UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

LOS TEOREMAS DE Yu. S. ILYASHENKO SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ANALITICAS EN EL PLANO PROYECTIVO COMPLEJO.

T E S I S

Que para obtener la

Maestría en Ciencias

(M A T E M A T I C A S)

P r e s e n t a :

LAURA ORTIZ BOBADILLA

Cd. Universitaria, Octubre, 1986.

A mis padres ,

a mi hermana .

Al Dr. Xavier Gomez - Mont,
quien, como maestro y director
de esta tesis, me ha motivado
constantemente y ha sido un
factor decisivo e invaluable en
mi formacion .

I N D I C E .

APENDICES :

LOS TEOREMAS DE Yu.S.ILYASHENKO SOBRE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ANALITICAS EN EL PLANO PROYECTIVO COMPLEJO .

En este trabajo se estudian las ecuaciones diferenciales analíticas que tienen un número finito de puntos singulares en el plano proyectivo complejo. Estas ecuaciones, como se demostrará en la sección 2.1, coinciden con la clase de ecuaciones que, en una vecindad afín (z,w), se escriben como ecuaciones racionales de la forma

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)} .$$

Lo primero que haremos , es clasificar a estas ecuaciones por el grado de P y Q : diremos que dos ecuaciones están en la clase $\mathcal{A}_n$ si P y Q son polinomios de grado no mayor que n. Se observa que esta clasificación depende de la carta afín elegida ; sin embargo, como habremos de demostrar, dicha clasificación nos permite rescatar,entre el conjunto de ecuaciones, a aquellas que tienen las mismas propiedades que un un conjunto genérico de ecuaciones algebraicas .

El resultado principal que se demostrará es el Teorema de la Rigidez Absoluta; en él se establecen las condiciones necesarias para que dos ecuaciones topológicamente equivalentes, α y $\alpha' \in \mathcal{A}_n$, resulten analíticamente equivalentes . Concretamente , bastará pedir que la ecuación $\alpha \in \mathcal{A}_n$ cumpla ciertas condiciones que se satisfacen para subconjuntos abiertos y densos en $\mathcal{A}_n$, además de que el homeomorfismo que relaa α con $\alpha' \in \mathcal{A}_n$, sea cercano al homeomorfismo identidad (en la topología uniforme). Para demostrar este resultado, el camino que seguiremos es, a grandes rasgos, el siguiente : primero, transladaremos el problema de la equivalencia topológica de las ecuaciones α y $\alpha' \in \mathcal{A}_n$, a la equivalencia topológica de los grupos de holonomía ,$\mathcal{F}_\alpha$,$\mathcal{F}_{\alpha'}$, de la solución al infinito (aquí se da por entendido que nos restringimos al caso en que las ecuaciones que tienen a la recta al infinito como solución) . Después, mediante un proceso de "linealización", se demuestra que la equivalencia topológica de los grupos de holonomía, $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{F}_{\alpha'}$,conlleva la equivalencia analítica de los mismos. Posteriormente, se demuestra un resultado sobre la densidad de las soluciones en CP^2, de las ecuaciones α en $\mathcal{A}_n$, conocido como el Teorema de Xuday-Verenov. Así, con esto en mente, se pasa a la demostración del Teorema de la Rigidez Fuerte que es, en esencia, el teorema de la rigidez absoluta restringido al caso de una familia monoparamétrica de ecuaciones en $\mathcal{A}_n$. De aquí, mediante una serie de construcciones cuidadosas se demuestra el teorema de la rigidez absoluta .

Este trabajo, que consta de ocho capitulos y cuatro apéndices, está basado, fundamentalmente, en el artículo de Yu.S.Ilyashenko,"Topología de los retratos de fase de las ecuaciones diferenciales analíticas en el plano proyectivo complejo", publicado en 1978 en los Trabajos del Seminario Petrovsky, por la Universidad de Moscú . En esencia, se respetó la estructura propuesta en el trabajo de Ilyashenko aunque, en algunos casos se realizaron ciertas modificaciones o se agregaron demostraciones de hechos que se afirman el el trabajo original .

Por último, quisiera agradecer en forma muy especial a Xavier Gomez-Mont el haberme sugerido este material tan interesante, así como el haberme apoyado y motivado tan profundamente durante todo este tiempo ; por sus invaluables comentarios, sugerencias y ante todo por su trato cálido y amigable, ha sido para mi, un guía excepcional . Quisiera, así mismo , agradecer a mi compañero Ernesto Rosales, quien no sólo me dio el cariño y las fuerzas para seguir adelante, sino que me ayudó con sus comentarios y me apoyó en los momentos más difíciles .

1. INTRODUCCION.

En este trabajo se plantea como problema, el estudio de las ecuaciones diferenciales en el plano proyectivo complejo, CP^2, que tienen un número finito de singularidades . Uno de los primeros resultados que habremos de demostrar, es que la clase de dichas ecuaciones coincide con la clase de aquellas ecuaciones que en una vecindad afín arbitraria (z,w) se escriben como

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)} \qquad \ldots(1.1)$$

donde P y Q son polinomios en las variables z y w. Esta expresión nos permite clasificar las ecuaciones en función del grado de P y de Q : si (z,w) es una vecindad fija, decimos que la ecuación (1.1) pertenece a la clase $\mathcal{A}_n$ si P y Q son polinomios de grado no mayor que n.

A la clase $\mathcal{A}_n$ podemos identificarla con el espacio complejo de los coeficientes de los polinomios P y Q de grado no mayor que n. Observamos que, el espacio de coeficientes del polinomio $P(z,w)$ de grado n tine dimensión $(n+1)(n+2)/2$ y, en consecuencia, el espacio de coeficientes para ecuaciones de la forma (1.1) tiene dimensión $(n+1)(n+2)$; dicho espacio dotado de la medida de Lebesgue .

DEFINICION - (equivalencia topológica).

Decimos que dos ecuaciones α y $\alpha' \in \mathcal{A}_n$ son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $H: CP^2 \dashrightarrow CP^2$ que lleve las soluciones de la ecuación α en las soluciones de la ecuación α'. Si H es analítico , entonces decimos que α y α' son analíticamente equivalentes.

Un concepto íntimamente ligado a la equivalencia topológica es el de la estabilidad estructural. En forma vaga, podemos decir que la estabilidad estructural nos indica cuándo se tiene que ecuaciones cercanas a una ecuacion dada son topológicamente equivalentes a ella.

DEFINICION - (estabilidad estructural)

Decimos que la ecuación α es estructuralmente estable en la clase $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_n$ si existe una vecindad V de α en $\mathcal{A}$, tal que para toda $\alpha' \in V$, α' es topológicamente equivalente a α .

Mencionamos a continuación un resultado ligado al concepto de estabilidad estructural y que habremos de demostrar más adelante.

TEOREMA -

Para $n \geq 2$ la clase de ecuaciones $\mathcal{A}_n$ no es estructuralmente estable.

Es importante hacer notar que la afirmación del teorema anterior no implica que no existan clases de ecuaciones contenidas en $\mathcal{A}_n$ tales que sus elementos sean estructuralmente estables en dichas clases. Un ejemplo de este hecho lo constituye el espacio $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n$ formado por las ecuaciones hamiltonianas $dH = 0$, donde H es un polinomio de grado no mayor que n+1.

La siguiente definición nos dará la clave de lo que habremos de entender por ecuaciones " típicas ".

DEFINICION- (propiedades genéricas).

Decimos que una propiedad de una ecuación $\alpha \in \mathcal{A}_n$ es genérica si el conjunto de aquellas ecuaciones para las cuales no se cumple tiene medida cero. Así mismo, decimos que una propiedad de una ecuación es de Petrovsky-Landis si el conjunto de aquellas ecuaciones que no la poseen no divide a $\mathcal{A}_n$ (es decir, el conjunto de aquellas ecuaciones que la cumplen es conexo en $\mathcal{A}_n$).

Si una propiedad es genérica en $\mathcal{A}_n$ decimos entonces que las ecuaciones para las cuales se cumple son genéricas.

El principal resultado de este trabajo, que habremos de demostrar en la sección 8, es el siguiente teorema.

TEOREMA DE RIGIDEZ ABSOLUTA .

Para la ecuacion genérica $\alpha\in\mathcal{A}_n$ existe una vecindad U_α de α y una vecindad $\mathcal{H}$ del homeomorfismo identidad, $CP^2 \dashrightarrow CP^2$, en la topología uniforme, tal que toda ecuación $\alpha'\in U_\alpha$ topológicamente equivalente a α por medio de un homeomorfismo $H\in\mathcal{H}$, es analíticamente equivalente a α .

1.1. CONCEPTOS Y DEFINICIONES BASICAS .

En esta sección introducimos algunos conceptos que resultan básicos para la comprensión de las secciones posteriores.

Inicialmente hablaremos sobre el espacio proyectivo de dimensión n , CP^n ($n\in\mathbb{N}$), para después restringir nuestro estudio al caso en que $n = 2$.

Consideremos el espacio $n+1$ - dimensional de los números complejos C . Una recta L_z por el origen, en C, queda totalmente determinada por un elemento $z\in C$ distinto de cero $L_z = \{\lambda z = (\lambda z_0,\dots,\lambda z_n)\ ;\ \lambda\in C\}$. El espacio proyectivo complejo CP^n, de dimensión n, es el espacio constituído por el conjunto de rectas que pasan por el origen en C^{n+1}:

$$CP^n = \{ z\in C^{n+1};\ z\neq 0 \} / \{\lambda z\}_{\lambda\in C}$$

A la clase de equivalencia del vector $(z_0,\dots,z_n)$ se le denota $(z_0:\dots:z_n)$.

Se puede dotar a CP^n de una estructura de variedad analítica (ver apéndice) considerando los abiertos U_i de CP^n, $U_i = \{ (z_0:\dots:z_n)\in CP^n,\ z_i\neq 0 \}$ de CP^n y los homeomorfismos $\varphi_i : U_i \dashrightarrow C^n$, definidos por

$$(z_0:\dots:z_n) = \left(\frac{z_0}{z_i},\dots,\frac{z_{i-1}}{z_i},\frac{z_{i+1}}{z_i},\dots,\frac{z_n}{z_i}\right)$$

En $\varphi_i(U_i\cap U_j)\subset C^n$, el cambio de coordenadas

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}(z_0,\dots,z_n) = \left(\frac{z_0}{z_j},\dots,\frac{\hat{z}_j}{z_j},\dots,\frac{1}{z_j},\dots,\frac{z_n}{z_j}\right)$$

es holomorfo.

A las coordenadas $z = (z_0:\dots:z_n)$ se les conoce como coordenadas homogéneas en CP^n y, a la imagen bajo φ_i de $(z_0:\dots:z_n)$, $\left(\frac{z_0}{z_i},\dots,\frac{z_{i-1}}{z_i},\frac{z_{i+1}}{z_i},\dots,\frac{z_n}{z_i}\right)$ se le da el nombre de coordenadas afines.

El espacio complejo C^n se halla incluído de manera natural en CP^n como

$$(z_1,\dots,z_n) \overset{i}{\hookrightarrow} (1:z_1:\dots:z_n)$$

Observamos que, con esta inclusión de C^n en CP^n, obtenemos todos los elementos de CP^n salvo aquellos de la forma $(0:z_1:\dots:z_n)$. Así, como $\{ (0:z_1:\dots:z_n) \}$ es isomorfo a CP^{n-1}, entonces $CP^n = C^n \cup CP^{n-1}$. Si consideramos los cocientes $w_i = z_i / z_0$ y permitimos que $z_0 = 0$, formalmente se tiene que $w = \infty$, por lo que se puede interpretar a CP^{n-1} como el conjunto de todas aquellas direcciones en C^n por las cuales se va a infinito en C^n. A $CP^{n-1}\subset CP^n$ se le conoce como el hiperplano al infinito y, para $n=2$, $CP^1\subset CP^2$ se conoce como la recta al infinito, demostrándose que CP^1 es homeomorfo a la esfera de dimensión dos S^2 (ver [4] p.18) .

Vamos a restringir nuestra atención al caso en que $n=2$. A los puntos en CP^2 que se encuentran en el complemento de la inclusión de C^2 en CP^2 los denominaremos puntos al infinito y, a los restantes, puntos finitos.

Nos interesa desarrollar el concepto de analiticidad para puntos de CP^2, para ello, haremos una distinción entre la analiticidad de una función en puntos finitos y la analiticidad en puntos infinitos.

DEFINICION -(analiticidad en puntos finitos)

Una función $f : CP^2 \dashrightarrow C$, $f(z_0:z_1:z_2) = w$, se dice que es holomorfa en un punto finito $(z_0:z_1:z_2)$ de CP^2, si la funcion es holomorfa en el punto (z_1,z_2); es decir si la composición $f\circ i : C^2 \dashrightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa en (z_1,z_2), donde i denota la inclusión de C^2 en CP^2.

$$\begin{tikzcd} CP^2 \arrow[r, "f"] & C \\ C^2 \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "f\circ i"'] & \end{tikzcd}$$

Consideramos ahora un punto al infinito $\hat{\eta} = (\eta_0 : \eta_1 : \eta_2)$ en CP^2 y una transformación proyectiva $\zeta' = A\zeta$ de CP^2 en CP^2 dada por

$$w_k = a_{k0}\zeta_0 + a_{k1}\zeta_1 + a_{k2}\zeta_2 \quad , a_{kj} \in C \ , \quad k,j = 0,1,2 \ ,$$

tal que $\det A \neq 0$. Bajo una elección apropiada de los coeficientes a_{kj}, el punto al infinito η puede verse como la imagen de un punto finito $\xi = (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2) \in CP^2$. Con esto en mente, podemos dar la siguiente definición.

DEFINICION -(analiticidad en puntos al infinito)

Decimos que la función $\omega = f(\zeta)$, $\zeta \in CP^2$, $w \in C$, es holomorfa en el punto al infinito η ,si la función $f(A\zeta)$ es holomorfa en el punto finito $\xi \in CP^2$, donde $\eta = A\xi$ y A es una matriz con coeficientes en C cuyo determinante es distinto de cero.

$$\begin{tikzcd} CP^2 \arrow[r, "f"] & C \\ CP^2 \arrow[u, "A"] \arrow[ur, "f\circ A"'] & \end{tikzcd}$$

El cambio de coordenadas de CP^2 en CP^2 que nos proporciona A induce un cambio de coordenadas afines, $\tilde{A}$, que nos permite analizar el comportamiento de la función f en los puntos al infinito : sean (z,w) coordenadas afines y sea $i\,(z,w)$ su inclusión en CP^2

$$(z,w) \overset{i}{\hookrightarrow} (1:z:w) \quad ;$$

para estudiar el comportamiento de f en una vecindad del infinito en z , consideramos la composición descrita en coordenadas por

$$\begin{tikzcd} (1:z:w) \arrow[r, dashed, "A"] & (\frac{1}{z}:1:\frac{w}{z}) \arrow[d, "p"] & \\ (z,w) \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, dashed, "\tilde{A}"] & (\frac{1}{z},\frac{w}{z})=(z_1,w_1) \arrow[r, dashed] & f(z_1,w_1) \end{tikzcd} \quad ,$$

y analizamos el comportamiento de $f(z_1,w_1)$ cuando $z_1 = 0$

De aquí en adelante, vamos a denotar por (z_1,w_1) a las coordenadas afines dadas por el cambio de coordenadas

$$(z_1,w_1) = \left(\frac{1}{z},\frac{w}{z}\right) \qquad \ldots(1.2)$$

las cuales nos permiten analizar el comportamiento de los puntos al infinito.

Al inicio del capítulo, al introducir las ecuaciones $\alpha \in \mathcal{A}_n$,dijimos que éstas eran tales que en una carta afín arbitraria (z,w) se escriben como

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}$$

donde P y Q son polinomios de grado no mayor que n. Consideremos el cambio de coordenadas (1.2) entre dos abiertos afines C^2 de CP^2 y veamos cual es la ecuación inducida en estas coordenadas por la ecuación (1.1) :

puesto que,

$$\frac{dw}{dt} = P(z(t),w(t)) \quad , \quad \frac{dz}{dt} = Q(z(t),w(t)) \quad ,$$

y

$$\dot{z}_1 = \frac{-\dot{z}}{z^2} \quad , \quad \dot{w}_1 = \frac{z\dot{w}-w\dot{z}}{z^2}$$

entonces,

$$\dot{z}_1 = -z_1^2\, Q\left(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1}\right) \quad , \quad \dot{w}_1 = z_1\, P\left(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1}\right) - Q\left(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1}\right)$$

Así,

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1\, Q\left(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1}\right)}{w_1 Q\left(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1}\right) - P\left(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1}\right)}$$

si ahora multiplicamos y dividimos por z , y definimos $\tilde{P}(z_1,w_1) = z_1^n P\left(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1}\right)$ y $\tilde{Q}(z_1,w_1) = z_1^n Q\left(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1}\right)$, entonces la ecuación anterior podemos reescribirla como

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1\, \tilde{Q}(z_1,w_1)}{w_1 \tilde{Q}(z_1,w_1) - \tilde{P}(z_1,w_1)} \qquad \ldots(1.3)$$

Un resultado importante con respecto a las transformaciones de CP^2 es el hecho de que los biholomorfismos de CP^2 en sí mismo, que preservan la línea al infinito, son, en cartas afines, transformaciones afines (en el apéndice

III, presentamos una demostración detallada de este hecho) Observamos que este resultado nos permite reenunciar el teorema de la rigidez absoluta sustituyendo "equivalencia analítica" por "equivalencia afín".

DEFINICION -(campo vectorial analítico)

Sea M una variedad compleja y sea TM su fibrado tangente. Un campo vectorial analítico X sobre M es una transformación holomorfa de M en TM, $X : M \dashrightarrow TM$, tal que la transformación $\pi \circ X : M \dashrightarrow M$ es la transformación identidad. En otras palabras, X es tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "id"'] & M \end{tikzcd}$$

Decimos que el campo X es singular en un punto p de M si $X(p) = 0$.

Es conveniente, sin embargo, ampliar un poco el concepto de campo vectorial introduciendo la noción de campo de direcciones en una variedad.

DEFINICION -(distribución o campo de direcciones)

Sea M^n una variedad compleja de dimensión n. Un campo de direcciones tangentes k-dimensionales o una distribución k-dimensional en M, es una transformación que asocia a cada punto $x \in M$, un subespacio de dimensión k del espacio tangente T_xM. Si dicha transformación es analítica en M, decimos que la distribución (o el campo de direcciones) es analítico en M.

En particular, en nuestro caso habrán de interesarnos únicamente las distribuciones 1-dimensionales, por lo que habremos de referirnos a ellas como campos de direcciones, quedando implícito que hablamos de campos de direcciones de dimensión uno.

Observamos que hablar de campos de direcciones equivale a asociar a cada punto de M un elemento del haz tangente proyectivizado $P(TM)$ (ver apéndice III).

DEFINICION -(distribución integrable)

Sea M^n una variedad y $\mathcal{D}$ una distribución k-dimensional en M. Decimos que $\mathcal{D}$ es integrable si, para cada punto $p \in M$, existe una variedad integral k-dimensional; es decir, una subvariedad k-dimensional de M cuyo espacio tangente en cada punto coincide con el subespacio k-dimensional asociado a dicho punto por la distribución. (En el caso en que $\mathcal{D}$ sea un campo de direcciones, las subvariedades son curvas)

DEFINICION -(foliación analítica)

Sea M^n una variedad compleja. Decimos que en M se encuentra definida una foliación analítica, si en cada punto p de M se encuentra definida una (y sólo una) subvariedad analítica de dimensión k que pasa por p y que depende analiticamente de los puntos de M. Además, se requiere que en una vecindad de cada punto de M, se halle definido un sistema coordenado $z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n$, tal que las superficies de nivel $z_{k+1} = c_1, \ldots, z_n = c_{n-k}$ sean precisamente las hojas de la foliación. Cada coleccion $(c_1, \ldots, c_{n-k})$ representa a una hoja distinta y $z_1, \ldots, z_k$ son coordenadas locales de cada hoja.

Si M es C^2 y se tiene definido en M un campo de direcciones holomorfo, que no se anula en ningun punto, entonces, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales (ver[3] p.35), la distribución es integrable y genera una foliación analítica de dimensión uno en M (sin singularidades).

En particular, siendo $M = C^2$ y el campo de direcciones el definido por la ecuación (1.1), entonces se tiene definida una distribución o un campo de direcciones integrable, salvo en aquellos puntos (z,w) en los que se satisface el sistema $P(z,w) = 0$, $Q(z,w) = 0$. Como hemos visto, dicho campo de direcciones induce en las coordenadas (z_1,w_1) un nuevo campo de direcciones de la forma (1.3), el cual habrá de ser integrable en todos los puntos de la vecindad coordenada, salvo en aquellos que satisfacen simultáneamente $z_1\tilde{Q}(z_1,w_1) = 0$, $w_1\tilde{Q}(z_1,w_1) - \tilde{P}(z_1,w_1) = 0$

Podemos ahora definir lo que habremos de entender por una solución de una ecuación diferencial $\alpha \in \mathcal{A}_n$. Esta definición se puede traducir casi palabra por palabra al caso mas general de ecuaciones diferenciales analíticas.

DEFINICION -(solucion de una ecuacion $\alpha \in \mathcal{A}_n$).

Una curva analítica φ se denomina solución de la ecuación $\alpha \in \mathcal{A}_n$, si vista en coordenadas afines arbitrarias, se tiene que, en cada uno de sus puntos, es tangente al campo de direcciones, es irreducible, completa (es decir, no esta contenida en ninguna curva irreducible analítica $\tilde{\varphi} \supset \varphi$ que sea tangente al campo de direcciones α) y no contiene a ningún punto singular de la ecuación (aún añadiéndole los puntos singulares se obtiene una curva analítica).

Observamos que al pedir que φ sea una curva analítica irreducible y al quitar los puntos singulares, estamos pidiendo que φ sea una variedad compleja conexa (ver [8] pag. 155). De hecho, la definición anterior nos dice que φ es una variedad compleja encajada en CP^2 (en consecuencia es una subvariedad conexa tangente al campo de direcciones). Así, la foliación por soluciones de la ecuación α nos da una partición del espacio (salvo en los puntos singulares) en curvas analíticas integrales del campo de direcciones definido por α.

A la solución con condición inicial p la denotamos φ_p.

Nuestro siguiente objetivo es ver cuándo se tiene que la línea al infinito constituye una solución para una ecuación $\alpha \in \mathcal{A}_n$.

Recordemos que analizar el comportamiento de una función $f(z,w)$ en los puntos al infinito equivale a pensar en el comportamiento de $f(z_1,w_1)$ cuando $z_1=0$. Lo primero que observamos es que las singularidades fijas de la ecuación (1.3) están dadas por los ceros comunes de

$$z_1\tilde{Q}(z_1,w_1)=0 \qquad \text{y} \qquad w_1\tilde{Q}(z_1,w_1) - \tilde{P}(z_1,w_1)=0$$

Si $p(w_1) = w_1\tilde{Q}(z_1,w_1) - \tilde{P}(z_1,w_1)\big|_{z_1=0}=0$, entonces la solución al infinito $\{z_1=0\}$ no podrá ser solución de la ecuación (1.3). Claramente, la expresión $z_1\tilde{Q}(z_1,w_1)$ se anula en la linea al infinito, de manera que, si $p(w_1)$ no es idénticamente cero, entonces el cociente

$$\frac{z_1\tilde{Q}(z_1,w_1)}{w_1\tilde{Q}(z_1,w_1) - \tilde{P}(z_1,w_1)}$$

es igual a cero para todo punto de la forma $(0,\hat{w}_1)$ tal que $\hat{w}_1$ no sea raíz del polinomio $p(w_1)=0$. Así, por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales analíticas (ver [3], pag 35), la recta al infinito $\{z_1=0\}$ es una solución de la ecuación (1.3) después de haberle sido extraídos los puntos singulares de la ecuación.

El polinomio $p(w_1)$ tiene grado n+1, de hecho, el polinomio en dos variables $w_1\tilde{Q}(z_1,w_1) - \tilde{P}(z_1,w_1)$ podemos escribirlo como

$$w_1\tilde{Q}(z_1,w_1) - \tilde{P}(z_1,w_1) = a_0(z_1)w_1^{n+1}+\dots+a_n(z_1) \quad ,$$

donde $a_j(z_1)$ denota un polinimio en z_1, j=1,...,n. Así, recordando un resultado de curvas algebraicas, se tiene que si $z_1=0$ no es un cero del polinomio $a_0(z_1)$ ni del discriminante de $w\tilde{Q}-\tilde{P}$, entonces el polinomio $p(w_1)$ tiene n+1 raíces distintas (ver [1],pags. 300-302)

Por lo anterior podemos afirmar que ecuaciones genéricas de Petrovsky - Landis $\alpha \in \mathcal{A}_n$ tienen la línea al infinito como solución y n+1 puntos singulares al infinito $(0,a_j)$ que, por brevedad, habremos de denotar como a_j. Al conjunto de dichas ecuaciones $\alpha \in \mathcal{A}_n$ lo denotaremos $\mathcal{A}_n'$. De hecho, $\mathcal{A}_n'$ constituye un abierto denso en $\mathcal{A}_n$, pues es el complemento de un conjunto analítico (ver apéndice II).

DEFINICION -(solución algebraica)

Decimos que una solucion φ de una ecuación $\alpha \in \mathcal{A}_n$ es una solución algebraica si φ, en coordenadas afines, está dada como el conjunto de ceros de un polinimio irreducible.

1.2 GRUPOS DE HOLONOMIA .

En la demostración del teorema de la rigidez absoluta vamos a seguir un camino que inicialmente nos llevará a plantear problemas de equivalencia topológica y analítica de grupos finitamente generados, de germenes de transformaciones conformes del espacio de los números complejos, C ,en sí mismo, que preservan el origen (germenes de biholomorfismos de $(C,0)$).

DEFINICION - (grupos marcados).

Denotemos por $\mathcal{F}$ al grupo de germenes de transformaciones conformes $(C,0) \dashrightarrow (C,0)$ con la operación de composición. Un subgrupo finitamente generado $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ se denomina marcado si en él se ha elegido un sistema ordenado de generadores $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n$.

Desde ahora estableceremos que a los germenes en $\mathcal{F}$ los denotaremos por $\mathbf{f}$ y a su representante lo denotaremos por f.

Un homomorfismo entre dos subgrupos marcados $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ con n generadores $\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n$ y $\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_n$ respectivamente , es un homomorfismo $k:\mathcal{F}_1 \dashrightarrow \mathcal{F}_2$ que transforma $\mathbf{f}$ en $\mathbf{g}$, para $j=1,\ldots n$.

DEFINICION -(equivalencia de grupos de germenes)

Dos subgrupos de germenes de transformaciones conformes $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ con n generadores se denominan topológicamente (analíticamente) equivalentes si existe un germen de homeomorfismo (biholomorfismo) $h:(C,0) \dashrightarrow (C,0)$ y un homomorfismo de grupos $k : \mathcal{F}_1 \dashrightarrow \mathcal{F}_2$, tal que , para cualquier $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_1$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(C,0) \arrow[r, "\mathbf{f}"] \arrow[d, "h"'] & (C,0) \arrow[d, "h"] \\
(C,0) \arrow[r, "k\mathbf{f}"] & (C,0)
\end{tikzcd} \qquad \ldots(1.4)$$

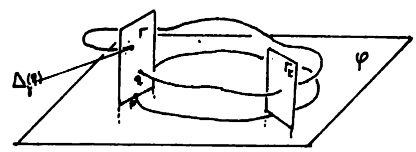
conmuta (la conmutatividad nos dice que k es un monomorfismo, pues si $k\mathbf{f} = id.$,entonces $\mathbf{f} = h^{-1}\cdot k\mathbf{f}\cdot h = h^{-1}\cdot id\cdot h =$ $= id$).

DEFINICION - (cíclos).

Los cíclos en una solución φ de una ecuación α (o los cíclos complejos de α) son los elementos no triviales del grupo fundamental $\pi_1(\varphi)$.

Recordemos que el grupo fundamental $\pi_1(X,x_0)$, donde X es un espacio topológico y $x_0 \in X$, representa al conjunto de clases de homotopía de curvas cerradas $\gamma : [0,1] \dashrightarrow X$ tales que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

Dada una ecuación α se tiene que a cada cíclo complejo γ que está en una solución φ de α, se halla asociada una transformación de retorno o transformación de holonomía denotada $\Delta_{\gamma,\alpha}$ o Δ_γ cuando α está fija:
Sea $\gamma :[0,1] \dashrightarrow \varphi$ el lazo representante de la clase $[\gamma]$, $[\gamma] \in \pi_1(\varphi)$ con $p = \gamma(0)$. Sea Γ_τ una transversal a la solución en el punto $\gamma(\tau)$ que depende contínuamente de τ y tal que $\Gamma_0 = \Gamma_1 := \Gamma$ es analítica.
Por el teorama de continuidad con respecto a condiciones iniciales , sabemos que existe una vecindad V del punto p, tal que, para cada elemento q de V, existe en φ_q una curva γ_q , $\gamma_q : [0,1] \dashrightarrow \varphi_q$, tal que $\gamma_q(\tau) \in \Gamma_\tau$ para toda $\tau \in [0,1]$. Denotemos por $\Delta_\gamma(q)$ al extremo final de la curva γ_q.



Así, por el teorema de dependencia analítica de las soluciones con respecto a condiciones iniciales, se tiene definida la transformación de retorno.

$$\Delta_\gamma : (\Gamma,p) \dashrightarrow (\Gamma,p)$$
$$q \dashrightarrow \Delta_\gamma(q)$$

Puede verse que el germen Δ de la transformación Δ_γ en el punto p no depende de la elección del representante en la clase $[\gamma] \in \pi_1(\varphi)$ (ver [9] ,pag 380).

De aquí en adelante vamos a suponer que la carta en la transversal (Γ,p) siempre se escogerá de modo que p tenga cooordenada 0 .

Antes de pasar a la definición de grupo de holonomía haremos unas observaciones relacionadas con la transformación Δ_γ .

En primer lugar observamos que en el caso de las ecuaciones de la clase $\mathcal{A}_n$ se tiene que las transversales a las soluciones son de dimensión compleja uno. Si el punto fijo de la transformación Δ_γ es aislado (aislado de otros puntos fijos) decimos que γ es un cíclo límite. Supongamos ahora que p no es un punto fijo aislado de Δ_γ y sea V una vecindad de p en (Γ,p), entonces existe una sucesión de puntos fijos de Δ_γ que tienden a p ; así, $\Delta_\gamma(q) - q = 0$ para una infinidad de puntos q en V y tienen como límite a $\Delta_\gamma(p) - p = 0$. Como Δ_γ es una función analítica en (Γ,p), entonces $\Delta_\gamma(z) - z \equiv 0$ para todo z en V. Lo anterior nos dice que Δ_γ es la transformación identidad y , en este caso, γ se denomina cíclo idéntico .

Sea φ una solución de la ecuación $\alpha \in \mathcal{A}_n$; sea Δ la transformación

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\varphi) & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{F} \\ \gamma & \longrightarrow & \Delta_\gamma \end{array}$$

que asocia, a cada curva $\gamma \in \pi_1(\varphi)$, el germen Δ_γ correspondiente. Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \pi_1(\varphi)$. Si consideramos el germen de la transformación de retorno asociado al producto de los lazos, $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, se tiene que éste corresponde a la composición de los germenes de las transformaciones de holonomía asociadas a cada uno de los lazos :

$$\Delta_{\gamma_1 \cdots \gamma_k} = \Delta_{\gamma_1} \circ \cdots \circ \Delta_{\gamma_k}$$

Por esta razón, Δ es un homomorfismo de grupos.

DEFINICION - (grupo de holonomía)

A la imagen de $\pi_1(\varphi)$ bajo la trasformación Δ se le denomina grupo de holonomía de la ecuación α sobre la solución φ y se denota $\mathcal{F}_{\alpha,\varphi}$.

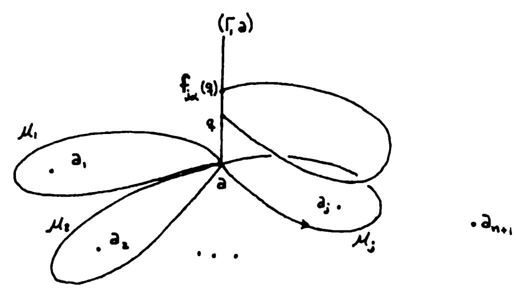
La elección de generadores del grupo $\pi_1(\varphi)$ transforma a φ en una superficie de Riemann marcada y a $\mathcal{F}_{\alpha,\varphi}$ en un subgrupo marcado del grupo $\mathcal{F}$.

1.3. GRUPO DE HOLONOMIA EN EL INFINITO.

En esta sección vamos a estudiar el grupo de holonomía de la solución al infinito de una ecuación $\alpha \in \mathcal{A}_n$. Nuestro particular interes en este grupo se debe a que, tanto la demostración del teorema de rigidez absoluta como en la demostración del teorema de Xuday-Verenov (sobre la densidad de las soluciones de las ecuaciones genéricas en la clase $\mathcal{A}_n$) , se usan fuertemente resultados ligados al grupo de holonomía sobre lo que se denomina solución al infinito F_α de la ecuación α ; en la obtención de dichos resultados habremos de usar el hecho de que el grupo fundamental $\pi_1(\varphi)$ es rico (es decir, es un grupo con n generadores).

Sea $\alpha \in \mathcal{A}_n'$ y consideremos la solución al infinito F_α de α. El grupo de holonomía $\mathcal{F}_{\alpha,F_\alpha}$, que por comodidad habremos de denotarlo como $\mathcal{F}_\alpha$, se encuentra unívocamente determinado si se fija un punto base "a" del grupo fundamental $\pi_1(F_\alpha)$ y una transversal $\Gamma \ni a$.

El grupo $\pi_1(F_\alpha)$ es un grupo libre con n generadores (lo cual es consecuencia del hecho de que la solución al infinito es una esfera con n+1 hoyos).En calidad de generadores pueden escogerse n lazos μ_j , j=1,...n, tales que cada uno rodee una sola vez al punto singular a_j y ninguna vez al punto a_i , para toda i≠j. Vamos a denominar a estos lazos, generadores canónicos (la elección no es única) La elección de dichos lazos se traduce en generadores canónicos del grupo $\mathcal{F}_\alpha$: $f_{j\alpha} = \Delta_{\mu_j,\alpha}$.



Es un hecho conocido que, si se tienen dos polinomios muy cercanos, sus raíces también lo son (ver [17], pag. 363); en consecuencia, para toda ecuación α' suficientemente cercana a α, los lazos μ_j asociados a α, son a su vez, generadores del grupo $\pi_1(F_{\alpha'})$, y los generadores $f_{j,\alpha'}$ de $\mathcal{F}_{\alpha'}$ dependen analíticamente de α'.

1.4. EQUIVALENCIA TOPOLOGICA DE ECUACIONES Y GRUPO DE HOLONOMIA.

Al estudiar las relaciones entre dos ecuaciones topológicamente equivalentes resulta fundamental analizar lo que sucede entre sus grupos de holonomía. Un resultado sencillo pero de gran importancia es que la equivalencia topológica de ecuaciones conlleva la equivalencia topológica de sus grupos de holonomía.

LEMA 1.1 -

Sean α^1 y $\alpha^2 \in \mathcal{A}_n$ ecuaciones topológicamente equivalentes y sea H el homeomorfismo que las conjuga. Consideremos una solución marcada φ^1 de la ecuación α^1 (es decir, una vez elegidos los generadores μ_j de $\pi_1(\varphi^1)$), $\varphi^2 = H(\varphi^1)$, y sean $\mu_{j_2} = H(\mu_{j_1})$ los generadores de $\pi_1(\varphi^2)$. Entonces los grupos marcados de holonomía $\mathcal{F}_{\alpha^1,\varphi^1}$ y $\mathcal{F}_{\alpha^2,\varphi^2}$ son topológicamente equivalentes; el homeomorfismo que los conjuga esta totalmente determinado por H.

DEMOSTRACION :

Sea "a^1" punto base del grupo fundamental $\pi_1(\varphi^1)$, $a^2 = H(a^1)$; Γ_1 y Γ_2 transversales a φ^1 y φ^2 en los puntos a^1 y a^2 respectivamente. Sea O_1 una vecindad de a^1 cuya foliación por soluciones de α^1 es topológicamente equivalente a la foliación estandar del bidisco $\{|z|<1\}\times\{|w|<1\}$ con w=cte. Sea $\pi^1: O_1 \dashrightarrow (\Gamma_1,a^1)$ la función de proyección a lo largo de las soluciones. Consideremos, además, la vecindad de "a^2" $O_2 = H(O_1)$ y $\pi^2: O_2 \dashrightarrow (\Gamma_2,a^2)$ el germen de la transformación proyección a lo largo de la solución. El siguiente diagrama conmutativo define un germen de homeomorfismo $h: (\Gamma_1,a^1) \dashrightarrow (\Gamma_2,a^2)$ (o bien, como acordamos anteriormente $h: (C,0) \dashrightarrow (C,0)$):

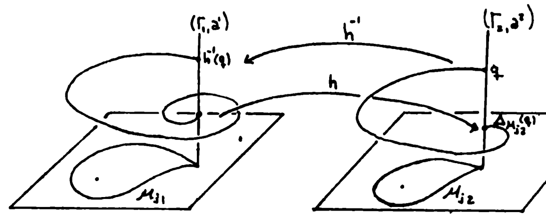
$$\begin{tikzcd} O_1 \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\pi^1"'] & O_2 \arrow[d, "\pi^2"] \\ (\Gamma_1,a^1) \arrow[r, "h"] & (\Gamma_2,a^2) \end{tikzcd} \qquad \ldots(1.5)$$

Sabemos que H lleva soluciones de α^1 en soluciones de α^2, nos preguntamos entonces como actúa h sobre los germenes de función definidos en (Γ_1,a^1): sea $q \in (\Gamma_2,a^2)$, vamos a encontrar $\Delta_{\mu_{j_2}}(q)$ calculando

$$\begin{aligned} h\circ\Delta_{\mu_{j_1}}\circ h^{-1}(q) &= h\circ\Delta_{\mu_{j_1}}(h^{-1}(q)) \\ &= h(\Delta_{\mu_{j_1}}(h^{-1}(q))) \\ &= \Delta_{\mu_{j_2}}(q). \end{aligned}$$

De esta manera, h hace corresponder los germenes de función del grupo $\mathcal{F}_{\alpha^1,\varphi^1}$ con los germenes del grupo $\mathcal{F}_{\alpha^2,\varphi^2}$.

//.



LEMA 1.1 -

Sea $\alpha \in \mathcal{A}_n$ una ecuación que no tiene soluciones algebraicas homeomorfas a la esfera con hoyos salvo F_α, sean μ_j, j=1,...,n, los generadores canónicos del grupo $\pi_1(F_\alpha,a)$ y sea $U_\alpha \subset \mathcal{A}_n$ una vecindad de α tal que los lazos μ_j sean generadores del grupo $\pi_1(F_{\alpha'},a)$ para $\alpha' \in U_\alpha$. Sea Γ transversal a $F_{\alpha'}$ en el punto "a" y sea $\mathcal{F}_{\alpha'}$ el grupo marcado de holonomía en (Γ,a) correspondiente a cada $\alpha' \in U_\alpha$. Supongamos que α y α' están ligados por el homeomorfismo H, para el cual $\|H-id\|_{CP^2} < \rho$ (donde por "id" entendemos la función identidad en CP^2). Entonces existe $\rho_0>0$ tal que si $\rho < \rho_0$, se tiene que $\mathcal{F}_\alpha$ y $\mathcal{F}_{\alpha'}$ son topológicamente equivalentes.

Observación : si las ecuaciones α y α' se encuentran ligadas por un homeomorfismo H , entonces α' no puede tener más que una solución homeomorfa a una esfera con agujeros (pues el género de una superficie es un invariante topológico). De hecho, como $\mathcal{A}_n'$ es un subconjunto abierto y denso de $\mathcal{A}_n$ puede escogerse U_α lo suficientemente pequeña, de manera que $U_\alpha \subset \mathcal{A}_n' \subset \mathcal{A}_n$. De esta manera, en el enunciado del lema no carece de sentido hablar de $\mathcal{F}_{\alpha'}$ para $\alpha' \in U_\alpha$. Por otra parte, como veremos más adelante, el conjunto de ecuaciones $\alpha \in \mathcal{A}_n$ que no tienen solución algebraica, homeomorfa a la esfera con hoyos, salvo F_α,es un abierto de Zarisky, es decir, es el complemento de un conjunto algebraico.

DEMOSTRACION :

Por la observación anterior, la recta al infinito F_α de la ecuación α , se transforma en la recta al infinito $F_{\alpha'}$ de α' ; $H(F_\alpha) = F_{\alpha'}$.

Sea "a" punto base de μ_j y O una vecindad del punto "a" cuya foliación sea topológicamente equivalente a la estandar. Podemos elegir ρ_0 suficientemente pequeño de modo que si $\|H-id\|_{C^1} < \rho_0$, la imagen de "a" bajo H esté contenida en la vecindad O; de esta manera podemos modificar H solamante en la vecindad O , de modo que $H(a) = a$. En la vecindad U_α , los puntos singulares $a_j = a_j(\alpha)$ dependen analíticamente de α . El conjunto de los puntos singulares $\{ a_j(\alpha) \}$ se transforma en el conjunto de puntos singulares $\{ a_j' = a_j(\alpha') \}$ (pues H es un homeomorfismo y lleva soluciones en soluciones), de modo que, para ρ suficientemente pequeño, $H(a_j) = a_j'$ y $H(\mu_j) = \mu_j$,para $j=1,\dots,n$.

El lema queda demostrado aplicando el lema 1.1 .

//.

1.5. GRUPO ESPECIAL DE TRANSFORMACIONES DE HOLONOMIA .

Al realizar el estudio de la intersección de una solución φ' con la transversal (Γ,a) a una solución cercana φ ,resulta conveniente analizar la órbita de un punto p bajo la aplicación de la transformación de holonomía $\Delta_\gamma \in \mathcal{F}_{\alpha,\varphi}$. Hay, sin embargo, dos aspectos delicados a los que es necesario prestar atención :

a) No todo germen $\Delta \in \mathcal{F}_{\alpha,\varphi}$ puede prolongarse analíticamente al punto $p \in \varphi \cap \Gamma$.

b) Aún pudiendose prolongar el germen Δ_γ al punto p, puede suceder que la transformación de retorno Δ_γ no esté definida.

Para ver el segundo problema, pensemos por un momento en el grupo de holonomía en el infinito de una ecuación hamiltoniana $\alpha \in \mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}_n$. Dicho grupo es finito pues se tienen ,a lo más, n generadores y cada generador tiene orden finito.

Consideremos el conmutador de dos gérmenes $\Delta_{\gamma_1} = f_1$ y $\Delta_{\gamma_2} = f_2$. Afirmamos que $f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-1} = e$, o bien genera un grupo cíclico infinito. En efecto, si $f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-1}(z_1) = h(z_1)$, y $h(z_1)$ no es la identidad, entonces $h(z_1) = z_1 + a_k z_1^k + \dots$ con $a_k \neq 0$,

$$(h \circ h)(z_1) = z_1 + a_k z_1^k + \dots + a_k(z + a_k z_1^k + \dots)^k + \dots$$

$$= z_1 + 2a_k z_1^k + \dots$$

analogamente,

$$\underbrace{(h \circ \dots \circ h)}_{m\text{-veces}}(z_1) = z_1 + m a_k z_1^k + \dots$$

y,por consiguiente, nunca se da la igualdad $f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-1} = id$ Sin embargo, el grupo de holonomía es finito, lo que implica que para cualquier lazo $\gamma \in [\pi_1(F_\alpha), \pi_1(F_\alpha)]$ el germen $\Delta_{\gamma,\alpha} = id$. Claramente el germen identidad se prolonga analíticamente a toda la transversal Γ . Sin embargo, el resultado que puede obtenerse al prolongar una solución φ de α sobre la curva γ puede ser distinto, pues φ es una función algebraica de w_1, es decir, existe un polinomio en (z_1, w_1) , $P(z_1, w_1) = a_0(z_1)w_1^n + \dots + a_n(z_1)$, tal que $P(\varphi(w_1), w_1) = 0$: supongamos que γ rodea a uno de los puntos excepcionales (ceros del dicriminante de P y ceros de $a_0(z_1)$), entonces, si φ da origen a un germen $\tilde{\varphi}$ basado en "a" , la prolongación de φ a lo largo de γ dará origen a un germen Ψ basado en "a" no necesariamente igual a $\tilde{\varphi}$ (de hecho existe un número positivo mínimo $m \leq n$, tal que la continuación de φ a lo largo de γ m veces, regresa al germen original $\tilde{\varphi}$).

La función de retorno Δ_γ no está por lo tanto definida para todo p en (Γ,a), ya que de lo contrario sería la identidad.

Por esta razón, surge la necesidad de prestar especial atención a la región en la cual la prolongación de los gérmenes está definida, y considerar, junto con el grupo de holonomía, al grupo especial de transformaciones de holonomía que describiremos en un momento (aunque la descripción es un poco aparatosa, nos ayudará a trabajar más adelante sin necesidad de preocuparnos por cuestiones como las que describimos anteriormente).

DEFINICION -(grupo especial de holonomía)

Sea $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ un subgrupo finitamente generado con generadores f_j, $j=1,\dots,n$, tales que se prolongan como transformaciones conformes en una vecindad conexa Ω_0 del origen. Los elementos del grupo especial de transformaciones de holonomía $\mathcal{P}_{\mathcal{F}'}$ son las parejas (f, Ω_f) tales que $f \in \mathcal{F}'$ y Ω_f es el dominio que definiremos abajo; la operación del grupo está dada por

$$(f, \Omega_f)\,(g, \Omega_g) = (f \circ g, \Omega_{f \circ g})$$

Vamos a describir ahora el dominio Ω_f.

Denominamos presentación admisible del germen f a cualquier presentación π_f de la forma

$$\prod_{K=1}^{N} f_{j_K}^{\epsilon_K} = f_{j_1}^{\epsilon_1} \circ \dots \circ f_{j_N}^{\epsilon_N},\ j \in \{1,\dots,n\} \quad, \epsilon = \pm 1 \quad .$$

A un germen arbitrario $\prod_{K=1}^{s} f_{j_K}^{\epsilon_K}$, $s < n$, lo denominamos germen intermedio.

Definimos Ω_{π_f} como la región estrellada máxima con centro en el punto 0, perteneciente a Ω_0, en la cual el germen f y todos los gérmenes intermedios de la presentación se prolongan analíticamente, además

$$\left(\prod_{K=1}^{s} f_{j_K}^{\epsilon_K}\right)(\Omega_{\pi_f}) \subset \Omega_0$$

Definimos, por último, a Ω_f como la unión de todas las regiones Ω_{π_f} correspondientes a todas las presentaciones admisibles del germen f. De la definición es inmediato que cada germen f alcanza su prolongación analítica en Ω_f.

Algunas veces escribiremos $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}'}$ en lugar de $(f, \Omega_f) \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}'}$ dando por entendido que el representante f del germen f lo observamos como transformación conforme en Ω_f.

Al conjunto

$$\mathcal{P}_{\mathcal{F}'}(p) = \{\, f(p)\ ;\ f \in \mathcal{F}',\ p \in \Omega_f \}$$

lo denominamos la órbita de p bajo la acción del grupo $\mathcal{P}_{\mathcal{F}'}$.

Puesto que prestaremos especial interés al comportamiento de las soluciones en una vecindad de la solución al infinito, daremos la siguiente definición :

DEFINICION -(grupo especial de holonomía en infinito)

Sea $\mathcal{F}$ el grupo de transformaciones de holonomía en el infinito de la ecuación α, $f_{j\alpha}$, $j=1,\dots,n$, los generadores del grupo $\mathcal{F}_\alpha$ y sea Ω_0 una región tal que se encuentren en ella definidas las transformaciones de retorno correspondientes. Al grupo $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_\alpha, \Omega_0}$ se le conoce como el grupo especial de transformaciones de holonomía de la ecuación α en el infinito, y se le denota por $\mathcal{P}_\alpha$.

Esta larga definición queda justificada con la siguiente proposición.

PROPOSICION 1.3 -

La órbita $\mathcal{P}_\alpha(p)$ del punto p bajo la acción del grupo especial de transformaciones de holonomía de la ecuación α en el infinito está contenida en la intersección de la solución φ_p de α con la transversal Γ.

2. ECUACIONES DIFERENCIALES ALGEBRAICAS .

En esta sección se estudiará la relación entre las ecuaciones diferenciales algebraicas y las ecuaciones $\alpha \in \mathcal{A}_n$ definidas en la sección anterior .

2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ANALITICAS Y ALGEBRAICAS .

DEFINICION - (ecuación diferencial analítica)

Una ecuación diferencial analítica definida en una región Ω de la variedad algebraica X es una sección analítica del haz tangente proyectivizado PTX (campo de direcciones analítico en X).

Con el fin de que una ecuación definida en una región Ω refleje propiedades de la variedad X se necesita que la diferencia $Y = X \setminus \Omega$ sea " suficientemente flaco " . Aclaremos :

DEFINICION - (ecuación analítica con singularidades)

Decimos que la sección holomorfa $s : \Omega \dashrightarrow TX$ asigna una ecuación diferencial analítica con singularidades en X, si el conjunto $Y = X \setminus \Omega$ pertenece al subconjunto analítico $Y' \subset X$ de codimensión dos.Si no existe una región $\Omega' \supset \Omega$ en la cual se pueda prolongar analíticamente la sección s , entonces Y se denomina el conjunto de puntos singulares de la sección s .

DEFINICION - (ecuación diferencial algebraica)

Sea X una variedad algebraica proyectiva y $s : X \dashrightarrow PTX$ una sección birracional del fibrado tangente. Entonces s se denomina ecuación diferencial algebraica en X .

El resultado principal que habremos de demostrar en esta sección, es el hecho de que toda ecuación diferencial analítica en una variedad algebraica es algebraica. Para ello haremos uso del siguiente lema.

LEMA 2.1 -

Una ecuación diferencial analítica con singularidades en una variedad compleja X, es aquella y sólo aquella, para la cual el campo de direcciones correspondiente determina localmente un campo vectorial analítico .

En vista de que sólo haremos uso de una de las implicaciones de este lema, nos restringiremos a demostrar el siguiente resultado (en [6] y en [10] se dan demostraciones distintas del lema 2.1)

LEMA 2.2 -

Sea $\dot{z} = \hat{F}(z)$ una ecuación diferencial analítica con singularidades definida en un abierto U de una variedad compleja X ;sea Y el conjunto de los puntos singulares de la ecuación. Entonces, para cada punto $y_0 \in Y$ existe una vecindad V y una ecuación diferencial de la forma $\dot{z} = F(z)$ definida en V, donde F es un campo vectorial cuyas soluciones coinciden con las soluciones de la ecuacion original en V y el conjunto de puntos singulares $\{ F(z) = 0 \}$ coincide con $V \cap Y$.

DEMOSTRACION :

Sea V una vecindad de y_0 biholomorfa a una bola en $\mathbb{C}^n$, con coordenadas $z_1, \dots, z_n$. En $V \setminus Y$ se tiene una foliación sin singularidades por soluciones de la ecuación $\dot{z} = \hat{F}(z)$. En cada punto $x \in V \setminus Y$ definimos n-1 funciones $w_2(x), \dots, w_n(x)$ tales que el vector

$$(1, w_2(x), \dots, w_n(x))$$

sea tangente a la solución φ_x de $\dot{z} = \hat{F}(z)$ .Las funciones $w_2(x), \dots, w_n(x)$ son meromorfas en $V \setminus Y$. Así,puesto que V es una subvariedad analítica y $Y \cap V$ es un subconjunto analítico de codimensión mayor que uno, entonces las funciones $w_2, \dots, w_n$ se extienden como funciones meromorfas a todo V (teorema de extensión de Levi, ver apéndice)

Por la manera en que elegimos a V , las funciones w_i se escriben como el cociente de funciones holomorfas f_i , g_i en V

$w_i = f_i / g_i$, f_i, g_i primos relativos.

Sea $Y_i = \{ x\in V\cap Y \ ; \ f_i(x) = g_i(x) = 0 \}$ el conjunto de los puntos singulares de w_i ; cod.$Y_i > 1$. Definimos la función f_1 en V como el producto de las funciones g_i, $i = 2,..,n$.

$$f_1 = g_2 \cdot \ldots \cdot g_n ,$$

y sea $F(z) = (f_1, w_1 f_1, \ldots, w_n f_n)$. Entonces, la ecuación $\dot z = F(z)$ genera la misma foliación que $(1, w_2(x), .., w_n(x))$ en $V\setminus(Y\cup Y')$, donde $Y' = \cap Y_i$; cod.$Y' > 1$. Nos resta demostrar que $Y' = Y\cap V$.

Supongamos que $Y' \subsetneq (Y\cap V)$ y sea $z_0 \in (Y\cap V)\setminus Y'$ (es decir $F(z) \neq 0$). Entonces existe una vecindad V_{z_0} de z_0 tal que la ecuación $\dot z = F(z)$ genera una foliación sin singularidades en V_{z_0} que coincide con la función asociada a la ecuación $\dot z = \hat F(z)$. Por lo tanto, F se extiende a $\hat F$ de una manera no singular al punto $z_0 \in Y$, lo que es una contradicción.

Supongamos ahora que $(Y\cap V) \subsetneq Y'$ y sea $z_0 \in Y' \setminus (Y\cap V)$ un punto no singular de la foliación generada por la ecuación $\dot z = F(z)$. En una vecindad V_0 de z_0 se tiene definido un holomorfismo Ψ_0 de V_0 en un abierto W_0 de C^n, $C^n = \{\zeta_1,\ldots,\zeta_n\}$, $\Psi_0 : V_0 \dashrightarrow W_0$, tal que lleva las hojas de la foliación en lineas paralelas al eje ζ_1 y al campo $F(z)$ en el campo $(f(\zeta),0,\ldots,0)$, donde $f(\zeta)$ es una función holomorfa en W_0. Dado que $F(z_0) = 0$ y $F(z) \neq 0$ para $z\in V_0\setminus Y'$, entonces $f(\Psi_0(z_0)) = 0$ y $f(\Psi_0(z)) \neq 0$ para $z \in V_0 \setminus Y'$. Sin embargo, los ceros de $f\cdot\Psi_0$ tienen dimensión n-1 y, por otra parte, dim$Y' < n-1$, lo que es una contradicción .

//.

TEOREMA 2.3 -

Una ecuacion diferencial analítica con singularidades en en una variedad algebraica, es algebraica.

DEMOSTRACION :

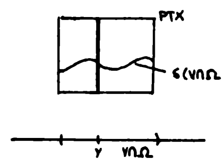
Sea $s : \Omega \dashrightarrow PTX$ una seccion analítica del haz tangente proyectivo.Vamos a demostrar que s es la restricción a Ω de una sección birracional $\sigma: X \dashrightarrow PTX$.

Sea π la proyección $PTX \xrightarrow{\pi} X$, $y \in Y = X\setminus\Omega$ un punto singular arbitrario de la ecuacion s y V una vecindad de "y" en la cual el haz PTX es trivial (observamos que en Ω s y π son inversas, sin embargo nuestro objetivo es ver lo que sucede en los puntos singulares). Consideremos una carta coordenada z en V (donde V es biholomorfa a una bola en C^n) tal que ,en y, $z(y) = 0$, y sean $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ cooordenadas homogéneas en la fibra PT_z , $z\in V$. $\zeta = (\zeta_1:\ldots:\zeta_n)$ es un campo de direcciones en la región $\Omega\cap V$, de modo que, por el lema 2.2, ζ determina un campo vectorial analítico $v(z)$, definido como $v(z) = (v_1(z),\ldots,v_n(z))$. Por consiguiente, la subvariedad $s(\Omega\cap V) \subset PTX$ está dada por las ecuaciones

$$\zeta_i v_j(z) - \zeta_j v_i(z) = 0 \quad i,j=1,\ldots n \quad , z\in\Omega\cap V \quad \ldots(2.1)$$

(ya que $\zeta = (\zeta_1(z):\ldots:\zeta_n(z)) = (v_1(z):\ldots:v_n(z))$ para $z \in \Omega\cap V)$.

Esquemáticamente, la imagen de $\Omega\cap V$ bajo s toma la forma



De esta manera, $s(\Omega)$ está contenido en un subconjunto analítico cerrado $S\subset PTX$ construído como la unión finita -por compacidad- de los subconjunto definidos por las ecuaci:ones (2.1). El subconjunto S coincide con $s(\Omega)$ en la región $\pi^{-1}(\Omega)$ en una vecindad de un punto singular arbitrario $y\in Y$, $S = s(\Omega) \cup \bigsqcup_{y\in Y} \pi^{-1}(y)$.

S es un subconjunto analítico de la variedad algebraica PTX pues S es la unión finita de subconjuntos analíticos definidos por (2.1). Por el teorema de Chow (ver apéndice III) S es una subvariedad algebraica de PTX. Sea S' la componente irreducible de S que contiene a $s(\Omega)$ La restricción $\pi|_{S'}$ es una transformacion racional, $\pi|_{S'}$ es la inversa de s y es uno a uno en $s(\Omega) \subset S'$. Por lo tanto, $\pi : S' \dashrightarrow X$ y $\sigma : X \dashrightarrow S' \hookrightarrow PTX$ son transfoarmaciones birracionales, $\sigma|_\Omega = s$.

//.

COROLARIO 2.4 -

Una ecuacion diferencial analítica en el espacio proyectivo complejo de dimensión n , CP^n, en una carta afín $C^n = \{ z \}$, determina un campo vectorial polinomial de la forma $\dot{z} = P(z)$, donde P denota un polinomio vectorial .

Como consecuencia de nuestras definiciones, un campo analítico de direcciones determina una ecuación diferencial analítica en CP^2 , sólo si dicha ecuación tiene un número finito de puntos singulares. De esta forma, por el corolario 2.3 ,una ecuación diferencial analítica con singularidades, en una carta afín (z,w),tiene la forma (1.1) ya que de la igualdad

$$\left(\frac{dw}{dT},\frac{dz}{dT}\right) = (P(z,w),\ Q(z,w))$$

se tiene que

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dT}\frac{dT}{dz} = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}$$

3. GRUPO ESPECIAL DE TRANSFORMACIONES CONFORMES .

En la demostración de los principales resultados de este trabajo haremos uso de un hecho que nos permitirá trabajar con "problemas linealizados". En esta sección daremos ciertos elementos que apuntan en este sentido, a saber, la aproximación de funciones lineales en una carta especial, por medio de elementos del grupo especial de transformaciones conformes . Primero enunciaremos uno de los resultados más conocidos relacionados con la linealización de transformaciones conformes.

TEOREMA 3.1 - (linelización de Schroeder)

Cada germen de transformación conforme $(\mathbb{C},0) \longrightarrow (\mathbb{C},0)$, $\mathbf{f}$, cuya derivada en cero $\nu = \mathbf{f}'(0)$ tenga módulo distinto de uno, es analíticamente equivalente a su parte lineal . En otras palabras, en alguna vecindad U del origen existe una carta $\tilde{\zeta}$ ($\tilde{\zeta}(0) = 0$), definida unívocamente salvo por multiplicación por constantes, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C},0) \arrow[r, "\mathbf{f}"] \arrow[d, "\tilde{\zeta}"'] & (\mathbb{C},0) \arrow[d, "\tilde{\zeta}"] \\
(\mathbb{C},0) \arrow[r, "\nu"] & (\mathbb{C},0)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Aquí ν denota al germen de la transformación multiplicación por ν .

Diremos, por brevedad, que la carta $\tilde{\zeta}$ linealiza a la transformación $\mathbf{f}$.

DEMOSTRACION :

Sea f el representante del germen $\mathbf{f}$,

$$z_1 = f(z) = \nu z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots \qquad \ldots(3.1)$$

con $|\nu| < 1$. Nuestro objetivo es encontrar una transformación conforme

$$\Phi(\zeta) = b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \ldots \qquad \ldots(3.2)$$

tal que

$$\Phi(\nu\zeta) = f(\Phi(\zeta)) \qquad \ldots(3.3)$$

Vamos a buscar una solución de la igualdad anterior en términos de series de potencias formales:

El hecho de que ν no sea raíz de la unidad nos ayudará a ver que existe una única solución de la ecuación (3.3) la cual se conoce como serie de Schroeder .

Supongamos que $n \geqslant 2$ y que los primeros k coeficientes, $k < n$ de la expresión (3.2) han sido determinados de manera tal que ambos lados de (3.3) coinciden en sus términos de orden $k < n$.

La igualdad (3.3) podemos expresarla como

$$\Phi(\nu\zeta) - \nu\Phi(\zeta) = f(\Phi(\zeta)) - \nu\Phi(\zeta)$$

de donde se obtiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\nu^k - \nu) b_k \zeta^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \Phi^k(\zeta) \qquad \ldots(3.4)$$

Así,el coeficiente en ζ^n es un polinomio en a_k $(k=2,\ldots,n)$ y en las b_k conocidas $(k=1,\ldots,n-1)$, con coeficientes enteros. El coeficiente en el miembro izquierdo de (3.4) es $(\nu^k - \nu) b_k$ y, puesto que ν no es raíz de la unidad y $\nu \neq 0$, entonces b_n está unívocamente determinado.

De esta manera, se determinan en forma recursiva los coeficientes de la serie formal de Schroeder que satisface la ecuación funcional (3.3) .

Sólo nos resta demostrar que la serie formal $\Phi(z)$ converge en alguna vecindad del origen.La convergencia de la serie (3.1) implica que existe un real positivo r tal que $|a_{n+1}| < r^n$.Reemplazando rz por z y rz_1 por z_1 en (3.1) se obtiene nuevamente una serie convergente con el mismo valor ν pero tal que $|a_{n+1}| < 1$. Como $|\nu| \neq 1$, existe un número positivo c tal que $|\nu^{n+1} - \nu| > c > 0$. Si ahora obtenemos los coeficientes de la serie de Schroeder se tiene que, por las desigualdades anteriores,

$$c|\Phi - \zeta| = c\left|\sum_{k=2}^{\infty} b_k\zeta^k\right| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} c|b_k\zeta^k| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} |\nu^k - \nu||b_k\zeta^k|$$

y

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k||\Phi^k(\zeta)| < \sum_{k=2}^{\infty} |\Phi^k(\zeta)|$$

Así, por (3.4),

$$c|\Phi-\varsigma| < \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| |\Phi^k(\varsigma)| < \sum_{k=2}^{\infty} |\Phi^k(\varsigma)|$$

Por consiguiente, la solución formal de la ecuación

$$c(\Psi-\varsigma) = \sum_{k=2}^{\infty} \Psi^k$$

es mayorante de $\Phi(\varsigma)$. Así, como la serie $\varsigma = \Psi - c^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}\Psi^k$ converge para $|\Psi| < 1$, entonces en una vecindad del origen tiene una inversa que converge, lo que demuestra la convergencia de Ψ y, con ella, la convergencia de la serie Φ.

Sólo nos resta ver que al hablar de unicidad de la carta $\tilde{\varsigma} = \Phi$ estamos entendiendo unicidad módulo multiplicación por constantes no nulas : claramente, si μ es una constante , se tiene que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C},0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varsigma"'] & (\mathbb{C},0) \arrow[d, "\varsigma"] \\ (\mathbb{C},0) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mu"'] & (\mathbb{C},0) \arrow[d, "\mu"] \\ (\mathbb{C},0) \arrow[r, "\varphi"] & (\mathbb{C},0) \end{tikzcd}$$

lo que implica que $\varphi = \mu\nu\mu^{-1} = \nu$. Observamos que la unicidad módulo multiplicación por constantes es consecuencia de la libertad que se tiene para elegir, en la construcción anterior, el valor del coeficiente b_1 de la serie de Schroeder.

Antes de enunciar la generalización del teorema anterior, vamos a precisar lo que habremos de entender por una familia analítica $\{f_t\}$ de gérmenes de transformaciones conformes $(C,0) \dashrightarrow (C,0)$ (biholomorfismos de $(C,0)$).

DEFINICION -(familia analítica de gérmenes de biholomorfismos de (C,0) - primera definición)

Sea D_r el disco de radio r en C, $D_r = \{ z \in C; |z| < r \}$ y $U \subset C^2$ una vecindad abierta del producto $D_r \times \{0\}$ $D_r \times \{0\} \subset U \subset D_r \times C$. Sea $f : U \subset C^2 \dashrightarrow C$ una función holomorfa tal que $f(t,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(t,0) \neq 0$, para todo $t \in D_r$. Denotamos por f_t a la restricción de f a U_t, $U_t = U \cap (\{t\} \times C)$, $f_t = f(t,\_) : U_t \dashrightarrow C$, $t \in D_r$. El conjunto $\{ f_t \}_{t \in D_r}$ es una familia analítica de germenes de biholomorfismos de $(C,0)$.

En función de lo que habremos de hacer más adelante,nos conviene modificar un poco nuestra definición.

DEFINICION -(familia analítica de germenes de biholomorfismos de (C,0) - segunda definición)

Sean D_r, U, U_t y f , como antes. Una familia analítica $\{ f_t \}_{t \in D_r}$, de germenes de biholomorfismos de $(C,0)$, es un biholomorfismo F, $F : U \subset D_r \times C \dashrightarrow D_r \times C$, en su imagen, tal que $F(t,z) = (t,f(t,z))$, $(F|_{U_t} = (t,f(t,\_))$.

Esta última definición nos permitirá introducir el concepto de familia de cambios de coordenadas para F.

DEFINICION -(familia analítica de cambios de coordenadas)

Sea $F : U \subset D_r \times C \dashrightarrow D_r \times C$ la familia analítica definida arriba, con U ,U_t ,D_r como antes. Una familia analítica de cambios de coordenadas es un biholomorfismo

$$\Phi : D_r \times C \dashrightarrow D_r \times C$$

de la forma $\Phi(t,z) = (t, \varphi(t,z))$, donde $\varphi(t,z)$ es un cambio de coordenadas para f_t ,t fija. El cambio de coordenadas de F por $\tilde{\varsigma}$ está dado por

$$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}|_{\Phi} : \Phi(U) \dashrightarrow D_r \times C$$

donde $\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}|_{\Phi(U)}$ es un biholomorfismo sobre su imagen.

Hacemos notar que estos últimos conceptos tienen una generalización directa al caso en que t es de la forma $t = (t_1,\dots,t_m)$ y D_r es un polidisco en C^m. Esta generalización habrá de sernos de gran utilidad en la sección ocho, en la cual hablaremos de una familia analítica de germenes, parametrizada por un abierto de C^m.

TEOREMA 3.2 -(de Schroeder para familias analíticas)

Sea F una familia analítica de germenes de biholomorfismos de $(C,0)$ parametrizados por D_r (como antes) y tal que $|\nu(t)| = |\frac{\partial F}{\partial z}(t,0)| \neq 1$ para toda $t \in D_r$. Entonces, para todo compacto K en D_r, $0 \in K \subset D_r$, existe una familia analítica de cambios de coordenadas Φ tal que, para todo $t \in K$,

$$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1}(t,z) = (t, \nu(t,z)) \qquad \ldots(3.5)$$

donde $\nu(t,z) = (t, \nu(t)z)$ es una función lineal en z. Φ es único salvo por un cambio de coordenadas para cada s fija.

DEMOSTRACION :

En la demostración de este teorema se usarán, en escencia, las ideas de la demostración del teorema anterior.

Sea F la familia analítica de germenes que cumple las hipótesis del teorema y sea $D_r \times V = \{ (t,z) ; |t| < r , |z| < v \} \subset D_r \times C$, una región en la que F converge. La familia F puede expresarse en $D_r \times V$ como

$$(t_1, z_1) = F(t,z) = (t, \nu(t)z + a_2(t)\, z^2 + \ldots) \qquad \ldots(3.6)$$

donde $|\nu(t)| \neq 1$ y $\nu(t) \neq 0$ para todo t en D_r (pues por hipótesis $|\frac{\partial F}{\partial z}(t,0)| \neq 1$ y $\frac{\partial F}{\partial z}(t,0) \neq 0$)

Nuestro objetivo es ahora encontrar un biholomorfismo $\Phi(s,\zeta) = (t, \phi(s,\zeta))$,

$$\Phi(s,\zeta) = (s, b_1(s)\zeta + b_2(s)\zeta^2 + \ldots) \qquad \ldots(3.7)$$

tal que

$$\Phi(s, \nu(s,\zeta)) = F(\Phi(s,\zeta)) = F(s, \phi(s,\zeta)) \qquad \ldots(3.8)$$

donde $\nu(s,\zeta)$ es una función lineal de ζ ,

$$\nu(s,\zeta) = (s, \nu(s)\zeta) \quad .$$

Así, las igualdades

$$\Phi(s, \nu(s,\zeta)) = \Phi(s, \nu(s)\zeta)$$

$$= (s, b_1(s)\nu(s)\zeta + b_2(s)\nu^2(s)\zeta^2 + \ldots)$$

y

$$F(s, \phi(s,\zeta)) = (s, \nu(s)\phi(s,\zeta) + a_2(s)(\phi(s,\ ))^2 + \ldots) =$$

$$= (s, \nu(s)(b_1(s)\zeta + b_2(s)\zeta^2 + \ldots) +$$

$$+ a_2(s)(b_1(s)\zeta + b_2(s)\zeta^2 + \ldots) + \ldots) \quad ,$$

$$\ldots(3.9)$$

implican que

$$b_1(s)\nu(s)\zeta = \nu(s)b_1(s)\zeta$$

y

$$b_2(s)\nu^2(s)\zeta^2 = (\nu(s)b_2(s) + a_2(s)b_1(s))\zeta^2 \quad .$$

La primera igualdad nos dice que podemos elegir libremente la función analítica $b_1(s)$, de manera que elegimos $b_1(s) \equiv 1$ para s en D_r. Así, la función $b_2(s)$ toma la forma

$$b_2(s) = a_2(s) \;/\; (\nu^2(s) - \nu(s)) \quad ;$$

observamos que las condiciones $|\nu(s)| \neq 1$ y $\nu(s) \neq 0$ para todo s en D_r, implican que $b_2(s)$ está unívocamente determinada.

Supongamos ahora que $n > 2$ y que las primeras k funciones $b_k(s)$ de la expresión (3.8) ya fueron determinadas, $k < n$. La igualdad (3.8) la reexpresamos como

$$\Phi(s,\nu(s,\zeta)) - \Phi(s,\nu(s)\phi(s,\zeta)) = F(s,\phi(s,\zeta)) - \Phi(s,\nu(s)\phi(s,\zeta))$$

de donde se obtiene la expresión

$$(0, \sum_{K=2}^{\infty} (\nu^K(s) - \nu(s))b_K(s)\zeta^K) = (0, \sum_{K=2}^{\infty} a_K(s)\,\phi(s,\zeta)^K)$$

$$\ldots(3.10)$$

En este caso, el coeficiente para ζ^n, $(\nu^n(s) - \nu(s))b_n(s)$ resulta un polinomio en $a_K(s)$ $(k=1,\ldots,n)$ y en las b_K conocidas $(k=1,\ldots,n-1)$. Se observa que, nuevamente, las condiciones sobre $\nu(s)$ implican que $b_n(s)$ se halla unívocamente determinado.

Vamos a demostrar ahora la convergencia de la serie formal $\Phi(s,\zeta)$ en una vecindad de $K\times\{0\}$ en $K\times C\subset D_r\times C$ donde K es un compacto, $0\in K\subset D_r$. Hacemos notar que, por la definición de Φ, necesitamos demostrar sólo convergencia de ϕ, $\phi : K\times C \dashrightarrow C$.

La convergencia de (3.6) en $D_r\times V$, nos dice que, para cada s fija, se tiene una serie convergente en z; de modo que, dado $s\in D_r$ existe

$$r = r(s)$$

tal que

$$|a_{n+1}(s)| < r_s^{n}$$

Ahora, como K es compacto, las funciones $a_{n+1}(s)$ alcanzan su módulo máximo en K; es decir, existe r tal que, para toda s en K

$$|a_{n+1}(s)| < r^{n}$$

Si ahora reemplazamos rz por z y rz_1 por z_1 en (3.6), se tiene que $|a_{n+1}(s)| < 1$ para todo $s\in K$. Por otra parte, $|\nu^{K}(s) - \nu(s)|$ toma su valor mínimo en K y éste es distinto de cero; así, existe c = cte. tal que $|\nu^{K}(s) - \nu(s)| > c > 0$. Repitiendo ahora los mismos argumentos que se usaron en la demostración del teorema 3.1 se demuestra la convergencia de $\phi(s,\zeta)$ y, con ella, el teorema 3.2.

//.

Observamos nuevamente que este teorema tiene una generalización directa para el caso en el que tengan familias analíticas parametrizadas por un abierto U de C.

En el siguiente lema se demuestra que toda función lineal (en una carta adecuada) es aproximada por elementos del grupo especial de transformaciones .

LEMA 3.3 -

Sea $\mathcal{P}$ el grupo especial finitamente generado de transformaciones conformes $(C,0) \dashrightarrow (C,0)$ y f_j, $j=1,\dots,n$ sus generadores, definidos en una vecindad Ω_0 del origen. Supongamos además que $|f_1'(0)| \neq 1$ y que la carta que linealiza a f_1, ζ, está definida en una vecindad $U\subset\Omega_0$; dicha vecindad U en la carta ζ determina el círculo $|\zeta| < \rho$. Denotemos por $\mathcal{P}'$ a la cerradura del subgrupo de C^* generado por las derivadas $\nu_j = f_j'(0)$, $j=1,\dots,n$. Entonces, para cualquier $\nu\in\mathcal{P}'$ existe una sucesión de transformaciones $F_\ell\in\mathcal{P}$ que converge uniformemente a la transformación $\zeta \dashrightarrow \nu\zeta$ en cualquier subregión compacta K de la región $U\cap\nu^{-1}(U) = \{\, q\in U\ ;\ |\zeta(q)| < |\nu|\rho \,\}$.

Observación : la convergencia uniforme en K de la sucesión $F_\ell\in\mathcal{P}$ supone que $K\subset\Omega_{F_\ell}$ para toda ℓ suficientemente grande.

DEMOSTRACION :

Basta demostrar el lema para el caso en el que $\nu = f'(0)$ para alguna $f\in\mathcal{P}$.

Sea $\nu_1 = f_1'(0)$, $|\nu_1| < 1$ (en caso contrario consideraríamos f_1^{-1} en la construcción que damos más adelante). Definamos

$$F_\ell = f_1^{-\ell}\circ f\circ f_1^{\ell}$$

Suponemos que ζ es la carta en U que linealiza a f y que, en dicha carta, las funciones f y F_ℓ se escriben como $f(\zeta)$ y $F(\zeta)$, donde

$$f(\zeta) = \nu\zeta + \sum_{K=2}^{\infty} a_K\zeta^{K} \quad ;$$

entonces, para F_ℓ se tiene que

$$\begin{aligned} F_\ell(\zeta) &= f_1^{-\ell}\circ f(\nu_1^{\ell}\zeta) \\ &= f_1^{-\ell}(\nu_1^{\ell}\nu\zeta + \sum_{K=2}^{\infty} a_K\nu_1^{\ell K}\zeta^{K}) \\ &= \nu_1^{-\ell}(\nu_1^{\ell}\nu\zeta + \sum_{K=2}^{\infty} a_K\nu_1^{\ell K}\zeta^{K}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_\ell(\zeta) = \nu\zeta + \sum_{K=2}^{\infty} a_K\nu_1^{\ell(K-1)}\zeta^{K}$$

Afirmamos que $F_\ell(\zeta)$ está definida y es univaluada en el disco U para ℓ suficientemente grande; además, $F_\ell(\zeta)|_U$ tiende uniformemente a $\nu\zeta$.

Para ver lo anterior, sea $p\in U$ y $\zeta = \zeta(p)$, entonces $|\zeta| < \rho$ y $|\nu\zeta| < \rho|\nu|$. Sea $\delta > 0$ tal que se cumple la desigualdad $|\nu|\rho - |\nu\zeta| > \delta$ y sea L tal que para toda ℓ mayor que L, $|\nu_1^{\ell}| < \epsilon$ para $\epsilon = \epsilon(\delta)$. Como

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty} a_k \nu_1^{\ell(k-1)} \zeta^k\right| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} |a_k \nu_1^{\ell(k-1)} \zeta^k| < \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \epsilon^{k-1} \rho^k$$

Así, podemos escoger L tan grande que $\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \epsilon^{k-1}\rho^k < \delta$. Por lo tanto, $|F_\ell(\zeta)| < |\nu\zeta| + \delta$ y $|F_\ell(\zeta)| < |\nu|\rho$,de donde de sigue que $F_\ell(\zeta)$ está definida en U .

Sean L y δ como antes, la desigualdad $|F_\ell(\zeta) - \nu\zeta| < \delta$ para toda $\ell > L$ nos dice que $F_\ell(\zeta)|_U$ converge uniformemente a $\nu\zeta$.

Nos queda demostrar que la región Ω_{F_ℓ} contiene a cualquier compacto $K \subset U \cap \nu^{-1}(U)$ para ℓ suficientemente grande.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la región Ω_0 , usada para definir a la región Ω_{F_ℓ} coincide con U (recordemos que Ω_0 es una vecindad conexa del origen tal que en ella se encuentran definidas las transformaciones de retorno f_j , j=1,...n.).

Cada presentación intermedia del germen $F_\ell = f^{-\ell} \circ f \circ f^\ell$ toma la forma $g_m = f_1^m$ o $h_{m\ell} = f_1^m F_\ell$, $0 < m \leqslant \ell$. Esto se debe a que una presentación de F_ℓ tiene la forma $\underbrace{f_1^{-1} \circ \ldots \circ f_1^{-1}}_{\ell\text{-veces}} \circ \prod_{k=1}^{N} f_{jk}^{\epsilon_k} \circ \underbrace{f_1 \circ \ldots \circ f_1}_{\ell\text{-veces}}$. Cada uno de estos gérmenes se prolonga analíticamente en todo U (pues supusimos $U = \Omega_{F_\ell}$) Además, $g_m(\zeta) = \nu_1^m \zeta$ y $h_{m\ell}(\zeta)$ tiende uniformemente a $\nu_1^m \nu\zeta$, $h_{m\ell}(\zeta) \underset{\ell\to\infty}{\rightrightarrows} \nu_1^m \nu \zeta$, cuando ℓ tiende a infinito (la convergencia es en ℓ y en m). Veamos que lo anterior nos dice que $h_{m\ell}(K) \subset U$:

a) Supongamos que $|\nu| < 1$, entonces $U \cap \nu^{-1}U = \nu^{-1}U$. Así , dado que para todo $\ell > L(K)$, $h_{m\ell}(\zeta) \underset{\ell\to\infty}{\rightrightarrows} \nu_1^m \nu \zeta$, se tiene que $|\nu_1^m \nu \zeta(p)| < |\nu_1^m \nu \rho| < |\nu|\rho$. Por consiguiente, $|h_{m\ell}\zeta(p)| < |\nu|\rho$ y $h_{m\ell}(K) \subset U$.

b) Supongamos que $|\nu| > 1$, entonces $U \cap \nu^{-1}U = U$.Así,para $\ell > L(K)$, $h_{m\ell}(\zeta)|_K \underset{\ell\to\infty}{\rightrightarrows} \nu_1^m \nu \zeta$; como es convergencia uniforme, en m y ℓ , puede pedirse m suficientemente grande de modo que $|\nu_1^m \nu| < 1$, entonces $|\nu_1^m \nu(p)| < |\zeta(p)| < \rho$. Por lo tanto, $h_{m\ell}(K) \subset U$. La relación $g_{m\ell}(K) = \nu_1^m K \subset U$ resulta evidente.

Por último, al iniciar la demostración afirmamos que bastaba pedir que $\nu = f'(0)$ para alguna $f \in \mathcal{P}$ .Aclaremos : Supongamos que $\nu \in \mathcal{P}'$ no es de la forma $\nu = f'(0)$ para alguna f en $\mathcal{P}$.Entonces existe una sucesión $\{\nu_m\}$ tal que ν_m converge uniformemente a ν y $\nu_m = f_m'(0)$. Para cada ν_m hemos visto que existe una sucesión $\{F_{m\ell}\}$ en $\mathcal{P}$ uniformemente convergente a ν_m en compactos $K \subset U \cap \nu^{-1}U$, de manera que se tiene

$$\begin{array}{llll} F_{11}, & F_{12}, & \ldots, F_{1k} & \dashrightarrow \nu_1 \\ F_{21}, & F_{22}, & \ldots, F_{2k} & \dashrightarrow \nu_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{m1}, & F_{m2}, & \ldots, F_{mk} & \dashrightarrow \nu_m \end{array}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer (para el compacto $K \subset U \cap \nu^{-1}U$) que, dada $\delta_j > 0$ todos los elementos F_{jm} , m=1,... de la sucesión $\{F_{m\ell}\}$ distan de ν_j menos que δ_j , ya que de lo contrario reenumeraríamos a los términos a partir del índice que cumple lo descrito Así,consideremos las siguientes δ_j para cada j=i,...: $\delta_j = 1\backslash 2^j$. Es inmediato que la sucesión diagonal $F_{11}, F_{22}, \ldots$, converge uniformemente a ν en K.

//.

4. EQUIVALENCIA ANALITICA Y TOPOLOGICA DEL GRUPO DE GERMENES DE TRANSFORMACIONES CONFORMES $(\mathbb{C},0) \dashrightarrow (\mathbb{C},0)$.

En esta sección se demostrará que, bajo ciertas condiciones genéricas, la equivalencia topológica de germenes de transformaciones conformes $(C,0) \dashrightarrow (C,0)$ implica su equivalencia analítica. Como consecuencia de este resultado se tiene que para ecuaciones genéricas α y $\alpha' \in \mathcal{A}_n$ la equivalencia topológica de α y α' implica la equivalencia analítica de sus grupos de holonomía $\mathcal{F}_\alpha$ y $\mathcal{F}_{\alpha'}$. En primer término, haremos uso de los resultados obtenidos en la sección anterior para demostrar que, bajo ciertas condiciones, el homeomorfismo que conjuga a los elementos de dos subgrupos marcados finitamente generados de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, conjuga a su vez a los germenes de las partes lineales de dichos elementos en una carta adecuada. Este hecho habra de simplificar nuestros razonamientos y nos permitirá demostrar el siguiente teorema :

TEOREMA 4.1 -

a) Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos subgrupos marcados finitamente generados del grupo $\mathcal{F}$, conjugados por el homeomorfismo h , de modo que el diagrama (1.4) conmuta y supongamos que para algún $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_1$, $|\mathbf{f}'(0)| = 1$.

b) Supongamos que el homeomorfismo h preserva la orientación natural de C .

Entonces existen:

1) cartas analíticas ζ_1 y ζ_2 que linealizan a las transformaciones $\mathbf{f}$ y $k\mathbf{f}$ respectivamente;

2) un número complejo β y una función contínua $F(\zeta_1)$ tales que, en las cartas ζ_1 , ζ_2 , el homeomorfismo h se expresa como

$$\zeta_2 = h(\zeta_1) = \zeta_1 |\zeta_1|^\beta F(\zeta_1) \qquad \ldots(4.1)$$

además,

$$F(\mathbf{f}'(0)\zeta_1) = F(\zeta_1) \qquad \ldots(4.2)$$

para cualquier $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_1$.

3) para cualquier $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_1$

$$(k\mathbf{f})'(0) = \mathbf{f}'(0)\,|\mathbf{f}'(0)|^\beta \qquad \ldots(4.3)$$

En las expresiones (4.1) y (4.3) se ha elegido la rama principal de la funcion exponencial

$$|\zeta_1| = \exp(\beta \ln|\zeta_1|) , \quad \mathrm{Im}\ \ln|\zeta_1| = 0$$

4.1 REDUCCION AL CASO LINEAL .

Para demostrar la primera afirmación del teorema 4.1 necesitamos demostrar que la condición $|\mathbf{f}'(0)| \neq 1$ implica que $|(k\mathbf{f})'(0)| \neq 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $|\mathbf{f}'(0)| < 1$;consideremos Ω_1 , una vecindad del origen tan pequeña que $f\Omega_1 \subsetneq \Omega_1$ y $h\circ f|_{\Omega_1} = kf\circ h|_{\Omega_1}$ es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \Omega_1 \arrow[d, "h"] \\ \Omega_2 \arrow[r, "kf"] & \Omega_2 \end{tikzcd}$$

con $\Omega_2 = h(\Omega_1)$ conmuta, entonces, $kf(\Omega_2) = h\circ f(\Omega_1) \subsetneq \Omega_2$

Vamos a demostrar que si $kf(\Omega_2) \subsetneq \Omega_2$, $|kf'(0)| < 1$

Como Ω_2 es una región simplemente conexa distinta de C, el teorema de la aplicación de Riemann nos asegura la existencia de un biholomorfismo $g : \Omega_2 \dashrightarrow D$, donde D denota el disco $\{w ; |w| < 1\}$, tal que $g(0) = 0$ y $g'(0) > 0$. Así, $g\circ kf\circ g^{-1} : D \dashrightarrow D$, $g\circ kf\circ g^{-1}(0) = 0$ y $|(g\circ kf\circ g^{-1})(z)| < 1$ si $|z| < 1$. Entonces, por el lema de Schwartz, para toda z en D, $|(g\circ kf\circ g^{-1})(z)| < |z|$ y $|(g\circ kf\circ g^{-1})'(0)| < 1$, donde la igualdad, en ambos casos, se da sólo si $(g\circ kf\circ g^{-1})(z) = e^{i\alpha} z$, para alguna $\alpha \in \mathbb{R}$; sin embargo, $(g\circ kf\circ g^{-1})(D) \subsetneq (D)$ (pues $kf(\Omega_2) \subsetneq \Omega_2$), lo que implica que no se tiene que $(g\circ kf\circ g^{-1})(z) = e^{i\alpha} z$. Por consiguiente, $|(g\circ kf\circ g^{-1})'(0)| < 1$

Puesto que,

$$\begin{aligned} |(g\circ kf\circ g^{-1})'(0)| &= |Dg_{\varphi(f(0))} \cdot Dkf_{f(0)} \cdot Dg^{-1}_{(0)}| \\ &= |Dg_{(0)} \cdot Dkf_{(0)} \cdot Dg^{-1}_{(0)}| \\ &= |Dkf_{(0)}| , \end{aligned}$$

entonces $|(kf)'(0)| < 1$. Como $|f'(0)| < 1$ y $|(kf)'(0)| < 1$, existen , por el teorema de Schroeder, cartas analíticas ζ_1 y ζ_2 que linealizan a las transformaciones $\mathbf{f}$ y $k\mathbf{f}$ respectivamente, por lo que queda demostrada la afirmación 1 del teorema 4.1.

LEMA 4.2 -

Supongamos satisfechas las condiciones del teorema 4.1 y supongamos que ζ_1 y ζ_2 son las cartas que linealizan a las transformaciones f_1 y kf_1 respectivamente. Entonces para cualquier $f\in\mathcal{F}_1$, el homeomorfismo h conjuga a los germenes de las partes lineales de las transformaciones f y kf en las cartas ζ_1 y ζ_2 :

$$h\circ\nu_1 = \nu_2'\circ h \qquad \ldots(4.1)$$

donde $\nu_1 : \zeta_1 \dashrightarrow \nu_1\zeta_1$ y $\nu_2 : \zeta_2 \dashrightarrow \nu_2\zeta_2$, $\nu_1 = f'(0)$, $\nu_2 = (kf)'(0)$.

DEMOSTRACION :

Analicemos las sucesiones $F_\ell^m\in\mathcal{F}_m$, m=1,2, dadas por $F_\ell^1 = f_1^{-\ell}\circ f\circ f_1^{\ell}$, $F_\ell^2 = (kf_1)^{-\ell}\circ(kf)\circ(kf_1)^{\ell} = kF_\ell^1$ (como k es homomorfismo de grupos, $k(f_1^{-\ell}\circ f\circ f_1^{\ell}) = (kf_1)^{-\ell}\circ(kf)\circ(kf_1)^{\ell}$)

Apartir del lema 4.1 se sigue que para cualesquiera germenes f, $g\in\mathcal{F}_1$, la desigualdad $|g'(0)|<1$, implica que la composición $g^{-\ell}\circ f\circ g^{\ell}$ tiende al germen de la transformación

$$\zeta \dashrightarrow f'(0)\zeta,$$

donde ζ es la carta que linealiza a la transformación g. Puesto que $|(kf)'(0)|<1$, lo anterior implica que

$$F_\ell^1 \dashrightarrow \nu_1 \quad y \quad F_\ell^2 \dashrightarrow \nu_2 \quad si \quad \ell\dashrightarrow\infty$$

donde $\nu_1:\zeta_1\dashrightarrow\nu_1\zeta_1$ y $\nu_2:\zeta_2\dashrightarrow\nu_2\zeta_2$. Como $F_\ell^1\in\mathcal{F}_1$ y $F_\ell^2 = kF_\ell^1\in\mathcal{F}_2$, $h\circ F_\ell^1 = F_\ell^2\circ h$; así, por la afirmación anterior, al pasar al límite se tiene que $h\circ\nu_1 = \nu_2\circ h$.

//.

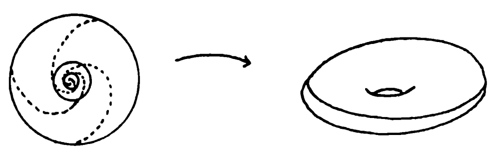
4.2. PASO DE GERMENES A TRANSFORMACIONES .

Como consecuencia del lema 4.2 y de la afirmación 1 del teorema 4.1, bastará demostrar las afirmaciones 2 y 3 del teorema 4.1 para el caso en el que se considera, en lugar de $\mathcal{F}_m$, el grupo $\mathcal{F}_m'$ de germenes de transformaciones lineales de la forma $\zeta_m \dashrightarrow f'(0)\zeta_m$, $f\in\mathcal{F}_m$. Supongamos que Ω_1 es una vecindad del origen en la cual se encuentra definido el homeomorfismo h y definamos $\Omega_2 = h\Omega_1$. Denotemos por $\Omega_m^* = \Omega_m\setminus\{0\}$, m=1,2. Sea k un homomorfismo, $k:\mathcal{F}_1\dashrightarrow\mathcal{F}_2$ (el mismo que en el diagrama (1.4)) y k' el homomorfismo correspondiente a $\mathcal{F}_1'$ y $\mathcal{F}_2'$, $k':\mathcal{F}_1'\dashrightarrow\mathcal{F}_2'$. Denotemos por $\mathcal{F}_m^+$ al semigrupo de aquellas transformaciones cuyos germenes pertenecen a $\mathcal{F}_m'$ y tales que llevan a la región Ω_m en sí misma, m=1,2. De la conmutatividad del diagrama (1.4), se sigue que

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1^* \arrow[r, "N"] \arrow[d, "h"'] & \Omega_1^* \arrow[d, "h"] \\
\Omega_2^* \arrow[r, "k'N"'] & \Omega_2^*
\end{tikzcd} \qquad \ldots(4.5)$$

para todo $N\in\mathcal{F}_1^+$, donde N es la multiplicación por ν en la carta ζ_1 ($\zeta_1\dashrightarrow\nu\zeta_1$) y $k'N$ es la multiplicación por $k'\nu$ en la carta ζ_2 ($\zeta_2\dashrightarrow k'\nu\zeta_2$).

Supongamos que $\nu_1 = f_1'(0)$ y $\nu_2 = (kf_1)'(0)$, y que $|\nu_1|<1$, entonces $|\nu_2|<1$. Observamos que el espacio cociente de la región Ω_m^* por el semigrupo $\{N_m^\ell ; \ell\in\mathbb{N}\}$ es el toro T_m^2 :
puede pensarse en Ω_m^* como un disco, y la identificación por elementos N_m^ℓ como la identificación de anillos (donde cada anillo representa una región fundamental)



Aunque más adelante habremos de regresar a este punto (ver observaciones al teorema 4.1), en nuestros razonamientos no vamos a hacer uso de los toros T_m^2, sino que concentraremos nuestra atención en las cubiertas universales $\hat\Omega_m$ sobre Ω_m^* con las cartas ξ_m y las proyecciones

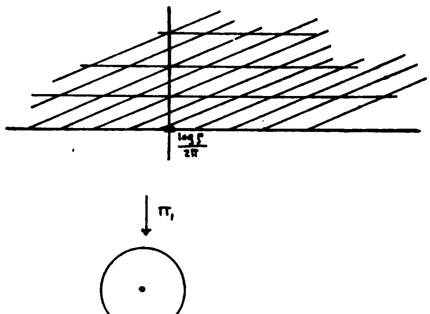
$$\pi_m : \hat\Omega_m \dashrightarrow \Omega_m^*$$
$$\xi_m \dashrightarrow e^{2\pi i\xi_m} = \zeta_m \qquad , m=1,2.$$

4.3 FIN DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.1.

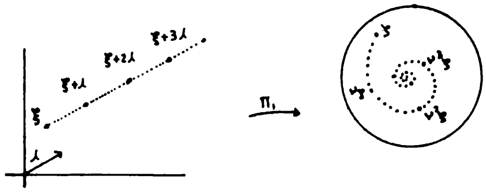
El homeomorfismo h se levanta al homeomorfismo $\hat h$, $\hat h : \hat\Omega_1 \dashrightarrow \hat\Omega_2$, en la cubierta universal, y está definido con precisión salvo por translaciones por números enteros. Fijemos arbitrariamente alguno de estos homeomorfismos $\hat h$:

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Omega}_1 \arrow[r, "\hat{h}"] \arrow[d, "e^{2\pi i}"'] & \hat{\Omega}_2 \arrow[d, "e^{2\pi i}"] \\
\Omega_1^* \arrow[r, "h"] & \Omega_2^*
\end{tikzcd}$$

Observamos que si $\Omega_1^* = \Omega_1 \setminus \{0\} = \{\zeta ;\ 0<|\zeta|<\rho\}$, haciendo $\zeta = e^{2\pi i\xi}$, se tiene que $0 < e^{-2\pi \operatorname{Im}\xi} < \rho$ y por lo tanto $\infty > \operatorname{Im}\xi > \frac{\log\rho}{2\pi}$



El semigrupo $\mathcal{F}_m^+$ se levanta al semigrupo de corrimientos Λ_m^+ que llevan a $\hat{\Omega}_m$ en sí misma. La relación $|\nu| = |e^{2\pi i\lambda}| < 1$ implica que $\operatorname{Im}\lambda > 0$ y, como $|\nu| = |e^{2\pi i(\lambda+n)}|$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, hablar de los elementos en Λ_1^+ equivale a pensar en la acción de $\mathbb{Z}\oplus\lambda\mathbb{Z}^+$ en $\hat{\Omega}_1$.



De manera natural se tiene definido un homomorfismo $\pi_*: \Lambda_m^+ \dashrightarrow \mathcal{F}_m$ cuyo espacio nulo es $\mathbb{Z}$:

$$\pi_*(\lambda(\xi)) = \pi(\lambda+\xi) = e^{2\pi i(\lambda+\xi)} = e^{2\pi i\lambda}\zeta = \pi_*\lambda(\zeta)$$

Se verifica fácilmente que π_* está bien definido (es decir, dos elementos de la misma órbita de λ se proyectan en el mismo elemento) y si $\pi_*\lambda(\zeta)=\zeta$, entonces $\pi(\lambda+\xi) = e^{2\pi i(\lambda+\xi)} = e^{2\pi i\lambda}e^{2\pi i\xi} = \zeta$, lo que implica que $\lambda\in\mathbb{Z}$.

El homomorfismo $k^+ = k'|_{\mathcal{F}_1^+} : \mathcal{F}_1^+ \dashrightarrow \mathcal{F}_2^+$ se levanta unívocamente al homomorfismo $k_*^+ : \Lambda_1^+ \dashrightarrow \Lambda_2^+$, prolongándose al homomorfismo $k'_* : \Lambda_1 \dashrightarrow \Lambda_2$ de modo tal que los siguientes diagramas conmuten :

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Omega}_m \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "e^{2\pi i}"'] & \hat{\Omega}_m \arrow[d, "e^{2\pi i}"] \\
\Omega_m^* \arrow[r, "\nu=\pi_{m*}\lambda"] & \Omega_m^*
\end{tikzcd} \qquad \lambda\in\Lambda_m^+,\ m=1,2 \qquad \ldots(4.6)$$

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Omega}_1 \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "h"'] & \hat{\Omega}_1 \arrow[d, "h"] \\
\hat{\Omega}_2 \arrow[r, "k'_*\lambda"] & \hat{\Omega}_2
\end{tikzcd} \qquad \ldots(4.7)$$

(ver observaciones al teorema 4.1)

Así, se tiene el siguiente diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{\Omega}_1 \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dl, "\hat{h}"'] \arrow[dd, "\pi"] & & \hat{\Omega}_1 \arrow[dl, "\hat{h}"'] \arrow[dd, "\pi"] \\
\hat{\Omega}_2 \arrow[rr, "k'_*\lambda"] \arrow[dd, "\pi"'] & & \hat{\Omega}_2 \arrow[dd, "\pi"] & \\
 & \Omega_1^* \arrow[rr, "\pi_*\lambda=\nu"] \arrow[dl, "h"'] & & \Omega_1^* \arrow[dl, "h"] \\
\Omega_2^* \arrow[rr, "k'\pi_*\lambda=k'\nu"] & & \Omega_2^* &
\end{tikzcd}$$

para $\lambda\in\Lambda_1^+$. Aquí λ y $k'_*\lambda$ denotan las translaciones $\xi_1 \overset{\lambda}{\dashrightarrow} \xi_1+\lambda$, $\xi_2 \dashrightarrow \xi_2 + k'_*\lambda$, donde $k'_*(\xi) = \xi + k'_*\lambda$ pues es el levantamiento de la transformación dada por $\zeta = e^{2\pi i\xi} \overset{k'\pi_*\lambda}{\dashrightarrow} k'e^{2\pi i\lambda}e^{2\pi i\xi} = k'\nu\zeta$

Por la conmutatividad de diagrama

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Omega}_2 \arrow[r, "k_*\lambda"] \arrow[d, "\pi"'] & \hat{\Omega}_2 \arrow[d, "\pi"] \\
\Omega_2^* \arrow[r, "k'\pi_*\lambda"] & \Omega_2^*
\end{tikzcd}$$

se tiene que $k'\pi_*\lambda\circ\pi = \pi\circ\kappa'_*\lambda$ y $(k'\pi_*\lambda\circ\pi)(\xi) = k'\pi_*\lambda(\xi) = k'e^{2\pi i\lambda}\varsigma$; además,

$$\begin{aligned}\pi\circ\kappa'_*\lambda(\xi) &= e^{2\pi i(\kappa'_*\lambda(\xi))}\\ &= e^{2\pi i(\xi+\kappa'_*\lambda)}\\ &= \varsigma e^{2\pi i\kappa'_*\lambda}\end{aligned};$$

por lo que

$$e^{2\pi i\kappa'_*\lambda} = k'e^{2\pi i\lambda} \qquad ...(4.8)$$

El homomorfismo es una transformación $\mathbb{Z}$-lineal de Λ_1 en Λ_2; su prolongación a una transformación $\mathbb{R}$-lineal la denotamos por A , $A : {}^{\mathbb{R}}C \dashrightarrow {}^{\mathbb{R}}C$ (ver observaciones a la demostración del teorema 4.1).De la condición $A1 = 1$, se sigue que

$$A\xi_1 = (\tfrac{\beta}{2} + 1)\xi_1 - \tfrac{\beta}{2}\bar{\xi}_1 \qquad ...(4.9)$$

donde β es un número complejo y $A\lambda = k'_*\lambda$, Tambien puede expresarse A como

$$A\xi_1 = \xi_1 + i\beta\,\mathrm{Im}\,\xi_1 \qquad ...(4.10)$$

Como consecuencia de la conmutatividad del diagrama (4.7) ,se tiene que la transformación $\hat{h}$ toma la forma

$$\xi_2 = \hat{h}(\xi_1) = A\xi_1 + f(\xi_1) \qquad ...(4.11)$$

donde

$$f(\xi_1 + \lambda) = f(\xi_1) \quad \text{para todo } \lambda\in\Lambda_1^+ ...(4.12)$$

Si $f(\xi_1) = \hat{h}(\xi_1) - A\xi_1$ y $\lambda\in\Lambda_1^+$ entonces se tiene que $f(\xi_1+\lambda) = \hat{h}(\xi_1+\lambda) - A(\xi_1+\lambda)$, y $f(\xi_1+\lambda) = \hat{h}(\lambda(\xi_1)) - A\xi_1 - A\lambda$; haciendo uso, nuevamente, de la conmutatividad del diagrama (4.7), $\hat{h}(\lambda(\xi_1)) = k'_*\lambda(\hat{h}(\xi_1)) = A\lambda(\hat{h}(\xi_1)) = A\lambda + \hat{h}(\xi_1)$. Por consiguiente, $f(\xi_1+\lambda) = A\lambda + \hat{h}(\xi_1) - A\xi_1 - A\lambda = f(\xi_1)$.

Resumiendo los resultados anteriores se obtiene una cadena de identidades que nos llevará a concluir la afirmación 3 del teorema :

$$k'\pi_*\lambda = k'\nu = k'e^{2\pi i\lambda}$$

por (4.8) se tiene,

$$k'\nu = e^{2\pi i\kappa'_*\lambda} = e^{2\pi i A\lambda}$$

de la expresión (4.10),

$$\begin{aligned}k'\nu &= e^{2\pi i(\lambda + i\beta\,\mathrm{Im}\lambda)}\\ &= \nu e^{(-2\pi\,\mathrm{Im}\lambda)\beta}\\ &= \nu e^{(\ln|\nu|)\beta}\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$k'\nu = \nu|\nu|^{\beta}. \qquad ...(4.13)$$

Recordando que $\nu = f'(0)$ para $f\in\mathcal{F}_1$ y $k'\nu = (kf)'(0)$ podemos reescribir la expresión (4.13) como

$$(kf)'(0) = f'(0)\,|f'(0)|^{\beta}$$

Por último, la igualdad

$$F(\varsigma_1) = F(e^{2\pi i\xi_1}) := e^{2\pi i f(\xi_1)} \qquad ...(4.14)$$

define a la función F que resulta ser invariante con respecto al semigrupo $\mathcal{F}_1^+$ por la fuerza de la relación (4.12):

sea $\nu\in\mathcal{F}_1^+$,

$$\begin{aligned}F(\nu\varsigma_1) &= F(e^{2\pi i(\lambda+\xi_1)})\\ &= e^{2\pi i f(\lambda+\xi_1)}\\ &= e^{2\pi i f(\xi_1)}\\ &= F(\varsigma_1)\end{aligned}$$

Afirmamos que la relación anterior se cumple para todo $\nu\in\mathcal{F}_1'$ y no sólo para $\nu\in\mathcal{F}_1^+$: sea ν tal que $|\nu| > 1$, entonces si $\varsigma_1\in\nu'\Omega_1^*$, $\varsigma_1 = \nu'\varsigma_1'$ para algún $\varsigma_1'\in\Omega_1^*$. Por lo tanto, $\nu\varsigma_1\in\Omega_1^*$,

$$F(\nu'\varsigma_1') = F(\varsigma_1') \quad \text{y}$$

$$F(\nu\varsigma_1) = F(\nu'\nu\,\varsigma_1) = F(\varsigma_1)$$

(se observa que la propiedad que cumple F se verifica para una región más pequena contenida en Ω_1^*).

La igualdad $\varsigma_2 = h(\varsigma_1) = \varsigma_1|\varsigma_1|^{\beta}F(\varsigma_1)$ se deduce de todo lo anterior como sigue :

recordando que $\xi_2 = \hat{h}(\xi_1) = A\xi_1 + f(\xi_1)$, se tiene $\pi(\xi_2) = = \pi(\hat{h}(\xi_1)) = \pi(A\xi_1 + f(\xi_1))$; así,

$$\varsigma_2 = h(\varsigma_1) = e^{2\pi i A\xi_1}e^{2\pi i f(\xi_1)}$$

$$= F(\varsigma_1)e^{2\pi i A\xi_1}$$

$$= F(\varsigma_1)e^{(-2\pi \mathrm{Im}\xi_1)\beta}$$

$$= F(\varsigma_1)\varsigma_1|\varsigma_1|^{\beta} \quad .$$

//.

4.4 OBSERVACIONES A LA DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4.1 .

a) Prolongación de k'_*.

La prolongación de $k^+_*: \Lambda^+_1 \dashrightarrow \Lambda^+_2$ al homomorfismo k'_*, $k'_*: \Lambda_1 \dashrightarrow \Lambda_2$ se realiza observando lo siguiente : si $\nu = = \pi_*\lambda \in \mathcal{F}^+_1$ entonces $|\nu| = |e^{2\pi i\lambda}| < 1$, de donde $|e^{-2\pi i\lambda}| > 1$ y $e^{-2\pi i\lambda} \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}^+_1$, $-\lambda \in \Lambda_1 \setminus \Lambda^+_1$. Por lo tanto, definimos

$$k'_*(-\lambda) = -k^+_*\lambda \qquad , \lambda \in \Lambda^+_1 ;$$

si $\lambda, \mu \in \Lambda_1$ y $\lambda \cdot \mu = \lambda + \mu \in \Lambda_1 \setminus \Lambda^+_1$, entonces $-(\lambda\cdot\mu) = = -(\lambda+\mu) \in \Lambda_1$,

$$k'_*(\lambda+\mu) = -k^+_*(-(\lambda+\mu))$$

$$= -k^+_*(-\lambda) - k^+_*(-\mu)$$

$$= k'_*\lambda + k'_*\mu$$

por lo tanto, k'_* es un homomorfismo $\mathbb{Z}$-lineal .

b) Prolongación de k'_* .

La prolongación de k'_* a una transformación $\mathbb{R}$-lineal A, $A : {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C} \dashrightarrow {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ se realiza de la siguiente manera :

b.1) Supongamos que Λ_1 es un grupo discreto, entonces k'_* es siempre una función contínua y, por consiguiente, se extiende a una función $\mathbb{Q}$-lineal, ya que de la relación

$$k'_*(n\lambda) = nk'_*\lambda$$

se sigue que

$$k'_*\lambda = nk'_*(\tfrac{1}{n}\lambda) \ ,$$

$$k'_*(\tfrac{1}{n}\lambda) = \tfrac{1}{n}k'\lambda \ ;$$

así, $\qquad k'_*((p/q)\lambda) = (p/q)k'_*\lambda.$

Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y por la continuidad k'_* como función $\mathbb{Q}$-lineal, k'_* se extiende a una función $\mathbb{R}$-lineal

Para extender ahora k'_* a todo $\mathbb{C}$ como función $\mathbb{R}$-lineal, necesitamos determinar el valor de k'_* en una dirección en $\mathbb{C}$ linealmente independiente a λ ($\lambda \in \mathbb{R}$.). Definamos entonces

$$k'_*\bar{\lambda} := \overline{k'_*\lambda}$$

claramente, $k'_*t\lambda = tk'_*\lambda$, para todo $t \in \mathbb{R}$, y $k_*1 = 1$. Denotemos por A a la extensión de k'_* definida arriba, $A : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$, y sea β el número complejo tal que se cumple la igualdad $Ai = (\beta+1)$ $\quad (Ai(\xi) = (\beta+1)i+\xi)$. Entonces,

$$A\xi_1 = A(\tfrac{\xi_1+\bar{\xi}_1}{2} + \tfrac{\xi_1-\bar{\xi}_1}{2})$$

$$= A(\tfrac{\xi_1+\bar{\xi}_1}{2}) + A(\tfrac{\xi_1-\bar{\xi}_1}{2})$$

$$= \tfrac{\xi_1+\bar{\xi}_1}{2}A(1) + (-i)\tfrac{\xi_1-\bar{\xi}_1}{2}A(i)$$

de aquí,

$$A\xi_1 = \tfrac{\xi_1+\bar{\xi}_1}{2} - i\tfrac{\xi_1-\bar{\xi}_1}{2}(\beta+1)i$$

y por lo tanto,

$$A\xi_1 = (1+\tfrac{\beta}{2})\xi_1 - \tfrac{\beta}{2}\bar{\xi}_1$$

que es la expresión (4.9). La expresión (4.10) es inmediata de descomponer ξ_1 como $\xi_1 = \mathrm{Re}\xi_1 + i\mathrm{Im}\xi_1$.

Observamos que $A|_{\Lambda^+_1} : \Lambda^+_1 \dashrightarrow \Lambda^+_2$, de manera que $A\lambda = = \lambda + i\beta\,\mathrm{Im}\lambda \in \Lambda^+_2$, es decir, $|e^{2\pi i(\lambda+i\beta\mathrm{Im}\lambda)}| < 1$, lo que implica que $\mathrm{Im}\lambda + \mathrm{Re}\beta\,\mathrm{Im}\lambda > 0$ y $\mathrm{Re}\beta > -1$.

b.2) Supongamos ahora que Λ_1^* es denso en C ,¿ qué podemos afirmar sobre la continuidad de k'_* ?

Sea $C_1 \subset \Omega_1$ compacto y $C_2 = \hat{h}(C_1) \subset \hat{\Omega}_2$. Vamos a demostrar que $k'_{*\,-} = \hat{h}\circ\_\circ\hat{h}^{-1}$ es una función contínua de Λ'_1 en Λ'_2, donde Λ'_m denota la restricción de Λ^*_m a aquellas funciones que llevan a C_m en sí mismo, m=1,2. En otras palabras, dado $\epsilon > 0$, vamos a demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $\lambda, \mu \in \Lambda_1$ y $\|\lambda-\mu\|_{C_1} < \delta$, entonces $\|k'_*\lambda - k'_*\mu\|_{C_2}$ es menor que ϵ .

Sea $\epsilon > 0$, como h es contínua, existe una $\delta > 0$ tal que si $|\alpha-\beta| < \delta$, $\alpha, \beta \in C_1$, entonces $|\hat{h}(\alpha)-\hat{h}(\beta)| < \epsilon/2$. Por lo tanto, si λ y $\mu \in \Lambda'_1$ son tales que $\|\lambda-\mu\|_{C_1} < \delta$ se tiene

$$|\lambda\circ\hat{h}^{-1}(y) - \mu\circ\hat{h}^{-1}(y)| < \sup \{ |\lambda x - \mu x|;\ x \in C_1 \} < \delta$$

para todo $y \in C_2$; por consiguiente,

$$|\hat{h}(\lambda\hat{h}^{-1}(y)) - \hat{h}(\mu\hat{h}^{-1}(y))| < \epsilon/2$$

para todo $y \in C_2$. De aquí,

$$\| k'_*\lambda - k_*\mu \| = \sup \{ |\hat{h}\circ\lambda\circ\hat{h}^{-1}(y) - \hat{h}\circ\mu\circ\hat{h}^{-1}(y)|;\ y \in C_2\} < \epsilon$$

,lo que implica la continuidad de k'_* .

c) La proyección a los toros T_m^2 , m=1.2.

En este inciso haremos algunos comentarios con respecto a los toros T_m^2 , m=1,2, obtenidos al hacer el cociente de las regiones Ω_1^* y Ω_2^* bajo la acción de los semigrupos $\{\nu^l;\ l \in \mathbb{N}\}$ y $\{(k'\nu)^l;\ l \in \mathbb{N}\}$ respectivamente.

Observemos que de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1^* \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "h"'] & \Omega_1^* \arrow[d, "h"] \\
\Omega_2^* \arrow[r, "k'\nu"] & \Omega_2^*
\end{tikzcd}$$

se sigue que el homeomorfismo h levanta al homeomorfismo $\tilde{h} : T_1^2 \dashrightarrow T_2^2$:

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1^* \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "h"'] & \Omega_1^* \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "h"'] & \Omega_1^*/\{\nu^l\} \arrow[d, "\tilde{h}"] \\
\Omega_2^* \arrow[r] & \Omega_2^* \arrow[r] & \Omega_2^*/\{(k'\nu)^l\}
\end{tikzcd}$$

La expresión de h , $\zeta_2 = h(\zeta_1) = \zeta_1|\zeta_1|^{\beta}F(\zeta)$ representa al levantamiento de h al homeomorfismo cubriente $\Omega_1^* \overset{h}{\dashrightarrow} \Omega_2^*$
Observamos que $h(\nu\zeta_1) = \nu|\nu|^{\beta}\zeta_1|\zeta_1|^{\beta}F(\zeta_1) = (k'\nu\circ h)(\zeta_1)$ que ,bajo p_2 se proyecta en $\tilde{\zeta}_1|\tilde{\zeta}_1|^{\beta}F(\tilde{\zeta}_1)$ donde $\zeta_1 = \nu^m\tilde{\zeta}_1$.

Si ahora consideramos las cubiertas universales $\hat{\Omega}_1$ y $\hat{\Omega}_2$, los elementos ν^l y $(k'\nu)^l$ se transforman en desplazamientos $\lambda(\zeta_1) = \zeta_1 + \lambda$ y $k'_*\lambda(\zeta_2) = \zeta_2 + k_*\lambda = \zeta_2 + \lambda + i\beta\, \mathrm{Im}\,\lambda$. Para λ y $k'_*\lambda$ se verifica que

$$\lambda(\zeta_1 + n) = \lambda(\zeta_1) + n \qquad \text{y}$$

$$k'_*(\zeta_2 + n) = k'_*\lambda(\zeta_2) + n \qquad \text{, para } n \in \mathbb{Z}.$$

Los límites,

$$\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n(\zeta)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\lambda + \zeta}{n} = \lambda$$

$$\mu_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{(k_*\lambda)^n(\zeta)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{nk_*\lambda + \zeta}{n} = k'_*\lambda = \lambda + i\beta\, \mathrm{Im}\,\lambda$$

representan a los " números de rotación " (obervemos que las transformaciones λ y $k'_*\lambda$ no bajan en transformaciones del círculo en sí mismo, sino en transformaciones del disco en sí mismo), que representan el promedio de avance de la imagen de los homeomorfismos con respecto al desplazamiento por una unidad.

4.5 DOS COROLARIOS AL TEOREMA 4.1 .

COROLARIO 4.3 -

Supongamos satisfecha la condición 1 del teorema 4.1 y supongamos que el homeomorfismo h invierte la orientación.Entonces la afirmación 1 del teorema 4.1 se cumple y las afirmaciones 2 y 3 se transforman en las siguientes :

2') Existe un número complejo β y una función acotada F, $F(\zeta_1)$, tales que

$$\zeta_2 = h(\zeta_1) = \bar{\zeta}_1 |\zeta_1|^{\beta} F(\zeta_1) \qquad ...(4.1')$$

y la expresión (4.2) se cumple.

3') Para todo $f \in \mathcal{F}_1$

$$(k'f)'(0) = \bar{f}'(0)|f'(0)| \qquad ...(4.3')$$

DEMOSTRACION :

Sea c la conjugación $\zeta_1 \dashrightarrow \bar{\zeta}_1$. El grupo marcado $\bar{\mathcal{F}}_1$, $\bar{\mathcal{F}}_1 = c \circ \mathcal{F}_1 \circ c$, es topológicamente equivalente al grupo $\mathcal{F}_2$ por medio del homeomorfismo $\bar{h} = h \circ c$, que preserva orientación. Para $\bar{h}, \bar{\mathcal{F}}_1$ y $\mathcal{F}_2$ se cumplen las condiciones del teorema 4.1, de modo que las expresiones (4.1) y (4.3) para $\bar{h}$ y $\bar{\mathcal{F}}_1$ implican las expresiones (4.1') y (4.3') para h y $\mathcal{F}_1$.

//.

COROLARIO 4.4 -

Supongamos satisfechas las condiciones del teorema 4.1 y sea f_{j1}, generador del grupo $\mathcal{F}_1$, $f_{j2} = k f_{j1}$, $\nu_{jm} = f'_{jm}(0)$, m=1,2, y sea λ_{jm} un valor cualquiera de $\pi_m^{-1}\nu_{jm}$, donde $\nu_{jm} = e^{2\pi i \lambda_{jm}}$; denotemos por ζ_m a las cartas que linealizan (tal como en el teorema 4.1). Entonces,

1) Existe una transformacion $\mathbb{R}$-lineal, $A : {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C} \dashrightarrow {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, $A1=1$ y un conjunto de números enteros, δ_j, tales que

$$A\lambda_{j1} = \lambda_{j2} + \delta_j \qquad ...(4.15)$$

2) Para cualquier punto $\zeta_1^{\circ} \in (\mathbb{C},0)$, denotamos por γ_{j1} al arco de la espiral logarítmica $\gamma_{j1} = \{\zeta_1(t); t \in [0,1]\}$, $\zeta_1(t) = e^{2\pi i t \lambda_{j1}} \zeta_1^{\circ}$. Si está definida la curva $\gamma_{j2} = h\gamma_{j1}$, entonces tiene los mismos extremos que el arco de la espiral logarítmica $\tilde{\gamma}_{j2} = \{\zeta_2(t); t \in [0,1]\}$, $\zeta_2(t) = e^{2\pi i t(\lambda_{j2}+\delta)} h(\zeta_1^{\circ})$ y es homotópica a éste en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

DEMOSTRACION :

1) Para demostrar la primera afirmación basta considerar la transformación A definida en el teorema 4.1 $A : \mathbb{C} \dashrightarrow \mathbb{C}$, $A\zeta_1 = (\frac{1+\beta}{2})\zeta_1 + \frac{\beta}{2}\bar{\zeta}_1$. Como $\nu_{jm} = e^{2\pi i \lambda_{jm}}$ y $\nu_{j2} = k'\nu_{j1}$, m=1,2, entonces,

$$\nu_{j2} = k' e^{2\pi i \lambda_{j1}} = e^{2\pi i A\lambda_{j1}} \quad \text{y}$$
$$e^{2\pi i \lambda_{j2}} = e^{2\pi i A\lambda_{j1}} \quad ;$$

claramente, para $\delta_j \in \mathbb{Z}$, $e^{2\pi i(\lambda_{j2}+\delta_j)} = e^{2\pi i A\lambda_{j1}}$; por lo tanto,

$$A\lambda_{j1} = \lambda_{j2} + \delta_j$$

2) Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\nu_{j1} \in \mathcal{F}_{j1}^{+}$. Demostraremos primero que γ_{j2} y $\tilde{\gamma}_{j2}$ tienen los mismos extremos :

$$\gamma_{j2}(0) = h(\gamma_{j1}(0)) = h(\zeta_1(0)) = h(\zeta_1^{\circ})$$

y

$$\tilde{\gamma}_{j2}(0) = \zeta_2(0) = h(\zeta_1^{\circ}) \ ;$$

por otra parte,

$$\gamma_{j2}(1) = h(\gamma_{j1}(1)) = h(e^{2\pi i \lambda_{j1}}\zeta_1^{\circ}) = h(\nu_{j1}\zeta_1^{\circ}),$$

de la conmutatividad del diagrama (4.5), $h(\nu_{j1}\zeta_1^{\circ}) = k'\nu_{j1} h(\zeta_1^{\circ}) = \nu_{j2} h(\zeta_1^{\circ})$; además, $\tilde{\gamma}_{j2}(1) = e^{2\pi i(\lambda_{j2}+\delta_j)} h(\zeta_1^{\circ}) = \nu_{j2}\, h(\zeta_1^{\circ})$

El homeomorfismo $h : \Omega_1^{*} \dashrightarrow \Omega_2^{*}$ se define por la expresión (4.1) (aunque debemos recordar que la región de definición de h es Ω_1). Sea $\sigma = F(\zeta_1^{\circ})$, por (4.2), $\sigma = F(\nu_{j1}\zeta_1^{\circ})$; definimos el homeomorfismo $\hat{h} : \Omega_1^{*} \dashrightarrow \Omega_1^{*}$, por $\tilde{\zeta}_2 = \tilde{h}(\zeta_1) = \sigma\zeta_1 |\zeta_1|^{\beta}$. Demostraremos que $\tilde{h}$ lleva al arco γ_{j1} en el arco $\tilde{\gamma}_{j2}$.

$$\tilde{h}(\zeta_1(t)) = \sigma\zeta_1(t)\,|\zeta_1(t)|^{\beta}$$
$$= F(\zeta_1^{\circ}) e^{2\pi i t\lambda_{j1}} \zeta_1^{\circ} \, |e^{2\pi i t \lambda_{j1}} \zeta_1^{\circ}|^{\beta}$$
$$= h(\zeta_1^{\circ}) e^{2\pi i(t\lambda_{j1} + i\beta \operatorname{Im}\lambda_j t)}$$
$$= h(\zeta_1^{\circ}) e^{2\pi i A\lambda_j t}$$
$$= h(\zeta_1^{\circ}) e^{2\pi i t(\lambda_{j2}+\delta_j)}$$
$$= \tilde{\zeta}_2(t)$$

La homotopía $H(\zeta_1, s) = \sigma\zeta_1|\zeta_1|^{\beta}[F(\zeta_1)/\sigma]^{s}$, $s \in [0,1]$ es tal que,

$$H(\zeta_1, 0) = \sigma\zeta_1|\zeta_1|^{\beta} = \tilde{h}(\zeta_1)$$

$$H(\zeta_1, 1) = \sigma\zeta_1|\zeta_1|^{\beta} F(\zeta_1)/\sigma = h(\zeta_1)$$

por lo que lleva a $\tilde{h}$ en h y a $\tilde{\gamma}_{j2}$ en γ_{j2}.

4.6 EQUIVALENCIA TOPOLOGICA Y ANALITICA .

Vamos a demostrar un resultado básico con respecto a la conjugación de subgrupos marcados finitamente generados de $\mathcal{F}$.

TEOREMA 4.5 -

Supongamos que a las condiciones del teorema 4.1, agregamos las dos siguientes :

1) El subgrupo del grupo C^* generado por ν_1 y ν_2 , con la multiplicación, es denso en C.
2) El grupo $\mathcal{F}_1$ es no conmutativo.

Entonces, la equivalencia topológica de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ implica su equivalencia analítica.

DEMOSTRACION :

De la condición 1 y de la expresión $F(\mathbf{f}'(0)\cdot\zeta_1) = F(\zeta_1)$,para $\mathbf{f}\in\mathcal{F}_1$, se sigue que $F\equiv\sigma$, σ constante. Por esta razón,

$$h(\zeta_1) = \zeta_2 = \sigma\,\zeta_1|\zeta_1|^{\beta} .$$

La condición 2 nos dice que el conmutador del grupo es distinto de la identidad y que, en consecuencia, contiene al germen de una transformación f de la forma

$$f : \zeta_1 \longrightarrow \zeta_1 + a_m\zeta_1^m + \dots \quad , a_m\neq 0,\ m > 1.$$

Puesto que $\mathbf{f}\in[\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_1]$, entonces $\mathbf{f} = \varphi\cdot\psi\cdot\varphi^{-1}\cdot\psi^{-1}$; por otra parte, si $k\mathbf{f} = h\circ\mathbf{f}\circ h^{-1}$, $k\,\mathbf{f} = k(\varphi\cdot\psi\cdot\varphi^{-1}\cdot\psi^{-1}) = k\varphi\cdot k\psi\cdot(k\varphi)^{-1}\cdot(k\psi)^{-1}$, por lo tanto, $k\,\mathbf{f}\in[\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_1]$. Suponemos que kf se expresa como

$$kf : \zeta_1 \longrightarrow \zeta_1 + b_n\zeta_1^n + \dots \quad , b_n \neq 0,\ n > 1$$

Vamos a demostrar que si dos transformaciones son conjugadas por el homeomorfismo $h(\zeta_1) = \sigma\zeta_1|\zeta_1|^{\beta}$, entonces $\beta = 0$. De aquí claramente se concluye el teorema 4.5.

De la conmutatividad del diagrama (1.4) se tiene que $h\circ\mathbf{f} = k\mathbf{f}\circ h$, por lo que, haciendo $\zeta = \zeta_1$ se obtiene

$$hf(\zeta) = h(\zeta + a_m\zeta^m + \dots)$$

$$= \sigma(\zeta + a_m\zeta^m + \dots)|\zeta + a_m\zeta^m + \dots|^{\beta}$$

$$hf(\zeta) = (\zeta + a_m\zeta^m + \dots)(\zeta + a_m\zeta^m + \dots)^{\beta/2}(\bar\zeta + \bar a_m\bar\zeta^m + \dots)^{\beta/2}$$

y

$$kf(h(\zeta)) = kf(\sigma\zeta|\zeta|^{\beta}) = \sigma\zeta|\zeta|^{\beta} + b_n(\sigma\zeta|\zeta|^{\beta}) + \dots$$

por lo tanto,

$$\sigma(\zeta + a_m\zeta^m + ..)(\zeta + a_m\zeta^m + ..)^{\frac{\beta}{2}}(\bar\zeta + \bar a_m\bar\zeta^m + ..)^{\frac{\beta}{2}} = \sigma\zeta|\zeta|^{\beta} + b_n(\sigma\zeta|\zeta|^{\beta})^n + \dots$$

$$\dots(4.16)$$

Sea $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$. Dividiremos ambos miembros de (4.16) y prestaremos atención a sus partes principales :

por una parte,

$$\frac{\sigma(\zeta^{1+\frac{\beta}{2}} + (1+\frac{\beta}{2})\zeta^{\frac{\beta}{2}}a_m\zeta^m + \dots)(\bar\zeta^{\frac{\beta}{2}} + \frac{\beta}{2}\bar\zeta^{\frac{\beta}{2}-1}\bar a_m\bar\zeta^m + \dots)}{\sigma\zeta|\zeta|^{\beta}} =$$

$$= \frac{\zeta|\zeta|^{\beta} + (1+\frac{\beta}{2})|\zeta|^{\beta}a_m\zeta^m + \frac{\beta}{2}\zeta|\zeta|^{\beta}\bar\zeta^{-1}\bar a_m\bar\zeta^m + \dots}{\zeta|\zeta|^{\beta}} =$$

$$= \frac{\zeta|\zeta|^{\beta} + \zeta|\zeta|^{\beta}(1+\frac{\beta}{2})a_m\zeta^m + \frac{\beta}{2}\zeta|\zeta|^{\beta}\bar a_m\bar\zeta^{m-1} + \dots}{\zeta|\zeta|^{\beta}} =$$

$$= 1 + (1+\tfrac{\beta}{2})a_m\zeta^m + \tfrac{\beta}{2}\bar a_m\bar\zeta^{m-1} + o(|\zeta|^{m-1}) \ ;$$

por otra parte,

$$(\sigma|\zeta|^{\beta} + b_n(\sigma\zeta|\zeta|^{\beta})^n + ..)/\sigma\zeta|\zeta|^{\beta} = 1 + b_n\sigma^{n-1}\zeta^{n-1}|\zeta|^{\beta(n-1)} + o(|\zeta|^{\beta_1(n+1)})$$

La expresión $o(|\zeta|^{\beta_1(n+1)})$ se obtiene de analizar el término $(b_{n+1}(\sigma\zeta|\zeta|^{\beta})^{n+1})/\sigma\zeta|\zeta|^{\beta} = b_{n+1}\sigma^n\zeta^n|\zeta|^{\beta n}$ de la serie; así, $o(b_{n+1}\sigma^n\zeta^n|\zeta|^{\beta n}) = o(|\zeta|^n|\zeta|^{\beta_1 n}) = o(|\zeta|^{n(\beta_1+1)})$. En la observación (b.2) al teorema 4.1 hicimos ver que $\mathrm{Re}\,\beta > -1$ lo que nos asegura que la expresión anterior tiene sentido.

Sea

$$L(\zeta) := 1 + \overbrace{(a_m\zeta^{m-1}(1+\tfrac{\beta}{2}) + \bar a_m\bar\zeta^{m-1}\tfrac{\beta}{2})}^{\ell(\zeta)} + o(|\zeta|^{m-1}) =$$

$$= 1 + \underbrace{b_n\sigma^{n-1}\zeta^{n-1}|\zeta|^{\beta(n-1)}}_{p(\zeta)} + o(|\zeta|^{(n-1)(\beta_1+1)}) := P(\zeta)$$

Las funciones $\ell(\zeta)$ y $p(\zeta)$ tienen orden de pequeñez m-1 y $(\beta_1+1)(n-1)$ respectivamente (donde por orden k de pequeñez de una función univaluada $f(\zeta)$ en el cero, enten-

-demos que $k=\sup\{ x\in\mathbb{R} \,;\, f(\zeta)/|\zeta|^{x} \longrightarrow 0$ si $\zeta \longrightarrow 0 \}$).
El orden de $\ell(\zeta)$ y de $p(\zeta)$ coincide, pues si dividimos las expresiones $L(\zeta) - 1$ y $P(\zeta) - 1$ entre $|\zeta|^{\min\{(m-1)(\beta+1)(n-1)\}}$ se tiene que una converge a cero cuando $\zeta \longrightarrow 0$ y la otra no.

Expresemos ζ como $|\zeta|e^{i\varphi}$, entonces la igualdad

$$\ell(|\zeta|e^{i\varphi}) + o(|\zeta|^{m-1}) = p(|\zeta|e^{i\varphi}) + o(|\zeta|^{(n-1)(\beta+1)})$$

toma la forma

$$a_m|\zeta|^{m-1}e^{i\varphi(m-1)}(1+\tfrac{\beta}{2}) + \bar{a}_m|\zeta|^{m-1}e^{-i\varphi(m-1)} + o(|\zeta|^{m-1}) =$$

$$= b_n\sigma^n|\zeta|^{n-1}e^{i\varphi(n-1)}|\zeta|^{\beta(n-1)} + o(|\zeta|^{m-1})$$

$$= b_n\sigma^{n-1}e^{i\varphi(n-1)}\ |\zeta|^{(\beta_1+1)(n-1)}|\zeta|^{i(\beta_2+1)(n-1)} + o(|\zeta|)^{m-1}.$$

Así, redistribuyendo los miembros de la igualdad anterior y dividiendo entre $|\zeta|^{m-1}$ se tiene :

$$a_m(1+\tfrac{\beta}{2})e^{i\varphi(m-1)} + \bar{a}_m\tfrac{\beta}{2}e^{-i\varphi(m-1)} - b_n\sigma^{n-1}e^{i\varphi(n-1)}|\zeta|^{i(\beta_2+1)(n-1)} = o(1) \quad \ldots(4.17)$$

Supongamos ahora que $\beta \neq 0$ y denotemos por $\tilde{f}_r(\varphi)$ a la restricción del miembro izquierdo de (4.17) a la vecindad $|\zeta| = r$.

Sea $n_r := \| \tilde{f}_r(\varphi) \|_{L_2(0,2\pi)}$. Vamos a demostrar que $n_r \geqslant |a_m||\beta|/2$:

$$\int_0^{2\pi} |a_m(1+\tfrac{\beta}{2})e^{i\varphi(m-1)} + \bar{a}_m\tfrac{\beta}{2}e^{-i\varphi(m-1)} - b_n\sigma^{n-1}e^{i\varphi(n-1)}|\zeta|^{i\beta_2(n-1)}|^2\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\,|a_m|^2|1+\tfrac{\beta}{2}| + |a_m|^2|\tfrac{\beta}{2}|^2 + |b_n|^2|\sigma^{n-1}|^2 + a_m^2(1+\tfrac{\beta}{2})\tfrac{\bar{\beta}}{2}e^{2i\varphi(m-1)} -$$

$$- a_m\bar{b}_n\bar{\sigma}^{n-1}(1+\tfrac{\beta}{2})e^{i\varphi(m-n)}|\zeta|^{i\beta_2(n-1)} - \bar{a}_m\bar{b}_n\bar{\sigma}^{n-1}\tfrac{\beta}{2}e^{-i\varphi(m+n-2)}|\zeta|^{-i\beta_2(n-1)} -$$

$$- b_n\sigma^{n-1}\bar{a}_m(1+\tfrac{\bar{\beta}}{2})e^{i\varphi(m-n)}|\zeta|^{i\beta_2(n-1)} - b_n\sigma^{n-1}a_m\tfrac{\bar{\beta}}{2}|\zeta|^{i\beta_2(n-1)}e^{i\varphi(m+n-2)}]\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} |a_m|^2|1+\tfrac{\beta}{2}| + |a_m|^2|\tfrac{\beta}{2}| + |b_n|^2|\sigma^{n-1}|\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi(\,|a_m|^2|1+\tfrac{\beta}{2}| + |a_m|^2|\tfrac{\beta}{2}| + |b_n|^2|\sigma^{n-1}|^2)\,d\varphi > 2\pi|a_m|^2|\tfrac{\beta}{2}|^2 .$$

Por lo tanto, $n_r \geqslant \sqrt{2\pi}\,|a_m||\beta|/2 \geqslant |a_m||\beta|/2$. Por la expresión (37) $n_r \longrightarrow 0$, lo que contradice el hecho de que $n_r \geqslant |a_m||\beta|/2$.

Así, $\beta = 0$ y queda demostrado el teorema .

4.7 DETERMINACION UNIVOCA DE h .

Por el teorema 4.5 se tiene que el holomorfismo h está definido unívocamente si

$$[\,f_1, f_2\,](\zeta) = \zeta + a_2\zeta^2 + \ldots \qquad , a_2 \neq 0$$

y queda definido módulo multiplicación por alguna raíz de alguna potencia de la unidad en los casos restantes.

Para ver lo anterior substituímos en (4.16) el valor $\beta = 0$ y obtenemos

$$\sigma(\zeta_1 + a_m\zeta_1^m) = \sigma\zeta_1 + b_n(\sigma\zeta_1)^n \quad ;$$

por lo tanto, $m = n$ y $\sigma a_m = \sigma^m b_m$.

De la igualdad $h(\zeta_1) = \sigma\zeta_1|\zeta_1|^{\beta} = \zeta_2$, se sigue que $h(\zeta_1) = \sigma\zeta_1 = \zeta_2$. Así,

$$h = \zeta_2^{-1}\circ\sigma\circ\zeta_1 \qquad \ldots(4.18)$$

donde

$$\sigma = a_2/b_2 \qquad \text{si } m = 2 \qquad \ldots(4.19)$$

y

$$\sigma = \sqrt[m-1]{a/b} \qquad \text{si } m = 2 \quad .$$

5. TEOREMA DE XUDAY - VERENOV SOBRE LA DENSIDAD DE SOLUCIONES .

El objetivo de esta seccion es demostrar un resultado relacionado con la densidad en CP^2 de las soluciones de un tipo genérico de ecuaciones diferenciales en $\mathcal{A}_n$. Concretamente, vamos a demostrar que cada solución (excepto la solución al infinito) de una ecuación genérica $\alpha \in \mathcal{A}_n$, $n > 2$ es densa en CP^2. Este resultado se conoce como el Teorema de Xuday-Verenov sobre la densidad de soluciones.

DEFINICION -(ecuación de Xuday- Verenov)

Decimos que una ecuacion $\alpha \in \mathcal{A}_n$, $n > 2$, es de Xuday-Verenov si cumple las siguientes propiedades :

1) $\alpha \in \mathcal{A}_n'$
2) el subgrupo del grupo C^* generado por los números ν_1 y ν_2 es denso en C.
3) $|\nu_j| \neq 1$, $j=1,\dots,n+1$.
4) la ecuación α no tiene más soluciones algebraicas que la solución al infinito.

Más adelante demostraremos que $\nu_j = e^{2\pi i \lambda_j}$ donde λ_j denota al número característico del punto singular a_j ;por ello la condición 3 es equivalente a pedir que $\mathrm{Im}\,\lambda_j \neq 0$.

Las ecuaciones de Xuday Verenov son genéricas en $\mathcal{A}_n$. Como observamos en la sección 1.1, la condición 1 se cumple para ecuaciones genéricas de Petrovsky-Landis, $\alpha \in \mathcal{A}_n$, y demostraremos más adelante que las coniciones 2 y 3 son genericas para $\alpha \in \mathcal{A}_n$. Por consiguiente, las ecuaciones $\alpha \in \mathcal{A}_n$ del tipo de Xuday-Verenov son genéricas en $\mathcal{A}_n$.

En lo que resta de la sección vamos a suponer que α es una ecuación de Xuday-Verenov.

5.1 ALGUNOS RESULTADOS PRELIMINARES .

a) Número característico de un punto singular .

Vamos a suponer, por simplicidad, que el punto singular coincide con el origen.

DEFINICION - (número característico)

Sea

$$\frac{dw}{dz} = \frac{aw + bz + \dots}{cw + dz + \dots} \qquad \dots(5.1)$$

una ecuación analítica, con miembro derecho meromorfo,definida en una vecindad del origen y supongamos que la matriz de la perte lineal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es no degenerada. Entonces el origen se denomina punto singular no degenerado (punto singular regular) de la ecuación (5.1). Al cociente λ de los valores propios λ_1 , λ_2 de la matriz se le denomina número característico del punto singular.

Esta definición determina un número en forma precisa si se acuerda cual de los vectores propios es el primero.Para el punto al infinito nos fijamos en el segundo vector, pues corresponde a la solución al infinito. En algunos casos resulta irrelevante el considerar λ o $1/\lambda$.

Cabe observar que la ecuación

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{w}{z}$$

es equivalente al campo vectorial dado por la expresión $(\frac{dw}{dT},\frac{dz}{dT}) = (\lambda_1 w, \lambda_2 z)$.

b) Teorema de Poincaré .

DEFINICION -(dominio de Poincaré)

Consideremos el espacio n-dimensional complejo $C^n = \{ \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \}$ de todas las posibles n-adas de valores propios. Decimos que una n-ada λ pertenece al dominio de Poincaré si el casco convexo de los puntos $\lambda_1,\dots$ $\dots,\lambda_n$,en el plano complejo , no contiene al origen. Si el origen esta en el casco convexo de $\lambda_1,\dots,\lambda_2$ decimos λ pertenece al dominio de Siegel.

DEFINICION -(resonancia)

Decimos que los elementos $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ son resonantes si $\lambda_i = \sum_{i \neq j} k_j \lambda_j$, donde $k_j \in Z_+$ y $\sum_{j=1}^{n} k_j \geqslant 2$.

A continuación enunciamos el Teorema de Poincaré que,inmediatamente después reenunciaremos adaptándolo a nuestro contexto.

TEOREMA 5.1 -(de Poincaré)

Si los valores propios de la parte lineal de un campo vectorial holomorfo en un punto singular , pertenecen al dominio de Poincaré y no son resonantes, entonces el campo es biholomorficamente equivalente a su parte lineal en la vecindad del punto singular.

En nuestro contexto, el teorema anterior se expresa de la siguiente manera.

TEOREMA 5.1 -(de Poincaré - otra formulación)

Sea 0 un punto singular no degenerado de la ecuación (5.1),y supongamos que el número característico del punto singular 0 es distinto de un entero, de la inversa de un entero o de un número negativo. Entonces en una vecindad del origen la ecuación (5.1) es analíticamente equivalente a su parte lineal; es decir, en la vecindad V existe una carta (ξ,η) en la que la ecuación (5.1) toma la forma

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\lambda\frac{\eta}{\xi} \qquad \ldots(5.2)$$

c) Separatrices complejas .

Sea α una ecuación de la forma (5.1) y supongamos que existe solamente un número finito de soluciones que se prolongan analíticamente al punto singular 0. Cada una de dichas soluciones φ se denomina separatriz compleja del punto 0 y a la unión $\varphi \cup \{0\}$ se le conoce como separatriz completa. A las componentes conexas de la intersección de una vecindad del punto singular en una separatriz completa,con una vecindad total del punto singular,se les conoce como separatrices locales.

COROLARIO 5.2 -(al teorema de Poincaré)

Sea 0 un punto singular no degenerado de la ecuación (5.1) y sea λ su número característico, $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$. Entonces el punto singular 0 tiene precisamente dos separatrices locales en las cuales se acumulan las soluciones restantes, con condición inicial suficientemente próxima al origen.

DEMOSTRACION :

Por el teorema de Poincaré existe una carta (ξ,η) en la cual la ecuación (5.1) toma la forma

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\lambda\frac{\eta}{\xi}$$

Integrando con respecto a ξ se tiene

$$\int\frac{1}{\eta}\,d\eta=\int\frac{\lambda}{\xi}\,d\xi$$

de donde

$$\log\eta=\lambda(\log\xi+k) \quad , k=\text{cte.}$$

y

$$\eta(\xi) = c\,\xi^{\lambda} \quad ,c=\text{cte} \quad ; \qquad \ldots(5.3)$$

análogamente, al integrar con respecto a η , se tiene

$$\xi(\eta) = c'\eta^{1/\lambda} \quad ,c'=\text{cte}. \qquad \ldots(5.4)$$

Así, las soluciones de la ecuación (5.2) toman la forma (5.3) o (5.4).

Toda solución de la forma $\eta(\xi) = c\xi^{\lambda}$ para $c = 0$, se acumula en la separatriz $\{\eta = 0\}$. En efecto, cuando ξ rodea una vez al origen, el valor $\eta(\xi)$ de la función η se multiplica por $e^{2\pi i\lambda}$ o por $e^{-2\pi i\lambda}$ dependiendo de la dirección del rodeo :

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= c\,\xi^{\lambda}\\ &= c\,e^{\lambda(\log|\xi|+i(\mathrm{Arg}\,\xi+2\pi k))}, \ k\in\mathbb{Z}\\ &= c\,e^{\lambda}e^{2\pi i\lambda k} \quad , k\in\mathbb{Z} \ ;\end{aligned}$$

como $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, $e^{2\pi i\lambda}$ o $e^{-2\pi i\lambda}$ tiene módulo menor que uno. Por consiguiente, conforme más veces se rodee al origen (en la dirección apropiada) más cerca se estará de la separatriz $\{\eta = 0\}$. Análogamente, las soluciones de la forma $\xi(\eta) = c'\eta^{1/\lambda}$ para $c' \neq 0$ se acumulan en la separatriz $\{\xi = 0\}$.

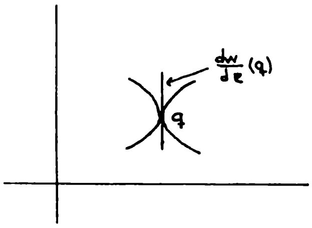
d) Prolongación analítica de soluciones .

TEOREMA 5.3-(de prolongación analítica)

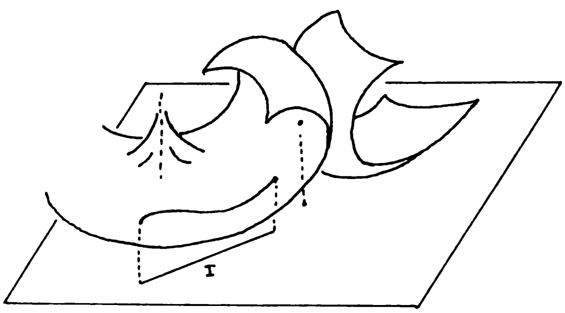
Cada solución φ de la ecuación $\alpha\in\mathcal{A}_n$ se puede prolongar hasta la frontera de cualquier bola contenida en la carta afín.

DEMOSTRACION :

Vista como gráfica de la función $w(z)$, cada solución φ_p de $\alpha \in \mathcal{A}_n$ tiene como puntos de ramificación a aquellos puntos q tales que $Q(q) = 0$. Esquemáticamente,



Como $Q(w(z),z)$ es un polinomio , entonces la cantidad de puntos de ramificación de la solución φ_p forma un conjunto discreto. Así, podemos construir un rayo ℓ en el plano z que no pase por la proyección, en dicho plano, de los puntos singulares de la ecuación α ni por los puntos de ramificación de la solución φ_p .



El comienzo del rayo coincide con la proyección del punto $p = (z_0, w_0)$ es decir, $\ell := r\hat{z} + z_0$ y $\varphi_p|_\ell = (r\hat{z}+z_0, w(r\hat{z}+z_0))$, $r \in [0,\infty)$, y además, $P(r\hat{z} + z_0, w(r\hat{z} + z_0)) = 0$ y $Q(r\hat{z} + z_0, w(r\hat{z} + z_0)) = 0$.

La solución φ_p alcanza una prolongación univaluada en algún intervalo semiabierto $I \subset \ell$ que contiene a la proyección de $p = (z_0, w_0)$; sea I_0 el intervalo maximal con dichas características. Afirmamos que o bien $I_0 = \ell$ o bien sobre I_0 la solución φ_p tiende al infinito con w ; en el primer caso, se tiene que I_0 contiene a la proyección de un punto regular de φ_p , o a la de un punto de ramificación, en el segundo caso, $\overline{I_0}$ contiene a la proyección de un punto singular de α .

5.2 DENSIDAD DE LAS SOLUCIONES EN UNA VECINDAD DE LA SOLUCION AL INFINITO .

Retomemos el grupo especial $\mathcal{P}$ de transformaciones de holonomía en el infinito para la ecuación α . La condición 3 sobre α nos dice que el grupo $\mathcal{P}$ satisface el lema 3.3. Así, sean U y ξ como en el lema 3.3, p,q puntos arbitrarios en U y $\nu = \xi(q) / \xi(p)$. Claramente p es elemento del conjunto $U \cap \nu^{-1}U = \{ q ; \xi(q) < |\nu| \rho \}$. Por la condición 2 sabemos que el grupo generado por $\nu_1, \ldots, \nu_n$, $\langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle$, es denso en C^* , de modo que $\nu \in \mathcal{P}'$,donde $\mathcal{P}' = \overline{\langle \nu_1, \ldots, \nu_n \rangle}$. Por el lema 3.3 existe una sucesión $F_\ell \in \mathcal{P}$ tal que $p \in \Omega_{F_\ell}$ para ℓ suficientemente grande y $F_\ell(\xi)$ tiende uniformemente a $\nu\xi$, $F_\ell(\xi) \rightrightarrows \nu\xi$; por consiguiente, $F_\ell(\xi(p)) \rightrightarrows \xi(q) = \nu\xi(p)$. Lo anterior implica que en la solución φ_p existe una sucesión de puntos tienden al punto q , pues $F_\ell \in \mathcal{P}$ y, por la proposición 1.3, $F_\ell(p)$ es un elemento de la intersección de la transversal (Γ, a) con φ_p . Así, como q se eligió arbitrariamente en U, se tiene que para cada q en U existe una sucesion de puntos en φ_p que tienden a q y, por consiguiente, φ_p es densa en alguna vecindad O del punto "a" $\in \Gamma \cap F_\alpha$.

5.3 DENSIDAD DE LAS SOLUCIONES EN CP^2.

Una vez que hemos demostrado la densidad de las soluciones en una vecindad de la solución al infinito, quisieramos extender este resultado a todo CP^2. Denotemos por Ω al espacio CP^2 del cual se han extraído los puntos singulares de la ecuación α y sea φ una solución de la ecuación α distinta de F_α. Vamos a demostrar que la cerradura $\overline{\varphi}$ de φ coincide con CP^2 .

Sea q un elemento de Ω arbitrario . Observamos que pedir que $q \in \overline{\varphi}$ es equivalente a que $\varphi_q \in \overline{\varphi}$. Si ambas soluciones tienen intersección no vacía con la vecindad O definida en la sección anterior, entonces $\varphi_q \subset \overline{\varphi}$: como φ es densa en O y $\varphi_q \cap O \neq \emptyset$, entonces $\varphi_q(s) \in \overline{\varphi}$ para un número infinito de s tales que $\varphi_q(s) \cap O \neq \emptyset$. Así, por la continuidad con respecto de condiciones iniciales $\varphi_q \subset \overline{\varphi}$.

Supongamos ahora que $\varphi \cap O = \emptyset$ y observemos que es equivalente a suponer que

$$\bar{\varphi}\cap F_{\alpha}=\phi \qquad \ldots(5.5)$$

(recordemos que F_{α} es la solución al infinito y por consiguiente no contiene puntos singulares). La siguiente proposición, aunada a la condición 4 sobre α, nos permitirán concluir que siempre se tiene que $\varphi\cap 0=\phi$.

PROPOSICION 5.4 -

La condición $\bar{\varphi}\cap F=\phi$ implica que la solución φ de la ecuación $\alpha\in\mathcal{A}_n$ es una curva algebraica.

DEMOSTRACION :

Demostraremos que la curva φ es cerrada en Ω. De aquí se sigue que φ es una curva algebraica pues $CP^2\setminus\Omega$ consiste de un número finito de puntos.

Supongamos que la curva φ no es cerrada en Ω y sea $q\in\varphi\cap(\Omega\setminus\varphi)\neq\phi$. Entonces $\varphi_q\subset\bar{\varphi}$ y de (5.5) se sigue que

$$\bar{\varphi}_q\cap F_{\alpha}=\phi \qquad \ldots(5.6)$$

Por el teorema de prolongación analítica de soluciones, $\bar{\varphi}_q$ tiene puntos comunes con la solución al infinito, sin embargo, la condición (5.6) nos dice que dichos puntos son singulares. Sea a_1 uno de éstos. Por ser α una ecuación de Xuday-Verenov, los puntos singulares al infinito cumplen con las condiciones del corolario al teorema de Poincaré, por lo que la condición (5.6) implica que φ_q es separatriz del punto singular a_1. Así, toda solución (salvo φ_q y F_{α}) con condición inicial cercana a a_1, se acumula en F_{α}. En particular, φ se encuentra entre dichas soluciones y, puesto que $a_1\in\varphi_q\subset\bar{\varphi}$, se contradice la condición (5.5). Por consiguiente, φ es cerrada.

//.

De esta manera, si resumimos los resultados obtenidos, habremos demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 5.5 -(de Xuday-Verenov)

Para ecuaciones genericas $\alpha\in\mathcal{A}_n$, n . 2, cada solución, salvo la solución al infinito, es densa en CP^2.

Vamos a demostrar ahora que, en efecto, las condiciones que cumple una ecuación de Xuday-Verenov son genéricas en $\mathcal{A}_n$. Supongamos por un momento que ya hemos demostrado que $\nu_j=e^{2\pi i\lambda_j}$ donde λ_j es el número característico del punto singular a_j.

PROPOSICION 5.6-

La condición de que el subgrupo de C de números complejos bajo la multiplicación, generado por los números $\nu_j=e^{2\pi i\lambda_j}$, j=1,...,n, sea denso en C, se cumple para casi todo elemento $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ en C^n.

DEMOSTRACION :

Basta demostrarlo para el caso en que n = 2.

Observemos que la densidad del conjunto $\{\nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2};\ (k_1,k_2)$ en $\mathbb{Z}\}$ en C, está basada en las siguientes condiciones :

Sea $\nu_j=e^{2\pi i\lambda_j}$, j=1,2. Entonces,

1) cualesquiera dos vectores elegidos entre $1,\lambda_1,\lambda_2$ no son colineales en C, es decir, $\lambda_j\notin\mathbb{R}$, j=1,2, y $\lambda_1\notin\lambda_2\mathbb{R}$

2) $1=a\lambda_1+b\lambda_2$, donde a,b y a/b son irracionales.

Estas condiciones hacen que el grupo generado por $1,\lambda_1,\lambda_2$ bajo la adición, sea denso en C y, en consecuencia, el grupo generado por ν_1 y ν_2 bajo la multiplicación es también denso en C.

//.

La condición de que $|\nu_j|\neq 1$, es equivalente a pedir $\mathrm{Im}\,\lambda_j=0$, lo cual es claramente una condición genérica.

A continuación demostraremos que cuando se habla de que no exista mas solución algebraica que la solución al infinito, se esta hablando de una condición genérica.

PROPOSICION 5.7 -

Pensemos en $\mathcal{A}_n$ como el espacio de los coeficientes de los polinomios P y Q de la ecuacion (1.1). El conjunto de puntos $N\in\mathcal{A}_n$ para los cuales la ecuación correspondiente (1.1) tiene por lo menos una solución algebraica, no contiene a ninguna región del espacio $\mathcal{A}_n$.

DEMOSTRACION :

Supongamos primero que $M(z,w) = 0$ es una solución de la ecuación

$$\alpha := \frac{dw}{dz} = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}$$

donde M es un polinomio irreducible de grado m. Entonces, puesto que en $M=0$,

$$dM = \frac{\partial M}{\partial z}dz + \frac{\partial M}{\partial w}dw = 0 \quad ,$$

se tienen las expresiones

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{M_z}{M_w} = \frac{P}{Q}$$

y

$$PM_w + QM_z = 0$$

Como P y Q son polinomios de grado n se tiene que (si denotamos por $\partial(\_)$ el grado de un polinomio)

$$\partial(PM_w + QM_z) = \partial(M) + n - 1$$

y, como $PM_w + QM_z$ se anula en $(z,w(z))$ y M es irreducible entonces $PM_w + QM_z$ está en el ideal generado por M y

$$PM_w + QM_z = M(z,w)(b_1 z^{n-1} + b_2 w^{n-1} + \ldots + b_\ell) \quad \ldots(5.7)$$

con $\ell = n(n+1)/2$.

Por otra parte, si existen polinomios P,Q y M (con P y Q de grado n) y números b_j, $j=1,\ldots,$, tales que se cumple la igualdad (5.7), entonces M es una integral de la ecuación α .

Sean $m_1,\ldots,m_r$, $r = (m+1)(m+2)/2$, los coeficientes del polinomio $M(z,w)$ y $a_1,\ldots,a_k$, $k=(n+1)(n+2)$, los coeficientes de los polinomios P y Q (en ese orden) Consideremos ahora el espacio complejo $\mathcal{J}_o$ de dimensión $(n+1)(n+2)/2 + (m+1)(m+2)/2$ formado por las variables

$$m_1,\ldots,m_r,a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_\ell$$

La relacion (5.7) define una variedad algebraica $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_o$ Como variedad algebraica, $\mathcal{J}$ puede descomponerse como una suma finita de variedades irreducibles $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \ldots + \mathcal{J}_t$ La proyección $\pi_i(\mathcal{J}_i)$ sobre el subespacio $a_1,\ldots,a_k$ es, a su vez, una variedad algebraica. Como existen ecuaciones de la forma $dw/dz = P / Q$ que no admiten soluciones algebraicas, se tiene que $\pi_i(\mathcal{J}_i)$ tiene dimensión no mayor que $(n+1)(n+2)-1$.

//.

De esta manera, queda demostrada la siguiente proposición :

PROPOSICION 5.8 -

Las ecuaciones de Xuday-Verenov son genéricas en $\mathcal{A}_n$.

5.4 LA RELACION $\nu_j = e^{2\pi i \lambda_j}$ Y LA PRIMERA VARIACION DE LA SOLUCION AL INFINITO CON RESPECTO A CONDICIONES INICIALES

A lo largo de la sección hemos hecho referencia varias veces al hecho de que los valores $f'(0) = \nu_j$ pueden escribirse de la forma $e^{2\pi i \lambda_j}$ donde λ_j denota al número característico del punto singular a_j . Este resultado puede deducirse apartir de las condiciones 2 y 3, las cuales nos permiten aplicar el teorema de Poincaré. Sin embargo, nosotros daremos un razonamiento distinto que, si bien resulta más largo, nos permite concluir ciertos resultados que más adelante usaremos. Para ello, vamos a calcular la primera variación de la solución al infinito con respecto a condiciones iniciales :

Recordemos que en la carta (z_1,w_1) (1.2), la ecuación (1.1) toma la forma

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1\widetilde{Q}}{w_1\widetilde{Q} - \widetilde{P}}$$

y $\quad p(w_1) = w_1\widetilde{Q} - \widetilde{P}\,\Big|_{z_1=0}$.

Vamos a calcular la matríz de la parte lineal de $z_1\widetilde{Q} / (w_1\widetilde{Q} - \widetilde{P})$: el desarrollo de $z_1\widetilde{Q}(z_1,w_1)$ alrededor del punto $(0,a_j)$ toma la forma

$z_1\widetilde{Q}(z_1,w_1) = \sum_{k=0}^{n} S_k(w\,)z$, donde S_k es un polinomio en w_1 alrededor de a_j . Así, $S_0(a_j)$ es la parte lineal de $z_1\widetilde{Q}(z_1,w_1)$ con respecto a z_1 y, como $\widetilde{Q}(z_1,w_1) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(w)z_1^k$, entonces $\widetilde{Q}(0,a_j) = S_0(a_j)$.

Por otro lado, la parte lineal en w_1 alrededor de a_j es cero, pues

$$z_1\widetilde{Q}(z_1,w_1) = \sum_{k=0}^{n} R_k(z_1)(w_1 - a_j)^k \quad ,$$

$R_1(z_1)(w_1 - a_j)$ es la parte lineal y $R_1(0) = 0$. Por último, para $w\tilde{Q} - \tilde{P}$ se tiene que el desarrollo alrededor de a_j es

$$(w\tilde{Q}-\tilde{P}|_{z_1=0})(w_1) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k (w_1 - a_j)^k$$

de modo que el término $\alpha_1(w_1 - a_j)$ se obtiene considerando la derivada de $p(w)$ en el punto a_j, $p'(a_j)$.

De esta manera, la matríz buscada es

$$\begin{pmatrix} \tilde{Q}(0,a_j) & 0 \\ \cdot & p'(a_j) \end{pmatrix} \qquad \ldots(5.8)$$

donde el punto señala un elemento que no nos interesa conocer. Así,el número característico en este caso resulta

$$\lambda_j = \frac{\tilde{Q}(0,a_j)}{p'(a_j)} \qquad \ldots(5.9)$$

Haciendo uso de un teorema de variable compleja que afirma que si se tiene una función analítica uniforme,que sólo tiene polos y puntos singulares aislados, entonces la suma de sus residuos es cero, vamos a demostrar que

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \qquad \ldots(5.10)$$

Recordemos que el residuo de una función g en un polo a_j de orden m está dado por

$$\mathrm{Res}(g,a_j) = [((w-a_j)^m g(w))^{(m-1)} / (m-1)!](a_j)$$

de manera que si $g := \tilde{Q}(0,w_1) / p(w_1)$, entonces $m=1$ (pues a es un cero simple de $p(w_1)$) y

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(g,a_j) &= [(w_1-a_j)\tilde{Q}(0,w_1) / p(w_1)]\Big|_{a_j} \\ &= \left.\frac{\tilde{Q}(0,w_1)}{p(w_1) / (w_1-a_j)}\right|_{a_j} \\ &= \tilde{Q}(0,a_j) / p'(a_j) \\ &= \lambda_j \end{aligned}$$

Como $\tilde{Q}(0,w_1) / p(w_1)$ no tiene más polos que los puntos a_j, y en el infinito se tiene que $\mathrm{Res}(g(w_1),\infty) = = \mathrm{Res}(-w_1^2 g(w_1),0) = -1$, entonces $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j - 1 = 0$, de donde se deduce la expresión (5.10).

El cociente $g(w_1) = \tilde{Q}(0,w_1) / p(w_1)$ puede expresarse como $\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\tilde{\alpha}_j}{w_1 - a_j}$ (observamos que $\partial(p) > \partial(\tilde{Q})$). Así,

$$\frac{\tilde{Q}(0,w_1)}{p(w_1)} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\alpha}_j \prod (w_1 - a_k)}{p(w_1)}$$

y, evaluando en a_j,

$$\tilde{Q}(0,a_j) = \tilde{\alpha}_j \prod_{j\neq k} (a_j - a_k)$$

por lo tanto,

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{\tilde{Q}(0,a_j)}{(a_j - a_k)} = \frac{\tilde{Q}(0,a_j)}{p'(a_j)} = \lambda_j$$

De aquí se obtiene la siguiente expresión para g :

$$g(w_1) = \tilde{Q}(0,w_1) / p(w_1) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\lambda}{w - a_j} \quad \ldots(5.11)$$

Para encontrar la expresión que estamos buscando necesitamos calcular la primera variación de la solución al infinito $\{ z_1 = 0 \}$. Recordaremos brevemente como se obtiene dicha variación :

Supongamos que se tiene la ecuación diferencial analítica $dx/dt = G(t,x)$ y supongamos que la curva $(t,p(t))$ es solución de la ecuación. Sea $z = \varphi - p$, donde satisface la ecuación, entpnces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{dp}{dt} = G(t,\varphi) - G(t,p(t))$$

y

$$\frac{dz}{dt} = G(t,z+p(t)) - G(t,p(t)) \quad ;$$

de aquí, $\frac{dz}{dt} = G_x(t,p(t))z + o(|z|)$, por lo que la ecuación de primera variación para $(t,p(t))$ es

$$\frac{dz}{dt} = G_x(t,p(t))z \; .$$

Así, dado que en nuestro caso la ecuación es

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1\tilde{Q}(z_1,w)}{w_1\tilde{Q}(z_1,w_1) - \tilde{P}(z_1,w_1)}$$

la solución $(t,p(t))$ estará dada por la solución al infinito $F_\alpha = F_\alpha(w_1) = ((w_1,0))$. Si denotamos por $z'(w_1)$ a la primera variación de F_α, la ecuación variacional, $dz/dw = G_z(w_1,F(w))z'$, es

$$\frac{dz'}{dw_1} = \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{z_1\widetilde{Q}(z_1,w_1)}{w_1\widetilde{Q}(z_1,w_1) - \widetilde{P}(z_1,w_1)}\right)\Bigg|_{z_1=0} z'$$

$$= \frac{\widetilde{Q}(0,w_1)p(w_1)}{p(w_1)^2}\,z'$$

$$= \frac{\widetilde{Q}(0,w_1)}{p(w_1)}\,z'$$

Por consiguiente,

$$\frac{dz'}{dw_1} = g(w_1)z' \qquad \ldots(5.12)$$

Para encontrar la expresión de la primera variación observamos que por (5.11) ,la ecuación (5.12) tiene la forma

$$\frac{1}{z'}dz' = \sum_{j=1}^{n+1}\frac{\lambda_j}{w_1-a_j}dw_1 \qquad ;$$

si ahora integramos la ecuación con condición inicial $z'(a) = 1$, obtenemos

$$\log z' = \sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j(\log(w_1-a_j) - \log(a-a_j))$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1}\log\left(\frac{w_1-a_j}{a-a_j}\right)^{\lambda_j} \qquad ,$$

y por consiguiente,

$$z = \prod_{j=1}^{n+1}\left(\frac{w-a_j}{a-a_j}\right)^{\lambda_j} \qquad \ldots(5.13)$$

Observemos que esta última relación tiene la característica de reunir en una sola expresión la información de los valores característicos y de los puntos singulares a al infinito . Si ahora consideramos la primera variación a lo largo de un lazo μ_j se tiene que

$$\log z'(w_j) = \lambda_j\int\frac{dw_1}{w-a_j} = \lambda_j 2\pi i$$

Por consiguiente,

$$z'(w_1) = e^{\lambda_j 2\pi i}$$

Como hemos considerado la prolongación a lo largo del lazo μ_j , la primera variación coincide justamente con el coeficiente del término lineal del j-ésimo generador f_j del grupo de holonomía , es decir,

$$f_j'(0) = \nu_j = e^{2\pi i\lambda_j} \qquad , \qquad \ldots(5.14)$$

6. CONDICIONES NECESARIAS PARA LA EQUIVALENCIA TOPOLOGICA DE ECUACIONES

En esta sección veremos que en la clase de ecuaciones $\mathcal{A}_n$ no existen ecuaciones estructuralmente estables; este resultado sin embargo, se vuelve más interesante si podemos dar una relación explícita entre aquellas ecuaciones que son topológicamente equivalentes, pues de esta manera habremos establecido condiciones necesarias para la equivalencia topológica de dos ecuaciones en $\mathcal{A}_n$. Empezaremos por demostrar la inestabilidad estructural de las ecuaciones $\alpha \in \mathcal{A}_n$ para $n \geqslant 2$.

6.1 EQUIVALENCIA TOPOLOGICA Y RIGIDEZ .

TEOREMA 6.1 -

En la clase $\mathcal{A}_n$ no hay ecuaciones estructuralmente estables para $n \geqslant 2$.

DEMOSTRACION :

Observemos que basta demostrar el teorema para un subconjunto denso de $\mathcal{A}_n$ .Así, restringiremos la demostración al subconjunto $\mathcal{A}_n'$ de $\mathcal{A}_n$. Supongamos que α y $\alpha' \in \mathcal{A}_n'$ son dos ecuaciones topológicamente equivalentes y sea F_α la solución marcada al infinito (una vez elegidos los generadores μ_j en el grupo $\pi_1(F_\alpha)$); entonces $F_{\alpha'} = H(F_\alpha)$ (con generadores $\mu_j' = H(\mu_j)$).Por el lema 1.1, los grupos de holonomía $\mathcal{F}_\alpha$ y $\mathcal{F}_{\alpha'}$ son topológicamente equivalentes, y, como consecuencia del teorema 4.1 (o del corolario 4.3), las partes lineales en el cero de las transformaciones de retorno $f_{j\alpha}$ y $f_{j\alpha'}$ se hallan ligadas por la relación

$$f_{j\alpha'}'(0) = (kf_{j\alpha})'(0) = f_{j\alpha}'(0)|f_{j\alpha}'(0)|^{\beta}$$

o bien por la relación

$$f_{j\alpha'}'(0) = (kf_{j\alpha})'(0) = \overline{f_{j\alpha}'(0)}\,|f_{j\alpha}'(0)|^{\beta}$$

(cuando el homeomorfismo que conjuga a los grupos no preserva la orientación). De esta manera, si $\nu_j = f_j'(0)$, se obtiene la relación

$$(\nu_1,\dots,\nu_n) \dashrightarrow (\nu_1|\nu_1|^{\beta},\dots,\nu_n|\nu_n|^{\beta})$$

sin embargo, los valores $\nu_j|\nu_j|^{\beta}$ pueden alterarse arbitrariamente $\nu_j|\nu_j|^{\beta}+\epsilon_j$, $\epsilon_j \in C$, lo que descarta la posibilidad de que la ecuación α sea una ecuación estructuralmente estable.

//.

El siguiente teorema nos dice que para ecuaciones genéricas, α y $\alpha' \in \mathcal{A}_n$, si α y α' son topológicamente equivalentes, entonces sus valores característicos estan relacionados por una transformación $\mathbb{R}$-lineal de C en sí mismo.

TEOREMA 6.2 -

Supongamos que las ecuaciones α y $\alpha' \in \mathcal{A}_n$ no tienen soluciones algebraicas salvo la recta al infinito. Sean $(\lambda_{11},\dots,\lambda_{n+1,1})$ y $(\lambda_{12},\dots,\lambda_{n+1,2})$ las colecciones de los números característicos de los puntos singulares al infinito de α y α' respectivamente, para los cuales $\operatorname{Im}\lambda_{jm} \neq 0$, $m=1,2$. Supongamos, por último, que las ecuaciones α y α' son topológicamente equivalentes. Entonces, existe una transformacion $\mathbb{R}$-lineal

$$A: {}^{\mathbb{R}}C \dashrightarrow {}^{\mathbb{R}}C \quad , A1 = 1$$

tal que

$$A(\lambda_{11},\dots,\lambda_{n+1,1}) = (\lambda_{12},\dots,\lambda_{n+1,2}) \qquad \dots(6.1)$$

(observamos que esta última igualdad expresa la dependencia de las colecciones).

La demostración de este teorema resulta un poco larga, pues aunque el corolario 4.4 de la sección 4.5 nos proporciona buena parte del resultado, se requieren todavía algunos argumentos que es necesario hacer con cuidado. Primeramente , vamos a demostrar un hecho general sobre la equivalencia topológica de foliaciones que nos permitirá hacer uso del corolario 4.4 .

6.2 PRESERVACION DE LA ORIENTACION .

LEMA 6.3 -

Sean

1) Dos ecuaciones diferenciales analíticas α y α' con sus respectivas regiones Ω y $\Omega' \subset$ C y ligadas por el homeomorfismo $H : \Omega \dashrightarrow \Omega'$.

2) Las ecuaciones α y α' tienen un punto singular no degenerado $\tilde{p}$ y $\tilde{p}' = H(\tilde{p})$ con números característicos no reales.

Sea $p \in \Omega$ un punto regular arbitrario de la ecuación α, $p' = H(p)$, Γ y Γ' transversales a las soluciones $\varphi_{p,\alpha}, \varphi_{p,\alpha'}$ en los puntos p y p' respectivamente, y h $h : (\Gamma,p) \dashrightarrow (\Gamma,p')$ el homeomorfismo definido por el diagrama conmutativo (1.5). Entonces los siguientes homeomorfismos conservan completamente la orientación o la invierten completamente :

1) Los homeomorfismos $H|_{\varphi_p}$ para toda hoja φ_p.

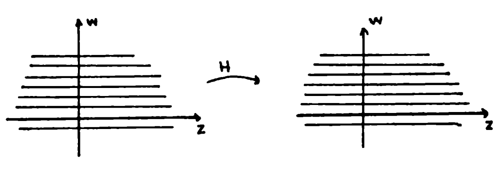
2) Los homeomorfismos $h : (\Gamma,p) \dashrightarrow (\Gamma',p')$ para todo punto p y transversal Γ.

3) Los homeomorfismos $h : (\Gamma,p) \dashrightarrow (\Gamma',p')$ y $H|_{\varphi_p}$.

DEMOSTRACION :

Para demostrar las afirmaciones 1 y 2 no es necesaria la condición 2 .

1) La primera afirmación resulta inmediata en el caso en el que las ecuaciones α y α' originan foliaciones estandar w=cte.

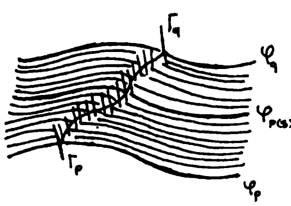


Supongamos ahora que, localmente (es decir, considerando un abierto conexo U de Ω), H tiene una orientación positiva en un punto p; entonces, por continuidad, existe una vecindad de p en la cual se tiene la misma orientación que en p . Análogamente, si existe un punto en el cual H tiene orientación negativa, existe una vecindad de q en la cual H tiene la misma orientación. Así, localmente, el conjunto donde H preserva orientación es abierto y el conjunto donde la invierte también es abierto. Por consiguiente, como U es conexo, alguno de los dos es vacío. Este argumento es local, pero la conexidad de Ω y el hecho de que los cambios de coordenadas sean holomorfos (por lo que preservan orientación), nos permiten concluir lo deseado.

Observamos que se tiene una afirmación análoga a la afirmación 1 en el caso de que se tiene una foliación arbitraria cuyas hojas son orientables.

2) Vamos ahora a demostrar la afirmación 2. Para ello consideremos dos puntos regulares p y $q \in \Omega$ y Γ_p, Γ_q dos transversales a $\varphi_{p,\alpha}$ y $\varphi_{q,\alpha}$, respectivamente, para las cuales el homeomorfismo $h|_{(\Gamma_p,p)}$ conserva la orientación. Debemos demostrar que también $h|_{(\Gamma_q,q)}$ preserva la orientación.

Sea { p(s) } una curva simple que no contiene a ningún punto singular de la ecuación α, $p(0) = p$ y $p(1) = q$; sea $\{\Gamma(s) \ni p(s)\}$ una familia contínua de transversales a las hojas $\varphi_{p(s),\alpha}$ y consideremos $M = \bigcup_{s \in [0,1]} (\Gamma(s),p(s))$



Observamos que, de manera natural, se ha construído una foliación del espacio M por hojas $(\Gamma(s),p(s))$.

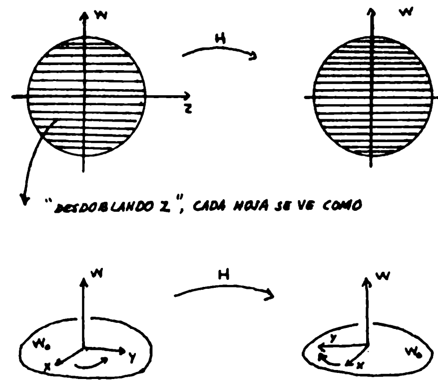
Sea $p'(s) = H(p(s))$, $\{(\Gamma'(s), p'(s))\}$ una familia contínua de transversales y consideremos $M' = \bigcup_{s \in [0,1]} (\Gamma'(s),p'(s))$
El homeomorfismo

$$\tilde{h} : M \dashrightarrow M'$$

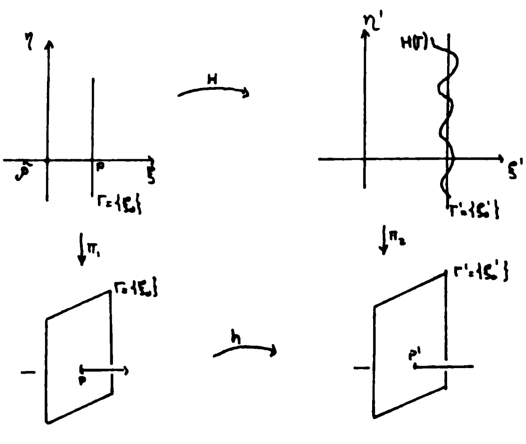
definido como $\tilde{h}|_{(\Gamma(s),p(s))} = h|_{(\Gamma(s),p(s))}$, transforma la foliación por transversales $(\Gamma(s),p(s))$ en la foliación por transversales $(\Gamma'(s),p'(s))$. La afirmación 2 se deduce ahora de la observación que hicimos al finalizar la demostración de 1.

3) Observemos primero que la afirmación 3 no se cumple para foliaciones estandar del bidisco $\{(z,w); |z|<1, |w|<1\}$

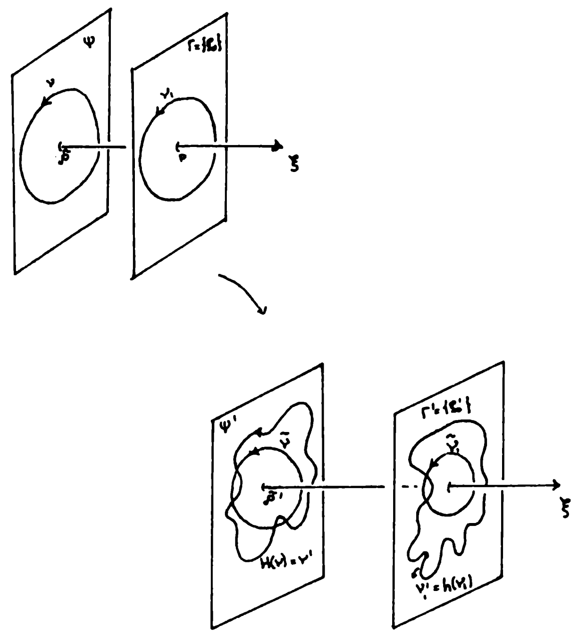
Consideremos las foliaciones estandar w=cte., la foliación z=cte. y el homeomorfismo $H(z_o,w_o) = (\bar{z}_o, w_o)$. H invierte la orientación, sin embargo, $h = \pi H \pi^{-1} : \Gamma_{(z_o,w_o)} \dashrightarrow \Gamma_{(z_o,w_o)}$ es la identidad y por lo tanto no invierte orientación.



Para demostrar la afirmación 3 necesitamos usar la condición 2, que nos permite usar el teorema de Poincaré. Así, puesto que $\tilde{p}$ y $\tilde{p}'$ son puntos singulares no degenerados de α y α', cuyos números característicos son no reales, existe una carta (ξ,η) en una vecindad O de $\tilde{p}$ en la que α tiene una expresión lineal y el punto $\tilde{p}$ tiene separatrices locales $\varphi = \{\eta = 0\}$ y $\Psi = \{\xi = 0\}$. Sean $O' = H(O)$, $\xi', \eta', \varphi', \Psi'$, los elementos análogos para la ecuación α'. Por el corolario al teorema de Poincaré, toda solución de la ecuación α que se aproxime a $\tilde{p}$ se acumula en las separatrices φ y Ψ; lo mismo sucede para la ecuación α'. Por esta razón, el homeomorfismo H transforma separatrices en separatrices (pues H manda sucesiones convergentes en sucesiones convergentes): $\varphi' = H(\varphi)$ $\Psi' = H(\Psi)$. Sea $p \in \varphi$, $p = (\xi_0, 0)$, $\Gamma = \{\xi = \xi_0\}$, $p' = H(p) \in \varphi'$ $p' = (\xi_0, 0)$ (observamos que la solución al infinito va en la solución al infinito y por ello $p' = (\xi_0', 0)$), $\Gamma' = \{\xi' = \xi_0\}$ y supongamos, por último, que el homeomorfismo $H|_{\varphi_1} : \varphi_1 \dashrightarrow \varphi'_{H(\varphi_1)}$ preserva orientación. Vamos a demostrar que $h : (\Gamma, p) \dashrightarrow (\Gamma', p')$ también preserva orientación. Observamos que, por la afirmación 2, basta hacerlo en la vecindad de la solución al infinito.



Sean $\nu \subset \Psi$, $\nu = \{ (\xi,\eta) = (0, \rho e^{it}) ; t \in [0,1], \rho > 0 \}$ $\nu_1 \subset \Gamma$, $\nu_1 = \{ (\xi,\eta) = (0, \rho e^{it}) ; t \in [0,1], \rho > 0 \}$, $\tilde{\nu} \subset \Psi'$, $\tilde{\nu}_1 \subset \Gamma'$ los análogos para α'; además sea $\nu' = H(\nu) \subset \Psi' \setminus \tilde{p}'$ y ν_1', $\nu_1' = h(\nu_1) \subset \Gamma' \setminus p'$.



Observamos que $H(\varphi) = \varphi'$ y que, por lo tanto, $H(O \setminus \varphi) = O' \setminus \varphi'$; por consiguiente, el hecho de que ν y ν_1 sean libremente homotópicas en $O \setminus \varphi$ implica que ν' y ν_1' son libremente homotópicas en $O' \setminus \varphi'$ (la homotopía estaría dada por $H \circ \mathcal{H} \circ h^{-1}$ donde $\mathcal{H}$ denota la homotopía de ν_1 a ν). Por la afirmación 1 sabemos que $H|_{\Psi}$ preserva orientación (y por ser homeomorfismo preserva grupo fundamental) por lo que $\tilde{\nu}$ y ν' son libremente homotópicas. Esto nos indica que $\tilde{\nu}_1$ y ν_1' son libremente homotópicas (pues ν_1' y ν', $\tilde{\nu}$ y $\tilde{\nu}_1$ son libremente homotópicas respectivamente). En resumen, $\tilde{\nu}_1$ y ν_1' son libremente homotópicas en $\Gamma' \setminus p'$ y sabemos que $\tilde{\nu}_1$ por definición está orientado como ν_1, por lo tanto el homeomorfismo $h : (\Gamma, p) \dashrightarrow (\Gamma', p')$ preserva orientación.

//.

6.3 DEMOSTRACION DEL TEOREMA 6.2 "MODULO $\mathbb{Z}$".

Hacemos notar que basta demostrar el teorema 6.2 para el caso en el que el homeomorfismo $H|_{\xi}$ preserva orientación. En caso contrario, en lugar de la ecuación α' puede pensarse en la ecuación $\bar{\alpha}'$ ligada a α' por medio de la conjugación $I(z_1,w) = (\bar{z}_1,\bar{w}_1)$; el homeomorfismo $I\cdot H|_{F_\alpha}$ preserva orientación. La colección de puntos singulares al infinito de la ecuación $\bar{\alpha}'$ se obtiene de la colección λ correspondiente a la ecuación α' por medio de la conjugación. Por esta razón, si la afirmación del teorema 6.2 se cumple para las ecuaciones α y $\bar{\alpha}'$, entonces se cumple para las ecuaciones α y α'.

Asumamos entonces que el homeomorfismo $H|_{F_\alpha}$ preserva orientación. Como vimos antes, $H(F_\alpha) = F_{\alpha'}$ y, si los lazos μ_j, j=1,...,n, son generadores canónicos para $\pi_1(F_\alpha)$ entonces $\mu_j' = H(\mu_j)$ son generadores para $\pi_1(F_{\alpha'})$ (cada uno rodea a un punto singular al infinito de la forma $H(a_j)$).

Sean $f_{j_1} = f_{j\alpha}$ y $f_{j_2} = f_{j\alpha'}$ las transformaciones de retorno correspondientes a los lazos μ_j y μ_j'. Por el lema 1, toda transformación f_{j_1} está ligada a f_{j_2} con el mismo homeomorfismo h y, por el lema 6.3, h preserva orientación. Además, por la expresión (5.14), sabemos que cualquier $\nu_{jm} = f'(0)$ es igual a $e^{2\pi i\lambda_{jm}}$, m=1,2. Por la afirmación 1 del corolario 4.4, existe una transformacion lineal $A: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $A1 = 1$, y una colección de enteros δ_j tal que

$$A\lambda_{j_1} = \lambda_{j_2} + \delta_j \qquad \ldots(6.2)$$

Esta afirmación es justamente la afirmación (6.2) "módulo $\mathbb{Z}$"; así, si logramos demostrar que $\delta_j = 0$, habremos terminado.

6.4 INTERPRETACION GEOMETRICA DE λ Y $\lambda + \delta$

Para demostrar que $\delta_j = 0$ en la expresión (6.2), vamos a dar un criterio que nos permita distinguir entre $e^{2\pi i\lambda_j}$ y $e^{2\pi i(\lambda_j+\delta_j)}$. Para ello usaremos razonamietos básicos de homotopía de curvas.

Sea α una ecuación diferencial analítica en la región $U \subseteq \mathbb{C}^2$, $\tilde{p}$ un punto singular de la ecuación α con número característico λ tal que $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$. Así, por el teorema de Poincaré, existe una vecindad U_0 de $\tilde{p}$ en la cual α tiene una expresión lineal y existen separatrices φ_0 y ψ_0 en las que se acumulan las soluciones restantes de la ecuación con condición inicial suficientemente cercana al punto sigular. Sea $\varphi \supset \varphi_0$ una separatriz y $a \in \varphi$ un punto arbitrario. En caso de que sea necesario restringiremos la vecindad $V = U$, $a \in V$, de manera que la intersección $V \cap \varphi$ sea uno-conexa y la diferencia $V \setminus (\varphi \cup \psi_0)$ sea homeomorfa al espacio $\mathbb{C}^2$ menos una "cruz coordenada" es decir, homotópicamente equivalente al toro T^2. Sea $\Gamma \subset V$, transversal a φ en el punto a, $p \in \Gamma$. Por la conmutatividad del grupo fundamental del toro, el número de vueltas del lazo $\tilde{\mu} \subset V$, con punto inicial p, alrededor de las separtrices φ y ψ_0 define la clase de homotopía $[\mu] \in \pi_1(V,p)$. Consideremos, por último, la proyección a lo largo de la solución $\pi: (\mathbb{C}^2,a) \to (\Gamma,a)$. La siguiente proposición caracteriza la prolongación analítica de la transformación π y nos da la clave para separar el número λ entre los numeros $\lambda + \delta$.

PROPOSICION 6.4 -

Sea $\tilde{\mu} \subset V \setminus (\varphi \cup \psi_0)$ el lazo con punto inicial $p \in \Gamma$, que rodea una vez a la separatriz ψ_0 y no rodea ni una sola vez a la separatriz φ. Entonces, si el lazo $\tilde{\mu}$ es suficientemente cercano a ψ, existe una prolongación analítica de la transformación π a lo largo del lazo $\tilde{\mu}$, tal que, en una carta analítica ζ en Γ, el camino $\pi\tilde{\mu}$ tiene los mismos extremos que la curva

$$\gamma_p = \{ p(t) \ ; \ t \in [0,1] \} \ , \ \zeta \circ p(t) = e^{-2\pi i\lambda t} \zeta \circ p \qquad \ldots(6.3)$$

y es homotópica a ella en $\Gamma \setminus a$.

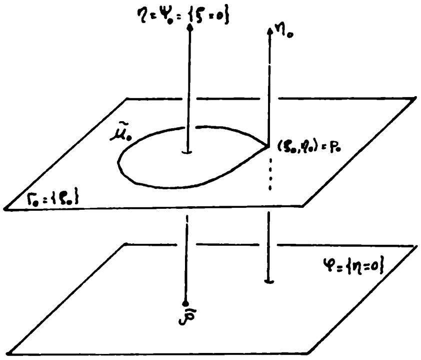
Antes de demostrar la proposición anterior observemos que hemos logrado obtener un criterio para separar el número λ de los restantes $\lambda + \delta$, $\delta \in \mathbb{Z}$. En efecto, si ζ_1 es otra carta arbitraria en Γ y $\gamma'_{p,\delta}$ es el arco

$$\gamma'_{p,\delta} = \{ p'(t) \ ; \ t \in [0,1] \} \ , \ \zeta \circ p(t) = e^{-2\pi i(\lambda+\delta)t} \zeta_1 \circ p \ ;$$

entonces si los caminos γ_p y $\gamma'_{p,\delta}$ (γ_p como en la proposición 6.4) tienen los mismos extremos, γ_p y $\gamma'_{p,\delta}$ son homotópicos si y sólo si $\delta = 0$.

Demostraremos ahora la proposición 6.4. Para ello, vamos a analizar el caso en el que el lazo $\tilde{\mu}$ tiene una expresión muy sencilla :

Sea (ζ,η) una carta que linealiza a la ecuación α en una vecindad del punto singular $\tilde{p}$, $\Gamma_0 = (\zeta = \zeta_0)$, $p = (\zeta_0,\eta_0)$ y sea μ_0 el lazo $\mu_0 = \{ (\zeta e^{2\pi i t},\eta_0) \ ; \ t \in [0,1] \}$; $\zeta_0|_\Gamma = \eta|_\Gamma$



Si deseamos conocer la proyección π a lo largo de $\tilde{\mu}_0$ necesitamos calcular la solución que pasa por ξ y termina en ξ_0 . Así, por el teorema de Poincaré,

$$\int_\gamma \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{d\xi'}d\xi' = \int_\gamma \frac{1}{\xi'}\, d\xi'$$

donde γ es una curva en Γ_0 que une ξ con ξ_0 ; así, si $\tilde{\eta}_0 = \eta(\xi_0)$, se tiene que $\ln\tilde{\eta}_0 - \ln\eta = (\ln\xi_0 - \ln\xi)$, de donde

$$\tilde{\eta}_0 = \eta\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\lambda$$

La proyección π en la carta ξ_0 toma entonces la forma $\pi(\xi,\eta) = \eta\left(\frac{\xi_0}{\xi}\right)^\lambda$, y por esta razón, la composición $\pi\tilde{\mu}_0$ se expresa como

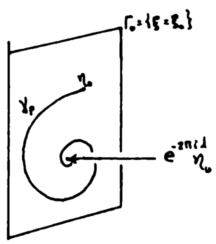
$$\pi\tilde{\mu}_0 = \{\ \pi(\xi_0 e^{2\pi i t},\eta_0)\ ;\ t\in[0,1]\ \}$$

$$= \{\eta_0\left(\frac{\xi_0}{\xi_0 e^{2\pi i t}}\right)^\lambda\ ;\ t\in[0,1]\ \}$$

es decir,

$$\pi\tilde{\mu}_0 = \{e^{-2\pi i\lambda t}\eta_0\ ;\ t\in[0,1]\ \}$$

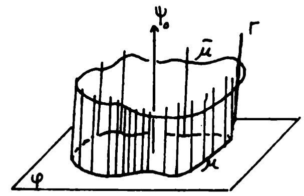
Hacemos notar que $\pi\mu_0$ coincide con el arco (6.3) en Γ_0 pues por definición $\xi_0|_{\Gamma_0} = \eta|_{\Gamma_0}$ y por lo tanto, $e^{-2\pi i\lambda t}\eta_0\cdot p = e^{-2\pi i\lambda t}\xi_0\cdot p$.



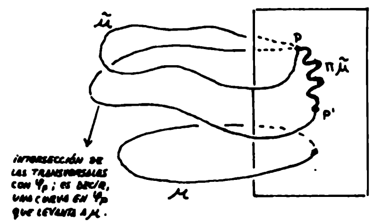
Para demostrar la proposición 6.4 para un lazo arbitrario vamos a usar fuertemente los resultados obtenidos para $\tilde{\mu}_0$ ligados al hecho de que las transformaciones de retorno alrededor de un punto singular resultan ser independientes del representante de la clase de homotopía de lazos.

Consideremos Γ y $\tilde{\mu}$ transversal y lazo arbitrarios, tales que satisfacen las condiciones de la proposición 6.4 y siendo $\tilde{\mu}$ un lazo, tan cercano a φ , que satisface la siguiente construcción :

Consideremos una proyección μ de $\tilde{\mu}$ en la solución φ a lo largo de una familia de transversales a φ ;



consideremos, además, el camino $\pi\tilde{\mu}\subset\Gamma$ y sea $f = \Delta_{\mu,\alpha}$;



si denotamos p' al punto final del camino, entonces, como consecuencia de lo definido,

$$p' = f^{-1}p \qquad \ldots(6.4)$$

Suponemos ahora que $\{(\Gamma(s),a(s))\}$, $s\in[0,1]$, denota una familia contínua de transversales a φ , $a(s)\in\varphi$, $\Gamma(0) = \Gamma_0$ y $\Gamma_1 = \Gamma$, y sea $\{\tilde{\mu}_s\}$ una familia contínua de lazos con punto inicial $p(s)\in\Gamma(s)$, $p(s)\in V\setminus(\varphi\cup\Psi_0)$; además, sea μ_s la proyección de $\tilde{\mu}_s$ sobre φ , $s\in[0,1]$, $\tilde{\mu}(0) = \tilde{\mu}_0$, $\tilde{\mu}(1) = \mu$ (por simplicidad denotamos Γ_s por $\Gamma(s)$, μ_s por $\mu(s)$, etcetera). De manera natural, se tienen definidas, una transformación en las transversales

$$\Delta_s : (\Gamma_s, a(s)) \longrightarrow (\Gamma_0, a(0)) \quad ,$$

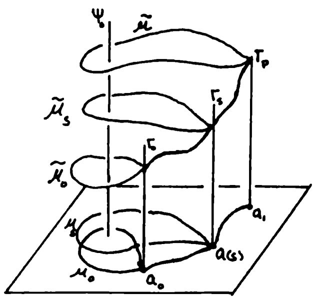
una proyección a lo largo de soluciones

$$\pi_s : (\mathbb{C}^2, a(s)) \dashrightarrow (\Gamma_s, a(0))$$

y una transformación de retorno

$$f_s : (\Gamma_s, a(s)) \text{ --- } (\Gamma_s, a(s))$$

correspondiente al lazo $\mu_s \subset \varphi$,con punto inicial a(s),libremente homotópico a μ_1 en φ (pues ambos rodean a Ψ_0 una sola vez).



La transformacion de retorno f_s es independiente del lazo escogido en $[\mu_s]$, entonces, como μ_0 y μ_s son libremente homotópicos, podemos pensar en el lazo basado en el punto a(s) y que está dado por recorrer el camino de a(s) a a_0 ,rodear Ψ_0 con μ_0 y regresar de a_0 a a(s) . De aquí, la transformacion f_s se puede escribir como

$$f_s = \Delta_s^{-1} \cdot f \cdot \Delta_s$$

Vamos a demostrar que f_s cumple con una relación parecida a la dada por (6.4), para con ello poder demostrar que los caminos $\gamma_{p(s)}$ (ver (6.5)) y $\pi_s \tilde{\mu}_s$ tienen los mismos extremos y son homotópicos para cada $s \in [0,1]$. Primero observamos que, dado que la carta ζ_0 linealiza a f_0 , la carta $\zeta_s = \zeta_0 \Delta_s$ linealiza a la transformación f_s ; además, $f_s'(0) = e^{2\pi i \lambda}$. Para verlo, consideremos la derivada de f_s en el cero

$$Df_s(0) = (D\Delta_s)_{f(\Delta_s(0))} \cdot (Df_0)_{\Delta_s(0)} \cdot (D\Delta_s)_{(0)}$$

Recordemos que $\Delta_s : (\Gamma_s, a_s) \dashrightarrow (\Gamma_0, a_0)$, de modo que la proyección $\pi(a(s),0) = 0(\frac{x}{a(s)})^{\lambda} = 0$, de donde $\Delta_s(0) = 0$. De aquí se sigue que $f_0(\Delta_s(0)) = f_0(0) = e^{-2\pi i \lambda} 0 = 0$ y , en consecuencia,

$$Df_s(0) = Df_0(0)$$

Por otra parte, de la expresión (6.4)

$$\pi \mu_0(\eta) = f_0^{-1}(\eta) , \quad \text{para } \eta \in \Gamma \quad ,$$

de donde,

$$f_0^{-1}(\eta) = e^{-2\pi i \lambda} \eta$$

y

$$f_0'(0) = e^{2\pi i \lambda}$$

De aquí, la parte lineal de f_s es $e^{-2\pi i \lambda} z$, pues $f_s(0) = 0$

Hacemos notar ahora que, tanto el inicio p(s) como el final p'(s) de los arcos

$$\gamma_{p(s)} = \{ p(s,t) \ ; \ t \in [0,1] \}, \ \zeta_s p(t,s) = e^{-2\pi i \lambda t} \zeta_s \cdot p(s) \ , \qquad \ldots (6.5)$$

satisfacen la relación $p'(s) = f_s^{-1} p(s)$, pues se tiene que $\zeta_s \cdot p(0,s) = \zeta_s p(s)$, $\zeta_s \cdot p(1,s) = e^{-2\pi i \lambda} \zeta_s p(s)$ y f_s en la carta ζ_s toma la forma $f_s(\zeta_s) = e^{2\pi i \lambda} \zeta_s$. En resumen, hemos demostrado que

$$p'(s) = f_s^{-1} p(s)$$

y, por lo tanto, p'(s) es precisamente el extremo final de $\pi_s \tilde{\mu}_s$. Por último, los caminos $\gamma_{p(s)}$ y $\pi_s \tilde{\mu}_s$ tienen los mismos extremos, pertenecen a $\Gamma(s) \setminus a(s)$, dependen contínuamente de s y son homotópicos para s = 0 . Por lo tanto, $\gamma_{p(s)}$ y $\pi_s \tilde{\mu}_s$ son homotópicos en $\Gamma(s) \setminus a(s)$ para cada $s \in [0,1]$; en particular, para $\Gamma(1) \setminus a(1) = \Gamma \setminus a$, γ_p y $\pi \tilde{\mu}$ son homotópicos, que es lo que queriamos demostrar.

//.

Antes de poder concluir la demostración del teorema 6.2 necesitamos un último resultado.

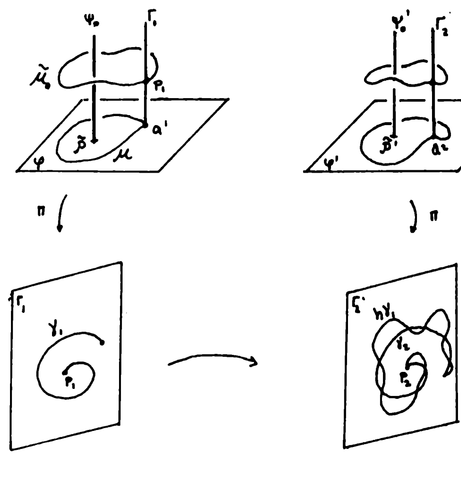
COROLARIO 6.5 -

Sean α y $\alpha' \in \mathcal{A}_n'$ dos ecuaciones topológicamente equivalentes, H el homeomorfismo que los conjuga, $\hat{p}$ y $\hat{p}' = H(\hat{p})$ los puntos singulares de las ecuaciones α y α' con números característicos no reales λ_1 y λ_2, φ y $\varphi' = H(\varphi)$ separatrices de los puntos $\tilde{p}$ y $\tilde{p}'$; $a' \in \varphi$, $a^2 = H(a') \in \varphi'$, Γ_1 y Γ_2 transversales a las soluciones en los puntos a' y a^2 y $h : (\Gamma_1, a') \longrightarrow (\Gamma_2, a^2)$ el homeomorfismo definido en (1.5) Sean μ y μ' lazos en φ y φ', basados en a' y a^2, que rodean a los puntos $\tilde{p}$ y $\tilde{p}'$ una sola vez en dirección positiva, f_1 y f_2 las correspondientes transformaciones de retorno y ξ_1, ξ_2 las cartas que las linealizan. Por último, sea $p_1 \in \Gamma_1 \setminus a'$, $p_2 = h(p_1) \in \Gamma_2$ y

$$\gamma_{p_m} = \{ p_m(t) \in \Gamma_m ;\ t \in [0,1] \},\ \xi_m p_m(t) = e^{2\pi i \lambda t}\xi_m(p),\ m=1,2$$

Entonces si el homeomorfismo $H|_\varphi$ preserva orientación, los arcos $h\gamma_{p_1}$ y γ_{p_2} son homotópicos en $\Gamma_2 \setminus a^2$.

La idea de la demostración es usar la proposición 6.4 para $H(\tilde{\mu})$ (donde $\tilde{\mu}$ está definido como antes), de manera que pueda extenderse la proyección a lo largo de las soluciones a un lazo conveniente y, por consiguiente, la conmutatividad del diagrama (1.5) pueda ser extendida a un dominio que nos permita sacar conclusiones sobre el comportamiento de h.



DEMOSTRACION :

Sean $U, \Psi_0, V, \tilde{\mu}$ definidos como antes, U', Ψ_0', V', los objetos análogos para la ecuación α', y sea $p_1 \in \Gamma_1$ un punto suficientemente cercano a a'. El hecho de que el grupo $\pi_1(V \setminus (\varphi \cup \Psi_0))$ sea conmutativo, nos dice que la clase de homotopía $[\tilde{\mu}] \in \pi_1(V \setminus (\varphi \cup \Psi_0))$ se define por la clase libre de homotopía de dicho lazo. Consideremos como representante de dicha clase a un pequeño círculo topoló-gico que rodee a la separatriz Ψ_0 una vez en dirección positiva y que no rodee ni una sola vez a la separatriz φ. El homeomorfismo H transforma a μ_0 en un pequeño círculo toplógico $\tilde{\mu}_0'$, que rodea una vez a la separatriz $\Psi_0' = H(\Psi_0)$ y ninguna vez a la separatriz $\varphi' = H(\varphi)$. Podemos suponer que ambos círculos topológicos $\tilde{\mu}_0$ y $\tilde{\mu}_0'$ se proyectan homeomorfamente a lo largo de las soluciones sobre las transversales a las soluciones φ y φ'. Como $H|_\varphi$ preserva orientación, entonces por el lema 6.3, $\tilde{\mu}_0'$ rodea a la separatriz Ψ_0' en dirección positiva. Puesto que todo $\tilde{\mu} \in [\tilde{\mu}_0]$ es libremente homotópico a $\tilde{\mu}_0$ y H preserva orientación, $H\tilde{\mu}$ y $\tilde{\mu}_0' = H(\tilde{\mu}_0)$ son libremente homotópicos y, en consecuencia, $H\tilde{\mu}$ cumple con las hipótesis de la proposición 6.4 ($H\tilde{\mu}$ rodea una sola vez a Ψ_0' y ninguna a φ') Asi, las proyecciones π_1 y π_2 del diagrama (1.5) se prolongan analíticamente a los lazos $\tilde{\mu}$ y $H\tilde{\mu}$, de modo que, extendiendo las vecindades O_1 y O_2 y las proyecciones π_1 y π_2 (que denotamos igual por comodidad), el diagrama (1.5) conmuta. Asi, $h\pi_1\tilde{\mu} = \pi_2 H\tilde{\mu}$. La proposición 6.4 afirma que $\pi'(H\tilde{\mu})$ y γ_{p_2} son homotópicos en $\Gamma_2 \setminus a^2$ y que $\pi'\tilde{\mu}$ es homotópico a γ_{p_1}; por lo tanto, como h preserva orientación, $h\pi'\tilde{\mu}$ es homotópico a $h\gamma_{p_1}$ y $h\pi'\tilde{\mu} = \pi^2 H\tilde{\mu}$ es homotópico a γ_{p_2}. De aquí se tiene, por fin, que h es homotópico a γ_{p_2}.

//.

6.5 FIN DE LA DEMOSTRACION DEL TEOREMA 6.2 .

Usando los resultados anteriores, la demostración del teorema 6.2 resulta muy sencilla. Sabemos que la condición $\mathrm{Im}\,\lambda_j \neq 0$ implica la existencia de una carta que linealiza a la transformación $f_{jm} : (\Gamma_m, a^m) \longrightarrow (\Gamma_m, a^m)$, $m=1,2$ Sea ξ_{jm} dicha carta. Como consecuencia del lema 6.3, el homeomorfismo h preserva orientación, lo que implica que los grupos de holonomía $\mathcal{F}_\alpha$ y $\mathcal{F}_{\alpha'}$ de las ecuaciones α y α' satisfacen las condiciones del teorema 4.1. Sea $p \in \Gamma_1$ un punto suficientemente cercano a a'. Denotemos por $\gamma_{jm} \subset \Gamma_m$ al arco de espiral logarítmica

$$\gamma_{jm} = \{ p(t) \in \Gamma_m ;\ t \in [0,1] \},\ \xi_{jm} p(t) = e^{\pi i \lambda_{jm} t}\xi_{jm}(p_m)$$

donde $p_1 = p$, $p_2 = h(p)$. Por el corolario 4.4 al teorema 4.1, $h\gamma_1$ es homotópico en $\Gamma_2 \setminus a^2$ al arco

$$\widetilde{\gamma}_{j2} = \{\ p(t) \in \Gamma_2\ ;\ t \in [0,1]\ \},\ \zeta_{j2} \cdot p(t) = e^{2\pi i(\lambda_{j2}+\delta_j)t}\,\zeta_{j2}(p_2)$$

donde δ_j es como en (6.2). Ahora,como consecuencia del corolario 6.5, $h\gamma_{j1}$ y γ_{j2} son homotópicos en $\Gamma_2 \setminus a^2$; los arcos $\bar{\gamma}_{j2}$ y γ_{j2} son entonces homotópicos en $\Gamma_2 \setminus a^2$, y por lo tanto, $\delta_j = 0$. El teorema 6.2 queda demostrado.

//.

7. RIGIDEZ FUERTE : EL CASO DE UNA FAMILIA MONOPARAMETRICA .

7.1 EL TEOREMA DE RIGIDEZ .

En la introducción de este trabajo enunciamos el teorema de la rigidez absoluta. En esta sección demostraremos un teorema que resulta ser una consecuencia inmediata del teorema de la rigidez absoluta, pues es la restricción de dicho teorema al caso en el que se tiene una familia analítica a un parámetro de ecuaciones. Sin embargo, la demostración de este caso más sencillo nos proporcionará parte de las ideas necesarias para demostrar el teorema en su versión más general.

En esta sección vamos a considerar una ecuación $\alpha \in \mathcal{A}_n$ a la cual le imponemos las siguientes condiciones genéricas :

7.a) α es una ecuación de Xuday-Verenov
7.b) el 2-jet del conmutador $[f_{1\alpha}, f_{2\alpha}]$ es distinto de identidad .
7.c) en la vecindad afín (z,w) la ecuación α tiene n^2 puntos singulares p_j .
7.d) $Q_z + P_w|_{p_j} \neq 0$, $j=1,\dots,n$.

Antes de enunciar el teorema veamos que , en efecto, las condiciones 7.a - 7.d son genéricas :

En la sección 5.3 vimos que la condición 7.a es genérica para las ecuaciones $\alpha \in \mathcal{A}_n$. Observamos que la condición 7.c equivale a pedir que el sistema

$$P = 0 \ , \ Q = 0 \ ,$$

tenga n^2 raíces distintas. El teorema de Bezout (ver apéndice 1) nos dice que esta condición se cumple para parejas de polinomios genéricos en $\mathcal{A}_n$ de grado n.

Por otra parte, la condición 7.d equivale a pedir que los sistemas

$$P = 0 \ , \ Q = 0 \ , \ Q_z + P_w = 0$$

sean linealmente independientes; hacemos notar que ésta condición se cumple también para parejas genéricas (basta ver lo que sucede con las resultantes de P y P_w y de Q y Q_z).

Por último , la condición 7.b también se cumple para ecuaciones genéricas $\alpha \in \mathcal{A}_n$ como se ve en la siguiente proposición.

PROPOSICION 7.1 -
Sea $\alpha_0 \in \mathcal{A}_n$ fija y ζ una carta en la transversal Γ a la solución al infinito . En una vecindad $V \subset \mathcal{A}_n$ del punto α_0 se encuentra definida una transformación analítica de V en C^{2n}, $\Phi : V \dashrightarrow C^{2n}$, tal que, a cada $\alpha \in V$ le asocia el conjunto $\{ f_{1\alpha}'(0), f_{1\alpha}''(0), \dots, f_{n\alpha}'(0), f_{n\alpha}''(0) \}$ de los coeficientes de Taylor del 2-jet de las transformaciones $f_{1\alpha}$, ..., $f_{n\alpha}$. Entonces $\dim \Phi(V) = 2n$.

En otras palabras, la proposición anterior nos dice que variando la ecuación $\alpha \in \mathcal{A}_n$ se pueden variar arbitrariamente los 2-jet de las n transformaciones en el infinito. La demostración del teorema se sigue de calcular la primera y segunda variación de la solución al infinito F con respecto a las condiciones iniciales. En la sección 5 calculamos ya la primera variación y obtuvimos que $\dot{f}'(0) = e^{2\pi i \lambda_j}$, $j=1,\dots,n$; para demostrar la proposición bastará con encontrar la expresión de $f_j''(0)$. No lo haremos aquí.

Formulemos ahora el teorema de la rigidez fuerte :

TEOREMA 7.2 - (de la rigidez fuerte)
Sea $\alpha \in \mathcal{A}_n$ una ecuación cualquiera y $\mathcal{A} = \{\alpha(t)\}$ una familia analítica monoparamétrica definida en una vecindad $O \subset C$ del origen, $\alpha(0) = \alpha$. Supongamos que α es estructuralmente estable en la clase $\mathcal{A}$, donde el homeomorfismo $H(t)$ que conjuga a las ecuaciones α y $\alpha(t)$ tiende uniformemente a la identidad cuando $t \dashrightarrow 0$. Entonces, si α es una ecuación de tipo genérico, entonces $\alpha(t)$ es afinmente equivalente a α .

Observamos que, cuando decimos que α es de tipo genérico, estamos suponiendo que satisface precisamente las condiciones 7.a - 7.d descritas al principio de la sección.

El conjunto $\mathcal{A}_\alpha$ de ecuaciones $\alpha' \in \mathcal{A}_n$, afinmente equivalentes a α, constituye una variedad analítica. Si la interseccion $\mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{A}$ es un subconjunto abierto del conjunto $\mathcal{A}$, entonces por la analiticidad, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\alpha$. Por esta razón, vamos a restringirnos en la demostración a la región de definición $\mathcal{O}$ de la familia $\mathcal{A}$.

7.2 DEPENDENCIA ANALITICA CON RESPECTO A UN PARAMETRO DEL HOMEOMORFISMO QUE CONJUGA A LOS GRUPOS DE HOLONOMIA

Aplicando el resultado del lema 2.1, se tiene que para todo t en una cierta vecindad $\mathcal{O}'$ del origen, los grupos marcados de holonomía en el infinito $\mathcal{F}_{\alpha(t)}$ con generadores $f_{j,\alpha(t)} = f_{j,t}$, son conjugados por el homeomorfismo h_t, donde $h_t : (\Gamma, a) \dashrightarrow (\Gamma, a)$ y se tiene que, para todo $p \in \Gamma$ para el cual $h_t p$ esté definido, el diagrama (1.5) toma la forma

$$\begin{tikzcd} O \arrow[r, "H_t"] \arrow[d, "\pi"'] & O \arrow[d, "\pi"] \\ (\Gamma, a) \arrow[r, "h_t"] & (\Gamma, a) \end{tikzcd}$$

donde O es una vecindad del punto base "a". Así, por la conmutatividad, $\pi H_t(\varphi_{p\alpha}) = (h_t \pi)(\varphi_{p\alpha}) = h_t(\pi \varphi_{p\alpha})$ y, por la equivalencia topológica en la transversal $h_t(\pi\varphi_{p\alpha}) = (\pi\varphi)_{h_t p,\alpha}$ La igualdad $\pi H_t(\varphi_{p\alpha}) = \pi \varphi_{h_t p,\alpha}$ nos proporciona una igualdad de conjuntos que más adelante nos será de gran utilidad

$$H_t \varphi_{p,\alpha} = \varphi_{h_t p,\alpha} \qquad \ldots(7.1)$$

(es importante no olvidar que la igualdad anterior representa sólo una igualdad de conjuntos)

Vamos a ver que la familia de homeomorfismos es, de hecho, una familia analítica de holomorfismos.

PROPOSICION 7.3 -

La familia de homeomorfismos $\{h_t\}$ es una familia analítica de holomorfismos.

DEMOSTRACION :

Las condiciones 7.a y 7.b implican que el grupo $\mathcal{F}_\alpha$ cumple con las condiciones del teorema 4.5. Por esta razón el homeomorfismo h_t es un holomorfismo. Además, la expresión (4.18) nos permite dar una descripción precisa de h_t: el teorema de Schroeder para la linealización de una familia de transformaciones, nos asegura la existencia de una familia analítica de cartas $\{\zeta_t\}$ tal que la carta ζ_t linealiza a la función $f_{1,\alpha(t)}$. El conmutador $[f_{1,\alpha(t)}, f_{2,\alpha(t)}]$ en la carta ζ_t toma la forma

$$\zeta_t \dashrightarrow \zeta_t + a_2(t)\,\zeta_t^2 + \ldots$$

donde $a_2(t)$ es una función analítica de t; por la condición 7.b, se tiene que $a_2(0) \neq 0$ y, por consiguiente, $a_2(t) \neq 0$ y

$$h_t = \zeta_t^{-1} \cdot \frac{a_2(t)}{a_2(0)} \cdot \zeta_0 \qquad \ldots(7.2)$$

//.

7.3 FOLIACION AUXILIAR .

Vamos a reinterpretar ahora a la familia $\mathcal{A}$ como una ecuación diferencial, para con ello construir una foliación auxiliar Θ que nos permita demostrar la equivalencia analítica de las ecuaciones α y $\alpha(t)$.

Una ecuación cualquiera $\alpha(t)$ de la familia analítica $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_n$, se expresa en una vecindad afín (z,w) como dw/dz = P(z,w,t) / Q(z,w,t), con P y Q polinimios que dependen analíticamente de t. Sea X el producto $X = CP^2 \times \mathcal{O}$ la familia $\mathcal{A}$ se puede interpretar como una ecuación en X (que denotaremos también por $\mathcal{A}$) y que en la región $\Omega \subset X, \Omega = \{ (z,w,t) \}$ toma la forma

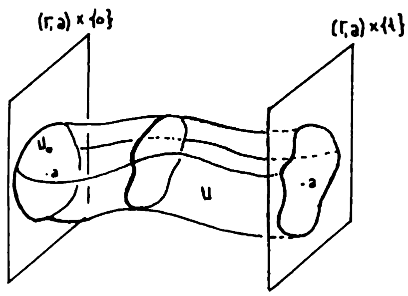
$$\frac{dw}{dt} = \frac{P(z,w,t)}{Q(z,w,t)} \quad , \quad \frac{dt}{dz} = 0$$

Observamos que la restricción $\mathcal{A}\big|_{t=t_0} = \alpha(t_0)$ y que la condición dt/dz = 0 implica que el plano vertical t = cte es invariante con respecto a $\mathcal{A}$. A la solución de la ecuación $\mathcal{A}$ con condiciones iniciales $x = (q,t)$, la denotamos

$$\varphi_x = \varphi_{q,\alpha(t)}$$

Establecemos que el homeomorfismo H_t es el que lleva el espacio $CP^2 \times \{0\}$ en $CP^2 \times \{t\}$ y que el holomorfismo h_t lleva una vecindad de $(\Gamma,a) \times \{0\}$ en $(\Gamma,a) \times \{t\}$. Denotemos por U_0 a la región de definición de todos los holomorfismos de la familia $\{h_t\}$, por U_t a la región $h_t U_0$ y por $U \subset \Gamma \times \mathcal{O}'$ a la región

$$U = \bigsqcup_{t \in \mathcal{O}'} U_t$$



(recordamos que en lema 2.1 se escoge $\mathcal{O}$ suficientemente pequeño alrededor de "a" de modo que "a" y Γ sirven para considerar $\mathcal{F}_{\alpha(t)}$).

Con la notación que hemos introducido, la expresión (7.1) toma la forma

$$H_t \varphi_p = \varphi_{h_t p}\quad , \text{ para todo } p \in U_0,\ t \in \mathcal{O}' \qquad \ldots(7.3)$$

De manera natural se tiene una foliación por curvas η_p de U definidas como

$$\eta_p = \{ h_t p \ ;\ t \in \mathcal{O}' \}\ ,\ p \in U_0 \qquad \ldots(7.4)$$

La ecuación $\mathcal{A}$ tiene puntos singulares en la region Ω y en la región $X \setminus \Omega$. Denotemos por Y al conjunto de puntos singulares de $\mathcal{A}$ en Ω y por Y' al conjunto de los puntos singulares al infinito de la ecuacion $\mathcal{A}$, $Y' \subset X \setminus \Omega$. Por la condición 7.c cada restricción $\alpha(t_0) = \mathcal{A}|_{t=t_0}$ es una ecuación con n^2 puntos singulares; así, la vecindad $\mathcal{O}$ puede suponerse tan pequeña que Y consista de n^2 curvas analíticas $\{ P_j(t) \} \subset X$, para $j=1,\ldots,n$.

La siguiente proposición nos asegura la existencia de una foliación analítica bidimensional de la variedad $X \setminus \{ Y \cup Y' \}$. Dicha foliación, resulta ser invariante con respecto a la ecuación $\mathcal{A}$ y transversal a los planos t=cte. Como veremos más adelante, la construcción de esta foliación es la clave para la demostración del teorema, ya que habremos de construir un campo tangente a las hojas de la foliación de manera tal, que el flujo fase de dicho campo proporcionará la relación analítica entre las ecuaciones $\alpha(0) = \alpha$ y $\alpha(t)$.

PROPOSICION 7.4 -

En la variedad $X \setminus \{ Y \cup Y' \}$ se halla definida una foliación analítica bidimensional Θ, invariante con respecto a la ecuación $\mathcal{A}$ y transversal a los planos t = cte Cada hoja tiene intersección no vacía con U ; la hoja ξ_p que contiene al punto $p \in U_0$ esta definida por la fórmula

$$\xi_p = \bigsqcup_{t \in \mathcal{O}'} \varphi_{h_t p} = \bigsqcup_{x \in \eta_p} \varphi_x \qquad \ldots(7.5)$$

DEMOSTRACION :

Observemos primero que $H_t F_\alpha = F_{\alpha(t)}$, de manera que la diferencia $X \setminus \{\Omega \cup Y'\}$ es una hoja de la foliación Θ pues

$$X \setminus (\Omega \cup Y') = \bigcup_{t \in \mathcal{O}'} F_{\alpha(t)} = \bigcup_{t \in \mathcal{O}'} H_t F_\alpha$$

y

$$X \setminus (\Omega \cup Y') = \bigcup_{t \in \mathcal{O}'} F_\alpha h_t \ ;$$

así, si "a" es el punto base de $\pi_1(F_\alpha)$

$$\xi_a = \bigcup_{t \in \mathcal{O}'} F_{\alpha h_t a} = \bigcup_{x \in \eta_a} F_{\alpha,a} \ .$$

A esta hoja se le denomina hoja al infinito.

Para demostrar la proposición 7.4 tenemos que demostrar los siguientes puntos :

a) Los conjuntos ξ_p forman una partición del conjunto, es decir,

$$\bigcup_{p\in U_0} \xi_p = X \setminus (\, Y \cup Y' \,) \qquad \ldots(7.6)$$

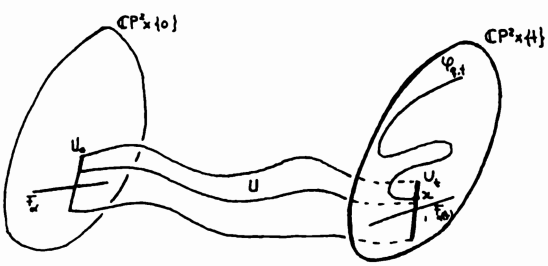
y que

$$\text{o bien } \xi_p \cap \xi_{p'} = \phi \quad \text{o} \quad \xi_p = \xi_{p'} \qquad \ldots(7.7)$$

b) La partición en conjuntos ξ_p es una foliación analítica.

Para demostrar la relación (7.6) hacemos notar que la vecindad $\mathcal{O}'$ puede tomarse tan pequeña que cada ecuación $\alpha(t)$ sea del tipo de Xuday-Verenov, así todas las soluciones de la ecuación $\alpha(t)$, salvo la solución al infinito, son densas en $CP^2\times\{t\}$. Consideremos un punto q en $X \setminus \{\, Y \cup Y' \,\}$, entonces $q \in CP^2\times\{t\}$ para alguna $t \in \mathcal{O}'$ Sea $\varphi_{q,t}$ la solución de $\alpha(t)$ que pasa por q; si $\varphi_{q,t}$ no es la solución al infinito, entonces $\varphi_{q,t}$ es densa en el producto $CP^2\times\{t\}$ e intersecta a U_t. Como U esta foleada por las curvas η_p, $\varphi_{q,t}$ intersecta a alguna de ellas en U_t, digamos que $x \in \eta_{x_0} \cap \varphi_{q,t}$. Por consiguiente,

$$q \in \xi_{x_0} = \bigcup_{x\in\eta_{x_0}} \varphi_x$$

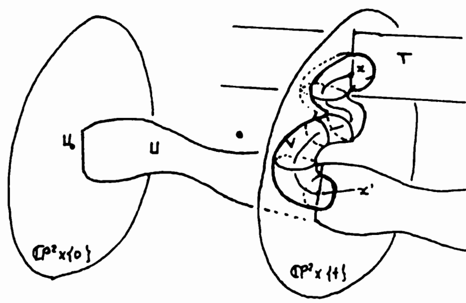


Así, $\bigsqcup_{p\in U_0} \xi_p = X \setminus \{\, Y \cup Y' \}$.

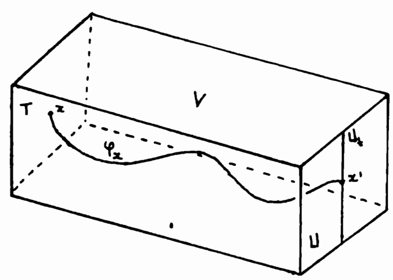
Para demostrar que o bien $\xi_p \cap \xi_{p'} = \phi$ o $\xi_p = \xi_{p'}$ usamos la relación (7.1) pues si $q \in \xi_p \cap \xi_{p'}$ entonces $q \in \varphi_{h_t p}$ y $q \in \varphi_{h_t p'}$, para alguna p y $p' \in U$; sin embargo, la relación (7.1) implica que $q \in H_t\varphi_p$ y $q \in H_t\varphi_{p'}$, por lo tanto, $p' \in \varphi_p$ y $\xi_p = \xi_{p'}$.

Demostraremos ahora que la partición de $X \setminus \{\, Y \cup Y' \}$ en conjuntos ξ_p es una foliación analítica.

Sean $x = (q,t) \in X \setminus \{\, Y \cup Y' \,\}$, $x' \in U_t \cap \varphi_x$ puntos arbitrarios y $\gamma \subset \varphi_x$ una curva que comienza en x y termina en x'. Sea $T \ni x$ un plano transversal a la solución φ_x, $V \subset X$ una vecindad de x a lo largo de la solución de la ecuación $\mathcal{A}$ tan pequeña que la proyección π_T, $\pi_T : V \dashrightarrow (T,x)$ de V a lo largo de la solución sea una transformación analítica univaluada de rango dos.



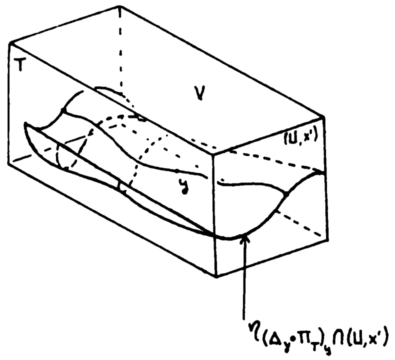
Esquemáticamente V puede interpretarse como



Consideremos ahora la transformación $\Delta_\gamma : (T,x) \dashrightarrow (U,x')$ de la ecuación $\mathcal{A}$ correspondiente a la curva γ. La transformación $\Delta_\gamma \circ \pi_T : (V,x) \dashrightarrow (U,x')$ es analítica de rango dos. La foliación H de la vecindad (U,x') induce una foliación H_* de la vecindad V, $H_* = (\Delta_\gamma \circ \pi_T)_* H$, como sigue: a la hoja de la foliación H que pasa por el punto $y \in V$ la denotamos $\eta_* y$ y se define como

$$\eta_* y = (\Delta_\gamma \circ \pi_T)^{-1} (\eta_{(\Delta_\gamma\circ\pi_T)y} \cap (U,x')) \quad ;$$

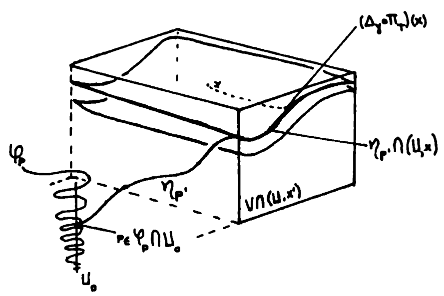
en otras palabras, dada $y \in V$, se considera la curva en (U,x') que pasa por el punto $(\Delta_\gamma \circ \pi_T)(y) \in (U,x')$, y se define la hoja $\eta_* y$ "jalando" el segmento $\eta_{(\Delta_\gamma\circ\pi_T)y} \cap (U,x')$ con la transformación $(\Delta_\gamma \circ \pi_T)^{-1}$



La foliación H_* así definida es analítica pues Δ_y y π_T son analíticas y la foliación H de U_1 dada por las curvas $\eta_p = \{ h\, p \; ; \; t \in \mathcal{O}' \}$, $p \in U_0$ también es analítica. Solo nos resta ver que la foliación H_* y nuestra foliación original coinciden.

Sea Θ_V la partición de la vecindad en las componentes conexas de la intersección $\xi_p \cap V$. La transformación $\Delta_y \circ \pi_T$ lleva a la intersección $\xi_p \cap V$ en el conjunto numerable de curvas analíticas dado por

$$\bigcup_{p' \in \varphi_p \cap U_0} \eta_{p'} \cap (U,x')$$



Cada una de las intersecciones $\eta_{p'} \cap (U,x')$ es conexa, por ello la foliación Θ_V y H_* coinciden. La foliación obtenida es independiente de la curva γ elegida y Θ_V es una foliación analítica. En consecuencia, Θ es una foliación analítica.

7.4 CAMPO TANGENTE A LA FOLIACION Y FIN DEL TEOREMA 7.2 .

En esta sección demostraremos un lema que implica al teorema 7.2 . Dicho lema es el siguiente :

LEMA 7.5 -

Sean la variedad X, la ecuación $\mathcal{A}$, la región Ω y los conjuntos Y y Y' de puntos singulares tal como fueron definidos en la sección anterior . Sea Θ la foliación bidimensional analítica invariante con respecto a la ecuación $\mathcal{A}$ y transversal a los planos t = cte.

Sea $\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = X \setminus (\Omega \cup Y')$ la hoja al infinito de la foliación Θ . Supongamos, por último que la ecuación $\alpha(0)$ satisface las condiciones 7.c y 7.d . Entonces todas las ecuaciones $\alpha(t)$ son afinmente equivalentes a la ecuación $\alpha(0)$

Para demostrar el lema 7.5 es necesaria la siguiente proposición :

PROPOSICION 7.6 -

Bajo las condiciones del lema 7.5, existe un campo W , definido en la región Ω , tangente a las hojas ξ_x de la foliación Θ y que tiene la forma

$$\dot{W}(z,w,t) = \begin{pmatrix} A(t)\frac{z}{w} + b(t) \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $A(t) : C^2 \longrightarrow C^2$ es una matríz analítica y $b(t)$ en C es un vector analítico.

La demostación de la proposición 7.6 nos llevará un poco de tiempo, de modo que optamos por deducir primero el lema 7.5 apartir de la proposición 7.6, y después pasaremos a la demostración de esta última.

Supongamos entonces que W es el campo construído en la proposición 7.6. El flujo fase $g_t : C^2 \times \{0\} \longrightarrow C^2 \times \{t\}$, correspondiente al campo W, está definido en el espacio $C^2 \times \{t\}$ para todo $t \in \mathcal{O}'$, ya que da lugar a las ecuaciociones diferenciales no homogeneas

$$\begin{bmatrix}\dot z\\ \dot w\end{bmatrix} = A(t)\begin{bmatrix}z\\ w\end{bmatrix} + b(t)$$

$$\dot t = 1 \qquad \ldots(7.8)$$

La linealidad de la ecuación (7.8) nos dice que g_t es una transformación afín y por lo tanto se prolonga al holomorfismo

$$\tilde H_t : CP^2\times\{0\} \longrightarrow CP^2\times\{t\}$$

Como W es tangente a Θ, la foliación Θ es invariante con respecto a la ecuación (7.8); así, la intersección $\xi_p \cap CP^2\times\{0\}$ se transforma en la intersección $\xi_p \cap CP^2\times\{t\}$ El lema 7.5 queda demostrado apartir de la observación de que las intersecciones $\xi_p\cap CP^2\times\{0\}$ y $\xi_p\cap CP^2\times\{t\}$ son solución de las ecuaciones $\alpha(0)$ y $\alpha(t)$ respectivamente.

Demostraremos ahora la proposición 7.6. Lo primero que veremos es que en X se tiene definida una distribución analítica, por planos, que resulta ser integrable.

En cada punto $x\in X \setminus \{Y \cup Y'\}$, consideramos el plano complejo bidimensional L_x tangente a la hoja $\xi_x \ni x$ de la foliación Θ. En la variedad X se define una distribucion analítica bidimensional $\mathcal{L}$ (una distribución por planos) de la siguiente manera :

Sea C_1^2 la vecindad afín en CP^2, $C_1^2 = \{(z_1, w_1)\}$ con $(z_1, w_1) = (\frac{1}{z}, \frac{w}{z})$ y sea $\Omega_1 = C_1^2\times\mathcal{O}'$. En la región la ecuación $\mathcal{A}$ da lugar al polinomio vectorial

$$W = (Q(z,w,t),\ P(z,w,t),\ 0) \quad ;$$

en la región Ω_1 la ecuación $\mathcal{A}$ da lugar al campo

$$W = (\hat Q_1(z_1,w_1,t),\ \hat P_1(z_1,w_1,t),\ 0) \quad ,$$

donde $\hat P_1$ y $\hat Q_1$ son polinomios que dependen analíticamente de t y tienen la forma

$$\hat Q_1(z_1, w_1, t) = z_1^{m+1} Q(\tfrac{1}{z_1}, \tfrac{w_1}{z_1}, t)$$

$$\hat P_1(z_1, w_1, t) = z_1^{m+1}[\tfrac{w_1}{z_1} Q(\tfrac{1}{z_1}, \tfrac{w_1}{z_1}, t) - \tfrac{1}{z_1} P(\tfrac{1}{z_1}, \tfrac{w_1}{z_1}, t)\ ]$$

Esta expresiones se deducen de la expresión (1.3)

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1\tilde Q}{w_1\tilde Q - \tilde P}$$

con $\tilde P(z_1, w_1) = z_1^n P(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})$ y $\tilde Q(z_1, w_1) = z_1^n Q(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1})$. Sustituyendo se tiene , para cada t,

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1(z_1^n Q(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t)}{w_1(z_1^n Q(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t) - z_1^n P(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t))}$$

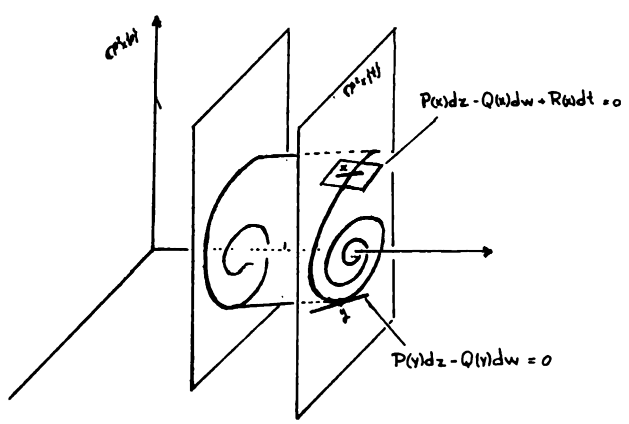
y

$$\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{z_1^{m+1} Q(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1} t)}{z_1^{m+1}(\frac{w_1}{z_1} Q(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t) - \frac{1}{z_1} P(\frac{1}{z_1}, \frac{w_1}{z_1}, t))} \qquad \ldots(7.9)$$

Puesto que los planos L_x y t = cte. son transversales en cada punto $(z,w,t) = x \in \Omega \setminus Y$ (ya que la foliación Θ es transversal a los planos t = cte.) se encuentra definida una función $R(x)$ tal que el plano L_x satisface la ecuación

$$\omega(x) = P(x)\,dz - Q(x)\,dw + R(x)\,dt = 0 \qquad \ldots(7.10)$$

Aclaremos : las rectas (complejas) tangentes a la foliación de $CP^2\times\{t\}$ dada por las soluciones $\varphi_x = \varphi_{q,\alpha(t)}$ de la ecuación $\alpha(t)$, satisfacen $P(x)\,dz - Q(x)\,dw = 0$. Así, puesto que la foliación Θ es transversal a los planos t = cte., entonces los planos L_x también lo son y por consiguiente, deberán tener componente en t distinta de cero.



Debido a que la distribución $\mathcal{L}$ es analítica, se tiene que R es una función analítica en $\Omega \setminus Y$. Como Y es un conjunto analítico de codimensión mayor que uno, la función R se prolonga analíticamente a todo Ω. Análogamente, en la región Ω la distribución $\mathcal{L}$, prescribe la forma

$$\omega_1(x) = \hat{P}_1(x)\, dz_1 - \hat{Q}_1(x)\, dw_1 + R_1(x)\, dt \qquad \ldots(7.11)$$

donde R_1 es una función analítica en Ω_1. Vamos a demostrar ahora que $R_1|_{z_1=0} = 0$.

El plano $\{ z_1 = 0 \} = \{ (w_1,0,t) \}$ es la cerradura de la hoja al infinito $\mathcal{F}_\infty = X \setminus \{\Omega \cup Y'\}$, es decir, $\{ z_1 = 0 \} = \mathcal{F} \cup Y'$; por esta razón, para todo $x \in \{ z_1 = 0 \}$, el plano L_x contiene al vector $(0,0,1)$ (hacemos notar que el punto $(0,0)$ satisface $P(x)\, dz - Q\, dw = 0$, de manera que, por la transversalidad de L_x, el vector $(0,0,1)$ debe estar contenido en L_x). Así, para el vector $(0,0,1)$ la igualdad (7.11) implica que $R_1(x) = 0$. Por lo tanto, $R_1|_{z_1=0} = 0$.

Nuestro siguiente objetivo es ver que R y R_1 son polinomios y, además, que $R|_Y = 0$, ya que, de esta manera, podremos hacer uso de un teorema relacionado con curvas algebraicas (el teorema de Noether) que nos asegura la existencia de polinomios $L_{1t}(z,w)$ y $L_{2t}(z,w)$ tales que $R(z,w,t) = Q(z,w,t)L_{1t}(z,w) + P(z,w,t)L_{2t}(z,w)$. Apartir de esta expresión quedará demostrada la proposición 7.6 y, con ella, el teorema 7.2.

PROPOSICION 7.7 -

Las funciones R y R_1 construidas arriba son polinomios de grado no mayor que $n+1$ en (z,w) y (z_1,w_1) respectivamente.

DEMOSTRACION :

En la intersección $\Omega \cap \Omega_1$ los campos (P,Q,R) y $(\hat{P}_1,\hat{Q}_1,\hat{R}_1)$ son proporcionales, lo que implica que las formas ω y ω_1, también lo son. Veamos cual es la relación que satisfacen :

De la relación (7.9) se deduce que la forma ω en la carta (z_1, w_1, t) toma la forma

$$\omega = \tfrac{1}{z_1^2}[w_1 Q(\tfrac{1}{z_1},\tfrac{w_1}{z_1},t) - P(\tfrac{1}{z_1},\tfrac{w_1}{z_1},t)]dz_1 - Q(\tfrac{1}{z_1},\tfrac{w_1}{z_1},t)dw + R(\tfrac{1}{z_1},\tfrac{w_1}{z_1},t)dt$$

Así, la igualdad $\frac{1}{z_1}[w_1 Q(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1},t) - P(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1},t)] = \hat{P}_1(z_1,w_1,t) \setminus z$ o bien la igualdad $Q(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1}) \setminus z_1 = \hat{Q}(z_1,w_1,t) \setminus z_1^{n+2}$ nos dice que $\omega_1 = z_1^{n+2}\omega$, de donde se sigue que

$$R_1(z_1,w_1,t) = z_1^{n+2} R(\tfrac{1}{z_1},\tfrac{w_1}{z_1},t).$$

Sabemos que R_1 es una función analítica en Ω y, por lo que vimos antes, $R_1|_{z_1=0} = 0$, de modo que $z_1^{n+2}R(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1},t)|_{z_1=0} = 0$ y $z_1^{n+1}R(\frac{1}{z_1},\frac{w_1}{z_1},t)$ es analítica en $\{ z_1 = 0 \}$. Esto equivale a decir que $(1\setminus z^{n+1})\, R(z,w,t)$ se extiende analíticamente al infinito, es decir, que $R_1(z_1,w_1, t)$ es un polinomio y por lo tanto, $R(z,w,t)$ también lo es.

//.

PROPOSICION 7.8 -

$$R|_Y = 0 \qquad \ldots(7.12)$$

DEMOSTRACION :

La proposición 7.8 es consecuencia directa de la condición 7.d y del teorema de Frobenius que recordamos a continuación:

Teorema de Frobenius -

Una distribución $\mathcal{D}$ en una variedad diferenciable X es integrable si y sólo si $d(\mathcal{L}(\mathcal{D})) \subset \mathcal{L}(\mathcal{D})$, donde $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ denota el ideal en T_1^*X dado por

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \{\omega \; T^*X \; ; \omega \text{ anula a } \mathcal{D}\}$$

(decimos que una q-forma anula a $\mathcal{D}$ si para cada $x \in X$, $\omega_x(v_1,\ldots,v_q) = 0$ siempre que $v_1,\ldots v_q \in \mathcal{D}(x)$)

Puesto que la distribución $\mathcal{L}$ es integrable, el teorema de Frobenius nos dice que $d(\mathcal{L}(\mathcal{D})) \subset \mathcal{L}(\mathcal{D})$, lo que equivale a decir que $\omega \wedge d\omega = 0$. En nuestro contexto la igualdad anterior implica que $(Q_z + P_w)R|_Y = 0$, ya que

$$d\omega = P_z\,(dz \wedge dz) + P_w\,(dw \wedge dz) - Q_w\,(dw \wedge dw) -$$

$$- Q_z(dz \wedge dw) + R_w\,(dw \wedge dt) + R_z(dz \wedge dt) \quad ;$$

como en Y se tiene que $P = 0 = Q$, entonces $\omega|_Y = R\, dt$. Así, en Y,

$$\omega \wedge d\omega = P_w R(dw \wedge dz) \wedge dt + Q_z R(dw \wedge dz) \wedge dt = 0,$$

por lo tanto,

$$(Q_z + P_w)R|_Y = 0$$

Por último, la condición 7.d , $Q_z + P_w|_{P_j} \neq 0$, para $P_j \in Y$, $j=1,\dots,n^2$, implica que

$$R|_Y = 0$$

//.

Apliquemos ahora el teorema de Noether (ver apéndice I) a nuestro problema. Observemos que P y Q no tienen factor común y que la condición 7.d nos asegura que los puntos singulares son puntos singulares ordinarios , ya sea de P o de Q. Sin pérdida de generalidad, suponemos que P_i es punto singular ordinario de P y que $O_{P_i}(Q) > 0$, donde cada P_i^j denota un lugar con centro en el punto singular ordinario P (ver preliminares). Sabemos que $O_{P_i^j}(R) > O_{P_i^j}(Q)$, pues de la igualdad $R|_Y = 0$ se sigue que R se anula , por lo menos, en los n^2 puntos distintos de intersección de P y Q. Así, por el teorema de Noether, para cada t fija existen polinomios $L_{1t}(z,w)$ y $L_{2t}(z,w)$, de grado no mayor que uno, tales que

$$R(z,w,t) = Q(z,w,t)L_{1t}(z,w) + P(z,w,t)L_{2t}(z,w) \quad \dots(7.13)$$

Como P,Q,R dependen analíticamente de t, los polinomios L_{1t} y L_{2t} también. Sea

$$W(x) = W(z,w,t) = \begin{pmatrix} L_{2t}(z,w) \\ L_{1t}(z,w) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$W(x)$ así definido es un campo analítico en X. Las igualdades (7.10) y (7.13) nos dicen que

$$(-L_{2t},L_{1t},1) = P(z,w,t)(-L_{2t}(z,w)- Q(z,w,t)L_{1t}(z,w)+ R(z,w)$$

y

$$R(z,w,t) = Q(z,w,t)L_{1t}(z,w) + P(z,w,t)L_{2t}(z,w) \quad ;$$

por lo tanto,

$$\omega(-L_{2t},L_{1t},1) = 0$$

y

$$W(x) = \begin{pmatrix} -L_{2t}(z,w) \\ -L_{1t}(z,w) \\ 1 \end{pmatrix} \in L_x = T_x\xi_x \quad .$$

Así, la proposición 7.6 queda demostrada y , con ella, teorema 7.2.

//.

8. RIGIDEZ ABSOLUTA .

8.1 UNA CONSTRUCCION BASICA.

En esta sección demostraremos el teorema que enunciamos al inicio de este capítulo y que resulta ser el principal resultado de este trabajo. Recordemos nuevamente dicho teorema y asumamos que a la ecuación $\alpha \in \mathcal{A}_n$, se le imponen las mismas condiciones genéricas que se asumieron en la sección 7.1 .

TEOREMA 8.1 -(de la rigidez absoluta).

Para ecuaciones genéricas $\alpha \in \mathcal{A}_n$ existe una vecindad U_α, $U_\alpha \subset \mathcal{A}_n$ de la ecuación α y una vecindad $\mathcal{H}$ del homeomorfimo identidad de $CP^2 \dashrightarrow CP^2$, en la topología uniforme, tales que toda ecuación $\alpha' \in U_\alpha$ topológicamente equivalente a α, conjugada a α por un homeomorfismo $H \in \mathcal{H}$, es afinmente equivalente a α .

Para demostrar este teorema vamos a proceder por contradicción. Es decir, supongamos que existe una sucesión de ecuaciones $\alpha_m \in \mathcal{A}_n$, topológicamente equivalentes a α_0, que tienden a α_0 y tales que el homeomorfismo H_m que liga a α_m con α_0 tiende a la transformación identidad, pero las ecuaciones α_m no son afinmente equivalentes a α_0. En lo que resta de la sección nos concentraremos en demostrar que esta suposición nos conduce a una contradicción.

Por el lema 1.2 sabemos que para m suficientemente grande, se encuentra definido un homeomorfismo

$$h_m : (\Gamma, a) \dashrightarrow (\Gamma, a)_m$$

que conjuga a los grupos marcados $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ y $\mathcal{F}_{\alpha_m}$ cuyos respectivos generadores son f_{j,α_0} y f_{j,α_m}, $j=1,\ldots,n$; el diagrama

$$\begin{tikzcd} (\Gamma,a) \arrow[r, "f_{j,\alpha_0}"] \arrow[d, "h_m"'] & (\Gamma,a) \arrow[d, "h_m"] \\ (\Gamma,a)_m \arrow[r, "f_{j,\alpha_m}"] & (\Gamma,a)_m \end{tikzcd}$$

es conmutativo para toda $j = 1,\ldots,n$, y además

$$H_m \varphi_{p,\alpha_0} = \varphi_{h_m p,\alpha_m} \qquad \ldots(8.1)$$

(donde la igualdad denota una igualdad de conjuntos - ver (7.1))

PROPOSICION 8.2 -

Sea $\alpha_0 \in \mathcal{A}_n'$ una ecuación que satisface las condiciones de la sección 7.1 y $\alpha_m \in \mathcal{A}_n$ una sucesión de ecuaciones que tienden a α_0, topológicamente conjugadas a α_0 por medio de homeomorfismos H_m que tienden uniformemente a la identidad, $H_m \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} id$. Entonces existe un subconjunto analítico $M \subset \mathcal{A}_n$, que contiene a α_0 y a una subsucesión numerable de la sucesión $\{\alpha_m\}$ (que habremos de denotar también como $\{\alpha_m\}$) que tiene las siguientes propiedades :

1) dim M > 0.
2) M es el subconjunto minimal de $\mathcal{A}_n$ que contiene a la unión de α_0 y $\{\alpha_m\}$.
3) Se encuentra definida una familia de holomorfismos $\{ \bar{h}_\alpha : (\Gamma, a) \dashrightarrow (\Gamma, a)_\alpha \ ; \alpha \in M \}$ que conjuga a los grupos marcados de holonomía $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ y $\mathcal{F}_\alpha$.

DEMOSTRACION :

La demostración de esta proposición es larga, de modo que la haremos por partes :

a) El subconjunto analítico M' de las ecuaciones cuyos grupos de holonomía al infinito son analíticamente equivalentes .

Sea V_1 una vecindad de α_0 en $\mathcal{A}_n$. Como α_0 es una ecuación de Xuday-Verenov y hemos visto que dichas ecuaciones forman un subconjunto abierto en $\mathcal{A}_n$, entonces podemos suponer que escogemos V_1 tan pequeña, que todo $\alpha \in V_1$ es de Xuday-Verenov. Además V_1 es una vecindad tal de α_0 que todas las transformaciones de retorno $f_{j\alpha}$, $j=1,\ldots,n$, dependen analíticamente de α, para α en V_1. Antes de hacer algunas observaciones en relación con este último punto, vamos a dar una idea de lo que deseamos demostrar.

Si $\mathcal{F}$, como antes, es el grupo formado por todos los germenes de transformaciones conformes $(\mathbb{C},0) \dashrightarrow (\mathbb{C},0)$, sea $\mathcal{F}^n$ el producto $\underbrace{\mathcal{F}\times\cdots\times\mathcal{F}}_{n\text{-veces}}$. Consideremos la transformación

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : V_1 &\dashrightarrow \mathcal{F}^n \\ \alpha &\dashrightarrow (f_{1\alpha},\dots,f_{n\alpha}) \end{aligned}$$

y consideremos en $\mathcal{T}(V_1)$ todas aquellas colecciones $(f_{1\alpha},\dots,f_{n\alpha})$ tales que los grupos $\mathcal{F}_\alpha$ generados por $f_{1\alpha},\dots,f_{n\alpha}$, sean analíticamente equivalentes a $\mathcal{F}_{\alpha_0}$. Deseamos demostrar que la imagen inversa del conjunto formado por dichas colecciones constituye un subconjunto analítico de $\mathcal{A}_n$.

Por lo que vimos en la sección 3, tiene sentido, dadas las transformaciones $f_{j\alpha}$, $\alpha\in V_1$, $j=1,..,n$, introducir el concepto de familia analítica de germenes $\{f_{j\alpha}\}$ parametrizados por U, donde U es una vecindad de $V_1\times\{0\}$, $V_1\times\{0\}\subset U\subset V_1\times\mathbb{C}$. Para cada j, la familia $\{f_{j\alpha}\}_{\alpha\in U}$ la entendemos como un biholomorfismo

$$F_j : U\subset V_1\times \mathbb{C} \dashrightarrow V_1\times\mathbb{C},$$

sobre su imagen, de la forma

$$F_j(\alpha,z) = (\alpha, f_j(\alpha,z)) = (\alpha, f_{j\alpha}(z))$$

(para α fija, $F_j(\alpha,\_) = (\alpha, f_j(\alpha,\_)) = (\alpha, f_{j\alpha})$).

Como $\mathcal{A}_n$ lo hemos identificado con el espacio de los coeficientes de los polinomios P_α y Q_α, entonces, si denotapor A^α_{rs} a los $(n+1)(n+2)/2$ coeficientes correspondientes a P_α y por B^α_{rs} a los correspondientes a Q_α, se tiene que las funciones F_j toman la forma

$$F_j(\alpha,z) = F_j((A^\alpha_{rs},B^\alpha_{rs})^n_{r+s=0},z) \quad , \; j=1,\dots,n \; ,$$

donde el orden ($\preceq$) que asociamos a los coeficientes es el correspondiente al grado, eligiendo primero la variable z y después la w : $(0,0)\prec(1,0)\prec(0,1)\prec(2,0)\prec(1,1)\prec(0,2)\prec\dots$. A los coeficientes correspondientes a α_0 los denotaremos, por brevedad, como A_{rs}, B_{rs}, para $r+s=0,\dots,n$.

Como α_0 y toda α en V_1 son ecuaciones de Xuday-Verenov, satisfacen las condiciones del teorema 3.2 . Por lo tanto, para cada familia F_j y todo compacto K en V_1, existe una familia de cambios de coordenadas Φ tal que

$$\Phi\circ F\circ\Phi^{-1}(\alpha,z) = (\alpha,\lambda(\alpha)z) \qquad \dots(8.3)$$

donde $\lambda_\alpha := \lambda(\alpha)$ depende analíticamente de α. Así, para α_0 y para cada α fija, si nos fijamos en la segunda coordenada de (8.3) para la familia F_1, se tiene que existen cambios de coordenadas ς_{α_0} y ς_α (que dependen analíticamente de α), tales que los siguientes diagramas conmutan :

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C},0) \arrow[r, "f_{1\alpha_0}"] \arrow[d, "\varsigma_{\alpha_0}"'] & (\mathbb{C},0) \arrow[d, "\varsigma_{\alpha_0}"] \\ (\mathbb{C},0) \arrow[r, "\lambda"] & (\mathbb{C},0) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\mathbb{C},0) \arrow[r, "f_{1\alpha}"] \arrow[d, "\varsigma_{\alpha}"'] & (\mathbb{C},0) \arrow[d, "\varsigma_{\alpha}"] \\ (\mathbb{C},0) \arrow[r, "\lambda_\alpha"] & (\mathbb{C},0) \end{tikzcd}$$

Así, en las cartas ς_{α_0} y ς_α las colecciones $(f_{1\alpha_0},\dots,f_{n\alpha_0})$ y $(f_{1\alpha},\dots,f_{n\alpha})$ correspondientes a $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ y $\mathcal{F}_\alpha$ toman la forma

$$\left(\lambda z,\sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} z^j,\dots,\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} z^j\right)$$

y

$$\left(\lambda_\alpha z,\sum_{j=1}^{\infty} a^\alpha_{2j} z^j,\dots,\sum_{j=1}^{\infty} a^\alpha_{nj} z^j\right)$$

respectivamente.

Supongamos ahora que los grupos $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ y $\mathcal{F}_\alpha$ son analíticamente equivalentes, entonces existe un holomorfismo $\bar h_\alpha$ tal que

$$\bar h_\alpha(\lambda z) = \lambda_\alpha(\bar h_\alpha(z)) \qquad \dots(8.4)$$

y

$$\bar h_\alpha\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} z^j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a^\alpha_{kj}(\bar h_\alpha(z)), \quad k=2,\dots,n. \qquad \dots(8.5)$$

Vamos a hacer uso de la relación (8.4) y del hecho de que $\bar h_\alpha$ tiene, como función analítica, una expresión en serie de potencias convergente alrededor del origen, para demostrar que $\lambda=\lambda_\alpha$.

Así, si $\bar{h}_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j z^j$, entonces $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(\lambda z)^j = \lambda_\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j z^j$
Sea β_k, el primer coeficiente de la serie anterior, distinto de cero, k > 1. La igualdad anterior nos dice que

$$\beta_k \lambda^k = \lambda_\alpha \beta_k \quad ,$$

por lo que ,

$$\lambda^k = \lambda_\alpha$$

Consideremos ahora el coeficiente = 0, entonces

$$\beta_{k+s} \lambda^{k+s} = \lambda_\alpha \beta_{k+s}$$

por lo que

$$\lambda^{k+s} = \lambda_\alpha$$

y $$\lambda^s = 1$$

Sin embargo, por ser α_0 ecuación de Xuday-Verenov $|\lambda| \neq 1$ de manera que todo β_k , k > 1, deberá ser cero. Así, la única relación que se tiene es

$$\lambda \beta_1 = \lambda_\alpha \beta_1$$

y $$\lambda = \lambda_\alpha$$

En resumen, lo anterior implica que si $\mathcal{F}_\alpha$ y $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ son grupos analíticamente equivalentes, entonces el holomorfismo $\bar{h}_\alpha$ que conjuga a dichos grupos es de la forma $\bar{h}_\alpha(z) = \mu z$ una vez linealizados los generadores $f_{1\alpha_0}$ y $f_{1\alpha}$.

En vista de que hemos conseguido una expresión para $\bar{h}_\alpha$ vamos a aplicarla a la expresión (8.5) para obtener la relación que guardan los coeficientes a_{kj} y a^α_{kj} ,k=2,.. ...,n , j=1,2,... :

$$\bar{h}_\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kj} z^j\right) = \mu \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} z^j$$

y

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} (\bar{h}_\alpha(z))^j = \sum_{j=1}^{\infty} a^\alpha_{kj} \mu^j z^j \quad ,$$

de donde,

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} z^j = \sum_{j=1}^{\infty} a^\alpha_{kj} \mu^{j-1} z^j$$

De aqui,

$$a_{k1} = a^\alpha_{k1}$$

$$a_{k2} = \mu a^\alpha_{k2}$$

$$\vdots$$

$$a_{kj} = \mu^{j-1} a^\alpha_{kj}$$

$$\vdots$$

Sustituyendo μ como (a_{k2} / a^α_{k2}) las relaciones anteriores toman la forma $a_{kj} = (a_{k2} / a^\alpha_{k2})\, a^\alpha_{kj}$,para j, k, k=2,...,n ; j=1,2,... . Equivalentemente,

$$a_{kj}(a^\alpha_{k2})^{j-1} = a^{j-1}_{k2} a^\alpha_{kj} \qquad \ldots (8.6)$$

(hacemos notar que aquí estamos suponiendo que $a_{k2} \neq 0$, en caso contrario, si a_{km} es el primer coeficiente distinto de cero, la relación que usaríamos sería $a_{km} = \mu^{m-1} a^\alpha_{km}$ y, una vez fija la raíz (m-1)-ésima de a_{km} / a^α_{km}, podemos continuar nuestros razonamientos de la misma manera que antes)

Observemos ahora que , puesto que los generadores $f_{j\alpha}$ de $\mathcal{F}_\alpha$ y la carta Σ_α dependen analíticamente de α (es decir, de los coeficientes $(A^\alpha_{rs}, B^\alpha_{rs})$) entonces

$$a^\alpha_{jk} = G_{jk}(A^\alpha_{rs}, B^\alpha_{rs}) \, , \qquad k=1,..,n \qquad ,$$

donde G es una función analítica de V, en C. De esta manera, las relaciones en (8.6) se traducen en

$$a_{kj} G^{j-1}_{j2}(A^\alpha_{rs}, B^\alpha_{rs}) = a^{j-1}_{k2} G_{jk}(A^\alpha_{rs}, B^\alpha_{rs})$$

para k=2,...,n y j=1,2,... ; por consiguiente, la ecuación $\alpha \in V \subset \mathcal{A}_n$ tiene grupo de holonomía al infinito $\mathcal{F}_\alpha$ analíticamente equivalente a $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ sí y sólo si para $x = (A^\alpha_{rs}, B^\alpha_{rs}) \in V$ se satisfacen las siguientes relaciones

$$\hat{G}_1(x) = G_1(x) - \lambda = 0$$

$$\hat{G}_{jk}(x) = a_{kj} G^{j-1}_{j2}(x) - a^{j-1}_{k2} G_{jk}(x) = 0$$

para k=2,...,n y j=1,2,... .

Hemos obtenido hasta este momento, un número infinito de relaciones que deben cumplir los coeficientes, sin embargo, vamos a hacer uso de que el anillo local de series de potencias alrededor de α_0 es un anillo noetheriano, para extraer un número finito de éstas . Para ello, consideremos las siguientes cadenas ascendentes de ideales ,

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{G}_1 \rangle &\subset \langle \hat{G}_1, \hat{G}_{12}, \dots, \hat{G}_{n_2} \rangle \\
&\subset \langle \hat{G}_1, \hat{G}_{12}, \dots, \hat{G}_{n_2}, \hat{G}_{13}, \dots, \hat{G}_{n_3} \rangle \\
&\subset \langle \hat{G}_1, \hat{G}_{12}, \dots, \hat{G}_{n_2}, \hat{G}_{13}, \dots, \hat{G}_{n_3}, \hat{G}_{14}, \dots, \hat{G}_{n_4} \rangle \\
&\;\vdots \\
&\;\vdots
\end{aligned}
$$

Por estar en un anillo noetheriano, esta cadena se detiene para alguna j .Por lo tanto, existe solamente una cantidad finita de relaciones que deben cumplir los coeficientes de la ecuación $\alpha \in V_1$ para que $\mathcal{F}_\alpha$ y $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ sean analíticamente equivalentes. Si denotamos por M' al conjunto de dichas ecuaciones, $M' \subset V_1$ y M' es un subconjunto analítico de $\mathcal{A}_n$.

Por construcción se tiene que, para toda $\alpha \in V_1$, los grupos marcados $\mathcal{F}_\alpha$ y $\mathcal{F}_{\alpha_0}$, son analíticamente equivalentes , si y sólo si $\alpha \in M'$. Hacemos notar que, por el teorema ., podemos sustituir equivalencia analítica por equivalencia topológica en la afirmación anterior; así, el hecho de que $\{\alpha_m\}$ y α_0 sean topológicamente equivalentes implica que α_0 y $\{\alpha_m\}$ pertenecen a M' .

b) La construcción de M.

Consideremos ahora el subconjunto analítico minimal M'' de M' que contiene a los puntos α_0 y $\{\alpha_m\}$. La dimensión de M'' es mayor que cero, pues $\alpha_0 \cup \{\alpha_m\}$ contiene al punto límite y cada punto de M'' es cero de un número finito de funciones analíticas. Consideremos, por último, la componente irreducible M de M'' que contiene a α_0 y a una subsucesión numerable de la sucesión $\{\alpha_m\}$. El conjunto M es la familia buscada.

//.

8.2 ANALITICIDAD CON RESPECTO A α DEL HOLOMORFISMO $\bar{h}_\alpha$.

Puesto que M es un conjunto analítico, tiene sentido considerar el conjunto Σ formado por los puntos singulares de M. El conjunto M es una componente irreducible de M'' y, por consiguiente, $M \setminus \Sigma$ es una variedad compleja (variedad analítica) cuya dimensión coincide con la de M (ver [8] , pag.155) .

Al hacer uso del concepto de familia analítica parametrizada por abiertos de C hemos dado lugar , implícitamente, a la noción de familia analítica parametrizada por una variedad analítica (basta pensar en las cartas coordenadas). Para generalizar este concepto para el caso de una familia analítica parametrizada por un conjunto analítico irreducible M, hacemos notar que , en los puntos regulares de M, la noción de analiticidad es la misma que hemos usado hasta ahora.

DEFINICION -(familia analítica parametrizada por conjuntos analíticos).

Sea M un conjunto analítico irreducible y U una vecindad de $M \times \{0\}$, $M \times \{0\} \subset U \subset M \times C$. Decimos que una transformación

$$\mathcal{H} : U \dashrightarrow M \times C$$

es una familia analítica de germenes de biholomorfismos de $(C,0)$, parametrizada por M si :

$$\mathcal{H}\big|_{U \cap ((M\setminus\Sigma)\times C)} : U \;\; ((M\setminus \Sigma) \times C) \dashrightarrow M \times C$$

es una familia analítica y

$$\mathcal{H} : U \dashrightarrow M \times C$$

es una familia contínua , donde Σ denota al conjunto de los puntos singulares de M.

Cuando hablamos de una familia contínua $\mathbf{H}$ de germenes de biholomorfismos de $(C,0)$, estamos asumiendo que

$$\mathbf{H} : U \subset M \times C \dashrightarrow M \times C$$

es un homeomorfismo en su imagen ; $\mathbf{H}(\alpha,z)$ tiene la forma $\mathbf{H}(\alpha,z) = (\alpha,h(\alpha,z))$, donde $h(\alpha,z)$ es una función contínua con respecto a la variable α y es analítica con respecto a la variable z , además, $h(\alpha,0) = 0$ y $\frac{\partial h}{\partial z}(t,0) \neq 0$.

PROPOSICION 8.3 -

La familia de holomorfismos $\{\bar{h}_\alpha\}$ definida en la proposición 8.2 (propiedad 3) es una familia analítica parametrizada por el conjunto analítico M. Es decir, si U es una vecindad de $M \times \{0\}$ en $M \times C$, la transformación

$$\mathbf{H} : U \dashrightarrow M \times C$$

dada por $\mathbf{H}(\alpha,z) = (\alpha,\bar{h}(\alpha,z)) = (\alpha,\bar{h}_\alpha(z))$, es una familia analítica en $U \cap ((M\setminus\Sigma)\times C)$ y es una función contínua en U .

DEMOSTRACION :

Para demostrar que $\mathbf{H}|_{U\cap(M\setminus\Sigma)\times C}$ representa una familia analítica basta analizar la expresión de $\bar{h}_\alpha$:

Dado que $\bar{h}_\alpha : (\Gamma,\partial) \dashrightarrow (\Gamma,\partial)_\alpha$ es el holomorfismo que liga a los grupos $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ y $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}$, entonces, por el teorema 4.5, $\bar{h}_\alpha$ tiene la forma:

$$\bar{h}_\alpha = \zeta_\alpha^{-1} \circ \frac{a_2(\alpha)}{a_2(o)} \circ \zeta_{\alpha_0} \qquad \ldots (8.7)$$

donde ζ_α y ζ_{α_0} son las cartas que linealizan a las transformaciones $f_{1\alpha}$ y $f_{1\alpha_0}$ respectivamente, y $a_2(\alpha)$ es la función analítica de α que denota al segundo coeficiente del conmutador $[f_{1\alpha}, f_{2\alpha}]$ en la carta ζ_α :

$$\zeta_\alpha \dashrightarrow \zeta_\alpha + a_2(\alpha)\zeta_\alpha^2 + \ldots$$

Así, puesto que ζ_α y $a_2(\alpha)$ dependen analíticamente de α en $M\setminus\Sigma$, $\mathbf{H}(\alpha,z) = (\alpha,\bar{h}_\alpha(z))$ es una familia analítica en $M\setminus\Sigma$.

La continuidad de $\mathbf{H}(\alpha,z) = (\alpha,\bar{h}_\alpha(z))$ en M se desprende, también, de la expresión de $\bar{h}_\alpha$ dada por (8.7), pues $a_2(\alpha)$ varía contínuamente con respecto a α a su vez, la carta ζ_α que linealiza a $f_{1\alpha}$ varía también en forma contínua con respecto a α (esto se desprende del hecho de que la demostración del teorema 3.2 puede ser modificada para el caso de familias contínuas de germenes de biholomorfismos de $(C,0)$).

//.

8.3 FOLIACION AUXILIAR .

La siguiente construcción es analóga a la que se hizo en la sección 7.3 , aunque en este caso serán necesarias algunas consideraciones complementarias.

Denotemos por X al producto $CP^2 \times V$, donde $V \subset M$ es una vecindad del punto α_0 que elegiremos posteriormente , y denotemos por X' al producto $CP^2 \times M$. Siendo C^2 la vecindad afín, denotaremos $\tilde{\Omega}'$ al producto $C^2 \times M$. La ecuación α en la vecindad C^2 toma la forma

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(z,w,\alpha)}{Q(z,w,\alpha)}$$

donde P y Q son funciones analíticas en X'.

La familia M puede reinterpretarse como una ecuación en X' ; dicha ecuación la denotamos por $\mathcal{A}$ y, en la región $\tilde{\Omega}'$ toma la forma

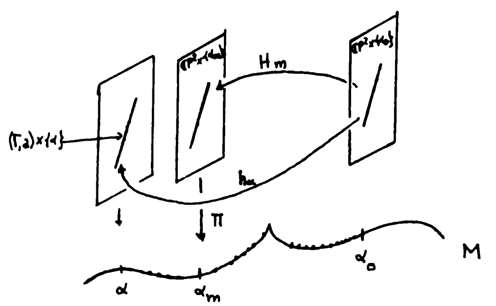
$$\frac{dw}{dz} = \frac{P}{Q} \qquad , \alpha' = 0$$

Observamos que el plano vertical $CP^2 \times \{\alpha\}$ es invariante con respecto a la ecuación $\mathcal{A}$. A la solución de la ecuación $\mathcal{A}$ con condiciones iniciales $x = (q,\alpha)$ la denotamos $\varphi_x = \varphi_{q,\alpha}$.

Sea H_m el homeomorfismo que lleva al plano $CP^2\times\{\alpha_0\}$ en el plano $CP^2\times\{\alpha_m\}$ y h_α el holomorfismo que transforma la vecindad $(\Gamma,a)\times\{\alpha_0\}$ en $(\Gamma,a)\times\{\alpha\}$, $\alpha\in M$, $h_\alpha(u,\alpha_0) = (\bar{h}(\alpha,u),\alpha) = (\bar{h}_\alpha(u),\alpha)$. Denotemos por U_{α_0} a la región en la cual se hallan definidos todos los holomorfismos h_α , $\alpha\in M$. Para todo m , la igualdad (8.1) se transforma en la siguiente igualdad de conjuntos

$$H_m\varphi_p = \varphi_{h_{\alpha_m}p}, \quad \text{para todo } p\in U_{\alpha_0}. \qquad \ldots(8.8)$$

Denotemos por U_α a la región $h_\alpha U_{\alpha_0}$, y por $U\subset\Gamma\times M$ a la región $U = \bigsqcup_{\alpha\in M} U_\alpha$.



Hacemos notar que a U podemos verlo como la imagen de una familia analítica $\mathbf{H}$ de germenes de biholomorfismos parametrizada por M :

$$\mathbf{H}: U_{\alpha_0}\times M \dashrightarrow \Gamma\times M$$

donde

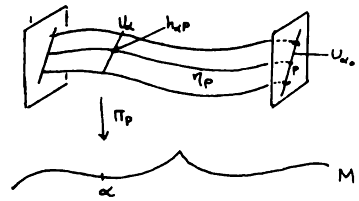
$$\mathbf{H}(u,\alpha) = (\bar{h}(\alpha,u),\alpha) = (\bar{h}_\alpha(u),\alpha)$$

Así, U es un espacio analítico. Además , si Σ_U denota al conjunto de puntos singulares de U , la diferencia $U\setminus\Sigma_U$ es una variedad analítica de la misma dimensión que U . Aclaremos : puesto que M es un conjunto analítico irreducible y H es un biholomorfismo en el complemento de los puntos (u,α) tales que α es un punto singular de M, $\alpha\in\Sigma$, entonces la dimensión de $U_{\alpha_0}\times(M\setminus\Sigma)$ coincide con la de su imagen bajo $\mathbf{H}$.

Para cada $p\in U_{\alpha_0}$ hagamos

$$\eta_p = \{\, h_\alpha p \;\; ; \alpha\in M \,\} \qquad \ldots(8.9)$$

Por la proposición 8.3 la familia de holomorfismos es analítica, lo que implica que el conjunto η_p es una foliación analítica H de la región U . Además, se halla definida una proyección biholomorfa de la foliación η_p sobre M : $\pi_p h_\alpha p = \alpha$.



Analicemos un momento la afirmación anterior : dado que U no es una variedad analítica sino sólo un espacio analítico, es necesario precisar lo que se entiende por foliacion analítica de un espacio analítico. Para nuestros fines bastará con lo siguiente :

La partición H del espacio U en espacios η_p , se denomina foliación analítica si es localmente trivial y la restricción $H|_{U\setminus\Sigma}$ es una foliación analítica. Por trivialidad local entendemos que en una vecindad de cada punto p la foliación sea equivalente al producto de polidiscos $U_1\times U_2$, $|\zeta_j| < 1$, con segunda coordenada constante .

Por último, sea Y el conjunto formado por los puntos singulares de la ecuación $\mathcal{A}$ contenidos en la región Ω y sea Y' el conjunto de los puntos singulares al infinito de la ecuación $\mathcal{A}$. Por definición,

$$Y = \{\, P_j(\alpha) \;\; ; \; j=1,\ldots,n^2 \; , \alpha\in V\subset M \,\},$$

$$Y' = \{\, a_j(\alpha) \; ; \; j=1,\ldots,n+1 \; , \alpha\in V\subset M \,\}$$

donde $P_j(\alpha)$ es una solución del sistema

$$P(z,w,\alpha) = 0 \quad , \quad Q(z,w,\alpha) = 0$$

Podemos considerar que V es tan pequeña que el conjunto Y se descompone en n^2 componentes conexas y el conjunto Y' en $n+1$ componentes conexas.

PROPOSICION 8.4 -

Puede elegirse la vecindad V tan pequeña que, para alguna vecindad $\tilde{U}$ del conjunto $Y \cup Y'$, se halle definida en la variedad $X' \setminus \tilde{U}$ una foliación Θ de codimensión 1 invariante con respecto a la ecuación $\mathcal{A}$ y transversal a los planos $CP^2 \times \{\alpha\}$.

Cada hoja tiene intersección no vacía con U_{α_0}; la hoja ξ_p que contiene al punto p se define por medio de la expresión

$$\xi_p = \bigcup_{\alpha \in V} \varphi_{h_\alpha p} = \bigcup_{q \in \eta_p} \varphi_q \qquad \ldots (8.10)$$

DEMOSTRACION :

Al igual que en la proposición 7.4, necesitamos demostrar los siguientes tres hechos :

a) $\bigcup_{p \in U_{\alpha_0}} \xi_p = X' \setminus \tilde{U}$ ...(8.11)

b) Si $\xi_p \cap \xi_{p'} \neq \emptyset$, entonces $\xi_p = \xi_{p'}$ ...(8.12)

c) La partición del espacio X' en conjuntos ξ_p, es una foliación analítica.

No nos detendremos en la demostración de (8.11) pues el resultado se deduce del teorema de Xuday-Verenov de la misma manera que en la proposición 7.4 .

La demostración de (8.12) no es sencilla : resulta que en este caso no podemos usar directamente expresiones de la forma (7.1) tal como lo hicimos en la sección 7.2, pues ahora dicha expresión se cumple solamente para el conjunto numerable $\{\alpha_m\} \in M$, tal como se señaló en (8.8). Para resolver nuestro problema, haremos uso de la minimalidad de M y de la siguiente construcción auxiliar .

Sea μ una métrica riemanniana arbitraria en $X \setminus (Y \cup Y')$ tal que $\mu(x, Y \cup Y') = \infty$, para todo x en $X \setminus (Y \cup Y')$. Sea K_p^ρ el círculo geodesico de radio ρ y centro p en la solución φ_p de la ecuación $\mathcal{A}$ en la métrica $\mu|_{\varphi_p}$.

LEMA 8.5 -

Existe ρ tal que $\bigcup_{p \in U} K_p^\rho \supseteq X' \setminus \tilde{U}$.

DEMOSTRACION :

Para cada punto $x \in X'$, la intersección $\varphi_x \cap U$ es no vacía por el teorema de densidad. Sean $p \in \varphi_x \cap U$, $\gamma_{p,x} \subset \varphi_x$ una curva real de dimensión uno con punto inicial p y final x y $\ell_{\gamma_{p,x}}$ su longitud en la métrica μ. Consideremos la función

$$\rho(x) = \inf_{\substack{p \in \varphi_x \cap U \\ \gamma_{p,x} \subset \varphi_x}} \ell_{\gamma_{p,x}}$$

De esta manera, $\rho(x)$ asocia el ínfimo de la longitud de las curvas contenidas en φ_x que unen a p en $\varphi_x \cap U$ con x ; debemos considerar el ínfimo pues φ_x no es necesariamente geodésicamente completo.

Vamos a demostrar que esta función es contínua. Por una parte, la continuidad de las soluciones con respecto a condiciones iniciales implica la semicontinuidad por arriba de $\rho(x)$:

$$\rho(x_0) \geq \overline{\lim_{x \to x_0}}\, \rho(x)$$

donde $\overline{\lim_{x \to x_0}}\, \rho(x) = \inf_{r>0} \{ \sup[\rho(x) \mid 0 < \mu(x-x_0) < r] \}$ (recordamos que $\rho(x) < \rho(x_0) + \epsilon$ para alguna vecindad de x_0 si y sólo si $\rho(x_0) \geq \overline{\lim_{x \to x_0}}\, \rho(x)$).

La semicontinuidad por arriba de ρ y la compacidad de $X' \setminus \tilde{U}$ nos permiten demostrar el lema 8.5 (basta recordar que si K es un compacto y ρ es semicontínua por arriba en K, entonces ρ es acotada por arriba y existe un punto en K donde ρ alcanza su supremo) : dado $\tilde{x}$ en $X' \setminus \tilde{U}$, consideremos

$$\rho(\tilde{x}) = \inf_{\substack{q \in \varphi_{\tilde{x}} \cap U \\ \gamma_{q,\tilde{x}} \subset \varphi_{\tilde{x}}}} \ell_{\gamma_{q,\tilde{x}}}$$

Sea $x_0 \in X' \setminus \tilde{U}$ el punto donde $\rho(x)$ alcanza el supremo entonces $\rho(x_0) \geq \rho(\tilde{x})$ y, por consiguiente, $\tilde{x} \in K_q^{\rho(x_0)}$, para $q \in \varphi_{\tilde{x}} \cap U$.

Nos interesa, aun despues de haber concluído la demostración del lema, argumentar por que afirmamos que $\rho(x)$ es contínua, ya que ello nos llevará a enunciar el lema de Petrovsky-Landis que más adelante usaremos :

LEMA (8.5) -(de Petrovsky-Landis)

Sea γ_m una curva rectificable contenida en una solución φ_m de la ecuación $\alpha_m \in \mathcal{A}_n$, m=1,2,... ; además

$$l_{\gamma_m} < \rho \qquad \ldots(8.13)$$

y α_m tiende a α_0 , $\alpha_m \dashrightarrow \alpha_0$. Entonces de la sucesión $\{\gamma_m\}$ es posible extraer una subsucesión $\{\gamma'_m\}$, la cual converge a la curva rectificable γ , contenida en la solución de la ecuación α_0 :

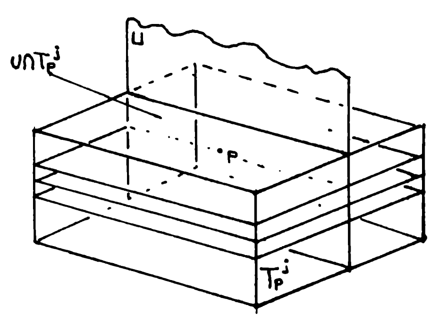
$$\lim \operatorname{top} \gamma'_m = \gamma \quad \text{y} \quad l_{\gamma'_m} \dashrightarrow l_\gamma \qquad \ldots(8.14)$$

(ver [13] , pag.201)

8.4 NUEVA CONSTRUCCION DE UNA FOLIACION ; ELECCION DE LA VECINDAD V.

Consideremos ρ fija según el lema 8.5 y observemos que el círculo geodesico $K_p^\rho \subset \varphi_p$ no es necesariamente unoconexo. Cubramos cada K_p^ρ con conjuntos simplemente conexos $\Omega_p^j \subset K_p^{2\rho}$, $p \in \Omega_p^j$.

Por el lema de la trivialización global (ver apéndice IV), para cada Ω_p^j existe una vecindad T_p^j cuya foliación por soluciones de la ecuación $\mathcal{A}$ es topológicamente equivalente al producto $\Omega_p^j \times W_p^j$ donde $W_p^j = T_p^j \cap U$.



Sea $\pi_p^j : T_p^j \dashrightarrow W_p^j$ la proyección a lo largo de las soluciones. De esta manera hemos obtenido una cubierta compacta del conjunto compacto $CP^2 \times \{\alpha_0\} \setminus \tilde{U}$: para cada p en U_{α_0} consideramos las cubiertas K_p^ρ en φ_p ;"engordamos" cada cubierta por medio de las vecindades T_p^j . La densidad de φ_p en $CP^2 \times \{\alpha_0\}$ nos asegura que la unión de las vecindades T_p^j cubren todo $CP^2 \times \{\alpha_0\} \setminus \tilde{U}$.

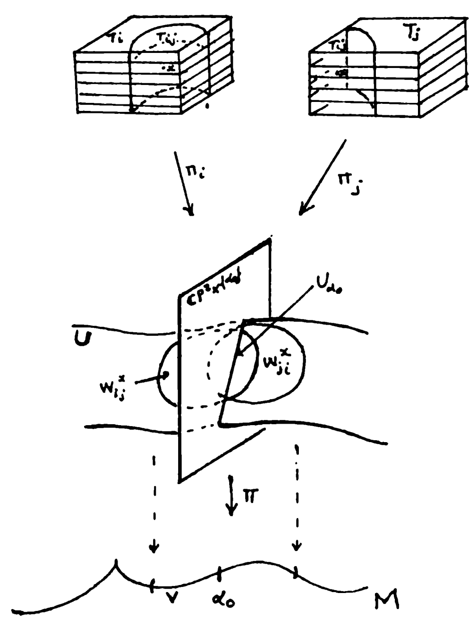
Como $CP^2 \times \{\alpha_0\} \setminus \tilde{U}$ es compacto, podemos extraer una subcubierta finita; a las regiones correspondientes T_p^j , W_p^j , Ω_p^j y a las transformaciones π_p^j las ennumeramos con el índice i=1,...,N.

Sea $V_2 \subset M$ una vecindad del punto α_0 tan pequeña que

$$(CP^2 \times V_2) \setminus \tilde{U} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} T_i \; . \qquad \ldots(8.15)$$

Denotemos por $T_{ij} = T_i \cap T_j$ y sea T_{ij}^x la componente conexa de T_{ij} que contiene a x, $W_{ij}^x = \pi_i T_{ij}^x$, $W_{ji}^x = \pi_j T_{ij}^x$.
Escojamos ahora, entre los conjuntos $\{ W_{ij}^x \}$, a aquellos cuya cerradura no intersecta a U_{α_0} y sea $V \subset V_2$ una vecindad de α_0 tal que su intersección con las proyecciones de dichas cerraduras $\pi \overline{W}_{ij}^x$ en M, a lo largo de los planos verticales, sea vacía :

$$\text{si} \quad V \cap \pi \overline{W}_{ij}^x \neq \emptyset, \text{ entonces } \quad \overline{W}_{ij}^x \cap U_{\alpha_0} \neq \emptyset \qquad \ldots(8.16)$$



(aquí hemos separado T_i y T_j y las hemos considerado triviales para claridad del dibujo)

La vecindad V que acabamos de construir es la buscada $X = CP^2 \times V$.

La transformación $\pi_i : T_i \dashrightarrow W_i \subset U$ induce en T_i una foliación analítica de codimensión uno : $\Theta_i = \pi_i^* H$ (ver en apéndice IV : foliación inducida)

Demostraremos que existe una foliación analítica Θ de codimensión uno en X tal que

$$\Theta\,|_{T_i} = \Theta_i \qquad \ldots(8.17)$$

Para ello, nos bastará demostrar que las restricciones $\Theta_i|_{T_{ij}}$ y $\Theta_j|_{T_{ij}}$ producen la misma foliación

$$\Theta_i\,|_{T_{ij}} = \Theta_j\,|_{T_{ij}} \qquad \ldots(8.18)$$

pues de $CP^2 \times V_i \backslash \tilde{U} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} T_i$, se sigue que la foliación Θ está definida en todo $X \setminus \tilde{U}$.

De aquí en adelante, pensaremos exclusivamente en aquellas regiones W_{ij}^* que satisfacen la relación (8.16)

Sea $x \in T_{ij}$ un punto arbitrario, $\pi_i x = q$, $\pi_j x = q'$. Sean $\gamma', \gamma'' \subset \varphi_x$ dos curvas con punto inicial x y final q y q' respectivamente, $\gamma = \gamma'^{-1}\gamma''$.

Denotemos por Δ_{ij}^q al germen de la transformación de retorno

$$\Delta_{\gamma,\mathcal{A}} : (U,q) \dashrightarrow (U,q')$$

Es importante hacer notar que $\Delta_{ij}^q\, \pi_i^x = \pi_j^x$ (aquí π_i^x, π_j^x denotan a los gérmenes en el punto x de las transformaciones π_i, π_j). Debemos demostrar que $\Delta_{ij}^q\, \eta_q = \eta_{q'}$, donde η_q es el germen de la hoja η_q en el punto q.

La siguiente proposición nos dará la clave para concluir la demostración de la proposición 8.4, pues en ella habremos de demostrar que la foliación H es preservada por la transformación Δ_{ij}^q, y esto, como se verá posteriormente, nos permitirá relacionar las hojas ξ_p y $\xi_{p'}$ cuando $x \in \xi_p \cap \xi_{p'}$.

PROPOSICION 8.6 -

La transformación Δ_{ij}^q conserva la foliación H.

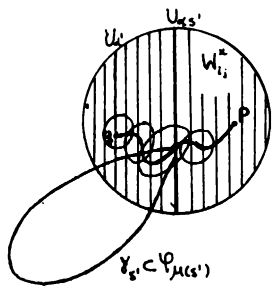
Antes de demostrar la proposición 8.6 necesitamos estar seguros de que el germen Δ_{ij}^q pueda ser prolongado en W_{ij}^* y que además, la prolongación se corresponda con el germen de una transformación de retorno :

PROPOSICION 8.7 -

El germen Δ_{ij}^q admite prolongación analítica Δ_{ij}^p para cualquier punto $p \in W_{ij}^*$. Para dicho Δ_{ij}^p existe un germen de transformación de retorno de la ecuación $\mathcal{A}$, correspondiente a alguna curva $\gamma \subset \varphi_p$ de longitud no mayor que 4ρ.

DEMOSTRACION :

Sea $\mu = \{\mu(s)\}$, $\mu : [0,1] \dashrightarrow W_{ij}^*$ una curva arbitraria con punto inicial q y final p, $\mu[0,1) \in W_{ij}^*$. Denotemos por S al conjunto de aquellas s para las cuales el germen Δ_{ij}^q alcanza su prolongación analítica $\Delta_{ij}^{\mu(s')}$ en la curva $\{\mu(s')\ ;\ s' \in [0,s]\}$.



El germen $\Delta_{ij}^{\mu(s')}$ es el germen de la transformación de retorno alrededor de alguna curva $\gamma_{s'} \subset \varphi_{\mu_{s'}}$, de longitud no mayor que 4ρ (recordemos que $\Omega_j^\rho \subset K_\rho^{2\rho}$); $\gamma_{s'}$ está dividida en dos partes, una contenida en T_i y la otra en T_j. Sea $s_0 = \sup_{s \in S} s$. Demostraremos que $s_0 = 1$. Para ello, sea s_m una sucesión de puntos en S que tienden a s_0, $p_m = \mu(s_m)$ y $\gamma_{p_m} = \gamma_m$ las curvas correspondientes. Las curvas γ_m satisfacen las condiciones del lema de Petrovsky-Landis, lo que implica que existe una subsucesión $\{\gamma_m\}$ tal que tiene como límite a una curva γ_p. Así, $\Delta_{ij}^{\rho} = \Delta_{\gamma_{\rho}}$

es la prolongación analítica buscada. Si s fuese distinto de uno, s_0 no podría ser supremo pues $\Delta_{\gamma_{p_0}}$ es un germen en p_0 y, por consiguiente, está definido en una vecindad de p_0 que necesariamente habrá de contener elementos $\mu(s')$ tales que $s' > s_0$.

//.

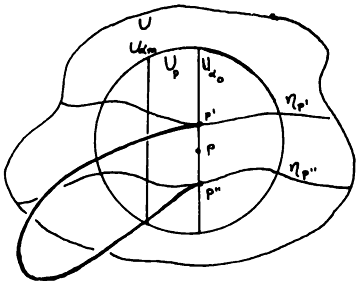
Pasemos ahora a la demostración de la proposición 8.6 : Sean $q_i = \pi_i x$, $p \in \overline{W}^{*}_{ij} \cap U$ y Δ^{p}_{ij} la prolongación analítica del germen Δ^{q}_{ij} al punto p . Basta demostrar que el germen Δ^{p}_{ij} preserva la foliación H.

Sea Δ^{p}_{ij} un representante arbitrario del germen Δ^{p}_{ij} definido en una vecindad $U_p \subset U$ del punto p y sean

$$p' \in U_p \cap U_{\alpha_0} , \quad p'' = \Delta^{p}_{ij}\, p' \qquad \ldots(8.19)$$

Deseamos demostrar que

$$\Delta^{p}_{ij}\, \eta_{p'} = \eta_{p''} \qquad \ldots(8.20)$$



Examinemos la sucesión de puntos

$$p'_m = h_{\alpha_m}(p') \in \eta_{p'}$$

y

$$p''_m = h_{\alpha_m}(p'') \in \eta_{p''}$$

De la expresión (8.8), $H_m \varphi_{p'} = \varphi_{h_{\alpha_m} p'}$, se sigue que $h_{\alpha_m}(p'')$ pertenece a $H_m(\varphi_{p'})$ pues la relación (8.19) nos dice que $\varphi_{p'} = \varphi_{p''}$ y, por consiguiente,

$$H_m \varphi_{p'} = H_m \varphi_{p''} = \varphi_{h_{\alpha_m} p''}$$

De esta manera, $\Delta^{p}_{ij}\, p'_m = p''_m$, y por tanto,

$$\Delta^{p}_{ij}\, \eta_{p'} \cap \eta_{p''} \supset \{ p''_m \}$$

La intersección $\Delta^{p}_{ij}\eta_{p'} \cap \eta_{p''}$ es un conjunto analítico que contiene a p" ; entonces, si suponemos que no es representante del gemen de la hoja $\eta_{p''}$ en el punto p", se tiene que su imagen bajo la proyección es un subconjunto analítico propio del conjunto M que contiene a α_0 y a todos los α_m a partir de cierta m. Sin embargo, esto contradice el hecho de que M sea minimal. En consecuencia,

$$\Delta^{p}_{ij}\, \eta_{p'} = \eta_{p''}$$

y la proposición 8.6 queda demostrada.

//.

La proposición 8.4 se deduce ahora fácilmente :

Sea $x \in \xi_p \cap \xi_{p'}$, entonces $x \in \varphi_{h_\alpha p}$ y $x \in \varphi_{h_\alpha p'}$. Como Δ^{p}_{ij} preserva la foliación η_p , $h_\alpha p$ y $h_\alpha p'$ están en η_p y ,por consiguiente,

$$\xi_p = \xi_{p'} .$$

Que es lo que queríamos demostrar.

8.5 FIN DE LA DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE LA RIGIDEZ ABSOLUTA .

Sea α una ecuación arbitraria de $V \setminus \Sigma$, $\mathcal{O}$ el disco $|t| < 1$, $\Psi :\ \longrightarrow V$ una transformación analítica tal que $\Psi(0) = \alpha_0$, $\Psi(\mathcal{O} \setminus 0) \subset M \setminus \Sigma$ y $\alpha_1 \in \Psi(\mathcal{O})$. Sea $\tilde{X} = CP^2 \times \mathcal{O}$ y Ψ la transformación inducida

$$\Psi : \tilde{X} \longrightarrow X$$
$$(q,t) \longrightarrow (q, \Psi(t)) \quad , \ q \in CP^2 .$$

Sean $\mathcal{A}$ la ecuación definida en la sección 8.3 y Θ la foliación analítica de $X'\setminus\tilde{U}$ definida en la proposición 8.4. Por último, sea $U_* = \{ x\in \tilde{X} ; \Psi(x)\in \tilde{U} \}$, donde $\tilde{U}$ representa a la vecindad de los puntos singulares YUY'. Afirmamos que la intersección de U_* con el plano vertical $CP^2\times\{ t \}$ está formado por un número finito de "esferas" abiertas : $U_*\cap CP^2\times\{ t \}$ son aquellos elementos de la forma (x,t) tales que bajo Ψ caen en la vecindad U de YUY'. Por hipótesis, YUY' está formado por un número finito de componentes y $\tilde{U}$ es una vecindad abierta de YUY', por lo tanto, una consecuencia directa es que $U_*\cap CP^2\times\{ t \}$ está formado por un número finito de esferas abiertas.

Denotemos $\mathcal{A}^* = \Psi\mathcal{A}$ a la ecuación en $\tilde{X}$. Para aclarar ideas observemos lo siguiente :
la ecuacion diferencial $\mathcal{A}$, $P(z,w,\alpha) / Q(z,w,\alpha)$, asocia a cada punto de $\Omega = C^2\times V$ un vector,

$$(z,w,\alpha) \dashrightarrow (z,w,\alpha,P(z,w,\alpha),Q(z,w,\alpha),0) ;$$

Así, podemos formar el siguiente diagrama de haces vectoriales :

$$\begin{tikzcd} E(\tilde{X}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "\pi"'] & TX \arrow[d, "\pi"] \\ \tilde{X} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

el cual, elemento a elemento, toma la forma

$$\begin{tikzcd} (z,w,t,P(z,w,\psi(t)),Q(z,w,\psi(t)),0) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & (z,w,\psi(t),P(z,w,\psi(t)),Q(z,w,\psi(t)),0) \arrow[d] \\ (z,w,t) \arrow[r, "\Psi"] & (z,w,\psi(t)) \end{tikzcd}$$

La ecuación inducida en $\tilde{X} = CP^2\times\mathcal{O}$ es entonces,

$$\mathcal{A}^* = \Psi^*\mathcal{A} : \frac{P(z,w,\psi(t))}{Q(z,w,\psi(t))}$$

Denotemos ahora por $\Theta^* = \Psi^*\Theta$ a la foliación inducida en $\tilde{X}\setminus U_*$ (ver apéndice IV). Θ^* es una foliación analítica en todo $\tilde{X}\setminus (U_*\cup CP^2\times\{0\})$; como $CP^2\times\{0\}$ es un subconjunto analítico de $\tilde{X}\setminus U_*$ de codimensión mayor que uno, entonces Θ^* es analítica en todo $\tilde{X}\setminus U_*$ (ver apéndice II). Observamos que Θ^* es invariante con respecto a la ecuación $\mathcal{A}^*$ y es transversal a los planos t=cte. Por esta razón, la foliación Θ^* genera en $\tilde{X}\setminus U_*$ una distribución integrable $\mathcal{L}$ que, en la región $\Omega\cap\tilde{X}\setminus U_*$ toma la forma $\omega(x) = P(x)dz - Q(x)dw + R(x)dt$ y, en la región $\Omega_1\cap X\setminus U$, la forma $\omega(x) = \tilde{P}(x)dz - \tilde{Q}(x)dw + R_1(x)dt$ donde $P,Q,R,\tilde{P},\tilde{Q},R_1$, son como en la sección 7.4.

R es una función analítica en $\Omega\cap(\tilde{X}\setminus U_*)$; sin embargo, hace un momento observamos que $U_*\cap CP^2\times\{t\}$ está formado por un número finito de esferas, de modo que R es una función analítica en $C^2\times\{t\}$ salvo en un número finito de abiertos. Así, R se extiende a una función holomorfa en todas las componentes de U que se encuentran en Ω (ver apéndice II). Análogamente, para la región $\Omega_1 = \{ (z,w,t) \}$ la función R se extiende a una función holomorfa a las componentes de U_* contenidas en Ω_1. A su vez, la distribución $\mathcal{L}$ se prolonga a la distribución $\tilde{\mathcal{L}}$ en $\tilde{X}$, que es integrable en todo $\tilde{X}\setminus Y$ por la analiticidad de las formas $\omega\wedge d\omega$ y $\omega_1\wedge d\omega_1$. La distribución $\tilde{\mathcal{L}}$ genera, por ello, una foliación $\tilde{\Theta}^*$ en $\tilde{X}\setminus Y$. La foliación $\tilde{\Theta}^*$ es transversal a los planos t=cte en todas partes salvo en Y y es invariante con respecto a la ecuación $\mathcal{A}^*$. El espacio al infinito es una hoja de la foliación $\tilde{\Theta}^*$.

De esta manera, hemos reproducido las mismas condiciones que se tenían en el lema 7.5, lo que implica que toda ecuacion $\alpha\in\Psi(\mathcal{O})$ y, en particular α_1, es afinmente equivalente a α_0.

El conjunto M_{α_0} de ecuaciones $\alpha\in\mathcal{A}_n$ afinmente equivalentes a α_0, forma una variedad algebraica que contiene a $V\setminus\Sigma\subset M$; por consiguiente $M\subset M_{\alpha_0}$, lo que demuestra el teorema.

Con la demostración del teorema de la rigidez absoluta damos por terminado este trabajo. Cabe mencionar, sin embargo, que en el trabajo escrito por Ilyashenko se incluye una última sección , en la que se demuestra que, para ecuaciones genéricas $\alpha \in \mathcal{A}_n$, se tiene un número finito de ciclos límite homológicamente independientes. Se incluyen además, una serie de preguntas y conjeturas relacionadas con el material expuesto, tendientes a mejorar los resultados obtenidos.

SIMBOLOGIA (capítulos 1-8) .

$\mathcal{A}_n$ - clase de ecuaciones de la forma $dw/dz = P(z,w)/Q(z,w)$ con P y Q polinomios de grado no mayor que n.

CP^n - espacio proyectivo complejo .

$\mathcal{A}_n'$ - clase de ecuaciones $\alpha \in \mathcal{A}_n$ que tienen la recta al infinito como solución y n+1 puntos singulares al infinito distintos.

a_j - coordenadas de los puntos singulares al infinito de la ecuación α.

$\mathcal{F}$ - grupo de germenes de biholomorfismos de $(C,0)$.

$\mathbf{f}$ - germen de función

Δ_γ - transformación de holonomía alrededor del lazo γ

F_α - solución al infinito de la ecuación α

a - punto base fijo del grupo fundamental $\pi_1(F_\alpha)$

$\mu_{j\alpha}$ - generadores canónicos del grupo fundamental $\pi_1(F_\alpha)$

(Γ,a) - transversal a F_α en el punto a .

$\mathcal{F}_\alpha$ - grupo de holonomía de la solución al infinito , F_α .

$\mathbf{f}_{j\alpha}$ - generadores canónicos de $\mathcal{F}_\alpha$.

$\nu_{j\alpha}$ - derivadas de los generadores canónicos de $\mathcal{F}_\alpha$ en al origen, $\mathbf{f}_{j\alpha}'(0)$.

$\mathcal{P}_\alpha$ - grupo especial de transformaciones de holonomía de la ecuacion α en el infinito

$\mathcal{P}_\alpha'$ - cerradura del subgrupo del grupo C^* generado por los números $\nu_{j\alpha}$

(X,x) - siendo X un espacio topólogico y $x \in X$, (X,x) denota una vecindad del punto x en X .

$f : (X,x) \dashrightarrow (Y,y)$ - transformación de alguna vecindad del punto x en la vecindad (Y,y), donde $f(x) = y$.

$\mathbf{f} : (X,x) \dashrightarrow (Y,y)$ - germen en x de una transformación f que lleva a x en y .

APENDICE I
CURVAS ALGEBRAICAS .

I.1. ESPACIO PROYECTIVO Y ESPACIO AFIN .

Para definir el concepto de un espacio proyectivo de dimensión n , $\mathbb{P}^n$, vamos primero a introducir la noción de sistema coordenado proyectivo. Para ello, consideremos un conjunto $\mathbb{P}$ (cuyos elementos llamaremos puntos) y un campo K (cuyos elementos llamaremos constantes o números ; aquí sólo nos interesará el caso en que K denota a los números reales o a los números complejos).

DEFINICION -(sistema coordenado proyectivo)

Un sistema coordenado proyectivo n-dimensional sobre K en $\mathbb{P}$, es una correspondencia entre los puntos de $\mathbb{P}$ y los conjuntos ordenados de $n+1$ números $(\xi_0:\dots:\xi_n)$ tales que

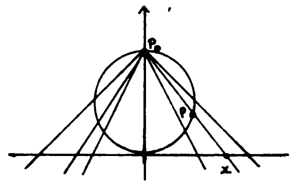
a) Cada punto de $\mathbb{P}$ corresponde a, al menos, un conjunto $(\xi_0:\dots:\xi_n)$ con no toda $\xi_i = 0$.

b) Cada conjunto $(\xi_0:\dots:\xi_n)$ tal que no todo $\xi_i = 0$ corresponde a uno y sólo un punto de $\mathbb{P}$.

c) Dos elementos $(\xi_0:\dots:\xi_n)$ y $(\eta_0:\dots:\eta_n)$ corresponden al mismo punto en $\mathbb{P}$ si y sólo si existe un número tal que $\xi_i = \lambda\eta_i$, $i=0,\dots,n$.

A los números $\xi_0,\dots,\xi_n$ de cualquiera de los conjuntos de $n+1$ números asociados a un punto p de $\mathbb{P}$ se les conoce como coordenadas homogéneas de p en el sistema de coordenadas dado. Generalmente se habla del punto ξ o (ξ) haciendo referencia al punto cuyas coordenadas son $\xi_0,\dots,\xi_n$.

Como ejemplo, consideremos el conjunto $\mathbb{P}$ de puntos del círculo euclideano $x^2+y^2-y=0$



Sea $p_0 = (0,1)$; si $p \neq p_0$, las coordenadas proyectivas de p están dadas por $(\lambda:\lambda x)$ donde x es la abscisa del punto en el cual la línea $p_0 p$ intersecta al eje x y $\lambda \in R \setminus \{0\}$. Como coordenada proyectiva de p consideramos $(0,\lambda)$, $\lambda \neq 0$.

Al conjunto $\mathbb{P}$ pueden asociársele distintos sistemas coordenados. Si X es un sistema coordenado en $\mathbb{P}$, entonces definimos un nuevo sistema coordenado Y en $\mathbb{P}$ asociando,a cada punto x, las coordenadas (y) definidas por

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i , \quad a_{ij} \in K\setminus\{0\} , \ j=1,\dots,n. \qquad \dots(I.1)$$

Se demuestra que la relación entre dos sistemas X y Y , definida arriba, es de equivalencia.

DEFINICION -(espacio proyectivo sobre K)

Un espacio proyectivo n-dimensional $\mathbb{P}^n$ sobre un campo K es un conjunto de puntos $\mathbb{P}$ junto con una clase de equivalencia de sistemas coordenados proyectivos n-dimensionales de $\mathbb{P}$ sobre K.

Como hemos visto, la correspondencia entre puntos de $\mathbb{P}$ y sus conjuntos coordenados no es uno a uno. Para poder tener este tipo de correspondencia introducimos un sistema coordenado distinto :

DEFINICION -(sistema coordenado afín)

Sean $\xi_0,\dots,\xi_n$ coordenadas homogéneas de un punto p en $\mathbb{P}^n$ en un sistema coordenado proyectivo. Si $\xi_0 \neq 0$, entonces los números $\xi_1/\xi_0 ,\dots,\xi_n/\xi_0$ se denominan coordenadas de p en el sistema coordenado afín correspondiente al sistema proyectivo dado.

Observamos que todos los puntos p de $\mathbb{P}^n$ pueden ser representados en el sistema coordenado afín, salvo aquellos de la forma $(0:\xi_1:\ldots:\xi_n)$. Al conjunto de puntos de la forma $(0:\xi_1:\ldots:\xi_n)$ se le denomina hiperplano al infinito. Así, el sistema coordenado afín establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de $\mathbb{P}^n$, salvo en el hiperplano al infinito, y el conjunto de n-adas de elementos en K.

Un cambio de coordenadas proyectivas (I.1) que lleve $x_0 = 0$ en $y_0 = 0$, toma la forma

$$x_0 = y_0$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x + b_j x_0 \quad ,j=1,..,n$$

Por consiguiente, si dos sistemas coordenados afines tienen el mismo hiperplano al infinito, entonces están relacionadas por la expresión $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i + b_j$, $j=1,\ldots,n$, con $a_{ij} \neq 0$. Recíprocamente, todo conjunto de ecuaciones de este tipo define un cambio de sistema coordenado afín. Diremos que dos sistemas relacionados de esta manera son equivalentes.

DEFINICION -(espacio afín n-dimensional sobre K)

Sea H el hiperplano al infinito del espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. A los puntos de $\mathbb{P}^n \setminus H$, junto con una clase de equivalencia de sistemas coordenados afines, se le denomina espacio proyectivo afin, A^n, de dimensión n sobre K.

I.2 - CURVAS ALGEBRAICAS .

Consideremos un sistema coordenado proyectivo en $\mathbb{P}^2$ y sea $F(x) = F(x_0, x_1, x_2)$ un polinomio homogéneo irreducible de grado n>0 con coeficientes en K. Si un conjunto de coordenadas (ξ_0, ξ_1, ξ_2) de un punto p en $\mathbb{P}^2$ satisface la ecuación $F(x) = 0$, entonces todos los conjuntos de coordenadas de p lo hacen, pues $F(\lambda\xi_0, \lambda\xi_1, \lambda\xi_2) = \lambda^n F(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 0$.

Por lo tanto, decimos que un polinomio $F \in K[x_0, x_1, x_2]$ se anula en un punto ξ de P^2 si $F(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 0$ sin importar qué coordenadas ξ_i de ξ se escojan.

DEFINICION -(curva algebraica irreducible)

Sea F(x) un polinomio homogéneo irreducible de grado n>0 con coeficientes en K, $F \in K[x_0, x_1, x_2]$. Una curva algebraica irreducible se define como el conjunto de puntos $\xi = (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2)$ en $\mathbb{P}^2$ tales que

$$F(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = 0$$

Una curva algebraica es un objeto geométrico cuya definición es independiente del sistema coordenado empleado ; para ver lo anterior, se considera un sistema coordenado Y ,equivalente al sistema X, y se define G(Y) como el polinomio obtenido de substituir en F(x) las coordenadas x_i por su expresion en y_i ,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \; .$$

Así, las coordenadas (y) satisfacen $G(y) = 0$ si y sólo si $F(x) = 0$.

Observamos que la ecuación de una curva irreducible es única salvo por multiplicación por constantes, pues si $F(x) = 0$ y $G(x) = 0$ definen la misma curva irreducible, entonces F y G son irreducibles y $G(\xi) = 0$ si y sólo si $F(\xi) = 0$; por lo tanto, existe $\lambda \neq 0$ constante tal que $F(x) = \lambda G(x)$.

Puesto que la irreducibilidad de un polinomio depende de la cerradura algebraica del campo K, entonces la definición de curva algebraica irreducible depende, a su vez, de la cerradura algebraica de K.

DEFINICION -(curva algebraica y sus componentes)

Sea F(x) un polinomio homogéneo de grado n que se factoriza en polinomios irreducibles $F = F_1, \ldots, F_r$. El conjunto formado por las curvas irreducibles $C_1, \ldots, C_r$ cuyas ecuaciones son $F_1 = 0, \ldots, F_r = 0$ se denomina curva algebraica C y su ecuación es $F(x) = 0$. A las curvas $C_1, \ldots, C_r$ se les conoce como componentes de C.

Hacemos notar que las componentes de una curva algebraica no son necesariamente distintas, por ejemplo, la curva cuya ecuacion es $x_0^5 x_1 = 0$ tiene seis componentes y una de ellas , $x_0 = 0$, es múltiple.

Por brevedad, hablaremos de la curva $F(x) = 0$ en lugar decir la curva cuya ecuación es $F(x) = 0$.

Supongamos ahora que $F(x) = 0$ es una curva C que no tiene a $x_0 = 0$ como componente, es decir, x_0 no es un factor de $F(x)$; entonces, se tiene asociado a C un polinomio no homogeneo $F(1,x,y)$ del mismo grado. Denotaremos por $f(x,y)$ a $F(1,x,y)$. A la ecuación $f(x,y) = 0$ la llamaremos ecuación de C en el sistema coordenado afín. Claramente, si (z,w) son las coordenadas afines de un punto de C, entonces $f(z,w) = 0$ y viceversa. De esta manera, las soluciones de $f(x,y) = 0$ son los puntos de C que no se encuentran en la linea al infinito.

DEFINICION -(subconjunto cerrado en $\mathbb{P}^n$)

Un subconjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ es cerrado si todos sus elementos son tales que anulan a un número finito de polinomios con coeficientes en K.

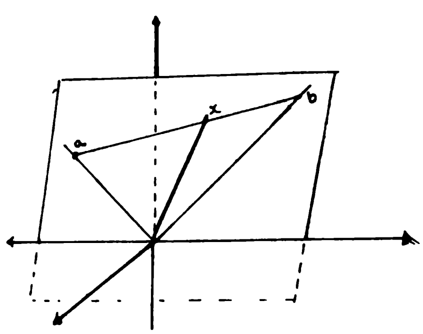
DEFINICION -(hipersuperficie en $\mathbb{P}^n$)

Una hipersuperficie en $\mathbb{P}^n$, $n>0$, es el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación de la forma $F(x_0,\ldots,x_n) = 0$, donde F es un polinomio homogeneo de grado $m>0$ con coeficientes en K.

Una manera de estudiar el comportamiento de las curvas algebraicas es estudiar las intersecciones de éstas con líneas en $\mathbb{P}^2$.

Sea C una curva algebraica definida por $F(x) = 0$, donde el grado de F es n. Sean (a), (b) y (c) puntos distintos; decimos que (c) está en la línea L que une a (a) con (b), si existen constantes s y t tales que

$$c_i = sa_i + tb_i \quad \text{para todo } i$$



A la intersección de L con la curva C se le identifica con los valores s y t para los cuales $sa + tb$ es una raíz de $F(x)$, es decir $F(sa + tb) = 0$. Podemos distinguir dos casos :

a) si $F(sa + tb)$ es idénticamente cero para s y t, entonces L esta contenida en C y de hecho L es una componente de C.

b) si $F(sa + tb)$ no es idénticamente cero en s y t, entonces F es un polinomio homogeneo en esas variables. Así, F es satisfecho por n cocientes $s:t$, donde un punto de multiplicidad r se considera como r raíces y un cociente $s:t$ es una raíz de F si $F(s,t) = 0$. Cada cociente $s:t$ determina un único punto común entre L y C. A un punto de intersección que corresponda a una raíz de multiplicidad r de $F(as + bt) = 0$, lo contaremos como r puntos.

Lo anterior se expresa como

TEOREMA I.1

Si una ecuación de una curva C tiene grado n entonces una línea L es una componente de C o tiene exactamente n puntos en común con C.

DEFINICION -(orden de un curva)

Definimos el orden de una curva como el grado de la ecuación que la define. Una curva de orden 1 es una línea ; a las curvas de orden 2,3,4,...n, se les denomina cuádricas, cúbicas, cuárticas,..., n-icas.

Si C es una curva de orden n que no tiene componentes múltiples, se demuestra que por cada punto p de C pasan líneas que intersectan a C en n puntos distintos.

Sea p un punto en C y L una línea. Para analizar con más detalle las intersecciones de L y C en p, consideremos un sistema coordenado afín y supongamos que en él p tiene coordenadas (a,b) y que C se define por la ecuación $f(x,y) = 0$. Las ecuaciones paramétricas para L son

$$x = a + \lambda t \quad , \quad y = b + \mu t$$

donde L queda determinada por el cociente $\lambda:\mu$. Las raíces de $f(a+\lambda t, b+\mu t) = 0$ nos determinan a los puntos de intersección de la curva C y la recta L. Si expandemos en serie de Taylor alrededor de (a,b) , obtenemos que

$$(f_x\lambda + f_y\mu)t + \frac{1}{2!}(f_{xx}\lambda^2 + 2f_x f_y \lambda\mu + f_{yy}\mu^2)t^2 + \ldots = 0 ,$$

pues el hecho de que p sea un punto en C implica que $f(a,b) = 0$.

DEFINICION -(tangente a una curva C)

Consideremos f, p y C como antes y calculemos el desarrollo en serie de Taylor de f alrededor de p . Si f_x y f_y no son ambos cero, entonces toda línea que pasa por p tiene una intersección simple con C en p, a excepción del valor s:t que hace que $f_x s + f_y t = 0$. Esta línea se denomina tangente a C en p .

Apartir de la definición anterior, nos preguntamos lo que sucede cuando $f_x = f_y = 0$, pero alguna de las segundas derivadas parciales f_{xx} ,f_{xy} ,f_{yy} es distinta de cero.En este caso, toda línea por p tiene por lo menos dos intersecciones en p y, en a lo más dos líneas, correspondientes a las raíces de

$$f_{xx}\lambda^2 + f_{xy}\lambda\mu + f_{yy}\mu^2 = 0 \qquad , \qquad \ldots(I.2)$$

tiene más de dos intersecciones. Esta líneas se denominan tangentes a C en p ; si la expresión (I.2) tiene una raíz doble, decimos que son dos tangentes que coinciden (la multiplicidad de las tangentes depende de la multiplicidad de la raíz de la ecuación (I.2).

Este concepto de tangencia en un punto p de C se generaliza a todo r>1. Diremos que un punto p en una curva C es de multiplicidad r si todas las r-1 derivadas de f se anulan en p pero la r-derivada de f es distinta de cero en p.

DEFINICION -(puntos simples y puntos singulares).

Un punto de C de multiplicidad uno se denomina punto simple de C; un punto de multiplicidad dos ,se denomina punto doble y así sucesivamente. Si un punto es de multiplicidad mayor que uno se dice que se trata de un punto singular. Por último, un punto singular de multiplicidad r cuyas tangentes son distintas, se denomina punto singular ordinario.

TEOREMA - I.2

Sea f como antes y supongamos que $f(x,y)$ no tiene términos de grado menor que r y tiene algunos términos de grado r, entonces el origen es un punto de multiplicidad r de $f = 0$ y la curva definida apartir de igualar los terminos de grado r de f tiene como componentes a las tangentes de f en el origen.

A continuación, damos algunos ejemplos relacionados con la teoría que hemos expuesto brevemente hasta ahora :

1) Consideremos la ecuacion $x^3 - x^2 + y^2 = 0$ y veamos lo que sucede en el origen :

$$f(x,y) = x^3 - x^2 + y,$$

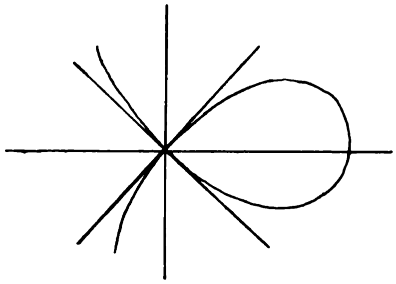
$$f_x = x(3x-2)$$

$$f_y = 2y$$

por lo tanto, $f_x = f_y = 0$ en el origen, de manera que el origen es un punto doble. Calculemos ahora las tangentes apartir de las raíces de

$$\lambda^2 f_{xx} + \lambda\mu f_{xy} + \mu^2 f_{yy} = 0$$

como $\lambda^2(6x - 2) + 2\mu^2 = 0$, en el cero se tiene que $\lambda^2 = \mu^2$; por lo tanto, (λ,μ) y $(\lambda,-\mu)$ son coordenadas de las rectas tangentes. Así, las ecuaciones de las tangentes a la curva C, en el origen,son $x + y = 0$ y $x - y = 0$. La curva tiene entonces un punto doble ordinario que comunmente se le denomina nodo.



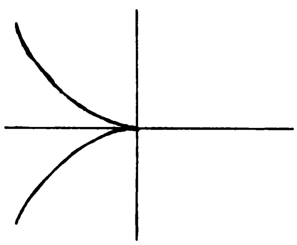
2) Ahora veremos el caso de un punto doble no ordinario

$$f(x,y) = x^3 - y^2$$

$$f_x = 3x \quad , \quad f_y = -2y$$

$$f_{xx} = 6x \quad , \quad f_{yy} = -2$$

Asi, $\lambda^2 6x - 2\mu^2 = 0$ y en el origen, $\mu^2 = 0$. Las coordenadas de las tangentes son $(\lambda, 0)$ y las ecuaciones $x = 0$.



I.3 - INTERSECCION DE CURVAS ; TEOREMA DE BEZOUT Y TEOREMA DE NOETHER.

Al hablar sobre la intersección de dos curvas algebraicas uno puede preguntarse cúantos puntos de intersección tienen, o bien cuándo tienen una componente común. La respuesta a este problema nos la da el teorema de Bezout que enunciamos a continuación .

TEOREMA I.3 -(de Bezout)

Dos curvas de ordenes m y n que no tienen componentes comunes, tienen exactamente mn intersecciones.

Al hablar de un polinomio en $K[x]$ nos referimos a una suma finita $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, donde los coeficientes a_j pertenecen al campo K. Si ahora consideramos sumas infinitas del tipo $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$, obtenemos lo que se conoce como serie de potencias formal sobre el campo K. Las series formales se suman y multiplican como polinomios y constituyen un dominio entero que denotamos por $K'[x]$. Es fácil demostrar que un elemento de la forma $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ es una unidad en $K'[x]$ si y sólo si a_0 es una unidad en K.

Sea f un elemento del campo cociente $K(x)'$ de $K[x]'$ entonces f tiene la forma

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots}{b_0 + b_1 x + \cdots}$$

así, si consideramos el mínimo entero tal que $b_h \neq 0$, entonces $b_0 + b_1 x + \ldots = x^h (b_h + b_{h+1} x + \ldots)$. Si ahora consideramos el inverso $d_0 + d_1 x + \ldots$ de $b_h + b_{h+1} x + \ldots$ entonces

$$f(x) = \frac{(b_0 + b_1 x + \ldots)(d_0 + d_1 x + \ldots)}{x^h}$$

y

$$f(x) = \frac{e_0 + e_1 x + \ldots}{x^h}$$

En otras palabras, $K(x)'$ consiste de aquellas series de potencias formales que tienen sólo un número finito de términos negativos. Por lo tanto, todo elemento distinto de cero en $K(x)'$ se expresa en forma única como

$$f = x^k (a_0 + a_1 x + \ldots), \text{ para alguna } k \in \mathbb{Z}, \text{ y } a_0 \neq 0$$

Al entero k se le conoce como el orden de f y se denota como $O(f)$. El orden de dos elementos f y g de $K(x)'$ cumple con las siguientes propiedades:

$$O(fg) = O(f) + O(g) \quad \text{y} \quad O(f \pm g) \geq \min[\, O(f), O(g) \,]$$

Nuestro objetivo ahora, es enunciar el teorema de Noether, el cual nos asegura que, bajo ciertas condiciones, dadas tres curvas algebraicas R, P y Q , existen polinomios homogéneos A y B tales que

$$R = AP + BQ$$

Sin embargo, necesitamos antes revisar algunos conceptos relacionados con parametrizaciones de una curva algebraica. Para ello, vamos a considerar series de potencias en una variable auxiliar t ; denotaremos a los elementos de $K(t)'$ como $\hat{x}$, $\hat{y}$,...

DEFINICION -(parametrización de una curva)

Sea $F(x) = 0$ la ecuación de una curva algebraica C en el plano proyectivo sobre el campo K. Decimos que $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2 \in K(t)'$ son las coordenadas de una parametrización de C si

a) $F(\hat{x}) = 0$

b) Si no existe $\hat{y} \in K(t)'$ tal que $\hat{y}\hat{x}_i \in K$, $i = 0,1,2$.

Si $\hat{a} \neq 0$ y $(\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$ son las coordenadas de la parametrización de una curva C , entonces $(\hat{a}\hat{x}_0, \hat{a}\hat{x}_1, \hat{a}\hat{x}_2)$ son coordenadas de la misma parametrización.
Por brevedad hablaremos de la parametrización $(\hat{x})$ en lugar de hablar de la parametrización cuyas coordenadas son $(\hat{x})$.

DEFINICION -(centro de una parametrización)

Sea $(\hat{x})$ una parametrización de una curva C y sea h , $h = \min O(\hat{x}_i)$, $i=0,1,2$. Entonces la parametrización $(\hat{y})$ definida por $\hat{y}_i = t^h \hat{x}_i$ es la misma parametrización que $(\hat{x})$ y, por lo menos para alguna $\hat{y}_i(t)$ en $K(t)'$, $i=0,1,2$, $O(\hat{y}_i) = 0$. Entonces $\hat{y}_i(0) = a_i \neq 0$ para alguna i
El punto (a) se denomina centro de la parametrización.

Igual que antes podemos considerar una parametrización en coordenadas afines : si $\hat{x}_0 = 0$, se define

$$\hat{x} = \hat{x}_1 / \hat{x}_0 \quad , \quad \hat{y} = \hat{x}_2 / \hat{x}_0$$

$(\hat{x},\hat{y})$ son las coordenadas afines de la parametrización.
Recíprocamente, si $(\hat{x},\hat{y})$ son coordenadas afines de C tales que $f(\hat{x},\hat{y}) = F(1,\hat{x},\hat{y}) = 0$ y $\hat{x}$, $\hat{y}$ no son ambos elementos de K, entonces $(1,\hat{x},\hat{y})$ son las coordenadas de una parametrización de C.

DEFINICION -(equivalencia de parametrizaciones)

Sean (x) y (y) dos parametrizaciones tales que $y_i = \hat{x}_i(\hat{t})$, donde $O(\hat{t})>0$. Entonces, si $(\hat{x})$ y $(\hat{y})$ tienen el mismo centro y si $O(\hat{t}) = 1$, decimos que $(\hat{x})$ y $(\hat{y})$ son equivalentes.

Sea $(\hat{x})$ una parametrización , $\hat{x}_i \in K(t^r)'$, entonces podemos substituir t^r pot t' de modo que $\hat{x}_i \in K(t')'$. Decimos que una parametrización $(\hat{x})$ con $\hat{x}_i \in K(t^r)$ es una parametrización reducible. Como las parametrizaciones irreducibles son gran utilidad en el estudio de las curvas algebraicas, enunciaremos a continuación dos teoremas en esta dirección.

TEOREMA I.4 -

La parametrización

$$\hat{x} = t^n \quad , \quad \hat{y} = a_1 t^{n_1} + a_2 t^{n_2} + \dots \quad ,$$

con $0<n$, $0<n_1<n_2\dots$, $a_i \neq 0$, es reducible si y sólo si los enteros $n, n_1, n_2, \dots$ tienen un factor común mayor que uno.

TEOREMA I.5 -

En un sistema coordenado apropiado,toda parametrización es equivalente a una.de la forma

$$\hat{x} = t^n \quad , \quad \hat{y} = a_1 t^{n_1} + a_2 t^{n_2} + \dots \quad ,$$

con $0 < n$, $0 < n_1 < n_2 \dots$

DEFINICION -(lugar de una curva, centro del lugar)

Se conoce como lugar de una curva a la clase de equivalencia de parametrizaciones irreducibles de C. Al centro común de las parametrizaciones se le conoce como centro del lugar.

Cuando K denota el campo de los números complejos se tiene que, dada una curva $F(x,y) = 0$ y un punto (x_0, y_0) en ella, existe un número finito de parejas de funciones $x(t)$, $y(t)$ analíticas en una vecindad de $t = 0$, tales que

a) $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$

b) $f(x(t),y(t)) = 0$

c) Existe una vecindad V de (x_0,y_0) tal que para todo punto (x,y) en V, distinto de (x_0,y_0), existe una única pareja $(x(t),y(t))$ y un único valor de t , tal que $x = x(t)$, $y = y(t)$.

(Ver [ ] pag.)

La expansión en serie de potencias de las funciones $x(t)$,$y(t)$ es una parametrización de la función f con centro en (x_0,y_0). El hecho de que los puntos (x,y) cercanos a (x_0,y_0) puedan ser obtenidos apartir de un único valor t es consecuencia de que la parametrización $(x(t),y(t))$ sea irreducible. En este caso se define una rama de la curva como el conjunto de todos los puntos $(x(t),y(t))$ que se obtienen variando t en una vecindad del origen de manera que las funciones $x(t)$, $y(t)$ sean analíticas en dicha vecindad. Así, el concepto de rama de una curva, cuando $K = C$, tiene su contraparte algebraica en el concepto de lugar de una curva (para un campo K algebraicamente cerrado y de característica cero).

TEOREMA I.6 -

El centro de cualquier lugar de C es un punto de C.

DEMOSTRACION :

Sea $(\hat{x})$ una parametrización de un lugar de C, entonces $x_i = a_i + b_i t + \ldots$ y no toda $a_i = 0$, $i=0,1,2$. Como $F(\hat{x}) = 0$, en particular $F(\hat{x}) \equiv 0 \pmod t$;además se tiene que $\hat{x}_i = a_i \pmod t$, de donde $F(a) \equiv 0 \pmod t$. Así, t divide a $F(a) \in K$ y , por consiguiente, $F(a) = 0$ (aquí por " $\equiv \pmod t$" estamos entendiendo congruencia módulo t)

Enunciamos el recíproco del teorema anterior:

TEOREMA I.7 -

Todo punto de una curva algebraica C es el centro de por lo menos un lugar de C.

Aunque no daremos una demostración de este último resultado,diremos que éste se deriva de considerar el campo de potencias fraccionales $K(x)^*$ (definido como el conjunto de todos aquellos elementos que pertenecen a los campos $K(x^{1/n})'$, n=1,2,...) y del siguiente teorema :

TEOREMA I.8 -

Si $f(x,y) \in K[x,y]$, entonces a cada raíz $\hat{y} \in K(x)^*$ de $f(x,y) = 0$ para la cual $O(\hat{y}) >)$, corresponde un único lugar de la curva $f(x,y) = 0$ con centro en el origen.Recíprocamente, a cada lugar $(\hat{x},\hat{y})$ de f con centro en el origen le corresponden $O(\hat{x})$ raíces de $f(x,y) = 0$, cada una de orden mayor que cero.

DEMOSTRACION :

Sea $f(x,y) = 0$ y $\hat{y} \in K(x)^*$ una raíz de $f(x,y) = 0$. Sea n el mínimo entero tal que y $K(x\ )'$. Entonces si $t = x^{*}$, (t^n,y) es una parametrización con centro en el origen. Por el teorema I.4, (t^n,y) es irreducible.

Para demostrar el recíproco, se considera una parametrización irreducible de f, $(\hat{x},\hat{y})$, tal que $O(\hat{x}) = n > 0$ y $O(\hat{y}) > 0$. Por el teorema I.5, existe una parametrización equivalente de la forma

$$(t^n, a_1 t^{n_1} + a_2 t^{n_2} + \ldots) \quad , \quad a_i \neq 0.$$

Se observa que dos parametrizaciones de este tipo difieren por una raíz de la unidad, es decir, substituyendo ct pot t, donde $c^n = 1$. Queda demostrar que para cada valor distinto de c, se tiene una raíz distinta de $f(x,y) = 0$ No lo haremos aquí.

DEFINICION -(orden de un polinomio en un lugar P)

Sea $(\hat{x},\hat{y})$ un lugar P con centro (x_0,y_0) y sea $g(x,y)$ un polinomio. El orden de g en P, $O_P(g)$, se define como el orden de la serie de potencias $g(\hat{x},\hat{y})$.

Se demuestra que el orden de g depende sólo del lugar y no de la parametrización específica (pues se están considerando parametrizaciones equivalentes) Nuevamente ,en este caso, $O_P(gh) = O_P(g) + O_P(h)$ y $O_P(g \pm h) \geq \min(O_P(g),O_P(h))$

En forma análoga, si $(\hat{x})$ es una parametrización de P en coordenadas proyectivas con todo $O(\hat{x}_i) \geq 0$ y por lo menos $O(\hat{x}_i) \neq 0$, y si G es un polinomio homogéneo en x_0, x_1, x_2 , definimos $O_P(g)$ como el orden de $G(\hat{x})$.

Por último, vamos a enunciar el teorema de Noether.

TEOREMA I.9 -(de Noether)

Supongamos que F,G,H son tres curvas algebraicas y supongamos que F y G no tienen factor común. Consideramos cada lugar P_i tal que $O_{P_i}(G) > 0$ y tal que P_i tiene su centro un punto ordinario de multiplicidad r_i de F, $r_i \geq 1$
Si para cada uno de dichos P_i

$$O_{P_i}(H) \geq O_{P_i}(G) + r_i - 1$$

entonces $H = AG + BF$, donde A y B son polinomios homogéneos.

APENDICE II
ESPACIOS Y VARIEDADES ANALITICAS

En el apéndice I nos concentramos en el estudio de los ceros de polinomios ; aquí hablaremos también de ceros de funciones, pero en este caso, se estudiarán los ceros de funciones analíticas.

II.1 - FUNCIONES HOLOMORFAS .

Como hasta ahora lo hemos hecho, denotaremos por R al campo de los números reales y por C al campo de los números complejos. Por C^n entenderemos al espacio vectorial sobre C de las colecciones $(z_1,\dots,z_n)$ en $C\times\dots\times C = C^n$, $z_j \in C$ (en forma análoga se define R^n). El valor absoluto de un número complejo $z\in C$, lo denotamos $|z|$ y definimos para $z\in C^n$ la norma

$$|z| = \max \{ |z_j| ; 1 \leqslant j \leqslant n \}$$

Si $w\in C^n$ y $r = (r_1,\dots,r_n)\in R^n$, el polidisco con centro en w y radio r es el conjunto $\triangle(w;r)$,

$$\triangle(w;r) = \{ z\in C^n ; |z_1-w_1| < r_1,\dots,|z_n-w_n| < r_n \}$$

Denotamos $\overline{\triangle}(w;r)$ a la cerradura de $\triangle(w;r)$ en C^n

Si D es un subconjunto de C^n, una función complejo - valuada f es una transformación de D en el plano complejo.

DEFINICION II.1 -(función holomorfa)

Sea f una función complejo valuada definida en un subconjunto abierto $D\subset C^n$. Decimos que f es una función holomorfa en D si a cada punto $w\in D$ le corresponde una vecindad abierta U, $w\in U\subset D$, tal que la función f tiene una expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{\nu_1\cdots\nu_n=0}^{\infty} a_{\nu_1\cdots\nu_n}(z_1-w_1)^{\nu_1}\dots(z_n-w_n)^{\nu_n} \quad \dots(II.1)$$

convergente para todo $z\in U$. Al conjunto de todas las funciones holomorfas en D se le denota por $\mathcal{O}_D$.

Una observación importante es que toda serie convergente de la forma (II.1) es absolutamente uniformemente convergente en polidiscos suficientemente pequeños $\triangle(w,r)$ centrados en w, $w = (w_1,\dots,w_n)$. Así, una serie de este tipo puede reordenarse arbitrariamente sin por ello dejar de representar a la función f. En particular, pueden considerarase las primeras $n-1$ variables $z_1,\dots,z_{n-1}$ dadas y fijos los valores $a_1,\dots,a_{n-1}$; de esta manera, la serie (II.1) puede rearreglarse como una serie en la variable z_n, para z_n suficientemente cercana a w_n . Como este resultado es igualmente válido para cualquier z_j, se tiene que una función holomorfa f es holomorfa en cada variable . El siguiente lema nos proporciona la afirmación recíproca

LEMA II.2 -(de Osgood)

Sea f una función complejo-valuada, contínua en un abierto $D\subset C^n$ y holomorfa en cada variable, entonces f es holomorfa en D.

DEMOSTRACION :

Consideremos $w\in D$ y $\overline{\triangle}(w,r)\subset D$. Por ser f una función holomorfa en cada variable, podemos aplicar repetidamente la formula integral de Cauchy en una variable para obtener

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_1-\zeta_1|=r_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}\dots\int_{|w_n-\zeta_n|=r_n} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n-z_n} f(\zeta)$$

para toda $z\in\triangle(w,r)$. Dado que el integrando de la expresión anterior es contínuo en el dominio de integración para z fija , entonces

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \frac{f(\zeta)\, d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}$$

Ahora, para z fija, la serie

$$\frac{1}{(\zeta_1-z_1)\ldots(\zeta_n-z_n)} = \sum_{\nu_1\ldots\nu_n=0}^{\infty} \frac{(z_1-w_1)^{\nu_1}\ldots(z_n-w_n)^{\nu_n}}{(\zeta_1-w_1)^{\nu_1+1}\ldots(\zeta_n-w_n)^{\nu_n+1}}$$

es uniformemente convergente para ζ en el dominio de integración , de manera que

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{|w_j-\zeta_j|=r_j} \sum_{\nu_1\ldots\nu_n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z_1-w_1)^{\nu_1}\ldots(z_n-w_n)^{\nu_n}d\zeta_1\ldots d\zeta_n}{(\zeta_1-w_1)^{\nu_1+1}\ldots(\zeta_n-w_n)^{\nu_n+1}} \quad ;$$

intercambiando el orden de la suma y la integración, f se expresa como la serie de potencias

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \sum_{\nu_1\ldots\nu_n=0}^{\infty} \left(\int_{|w_j-\zeta_j|=r_j} \frac{f(\zeta)\, d\zeta_1\ldots d\zeta_n}{(\zeta_1-w_1)^{\nu_1+1}\ldots(\zeta_n-w_n)^{\nu_n+1}}\right)(z_1-w_1)^{\nu_1}\ldots(z_n-w_n)^{\nu_n}.$$

Lo que demuestra que f es holomorfa .

// .

El crirterio de Cauchy en una variable tiene su equivalente para funciones de varias variables complejas. Sea z en C^n tal que $z_j = x_j + i\, y_j$ (donde x_j y y_j se conocen como las coordenadas reales subyacentes) , definimos las operaciones lineales

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

El operador $\frac{\partial}{\partial z_j}$ así definido coincide con el concepto de derivada parcial de una función holomorfa.

TEOREMA II.3 -(criterio de Cauchy-Riemann)

Sea f una función complejo valuada en el abierto D , $D \subset C^n$, tal que es contínuamente diferenciable en las coordenadas reales subyacentes de C^n. Entonces f es holomorfa en D si y sólo si satisface el sistema

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(z) = 0 \qquad , j=1,\ldots n.$$

DEMOSTRACION :

Nuevamente consideramos $f(z)$ como una función de una sola variable z_j . Si $f(z) = u(z) + i\, v(z)$ entonces

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial y_j}\right) + i\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)$$

El teorema es ahora inmediato de considerar el criterio de Cauchy-Riemann para funciones de una variable y del lema de Osgood.

// .

Sean $D \subset C^n$ y $D' \subset C^m$ dos dominios abiertos. Una transformación $g : D \longrightarrow D'$

$$(w_1,\ldots,w_m) = (g_1(z_1,\ldots,z_n),\ldots,g_m(z_1,\ldots,z_n))$$

es una transformación holomorfa si las funciones $g_1,\ldots,g_m$ son holomorfas en D.

Una gran cantidad de los resultados de funciones holomorfas de una variable se generalizan a varias variables, entre ellos, el teorema del módulo máximo y el lema de Schwartz. Este último lo recordaremos en el caso de una variable, pues en la sección 4.1 lo usamos fuertemente.

LEMA II.4 -(de Schwartz)

Sea f una función analítica en la región $|z|<1$, tal que $|f(z)| < 1$ y $f(0) = 0$, entonces $|f(z)| \leqslant |z|$ y $|f'(0)| \leqslant 1$. Si $|f(z)| = |z|$ para alguna $z \neq 0$ o si $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = cz$, $|c|=1$.

.

Otro resultado que se generaliza apartir de un teorema para funciones de una sola variable es que,si dos funciones holomorfas coinciden para todo z en un subconjunto abierto de U, entonces $f(z) = g(z)$ para todo z en U. Este resultado, es equivalente al principio de prolongación analítica que a continuación enunciamos:

PROPOSICION II.5 -(principio de prolongación analítica)

Sea $\Omega \subset C^n$ abierto y conexo, y sea f una función holomorfa en Ω . Si f se anula en un subconjunto abierto no vacío de Ω , entonces $f \equiv 0$ en Ω .

DEFINICION -(función regular)

Sea f una función holomorfa, decimos que f es regular de orden k en z_n en un punto w, si $f(w_1,\ldots,w_{n-1},z_n)$, considerada como una función de la variable z_n tiene un cero de orden k en $z_n = w_n$, es decir,

$$f(w) = \frac{\partial f}{\partial z_n}(w) = \ldots = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial z_n}(w) = 0 \quad , \frac{\partial^k f}{\partial z_n} \neq 0.$$

DEFINICION -(punto singular de una función holomorfa)

Sea D un dominio en C^n y $F : D \to C^m$ una función holomorfa, $F(z) = (f_1(z),\ldots,f_m(z))$. Si la matriz jacobiana

$$J_F(w) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)(w)$$

tiene rango máximo en $w \in D$, decimos que F es no singular en w. Decimos que F es no singular en D si es no singular en cada uno de sus puntos.

TEOREMA II.6 -(de la función inversa)

Sean U,V abiertos de C^n ; $0 \in U$ y $f: U \to V$ una función holomorfa no singular en el origen. Entonces f es uno a uno en una vecindad del origen y f^{-1} es holomorfa en $f(0)$.

Sea F una función holomorfa en una vecindad de un punto p de C^n en C^n_1 tal que el determinante $\det J_F(p)$,sea distinto de cero, entonces, por el teorema de la función inversa, existe una vecindad U de p en la cual F es un isomorfismo analítico. Sea

$$w_1 = w_1(z_1,\ldots,z_n) \ ,\ldots, \ w_n = w_n(z_1,\ldots,z_n)$$

la expresión de F en términos de las coordenadas w_i de C^n. Decimos que $w_1,\ldots, w_n$ es un conjunto coordendo en p si $w_i(p) = 0$, $i=1,\ldots,n$ y si definen un isomorfismo analítico en una vecindad de p .

DEFINICION -(biholomorfismo)

Sea F una función holomorfa de una región $D \subset C^n$ en un abierto $V \subset C^n$ definida por

$$w_k = w_k(z_1,\ldots,z_n) \quad , \ k=1,\ldots,n.$$

Si no sólo F ,sino su inversa F^{-1}

$$z_k = z_k(w_1,\ldots,w_n) \quad , \ k=1,\ldots,n \quad ,$$

es holomorfa, decimos que F es un biholomorfismo. En el caso en que $n=1$, se dice que F es conforme.

DEFINICION -(subvariedad compleja de C^n).

Un subconjunto M de C^n es una subvariedad compleja si para todo p M existe una vecindad U de p y una transformación $F : U \to C^m$ $(n \geq m)$ no singular en p, tal que $M \cap U = \{ z \in U \ ; \ F(z) = F(p) \}$.

El siguiente teorema caracteriza a las subvariedades complejas de C^n.

TEOREMA II.7 -

Un subconjunto M de C^n es una subvariedad compleja de C^n, si y sólo si cada punto $p \in M$ tiene asociado un conjunto coordenado $w_1,\ldots,w_n$ en p, tal que en alguna vecindad U de p, $M \cap U = \{ z \in U; \ w_1(z) = \ldots = w_m(z) = 0 \}$.

DEMOSTRACION :

Supongamos que M es una variedad compleja de C^n y sean $p \in M$,U y F como en la definición anterior, $F = (f_1,\ldots,f_m)$ Supongamos que $f_i(p) = 0$. Como F es no singular en p , entonces los vectores

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_1}(p),\ldots,\frac{\partial f_i}{\partial z_n}(p)\right)$$

son linealmente independientes , $j=1,\ldots,m$. Sean

$$(a_{j1},\ldots,a_{jn}) \quad , \quad m+1 \leq j < n \ ,$$

$n-m$ vectores que completan a los anteriores a una base de C^n. Construímos $n-m$ funciones como sigue

$$f_j(z) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} z_i$$

De esta manera, $F = (f_1, \ldots, f_n)$ es no singular en p, lo que implica que $f_1, \ldots, f_n$ forman un sistema coordenado en p y. $M \cap U = \{ z \in U ; f_1(z) = \ldots = f_m(z) = 0 \}$.
Si ahora suponemos que para todo p M existe un conjunto coordenado $w_1, \ldots, w_n$ en p, definimos F como $F = (w_1, \ldots, w)_n$, claramente $M \cap U = \{ z \in U ; F(z) = F(p) \} = \{ z \in U ; (w_1(z), \ldots, w_m(z)) = 0 \}$.

//.

Este teorema implica que $M \subset \mathbb{C}^n$ es una subvariedad si y sólo si, para cada uno de sus puntos existe una vecindad U de p, un polidisco $\triangle(0;\delta)$ y una función no singular F de $\triangle(0;\delta)$ en $\mathbb{C}^n$, tales que $M \cap U = F(\triangle(0;\delta))$ y $F(0) = p$.

DEFINICION -(subconjunto flaco de un dominio)

Sea D u dominio en $\mathbb{C}^n$ y $X \subset D$. Decimos que X es un subconjunto flaco de D si para toda $z \in D$ existe un disco abierto $\triangle(z;r) \subset D$ y una función holomorfa f, no idénticamente cero en $\triangle(z;r)$, tales que $f(X \cap \triangle(z;r)) = 0$

TEOREMA II.8 -(de extensión de Riemann)

Sea X un subconjunto flaco de un dominio D en $\mathbb{C}^n$ y f una función holomorfa en $D \setminus X$, localmente acotada en D. Entonces existe una única función holomorfa $\tilde{f}$ en D tal que $\tilde{f}(z)|_{D \setminus X} = f(z)$ (que f sea localmente acotada en D significa que, para todo $z \in D$, existe $\triangle(z;r) \subset D$ tal que $f|_{\triangle(z;r) \cap (D \setminus X)}$ es acotada).

Un resultado que se desprende del teorema de extensión de Riemann, es el hecho de que para todo subconjunto flaco X de un subconjunto conexo U de $\mathbb{C}^n$, la diferencia $U \setminus X$ es conexa. La demostración de este resultado se basa en suponer que $U \setminus X$ es disconexo, esto implica que $U \setminus \bar{X}$ es también disconexo y por lo tanto, puede escribirse como la unión de dos conjuntos abiertos ajenos U_1 y U_2.

Definimos en $U \setminus \bar{X}$ la función

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in U_1 \\ 0 & \text{si } z \in U_2 \end{cases}$$

claramente Φ es holomorfa en $U \setminus \bar{X}$. Como U es conexo, existe $p \in U$ tal que $p \in \bar{X} \cap \bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$. Para dicha p, Φ no se extiende a una función holomorfa, lo que contradice el teorema de Riemann.

Contrariamente a lo que sucede para funciones de una sola variable, en varias variables toda singularidad aislada de una función holomorfa es removible. Este resultado es consecuencia inmediate del siguiente teorema.

TEOREMA II.9 -(de Hartogs)

Sea $\triangle(0;1) = \{ z \in \mathbb{C}^n ; |z_j| < 1 \}$, $n > 1$. Sea V una vecindad de $\partial(\triangle(0,1))$ tal que la intersección $V \cap \triangle(0;1)$ es conexa. Entonces, para toda función holomorfa V, existe una función holomorfa F en $\triangle(0;1) \cup V$, tal que $F|_V = f$.

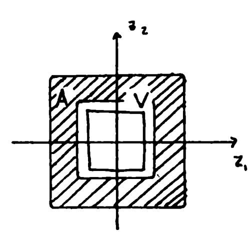
DEMOSTRACION :

Sea $\epsilon > 0$ tal que $A = A_1 \cup A_2$, donde

$$A = \{ z \in \mathbb{C}^n ; 1-\epsilon < |z_1| < 1,\ |z_j| < 1,\ j > 2 \} \cup$$

$$\cup \{ z \quad \mathbb{C} ; 1-\epsilon < |z_2| < 1,\ |z_j| < 1,\ j \neq 2 \}$$

y $A \subset V$.



Sea $z' = (z_2, \ldots, z_n)$. Si $|z'| < 1$, entonces la función $z_1 \longrightarrow f(z_1, z')$ es holomorfa en el anillo $\{ z_1 \in \mathbb{C} ; 1-\epsilon < |z_1| < 1 \}$, de manera que podemos expresarla en serie de Laurent en z_1

$$f(z_1, z') = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu(z') z_1^\nu$$

con $a_\nu(z')$ holomorfas en $P = \{ |z_2| < 1, \ldots, |z_n| < 1 \}$
Ahora, si $1-\epsilon < |z_2| < 1$, $|z_3| < 1, \ldots, |z_n| < 1$, la función

$z_1 \dashrightarrow f(z_1, z\ )$ es holomorfa en el disco $|z_1| < 1$, por lo que la serie de Laurent no tiene términos con potencias negativas en z_1. Es decir, $a_\nu(z') = 0$ para $\nu < 0$ y $1-\epsilon < |z_2| < 1$. Por el principio de prolongación analitica ,II.5, $a_\nu(z') \equiv 0$ para $\nu < 0$, $z' \in P$. Definimos

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & , \ z \in V \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(z')\ z_1 & , z \in \Delta(0,1) \end{cases}$$

La serie anterior converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\Delta(0,1)$ y es holomorfa ahí ; además, F coincide con f en $V \cap \Delta(0,1)$ pues coincide en un subconjunto abierto de $V \cap P$ y la intersección $V \cap P$ es conexa.

//.

Una demostración distinta de este resultado se obtiene usando la integral de Cauchy-Riemann.

Una forma muy usada del teorema de Hartogs es la siguiente :

TEOREMA II.10 -(de Hartogs)

Sean $V \subset U$ abiertos de C_1^n toda función holomorfa en una vecindad de $U \backslash V$ se extiende a una función holomorfa en U.

II.2 - FUNCIONES HOLOMORFAS : ANILLOS LOCALES .

En general, nos interesará analizar el comportamiento de una función en la vecindad de algún punto en especial. Esto nos permite desarrollar una teoría local de las funciones holomorfas y obtener una gran cantidad de resultados que, en el caso global sería poco razonable plantearse. Para el estudio local de las funciones holomorfas necesitamos desarrollar el concepto de germen de una función; este concepto nos permitirá establecer una equivalencia entre aquellas funciones que son iguales en la vecindad de algún punto dado.

DEFINICION -(germen de función)

Sean f_U y g_V funciones complejas definidas en una vecindad U y V de w , respectivamente. Decimos que f_U es equivalente a g_V en w ,si existe una vecindad abierta W de w , $W \subset U \cap V$, tal que $f_U|_W = g_V|_W$. Vamos a denominar germen de una función en el punto w , a la clase de equivalencia de dichas funciones.

Es sencillo demostrar que la relación anterior es, en efecto, una relación de equivalencia. Vamos a denotar por $\mathbf{f}_w$, al germen correspondiente a la función f en el punto w; cuando no sea necesario especificar el punto, escribiremos sólo $\mathbf{f}$.

Se observa que el germen depende no sólo del comportamiento de la función en el punto, sino de su comportamiento en toda una vecindad de éste. El valor de un germen en w es el valor de cualquiera de sus representantes.

El hecho de considerar germenes de funciones de variable compleja, nos permite dar al conjunto de dichos germenes una estructura de anillo :

Sean f y g los representantes de los germenes $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ en w. En $U \cap V$, se encuentran definidos $f + g$ y $f\,g$, de manera que los germenes de dichas funciones definen a la suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ y al producto $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ de $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$. Es inmediato que lo anterior define un anillo conmutativo con elemento identidad.

Nosotros estaremos interesados en un anillo muy especifico, a saber, el anillo de germenes de funciones holomorfas en un punto w, que generalmente se denota por $\mathcal{O}_w$. Cuando $w = \bar{0} \in C_1^n$ $\mathcal{O}_w$ se denota $\mathcal{O}$ y, cuando es necesario especificar la dimensión compleja del espacio subyacente, C , se usa la notación ${}_n\mathcal{O}_w$.

El siguiente teorema nos será de gran utilidad al trabajar con anillos de gérmenes de funciones holomorfas.

TEOREMA II.11 -

El anillo de germenes de funciones holomorfas en un punto $w \in C^n$, ${}_n\mathcal{O}_w$, es isomorfo al anillo de series de potencias convergentes alrededor de w.

DEMOSTRACION :

Observemos primero, que cada serie de potencias convergente en una vecindad de un punto w representa a una función en dicha vecindad y por consiguiente, determina un unico germen en ${}_n\mathcal{O}_w$. Por otra parte, si f_U es un representante de un germen $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}_w$, f tiene una expansión en serie de potencias en una vecindad de w. Se observa que si $\tilde{f}$ es otro representante de $\mathbf{f}$, $\tilde{f}$ y f_U determinan la misma expansión en serie de potencias en una vecindad de w.

//.

Haciendo el cambio de variables, $\zeta_j = z_j - w_j$, es inmediato ver que los anillos ${}_n\mathcal{O}_w$ y ${}_n\mathcal{O}$ son isomorfos; de manera que ,por lo general, hablaremos del anillo de germenes de funciones holomorfas en el origen.

Vamos a demostrar que ${}_n\mathcal{O}$ es un anillo entero . Para ello, consideremos dos elementos $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g} \in {}_n\mathcal{O}$ y sean f y g las funciones representantes en una vecindad U del origen. Supongamos que $\mathbf{f}\,\mathbf{g} = 0$, entonces el producto de f y g se anula, $f(z)g(z) = 0$,en una vecindad $V \subset U$ del origen. Si $f(z) \neq 0$ para alguna w V, entonces, por continuidad, $f(z) \neq 0$ en alguna vecindad abierta de w y,por lo tanto, $g(w) \equiv 0$ en dicha vecindad. Lo anterior nos dice que $g(z) \equiv 0$ en V.

Por lo que acabamos de demostrar, tiene sentido pensar en el campo cociente ${}_n\mathcal{M}$ de ${}_n\mathcal{O}$ que se conoce como el campo de germenes de funciones meromorfas.

Pensemos en los germenes de funciones en ${}_n\mathcal{O}$ que son distintos de cero en el origen; claramente estos elementos poseen un inverso multiplicativo en ${}_n\mathcal{O}$ y , por consiguiente , representan a las unidades en ${}_n\mathcal{O}$. ${}_n\mathcal{O}$ es un anillo local.

Resulta útil observar que aquellos elementos que no son unidad en ${}_n\mathcal{O}$, forman un ideal en ${}_n\mathcal{O}$: el ideal de germenes de funciones holomorfas que se anulan en el origen.

Sea $f(z) = (z_1,\ldots,z_{n-1})$ un representante del germen $\mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in {}_{n-1}\mathcal{O}$; $f(z)$ puede considerarse como una función holomorfa en n variables , $z_1,\ldots,z_{n-1},z_n$ y, como tal, determina un germen en ${}_n\mathcal{O}$. El germen así definido es independiente del representante elegido y, la transformación ${}_{n-1}\mathcal{O} \dashrightarrow {}_n\mathcal{O}$ es monomorfismo : los elementos ${}_{n-1}\mathcal{O} \subset {}_n\mathcal{O}$ son aquellos elementos $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}$ que no dependen de z_n

Vamos a estudiar ahora, un tipo especial de elementos en ${}_n\mathcal{O}$: sean $a_0,\ldots,a_k$ elementos de ${}_{n-1}\mathcal{O}$ y construyamos el polinomio

$$p(a) = a_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_{k-1} z^k \quad ;$$

por definición, $p(a)$ representa a una serie de potencias convergente en n variables y, por consiguiente, pertenece a ${}_n\mathcal{O}$. El conjunto de elementos de esta forma constituye el anillo de polinomios en z_n sobre ${}_{n-1}\mathcal{O}$, ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$. Claramente, ${}_{n-1}\mathcal{O} \subset {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n] \subset {}_n\mathcal{O}$

DEFINICION -(germen regular de orden k)

Sea $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}$ y supongamos que existe un representante f de $\mathbf{f}$ tal que f es una función regular de orden k en z_n en el origen. Entonces se dice que $\mathbf{f}$ es regular de orden k en z_n.

DEFINICION -(polinomio de Weierstrass)

Sea h un elemento de ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ de la forma

$$h(z_n) = z_n^k + a_1 z_n^{k-1} + \ldots + a_{k-1} z_n + a_k$$

tal que los coeficientes $a_j \in {}_{n-1}\mathcal{O}$, $j=1,\ldots,k$, no son unidades. Entonces h se denomina polinomio de Weierstrass de grado k en z_n .

Puesto que en un polinomio de Weierstrass, $h \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$, los coeficientes a_j no son unidades, se tiene que en el origen $a_j(0,..,0) = 0$; por lo tanto, $h(0,..,0,z_n) = z_n^k$ lo que implica que h es regular en z_n de orden k.

El siguiente teorema nos proporciona un resultado sobre "factorización" de elementos en ${}_n\mathcal{O}$.

TEOREMA II.12 - (de preparación de Weierstrass)

Sea $f \in {}_n\mathcal{O}$ un germen regular de orden k en z_n, entonces existe un único polinomio de Weierstrass $h \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$, de grado k, tal que $f = uh$ para alguna unidad $u \in {}_n\mathcal{O}$.

DEFINICION -(elementos irreducibles)

Un elemento $f \in {}_n\mathcal{O}$ es reducible sobre ${}_n\mathcal{O}$ si puede ser escrito como el producto $f = g_1 g_2$, donde g_1, g_2 no son unidades de ${}_n\mathcal{O}$; en caso contrario, se dice que f es irreducible en ${}_n\mathcal{O}$. Análogamente, un elemento $f \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ se denomina reducible en ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$, si puede escribirse como $f = g_1 g_2$ donde g_1, g_2 no son unidades de ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$; en caso contrario, f es irreducible en ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$

LEMA II.13 -

Un polinomio de Weierstrass $h \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ es reducible sobre ${}_n\mathcal{O}$ si y sólo si h es reducible sobre ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$; si h es reducible, entonces todos sus factores son polinomios de Weierstrass módulo unidades de ${}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$.

Haciendo uso de la inducción en n y del teorema de preparación de Weierstrass, se demuestra que los anillos locales ${}_n\mathcal{O}$ son anillos Noetherianos, es decir, son anillos conmutativos con elemento identidad, tales que cada ideal tiene una base finita.

II.3 CONJUNTOS ANALITICOS Y GERMENES DE CONJUNTOS ANALITICOS.

En II.1 definimos una subvariedad M de $\mathbb{C}^n$ en forma local, como el conjunto de ceros de ciertas funciones; sin embargo, es importante dejar claro que no todo conjunto de ceros de funciones es subvariedad de $\mathbb{C}^n$. Consideremos por ejemplo, en $\mathbb{C}^3$ el conjunto $\{ z_1 z_2 z_3 = 0 \}$, se demuestra que este conjunto no es una subvariedad de $\mathbb{C}^3$ observando que en el origen, $0 \in \mathbb{C}^3$, se tienen tres componentes. Pensemos también en el conjunto $\{ z_3^r - z_1 z_2 = 0 \}$, donde $r \geq 2$;si $f(z_1, z_2, z_3) = z_3^r - z_1 z_2$, entonces el jacobiano de f es $J_f = (z_2, -z_1, r z_3^{r-1})$, que es claramente singular en el origen.

Nos interesa estudiar el conjunto de ceros de funciones holomorfas aún en el caso en el que dicho conjunto no constituya una subvariedad analítica de $\mathbb{C}^n$. La siguiente definición abarca esta situación más general.

DEFINICION -(subconjunto analítico)

Sea U un dominio en $\mathbb{C}^n$. Un subconjunto V de U se denomina analítico, si para toda $z \in U$, existe una vecindad U_z y un número finito de funciones holomorfas $f_1, \ldots, f_k$ en U_z tales que $V \cap U_z = \{ x \in U_z ;\ f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0 \}$.

En una gran cantidad de casos denotaremos a $V \cap U_z$ por $V(f_1, \ldots, f_k)$.

TEOREMA II.14 -

Sea U un dominio en $\mathbb{C}^n$ y V un subconjunto analítico de U. Entonces se tiene que

a) V es cerrado en U.
b) Si $V \neq U$, $U \setminus V$ es denso en U.
c) $U \setminus V$ es conexo en U.

DEMOSTRACION :

a) Por definición de subconjunto analítico, toda $z \in V$ tiene una vecindad U_z tal que $V \cap U_z$ es cerrado en U.

b) Supongamos que $U \setminus V$ no es denso en U, entonces $\mathring{V} \neq \emptyset$ vamos a demostrar que $\mathring{V}$ es cerrado en U. Así, V es abierto y cerrado en la región conexa U y, por lo tanto, $\mathring{V} = U$, lo que es una contradicción :
Sea $z \in \overline{\mathring{V}}$ y U_z una vecindad abierta conexa de z en U Como V es analítico, existen $f_1, \ldots, f_k$ funciones holomorfas en U tales que $V \cap U_z = \{ x \in U_z ; f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0 \}$ entonces, cada f_j se anula en $\mathring{V} \cap U_z$. Por consiguiente, por el principio de prolongación analítica, $f_j \equiv 0$ en U_z de manera que $U_z \subset V$. Así, $U_z \subset \mathring{V}$ y $z \in \mathring{V}$. Por lo tanto, $\mathring{V} = \overline{\mathring{V}}$.

c) Bastará probar que todo $z \in U$ tiene una vecindad conexa U_z tal que $U_z \setminus V$ es conexo.

Sea U_z una vecindad conexa y $f_1,\dots f_k$ funciones holomorfas en U_z tales que

$$U_z\cap V = \{ x\in U_z ; f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0 \}$$

Sean $x_0, x_1 \in U_z\setminus V$ y $\tilde{V} = \{\lambda\in C; \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1\in U_z\}$. $\tilde{V}$ es un conjunto convexo no vacío de C. El conjunto V' defini- por $V' = \{\lambda\in C ; \lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 \in U_z\cap V \}$ es discreto en V. Por consiguiente, $\tilde{V}\setminus V'$ es conexo y 0,1 $\tilde{V}\setminus V'$. Si $t \dashrightarrow \gamma(t)$ denota un arco en $\tilde{V}\setminus V'$ que conecta a 0 con 1, entonces, $t \dashrightarrow \gamma(t)x + (1-\gamma(t))x$ es un arco en $U_z\setminus V$ que conecta a x_1 con x_0.

//.

TEOREMA II.15 -

Sea F una colección de funciones holomorfas en un abierto U de C^n. Entonces $V(F) = \{ x\in U; f(x) = 0$,para todo $f\in F \}$ es un subconjunto analítico de U.

Vamos a desrrollar una versión local de la noción de subconjunto analítico; para ello, daremos una relación de equivalencia entre los subconjuntos de C^n:

DEFINICION -(germen de un conjunto)

Sean X y Y subconjuntos de C^n. Decimos que X y Y son equivalentes en el origen si existe una vecindad U del origen tal que $X\cap U = Y\cap U$. A una clase de equivalencia de conjuntos se le denomina germen de un conjunto.

Como nuestro interés es trabajar con subconjuntos analíticos en forma local, vamos a definir lo que entenderemos por un germen de un conjunto analítico.

DEFINICION -(germen de un conjunto analitico)

Decimos que X es un germen de un conjunto analítico si existen $\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_k\in {}_n\mathcal{O}$,tales que

$$X = V(\mathbf{f}_1)\cap\dots\cap V(\mathbf{f}_k) \qquad ;$$

donde, por $V(\mathbf{f}_j)$ entendemos a la clase de equivalencia de conjuntos $\{ x\in U; f_j(x) = 0 \}$, siendo f el representante del germen $\mathbf{f}_j$ en U.

En otras palabras, X es el germen de un conjunto analítico en el origen, si el conjunto $\{x\in U; f_1(x)=\dots=f_k(x)=$ es un representante del germen de conjunto X, donde U es una vecindad del origen y $f_1,\dots,f_k$ son funciones holomorfas en U. A la intersección $\bigcap_{j=1}^{k} V(\mathbf{f}_j)$ también se le denota como $V(\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_k)$ o bien $\{ \mathbf{f}_1=\dots= \mathbf{f}_k= 0 \}$

Denotaremos por ${}_n\mathcal{J}$ a la colección de gérmenes de conjuntos analíticos en el origen.

Observamos que si V y W son elementos de ${}_n\mathcal{J}$, entonces $V\cap W$ y $V\cup W$ son elementos de ; ya que si $V = V(\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_k)$ y $W = W(\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_m)$, entonces $V\cap W = \{ \mathbf{f}_1=\dots=\mathbf{f}_k=\mathbf{g}_1=\dots=\mathbf{g}_m=0 \}$ y $V\cup W = \{\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{g}_j=0;\ i=1,\dots,k; j=1,\dots,m \}$

DEFINICION -(el ideal de V y el lugar de V)

Sea $V\in{}_n\mathcal{J}$. Consideremos los conjuntos id $V = \mathcal{L}(V) = \{ \mathbf{f}\in\mathcal{O}; \mathbf{f}$ se anula en V $\}$ y loc $\mathcal{S} = \bigcap_{\mathbf{f}\in\mathcal{S}} V(\mathbf{f})$ donde $\mathcal{S}\subset_n\mathcal{O}$. El conjunto $\mathcal{L}(V)$ se conoce como el ideal de V y el conjunto loc $\mathcal{S}$ se conoce como el 'locus' o el lugar de $\mathcal{S}$.

Es importante hacer notar que $\mathcal{L}(V)$ es, en efecto, un ideal, pues si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son dos elementos en ${}_n\mathcal{O}$ que se anulan en V , $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ y $\mathbf{f}\cdot\mathbf{k}$ también (para todo $\mathbf{k}\in{}_n\mathcal{O}$)

Vamos a demostrar ahora que loc $\mathcal{S}$ es un germen de un conjunto analítico.

PROPOSICION II.16 -

Sea $\mathcal{S}\subset{}_n\mathcal{O}$ y $V\in{}_n\mathcal{J}$ tales que loc $\mathcal{S} = \bigcap_{\mathbf{f}\in S} V(\mathbf{f})$. Entonces loc $\mathcal{S}$ es un germen de conjunto analítico.

DEMOSTRACION :

Sea $\mathcal{L}$ el ideal generado por $\mathcal{S}$ y sean $\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_m$ sus generadores (sabemos que $\mathcal{L}$ es finitamente generado pues es un anillo Noetheriano). Como todo elemento de $\mathcal{S}$ se anula en loc $\mathcal{S}$, entonces $V(\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_m)$ loc $\mathcal{S}$. Por otra parte, todo elemento de $\mathcal{L}$ se anula en $V(\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_m)$ y $\mathcal{L}\supset\mathcal{S}$, de manera que loc $\mathcal{S} = V(\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_m)$. Por lo tan to, loc S = $V(g_1,\dots,g_m)$.

Al igual que cuando trabajamos con curvas algebraicas, existe un concepto de irreducibilidad para el caso de gérmenes de conjuntos analíticos.

DEFINICION -(germen irreducible de conjunto analítico)

Sea $V \in {}_n\mathcal{T}$. Decimos que V es irreducible, si se tiene que la igualdad $V = V_1 \cup V_2$ para $V_1, V_2 \in {}_n\mathcal{T}$ implica que o bien $V = V_1$ o $V = V_2$.

TEOREMA II.17 -

Sea $V \in {}_n\mathcal{T}$. Entonces V tiene una descomposición en gérmenes irreducibles $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$, donde $V_j \in {}_n\mathcal{T}$ y $V_j \not\subset V_i$ para $i \neq j$. Además, $V_1,\dots,V_k$, están determinados en forma única por V.

La demostracion de este teorema se basa, esencialmente, en el hecho de que ${}_n\mathcal{O}$ es Noetheriano y en que la contención $V_j \supset V_i$ implica $\mathrm{id}V_j \subset \mathrm{id}V_i$: lo anterior nos asegura que toda cadena descendente $V_1 \supset V_2$ ... se detiene para alguna k, es decir, $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_k = V_{k+1} = \dots$ (observamos que de lo contrario la cadena de ideales $\mathrm{id}V_1 \subset \mathrm{id}V_2 \subset \dots$ sería una sucesión ascendente y esto contradice el que ${}_n\mathcal{O}$ sea Noetheriano).

A los germenes $V_1,\dots,V_k$ de la descomposición anterior se les conoce como ramas irreducibles de V. Nos podemos preguntar ahora,dado $f \in {}_n\mathcal{O}$, si existirá alguna relación entre la factorización de f y las ramas irreducibles de $V(f)$. El siguiente teorema nos responde con precisión a esta pregunta.

TEOREMA II.18 -

Sea $f \in {}_n\mathcal{O}$ y $f = \prod_{i=1}^{k} P_i^{n_i}$ su factorización en factores irreducibles. Entonces la descomposición de $V(f)$ en sus ramas irreducibles está dada por

$$V(f) = V(P_1) \cup \dots \cup V(P_k) \quad .$$

DEFINICION -(punto regular de V)

Sea V un subconjunto analítico de un dominio U en $\mathbb{C}^n$. Un punto $x \in V$ se denomina punto regular de V, si existe una vecindad U_x de x ,tal que $V \cap U_x$ es una subvariedad compleja de U . Si x no es un punto regular, decimos que x es singular.

DEFINICION -(dimensión de un subconjunto analítico)

Sea V un subconjunto analítico irreducible en el origen ,$0 \in \mathbb{C}^n$ y sean $(z_1,\dots,z_k; z_{k+1},\dots,z_n)$ coordenadas regulares en una vecindad del origen. Se define la dimensión de V en el origen como $\dim_0 V = k$.

II.4 ESPACIOS ANALITICOS Y VARIEDADES ANALITICAS COMPLEJAS.

Despues de tratar el caso local, nos encontramos con el problema de juntar de una manera adecuada los resultados locales, para así, poder estudiar ciertos planteamientos globales. Con ese fin, introducimos el concepto de gavillas de funciones holomorfas.

DEFINICION -(gavilla sobre un espacio topológico)

Sea D un espacio topológico. Una gavilla sobre D es un espacio topológico $\mathcal{T}$ y una transformación $\pi : \mathcal{T} \dashrightarrow D$, tales que

a) π es un homeomorfismo local; es decir, para toda τ en $\mathcal{T}$, existe una vecindad U de τ tal que $\pi(U)$ es abierto y la restricción $\pi|_U$ es un homeomorfismo.

b) Para cada $\xi \in D$, la fibra $\pi^{-1}(\xi) = \mathcal{T}_\xi$, tiene una estructura de grupo abeliano.

c) Las operaciones de grupo son contínuas en la topología de $\mathcal{T}$.

Consideremos $\tilde{\mathcal{O}} = \bigcup_{z \in \mathbb{C}^n} \mathcal{O}_z$ y sea $\tilde{\pi}$,$\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{O}} \dashrightarrow \mathbb{C}^n$ la proyección dada por $\tilde{\pi}(f_z) = z$, para $f \in \mathcal{O}_z$. Vamos a definir una topología en $\tilde{\mathcal{O}}$. Sea $f_z \in \mathcal{O}_z$ y $N(U,f) = \{ f_\xi ; \xi \in U \}$, donde f_ξ es el germen en ξ definido por (U,f). Si consideramos todas las parejas (U,f) que definen a f_ξ, los conjuntos $N(U,f)$ forman un sistema de vecindades de f_ξ. La transformación $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow C^n$ es contínua, pues si V es una vecindad de ξ y (U,f) es la pareja que define a f_ξ, entonces $\tilde{\pi}(N(U \cap V, f)) \subset V$. Se demuestra además que, con la topología definida, $\tilde{\mathcal{O}}$ es un espacio de Hausdorff.

Por último, la transformación $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow C^n$ es un homeomorfismo local: sea $x = f_\xi$ y $N = N(U,f)$ donde (U,f) define a f_ξ, entonces $\tilde{\pi}(N) = U$. La inversa de $\pi|_N$ está dada por $\xi \longrightarrow f_\xi$, $\xi \in U$.

$\mathcal{O}$ con la estructura definida, constituye una gavilla de germenes de funciones holomorfas en C^n.

DEFINICION -(espacio anillado)

Un espacio anillado es una pareja $(X,\bar{\mathcal{O}})$, donde X es un espacio Hausdorff y $\bar{\mathcal{O}}$ es la gavilla de subanillos con unidad de la gavilla de germenes contínuos de funciones en X complejo-valuadas.

No abundaremos en el significado más amplio de esta definición, pues nos interesa en particular el caso en el que X es un dominio en C^n y $\bar{\mathcal{O}}$ es la gavilla ${}_n\mathcal{O}|_X$ de germenes de funciones holomorfas en X.

DEFINICION -(transformación de espacios anillados)

Sean $(X, {}_X\mathcal{O})$ y $(Y, {}_Y\mathcal{O})$ espacio anillados. Una transformación contínua $f : X \longrightarrow Y$ se denomina transformación de espacios anlillados si, para toda $x \in X$ y $h \in {}_Y\mathcal{O}_{f(x)}$, se tiene que $h \circ f \in {}_X\mathcal{O}_x$.

A la transformación de ${}_Y\mathcal{O}_{f(x)}$ en ${}_X\mathcal{O}_x$, dada por

$$h \longrightarrow h \circ f$$

se le denota f^*. Si f es uno a uno y f^* es sobre, decimos que f es una inyección de X en Y. Si $Y \subset X$ y la identidad $i : Y \longrightarrow X$ es una inyección, decimos que Y es un subespacio de X. Si Y es un subconjunto cerrado de un espacio analítico X, decimos que Y es un subespacio analítico de X.

DEFINICION -(isomorfismo de espacios anillados)

Sean $(X, {}_X\mathcal{O})$ y $(Y, {}_Y\mathcal{O})$ espacios anlillados. Una transformación $f : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo de espacios anillados, si f es un homeomorfismo y f es una inyección de X en Y.

DEFINICION -(variedad analitica compleja -primera definición)

Un espacio anillado $(X, {}_X\mathcal{O})$ es una variedad analítica compleja si todo $x \in X$ tiene una vecindad U, tal que $(U, {}_X\mathcal{O}|_U)$ es isomorfo al espacio anillado $(Y, {}_Y\mathcal{O})$, donde Y es un dominio en C^n y ${}_Y\mathcal{O}$ es la gavilla de germenes de funciones holomorfas en Y.

Se demuestra que esta definición es equivalente a la siguiente.

DEFINICION -(variedad analítica compleja -segunda definición)

Una variedad compleja es una variedad diferencible que admite una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ y transformaciones coordenadas $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow C^n$, tales que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ es holomorfa en $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset C^n$, para todo α, β.

Haciendo uso de las condiciones de Cauchy-Riemann, es fácil ver que toda variedad analítica compleja es orientable.

DEFINICION -(espacio analítico)

Un espacio anillado $(X, {}_X\mathcal{O})$ es un espacio analítico si toda $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $(U, {}_X\mathcal{O}|_U)$ es isomorfa a un espacio anlillado $(Y, {}_Y\mathcal{O})$ donde Y es un subconjunto analítico de un dominio en C^n y ${}_Y\mathcal{O} = ({}_n\mathcal{O}/\mathcal{I})|_Y$ donde $\mathcal{I}$ es el ideal de Y.

Un subespacio analítico de un espacio analítico $(X, {}_x\mathcal{O})$ es un espacio analítico, tal que $Y \subset X$ y la identidad $\iota : Y \dashrightarrow X$ es una inyección de Y en X.

PROPOSICION II.19 -

Sea $(X, {}_x\mathcal{O})$ un espacio anillado. Sea Y un subconjunto con la siguiente propiedad : si $y \in Y$, entonces existe una vecindad U de y, y funciones holomorfas $f_1, \ldots, f_t$, definidas en U tales que $Y \cap U = V(f_1, \ldots, f_t)$. Entonces, si $\mathcal{Q}$ es la gavilla en Y de funciones holomorfas en X que se anulan en Y, $(Y, ({}_x\mathcal{O}/\mathcal{Q})|_Y)$ es un subespacio analítico de X. Todo subespacio analítico surge de esta manera.

DEFINICION -(punto regular de un espacio analitico)

Sea $(X, {}_x\mathcal{O})$ un espacio analítico. Un punto regular de X es un punto x que tiene una vecindad U, tal que $(U, {}_x\mathcal{O}|_U)$ es una variedad compleja. Decimos que un punto es singular si no es regular.

DEFINICION -(vector tangente)

Sea $(X, \mathcal{O})$ un espacio analítico, y sea x un punto en X. Una derivación de $\mathcal{O}_x$ (o un vector tangente) en x, es una transformación $t : \mathcal{O}_x \dashrightarrow C$, tal que

a) $t(a\mathbf{f} + b\mathbf{g}) = at(\mathbf{f}) + bt(\mathbf{g})$, para $a, b \in C$ y $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{O}_x$;

b) $t(\mathbf{f}\,\mathbf{g}) = \mathbf{f}(x)\, t(\mathbf{g}) + \mathbf{g}(x)\, t(\mathbf{f})$

El conjunto de derivaciones de $\mathcal{O}_x$ forma un espacio vectorial sobre C, que denotamos por TX_x y se denomina espacio tangente a X en x.

PROPOSICION II.20 -

Sea $\varphi : (X, {}_x\mathcal{O}) \dashrightarrow (Y, {}_y\mathcal{O})$ una transformación holomorfa Para cualquier $x \in X$ existe una transformación lineal inducida $\varphi_* : TX_x \dashrightarrow TY_{\varphi(x)}$. Si φ es inyectiva (biholomorfa) en x, entonces φ_* es uno a uno (isomorfa) en x. φ_* es la diferencial de φ.

Por último, daremos una base del espacio tangente TX_x

PROPOSICION II.21 -

Sea $x \in C^n$. Entonces, las transformaciones

$$\frac{\partial}{\partial z_i} : {}_n\mathcal{O}_x \dashrightarrow C,$$

definidas por

$$\frac{\partial}{\partial z_i}(\mathbf{f}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z_i}(x)$$

están en TX_x y forman una base de TX_x

DEMOSTRACION :

Por definición, $\frac{\partial}{\partial z_i} \in TX_x$,para $j=1,..,n$. Dichas transformaciones son independientes pues $\frac{\partial z_j}{\partial z_i} = \delta_{ij}$. Vamos a demostrar que generan :

Sea $t \in TX_x$. Entonces, para $c \in C$,

$$t(c \cdot 1) = ct(1) \qquad y \qquad t(c) = 1t(c) + ct(1)$$

(pues t es una derivación),entonces $t(c) = 0$. Si $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}_x$, podemos escribirla en serie de Taylor como

$$f(z) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(x)(z_i - x_i) + \sum_{i=1}^{n} (z_i - x_i) g_i(z)$$

donde g son funciones holomorfas que se anulan en el origen. Aplicando t se tiene,

$$t(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(x)\, t(\mathbf{z}_i)$$

por lo tanto,

$$t = \sum_{i=1}^{n} t(z_i) \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)$$

//.

APENDICE III .
CONJUNTOS ALGEBRAICOS EN CP^n.

III.1. TRANSFORMACIONES RACIONALES Y BIRRACIONALES .

En el apéndice I definimos el concepto de espacio proyectivo n-dimensional $\mathbb{P}^n$. Aquí retomaremos este concepto y daremos algunos resultados relacionados con dicho espacio.

Recordemos que si $\mathbb{P}^n$ es un espacio proyectivo de dimensión n sobre un campo K, entonces un punto $\xi \in \mathbb{P}^n$ está dado por n+1 elementos $(\xi_0:\ldots:\xi_n)$ de K, tales que no toda $\xi_i = 0$. Además, dos colecciones $(\xi_0:\ldots:\xi_n)$ y $(\eta_0:\ldots:\eta_n)$ representan al mismo punto en $\mathbb{P}^n$, si y sólo si existe λ en $K\setminus\{0\}$, tal que $\eta_i = \lambda\xi_i$, para todo i=1,...,n.

De la misma manera que en I.2, decimos que un polinomio $F(x) \in K[x_0,\ldots,x_n]$ se anula en un punto $\xi \in \mathbb{P}^n$, si $F(\xi_0,\ldots,\xi_n) = 0$ sin importar las coordenadas ξ_i de ξ elegidas. Si descomponemos al polinomio F como la suma de sus términos de grado j , se tiene que

$$F = F_0 + \ldots + F_r$$

y

$$F(\lambda x_0,\ldots,\lambda x_n) = F(x_0,\ldots,x_n) + \lambda F(x_0,\ldots,x_n) + \ldots + \lambda^r F(x_0,\ldots,x_n)$$

Así, si $F(\lambda\xi_0,\ldots,\lambda\xi_n) = 0$, como K es infinito, se tiene que $F_i(\xi_0,\ldots,\xi_n) = 0$ para toda $i = 0,\ldots,n$. A los polinomios F se les denomina componentes homogéneas de F.

Sea X un subconjunto cerrado de $\mathbb{P}^n$ (recordemos que X es cerrado si todos sus elementos son tales que anulan a un número finito de polinomios con coeficientes en K) y sea V el conjunto formado por todos los polinomios F en $K[y_0,\ldots,y_n]$ que se anulan en todo punto x de X. V constituye un ideal de X. Hacemos notar que si F es un elemento de V , entonces todas sus componentes homogéneas pertenecen a V . A un ideal con estas características se le conoce como ideal homogéneo.

Al considerar funciones racionales en coordenadas homogeneas

$$f(x_0,\ldots,x_n) = \frac{P(x_0,\ldots,x_n)}{Q(x_0,\ldots,x_n)}$$

es necesario observar que si P y Q no son polinomios homogéneos del mismo grado, el valor $f(x_0,\ldots,x_n)$ es distinto del valor $f(\lambda x_0,\ldots,\lambda x_n)$ .Por consiguiente, cuando hablemos de una función racional f, en coordenadas homogéneas en un punto x, estaremos suponiendo que f es una función homogénea de grado cero, es decir, f es de la forma P/Q, donde P y Q son polinomios homogéneos del mismo grado.

DEFINICION -(función regular en abiertos de $\mathbb{P}^n$)

Si U es un abierto de $\mathbb{P}^n$, $x \in U$ y $f = P/Q$ es una función homogenea de grado cero, tal que $Q(x) \neq 0$, entonces en una vecindad de x, f determina una función con valores en K que se denomina función regular en x.

Si f es una función regular en todo punto x de U, decimos que f es regular en U

Observamos que el conjunto de todas las funciones regulares en U constituye un anillo que se denota por K[U] .

DEFINICION -(transformación regular de abiertos de $\mathbb{P}^n$)

Sea U un abierto de $\mathbb{P}^n$. Una transformación regular f , $f : U \dashrightarrow P^n$ se define como una colección

$$(F_0:\ldots:F_n)$$

donde cada F_j es una función regular en U.

Observamos que el conjunto de puntos x para los cuales una transformación racional es regular, es un abierto de $\mathbb{P}^n$.

Sean U y V abiertos de $\mathbb{P}$ y $\mathbb{P}^m$ respectivamente, y f, $f : U \dashrightarrow \mathbb{P}^m$, una transformación racional. Decimos que f transforma a U en V, si existe un abierto $U' \subset U$ tal que $f(U') \subset V$ y f es regular en U'

DEFINICION -(transformación birracional)

Sean U y V abiertos de P^n. Decimos que una transformación racional f de U en V, $f: U \dashrightarrow V$, es birracional si f tiene una inversa y ésta es racional. En este caso, decimos que U y V son birracionalmente isomorfos.

Vamos a dar ahora una construcción, que se conoce como la proyectivización de un haz vectorial.

Sea $p : E \dashrightarrow X$ un haz vectorial y sea $\mathbb{P}(E_x)$ el espacio proyectivo de rectas del espacio vectorial E_x. Consideremos ahora $\mathbb{P}(E) = \bigsqcup_{x\in X} \mathbb{P}(E_x)$ y sea $\{ U_\alpha \}$ una cubierta de X, tal que la imagen inversa bajo p de U_α es isomorfa al producto de U_α con V, $p^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times V$, donde V denota un espacio vectorial. De esta manera, se obtiene un isomorfismo

$$\bigsqcup_{x\in U_\alpha} \mathbb{P}(E_x) \simeq U_\alpha \times \mathbb{P}(V)$$

por medio del cual es posible introducir a $\mathbb{P}(E)$ una estructura de variedad algebraica.

DEFINICION -(haz tangente proyectivo)

Sea TX el haz tangente de una variedad X , entonces $\mathbb{P}(TX)$ se denomina el haz tangente proyectivo de X.

III.2. CONJUNTOS ALGEBRAICOS Y ANALITICOS : EL TEOREMA DE CHOW Y EL TEOREMA DE EXTENSION DE LEVI .

Hasta ahora hemos estudiado por separado el conjunto de ceros de polinomios homogéneos y el conjunto de ceros de funciones analíticas. Sin embargo, en el caso en que P denota el espacio proyectivo complejo, CP^n, se tienen una gran cantidad de resultados que hacen que sea indistinto hablar de propiedades de tipo algebraico o analítico en cierto tipo de subconjuntos de CP^n.

Lo primero que haremos es establecer la relación entre los biholomorfismos de CP^2 que fijan el infinito y las transformaciones afines.

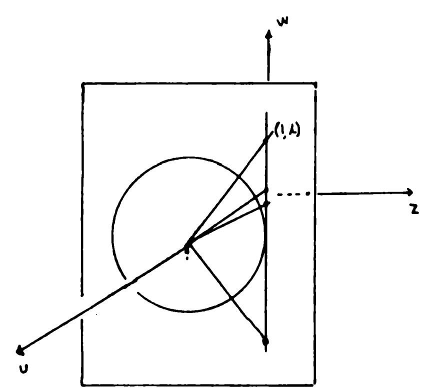
PROPOSICION III.1 -

Los biholomorfismos de CP^2 en CP^2 que fijan al infinito, en coordenadas afines, son afines.

DEMOSTRACION :

Sean $(u:z:w)$ coordenadas homogeneas en CP^2 y sea $(0:\lambda_1:\lambda_2)$ un punto al infinito. Al punto $(o:\lambda_1:\lambda_2)$ podemos verlo como $(0:1:\lambda)$, donde $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$. Como vamos a trabajar en coordenadas afines, consideraremos puntos de la forma $(1:z:w)$ Así, una sucesión de puntos $(1:z_n:w_n)$ que tienda al punto $(0:1:\lambda)$ deberá cumplir que z_n tienda al infinito y el cociente w_n/z_n tienda a λ (pues $(1:z_n:w_n) = (\frac{1}{z_n}:1:\frac{w_n}{z_n})$ tiende a $(0:1:\lambda)$ si y sólo si $\frac{1}{z_n} \dashrightarrow 0$ y $\frac{w_n}{z_n} \dashrightarrow \lambda$).

Por consiguiente, cada punto al infinito $(0:1:\lambda)$ determina un punto finito en CP^2, $(1:z:\lambda z) = (\frac{1}{z}:1:\lambda)$, tal que tiene a $(0:1:\lambda)$ como punto al infinito.



A la función $f : CP^2 \dashrightarrow CP^2$ podemos verla en la carta afín (z,w) como una función de C^2 en C^2 (que también denotaremos por f), $f : C \dashrightarrow C$. Así, dada una dirección fija $(1,\lambda)$ en C, si $(\frac{z}{z},\frac{w}{z})$ tiende a $(1,\lambda)$, entonces $f(1,\frac{w}{z})$ tiende a $f(1,\lambda)$. La restricción

$$f\,\Big|_{\{1\}\times C} = f(1,\_) : C \dashrightarrow C^2$$

la podemos escribir como

$$f(1,w) = (f_1(1,w), f_2(1,w)) \qquad ;$$

de hecho, para cada z fija se tiene la restricción

$$f(z,\_) : C \dashrightarrow C^2 \quad ,$$

definida por

$$f(z,w) = (f_1(z,w), f_2(z,w)) \qquad .$$

Así, como f es un biholomorfismo que fija al infinito, entonces para z fija, las funciones $f_1(z,\_) : C \dashrightarrow C$ y $f_2(z,\_) : C \dashrightarrow C$, son holomorfismos que se extienden al infinito; por lo tanto, $f_1(z,\_)$ y $f_2(z,\_)$ son polinomios en w de grado menor que dos (pues de lo contrario f no sería biholomorfismo) :

$$f_1(z,w) = a_0(z) + a_1(z)\, w$$

$$f_2(z,w) = b_0(z) + b_1(z)\, w$$

Nuevamente, como

$$f(z,w) = (\, a_0(z) + a_1(z)w,\ b_0(z) + b_1(z)w\,)$$

es un biholomorfismo, entonces para $w = 0$, las funciones $a_0(z)$ y $b_0(z)$ son holomorfismos de C en C que se extienden al infinito; por lo tanto,

$$a_0(z) = a_{00} + a_{01} z$$

y

$$b_0(z) = b_{00} + b_{01} z$$

Análogamente, haciendo $w=1$, se tiene

$$a_1(z) = a_{10} + a_{11} z$$

y

$$b_1(z) = b_{10} + b_{11} z \quad .$$

La función $f(z,w)$ toma entonces la forma

$$f(z,w) = (a_{00} + a_{01} z + (a_{10} + a_{11} z)w\ ,\ b_{00} + b_{01} z + (b_{10} + b_{11} z)w)$$

Por último, nos resta ver que $a_{11} = b_{11} = 0$. Para ello, observamos que el jacobiano $J\,(z,w)$ tiene la forma

$$\begin{matrix} a_{01} + a_{11} w & a_{10} + a_{11} z \\ b_{01} + b_{11} w & b_{10} + b_{11} z \end{matrix}$$

Como el determinante del jacobiano, $\det(J\,(z,w))$, debe de ser distinto de cero para todo (z,w), entonces $a_{11} = b_{11} = 0$. Así,

$$f(z,w) = (a_{00} + a_{01} z + a_{10} w\ ,\ b_{00} + b_{01} z + b_{10} w)$$

con $a_{01} b_{10} - a_{10} b_{01} = 0$.

//.

DEFINICION -(conjunto algebraico)

Un conjunto algebraico $V \subset CP^n$ es el lugar en CP^n de una colección de polinomios homogéneos $\mathcal{F} = \{F\,(x\ ,..,x\ )\}$, es decir, $V = \bigcap_{F_j \in \mathcal{F}} V(F\ )$

De la definición puede verse que un conjunto algebraico es un subconjunto analítico de CP^n y, de hecho, se dice que un conjunto algebraico es irreducible, suave, conexo, o que posee alguna propiedad determinada, si la tiene como subconjunto analítico de CP^n.

Inversamente, se tiene que un subconjunto analítico de CP^n es un conjunto algebraico. Este resultado es conocido como el teorema de Chow :

TEOREMA III.2 -(de Chow)

Todo subconjunto analítico de un espacio proyectivo, es un conjunto algebraico.(Ver [ ], pag. 167)

Otro resultado en esta dirección es el hecho de que toda función meromorfa en un conjunto algebraico $V \subset \mathbb{P}^n$ es racional.

DEFINICION -(topología de Zarisky en CP^n)

Definimos la topología de Zarisky en CP^n, definiendo los abiertos como los complementos de conjuntos algebraicos.

Con esta definición, la unión de cualquier familia de abiertos es abierta y la intersección de dos abiertos es abierta. Además, el vacío y el total son abiertos.

DEFINICION -(transformación racional de M en CP^n)

Una funcion racional (meromorfa) de una variedad compleja M al espacio proyectivo CP^n, es una transformación

$$f : z \dashrightarrow [\ 1: f_1(z) :\ldots:f_n(z)\ ]$$

dada por n funciones meromorfas en M.

Una transformacion racional $f: M \dashrightarrow N$, de una variedad compleja M a un conjunto algebraico $N \subset CP^n$, es una transformación racional $f : M \dashrightarrow CP^n$, cuya imagen está contenida en N.(Observamos que una transformación racional no tiene por que estar definida en todo M)

Otra manera de ver una transformacion racional f de M en CP^n, es considerarla como dada por (n+1) funciones holomorfas de la siguiente manera : si f está dada por n funciones meromorfas $f_1,\ldots,f_n$, entonces cada una puede expresarse localmente como el cociente de dos funciones holomorfas , primo relativas :

$$f_i = g_i / h_i \qquad ;$$

sea h_0 el minimo comun multiplo de las funciones h_i, entonces, f se expresa localmente como

$$f : z \dashrightarrow [\ h_0(z):f_1(z)h_0(z):\ldots:f_n(z)h_0(z)\ ]$$

(observamos que $[\ h_0(z):f_1(z)h_0(z):\ldots:f_n(z)h_0(z)\ ]$ denota al punto $[\ 1:f_1(z):\ldots:f_n(z)\ ]$). Así,las funciones $\varphi_0 = h$ y $\varphi_j = f_j h_0$, son holomorfas y f está bien definida excepto en $V = \bigcap_{j=0}^{n} V(\varphi_j)$.

Observamos que las funciones φ_j no tienen factores comunes, pues si Ψ es una función irreducible que divide exactamente m veces a h , entonces Ψ^m divide a h para alguna i. Como h_i y g_i son primas relativas, Ψ no divide a $\varphi_i = h_0 f_i = h_0(g_i / h_i)$. Por consiguiente, ninguna función que se anule en un punto $p \in V = \bigcap_{j=0}^{n} V(\varphi_j)$, puede dividir a todas las funciones φ_j , $j=0,\ldots,n$. Así, f está bien definida en el complemento de V . En otras palabras una transformación racional esta bien definida en el complemento de una subvariedad de codimensión dos o más.

Enunciamos, por último, un teorema relacionado con la extensión de funciones meromorfas.

TEOREMA III.3 -(de extensión de Levi).

Sea f una función meromorfa definida en el complemento de un subconjunto algebraico de codimensión mayor o igual que dos, en una variedad compleja M. Entonces f se extiende a una función meromorfa en M.

APENDICE IV
FOLIACIONES ANALITICAS.

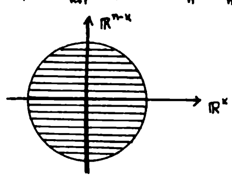
En forma vaga podemos decir que cuando hablamos de la foliación de una variedad M de dimensión m (diferenciable o analítica) pensamos en una partición M en subvariedades conexas de dimensión n , que localmente se acumulan como subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, o de $\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$, con segunda coordenada constante. A dichas subvariedades se les conoce como hojas de la foliación.

En la seccion 1.1 dimos una definición de foliación en base al concepto de distribuciones, ahora vamos a seguir un camino distinto, definiendo primero lo que habremos de entender por foliación de abiertos de una variedad .

DEFINICION -(foliación estandar)

Sea V' un dominio en $\mathbb{R}^n$ o en $\mathbb{C}^n$, dado por las desigualdades $|z_i| < 1$, i=1,...,n. La foliación estandar en V', por hojas de dimensión k, está dada por una partición V' en conjuntos

$$\{ (z_1,\dots,z_n);\ z_{k+1} = c_1,\dots,z_n = c_{n-k},\ c_i \in C \}$$



DEFINICION -(foliación sin singularidades de U)

Sea M una variedad y U un abierto de M. Una partición de U en conjuntos conexos disjuntos se denomina foliación de U sin singularidades por hojas de dimensión k, si para $x \in U$, existe una vecindad $V \subset U$ de x y un homeomorfismo $\varphi: V \dashrightarrow V'$ tal que lleva a cada $U_i \cap V$ en una hoja de la foliación estándar.

Por definición, la hoja que pasa por un punto x, $x \in U$, está univocamente determinada por x y se denota φ_x .

Si en la definicion anterior, $V' \subset \mathbb{C}^n$ y φ es un biholomorfismo, entonces decimos que la foliación de U es una foliación analítica. Si además, k=1, decimos que se tiene una foliación analítica por curvas del abierto U.

DEFINICION -(foliación con singularidades de U)

Sea U un abierto de una variedad analítica M y $Y \subset U$ un subconjunto analítico de codimensión mayor que uno. Si en $U \setminus Y$ se tiene una foliación sin singularidades por curvas analíticas φ_x que no admite extensión a ningún abierto U', $U\setminus Y \subset U \subset U'$. Entonces decimos que en U se tiene una foliación con singularidades. A Y se le conoce como el conjunto de puntos singulares de la foliación.

Hemos desarrollado,hasta ahora, el concepto de foliación para abiertos de una variedad, sin embargo, nos interesa extender esta noción para variedades. Hacemos notar que, para ello, es necesario pedir ciertas condiciones de compatibilidad de los abiertos U de la variedad y los homeomorfismos φ que llevan a U en la foliación estandar.

DEFINICION -(foliación de una variedad)

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una foliación de clase C^r y dimensión k de M es un atlas máximo $\mathcal{F} = \{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}$ de clase C en M, tal que

a) Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}$, entonces φ_α lleva a U_α en la foliación estandar de dimensión k de V'

b) Si $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{F}$ y $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, entonces el cambio de coordenadas

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \dashrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es de la forma

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x,y) = (h_1(x,y), h_2(y))$$

para (x,y) (U U) = U U R R , donde h y h son difeomorfismos en su imagen.

Si M es una variedad analítica, entonces una foliación analítica, sin singularidades, de M se define de manera análoga a la anterior, pidiendo que los cambios de coordenadas sean biholomorfismos.

DEFINICION -(placa)

Sea $\mathcal{F}$ una foliación de clase C^r y dimensión k de una variedad M de dimensión n; sea $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ una carta local de $\mathcal{F}$ tal que $\varphi_\alpha(U_\alpha) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ (o $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ en el caso de una foliación analítica de una variedad compleja). A los conjuntos de la forma $\varphi_\alpha^{-1}(U \times \{c\})$, $c \in U_2$, se les denomina placas de U_α o placas de $\mathcal{F}$.

Observamos que si en la variedad M se tiene definida una foliación $\mathcal{F}$, entonces M esta cubierta por las placas de $\mathcal{F}$ .De esta manera, si consideramos una sucesión de placas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, tales que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \phi$, para toda j , j=1,...,k-1,entonces se puede dar una relación de equivalencia entre los puntos de M como sigue : p y q son equivalentes si existe un sucesión de placas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, que une a p con q , $p \in \alpha_1$ y $q \in \alpha_k$. A las clases de equivalencia se les denomina hojas de $\mathcal{F}$. Por definición, una hoja de $\mathcal{F}$ es un subconjunto de M conexo por trayectorias.

Vamos a ver que en una variedad M puede definirse una foliación apartir de submersiones :

Primero recordemos que si M y N son variedades diferenciables (analíticas) de dimensión m y n respectivamente ,decimos que f, f : M ---> N, es una submersión si, para todo p en M, $Df(p) : TM_p \to TN_{f(p)}$ es suprayectiva. Como consecuencia del teorema de la función inversa se demuestra que una submersión se ve ,localmente, como una proyeccion. Así, si f es una submersión, $p \in M$ y $q = f(p) \in N$, existen cartas locales (U, φ) en M , $p \in U$, y (V, ψ) en N ,$q \in V$,con $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset R^{m-n} \times R^n$ (o $C^{m-n} \times C^n$) y $\psi(V) = V_2 \supset U_2$ tales que la composición

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \to U_2$$

coincide con la proyección canónica de $U_1 \times U_2$ en U_2, $(x,y) \to y$.

A continuación daremos una definición alternativa de foliación, la cual nos permite un manejo más sencillo de los conceptos que desarrollaremos más adelante :

DEFINICION -(foliación de una variedad)

Una foliación diferenciable (analítica) $\mathcal{F}$ de codimensión s de M, está definida por una colección $\{(U_j, f_j)\}_{j \in I}$ máxima donde los U_j son abiertos de M y las funciones $f_j : U_j \to R^s$ ($f_j : U_j \to C^s$) son submersiones tales que

a) $\bigcup_{j \in I} U_j = M$

b) Si $U_i \cap U_j \neq \phi$, existe un difoemorfismo local (holomorfismo local) g_{ij} tal que $f_i = g_{ij} f_j$ en $U_i \cap U_j$.

Las funciones f_i se denominan transformaciones distinguidas de $\mathcal{F}$.

Hacemos notar que las componentes conexas de $f_j^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}^s$ ($c \in \mathbb{C}^s$) corresponden a las placas de $\mathcal{F}$ en U_j.

DEFINICION -(transversalidad)

Sea N una variedad , y g : N ---> M una transformación diferenciable (holomorfa). Decimos que g es transversal a la foliación $\mathcal{F}$ de M si g es transversal a todas las hojas de $\mathcal{F}$; es decir, se, para todo $p \in N$,

$$Dg(p)\, TN_p + T(\mathcal{F})_q = TM_q \ , \ q = g(p) \quad ,$$

donde por $T(\mathcal{F})$ denotamos al espacio tangente a la hoja φ de $\mathcal{F}$ que pasa por q .

El siguiente resultado nos permite introducir lo que se conoce como foliación inducida.

TEOREMA IV.1 -

Sea $\mathcal{F}$ una foliación diferenciable (holomorfa) en M y $g : N \dashrightarrow M$ una transformación diferenciable (holomorfa) transversal a $\mathcal{F}$. Entonces existe una única foliación en N, $g^*(\mathcal{F})$, de codimensión $\operatorname{cod}(\mathcal{F})$, tal que sus hojas son las componentes conexas de los conjuntos $g(F)$, para cada hoja F de $\mathcal{F}$.

DEMOSTRACION :

Consideremos un sistema de transformaciones distinguidas de $\mathcal{F}$, $\{ (U_i, f_i, g_{ij}) \}$; $f_i = g_{ij} f_j \}$. Si consideramos la composición en $g^{-1}(U_i) \cap g^{-1}(U_j)$, definida por $f_i \circ g = g_{ij} \circ f_j g$, entonces la colección $\{ (g^{-1}(U_i), f_i \circ g, g_{ij}) \}$ es un sistema de transformaciones distinguidas para alguna foliación $g^*(\mathcal{F})$ de N de codimensión $\operatorname{cod}(\mathcal{F})$. Supongamos ahora que F es una hoja de $\mathcal{F}$ y α es una placa de $U_i \cap F$ para alguna i, entonces las componetes conexas de $g^{-1}(\alpha)$ son placas de la foliación $g^*(\mathcal{F})$ en $g^{-1}(U_i)$. Así, si pensamos en la imagen inversa bajo g de F, $g^{-1}(F)$, se tiene que esta es una unión de hojas de $g^*(\mathcal{F})$. De esta manera hemos cubierto N mediante la unión de los conjuntos $g^{-1}(F)$, con F hoja de $\mathcal{F}$, y las hojas de $g^*(\mathcal{F})$ están dadas por las componentes conexas de $g^{-1}(F)$, para F hoja de $\mathcal{F}$.

//.

DEFINICION -(foliación inducida)

Sean $M, N, g, \mathcal{F}$, como en el teorema IV.1. A la foliación $g^*(\mathcal{F})$ construida arriba, se le conoce como foliación inducida.

El siguiente resultado se conoce como lema de la trivialización global :

LEMA IV.2 -(de la trivialización global)

Sea M una variedad diferenciable (analítica) y $\mathcal{F}$ una foliación diferenciable (analítica) de codimensión n de M. Sea $\gamma : I \dashrightarrow M$ una trayectoria simple en M, cuya imagen esta contenida en una hoja F de $\mathcal{F}$. Entonces existen una vecindad V de $\gamma(I)$, $V \supset \gamma(I)$, y un difeomorfismo (holomorfismo) h,

$$h : D^{m-n} \times D^n \dashrightarrow V$$

tal que la foliación inducida $h^*\mathcal{F}$ tiene como hojas a las superficies $P^{-1}(y)$, donde por $P : D^{m-n} \times D^n \dashrightarrow D^n$ entendemos la proyección $P(x,y) = y$, y D^{m-n}, D^n denotan discos en $\mathbb{R}^{m-n}$ y $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^{m-n}$ y $\mathbb{C}^n$) respectivamente.

INDICE ANALITICO .

BIBLIOGRAFIA .

[1] AHLFORS L. - Complex analysis., 3rdedition, Mc.Graw Hill, New York, 1979

[2] CAMACHO C.,LINS N.A. - Teoría geométrica das folheações., IMPA.,Río de Janeiro, 1979 .

[3] CODDINGTON E.,LEVINSON N. - Theory of ordinary differential equations., Intern.Series in Pure and Applied Maths., 1955.

[4] DUBROVIN B.,FOMENKO A.,NOVIKOV S. - Modern geometry , methods and applications., part II, Springer Verlag, New York , 1985 .

[5] FUKS B.A. - Introduction to the theory of analitic functions of several complex variables.,vol.8 ,AMS.,Rhode Island, 1963.

[6] GOMEZ-MONT X. - On families of rational vector fields., Aportaciones Matemáticas 1, Soc. Mat. Mexicana, 1985, pp. 36 - 65.

[7] GRIFFITHS PH., HARRIS J. - Principles of algebraic geometry., Wiley Interscience, New York, 1978 .

[8] GUNNING R.,ROSSI H. - Analytic functions of several complex variables., Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1965 .

[9] HAEFLIGER A. - Varietés feuilletées.,Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa , serie 3, vol 16 , 1962 ,pp. 367 - 397 .

[10] ILYASHENKO Yu.S. - Foliations into analytic curves. ,Mat. Sbornik , tom 88 (130) 1972 , No. 4 , pp. 551 - 569 .

[11] ILYASHENKO Yu.S. - Topología de los retratos fase de las ecuaciones diferenciales analíticas en el plano proyectivo complejo., Trabajos del Seminario I.G.Petrovsky , 4 , Ed. de la Universidad de Moscú, Moscú , 1978, pp. 83 - 136 .(En ruso).

[12] NARASIMHAN R. - Several complex variables ., Univ. of Chicago Press , Chicago, 1971 .

[13] PETROVSKY I.G., LANDIS E.M. - On the number of limit cycles of the equation dy/dx = P(x,y) / Q(x,y) , where P and Q are polynomials of second degree ., Mat. Sbornik 37 (79) 1955 , pp. 209 - 250 ; english trans., Amer.Math.Soc.Trans. (2) (10),1958 , pp. 177 - 221 .

[14] SHAFAREVICH - Basic algebraic geometry ., Spinger Verlag , New York , 1977 .

[15] SIEGEL A.A. - Lectures on celestial mechanics ., Springer Verlag , New York ,1971.

[16] WALKER R. - Algebraic curves., Spinger Verlag , New York, 1950 .

[17] WHITNEY H. - Complex analytic varieties ., Addison-Wesley Pub. Co. , Massachusetts ,1972 .