TOPOLOGIA

0646889

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISION DE ESTUDIOS Posgrado

HIPERESPACIOS CON PUNTA DE CONO

ISABEL PUGA ESPINOSA

México 1989

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios ~~es~~ Posgrado

HIPERESPACIOS CON PUNTA DE CONO

Tesis que, para obtener el grado de Doctora en Ciencias (Matemáticas) presenta

Ma. Isabel Puga Espinosa

MEXICO, 1989

A VICTOR

AGRADECIMIENTOS

Efusivamente, a Luis Montejano quien me dirigió este trabajo con un entusiasmo contagioso.
Durante una sesión de trabajo, Luis intuyó la propiedad de los hiperespacios de tener punta de cono y le fue dando forma hasta plantearla como aparece en la tesis. Le agradezco la oportunidad que me dio de trabajar en este concepto tan rico. Su talento y generosidad me allanaron el camino en todo momento .

A Alejandro Illánez quien asesoró mi trabajo cuando Luis tuvo que salir de año sabático . Alejandro me dio ideas fundamentales para concluir la tesis, corrigió la primera versión con su vista de águila para encontrar errores y me hizo sugerencias muy adecuadas

A ambos : Luis y Alejandro, por las gratas sesiones de trabajo que compartimos en el seminario de Hiperespacios y durante las cuales, mucho se enriqueció mi visión de las matemáticas .

Silvya de Neymet y Richard Wilson leyeron y corrigieron la tesis meticulosamente. Sin duda, si logré una versión final más clara y precisa, fue gracias a ellos.

A Javier Bracho, quien me planteó preguntas muy interesantes para la investigación futura.

A Mónica Clapp y Adalberto García Máynez su apoyo e interés en mi trabajo.

A Lucina Parra su contribución mecanográfica; a Jaime Basurto su asesoría para la impresión en lasser de este trabajo y a Julia, la famosa Julia de la División de estudios de posgrado, por hacerme fáciles los trámites.

A la Facultad de Ciencias (UNAM) por las facilidades que me dio para realizar mi tesis (libertad, tiempo, instalaciones, trámites, etc.)

Durante el desarrollo de la tesis utilicé biblioteca, computadora, impresora y hasta café del Instituto de Matemáticas (UNAM). A todos sus miembros, muchas gracias.

En fin a todos aquellos que han estado cerca de mí y me estimularon para seguir adelante.

Isabel Puga.

INDICE

INTRODUCCION

Los hiperespacios 2^X y $C(X)$ de un continuo X, son los espacios de subconjuntos cerrados y de subcontinuos de X, respectivamente, con la métrica de Hausdorff (I.1).

Estos hiperespacios, que son continuos conexos por trayectorias, se estudian desde los años 30, cuando los matemáticos polacos Kuratowski, Mazurkiewicz y otros, iniciaron el tema. Sin embargo, aún hoy, se conocen pocas construcciones explícitas de hiperespacios de continuos.
En algunos casos $C(X)$ es homeomorfo al cono $K(X)$ de X, por ejemplo, cuando X es un arco o una curva cerrada simple (I.4).

En este trabajo intentamos contribuir al conocimiento del hiperespacio $C(X)$, mediante dos generalizaciones de la propiedad $C(X) \cong K(X)$: La propiedad de $C(X)$ de tener punta de cono y la de tener punta de cono relativa a un subconjunto de X y estudiamos estas propiedades para dos tipos de continuos :

Gráficas finitas y Dendroides suaves.

La tesis está organizada en la siguiente forma :
En el capítulo I, exponemos conceptos básicos que faciliten la lectura de la tesis.

En el capítulo II exponemos definiciones y propiedades básicas de dendroides y dendroides suaves; introducimos los conceptos de "puntos esenciales" y "puntos orilla" en dendroides; demostramos propiedades que relacionan estos conceptos con la dimensión del hiperespacio C(X) de un dendroide X y con la conexidad y la suavidad de X. Mediante los puntos esenciales y puntos orilla hacemos ciertas clasificaciones en dendroides suaves que tienen relación con la propiedad punta de cono.
En este capítulo, demostramos también , la existencia de funciones continuas en ciertos subconjuntos de C(X), cuyas imágenes son subdendroides de X con una infinidad de puntos terminales, en un caso y gráficas finitas contenidas en X, en otro caso y, que además, tienen la medida de Whitney que se quiera.

En el capítulo III definimos la propiedad de C(X) de tener punta de cono y de tener punta de cono relativa; de tener punta de cono con la base fija y con vértice en el elemento X de C(X).
Damos también, un ejemplo muy sencillo en el que se puede ver gráficamente como el hiperespacio de un cierto continuo X (X es la unión de tres arcos que se intersectan dos a dos en un punto fijo) no es homeomorfo al cono de X, pero si tiene punta de cono y finalmente demostramos :
i) Todas las gráficas finitas X,tienen punta de cono con la base fija y vértice en X.

ii) Damos condiciones necesarias (relacionadas con los puntos esenciales y orilla) para que un dendroide X, suave en uno de sus puntos p tenga punta de cono relativa a {p}.
En este caso se puede afirmar que la punta de cono tiene la base fija y vértice en X y que la "punta de cono" de C(X) es homeomorfa al cubo de Hilbert.

iii) Damos condiciones necesarias para que un dendroide X, suave en p no tenga punta de cono relativa a {p}.

C A P I T U L O   I

P R E L I M I N A R E S

1. Los Hiperespacios $C(X)$ y 2^X

En las secciones 1 a la 4, expondremos las definiciones y resultados básicos de la teoría de hiperespacios, necesarios para el desarrollo de este trabajo. Como referencia el libro de Naddler [9] es ideal, véase también [5] .

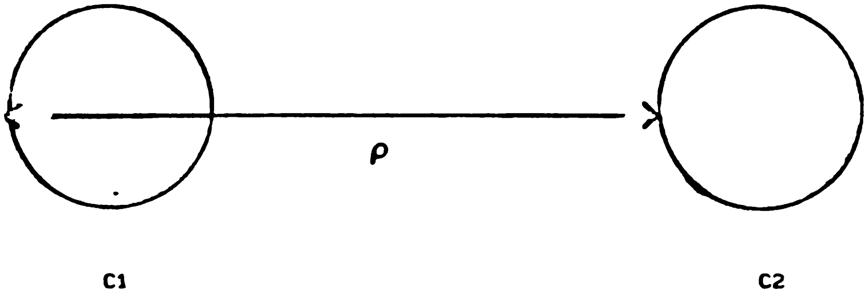
Un continuo es un espacio métrico compacto y conexo.
La nomenclatura de "continuo" se utiliza también cuando el espacio es solamente Hausdorff y no métrico. Sin embargo para nosotros un continuo será siempre un espacio métrico.

Un subcontinuo de un continuo X es un subconjunto no vacío de X compacto y conexo.
Sea X un continuo, la **métrica de Hausdorff, D,** entre dos subconjuntos cerrados A y B de X se define como sigue:

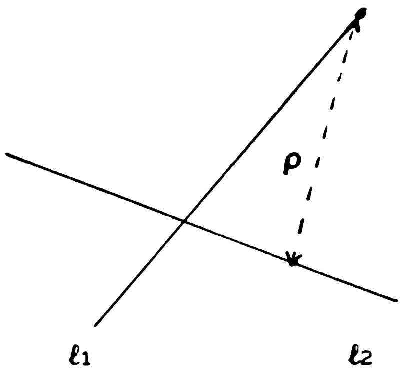
$$\mathbf{D}(A,B) = \inf\{ \varepsilon : A \subseteq N_\varepsilon(B) \text{ y } B \subseteq N_\varepsilon(A) \}$$

donde $N_\varepsilon(A) = \{ x \in X : d(x,A) < \varepsilon \}$ (d es la métrica en X) ,
La distancia $\mathbf{D}(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $\forall\, x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$ y viceversa, véanse los ejemplos de la figura 1.

Denotaremos por 2^X al espacio de subconjuntos cerrados no vacíos de X con la métrica de Hausdorff y por $C(X)$ al subespacio de 2^X cuyos elementos son los subcontinuos de X .Es a estos dos espacios métricos a los que llamamos hiperespacio de cerrados e hiperespacio de continuos de X respectivamente.



(a) $D(C1,C2) = \rho$



$[u,v] \in B_{\varepsilon}([a,b])$

(c)

(b) $D(\ell_1\ \ell_2) = \rho$

Figura 1

$D(A,B) = \max\{ \sup\{d(x,A) | x \in B\}, \sup\{d(x,B) | x \in A\} \}$ donde
$d(x,A) = \inf\{d(x,a) | a \in A\}$ y d es la metrica en X
Esta definicion y la anterior de distancia de Hausdorff
son equivalentes

Con la métrica de Hausdorff, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ de X son ambos continuos ([9] Teoremas 0.8 y 1.12).
Siguiendo la notación usual de espacios métricos, si $H \in 2^X$, la bola con radio ε y centro en H, es el conjunto

$$B_{\varepsilon}(H) = \{ K \in 2^X : D(H,K) < \varepsilon \}$$

Si $p \in X$, denotaremos por $C_p(X)$ al subconjunto de $C(X)$ que consta de todos los continuos que contienen a p .

Llamaremos *arco* a un espacio homeomorfo al intervalo $I = [0,1]$. Un arco ordenado en 2^X es un arco en 2^X tal que :
i) Si H y K son elementos del arco, entonces $H \subseteq K$ ó $K \subseteq H$
ii) La intersección de todos los elementos del arco es el punto inicial y la unión es el punto final.

Además de ser conexos $C(X)$ y 2^X son conexos por trayectorias. Si A y $B \in 2^X$, $A \subseteq B$ y cada componente conexa de B contiene una componente conexa de A , entonces existe un arco ordenado de A a B ([5], Lema 2.3).

La función de X en $C(X)$ que manda x en $\{x\}$ es una isometría, de modo que X es siempre un subcontinuo de $C(X)$ y el continuo X es un elemento de $C(X)$.

Si $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, definimos $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Para toda $\mathcal{A}$, $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq X$. Más aún, σ es una función continua de 2^{2^X} sobre 2^X [5] .

Si $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente en 2^X entonces $\lim K_n$ es el conjunto de elementos $\mathbf{x} \in X$ para los cuales existe una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}$, con $\mathbf{x}_n \in K_n$, que converge a $\mathbf{x}$.
En efecto, sean $\mathbf{x} \in K = \lim K_n$ y $m \in \mathbb{N}$. Existe $n(m)$ tal que

si $n \geq n(m)$, $\mathbf{D}(K_n,K) < 1/m$. De aquí que $\forall\, n \geq n(m)$, existe $\mathbf{x}_n \in K_n$ tal que $d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}) < \varepsilon$.
Para $n \in \{ n(m),n(m)+1,\ldots,n(m+1)-1\}$, tomamos $\mathbf{x}_n \in K_n$ tal que $d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}) < 1/m$. Es claro que la sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{x}$.
Por otro lado, supongamos que una sucesión $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{x}$, y $\mathbf{x}_n \in K_n$. Sea $\varepsilon > 0$. Ya que $\mathbf{D}(K_n,K) < \varepsilon/2$, si n es suficientemente grande, existe $\mathbf{y}_n \in K$ tal que $d(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n) < \varepsilon/2$ si n es suficientemente grande . De aquí que
$d(\mathbf{y}_n,\mathbf{x}) \leq d(\mathbf{y}_n,\mathbf{x}_n) + d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}) < \varepsilon$ si n es suficientemente grande
Esto demuestra que K contiene elementos tan cerca de $\mathbf{x}$ como se quiera y puesto que K es cerrado , $\mathbf{x} \in K$.

1.1 Lema

Sea (Y,d_Y) un espacio métrico compacto y $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y . Si toda subsucesión convergente de $\{\mathbf{y}_n\}$ converge a un punto $\mathbf{y} \in Y$, entonces la sucesión $\{\mathbf{y}_n\}$ converge a $\mathbf{y}$.

Demostración

Supongamos que $\{\mathbf{y}_n\}$ no converge a $\mathbf{y}$. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $d_Y(\mathbf{y}_{n_k},\mathbf{y}) \geq \varepsilon$. Podemos además, elegir $n_k > n_{k-1}$. Puesto que Y es compacto, $\{\mathbf{y}_{n_k}\}$ tiene una subsucesión convergente, pero ésta no converge a $\mathbf{y}$, contrario a la hipótesis.
En virtud de este lema, en nuestras demostraciones posteriores, llamaremos nuevamente $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a una subsucesión convergente de una sucesión arbitraria $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

1.2 *Ejemplo*

El intervalo $I = [0,1]$ *es claramente un continuo.*
Sus subcontinuos son intervalos $[a,b]$ *con* $0 \leq a \leq b \leq 1$.
Si $[a,b] \in C(I)$ *entonces el intervalo* $[u,v] \in B_\varepsilon([a,b])$ *si y sólo si* $u \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap [0,1]$ *y* $v \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \cap [0,1]$ *(figura 2). Asociamos a cada* $[a,b]$ *el punto* $(1/2(a+b), b-a)$ *en* $\mathbb{R}^2$. *La función* g *así definida en* $C(I)$ *es uno a uno y su imagen es el triángulo* Δ *de la figura 2 .*
Veremos que g *es continua. Sea* $[a,b] \subseteq [0,1]$ *y* $\varepsilon > 0$.
Si la distancia entre dos puntos (x_1,y_1) *y* (x_2,y_2) *en* Δ *esta dada por* $\max\{|x_2-x_1|, |y_2-y_1|\}$ *entonces la bola con radio* 2ε *y centro en* $g([a,b])$ *es como en la figura 2*
Podemos verificar que $[u,v] \in B_\varepsilon([a,b])$ *si y sólo si* $g([u,v])$ *es elemento de la bola (cuadrada) de radio* 2ε *y centro en* $g([a,b])$
Esto demuestra la continuidad de g *y también la de* g^{-1} . *Así que* $C(I)$ *es homeomorfo a* Δ .

1.3.Definiciones

a) Un continuo X es unicoherente si siempre que la unión de dos subcontinuos propios, $H \cup K = X$, se tiene que $H \cap K$ es conexo.

b) Un continuo es descomponible si es la unión de dos subcontinuos propios. En caso contrario, diremos que es indescomponible.

Diremos que es hereditariamente indescomponible o hereditariamente descomponible si todos sus subcontinuos son indescomponibles o todos descomponibles respectivamente.

El hiperespacio C(X) es unicoherente ([9] Corolario 1.176)

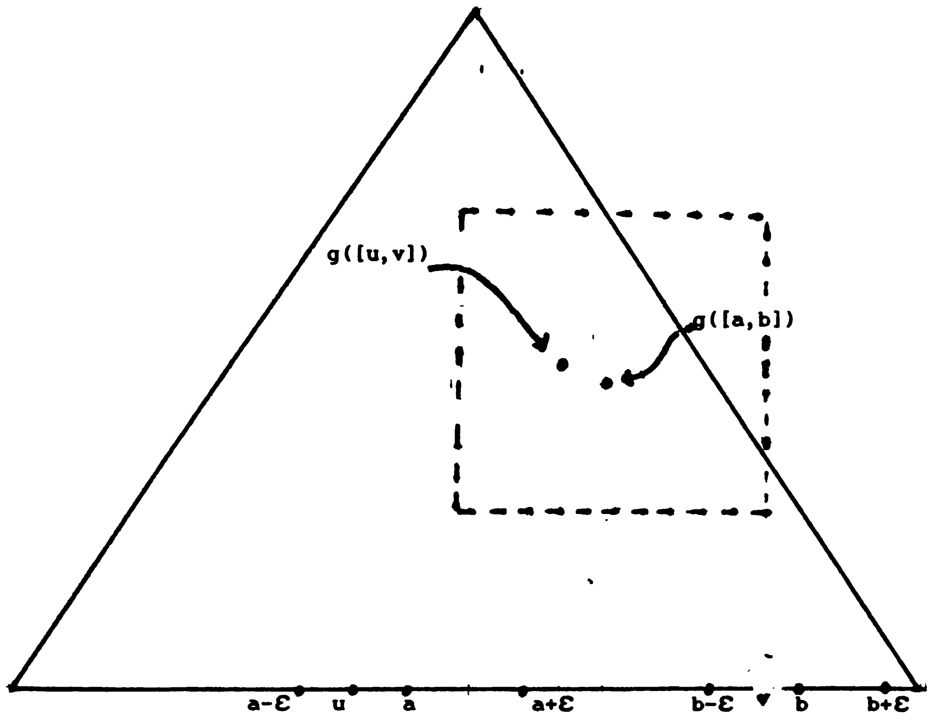


Figura 2

El triángulo Δ es homeomorfo a C(I)

$g\colon C(I) \longrightarrow \Delta \quad g([a,b]) = \left(\frac{a+b}{2}, b-a\right)$

2. Funciones de Whitney

2.1. Definición

Una función de Whitney de 2^X (respectivamente de $C(X)$) es una función continua μ definida en 2^X (en $C(X)$) con valores en I y çon las dos siguientes propiedades:

i) $\mu(\{x\}) = 0 \quad \forall \quad x \in X$ ii) $\mu(A) < \mu(B)$ si $A \subset B.\ A \neq B$

Denotaremos por μ_p a la función de Whitney μ de $C(X)$ restringida $C_p(X)$.

En el intervalo I, la longitud de los subintervalos es una función de Whitney de $C(I)$.
Intuitivamente μ mide el tamaño de los subcontinuos de X.
Whitney, [13] demuestra que todo continuo X admite una función de Whitney en 2^X . También puede verse una construcción de una función de Whitney en [9] 0.50.1.
Una función continua definida en un subespacio cerrado de 2^X, con las propiedades i), ii) de la definición 1, puede extenderse a una función de Whitney en 2^X [12] 5. En particular funciones de Whitney en $C(X)$ tienen extensión a 2^X.

Toda función de Whitney μ tiene la siguiente propiedad [5] :
2.2 Dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A \subseteq B$ y $\mu(B)-\mu(A) < \delta$ entonces $D(A,B) < \varepsilon$.

Si $t \in I$ decimos que $\mu^{-1}(t)$ es un nivel de Whitney de μ . Por ejemplo, para cualquier μ , el nivel de Whitney, $\mu^{-1}(0)$, es homeomorfo a X.

En C(I) (figura 2), con la función de Whitney definida como la longitud de los subintervalos, cada recta paralela a la base del triángulo Δ representa un nivel de Whitney en C(I) .

2.3 Teorema.

Si X es un continuo, μ es un mapeo de Whitney para C(X) y $t \in I$. Entonces $\mu^{-1}(t)$, $\mu^{-1}([0,t])$ y $\mu^{-1}([t,1])$ todos son subcontinuos de C(X) .

Demostración

Puesto que son imagen inversa de cerrados bajo una función continua, los tres subconjuntos son cerrados y, por lo tanto compactos.

Si $A \in \mu^{-1}([t,1])$, hay un arco ordenado de A a X. Todo elemento del arco ordenado contiene a A, de modo que este arco está contenido en $\mu^{-1}([t,1])$ lo que demuestra la conexidad de este conjunto.

Supongamos ahora que $\mu^{-1}([0,t])$ no es conexo, entonces existen cerrados, ajenos, no vacíos, H y K de C(X) tales que $\mu^{-1}([0,t]) = H \cup K$. Como $\mu^{-1}(0)$ es homeomrfo a X y X es conexo podemos suponer que $\mu^{-1}(0) \subseteq H$. Por otra parte, K no es vacío, así que algún $A \in \mu^{-1}([0,t])$ es elemento de K (véase la figura 3).

Si $p \in A$, hay un arco ordenado T de $\{p\}$ a A. Pero entonces $(H \cap T) \cup (K \cap T)$, es una separación de T , puesto que ambos conjuntos son no vacíos. En efecto, $\{p\} \in H \cap T$ y $A \in K \cap T$, lo que contradice la conexidad de T .
La conexidad de $\mu^{-1}(t)$ se sigue de la unicoherencia de $C(X)$ y de la conexidad de los dos conjuntos anteriores.

2.4 Teorema de Cambio de parámetro.
Sean $\mu:C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney y $\hat{F}:C(X) \times I \longrightarrow C(X)$ y $s:C(X) \longrightarrow I$ funciones continuas.
Supongamos que para cada $A \in C(X)$ existe $F(A) \in \hat{F}(\{A\} \times I)$ único tal que $\mu(F(A)) = s(A)$, entonces F es continua en $C(X)$.

Demostración
Bastará demostrar que si $\{A_n\}$ es una sucesión que converge a A en $C(X)$, entonces $\{F(A_n)\}$ converge a $F(A)$.
Para cada n existe $t_n \in [0,1]$ tal que $F(A_n) = \hat{F}(A_n,t_n)$.
Supongamos que una subsucesión de $\{t_n\}$ converge a t y que una subsucesión de $\{F(A_n)\}$, converge a B entonces
$B = \lim F(A_n) = \lim \hat{F}(A_n,t_n) = \hat{F}(A,t)$. (Véase el lema 1.1)
De aquí que $B \in \hat{F}\left(\{A\} \times I\right)$. Por otro lado
$\mu(B) = \lim \mu(F(A_n)) = \lim s(A_n) = s(A)$ implica, junto con lo anterior y la hipótesis de que $F(A)$ es único, que $B = F(A)$.

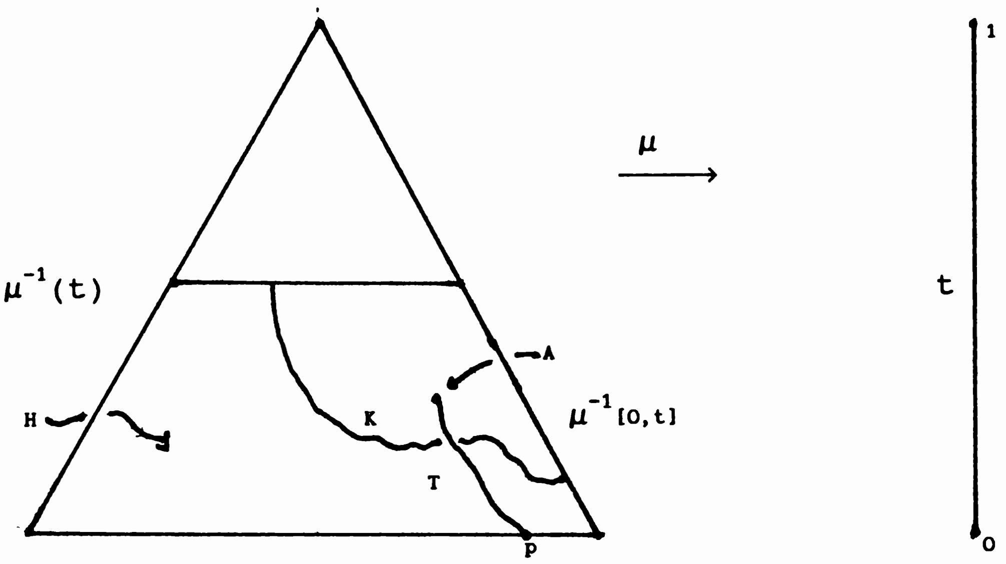


Figura 3

Ilustracion de 2.3 para C(I)

3. Conos.

Si X es un espacio topológico, *el cono de* X , $K(X)$, es el espacio que resulta al tomar el producto topológico de X con el intervalo unitario e identificar la tapa superior $X \times \{1\}$ en un sólo punto.
En el ejemplo de la sección 1, vimos que $C(I)$ es homeomorfo a Δ y Δ es homeomorfo a $K(I)$.
Siguiendo la misma idea de ese ejemplo, podemos verificar que si $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ entonces $C(S^1)$ es homeomorfo a $K(S^1)$

3.1 Lema.
Sean X y Y espacios topológicos compactos y Hausdorff.
Si $H : X \times I \longrightarrow Y$ es una función continua tal que
i) $H(X \times \{1\}) = y_0 \in Y$.

ii) $H \mid X \times [0,1) \longrightarrow Y - \{y_0\}$ es uno a uno y sobre

entonces $K(X) \cong Y$.

Demostración.

Sea H^* la relación que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "P"'] & & Y \\ & K(X) \arrow[ur, "H^*"'] & \end{tikzcd}$$

P es la proyección canónica que identifica a todos los puntos de $X \times \{1\}$ en un solo punto. (U es abierto en $K(X)$ si y sólo si $P^{-1}(U)$ es abierto en $X \times I$.)
Claramente H^* es función y es uno a uno y sobre.
Sea V abierto en Y , como H es continua $H^{-1}(V)$ es abierto en $X \times I$. Por otro lado, si $y_0 \in V$, entonces $X \times \{1\} \subseteq H^{-1}(V)$ y si $y_0 \notin V$, entonces $X \times \{1\} \cap H^{-1}(V) = \phi$. En ambos casos $(H^*)^{-1}(V) = P(H^{-1}(V)) = H^{-1}(V)$ y $P^{-1}((H^*)^{-1}(V)) = H^{-1}(V)$ que es abierto. Esto demuestra la continuidad de H^* .
Toda función biyectiva y continua de un compacto en un Hausdorff es un homeomorfismo, así que $K(X) \cong Y$.

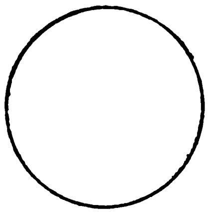
4. Continuos cuyos hiperespacios son Conos.

¿Cuándo C(X) y K(X) son homeomorfos?

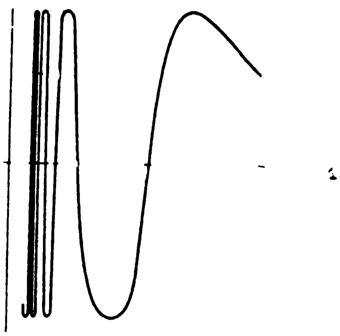
Nadler [9] contesta parcialmente a esta pregunta :

Si X es hereditariamente descomponible, $C(X) \cong K(X)$ si y sólo si X es homeomorfo a alguno de los continuos de las figuras 4 y 5 .

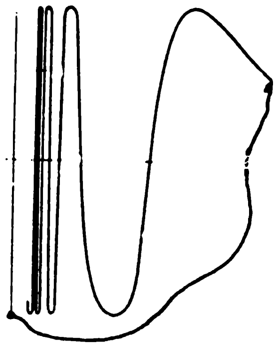
(a) El intervalo I



(b) $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$

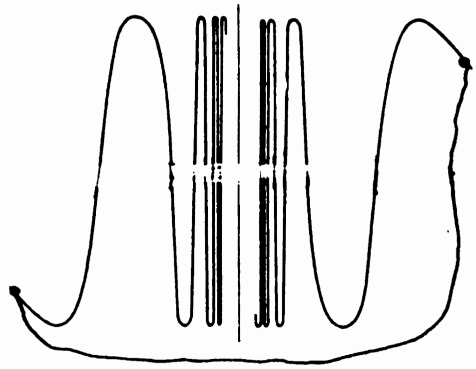


c) $W_0 = Cl\{(x, \text{sen } 1/x) : 0 < x \leq 1\}$



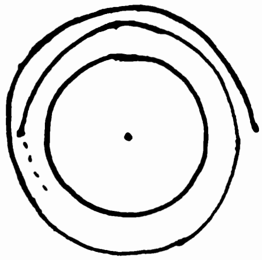
(d) W_0, identificando los puntos (0,-1) y (1,sen 1)

Figura 4

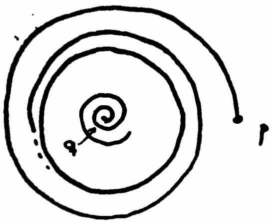


(a) $W_0 \cup \{(x, \text{sen } 1/x): -1 \leq x < 0\}$

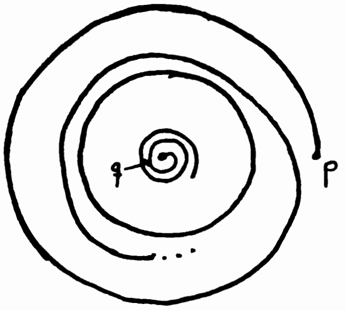
identificando los puntos (1,sen1)
y (-1,sen -1)



(b) $W = S^1 \cup \{(1+1/t)e^{it} : t \geq 1\}$



(c) $W \cup \{(1+1/t)e^{it} : t \geq 1\}$
identificando p con q



(d) $W \cup \{(1+1/t)e^{it} : t \leq 1\}$

identificando p con q

Figura 5

Si X es indescomponible y $C(X) \cong K(X)$ entonces todos los subcontinuos propios de X son arcos y si $C(X)$ es descomponible y $C(X) \cong K(X)$ entonces X contiene a lo más un indescomponible ([9]).

Decimos que X tiene la propiedad del cono si $C(X) \cong K(X)$ y algún homeomorfismo entre estos dos conjuntos manda a X al vértice del cono y al conjunto $\{\{x\} : x \in X\}$ a la base del cono. Los continuos I y S^1 tienen la propiedad del cono. Estos dos continuos y los indescomponibles cuyos subcontinuos propios son arcos son los únicos continuos de dimensión finita que tienen la propiedad del cono ([12]).
Por ejemplo, si X es homeomorfo a alguno de los continuos de la figura 5 , $C(X)$ y $K(X)$ son homeomorfos pero ningún homeomorfismo entre ellos manda a X al vértice del cono.
Para todos los continuos de las figura 4 y 5 existe un homeomorfismo que manda al conjunto $\{\{x\}:x \in X\}$ a la base del cono.

5. El cubo de Hilbert y subconjuntos Zeta

5.1 Definición

i) El cubo de Hilbert, al que denotaremos por Q , es el producto topológico de una familia numerable de intervalos.

ii) Sea X un espacio métrico. Un subconjunto cerrado A de X es un subconjunto Zeta si el conjunto $\{f \in C(Q,X): f(Q) \cap A = \phi\}$ es denso en $C(Q,X)$ donde $C(Q,X)$ es el espacio de funciones continuas de Q en X con la métrica del supremo.

iii) Si M es un espacio compacto, diremos que $g \in C(M,X)$ es una función Zeta si $g(M)$ es un subconjunto Zeta de X.

5.2 Ejemplo.

i) Si X es un espacio métrico, los conjuntos $X \times \{0\}$ y el vertice V de $K(X)$ son ambos subconjuntos Zeta de $K(X)$. En efecto, sea $F:Q \longrightarrow K(X)$ una funcion continua y $\varepsilon > 0$. Si definimos $f : Q \longrightarrow K(X)$ y $g : Q \longrightarrow K(X)$ como

$$f(\mathbf{q}) = \begin{cases} F(\mathbf{q}) \text{ si } F(\mathbf{q}) \notin X \times [0,\varepsilon) \\ (x,\varepsilon) \text{ si } F(\mathbf{q}) = (x,t) \text{ con } t \in [0,\varepsilon] \end{cases}$$

$$g(\mathbf{q}) = \begin{cases} F(\mathbf{q}) \text{ si } F(\mathbf{q}) \in X \times [0,1-\varepsilon] \\ (x,1-\varepsilon) \text{ si } F(\mathbf{q}) = (x,t) \text{ con } t \in [1-\varepsilon,1] \end{cases}$$

entonces f y g son continuas, distan de F en menos que ε , $f(Q) \cap X \times \{0\} = \phi$ y $g(Q) \cap \{V\} = \phi$

Sea (X,d) un espacio métrico, ANR, separable y localmente compacto. Entonces las dos siguientes proposiciones son equivalentes:

a) El conjunto $Z(X)$ de funciones Zeta en $C(I^k,X)$ es denso en $C(I^k, X)$.

b) Si $h_1, h_2 \in C(I^k,X)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existen funciones $\hat{h}_1, \hat{h}_2 \in C(I^k,X)$ tales que $d(h_i(t),\hat{h}_i(t)) < \varepsilon$ $\forall\ t \in I^k$ $i = 1,2$ y $\hat{h}_1(I^k) \cap \hat{h}_2(I^k) = \phi$. [8]

5.3 **Teorema**

Sea X un continuo, $p \in X$ y $\mu : C(X) \longrightarrow I$ un mapeo de Whitney. Entonces $\mu_p^{-1}(t)$ es un subconjunto Zeta de $\mu_p^{-1}[t,1]$ $\forall\ t \in [0,1]$.

Demostración

a) Elegimos un arco ordenado $\alpha : I \longrightarrow C(X)$ estrictamente creciente de $\{p\}$ a X . Es decir α es una función continua tal que $\alpha(0) = \{p\}$, $\alpha(1) = X$ y si $s < t$, entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t)$ Sea $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe $\gamma : \mu_p^{-1}[t,1] \longrightarrow \mu_p^{-1}[t,1]$ tal que $\operatorname{Im} \gamma \cap \mu_p^{-1}(t) = \phi$ y $D(A,\gamma(A)) < \varepsilon$ $\forall$ $A \in \mu_p^{-1}[t,1]$ Definimos

$$\gamma(A) = \begin{cases} A \cup \alpha(t_A) \text{ si } \mu(A) \leq t+\delta \\ A \text{ si } \mu(A) \geq t+\delta \end{cases}$$

donde t_A se elige de tal manera que $\mu(A \cup \alpha(t_A)) = t+\delta$. Es fácil verificar que γ es continua y satisface las propiedades que mencionamos arriba .

Finalmente, sea $f : Q \longrightarrow \mu_p^{-1}[t,1]$ una función continua y $\varepsilon > 0$, entonces la función $\gamma \circ f : Q \longrightarrow \mu_p^{-1}[t,1]$ dista de f en menos que ε y su imagen no intersecta a $\mu_p^{-1}(t)$.

C A P I T U L O I I

D E N D R O I D E S

1. Definiciones y Propiedades.

1.1 Definición

Un dendroide es un continuo conexo por trayectorias y hereditariamente unicoherente .

Dicho de otro modo, un dendroide es un continuo conexo por trayectorias y con la propiedad de que, la intersección de cualesquiera dos de sus subcontinuos, es conexa.

Puede verificarse fácilmente que, en un dendroide X :

i) Dados dos puntos $p, q \in X$ existe un sólo arco entre p y q. Denotaremos por pq a este arco.

ii) Si $A \in C(X)$, existe un único elemento $\mathbf{a} \in A$ tal que $p\mathbf{a} \cap A = \{\mathbf{a}\}$. Denotaremos por pA al arco $p\mathbf{a}$.

iii) Todo subcontinuo de un dendroide, es un dendroide .

Decimos que un dendroide X es suave en un punto $p \in X$ si siempre que $\lim x_n = x$, se tiene $\lim px_n = px$. (véase [7])

Una forma equivalente de definir la suavidad en p, es la siguiente :

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones en X que convergen a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ respectivamente y $a_n \in pb_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim a_nb_n = \mathbf{ab}$. ([2], Teorema 12).

Un dendroide es suave, si es suave en alguno de sus puntos.

En etste capítulo X denotará siempre a un dendroide .

Para definir el grado de v *en* X,

sea S_v el conjunto de familias F cuyos elementos son arcos α en X con un extremo en v y tales que si $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ entonces $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \{v\}$.

Sea C una cadena de S_v , *i.e.* un subconjunto de S tal que si $F_1, F_2 \in S_v$ entonces, ó bien $F_1 \subseteq F_2$ ó bien $F_1 \supseteq F_2$.

Se puede ver fácilmente que $\bigcup_{F \in C} F \in S_v$. Por el lema de Zorn, S_v tiene elementos maximales, es decir, elementos que no están propiamente contenidos en ningún otro elemento de S_v .

Veremos que cualesquiera dos elementos maximales tienen la misma cardinalidad.

Supongamos que F_1 y F_2 son elementos maximales de S_v y sea $\alpha \in F_1$, entonces existe $\beta \in F_2$ tal que $\alpha \cap \beta \neq \{v\}$, pues si no fuera así, $F_2 \cup \{\alpha\} \in S_v$ lo que contradice la maximalidad de F_2 . Ahora bien, si para dos elementos β_1 y β_2 de F_2, $\beta_1 \cap \alpha \neq \{v\}$ y $\beta_2 \cap \alpha \neq \{v\}$ entonces, puesto que v es extremo de α , de β_1 y de β_2 , $\beta_1 \cap \beta_2 \neq \{v\}$.

Lo anterior demuestra que la función que manda α en β es una biyección.

Estamos ahora en condiciones de definir el grado de v = gr(v) como el cardinal de una familia maximal de arcos, que tienen un extremo en v y cuya intersección dos a dos es $\{v\}$, si este cardinal es finito. Si dicho cardinal no es finito, diremos simplemente, que el grado de v es infinito, gr(v) = ∞.

1.2 Definición

Un punto en un dendroide es terminal si es extremo de cualquier arco que lo contiene.

Es fácil verificar que x es terminal, si y sólo si $\operatorname{gr} x = 1$

1.3 Teorema

Sea X un dendroide suave en p . La función que asocia a cada $A \in C(X)$ el punto $\mathbf{a} \in A$ para el cual $\mathbf{pa} = pA$, es una función continua.

Demostración

Supongamos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(X)$ converge al continuo A y que $pA_n = px_n$. Por la suavidad en p, si $x_n \to x$ entonces $px_n \to px$ y de aquí que $pA = \mathbf{pa} \subseteq px$. Como $\mathbf{a} \in A$, una sucesión $\{a_n\}$ con $a_n \in A_n$ converge a $\mathbf{a}$. Por la forma en que se definió x_n, $pa_n = px_n \cup a_nx_n$ y, por lo tanto,

$\mathbf{pa} = \lim pa_n = \lim (px_n \cup a_nx_n) = px \cup \mathbf{ax} = px$, lo que demuestra que $\mathbf{a} = x$.

2. Puntos Esenciales.

2.1. Definición.

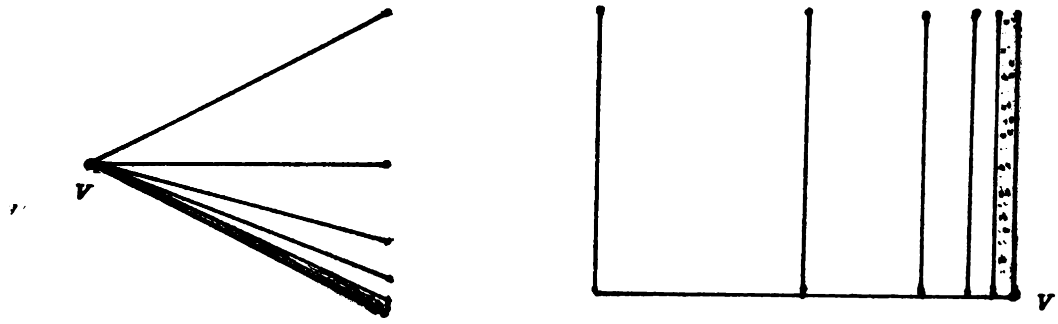
Diremos que v es un punto esencial en cualquiera de los dos siguientes casos:

I) $gr(v) = \infty$

II) Existe un arco α en X y una sucesión $\{v_n\} \subseteq \alpha$ tal que $gr(v_n) \geq 3$ y $\lim v_n = v$. (Estamos suponiendo, naturalmente, que $v_n \neq v$ para toda $n \in \mathbb{N}$).

2.2 Ejemplos

En una **escoba** *(figura 6a) v es un punto esencial del tipo I y en un* **peine** *(figura 6b) v es un punto esencial del tipo II.*



(a) (b)

Figura 6

2.3. Teorema

Si X es un dendroide suave y el conjunto de sus puntos terminales es infinito, entonces X contiene un punto esencial.

Demostración

Sea T el conjunto de puntos terminales de X y $u_o \in X$ un punto en el cual X es suave. Si para algún subconjunto infinito T^* de T, $u_o t_1 \cap u_o t_2 = \{u_o\}$ $\forall\ t_1, t_2 \in T^*$, entonces $gr(u_o) = \infty$ y u_o es esencial.

Si este no es el caso, entonces existe un subconjunto infinito T^* de T tal que $u_o t_1 \cap u_o t_2$ contiene propiamente a u_o $\forall\ t_1, t_2 \in T^*$. Sean $T_o = \{t_1^o, t_2^o, \ldots,\}$ un subconjunto infinito numerable de T^* y $A_o = u_o t_1^o$ y coloreemos los pares no ordenados de T_o en la siguiente forma:

El par $\{t_i^o, t_j^o\}$ es azul si $u_o t_i^o \cap u_o t_j^o \subseteq A_o$ y es rojo en cualquier otro caso.

Por el teorema de Ramsey [11], existe $T_1 = \{t_1^1, t_2^1, \ldots\} \subseteq T_o$ cuyos pares son todos de un solo color. Si el color es el azul, entonces es fácil verificar que hay un punto esencial contenido en A_o. Si el color es el rojo, repetimos el procedimiento de colorear, ahora a T_1 y sustituyendo a A_o por $u_o t_1^1 = A_1$. Si para alguna $n \in \mathbb{N}$, los pares de T_n son todos azules, entonces hay un punto esencial contenido en A_{n-1}. Si los pares de T_n son rojos $\forall\ n \in \mathbb{N}$, llamamos $u_{n+1} \in u_o t_1^n$ al extremo del arco que va de t_1^{n+1} a $u_o t_1^n$. Ahora bien, $u_n \in u_o u_{n+1}$ (véase la figura 7 abajo) y $gr(u_n) > 2$. Como X es suave en u_o, $u_n \in u_oU$ donde $u = \lim u_n$ y esto demuestra que u es un punto esencial.

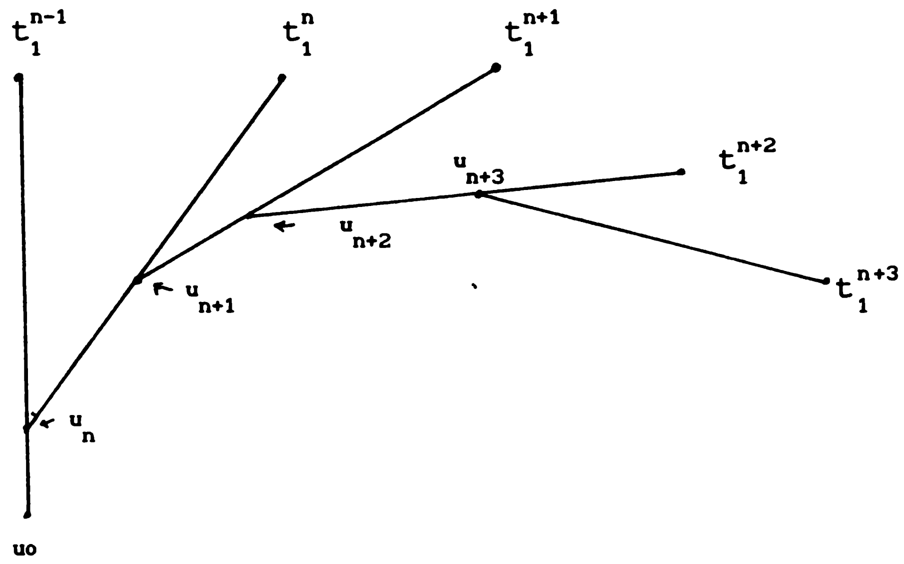


Figura 7

En el que caso en que los pares de T_n son rojos $\forall\ n \in \mathbb{N}$, como $t_1^{n+1} \in T_{n+1} \subseteq T_n$, el par $\{t_1^{n+1}, t_1^{n}\}$ es un par de T_n, asi que es rojo y $u_ot_1^{n+1} \cap u_ot_1^{n}$ no esta contenido en A_{n-1}

Nótese que si X tiene solamente un número finito de puntos terminales, entonces X es un árbol (*i,e.* una gráfica finita sin ciclos)

2.4. Teorema

Sea $\alpha \subseteq X$ un arco, el conjunto $V_\alpha = \{v \in \alpha : v$ es esencial$\}$ es cerrado.

Demostración

Sea $\{v_n\} \subseteq V_\alpha$ una sucesión que converge a v. Si para una infinidad de índices n, $gr(v_n) \geq 3$, entonces $v \in \alpha$ y v es esencial del tipo II. Si no es este el caso entonces v_n es esencial del tipo II para n suficientemente grande ya que su grado no puede ser infinito y entonces la sucesión $\{u_i^n\}_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos de grado ≥ 3 que converge a v_n está contenida en α (ya que $gr\ v_n \leq 2$). Por lo anterior, tan cerca como queramos de v hay un punto de la forma $u_i^n \in \alpha$ que es de grado ≥ 3. Esto demuestra que v es esencial.

2.5. **Teorema**

Sea $E = \{x \in X : x$ es esencial$\}$. Si X es suave en p y $p \in ClE$ entonces $p \in E$.

Demostración

Sea $\{v_n\} \subseteq E$ una sucesión que converge a p. Si alguna subsucesión de $\{v_n\}$ está contenida en un arco, entonces, por el teorema anterior, $p \in E$. Si no es este el caso y $gr(p)$ es finito, entonces existe un arco α con un extremo en p tal que $v_np \cap \alpha = u_np$ con $u_n \neq p$ para una infinidad de índices n. Es claro que, pqara esos índices $gr(u_n) \geq 3$. Como X es suave en p, la sucesión de arcos v_np converge a $\{p\}$ y, por lo tanto, $\{u_n\}$ converge a p lo que implica que $p \in E$.

2.6 Lema

Sean X un dendroide suave en p, $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a x y tal que cualquier arco de X sólo contiene un número finito de elementos de $\{x_n\}$. Entonces en px hay algún punto esencial. Más aún, si $u = \lim u_n$ donde $u_n \in px$ es tal que $px_n \cap px = pu_n$, entonces u es esencial.

Demostración

Sea $u_n \in px$ tal que $px_n \cap px = pu_n$ y sea $u = \text{lím}\ u_n$. Entonces $u \in px$. Veremos que u es esencial.

Si $\{u_n : n=1,2,\dots\}$ es un conjunto infinito entonces, como $gr\ u_n > 2$, u es esencial. Si el conjunto $\{u_n : n=1,2,\dots\}$ es finito y $gr(u)$ es finito, entonces existe un arco α con un extremo en u tal que $px_n \cap \alpha = uy_n$ con $y_n \neq u$, $\alpha \cap px = \{u\}$ y $gr(y_n) > 2$. Sea $y = \lim y_n$. Entonces

$$px = \lim px_n = \lim (py_n \cup y_nx_n) = py \cup yx,$$

lo que demuestra que $y \in px$ y, como $y \in \alpha$, entonces $y = u$. Además $gr(y_n) > 2$ lo que implica que u es esencial.

2.7. Teorema

Sea X un dendroide suave en p y $v \in X$ el único punto esencial en el arco pv. Entonces X es suave en todo $q \in pv$.

Demostración

Para cada $x \in X$ denotaremos por $\hat{x}$ al elemento de pv para el cual $pv \cap x\hat{x} = \{\hat{x}\}$. Sea $\{x_n\} \subseteq X$ una sucesión que converge a x y $u = \lim \hat{x}_n$. Si demostramos que $u = \hat{x}$, entonces $\lim qx_n = \lim (q\hat{x}_n \cup \hat{x}_n x_n) = q\hat{x} \cup \hat{x}x = qx$, lo que demuestra la suavidad en q.

Ya que X es suave en p, $px = \lim px_n = \lim (p\hat{x}_n \cup \hat{x}_n x_n) = $ $= pu \cup ux$. Esto implica que $pu \subseteq px$ y por lo tanto, ya que $u \in pv$, por la forma en que se definió $\hat{x}$, $pu \subseteq p\hat{x}$.

Ahora bien, supongamos que una subsucesión de $\{x_n\}$ está contenida en un arco α .Si $\alpha = pv$, entonces $x_n = \hat{x}_n$ y $\hat{x} = x = u$ Si α es un arco distinto de pv, entonces, como $x \in \alpha$, $\hat{x} = \hat{x}_n$ para todo elemento x_n de la subsucesión, así que $u = \hat{x}$.

En el caso en el que ninguna subsucesión de $\{x_n\}$ está contenida en un arco, el lema 2.6 implica que u es un punto esencial. Entonces $u = v$ y la contención $pu \subseteq p\hat{x}$ demuestra que $u = \hat{x}$.

2.8 Corolario

Sea X un dendroide suave en p, $A \in C_p(X)$ y supongamos que A contiene algún punto esencial. Entonces A contiene un punto esencial q tal que X es suave en q.

Demostración

Por el teorema 2.4., existe un primer punto esencial q en el arco que va de p a algún punto esencial de A, y por el teorema 2.7, X es suave en q.

puntos esenciales y dimensión.

2.9. Lema

Sea X un dendroide suave en p, $A \in C_p(X)$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in A$ puntos terminales de X y $A_\delta(u_i)$ la componente conexa de $A - B_\delta(u_i)$ que contiene a p . Si $\varepsilon > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $A_\delta = A_\delta(u_1) \cap \ldots \cap A_\delta(u_n)$ dista de A en menos que ε.

Demostración

Supongamos que la conclusión del lema es falsa, entonces existe $A_n = A_{1/n}(u)$ tal que que $\mathbf{D}(A_n, A) \geq \varepsilon$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Ya que $A_n \subseteq A$, de la definición de la distancia $\mathbf{D}$, se sigue que hay una sucesión $\{x_n\} \subseteq A - A_n$ tal que $d(x_n, A_n) \geq \varepsilon$ y, por lo tanto, para alguna i fija $x_n \notin A_{1/n}(u_i)$ para una infinidad de índices n. Podemos suponer, sin pérdida de generalida que $i = 1$ y que $x_n \notin A_{1/n}(u_1)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Como $A_{1/n}(u_1)$ es un subcontinuo de X, entonces es un dendroide, así que si $x_n \notin A_{1/n}(u_1)$,entonces el arco px_n intersecta a $B_{1/n}(u_1)$ en algún punto v_n . Sea $x = \lim x_n$. Por la suavidad en p, $pu_1 = \lim pv_n \subseteq \lim px_n = px$; pero u_1 es terminal, de modo que $u_1 = x$.

Ahora bien, si n es suficientemente grande

i) $d(x_n,u_1) < \varepsilon/2$

ii) Por ser X un espacio Hausdorff $B_{1/n}(u_j)$ no intersecta a el arco pu_1 así que $d(u_1,A_{1/n}(u_1)) < \varepsilon/2$ (véase la figura 8, abajo).

Las dos desigualdades anteriores implican $d(x_n,A_{1/n}(u_1)) < \varepsilon$ si n es suficientemente grande . Esto contradice la forma en que se escogieron las x_n .

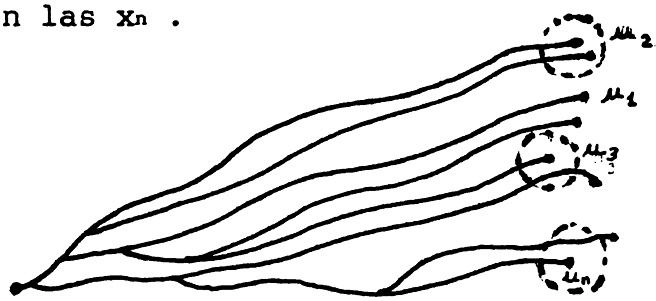


Figura 8

Sea X un dendroide suave en p y A un subdendroide que contiene a p y no contiene puntos esenciales. Por el teorema 2.3, A sólocontiene un número finito de puntos terminales (*i.e.* A es un árbol). Denotaremos por $\hat{N}_\varepsilon(A)$ al conjunto $A - \bigcup(\hat{\mathbf{a}},\mathbf{a}]$ donde **a** es terminal de A y $\hat{\mathbf{a}} \in A$ es tal que $d(\hat{\mathbf{a}},a) = \varepsilon$ y $d(x,\mathbf{a}) < \varepsilon \ \forall \ x \in (\hat{\mathbf{a}},\mathbf{a}]$.

En el siguiente lema tomaremos ε suficientemente pequeña para quue en $[\hat{\mathbf{a}},\mathbf{a}]$ no haya puntos de grado mayor que 2 .

(Esto es posible ya que A sólo contiene un número finito de puntos de grado > 2, pues en caso contrario A contendría un punto esencial)

2.10 Lema

Sea X un dendroide suave en p y $A \in C_p(X)$ tal que A no contiene puntos esenciales . Sea ε como en el párrafo anterior. Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $K \varepsilon B_\delta(A)$ entonces $K \supseteq \hat{N}_\varepsilon(A)$.

Demostración

Supongamos que el lema es falso. Entonces existe una sucesión $\{K_n\} \subseteq C(X)$ que converge a A y tal que K_n no contiene a $\hat{N}_\varepsilon$. Afirmamos que para una infinidad de índices n K_n no contiene a un terminal fijo $\mathbf{a} \varepsilon A$ y no contiene a $\hat{\mathbf{a}}$: Si K_n contuviera a todos los terminales $\hat{\mathbf{a}}$ de $\hat{N}_\varepsilon(A)$, entonces contendría a $\hat{N}_\varepsilon(A)$. Como el número de terminales de A es finito entonces algun $\hat{\mathbf{a}}$ fijo no está contenido en una infinidad de continuos K_n . Ahora bien si $\mathbf{a}$ no es elemento de una infinidad de estos continuos queda demostrada nuestra afirmación . En caso contrario, *i.e.* $\mathbf{a}$ es elemento de todos los continuos K_n salvo un número finito, entonces ninguno de ellos intersecta a $\hat{N}_\varepsilon(A)$, pues si $\mathbf{y} \in K_n \cap \hat{N}_\varepsilon(A)$ entonces el arco $\mathbf{ya} \subseteq K_n$ y, por lo tanto $\hat{\mathbf{a}} \in K_n$ con lo cual queda demostrada la afirmación. (Diremos, sin pérdida de generalidad que $\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}} \notin K_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$)

Por lo anterior, a partir de cierta n, K_n no contiene elementos de A cercanos a $\mathbf{a}$ así que existe una sucesión de elementos $x_n \in K_n - A$ que converge a $\mathbf{a}$. Como A no contiene puntos esenciales, los arcos que van de A a x_n contienen un arco $\alpha = uv$ con $u \in A$ y $v \notin A$ (*i.e* α está contenido en Ax_n para una inxfinidad de índices n) . Pero px_n converge a $\mathbf{pa}$, por lo tanto, $v \in \mathbf{pa}$ lo que contradice que $\mathbf{pa} \subseteq A$.

2.11 Teorema

Sea X un dendroide suave en p, $A \in C_p(X)$ contiene un punto esencial, si y sólo si $\dim B_\varepsilon(A) = \infty$ $\forall\ \varepsilon > 0$.

Demostración

Supongamos que A contiene un punto esencial y sea $\varepsilon > 0$, demostraremos que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $B_\varepsilon(A)$ contiene un subespacio homeomorfo a I^n .

Por el corolario 2.7., A contiene un punto $\mathbf{q}$ esencial y suave.

Dividiremos la demostración en dos casos:

I. $gr(\mathbf{q}) = \infty$.

II. Existe un arco α y una sucesión $\{v_n\} \subseteq \alpha$ tal que $gr(v_n) \geq 3$ y $\lim v_n = \mathbf{q}$.

I.

1) Supongamos que existen $u_1, \ldots u_n \notin A$ tales que $\mathbf{q}u_i \cap \mathbf{q}u_j = \{\mathbf{q}\}$.

Denotamos por v_i al último punto en $\mathbf{q}u_i \cap A$. Podemos suponer que $d(A,t) < \varepsilon \ \forall \ t \in v_1u_1$.

Para cada $t \in v_1u_1$, el conjunto $A_1(t) = A \cup v_1t \in C(X)$ y $D(A,A_1(t)) < \varepsilon$. Entonces

$S = \{A_1(t_1) \cup \ldots \cup A_n(t_n) | t_1 \in v_1u_1\} \subseteq B_\varepsilon(A)$ y la función que asocia a $(t_1,\ldots,t_n)$, el elemento $A_1(t_1) \cup \ldots \cup A_n(t_n) \in S$ es un homeomorfismo entre I^n y S.

2) Como $gr(q) = \infty$, si no ocurre el caso 1), entonces existen terminales de X, $u_1,\ldots u_n \in A$ tales que $qu_i \cap qu_j = \{q\}$.

Por el lema anterior y utilizando la misma notación que en el lema, existe $\delta > 0$ tal que $D(A_\delta,A) < \varepsilon$.

Sean ahora $w_1,\ldots,w_n$, los terminales de A_δ en los arcos $qu_1,\ldots,qu_n$ respectivamente . Entonces el conjunto

$$S = \left\{ A_\delta \cup \bigcup_{i=1}^{n} w_it_i \mid t_i \in [w_i,u_i] \right\}$$

esta contenido en $B_\varepsilon(A)$ y es homeomorfo a I^n.

II

1) Supongamos que para alguna k, $qv_k \subseteq A$ y supongamos

a) Existen elementos de la sucesión $v_{k1},\ldots,v_{kn} \in qv_k$ y $u_1,\ldots,u_n \notin A$ tales que $v_{ki}u_i \cap v_{kj}u_j = \phi$ y $d(t,A) < \varepsilon$ $\forall \ t \in v_{ki}u_i$ $i= 1,\ldots,n$.

Sea $w_i \in A$ tal que $A \cap v_{ki}u_i = v_{ki}w_i$, entonces para cada $t \in w_iu_i$, $A \cup w_it$, es un continuo y $D(A,A \cup w_it) < \varepsilon$.

El conjunto $\left\{A \cup \bigcup_{i=1}^{n} w_it_i, t_i \in w_iu_i\right\} \subseteq B_\varepsilon(A)$ es homeomorfo a I^n.

b) Existen $v_{k1},\ldots,v_{kn} \in qv_k$; $u_1,\ldots,u_n \in A$ terminales, tales que $v_{ki}u_i \cap v_{kj}u_j = \phi$. Tomamos, entonces δ y S como en el caso I.2.

2. Si $\alpha \cap A = \{q\}$, entonces existen $v_k \in \alpha$, $v_{k1},\ldots,v_{kn} \in qv_k$ y $u_1,\ldots,u_n \in X$ tales que $u_{ki}v_i \cap u_{kj}v_j = \phi$ y $D(A, A \cup qv_k \cup v_{ki}u_i) < \varepsilon$.

El conjunto $\left\{A \cup qv_k \bigcup_{i=1}^{n} v_{ki}t_i \mid t_i \in v_{ki}u_i\right\} \subseteq B_\varepsilon(A)$ es homeomorfo a I^n, lo que concluye la demostración de la suficiencia.

Supongamos ahora que A no contiene puntos esenciales . Por el corolario 2.8, X es suave en todo punto de A y entonces, el teorema 2.5 implica que ninguna sucesión de puntos esenciales converge a algún punto de A.

Por otra parte no hay una infinidad de puntos de X, con grado > 2 que tengan un punto límite en A, pues si $\{a_n\}$ es una sucesión que converge a $\mathbf{a} \in A$, entonces, si $\{a_n\}$ está contenida en un arco, **a** es esencial y si $\{a_n\}$ no está contenida en un arco, entonces el lema 2.6 implica que en pa hay un punto esencial.

Por todo lo anterior y por el lema 2.10, existe $\delta > 0$ tal que si $K \in C(X) \cap B_\delta(A)$, entonces K no contiene puntos esenciales, los únicos puntos de grado > 2 contenidos en K, son los de A y $K \supseteq \hat{N}_\varepsilon(A)$ donde ε es como en el párrafo anterior al lema 2.10

El conjunto S de puntos $a \in A$ para los cuales existe algún arco $\alpha = [a,w(a)]$ tal que $(a,w(a)] \subseteq A^c$ es finito y el número máximo l de estos arcos tales que dos de ellos se intersectan a lo más en el extremo $a \in A$ es también finito.
Tomaremos $w(a)$ de modo que si $x \in [a, w(a)]$, entonces $d(x,a) < \delta$.
Si T es el conjunto de terminales de X contenidos en A, entonces el número k de elementos de T es finito.
Si $K \in B_\delta(A)$ entonces $K = \hat{N}_\varepsilon(A) \cup \bigcup_{a\in T}[\hat{a},y_a] \cup \bigcup_{a\in S}[a,z(a)]$,
donde $y_a \in [\hat{a},a]$, $z(a) \in \alpha = [a,w(a)]$ y los arcos α son los l arcos posibles.

La función que asocia a K con (y_a,z_a) es un homeomorfismo entre $B_\delta(K)$ y I^{l+k}.

Puntos esenciales y conexidad.

2.12. **Teorema**

Sea X un dendroide suave en p. Supongamos que p no es esencial y no es terminal de X. Entonces p es un punto de corte de X, *i.e* $X -\{p\}$ no es conexo.

Demostración:

Como p no es esencial y no es terminal, $2 \leq gr(p) = n$ es finito. Sean $a_1,\dots,a_n$ puntos terminales de X, para los cuales, si $i \neq j$, $pa_i \cap pa_j = \{p\}$ y sea

$A_j = \{ x \in X | px \cap pa_j$ contiene un subarco de $pa_j \}$.

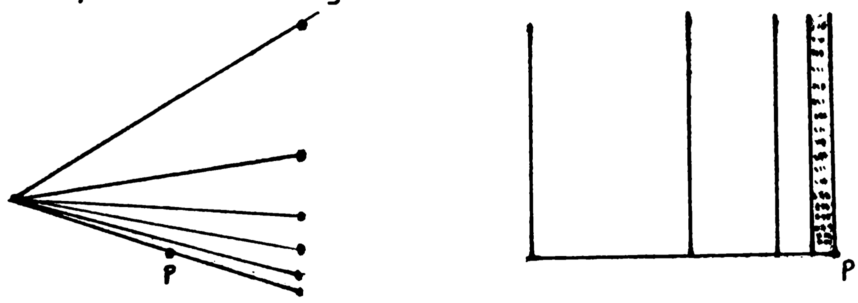
Es claro que $X - \{p\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ y que $A_i \cap A_j = \phi$.

Bastará demostrar que cada A_j es abierto.

Sea $x \in A_j$ y supongamos que x es límite de una sucesión $\{x_n\} \subseteq A_j^c$. Podemos suponer que para alguna k fija, distinta de j, $x_n \in A_k \ \forall \ n \in \mathbb{N}$. Denotemos por b_n al último punto de pa_k en el arco que va de p a x_n. Como p no es esencial y $gr(b_n) > 2$, $p \neq \lim b_n = b$. Por otra parte $px = \lim px_n = \lim (pb_n \cup b_n x_n) = pb \cup bx$.

Así que $pb \subseteq px$ por lo que $b \in A_j$. Pero $b_n \in pa_k \ \forall \ n$ y esto implica que $b \in A_k$. Así que $pb \subseteq pa_k$. Pero pb debe compartir un subarco con pa_j. Esto es absurdo ya que $pa_k \cap pa_j = \{p\}$.

Es claro que si p es terminal, entonces p no es de corte, las otras dos hipótesis del teorema también son necesarias para que p sea de corte, véase la figura 9 .



a) p no es terminal, no es esencial, pero no es suave, entonces no es de corte

b) p no es terminal, es suave pero es esencial, entonces no es de corte

Figura 9

3. Puntos Orilla.

3.1. Definición

Diremos que un punto $x \in X$ (respectivamente $S \subseteq X$) está en la orilla de X si $\forall\ \varepsilon > 0$, existe $A \in C(X)$ tal que $D(A,X) < \varepsilon$ y $x \notin A$ (resp. $S \cap A = \phi$)

Es fácil ver que la siguiente definición es equivalente a la anterior:

Diremos que x (repectivamente S) está en la orilla si para cada función de Whitney $\mu:C(X)$ I y $\lambda \in [0,1)$ existe $A \in C(X)$ con $\mu(A) > \lambda$ tal que $x \notin A$ (resp. $S \cap A = \phi$)

3.2 Ejemplos

i) En las figuras 6(a) y 6(b), los puntos de la línea rosa y los puntos terminales son los puntos orilla.

ii) En el cono del conjunto de Cantor, todos los puntos, excepto el vértice, están en la orilla.

3.3 Teorema

Si v es un punto de corte de un dendroide X, entonces v no está en la orilla.

Demostración

Supongamos que $X - \{v\} = U \cup V$ donde U y V son abiertos ajenos no vacíos de X. Entonces $U \cup \{v\}$ y $V \cup \{v\}$ son elementos de $C(X)$. Sea μ una función de Whitney de $C(X)$ y

$\lambda = \max \{\mu(U \cup \{v\}), \mu(V \cup \{v\})\}$, entonces $\lambda < 1$ y si $\mu(A) > \lambda$ entonces $v \in A$, lo que demuestra que v no es orilla.

La implicación inversa es falsa : En el dendroide de la figura 10 el punto p no es de corte y no está en la orilla

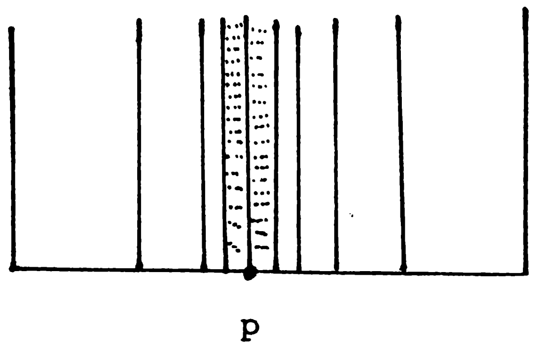


Figura 10

3.4 Teorema

Sea X un dendroide. Si $q \in X$ es un punto orilla que no es terminal y no es esencial entonces X no es suave en q.

Demostración.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n \in C(X)$ tal que $D(A_n,X) < 1/n$ y $q \notin A_n$. Por lo tanto hay una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a q y tal que $q_n \in A_n$. Supongamos que existe un arco α en X que contiene a q_n para una infinidad de índices n , entonces $q \in \alpha$

y, como q no es terminal, podemos suponer que existe $q^1 \in \alpha$ tal que q está entre q^1 y q_n para una infinidad de índices n. Sea $\{q_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a q^1 y tal que $q_n^1 \in A_n$. El arco $q_nq_n^1$ está contenido en A_n y por lo tanto no contiene a q, así que $gr\ q_n > 2$, lo que implica que q es esencial, contrario a la hipótesis.

Como q no es esencial $gr(q)$ es finito y entonces existe un arco α con un extremo en q para el cual los arcos $qq_n \cap \alpha = qp_n$, con $p_n \neq q$ y $p_n \neq q_n$ $\forall$ n salvo un número finito. Si p es un punto límite de $\{p_n\}$, p es esencial y por lo tanto $p \neq q$. Si X fuera suave en q, $\lim qq_n = q$. Pero $\lim qq_n = \lim (qp_n \cup p_nq_n) = qp \cup \lim p_nq_n$ lo que muestra que $p = q$. Esta contradicción termina la prueba del teorema

3.5 Teorema

Sea X un dendroide suave en p, supongamos que p no es esencial y que todos los puntos esenciales de X están en la orilla. Si en el arco pq, el único punto esencial es **q**, entonces **q** es del tipo II y existe una sucesión $\{q_n\} \subseteq pq$ tal que $gr\ (q_n) > 2$ y $\lim q_n = q$.

Demostración

El corolario 2.8 implica que hay un punto en pq que es suave y que no es terminal. Sin perder generalidad llamaremos de nuevo p a este punto y, entonces podemos afirmar, por el teorema anterior, que p no está en la orilla.

Como q es esencial, q está en la orilla de X así que existen continuos A_n tales que $D(A_n,X) < 1/n$ y $q \notin A_n$. Como p no está en la orilla $p \in A_n$ si n es suficientemente grande.

Si el $gr(q) = 1$ entonces q tiene que ser del tipo II y la sucesión $\{q_n\}$ es como en el enunciado del teorema.

Supongamos que $gr\ q \geq 2$ y sea $u \in X$ tal que $pq \cap uq = \{q\}$.

Como $q \notin A_n$, $u \notin A_n$. Pero $\{A_n\}$ converge a X, así que debe existir $u_n \in A_n$ tal que $\lim u_n = u$. A partir de cierta n, $u_n \notin pq$, ya que $u \notin pq$.

Llamemos $q_n \in pq$ al punto para el cual $pq \cap pu_n = pq_n$, entonces $q_n \in A_n$ pues $p, u_n \in A_n$. Sea q_o un punto límite de $\{q_n\}$.

Si $q_o = q_n$ para una infinidad de índices n, entonces $q_o \in A_n$ y por lo tanto $q_o \neq q$. Como, además $q_o \in pq$, q_o no esesencial, así que hay un arco α con un extremo en q_o tal que para una infinidad de índices n, $q_ou_n \cap \alpha = q_oy_n$ con $y_n \neq q_o$. Es claro que $gr\ y_n > 2$, así que $\lim y_n = y \neq q_o$. Pero entonces

$$\lim pu_n = \lim(py_n \cup y_nu_n) = py \cup yu \neq pu$$

y esto contradice la suavidad de p.

De modo que el conjunto $\{q_n | n\in\mathbb{N}\}$ es infinito y $gr(q_n) > 2$ lo que implica que $\lim q_n$ es esencial. Como este límite es elemento de pq entonces $\lim q_n = q$ y esto demuestra el teorema.

4. Funciones Continuas en Dendroides Suaves

En esta sección utilizaremos funciones continuas en dendroides suaves similares a las que aparecen en [4] .

4.1. Lema

Sea X un dendroide suave en p y $\mu : C(X) \quad [0,1]$ una función de Whitney

i) Si $H_p : X \times I \quad X$ es la función definida para $(x,t) \in X \times I$ como el elemento $H_p(x,t)$ de px para el cual $\mu(pH_p(x,t)) = t\mu(px)$ entonces H_p es continua.

ii) Si $A \in C_p(X)$ y $0 \leq s \leq t \leq 1$, entonces

$$U = \bigcup_{x \in A} H_p(\{x\} \times [s,t]) \in C(X)$$

y las funciones $\psi_p : I \longrightarrow C(X)$ y $J : C(X) \times I \longrightarrow C(X)$ definidas por

$$\psi_p(t) = \bigcup_{x \in X} H_p(\{x\} \times [0,t]) \quad \text{y} \quad J(A,t) = \bigcup_{x \in A} H_p(x,t)$$

son continuas.

Demostración

La continuidad de H_p, ψ_p y J se sigue de la continuidad de la función de Whitney, de la continuidad de la función $\bigcup$ y de la suavidad de X en p.

ii) Para la conexidad de $\mathbf{U}$, obsérvese que $\{p\} = H_p(p,s)$, para cualquier $s \in [0,1]$. Como $p \in A$ entonces $p \in \mathbf{U}$, por lo cual, bastará demostrar que si $v \in \mathbf{U}$ entonces el arco pv está contenido en $\mathbf{U}$. Sea $v = H_p(x,r)$ donde $x \in A$ y $r \in [s,t]$ y sea $u \in pv$. Entonces las desigualdades $r\mu(pp) = 0 \leq \mu(pu) \leq \mu(pv) = r\mu(px)$ implican la existencia de un elemento $y \in px \cap A$ para el cual $\mu(pu) = r\mu(py)$ y esto demuestra que $u \in \mathbf{U}$ ya que $u = H_p(y,r)$

4.2. Lema

Sea X un dendroide suave en p y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un árbol $T\hat{}$ y una retracción $r\hat{}:X \longrightarrow T\hat{}$ tal que si $A \in C_p(X)$ y definimos $r(A) = r\hat{}(A) \cup pr\hat{}(A)$, entonces $\mathbf{D}(A,r(A)) < \varepsilon$.

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen un árbol T_n y una retracción $r_n : X \longrightarrow T$ tales que $d(x,r_n(x)) < 1/n$. ([3]). La sucesión $\{r_n(p)\}$ converge a p, así que la sucesión de arcos $\{pr_n(p)\}$ converge a $\{p\}$ y, por lo tanto, $\mathbf{D}(pr_n(p),p) < \varepsilon$ si $n > n_o$.
Fijemos $n > \max\{n_o,1/\varepsilon\}$ y hagamos $T\hat{} = T_n$ y $r\hat{} = r_n$.
Bastará demostrar que para cada $\mathbf{a} \in A$, $d(\mathbf{a},r(A)) < \varepsilon$ y para cada $\mathbf{b} \in r(A)$, $d(b,A) < \varepsilon$.
Si $\mathbf{a} \in A$, $\hat{r}(\mathbf{a}) \in r(A)$ y $d(\mathbf{a},\hat{r}(\mathbf{a})) = = d(\mathbf{a},r_n(\mathbf{a})) < \varepsilon$.
Si $\mathbf{b} \in \hat{r}(A)$, entonces $\mathbf{b} = \hat{r}(\mathbf{a})$ y $d(\mathbf{b},\mathbf{a}) < \varepsilon$.
Por último, como $pr\hat{}(A) \subseteq pr\hat{}(p)$, y $d(p,p\hat{r}(p)) < \varepsilon$ entonces, si $\mathbf{b} \in p\hat{r}(A),d(p,\mathbf{b})) < \varepsilon$ y como $p \varepsilon A$, esto termina la prueba del teorema.

4.3. Teorema

Sean X un dendroide suave en p y $\mu : C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney. Sea $\lambda_0 \in [0,1)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un árbol T que contiene a p y funciones continuas $R : \mu_p^{-1}(\lambda_0) \longrightarrow \mu_p^{-1}(\lambda_0) \cap C(T)$ y $\hat{R} : \mu_p^{-1}[\lambda_0,1] \longrightarrow \mu_p^{-1}[\lambda_0,1] \cap C(T)$ tales que $D(A,R(A)) < \varepsilon$ y $D(A,\hat{R}(A)) < \varepsilon$

Demostración

Sea $\delta > 0$ tal que si $D(A,B) < \delta$ entonces $|\mu(A) - \mu(B)| < 1- \lambda_0$. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\varepsilon < \delta$.

Sean $\beta > 0$ tal que si $A \subseteq B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \beta$ entonces $D(A,B) < \varepsilon$ (ver 2.2, capítulo I) . Finalmente, sea $0 < \alpha < \varepsilon/2$ tal que si $D(A,B) < \alpha$ entonces $|\mu(A) - \mu(B)| < \beta$.

Por el lema anterior, existe $T\hat{}$ un árbol y $r\hat{}:X \longrightarrow T\hat{}$ una retracción tales que $D(A,r(A)) < \alpha$. (r es la función definida en el lema anterior).

Por el teorema 1.2 de este capítulo, r es continua y su imagen está contenida en $T = T\hat{} \cup pr\hat{}(T\hat{})$ que también es un árbol.

Es claro que $D(X,T) \le D(X,T\hat{}) < \alpha$, lo que implica $\mu(T) > \lambda_0$.

Sean ahora $h_1,h_2:C_p(T) \times I \longrightarrow C_p(T)$ definidas como

$$h_1(A,t) = \bigcup_{x\in A} H_p(x,1-t) \quad \text{y} \quad h_2(A,t) = A \cup \bigcup_{x\in T} H_p(x,t)$$

Si $\mu(A) \ge \lambda_0$, existe $\hat{h}_1(A) \in h_1(\{A\} \times [0,1])$ tal que $\mu(\hat{h}_1(A)) = \lambda_0$ y si $\mu(A) \le \lambda_0$ existe $\hat{h}_2(A) \in h_2(\{A\} \times [0,1])$ tal que $\mu(\hat{h}_2(A)) = \mu(A)$ (véase el teorema de cambio de parámetro, en la sección 2 del capítulo I)

Sean $A \in \mu_p^{-1}(\lambda_0)$ y $R(A) = \begin{cases} \hat{h}_1(r(A)) & \text{si } \mu(r(A)) \geq \lambda_0 \\ \hat{h}_2(r(A)) & \text{si } \mu(r(A)) \leq \lambda_0 \end{cases}$

$A \in \mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$ y $\hat{R}(A) = \begin{cases} r(A) & \text{si } \mu(r(A)) \geq \lambda_0 \\ \hat{h}_2(r(A)) & \text{si } \mu(r(A)) \leq \lambda_0 \end{cases}$

Para demostrar que R y $\hat{R}$ son continuas basta observar que $\hat{h}_1$, $\hat{h}_2$ y r lo son y $\hat{h}_1(r(A)) = r(A) = \hat{h}_2(r(A))$ si $\mu(r(A)) = \lambda_0$. Por otro lado $D(A,r(A)) < \alpha \Rightarrow |\mu(A) - \mu(r(A)| < \beta$. Pero $\mu(A) = \mu(R(A))$ si $A \in \mu_p^{-1}(\lambda_0)$ y $\mu(A) \geq \mu(R(\hat{A}))$ si $A \in \mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$. Así que $|\mu R(A) - \mu r(A)| < \beta$ y $|\mu\hat{R}(A) - \mu r(A)| < \beta$ lo que implica que $D(R(A),r(A)) < \varepsilon/2$ ya que $r(A) \subseteq R(A)$ o viceversa y que $D(\hat{R}(A),r(A)) < \varepsilon/2$ ya que $r(A) \subseteq \hat{R}(A)$

Finalmente $D(A,R(A)) \leq D(A,r(A)) + D(r(A),R(A)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ y lo mismo es válido para $\hat{R}$.

4.4 Teorema.

Sea X un dendroide suave en p y supongamos que algún punto esencial q_0 de X no está en la orilla. Sea $\mu:C(X) \longrightarrow [0,1]$ una función de Whitney y $\lambda \in [0,1)$ con la propiedad de que $\mu(A) \geq \lambda \Rightarrow q_0 \in A$. Entonces

a) Existe una función $F : \mu_p^{-1}[\lambda,1] \longrightarrow \mu_p^{-1}[\lambda,1]$, continua tal que $F(A)$ es un dendroide con una infinidad de puntos terminales y $\mathbf{D}(A,F(A)) < \varepsilon$.

b) Para toda $\alpha > \lambda$ existe una función $G : \mu_p^{-1}(\alpha) \longrightarrow \mu_p^{-1}(\alpha)$ continua, tal que $G(A)$ tiene una infinidad de terminales y $\mathbf{D}(A,G(A)) < \varepsilon$.

Demostración

Podemos asegurar que si $A \in \mu_p^{-1}(\lambda)$ entonces A contiene un punto q esencial tal que X es suave en q (corolario 2.8). Sea $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $A \subseteq B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta(\varepsilon)$ entonces $\mathbf{D}(A,B) < \varepsilon$.

a) Sea $\hat{F}(A,t) = A \cup \psi_q(t)$, $A \in \mu_p^{-1}[\lambda,1]$ y $t \in [0,1]$.

Puesto que las funciones ψ_q (lema 4.1) y $\cup$ son continuas, $\hat{F}$ es continua.

Para cada $A \in \mu_p^{-1}[\lambda,1]$, $\hat{F}(\{A\} \times [0,1])$ es un arco ordenado con extremos en A y en X, por lo tanto existe un único elemento $F(A) \in \hat{F}\left(\{A\} \times [0,1]\right)$ para el cual

$\mu(F(A)) = \min\,\{\mu(A) + \delta/2,\ 1\}$ donde $\delta = \delta(\varepsilon)$. Es claro que A está propiamente contenido en $F(A)$ y que, por la forma en que se definió $\hat{F}$, $F(A)$ tiene una infinidad de terminales (figura 11). La distancia $\mathbf{D}(A,F(A)) < \varepsilon$ debido a la forma en que se eligió δ. La continuidad de F se sigue del teorema de cambio de parámetro.

b) Definimos $\hat{J}:\mu_p^{-1}(\alpha) \times [0,1] \longrightarrow C(X)$ como

$\hat{J}(A,t) = \bigcup_{x \in A} H_q(x,1-t)$. Por el lema 4.1 ii), $\hat{J}$ es continua y para cada $A \in \mu_p^{-1}(\alpha)$, $\hat{J}\Big(\{A\} \times [0,1]\Big)$ es un arco ordenado con extremos en $\{q\}$ y en A. Sea $\delta = \delta(\varepsilon/2)$ y $\eta = \min\{\delta, \alpha-\lambda\}$. Existe un único $J(A) \in \hat{J}(\{A\} \times [0,1])$ tal que $\mu(J(A)) = \alpha - \eta \geq \lambda$. Entonces $J(A)$ contiene a q. La función G estará definida por $G(A) = F(J(A))$ donde F es la función del inciso a), sustituyendo a $\delta/2$ por η, así obtenemos, por un lado, $\mu(G(A)) = \mu(J(A)) + \eta = \alpha$ y, por otro,

$$\mathbf{D}(A,G(A)) \leq \mathbf{D}(A,J(A)) + \mathbf{D}(J(A), G(A)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2,$$

debido a la forma en que se eligió δ. Es claro que G es continua y que $G(A)$ contiene una infinidad de terminales.

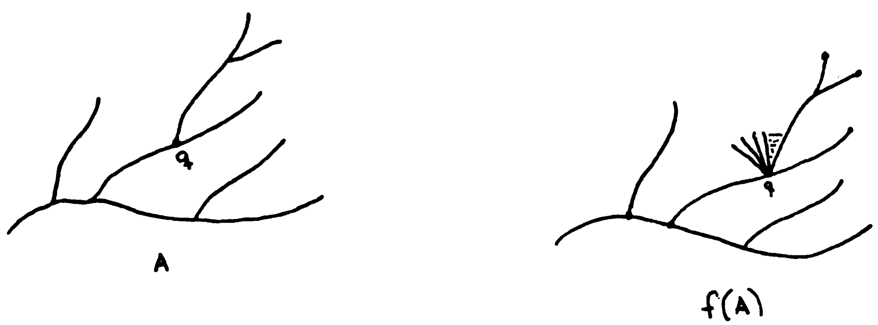


Figura 11

C A P I T U L O I I I

H I P E R E S P A C I O S C O N P U N T A

D E C O N O

1. Definiciones y Ejemplos.

1.1. Definición

Sea X un continuo y μ un mapeo de Whitney para $C(X)$. El hiperespacio $C(X)$ tiene punta de cono respecto a μ, si existe $\lambda \in [0, \mu(X))$ tal que $K(\mu^{-1}(\lambda)) \cong \mu^{-1}[\lambda,1]$.

Si F es un homeomorfismo entre estos dos conjuntos, llamaremos a F homeomorfismo de cono.

Si para algún homeomorfismo de cono, F, la imagen del vértice del cono es X, diremos que $C(X)$ tiene punta de cono con vértice en X.

Si $F|\mu^{-1}(\lambda)x\{0\}$ es la identidad, diremos que $C(X)$ tiene punta de cono con la base fija.

El homeomorfismo de cono F preserva niveles de Whitney si $F|\mu^{-1}(\lambda)x\{t\}$ es un homeomorfismo sobre $\mu^{-1}(\alpha(t))$ donde α es un homeomorfismo de $[0,1]$ en $[\lambda,1]$ con $\alpha(0) = \lambda$.

1.2. Definición.

Sea $A \in C(X)$ y $C_A(X) = \{ K \in C(X) \mid A \subseteq K \}$. Diremos que $C(X)$ tiene punta de cono relativa a A si

$$\mu^{-1}([\lambda,1]) \cap C_A(X) = K(\mu^{-1}(\lambda) \cap C_A(X)),$$

para alguna $\lambda \in [0,\mu(X)]$.

1.3. Ejemplo

Sea X el continuo de la figura 12(a). Clasificaremos a los subcontinuos de X en dos tipos:

i) Subcontinuos que contienen a p.

ii) Subcontinuos que están contenidos en uno sólo de los arcos pv_k , $k = 1,2,3$, de X.

(Naturalmente estas dos familias tienen intersección no vacía). Los que contienen a p se pueden representar mediante coordenadas (x,y,z), $0 \leq x, y, z \leq 1$, en el espacio euclideano de tres dimensiones. Con esta representación, la imagen de esta familia de subcontinuos es el cubo de la figura 12(b). Los subcontinuos de la familia ii) son los subcontinuos de un intervalo así que se pueden representar mediante un triángulo que queda pegado al cubo como se muestra en la figura 12(b). Para demostrar que el cubo con alitas de la figura 12(b) es homeomorfo a C(X) se utilizan argumentos similares a los del ejemplo I.1.2.

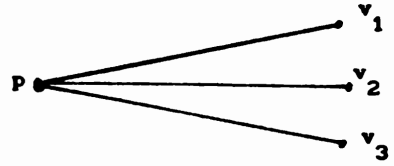
Claramente $C(X) \not\approx K(X)$ ya que K(X) tiene dimensión 2.

Supongamos que la longitud de cada uno de los arcos que van de el punto p a los extremos, v_1, v_2, v_3, tiene longitud 1/3, de modo que $\mu(X) = 1$ y sea μ la función de Whitney en C(X) que asocia su longitud a los subcontinuos considerados en ii) y a los subcontinuos K, considerados en i), la suma $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ donde α_k es la longitud de $K \cap pv_k$

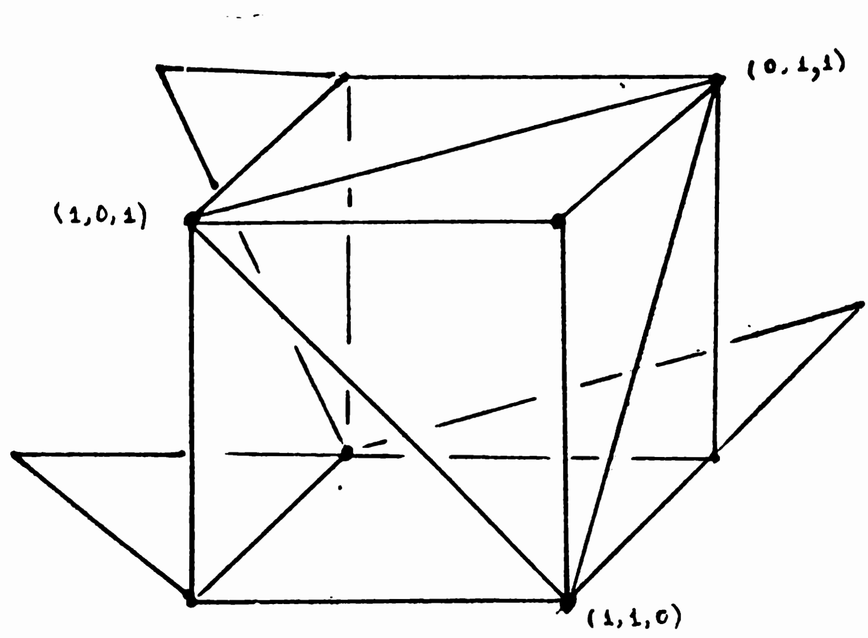
Ahora bien si P es el plano que pasa por los puntos (1,1,0), (1,0,1) y (0,1,1) entonces

$$P \cap \text{Cubo} = \mu^{-1}(2/3) \quad y \quad \mu^{-1}([2/3,1]) = K(\mu^{-1}(2/3))$$

lo cual se puede observar en el dibujo. Esto demuestra que C(X) tiene punta de cono con vértice en X y la base fija.



(a)



(b)

Figura 12

2. Graficas Finitas.

En esta sección demostraremos que el hiperespacio de una gráfica finita tiene punta de cono.

2.1.Definiciones.

Una gráfica finita es una terna $(V,\mathcal{A},\psi)$ donde V y $\mathcal{A}$ son conjunto finitos (vértices y aristas resp.) ajenos y $\psi : \mathcal{A} \longrightarrow V^{(2)}$, es una función de $\mathcal{A}$ en el conjunto $V^{(2)}$ de pares no ordenados de V.

Es bien conocido que toda gráfica $X = (V,\mathcal{A},\psi)$ se puede representar en $\mathbb{R}^3$ de la manera siguiente :

A cada vértice u de X le corresponde un punto x_u de $\mathbb{R}^3$.

A cada arista $a \in \mathcal{A}$, le corresponde un arco $\alpha(a)$ de x_u a x_v , si $\psi(a) = \{u,v\}$.

Si $\alpha(a) \cap \alpha(a') \neq \phi$, entonces $\psi(a) \cap \psi(a') \neq \phi$ y $\alpha(a) \cap \alpha(a') = \{x_u : u \in \psi(a) \cap \psi(a')\}$.

Si $u \in V - \psi(a)$, entonces $x_u \notin \alpha(a)$. (Esta condición es redundante cuando X no tiene puntos aislados).

Diremos que la gráfica G es conexa si el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que la representa $(\{x_u : u \in V\} \cup \bigcup_{a\in\mathcal{A}}\alpha(a))$ es conexo.

Para cada $a \in \mathcal{A}$ fijaremos un homeomorfismo entre el intervalo $[0,1]$ y $\alpha(a)$.

2.2 Lema.

Sea X una gráfica finita y μ un mapeo de Whitney para 2^X. Entonces existe $\lambda \in [0,1)$ tal que $\forall\ K \in 2^X$ que satisface $\mu(K) \geq \lambda$ se tiene $K \cap \mathrm{Int}\,a \neq \phi\ \forall\ a \in \mathcal{A}$.

Demostración.

Para cada $a \in \mathcal{A}$ denotemos por X_a a cualquier subconjunto abierto no vacío de X contenido en a y diferente de Int$a$. Los conjuntos $X-X_a$ son cerrados y $\mu(X-X_a) < 1$. Como $\mathcal{A}$ es finito, si hacemos $\lambda = \max\{ \mu(X - X_a):a \in \mathcal{A} \}$ entonces λ satisface las condiciones del lema.

2.3. Definiciones:

Sea λ como en el lema anterior y $K \in \mu^{-1}[\lambda,1] \cap C(X)$.

Para cada $a \in \mathcal{A}$ hay cuatro posibilidades:

i) $K \cap a = [0,u] \cup [v,1]$, $0,u,v,1 \in a$ y $0 \leq u < v \leq 1$

ii) $K \cap a = [0,u]$, $0 < u < 1$

iii) $K \cap a = [v,1]$ $0 < v < 1$

iv) $K \cap a = a$.

En cada uno de los primeros tres casos definimos:

a) El centro de K en a, $c(K,a) = c$, como:

i) $c = u/(u+1-v)$; ii) $c = 1$; iii) $c = 0$.

b) En los cuatro casos, para cada $t \in [0,1]$,

i) $u(t) = tc + (1-t)u$; $v(t) = tc + (1-t)v$ y

$Ka(t) = [0,u(t)] \cup [v(t),1]$

ii) $u(t) = t + (1-t)u$ y $Ka(t) = [0,u(t)]$

iii) $v(t) = (1-t)v$ y $Ka(t) = [v(t),1]$

iv) $Ka(t) = a$ y

c) $Ka[0,1] = \{Ka(t):t \in [0,1]\} \subseteq C(X)$

d) En cualquiera de los tres primeros casos, denotaremos por

$C_0(K\cap a)$ a la componente conexa de $K\cap a$ que contiene a 0 y por $C_1(K\cap a)$ a la componente conexa de $K\cap a$ que contiene a 1.

e) La función $f: \mu^{-1}(\lambda) \times I \longrightarrow \mu^{-1}[\lambda,1]$ estará definida por

$$f(K,t) = \bigcup_{a\in A} Ka(t).$$

Para verificar que f está bien definida , observemos que $u = u(0) \leq u(t) \leq u(1) = c = v(1) \leq v(t) \leq v(0) = v$, de hecho $u(t)$ y $v(t)$ recorren linealmente una trayectoria de u a c y de v a c, respectivamente.

Debido a lo expuesto en el párrafo anterior, $K \subseteq f(K,t)$ $\forall$ $t \in I$ por lo que $\mu f(K,t) \geq \lambda$.

Es conexo por trayectorias debido a que K lo es y $\forall$ $x \in f(K,t)$ hay una trayectoria de x a K, como ya vimos arriba.

Por otra parte, puesto que f está definida como unión finita de cerrados, $f(K,t)$ es cerrado.

2.4.Lema.

i) La definición de centro es independiente del sentido del homeomorfismo que elegimos al identificar a con el intervalo $I = [0,1]$.

ii) Para cada $a \in A$, las funciones

$$K \longrightarrow c(K,a), \ (K \in \mu^{-1}(\lambda) - \{K|K \cap a \neq a\});$$

$$(u,t) \longrightarrow u(t) \text{ y } (v,t) \longrightarrow v(t)$$

son continuas.

Demostración

i) Sea $a \in \mathcal{A}$ una arista para la cual $K \cap a \neq a$ y sea ϕ definido en I el homeomorfismo con el cual identificamos a a con I.

Sea h definida en I como $h(t) = 1-t$ y $\psi = \phi \circ h$ el homeomorfismo que identifica a a con I en el sentido inverso al de ϕ.

Si interpretamos el centro de K en a como $\phi(c)$ donde c se define como en 2.4 (a) entonces, cuando el homeomorfismo es ψ, el centro de K en a es $\psi(1-v/1-v-1+u+1) = \phi(h(1-v/u-v+1) =$ $= \phi(u/u-v+1) = \phi(c)$.

La verificación de ii) es inmediata.

2.5.**Teorema**

a) El hiperespacio de C(X) de una gráfica finita tiene punta de cono con vértice en X y base fija.

Más aún:

b) Si f^* es el homeomorfismo de cono, para cada $K \in \mu^{-1}(\lambda)$, el conjunto $\{f^*(K,t) : t \in I\}$ es un arco ordenado con extremos en K y en X y la función $f^*(K,t)$ es una función creciente de t. Esto es: $f^*(K,s) \subset f^*(K,t)$ si $s < t$.

c) Existe un homeomorfismo de cono que preserva niveles de Whitney.

Demostración:

Sea f la función que definimos en 3e) y f^* como en la demostración del lema I.3.1.

Como $K\alpha(0) = K \cap \alpha \ \forall \ \alpha \in A$, entonces $f(K,0) = K$. Esto demuestra que f^* preserva la base. Además $K\alpha(s) \subset K\alpha(t)$ si $s < t$ lo que demuestra la afirmación del inciso b). Por otra parte $K\alpha(1) = \alpha$ $\forall \ \alpha \in A$, así que $f(K,1) = X$, lo cual demuestra la hipótesis i) del lema I.3.1. y que f^* manda al vértice del cono en X.

Demostraremos que f es continua y satisface la hipótesis ii) del lema I.3.1.

Continuidad:

Sean (K,s), $(K_n,s_n)_{n=1}^{\infty} \in \mu^{-1}(\lambda) \times I$ y supongamos que (K_n,s_n) converge a (K,s). Para demostrar que $f(K_n,s_n)$ converge a $f(K,s)$ utilizaremos la igualdad que está antes de la definición I.1.2.

Sea $x \in f(K,s)$, entonces $x \in \alpha$ para alguna $\alpha \in A$ y, ya que los demás casos se demuestran en forma análoga, podemos suponer, sin perder generalidad que $x \in Co(f(K,s) \cap \alpha)$.

Ahora, si $Co(K \cap \alpha) = [0,u]$ y $x \notin K$, entonces $u > 0$ y $x = u(t)$ donde $0 < t \leq s$.

Por la convergencia de K_n a K, si $Co(K_n \cap \alpha) = [0,u_n]$ entonces $\lim u_n = u$ y, por lo tanto, para una infinidad de valores de n, $u_n > 0$.

Ahora bien, si $t < s$, entonces, para una infinidad de valores de n, $t < s_n$. Esto implica que $u_n(t) \in f(K_n,s_n)$.

Pero $\lim u_n(t) = u(t) = x$, así que $x \in \lim f(K_n,s_n)$.

Si $t = s$, entonces la sucesión $\{u_n(s_n)\}$ converge a x y de nuevo $x \in \lim f(K_n,s_n)$.

Si $x \in K$ entonces $x \in \lim K_n \subseteq \lim f(K_n,s_n)$.

Ahora supongamos que $x \in \lim f(K_n,s_n)$. Entonces una sucesión $\{x_n\}$, $x_n \in f(K_n,s_n)$ converge a x.

Si para una infinidad de valores de n, $x_n \in K_n$, entonces $x \in K \subset f(K,s)$. Supongamos, entonces que $x_n \notin K_n$ para casi toda n.

Ya que la gráfica X tiene solamente un número finito de aristas, hay una $a \in \mathcal{A}$ que contiene a x_n para una infinidad de valores de n y podemos también suponer que $x_n \in Co(f(K_n,s_n) \cap a)$. Si $Co(K_n \cap a) = [0,u_n]$, entonces $x_n = u_n(t_n), 0 < t_n \leq s_n$.

Por otra parte, si $\lim u_n = u$, entonces $Co(K \cap a) = [0,u]$ y $u_n(t_n)$ converge a $u(t)$ para alguna t entre 0 y s, lo que demuestra que $x = u(t) \in f(K,s)$ y esto demuestra la continuidad de f.

Demostraremos que f es inyectiva.

Sean (K_1,s_1) y (K_2,s_2) elementos distintos del dominio de f.

Si $K_1 = K_2$ entonces, sin pérdida de generalidad, $s_1 < s_2$. De la definición de f se sigue que $f(K_1,s_1)$ está propiamente contenido en $f(K_2,s_2)$.

Supongamos que $K_1 \neq K_2$ y que para alguna $a \in A$, $K_1 \cap a$ y $K_2 \cap a$ no son comparables, es decir, ninguno de ellos está contenido en el otro.

Si $K_1 \cap a = [0,u_1] \cup [v_1,1]$ y $K_2 \cap a = [0,u_2] \cup [v_2,1]$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \leq u_1 < u_2$ y $v_1 < v_2 \leq 1$. Entonces el centro c_1, de K_1 en a y el centro c_2, de K_2 en a satisfacen la relación $c_1 < c_2$ y, por lo tanto, $\forall\ t \in I$

$$u_1(t) < u_2(t) \ldots (1) \quad \text{y} \quad v_1(t) < v_2(t) \ldots (2)$$

(véase la figura 13)

Si $f(K_1,s_1) = f(K_2,s_2)$ entonces $K_1a(s_1) = K_2a(s_2)$. Esto implica, por la desigualdad (1), que $s_1 > s_2$ y por (2), que $s_1 < s_2$.

Ahora supongamos que $K_1 \cap a$ y $K_2 \cap a$ son comparables $\forall\ a \in A$. Como $K_1 \neq K_2$, entonces $K_1 \cap b \neq K_2 \cap b$ para alguna $b \in A$. Digamos que el primer conjunto está contenido en el segundo. Entonces $K_1b(s) \subset K_2b(s)\ \forall\ s \in I$ y por lo tanto si $K_1b(s_1) = K_2b(s_2)$, debe cumplirse $s_1 > s_2$. Pero $\mu(K_1) = \lambda = \mu(K_2)$, así que $K_1 \cap e \supset K_2 \cap e$
para alguna $e \in A$. El mismo razonamiento que hicimos para la arista b, nos conduce a concluir que si $f(K_1,s_1) = f(K_2,s_2)$ entonces $s_1 < s_2$ lo que demuestra que f es inyectiva.

Para demostrar que f es suprayectiva, sea $H \in \mu^{-1}[\lambda,1]$ y $a \in A$

Si $H \cap a \neq a$ entonces $C_0(H \cap a) = [0,\hat{u}]$ ó ϕ y $C_1(H \cap a) = [\hat{v},1]$ ó ϕ.
Denotamos por $\hat{c}$ al centro de H en a.
Cuando $\hat{u} \neq 0$, definimos $t_a^o = \hat{u}/\hat{c}$ y $u(t) = (\hat{u} - t\hat{c})/(1 - t)$

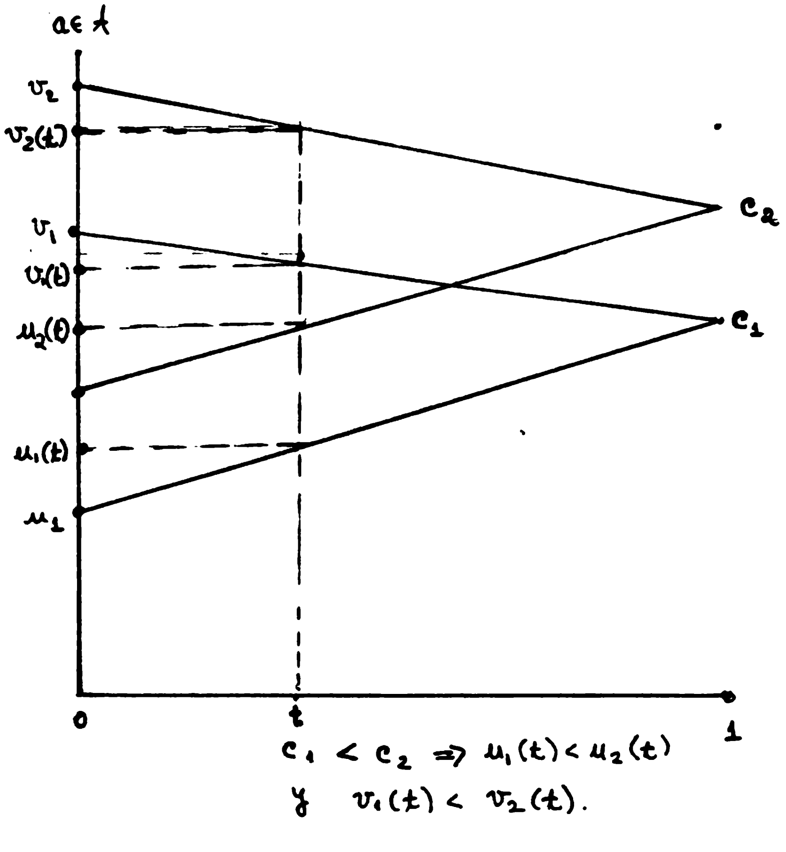


Figura 13

Si $K_1 \cap a$ y $K_2 \cap a$ no son comparables, entonces $K_1 a(s_1) \neq K_2 a(s_2)$.

para $t \in [0,t_a^o]$. Nótese que $\mathbf{u}(0) = \hat{u}$ y $\mathbf{u}(t_a^o) = 0$

Si $\hat{u} = 0$, definimos $\mathbf{u}(t) = 0 \ \forall \ t \in I$

Si $\hat{v} \neq 1$, definimos $t_a^1 = (1 - \hat{v})/(1 - \hat{c})$ y

$\mathbf{v}(t) = (\hat{v} - t\hat{c})/(1 - t)$ para $t \in [0,t_a^1]$. Análogamente $\mathbf{v}(0) = \hat{v}$ y $\mathbf{v}(t_a^1) = 1$

Si $\hat{v} = 1$, entonces $\mathbf{v}(t) = 1 \ \forall \ t \in I$.

Es claro que las funciones **u** y **v** dependen de la arista a.

Nótese .también que si $\hat{u} \neq 0$ y $\hat{v} \neq 1$, $t_a^o = t_a^1$. Denotamos por t_a a $t_a^o = t_a^1$.

Definiremos $t_a = t_a^1$, si $\hat{u} = 0$, y $t_a = t_a^o$, si $\hat{v} = 1$.

El centro $\mathbf{c}(t)$ de la arista $[0,\mathbf{u}(t)] \cup [\mathbf{v}(t),1]$ es igual a $\hat{c}$ independientemente de t.

Verificaremos la última afirmación:

$c(t) = (\hat{u} - t\hat{c})/(\hat{u} - \hat{v} + 1 - t)$. Sabemos que $\hat{c} = \hat{u}/(\hat{u} - \hat{v} + 1)$, y de aquí, $\hat{u} = \hat{c}(\hat{u} - \hat{v} + 1)$, así que

$\mathbf{c}(t) = (\hat{c}(\hat{u}-\hat{v}+1) - t\hat{c})/(\hat{u}-\hat{v}+1-t) = \hat{c}(\hat{u}-\hat{v}+1-t)/\hat{u}-v\hat{+}1-t = \hat{c}.$

Definimos ahora $Ha(t) = a \ \forall \ t \in I$ si $H \cap a = a$.

En los demás casos, para $t \in [0,t_a]$

$$Ha(t) = \begin{cases} [0,\mathbf{u}(t)] \cup [\mathbf{v}(t),1] \text{ si } C_0(H\cap a) \text{ y } C_1(H\cap a) \text{ son ambos, no vacíos} \\ [0,\mathbf{u}(t)] \text{ si } C_1(H\cap a) \text{ es vacío} \\ [\mathbf{v}(t),1] \text{ si } C_0(H\cap a) \text{ es vacío} \end{cases}$$

Si $to = \min \{t_a : a \in A\}$ entonces $0 < to = t_a$ para alguna $a \in A$.

Sea ψ definida para $t \in [0,t_0]$ como

$\psi(t) = \left\{Ha(t)\right\}_{a\in A} \in 2^{2^X}$. Es fácil verificar que ψ es una función continua, cuando 2^{2^X} es el hiperespacio de cerrados de 2^X y la función $\mu\circ\bigcup\circ\,\psi$ que asocia a cada $t \in [0,t_0]$ la medida de Whitney μ de $\bigcup\limits_{a\in A} Ha(t)$ es también continua.

Por otro lado $\mu(\bigcup(\psi(0))) = \mu(H) \geq \lambda$ y por la forma en que elegimos λ, $\mu\bigcup\psi(t_0) < \lambda$.

Por el teorema del valor intermedio existe $\tau \in [0,t_0)$ tal que $\mu(\bigcup(\psi(\tau))) = \lambda$.

Sea $K = \bigcup(\psi(\tau)) = \bigcup\limits_{a\in A} Ha(\tau)$, entonces $K\cap a = Ha(\tau)$ y, por lo tanto $Ka(\tau) = [0,\tau\hat{c}+(1-\tau)\mathbf{u}(\tau)] \cup [\tau\hat{c}+(1-\tau)\mathbf{v}(\tau)] = [0,\hat{u}] \cup [\hat{v},1] = H \cap a$ cuando $Ha(\tau) = [0,\mathbf{u}(\tau)] \cup [\mathbf{v}(\tau),1]$. En los otros dos casos posibles para $Ha(\tau)$, la demostración es similar. Esto demuestra que $f(K,\tau) = H$.

Por todo lo que se demostró arriba, f satisface las hipótesis del lema I.3.1 y, por lo tanto f^* es un homeomorfismo de cono con las propiedades del enunciado del teorema.

c) Para cada $A \in \mu^{-1}(\lambda)$ $f^*(\{A\} \times I)$ es un arco ordenado con extremos en A y en X. Sea $h(A,t) \in f^*(\{A\} \times I)$ tal que $\mu(h(A,t)) = (1-t)\lambda + t$. Entonces h es un homeomorfismo de cono y preserva niveles de Whitney.

3. Dendroides Suaves.

3.1 Teorema

Sea X un dendroide suave en p y supongamos que X contiene un punto esencial que no está en la orilla. Entonces para toda función de Whitney $\mu : C(X) \longrightarrow I$, existe $\lambda_o \in [0,1)$ tal que

$$K(\mu_p^{-1}(\lambda_o)) \cong Q \cong \mu_p^{-1}[\lambda_o,1]$$

donde Q es el cubo de Hilbert.

Aun más: existe un homeomorfismo h entre $K(\mu_p^{-1}(\lambda))$ y $\mu_p^{-1}[\lambda,1]$ tal que $H(A,0) = A \ \forall\ A \in \mu_p^{-1}(\lambda)$ y $h(A \times \{1\}) = X$ *i.e.* C(X) tiene punta de conoo con vértice en X y la base fija.

Demostración

Ya que X contiene un punto esencial que no está en la orilla, existe $\lambda \in [0,1)$ y un punto esencial en X contenido en cada A para la cual $\mu(A) > \lambda$.

Por el corolario 2.7, podemos suponer que existe un punto esencial q tal que X es suave en q y $q \in A$ si $A \in \mu_p^{-1}[\lambda,1]$.

Sea $1 > \lambda_o > \lambda$. Para demostrar que los espacios $\mu_p^{-1}[\lambda_o,1]$ y $\mu_p^{-1}(\lambda_o)$ son cubos de Hilbert, utilizaremos la siguiente caracterización (véase [13]).

Un espacio métrico M localmente compacto es homeomorfo al cubo de Hilbert si y sólo si

i) M es un ANR, contractible y

ii) el conjunto de funciones Zeta en $C(I^k,M)$ es denso en $C(I^k,M)$.

(Un espacio métrico es AR (resp. ANR) si $\forall$ espacio métrico Y, $K \subseteq Y$ cerrado y $f : K \longrightarrow M$ continua, existe una extensión continua de f a Y (resp. a una vecindad de K en Y).)

La propiedad i) se cumple, para $M = \mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$ y $M = \mu_p^{-1}(\lambda_0)$ ya que, por ser compactos, ambos espacios son localmente compactos y puesto que ambos son AR ([6]), entonces son ANR .

Como $K = M \times \{0\} \cup M \times \{1\}$ es cerrado en $M \times I$, entonces , si M es AR, la función $f : K \longrightarrow M$, definida por $f(x,0) = x$ y $f(x,1) = x_0 \in M$ $\forall$ $x \in M$, tiene extensión continua a $X \times I$ y, por lo tanto nuestros espacios M son contractibles.

Además por ser compactos y métricos, ambos espacios son separables así que, para probar la propiedad ii) demostraremos que dadas h_1, $h_2 \in C(I^k,M)$ (en este caso M es $\mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$ ó $\mu_p^{-1}(\lambda_0)$) y $\varepsilon > 0$, existen $\hat{h}_1$, $\hat{h}_2 \in C(I^k,M)$ tales que $D(\hat{h}_i(t),\hat{h}_i(t)) < \varepsilon$ $i=1,2$ y $\hat{h}_1(I^k) \cap \hat{h}_2(I^k) = \phi$. (Véase el párrafo despues de I.5.2)

Dadas las funciones h_1, h_2 y la $\varepsilon > 0$, definimos:

$\hat{h}_1 = R \circ h_2$ y $\hat{h}_2 = G \circ h_2$, donde R es la función del teorema II.4.3. y G la del teorema II.4.4.a), en el caso en el que $M = \mu_p^{-1}(\lambda_0)$. Debido a que $\lambda_0 > \lambda$, y λ satisface la hipótesis del teorema 4.4, G está bien definida y se sigue inmediatamente de los teoremas mencionados que $\hat{h}_1$ y $\hat{h}_2$ son continuas y que $D(\hat{h}_i(t),h_i(t)) < \varepsilon$, $i = 1,2$.

Ahora bien, la imagen de un punto, bajo R, es un subcontinuo de un árbol y, por lo tanto, es un árbol, mientras que la imagen de un punto bajo G, contiene una infinidad de terminales, de modo que no es un árbol. Esto demuestra que las imagenes de $\hat{h}_1$ y $\hat{h}_2$ no se intersectan.

Para el caso de $M = \mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$, $\hat{h}_1 = \hat{R} \circ h_1$ y $\hat{h}_2 = F \circ h_2$, donde $\hat{R}$es la función del teorema II.4.3 y F la del teorema II.4.4.a). La demostración de que ambas funciones satisfacen las condiciones requeridas es análoga a la del caso anterior.

Por otra parte, $K(\mu_p^{-1}(\lambda_0))$ es homeomorfa a K(Q) y este último espacio es homeomorfo a Q ([1], teorema 12.2).

Los conjuntos $\mu_p^{-1}(\lambda_0) \times \{0\}$ y $\mu_p^{-1}(\lambda_0)$ son subconjuntos Z de $K(\mu_p^{-1}(\lambda_0)$ y $\mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$,respectivamente (Ejemplo I.5.2 y teorema 1 del capítulo III). Por otra parte, demostramos también, en el ejemplo I.5.2 que el vertice de un cono es un subconjunto Zeta del cono . Demostraremos que el punto $X \in \mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$, es tambiên un subconjunto Zeta. Para esto, tomemos $F : Q \longrightarrow \mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$ una funcióon continua y $\varepsilon > 0$. Sea $f : Q \longrightarrow \mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$ definida por $f(q) = \hat{R}(f(q))$ donde $\hat{R}$ es la función del teorema II.4.3, entonces f es continua y dista de F en menos que ε . Si A es un elemento de la imagen de $\hat{R}$ entonces A es un subcontinuo de un árbol, de modo que $X \notin \mathrm{Im}\, f$. (Estamos suponiendo que X tiene una infinidad de terminales pues el otro caso queda incluido en el teorema 2.5).

Por otra parte, es fácil verificar que la unión finita de subconjuntos Zeta es subconjunto Zeta

Sea j la función definida en $\mu_p^{-1}(\lambda_0) \times \{0\} \cup \mu_p^{-1}(\lambda_0) \times \{1\}$ en

$\mu_p^{-1}[\lambda_0,1] \cup \{X\}$, $j(A,0) = A$ y $j(\mu_p^{-1}(\lambda_0) \times \{1\}) = X$. Entonces existe un homeomorfismo que es una extension de esta función a todo Q ([1] 11.1) lo que demuestra la última afirmación del teorema.

3.2 Corolario

Si X es suave en p y p es esencial entonces

$$K(\mu_p^{-1}(\lambda_0) \cong Q = \mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$$

para cualquier funcióon de Whitney μ y cualquier $\lambda_0 > 0$.

Demostración

La demostración es la misma que la del teorema anterior ya que la hipótesis de un punto esencial que no esté en la orilla solamente se utiliza para asegurar que todo $A \in \mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$ contiene a este punto esencial . Pero en este caso, el punto esencial $p \in A$ $\forall$ $A \in \mu_p^{-1}[\lambda_0,1]$ por hipótesis .

3.3 **Teorema**

Sea X un dendroide suave en p y supongamos que el conjunto de todos los puntos esenciales de X está en la orilla. Si p no es esencial y si $\mu:C(X) \longrightarrow I$ es una función de Whitney y $\lambda \in I$, entonces $K(\mu_p^{-1}(\lambda))$ no es homeomorfo a $\mu_p^{-1}[\lambda,1]$.

Demostración

Supongamos que para alguna $\lambda \in [0,1)$ existe un homeomorfismo

$h : K(\mu_P^{-1}(\lambda)) \longrightarrow \mu_P^{-1}[\lambda,1]$. Sea $V = h(\mu_P^{-1}(\lambda) \times \{1\})$ y supongamos que

i) V contiene algún punto esencial. Sea $q \in V$ tal que en el arco pq el único punto esencial es q, entonces q es del tipo II y existe una sucesión $\{q_n\} \subseteq pq$ tal que $\mathrm{gr}\, q_n > 2$ y $\lim q_n = q$ (teorema II.3.5). Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $pq_n \subseteq pq_{n+1}$.

Por otra parte, la hipótesis implica que hay un continuo $A \in \mu_P^{-1}(\lambda)$ que no contiene ningún punto esencial.

Supongamos que alguna $y \in pq$, no es elemento de $h(A,t)$ $\forall\, t < 1$. Si $y \neq q$, podemos suponer que algún elemento $x \in (p, x)$ tiene esta misma propiedad.

Como $p, q \in V$, entonces $x \in V$, así que hay una sucesión $\{x_n\}$, con $x_n \in h(A,1-1/n)$, que converge a x. Pero $px_n \subseteq h(A, 1-1/n)$ así que $x \notin px_n$ y esto implica que cada arco de X sólo puede contener un número finito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$

Por el lema 2.5 hay un punto esencial en px. La única posibilidad es $x = q$.

Debido a lo anterior, para toda $N \in \mathbb{N}$, existe $t < 1$ tal que $\{q_1,\dots q_N\} \subseteq h(A,t)$ y por lo tanto la dimensión de $B_\delta(h(A,t))$ es mayor o igual que N $\forall\, N$ y $\forall\, \delta$ (véase la demostración del teorema II.2.10).

Pero como A no tiene puntos esenciales, $\dim B_\delta(A,0)$ es finita $\forall\, \delta$ suficientemente pequeña (teorema II.2.10) y como $\dim B_\delta(A,0) = \dim B_\delta(A,t)$ $\forall\, t \in [0,1)$ esto es una contradicción.

ii) Supongamos ahora que V no tiene puntos esenciales. Entonces $B_\delta(V)$ tiene dimensión finita si δ es pequeña; pero X tiene puntos esenciales y si $h(A,t) = X$, entonces A tiene puntos esenciales y por lo tanto toda bola abierta con centro en $h(A,t)$ tiene dimensión infinita. Pero $h(A,t) \subseteq B_\delta(V)$ si t es suficientemente cercana a 1 y esto es una contradicción.

Pregunta

¿Si cada uno de los puntos esenciales de un dendroide suave están en la orilla, entonces el conjunto de puntos esenciales está en la orilla ?

Si la respuesta a esta pregunta es afirmativa, entonces los teoremas 2.1 y 2.2 se pueden enunciar como

El hiperespacio C(X) de un dendroide suave X tiene punta de cono relativa a p si y sólo si algún punto esencial de X no está en la orilla o si p es esencial .

BIBLIOGRAFIA

1. Chapman T. A. Lectures on Hilbert Cube Manifolds. Publ. Am. Math. Soc. (1976).

2. Charatonik J. J. and Eberhart Carl. On Smooth Dendroids. Fund. Math. LXVIII (1970), págs. 296 a 322.

3. Fugate J. B. Small Retraction of Smooth Dendroids onto Trees Fund. Math. LXXI (1971) págs 255 a 262.

4. Goodykoontz Jack T. Arc-Smoothnes in Hyperspaces. Topology and its Appl. 15 (1983) págs 131 a 150.

5. Kelly J.L. Hyperspaces of a Continuum. Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942) págs 22 a 36.

6. Lynch Mark. Whitney levels in $C_p(X)$ are ARS. Proc. of the Am. Math. Soc. 97 #4, 1986 págs 748 a 750.

7. Macías Sergio. Un Estudio Sobre los Dendroides Suaves Tesis de Maestría, Fac, de Ciencias UNAM, (1987).

8. Montejano Luis. Introducción a la Topología de Dimensión Infinita. (Apuntes, no publicados.)

9. Nadler Sam B. Hyperspaces of Sets. Marcel Dekker Inc.

10. Nadler Sam B. Continua whose Cone and Hyperspace are Homeomorphic. Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1977).

11. Ramsey F.P. On a Problem of Formal Logic. Proc. London Math. Soc. 30 (1930) págs 264 a 286.

12. Rogers J.T. The Cone = Hyperspace Property. Can. J. Math. XXIV (1972) págs 279 a 285.

13. Torúnczyck H. On CE images of the Hilbert Cube and Characterizations of Q-Manifolds. Fund. Math. CVI (1980) págs. 31 a 40.

14. Whitney H. Regular Families of Curves I. Proc. Nat. Acad. Sci. 18 (1931) págs 275 a 278.

15. Ward L.E. Extending Whitney Maps. Pacific J. Math. (1981) págs 465 a 469.