UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGORITMOS COMPUTACIONALES PARA INVERSOS GENERALIZADOS

TESIS PROFESIONAL

JOSE LUIS NAVA BOLAÑOS

1265

1972

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

ALGORITMOS COMPUTACIONALES PARA INVERSOS GENERALIZADOS

Tesis profesional

que

José Luis Nava Bolaños

presenta para obtener

el título de Actuario.

MEXICO, D.F.

1 9 7 2

A quien mucho le debo
y poco le he dado.

A los que he de amar
y he amado.

En agradecimiento al M. en C. José Luis Moreno L., por su invaluable ayuda para la elaboración de este trabajo. Y así mismo a Isaac Elnekavé K.

Este trabajo se elaboró siendo becario del CONACYT.

I N D I C E

INTRODUCCION.

Dado el avance que se ha venido presentando en las ciencias de la computación, se nos presenta esta como una herramienta de gran poder para resolver una amplia gama de problemas que surgen, tanto en el campo de la ciencia como en el de los negocios.

En el campo de acción del Actuario se llegan a presentar problemas que solo pueden resolverse por medio de esta herramienta y al aprender a usarla, el Actuario amplía su campo de acción profesional.

El presente trabajo intenta aplicar dicha herramienta en el problema que surge cuando se desea encontrar solución a un sistema de ecuaciones lineales y la matriz asociada a dicho sistema es singular.

Se implementarán diferentes algoritmos para este problema, así mismo, se dará un enfoque sobre la teoría que los origina.

El lenguaje utilizado fue el FORTRAN IV, nivel G, y la computadora una IBM 360-44, perteneciente al Centro de Estadística y Cálculo de la Escuela Nacional de Agricultura, Chapingo, México.

Es muy frecuente trabajar con un sistema de ecuaciones lineales del tipo

$$\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{12}X_2 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m \end{array}$$

el cual se puede representar en forma matricial como:

$$Ax = b \tag{I}$$

en donde A es una matriz de orden $m \times n$ cuyos elementos son coeficientes conocidos, b un vector de valores conocidos y x es el vector de incógnitas. Se desea encontrar, si es que existe, un vector x que satisfaga la ecuación (I). Este problema es relativamente fácil de resolver en el caso de que la matriz de coeficientes A sea de orden $n \times n$ y no-singular, la solución estaría dada por:

$$x = A^{-1}b$$

Para saber si el sistema (I) tiene solución, nos bastará con saber si

$$b \in E_c(A)$$

en donde $E_c(A)$ es el espacio generado por las columnas de la matriz A, $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$; ya que si $b \in E_c(A)$ entonces existen escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que
$b = x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = Ax$

y la solución estaría dada por $x' = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Esta forma de saber si el sistema (I) tiene solución es equivalente a la de verificar que

$$r(A) = r([A \mid b])$$

ya que esto último nos implica que las columnas de A y el vector b son linealmente dependientes.

Nos interesará resolver el caso en el que la matriz A del sistema (I) es singular, para ello haremos uso de la matriz conocida como inverso generalizado.

EL G-INVERSO.

DEFINICION 1: Sea A una matriz de orden $m \times n$ y de rango r, si una matriz A^- satisface las cuatro condiciones siguientes, se dice que A^- es el inverso generalizado de A o el g-inverso de A.

$$\begin{aligned} &\text{i)} \quad AA^- = (AA^-)' \\ &\text{ii)} \quad A^-A = (A^-A)' \\ &\text{iii)} \quad AA^-A = A \\ &\text{iv)} \quad A^-AA^- = A^- \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Es claro que si el g-inverso de A existe, este será de orden $n \times m$ y también si A es la matriz nula, entonces A^- será la matriz nula pero de orden $n \times m$.

Para poder afirmar que el g-inverso existe, es necesario recurrir a un teorema que dice lo siguiente:

TEOREMA 1: Sea A una matriz tal que, el rango de A es r $\Rightarrow$ existen matrices B y C tal que

i) $B_{m\times r}$, $C_{r\times n}$

ii) B y C son de rango r

iii) $A = BC$

donde $B'B$ y $C'C$ son no-singulares.

DEMOSTRACION: Si A es de rango r $\Rightarrow$ existen P,Q no-singulares tal que

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ con I_r la matriz idéntica de orden $r\times r$

Si P,Q son no singulares $\Rightarrow$ existen P^{-1},Q^{-1} tal que,

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

Particionando las matrices de la siguiente manera:

$$P = \begin{bmatrix} \underset{r\times m}{P_1} \\ \underset{(m-r)\times m}{P_2} \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} \underset{n\times r}{Q_1} , & \underset{n\times(n-r)}{Q_2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{m\times r}{P_{11}} , & \underset{m\times(m-r)}{P_{21}} \end{bmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} \underset{n\times r}{Q_{11}} \\ \underset{n\times(n-r)}{Q_{21}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad PAQ = \begin{bmatrix} \underset{r\times r}{I} & \underset{r\times(n-r)}{0} \\ \underset{(m-r)\times r}{0} & \underset{(m-r)\times(n-r)}{0} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} P_{11}, P_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}, 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = \underset{(m\times r)(r\times n)}{\begin{bmatrix} P_{11} & Q_{11} \end{bmatrix}}$$

Como P^{-1} es no-singular $\Rightarrow$ todas sus columnas son linealmente independientes y P_{11} tiene por columnas r columnas de P^{-1} $\Rightarrow$ son linealmente independientes y P_{11} es de rango r, análogamente para Q_{11} .

Si $P_{11}: E_r \to E_m$ y $R(P_{11}) = r \Rightarrow P_{11}(E_r) = E_r$

pero $P'_{11}: E_m \to E_r$ y $R(P'_{11}) = r \Rightarrow P'_{11}(P_{11}(E_r)) = P'_{11}(E_r) = E_r$

$$\Rightarrow (P'_{11}P_{11})(E_r) = E_r$$

$\Rightarrow$ $P'_{11}P_{11}$ es no-singular.

y análogamente para $Q_{11}Q'_{11}$

Si hacemos $B = P_{11}$ y $C = Q_{11}$ el teorema queda probado.

Ahora si podemos mencionar el teorema de existencia del g-inverso que dice:

TEOREMA 2: Para cada matriz $A_{m\times n}$ hay una matriz A^- que satisface las condiciones de (II), para probarlo se propone

$A^- = C'(CC')^{-1}(B'B)^{-1}B'$ que cumple con las condiciones de (II).

Otra ventaja del g-inverso es que es UNICO y por lo tanto, el problema de encontrar solución al sistema $Ax = b$ queda en parte ya solucionado.

PROPIEDADES.

A continuación mencionaremos propiedades importantes del g-inverso.

El g-inverso de la transpuesta de la matriz A es la transpuesta del g-inverso de A, es decir $(A')^- = (A^-)'$ y el g-inverso de A^- es A, es decir $(A^-)^- = A$.

Como sabemos que el rango de una matriz es de gran utilidad, se tendrá lo siguiente:

TEOREMA 3: El rango del g-inverso de A es igual al rango de A, es decir $R(A^-) = R(A)$ y como consecuencia $R(A) = R(AA^-) = R(A^-A) = R(AA^-A) = R(A^-AA^-) = r$ donde r es el rango de A.

TEOREMA 4: Si $R(A) = m \Rightarrow A^- = A'(AA')^{-1}$ y $AA^- = I$
Si $R(A) = n \Rightarrow A^- = (A'A)^{-1}A'$ y $A^-A = I$

TEOREMA 5: Sea $B_{m\times r}$ de rango $r(r > 0)$, y $C_{r\times m}$ de rango r $\Rightarrow (BC)^- = C^-B^-$.

Para los siguientes productos tendremos 2 teoremas:

TEOREMA 6: Para cualquier matriz A tenemos que,

i) $(A'A)^- = A^-A'^-$

ii) $(AA^-)^- = AA^-$

iii) $(A^-A)^- = A^-A$

TEOREMA 7: Sean $P_{m\times m}$, $Q_{n\times n}$ matrices ortogonales y $A_{m\times n}$ = $(PAQ)^- = Q'A^-P'$.

Hay matrices que tienen características muy interesantes y además que son de mucho uso, estas son las simétricas e idempotentes, es por esto que daremos unos teoremas sobre dichas matrices.

TEOREMA 8: Si A es una matriz simétrica entonces,

i) $A^- = (A^-)'$

ii) $AA^- = A^-A$

y si además es idempotente entonces $A^- = A$.

Como consecuencia tendríamos lo siguiente.

TEOREMA 9: Las matrices AA^- , A^-A , $I-AA^-$, $I-A^-A$ son todas simétricas e idempotentes.

Un tipo de matrices que tienen un papel importante en la teoría del g-inverso son las matrices diagonales.

TEOREMA 10: Sea $D_{n\times n}$ matriz diagonal, con d_{ii} , $i = 1,2,\ldots,n$ los elementos de la diagonal, entonces el g-inverso es D^- de D, es una matriz diagonal con el i-ésimo elemento de D^- , igual a d_{ii}^{-1} si $d_{ii} \neq 0$, e igual a 0 si $d_{ii} = 0$.

TEOREMA 11: Si c es un escalar diferente de cero $\Rightarrow (cA)^- = (\frac{1}{c})A^-$.

DEMOSTRACION:

i) $(cA)(\frac{1}{c}A^-) = AA^-$ es simétrica

ii) $(\frac{1}{c}A^-)cA = A^-A$ es simétrica

iii) $cA(\frac{1}{c}A^-)cA = cAA^-A = cA$

iv) $(\frac{1}{c}A^-)cA(\frac{1}{c}A^-) = \frac{1}{c}A^-AA^- = \frac{1}{c}A^-$

TEOREMA 12: Si $A = A_1+A_2+\ldots+A_t$ y $A_iA_j' = 0$ y $A_i'A_j = 0 \quad \forall_{i,j} = \overline{1, t} \quad i \neq j$

$\Rightarrow A^- = A_1^- +\ldots+ A_t^-$

DEMOSTRACION:

$$AA^- = (A_1+A_2+\ldots+A_t)(A_1^-+A_2^-+\ldots+A_t^-) =$$

$$= (A_1A_1^-+A_2A_1^-+\ldots+A_t^-+A_1^-)+\ldots+(A_1A_t^-+\ldots+A_tA_t^-)$$

$$= \sum_{i=1}^{t} A_iA_1^-+ \sum_{i=1}^{t} A_iA_2^-+\ldots+\sum_{i=1}^{t} A_iA_t^-$$

Debemos probar que $\underset{i \neq j}{A_i A_j^- = 0}$ y $\underset{i \neq j}{A_i^- A_j = 0}$

$$\Rightarrow A_i^- A_j = (A_i^- A_i A_i^-)(A_j A_j^- A_j) = A_i^-(A_i A_i^-)(A_j A_j^- A_j) = A_i^-(A_i'^- A_i')A_j A_j^- A_j =$$

$$= A_i^- A_i'^-(A_i' A_j)A_j^- A_j = 0 \quad \text{para} \quad A_i' A_j = 0$$

$$A_i A_j^- = (A_i A_i^- A_i)(A_j^- A_j A_j^-) = (A_i A_i^- A_i)(A_j^- A_j)A_j^- = A_i A_i^- A_i A_j' A_j'^- A_j^-$$

$$= A_i A_i^-(A_i A_j')A'^- A_j^- = 0 \quad \text{para} \quad A_i A_j' = 0$$

i) $\Rightarrow AA^- = A_1 A_1^- + A_2 A_2^- + \ldots + A_t A_t^-$ es simétrica

ii) $A^- A = (A_1^- + A_2^- + \ldots + A_t^-)(A_1 + A_2 + \ldots + A_t) = \sum_{i=1}^{t} A_i^- A_1 + \ldots + \sum_{i=1}^{t} A_i^- A_t$

$= A_1^- A_1 + A_2^- A_2 + \ldots + A_t^- A_t$ es simétrica

iii) $AA^- A = (A_1 + A_2 + \ldots + A_t)(A_1^- + A_2^- + \ldots + A_t^-)(A_1 + A_2 + \ldots + A_t)$

$$= \left(\sum_{i=1}^{t} A_i A_i^-\right) \sum_{j=1}^{t} A_j = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{t} A_i A_i^- A_j = \sum_{i=1}^{t} A_i A_i^- A_i$$

$$= \sum_{i=1}^{t} A_i = A.$$

iv) $A^- A A^- = \left(\sum_{i=1}^{t} A_i^- \sum_{j=1}^{t} A_j\right) \sum_{k=1}^{t} A_k^- = \left(\sum_{i=1}^{t} A_i^- A_i\right) \sum_{k=1}^{t} A_k^- =$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{k=1}^{t} A_i^- A_i A_k^- = \sum_{i=1}^{t} A_i^- A_i A_i^- = \sum_{i=1}^{t} A_i^- = A^-$$

$$\Rightarrow A^- = \sum_{i=1}^{t} A_i^-$$

TEOREMA 13: Sea una matriz A de $n\times m$ y K de $m\times m$ no-singular y $B = AK$.

$$\Rightarrow \quad BB^{-} = AA^{-}$$

TEOREMA 14: Si $A'A = AA'$

$\Rightarrow \quad A^{-}A = AA^{-}$.

DEMOSTRACION: $(A'A)(A'A)^{-} = (AA')(A'A)^{-} = (AA')(A^{-}A'^{-})$

$$\Rightarrow \quad A'AA^{-}A'^{-} = (AA')(AA')^{-}$$

$$A'AA^{-}A'^{-} = AA'A'^{-}A^{-}$$

$$A'(AA^{-})A'^{-} = A(A^{-}A)'A^{-}$$

$$(A^{-}(AA^{-})A)' = AA^{-}AA^{-}$$

$$(A^{-}A)' = AA^{-}$$

$$A^{-}A = AA^{-}$$

TEOREMA 15: Si $A' = AA\ldots A$ $\quad r$ veces

$\Rightarrow \quad (A^{r})^{-} = (A^{-})^{r}$ $\quad$ donde $r > 0$

DEMOSTRACION:

i) $A^{r}(A^{-})^{r} = (AA\ldots A)(A^{-}A^{-}\ldots A^{-}) = \underbrace{AA\ldots A}_{r-1}A A^{-}\underbrace{A^{-}\ldots A^{-}}_{r-1}$

$$= \underbrace{AA\ldots A}_{r-1}\underbrace{A^{-}\ldots A^{-}}_{r-1} = \ldots = AA^{-} \quad \text{simétrica}$$

ii) $(A^-)^r A^r = (A^-A^-\ldots A^-)(AA\ldots A) = \underbrace{A^-A^-\ldots A^-}_{r-1}AA^-\underbrace{AA\ldots A}_{r-1} =$

$\underbrace{A^-A^-\ldots A}_{r-1}\underbrace{A\ldots A}_{r-1} = \ldots = A^-A.$ es simétrica

iii) $A^r(A^-)^r A^r = AA^-A^r = AA^{r-1} = A^r$

iv) $(A^-)^r A^r (A^-)^r = A^-A(A^-)^r = A^-(A^-)^{r-1} = (A^-)^r$

TEOREMA 16: Sea $A = \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}$ y $BC' = 0$

$\Rightarrow A^- = [B^-, C^-]$.

DEMOSTRACION:

i) $AA^- = \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} [B^- C^-] = \begin{bmatrix} BB^- & CC^- \\ CB^- & CC^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BB^- & 0 \\ 0 & CC^- \end{bmatrix}$ simétrica

ii) $A^-A = [B^-C^-]\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = [B^-B+C^-C]$ es simétrica

iii) $AA^-A = \begin{bmatrix} BB^- & 0 \\ 0 & CC^- \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BB^-B \\ CC^-C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = A$

iv) $A^-AA^- = [B^-B+C^-C][B^-, C^-] = [B^-BB^-, C^-CC^-] = [B^-, C^-] = A^-$

TEOREMA 17: Si $a \neq 0$ vector $\Rightarrow a^- = (a'a)^{-1}a'$

DEMOSTRACION:

i) $a^-a = (a'a)^{-1}a'a = 1$ que es simétrica.

ii) $aa^- = a(a'a)^{-1}a'$ que es simétrica.

iii) $a^-aa^- = 1a^- = a^-$

iv) $aa^-a = a$.

TEOREMA 18: Si $A = \begin{bmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \vdots\;\; \vdots \\ 11\ldots1 \end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow A^- = \frac{1}{nm}A'$

DEMOSTRACION:

i) $A^-A = \frac{1}{nm}A'A = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \vdots\;\; \vdots \\ 11\ldots1 \end{bmatrix}$ simétrica

ii) $AA^- = \frac{1}{nm}AA' = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \vdots\;\; \vdots \\ 11\ldots1 \end{bmatrix}$ simétrica

iii) $A^-AA^- = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \vdots\;\; \vdots \\ 11\ldots1 \end{bmatrix} \frac{1}{nm}\begin{bmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \vdots\;\; \vdots \\ 11\ldots1 \end{bmatrix} = \frac{1}{nm}A' = A^-$

iv) $AA^-A = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \vdots\;\; \vdots \\ 11\ldots1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \vdots\;\; \vdots \\ 11\ldots1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \vdots\;\; \vdots \\ 11\ldots1 \end{bmatrix} = A$

TEOREMA 19: $A^- = A' \Leftrightarrow A'A$ es idempotente.

TEOREMA 20: Sea $P_{m\times n}$ una matriz ortogonal y

sea $Q = q_1,\ldots,q_{n\;m\times n}$

donde $q_1,\ldots,q_n$ son n columnas de P.

$\Rightarrow Q^- = Q'$

DEMOSTRACION:

$$P \text{ ortogonal} \iff P_i'P_j = 0 \quad i \neq j$$

$$P_i'P_j = 1 \quad i = j$$

Probaremos que $Q'Q$ es idempotente.

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} [q_1 \cdots q_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ Que es simétrica e idempotente.

$$\Rightarrow \quad Q^- = Q'$$

SISTEMAS DE ECUACIONES.

Después de haber descrito las propiedades del g-inverso , el problema planteado en (I) ya está resuelto y esto se comprueba con lo siguiente:

TEOREMA 21: El sistema $Ax = b$ es consistente.

$$\iff AA^-b = b.$$

y si el sistema es consistente, la solución está dada por,

TEOREMA 22: Si el sistema $Ax = b$ es consistente, entonces x es solución $\iff$ Existe $h \in E^n$ tal que

$$x = A^-b + (I - A^-A)h$$

A continuación veremos un teorema de gran importancia, pero antes de formalizarlo tenemos que recurrir a las siguientes definiciones:

DEFINICION 2: Sea $A_{m\times n}$, el espacio nulo de A se define como:

$$S = \{y : Ay = 0 \quad y \varepsilon En\} = E_N$$

DEFINICION 3: Sea S subespacio de En =>

S^* es el complemento ortogonal de S si

i) $S \perp S^*$

ii) $S \oplus S^* = En$, donde $\oplus$ es la suma directa

TEOREMA 23: Sea $A_{m\times n}$ entonces

i) $E_c(A) = E_c(AA^-)$

ii) $E_c(A^-) = E_c(A^-A)$

iii) $E_c(I-AA^-) = [E_c(A)]^\perp$

iv) $E_c(I-A^-A) = [E_c(A')]^\perp$

v) $E_c(I-A^-A) = E_N(A)$

vi) $E_c(I-AA^-) = E_N(A^-)$

DEMOSTRACION:

i) Si $y \varepsilon E_c(A)$ => existe $x_1 \varepsilon En$, tal que $Ax_1 = y$

entonces el sistema $Ax = y$ es consistente => $AA^-y = y$

<=> existe $y \varepsilon Em$, tal que $AA^-y = y$ => $y \varepsilon E_c(AA^-)$

Si $y \in E_c(AA^-)$ => existe x tal que $AA^-x = y$ => existe $A^-x \in En$, tal que $A(A^-x) = y$ => $y \in E_c(A)$

$\therefore$ $E_c(A) = E_c(AA^-)$

ii) $y \in E_c(A^-)$ => existe $x \in Em$, tal que $A^-x = y$ => $A^-A(A^-x) = A^-x = x$ => existe $A^-x \in En$, tal que $A^-A(A^-x) = y$ => $y \in E_c(A^-)$

Si $y \in E_c(A^-A)$ => existe $x \in Em$, tal que $A^-Ax = y$

=> existe $Ax \in En$, tal que $A^-(Ax) = y$

=> $x \in E_c(A^-)$

$\therefore$ $E_c(A^-) = E_c(A^-A)$.

iii) $y \in \left[E_c(A)\right]^{\perp} = E_N(A') = A'y = 0$

=> $A'^-A'y = 0$

$(AA^-)'y = 0$

$AA^-y = 0$

$y - AA^-y = y$

$(I - AA^-)y = y$ => $y \in E_c(I - AA^-)$

Sea $y \in E_c(I - AA^-)$ => existe x, tal que $(I-AA^-)x = y$

=> $x - A'^-A'x = y$

$A'x - A'A'^-A'x = A'y$

=> $0 = A'y$ => $y \in E_N(A') = \left[E_c(A)\right]^\perp$

$\therefore\ E_c(I - AA^-) = \left[E_c(A)\right]^\perp$

iv) $E_c(I - A^-A) = \left[E_c(A')\right]^\perp$

por iii sabemos que

$E_c(I - AA^-) = \left[E_c(A)\right]^\perp$

=> $\left[E_c(A')\right]^\perp = E_c(I - A'A'^-) = E_c\left[I - (A^-A)'\right] = E_c(I - A^-A)$

v) $y \in E_c(I - A^-A)$ => existe $x \in En$, tal que $(I - A^-A)x = y$

=> $x - A^-Ax = y$ => $Ax - AA^-Ax = A_y = 0$ => $y \in E_N(A)$

Si $y \in E_N(A)$ => $Ay = 0$ => A^-Ay => => $y - A^-Ay = y$

=> $(I - A^-A)y = y$ => $y \in E_c(I - A^-A)$

$\therefore\ E_c(I - A^-A) = E_N(A)$

vi) $y \in E_c(I - AA^-)$ => existe $x \in En$, tal que $(I - AA^-)x = y$

=> $x - AA^-x = y$ => $A^-x - A^-AA^-x = A^-y = 0$ => $y \in E_N(A^-)$

$y \in E_N(A^-)$ => $Ay = 0$ por demostrar que $y \in E_c(I - AA^-)$

es decir, existe x, tal que $(I - AA^{-})x = y$

Sea $x = y \in E_N$

$(I - AA^{-})y = y - AA^{-}y = y - A(0) = y \Rightarrow$

$y \in E_C(I - AA^{-})$

$\therefore \; E_C(I - AA^{-}) = E_N(A^{-})$

INVERSO CONDICIONAL.

El inverso condicional es más fácil de obtener que el g-inverso y por lo tanto, más deseable emplearlo y se define como sigue:

DEFINICION 4: Sea $A_{m\times n}$, a la matriz A^c se define como el inverso condicional o el c-inverso de $A \Leftrightarrow$ satisface que:

$$AA^cA = A.$$

Como se podrá ver que el c-inverso cumple solamente una sola condición del g-inverso y como consecuencia, es menos eficiente, ya que el c-inverso no es único y el g-inverso de A es el c-inverso de A, pero el c-inverso de A no es necesariamente el g-inverso de A.

Es claro que si $A_{m\times n}$, el c-inverso es de $n\times m$.

El c-inverso tiene las siguientes propiedades:

Para todo c-inverso de A tenemos que:

1) Las matrices A^cA, AA^c son idempotentes

2) $R(A) = R(A^cA) = R(AA^c) \leq R(A^c)$

3) $E_N(A) = E_c(I - A^cA)$

DEMOSTRACION: Sea $w \in E_N(A) \Rightarrow Aw = 0$

$$A^cAw = 0$$

$w - A^cAw = w$ pero $Aw = 0$

$\Rightarrow w - A^c0_m = w \Rightarrow w - 0_m = w$

$\Rightarrow w \quad E_c(I - A^cA)$.

Sea $z \in E_c(I - A^cA) \Rightarrow$ existe x, tal que

$(I - A^cA)x = z \Rightarrow A(I - A^cA)x = Az = 0$.

$= \quad z \in E_N(A)$

$\therefore \quad E_N(A) = E_c(I - A^cA)$

Descrito lo anterior, se podrá mostrar lo que sucede con el sistema (I) y el c-inverso, por lo tanto:

TEOREMA 24: Una condición necesaria y suficiente para que exista solución al sistema $Ax = b$ es que haya un c-inverso de A tal que:

$$AA^cb = b$$

Como se mencionó al principio, si $R(A) = m$, entonces el sistema (I) tiene solución, y si el sistema (I) es igual a $Ax = 0$ a este sistema se le llama sistema homogéneo; este tiene solución cuando $x = 0 \iff R(A) < n$.

TEOREMA 25: Sea $A_{m\times n}$ y sea A^c el c-inverso de A. Supongamos que existe la solución al sistema (I) => para todo vector $h_{n\times 1}$ el vector x_0 es solución cuando,

$$x_0 = A^cb + (I - A^cA)h \qquad \text{(III)}$$

y toda solución se puede escribir de la forma (III) para algún vector $h_{n\times 1}$

COROLARIO 1: Si el sistema (I) es consistente, => el vector $x = A^-b$, y el vector $x_0 = A^cb$ son solución.

COROLARIO 2: Si el sistema (I) es consistente.

La solución $x = A^-b$ es única.

$\iff A^-A = I$

Si el sistema (I) es consistente, entonces el sistema tiene solución única $\iff R(A) = n$, y si existe solución única entonces es A^-b, en este caso $A^-b = A^cb$ para cualquier c-inverso.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES INCONSISTENTES.

Supongamos que el sistema (I) es inconsistente, es decir, no existe un vector x que satisfaga el sistema, entonces escribiremos

$$Ax - b = e(x) \tag{IV}$$

donde $e(x)$ es el vector de desviaciones.

Si existe un vector x_0 tal que $Ax_0 = b$, $\Rightarrow e(x_0) = 0$ y si no, es deseable que $e(x_0)$ sea mínima.

Si x_0 es la solución aproximada al sistema (I) tal que x_0 produzca la $e(x)$ más pequeña, se dice que x_0 es la mejor solución aproximada del sistema (I).

Formalizando lo anterior, se dará la siguiente definición:

DEFINICION 5: El vector x_0 se define como la mejor solución aproximada del sistema (I), donde:

$Ax - b = e(x)$

$\Leftrightarrow$ i) $\forall\ x \in Em$ se cumple que

$$e'(x)e(x) \geq e'(x_0)e(x_0)$$

ii) $\forall\ x \neq x_0$ tal que

$$e'(x)e(x) = e'(x_0)e(x_0)$$

se cumple que $x'x > x_0'x_0$

TEOREMA 26: La mejor solución aproximada del sistema (I) es x_0 con $x_0 = A^- b$

y como consecuencia, para toda $A_{m \times n}$ y $b_{m \times 1}$, el mínimo de $e(x)'e(x)$ para $x \varepsilon En$ es $b'(I - AA^-)b$.

APLICACION DEL G-INVERSO A LA ESTADISTICA.

Dado un conjunto de observaciones $\{Y_i\}$ $i = 1,\ldots,n$ se desea saber si existen con un conjunto de valores $\{\beta_i\}$ $i = 1,\ldots,p$ para los cuales

$$Y_i = \sum_{j=1}^{p} X_i \beta_j$$

en donde las X_{ij} son valores conocidos.

En forma matricial se tendría,

$$\underset{n\times 1}{Y} = \underset{n\times p}{X} \; \underset{p\times 1}{\beta} \qquad \text{(V)}$$

es claro que si $Y \varepsilon E_c(X)$, existirá β tal que satisfaga la ecuación (V). De no ser así, sabemos que

$$En = E_c(X) \oplus [E_c(X)]^{\perp}$$

ahora bien como

$$Y \varepsilon En \Rightarrow Y = u + e$$

con $u \varepsilon E_c(X)$ y $e \varepsilon [E_c(X)]^{\perp}$ y esta representación de Y es única.

$$u \in E_c(X) \Rightarrow \text{ existe } \beta \text{ tal que } u = X\beta$$

$$Y = X\beta + e \qquad \text{(VI)}$$

El modelo (VI) es el modelo estadístico para regresión lineal múltiple.

$$e = Y - X\beta \in [E_c(X)]^{\perp}$$

por el Teorema (23)

$$Y - X\beta \in E_N(X') \text{ , es decir}$$

$$X'(Y - X\beta) = 0$$

$$X'Y = X'X\beta \qquad \text{(VII)}$$

La ecuación (VII) es conocida como las ecuaciones normales.

En el caso de que la matriz $X'X$ sea de rango completo, nosotros podemos conocer el valor de β el cual está dado por

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Es importante notar que las ecuaciones normales son consistentes ya que

$$E_c(X'X) = [E_N(X'X)]^{\perp} = [E_N(X)]^{\perp} = E_c(X')$$

$$\Rightarrow E_c(X'X) = E_c(X')$$

$$\therefore \quad X'Y \in E_c(X') = E_c(X'X)$$

En el caso de que la matriz $X'X$ sea de rango incompleto, nosotros podemos utilizar el g-inverso para encontrar una solución.

Demostraremos que

$$\beta^* = (X'X)^- X'Y$$

satisface las ecuaciones normales.

$$\begin{aligned}(X'X)\beta^* &= (X'X)(X'X)^- X'Y = (X'X)(X^-(X')^-)X'Y \\ &= (X'XX^-)(X(X^-)'X')Y = (X'XX^-)(XX^-)'Y \\ &= X'XX^-XX^-Y = X'XX^-Y = X'(XX^-)'Y = (XX^-X)'Y = X'Y\end{aligned}$$

El conjunto de soluciones de las ecuaciones normales está dada por:

$$\begin{aligned}\{\beta\} &= (X'X)^- X'Y \oplus E_N(X'X) = \{X^-Y\} \oplus E_N(X) \\ &= X^-Y + w \quad \text{con } w \in E_N(X) \\ &= X^-Y + |I - X^-X|h. \qquad h_{p\times 1}\end{aligned}$$

Puede verse que esta es la forma más general para encontrar la $\hat{\beta}$ que satisface la ecuación (VI), ya que en el caso en que la matriz $X'X$ sea no-singular, se tiene que $(X'X)^{-1} = (X'X)^-$

Dado lo anterior, se muestran ciertas propiedades cuya demostración podrá verse en Graybill.

1) Existe una matriz $G_{m\times p}$ tal que el vector $G\hat{\beta}$ es único $\forall\hat{\beta}$ que satisfaga las ecuaciones normales.

2) Si $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ satisfacen las ecuaciones normales

$\Rightarrow$ $\hat{\beta}_1'X'Y = \hat{\beta}_2'X'Y$ $\forall\hat{\beta}$ que satisfacen las ecuaciones normales, es decir, $\hat{\beta}'X'Y$ es invariante.

3) $(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$ es invariante para toda solución de $\hat{\beta}$ de las ecuaciones normales.

4) $\forall\hat{\beta}$ que satisfacen las ecuaciones normales, las dos formas cuadráticas

$$\hat{\beta}'X'Y = Y'CY \quad y,$$

$$(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta}) = Y'BC$$

son tales que $CB = 0$.

donde C y B son idempotentes y $C + B = I$.

SOLUCION MINIMOCUADRATICA.

DEFINICION 6: El vector x_0 es definido como solución minimocuadrática del sistema (IV), es decir $Ax - b = e(x) \Leftrightarrow$ $\forall$ $x \in En$ sucede que

$$e'(x)e(x) \geq e'(x_0)e'(x_0)$$

La diferencia entre la mejor solución aproximada y la solución minimocuadrática no está en la restricción que

$$x'x > x_0'x_0$$

Y por tanto, nosotros tenemos muchas soluciones minimocuadráticas en un sistema lineal. La mejor solución aproximada es la solución minimocuadrática, pero no la solución minimocuadrática es la mejor solución aproximada.

TEOREMA 27: El vector $x_0 = Bb$ es la solución minimocuadrática del sistema (IV), donde B es una matriz tal que,

i) $ABA = A$

ii) AB es simétrica.

y como consecuencia, si $A_{m\times n}$ y B tal que $ABA = A$ y AB es simétrica, entonces $AB = AA^-$.

TEOREMA 28: x_0 de $n\times 1$ es solución minimocuadrática al sistema (IV)

$\Leftrightarrow (Ax_0 - b)'(Ax_0 - b) = b'(I - AA^-)b$

TEOREMA 29: x_0 de $n\times 1$ es la solución minimocuadrática al sistema (IV) $\Leftrightarrow$ x_0 satisface la siguiente ecuación:

$$Ax = AA^-b$$

Consecuentemente tendremos que, si x_0 de $n\times 1$ es la solución minimocuadrática al sistema (IV) $\Leftrightarrow$ x_0 satisface

$$A'Ax = A'b$$

Ahora definiremos el inverso minimocuadrático.

DEFINICION 8: Sea A una matriz de $m\times n$; a la matriz A^{ℓ} la denotaremos como el inverso minimocuadrático o el ℓ-inverso de A <=> satisface,

1) $AA^{\ell}A = A$

2) $AA^{\ell} = (AA^{\ell})'$

Nótese que A^{ℓ} es la matriz B del teorema (27) y entonces $x_0 = A^{\ell}b$ es la solución minimocuadrática al sistema (IV); donde A^{-} es el c-inverso y el ℓ-inverso de A.

También x_0 de $n\times 1$ es la solución minimocuadrática del sistema (IV) <=> $Ax_0 = AA^{\ell}b$. $\forall$ ℓ-inverso A^{ℓ} de A, y x_0 de $n\times 1$ es la solución minimocuadrática del sistema (IV) <=> $A^{-}Ax_0 = A^{-}b$.

TEOREMA 30: Sea el sistema (IV) y sea A^{ℓ} el ℓ-inverso de A, entonces para algún vector $h_{n\times 1}$ el vector x_0 es la solución minimocuadrática del sistema (IV), donde

$$x_0 = A^{\ell}b + (I - A^{\ell}A)h$$

Si $A_{m\times n}$ y sea $(A'A)^{c}$ un c-inverso de $A'A$, entonces $(A'A)^{c}A'$ es un ℓ-inverso de A y => $AA^{\ell} = AA^{-}$ donde AA^{ℓ} es simétrica e idempotente y el sistema (IV) es consistente <=> $AA^{\ell}b = b$.

ALGORITMOS PARA ENCONTRAR EL G-INVERSO

En esta sección se expondrán los algoritmos empleados, su base teórica, programa y conclusiones.

METODO I

El g-inverso obtenido usando el teorema de Cayley-Hamilton.

Este método fue propuesto por Decell. Se hace uso del famoso teorema de Cayley-Hamilton y una modificación al método de Leverrier para encontrar los coeficientes en el polinomio característico de una matriz. El método es similar al originalmente propuesto por Penrose.

Este método no es uno de los más simples de programar y sólo se establecerán los principales resultados en la derivación. Dicho método se basa fundamentalmente en los teoremas que a continuación enunciaremos:

TEOREMA 1 (Cayley-Hamilton)

Sea $f(t) = (-1)^n(t^n+a_1t^{n-1}+\dots+a_{n-1}t+a_n)$.

El polinomio característico de la matriz B y sea I_n y 0_n, las matrices idéntica y nula respectivamente.

$$\Rightarrow B^n+a_1B^{n-1}+\dots+a_{n-1}B+a_nI= 0_n .$$

TEOREMA 2: Sea $A_{n\times m}$ una matriz y sea

$$f(t) = (-1)^n (a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_kt^{n-k}+\ldots+a_{n-1}t+a_n)$$

con $a_0=1$, el polinomio característico de AA'

Si $k\neq 0$ y es el mayor entero, tal que $a_k\neq 0 \Rightarrow$ el g-inverso de A está dado por

$$A^- = -a_k^{-1}A'\left[(AA')^{k-1}+a_1(AA')^{k-2}+\ldots+a_{k-1}I\right] \qquad (a)$$

Si $k=0$ y el mayor entero, tal que $a_k\neq 0 \Rightarrow A^- = 0_{m\times n}$

La modificación del método de Leverrier es la llamada Modificación de Faddeev, se usa calculando las cantidades en (a) y con ésto, obtener A^-, los cálculos son hechos en k+1 etapas de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\begin{array}{lll}
A_0 = 0_n & -1 = q_0 & B_0 = I \\
A_1 = AA' & tr(A_1) = q_1 & B_1 = A_1 - q_1 I \\
A_2 = AA'B_1 & \frac{1}{2}tr(A_2) = q_2 & B_2 = A_2 - q_2 I \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
A_{k-1} = AA'B_{k-2} & \frac{1}{k-1}tr(A_{k-1}) = q_{k-1} & B_{k-1} = A_{k-1} - q_{k-1} I \\
A_k = AA'B_{k-1} & \frac{1}{k}tr(A_k) = q_k & B_k = A_k - q_k I .
\end{array}$$

Faddeev dice que si $q_j = -a_j \Rightarrow$ la ecuación (a), quedará como sigue:

$$A^- = -a_k^{-1}A'B_{k-1}$$

Nótese que la determinación del Rango de A es necesaria para este procedimiento.

Este método no es funcional computacionalmente porque abusa del gran número de operaciones y ésto hace que se sature la memoria de la computadora.

METODO 2. Algoritmo por Eliminación.

Este método está dado por Ben-Israel y Wersan . Se utiliza la técnica de reducción Gaussiana pero se requiere la inversión de una submatriz no-singular. Como el anterior método, éste no es funcional computacionalmente como otros métodos que existen.

Las cantidades esenciales para la derivación se darán a continuación:

Sea A una matriz de rango r de m×n, P una matriz permutada y E un producto de matrices elementales.

Sabemos que A'A es de rango r, entonces podemos elegir E y P , de tal manera que

$$EA'AP = \begin{bmatrix} Ir & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En términos de las matrices P,C,E y A, se puede ver que cualquiera de las siguientes 2 expresiones pueden ser usadas para encontrar A^-

$$A^- = P \begin{bmatrix} I_r \\ \hline C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I_r + CC')^{-1} & \vdots & 0 \end{bmatrix} EA' \qquad \text{(b)}$$

$$A^- = P \left[I_n - \left(\frac{C}{-I_{n-r}} \right) (I_{n-r} + C'C)^{-1} (C' \ \vdots \ -I_{n-r}) \right] EA' \qquad \text{(c)}$$

Note que (b) requiere de la inversión de una matriz de r×r, mientras en (c) invertimos una matriz de (n-r)×(n-r), la determinación del rango está prácticamente aquí:

$$EA'AP$$

Nótese que no tendrá elementos idénticamente cero y para calcular-lo, debe de tomarse una decisión en la cual la combinación lineal de las filas de A'A son cero y esta matriz es pequeña pero no debe de ser declarada cero.

METODO 3

Método Iterativo para el cálculo del g-inverso y el operador proyección AA^-.

Consideremos en esta sección un procedimiento iterativo para encontrar la solución del g-inverso. No intentaremos demostrar la derivación, ni la prueba de convergencia.

Si λ_1 (A'A) es el máximo eginvalor positivo de la matriz A'A de mxn, entonces puede ser demostrado que para Amxn, la sucesión:

$$1)\quad Y_o = \alpha A'$$

$$2)\quad Y_{k+1} = Y_k(2I_m - \alpha AY_k)$$

donde

$$3)\quad 0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_1(A'A)}$$

converge a A^- si $K \to \infty$

está demostrado que mientras la convergencia está asegurada para alguna α en el intervalo abierto.

$$\left[0, \frac{2}{\lambda_1(A'A)}\right]$$

el valor óptimo de α es:

$$\alpha_o \frac{2}{\lambda_1(A'A) + \lambda_r(A'A)} \qquad (3)$$

donde λ_r $(A'A)$ es el MINIMO eginvalor positivo deferente de 0 de $A'A$, ya que los eginvalores de una matriz no son generlamente fáciles de obtener. Esperamos determinar otra forma en valor adecuado de α usando en 1.,2.

Una aplicación del teorema de Gershgorin nos da un medio más apropiado para obtener una α.

Sabemos del teorema que

$$\lambda_1 \ (A'A) \leq \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{i=1} |b_{ij}|$$

donde $A'A = B$

entonces la conclución (3) puede ser cambiada por

$$0 < \alpha < \frac{2}{\max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}|} \qquad (3')$$

y para una matriz A,dada una aplicación de 3', 1 y 2 dará una sucesión de matrices con las propiedades:

$$||A^- - Y_{k+1}|| \leq ||A|| - ||A^- - Y_k||^2$$

$$\{Y_k\} \rightarrow A^- \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty$$

está demostrado que la sucesión definida por

$$Z_o = \alpha AA'$$

$$Z_{k+1} = 2z_k - Z_k^2 \qquad k = 1, 2...$$

con α satisfaciendo

$$0 < \alpha < \frac{2}{\underset{i=1,..m}{\mathrm{MAX}} \sum_{j=1}^{m} |b_{ij}|} \qquad \text{donde} \quad B = AA'$$

converge a AA^- cuando $k \rightarrow \infty$

Un resultado adicional es que la traza de Z_k es una función monó tona creciente de k, la cual converge al rango de A.

Notar que el método descrito anteriormente para obtener A^- difie re de las anteriormente consideradas, en que el rango de A no ne cesita ser determinado.

En el caso de matrices pequeñas han convergido en muy pocas inte racciones. Sin embargo, debe de recordarse que la convergencia en un número finito no está asegurada.

CONCLUSIONES.

Se analizó cada uno de los tres métodos y se concluyó después de varias pruebas que el mejor método es el tercero, es el más exac to, rápido y el que ocupa menos memoria, dicho método, puede en contrar el g-inverso de matrices grandes, en cambio los otros dos tienen serias deficiencias para dichas matrices, pero en ma trices pequeñas los tres tienen igual precisión, aunque el 1 y 2 ocupan mucha memoria. Como se ha descrito anteriormente el obte ner en los dos primeros el rango de A y sus múltiples operaciones las hacen ineficientes y por tanto se recomienda usarse en el siguiente orden:

primero el 3, después el 1 y por último el 2.

```
,5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...
      PROGRAM GINV2
     IMPLICIT REAL *8 (A,B,C,P)
     REAL *8 WF(5C,50)
      DIMENSICN PRCV(50),A(50,50),B(50,50),C(50,50),AK(50,50)
     DATA LEC,IMF,EPSI/5,6,C.000001/
-LEER ORDEN DE LA MATRIZ (N,M) Y LA MATRIZ A LA QUE SE LE SACARA EL G-INVER
-
     IS=6
     READ(LEC,1) N,M
  1  FORMAT(2I2)
     DO 604 I=1,N
     IP=1
     IP6=6
)9   READ(LEC,603)(A(I,J),J=IP,IP6),(WF(I,J),J=IP,IP6)
)3   FORMAT(6(5X,F8.0),T1,6(5X,F8.0))
)4   CONTINUE
-IMPRESION DE LA MATRIZ ORIGINAL
            WRITE (IMP, 100C)
)0          FORMAT ('1',10X,' LA MATRIZ ORIGINAL ES ')
     DO 101  I =1 ,N
)1   WRITE (IMP,10C)I,(A(I ,J ),J=1,M)
)0   FORMAT ('0',I2/6(5X,F16.10))
-
-A(N,M), SI SI N ES MENOR QUE M, OBTENER  C=AA'
-
      IF (N.GT.M ) GO TC 204
      DO   2    I=1,N
     DO 2     K =1 ,N
     C (I ,K ) = 0.
     DO 2     J =1 ,M
      C(I,K) =C(I,K) + A(I,J) *A(K,J)
      B(I,K) = C(I,K)
-
-OBTENER RANGO DE AA' Y DESPUES INICIAR EL PROCESO
      CALL RANGO (B,N,N, NRAN)
      GO TO 207
-
-OBTENER RANGO DE A,DESPUES OBTENER C=AA' E INICIAR EL PROCESO
4     DO 205 I=1,N
      DO 205  J=1,M
5     B(I,J) = A(I,J)
      CALL RANGO (B , N, M, NRAN )
      DO 206    I=1,N
      DO 206     K=1,N
      C(I,K)=0.
      DO 206     J=1,M
6     C(I,K) = C(I,K) + A(I,J)*A(K,J)
7     DO 3     I=1,N
      DO 3      J=1,N
      AK(I,J) =0.
      AK(I,I) =1.
-SE INICIA EL PRCCESC
     DO 8    L=1,NRAN
     DO 5      I = 1,N
     DO 5     J= I ,N
     B (I ,J )= AK (I ,J )
     B (J ,I )= AK (J ,I )
-
-EN LA L-ESIMA ITERACICN A(L) =AA'B(L-1)
```

```
5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...80
  DO 6     I =1  ,N
  DO 6     K =1  ,N
  AK (I  ,K )= 0.
  DO 6     J =1  ,N
  IF (L .EQ. 15) WRITE (IS,988) I,J,K,C(I,J),B(J,K)
  FORMAT ('0',5X,3I8,2E18.8)
  AK (I  ,K )= AK (I  ,K ) + C(I  ,J )*B(J,K )

OBTENER TRAZA(A(L))
  Q =0.
  DO 7     I =1  ,N
  Q =Q + AK (I  ,I )

  RL =L
  Q =Q/RL
CUANDO LA L-ESIMA ITERACION ES IGUAL AL RANGO DE A ,SE OBTIENE EL G-INVERSO
 SI NO OBTENER B(L) =A(L) -TRAZA(A(L))/L * ID Y SE ALMACENA EN AK. SE REPI-
TE EL PROCESO
   IF (L .GE.NRAN ) GC TC 80
  DO 800   I =1  ,N
  AK (I  ,I)= AK (I  ,I) -C
   CONTINUE

OBTENER EL G-INVERSO DE A, QUE SERA IGUAL A
   (TRAZA(A(L))/L )A'B(L-1)   ,DONDE L=RANGO(A)
  DO 99    I =1,M
  DO 9     K =1  ,N
  PROV (K) =A (K  ,I  )
  DO 99    K =1  ,N
  A (K  ,I  )=0.
  DO 99    L =1  ,N
9 A (K  ,I  )= A (K  ,I  ) +(1./Q)* PROV(L)*B (L  ,K )
  DO 30 I=1,N
  DO 30 J=I,N
  APROV=A(I,J)
  A(I,J)=A(J,I)
0 A(J,I)=APROV
   WRITE (IMP,4)
   FORMAT ('0',20X,'EL G-INVERSO DE LA MATRIZ ES')
  DO 191 I=1,M
   WRITE (IMP,192)I,(A(I,J),J=1,N)
   FORMAT ('0',I2/6(5X,F16.10))
   WRITE (IMP,13) NRAN
   FORMAT ('0',20X,'RANGC = ',I2)
  CALL CHUECO(N,M,WF,A,EPSI,LEC,IMP)
   STOP
   END
 TARJETAS
```

```
.5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...
      SUBROUTINE RANGO (A ,N ,M ,NRAN)
      IMPLICIT REAL *8 (A,P)
      DIMENSION A(50,50)
      EP =.00001
      NRAN=0
· MI  ES EL MINIMO ENTRE N Y M
      MI= MINO(N,M)
      I=1
-SI A(I,2) DIFERENTE DE CERO, HAY QUE REDUCIR LA MATRIZ Y AUMENTAR EL RANGO
      IF (DABS(A(I,I)).LE. EP) GO TO 4
      J1 =I+1
      DO 3    J=J1,N
      IF (DABS(A(J,I)) .LE. EP ) GO TO 3
      AP =A(J,I)/A(I,I)
      A(J,I) =0.
      DO 2    K=J1,M
      A(J,K) =A(J,K)-AP*A(I,K)
      CONTINUE
      NRAN=NRAN+1
      I = I+1
      IF (I.GT.MI) GO TC 24
      GO TO 1
-
-SI A(I,I)=0  E I=N , VER SI HAY ALGUN ELEMENTO DIFERENTE DE CERO EN LA
-FILA N . SI LO HAY AUMENTAR EL RANGO Y REGRESAR AL PROGRAMA, SI NO HAY, SOL
-REGRESAR,
      IF(I.NE.N) GC TO 7
      DO 5    K=I,M
      IF (DABS(A(I,K)).GT.EP) GO TO 6
      CONTINUE
      GO TO 24
      NRAN = NRAN+1
      RETURN
-
-SI  I)N  PERO I=M Y A(I,I)=0   VER SI E NLA COLUMNA M HAY ALGUN ELEMENTO
-DIFERENTE DE CERO, SI ESC PASA SE AUMENTA EL RANGO Y SE REGRESS AL PROGRAMA
-SINO SOLO SE REGRESA AL PROGRAMA.
      IF (I.NE.M) GO TO 9
      DO 8    K=I,N
      IF (DABS(A(K,I)) .GT. EP) GO TO 6
      CONTINUE
      GO TO 24
-
-AQUI SE LLEGA CUANDO A(I,I)=0,N,I,M,I.
-SI ALGUN ELEMENTO DE LA FILA  I ES DIFERENTE DE CERO, SE CAMBIA COLUMNA
      DO 10    J=I,M
      IF (DABS(A(I,J)).GT.EP) GO TO 21
      CONTINUE
      GO TO 110
      DO 22    K=I,N
      PROV = A(K,I)
      A(K,I) =A(K,J)
      A(K,J)= PROV
      GO TC 100
-
-CUANDO A(I,I)=0, I)N,I)M,Y ACEMAS ALGUN ELEMENTO DE LA COLUMNA  I  ES DIFER
- TE DE CERO SE CAMBIA FILE
0     DO 11    J=I,N
```

```
5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...
     CONTINUE

SI  TODOS  LOS  ELEMENTOS  DE  FILAI  Y  COLUMNA  I  SON  CERO,  I=I+1,
SI  I,MIN(N,M)  SE  REGRESA  AL  PROGRAMA,  SI  NO  SE  VUELVE  A  BUSCAR  UN  ELEMENTO
DIFERENTE  DE  CERO  EN  LA  FILE  O  COLUMNA  I  .
     I = I+1
     IF (I.GT.MI) GO TO 24
     GO TO 4

CAMBIO DE FILA
     DO 20    K=I,M
     PROV= A(I,K)
     A(I,K) = A(J,K)
     A(J,K) = PROV
     GO TO 100
     RETURN
     END
 TARJETAS
```

```
5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...8
  SUBROUTINE CHUECO (NHIL,NCCL,O,G,EPSI,IE,IS)
  REAL *8 G(50,50),O(50,50),T(50,50)
  IPASO = 1
  KER=0
  KKER=0
  DO 1 I=1,NHIL
  DO 1 J=1,NHIL
  DO 1 K=1,NCCL
  T(I,J) = O(I,K) * G(K,J)
  DO 2 I =1,NHIL
  DO 2 J =1,NHIL
  P = T(I,J)-T(J,I)
  P=ABS(P)
  IF (P .LE. EPSI) GO TO 2
  WRITE (IS,3)IPASO,I,J,P
  KER=KER+1
  KKER=KKER+1
3 FORMAT(/5X,'LA CONDICION ',I2,' NO SE CUMPLIO PARA EL ELEMENTO
 1(',I2,',',I2,')   EL CUAL TIENE UN VALOR DE ',F10.6)
  CONTINUE
  IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
  IPASO = IPASO + 1
  KKER=0
  DO 4 I=1,NCCL
  DO 4 J=1,NCCL
  DO 4 K=1,NHIL
  T(I,J) = G(I,K)* O(K,J)
  DO 5 I = 1,NCCL
  DO 5 J = 1,NCCL
  P = T(I,J)-T(J,I)
  P=ABS(P)
  IF (P.LE. EPSI) GO TO 5
  WRITE (IS,3) IPASO,I,J,P
  KER=KER+1
  KKER=KKER+1
  CONTINUE
  IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
  IPASO = IPASO + 1
  KKER=0
  DO 6 I=1,NCCL
  DO 6 J=1,NHIL
  DO 7 K=1,NCCL
  PGOG = T(I,K) * G(K,J)
  PGO  = PGOG - G(I,J)
  PGO =ABS(PGO )
  IF (PGO  .LE. EPSI) GO TO 6
  WRITE(IS,3) IPASO,I,J,PGO
  KER=KER+1
  KKER=KKER+1
  CONTINUE
  IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
  IPASO = IPASO + 1
  KKER=0
  DO 8 I= 1,NHIL
  DO 8 J= 1,NCCL
  DO 9 K= 1,NCCL
  POGO = O(I,K)*T(K,J)
  POG  = POGO - O(I,J)
  POG =ABS(POG)
```

```
5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...80
  IF(POG  .LE. EPSI) GO TO 8
  WRITE(IS,3) IPASO,I,J,PCG
  KER=KER+1
  KKER=KKER+1
  CONTINUE
  IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
  FORMAT(/20X,'EL G-INVERSO CUMPLE LA CONDICION',I2,'CON UNA PRECISI
 1ON DE',F10.7)
  IF(KER.NE.0) GO TO 42
  WRITE (IS,10) EPSI
  FORMAT(/20X,'EL G-INVERSO CUMPLE LAS 4 CONDICIONES CON UNA PRECISI
 1ON DE',F10.7)
  RETURN
2 AL=(NHIL+NCOL)*(NHIL+NCOL)
  EL=KER
  PROP=EL/AL
  WRITE(IS,12) EPSI,PROP
2 FORMAT(//20X,'LA PROPORCION DE CELDAS (BAJO LAS CUATRO CONDICIONES
 1)'/15X,' QUE SOBREPASAN LA PRECISION DE ',F10.7,' ES DE ',F10.7)
  RETURN
  END
 TARJETAS
```

```
5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...80
   PROGRAMA QUE CALCULA UN G INVERSO POR EL METODO DE ELIMINACION
   DIMENSION B(50,50),    A(50,50),E(50,50),CAM(50),ECAM(50),WF(50,50)
   INTEGER *2 P(50,50)
   DATA EPSI,IE,IS/0.000001,5,6/
   LECT=5
   READ(LECT,200) M,N
 0 FORMAT(2I2)
   DO 604 I=1,M
   IP=1
   IP6=6
   READ (LECT,603)(B(I,J),J=IP,IP6),(WF(I,J),J=IP,IP6)
 3 FORMAT(6(5X,F8.0),T1,6(5X,F8.0))
   CONTINUE
 2 FORMAT('1',45X,'L A  M A T R I Z  O R I G I N A L  E S ',////)
 0 FORMAT(4X,9F12.4)
 1 FORMAT(4X,9F12.4)
 2 FORMAT('0',////,22X,'E L  I N V E R S O  G E N E R A L I Z A D O
  1D E  L A  M A T R I Z  O R I G I N A L  E S',/////)
   WRITE(6,202)
   WRITE(6,501)((B(I,J),J=1,N),I=1,M)
 2 DO 112 M1=1,N
   DO 112 M2=1,N
   E(M1,M2)=0.
 2 P(M1,M2) =0
   DO 113 M1=1,N
   P(M1,M1)=1
 3 E(M1,M1)=1
   FORMACION DE B'B EN A
   DO 1 N1=1,N
   DO 1 N2=N1,N
   SUM=0
   DO 2 N3=1,M
 2 SUM=SUM+B(N3,N1)*B(N3,N2)
   A(N1,N2)=SUM
 1 A(N2,N1)=SUM
   IR=0
   TOL= .005
   REDUCCION DE LA MATRIZ A A LA IDENTICA
   I=0
 3 I=I+1
   IF(N.LT.I)GO TO 40
   IF(A(I,I).EQ.0)GO TO 12
 4 IR=IR+1
   IF(A(I,I).EQ.1)GO TO 6
   AUX=A(I,I)
   A(I,I)=1
   DO 21 M1=1,I
 1 E(I,M1)=E(I,M1)/AUX
   I1=I+1
   DO 5 M1=I1,N
   A(I,M1)=A(I,M1)/AUX
 5 E(I,M1)=E(I,M1)/AUX
 6 IF(I.EQ.1)GO TO 8
   IM1=I-1
   DO 7 M2=1,IM1
   IF(A(M2,I).EQ.0)GO TO 7
   VAR=A(M2,I)
   A(M2,I)=0
   DO 10 M4=1,I
```

```
5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...8
 0 E(M2,M4)=E(M2,M4)-E(I,M4)*VAR
   DO 7 M3=I1,N
   A(M2,M3)=A(M2,M3)-A(I,M3)*VAR
 7 E(M2,M3)=E(M2,M3)-E(I,M3)*VAR
   IF(N-I)3,3,8
 8 DO 9 M2=I1,N
   IF(A(M2,I).EQ.0)GO TO 9
   VAR=A(M2,I)
   A(M2,I)=0
   DO 11 M4=1,I
 1 E(M2,M4)=E(M2,M4)-E(I,M4)*VAR
   DO 9 M3=I1,N
   A(M2,M3)=A(M2,M3)-A(I,M3)*VAR
 9 E(M2,M3)=E(M2,M3)-E(I,M3)*VAR
   GO TO 3
   EN CASO DE ENCONTRARSE UN CERO EN LA DIAGONAL HAY QUE BUSCAR OTRA HILERA
   QUE TENGA A(I,I) DISTINTO DE CERO E INTERCAMBIARLA
 2 L=I
 7 K=I+1
 4 IF(N-K)13,18,18
 3 J=I+1
 7 IF(N-J)14,16,16

   CUANDO L ES MAYOR O IGUAL QUE N SE VA A 40 PARA DECIDIR CUAL FORMULA ES LA
   MAS APROPIADA PARA  CALCULAR  B-
 4 IF(L-N)15,40,40
 5 L=L+1
   GO TO 17
 5 IF(A(L,J).NE.0)GO TO 26
   J=J+1
   GO TO 27
26 DO 30 M1=1,N
   CAM(M1)=A(M1,J)
   ECAM(M1)=P(M1,J)
   A(M1,J)=A(M1,I)
   P(M 1,J)=P(M1,I)
   A(M1,J)=CAM(M1)
30 P(M1,I)=ECAM(M1)
   IF(I.EQ.L)GO TO 4
   DO 35 M2=1,N
   CAM(M2)=A(I,M2)
   ECAM(M2)=E(I,M2)
   A(I,M2)=A(L,M2)
   E(I,M2)=E(L,M2)
   A(L,M2)=CAM(M2)
35 E(L,M2)=ECAM(M2)
   GO TO 4
18 IF(A(K,L).NE.0)GO TO 32
   K=K+1
   GO TO 34
32 DO 20 M1=1,N
   CAM(M1)=A(I,M1)
   ECAM(M1)=E(I,M1)
   E(I,M1)=E(K,M1)
   A(I,M1)=A(K,M1)
   E(K,M1)=ECAM(M1)
20 A(K,M1)=CAM(M1)
   IF(I.EQ.L)GO TO 4
   DO 25 M2=1,N
```

```
5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75.
   ECAM(M2)=P(M2,L)
   CAM(M2)=A(M2,L)
   A(M2,L)=A(M2,I)
   P(M2,L)=P(M2,I)
   A(M2,I)=CAM(M2)
5  P(M2,I)=ECAM(M2)
   GO TO 4
   SI EL RANGO DE LA MATRIZ ES IGUAL A  N  B- =(B'B)-1 *B'
0  IF(IR.EQ.N) GO TO 91
   OBTENCION DE EB' GUARDANDOLA EN  B
   DO 45 M2=1,M
   DO 44 M1=1,N
   SUM=0
   DO 43 M3=1,N
3  SUM=SUM+E(M1,M3)*B(M2,M3)
4  ECAM(M1)=SUM
   DO 45 I=1,N
5  B(M2,I)=ECAM(I)
   IR1=IR+1
   IF(N-2*IR)80,80,51

   SI EL RANGO DE LA MATRIZ A'A QUE ES IR ES MENOR QUE N-IR B- SE CALCULA
   OBTENCION DE C'C GUARDANDOLA EN LA I DE EA'AP

1  DO 50 M1=1,IR
   DO 50 M2=M1,IR
   SUM=0
   DO 48 M3=IR1,N
8  SUM=SUM+A(M1,M3)*A(M2,M3)
   A(M1,M2)=SUM
0  A(M2,M1)=SUM
   OBTENCION DE ( I + C'C )
   DO 52 M1=1,IR
2  A(M1,M1)=A(M1,M1)+1
   OBTENCION DE ( C'C + I )-EN  A
   IF(IR-1)150,151,150
0  CALL BORDR (A,IR,DET,TCL)
   GO TO 152
1  A(1,1)=1/A(1,1)
   INTRODUCCION DE (I+CC')-1  EN E
2  DO 60 M1=1,IR
   DO 60 M2=1,IR
0  E(M1,M2)=A(M1,M2)
   OBTENCION DE C' ( C'C + I )-1  EN LA PARTE BAJA  DE  E
   DO 62 M1=IR1,N
   DO 62 M2=1,IR
   SUM=0
   DO 61 M3=1,IR
1  SUM=SUM+A(M3,M1)*A(M3,M2)
2  E(M1,M2)=SUM
   METER CEROS EN LA SEGUNDA PARTE DE E
   DO 64 M1=1,N
   DO 64 M2=IR1,N
4  E(M1,M2)=0
   MULTIPLICACION DE E POR P QUEDANDO EL RESULTADO EN A
   DO 67 M1=1,N
   DO 66 M2=1,IR
   SUM=0
   DO 65 M3=1,N
```

```
.5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...8
55  SUM=SUM+P(M1,M3)*E(M3,M2)
56  A(M1,M2)=SUM
    DO 67 M4=IR1,N
67  A(M1,M4)=0
    MULTIPLICACION DE A POR EA' QUE ESTA EN B Y QUEDANDO EL RESULTADO EN B
    DO 70 M2=1,M
    DO 69 M1=1,N
    SUM=0
    DO 68 M3=1,N
68  SUM=SUM+A(M1,M3)*B(M2,M3)
69  CAM(M1)=SUM
    DO 70 M4=1,N
70  B(M2,M4)=CAM(M4)
    WRITE(6,502)
    WRITE(6,500) ((B(M1,M2),M1=1,M),M2=1,N)
    STOP
    OBTENCION DE E-  POR LA FORMULA 2
    OBTENCION DE C'C GUARDANDOLA EN LA I DE A
80  DO 85 M1=IR1,N
    DO 85 M2=M1,N
    SUM=0
    DO 84 M3=1,IR
84  SUM=SUM+A(M3,M1)*A(M3,M2)
    M4=M1-IR
    M5=M2-IR
    A(M4,M5)=SUM
85  A(M5,M4)=SUM
    NMR=N- IR
    OBTENCION DE (C'C+I)-1
    DO 90 M1=1,NMR
90  A(M1,M1)=A(M1,M1)+1
    CALL BORDR  (A,NMR,DET,TOL)
    OBTENCION DE C(C'C+I)-1 GUARDANDOLA EN LA PRIMERA PARTE INFERIOR DE
    E  Y (C'C+I)-1 EN LA SEGUNDA SUPERIOR DE E
    DO 100 M1=1,IR
    DO 100 M2=1,NMR
    SUM=0
    DO 99 M3=1,NMR
    M4=IR+M3
99  SUM=SUM-A(M1,M4)*A(M3,M2)
    M5=M2+IR
    E(M1,M5)=SUM
100 E(M5,M1)=SUM
    ACOMODO DE (C'C + I)-1 EN LA SEGUNDA INFERIOR PARTE DE  E
    DO 102 M1=1,NMR
    DO 102 M2=1,NMR
    M3=M1+IR
    M4=M2+IR
102 E(M3,M4)=A(M1,M2)
    DO 104 M1=1,IR
    DO 104 M2=1,IR
    SUM=0
    DO 103 M3=IR1,N
103 SUM=SUM-E(M3,M1)*A(M2,M3)
104 E(M1,M2)=SUM
    DO 116 M1=1,N
    DO 115 M2=1,N
115 E(M1,M2)=-E(M1,M2)
116 E(M1,M1)=E(M1,M1)+1
```

```
..5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...8
   MULTIPLICACION DE P  POR  E  QUEDANDO EL RESULTADO EN  A
   DO 106  M1=1,N
   DO 106 M2=1,N
   SUM=0
   DO 105 M3=1,N
05 SUM=SUM+P(M1,M3)*E(M3,M2)
06 A(M1,M2)=SUM
   MULTIPLICACION DE A  POR EA' QUE ESTA EN B
   DO 111 M2=1,M
   DO 110 M1=1,N
   SUM=0
   DO 109 M3=1,N
09 SUM=SUM+ A(M1,M3)*B(M2,M3)
10 ECAM(M1)=SUM
   DO 111 M4=1,N
11 B(M2,M4)=ECAM(M4)
   WRITE(6,502)
   WRITE(6,500) ((B(M1,M2), M1=1,M),M2=1,N)
   GO TO 92
   OBTENCION DE -- CUANDO EL RANGO ES IGUAL A  N
91 DO 94 M1=1,N
   DO 94 M2=1,M
   SUM=0
   DO 95 M3=1,N
95 SUM=SUM+E(M1,M3)*B(M2,M3)
94 P(M1,M2)=SUM
   WRITE(6,502)
   WRITE(6,203) ((P(M1,M2),M2=1,M),M1=1,N)
03 FORMAT('0',5(F6.2,3X))
92 DO 730 I=1,M
   DO 730 J=I,M
   APROV=B(I,J)
   B(I,J)=B(J,I)
30 B(J,I)=APROV
   CALL CHUECO(M,N,WF,B,EPSI,IE,IS)
   STOP
   END
  TARJETAS
```

```
..5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...80
      SUBROUTINE BORDR (A,N,DET,TOL)
      DIMENSION B(50),D(50), A(50,50)
      DET=A(1,1)
      IF(ABS(DET)-TOL)7,7,35
   35 A(1,1)=1./A(1,1)
      DO 10 K=2,N
      KK=K-1
      DO 11 KI=1,KK
      SUM=0.
      DO 12 J=1,KK
   12 SUM=SUM + A(KI,J)*A(J,K)
   11 B(KI)=SUM
      SUM=0.
      DO 13 I=1,KK
   13 SUM=SUM+A(K,I)*B(I)
      AL=A(K,K)-SUM
   14 DET=DET*AL
      IF(ABS(DET)-TOL)7,7,36
   36 DK=1./AL
      DO 15 KI=1,KK
      SUM=0.
      DO 16 J=1,KK
   16 SUM=A(K,J)*A(J,KI)+SUM
   15 D(KI)=-DK*SUM
      DO 18 I=1,KK
      DO 18 J=1,KK
   18 A(I,J)=A(I,J)-B(I)*D(J)
      A(K,K)= DK
      DO 60 J=1,KK
   60 A(K,J)=D(J)
      DO 61 I=1,KK
   61 A(I,K)=-DK*B(I)
   10 CONTINUE
      RETURN
    7 WRITE(6,8)
    8 FORMAT('0','SUBMATRIZ SINGULAR NO HAY SOLUCION  POR ESTE M.')
   24 STOP
      END
38 TARJETAS
```

```
.5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75..
      SUBROUTINE CHUECO (NHIL,NCOL,O,G,EPSI,IE,IS)
      DIMENSION O(50,50),G(50,50),T(50,50)
      IPASO = 1
      KER=0
      KKER=0
      DO 1 I=1,NHIL
      DO 1 J=1,NHIL
      DO 1 K=1,NCOL
      T(I,J) = O(I,K) * G(K,J)
      DO 2 I =1,NHIL
      DO 2 J =1,NHIL
      P = T(I,J)-T(J,I)
      P=ABS(P)
      IF (P .LE. EPSI) GO TO 2
      WRITE (IS,3) IPASO,I,J,P
      KER=KER+1
      KKER=KKER+1
    3 FORMAT(/15X,' LA CONDICION ',I2,' NO SE CUMPLIO PARA EL ELEMENTO
     1(',I2,',',I2,')   EL CUAL TIENE UN VALOR DE ',F10.6)
      CONTINUE
      IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
      IPASO = IPASO + 1
      KKER=0
      DO 4 I=1,NCOL
      DO 4 J=1,NCOL
      DO 4 K=1,NHIL
      T(I,J) = G(I,K)* O(K,J)
      DO 5 I = 1,NCOL
      DO 5 J = 1,NCOL
      P = T(I,J)-T(J,I)
      P=ABS(P)
      IF (P.LE. EPSI) GO TO 5
      WRITE (IS,3)IPASO,I,J,P
      KER=KER+1
      KKER=KKER+1
      CONTINUE
      IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
      IPASO = IPASO + 1
      KKER=0
      DO 6 I=1,NCOL
      DO 6 J=1,NHIL
      DO 7 K=1,NCOL
      PGOG = T(I,K) * G(K,J)
      PGO  = PGOG - G(I,J)
      PGO =ABS(PGO )
      IF (PGO  .LE. EPSI) GO TO 6
      WRITE (IS,3) IPASO,I,J,PGO
      KER=KER+1
      KKER=KKER+1
      CONTINUE
      IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
      IPASO = IPASO + 1
      KKER=0
      DO 8 I= 1,NHIL
      DO 8 J= 1,NCOL
      DO 9 K= 1,NCOL
      POGO = O(I,K)*T(K,J)
      POG  = POGO - O(I,J)
      POG =ABS(POG)
```

```
5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75..
   IF(POG  .LE. EPSI) GO TO 8
   WRITE (IS,3)IPASO,I,J,POG
   KER=KER+1
   KKER=KKER+1
   CONTINUE
   IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
1  FORMAT(/20X,'EL G-INVERSO CUMPLE LA CONDICION',I2,'CON UNA PRECISI
 1ON DE',F10.7)
   IF(KER.NE.0) GC TO 42
   WRITE (IS,10) EPSI
   FORMAT(/20X,'EL G-INVERSO CUMPLE LAS 4 CONDICIONES CON UNA PRECISI
 1ON DE',F10.7)
   RETURN
2  AL=(NHIL+NCOL)*(NHIL+NCOL)
   EL=KER
   PROP=EL/AL
   WRITE(IS,12) EPSI,PROP
2  FORMAT(//20X,'LA PROPORCION DE CELDAS (BAJO LAS CUATRO CONDICIONES
 1)'/15X,' QUE SOBREPASAN LA PRECISION DE ',F10.7,' ES DE ',F10.7)
   RETURN
   END
 TARJETAS
```

```
.5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75..
    DIMENSION A(50,50),Y(50,50),KFM(80)
    DATA IE,IS,EPSI/5,6,0.000001/
       ORDEN  DE  LA MATRIZ ORIGINAL A(N,NP)
       NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES
    NUMI=200
       TOLERANCIA PARA SUMA DE DIFERENCIAS
    TOL=.001
    LECTURA DE FORMATO
    READ(5,1)(KFM(I),I=1,80)
    FORMAT(80A1)
       LECTURA DE LA MATRIZ ORIGINAL
    READ(5,2)  NHIL, NCOL
  2 FORMAT(2I2)
    READ(5,KFM)((A(I,J),J=1,NCOL),I=1,NHIL)
       IMPRESION DE LA MATRIZ ORIGINAL
    WRITE(6,100)
 00 FORMAT('1', 'MATRIZ ORIGINAL')
    WRITE(6,101)((A(I,J),J=1,NCOL),I=1,NHIL)
 01 FORMAT(8F15.5)
       OBTENCION DEL G-INVERSO DE LA MATRIZ ORIGINAL
    N = NHIL
    NP = NCOL
    CALL GINVE(N,NP,A,Y,NUMI,IT,DIF,TOL)
       IMPRESION DEL NUMERO DE ITERACIONES Y DEL G-INVERSO
    WRITE(6,102) IT,DIF
 02 FORMAT('0','NUMERO DE ITERACIONES = ',I3,/,'0',
   1'SUMA DE DIFERENCIAS = ',F15.8,/,'0','EL G-INVERSO ES',/)
    WRITE(6,103)((Y(I,J),J = 1,NHIL),I=1,NCOL)
 03 FORMAT(7(2X,F15.5)/)
    CALL CHUECO (NHIL,NCOL,A,Y,EPSI,IE,IS)
    STOP
    END
    SUBROUTINE GINVE(N,NP,A,Y,NUMI,IT,DIF,TOL)
    DIMENSION A(50,50),Y(50,50),YA(50,50),B(50)
    DO 2 I=1,NP
    DO 2 J=I,NP
    SUM=0.
    DO 1 K=1,N
  1 SUM=SUM+A(K,I)*A(K,J)
    Y (I,J) = SUM
  2 Y(J,I) = Y(I,J)
    ALFA=0.
    DO 4 I=1,NP
    SUM=0.
    DO 3 J=1,NP
  3 SUM=SUM + ABS(Y(I,J))
    IF(SUM-ALFA) 4,4,33
 33 ALFA=SUM
  4 CONTINUE
    ALFA= 1./ALFA
    DO 5 I=1,NP
    DO 5 J=1,N
  5 Y(I,J)=A(J,I)*ALFA
    DO 60 IT = 1,NUMI
    DIF=0.
    DO 66 I=1,NP
    DO 66 J=1,NP
    SUM=0.
    DO 6 K=1,N
```

```
5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...8
5  SUM=SUM+Y(I,K)*A(K,J)
5  YA(I,J)= - SUM
   DO 7 K=1,NP
7  YA(K,K)=2. + YA(K,K)
   DO 59 J=1,N
   DO 9 I=1,NP
   SUM=0.
   DO 8 K=1,NP
8  SUM=SUM + YA(I,K)*Y(K,J)
9  B(I)=SUM
   DO 59 I=1,NP
   DIF=DIF + ABS(Y(I,J)-B(I))
9  Y(I,J)=B(I)
   IF(DIF-TOL)70,60,60
0  CONTINUE
0  RETURN
   END
 TARJETAS
```

```
5...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...
   SUBROUTINE CHUECO (NHIL,NCOL,O,G,EPSI,IE,IS)
   DIMENSION O(50,50),G(50,50),T(50,50)
   IPASO = 1
   KER=0
   KKER=0
   DO 1  I=1,NHIL
   DO 1  J=1,NHIL
   DO 1  K=1,NCOL
   T(I,J) = O(I,K) * G(K,J)
   DO 2  I =1,NHIL
   DO 2  J =1,NHIL
   P = T(I,J)-T(J,I)
   P=ABS(P)
   IF (P .LE. EPSI) GO TO 2
   WRITE (IS,3)IPASO,I,J,P
   KER=KER+1
   KKER=KKER+1
   FORMAT(/15X,' LA CONDICION ',I2,' NO SE CUMPLIO PARA EL ELEMENTO
  1(',I2,',',I2,')    EL CUAL TIENE UN VALOR DE ',F10.6)
   CONTINUE
   IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
   IPASO = IPASO + 1
   KKER=0
   DO 4  I=1,NCOL
   DO 4  J=1,NCOL
   DO 4  K=1,NHIL
   T(I,J) = G(I,K)* O(K,J)
   DO 5  I = 1,NCOL
   DO 5  J = 1,NCOL
   P = T(I,J)-T(J,I)
   P=ABS(P)
   IF (P.LE. EPSI) GO TO 5
   WRITE (IS,3) IPASO,I,J,P
   KER=KER+1
   KKER=KKER+1
   CONTINUE
   IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
   IPASO = IPASO + 1
   KKER=0
   DO 6  I=1,NCOL
   DO 6  J=1,NHIL
   DO 7  K=1,NCOL
   PGOG = T(I,K) * G(K,J)
   PGO  = PGOG - G(I,J)
   PGO =ABS(PGO )
   IF (PGO  .LE. EPSI) GO TO 6
   WRITE(IS,3) IPASO,I,J,PGO
   KER=KER+1
   KKER=KKER+1
   CONTINUE
   IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
   IPASO = IPASO + 1
   KKER=0
   DO 8  I= 1,NHIL
   DO 8  J= 1,NCOL
   DO 9  K= 1,NCOL
   POGO = O(I,K)*T(K,J)
   POG  = POGO - O(I,J)
   POG =ABS(POG)
```

```
...10...15...20...25...30...35...40...45...50...55...60...65...70...75...80
 IF(POG  .LE. EPSI) GO TO 8
 WRITE(IS,3) IPASO,I,J,POG
 KER=KER+1
 KKER=KKER+1
 CONTINUE
 IF(KKER.EQ.0) WRITE(IS,11) IPASO,EPSI
 FORMAT(/20X,'EL G-INVERSO CUMPLE LA CONDICION',I2,'CON UNA PRECISI
1ON DE',F10.7)
 IF(KER.NE.0) GO TO 42
 WRITE (IS,10) EPSI
 FORMAT(/20X,'EL G-INVERSO CUMPLE LAS 4 CONDICIONES CON UNA PRECISI
1ON DE',F10.7)
 RETURN
 AL=(NHIL+NCOL)*(NHIL+NCOL)
 EL=KER
 PROP=EL/AL
 WRITE(IS,12) EPSI,PROP
 FORMAT(//20X,'LA PROPORCION DE CELDAS (BAJO LAS CUATRO CONDICIONES
1)'/15X,' QUE SOBREPASAN LA PRECISION DE ',F10.7,' ES DE ',F10.7)
 RETURN
 END
TARJETAS
```

BIBLIOGRAFIA.

1) GRAYBILL- Introduction to matrices with applications in statistics - Wadsworth - 1969.

2) FADDEEV- Computational methods of linear algebra - Freeman and Co. - 1963.

3) HEMMERLE W. - Statistical computations on a digital computer Blaisdell publishing Co. - 1967.

4) MEXAS A. - Notas de clase - Iowa State University.