UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

PROPIEDADES ESPECTRALES DE LOS OPERADORES POSITIVOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A

ALEJANDRO GONZALEZ RULLAN

México, D. F. 1975

A mis Padres

Agradezco al Dr. José Angel Canavati su ayuda en la elaboración de esta tesis.

I N D I C E

Pág.

PROLOGO

CAPITULO I.

Propiedades espectrales de matrices con conos invariantes 1

1.1. Introducción 1

1.2. Conos en E^n 4

1.3. Matrices y conos invariantes 11

1.4. Irreducibilidad 21

1.5. Aplicaciones 36

CAPITULO II.

Vectores propios positivos de funciones que preservan un orden 40

2.1. Introducción 40

2.2. Vectores propios positivos de funciones que preservan un orden 41

BIBLIOGRAFIA 78

P R O L O G O

La teoría clásica de Perron-Frobenius para matrices ha sido generalizada por varios autores para espacios de dimensión finita e infinita.

El presente trabajo reune los resultados obtenidos por Vandergraft [1], H. Schneider y R.E.L. Turner [2] para operadores que dejan invariante algún cono en un espacio de Banach sobre los reales.

El primer capítulo contiene una generalización de la teoría de Perron-Frobenius para matrices en espacios de dimensión finita, así como unas aplicaciones a procesos iterativos.

En el segundo capítulo se obtienen resultados similares, en espacios de Banach, pero haciendo a un lado la linealidad y continuidad de los operadores y basándose fuertemente en la preservación del orden parcial inducido por un cono.

CAPITULO I.

PROPIEDADES ESPECTRALES DE MATRICES CON CONOS INVARIANTES

1.1. INTRODUCCION

Los resultados básicos de la teoría de Perron-Frobenius para matrices no netativas son:

Propiedad I. Si A es una matriz $n \times n$ con elementos no negativos ($A \geq 0$), entonces: (a) $\rho_\sigma(A)$ es un valor propio, (b) existe un vector propio, no netativo, correspondiente a $\rho_\sigma(A)$, (c) si $B \geq A$, i.e., $B-A \geq 0$, entonces $\rho_\sigma(B) \geq \rho_\sigma(A)$, donde $\rho_\sigma(A)$ es el radio espectral de A.

Propiedad II. Si $A \geq 0$ es irreducible (§ 1.4), entonces: (a) $\rho_\sigma(A)$ es un valor propio simple, (b) existe un vector propio, positivo, correspondiente a $\rho_\sigma(A)$ y (c) si $B \geq A$ y $B \neq A$ entonces $\rho_\sigma(B) > \rho_\sigma(A)$.

Propiedad III. Si A tiene todos sus elementos positivos ($A>0$), entonces: (a) $\rho_\sigma(A)$ es un valor propio simple, mayor que la magnitud de cualquier otro valor propio, (b) las propiedades II(b) y II(c) se cumplen.

Los resultados referentes a la existencia de vectores y valores propios I(a), I(b), II(a), II(b), III(a), han sido generalizados para operadores en espacios de Banach (ver [6], [7] y y [8]. Los resultados relacionados con la comparación de los radios espectrales fueron generalizados por Vandergraft [1] en vista de sus aplicaciones a los procesos iterativos. Estos resultados no habían sido generalizados adecuadamente, la irreducibilidad, que es una parte importante de la teoría, era reemplazada generalmente por una condición más fuerte. Por ejemplo, Marek [11] probó algunos teoremas de comparación para los operadores u_o-positivos de Krasnosel'skii. Puede ser demostrado (ver § 1.4) que estos operadores son esencialmente irreducibles, pero no recíprocamente. Shaefer [8] definió una clase de operadores en un espacio de Banach, la cual en E^n es la clase de matrices irreducibles; sin embargo sus resultados solamente son referentes a la existencia de vectores y valores propios.

En su generalización de la teoría de Perron-Frobenius, Vandergraft reemplazó la positividad de un operador por la condición de que deje invariante a un cono y, para obtener resultados más fuertes, supuso que los espacios eran de dimensión finita.

En este capítulo presentaremos estos resultados [1], en la sección 1.2 damos algunos resultados básicos en la teoría de conos en E^n, en la sección 1.3 se dan condiciones necesarias y suficientes para que una matriz deje invariante a un cono. En la sección 1.4 se generaliza el concepto de irreducibilidad de una matriz y también se dan condiciones necesarias y suficientes para que una matriz sea irreducible con respecto a un cono, así como criterios de comparación para los radios espectrales de dos matrices. En la última sección se dan algunas aplicaciones a procesos iterativos.

1.2 Conos en E^n.

Un cono K es un subconjunto cerrado de E^n el cual satisface:

i) $K \cap (-K) = \{0\}$

ii) $K + K = K$

iii) $\alpha K \subset K$ para cualquier $\alpha \geq 0$.

Un cono es llamado sólido si su interior K^o es no vacío y se dice que K reproduce a E^n si $E^n = K - K$. Si $x \in K$ entonces escribiremos $x \geq^k 0$, y $x \geq 0$ significa que x está en el cono que consiste de todos los vectores de E^n con coordenadas no negativas. Si A es una matriz $n \times n$, entonces escribiremos $A \geq^k 0$ cuando $A x \in K$ para toda $x \in K$. Si K es un cono sólido entonces $x >> 0$ significa $x \in K^o$ y $A >> 0$ significa que $A x \in K^o$ para toda $x \in K$ y $x \neq 0$. Podemos utilizar el cono K para establecer un orden parcial en E^n y escribiremos $x \leq^k y$ si $y - x$ está en K.

Los siguientes lemas nos dan algunas propiedades importantes acerca de los conos en E^n.

Lema 1.2.1: Sea K un cono sólido en E^n y sea $x \in K^o$, entonces para toda $y \in E^n$ existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha y \leq^k x$.

Demostración: Si $x \in K^o$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola de radio ε con centro en x, $B(x,\varepsilon)$ está contenida en K y por lo tanto para toda $\lambda > 0$ la bola $B(\lambda x, \lambda\varepsilon)$ está contenida en K, lo que implica que $\lambda x \epsilon K^{o}$.

Para cualquier $y \epsilon E^{n}$ y $\lambda > \frac{|y|}{\varepsilon}$ tenemos

$$|\lambda x-(\lambda x-y)| = |y| < \lambda \varepsilon$$

y por lo tanto

$$\lambda x-y \epsilon B(\lambda x,\lambda \varepsilon) \subset K$$

i.e., $y \underset{-}{<}^{k} \lambda x$, lo cual demuestra el lema.

<u>Lema 1.2.2</u>: Sea K un cono en E^{n} y sean x, $y \epsilon K$ con -- $y \underset{-}{<}^{k} x \varepsilon \partial K$, entonces $y \epsilon \partial K$.

<u>Demostración</u>: Primero demostraremos que si $x=u+v$ con $u,v \epsilon K$ y $x \varepsilon \partial K$, entonces u y v están en ∂K. Supongamos que $u \varepsilon K^{o}$, entonces existe $\varepsilon > o$ tal que la bola $B(u,\varepsilon)$ está contenida en K. Sea $y \epsilon B(x,\varepsilon)$, entonces $|u+v-y| < \varepsilon$ y de aquí que -- $y-v \epsilon B(u,\varepsilon) \subset K$. Ahora, $y = (y-v) + v \varepsilon K$, lo cual significa que $B(x,\varepsilon) \subset K$; por lo tanto $x \epsilon K^{o}$ lo cual es una contradicción. Aná logamente $v \epsilon \partial K$.

Si $o \underset{-}{<}^{k} y \underset{-}{<}^{k} x$, entonces como $(x-y) + y = x \epsilon \partial K$ tenemos que, por lo anteriormente demostrado, $y \epsilon \partial K$.

<u>Lema 1.2.3</u>: Sea K un cono en E^{n}. Entonces K es sólido si y solo si K reproduce a E^{n}.

<u>Demostración</u>: Supongamos que K es sólido y sean $y \epsilon E^{n}$ y $x \epsilon K^{o}$, entonces existe $\lambda \geq o$ tal que $\lambda x-y \epsilon K$, por lo tanto $y-\lambda x \epsilon (-K)$ y como $y=\lambda x-(\lambda x-y)$ con $\lambda x \epsilon K$, entonces $E^{n}=K-K$.

Ahora supongamos que K reproduce a E^n, entonces K tiene n vectores linealmente independientes, sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estos vectores y consideremos el siguiente conjunto

$$\{ x \in K \mid x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i , \alpha_i > 0\}$$

éste no es vacío y está contenido en K°, por lo tanto K es sólido.

Un vector $x \in K$ es llamado <u>vector extremo</u> de K si $x=u+v$ con $u, v \in K$ implica que u y v son múltiplos no negativos de x. Un cono K es <u>generado</u> por un conjunto de vectores si cada elemento de K puede ser escrito como una combinación lineal finita de estos vectores, usando solamente coeficientes no negativos. La relación entre estos dos conceptos está dada por el siguiente teorema:

<u>Teorema 1.2.1</u>: Cualquier cono en E^n es generado por sus vectores extremos.

<u>Demostración</u>: Esta va a ser por inducción en n. Para $n = 2$ el resultado es obvio. Supongamos que el teorema es cierto para espacios de dimensión menor que $n > 2$. Si x es un punto interior de $K \subset E^n$, entonces sea $u \in K$ linealmente independiente de x y H el plano generado por x y u. Entonces $\tilde{K} = H \cap K$ es un cono de dimensión 2, como $x \in \tilde{K}$, entonces $x = x_1 + x_2$, donde x_1 y x_2 están en la frontera de $\tilde{K}$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ consideremos la vecindad $B(x_1, \varepsilon)$, entonces $B(x_1, \varepsilon) \cap H$ es una vecindad de x_1 en H y por lo tanto existe $y \in B(x_1, \varepsilon) \cap H$ tal que $y \notin \tilde{K}$

y entonces $y \notin K$, esto implica que $x_1 \in \partial K$. Análogamente -- $x_2 \in \partial K$ y por lo tanto para demostrar el teorema podemos considerar solamente puntos de la frontera de K.

Sea $x \in \partial K$ arbitrario, podemos suponer que x no es extremo, en cuyo caso $x=u+v$, donde $u,v \in \partial K$, por el Lema 1.2.2, y además son linealmente independientes de x.

Consideremos el conjunto

$$U = \{y \in K \mid y=\alpha u+\beta v;\alpha,\beta \geq o\}$$

este conjunto es un cono que contiene a x y además si $y \in U$, entonces

$$o \leq^k y=\alpha u+\beta v \leq^k \lambda u+\lambda v=\lambda x \in \partial K,\ \lambda= \max(\alpha,\beta),$$ lo que implica que $U \subset \partial K$.

Sea S el mayor cono tal que $x \in S \subset \partial K$. Si H_s es el menor subespacio que contiene a S, entonces H_s tiene dimensión menor que n, ya que si su dimensión es n entonces existen en S n vectores linealmente independientes y por lo tanto S tiene interior no vacío, que contradice la hipótesis de que $S \subset \partial K$. Ahora podemos aplicar la hipótesis de inducción a H_s y la demostración está completa puesto que todos los vectores extremos de S también son extremos de K. Para demostrar esta última afirmación consideremos $y \in S$ y supongamos que no es extremo de K, entonces $y=u+v$ donde $u,v \in K$. Supongamos que $u \notin S$ y consideremos el conjunto

$$S' = \{z \in K \mid z=\omega + \alpha u , \omega \in S,\alpha \geq o\}$$

claramente S' es un cono. Como $o \leq^k \omega+\alpha u=\omega+\alpha(y-v) \leq^k \omega+\alpha y \in S \subset \partial K$, entonces $\omega+\alpha u\epsilon\partial K$ y $S'\subset\partial K$. Como $x\epsilon S'$ y S' es mayor que S, tenemos una contradicción en la definición de S, de aquí que $u\epsilon S$; análogamente $v\epsilon S$. Por lo tanto y no es vector extremo de S y el teorema queda demostrado.

Sean $x_1,x_2,\ldots,x_m$ vectores linealmente independientes en E^n, definimos el cono generado por estos como el conjunto

$$\{x|x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i,\ \alpha_i\geq o\}$$

Un <u>subcono</u> de K es cualquier cono contenido en K, un <u>subcono extremo</u> es un subcono generado por algún subconjunto de vectores extremos de K. Si un subcono extremo está contenido en la frontera de K, entonces se dice que es una <u>cara</u> de K.

Si F es una cara, entonces está contenida en un subespacio lineal de dimensión menor que n. El menor subespacio tal será denotado por H_F. A cada $x\epsilon\partial K$ le corresponde una cara en particular, la cual tiene algunas propiedades útiles. Estas son descritas en el siguiente lema:

<u>Lema 1.2.4</u>: Dada cualquier $x\epsilon\partial K$ existe una cara F_x tal que:

i) $x\epsilon F_x^{\circ}$ relativo al subespacio H_{F_x},

ii) $F_x = \partial K \cap H_{F_x}$.

iii) $o\leq^k y \leq^k x$ implica $y \epsilon F_x$.

<u>Demostración</u>: Por el teorema 1.2.1, cualquier $x\epsilon\partial K$ puede ser escrita como $x = \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_i$, donde $\nu_i > o$, x_i extremo

para $i=1,2,\ldots,m$. Sea F el cono generado por $x_1, x_2, \ldots, x_m$; F es un subcono extremo. Además si $y = \Sigma\, \alpha_i x_i \epsilon F$, $\alpha_i \geq o$, definimos $\beta = \frac{\max\,(\alpha_i)}{\min\,(\nu_i)}$, entonces $y \leq^k \beta x \epsilon \partial K$ y $y \epsilon \partial K$, por lo tanto F es una cara. Como el conjunto

$$\{x \mid x = \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_i \ , \ \nu_i > o\} \ .$$

es abierto relativo al subespacio H_F, entonces F es una cara que satisface (i).

Sea F_x la mayor cara tal que (i) se cumple. Entonces obviamente $F_x \subset \partial K \cap H_{F_x}$; $\partial K \cap H_{F_x}$ es un conjunto cerrado, $(\partial K \cap H_{F_x}) \cap -(\partial K \cap H_{F_x}) = \{o\}$ y $\lambda(\partial K \cap H_{F_x}) \subset (\partial K \cap H_{F_x})$, si $\lambda \geq o$. Sean $x_1 + x_2 \epsilon \partial K \cap H_{F_x}$, entonces $x_1 + x_2 \epsilon H_{F_x}$ y como $x_1 + x_2 \epsilon K$, se tiene que $x_1 + x_2 \epsilon \partial K$ o $x_1 + x_2 \epsilon K^o$. Supongamos que $x_1 + x_2 \epsilon K^o$, como F_x reproduce a H_{F_x} tenemos $x_1 + x_2 = y_1 - y_2 \epsilon K^o$ con $y_1, y_2 \epsilon F_x$, pero esto implica que $y \epsilon K^o$ lo que contradice $y_1 \epsilon F_x \subset \partial K$. Por lo tanto $x_1 + x_2 \epsilon \partial K$ y entonces $\partial K \cap H_{F_x}$ es un subcono contenido en la frontera de K. Para demostrar que $\partial K \cap H_{F_x}$ es una cara, veremos que todo vector extremo de $\partial K \cap H_{F_x}$ es un vector extremo de K. Sea $y \epsilon \partial K \cap H_{F_x}$, supongamos que $y = u + v$ con $u, v \epsilon K$ linealmente independientes de y, entonces $u, v \epsilon \partial K$ ya que $o \leq^k u \leq^k y$, $o \leq^k v \leq^k y$.

Supongamos que $u \notin H_{F_x}$ y consideremos el subespacio H' generado por H_{F_x} y u.

El conjunto $\partial K \cap H'$ satisface las siguientes propiedades: $(\partial K \cap H') - (\partial K \cap H') = \{o\}$, $\lambda(\partial K \cap H') \subset (\partial K) \cap H'$ para toda $\lambda > o$

es cerrado y además si ω, $z\epsilon\partial K\cap H'$, entonces $\omega + z \ \epsilon\ H'$, i.e., $\omega + z = \alpha u + \omega'$ con $\omega' \epsilon\ H_{F_x}$, entonces existe $\eta > o$ tal que - $\omega' \overset{k}{\leq} \eta x$ y por lo tanto $\omega + z = \alpha u + \omega' \overset{k}{\leq} \alpha u + \eta x \overset{k}{\leq} \alpha y + \eta x \epsilon \partial K \cap H_{F_x}$, lo cual implica que $\omega + z \epsilon \partial K$ y de aquí que $\partial K \cap H'$ es un cono contenido en ∂K. Como $\nu u \overset{k}{\leq} \nu y \overset{k}{\leq} x$ para alguna $\nu > o$, entonces $x - \nu u \epsilon \partial K \cap H'$ y por lo tanto $x \epsilon (\partial K \cap H')^{o}$ relativo a H'. Si $\partial K \cap H'$ no es un subcono extremo, entonces podemos seguir construyendo subconos de la forma $\partial K \cap H^{i}$ tales que x está contenido en el interior de estos subconos relativo a los subespacios H^{i} respectivamente. Como $x \epsilon \partial K$ entonces alguno de estos subconos debe ser una cara, pero por la forma en que se definió F_x tenemos que ninguno de estos subconos puede ser una cara, de donde se concluye que $u \epsilon\ H_{F_x}$. Análogamente $v\ \epsilon\ H_{F_x}$ y por lo tanto y no es vector extremo de $\partial K \cap H_{F_x}$; como F_x es la mayor cara tal que (i) se cumple tenemos que $\partial K \cap H_{F_x} \subset F_x$ y por lo tanto $F_x = \partial K \cap H_{F_x}$.

Finalmente, si $o \overset{k}{\leq} y \overset{k}{\leq} x$, entonces $y \epsilon \partial K$. Supongamos que $y \notin H_{F_x}$, sea H' el subespacio generado por H_{F_x} y y. Si $F' = \partial K \cap H'$, entonces usando un desarrollo análogo al que se utilizó para demostrar que $\partial K \cap H_{F_x}$ es una cara se demuestra que F' es una cara y como $x - y \overset{k}{\leq} x \epsilon \partial K$, $x - y \epsilon F'$, entonces x está en $(F')^{o}$ relativo a $H_{F'}$. Esto contradice la definición de F_x, de esta manera $y \epsilon\ H_{F_x}$ y por (ii) se concluye que $y\ \epsilon\ F_x$.

1.3 Matrices y conos invariantes

De la teoría de conos invariantes en espacios de Banach [6], [7] se sigue que si una matriz A deja invariante a un cono sólido, entonces $\rho_\sigma(A)$ es un valor propio y existe un vector propio, correspondiente a $\rho_\sigma(A)$, en el cono. Esto puede ser demostrado también usando el teorema de punto fijo de Brouwer. Birkhoff [5] dió una demostración elemental de este resultado usando la forma canónica de Jordan. La ventaja de la demostración de Birkhoff es que ésta puede ser extendida para demostrar otra propiedad de $\rho_\sigma(A)$, la cual se convierte en una condición suficiente para que A deje invariante a un cono sólido. Para establecer esta condición, necesitamos la siguiente definición:

Definición 1.3.1: Si λ es un valor propio de una matriz A, entonces el grado de λ es el tamaño del bloque diagonal más grande, en la forma canónica de Jordan de A, que contiene a λ.

Teorema 1.3.1: Si K es un cono sólido y $A \underline{<}^k o$, entonces

i) $\rho_\sigma(A)$ es un valor propio,

ii) el grado de $\rho_\sigma(A)$ no es menor que el grado de cualquier otro valor propio que tenga el mismo módulo,

iii) K contiene un vector propio correspondiente a $\rho_\sigma(A)$.

Además, las condiciones (i) y (ii) son suficientes para que A deje invariante a un cono sólido.

Antes de demostrar este teorema demostraremos un lema elemental.

<u>Lema 1.3.1</u>: Excepto cuando el número complejo $\alpha = \rho\, e^{i\theta}$ es positivo, existe una sucesión finita de constantes positivas (ω_r) tal que $\Sigma \omega_r \alpha^r = o$.

<u>Demostración</u>: Si α es positivo el resultado es obvio.

Si el argumento de α es múltiplo de $\pi/2$ el resultado es trivial; de otra manera existe un entero s tal que para cuadrante hay un entero $r_i \leq s$ con $i=1,2,3,4$ y $\alpha_i = \alpha^{r_i}$ está en el i-ésimo cuadrante. Ahora, si sumamos, multiplicando por constantes positivas si es necesario, los vectores de la forma α^r, con $r \leq s$, cuyo argumento sea mayor que el de α_4 y menor que el de α_1, obtenemos un vector de la forma $t(1,0)$. Análogamente se pueden generar los vectores $t(0,1)$, $t(-1,0)$ y $t(0,-1)$, donde $t > 0$; la suma de estos vectores es cero y entonces el lema queda demostrado.

<u>Demostración del teorema 1.3.1</u>: Primero demostraremos (i) y (iii). Podemos extender E^n y A de manera única al espacio complejo de dimensión n y escoger una base canónica de Jordan en este espacio complejo de tal manera que para cada vector $x_{j,k}$ de esta base:

$$Ax_{j,k} = \lambda_j\, x_{j,k} + x_{j,k-1} \qquad j=1,\dots,\ell \;;\quad k=1,\dots,m_j .$$

$$x_{j,o} = 0 \qquad , \qquad \sum_{j=o}^{\ell} m_j = n \qquad (3.1)$$

Los vectores $x_{j,k}$ pueden ser complejos en cuyo caso aparecen como pares conjugados.

Por inducción sobre r demostraremos que

$$A^r x_{j,k} = \sum_{s=o}^{k-1} \lambda_j^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,k-s} \qquad (3.2)$$

Para $r=1$ es cierto pues

$$Ax_{j,k} = \sum_{s=o}^{k-1} \lambda_j^{1-s} \binom{1}{s} x_{j,k-s} = \lambda_j\, x_{j,k} + x_{j,k-1}$$

Supongamos ahora que (3.2) se cumple para $r-1$, entonces

$$A^r x_{j,k} = AA^{r-1}x = A \sum_{s=o}^{k-1} \lambda_j^{r-s-1} \binom{r-1}{s} x_{j,k,s} =$$

$$= \sum_{s=o}^{k-1} \lambda_j^{r-s} \binom{r-1}{s} x_{j,k-s}$$

$$= \sum_{s=o}^{k-2} \lambda_j^{r-s} \binom{r-1}{s} x_{j,k-s} + \sum_{s=o}^{k-2} \lambda_j^{r-s-1} \binom{r-1}{s} x_{j,k-s-1} + \lambda_j^{r-k+1} \binom{r-1}{k-1} x_{j,1}$$

$$= \sum_{s=o}^{k-1} \lambda_j^{r-s} \binom{r-1}{s} x_{j,k-s} + \sum_{s=1}^{k-1} \lambda^{r-s} \binom{r-1}{s-1} x_{j,k-s}$$

$$= \lambda_j^r \binom{r-1}{o} x_{j,k} + \sum_{s=1}^{k-1} + \lambda_j^{r-s} \left[\binom{r-1}{s} + \binom{r-1}{s-1}\right] x_{j,k-s}$$

$$= \sum_{s=o}^{k-1} \lambda_j^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,k-s} \quad \text{ya que} \quad \binom{r-1}{s} + \binom{r-1}{s-1} = \binom{r}{s} \quad ,$$

lo cual demuestra (3.2).

Ahora, sea $\rho_\sigma(A) = \max |\lambda_j|$ el radio espectral de A. En el caso de que $\rho_\sigma(A) = 0$ (i.e., $\lambda_j = o$, $j = 1,\ldots,\ell$), entonces A es nilpotente y tenemos que $A^r(K) = o$ para alguna r mínima. Para esta r, algún vector $\omega = A^{r-1} x \neq o, \omega \varepsilon K$ satisface $A\omega = o = \rho_\sigma(A)\,\omega$. Lo cual demuestra (i) y (iii) para este caso.

En el caso de que $\rho_\sigma(A)=\rho>o$, podemos suponer que los valores propios satisfacen la siguiente relación:

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_\gamma| > |\lambda_{\nu+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_\ell|$$

Sea $M = \max m_j \quad , \quad j = 1,2,\ldots,\nu \quad .$ Entonces

$$A^r \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} C_{j,k} x_{j,k} = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} C_{j,k} A^r x_{j,k} = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} C_{j,k} \sum_{s=o}^{k-1} \lambda_j \binom{r}{s} x_{j,k-s}$$

$$= \sum_{J} \sum_{k=1}^{M} C_{j,k} \sum_{s=o}^{k-1} \lambda_j^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,k-s} + \sum_{\tilde{J}} \sum_{k=1}^{m_j} C_{j,k} \sum_{s=o}^{k-1} \lambda_j^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,k-s}$$

donde

$$J = \{j \varepsilon \{1,2,\ldots,\ell\} \mid |\lambda_j| = \rho(A),\ M = m_j\} \quad , \quad \tilde{J} = \{1,\ldots,\ell\} - J.$$

Por una parte

$$\sum_{J} \sum_{k=1}^{M} C_{j,k} \sum_{s=o}^{k-1} \lambda_j^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,k-s} = \sum_{J} \sum_{k=1}^{M} C_{j,k} \sum_{s=o}^{k-1} (\rho e^{i\theta_j})^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,k-s}$$

$$= \sum_{J} C_{j,M} \sum_{s=o}^{M-1} (\rho e^{i\theta_j})^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,M-s} + \sum_{J} \sum_{k=1}^{M-1} C_{j,k} \sum_{s=o}^{k-1} (\rho e^{i\theta_j})^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,k-s}$$

$$= \sum_{J} C_{j,M} (\rho e^{i\theta_j})^{r-(M-1)} \binom{r}{M-1} x_{j,1} + \sum_{J} C_{j,M} \sum_{s=o}^{M-2} (\rho e^{i\theta_j})^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,M-s} +$$

$$+ \sum_{J} \sum_{k=1}^{M-1} C_{j,k} \sum_{s=o}^{k-1} (\rho e^{i\theta_j})^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,k-s}$$

$$= \sum_{J} C_{j,M} (\rho e^{i\theta_j})^{r-(M-1)} x_{j,1} + \sum_{J} C_{j,M} (\rho e^{i\theta_j})^{r-(M-1)} Q_{M-2}(r)\, x_{j,1} +$$

$$+ \sum_{J} C_{j,M} \sum_{s=o}^{M-2} (\rho e^{i\theta_j})^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,M-s} + \sum_{J} \sum_{k=1}^{M-1} C_{j,k} \sum_{s=o}^{k-1} (\rho e^{i\theta_j})^{r-s} \binom{r}{s} x_{j,k-s}$$

$$= \rho^{r}\, r^{M-1} \left(\sum_{J} C_{j,M} (\rho e^{i\theta_j})^{M-1} e^{ir\theta_j} x_{j,1} + 0\,(1)\right)$$

ya que $Q_{M-2}(r)$ es un polinomio de grado M-2 en r y $\binom{r}{s}$ es un polinomio en r de grado $S<M-1$.

Por otra parte, para toda $j \in \tilde{J}$ se cumple una de las siguientes relaciones:

a) $|\lambda_j| < \rho$

b) $|\lambda_j| = \rho$, $m_j<M$

En el caso (a) al dividir entre ρ^r y hacer que r tienda a infinito el término correspondiente tiende a 0, en el caso (b) al dividir entre r^{M-1} y como $\binom{r}{s}$ tiene grado menor que M-1, el termino correspondiente tiende a cero cuando r tiende a infinito.

Por lo tanto:

$$A^r\left(\sum_{J=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{m_j} C_{j,k}\, x_{j,k}\right) = \rho^r r^{M-1}\left(\sum_J C_{j,M}(\rho e^{i\theta j})^{M-1} e^{ir\theta_j}\, x_{j,1} + 0\ (1)\right) \quad (3.3)$$

Ahora: si $x \in K^o$, entonces $x = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{m_j} C_{j,k}\, x_{j,k}$

Supongamos que $C_{j_o, k_o} = 0$ para alguna j_o, k_o, como -- $x \in K^o$, entonces existe $\varepsilon > o$ tal que la bola con radio ε y centro en x está contenida en K y por lo tanto si escogemos δ tal que $o < \delta < \varepsilon$, el vector $z = x + \delta x_{j_o, k_o}$ está en K^o, por lo tanto K contiene vectores de la forma:

$$z = \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{m_j} C_{j,k}\, x_{j,k}$$

con $C_{j,k} \neq 0$; $j = 1,2,\ldots,\ell$ $k = 1,2,\ldots,m_j$.

Para cualquier vector de éstos consideremos la sucesión $(A^r z)$. Claramente para ninguna r, $A^r z = o$ ya que si $A^r z = o$ para alguna r entonces por (3.3) $\rho = o$. A cada término $A^r z$ le asociamos su dirección, la cual es la misma que la de $A^r z/\rho^r\, r^{M-1}$, esta dirección está en el conjunto de direcciones de K. Este conjunto es compacto ya que K es cerrado; entonces el conjunto de límites de subsucesiones de esta sucesión de direcciones (las cuales pueden ser llamadas "direcciones ω - límite") es un subconjunto (cerrado) no vacío del conjunto de direcciones de K. Los vectores con una "dirección ω-límite" tienen la forma:

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{m_j} C_{j,k}\, A^r x_{j,k}}{\rho^r\, r^{M-1}}\right) = \sum d_{j,k}\, x_{j,1} = \omega \quad (3.4)$$

con $\quad A^r x_{j,1} = \rho^r e^{i\theta jr}\, x_{j,1}$

Si estos vectores son diferentes de cero serán llamados "ω- vectores".

Por el Lema 1.3.1, para cada $\theta_\ell \neq o$ (mod 2π), i.e., cualquier λ_ℓ no positiva, podemos encontrar constantes positivas (v_r), tales que $\Sigma v_r \lambda^r{}_\ell = o$ y podemos construir el vector:

$$\omega' = \Sigma\, v_r\, A^r\, (\omega) = \Sigma\, v_r\, \Sigma\, d_k\, \lambda_k^r\, x_k$$

el cual será diferente de cero ya que $A^r \omega \neq o$ y $v_r > o$ para toda r, además

$$\omega' = \Sigma\, v_r\, A^r \omega = \Sigma\, v_r\, \Sigma\, d_k \lambda_k^r\, x_k =$$

$$= \Sigma\Sigma\, v_r\, d_k\, \lambda_k^r\, x_k = \Sigma\, d'_k\, x_r$$

donde $\quad d'_k = \Sigma\, v_r\, d_k\, \lambda_k^r$, si $d_k = o$ entonces $d'_k = o$

y $\quad d'_\ell = \Sigma\, v_r \lambda_\ell^r = o.$

Iterativamente podemos encontrar un vector con un mínimo de coeficientes d_k diferentes de cero en (3.4), si $d_k \neq o$ entonces $\lambda_k = \rho$, por lo tanto éste es un vector propio de A en K con valor propio $\rho_\sigma(A)$.

Para demostrar (ii) notamos que si esto fuera falso, entonces λ_j sería no positivo para toda $j \in J$, ya que en este - caso el grado de $\rho_\sigma(A)$ sería menor que M. Entonces por la construcción anterior podríamos producir un elemento diferente de cero con todas las constantes d_k iguales a cero. Esta contradicción demuestra (ii).

Para demostrar la parte final del teorema sea $\lambda_1 = \rho_\sigma(A)$ y normalicemos los vectores $x_{i,j}$ de tal manera que

$$Ax_{j,k} = \lambda_j x_{j,k} + \varepsilon x_{j,k-1} \qquad j=1,\dots,\ell;\ k=1,\dots,m_j \tag{3.5}$$

donde

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu = \ell \\ \lambda_1 - |\lambda_{\nu+1}| & \text{si } \nu \neq \ell. \end{cases}$$

Por hipótesis $m_1 \geq m_j$ para $j = 1,\dots,\nu$; demostraremos que el conjunto:

$$K = \{x \in E^n \,/\, x = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_{j,k} x_{j,k}, |\alpha_{j,k}| \leq \alpha_{1,k} \text{ si } k \leq m_j$$

$$|\alpha_{j,k}| \leq \alpha_{1,m_1} \text{ si } k \geq m_1,\ \alpha_{j,k} = \bar{\alpha}_{p,q} \text{ si } x_{j,k} = \bar{x}_{p,q}\} \tag{3.6}$$

es un cono sólido invariante bajo A. Claramente se ve que K es un cono. Para demostrar que es sólido sea

$$y = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \nu_{j,k} x_{j,k}$$

un elemento arbitrario de E^n , entonces

$$y = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \beta_{j,k} x_{j,k} - \sum_{k=1}^{m_j} \delta_k x_{1,k} , \tag{3.7}$$

donde

$$\beta_{j,k} = \nu_{j,k} , \quad j \neq 1$$

$$\beta_{1,k} = \begin{cases} \max\left(|\nu_{1,k}|, \{ |\nu_{j,k}|, m_j \leq k) & \text{si} \quad k \leq m_1 \\ \max\left(|\nu_{1,m_1}|, \{ |\nu_{j,k}|, m_j \leq k) & \text{si} \quad k \leq m_1 \end{cases}$$

$$\partial_k = \beta_{1,k} - \nu_{1,k}$$

La forma en que se escogieron $\beta_{j,k}$ y δ_k asegura que ambos términos en (3.7) están en K, de aquí que K reproduce a E^n y por lo tanto es sólido.

Para demostrar que K es invariante sea

$$x = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_{j,k}\, x_{j,k} \quad \varepsilon\ K$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \beta_{j,k}\, x_{j,k}$$

Por (3.5) tenemos que

$$\beta_{j,k} = \begin{cases} \alpha_{j,k}\lambda_j + \varepsilon\, \alpha_{j,k-1} & \text{si} \quad k < m_j, \\ \alpha_{j,k}\lambda_j & \text{si} \quad k = m_j. \end{cases}$$

Obviamente $\beta_{j,k} = \bar{\beta}_{p,q}$ si $x_{j,k} = \bar{x}_{p,q}$, necesitamos demostrar que

$$|\beta_{j,k}| \leq \beta_{1,k} \quad \text{si} \quad k \leq m_1$$

$$|\beta_{j,k}| \leq \beta_{1m_1} \quad \text{si} \quad k \leq m_1$$

Consideremos los siguientes casos:

i) $k < m_1$, $k < m_j$

$$|\beta_{j,k}| = |\alpha_{j,k}\lambda_j + \varepsilon\, \alpha_{j,k+1}| \leq \alpha_{1,k}\lambda_j + \varepsilon\, \alpha_{1,k+1} = \beta_{1,k}$$

ii) $k < m_1$, $k = m_j$

$$|\beta_{j,k}| = |\alpha_{j,m_j}| \leq \alpha_{1,m_j} + \varepsilon\, \alpha_{1,m_{j+1}} = \beta_{1,m_j}$$

iii) $k \geq m_1$, $k < m_j$. Como $m_1 \geq m_j$ $j = 1,\ldots,\nu$

entonces $|\lambda_j| \leq |\lambda_{\nu+1}|$ para toda j tal que

$k < m_j$, $k \geq m_1$.

así

$$|\beta_{j,k}| = |\alpha_{j,k}\lambda_j + \varepsilon\, \lambda_{1,k+1}| \leq$$

$$\leq \alpha_{1,k}(\lambda_1 - \varepsilon) + \varepsilon\, \alpha_{1,k+1} = \alpha_{1,m_1}\lambda = \beta_{1,m_1}$$

iv) $k \geq m_1$, $k = m_j$

$$|\beta_{j,k}| = |\alpha_{j,k}\lambda_j| \geq \alpha_{1,k}\lambda_1 = \beta_{1,k}$$

Entonces $A\,x \in K$, lo cual demuestra el teorema.

Un corolario a este teorema es que si A es simétrica entonces A tiene todos sus valores propios reales y por lo tanto $\rho_\sigma(A)$ o $-\rho_\sigma(A)$ son valores propios, de lo cual, aplicando el teorema, se obtiene que A o $-A$ deja invariante un cono sólido. También, toda matriz estrictamente triangular deja invariante a un cono sólido ya que todos sus valores propios son iguales a cero.

1.4. Irreducibilidad.

Si e_1, $e_2,\ldots,e_n$ son los vectores coordenados unitarios en E^n, entonces un <u>subespacio coordenado</u> es un subespacio generado por cualquier subconjunto de $e_1,\ldots,e_n$. Una matriz <u>irreducible</u>, de acuerdo con la definición clásica, es una matriz - que no deja invariante algún subespacio coordenado de dimensión menor que n. Como el hiperoctante positivo es el cono generado por los vectores $e_1,\ldots,e_n$, una matriz irreducible no negativa transforma al hiperoctante positivo en él mismo y deja ninguna cara invariante.

Si reemplazamos el hiperoctante positivo por un cono sólido arbitrario, la definición dada anteriormente nos lleva a la siguiente generalización:

<u>Definición 1.4.1</u>: Una matriz $A \geq^k 0$ es K -irreducible - si A no deja invariante alguna cara de K. Una matriz que no es K -irreducible es llamada K -reducible.

Para reforzar esta definición probaremos algunas propiedades de las matrices K -irreducibles que son ciertas para matrices no negativas irreducibles. En adelante siempre supondremos que K es un cono sólido.

<u>Teorema 1.4.1</u>: $A \geq^k 0$ es K -irreducible si y solo si ningún vector propio de A está en la frontera de K.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $A \geq^k 0$ es K-reducible y sea

$F \subset \partial K$ una cara de K invariante bajo A. Restringiendo A al subespacio H_F, A deja invariante al cono sólido F; entonces, por el Teorema 1.3.1, A restringida a H_F tiene un vector propio $x \in F$. Pero x es también un vector propio de A operando en todo el espacio y además está en ∂K. Recíprocamente, supongamos que x es un vector propio en la frontera de K, y sea F_x la cara definida para x en el Lema 1.2.4. Como $x \in F_x{}^o$ relativo a H_{F_x}, entonces para toda $y \in F_x$ existe $\alpha > o$ tal que $y \overset{k}{\leq} \alpha x$. Luego, $Ay \overset{k}{\leq} A(\alpha x) = \alpha\lambda x, \lambda \geq o$; si $\lambda = o$ entonces $o = Ay \in F_x$; de otra manera, si $\lambda > o$, entonces $(\alpha\lambda)^{-1} Ay \overset{k}{\leq} x$ y por el Lema 1.2.4, tenemos que $(\alpha\lambda)^{-1} Ay \in F_x$, por lo tanto $Ay \in F_x$. Entonces F_x es una cara invariante bajo A y por definición A es K-reducible.

El siguiente lema nos da una propiedad interesante de las matrices con conos invariantes y nos permite probar otra caracterización espectral de las matrices K -irreducibles.

<u>Lema 1.4.1</u>: Si $A \overset{k}{\geq} o$ tiene dos vectores propios en K^o, entonces A también tiene un vector propio en la frontera de K. Además, los valores propios correspondientes son iguales.

<u>Demostración</u>: Sean x_1, $x_2 \in K^o$ vectores propios de A linealmente independientes con valores propios λ_1, λ_2. Supongamos que $o \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ y sea

$$t_o = \min \{t > o \mid t\, x_2 - x_1 \in K\}$$

Como x_1, x_2 ε K^o, entonces para alguna $\alpha > o, \alpha x_2 - x_1$ ε K y como K es cerrado, entonces t_o existe y además es diferente de cero. Por la definición de t_o, el vector $x_3 = t_o x_2 - x_1$ está en la frontera de K. Si $\lambda_1 \neq o$ entonces

$$Ax_3 = t_o \lambda_2 x_2 - \lambda_1 x_1 = \lambda_1 (t_o(\lambda_2/\lambda_1) x_2 - x_1) \varepsilon K .$$

La definición de t_o implica que $\lambda_2 \geq \lambda_1$, de aquí que $\lambda_2 = \lambda_1$; por otra parte si $\lambda_1 = o$ entonces $\lambda_2 = o$ y $Ax_3 = o$. En ambos casos, x_3 es un vector propio en la frontera de K con valor propio $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$, ya que

$$Ax_3 = \lambda_1 (t_o(\lambda_1/\lambda_2) x_2 - x_1) = \lambda_1(t_o x_2 - x_1) = \lambda_3 x_3.$$

El siguiente teorema se demuestra a partir de los dos resultados previos.

<u>Teorema 1.4.2</u>: $A \overset{k}{\geq} o$ es K -irreducible si y solo si A tiene exactamente un vector propio en K y éste está en K^o.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $A \overset{k}{\geq} o$ es K -irreducible. Por los teoremas 1.3.1 y 1.4.1, A tiene un vector propio en K^o; si A tiene otro vector propio en K entonces éste también está en K^o y entonces por el Lema 1.4.1, A tiene un vector propio en ∂K, lo cual contradice que A sea K -irreducible. Por otra parte si A tiene exactamente un vector propio en K y éste está en K^o entonces por el teorema 1.4.1, A es K -irreducible.

Es de notar que el concepto de irreducibilidad depende de la matriz y del cono. Es posible que una matriz deje invariantes a dos conos y que solo sea irreducible con respecto a uno. Un ejemplo de ésto es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $K_1 = \{ (x,y) \ / \ x \geq o, \ y \geq o \}$

$K_2 = \{ (x,y) \ / \ x \geq o, \ |y| \leq x \}$

Claramente $A \geq^{k_i} 0$, $i = 1,2$.

Como $(0,1) \in \partial K_1$ y $A\,(0,1) = (0,1)$, A no es K_1 -irreducible.

Los vectores de la frontera de K_2 tienen la forma $(|x|,x)$; como $A(|x|,x) = 2(|x|,\frac{1}{2}, x)$ entonces ningún vector propio de A está en ∂K_2 y por lo tanto A es K_2 -irreducible.

Frobenius presentó la clase de matrices irreducibles no negativas porque es mayor que la clase de matrices positivas y conserva muchas de las propiedades espectrales importantes. Claramente, si A transforma a K en su interior, no puede dejar alguna cara invariante, de aquí que A sea K -irreducible. Esto es, la clase de matrices K -irreducibles es mayor que la clase de matrices que satisfacen $A >> 0$. Ciertas similaridades en propiedades espectrales de estos dos tipos de matrices son señaladas por los dos teoremas siguientes:

<u>Teorema 1.4.3</u>: Si $A \geq^k o$ es K -irreducible entonces:

i) $\rho_\sigma(A)$ es un valor propio simple y cualquier otro valor propio con el mismo módulo también es simple;

ii) existe un vector propio correspondiente a $\rho_\sigma(A)$ en K^o y ningún otro vector propio de A está en K.

Además, (i) es suficiente para que A sea K-irreducible con respecto a algún cono sólido invariante.

Demostración: Por el Teorema 1.3.1, $\rho_\sigma(A)$ es un valor propio. Supongamos que $\rho_\sigma(A)$ no es simple, entonces existen vectores x_1, x_2 linealmente independientes, con $x_1 \varepsilon K^o$ y $Ax_1 = \rho_\sigma(A)x_1$; además una de las dos siguientes relaciones se cumple:

(4.1) $Ax_2 = \rho_\sigma(A)\, x_2$

(4.2) $Ax_2 = \rho_\sigma(A)\, x_2 + x_1$,

esto es por la forma canínica de Jordan de A. Si (4.1) fuera cierto, entonces como $x_1 \varepsilon K^o$, existe t suficientemente grande de tal que $-x_2 \overset{k}{\leq} tx_1$, si hacemos $x_3 = tx_1 + x_2$ entonces x_3 es otro vector propio de A en K, esto contradice el Teorema 1.4.2. Si (4.2) se cumple y $-x_2 \varepsilon K$ entonces $A(-x_2) = -\rho_\sigma(A)x_2 - x_1, \varepsilon K$; como $-t^{-1}x_2 \overset{k}{\leq} x_1$, $-\rho_\sigma(A)x_2 - x_1 + (-t^{-1} + \rho_\sigma(A))x_2 \varepsilon K$, si $t^{-1} \geq \rho_\sigma(A)$, i.e., $-t^{-1}x_2 - x_1 \varepsilon K$, se contradice que $x_1 + t^{-1}x_2 \varepsilon K$; por otra parte, si $t^{-1} < \rho_\sigma(A)$ entonces $o \overset{k}{\leq} x_1 + t^{-1}x_2 \overset{k}{\leq} x_1 + \rho(A)x_2$, lo cual contradice que $-\rho_\sigma(A)x_2 - x_1 \varepsilon K$. Por lo tanto si (4.2) se cumple entonces $-x_2 \notin K$; como en el Lema 1.4.1, podemos definir

$$t_o = \min \{t > o \mid tx_1 - x_2 \varepsilon K\}$$

y como $-x_2 \notin K$ entonces $t_o \neq 0$. Si $\rho_\sigma(A) = 0$ entonces $Ax = 0$, con $x \in K^o$ y por lo tanto $A(K) = 0$ contradiciendo la K -irreducibilidad de A. Entonces $\rho_\sigma(A) \neq 0$, esto implica que

$$A(t_o x_1 - x_2) = t_o\, \rho_\sigma(A)x_1 - \rho_\sigma(A)x_2 - x_1 =$$

$$= \rho_\sigma(A) \left((t_o - \frac{1}{\rho_\sigma(A)})x_1 - x_2\right) \in K.$$

lo cual contradice la definición de t_o. De **todo** esto concluimos que $\rho_\sigma(A)$ es simple. Por la parte (ii) del Teorema 1.3.1, cualquier valor propio con el mismo módulo también es simple. La segunda parte del teorema es una consecuencia del Teorema 1.4.2. Para demostrar la parte final del teorema usaremos la demostración del Teorema 1.3.1. En este caso el cono definido en esa demostración solamente contiene elementos de la forma $\alpha x_1 + y$, donde -- $\alpha = \alpha_{1,1}$, $x_1 = x_{1,1}$

$$y = \sum_{k=2}^{m_1} \alpha_{1,k}\, x_{1,k} + \sum_{j=2}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_{j,k}\, x_{j,k}$$

Como $\rho_\sigma(A)$ es simple entonces $m_1 = 1$ y por lo tanto

$$|\alpha_{jk}| \leq \alpha_{11} \qquad \text{si} \quad k \leq m_1 = 1$$

$$|\alpha_{j,k}| \leq \alpha_{1,m_1} = \alpha_{1,1} \quad \text{si} \quad k \geq m_1 = 1$$

si $\alpha = o$ entonces $|\alpha_{j,k}| \leq \alpha_{1,1} = o$, i.e., $y = o$.

De aquí que ningún otro vector propio diferente de x_1 puede estar en K puesto que $Ax = \alpha\rho_\sigma(A)\, x_1 + Ay$ y $Ay \neq \rho_\sigma(A)\, y$. Entonces por el Teorema 1.4.2 A es irreducible con respecto a este cono.

Reemplazando la hipótesis de que A sea K -irreducible por la de que $A >>^k o$, es posible hacer una afirmación más fuerte acerca de $\rho_\sigma(A)$.

Teorema 1.4.4: Si $A >>^k o$, entonces

i) $\rho_\sigma(A)$ es un valor propio simple, mayor que la magnitud de cualquier otro valor propio,

ii) un vector propio correspondiente a $\rho_\sigma(A)$ está en K^o.

Además, la condición (i) es suficiente para que A transforme a un cono sólido en su interior.

Demostración: La mayor parte del teorema se sigue como un corolario del teorema anterior. De hecho solamente tenemos que demostrar la última parte de (i) y la afirmación final.

Sea λ_2, cualquier valor propio diferente de $\rho_\sigma(A)$, con vector propio x_2 y supongamos que $|\lambda_2| = \rho_\sigma(A)$. Por simplicidad supongamos que $\rho_\sigma(A) = 1$, en cuyo caso $\lambda_2 = e^{i\theta}$ para alguna θ. Vamos a demostrar que para alguna ϕ, $\text{Re}\,(e^{i\phi}x_2)\varepsilon K$ y de aquí obtendremos una contradicción. Para cualquier ϕ, $\text{Re}\,(e^{i\phi}x_2)\varepsilon K$ o $\text{Re}\,(e^{i\phi}x_2)\notin K$, en este último caso, como en el Lema 1.4.1, podemos definir:

$$t_\phi = \min\{t>o \mid tx_1 + \text{Re}(e^{i\phi}x_2)\varepsilon K\}$$

donde $x_1 \;\varepsilon\; K^o$ es el vector propio correspondiente a $\rho_\sigma(A)$.

Si

entonces y_ϕ está en la frontera de K y

$$Ay_\phi = t_\phi \; x_1 + \mathrm{Re}\,(e^{i(\phi+\theta)}x_2)\varepsilon\, K^o.$$

De aquí que $t_\phi > t_{\phi+\theta}$ si $t_\phi > o$ y entonces $\inf(t_\phi) = o$. De donde se concluye que para alguna ϕ_o, $y_o + \mathrm{Re}(e^{i\phi_o}x_2)\varepsilon K$ ya que K es cerrado y existe una sucesión (y_{ϕ_n}) tal que - $y_{\phi_n} \to y_{\phi_o}$.

Ahora, si (ξ_k) es cualquier conjunto finito de constantes positivas, entonces $\Sigma\xi_k A^k y_o = o$ implica que $y_o = o$. Por el Lema 1.3.1, si $\theta \not\equiv o$ (mod. 2π), entonces existe un conjunto de números positivos (ξ_k) tales que $\Sigma\xi_k\, e^{ik\theta} = o$. De aquí que

$$\Sigma\xi_k A^k y_o = \Sigma\xi_k\, \mathrm{Re}(e^{ik\theta}\, e^{i\phi_o}\, x_2) =$$

$$= \mathrm{Re}\,(\Sigma\xi_k\, e^{ik\theta}\, e^{i\phi_o}\, x_2) = 0$$

esto implica que $y_o = o$, i.e., $\alpha_j \cos\phi_o - \beta_j \operatorname{sen}\phi_o = 0$ donde $x_2(j) = \alpha_j + i\,\beta_j$, por lo tanto si hacemos

$$e^{i(\phi_o + \pi/2)}x_2 = y_2$$

entonces y_2 es real. Como

$$A\, y_2 = A\, e^{i(\phi_o + \pi/2)}x_2 = \lambda_2\, e^{i(\phi_o + \pi/2)}x_2 = \lambda_2\, y_2$$

donde $|\lambda_2| = 1$, claramente $\lambda_2 = \pm 1$ ya que $A\, y_2$ es real.

Supongamos que $y_2 \notin K$, entonces podemos definir

$$t_o = \min\,\{t > o \;/\; t\, x_1 + y_2\, \varepsilon\, K\}$$

consecuentemente, $t_o\, x_1 + y_2 \in \partial K$,

$$A^2\,(t_o\, x_1 + y_2) = t_o\, x_1 + y_2 \in K^o$$

lo cual es una contradicción.

Si $y_2 \in K$ entonces $-y_2 \notin K$ y análogamente llegamos a otra contradicción. Por lo tanto $|\lambda_2| < \rho_\sigma(A)$.

Para demostrar la parte final del teorema otra vez usaremos la notación usada en la demostración del Teorema 1.3.1. Supongamos que (i) se cumple, entonces $\rho_\sigma(A)>0, \nu = 1$, $m_1 = 1$, y el cono (3.6) se transforma en:

$$K = \{x \mid x = \alpha_1\, x_1 + \sum_{j=2}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_{j,k}\, x_{j,k},\ |\alpha_{j,k}| \leq \alpha_1\}$$

entonces si $x \in K$

$$Ax = \beta_1\, x_1 + \sum_{j=2}^{\ell} \sum_{k=1}^{m_j} \beta_{j,k}\, x_{j,k}\ ,$$

donde

$$\beta_1 = \lambda_1\ \alpha_1$$

$$\beta_{j,k} = \begin{cases} \alpha_{j,k}\lambda_j + \varepsilon\, \alpha_{j,k+1} & \text{si } k<m_j\ ,\ j=2,\ldots,\ell \\ \alpha_{j,k}\lambda_j & \text{si } k=m_j\ ,\ j=2,\ldots,\ell \end{cases}$$

Podemos hacer $\varepsilon < \lambda_1 - |\lambda_2|$. De aquí que si $k<m_j$

$$|\beta_{j,k}| = |\alpha_{j,k}\, \lambda_j + \varepsilon\, \alpha_{j,k+1}| \leq |\alpha_{j,k}\lambda_j| + |\varepsilon \alpha_{j,k+1}|$$

$$\leq \alpha_1 |\lambda_j| + \varepsilon\, \alpha_1 < \alpha_1\, (\lambda_1 - \varepsilon) + \varepsilon\, \alpha_1 = \alpha_1 \lambda_1 = \beta_1\quad ;$$

si $k = m_j$

$$|\beta_{j,k}| = |\alpha_{j,k}\lambda_j| < \alpha_1\lambda_1 = \beta_1$$

Como $\beta_{j,k}$ es estrictamente menor que β_1 para toda $j = 2,3,\ldots,\ell$; $k = 1,2,\ldots,m_j$ claramente $A\,x \in K^o$.

<u>Teorema 1.4.5</u>: Si $0 \leq^k A \leq^k B$ y A es K-irreducible entonces B también es K-irreducible.

<u>Demostración</u>: Supongamos que B es K-reducible. Entonces B debe tener un vector propio $x \in \partial K$, usando el Lema 1.2.4, si $y \in F_x \subset H_{F_x}$ entonces como $x \in F_x{}^o$ relativo a H_{F_x}, existe $\alpha > o$ tal que $y \leq^k \alpha x$, luego $Ay \leq^k \alpha\, Ax \leq^k \alpha\, Bx = \alpha\lambda x \in F_x$, de aquí que $A\,y \in F_x$, i.e., A deja invariante a F_x y por lo tanto es K-reducible.

Este resultado nos permite extender más aún nuestra generalización de la teoría de Perron-Frobenius.

<u>Teorema 1.4.6</u>: Si $o \leq^k A \leq^k B$, donde A es K-irreducible y $A \neq B$ entonces $\rho_\sigma(A) < \rho_\sigma(B)$.

<u>Demostración</u>: Por el Teorema 1.4.5, B también es K-irreducible, entonces por el Teorema 1.4.3 existe $y_1 \in K^o$ con $B\,y_1 = \rho_\sigma(B)\,y_1$. Sea $x_1 \in K$ tal que $Ax_1 = \rho_\sigma(A)\,x_1$, por hipótesis tenemos:

$$B\,x_1 \geq^k Ax_1 = \rho_\sigma(A)\,x_1 \tag{4.3}$$

Sea

$$t_o = \min\{t>o \;/\; t\, y_1' - x_1 \,\varepsilon\, K\} \qquad (4.4)$$

como K es cerrado, t_o existe y es diferente de cero, además $\rho_\sigma(A) \neq 0$ ya que A es K-irreducible. De (4.3) tenemos que

$$o \overset{k}{\leq} B(t_o\, y_1 - x_1) = t_o\, B\, y_1 - Bx_1 \overset{k}{\leq}$$

$$\overset{k}{\leq} t_o\, \rho_\sigma(B)\, y_1 - \rho_\sigma(A)\, x_1 = \rho_\sigma(A)\, (t_o \frac{\rho_\sigma(B)}{\rho_\sigma(A)}\, y_1 - x_1)$$

(4.4) implica que

$$\rho_\sigma(B) \geq \rho_\sigma(A) \qquad (4.5)$$

Supongamos que $\rho_\sigma(B) = \rho_\sigma(A) = \lambda$. Si

$$y_1 = \alpha x_1, \qquad (4.6)$$

$\alpha > o$, entonces $A\alpha x_1 = \alpha\lambda x_1 = \lambda y_1 = B\, y_1 = B\alpha x_1$, luego $(B - A)\, x_1 = o$. Como $x_1 \,\varepsilon\, K^o$, para toda $z \,\varepsilon\, K$ existe $\beta > o$, tal que $(B - A)\, z \overset{k}{\leq} \beta(B - A)\, x_1$, por lo tanto $A = B$. Esta contradicción impliaa que (4.6) no puede cumplirse, i.e., x_1 y y_1 son linealmente independientes. Si hacemos

$$z = t_o\, y_1 - x_1 \,,$$

entonces $z \neq o$, por (4.4) $z \,\varepsilon\, \partial\, k$ y

$$Az = t_o\, A\, y_1 - A\, x_1 \,.$$

Si F_z es la cara que, por el Lema 1.2.4, corresponde a z, entonces F_z es invariante bajo A, ya que para cualquier $x \varepsilon F_z$ existe $\nu > o$ tal que $x \overset{k}{\leq} \nu z$. Luego $Ax \overset{k}{\leq} \nu\, Az \overset{k}{\leq} \nu\lambda z \varepsilon F_z$ impli ca que $Ax \varepsilon F_z$. Esto contradice que A es K -irreducible y por lo tanto $\rho_\sigma(B) > \rho_\sigma(A)$.

El teorema anterior se debilita si A no es K -irreducible.

<u>Corolario 1.4.1</u>: Si $o \leq^k A \leq^k B$, entonces $\rho_\sigma(A) \leq \rho_\sigma(B)$.

<u>Demostración</u>: Sea $C >>^k o$ y definamos $A_t = A + t\,C$, $B_t = B + t\,C$, $t>o$. Para cualquier $x \varepsilon K$,

$$A_t x = Ax + t\,Cx \;\varepsilon\; K^o ,$$

ya que $A\,x \;\varepsilon\; K$ y $C\,x \;\varepsilon\; K^o$, entonces $A_t >>^k o$; de aquí que A_t sea K -irreducible para toda $t>o$.

Por el teorema anterior

$$\rho_\sigma(A_t) < \rho_\sigma(B_t)$$

y haciendo $t \to o$ tenemos que

$$\rho_\sigma(A) \leq \rho_\sigma(B).$$

En la teoría clásica, de las definiciones se deduce inmediatamente que si una matriz A es positiva, no negativa o irreducible, entonces también la matriz transpuesta ${}^tA$ lo es; el -- mismo tipo de afirmación puede ser hecho acerca de $A \geq^k o$, $A >>^k o$ o $A \geq^k o$ y K -irreducible, debido a las caracterizaciones espectrales dadas en los teoremas 1.3.1, 1.4.3 y 1.4.4. El cono que A deja invariante puede no ser el mismo que ${}^tA$ deja invariante. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$K = \{(x,y) \mid 2|y| \leq x,\ x > o\}, \quad \text{entonces} \quad A \geq^{k} o$$

ya que

$$Az = (2x + y,\ y), \quad 2|y| \leq x \leq 2x + y.$$

Pero K no es invariante bajo ${}^{t}A$ ya que

$${}^{t}Az = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x+y \end{pmatrix},$$

si $z = (1, 1/2)$, ${}^{t}Az = (2, 3/2)$ y $2|y| = 3 > 1 = x$.

El resultado que puede ser demostrado es el siguiente:

<u>Teorema 1.4.7</u>: Si $A \geq^{k} o$, entonces existe un cono sólido $\tilde{K}$ tal que ${}^{t}A \geq^{\tilde{k}} o$. El mismo tipo de resultado se obtiene si $A \geq^{k} o$ y K -irreducible o $A >>^{k} o$.

<u>Demostración</u>: Usando el hecho de que A y ${}^{t}A$ tienen los mismos valores propios vemos que este teorema se deduce fácilmente de los Teoremas 1.3.1, 1.4.3 y 1.4.4.

Para concluir esta sección mostraremos la relación entre K -irreducibilidad y otros dos conceptos.

Krasnosel'skii [6] ha demostrado un resultado similar al Teorema 1.4.3 usando u_o -positividad en lugar de K -irreducibilidad. Una matriz $A \geq^{k} o$ es llamada u_o -positiva si para algún vector $u_o \varepsilon K$ y cualquier $x \varepsilon K$ existen constantes $\alpha(x) > o$, -- $\beta(x) > o$ y un entero $k(x)$ tales que

$$\alpha(x)\, u_o \leq^{k} A^{k} x \leq^{k} \beta(x)\, u_o$$

Krasnosel'skii demuestra que si A es una matriz u_o - positiva, entonces $\rho_\sigma(A)$ es un valor propio simple. Entonces, por los Teoremas 1.3.1 y 1.4.3, existe un cono sólido $\tilde{K}$, posiblemente diferente de K, tal que A es $\tilde{K}$-irreducible. El recíproco es falso, como lo muestra el siguiente ejemplo: la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es irreducible puesto que: $A(1,0) = (0,1)$, $A(0,1) = (1,0)$ y $A(1,1) = (1,1)$, i.e., tiene un vector propio en K^o y ninguno en ∂K. Como $A(K^o) \subset K^o$ entonces no existen constantes $\beta(x)$, $k(x)$, tales que $A^k x \leq^k \beta(x) u_o$ para $u_o \in \partial K$ y para toda $x \in K^o$. Análogamente, $A(\partial K) \subset \partial K$ implica que no existen constantes $\alpha(x)$, $k(x)$, tales que $\alpha(x) u_o \leq^k A^k x$ para $u_o \in K^o$ y para toda $x \in \partial K$. Por lo tanto A no es u_o -positiva.

Shaefer [8] probó un resultado que es muy similar al Teorema 1.4.3, para operadores casi interiores en un espacio de Banach. Esta propiedad puede ser definida de la siguiente manera:

$A \geq^k o$ es casi interior si para alguna $\lambda > \rho_\sigma(A)$

$$A(\lambda I - A)^{-1} >>^k o.$$

Antes de demostrar que este concepto es equivalente a K-irreducibilidad, necesitamos otro lema básico acerca de las matrices K-irreducibles.

Lema 1.4.2: Si $A \geq^{k} o$ es K -irreducible, entonces -- $(I + A)^{n-1} >>^{k} o$, (n es la dimensión del espacio).

Demostración: Sea y un elemento arbitrario, diferente de cero en ∂K y sea F_y la cara que, por el Lema 1.2.4, corresponde a y. Como A es K -irreducible $Ay \notin F_y$, de aquí que

$$(I + A)\, y \notin H_{F_y} .$$

De hecho, si $y_1 = (I + A)y$ no está en K^o, entonces tiene que estar en una cara F_1 , la dimensión de H_{F_1} debe ser mayor que la dimensión de H_{F_y} . Repitiendo este argumento se demuestra que $(I + A)^k y \varepsilon K^o$ para alguna $k \leq n-1$; por otra parte, si $x \in K^o$ entonces $(I + A) x \in K^o$. Por lo tanto $(I+A)^{n-1} >>^{k} o$.

Teorema 1.4.8: $A \geq^{k} o$ es K - irreducible si y solo si es casi interior.

Demostración: Si $\tilde{A} = A\,(\lambda I-A)^{-1} >>^{k} o$ para alguna λ, entonces $\tilde{A}$ es K -irreducible. Pero como $\tilde{A}$ y A tienen los mismos vectores propios, entonces, por el Teorema 1.4.2, $\tilde{A}$ es también K -irreducible. Recíprocamente, si A es K -irreducible entonces para toda $\lambda > \rho(A)$, $(\lambda I-A)^{-1}$ existe y además

$$A(\lambda I-A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k} \geq^{k} \frac{A}{\lambda}\,(I+\frac{A}{\lambda}+\dots+\frac{A^{n-1}}{\lambda^{n-1}}) \geq^{k} \alpha\, A(I + A)^{n-1} ,$$

donde α es una constante positiva que depende de λ. Por el Lema 1.4.2, $(I + A)^{n-1} >>^{k} o$, entonces si demostramos que $x >>^{k} o$ implica $Ax >>^{k} o$, el teorema quedará demostrado. Supongamos que

$x_o \varepsilon K^o$ y $Ax\varepsilon\partial K$, como A es K-irreducible, existe $x_1\varepsilon$ K^o tal que $Ax_1 = \rho_\sigma(A)\, x_1$, y como $x_o\varepsilon K^o$ entonces $x_1 \overset{k}{\leq} \alpha x_o$ para alguna $\alpha>o$. Esto implica que $\rho_\sigma(A)\, x_1 = Ax_1 \overset{k}{\leq} \alpha x_o \varepsilon \partial K$. Luego - $x_1 \varepsilon \partial K$, lo cual es una contradicción que demuestra el teorema.

1.5. Aplicaciones. Algunas aplicaciones importantes de la teoría de Perron-Frobenius son los teoremas de comparación para procesos iterativos, como son descritos por Varga [9]. Estos resultados son válidos solamente para ciertas matrices irreducibles. Usando la discusión precedente, podemos generalizar muchos de estos teoremas para incluir una amplia clase de - problemas. A continuación daremos algunos resultados importantes:

Sea $B=B_1+B_2$ una matriz $n \times n$, $B_i \overset{k}{\geq} o$, $i=1,2$ y sean

$$m(\lambda) = \rho_\sigma(\lambda B_1+B_2)$$

$$n(\lambda) = \rho_\sigma(B_1+\lambda B_2)$$

dos funciones reales de variable real.

Si B es K-irreducible entonces por el Teorema 1.4.5, λB_1+B_2 y $B_1+\lambda B_2$ son K-irreducibles para toda $\lambda>o$. Por el Teorema 1.4.6 $m(\lambda)$ y $n(\lambda)$ son estrictamente crecientes. Por otra parte si B es K-reducible, por el Corolario 1.4.1, $m(\lambda)$ y $n(\lambda)$ son no decrecientes.

Teorema 1.5.1: Sea $B = B_1 + B_2$ una matriz $n \times n$ con $B_1 \neq 0$, $\rho_\sigma(B_1)<1$ y $B_i \overset{k}{\geq} o$, donde K es un cono sólido y supongamos que B es K - irreducible. Entonces la matriz ---- $H = (I-B_1)^{-1} B_2$ existe y exactamente una de las siguientes relaciones se cumple:

$$\rho_\sigma(H) = \rho_\sigma(B) = 1$$

$$\rho_\sigma(H) < \rho_\sigma(B) < 1$$

$$\rho_\sigma(H) > \rho_\sigma(B) > 1$$

<u>Demostración</u>: Como $\rho_\sigma(B_1)<1$ entonces $(I-B_1)^{-1}$ existe y como K es cerrado

$$(I-B_1)^{-1} B_2 = B_2 + B_1 B_2 + \dots \geq^k o$$

Supongamos que $\tau = \rho_\sigma(B) \geq 1$ entonces

$$(I-B_1)^{-1} B_2 \geq^k \frac{1}{\tau} (I - \frac{B_1}{\tau})^{-1} B_2$$

Por el Corolario 1.4.1

$$\rho_\sigma((I-B_1)^{-1} B_2) \geq \rho_\sigma((I- \frac{B_1}{\tau})^{-1} B_2) \geq 1, \qquad (5.1)$$

ya que existe $x \in K^o$ tal que $(B_1 + B_2)x = \tau x$, i.e.,

$$\frac{1}{\tau} B_2 x = x - \frac{1}{\tau} B_1$$

$$\frac{1}{\tau} (I - \frac{B_1}{\tau})^{-1} B_2 x = x$$

Por otra parte si $\rho_\sigma(B)<1$ y $\rho_\sigma((I-B_1)^{-1} B_2) = o$

tenemos

Entonces, podemos suponer que $\rho_\sigma(H) \neq o$, i.e., existe $x \varepsilon K$ tal que $(I - B_1)^{-1} B_2 x = \lambda x$, $\lambda \neq o$.

Podemos escribir esto de las siguientes maneras:

$$(\lambda B_1 + B_2) x = \lambda x$$

$$(B_1 + \frac{1}{\lambda} B_2) x = x$$

como $\lambda B_1 + B_2$ y $B_1 + \frac{1}{\lambda} B_2$ son K-irreducibles y $x \varepsilon K$ entonces $x \varepsilon K^o$, y

$$\rho_\sigma(\lambda B_1 + B_2) = \lambda \tag{5.2}$$

$$\rho_\sigma(B_1 + \frac{1}{\lambda} B_2) = 1 \tag{5.3}$$

i.e., $m(\lambda) = \lambda$ y $n(1/\lambda) = 1$.

Si $\rho_\sigma(B) = 1$, entonces $n(1) = 1$ y como $n(\alpha)$ es monótona creciente tenemos que $\lambda = 1$.

Ahora, supongamos que $o<\rho_\sigma(B)<1$, como $n(1)=\rho_\sigma(B)>1$ y $n(1/\lambda) = 1$, tenemos que $1/\lambda>1$ o $o<\lambda<1$. Pero como $m(\alpha)$ es también estrictamente creciente y $m(1) = \rho_\sigma(B)$ se tiene que, por (5.2)

$$o < \lambda < \rho_\sigma(B) < 1.$$

Análogamente, supongamos que $\rho_\sigma(B)>1$, entonces $n(1) = \rho_\sigma(B) > 1$ y como $n(\frac{1}{\lambda}) = 1$ tenemos que $\frac{1}{\lambda} < 1$ i.e., $\lambda>1$. Además $m(\lambda) = \lambda$ y $m(1) = \rho_\sigma(B)$ implican que

$$\lambda = m(\lambda) > m(1) = \rho_\sigma(B)$$

Lo cual demuestra el teorema.

Si B no es K -irreducible, no se pueden demostrar las desigualdades estrictas. De hecho, se transforma en el siguiente teorema:

<u>Teorema 1.5.2</u>: Si $B = B_1 + B_2$, donde $B_i \overset{k}{\geq} 0$, $\rho_\sigma(B_1)<1$, $B_1 \neq 0$, entonces $H = (I - B_1)^{-1} B_2$ existe, y además

$$\rho_\sigma(H) \leq \rho_\sigma(B) \leq 1 \quad \text{o} \quad \rho_\sigma(H) \geq \rho_\sigma(B) \geq 1$$

<u>Demostración</u>: Esta es análoga a la del Teorema 1.5.1, tomando en cuenta que en este caso las funciones $m(\lambda)$ y $n(\lambda)$ son no decrecientes.

CAPITULO II.

VECTORES PROPIOS POSITIVOS DE FUNCIONES QUE PRESERVAN UN ORDEN

2.1. INTRODUCCION

En este capítulo analizaremos condiciones bajo las cuales un operador tiene un vector propio en un cono en un Espacio de Banach. El problema de encontrar soluciones diferentes de cero de la ecuación

$$A(\phi) = \lambda \phi, \qquad (*)$$

es muy importante en muchos problemas físicos, por ejemplo, - aquellos de la mecánica relacionados con la determinación del principio de la inestabilidad, llevan a problemas en la existencia de funciones propias (soluciones diferentes de cero de la ecuación (*)).

La mayoría de los resultados obtenidos anteriormente para operadores positivos [6], [7] se refieren a operadores lineales o completamente continuos.

Como las ecuaciones no lineales y discontinuas aparecen en muchos problemas físicos, no supondremos ni linealidad ni - continuidad para basarnos fuertemente en la preservación del or den inducido por el cono. Como una aplicación demostraremos la existencia de un vector propio positivo para un problema de Sturm-Liouville discontinuo.

Los resultados dados en este capítulo son debidos a H. Schneider y R.E.L. Turner [2], Además de los teoremas de existencia, se da una demostración de que el radio espectral está en el espectro de un operador lineal positivo y se generalizan los teoremas de comparación de los radios espectrales para operadores en un espacio de Banach.

La definición de cono dada en el Capítulo I, difiere a la que daremos a continuación, pero si añadimos a ésta la condición de normalidad (§ 2.2), entonces los dos conceptos resultan ser equivalentes en espacios de dimensión finita.

2.2. Vectores propios positivos de funciones que preservan un orden

Sea X un espacio de Banach real con norma $|| \quad ||$. Un cono K en X es un conjunto convexo y cerrado tal que:

i) $K + K = K$

ii) $\alpha K \subset K$, $\alpha > o$.

Decimos que un cono K es normal si existe $\delta > o$ Tal que para toda $x, y \in K$, $|| x + y || \geq \delta \ || x ||$. Si $X = E^n$ entonces K es normal si y solo si $K \cap - K = \{o\}$, por lo tanto el concepto de cono normal coincide con el de cono, dado en el -

Capîtulo I.

Para ver que no todo cono es normal sea $X = \ell^2(\mathbb{C})$, y consideremos los conos

$$K_n = \{z\varepsilon\mathbb{C} \ / \ -\theta_n \leq \arg \leq \theta_n,\ \theta_n = n\pi/2n+1\}\ ,\ n = 1,2,3,\ldots$$

Definimos:

$$\{ K = \ z = (z_1, z_2, \ldots) \ / \ z\varepsilon\Big(\prod_{n\,\varepsilon N} K_n\Big) \cap \ \ell^2\}\ ,$$

Se hacemos

$$\bar{z}_1 = \{z_1\ ,\ \frac{z_1}{2}, \ldots\} \qquad \bar{w}_1 = \{w_1\ , \frac{w_1}{2}, \ldots\}$$

$$\bar{z}_2 = \{o\ ,\ \frac{z_2}{2}, \ldots\} \qquad \bar{w}_2 = \{o,\ \frac{w_2}{2}, \ldots\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\bar{z}_m = \{o, \ldots, \frac{z_m}{m}\ ,\ \frac{z_m}{m+1}, \ldots\} \ \bar{w}_m = \{o, \ldots, o,\ \frac{w_m}{m}\ ,\ \frac{w_m}{m+1}\ ,\ \ldots\}$$

donde

$$z_i,\ w_i\ \varepsilon\ K_i \quad y \quad |z_i| = |w_i| = 1$$

Entonces

$$||\bar{z}_m|| = |z_m| \ \Big(\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{K^2}\Big)^{1/2}\ ,\ ||\bar{w}_m|| = |w_m| \ \Big(\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}$$

Además tenemos que

$$||\bar{z}_m + \bar{w}m|| = |z_m + w_m| \ \Big(\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}$$

$$\lim_{n\to\infty} ||\bar{z}_m + \bar{w}_m|| = o$$

i.e., K no es normal.

Decimos que K reproduce a X si cualquier $z \in K$ puede ser escrita en la forma $z = x - y$ con $x, y \in K$.

Los resultados demostrados en los Lemas 1.2.1 y 1.2.2 también son válidos para cualquier espacio de Banach; omitiremos las demostraciones de los resultados correspondientes ya que son idénticas a las demostraciones de esos lemas.

Lema 2.2.1: Si K es un cono que reproduce a X, entonces existe una constante $\eta > o$ tal que cada $x \in X$ tiene una representación $x = x_1 - x_2$, $x_1, x_2 \in K$ con $||x_i|| \leq \eta ||x||$.

Demostración: Como la función $d: K \times K \to X$, definida por $d(x,y) = x - y$ es sobre, entonces por una modificación del teorema de la función abierta, existe $\delta > o$ tal que

$$B_\delta \subset d\,(B_1 \cap K \times B_1 \cap K)$$

Por lo tanto, para cada $x \in X$

$$B_{||x||} \subset d(B_{\frac{||x||}{\delta}} \cap K \times B_{\frac{||x||}{\delta}} \cap K)$$

i.e.,

$$||x_i|| \leq \frac{||x||}{\delta}, \quad i = 1,2$$

Donde B_δ es la bola cerrada de radio δ con centro en el origen.

Definición 2.2.1: Una cara es un cono $F \subset K$ tal que para toda $x \in F$, $y \in K$ con $y \overset{k}{\leq} x$, entonces $y \in F$.

Ahora mostraremos la relación entre esta definición y la definición de cara dada en el Capítulo I.

Supongamos que $X = E^n$ y sea F una cara de K de acuerdo con la definición 2.2.1, supongamos que $F \neq K$. Si $F \not\subset \partial K$, sea $x \in F \cap K^o$, entonces para toda $y \in K$, existe $\alpha > o$ tal que $\alpha y \stackrel{k}{\leq} x$; luego $y \in F$ y $K \subseteq F$ lo cual contradice que $F \neq K$, por lo tanto $F \subset \partial K$.

Por el Teorema 1.2.1 F está generada por sus vectores extremos. Si $x \in F$ no es vector extremo de K, entonces $x = u + v$, con $u, v \in K$ linealmente independientes de x, como $u \stackrel{k}{\leq} x$, $v \stackrel{k}{\leq} x$ entonces u,v F, lo cual implica que x no es vector extremo de F y entonces F es un subcono extremo. De esto concluimos que F es una cara de acuerdo con la definición del Capítulo I. Más aún, supongamos que existe otra cada $F_1 \supset F$ tal que si $x \in F^o$ relativo a H_F entonces $x \in F_1{}^o$ relativo a H_{F_1}, esto implica que para cualquier $y \in F_1$ existe $\alpha > o$ tal que $\alpha y \stackrel{k}{<} x$ y por lo tanto $y \in F$, i.e., $F = F_1$. De esto concluimos que F es la cara que, por el Lema 1.2.4, corresponde a cualquier $x \in F^o$ relativo a H_F.

Ahora, supongamos que F es una cara dada por el Lema - 1.2.4 correspondiente a alguna $y \in \partial K$. Entonces si $x \stackrel{k}{\leq} z$, $x \in K$, $z \in F$, existe $\alpha > o$ tal que $o \stackrel{k}{\leq} x \stackrel{k}{\leq} z \stackrel{k}{\leq} \alpha y$; la parte (iii) de ese lema implica que $x \in F$. Por lo tanto F es una cara de acuerdo con la Definición 2.2.1.

Para ver que las dos definiciones no son equivalentes consideremos el siguiente ejemplo:

Sea K el cono generado por los siguientes vectores en $\mathbb{R}^4$: $x_1 = (0,1,2,0)$, $x_2 = (0,1,4,0)$, $x_3 = (1,1,2,0)$, -- $x_4 = (1,1,4,0)$, $x_5 = (0,0,0,1)$; claramente estos son vectores extremos de K; el cono generado por los vectores x_1 y x_4 es una cara de acuerdo con la definición del Capítulo I pero no de acuerdo a la Definición 2.2.1.

Aunque las definiciones no son equivalentes, todos los resultados que obtengamos usando la Definición 2.2.1 serán válidos si utilizamos la definición dada en el Capítulo I, cuando $X = E^n$.

En adelante siempre supondremos que K es un cono normal que reproduce a X.

<u>Lema 2.2.2</u>: Para cada $x \in K$, el conjunto

$$F(x) = \{y \in K \mid \exists \alpha > o,\ \alpha y \overset{k}{\leq} x\}$$

es una cara.

<u>Demostración</u>: Claramente $F(x) + F(x) = F(x)$, $\alpha F(x) \subset F(x)$. Para demostrar que $F(x)$ es cerrado consideremos $o \neq y \in \overline{F(x)}$, entonces existe una sucesión $(y_n) \subset F(x)$ tal que $y_n \to y$ y -- $||y_n|| \leq M$ para una constante M. Para cada y_n existe $\alpha_n > o$, tal que $\alpha_n y_n \overset{k}{\leq} x$. Sea $\alpha = \inf \alpha_n$, supongamos que $\alpha \neq o$, entonces como K es cerrado $\alpha y \overset{k}{\leq} x$ y por lo tanto $y \in F(x)$. Si $\alpha = o$ entonces existe una subsucesión (α_{n_k}) tal que $\alpha_{n_k} \to o$; por el Lema 2.2.1 tenemos que si

$$\alpha_{n_k} y_{n_k} = \alpha_{n_k} y_{n_k} - y + y = y - (y - \alpha_{n_k} y_{n_k})$$

entonces

$$||y|| \leq \eta\ ||\alpha_{n_k}\ y_{n_k}|| \leq \eta\ \ \alpha_{n_k}\ M,$$

y por lo tanto

$$||y|| \ \leq\ \lim \eta\ \ \alpha_{n_k}\ M = 0$$

lo cual contradice que $y \neq 0$.

Si en un cono K toda cadena de caras

$$0 \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \ \ldots$$

termina en K después de un número finito de pasos, decimos que K satisface la condición de cadenas finitas.

En este caso la <u>longitud de una cadena</u> es el número de caras de la cadena incluyendo 0 y K.

Por ejemplo, si H es un espacio de Hilbert, el conjunto

$$K = \{x|\ (x|x_o) \geq \alpha||x||.||x_o||\}$$

para x_o fijo y $o< \alpha<1$, es un cono. Sean $x, y \varepsilon K$, entonces

$$||x+y||.||x_o|| \geq |(x+y|x_o)| = (x+y|x_o) =$$

$$= (x|x_o) + (y|x_c) \geq (x|x_o) \geq \alpha||x||.||x_o||$$

i.e., K es normal. Es claro que

$$\partial K = \{x \varepsilon K\ |(x|x_o) = \alpha||x||.||x_o||\}$$

$$K^o = \{x \varepsilon K\ |(x|x_o) > \alpha\ ||x||.||x_o||\}$$

entonces como $x_o \varepsilon K^o$, para toda $z\ \varepsilon\ H$ existe $\alpha>o$, tal que

$z \leq^k \alpha\, x_o$. Por lo tanto $z = \alpha x - (\alpha x - z)$ con $\alpha x,\ \alpha x - z \in K$, i.e., K reproduce a H.

Ahora, sea $F \neq \{o\}$ una cara de K, si $F \neq K$, entonces -- $F \subset \partial K$ ya que $K^o \subset K^{oo}$. Sea $y \in K - F$ y consideremos la mínima - cara F_1, tal que $F \subset F_1$ y $y \in F_1$; si $y \in K^o$ entonces $F_1 = K$; de otra manera si $y \in \partial K$ y $x + y \in \partial K$ para alguna $x \in F$, entonces

$$\alpha||x_o||(||x||+||y||) = (x+y|x_o) = \alpha||x_o||\cdot||x+y|| .$$

Lo cual implica que $y = \lambda x$, contradiciendo la hipótesis de que $y \notin F$. Luego, si $y \in \partial K$, entonces para toda $x \in F$, $x + y \in K^o$; esto implica que $F_1 = K$. Por lo tanto K satisface la condición de cadenas finitas con longitud máxima igual a 3.

El interior de un cono puede ser vacío, como en el cono

$$\{f \mid f \geq o \ , \ f \quad L^2\ [0,1]\ \}$$

Decimos que x está en el interior de orden de K, denotado por K^{oo}, si y solamente si $F(x) = K$. Si $x \in K^o$, entonces claramente $F(x) = K$, y por lo tanto $K^o \subset K^{oo}$. El interior de K - puede estar contenido propiamente en K^{oo} como puede ser visto en el espacio normado incompleto $C\ [0,1]$, con la norma de $L^2\ [0,1]$ considerando el cono de las funciones no negativas, que tiene interior vacío y cualquier función $f > o$ está en el interior de orden.

El conjunto de funcionales lineales x' en el dual de X, satisfaciendo $x'(x) = \langle x', x\rangle \geq o$ para toda $x \in K$ es llamado:

"cono dual a K" y es denotado por K'. El siguiente teorema acerca del espectro es fundamental en la teoría de operadores lineales. Por el espectro $\sigma(A)$ de una función lineal A, entendemos el espectro de la extensión de A a la de X sobre los complejos.

<u>Teorema 2.2.1</u>: Sea A una función lineal continua de X en X transformando un cono K en él mismo. Si A tiene radio espectral 1, entonces $\lambda = 1$ está en $\sigma(A)$.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $1 \notin \sigma(A)$. Por el teorema de la función espectral tenemos que

$$\sigma(I + A) = p(\sigma(A)), \quad \text{donde} \quad p(z) = 1 + z.$$

Luego $\quad \sigma(I + A) = \{\mu = 1 + \lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ y

$$\sup_{\mu \in \sigma(I+A)} |\mu| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |1 + \lambda|$$

puesto que $\sigma(A)$ es compacto existe $\lambda_o \in \sigma(A)$ tal que

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |1 + \lambda| = |1 + \lambda_o| .$$

Es fácil comprobar que

$$|1 + \lambda_o| < 2$$

Por lo tanto, el radio espectral de I + A es estrictamente menor que 2, entonces para alguna $\eta > o$

$$(I - \eta I - A)^{-1} = ((2-\eta)I-I+A)^{-1} = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(I+A)^k}{(2-\eta)^{k+1}}$$

existe y deja invariante a K. Como

$$(I - \eta I - A)^{-1} = \sum_{k=o}^{N} \frac{A^k}{(1-\eta)^{k+1}} + \frac{A^{N+1}}{(1-\eta)^{N+1}} (I - \eta I - A)^{-1}$$

entonces para todo entero k tenemos

$$o \leq^k \frac{A^k}{(1-\eta)^{k+1}} \leq^k (I - \eta I - A)^{-1}$$

Sea $x \varepsilon K$, entonces

$$||(I - \eta I - A)^{-1} x|| =$$

$$= ||(I-\eta I - A)^{-1}x - \frac{A^k x}{(1-\eta)^{k+1}} + \frac{A^k x}{(1-\eta)^{k+1}}|| \geq \delta \, ||\frac{A^k x}{(1-\eta)^{k+1}}||$$

ya que $(I - \eta I - A)^{-1}x - \frac{A^k x}{(1-\eta)^{k+1}} \varepsilon K$, y K es normal, por lo tanto

$$||\frac{A^k x}{(1-\eta)^{k+1}}|| \leq \delta^{-1} ||(I - \eta I - A)^{-1}x||.$$

Ahora, para toda k y para toda $x \varepsilon K$

$$x = (I+A)^k x - (k A + \dots + A^k)x ,$$

por el Lema 2.2.1 existe una constante c tal que

$$||(I+A)^k x|| \leq c \; ||x||.$$

Si $x \neq o$ entonces

$$\frac{||A^k x||}{||x||} \leq (1 - \eta)^{k+1} \delta^{-1} \frac{||(I-\eta I-A)^{-1}||}{||x||} =$$

$$= (1-\eta)^{k+1} \delta^{-1} \frac{||\sum_{i=o}^{\infty} \frac{(I+A)^i x}{(2-\eta)^{i+1}}||}{||x||} \leq$$

$$\leq \frac{(1-\eta)^{k+1}\delta^{-1}\left(\sum_{i=o}^{\infty} \frac{1}{(2-\eta)^{i+1}}\right) c||x||}{||x||} = (1-\eta)^k \delta^{-1} c$$

entonces $||A^k|| \leq (1-\eta)^k \delta^{-1} c$, por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{||A^k||} \leq (1-\eta) \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\delta^{-1} c} =$$

$$= (1 - \eta)$$

lo cual contradice que el radio espectral sea 1.

Ahora analizaremos condiciones bajo las cuales una función A tiene un vector propio en K.

Decimos que una función $A:K\to K$ es <u>homogénea</u> si, y solo si $A\alpha x = \alpha Ax$, para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y decimos que es <u>monótona</u> si deja invariante a un cono K y $x, y \in K$ con $x \leq^k y$, implica que $Ax \leq Ay$.

<u>Lema 2.2.3:</u> Se A una función homogénea y monótona. Si $x \in K$ y Ax está en la cara $F(x)$, entonces A deja invariante a $F(x)$.

<u>Demostración</u>: Sea $y \in F(x)$, entonces existe $\alpha > o$ tal que $\alpha y \leq^k x$, luego

$$\alpha Ay = A\alpha y \leq^k Ax \in F(x)$$

esto implica que $Ay \in F(x)$.

Motivados por la definición de irreducibilidad dada en el

Capítulo I, decimos que una función A homogénea y monótona es irreducible si, y solo si $x_1 \geq^k x_o \geq^k o$, $x_1 \neq x_o$ y $Ax_1 - Ax_o \in F(x_1 - x_o)$, implica que $F(x_1 - x_o) = K$.

Lema 2.2.4: Supongamos que A es irreducible y que $x_1 \geq^k x_2$, $x_1 \neq x_2$, entonces

$$F_k = F((I+A)^k x_1 - (I+A)^k x_o) \subset F_{k+1}$$

con inclusión estricta excepto cuando $F_k = K$.

Demostración: Sea $x_i^k = (I+A)^k x_i$, $i = 1,2$, la monotonía de A implica que para todo entero k

$$x_1^k = (I+A)^k x_1 = x_1 + k\, Ax_1 + \ldots + A^k x_1$$

$$\geq^k x_2 + k\, Ax_2 + \ldots + A^k x_2 = (I+A)^k x_2 = x_2^k .$$

Por otra parte

$$x_i^{k+1} = (I + A)\, x_i^k ,$$

y entonces

$$x_1^{k+1} - x_2^{k+1} = x_1^k - x_2^k + Ax_1^k - Ax_2^k \geq^k x_1^k - x_2^k$$

Sea $y \in F_k$, entonces existe $\alpha > o$ tal que

$$\alpha y \leq^k x_1^k - x_2^k \leq^k x_1^{k+1} - x_2^{k+1}$$

por lo tanto $y \in F_{k+1}$, $F_k \subset F_{k+1}$.

Si $F_k = F_{k+1}$, entonces existe $\beta > o$ tal que .

$$\beta\ (x_1^{k+1} - x_2^{k+1}) \leq^k x_1^k - x_2^k \qquad y$$

$$\beta\ (Ax_1^k - Ax_2^k) \leq^k (1-\beta)\ (x_1^k - x_2^k) \varepsilon\ F_k\ ,$$

por la irreducibilidad de A, tenemos que $F_k = K$.

En el Teorema 2.2.2 consideraremos una función homogéna, monótona y semicontinua superiormente. El siguiente lema prueba que una función que cumple con estas condiciones es continua en K^o. Por supuesto que K^o puede ser vacío.

<u>Lema 2.2.5</u>: Si A es monótona y homogénea, entonces A es continua en K^o.

<u>Demostración</u>: Sea $x \varepsilon K^o$ y $(x_n) \subset K$ una sucesión que converge fuertemente a x, entonces existe $\varepsilon > o$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset K$. Para toda α, tal que $o<\alpha<1$, existe $N_\alpha \geq 1$ tal que

$$||x - x_n|| < (1-\alpha)\varepsilon,\ n \geq N\alpha.$$

Pero como $(1-\alpha)\ x\ \varepsilon\ K^o$ y $B((1-\alpha)x,(1-\alpha)\varepsilon) \subset K$

si $||(1-\alpha)x-(x_n - \alpha x)|| = ||x-x_n|| \leq (1-\alpha)\varepsilon$, entonces $x_n - \alpha x \varepsilon K$. Por otra parte, $(\alpha^{-1}-1)x \varepsilon K^o$ y por lo tanto $B((\alpha^{-1}-1)x,\ (\alpha^{-1}-1)\varepsilon) \subset K$

Luego, para toda $n \geq N_\alpha$ tenemos que

$$||(\alpha^{-1}-1)x - (\alpha^{-1}x - x_n)|| = ||x-x_n|| < (1-\alpha)\varepsilon <$$
$$< \alpha^{-1}(1-\alpha)\varepsilon = (\alpha^{-1} - 1)\varepsilon,$$

esto implica que $\alpha^{-1} x - x_n \in K$. Por lo tanto,

$$\alpha x \leq^k x_n \leq^k \alpha^{-1} x.$$

Ahora, sea $B(Ax,\varepsilon)$, si δ es la constante de normalidad de K, la cual podemos suponer menor que 1, escogemos α tal que

$$1 > \alpha > \max \{ 1 - \frac{\varepsilon \delta}{3||Ax||} , (1 + \frac{\varepsilon \delta}{3||Ax||})^{-1} \}$$

con lo cual obtenemos:

i) $||Ax - \alpha Ax|| = (1-\alpha)||Ax|| < \frac{\varepsilon\delta ||Ax||}{3||Ax||} = \frac{\varepsilon \delta}{3} < \varepsilon$

ii) $||Ax - \alpha^{-1}Ax|| = (\alpha^{-1} - 1)||Ax|| < \frac{\varepsilon\delta ||Ax||}{3||Ax||} = \frac{\varepsilon \delta}{3} < \varepsilon$

Si $\alpha Ax \leq^k y \leq^k \alpha^{-1} Ax$, entonces

$$||Ax-y|| = ||Ax-\alpha^{-1}Ax + \alpha^{-1} Ax - y|| \leq$$

$$\leq (1-\alpha)^{-1}||Ax|| + ||\alpha^{-1} Ax - y|| <$$

$$< \frac{\varepsilon \delta}{3} + \delta^{-1}||(\alpha^{-1}Ax-y) + y - \alpha Ax|| <$$

$$< \frac{\varepsilon \delta}{3} + \delta^{-1} (\alpha^{-1}-\alpha)||Ax|| < \frac{\varepsilon\delta}{3} + \frac{\delta^{-1} 2\varepsilon\delta}{3} < \varepsilon$$

Esto implica que $y \in B(Ax,\varepsilon)$ para toda y, tal que $\alpha Ax \leq^k y \leq^k \alpha^{-1} Ax$, entonces como $\alpha Ax \leq^k Ax_n \leq^k \alpha^{-1} Ax$ para toda $n \geq N_\alpha$, tenemos que $Ax_n \to Ax$ y por lo tanto A es continua en K^o.

Decimos que A es <u>semicontinua superiormente</u> si, y solo si, cuando $x_n \to x$ y $Ax_n \to z$, entonces $A\,x \geq^k z$.

<u>Teorema 2.2.2</u>: Sea X un espacio de Banach sobre los reales y $X_1 \subset X$ un segundo espacio de Banach con inclusión compacta en X. Sea K un cono en X y supongamos que $K_1^{oo} \neq \emptyset$, donde $K_1 = K \cap X_1$. Sea $A \not\equiv 0$ en K, una función homogéna, monótona, semicontinua superiormente y acotada (i.e., manda conjuntos acotados en conjuntos acotados) de K en K. Supongamos que; (i) existe una función B, homogénea, monótona y acotada de K en K_1, tal que $AB = BA$ y $Bx \geq^k \alpha Ax$ para alguna $\alpha > o$ y para toda $x \in K$. (ii) Existe una función C homogénea y monótona con $AC = CA$ y tal que si $x, y \in K$ con $y \geq^k x$, $y \neq x$, entonces $Cy - C\,x \in K_1^{oo}$. Entonces existe $x \in K_1^{oo}$ y $\rho > o$ tal que $Ax = \rho x$. Más aún, ρ es maximal; esto es, que si $Aw = \mu w$ con $w \in K - \{o\}$, entonces $\mu \leq \rho$.

<u>Demostración</u>: Sean

$$\rho = \sup\{\lambda \mid \exists\, x \in CB(K),\ x \neq o,\ Ax \geq^k \lambda\, x\}$$

y x un vector en K, para el cual $Ax \neq o$. Entonces $Bx \geq^k \alpha Ax \neq o$, así $Bx \neq o$ y por (ii) $CBx \in K_1^{oo}$. Como $F(CBx) = K$, existe $\beta_1 > o$, tal que $CBx \geq^k \beta_1 x$ y así

$$CBAx = ACBx \geq^k \beta_1\ Ax \neq o \quad ;$$

luego $CBA\,x \in K_1^{oo}$ y entonces existe $\beta_2 > o$, tal que $CBAx \geq^k \beta_2 x$, por lo tanto:

$$CBA^2x = ACBAx \geq^k \beta_2\ Ax \neq o,$$

esto implica que $ACBAx = CBA^2x \in K_1^{oo}$. Luego existe $\eta > o$ para el cual $A(CBAx) \geq^k \eta CBAx$, por lo tanto $\rho > o$.

Sean (x_n) una sucesión de vectores en $CB(K)$, normalizados en X, i.e., $||x_n|| = 1$ y satisfaciendo $Ax_n \geq^k (\rho - 1/n)\, x_n$. Como A y B son acotadas, las sucesiones (ABx_n) y (Bx_n) son acotadas en K_1 y por lo tanto relativamente compactas en K, entonces existen subsucesiones tales que $Bx_{n_k} \to x_o \in K$ y $A\,Bx_{n_k} \to z \in K$.

Tenemos que $Bx_{n_k} \geq^k \alpha Ax_{n_k} \geq^k \alpha(\rho - 1/n_k)\, x_{n_k}$ i.e.,

$Bx_{n_k} - \alpha(\rho - 1/n_k)\, x_{n_k} \in K$. La normalidad de K implica que

$$||Bx_{n_k}|| = ||Bx_{n_k} - \alpha(\rho - 1/n_k)x_{n_k} + \alpha(\rho - 1/n_k)\, x_{n_k}||$$

$$\geq \delta\ ||\alpha(\rho - 1/n_k)\, x_{n_k}|| = \delta\ \alpha(\rho - 1/n_k),$$

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} ||Bx_{n_k}|| \geq \lim\limits_{n\to\infty} \delta\alpha(\rho - 1/n_k)$,

por lo tanto $||x_o|| \geq \delta\ \alpha\ \rho$, i.e., $x_o \neq o$.

Similarmente $ABx_{n_k} \geq^k \alpha A\ Ax_{n_k} \geq^k \alpha(\rho - 1/n_k)^2\, x_{n_k}$, lo cual implica que $||z|| \geq \delta\ \alpha\ \rho^2$, i.e., $z \neq o$.

Ahora, $ABx_{n_k} \geq^k (\rho - 1/n_k)\, Bx_{n_k}$ y A es semicontinua superiormente, luego

$$Ax_o \geq^k z = \lim_{n\to\infty} A\ Bx_{n_k} \geq^k \lim_{n\to\infty} \rho\ Bx_{n_k} = \rho x_o .$$

Entonces $A\ Bx_o = B\ Ax_o \overset{k}{\geq} B\rho x_o \overset{k}{\geq} \alpha\rho Ax_o \neq o$, así que $Bx_o \neq o$ y $Bx_o \varepsilon K_1$. Si $ABx_o = \rho\ Bx_o$ y $x = C\ B\ x_o$ tenemos que

$$Ax = ACBx_o = CABx_o = C\ \rho\ Bx_o = \rho CBx_o = \rho x$$

dando el deseado vector propio. De otra manera

$$ABx_o \neq \rho\ Bx_o \quad , \quad \text{por (ii)}$$

$$CABx_o - \rho CBx_o\ \varepsilon\ K_1^{oo} \ ,$$

y entonces existe $\varepsilon > o$, tal que

$$ACBx_o - \rho CBx_o \overset{k}{\geq} \varepsilon\ CBx_o \ ,$$

i.e., $\quad ACBx_o \overset{k}{\geq} (\rho + \varepsilon)CBx_o$,

contradiciendo la definición de ρ. Para demostrar la última parte supongamos que existe $w\ \varepsilon\ K - \{o\}$ tal que $A\ w = \mu\ w$ para alguna $\mu > o$, de manera análoga al principio de la demostración, tenemos que $ACBA\ \omega \neq o$ y $A(CBA\omega) = \mu CBA\omega$, por la definición de ρ tenemos que $\mu \leq \rho$.

<u>Corolario 2.2.1</u>: Si en el enunciado del Teorema 2.2.2 la existencia de C se reemplaza por la hipótesis de que K satisface la condición de cadenas finitas y A es K-irreducible, entonces existe $x\ \varepsilon\ K_1^{oo}$ y una $\rho > o$ maximal, tal que $Ax = \rho x$.

<u>Demostración</u>: Sea $C = (I + A)^m$, donde m es la máxima longitud de las cadenas de caras de K. Es suficiente con demostrar que C satisface (ii) en el Teorema 2.2.2. Claramente C es monótona, homogénea y $AC = CA$. Sean $x, y\ \varepsilon\ K$ con $x \neq y$,

$y \leq^k x$ y consideremos las caras

$$F_i = F((I + A)^i x - (I + A)^i y).$$

Por el Lema 2.2.4 $F_i \subset F_{i+1}$, con inclusión estricta excepto cuando $F_i = K$; como la longitud de la cadena más larga es m tenemos que $F_i = K$ para algún entero $i \leq m$, por lo tanto $F_m = K$, i.e., $Cx - C y \in K_1^{oo}$.

<u>Teorema 2.2.3</u>: Supongamos X, K, X_1 y K_1 como en el Teorema 2.2.2. Sea A una función que satisface las siguientes condiciones:

(i) Existe $a > 2$ tal que si $o \leq ||x|| \leq a^{-1}$, entonces $A\, 2x \geq^k 2\, Ax$; mientras que si $||x|| \geq a$ y $Ax \geq^k \tau\, x$, entonces existe x_1 con $a^{-1} < ||x_1|| < a$, tal que $Ax_1 \geq^k \tau x_1$. Además $A(o) = o$.

(ii) A es monótona, semicontinua superiormente y acotada de K en K_1.

(iii) Existe un entero $\nu \geq o$ tal que para cualquier bola B_α y cada par $o < \rho_1 < \rho_2 < \infty$, el conjunto

$$S(\rho_1, \rho_2, \alpha, \nu) = \bigcup_{\rho_1 \leq r \leq \rho_2} (\tfrac{1}{r} A)^\nu (B_\alpha \cap K),$$

es acotado en K. Además, si $x \geq^k y \geq^k o$ y $x \neq y$ entonces para cada $r > o$

$$(\tfrac{1}{r} A)^\nu x - (\tfrac{1}{r} A)^\nu y \in K_1^{oo}.$$

Entonces existe $x \in K_1^{oo}$ y $\rho > o$ maximal tal que $Ax = \rho x$.

Demostración: Si $x \in K$ y $x \neq o$, entonces $A^{\nu}x \in K_1^{oo}$; como $A(o) = o$, entonces $A\,x \neq o$ y $A^{\nu+1}x = A^{\nu}Ax \in K_1^{oo}$, (i.e., - $F(A^{\nu+1}x) = K_1$). Por lo tanto existe $\rho_1 > o$ tal que

$$A(A^{\nu}x) \overset{k}{\geq} \rho_1\, A^{\nu}x \tag{2.1}$$

De (ii) sabemos que para cada $x \in K \cap B_a$, $Ax \in K \cap B_{\tilde{a}}$, para alguna $\tilde{a} > o$. Si hacemos que ρ_2 sea un número real mayor que $\tilde{a}\,\delta^{-1}\,a$, donde δ es la constante de normalidad de K, entonces

$$A\,x \overset{k}{\geq} \rho_2\, x \tag{2.2}$$

es imposible que pase para alguna $x \neq o$. Si fuera cierto para alguna x, entonces si $||x|| > a$, por (i) existe x_o tal que $a^{-1} < ||x_o|| < a$ y $Ax_o \overset{k}{\geq} \rho_2 x$; si $||x|| \leq a^{-1}$, entonces para $x_1 = 2x$,

$$Ax_1 \overset{k}{\geq} 2\,A\,x \geq \rho_2\, 2x = \rho_2\, x_1$$

y así continuamos hasta encontrar $x_i = 2^i x$, con $a^{-1} < ||\,x_i||$ y $A\,x_i \overset{k}{\geq} \rho_2\, x_i$. En ambos casos podemos encontrar x_o tal que $a^{-1} < ||x_o|| < a$ y $Ax_o \overset{k}{\geq} \rho_2\, x_o$, como K es normal

$$\tilde{a} \geq ||Ax|| = ||Ax - \rho_2\, x + \rho_2\, x\,|| \geq$$
$$\geq \delta||\rho x|| = \delta\,\rho_2\,||x|| > \delta\,\rho_2\, a^{-1}$$

y entonces $\tilde{a}\,\delta^{-1}\,a > \rho_2$, lo cual contradice la definición de ρ_2. Podemos suponer que $\rho_1 \leq 1$ y $\rho_2 \geq 1$, usando estos dos números podemos definir el conjunto $S(\rho_1, \rho_2, \alpha, \nu)$ de la hipótesis (iii) y además el conjunto

$$P_\alpha = \{x \in K \mid x = \beta y,\ y \in S(\rho_1,\rho_2,\alpha,\nu),\ 1 \leq \beta \leq 2\delta^{-1},\ x \notin B_{\alpha-1}\}$$

Sea $\alpha > o$; si $x \in B_\alpha \cap K$, entonces para alguna r con $\rho_1 \leq r \leq \rho_2$,

$$(\tfrac{1}{r} A)^\nu x \in S(\rho_1,\rho_2,\alpha,\nu) ,$$

y además $(\frac{1}{r} A)^\nu x \in B_{\tilde{\alpha}}$ para alguna $\tilde{\alpha} > o$.

Podemos escoger $\alpha' > \alpha$ tal que $(\alpha')^{-1} < \tilde{\alpha} < \alpha'$ y $(\frac{1}{r} A)^\nu x \in B_{(\alpha')^{-1}}$; como

$$(\tfrac{1}{r} A)^\nu x \in S(\rho_1,\rho_2,\alpha,\nu) \subset S(\rho_1,\rho_2,\alpha',\nu)$$

entonces $P_{\alpha'}$ es diferente del vacío. Supongamos que hemos escogido una α tal que $P_\alpha \neq \phi$, $\alpha > a$ y $\alpha > \delta^{-1} a$. Sea

$$\rho = \sup\{\lambda / \exists\, x \in P_\alpha,\ Ax \geq^k \lambda x\} ,$$

por (2.1),(2.2) notamos que $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$.

Como por hipótesis el conjunto $S(\rho_1,\rho_2,\alpha,\nu)$ es acotado en K_1, entonces el conjunto P_α es acotado en K_1 y consecuentemente es relativamente compacto en K. Además, como A es acotada de K en K_1, entonces $A(P_\alpha)$ es acotado en K_1, y por lo tanto relativamente compacto en K. Podemos escoger una sucesión $(x_n) \subset P_\alpha$ tal que $x_n \to x_o \in K$ con $\|x_o\| \geq \alpha^{-1}$, $Ax_n \to z \in K$ y

$A x_n \geq^k (\rho - 1/n)\, x_n$. Como A es semicontinua por arriba, entonces $A x_o \geq^k z \geq^k \rho x_o$.

Si $A x_o = \rho x_o$, entonces

$$A\left(\frac{1}{\rho}A\right)^{\nu}x_o = \rho\left(\frac{1}{\rho}A^{\nu}x_o\right)$$

y así $\left(\frac{1}{\rho}A\right)^{\nu}x_o$ es el vector propio buscado, ya que $\left(\frac{1}{\rho}A^{\nu}x_o\right) \in K_1^{\circ\circ}$.

De otra manera $\frac{1}{\rho}\ A\ x_o \overset{k}{\geq} x_o$ con $\frac{1}{\rho}A\ x_o \neq x_o$.

Supongamos que $a^{-1}<||x_o||<a$, luego

$$\left(\frac{1}{\rho}A\right)^{\nu+1}x_o - \left(\frac{1}{\rho}A\right)^{\nu}x_o \in K_1^{\circ\circ}$$

y entonces existe $\varepsilon > o$ tal que $Ax - \rho x \overset{k}{\geq} \varepsilon x$. Por lo tanto $Ax \overset{k}{\geq} \tilde{\rho}x$ con $\tilde{\rho} = \rho + \varepsilon > \rho$. Como

$$x = \left(\frac{1}{\rho}A\right)^{\nu} x_o \overset{k}{\geq} x_o$$

y K es normal, entonces $||x|| \geq \delta\ ||x_o|| \geq \delta\ \ a^{-1} > \alpha^{-1}$, de aquí que $x \in P_\alpha$; lo cual contradice la definición de ρ. Si $||x_o|| \leq a^{-1}$, entonces para algún entero n tal que $2^n < 2\ \delta^{-1}$ tenemos $||2^n\ x|| \geq \alpha^{-1}$, i.e., $2^n\ x \in P_\alpha$, lo cual contradice la definición de ρ, ya que usando la hipótesis (i) n veces tenemos $A\ 2^n\ x \overset{k}{\geq} \tilde{\rho}2^n\ x$. Si $||x_o|| \geq a$, la hipótesis (i) nos da un vector $x_1 \in P_\alpha$ con $A\ x_1 \overset{k}{\geq} \tilde{\rho}\ x_1$ que es otra contradición.

Como una aplicación del teorema anterior consideremos la siguiente situación:

Sea $X = C\,[0,1] = C$, el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$, con la norma del supremo $||.||_\infty$. Sea $H_o^2 = H_o^2\,(\,]0,1[\,) = \overline{C_o^\infty(\,]0,1[\,)}$, la cerradura del espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en $]0,1[$ con la norma

$$||f||^2_{2,2} = ||f||^2_2 + ||Df||^2_2 + ||D^2f||^2_2$$

donde $||.||_2$ es la norma de $L^2([0,1])$

Ahora, $H^2_o \subset H^2 = H^2([0,1])$ donde $H^k([0,1])$ es el espacio de Banach que consta de aquellas funciones en $L^k([0,1])$ que tienen $k-1$ derivadas absolutamente continuas y $D^k f \in L^2([0,1])$, con la siguiente norma:

$$||f||^2_{2,k} = ||f||^2_2 + ||Df||^2_2 + \dots + ||D^k f||^2_2$$

Sea $K \subset X$ el cono de las funciones no negativas, claramente K es normal y reproduce a X.

Como H^2 tiene inclusión continua en C, ([3], p. 56) entonces existe una constante M tal que

$$||f||_\infty \leq M\ ||f||_{2,2} \tag{2.3}$$

Si $\phi \in H^2_o \subset H^2$ entonces existe una sucesión $(f_n) \subset C^\infty_o$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} ||\phi - f_n||_{2,2} = 0$$

Por (2.3) tenemos que

$$\sup_{0\leq x\leq 1} |(\phi - f_n)(x)| \leq M\ ||\phi - f_n||_{2,2}\ ,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} |(\phi - f_n)\,x| = 0 \quad \text{para toda } x \in [0,1]\ ,$$

pero $f_n(o) = o = f_n(1)$ y entonces $\phi(o) = o = \phi(1)$.

Definimos el operador L, con dominio $D(L) = H_o^2$, de la siguiente manera:

$$L\cdot f = -D^2 f \quad \text{para toda} \quad f \in D(L)$$

Para cada $h \in L^2$, $g = L^{-1} h = G h$ está definida de la siguiente manera:

$$g(x) = \int_o^x s(1-x)h(s)ds + \int_x^1 x(1-s)h(s)\,ds,$$

claramente el operador G es lineal, $g(x)>o$ para toda $x \in]0,1[$ y $g(o) = o = g(1)$ si $h \in K$.

Sea $X_1 = H_o^2$, por un teorema de Rellich ([4], p. 281), H^2 tiene inclusión compacta en H^1. Pero como H^1 tiene inclusión continua en C ([3], p. 56), entonces $X_1 \subset H^2$ tiene inclusión compacta en X.

Sea $g \in K_1 = K \cap X_1$ tal que $g(x)>o$ para toda $x \in]0,1[$, $Dg(o)>o$ y $Dg(1)<o$, vamos a demostrar que el conjunto de funciones que satisfacen estas condiciones es el interior de orden de K_1. Supongamos que g satisface estas condiciones y que además existe $f \in K$, tal que $g - \alpha f \notin K$, para toda $\alpha > o$. Como $g(x)>o$ para $x \in]0,1[$, entonces siempre existe $\alpha>o$ tal que $\alpha g(y)>f(y)$ para toda y en un intervalo cerrado contenido en $]0,1[$; por lo tanto debe existir una sucesión $\{x_n\} \subset]0,1[$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = o \quad \text{o} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

$x_n \neq o$ y $g(x_n) - \alpha f(x_n) < o$ para toda $\alpha > o$. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = o$ entonces para toda $\alpha > o$

$$\frac{1}{\alpha} Dg(o) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)}{\alpha\, x_n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = Df\,(o)$$

i.e., $Df(o) = \infty$, contradiciendo la suposición de que $f \in H_o^2$. Análogamente llegamos a una contradicción si $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

Entonces siempre podemos encontrar $\alpha > o$ tal que $g - \alpha f \in K_1$ y por lo tanto $g \in K_1^{oo}$. Recíprocamente, si $g \in K_1^{oo}$, claramente $g(x) > o$ para $x \in]0,1[$; $Dg\,(o) \geq o$ y $Dg(1) \leq o$. Supongamos que $Dg(o) = o$ y sea $f \in K_1$, tal que $Df(o) > o$, entonces existe $\alpha > o$ tal que $(g - \alpha\, f) \geq^k o$, por lo tanto

$$o = Dg(o) = \lim_{x\to o} \frac{g(x)}{x} \geq \alpha \lim_{x\to o} \frac{f(x)}{x} = \alpha\, Df(o)$$

lo cual contradice que $Df(o) > o$. Análogamente llegamos a una contradicción si suponemos que $Dg(1) = o$.

Ahora, sea $h \in K$, $h \neq 0$, entonces

$$g(x) = Gh = \int_o^x s(1-x)h(s)ds + \int_x^1 x(1-s)h(s)ds > o, x \in]0,1[.$$

$$g\,(o) = o = g\,(1)$$

$$Dg(o) = \int_o^1 h(s)ds - \int_o^1 s\, h\,(s)\, ds > o$$

$$Dg(1) = -\int_o^1 s\, h(s)ds < o$$

i.e., $g = G\,h \in K_1^{oo}$.

Por otra parte, para cada $h \in L^2[0,1]$

$$Gh(x) = \int_o^x s(1-x)h(s)ds + \int_x^1 x(1-s)h(s)ds \leq$$

$$\leq \int_o^1 sh(s)ds + \int_o^1 (1-s)h(s)ds = \int_o^1 h(s)ds$$

$$DGh(x) = \int_x^1 (1-s)h(s)ds - \int_o^x s\, h(s)ds \leq \int_o^1 (1-s)h(s)ds$$

y $D^2 Gh(x) = -h(x)$.

Entonces existe $M > o$ tal que

$$||G|| = \sup_{||h||_2=1} ||Gh||_{2,2} < M \qquad \text{ya que}$$

$$||Gh||_{2,2}^2 = ||Gh||_2^2 + ||DGh||_2^2 + ||D^2Gh||_2^2 \leq$$

$$\leq \left(\int_o^1 h(s)ds\right)^4 + \left(\int_o^1 (1-s)h(s)ds\right)^4 + \left(\int_o^1 h(s)ds\right)^2 = M^2,$$

y por lo tanto G es acotado de L^2 en H_o^2 .

Sea $a(s,t)$ una función real definida en $[0,1] \times [0,\infty[$ que satisface las siguientes condiciones:

(a) Para cada s, $a(s,t)$ es semicontinua superiormente en t, (uniformemente en s) y es estrictamente creciente en t;

(b) Existe $\tilde{\alpha} > 2$ tal que para $o > t < \tilde{\alpha}^{-1}$,

$a(s,2t) \geq 2a(s,t) > o$. Mientras que si $t \to \infty$, entonces $t^{-1} a(s,t) \to o$ uniformemente en s;

(c) Para cada $f \in K$, $a(.,f(.))$ es medible y $a(., f(.)) \equiv 0$ si y solo si $f \equiv 0$.

Usando la notación anterior podemos dar el siguiente resultado:

<u>Corolario 2.2.2</u>: Existe $\mu > o$ y $f \in D(L)$ con $f > o$ en $]0,1[$, $Df(o) > o$ y $Df(1) < o$ tal que $L f = \mu a(.,f(.))$.

Además, μ es el valor propio más pequeño que corresponde a tal f.

<u>Demostración</u>: Este problema es equivalente al de encontrar $f \in K_1^{oo}$ tal que

$$Af \equiv G\, a(.,f(.)) = \mu^{-1} f = \lambda f$$

Así es que con demostrar que A satisface las condiciones del Teorema 2.2.3 será suficiente.

Sea $f \in K$ tal que $||f||_\infty \leq \tilde{\alpha}^{-1}$, entonces si $f(s) > o$ por (b) tenemos que

$$a(s,2\, f(s)) \geq 2a(s,f(s)) > o$$

Mientras que si $f(s) = o$

$$a(s, 2f(s)) = o = 2a(s, f(s))$$

por lo tanto

$$a(., 2f(.)) \geq 2a(., f(.))$$

Luego

$$A(2f) = Ga\,(.,2f(.)) \geq G\, 2a(.,f(.)) = 2\, A(f).$$

Por lo tanto la primera parte de (i) es satisfecha por cualquier $c > \tilde{\alpha}$ y $||f||_\infty \leq c^{-1} < \tilde{\alpha}^{-1}$.

Para demostrar la segunda parte vemos que para cualquier $\tau > o$ fijo, podemos encontrar $c(\tau)>2$ tal que $A(f) \geq^k \tau f$ es imposible para toda f con $||f||_\infty \geq c(\tau)$. De otra manera, supongamos que $A(f_n) \geq^k \tau f_n \geq^k o$ para una sucesión $(f_n) \subset K$ y $||f_n||_\infty \to \infty$, entonces

$$||A(f_n)||_\infty = ||G\ a(.,f_n(.))||_\infty \geq \tau\ ||f_n||_\infty$$

Como $t^{-1} a(s,t) \to o$ uniformemente en s cuando $t \to \infty$, dada $\varepsilon > o$ podemos encontrar t_o tal que para $t > t_o$, $t^{-1} a(s,t) < \varepsilon$, i.e.,

$$a(s,t) < t\ \varepsilon. \qquad (2.4)$$

Como $a(s,t)$ es creciente en t, si $f_n(s) \leq t_o$, entonces

$$a(s,f_n(s)) \leq a(s,t_o) \qquad (2.5)$$

De (2.4) y (2.5) obtenemos que $a(s,f_n(s)) \leq a(s,t_o) + \varepsilon f_n(s)$ para toda $f_n(s)$ y

$$||a(.,f(.))||_2 \leq ||a(.,t_o) + \varepsilon\ fn\ ||_2$$

$$\leq a(.,t_o)||_2 + \varepsilon\ ||f_n||_2$$

ya que $a(.,f(.))$ es medible para toda $f \in K$.

Como H_o^2 tiene inclusión acotada en C y G es acotado de L^2 en H_o^2 , existen constantes C_1, C_2 tales que:

$$\tau \; ||f_n||_\infty \leq ||G\, a\,(.,f)||_\infty \leq C_1 ||G\, a\,(.,f_n)||_{2,2}$$

$$\leq C_1 C_2 ||a\,(.,f_n)||_2 \leq C_1 C_2 \,(||a(.,t_o)||_2 + \varepsilon ||f_n||_2$$

$$\leq C_1 C_2 \,(||a(.,t_o)||_2 + \varepsilon \; ||f_n||_\infty).$$

Podemos escoger ε de tal manera que $C_1 \; C_2 \varepsilon < \tau$ y entonces

$$C_1 C_2 \; \varepsilon \; ||f_n||_\infty < \tau \; ||f_n||_\infty \leq$$

$$\leq C_1 C_2 ||a(.,t_o)||_2 + C_1 C_2 \; \varepsilon \; ||f_n||_\infty$$

i.e., $\quad o<(\tau - C_1 C_2 \varepsilon) \; ||f_n||_\infty \leq C_1 C_2 \; ||a(.,t_o)||_2$

lo cual, para un valor grande de $||f_n||_\infty$, es una contradicción y entonces queda demostrada la segunda parte de (i). Recalcando que $a(.,o) = o$ tenemos $A(o) = o$ lo cual demuestra (i) en el Teorema 2.2.3.

Sean $f, g \in K$ tales que $f \geq^k g$, entonces como $a(s,t)$ es creciente en t,

$$a(s,f(s)) \geq a(s,g(s))$$

además como G es monótona

$$A(f) = G\; a(.,f(.)) \geq G\; a(.,g(.)) = A(g)$$

i.e., A es monótona. Sea $U \subset K$ tal que $||f||_\infty < M$ para toda $f \in U$, entonces

$$||a(.,f(.))||_2 \leq ||a(.,M)||_2 = M_1$$

i.e., $a(.,U)$ es acotado en L^2; como G es acotado de

L^2 en H_o^2, entonces A es acotado de K en K_1 ya que $Gh \in K_1^{oo}$ para toda $h \in K-\{o\}$. Para demostrar la semicontinuidad superior de A supongamos que $f_n \to f$ y $A(f_n) \to g$; la sucesión $a(.,f_n(.))$ es acotada en L^2, por un teorema sobre compacidad débil([3], p.29), $a(.,f_n(.))$ es débilmente compacta y por lo tanto tiene una subsucesión -- $(a(.,f_n(.))$ que converge débilmente a un elemento $h \in L^2$, i.e., para toda $\phi \in L^2$

$$(\phi \mid a(.,f_n(.))) \to (\phi|h)$$

ya que $(L^2)' \simeq L^2$. Si $a(.,f(.)) - h(.)$ no está en K, entonces existe $\psi \geq o$ en L^2 tal que

$$(\psi| \; a(.,f(.)) - h) = \eta < o$$

Sea $\varepsilon = \eta/2$, como

$$(\psi|a(.,f(.)) - a(.,f_n(.)) \to (\psi| \; a(.,f(.)) - h) \; ,$$

entonces existe un entero N_o tal que para toda $n \geq N_o$

$$d_n = (\psi|a(.,f(.)) - a(.,f_n(.))) < \eta/2 \qquad (2.6)$$

Por el lema de Lebesgue-Fatou tenemos que

$$\underline{\lim} \; d_n \geq (\psi \mid \underline{\lim} \, (a(.,f) - a(.,f_n)))$$

$$\geq (\psi| \; a(.,f(.)) - \overline{\lim} \; a(.,f_n(.)))$$

como a(s,t) es semicontinua superiormente en t, entonces

$$a(s,f(s)) \geq \overline{\lim}\, a(s,f_n(s))$$

y por lo tanto

$$\underline{\lim}\ d_n \geq 0$$

lo cual contradice (2.6). Entonces

$$a(s,f_n(s)) \geq h(s) \quad y \quad Ga(s,f_n(s)) \geq Gh(s). \tag{2.7}$$

Sea (g_n) una sucesión en L^2 que converge débilmente a $g \in L^2$ i.e., $(\phi|g_n) \to (\phi|g)$ para toda L^2 por lo tanto

$$\int_0^1 \phi(g-g_n) \to 0 \tag{2.8}$$

Ahora,

$$(G\, g - G\, g_n)(x) = G\,(g-g_n)(x) =$$

$$= \int_0^k s(1-x)(g-g_n)(s)ds + \int_x^1 x(1-s)(g-g_n)(s)ds \leq \int_0^1 (g-g_n)(s)ds$$

entonces

$$||Gg - Gg_n||_2 \leq \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 (g-g_n)(s)ds\right)^2 dx\right]^{1/2}$$

$$= \left| \int_0^1 (g - g_n)(s)ds \right| ,$$

y por (2.8) tenemos que

$$||Gg - Gg_n||_2 \to 0 .$$

Por lo tanto $(G\, g_n)$ es una sucesión que converge fuertemente a Gg en L^2.

Como $a(.,f_n(.)) \to h$ débilmente en L^2, entonces

$A(f_n) = G\, a(.,f_n(.)) \to G\, h$ fuertemente en L^2.

Pero como habíamos supuesto que $A(f_n)$ convergía a g, entonces por (2.7)

$$Af = G\, a\,(.,f(.)) \geq^k G\, h = g\ ,$$

lo cual demuestra (ii) del Teorema 2.2.3.

Para demostrar (iii) tomemos $\nu = 1$, como A es acotado de L^2 en H_o^2 y por lo tanto de X en X_1, entonces el conjunto:

$$S(\rho_1,\rho_2,\alpha, 1) = \bigcup_{\rho_1 \leq r \leq \rho_2} \frac{1}{r}\ A(B_\alpha \cap K)$$

es acotado en K_1. Si $f_1 \geq f_2 \geq o$ y $f_1 \neq f_2$, entonces $q\ (s) = a(s,f_1(s)) - a(s,\ f_2(s))$ será positiva en un conjunto de medida positiva ya que $a(s,t)$ es estrictamente creciente en t. Luego, $A(f_1) - A(f_2)$ está en K_1^{oo} y también cualquier múltiplo positivo de Gq está en K_1^{oo}. Esto completa la demostración.

Ahora daremos algunos resultados acerca del tamaño de $\rho = \rho(A)$, por simplicidad nos limitaremos a las situaciones del Teorema 2.2.2 y del Corolario 2.2.1. Los siguientes resultados son consecuencias del Teorema 2.2.2.

<u>Corolario 2.2.3</u>: Bajo las hipótesis del Teorema 2.2.2

$$\rho = \rho(A) = \sup_{x \in CB(k)} \inf_{x' \in K'} \frac{\langle x', A(x) \rangle}{\langle x', x \rangle}.$$

<u>Demostración:</u> Por el Teorema 2.2.2, para cada $x \in CB(K)$; $A(x) - \rho x \notin K$ o $A(x) - \rho x = o$. En el primer caso tenemos que la distancia entre $A(x)-\rho x$ y K es igual a $\delta > o$. Consideremos la vecindad de radio δ con centro en $A(x)-\rho x$, $B_\delta = B(A(x) - \rho x, \delta)$ como $B_\delta \cap K = \emptyset$, entonces por un corolario al teorema de Hahn-Banach podemos separar B_δ y K por un hiperplano afin cerrado $H_o = H + x_o$, además la distancia entre B_δ y H_o es cero y también la distancia entre K y H_o. Sea $y \neq A(x) - \rho x$ un elemento de $B_\delta \cap H_o$, entonces la distancia entre y y $A(x)-\rho x$ es diferente de cero y por lo tanto existen dos puntos en la recta que pasa por y y $A(x)-\rho x$, los cuales están separados por H_o, esto contradice que B_δ está en un lado de H_o. Si $y = Ax-\rho x$ lo mismo se cumple para cualquier recta que pase por y.

Luego, $B_\delta \cap H_o = \emptyset$.

Como K es cerrado, entonces $H_o \cap K \neq \emptyset$. Si $o \in H_o \cap K$, entonces $x_o = o$, de otra manera supongamos $o \neq y \in H_o \cap K$ y sea α tal que $o<\alpha<1$, si $\alpha y \in H_o \cap K$, entonces

$$y = y_1 + x_o,$$

$$\alpha y = y_2 + x_o,$$

por lo tanto

$$\alpha\, y_1 + x_o = y_2 + x_o$$

$$\alpha\, y_1 - y_2 = (1-\alpha)\, x_o .$$

Luego, $x_o \varepsilon H_o$ y entonces $H_o = H$. Si

$\alpha\, y \notin H_o \cap K$, consideremos $\alpha^{-1} y$; si

$\alpha^{-1} y \; \varepsilon \; K \cap H_o$ entonces $H = H_o$; si

$\alpha^{-1} y \notin K \cap H_o$ entonces αy está de un lado de H_o y $\alpha^{-1} y$ está en el otro, contradiciendo que K está en un lado de H_o. En todos los casos tenemos que H_o es un hiperplano cerrado y por lo tanto existe $x' \; \varepsilon \; X'$ tal que

$$< x', B_\delta > < o , \qquad < x', K > \geq o$$

Entonces $x' \varepsilon K'$ y $< x', Ax - \rho x > < o$

i.e.,

$$\frac{< x', Ax >}{< x', x >} < \rho$$

por lo tanto

$$\inf_{x' \varepsilon K'} \frac{< x', Ax >}{< x', x >} < \rho$$

En el segundo caso, $Ax = \rho x$,

$$< x', Ax - \rho x > = o$$

i.e., $\dfrac{< x', Ax >}{< x', A >} = \rho$ para toda $x' \varepsilon K'$,

por lo tanto

$$\sup_{x \varepsilon CB(K)} \; \inf_{x' \varepsilon K'} \frac{< x', Ax >}{< x', x >} = \rho$$

Corolario 2.2.4: Supongamos que A, B y C satisfacen las hipótesis del Teorema 2.2.2 y que existe un trío similar $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ con $\tilde{A}x \geq^k Ax$ para toda $x \in K$.

Entonces $\rho(\tilde{A}) \geq \rho(A)$.

Demostración: Sea $Ax_o = \rho(A)x_o$ donde $x_o \in K_1^{oo}$ y supongamos que $Ax_o \geq^k (\rho(\tilde{A}) + \varepsilon)x_o$ para alguna $\varepsilon > o$.

Entonces

$$\tilde{A}\tilde{B}x_o - \rho(\tilde{A})\tilde{B}x_o \geq^k \varepsilon \tilde{B}x_o \geq^k \varepsilon\tilde{\alpha}\tilde{A}x_o \geq^k \varepsilon\tilde{\alpha} Ax_o$$

y
$$\tilde{A}\tilde{B}x_o - \rho(\tilde{A})\tilde{B}x_o \in K_1 - \{o\}.$$

por lo tanto
$$\tilde{A}\tilde{C}\tilde{B}x_o - \rho(\tilde{A})\tilde{C}\tilde{B}x_o \in K_1^{oo}$$

Esto implica que existe $\beta > o$ tal que

$$\tilde{A}\tilde{C}\tilde{B}x_o - \rho(\tilde{A})\tilde{C}\tilde{B}x_o \geq^k \beta \tilde{C}\tilde{B}x_o$$

i.e., $\rho(\tilde{A}) > \rho(\tilde{A})$, lo cual es imposible. Si consideramos el conjunto $\{x_o\} \cup \tilde{C}\tilde{B}(K)$, entonces

$$\tau = \sup\{\lambda \,|\, \tilde{A}x \geq^k \lambda x, x \in \tilde{C}\tilde{B}(K) \cup \{x_o\}\} =$$
$$= \sup\{\lambda \,|\, \tilde{A}x \geq^k \lambda x, x \in \tilde{C}\tilde{B}(K)\} = \rho(\tilde{A}).$$

Como $\tilde{A}x_o \geq^k Ax_o = \rho(A)$ entonces $\rho(\tilde{A}) \geq \rho(A)$

Teorema 2.2.4: Supongamos que las condiciones del Corolario 2.2.1 son satisfechas por los operadores lineales A y B. Así mismo supongamos que $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ también las satisfacen excepto por la irreducibilidad de A, donde $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ también son -

operadores lineales. Si $\tilde{A}x \geq^k Ax$ para $x \in K$ y $A \neq \tilde{A}$ en K_1, entonces $\tilde{A}$ es irreducible, $\rho(\tilde{A})$ y $\rho(A)$ son los radios espectrales de $\tilde{A}$ y A, respectivamente y $\rho(\tilde{A}) > \rho(A)$.

Demostración: Sean $x, y \in K$, $x \geq^k y$, $x \neq y$ y supongamos que $\tilde{A}x - \tilde{A}y \in F(x-y)$. Por hipótesis

$$\tilde{A}(x-y) \geq^k A(x-y)$$

i.e.,
$$Ax - Ay \leq^k \tilde{A}x - \tilde{A}y \in F(x-y)$$

esto implica que $Ax - Ay \in F(x-y)$, contradiciendo la irreducibilidad de A; por lo tanto $\tilde{A}$ es irreducible.

Sea $\rho_\sigma(A)$ el radio espectral de A, entonces

$$\rho(A) \leq \rho_\sigma(A) = r$$

Por el Teorema 2.2.1 $r \in \sigma(A)$ y como r está en la frontera de $\sigma(A)$, entonces $||(A - (r + 1/n))^{-1}||$ debe ser no acotada - cuando n tiende a infinito. De otra manera, supongamos que $||(A - (r + 1/n))^{-1}||$ es acotada y escojamos cualquier vector $y \in X$, sea

$$z_n = (A - (r + 1/n))^{-1} y \, ,$$

entonces
$$(A - r)\, z_n = y + \frac{1}{n} z_n$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} (A - r) z_n = y$$

Esto significa que $A - r$ tiene rango denso en X y por lo tan to r está en el resolvente de A, contradiciendo que $r \varepsilon \sigma(A)$. Entonces r está en el espectro puntual o en el espectro continuo de A, y por lo tanto $(A - (r + 1/n))^{-1}$ debe ser no acotada en n. Luego, para cada n existe un vector $x_n \varepsilon K$ tal que $||x_n|| = 1$ y

$$\lim_{n\to\infty} ||(A - (r + 1/n))^{-1} x_n|| = \infty$$

De aquí que $(A - (r + 1/n))x_n \to o$, por lo tanto $(A-r)x_n \to o$ cuando $n \to \infty$.

Entonces $(A - r)Bx_n - B(A - r)x_n \to o$, como B es acotada de X en X_1 y X_1 tiene inclusión compacta en X, entonces B es compacta de X en X, tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que Bx_n converge a un vector ω en K, satisfaciendo $A\omega - r\omega = o$. Como $Bx_n \underset{-}{>}^{k} \alpha Ax_n$, entonces $||Bx_n|| \geq \alpha\delta ||Ax_n||$, por otra parte

$$r||x_n|| = ||Ax_n - rx_n - Ax_n|| \leq ||Ax_n - rx_n|| + ||Ax_n|| .$$

Si $||Bx_n|| \to o$, entonces $||Ax_n|| \to o$, por lo tanto

$$r = \lim_{n\to\infty} r||x_n|| \leq \lim_{n\to\infty} ||Ax_n - rx_n|| + ||Ax_n|| = o.$$

Esta contradicción muestra que $\omega \neq o$. Entonces

$$A\,C\omega - rC\omega = A(I+A)^m\omega - r(I+A)^m\omega = o$$

y vemos que $r \leq \rho(A)$, por lo tanto $r = \rho(A)$.

Ahora, sea y un vector en K para el cual $Ay \neq \tilde{A}y$

y sea

$$E_{k+1} = F((I+\tilde{A})^{k+1}y - (I+A)^{k+1})$$

como $(I + \tilde{A})^k y - (I + A)^k y \leq^k (I + \tilde{A})^{k+1} y - (I + A)^{k+1} y$,

entonces $E_k \subset E_{k+1}$; si $E_k = E_{k+1}$ entonces existe $\beta > o$

tal que

$$(I + A)((I + \tilde{A})^k y - (I + A)^k y) \leq^k (I + \tilde{A})^{k+1} - (I + A)^{k+1} y$$

$$\leq^k \beta ((I + \tilde{A})^k y - (I + A)^k y)$$

Como $I + A$ es irreducible tenemos que $E_k = K$. De la condición de cadenas finitas de K se sigue que $E_p = K$ para algún entero $p > o$. Si $Ax_o = \rho(A)x_o$ para alguna $x_o \varepsilon K_1^{oo}$, existe $\alpha > o$ tal que $\alpha\, y \leq^k x$ y

i.e.,

$$((I = \tilde{A})^p - (I + A)^p (x_o - \alpha\, y) = o,$$

$$(I + \tilde{A})^p x_o - (1 + \rho(A))x_o \geq^k$$

$$\geq^k (I+\tilde{A})^p \alpha y - (I+A)^p \alpha y + (I+A)^p x_o - (I + \rho(A))^p x_o$$

$$= (I + \tilde{A})^p \alpha y - (I + A)^p\, \alpha y = h$$

y además $F(h) = E_p = K$, i.e., $h \;\varepsilon\; K_1^{oo}$.

Luego $(I + \tilde{A})^p x_o \geq^k (1 + \rho(A))^p x_o$ con

$$(I + \tilde{A})^p x_o \neq (1 + \rho(A))^p x_o$$

de aquí que $\rho((I + \tilde{A})^p) > (1 + \rho(A))^p$

Por el teorema de la función espectral tenemos

$$(1 + \rho(\tilde{A}))^p = \rho(I + \tilde{A})^p > (1 + \rho(A))^p$$

y por lo tanto

$$\rho(\tilde{A}) > \rho(A).$$

Como un corolario de este teorema tenemos el Teorema - 1.4.6.

- BIBLIOGRAFIA -

1. J.S. Vandergraft, "Spectral properties of matrices which have invariant cones", SIAM J. Appl. Math. 16 (1968), pp. 1208 - 1222.

2. H. Schneider and R.E.L. Turner, "Positive Eigenvectors of Order-preserving Maps", Journal of Mathematical -- Analysis and Applications, 37 (1972), pp. 506 - 515.

3. S.L. Sobolev, "Applications of Functional Analysis in -- Mathematical Phisics", Translations of Mathematical Monographs Vol. 7, American Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1963.

4. K, Yoshida, "Functional Analysis", Springer Verlang, Berlin, 1971.

5. G. Birkhoff, "Linear transformations with invariant cones", Amer. Math. Monthly, 74 (1967), pp. 274 - 276.

6. M.A. Kransnoselskii, "Positive Solutions of Operator -- Equations", Noordhatt, Groningen, 1964.

7. M.G. Krein and M.A. Rutman, "Linear Operators Leaving -- Invariant a Cone in a Banach Space", American Math. Soc. Translation no. 26 (1950), 128 pp.

8. H. Schaefer, "Some spectral properties of positive operators", Pacific J. Math., 10 (1960), pp. 1009 - 1019.

9. R.S. Varga, "Matrix Iterative Analysis", Prentice-Hall, -- Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

10. F.R. Gantmacher, "The Theory of Matrices", vol. 2, Chelsea, New York, 1959.

11. I. Marek, "u_0-Positive operators and some of their applications", SIAM J. Appl. Math., 15 (1967), pp. 484 - 494.

12. A.L. Peressini, "Ordered Topological Vector Spaces", Harper & Row, New York, 1967.

13. H.H. Schaefer, "Topological Vector Spaces", MacMillan, New York, 1966.