

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

SOLUCION DE UN SISTEMA DE ACUIFEROS  
POR EL METODO DEL ELEMENTO FINITO

1976  
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
A C T U A R I O

PRESENTA:

RAUL MEDINA MORA ICAZA



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Con cariño y agradecimiento  
a mis padres,  
a mis hermanos y amigos,  
a mis compañeros y profesores  
y a ti Katty

Al Dr. Robert Yates mi más  
sincero agradecimiento por el  
apoyo y la confianza que me  
brindó durante la dirección  
de este trabajo.

Al Ing. Antonio Moutalvo por  
su paciencia y dedicación que  
hicieron posible el desarrollo  
del presente

Al Dr. Ismael Herrera  
por sus valiosos consejos  
y ayuda en la elaboración  
de esta tesis

## INDICE

### CAPITULO 1

Descripción de un sistema de acuíferos y obtención de las ecuaciones del sistema 3

### CAPITULO 2

Solución de las ecuaciones del sistema 20

### CAPITULO 3

Resultados y gráficas 46

### APENDICE A

Notaciones 61

### APENDICE B

Evaluación de las integrales  $\langle P_i, P_j \rangle$  y  $\langle P_i', P_j' \rangle$  64

REFERENCIAS 75

# INTRODUCCION

## Introducción

En la solución numérica de las ecuaciones de un sistema de acuíferos semiconfinados, normalmente se ha atacado el problema resolviendo las ecuaciones diferenciales parciales planteadas por Hantush [1960] que contemplan al sistema acoplado.

El presente trabajo presenta un ataque diferente ya que utiliza la reformulación de las ecuaciones, con las ecuaciones integrodiferenciales planteadas por Herrera y Rodarte [1973] que eliminan la dependencia directa del acuífero y permiten manejar el sistema desacoplado.

Una de las dificultades que introduce esta reformulación es la aparición de convoluciones, que para resolverlas sería necesario tener guardados todos los valores anteriores de la solución hasta el tiempo  $t$ ; sin embargo, esta dificultad es superable con la aproximación de las funciones de memoria que permiten eliminar la convolución y desacoplar las ecuaciones lo que aporta una ganancia en eficiencia.

Para la solución de estas ecuaciones se hizo un programa que las resuelve con estas aproximaciones y los resultados se compararon con la solución analítica del sistema, dada por Neuman & Witherspoon [1969c]

El contenido de esta tesis es el desarrollo de las técnicas de solución. Primero se hace una descripción del sistema y se plantean las ecuaciones, después se resuelven las ecuaciones con las aproximaciones y finalmente se comparan los resultados con la solución analítica.



## CAPITULO 1

DESCRIPCION DE UN SISTEMA DE ACUIFEROS  
Y OBTENCION DE LAS ECUACIONES DEL SISTEMA

## Capítulo I

Definición.- un acuífero es un manto de agua localizado en el subsuelo; un acuitardo es una capa semipermeable

Cuando se extrae agua del subsuelo, en ocasiones aparece la siguiente pregunta: ¿qué tanta agua proviene del acuífero en el cual está situado el pozo y qué tanta de regiones adyacentes?

Un acuífero que recibe una cantidad significativa de agua de regiones adyacentes, se conoce como "acuífero semiconfinado".

En la realidad este tipo de acuíferos forman parte, a menudo, de un sistema múltiple de acuíferos, i.e. una sucesión de acuíferos separados por acuitardos de baja permeabilidad y espesor variable. Cuando estas regiones tienen una permeabilidad suficientemente baja actúan como fronteras impermeables y la simulación de un acuífero bombeado bajo estas condiciones fue analizada por Neuman & Witherspoon [1968].

Sin embargo, al aumentar la permeabilidad, la filtración se hace apreciable y el flujo no se restringe sólo al acuífero bombeado. El agua adicional proviene de los acuíferos adyacentes y/o de los acuíferos adyacentes no bombeados.

Dado que el flujo no se restringe al acuífero bombeado, el "acuífero semiconfinado" debe ser visto como parte de un sistema múltiple de acuíferos donde el abatimiento en cada capa depende del comportamiento de todo el sistema. Por esto, no se puede entender el flujo del acuífero bombeado sin analizar el sistema completo. [Neuman & Witherspoon, 1969c].

## I.- Principales suposiciones y definiciones.

Dado que una solución rigurosa del flujo en un sistema múltiple de acuíferos incluye una serie de condiciones de frontera que provocan que el problema sea intratable analíticamente, se procede a simplificar el modelo suponiendo que el flujo es esencialmente horizontal en los acuíferos y

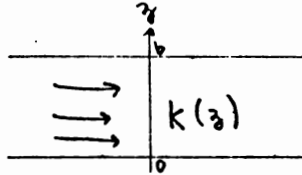
vertical en los acuitardos. La validez de estas suposiciones fue investigada por Neuman & Witherspoon [1969a] para el caso de dos acuíferos y un acuitardo entre ellos, que es el problema que se tratará en esta tesis. Ellos demostraron que, cuando las permeabilidades de los acuíferos son mayores que la del acuitardo en más de dos órdenes de magnitud, los errores introducidos por estas suposiciones son normalmente menores al 5%. Prácticamente el contraste de las permeabilidades entre acuífero y acuitardo es mayor que tres órdenes de magnitud, y por esto, se pueden hacer las suposiciones anteriores. [Neuman & Witherspoon 1969c].

En el desarrollo del presente trabajo se utilizarán los siguientes parámetros: [Fayre]

T, transmisibilidad del acuífero, definida como la descarga de agua a través de todo el acuífero, por unidad de longitud (horizontal), y perpendicular a la dirección del flujo, y por unidad de gradiente hidráulico.

Entonces  $T$  es igual al producto de la permeabilidad  $k$  por el espesor vertical del acuífero  $b$ .

$$T = \bar{k} b, \text{ con } \bar{k} = \frac{1}{b} \int_0^b k(z) dz$$



$k$ , permeabilidad del acuífero

$S$ , almacenamiento del acuífero, (también llamado: coeficiente de almacenaje); es el volumen de agua ( $\Delta U_w$ ) liberada del acuífero por unidad de área (horizontal) del acuífero y por unidad de declinación del nivel piezométrico medio (vertical) del acuífero

$$S = \frac{\Delta U_w}{\Delta A \cdot \Delta \bar{\varphi}} \quad \bar{\varphi}, \text{ nivel piezométrico medio}$$

$S_s$ , almacenamiento específico, (almacenamiento medio), se define como el volumen de agua liberado del acuífero por unidad de área del acuífero y por unidad de

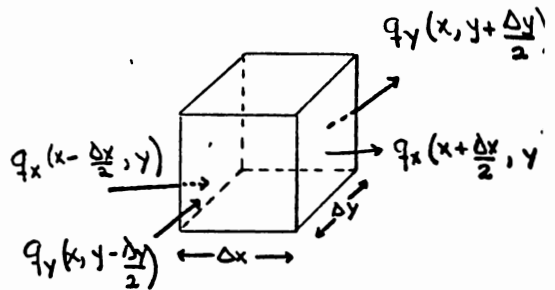
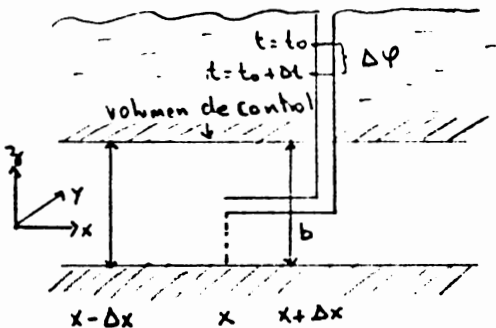
declinación del nivel piezométrico

$$S_a = \frac{S}{b}$$

(ver Apéndice A para resumen de notaciones)

## II.- Ecuación fundamental del flujo en un acuífero. [Payre]

Para obtener la ecuación del flujo, aplíquese el principio de conservación a un volumen dado del medio, suponiendo que la permeabilidad  $K$  y por lo tanto la transmisibilidad  $T = Kb$  son independientes del tiempo. En este desarrollo se tomará en cuenta el nivel piezométrico  $\varphi$ , pero se puede usar, de la misma manera la presión  $P$ .



Considérese un volumen de control  $b \Delta x \Delta y$  (figura 1) y sea  $\bar{q} = \begin{vmatrix} q_x \\ q_y \end{vmatrix}$  la descarga por unidad de espesor del acuífero.

Entonces,

$$\begin{aligned} & \Delta t \left\{ \Delta y \left[ q_x \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y \right) - q_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \Delta x \left[ q_y \left( x, y - \frac{\Delta y}{2} \right) - q_y \left( x, y + \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \right\} \\ & = S' \Delta x \Delta y (\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)). \end{aligned}$$

Al dividir entre  $\Delta x \Delta y \Delta t$  y tomando el límite cuando  $\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0$ , se obtiene

$$-\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) = S' \frac{\partial \varphi}{\partial t};$$

$$\text{div} (\mathbf{T} \cdot \text{grad } \varphi) = S' \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

### III.- Flujo en un sistema de acuíferos semiconfinados. [Payre]

Considérese el sistema típico de acuíferos semiconfinados descrito por Herrera y Rodarte [1973]

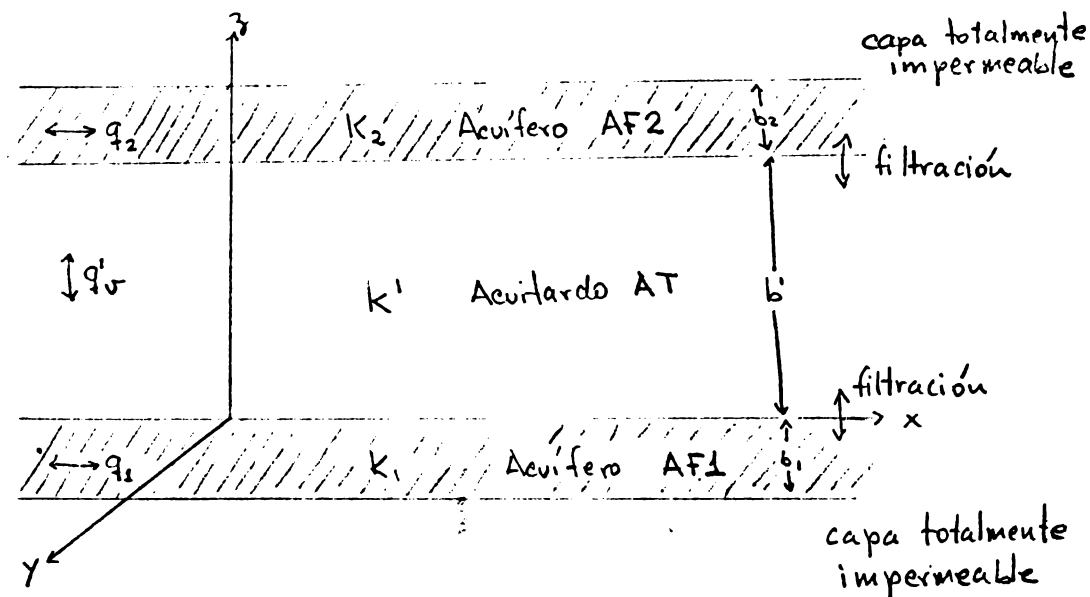


figura 2.- El sistema de acuíferos

Tratan dos acuíferos AF1 y AF2 separados por un acuitardo (capa semipermeable) AT. (ver figura 2). Se utilizarán los índices '1' para AF1 (acuífero más profundo), '2' para AF2 y ' (prima) para el acuitardo AT.

Las  $k_i$  son del mismo orden de magnitud y  $k_i \gg k'$  en la mayoría de los casos (aunque no es una limitación). Se supone, como ya se dijo, que el flujo en los acuíferos es esencialmente horizontal y en el acuitardo esencialmente vertical.



Al escribir el principio de conservación con un pequeño volumen de control como se hizo en § II :

$$\Delta t \left\{ \Delta y \left[ q'_x \left( x - \frac{\Delta x}{2}, y \right) - q'_x \left( x + \frac{\Delta x}{2}, y \right) \right] + \Delta x \left[ q'_y \left( x, y - \frac{\Delta y}{2} \right) - q'_y \left( x, y + \frac{\Delta y}{2} \right) \right] \right\} + q'_{\nu} \Big|_{z=0} \Delta x \Delta y = S' \Delta x \Delta y [\varphi_1(t + \Delta t) - \varphi_1(t)],$$

donde

$q'_{\nu} \Big|_{z=b_1}$  es la descarga vertical a través de la frontera  $AT \leftrightarrow AF1$

Al tomar el límite cuando  $\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0$ , dividiendo entre  $\Delta x \Delta y \Delta t$  y tomando en cuenta que  $q'_{\nu} = -k' \frac{\partial \varphi'}{\partial z}$ , se obtiene para el acuífero AF1:

$$\text{div} (T_1 \text{ grad } \varphi_1) - k' \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \Big|_{z=0} = S_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$$

Para el acuífero AT, donde el flujo es sólo vertical

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( k' \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) = S'_A \frac{\partial \varphi'}{\partial t}$$

$\gamma$ , de la misma forma que el acuífero AF1, se obtiene para AF2:

$$\operatorname{div}(T_2 \operatorname{grad} \varphi_2) + k' \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \Big|_{z=b'} = S_2' \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$$

En el caso de un medio homogéneo,  $T_i$  es constante y las ecuaciones se reducen a:

$$\nabla^2 \varphi_i + \frac{k'}{T_i} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \Big|_{z=b'} = \frac{S_i'}{T_i}$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales se completa con condiciones apropiadas de tres tipos:

1- Las condiciones iniciales, que dan el estado del sistema al tiempo  $t=0$ . A pesar de que cualquier estado particular puede ser manejado, parece razonable suponer un estado de equilibrio para  $t=0$ , es decir,

$$\varphi \begin{cases} \varphi_1(x, y, 0) = 0 \\ \varphi'(x, y, z, 0) = 0 \\ \varphi_2(x, y, 0) = 0 \end{cases}$$

2- Las condiciones de frontera; en el caso de que las condiciones iniciales sean de equilibrio,

las condiciones de frontera provocarán el movimiento del agua. Estas pueden provenir de la presencia de uno o varios pozos, por los cuales se puede bombear agua o inyectarla.

Deben también reflejar el hecho de que las capas bajo AF1 y sobre AF2 son totalmente impermeables, i.e.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-b_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=b_1+b_2} = 0$$

Finalmente, deben reflejar el hecho de que, al alejarse mucho de las perturbaciones, como la acción del bombeo (por ejemplo), la influencia en el flujo desaparece:

$$\lim_{x,y \rightarrow \infty} \varphi_1(x,y,t) = 0 \quad ;$$

$$\lim_{x,y \rightarrow \infty} \varphi_2(x,y,t) = 0 \quad ;$$

$$\lim_{x,y \rightarrow \infty} \varphi'(x,y,z,t) = 0 \quad ;$$

3- Las condiciones de continuidad; es obvio que la pérdida de nivel  $\varphi$  en un medio, por heterogéneo que sea, es una función continua de espacio y tiempo. Aquí, para facilidad del tratamiento,

se ha dividido  $\Psi$  en tres partes,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  y  $\Psi'$ . Debemos, por tanto, agregar como condición de continuidad que

$$\Psi_1(x, y, t) = \Psi'(x, y, 0, t)$$

$$\Psi_2(x, y, t) = \Psi'(x, y, b, t)$$

con lo que se asegura la continuidad de  $\Psi$  en las interfaces entre AF1 y AT y entre AF2 y AT.

En este momento se tienen las mismas relaciones bajo las cuales se establecen las ecuaciones integro diferenciales del sistema por Herrera y Rodarte [1973] y que son las que manejaremos en esta tesis. La única diferencia es que están escritas en función del abatimiento  $S$  y  $S'$  en lugar del nivel  $\Psi$  y  $\Psi'$ ; pero como se tiene que  $\Delta\Psi = -\Delta S$ , los dos sistemas son equivalentes.

Para analizar el sistema desde un punto de vista analítico, Herrera y Rodarte [1973] lo transformaron en un sistema de dos ecuaciones integro diferenciales después de introducir una función de memoria de forma conveniente. Esto se analiza a continuación:

IV. Ecuaciones integro diferenciales para un sistema de acuíferos semiconfinados [Herrera y Rodarte 1973].

En esta sección se obtendrán las ecuaciones integrodiferenciales, equivalentes a las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el comportamiento transitorio de sistemas múltiples de acuíferos, para el caso particular de un sistema de dos acuíferos separados por una capa semipermeable (acuiturdo) (figura 2).

De acuerdo con Hantush [1960] y Neuman & Witherspoon [1969 b] el problema se puede formular de la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial y^2} + \frac{k'}{T_1} \left( \frac{\partial s_1'}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial s_1}{\partial t} \quad (1.1a)$$

$$\frac{\partial^2 s_1'}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial s_1'}{\partial t} \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial y^2} - \frac{k'}{T_2} \left( \frac{\partial s_1'}{\partial z} \right)_{z=b'} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial s_2}{\partial t} \quad (1.1c)$$

con las condiciones

$$S'(x, y, 0, t) = S_1(x, y, t) \quad (1.2a)$$

$$S'(x, y, b', t) = S_2(x, y, t) \quad (1.2b)$$

$$S_1(x, y, 0) = 0 \quad (1.2c)$$

$$S_2(x, y, 0) = 0 \quad (1.2d)$$

$$S'(x, y, z, 0) = 0 \quad (1.2e)$$

Estas ecuaciones se pueden transformar en el siguiente sistema: [Herrera y Rodarte 1973]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} - C_1 \int_0^t \frac{\partial S_1}{\partial t}(x, y, t-\tau) f(\alpha'\tau/b'^2) d\tau \\ + C_1 \int_0^t \frac{\partial S_2}{\partial t}(x, y, t-\tau) h(\alpha'\tau/b'^2) d\tau = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.3a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2} - C_2 \int_0^t \frac{\partial S_2}{\partial t}(x, y, t-\tau) f(\alpha'\tau/b'^2) d\tau \\ + C_2 \int_0^t \frac{\partial S_1}{\partial t}(x, y, t-\tau) h(\alpha'\tau/b'^2) d\tau = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial S_2}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.3b)$$

$$\begin{aligned} S'(x, y, z, t) = \int_0^t \frac{\partial S_1}{\partial t}(x, y, t-\tau) u(z, \tau) d\tau \\ + \int_0^t \frac{\partial S_2}{\partial t}(x, y, t-\tau) v(z, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.3c)$$

donde

$$f(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \quad (1.4)$$

$$h(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t} \quad (1.5)$$

$$C_i = \frac{k'}{\tau_i b'} \quad i = 1, 2 \quad (1.6)$$

$$t' = \frac{\alpha' t}{b'^2} \quad (1.7)$$

y las funciones auxiliares  $u, v$  cumplen ciertas condiciones [ver Herrera y Rodarte 1973].

(ver en el capítulo 3, gráficas de las funciones de memoria y de influencia  $f$  y  $h$ )

El sistema se puede transformar, usando variables adimensionales para simplificarlo, de la siguiente forma:

Si  $C_i = \frac{k'}{\tau_i b'} = \frac{k'}{k_i b_i b'}$ , dividimos la ecuación (1.3a) entre  $C_i$

$$\frac{\partial^2 s_1}{\partial (\alpha_i^{1/2} x)^2} + \frac{\partial^2 s_1}{\partial (\alpha_i^{1/2} y)^2} - \int_0^t \frac{\partial s_1}{\partial t}(x, y, t-z) f\left(\frac{\alpha_i' z}{b_i'^2}\right) dz + \int_0^t \frac{\partial s_2}{\partial t}(x, y, t-z) h\left(\frac{\alpha_i' z}{b_i'^2}\right) dz = \frac{1}{\alpha_i C_i} \frac{\partial s_1}{\partial t} \quad (1.8a)$$

donde

$$\alpha_1 c_1 = \frac{T_1}{S_1} \cdot \frac{k'}{T_1 b'} = \frac{k'}{b' S_1} \left( \frac{\alpha'}{b'} \cdot \frac{b'}{\alpha'} \right) = \frac{k' b'}{\alpha' S_1} \left( \frac{\alpha'}{b'^2} \right)$$

Si se define la variable adimensional  $\alpha_1$  como:

$$\alpha_1 = \frac{k' b'}{\alpha' S_1} \quad (1.9)$$

y se sustituye junto con (1.7) en (1.8a), se obtiene

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial (c_1^{1/2} x)^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial (c_1^{1/2} y)^2} - \int_0^{t'} \frac{\partial S_1}{\partial t'} (t'-z) f(z) dz + \int_0^{t'} \frac{\partial S_2}{\partial t'} (t'-z) h(z) dz = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial S_1}{\partial t'} \quad (1.10a)$$

Ademas se definen las variables adimensionales

$$\xi_i = x c_i^{1/2} = x \left( \frac{k'}{k_i b_i b'} \right)^{1/2} \quad i=1,2$$

$$\eta_i = y c_i^{1/2} = y \left( \frac{k'}{k_i b_i b'} \right)^{1/2} \quad i=1,2$$

$$r = r \left( \frac{k'}{k_i b_i b'} \right)^{1/2} = \left( \xi_i^2 + \eta_i^2 \right)^{1/2} = r c_i^{1/2}$$

y se sustituyen en (1.10a), finalmente

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S_1}{\partial r} \right) - \int_0^{t'} \frac{\partial S_1}{\partial t'} (t'-z) f(z) dz + \int_0^{t'} \frac{\partial S_2}{\partial t'} (t'-z) h(z) dz = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial S_1}{\partial t'} \quad (1.11a)$$



En la ecuación (1.3b) se divide entre  $c_2$  y se multiplican los dos primeros términos por  $\frac{c_1}{c_2}$ :

$$\frac{c_1}{c_2} \left[ \frac{\partial^2 S_2}{\partial (c_1' x)^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial (c_1' y)^2} \right] - \int_0^{t'} \frac{\partial S_2}{\partial t'} (t'-z) f(z) dz + \int_0^{t'} \frac{\partial S_1}{\partial t'} (t'-z) h(z) dz = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial S_2}{\partial t'} \quad (1.10b)$$

donde  $\alpha_2 = \frac{k' b'}{a' S_2}$

al utilizar las definiciones para  $\xi_i, \eta_i, R$  y definiendo

$w = \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_2 b_2}{k_1 b_1}$ , se obtiene finalmente

$$\frac{w}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S_2}{\partial r} \right) - \int_0^{t'} \frac{\partial S_2}{\partial t'} (t'-z) f(z) dz + \int_0^{t'} \frac{\partial S_1}{\partial t'} (t'-z) h(z) dz = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial S_2}{\partial t'} \quad (1.11b)$$

En el siguiente capítulo se tratará al sistema (1.11), para el cual se obtendrán soluciones para  $S_1$  y  $S_2$  por el método de Galerkin y aplicando el esquema de Crank-Nicolson. (Toda referencia a  $t$  en el próximo capítulo será referencia a  $t'$ , para simplificar la notación)

## CAPITULO 2

;

SOLUCION DE LAS ECUACIONES DEL SISTEMA

---

## CAPITULO II

Considérese el sistema (1.11)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S_1}{\partial r} \right) - \int_0^t \frac{\partial S_1(t-\tau) f(\tau) d\tau}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial S_2(t-\tau) h(\tau) d\tau}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$\frac{w}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S_2}{\partial r} \right) - \int_0^t \frac{\partial S_2(t-\tau) f(\tau) d\tau}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial S_1(t-\tau) h(\tau) d\tau}{\partial t} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (2.1b)$$

$r, t \geq 0$

En este momento las ecuaciones están acopladas pero, como más adelante se verá, se podrán desacoplar debido a las aproximaciones de las funciones de memoria e influencia.

Se consideran las siguientes condiciones iniciales y de frontera

$$S_1(r, 0) = S_2(r, 0) = 0 \quad r \geq 0 \quad (2.2a)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_1(r, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} S_2(r, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (2.2b)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial S_1}{\partial r} = \hat{c}^1 \quad t > 0 \quad (2.2c)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial S_2}{\partial r} = \hat{c}^2 \quad t > 0 \quad (2.2d)$$

En la aproximación numérica se truncará el sistema al intervalo  $[0, R]$  y la condición (2.2b) queda como

$$S_1(R, t) = S_2(R, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (2.2b')$$

En las ecuaciones (2.1)  $f(t)$  y  $h(t)$  tienen la forma

$$f(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \quad (2.3)$$

$$h(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t} \quad (2.4a)$$

que puede reescribirse como

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [e^{-(n-1)^2 \pi^2 t} - e^{-n^2 \pi^2 t}] \quad (2.4b)$$

Al multiplicar las ecuaciones (2.1) por  $r$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S_1}{\partial r} \right) - \int_0^t r \frac{\partial S_1(t-z)}{\partial t} f(z) dz \\ + \int_0^t r \frac{\partial S_2(t-z)}{\partial t} h(z) dz = \frac{r}{\alpha_1} \frac{\partial S_1}{\partial t} \quad (2.5a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial S_2}{\partial r} \right) - \int_0^t r \frac{\partial S_2(t-z)}{\partial t} f(z) dz \\ + \int_0^t r \frac{\partial S_1(t-z)}{\partial t} h(z) dz = \frac{r}{\alpha_2} \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (2.5b) \end{aligned}$$

## Aproximación Numérica.

Para resolver es sistema de ecuaciones (2.5) se aplicará el método Galerkin que consiste en transformar el problema en una forma variacional equivalente y la solución aproximada es una combinación lineal  $\sum q_j \varphi_j$  de unas funciones base  $\varphi_j(x)$ , los coeficientes  $q_j$  son los que calcula la computadora.

En el método del elemento finito las funciones base son polinomios seccionalmente continuos ("piecewise polynomials"). [Strang & Fix]

El conjunto de polinomios "chapeau" será utilizado como funciones base.

Descripción de los polinomios "Chapeau":

Sea  $\Delta r: 0 = r_1 < r_2 < \dots < r_n = R$  una partición cualquiera del intervalo  $[0, R]$ , con los puntos de la malla en  $r_i$ .

Las funciones base "chapeau" son el conjunto de polinomios seccionalmente continuos  $P(x) \in H^1(0, R)$  y es de grado 1 en cada subintervalo.

Dichos polinomios se definen de la siguiente forma.

$$\text{Sean } d_i = \frac{r - r_i}{r_i - r_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, L$$

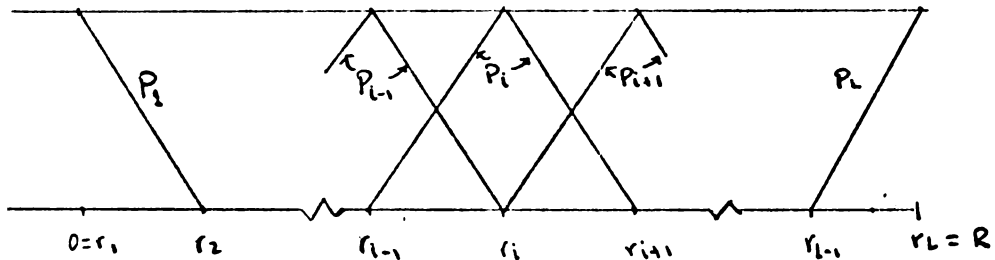
$$\text{y } \beta_i = \frac{r - r_i}{r_{i+1} - r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, L-1$$

entonces

$$P_1 = \begin{cases} 1 - \beta_1 & r \in [r_1, r_2] \\ 0 & r \in [r_2, r_L] \end{cases} \quad (2.6a)$$

$$P_i = \begin{cases} 1 + d_i & r \in [r_{i-1}, r_i] \\ 1 - \beta_i & r \in [r_i, r_{i+1}] \\ 0 & r \in \{ [0, R] - [r_{i-1}, r_{i+1}] \} \end{cases} \quad (2.6b)$$

$$i = 2, 3, \dots, L-1$$



$$P_L = \begin{cases} 1 + d_L & r \in [r_{L-1}, r_L] \\ 0 & r \in [r_1, r_{L-1}] \end{cases} \quad (2.6c)$$

Se puede ver entonces, de la definición, que

$$\text{para } j = i \quad P_j(r_i) = 1 \quad (2.7a)$$

$$\text{y para } j \neq i \quad P_j(r_i) = 0 \quad (2.7b)$$

Para aplicar el método Galerkin, se definen las aproximaciones a  $S_1(r, t)$  y  $S_2(r, t)$  como:

$$S_1(r, t) = \sum_{i=1}^L \beta_i(t) P_i(r) \quad (2.8)$$

$$S_2(r, t) = \sum_{i=1}^L \gamma_i(t) P_i(r) \quad (2.9)$$

con  $\gamma_L = \beta_L = 0$  por la condición de frontera (2.26')

Si se escribe el sistema de ecuaciones diferenciales con las aproximaciones (2.8) y (2.9) como:

$$L \tilde{u} = 0$$

el método Galerkin garantiza que  $\tilde{u}$  es la más cercana a  $u$  en el sentido de la norma:

$$\langle u, v \rangle = \int_0^R (Lu)v \, dr$$

Aplicando el método de Galerkin, se multiplican las ecuaciones (2.5) por  $P_j(r)$  y se integran sobre todo el intervalo, obteniendo:

$$\int_0^R (r S_{1r})_r P_j dr - \frac{1}{\alpha a_1} \int_0^R r S_{1t} P_j dr$$

$$= \int_0^R r P_j S_{1t} * f dr - \int_0^R r P_j S_{2t} * h dr \quad (2.10a)$$

$$\int_0^R (r S_{2r})_r P_j dr - \frac{1}{\alpha a_2} \int_0^R r S_{2t} P_j dr$$

$$= \int_0^R r P_j S_{2t} * f dr - \int_0^R r P_j S_{2t} * h dr \quad (2.10b)$$

donde  $u * v = \int_0^t u(z) v(t-z) dz = \int_0^t u(t-z) v(z) dz$  ,  $j=1, 2, \dots, L-1$

Si en las ecuaciones (2.10) se integra por partes el primer elemento, al aplicar las condiciones de frontera (2.2b), (2.2c) y (2.2d), se obtiene:

$$-\hat{c} \cdot P_j(0) - \int_0^R (r S_{1r}) P_j' dr - \frac{1}{\alpha a_1} \int_0^R r S_{1t} P_j dr$$

$$= \int_0^R r P_j S_{1t} * f dr - \int_0^R r P_j S_{2t} * h dr \quad \therefore (2.11a)$$



$$\begin{aligned} \omega \hat{C}^2 P_j(t) &= \int_0^R \omega(r, S_{2,r}) P_j' dr - \frac{1}{\alpha_{a_2}} \int_0^R r S_{2,t} P_j dr \\ &= \int_0^R r P_j S_{2,t} * f dr - \int_0^R r P_j S_{2,t} * h dr \quad (2.11b) \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, L-1$$

Analícese ahora la aproximación para las convoluciones  $S_{1,t} * f$  y  $S_{2,t} * f$

$$S_{1,t} * f = \int_0^t S_{1,t}(t-z) f(z) dz$$

$$\text{donde } f(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2/t} \right)$$

la aproximación que sigue elimina la necesidad de guardar los valores anteriores de la solución, sin embargo,  $f(t)$  tiene una singularidad en 0 pero es integrable. Entonces se hace

$$f(t) = 1 + 2g(t)$$

y se define  $g(t)$  como

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t}$$

Entonces

$$\begin{aligned} S_{i,t} * f &= \int_0^t S_{i,t}(t-z) dz + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t S_{i,t}(t-z) e^{-n^2 \pi^2 z} dz \\ &= S_i + 2 \int_0^t S_{i,t}(t-z) g(z) dz \\ &= S_i + 2 I \end{aligned}$$

donde

$$I = \int_0^t S_{i,t}(t-z) g(z) dz$$

Se integra por partes, obteniéndose

$$I = S_{i,t}(t-z) G(z) \Big|_0^t + \int_0^t S_{i,tt}(t-z) G(z) dz$$

donde  $G(t) = \int_0^t g(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - e^{-n^2 \pi^2 t}}{n^2 \pi^2} \right)$

y, por la condición (2.2a)

$$I = \int_0^t S_{i,tt}(t-z) G(z) dz$$

Si se aproxima  $G$  con una función  $G_a$ , y se integra por partes, se obtiene

$$\begin{aligned} I \approx I_a &= \int_0^t S_{i,tt}(t-z) G_a(z) dz \\ &= -S_{i,t}(t-z) G_a(z) \Big|_0^t + \int_0^t S_{i,t}(t-z) G'_a(z) dz \end{aligned}$$

y por la condición (2.2a)

$$I_a = G_a(0) S_{1,t} + \int_0^t S_{1,t}(t-z) G'_a(z) dz$$

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^t g(z) dz = \int_0^\infty g(z) dz - \int_t^\infty g(z) dz \\ &= G(\infty) - \int_t^\infty g(z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\infty) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2 \pi^2 z} dz = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-n^2 \pi^2 z}}{n^2} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

por otro lado

$$\int_t^\infty \sum_{n=1}^N e^{-n^2 \pi^2 z} dz = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{e^{-n^2 \pi^2 t}}{n^2}$$

y entonces

$$G_N(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{e^{-n^2 \pi^2 t}}{n^2}$$

$$G'_N(t) = \sum_{n=1}^N e^{-n^2 \pi^2 t}$$

$$G_N(0) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$$

entonces, si se aproxima  $G_1$  con  $G_N$ , se obtiene

$$I_N = G_N(0) S_{1t} + \int_0^t S_{1t}(z) \sum_{n=1}^N e^{-n^2 \pi^2 (t-z)} dz$$

y finalmente la convolución queda aproximada:

$$S_{1t} * f = S_1 + 2 G_N(0) S_{1t} + 2 \sum_{n=1}^N e^{-n^2 \pi^2 t} \int_0^t S_{1t}(z) e^{-n^2 \pi^2 z} dz \quad (2.12)$$

Siguiendo un proceso análogo para  $S_{2t} * f$

$$S_{2t} * f = S_2 + 2 G_N(0) S_{2t} + 2 \sum_{n=1}^N e^{-n^2 \pi^2 t} \int_0^t S_{2t}(z) e^{-n^2 \pi^2 z} dz \quad (2.13)$$

Analícese la aproximación para las otras convoluciones, es decir  $S_{1t} * h$  y  $S_{2t} * h$

Para aproximar  $h(t)$ , ésta se puede reescribir como

$$h(t) = \sum_{m=0}^M a_m e^{-\alpha_m t} \quad (2.13a)$$

Si se trunca la serie infinita en  $M$ , se obtiene la primera aproximación con

$$a_m = [1, -2, 2, -2, \dots, 2 \cdot (-1)^{M-1}, (-1)^M]^T$$

$$\alpha_m = [0, \pi^2, 4\pi^2, \dots, M^2 \pi^2]^T,$$

Esta aproximación es buena para tiempos grandes (ver gráficas en el siguiente capítulo), pero desvía de la  $t$  real cerca de cero. En el siguiente capítulo se discuten algunas formas de escoger  $a_m$  y  $\alpha_m$  para mejorar la aproximación.

Las convoluciones quedan como:

$$S_{1t} * h = \sum_{m=0}^M a_m e^{-\alpha_m t} \int_0^t S_{1t}(z) e^{\alpha_m z} dz \quad (2.14)$$

$$y \quad S_{2t} * h = \sum_{m=0}^M a_m e^{-\alpha_m t} \int_0^t S_{2t}(z) e^{\alpha_m z} dz \quad (2.15)$$

Tómense las ecuaciones (2.11) y sustitúyanse en ellas las aproximaciones a las convoluciones  $S_{1t} * f$ ,  $S_{2t} * f$ ,  $S_{1t} * h$  y  $S_{2t} * h$  es decir (2.12), (2.13), (2.14) y (2.15), junto con las aproximaciones (2.8) y (2.9).

La ecuación (2.11a) queda

$$\begin{aligned}
 -\hat{c}' P_j(0) - \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i', P_j' \rangle \beta_i - \frac{1}{\alpha_{a_1}} \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i, P_j \rangle \beta_i = \\
 \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i, P_j \rangle \beta_i + 2 G_N(0) \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i, P_j \rangle \beta_i \\
 + 2 \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i, P_j \rangle \int_0^t \beta_i' e^{-n^2 \pi^2 (t-\tau)} d\tau + \sum_{m=0}^M a_m \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i, P_j \rangle \int_0^t \beta_i' e^{-\alpha_m(t-z)} dz
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$j = 1, 2, \dots, L-1$

donde se define  $\langle f, g \rangle = \int_0^R f g \, r dr$

la ecuación (2.16) puede reescribirse en forma matricial

$$-R' - [A+B]\beta - 2B \sum_{n=1}^N \int_0^t \beta' e^{-n^2 \pi^2 (t-z)} dz$$

$$+ B \sum_{m=0}^M a_m \int_0^t \gamma' e^{-\alpha_m (t-z)} dz = \left( \frac{1}{\alpha_1} + 2G_N(0) \right) B \beta'$$

y finalmente queda

$$-R' - [A+B]\beta - 2B D' + B D^2 = \alpha'_N B \beta' \quad (2.17)$$

donde

$$R' = [\hat{c}' P_1(0), 0, \dots, 0]^T$$

$$A = \{a_{ij}\} \text{ con } a_{ij} = \langle P_i', P_j' \rangle \quad i, j = 1, 2, \dots, L-1$$

$$B = \{b_{ij}\} \text{ con } b_{ij} = \langle P_i, P_j \rangle \quad i, j = 1, 2, \dots, L-1$$

$$D' = \sum_{n=1}^N \int_0^t \beta' e^{-n^2 \pi^2 (t-z)} dz$$

$$D^2 = \sum_{m=0}^M a_m \int_0^t \gamma' e^{-n^2 \pi^2 (t-z)} dz$$

$$\alpha'_N = \frac{1}{\alpha_1} + 2G_N(0)$$

$$G_N(0) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$$

$$\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{L-1}]^T$$

$$\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{L-1}]^T$$

(ver apéndice B para la evaluación de las integrales  $\langle P_i, P_j \rangle$  y  $\langle P'_i, P'_j \rangle$ )

La ecuación (2.11b) se transforma en la misma forma obteniéndose

$$\begin{aligned} -\omega \hat{c}^2 P_j(0) - \omega \sum_{i=1}^{L-1} \langle P'_i, P'_j \rangle \gamma_i - \frac{1}{da_2} \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i, P_j \rangle \beta_i = \\ \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i, P_j \rangle \gamma_i + 2G_N(0) \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i, P_j \rangle \gamma'_i \\ + 2 \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i, P_j \rangle \int_0^t \gamma'_i e^{-n^2 \pi^2 (t-z)} dz + \sum_{m=0}^M a_m \sum_{i=1}^{L-1} \langle P_i, P_j \rangle \int_0^t \beta'_i e^{-\alpha_m (t-z)} dz \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$j = 1, 2, \dots, L-1$$

Que se escribe en forma matricial como

$$\begin{aligned} -R^2 - [\omega A + B] \gamma - 2B \sum_{n=1}^N \int_0^t \gamma' e^{-n^2 \pi^2 (t-z)} dz \\ + B \sum_{m=0}^M a_m \int_0^t \beta' e^{-\alpha_m (t-z)} dz = \left( \frac{1}{da_2} + 2G_N(0) \right) B \gamma' \end{aligned}$$

y finalmente queda

$$-R^2 - [\omega A + B] \gamma - 2BE^1 + BE^2 = \alpha_N^2 B \gamma^1 \quad (2.19)$$

donde:

$$R^2 = [\omega \hat{C}^2 P_1(0), 0, 0, \dots, 0]^T$$

$$E^1 = \sum_{n=1}^N \int_0^t \gamma^1 e^{-n^2 \pi^2 (t-z)} dz$$

$$E^2 = \sum_{m=0}^M a_m \int_0^t \beta^1 e^{-n^2 \pi^2 (t-z)} dz$$

$$\alpha_N^2 = \frac{1}{\alpha_{a2}} + 2 G_N(0)$$

Las ecuaciones (2.17) y (2.19) forman un sistema de ecuaciones integrodiferenciales ordinarias acopladas, en  $t$ , para las variables  $\beta(t)$  y  $\gamma(t)$

Para el tratamiento numérico se aplicará el esquema de Crank-Nicolson para la iteración en el tiempo y que centra la solución en  $t + \frac{\Delta t}{2}$ , y da un error de  $(\Delta t)^2$  global [Strang & Fix], y debido a la forma de las ecuaciones es posible



Aplicárese el esquema Crank-Nicolson en la ecuación (2.17) y se obtiene

$$\begin{aligned} -R^1\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - [A+B] \frac{\beta^{n+1} + \beta^n}{2} - 2B D^1\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ + B D^2\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \alpha_N^1 B \frac{\beta^{n+1} - \beta^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde

$$\beta^{n+1} = \beta(t + \Delta t)$$

$$\beta^n = \beta(t)$$

Por otra parte al aplicar el esquema Crank-Nicolson en la ecuación (2.19) se obtiene:

$$\begin{aligned} -R^2\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - [WA+B] \frac{\gamma^{n+1} + \gamma^n}{2} - 2B E^1\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) \\ + B E^2\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \alpha_N^2 B \frac{\gamma^{n+1} - \gamma^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde

$$\gamma^{n+1} = \gamma(t + \Delta t)$$

$$\gamma^n = \gamma(t)$$

Calcúlese la aproximación para los términos

$$D'(t + \frac{\Delta t}{2}) \text{ en (2.20)}$$

$$\text{y } E'(t + \frac{\Delta t}{2}) \text{ en (2.21)}$$

$$\text{Sea } D'(t) = \sum_{m=1}^N H_m(t)$$

$$\text{con } H_m(t) = \int_0^t \beta' e^{-m^2 \pi^2 (t-z)} dz \quad (2.22)$$

entonces

$$D'(t + \frac{\Delta t}{2}) = \sum_{m=1}^N H_m(t + \frac{\Delta t}{2})$$

$$\text{y sea } H_m(t + \frac{\Delta t}{2}) = e^{-m^2 \pi^2 (t + \frac{\Delta t}{2})} U_m(t + \frac{\Delta t}{2}) \quad (2.23)$$

$$\text{con } U_m(t + \frac{\Delta t}{2}) = \int_0^{t + \frac{\Delta t}{2}} \beta' e^{m^2 \pi^2 z} dz$$

Entonces

$$\begin{aligned} U_m(t + \frac{\Delta t}{2}) &= \frac{1}{2} \int_0^t \beta' e^{m^2 \pi^2 z} dz + \frac{1}{2} \int_0^{t + \Delta t} \beta' e^{m^2 \pi^2 z} dz \\ &= \int_0^t \beta' e^{m^2 \pi^2 z} dz + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t + \frac{\Delta t}{2}} \beta' e^{m^2 \pi^2 z} dz \\ &= U_m(t) + \frac{1}{2} \Delta t \beta'(t + \frac{\Delta t}{2}) e^{m^2 \pi^2 (t + \frac{\Delta t}{2})} \end{aligned}$$

y al sustituir este resultado en (2.23) se obtiene:

$$H_m(t + \frac{\Delta t}{2}) = e^{-m^2 \pi^2 (t + \frac{\Delta t}{2})} \left[ U_m(t) + \frac{1}{2} \Delta t \beta'(t + \frac{\Delta t}{2}) e^{m^2 \pi^2 (t + \frac{\Delta t}{2})} \right] \quad (2.23a)$$

Se utiliza la definición (2.22) junto con la ecuación (2.23) para obtener la fórmula recurrente:

$$H_m(t + \frac{\Delta t}{2}) = e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} H_m(t) + \frac{1}{2} \Delta t \beta'(t + \frac{\Delta t}{2})$$

y que al discretizar en el tiempo el segundo término nos conduce a:

$$D'(t + \frac{\Delta t}{2}) = \sum_{m=1}^N e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} H_m(t) + \frac{N}{2} [\beta(t + \Delta t) - \beta(t)] \quad (2.24)$$

Del mismo modo, si se define

$$E'(t) = \sum_{m=1}^N I_m(t)$$

$$\text{con } I_m(t) = \int_0^t \gamma' e^{-n^2 \pi^2 (t-z)} dz \quad (2.25)$$

entonces

$$E'(t + \frac{\Delta t}{2}) = \sum_{m=1}^N I_m(t + \frac{\Delta t}{2})$$

Siguiendo un desarrollo análogo al anterior, se obtiene:

$$E'(t + \frac{\Delta t}{2}) = \sum_{m=1}^N e^{-n^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} I_m(t) + \frac{N}{2} [\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)] \quad (2.26)$$

De las definiciones (2.22) y (2.25) se puede ver que

$$\begin{aligned} H_m(0) &= I_m(0) = 0 \\ D'(0) &= E'(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Es necesario encontrar una aproximaciones para  $H_m(t + \Delta t)$  e  $I_m(t + \Delta t)$ , lo que se hace a continuación

$$H_m(t + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{1}{2} (H_m(t + \Delta t) + H_m(t))$$

$$H_m(t + \Delta t) = 2H_m(t + \frac{\Delta t}{2}) - H_m(t)$$

Al utilizar la expresión (2.23a) se obtiene

$$H_m(t + \Delta t) = 2 \left[ e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} H_m(t) + \frac{1}{2} \Gamma^n \right] - H_m(t)$$

$$H_m(t + \Delta t) = \left[ 2e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} - 1 \right] H_m(t) + \Gamma^n \quad (2.28)$$

$$\text{donde } \Gamma^n = \beta^{n+1} - \beta^n$$

y siguiendo un proceso análogo se llega a:

$$I_m(t + \Delta t) = \left[ 2e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} - 1 \right] I_m(t) + \Phi^n \quad (2.29)$$

$$\text{donde } \Phi^n = \gamma^{n+1} - \gamma^n$$

Calcúlense ahora las aproximaciones para

$$D^2(t + \frac{\Delta t}{2}) \quad \text{y} \quad E^2(t + \frac{\Delta t}{2})$$

Para encontrar expresiones que nos permitan evaluar  $D^2(t + \frac{\Delta t}{2})$  y  $E^2(t + \frac{\Delta t}{2})$ , se seguirá un proceso diferente al utilizado para encontrar las expresiones de  $D'(t + \frac{\Delta t}{2})$  y  $E'(t + \frac{\Delta t}{2})$

Se considera el desacoplamiento del sistema utilizando soluciones en tiempos anteriores para encontrar las expresiones para  $D^2$  y  $E^2$ .

$$\text{Sea } D^2(t + \frac{\Delta t}{2}) = \int_0^{t + \frac{\Delta t}{2}} \gamma'(z) h(t + \frac{\Delta t}{2} - z) dz$$

$$D^2(t + \frac{\Delta t}{2}) = \int_0^t \gamma'(z) h(t + \frac{\Delta t}{2} - z) dz + \int_t^{t + \frac{\Delta t}{2}} \gamma'(z) h(t + \frac{\Delta t}{2} - z) dz$$

$$D^2(t + \frac{\Delta t}{2}) = \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} D_m^n + \int_0^{\frac{\Delta t}{2}} \gamma'(t+d) h(\frac{\Delta t}{2} - z) dz$$

$$\text{con } D_m^n = a_m e^{-\alpha_m t} \int_0^t \gamma'(z) e^{\alpha_m z} dz$$

$$D^2(t + \frac{\Delta t}{2}) = \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} D_m^n + \gamma'(t + \frac{\Delta t}{4}) h(\frac{\Delta t}{4}) \frac{\Delta t}{2}$$

$$D^2(t + \frac{\Delta t}{2}) = \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} D_m^n + \Phi^{n-1/2} h(\frac{\Delta t}{4}) \quad (2.30)$$

Al tener las ecuaciones desacopladas, el valor de  $\bar{\Phi}^{n-1/2}$  se extrapola utilizando los valores  $\bar{\Phi}^{n-1}$  y  $\bar{\Phi}^{n-2}$ , obteniéndose que

$$\bar{\Phi}^{n+1/2} = \frac{3}{2} \bar{\Phi}^{n-1} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}^{n-2} \quad (2.31)$$

Para encontrar el valor de  $D_m^{n+1}$  se utiliza el valor ya obtenido  $\bar{\Phi}^n$  y entonces

$$\begin{aligned} D_m^{n+1} &= \int_0^{t+\Delta t} \gamma'(z) a_m e^{-\alpha_m(t+\Delta t-z)} dz \\ &= \int_0^t \gamma'(z) a_m e^{-\alpha_m(t+\Delta t-z)} dz + \int_t^{t+\Delta t} \gamma'(z) a_m e^{-\alpha_m(t+\Delta t-z)} dz \end{aligned}$$

$$D_m^{n+1} = e^{-\alpha_m \Delta t} D_m^n + \bar{\Phi}^n a_m e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} \quad (2.32)$$

Siguiendo un proceso análogo al anterior, se obtienen expresiones para  $E^2(t + \frac{\Delta t}{2})$  y  $E^2(t + \Delta t)$  como sigue:

$$E^2(t + \frac{\Delta t}{2}) = \int_0^{t + \frac{\Delta t}{2}} \beta'(z) h(t + \frac{\Delta t}{2} - z) dz$$

$$E^2(t + \frac{\Delta t}{2}) = \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} E_m^n + \Gamma^{n-1/2} h(\frac{\Delta t}{4}) \quad (2.33)$$

$$\text{con } E_m^n = a_m e^{-\alpha_m t} \int_0^t \beta' e^{\alpha_m c} dc$$

$$y \Gamma^{n-1/2} = \frac{3}{2} \Gamma^{n-1} - \frac{1}{2} \Gamma^{n-2}$$

y finalmente

$$E_m^{n+1} = e^{-\alpha_m \Delta t} E_m^n + \Gamma^n a_m e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} \quad (2.34)$$

Al sustituir en la ecuación (2.20) las aproximaciones (2.24) y (2.30) se obtiene

$$\begin{aligned} -R'(t + \frac{\Delta t}{2}) - [A+B] \frac{\beta^{n+1} + \beta^n}{2} - 2B \left[ \sum_{m=1}^N e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} H_m(t) + \frac{N}{2} (\beta^{n+1} - \beta^n) \right] \\ + B \left[ \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} D_m^n + \Phi^{n-1/2} h\left(\frac{\Delta t}{4}\right) \right] = \alpha'_N B \frac{\beta^{n+1} - \beta^n}{\Delta t} \quad (2.35) \end{aligned}$$

y factorizando se obtiene

$$\begin{aligned} -R'(t + \frac{\Delta t}{2}) - \left[ (A+B) \frac{1}{2} + \frac{\alpha'_N B}{\Delta t} \right] \beta^{n+1} - \left[ (A+B) \frac{1}{2} - \frac{\alpha'_N B}{\Delta t} \right] \beta^n \\ - 2B \left[ \sum_{m=1}^N e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} H_m(t) + \frac{N}{2} (\beta^{n+1} - \beta^n) \right] \\ + B \left[ \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} D_m^n + \Phi^{n-1/2} h\left(\frac{\Delta t}{4}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} & \left[ A \frac{\Delta t}{2} + \left( \frac{\Delta t}{2} + \alpha_N' + N \Delta t \right) B \right] \beta^{n+1} + \left[ A \frac{\Delta t}{2} + \left( \frac{\Delta t}{2} - \alpha_N' - N \Delta t \right) B \right] \beta^n \\ & = -\Delta t R' \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) - \Delta t B \left[ 2 \sum_{m=1}^N e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} I_m(t) - \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} \right] \Gamma_m^n + \Phi^{n-\frac{1}{2}} h \left( \frac{\Delta t}{4} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Se sustituyen en la ecuación (2.21) las aproximaciones (2.26) y (2.33), obteniéndose:

$$\begin{aligned} & -R^2 \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) - [\omega A + B] \frac{\gamma^{n+1} + \gamma^n}{2} - 2B \left[ \sum_{m=1}^N e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} I_m(t) + \frac{N}{2} (\gamma^{n+1} - \gamma^n) \right] \\ & + B \left[ \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} E_m^n + \Gamma^{n-1/2} h \left( \frac{\Delta t}{4} \right) \right] = \alpha_N^2 B \frac{\gamma^{n+1} - \gamma^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.37)$$

y factorizando, se obtiene:

$$\begin{aligned} & -R^2 \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) - \left[ (\omega A + B) \frac{1}{2} + \frac{\alpha_N^2 B}{\Delta t} \right] \gamma^{n+1} - \left[ (\omega A + B) \frac{1}{2} - \frac{\alpha_N^2 B}{\Delta t} \right] \gamma^n \\ & - 2B \left[ \sum_{m=1}^N e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} I_m(t) + \frac{N}{2} (\gamma^{n+1} - \gamma^n) \right] \\ & + B \left[ \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} E_m^n + \Gamma^{n-1/2} h \left( \frac{\Delta t}{4} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$



Finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \left[ A \frac{\omega \Delta t}{2} + \left( \frac{\Delta t}{2} + \alpha_N^2 + N \Delta t \right) B \right] \gamma^{n+1} + \left[ A \frac{\omega \Delta t}{2} + \left( \frac{\Delta t}{2} - \alpha_N^2 - N \Delta t \right) B \right] \gamma^n \\
 &= -\Delta t R^2 \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) - \Delta t B \left[ 2 \sum_{m=1}^N e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} \text{Im}(H) - \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} E_m^n + \right] \Gamma^{n-1/2} h \left( \frac{\Delta t}{4} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.38}$$

Si se expresa la ecuación (2.36) en forma matricial:

$$A_i^* \beta^{n+1} + B_i^* \beta^n = \mu
 \tag{2.39}$$

y tomando en cuenta que  $\Gamma^n = \beta^{n+1} - \beta^n$ , entonces

$$\beta^{n+1} = \Gamma^n + \beta^n$$

y la ecuación (2.39) queda como

$$A_i^* (\Gamma^n + \beta^n) + B_i^* \beta^n = \mu$$

obteniéndose que

$$\Gamma^n = A_i^{*-1} \left[ - (A_i^* + B_i^*) \beta^n + \mu \right]
 \tag{2.40}$$

donde

$$A_1^* = \left[ A \frac{\Delta t}{2} + \left( \frac{\Delta t}{2} + \alpha'_N + N \Delta t \right) B \right]$$

$$B_1^* = \left[ A \frac{\Delta t}{2} + \left( \frac{\Delta t}{2} - \alpha'_N - N \Delta t \right) B \right]$$

$$\mathcal{M} = -\Delta t R'(t + \frac{\Delta t}{2}) - \Delta t B \left[ 2 \sum_{m=1}^N e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} H_m(t) - \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} D_m^n + \bar{\Phi}^{n-1/2} h\left(\frac{\Delta t}{4}\right) \right]$$

y

$$A_1^* + B_1^* = (A + B) \Delta t$$

Ahora, exprese la ecuación (2.38) en forma matricial

$$A_2^* \gamma^{n+1} + B_2^* \gamma^n = \eta \quad (2.41)$$

y tomando en cuenta que

$$\bar{\Phi}^n = \gamma^{n+1} - \gamma^n$$

$$\text{entonces } \gamma^{n+1} = \bar{\Phi}^n + \gamma^n$$

por lo que la ecuación (2.41) queda de la forma

$$A_2^* (\bar{\Phi}^n + \gamma^n) + B_2^* \gamma^n = \eta$$

o bien, como

$$\bar{\Phi}^n = A_2^{*-1} [-(A_2^* + B_2^*) \gamma^n + \eta] \quad (2.42)$$

-45-

donde

$$A_2^* = \left[ A \frac{\omega \Delta t}{2} + \left( \frac{\Delta t}{2} + \alpha_N^2 + N \Delta t \right) B \right]$$

$$B_2^* = \left[ A \frac{\omega \Delta t}{2} + \left( \frac{\Delta t}{2} - \alpha_N^2 - N \Delta t \right) B \right]$$

$$\eta = -\Delta t R^2 \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) - \Delta t B \left[ 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq N}}^N e^{-m^2 \pi^2 \frac{\Delta t}{2}} I_m(t) - \sum_{m=0}^M e^{-\alpha_m \frac{\Delta t}{2}} \left[ E_m^n + \Gamma^{n+1/2} h\left(\frac{\Delta t}{4}\right) \right] \right]$$

y

$$A_2^* + B_2^* = (\omega A + B) \Delta t$$

CAPITULO 3

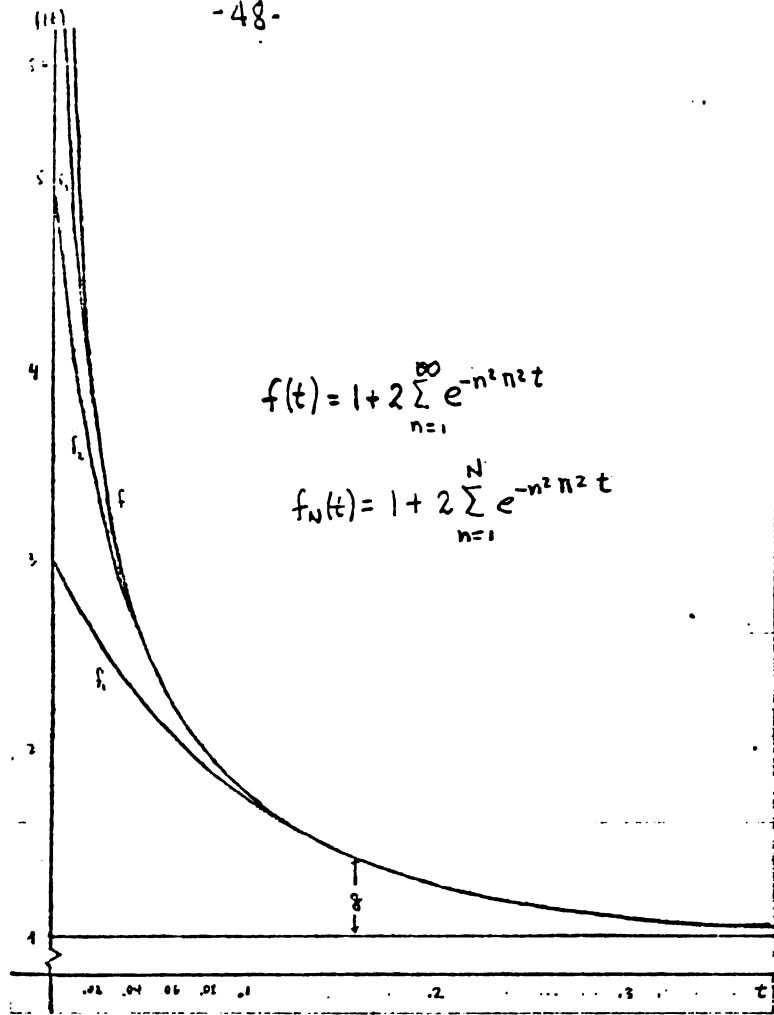
RESULTADOS Y GRAFICAS

### CAPITULO 3

Antes de analizar los resultados obtenidos, es necesario mencionar algunas características, tanto de las aproximaciones como del programa, como de la comparación con la solución analítica dada por Neuman & Witherspoon [1969c].

La función de memoria  $f$ .- como se puede ver en su forma, la función de memoria  $f$  tiene una singularidad en el cero y la aproximación que se dió aprovecha el hecho de que de todos modos  $f$  es integrable. (ver figura 3.1).

Como se puede observar en la figura, a pesar de ser  $f$  una serie infinita, se puede trincar el desarrollo en  $N$ , siendo  $N=5$  una buena aproximación de  $f$ . La función  $g$  tiene las mismas características que  $f$ , sólo que en lugar de ser asintótica a 1 lo es a cero.  $f_{N-1} = g_N$

Fig. 3.1 La función de memoria  $f$ 

La función de influencia  $h$ . la función de influencia  $h$  presenta dificultades

de otro tipo. Por su forma  $h(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t}$

Se puede ver que tiene derivadas de todo orden iguales a cero en  $t=0$ . Tiene otra expresión que es  $h(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(2n-1)^2}{4t}}$  (ver figura 3.2)

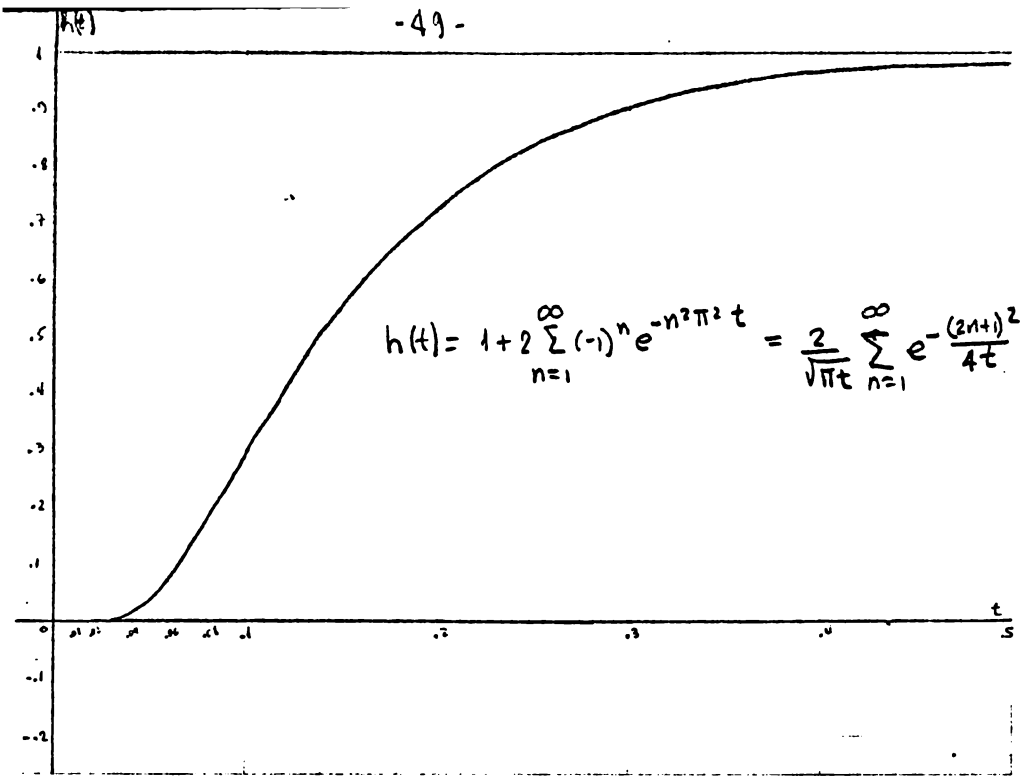


Fig. 3.2 La función de influencia  $h$

Esta segunda expresión es una excelente aproximación cuando se calcula a  $M$  términos, sobre todo en tiempos pequeños donde es suficiente  $M=1$  y  $M=2$  y para tiempos grandes basta tomar 3 ó 4 términos

Sin embargo no se puede utilizar la expresión para hacer la aproximación en la convolución por tener la variable  $t$  en el denominador del exponente.

Al analizar las aproximaciones logradas al truncar la serie infinita a  $M$  términos (ver figura 3.3)

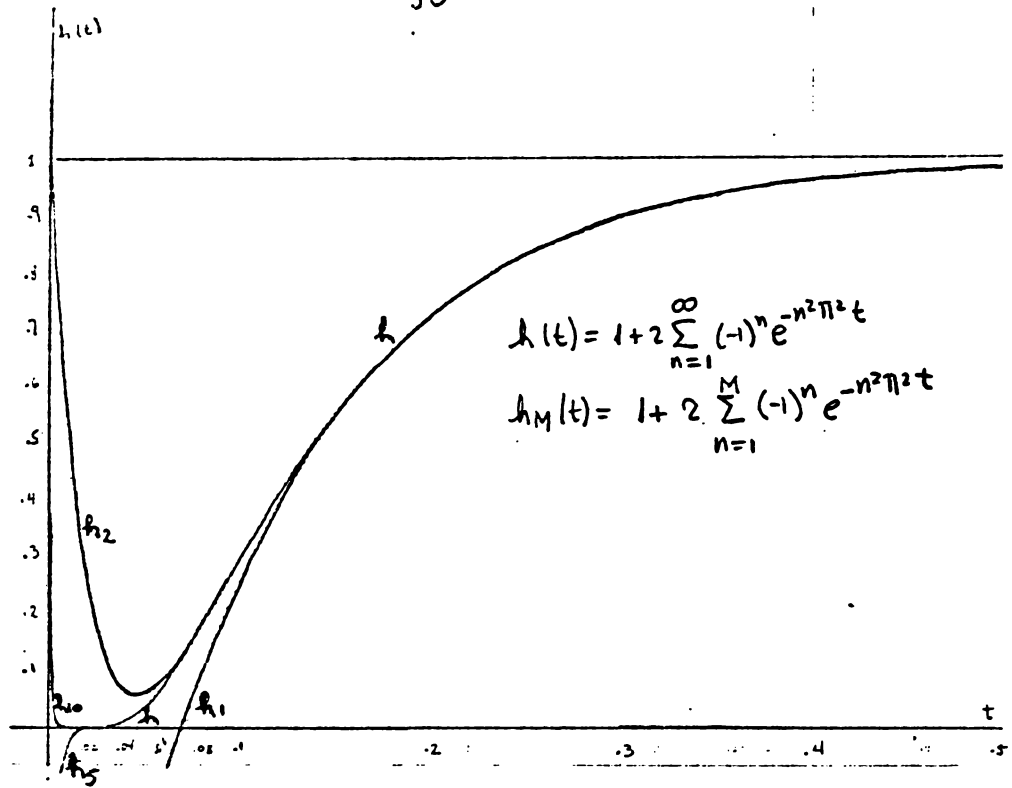


fig. 3.3 La función de influencia  $h$  y sus aproximaciones

se observa que si se toman un número par de términos, la aproximación empieza en 1 y si  $M$  es impar, se empieza en  $-1$ , siendo que la función  $h$  siempre empieza en 0 y se mantiene muy pequeña (menor que  $10^{-6}$ ) hasta  $t = .03$ ; esto quiere decir que para aproximar  $h$  con  $h_M$  se necesitarían demasiados términos en tiempos pequeños y se estarían cometiendo errores de redondeo de la máquina por el tamaño de estos números.



Esto sugiere un reordenamiento de la función  $h$  y es el que sigue.  $h'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [e^{-n^2 \pi^2 t} - e^{-n^2 \pi^2 t}]$ , esta nueva expresión permite, que al aproximar  $h'(t)$  con  $h'_M(t)$  truncando en  $M$  la serie infinita, mejorar la aproximación ya que  $h'_M(0) = 0$ , es decir para cualquier valor de  $M$  la aproximación empieza en cero como la serie original.

Al ver la figura 3.4 se puede observar que todas las  $h'_M$  parten del origen, sin embargo todavía se cometen errores para tiempos pequeños.

Una posible solución a este problema sería pedir que los errores que se cometan al principio del tiempo se compensen después y que de todos modos estos sean pequeños.

O sea que lo que se pide es que se conserve el área total de  $1-h(t)$ . Se puede ver que

$$\int_0^{\infty} (1-h(t)) dt = \frac{1}{6}$$

por lo tanto se puede pedir para la aproximación que  $\int [\lambda_1 (1-h_M(t)) + \lambda_2 (1-h_{M+1}(t))] dt = \frac{1}{6}$  con  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

O sea que

$$\int_0^{\infty} [\lambda (1 - h_M(t)) + (1 - \lambda) (1 - h_{M+1}(t))] dt = \frac{1}{6} \quad (3.1)$$

se tiene que: (tomando el desarrollo  $h'(t)$ )

$$h_M(t) = 1 - 2(e^{-\pi^2 t} - e^{-4\pi^2 t} \dots - (-1)^M e^{-M^2 \pi^2 t}) - (-1)^M e^{-(M+1)^2 \pi^2 t}$$

$$h_{M+1}(t) = 1 - 2(e^{-\pi^2 t} - e^{-4\pi^2 t} + \dots - (-1)^{M+1} e^{-(M+1)^2 \pi^2 t}) - (-1)^{M+1} e^{-(M+2)^2 \pi^2 t} \quad (3.2)$$

De la expresión (3.1) se obtiene que:

$$\int_0^{\infty} \lambda [1 - h_M(t) - 1 + h_{M+1}(t)] dt = \frac{1}{6} - \int_0^{\infty} (1 - h_{M+1}(t)) dt$$

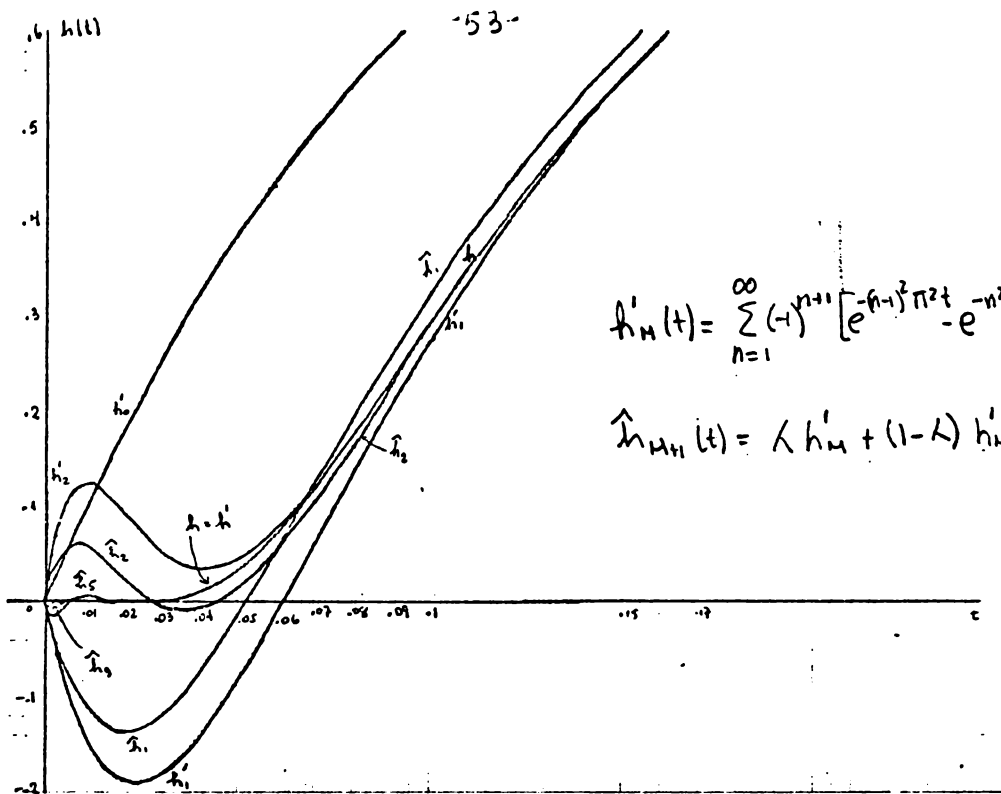
y por lo tanto

$$\lambda = \frac{\frac{1}{6} - \int_0^{\infty} (1 - h_{M+1}(t)) dt}{\int_0^{\infty} (h_{M+1}(t) - h_M(t)) dt} \quad (3.3)$$

las expresiones (3.2) se pueden reescribir:

$$h_M = 1 + 2 \sum_{n=1}^M (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t} - (-1)^M e^{-(M+1)^2 \pi^2 t}$$

$$h_{M+1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{M+1} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t} - (-1)^{M+1} e^{-(M+2)^2 \pi^2 t}$$



$$h'_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [e^{-(n-1)^2 \pi^2 t} - e^{-n^2 \pi^2 t}]$$

$$\hat{h}_{m+1}(t) = \lambda h'_m + (1-\lambda) h'_{m+1}$$

fig. 3.4 La función de influencia  $h$  y otras aproximaciones:  $h'_m(t)$  y  $\hat{h}_{m+1}(t)$

y entonces

$$1 - h_{m+1}(t) = -2 \sum_{n=1}^{M+1} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t} + (-1)^{M+1} e^{-(M+2)^2 \pi^2 t} \quad (3.4)$$

$$y \quad h_{m+1}(t) - h_m(t) = (-1)^{M+1} e^{-(M+1)^2 \pi^2 t} - (-1)^{M+1} e^{-(M+2)^2 \pi^2 t} \quad (3.5)$$

Al integrar (3.4) se tiene

$$\int_0^{\infty} (1 - h_{m+1}(t)) dt = \left[ \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{M+1} (-1)^n \frac{e^{-n^2 \pi^2 t}}{n^2} - (-1)^M \frac{e^{-(M+2)^2 \pi^2 t}}{(M+2)^2 \pi^2} \right]_{t=0}^{t=\infty}$$

$$\int_0^{\infty} (1 - h_{M+1}(t)) dt = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{M+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + (-1)^{M+1} \frac{1}{(M+2)^2 \pi^2} \quad (3.6)$$

Al integrar (3.5) se obtiene

$$\int_0^{\infty} (h_{M+1}(t) - h_M(t)) dt = \frac{(-1)^{M+1}}{\pi^2} \left[ \frac{1}{(M+1)^2} - \frac{1}{(M+2)^2} \right] \quad (3.7)$$

Al sustituir (3.6) y (3.7) en (3.3), se obtiene

$$\lambda = \frac{\frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{M+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - (-1)^{M+1} \frac{1}{(M+2)^2 \pi^2}}{\frac{(-1)^{M+1}}{\pi^2} \left[ \frac{1}{(M+1)^2} - \frac{1}{(M+2)^2} \right]} \quad (3.8)$$

Ahora, si se define:

$$(1 - \hat{h}_{M+1}) = \lambda (1 - h_M) + (1 - \lambda) (1 - h_{M+1})$$

entonces

$$\hat{h}_{M+1}(t) = \lambda h_M(t) + (1 - \lambda) h_{M+1}(t)$$

$$\hat{h}_{M+1}(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^M (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t} + (2 - \lambda) (-1)^{M+1} e^{-(M+1)^2 \pi^2 t} + (1 - \lambda) (-1)^{M+2} e^{-(M+2)^2 \pi^2 t} \quad (3.9)$$

Esta nueva aproximación permite dar nuevos valores a los coeficientes  $\alpha_m$  de la expresión (2.13a) para  $h(t)$ . Esta fue la aproximación que se utilizó en el programa.

Si se observa la figura 3.4 se podrá ver como las aproximaciones  $\hat{h}_{M+1}$  son mucho mejores que las  $h_M$  y  $h'_{M+1}$ . Para la solución obtenida se utilizó una  $M = 10$ . Se podrían obtener  $\alpha_m$  y  $\alpha'_m$  pidiendo además que las derivadas fuesen cero en  $t=0$ .

Dada la estructura de las matrices  $A$  y  $B$  que contienen las integrales de los productos internos  $\langle P_i, P_j \rangle$  y  $\langle P'_i, P'_j \rangle$ , en el programa se hizo un ahorro de memoria.

Estas matrices son tridiagonales y se guardan entonces en matrices de  $L-1 \times 3$  en lugar de  $L-1 \times L-1$ .

Por otro lado en lugar de invertir las matrices  $A_1^*$  y  $A_2^*$  se resolvió el sistema (2.40) y (2.42)

$$\begin{aligned} \text{como } A_1^* \Gamma^n &= [-(A_1^* + B_1^*)\beta^n + \mu] \\ & \text{y } A_2^* \Phi^n = [-(A_2^* + B_2^*)\beta^n + \eta] \end{aligned}$$

con un ahorro en el tiempo de computa. Esto se pudo hacer gracias a la estructura tridiagonal de las matrices  $A$  y  $B$  y por lo tanto de  $A^*$  y  $B^*$ .

Por último para hacer la comparación de los resultados obtenidos con la solución analítica dada por Neuman & Witherspoon [1969c] fue necesario transformar algunas de las variables adimensionales para coincidir con la transformación de ellos.

Por un lado maneja la variable adimensional de espacio  $S_D = \frac{4\pi T_1}{Q_1} S$  y como

$$Q_1 = -2\pi \hat{c}' T_1 \quad \text{se tiene}$$

$$S_D = \frac{4\pi T_1}{-2\pi \hat{c}' T_1}$$

$$S_D = -\frac{2}{\hat{c}' } S$$

entonces para analizar  $S$  directamente hacemos

$$\hat{c}' = -2$$

Por otro lado maneja la variable adimensional de tiempo  $t_{D1} = \frac{k_1 t}{S_{D1} r^2}$

y por otro lado define

$$\frac{r}{B_{11}} = r \sqrt{\frac{k_1'}{k_1 b_1 b_1'}} \quad \text{que es igual a } r \alpha_1^{1/2} \text{ en las}$$

variables analizadas en el capítulo 1 y coincide con la  $r$  que maneja el programa

define además

$$\beta_{11} = \frac{r}{4b_1} \sqrt{\frac{k_1' s_0'}{k_1 s_0}}$$

entonces

$$\beta_{11} = \frac{r}{4b_1} \sqrt{\frac{k_1' s_1' b_1}{k_1 b_1' s_1}} = \frac{r}{4} \sqrt{\frac{k_1'}{k_1 b_1' b_1} \frac{s_1'}{s_1}} = \frac{1}{4} \alpha_1^{1/2} r \sqrt{\frac{k_1'}{k_1 b_1 b_1'}}$$

$$\beta_{11} = \frac{\alpha_1^{1/2}}{4} \frac{r}{B_{11}}$$

$$\text{entonces } \alpha_1 = \left( \frac{4 \beta_{11}}{r/B_{11}} \right)^2$$

$$\text{análogamente } \alpha_2 = \left( \frac{4 \beta_{21}}{r/B_{21}} \right)^2$$

Finalmente

$$t_{D_1} = \left( \frac{B_{11}}{r} \right)^2 \alpha_{a_1} t$$

En el caso de comparación, Neuman & Witherspoon manejan las constantes de la siguiente forma:

$$\beta_{11} = \frac{r}{B_{11}} = .1$$

$$\beta_{21} = \frac{r}{B_{21}} = .1$$

entonces para nuestra solución las constantes quedan:

$$\alpha_{a_1} = 16$$

$$\alpha_{a_2} = 16$$

$$w = \frac{c_2}{c_1} = 1$$

$$\text{y } t_D = 1600 t$$

donde  $t$  es el tiempo adimensional que se maneja en la solución (denotado  $t'$  en el capítulo 1)

Finalmente quiero hacer notar el problema que se tuvo para obtener los resultados analíticos



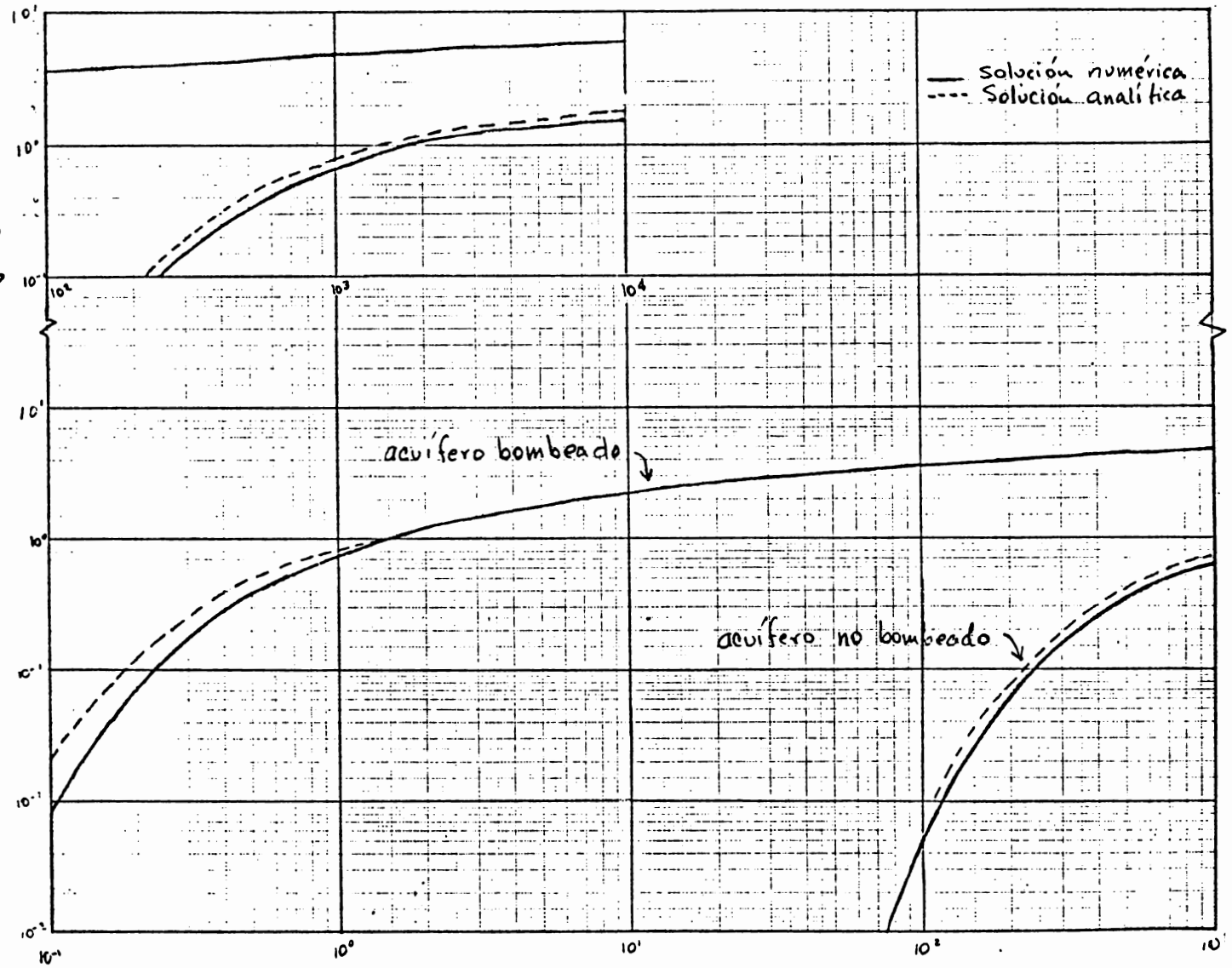
$$\hat{C}_1 = -2$$

$$d_{a1} = 16$$

$$d_{a2} = 16$$

$$-59-$$

$$\hat{C}_0 = -\frac{2}{C_1}$$



$$t_D = \frac{d_{a1} t'}{r^2}$$

fig. 3.5 Comparación de las soluciones

y que consistió en que fueron obtenidos de una gráfica logarítmica publicada por Neuman & Witherspoon [1969c] y por consiguiente es muy difícil lograr el valor exacto a partir de ella, sin embargo considero que están suficientemente bien obtenidos esos datos.

La solución obtenida por el programa en el pozo bombeado es un poco diferente para tiempos muy pequeños pero después es excelente; en lo que se refiere al pozo no bombeado se tiene una pequeña diferencia, pero es importante notar que la solución analítica corresponde al sistema de ecuaciones de Hautush [1960] y la numérica al sistema de ecuaciones integrodiferenciales de Herrera y Rodarte [1973], además de los problemas que aparecen al aproximar las funciones de memoria e influencia. (ver figura 3.5)

Por último se puede decir que se observó la convergencia de las soluciones, al comparar los resultados obtenidos al modificar el valor de  $\alpha$  y la

## APENDICE A

NOTACIONES

APENDICE A

NOTACIONES

- $b_i$ : espesor del  $i$ -ésimo acuífero;
- $b'$ : espesor del acuitardo;
- $C_i$ :  $\frac{k'}{T_i b'}$ ,  $i = 1, 2$ ;
- $\hat{C}_i$ :  $-\frac{Q_i}{2\pi T}$ ,  $i = 1, 2$ ;
- $f(t')$ : función de memoria, igual a  $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t'}$ ;
- $g(t')$ :  $2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t'}$ ;
- $h(t')$ : función de influencia, igual a  $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 \pi^2 t'}$ ;
- $K_i$ : permeabilidad del  $i$ -ésimo acuífero;
- $k'$ : permeabilidad del acuitardo;
- $Q_i$ : gasto del  $i$ -ésimo pozo;
- $r$ : distancia radial al pozo;
- $R$ :  $r \cdot \left( \frac{k'}{K_i b_i b'} \right)^{1/2}$ ;
- $S_{si}$ : almacenamiento específico del  $i$ -ésimo acuífero;
- $S_{s'}$ : almacenamiento específico del acuitardo;
- $\beta_i$ : coeficiente de almacenamiento del  $i$ -ésimo

- $S'$  coeficiente de almacenamiento del acuitardo, igual a  $S_2' b'$  ;
- $S_i$  abatimiento en el  $i$ -ésimo acuífero ;
- $S'$  abatimiento en el acuitardo ;
- $T_i$  transmisibilidad del  $i$ -ésimo acuífero, igual a  $K_i b_i$
- $t$  tiempo ;
- $t'$  tiempo a-dimensional, igual a  $\frac{\alpha' t}{b'^2}$
- $x, y, z$  coordenadas ;
- $\alpha_i \quad \frac{K_i}{S_{\alpha i}} = \frac{T_i}{S_i} , i = 1, 2 ;$
- $\alpha' \quad \frac{K'}{S_2'}$  ;
- $\alpha_{\alpha i} \quad \frac{S_i'}{S_i} , i = 1, 2 ;$
- $\eta_i \quad y \cdot \left( \frac{K'}{K_i b_i b'} \right)^{1/2} , i = 1, 2 ;$
- $\xi_i \quad x \cdot \left( \frac{K'}{K_i b_i b'} \right)^{1/2} , i = 1, 2 ;$

## APENDICE B

EVALUACION DE LAS INTEGRALES

$$\langle P_i, P_j \rangle \text{ y } \langle P_i', P_j' \rangle$$

## APENDICE B

### EVALUACION DE LAS INTEGRALES

$$\langle P_i, P_j \rangle, \quad \langle P_i', P_j' \rangle$$

a) Evaluación de  $\langle P_i, P_j \rangle$

1)  $\langle P_1, P_1 \rangle$

2)  $\langle P_i, P_i \rangle, \quad i = 2, 3, \dots, L-1$

3)  $\langle P_{i-1}, P_i \rangle = \langle P_i, P_{i-1} \rangle, \quad i = 2, 3, \dots, L-1$

4)  $\langle P_{i+1}, P_i \rangle = \langle P_i, P_{i+1} \rangle, \quad i = 2, 3, \dots, L-1$

$$1) \quad \langle P_1, P_1 \rangle = \int_{r_1}^{r_2} r (1-\beta_1)^2 dr = \int_{r_1}^{r_2} r \cdot \left[ \frac{(r_2-r_1) - (r-r_1)}{r_2-r_1} \right]^2 dr$$

$$= \frac{1}{(r_2-r_1)^2} \int_{r_1}^{r_2} (r r_2^2 - 2r^2 r_2 + r^3) dr$$

$$= \frac{1}{(r_2-r_1)^2} \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{2r^3 r_2}{3} + \frac{r^2 r_2}{2} \right]_{r=r_1}^{r=r_2}$$

$$= \frac{1}{12(r_2-r_1)^2} \left[ -3r_1^4 + 8r_1^3 r_2 - 6r_1^2 r_2^2 + r_2^4 \right]$$

$$\begin{aligned}
 \langle P_i, P_i \rangle &= \frac{1}{12(r_2 - r_1)^2} \left[ -3r_1^4 + 2r_1^3 r_2 + r_1^2 r_2^2 - 3r_1^2 r_2^2 + 2r_1 r_2^3 + r_2^4 \right. \\
 &\quad \left. + 6r_1^3 r_2 - 4r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2^3 \right] \\
 &= \frac{1}{12(r_2 - r_1)^2} \left[ r_1^2 (-3r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2) + r_2^2 (-3r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2) \right. \\
 &\quad \left. - 2r_1 r_2 (-3r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2) \right] \\
 &= \frac{1}{12(r_2 - r_1)^2} \left[ (r_2 - r_1)^2 \left[ (3r_1 + r_2)(r_2 - r_1) \right] \right] \\
 &= \frac{r_2 - r_1}{12} (3r_1 + r_2)
 \end{aligned}$$

Sea  $h_i = r_{i+1} - r_i$   $i = 1, 2, \dots, L-2$

entonces

$$\langle P_i, P_i \rangle = \int_{r_i}^{r_2} r(1 - \beta_i)^2 dr = \frac{h_i}{12} (3r_1 + r_2)$$

$$\text{ii) } \langle P_i, P_i \rangle = \int_{r_{i-1}}^{r_i} r(1 + \alpha_i)^2 dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} r(1 - \beta_i)^2 dr$$

$$\text{i) } \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \left[ \frac{r_i - r_{i-1} + r - r_i}{r_i - r_{i-1}} \right]^2 dr$$



$$\int_{r_{i-1}}^{r_i} r \cdot \left[ \frac{r - r_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} \right]^2 dr = \frac{1}{(r_i - r_{i-1})^2} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (r^3 - 2r^2 r_{i-1} + r r_{i-1}^2) dr$$

$$= \frac{1}{(r_i - r_{i-1})^2} \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{2r^3 r_{i-1}}{3} + \frac{r^2 r_{i-1}^2}{2} \right]_{r=r_{i-1}}^{r=r_i}$$

$$= \frac{1}{12(r_i - r_{i-1})^2} \left[ 3r_i^4 - 8r_i^3 r_{i-1} + 6r_i^2 r_{i-1}^2 - r_{i-1}^4 \right]$$

$$= \frac{1}{12(r_i - r_{i-1})^2} \left[ 3r_i^4 - 2r_i^3 r_{i-1} - r_i^2 r_{i-1}^2 + 3r_i^2 r_{i-1}^2 - 2r_i r_{i-1}^3 - r_{i-1}^4 - 6r_i^3 r_{i-1} + 4r_i^2 r_{i-1}^2 + 2r_i r_{i-1}^3 \right]$$

$$= \frac{1}{12(r_i - r_{i-1})^2} \left[ r_i^2 (3r_i^2 - 2r_i r_{i-1} - r_{i-1}^2) + r_{i-1}^2 (3r_i^2 - 2r_i r_{i-1} - r_{i-1}^2) - 2r_i r_{i-1} (3r_i^2 - 2r_i r_{i-1} - r_{i-1}^2) \right]$$

$$= \frac{1}{12(r_i - r_{i-1})^2} \left[ (r_i - r_{i-1})^2 \left[ (3r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) \right] \right]$$

$$= \frac{r_i - r_{i-1}}{12} (3r_i + r_{i-1})$$

$$= \frac{h_{i-1}}{12} (3r_i + r_{i-1})$$

$$ii) \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \left[ \frac{r_{i+1} - r - r + r_i}{r_{i+1} - r_i} \right]^2 dr = \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \left[ \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i} \right]^2 dr$$

$$= \frac{1}{(r_{i+1} - r_i)^2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} (r^3 - 2r^2 r_{i+1} + r r_{i+1}) dr$$

$$= \frac{1}{(r_{i+1} - r_i)^2} \left[ \frac{r^4}{4} - \frac{2r^3 r_{i+1}}{3} + \frac{r^2 r_{i+1}}{2} \right]_{r=r_i}^{r=r_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{12 (r_{i+1} - r_i)^2} \left[ -3r_i^4 + 8r_i^3 r_{i+1} - 6r_i^2 r_{i+1}^2 + r_{i+1}^4 \right]$$

$$= \frac{1}{12 (r_{i+1} - r_i)^2} \left[ -3r_i^4 + 2r_i^3 r_{i+1} + r_i^2 r_{i+1}^2 - 3r_i^2 r_{i+1}^2 + 2r_i r_{i+1}^3 + r_{i+1}^4 \right. \\ \left. + 6r_i^3 r_{i+1} - 4r_i^2 r_{i+1}^2 - 2r_i r_{i+1}^3 \right]$$

$$= \frac{1}{12 (r_{i+1} - r_i)^2} \left[ r_i^2 (-3r_i^2 + 2r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2) + r_{i+1}^2 (-3r_i^2 + 2r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2) \right. \\ \left. - 2r_i r_{i+1} (-3r_i^2 + 2r_i r_{i+1} + r_{i+1}^2) \right]$$

$$= \frac{1}{12 (r_{i+1} - r_i)^2} \left[ (r_{i+1} - r_i)^2 \left[ (3r_i + r_{i+1})(r_{i+1} - r_i) \right] \right]$$

$$= \frac{r_{i+1} - r_i}{12} (3r_i + r_{i+1})$$

$$= h_i (2r_i + r_{i+1})$$

por lo tanto,

$$\langle P_i, P_i \rangle = \int_{r_{i-1}}^{r_i} r(1+\alpha_i)^2 dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} r(1-\beta_i)^2 dr$$

$$\langle P_i, P_i \rangle = \frac{h_{i-1}}{12} (3r_i + r_{i-1}) + \frac{h_i}{12} (3r_i + r_{i+1})$$

$$\langle P_i, P_i \rangle = \frac{h_{i-1} (3r_i + r_{i-1}) + h_i (3r_i + r_{i+1})}{12}, \quad i = 2, 3, \dots, L-1$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \langle P_{i-1}, P_i \rangle &= \langle r, P_i, P_{i-1} \rangle = \int_{r_{i-1}}^{r_i} r(1-\beta_{i-1})(1+\alpha_i) dr \\ &= \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \left[ \frac{(r_i - r_{i-1}) - (r - r_{i-1})}{r_i - r_{i-1}} \cdot \frac{(r_i - r_{i-1}) + (r - r_i)}{r_i - r_{i-1}} \right] dr \\ &= \frac{1}{(r_i - r_{i-1})^2} \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \cdot (r_i - r)(r - r_{i-1}) dr \\ &= \frac{1}{(r_i - r_{i-1})^2} \int_{r_{i-1}}^{r_i} (-r^3 + r^2 r_{i-1} + r^2 r_i - r r_i r_{i-1}) dr \\ &= \frac{1}{(r_i - r_{i-1})^2} \left[ -\frac{r^4}{4} + \frac{r^3 r_{i-1}}{3} + \frac{r^3 r_i}{3} - \frac{r^2 r_i r_{i-1}}{2} \right]_{r=r_{i-1}}^{r=r_i} \\ &= \frac{1}{12 (r_i - r_{i-1})^2} \left[ r_i^4 - 2r_i^3 r_{i-1} + 2r_i r_{i-1}^3 - r_{i-1}^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle P_{i-1}, P_i \rangle &= \frac{1}{12 (r_i - r_{i-1})^2} \left[ (r_i^2 - r_{i-1}^2)(r_i^2 + r_{i-1}^2) - 2r_i r_{i-1} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \right] \\
&= \frac{1}{12 (r_i - r_{i-1})^2} \left[ (r_i^2 - r_{i-1}^2) (r_i^2 - 2r_i r_{i-1} + r_{i-1}^2) \right] \\
&= \frac{1}{12 (r_i - r_{i-1})^2} \left[ (r_i - r_{i-1})^2 (r_i - r_{i-1}) (r_i + r_{i-1}) \right] \\
&= \frac{r_i - r_{i-1}}{12} (r_i + r_{i-1})
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\langle P_{i-1}, P_i \rangle = \langle P_i, P_{i-1} \rangle = \int_{r_{i-1}}^{r_i} r (1 - \beta_{i-1}) (1 + \alpha_i) dr = \frac{h_{i-1}}{12} (r_i + r_{i-1})$$

$i = 2, 3, \dots, L-1$

$$\begin{aligned}
4) \quad \langle P_{i+1}, P_i \rangle &= \langle P_i, P_{i+1} \rangle = \int_{r_i}^{r_{i+1}} r (1 - \beta_i) (1 + \alpha_{i+1}) dr \\
&= \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \left[ \frac{r_{i+1} - r_i - r + r_i}{r_{i+1} - r_i} \cdot \frac{r_{i+1} - r_i + r - r_{i+1}}{r_{i+1} - r_i} \right] dr \\
&= \frac{1}{(r_{i+1} - r_i)^2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r (r_{i+1} - r) (r - r_i) dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(r_{i+1} - r_i)^2} \int_{r_i}^{r_{i+1}} (-r^3 + r^2 r_{i+1} + r^2 r_i - r r_{i+1} r_i) dr \\
 &= \frac{1}{(r_{i+1} - r_i)^2} \left[ -\frac{r^4}{4} + \frac{r^3 r_{i+1}}{3} + \frac{r^3 r_i}{3} - \frac{r^2 r_{i+1} r_i}{2} \right]_{r=r_i}^{r=r_{i+1}} \\
 &= \frac{1}{12 (r_{i+1} - r_i)^2} \left[ r_{i+1}^4 - 2r_{i+1}^3 r_i + 2r_i^3 r_{i+1} - r_i^4 \right] \\
 &= \frac{1}{12 (r_{i+1} - r_i)^2} \left[ (r_{i+1}^2 - r_i^2) (r_{i+1}^2 + r_i^2) - 2r_{i+1} r_i (r_{i+1}^2 - r_i^2) \right] \\
 &= \frac{1}{12 (r_{i+1} - r_i)^2} \left[ (r_{i+1}^2 - r_i^2) (r_{i+1} + r_i^2 - 2r_{i+1} r_i) \right] \\
 &= \frac{r_{i+1} - r_i}{12} \cdot (r_{i+1} + r_i)
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\langle P_{i+1}, P_i \rangle = \langle P_i, P_{i+1} \rangle = \int_{r_i}^{r_{i+1}} r(1 - \beta_i)(1 + \alpha_{i+1}) dr = \frac{A_i}{12} (r_{i+1} - r_i)$$

$$i = 2, 3, \dots, L-1$$

b) Evaluación de  $\langle P'_i, P'_j \rangle$

$$1) \quad \langle P'_i, P'_i \rangle$$

$$2) \quad \langle P'_i, P'_i \rangle, \quad i = 2, 3, \dots, L-1$$

$$3) \quad \langle P'_{i-1}, P'_i \rangle = \langle P'_i, P'_{i-1} \rangle, \quad i = 2, 3, \dots, L-1$$

$$4) \quad \langle P'_{i+1}, P'_i \rangle = \langle P'_i, P'_{i+1} \rangle, \quad i = 2, 3, \dots, L-1$$

$$1) \quad \langle P'_i, P'_i \rangle = \int_{r_1}^{r_2} r \left( \frac{d(1-\beta_i)}{dr} \right)^2 dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{(r_2-r_1)^2}$$

$$= \frac{1}{(r_2-r_1)^2} \left[ \frac{r^2 - r_1^2}{2} \right]$$

$$= \frac{r_2 + r_1}{2(r_2-r_1)} = \frac{r_2 - r_1 + 2r_1}{2(r_2-r_1)}$$

$$= \frac{r_2 - r_1}{2(r_2-r_1)} + \frac{2r_1}{2(r_2-r_1)}$$

por lo tanto,

$$\langle P'_i, P'_i \rangle = \frac{1}{2} + \frac{r_1}{h_1}$$

$$2) \quad \langle P'_i, P'_i \rangle = \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \left( \frac{d(1+\alpha_i)}{dr} \right)^2 dr + \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \left( \frac{d(1-\beta_i)}{dr} \right)^2 dr$$

$$= \frac{1}{(r_i - r_{i-1})^2} \cdot \frac{r_i^2 - r_{i-1}^2}{2} + \frac{1}{(r_{i+1} - r_i)^2} \cdot \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2}$$

$$= \frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} + \frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1} - r_i)}$$

$$= \frac{r_i - r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} + \frac{2r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} + \frac{r_{i+1} - r_i}{2(r_{i+1} - r_i)} + \frac{2r_i}{2(r_{i+1} - r_i)}$$

por lo tanto,

$$\langle P'_i, P'_i \rangle = 1 + \frac{r_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{r_i}{h_i}; \quad i = 2, 3, \dots, L-1$$

$$3) \quad \langle P'_{i-1}, P'_i \rangle = \langle P'_i, P'_{i-1} \rangle = \int_{r_{i-1}}^{r_i} r \frac{d(1-\beta_{i-1})}{dr} \frac{d(1+\alpha_i)}{dr} dr$$

$$= \frac{-1}{(r_i - r_{i-1})^2} \cdot \frac{r_i^2 - r_{i-1}^2}{2} = -\frac{r_i + r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})}$$

$$= -\frac{r_i - r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})} - \frac{2r_{i-1}}{2(r_i - r_{i-1})}$$

por lo tanto,

$$\langle P'_{i-1}, P'_i \rangle = \langle P'_i, P'_{i-1} \rangle = -\frac{1}{2} - \frac{r_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i=2, 3, \dots, L-1$$

$$4) \quad \langle P'_{i+1}, P'_i \rangle = \langle P'_i, P'_{i+1} \rangle = \int_{r_i}^{r_{i+1}} r \frac{d(1-\beta_i)}{dr} \frac{d(1+d_{i+1})}{dr} dr$$

$$= \frac{-1}{(r_{i+1}-r_i)^2} \cdot \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2}{2} = -\frac{r_{i+1} + r_i}{2(r_{i+1}-r_i)}$$

$$= -\frac{r_{i+1}-r_i}{2(r_{i+1}-r_i)} - \frac{2r_i}{2(r_{i+1}-r_i)}$$

por lo tanto,

$$\langle P'_i, P'_i \rangle = \langle P'_i, P'_{i+1} \rangle = -\frac{1}{2} - \frac{r_i}{h_i}, \quad i=2, 3, \dots, L-1$$



## REFERENCIAS

REFERENCIAS

- Hantush, M.S. "Modification of the theory of leaky aquifers", Journal Geophysical Research, 65(11), p. 3713-3725, 1960.
- Herrera, I., and L. Rodarte, "Integro differential equations for Systems of leaky aquifers and Applications, 1.-The Nature of Aproximate Theories", Water Resources Research, 9(4), p. 995-1005, 1973.
- Neuman, S.P., and P.A. Witherspoon, "Theory of flow in aquicludes adjacent to slightly leaky aquifers", Water Resources Research, 4(1), p. 103-112, 1968.
- Neuman, S.P., and P.A. Witherspoon, "Transient Flow of Ground Water to Wells in Multiple Aquifer Systems", Geotechnical Engineering Report, University of California, Berkeley, January 1969a

Neuman, S. P., and P. A. Witherspoon, "Theory of flow in a two aquifer system, Water Resources Research, 5(4), 803-816, 1969b

Neuman, S. P., and P. A. Witherspoon, "Applicability of current theories of flow in leaky aquifers", Water Resources Research, 5(4), 817-829, 1969c.

Payre, G., "Towards a numerical resolution of Leaky aquifers problems"

Pérez de Celis, C., "Solución de la ecuación de calor con aplicación a acuíferos", Tesis profesional de Matemático, 1976 (en elaboración)

Strang, G., and G. J. Fix, "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice Hall, 1973.