N}^3 \longrightarrow \mathbb{N}$

$\therefore N^2 \longrightarrow N$ se obtiene por recursión primitiva de las funciones $0 : N \longrightarrow N$ (la función constante de valor 0) y $\langle p_1^3, p_3^3 \rangle : N^3 \longrightarrow N^N$

Existe una descripción alternativa de la clase R' , como se hace notar en $[T_0]$. Esta caracterización surgió del trabajo de Martin Davis [Da] en el cual demostró que la clase de funciones recursivas coincide con la clase de funciones $f: N^n \longrightarrow N$, *diofánticas*; esto es, aquellas funciones cuyas gráficas son *conjuntos diofánticos*. Los conjuntos diofánticos se definen por medio de los *predicados diofánticos*. Para la clase R' se usarán *predicados ultradiofánticos*. Se definen de la siguiente forma

1.2 Predicados Ultradiofánticos y la Definición de U.D.

1.21 Definición $[T_0]$ ¹

P.U.D.1).- Si $f(x_1, \dots, x_n)$ es un polinomio en $Z[x_1, \dots, x_n]$ entonces la fórmula $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ es un *predicado ultradiofántico* en el que no aparecen ninguna variable ligada y todas las x_i son variables libres, para $i \in \{1, \dots, n\}$

P.U.D.2).- Si P es un predicado ultradiofántico también lo será su negación $\neg P$. Las variables libres de $\neg P$ son las de P y las ligadas son también las de P .

P.U.D.3).- Si P, Q son predicados ultradiofánticos y no existen variables que aparezcan libres en uno y ligadas en el otro, entonces $P \vee Q, P \wedge Q, P \Rightarrow Q$ son predicados ultradiofánticos. Las variables que aparecen libres (ligadas) en

¹ Se sobreentiende que algo es un predicado ultradiofántico si se obtiene de P.U.D.1 a P.U.D.4

cualesquiera de estos predicados son las variables libres (ligadas) que aparecen en P o Q.

P.U.D.4)- Si P es un predicado ultradiofántico y x es una variable que no aparece ligada en P entonces $(\forall x) P$, $(\exists x) P$ también son predicados ultradiofánticos, las otras variables ligadas que aparecen en $(\forall x) P$ (resp. $(\exists x) P$) son las de P. Las variables libres de $(\forall x) P$ (resp. $(\exists x) P$) son las variables distintas de x que aparecen libres en P

1.22 Ejemplos

a). $(\forall x) (\exists y) (x + 1 = y)$

b). $(x = 0) \vee (x = 1)$

c). $(\exists x_3) (x_1^2 + x_2 \cdot x_3 = 0)$

1.23. Conjuntos Ultradiofánticos

1.23.1. Definición $\{T_0\}$

Un subconjunto A de N^n es *ultradiofántico* si existe algún predicado ultradiofántico $P(x_1, \dots, x_n)$ tal que para cada n-ada (a_1, \dots, a_n)

$$(a_1, \dots, a_n) \in A \text{ sii } P(a_1, \dots, a_n)$$

Una función $f: N^n \longrightarrow N$ es *ultradiofántica* sii su gráfica es un conjunto ultradiofántico.

Se puede demostrar el siguiente resultado.

1.23.2 Lema [T₀]

Si A es un conjunto ultradiofántico contenido en N^n entonces existe un elemento $f_A: N^n \longrightarrow N$ de R' tal que

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in N^n \mid f_A(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Con este resultado y algunas consideraciones adicionales se demuestra el siguiente teorema.

1.23.3 Teorema [T₀]

La clase R' consta precisamente de la clase de las funciones ultradiofánticas.

Un corolario inmediato del teorema anterior es:

1.23.4 Corolario

Un subconjunto A de N^n es ultradiofántico sii existe un elemento $f_A: N^n \longrightarrow N$ en R' tal que

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in N^n \mid f_A(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Este último resultado permite definir a los conjuntos ultradiofánticos de otra manera. Es claro que todo elemento de R' se puede ver como un Set-morfismo. Para dar una definición alternativa de los conjuntos ultradiofánticos se usarán las propiedades categóricas que satisface Set^1 . El corolario 1.23.4 sugiere una descripción categórica de los conjuntos ultradiofánticos como lo dice la siguiente definición.

¹ Para un desarrollo sistemático, véase por ejemplo [G₀]

1.24 Definición

Un objeto A de Set se dice que es *ultradiofántico* si existe un Set -morfismo $f_A: N^n \longrightarrow N$ de R' tal que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_A} & N^n \\
 \downarrow & \text{P.F.} & \downarrow \\
 1 & \xrightarrow{v} & \Omega = \{0,1\}
 \end{array}
 \quad x f_A = x_A$$

donde $1 \xrightarrow{v} \Omega$ es el morfismo verdad para Set y $x: N \longrightarrow \Omega$ se obtiene del siguiente diagrama conmutativo

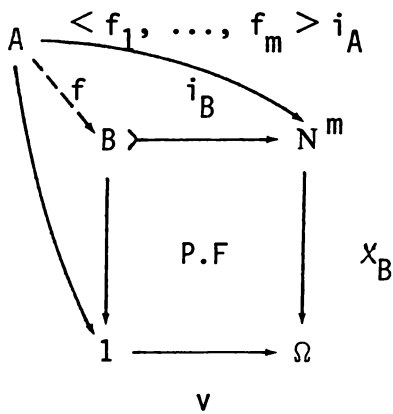
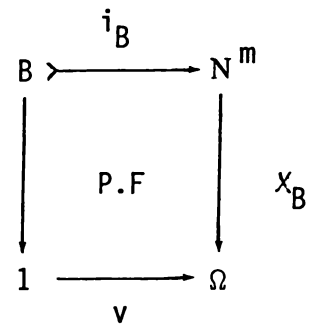
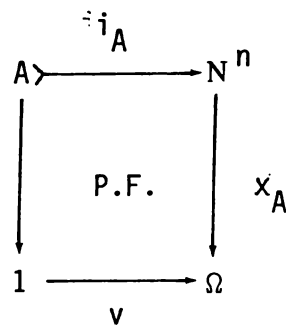
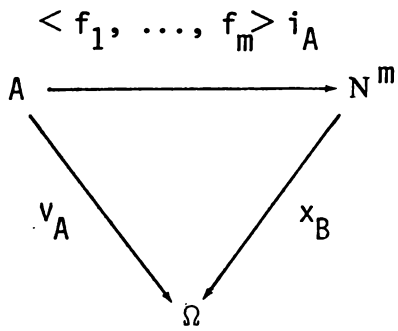
$$\begin{array}{ccccc}
 & & N & \xrightarrow{s} & N \\
 & \nearrow 0 & \downarrow x & & \downarrow x \\
 1 & & & & \\
 & \searrow v & \Omega & \xrightarrow{\text{falso}_\Omega} & \Omega
 \end{array}$$

A se llamará un *objeto ultradiofántico* o simplemente un *objeto U.D.*

Para poder ver a los objetos ultradiofánticos como una subcategoría de Set es necesario definir el concepto de morfismo ultradiofántico o *U.D.-morfismo*. De nuevo, 1.23.4 permite dar la siguiente definición.

1.25. Definición

Sean A, B dos $U.D.$ -objetos arbitrarios, se dice que un Set -morfismo $f: A \longrightarrow B$ es un *morfismo ultradiofántico* ó *U.D.-morfismo* sii existen $f_1, \dots, f_m: N^m \longrightarrow N$ elementos de R' tales que hacen conmutativos los diagramas.



$$x_B \langle f_1, \dots, f_m \rangle i_A = v_A = x_A i_A$$

Antes de probar que con esta definición los $U.D.$ -objetos forman una subcategoría de Set , se verán algunos ejemplos de $U.D.$ -objetos.

1.26. Ejemplos

a). El objeto terminal de Set $1 = \{o\}$ es un $U.D.$ -objeto

Demostración

$1 = \{x \in N \mid 1_N(x) = 0\}$; claramente 1_N pertenece a R' . Además, es obvio que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{0} & N \\
 \downarrow & \text{P.F.} & \downarrow x \\
 1 & \xrightarrow{v} & \Omega
 \end{array}$$

es un producto fibrado

b). N es un U.D.-objeto.

Demostración

El cuadrado

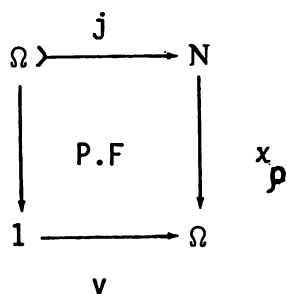
$$\begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow{1_N} & N \\
 \downarrow & \text{P.F.} & \downarrow x0_N \\
 1 & \xrightarrow{v} & \Omega
 \end{array}$$

es un producto fibrado, donde $0_N : N \longrightarrow N$ es la función constante de valor cero

c). Ω es un U.D.-objeto.

Demostración

El cuadrado



es un producto fibrado, donde $p: N \longrightarrow N$ es el morfismo predecesor.

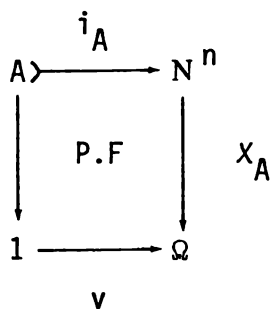
1.27. Lema

Los objetos ultradiofánticos junto con los *U.D.*-morfismos, forman una subcategoría de *Set* que se denotará por *U.D.*

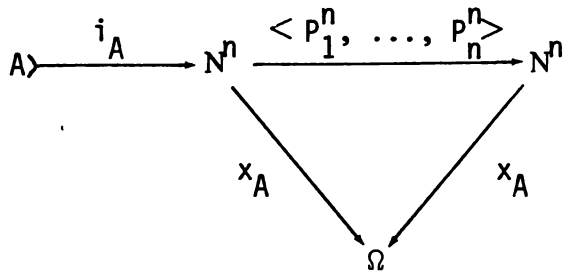
Demostración

1). Hay identidades

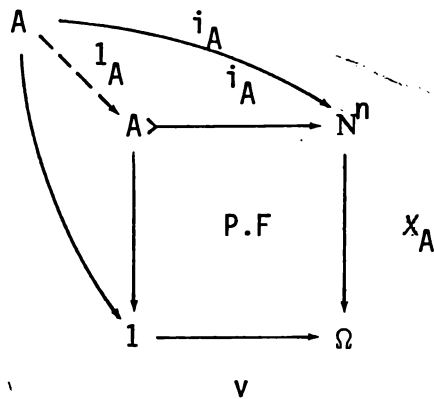
En efecto, si *A* es un *U.D.*-objeto entonces existe un producto fibrado de la forma



Ahora, como el diagrama



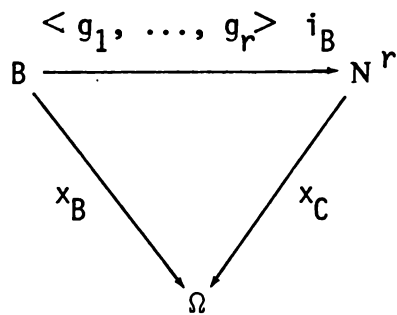
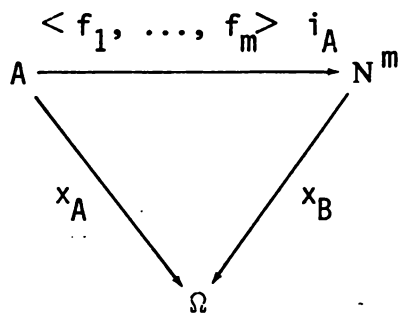
es conmutativo y las proyecciones $p_i^n : N^n \longrightarrow N$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, pertenecen a R' , entonces $1_A : A \longrightarrow A$ es el único Set-morfismo que hace conmutativo el diagrama



2). $U.D.$ es cerrada bajo la composición de Set-morfismos.

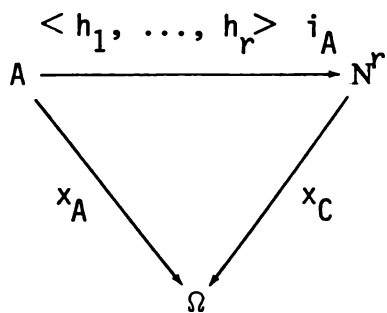
Demostración

Supóngase que $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ son dos $U.D.$ -morfismos entonces se tienen diagramas conmutativos de la forma

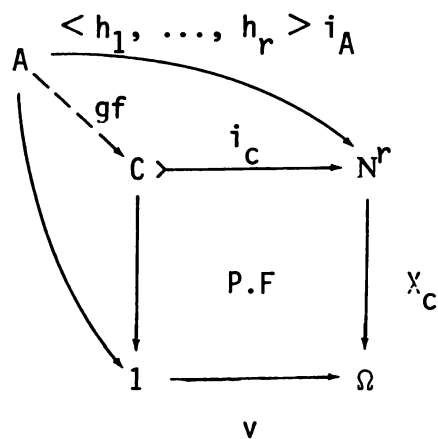


donde $f_1, \dots, f_m: N^n \longrightarrow N$ y $g_1, \dots, g_r: N^m \longrightarrow N$ pertenecen a R' .
 Sea $h_i = g_i \circ \langle f_1, \dots, f_m \rangle: N^n \longrightarrow N$, entonces por 1.11, h_i pertenece a R' ,
 para $i \in \{1, \dots, r\}$.

Además, el triángulo



es conmutativo. Es claro entonces que $gf: A \longrightarrow C$ es el único Set-morfismo que hace conmutativo el diagrama



Esto demuestra el lema. Estos últimos resultados se pueden resumir con la siguiente definición

1.28 Definición

La subcategoría *U.D.* de *Set* se llama la *categoría ultradiofántica* determinada por *Set*.

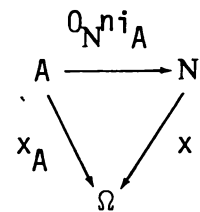
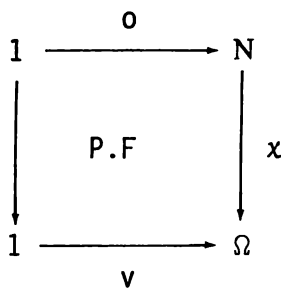
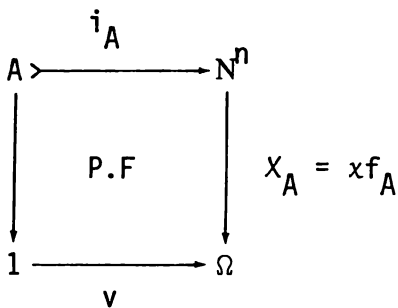
La construcción que se ha dado para *U.D.* se puede hacer en categorías más débiles que *Set*. Sin embargo, antes de hacer ésto, se estudiarán que propiedades satisface *U.D.*, como subcategoría de *Set*.

1.3 Propiedades de U.D.

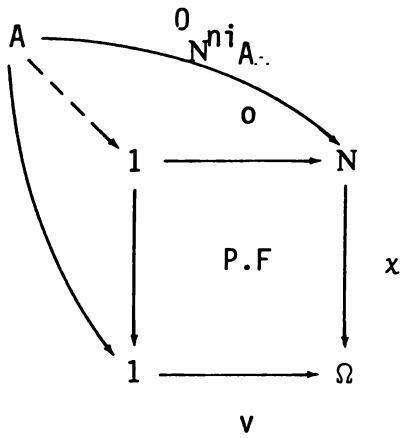
1.31 *U.D.* tiene objeto terminal

Demostración

Sea *A* un *U.D.*- objeto arbitrario y considérense los siguientes diagramas



donde $0_N: N^n \longrightarrow N$ es la función constante de valor cero. Entonces es claro que $!_A: A \longrightarrow 1$ hace conmutativo el diagrama

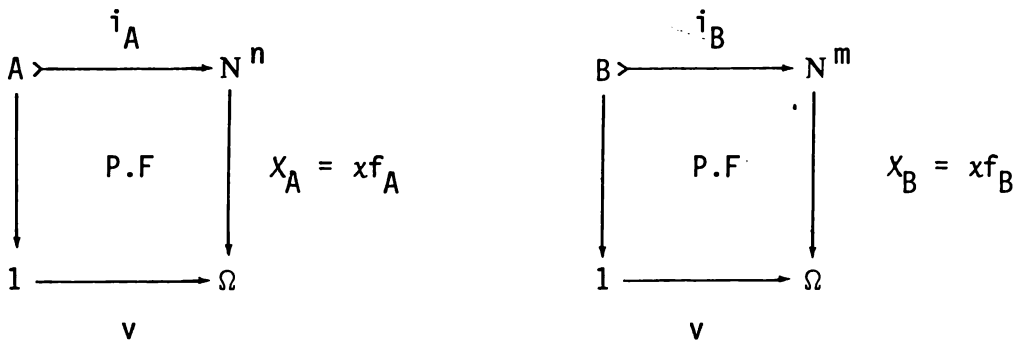


Por lo tanto $i_A: A \longrightarrow 1$ es un *U.D.*-morfismo. En consecuencia, 1 es un *U.D.*-objeto terminal

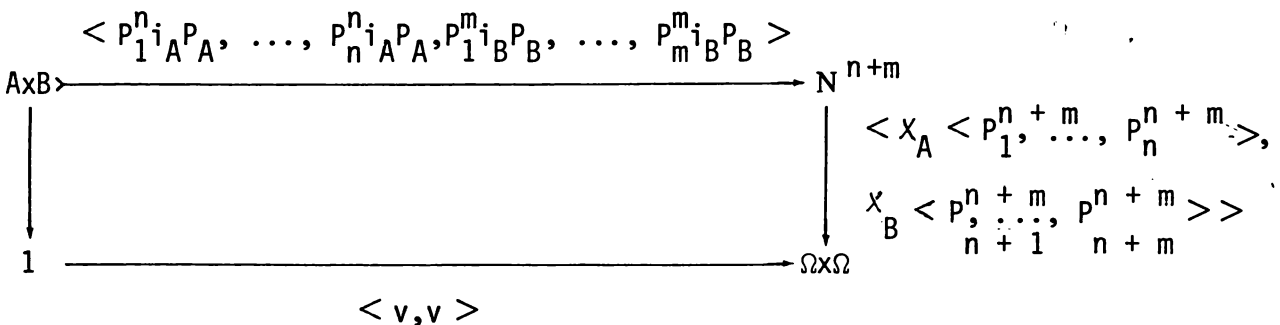
1.32 *U.D.* tiene productos finitos

Demostración

Sean A, B dos *U.D.*-objetos arbitrarios; entonces existen productos fibrados de la forma



Considérese el siguiente diagrama

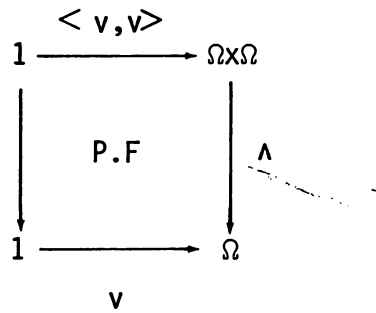


entonces, es claro que es conmutativo ya que

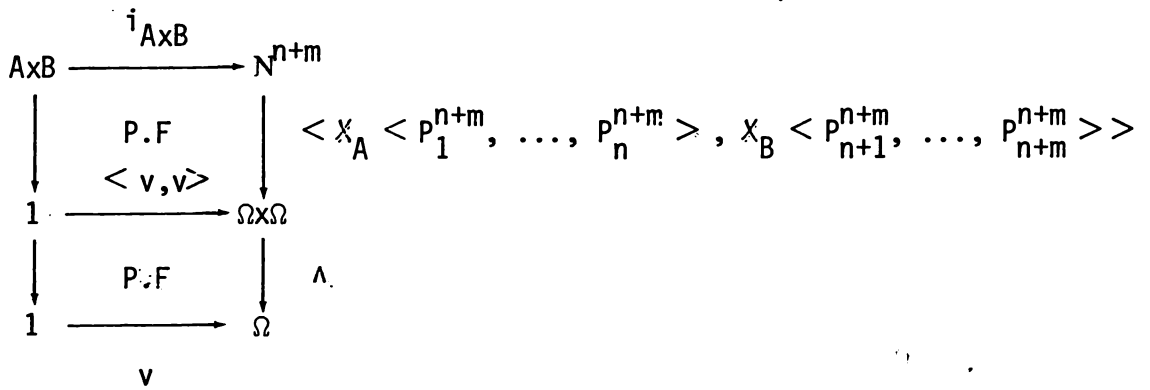
$$\begin{aligned} &\langle X_A \langle P_1^{n+m}, \dots, P_n^{n+m} \rangle, X_B \langle P_{n+1}^{n+m}, \dots, P_{n+m}^{n+m} \rangle \rangle \langle P_1^n i_A P_A, \dots, P_n^n i_A P_A, P_1^m i_B P_B, \dots, \\ &P_m^m i_B P_B \rangle = \langle X_A \langle P_1^n i_A P_A, \dots, P_n^n i_A P_A \rangle, X_B \langle P_1^m i_B P_B, \dots, P_m^m i_B P_B \rangle \rangle = \\ &\langle X_A i_A P_A, X_B i_B P_B \rangle = \langle v_{A \times B}, v_{A \times B} \rangle. \end{aligned}$$

Un cálculo simple, demuestra también que es un producto fibrado.

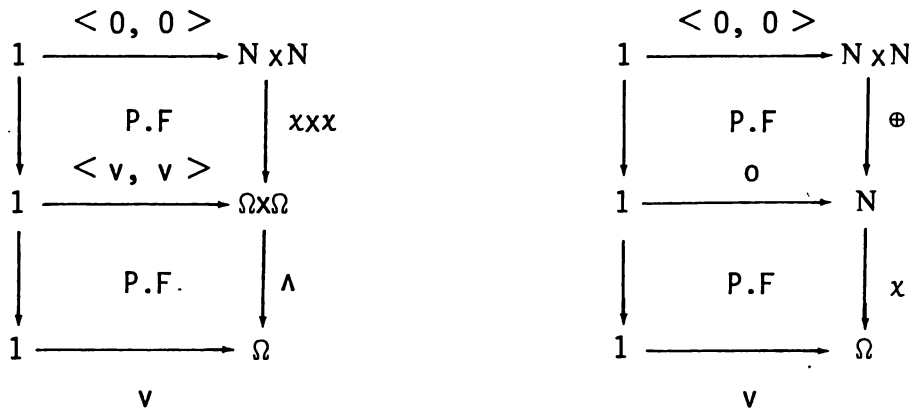
Ahora bien, como el cuadrado



es un producto fibrado entonces el diagrama



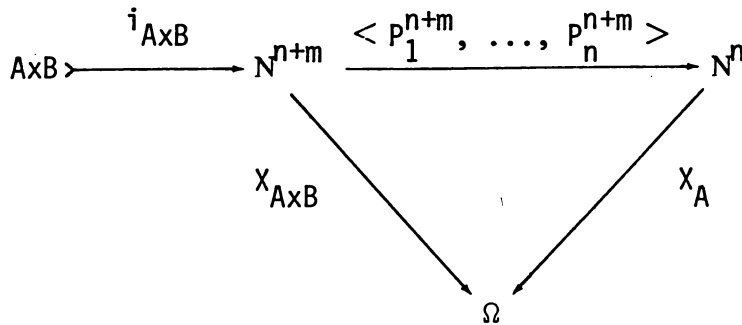
es un producto fibrado. Aparentemente todavía no se ha demostrado que $A \times B$ es un U.D.-objeto. Sin embargo, como los diagramas



son productos fibrados y $X_A = x f_A$, $X_B = x f_B$ entonces el morfismo característico de $i_{A \times B}$ se puede escribir como

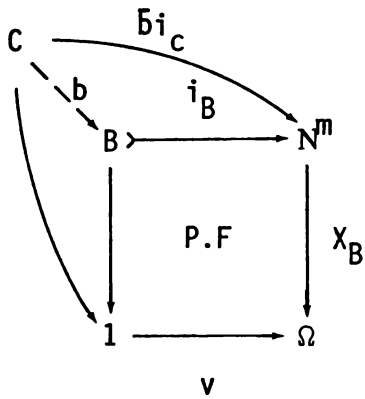
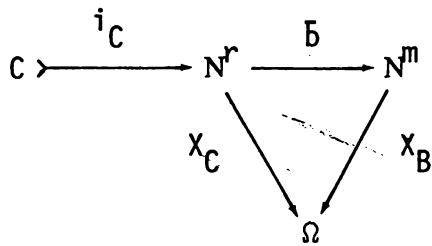
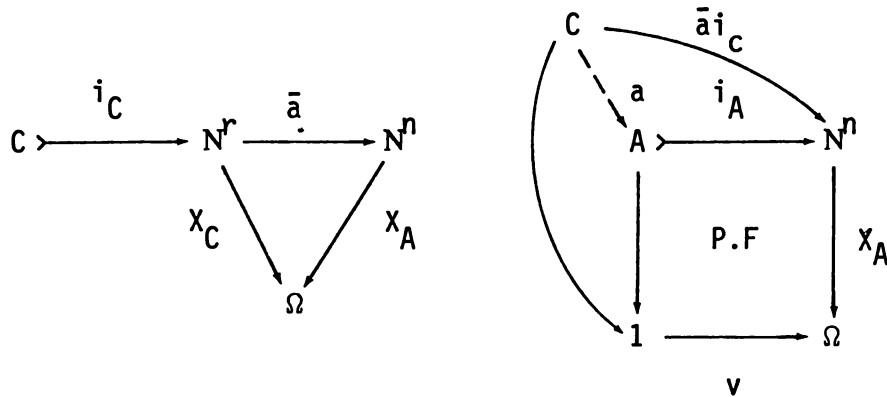
$$x \circ \langle f_A \langle p_1^{n+m}, \dots, p_n^{n+m} \rangle, f_B \langle p_{n+1}^{n+m}, \dots, p_{n+m}^{n+m} \rangle \rangle : N^{n+m} \longrightarrow \Omega$$

Para demostrar que las proyecciones $P_A: A \times B \longrightarrow A$, $P_B: A \times B \longrightarrow B$ son U.D.-morfismos basta considerar, por ejemplo, el siguiente diagrama:



es claro que es conmutativo. Además, $\langle p_1^{n+m}, \dots, p_n^{n+m} \rangle = i_{A \times B}^* i_A^* P_A$. Por lo tanto, $P_A: A \times B \longrightarrow A$ es un U.D.-morfismo. Análogamente, $P_B: A \times B \longrightarrow B$ es un U.D.-morfismo.

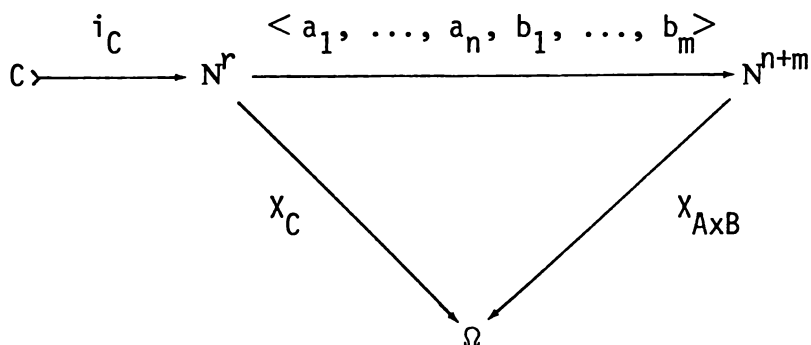
Supóngase ahora que $C \xrightarrow{a} A$, $C \xrightarrow{b} B$ son U.D.-morfismos; se tienen diagramas conmutativos de la forma



donde $\bar{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle : N^r \longrightarrow N^n$

$\bar{b} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle : N^r \longrightarrow N^m$

Considérese ahora el siguiente triángulo



entonces por la descripción de $X_{A \times B}$ es obvio que el triángulo es conmutativo.

Por último, el Set-morfismo $\langle a, b \rangle : C \longrightarrow A \times B$ es tal que

$i_{A \times B} \langle a, b \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle i_C$; por lo tanto, $\langle a, b \rangle$ es un U.D.-morfismo. Claramente, $P_A \langle a, b \rangle = a$ y $P_B \langle a, b \rangle = b$. La unicidad es inmediata.

La demostración anterior muestra el espíritu de este trabajo. Es claro que si en lugar de trabajar con funciones ultradiofánticas, se hubiere trabajado con predicados ultradiofánticos, no se tendría que haber hecho la observación de la página anterior. La pregunta natural que surge de esto último es: ¿cómo se puede trabajar con los predicados ultradiofánticos?. Para el caso de Set la respuesta es sencilla: como es bien sabido Set es un topos elemental bien punteado¹ que tiene objeto de números naturales. En particular, Set tiene una lógica interna que es booleana y bivalente. Esto último permite dar una interpretación para los predicados ultradiofánticos, por ejemplo, el Set-morfismo $\wedge : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ es la versión interna del conectivo \wedge .

¹ Véase [J] pág. 314.

Si se recuerda la definición de los predicados ultradiofánticos entonces es claro que para dar una interpretación de estos últimos, se puede proceder por inducción sobre el número de conectivos que aparecen en el predicado. Por ejemplo, supóngase que $P(x_1, \dots, x_n)$ es $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, para fines prácticos, supóngase además que $n = 1$. Se tiene entonces un polinomio en $Z[x]$ que se puede escribir como

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios con coeficientes naturales. Es claro como podrían interpretarse. Si $g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ entonces

$x_{P(x)}: N \longrightarrow N$ es:

$$\oplus \cdot \langle S^{a_n} 0_N, h(x) \rangle \oplus \dots \oplus \cdot \langle S^{a_1} 0_N, h_1(x) \rangle \oplus S^{a_0} 0_N$$

donde $h_1 = 1_N, h_2(x) = \cdot \langle 1_N, h_1(x) \rangle ; \dots, h_n(x) = \cdot \langle 1_N, h_{n-1} \rangle$

Ahora bien, $f(x) = 0$ sii $(g(x) \dot{-} h(x)) \oplus (h(x) \dot{-} g(x)) = 0$, donde $\dot{-}: N \times N \longrightarrow N$ es el morfismo diferencia de N . En consecuencia, se define $x_{P(x)}: N \longrightarrow \Omega$

como la composición, $x^\oplus \langle \dot{-} \langle x_{g(x)}, x_{h(x)} \rangle, \dot{-} \langle x_{h(x)}, x_{g(x)} \rangle \rangle$, donde

$x: N \longrightarrow \Omega$ es el morfismo definido en 1.24.

Se puede probar que para todo natural $1 \xrightarrow{S^{a_0}} N$, $x_{P(x)} S^{a_0} = v$ sii $x_{g(x)} S^{a_0} = x_{h(x)} S^{a_0}$ sii $g(a) = h(a)$ sii $f(a) = 0$. Esto es, un natural a , satisface P sii $x_{P(x)} S^{a_0} = v$.

El lector familiarizado con la teoría de los topos notará que esta interpretación está inspirada en la interpretación que dá Mitchell en [M₁]. En el capítulo dos se hará una descripción detallada de lo que se ha mencionado aquí. Estas observaciones pueden justificar la importancia de los predicados ultradiofánticos.

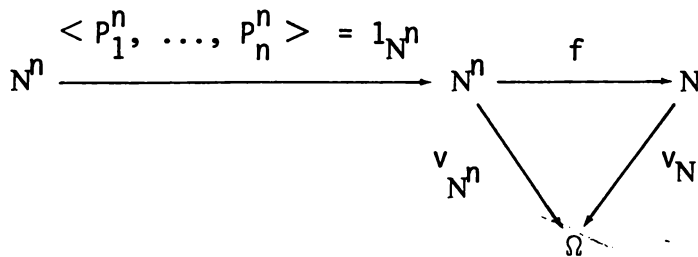
Hay algunas consecuencias inmediatas de 1.32

1.32.1

N^n es un U.D.-objeto y todo morfismo $f: N^n \longrightarrow N$ que pertenece a R' es un U.D.-morfismo.

Demostración

Por 1.32 es claro que N^n es un U.D.-objeto. Sea $f: N^n \longrightarrow N$ un morfismo que pertenece a R' , como el diagrama



es conmutativo entonces f es un U.D.-morfismo.

1.32.2

Los morfismos $\oplus: N^2 \longrightarrow N$, $\dot{\div}: N^2 \longrightarrow N$, $\ddot{\div}: N^2 \longrightarrow N$ son U.D.-morfismos

1.33 U.D. tiene igualadores

Demostración

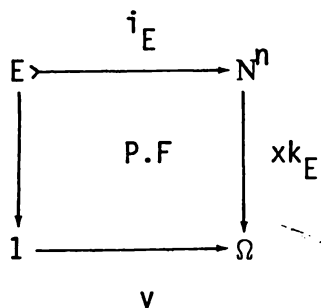
Se demostrará primero que si $\bar{f} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle: N^n \longrightarrow N^{m \times 1}$ y $\bar{g} = \langle g_1, \dots, g_m \rangle: N^n \longrightarrow N^{m \times 1}$ son morfismos cuyas componentes pertenecen a R' entonces el igualador de \bar{f} y \bar{g} es un U.D.-objeto.

Sea $k_E: N^n \longrightarrow N$ definido por la siguiente regla:

$$\oplus \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle, \langle g_1, f_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle f_m, g_m \rangle, \langle g_m, f_m \rangle$$

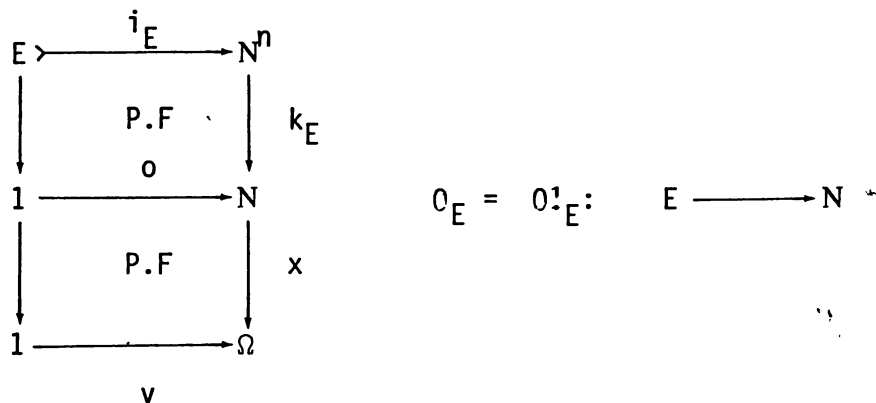
entonces es claro que $k_E: N^n \longrightarrow N$ pertenece a R' . Además, $k_E(x) = 0$ sii

$\oplus \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle f_i, g_i \rangle, \langle g_i, f_i \rangle (x) = 0$, para $i \in \{1, \dots, m\}$ sii $g_i(x) = f_i(x)$ para $i \in \{1, \dots, m\}$ sii $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$. En consecuencia, si se considera el producto fibrado

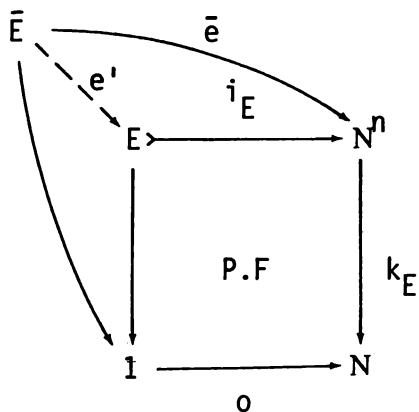


entonces es claro que (E, i_E) es el igualador de \bar{f} y \bar{g} .

En efecto, el producto fibrado anterior puede escribirse de la siguiente manera:

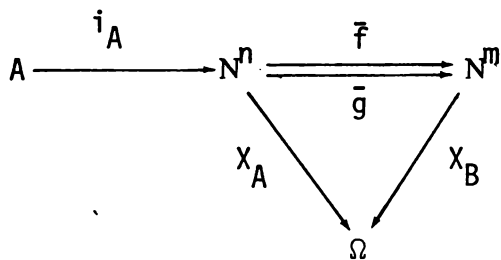


en particular $k_E i_E = 0_E$; por lo tanto $\bar{f} i_E = \bar{g} i_E$. Si $\bar{E} \xrightarrow{\bar{e}} N^n$ es tal que $\bar{f} \bar{e} = \bar{g} \bar{e}$ entonces $k_E \bar{e} = 0_{\bar{E}}$. En consecuencia, el diagrama exterior del cuadrado



es conmutativo. Por lo consiguiente, existe un único morfismo $e': \bar{E} \longrightarrow E$ tal que $i_E e' = \bar{e}$. Por construcción E es un U.D.-objeto.

Sean $f, g: A \longrightarrow B$ dos U.D-morfismos arbitrarios. Entonces se tienen diagramas de la forma

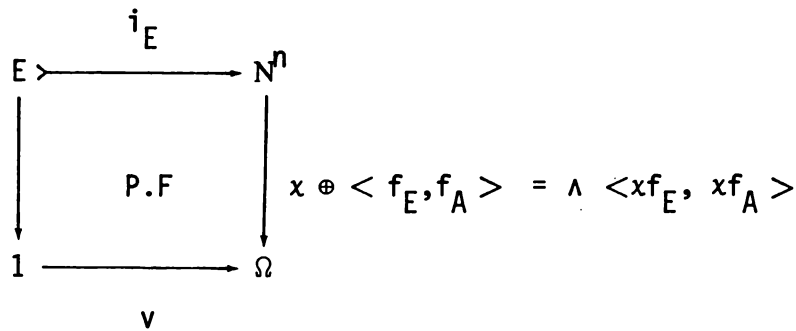


$$\bar{f} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle: N^n \longrightarrow N^m$$

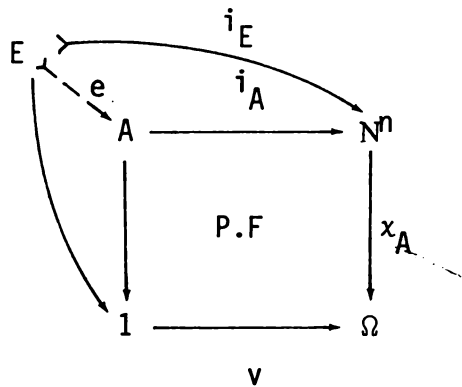
$$\bar{g} = \langle g_1, \dots, g_m \rangle: N^n \longrightarrow N^m$$

$$\bar{f} i_A = i_B f, \quad \bar{g} i_A = i_B g$$

Sea (\bar{E}, i_E) el igualador de \bar{f} y \bar{g} ; considérese el siguiente producto fibrado:



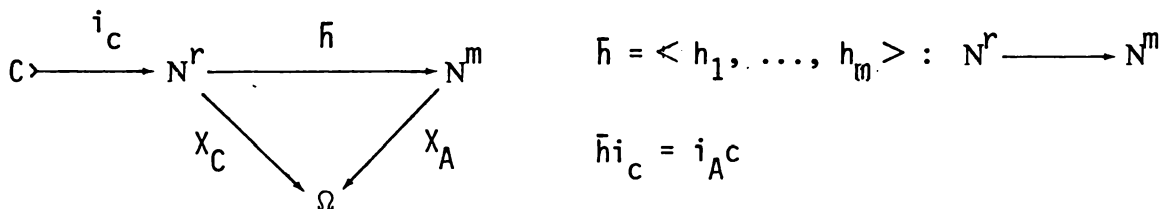
Claramente, E es un U.D.-objeto. Además, E es un subobjeto de A por el diagrama anterior. Existe un único Set-morfismo $e: E \longrightarrow A$ tal que hace conmutativo



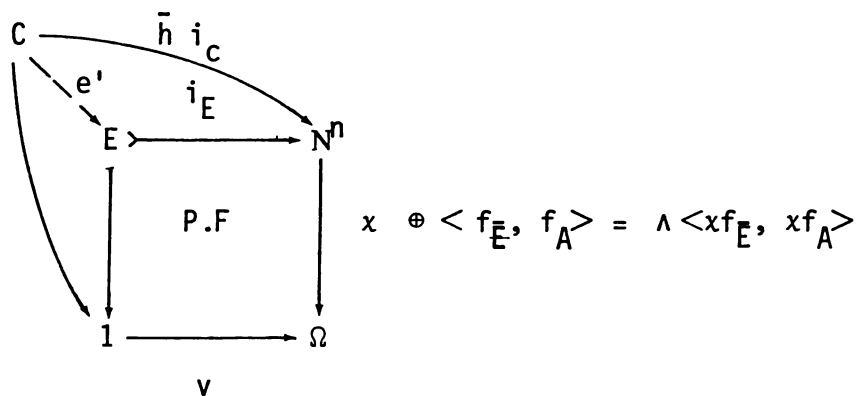
Es claro que $e: E \longrightarrow A$ es un U.D.-morfismo. Se demostrará que (E, e) es el igualador de f y g .

Ahora bien, $fe = ge$ si $i_B fe = i_B ge$, pero $i_B fe = \bar{f}i_A e = \bar{f}i_E = \bar{g}i_E = i_B ge$ ya que E también es un subobjeto de \bar{E} .

Por último, supóngase que $C \xrightarrow{c} A$ es un U.D.-morfismo tal que $fc = gc$. Se tiene un diagrama conmutativo de la forma



Ahora, como $fc = gc$ entonces $i_B fc = i_B gc$; Por lo tanto, $\bar{f}i_A c = \bar{g}i_A c$; i.e., $f_E(i_A c) = 0_C$. En consecuencia, existe un único Set-morfismo $e': C \longrightarrow E$ que hace conmutativo el diagrama



Claramente, $e': C \longrightarrow E$ es un U.D.-morfismo. Como $i_E = i_A e$ entonces $i_A c = \bar{h} i_c = i_E e' = i_A e e'$; $\therefore c = e e'$ ya que i_A es un Set-monomorfismo. Por lo tanto (E, e) es el U.D-igualador de f y g .

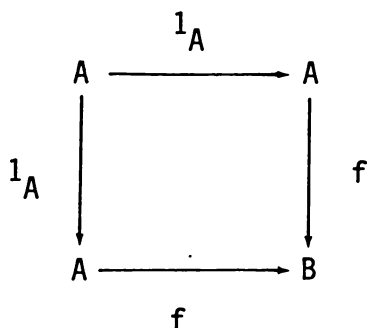
Una observación más, es claro que (E, e) es también el Set-igualador de f y g .

1.34 U.D. tiene límites finitos

1.35 Todo U.D.-monomorfismo es un Set-monomorfismo.

Demostración

Sea $F: U.D. \longrightarrow \text{Set}$ el functor inclusión. Por 1.32 y 1.33, F preserva límites finitos. En particular, F preserva productos fibrados. Ahora, es bien sabido que un morfismo $f: A \longrightarrow B$ es un monomorfismo sii el cuadrado



es un producto fibrado.

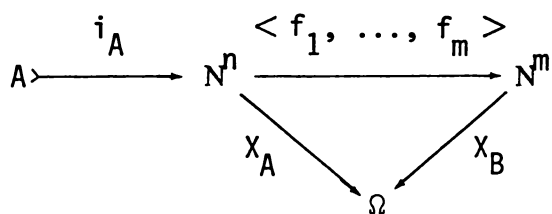
Esta última afirmación también puede probarse directamente. Es evidente la importancia de 1.35. Permitirá probar que $\Omega = \{0,1\}$ es un U.D.-clasificador de subobjetos. Para demostrar esto último se comenzará con:

1.36

Si $f: A \longrightarrow B$ es un U.D.-morfismo entonces $\text{Im}f$, la imagen de f , es un U.D.-objeto.

Demostración

Sea $f: A \longrightarrow B$ un U.D.-morfismo arbitrario; entonces existe un diagrama conmutativo de la forma



$$\begin{aligned}
 \langle f_1, \dots, f_m \rangle i_A &= i_B f \\
 f_1, \dots, f_m: N^n &\longrightarrow N^m \\
 &\text{pertenecen a } R!
 \end{aligned}$$

Sea $P_A(x_1, \dots, x_n)$ un predicado ultradiofántico que define a A ; $P_B(y_1, \dots, y_m)$ un predicado ultradiofántico que define a B y $P_j(x_1, \dots, x_n, Z)$ los predicados ultradiofánticos que definen a las gráficas de $f_j: N^n \longrightarrow N$, para $j \in \{1, \dots, m\}$; entonces la imagen de f puede describirse de la siguiente manera:

$$\text{Im}f = \{(y_1, \dots, y_m) \in N^m \mid (\exists x_1, \dots, x_n) (P_A(x_1, \dots, x_n) \wedge P_1(x_1, \dots, x_n, y_1) \wedge \dots \wedge P_m(x_1, \dots, x_n, y_m) \wedge P_B(y_1, \dots, y_m))\}$$

Claramente, el predicado que describe a $\text{Im}f$ es ultradiofántico.

1.37

Si A es un U.D.-objeto arbitrario entonces el Set-morfismo característico de A , $X_A: N^n \longrightarrow \Omega$ es un U.D.-morfismo.

Demostración

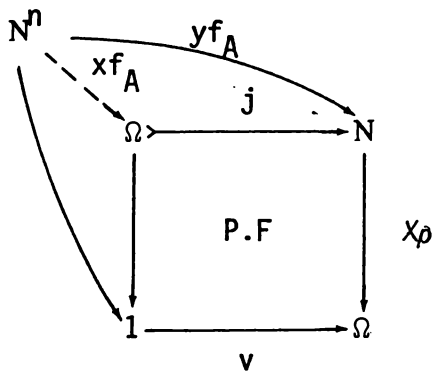
Sea A un U.D.-objeto arbitrario. Por definición, existe un elemento $f_A: N^n \longrightarrow N$ de R' tal que $X_A = x f_A$. Como conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} N^n & \xrightarrow{1_{N^n}} & N^n & \xrightarrow{y f_A} & N \\ & & \searrow v_{N^n} & & \swarrow X_\Omega \\ & & & & \Omega \end{array}$$

donde $y: N \longrightarrow N$ se obtiene a partir del diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & N & \xrightarrow{s} & N \\ & \nearrow \theta & \downarrow y & & \downarrow y \\ 1 & & N & \xrightarrow{0_N} & N \\ & \searrow s\theta & & & \end{array}$$

entonces $xf_A: N^n \longrightarrow \Omega$ es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama



es fácil ver que $x_j: N \longrightarrow N$ es $y: N \longrightarrow N$; por lo tanto, $xf_A: N^n \longrightarrow \Omega$ es un U.D.-morfismo.

1.38

Los set-morfismos $1 \xrightarrow{v} \Omega$ y $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$ son U.D.-morfismos.

Demostración

Basta considerar los diagramas conmutativos



por lo tanto, $1 \xrightarrow{v} \Omega$ y $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$ son U.D.-morfismos.

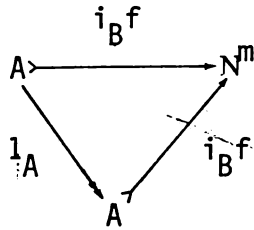
1.39

Ω es un U.D.-clasificador de subobjetos.

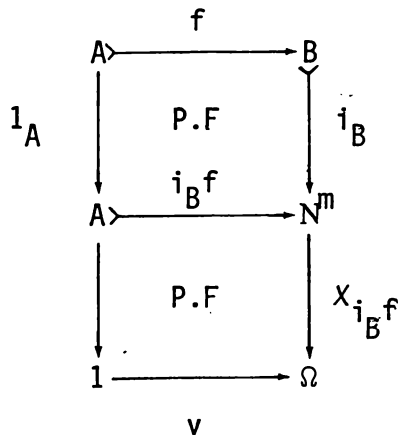
Demostración

Sea $X: A \longrightarrow \Omega$ un U.D.-morfismo arbitrario. Entonces es claro que X clasifica a un U.D.-subobjeto ya que $1 \xrightarrow{v} \Omega$ es un U.D.-morfismo y U.D. tiene productos fibrados.

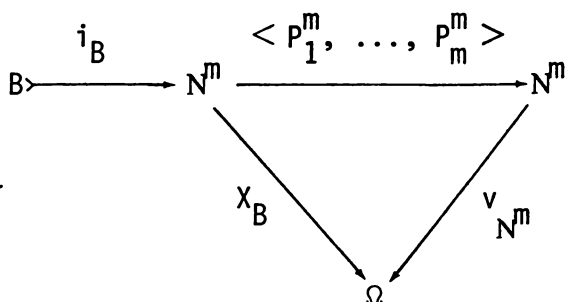
Recíprocamente, si $f: A \longrightarrow B$ es un U.D.-monomorfismo entonces por 1.35, f es un Set-monomorfismo. En consecuencia, la imagen de f se puede describir por medio del siguiente triángulo conmutativo.



visto como subobjeto de N^m . En consecuencia, el diagrama



es un producto fibrado. Por 1.38, $\chi_{i_B} \circ f : N^m \longrightarrow \Omega$ es un U.D.-morfismo y es obvio que $i_B : B \longrightarrow N^m$ es también un U.D.-morfismo debido a la conmutatividad del diagrama



Por lo tanto $\chi_A = \chi_{i_B} \circ i_B : B \longrightarrow \Omega$ es un U.D.-morfismo. Esto demuestra que Ω es un U.D.-clasificador de subobjetos.

Al haber hecho la construcción de los U.D.-objetos sobre Set y al ser esta última *cartesianamente cerrada*; esto es, para cada Set-objeto A, el functor producto $- \times A : \text{Set} \longrightarrow \text{Set}$ tiene un adjunto derecho. Es natural preguntarse si U.D lo es. La respuesta es negativa, como se ve en el próximo resultado.

1.4 U.D. No es Cartesianamente cerrada

Demostración

La prueba de esta afirmación no es muy difícil. Si U.D fuese cartesianamente cerrada, existiría un elemento $f : N^2 \longrightarrow N$ de R' que sólo toma valores entre cero y uno, tal que las funciones

$$f(1,j), f(2,j), \dots$$

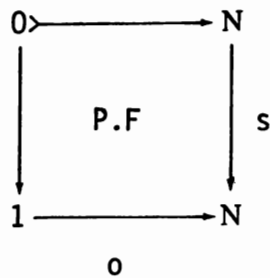
son todos los morfismos característicos de los U.D.-subobjetos de N. En $[T_0]$, se demuestra que tal morfismo $f : N^2 \longrightarrow N$ no puede existir.

Sin embargo, U.D. satisface las siguientes propiedades

1.41 U.D. tiene un objeto inicial

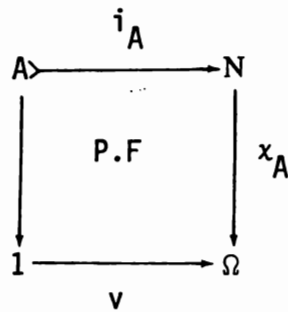
Demostración

Como el cuadrado

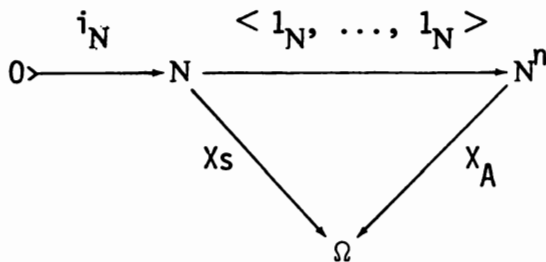


es un producto fibrado entonces 0 es un U.D.-objeto.

Si A es un U.D.-objeto arbitrario entonces existe un diagrama de la forma



Ahora, como el diagrama



es un conmutativo, entonces $i_A: 0 \longrightarrow A$ es un U.D.-morfismo.

Se puede demostrar también que \mathbf{N} es un U.D.-objeto de números naturales, U.D. tiene coproductos finitos y coigualadores. Las demostraciones de estos hechos se basan en las construcciones que se hacen en \mathbf{Set} . En particular, la formación en U.D. de los colímites finitos realmente es una consecuencia directa de la construcción que se hace en \mathbf{Set} .

Como se verá en el próximo capítulo la definición de una categoría ultradiofántica sobre una categoría $\underline{\mathcal{C}}$, no dependerá de la existencia de colímites finitos en $\underline{\mathcal{C}}$. Los resultados que se han demostrado en este capítulo se pueden resumir con el siguiente teorema.

1.5 Teorema (U.D.)

Sea U.D. la categoría ultradiofántica determinada por \mathbf{Set} . Entonces U.D. satisface:

- U.D.1)- U.D. tiene límites finitos. Además, el funtor inclusión $F: \mathbf{U.D.} \longrightarrow \mathbf{Set}$ preserva límites finitos.
- U.D.2) U.D. tiene un objeto inicial que es el mismo de \mathbf{Set} .
- U.D.3) Si Ω es el clasificador de subobjetos para \mathbf{Set} , también Ω es un U.D.-clasificador de subobjetos.
- U.D.4) $|\text{hom}_{\mathbf{U.D.}}(1, \Omega)| = 2$
- U.D.5) U.D. no es cartesianamente cerrada.
- U.D.6) U.D. tiene objeto de números naturales, que es el mismo de \mathbf{Set} .

Este teorema y las demostraciones que se han hecho permiten conjeturar que la construcción de una categoría ultradiofántica se puede hacer sobre categorías más débiles que Set. En particular, sobre categorías que *no necesariamente* sean cartesianamente cerradas. Esta última afirmación se precisará con detalle en el próximo capítulo. Además, se tratará de probar un teorema semejante al teorema 1.5.

2. LA CATEGORÍA $\underline{C}_{U.D.}$ ASOCIADA A \underline{C}

2.1 Introducción

Para definir el concepto de categoría ultrafiofántica sobre una categoría \underline{C} , se necesita precisar qué tipo de condiciones satisface esta última. Como se ha dicho anteriormente, esta construcción se hará sobre categorías que no son, en general, cartesianamente cerradas. El trabajo se desarrollará con categorías que satisfacen la siguiente definición.

2.11 Definición

Sea \underline{C} una categoría que cumple las siguientes condiciones

C.1)- \underline{C} tiene límites finitos

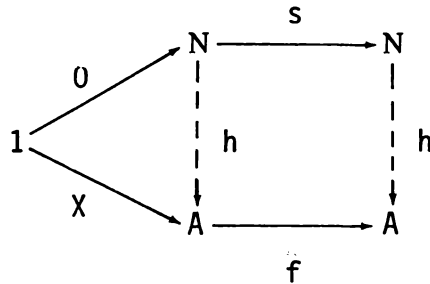
C.2)- \underline{C} tiene clasificador de subobjetos; i.e., existe un \underline{C} -objeto Ω y un morfismo $1 \xrightarrow{v} \Omega$ (llamado verdad) tal que, para cada monomorfismo $f: A \rightarrow B$ en \underline{C} , existe un único morfismo $\chi_A: B \rightarrow \Omega$ (llamado el morfismo característico de A) que hace el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \chi_A \\ 1 & \xrightarrow{v} & \Omega \end{array}$$

P.F

un producto fibrado.

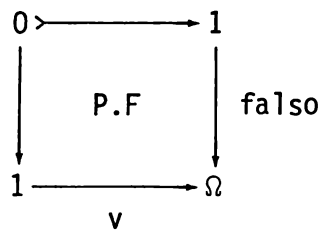
C.3)- \underline{C} tiene un objeto de números naturales; i.e., se tiene un diagrama en \underline{C} de la forma $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$ tal que para cualquier otro diagrama en \underline{C} , $1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} A$, existe un único \underline{C} -morfismo $h: N \rightarrow A$ que hace conmutativo el diagrama.



C.4)- \underline{C} tiene un objeto inicial estricto; esto es, todo \underline{C} -morfismo de codominio 0 es un isomorfismo.

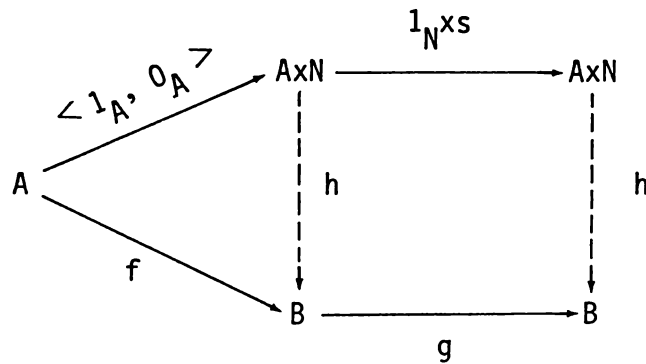
C.5)- \underline{C} es una (epimorfismos, monomorfismos)-categoría.

C.6)- Ω es el coproducto de $1 \xrightarrow{v} \Omega$ y $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$, donde $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$ es el morfismo característico de $0 \rightarrow 1$.



C.7)- \underline{C} satisface el siguiente principio de recursión primitiva:

Si $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow B$ son dos \underline{C} -morfismos arbitrarios entonces existe un único \underline{C} -morfismo $h: A \times N \longrightarrow B$ tal que hace conmutativo el diagrama



donde $0_A = A \xrightarrow{0} 1 \xrightarrow{0} N$.

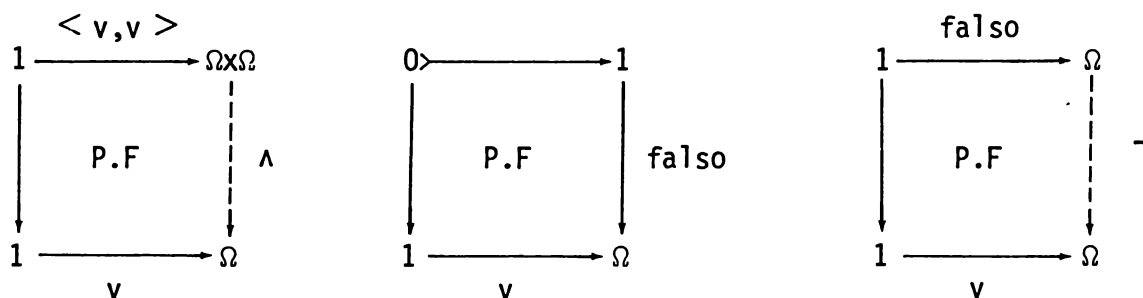
Se intentará hacer un desarrollo análogo, hasta donde sea posible, al que se hizo en la construcción de la categoría U.D. Es necesario hacer notar que al ser Set un topos, se tenía la estructura suficiente para poder tener una interpretación de los predicados ultradiófanticos. El camino que se seguirá es dar una interpretación de los predicados ultradiófanticos, en una categoría \underline{C} que satisfaga 2.11. Esto último se desarrollará por etapas; es claro que lo primero que se debe tener es una lógica suficientemente adecuada en \underline{C} . La siguiente sección aclara qué tipo de lógica se puede desarrollar en \underline{C} .

2.2 Lógica de \underline{C}

"If it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic".

L. Carroll -

Una consecuencia inmediata de 2.11 es la existencia de operadores $\wedge: \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, $\neg: \Omega \longrightarrow \Omega$ definidos por los siguientes productos fibrados.



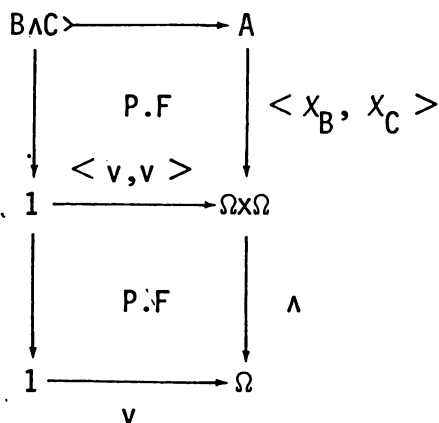
Esta última observación permite probar la siguiente proposición.

2.21 Proposición

Si A es un \underline{C} -objeto arbitrario entonces $\text{Sub}(A)$ tiene una estructura de álgebra de Boole.

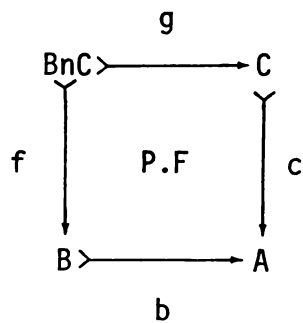
Demostración

Sean $B, C \in \text{Sub}(A)$; se define $B \wedge C$ como aquel subobjeto de A cuyo morfismo característico es $\wedge \langle \chi_B, \chi_C \rangle$.

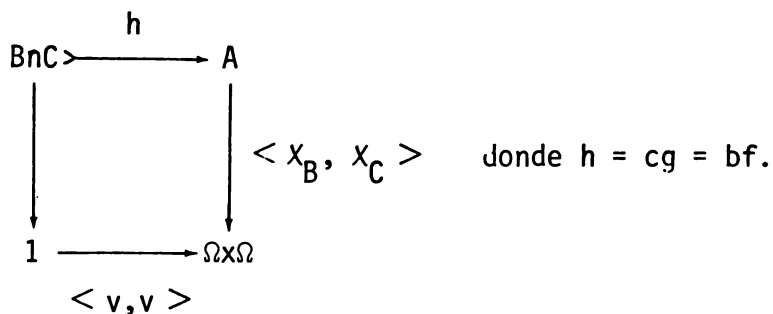


Nótese que $\wedge \langle \chi_B, \chi_C \rangle = \chi_B$ si $B \leq C$ donde \leq es el orden usual en $\text{Sub}(A)$.

Además, si $B \cap C$ denota a la intersección de B y C entonces $B \cap C \approx B \wedge C$ puesto que si el cuadrado.



es un producto fibrado entonces también lo es el siguiente cuadrado:



Esto permite afirmar que $\lambda : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ satisface las siguientes propiedades:

Λ.1)- $\lambda \langle P_2, P_1 \rangle = \lambda$; $P_j : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ es la j -ésima proyección, $j \in \{1, 2\}$

Λ.2)- $\lambda \langle 1_\Omega, 1_\Omega \rangle = 1_\Omega$

Λ.3)- $\lambda \langle P_1, \lambda \langle P_2, P_3 \rangle \rangle = \lambda \langle \lambda \langle P_1, P_2 \rangle, P_3 \rangle$; $P_j : \Omega \times \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ denota a la j -ésima proyección, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Por lo anterior, $B \wedge C$ es el ínfimo de B y C.

Como Ω es el coproducto de $1 \xrightarrow{v} \Omega$ y $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$ se tiene que $\neg \neg = 1_\Omega$. Esta observación permite definir un nuevo operador $v : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, de la siguiente manera:

$$v = \neg \lambda (\neg \times \neg).$$

V cumple las siguientes condiciones:

$$V.1)- \quad V \langle 1_{\Omega}, 1_{\Omega} \rangle = 1_{\Omega}$$

Demostración

$$V \langle 1_{\Omega}, 1_{\Omega} \rangle = \bigwedge \langle \bigvee, \bigvee \rangle = \bigvee (\bigvee) = 1_{\Omega}, \text{ por } \wedge.1.$$

$$V.2)- \quad V \langle P_2, P_1 \rangle = V$$

Demostración

$$\begin{aligned} V \langle P_2, P_1 \rangle &= \bigwedge \langle \bigvee \times \bigvee \rangle \langle P_2, P_1 \rangle = \bigwedge \langle \bigvee P_2, \bigvee P_1 \rangle = \\ &= \bigwedge \langle P_2, P_1 \rangle \langle \bigvee P_2, \bigvee P_1 \rangle = \bigwedge \langle \bigvee P_1, \bigvee P_2 \rangle = \\ &= \bigwedge \langle \bigvee \times \bigvee \rangle \langle P_1, P_2 \rangle = V \langle P_1, P_2 \rangle = V; \text{ por } \wedge.2 \end{aligned}$$

$$V.3)- \quad V \langle V \langle P_1, P_2 \rangle, P_3 \rangle = V \langle P_1, V \langle P_2, P_3 \rangle \rangle$$

Demostración

$$\begin{aligned} V \langle V \langle P_1, P_2 \rangle, P_3 \rangle &= V \langle \bigwedge \langle \bigvee P_1, \bigvee P_2 \rangle, P_3 \rangle = \\ &= \bigwedge \langle \bigwedge \langle \bigvee P_1, \bigvee P_2 \rangle, \bigvee P_3 \rangle = \\ &= \bigwedge \langle \bigvee P_1, \bigwedge \langle \bigvee P_2, \bigvee P_3 \rangle \rangle = \\ &= V \langle P_1, \bigwedge \langle \bigvee P_2, \bigvee P_3 \rangle \rangle = \\ &= V \langle P_1, V \langle P_2, P_3 \rangle \rangle; \text{ por } \wedge.3 \end{aligned}$$

$$V.4)- \quad \text{Si } B, C \in \text{Sub}(A) \text{ entonces } \bigwedge \langle X_B, V \langle X_B, X_C \rangle \rangle = X_B \text{ y además}$$
$$V \langle X_B, \bigwedge \langle X_B, X_C \rangle \rangle = X_B.$$

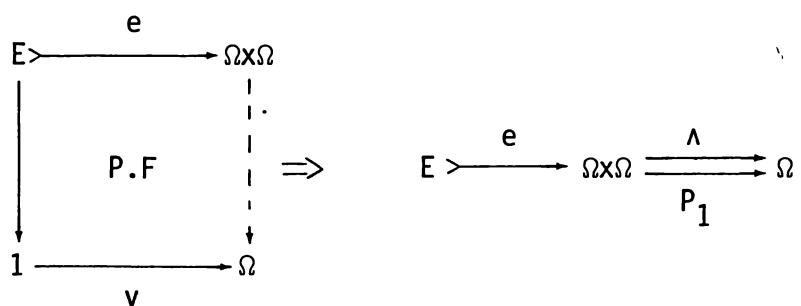
Demostración

$\wedge \langle X_B, \vee \langle X_B, X_C \rangle \rangle = \wedge \langle X_B, \neg \wedge \langle \neg X_B, \neg X_C \rangle \rangle$; Por lo anterior,
 $\wedge \langle \neg X_B, \neg X_C \rangle \leq \neg X_B$ entonces $\neg (\neg X_B) \leq \neg \wedge \langle \neg X_B, \neg X_C \rangle$; esto es
 $X_B \leq \neg \wedge \langle \neg X_B, \neg X_C \rangle$; $\therefore \wedge \langle X_B, \vee \langle X_B, X_C \rangle \rangle = X_B$.

Por último, $\vee \langle X_B, \wedge \langle X_B, X_C \rangle \rangle = \neg \wedge \langle \neg X_B, \neg \wedge \langle X_B, X_C \rangle \rangle$ al ser
 $\wedge \langle X_B, X_C \rangle$ el ínfimo de X_B y X_C se tiene que $\wedge \langle X_B, X_C \rangle \leq X_B$ en consecuencia
 $\neg X_B \leq \neg \wedge \langle X_B, X_C \rangle$; $\therefore \wedge \langle \neg X_B, \neg \wedge \langle X_B, X_C \rangle \rangle = \neg X_B$.

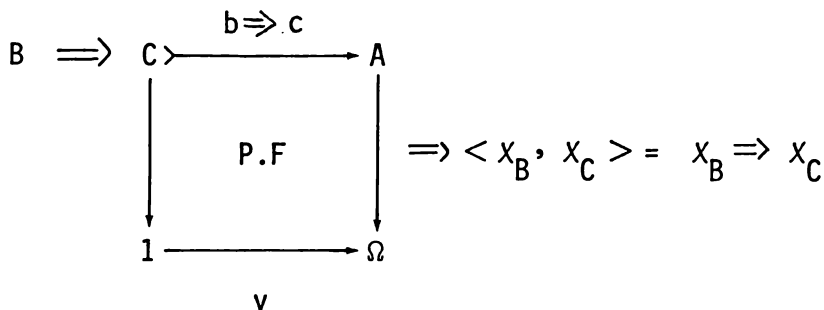
Un resultado elemental¹, afirma que $\text{Sub}(A)$ es una retícula donde $\wedge \langle X_B, X_C \rangle$,
 $\vee \langle X_B, X_C \rangle$ son el ínfimo y el supremo de X_B, X_C respectivamente.

Para probar que $\text{Sub}(A)$ es un álgebra de Boole, basta ver que se le puede inducir
 una estructura de álgebra de Heyting. Para hacer esto último se necesita definir
 un nuevo operador $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, llamado el "operador pseudocomplemento";
 Si (E, e) es el igualador de \wedge y $P_1 : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, entonces $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$
 es el morfismo característico de E .



¹ Véase por ejemplo, [B.M.], páginas 473-475.

Si $B, C \in \text{Sub}(A)$, se define el pseudo complemento de B relativo a C , como el subobjeto de A cuyo morfismo característico es $\Rightarrow \langle X_B, X_C \rangle$.

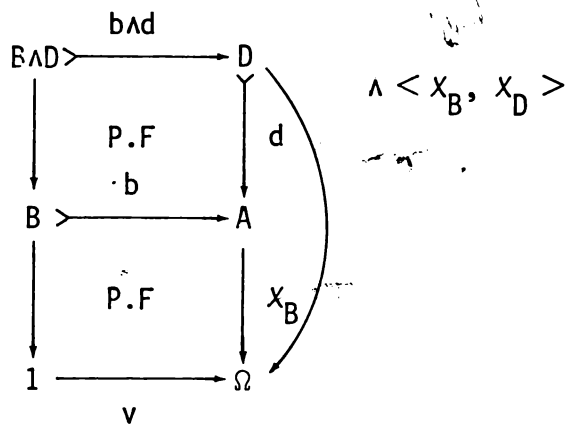
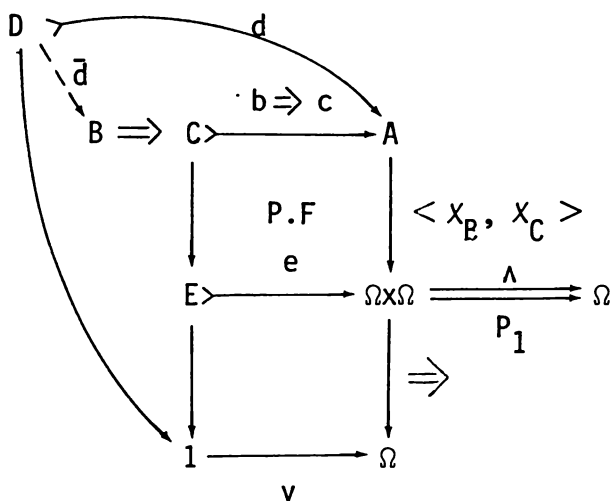


$B \Rightarrow C$ satisface las siguientes condiciones:

$\Rightarrow .1)$ - Si $B, C, D \in \text{Sub}(A)$ entonces $\wedge \langle X_D, X_B \Rightarrow X_C \rangle = X_D$ sii $\wedge \langle \wedge \langle X_D, X_B \rangle, X_C \rangle = \wedge \langle X_D, X_B \rangle$

Demostración

$\Rightarrow)$ - Supóngase que $\wedge \langle X_D, X_B \Rightarrow X_C \rangle = X_D$. Considérense los siguientes diagramas



Como D se factoriza a través de $B \implies C$ entonces el morfismo $\wedge \langle X_B^d, X_C^d \rangle$ es igual a X_B^d . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \wedge \langle \wedge \langle X_D, X_B \rangle, X_C \rangle &= \wedge \langle \wedge \langle X_B^d, X_C^d \rangle, X_C \rangle = \\ &= \wedge \langle X_B^d, \wedge \langle X_C^d, X_C \rangle \rangle = \wedge \langle X_B^d, X_C^d \rangle = X_B^d \\ &= \wedge \langle X_B, X_D \rangle. \end{aligned}$$

\Leftarrow)- Recíprocamente, si $\wedge \langle \wedge \langle X_D, X_B \rangle, X_C \rangle = \wedge \langle X_D, X_B \rangle$ entonces

$$\begin{aligned} \wedge \langle X_B^d, X_C^d \rangle &= \wedge \langle \wedge \langle X_B, X_D \rangle, \wedge \langle X_C, X_D \rangle \rangle = \\ &= \wedge \langle \wedge \langle \wedge \langle X_B, X_D \rangle, X_C \rangle, X_D \rangle = \wedge \langle \wedge \langle X_D, X_B \rangle, X_D \rangle = \\ &= \wedge \langle X_D, X_B \rangle = X_B^d \end{aligned}$$

Por lo tanto d se factoriza a través de $B \implies C$; en particular,

$$\wedge \langle X_D, X_B \rangle \implies X_C \rangle = X_D$$

$$\implies .2)- \wedge \langle X_B, X_C \rangle = X_B \text{ sii } X_B \implies X_C = v_A, \text{ donde } v_A = A \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{v} \Omega.$$

Demostración

\implies)- Si $\wedge \langle X_B, X_C \rangle = X_B$ entonces, para todo elemento D en $\text{Sub}(A)$ se tiene que $\wedge \langle X_D, X_B \rangle \implies X_C \rangle = X_D$ puesto que $\wedge \langle \wedge \langle X_D, X_B \rangle, X_C \rangle$ es igual a $\wedge \langle X_D, \wedge \langle X_B, X_C \rangle \rangle = \wedge \langle X_D, X_B \rangle$. En consecuencia $X_B \implies X_C = v_A$.

\Leftarrow)- Inmediato por $\Pi. 1$.

Esto demuestra que $\text{Sub}(A)$ es un álgebra de Heyting. Es bien sabido¹, que toda

¹ Véase por ejemplo [R.-S.], I 12.1 y I 12.2

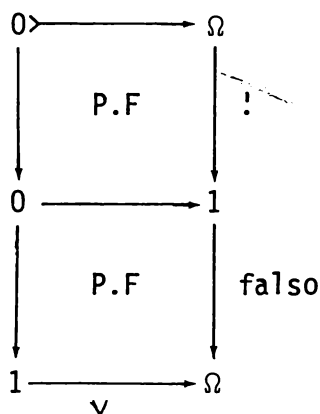
álgebra de Heyting es distributiva. Ahora bien, para probar, finalmente, que $\text{Sub}(A)$ es un álgebra de Boole, sólo es necesario hacer notar que todo elemento B de $\text{Sub}(A)$ tiene complemento. Para esto se probarán dos resultados:

$$\text{B.1)- } \wedge < 1_\Omega, \top > = \text{falso}_\Omega; \text{ donde } \text{falso}_\Omega = \Omega \longrightarrow 1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$$

$$\text{B.2)- } \vee < 1_\Omega, \top > = \vee_\Omega$$

Demostración

B.1 es inmediato, al ser 0 un objeto inicial estricto y el siguiente diagrama, un producto fibrado.



$$\text{B.2 se obtiene de B.1 ya que } \vee < 1_\Omega, \top > = \top \wedge < \top, \top^2 > = \top \wedge < \top, 1_\Omega > = \top \text{ falso}_\Omega = \vee_\Omega$$

Si se define $\top B$ como el subobjeto clasificado por $\top X_B$ entonces por B.1 y B.2 se obtienen las siguientes identidades:

$$\text{C.1)- } \wedge < X_B, \top X_B > = \text{falso}_B$$

$$\text{C.2)- } \vee < X_B, \top X_B > = \vee_B$$

Esto demuestra de $\text{Sub}(A)$ es un álgebra de Boole. Se puede demostrar fácilmente que si $B, C \in \text{Sub}(A)$ entonces $X_B \implies X_C = \bigvee \langle \bigwedge X_B, X_C \rangle$, usando $\Pi.1$ y la distributividad de $\text{Sub}(A)$.

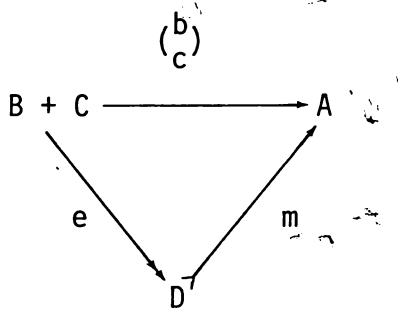
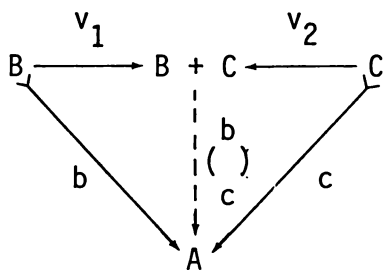
Esta proposición permite afirmar que \underline{C} tiene una lógica clásica. A pesar de que \underline{C} no posee, en general, coproductos finitos, se verá más adelante, que algunos coproductos si existen. Es bien sabido, que el coproducto de monomorfismos no necesariamente, es un monomorfismo. Sin embargo, al ser \underline{C} una categoría (epimorfismos, monomorfismos) -factorizable, todo \underline{C} -morfismo puede factorizarse a través de un monomorfismo. Si B, C son subobjetos de un objeto A tales que su coproducto $B + C$ existe en \underline{C} , sería interesante saber si el subobjeto de A , que se obtiene al tomar la (epimorfismos, monomorfismos)-factorización del \underline{C} -morfismo $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} : B + C \longrightarrow A$ es el supremo de B y C . El siguiente lema aclara esta pregunta.

2.22 Lema

Si $B, C \in \text{Sub}(A)$ y $B + C$ existe entonces la imagen de $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} : B + C \longrightarrow A$ es el supremo de B y C en A .

Demostración

Considérense los siguientes diagramas



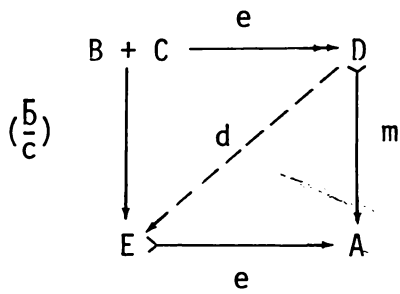
Entonces es claro que $B, C \leq D$ puesto que, por ejemplo, $b = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} v_1 = mev_1$.

Si E es un subobjeto de A tal que $E \geq B, C$ entonces existen morfismos \bar{b}, \bar{c} que hacen conmutar los siguientes diagramas



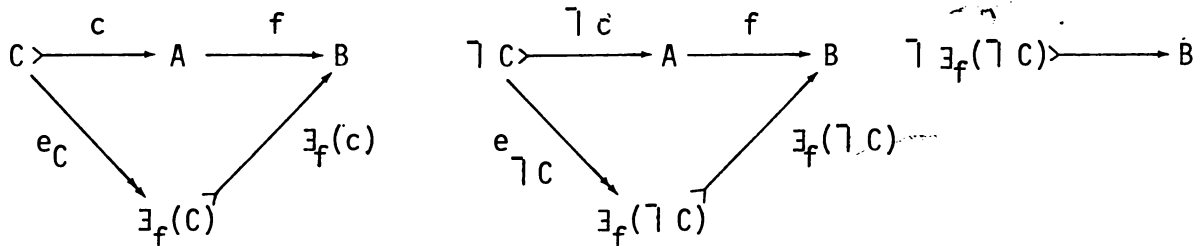
Al ser $B + C$ un coproducto existe $(\frac{\bar{b}}{\bar{c}}): B + C \longrightarrow E$ tal que

$(\frac{\bar{b}}{\bar{c}}) v_1 = \bar{b}, (\frac{\bar{b}}{\bar{c}}) v_2 = \bar{c}$. En consecuencia, el siguiente cuadrado es conmutativo



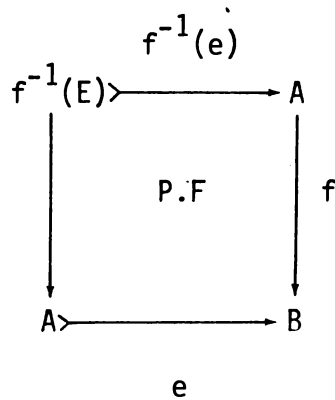
Por la propiedad de diagonalización, existe un único morfismo $d: D \longrightarrow E$ que hace conmutativos los triángulos correspondientes; en particular, $ed = m$; esto es, $D \leq E$. Por lo tanto D es el supremo de B y C .

Para tener toda la lógica necesaria en \underline{C} , se necesita poder "cuantificar existencial y universalmente", a través de monomorfismos. Es decir, si $f: A \longrightarrow B$ es un \underline{C} -morfismo y $C \xrightarrow{c} A$ es un monomorfismo entonces $\exists_f(C)$ es la imagen de la composición fc y $\forall_f(C)$ es el subobjeto $\neg \exists_f(\neg C)$.



2.23 Proposición

Si $f: A \longrightarrow B$ es un \underline{C} -morfismo entonces el funtor $f^{-1}: \text{Sub}(B) \longrightarrow \text{Sub}(A)$ definido por el cuadrado

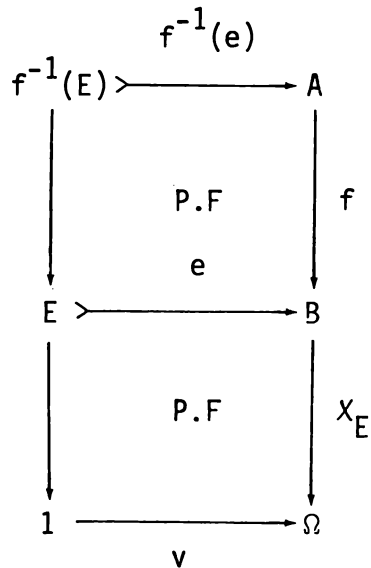


tiene un adjunto izquierdo $\exists_f: \text{Sub}(A) \longrightarrow \text{Sub}(B)$ y un adjunto derecho

$\forall_f: \text{Sub}(A) \longrightarrow \text{Sub}(B)$. f^{-1} es un funtor de álgebras de Boole.

Demostración

Es claro que $f^{-1}: \text{Sub}(B) \longrightarrow \text{Sub}(A)$ es un funtor. La observación más importante en esta demostración es que si $E \in \text{Sub}(B)$, el morfismo característico de $f^{-1}(E)$ es $X_E f$, como lo demuestra el siguiente producto fibrado:



$$X_{f^{-1}(E)} = X_E f$$

$$f^{-1} \text{ preserva complementos puesto que } X_{\bigcap f^{-1}(E)} = \bigcap X_{f^{-1}(E)} = \bigcap X_E f = \\ = X_{\bigcap E} f = X_{f^{-1}(\bigcap E)}$$

$$f^{-1} \text{ preserva ínfimos: } X_{f^{-1}(E \wedge F)} = X_{E \wedge F} f = \wedge \langle X_E, X_F \rangle f = \wedge \langle X_E f, X_F f \rangle = \\ = \wedge \langle X_{f^{-1}(E)}, X_{f^{-1}(F)} \rangle = X_{f^{-1}(E) \wedge f^{-1}(F)}$$

$$f^{-1} \text{ preserva supremos: } X_{f^{-1}(A \vee B)} = X_{A \vee B} f = \vee \langle X_A, X_B \rangle f = \vee \langle X_A f, X_B f \rangle = \\ = \vee \langle X_{f^{-1}(A)}, X_{f^{-1}(B)} \rangle = X_{f^{-1}(A) \vee f^{-1}(B)}$$

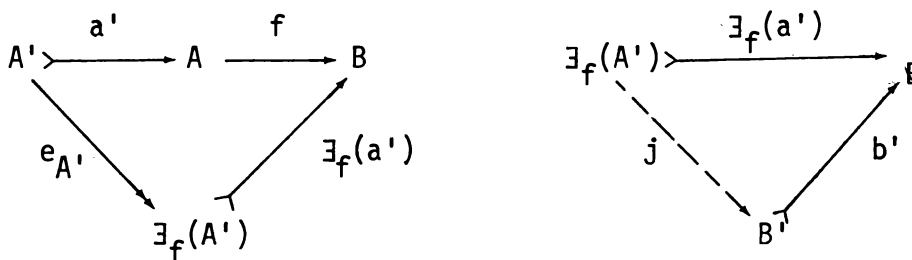
Para la propiedad de diagonalización $\exists_f: \text{Sub}(A) \longrightarrow \text{Sub}(B)$ es un funtor.

Para probar la adjunción, se demostrará:

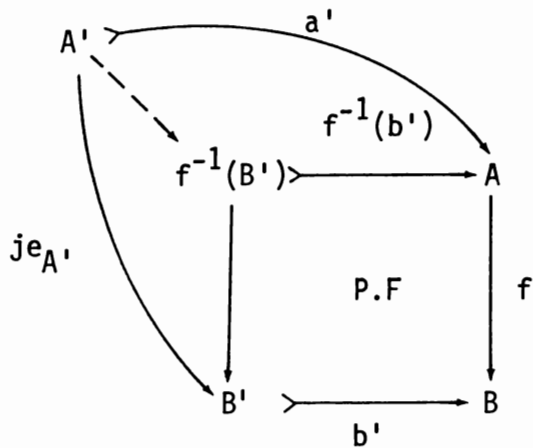
$$\exists_f) \cdot \exists_f(A') \leq B' \text{ sii } A' \leq f^{-1}(B')$$

Demostración

Supóngase que $\exists_f(A') \leq B'$; se tienen diagramas de la forma:

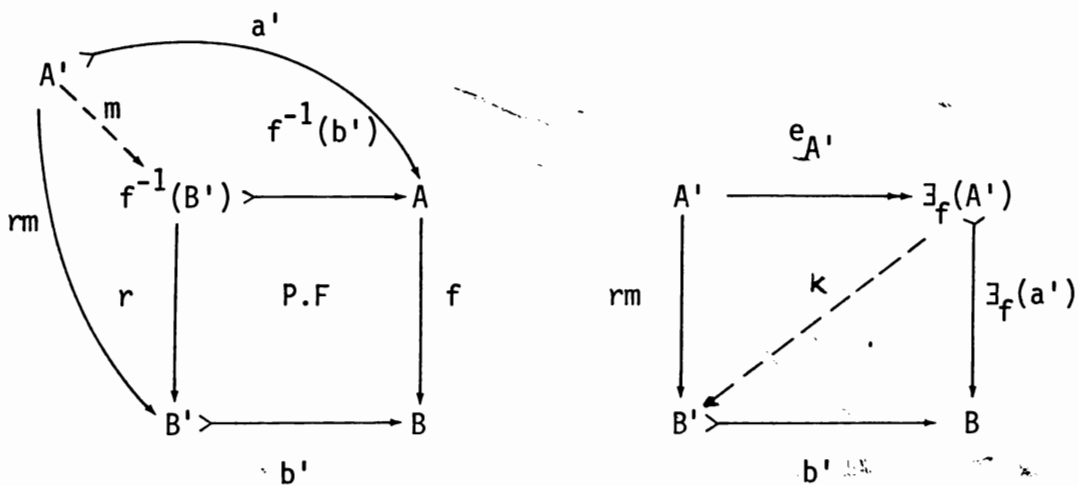


En consecuencia, el diagrama exterior del cuadrado



es conmutativo; por lo tanto, $A' \leq f^{-1}(B')$

Recíprocamente, si $A' \leq f^{-1}(B')$ entonces la propiedad de diagonalización asegura un morfismo $k: \exists_f(A') \longrightarrow B'$ que hace conmutativo el diagrama:



$$\therefore \exists_f(A') \leq B'$$

Por último, la adjunción $f^{-1} \dashv \forall_f$ es consecuencia inmediata de la anterior.

$$\forall_f)- B' \leq \forall_f(A') \text{ sii } f^{-1}(B') \leq A'$$

Demostración

$$B' \leq \exists_f(\exists A') \text{ sii } \exists_f(\exists A') \leq \exists B' \text{ sii } \exists A' \leq f^{-1}(\exists B') = \exists f^{-1}(B') \text{ sii } f^{-1}(B') \leq A'.$$

Una consecuencia inmediata de esta proposición es la siguiente observación.

2.24 Si $f: A \longrightarrow B$ es un \underline{C} -morfismo y $A' \longrightarrow A$ es un subobjeto de A entonces $\forall_f(A') \simeq B \implies A' \simeq A$

Los resultados anteriores demuestran que a pesar de no ser \underline{C} , cartesianamente cerrada, se puede definir una lógica clásica, junto con cuantificadores existenciales y universales, que satisfacen propiedades análogas a las que cumplen los topos elementales. Con este comentario se termina esta sección. La próxima etapa es ver qué propiedades aritméticas tiene \underline{C} .

2.3 Aritmética en \underline{C}

2.31 Recursión Primitiva

La condición $\underline{C}.8$ de 2.11, permite probar el esquema de recursión primitiva usual; esto es, si $f: A \longrightarrow B$, $g: A \times N \times B \longrightarrow B$ son \underline{C} -morfismos entonces existe un único \underline{C} -morfismo $h: A \times N \longrightarrow B$ que hace conmutativo los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 & & \langle 1_A, 0_A \rangle \\
 & \nearrow & \\
 A & & A \times N \\
 & \searrow & \downarrow h \\
 & & B
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & 1_{A \times N} \\
 & \nearrow & \\
 A \times N & \xrightarrow{\quad} & A \times N \\
 \downarrow h & & \downarrow h \\
 A \times N \times B & \xrightarrow{\quad} & B \\
 & & g
 \end{array}$$

Demostración

Considérense los morfismos $\langle 1_A, 0_A, f \rangle : A \longrightarrow A \times N \times B$

$\langle P_A, P_N, g \rangle : A \times N \times B \longrightarrow A \times N \times B$; Por C.8 existe un único morfismo $h' :$

$A \times N \longrightarrow A \times N \times B$ que cumple las relaciones

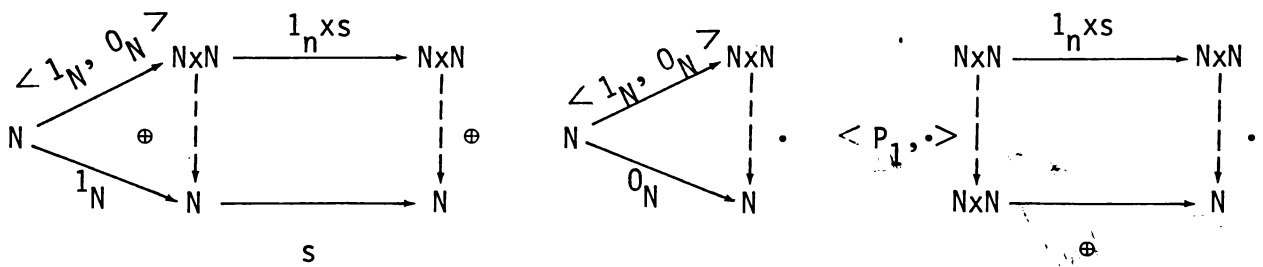
$$h' \langle 1_A, 0_A \rangle = \langle 1_A, 0_A, f \rangle ; \quad h'(1_A \times s) = \langle P_A, P_N, g \rangle h'.$$

Sea $h = P_B h'$; un cálculo sencillo demuestra las identidades deseadas. La unicidad es consecuencia inmediata de la unicidad de h' .

Esta observación, también aparece en [Pe-et.al]; algunos de los resultados que se mencionarán aquí, están contenidos en el artículo mencionado. Sin embargo, el desarrollo de la C-aritmética de este trabajo es original.

2.32 Propiedades Elementales

Una aplicación de 2.31, es la existencia de morfismos $\oplus : N \times N \longrightarrow N$,
 $\cdot : N \times N \longrightarrow N$, definidos como en Set.



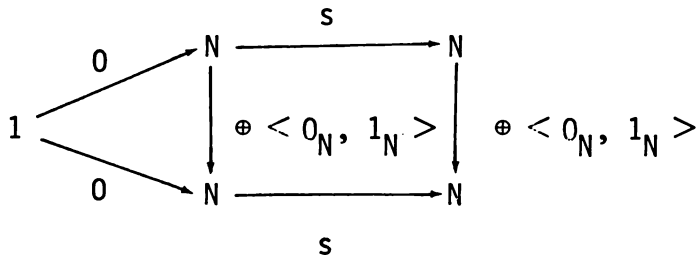
\oplus y \cdot satisfacen las siguientes propiedades. Algunas de ellas son bastante sencillas y no se demostrarán

⊕.1).- $\oplus \langle 0, 0 \rangle = 0$

⊕.2).- $\oplus \langle 0_N, 1_N \rangle = 1_N$

Demostración

Considérese el diagrama

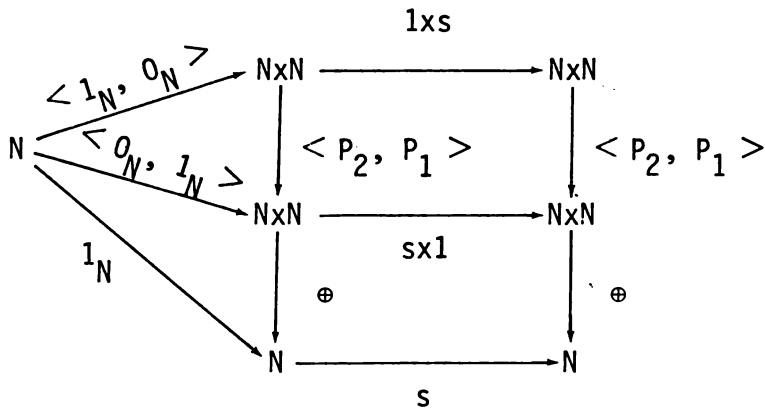


entonces $\oplus \langle 0_N, s \rangle = \oplus (1 \times s) \langle 0_N, 1_N \rangle = s \oplus \langle 0_N, 1_N \rangle$

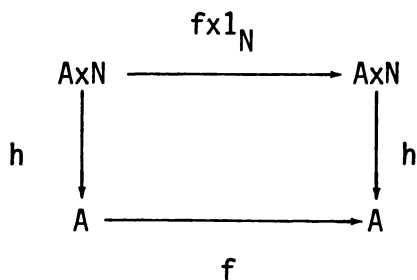
Por la unicidad $\oplus \langle 0_N, 1_N \rangle = 1_N$

⊕.3).- $\oplus \langle p_2, p_1 \rangle = \oplus$

Esta identidad se demuestra con el siguiente diagrama

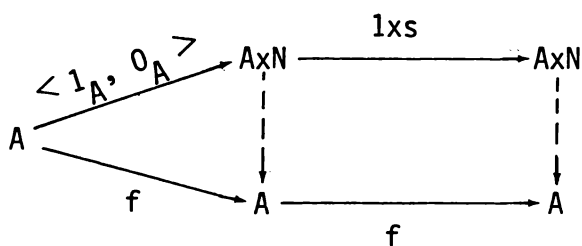


Basta demostrar que el rectángulo inferior es conmutativo. Esto último es un caso particular de una situación más general. Si $h: A \times N \longrightarrow A$ es un morfismo que se obtiene por recursión primitiva de $1_A: A \longrightarrow A$ y $f: A \longrightarrow A$ entonces el cuadrado



es conmutativo

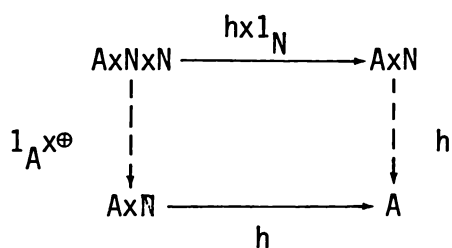
En efecto, es fácil ver que $h(fx1_N)$ y fh , hacen conmutativo el diagrama



Por lo tanto, $\oplus \langle P_2, P_1 \rangle = \oplus$

⊕.4).- $\oplus \langle P_1, \oplus \langle P_2, P_3 \rangle \rangle = \oplus \langle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle, P_3 \rangle$

Esta identidad, se obtiene de la conmutatividad del cuadrado



donde $h: AxN \longrightarrow A$ es un morfismo que se obtuvo por recursión primitiva, como en el caso anterior.

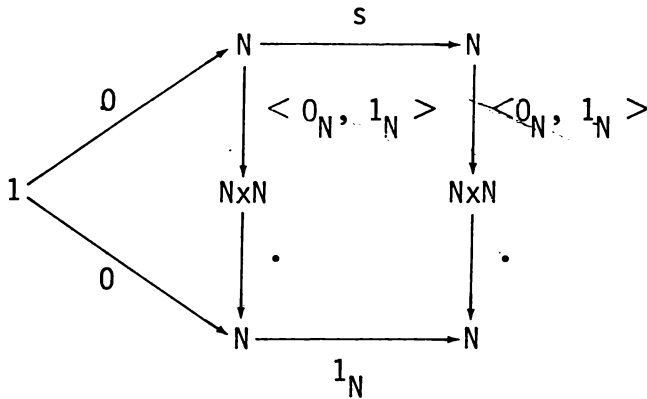
Las propiedades respectivas para el producto, $\cdot: N \times N \longrightarrow N$, son más complicadas de probar. Ninguna de ellas, es conceptualmente difícil; el problema radica en que la longitud de sus demostraciones es bastante grande. A pesar de esto, se tratará de dar un camino sencillo para comprobarlas.

•.1).- $\cdot \langle 0, 0 \rangle = 0$

•.2).- $\cdot \langle 0_N, 1_N \rangle = 0_N$

Demostración

Inmediata por la conmutatividad del diagrama



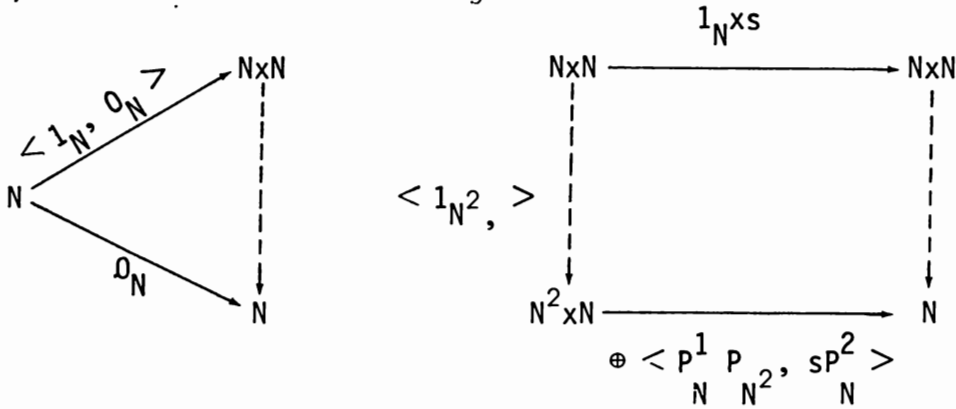
y •.3.

•.3).- $\cdot \langle P_2, P_1 \rangle = \cdot$

Demostración

La idea es probar que $\cdot \langle P_2, P_1 \rangle : N \times N \longrightarrow N$ satisface las identidades que definen a \cdot . Para esto último, es suficiente probar que $\oplus \langle P_2, \cdot \rangle$ es igual a $\cdot(sx1)$, tal afirmación se comprueba al verificar que $\oplus \langle P_2, \cdot \rangle$ y

•(sx1) hacen conmutativos los diagramas

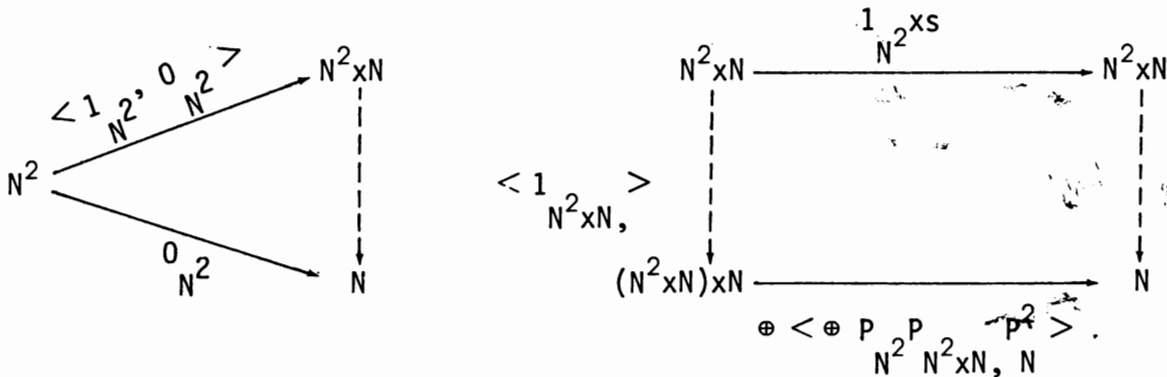


Para demostrar la asociatividad del producto, se comprobará primero que las operaciones \cdot y \oplus se distribuyen; esto es,

$$\oplus \cdot \langle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle, P_3 \rangle = \oplus \langle \cdot \langle P_1, P_3 \rangle, \cdot \langle P_2, P_3 \rangle \rangle.$$

Demostración

Como en el caso anterior, se comprueba fácilmente que los morfismos $\cdot \langle \oplus \langle P_1, P_2 \rangle, P_3 \rangle \alpha : N^2 x N \longrightarrow N$ y $\oplus \langle \cdot \langle P_1, P_3 \rangle, \cdot \langle P_2, P_3 \rangle \rangle \alpha$, hacen conmutativo los diagramas.

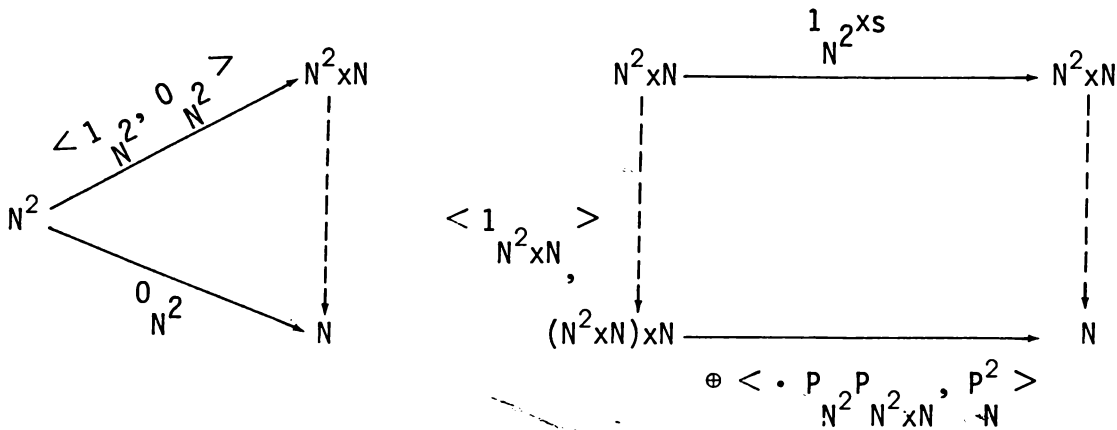


donde $\alpha^{-1} : N x N x N \longrightarrow N^2 x N$ es el cambio de coordenadas usual.

$$\cdot \cdot 4) \cdot \cdot \langle P_1, \cdot \langle P_2, P_3 \rangle \rangle = \cdot \langle \cdot \langle P_1, P_2 \rangle, P_3 \rangle$$

Demostración

Inmediata al comprobar, de nuevo que $\cdot \langle P_1, \cdot \langle P_2, P_3 \rangle \rangle \alpha : N^2 \times N \longrightarrow N$ y $\cdot \langle \cdot \langle P_1, P_2 \rangle, P_3 \rangle \alpha$ hacen conmutativo el diagrama



α es el mismo morfismo del inciso anterior.

Se pueden resumir los resultados anteriores con la siguiente afirmación.

2.33 Proposición

N junto con las operaciones definidas en 2.32, forman un semianillo conmutativo con uno.

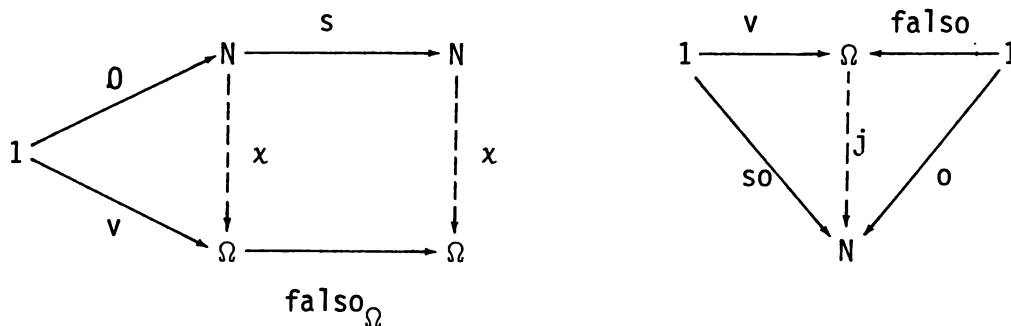
Es bien conocido, [J], que un objeto de números naturales en un topos satisface los postulados de Peano. Se verá que en esta situación también se verifican tales postulados. Antes de esto, se probará que Ω es un subobjeto de N .

2.34 Proposición

Ω es un subobjeto de N

Demostración

Considérense los siguientes diagramas



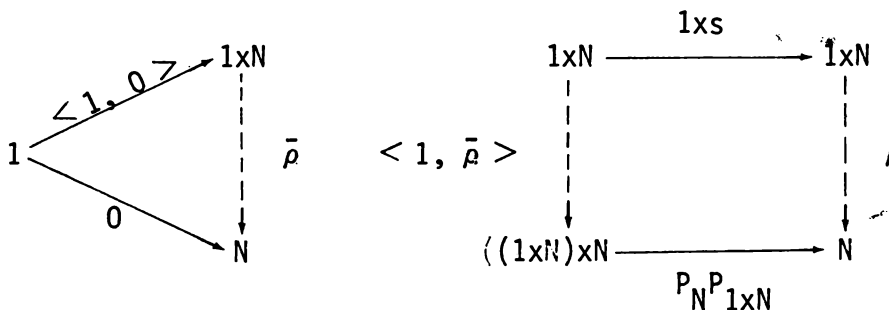
Es claro que $w = xj: \Omega \longrightarrow \Omega$ es un isomorfismo, al verificarse la siguiente igualdad: $w = \begin{pmatrix} \text{falso} \\ v \end{pmatrix}$

En efecto, $wv = xjv = xso = \text{falso}_{\Omega} \cdot x_o = \text{falso}_{\Omega} \cdot v = \text{falso}$

$$w \text{ falso} = xj \text{ falso} = x_o = v$$

en consecuencia $w^2 = 1_{\Omega}$: en particular, j es un monomorfismo.

Para probar el primer postulado de Peano, se necesita definir el morfismo predecesor $\rho: N \longrightarrow N$. Dicho morfismo está definido por el siguiente diagrama

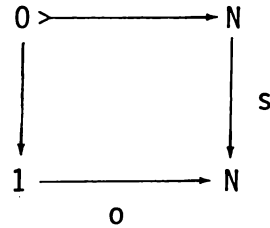


$\rho = \rho \langle 1_N, 1_N \rangle: N \longrightarrow N$; es fácil ver que ρ cumple: $\rho o = 0$ y $\rho s = 1_N$.

Esto permite afirmar que s es un monomorfismo. En particular, se tienen los postulados de Peano.

2.35 Proposición (postulados de Peano)

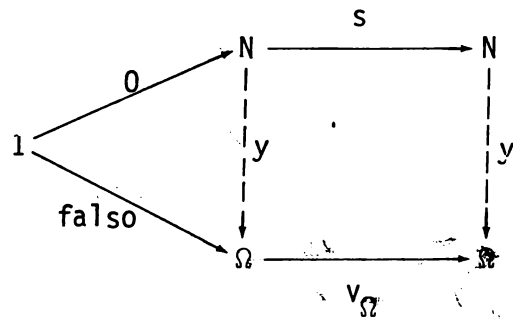
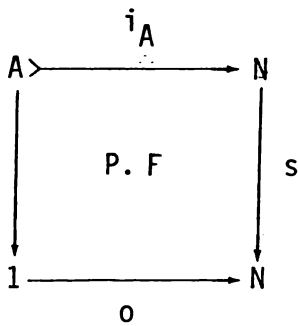
P.1).- El cuadrado



es un producto fibrado.

Demostración

Considérense los siguientes diagramas



Un cálculo sencillo demuestra que $\text{falso}_A = y \circ o_A = y \circ s \circ i_A = v_{\Omega} \circ y \circ i_A = v_A$; lo cual implica que A es isomorfo a 0 .

P.2).- s es un monomorfismo.

P.3).- N satisface el principio de inducción; es decir, si $A \xrightarrow{a} N$ es un subobjeto de N que cumple.

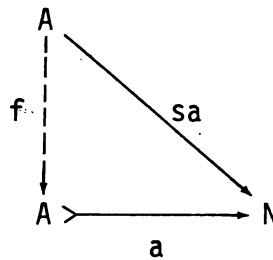
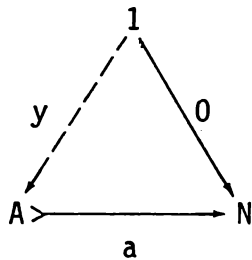
a).- $0 \in a$

b).- $sa \subseteq a$

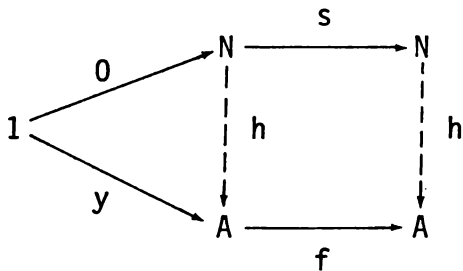
entonces $A \cong N$.

Demostración

Por hipótesis se tienen diagramas de la forma:



Al ser N un objeto de números naturales, existe $N \xrightarrow{h} A$ que hace conmutativo el diagrama:

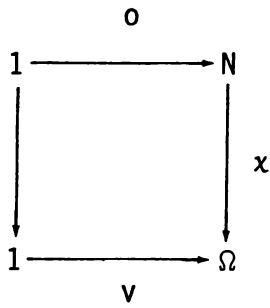


entonces es claro que $ah: N \rightarrow N$ satisface: $aho = o$, $ahs = sah$, por lo tanto, $ah = 1_N$ y $A \cong N$.

Hay algunas observaciones interesantes de 2.34 y 2.35

2.35.1 Lema

El cuadrado



es un producto fibrado.

Demostración

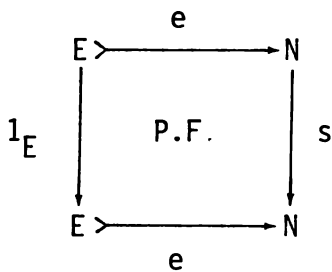
La idea es probar que si $y: N \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de $1 \xrightarrow{0} N$ entonces y satisface también la definición de x (2.24). Esto último es inmediato por 2.21. B.1, 2.35. P.1:

2.35.2 Proposición

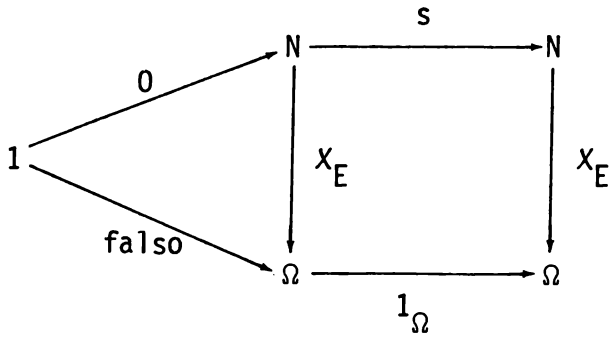
El igualador de $N \begin{array}{c} \xrightarrow{1_N} \\ \xrightarrow{s} \end{array} N$ es $0 \xrightarrow{\quad} N$.

Demostración

Si $E \xrightarrow{e} N$ es el igualador de $N \begin{array}{c} \xrightarrow{1_N} \\ \xrightarrow{s} \end{array} N$ entonces, es obvio que el cuadrado



es un producto fibrado. Si X_E denota al morfismo característico de E , por 2.35.P.1, $X_E 0 = \text{falso}$. Además, como el cuadrado anterior es un producto fibrado, $sX_E = X_E$. Esto dice que $X_E: N \longrightarrow \Omega$ hace conmutativo el diagrama



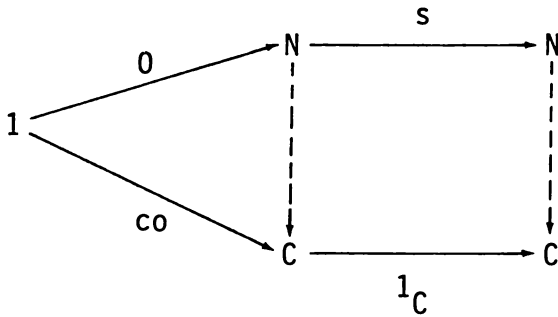
en consecuencia, $X_E = \text{falso}_N$

2.35.3 Proposición

El coigualador de $N \begin{matrix} \xrightarrow{1_N} \\ \xrightarrow{s} \end{matrix} N$ es $N \longrightarrow 1$

Demostración

Si $c: N \longrightarrow C$ es tal que $cs = c$ entonces es fácil ver que c y el morfismo $\text{co}_N: N \longrightarrow C$ hacen conmutativo el diagrama



Una última observación, la recursión primitiva permite afirmar que ciertos objetos tienen coproductos¹, esto queda resumido con:

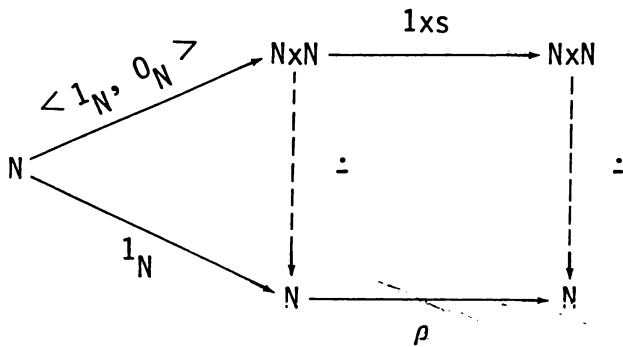
¹ Este resultado también se hizo notar en [P_e-et. al]

2.35.4 Proposición

Para todo objeto A , el diagrama $A \xrightarrow{\langle 1_A, 0_A \rangle} A \times N \xleftarrow{1_A \times s} A \times N$ es un coproducto; en particular, $1 \xrightarrow{0} N \xleftarrow{s} N$ es un coproducto.

Para finalizar este pequeño desarrollo de la \underline{C} -aritmética, se introducirá el \underline{C} -morfismo diferencia. Dicho morfismo está definido por recursión primitiva de

$N \xrightarrow{1_N} N$ y $\rho: N \longrightarrow N$; donde ρ es el morfismo predecesor.



En el caso de Set , este morfismo permite definir un predicado de igualdad entre los Set -morfismos de codominio N ; es decir, si $f, g: A \longrightarrow N$ son dos Set -morfismos entonces $f = g$ sii $(f \dot{-} g) + (g \dot{-} f)$ es el Set -morfismo 0_A .

Es evidente que para probar una afirmación análoga en \underline{C} se necesitan conocer algunas propiedades del \underline{C} -morfismo diferencia.

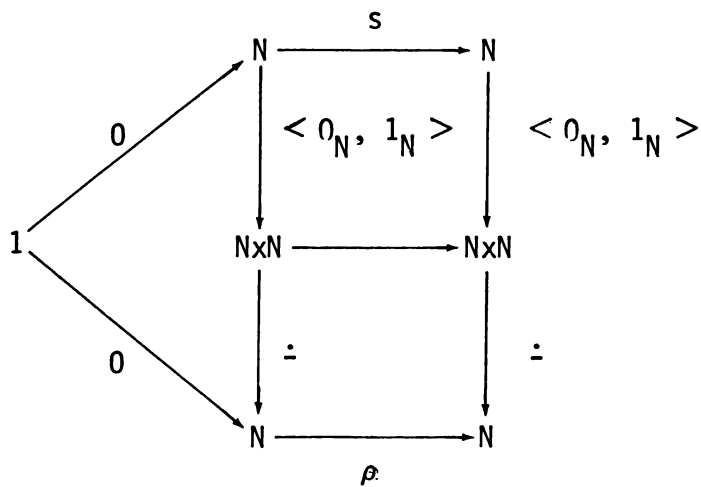
2.36 Propiedades de $\dot{=}$

$\dot{=}.1).$ - $\dot{=} \langle 0, 0 \rangle = 0$

$\dot{=}.2).$ - $\dot{=} \langle 0_N, 1_N \rangle = 0_N$

Demostración

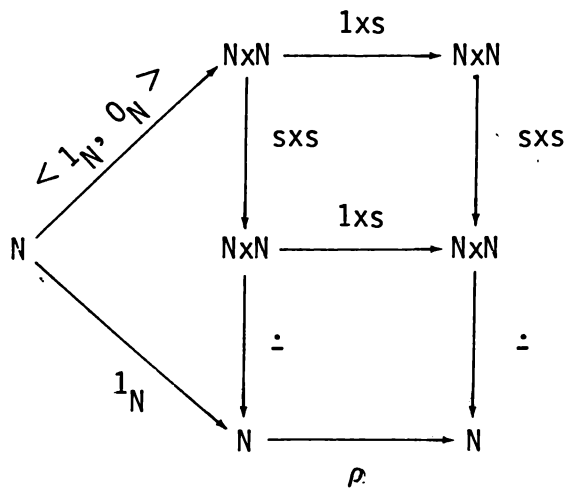
Inmediata para la conmutatividad del diagrama.



$\therefore 3).$ - $\therefore (sxs) = \therefore$

Demostración

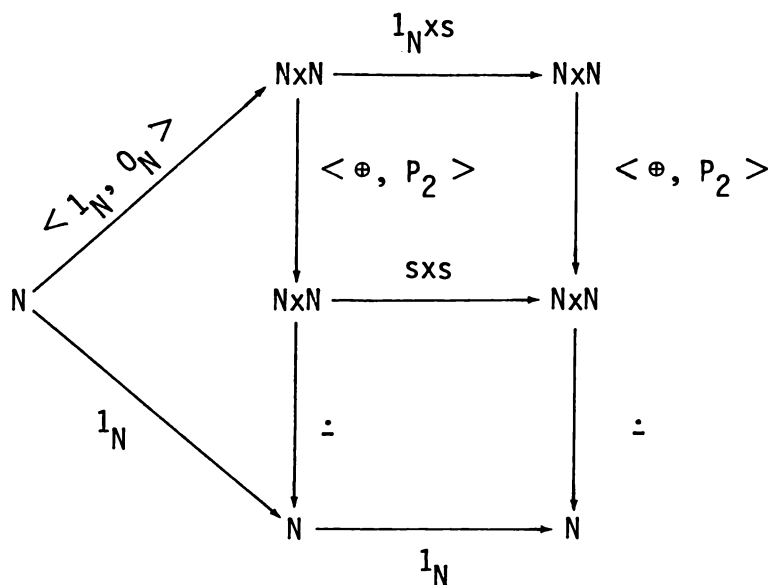
Considérese el siguiente diagrama



$\therefore 3).$ - $\therefore \langle \oplus, P_2 \rangle = P_1$ y $\therefore \langle \oplus, P_1 \rangle = P_2$

Demostración

La segunda afirmación es consecuencia inmediata de la conmutatividad de \oplus . Para la primera afirmación basta tomar en cuenta el diagrama siguiente.

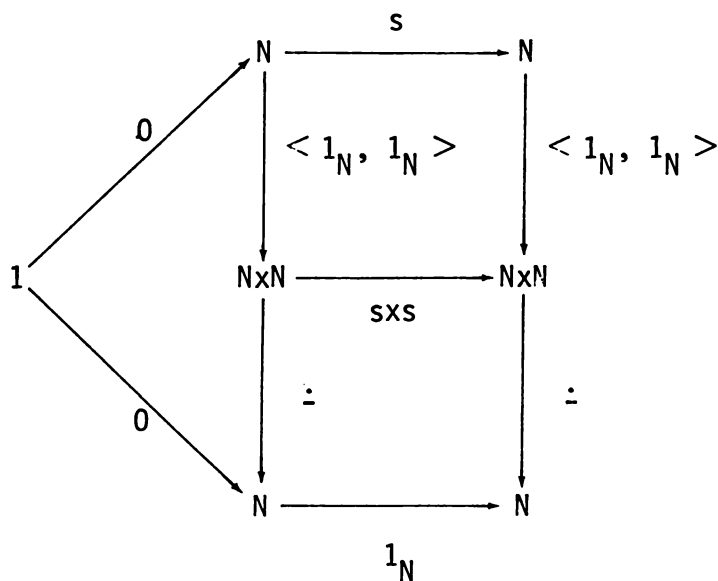


es claro que $P_1: N \times N \longrightarrow N$ también lo hace conmutativo.

$\therefore 5).- \quad \vdots \quad \langle 1_N, 1_N \rangle = 0_N$

Demostración

El diagrama

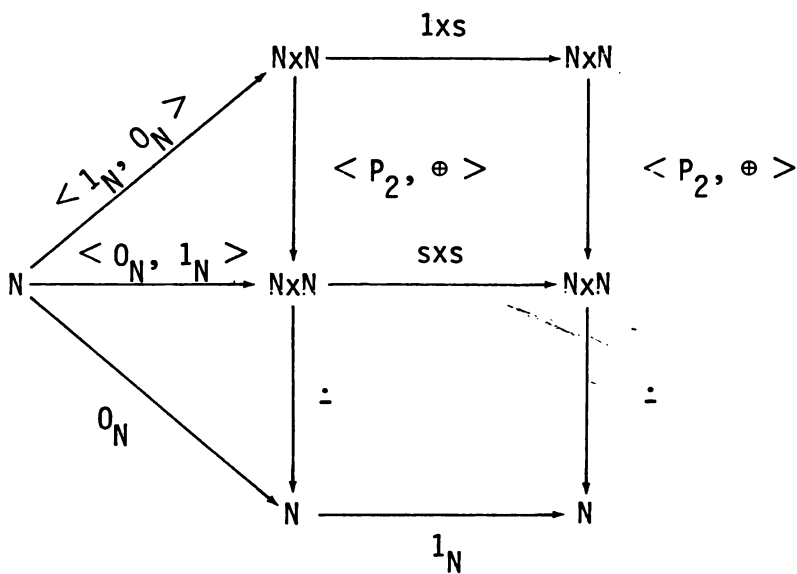


prueba la afirmación.

$$\therefore 6).- \quad \text{si } \langle P_2, \oplus \rangle = 0_{N \times N} \text{ y } \text{si } \langle P_1, \oplus \rangle = 0_{N \times N}$$

Demostración

De nuevo, estas igualdades se obtienen de:



$$\therefore 7).- \quad \langle P_2, \oplus \rangle \text{ y } \langle P_1, \oplus \rangle \text{ son monomorfismos.}$$

Demostración

Basta ver que alguno de los dos morfismos es un monomorfismo ya que $\langle P_2, \oplus \rangle = \langle P_1, \oplus \rangle \langle P_2, P_1 \rangle$ y $\langle P_2, P_1 \rangle$ es un isomorfismo.

Si $\langle f_1, f_2 \rangle, \langle g_1, g_2 \rangle$ son tales que $\langle \oplus, P_2 \rangle \langle f_1, f_2 \rangle = \langle \oplus, P_2 \rangle \langle g_1, g_2 \rangle$ entonces $f_2 = g_2$ y por $\div.4$, $P_1 \langle f_1, f_2 \rangle = \div \langle \oplus, P_2 \rangle \langle f_1, f_2 \rangle = \div \langle \oplus, P_2 \rangle \langle g_1, g_2 \rangle$ que a su vez es igual a $P_1 \langle g_1, g_2 \rangle$; esto es, $f_1 = g_1$.

Esta última propiedad permite preguntarse, si $\langle \oplus, P_2 \rangle$ representa un orden en N . El siguiente resultado aclara esta inquietud.

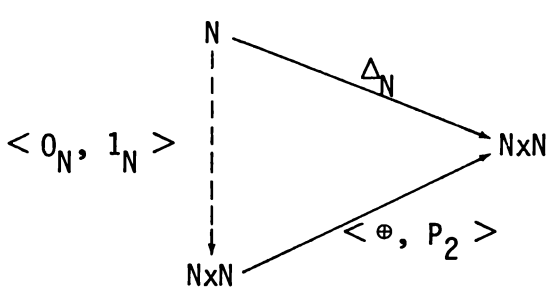
2.37 Proposición (Orden en N)

$\langle \oplus, P_2 \rangle N \times N \longrightarrow N \times N$ representa una relación de orden sobre N

Demostración

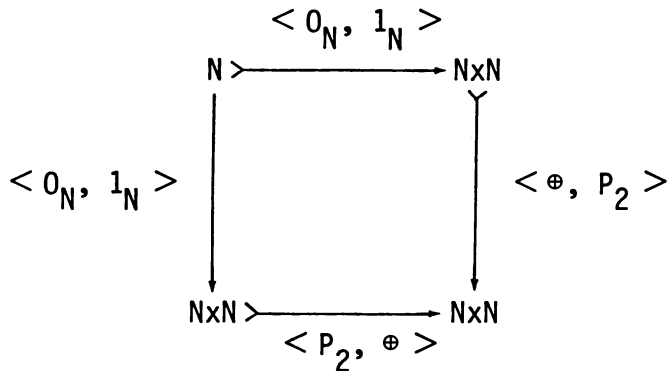
a).- Reflexividad

El morfismo $\Delta_N = \langle 1_N, 1_N \rangle : N \longrightarrow N \times N$ se factoriza a través del morfismo $\langle 0_N, 1_N \rangle : N \longrightarrow N \times N$; como se puede ver en el triángulo:



b).- Antisimetría

El cuadrado



es un producto fibrado.

En efecto, claramente es conmutativo. Si $A \xrightarrow{\langle f_1, f_2 \rangle} NxN$ son tales que $\langle g_1, g_2 \rangle$

$\langle \oplus, P_2 \rangle \langle f_1, f_2 \rangle = \langle P_2, \oplus \rangle \langle g_1, g_2 \rangle$ entonces

$$f_1 = \div \langle \oplus, P_2 \rangle \langle f_1, f_2 \rangle = \div \langle P_2, \oplus \rangle \langle g_1, g_2 \rangle = 0_{NxN} \langle g_1, g_2 \rangle = 0_A$$

por lo tanto $\langle f_2, f_2 \rangle = \langle g_2, \oplus \langle g_1, g_2 \rangle \rangle$; esto es, $g_2 = \oplus \langle g_1, g_2 \rangle$; como

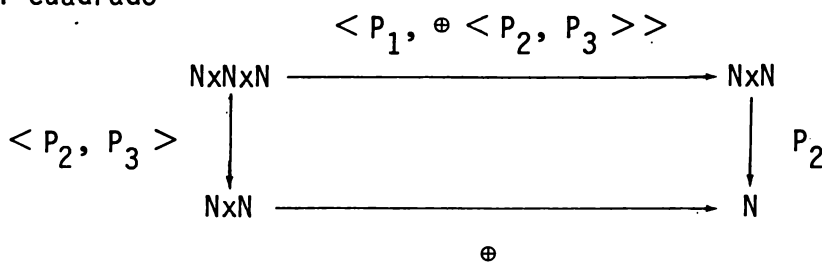
$$0_A = \div \langle g_2, g_2 \rangle \text{ entonces } g_1 = \div \langle \oplus, P_2 \rangle \langle g_1, g_2 \rangle = \div \langle \oplus \langle g_1, g_2 \rangle, g_2 \rangle$$

$$= \div \langle g_2, g_2 \rangle = 0_A.$$

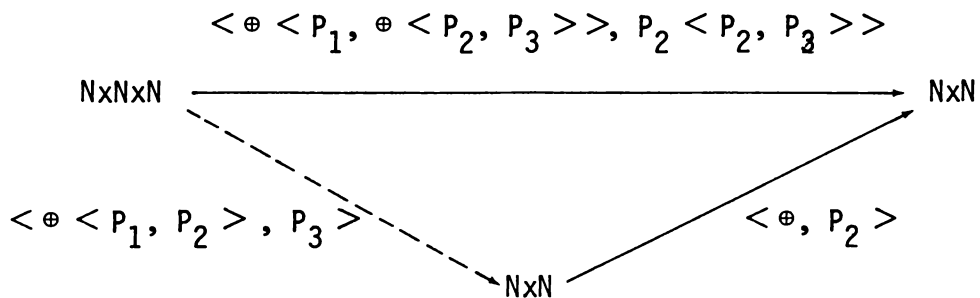
Lo cual demuestra que $f_1 = g_1 = 0_A$ y $g_2 = f_2$.

c).- Transitividad

Como el cuadrado



es un producto fibrado y la suma es asociativa, entonces el triángulo



es conmutativo.

La interpretación en Set del morfismo $\langle \oplus, P_2 \rangle : N \times N \longrightarrow N \times N$ es el conjunto $\{(a,b) \mid b \leq a\}$. Ahora bien, este conjunto puede descomponerse como la unión ajena de los conjuntos $\{(a,a) \mid a \in N\}$ y $\{(a,b) \mid b < a\}$. En \underline{C} , esto último equivale a decir que $\langle \oplus, P_2 \rangle$ es la unión ajena de Δ_N y $\langle s^\oplus, P_2 \rangle$. El próximo resultado afirma lo anterior.

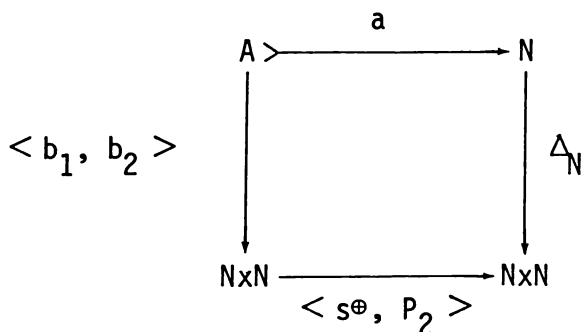
2.37.1 Proposición

$$\langle \oplus, P_2 \rangle = \Delta_N \vee \langle s^\oplus, P_2 \rangle \text{ y } \Delta_N \wedge \langle s^\oplus, P_2 \rangle = 0_A$$

Demostración

a).- $\Delta_N \wedge \langle s^\oplus, P_2 \rangle = 0_A$

Si el cuadrado

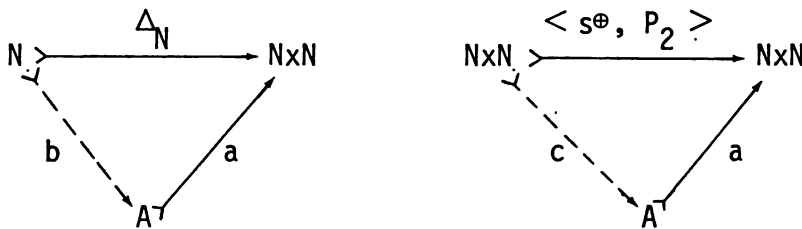


es un producto fibrado entonces $sb_1 = \dot{=} \langle \oplus, P_2 \rangle (sx1_N) \langle b_1, b_2 \rangle = \dot{=} \Delta_N a = 0_A$.
 Esto implica que $sb_2 = a$ y $b_2 = a$. Por 2.35.2, A es inicial.

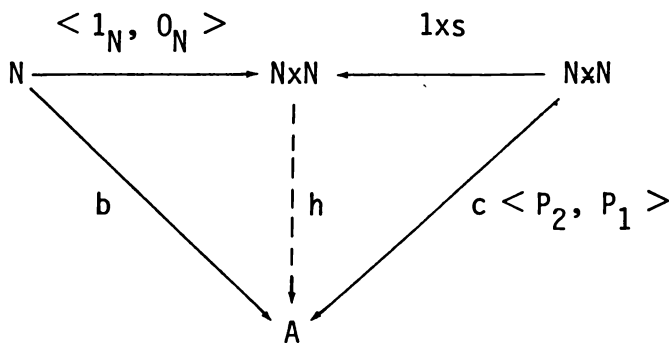
b).- $\Delta_N \vee \langle s^\oplus, P_2 \rangle = \langle \oplus, P_2 \rangle$

Claramente, Δ_N y $\langle s^\oplus, P_2 \rangle$ son subobjetos de $\langle \oplus, P_2 \rangle$. Supóngase que $A \xrightarrow{a} NxN$ es un subobjeto que contiene a Δ_N y $\langle s^\oplus, P_2 \rangle$.

Existen triángulos conmutativos de la forma



Por 2.35.4, existe un único morfismo $h: NxN \longrightarrow A$ que hace conmutativo el diagrama



Un cálculo sencillo, demuestra que $ah \langle P_2, P_1 \rangle = \langle \oplus, P_2 \rangle$. Sólo hay que probar, usando la propiedad universal del coproducto anterior, que $\langle P_2, P_1 \rangle ah = \langle P_1, \oplus \rangle$. En consecuencia, $\langle \oplus, P_2 \rangle = \Delta_N \vee \langle s^\oplus, P_2 \rangle$.

Este último resultado permite demostrar la tricotomía en \underline{C} ; esto es, NxN puede

descomponerse como la unión ajena de $\Delta_N, \langle s^\oplus, P_2 \rangle$ y $\langle P_1, s^\oplus \rangle$. Esta afirmación queda resumida en la siguiente proposición.

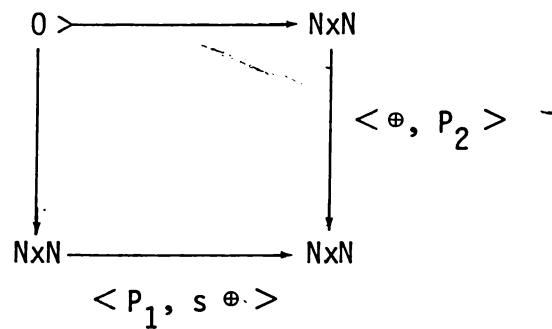
2.38 Proposición

$N \times N \approx \Delta_N \vee \langle s^\oplus, P_2 \rangle \vee \langle P_1, s^\oplus \rangle$ y los sumandos son ajenos dos a dos.

Demostración

Por 2.37.1, basta demostrar que $N \times N \approx \langle \oplus, P_2 \rangle \vee \langle P_1, s^\oplus \rangle$ y $\langle \oplus, P_2 \rangle \wedge \langle P_1, s^\oplus \rangle = 0$. La demostración se hará en dos etapas.

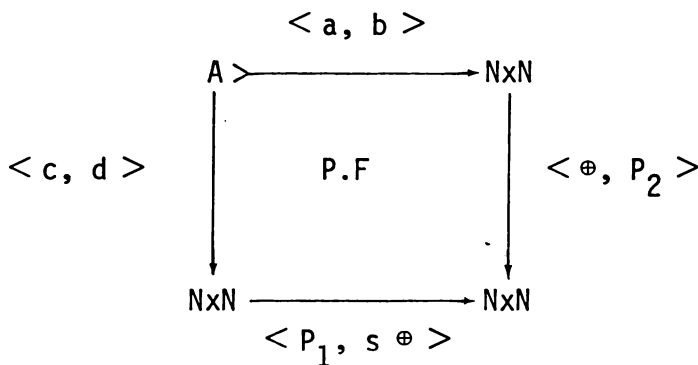
a).- El cuadrado



es un producto fibrado.

Demostración

Sea



el producto fibrado de $\langle \oplus, P_2 \rangle$ y $\langle P_1, s^\oplus \rangle$; por la conmutatividad del diagrama se tiene que:

$$\oplus \langle a, b \rangle = c \text{ y } b = s^\oplus \langle c, d \rangle$$

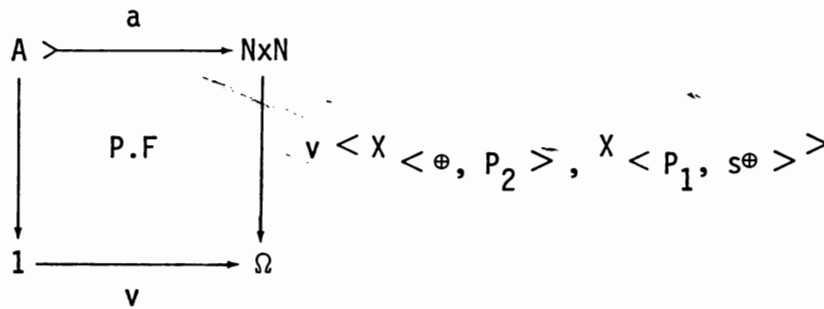
Por 2.36.-4 y 2.36.-6 $a = \dot{\vdash} \langle \oplus, P_2 \rangle \langle a, b \rangle = \dot{\vdash} \langle P_1, s^\oplus \rangle \langle c, d \rangle = 0_A$;

esto implica que $c = b$ y $b = s^\oplus \langle b, d \rangle$. De nuevo, por 2.36.-4,

$$d = \dot{\vdash} \langle \oplus, P_2 \rangle \langle d, b \rangle = \dot{\vdash} \langle \oplus \langle b, d \rangle, b \rangle = \dot{\vdash} \langle \oplus \langle b, d \rangle, s^\oplus \langle b, d \rangle \rangle = \\ = \rho \dot{\vdash} \langle \oplus \langle b, d \rangle, \oplus \langle b, d \rangle \rangle = \rho^0_A = 0_A.$$

Por consiguiente $b = sb$, lo cual implica que A es inicial (2.35.2).

b).- Si el cuadrado



es un producto fibrado entonces $A \cong NxN$.

Demostración

Por 2.24, sólo es necesario demostrar que $\forall_{P_2} (A) \cong N$, donde $P_2 : NxN \longrightarrow N$

denota a la segunda proyección. Al ser $\forall_{P_2} (A) \xrightarrow{\forall_{P_2} (a)} N$ un subobjeto de N ,

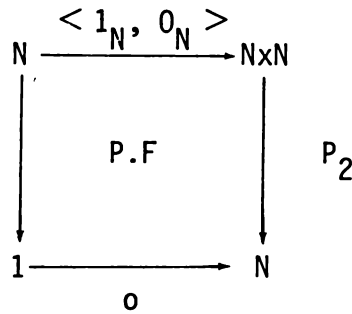
podemos usar el principio de inducción; i.e., $\forall_{P_2} (a)$ satisface las siguientes

condiciones:

b.1).- $0 \in \forall_{P_2}(a)$

b.2).- $s \forall_{P_2}(a) \leq \forall_{P_2}(a)$

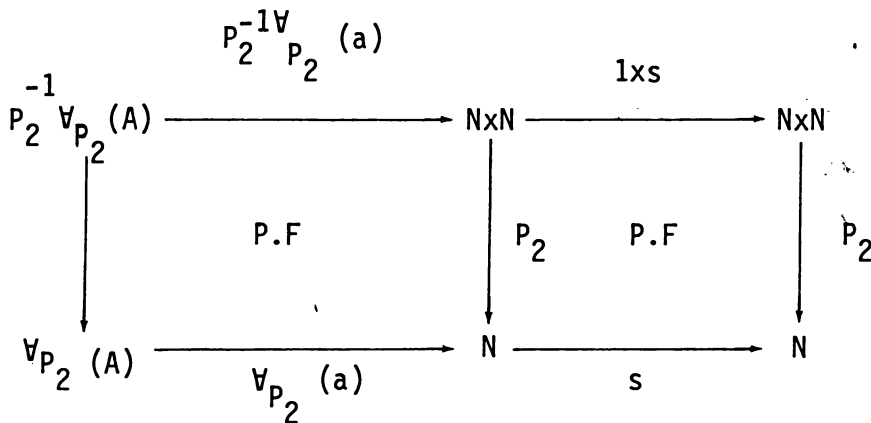
En efecto, $0 \in \forall_{P_2}(a)$ si $P_2^{-1}(0) \leq a$ (2.23. \forall_f). Como el cuadrado



es un producto fibrado entonces $P_2^{-1}(0) = \langle 1_N, 0_N \rangle$. Ahora, $\langle 1_N, 0_N \rangle \leq \langle \oplus, P_2 \rangle$ ya que $\langle \oplus, P_2 \rangle \langle 1_N, 0_N \rangle = \langle 1_N, 0_N \rangle$. Como $a \geq \langle \oplus, P_2 \rangle$, entonces $a \geq \langle 1_N, 0_N \rangle$.

Por 2.23. \forall_f , b.2 es equivalente a demostrar que $P_2^{-1}(s \forall_{P_2}(a)) \leq a$.

$P_2^{-1}(s \forall_{P_2}(a))$ se puede describir, por medio del siguiente producto fibrado.

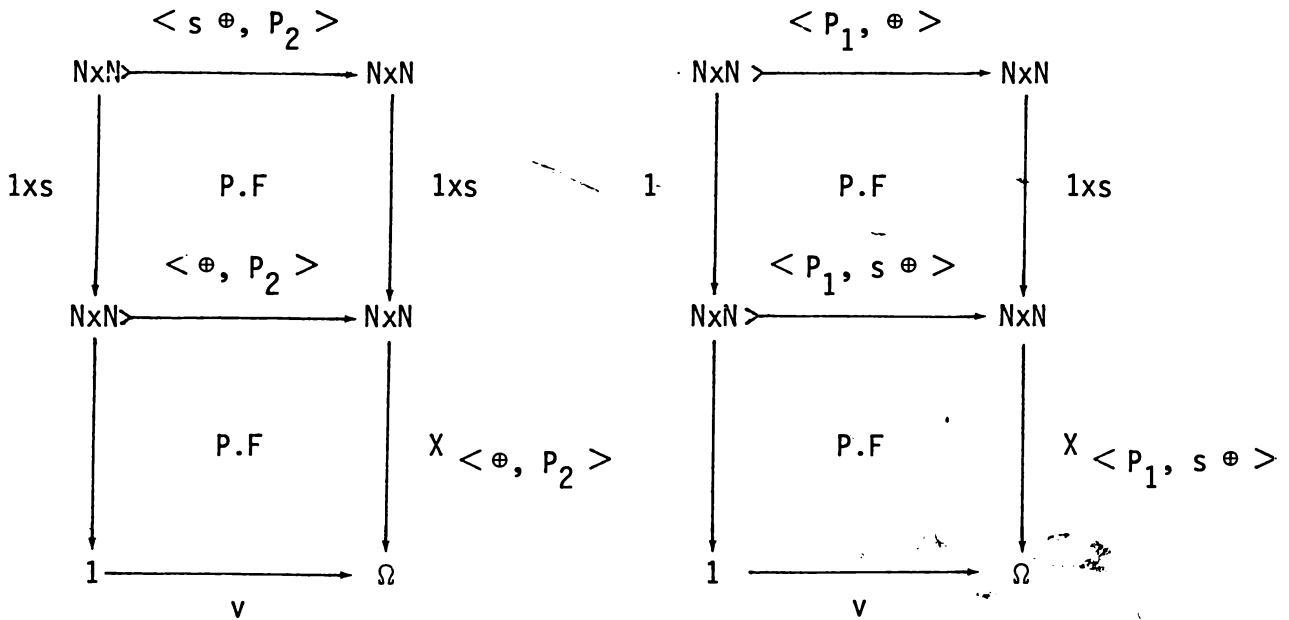


$$\therefore P_2^{-1}(s \forall_{P_2}(a)) = (1 \times s) (P_2^{-1} \forall_{P_2}(a))$$

Ahora, es claro que $P_2^{-1} \vee_{P_2} (a) \leq a$. Como $(1 \times s)$ es un monomorfismo entonces,
 $(1 \times s) (P_2^{-1} \vee_{P_2} (a)) = \exists_{1 \times s} (P_2^{-1} \vee_{P_2} (a)) \leq \exists_{1 \times s} (a)$.

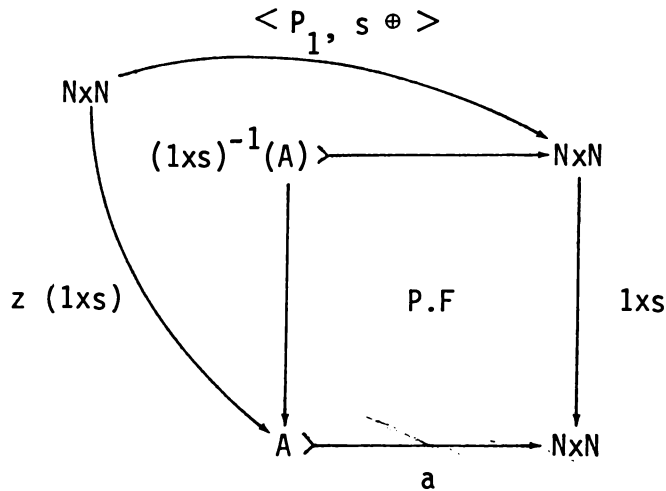
Por la transitividad del orden definido en $\text{Sub}(N \times N)$, sólo es necesario probar que $\exists_{(1 \times s)}(a) \leq a$. Por 2.23 \exists_f , esto último es equivalente a probar que $a \leq (1 \times s)^{-1}a$.

Al ser A el supremo de $\langle \oplus, P_2 \rangle$ y $\langle P_1, s \oplus \rangle$ basta ver que $(1 \times s)^{-1}(A)$ es una cota superior para estos dos subobjetos. $(1 \times s)^{-1}(A)$ se puede calcular con los siguientes diagramas.



$$\begin{aligned} \therefore (1 \times s)^{-1}(A) &= (1 \times s)^{-1} (\langle \oplus, P_2 \rangle \vee \langle P_1, s \oplus \rangle) = \\ &= (1 \times s)^{-1} (\langle \oplus, P_2 \rangle) \vee (1 \times s)^{-1} (\langle P_1, s \oplus \rangle) \\ &= \langle s \oplus, P_2 \rangle \vee \langle P_1, \oplus \rangle \quad ; \quad \text{por 2.23} \end{aligned}$$

$\langle P_1, s \oplus \rangle \leq (1xs)^{-1}(A)$ ya que $\langle P_1, s \oplus \rangle \leq a$ y además $\langle P_1, s \oplus \rangle (1xs) =$
 $= \langle P_1, s^2 \oplus \rangle = (1xs) \langle P_1, s \oplus \rangle$. Por lo tanto, si $z: NxN \longrightarrow A$ es
 tal que $az = \langle P_1, s \oplus \rangle$ entonces $az(1xs) = \langle P_1, s \oplus \rangle (1xs) =$
 $= (1xs) \langle P_1, s \oplus \rangle$; esto es, el diagrama exterior del cuadrado



es conmutativo.

Por 2.37.1, para que $\langle \oplus, P_2 \rangle$ esté contenido en $(1xs)^{-1}(A)$, basta ver que Δ_N y $\langle s \oplus, P_2 \rangle$ son subobjetos de $(1xs)^{-1}(A)$.

Como $\Delta_N \leq \langle P_1, \oplus \rangle$ y $\langle P_1, \oplus \rangle \leq (1xs)^{-1}(A)$ entonces $\Delta_N \leq (1xs)^{-1}(A)$, es obvio que $\langle s \oplus, P_2 \rangle \leq (1xs)^{-1}(A)$.

Por consiguiente $\langle \oplus, P_2 \rangle \leq B$; $\therefore a \leq (1xs)^{-1}(a)$; en particular $s \forall_{P_2}(a) \leq \forall_{P_2}(a)$ y por 2.35.P.3, $\forall_{P_2}(a) \approx N$. Esto implica que $A \approx NxN$ y la proposición está probada.

Esta última proposición, permitirá definir el morfismo "máximo", que se denotará por máx: $N \times N \longrightarrow N$.

2.39 Corolario

$$\text{máx} = \oplus \langle P_1, \dot{\cdot} \langle P_2, P_1 \rangle \rangle = \oplus \langle P_2, \dot{\cdot} \rangle : N \times N \longrightarrow N.$$

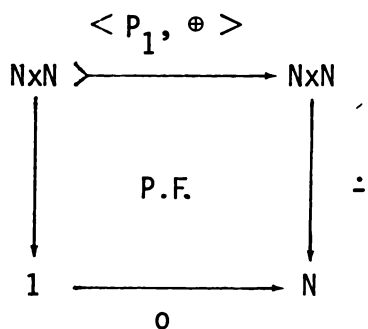
Demostración

Sea $E \xrightarrow{e} N \times N$ el igualador de $\oplus \langle P_1, \dot{\cdot} \langle P_2, P_1 \rangle \rangle$ y $\oplus \langle P_2, \dot{\cdot} \rangle$. Por 2.38, basta probar que $\langle \oplus, P_2 \rangle$ y $\langle P_1, s \oplus \rangle$ son subobjetos de E ; i.e., $\langle \oplus, P_2 \rangle$ y $\langle P_1, s \oplus \rangle$ igualan a $\oplus \langle P_1, \dot{\cdot} \langle P_2, P_1 \rangle \rangle$ y $\oplus \langle P_2, \dot{\cdot} \rangle$. Un cálculo sencillo demuestra que:

$$\begin{aligned} \oplus \langle P_2, \dot{\cdot} \rangle \langle \oplus, P_2 \rangle &= \oplus \langle P_2, \dot{\cdot} \langle \oplus, P_2 \rangle \rangle = \oplus \langle P_2, P_1 \rangle = \oplus \\ \oplus \langle P_1, \dot{\cdot} \langle P_2, P_1 \rangle \rangle \langle \oplus, P_2 \rangle &= \oplus \langle \oplus, \dot{\cdot} \langle P_2, \oplus \rangle \rangle = \oplus \langle \oplus, 0_{N \times N} \rangle = \oplus \\ \oplus \langle P_2, \dot{\cdot} \rangle \langle P_1, s \oplus \rangle &= \oplus \langle s \oplus, \dot{\cdot} \langle P_1, s \oplus \rangle \rangle = \oplus \langle s \oplus, 0_{N \times N} \rangle = s \oplus \\ \oplus \langle P_1, \dot{\cdot} \langle P_2, P_1 \rangle \rangle \langle P_1, s \oplus \rangle &= \oplus \langle P_1, \dot{\cdot} \langle s \oplus, P_1 \rangle \rangle = \oplus \langle P_1, P_2 (1xs) \rangle = \\ &= s \oplus \end{aligned}$$

2.39.1 Corolario

El cuadrado



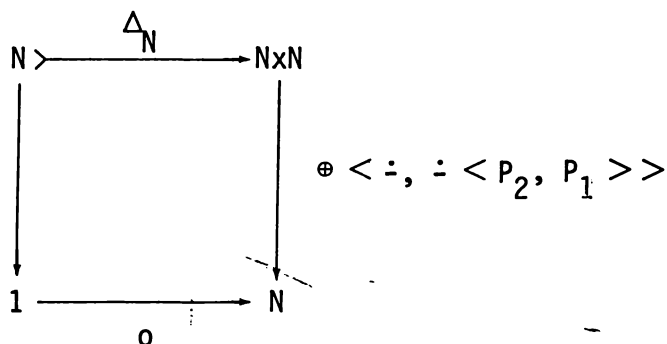
es un producto fibrado.

Demostración

Por 2.36.÷.6, el cuadrado es conmutativo. Si $a, b: A \longrightarrow N$ son tales que $\dot{\cdot} \langle a, b \rangle = 0_A$ entonces por 2.39, $\oplus \langle P_1, \dot{\cdot} \langle P_2, P_1 \rangle \rangle \langle a, b \rangle =$
 $= \oplus \langle P_2, \dot{\cdot} \rangle \langle a, b \rangle = \oplus \langle b, \dot{\cdot} \langle a, b \rangle \rangle = \oplus \langle b, 0_A \rangle = b$; esto es, b se
 puede escribir como $\oplus \langle a, \dot{\cdot} \langle b, a \rangle \rangle$.

2.39.2 Corolario (Predicado de Igualdad)

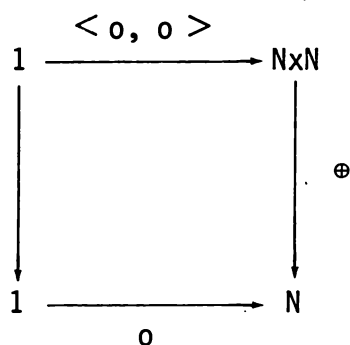
El cuadrado



es un producto fibrado.

Demostración

Por 2.39.1, sólo es necesario hacer notar que el cuadrado



es un producto fibrado

En efecto, es obvio que el diagrama es conmutativo. Si $a, b: A \longrightarrow N$ son tales que $\oplus \langle a, b \rangle = 0_A$ entonces $a = \dot{=} \langle \oplus, P_2 \rangle \langle a, b \rangle = \dot{=} \langle 0_A, b \rangle = 0_A$. Análogamente, $b = 0_A$.

Comúnmente, se acostumbra denotar al morfismo característico de Δ_N por S_N . El corolario anterior, demuestra que S_N es igual a $x \oplus \langle \dot{=} \langle P_2, P_1 \rangle \rangle$, donde $x: N \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de $1 \xrightarrow{0} N$. Es necesario hacer notar la importancia de 2.39.2; permite afirmar que si f, g son dos \underline{C} -morfismos de codominio N entonces f es igual a g (externamente) si y solamente si $\oplus \langle \dot{=} \langle f, g \rangle, \dot{=} \langle g, f \rangle \rangle$ es el morfismo $0_{\text{dom}(f)}$ (internamente). Con este comentario, se concluye esta sección. Estos resultados permitirán dar una interpretación de los predicados ultrafiofánticos. De esto último se ocupará la siguiente sección.

2.4 Interpretación de los Predicados Ultrafiofánticos

2.41 Polinomios en \underline{C} .

Antes de definir, de manera formal, la interpretación de los Predicados Ultrafiofánticos, se tiene que dar una regla para asociar a polinomios en $Z[x_1, \dots, x_n]$, con coeficientes naturales, morfismos en \underline{C} . Para hacer esto último procederemos de la siguiente manera.

2.41.1 Polinomios en $Z[x]$ con coeficientes naturales

Si $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, con $a_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \dots, n\}$. El \underline{C} -morfismo $P_{f(x)}: N \longrightarrow N$ asociado a f es igual a:

$$\cdot \langle s^{a_n} 0_N, h_n(x) \rangle \oplus \dots \oplus \cdot \langle s^{a_1} 0_N, h_1(x) \rangle \oplus s^a 0_N$$

donde $h_j(x): N \longrightarrow N$ está descrito por las identidades:

$$h_1(x) = 1_N; h_2(x) = \cdot \Delta_N; \dots; h_{k+1}(x) = \cdot \langle 1_N, h_k(x) \rangle, \dots, h_n(x) = \cdot \langle 1_N, h_{n-1}(x) \rangle$$

Las propiedades aritméticas, descritas en 2.3, permitirán probar las siguientes identidades.

2.41.2 Proposición

Si $1 \xrightarrow{s^a} N$ es un natural entonces $P_{f(a)} = P_f(s^a 0)$.

Demostración

a).- Se probará primero que $h_j(s^a 0) = s^{a^j} 0 = s^{h_j(a)} 0$

Demostración

En efecto, si $i = 1$ entonces $h_1(x) = 1_N$ y la fórmula es clara. Para $h_{k+1}(x) = \cdot \langle 1_N, h_k(x) \rangle$; $h_{k+1}(s^a 0) = \cdot \langle s^a 0, h_k(s^a 0) \rangle = \cdot \langle s^a 0, s^{a^k} 0 \rangle = s^{a^{k+1}} 0$.

La última identidad se sigue de la siguiente fórmula:

b).- Se probará ahora

$$\cdot \langle s^a 0, s^b 0 \rangle = s^{ab} 0, a, b \in N$$

Demostración

Si $a = 0$ entonces $\cdot \langle 0, s^b 0 \rangle = 0 = s^{0b} 0$. Si a es de la forma $j+1$,

$$\begin{aligned} \cdot \langle s^{a+1}_0, s^b_0 \rangle &= \cdot \langle s^b_0, s^{a+1}_0 \rangle = \oplus \langle s^b_0, \cdot \langle s^b_0, s^a_0 \rangle \rangle = \oplus \langle s^b_0, s^{ab}_0 \rangle = \\ &= s^b \oplus \langle 0, s^{ab}_0 \rangle = s^b(s^{ab}_0) = s^{b+ab}_0 = s^{(a+1)b}_0. \end{aligned}$$

c).- Se probará

$$P_{f(a)} = P_f(s^a_0)$$

Demostración

$P_f(s^a_0) = \cdot \langle s^{an}_0, h_n(s^a_0) \rangle \oplus \dots \oplus \cdot \langle s^{a1}_0, h_1(s^a_0) \rangle \oplus s^a_0$; Por (a) y (b) esta expresión puede escribirse como:

$\cdot \langle s^{an}_0, s^{an}_0 \rangle \oplus \dots \oplus \cdot \langle s^{a1}_0, s^{a1}_0 \rangle \oplus s^a_0$, que a su vez es igual a:

$$s^{an} s^{an} \oplus \dots \oplus s^{a1} s^{a1} \oplus s^a_0 = s^{f(a)}_0. \text{ En consecuencia, } P_{f(a)} = s^{f(a)}_0.$$

2.41.3

Considérese ahora polinomios $f(x, y)$ en dos variables \bar{x}, y . Entonces f puede escribirse como:

$$f(x, y) = A_0(x) + A_1(x)y + \dots + A_n(x)y^n$$

donde $A_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ y sus coeficientes son naturales, $i \in \{0, \dots, n\}$. Por 2.41.1, cada $A_i(x)$, tiene asociado un \mathbb{C} -morfismo, entonces $P_{f(x, y)}$ está dado por la siguiente regla:

$$P_{f(x, y)} = P_{A_0} P_1 \oplus \cdot \langle P_{A_1} P_1, h_1 P_2 \rangle \oplus \cdot \langle P_{A_2} P_1, h_2 P_2 \rangle \oplus \dots \oplus \cdot \langle P_{A_n} P_1, h_n P_2 \rangle$$

donde $P_1, P_2: \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ son las proyecciones.

Se pueden probar las siguientes identidades.

2.41.4 Proposición

- i).- $P_{f(x,y)} \langle P_2, P_1 \rangle = P_{f(y,x)}$
 ii).- $P_{f(x,y)} \langle 1_N, s^a_{0N} \rangle = P_{f(x,a)}$
 iii).- $P_{f(x,y)} \langle s^a_{0N}, 1_N \rangle = P_{f(a,y)}$
 iv).- $P_{f(x,y)} \langle s^a_{0}, s^b_{0} \rangle = s^{f(a,b)}_0 = P_{f(a,b)}$

Demostración

i).-
$$P_{f(y,x)} = P_{A_0} P_2^{\oplus} \cdot \langle P_{A_1} P_2, h_1 P_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle P_{A_n} P_2, h_n P_1 \rangle$$

$$P_{f(x,y)} \langle P_2, P_1 \rangle = P_{A_0} P_1 \langle P_2, P_1 \rangle^{\oplus} \cdot \langle P_{A_1} P_1, h_1 P_2 \rangle$$

$$\langle P_2, P_1 \rangle^{\oplus} \dots \oplus \langle P_{A_n} P_1, h_n P_2 \rangle \langle P_2, P_1 \rangle$$

$$= P_{A_0} P_2^{\oplus} \cdot \langle P_{A_1} P_2, h_1 P_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle P_{A_n} P_2, h_n P_1 \rangle$$

ii).- $f(x,a) = A_0(x) + a A_1(x) + \dots + a^n A_n(x).$

$$P_{f(x,y)} \langle 1_N, s^a_{0N} \rangle = P_{A_0}^{\oplus} \cdot \langle P_{A_1}, h_1 s^a_{0N} \rangle \oplus \dots \oplus \langle P_{A_n}, h_n s^a_{0N} \rangle$$

$$= P_{A_0}^{\oplus} \cdot \langle P_{A_1}, s^a_{0N} \rangle \oplus \dots \oplus \langle P_{A_n}, s^a_{0N} \rangle$$

$$= P_{f(x,a)}$$

iii).- $f(a,y) = A_0(a) + A_1(a) y + \dots + A_n(a) y^n$

$$P_{f(x,y)} \langle s^a_{0N}, 1_N \rangle = P_{A_0} s^a_{0N}^{\oplus} \cdot \langle P_{A_1} s^a_{0N}, h_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle P_{A_n} s^a_{0N}, h_n \rangle$$

$$= s^a_{0N} \oplus \cdot \langle s^a_{0N}, h_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle s^a_{0N}, h_n \rangle$$

iv).- Es obvio, por 2.41.2

2.41.5

En general, si $f(x_1, \dots, x_n)$ es un polinomio en n -variables x_1, \dots, x_n ; entonces si f es igual a:

$$f(x_1, \dots, x_n) = A_0(x_1, \dots, x_{n-1}) + A_1(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n + \dots + A_k(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^k$$

$P_{f(x_1, \dots, x_n)}: N^n \longrightarrow N$ es el \underline{C} -morfismo:

$$P_{A_0} \langle P_1^n, \dots, P_{n-1}^n \rangle \oplus \dots \oplus P_{A_1} \langle P_1^n, \dots, P_{n-1}^n \rangle, h_1 P_n^n \rangle \oplus \dots \oplus$$

$$\dots \oplus P_{A_k} \langle P_1^n, \dots, P_{n-1}^n \rangle, h_k P_n^n \rangle \text{ donde } P_i^n: N^n \longrightarrow N \text{ es la } i\text{-ésima proyección,}$$

$i \in \{1, \dots, n\}$.

Como en el punto anterior, se probarán las siguientes relaciones:

2.41.6 Proposición

i).-
$$P_{f(x_1, \dots, x_n)} \langle P_1^n, \dots, P_{i-1}^n, P_n^n, P_{i+1}^n, \dots, P_i^n \rangle =$$

$$= P_{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, \dots, x_i)}$$

ii).-
$$P_{f(x_1, \dots, x_n)} \langle P_1^{n-1}, \dots, P_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^{a_0}, P_i^{n-1}, \dots, P_{n-1}^{n-1} \rangle =$$

$$= P_{f(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)}$$

iii).-
$$P_{f(x_1, \dots, x_n)} \langle s_{1_0}^{a_1}, \dots, s_{n_0}^{a_n} \rangle = s_{0}^{f(a_1, \dots, a_n)} \equiv P_f(a_1, \dots, a_n)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
 \text{i).- } f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_i) &= A_0(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) + \dots + \\
 &A_k(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) x_i^k \\
 P_{f(x_1, \dots, x_n)} < P_1^n, \dots, P_{i-1}^n, P_n^n, \dots, P_i^n > &= P_{A_0} < P_1^n, \dots, P_{i-1}^n, P_n^n, P_{i+1}^n, \dots, \\
 P_{n-1}^n > \oplus \dots \oplus &\cdot < P_{A_k} < P_1^n, \dots, P_{i-1}^n, P_n^n, P_{i+1}^n, P_{n-1}^n >, h_k P_i^n > = \\
 &= P_{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \dots, x_n)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii).- } f(x_1, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) &= A_0(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \\
 &+ \dots + A_k(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) x_n^k \\
 P_{f(x_1, \dots, x_n)} < P_1^{n-1}, \dots, P_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, P_i^{n-1}, \dots, P_{n-1}^{n-1} > &= \\
 = P_{A_0} < P_1^{n-1}, \dots, P_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, P_i^{n-1}, \dots, P_{n-2}^{n-1} > \oplus \dots \oplus &\cdot < P_{A_k} < P_1^{n-1}, \dots, \\
 P_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, P_i^{n-1}, \dots, P_{n-2}^{n-1} >, h_k P_{n-1}^{n-1} > & \\
 P_{A_j} < P_1^{n-1}, \dots, P_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, P_i^{n-1}, \dots, P_{n-2}^{n-1} > &\text{ es un morfismo de dominio} \\
 N^{n-2}, j \in \{0, \dots, k\} . &
 \end{aligned}$$

Ahora bien, $\langle P_1^{n-1}, \dots, P_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, P_i^{n-1}, \dots, P_{n-2}^{n-1} \rangle$ puede escribirse de la siguiente manera:

$$\langle P_1^{n-2}, \dots, P_{i-1}^{n-2}, s_{N^{n-2}}^a, P_i^{n-2}, \dots, P_{n-2}^{n-2} \rangle \langle P_1^{n-1}, \dots, P_{i-1}^{n-1}, P_i^{n-1}, \dots, P_{n-2}^{n-1} \rangle$$

por lo tanto, para toda j ($0 \leq j \leq k$), se tiene

$$\begin{aligned}
P_{A_j} < p_1^{n-1}, \dots, p_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, p_i^{n-1}, \dots, p_{n-2}^{n-1} > &= P_{A_j} < p_1^{n-2}, \dots, p_{i-1}^{n-2}, \\
s_{N^{n-2}}^a, p_i^{n-2}, \dots, p_{n-2}^{n-2} > &< p_1^{n-1}, \dots, p_{i-1}^{n-1}, p_i^{n-1}, \dots, p_{n-2}^{n-1} > = \\
= P_{A_j}(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) &< p_1^{n-1}, \dots, p_{i-1}^{n-1}, p_i^{n-1}, \dots, p_{n-2}^{n-1} > \\
\therefore P_f(x_1, \dots, x_n) < p_1^{n-1}, \dots, p_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, p_i^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} > &= \\
= P_{A_0}(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) &< p_1^{n-1}, \dots, p_{i-1}^{n-1}, p_i^{n-1}, \dots, p_{n-2}^{n-1} > \oplus \dots \oplus \\
\oplus < P_{A_k}(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) &< p_i^{n-1}, \dots, p_{i-1}^{n-1}, \dots, p_{n-2}^{n-1} > \\
h_k p_{n-1}^{n-1} > &= P_f(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

.iii).- Inmediato.

Como se verá en la próxima sección, estos resultados permitirán definir una interpretación de los Predicados Ultradiofánticos, por medio de morfismos de dominio una potencia de N , y codominio Ω . Dicho esto último se comenzará con

2.42 La Interpretación de los Predicados Ultradiofánticos:

Sea $P(x_1, \dots, x_n)$ un predicado ultradiofántico arbitrario. Se procederá por inducción sobre el número de conectivos lógicos que aparecen en P .

2.42.1

Si en P no aparece algún conectivo entonces P es la forma $f(x_1, \dots, x_r) = 0$ donde f es una expresión polinomial con coeficientes enteros. Este polinomio se puede escribir como $f = g - h$ donde g, h son polinomios con coeficientes naturales. Además es claro que $f(x_1, \dots, x_r) = 0$ si $((g \dot{-} h) + (h \dot{-} g))(x_1, \dots, x_r) = 0$, donde $\dot{-}$ es la diferencia en N . Se define $X_P(x_1, \dots, x_r): N^r \longrightarrow \Omega$ como

$$X_{P(x_1, \dots, x_r)} = X_{\oplus} \langle \dot{=} \langle P_g(x_1, \dots, x_r), P_h(x_1, \dots, x_r) \rangle, \\ \dot{=} \langle P_h(x_1, \dots, x_r), P_g(x_1, \dots, x_r) \rangle \rangle$$

donde P_h y P_g son los morfismos asociados a g y h por 2.41.6 y $x: N \longrightarrow \Omega$ es el \underline{C} -morfismo definido en 2.34.

2.42.2

Si $P(x_1, \dots, x_r) = \top Q(x_1, \dots, x_r)$ y $X_{Q(x_1, \dots, x_r)}: N^r \longrightarrow \Omega$ es el morfismo asociado a $Q(x_1, \dots, x_r)$ entonces

$$X_{P(x_1, \dots, x_r)} = \top X_{Q(x_1, \dots, x_r)}$$

2.42.3

Si $P(x_1, \dots, x_r)$ es de la forma $P_1(x_1, \dots, x_r) \wedge Q(x_1, \dots, x_r)$ entonces

$$X_{P(x_1, \dots, x_r)} = \wedge \langle X_{P_1(x_1, \dots, x_r)}, X_{Q(x_1, \dots, x_r)} \rangle$$

2.42.4

Si $P(x_1, \dots, x_r) = P_1(x_1, \dots, x_r) \vee Q(x_1, \dots, x_r)$ entonces

$$X_{P(x_1, \dots, x_r)} = \vee \langle X_{P_1(x_1, \dots, x_r)}, X_{Q(x_1, \dots, x_r)} \rangle$$

2.42.5

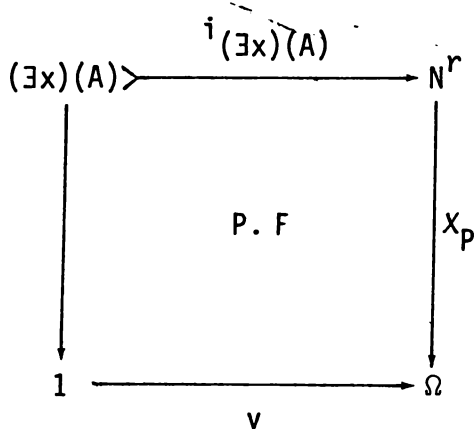
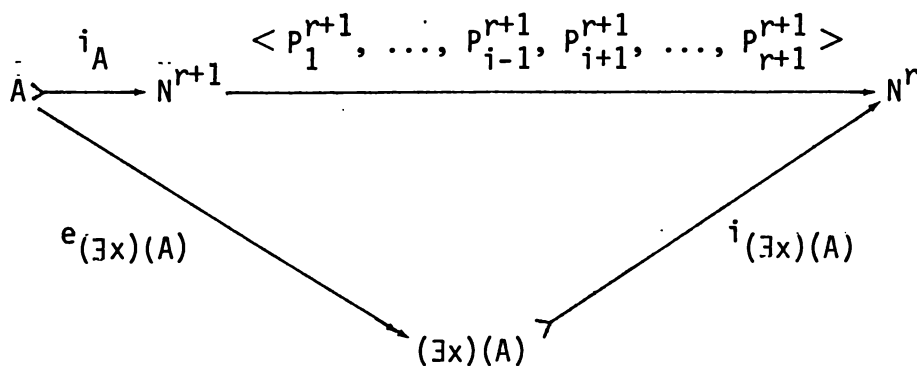
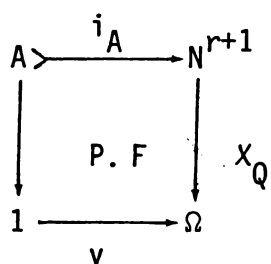
Si $P(x_1, \dots, x_r) = (\exists x) (Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_r))$ y

$$X_{Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_r)}: N^{r+1} \longrightarrow \Omega$$

es el \underline{C} -morfismo asociado a $Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_r)$ entonces

$\chi_P(x_1, \dots, x_r): N^r \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de $(\exists x)(A) \longrightarrow N^r$

donde $A \xrightarrow{i_A} N^{r+1}$ es el subobjeto clasificado por $\chi_{Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_i, \dots, x_r)}$

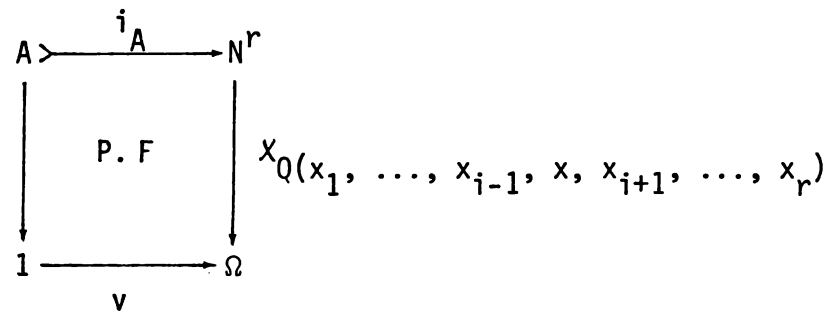


2.42.6

Si $P(x_1, \dots, x_r) = (\forall x)(Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_r))$ entonces

$\chi_P(x_1, \dots, x_r): N^r \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de

$(\forall x)(A) \xrightarrow{i_{(\forall x)(A)}} N^r$ donde A es el subobjeto clasificado por $X_Q(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_r)$



Cuando no haya peligro de confusión se escribirá $X_P: N^r \longrightarrow \Omega$ en lugar de $X_{P(x_1, \dots, x_r)}: N^r \longrightarrow \Omega$.

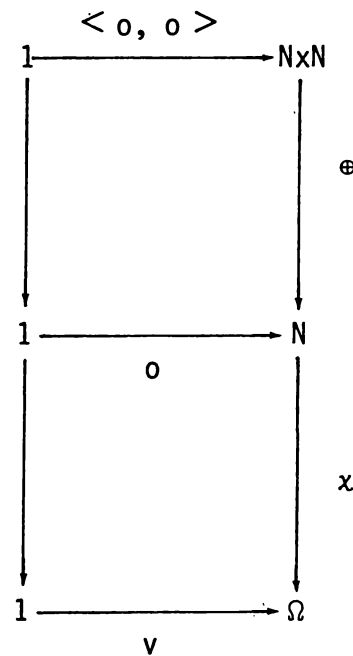
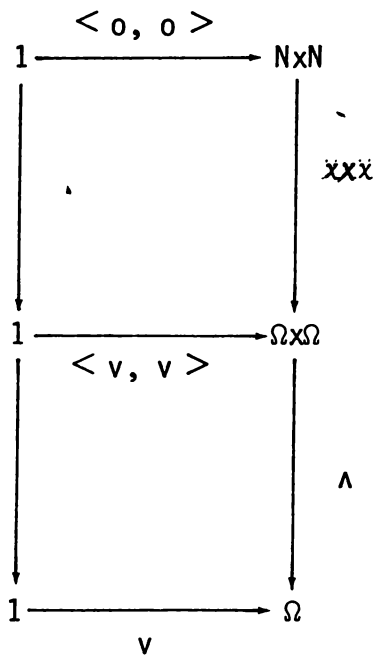
A veces, es difícil calcular la intersección de dos subobjetos. La siguiente observación permite afirmar que en ciertos casos este cálculo no es tan complicado.

2.42.7 Proposición

Si $f, g: N^r \longrightarrow N$ son \underline{C} -morfismos entonces $\wedge \langle xf, xg \rangle = x \oplus \langle f, g \rangle$.

Demostración

Basta demostrar que $\wedge (xxx)$ es igual a $x \oplus$. Para esto, considérense los siguientes diagramas



Claramente, cada uno de ellos es un producto fibrado; por lo tanto, $\wedge (xxx) = x \oplus$.

De acuerdo a la definición 2.42, es bastante claro cómo se podrían definir los objetos ultradiofánticos en \underline{C} . Como se vió en el capítulo anterior, un subconjunto A de N^n es ultradiofántico sii existe un Predicado $P(x_1, \dots, x_n)$ tal que

$$(a_1, \dots, a_n) \in A \text{ sii } P(a_1, \dots, a_n)$$

Como ya se tiene una interpretación de los predicados ultradiofánticos sólo es necesario precisar cómo se van a caracterizar los objetos ultradiofánticos en \underline{C} ; de esto último se ocupará la siguiente sección.

2.5 La Categoría $\underline{C}_{U.D}$

2.5.1 Los Objetos de $\underline{C}_{U.D}$

Definición

Se dice que un \underline{C} -objeto A es ultradiofántico sii existe un predicado $P(x_1, \dots, x_n)$ tal que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_A} & N^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \xrightarrow{v} & \Omega
 \end{array}
 \quad X_P = X_A$$

es un producto fibrado.

Los objetos de $\underline{C}_{U.D}$ son los \underline{C} -objetos ultradiofánticos.

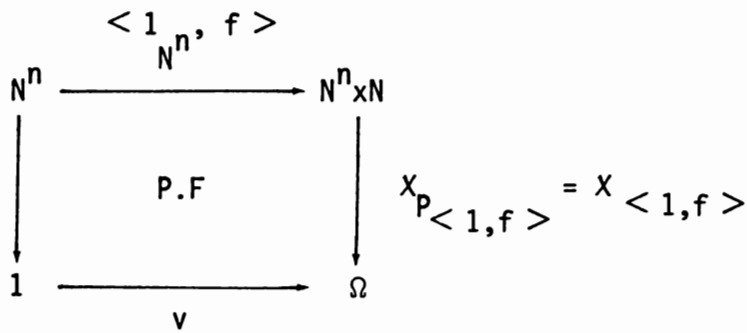
La definición de $\underline{C}_{U.D}$ -morfismo necesita un poco más de cuidado. Hasta el momento, no se ha considerado un análogo a la clase R' de funciones ultradiofánticas. Para definir a los $\underline{C}_{U.D}$ -morfismos se usará la definición anterior. Recuérdese que una función $f: N^n \longrightarrow N$ pertenece a R' sii su gráfica es un conjunto ultradiofántico. Como ya se cuenta con una definición precisa de $\underline{C}_{U.D}$ -objeto, la definición de $R'_{\underline{C}}$ no es muy difícil de imaginar.

2.52 La Clase $R'_{\underline{C}}$

Definición

Se dice que un \underline{C} -morfismo $f: N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$ sii su gráfica

$N^n \xrightarrow{\langle 1, f \rangle} N^n \times N$ es un $\underline{C}_{U.D}$ -objeto; i.e., si existe un predicado ultradiofántico $P_{\langle 1, f \rangle}$ tal que el cuadrado



es un producto fibrado.

Se verán qué tipo de propiedades satisface R' .

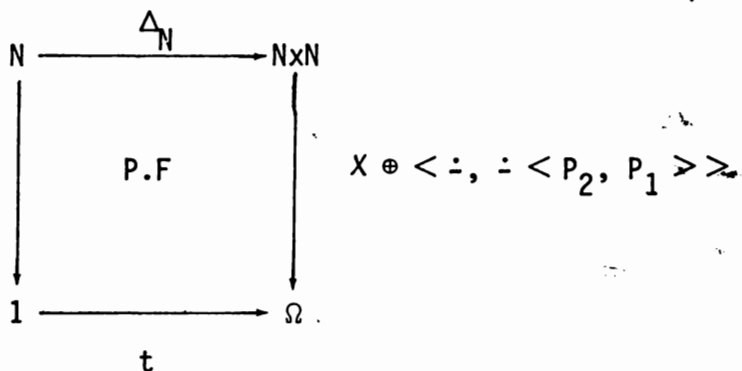
2.53 Propiedades de $R'_{\underline{C}}$

2.53.1 Proposición

El morfismo $1_N: N \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$

Demostración

Como el cuadrado



es un producto fibrado (por 2.35.1 y 2.39.2) y $x_{\oplus \langle \div, \div \langle P_2, P_1 \rangle \rangle}$ corresponde al predicado $x = y$ entonces Δ_N es un $\underline{C}_{U.D}$ -objeto; esto es, $1_N: N \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$.

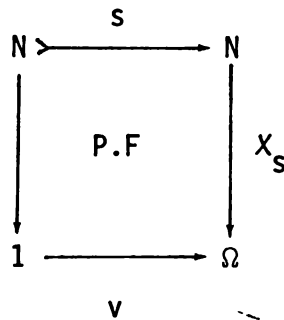
2.53.2 Proposición

El morfismo $s: N \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$.

Demostración

($R'_{\underline{C}}$.1) $s: N \longrightarrow N$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto

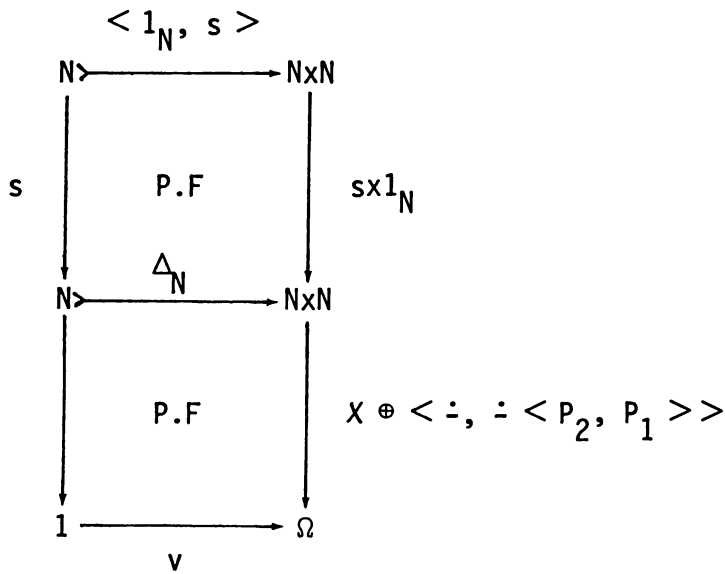
En efecto, considérese el siguiente producto fibrado.



entonces, por 2.35.P.1, $\lceil X_s o = \lceil \text{falso} = v$; Además, $\lceil X_s s = \lceil v_N = \text{falso}_N$; por 2.34, $\lceil X_s = X$; esto es, $X_s = \lceil X$.

($R'_{\underline{C}}$.2) $\langle 1, s \rangle : N \longrightarrow N \times N$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto.

Basta considerar el siguiente producto fibrado



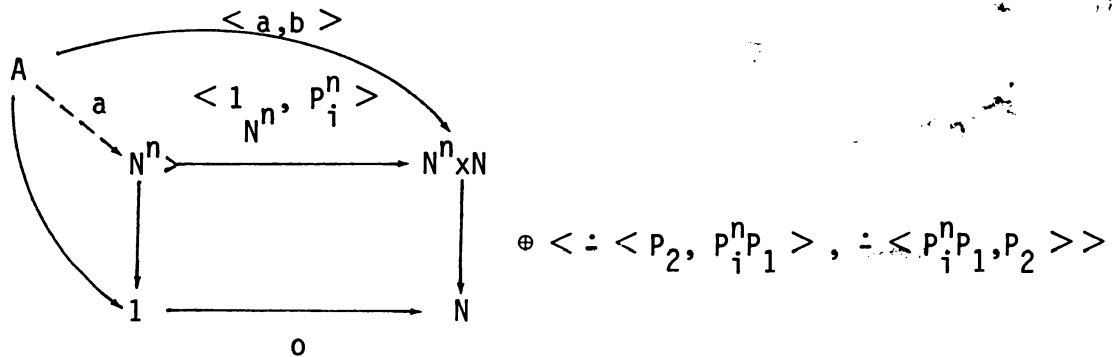
Ahora, la composición $x \oplus \langle \cdot \langle sP_1, P_2 \rangle, \cdot \langle P_2, sP_1 \rangle \rangle$ corresponde al predicado $y = x + 1$. En efecto, sólo es necesario hacer notar que $\oplus \langle P_1, so_{N^2} \rangle$ es igual a: $\oplus \langle P_1, so_{N^2} \rangle = s \oplus \langle P_1, 0_{N^2} \rangle = s \oplus \langle 1_N, 0_N \rangle P_1 = sP_1$

2.53.3 Proposición

(R' C.3) Si $P_i^n: N^n \longrightarrow N$ es la i -ésima proyección entonces P_i^n pertenece a $R'_{\underline{C}}(1 \leq i \leq n)$.

Demostración

Considérese el siguiente cuadrado



donde $P_2: N^n \times N \longrightarrow N$, $P_1: N^n \times N \longrightarrow N^n$ son las proyecciones. El cuadrado es conmutativo ya que $\oplus \langle \cdot \langle P_2, P_1^n P_1 \rangle, \cdot \langle P_1^n P_1, P_2 \rangle \rangle \langle 1_{N^n}, P_1^n \rangle = \oplus \langle \cdot \langle P_1^n, P_1^n \rangle, \cdot \langle P_1^n, P_1^n \rangle \rangle = 0_{N^n}$

Si $\langle a, b \rangle : A \longrightarrow N^n \times N$ es un \underline{C} -morfismo tal que $\oplus \langle \cdot \langle b, P_1^n a \rangle, \cdot \langle P_1^n a, b \rangle \rangle = 0_A$ entonces $\cdot \langle b, P_1^n a \rangle = 0_A$ y $\cdot \langle P_1^n a, b \rangle = 0_A$. Por lo tanto, $b = P_1^n a$.

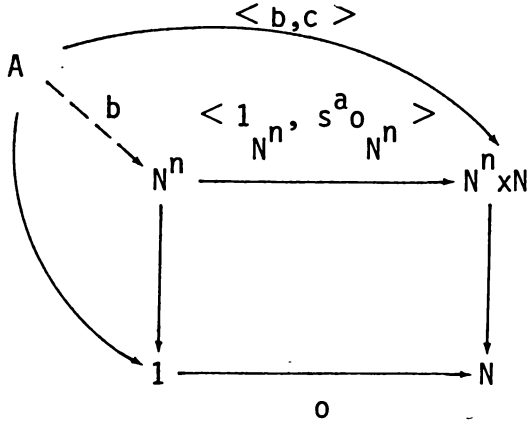
Esto prueba que $P_1^n: N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$.

2.53.4 Proposición

($R'_{\underline{C}}$.4) Todos los morfismos constantes de la forma $s^a_{0_{N^n}}: N^n \longrightarrow N$ pertenecen a $R'_{\underline{C}}$.

Demostración

Considérese el cuadrado



$$\oplus \langle \cdot \langle P_2, s^a_{0_{N^n \times N}} \rangle, \cdot \langle s^a_{0_{N^n \times N}}, P_2 \rangle \rangle$$

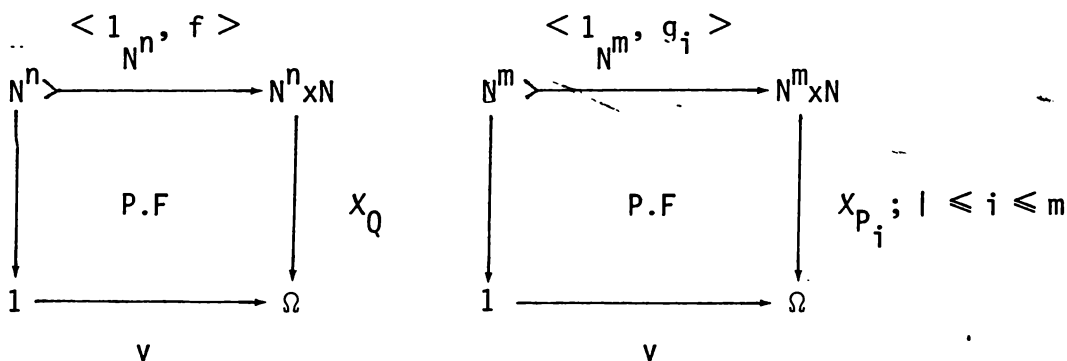
Claramente, es conmutativo. Si $\langle b, c \rangle : A \longrightarrow N^n \times N$ es tal que $\langle c, s^a_{0_A} \rangle = 0_A = \langle s^a_{0_A}, c \rangle$ entonces $c = s^a_{0_A}$. En consecuencia, $s^a_{0_{N^n}} : N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{c}}$.

2.53.5 Proposición

($R'_{\underline{c}}$.5) Si $f : N^n \longrightarrow N$ y $g_1, \dots, g_n : N^m \longrightarrow N$ pertenecen a $R'_{\underline{c}}$ entonces el \underline{c} -morfismo composición $f \langle g_1, \dots, g_n \rangle : N^m \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{c}}$.

Demostración

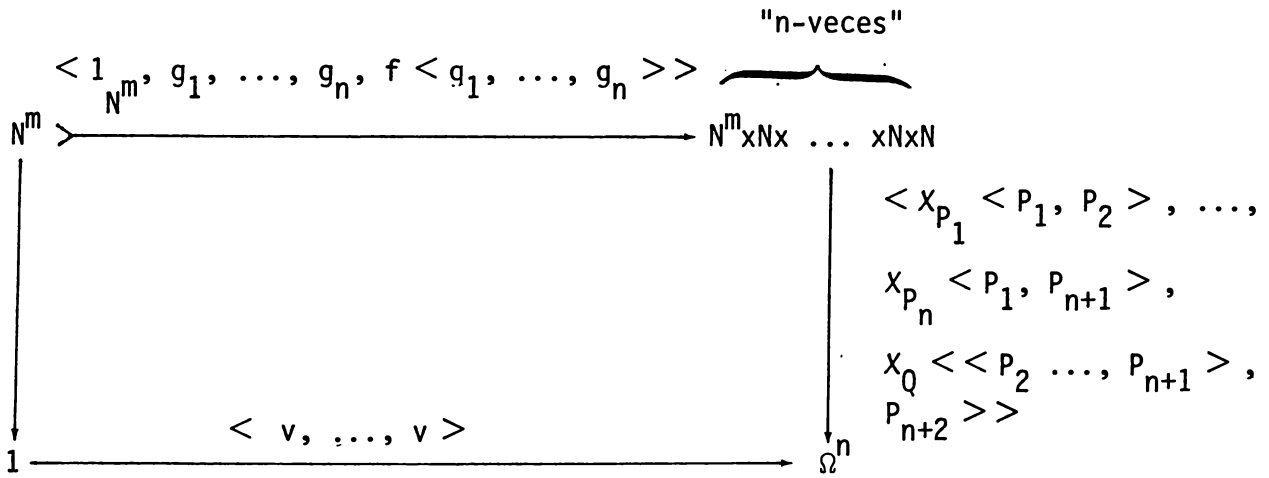
Por hipótesis, se tienen productos fibrados de la forma:



En Set, un Predicado que describe a la gráfica de la composición es:

$$(\exists z_1, \dots, z_n) (Q(z_1, \dots, z_n, y) \wedge P_1(x_1, \dots, x_m, z_1) \wedge \dots \wedge P_n(x_1, \dots, x_m, z_n))$$

Se verá que este Predicado también resuelve $R'_{\underline{c}}$.5. Para esto, considérese el siguiente diagrama



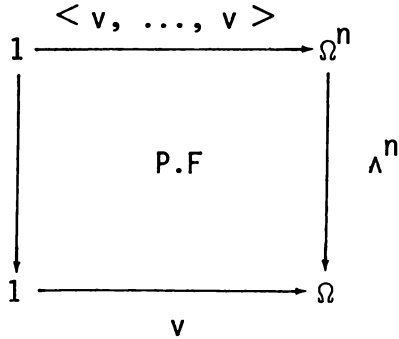
donde $P_1: N^m \times N \times \dots \times N \times N \longrightarrow N^m, \dots, P_{n+2}: N^m \times N \times \dots \times N \times N \longrightarrow N$ denotan a las proyecciones.

Si se componen los morfismos que aparecen en la parte superior del diagrama se obtiene: $\langle X_{P_1} \langle 1_{N^m}, g_1 \rangle, \dots, X_{P_n} \langle 1_{N^m}, g_n \rangle, X_Q \langle \langle g_1, \dots, g_n \rangle, f \langle g_1, \dots, g_n \rangle \rangle \rangle$ que claramente es igual a $\langle v_{N^m}, \dots, v_{N^m} \rangle$. Un cálculo sencillo demuestra que este último diagrama es un producto fibrado.

Como la intersección de subobjetos es asociativa entonces también es inmediato

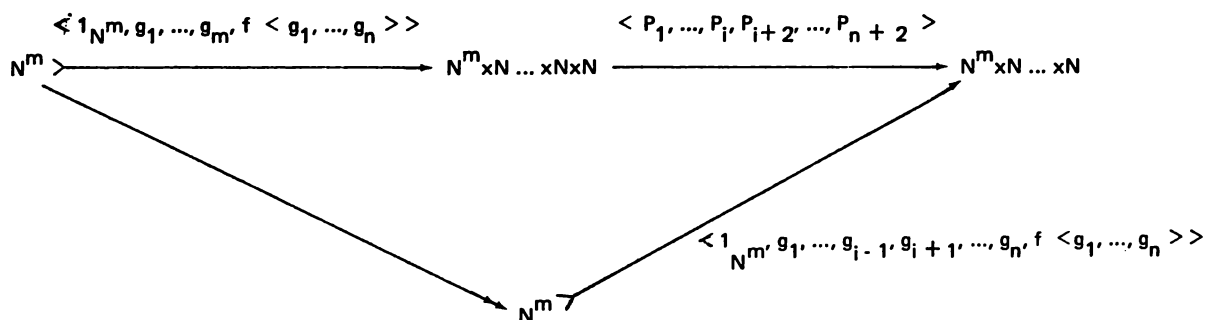
$$\langle 1_{N^m}, g_1, \dots, g_n, f \langle g_1, \dots, g_n \rangle \rangle$$

que el subobjeto $N^m \xrightarrow{\hspace{15em}} N^m \times N \times \dots \times N \times N$ corresponde al predicado $Q(x_1, \dots, x_n, y) \wedge P_1(y_1, \dots, y_m, x_1) \wedge \dots \wedge P_n(y_1, \dots, y_m, x_n)$. Sólo es necesario hacer notar que el cuadrado

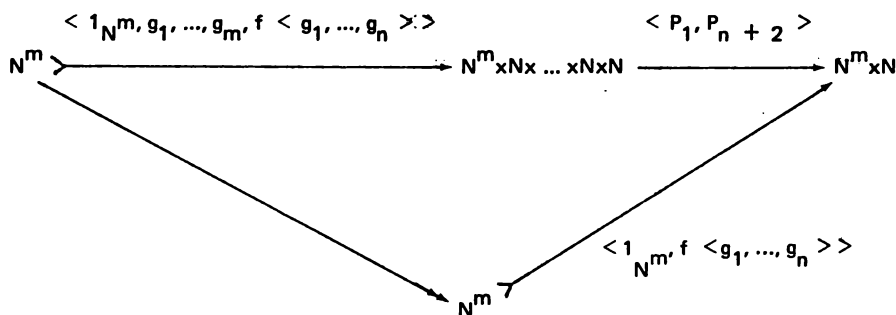


es un producto fibrado. Recuérde-se que la intersección es asociativa.

Ahora bien, $(\exists z_i) (Q(z_1, \dots, z_n, y) \wedge P_1(x_1, \dots, x_m, z_1) \wedge \dots \wedge P_n(x_1, \dots, x_m, z_n))$ se obtiene al considerar



Por lo tanto $(\exists z_1, \dots, z_n) (Q(z_1, \dots, z_n, y) \wedge P_1(x_1, \dots, x_m, z_1) \wedge \dots \wedge P_n(x_1, \dots, x_m, z_n))$ queda descrito por:



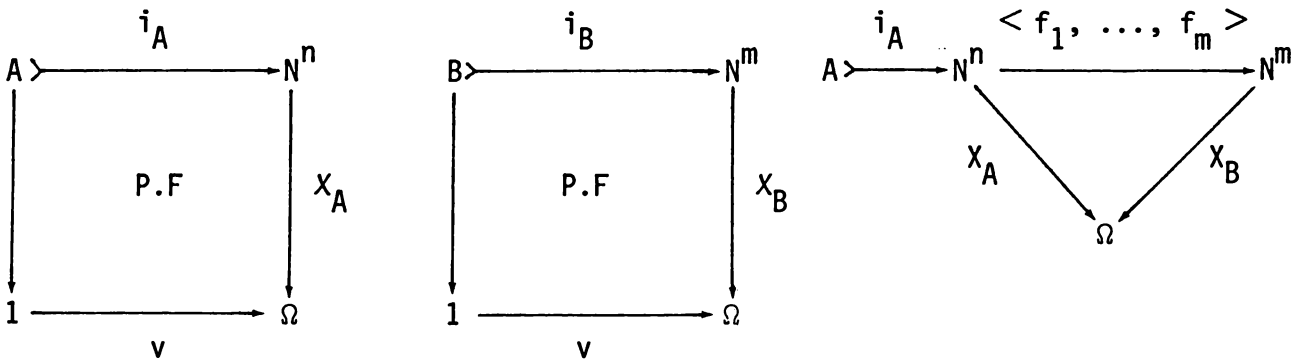
Por 2.42.5, $N^m \xrightarrow{\langle 1_{N^m}, f \langle g_1, \dots, g_n \rangle \rangle} N^m \times N$ es un U.D-objeto; esto es, $f \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$.

Estas cinco propiedades sirven para definir los $\underline{C}_{U.D}$ -morfismos.

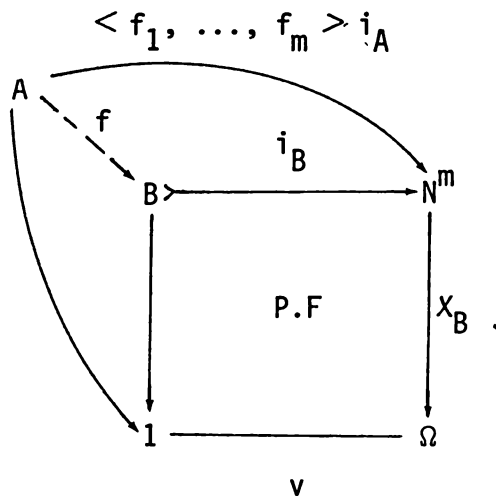
2.54 Los $\underline{C}_{U,D}$ -morfismos

2.54.1 Definición

Sean A, B dos $\underline{C}_{U,D}$ -objetos se dice que un \underline{C} -morfismo $f: A \longrightarrow B$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo sii existen $f_1, \dots, f_m: N^n \longrightarrow N^m$ elementos de R'_C tales que hacen conmutativos los diagramas



$$v_A = X_A i_A = X_B \langle f_1, \dots, f_m \rangle i_A$$



$$i_B f = \langle f_1, \dots, f_m \rangle i_A$$

Esta es la misma definición que se dió en el capítulo anterior. Se verá en la siguiente observación que $\underline{C}_{U,D}$ es en efecto, una subcategoría de \underline{C} .

2.54.2 Proposición

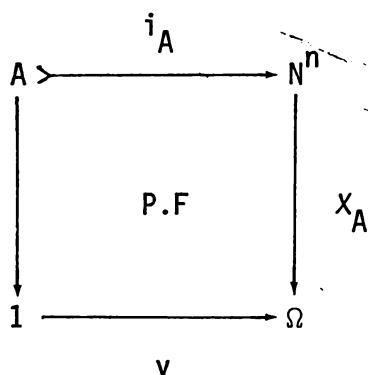
$\underline{C}_{U,D}$ es una subcategoría de \underline{C}

Demostración

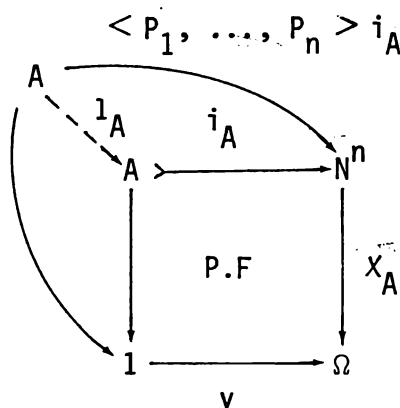
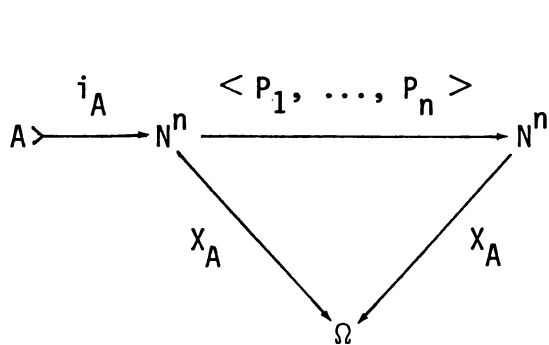
a).- Hay identidades

Demostración

Sea A un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto arbitrario entonces existe un producto fibrado de la forma:



Considérense los siguientes diagramas conmutativos.

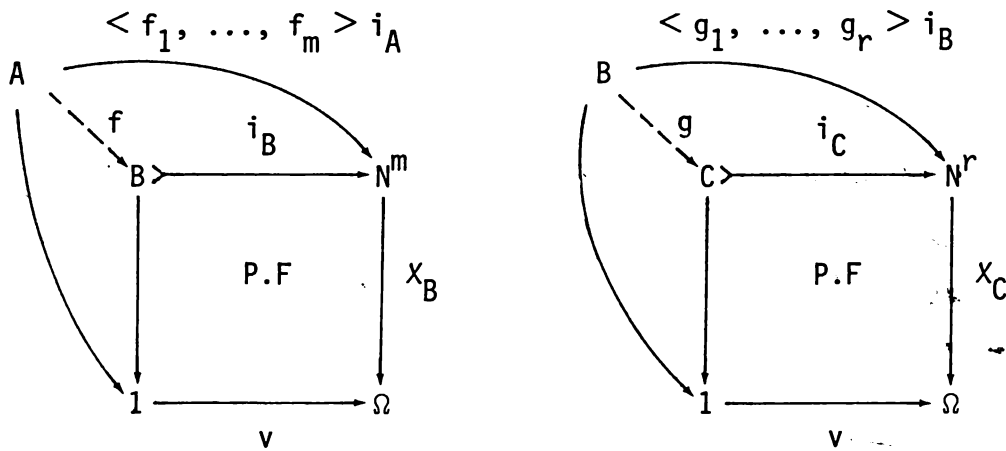
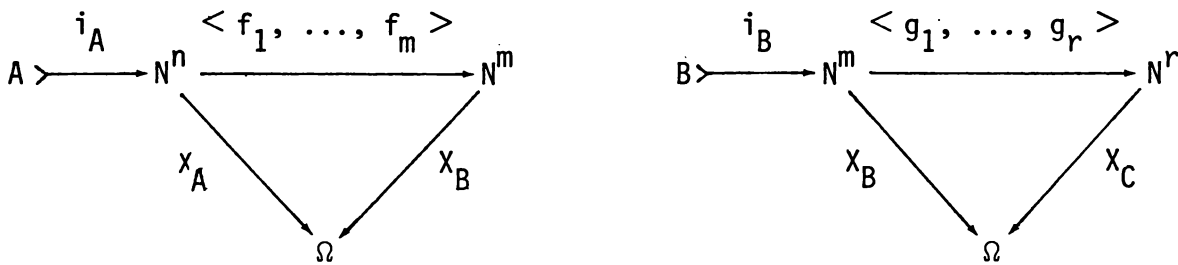


donde $P_i: N^n \longrightarrow N$ es la i -ésima proyección. En consecuencia, $1_A: A \longrightarrow A$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo.

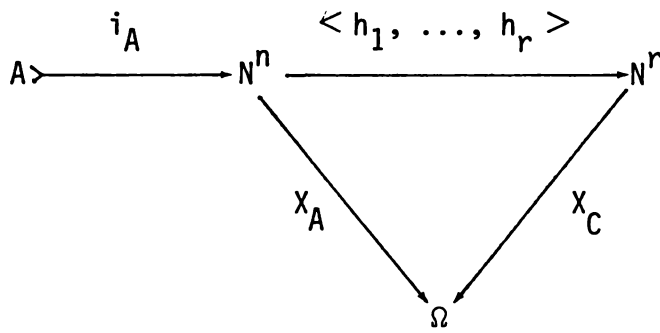
b).- $\underline{C}_{U,D}$ es cerrada bajo la composición de $\underline{C}_{U,D}$ -morfismos.

Demostración

Supóngase que se tienen diagramas conmutativos de la siguiente manera



Considérese $h_j = g_j \langle f_1, \dots, f_m \rangle: N^n \longrightarrow N$; Por $R'_{\underline{C}}$ -5 cada h_j pertenece a $R'_{\underline{C}}$ ($1 \leq j \leq r$). Además, hacen conmutativo el diagrama



$$\begin{aligned}
 X_C \langle h_1, \dots, h_r \rangle i_A &= X_C \langle g_1, \dots, g_r \rangle \langle f_1, \dots, f_m \rangle i_A = \\
 &= X_C \langle g_1, \dots, g_r \rangle i_B f = X_B i_B f = v_B f = v_A.
 \end{aligned}$$

Por último, $i_C(gf) = \langle g_1, \dots, g_r \rangle i_B f = \langle g_1, \dots, g_r \rangle \langle f_1, \dots, f_m \rangle i_A = \langle h_1, \dots, h_r \rangle i_A$; por lo tanto, el \underline{C} -morfismo composición $gf: A \longrightarrow C$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo.

Esto demuestra que $\underline{C}_{U,D}$ es una subcategoría de \underline{C} . Los últimos resultados se pueden resumir con la siguiente definición.

2.55 Definición

La subcategoría $\underline{C}_{U,D}$ de \underline{C} se llama la categoría ultradiofántica determinada por \underline{C} .

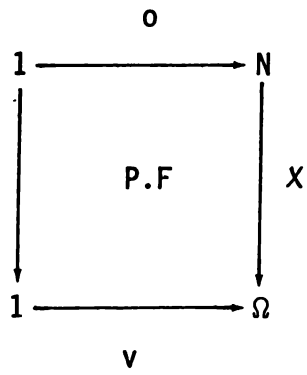
Antes de pasar a estudiar las propiedades de $\underline{C}_{U,D}$, se harán algunas observaciones.

2.55.1 Proposición

1 es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto

Demostración

Inmediata ya que el cuadrado



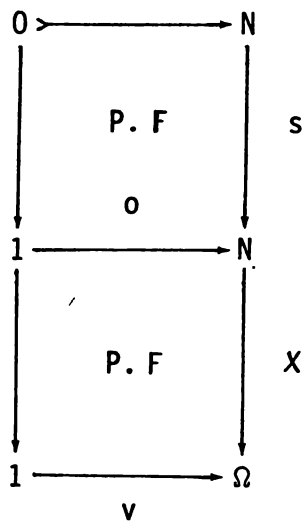
es un producto fibrado.

2.55.2 Proposición

O es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto

Demostración

Como el diagrama



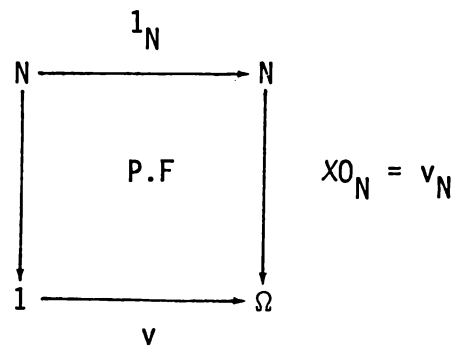
es un producto fibrado entonces O es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto.

2.55.3 Proposición

N es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto

Demostración

Considérese $0_N: N \longrightarrow N$ entonces como $X0_N = X0'_N = v_N$, el cuadrado



es un producto fibrado

2.55.4 Proposición

Ω es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto

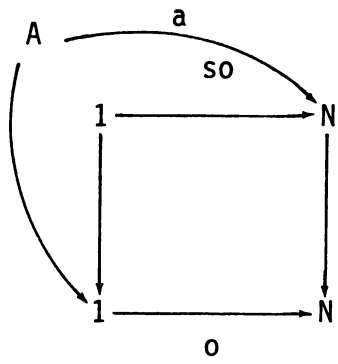
Demostración

En Set , Ω es el conjunto $\{x \in N \mid x = 0 \vee x = 1\}$. Se verá primero que la interpretación de los conjuntos $\{x \in N \mid x = 0\}$ y $\{x \in N \mid x = 1\}$ son $1 \xrightarrow{0} N$ y $1 \xrightarrow{s_0} N$ respectivamente.

En efecto, por 2.55.1 es claro que la interpretación en \underline{C} de $\{x \in N \mid x = 0\}$ es $1 \xrightarrow{0} N$. Para el conjunto restante basta considerar las identidades:

$$\begin{aligned} \oplus \langle \cdot, \cdot \langle 1_N, s_{0_N} \rangle, \cdot \langle s_{0_N}, 1_N \rangle \rangle &= \oplus \langle \rho, \cdot \langle 1_N, 0_N \rangle, \cdot \langle s_{0_N}, 1_N \rangle \rangle \\ &= \oplus \langle \rho, \cdot \langle s_{0_N}, 1_N \rangle \rangle. \end{aligned}$$

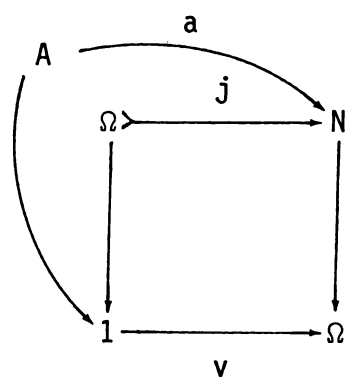
Ahora, el cuadrado



$$\oplus \langle \rho, \dot{\langle so_N, 1_N \rangle} \rangle; \quad X_{so} = x \oplus \langle \rho, \dot{\langle so_N, 1_N \rangle} \rangle$$

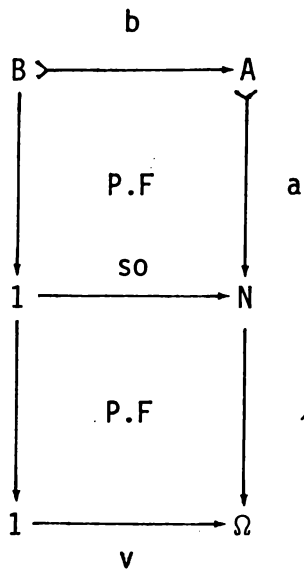
es conmutativo ya que $\oplus \langle \rho so, \dot{\langle so_N, 1_N \rangle} so \rangle = \oplus \langle o, \dot{\langle so, so \rangle} \rangle = \oplus \langle o, o \rangle = o$. Si $A \xrightarrow{a} N$ es tal que $\oplus \langle \rho a, \dot{\langle so_A, a \rangle} \rangle = 0_A$ entonces $\rho a = 0_A$ y $\dot{\langle so_A, a \rangle} = 0_A$; en consecuencia, por 2.39.1 $a = \oplus \langle so_A, \dot{\langle a, so_A \rangle} \rangle = \oplus \langle so_A, \rho \dot{\langle a, o_A \rangle} \rangle = \oplus \langle so_A, \rho a \rangle = \oplus \langle so_A, o_A \rangle = so_A$. Por lo tanto el cuadrado es un producto fibrado.

Por último considérese el cuadrado

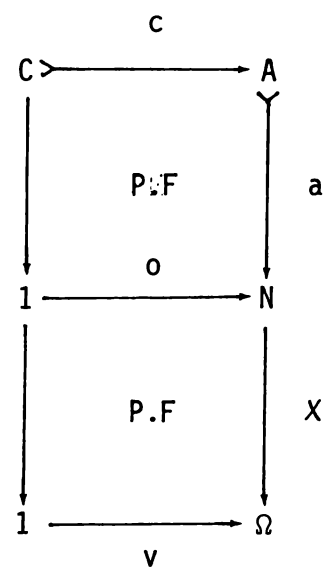


$$v \langle x, x \oplus \langle \rho, \dot{\langle so_N, 1_N \rangle} \rangle \rangle$$

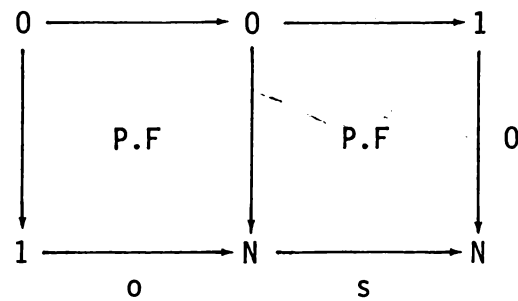
donde $j: \Omega \rightarrow N$ es el morfismo definido en 2.34. Usando la propiedad universal del coproducto es fácil ver que $v \langle x, x \oplus \langle \rho, \dot{\langle so_N, 1_N \rangle} \rangle \rangle j$ es igual a v_Ω . Supóngase ahora que $a: A \rightarrow N$ es un \underline{C} -morfismo tal que $v \langle xa, x \oplus \langle \rho a, \dot{\langle so_A, a \rangle} \rangle \rangle = v_A$ entonces si $B \xrightarrow{b} A, C \xrightarrow{c} A$ son los subobjetos clasificados por $X_{so} a$ y $X_o a$.



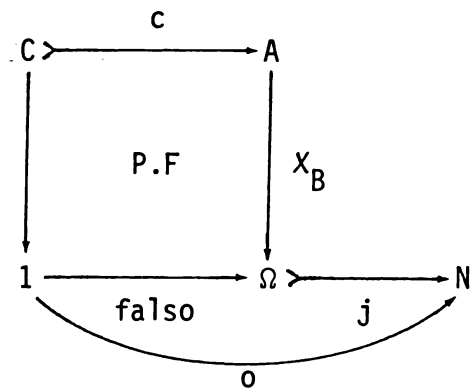
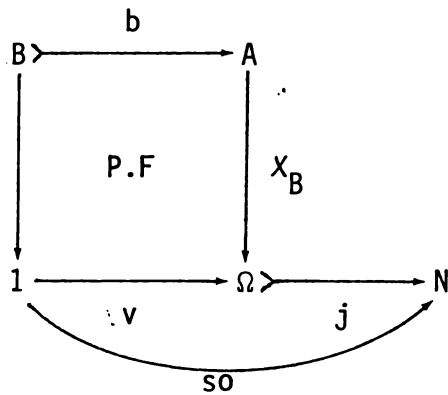
$$X \oplus \langle \rho, \cdot \rangle \langle so_N, 1_N \rangle$$



entonces por hipótesis $B \vee C = A$. Además, como el diagrama



es un producto fibrado entonces $\wedge \langle xa, x \oplus \langle \rho a, \cdot \rangle \langle so_A, a \rangle \rangle = falso_N = falso_A$. Es decir, B y C son subobjetos ajenos cuyo supremo es A. La idea es probar que los morfismos j_X y a son iguales. Para esto, supóngase que $E \xrightarrow{e} A$ es el igualador de tales morfismos. Por lo anterior, basta probar que B y C son subobjetos de E. Los diagramas



son tales que:

$$jX_B b = so_B \quad \text{y} \quad jX_B c = j \text{ falso}_C = o_C$$

Como $ab = so_B$ y $ac = o_C$ por construcción se tiene entonces que b y c igualan a jX_B y a ; i.e., B, C son subobjetos de E . En consecuencia, $jX_B = a$ y la observación está demostrada.

Estos últimos resultados ayudarán a estudiar qué propiedades tiene la subcategoría $\underline{C}_{U,D}$. De esto se ocupará la última parte de este capítulo.

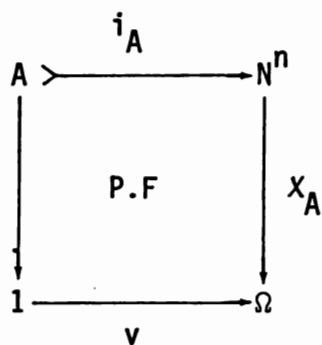
2.6 Propiedades de $\underline{C}_{U,D}$.

2.61 Proposición

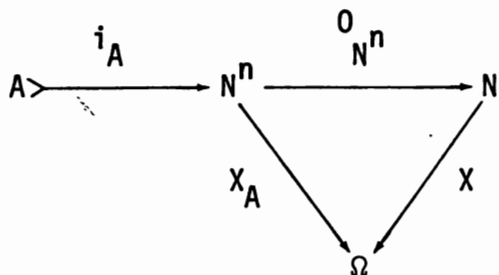
$\underline{C}_{U,D}$ tiene objeto terminal

Demostración

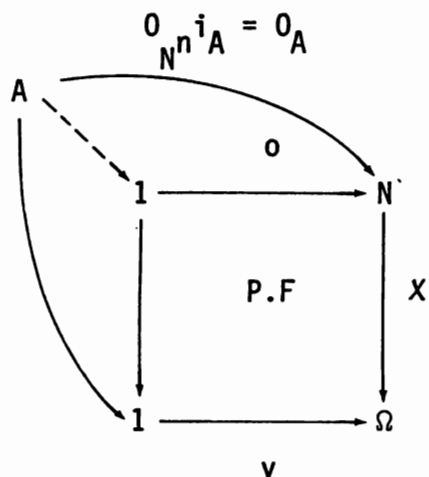
Por 2.55.1, 1 es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto. Basta probar que el \underline{C} -morfismo $!_A: A \longrightarrow 1$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo, si A es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto. Supóngase que A es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto arbitrario, entonces existe un producto fibrado de la forma



Considérese el diagrama



entonces claramente $x \circ o_{N^n} \circ i_A = x \circ x_A = v$; Por lo tanto el diagrama exterior del producto fibrado



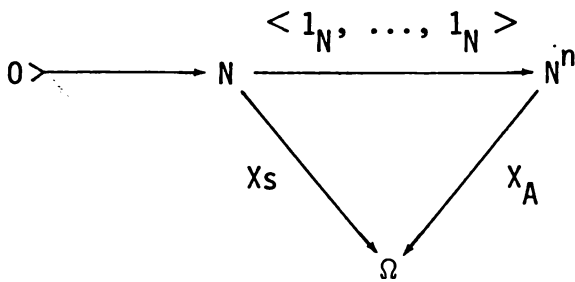
es conmutativo. Por lo tanto $\pi_A: A \rightarrow 1$ es un $C_{U,D}$ -morfismo

2.62 Proposición

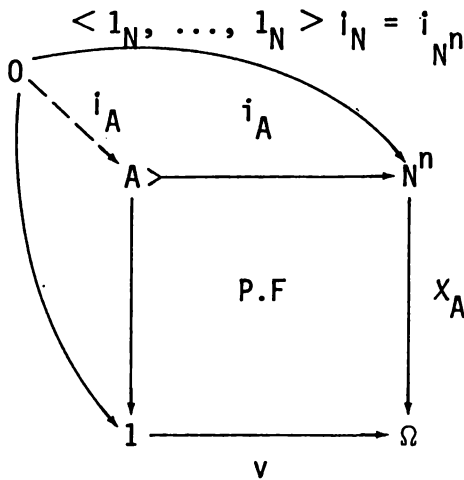
$\underline{C}_{U,D}$ tiene objeto inicial estricto.

Demostración

Por 2.55.2 $0 \longrightarrow N$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto. Sea A un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto y considérese el siguiente diagrama conmutativo



Por lo tanto, $i_A; 0 \longrightarrow A$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo ya que hace conmutativo al diagrama



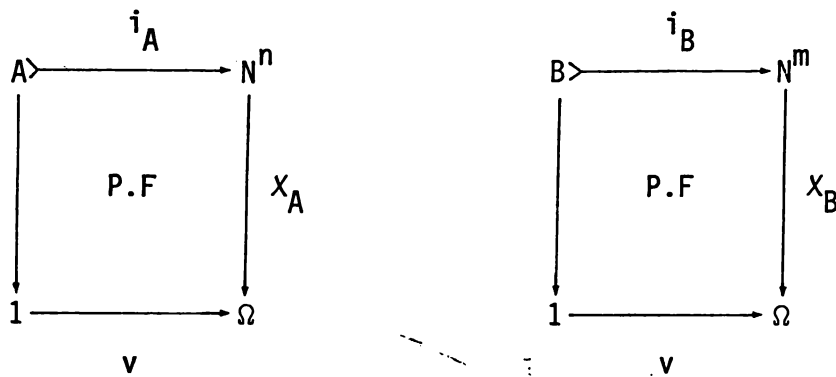
Claramente 0 es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto inicial estricto.

2.63 Proposición

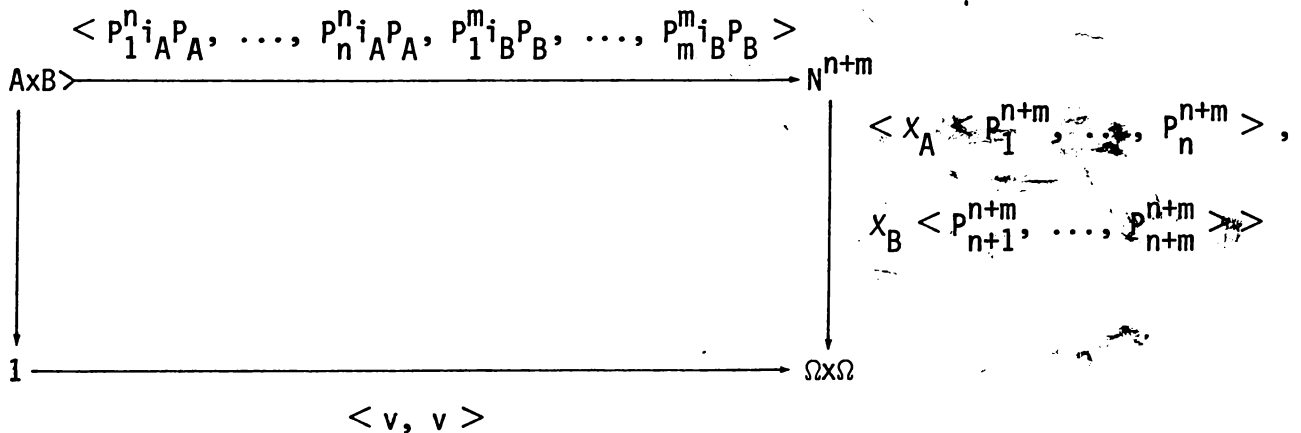
$\underline{C}_{U,D}$ tiene productos finitos

Demostración

Sean A, B dos $\underline{C}_{U,D}$ -objetos arbitrarios entonces se tienen productos fibrados de la forma



Sea $A \times B$ el \underline{C} -producto de A y B. se demostrará primero que el diagrama

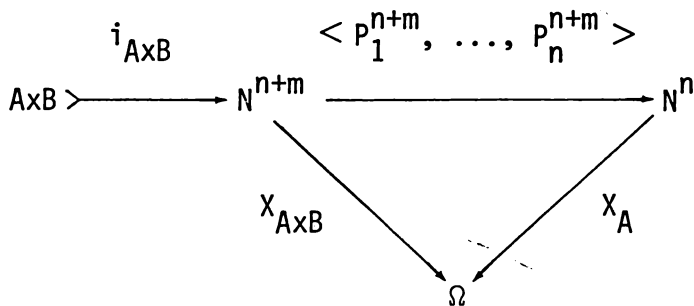


es un producto fibrado.

En efecto, es claro que el diagrama es conmutativo. Si $f = \langle f_1, \dots, f_{n+m} \rangle : C \longrightarrow N^{n+m}$ es tal que $\langle X_A \langle f_1, \dots, f_n \rangle, X_B \langle f_{n+1}, \dots, f_{n+m} \rangle \rangle = \langle v_C, v_C \rangle$ entonces existen \underline{C} -morfismos $g: C \longrightarrow A$ y $h: C \longrightarrow B$ tales que $\langle f_1, \dots, f_n \rangle = i_A g$ y $\langle f_{n+1}, \dots, f_{n+m} \rangle = i_B h$. Entonces el morfismo $\langle g, h \rangle : C \longrightarrow A \times B$ es tal que $\langle P_1^n i_A P_A, \dots, P_n^n i_A P_A, P_1^m i_B P_B, \dots, P_m^m i_B P_B \rangle \langle g, h \rangle$ es igual a f . Por lo tanto, $A \times B$ es un $\underline{C}_{U.D}$ -objeto.

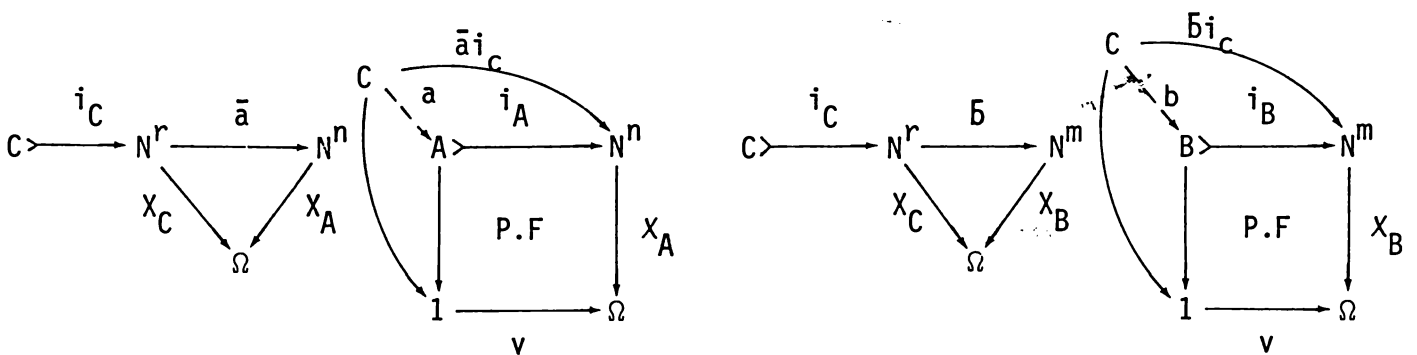
Sea $i_{A \times B} = \langle P_1^n i_A P_A, \dots, P_n^n i_A P_A, P_1^m i_B P_B, \dots, P_m^m i_B P_B \rangle$. Considérese

$P_A: A \times B \longrightarrow A$ entonces como el diagrama



es conmutativo y además $\langle P_1^{n+m}, \dots, P_n^{n+m} \rangle i_{A \times B} = i_A P_A$ entonces P_A es un $\underline{C}_{U.D}$ -morfismo. Análogamente, $P_B: A \times B \longrightarrow B$ es un $\underline{C}_{U.D}$ -morfismo.

Supóngase ahora que $C \xrightarrow{a} A$, $C \xrightarrow{b} B$ son $\underline{C}_{U.D}$ -morfismos; existen morfismos $\bar{a}: N^r \longrightarrow N^n$, $\bar{b}: N^r \longrightarrow N^m$ tales que hacen conmutativos los diagramas



Sea $\bar{c} = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m \rangle : N^n \longrightarrow N^{n+m}$ entonces es claro que $X_{A \times B} \bar{c} i_C = v_C$. Por último el \underline{C} -morfismo $\langle a, b \rangle : C \longrightarrow A \times B$ es tal que $i_{A \times B} \langle a, b \rangle = \bar{c} i_C$. Por lo tanto, $\langle a, b \rangle : C \longrightarrow A \times B$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo. Claramente, $P_A \langle a, b \rangle = a$ y $P_B \langle a, b \rangle = b$. La unicidad es inmediata.

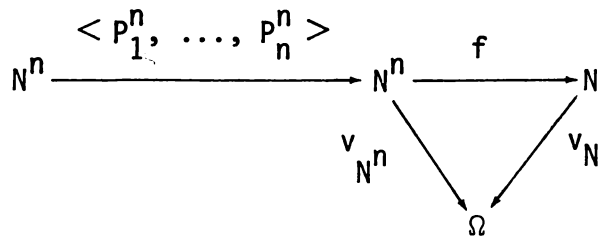
Hay algunas consecuencias inmediatas de 2.63

2.63.1 Proposición

N^n es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto y todo morfismo $f: N^n \longrightarrow N$ que pertenece a R'_C es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo.

Demostración

Por 2.63 es claro que N^n es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto. Sea $f: N^n \longrightarrow N$ un morfismo que pertenece a R'_C , como el diagrama



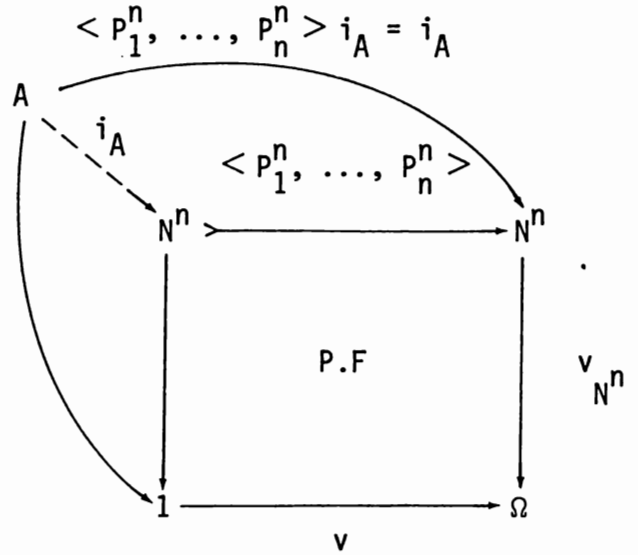
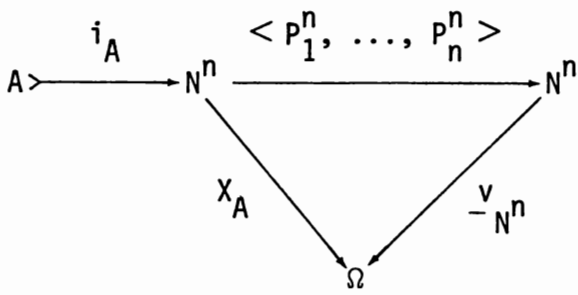
es conmutativo entonces f es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo; $1_N f = f \langle p_1^n, \dots, p_n^n \rangle$

2.63.2 Proposición

Si A es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto entonces el morfismo $i_A: A \longrightarrow N^n$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo

Demostración

Basta considerar



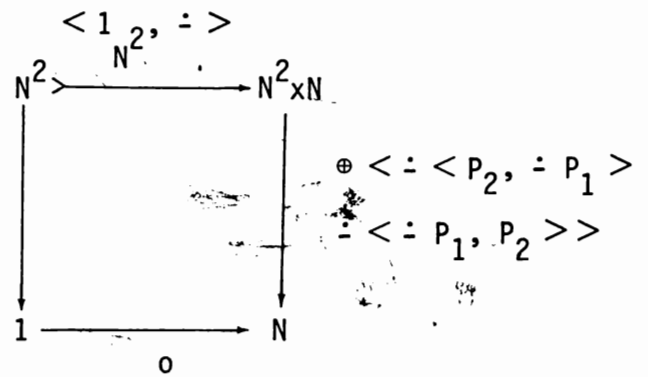
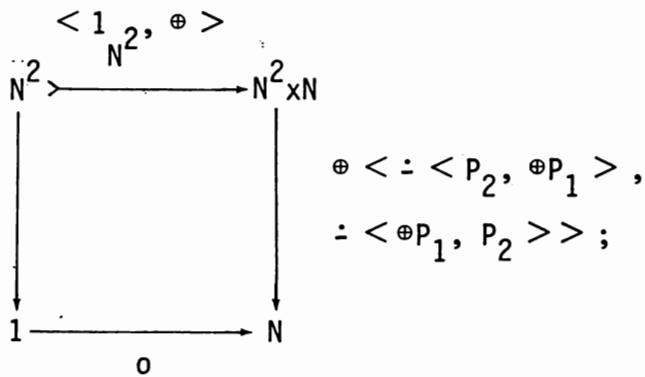
Para probar que $\underline{C}_{U,D}$ tiene igualadores es necesario hacer notar lo siguiente.

2.63.3 Proposición

Los morfismos \oplus y $\div: N^2 \longrightarrow N$ pertenecen a $R'_{\underline{C}}$.

Demostración

Inmediata porque los cuadrados



son productos fibrados.

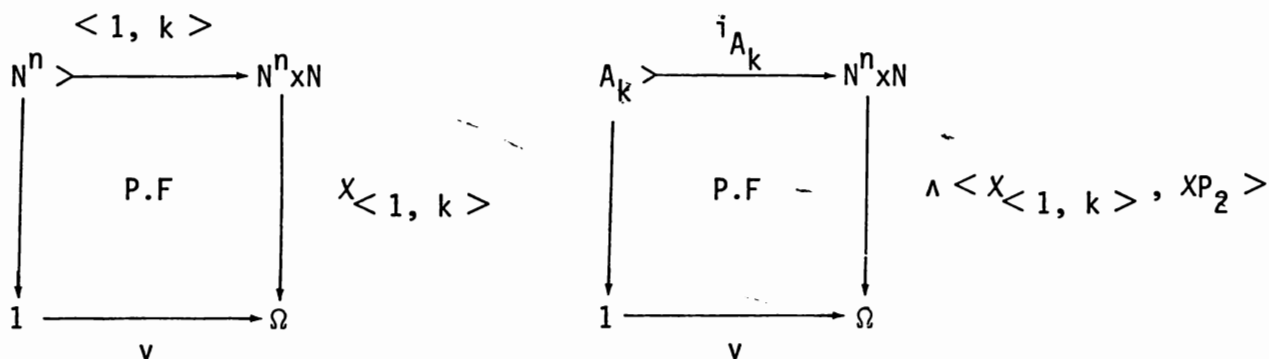
2.64 Proposición

$\underline{C}_{U,D}$ tiene igualadores.

Demostración

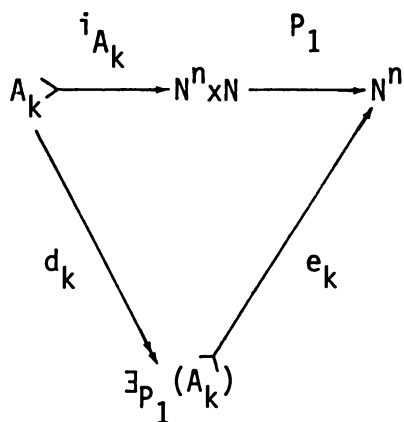
1).- Se demostrará primero: si $f, g: N^n \longrightarrow N$ son dos elementos arbitrarios de $R'_\underline{C}$ entonces su \underline{C} -igualador es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto.

En efecto, sean $f, g: N^n \longrightarrow N$ dos elementos arbitrarios de $R'_\underline{C}$ y defínase $k = \oplus \langle \cdot \langle f, g \rangle, \cdot \langle g, f \rangle \rangle : N^n \longrightarrow N$; Por $R'_\underline{C}.5$, k pertenece a $R'_\underline{C}$, es decir, $\langle 1, k \rangle : N^n \longrightarrow N^n \times N$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto. Considérense los productös fibrados:



por $R'_\underline{C}.4$, el morfismo característico de $\langle 1_{N^n}, o_{N^n} \rangle : N^n \longrightarrow N^n \times N$ es XP_2 , donde $P_2: N^n \times N \longrightarrow N$ es la proyección.

Por construcción, A_k es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto. En Set, A_k corresponde a los ceros de k . Por último, considérese el siguiente diagrama conmutativo



si $P_{\langle 1, k \rangle}$ es el predicado que define a $\langle 1_{N^n}, k \rangle : N^n \longrightarrow N^n \times N^n$

entonces en Set $\exists_{P_1}(A_k)$ es el conjunto $\{(x_1, \dots, x_n) \in N^n \mid (\exists y)$

$(P(x_1, \dots, x_n, y) \wedge y = 0)\}$. Ahora bien, se probará que $\exists_{P_1}(A_k) \xrightarrow{e_k} N^n$ es el igualador de f y g . Claramente, $\exists_{P_1}(A_k)$ es un $\underline{C}_{U.D}$ -objeto.

a).- $f e_k = g e_k$

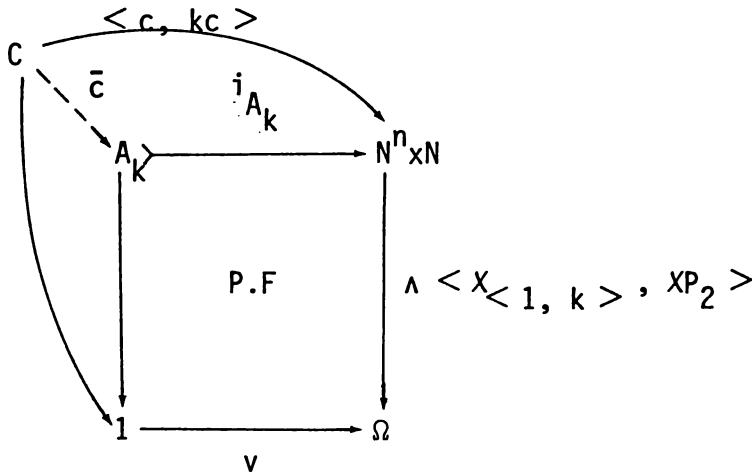
Por 2.39.2, (a) es equivalente a probar que $k e_k = 0_{\exists_{P_1}(A_k)}$. Como d_k es un

epimorfismo, $k e_k = 0_{\exists_{P_1}(A_k)}$ sii $k P_1 i_{A_k} = 0_{A_k}$; Al ser A_k un subobjeto de

$\langle 1, k \rangle : N^n \longrightarrow N^n \times N^n$, $k P_1 i_{A_k}$ es igual a $P_2 i_{A_k}$. Como $x P_2 i_{A_k} = y_{A_k}$ entonces

$P_2 i_{A_k} = 0_{A_k}$.

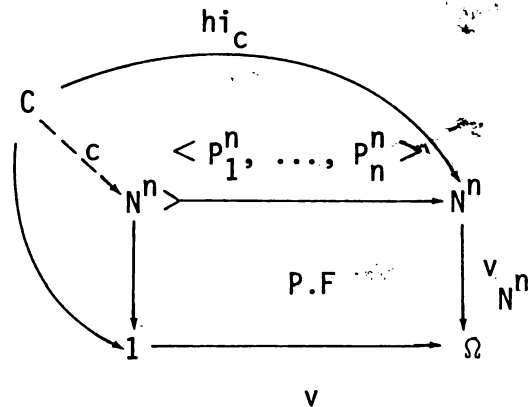
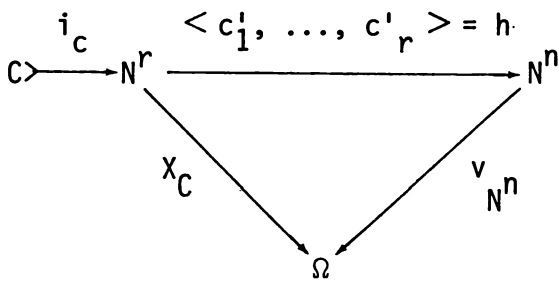
b).- Si $C \xrightarrow{c} N^n$ es un \underline{C} -morfismo tal que $f c = g c$ entonces, por 2.39.2, $k c = 0_C$; en consecuencia, el diagrama exterior del producto fibrado



es conmutativo. Por lo tanto, existe un único \underline{C} -morfismo $\bar{c}: C \longrightarrow A_k$ tal que $i_{A_k} \bar{c} = \langle c, kc \rangle$; en particular, $P_1 i_{A_k} \bar{c} = c$, pero $P_1 i_{A_k} = e_k d_k$; es decir, $c = e_k (d_k \bar{c})$. Como e_k es un \underline{C} -monomorfismo, $d_k \bar{c}: C \longrightarrow \exists_{P_1}(A_k)$ es único con esta propiedad.

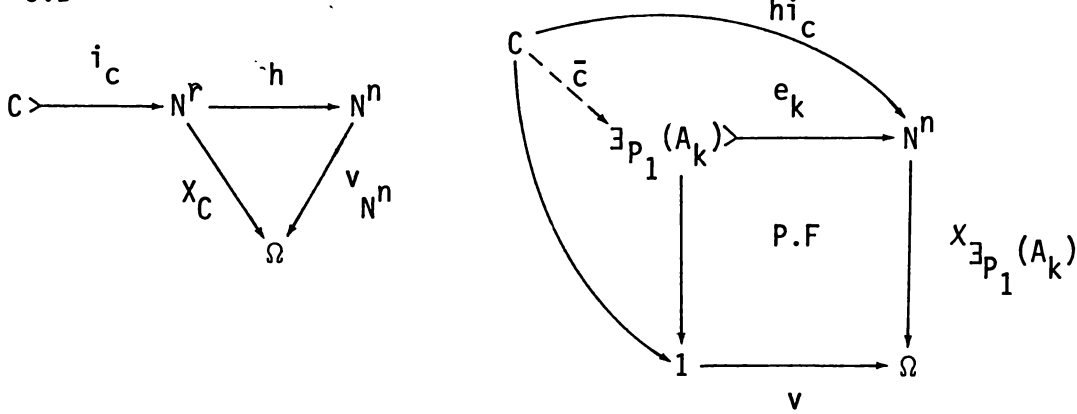
Esto demuestra que $\exists_{P_1}(A_k) \xrightarrow{e_k} N^n$ es el \underline{C} -igualador de f y g . Para comprobar que $\exists_{P_1}(A_k)$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -igualador sólo es necesario verificar que si $C \xrightarrow{c} N^n$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo tal que $fc = gc$ entonces el \underline{C} -morfismo $\bar{c}: C \longrightarrow \exists_{P_1}(A_k)$ que factoriza a c , es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo:

Supóngase que $c: C \longrightarrow N^n$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo tal que $fc = gc$. Se tienen diagramas conmutativos de la forma:



como $fc = gc$ entonces $kc = o_c$; por lo tanto, $khi_c = 0_c$; existe un único \underline{C} -morfismo $\bar{c}: C \longrightarrow \exists_{P_1}(A_k)$ tal que $e_k \bar{c} = hi_c$. Claramente, \bar{c} es un

$\underline{C}_{U,D}$ -morfismo porque hace conmutativos los diagramas

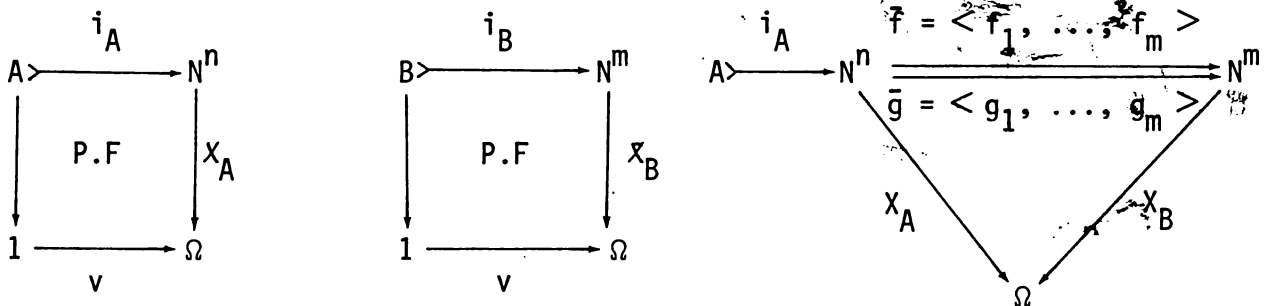


En consecuencia, $\exists_{P_1}(A_k) \xrightarrow{e_k} N^n$ es el $\underline{C}_{U,D}$ -igualador de f y g

2).- Se demostrará ahora:

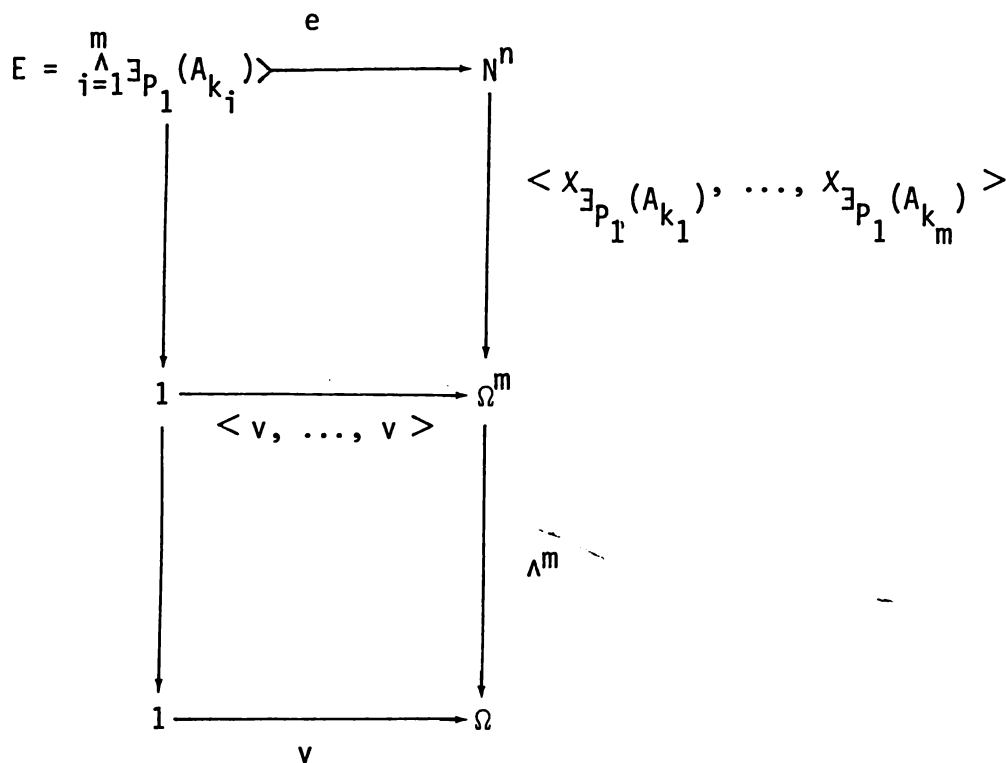
Si $A \xrightarrow[f]{g} B$ son $\underline{C}_{U,D}$ -morfismos entonces el \underline{C} -igualador de f y g es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto y además es un $\underline{C}_{U,D}$ -igualador.

Considérese la siguiente situación



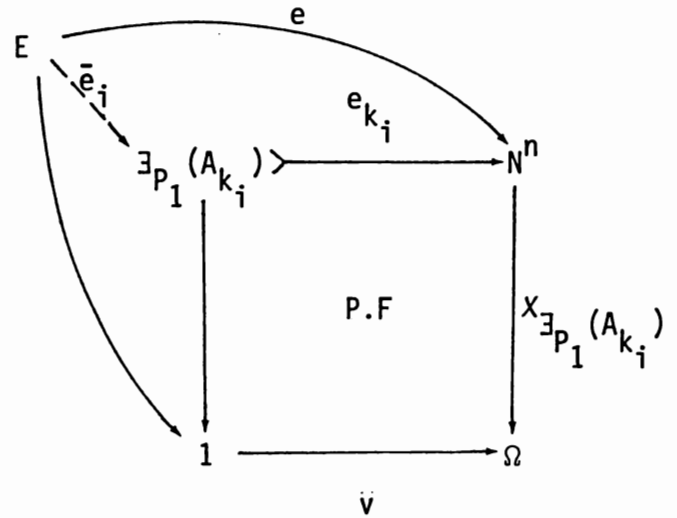
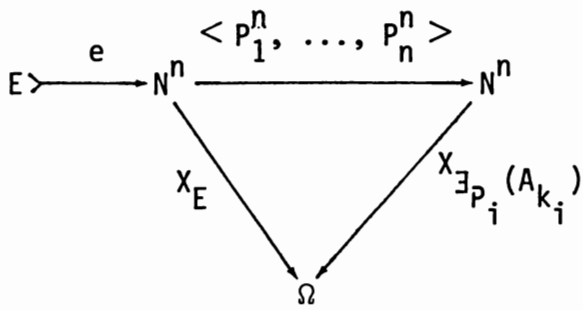
$$\bar{f}i_A = i_B f, \quad \bar{g}i_A = i_B g.$$

Por (1), se sabe que $\exists_{P_1}(A_{k_i}) \xrightarrow{e_{k_i}} N^n$ es el \underline{C} -igualador de f_i, g_i para $i \in \{1, \dots, m\}$. Además, $\exists_{P_1}(A_{k_i})$ es un $\underline{C}_{U.D}$ -objeto, $i \in \{1, \dots, m\}$. Considérese el siguiente producto fibrado.



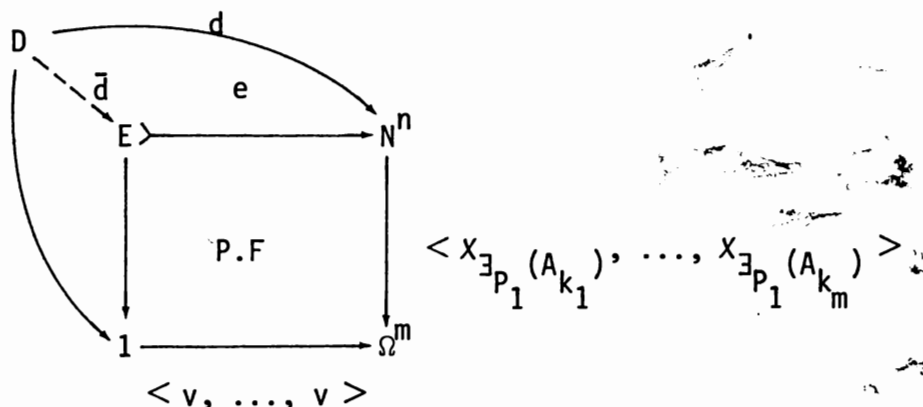
Entonces es claro que E es un $\underline{C}_{U.D}$ -objeto. Se verá que E es el igualador para \bar{f} y $\bar{g}: N^n \longrightarrow N^m$.

En efecto, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ existe $\bar{e}_i: E \longrightarrow \exists_{P_1}(A_{k_i})$ tal que $e_{k_i} \bar{e}_i = e$. Claramente \bar{e}_i es un $\underline{C}_{U.D}$ -morfismo, puesto que hace conmutativos los diagramas



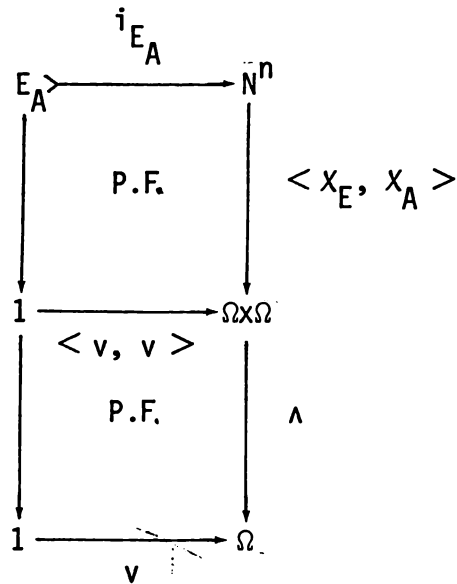
Por consiguiente, $\bar{f} e = \langle f_1, \dots, f_m \rangle e = \langle f_1 e, \dots, f_m e \rangle =$
 $= \langle f_1 e_{k_1} \bar{e}_1, \dots, f_m e_{k_m} \bar{e}_m \rangle = \langle g_1 e_{k_1} \bar{e}_1, \dots, g_m e_{k_m} \bar{e}_m \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle g_1 e, \dots, g_m e \rangle =$
 $= \langle g_1, \dots, g_m \rangle e = \bar{g} e.$

Supóngase ahora que se tiene un \underline{C} -morfismo $D \xrightarrow{d} N^n$ tal que $\bar{f}d = \bar{g}d$;
 entonces para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $f_i d = g_i d$. Por (1), existe un único morfismo
 $d_i: D \longrightarrow \exists_{P_1}(A_{k_i})$ tal que $e_{k_i} d_i = d$, para $i \in \{1, \dots, m\}$. Estos \underline{C} -morfismos
 d_i , inducen un morfismo $\bar{d}: D \longrightarrow E$ tal que $e\bar{d} = d$.



Por lo tanto (E, e) es el \underline{C} -igualador de \bar{f} y \bar{g} .

Sea E_A la intersección de E y A , entonces E_A es un $\underline{C}_{U.D}$ -objeto; existen $\underline{C}_{U.D}$ -morfismos $E_A \xrightarrow{e'} E$, $E_A \xrightarrow{e_A} A$ tales que $e \circ e' = i_{E_A}$, $i_A \circ e_A = i_{E_A}$, al ser el diagrama

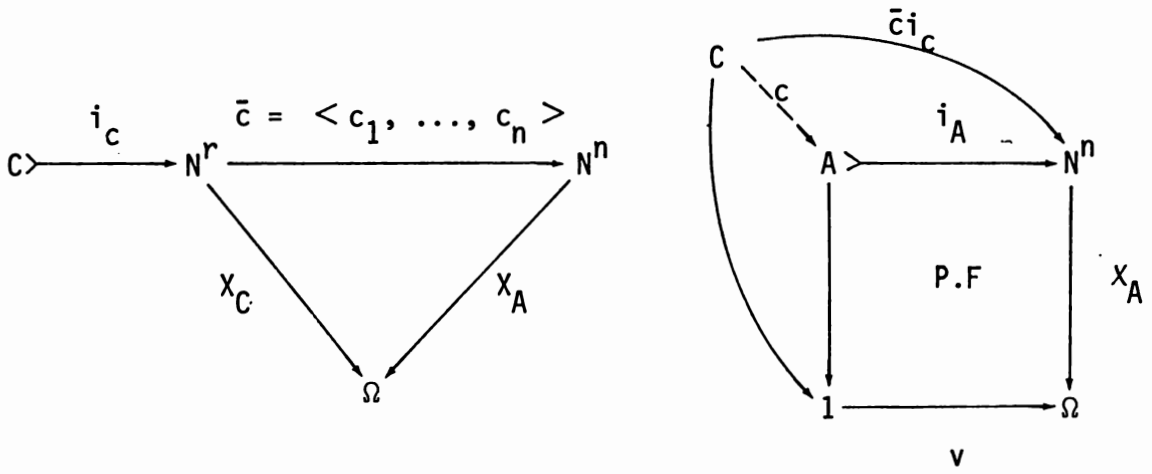


un producto fibrado.

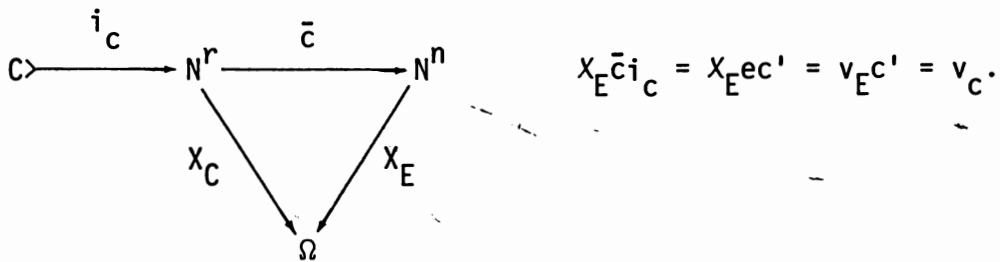
Se comprobará que (E_A, e_A) es el $\underline{C}_{U.D}$ -igualador de f y g .

Primero, $fe_A = ge_A$ ya que $i_B fe_A = \bar{f} i_A e_A = \bar{f} i_{E_A} = \bar{f} e e' = \bar{g} e e' = \bar{g} i_{E_A} = \bar{g} i_A e_A = i_B g e_A$. Como i_B es un \underline{C} -monomorfismo, $fe_A = ge_A$.

Si $C \xrightarrow{c} A$ es un $\underline{C}_{U.D}$ -morfismo tal que $fc = gc$ entonces se tienen diagramas conmutativos de la forma

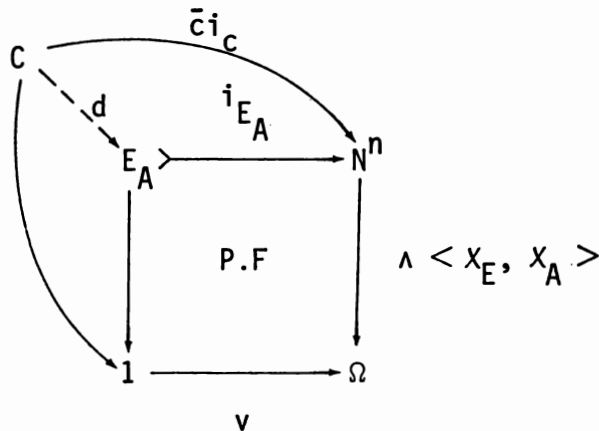


Como $i_B f = \bar{f} i_A$ entonces, $\bar{f} (\bar{c} i_c) = \bar{g} (\bar{c} i_c)$; en consecuencia, existe un único \underline{C} -morfismo $c': C \longrightarrow E$ tal que $ec' = \bar{c} i_c$. Claramente, c' es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo ya que el diagrama



es conmutativo.

Ahora bien, $c': C \longrightarrow E$ y $c: C \longrightarrow A$ inducen un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo $d: C \longrightarrow E_A$ tal que hace conmutar, el diagrama exterior del producto fibrado



$\therefore i_{E_A}^d = \bar{c}i_c$. Por último, como $i_{E_A} = i_A e_A$ entonces $i_A e_A^d = \bar{c}i_c = i_A^c$; como i_A es un \underline{C} -monomorfismo, $e_A^d = c$. Además, d es único con esta propiedad ya que e_A es un \underline{C} -monomorfismo. Por lo tanto, (E_A, e_A) es el $\underline{C}_{U,D}$ -igualador de f y g ; esto prueba 2.64.

Una observación más: Un argumento análogo al que se hizo en (2), demuestra que (E_A, e_A) también es el \underline{C} -igualador de f y g . Se pueden resumir los resultados anteriores con la siguiente afirmación.

2.65 Proposición

$\underline{C}_{U,D}$ tiene límites finitos.

Como se vió en 2.64, los $\underline{C}_{U,D}$ -igualadores también son \underline{C} -igualadores; este resultado motiva la siguiente pregunta: ¿Todo $\underline{C}_{U,D}$ -monomorfismo es un \underline{C} -monomorfismo?. El siguiente resultado aclara esta inquietud.

2.66 Proposición

Todo $\underline{C}_{U,D}$ -monomorfismo es un \underline{C} -monomorfismo

Demostración

Sea $F: \underline{C}_{U,D} \longrightarrow \underline{C}$ el funtor inclusión. Por 2.63 y 2.64, F preserva productos e igualadores; en consecuencia, F preserva productos fibrados. En particular, F preserva monomorfismos; i.e, todo $\underline{C}_{U,D}$ -monomorfismo es un \underline{C} -monomorfismo.

Es evidente la importancia de 2.66; permite preguntarse si Ω es un clasificador de subobjetos en $\underline{C}_{U,D}$. Se demostrará que la respuesta es afirmativa. Antes de poder probar esto último, se necesitan estudiar algunas propiedades más de $\underline{C}_{U,D}$.

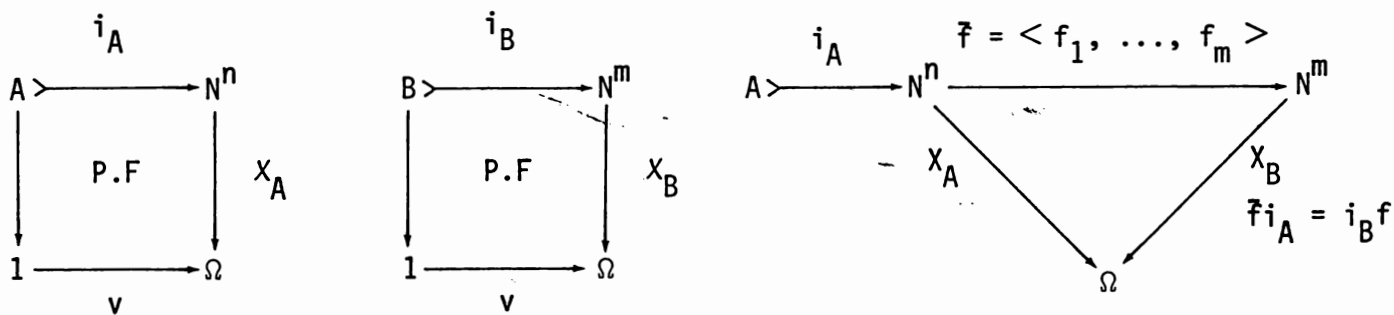
2.7 La imagen de un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo

2.71 Proposición

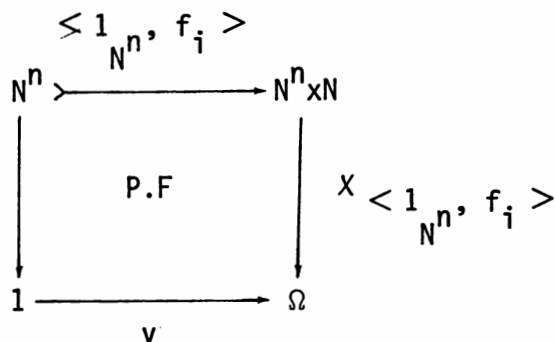
Si $f: A \longrightarrow B$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo entonces la imagen de f en \underline{C} , $\text{Im}f$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto.

Demostración

Sea $f: A \longrightarrow B$ un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo arbitrario entonces se tiene la siguiente situación:

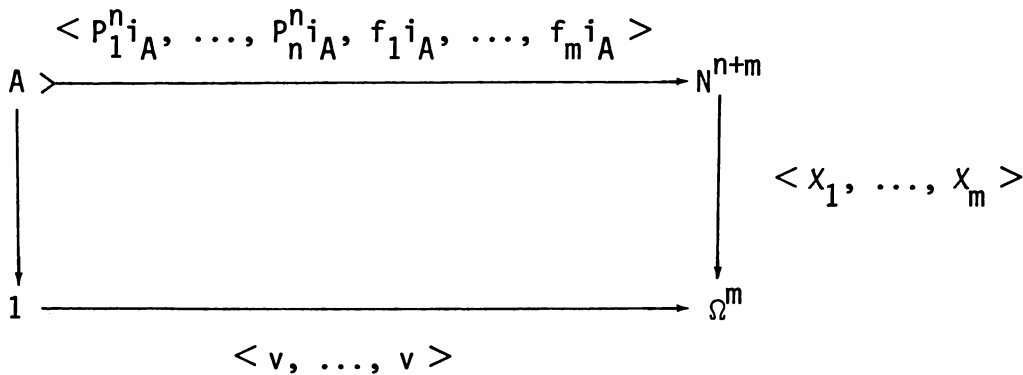


Como cada $f_i: N^n \longrightarrow N$, pertenece a R'_C entonces $\langle 1, f_i \rangle: N^n \longrightarrow N^n \times N$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto; en particular existe un producto fibrado de la forma



para $i \in \{1, \dots, m\}$

Considérese el siguiente diagrama



donde $X_i = \wedge \langle X_A \langle p_{1A}^{n_1}, \dots, p_{nA}^{n_m} \rangle, X_{\langle 1, f_i \rangle} \langle \langle p_{1A}^{n_1}, \dots, p_{nA}^{n_m} \rangle, p_{n+i}^{n+m} \rangle \rangle$,

para $i \in \{1, \dots, m\}$

entonces se afirma que es un producto fibrado.

En efecto, el diagrama es conmutativo ya que para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, se tiene

$$X_i \langle p_{1A}^{n_1}, \dots, p_{nA}^{n_m}, f_{1A}, \dots, f_{mA} \rangle = \wedge \langle X_A \langle p_{1A}^{n_1}, \dots, p_{nA}^{n_m} \rangle, \dots \rangle,$$

$$X_{\langle 1, f_i \rangle} \langle \langle p_{1A}^{n_1}, \dots, p_{nA}^{n_m} \rangle, f_{iA} \rangle = \wedge \langle X_{A,A}, X_{\langle 1, f_i \rangle} \langle 1_{N^n}, f_i \rangle_{iA} \rangle$$

$$= \wedge \langle v_A, v_A \rangle = v_A.$$

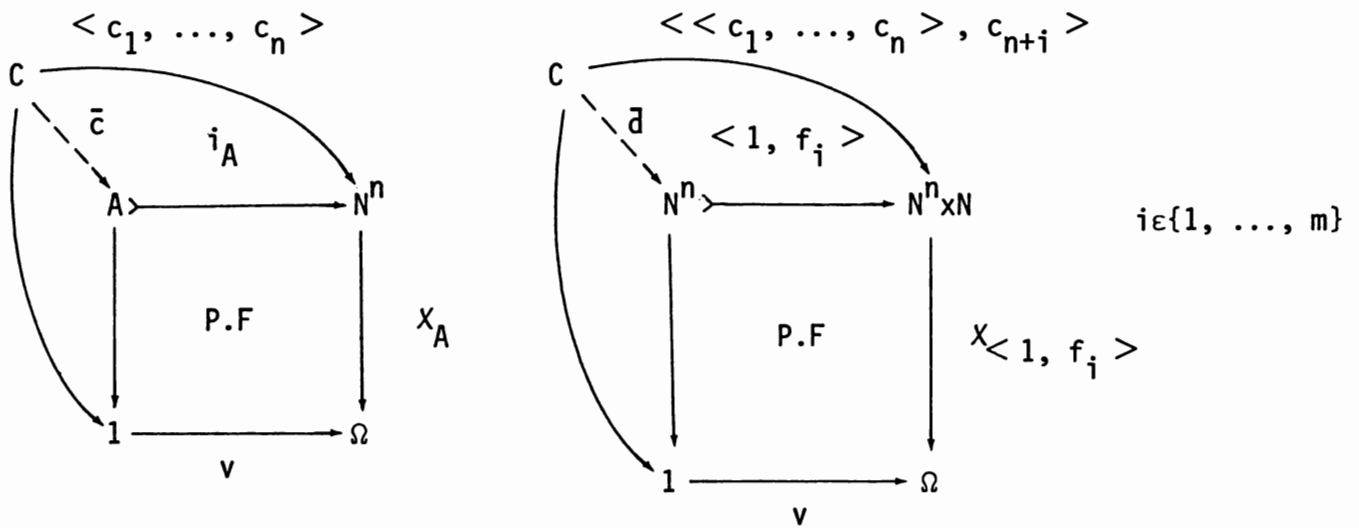
$$\langle c_1, \dots, c_{n+m} \rangle = c$$

Si $C \xrightarrow{\quad\quad\quad} N^{n+m}$ es tal que $X_i c = v_c$ para toda $i \in \{1, \dots, m\}$

entonces $X_A \langle c_1, \dots, c_n \rangle = v_c$ y $X_{\langle 1, f_i \rangle} \langle \langle c_1, \dots, c_n \rangle, c_{n+i} \rangle = v_c$ para

$i \in \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto existen morfismos $\bar{c}: C \longrightarrow A$ y $\bar{d}: C \longrightarrow N^n$

que hacen conmutativos los diagramas:



es decir, $i_A \bar{c} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$ y $f_i \langle c_1, \dots, c_n \rangle = c_{n+i}$ para $i \in \{1, \dots, m\}$;
 Un cálculo sencillo demuestra que $\langle p_{1A}^n, \dots, p_{nA}^n, f_{1A}, \dots, f_{mA} \rangle \bar{c} =$
 $= \langle c_1, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots, c_{n+m} \rangle = c.$

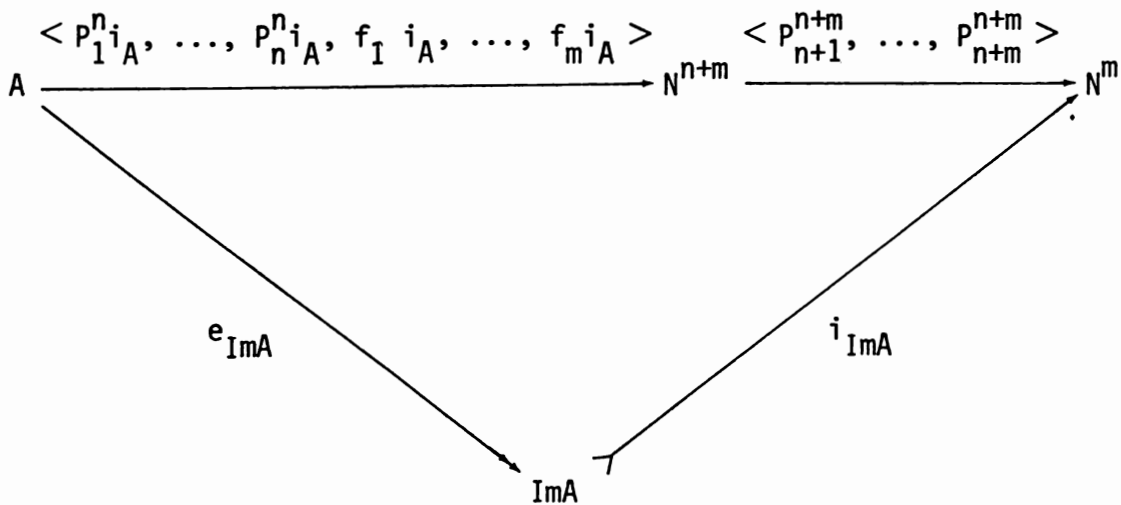
En Set esta construcción corresponde a tomar el siguiente conjunto:

$$\{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in N^{n+m} \mid p_A(x_1, \dots, x_n) \wedge p_{\langle 1, f_1 \rangle}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \wedge \dots \wedge p_{\langle 1, f_m \rangle}(x_1, \dots, x_n, x_{n+m})\}.$$

Es claro que en Set la imagen queda descrita por el siguiente conjunto.

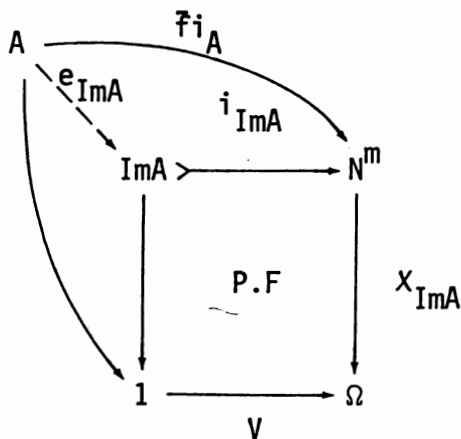
$$\{(y_1, \dots, y_m) \in N^m \mid (\exists x_1, \dots, x_n) (p_A(x_1, \dots, x_n) \wedge p_{\langle 1, f_1 \rangle}(x_1, \dots, x_n, y_1) \wedge \dots \wedge p_{\langle 1, f_m \rangle}(x_1, \dots, x_n, y_m))\}$$

En \underline{C} esto equivale a tomar el siguiente diagrama:



Claramente, la parte superior del diagrama anterior es igual a:

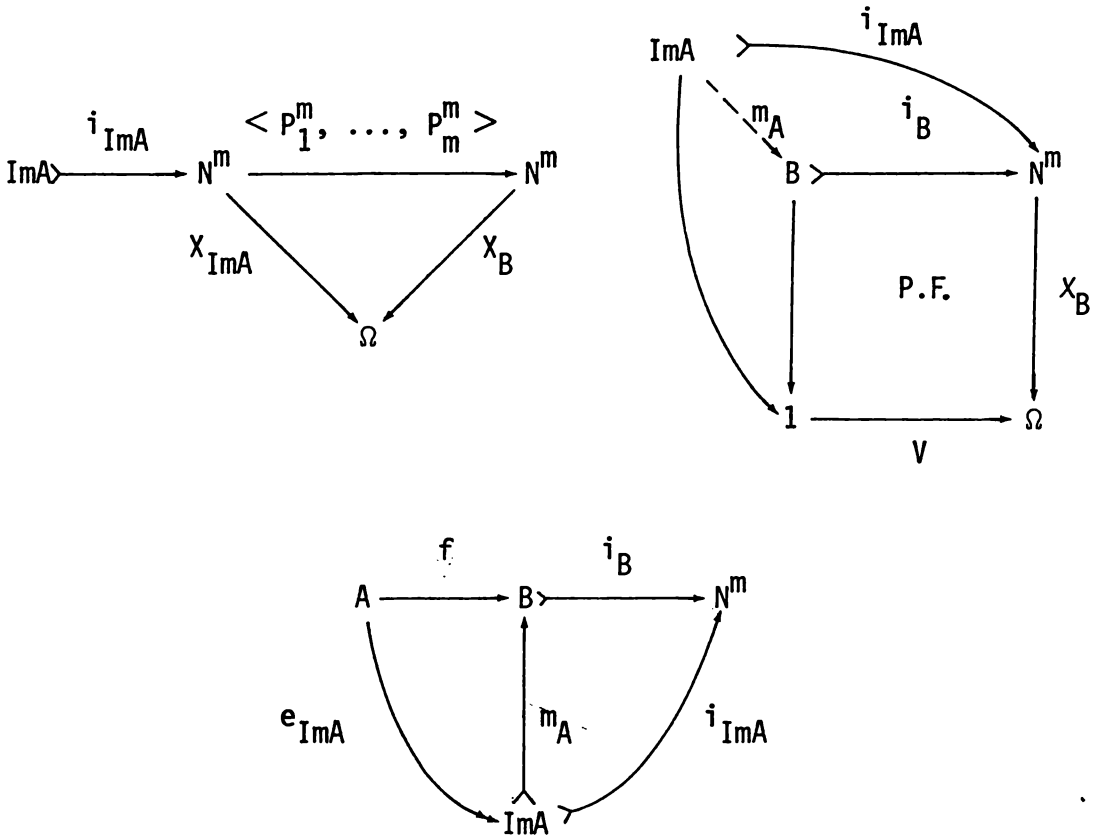
$\langle f_1 i_A, \dots, f_m i_A \rangle = \langle f_1, \dots, f_m \rangle i_A = \bar{f} i_A = i_B f$. Además, por construcción ImA es un $\underline{C}_{U.D.}$ -objeto; $e_{ImA}: A \longrightarrow ImA$ es un $\underline{C}_{U.D.}$ -morfismo ya que hace conmutativo el diagrama



Por último, como $i_{ImA} e_{ImA} = i_B f$ y e_{ImA} es un \underline{C} -epimorfismo entonces $X_B i_{ImA} = v_{ImA}$.

Por lo tanto, existe un único \underline{C} -morfismo $m_A: ImA \longrightarrow B$ tal que hace

conmutativos los diagramas



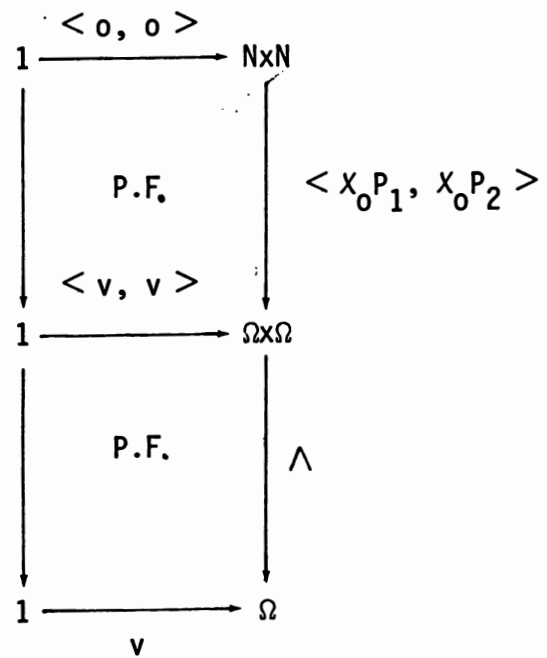
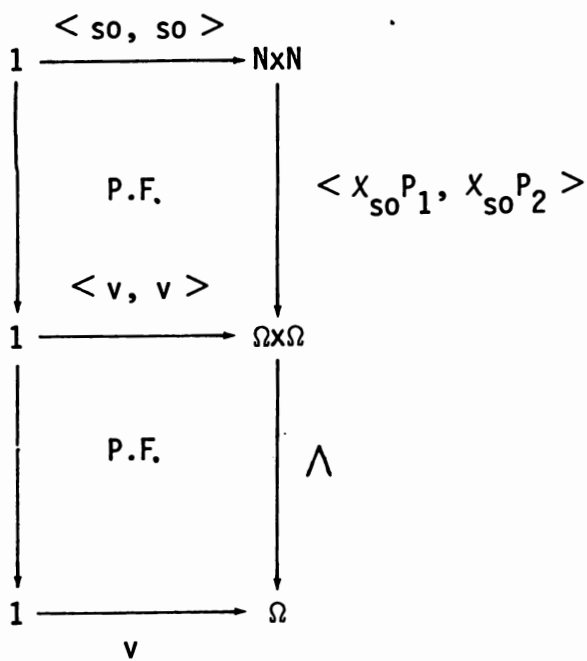
En consecuencia, $m_A: ImA \longrightarrow B$ es un $\underline{C}_{U.D}$ -morfismo y la afirmación está probada.

2.72 Proposición

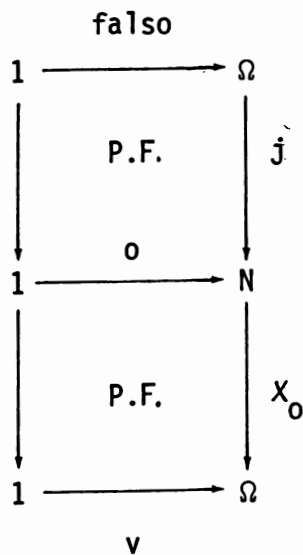
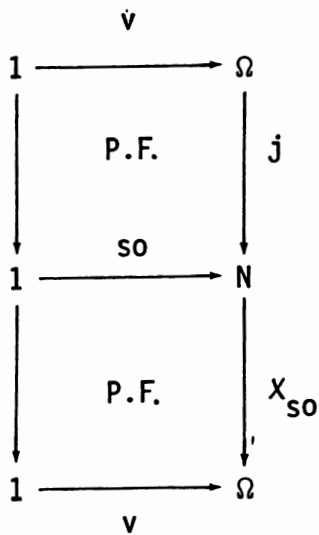
El morfismo característico de $\Omega \xrightarrow{\langle j, j \rangle} N \times N$ es $v \langle \wedge (X_{s_0} \times X_{s_0}), \wedge (X_0 \times X_0) \rangle$

Demostración

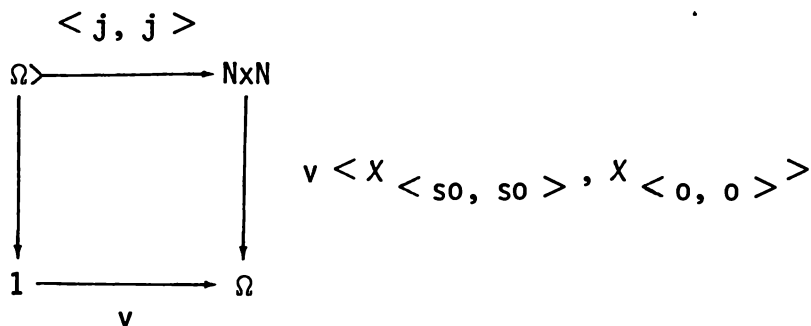
Como los diagramas



son productos fibrados entonces $X_{\langle so, so \rangle} = \wedge (X_{so} \times X_{so})$ y $X_{\langle o, o \rangle} = \wedge (X_o \times X_o)$. Además $X_{so}^j = 1_\Omega$ y $X_o^j = \lceil$ porque los rectángulos

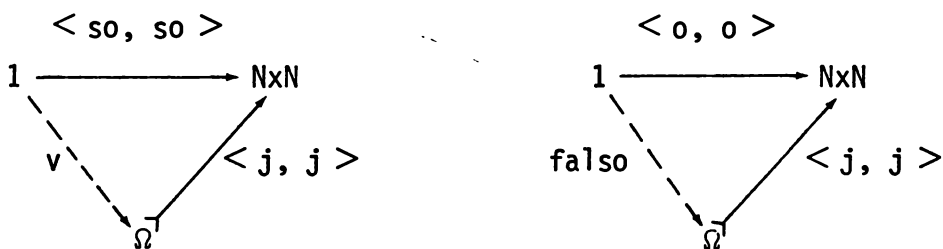


Por lo tanto, el cuadrado

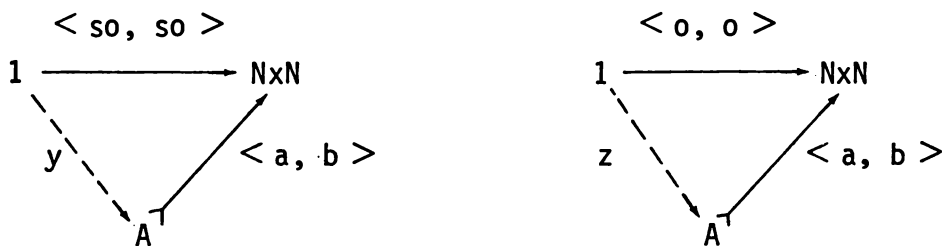


es conmutativo.

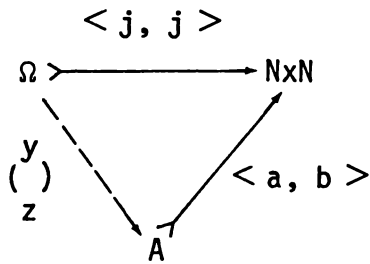
Ahora, $1 \xrightarrow{\langle so, so \rangle} N \times N$, $1 \xrightarrow{\langle o, o \rangle} N \times N$ son subobjetos de $\Omega \xrightarrow{\langle j, j \rangle} N \times N$, puesto que los triángulos



son conmutativos. Supóngase que $A \xrightarrow{\langle a, b \rangle} N \times N$ es un subobjeto de $N \times N$ tal que

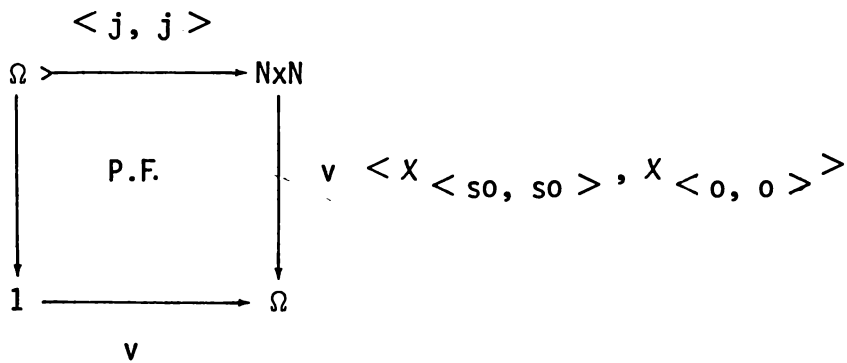


entonces el triángulo



es conmutativo puesto que $\langle a, b \rangle \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix} \right) v = \langle a, b \rangle y = \langle so, so \rangle = \langle j, j \rangle v$
 y además $\langle a, b \rangle \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix} \right) falso = \langle a, b \rangle z = \langle o, o \rangle = \langle j, j \rangle falso$.

Por lo tanto, el cuadrado



es un producto fibrado.

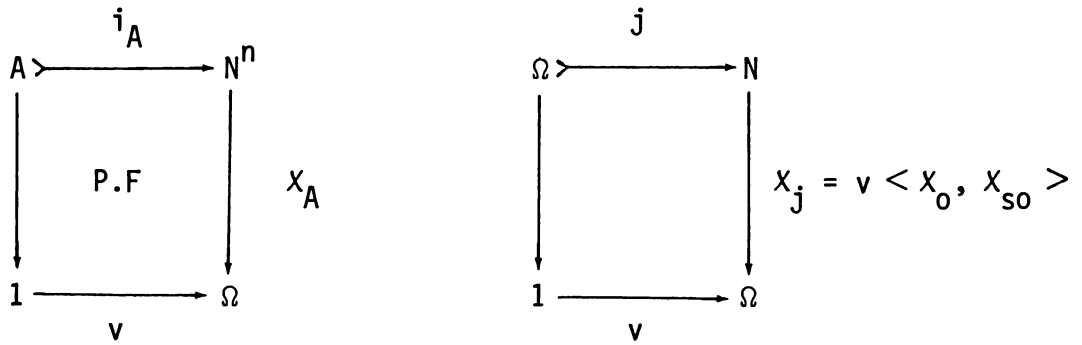
Con este último resultado se puede probar:

2.73 Proposición

Si A es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto entonces el \underline{C} -morfismo característico de A , $X_A: N^n \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo.

Demostración

Sea A un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto arbitrario y considérense los productos fibrados



Se demostrará que $jX_A: N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$. Esto es, su gráfica $\langle 1_{N^n}, jX_A \rangle: N^n \longrightarrow N^n \times N$ es un $\underline{C}_{U.D}$ -objeto.

La descripción en Set del morfismo característico de $\langle 1_{N^n}, jX_A \rangle$ es:

$$\{(x, y) \in N^n \times N \mid (P_A(x_1, \dots, x_n) \wedge y = 1) \vee (\neg P_A(x_1, \dots, x_n) \wedge y = 0)\}$$

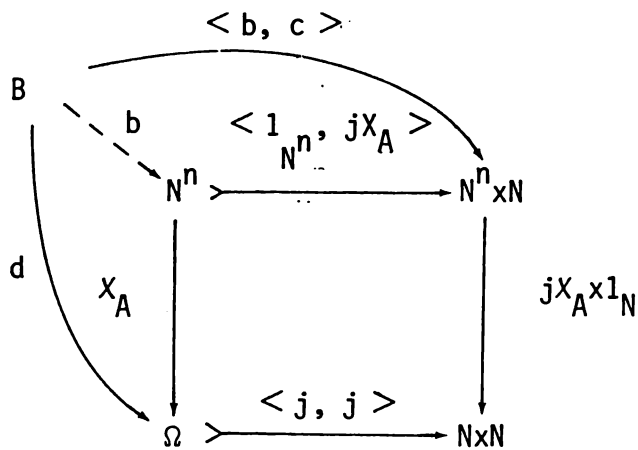
En \underline{C} esto equivale a considerar el siguiente \underline{C} -morfismo:

$$v \langle \wedge \langle X_A P_1, X_{s_0} P_2 \rangle, \wedge \langle \neg X_A P_1, X_0 P_2 \rangle \rangle: N^n \times N \longrightarrow \Omega; \text{ donde } P_1: N^n \times N \longrightarrow N^n, P_2: N^n \times N \longrightarrow N \text{ son las proyecciones.}$$

Ahora bien, por 2.72, $1_\Omega = X_{s_0} j$ y $\neg = X_0 j$; en consecuencia el morfismo anterior puede escribirse como:

$$v \langle \wedge \langle X_{s_0} j X_A P_1, X_{s_0} P_2 \rangle, \wedge \langle X_0 j X_A P_1, X_0 P_2 \rangle \rangle = v \langle \wedge (X_{s_0} \times X_{s_0}), \wedge (X_0 \times X_0) \rangle (jX_A \times 1_N) = X_{\langle j, j \rangle} (jX_A \times 1_N).$$

Basta probar entonces que el cuadrado



es un producto fibrado.

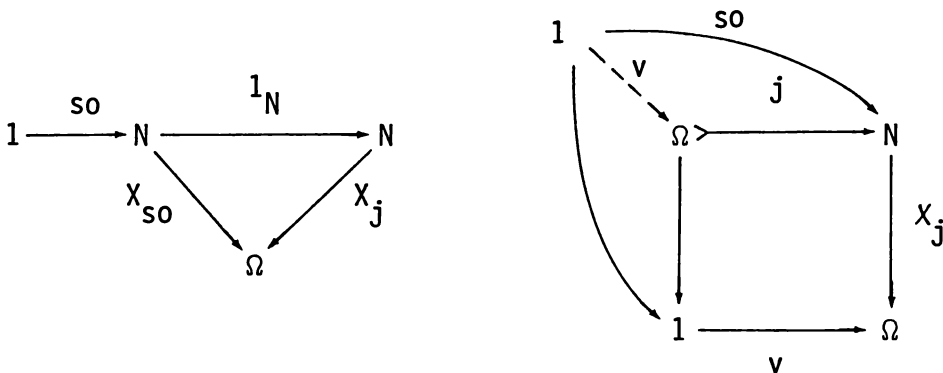
En efecto, es claro que el cuadrado es conmutativo. Si $B \xrightarrow{\langle b, c \rangle} N^n \times N$ y $d: B \rightarrow \Omega$ son tales que $jd = jX_A b$ y $jd = c$ entonces al ser j un monomorfismo $d = X_A b$ y $jd = c$. Por lo tanto, el cuadrado es un producto fibrado y $jX_A: N^n \rightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$. En particular, $X_A: N^n \rightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo.

2.74 Proposición

Ω es un clasificador de $\underline{C}_{U,D}$ -subobjetos.

Demostración

El \underline{C} -morfismo $v: 1 \rightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo ya que el diagrama

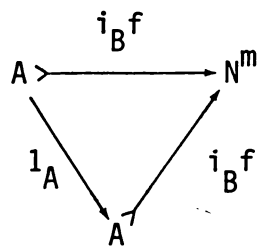


son conmutativos (véase 2.55.4)

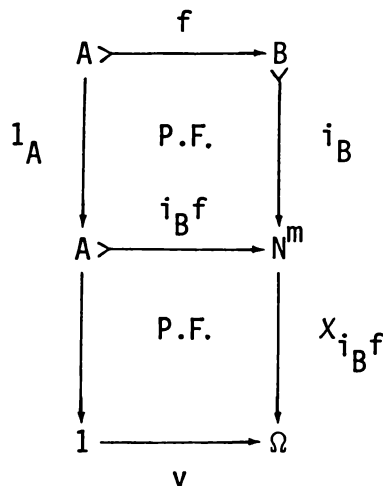
Análogamente, falso: $1 \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo.

Por último, todo $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo $X: A \longrightarrow \Omega$ clasifica a un $\underline{C}_{U,D}$ -subobjeto de A ya que $\underline{C}_{U,D}$ tiene productos fibrados y $v: 1 \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo.

Recíprocamente, si $f: A \longrightarrow B$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -monomorfismo entonces por 2.66, f es un \underline{C} -monomorfismo; en consecuencia $i_B f: A \longrightarrow N^m$ es un \underline{C} -monomorfismo. Además, por 2.71, la \underline{C} -imagen de $i_B f$ es:



Por 2.73 el morfismo característico de $i_B f$, $X_{i_B f}: N^m \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo. Al ser el diagrama



un producto fibrado e $i_B: B \longrightarrow N^m$ un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo, $X_A = X_{i_B f} i_B: B \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo.

Por lo tanto, Ω es un clasificador de $\underline{C}_{U,D}$ -subobjetos.

Se ha probado entonces el siguiente teorema.

2.8 Teorema ($\underline{C}_{U,D}$)

Si \underline{C} es una categoría que satisface 2.11 y $\underline{C}_{U,D}$ es la categoría ultradiofántica determinada por \underline{C} (2.55) entonces $\underline{C}_{U,D}$ satisface.

$\underline{C}_{U,D}$ ·1).- $\underline{C}_{U,D}$ tiene límites finitos. Además, el funtor inclusión $F: \underline{C}_{U,D} \longrightarrow \underline{C}$ preserva límites finitos.

$\underline{C}_{U,D}$ ·2).- $\underline{C}_{U,D}$ tiene un objeto inicial estricto.

$\underline{C}_{U,D}$ ·3).- $\underline{C}_{U,D}$ tiene clasificador de subobjetos, que es el mismo de \underline{C} .

3. EL CASO DE LAS CATEGORIAS CON N "TIPICO".

El teorema 2.8 permite preguntarse si la categoría $\underline{C}_{U,D}$ es isomorfa a U.D. El propósito de este capítulo es dar una respuesta a esta interrogante. El estudio de esto último depende fuertemente de la siguiente definición y sus consecuencias.

3.1 Definición

Sea \underline{C} una categoría que cumple 2.11. Se dice que el \underline{C} -objeto de números naturales N , es *típico* [F_r] si para cada pareja f, g de endomorfismos de N tal que $fs^n_0 = gs^n_0$ para todo natural $s^n_0: 1 \longrightarrow N$ ($n \in \mathbb{N}$) se tiene que f es igual a g .

Como en [Coste-Roy, M. F. et al.] se puede probar el siguiente resultado

3.12 Proposición

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

T.1):- N es típico

T.2):- El único subobjeto de N que contiene a todos los naturales $1 \xrightarrow{s^n_0} N$ ($n \in \mathbb{N}$) es N .

Demostración

T.1 \Rightarrow T.2):- Supóngase que $A \subset N$ contiene a todos los naturales $1 \xrightarrow{s^n_0} N$.

Sea $X_A: N \longrightarrow \Omega$ el morfismo característico de A y considérense los endomorfismos jX_A y jV_N , donde $j: \Omega \longrightarrow N$ es el morfismo construido en 2.34. Se tiene entonces que para todo natural $1 \xrightarrow{s^n_0} N$, se cumple:

$$jX_A s^no = jv = so \quad \text{y} \quad jV_N s^no = jv = só.$$

Por lo tanto, $jX_A = jV_N$, i.e., $X_A = V_N$.

T.2 \Rightarrow T.1).- Recíprocamente, si $f, g: N \longrightarrow N$ son tales que $fs^no = gs^no$ para todo natural $1 \xrightarrow{s^no} N$ y $E \xrightarrow{e} N$ es el igualador de f y g , entonces es claro que E contiene a todos los naturales $1 \xrightarrow{s^no} N$. Por T.2, E es N y en consecuencia f es igual a g .

De aquí en adelante, se supondrá además que \underline{C} es bivalente, i.e.,:
 $|\text{hom}_{\underline{C}}(1, \Omega)| = 2$; \underline{C} denotará a una categoría que satisface 2.11 y alguna de las condiciones equivalentes de 3.12. Una consecuencia inmediata de 3.1 es la siguiente proposición.

3.13 Proposición

Si $y: 1 \longrightarrow N$ es un elemento de N entonces existe n en N tal que $y = s^no$.

Demostración

Supóngase lo contrario y considérese el producto fibrado

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{y} & N \\
 \downarrow & & \downarrow X_y \\
 1 & \xrightarrow{v} & \Omega
 \end{array}$$

P.F

entonces, es obvio que $jX_y s^no = j \text{ falso}_N s^no$, para todo natural $s^no: 1 \longrightarrow N$;

en consecuencia, $jX_j = j \text{ falso}_N$; esto es, $X_y = \text{falso}_N$ lo cual es absurdo.

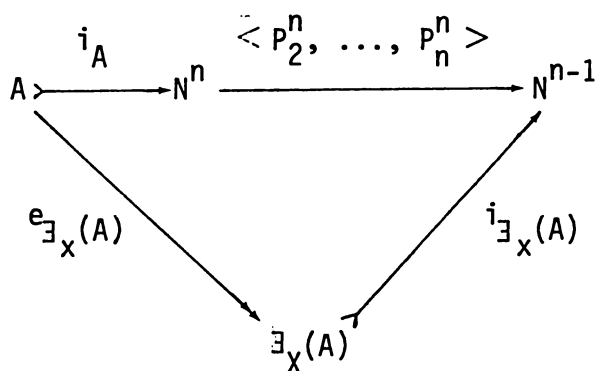
3.13 puede justificar, de algún modo, el nombre que recibe N en 3.1. Como se verá, 3.1 tiene implicaciones muy interesantes. Algunas de estas últimas se demostrarán en lo que sigue:

3.14 Proposición

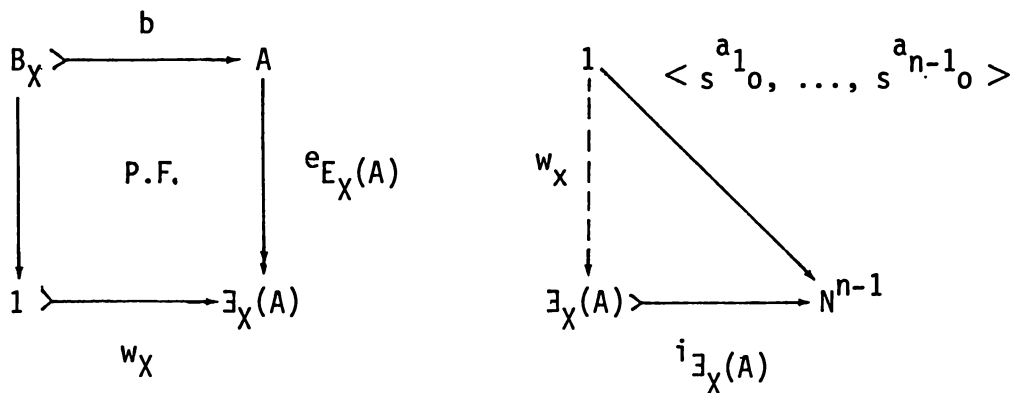
Si A es un subobjeto de N^n tal que $X_A < s^{a_1}_0, \dots, s^{a_n}_0 > = \text{falso}$ para toda n-ada $< s^{a_1}_0, \dots, s^{a_n}_0 > : 1 \longrightarrow N^n$ entonces X_A es falso.

Demostración

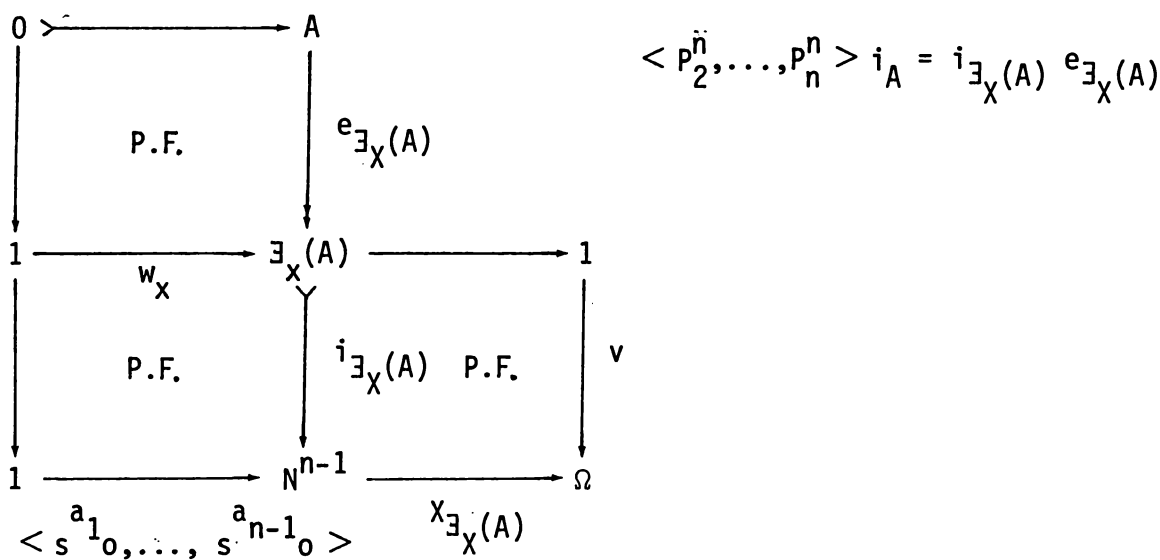
Por inducción sobre n. Si n es cero ó uno la afirmación es inmediata. Supóngase que el resultado es cierto para toda k menor que n. Sea $A \xrightarrow{i_A} N^n$ un subobjeto de N^n que cumple: $X_A < s^{a_1}_0, \dots, s^{a_n}_0 > = \text{falso}$, para toda n-ada $< s^{a_1}_0, \dots, s^{a_n}_0 >$. Basta demostrar que $\exists_X(A) \xrightarrow{\quad} N^{n-1}$ es tal que $X_{\exists_X(A)} < s^{a_1}_0, \dots, s^{a_{n-1}}_0 >$ es falso para toda (n-1)-ada, $< s^{a_1}_0, \dots, s^{a_{n-1}}_0 >$, donde $\exists_X(A)$ se obtiene por medio del siguiente diagrama:



En efecto, en caso contrario existiría una $(n-1)$ -ada tal que $\langle s_0^{a_1}, \dots, s_{n-1}^{a_{n-1}} \rangle :$
 $1 \longrightarrow N^{n-1}$, pertenece a $\exists_X(A)$. Considérese el producto fibrado



B_X no puede ser inicial ya que de serlo, se tendrían los siguientes diagramas conmutativos



en particular, $X \langle s_0^{a_1}, \dots, s_{n-1}^{a_{n-1}} \rangle <p_2^n, \dots, p_n^n> i_A = \text{falso}_A$; como

$e_{\exists_X(A)}$ es un epimorfismo entonces $X_{\exists_X(A)} \langle s^a_{1_0}, \dots, s^a_{n-1_0} \rangle = \text{falso}_{\exists_X(A)}$;
 lo cual no es posible.

Por lo tanto, B_X no es inicial. Ahora, si $E \xrightarrow{e} N$ es el igualador de

$v_N: N \longrightarrow \Omega$ y $X_A \langle 1_N, s^a_{1_{0N}}, \dots, s^a_{n-1_{0N}} \rangle: N \longrightarrow \Omega$ entonces E es

inicial por hipótesis y T.1. Sin embargo, $p_1^n i_A^b: B_X \longrightarrow A$ iguala a v_N y

$X_A \langle 1_N, s^a_{1_{0N}}, \dots, s^a_{n-1_{0N}} \rangle$ ya que:

$$\langle 1_N, s^a_{1_{0N}}, \dots, s^a_{n-1_{0N}} \rangle p_1^n i_A^b = \langle p_1^n i_A^b, s^a_{1_{0B_X}}, \dots, s^a_{n-1_{0B_X}} \rangle$$

y además, $\langle p_2^n, \dots, p_n^n \rangle i_A^b = i_{\exists_X(A)} e_{\exists_X(A)}^b = i_{\exists_X(A)} w_X (!_{B_X}) =$

$$= \langle s^a_{1_0}, \dots, s^a_{n-1_0} \rangle (!_{B_X}) = \langle s^a_{1_{0B_X}}, \dots, s^a_{n-1_{0B_X}} \rangle$$

En consecuencia, $\langle 1_N, s^a_{1_{0N}}, \dots, s^a_{n-1_{0N}} \rangle p_1^n i_A^b = \langle p_1^n i_A^b, p_2^n i_A^b, \dots, p_n^n i_A^b \rangle =$

$$= i_A^b \quad \therefore X_A \langle 1_N, s^a_{1_{0N}}, \dots, s^a_{n-1_{0N}} \rangle p_1^n i_A^b = X_A i_A^b = v_A^b = v_{B_X}$$

De esto último, se puede concluir que $X_{\exists_X(A)} \langle s^a_{1_0}, \dots, s^a_{n-1_0} \rangle = \text{falso}$ para
 toda $(n-1)$ -ada $\langle s^a_{1_0}, \dots, s^a_{n-1_0} \rangle$ y por hipótesis de inducción $\exists_X(A)$ es inicial.

Por 2.11, C.4, A es inicial.

3.15 Proposición

Si $A \twoheadrightarrow N^n$ es no-inicial entonces A es no-vacío; i.e., A tiene un elemento.

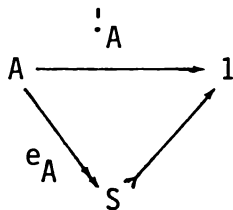
Demostración

Por 3.14, para alguna n -ada $\langle s^a_1, \dots, s^a_n \rangle : 1 \longrightarrow N^n$, $\chi_A \langle s^a_1, \dots, s^a_n \rangle =$

3.15 tiene una consecuencia interesante.

3.16 Proposición

Si $A \twoheadrightarrow N$ es un subobjeto de N arbitrario entonces su soporte¹ $A \longrightarrow S$ se escinde



Demostración

Sea A un subobjeto de N arbitrario, entonces S es 1 ó 0. Si S es 0 entonces A es inicial y la afirmación está probada. Si S es 1, por 3.15 A es no-vacío.

Lo interesante de 3.16 es que de hecho es equivalente a 3.1. Es decir, N es típico sii los soportes de los subobjetos de N se escinden. Esta última afirmación queda contenida en la siguiente proposición.

¹ Véase por ejemplo, [J] págs. 140-146

3.17 Proposición

Son equivalentes

T.1).- N es típico

T.2).- El único subobjeto de N que contiene a todos los naturales $1 \xrightarrow{s^n_0} N$ ($n \in \mathbb{N}$) es N .

T.3).- El único subobjeto de N que contiene a todos los elementos $1 \xrightarrow{y} N$ de N es N .

T.4).- Si $A \xrightarrow{\quad} N$ es un subobjeto arbitrario entonces su soporte $A \xrightarrow{\quad} S$ se escinde.

Demostración

Es obvio que $T.2 \implies T.3$, $T.3 \implies T.1$. Es decir, $T.1$, $T.2$ y $T.3$ son equivalentes. Además, es claro que $T.1$ implica $T.4$. Sólo falta demostrar que $T.4$ implica $T.1$.

Sea $A \xrightarrow{i_A} N$ un subobjeto arbitrario de N . Si $\neg A \xrightarrow{i_{\neg A}} N$ es el complemento de A y $\neg A \xrightarrow{\quad} S$ es su soporte entonces por $T.4$, este último se escinde. Si $\neg A$ es inicial no hay nada que probar. Si $\neg A$ es no-inicial, sea $y: 1 \xrightarrow{\quad} \neg A$ un elemento de $\neg A$. Supóngase ahora que A contiene todos los elementos de N ; en consecuencia A contiene a $i_{\neg A}$ y: $1 \xrightarrow{\quad} N$; esto es,

$i_{\neg A}$ y pertenece a A y $\neg A$, lo cual no es posible. Por lo tanto, si A contiene todos los puntos de A entonces A es N .

A partir de 3.17 y por el trabajo desarrollado en los topos bien punteados¹, es

¹ Véase [J] pág. 314

razonable preguntarse si no se puede hacer un estudio análogo para la categoría $\underline{C}_{U.D.}$. La siguiente sección se encargará de esta última pregunta.

3.2 $\underline{C}_{U.D.}$ es una categoría bien puntuada

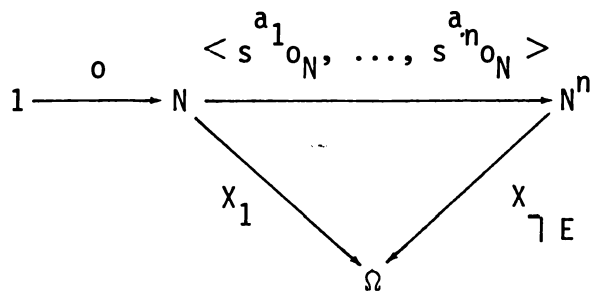
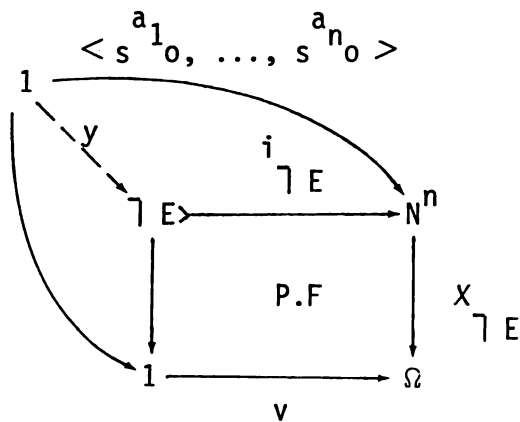
Como en el caso de los topos bien puntuados. Se puede probar la siguiente proposición.

3.21 Proposición

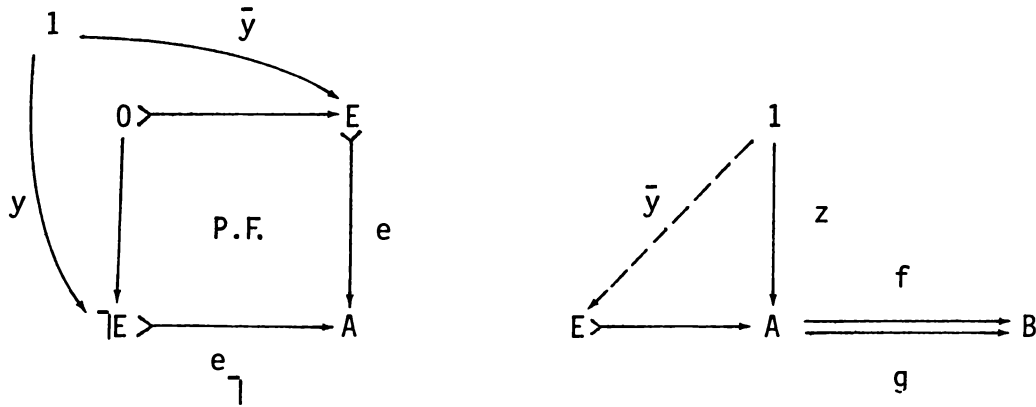
$\underline{C}_{U.D.}$ es una categoría bien puntuada. Es decir, 1 es un generador.

Demostración

Sean $f, g: A \longrightarrow B$ dos $\underline{C}_{U.D.}$ -morfismos distintos. Considérese $E \xrightarrow{e} A$, el igualador de f y g ; entonces es claro que e no puede ser equivalente a la identidad. Si $\neg E \xrightarrow{e} A$ es el complemento de E en A entonces $\neg E$ no puede ser inicial por la observación anterior. En consecuencia, $\neg E$ es no-inicial; por 3.15 existe una n -ada $\langle s^a_{10}, \dots, s^a_{n0} \rangle$ tal que $\langle s^a_{10}, \dots, s^a_{n0} \rangle : 1 \longrightarrow N^n$ pertenece a $\neg E$. $\langle s^a_{10}, \dots, s^a_{n0} \rangle$ se puede escribir como:



Claramente $y: 1 \longrightarrow \bar{\gamma}E$ es un $\underline{C}_{U.D.}$ -morfismo. Además, si $z: 1 \longrightarrow A$ se define como $e \circ y: 1 \longrightarrow A$ entonces $fz \neq gz$ ya que en caso contrario el diagrama exterior del cuadrado



sería conmutativo; lo que no es posible. Por lo tanto $fz \neq gz$.

3.21 tiene una consecuencia importante. Permite describir a los $\underline{C}_{U.D.}$ -epimorfismos y a los $\underline{C}_{U.D.}$ -monomorfismos como morfismos suprayectivos e inyectivos.

El siguiente resultado aclara esta afirmación.

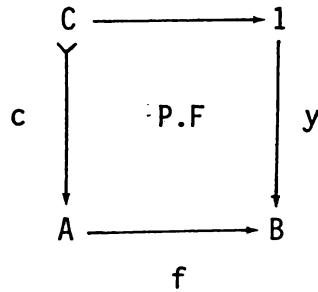
3.22 Proposición

Sea $f: A \longrightarrow B$ un $\underline{C}_{U.D.}$ -morfismo arbitrario. Entonces

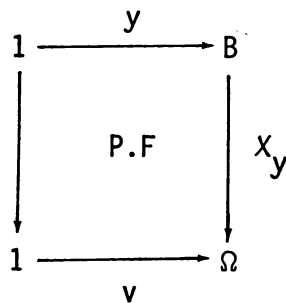
- a).- f es un $\underline{C}_{U.D.}$ -epimorfismo sii f es suprayectivo; i.e., si $y: 1 \longrightarrow B$ es un elemento de B entonces existe X en A tal que $fx = y$.
- b).- f es un $\underline{C}_{U.D.}$ -monomorfismo sii f es inyectiva; i.e., si $y, z: 1 \longrightarrow A$ son elementos de A tales que $fy = fz$ entonces $y = z$.

Demostración

a).- Supóngase que f es un \underline{C} -epimorfismo. Si $y: 1 \longrightarrow B$ es un elemento de B y el cuadrado



es un producto fibrado, entonces se tiene que C es inicial ó $C \longrightarrow 1$ es una retracción. Si \underline{C} fuese inicial, al ser



un producto fibrado, la composición $X_y y$ es por un lado v y por otro falso, puesto que $X_y f = \text{falso}_A = \text{falso}_B f$; $\therefore X_y = \text{falso}_B$, $\therefore X_y y = \text{falso}$. En consecuencia, existe $\bar{z}: 1 \longrightarrow C$; Si $z = C\bar{z}$ entonces $fz = fc\bar{z} = y$ (! $_C$) $\bar{z} = y$. Por lo tanto f es suprayectiva.

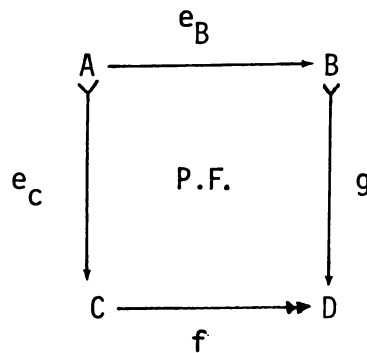
Recíprocamente, si $f: A \longrightarrow B$ es suprayectiva y $g, h: B \longrightarrow C$ son tales que $gf = hf$ entonces si g es distinto de h por 3.21 existe un elemento y de B tal que $gy \neq hy$. Como f es suprayectiva, existe $w: 1 \longrightarrow A$ tal que $fw = y$; por lo tanto, $gy = gfw = hfw = hy$.

b).- La demostración es análoga a lo anterior.

Es bien sabido que en una categoría con productos fibrados, el producto fibrado de epimorfismos no necesariamente es un epimorfismo. Para continuar el estudio de $\underline{C}_{U.D.}$, se necesita un resultado cercano a la afirmación anterior.

3.23 Proposición

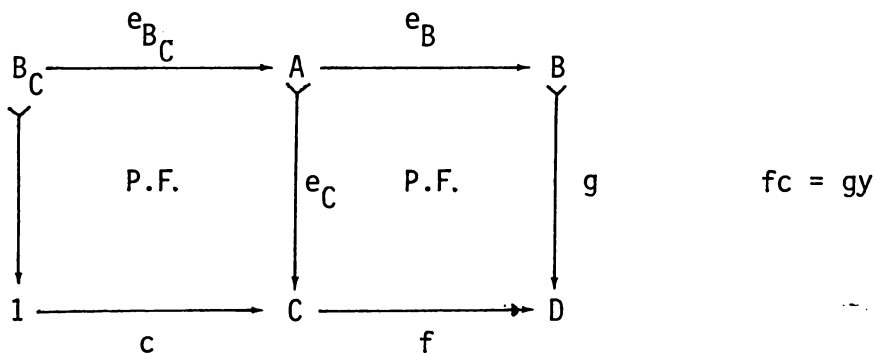
Sea



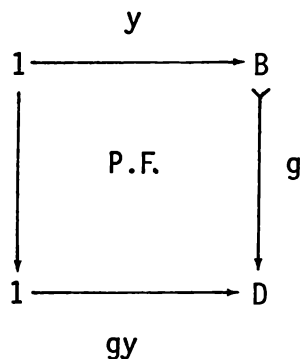
un producto fibrado con $f: C \longrightarrow D$ suprayectivo. Entonces e_B también lo es.

Demostración

Sea $y: 1 \longrightarrow B$ un elemento arbitrario de B , entonces $gy: 1 \longrightarrow B$ es un elemento de D ; por hipótesis, existe un elemento $c: 1 \longrightarrow C$ tal que $fc = gy$. Considérese ahora el producto fibrado



entonces al ser el cuadrado



un producto fibrado, se tiene que B_C es 1; en consecuencia, $e_B e_{B_C} = y$. Por lo tanto, e_B es suprayectivo.

Estas afirmaciones permitirán probar que $\underline{C}_{U.D.}$ es isomorfa a la categoría U.D.. Para empezar, se demostrará.

3.24 Proposición

Si $P(x_1, \dots, x_n)$ es un predicado ultradiofántico y $X_P(x_1, \dots, x_n)$ es el morfismo asociado a $P(x_1, \dots, x_n)$ por 2.42.1 entonces

$$X_{P(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)} = X_{P(x_1, \dots, x_n)}$$

$$\langle p_1^{n-1}, \dots, p_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, p_i^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} \rangle$$

Demostración

Se hará inducción sobre el número de conectivos lógicos que aparecen en $P(x_1, \dots, x_n)$.

Si el predicado tiene cero conectivos entonces es de la forma $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Por 2.421, $X_P(x_1, \dots, x_n) = x \oplus < P_g(x_1, \dots, x_n), P_h(x_1, \dots, x_n) >$,

$= < P_h(x_1, \dots, x_n), P_g(x_1, \dots, x_n) >$

Ahora $P_g(x_1, \dots, x_n) < P_1^{n-1}, \dots, P_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, P_i^{n-1}, \dots, P_{n-1}^{n-1} >$

$= P_g(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)$ por 2.41.6; en consecuencia,

$X_P(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) = X_P(x_1, \dots, x_n)$

$< P_1^{n-1}, \dots, P_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, P_i^{n-1}, \dots, P_{n-1}^{n-1} >$

Supóngase que P es un predicado en n-variables donde aparece al menos un conectivo; entonces P es de la forma:

$$\neg Q, P_1 \wedge P_2, (\exists x_j)(Q)$$

Si P es $\neg Q$ entonces como $X_P = X_{\neg Q} = \neg X_Q$ se tiene que:

$X_P < P_1^{n-1}, \dots, P_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, P_i^{n-1}, P_{n-1}^{n-1} > = \neg X_Q < P_1^{n-1}, \dots, P_{i-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a,$

$P_i^{n-1}, \dots, P_{n-1}^{n-1} > = \neg X_Q(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)$

$= X_{\neg Q}(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) = X_P(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

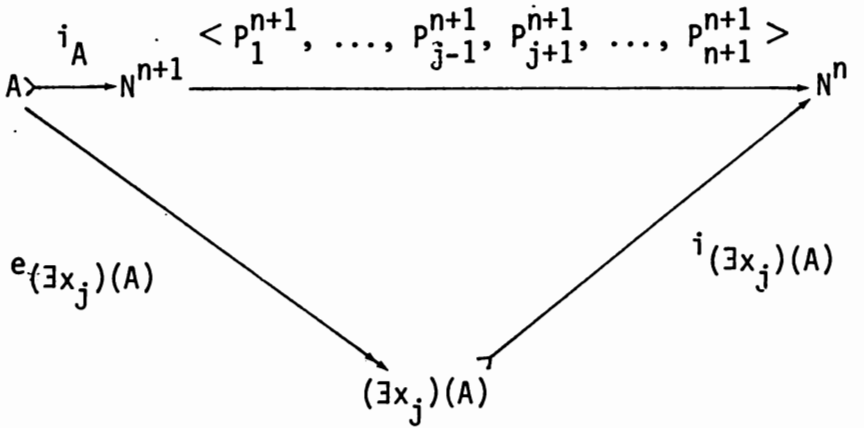
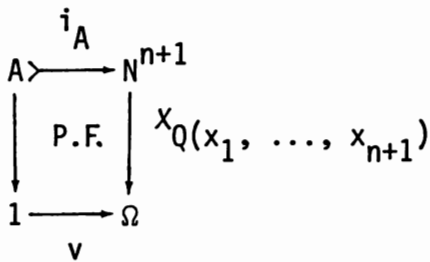
Si P es de la forma $P_1 \wedge P_2$ entonces $X_P = X_{P_1 \wedge P_2} = \wedge < X_{P_1}, X_{P_2} >$ y la demostración es análoga a la anterior.

Por último, supóngase que P es $(\exists x_j)(Q)$ entonces se tiene lo siguiente

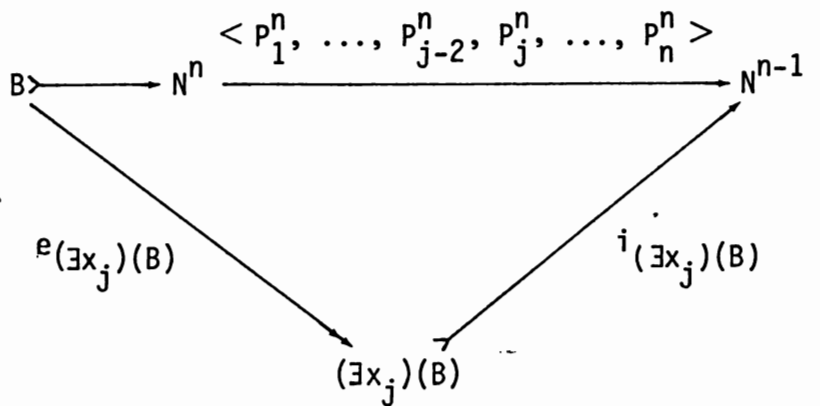
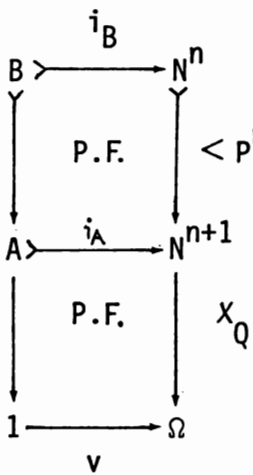
$(\exists x_j)(Q(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}))$

1).- La variable que se va a sustituir por s^a es $j - r$, con $r > 0$

Existen diagramas de la forma



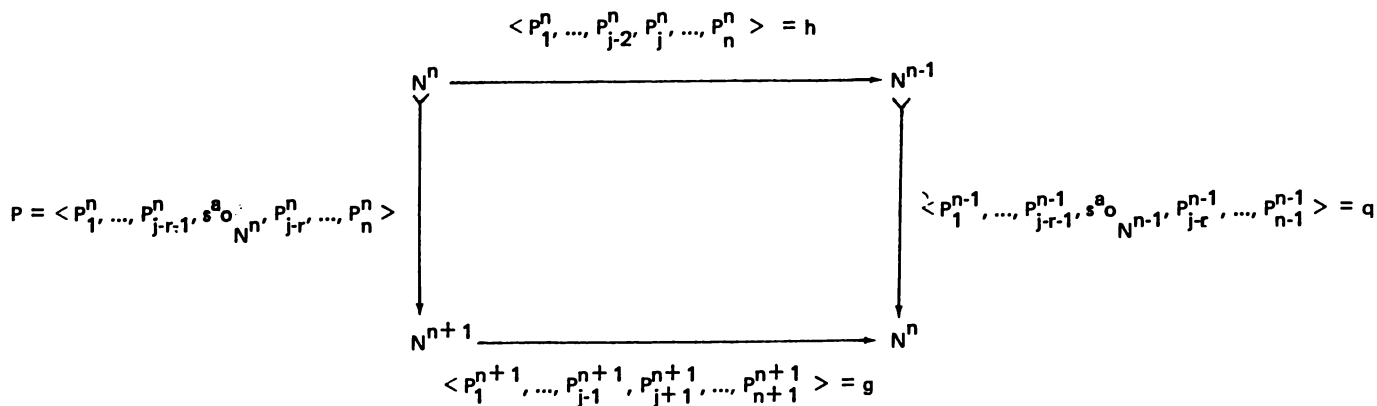
$$\langle p_1^{n-1}, \dots, p_{j-r-1}^{n-1}, s^a_{N^{n-1}}, p_{j-r}^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} \rangle : N^{n-1} \longrightarrow N^n$$



Basta demostrar que el morfismo característico de $(\exists x_j)(B) \xrightarrow{\quad} N^{n-1}$ es

$\chi_{(\exists x_j)(A)} \langle p_1^{n-1}, \dots, p_{j-r-1}^{n-1}, s^a_{N^{n-1}}, p_{j-r}^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} \rangle$. Para esto,

considérese el cuadrado



El cuadrado anterior es conmutativo ya que:

$$\langle p_1^{n-1}, \dots, p_{j-r-1}^{n-1}, s^a_{N^{n-1}}, p_{j-r}^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} \rangle \langle p_1^n, \dots, p_{j-2}^n, p_j^n, \dots, p_n^n \rangle =$$

$$= \langle p_1^n, \dots, p_{j-r-1}^n, s^a_{N^n}, p_{j-r}^n, \dots, p_{j-2}^n, p_j^n, \dots, p_n^n \rangle$$

$$\langle p_1^{n+1}, \dots, p_{j-1}^{n+1}, p_{j+1}^{n+1}, \dots, p_{n+1}^{n+1} \rangle \langle p_1^n, \dots, p_{j-r-1}^n, s^a_{N^n}, p_{j-r}^n, \dots, p_n^n \rangle =$$

$$= \langle p_1^n, \dots, p_{j-r-1}^n, s^a_{N^n}, p_{j-r}^n, \dots, p_{j-2}^n, p_j^n, \dots, p_n^n \rangle$$

También, el diagrama es un producto fibrado; ya que si $\bar{f}: C \xrightarrow{\quad} N^{n-1}$ y $\bar{g}: C \xrightarrow{\quad} N^{n+1}$ son tales que

$C \xrightarrow{\quad} N^{n+1}$ son tales que

$$\langle p_1^{n+1}, \dots, p_{j-1}^{n+1}, p_{j+1}^{n+1}, \dots, p_{n+1}^{n+1} \rangle \bar{g} = \langle p_1^{n-1}, \dots, p_{j-r-1}^{n-1}, s^a_{N^{n-1}}, p_{j-r}^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} \rangle \bar{f}$$

$$\text{entonces } f_1 = g_1, \dots, f_{j-r-1} = g_{j-r-1}, s^a_C = g_{j-r}, f_{j-r} = g_{j-r+1}, \dots,$$

$$f_{j-r+(r-2)} = g_{j-r+(r-1)} = g_{j-1}, f_{j-r+(r-1)} = f_{j-1} = g_{j+1}, \dots, f_{n-1} = g_{n+1}.$$

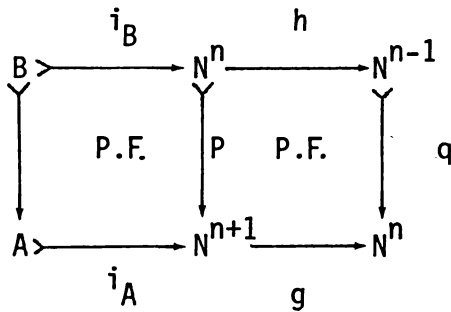
Considérese el morfismo $\langle f_1, \dots, f_{j-r-1}, g_{j-r+1}, \dots, g_{n+1} \rangle : C \longrightarrow N^n$.

Por las identidades anteriores, es claro que:

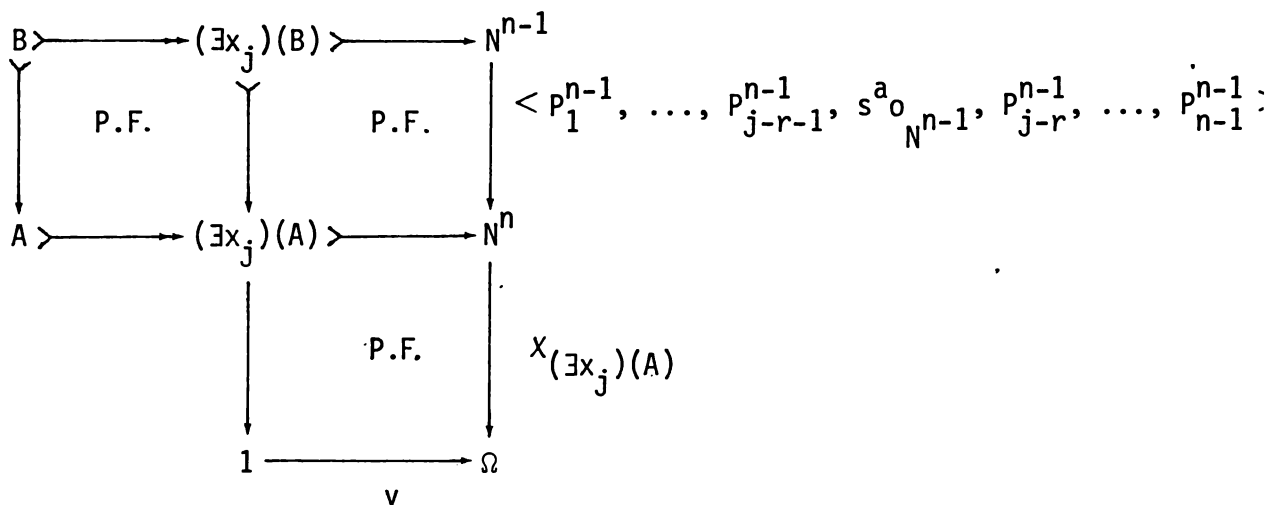
$$\langle p_1^n, \dots, p_{j-r-1}^n, s_{N^n}^a, p_{j-r}^n, \dots, p_n^n \rangle \langle f_1, \dots, f_{j-r-1}, g_{j-r+1}, \dots, g_{n+1} \rangle = \bar{g}$$

$$\langle p_1^n, \dots, p_{j-2}^n, p_j^n, \dots, p_n^n \rangle \langle f_1, \dots, f_{j-r-1}, g_{j-r+1}, \dots, g_{n+1} \rangle = \bar{f}$$

En consecuencia, el cuadrado es un producto fibrado. Se puede considerar entonces un diagrama de la forma



Por 3.23 puede escribirse también como:



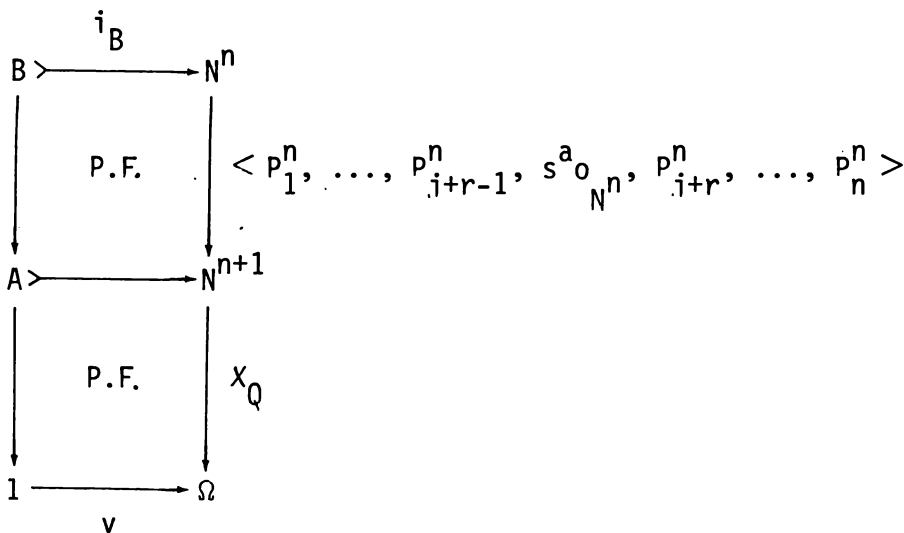
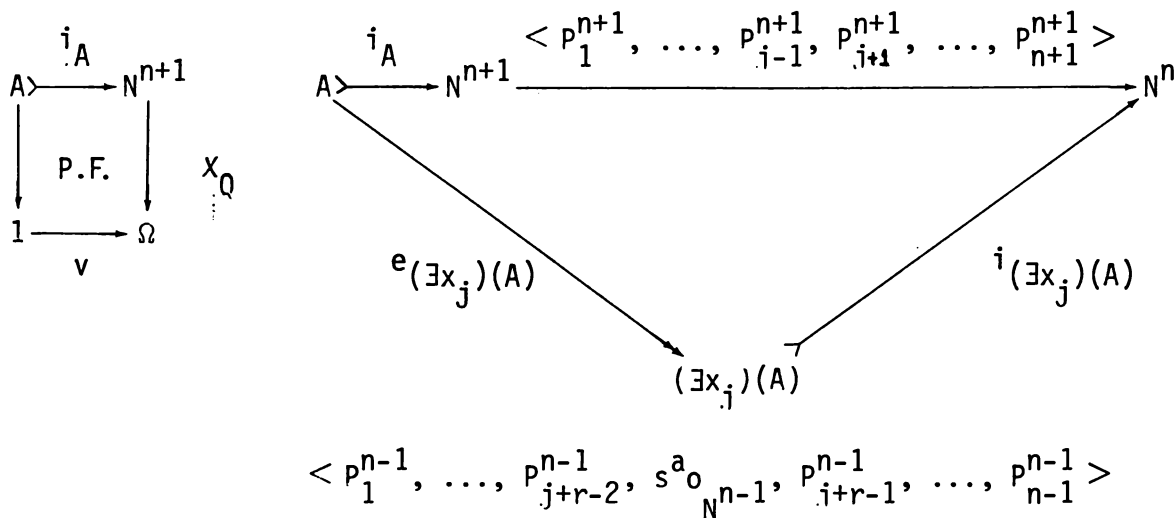
En particular, $X_{(\exists x_j)}(B) = X_{(\exists x_j)}(A) < p_1^{n-1}, \dots, p_{j-r-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, p_{j-r}^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} > ;$

es decir, $X_{P(x_1, \dots, x_n)} < p_1^{n-1}, \dots, p_{j-r-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, p_{j-r}^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} > =$

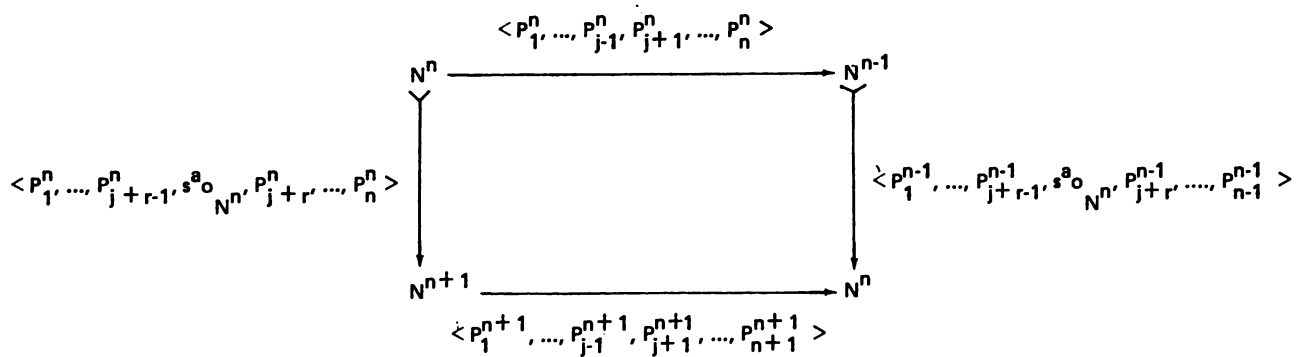
$= X_{P(x_1, \dots, x_{j-r-1}, a, x_{j-r+1}, \dots, x_n)}$

2).- La variable que se va a sustituir por s^a , es $j+r$, con $r > 0$.

Como en el caso anterior, se tienen diagramas de la forma



Como en el caso anterior, el cuadrado



es un producto fibrado

$$\begin{aligned}
 & \langle P_1^{n-1}, \dots, P_{j+r-1}^{n-1}, s_{N^{n-1}}^a, P_{j+r}^{n-1}, \dots, P_{n-1}^{n-1} \rangle \langle P_1^n, \dots, P_{j-1}^n, P_{j+1}^n, \dots, P_n^n \rangle = \\
 & = \langle P_1^n, \dots, P_{j-1}^n, P_{j+1}^n, \dots, P_{j+r-1}^n, s_{N^n}^a, P_{j+r}^n, \dots, P_n^n \rangle
 \end{aligned}$$

Se procede como en el caso anterior y se obtiene el resultado deseado.

Una pregunta interesante que surge, a partir de la interpretación que se dió en 2.42 de los predicados ultradiofánticos, es saber si esta última preserva validez. Es decir, un predicado ultradiofántico cerrado es válido sii su morfismo asociado lo es. En la situación en la que se está trabajando esta afirmación es cierta, como se hace notar en el siguiente resultado:

3.25 Proposición

Si P es un predicado ultradiofántico cerrado entonces

- 1).- P es verdad sii X_p lo es
- 2).- P es falso sii X_p también lo es.

Demostración

Se demostrará simultáneamente, (1) y (2) por inducción sobre el número de conectivos que aparecen en P.

Si P no contiene conectivos entonces es de la forma $f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Ahora, si $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ es cierto también lo es $x_{f(a_1, \dots, a_n)}$ ya que

$$x_{f(a_1, \dots, a_n)} = x \oplus \langle \vdash \langle x_{g(a_1, \dots, a_n)}, x_{h(a_1, \dots, a_n)} \rangle, \vdash$$

$$\langle x_{h(a_1, \dots, a_n)}, x_{g(a_1, \dots, a_n)} \rangle \rangle = x \oplus \langle \vdash \langle \text{so}_N^{g(a_1, \dots, a_n)}, \text{so}_N^{h(a_1, \dots, a_n)} \rangle \rangle$$

$$\vdash \langle \text{so}_N^{h(a_1, \dots, a_n)}, \text{so}_N^{g(a_1, \dots, a_n)} \rangle \rangle = x \text{ so}_N^{(g(a) \dot{-} h(a) + (h(a) \dot{-} g(a)))} \text{ donde}$$

$$a = (a_1, \dots, a_n).$$

Análogamente, si P es falso, x_p también lo es.

Supóngase ahora que P es un predicado que tiene al menos un conectivo, entonces P es de la forma

$$P_1 \wedge P_2, \neg Q, (\exists x) (Q)$$

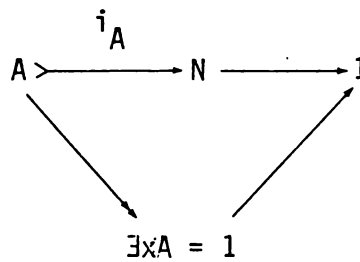
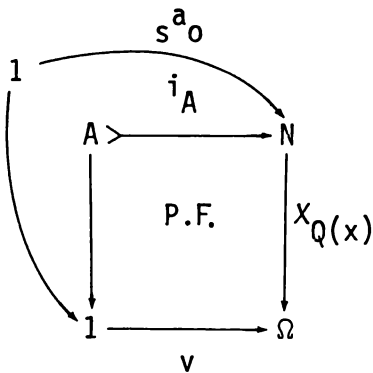
a).- Si P es $P_1 \wedge P_2$ entonces P es válido sii P_1 y P_2 lo son sii X_{P_1} y X_{P_2} son válidos sii $\wedge \langle X_{P_1}, X_{P_2} \rangle$ es cierto sii X_P es válido.

b).- Si P es $\neg Q$ entonces P es válido sii Q es falso sii X_Q es falso sii $\neg X_Q$ es válido sii $X_{\neg Q} = X_P$ es válido.

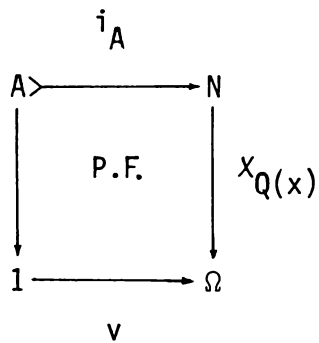
c).- Si P es de la forma $(\exists x)(Q(x))$ se tiene.

c.1).- Si $(\exists x)(Q(x))$ es válido, entonces para algún natural a , $Q(a)$ es cierto.

En consecuencia, $X_{Q(a)}$ es cierto. Por 3.24, $X_{Q(a)} = X_{Q(x)} s^a_{0N}$. Si A es el subobjeto clasificado por $X_{Q(x)}$ entonces es claro que A es no-inicial y por lo tanto no vacío. Esto es, $X_{(\exists x)Q(x)}$ es válido.



c.2).- Si $(\exists x)(Q(x))$ es falso entonces para todo natural a , $Q(a)$ es falso. Considérese el producto fibrado



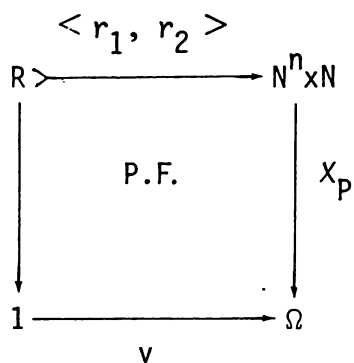
entonces A es inicial ya que en caso contrario existiría un elemento de N s^a : $1 \longrightarrow N$ tal que se factoriza a través de A . En particular, $X_{Q(x)} s^a$ es válido; i.e., $X_{Q(a)}$ es cierto. Por lo tanto, $Q(a)$ también es válido, lo cual no es posible.

3.26 Corolario

Si un predicado ultradiofántico $P(x_1, \dots, x_n, y)$ define a una gráfica entonces existe un $\underline{C}_{U.D.}$ -morfismo $h: N^n \longrightarrow N$ que lo representa.

Demostración

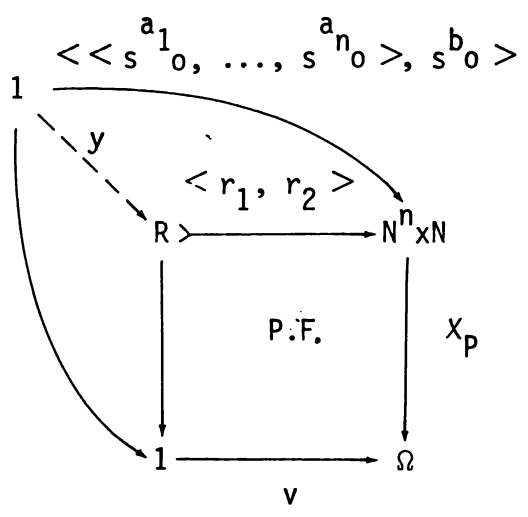
Considérese el siguiente producto fibrado.



donde X_P es el morfismo asociado al predicado P . Se demostrará que r_1 es un isomorfismo

1).- $r_1: R \longrightarrow N^n$ es un epimorfismo.

Sea $\langle s^a_b, \dots, s^a_{n_0} \rangle : 1 \longrightarrow N^n$ un elemento arbitrario de N^n , entonces como P define a una gráfica existe un natural b tal que $P(a_1, \dots, a_n, b)$ es cierto. Por 3.25, $X_p \langle \langle s^a_b, \dots, s^a_{n_0} \rangle, s^b_o \rangle$ es cierto. En consecuencia, el diagrama exterior del cuadrado



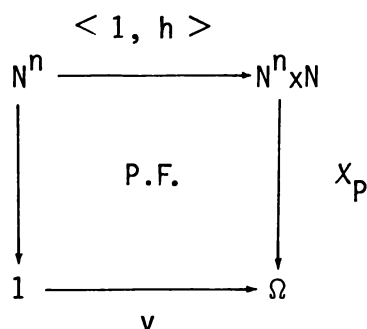
es conmutativo. En particular, $r_1 y = \langle s^a_b, \dots, s^a_{n_0} \rangle$

2).- $r_1: R \longrightarrow N^n$ es un monomorfismo.

Supóngase que $y, z: 1 \longrightarrow R$ son elementos de R tales que $r_1 y = r_1 z$, entonces $X_p \langle r_1 y, r_2 y \rangle = X_p \langle r_1 y, r_2 z \rangle$ es válido. Por 3.25, $P(a_1, \dots, a_n, b)$, $P(a_1, \dots, a_n, c)$ son válidos donde (a_1, \dots, a_n) , b, c representan a $r_1 y$, $r_2 y$ y $r_2 z$ respectivamente. Por lo tanto $b = c$; i.e., $r_2 y = r_2 z$.

En consecuencia, $\langle r_1, r_2 \rangle y = \langle r_1, r_2 \rangle z \quad \therefore y = z$.

Esto demuestra que $r_j: R \longrightarrow N^n$ es un isomorfismo. Sea $h: N^n \longrightarrow N$ definido por: $h = r_2 r_1^{-1}$, entonces es claro que el cuadrado



es un producto fibrado.

Se pueden probar algunas propiedades más de $\underline{C}_{U,D}$. Sin embargo, 3.26 permite demostrar el siguiente teorema.

3.3 Teorema (U.D. vs. $\underline{C}_{U,D}$)

La categoría $\underline{C}_{U,D}$ es isomorfa a U.D.

Demostración

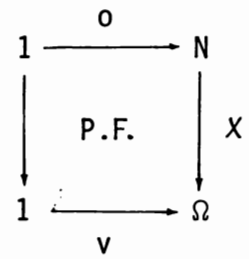
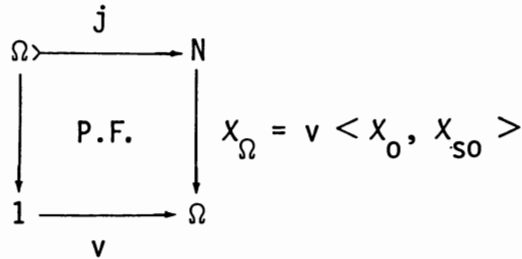
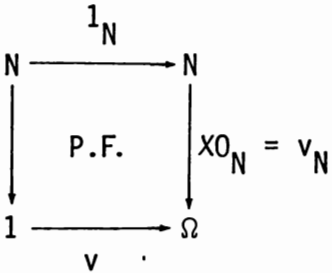
Se definirá primero un funtor $F: \underline{C}_{U,D} \longrightarrow U.D$ de la siguiente manera:

F.1).- Si A es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto entonces existe un predicado ultradiofántico P que define a A . Se define $F(A)$ como aquel conjunto ultradiofántico definido por P .

F.2).- Si $f: N^n \longrightarrow N$ es un elemento arbitrario de R'_C , entonces $\langle 1, f \rangle: N^n \longrightarrow N^n \times N$ es un $\underline{C}_{U,D}$ -objeto. Existe un predicado ultradiofántico P $\langle 1, f \rangle$ que define a $\langle 1, f \rangle$, entonces $F(f): N^n \longrightarrow N$ es el U.D-morfismo cuya

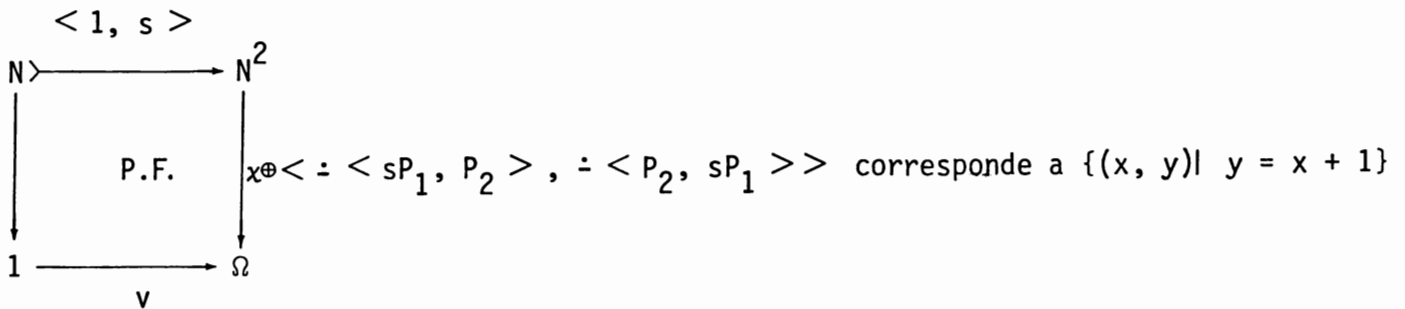
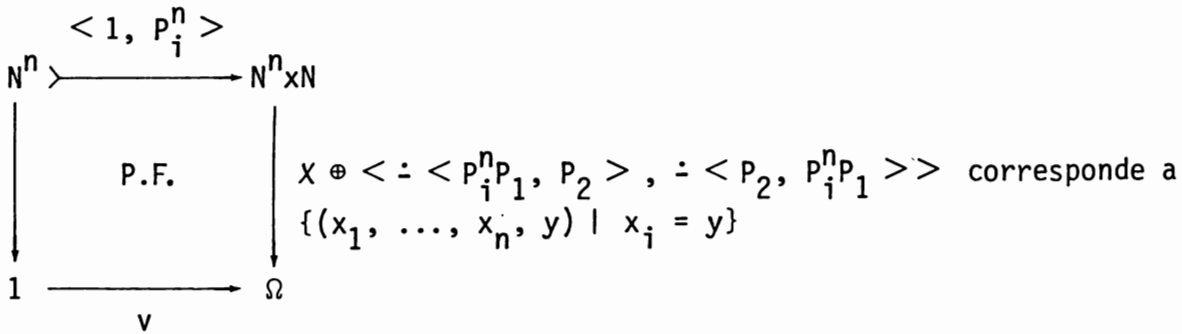
gráfica está descrita por $P \langle 1, F \rangle$.

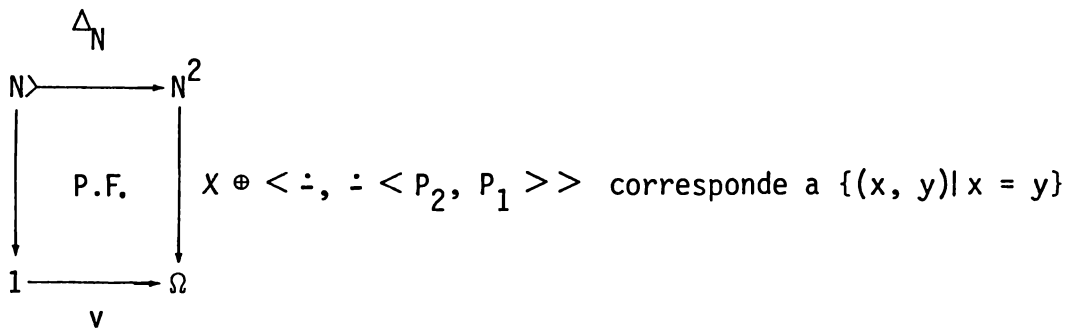
F.3).- Es claro entonces que $F(N) = \mathbb{N}$, $F(\Omega) = \Omega$, $F(1) = 1$ debido a que los cuadrados



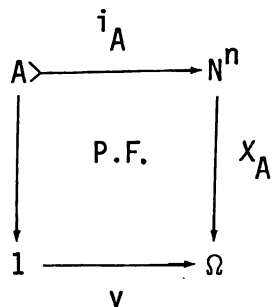
son productos fibrados. (véase 2.55.2, 2.55.3, 2.55.4).

Además, $F(s) = s$, $F(1_N) = 1_N$, $F(P_i) = P_i : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ de nuevo, por la definición de los predicados para las gráficas de s , 1_N y $P_i^n : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$. (véase 2.53.1, 2.53.2, 2.53.3, 2.53.5).





Ahora bien, si A es un $\underline{C}_{U.D}$ -objeto arbitrario entonces existe un predicado P que define a A y se tiene un producto fibrado de la forma



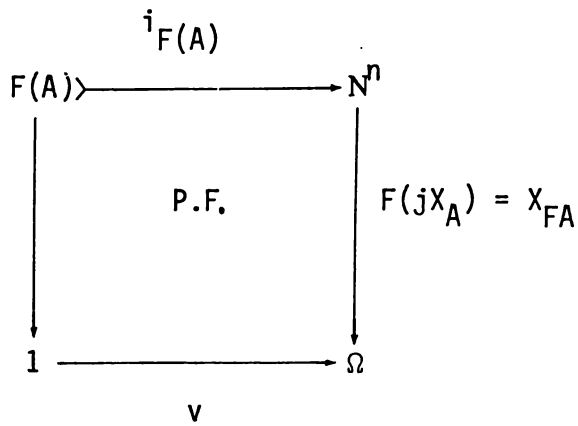
Por 2.73, el morfismo $jX_A: N^n \longrightarrow N$ pertenece a R' ; el predicado que define a la gráfica $\langle 1_{N^n}, jX_A \rangle$ es:

$$\{(x, y) \in N^n \times N \mid (P(x_1, \dots, x_n) \wedge y = 1) \vee (\neg P(x_1, \dots, x_n) \wedge y = 0)\}$$

en consecuencia, el U.D-morfismo $F(jX_A): N^n \longrightarrow N$ queda descrito por:

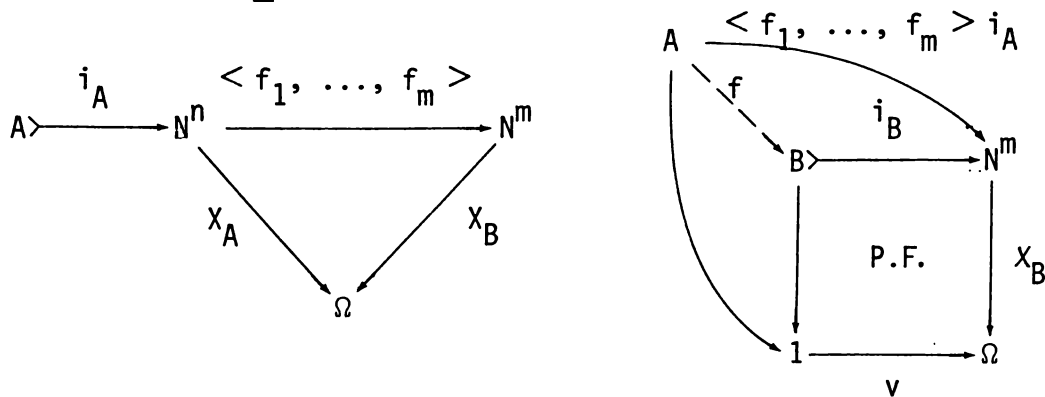
$$F(jX_A) = \begin{cases} 1 & \text{si } P(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & \text{si } \neg P(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

entonces es claro que el cuadrado

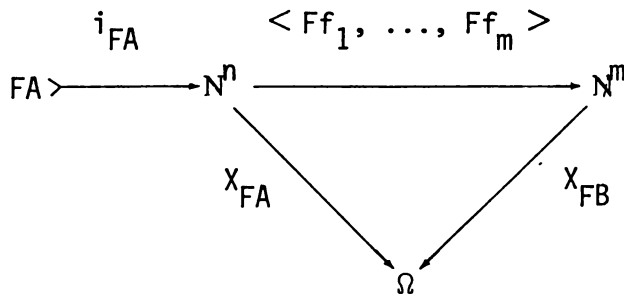


es un producto fibrado. En particular, $F(i_A) = i_{FA}$.

F.4).- Sea $f; A \longrightarrow B$ un $\underline{C}_{U.D}$ -morfismo entonces existen f_1, \dots, f_m elementos de R'_C tales que hacen conmutativos los diagramas

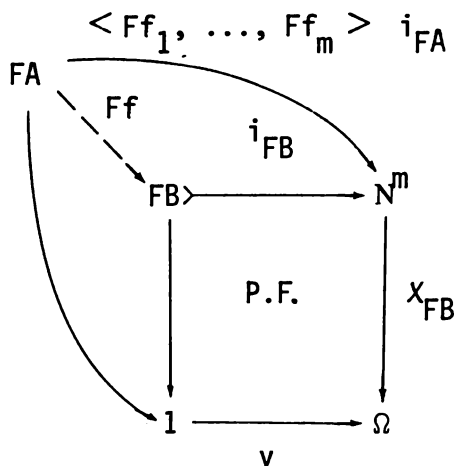


Considérense $Ff_1, \dots, Ff_m, X_{FA}, X_{FB}$ entonces por F.3 y 3.25 el diagrama



es conmutativo

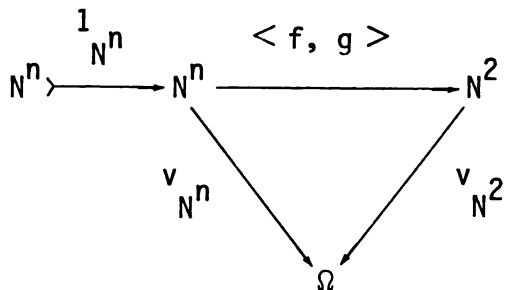
Se define $Ff: FA \longrightarrow FB$ como aquel U.D-morfismo que hace conmutativo el diagrama



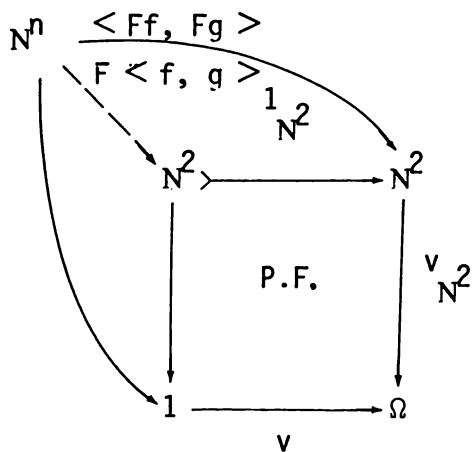
F.5).- Si $f_1, \dots, f_m: N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{c}}$ entonces $F \langle f_1, \dots, f_m \rangle = \langle Ff_1, \dots, Ff_m \rangle$

Demostración

La afirmación se comprobará sólo para $m = 2$. En el caso general, la demostración es análoga a la que se dará. Sean $f, g: N^n \longrightarrow N$ dos elementos arbitrarios de R' , entonces por 2.54.1 el diagrama



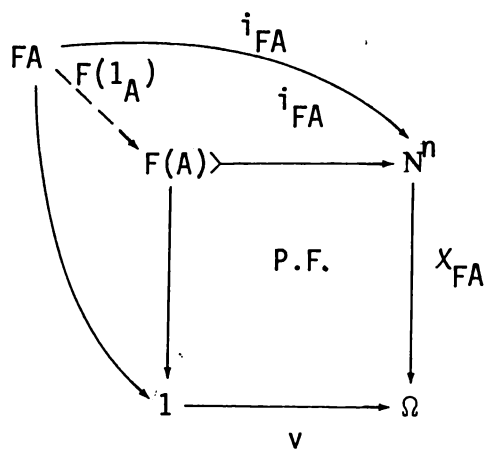
es conmutativo. Por F.4, $F \langle f, g \rangle: N^n \longrightarrow N^2$ es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama



Por lo tanto, $F \langle f, g \rangle = \langle Ff, Fg \rangle$

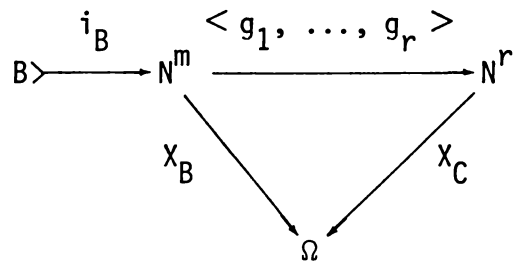
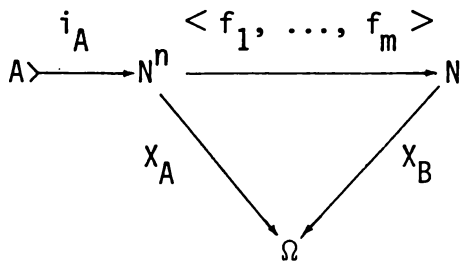
F.6).- F es un funtor

En efecto, si A es un $\underline{C}_{U.D.}$ -objeto arbitrario y $1_A: A \longrightarrow A$ es la identidad en A , entonces $F(1_A): F(A) \longrightarrow FA$ es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama



Por lo tanto, $F(1_A) = 1_{FA}$.

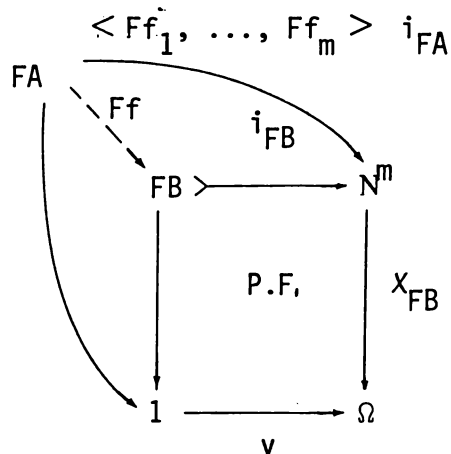
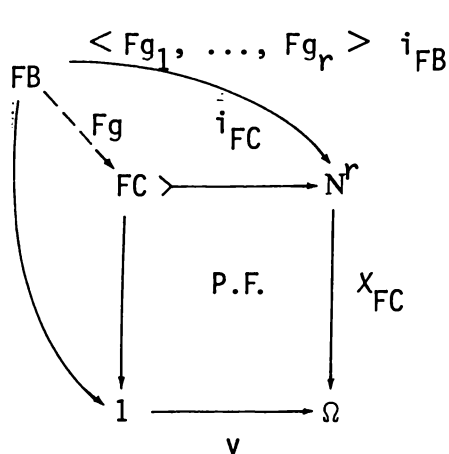
Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dos $\underline{C}_{U.D.}$ -morfismos arbitrarios. Existen diagramas conmutativos de la forma:



Por 2.54.2, se sabe que $g_i \langle f_1, \dots, f_m \rangle = h_i$ para $i \in \{1, \dots, r\}$ son tales que $i_c(fg) = \langle h_1, \dots, h_r \rangle i_A$.

Ahora, por 2.53.5 es claro que $Fh_i = Fg_i F \langle f_1, \dots, f_m \rangle = Fg_i \langle Ff_1, \dots, Ff_m \rangle$ ya que el predicado que define a h_i está dado por la "composición" de los predicados

Por último, como los cuadrados



son productos fibrados y $X_{FC} \langle Fh_1, \dots, Fh_r \rangle i_{FA} = X_{FC} \langle Fg_1, \dots, Fg_r \rangle$

$\langle Ff_1, \dots, Ff_m \rangle i_A = X_{FC} \langle Fg_1, \dots, Fg_r \rangle i_{FB} Ff = X_{FC} i_{FC} (Fg Ff) = v_{FA}$

entonces $F(gf) = F(g) F(f)$.

F.7).- F es denso

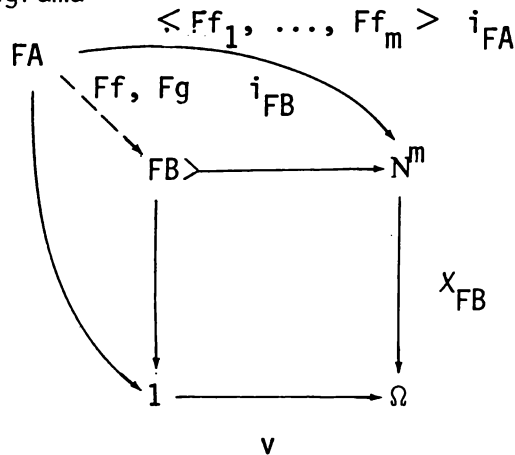
Si A es un U.D-objeto entonces existe un predicado ultradiofántico P que define

a A . Sea B el $\underline{C}_{U,D}$ -objeto cuyo morfismo característico es X_p . Por F.3 $F(B)$ es isomorfo a A ya que tienen el mismo morfismo característico.

F.8).- F es fiel

Sean $f, g: A \longrightarrow B$ dos $\underline{C}_{U,D}$ -morfismos arbitrarios. Supóngase que $F(f) = F(g)$.

Entonces el diagrama



es conmutativo. En particular, $\langle Ff_1, \dots, Ff_m \rangle i_{FA} = \langle Fg_1, \dots, Fg_m \rangle i_{FA}$.

Basta demostrar que $\langle f_1, \dots, f_m \rangle i_A = \langle g_1, \dots, g_m \rangle i_A$. Sea $a: 1 \longrightarrow A$

un elemento arbitrario de A entonces $X_A i_A a = X_A \langle s^{a_1}_0, \dots, s^{a_n}_0 \rangle = v$, donde

$\langle s^{a_1}_0, \dots, s^{a_n}_0 \rangle: 1 \longrightarrow N^n$. Por 3.25, $P(a_1, \dots, a_n)$ es cierto, si P

denota al predicado que define a A . En consecuencia, (a_1, \dots, a_n) pertenece a

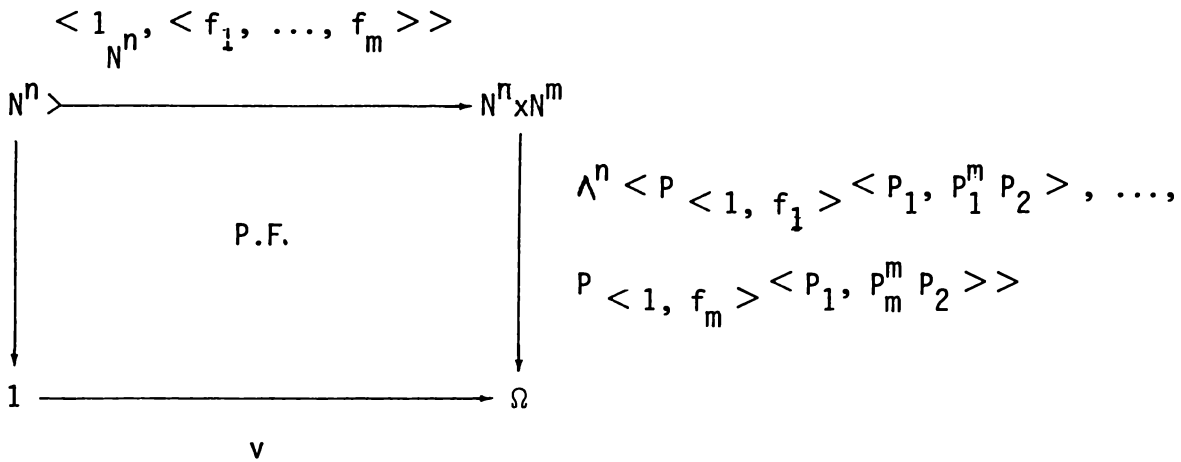
FA . En particular, $\langle f_1, \dots, f_m \rangle i_A = \langle g_1, \dots, g_m \rangle i_A$ ya que en caso contrario

existiría $a: 1 \longrightarrow A$ tal que $\langle f_1, \dots, f_m \rangle i_A a \neq \langle g_1, \dots, g_m \rangle i_A a$; esto

es, $\langle f_1, \dots, f_m \rangle \langle s^{a_1}_0, \dots, s^{a_n}_0 \rangle \neq \langle g_1, \dots, g_m \rangle \langle s^{a_1}_0, \dots, s^{a_n}_0 \rangle$,

pero por hipótesis $\langle Ff_1, \dots, Ff_m \rangle (a_1, \dots, a_n) = \langle Fg_1, \dots, Fg_m \rangle (a_1, \dots, a_n)$.

Como el diagrama

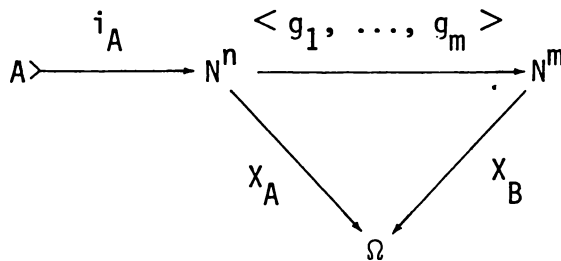


es un producto fibrado entonces $\langle f_1, \dots, f_m \rangle \langle s^{a_1}_0, \dots, s^{a_n}_0 \rangle = \langle g_1, \dots, g_m \rangle \langle s^{a_1}_0, \dots, s^{a_n}_0 \rangle$. Lo que no es posible. En consecuencia, F es fiel.

F.9).- F es pleno

Sean A, B dos $\underline{C}_{U,D}$ -objetos y $f: FA \longrightarrow FB$ un U.D-morfismo arbitrario. Existe $\bar{f} = \langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m \rangle : N^n \longrightarrow N^m$ tal que $\bar{f} i_{FA} = i_{FB} f$. Cada $f_i: N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{U,D}$, por lo tanto existe un predicado P_{f_i} que define a su gráfica. Por 3.26, existe $g_i: N^n \longrightarrow N$ un $\underline{C}_{U,D}$ -morfismo que pertenece a R' cuya gráfica está representada por $X_{P_{f_i}}$. Por construcción, $Fg_i = f_i$ para $i \in \{1, \dots, m\}$.

Además, el diagrama



es conmutativo puesto que $F(X_B \langle g_1, \dots, g_m \rangle i_A) = F(X_A i_A) = v_{FA}$ y F es fiel.

Por lo tanto existe un único $\underline{C.U.D.}$ -morfismo $g: A \longrightarrow B$ tal que cumple

$$i_B g = \langle g_1, \dots, g_m \rangle i_A.$$

Por construcción, $F(g) = f$. En consecuencia, F es pleno.

Esto demuestra el teorema.

Autoanálisis

*He cometido un error fatal
- y lo peor de todo es que
no sé cual.*

-J.E.P.-

BIBLIOGRAFIA

- [B. M.] Birkoff G., Mac Lane S. Algebra; Second Edition (1979); Collier Macmillan International Editions.
- [Coste Roy M. F. et. al.] Coste Roy M. F., Coste M., Mahé L. Contribution to the study of the natural number object in elementary Topoi; Journal of Pure and Applied Algebra 17 (1980), 35-68.
- [Da.] Davis M., Hilbert's tenth problem is unsolvable. American Mathematical Monthly, Vol. 80, No. 3, 1973, 233-269.
- [Fr.] Freyd P., Aspects of Topoi; Bull. Aust. Math. Soc. 7 (1972), 1-76 and 467-480.
- [Go.] Goldblatt R; Topoi, The Categorical Analysis of Logic; Studies in Logic and Foundations, V. 97; North Holland (1979).
- [Jo.] Johnstone P. T., Topos Theory; Academic Press, London (1977).
- [Mi.] Mitchell W, Boolean Topoi and The Theory of Sets, Journal of Pure and Applied Algebra 2 (1972), 261-274.
- [Pe, et.-al.] Pfender M., Reiter R. and Sartorius M. Constructive Arithmetics. Category Theory, SLN No. 962, Springer Verlag (1982).
- [R.-S.] Rasiowa H. and Sikorski R., The Mathematics of Metamathematics, Polish Scientific Publisher (1963).
- [To.] Tomás F., Aritmética i Anàlisi Formalment Recursives; Publicacions, Secció de Mathématiques, Vol. 28, No. 1, Maig 1984, Universitat Autònoma de Barcelona.