Geometría Hiperbólica
(un enfoque elemental)

Tesis que para obtener el título de Licenciado en matemáticas

Presenta

Luz maría marván Garduño

Agosto 1984

A mis padres

A mi maestro
por excelencia
Luis Ché Colavita

Prólogo

Cuando empecé a pensar en escoger tema de tesis, quería trabajar en algo que se relacionara con la enseñanza de las matemáticas.

La profesora Guadalupe Lucio sugirió que el trabajo de tesis podría consistir en la elaboración de un programa para un curso de geometría no euclidiana a nivel elemental (tercer o cuarto semestre de la licenciatura en matemáticas), y en la redacción de las notas para dicho curso.

Posteriormente, el profesor Arturo Ramírez me propuso referirme únicamente a geometría hiperbólica, y seleccionó el material que debía incluir en el trabajo.

La tesis fue realizada bajo la dirección del profesor Carlos Bosch Giral y con asesoría del profesor Arturo Ramírez. Las ilustraciones fueron entintadas por mi hermana Adriana.

Desgraciadamente, al presente trabajo le falta mucho todavía para poder usarse como notas de clase: la redacción no es tal vez la más adecuada para unas notas, no hay ejercicios, se supone que el lector tiene acceso a la bibliografía dada, cosa que no sucede con la mayoría de los alumnos de licenciatura, etc. Pero sobre todo, el material no ha sido ensayado, pues, por el momento, no existe la posibilidad de dar un curso de geometría hiperbólica a un nivel elemental.

Espero tener algún día la oportunidad de completar este trabajo.

Contenido

Contenido 1

Introducción 4

Primera Parte
El postulado de las paralelas 5

Capítulo I El quinto postulado de Euclides 7

I.1 Euclides y la geometría euclidiana 8

I.2 El quinto postulado de Euclides o postulado de las paralelas 11

I.3 "Demostraciones" del quinto postulado 16

I.3.1 "Demostración" de Wallis 17

I.3.2 "Demostración" de W. Bolyai 18

I.3.3 "Demostración de Legendre 19

I.3.4 Otra "demostración" 22

Fragmento de carta de W. Bolyai 24

Capítulo II Independencia del quinto postulado 25

II.1 Modelo de Poincaré del semiplano

II.1.1 ¿Qué es un modelo? 26

II.1.2 Modelo de Poincaré del semiplano 27

II.2 Independencia del quinto postulado

II.2.1 Independencia del quinto postulado 33

II.2.2 Resultados de geometría euclidiana que no son consecuencia de los cuatro primeros postulados 35

II.3 Modelo de Poincaré del disco y modelo de Beltrami-Klein

II.3.1 Isomorfismo entre el modelo de Betrami-Klein y el de Poincaré del semiplano 37

II.3.1 Isomorfismo entre el modelo de Poincaré del disco y el modelo de Poincaré del semiplano 39

Segunda parte

Geometría hiperbólica 41

surgimiento de la geometría hiperbólica 43

Capítulo I h-congruencia 45

I.1. h-isometrías 47

I.2 Cinco construcciones básicas 57

I.2.1 Dados un h-punto P y una h-recta C, encontrar el transformado de P bajo la inversión con respecto a C 57

I.2.2 Dadas dos h-rectas l y C, encontrar el inverso de l con respecto a C 59

I.2.3 Dados dos h-puntos, encontrar la h-recta tal que la inversión con respecto a ella transforme a uno en el otro 60

I.2.4 Dadas dos h-rectas, encontrar una h-recta tal que la inversión con respecto a ella transforme a una en la otra. 61

I.2.5 Dada una h-recta l, encontrar una h-recta tal que al invertir con respecto a ella, l se transforme en sí misma globalmente. 67

I.3 h-congruencia 68

I.4 Una h-isometría que nos resultará útil (transformar una sucesión de h segmentos h-colineales h-congruentes A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 etc. en la sucesión A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 etc.) 73

Capítulo II	Conceptos básicos	76
II.1	h-perpendiculares	77
II.2	h-mediatrices	82
II.3	h-bisectrices	85
II.4	h-círculos	89
Capítulo III	Paralelas	94
III.1	h-paralelas y paralelas frontera	95
III.2	Perpendicular común	102
III.3	Distancia entre paralelas	107
Capítulo IV	h-triángulos.	110
IV.1	Suma de ángulos de un h-triángulo	113
IV.2	Congruencia de h-triángulos	116
IV.3	Teorema de Pitágoras	120
IV.4	h-bisectrices, h-mediatrices y h-alturas	
IV.4.1	h-bisectrices de un h-triángulo	125
IV.4.2	h-mediatrices de un h-triángulo	127
IV.4.3	h-alturas de un h-triángulo	133
Apéndice		141
Bibliografía		1

Introducción

Este trabajo, titulado "Geometría hiperbólica, un enfoque elemental", está dividido en dos partes esencialmente distintas: "El postulado de las paralelas" y "Geometría hiperbólica".

Lo que pretendemos con la primera parte (Postulado de las paralelas) es, situar el surgimiento de la geometría hiperbólica en su correspondiente marco histórico y mostrar cómo puede usarse un modelo para verificar los axiomas de una cierta teoría.

En la segunda parte (Geometría hiperbólica), demostraremos, trabajando únicamente con el modelo de Poincaré del semiplano, algunos resultados de geometría hiperbólica. En la mayoría de las demostraciones utilizamos alguna propiedad intrínseca del modelo, como por ejemplo, el hecho de que la distancia definida para este modelo se preserva bajo inversión euclidiana, por lo que nuestras demostraciones sólo serán válidas en el modelo. Sin embargo, es posible demostrar que todos los resultados a que haremos referencia son válidos en general.

Lo que pretendemos con esta segunda parte no es demostrar la validez, en el modelo, de los resultados que presentaremos, sino más bien mostrar la utilidad del modelo en la obtención de dichos resultados.

Primera Parte

El postulado de las paralelas

En esta primera parte, únicamente prepararemos el terreno para poder empezar a hablar de geometría hiperbólica.

En el primer capítulo (El quinto postulado de Euclides), hablaremos, después de explicar qué se entiende por geometría euclidiana, del quinto postulado de Euclides (postulado de las paralelas).

Mencionaremos las razones por las cuales se pensaba que éste debía ser, no un postulado, sino un teorema de la geometría euclidiana, y analizaremos algunos de los intentos de demostración de dicho postulado.

En el segundo capítulo (Independencia del quinto postulado), demostraremos la imposibilidad de demostrar el postulado de las paralelas.

Capítulo I

El quinto postulado de Euclides

En este capítulo presentaremos una breve reseña histórica de los intentos de demostración del quinto postulado de Euclides, llamado también postulado de las paralelas.

En la sección I.1 (Euclides y la geometría euclidiana) hablaremos del trabajo de Euclides y explicaremos qué se entiende por geometría euclidiana.

A continuación, en la sección I.2 (El quinto postulado o postulado de las paralelas), mencionaremos las razones por las cuales se pensaba que el quinto postulado debía ser, no un postulado, sino un resultado de la geometría euclidiana y nos referiremos, en términos muy generales, a algunos intentos de demostración del postulado.

Finalmente, en la sección I.3 ("Demostraciones" del quinto postulado), presentaremos con detalle cuatro intentos de demostración del quinto postulado y explicaremos por qué ninguno es válido.

Cerraremos el capítulo con una carta de W. Bolyai (1775-1856), que consideramos muestra lo agobiante que llegó a ser no poder resolver el problema del quinto postulado.

I.1 Euclides y la geometría euclidiana

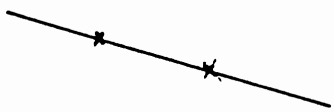
Poco se sabe con certeza de la vida de Euclides. Es costumbre ubicarlo alrededor del año 200 A.C. Sin embargo, algunos historiadores ponen en duda esta fecha y aún la existencia misma de Euclides, atribuyendo su obra a la labor conjunta de una escuela que pretendió recopilar todos los conocimientos matemáticos de la época.

La obra de Euclides consta fundamentalmente de los famosos Elementos. Los Elementos de Euclides forman un conjunto de trece libros dedicados al desarrollo lógico y sistemático de la geometría. Son considerados como la obra cumbre de la matemática griega. Durante siglos fueron el texto obligado de geometría en todas las escuelas. Son el primer libro de fundamentación geométrica.

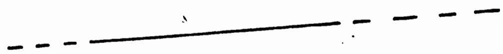
El libro I de los Elementos está dedicado a geometría plana. Euclides empezó este libro definiendo ciertos conceptos: punto, recta, superficie, rectas paralelas etc.

A continuación dió cinco postulados, es decir hechos que supuso que se cumplían y que utilizó para él obtener resultados.

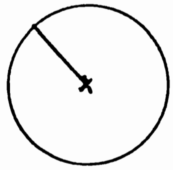
Postulado I.- Por dos puntos pasa una única recta.



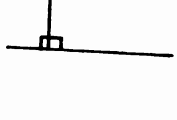
Postulado II.- Una recta puede prolongarse indefinidamente.



Postulado III.- Un punto y una distancia determinan un círculo.

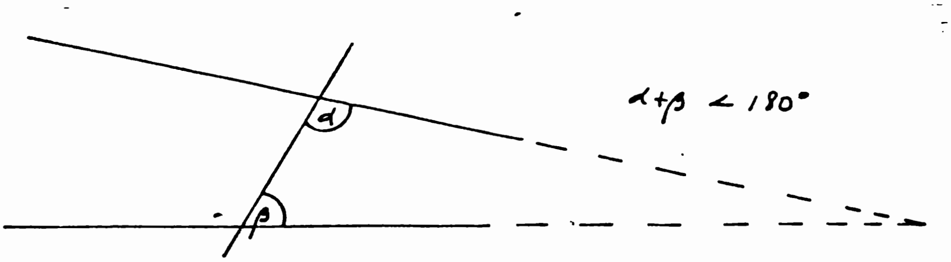


Postulado IV.- Todos los ángulos rectos son iguales



Postulado IV.- Todos los ángulos rectos son iguales.

Postulado V.- Si una recta que corte a otras dos forma con ellas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.*



Y enunció también lo que él llamó nociones comunes: cosas iguales a una tercera son iguales entre sí; si a iguales se suman iguales, los totales son iguales; si a iguales se restan iguales los residuos son iguales; las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí; el todo es mayor que la parte.

Utilizando las definiciones, los postulados y las nociones comunes, Euclides construyó toda su geometría. Todos los resultados que pueden obtenerse como consecuencia de los postulados de Euclides conforman lo que se conoce como geometría euclidiana.

Los resultados de geometría euclidiana son entonces no solamente los que Euclides demostró en Los Elementos, también todos los que se obtuvieron posteriormente, pero con base en los resultados de Euclides: Teorema de Menelao (fines del siglo I D.C), Teorema de Desargues (1593-1622), Teorema de Ceva (1647-1934) etc.

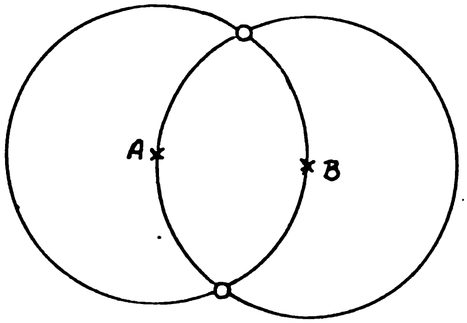
---

*La manera como Euclides enunció sus postulados no es exactamente ésta. Para una traducción fiel del original ver [3].

Cabe mencionar que, especialmente durante el siglo pasado, se hicieron algunas críticas al trabajo de Euclides, argumentando que éste presentaba algunas fallas lógicas.

Además de que algunas de sus definiciones fueron consideradas poco claras, se observó que Euclides utilizó en sus demostraciones suposiciones que ni postuló, ni demostró, ni pueden demostrarse con sus postulados.

Como ejemplo podemos mencionar que, en la primera demostración de los Elementos (proposición 1, libro I), Euclides consideró dos círculos, uno con centro en A y que pasa por B, y otro con centro en B y que pasa por A, y utilizó, sin haberlo demostrado ni postulado, el hecho de que dichos círculos se intersectaban.



El problema aquí radica no tanto en que Euclides haya utilizado algo que no demostró, sino en que, con los postulados de Euclides, no es posible demostrar que dichos círculos se intersectan.

Hilbert (1862-1943) reivindica a Euclides publicando, en 1901, su libro Fundamentos de la Geometría [4] en donde dió cinco grupos de axiomas (20 axiomas en total) para la geometría euclidiana.

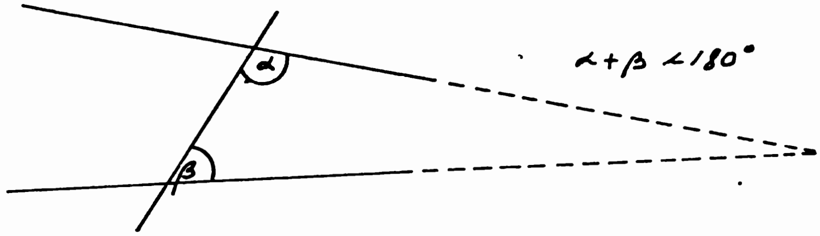
Con ellos es posible demostrar, apegándose a la lógica más rigurosa, todos los resultados de geometría Euclidiana.

El lector interesado en conocer las demostraciones de geometría que utilizan los axiomas de Hilbert puede consultar [3]. Nosotros, cuando demostremos un resultado de geometría euclidiana lo haremos, en general, al estilo Euclides, sabiendo que, si quisiéramos, podríamos utilizar los axiomas de Hilbert para una demostración impecable desde el punto de vista de la lógica.

I.2 El quinto postulado de Euclides o postulado de las paralelas

Entre todos los postulados de Euclides, el quinto postulado (axioma de las paralelas en la axiomática de Hilbert), ocupa un lugar en cierto modo especial. El quinto postulado dice:

"Si una recta que corta a otras dos forma con éstas ángulos interiores del mismo lado de ella que sumados sean menores que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos"



Desde el principio el postulado fue objetado como tal. Proclo (410 - 485) en su obra "Comentarios al libro I de los Elementos de Euclides" dijo que puede ser engañoso suponer que el que la suma sea menor que dos rectos siente las bases para creer que las rectas se cortan.

No es nuestra intención discutir aquí que tan "engañoso" o "poco evidente" puede ser el quinto postulado. Basta mencionar que a los griegos les preocupaba la naturaleza del postulado y que desde el principio se intentó prescindir de él.

Por otra parte, el recíproco del quinto postulado, es decir, la afirmación:

"Si dos rectas se cortan, al ser cortadas por una tercera se forman, de un lado de ella, ángulos interiores cuya suma es menor que dos rectos"

es un teorema que puede demostrarse utilizando únicamente los cuatro primeros postulados de Euclides (o con los axiomas de Hilbert, sin usar el de las paralelas, ver [5]).

De hecho, la proposición 28 de los Elementos:

"Si una recta que corta a otras dos forma con ellas ángulos interiores del mismo lado cuya suma es dos rectos, las rectas son paralelas"

que Euclides obtuvo como consecuencia de los primeros cuatro postulados (ver [3]), es el recíproco del quinto postulado.

Los griegos sabían que el hecho de que un teorema fuera demostrable, no implicaba necesariamente que su recíproco también lo fuera. Sin embargo, dada la gran cantidad de teoremas geométricos que son válidos tanto ellos como sus recíprocos, se pensó que tal vez fuera posible obtener también el quinto postulado como consecuencia de los cuatro primeros, y esto se intentó de muy diversas maneras.

De hecho, no solamente durante la época de los griegos, sino a lo largo de dos mil años (desde Euclides hasta 1800), varios matemáticos trataron por todos los medios, de demostrar el quinto postulado.

Todo parece indicar que los primeros intentos que se hicieron para demostrar el postulado intentaban en realidad demostrar que las paralelas son equidistantes, pues se sabía que con la equidistancia podía obtenerse el quinto postulado.

Como esto no fue posible, Posidonio (siglo I A.C.) cambió la definición de paralelas. Euclides había definido a las paralelas como rectas que prolongándose indefinidamente en ambos sentidos, no se cortan ni en un sentido ni en otro; Posidonio propuso definirlas como rectas coplanares y equidistantes.

Sin embargo, hay un problema, y es que Euclides no postuló la existencia de las paralelas, sino que la demostró (Proposición 16). Lo que demostró en esta proposición fue la existencia de rectas que no se cortan, no la existencia de rectas equidistantes, por lo que para demostrar el quinto postulado era necesario no solamente cambiar la definición de paralelas, sino demostrar la existencia de rectas equidistantes, cosa que tampoco pudo hacerse.

Ptolomeo (siglo II D.C.) "demostró" el quinto postulado utilizando lo que posteriormente recibió el nombre del Axioma de Playfair: "La paralela a una recta por un punto fuera de ella es única", pero nunca demostró la unicidad de la paralela.

Proclo (410-485 D.C) obtuvo el quinto postulado a partir de un resultado que "demostró" previamente: "Si una recta corta a una paralela, corta a la otra". Para demostrar su resultado, Proclo utilizó, sin demostrarlo, que la distancia entre paralelas está acotada (ver [3]), por lo que para aceptar su demostración es necesario primero aceptar lo anterior

Ocho siglos después, el persa Nastradin at-Tusi (1201-1274) obtuvo el postulado utilizando, como lema, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°. Supuestamente demostró el lema, pero la demostración de éste no es válida pues en ella intervienen argumentos que a su vez necesitan ser demostrados.

C. Clavius (1537-1612), obtuvo el quinto postulado suponiendo, sin haberlo demostrado, que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta y que están del mismo lado de ella, es otra recta.

También se "demostró" el postulado suponiendo que dos paralelas a una tercera son paralelas entre sí.

A partir del siglo XVII, la mayoría de los matemáticos interesados en el problema del quinto postulado, lo que pretendían era demostrar la unicidad de la paralela o, en su defecto, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

Por ejemplo J. Wallis (1616-1703), y posteriormente W. Bolyai (1775-1850) intentaron demostrar el postulado de Playfair. Sus intentos de demostración se presentarán con detalle en la siguiente sección.

G. Saccheri (1667-1733), J.H. Lambert (1728-1777) y A.M. Legendre (1752-1833) intentaron demostrar que la suma de ángulos de un triángulo es 180°.

Saccheri, trabajando con ciertos cuadriláteros (cuadriláteros de Saccheri) obtuvo una demostración correcta de que la suma de ángulos interiores de un triángulo no puede ser mayor que 180° y después intentó demostrar que no puede ser menor que 180°. No logró hacerlo; sin embargo, descubrió que si se podía demostrar que todo ángulo inscrito en un semicírculo es recto, o que dos paralelas siempre tienen una perpendicular común, se podía demostrar entonces que la suma de ángulos interiores de un triángulo no era menor que 180° y obtener así el postulado de las paralelas.

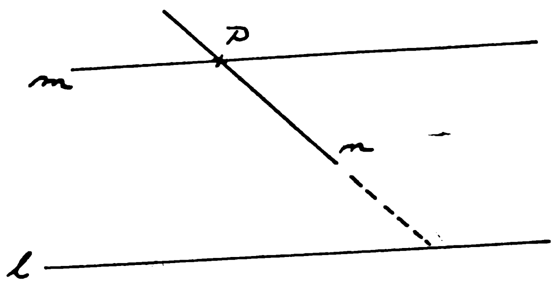
En 1823, Legendre pensó que había resuelto el problema del quinto postulado, "demostrando" que la suma de ángulos de un triángulo es 180°. Al igual que Saccheri obtuvo una demostración correcta de que dicha suma no es mayor que 180° y posteriormente "demostró" que tampoco puede ser menor, pero utilizando (inconscientemente) un hecho que no pudo demostrar y que propuso adoptar como axioma.
En la siguiente sección presentaremos con detalle la demostración de Legendre.

I.3 "Demostraciones" del quinto postulado

En esta sección presentamos cuatro intentos de demostración del quinto postulado. En las dos primeras lo que se pretende es demostrar el axioma de Playfair (unicidad de la paralela); en las dos últimas se pretende demostrar que la suma de ángulos interiores de todo triángulo es 180°.

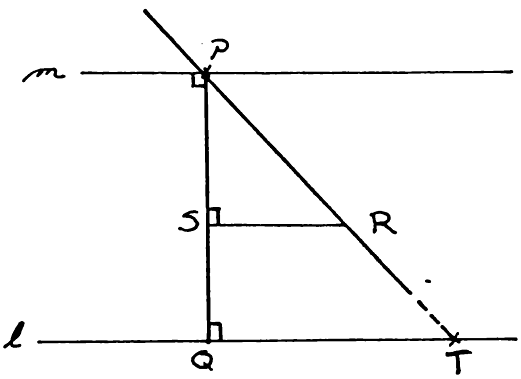
Para una demostración de que tanto el axioma de Playfair como el hecho de que la suma de ángulos interiores de un triángulo sea 180° implica el quinto postulado, ver [ ]

En las dos demostraciones del postulado de Playfair que presentamos a continuación, lo que se hace es, dados una recta l y un punto P fuera de ella, trazar una recta m paralela a l por P, después trazar una recta arbitraria por P (n), diferente de m y "demostrar" que l y n se intersectan, con lo que m resulta ser la única paralela a l por P.



Demostración I.3.1 (J. Wallis 1616 - 1703)

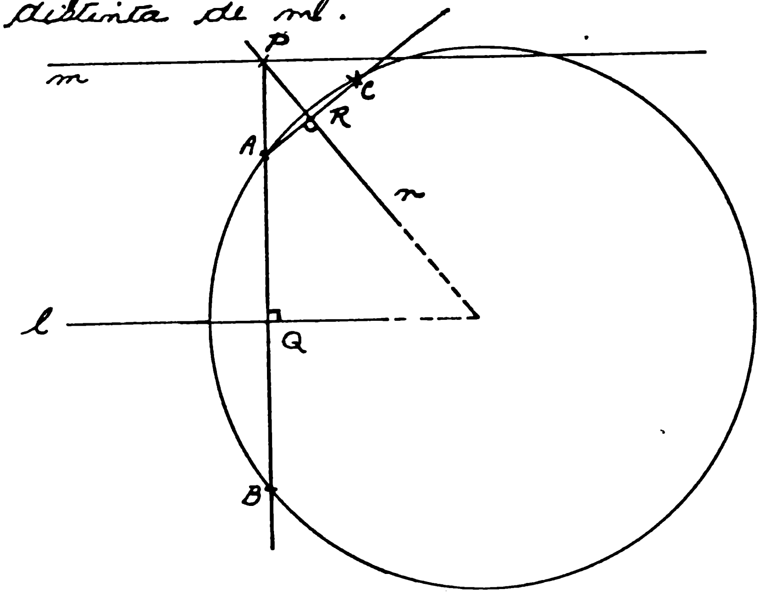
Sea l una recta, y P un punto fuera de ella. Tracemos desde P una perpendicular a l y llamemos Q a su pie.
Tracemos, por P, una recta m perpendicular a PQ, l y m resultan ser paralelas.



Sea n una recta por P diferente de m y sea R un punto de n en la región comprendida entre l y m.
Tracemos desde R una perpendicular a PQ y llamemos S a su pie.
Tracemos un triángulo PQT semejante al triángulo PSR, es decir, un triángulo PQT tal que
$\angle PQT = \angle PSR$; $\angle QTP = \angle SRP$ y $\angle TPQ = \angle RPS$.
Entonces T está sobre n ($n = PR$) y sobre l (l es perpendicular a PQ), por lo que n y l se intersectan en T y por lo tanto no son paralelas y m es la única paralela a l por

Demostración I.3.2 (basada en un argumento de W. Bolyai 1775 - 1856)

Sea l una recta y sea P un punto fuera de l. Sea Q el pie de la perpendicular a l desde P y sea m ~~una p~~ la perpendicular a PQ por P. l y m son paralelas. Sea n una recta por P distinta de m.



Sea A un punto del segmento PQ. Sea $B \neq A$ el punto sobre la recta PQ tal que $AQ = QB$. Tracemos la perpendicular a n desde A y llamemos R a su pie. Sea $C \neq A$ el punto sobre la recta AR tal que $AR = RC$.

A, B y C son tres puntos no colineales. Tracemos el círculo que pasa por ellos.

AC y AB resultan ser cuerdas de este círculo, y l y n mediatrices de estas cuerdas, por lo que l y n se intersectan en el centro del círculo y entonces no son paralelas y m es la única paralela a l por P.

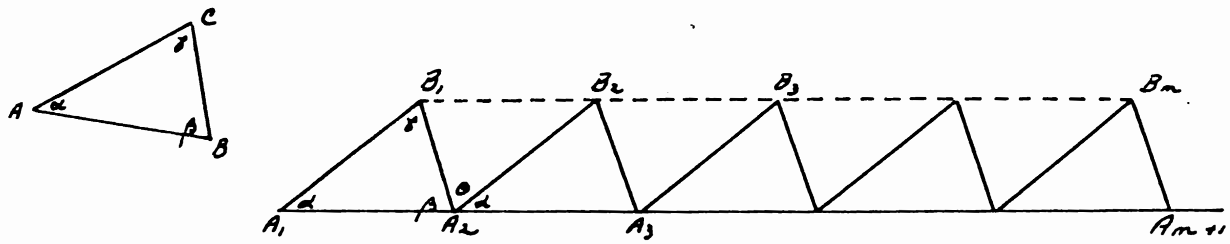
"La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°"

Demostración I.3.3 (Legendre)

i) No existen triángulos tales que la suma de sus ~~tres~~ ángulos interiores es mayor que 180°.

Demostración: Supongamos que existe un triángulo ABC cuyos ángulos interiores, α, β y γ, suman más de 180°.

Sobre una recta marquemos $n+1$ puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ tales que A_2 está entre A_1 y A_3; A_3 entre A_2 y A_4, A_4 entre A_3 y A_5 etc. y tales que los segmentos A_1A_2, A_2A_3, $A_3A_4, \ldots A_nA_{n+1}$ son congruentes con AB.



Sobre cada uno de los segmentos A_iA_{i+1}, $1 \leq i \leq n$, construyamos un triángulo $A_iA_{i+1}B_i$ congruente con el triángulo ABC (todos los triángulos deben estar del mismo lado de la recta A_1A_{n+1}).

Sea θ el ángulo $B_1A_2B_2$. Entonces $\alpha+\beta+\theta = 180°$; y como estamos suponiendo que $\alpha+\beta+\gamma > 180°$, tenemos que $\gamma > \theta$.

Como $\gamma > \theta$, $A_1A_2 > B_1B_2$ y, en general, $A_iA_{i+1} > B_iB_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$

$$A_iA_{i+1} > B_iB_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n) \quad \cdots (1)$$

Por otra parte, el segmento A_1A_{n+1} es menor que la poligonal $A_1B_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-1}B_n + B_nA_{n+1}$, es decir,

$$n(A_1A_2) < A_1B_1 + n(B_1B_2) + B_nA_{n+1}$$

de donde

$$n(A_1A_2 - B_1B_2) < A_1B_1 + B_nA_{n+1}$$

y como $B_nA_{n+1} = B_1A_2$, tenemos que

$$n(A_1A_2 - B_1B_2) < A_1B_1 + B_1A_2 \quad \cdots (2)$$

por (1), la diferencia $A_1A_2 - B_1B_2$ es igual a un segmento no nulo ε, por lo que (2) puede escribirse en la forma

$$n \cdot \varepsilon < A_1B_1 + B_1A_2 \quad \cdots (3)$$

lo cual es un absurdo, pues n puede ser arbitrariamente grande.

Por lo tanto, γ no puede ser mayor que θ, de donde $\alpha+\beta+\gamma$ no puede ser mayor que $180°$ y así no existen triángulos cuya suma de ángulos interiores es mayor que $180°$.

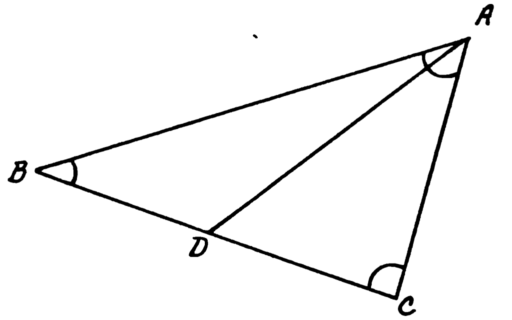
ii) No existen triángulos cuya suma de ángulos interiores sea menor que $180°$.

Para demostrar esto utilizaremos el concepto de defecto de un triángulo. El defecto de un triángulo cuyos ángulos interiores son α, β y γ, se define como el ángulo δ tal que $\alpha+\beta+\gamma+\delta=180°$ es decir, $\delta = 180° - (\alpha+\beta+\gamma)$.

Obsérvese que el defecto no puede ser mayor que $180°$.

El defecto, δ, tiene la siguiente propiedad: si dividimos un triángulo por medio de una ~~trans~~ recta por un vértice, en dos subtriángulos el defecto del triángulo original es igual a la suma de los defectos de los dos subtriángulos.

Para demostrar esta propiedad del defecto consideremos un triángulo ABC y una recta CD por el vértice C que intersecte al lado AB en D.



δ, el defecto de ABC, es igual a 2 rectos $-(\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB)$

δ_1, el defecto de CAD, es igual a 2 rectos $-(\measuredangle DCA + \measuredangle CAD + \measuredangle ADC)$.

δ_2, el defecto de CDB es igual a 2 rectos $-(\measuredangle BCD + \measuredangle CDB + \measuredangle DBC)$.

Tenemos así que

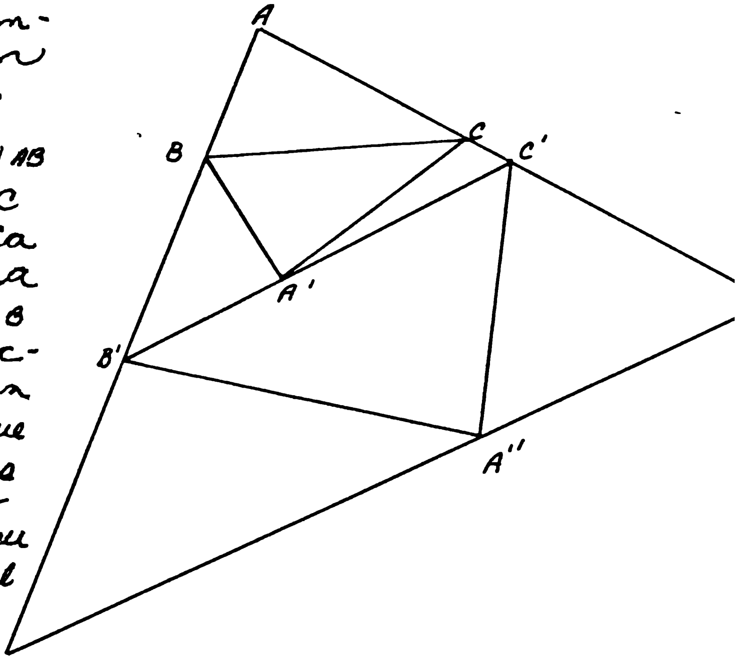
$$\begin{aligned}
\delta_1 + \delta_2 &= 2 \text{ rectos} - (\measuredangle DCA + \measuredangle CAD + \measuredangle ADC) + \\
&\quad 2 \text{ rectos} - (\measuredangle BCD + \measuredangle CDB + \measuredangle DBC) \\
&= 4 \text{ rectos} - \measuredangle CAD - \measuredangle DBC - (\measuredangle DCA + \measuredangle BCD) \\
&\quad - (\measuredangle ADC + \measuredangle CDB) \\
&= 4 \text{ rectos} - \measuredangle CAD - \measuredangle DBC - \measuredangle BCA - 2 \text{ rectos} \\
&= 2 \text{ rectos} - (\measuredangle CAB - \measuredangle ABC - \measuredangle BCA) \\
&= \delta
\end{aligned}$$

En general, si dividimos un triángulo en n subtriángulos, el defecto del triángulo original es igual a la suma de los defectos de los n subtriángulos.

Ahora, para demostrar que la suma de ángulos de un triángulo no puede ser menor que 180°, supongamos que existe un triángulo ABC cuyos ángulos interiores suman menos que 180°.

Entonces δ_1, el defecto de ABC, es estrictamente mayor que cero.

Reflejando A sobre BC obtenemos un punto A' tal que los triángulos ABC y A'BC son congruentes, por lo que tienen el mismo defecto, δ_1.



Prolongando los lados AB y AC del triángulo ABC y trazando una recta por A' que intersecte a las prolongaciones de AB y AC en B' y C' respectivamente, obtenemos un triángulo AB'C' tal que dos de sus subtriángulos (ABC y A'BC), tienen defecto δ_1, por lo que su defecto es mayor o igual que $2\delta_1$.

Volviendo a reflejar A, pero ahora sobre B'C', obtenemos un punto A'' tal que el triángulo A''B'C' es congruente con el triángulo AB'C', por lo que su defecto es también mayor o igual que 2δ.

Trazando una recta por A'' que intersecte a las prolongaciones de AB' y AC' en B'' y C'' respectivamente, obtenemos un triángulo AB''C'' tal que dos de sus subtriángulos tienen defecto mayor o igual que $2\delta_1$, por lo que el defecto de AB''C'' es por lo menos $4\delta_1$.

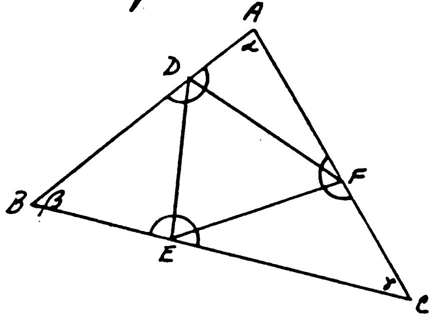
Repitiendo este proceso tantas veces como sea necesario, podemos obtener un triángulo AB^nC^n cuyo defecto δ_n sea mayor que 180°, lo cual es imposible, y esto implica que no existen triángulos cuya suma de ángulos interiores sea menor que 180°.

Habiendo demostrado que no existen triángulos cuya suma de ángulos es mayor que 180°, y que no existen triángulos cuya suma de ángulos es menor que 180°. Tenemos que, en todo triángulo, la suma de ángulos interiores es igual a 180°.

Otra manera de "demostrar" que la suma de ángulos de un triángulo es 180°, es la siguiente:

Demostración I.3.4 Sea ABC un triángulo y sean α, β y γ sus ángulos interiores.

Sea x la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Entonces $\alpha+\beta+\gamma = x$.



Sean D, E y F tres puntos sobre cada uno de los lados del triángulo ABC.

Unamos estos puntos para formar cuatro subtriángulos de ABC.

La suma de los ángulos interiores de cada uno de estos subtriángulos es x, por lo que la suma de los ángulos interiores de los cuatro subtriángulos es $4x$.

Pero dicha suma es igual a

$$\alpha + \measuredangle ADF + \measuredangle FDE + \measuredangle EDB + \beta + \measuredangle BED + \measuredangle DEF + \measuredangle FEC + \gamma + \measuredangle CFE + \measuredangle EFD + \measuredangle DFA =$$

$$\alpha + 180° + \beta + 180° + \gamma + 180° = \alpha+\beta+\gamma + 3(180°)$$

y así

$$4x = \alpha+\beta+\gamma + 3(180°),$$

y como $\alpha+\beta+\gamma = x$, tenemos que

$$3x = 3(180°)$$

de donde

$$x = 180°.$$

Por increíble que parezca, ninguna de estas demostraciones es válida, pues, en cada una de ellas, interviene un argumento que como se demostrará posteriormente no es posible obtener como consecuencia de los primeros cuatro postulados.

Estos argumentos son los siguientes:

En la demostración de Wallis del postulado de Playfair (demostración I.3.1), se utiliza que, dado un triángulo (PSR), y un segmento (PQ), siempre es posible construir un triángulo (PQT), semejante al dado y tal que uno de sus lados sea el segmento dado.

Wallis sabía que esto no podía obtenerse como consecuencia de los primeros postulados, por lo que propone adoptarlo como axioma. (postulado de Wallis).

En la demostración de Bolyai del postulado de Playfair (demostración I.3.2), el error consiste en suponer que dados tres puntos no colineales, siempre existe un círculo que pasa por ellos.

Por lo que se refiere a la demostración de Legendre de que la suma de ángulos de todo triángulo es 180°, la primera parte, es decir, donde se demuestra que tal suma no puede ser mayor que 180°, es válida.

Sin embargo, en la segunda parte, hay un argumento

"Dado un punto (A') en el interior de un ángulo (∠CAB), siempre es posible trazar una recta (B'C') que pase por el punto dado, y que intersecte a ambos lados del triángulo".

que no es consecuencia de los primeros postulados, y que Legendre propuso adoptar como axioma (axioma de Legendre).

En la última demostración (demostración I.3.4), tomada de [5], el error consiste en suponer que todo triángulo tiene la misma suma de ángulos.

Finalizamos este capítulo con un fragmento de la carta que Wolfgang Bolyai (1775-1856), escribe a su hijo Johan (1802-1860), al enterarse que él también estaba intentando resolver el problema del postulado de las paralelas.

"... No debes intentar acercarte a la ciencia de las paralelas. Conozco este camino hasta el final, pues he atravesado esta noche sin fondo que extinguió toda luz y alegría de mi vida. Te lo ruego, deja en paz a la ciencia de las paralelas...

... Yo pensé en sacrificarme por la verdad. Estaba dispuesto a convertirme en un mártir que borrara la imperfección de la geometría y la devolviera purificada a la humanidad. Realicé trabajos monstruosos, enormes. Mis creaciones son bastante mejores que las de otros y aún así no he obtenido completa satisfacción... Regresé cuando vi que ningún hombre podía tocar el fondo de la noche. Regresé desconsolado sintiendo lástima de mí mismo y de la humanidad...

... Admito que espero poco de lo que me comunicas. Siento que he estado en esas regiones, que he recorrido todos los escollos de ese mar muerto infernal, y que he regresado siempre con el mástil roto y las velas desgarradas. La ruina de mi disposición y mi caída datan de ese tiempo. Arriesgué sin pensarlo mi vida y mi felicidad...

Capítulo II

Independencia del quinto postulado

En el presente capítulo demostraremos que el quinto postulado no puede demostrarse, es decir, demostraremos, utilizando el modelo de Poincaré del semiplano, que el quinto postulado no es una consecuencia de los cuatro primeros.

En la sección II.1 (Modelo de Poincaré del semiplano), explicaremos qué se entiende por modelo de una geometría, presentaremos al modelo de Poincaré del semiplano, y demostraremos que satisface los cuatro primeros postulados de Euclides.

En la sección II.2 (Independencia del quinto postulado), veremos que el modelo de Poincaré del semiplano no satisface el quinto postulado y que por lo tanto éste es independiente de los otros cuatro. Recordaremos además aquellas suposiciones a partir de las cuales podía obtenerse el quinto postulado, únicamente para aclarar que no son válidas si no se cuenta con el quinto postulado.

Finalmente, en la sección II.3 (Modelo de Poincaré del disco y modelo de Beltrami-Klein) presentaremos otros dos modelos que, por ser isomorfos al modelo de Poincaré del semiplano, satisfacen también los cuatro primeros postulados pero no satisfacen el quinto.

II.1 Modelo de Poincaré del semiplano.

II.1.1 ¿Qué es un modelo?

Usualmente, para revisar un conjunto de postulados, en particular para revisar si éstos son o no independientes, se utiliza el método de los modelos.

Para poder explicar qué es un modelo, hay que mencionar que, en general, en matemáticas los conceptos básicos se definen enunciando sus propiedades, y que en muchas teorías matemáticas, los conceptos básicos no se definen explícitamente, pues los axiomas o postulados de la teoría los definen implícitamente, hablando de sus propiedades.

La manera como se represente a los conceptos básicos de una teoría puede variar; pero para que una representación sea válida es necesario que ésta satisfaga los axiomas de la teoría.

Se llama modelo de un conjunto de postulados a cualquier representación, consistente con los postulados, de los conceptos básicos involucrados en ellos.

En el caso de la geometría, actualmente los conceptos de punto, recta y plano no se definen explícitamente; las propiedades de estos conceptos están determinadas por los axiomas.

Podemos, por lo tanto, representar a los puntos, las rectas y los planos como se nos venga en gana, siempre y cuando la representación sea consistente con los axiomas.

Hay otros conceptos, como el orden, la congruencia, la distancia entre dos puntos etc., que tampoco se definen explícitamente, pero que también están determinados por los axiomas.

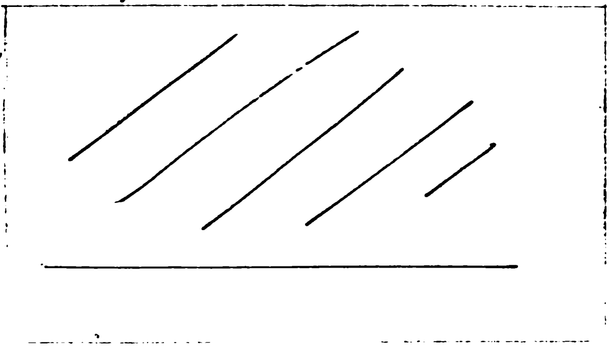
Así, en el caso de la distancia, por ejemplo, ésta puede definirse de manera distinta en cada modelo, lo importante es, que con cualquier definición que de ella se dé, se sigan cumpliendo los axiomas.

II.1.2 Modelo del Poincaré del semiplano

El modelo de Poincaré del semiplano es un modelo que satisface los cuatro primeros axiomas de Euclides.

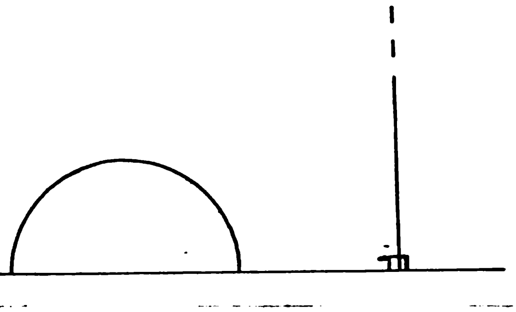
En este modelo, el "plano", π, es uno de los semiplanos determinados por una recta a la que llamaremos eje x. Los puntos del eje x no pertenecen a π.

Por comodidad, en las representaciones gráficas el eje x será una línea horizontal y π el semiplano superior, lo que nos permitirá, entre otras cosas hablar de izquierda y derecha, arriba y abajo, sin que se preste a confusiones.



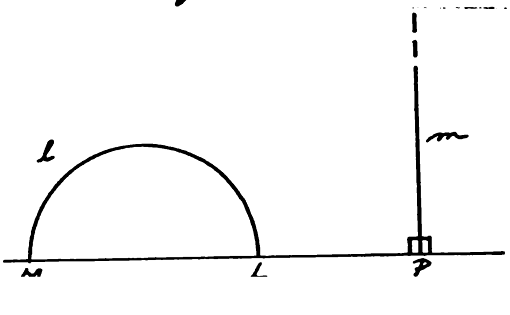
Las "rectas" son las e-semicircunferencias de radio finito o infinito, contenidas en π y perpendiculares al eje x, es decir, las "rectas" son las semicircunferencias con centro en el eje x y los rayos perpendiculares al eje x.

A los puntos se les representa de la manera usual.



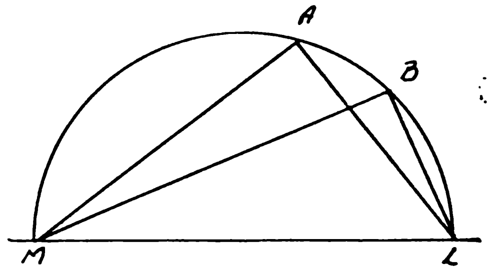
Para evitar confusiones, a los elementos del modelo de Poincaré los llamaremos h-elementos: h-punto, h-recta, h-circulos etc., y a los del modelo euclideano, es decir, a los de la representación usual, los llamaremos e-elementos: e-recta, e-punto, e-circulo etc.

A los e-puntos en donde una h-recta intersecta al eje x, les llamaremos puntos al infinito. En la figura, L y M son los puntos al infinito de la h-recta l, y P es un punto al infinito de la h-recta m. (El otro punto al infinito de la h-recta m está sobre la e-recta al infinito).



En este modelo, dados dos h-puntos A y B, la distancia entre ellos (h-distancia), se define como

$$d_B^A = \left| \log\left(\frac{AL}{LB} \Big/ \frac{AM}{MB}\right) \right|$$



Donde L y M son los puntos al infinito de la h-recta que contiene a A y B y tales que A está entre M y B y B está entre A y L, y AL, LB, AM y MB son las e-longitudes de los e-segmentos AL, LB, AM y MB.

Al cociente $\frac{AL}{LB} \Big/ \frac{AM}{MB}$ se le llama razón cruzada de A, B, L y M y se denota $\{ABLM\}$.

En el caso en que la h-recta AB es un e-rayo, la e-longitud de los e-segmentos AL y LB es infinita, sin embargo,

$$\lim_{L \to \infty} \frac{AL}{LB} = -1$$

y así

$$\lim_{L \to \infty} \left| \log \frac{AL}{LB} \Big/ \frac{AM}{MB} \right| = \left| \log -1 \Big/ \frac{AM}{MB} \right|$$

$$= \left| \log \frac{MB}{MA} \right|$$

por lo que consideraremos que, en el caso en que AB es e-rayo,

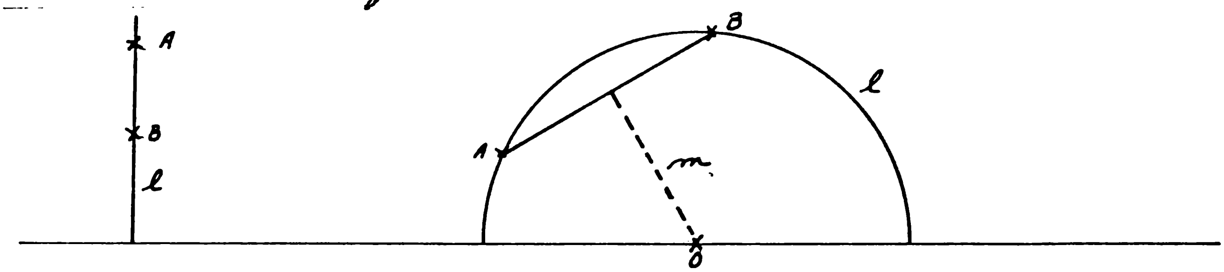
$$d_B^A = \left| \log \frac{MB}{MA} \right|$$

Como no estamos dando dos definiciones distintas de h-distancia, sino únicamente mencionando que, en el caso en que AB es e-rayo, ésta se simplifica, todas las demostraciones en donde aparezca la definición de h-distancia, serán válidas tanto para el caso en que AB es e-semicircunferencia como para el caso en que AB es e-rayo.

A continuación demostramos que el modelo de Poincaré del semiplano satisface los cuatro primeros postulados de Euclides (Para una demostración de que el modelo satisface los axiomas de Hilbert I-1, I-2, I-3, I-4, I-5, I-6, I-7, I-8, II-1, II-2, II-3, III-1, III-2, III-4, III-5, V-1 y V-2, ver [5])

Postulado I.- Por dos puntos pasa una única recta.

Sean A y B dos h-puntos. Sea l la e-recta que contiene a A y B. Si l es h-recta, es decir, si l es perpendicular al eje x, l es la h-recta que buscamos.



Si l no es h-recta, sea m la e-mediatriz del e-segmento AB, y O la intersección de ésta con el eje x.

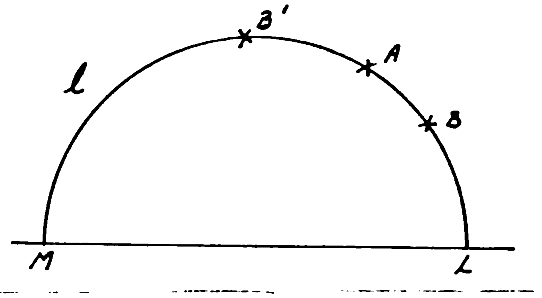
Sea C la e-circunferencia con centro en O y radio OA. La parte de C contenida en el h-plano es una h-recta que pasa por A y por B.

Así, dados dos h-puntos, siempre hay una h-recta que los contiene.

Además, la h-recta que pasa por dos h-puntos dados resulta ser única, pues tanto la e-recta que pasa por dos puntos dados como la e-circunferencia que pasa por dos e-puntos dados y con centro en una e-recta dada son únicas.

Postulado II.- Una recta puede prolongarse indefinidamente.

Interpretaremos este postulado como: dados una recta, un punto sobre ella, y un número real positivo d, siempre es posible encontrar, de cada lado del punto dado un punto sobre la recta dada tal que su distancia al punto dado sea d.



Sea l una h-recta y L y M sus puntos al infinito. Sea A un h-punto sobre l y sea d un real positivo.

Existen solamente dos números reales, λ y $1/\lambda$, ambos positivos, tales que

$$d = |\log \lambda| \text{ y } d = |\log 1/\lambda|.$$

y dados λ y $1/\lambda$ existen sólo dos e-puntos, B y B', sobre l tales que $\{ABLM\} = \lambda$ y $\{AB'LM\} = 1/\lambda$.

Como λ y $1/\lambda$ son positivos, A y B, al igual que A y B', están en el mismo arco de la e-circunferencia determinado por L y M, es decir, B y B' son h-puntos (ver [ ])

Así, existen sólo dos h-puntos, B y B', tales que

$$d = |\log \{ABLM\}| = |\log \{AB'LM\}|$$

Además, B y B' están uno de cada lado de A, pues

$$\{ABLM\} = \frac{1}{\{AB'LM\}} \Rightarrow \{ABLM\} = \{B'ALM\} \Rightarrow AB = B'A$$

$$\Rightarrow AB = -AB' \quad \text{(ver [7])}.$$

Hemos demostrado entonces, no solamente que existen un punto de cada lado de A tal que su distancia a A es d, sino que dicho punto es único.

Obsérvese que la definición de λ-distancia no solamente es consistente con el postulado II, sino también satisface:

i) Si $A = B$, $d_B^A = 0$

$$A = B \Rightarrow d_B^A = |\log \{AALM\}| = |\log 1| = 0 .$$

ii) $d_B^A = d_A^B$

$$d_B^A = |\log \{ABLM\}| = |-\log \{ABLM\}|$$

$$= \left|\log \frac{1}{\{ABLM\}}\right| = |\log \{BALM\}| = d_A^B .$$

iii) si $B \to L$ (o si $B \to M$), $d_B^A \to \infty$

$$B \to M \Rightarrow d_B^A \to |\log \{AMLM\}| = \left|\log \frac{AL}{LM} \Big/ \frac{AM}{MM}\right|$$

$$= \left|\log \frac{AL \cdot cero}{LM \cdot AM}\right| = |\log cero| = |-\infty| = \infty .$$

$$B \to L \Rightarrow d_B^A \to |\log \{ALLM\}| = \left|\log \frac{AL}{LL} \Big/ \frac{AM}{ML}\right|$$

$$= \left|\log \frac{AL \cdot AM}{LL \cdot ML}\right| = \left|\log \frac{AL \cdot AM}{cero \cdot M}\right| = |\log \infty| = \infty .$$

Postulado III. - Un punto y una distancia determinan un círculo.

Entenderemos por círculo el conjunto de puntos que están a la misma distancia de un punto dado.

Sea C un ~~k~~punto y r una k- distancia

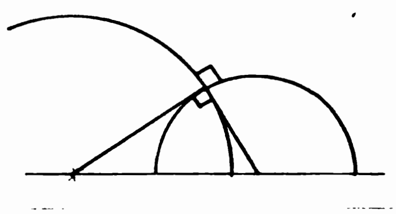
Aunque todavía no se haya mencionado como pueden representarse los círculos del modelo de Poincaré (k- círculos), es posible demostrar que estos satisfacen el tercer postulado.

Sea C un k- punto y r una k- distancia.

~~Sobre~~
Sobre cada una de las k-rectas por C (que son una infinidad, sólo hay, como acabamos de demostrar, dos k-puntos que están bien determinados, cuya distancia a C es r.

Así, el k- círculo de k-centro C y k-radio r, es decir, el conjunto de k-puntos que están a una k-distancia r de C, está bien determinado, por lo que el modelo de Poincaré satisface el tercer postulado.

Postulado IV. - Todos los ángulos rectos son congruentes.



Representaremos a los k-ángulos de la misma manera que los e- ángulos, y diremos que dos k- ángulos son k-congruentes si son e-congruentes. Así, todos los k-ángulos rectos son e-congruentes.

Hemos dado entonces un modelo cuyos elementos satisfacen los cuatro primeros postulados de Euclides, y tenemos así que existen al menos dos maneras distintas de representar a los elementos de una geometría cuyos axiomas sean los cuatro primeros postulados de Euclides: la representación usual (modelo euclideano), y el modelo de Poincaré del semiplano.

II.2 Independencia del quinto postulado

II.2.1 Independencia del quinto postulado

En cualquier rama de las matemáticas, en particular en geometría, los resultados no se demuestran utilizando lo que parecen indicar las representaciones gráficas, sino como consecuencia de los postulados y de los teoremas previamente demostrados.

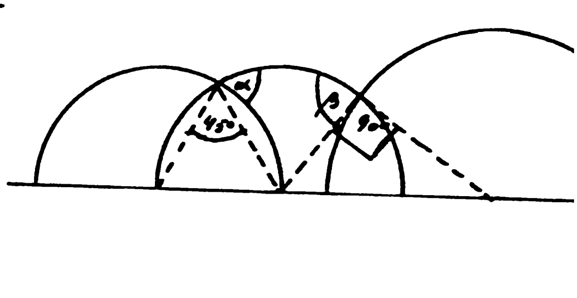
Así, los resultados obtenidos son válidos independientemente de la manera que se escoja para representar a los conceptos básicos de la teoría.

En el caso de Los Elementos, por ejemplo, las primeras 28 proposiciones del libro I son válidas ciertamente para la representación euclidiana, pero dado que para demostrarlas Euclides se basó en los cuatro primeros postulados y no en lo que le indicaban las figuras, estas proposiciones también son válidas en el modelo de Poincaré.

Y no sólo eso, cualquier otro resultado que pueda obtenerse a partir de los primeros cuatro postulados tiene que ser válido tanto para la representación euclidiana como para el modelo de Poincaré.

En particular, si el postulado de las paralelas puede obtenerse a partir de los otros cuatro, tiene que ser válido en el modelo de Poincaré, es decir, si el quinto postulado es consecuencia de los otros cuatro, cualesquiera dos rectas en el modelo de Poincaré que al ser cortadas por una transversal formen con ella ángulos internos del mismo lado cuya suma sea menor que dos rectos, deben intersectarse.

En esta figura, a y b son dos rectas en el modelo de Poincaré, y c una tercera recta que corta a ambas. Los ángulos α y β, que son ángulos internos del mismo lado de c, suman menos que dos rectos ($\alpha = 45°$, $\beta = 90°$); sin embargo, las rectas a y b no se intersectan.



Con esto queda demostrado entonces que el postulado de las paralelas no puede obtenerse como una consecuencia de los otros postulados.

Es independiente de ellos, pues si no lo fuera, sería válido en el modelo de Poincaré.

II.2.2 Resultados de geometría euclidiana que no son consecuencia de los primeros cuatro postulados.

Como se mencionó en el capítulo I, secciones I.2 y I.3, el quinto postulado puede obtenerse como consecuencia de alguna de las siguientes afirmaciones:

- las paralelas equidistan
- la paralela a una recta por un punto fuera de ella es única
- una recta que corta a una paralela corta a otra.
- dos paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
- la distancia entre paralelas está acotada
- la suma de ángulos interiores de todo triángulo es 180°.
- los puntos que equidistan de una recta están en una recta
- dos paralelas siempre tienen una perpendicular común
- Todo ángulo inscrito en un semicírculo es recto.
- existen los triángulos semejantes que no son congruentes
- dados tres puntos no colineales, existe un círculo que pasa por ellos
- por un punto en el interior de un ángulo siempre es posible trazar una recta que corte a ambos lados del ángulo
- todos los triángulos tienen la misma suma de ángulos.

Una vez demostrado que el quinto postulado no es una consecuencia de los otros cuatro, queda claro que tampoco estas afirmaciones son consecuencia de los cuatro primeros postulados.

Además, el modelo de Poincaré permite comprobar la independencia de estas afirmaciones. En algunos casos, la comprobación es inmediata, por ejemplo:

En la figura a), P es un punto fuera de la recta l y por el pasan al menos dos rectas que no intersectan a l (de hecho pasan una infinidad).

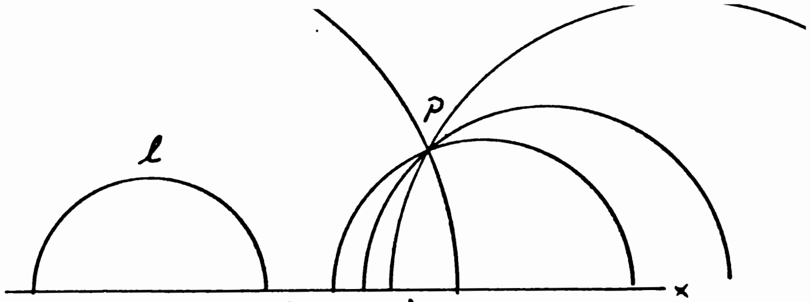


fig. a)

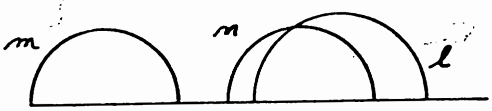


fig. b

En la figura b), l y m son paralelas, y n es una recta que corta a l pero no a m.
En esta misma figura, l y n son paralelas a m y no son paralelas entre sí.

En la figura c), el triángulo AOC tiene suma de ángulos $40 + 40 + 0 = 90 < 180^\circ$, y el triángulo AB'C tiene suma de ángulos $40 + 20 + 11 = 71 \neq 90$

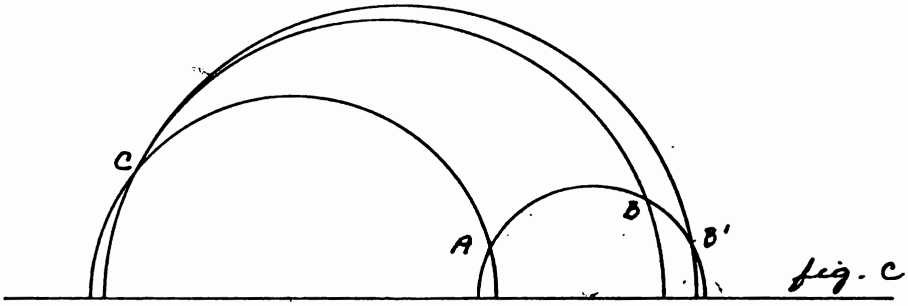


fig. c

En la figura d), P es un punto en el interior del ángulo AOB tal que ninguna de las rectas por él intersecta a ambos lados del ángulo

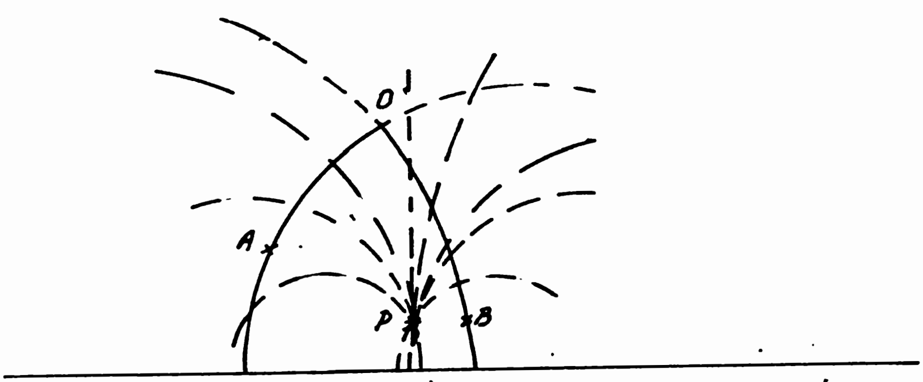
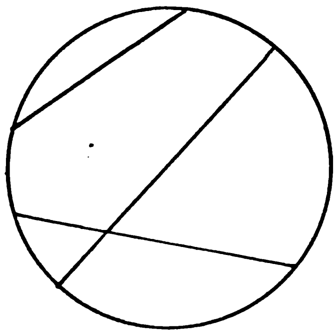


fig. d)

II.3 Modelo de Beltrami Klein y modelo de Poincaré del disco

A continuación presentamos otros dos modelos que satisfacen los cuatro primeros postulados y no satisfacen el quinto.

II.3.1 Modelo de Beltrami Klein.



Por brevedad, nos referiremos a este modelo como modelo de Klein. En él, el h-plano es el interior de un círculo γ; y los h-puntos los e-puntos en el interior de γ y las h-rectas las e-cuerdas abiertas que unen dos puntos sobre γ. (Los dos puntos sobre γ no pertenecen a la h-cuerda pues no están en el h-plano.

En este modelo, ni la h-congruencia de ángulos ni la h-congruencia de segmentos coincide con la euclidiana.

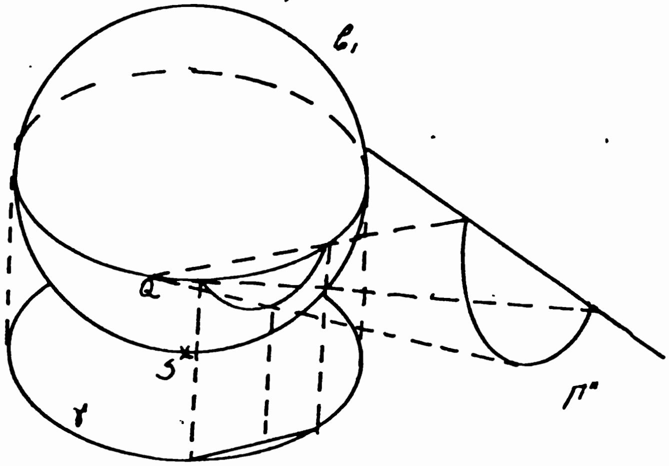
Para demostrar que el modelo de Klein satisface los cuatro primeros postulados de Euclides y no satisface el quinto, lo que haremos será demostrar que este modelo es isomorfo al modelo de Poincaré del semiplano, es decir, demostraremos que existe una función biyectiva f, del h-plano de Klein al h-plano de Poincaré, que asocia a cada h-punto del h-plano de Klein un h-punto del modelo de Poincaré del semiplano y bajo la cual las h-rectas de un modelo ~~van a~~ se transforman en h-rectas del otro modelo, preservándose la incidencia y la relación estar entre.

Una vez demostrado el isomorfismo, tendremos que ambos modelos tienen las mismas propiedades, en particular, tendremos que ambos satisfacen los cuatro primeros postulados de Euclides y no satisfacen el quinto.

Para demostrar el isomorfismo demostraremos que es posible pasar de un modelo a otro mediante composición de proyecciones.

Sea γ el modelo de Klein, sean S y r el e-centro y el e-radio de γ respectivamente, y sea Γ_1 el plano que contiene a γ. Sea $\mathcal{E}_1$ una e-esfera cuyo e-radio es también r y tangente a Γ_1 en S.

Sea P_1 la proyección que manda a cada punto X de γ al punto X' en donde la e-recta por X y perpendicular al plano Γ_1 intersecta por primera vez a la cáscara de la esfera.



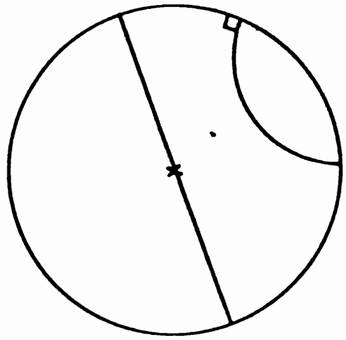
Al aplicar P_1, la e-circunferencia γ va se transforma en el ecuador de la esfera y el interior de γ, es decir, el h-plano de Klein, se transforma en la cáscara de la semiesfera que contiene a S, a la que llamaremos γ'. Las h-rectas del modelo de Klein, es decir, las e-cuerdas de γ, van a dar a e-semicircunferencias sobre γ' ortogonales al ecuador.

Sea Q un punto sobre el ecuador. Sea Γ_2 el e-plano tangente a $\mathcal{E}_1$ en el punto diametralmente opuesto a Q, y sea P_2 la proyección estereográfica de $\mathcal{E}_1$ sobre Γ_2 desde Q.

Al aplicar P_2, todos los puntos del ecuador distintos de Q se transforma en una recta sobre Γ_2 (eje x); γ', la cáscara de la esfera que contiene a S, se transforma en Γ'', uno de los dos semiplanos determinados por el eje x. Las e-semicircunferencias ortogonales al ecuador que no pasan por Q, se transforman en e-semicircunferencias ortogonales al eje x; y las e-semicircunferencias sobre γ' ortogonales al ecuador que sí pasan por Q, ~~van a~~ se transforman en e-rayos sobre γ'' ortogonales al eje x.

Existe entonces una función $f: \gamma \to \gamma''$, $f(x) = P_2(P_1(x))$, que transforma al modelo de Klein en el modelo de Poincaré del semiplano, y tal que su inversa, $f^{-1}: \gamma'' \to \gamma$, $f(x'') = P_1^{-1}(P_2(x''))$, transforma al modelo del semiplano en el de Klein, y tenemos así que ambos modelos son isomorfos.

II.3.2 Modelo de Poincaré del disco.

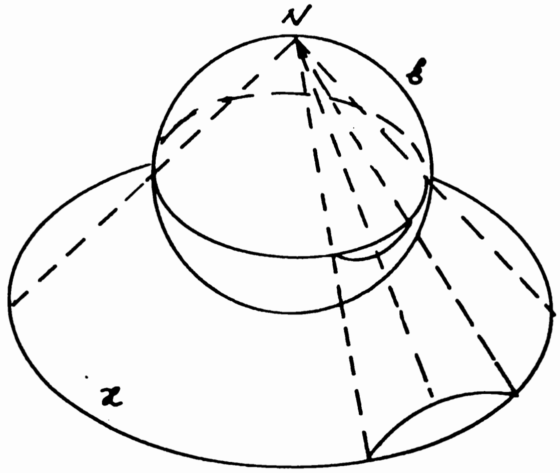


En él, el h-plano es el interior de un e-círculo $\mathcal{X}$; los h-puntos son los e-puntos en el interior de $\mathcal{X}$ y las h-rectas son los e-diámetros de $\mathcal{X}$ y las e-semicircunferencias ortogonales a $\mathcal{X}$.

Este modelo también es isomorfo al de Poincaré del semiplano (y por lo tanto al de Klein). Para demostrar el isomorfismo proyectaremos también al disco sobre una semiesfera, y a ésta sobre un segundo plano, pero ahora de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{X}$ el modelo de Poincaré del disco. Sean S y r' el e-centro y el e-radio de $\mathcal{X}$ respectivamente, y sea Γ el e-plano que contiene a $\mathcal{X}$.

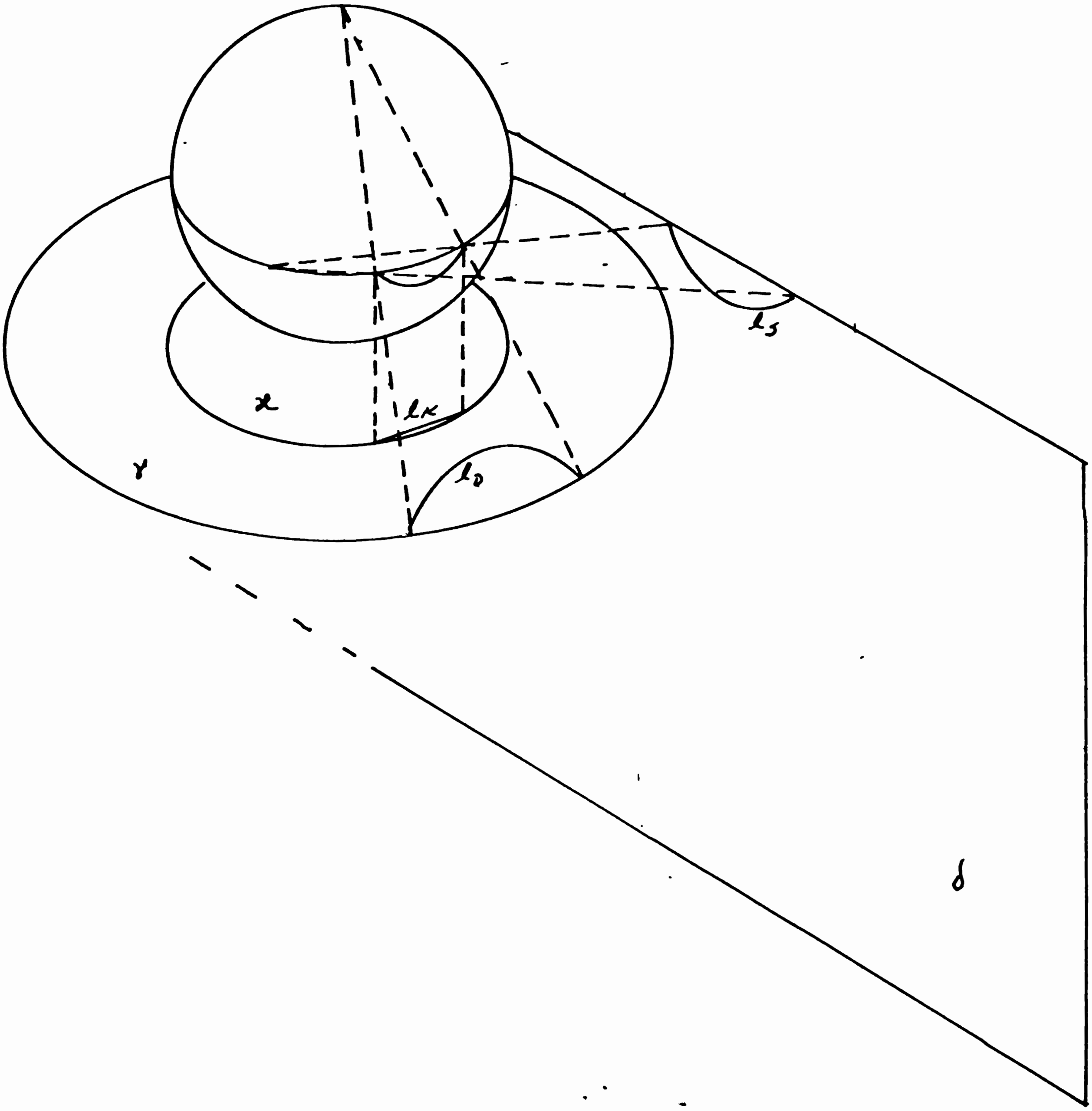
Sea $\mathcal{E}$ una esfera cuyo radio r es menor que r' y tangente a Γ en S. Sea N el punto sobre $\mathcal{E}$ diametralmente opuesto a S.



Sea P_1 la proyección estereográfica, desde N, de la cáscara de la semiesfera que contiene a S sobre Γ.

Al aplicar P_1 la e-circunferencia $\mathcal{X}$ va a dar al ecuador de la esfera; el interior de $\mathcal{X}$, es decir el h-plano, va a dar a la cáscara de la esfera que contiene a S. Las h-rectas del modelo del disco, es decir, los diámetros de $\mathcal{X}$ y las e-semicircunferencias ortogonales a $\mathcal{X}$, van a dar a e-semicircunferencias ortogonales al ecuador.

Definimos P_2 como en el caso anterior, es decir, como la proyección estereográfica de la esfera desde un punto Q al plano tangente a $\mathcal{E}$ en el punto diametralmente opuesto a Q, y así, como en el caso anterior, al aplicar P_2 obtenemos el modelo de Poincaré del semiplano.



Esta figura ilustra el isomorfismo entre los tres modelos. En ella, γ es el modelo de Poincaré del disco, κ es el modelo de Klein y δ es el modelo de Poincaré del semiplano. l_D, l_K y l_S son la misma h-recta en el modelo de Poincaré del disco, en el modelo de Klein y en el modelo de Poincaré del semiplano

Segunda Parte

Geometría Hiperbólica

Segunda Parte

La segunda parte de este trabajo la dedicaremos al estudio de algunos resultados de geometría hiperbólica.

Después de una breve introducción en donde diremos qué se entiende por geometría hiperbólica y hablaremos del surgimiento de ésta, presentaremos algunos resultados de geometría hiperbólica en el modelo de Poincaré del semiplano.

Trabajaremos suponiendo válidos todos los resultados de geometría euclidiana, y tomando en cuenta que las rectas del modelo de Poincaré del semiplano son semicírculos en la geometría euclidiana. Es decir, utilizaremos aquellas propiedades que, por ser semicírculos euclidianos, poseen las rectas del modelo.

Muchas de nuestras demostraciones, entonces, serán válidas únicamente para el modelo de Poincaré: es posible demostrar, aunque no lo haremos, que todos los resultados a los cuales hacemos referencia son válidos en general.

Esta segunda parte está dividida en cuatro capítulos:

I h-congruencia
II Conceptos elementales
III Paralelas
IV h-triángulos.

En los dos primeros capítulos prácticamente lo que haremos es proporcionar la herramienta necesaria para el desarrollo de los dos últimos: definir los conceptos de h-congruencia, h-perpendicular, h-mediatriz etc; demostrar algunas de sus propiedades, e indicar como hacer ciertas construcciones.

En los dos últimos capítulos estudiaremos propiedades de las paralelas y de los triángulos en geometría hiperbólica.

Surgimiento de la geometría hiperbólica

La mayoría de los últimos intentos por demostrar el postulado de las paralelas utilizaban el método indirecto: suponían que el postulado era falso y esperaban de este modo llegar a una contradicción.

A medida que se negaba el postulado y la contradicción no aparecía, se empezó a pensar, mucho antes de contar con los modelos de Poincaré y de Klein no solamente que el postulado de las paralelas no podía demostrarse, sino que, después de todo, tal vez fuera posible construir una geometría en donde fuera válida la negación del postulado.

Gauss (1777-1855) fue tal vez el primero en concebir una geometría "no euclidiana". El pensamiento le pareció tan revolucionario que no lo hizo público. En 1829 le escribe a Bessel:

"Tiene que pasar mucho tiempo antes de que haga públicas mis investigaciones al respecto; en realidad esto no sucederá mientras yo viva, pues temo al grito de los estúpidos si hago explícitos mis puntos de vista.".

En algunos párrafos de sus cartas, Gauss expresa la convicción de que existe una geometría consistente en la cual no es válido el postulado de las paralelas.

Los primeros trabajos publicados que hablan de una geometría no euclidiana se deben al ruso Lobachevski (1793-1856); y al húngaro Johann Bolyai (1802-1860).

En 1823, J. Bolyai escribe a su padre:

"Estoy dispuesto a publicar un trabajo sobre paralelas en cuanto lo ponga en orden, lo complete y se presente la oportunidad...
He encontrado cosas magníficas y sorprendentes... Todo lo que puedo decir es que he creado, de la nada, un mundo nuevo y diferente..."

J. Bolyai publicó su trabajo en 1831, pero se le había anticipado Lobachevski, quien presentó su tratado a la división de físico - matemáticas de la Universidad de Kasan el 2 de febrero de 1826.

Gauss, Bolyai y Lobachevsky llegaron independientemente a la misma conclusión: Existe una geometría cuyos postulados son los cuatro primeros de Euclides y donde no vale el quinto.

Esta nueva geometría recibió distintos nombres: geometría anti-euclidiana, geometría astral, geometría imaginaria, pangeometría. En la actualidad se le conoce con el nombre de geometría hiperbólica.

Los contemporáneos de estos matemáticos no prestaron mucha atención a sus ideas. La creencia de que la geometría euclidiana era la única geometría posible, estaba tan enraizada en el pensamiento de la época, que costaba trabajo aceptar la nueva noción.

A pesar de que la nueva geometría se desarrolló hasta el punto de trabajar con su trigonometría, seguía siendo intuitivamente inaceptable y casi incomprensible.

Sus descubridores creían firmemente que no había en ella contradicciones lógicas; estaban seguros de que el postulado de las paralelas era independiente de los otros cuatro, sin embargo, nunca dan una demostración formal de esto.

No es sino hasta finales del siglo pasado, que Felix Klein (1849-1925) y Henri Poincaré (1845-1912), construyen modelos de esta geometría. En esto se demuestra la imposibilidad de demostrar el postulado de las paralelas.

Capítulo I

h-congruencia

Con este capítulo comenzamos el estudio de la geometría hiperbólica.

Como ya se mencionó trabajaremos únicamente con el modelo de Poincaré del semiplano. Al igual que en la sección II.1 de la primera parte, distinguiremos a los elementos del modelo de Poincaré de los euclidianos anteponiendo una "h" a los hiperbólicos y una "e" a los euclidianos: h-rectas, e-rectas, h-puntos, e-puntos etc.

Básicamente, lo que se hará en este primer capítulo será definir el concepto de h-congruencia.

Dado que definiremos la h-congruencia de h-segmentos diciendo que dos h-segmentos son h-congruentes si y sólo si existe una transformación del h-plano en sí mismo que preserva la h-distancia y tal que transforma a un h-segmento en el otro, comenzamos, en la sección I.1, (h-isometrías), hablando de las transformaciones que preservan la h-distancia. Esencialmente lo que demostramos es que la inversión euclidiana con respecto a h-rectas es una h-isometría. Se menciona, aunque no se demuestra, que toda h-isometría es producto de e-inversiones con respecto a h-rectas.

En la sección I.2 (Cinco construcciones básicas) indicaremos como hacer cinco construcciones que consideramos básicas: dados dos h-puntos, encontrar la h-isometría que transforma a uno en otro; dadas dos h-rectas, encontrar una h-isometría que transforme a una en otra; dada una h-recta, encontrar una h-isometría que transforme a la h-recta en sí misma; dado un h-punto y una h-isometría, encontrar el transformado del punto con respecto a la h-isometría y dada una h-recta y una h-isometría encontrar la h-transformada de la h-recta con respecto a la h-isometría.

Para esto supondremos que se conoce la manera de trazar e-perpendiculares, e-mediatrices, y encontrar el e-punto medio de un e-segmento.

En la sección I.3 definimos la h-congruencia de segmentos y demostramos que, dados dos h-segmentos, existe una h-isometría que trasforma a uno en otro si y sólo si los h-segmentos tienen la misma h-longitud.

Finalmente, en la sección I.4 (Una h-isometría que nos resultará útil), se indica la forma de transformar a una sucesión de h-segmentos h-congruentes h-colineales A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... en la sucesión A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, ...

Capítulo I   h-congruencia

I.1.   h-isometrías

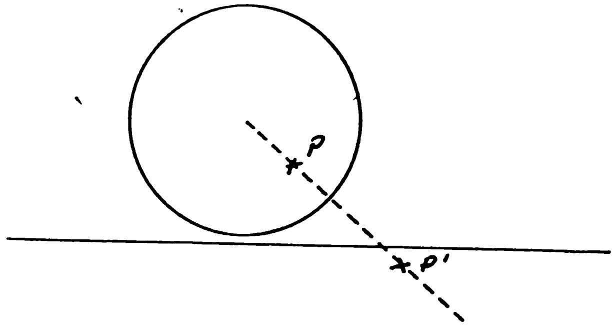
Una h-isometría es una transformación del h-plano en sí mismo que preserva la h-distancia.

$f:\pi\to\pi$ es h-isometría si y sólo si $d_{Y}^{X} = d_{fY}^{fX}$ para cualesquiera h-puntos X y Y.

Estudiaremos únicamente una h-isometría: la e-inversión con respecto a h-rectas.

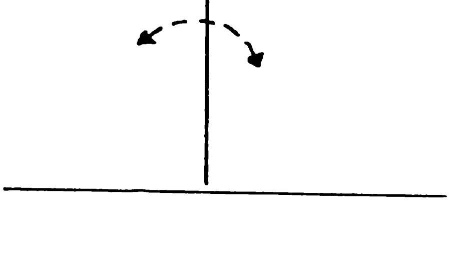
En general, la e-inversión con respecto a un e-círculo $\mathcal{C}$ contenido en el h-plano no es una transformación del plano en sí mismo, pues puede transformar puntos del h-plano en e-puntos que no pertenecen al h-plano.

En la figura, el e-inverso P' del h-punto P con respecto a la e-circunferencia $\mathcal{C}$ no está en el h-plano.

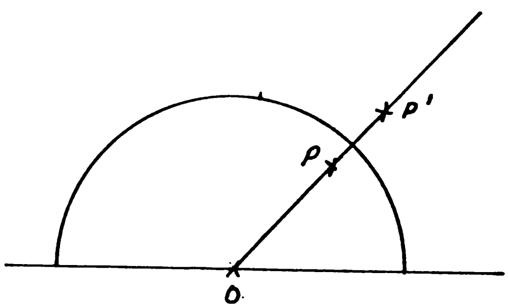


Sin embargo la e-inversión con respecto a h-rectas sí transforma puntos del h-plano en puntos del h-plano.

Teorema I.1.- La e-inversión con respecto a h-rectas es una transformación del h-plano en sí mismo.

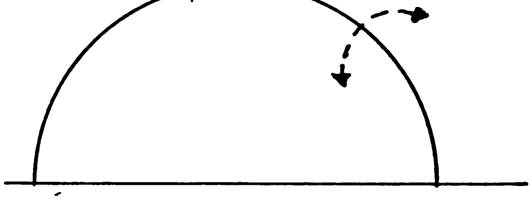


Si la h-recta de inversión es un e-rayo, la e-inversión resulta ser una e-reflexión con respecto al e-rayo y así el h-plano se transforma en el h-plano.



Si la h-recta de inversión es e-semicircunferencia de e-centro O y e-radio r, el e-inverso de un h-punto P es el único e-punto P' sobre la e-recta OP tal que $OP \cdot OP' = r^2$, donde OP y OP' son las e-longitudes de los e-segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{OP'}$. Como r^2 siempre es mayor que cero $\overline{OP}$ y $\overline{OP'}$ tienen el mismo signo, lo que implica que P y P' están del mismo lado de O. Si P' está del mismo lado de O que P, P' está en el h-plano, y con esto queda demostrado que la e-inversión con respecto a h-rectas es una transformación del h-plano en sí mismo.

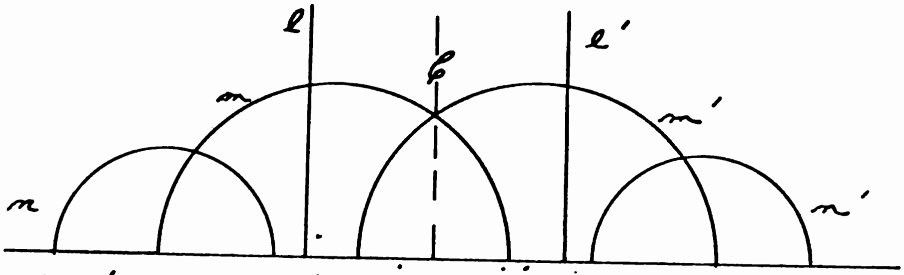
Una h-recta divide al h-plano en dos h-semiplanos ajenos. Al e-invertir con respecto a una h-recta, transformamos a uno de los h-semiplanos determinados por la h-recta de inversión al otro y viceversa, y a los puntos sobre la h-recta de e-inversión en sí mismos.



De ahora en adelante, a menos que se indique lo contrario, cuando hablemos de inversión nos estaremos refiriendo a e-inversión con respecto a h-rectas.

Teorema I.2 La e-inversión transforma h-rectas en h-rectas.

Si $\mathcal{C}$, la h-recta de e-inversión es un e-rayo, la e-inversión resulta ser una e-reflexión con respecto a $\mathcal{C}$, por lo que los e-rayos perpendiculares al eje x se transforman en e-rayos perpendiculares al eje x, y las e-semicircunferencias con centro en el eje x se transforman en e-circunferencias con centro en el eje x.

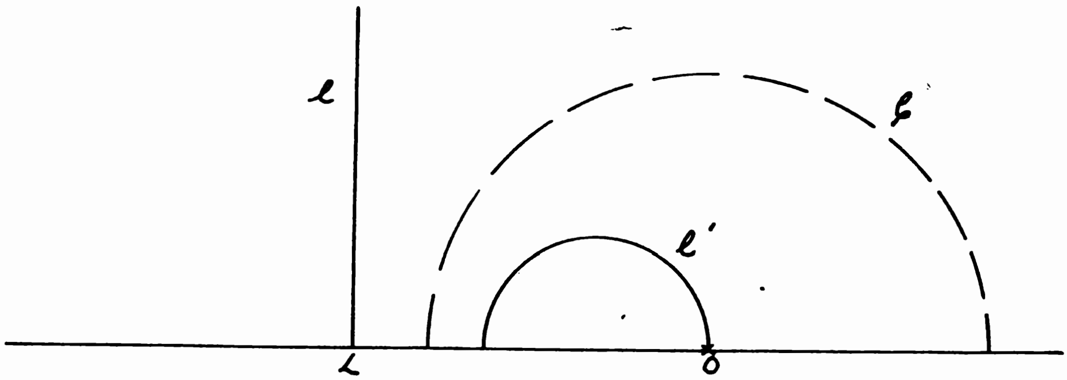


Si $\mathcal{C}$, la h-recta de inversión es e-semicircunferencia, consideremos primero el caso en que l, la h-recta invertida es un e-rayo.

Sea O el e-centro de $\mathcal{C}$ y sea L el pie de l.

Si L coincide con O, l se transforma en sí misma (globalmente, no puntualmente).

Si L es distinto de O, la e-recta que contiene al e-rayo l se transforma en una e-circunferencia l' que pasa por O y tal que su e-diámetro por O es perpendicular a l. Así, la parte de l' contenida en el h-plano es una e-semicircunferencia con centro en el eje x y por lo tanto una h-recta.

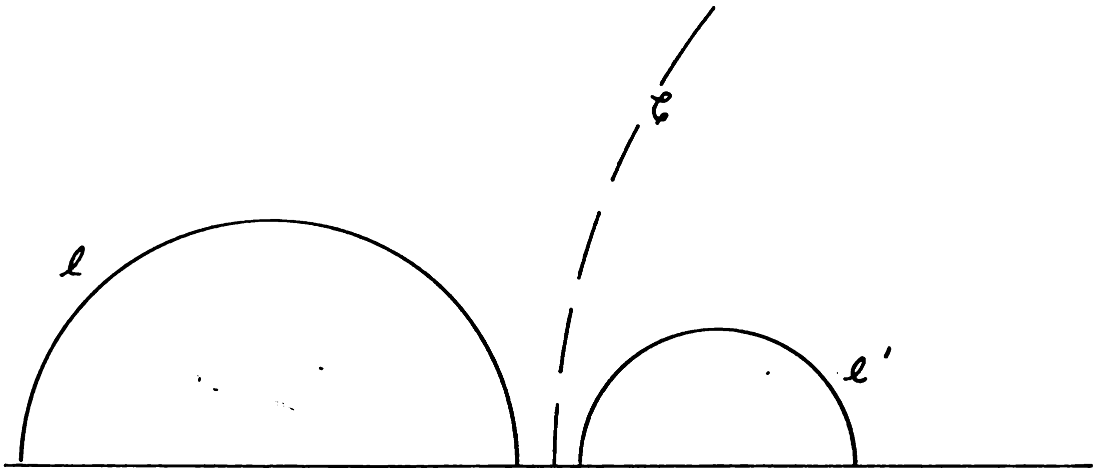


Recíprocamente, una h-recta e-semicircunferencia que pasa por el centro de e-inversión se transforma en una h-recta e-rayo que no pasa por el centro de inversión.

Si l, la h-recta invertida, es una e-semicircunferencia que no pasa por O, el centro de e-inversión, la e-circunferencia que contiene a l se transforma en una e-circunferencia l' que tampoco pasa por O.

Como l es ortogonal al eje x, que globalmente se transforma en sí mismo, y la e-inversión preserva ángulos, l', el e-inverso de l, también es ortogonal al eje x y por lo tanto tiene su centro sobre él.

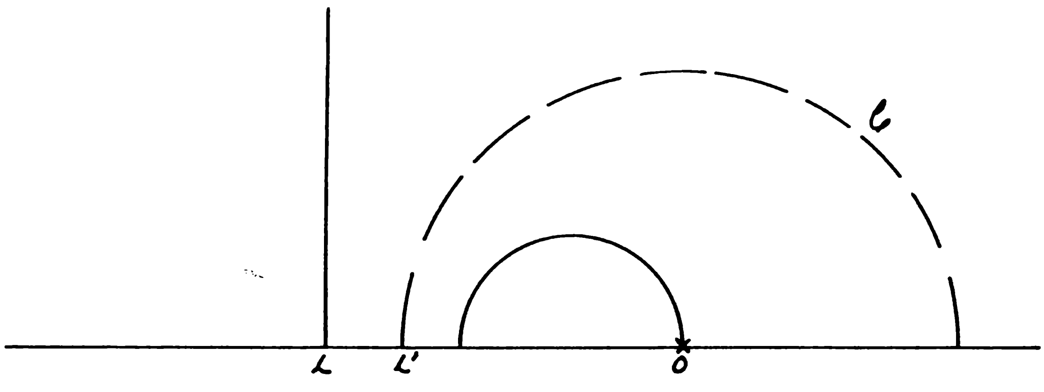
Así, la parte de l' comprendida en el h-plano es una e-semicircunferencia con centro en el eje x; es decir, es una h-recta.



Teorema I.3 Bajo e-inversión, los puntos al infinito de una h-recta se transforman en los puntos al infinito de su inversa.

Si la h-recta invertida es un e-rayo, el punto al infinito que no es el pie del e-rayo se transforma en el centro de inversión, que es un punto al infinito pues está sobre el eje x.

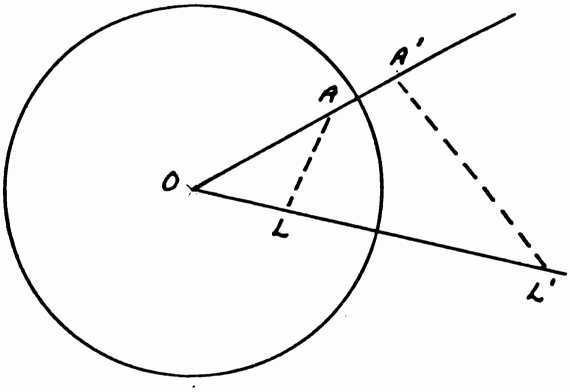
El pie del e-rayo, por estar sobre el eje x, se transforma en algún punto sobre el eje x pues el eje x, por ser una e-recta que pasa por el centro de inversión, se transforma en sí mismo globalmente.



En el caso en que la h-recta invertida sea una e-semicircunferencia, se aplica el mismo razonamiento: puntos sobre el eje x se transforman en puntos sobre el eje x pues éste es su propio inverso.

Teorema I.4 La e-inversión preserva la razón cruzada.

Demostraremos este resultado en general, es decir, para e-inversión con respecto a cualquier e-circunferencia y no solamente con respecto a h-rectas. En particular, será válido para e-inversión con respecto a h-rectas.
Sean A, B, L y M cuatro puntos, y sean A', B', L' y M' sus inversos con respecto a una circunferencia de radio r y centro O.



Entonces $OA \cdot OA' = r^2$
y $OL \cdot OL' = r^2$
de donde
$OA \cdot OA' = OL \cdot OL'$
y $\dfrac{OA}{OL'} = \dfrac{OL}{OA'}$
Además,
$\measuredangle LOA = \measuredangle L'OA'$

y así, los e-triángulos OAL y $OA'L'$ son inversamente semejantes, por lo que los lados AL y $A'L'$ deben guardar la misma proporción que OA y OL'.

Es decir, $\dfrac{AL}{A'L'} = \dfrac{OA}{OL'}$

y así $AL = \dfrac{A'L' \cdot OA}{OL'}$.

análogamente,

$$LB = \frac{L'B' \cdot OL}{OB'},$$

$$AM = \frac{A'M' \cdot OA}{OM'} \quad y$$

$$MB = \frac{M'B' \cdot OM}{OB'}$$

Sustituyendo estos valores en $\{ABLM\}$, la razón cruzada de A, B, L y M, tenemos que:

$$\{ABLM\} = \frac{AL}{LB} \Big/ \frac{AM}{MB} = \dfrac{\dfrac{A'L' \cdot OA}{OL'}}{\dfrac{L'B' \cdot OL}{OB'}} \Bigg/ \dfrac{\dfrac{A'M' \cdot OA}{OM'}}{\dfrac{M'B' \cdot OM}{OB'}} =$$

$$\frac{A'L' \cdot \cancel{OA} \cdot \cancel{OB'} \cdot M'B' \cdot OM \cdot OM'}{L'B' \cdot OL' \cdot OL \cdot A'M' \cdot \cancel{OA} \cdot \cancel{OB'}} = \left(\frac{A'L' \cdot M'B'}{L'B' \cdot A'M'}\right)\left(\frac{OM \cdot OM'}{OL \cdot OL'}\right) =$$

$$\left(\frac{A'L'}{L'B'} \Big/ \frac{A'M'}{M'B'}\right)\left(\frac{OM \cdot OM'}{OL \cdot OL'}\right)$$

pero como $OM \cdot OM' = OL \cdot OL'$ (pues ambos son igual a r^2),

$$\{ABLM\} = \frac{A'L'}{L'B'} \Big/ \frac{A'M'}{M'B'}$$

es decir,

$$\{ABLM\} = \{A'B'L'M'\}.$$

Teorema I.5 La e-inversión es una h-isometría.

Sea ℓ una h-recta.
Sean A y B dos h-puntos y sean L y M los puntos al infinito de la h-recta que los contiene.
Sean A' y B' los e-inversos de A y B con respecto a ℓ.

Demostraremos que $d_B^A = d_{B'}^{A'}$.

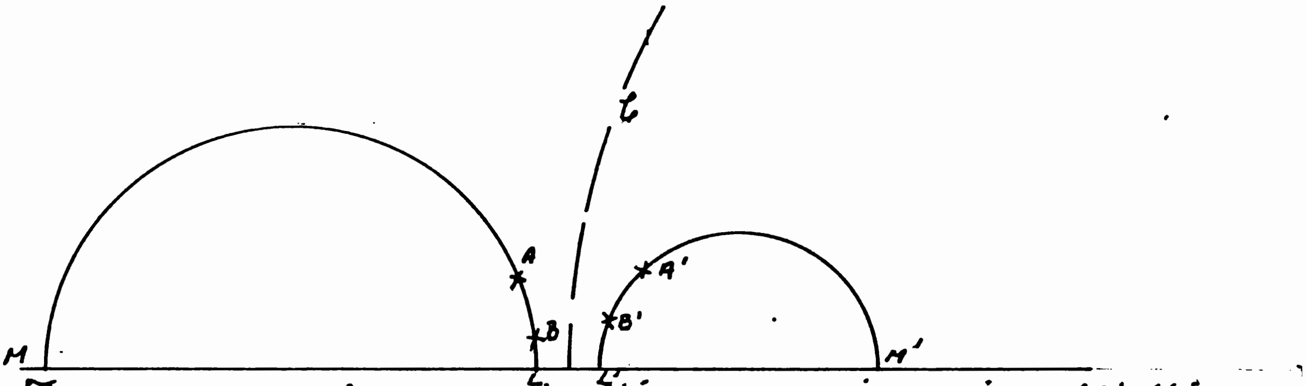
L' y M' los inversos de L y M respectivamente, son los puntos al infinito de la h-recta que contiene a A' y B'.

Así, la h-longitud del h-segmento A'B' es:

$$d_{B'}^{A'} = |\log\{A'B'L'M'\}|,$$

y como la e-inversión preserva la razón cruzada.

$$d_{B'}^{A'} = |\log\{A'B'L'M'\}| = |\log\{ABLM\}| = d_B^A$$



Teorema I.6 La composición de e-inversiones es una h-isometría.

Sean f_1 y f_2 dos e-inversiones y sean A y B dos h-puntos.
Sean $A' = f_1(A)$ y $B' = f_1(B)$. Como f_1 es h-isometría,

$$d_B^A = d_{B'}^{A'}.$$

Sean $A'' = f_2(A')$ y $B'' = f_2(B')$. Como f_2 es h-isometría,

$$d_B^{A'} = d_{B''}^{A''}$$

y así $d_B^A = d_{B''}^{A''} = d_{f_2(f_1(B))}^{f_2(f_1(A))}$, es decir $f_2 \circ f_1$ es h-isometría.

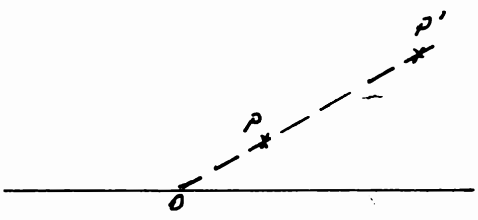
Es posible demostrar que toda h-isometría es producto de e-inversiones.

A continuación veremos que dados dos h-puntos, siempre existe una h-isometría que transforma a uno en otro, y que dadas dos h-isometrías también existe una h-isometría que transforma a una en otra. En realidad lo único que haremos será aplicar algunos resultados de e-inversión al modelo de Poincaré. Posteriormente (sección I.2), veremos como encontrar dicha inversión.

Teorema I.7 Dados dos h-puntos siempre existe una h-isometría que transforma a uno en otro.

En el e-plano, dados tres e-puntos e-colineales P, P' y O, tales que P y P' están del mismo lado de O, siempre existe una e-inversión con centro en O que transforma a P en P' y viceversa (ver T I).

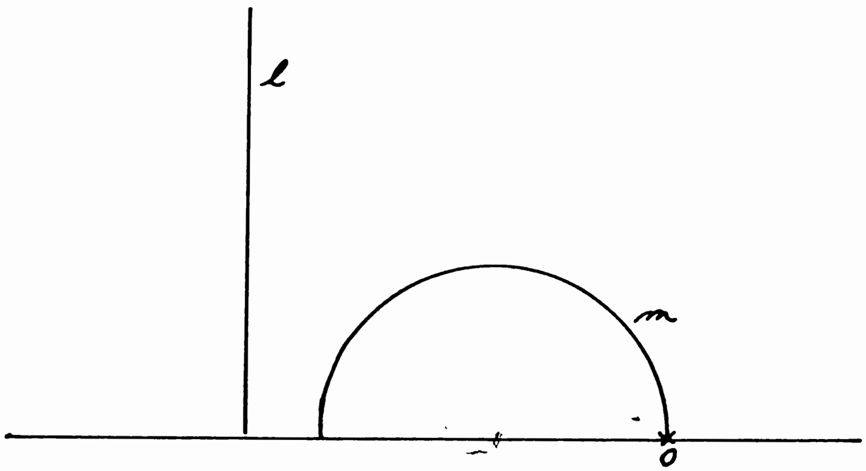
Así, si P y P' son dos h-puntos y O el e-punto en donde la e-recta PP' intersecta al eje x, siempre existe una inversión con centro en O que transforma a P en P' y viceversa.

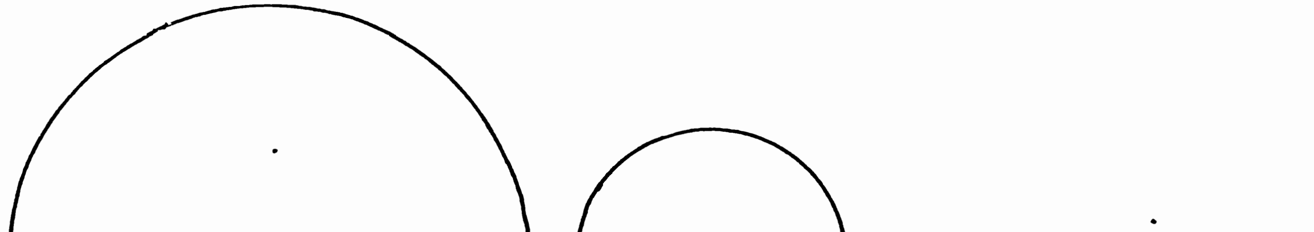


Teorema I.8 Dadas dos L-rectas siempre existe una L-isometría que transforma a una en otra.

En el E-plano, dadas una E-recta l y una E-circunferencia m, existe una inversión que transforma a l en m y viceversa; y, dadas dos E-circunferencias existe una inversión que transforma a una en otra (cuando las E-circunferencias se intersectan, existen dos E-inversiones). Además, en el caso de la E-recta l y la E-circunferencia m, O, el centro de inversión está sobre la E-recta perpendicular a l que pasa por el centro de m, y en el caso de las dos E-circunferencias, el centro de inversión (O) está sobre la línea de los centros de las dos E-circunferencias (ver [7])

Así, dadas dos L-rectas, la E-inversión que transforma a una en otra tiene centro en el eje x y por lo tanto es una L-isometría.



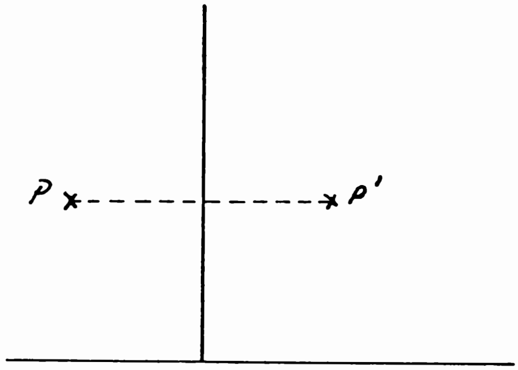


I.2 Cinco construcciones básicas.

I.2.1 Dados un h-punto P y una h-recta $\mathcal{C}$, encontrar el inverso de P con respecto a $\mathcal{C}$.

Si P está sobre $\mathcal{C}$, P es su propio inverso. Supondremos entonces que P no está sobre $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ es un e-rayo, P', el inverso de P, es el e-reflejado de P con respecto a $\mathcal{C}$.

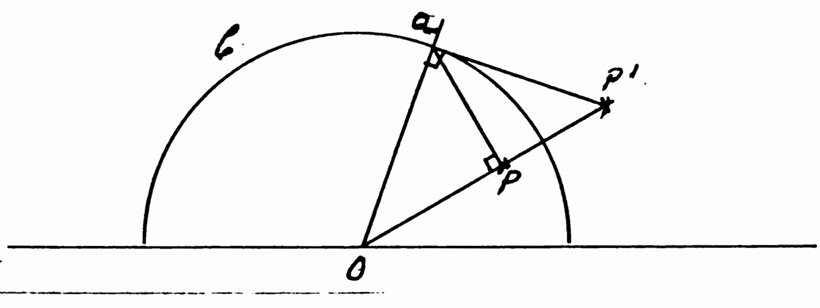


Si $\mathcal{C}$ es h-recta, e-semicirc., consideremos primero el caso en que P está en el interior de $\mathcal{C}$.

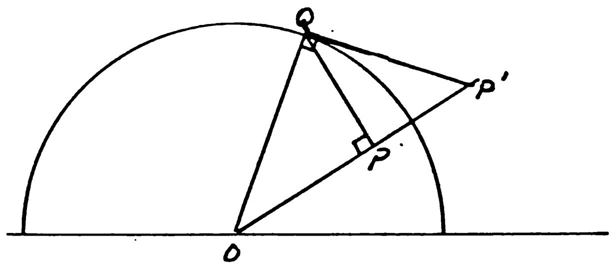
Marquemos O, el centro de $\mathcal{C}$, y tracemos la e-recta PO.

Tracemos la e-perpendicular por P a la e-recta PO, y llamemos Q al punto en donde ésta intersecta a $\mathcal{C}$.

Tracemos la e-tangente a $\mathcal{C}$ en Q (para trazarla, conviene recordar que ésta es perpendicular al e-radio OQ) y llamemos P' al punto en donde ésta intersecta a la e-recta OP. P' resulta ser el inverso de P con respecto a $\mathcal{C}$.



Demostración.-
Los e-ángulos $P'QO$ y QPO son rectos, y el e-ángulo QOP' coincide con el e-ángulo POQ. Así, los e-triángulos $P'QO$ y QPO son semejantes, por lo que



$$OP/QO = OQ/P'O$$

de donde

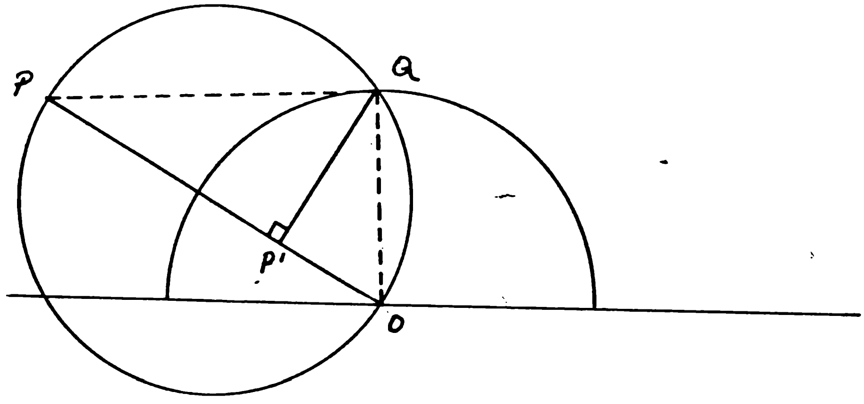
$$OP \cdot P'O = OQ \cdot QO$$

y

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ = (\text{radio de } \mathcal{C})^2$$

es decir, P' es el inverso de P con respecto a $\mathcal{C}$.

Si P está fuera de $\mathcal{C}$, tracemos la e-circunferencia de e-diámetro OP, y llamemos Q al punto donde ésta intersecta a $\mathcal{C}$. Después tracemos la e-perpendicular a la e-recta OP desde Q, y llamemos P' al pie de esta perpendicular. P' resulta ser el inverso de P con respecto a $\mathcal{C}$.

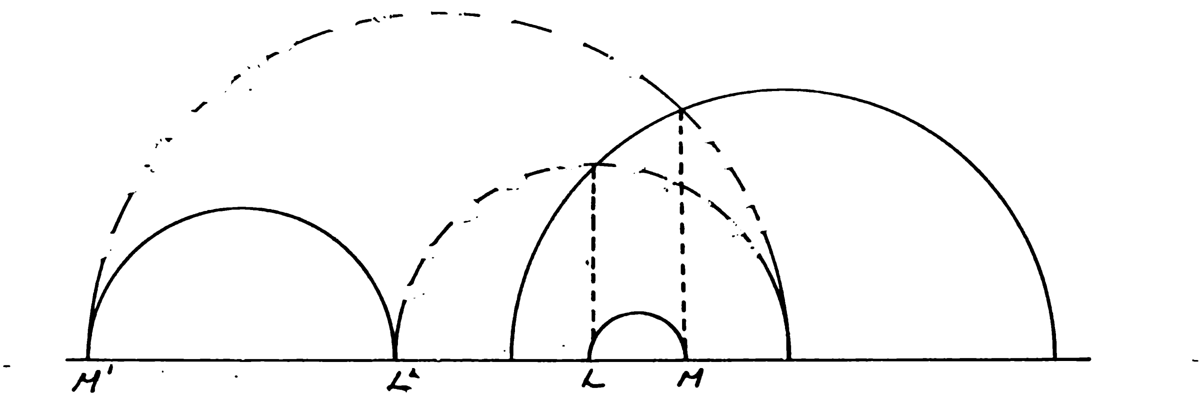


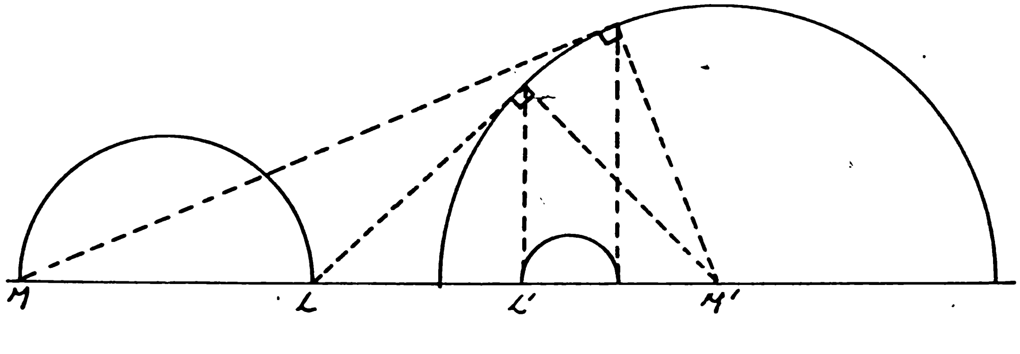
Para demostrarlo, basta observar que el e-ángulo PQO es recto por estar inscrito en un semicírculo, y utilizar la misma semejanza de e-triángulos que en el caso anterior.

I.2.2 Dadas dos h-rectas, l y b, encontrar la h-recta inversa de l con respecto a b.

Para encontrar l', la h-recta inversa de l con respecto a b, basta tomar dos h-puntos A y B sobre l, encontrar A' y B', sus inversos con respecto a b, y trazar la h-recta por A' y B'. Dicha recta resulta ser l'.

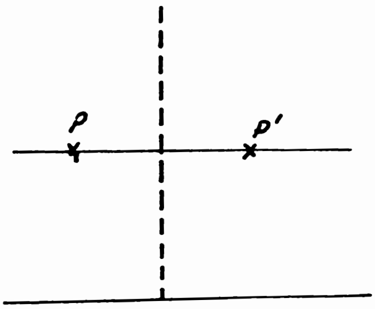
La manera más sencilla de trazar l' es encontrando las inversas de L y M, los puntos al infinito de l.





Si l y b se intersectan en un punto I, conviene tomar en cuenta que la h-recta inversa de l tiene que pasar por I.

I.3.3 Dados dos h-puntos, encontrar la h-recta tal que la inversión con respecto a ella transforma a uno en el otro.



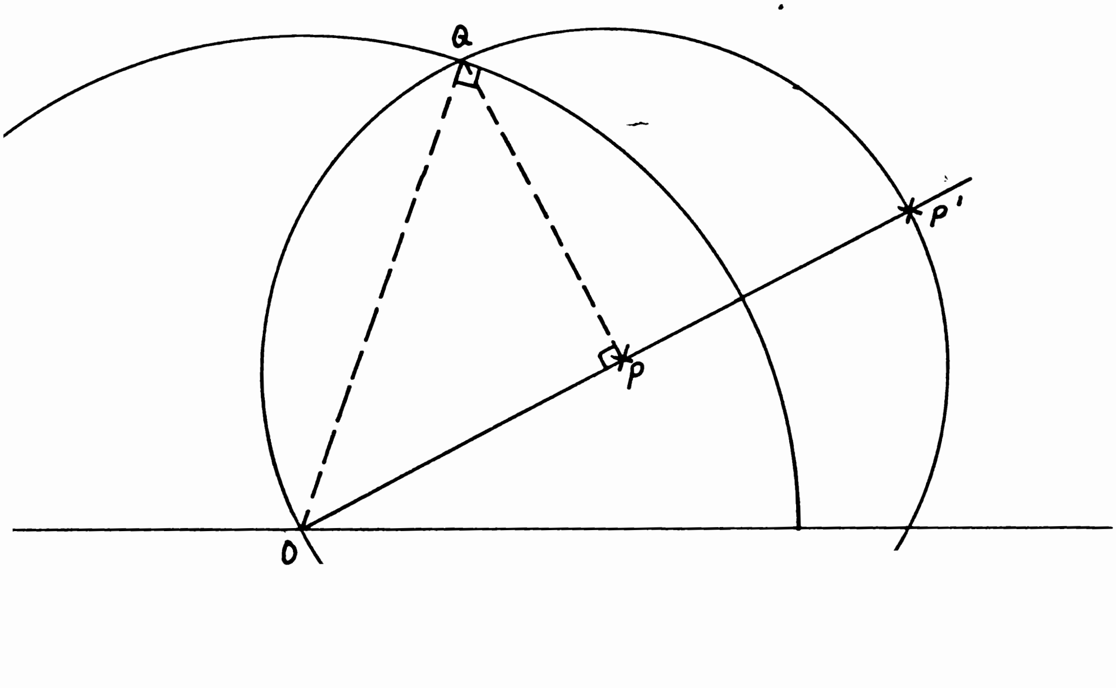
Sean P y P' dos h-puntos. Si la e-recta PP' es paralela al eje x, la h-recta de inversión es el e-rayo e-mediatriz del e-segmento PP'.

Si la e-recta PP' intersecta al eje x en un e-punto O, supondremos, sin pérdida de generalidad, que P está entre O y P'.

Trazamos la e-circunferencia de e-diámetro OP', y trazamos la e-perpendicular a PP' en P y llamemos Q al h-punto de intersección de esta e-perpendicular con la e-circunferencia de e-diámetro OP'.

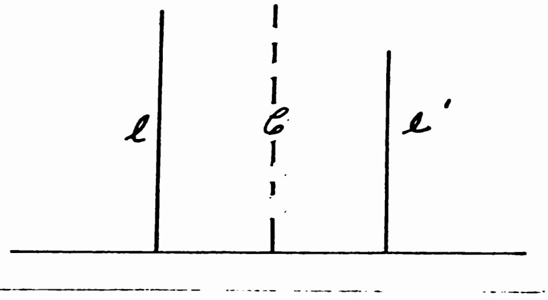
Trazamos C, la e-semicircunferencia de e-centro O y e-radio OQ.

C resulta ser la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, P y P' son mutuamente inversos. Para demostrarlo, utilizamos la semejanza de los e-triángulos $P'QO$ y QPO, al igual que en la construcción I.2.1



I.2.4 Dadas dos h-rectas, encontrar la h-recta tal que la inversión con respecto a ella transforma a una en otra.

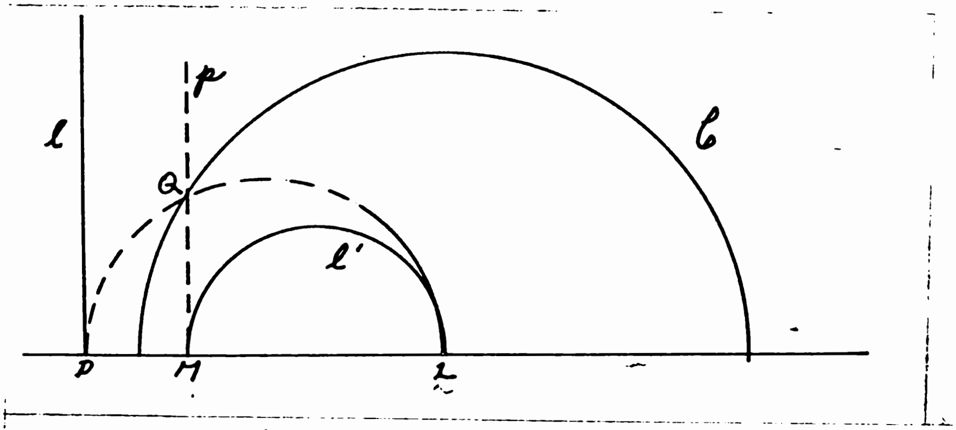
Sean l y l' dos h-rectas. Si ambas son e-rayos, $\mathcal{C}$, la h-recta de inversión es el e-rayo que e-equidista de ambas.



Si l es un e-rayo y l' es e-semicircunferencia, sea P el pie del e-rayo y sean L y M los puntos al infinito de l'. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que M está entre L y P.

Tracemos p, la e-perpendicular al ~~M~~ eje x en el punto M. Tracemos la e-circunferencia de e-diámetro LP, y llamemos Q a la intersección de ésta con la e-perpendicular p.

Tracemos $\mathcal{C}$, la e-semicircunferencia de centro L y e-radio LQ.

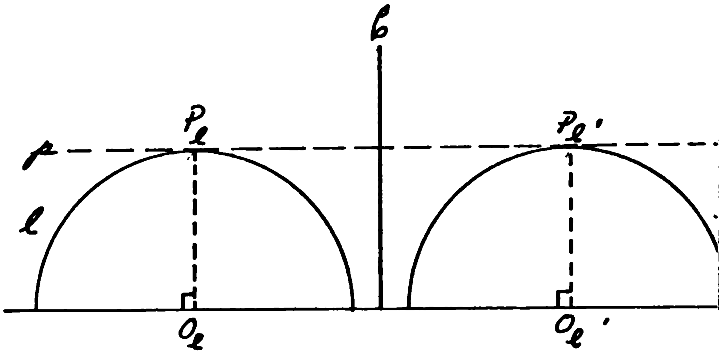


$\mathcal{C}$ es la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, un punto al infinito de l, (P), se transforma en un punto al infinito de l', (M), y el otro punto al infinito de l (el que está sobre la e-recta al infinito), se transforma en el otro punto al infinito de l', (L), por lo que al invertir con respecto a $\mathcal{C}$, l se transforma en l' y viceversa.

Ahora veamos cómo proceder cuando las dos h-rectas son e-semicircunferencias.

Sean l y l' dos h-rectas e-semicircunferencias y sean O_l y $O_{l'}$ sus cen
Sean P_l y $P_{l'}$ los h-puntos en donde los e-radios de l y l' perpendiculares al eje x intersectan a l y a l' respectivamente.

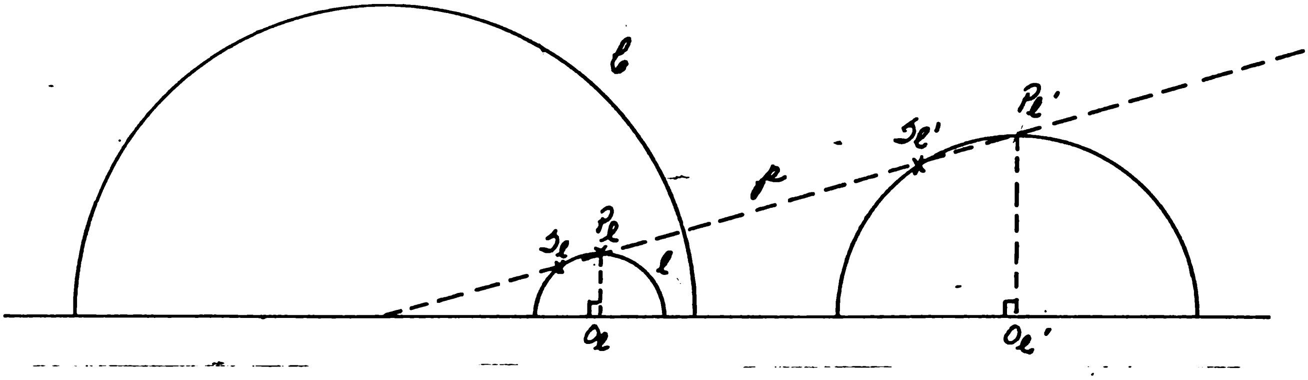
Tracemos p, la e-recta $P_lP_{l'}$. Si p es paralela al eje x, la inversión que transforma a l en l' y viceversa es la inversión con respecto a la h-recta e-rayo e-mediatriz del e-segmento $O_lO_{l'}$



Si p no es paralela al eje x, Observemos que p no es tangente a l, pues la e-tangente a l en P_l es perpendicular al e-radio de l por P_l y en consecuencia paralela al eje x. (Análogamente, p tampoco es tangente a l'.

Sea S_l el otro h-punto en donde p intersecta a l, y sea $S_{l'}$ el otro h-punto donde p intersecta a l'.

Tracemos $\mathcal{C}$, la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, P_l y $S_{l'}$ son mutuamente inversos. (ver I.2.3)



$\mathcal{C}$ resulta ser la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, l y l' son mutuamente inversas. Para demostrar esto, demostraremos que la inversión con respecto a $\mathcal{C}$, que por construcción transforma a P_l en $S_{l'}$ y viceversa, también transforma a $P_{l'}$ en S_l y viceversa, pues así, la h-recta que contiene a P_l y a S_l (l), se transforma en la h-recta que contiene a $S_{l'}$ y $P_{l'}$ (l').

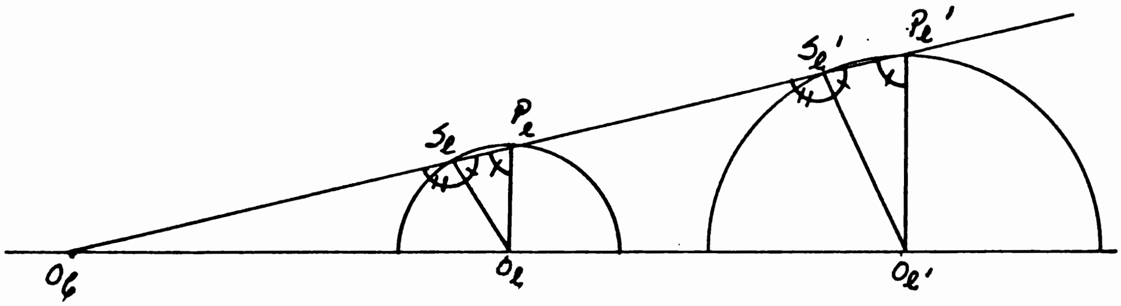
Para demostrar que S_ℓ y $P_{\ell'}$ son mutuamente inversos con respecto a $\mathcal{C}$, basta demostrar que

$$O_\mathcal{C} S_\ell \cdot O_\mathcal{C} P_{\ell'} = O_\mathcal{C} P_\ell \cdot O_\mathcal{C} S_{\ell'}\text{, donde } O_\mathcal{C} \text{ es el e-centro de } \mathcal{C}.$$

ya que, por construcción, $O_\mathcal{C} P_\ell \cdot O_\mathcal{C} S_{\ell'}$ es el cuadrado del e-radio de $\mathcal{C}$.

Demostración.-
Las e-rectas $P_\ell O_\ell$ y $P_{\ell'} O_{\ell'}$ son ambas perpendiculares al eje x, por lo que los e-triángulos $P_\ell O_\mathcal{C} O_\ell$ y $P_{\ell'} O_\mathcal{C} O_{\ell'}$ son semejantes, y así,

$$\measuredangle O_\ell P_\ell O_\mathcal{C} = \measuredangle O_{\ell'} P_{\ell'} O_\mathcal{C} \quad \cdots (1)$$



Por otra parte, como $O_\ell P_\ell$ y $O_\ell S_\ell$ son ambos e-radios de ℓ, el e-triángulo $O_\ell P_\ell S_\ell$ es isósceles, de donde

$$\measuredangle P_\ell S_\ell O_\ell = \measuredangle O_\ell P_\ell S_\ell = O_\ell P_\ell O_\mathcal{C} \quad \cdots (2)$$

Análogamente, el e-triángulo $O_{\ell'} P_{\ell'} S_{\ell'}$ también es isósceles, por lo que

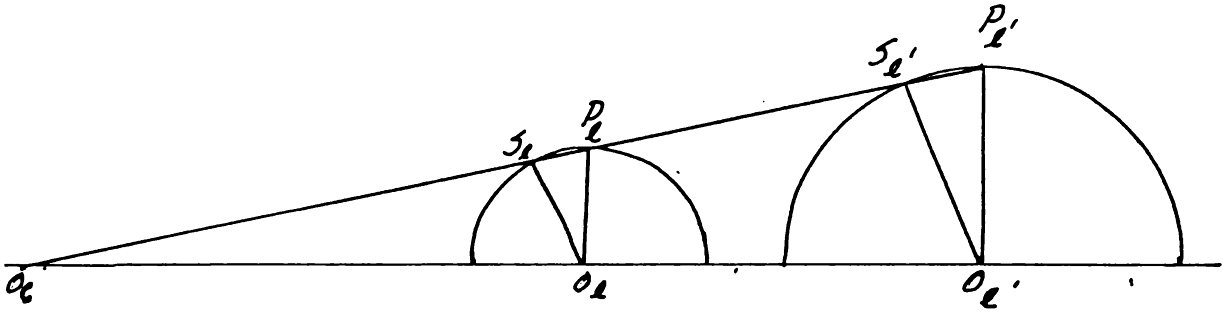
$$\measuredangle P_{\ell'} S_{\ell'} O_{\ell'} = \measuredangle O_{\ell'} P_{\ell'} S_{\ell'} = O_{\ell'} P_{\ell'} O_\mathcal{C} \quad \cdots (3)$$

Utilizando (1), (2) y (3), tenemos que

$$\measuredangle P_\ell S_\ell O_\ell = \measuredangle P_{\ell'} S_{\ell'} O_{\ell'} \quad \text{y, de aquí, que}$$

$$\measuredangle O_\ell S_\ell O_\mathcal{C} = \measuredangle O_{\ell'} S_{\ell'} O_\mathcal{C}\text{, lo que implica que}$$

los e-triángulos $O_\ell S_\ell O_\mathcal{C}$ y $O_{\ell'} S_{\ell'} O_\mathcal{C}$ también son semejantes.



Por la semejanza de los e-triángulos $O_c S_l O_l$ y $O_c S_{l'} O_{l'}$, tenemos que

$$O_c S_l / O_c S_{l'} = O_l O_c / O_{l'} O_c \,,$$

y la semejanza de los e-triángulos $O_c P_l O_l$ y $O_c P_{l'} O_{l'}$ implica que

$$O_c P_l / O_c P_{l'} = O_l O_c / O_{l'} O_c$$

y así,

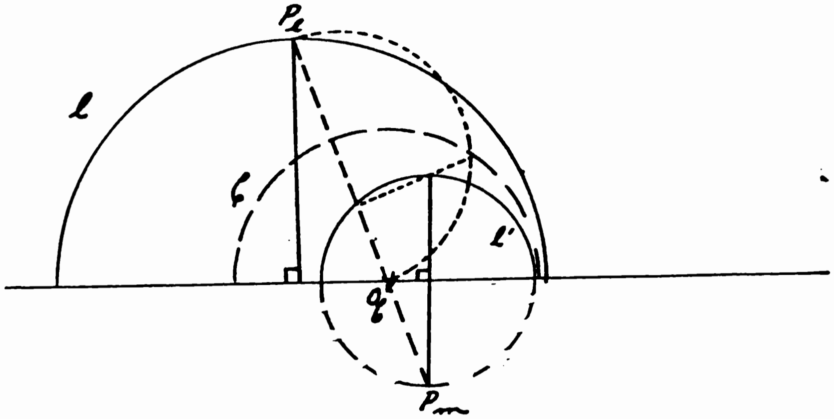
$$O_c S_l / O_c S_{l'} = O_c P_l / O_c P_{l'} \,,$$

de donde

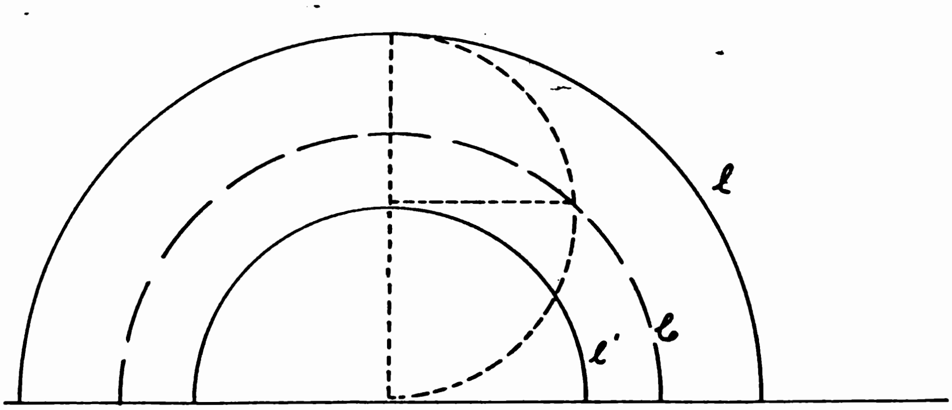
$$O_c S_l \cdot O_c P_{l'} = O_c P_l \cdot O_c S_{l'} \,,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Con un razonamiento análogo, es posible demostrar que, cuando l y l' son e-semicircunferencias ajenas y una está dentro de la otra (supondremos l dentro de l'), O_6, el centro de inversión, es el punto de intersección de la e-recta $P_l P_m$ con el eje x, donde P_l es, como en el caso anterior, el h-punto donde el e-diámetro de l' perpendicular al eje x intersecta a l', y P_m es el e-punto (fuera del h-plano) donde el e-diámetro de l perpendicular a x intersecta a la parte de la e-circunferencia l que está fuera del h-plano.

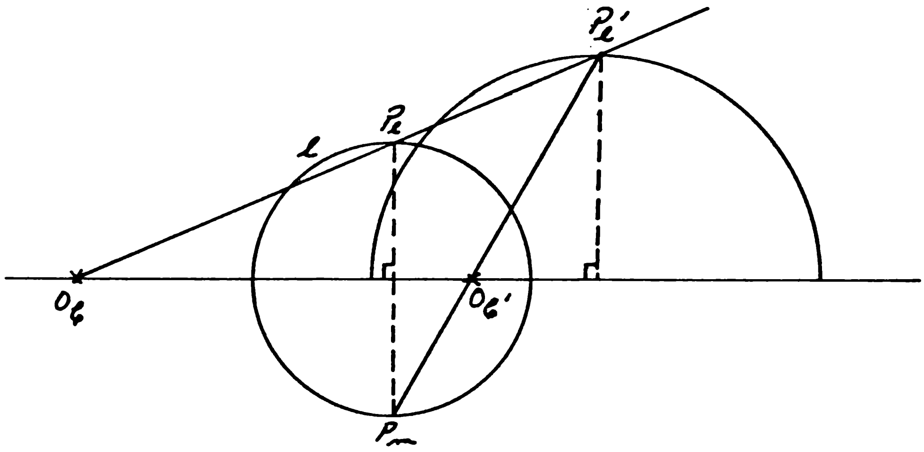


En el caso particular en que l y l' son concéntricas, el centro de inversión coincide con el centro de ambas

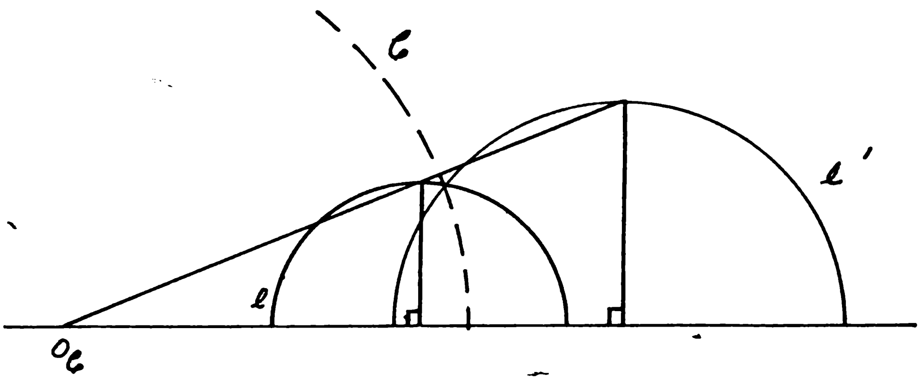


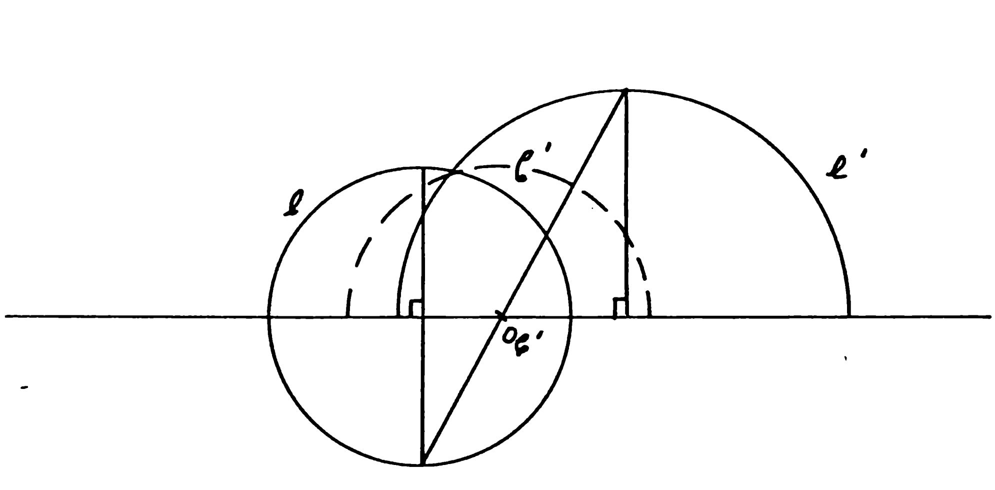
Nota: En ambos casos (cuando una h-recta está dentro de la otra y cuando no lo está), O_6, el centro de inversión, resulta ser el centro de similitud (ver [7]) de las e-circunferencias l y l'. Cuando l está dentro de l', O_6 es el centro de similitud interno y cuando l no está dentro de l', O_6 es el centro de similitud externo.

También es posible demostrar que cuando las dos h-rectas l y l' se intersectan, existen dos centros de inversión: el centro de similitud interno y el centro de similitud externo, es decir, los e-puntos O_C y O_C' que se muestran en la figura.



Una vez determinado un centro de inversión es trivial, en este caso, encontrar C, la h-recta de inversión, pues esta debe pasar por el punto de intersección de l y l'.

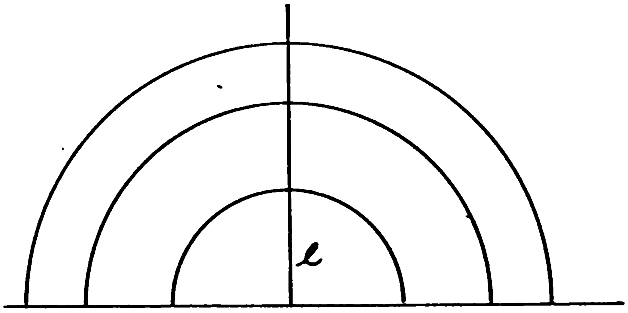




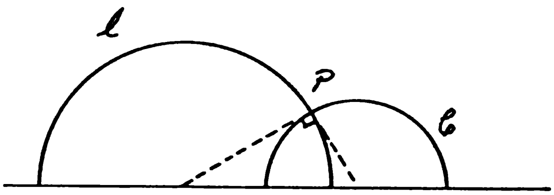
I. 3. 5. Dada una h-recta l, encontrar una h-recta b tal que, al invertir con respecto a ella, l se transforme en sí misma globalmente.

Como la e-inversión transforma en sí mismas (globalmente, no puntualmente), a las e-rectas que pasan por el centro de inversión y a las e-circunferencias ortogonales a la de inversión, dada una h-recta l, existen una infinidad de h-rectas b tales que al invertir con respecto a ellas, l se transforma en sí misma globalmente.

Si l es un e-rayo, toda h-recta e-semicircunferencia con centro en el pie de l resulta ser tal que al invertir con respecto a ella, l es su propio inverso.



Si l es e-semicircunferencia, toda h-recta b ortogonal a l es tal que al invertir con respecto a ella, l es su propio inverso.



Dada una e-circunferencia l, para trazar una e-circunferencia ortogonal a ella, basta recordar que los e-radios en el punto de contacto deben de formar ángulo recto.

Podemos, además, dada una h-recta l y un h-punto P en l, encontrar la h-recta tal que al invertir con respecto a ella l se transforme en sí misma globalmente y P quede fijo. Basta escoger, entre la infinidad de h-rectas que transforman a l en sí misma globalmente, a aquélla que pase por P.

I.3 h- congruencia

Decimos que dos figuras son h-congruentes si y sólo si existe una h-isometría que transforma a una en otra. En particular, decimos que dos h-segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son h-congruentes si y sólo si existe una h-isometría que transforma a uno en otro.

Es decir, $\overline{AB} =_h \overline{A'B'}$ si y sólo si existe una función f del h-plano en sí mismo que satisface:

1) $d_Y^X = d_{f(Y)}^{f(X)}$ para cualesquiera dos h-puntos X y Y

2) $f(A) = A'$

3) $f(B) = B'$

4) para todo h-punto Z en $\overline{AB}$, $f(Z)$ está en $\overline{A'B'}$

Teorema I.9. Dos h-segmentos son h-congruentes si y sólo si tienen la misma h-longitud.

(Entenderemos por h-longitud de un h-segmento, la h-distancia entre sus puntos extremos.)

Una parte de la demostración es una consecuencia inmediata de la definición de h-congruencia:

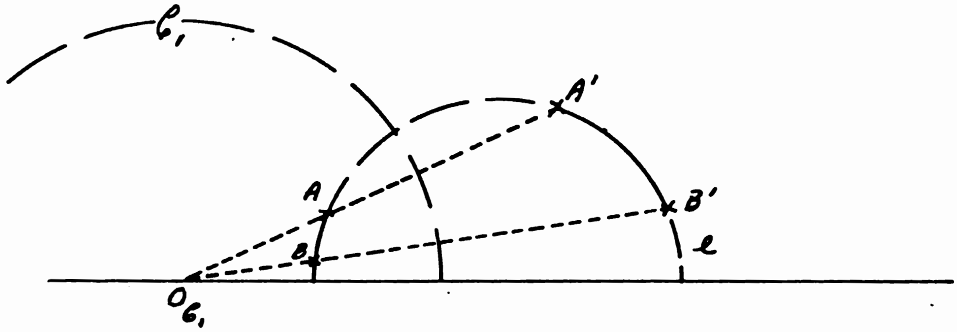
Si $\overline{AB} =_h \overline{A'B'}$, existe una h-isometría f tal que $f(A) = A'$ y $f(B) = B'$. Como f es h-isometría, $d_B^A = d_{f(B)}^{f(A)}$.

Es decir, $d_B^A = d_{B'}^{A'}$.

Para demostrar que si dos h-segmentos tienen la misma h-longitud son h-congruentes, consideremos, como primer caso, aquél en el que ambos h-segmentos están sobre la misma h-recta.

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ dos h-segmentos tales que $d_B^A = d_{B'}^{A'}$ y sea l la h-recta que los contiene.

Sea $\mathcal{C}_1$ la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, A y A' son mutuamente inversos. Sea f_1 la inversión con respecto a $\mathcal{C}_1$.



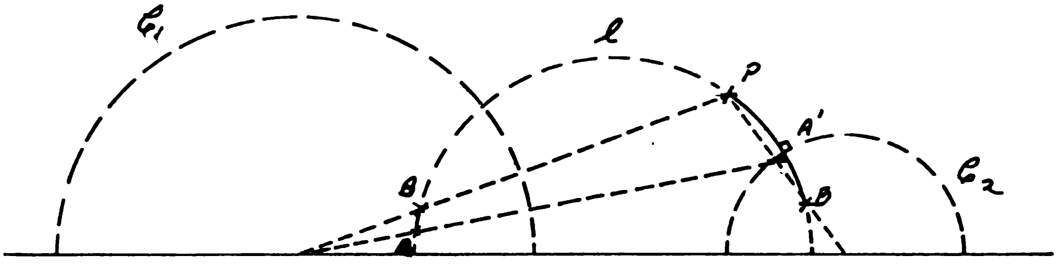
Al aplicar f_1, A se transforma en A' y B se transforma en un h-punto P (que también está sobre la h-recta l, pues $\mathcal{C}_1 \perp l$) y tal que $\overline{AB} =_h \overline{A'P}$, por lo que $d_P^{A'} = d_B^A$

Si P está del mismo lado de A' que B', $P = B'$, pues $d_P^{A'} = d_B^A = d_{B'}^{A'}$, y, como se demostró en la primera parte de este trabajo (sección II.1.2), dada una h-distancia existe, de cada lado de A', un único h-punto sobre l tal que su h-distancia a A' es la h-distancia dada.

Así, $f_1(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$, es decir, $\overline{AB} =_h \overline{A'B'}$.

Si P está sobre l, pero del otro lado de A' que B', sea C_2 la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, l se transforma en sí misma globalmente y A' queda fijo (I.2.6), y sea f_2 la inversión con respecto a C_2.

Al aplicar f_2, A' se transforma en sí mismo y P se transforma en el h-punto X del otro lado de A' tal que $d_X^{A'} = d_P^{A'} = d_B^{A}$. Es decir, P se transforma en B'.



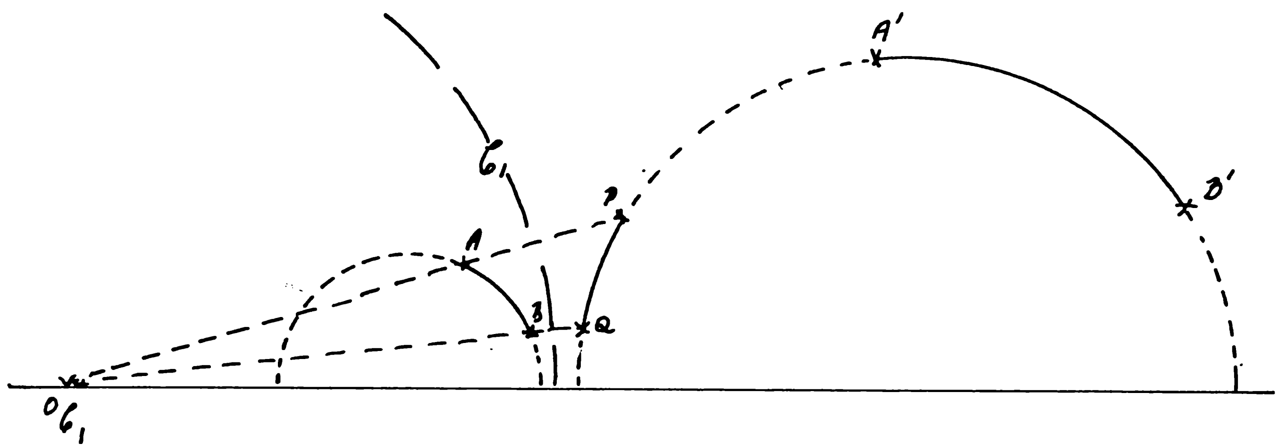
Tenemos entonces que $f_2(f_1(\overline{AB})) = f_2(\overline{A'P}) = \overline{A'B'}$ es decir, $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son h-congruentes.

Ahora consideremos el caso en el que los dos h-segmentos cuya h-longitud es la misma, están sobre distinta h-recta.

Sean $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ dos h-segmentos tales que $d_B^A = d_{B'}^{A'}$, y sean l y m las h-rectas que los contienen.

Sea b_1 la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, l y m son mutuamente inversas, y sea f_1 la inversión con respecto a b_1.

Al aplicar f_1, $\overline{AB}$ se transforma en un h-segmento $\overline{PQ}$ sobre m, h-congruente con $\overline{AB}$, con lo que tenemos, sobre la h-recta que contiene a $\overline{A'B'}$, un h-segmento $\overline{PQ}$ tal que su h-longitud es la misma que la de $\overline{AB}$ y por lo tanto la misma que la de $\overline{A'B'}$.



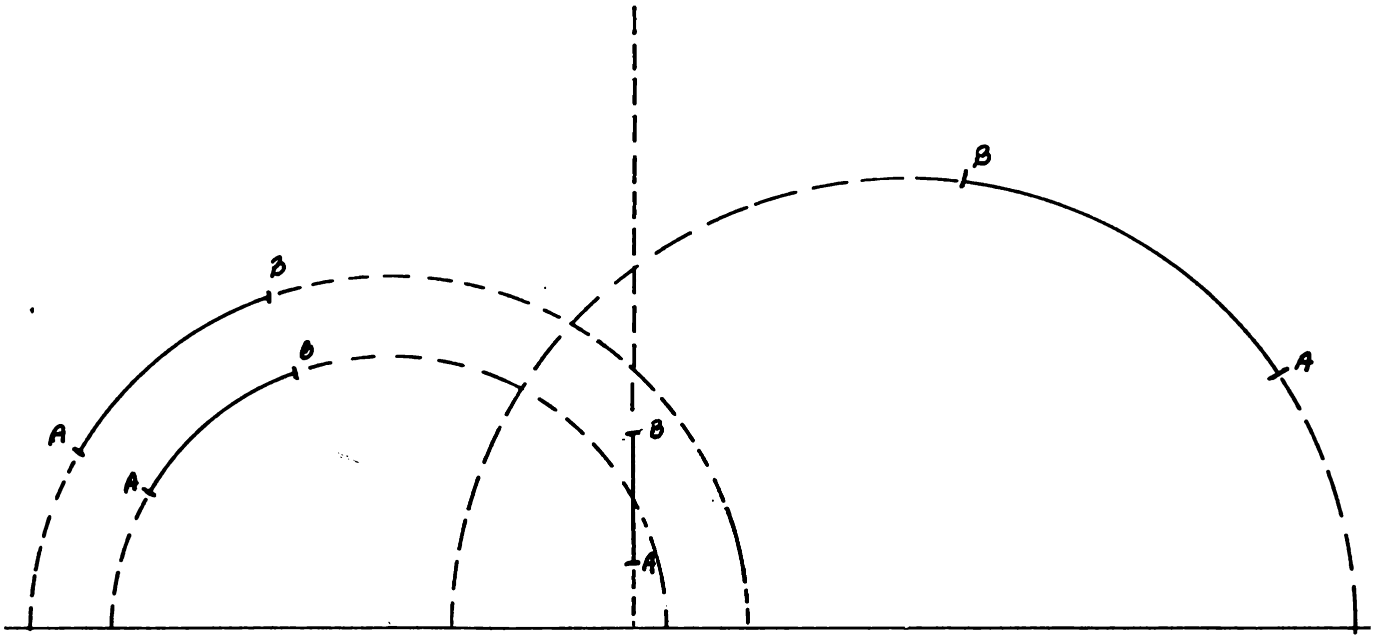
Siendo $\overline{PQ}$ y $\overline{A'B'}$ dos h-segmentos colineales cuya h-longitud es la misma, existe, como acabamos de demostrar, una h-isometría f tal que $f(PQ) = A'B'$.

Tenemos entonces que $f(f_1(\overline{AB})) = f(PQ) = A_1'B'$.

es decir, $\overline{AB} =_h \overline{A'B'}$.

Como la k-distancia no es la misma que la e-distancia, la k-congruencia no es la misma que la e-congruencia.

En la siguiente figura, todos los k-segmentos $\overline{AB}$ son k-congruentes y, sin embargo, no son e-congruentes.



I.4 Una h-isometría que nos resultará útil

Terminamos este capítulo explicando cómo encontrar la h-isometría que transforma a una sucesión de h-segmentos colineales h-congruentes A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 etc. a la sucesión de h-segmentos A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 etc.

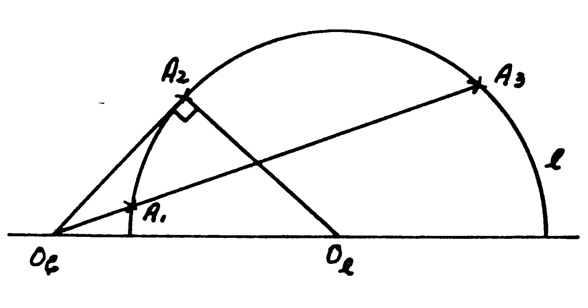
Supondremos que la recta que contiene a la sucesión de h-segmentos es e-semicircunferencia. En el caso en que ésta sea un e-rayo, los trazos pueden deducirse fácilmente una vez conocidos los trazos para la semicircunferencia.

Además, omitiremos la justificación de todos los trazos, ya que todos ellos son consecuencia de resultados ya demostrados.

Para empezar, veamos cómo trazar una sucesión de h-segmentos colineales h-congruentes.

Sea l una h-recta y sea $\overline{A_1A_2}$ un h-segmento sobre l.

Para encontrar un h-punto A_3 tal que $\overline{A_1A_2} =_h \overline{A_2A_3}$, marcamos O_l, el centro de l, y trazamos el e-radio O_lA_2.

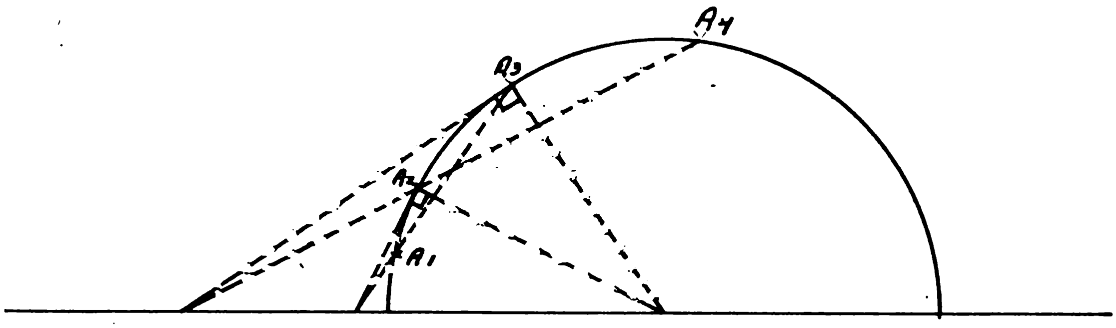


Trazamos la e-recta perpendicular al e-radio O_lA_2 en A_2 y llamamos O_{C_1} al e-punto en donde ésta intersecta al eje x.

Trazamos la e-recta $O_{C_1}A_1$ y llamamos A_3 al h-punto de l distinto de A_1 sobre $O_{C_1}A_1$.

A_3 es tal que $\overline{A_1A_2} =_h \overline{A_2A_3}$.

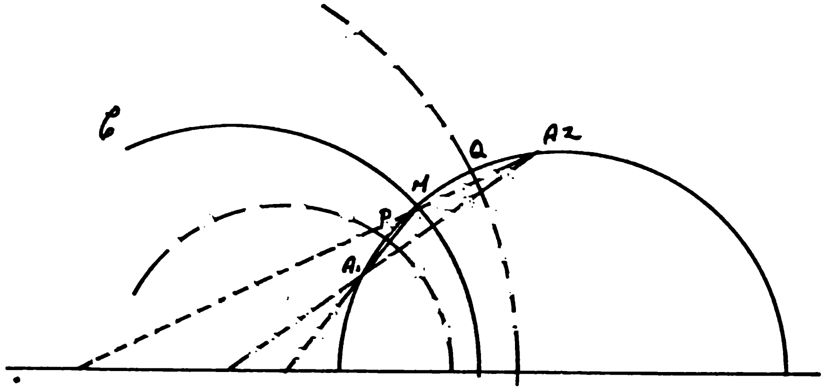
Repitiendo este proceso, podemos obtener un h-punto A_4 tal que $\overline{A_2A_3} =_h \overline{A_3A_4}$; después un h-punto A_5 tal que $\overline{A_3A_4} =_h \overline{A_4A_5}$, etc.



Ahora encontremos la h-isometría que transforma a A_1A_2 en A_2A_3; a A_2A_3 en A_3A_4; a A_3A_4 en A_4A_5 etc.

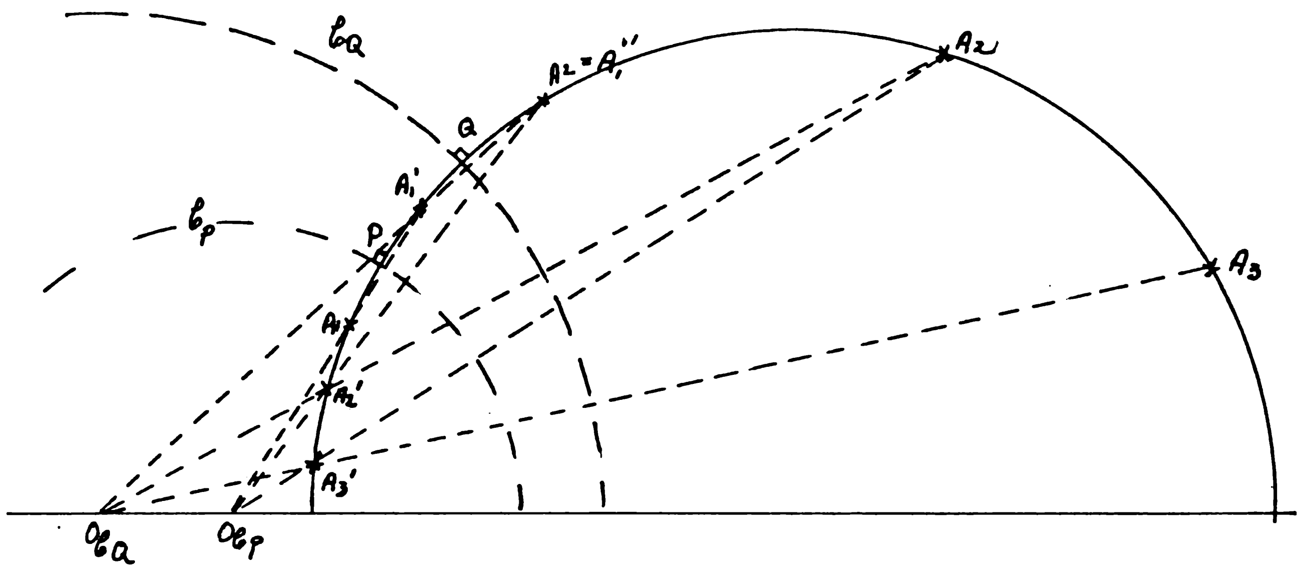
Para simplificar las cosas supondremos que los h-puntos A_1, A_2, A_3 etc. están colocados de izquierda a derecha y tomaremos como unidad de h-distancia a la h-longitud de los h-segmentos de la sucesión. Sea l la h-recta que contiene a la sucesión.

Sea P el h-punto sobre l situado a una h-distancia $1/4$ a la derecha de A_1, y sea Q el h-punto sobre l situado a una h-distancia $3/4$ a la derecha de A_1.



Para encontrar P y Q, trazamos la h-recta C que transforma a A_1 en A_2. El punto M en donde ésta intersecta a l, resulta ser el h-punto medio del h-segmento A_1A_2.

Una vez encontrado M, encontramos, con el mismo método, el h-punto medio del h-segmento A_1M, y éste resulta ser P, y encontramos el h-punto medio de $\overline{MA_2}$ y éste resulta ser Q.



Sea b_P la h-recta ortogonal a l en P, y sea f_P la inversión con respecto a b_P. Al aplicar f_P, P queda fijo y l se transforma en sí misma globalmente, por lo que A_1, A_2, A_3 etc. se transforman en h-puntos A_1', A_2', A_3' etc. que están sobre l.

Como A_1 está a una h-distancia 1/4 a la izquierda de P, A_1' está a una h-distancia 1/4 a la derecha de P, y por lo tanto a una h-distancia 1/4 a la izquierda de Q.

Como A_2 está a una h-distancia 3/4 a la derecha de P, A_2' está a una h-distancia 3/4 a la izquierda de P y por lo tanto a una h-distancia 5/4 a la izquierda de Q.

En general, cada h-punto A_i', $i=1,2,3,\ldots$ está a una h-distancia $\frac{4i-3}{4}$ a la izquierda de Q.

Sea b_Q la h-recta ortogonal a l en Q, y sea f_Q la inversión con respecto a b_Q. Al aplicar f_Q, cada h-punto A_i' $i=1,2,3,\ldots$ se transforma en un h-punto A_i'' sobre l situado a una h-distancia $\frac{4i-3}{4}$ a la derecha de Q.

Pero para toda i, $i=1,2,3,\ldots$, A_i'' coincide con A_{i+1}, pues todo h-punto A_{i+1} está a una h-distancia $\frac{4i-3}{4}$ a la derecha de Q.

Así, $f_2(f_1(A_i)) = f_2(A_i') = A_i'' = A_{i+1}$

Por lo que la h-isometría $f_2 \circ f_1$ transforma a la sucesión $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$ en la sucesión $A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, \ldots$

Capítulo II

Conceptos Básicos

Las tres primeras secciones de este capítulo: II.1 h-perpendiculares, II.2 h-mediatrices y II.3 h-bisectrices, estarán dedicadas al estudio de la h-perpendicular a una h-recta por un h-punto, la h-mediatriz de un h-segmento y la h-bisectriz de un h-ángulo. Definiremos estas h-rectas, demostraremos algunas de sus propiedades e indicaremos cómo trazarlas.

En la cuarta sección: II.4 h-círculos, hablaremos de h-círculos. Mencionaremos qué forma tienen e indicaremos cómo trazarlos. Demostraremos que todo h-círculo es perpendicular a sus h-diámetros y que, dados tres h-puntos no h-colineales, no siempre existe un h-círculo que pasa por ellos. Además definiremos el concepto de horociclo.

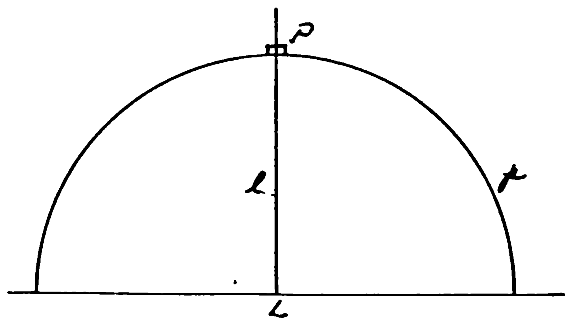
II.1 h-perpendiculares.

Diremos que dos h-rectas que se intersectan son perpendiculares si y sólo si el ángulo que forman al intersectarse es recto.

Teorema II.1.- Dados una h-recta l y un h-punto P sobre ella, existe una única h-recta perpendicular a l en P.

Consideramos primero el caso en el que l es e-rayo.

Sea L el pie de l y sea P un h-punto sobre l.



Sea p la e-semicircunferencia con centro en L y e-radio LP.

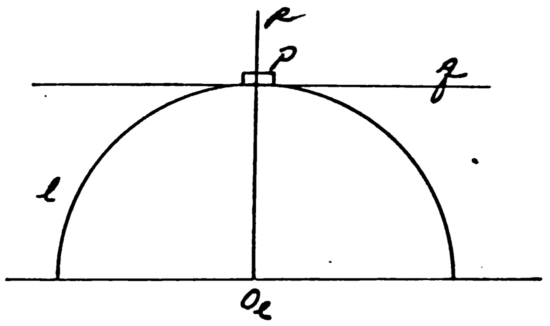
Como las e-circunferencias tienen la propiedad de ser ortogonales a sus radios, p es ortogonal a LP, por lo que p resulta ser una h-recta perpendicular al e-rayo l en P.

Ninguna otra h-recta e-semicircunferencia q, $q \neq p$, puede ser perpendicular a l en P, pues toda e-circunferencia perpendicular a l debe tener centro en l.

Tampoco existe una h-recta e-rayo perpendicular a l, pues ninguna h-recta e-rayo intersecta a l.

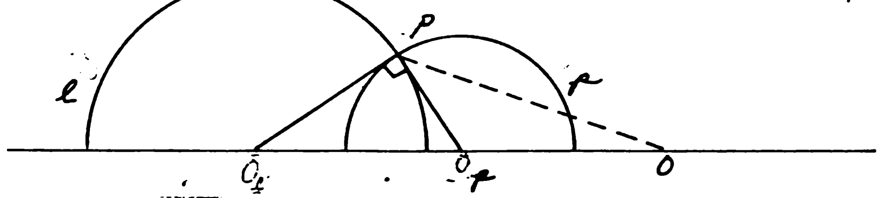
Así, p resulta ser la única perpendicular a l en P.

Si l es e-semicircunferencia, sea O_l el centro de l, sea P un h-punto de l, y sea q la e-recta perpendicular al e-radio $O_l P$.



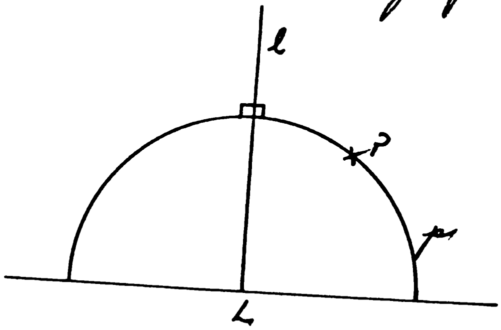
Si q no intersecta al eje x, la única h-perpendicular a l en P es el e-rayo que pasa por P.

Si q intersecta al eje x en un punto O_p, la e-circunferencia de centro O_p y e-radio $O_p P$ resulta ser una h-recta perpendicular a l en P.



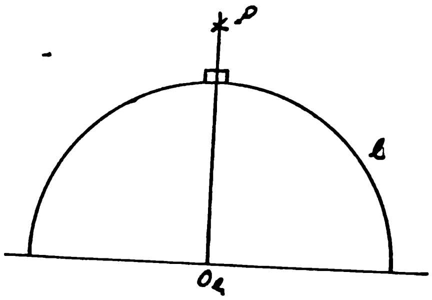
Ningún otro punto O del eje x ($O \neq O_p$) puede ser el centro de la h-perpendicular buscada, pues si el e-ángulo $O_l P O_p$ es recto, y $O \neq O_p$, el e-ángulo $O_l P O$ no puede ser recto, y así, la única h-recta perpendicular a l en P es p.

Teorema II.2.- Dados una h-recta l y un h-punto P fuera de l, existe una única h-recta perpendicular a l desde P.



Si l es un e-rayo, la h-perpendicular p a l desde P es la e-semicircunferencia con centro en L el pie de l y e-radio LP.

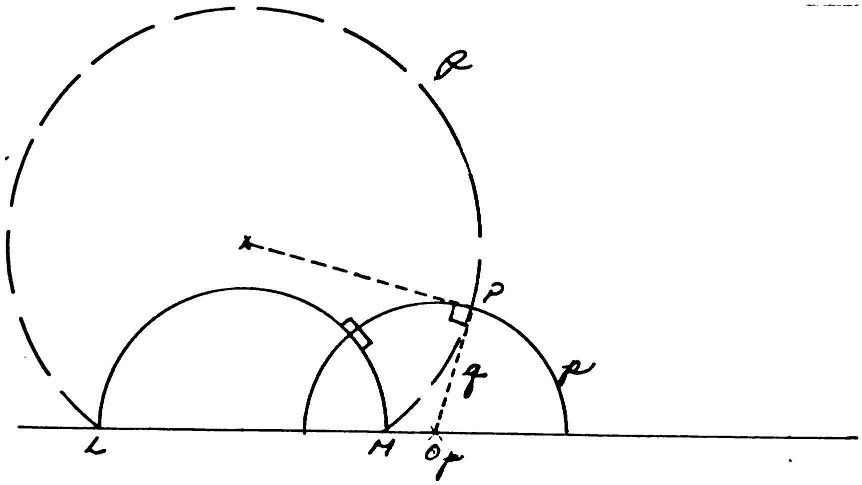
Es única porque las únicas h-rectas perpendiculares a l son las e-semicircunferencias que tienen centro en L, y, de todas ellas, sólo una pasa por P.



Si l es e-semicircunferencia y la e-recta que une a P con el centro de l es h-recta, ésta h-recta es p, la h-perpendicular buscada.

Si la e-recta QP no es h-recta, sean L y M los puntos al infinito de l, sea $\mathcal{P}$ la e-circunferencia LMP y sea q la e-tangente a $\mathcal{P}$ en P.

Sea O_p el punto en donde q intersecta al eje x, y sea p la e-semicircunferencia de centro O_p y e-radio O_pP.



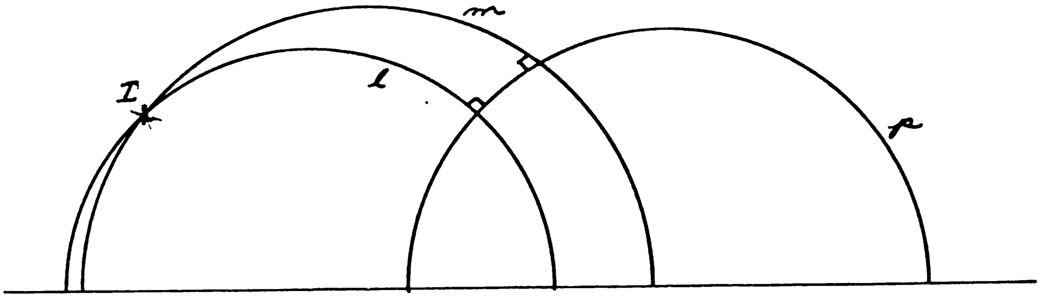
p es ortogonal a $\mathcal{P}$, y por lo tanto ortogonal a l, pues $\mathcal{P}$ y l, vistas como e-circunferencias, pertenecen a una familia de e-circunferencias coaxiales (ver [7 I]) cuyo eje radical es el eje x, por lo que cualquier e-circunferencia perpendicular a $\mathcal{P}$ es también perpendicular a l.

Así, p es una h-recta perpendicular a l desde P.

La unicidad se sigue como consecuencia de la unicidad de la e-circunferencia ortogonal a $\mathcal{P}$ en P y con centro en el eje x.

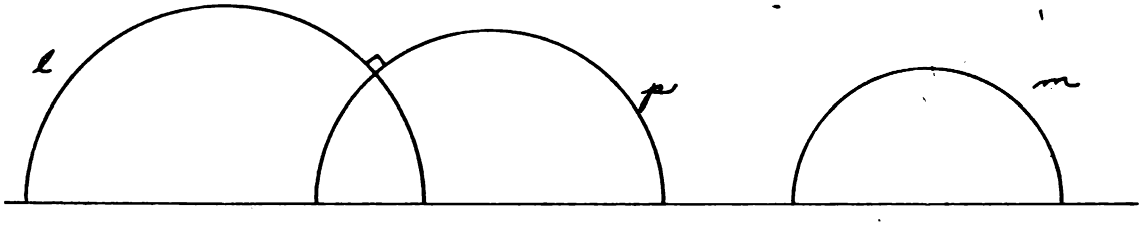
Teorema II.3.- Si l y m son dos h-rectas tales que exista una h-recta perpendicular a ambas, l y m no se intersectan.

Sean l y m dos h-rectas y sea p una h-recta perpendicular a ambas.



Si l y m se intersectan en un h-punto I, p e I son tales que existen, desde I, dos h-perpendiculares a p (l y m), lo cual contradice el Teorema II.2.

Observamos también que si l y m son dos h-rectas que no se intersectan y p es una h-recta perpendicular a l, p puede no intersectar a m.



II.2 h-mediatrices.

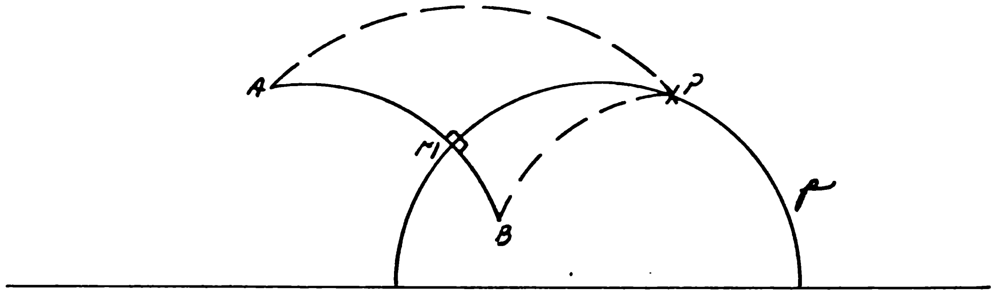
Definiremos a la h-mediatriz de un h-segmento de la siguiente manera: Una h-recta m es h-mediatriz de un h-segmento $\overline{AB}$ si y sólo si los h-puntos de m h-equidistan de A y de B; es decir, si y sólo si $d_A^P = d_B^P$ para todo h-punto P en m.

Teorema II.4.- Una h-recta m es h-mediatriz de un h-segmento $\overline{AB}$, si y sólo si m es la h-perpendicular en M del h-segmento $\overline{AB}$, donde M es el h-punto medio del h-segmento $\overline{AB}$.

Sea $\overline{AB}$ un h-segmento. Sea M el h-punto medio de $\overline{AB}$ y sea p la h-perpendicular a AB en M.

Demostraremos que p es la h-mediatriz de $\overline{AB}$; es decir demostraremos que para todo h-punto P en p, $d_A^P = d_B^P$.

Sea P un h-punto de p distinto de M, y sea f_p la inversión con respecto a p.



Como p es perpendicular a la h-recta AB, al aplicar f_p, la h-recta AB se transforma en sí misma globalmente y M queda fijo, y como M es el h-punto medio de $\overline{AB}$, f_p transforma a A en B.

Además, como f_p transforma a P en sí mismo, f_p transforma al h-segmento $\overline{PA}$ en el h-segmento $\overline{PB}$, con lo que p.

$\overline{PA} =_h \overline{PB}$ y así $d_A^P = d_B^P$, que es lo que queríamos demostrar.

Ahora demostremos que la h-mediatriz de un h-segmento es perpendicular a éste en el h-punto medio.

Sea $\overline{AB}$ un h-segmento y m una h-recta h-mediatriz de $\overline{AB}$.

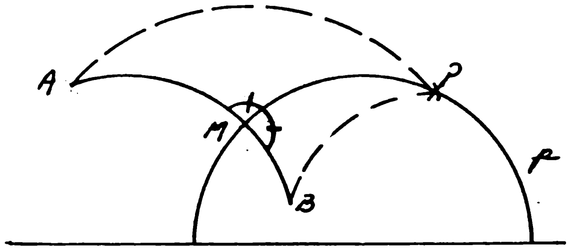
Sea M el h-punto de intersección de m y AB.

Como M está en m, $d_A^M = d_B^M$. Es decir, M es el h-punto medio del h-segmento $\overline{AB}$.

Para demostrar que m es perpendicular a AB, tomemos un h-punto P en m distinto de M.

Como P está en m, $d_A^P = d_B^P$.

Tenemos entonces que $\overline{AM} =_h \overline{BM}$ y que $\overline{PA} =_h \overline{PB}$, y, como además, $\overline{MP} =_h \overline{MP}$, resulta que los h-triángulos AMP y BMP son tales que sus lados son respectivamente h-congruentes.

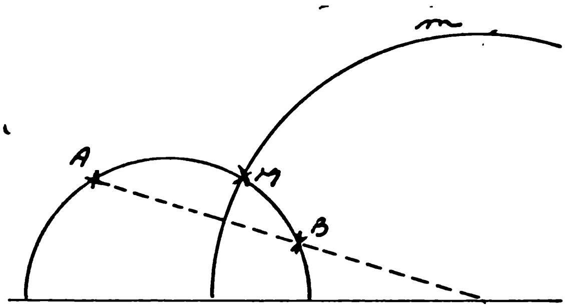


El resultado de geometría euclidiana que afirma que dos e-triángulos que tienen sus lados respectivamente e-congruentes, tienen sus ángulos respectivamente congruentes, es válido también en geometría hiperbólica, pues dicho resultado es una consecuencia directa del axioma de congruencia de Hilbert, y el axioma de congruencia de Hilbert es independiente del postulado de las paralelas (ver [8]).

Así, la h-congruencia de los lados de los h-triángulos AMP y BMP, implica que los h-ángulos AMP y BMP son congruentes, por lo que m es perpendicular a AB.

Como corolario de este teorema tenemos que la h-mediatriz de un h-segmento es única.

El teorema II.4 nos permite encontrar fácilmente la h-mediatriz m de un h-segmento $\overline{AB}$. Simplemente trazamos la h-recta tal que, al invertir con respecto a ella, A y B son mutuamente inversos. (Trazo I.2.1), y ésta resulta ser la h-mediatriz de $\overline{AB}$



Sea $\overline{AB}$ un h-segmento y AB la h-recta que lo contiene.

Sea m la h-recta tal que, al invertir con respecto a ella, A y B son mutuamente inversos, y sea f_m la inversión con respecto a m.

Sea M el h-punto de intersección de m y AB.

f_m transforma al h-segmento $\overline{AM}$ en el h-segmento $\overline{BM}$, y por lo tanto M es el h-punto medio de $\overline{AB}$.

Además, el que f_m transforme a $\overline{AM}$ en $\overline{BM}$, implica que f_m transforma a la h-recta AB en sí misma globalmente.

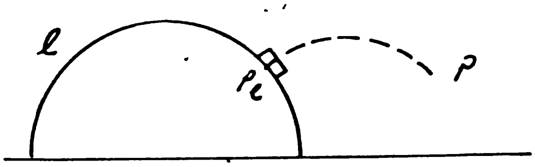
Este hecho indica que m es perpendicular a AB, pues, bajo e-inversión, las únicas e-circunferencias que se transforman en sí mismas globalmente, son las e-circunferencias perpendiculares a la circunferencia de inversión (ver [7]).

Así, m es la h-perpendicular al h-segmento $\overline{AB}$ en el h-punto medio y, por lo tanto, ~~la~~ su h-mediatriz.

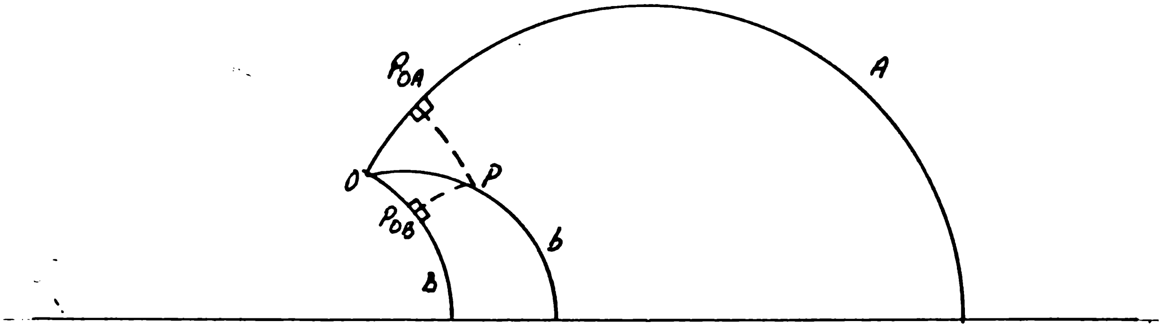
II.3 H- bisectrices

Diremos que una h-recta b es la h-bisectriz de un h-ángulo AOB si y sólo si para todo h-punto P en b, la h-distancia de P al lado OA del h-ángulo, es la misma que la h-distancia de P al lado OB del h-ángulo.

Consideraremos que la h-distancia de un h-punto P a una h-recta l, es la h-longitud del h-segmento PP_l, donde P_l es el pie de la h-perpendicular a l desde P.



Así, una h-recta b es h-bisectriz de un h-ángulo AOB si y sólo si, para todo h-punto P en b, $d^{P}_{P_{OA}} = d^{P}_{P_{OB}}$, donde P_{OA} y P_{OB} son los pies de las h-perpendiculares desde P a OA y OB respectivamente.

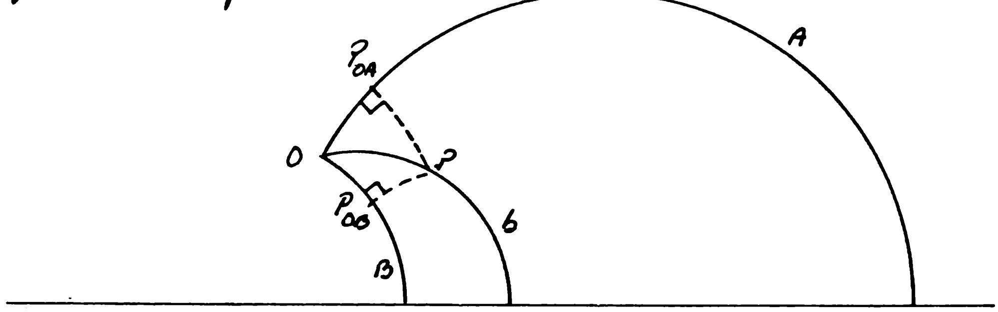


Una consecuencia inmediata de la definición de h-bisectriz es que la h-bisectriz de un h-ángulo pasa por el vértice del h-ángulo.

Teorema II.5.- Una h-recta b es h-bisectriz de un h-ángulo AOB, si y sólo si el h-ángulo AOP es h-congruente con el h-ángulo POB, donde P es un h-punto sobre b distinto de O.

Sea AOB un h-ángulo y sea P un h-punto en el interior del h-ángulo AOB tal que los h-ángulos AOP y POB son h-congruentes.

Demostraremos que la la h-recta OP es la h-bisectriz del h-ángulo AOB; es decir, demostraremos que $d^{P}_{P_{OA}} = d^{P}_{P_{OB}}$, donde P_{OA} y P_{OB} son los pies de las h-perpendiculares desde P a OA y OB respectivamente.



Sea f la inversión con respecto a la h-recta OP. Al aplicar f, P y O quedan fijos y el h-rayo OA se transforma en el h-rayo OB (pues la e-inversión preserva ángulos).

La h-recta PP_{OA}, que pasa por P y es perpendicular a OA, se transforma en la h-recta que pasa por P y es perpendicular a $R_0 OB$; es decir, se transforma en la h-recta PP_{OB}.

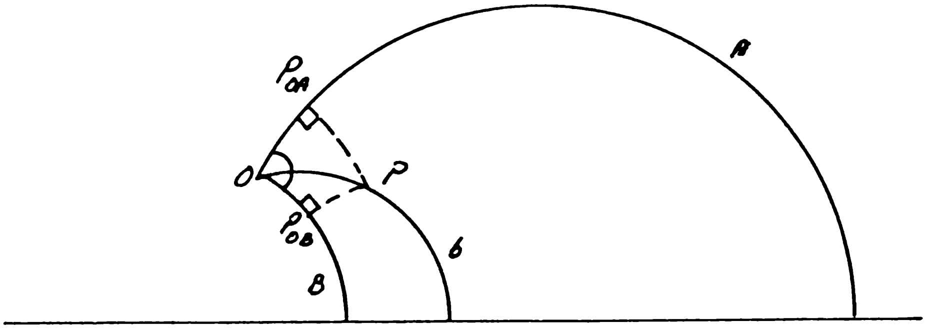
Tenemos entonces que, al aplicar f, P_{OA}, que es el h-punto de intersección de las h-rectas OA y PP_{OA}, se transforma en P_{OB}, que es el punto de intersección de las h-rectas OB y PP_{OB}.

Así, f transforma al h-segmento $\overline{PP_{OA}}$ en el h-segmento $\overline{PP_{OB}}$, por lo que

$\overline{PP_{OA}} =_h \overline{PP_{OB}}$ y $d^{P}_{P_{OA}} = d^{P}_{P_{OB}}$, que es lo que queríamos demostrar.

Sea AOB un h-ángulo y sea b la h-bisectriz de AOB. Sea P un h-punto sobre b distinto de O.
Sean P_{OA} y P_{OB} los pies de las h-perpendiculares de de P a OA y OB respectivamente.

Entonces $d^{P}_{P_{OA}} = d^{P}_{P_{OB}}$ y por lo tanto $\overline{P_{OA}P} =_h \overline{P_{OB}P}$.



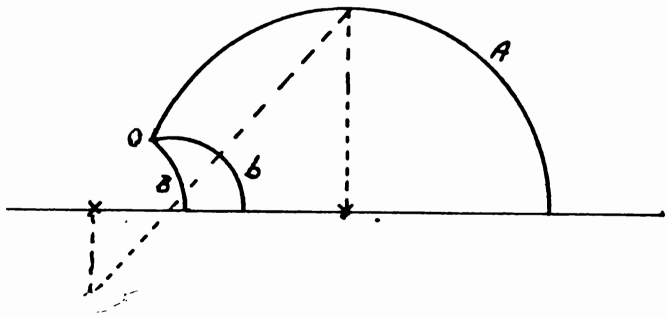
Los h-triángulos $OP_{OA}P$ y $OP_{OB}P$ son dos h-triángulos rectángulos ($\measuredangle PP_{OA}O = \measuredangle PP_{OB}O = 90°$), tales que tienen un par de lados respectivamente congruentes ($\overline{P_{OA}P} =_h \overline{P_{OB}P}$ y $\overline{PO} =_h \overline{PO}$), y por lo tanto tienen sus ángulos respectivamente congruentes.

(Este es un resultado de geometría euclidiana que no depende del postulado de las paralelas (ver [ ]) y por lo tanto válido en geometría hiperbólica.

Así, $\measuredangle AOP = \measuredangle P_{OA}OP = \measuredangle P_{OB}OP = \measuredangle BOP$

El teorema II.5 nos permite encontrar fácilmente la h-bisectriz b de un h-ángulo AOB.

Simplemente hay que trazar la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, el h-rayo OA se transforma en el h-rayo OB (trazo I.2.4) y ésta resulta ser la h-bisectriz de AOB

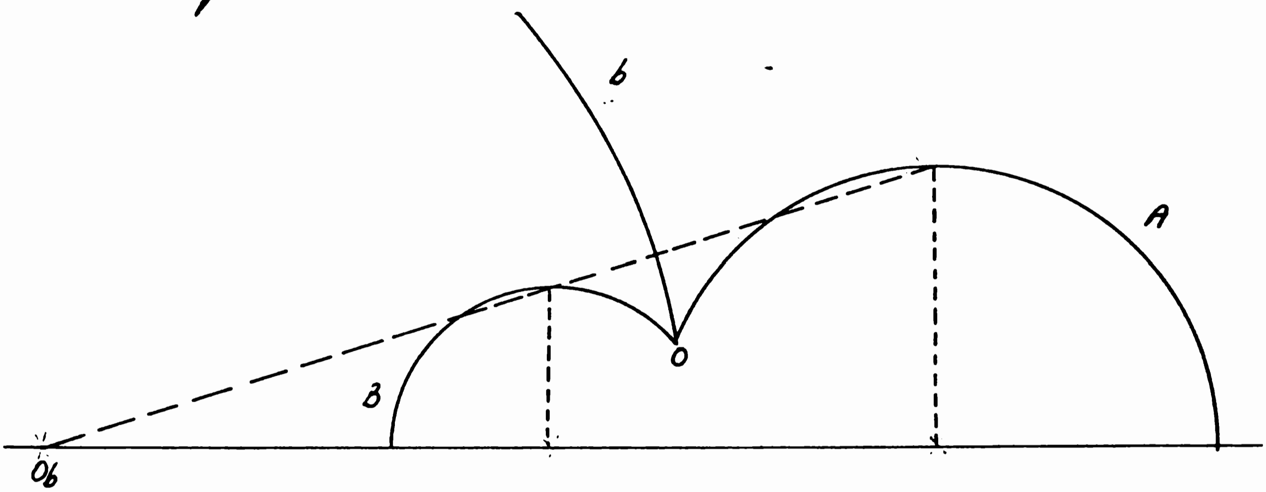


Sea b la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, el h-rayo OA se transforma en el h-rayo OB.

Sea f_b la inversión con respecto a b.

Como al aplicar f_b, b se transforma en sí misma, el h-ángulo AOb se transforma en el h-ángulo BOb, y como la e-inversión preserva ángulos,

$\measuredangle AOb = \measuredangle BOb$; es decir, b es la h-bisectriz del h-ángulo AOB.

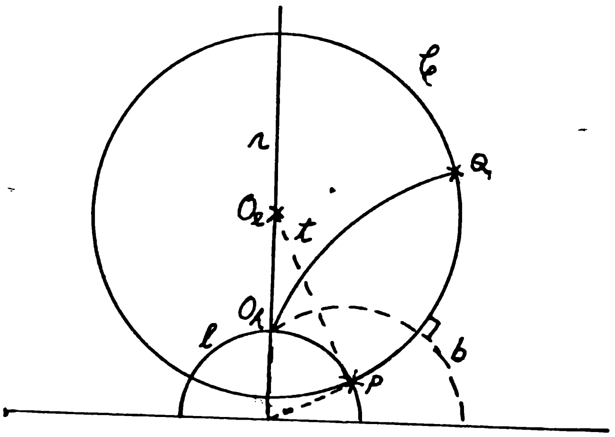


II.4 h-círculos

En la primera parte de este trabajo (sección II.1), definimos al h-círculo como el conjunto de h-puntos que h-equidistan de un h-punto fijo, y demostramos que dados un h-punto y una h-distancia, existe un único h-círculo cuyo h-centro es el h-punto dado y cuyo h-radio es la h-distancia dada.

Ahora veremos qué forma tienen los h-círculos.

Teorema II.6.- Los h-círculos son e-círculos cuyo centro (h-centro) no coincide con el centro euclidiano.



Sea O_h un h-punto, sea r la h-recta e-rayo que pasa por O_h y sea l cualquier otra h-recta por O_h.

Sea P un h-punto sobre l ($P \neq O_h$), y sea t la e-tangente a l en P, y sea O_e el h-punto donde t intersecta a r.

Sea $\mathcal{C}$ la e-circunferencia de e-centro O_e y e-radio $O_e P$. Demostraremos que $\mathcal{C}$ es el h-círculo de h-centro O_h y h-radio $O_h P$. Es decir, demostraremos que todo h-punto de $\mathcal{C}$ está a una h-distancia $\underline{r}$ de O_h, donde r es la h-longitud del h-segmento $\overline{O_h P}$.

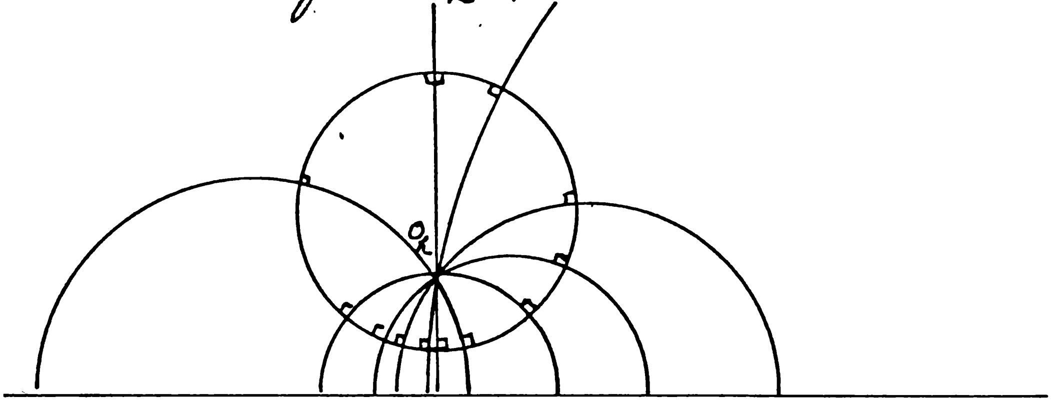
Sea Q un h-punto de $\mathcal{C}$ distinto de P, y sea b la h-bisectriz del h-ángulo QO_hP. Observemos que la h-recta b, al igual que todas las h-rectas por O_h, es ortogonal a $\mathcal{C}$, pues las h-rectas por O_h vistas como e-circunferencias pertenecen a una familia de e-circunferencias coaxiales (ver [7]), cuyo eje radical es r, y $\mathcal{C}$ es una e-circunferencia con centro en r y ortogonal a una e-circunferencia de la familia ($\mathcal{C}$ es, por construcción ortogonal a l).

Sea f_b la inversión con respecto a b. Al aplicar f_b, $\mathcal{C}$ se transforma en sí misma globalmente, y el h-rayo $O_h Q$ se transforma en el h-rayo $O_h P$, por lo que el h-punto Q se transforma en el h-punto P y así el h-segmento $O_h Q$ se transforma en el h-segmento $O_h P$.

Tenemos entonces que $\overline{O_h P} =_h \overline{O_h Q}$ y por lo tanto que $d_{O_h}^{Q} = d_{O_h}^{P}$, que es lo que queríamos demostrar.

Hemos demostrado entonces no solamente que los h-círculos son e-círculos cuyo centro no coincide con el e-centro, sino también que el h-círculo de h-centro O_h y h-radio O_hP es el e-círculo perpendicular a la h-recta O_hP en P y cuyo e-centro está sobre la h-recta e-rayo que pasa por O_h, es decir, el e-centro está sobre el e-eje radical de las h-rectas por O_h.

Así, el h-círculo de h-centro O_h y h-radio O_hP, no solamente es perpendicular a la h-recta O_hP, sino también es perpendicular a todas las h-rectas por O_h.

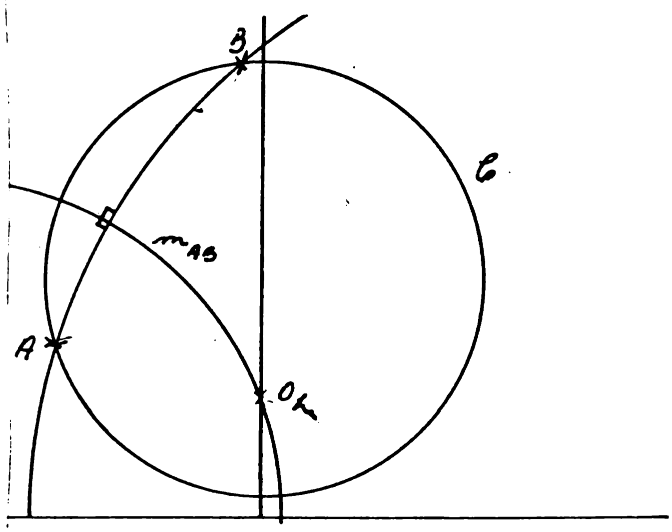


Tenemos entonces el siguiente resultado:

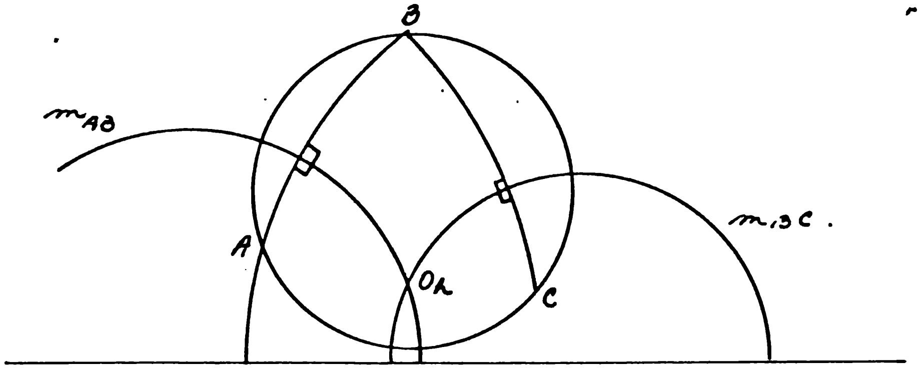
Teorema II.7.- Todo h-círculo es perpendicular a sus h-diámetros.

Observemos también que si A y B son dos h-puntos sobre un h-círculo $\mathcal{C}$, O_h el h-centro de $\mathcal{C}$, está sobre la h-mediatriz m_{AB} del h-segmento $\overline{AB}$, pues si O_h es el h-centro de $\mathcal{C}$, $d^A_{O_h} = d^B_{O_h}$.

NOTA: El h-segmento $\overline{AB}$ no coincide con el h-arco AB

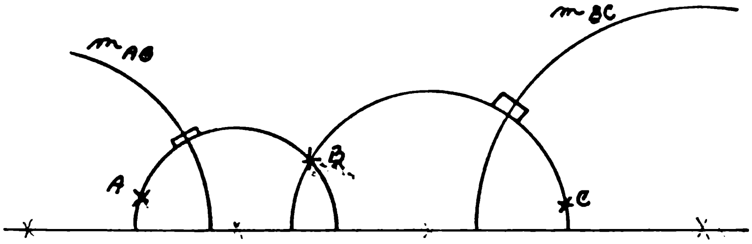


Así, si tres h-puntos A, B y C están sobre un h-círculo $\mathcal{C}$, y m_{AB} y m_{BC} son las h-mediatrices de los h-segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente el h-centro de $\mathcal{C}$ es el h-punto de intersección de m_{AB} y m_{BC}.



En la siguiente figura, A, B y C son tres h-puntos tales que m_{AB} y m_{BC}, las h-mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, no se intersectan, por lo que no puede existir un h-círculo por A, B y C, y tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema II.8.- Dados tres h-puntos no colineales, no siempre existe un h-círculo que los contenga.



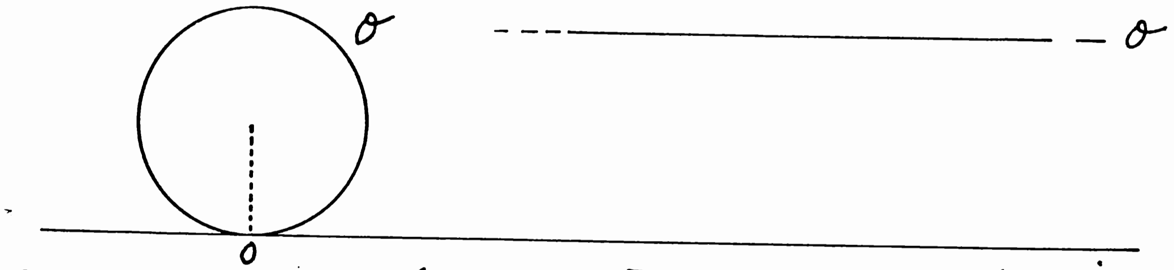
En la primera parte de este trabajo, (sección I.4), analizamos un intento de demostración del postulado de las paralelas cuyo error consistía, precisamente, en suponer la existencia del círculo que pasa por tres puntos no colineales.

Terminaremos esta sección hablando del horociclo.

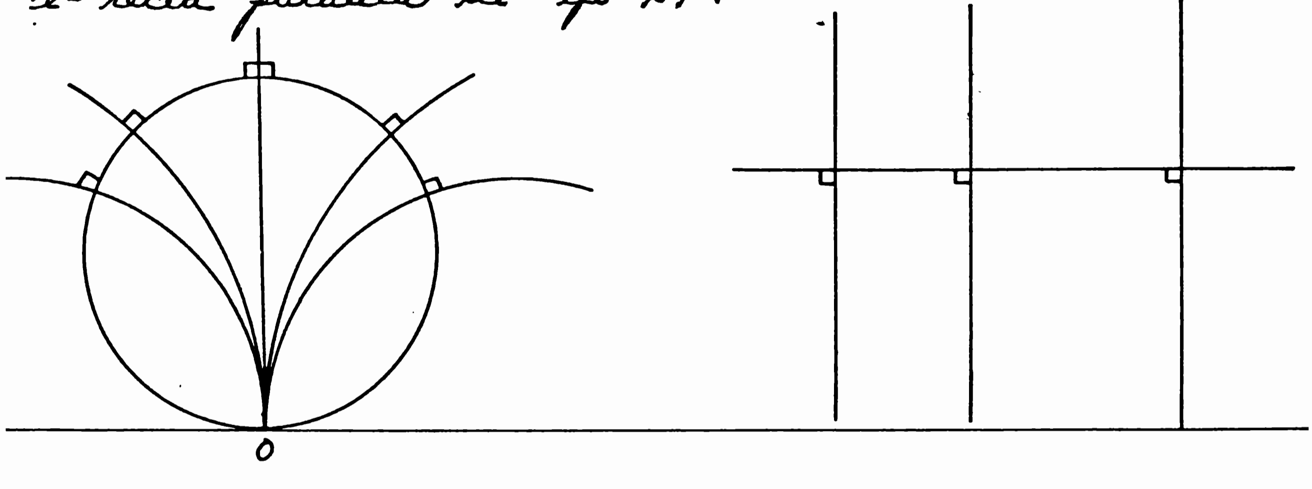
Llamaremos horociclos a los e-círculos tangentes al eje x y a las e-rectas paralelas al eje x.

Si $\mathcal{O}$ es un e-círculo tangente al eje x, diremos que el e-punto O donde $\mathcal{O}$ intersecta al eje x, es el centro del horociclo $\mathcal{O}$.

Si $\mathcal{O}'$ es una e recta paralela al eje x, diremos que I, el punto de la e-recta al infinito en donde se intersectan todas las h-rectas e-rayos, es el centro del horociclo $\mathcal{O}'$.



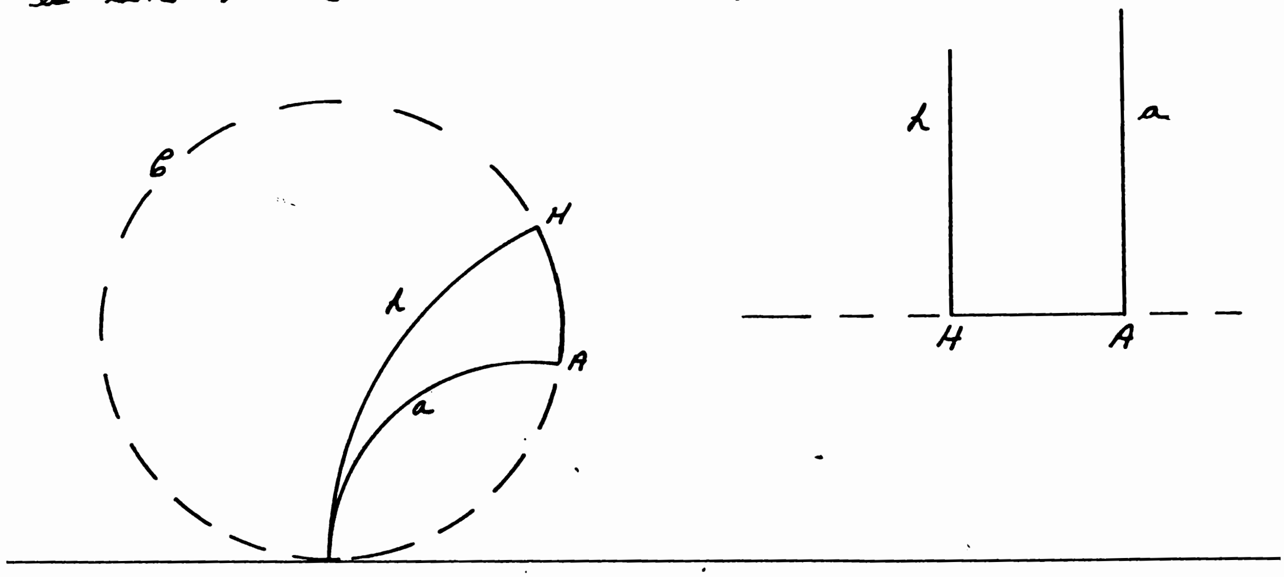
Observemos que las e-rectas paralelas al eje x tienen la propiedad de ser perpendiculares a todas las h-rectas e-rayos, y que un e-círculo tangente al eje x en un e-punto O tiene la propiedad de ser perpendicular a todas las h-rectas por O. (Para demostrar esto último, aplicamos una e-inversión f_O cuyo centro sea O. Todas las h-rectas por O se transforman en e-rayos perpendiculares al eje x, y el e-círculo por O se transforma en una e-recta paralela al eje x).



Podemos considerar entonces que los horociclos son h-círculos con centro en un punto al infinito, pues los h-círculos cuyo h-centro es un h-punto O_χ son aquellas figuras que tienen la propiedad de ser perpendiculares a todas las h-rectas por O_χ, y los orociclos con centro en un h-punto O son aquellas figuras que tienen la propiedad de ser perpendiculares a todas las h-rectas por O.

Si h es una h-recta; M uno de sus puntos al infinito, $\mathcal{C}$ un horociclo con centro en M, y H el h-punto de intersección de h y $\mathcal{C}$, diremos que el h-rayo HM es un h-radio del horociclo $\mathcal{C}$.

Si h y a son dos h-radios de un horociclo $\mathcal{C}$ de centro M, y H y A los h-puntos de intersección de h y $\mathcal{C}$ y a y $\mathcal{C}$ respectivamente, diremos que HA es un h-arco del horociclo $\mathcal{C}$, y que HAM es un sector del horociclo $\mathcal{C}$.



Capítulo III h-paralelas

En este capítulo presentamos algunos resultados sobre paralelismo.

En la primera sección (III.1 h-paralelas y paralelas frontera), mencionaremos que hay dos tipos de paralelas: las paralelas frontera, que son las que se intersectan en un punto al infinito, y las h-paralelas, que son totalmente ajenas.

Demostraremos que las paralelas frontera a una h-recta dada por un h-punto dado, tienen la propiedad de dividir al h-plano en dos regiones tales que, en una de ellas, se encuentran todas las h-paralelas a la recta por el punto dado; y en la otra se encuentran todas las h-rectas por el h-punto dado que no son paralelas a la recta dada.

En la sección III.2 (Perpendicular común), demostraremos que las paralelas frontera no tienen una perpendicular común, y que las h-paralelas sí tienen perpendicular común y ésta es única. Indicaremos además como trazar dicha perpendicular.

Finalmente, en la sección III.3, demostraremos que las paralelas no son equidistantes, y explicamos, tanto en el caso de las h-paralelas como en el de las paralelas frontera, cómo es la h-distancia entre paralelas.

Para una demostración general de ~~t~~ los resultados de paralelismo a los que haremos referencia, ver, por ejemplo, [2]

III. 1. h-paralelas y paralelas frontera.

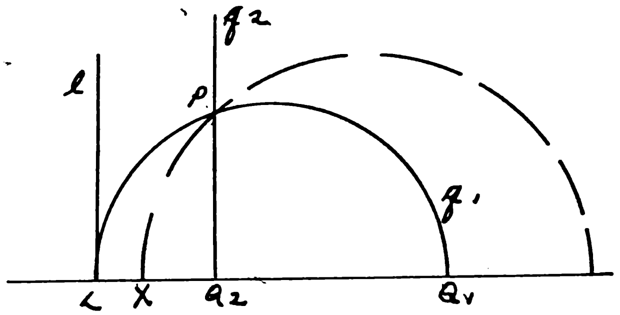
Diremos que dos h-rectas son paralelas si y sólo si no tienen un h-punto en común.

Teorema III.1.- Dada una h-recta l y un h-punto P fuera de ella, existen una infinidad de h-rectas paralelas a l que pasan por P.

Consideremos primero el caso en el que la h-recta dada es un e-rayo.

Sea l un e-rayo de pie L y sea M el otro punto al infinito de l (el que está sobre la e-recta al infinito).

Sea P un h-punto, que no está en l.



Sea q_1 la h-recta e-semicircunferencia que pasa por L y por P, y sea Q_1 el otro punto al infinito de q_1.

q_1 es una h-recta paralela a l por P, pues el e-punto L no pertenece al h-plano.

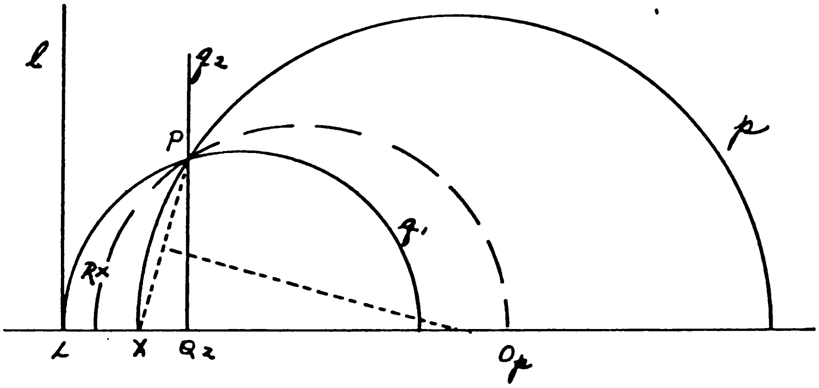
Sea q_2 la h-recta que pasa por M y por P; es decir, sea q_2 la h-recta e-rayo que pasa por P. Sea Q_2 el pie de q_2. q_2 también es una paralela a l por P.

Demostraremos que para todo e-punto X en el segmento LQ_2 la h-recta por X y por P es una h-recta paralela a l por P, y con esto quedará demostrado que existen una infinidad de paralelas a l por P.

Sea X un e-punto del e-segmento LQ_2; sea m la e-mediatriz del e-segmento XP, y sea O_p el e-punto de intersección de m y el eje x.

Es posible demostrar, utilizando que el e-ángulo PXL es obtuso (pues el e-ángulo PXQ_2 es agudo por ser e-ángulo interior de un e-triángulo rectángulo), que el e-punto O_p está situado fuera de LX.

Sea p la e-semicircunferencia de e-centro O_p y e-radio O_pX

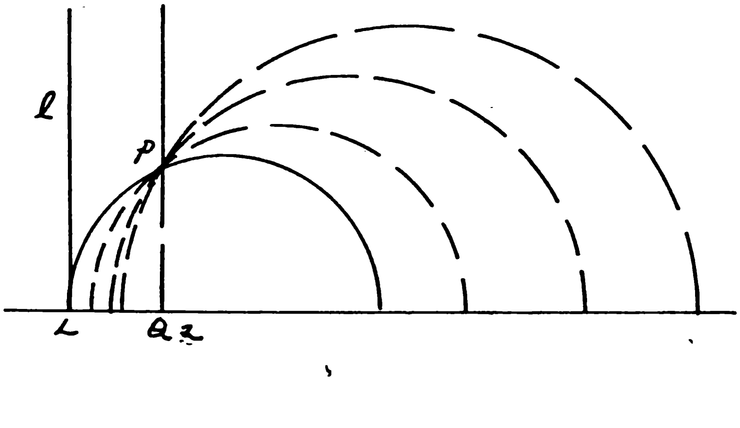


p es una h-recta por P, y como O_p no está en LX y L no está en O_pX, la e-longitud del e-segmento O_pX es menor que la del e-segmento O_pL, por lo que p no intersecta a l y así es una paralela a l por P.

Hemos demostrado entonces que toda h-recta por P tal que uno de sus puntos al infinito está sobre el e-segmento LQ_2, es una paralela a l por P.

Observemos que, dado un h-punto R en el interior del h-ángulo LPQ_2, un punto al infinito de la h-recta PR está en el interior del e-segmento LQ_2

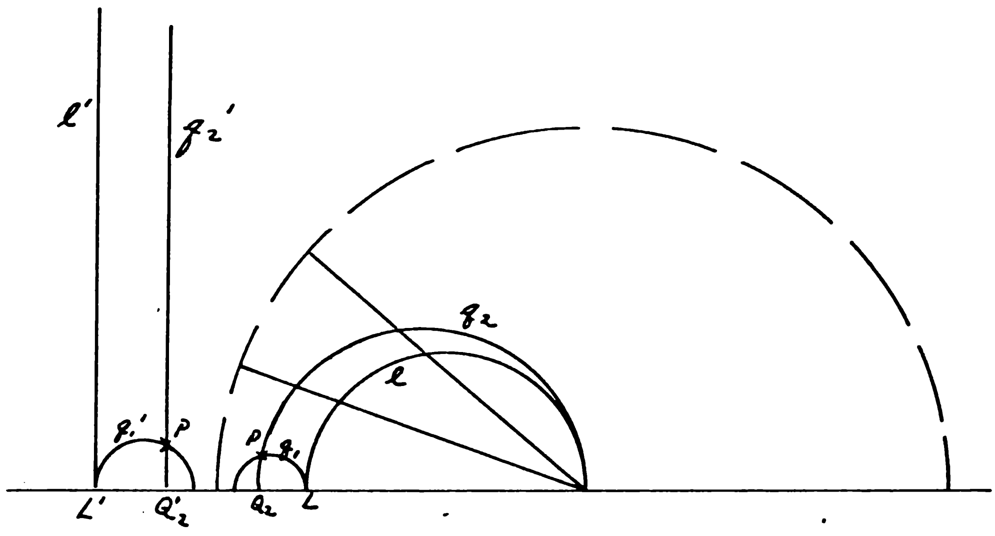
Así, toda h-recta por P que tiene un h-punto en el interior del h-ángulo LPQ_2, es paralela a l por P, y entonces toda h-recta por P en el interior del h-ángulo LPQ_2 y su opuesto por el vértice es paralela a l por P.



Ahora veamos qué sucede cuando la h-recta dada la una e-semicircunferencia

Sea l una h-recta e-semicircunferencia y sean L y M sus puntos al infinito. Sea P un h-punto que no está en l. Supondremos sin pérdida de generalidad, que P no está en el interior de l.

Sea q_1 la h-recta que pasa por L y por P. Sea q_2 la h-recta que pasa por M y por P, y sea Q_2 el otro punto al infinito de q_2.

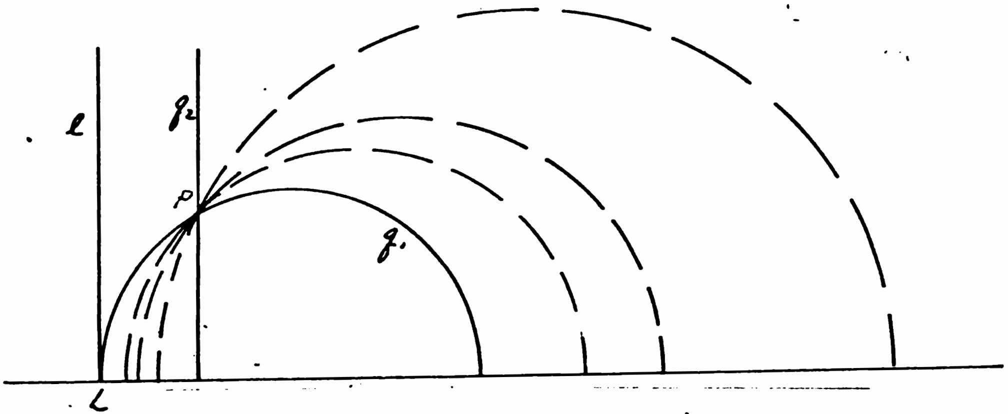


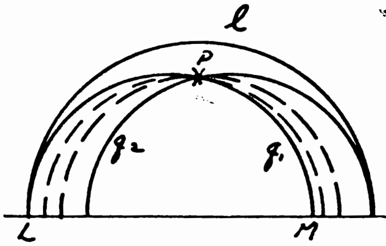
Ahora invertamos con respecto a una h-recta b con centro en M.
El h-punto P se transforma en un h-punto P', y la h-recta l, que es una e-semicircunferencia que pasa por M el centro de inversión, se transforma en un e-rayo l' que no pasa por P' y cuyo pie, L', es el inverso de L. (l' está a la izquierda o a la derecha de P' dependiendo de si P está en el interior o en el exterior de l).

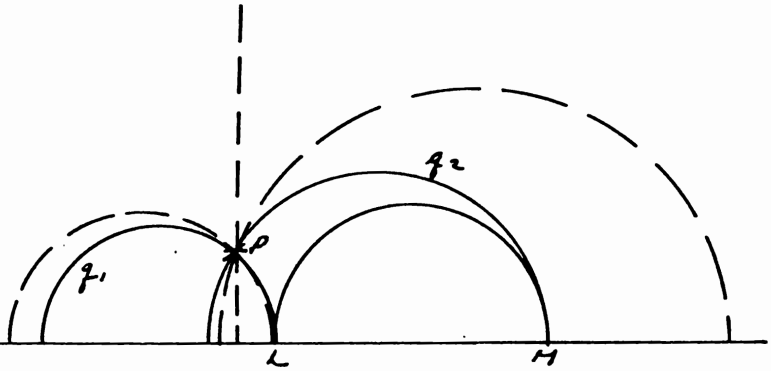
La h-recta q_2, que es una e-semicircunferencia por el centro de inversión y que pasa por P, se transforma en la h-recta e-rayo q_2' que pasa por P', y cuyo pie, Q_2', es el inverso de Q_2.
La h-recta q_1, que pasa por L y por P, se transforma en la h-recta q_1' que pasa por L' y por P'.

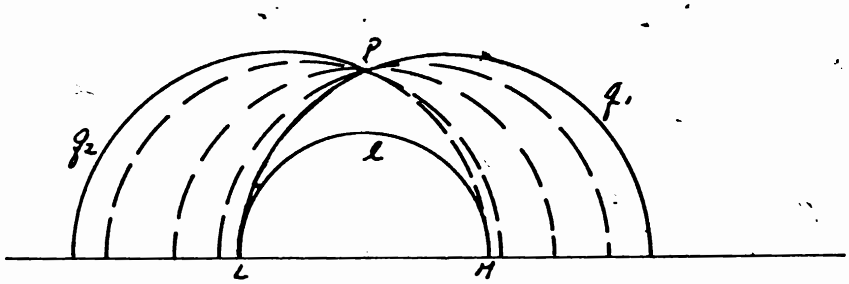
Como acabamos de demostrar, toda h-recta por P' en el interior del h-ángulo $L'P'Q_2'$ y su opuesto por el vértice, es paralela a l', y como la inversión preserva la incidencia, esto significa que, en la figura original, toda h-recta por P en el interior del h-ángulo LPQ_2 y su opuesto por el vértice es paralela a l por P, por lo que existen una infinidad de paralelas a l por P.

Tenemos entonces que dada una h-recta l de puntos al infinito L y M, y un h-punto P fuera de l, q_1 y q_2, las h-rectas que pasan por P y por L y por P y por M respectivamente, son dos paralelas a l por P tales que todas las h-rectas por P en el interior de uno de los dos pares de h-ángulos opuestos por el vértice determinados por q_1 y q_2, son paralelas a l por P.









A continuación demostraremos que todas las h-rectas por P en el interior del otro par de h-ángulos opuestos por el vértice determinados por q_1 y q_2, intersectan a l y, por lo tanto, no son paralelas a ella.

Consideraremos únicamente el caso en el que la h-recta l es un e-rayo, pues al igual que en la demostración del teorema anterior, si l es una e-semicircunferencia, podemos aplicar una transformación que la transforme en e-rayo.

Lo que haremos será demostrar que para todo e-punto Y sobre el e-segmento $Q_2 Q_1$ (ver figura a)) la h-recta que pasa por Y y P intersecta a l.

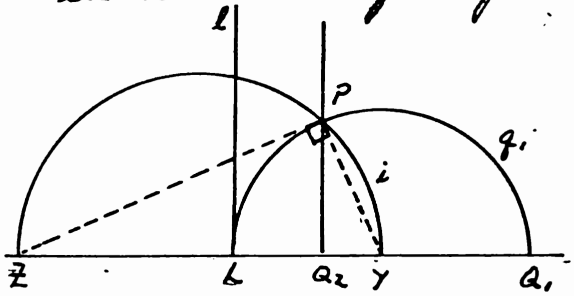


fig. a)

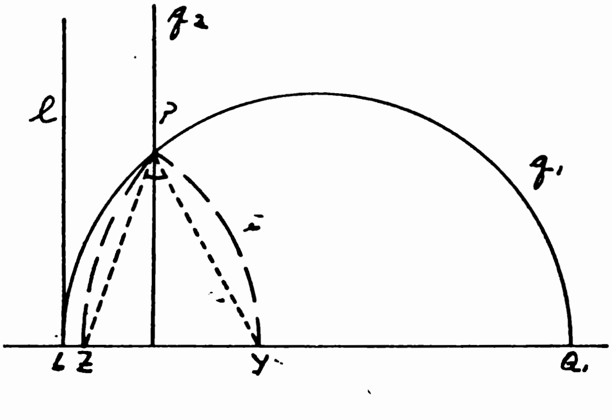
Sea Y un e-punto del e-segmento $Q_1 Q_2$.

Sea i la h-recta que pasa por Y y por P y sea Z el otro punto al infinito de i. Demostraremos que ZY contiene a L y así, i tiene que intersectar a l.

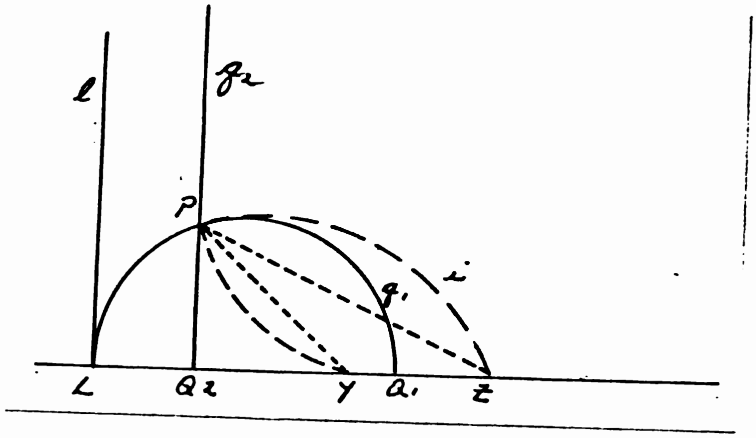
El e-ángulo YPZ es recto por estar inscrito en la e-semicircunferencia i.

Si Z coincide con L o L está fuera de ZY,

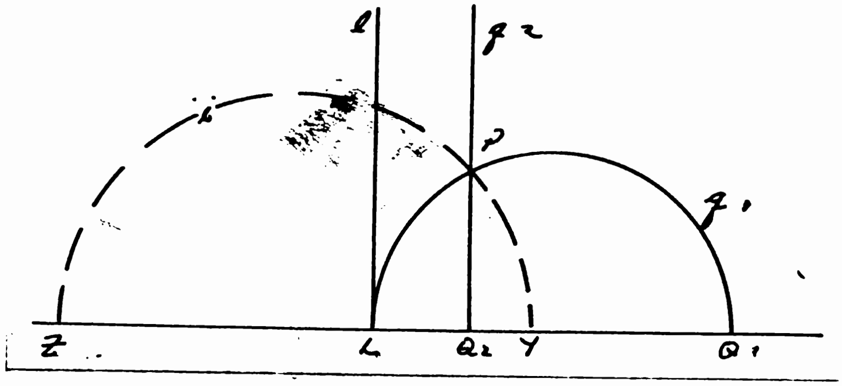
el e-ángulo YPZ sería agudo pues estaría contenido en el interior del e-ángulo LPQ, que es recto por estar inscrito en la e-semicircunferencia q_1.



si Z está a la derecha de L y a la derecha de Y, el e-ángulo YPZ también sería agudo (pues el e-ángulo PYZ del e-triángulo PYZ es obtuso por ser el complemento del e-ángulo PYQ_2 del e-triángulo (rectángulo PYQ_2).



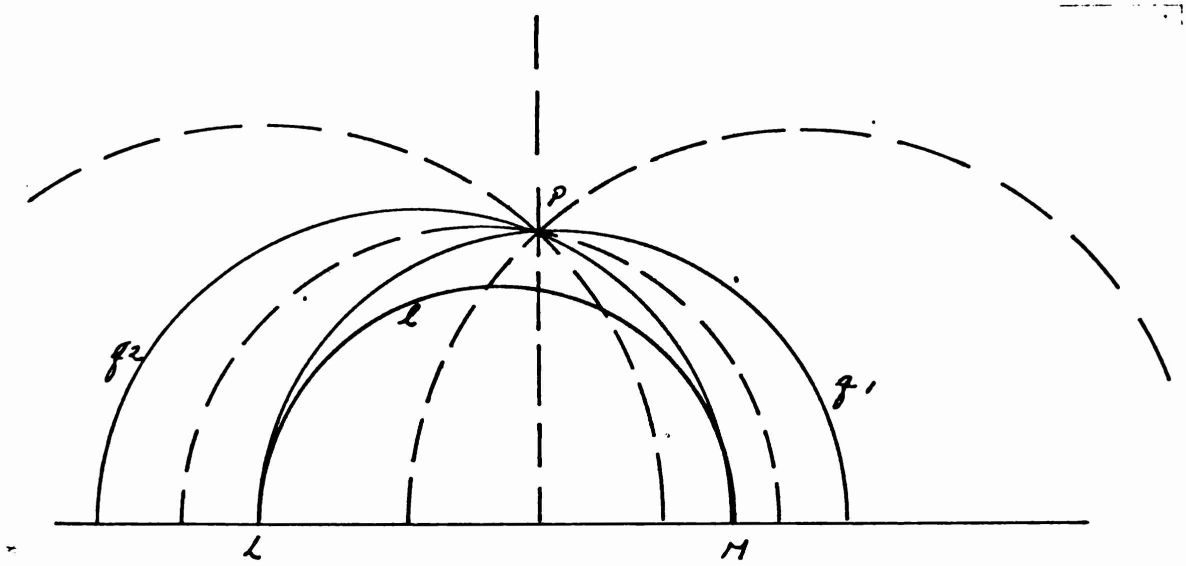
Así, Z no puede coincidir con L ni estar a la derecha de L, y Z está a la izquierda de L, por lo que i intersecta a l.



Hemos demostrado entonces que toda h-recta por P en el interior del h-ángulo Q_2PQ_1 y su opuesto por el vértice intersecta a l, y tenemos entonces el siguiente resultado:

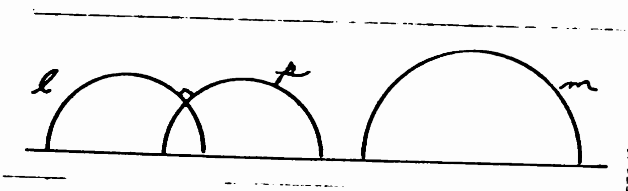
Teorema III.2 - Dada una h-recta l de puntos al infinito L y M, y un h-punto P fuera de ella, q_1, la h-recta paralela a l que pasa por L y P, y q_2, la h-recta paralela a l que pasa por M y P, son tales que todas las h-rectas por P en el interior de uno de los dos pares de h-ángulos opuestos por el vértice determinados por q_1 y q_2, son también paralelas a l por P; y todas las h-rectas por P en el interior del otro par de h-ángulos opuestos por el vértice determinados por q_1 y q_2, no son paralelas a l.

Diremos que q_1 y q_2 son las paralelas límite a l por P, ó las paralelas frontera a l por P; y a las demás h-rectas paralelas a l por P, las llamaremos h-paralelas a l por P.



III.2 Perpendicular común

En geometría euclidiana, dos e-rectas paralelas tienen una infinidad de e-perpendiculares comunes. De hecho, toda e-recta perpendicular a una de las dos e-paralelas, es perpendicular a la otra.



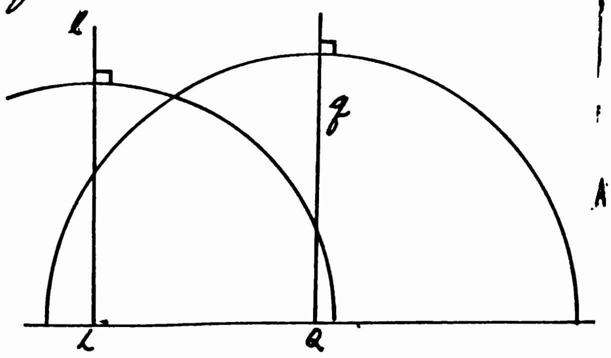
En geometría hiperbólica, dadas dos paralelas l y m y una h-recta p perpendicular a l, puede suceder que p ni siquiera intersecte a m.

Veamos entonces si las paralelas tienen o no una perpendicular común.

Teorema III.3.– Si l y q son dos paralelas frontera, no existe una h-recta perpendicular a ambas.

Sean l y q dos paralelas frontera.

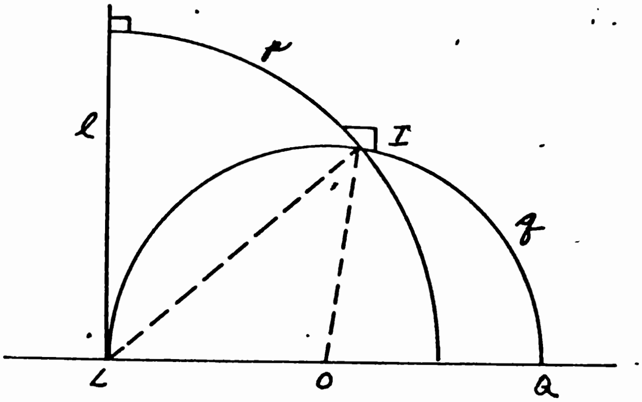
Si l y q son e-rayos de pies L y Q respectivamente, las únicas h-perpendiculares a l son las h-rectas semicircunferencias con centro en L (sección II.1), y las únicas h-rectas paralelas a q son las e-semicircunferencias con centro en Q.



Y como una e-semicircunferencia no puede tener dos e-centros, no puede existir una h-recta perpendicular tanto a l como a q.

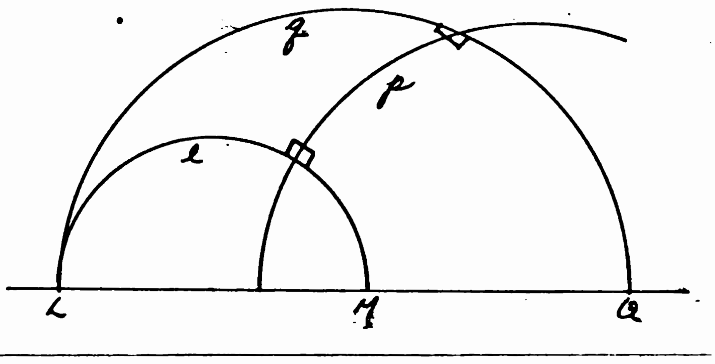
Si l es un e-rayo de pie L, y q una e-semicircunferencia de e-centro O y puntos al infinito L y Q, si existiera una h-recta p perpendicular tanto a l como y q.

p sería, a causa de la perpendicularidad con l, una e-semicircunferencia de e-centro L, y, a causa de la perpendicularidad con q, el e-ángulo OIL, donde I es la intersección de p y q, sería recto.



Pero el e-ángulo OIL no puede ser recto porque O está en el interior del e-ángulo QIL, que es recto, y así, no existe una h-recta perpendicular a l y a q.

Si l es una e-semicircunferencia de puntos al infinito L y M, y q es una e-semicircunferencia de puntos al infinito L y Q, para demostrar que no existe una h-recta perpendicular a ambas, basta observar que si existiera una h-recta p con éstas características, la inversión con respecto a p transformaría a l en sí misma globalmente, y por lo tanto, al e-punto L en el e-punto M, y como también transformaría a q en sí misma globalmente, transformaría a L en Q, pero un punto no puede tener dos inversos, y así, no existe una h-recta perpendicular a l y a q.

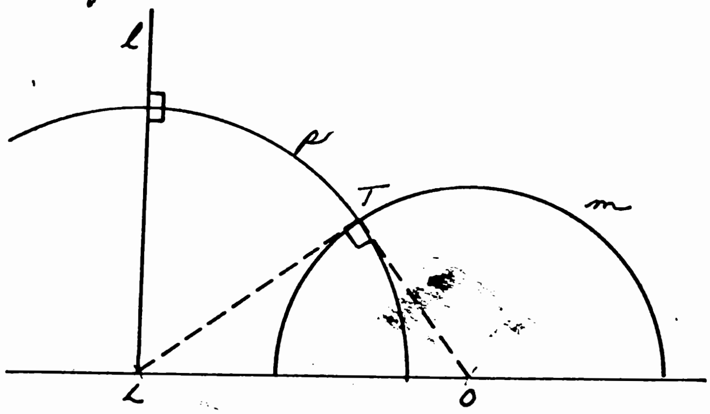


Una vez demostrado que las paralelas frontera no tienen perpendicular común, demostraremos lo siguiente:

Teorema III.4.- Si l y m son dos h-paralelas, l y m sí tienen una perpendicular común.

Consideraremos únicamente el caso en que una de las h-rectas es e-rayo y la otra e-semicircunferencia, pues, en el caso en que ambas son e-semicircunferencias, podemos aplicar una inversión que transforme a una de ellas en e-rayo.

Sea l una h-recta e-rayo de pie L y sea m una h-recta e-semicircunferencia de centro O y h-paralela a l.

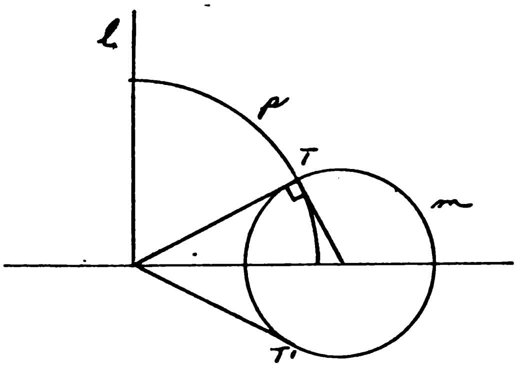


Sea T el h-punto donde la e-tangente a m desde L intersecta a m, y sea p la e-semicircunferencia de e-centro L y e-radio LT.

Como p tiene centro en L, p es perpendicular a l; y como el ángulo LTO es recto (pues LT es la tangente a m en T), p es perpendicular a m.

Así, p es una h-recta perpendicular tanto a l como a m.

Además, p es la única L-recta perpendicular tanto a ℓ como a m, pues, de todas las e-semicircunferencias con centro en L, la única que tiene la propiedad de ser perpendicular a m, es la L e-semicircunferencia p tal que el e-ángulo LTO es recto, donde T es la intersección de p y m.



Y para que este e-ángulo sea recto, es necesario que LT sea la e-tangente a m desde L, que es única. (De hecho, hay dos e-tangentes desde L al e-círculo m, pero la otra lo intersecta en un e-punto T' que no pertenece al L-plano.

Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema III.5.- Si ℓ y m son dos L-paralelas, tienen una única perpendicular común.

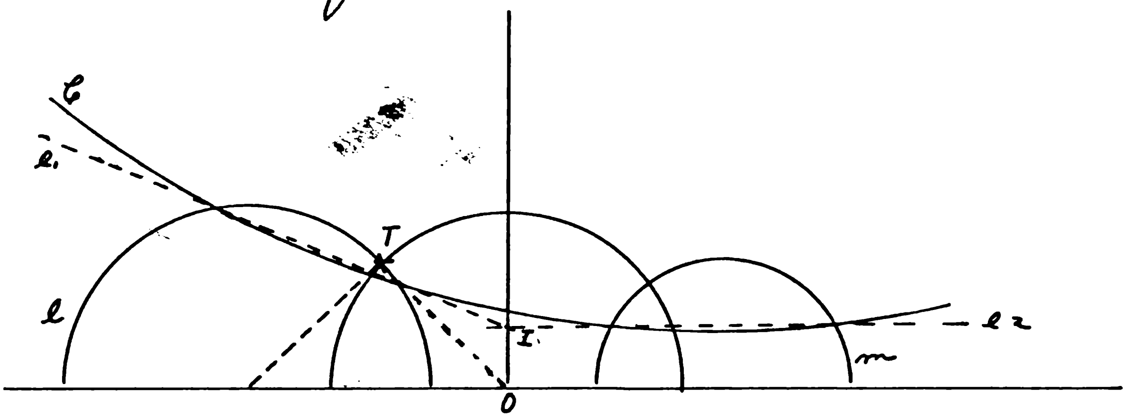
Podríamos resumir los resultados de esta sección diciendo que: dos L-rectas paralelas tienen, a lo más, una perpendicular común. Si las L-rectas son L-paralelas, sí tienen tal perpendicular; si son paralelas frontera, no la tienen.

Antes de seguir adelante, veremos cómo trazar la perpendicular común de dos h-paralelas e-semicircunferencias.

Sean l y m dos h-paralelas e-semicircunferencias.

Trazar una e-circunferencia $\mathcal{C}$ que intersecte, en dos puntos, tanto a l como a m.
Trazar la e-recta e_1 que pasa por los dos puntos donde $\mathcal{C}$ intersecta a l.
Trazar la e-recta e_2 que pasa por los dos puntos donde $\mathcal{C}$ intersecta a l.
Llamar I al punto de intersección de e_1 y e_2.

Trazar la e-recta por I perpendicular al eje x y llamar O a la intersección de esta e-recta con el eje x.
Trazar la e-tangente a l desde O y llamar T al punto de tangencia.



La h-recta de e-centro O y e-radio OT, resulta ser una h-recta perpendicular a l, y, por tener centro en el eje radical de l y m (ver [7]), es también perpendicular a m.

III.3 Distancia entre paralelas.

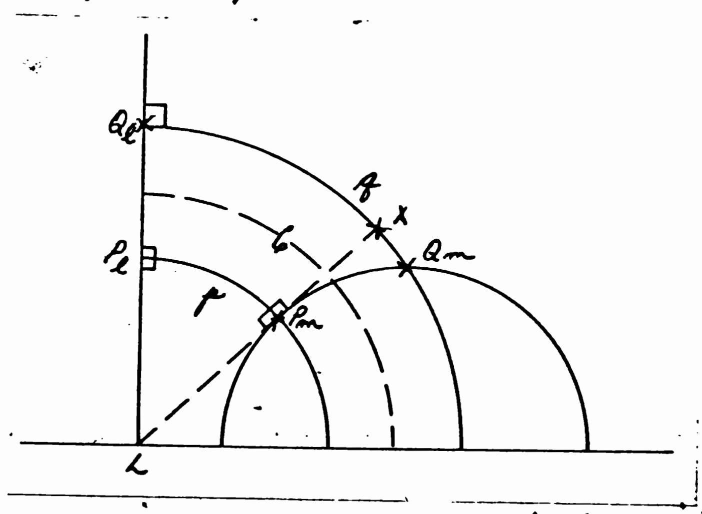
En la sección II.3 definimos la distancia de un h-punto P a una h-recta l como la h-longitud del h-segmento PP', donde P' era el pie de la h-perpendicular a l desde P.

A continuación demostraremos que si l es una h-recta y m es una h-recta paralela a l, los h-puntos de m no h-equidistan de l.

III.3.1 Distancia entre h-paralelas.

Teorema III.6.- Si l y m son dos h-paralelas, p su perpendicular común y P_m la intersección de p y m, para todo h-punto Q_m en m distinto de P_m, la h-distancia de Q_m a l es mayor que la de P_m a l.

Sean l y m dos h-paralelas. Supondremos que l es un e-rayo. Sea p la perpendicular común de l y m y sean P_ℓ y P_m los puntos de intersección de p y l y p y m. Sea Q_m un punto en m distinto de P_m.



Sea 6 la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, p se transforma en q. 6 es una e-semicircunferencia con centro en L (sección II. Sea f_6 la inversión con respecto a 6. Al aplicar f_6, P_ℓ se transforma en Q_ℓ y P_m en el h-punto X donde la e-recta que pasa por L y P_m intersecta a q.

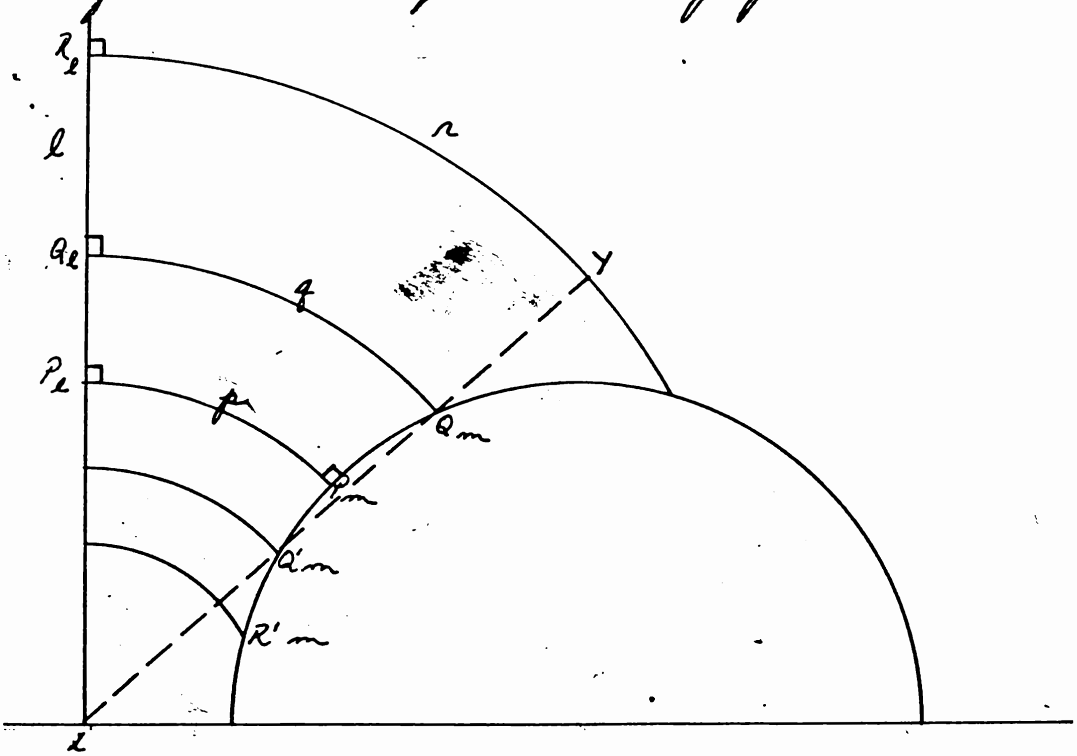
Tenemos entonces un h-punto X en m tal que $d_{Q_\ell}^{X} = d_{P_\ell}^{P_m}$

Como p es h-perpendicular a m, la e-recta LP_m es tangente a m y así, el h-punto X no puede estar sobre m por lo que X es distinto de Q_m y entonces $d_{Q_\ell}^{Q_m} \neq d_{Q_\ell}^{X}$, de donde $d_{Q_\ell}^{Q_m} \neq d_{P_\ell}^{P_m}$.

Además, debido también a que la e-recta LP_m es e-tangente a m, el h-punto X no puede estar dentro de la e-semicircunferencia m, por lo que la h-longitud de $\overline{Q_m Q_\ell}$ no sólo es distinta que la de $\overline{XQ_\ell}$, sino que es mayor, y así $d^{Q_m} > d^{P_m}$

Observemos que, si tomamos un h-punto R_m en m, del mismo lado de P_m que Q_m, y más lejos de P_m que Q_m, la h-distancia de R_m a l es mayor que la de Q_m a l, ya que si trazamos la h-perpendicular r desde R_m a l y llamamos R_l al pie de esta h-perpendicular, la inversión con respecto a la h-recta que transforma a q en r, transforma al h-segmento $Q_m Q_l$ en un h-segmento YR_l menor que el h-segmento $R_m R_l$, por lo que tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema III.7. Si l y m son dos X-paralelas y X es un h-punto en m, la h-distancia de X a l es mínima cuando X está sobre la perpendicular común y va aumentando a medida que X se aleja de la perpendicular común.

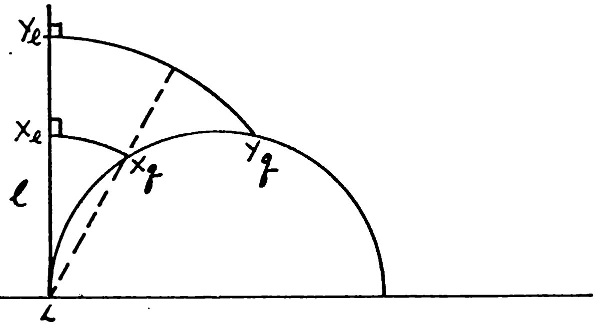


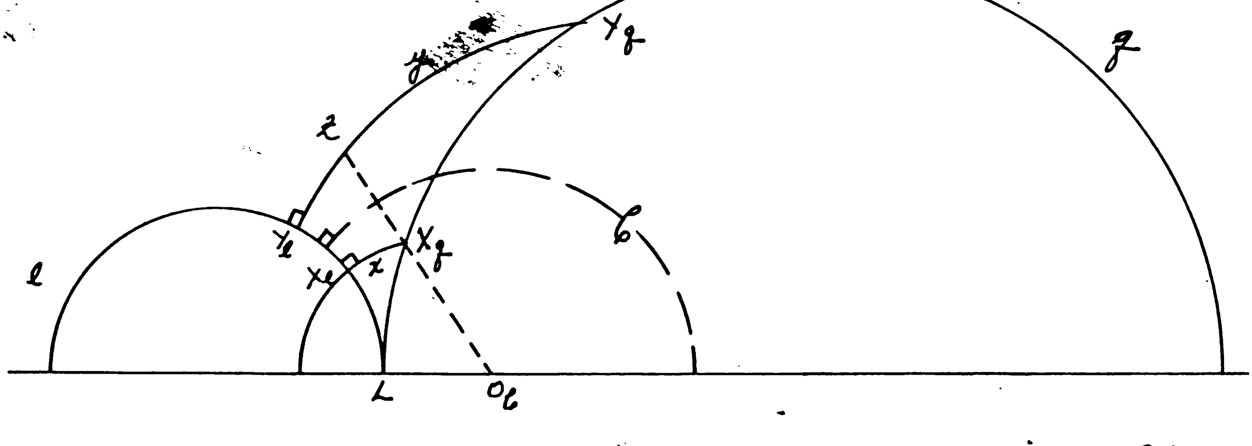
(En realidad, sólo hemos demostrado que esto sucede para los h-puntos X que están de un mismo lado de la perpendicular común, pero invirtiendo con respecto a p, la perpendicular común, demostramos que del otro lado sucede lo mismo. En la figura, Q_m', el inverso de Q_m con respecto a p, está a la misma distancia de l que Q_m; y R'_m, el inverso de R_m con respecto a p, está a la misma h-distancia de l que R_m.)

III.3.2. Distancia entre paralelas frontera.

Teorema III.8.- Si l y q son dos paralelas frontera, y X y Y dos h-puntos distintos sobre q, la h-distancia de X a l es distinta de la h-distancia de Y a l.

Sean l y q dos paralelas frontera que se intersectan en un punto al infinito L sobre el eje x. Sean X_q y Y_q dos h-puntos distintos sobre q; sean x y y las h-perpendiculares a l desde X_q y Y_q respectivamente, y sean X_l y Y_l los pies de estas h-perpendiculares.





Si X_q está entre L y Y_q, observamos, procediendo como en la demostración anterior, que la inversión que transforma a x en y transforma al h-segmento X_qX_l en un h-segmento ZY_l cuya h-longitud es menor que la del h-segmento Y_qY_l, por lo que $d_{X_l}^{X_q} < d_{Y_l}^{Y_q}$, y así, la h-distancia de X_q a l es menor que la de Y_q a l.

Tenemos entonces que la h-distancia entre paralelas límite crece a medida que nos alejamos del punto al infinito en donde se intersectan estas paralelas.
Se llama dirección de paralelismo ~~al~~ a la dirección en la cual la h-distancia entre dos paralelas límite decrece

Capítulo IV

h-triángulos

Este capítulo estará dedicado al estudio de h-triángulos.

En la primera sección (IV.1 Suma de ángulos de un h-triángulo) demostraremos que en todo h-triángulo la suma de ángulos interiores es estrictamente menor que 180°, y que la suma de ángulos interiores de los h-triángulos no es la misma para todos los h-triángulos.

En la sección IV.2 (h-congruencia de h-triángulos), mencionaremos que todos los teoremas de geometría euclidiana sobre congruencia de triángulos son válidos también en geometría hiperbólica, pero que en geometría hiperbólica tenemos también que dos h-triángulos cuyos ángulos son h-congruentes, son h-congruentes y por lo tanto, en geometría hiperbólica no existen los triángulos semejantes propiamente dichos. Demostraremos también que todos los h-triángulos 3-asintóticos son h-congruentes.

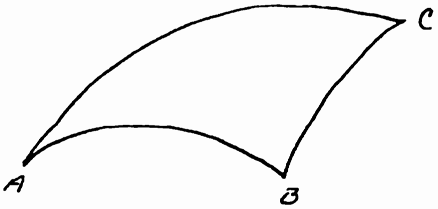
En la sección IV.3 (Teorema de Pitágoras) exhibiremos un h-triángulo rectángulo en el que el cuadrado de la hipotenusa es mayor que la suma de los cuadrados de los catetos, para demostrar que el Teorema de Pitágoras no es válido en geometría hiperbólica.

Posteriormente, en la sección IV.4 (h-bisectrices, h-mediatrices y h-alturas de un h-triángulo), analizaremos si, al igual que en geometría euclidiana, estas rectas concurren. Demostraremos que las tres h-bisectrices se intersectan en un h-punto en el interior del h-triángulo y que este h-punto resulta ser el h-centro del h-círculo inscrito en el h-triángulo. Con respecto a las h-mediatrices demostraremos que si dos h-mediatrices se intersectan en un h-punto, la tercera h-mediatriz pasa también por ese h-punto; que si dos h-mediatrices de un h-triángulo son paralelas frontera, la tercera es paralela frontera a ambas por el mismo punto al infinito, y que si dos h-mediatrices son h-paralelas la tercera es h-paralela a ambas y además, las 3 h-mediatrices tienen una perpendicular común, y en ese sentido puede decirse que pertenecen a la misma familia de paralelas.

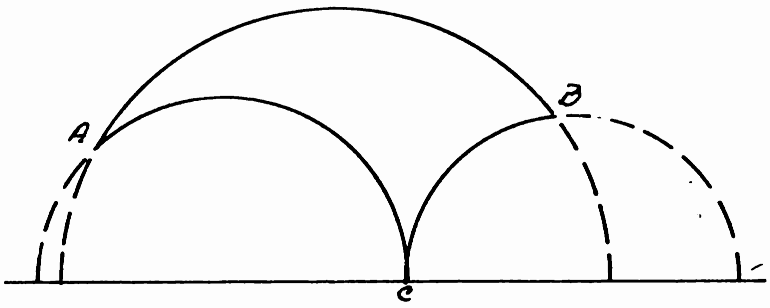
Cuando hablemos de k-alturas demostraremos que si dos k-alturas se intersectan en un k-punto la tercera k-altura pasa también por ese k-punto. Mencionaremos que, al igual que en el caso de las k-mediatrices, si dos k-alturas se intersectan en un punto al infinito, la tercera altura pasa también por ese punto, y que si las tres alturas son k-paralelas, existe una k-recta perpendicular a las tres.

IV h- triángulos

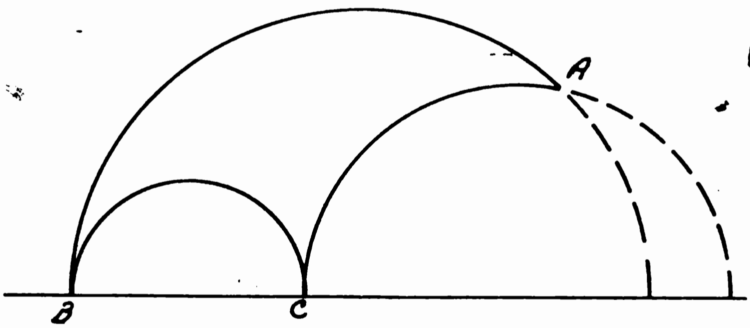
Tres h-puntos ABC determinan un h-triángulo ABC. Los vértices del h-triángulo son los puntos A, B y C; los lados del h-triángulo son los h-segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, y los ángulos de ABC son los h-ángulos CAB, ABC y BCA.



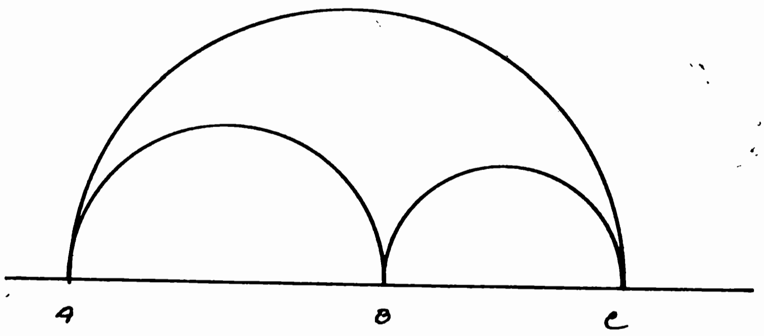
Si A y B son dos h-puntos y C un e-punto sobre el eje x, diremos que ABC es un h-triángulo 1-asintótico cuyos lados son el h-segmento AB y los h-rayos AB y BC



Si A es un h-punto y B y C dos e-puntos sobre el eje x diremos que ABC es un h-triángulo 2-asintótico.



Si ABC son tres puntos en el eje x, diremos que ABC es un h-triángulo 3-asintótico.



IV.1 Suma de ángulos de un h-triángulo.

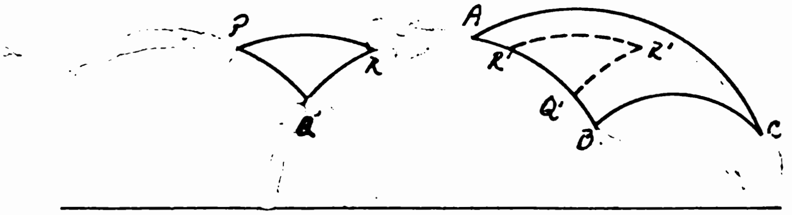
Teorema IV.1 En todo h-triángulo la suma de ángulos interiores es menor que 180°.

En la sección I.3 de la primera parte de este trabajo, definimos el defecto δ de un triángulo ABC como $\delta = 180° - (A+B+C)$. Demostramos que δ siempre es mayor o igual que cero y que $\delta(ABC)$ es igual a la suma de los defectos de los subtriángulos del triángulo ABC. Para demostrar esto, utilizamos resultados que no dependen del postulado de las paralelas por lo que podemos aplicar este resultado también a los h-triángulos.

Así, para demostrar que todo h-triángulo tiene suma de ángulos menor que 180°, es decir, para demostrar que todo h-triángulo tiene defecto positivo, basta demostrar que todo h-triángulo contiene un h-subtriángulo con defecto positivo.

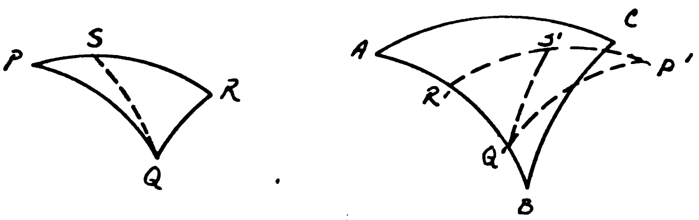
Sea ABC un h-triángulo arbitrario y sea PQR un h-triángulo con defecto positivo (los h-triángulos con defecto positivo existen, exhibimos uno en la sección II.2.2 de la primera parte.

Si al aplicarle a PQR una h-isometría que mande el lado PQ sobre el lado AB, su imagen, P'Q'R' es un h-subtriángulo de ABC, tenemos que ABC tiene defecto positivo pues contiene un h-subtriángulo (P'Q'R') con defecto positivo.



Si $P'Q'R'$ no está en el interior de ABC, dividimos a PQR en dos subtriángulos SPQ y SQR. Al menos uno de ellos, digamos SQR, tiene defecto positivo.

Si $S'Q'R'$, la imagen de SQR, está en el interior de ABC, ABC tiene un h-subtriángulo con defecto positivo y por lo tanto tiene defecto positivo.

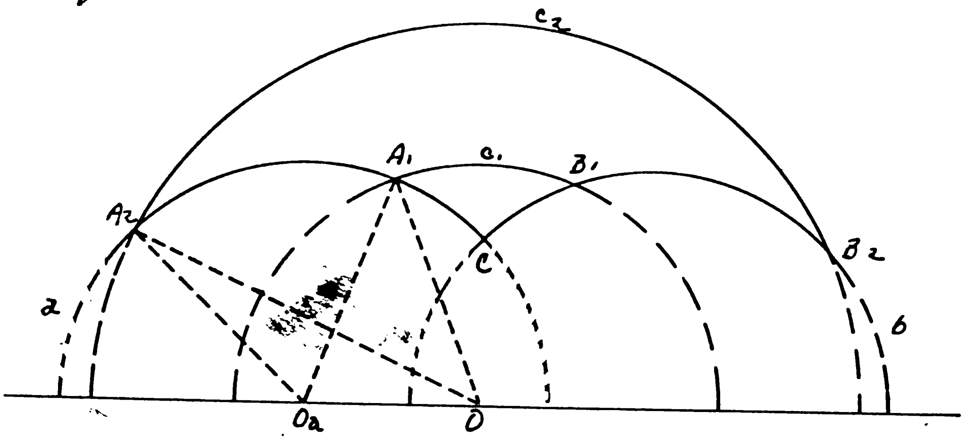


Si $S'Q'R'$ no está en el interior de ABC, repetimos el proceso tantas veces como sea necesario hasta obtener un h-triángulo T h-subtriángulo de PQR y tal que su imagen, T', sea h-subtriángulo de ABC.

Teorema IV.2 - No todos los h-triángulos tienen la misma suma de ángulos.

Sean a y b dos h-rectas e-semicircunferencias que se intersectan en un h-punto C y cuyo e-radio es el mismo. Sea O el pie de la e-perpendicular al eje x desde C y sea c_1 una h-recta con centro en O y cuyo e-radio es el mismo que el de a y b. Sean A_1 y B_1 los h-puntos donde c_1 intersecta a a y a b respectivamente.

Sea c_2 una h-recta con centro en O y cuyo e-radio es mayor que el e-radio de c_1, y sean A_2 y B_2 los h-puntos donde c_2 intersecta a a y a b respectivamente.



Es posible demostrar que el e-ángulo OA_1O_a, donde O_a es el centro de a, es mayor que el e-ángulo OA_2O_a y, por lo tanto, el h-ángulo B_1A_1C es mayor que el h-ángulo B_2A_2C. Análogamente, el h-ángulo A_1B_1C es mayor que el h-ángulo A_2B_2C y así, la suma de los ángulos interiores del h-triángulo A_1B_1C es mayor que la de los ángulos interiores del h-triángulo A_2B_2C.

En general, es posible demostrar que a medida que crecen los lados de un h-triángulo, disminuye la suma de sus ángulos.

IV.2 h-congruencia de h-triángulos

De acuerdo con nuestra definición de h-congruencia, dos h-triángulos son h-congruentes si y sólo si existe una h-isometría que transforma a uno en otro.

Los siguientes teoremas de geometría euclidiana sobre congruencia de triángulos son independientes del postulado de las paralelas (ver [8]) y por lo tanto válidos en geometría hiperbólica:

Si dos triángulos son congruentes, tienen sus ángulos respectivamente congruentes.

Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo formado por ellos respectivamente congruentes, son congruentes.

Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado adyacente a ellos respectivamente congruentes, son congruentes.

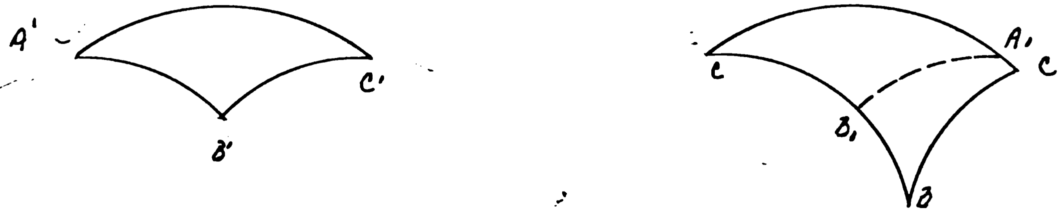
Pero en geometría hiperbólica tenemos también el siguiente resultado:

Teorema IV.3.- Si dos h-triángulos tienen sus ángulos respectivamente h-congruentes, son h-congruentes.

Para demostrar este teorema, tomaremos dos h-triángulos ABC y $A'B'C'$ tales que $\measuredangle ABC =_h \measuredangle A'B'C'$; $\measuredangle BCA =_h \measuredangle B'C'A'$ y $\measuredangle CAB =_h \measuredangle C'A'B'$, y supondremos que un par de lados correspondientes, digamos AB y $A'B'$, no son h-congruentes, con lo que llegaremos a una contradicción.

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que el lado AB es mayor que el lado A'B'. Entonces el lado AC es mayor que el lado A'C' (esto es un resultado de geometría euclidiana que no depende del postulado de las paralelas (ver [9]).

Existen por lo tanto un h-punto B_1 en el interior del h-segmento AB y un h-punto C_1 en interior del h-segmento AC tales que el h-triángulo AB_1C_1 es h-congruente con el h-triángulo A'B'C'.



Como los ángulos de ABC son h-congruentes con los de A'B'C', $\delta(ABC) = \delta(A'B'C')$. Y como $A'B'C' =_h A_1B_1C$, $\delta(A'B'C') = \delta(A_1B_1C)$.

Así, $\delta(ABC) = \delta(A_1B_1C)$ es decir, el h-triángulo ABC y su h-subtriángulo A_1B_1C tienen el mismo defecto δ.

Pero esto es imposible, pues al trazar la h-recta B_1C, obtenemos otros dos h-subtriángulos CB_1B y A_1B_1C cuyos defectos son δ_1 y δ_2 respectivamente. Y como el defecto de un h-triángulo es igual a la suma de los defectos de sus h-subtriángulos, tenemos que $\delta = \delta + \delta_1 + \delta_2$, lo cual es imposible pues δ_1 y δ_2 son estrictamente positivos.

Cuando hablamos de los intentos de demostración del postulado de las paralelas, analizamos uno, el de Wallis, que se basa en la existencia de triángulos semejantes. El teorema que acabamos de demostrar nos dice, que en geometría hiperbólica no existen los triángulos semejantes propiamente dichos.

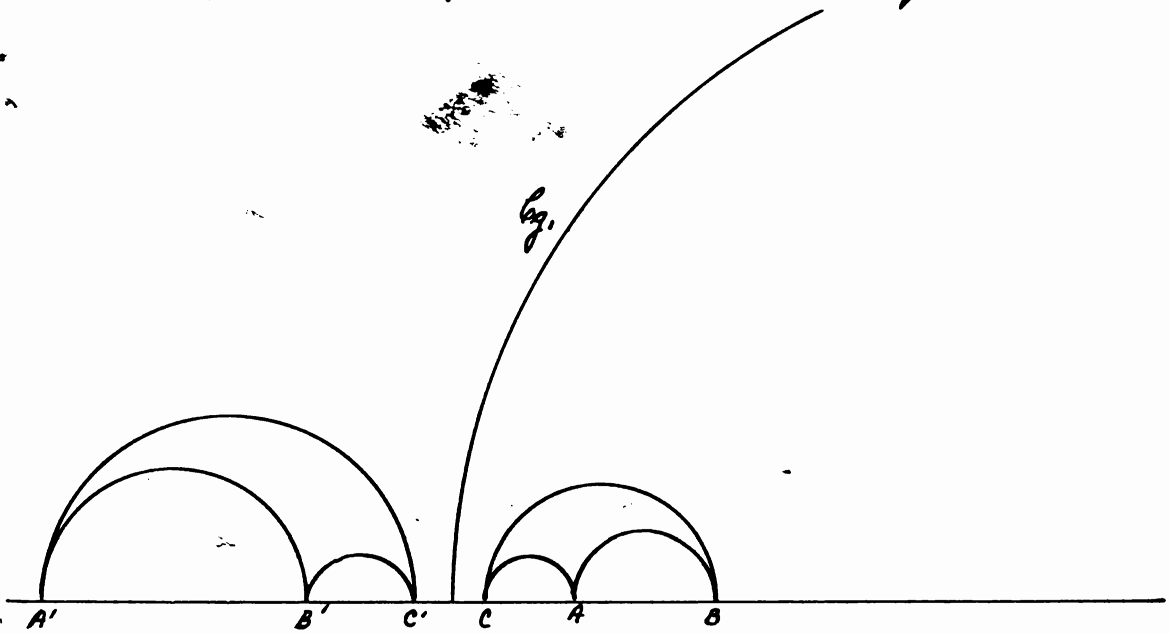
Teorema II.4 .- Todos los h-triángulos 3-asintóticos son h-congruentes.

Sean ABC y A'B'C' dos h-triángulos 3-asintóticos. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que A, B, C, A', B' y C' están en el orden que indica la figura.

Demostraremos que existe una h-isometría que transforma a ABC en A'B'C' y así, que los dos h-triángulos son h-congruentes.

Sea g_1 la inversión que transforma a la h-recta AB en la h-recta A'B' (construcción I.2.4). g_1 transforma a A en B', a B en A', y a C en un e-punto C'', donde C'', en general, no coincide con C'.

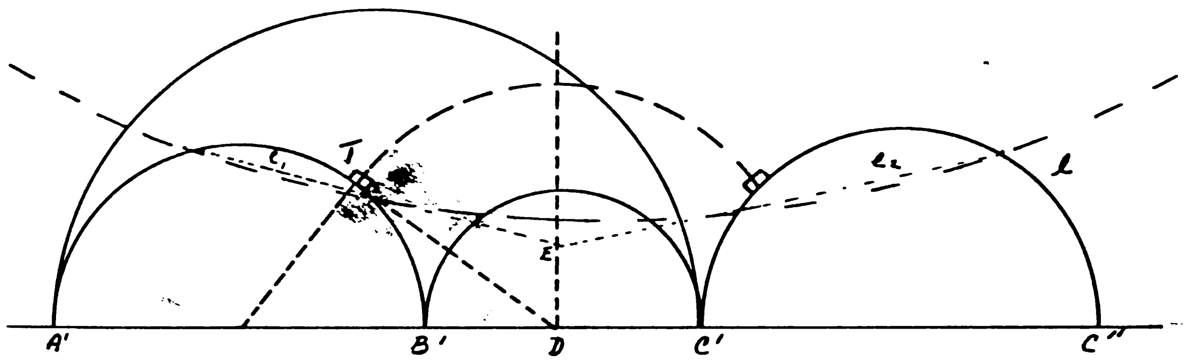
Si $C'' = C'$, g_1 transforma a ABC en el h-triángulo B'A'C', que es el mismo que A'B'C', por lo que ABC y A'B'C' son h-congruentes.



Si $C'' \neq C$, tracemos la h-recta l que pasa por C' y C'' y sea $\mathscr{D}$ una e-circunferencia que intersecta en dos h-puntos tanto a la h-recta $A'B'$ como a la h-recta $C'C''$.

Sea l_1 la e-recta que pasa por los h-puntos en donde $\mathscr{D}$ intersecta a $A'B'$ y sea l_2 la la e-recta que pasa por los dos h-puntos en donde $\mathscr{D}$ intersecta a $C'C''$. Sea E el punto de intersección de l_1 y l_2 y sea D el e-punto donde la e-recta perpendicular al eje x desde E intersecta al eje x. D está en el eje radical de las e-circunferencias $A'B'$ y $C'C''$ (ver [5]) y, por lo tanto, cualquier e-circunferencia con centro en D y ortogonal a $A'B'$ es ortogonal a $C'C''$.

Sea T el h-punto donde la e-tangente a $A'B'$ desde D intersecta a $A'B'$ y sea $\mathscr{C}$ la h-recta con centro en D y e-radio DT. Entonces $\mathscr{C}$ es h-perpendicular tanto a la h-recta $A'B'$ como a la h-recta $C'C''$.



Sea g_2 la inversión con respecto a $\mathscr{C}$.

g_2 transforma a la h-recta $A'B'$ en sí misma globalmente, por lo que $g_2(B') = A'$ y $g_2(A') = B'$.

y como g_2 también transforma a $C'C''$ en sí misma globalmente.

Tenemos entonces que

$$g_2 \circ g_1(A) = g_2(B') = A'$$
$$g_2 \circ g_1(B) = g_2(A') = B'$$
$$g_2 \circ g_1(C) = g_2(C'') = C'$$

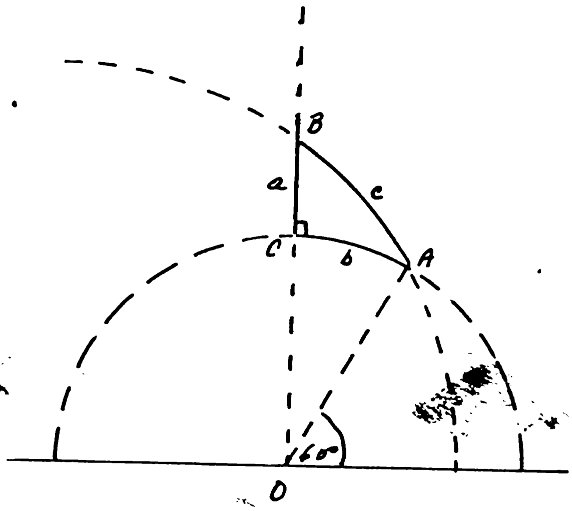
Es decir, la h-isometría $g = g_2 \circ g_1$ transforma al h-triángulo 3-asintótico ABC en el h-triángulo 3-asintótico $A'B'C'$ y por lo tanto ABC y $A'B'C'$ son h-congruentes.

IV.3 Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras no es válido en geometría hiperbólica. Es posible demostrar que en geometría hiperbólica el cuadrado de la hipotenusa siempre es estrictamente mayor que la suma del cuadrado de los catetos. Demostraremos únicamente lo siguiente:

Teorema IV.5.- Existen h-triángulos rectángulos tales que el cuadrado de la hipotenusa es mayor que la suma de los cuadrados de los catetos.

Para demostrar este teorema, lo que haremos será exhibir un h-triángulo rectángulo con esta propiedad.

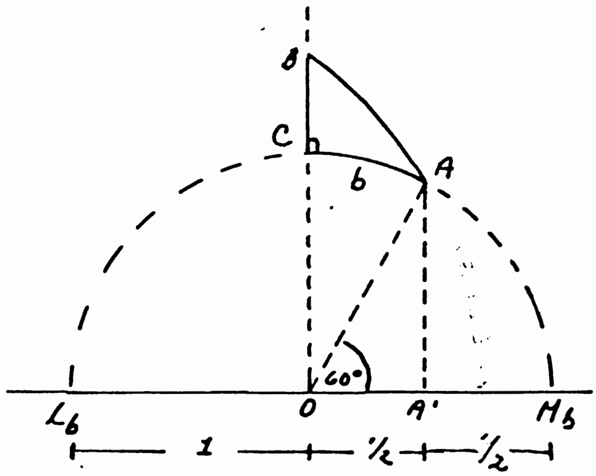


Tracemos una h-recta e-rayo a y llamemos O a su pie. Tracemos la h-recta b de e-centro O y e-radio 1 y llamemos C a la intersección de a y b. Tracemos una e-recta por O que forme ángulo de $60°$ con el eje X y llamemos A al punto de intersección de esta e-recta y la h-recta b.

Con centro en L_b, el punto al infinito izquierdo de b, tracemos una h-recta c cuyo e-radio sea L_bA, y llamemos B al punto de intersección de c y a.

Tenemos así un h-triángulo ABC cuyo ángulo en C es recto. Calcularemos la h-longitud de la hipotenusa (c), y la de los catetos (a y b), para demostrar que $c^2 > a^2 + b^2$.

Cálculo del cateto b



El cateto b mide, por definición de h-distancia, $|\log\{C, A, M_b, L_b\}|$ donde L_b y M_b son los puntos al infinito de la h-recta CA y tales que C está entre A y L_b y A está entre C y M_b.

Lo primero que observamos es que
$\{C, A, M_b, L_b\} = \{C', A', M_b', L_b'\}$

donde C' y A' son, respectivamente las e-proyecciones de C y A sobre el eje x (ver [7.3]). En este caso, C' es O, el pie del e-rayo a.

Así estamos interesados en la razón cruzada

$$\{O, A'; M_b, L_b\} = \frac{OM_b}{M_bA'} \Big/ \frac{OL_b}{L_bA'}$$

OL_b y OM_b son, por construcción, -1 y 1 respectivament
$L_bA' = L_bO + OA'$ donde $L_bO = 1$ y OA' es $1/2$ pues el e-triángulo $OA'A$ es rectángulo, de hipotenusa 1 y con ángulo $AOA' = 60°$.

Así, $L_bA' = 1 + 1/2 = 3/2$. Finalmente,

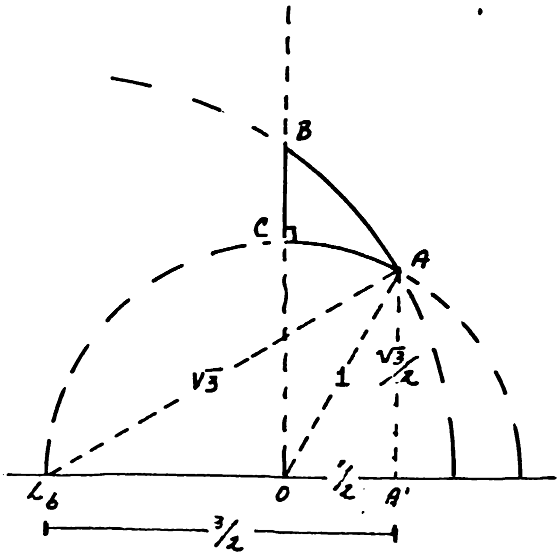
$M_bA' = M_bO - A'O = (-1) - (-1/2) = -1/2$

Sustituyendo estos valores en la razón cruzada tenemos que

$$\{O, A'; M_b, L_b\} = \frac{1}{-1/2} \Big/ \frac{-1}{3/2} = 3.$$

Por lo que el cateto b mide $|\log 3| = 3$

Cálculo del cateto a



El cateto a mide, por definición de h-distancia, $\left|\log\left(OB/OC\right)\right|$.

Donde OC mide, por construcción, 1; y OB mide $\sqrt{2}$, pues como el e-triángulo rectángulo AOA' tiene hipotenusa 1 y cateto $OA' = 1/2$, el tercer cateto mide $\sqrt{3}/2$.

Así, el e-triángulo rectángulo $L_bA'A$ tiene catetos $L_bA' = 3/2$ y $A'A = \sqrt{3}/2$, por lo que su hipotenusa, L_bA, mide $\sqrt{3}$.

Pero esta hipotenusa es el e-radio de la h-recta c, por lo que la e-distancia de L_b a B es también $\sqrt{3}$

Aplicando Pitágoras al e-triángulo BL_bO, de hipotenusa $= \sqrt{3}$ y cateto $L_bO = 1$, tenemos que el otro cateto, OB, es $\sqrt{2}$

Así, el cateto b del h-triángulo ABC mide

$$\left|\log \frac{OB}{OC}\right| = \left|\log \frac{\sqrt{2}}{1}\right| = \log \sqrt{2}$$

Cálculo de la hipotenusa.

La ~~l-~~ longitud de la hipotenusa, c, es:

$|\log\{C, A, M_c, L_c\}$ donde M_c y L_c son los puntos al infinito de AC tales que C está entre A y L_c y A entre C y M_c.

$\{C, A, M_c, L_c\} = \{0, A', M_c, L_c\}$ donde A' es ~~el~~ la proyección de A sobre el eje X.

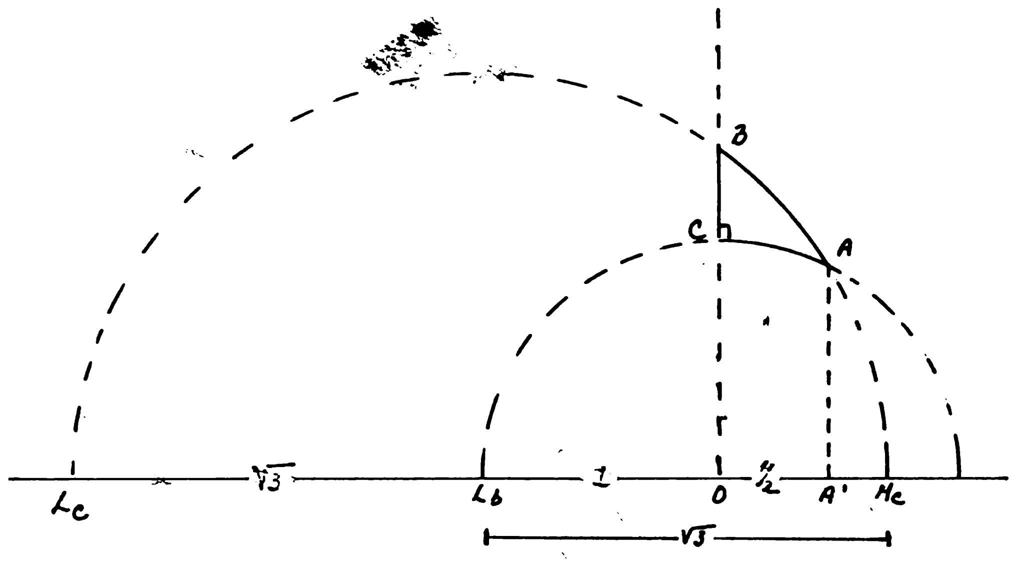
$$\{0, A'; M_c, L_c\} = \frac{OM_c}{M_cA'} \Big/ \frac{OL_c}{L_cA'}$$

$$OM_c = L_bM_c - L_bO = \sqrt{3} - 1 = -1 + \sqrt{3}$$

$$M_cA' = M_cL_b - A'L_b = -\sqrt{3} - (-3/2) = (3/2) - \sqrt{3}$$

$$OL_c = OL_b + L_bL_c = -1 - \sqrt{3}$$

$$L_cA' = L_cO + OA' = (1 + \sqrt{3}) + 1/2 = (3/2) + \sqrt{3}$$



Sustituyendo estos valores en la razón cruzada, tenemos

$$\{0, A'; M_c, L_c\} = \frac{-1+\sqrt{3}}{\frac{3}{2} - \sqrt{3}} \Big/ \frac{-1-\sqrt{3}}{\frac{3}{2} + \sqrt{3}} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{3 - 2\sqrt{3}} \Big/ \frac{-2-2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} =$$

$$\frac{(2\sqrt{3} - 2)(2\sqrt{3} + 3)}{(-2\sqrt{3} - 2)(-2\sqrt{3} + 3} = \frac{4(3) + 1(2\sqrt{3}) - 6}{4(3) + 1(-2\sqrt{3}) - 6} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6 - 2\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} =$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right) = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$

por lo que $c = |\log 2 + \sqrt{3}| = \log 2 + \sqrt{3}$.

Tenemos entonces que:

$a = \log \sqrt{2}$ $\qquad$ $b = \log 3$ $\qquad$ $c = \log 2 + \sqrt{3}$

de donde

$a = \log \sqrt{2} \approx \log 1.4142 < \log 1.42 \approx .1523 < .153$

$b = \log 3 \approx .47712 < .478$

$c = \log 2 + \sqrt{3} \approx \log 2 + 1.7320 > \log 3.731 \approx .57185 > .570$

y por lo tanto

$a^2 < .023409$ $\qquad$ $b^2 < .228484$ $\qquad$ $c^2 > .3249$

Así,

$c^2 > .3249 > .023409 + .228484 > a^2 + b^2$.

Es decir, $c^2 > a^2 + b^2$.

IV.4 h-bisectrices, h-mediatrices y h-alturas de un h-triángulo

IV.4.1 h-bisectrices de un h-triángulo

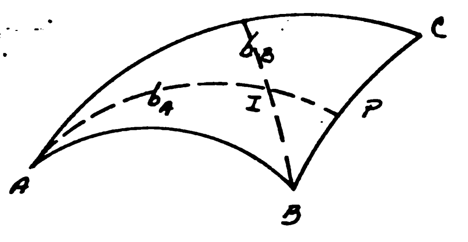
Teorema IV.6 Dos h-bisectrices interiores de un h-triángulo siempre se intersectan en un punto en el interior del h-triángulo.

El que toda recta por el vértice de un triángulo intersecte al lado opuesto al vértice, es un resultado de geometría euclidiana que no depende del postulado de las paralelas (Euclides lo demo utilizaba sin haberlo demostrado y Hilbert lo obtiene como una consecuencia del axioma III.5 (ver [4])).

Así, si ABC es un h-triángulo y b_A la h-bisectriz interior del h-ángulo en A, b_A intersecta al lado BC en un h-punto P.

b_B, la h-bisectriz en B, es una h-recta por el vértice en B del h-triángulo ABP, por lo que intersecta al lado AP, es decir, a b_A, en un h-punto I.

I está en el interior del h-triángulo ABC pues el h-segmento AP está en el interior del h-triángulo ABC.

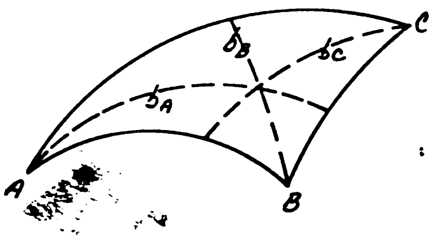


Teorema IV.7 Si I es el h-punto de intersección de dos h-bisectrices interiores de un h-triángulo, la tercera h-bisectriz pasa por I.

Sea ABC un h-triángulo, b_A y b_B las h-bisectrices interiores de ABC por A y por B respectivamente, y sea I el h-punto de intersección de b_A y b_B.

Como I está sobre b_A, la h-distancia de I al lado AB es la misma que la h-distancia de I al lado AC ($d^I_{AB} = d^I_{AC}$).

Análogamente, como I está sobre b_B, $d^I_{BC} = d^I_{BA}$, y así, $d^I_{AC} = d^I_{BC}$, por lo que I está sobre la h-bisectriz de AC y BC. (b_C).



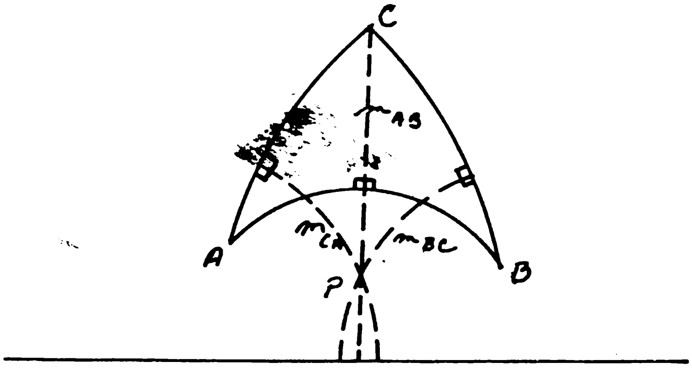
Tenemos además que si P_a, P_b y P_c son los pies de las h-perpendiculares a los lados del h-triángulo desde I, $d^I_{P_a} = d^I_{P_b} = d^I_{P_c}$; y, por lo tanto P_a, P_b y P_c están sobre el h-círculo de h-centro I y h-radio IP_a.

IV. 4.2 h-mediatrices de un h-triángulo

Teorema IV.8 Las tres h-mediatrices de un h-triángulo concurren (en un h-punto o en un h-punto al infinito) o son h-paralelas.

Demostraremos primero que si en un h-triángulo dos h-mediatrices se intersectan (en un h-punto o en un punto al infinito), la tercera h-mediatriz pasa por el punto de intersección de las dos primeras, y que si en un h-triángulo dos h-mediatrices son h-paralelas, la tercera h-mediatriz es h-paralela a ambas. Una vez hecho esto, exhibiremos h-triángulos tales que sus h-mediatrices concurren, y un h-triángulo tal que sus h-mediatrices son h-paralelas.

Sea ABC un h-triángulo tal que dos de sus h-mediatrices, m_{AB} y m_{BC}, se intersectan en un h-punto P, y sea m_{AC} la tercera h-mediatriz.

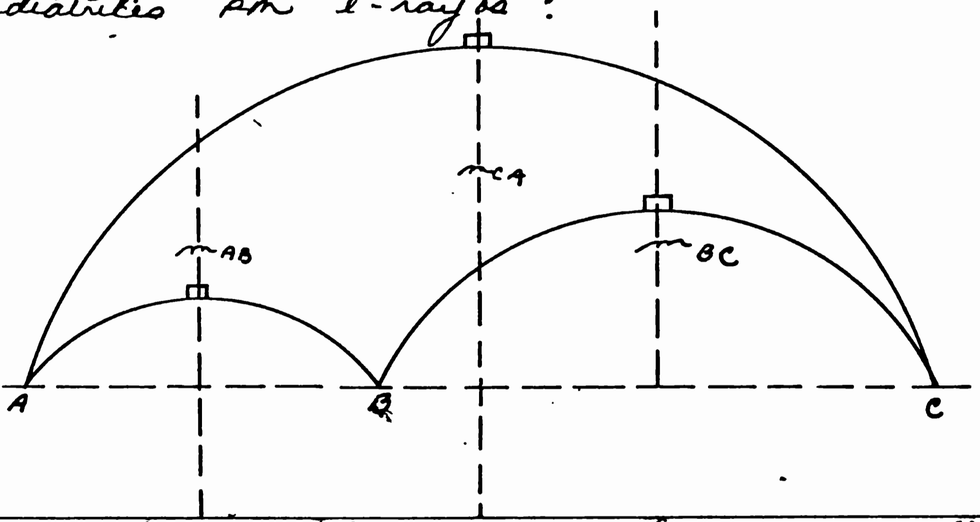


Como P está en m_{AB}, $d_A^P = d_B^P$;

como P está en m_{BC}, $d_B^P = d_C^P$.

y así, $d_A^P = d_C^P$, es decir, P está sobre m_{AC}.

Sea ABC un h-triángulo tal que dos de sus h-mediatrices m_{AB} y m_{BC} se intersectan en un punto al infinito. Supondremos que m_{AB} y m_{BC} son h-rectas, pues en caso de no serlo, aplicamos una inversión con centro en el e-punto de intersección de las h-mediatrices y transformamos al h-triángulo ABC en un h-triángulo A'B'C' tal que dos de sus h-mediatrices son e-rayos.



Como al invertir con respecto a m_{AB}, que es e-rayo, A se transforma en B y viceversa, la e-recta AB es perpendicular a m_{AB} y por lo tanto paralela al eje X.

Análogamente, la e-recta BC es también paralela al eje X.

Como la e-paralela a una e-recta por un punto es única, la e-recta AB es la misma que la e-recta BC y así A y C son dos h-puntos tales que la e-recta que los une es paralela al eje X, por lo que la h-mediatriz del h-segmento AC es un e-rayo (el e-rayo cuyo pie es el e-centro de la h-recta AC).

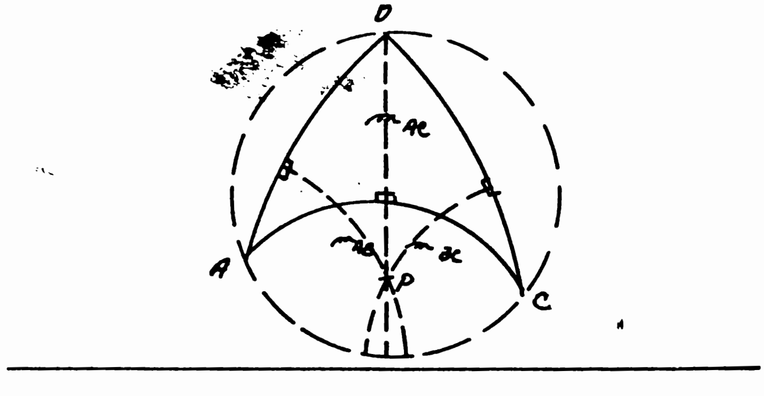
Si ABC es un h-triángulo tal que dos de sus h-mediatrices, m_{AB} y m_{BC}, son h-paralelas, la tercera h-mediatriz, m_{AC}, es h-paralela tanto a m_{AB} como a m_{BC}, pues si m_{AC} intersecta, digamos a m_{AB}, m_{BC} tendría que pasar por el punto de intersección de m_{AB} y m_{AC}, con lo que m_{AB} y m_{BC} no serían h-paralelas.

A continuación exhibiremos un h-triángulo tal que sus h-mediatrices concurren en un h-punto.

Sea $\mathcal{C}$ un h-círculo de h-centro O y sean A, B y C tres h-puntos sobre $\mathcal{C}$. A, B y C no son h-colineales —pues el que una recta y un círculo tengan a lo más dos puntos en común, es un resultado que no depende del postulado de las paralelas (ver [8])— y, por lo tanto, determinan un h-triángulo ABC.

Como O, el h-centro de $\mathcal{C}$, h-equidista de A y B, O está sobre m_{AB}, la h-mediatriz de AB. Análogamente, O está sobre sobre m_{BC}, la h-mediatriz de BC, y sobre m_{CA}, la h-mediatriz de CA.

Así, las tres h-mediatrices del h-triángulo ABC se intersectan en el h-punto O.



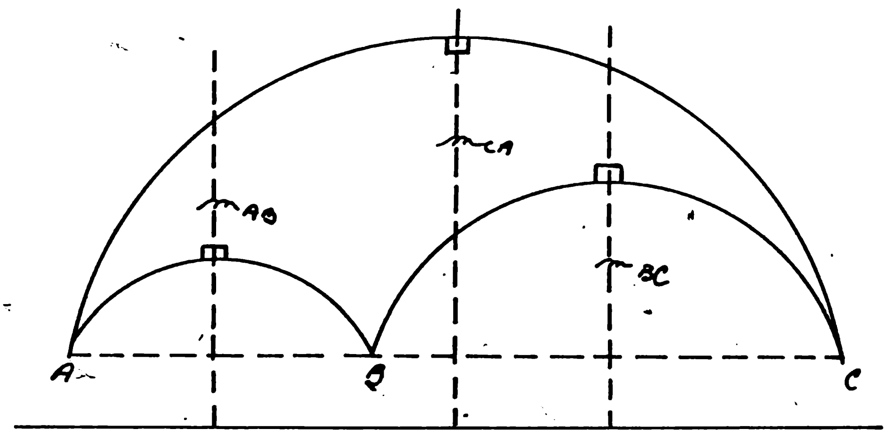
Ahora exhibiremos un h-triángulo cuyas tres h-mediatrices se intersectan en un punto al infinito.

Sean A, B y C tres h-puntos e-colineales y tales que la e-recta que los contiene es paralela al eje X.

Como A, B y C son e-colineales, no existe un e-círculo que pase por ellos y por lo tanto no existe una h-recta que pase por ellos, por lo que determinan un h-triángulo ABC.

m_{AB}, la h-mediatriz de $\overline{AB}$, es la h-recta e-rayo que pasa por el e-punto medio del e-segmento AB. Análogamente, m_{BC} es la h-recta e-rayo que pasa por el e-punto medio del e-segmento BC, y m_{CA} es la h-recta e-rayo por el e-punto medio del e-segmento CA.

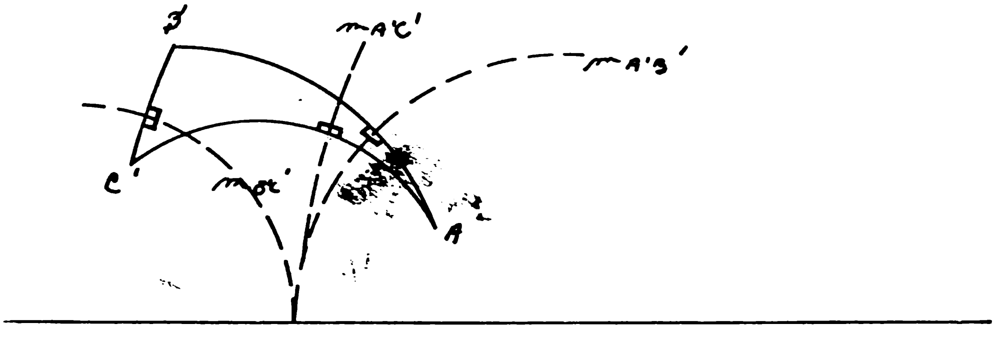
Así, ABC es un h-triángulo tal que sus tres h-mediatrices son h-rectas e-rayo y, por lo tanto, pasan por el mismo punto al infinito.



Observemos que al invertir un h-triángulo ABC tal que sus tres h-mediatrices m_{AB}, m_{BC} y m_{CA} sean e-rayos, con respecto a una h-recta e-semicircunferencia cuyo e-centro O, no coincida con los pies de las h-mediatrices, m_{AB}, m_{BC} y m_{CA}, que son e-semirectas que no pasan por O, se transforman en e-semicircunferencias que pasan por O, $m_{A'B'}$, $m_{B'C'}$ y $m_{C'A'}$.

Y como la inversión preserva ángulos y h-distancia, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ y $\overline{C'A'}$, las inversas de los h-segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, son tales que $m_{A'B'}$ es la h-mediatriz de $\overline{A'B'}$; $m_{B'C'}$ es la h-mediatriz de $B'C'$ y $m_{C'A'}$ es la h-mediatriz de $C'A'$.

Así, $A'B'C'$ es un h-triángulo tal que sus tres h-mediatrices se intersectan en un punto al infinito O sobre el eje X.



Finalmente, exhibiremos un h-triángulo ABC tal que sus tres h-mediatrices son h-paralelas.

Sean A, B y C tres h-puntos e-colineales y tales que la e-recta que los contiene no es un e-rayo e intersecta al eje x en un e-punto O.

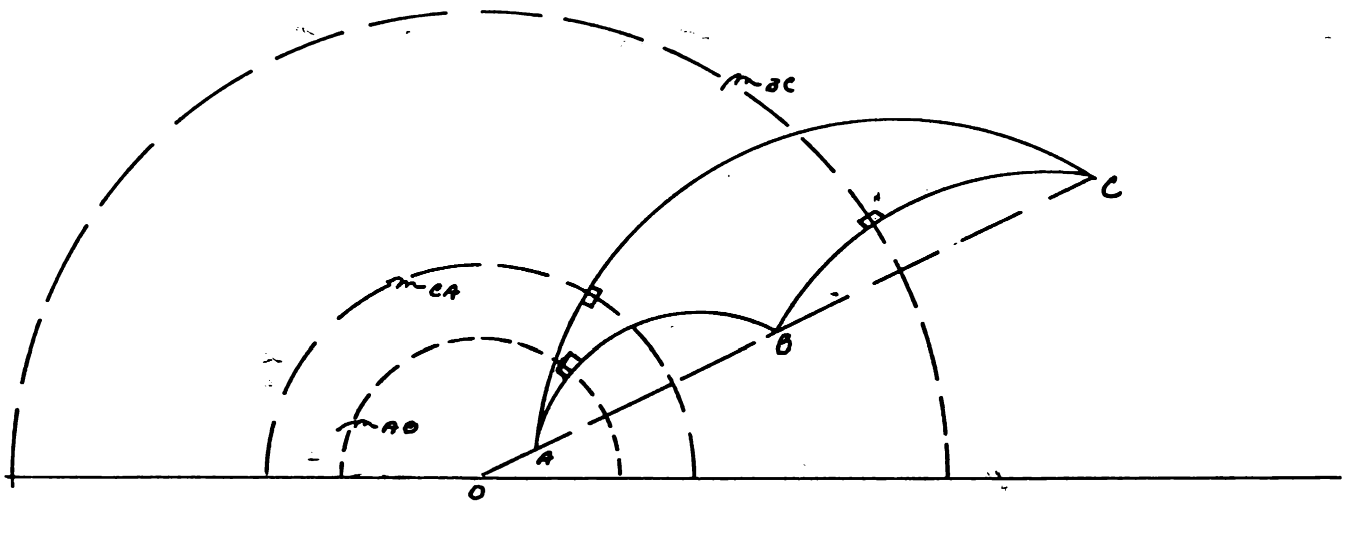
Como A, B y C son ~~h~~e-colineales, no son h-colineales y por lo tanto determinan un h-triángulo ABC.

Sea l la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, A y B son mutuamente inversos. l tiene centro en O y l es la h-mediatriz de $\overline{AB}$. $(m$

Análogamente, la h-mediatriz de $\overline{BC}$ (m_{BC}) es la h-recta tal que al invertir con respecto a ella, B y C son mutuamente inversos, por lo que m_{BC} tiene centro en O.

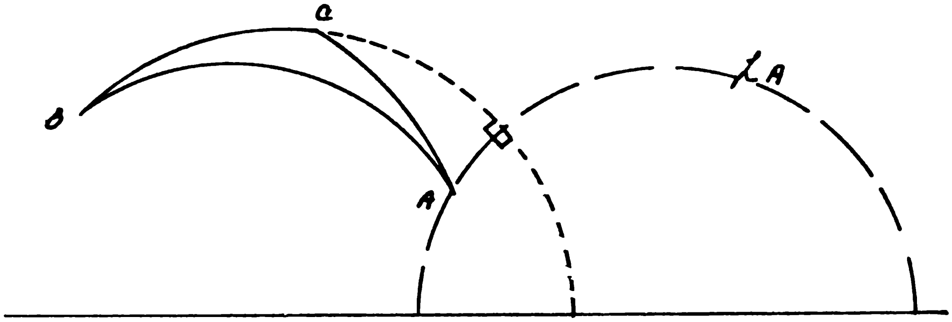
Por la misma razón, el centro de m_{CA} es también O.

Tenemos entonces que las tres h-mediatrices de ABC son e-semicircunferencias concéntricas y por lo tanto h-paralelas.

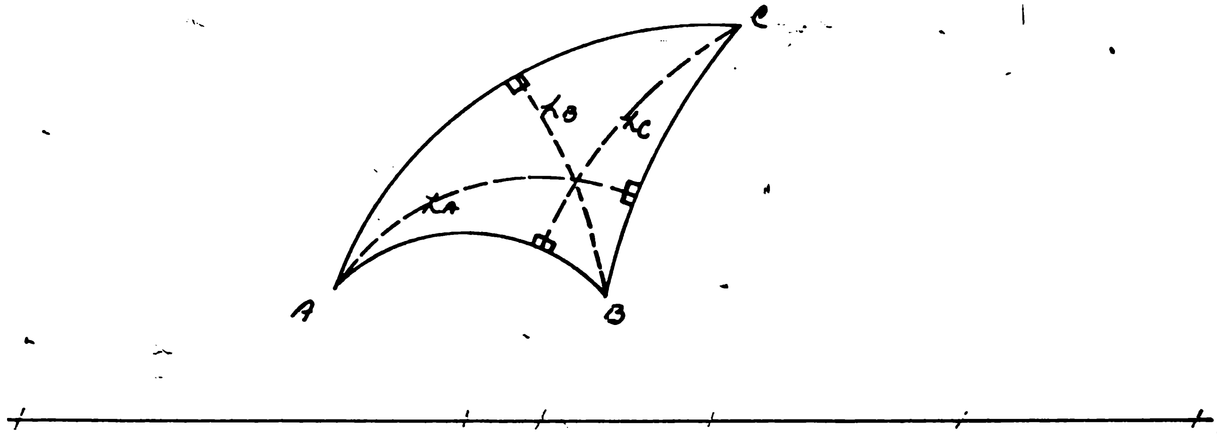


IV. 4.3 h-alturas de un h-triángulo

Sea ABC un h-triángulo. La h-altura en A de ABC (h_A), es la h-recta perpendicular a la h-recta BC desde A.



Análogamente, h_B y h_C son las h-perpendiculares desde B y desde C a los lados CA y AB respectivamente.



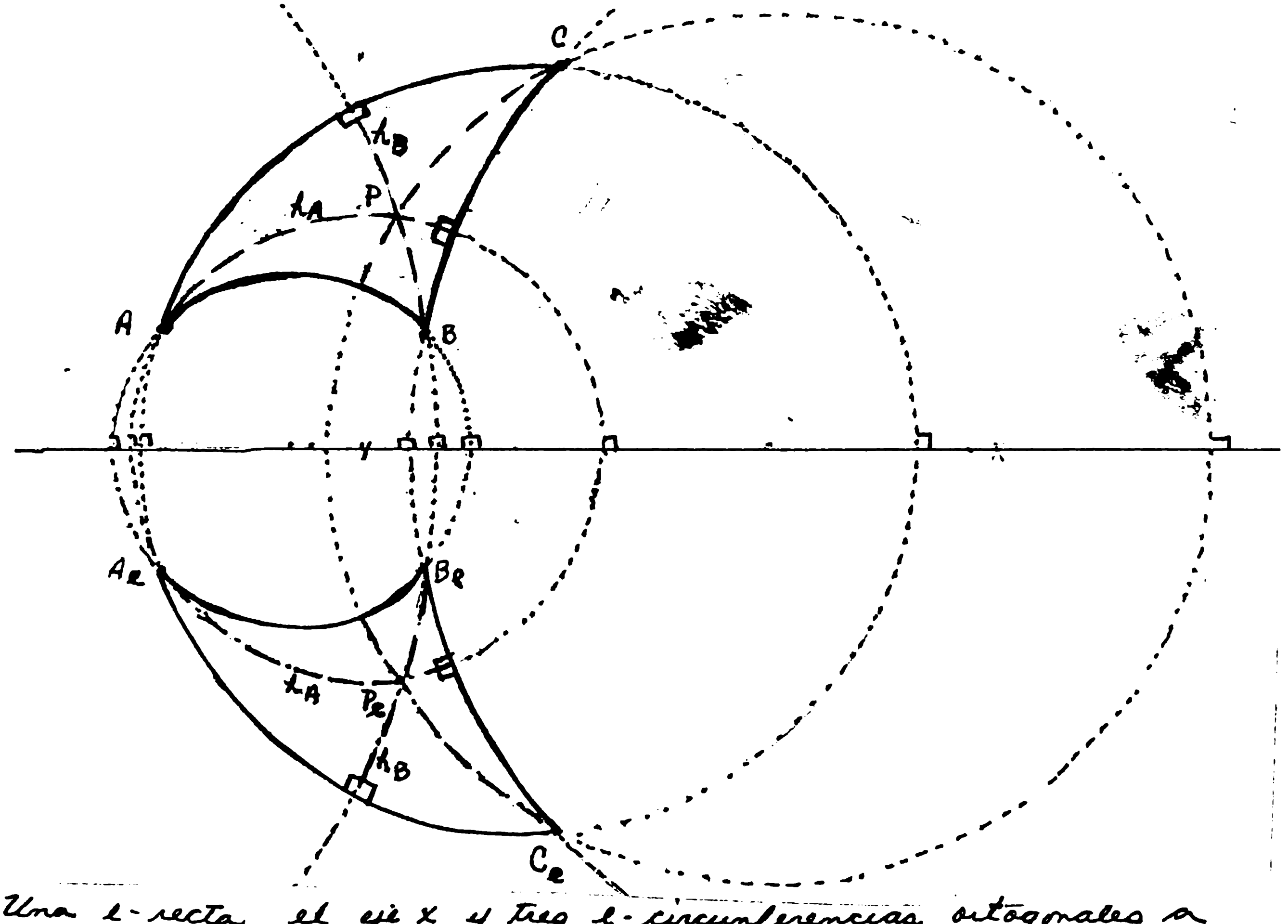
Teorema II.9 Las tres h-alturas de un h-triángulo concurren (en un h-punto o en un punto al infinito), o son h-paralelas.

Al igual que en el caso de las h-mediatrices, demostraremos primero que si en un h-triángulo dos h-alturas se intersectan, la tercera h-altura pasa por el punto de intersección de las dos primeras, y que si dos h-alturas son h-paralelas, la tercera es h-paralela a ambas. Una vez hecho esto, exhibiremos h-triángulos tales que sus h-alturas concurren y un h-triángulo tal que ~~dos~~ sus h-alturas son h-paralelas.

Sea ABC un h-triángulo tal que dos de sus h-alturas, h_A y h_B, se intersectan en un h-punto P. Sea l la h-recta que pasa por C y por P. Demostraremos que l es la h-altura h_C; es decir, demostraremos que l es h-perpendicular a AB, y con esto quedará demostrado que la tercera h-altura pasa por P.

Para ello tomaremos en cuenta que el h-plano es un e-semiplano y haremos una e-inversión del e-plano en sí mismo, para demostrar que en la figura invertida C'P', el inverso de la h-recta CP, es perpendicular a A'B', el inverso de la h-recta AB.

Consideraremos entonces que nuestras h-rectas son parte de e-circunferencias en el e-plano, y tenemos la siguiente situación:

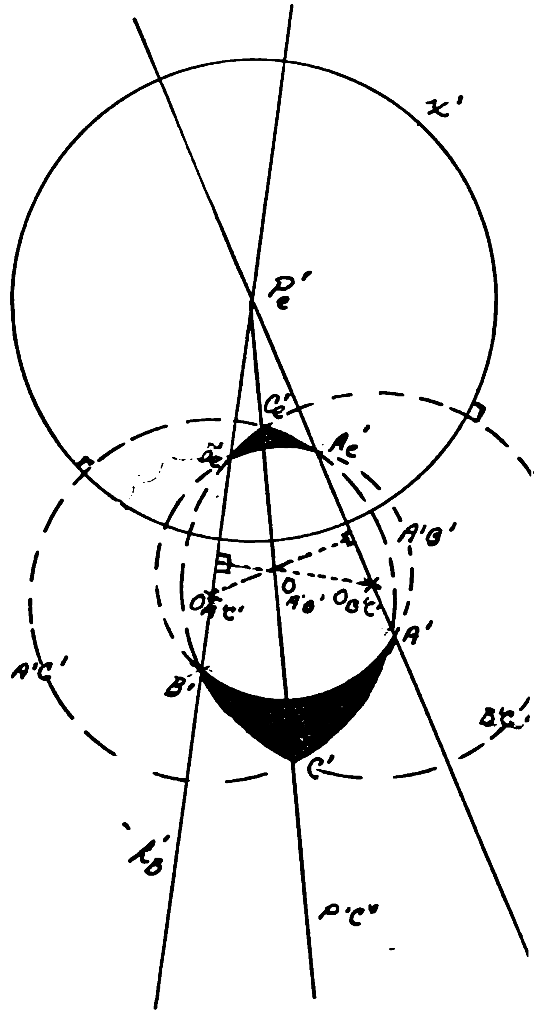


Una e-recta, el eje X, y tres e-circunferencias ortogonales a ella: AB, BC y CA, tales que AB y BC se intersectan en los puntos B y B_e; BC y CA se intersectan en C y C_e, y CA y AB en A y A_e.

Tenemos además otras tres e-circunferencias ortogonales al eje X: h_A, h_B y CP, y tales que h_A pasa por A, A_e, P y P_e y es ortogonal a BC; h_B pasa por B, B_e, P y P_e y es ortogonal a AC, y CP pasa por C, P, C_e y P_e.

Para demostrar que la e-circunferencia CP es ortogonal a la e-circunferencia AB, haremos una e-inversión con respecto a una e-circunferencia con centro en P.

Al aplicar f, el eje x se transforma en una circunferencia x'; ℓ_A, que pasa por P y es ortogonal a x, se transforma en un diámetro de x' (ℓ'_A). Lo mismo sucede con ℓ_B. ℓ'_A y ℓ'_B se intersectan en el centro de x', que es P'_e, el inverso de P_e.



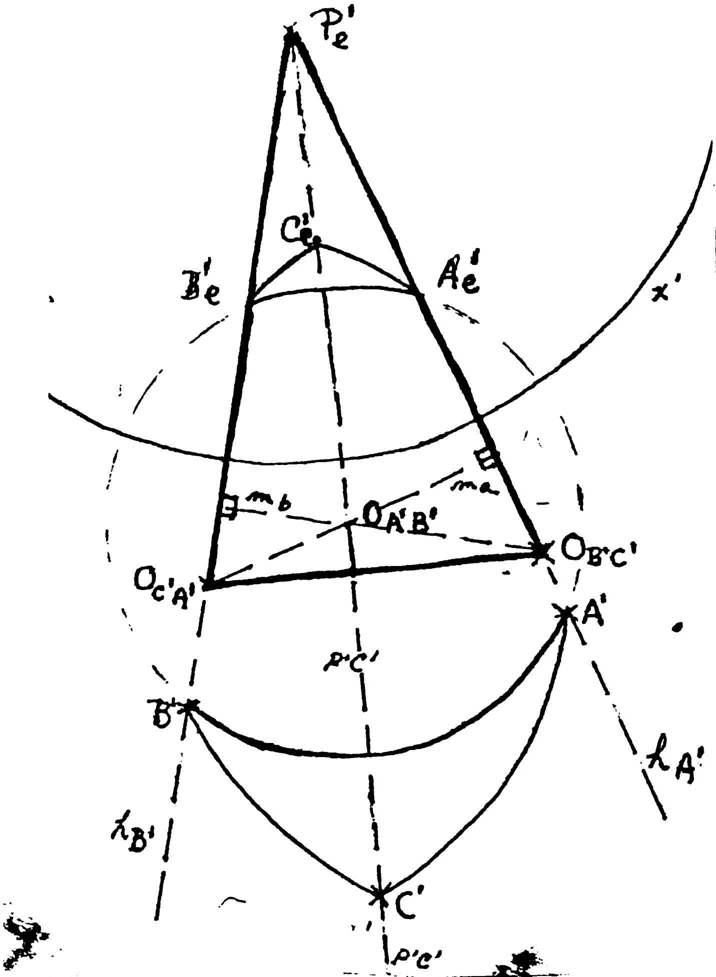
BC, que es ortogonal al eje x y a ℓ_A, se transforma en una circunferencia $B'C'$ ortogonal a x' y cuyo centro ($O_{B'C'}$) está sobre ℓ'_A. Además, $B'C'$ intersecta a ℓ'_B en dos puntos B' y B'_e que son los inversos de B y B_e.

Análogamente, $C'A'$, el inverso de CA, es una circunferencia cuyo centro ($O_{C'A'}$) está en ℓ'_B, y que es ortogonal a x' e intersecta a ℓ'_A en A' y A'_e.

Además, $C'A'$ y $B'C'$ se intersectan en C' y C'_e, los inversos de C y C_e.

$A'B'$, el inverso de AB, es la circunferencia que pasa por A', B', B'_e y B'_e. Para encontrarla, podemos trazar las mediatrices de los segmentos $B'B'_e$ y $A'A'_e$, y el punto donde se intersectan es $O_{A'B'}$, el centro de $A'B'$. Finalmente, $C'P'$, el inverso de CP, es la recta que pasa por P'_e, C' y C'_e.

Demostraremos ahora que $C'P'$ es perpendicular a $A'B'$; es decir demostraremos que $C'P'$ pasa por $O_{A'B'}$, el centro de $A'B'$.



Para demostrar que $P'C'$ pasa por $O_{A'B'}$ haremos lo siguiente:

Fijémonos en el e-triángulo $P_e' O_{C'A'} O_{B'C'}$ y en m_b y m_a, las mediatrices de los segmentos $B'B_e'$ y $A'A_e'$ que usamos para encontrar $O_{A'B'}$, el centro de $A'B'$.

Como B' y B_e' están sobre la circunferencia $B'C'$, m_b pasa por $O_{B'C'}$, el centro de $B'C'$. Además, como m_b es perpendicular a $P_e' O_{C'A'}$, m_b resulta ser la altura en $O_{B'C'}$ del triángulo $P_e' O_{C'A'} O_{B'C'}$.

Análogamente, m_a pasa por $O_{C'A'}$ y es perpendicular a $P_e' O_{B'C'}$, por lo que m_a es la altura en $O_{C'A'}$ del triángulo $P_e' O_{C'A'} O_{B'C'}$.

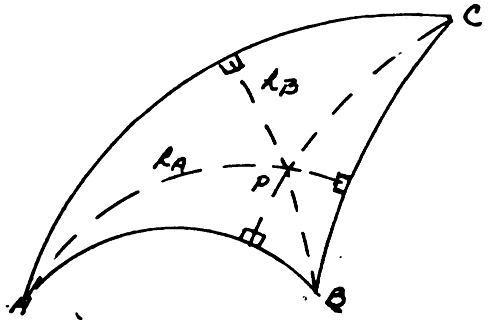
Tenemos entonces que m_a y m_b son dos alturas del e-triángulo $P_e' O_{C'A'} O_{B'C'}$ que se intersectan en $O_{A'B'}$. Y como en geometría euclidiana las tres alturas de un triángulo pasan por un mismo punto, la tercera altura tiene que pasar por $O_{A'B'}$. Demostraremos que la recta $P'C'$ es la tercera altura y con esto que pasa por $O_{A'B'}$.

$P'C'$ pasa por P_e', por lo que lo único que hay que demostrar para convencernos de que $P'C'$ es la tercera altura, es que $P'C'$ es perpendicular a $O_{C'A'} O_{B'C'}$.

Para ello basta observar que $P'C'$ pasa por C' y C_e', los puntos de intersección de las circunferencias $B'C'$ y $C'A'$, por lo que es perpendicular a la línea de sus centros; es decir $P'C'$ es perpendicular a $O_{C'A'} O_{B'C'}$ y por lo tanto es la tercera altura, por lo que tiene que pasar por $O_{A'B'}$.

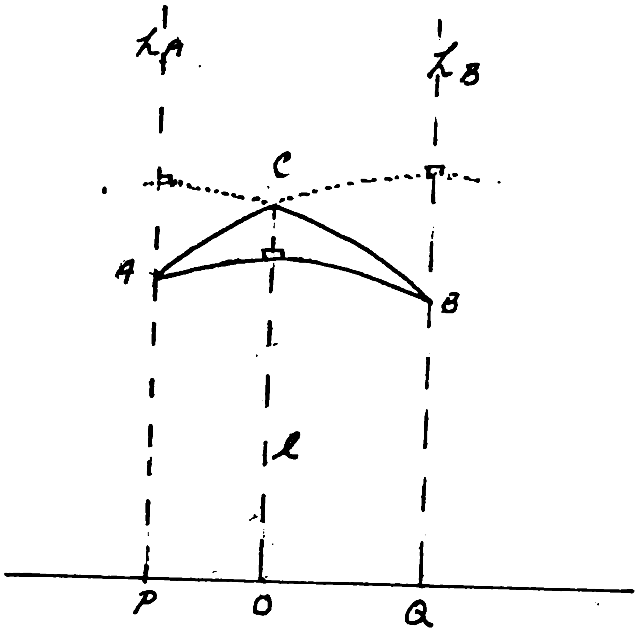
Así, $P'C'$ es perpendicular a $A'B'$!

Entonces, en la figura original la h-recta PC es perpendicular a la h-recta AB, con lo que PC resulta ser la tercera h-altura del h-triángulo ABC, y con esto queda demostrado que si dos h-alturas de un h-triángulo se intersectan en un h-punto P, la tercera h-altura pasa también por P.



Sea ABC un h-triángulo tal que dos de sus h-alturas, h_A y h_B son paralelas límite.

Supondremos que h_A y h_B son e-rayos pues, en el caso en que h_A y h_B se intersectan en un e-punto X sobre el eje x, podemos hacer una inversión con respecto a una h-recta con centro en X para transformar al h-triángulo ABC en un h-triángulo A'B'C' tal que dos de sus h-alturas: $h_{A'}$ y $h_{B'}$ son e-rayos.



Sea l la h-recta e-rayo que pasa por C. Demostraremos que l es perpendicular a AB y con esto que es la tercera h-altura. Para ello lo que haremos será demostrar que la e-distancia OA (donde O es el pie de l) es la misma que la e-distancia OB, y con esto que O es el e-centro de la h-recta AB.

Sea P el pie de la h-altura h_A. Como h_A es perpendicular a la h-recta BC, P es el e-centro de la h-recta BC. Sea Q el pie de la h-altura h_B (Q es el e-centro de la h-recta AC)

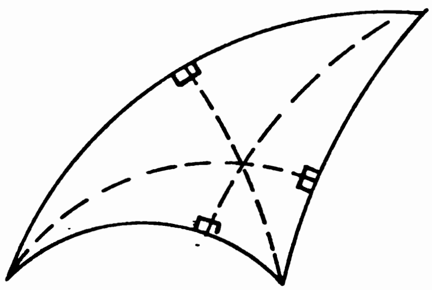
Como los e-triángulos BPQ y CPQ son rectángulos,
$(BP)^2=(PQ)^2+(QB)^2$ y $(CP)^2=(PO)^2+(OC)^2$
y como $BP=CP$ (C es el e-centro de BC), $(BP)^2=(CP)^2$
y así $(PQ)^2+(QB)^2=(PO)^2+(OC)^2$
de donde $(PQ^2)=(PO)^2+(OC)^2-(QB)^2$ .... (1).

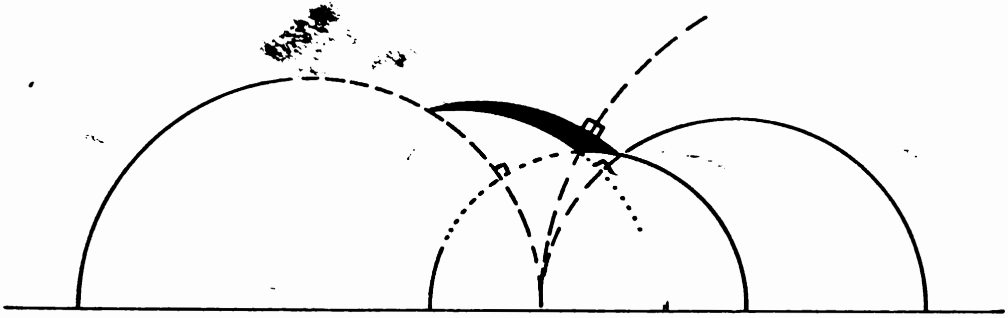
Análogamente, los e-triángulos APQ y CQO son rectángulos por lo que $(QA)^2=(AP)^2+(PQ)^2$ y $(CQ)^2=(QO)^2+(OC)^2$.
y como $(QA)^2=(CQ)^2$ (Q es el e-centro de AC),
$(AP)^2+(PQ)^2=(QO)^2+(OC)^2$, de donde
$(PQ)^2=(QO)^2+(OC)^2-(AP)^2$ .... (2)

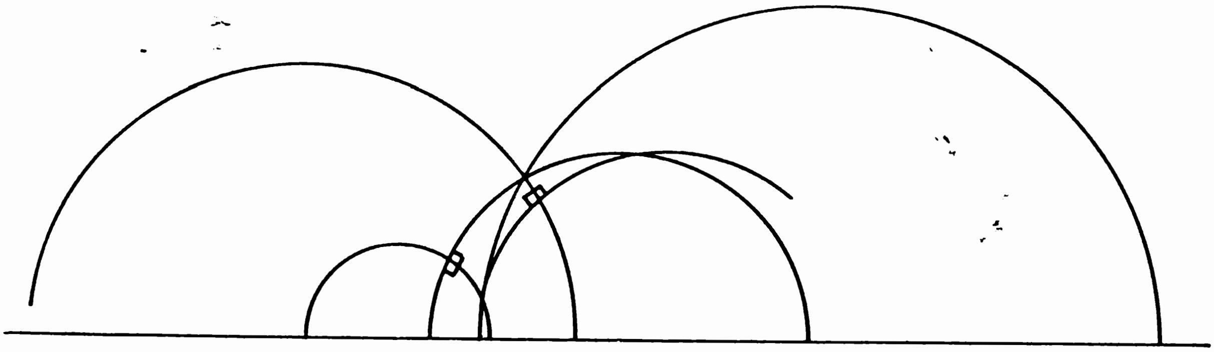
de (1) y (2) tenemos que
$(PO)^2+(OC)^2-(QB)^2=(QO)^2+(OC)^2-(AP)^2$ y así
$(PO)^2+(AP)^2=(QO)^2+(QB)^2$
pero $(PO)^2+(AP)^2=OA^2$ (APO es rectángulo)
y $(QO)^2+(QB)^2=OB^2$ (BQO es rectángulo)
y entonces $OA^2=OB^2$, por lo que $OA=OB$
que es lo que queríamos demostrar.

Si ABC es un h-triángulo tal que dos de sus h-alturas, h_A y h_B son h-paralelas, la tercera h-altura, h_C, es h-paralela a ambas, pues si h_C intersecta, digamos a h_A, h_B tiene que pasar por el punto de intersección de h_A y h_C, lo cual contradice que h_A y h_B sean h-paralelas.

A continuación exhibimos dos h-triángulos tales que sus h-alturas concurren y un h-triángulo cuyas h-alturas son h-paralelas.







Apendice

Área de un h-triángulo.

A continuación demostraremos algunos resultados que utilizaremos para definir el área de un h-triángulo.

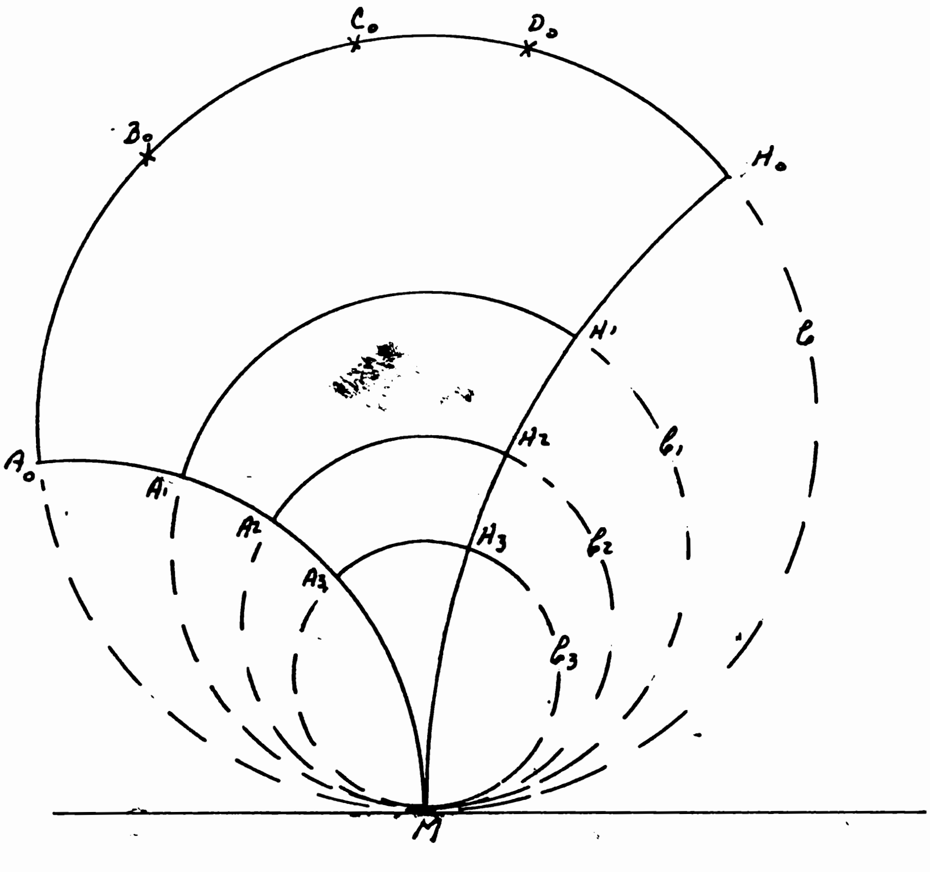
Supondremos que la función área (a) satisface que el área de una figura cerrada en el sentido geométrico es [illegible], que el área de figuras congruentes es la misma y que si una figura está contenida dentro de otra, su área es menor que la de la figura que la contiene.

Las demostraciones de los teoremas A.2, A.3, A.4 y A.5, son una adaptación al modelo de Poincaré del semiplano de demostraciones tomadas de [1].

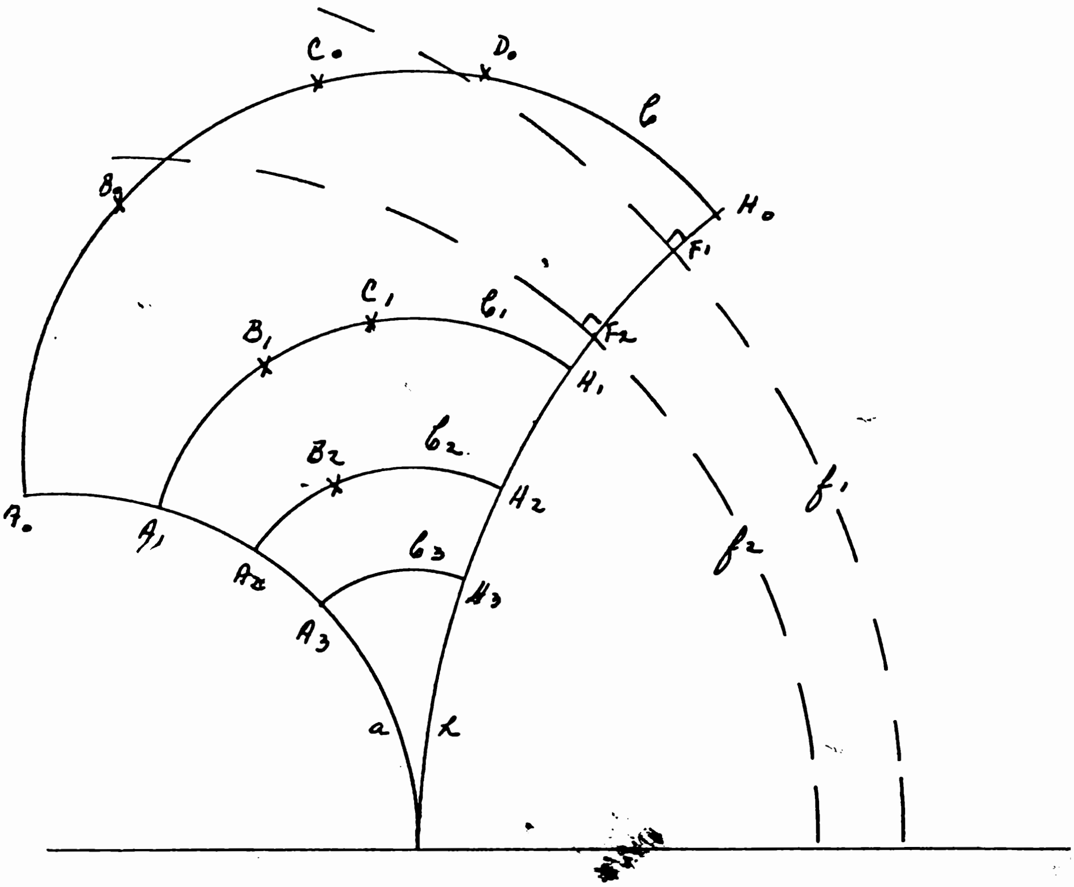
Sea $\mathcal{C}$ un horociclo de centro M y sean h y a dos h-radios del horociclo $\mathcal{C}$; sea H_0A_0 el h-arco de $\mathcal{C}$ determinado por h y a.

Sean $H_1, H_2, H_3, \ldots$ una sucesión de h-puntos sobre h en el "interior" de $\mathcal{C}$ tales que $H_iH_{i+1} =_h H_{i+1}H_{i+2}$
$i = 0, 1, 2, \ldots$

Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \ldots$ los horociclos que con centro en M que pasan por $H_1, H_2, H_3, \ldots$; y sean $A_1, A_2, A_3, \ldots$ los h-puntos en donde $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \ldots$ intersectan al h-radio a.



Indicaremos como trazar los h-puntos $B_0, C_0, D_0, \ldots$ sobre el h-arco HA tales que:
el h-arco H_0B_0 es h-congruente con el h-arco H_1A_1;
el h-arco H_0C_0 es h-congruente con el h-arco H_2A_2;
el h-arco H_0D_0 es h-congruente con el h-arco H_3A_3 etc.



Para encontrar el h-punto B_0 en $\overline{H_0A_0}$ tal que $H_0B_0 =_h H_1A$ hacemos lo siguiente:
Sea f la h-isometría que transforma a $H_0, H_1, H_2, \ldots$ en $H_1, H_2, H_3, \ldots$ Como se demostró en I.4, $f = f_2 \circ f_1$, donde f_1 es la inversión con respecto a la h-recta ortogonal a h en el h-punto F_1 en el interior de $\overline{H_0H_1}$ tal que $d_{F_1}^{H_0} = \frac{1}{4} d_{H_1}^{H_0}$; y f_2 es la inversión con respecto a la h-perpendicular a h en el h-punto F_2 en el interior de $\overline{H_0H_1}$ tal que $d_{F_2}^{H_0} = \frac{3}{4} d_{H_1}^{H_0}$.

La h-isometría f transforma al horociclo $\mathcal{C}$ en el horociclo $\mathcal{C}_1$, pues como $\mathcal{C}$ es un e-círculo tangente a x en M y $f(M) = M$ (ver sección), $f(\mathcal{C})$ también también es un e-círculo tangente al eje x en M; y como $f(H_0) = H_1$, $f(\mathcal{C})$ es el e-círculo tangente en M al eje x y que pasa por H_1; es decir, $f(\mathcal{C})$ es el horociclo $\mathcal{C}_1$. Entonces el h-punto B tal que $f(B) = A_1$, está sobre $\mathcal{C}$. ~~Se~~
Es posible demostrar que B no sólo está sobre $\mathcal{C}$, sino que B está entre H_0 y A_0. Así, tenemos un h-punto B en el interior del h-arco H_0A_0 tal que $f(B) = A_1$. Y como $f(H_0) = H_1$, f transforma al h-arco H_0B en el h-arco H_1A_1, por lo que estos h-arcos son h-congruentes.

(Para encontrar B, basta aplicar a A_1 la h-isometría f^{-1}, inversa de f; es decir, basta aplicar a A_1 f_2 seguida de f_1.

Para encontrar el h-punto C en H_0A tal que el h-arco HC es h-congruente con el h-arco H_2A_2, encontramos primero $f^{-1}(A_2)$.

$f^{-1}(A_2)$ es un h-punto B_1 sobre el h-arco H_1A_1 (pues $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$).

Después, encontramos $f^{-1}(B_1)$. $f^{-1}(B_1)$ es un h-punto C sobre el h-arco HA (pues $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1$); así C es un h-punto sobre HA tal que

$$f^2(C) = f(f(C)) = f(B_1) = A_2 .$$

y como $f^2(H) = f(f(H)) = f(H_1) = H_2$,

tenemos que $f(HC) = H_2A_2$, por lo que

$$HC =_h H_2A_2 .$$

Análogamente, para encontrar el h-punto D tal que $H_0D =_h H_3A_3$, encontramos el h-punto B_2 tal que $f(B_2) = A_3$ (B_2 está en $\mathcal{C}_2$); después el h-punto C_1 tal que $f(C_1) = B_2$ (C_1 está en $\mathcal{C}_1$), y finalmente, el h-punto D tal que $f(D) = C_1$ (D está en $\mathcal{C}$).

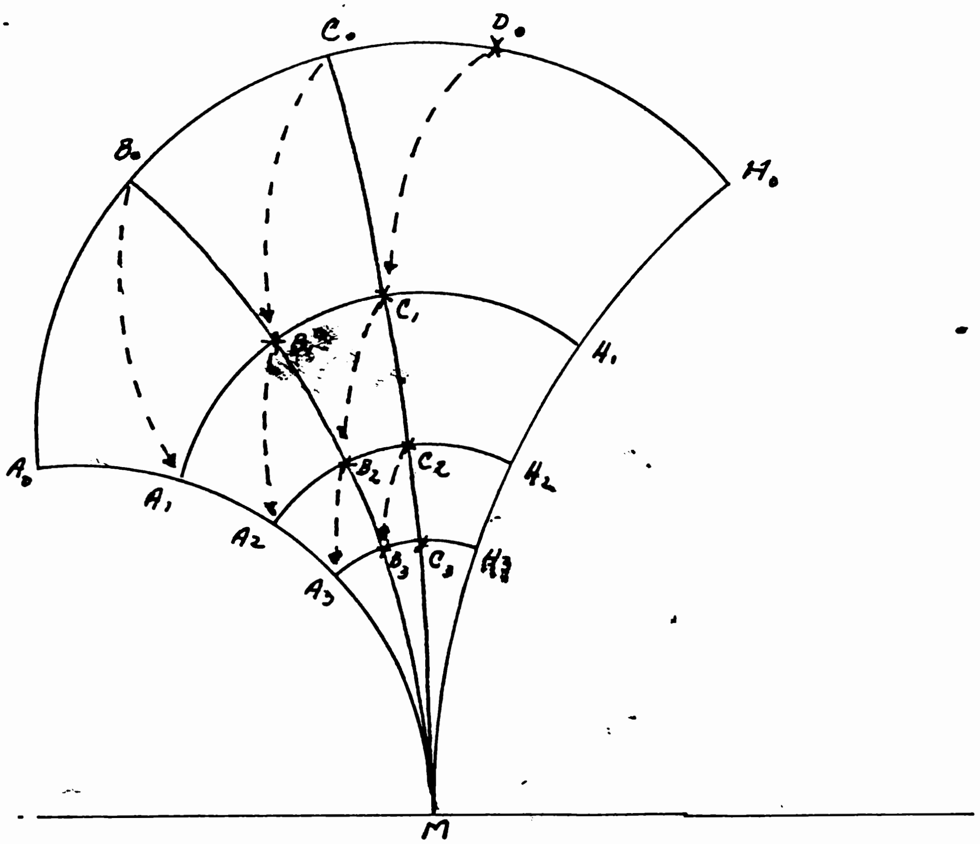
Así, D es un h-punto en el h-arco H_0A tal que $f^3(D) = A_3$. Y como $f^3(H_0) = H_3$, tenemos que $f^3(H_0D) = H_3A_3$, por lo que $H_0D =_h H_3A_3$.

Procediendo de la misma manera, tenemos que $E = [f^{-1}(A_4)]^4$, $F = [f^{-1}(A_5)]^5$, $G = [f^{-1}(A_6)]^6$ etc.

Observamos ahora que, como $A_1, A_2, A_3, \dots$ son colineales, y $f^{-1}(A_1) = B_0$; $f^{-1}(A_2) = B_1$; $f^{-1}(A_3) = B_2$ etc., los h-puntos B_0, B_1, B_2 también son colineales. Además, como $f^{-1}(M) = M$, la h-recta que contiene a $B_0, B_1, B_2, \dots$ es el h-radio por B_0 del horociclo $\mathcal{C}$.

Análogamente, como $(f^{-1})^2$ transforma a A_2 en C_0; a A_3 en C_1; a A_4 en C_2 etc., $C_0, C_1, C_2 \dots$ son colineales y la h-recta que pasa por ellos es el h-radio por C_0 de $\mathcal{C}$.

$D_0, D_1, D_2 \dots$ están sobre el h-radio de $\mathcal{C}$ por D_0 y así sucesivamente.



Hemos demostrado entonces el siguiente resultado:

Teorema A.1 – Si HAM es un sector de horociclo con centro en M; $H_1, H_2, H_3 \dots$ h-puntos sobre el h-radio HM tales que $HH_1 =_h H_1H_2 =_h H_2H_3 \dots$; $A_1, A_2, A_3, \dots$ los puntos en donde los horociclos con centro en M que pasan por $H_1, H_2, H_3, \dots$ intersectan al h-radio AM; $B_0, C_0, D_0, \dots$ puntos en el h-arco HA tales que $HB_0 =_h H_1A_1$; $HC_0 =_h H_2A_2$; $HD_0 =_h H_3A_3, \dots$ y $B_i, C_i, D_i, \dots$ $i = 1,2,3,\dots$ los h-puntos en donde los h-radios B_0M, C_0M, D_0M etc. intersectan a los h-arcos H_iA_i, la h-isometría f que transforma a la sucesión $H, H_1, H_2, \dots$ en la sucesión $H_1, H_2, H_3, \dots$ transforma a B_i en A_{i+1}; a C_i en B_{i+1}; a D_i en C_{i+1} etc.

para todo $i = 0,1,2,3 \dots$

Teorema A.2 Todo sector de horociclo tiene área finita.

Sea HAM un sector de horociclo. Sean H_i, A_i, B_i, C_i etc como en el teorema anterior.

Por el Teorema anterior, existe una h-isometría que transforma a H_i en H_{i+1} y a B_i en A_{i+1}; a C_i en B_{i+1}; a D_i en C_{i+1} etc.

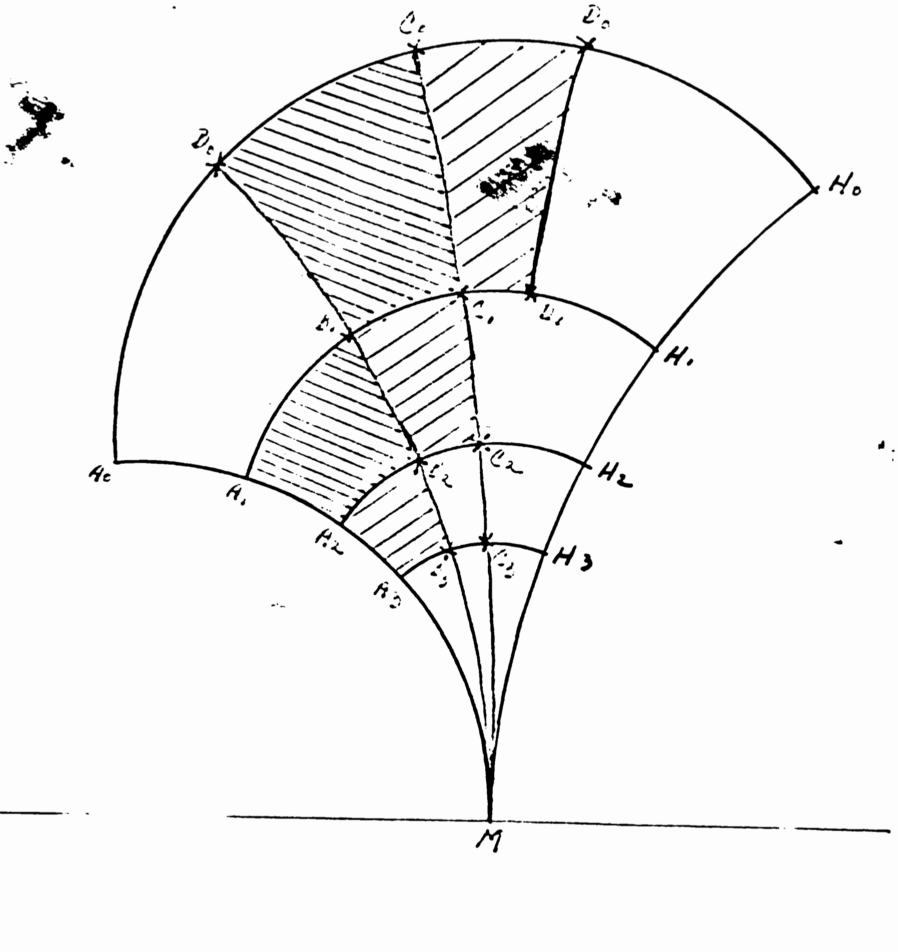
así, $C_1C_0B_0B_1 =_h B_2B_1A_1A_2$ y

$D_1D_0C_0C_1 =_h C_2C_1B_1B_2 =_h B_3B_2A_2A_3$; es decir

$D_1D_0C_0C_1 =_h B_3B_2A_2A_3$.

análogamente, $E_1E_0D_0D_1 =_h B_4B_3A_3A_4$; $F_1F_0E_0E_1 =_h B_5B_4A$ etc. y así,

$H_1H_0A_0A_1 =_h B_0A_0M$, de donde $a(H_1H_0A_0A_1) = a(B_0A_0$



y como $H_1H_0A_0A_1$ tiene área finita por ser una región cerrada desde el punto de vista geométrico, B_0A_0M también tiene área finita.

Pero si $a(B_0A_0M)$ es finita, $a(H_0A_0M)$ también es finita, pues

$a(H_0A_0M) =$

$a(B_0A_0M) \cdot H_0A_0/B_0A_0$

y así todo sector de horociclo tiene área finita.

Teorema A.3 Todo h-triángulo 3-asintótico tiene área finita.

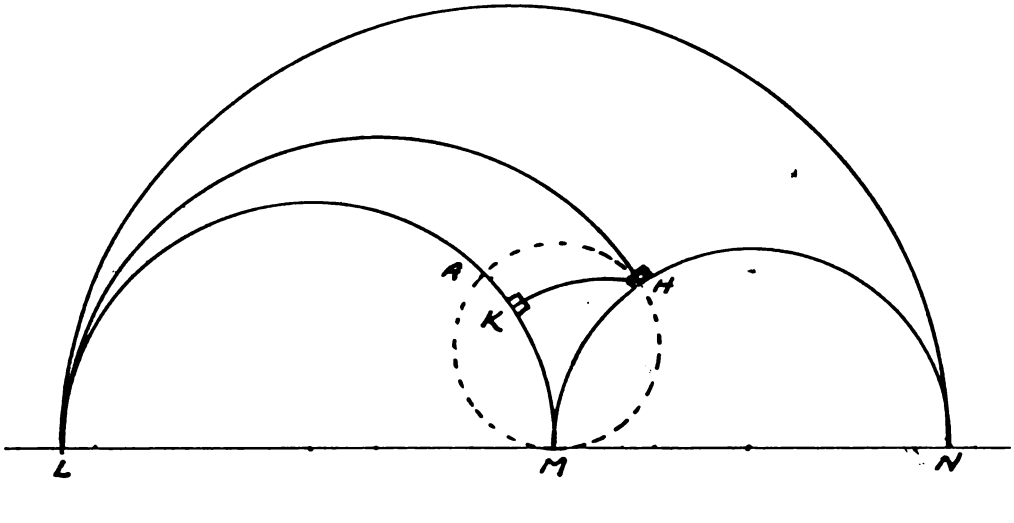
Sea LMN un h-triángulo 3-asintótico. Sea LH la h-perpendicular a MN desde L y sea HK la h-perpendicular a ML desde H. Sea C el horociclo con centro en M que pasa por H, y sea A la intersección de C y LM.

El h-triángulo 1-asintótico KHM está comprendido dentro del sector de horociclo HAM, que tiene área finita, por lo que a(KHM) es finita.

La inversión con respecto a HK transforma a HKL en HKM, por lo que HKL $=_h$ HKM y entonces a(HKL) = a(HKM), de donde HKL tiene área finita. Así, el h-triángulo HLM tiene también área finita (a(HLLM) = a(HKL) + a(HKM)).

Análogamente, la inversión con respecto a LH transforma a HLM en HLN, por lo que HLN tiene área finita.

Y como a(LMN) = a(HLM) + a(HLN), LMN tiene área finita y así todos los h-triángulos 3-asintóticos tienen área finita.



Como se demostró en la sección IV.2, todos los h-triángulos 3-asintóticos son h-congruentes (teor. IV.4), y así, todos los h-triángulos 3-asintóticos tienen la misma área.

Sea $h\pi$ el área de los h-triángulos 3-asintóticos.

Teorema A.4 El área de un h-triángulo 2-asintótico de ángulo θ es $h(\pi-\theta)$, donde h es la misma constante que aparece en el área de los h-triángulos 3-asintóticos.

Sea AMN un h-triángulo 2-asintótico con vértices al infinito M y N. Sea AH una h-recta por A en el interior del h-ángulo en A del h-triángulo y sea L el punto al infinito de AH entre M y N.

Entonces $a(AMLN) = a(LAM) + a(NAL)$, y también

$a(AMLN) = a(NMA) + a(NML)$, de donde

$$a(LAM) + a(NAL) = a(NMA) + a(NML) \quad \ldots (1)$$

Intentando definir el área de un h-triángulo 2-asintótico como función de su ángulo, tenemos que

$a(LAM) = a(x)$ donde $x = \measuredangle LAM$;

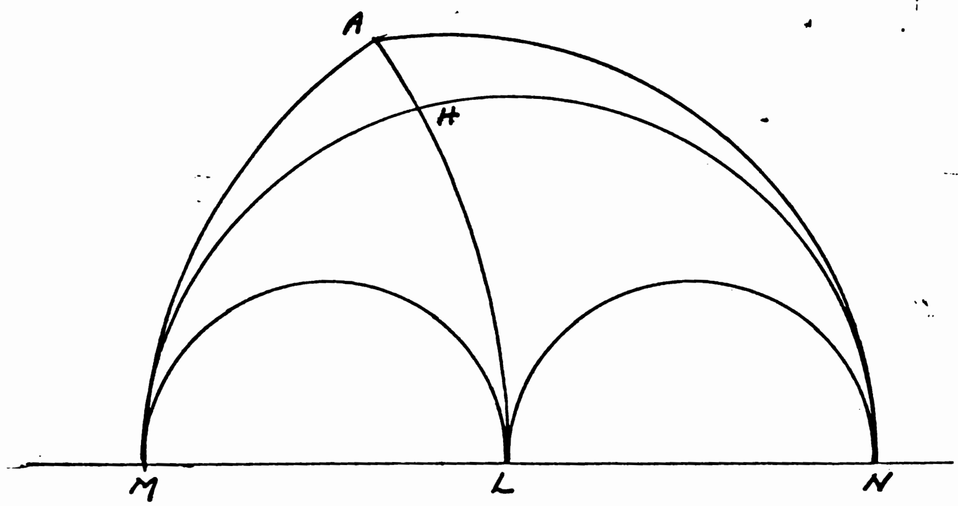
$a(NAL) = a(z)$ donde $z = \measuredangle NAL$, y

$a(NAM) = a(x+z)$.

Sustituyendo estos valores en (1) tenemos

$a(x) + a(z) = a(x+z) + a(LMN)$, donde LMN es 3-asintótico y por lo tanto de área $h\pi$, y así

$$a(x) + a(z) = a(x+z) + h\pi.$$



Consideremos la expresión

$$a(x) + a(y) = a(x+y) + k\pi$$

Dejando y fijo y variando x, derivemos la expresión con respecto a x, y obtenemos

$$a'(x) = a'(x+y)$$

y como y es arbitraria, tenemos que $a'(x)$ es constante, de donde a es una función de la forma $a(\theta) = m\theta + b$.

En el caso en que $\theta = 0$, lo que tenemos no es un k-triángulo 2-asintótico, sino un k-triángulo 3-asintótico, por lo que

$$a(\theta) = k\pi \quad \text{para } \theta = 0.$$

y cuando $\theta = \pi$, los tres vértices del k-triángulo son colineales, por lo que

$$a(\theta) = 0 \quad \text{para } \theta = \pi.$$

Tenemos entonces que

$$m \cdot \pi + b = 0 \quad \text{y}$$
$$m \cdot 0 + b = k\pi$$

de donde $b = k\pi$ y $m = -k$,

y así, $a(\theta) = m\theta + b = -k\theta + k\pi = k(\pi - \theta)$

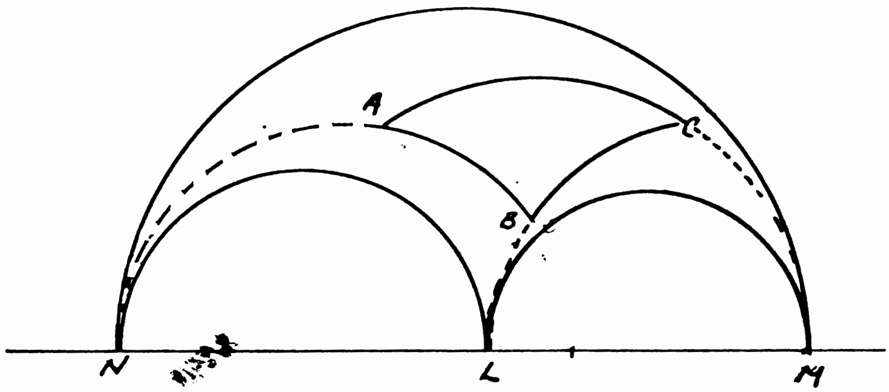
es decir, el área de un k-triángulo 2-asintótico de ángulo θ es $k(\pi - \theta)$, donde k es la misma constante que aparece en el área de los k-triángulos 3-asintóticos.

Teorema A.5 El área de un h-triángulo cuyos vértices están en el h-plano es $h\,d$, donde h es una constante y d es el defecto del h-triángulo.

Sea ABC un h-triángulo cuyos vértices están en el h-plano.

Sea N el punto al infinito izquierdo de la h-recta AB (ver figura); L el punto al infinito de la h-recta BC, y M el punto al infinito derecho de la h-recta CA.

Sea LMN el h-triángulo 3-asintótico LMN.



Entonces $a(LMN) = a(ABC) + a(AMN) + a(BNL) + a(CLM)$

y así $a(ABC) = a(LMN) - a(AMN) - a(BNL) - a(CLM)$.

donde

$$a(LMN) = h\pi$$
$$a(AMN) = h(\pi - \measuredangle MAN) = h(\pi - (\pi - A)) = hA$$
$$a(BNL) = h(\pi - \measuredangle NBL) = h(\pi - (\pi - B)) = hB$$
$$a(CLM) = h(\pi - \measuredangle LCM) = h(\pi - (\pi - C)) = hC$$

y así,

$$a(ABC) = h\pi - hA - hB - hC = h(\pi - A - B - C) = h\,d$$

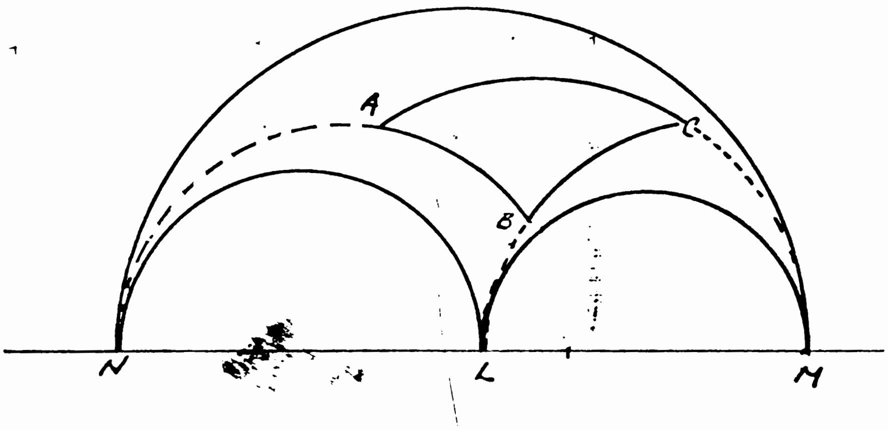
donde d es el defecto de ABC.

Teorema A.5 El área de un h-triángulo cuyos vértices están en el h-plano es hd, donde h es una constante y d es el defecto del h-triángulo.

Sea ABC un h-triángulo cuyos vértices están en el h-plano.

Sea N el punto al infinito izquierdo de la h-recta AB (ver figura); L el punto al infinito de la h-recta BC, y M el punto al infinito derecho de la h-recta CA.

Sea LMN el h-triángulo 3-asintótico LMN.



Entonces $a(LMN) = a(ABC) + a(AMN) + a(BNL) + a(CLM)$

y así $a(ABC) = a(LMN) - a(AMN) - a(BNL) - a(CLM)$.

donde

$$a(LMN) = h\pi$$
$$a(AMN) = h(\pi - \angle MAN) = h(\pi - (\pi - A)) = hA$$
$$a(BNL) = h(\pi - \angle NBL) = h(\pi - (\pi - B)) = hB$$
$$a(CLM) = h(\pi - \angle LCM) = h(\pi - (\pi - C)) = hC$$

y así,

$$a(ABC) = h\pi - hA - hB - hC = h(\pi - A - B - C) = hd$$

donde d es el defecto de ABC.

Bibliografía

1 Coxeter H. S. M. Non Euclidean Geometry
Toronto, University of Toronto
3° ed. 1957.

2 Gans David An Introduction to non-euclidean geometry
New York, Academic Press
1973

3 Heath Thomas L The thirteen book of Euclid's elements.
(traducción comentada del texto de Herbey).
New York, Dover
2ª ed. 1956

4 David Foundations of Geometry
Open Court, La Salle, Illinois
10ª ed. 1971

5 Meschkowski H. Noneuclidean Geometry
New York Academic Press
1964

6 Santaló Luis Geometrías no euclidianas
Editorial Universitaria de Buenos Aires
1961

7 Shively Levi S. Introducción a la geometría moderna
Compañía Editorial Continental Mex DF
8ª ed. 1975

8 Verriest Gustave Introduction à la géométrie non euclidienne par la méthode élementaire
Paris, Gauthier Villars
1951