UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

CATEGORIAS ULTRADIOFANTICAS

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias
(Matemáticas)
presenta:

Leopoldo Román Cuevas

México, D. F. 1985

Fuiste en mi vida el vuelo de más largo horizonte.
Se quedan en mi vida tus ojos solitarios.
Nuestras dos soledades -música en la noche- ligan
a las estrellas los inegables actos.

- C. Pellicer -

A Laura Elisa

INTRODUCCION

Sea $\underline{C}$ una categoría que cumple las siguientes condiciones:

$\underline{C}$.1)- $\underline{C}$ tiene límites finitos

$\underline{C}$.2)- $\underline{C}$ teiene clasificador de subojetos, Ω

$\underline{C}$.3)- $\underline{C}$ tiene un objeto de números naturales

$\underline{C}$.4)- $\underline{C}$ tiene un objeto inicial estricto

$\underline{C}$.5)- $\underline{C}$ es una (epimorfismos, monomorfismos) -categoría

$\underline{C}$.6)- Ω es el coproducto de $1 \xrightarrow{v} \Omega$ y $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$

$\underline{C}$.7)- $\underline{C}$ satisface el principio de recursión primitiva; es decir, si $f\colon A \longrightarrow B$ $g\colon B \longrightarrow B$ son dos $\underline{C}$-morfismos arbitrarios, entonces existe un único $\underline{C}$-morfismo $h\colon A x N \longrightarrow B$ tal que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & AxN \arrow[r, "1_A x s"] \arrow[d, dashed, "h"] & AxN \arrow[d, dashed, "h"] \\
A \arrow[ur, "<1_A, 0_A>"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

donde $0_A = A \longrightarrow 1 \xrightarrow{o} N$.

Así, como los topoi bien punteados corresponden a modelos de la teoría de conjuntos[1], uno de los propósitos de este trabajo es asociarle a una categoría $\underline{C}$, que satisface las condiciones del párrafo anterior, una subcategoría $\underline{C}_{U.D.}$, generada por los "predicados aritméticos" (los predicados "aritméticos" se obtienen a partir del cálculo de predicados y predicados del tipo $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, donde f es un polimonio con coeficientes enteros), cuyos objetos se pueden pensar como los objetos aritméticos de $\underline{C}$.

El interés de esto último puede justificarse, al hacer notar que con los predicados aritméticos, se puede desarrollar la aritmética usual. La subcategoría $\underline{C}_{U.D.}$ se obtiene al dar una interpretación en $\underline{C}$ de los predicados aritméticos; dicha interpretación está inspirada en el lenguaje que le asocia Mitchell en [M_1], a un topos $\underline{E}$. En el segundo capítulo se expondrá con detalle dicha intepretación.

Durante el desarrollo del trabajo se nombrarán a los predicados aritméticos, "predicados ultradiofánticos"; este último nombre apareció en un artículo de F. Tómas, [T_0], en donde se usaban tales predicados para dar una caracterización de cierta clase R', de funciones $f: N^n \longrightarrow N$, que contiene a las funciones recursivas. Cabe mencionar que con la clase R' se puede desarrollar también la aritmética usual.

La exposición del trabajo está dividida en tres capítulos. En el capítulo uno, se introducen la clase R', los predicados ultradiofánticos, se construye la categoría $Set_{U.D.}$ que en este caso se denotará por U.D., y se da una lista de las propiedades categorícas que cumple U.D. En el capítulo dos, se toma una categoría $\underline{C}$ que satisface las condiciones mencionadas al principio de la introducción, se construye la subcategoría $\underline{C}_{U.D}$ y se da una lista de las

1 Véase por ejemplo, [J_0], capítulo 9.

propiedades categóricas que tiene; desde luego, esta lista es semejante a la que se dió para U.D. En el capítulo tres, se comparan las categorías $\underline{C}_{U.D.}$ y U.D.; se demuestra que si el objeto de números naturales de $\underline{C}$ es típico y $|hom_{\underline{C}}(1, \Omega)| = 2$ entonces $\underline{C}_{U.D}$ y U.D son isomorfas.

Agradecimientos

Wovon man nicht sprechen kann, darüber muß man schweigen.

- L. Wittgenstein -

Deseo agradecer al M. en C. Alejandro Odgers, director de esta tesis, la amistad y ayuda que me ofreció durante estos años.

También, al Dr. Francisco Tomás, codirector de esta tesis, los consejos y ayuda que me brindó durante el desarrollo de este trabajo.

Por último, a la Srita. Lourdes Araiza por su excelente trabajo mecanográfico y al Sr. Jesús Espinoza por su trabajo gráfico, mi más sincero agradecimiento.

NOTACION

Los símbolos $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$, etc. denotarán siempre a una categoría

Set denota a la categoría de los conjuntos.

$\mathbf{N}$ es el objeto de números naturales de Set

AxB denota el producto de dos objetos

$P_i^n : A^n \longrightarrow A$ denota a la i-ésima proyección del producto A^n

Si $f\colon A \longrightarrow B$ es un morfismo de una categoría $\underline{C}$, entonces $f\colon A \rightarrowtail B$ (resp. $f\colon A \twoheadrightarrow B$) denota a un monomorfismo (resp. epimorfismo) de $\underline{C}$.

Si el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
D \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado en una categoría $\underline{C}$ entonces se denotará por:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d] \\
D \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

1. PRELIMINARES

En esta sección no se intentará dar un desarrollo extenso de la clase de las funciones y los predicados ultradiofánticos. Sólo se mencionará lo estrictamente necesario, para desarrollar el trabajo.

1.1 La Definición de la Clase R'

Para definir la clase R' se procederá como en $[T_0]$.

1.11 Definición

R' es la mínima clase de funciones de N^n en N, con n no fijo, que satisface:

R'1).- Las funciones constantes, las proyecciones, la función identidad de N y la función sucesor pertenecen a R'.

R'2).- Si $f: N^n \longrightarrow N$ y $g: N^{n+2} \longrightarrow N$ pertenecen a R' y la función $h: N^{n+1} \longrightarrow N$ se obtiene por *recursión primitiva* de f y g; i.e.; h satisface

$$h(x_1,\ldots, x_n,0) = f(x_1,\ldots, x_n)$$
$$h(x_1,\ldots, x_n, s(y)) = g(x_1,\ldots, x_n, y, h(x_1,\ldots, x_n, y))$$

entonces h pertenece a R'

R'3).- Si $f: N^n \longrightarrow N$ pertenece a R' y $g_1, \ldots, g_n: N^m \longrightarrow N$ es una sucesión de funciones que pertenece a R' entonces la función composición $f < g_1, \ldots, g_n > : N^m \longrightarrow N$ pertenece a R'.

R'4).- Si $f: N^{n+1} \longrightarrow N$ pertenece a R', $f_E: N^n \longrightarrow N$ es la función definida por

$$f_E(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists y) \ (f(x_1, \dots, x_n, y) = 0) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y $f_E (x_1, \dots, x_n) = 1$ para toda n-ada $(x_1, \dots, x_n)$ entonces la función

$$f_M (x_1, \dots, x_n) = \text{mín} \ \{y \mid f (x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$$

pertenece a R'

R'5).- Si $f: N^{n+1} \longrightarrow N$ pertenece a R' entonces f_E también pertenece a R'.

La mínima clase de funciones que satisface las tres primeras condiciones es llamada la clase de las funciones recursivas primitivas. La mínima clase que satisface las cuatro primeras condiciones es la clase de funciones recursivas ó diofánticas. La mínima clase que satisface las cinco condiciones es la clase de las funciones ultradiofánticas.

Como se mencionó en la introducción, la clase R' permite desarrollar la aritmética usual. No se intentará hacer un desarrollo de esta última, sólo se harán algunos ejemplos para mostrar como se obtiene la aritmética.

1.12 Lema

Las funciones suma $\oplus : N \longrightarrow N$, producto $. : N \longrightarrow N$ pertenecen a R'.

Demostración

$\oplus: N^2 \longrightarrow N$ se obtiene por recursión primitiva de las siguientes funciones: $1_N : N \longrightarrow N$ y $sp_3^3: N^3 \longrightarrow N$

$\cdot: N^2 \longrightarrow N$ se obtiene por recursión primitiva de las funciones 0_N : $N \longrightarrow N$ (la función constante de valor 0) y $\oplus < p_1^3, p_3^3 > : N^3 \longrightarrow N$

Existe una descripción alternativa de la clase R', como se hace notar en $[T_0]$. Esta caracterización surgió del trabajo de Martin Davis [Da] en el cual demostró que la clase de funciones recursivas coincide con la clase de funciones $f: N^n \longrightarrow N$, *diofánticas*; esto es, aquellas funciones cuyas gráficas son *conjuntos diofánticos*. Los conjuntos diofánticos se definen por medio de los *predicados diofánticos*. Para la clase R' se usarán *predicados ultradiofánticos*. Se definen de la siguiente forma

1.2 Predicados Ultradiofánticos y la Definición de U.D.

1.21 Definición $[T_0]$[1]

P.U.D.1).- Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es un polinomio en $Z[x_1, \ldots, x_n]$ entonces la fórmula $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ es un *predicado ultradiofántico* en el que no aparecen ninguna variable ligada y todas las x_i son variables libres, para $i \in \{1, \ldots, n\}$

P.U.D.2).- Si P es un predicado ultradiofántico también lo será su negación $\neg P$. Las variables libres de $\neg P$ son las de P y las ligadas son también las de P.

P.U.D.3).- Si P,Q son predicados ultradiofánticos y no existen variables que aparezcan libres en uno y ligadas en el otro, entonces $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \Rightarrow Q$ son predicados ultradiofánticos. Las variables que aparecen libres (ligadas) en

1 Se sobreentiende que algo es un predicado ultradiofántico si se obtiene de P.U.D.1 a P.U.D.4

cualesquiera de estos predicados son las variables libres (ligadas) que aparecen en P o Q.

P.U.D.4).- Si P es un predicado ultradiofántico y x es una variable que no aparece ligada en P entonces $(\forall x)$ P, $(\exists x)$ P también son predicados ultradiofánticos, las otras variables ligadas que aparecen en $(\forall x)$ P (resp. $(\exists x)$ P) son las de P. Las variables libres de $(\forall x)$ P (resp. $(\exists x)$ P) son las variables distintas de x que aparecen libres en P

1.22 Ejemplos

a). $(\forall x)\ (\exists y)\ (x + 1 = y)$

b). $(x = 0)\ \vee\ (x = 1)$

c). $(\exists x_3)\ (x_1^2 + x_2 . x_3 = 0)$

1.23. Conjuntos Ultradiofánticos

1.23.1 Definición $[T_o]$

Un subconjunto A de N^n es *ultradiofántico* si existe algún predicado ultradiofántico P $(x_1, \ldots, x_n)$ tal que para cada n-ada $(a_1, \ldots, a_n)$

$$(a_1, \ldots, a_n)\ \varepsilon\ A \text{ sii } P\ (a_1, \ldots, a_n)$$

Una función $f: N^n \longrightarrow N$ es *ultradiofántica* sii su gráfica es un conjunto ultradiofántico.

Se puede demostrar el siguiente resultado.

1.23.2 Lema [T_0]

Si A es un conjunto ultradiofántico contenido en N^n entonces existe un elemento f_A: $N^n \longrightarrow N$ de R' tal que

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in N^n \mid f_A (x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

Con este resultado y algunas consideraciones adicionales se demuestra el siguiente teorema.

1.23.3 Teorema [T_o]

La clase R' consta precisamente de la clase de las funciones ultradiofánticas.

Un corolario inmediato del teorema anterior es:

1.23.4 Corolario

Un subconjunto A de N^n es ultradiofántico sii existe un elemento f_A: $N^n \longrightarrow N$ en R' tal que

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in N^n \mid f_A (x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

Este último resultado permite definir a los conjuntos ultradiofánticos de otra manera. Es claro que todo elemento de R' se puede ver como un Set-morfismo. Para dar una definición alternativa de los conjuntos ultradiofánticos se usarán las propiedades categóricas que satisface Set[1]. El corolario 1.23.4 sugiere una descripción categórica de los conjuntos ultradiofánticos como lo dice la siguiente defincíón.

---

1 Para un desarrollo sistemático, véase por ejemplo [G_o]

1.24 Definición

Un objeto A de Set se dice que es *ultradiofántico* sii existe un Set-morfismo $f_A\colon N^n \longrightarrow N$ de R' tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d] & xf_A = \chi_A \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega & = \{0,1\} \end{tikzcd}$$

donde $1 \xrightarrow{v} \Omega$ es el morfismo verdad para Set y $x\colon N \longrightarrow \Omega$ se obtiene del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "x"] & N \arrow[d, dashed, "x"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "v"'] & \Omega \arrow[r, "\text{falso}_\Omega"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

A se llamará un *objeto ultradiofántico* o simplemente un *objeto U.D.*

Para poder ver a los objetos ultradiofánticos como una subcategoría de Set es necesario definir el concepto de morfismo ultradiofántico o *U.D.*-morfismo. De nuevo, 1.23.4 permite dar la siguiente definición.

1.25. Definición

Sean A, B dos *U.D.*-objetos arbitrarios, se dice que un Set-morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un *morfismo ultradiofántico* ó *U.D.- morfismo* sii existen $f_1, \ldots, f_m\colon N^m \longrightarrow N$ elementos de R' tales que hacen conmutativos los diagramas.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "{<f_1, \ldots, f_m> i_A}"] \arrow[dr, "v_A"'] & & N^m \arrow[dl, "\chi_B"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "{<f_1, \ldots, f_m> i_A}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\chi_B <f_1, \ldots, f_m> i_A = v_A = \chi_A\, i_A$$

Antes de probar que con esta definición los *U.D.*-objetos forman una subcategoría de Set, se verán algunos ejemplos de *U.D.*-objetos.

1.26. Ejemplos

a). El objeto terminal de Set $1 = \{o\}$ *es un U.D.-objeto*

Demostración

$1 = \{x \in N \mid 1_N(x) = 0\}$; claramente 1_N pertenece a R'. Además, es obvio que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N \arrow[d, "x"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado

b). N es un U.D.-objeto.

Demostración

El cuadrado

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "1_N"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N \arrow[d, "x0_N"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, donde $0_N : N \longrightarrow N$ es la función constante de valor cero

c). Ω es un U.D.-objeto.

Demostración

El cuadrado

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \arrow[d, "\chi_{\rho}"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, donde ρ: $N \longrightarrow N$ es el morfismo predecesor.

1.27. Lema

Los objetos ultradiofánticos junto con los *U.D.*-morfismos, forman una subcategoría de Set que se denotará por U.D.

Demostración

1). Hay identidades

En efecto, si A es un *U.D.*-objeto entonces existe un producto fibrado de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Ahora, como el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "{<p_1^n, \ldots, p_n^n>}"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N^n \arrow[dl, "\chi_A"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y las proyecciones $p_i^n : N^n \longrightarrow N$, para $i \varepsilon \{1, \ldots, n\}$, pertenecen a R', entonces 1_A: $A \longrightarrow A$ es el único Set-morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "1_A"] \arrow[drr, bend left, "i_A"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

2). *U.D.* es cerrada bajo la composición de Set-morfismos.

Demostración

Supóngase que f: $A \longrightarrow B$, g: $B \longrightarrow C$ son dos U.D.-morfismos entonces se tienen diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "<f_1, \ldots, f_m> i_A"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N^m \arrow[dl, "\chi_B"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "<g_1, \ldots, g_r> i_B"] \arrow[dr, "\chi_B"'] & & N^r \arrow[dl, "\chi_C"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

donde $f_1, \ldots, f_m$: $N^n \longrightarrow N$ y $g_1, \ldots, g_r$: $N^m \longrightarrow N$ pertenecen a R'. Sea $h_i = g_i < f_1, \ldots, f_m >$: $N^n \longrightarrow N$, entonces por 1.11, h_i pertenece a R', para $i \varepsilon \{1, \ldots, r\}$.

Además, el triángulo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "<h_1, \ldots, h_r> i_A"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N^r \arrow[dl, "\chi_C"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Es claro entonces que gf: $A \longrightarrow C$ es el único Set-morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "gf"] \arrow[drr, bend left, "<h_1, \ldots, h_r> i_A"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& C \arrow[r, tail, "i_c"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^r \arrow[d, "\chi_c"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Esto demuestra el lema. Estos últimos resultados se pueden resumir con la siguiente definición

1.28 Definición

La subcategoría *U.D.* de Set se llama la *categoría ultradiofántica* determinada por Set.

La construcción que se ha dado para *U.D.* se puede hacer en categorías más débiles que Set. Sin embargo, antes de hacer ésto, se estudiarán que propiedades satisface U.D., como subcategoría de Set.

1.3 Propiedades de U.D.

1.31 *U.D.* tiene objeto terminal

Demostración

Sea A un U.D.- objeto arbitrario y considérense los siguientes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "X_A = xf_A"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "o"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \arrow[d, "x"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "0_{N^n} i_A"] \arrow[dr, "x_A"'] & & N \arrow[dl, "x"] \\
& \Omega &
\end{tikzcd}
$$

donde $0_{N^n}\colon\ N^n \longrightarrow N$ es la función constante de valor cero. Entonces es claro que $!_A\colon A \longrightarrow 1$ hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "0_N n i_A"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& 1 \arrow[r, "o"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N \arrow[d, "x"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $!_A: A \longrightarrow 1$ es un $\mathcal{U.D}$.-morfismo. En consecuencia, 1 es un $\mathcal{U.D}$.-objeto terminal

1.32 $\mathcal{U.D}$. tiene productos finitos

Demostración

Sean A,B dos $\mathcal{U.D}$.-objetos arbitrarios; entonces existen productos fibrados de la forma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^n \arrow[d, "\chi_A = xf_A"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^m \arrow[d, "\chi_B = xf_B"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, tail, "{< p_1^n i_A p_A, \ldots, p_n^n i_A p_A, p_1^m i_B p_B, \ldots, p_m^m i_B p_B >}"] \arrow[d] & N^{n+m} \arrow[d, "{< \chi_A < p_1^{n+m}, \ldots, p_n^{n+m} >, \chi_B < p_{n+1}^{n+m}, \ldots, p_{n+m}^{n+m} > >}"] \\
1 \arrow[r, "{< v,v >}"'] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}$$

entonces, es claro que es conmutativo ya que

$$< \chi_A < P_1^{n+m} \ldots, P_n^{n+m} >, \chi_B < P_{n+1}^{n+m}, \ldots, P_{n+m}^{n+m} \gg \lessdot P_1^n i_A P_A, \ldots, P_n^n i_A P_A, P_1^m i_B P_B, \ldots,$$

$$P_m^m i_B P_B > \;=\; < \chi_A < P_1^n i_A P_A, \ldots, P_n^n i_A P_A >, \chi_B < P_1^m i_B P_B, \ldots, P_m^m i_B P_B >> \;=$$

$$< \chi_A i_A P_A, \chi_B i_B P_B > \;=\; < v_{AxB}, v_{AxB} > .$$

Un cálculo simple, demuestra también que es un producto fibrado.

Ahora bien, como el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{<v,v>} & \Omega x \Omega \\ \Big\downarrow & P.F & \Big\downarrow \wedge \\ 1 & \xrightarrow[v]{} & \Omega \end{array}$$

es un producto fibrado entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} AxB & \xrightarrow{i_{AxB}} & N^{n+m} \\ \Big\downarrow & P.F & \Big\downarrow < \chi_A < P_1^{n+m}, \ldots, P_n^{n+m} >, \chi_B < P_{n+1}^{n+m}, \ldots, P_{n+m}^{n+m} >> \\ 1 & \xrightarrow{<v,v>} & \Omega x \Omega \\ \Big\downarrow & P.F & \Big\downarrow \wedge \\ 1 & \xrightarrow[v]{} & \Omega \end{array}$$

es un producto fibrado. Aparentemente todavía no se ha demostrado que AxB es un U.D.-objeto. Sin embargo, como los diagramas

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{<0,\,0>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N \times N \arrow[d, "\chi\times\chi"] \\
1 \arrow[r, "{<v,\,v>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{<0,\,0>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N \times N \arrow[d, "\oplus"] \\
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N \arrow[d, "\chi"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

son productos fibrados y $\chi_A = \chi f_A$, $\chi_B = \chi f_B$ entonces el morfismo característico de i_{AxB} se puede escribir como

$$\chi \oplus < f_A < p_1^{n+m}, \ldots, p_n^{n+m} >, f_B < p_{n+1}^{n+m}, \ldots, p_{n+m}^{n+m} >> : N^{n+m} \longrightarrow \Omega$$

Para demostrar que las proyecciones P_A: AxB $\longrightarrow$ A, P_B: AxB $\longrightarrow$ B son U.D.-morfismos basta considerar, por ejemplo, el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
AxB \arrow[r, tail, "i_{AxB}"] & N^{n+m} \arrow[rr, "{< p_1^{n+m}, \ldots, p_n^{n+m} >}"] \arrow[dr, "\chi_{AxB}"'] & & N^n \arrow[dl, "\chi_A"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

es claro que es conmutativo. Además, $< p_1^{n+m}, \ldots, p_n^{n+m} > i_{AxB} = i_A P_A$. Por lo tanto, P_A: AxB $\longrightarrow$ A es un U.D.-morfismo. Análogamente, P_B : AxB $\longrightarrow$ B es un U.D.-morfismo.

Supóngase ahora que $C \xrightarrow{a} A$, $C \xrightarrow{b} B$ son U.D.-morfismos; se tienen diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "i_C"] & N^r \arrow[r, "\bar{a}"] \arrow[dr, "\chi_C"'] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\ & & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[dr, dashed, "a"] \arrow[drr, bend left, "\bar{a}i_C"] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\ & 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "i_C"] & N^r \arrow[r, "\bar{b}"] \arrow[dr, "\chi_C"'] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\ & & \Omega \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, dashed, "b"] \arrow[drr, bend left, "\bar{b}i_C"] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\ & 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

donde $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle : N^r \longrightarrow N^n$

$\bar{b} = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle : N^r \longrightarrow N^m$

Considérese ahora el siguiente triángulo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "i_C"] & N^r \arrow[rr, "< a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m >"] \arrow[dr, "\chi_C"'] & & N^{n+m} \arrow[dl, "\chi_{AxB}"] \\ & & \Omega & \end{tikzcd}$$

entonces por la descripción de χ_{AxB} es obvio que el triángulo es conmutativo.

Por último, el Set-morfismo $< a,b > : C \longrightarrow AxB$ es tal que $i_{AxB} < a,b > = < a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m > i_C$; por lo tanto, $< a,b >$ es un U.D.-morfismo. Claramente, $P_A < a,b > = a$ y $P_B < a,b > = b$. La unicidad es inmediata.

La demostración anterior muestra el espíritu de este trabajo. Es claro que si en lugar de trabajar con funciones ultradiofánticas, se hubiere trabajado con predicados ultradiofánticos, *no* se tendría que haber hecho la observación de la página anterior. La pregunta natural que surge de esto último es: ¿cómo se puede trabajar con los predicados ultradiofánticos?. Para el caso de Set la respuesta es sencilla: como es bien sabido Set es un topos elemental bien punteado[1] que tiene objeto de números naturales. En particular, Set tiene una lógica interna que es booleana y bivalente. Esto último permite dar una interpretación para los predicados ultradiofánticos, por ejemplo, el Set-morfismo $\wedge : \Omega x \Omega \longrightarrow \Omega$ es la versión interna del conectivo $\wedge$.

1 Véase [J] pág. 314.

Si se recuerda la definición de los predicados ultradiofánticos entonces es claro que para dar una interpretación de estos últimos, se puede proceder por inducción sobre el número de conectivos que aparecen en el predicado. Por ejemplo, supóngase que P $(x_1, \ldots, x_n)$ es $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, para fines prácticos, supóngase además que $n = 1$. Se tiene entonces un polinomio en $Z[x]$ que se puede escribir como

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios con coeficientes naturales. Es claro como podrían interpretarse. Si $g(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ entonces

$x_{P(x)}: N \longrightarrow N$ es:

$$\oplus \cdot < S^{a_n} 0_N, h_n(x) > \oplus \ldots \oplus \cdot < S^{a_1} 0_N, h_1(x) > \oplus S^{a_0} 0_N$$

donde $h_1 = 1_N, h_2(x) = \cdot < 1_N, h_1(x) > ; \ldots, h_n(x) = \cdot < 1_N, h_{n-1} >$

Ahora bien, $f(x) = 0$ sii $(g(x) \dot{-} h(x)) \oplus (h(x) \dot{-} g(x)) = 0$, donde $\dot{-} : N \times N \longrightarrow N$ es el morfismo diferencia de N. En consecuencia, se define $x_{P(x)}: N \longrightarrow \Omega$ como la composición, $x_{\oplus} < \dot{-} < x_{g(x)}, x_{h(x)} >, \dot{-} < x_{h(x)}, x_{g(x)} > >$, donde $x: N \longrightarrow \Omega$ es el morfismo definido en 1.24.

Se puede probar que para todo natural $1 \xrightarrow{S^a 0} N$, $X_{P(x)} S^a 0 = v$ sii $x_{g(x)} S^a 0 = X_{h(x)} S^a 0$ sii $g(a) = h(a)$ sii $f(a) = 0$. Esto es, un natural a, satisface P sii $x_{P(x)} S^a 0 = v$.

El lector familiarizado con la teoría de los topos notará que esta interpretación está inspirada en la interpretación que dá Mitchell en [M_1]. En el capítulo dos se hará una descripción detallada de lo que se ha mencionado aquí. Estas observaciones pueden justificar la importancia de los predicados ultradiofánticos.

Hay algunas consecuencias inmediatas de 1.32

1.32.1

N^n es un U.D.-objeto y todo morfismo f: $N^n \longrightarrow N$ que pertenece a R' es un U.D.-morfismo.

Demostración

Por 1.32 es claro que N^n es un U.D.-objeto. Sea f: $N^n \longrightarrow N$ un morfismo que pertenece a R', como el diagrama

$$\begin{tikzcd} N^n \arrow[rr, "{<P_1^n, \ldots, P_n^n> = 1_{N^n}}"] & & N^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "v_{N^n}"'] & N \arrow[d, "v_N"] \\ & & & \Omega \end{tikzcd}$$

es conmutativo entonces f es un U.D.-morfismo.

1.32.2

Los morfismos $\oplus: N^2 \longrightarrow N$, $\dot{-}: N^2 \longrightarrow N$, $\cdot: N^2 \longrightarrow N$ son U.D.-morfismos

1.33 U.D. tiene igualadores

Demostración

Se demostrará primero que si $\bar{f} = < f_1, \ldots, f_m > : N^n \longrightarrow N^m$ y $\bar{g} = < g_1, \ldots, g_m >: N^n \longrightarrow N^m$ son morfismos cuyas componentes pertenecen a R' entonces el igualador de $\bar{f}$ y $\bar{g}$ es un U.D.-objeto.

Sea $k_E\colon N^n \longrightarrow N$ definido por la siguiente regla:

$$\oplus \langle \dot{-} \langle f_1, g_1\rangle , \dot{-} \langle g_1, f_1\rangle\rangle \oplus \dots \oplus \langle \dot{-} \langle f_m, g_m\rangle , \dot{-} \langle g_m, f_m\rangle\rangle$$

entonces es claro que $k_E\colon N^n \longrightarrow N$ pertenece a R'. Además, $k_E(x) = 0$ sii

$\oplus \langle \dot{-} \langle f_i, g_i\rangle, \dot{-} \langle g_i, f_i\rangle\rangle (x) = 0$, para $i\varepsilon\{1, \dots, m\}$ sii $g_i(x) = f_i(x)$ para $i\varepsilon\{1, \dots, m\}$ sii $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$. En consecuencia, si se considera el producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, "i_E"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^n \arrow[d, "xk_E"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

entonces es claro que (E, i_E) es el igualador de $\bar{f}$ y $\bar{g}$.

En efecto, el producto fibrado anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, "i_E"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^n \arrow[d, "k_E"] \\
1 \arrow[r, "o"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N \arrow[d, "x"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad 0_E = 0 !_E\colon \quad E \longrightarrow N$$

en particular $k_E i_E = 0_E$; por lo tanto $\bar{f} i_E = \bar{g} i_E$. Si $\bar{E} \xrightarrow{\bar{e}} N^n$ es tal que $\bar{f}\,\bar{e} = \bar{g}\,\bar{e}$ entonces $k_E\,\bar{e} = 0_{\bar{E}}$. En consecuencia, el diagrama exterior del cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\bar{E} \arrow[dr, dashed, "e'"] \arrow[drr, bend left, "\bar{e}"] \arrow[dd, bend right] & & \\
& E \arrow[r, tail, "i_E"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & N^n \arrow[d, "k_E"] \\
& 1 \arrow[r, "o"'] & N
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo consiguiente, existe un único morfismo $e': \bar{E} \longrightarrow E$ tal que $i_E e' = \bar{e}$. Por construcción E es un U.D.-objeto.

Sean $f, g: A \longrightarrow B$ dos U.D-morfismos arbitrarios. Entonces se tienen diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_A"] & N^n \arrow[r, shift left, "\bar{f}"] \arrow[r, shift right, "\bar{g}"'] \arrow[dr, "\chi_A"'] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
& & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\bar{f} = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle: N^n \longrightarrow N^m$

$\bar{g} = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle: N^n \longrightarrow N^m$

$\bar{f}\, i_A = i_B f, \quad \bar{g}\, i_A = i_B g$

Sea $(\bar{E}, i_{\bar{E}})$ el igualador de $\bar{f}$ y $\bar{g}$; considérese el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "i_E"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "x \oplus < f_E, f_A > \; = \wedge <xf_E, xf_A>"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Claramente, E es un U.D.-objeto. Además, E es un subobjeto de A por el diagrama anterior. Existe un único Set-morfismo $e: E \longrightarrow A$ tal que hace conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, dashed, "e"] \arrow[drr, tail, bend left, "i_E"] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & A \arrow[r, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "x_A"] \\ & 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Es claro que $e: E \longrightarrow A$ es un U.D.-morfismo. Se demostrará que (E,e) es el igualador de f y g.

Ahora bien, $fe = ge$ sii $i_B fe = i_B ge$, pero $i_B fe = \bar{f} i_A e = \bar{f} i_E = \bar{g} i_E = i_B ge$ ya que E también es un subobjeto de $\bar{E}$.

Por último, supóngase que $C \xrightarrow{c} A$ es un U.D.-morfismo tal que $fc = gc$. Se tiene un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "i_c"] & N^r \arrow[rr, "\bar{h}"] \arrow[dr, "X_C"'] & & N^m \arrow[dl, "X_A"] \\ & & \Omega & \end{tikzcd}$$

$\bar{h} = < h_1, \ldots, h_m > : N^r \longrightarrow N^m$

$\bar{h} i_c = i_A c$

Ahora, como $fc = gc$ entonces $i_B fc = i_B gc$; Por lo tanto, $\bar{f} i_A c = \bar{g} i_A c$; i.e., $f_E(i_A c) = 0_c$. En consecuencia, existe un único Set-morfismo $e'\colon C \longrightarrow E$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "e'"] \arrow[drr, bend left, "\bar{h}\, i_C"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& E \arrow[r, tail, "i_E"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad \chi \oplus \langle f_E, f_A \rangle = \wedge \langle \chi f_E, \chi f_A \rangle$$

Claramente, $e'\colon C \longrightarrow E$ es un U.D.-morfismo. Como $i_E = i_A e$ entonces $i_A c = \bar{h} i_C = i_E e' = i_A e e'$; $\therefore$ $c = ee'$ ya que i_A es un Set-monomorfismo. Por lo tanto (E, e) es el U.D-igualador de f y g.

Una observación más, es claro que (E,e) es también el Set-igualador de f y g.

1.34 U.D. tiene límites finitos

1.35 Todo U.D.-monomorfismo es un Set-monomorfismo.

Demostración

Sea $F\colon$ U.D. $\longrightarrow$ Set el funtor inclusión. Por 1.32 y 1.33, F preserva límites finitos. En particular, F preserva productos fibrados. Ahora, es bien sabido que un morfismo $f\colon A \longrightarrow B$ es un monomorfismo sii el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "1_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Esta última afirmación también puede probarse directamente. Es evidente la importancia de 1.35. Permitirá probar que $\Omega = \{0,1\}$ es un U.D.-clasificador de subobjetos. Para demostrar esto último se comenzará con:

1.36

Si $f: A \longrightarrow B$ es un U.D.-morfismo entonces Imf, la imagen de f, es un U.D.- objeto.

Demostración

Sea $f: A \longrightarrow B$ un U.D.-morfismo arbitrario; entonces existe un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "< f_1, \ldots, f_m >"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N^m \arrow[dl, "\chi_B"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

$< f_1, \ldots, f_m > i_A = i_B f$

$f_1, \ldots, f_m: N^n \longrightarrow N$

pertenecen a R'.

Sea $P_A(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado ultradiofántico que define a A; $P_B(y_1, \ldots, y_m)$ un predicado ultradiofántico que define a B y $P_j\ (x_1, \ldots, x_n, Z)$ los predicados ultradiofánticos que definen a las gráficas de $f_j\colon N^n \longrightarrow N$, para $j \varepsilon \{1, \ldots, m\}$; entonces la imagen de f puede describirse de la siguiente manera:

$$\mathrm{Imf} = \{(y_1, \ldots, y_m) \; \varepsilon \; N^m \mid (\exists x_1, \ldots, x_n)\ (P_A(x_1, \ldots, x_n) \wedge P_1(x_1, \ldots, x_n, y_1)$$

$$\wedge \ldots \wedge\ P_m(x_1, \ldots, x_n, y_m) \wedge P_B(y_1, \ldots, y_m))\}$$

Claramente, el predicado que describe a Imf es ultradiofántico.

1.37

Si A es un U.D.-objeto arbitrario entonces el Set-morfismo característico de A, $X_A\colon N^n \longrightarrow \Omega$ es un U.D.-morfismo.

Demostración

Sea A un U.D.-objeto arbitrario. Por definición, existe un elemento $f_A\colon N^n \longrightarrow N$ de R' tal que $X_A = xf_A$. Como conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} N^n \arrow[r, "1_{N^n}"] & N^n \arrow[r, "yf_A"] \arrow[dr, "v_{N^n}"'] & N \arrow[d, "X_\Omega"] \\ & & \Omega \end{tikzcd}$$

donde $y\colon N \longrightarrow N$ se obtiene a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "y"] & N \arrow[d, dashed, "y"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "so"'] & N \arrow[r, "0_N"'] & N \end{tikzcd}$$

entonces xf_A: $N^n \longrightarrow \Omega$ es el único morfismo que hace conmutativo el diragrama

$$\begin{tikzcd}
N^n \arrow[dr, dashed, "xf_A"] \arrow[drr, bend left, "yf_A"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \Omega \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N \arrow[d, "\chi_\rho"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es fácil ver que xj: $N \longrightarrow N$ es y: $N \longrightarrow N$; por lo tanto, xf_A: $N^n \longrightarrow \Omega$ es un U.D.-morfismo.

1.38

Los set-morfismos $1 \xrightarrow{v} \Omega$ y $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$ son U.D.-morfismos.

Demostración

Basta considerar los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "o"] & N \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "\chi"'] & N \arrow[d, "\chi_\rho"] \\
& & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "o"] & N \arrow[r, "1_N"] \arrow[dr, "\chi"'] & N \arrow[d, "\chi_\rho"] \\
& & \Omega
\end{tikzcd}$$

por lo tanto, $1 \xrightarrow{v} \Omega$ y $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$ son U.D.-morfismos.

1.39

Ω es un U.D.-clasificador de subobjetos.

Demostración

Sea $X\colon A \longrightarrow \Omega$ un U.D.-morfismo arbitrario. Entonces es claro que X clasifica a un U.D.-subobjeto ya que $1 \xrightarrow{v} \Omega$ es un U.D.-morfismo y U.D. tiene productos fibrados.

Recíprocamente, si $f\colon A \rightarrowtail B$ es un U.D.-monomorfismo entonces por 1.35, f es un Set-monomorfismo. En consecuencia, la imagen de f se puede describir por medio del siguiente triángulo conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, tail, "i_B f"] \arrow[dr, "1_A"'] & & N^m \\
& A \arrow[ur, "i_B f"'] &
\end{tikzcd}$$

visto como subobjeto de N^m. En consecuencia, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & B \arrow[d, tail, "i_B"] \\
A \arrow[r, tail, "i_B f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^m \arrow[d, "X_{i_B f}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Por 1.38, $\chi_{i_B} f : N^m \longrightarrow \Omega$ es un U.D.-morfismo y es obvio que $i_B: B \rightarrowtail N^m$ es también un U.D.-morfismo debido a la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] & N^m \arrow[rr, "< p_1^m, \dots, p_m^m >"] \arrow[dr, "\chi_B"'] & & N^m \arrow[dl, "\vee_{N^m}"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\chi_A = \chi_{i_B} \overset{\circ}{f} i_B : B \longrightarrow \Omega$ es un U.D.-morfismo. Esto demuestra que Ω es un U.D.-clasificador de subobjetos.

Al haber hecho la construcción de los U.D.-objetos sobre Set y al ser esta última *cartesianamente cerrada*; esto es, para cada Set-objeto A, el funtor producto $-\times A$: Set $\longrightarrow$ Set tiene un adjunto derecho. Es natural preguntarse si U.D lo es. La respuesta es negativa, como se ve en el próximo resultado.

1.4 U.D. No es Cartesianamente cerrada

Demostración

La prueba de esta afirmación no es muy difícil. Si U.D fuese cartesianamente cerrada, existiría un elemento $f: N^2 \longrightarrow N$ de R' que sólo toma valores entre cero y uno, tal que las funciones

$f(1,j), f(2,j), \dots$

son todos los morfismos característicos de los U.D.-subobjetos de N. En $[T_0]$, se demuestra que tal morfismo $f: N^2 \longrightarrow N$ no puede existir.

Sin embargo, U.D. satisface las siguientes propiedades

1.41 U.D. tiene un objeto inicial

Demostración

Como el cuadrado

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \arrow[d, "s"] \\ 1 \arrow[r, "o"'] & N \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado entonces 0 es un U.D.-objeto.

Si A es un U.D.-objeto arbitrario entonces existe un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \arrow[d, "x_A"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Ahora, como el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, tail, "i_N"] & N \arrow[rr, "< 1_N, \ldots, 1_N >"] \arrow[dr, "Xs"'] & & N^n \arrow[dl, "X_A"] \\ & & \Omega & \end{tikzcd}$$

es un conmutativo, entonces $i_A: 0 \longrightarrow A$ es un U.D.-morfismo.

Se puede demostrar también que N es un U.D.-objeto de números naturales, U.D. tiene coproductos finitos y coigualadores. Las demostraciones de estos hechos se basan en las construcciones que se hacen en Set. En particular, la formación en U.D. de los colímites finitos realmente es una consecuencia directa de la construcción que se hace en Set.

Como se verá en el próximo capítulo la definición de una categoría ultradiofántica sobre una categoría $\underline{C}$, no dependerá de la existencia de colímites finitos en $\underline{C}$. Los resultados que se han demostrado en este capítulo se pueden resumir con el siguiente teorema.

1.5 Teorema (U.D.)

Sea U.D. la categoría ultradiofántica determinada por Set. Entonces U.D. satisface:

U.D.1)- U.D. tiene límites finitos. Además, el funtor inclusión $F: \text{U.D.} \longrightarrow \text{Set}$ preserva límites finitos.

U.D.2) U.D. tiene un objeto inicial que es el mismo de Set.

U.D.3) Si Ω es el clasificador de subobjetos para Set, también Ω es un U.D.-clasificador de subobjetos.

U.D.4) $|\hom_{\text{U.D.}}(1,\Omega)| = 2$

U.D.5) U.D. no es cartesianamente cerrada.

U.D.6) U.D. tiene objeto de números naturales, que es el mismo de Set.

Este teorema y las demostraciones que se han hecho permiten conjeturar que la construcción de una categoría ultradiofántica se puede hacer sobre categorías más débiles que Set. En particular, sobre categorías que *no necesariamente* sean cartesianamente cerradas. Esta última afirmación se precisará con detalle en el próximo capítulo. Además, se tratará de probar un teorema semejante al teorema 1.5.

2. LA CATEGORIA $\underline{C}_{U.D.}$ ASOCIADA A $\underline{C}$

2.1 Introducción

Para definir el concepto de categoría ultrafiofántica sobre una categoría $\underline{C}$, se necesita precisar qué tipo de condiciones satisface esta última. Como se ha dicho anteriormente, esta construcción se hará sobre categorías que no son, en general, cartesianamente cerradas. El trabajo se desarrollará con categorías que satisfacen la siguiente definición.

2.11 Definición

Sea $\underline{C}$ una categoría que cumple las siguientes condiciones

C.1)- $\underline{C}$ tiene límites finitos.

C.2)- $\underline{C}$ tiene clasificador de subobjetos; i.e., existe un $\underline{C}$-objeto Ω y un morfismo $1 \xrightarrow{v} \Omega$ (llamado verdad) tal que, para cada monomorfismo $f\colon A \rightarrowtail B$ en $\underline{C}$, existe un único morfismo $\chi_A\colon B \longrightarrow \Omega$ (llamado el morfismo característico de A) que hace el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & B \arrow[d, "\chi_A"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

un producto fibrado.

C.3)- $\underline{C}$ tiene un objeto de números naturales; i.e., se tiene un diagrama en $\underline{C}$ de la forma $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$ tal que para cualquier otro diagrama en $\underline{C}$, $1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} A$, existe un único $\underline{C}$-morfismo $h\colon N \longrightarrow A$ que hace conmutativo el diagrama.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "h"] & N \arrow[d, dashed, "h"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "x"'] & A \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

C.4)- $\underline{C}$ tiene un objeto inicial estricto; esto es, todo $\underline{C}$-morfismo de codominio 0 es un isomorfismo.

C.5)- $\underline{C}$ es una (epimorfismos, monomorfismos)-categoría.

C.6)- Ω es el coproducto de $1 \xrightarrow{v} \Omega$ y $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$, donde $1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$ es el morfismo característico de $0 \rightarrowtail 1$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & 1 \arrow[d, "\text{falso}"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

C.7)- $\underline{C}$ satisface el siguiente principio de recursión primitiva:

Si $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon B \longrightarrow B$ son dos $\underline{C}$-morfismos arbitrarios entonces existe un único $\underline{C}$-morfismo $h\colon A\times N \longrightarrow B$ tal que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A\times N \arrow[r, "1_N\times s"] \arrow[dd, dashed, "h"] & A\times N \arrow[dd, dashed, "h"] \\
A \arrow[ur, "\langle 1_A, 0_A\rangle"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
& B \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

donde $0_A = A \longrightarrow 1 \xrightarrow{\;0\;} N$.

Se intentará hacer un desarrollo análogo, hasta donde sea posible, al que se hizo en la construcción de la categoría U.D. Es necesario hacer notar que al ser Set un topos, se tenía la estructura suficiente para poder tener una *interpretación* de los predicados ultradiofánticos. El camino que se seguirá es dar una interpetación de los predicados ultradiofánticos, en una categoría $\underline{C}$ que satisfaga 2.11. Esto último se desarrollará por etapas; es claro que lo primero que se debe tener es una *lógica* suficientemente adecuada en $\underline{C}$. La siguiente sección aclara qué tipo de lógica se puede desarrollar en $\underline{C}$.

2.2 Lógica de $\underline{C}$

"*If it was so, it might be; and if it were so, it would be; but as it isn't, it ain't. That's logic*".

- *L. Carroll* -

Una consecuencia inmediata de 2.11 es la existencia de operadores :
$\wedge\colon \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$, $\neg\colon \Omega \longrightarrow \Omega$ definidos por los siguientes productos fibrados.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "{<v,v>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & \Omega\times\Omega \arrow[d, dashed, "\wedge"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & 1 \arrow[d, "falso"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "falso"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & \Omega \arrow[d, dashed, "\neg"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Esta última observación permite probar la siguiente proposición.

2.21 Proposición

Si A es un C-objeto arbitrario entonces Sub (A) tiene una estructura de álgebra de Boole.

Demostración

Sean $B, C \in$ Sub (A); se define $B \wedge C$ como aquel subobjeto de A cuyo morfismo característico es $\wedge < \chi_B, \chi_C >$.

$$\begin{tikzcd} B\wedge C \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & A \arrow[d, "{<\chi_B, \chi_C>}"] \\ 1 \arrow[r, "{<v,v>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\wedge"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Nótese que $\wedge < \chi_B, \chi_C > = \chi_B$ sii $B \leqslant C$ donde $\leqslant$ es el orden usual en Sub (A).

Además, si $B \cap C$ denota a la intersección de B y C entonces $B \cap C \simeq B \wedge C$ puesto que si el cuadrado.

$$\begin{tikzcd} B\cap C \arrow[r, tail, "g"] \arrow[d, tail, "f"'] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & C \arrow[d, tail, "c"] \\ B \arrow[r, tail, "b"'] & A \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado entonces también lo es el siguiente cuadrado:

$$\begin{tikzcd} B\cap C \arrow[r, tail, "h"] \arrow[d] & A \arrow[d, "<\chi_B,\ \chi_C>"] \\ 1 \arrow[r, "<v,v>"'] & \Omega\times\Omega \end{tikzcd}$$ donde $h = cg = bf$.

Esto permite afirmar que $\wedge : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ satisface las siguientes propiedades:

$\wedge$.1)- $\wedge < P_2, P_1 > = \wedge$; P_j: $\Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ es la j-ésima proyección, $j\varepsilon\{1, 2\}$

$\wedge$.2)- $\wedge < 1_\Omega, 1_\Omega > = 1_\Omega$

$\wedge$.3)- $\wedge < P_1, \wedge < P_2, P_3 >> = \wedge < \wedge < P_1, P_2 > , P_3 >$; P_j: $\Omega\times\Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$ denota a la j-ésima proyección, $j\varepsilon \{1, 2, 3\}$.

Por lo anterior, $B\wedge C$ es el ínfimo de B y C.

Como Ω es el coproducto de $1 \xrightarrow{v} \Omega$ y $1 \xrightarrow{falso} \Omega$ se tiene que $\neg^2 = 1_\Omega$. Esta observación permite definir un nuevo operador $\vee : \Omega\times\Omega \longrightarrow \Omega$, de la siguiente manera:

$$\vee = \neg\wedge(\neg\times\neg).$$

V cumple las siguientes condiciones:

V.1)- $\vee < 1_\Omega, 1_\Omega > \ = 1_\Omega$

Demostración

$$\vee < 1_\Omega, 1_\Omega > = \neg \wedge < \neg, \neg > = \neg(\neg) = 1_\Omega, \text{ por } \wedge.1.$$

V.2)- $\vee < P_2, P_1 > \ = \vee$

Demostración

$$\begin{aligned} \vee < P_2, P_1 > &= \neg \wedge (\neg \times \neg) < P_2, P_1 > = \neg \wedge < \neg P_2, \neg P_1 > = \\ &= \neg \wedge < P_2, P_1 > < \neg P_2, \neg P_1 > = \neg \wedge < \neg P_1, \neg P_2 > = \\ &= \neg \wedge (\neg \times \neg) < P_1, P_2 > = \vee < P_1, P_2 > = \vee; \text{ por } \wedge.2 \end{aligned}$$

V.3)- $\vee < \vee < P_1, P_2 >, P_3 > = \vee < P_1, \vee < P_2, P_3 >>$

Demostración

$$\begin{aligned} \vee < \vee < P_1, P_2 >, P_3 > = \vee < \neg \wedge < \neg P_1, \neg P_2 >, P_3 > &= \\ = \neg \wedge < \wedge < \neg P_1, \neg P_2 >, \neg P_3 > &= \\ = \neg \wedge < \neg P_1, \wedge < \neg P_2, \neg P_3 >> &= \\ = \vee < P_1, \neg \wedge < \neg P_2, \neg P_3 >> &= \\ = \vee < P_1, \vee < P_2, P_3 >>; \text{ por } \wedge.3 & \end{aligned}$$

V.4)- Si B, C ε Sub (A) entonces $\wedge < X_B, \vee < X_B, X_C >> = X_B$ y además $\vee < X_B, \wedge < X_B, X_C >> = X_B$.

Demostración

$$\wedge < X_B, \vee < X_B, X_C >> = \wedge < X_B, \neg \wedge < \neg X_B, \neg X_C >> \text{ ; Por lo anterior,}$$
$$\wedge < \neg X_B, \neg X_C > \leqslant \neg X_B \text{ entonces } \neg(\neg X_B) \leqslant \neg \wedge < \neg X_B, \neg X_C > \text{ ; esto es}$$
$$X_B \leqslant \neg \wedge < \neg X_B, \neg X_C > \;\; ; \;\; \therefore \;\; \wedge < X_B, \vee < X_B, X_C >> = X_B.$$

Por último, $\vee < X_B, \wedge < X_B, X_C >> = \neg \wedge < \neg X_B, \neg \wedge < X_B, X_C >>$ al ser $\wedge < X_B, X_C >$ el ínfimo de X_B y X_C se tiene que $\wedge < X_B, X_C > \leqslant X_B$ en consecuencia $\neg X_B \leqslant \neg \wedge < X_B, X_C >$; $\therefore$ $\wedge < \neg X_B, \neg \wedge < X_B, X_C >> = \neg X_B$.

Un resultado elemental[1], afirma que Sub (A) es una retícula donde $\wedge < X_B, X_C >$, $\vee < X_B, X_C >$ son el ínfimo y el supremo de X_B, X_C respectivamente.

Para probar que Sub (A) es un álgebra de Boole, basta ver que se le puede inducir una estructura de álgebra de Heyting. Para hacer esto último se necesita definir un nuevo operador $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, llamado el "operador pseudocomplemento"; Si (E, e) es el igualador de $\wedge$ y $P_1 : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$, entonces $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de E.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & \Omega\times\Omega \arrow[d, dashed] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "e"] & \Omega\times\Omega \arrow[r, shift left, "\wedge"] \arrow[r, shift right, "P_1"'] & \Omega . \end{tikzcd}$$

1 Véase por ejemplo, [B.M.], páginas 473-475.

Si B, C ε Sub (A), se define el pseudo complemento de B relativo a C, como el subobjeto de A cuyo morfismo característico es $\Rightarrow < \chi_B, \chi_C >$.

$$\begin{tikzcd}
B \Rightarrow C \arrow[r, tail, "b \Rightarrow c"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & A \arrow[d, "\Rightarrow < \chi_B, \chi_C > = \chi_B \Rightarrow \chi_C"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

B $\Rightarrow$ C satisface las siguientes condiciones:

$\Rightarrow$.1)- Si B,C,D ε Sub(A) entonces $\wedge < \chi_D, \chi_B \Rightarrow \chi_C > = \chi_D$ sii $\wedge < \wedge < \chi_D, \chi_B > , \chi_C > = \wedge < \chi_D, \chi_B >$

Demostración

$\Rightarrow$)- Supóngase que $\wedge < \chi_D, \chi_B \Rightarrow \chi_C > = \chi_D$. Considérense los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "\bar{d}"] \arrow[drr, tail, bend left, "d"] \arrow[dddr, bend right] & & & \\
& B \Rightarrow C \arrow[r, tail, "b \Rightarrow c"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & A \arrow[d, "< \chi_B, \chi_C >"] & \\
& E \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[r, shift left, "\wedge"] \arrow[r, shift right, "P_1"'] \arrow[d, "\Rightarrow"] & \Omega \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \wedge D \arrow[r, tail, "b \wedge d"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & D \arrow[d, tail, "d"] \arrow[dd, bend left=60, "\wedge < \chi_B, \chi_D >"] \\
B \arrow[r, tail, "b"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & A \arrow[d, "\chi_B"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Como D se factoriza a través de $B \Longrightarrow C$ entonces el morfismo $\wedge < X_B d, X_C d >$ es igual a $X_B d$. En consecuencia,

$$\wedge < \wedge < X_D, X_B > , X_C > = \wedge < \wedge < X_B d, X_C d > , X_C > =$$

$$= \wedge < X_B d, \wedge < X_C d, X_C >> = \wedge < X_B d, X_C d > = X_B d$$

$$= \wedge < X_B, X_D > .$$

$\Longleftarrow$)- Recíprocamente, si $\wedge < \wedge < X_D, X_B > , X_C > = \wedge < X_D, X_B >$ entonces

$$\wedge < X_B d, X_C d > = \wedge < \wedge < X_B, X_D >> , \wedge < X_C, X_D >> =$$

$$= \wedge < \wedge < \wedge < X_B, X_D > , X_C > , X_D > = \wedge < \wedge < X_D, X_B > , X_D > =$$

$$= \wedge < X_D, X_B > = X_B d$$

Por lo tanto d se factoriza a través de $B \Longrightarrow C$; en particular,

$$\wedge < X_D, X_B \Rightarrow X_C > = X_D$$

$\Rightarrow$.2)- $\wedge < X_B, X_C > = X_B$ sii $X_B \Rightarrow X_C = v_A$, donde $v_A = A \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{v} \Omega$.

Demostración

$\Longrightarrow$)- Si $\wedge < X_B, X_C > = X_B$ entonces, para todo elemento D en Sub (A) se tiene que $\wedge < X_D, X_B \Rightarrow X_C > = X_D$ puesto que $\wedge < \wedge < X_D, X_B > , X_C >$ es igual a $\wedge < X_D, \wedge < X_B, X_C >> = \wedge < X_D, X_B >$. En consecuencia $X_B \Rightarrow X_C = v_A$.

$\Longleftarrow$)- Inmediato por Π. 1.

Esto demuestra que Sub(A) es un álgebra de Heyting. Es bien sabido[1], que toda

1 Véase por ejemplo [R.-S.], I 12.1 y I 12.2

álgebra de Heyting es distributiva. Ahora bien, para probar, finalmente, que Sub(A) es un álgebra de Boole, sólo es necesario hacer notar que todo elemento B de Sub(A) tiene complemento. Para esto se probarán dos resultados:

B.1)- $\wedge < 1_\Omega, \neg > = \text{falso}_\Omega$; donde $\text{falso}_\Omega = \Omega \longrightarrow 1 \xrightarrow{\text{falso}} \Omega$

B.2)- $v < 1_\Omega, \neg > = v_\Omega$

Demostración

B.1 es inmediato, al ser 0 un objeto inicial estricto y el siguiente diagrama, un producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & \Omega \arrow[d, "!"] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & 1 \arrow[d, "\text{falso}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

B.2 se obtiene de B.1 ya que $v < 1_\Omega, \neg > = \neg \wedge < \neg, \neg^2 > = \neg \wedge < \neg, 1_\Omega > =$
$= \neg \text{ falso}_\Omega = v_\Omega$

Si se define $\neg B$ como el subobjeto clasificado por $\neg X_B$ entonces por B.1 y B.2 se obtienen las siguientes identidades:

C.1)- $\wedge < X_B, \neg X_B > = \text{falso}_B$ C.2)- $v < X_B, \neg X_B > = v_B$

Esto demuestra de Sub(A) es un álgebra de Boole. Se puede demostrar fácilmente que si B, C ε Sub(A) entonces $X_B \Longrightarrow X_C = \vee < \neg X_B, X_C >$, usando Π.1 y la distributividad de Sub(A).

Esta proposición permite afirmar que $\underline{C}$ tiene una lógica clásica. A pesar de que $\underline{C}$ no posee, en general, coproductos finitos, se verá más adelante, que algunos coproductos si existen. Es bien sabido, que el coproducto de monomorfismos no necesariamente, es un monomorfismo. Sin embargo, al ser $\underline{C}$ una categoría (epimorfismos, monomorfismos) -factorizable, todo $\underline{C}$-morfismo puede factorizarse a través de un monomorfismo. Si B, C son subobjetos de un objeto A tales que su coproducto B + C existe en $\underline{C}$, sería interesante saber si el subobjeto de A, que se obtiene al tomar la (epimorfismos, monorfismos)-factorización del $\underline{C}$-morfismo $\binom{b}{c} : B + C \longrightarrow A$ es el supremo de B y C. El siguiente lema aclara esta pregunta.

2.22 Lema

Si B, C ε Sub(A) y B + C existe entonces la imagen de $\binom{b}{c}: B + C \longrightarrow A$ es el supremo de B y C en A.

Demostración

Considérense los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "v_1"] \arrow[dr, tail, "b"'] & B + C \arrow[d, dashed, "\binom{b}{c}"] & C \arrow[l, "v_2"'] \arrow[dl, tail, "c"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B + C \arrow[rr, "\binom{b}{c}"] \arrow[dr, "e"'] & & A \\ & D \arrow[ur, tail, "m"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces es claro que B, C $\leqslant$ D puesto que, por ejemplo, $b = \binom{b}{c} v_1 = mev_1$.

Si E es un subobjeto de A tal que $E \geqslant B, C$ entonces existen morfismos $\bar{b}$, $\bar{c}$ que hacen conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, tail, "b"] \arrow[dd, dashed, "\bar{b}"'] & & A \\ & & \\ E \arrow[uurr, tail, "e"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, tail, "c"] \arrow[dd, dashed, "\bar{c}"'] & & A \\ & & \\ E \arrow[uurr, tail, "e"'] & & \end{tikzcd}$$

Al ser $B + C$ un coproducto existe $\binom{\bar{b}}{\bar{c}}: B + C \longrightarrow E$ tal que $\binom{\bar{b}}{\bar{c}}\, v_1 = \bar{b}$, $\binom{\bar{b}}{\bar{c}}\, v_2 = \bar{c}$. En consecuencia, el siguiente cuadrado es conmutativo

$$\begin{tikzcd} B + C \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\binom{\bar{b}}{\bar{c}}"'] & D \arrow[d, tail, "m"] \arrow[dl, dashed, "d"'] \\ E \arrow[r, tail, "e"'] & A \end{tikzcd}$$

Por la propiedad de diagonalización, existe un único morfismo $d: D \longrightarrow E$ que hace conmutativos los triángulos correspondientes; en particular, $ed = m$; esto es, $D \leqslant E$. Por lo tanto D es el supremo de B y C.

Para tener toda lo lógica necesaria en $\underline{C}$, se necesita poder "cuantificar existencial y universalmente", a través de monomorfismos. Es decir, si $f: A \longrightarrow B$ es un $\underline{C}$-morfismo y $C \overset{c}{\rightarrowtail} A$ es un monomorfismo entonces $\exists_f (C)$ es la imagen de la composición fc y $\forall_f (C)$ es el subobjeto $\neg \exists_f (\neg C)$.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, tail, "c"] \arrow[dr, "e_C"'] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & \exists_f(C) \arrow[ur, tail, "\exists_f(c)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \neg C \arrow[r, tail, "\neg c"] \arrow[dr, "e_{\neg C}"'] & A \arrow[r, "f"] & B \\ & \exists_f(\neg C) \arrow[ur, tail, "\exists_f(\neg C)"'] & \end{tikzcd} \qquad \neg \exists_f(\neg C) \rightarrowtail B$$

2.23 Proposición

Si $f: A \longrightarrow B$ es un $\underline{C}$-morfismo entonces el funtor $f^{-1}: Sub(B) \longrightarrow Sub(A)$ definido por el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(E) \arrow[r, tail, "f^{-1}(e)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, tail, "e"'] & B
\end{tikzcd}$$

tiene un adjuntoizquierdo $\exists_f: Sub(A) \longrightarrow Sub(B)$ y un adjunto derecho $\forall_f: Sub(A) \longrightarrow Sub(B)$. f^{-1} es un funtor de álgebras de Boole.

Demostración

Es claro que $f^{-1}: Sub(B) \longrightarrow Sub(A)$ es un funtor. La observación más importante en esta demostración es que si $E \varepsilon Sub(B)$, el morfismo característico de $f^{-1}(E)$ es $X_E f$, como lo demuestra el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(E) \arrow[r, tail, "f^{-1}(e)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & A \arrow[d, "f"] \\
E \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & B \arrow[d, "X_E"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$X_{f^{-1}(E)} = X_E f$$

f^{-1} preserva complementos puesto que $X_{\neg f^{-1}(E)} = \neg X_{f^{-1}(E)} = \neg X_E f =$

$= X_{\neg E} f = X_{f^{-1}(\neg E)}$

f^{-1} preserva ínfimos: $X_{f^{-1}(E \wedge F)} = X_{E \wedge F} f = \wedge < X_E, X_F > f = \wedge < X_E f, X_F f > =$

$= \wedge < X_{f^{-1}(E)}, X_{f^{-1}(F)} > = X_{f^{-1}(E) \wedge f^{-1}(F)}$

f^{-1} preserva supremos: $X_{f^{-1}(A \vee B)} = X_{A \vee B} f = \vee < X_A, X_B > f = \vee < X_A f, X_B f > =$

$= \vee < X_{f^{-1}(A)}, X_{f^{-1}(B)} > = X_{f^{-1}(A) \vee f^{-1}(B)}$.

Para la propiedad de diagonalización $\exists_f$: Sub(A) $\longrightarrow$ Sub(B) es un funtor.

Para probar la adjunción, se demostrará:

$\exists_f$).- $\exists_f(A') \leqslant B'$ sii $A' \leqslant f^{-1}(B')$

Demostración

Supóngase que $\exists_f(A') \leqslant B'$; se tienen diagramas de la forma:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, tail, "a'"] \arrow[dr, "e_{A'}"'] & A \arrow[r, "f"] & B \\
& \exists_f(A') \arrow[ur, tail, "\exists_f(a')"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\exists_f(A') \arrow[rr, tail, "\exists_f(a')"] \arrow[dr, dashed, "j"'] & & B \\
& B' \arrow[ur, tail, "b'"'] &
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, el diagrama exterior del cuadrado

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, tail, bend left, "a'"] \arrow[ddr, bend right, "je_{A'}"'] & & \\
& f^{-1}(B') \arrow[r, tail, "f^{-1}(b')"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & A \arrow[d, "f"] \\
& B' \arrow[r, tail, "b'"'] & B
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo; por lo tanto, $A' \leqslant f^{-1}(B')$

Recíprocamente, si $A' \leqslant f^{-1}(B')$ entonces la propiedad de diagonalización asegura un morfismo $k\colon \exists_f(A') \longrightarrow B'$ que hace conmutativo el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[dr, dashed, "m"] \arrow[drr, tail, bend left, "a'"] \arrow[ddr, bend right, "rm"'] & & \\
& f^{-1}(B') \arrow[r, tail, "f^{-1}(b')"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & A \arrow[d, "f"] \\
& B' \arrow[r, tail, "b'"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "e_{A'}"] \arrow[d, "rm"'] & \exists_f(A') \arrow[d, tail, "\exists_f(a')"] \arrow[dl, dashed, "k"'] \\
B' \arrow[r, tail, "b'"'] & B
\end{tikzcd}
$$

$$\therefore \quad \exists_f(A') \leqslant B'$$

Por último, la adjunción $f^{-1} \dashv \forall_f$ es consecuencia inmediata de la anterior.

$\forall_f$)- $\quad B' \leqslant \forall_f(A')$ sii $f^{-1}(B') \leqslant A'$

Demostración

$B' \leqslant \neg\, \exists_f(\neg A')$ sii $\exists_f(\neg A') \leqslant \neg B'$ sii $\neg A' \leqslant f^{-1}(\neg B') = \neg f^{-1}(B')$ sii $f^{-1}(B') \leqslant A'$.

Una consecuencia inmediata de esta proposición es la siguiente observación.

2.24 Si $f\colon A \longrightarrow B$ es un $\underline{C}$-morfismo y $A' \rightarrowtail A$ es un subobjeto de A entonces $\forall_f(A') \simeq B \implies A' \simeq A$

Los resultados anteriores demuestran que a pesar de no ser $\underline{C}$, cartesianamente cerrada, se puede definir una lógica clásica, junto con cuantificadores existenciales y universales, que satisfacen propiedades análogas a las que cumplen los topos elementales. Con este comentario se termina esta sección. La próxima etapa es ver qué propiedades aritméticas tiene $\underline{C}$.

2.3 Aritmética en $\underline{C}$

2.31 Recursión Primitiva

La condición $\underline{C}.8$ de 2.11, permite probar el esquema de recursión primitiva usual; esto es, si $f\colon A \longrightarrow B$, $g\colon AxNxB \longrightarrow B$ son $\underline{C}$-morfismos entonces existe un único $\underline{C}$-morfismo $h\colon AxN \longrightarrow B$ que hace conmutativo los diagramas

$$\begin{tikzcd} & AxN \arrow[d, dashed, "h"] \\ A \arrow[ur, "{<1_A,\, 0_A>}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} AxN \arrow[r, "1_A x s"] \arrow[d, dashed, "h"'] & AxN \arrow[d, dashed, "h"] \\ AxNxB \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Demostración

Considérense los morfismos $< 1_A, 0_A, f > : A \longrightarrow AxNxB$

$< P_A, P_N, g > : AxNxB \longrightarrow AxNxB$; Por $\underline{C}$.8 existe un único morfismo h':

$AxN \longrightarrow AxNxB$ que cumple las relaciones

$$h' < 1_A, 0_A > = < 1_A, 0_A, f > \; ; \quad h'(1_A xs) = < P_A, P_N, g > h'.$$

Sea $h = P_B h'$; un cálculo sencillo demuestra las identidades deseadas. La unicidad es consecuencia inmediata de la unicidad de h'.

Esta observación, también aparece en [Pe.-et.al] ; algunos de los resultados que se mencionarán aquí, están contenidos en el artículo mencionado. Sin embargo, el desarrollo de la $\underline{C}$-aritmética de este trabajo es original.

2.32 Propiedades Elementales

Una aplicación de 2.31, es la existencia de morfismos $\oplus$: $NxN \longrightarrow N$, $\cdot$: $NxN \longrightarrow N$, definidos como en Set.

$$\begin{tikzcd}
 & NxN \arrow[r, "1_n xs"] \arrow[d, dashed, "\oplus"'] & NxN \arrow[d, dashed, "\oplus"] \\
N \arrow[ur, "< 1_N{,} 0_N >"] \arrow[r, "1_N"'] & N \arrow[r, "s"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & NxN \arrow[d, dashed, "\cdot"] \\
N \arrow[ur, "< 1_N{,} 0_N >"] \arrow[r, "0_N"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
NxN \arrow[r, "1_n xs"] \arrow[d, dashed, "< P_1{,} \cdot >"'] & NxN \arrow[d, dashed, "\cdot"] \\
NxN \arrow[r, "\oplus"'] & N
\end{tikzcd}$$

$\oplus$ y $\cdot$ satisfacen las siguientes propiedades. Algunas de ellas son bastante sencillas y no se demostrarán

$\oplus$.1).- $\oplus < 0,0 > = 0$

$\oplus$.2).- $\oplus < 0_N, 1_N > = 1_N$

Demostración

Considérese el diagrama

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\oplus < 0_N,\, 1_N >"] & N \arrow[d, "\oplus < 0_N,\, 1_N >"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "0"'] & N \arrow[r, "s"'] & N \end{tikzcd}$$

entonces $\oplus < 0_N, s > = \oplus\, (1xs) < 0_N, 1_N > = s\, \oplus < 0_N, 1_N >$

Por la unicidad $\oplus < 0_N, 1_N > = 1_N$

$\oplus$.3).- $\oplus < P_2, P_1 > = \oplus$

Esta identidad se demuestra con el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & NxN \arrow[r, "1xs"] \arrow[d, "< P_2,\, P_1 >"] & NxN \arrow[d, "< P_2,\, P_1 >"] \\ N \arrow[ur, "< 1_N,\, 0_N >"] \arrow[r, "< 0_N,\, 1_N >"] \arrow[dr, "1_N"'] & NxN \arrow[r, "sx1"] \arrow[d, "\oplus"] & NxN \arrow[d, "\oplus"] \\ & N \arrow[r, "s"'] & N \end{tikzcd}$$

Basta demostrar que el rectángulo inferior es conmutativo. Esto último es un caso particular de una situación más general. Si $h: AxN \longrightarrow A$ es un morfismo que se obtiene por recursión primitiva de $1_A: A \longrightarrow A$ y $f: A \longrightarrow A$ entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A\times N \arrow[r, "f\times 1_N"] \arrow[d, "h"'] & A\times N \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

es conmutativo

En efecto, es fácil ver que $h(f\times 1_N)$ y fh, hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A\times N \arrow[r, "1\times s"] \arrow[d, dashed] & A\times N \arrow[d, dashed] \\ A \arrow[ur, "<1_A, 0_A>"] \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\oplus < P_2, P_1 > = \oplus$

$\oplus$.4).- $\oplus < P_1, \oplus < P_2, P_3 >> = \oplus < \oplus < P_1, P_2 > , P_3 >$

Esta identidad, se obtiene de la conmutatividad del cuadrado

$$\begin{tikzcd} A\times N\times N \arrow[r, "h\times 1_N"] \arrow[d, dashed, "1_A\times\oplus"'] & A\times N \arrow[d, dashed, "h"] \\ A\times N \arrow[r, "h"'] & A \end{tikzcd}$$

donde $h: A\times N \longrightarrow A$ es un morfismo que se obtuvo por recursión primitiva, como en el caso anterior.

Las propiedades respectivas para el producto, $\cdot : N \times N \longrightarrow N$, son más complicadas de probar. Ninguna de ellas, es conceptualmente difícil; el problema radica en que la longitud de sus demostraciones es bastante grande. A pesar de esto, se tratará de dar un camino sencillo para comprobarlas.

$\cdot$.1).- $\quad \cdot < 0, 0 > = 0$

$\cdot$.2).- $\quad \cdot < 0_N, 1_N > = 0_N$

Demostración

Inmediata por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "< 0_N, 1_N >"] & N \arrow[d, "< 0_N, 1_N >"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & N \times N \arrow[d, "\cdot"] & N \times N \arrow[d, "\cdot"] \\
 & N \arrow[r, "1_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

y $\oplus$.3.

$\cdot$.3).- $\quad \cdot < P_2, P_1 > = \cdot$

Demostración

La idea es probar que $\cdot < P_2, P_1 > : N \times N \longrightarrow N$ satisface las identidades que definen a $\cdot$. Para esto último, es suficiente probar que $\oplus < P_2, \cdot >$ es igual a $\cdot(s \times 1)$, tal afirmación se comprueba al verificar que $\oplus < P_2, \cdot >$ y

$\cdot(s \times 1)$ hacen conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & N \times N \arrow[dd, dashed] \\
N \arrow[ur, "{<1_N, 0_N>}"] \arrow[dr, "0_N"'] & \\
 & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "1_N \times s"] \arrow[d, dashed, "{<1_{N^2},\ >}"'] & N \times N \arrow[d, dashed] \\
N^2 \times N \arrow[r, "{\oplus < P^1_N\, P_{N^2},\ sP^2_N >}"'] & N
\end{tikzcd}$$

Para demostrar la asociatividad del producto, se comprobará primero que las operaciones $\cdot$ y $\oplus$ se distribuyen; esto es,

$\oplus\cdot$).- $\quad \cdot < \oplus < P_1, P_2 > P_3 > = \oplus < \cdot < P_1, P_3 >, \cdot < P_2, P_3 >>.$

Demostración

Como en el caso anterior, se comprueba fácilmente que los morfismos $\cdot < \oplus < P_1, P_2 >, P_3 > \alpha : N^2 \times N \longrightarrow N$ y $\oplus < \cdot < P_1, P_3 >, \cdot < P_2, P_3 >> \alpha$, hacen conmutativo los diagramas.

$$\begin{tikzcd}
 & N^2 \times N \arrow[dd, dashed] \\
N^2 \arrow[ur, "{<1_{N^2}, 0_{N^2}>}"] \arrow[dr, "0_{N^2}"'] & \\
 & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N^2 \times N \arrow[r, "1_{N^2} \times s"] \arrow[d, dashed, "{<1_{N^2 \times N},\ >}"'] & N^2 \times N \arrow[d, dashed] \\
(N^2 \times N) \times N \arrow[r, "{\oplus < \oplus P_{N^2}\, P_{N^2 \times N},\ P^2_N >}"'] & N
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha^{-1}: N \times N \times N \longrightarrow N^2 \times N$ es el cambio de coordenadas usual.

$\cdot .4).-\quad \cdot < P_1, \cdot < P_2, P_3 >> \; = \; \cdot < \cdot < P_1, P_2 > , P_3 >$

Demostración

Inmediata al comprobar, de nuevo que $\cdot < P_1, \cdot < P_2, P_3 >> \; \alpha : N^2xN \longrightarrow N$ y $\cdot < \cdot < P_1, P_2 > , P_3 > \; \alpha$ hacen conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & N^2xN \arrow[d, dashed] \\
N^2 \arrow[ur, "< 1_{N^2}, 0_{N^2} >"] \arrow[r, "0_{N^2}"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N^2xN \arrow[r, "1_{N^2}xs"] \arrow[d, "< 1_{N^2xN} , >"'] & N^2xN \arrow[d, dashed] \\
(N^2xN)xN \arrow[r, "\oplus < \cdot P_{N^2} P_{N^2xN} , P^2_N >"'] & N
\end{tikzcd}
$$

α es el mismo morfismo del inciso anterior.

Se pueden resumir los resultados anteriores con la siguiente afirmación.

2.33 Proposición

N junto con las operaciones definidas en 2.32, forman un semianillo conmutativo con uno.

Es bien conocido, [J], que un objeto de números naturales en un topos satisface los postulados de Peano. Se verá que en esta situación también se verifican tales postulados. Antes de esto, se probará que Ω es un subobjeto de N.

2.34 Proposición

Ω es un subobjeto de N

Demostración

Considérense los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "x"] & N \arrow[d, "x"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "v"'] & \Omega \arrow[r, "falso_\Omega"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "v"] \arrow[dr, "so"'] & \Omega \arrow[d, dashed, "j"] & 1 \arrow[l, "falso"'] \arrow[dl, "o"] \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

Es claro que $w = xj: \Omega \longrightarrow \Omega$ es un isomorfismo, al verificarse la siguiente igualdad: $w = \binom{falso}{v}$

En efecto, $wv = xjv = xso = falso_\Omega xo = falso_\Omega v = falso$

$w\ falso = xj\ falso = xo = v$

en consecuencia $w^2 = 1_\Omega$: en particular, j es un monomorfismo.

Para probar el primer postulado de Peano, se necesita definir el morfismo predecesor $\rho: N \longrightarrow N$. Dicho morfismo está definido por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 1xN \arrow[d, dashed, "\bar{\rho}"] \\
1 \arrow[ur, "<1, 0>"] \arrow[r, "0"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1xN \arrow[r, "1xs"] \arrow[d, dashed, "<1, \bar{\rho}>"'] & 1xN \arrow[d, dashed, "\bar{\rho}"] \\
(1xN)xN \arrow[r, "P_N P_{1xN}"'] & N
\end{tikzcd}$$

$\rho = \rho < !_N, 1_N > \; N \longrightarrow N$; es fácil ver que ρ cumple: $\rho o = 0$ y $\rho s = 1_N$.

Esto permite afirmar que s es un monomorfismo. En particular, se tienen los postulados de Peano.

2.35 Proposición (postulados de Peano)

P.1).- El cuadrado

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, tail] \arrow[d] & N \arrow[d, "s"] \\ 1 \arrow[r, "o"'] & N \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Demostración

Considérense los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P. F}"] & N \arrow[d, "s"] \\ 1 \arrow[r, "o"'] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "y"] & N \arrow[d, dashed, "y"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "\text{falso}"'] & \Omega \arrow[r, "v_\Omega"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Un cálculo sencillo demuestra que $\text{falso}_A = yo_A = ysi_A = v_\Omega y i_A = v_A$; lo cual implica que A es isomorfo a 0.

P.2).- s es un monomorfismo.

P.3).- N satisface el principio de inducción; es decir, si $A \overset{a}{\rightarrowtail} N$ es un subobjeto de N que cumple.

a).- $o \in a$

b).- $sa \subseteq a$

entonces $A \simeq N$.

Demostración

Por hipótesis se tienen diagramas de la forma:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, dashed, "y"'] \arrow[dr, "0"] & \\ A \arrow[rr, tail, "a"'] & & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, "sa"] & \\ A \arrow[r, tail, "a"'] & N \end{tikzcd}$$

Al ser N un objeto de números naturales, existe $N \xrightarrow{h} A$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed, "h"] & N \arrow[d, dashed, "h"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "y"'] & A \arrow[r, "f"'] & A \\ & & \end{tikzcd}$$

entonces es claro que $ah: N \longrightarrow N$ satisface: $aho = o$, $ahs = sah$, por lo tanto, $ah = 1_N$ y $A \simeq N$.

Hay algunas observaciones interesantes de 2.34 y 2.35

2.35.1 Lema

El cuadrado

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "o"] \arrow[d] & N \arrow[d, "x"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Demostración

La idea es probar que si $y\colon N \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de $1 \xrightarrow{o} N$ entonces y satisface también la definición de x (2.24). Esto último es inmediato por 2.21. B.1, 2.35. P.1;

2.35.2 Proposición

El igualador de $N \underset{s}{\overset{1_N}{\rightrightarrows}} N$ es $0 \rightarrowtail N$.

Demostración

Si $E \overset{e}{\rightarrowtail} N$ es el igualador de $N \underset{s}{\overset{1_N}{\rightrightarrows}} N$ entonces, es obvio que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d, "1_E"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N \arrow[d, "s"] \\ E \arrow[r, tail, "e"'] & N \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Si X_E denota al morfismo característico de E, por 2.35.P.1, $X_E 0$ = falso. Además, como el cuadrado anterior es un producto fibrado, $sX_E = X_E$. Esto dice que $X_E\colon N \longrightarrow \Omega$ hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\chi_E"] & N \arrow[d, "\chi_E"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "\text{falso}"'] & & \\
 & \Omega \arrow[r, "1_\Omega"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

en consecuencia, $\chi_E = \text{falso}_N$

2.35.3 Proposición

El coigualador de $N \underset{s}{\overset{1_N}{\rightrightarrows}} N$ es $N \longrightarrow 1$

Demostración

Si $c\colon N \longrightarrow C$ es tal que $cs = c$ entonces es fácil ver que c y el morfismo $co_N\colon N \longrightarrow C$ hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, dashed] & N \arrow[d, dashed] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "co"'] & & \\
 & C \arrow[r, "1_C"'] & C
\end{tikzcd}$$

Una última observación, la recursión primitiva permite afirmar que ciertos objetos tienen coproductos[1], esto queda resumido con:

1 Este resultado también se hizo notar en [P_e-et. al]

2.35.4 Proposición

Para todo objeto A, el diagrama $A \xrightarrow{<1_A,\, 0_A>} A\times N \xleftarrow{1_A \times s} A\times N$ es un coproducto; en particular, $1 \xrightarrow{o} N \xleftarrow{s} N$ es un coproducto.

Para finalizar este pequeño desarrollo de la C-aritmética, se introducirá el C-morfismo diferencia. Dicho morfismo está definido por recursión primitiva de $N \xrightarrow{1_N} N$ y ρ: $N \longrightarrow N$; donde ρ es el morfismo predecesor.

$$\begin{tikzcd}
 & N\times N \arrow[r, "1\times s"] \arrow[d, dashed, "\dot{-}"] & N\times N \arrow[d, dashed, "\dot{-}"] \\
N \arrow[ur, "<1_N,\, 0_N>"] \arrow[r, "1_N"'] & N \arrow[r, "\rho"'] & N
\end{tikzcd}$$

En el caso de Set, este morfismo permite definir un predicado de igualdad entre los Set-morfismos de codominio N; es decir, si f, g: $A \longrightarrow N$ son dos Set-morfismos entonces $f = g$ sii $(f \dot{-} g) + (g \dot{-} f)$ es el Set-morfismo 0_A.

Es evidente que para probar una afirmación análoga en C se necesitan conocer algunas propiedades del C-morfismo diferencia.

2.36 Propiedades de $\dot{-}$

$\dot{-}$.1).- $\dot{-} < 0, 0 > = 0$

$\dot{-}$.2).- $\dot{-} < 0_N, 1_N > = 0_N$

Demostración

Inmediata para la conmutatividad del diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\langle 0_N,\ 1_N \rangle"] & N \arrow[d, "\langle 0_N,\ 1_N \rangle"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & N\times N \arrow[r] \arrow[d, "\dot{-}"] & N\times N \arrow[d, "\dot{-}"] \\
 & N \arrow[r, "\rho"'] & N
\end{tikzcd}
$$

$\dot{-}$.3).- $\dot{-}\,(sxs) = \dot{-}$

Demostración

Considérese el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & N\times N \arrow[r, "1xs"] \arrow[d, "sxs"] & N\times N \arrow[d, "sxs"] \\
N \arrow[ur, "\langle 1_N,\ 0_N \rangle"] \arrow[dr, "1_N"'] & N\times N \arrow[r, "1xs"] \arrow[d, "\dot{-}"] & N\times N \arrow[d, "\dot{-}"] \\
 & N \arrow[r, "\rho"'] & N
\end{tikzcd}
$$

$\dot{-}$.3).- $\dot{-}\langle \oplus,\ P_2 \rangle = P_1$ y $\dot{-}\langle \oplus,\ P_1 \rangle = P_2$

Demostración

La segunda afirmación es consecuencia inmediata de la conmutatividad de $\oplus$. Para la primera afirmación basta tomar en cuenta el diagrama siguiente.

$$\begin{tikzcd}
 & N\times N \arrow[r, "1_N\times s"] \arrow[d, "<\oplus, P_2>"] & N\times N \arrow[d, "<\oplus, P_2>"] \\
N \arrow[ur, "<1_N, 0_N>"] \arrow[dr, "1_N"'] & N\times N \arrow[r, "s\times s"] \arrow[d, "\dot{-}"] & N\times N \arrow[d, "\dot{-}"] \\
 & N \arrow[r, "1_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

es claro que $P_1: N\times N \longrightarrow N$ también lo hace conmutativo.

$\dot{-}$.5).- $\dot{-} < 1_N, 1_N > = 0_N$

Demostración

El diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "s"] \arrow[d, "<1_N, 1_N>"] & N \arrow[d, "<1_N, 1_N>"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & N\times N \arrow[r, "s\times s"'] \arrow[d, "\dot{-}"] & N\times N \arrow[d, "\dot{-}"] \\
 & N \arrow[r, "1_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

prueba la afirmación.

$\dot{-}$.6).- $\dot{-} < P_2, \oplus > \; = \; 0_{NxN}$ y $\dot{-} \; < P_1, \oplus > \; = 0_{NxN}$

Demostración

De nuevo, estas igualdades se obtienen de:

$$\begin{tikzcd}
 & NxN \arrow[r, "1xs"] \arrow[d, "< P_2, \oplus >"] & NxN \arrow[d, "< P_2, \oplus >"] \\
N \arrow[ur, "< 1_N, 0_N >"] \arrow[r, "< 0_N, 1_N >"] \arrow[dr, "0_N"'] & NxN \arrow[r, "sxs"] \arrow[d, "\dot{-}"] & NxN \arrow[d, "\dot{-}"] \\
 & N \arrow[r, "1_N"'] & N
\end{tikzcd}$$

$\dot{-}$.7).- $< P_2, \oplus >$ y $< P_1, \oplus >$ son monomorfismos.

Demostración

Basta ver que alguno de los dos morfismos es un monomorfismo ya que $< P_2, \oplus > \; = \; < P_1, \oplus >< P_2, P_1 >$ y $< P_2, P_1 >$ es un isomorfismo.

Si $< f_1, f_2 >, < g_1, g_2 >$ son tales que $< \oplus, P_2 > < f_1, f_2 > = < \oplus, P_2 > < g_1, g_2$ entonces $f_2 = g_2$ y por $\dot{-}.4$, $P_1 < f_1, f_2 > = \dot{-} < \oplus, P_2 > < f_1, f_2 > =$
$= \dot{-} < \oplus, P_2 > < g_1, g_2 >$ que a su vez es igual a $P_1 < g_1, g_2 >$; esto es, $f_1 = g_1$.

Esta última propiedad permite preguntarse, si $< \oplus, P_2 >$ representa un orden en N. El siguiente resultado aclara esta inquietud.

2.37 Proposición (Orden en N)

$< \oplus, P_2 >$ $N x N \rightarrowtail N x N$ representa una relación de orden sobre N

Demostración

a).- Reflexividad

El morfismo $\Delta_N = < 1_N, 1_N > : N \longrightarrow NxN$ se factoriza a través del morfismo $< 0_N, 1_N > : N \longrightarrow NxN$; como se puede ver en el triángulo:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, dashed, "{< 0_N, 1_N >}"'] \arrow[dr, "\Delta_N"] & \\
NxN \arrow[r, "{< \oplus, P_2 >}"'] & NxN
\end{tikzcd}$$

b).- Antisimetría

El cuadrado

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
N \arrow[r, rightarrowtail, "{<0_N, 1_N>}"] \arrow[d, "{<0_N, 1_N>}"'] & NxN \arrow[d, "{<\oplus, P_2>}"] \\
NxN \arrow[r, rightarrowtail, "{<P_2, \oplus>}"'] & NxN
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

En efecto, claramente es conmutativo. Si $A \underset{<g_1,\, g_2>}{\overset{<f_1,\, f_2>}{\rightrightarrows}} NxN$ son tales que

$<\oplus, P_2><f_1, f_2> \;=\; <P_2, \oplus><g_1, g_2>$ entonces

$f_1 = \dot{-} <\oplus, P_2><f_1, f_2> = \dot{-} <P_2, \oplus><g_1, g_2> = 0_{NxN} <g_1, g_2> = 0_A$

por lo tanto $<f_2, f_2> = <g_2, \oplus <g_1, g_2>>$; esto es, $g_2 = \oplus <g_1, g_2>$; como

$0_A = \dot{-} <g_2, g_2>$ entonces $g_1 = \dot{-} <\oplus, P_2><g_1, g_2> = \dot{-} <\oplus <g_1, g_2>, g_2>$

$= \dot{-} <g_2, g_2> = 0_A$.

Lo cual demuestra que $f_1 = g_1 = 0_A$ y $g_2 = f_2$.

c).- Transitividad

Como el cuadrado

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
NxNxN \arrow[r, "{<P_1, \oplus <P_2, P_3>>}"] \arrow[d, "{<P_2, P_3>}"'] & NxN \arrow[d, "P_2"] \\
NxN \arrow[r, "\oplus"'] & N
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado y la suma es asociativa, entonces el triángulo

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
NxNxN \arrow[rr, "{<\oplus<P_1,\ \oplus<P_2,\ P_3>>,\ P_2<P_2,\ P_3>>}"] \arrow[dr, dashed, "{<\oplus<P_1,\ P_2>,\ P_3>}"'] & & NxN \\
& NxN \arrow[ur, "{<\oplus,\ P_2>}"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

La interpretación en Set del morfismo $<\oplus,\ P_2> : NxN \longrightarrow NxN$ es el conjunto $\{(a,b) \mid b \leqslant a\}$. Ahora bien, este conjunto puede descomponerse como la unión ajena de los conjuntos $\{(a,a) \mid a \varepsilon N\}$ y $\{(a,b) \mid b < a\}$. En $\underline{C}$, esto último equivale a decir que $<\oplus,\ P_2>$ es la unión ajena de Δ_N y $<s\oplus,\ P_2>$. El próximo resultado afirma lo anterior.

2.37.1 Proposición

$$<\oplus,\ P_2> = \Delta_N \vee <s\oplus,\ P_2> \text{ y } \Delta_N \wedge <s\oplus,\ P_2> = 0_A$$

Demostración

a).- $\Delta_N \wedge <s\oplus,\ P_2> = 0_A$

Si el cuadrado

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
A \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d, "{<b_1,\ b_2>}"'] & N \arrow[d, "\Delta_N"] \\
NxN \arrow[r, "{<s\oplus,\ P_2>}"'] & NxN
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado entonces $sb_1 = \dot{-} \langle \oplus, P_2 \rangle (sx1_N) \langle b_1, b_2 \rangle = \dot{-} \Delta_N a = 0_A$. Esto implica que $sb_2 = a$ y $b_2 = a$. Por 2.35.2, A es inicial.

b).- $\Delta_N \; v \langle s\oplus, P_2 \rangle = \langle \oplus, P_2 \rangle$

Claramente, Δ_N y $\langle s\oplus, P_2 \rangle$ son subobjetos de $\langle \oplus, P_2 \rangle$. Supóngase que $A \overset{a}{\rightarrowtail} NxN$ es un subobjeto que contiene a Δ_N y $\langle s\oplus, P_2 \rangle$.

Existen triángulos conmutativos de la forma

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, tail, "\Delta_N"] \arrow[dr, dashed, "b"'] & & NxN \\ & A \arrow[ur, tail, "a"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} NxN \arrow[rr, tail, "\langle s\oplus, P_2 \rangle"] \arrow[dr, dashed, "c"'] & & NxN \\ & A \arrow[ur, tail, "a"'] & \end{tikzcd}$$

Por 2.35.4, existe un único morfismo h: $NxN \longrightarrow A$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\langle 1_N, 0_N \rangle"] \arrow[dr, "b"'] & NxN \arrow[d, dashed, "h"] & NxN \arrow[l, "1xs"'] \arrow[dl, "c \langle P_2, P_1 \rangle"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Un cálculo sencillo, demuestra que $ah \langle P_2, P_1 \rangle = \langle \oplus, P_2 \rangle$. Sólo hay que probar, usando la propiedad universal del coproducto anterior, que $\langle P_2, P_1 \rangle ah = \langle P_1, \oplus \rangle$. En consecuencia, $\langle \oplus, P_2 \rangle = \Delta_N \; v \langle s\oplus, P_2 \rangle$.

Este último resultado permite demostrar la tricotomía en <u>C</u>; esto es, NxN puede descomponerse como la unión ajena de Δ_N, $< s\oplus, P_2 >$ y $< P_1, s\oplus >$. Esta afirmación queda resumida en la siguiente proposición.

2.38 Proposición

$NxN \simeq \Delta_N \vee < s\oplus, P_2 > \vee < P_1, s\oplus >$ y los sumandos son ajenos dos a dos.

Demostración

Por 2.37.1, basta demostrar que $NxN \simeq < \oplus, P_2 > \vee < P_1, s\oplus >$ y $< \oplus, P_2 > \wedge < P_1, s\oplus > = 0$. La demostración se hará en dos etapas.

a).- El cuadrado

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, tail] \arrow[d] & NxN \arrow[d, "< \oplus, P_2 >"] \\ NxN \arrow[r, "< P_1, s\oplus >"'] & NxN \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Demostración

Sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "< a, b >"] \arrow[d, "< c, d >"'] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & NxN \arrow[d, "< \oplus, P_2 >"] \\ NxN \arrow[r, "< P_1, s\oplus >"'] & NxN \end{tikzcd}$$

el producto fibrado de $<\oplus, P_2>$ y $<P_1, s\oplus>$; por la conmutatividad del diagrama se tiene que:

$$\oplus <a, b> = c \text{ y } b = s\oplus <c, d>$$

Por 2.36.∸4 y 2.36.∸6 $a = \dot{-} <\oplus, P_2> <a,b> = \dot{-} <P_1, s\oplus><c,d> = 0_A$; esto implica que $c = b$ y $b = s\oplus <b,d>$. De nuevo, por 2.36.∸4,

$d = \dot{-} <\oplus, P_2><d, b> = \dot{-} <\oplus <b, d>, b> = \dot{-} <\oplus <b, d>, s\oplus <b,d>> =$

$= \rho\, \dot{-} <\oplus <b,d>, \oplus <b,d>> = \rho o_A = 0_A$.

Por consiguiente $b = sb$, lo cual implica que A es inicial (2.35.2).

b).- Si el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "a"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N\times N \arrow[d, "v <X_{<\oplus, P_2>}, X_{<P_1, s\oplus>}>"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado entonces $A \simeq N\times N$.

Demostración

Por 2.24, sólo es necesario demostrar que $\forall_{P_2}(A) \simeq N$, donde $P_2 : N\times N \longrightarrow N$ denota a la segunda proyección. Al ser $\forall_{P_2}(A) \xrightarrow{\forall_{P_2}(a)} N$ un subobjeto de N, podemos usar el principio de inducción; i.e., $\forall_{P_2}(a)$ satisface las siguientes condiciones:

b.1).- $0 \varepsilon\ \forall_{P_2}(a)$ b.2).- $s\ \forall_{P_2}(a) \leqslant \forall_{P_2}(a)$

En efecto, $0 \varepsilon\ \forall_{P_2}(a)$ sii $P_2^{-1}(o) \leqslant a$ (2.23. $\forall_f$). Como el cuadrado

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "< 1_N, 0_N >"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N\times N \arrow[d, "P_2"] \\ 1 \arrow[r, "o"'] & N \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado entonces $P_2^{-1}(o) = < 1_N, 0_N >$. Ahora, $< 1_N, 0_N > \leqslant < \oplus, P_2 >$ ya que $< \oplus, P_2 > < 1_N, 0_N > = < 1_N, 0_N >$. Como $a \geqslant < \oplus, P_2 >$, entonces $a \geqslant < 1_N, 0_N >$.

Por 2.23. $\forall_f$, b.2 es equivalente a demostrar que $P_2^{-1}(s\ \forall_{P_2}(a)) \leqslant a$.
$P_2^{-1}(s\ \forall_{P_2}(a))$ se puede describir, por medio del siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} P_2^{-1}\forall_{P_2}(A) \arrow[r, "P_2^{-1}\forall_{P_2}(a)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N\times N \arrow[r, "1\times s"] \arrow[d, "P_2"] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N\times N \arrow[d, "P_2"] \\ \forall_{P_2}(A) \arrow[r, "\forall_{P_2}(a)"'] & N \arrow[r, "s"'] & N \end{tikzcd}$$

$$\therefore\ P_2^{-1}(s\forall_{P_2}(a)) = (1 \times s)(P_2^{-1}\forall_{P_2}(a))$$

Ahora, es claro que $P_2^{-1}\ \forall_{P_2}(a) \leqslant a$. Como $(1 \times s)$ es un monomorfismo entonces, $(1 \times s)\ (P_2^{-1}\ \forall_{P_2}(a)) = \exists_{1 \times s}(P_2^{-1}\forall_{P_2}(a)) \leqslant \exists_{1 \times s}(a)$.

Por la transitividad del orden definido en Sub(NxN), sólo es necesario probar que $\exists_{(1 \times s)}(a) \leqslant a$. Por 2.23 $\exists_f$, esto último es equivalente a probar que $a \leqslant (1 \times s)^{-1}a$.

Al ser A el supremo de $<\oplus, P_2>$ y $<P_1, s\oplus>$ basta ver que $(1 \times s)^{-1}(A)$ es una cota superior para estos dos subobjetos. $(1 \times s)^{-1}(A)$ se puede calcular con los siguientes diagramas.

$$
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, tail, "{<s\oplus, P_2>}"] \arrow[d, "1xs"'] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \times N \arrow[d, "1xs"] \\
N \times N \arrow[r, tail, "{<\oplus, P_2>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \times N \arrow[d, "\chi_{<\oplus, P_2>}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, tail, "{<P_1, \oplus>}"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \times N \arrow[d, "1xs"] \\
N \times N \arrow[r, tail, "{<P_1, s\oplus>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \times N \arrow[d, "\chi_{<P_1, s\oplus>}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$\therefore\ (1xs)^{-1}(A) = (1xs)^{-1}\ (<\oplus, P_2> \vee <P_1, s\oplus>) =$

$= (1xs)^{-1}\ (<\oplus, P_2>) \vee (1xs)^{-1}(<P_1, s\oplus>)$

$= <s\oplus, P_2> \vee <P_1, \oplus>$; por 2.23

$< P_1, s \oplus > \leqslant (1xs)^{-1}(A)$ ya que $< P_1, s \oplus > \leqslant a$ y además $< P_1, s \oplus > (1xs) =$ $= < P_1, s^2 \oplus > = (1xs) < P_1, s \oplus >$. Por lo tanto, si $z: NxN \longrightarrow A$ es tal que $az = < P_1, s \oplus >$ entonces $az\,(1xs) = < P_1, s \oplus > (1xs) =$ $= (1xs) < P_1, s \oplus >$; esto es, el diagrama exterior del cuadrado

$$\begin{tikzcd}
NxN \arrow[drr, bend left, "< P_1, s \oplus >"] \arrow[ddr, bend right, "z\,(1xs)"'] & & \\
& (1xs)^{-1}(A) \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & NxN \arrow[d, "1xs"] \\
& A \arrow[r, tail, "a"'] & NxN
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Por 2.37.1, para que $< \oplus, P_2 >$ esté contenido en $(1xs)^{-1}(A)$, basta ver que Δ_N y $< s \oplus, P_2 >$ son subobjetos de $(1xs)^{-1}(A)$.

Como $\Delta_N \leqslant < P_1, \oplus >$ y $< P_1, \oplus > \leqslant (1xs)^{-1}(A)$ entonces $\Delta_N \leqslant (1xs)^{-1}(A)$, es obvio que $< s \oplus, P_2 > \leqslant (1xs)^{-1}(A)$.

Por consiguiente $< \oplus, P_2 > \leqslant B$; $\therefore\ a \leqslant (1xs)^{-1}(a)$; en particular, $s\forall_{P_2}(a) \leqslant \forall_{P_2}(a)$ y por 2.35.P.3, $\forall_{P_2}(a) \simeq N$. Esto implica que $A \simeq NxN$ y la proposición está probada.

Esta última proposición, permitirá definir el morfismo "máximo", que se denotará por máx: $N{\times}N \longrightarrow N$.

2.39 Corolario

$$\text{máx} = \oplus \langle P_1, \dot{-} \langle P_2, P_1 \rangle\rangle = \oplus \langle P_2, \dot{-} \rangle : N{\times}N \longrightarrow N.$$

Demostración

Sea $E \overset{e}{\rightarrowtail} N{\times}N$ el igualador de $\oplus \langle P_1, \dot{-} \langle P_2, P_1 \rangle\rangle$ y $\oplus \langle P_2, \dot{-} \rangle$. Por 2.38, basta probar que $\langle \oplus, P_2 \rangle$ y $\langle P_1, s\oplus \rangle$ son subobjetos de E; i.e., $\langle \oplus, P_2 \rangle$ y $\langle P_1, s\oplus \rangle$ igualan a $\oplus \langle P_1, \dot{-} \langle P_2, P_1 \rangle\rangle$ y $\oplus \langle P_2, \dot{-} \rangle$. Un cálculo sencillo demuestra que:

$\oplus \langle P_2, \dot{-} \rangle \langle \oplus, P_2 \rangle = \oplus \langle P_2, \dot{-} \langle \oplus, P_2 \rangle\rangle = \oplus \langle P_2, P_1 \rangle = \oplus$

$\oplus \langle P_1, \dot{-} \langle P_2, P_1 \rangle\rangle \langle \oplus, P_2 \rangle = \oplus \langle \oplus, \dot{-} \langle P_2, \oplus \rangle\rangle = \oplus \langle \oplus, 0_{N{\times}N} \rangle = \oplus$

$\oplus \langle P_2, \dot{-} \rangle \langle P_1, s\oplus \rangle = \oplus \langle s\oplus, \dot{-} \langle P_1, s\oplus \rangle\rangle = \oplus \langle s\oplus, 0_{N{\times}N} \rangle = s\oplus$

$\oplus \langle P_1, \dot{-} \langle P_2, P_1 \rangle\rangle \langle P_1, s\oplus \rangle = \oplus \langle P_1, \dot{-} \langle s\oplus, P_1 \rangle\rangle = \oplus \langle P_1, P_2 (1{\times}s) \rangle =$
$= s\oplus$

2.39.1 Corolario

El cuadrado

$$\begin{tikzcd}
N{\times}N \arrow[r, tail, "\langle P_1, \oplus \rangle"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N{\times}N \arrow[d, "\dot{-}"] \\
1 \arrow[r, "o"'] & N
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Demostración

Por 2.36.$\dot{-}$.6, el cuadrado es conmutativo. Si a, b: $A \longrightarrow N$ son tales que $\dot{-} < a,b > = 0_A$ entonces por 2.39, $\oplus < P_1, \dot{-} < P_2, P_1 >> < a,b > =$
$= \oplus < P_2, \dot{-} > < a,b > = \oplus < b, \dot{-} < a,b >> = \oplus < b, 0_A > = b$; esto es, b se puede escribir como $\oplus < a, \dot{-} < b, a >>$.

2.39.2 Corolario (Predicado de Igualdad)

El cuadrado

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "\Delta_N"] \arrow[d] & N \times N \arrow[d, "\oplus < \dot{-}, \dot{-} < P_2, P_1 >>"] \\ 1 \arrow[r, "o"'] & N \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Demostración

Por 2.39.1, sólo es necesario hacer notar que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "< o, o >"] \arrow[d] & N \times N \arrow[d, "\oplus"] \\ 1 \arrow[r, "o"'] & N \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado

En efecto, es obvio que el diagrama es conmutativo. Si a,b: $A \longrightarrow N$ son tales que $\oplus < a, b > = 0_A$ entonces $a = \dot{-} < \oplus, P_2 > < a, b > =$ $\dot{-} < 0_A, b > = 0_A$. Análogamente, $b = 0_A$.

Comúnmente, se acostumbra denotar al morfismo característico de Δ_N por S_N. El corolario anterior, demuestra que S_N es igual a $x \oplus < \dot{-}, \dot{-} < P_2, P_1 >>$, donde $x: N \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de $1 \xrightarrow{0} N$. Es necesario hacer notar la importancia de 2.39.2; permite afirmar que si f, g son dos C-morfismos de codominio N entonces f es igual a g (externamente) si y solamente si $\oplus < \dot{-} < f, g > , \dot{-} < g, f >>$ es el morfismo $0_{dom(f)}$ (internamente). Con este comentario, se concluye esta sección. Estos resultados permitirán dar una interpretación de los predicados ultrafiofánticos. De esto último se ocupará la siguiente sección.

2.4 Interpretación de los Predicados Ultrafiofánticos

2.41 Polinomios en C.

Antes de definir, de manera formal, la interpretación de los Predicados Ultradiofánticos, se tiene que dar una regla para asociar a polimonios en $Z[x_1, \ldots, x_n]$, con coeficientes naturales, morfismos en C. Para hacer esto último procederemos de la siguiente manera.

2.41.1 Polimonios en Z [x] con coeficientes naturales

Si $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, con $a_i \varepsilon N$, $i \varepsilon \{0, \ldots, n\}$. El C-morfismo $P_{f(x)}: N \longrightarrow N$ asociado a f es igual a:

$\cdot < s^{a^n} o_{N^n}, h_n(x) > \oplus \cdot \cdot \cdot \oplus \cdot < s^{a^1} o_N, h_1(x) > \oplus s^{a^0} o_N$

donde $h_i(x)$: $N \longrightarrow N$ está descrito por las identidades:

$h_1(x) = 1_N$; $h_2(x) = \cdot \Delta_N$; . . .;$h_{k+1}(x) = \cdot < 1_N, h_k(x) >$, ..., $h_n(x) =$
$= \cdot < 1_N, h_{n-1}(x) >$

Las propiedades aritméticas, descritas en 2.3, permitirán probar las siguientes identidades.

2.41.2 Proposición

Si $1 \xrightarrow{s^a o} N$ es un natural entonces $P_{f(a)} = P_f(s^a o)$.

Demostración

a).- Se probará primero que $h_i(s^a o) = s^{a^i} o = s^{h_i(a)} 0$

Demostración

En efecto, si i = 1 entonces $h_i(x) = 1_N$ y la fórmula es clara. Para $h_{k+1}(x) =$
$= \cdot < 1_N, h_k(x) >$; $h_{k+1}(s^a o) = \cdot < s^a o, h_k (s^a o) > = \cdot < s^a o, s^{a^k} o > = s^{a^{k+1}} o$

La última identidad se sigue de la siguiente fórmula:

b).- Se probará ahora

$\cdot < s^a o, s^b o > = s^{ab} o$, a, b ε N

Demostración

Si a = o entonces $\cdot < o, s^b o > = o = s^{ob} o$. Si a es de la forma j+1,

$\cdot < s^{a+1}o, s^{b}o > = \cdot < s^{b}o, s^{a+1}o > = \oplus < s^{b}o, \cdot < s^{b}o, s^{a}o >> = \oplus < s^{b}o, s^{ab}o > =$

$= s^{b} \oplus < o, s^{ab}o > = s^{b}(s^{ab}o) = s^{b+ab}o = s^{(a+1)b}o.$

c).- Se probará

$P_{f(a)} = P_{f}(s^{a}o)$

Demostración

$P_{f}(s^{a}o) = \cdot < s^{an}o, h_{n}(s^{a}o) > \oplus \ldots \oplus \cdot < s^{a_1}o, h_{1}(s^{a}o) > \oplus s^{a_0}o$; Por (a) y (b) esta expresión puede escribirse como:

$\cdot < s^{a_n}o, s^{a^n}o > \oplus \ldots \oplus \cdot < s^{a_1}o, s^{a}o > \oplus s^{a_0}o$, que a su vez es igual a:

$s^{a_n a^n}o \oplus \ldots \oplus s^{a_1 a}o \oplus s^{a_0}o = s^{f(a)}o$. En consecuencia, $P_{f(a)} = s^{f(a)}o$.

2.41.3

Considérese ahora polinomios $f(x, y)$ en dos variables $\bar{x}$, y. Entonces f puede escribirse como:

$f(x,y) = A_{o}(x) + A_{1}(x)\, y + \ldots + A_{n}(x)y^{n}$

donde $A_{i}(x) \in Z[x]$ y sus coeficientes son naturales, $i \in \{o, \ldots, n\}$. Por 2.41.1, cada $A_{i}(x)$, tiene asociado un $\underline{C}$-morfismo, entonces $P_{f(x,\, y)}$ está dado por la siguiente regla:

$P_{f(x,\, y)} = P_{A_o}P_1 \oplus \cdot < P_{A_1}P_1, h_1P_2 > \oplus \cdot < P_{A_2}P_1, h_2P_2 > \oplus \ldots \oplus \cdot < P_{A_n}P_1, h_nP_2 >$

donde $P_1, P_2: N^2 \longrightarrow N$ son las proyecciones.

Se pueden probar las siguientes identidades.

2.41.4 Proposición

i).- $P_{f(x,y)} < P_2, P_1 > \; = \; P_{f(y,x)}$

ii).- $P_{f(x,y)} < 1_N, s^a o_N > = P_{f(x,a)}$

iii).- $P_{f(x,y)} < s^a o_N, 1_N > = P_{f(a,y)}$

iv).- $P_{f(x,y)} < s^a o, s^b o > = s^{f(a,b)} o = P_{f(a,b)}$

Demostración

i).- $P_{f(y,x)} = P_{A_o} P_2 \oplus \cdot < P_{A_1} P_2, h_1 P_1 > \oplus \ldots \oplus \cdot < P_{A_n} P_2, h_n P_1 >$

$$P_{f(x,y)} < P_2, P_1 > = P_{A_o} P_1 < P_2, P_1 > \oplus \cdot < P_{A_1} P_1, h_1 P_2 >$$
$$< P_2, P_1 > \oplus \ldots \oplus \cdot < P_{A_n} P_1, h_n P_2 > < P_2, P_1 >$$
$$= P_{A_o} P_2 \oplus \cdot < P_{A_1} P_2, h_1 P_1 > \oplus \ldots \oplus \cdot < P_{A_n} P_2, h_n P_1 >$$

ii).- $f(x,a) = A_o(x) + a\, A_1(x) + \ldots + a^n A_n(x).$

$$P_{f(x,y)} < 1_N, s^a o_N > = P_{A_o} \oplus \cdot < P_{A_1}, h_1 s^a o_N > \oplus \ldots \oplus \cdot < P_{A_n}, h_n s^a o_N >$$
$$= P_{A_o} \oplus \cdot < P_{A_1}, s^a o_N > \oplus \ldots \oplus \cdot < P_{A_n}, s^{a^n} o_N >$$
$$= P_{f(x,a)}$$

iii).- $f(a,y) = A_o(a) + A_1(a)\, y + \ldots + A_n(a)\, y^n$

$$P_{f(x,y)} < s^a o_N, 1_N > = P_{A_o} s^a o_N \oplus \cdot < P_{A_1} s^a o_N, h_1 > \oplus \ldots \oplus \cdot < P_{A_n} s^a o_N, h_n >$$
$$= s^{A_o(a)} o_N \oplus \cdot < s^{A_1(a)} o_N, h_1 > \oplus \ldots \oplus \cdot < s^{A_n(a)} o_N, h_n >$$

iv).- Es obvio, por 2.41.2

2.41.5

En general, si $f(x_1, \ldots, x_n)$ es un polimonio en n-variables $x_1, \ldots, x_n$; entonces si f es igual a:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = A_o(x_1, \ldots, x_{n-1}) + A_1(x_1, \ldots x_{n-1})\, x_n + \ldots + A_k(x_1, \ldots, x_{n-1})\, x_n^k$$

$P_{f(x_1, \ldots, x_n)}: N^n \longrightarrow N$ es el $\underline{C}$-morfismo:

$$P_{A_o} < P_1^n, \ldots, P_{n-1}^n > \oplus \cdot < P_{A_1} < P_1^n, \ldots, P_{n-1}^n >, h_1\, P_n^n > \oplus \ldots \oplus$$
$$\cdot < P_{A_k} < P_1^n, \ldots, P_{n-1}^n >, h_k\, P_n^n >$$ donde $P_i^n: N^n \longrightarrow N$ es la i-ésima proyección, $i \varepsilon \{1, \ldots, n\}$.

Como en el punto anterior, se probarán las siguientes relaciones:

2.41.6 Proposición

i).- $$P_{f(x_1, \ldots, x_n)} < P_1^n, \ldots, P_{i-1}^n, P_n^n, P_{i+1}^n, \ldots, P_i^n > =$$
$$= P_{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, \ldots, x_i)}$$

ii).- $$P_{f(x_1, \ldots, x_n)} < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, {s^a o}_{N^{n-1}}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-1}^{n-1} > =$$
$$= P_{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)}$$

iii).- $$P_{f(x_1, \ldots, x_n)} < s^{a_1} o, \ldots, s^{a_n} o > = s^{f(a_1, \ldots, a_n)} o = P_{f(a_1, \ldots, a_n)}$$

Demostración

i).- $f(x_1, \ldots, x_n, \ldots, x_i) = A_o(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) + \ldots +$
$A_k(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})\, x_i^k$

$P_{f(x_1, \ldots, x_n)} < P_1^n, \ldots, P_{i-1}^n, P_n^n, \ldots, P_i^n > = P_{A_o} < P_1^n, \ldots, P_{i-1}^n, P_n^n, P_{i+1}^n, \ldots,$
$P_{n-1}^n > \oplus \ldots \oplus \cdot < P_{A_k} < P_1^n, \ldots, P_{i-1}^n, P_n^n, P_{i+1}^n, P_{n-1}^n >, h_k\, P_i^n > =$

$= P_{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots, x_n)}$

ii).- $f(x_1, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n) = A_o\, (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})$
$+ \ldots + A_k\, (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})\, x_n^k$

$P_{f(x_1, \ldots, x_n)} < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-1}^{n-1} > =$

$= P_{A_o} < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-2}^{n-1} > \oplus \ldots \oplus \cdot < P_{A_k} < P_1^{n-1}, \ldots,$
$P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-2}^{n-1} >, h_k\, P_{n-1}^{n-1} >$

$P_{A_j} < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-2}^{n-1} >$ es un morfismo de dominio N^{n-2}, $j \varepsilon \{o, \ldots, k\}$.

Ahora bien, $< P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-2}^{n-1} >$ puede escribirse de la siguiente manera:

$< P_1^{n-2}, \ldots, P_{i-1}^{n-2}, s^a o_{N^{n-2}}, P_i^{n-2}, \ldots, P_{n-2}^{n-2} > < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, P_i^{n-1}, \ldots P_{n-2}^{n-1} >$

por lo tanto, para toda j ($o \leqslant j \leqslant k$), se tiene

$$P_{A_j} < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-2}^{n-1} > \; = P_{A_j} < P_1^{n-2}, \ldots, P_{i-1}^{n-2},$$

$$s^a o_{N^{n-2}}, P_i^{n-2}, \ldots, P_{n-2}^{n-2} > < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-2}^{n-1} > =$$

$$= P_{A_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})} < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-2}^{n-1} >$$

$$\therefore P_{f(x_1, \ldots, x_n)} < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-1}^{n-1} > =$$

$$= P_{A_o(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})} < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-2}^{n-1} > \oplus \ldots \oplus$$

$$\oplus \; \cdot < P_{A_k (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})} < P_i^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, \ldots, P_{n-2}^{n-1} >$$

$$h_k \; P_{n-1}^{n-1} > \; = P_{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)}$$

iii).- Inmediato.

Como se verá en la próxima sección, estos resultados permitirán definir una interpretación de los Predicados Ultradiofánticos, por medio de morfismos de dominio una potencia de N, y codomino Ω. Dicho esto último se comenzará con

2.42 La Intepretación de los Predicados Ultradiofánticos.

Sea $P(x_1, \ldots, x_n)$ un predicado ultradiofántico arbitrario. Se procederá por inducción sobre el número de conectivos lógicos que aparecen en P.

2.42.1

Si en P no aparece algún conectivo entonces P es la forma $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$ donde f es una expresión polinomial con coeficientes enteros. Este polinomio se puede escribir como f = g-h donde g,h son polimonios con coeficientes naturales. Además es claro que $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$ sii $((g \dot- h) + (h \dot- g)) (x_1, \ldots, x_r) = 0$, donde $\dot-$ es la diferencia en N. Se define $X_{P(x_1, \ldots, x_r)}: N^r \longrightarrow \Omega$ como

$$\chi_{P(x_1, \ldots, x_r)} = \chi \oplus < \dot{-} < P_{g(x_1, \ldots, x_r)}, P_{h(x_1, \ldots, x_r)} >,$$

$$\dot{-} < P_{h(x_1, \ldots, x_r)}, P_{g(x_1, \ldots, x_r)} >>$$

donde P_h y P_g son los morfismos asociados a g y h por 2.41.6 y x: $N \longrightarrow \Omega$ es el C-morfismo definido en 2.34.

2.42.2

Si $P_{(x_1, \ldots, x_r)} = \neg Q\ (x_1, \ldots, x_r)$ y $\chi_{Q(x_1, \ldots, x_r)}: N^r \longrightarrow \Omega$ es el morfismo asociado a $Q_{(x_1, \ldots, x_r)}$ entonces

$$\chi_{P(x_1, \ldots, x_r)} = \neg \chi_{Q(x_1, \ldots, x_r)}$$

2.42.3

Si $P(x_1, \ldots, x_r)$ es de la forma $P_1(x_1, \ldots, x_r) \wedge Q(x_1, \ldots, x_r)$ entonces

$$\chi_{P(x_1, \ldots, x_r)} = \wedge < \chi_{P_1(x_1, \ldots, x_r)}, \chi_{Q(x_1, \ldots, x_r)} >$$

2.42.4

Si $P(x_1, \ldots, x_r) = P_1(x_1, \ldots, x_r) \vee Q(x_1, \ldots, x_r)$ entonces

$$\chi_{P(x_1, \ldots, x_r)} = \vee < \chi_{P_1(x_1, \ldots, x_r)}, \chi_{Q(x_1, \ldots, x_r)} >$$

2.42.5

Si $P(x_1, \ldots, x_r) = (\exists x)\ (Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_r))$ y

$\chi_{Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_r)}: N^{r+1} \longrightarrow \Omega$

es el $\underline{C}$-morfismo asociado a $Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_r)$ entonces

$\chi_{P(x_1, \ldots, x_r)}: N^r \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de $(\exists x)(A) \rightarrowtail N^r$

donde $A \overset{i_A}{\rightarrowtail} N^{r+1}$ es el subobjeto clasificado por $\chi_{Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_i, \ldots, x_r)}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^{r+1} \arrow[d, "\chi_Q"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[drr, "e_{(\exists x)(A)}"'] & N^{r+1} \arrow[rrr, "< P_1^{r+1}, \ldots, P_{i-1}^{r+1}, P_{i+1}^{r+1}, \ldots, P_{r+1}^{r+1} >"] & & & N^r \\ & & (\exists x)(A) \arrow[urr, tail, "i_{(\exists x)(A)}"'] & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (\exists x)(A) \arrow[r, tail, "i_{(\exists x)(A)}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^r \arrow[d, "\chi_P"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

2.42.6

Si $P(x_1, \ldots, x_r) = (\forall x)(Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_r))$ entonces

$\chi_{P(x_1, \ldots, x_r)}: \quad N^r \longrightarrow \Omega$ es el morfismo característico de

$(\forall x)(A) \rightarrowtail^{i_{(\forall x)(A)}} N^r$ donde A es el subobjeto clasificado por $\chi_{Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_r)}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^r \arrow[d, "\chi_{Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_r)}"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Cuando no haya peligro de confusión se escribirá χ_P: $N^r \longrightarrow \Omega$ en lugar de $\chi_{P(x_1, \ldots, x_r)}$: $N^r \longrightarrow \Omega$.

A veces, es difícil calcular la intersección de dos subobjetos. La siguiente observación permite afirmar que en ciertos casos este cálculo no es tan complicado.

2.42.7 Proposición

Si f, g: $N^r \longrightarrow N$ son $\underline{C}$-morfismos entonces $\wedge < xf, xg > = x \oplus < f, g >$.

Demostración

Basta demostrar que $\wedge$ (xxx) es igual a x $\oplus$. Para esto, considérense los siguientes diagramas

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{<o, o>}"] \arrow[d] & N \times N \arrow[d, "xxx"] \\
1 \arrow[r, "{<v, v>}"'] \arrow[d] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{<o, o>}"] \arrow[d] & N \times N \arrow[d, "\oplus"] \\
1 \arrow[r, "o"'] \arrow[d] & N \arrow[d, "\chi"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Claramente, cada uno de ellos es un producto fibrado; por lo tanto, $\wedge(xxx) = \chi \oplus$.

De acuerdo a la definición 2.42, es bastante claro cómo se podrían definir los objetos ultradiofánticos en C. Como se vió en el capítulo anterior, un subconjunto A de N^n es ultradiofántico sii existe un Predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ tal que

$$(a_1, \ldots, a_n) \in A \quad \text{sii} \quad P(a_1, \ldots, a_n)$$

Como ya se tiene una interpretación de los predicados ultradiofánticos sólo es necesario precisar cómo se van a caracterizar los objetos ultradiofánticos en C; de esto último se ocupará la siguiente sección.

2.5 La Categoría $\underline{C}_{U.D}$

2.5.1 Los Objetos de $\underline{C}_{U.D}$

Definición

Se dice que un $\underline{C}$-objeto A es ultradiofántico sii existe un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_P = \chi_A"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Los objetos de $\underline{C}_{U.D}$ son los $\underline{C}$-objetos ultradiofánticos.

La definición de $\underline{C}_{U.D}$-morfismo necesita un poco más de cuidado. Hasta el momento, no se ha considerado un análogo a la clase R' de funciones ultradiofánticas. Para definir a los $\underline{C}_{U.D}$-morfismos se usará la definción anterior. Recuérdese que una función $f\colon N^n \longrightarrow N$ pertenece a R' sii su gráfica es un conjunto ultradiofántico. Como ya se cuenta con una definición precisa de $\underline{C}_{U.D}$-objeto, la definición de $R'_{\underline{C}}$ no es muy difícil de imaginar.

2.52 La Clase $R'_{\underline{C}}$

Definición

Se dice que un $\underline{C}$-morfismo $f\colon N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$ sii su gráfica $N^n \xrightarrow{<1,\ f>} N^n x N$ es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto; i.e., si existe un predicado ultradiofántico $P_{<1,\ f>}$ tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
N^n \arrow[r, "<1_{N^n}, f>"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n x N \arrow[d, "X_{P_{<1,f>}} = X_{<1,f>}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Se verán qué tipo de propiedades satisface R'.

2.53 Propiedades de $R'_{\underline{c}}$

2.53.1 Proposición

El morfismo 1_N: N ⟶ N pertenece a $R'_{\underline{c}}$

Demostración

Como el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\Delta_N"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & NxN \arrow[d, "X \oplus < \dot{-}, \dot{-} < P_2, P_1 >>"] \\
1 \arrow[r, "t"'] & \Omega .
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado (por 2.35.1 y 2.39.2) y $x \oplus < \dot{-}, \dot{-} < P_2, P_1 >>$ corresponde al predicado x = y entonces Δ_N es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto; esto es, 1_N: N ⟶ N pertenece a $R'_{\underline{c}}$.

2.53.2 Proposición

El morfismo $s\colon N \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$.

Demostración

$(R'_{\underline{C}}.1)$ $s\colon N \longrightarrow N$ es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto

En efecto, considérese el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "s"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \arrow[d, "X_s"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

entonces, por 2.35.P.1, $\neg X_s o = \neg$ falso $= v$; Además, $\neg X_s s = \neg v_N =$ falso$_N$; por 2.34, $\neg X_s = X$; esto es, $X_s = \neg X$.

$(R'_{\underline{C}}.2)$ $< 1, s > : N \longrightarrow NxN$ es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto.

Basta considerar el siguiente producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, tail, "{<1_N, s>}"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N\times N \arrow[d, "s\times 1_N"] \\
N \arrow[r, tail, "\Delta_N"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N\times N \arrow[d, "x \oplus <\dot{-},\ \dot{-} <P_2,\ P_1>>"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Ahora, la composición $x \oplus < \dot{-} < sP_1, P_2 > , \dot{-} < P_2, sP_1 >>$ corresponde al predicado $y = x + 1$. En efecto, sólo es necesario hacer notar que $\oplus < P_1, so_{N^2} >$ es igual a: $\oplus < P_1, so_{N^2} > = s\oplus < P_1, 0_{N^2} > = s\oplus < 1_N, 0_N > P_1 = sP_1$

2.53.3 Proposición

$(R'_{\underline{c}}.3)$ Si $P_i^n : N^n \longrightarrow N$ es la i-ésima proyección entonces P_i^n pertenece a $R'_{\underline{c}} (1 \leq i \leq n)$.

Demostración

Considérese el siguiente cuadrado

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "a"] \arrow[drr, bend left, "{<a,b>}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& N^n \arrow[r, tail, "{<1_{N^n}, P_i^n>}"] \arrow[d] & N^n\times N \arrow[d, "\oplus < \dot{-} < P_2,\ P_i^n P_1 > ,\ \dot{-} < P_i^n P_1, P_2 >>"] \\
& 1 \arrow[r, "o"'] & N
\end{tikzcd}
$$

donde $P_2\colon N^n x N \longrightarrow N$, $P_1\colon N^n x N \longrightarrow N^n$ son las proyecciones. El cuadrado es conmutativo ya que $\oplus < \dot{-} < P_2, P_i^n P_1 > , \dot{-} < P_i^n P_1, P_2 >> < 1_{N^n}, P_i^n > =$

$= \oplus < \dot{-} < P_i^n, P_i^n > , \dot{-} < P_i^n, P_i^n >> = 0_{N^n}$

Si $< a,b > : A \longrightarrow N^n x N$ es un $\underline{C}$-morfismo tal que

$\oplus < \dot{-} < b, P_i^n a > , \dot{-} < P_i^n a, b >> = 0_A$ entonces $\dot{-} < b, P_i^n a > = 0_A$ y

$\dot{-} < P_i^n a, b > = 0_A$. Por lo tanto, $b = P_i^n a$.

Esto prueba que $P_i^n\colon N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{c}}$.

2.53.4 Proposición

$(R'_{\underline{c}}.4)$ Todos los morfismos constantes de la forma $s^a o_{N^n}\colon N^n \longrightarrow N$ pertenecen a $R'_{\underline{c}}$.

Demostración

Considérese el cuadrado

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "b"] \arrow[drr, bend left, "< b,c >"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& N^n \arrow[r, "< 1_{N^n}, s^a o_{N^n} >"] \arrow[d] & N^n x N \arrow[d, "\oplus < \dot{-} < P_2, s^a o_{N^k x N} > , \dot{-} < s^a o_{N^k x N}, P_2 >>"] \\
& 1 \arrow[r, "o"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Claramente, es conmutativo. Si $< b, c > : A \longrightarrow N^n x N$ es tal que $\dot{-} < c, s^a o_A > = 0_A = \dot{-} < s^a o_A, c >$ entonces $c = s^a o_A$. En consecuencia, $s^a o_{N^n} : N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{c}}$.

2.53.5 Proposición

$(R'_{\underline{c}}.5)$ Si $f: N^n \longrightarrow N$ y $g_1, \ldots, g_n : N^m \longrightarrow N$ pertenecen a $R'_{\underline{c}}$ entonces el $\underline{C}$-morfismo composición $f < g_1, \ldots, g_n > : N^m \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{c}}$.

Demostración

Por hipótesis, se tienen productos fibrados de la forma:

$$\begin{tikzcd} N^n \arrow[r, tail, "< 1_{N^n}, f >"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n x N \arrow[d, "\chi_Q"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N^m \arrow[r, tail, "< 1_{N^m}, g_i >"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^m x N \arrow[d, "\chi_{P_i} ;\ 1 \leq i \leq m"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

En Set, un Predicado que describe a la gráfica de la composición es:
$(\exists z_1, \ldots, z_n)\ (Q(z_1, \ldots, z_n, y) \wedge P_1(x_1, \ldots, x_m, z_1) \wedge \ldots \wedge P_n(x_1, \ldots, x_m, z_n))$

Se verá que este Predicado también resuelve $R'_{\underline{c}}.5$. Para esto, considérese el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
N^m \arrow[r, tail, "{<1_{N^m},\, g_1,\, \dots,\, g_n,\, f<g_1,\, \dots,\, g_n>>}"] \arrow[d] & N^m x \overbrace{N x \dots x N x N}^{\text{"n-veces"}} \arrow[d, "{\begin{array}{l} <\chi_{P_1}<P_1,\, P_2>,\, \dots, \\ \chi_{P_n}<P_1,\, P_{n+1}>, \\ \chi_Q<<P_2\, \dots,\, P_{n+1}>, \\ P_{n+2}>> \end{array}}"] \\
1 \arrow[r, "{<v,\, \dots,\, v>}"] & \Omega^n
\end{tikzcd}
$$

donde $P_1 : N^m xN \dots xNxN \longrightarrow N^m$, $\dots$, $P_{n+2} : N^m xNx \dots . xNxN \longrightarrow N$ denotan a las proyecciones.

Si se componen los morfismos que aparecen en la parte superior del diagrama se obtiene: $<\chi_{P_1}<1_{N^m}, g_1>, \dots, \chi_{P_n}<1_{N^m}, g_n>, \chi_Q<<g_1, \dots, g_n>,$ $f<g_1, \dots, g_n>>>$ que claramente es igual a $<v_{N^m}, \dots, v_{N^m}>$. Un cálculo sencillo demuestra que este último diagrama es un producto fibrado.

Como la intersección de subobjetos es asociativa entonces también es inmediato que el subobjeto $N^m \xrightarrow{<1_{N^m},\, g_1,\, \dots,\, g_n,\, f<g_1,\, \dots,\, g_n>>} N^m xNx \dots xNxN$ corresponde al predicado $Q(x_1, \dots, x_n, y) \wedge P_1(y_1, \dots, y_m, x_1) \wedge \dots \wedge P_n$ $(y_1, \dots, y_m, x_n)$. Sólo es necesario hacer notar que el cuadrado

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{<v,\, \dots,\, v>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & \Omega^n \arrow[d, "\wedge^n"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado. Recuérdese que la intersección es asociativa.

Ahora bien, $(\exists z_i)\ (Q(z_1, \ldots, z_n, y) \wedge P_1(x_1, \ldots, x_m, z_1) \wedge \ldots . \wedge P_n(x_1, \ldots, x_m, z_n))$ se obtiene al considerar

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
N^m \arrow[rr, tail, "{<1_{N^m}, g_1, \ldots, g_m, f<g_1, \ldots, g_n>>}"] \arrow[dr] & & N^m x N \ldots x N x N \arrow[rr, "{<p_1, \ldots, p_i, p_{i+2}, \ldots, p_{n+2}>}"] & & N^m x N \ldots x N \\
& N^m \arrow[urrr, tail, "{<1_{N^m}, g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n, f<g_1, \ldots, g_n>>}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $(\exists z_1, \ldots, z_n)\ (Q(z_1, \ldots, z_n, y) \wedge P_1(x_1, \ldots, x_m, z_1)$

$\wedge \ldots \wedge P_n(x_1, \ldots, x_m, z_n))$ queda descrito por:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
N^m \arrow[rr, tail, "{<1_{N^m}, g_1, \ldots, g_m, f<g_1, \ldots, g_n>>}"] \arrow[dr] & & N^m x N x \ldots x N x N \arrow[rr, "{<p_1, p_{n+2}>}"] & & N^m x N \\
& N^m \arrow[urrr, tail, "{<1_{N^m}, f<g_1, \ldots, g_n>>}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Por 2.42.5, $N^m \xrightarrow{<1_{N^m},\ f\ <g_1, \ldots, g_n>>} N^m x N$ es un U.D-objeto; esto es, $f<g_1, \ldots, g_n>$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$.

Estas cinco propiedades sirven para definir los $\underline{C}_{U.D}$-morfismos.

2.54 Los $\underline{C}_{U.D}$-morfismos

2.54.1 Definición

Sean A, B dos $\underline{C}_{U.D}$-objetos se dice que un $\underline{C}$-morfismo $f: A \longrightarrow B$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo sii existen $f_1, \ldots, f_m: N^n \longrightarrow N$ elementos de $R'_{\underline{c}}$ tales que hacen conmutativos los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "{<f_1, \ldots, f_m>}"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N^m \arrow[dl, "\chi_B"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
$$

$$v_A = \chi_A\, i_A = \chi_B <f_1, \ldots, f_m> i_A$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "{<f_1, \ldots, f_m> i_A}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
& 1 \arrow[r, no head, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$$i_B f = <f_1, \ldots, f_m> i_A$$

Esta es la misma definición que se dió en el capítulo anterior. Se verá en la siguiente observación que $\underline{C}_{U.D}$ es en efecto, una subcategoría de $\underline{C}$.

2.54.2 Proposición

$\underline{C}_{U.D}$ es una subcategoría de $\underline{C}$

Demostración

a).- Hay identidades

Demostración

Sea A un $\underline{C}_{U.D}$-objeto arbitrario entonces existe un producto fibrado de la forma:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Considérense los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "< P_1, \ldots, P_n >"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N^n \arrow[dl, "\chi_A"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "1_A"] \arrow[drr, bend left, "< P_1, \ldots, P_n > i_A"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

donde $P_i \colon N^n \longrightarrow N$ es la i-ésima proyección. En consecuencia, $1_A \colon A \longrightarrow A$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo.

b).- $\underline{C}_{U.D}$ es cerrada bajo la composición de $\underline{C}_{U.D}$-morfismos.

Demostración

Supóngase que se tienen diagramas conmutativos de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "< f_1, \dots, f_m >"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N^m \arrow[dl, "\chi_B"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] & N^m \arrow[rr, "< g_1, \dots, g_r >"] \arrow[dr, "\chi_B"'] & & N^r \arrow[dl, "\chi_C"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "< f_1, \dots, f_m > i_A"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left, "< g_1, \dots, g_r > i_B"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& C \arrow[r, tail, "i_C"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^r \arrow[d, "\chi_C"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Considérese $h_j = g_j < f_1, \dots, f_m > \colon N^n \longrightarrow N$; Por $R'_{\underline{c}}.5$ cada h_j pertenece a $R'_{\underline{c}}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Además, hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "< h_1, \ldots, h_r >"] \arrow[dr, "X_A"'] & & N^r \arrow[dl, "X_C"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

$$X_C < h_1, \ldots, h_r > i_A = X_C < g_1, \ldots, g_r >< f_1, \ldots f_m > i_A =$$

$$= X_C < g_1, \ldots, g_r > i_B f = X_B i_B f = v_B f = v_A.$$

Por último, $i_C(gf) = < g_1, \ldots, g_r > i_B f = < g_1, \ldots, g_r >< f_1, \ldots, f_m > i_A =$ $= < h_1, \ldots, h_r > i_A$; por lo tanto, el $\underline{C}$-morfismo composición $gf: A \longrightarrow C$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo.

Esto demuestra que $\underline{C}_{U.D}$ es una subcategoría de $\underline{C}$. Los últimos resultados se pueden resumir con la siguiente definición.

2.55 Definición

La subcategoría $\underline{C}_{U.D}$ de $\underline{C}$ se llama la <u>categoría ultradiofántica</u> determinada por $\underline{C}$.

Antes de pasar a estudiar las propiedades de $\underline{C}_{U.D}$, se harán algunas observaciones.

2.55.1 Proposición

1 es un $C_{U.D}$-objeto

Demostración

Inmediata ya que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "o"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \arrow[d, "X"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

2.55.2 Proposición

0 es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto

Demostración

Como el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \arrow[d, "s"] \\ 1 \arrow[r, "o"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \arrow[d, "X"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado entonces 0 es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto.

2.55.3 Proposición

N es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto

Demostración

Considérese $0_N \colon N \longrightarrow N$ entonces como $X0_N = X0!_N = v_N$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "1_N"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N \arrow[d] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad X0_N = v_N$$

es un producto fibrado

2.55.4 Proposición

Ω es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto

Demostración

En Set, Ω es el conjunto $\{x \in N \mid x = 0 \ \vee \ x = 1\}$. Se verá primero que la interpretación de los conjuntos $\{x \in N \mid x = o\}$ y $\{x \in N \mid x = 1\}$ son $1 \xrightarrow{\ o\ } N$ y $1 \xrightarrow{\ so\ } N$ respectivamente.

En efecto, por 2.55.1 es claro que la interpretación en $\underline{C}$ de $\{x \in N \mid x = 0\}$ es $1 \xrightarrow{\ o\ } N$. Para el conjunto restante basta considerar las identidades:

$$\oplus < \dot{-} < 1_N, so_N > , \dot{-} < so_N, 1_N >> = \oplus < \rho \ \dot{-} < 1_N, 0_N > , \dot{-} < so_N, 1_N >> =$$

$$= \oplus < \rho, \dot{-} < so_N, 1_N >> .$$

Ahora, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "a"] \arrow[dd, bend right] & & \\
& 1 \arrow[r, "so"] \arrow[d] & N \arrow[d, "\oplus \langle \rho,\ \dot{-} \langle so_N,\ 1_N \rangle\rangle"] \\
& 1 \arrow[r, "o"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad ; \qquad X_{so} = x \oplus \langle \rho,\ \dot{-} \langle so_N,\ 1_N \rangle\rangle$$

es conmutativo ya que $\oplus \langle \rho so,\ \dot{-} \langle so_N,\ 1_N \rangle so \rangle = \oplus \langle o,\ \dot{-} \langle so,\ so \rangle\rangle =$ $= \oplus \langle o,\ o \rangle = o$. Si $A \xrightarrow{a} N$ es tal que $\oplus \langle \rho a,\ \dot{-} \langle so_A,\ a \rangle\rangle = 0_A$ entonces $\rho a = 0_A$ y $\dot{-} \langle so_A,\ a \rangle = 0_A$; en consecuencia, por 2.39.1 $a = \oplus \langle so_A,\ \dot{-} \langle a,\ so_A \rangle\rangle = \oplus \langle so_A,\ \rho\ \dot{-} \langle a,\ o_A \rangle\rangle = \oplus \langle so_A,\ \rho a \rangle = \oplus \langle so_A,\ o_A \rangle =$ $= so_A$. Por lo tanto el cuadrado es un producto fibrado.

Por último considérese el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "a"] \arrow[dd, bend right] & & \\
& \Omega \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d] & N \arrow[d, "v \langle x,\ x \oplus \langle \rho,\ \dot{-} \langle so_N,\ 1_N \rangle\rangle\rangle"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

donde $j\colon \Omega \rightarrowtail N$ es el morfismo definido en 2.34. Usando la propiedad universal del coproducto es fácil ver que $v \langle x,\ x \oplus \langle \rho,\ \dot{-} \langle so_N,\ 1_N \rangle\rangle\rangle j$ es igual a v_Ω. Supóngase ahora que $a\colon A \longrightarrow N$ es un $\underline{C}$-morfismo tal que $v \langle xa,\ x \oplus \langle \rho a,\ \dot{-} \langle so_A,\ a \rangle\rangle\rangle = v_A$ entonces si $B \overset{b}{\rightarrowtail} A$, $C \overset{c}{\rightarrowtail} A$ son los subobjetos clasificados por $X_{so}a$ y $X_o a$.

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "b"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & A \arrow[d, tail, "a"] \\
1 \arrow[r, "so"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \arrow[d, "X \oplus <\rho,\, \dot{-} <so_N,\, 1_N>>"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "c"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & A \arrow[d, tail, "a"] \\
1 \arrow[r, "o"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N \arrow[d, "X"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

entonces por hipótesis BvC = A. Además, como el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & 1 \arrow[d, "0"] \\
1 \arrow[r, "o"'] & N \arrow[r, "s"'] & N
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado entonces $\wedge <xa,\, x \oplus <\rho a,\, \dot{-} <so_A,\, a>>> = falso_N a =$ $= falso_A$. Es decir, B y C son subobjetos ajenos cuyo supremo es A. La idea es probar que los morfismos jX_B y a son iguales. Para esto, supóngase que $E \xrightarrow{e} A$ es el igualador de tales morfismos. Por lo anterior, basta probar que B y C son subobjetos de E. Los diagramas

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "b"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & A \arrow[d, "\chi_B"] & \\
1 \arrow[r, "v"'] \arrow[rr, bend right, "so"'] & \Omega \arrow[r, tail, "j"'] & N
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "c"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & A \arrow[d, "\chi_B"] & \\
1 \arrow[r, "falso"'] \arrow[rr, bend right, "o"'] & \Omega \arrow[r, tail, "j"'] & N
\end{tikzcd}$$

son tales que:

$$j\chi_B b = so_B \quad y \quad j\chi_B c = j\ falso_C = o_C$$

Como $ab = so_B$ y $ac = o_C$ por construcción se tiene entonces que b y c igualan a $j\chi_B$ y a; i.e., B, C son subobjetos de E. En consecuencia, $j\chi_B = a$ y la observación está demostrada.

Estos últimos resultados ayudarán a estudiar qué propiedades tiene la subcategoría $\underline{C}_{U.D}$. De esto se ocupará la última parte de este capítulo.

2.6 Propiedades de $\underline{C}_{U.D}$.

2.61 Proposición

$\underline{C}_{U.D}$ tiene objeto terminal

Demostración

Por 2.55.1, 1 es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto. Basta probar que el $\underline{C}$-morfismo $!_A : A \longrightarrow 1$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo si A es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto. Supóngase que A es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto arbitrario, entonces existe un producto fibrado de la forma

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^n \arrow[d, "X_A"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Considérese el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[r, "0_{N^n}"] \arrow[dr, "X_A"'] & N \arrow[d, "X"] \\
& & \Omega
\end{tikzcd}
$$

entonces claramente $XO_{N^n}i_A = XO_A = v_A$; Por lo tanto el diagrama exterior del producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "0_{N^n}i_A = 0_A", "o"'] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& 1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N \arrow[d, "X"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo. Por lo tanto $!_A: A \longrightarrow 1$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo

2.62 Proposición

$\underline{C}_{U.D}$ tiene objeto inicial estricto.

Demostración

Por 2.55.2 $0 \rightarrowtail N$ es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto. Sea A un $\underline{C}_{U.D}$-objeto y considérese el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail] & N \arrow[rr, "<1_N, \ldots, 1_N>"] \arrow[dr, "Xs"'] & & N^n \arrow[dl, "X_A"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, i_A; $0 \rightarrowtail A$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo ya que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, dashed, "i_A"] \arrow[drr, bend left, "<1_N, \ldots, 1_N> i_N = i_{N^n}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[u, phantom, "i_A" near end] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "X_A"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Claramente 0 es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto inicial estricto.

2.63 Proposición

$\underline{C}_{U.D}$ tiene productos finitos

Demostración

Sean A, B dos $\underline{C}_{U.D}$-objetos arbitrarios entonces se tienen productos fibrados de la forma

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Sea AxB el $\underline{C}$-producto de A y B. se demostrará primero que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
A\times B \arrow[r, tail, "{< P_1^n i_A P_A,\ \dots,\ P_n^n i_A P_A,\ P_1^m i_B P_B,\ \dots,\ P_m^m i_B P_B >}"] \arrow[d] & N^{n+m} \arrow[d, "{< \chi_A < P_1^{n+m}, \dots, P_n^{n+m} >,\ \chi_B < P_{n+1}^{n+m}, \dots, P_{n+m}^{n+m} >>}"] \\
1 \arrow[r, "{< v, v >}"'] & \Omega\times\Omega
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado.

En efecto, es claro que el diagrama es conmutativo. Si $f = \langle f_1, \ldots, f_{n+m} \rangle :$ $C \longrightarrow N^{n+m}$ es tal que $\langle \chi_A \langle f_1, \ldots, f_n \rangle, \chi_B \langle f_{n+1}, \ldots, f_{n+m} \rangle \rangle =$ $= \langle v_C, v_C \rangle$ entonces existen $\underline{C}$-morfismos $g: C \longrightarrow A$ y $h: C \longrightarrow B$ tales que $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = i_A g$ y $\langle f_{n+1}, \ldots, f_{n+m} \rangle = i_B h$. Entonces el morfismo $\langle g, h \rangle : C \longrightarrow AxB$ es tal que $\langle P_1^n i_A P_A, \ldots, P_n^n i_A P_A, P_1^m i_B P_B, \ldots,$ $P_m^m i_B P_B \rangle \langle g, h \rangle$ es igual a f. Por lo tanto, AxB es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto.

Sea $i_{AxB} = \langle P_1^n i_A P_A, \ldots, P_n^n i_A P_A, P_1^m i_B P_B, \ldots, P_m^m i_B P_B \rangle$. Considérese $P_A: AxB \longrightarrow A$ entonces como el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
AxB \arrow[r, tail, "i_{AxB}"] & N^{n+m} \arrow[rr, "{\langle P_1^{n+m}, \ldots, P_n^{n+m} \rangle}"] \arrow[dr, "\chi_{AxB}"'] & & N^n \arrow[dl, "\chi_A"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo y además $\langle P_1^{n+m}, \ldots, P_n^{n+m} \rangle \; i_{AxB} = i_A P_A$ entonces P_A es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo. Análogamente, $P_B: AxB \longrightarrow B$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo.

Supóngase ahora que $C \xrightarrow{a} A$, $C \xrightarrow{b} B$ son $\underline{C}_{U.D}$-morfismos; existen morfismos $\bar{a}: N^r \longrightarrow N^n$, $\bar{b}: N^r \longrightarrow N^m$ tales que hacen conmutativos los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "i_C"] & N^r \arrow[r, "\bar{a}"] \arrow[dr, "\chi_C"'] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\
& & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "a"] \arrow[drr, bend left, "\bar{a} i_C"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "i_C"] & N^r \arrow[r, "\bar{b}"] \arrow[dr, "\chi_C"'] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
& & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "b"] \arrow[drr, bend left, "\bar{b} i_C"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Sea $\bar{c} = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m \rangle : N^r \longrightarrow N^{n+m}$ entonces es claro que $\chi_{AxB}\ \bar{c}i_c = v_c$. Por último el $\underline{C}$-morfismo $\langle a, b \rangle : C \longrightarrow AxB$ es tal que $i_{AxB}\ \langle a, b \rangle = \bar{c}i_c$. Por lo tanto, $\langle a, b \rangle : C \longrightarrow AxB$ es un $\underline{C}_{U.D}$- morfismo. Claramente, $P_A \langle a, b \rangle = a$ y $P_B \langle a, b \rangle = b$. La unicidad es inmediata.

Hay algunas consecuencias inmediatas de 2.63

2.63.1 Proposición

N^n es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto y todo morfismo $f: N^n \longrightarrow N$ que pertenece a $R'_{\underline{C}}$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo.

Demostración

Por 2.63 es claro que N^n es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto. Sea $f: N^n \longrightarrow N$ un morfismo que pertenece a $R'_{\underline{C}}$, como el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N^n \arrow[r, "\langle P^n_1, \dots, P^n_n \rangle"] & N^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "v_{N^n}"'] & N \arrow[d, "v_N"] \\
& & \Omega
\end{tikzcd}$$

es conmutativo entonces f es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo; $1_N f = f \langle P^n_1, \dots, P^n_n \rangle$

2.63.2 Proposición

Si A es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto entonces el morfismo $i_A: A \rightarrowtail N^n$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo

Demostración

Basta considerar

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "< p_1^n, \ldots, p_n^n >"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N^n \arrow[dl, "v_{N^n}"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "i_A"] \arrow[drr, bend left, "< p_1^n, \ldots, p_n^n > i_A = i_A"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& N^n \arrow[r, tail, "< p_1^n, \ldots, p_n^n >"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "v_{N^n}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Para probar que $\underline{C}_{U.D}$ tiene igualadores es necesario hacer notar lo siguiente.

2.63.3 Proposición

Los morfismos $\oplus$ y $\dot{-}$: $N^2 \longrightarrow N$ pertenecen a $R'_{\underline{c}}$.

Demostración

Inmediata porque los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
N^2 \arrow[r, tail, "< 1_{N^2}, \oplus >"] \arrow[d] & N^2 x N \arrow[d] \\
1 \arrow[r, "o"'] & N
\end{tikzcd}
\quad \oplus < \dot{-} < p_2, \oplus p_1 > , \dot{-} < \oplus p_1, p_2 >> ;
\qquad
\begin{tikzcd}
N^2 \arrow[r, tail, "< 1_{N^2}, \dot{-} >"] \arrow[d] & N^2 x N \arrow[d] \\
1 \arrow[r, "o"'] & N
\end{tikzcd}
\quad \oplus < \dot{-} < p_2, \dot{-} p_1 > \dot{-} < \dot{-} p_1, p_2 >>$$

son productos fibrados.

2.64 Proposición

$\underline{C}_{U.D}$ tiene igualadores.

Demostración

1).- Se demostrará primero: si f, g: $N^n \longrightarrow N$ son dos elementos arbitrarios de $R'_{\underline{C}}$ entonces su $\underline{C}$-igualador es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto.

En efecto, sean f, g: $N^n \longrightarrow N$ dos elementos arbitrarios de $R'_{\underline{C}}$ y defínase $k = \oplus < \dot{-} < f, g >, \dot{-} < g, f >> : N^n \longrightarrow N$; Por $R'_{\underline{C}}.5$, k pertenece a $R'_{\underline{C}}$, es decir, $< 1, k > : N^n \longrightarrow N^n xN$ es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto. Considérense los productos fibrados:

$$\begin{tikzcd} N^n \arrow[r, tail, "< 1, k >"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n xN \arrow[d, "\chi_{< 1, k >}"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_k \arrow[r, tail, "i_{A_k}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n xN \arrow[d, "\wedge < \chi_{< 1, k >}, \chi P_2 >"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

por $R'_{\underline{C}}.4$, el morfismo característico de $< 1_{N^n}, o_{N^n} > : N^n \longrightarrow N^n xN$ es χP_2, donde P_2: $N^n xN \longrightarrow N$ es la proyección.

Por construcción, A_k es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto. En Set, A_k corresponde a los ceros de k.

Por último, considérese el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_k \arrow[r, tail, "i_{A_k}"] \arrow[dr, "d_k"'] & N^n x N \arrow[r, "P_1"] & N^n \\
& \exists_{P_1}(A_k) \arrow[ur, tail, "e_k"'] &
\end{tikzcd}$$

si $P_{<1,k>}$ es el predicado que define a $<1_{N^n}, k>: N^n \longrightarrow N^n x N$ entonces en Set $\exists_{P_1}(A_k)$ es el conjunto $\{(x_1, \ldots, x_n) \varepsilon N^n | (\exists y)$ $(P(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge y = o)\}$. Ahora bien, se probará que $\exists_{P_1}(A_k) \overset{e_k}{\rightarrowtail} N^n$ es el igualador de f y g. Claramente, $\exists_{P_1}(A_k)$ es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto.

a).- $fe_k = ge_k$

Por 2.39.2, (a) es equivalente a probar que $ke_K = 0_{\exists_{P_1}(A_k)}$. Como d_k es un epimorfismo, $ke_K = 0_{\exists_{P_1}(A_k)}$ sii $kP_1 i_{A_k} = 0_{A_k}$; Al ser A_k un subobjeto de $N^n \overset{<1,\, k>}{\rightarrowtail} N^n x N$, $kP_1 i_{A_k}$ es igual a $P_2 i_{A_k}$. Como $xP_2 i_{A_k} = \underline{x}_{A_k}$ entonces $P_2 i_{A_k} = 0_{A_k}$.

b).- Si $C \xrightarrow{c} N^n$ es un $\underline{C}$-morfismo tal que f c = g c entonces por 2.39.2, $kc = 0_c$; en consecuencia, el diagrama exterior del producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "\bar{c}"] \arrow[drr, bend left, "<c,\, kc>"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A_k \arrow[r, tail, "i_{A_k}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n x N \arrow[d, "\wedge <\chi_{<1,\, k>},\, \chi P_2>"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por lo tanto, existe un único $\underline{C}$-morfismo $\bar{c}: C \longrightarrow A_k$ tal que $i_{A_k}\bar{c} = <c,\ k\,c>$; en particular, $P_1 i_{A_k}\bar{c} = c$, pero $P_1 i_{A_k} = e_k d_k$; es decir, $c = e_k\ (d_k\bar{c})$. Como e_k es un $\underline{C}$-monomorfismo, $d_k\bar{c}: C \longrightarrow \exists_{P_1}(A_k)$ es único con esta propiedad.

Esto demuestra que $\exists_{P_1}(A_k) \overset{e_k}{\rightarrowtail} N^n$ es el $\underline{C}$-igualador de f y g. Para comprobar que $\exists_{P_1}(A_k)$ es un $\underline{C}_{U.D}$- igualador sólo es necesario verificar que si $C \xrightarrow{c} N^n$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo tal que $fc = gc$ entonces el $\underline{C}$-morfismo $\bar{c}$: $C \longrightarrow \exists_{P_1}(A_k)$ que factoriza a c, es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo:

Supóngase que $c: C \longrightarrow N^n$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo tal que $fc = gc$. Se tienen diagramas conmutativos de la forma:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "i_c"] & N^r \arrow[rr, "<c'_1,\, \dots,\, c'_r> = h"] \arrow[dr, "\chi_C"'] & & N^n \arrow[dl, "v_{N^n}"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "c"] \arrow[drr, bend left, "hi_c"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& N^n \arrow[r, tail, "<p^n_1,\, \dots,\, p^n_n>"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "v_{N^n}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

como fc = gc entonces kc = o_c; por lo tanto, $khi_c = 0_c$; existe un único $\underline{C}$-morfismo $\bar{c}$: $C \longrightarrow \exists_{P_1}(A_k)$ tal que $e_k\bar{c} = hi_c$. Claramente, $\bar{c}$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo porque hace conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "i_c"] & N^r \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "X_C"'] & N^n \arrow[d, "v_{N^n}"] \\
& & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "\bar{c}"] \arrow[drr, bend left, "hi_c"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \exists_{P_1}(A_k) \arrow[r, tail, "e_k"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "X_{\exists_{P_1}(A_k)}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, $\exists_{P_1}(A_k) \overset{e_k}{\rightarrowtail} N^n$ es el $\underline{C}_{U.D}$-igualador de f y g

2).- Se demostrará ahora:

Si $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ son $\underline{C}_{U.D}$-morfismos entonces el $\underline{C}$-igualador de f y g es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto y además es un $\underline{C}_{U.D}$-igualador.

Considérese la siguiente situación

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "X_A"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^m \arrow[d, "X_B"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, shift left, "\bar{f} = < f_1, \ldots, f_m >"] \arrow[rr, shift right, "\bar{g} = < g_1, \ldots, g_m >"'] \arrow[dr, "X_A"'] & & N^m \arrow[dl, "X_B"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

$\bar{f}i_A = i_Bf$, $\bar{g}i_A = i_Bg$.

Por (1), se sabe que $\exists_{P_1}(A_{k_i}) \overset{e_{k_i}}{\rightarrowtail} N^n$ es el $\underline{C}$-igualador de f_i, g_i para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Además, $\exists_{P_1}(A_{k_i})$ es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Considérese el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
E = \bigwedge_{i=1}^{m} \exists_{P_1}(A_{k_i}) \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d] & N^n \arrow[d, "< \chi_{\exists_{P_1}(A_{k_1})}, \ldots, \chi_{\exists_{P_1}(A_{k_m})} >"] \\
1 \arrow[r, "< v, \ldots, v >"'] \arrow[d] & \Omega^m \arrow[d, "\wedge^m"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Entonces es claro que E es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto. Se verá que E es el igualador para $\bar{f}$ y $\bar{g}$: $N^n \longrightarrow N^m$.

En efecto, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe $\bar{e}_i$ $E \rightarrowtail \exists_{P_1}(A_{k_i})$ tal que $e_{k_i}\bar{e}_i = e$. Claramente $\bar{e}_i$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo, puesto que hace conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, "e"] & N^n \arrow[rr, "<p_1^n, \dots, p_n^n>"] \arrow[dr, "\chi_E"'] & & N^n \arrow[dl, "\chi_{\exists_{p_i}(A_{k_i})}"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dashed, "\bar{e}_i"] \arrow[drr, bend left, "e"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \exists_{p_1}(A_{k_i}) \arrow[r, tail, "e_{k_i}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_{\exists_{p_1}(A_{k_i})}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Por consiguiente, $\bar{f}\, e = <f_1, \dots, f_m> e = <f_1 e, \dots, f_m e> =$

$= <f_1 e_{k_1} \bar{e}_1, \dots, f_m e_{k_m} \bar{e}_m> = <g_1 e_{k_1} \bar{e}_1, \dots, g_m \bar{e}_{k_m} \bar{e}_m> = <g_1 e, \dots, g_m e> =$

$= <g_1, \dots, g_m> e = \bar{g} e.$

Supóngase ahora que se tiene un $\underline{C}$-morfismo $D \xrightarrow{d} N^n$ tal que $\bar{f}d = \bar{g}d.$; entonces para cada $i \varepsilon \{1, \dots, m\}$, $f_i d = g_i d$. Por (1), existe un único morfismo $d_i \colon D \longrightarrow \exists_{p_1}(A_{k_i})$ tal que $e_{k_i} d_i = d$, para $i \varepsilon \{1, \dots, m\}$. Estos $\underline{C}$-morfismos d_i, inducen un morfismo $\bar{d} \colon D \longrightarrow E$ tal que $e\bar{d} = d$.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dashed, "\bar{d}"] \arrow[drr, bend left, "d"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& E \arrow[r, tail, "e"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "<\chi_{\exists_{p_1}(A_{k_1})}, \dots, \chi_{\exists_{p_1}(A_{k_m})}>"] \\
& 1 \arrow[r, "<v, \dots, v>"'] & \Omega^m
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto (E, e) es el $\underline{C}$-igualador de $\bar{f}$ y $\bar{g}$.

Sea E_A la intersección de E y A, entonces E_A es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto; existen $\underline{C}_{U.D}$-morfismos $E_A \xrightarrow{e'} E$, $E_A \xrightarrow{e_A} A$ tales que $e\, e' = i_{E_A}$, $i_A e_A = i_{E_A}$, al ser el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_A \arrow[r, tail, "i_{E_A}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \bar{N}^n \arrow[d, "<\chi_E,\ \chi_A>"] \\
1 \arrow[r, "<v,\ v>"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \Omega \times \Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

un producto fibrado.

Se comprobará que (E_A, e_A) es el $\underline{C}_{U.D.}$-igualador de f y g.

Primero, $fe_A = ge_A$ ya que $i_B f e_A = \bar{f} i_A e_A = \bar{f} i_{E_A} = \bar{f} e e' = \bar{g} e e' = \bar{g} i_{E_A} = \bar{g} i_A e_A =$ $= i_B g e_A$. Como i_B es un $\underline{C}$-monomorfismo, $fe_A = ge_A$.

Si $C \xrightarrow{c} A$ es un $\underline{C}_{U.D.}$-morfismo tal que $fc = gc$ entonces se tienen diagramas conmutativos de la forma

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "i_c"] & N^r \arrow[rr, "\bar{c} = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle"] \arrow[dr, "\chi_C"'] & & N^n \arrow[dl, "\chi_A"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "c"] \arrow[drr, bend left, "\bar{c} i_c"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Como $i_B f = \bar{f}\, i_A$ entonces, $\bar{f}\,(\bar{c}\, i_c) = \bar{g}\,(\bar{c}\, i_c)$; en consecuencia, existe un único $\underline{C}$-morfismo c': $C \longrightarrow E$ tal que $ec' = \bar{c}\, i_c$. Claramente, c' es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo ya que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, tail, "i_c"] & N^r \arrow[rr, "\bar{c}"] \arrow[dr, "\chi_C"'] & & N^n \arrow[dl, "\chi_E"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\chi_E \bar{c} i_c = \chi_E e c' = v_E c' = v_c .
$$

es conmutativo.

Ahora bien, c': $C \longrightarrow E$ y c: $C \longrightarrow A$ inducen un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo d: $C \longrightarrow E_A$ tal que hace conmutar, el diagrama exterior del producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "d"] \arrow[drr, bend left, "\bar{c} i_c"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& E_A \arrow[r, tail, "i_{E_A}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^n \arrow[d, "\wedge \langle \chi_E, \chi_A \rangle"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$\therefore\ i_{E_A}d = \bar{c}i_C$. Por último, como $i_{E_A} = i_A e_A$ entonces $i_A e_A d = \bar{c}i_C = i_A c$; como i_A es un $\underline{C}$-monomorfismo, $e_A d = c$. Además, d es único con esta propiedad ya que e_A es un $\underline{C}$-monomorfismo. Por lo tanto, (E_A, e_A) es el $\underline{C}_{U.D}$-igualador de f y g; esto prueba 2.64.

Una observación más: Un argumento análogo al que se hizo en (2), demuestra que (E_A, e_A) también es el $\underline{C}$-igualador de f y g. Se pueden resumir los resultados anteriores con la siguiente afirmación.

2.65 Proposición

$\underline{C}_{U.D}$ tiene límites finitos.

Como se vió en 2.64, los $\underline{C}_{U.D}$-igualadores también son $\underline{C}$-igualadores; este resultado motiva la siguiente pregunta: ¿Todo $\underline{C}_{U.D}$-monomorfismo es un $\underline{C}$-monomorfismo?. El siguiente resultado aclara esta inquietud.

2.66 Proposición

Todo $\underline{C}_{U.D}$- monomorfismo es un $\underline{C}$-monomorfismo

Demostración

Sea F: $\underline{C}_{U.D} \longrightarrow \underline{C}$ el funtor inclusión. Por 2.63 y 2.64, F preserva productos e igualadores; en consecuencia, F preserva productos fibrados. En particular, F preserva monomorfismos; i.e, todo $\underline{C}_{U.D}$-monomorfismo es un $\underline{C}$-monomorfismo.

Es evidente la importancia de 2.66; permite preguntarse si Ω es un clasificador de subobjetos en $\underline{C}_{U.D}$. Se demostrará que la respuesta es afirmativa. Antes de poder probar esto último, se necesitan estudiar algunas propiedades más de $\underline{C}_{U.D}$.

2.7 La imagen de un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo

2.71 Proposición

Si $f: A \longrightarrow B$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo entonces la imagen de f en $\underline{C}$, Imf es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto.

Demostración

Sea $f: A \longrightarrow B$ un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo arbitrario entonces se tiene la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "\bar{f} = < f_1, \ldots, f_m >"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N^m \arrow[dl, "\chi_B"] \\ & & \Omega & \end{tikzcd}$$

$$\bar{f} i_A = i_B f$$

Como cada $f_i: N^n \longrightarrow N$, pertenece a $R_{\underline{c}}'$ entonces $< 1, f_i > : N^n \longrightarrow N^n x N$ es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto; en particular existe un producto fibrado de la forma

$$\begin{tikzcd} N^n \arrow[r, tail, "< 1_{N^n}, f_i >"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n x N \arrow[d, "\chi_{< 1_{N^n}, f_i >}"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

para $i \in \{1, \ldots, m\}$

Considérese el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "{<P_1^n i_A,\ \dots,\ P_n^n i_A,\ f_1 i_A,\ \dots,\ f_m i_A>}"] \arrow[d] & N^{n+m} \arrow[d, "{<X_1,\ \dots,\ X_m>}"] \\
1 \arrow[r, "{<v,\ \dots,\ v>}"'] & \Omega^m
\end{tikzcd}$$

donde $X_i = \wedge < X_A < P_1^{n+m}, \dots, P_n^{n+m} >, X_{<1,\, f_i>} << P_1^{n+m}, \dots, P_n^{n+m} >, P_{n+i}^{n+m} >>,$

para $i \varepsilon \{1, \dots, m\}$

entonces se afirma que es un producto fibrado.

En efecto, el diagrama es conmutativo ya que para cada $i \varepsilon \{1, \dots, m\}$, se tiene

$X_i < P_1^n i_A, \dots, P_n^n i_A, f_1 i_A, \dots, f_m i_A > = \wedge < X_A < P_1^n i_A, \dots, P_n^n i_A >,$

$X_{<1,\, f_i>} << P_1^n i_A, \dots, P_n^n i_A >, f_i i_A >> = \wedge < X_A i_A, X_{<1,\, f_i>} < 1_{N^n}, f_i > i_A >$

$= \wedge < v_A, v_A > = v_A.$

Si $C \xrightarrow{<c_1,\ \dots,\ c_{n+m}> = c} N^{n+m}$ es tal que $X_i c = v_C$ para toda $i \varepsilon \{1, \dots, m\}$

entonces $X_A < c_1, \dots, c_n > = v_C$ y $X_{<1,\, f_i>} << c_1, \dots, c_n >, c_{n+i} > = v_C$ para

$i \varepsilon \{1, \dots, m\}$. Por lo tanto existen morfismos $\bar{c}: C \longrightarrow A$ y $\bar{d}: C \longrightarrow N^n$
que hacen conmutativos los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "\bar{c}"] \arrow[drr, bend left, "<c_1, \ldots, c_n>"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dashed, "\bar{d}"] \arrow[drr, bend left, "<<c_1, \ldots, c_n>, c_{n+i}>"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& N^n \arrow[r, tail, "<1, f_i>"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F}"] & N^n x N \arrow[d, "\chi_{<1, f_i>}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad i \varepsilon \{1, \ldots, m\}
$$

es decir, $i_A\bar{c} = <c_1, \ldots, c_n>$ y $f_i <c_1, \ldots, c_n> = c_{n+i}$ para $i\varepsilon\{1, \ldots, m\}$;
Un cálculo sencillo demuestra que $<P^n_1 i_A, \ldots, P^n_n i_A, f_1 i_A, \ldots, f_m i_A>\bar{c} =$

$= <c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{n+m}> = c.$

En Set esta construcción corresponde a tomar el siguiente conjunto:

$\{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \varepsilon N^{n+m} | P_A(x_1, \ldots, x_n) \wedge P_{<1, f_1>}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \wedge \ldots \wedge P_{<1, f_m>}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+m})\}.$

Es claro que en Set la imagen queda descrita por el siguiente conjunto.

$\{(y_1, \ldots, y_m) \varepsilon N^m | (\exists x_1, \ldots, x_n) (P_A(x_1, \ldots, x_n) \wedge P_{<1, f_1>}(x_1, \ldots, x_n, y_1) \wedge \ldots \wedge P_{<1, f_m>}(x_1, \ldots, x_n, y_m))\}$

En $\underline{C}$ esto equivale a tomar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
A \arrow[rr, "{<p^n_1 i_A,\ \dots,\ p^n_n i_A,\ f_1\, i_A,\ \dots,\ f_m i_A>}"] \arrow[dr, two heads, "e_{ImA}"'] & & N^{n+m} \arrow[rr, "{<p^{n+m}_{n+1},\ \dots,\ p^{n+m}_{n+m}>}"] & & N^m \\
& ImA \arrow[urrr, tail, "i_{ImA}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

Claramente, la parte superior del diagrama anterior es igual a:

$< f_1 i_A, \dots, f_m i_A > \; = \; < f_1, \dots, f_m > i_A = \bar{f} i_A = i_B f$. Además, por construcción ImA es un $\underline{C}_{U.D.}$-objeto; $e_{ImA}: A \twoheadrightarrow ImA$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo ya que hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "e_{ImA}"] \arrow[drr, bend left, "\bar{f} i_A"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& ImA \arrow[r, tail, "i_{ImA}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^m \arrow[d, "X_{ImA}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Por último, como $i_{ImA} e_{ImA} = i_B f$ y e_{ImA} es un $\underline{C}$-epimorfismo entonces $X_B i_{ImA} = v_{ImA}$.

Por lo tanto, existe un único $\underline{C}$-morfismo m_A; $ImA \rightarrowtail B$ tal que hace conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathrm{ImA} \arrow[r, tail, "i_{\mathrm{ImA}}"] & N^m \arrow[rr, "<p_1^m, \ldots, p_m^m>"] \arrow[dr, "\chi_{\mathrm{ImA}}"'] & & N^m \arrow[dl, "\chi_B"] \\
 & & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{ImA} \arrow[dr, dashed, "m_A"] \arrow[drr, tail, bend left, "i_{\mathrm{ImA}}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
 & B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
 & 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, bend right, "e_{\mathrm{ImA}}"'] & B \arrow[r, tail, "i_B"] & N^m \\
 & \mathrm{ImA} \arrow[u, tail, "m_A"] \arrow[ur, tail, bend right, "i_{\mathrm{ImA}}"'] &
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, m_A: ImA $\rightarrowtail$ B es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo y la afirmación está probada.

2.72 Proposición

El morfismo característico de $\Omega \overset{<j,\, j>}{\rightarrowtail} N\mathrm{x}N$ es $v < \wedge\,(\chi_{so} \times \chi_{so}),\ \wedge\,(\chi_o \times \chi_o) >$

Demostración

Como los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{<so,\ so>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & N\times N \arrow[d, "{<X_{so}P_1,\ X_{so}P_2>}"] \\
1 \arrow[r, "{<v,\ v>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{<o,\ o>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & N\times N \arrow[d, "{<X_{o}P_1,\ X_{o}P_2>}"] \\
1 \arrow[r, "{<v,\ v>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \Omega\times\Omega \arrow[d, "\wedge"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

son productos fibrados entonces $X_{<so,\ so>} = \wedge\,(X_{so} \times X_{so})$ y $X_{<o,\ o>} = \wedge\,(X_o \times X_o)$. Además $X_{so}j = 1_\Omega$ y $X_o j = \neg$ porque los rectángulos

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "v"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
1 \arrow[r, "so"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & N \arrow[d, "X_{so}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "falso"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
1 \arrow[r, "o"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & N \arrow[d, "X_{o}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, tail, "{<j, j>}"] \arrow[d] & N x N \arrow[d, "{v <\chi_{<so,\, so>}, \chi_{<o,\, o>}>}"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Ahora, $1 \xrightarrow{<so,\, so>} NxN$, $1 \xrightarrow{<o,\, o>} NxN$ son subobjetos de $\Omega \rightarrowtail^{<j,\, j>} NxN$, puesto que los triángulos

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "{<so, so>}"] \arrow[dr, dashed, "v"'] & & N x N \\ & \Omega \arrow[ur, tail, "{<j, j>}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "{<o, o>}"] \arrow[dr, dashed, "falso"'] & & N x N \\ & \Omega \arrow[ur, tail, "{<j, j>}"'] & \end{tikzcd}$$

son conmutativos. Supóngase que $A \rightarrowtail^{<a,\, b>} NxN$ es un subobjeto de NxN tal que

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "{<so, so>}"] \arrow[dr, dashed, "y"'] & & N x N \\ & A \arrow[ur, tail, "{<a, b>}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, "{<o, o>}"] \arrow[dr, dashed, "z"'] & & N x N \\ & A \arrow[ur, tail, "{<a, b>}"'] & \end{tikzcd}$$

entonces el triángulo

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rr, tail, "{<j,\, j>}"] \arrow[dr, dashed, swap, "\binom{y}{z}"] & & N \times N \\
& A \arrow[ur, tail, swap, "{<a,\, b>}"] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo puesto que $<a,\, b> \binom{y}{z}\, v = \; <a,\, b>\, y = \; <so,\, so> \; = \; <j,\, j>\, v$ y además $<a,\, b> \binom{y}{z}$ falso $= \; <a,\, b>\, z = \; <o,\, o> \; = \; <j,\, j>$ falso.

Por lo tanto, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, tail, "{<j,\, j>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N \times N \arrow[d, "{v\, <\chi_{<so,\, so>},\, \chi_{<o,\, o>}>}"] \\
1 \arrow[r, swap, "v"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Con este último resultado se puede probar:

2.73 Proposición

Si A es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto entonces el $\underline{C}$-morfismo característico de A, $\chi_A\colon N^n \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo.

Demostración

Sea A un $\underline{C}_{U.D}$-objeto arbitrario y considérense los productos fibrados

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "X_A"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d] & N \arrow[d, "X_j = v < X_o, X_{so} >"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Se demostrará que $jX_A: N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$. Esto es, su gráfica $< 1_{N^n}, jX_A > : N^n \longrightarrow N^n xN$ es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto.

La descripción en Set del morfismo característico de $< 1_{N^n}, jX_A >$ es:

$\{(x, y) \varepsilon N^n xN \mid (P_A(x_1, \ldots, x_n) \wedge y = 1) \vee (\neg P_A(x_1, \ldots, x_n) \wedge y = 0)\}$

En $\underline{C}$ esto equivale a considerar el siguiente $\underline{C}$-morfismo:
$v < \wedge < X_A P_1, X_{so} P_2 > , \wedge < \neg X_A P_1, X_o P_2 >> : N^n xN \longrightarrow \Omega$; donde P_1: $N^n xN \longrightarrow N^n$, P_2: $N^n xN \longrightarrow N$ son las proyecciones.

Ahora bien, por 2.72, $1_\Omega = X_{so} j$ y $\neg = X_o j$; en consecuencia el morfismo anterior puede escribirse como:

$v < \wedge < X_{so} j X_A P_1, X_{so} P_2 > , \wedge < X_o j X_A P_1, X_o P_2 >> = v < \wedge (X_{so} x X_{so}),$
$\wedge (X_o x X_o) > (jX_A x 1_N) = X_{< j, j >} (jX_A x 1_N).$

Basta probar entonces que el cuadrado

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "b"] \arrow[drr, bend left, "{<b, c>}"] \arrow[ddr, bend right, "d"'] & & \\
& N^n \arrow[r, tail, "{<1_{N^n}, jX_A>}"] \arrow[d, "\chi_A"'] & N^n x N \arrow[d, "jX_A x 1_N"] \\
& \Omega \arrow[r, tail, "{<j, j>}"] & NxN
\end{tikzcd}
$$

es un producto fibrado.

En efecto, es claro que el cuadrado es conmutativo. Si $B \xrightarrow{<b,\, c>} N^n xN$ y $d\colon B \longrightarrow \Omega$ son tales que $jd = jX_A b$ y $jd = c$ entonces al ser j un monomorfismo $d = X_A b$ y $jd = c$. Por lo tanto, el cuadrado es un producto fibrado y $jX_A\colon N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{C}}$. En particular, $X_A\colon N^n \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo.

2.74 Proposición

Ω es un clasificador de $\underline{C}_{U.D}$-subobjetos.

Demostración

El $\underline{C}$-morfismo $v\colon 1 \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo ya que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "so"] & N \arrow[r, "1_N"] \arrow[dr, "\chi_{so}"'] & N \arrow[d, "\chi_j"] \\
& & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dashed, "v"] \arrow[drr, bend left, "so"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \Omega \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d] & N \arrow[d, "\chi_j"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

son conmutativos (véase 2.55.4)

Análogamente, falso: $1 \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo.

Por último, todo $\underline{C}_{U.D}$-morfismo $X: A \longrightarrow \Omega$ clasifica a un $\underline{C}_{U.D}$-subobjeto de A ya que $\underline{C}_{U.D}$ tiene productos fibrados y $v: 1 \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo.

Recíprocamente, si $f: A \rightarrowtail B$ es un $\underline{C}_{U.D}$-monomorfismo entonces por 2.66, f es un $\underline{C}$-monomorfismo; en consecuencia $i_B f: A \rightarrowtail N^m$ es un $\underline{C}$-monomorfismo. Además, por 2.71, la $\underline{C}$-imagen de $i_B f$ es:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, tail, "i_B f"] \arrow[dr, "1_A"'] & & N^m \\
& A \arrow[ur, tail, "i_B f"'] &
\end{tikzcd}$$

Por 2.73 el morfismo característico de $i_B f$, $X_{i_B f}: N^m \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo. Al ser el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & B \arrow[d, tail, "i_B"] \\
A \arrow[r, tail, "i_B f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^m \arrow[d, "X_{i_B f}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

un producto fibrado e $i_B: B \rightarrowtail N^m$ un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo, $X_A = X_{i_B f} i_B: B \longrightarrow \Omega$ es un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo.

Por lo tanto, Ω es un clasificador de $\underline{C}_{U.D}$-subobjetos.

Se ha probado entonces el siguiente teorema.

2.8 Teorema ($\underline{C}_{U.D}$)

Si $\underline{C}$ es una categoría que satisface 2.11 y $\underline{C}_{U.D}$ es la categoría ultradiofántica determinada por $\underline{C}$ (2.55) entonces $\underline{C}_{U.D}$ satisface.

$\underline{C}_{U.D}$.1).- $\underline{C}_{U.D}$ tiene límites finitos. Además, el funtor inclusión $F: \underline{C}_{U.D} \longrightarrow \underline{C}$ preserva límites finitos.

$\underline{C}_{U.D}$.2).- $\underline{C}_{U.D}$ tiene un objeto inicial estricto.

$\underline{C}_{U.D}$.3).- $\underline{C}_{U.D}$ tiene clasificador de subobjetos, que es el mismo de $\underline{C}$.

3. EL CASO DE LAS CATEGORIAS CON N "TIPICO".

El teorema 2.8 permite preguntarse si la categoría $\underline{C}_{U.D}$ es isomorfa a U.D. El propósito de este capítulo es dar una respuesta a esta interrogante. El estudio de esto último depende fuertemente de la siguiente definición y sus consecuencias.

3.1 Definición

Sea $\underline{C}$ una categoría que cumple 2.11. Se dice que el $\underline{C}$-objeto de números naturales N, es *típico* [F_r] si para cada pareja f, g de endomorfismos de N tal que $fs^n o = gs^n o$ para todo natural $s^n o: 1 \longrightarrow N$ ($n \in \mathbb{N}$) se tiene que f es igual a g.

Como en [Coste-Roy, M. F. et al.] se puede probar el siguiente resultado

3.12 Proposición

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

T.1).- N es típico

T.2).- El único subobjeto de N que contiene a todos los naturales $1 \xrightarrow{s^n o} N$ ($n \in \mathbb{N}$) es N.

Demostración

T.1 $\Rightarrow$ T.2).- Supóngase que $A \subset N$ contiene a todos los naturales $1 \xrightarrow{s^n o} N$. Sea $X_A: N \longrightarrow \Omega$ el morfismo característico de A y considérense los endomorfismos jX_A y jV_N, donde $j: \Omega \rightarrowtail N$ es el morfismo construido en 2.34. Se tiene entonces que para todo natural $1 \xrightarrow{s^n o} N$, se cumple:

$jX_A s^n o = jv = so$ y $jV_N s^n o = jv = so$.

Por lo tanto, $jX_A = jV_N$, i.e., $X_A = V_N$.

T.2 $\Rightarrow$ T.1).- Recíprocamente, si f, g: $N \longrightarrow N$ son tales que $fs^n o = gs^n o$ para todo natural $1 \xrightarrow{s^n o} N$ y $E \overset{e}{\rightarrowtail} N$ es el igualador de f y g, entonces es claro que E contiene a todos los naturales $1 \xrightarrow{s^n o} N$. Por T.2, E es N y en consecuencia f es igual a g.

De aquí en adelante, se supondrá además que $\underline{C}$ es bivalente, i.e.,: $|\hom_{\underline{C}}(1,\Omega)| = 2$; $\underline{C}$ denotará a una categoría que satisface 2.11 y alguna de las condiciones equivalentes de 3.12. Una consecuencia inmediata de 3.1 es la siguiente proposición.

3.13 Proposición

Si $y: 1 \longrightarrow N$ es un elemento de N entonces existe n en N tal que $y = s^n o$.

Demostración

Supóngase lo contrario y considérese el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "y"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F}"] & N \arrow[d, "X_y"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

entonces, es obvio que $jX_y\, s^n o = j\, \text{falso}_N\, s^n o$, para todo natural $s^n o: 1 \longrightarrow N$;

en consecuencia, $jX_j = j\ \text{falso}_N$; esto es, $X_y = \text{falso}_N$ lo cual es absurdo.

3.13 puede justificar, de algún modo, el nombre que recibe N en 3.1. Como se verá, 3.1 tiene implicaciones muy interesantes. Algunas de estas últimas se demostrarán en lo que sigue:

3.14 Proposición

Si A es un subobjeto de N^n tal que $X_A < s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o > = \text{falso}$ para toda n-ada $< s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o > : 1 \longrightarrow N^n$ entonces X_A es falso.

Demostración

Por inducción sobre n. Si n es cero ó uno la afirmación es inmediata. Supóngase que el resultado es cierto para toda k menor que n. Sea $A \overset{i_A}{\rightarrowtail} N^n$ un subobjeto de N^n que cumple: $X_A < s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o > = \text{falso}$, para toda n-ada $< s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o >$. Basta demostrar que $\exists_X(A) \rightarrowtail N^{n-1}$ es tal que $X_{\exists_X(A)} < s^{a_1}o, \ldots, s^{a_{n-1}}o >$ es falso para toda (n-1)-ada, $< s^{a_1}o, \ldots, s^{a_{n-1}}o >$, donde $\exists_X(A)$ se obtiene por medio del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[drr, "e_{\exists_X(A)}"'] & N^n \arrow[rr, "{< P^n_2, \ldots, P^n_n >}"] & & N^{n-1} \\
& & \exists_X(A) \arrow[ur, tail, "i_{\exists_X(A)}"'] &
\end{tikzcd}$$

En efecto, en caso contrario existiría una (n-1)-ada tal que $\langle s^{a_1}o, \dots, s^{a_{n-1}}o \rangle :$

$1 \longrightarrow N^{n-1}$, pertenece a $\exists_X(A)$. Considérese el producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
B_X \arrow[r, tail, "b"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "e_{E_X(A)}"] \\
1 \arrow[r, tail, "w_X"'] & \exists_X(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, dashed, "w_X"'] \arrow[dr, "{\langle s^{a_1}o, \dots, s^{a_{n-1}}o \rangle}"] & \\
\exists_X(A) \arrow[r, tail, "i_{\exists_X(A)}"'] & N^{n-1}
\end{tikzcd}
$$

B_X no puede ser inicial ya que de serlo, se tendrían los siguientes diagramas conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & A \arrow[d, "e_{\exists_X(A)}"] & \\
1 \arrow[r, "w_X"'] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & \exists_X(A) \arrow[r] \arrow[d, tail, "i_{\exists_X(A)}"] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & 1 \arrow[d, "v"] \\
1 \arrow[r, "{\langle s^{a_1}o, \dots, s^{a_{n-1}}o \rangle}"'] & N^{n-1} \arrow[r, "\chi_{\exists_X(A)}"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\langle p^n_2, \dots, p^n_n \rangle \, i_A = i_{\exists_X(A)} \, e_{\exists_X(A)}
$$

en particular, $\chi_{\langle s^{a_1}o, \dots, s^{a_{n-1}}o \rangle} \langle p^n_2, \dots, p^n_n \rangle \, i_A = \text{falso}_A$; como e $\exists_X(A)$ es un epimorfismo entonces $X_{\langle s^{a_1}o, \ldots, s^{a_{n-1}}o \rangle} i_{\exists_X(A)} = \text{falso}_{\exists_X(A)}$; lo cual no es posible.

Por lo tanto, B_X no es inicial. Ahora, si $E \overset{e}{\rightarrowtail} N$ es el igualador de $v_N : N \longrightarrow \Omega$ y $X_A \langle 1_N, s^{a_1}o_N, \ldots, s^{a_{n-1}}o_N \rangle : N \longrightarrow \Omega$ entonces E es inicial por hipótesis y T.1. Sin embargo, $P_1^n i_A b: B_X \longrightarrow A$ iguala a v_N y $X_A \langle 1_N, s^{a_1}o_N, \ldots, s^{a_{n-1}}o_N \rangle$ ya que:

$$\langle 1_N, s^{a_1}o_N, \ldots, s^{a_{n-1}}o_N \rangle \; P_1^n i_A b = \langle P_1^n i_A b, s^{a_1}o_{B_X}, \ldots, s^{a_{n-1}}o_{B_X} \rangle$$

y además, $\langle P_2^n, \ldots, P_n^n \rangle \; i_A b = i_{\exists_X(A)} \, e_{\exists_X(A)} b = i_{\exists_X(A)} w_X(!_{B_X}) =$

$= \langle s^{a_1}o, \ldots, s^{a_{n-1}}o \rangle \; (!_{B_X}) = \langle s^{a_1}o_{B_X}, \ldots, s^{a_{n-1}}o_{B_X} \rangle$

En consecuencia, $\langle 1_N, s^{a_1}o_N, \ldots, s^{a_{n-1}}o_N \rangle \; p_1^n i_A b = \langle P_1^n i_A b, P_2^n i_A b, \ldots, p_n^n i_A b \rangle =$

$= i_A b \qquad \therefore \; X_A \langle 1_N, s^{a_1}o_N, \ldots, s^{a_{n-1}}o_N \rangle \; P_1^n i_A b = X_A i_A b = v_A b = v_{B_X}$.

De esto último, se puede concluir que $X_{\exists_X(A)} \langle s^{a_1}o, \ldots, s^{a_{n-1}}o \rangle = \text{falso}$ para toda (n-1)-ada $\langle s^{a_1}o, \ldots, s^{a_{n-1}}o \rangle$ y por hipótesis de inducción $\exists_X(A)$ es inicial.

Por 2.11, C.4, A es inicial.

3.15 Proposición

Si $A \rightarrowtail N^n$ es no-inicial entonces A es no-vacío; i.e., A tiene un elemento.

Demostración

Por 3.14, para alguna n-ada $\langle s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o \rangle : 1 \longrightarrow N^n$, $X_A \langle s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o \rangle =$

3.15 tiene una consecuencia interesante.

3.16 Proposición

Si $A \rightarrowtail N$ es un subobjeto de N arbitrario entonces su soporte[1] $A \twoheadrightarrow S$ se escinde

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "!_A"] \arrow[dr, "e_A"'] & & 1 \\ & S \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Demostración

Sea A un subobjeto de N arbitrario, entonces S es 1 ó 0. Si S es 0 entonces A es inicial y la afirmación está probada. Si S es 1, por 3.15 A es no-vacío.

Lo interesante de 3.16 es que de hecho es equivalente a 3.1. Es decir, N es típico sii los soportes de los subobjetos de N se escinden. Esta última afirmación queda contenida en la siguiente proposición.

1 Véase por ejemplo, [J] págs. 140-146

3.17 Proposición

Son equivalentes

T.1).- N es típico

T.2).- El único subobjeto de N que contiene a todos los naturales $1 \xrightarrow{s^n o} N$ ($n \in N$) es N.

T.3).- El único subobjeto de N que contiene a todos los elementos $1 \xrightarrow{y} N$ de N es N.

T.4).- Si $A \rightarrowtail N$ es un subobjeto arbitrario entonces su soporte $A \twoheadrightarrow S$ se escinde.

Demostración

Es obvio que T.2 $\Longrightarrow$ T.3, T.3 $\Longrightarrow$ T.1. Es decir, T.1, T.2 y T.3 son equivalentes. Además, es claro que T.1 implica T.4. Sólo falta demostrar que T.4 implica T.1.

Sea $A \overset{i_A}{\rightarrowtail} N$ un subobjeto arbitrario de N. Si $\neg A \overset{i_{\neg A}}{\rightarrowtail} N$ es el complemento de A y $\neg A \twoheadrightarrow S$ es su soporte entonces por T.4, este último se escinde. Si $\neg A$ es inicial no hay nada que probar. Si $\neg A$ es no-inicial, sea y: $1 \longrightarrow \neg A$ un elemento de $\neg A$. Supóngase ahora que A contiene todos los elementos de N; en consecuencia A contiene a $i_{\neg A}$ y: $1 \longrightarrow N$; esto es, $i_{\neg A}$ y pertenece a A y $\neg A$, lo cual no es posible. Por lo tanto, si A contiene todos los puntos de A entonces A es N.

A partir de 3.17 y por el trabajo desarrollado en los topos bien punteados[1], es

1 Véase [J] pág. 314

razonable preguntarse si no se puede hacer un estudio análogo para la categoría $\underline{C}_{U.D.}$. La siguiente sección se encargará de esta última pregunta.

3.2 $\underline{C}_{U.D.}$ es una categoría bien punteada

Como en el caso de los topos bien punteados. Se puede probar la siguiente proposición.

3.21 Proposición

$\underline{C}_{U.D.}$ es una categoría bien punteada. Es decir, 1 es un generador.

Demostración

Sean $f,g\colon A \longrightarrow B$ dos $\underline{C}_{U.D.}$-morfismos distintos. Considérese $E \overset{e}{\rightarrowtail} A$, el igualador de f y g; entonces es claro que e no puede ser equivalente a la identidad. Si $\neg E \overset{e_{\neg}}{\rightarrowtail} A$ es el complemento de E en A entonces $\neg E$ no puede ser inicial por la observación anterior. En consecuencia, $\neg E$ es no-inicial; por 3.15 existe una n-ada $< s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o >$ tal que $< s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o > : 1 \longrightarrow N^n$ pertenece a $\neg E$. $< s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o >$ se puede escribir como:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dashed, "y"] \arrow[drr, bend left, "{< s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o >}"] \arrow[dd, bend right] & & \\
& \neg E \arrow[r, tail, "i_{\neg E}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & N^n \arrow[d, "\chi_{\neg E}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "o"] & N \arrow[rr, "{< s^{a_1}o_N, \ldots, s^{a_n}o_N >}"] \arrow[dr, "\chi_1"'] & & N^n \arrow[dl, "\chi_{\neg E}"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

Claramente $y: 1 \longrightarrow \neg E$ es un $\underline{C}_{U.D.}$-morfismo. Además, si $z: 1 \longrightarrow A$ se define como $e_{\neg} y: 1 \longrightarrow A$ entonces $fz \neq gz$ ya que en caso contrario el diagrama exterior del cuadrado

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[drr, bend left, "\bar{y}"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
& 0 \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & E \arrow[d, tail, "e"] \\
& \neg E \arrow[r, tail, "e_{\neg}"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, dashed, "\bar{y}"'] \arrow[d, "z"] & \\
E \arrow[r, tail] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

sería conmutativo; lo que no es posible. Por lo tanto $fz \neq gz$.

3.21 tiene una consecuencia importante. Permite describir a los $\underline{C}_{U.D.}$-epimorfismos y a los $\underline{C}_{U.D.}$-monomorfismos como morfismos suprayectivos e inyectivos.

El siguiente resultado aclara esta afirmación.

3.22 Proposición

Sea $f: A \longrightarrow B$ un $\underline{C}_{U.D.}$-morfismo arbitrario. Entonces

a).- f es un $\underline{C}_{U.D.}$-epimorfismo sii f es suprayectivo; i.e., si $y: 1 \longrightarrow B$ es un elemento de B entonces existe X en A tal que $fx = y$.

b).- f es un $\underline{C}_{U.D.}$-monomorfismo sii f es inyectiva; i.e., si $y, z: 1 \longrightarrow A$ son elementos de A tales que $fz = fy$ entonces $z = y$.

Demostración

a).- Supóngase que f es un $\underline{C}_{U.D.}$-epimorfismo. Si y: $1 \longrightarrow B$ es un elemento de B y el cuadrado

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, tail, "c"'] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & 1 \arrow[d, "y"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado, entonces se tiene que C es inicial ó $C \longrightarrow 1$ es una retracción. Si $\underline{C}$ fuese inicial, al ser

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "y"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F"] & B \arrow[d, "X_y"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

un producto fibrado, la composición $X_y y$ es por un lado v y por otro falso, puesto que $X_y f = \text{falso}_A = \text{falso}_B f$; $\therefore$ $X_y = \text{falso}_B$, $\therefore$ $X_y y = \text{falso}$. En consecuencia, existe $\bar{z}$: $1 \longrightarrow C$; Si $z = C\bar{z}$ entonces $fz = fc\bar{z} = y\ (!_C)\ \bar{z} = y$. Por lo tanto f es suprayectiva.

Recíprocamente, si f: $A \longrightarrow B$ es suprayectiva y g, h: $B \longrightarrow C$ son tales que gf = hf entonces si g es distinto de h por 3.21 existe un elemento y de B tal que gy $\neq$ hy. Como f es suprayectiva, existe w: $1 \longrightarrow A$ tal que fw = y; por lo tanto, gy = gfw = hfw = hy.

b).- La demostración es análoga a lo anterior.

Es bien sabido que en una categoría con productos fibrados, el producto fibrado de epimorfismos no necesariamente es un epimorfismo. Para continuar el estudio de $\underline{C}_{U.D.}$, se necesita un resultado cercano a la afirmación anterior.

3.23 Proposición

Sea

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e_B"] \arrow[d, tail, "e_C"'] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & B \arrow[d, tail, "g"] \\
C \arrow[r, two heads, "f"'] & D
\end{tikzcd}
$$

un producto fibrado con $f: C \longrightarrow D$ suprayectivo. Entonces e_B también lo es.

Demostración

Sea $y: 1 \longrightarrow B$ un elemento arbitrario de B, entonces $gy: 1 \longrightarrow B$ es un elemento de D; por hipótesis, existe un elemento $c: 1 \longrightarrow C$ tal que $fc = gy$. Considérese ahora el producto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
B_C \arrow[r, "e_{B_C}"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & A \arrow[r, "e_B"] \arrow[d, tail, "e_C"] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & B \arrow[d, tail, "g"] \\
1 \arrow[r, "c"'] & C \arrow[r, two heads, "f"'] & D
\end{tikzcd}
\qquad fc = gy
$$

entonces al ser el cuadrado

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "y"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & B \arrow[d, tail, "g"] \\ 1 \arrow[r, "gy"'] & D \end{tikzcd}$$

un producto fibrado, se tiene que B_C es 1; en consecuencia, $e_B e_{B_C} = y$. Por lo tanto, e_B es suprayectivo.

Estas afirmaciones permitirán probar que $\underline{C}_{U.D.}$ es isomorfa a la categoría U.D.. Para empezar, se demostrará.

3.24 Proposición

Si $P(x_1, \ldots, x_n)$ es un predicado ultradiofántico y $X_{P(x_1, \ldots, x_n)}$ es el morfismo asociado a $P(x_1, \ldots, x_n)$ por 2.42.1 entonces

$$X_{P(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)} = X_{P(x_1, \ldots, x_n)}$$

$$< p_1^{n-1}, \ldots, p_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, p_i^{n-1}, \ldots, p_{n-1}^{n-1} >$$

Demostración

Se hará inducción sobre el número de conectivos lógicos que aparecen en $P(x_1, \ldots, x_n$

Si el predicado tiene cero conectivos entonces es de la forma $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Por 2.421, $X_{P(x_1, \ldots, x_n)} = x \oplus < \dot{-} < P_{g(x_1, \ldots, x_n)}, P_{h(x_1, \ldots, x_n)} >,$
$\dot{-} < P_{h(x_1, \ldots, x_n)}, P_{g(x_1, \ldots, x_n)} > >$

Ahora $P_{g(x_1, \ldots, x_n)} < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_i^{n-1} \ldots, P_{n-1}^{n-1} >$
$= P_{g(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)}$ por 2.41.6; en consecuencia,
$X_{P(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)} = X_{P(x_1, \ldots, x_n)}$
$< P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-1}^{n-1} >$

Supóngase que P es un predicado en n-variables donde aparece al menos un conectivo; entonces P es de la forma:

$$\neg Q, \; P_1 \wedge P_2, \; (\exists x_j)\,(Q)$$

Si P es $\neg Q$ entonces como $X_P = X_{\neg Q} = \neg X_Q$ se tiene que:

$X_P < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_i^{n-1}, P_{n-1}^{n-1} > = \neg X_Q < P_1^{n-1}, \ldots, P_{i-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}},$
$P_i^{n-1}, \ldots, P_{n-1}^{n-1} > = \neg X_{Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)}$
$= X_{\neg Q(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)} = X_{P(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)}$.

Si P es de la forma $P_1 \wedge P_2$ entonces $X_P = X_{P_1 \wedge P_2} = \wedge < X_{P_1}, X_{P_2} >$ y la demostración es análoga a la anterior.

Por último, supóngase que P es $(\exists x_j)(Q)$ entonces se tiene lo siguiente
$(\exists x_j)\,(Q(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}))$

1).- La variable que se va a sustituir por $s^a o$ es $j - r$, con $r > o$

Existen diagramas de la forma

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^{n+1} \arrow[d, "\chi_{Q(x_1, \ldots, x_{n+1})}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[drr, "e_{(\exists x_j)(A)}"'] & N^{n+1} \arrow[rr, "< p_1^{n+1}, \ldots, p_{j-1}^{n+1}, p_{j+1}^{n+1}, \ldots, p_{n+1}^{n+1} >"] & & N^n \\
 & & (\exists x_j)(A) \arrow[ur, tail, "i_{(\exists x_j)(A)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$< p_1^{n-1}, \ldots, p_{j-r-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, p_{j-r}^{n-1}, \ldots, p_{n-1}^{n-1} > : N^{n-1} \rightarrowtail N^n$$

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n \arrow[d, tail, "< p_1^n, \ldots, p_{j-r-1}^n, s^a o_{N^n}, p_{j-r}^n, \ldots, p_n^n > = P"] \\
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^{n+1} \arrow[d, "\chi_Q"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail] \arrow[drr, "e_{(\exists x_j)(B)}"'] & N^n \arrow[rr, "< p_1^n, \ldots, p_{j-2}^n, p_j^n, \ldots, p_n^n >"] & & N^{n-1} \\
 & & (\exists x_j)(B) \arrow[ur, tail, "i_{(\exists x_j)(B)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Basta demostrar que el morfismo característico de $(\exists x_j)(B) \rightarrowtail N^{n-1}$ es $\chi_{(\exists x_j)(A)} < P_1^{n-1}, \ldots, P_{j-r-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_{j-r}^{n-1}, \ldots, P_{n-1}^{n-1} >$. Para esto, considérese el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} N^n & \xrightarrow{<P_1^n, \ldots, P_{j-2}^n, P_j^n, \ldots, P_n^n> \,=\, h} & N^{n-1} \\ {\scriptstyle p \,=\, <P_1^n, \ldots, P_{j-r-1}^n, s^a o_{N^n}, P_{j-r}^n, \ldots, P_n^n>} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle <P_1^{n-1}, \ldots, P_{j-r-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_{j-r}^{n-1}, \ldots, P_{n-1}^{n-1}> \,=\, q} \\ N^{n+1} & \xrightarrow[<P_1^{n+1}, \ldots, P_{j-1}^{n+1}, P_{j+1}^{n+1}, \ldots, P_{n+1}^{n+1}> \,=\, g]{} & N^n \end{array}$$

El cuadrado anterior es conmutativo ya que:

$$< P_1^{n-1}, \ldots, P_{j-r-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_{j-r}^{n-1}, \ldots, P_{n-1}^{n-1} > < P_1^n, \ldots, P_{j-2}^n, P_j^n, \ldots, P_n^n > =$$

$$= < P_1^n, \ldots, P_{j-r-1}^n, s^a o_{N^n}, P_{j-r}^n, \ldots, P_{j-2}^n, P_j^n, \ldots, P_n^n >$$

$$< P_1^{n+1}, \ldots, P_{j-1}^{n+1}, P_{j+1}^{n+1}, \ldots, P_{n+1}^{n+1} > < P_1^n, \ldots, P_{j-r-1}^n, s^a o_{N^n}, P_{j-r}^n, \ldots, P_n^n > =$$

$$= < P_1^n, \ldots, P_{j-r-1}^n, s^a o_{N^n}, P_{j-r}^n, \ldots, P_{j-2}^n, P_j^n, \ldots, P_n^n >$$

También, el diagrama es un producto fibrado; ya que si $\bar{f}: C \longrightarrow N^{n-1}$ y $\bar{g}$: $C \longrightarrow N^{n+1}$ son tales que

$< P_1^{n+1}, \ldots, P_{j-1}^{n+1}, P_{j+1}^{n+1}, \ldots, P_{n+1}^{n+1} > \bar{g} = < P_1^{n-1}, \ldots, P_{j-r-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_{j-r}^{n-1}, \ldots,$ $P_{n-1}^{n-1} > \bar{f}$ entonces $f_1 = g_1, \ldots, f_{j-r-1} = g_{j-r-1}, s^a o_C = g_{j-r}, f_{j-r} = g_{j-r+1}, \ldots,$

$f_{j-r+(r-2)} = g_{j-r+(r-1)} = g_{j-1}, f_{j-r+(r-1)} = f_{j-1} = g_{j+1}, \ldots, f_{n-1} = g_{n+1}.$

Considérese el morfismo $< f_1, \ldots, f_{j-r-1}, g_{j-r+1}, \ldots, g_{n+1} > : C \longrightarrow N^n$.
Por las identidades anteriores, es claro que:

$$< p_1^n, \ldots, p_{j-r-1}^n, s^a o_{N^n}, p_{j-r}^n, \ldots, p_n^n > < f_1, \ldots, f_{j-r-1}, g_{j-r+1}, \ldots, g_{n+1} > = \bar{g}$$

$$< p_1^n, \ldots, p_{j-2}^n, p_j^n, \ldots, p_n^n > < f_1, \ldots, f_{j-r-1}, g_{j-r+1}, \ldots, g_{n+1} > = \bar{f}$$

En consecuencia, el cuadrado es un producto fibrado. Se puede considerar entonces un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, tail, "P"] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^{n-1} \arrow[d, tail, "q"] \\
A \arrow[r, tail, "i_A"'] & N^{n+1} \arrow[r, "g"'] & N^n
\end{tikzcd}$$

Por 3.23 puede escribirse también como:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & (\exists x_j)(B) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^{n-1} \arrow[d, "{< p_1^{n-1}, \ldots, p_{j-r-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, p_{j-r}^{n-1}, \ldots, p_{n-1}^{n-1}}"] \\
A \arrow[r, tail] & (\exists x_j)(A) \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n \arrow[d, "\chi_{(\exists x_j)(A)}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

En particular, $X_{(\exists x_j)(B)} = X_{(\exists x_j)(A)} < p_1^{n-1}, \dots, p_{j-r-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, p_{j-r}^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} >$;

es decir, $X_{P(x_1, \dots, x_n)} < p_1^{n-1}, \dots, p_{j-r-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, p_{j-r}^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} > =$

$= X_{P(x_1, \dots, x_{j-r-1}, a, x_{j-r+1}, \dots, x_n)}$

2).- La variable que se va a sustituir por $s^a o$, es $j+r$, con $r > o$.

Como en el caso anterior, se tienen diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & N^{n+1} \arrow[d, "X_Q"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[drr, "e_{(\exists x_j)(A)}"'] & N^{n+1} \arrow[rrr, "< p_1^{n+1}, \dots, p_{j-1}^{n+1}, p_{j+1}^{n+1}, \dots, p_{n+1}^{n+1} >"] & & & N^n \\
& & (\exists x_j)(A) \arrow[urr, tail, "i_{(\exists x_j)(A)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$< p_1^{n-1}, \dots, p_{j+r-2}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, p_{j+r-1}^{n-1}, \dots, p_{n-1}^{n-1} >$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & N^n \arrow[d, "< p_1^n, \dots, p_{j+r-1}^n, s^a o_{N^n}, p_{j+r}^n, \dots, p_n^n >"] \\
A \arrow[r, tail] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & N^{n+1} \arrow[d, "X_Q"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Como en el caso anterior, el cuadrado

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
N^n \arrow[r, "{<P_1^n, \dots, P_{j-1}^n, P_{j+1}^n, \dots, P_n^n>}"] \arrow[d, tail, "{<P_1^n, \dots, P_{j+r-1}^n, s^a o_{N^n}, P_{j+r}^n, \dots, P_n^n>}"'] & N^{n-1} \arrow[d, tail, "{<P_1^{n-1}, \dots, P_{j+r-1}^{n-1}, s^a o_{N^n}, P_{j+r}^{n-1}, \dots, P_{n-1}^{n-1}>}"] \\
N^{n+1} \arrow[r, "{<P_1^{n+1}, \dots, P_{j-1}^{n+1}, P_{j+1}^{n+1}, \dots, P_{n+1}^{n+1}>}"'] & N^n
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado

$$< P_1^{n-1}, \dots, P_{j+r-1}^{n-1}, s^a o_{N^{n-1}}, P_{j+r}^{n-1}, \dots, P_{n-1}^{n-1} > < P_1^n, \dots, P_{j-1}^n, P_{j+1}^n, \dots, P_n^n > =$$

$$= < P_1^n, \dots, P_{j-1}^n, P_{j+1}^n, \dots, P_{j+r-1}^n, s^a o_{N^n}, P_{j+r}^n, \dots, P_n^n >$$

Se procede como en el caso anterior y se obtiene el resultado deseado.

Una pregunta interesante que surge, a partir de la interpretación que se dió en 2.42 de los predicados ultradiofánticos, es saber si esta última preserva validez. Es decir, un predicado ultradiofántico cerrado es válido sii su morfismo asociado lo es. En la situación en la que se está trabajando esta afirmación es cierta, como se hace notar en el siguiente resultado:

3.25 Proposición

Si P es un predicado ultradiofántico cerrado entonces

1).- P es verdad sii X_p lo es

2).- P es falso sii X_p también lo es.

Demostración

Se demostrará simultáneamente, (1) y (2) por inducción sobre el número de conectivos que aparecen en P.

Si P no contiene conectivos entonces es de la forma $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Ahora, si $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ es cierto también lo es $x_{f(a_1, \ldots, a_n)}$ ya que

$$X_{f(a_1, \ldots, a_n)} = x \oplus < \dot{-} < X_{g(a_1, \ldots, a_n)}, X_{h(a_1, \ldots, a_n)} > , \dot{-}$$

$$< X_{h(a_1, \ldots, a_n)}, X_{g(a_1, \ldots, a_n)} >> = x \oplus < \dot{-} < so_N^{g(a_1, \ldots, a_n)}, so_N^{h(a_1, \ldots, a_n)} >$$

$$\dot{-} < so_N^{h(a_1, \ldots, a_n)}, so_N^{g(a_1, \ldots, a_n)} >> = x\ so_N^{(g(a)\dot{-}h(a) + (h(a)\dot{-}g(a))}$$ donde

$a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Análogamente, si P es falso, x_p también lo es.

Supóngase ahora que P es un predicado que tiene al menos un conectivo, entonces P es de la forma

$P_1 \wedge P_2$, $\neg Q$, $(\exists x)\ (Q)$

a).- Si P es $P_1 \wedge P_2$ entonces P es válido sii P_1 y P_2 lo son sii X_{P_1} y X_{P_2} son válidos sii $\wedge \langle X_{P_1}, X_{P_2} \rangle$ es cierto sii X_P es válido.

b).- Si P es $\neg Q$ entonces P es válido sii Q es falso sii X_Q es falso sii $\neg X_Q$ es válido sii $X_{\neg Q} = X_P$ es válido.

c).- Si P es de la forma $(\exists x)(Q(x))$ se tiene.

c.1).- Si $(\exists x)$ $(Q(x))$ es válido, entonces para algún natural a, Q(a) es cierto.

En consecuencia, $X_{Q(a)}$ es cierto. Por 3.24, $X_{Q(a)} = X_{Q(x)}\ s^a o_N$. Si A es el subobjeto clasificado por $X_{Q(x)}$ entonces es claro que A es no-inicial y por lo tanto no vacío. Esto es, $X_{(\exists x)Q(x)}$ es válido.

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[drr, bend left, "s^a o"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & N \arrow[d, "X_{Q(x)}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[dr] & N \arrow[r] & 1 \\
& \exists x A = 1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

c.2).- Si $(\exists x)(Q(x))$ es falso entonces para todo natural a, Q(a) es falso.
Considérese el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N \arrow[d, "\chi_{Q(x)}"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

entonces A es inicial ya que en caso contrario existiría un elemento de N $s^a o: 1 \longrightarrow N$ tal que se factoriza a través de A. En particular, $\chi_{Q(x)}\ s^a o$ es válido; i.e., $\chi_{Q(a)}$ es cierto. Por lo tanto, Q(a) también es válido, lo cual no es posible.

3.26 Corolario

Si un predicado ultradiofántico $P(x_1, \ldots, x_n, y)$ define a una gráfica entonces existe un $\underline{C}_{U.D.}$-morfismo $h: N^n \longrightarrow N$ que lo representa.

Demostración

Considérese el siguiente producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, tail, "< r_1, r_2 >"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n x N \arrow[d, "\chi_P"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

donde χ_P es el morfismo asociado al predicado P. Se demostrará que r_1 es un isomorfismo

1).- $r_1 \colon R \longrightarrow N^n$ es un epimorfismo.

Sea $\langle s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o \rangle : 1 \longrightarrow N^n$ un elemento arbitrario de N^n, entonces como P define a una gráfica existe un natural b tal que $P(a_1, \ldots, a_n, b)$ es cierto. Por 3.25, $\chi_P \langle\langle s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o \rangle, s^b o \rangle$ es cierto. En consecuencia, el diagrama exterior del cuadrado

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, dashed, "y"] \arrow[drr, bend left, "\langle\langle s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o\rangle, s^b o\rangle"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& R \arrow[r, tail, "\langle r_1, r_2\rangle"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "P.F."] & N^n \times N \arrow[d, "\chi_P"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. En particular, $r_1 y = \langle s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o \rangle$

2).- $r_1 \colon R \longrightarrow N^n$ es un monomorfismo.

Supóngase que $y, z \colon 1 \longrightarrow R$ son elementos de R tales que $r_1 y = r_1 z$, entonces $\chi_P \langle r_1 y, r_2 y \rangle = \chi_P \langle r_1 y, r_2 z \rangle$ es válido. Por 3.25, $P(a_1, \ldots, a_n, b)$, $P(a_1, \ldots, a_n, c)$ son válidos donde $(a_1, \ldots, a_n)$, b, c representan a $r_1 y$, $r_2 y$ y $r_2 z$ respectivamente. Por lo tanto $b = c$; i.e., $r_2 y = r_2 z$.

En consecuencia, $\langle r_1, r_2 \rangle y = \langle r_1, r_2 \rangle z \quad \therefore\ y = z$.

Esto demuestra que $r_j: R \longrightarrow N^n$ es un isomorfismo. Sea $h: N^n \longrightarrow N$ definido por: $h = r_2 r_1^{-1}$, entonces es claro que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} N^n \arrow[r, "<1,\, h>"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n x N \arrow[d, "\chi_P"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado.

Se pueden probar algunas propiedades más de $\underline{C}_{U.D.}$ Sin embargo, 3.26 permite demostrar el siguiente teorema.

3.3 Teorema (U.D. vs. $\underline{C}_{U.D}$)

La categoría $\underline{C}_{U.D}$ es isomorfa a U.D.

Demostración

Se definirá primero un funtor $F: \underline{C}_{U.D} \longrightarrow U.D$ de la siguiente manera:

F.1).- Si A es un $\underline{C}_{U.D.}$-objeto entonces existe un predicado ultradiofántico P que define a A. Se define F(A) como aquel conjunto ultradiofántico definido por P.

F.2).- Si $f: N^n \longrightarrow N$ es un elemento arbitrario de $R'_{\underline{C}}$, entonces $<1, f>$: $N^n \longrightarrow N^n x N$ es un $\underline{C}_{U.D.}$-objeto. Existe un predicado ultradiofántico $P_{<1,\, f>}$ que define a $<1, f>$, entonces $F(f): N^n \longrightarrow N$ es el U.D-morfismo cuya gráfica está descrita por $P_{<1, F>}$.

F.3).- Es claro entonces que $F(N) = N$, $F(\Omega) = \Omega$, $F(1) = 1$ debido a que los cuadrados

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "1_N"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N \arrow[d, "\chi 0_N = v_N"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N \arrow[d, "\chi_\Omega = v < \chi_o, \chi_{so} >"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "o"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N \arrow[d, "\chi"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

son productos fibrados. (véase 2.55.2, 2.55.3, 2.55.4).

Además, $F(s) = s$, $F(1_N) = 1_N$, $F(P_i) = P_i : N^n \longrightarrow N$ de nuevo, por la definición de los predicados para las gráficas de s, 1_N y $P_i^n : N^n \longrightarrow N$. (véase 2.53.1, 2.53.2, 2.53.3, 2.53.5).

$$\begin{tikzcd} N^n \arrow[r, tail, "< 1, P_i^n >"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n x N \arrow[d, "\chi \oplus < \dot{-} < P_i^n P_1, P_2 >, \dot{-} < P_2, P_i^n P_1 >>"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

corresponde a $\{(x_1, \ldots, x_n, y) \mid x_i = y\}$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "< 1, s >"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^2 \arrow[d, "x \oplus < \dot{-} < sP_1, P_2 >, \dot{-} < P_2, sP_1 >>"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

corresponde a $\{(x, y) \mid y = x + 1\}$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail, "\Delta_N"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^2 \arrow[d, "\chi \oplus <\dot{-},\ \dot{-} < P_2,\ P_1 >>"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$ corresponde a $\{(x, y) | x = y\}$

Ahora bien, si A es un $\underline{C}_{U.D}$-objeto arbitrario entonces existe un predicado P que define a A y se tiene un producto fibrado de la forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "i_A"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n \arrow[d, "\chi_A"] \\ 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Por 2.73, el morfismo $j\chi_A$: $N^n \longrightarrow N$ pertenece a R'; el predicado que define a la gráfica $< 1_{N^n}, j\chi_A >$ es:

$$\{(x, y) \in N^n \times N \mid (P(x_1, \ldots, x_n) \wedge y = 1) \vee (\neg P(x_1, \ldots, x_n) \wedge y = o)\}$$

en consecuencia, el U.D-morfismo $F(j\chi_A)$: $N^n \longrightarrow N$ queda descrito por:

$$F(j\chi_A) = \begin{cases} 1 \text{ si } P(x_1, \ldots, x_n) \\ 0 \text{ si } \neg P(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

entonces es claro que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, tail, "i_{F(A)}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n \arrow[d, "F(j\chi_A) = \chi_{FA}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. En particular, $F(i_A) = i_{FA}$.

F.4).- Sea f; $A \longrightarrow B$ un $\underline{C}_{U.D}$-morfismo entonces existen $f_1, \ldots, f_m$ elementos de $R'_{\underline{c}}$ tales que hacen conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "<f_1, \ldots, f_m>"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N^m \arrow[dl, "\chi_B"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "<f_1, \ldots, f_m> i_A"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& B \arrow[r, tail, "i_B"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^m \arrow[d, "\chi_B"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Considérense $Ff_1, \ldots, Ff_m, \chi_{FA}, \chi_{FB}$ entonces por F.3 y 3.25 el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, tail, "i_{FA}"] & N^n \arrow[rr, "<Ff_1, \ldots, Ff_m>"] \arrow[dr, "\chi_{FA}"'] & & N^m \arrow[dl, "\chi_{FB}"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo

Se define $Ff\colon FA \longrightarrow FB$ como aquel U.D-morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[dr, dashed, "Ff"] \arrow[drr, bend left, "{<Ff_1, \ldots, Ff_m> i_{FA}}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& FB \arrow[r, tail, "i_{FB}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^m \arrow[d, "\chi_{FB}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

F.5).- Si $f_1, \ldots, f_m\colon N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{\underline{c}}$ entonces $F < f_1, \ldots, f_m > =$ $= < Ff_1, \ldots, Ff_m >$

Demostración

La afirmación se conprobará sólo para $m = 2$. En el caso general, la demostración es análoga a la que se dará. Sean $f, g\colon N^n \longrightarrow N$ dos elementos arbitrarios de R', entonces por 2.54.1 el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N^n \arrow[r, tail, "1_{N^n}"] & N^n \arrow[rr, "{<f, g>}"] \arrow[dr, "v_{N^n}"'] & & N^2 \arrow[dl, "v_{N^2}"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Por F.4, $F < f, g > \colon N^n \longrightarrow N^2$ es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
N^n \arrow[dr, dashed, "F<f,\, g>"] \arrow[drr, bend left, "<Ff,\, Fg>"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& N^2 \arrow[r, tail, "1_{N^2}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^2 \arrow[d, "v_{N^2}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, $F < f, g > = < Ff, Fg >$

F.6).- F es un funtor

En efecto, si A es un $\underline{C}_{U.D.}$-objeto arbitrario y 1_A: $A \longrightarrow A$ es la identidad en A, entonces $F(1_A)$: $F(A) \longrightarrow FA$ es el único morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
FA \arrow[dr, dashed, "F(1_A)"] \arrow[drr, bend left, "i_{FA}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& F(A) \arrow[r, tail, "i_{FA}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n \arrow[d, "\chi_{FA}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, $F(1_A) = 1_{FA}$.

Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dos $\underline{C}_{U.D.}$-morfismos arbitrarios. Existen diagramas conmutativos de la forma:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "<f_1, \dots, f_m>"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & N \arrow[dl, "\chi_B"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, tail, "i_B"] & N^m \arrow[rr, "<g_1, \dots, g_r>"] \arrow[dr, "\chi_B"'] & & N^r \arrow[dl, "\chi_C"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}
$$

Por 2.54.2, se sabe que $g_i <f_1, \dots, f_m> = h_i$ para $i \varepsilon \{1, \dots, r\}$ son tales que $i_c(fg) = <h_1, \dots, h_r> i_A$.

Ahora, por 2.53.5 es claro que $Fh_i = Fg_i\, F <f_1, \dots, f_m> = Fg_i <Ff_1, \dots, Ff_m>$ ya que el predicado que define a h_i está dado por la "composición" de los predicados

Por último, como los cuadrados

$$
\begin{tikzcd}
FB \arrow[dr, dashed, "Fg"] \arrow[drr, bend left, "<Fg_1, \dots, Fg_r> i_{FB}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& FC \arrow[r, tail, "i_{FC}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^r \arrow[d, "\chi_{FC}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FA \arrow[dr, dashed, "Ff"] \arrow[drr, bend left, "<Ff_1, \dots, Ff_m> i_{FA}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& FB \arrow[r, tail, "i_{FB}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^m \arrow[d, "\chi_{FB}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

son productos fibrados y $\chi_{FC} <Fh_1, \dots, Fh_r> i_{FA} = \chi_{FC} <Fg_1, \dots, Fg_r>$
$<Ff_1, \dots, Ff_m> i_A = \chi_{FC} <Fg_1, \dots, Fg_r> i_{FB}\, Ff = \chi_{FC}\, i_{FC}\, (Fg\, Ff) = v_{FA}$
entonces $F(gf) = F(g)\, F(f)$.

F.7).- F es denso

Si A es un U.D-objeto entonces existe un predicado ultradiofántico P que define a A. Sea B el $\underline{C}_{U.D}$-objeto cuyo morfismo característico es X_P. Por F.3 F(B) es isomorfo a A ya que tienen el mismo morfismo característico.

F.8).- F es fiel

Sean f, g: A $\longrightarrow$ B dos $\underline{C}_{U.D}$-morfismos arbitrarios. Supóngase que F(f) = F(g). Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[dr, dashed, "{Ff,\ Fg}"] \arrow[drr, bend left, "{<Ff_1, \ldots, Ff_m>\ i_{FA}}"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& FB \arrow[r, tail, "i_{FB}"] \arrow[d] & N^m \arrow[d, "X_{FB}"] \\
& 1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. En particular, $< Ff_1, \ldots, Ff_m > i_{FA} = < Fg_1, \ldots, Fg_m > i_{FA}$.

Basta demostrar que $< f_1, \ldots, f_m > i_A = < g_1, \ldots, g_m > i_A$. Sea a: $1 \longrightarrow A$ un elemento arbitrario de A entonces $X_A i_A a = X_A < s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o > = v$, donde $< s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o > : 1 \longrightarrow N^n$. Por 3.25, $P(a_1, \ldots, a_n)$ es cierto, si P denota al predicado que define a A. En consecuencia, $(a_1, \ldots, a_n)$ pertenece a FA. En particular, $< f_1, \ldots, f_m > i_A = < g_1, \ldots, g_m > i_A$ ya que en caso contrario existiría $a:1 \longrightarrow A$ tal que $< f_1, \ldots, f_m > i_A a \neq < g_1, \ldots, g_m > i_A a$; esto es, $< f_1, \ldots, f_m > < s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o > \neq < g_1, \ldots, g_m > < s^{a_1}o, \ldots, s^{a_n}o >$, pero por hipótesis $< Ff_1, \ldots, Ff_m > (a_1, \ldots, a_n) = < Fg_1, \ldots, Fg_m > (a_1, \ldots, a_n)$. Como el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
N^n \arrow[r, tail, "{<1_{N^n}, <f_1, \ldots, f_m>>}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{P.F.}"] & N^n x N^m \arrow[d, "{\Lambda^n <P_{<1, f_1>} <p_1, p_1^m p_2>, \ldots, P_{<1, f_m>} <p_1, p_m^m p_2>>}"] \\
1 \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado entonces $< f_1, \ldots, f_m > < s^{a_1} o, \ldots, s^{a_n} o > =$
$= < g_1, \ldots, g_m > < s^{a_1} o, \ldots, s^{a_n} o >$. Lo que no es posible. En consecuencia, F es fiel.

F.9).- F es pleno

Sean A, B dos $\underline{C}_{U.D}$-objetos y $f: FA \longrightarrow FB$ un U.D-morfismo arbitrario. Existe $\bar{f} = < \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m > : N^n \longrightarrow N^m$ tal que $\bar{f}\, i_{FA} = i_{FB} f$. Cada $f_i: N^n \longrightarrow N$ pertenece a $R'_{U.D.}$ por lo tanto existe un predicado P_{f_i} que define a su gráfica. Por 3.26, existe $g_i: N^n \longrightarrow N$ un $\underline{C}_{U.D.}$-morfismo que pertenece a R' cuya gráfica está representada por $X_{P_{f_i}}$. Por construcción, $Fg_i = f_i$ para $i \varepsilon \{1, \ldots, m\}$.

Además, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, tail, "i_A"] & N^n \arrow[rr, "{< g_1, \ldots, g_m >}"] \arrow[dr, "X_A"'] & & N^m \arrow[dl, "X_B"] \\
& & \Omega &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo puesto que $F(X_B < g_1, \ldots, g_m > i_A) = F(X_A i_A) = v_{FA}$ y F es fiel.

Por lo tanto existe un único $\underline{C}_{U.D.}$-morfismo $g: A \longrightarrow B$ tal que cumple

$$i_B g = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle i_A.$$

Por construcción, $F(g) = f$. En consecuencia, F es pleno.

Esto demuestra el teorema.

Autoanálisis

He cometido un error fatal
- y lo peor de todo es que
no sé cual.

-J.E.P.-

BIBLIOGRAFIA

[B. M.] Birkoff G., Mac Lane S. Algebra; Second Edition (1979); Collier Macmillan International Editions.

[Coste Roy M. F. et. al.] Coste Roy M. F., Coste M., Mahé L. Contribution to the study of the natural number object in elementary Topoi; Journal of Pure and Applied Algebra 17 (1980), 35-68.

[Da.] Davis M., Hilbert's tenth problem is unsolvable. American Mathematical Monthly, Vol. 80, No. 3, 1973, 233-269.

[Fr.] Freyd P., Aspects of Topoi; Bull. Aust. Math. Soc. 7 (1972), 1-76 and 467-480.

[Go.] Goldblatt R; Topoi, The Categorial Analysis of Logic; Studies in Logic and Foundations, V. 97; North Holland (1979).

[Jo.] Johnstone P. T., Topos Theory; Acadmic Press, London (1977).

[Mi.] Mitchell W, Boolean Topoi and The Theory of Sets, Journal of Pure and Applied Algebra 2 (1972), 261-274.

[Pe, et.-al.] Pfender M., Reiter R. and Sartorius M. Constructive Arithmetics. Category Theory, SLN No. 962, Springer Verlag (1982).

[R.-S.] Rasiowa H. and Sikorski R., The Mathematics of Metamathematics, Polish Scientific Publisher (1963).

[To.] Tomás F., Aritmética i Análisi Formalment Recursives; Publicacions, Secció de Mathemátiques, Vol. 28, No. 1, Maig 1984, Universitát Autónoma de Barcelona.