UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO SOBRE LAS INTEGRALES EULERIANAS.

TESIS QUE PRESENTA LA ALUMNA
ENRIQUETA GONZALEZ BAZ PARA SU EXAMEN PROFESIONAL
DE MAESTRA EN CIENCIAS MATEMATICAS

MEXICO D. F.

1 9 4 3

A la memoria

de mi inolvidable abuelita la señora

Doña MARIA BAZ VDA. DE GONZALEZ.

Con profundo agradecimiento a mis maestros, muy especialmente a los eminentes catedráticos Doctor Alfonso Nápoles Gándara, Doctor Carlos Graef y Maestro en Ciencias Jorge Quijano, cuya valiosa ayuda me permitió llevar a feliz término este trabajo, a fin de lograr el Título de MAESTRA EN CIENCIAS MATEMATICAS.

I N T R O D U C C I O N .

En el presente trabajo abordamos las Integrales Eulerianas que son cierto tipo de integrales generalizadas que fueron estudiadas por primera vez por Euler, el célebre matemático - suizo que enriqueciera a las Matemáticas con sus valiosos descubrimientos en Análisis Matemático Puro, Análisis aplicado a la Geometría, Mecánica, Astronomía, etc.

Entre sus principales obras podemos citar:

INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM (1748), una obra notable de análisis matemático.

INSTITUTIONES CALCULI DIFFERENTIALIS (1755) e INSTITUTIONES CALCULI INTEGRALIS (1768-70), que es el sumario - más completo sobre el cálculo de su tiempo y al que agregó investigaciones originales entre las que se encuentran las funciones Beta y Gamma.

METHODUS INVINIENDI LINEAS CURVAS MAXIMI MINIMIVE - PROPIETATE GAUDENTES (1744) en la que se encuentran sus investigaciones sobre el cálculo de variaciones.

THEORIA MOTUUM PLANETARUM ET COMETARUM (1744), THEORIA MOTUS LUNAE (1753) y THEORIA MOTUUM LUNAE (1772) son sus principales trabajos sobre astronomía. A Euler se le debe el método de variación de constantes arbitrarias, estudios sobre la variación secular de las excentricidades, los - movimientos de precesión y nutación y fue uno de los primeros que dando soluciones aproximadas al problema de los tres cuerpos, obtuvo, con éxito, la teoría del movimiento de la luna.

En su primera obra mencionada, expresa la dependencia de la variable y las series de potencias, los logaritmos y funciones trigonométricas, etc., introduciendo el término "función -

de x" y desde 1734 utilizó la notación f(x).

Simplificó considerablemente las fórmulas trigonométricas llamando a los ángulos del triángulo A, B, C y a los lados -- opuestos a, b y c respectivamente. Introdujo (en 1728) el símbolo e para designar la base de los logaritmos naturales, (en 1755) el símbolo Σ para indicar suma y usó (1777) la i para - $\sqrt{-1}$, notación que más tarde empleó Gauss.

Estudió también las reglas de transformación de coordenadas en el espacio, dió un método analítico para las curvas planas y superficies de 2° orden; y fue el primero en discutir las ecuaciones de 2° grado con tres variables, clasificando las superficies que ellas representan. Definió los logaritmos como exponentes y enunció su famoso teorema de funciones homogéneas.

En el campo de los números imaginarios, Euler alcanzó grandes progresos y encontró relaciones importantes, tales como: - $2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$ y $2 i \operatorname{sen} x = e^{ix} - e^{-ix}$.

Dió también un impulso considerable a las series infinitas creando la teoría de las integrales definidas y de las integrales que llevan su nombre, motivo de este trabajo.

En sus obras mencionadas en segundo término, desarrolla el cálculo de las diferencias finitas y de él deduce el cálculo diferencial. Contribuyó también a la teoría de las ecuaciones diferenciales, siendo el primero en estudiar sistemáticamente las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

En fin, podemos decir que no hubo rama de las Matemáticas que no recibiera la valiosa aportación de este genio que legó a las generaciones posteriores, horizontes más amplios de investigación y progreso.

I N D I C E

CAPITULO I.

CAPITULO II.

INTEGRALES GENERALIZADAS.

CAPITULO III.

INTEGRALES EULERIANAS.

CAPITULO IV.

LA FUNCION GAMMA EXPRESADA COMO PRODUCTO INFINITO.

/// ///

C A P I T U L O I .

CONCEPTO DE CONVERGENCIA UNIFORME Y SU IMPORTANCIA.

1. Consideremos una función $f_n(x)$, que dependa de x y de un número entero positivo n, y que en el intervalo (a, b), -- tienda hacia un límite $F(x)$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Llamaremos $\delta_n(x)$ a la diferencia $F(x) - f_n(x)$.

Decimos que una función $f_n(x)$ converge uniformemente hacia $F(x)$ en el intervalo (a, b), cuando dada arbitrariamente una $\varepsilon > 0$, por pequeña que se le suponga, se puede encontrar un número N, independiente de x, tal que el valor absoluto de la diferencia $\delta_n(x)$ se conserve menor que ε para toda $n \geq N$ y para todos los valores de x en el intervalo (a, b).

Es decir, que dada $\varepsilon > 0$ y $n \geq N$ debe tenerse $|\delta_n(x)| < \varepsilon$ para toda x en (a, b).

Como ilustración de la convergencia uniforme consideremos:

a) La función $f(x) = x^n$; en el intervalo (0, p), con p - constante positiva < 1. Entonces $F(x) = 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y - $\delta_n(x) = x^n$, de manera que siempre será posible encontrar una N a partir de la cual se conserve $|x^n| < \varepsilon$, siendo ε un número tan pequeño como se quiera y dado arbitrariamente; luego $f(x)$ es - uniformemente convergente en el intervalo (0, p).

Si consideramos la misma función, pero en el intervalo - (0, 1), deja de ser uniformemente convergente, pues para el valor $x = 1$ no será posible encontrar ninguna N que haga que -- $|\delta_n(x)| < \varepsilon$.

b) La función $f(x) = \text{ang tan}\,(nx)$; cuando $x > a$, siendo - a una constante positiva, y $n \longrightarrow \infty$, $F(x) = \frac{\pi}{2}$; entonces --

$\delta_n(x) = \frac{\pi}{2}$ - ang tan (nx), siempre existirá una N tal que para toda $n \geq N$ sea $|\delta_n(x)| < \varepsilon$. Asi que la función converge uniformemente en todo intervalo (a, b) con $0 < a < b$.

Pero si x = 0, F(0) = 0, $\delta_n(x)$ = ang tan (nx) y no existirá ninguna N que haga a $|\delta_n(x)| < \varepsilon$. La función deja de ser uniformemente convergente en todo intervalo (0, a).

c) La función $f(x) = \frac{1}{x + n}$ con $x \geq 0$ tiene por límite, cuando $n \longrightarrow \infty$, $F(x) = 0$ $\therefore$ $\delta_n(x) = \frac{1}{x + n}$. Siempre existirá una N a partir de la cual $|\delta_n(x)| < \varepsilon$, es decir, la función será uniformemente convergente en (0, a).

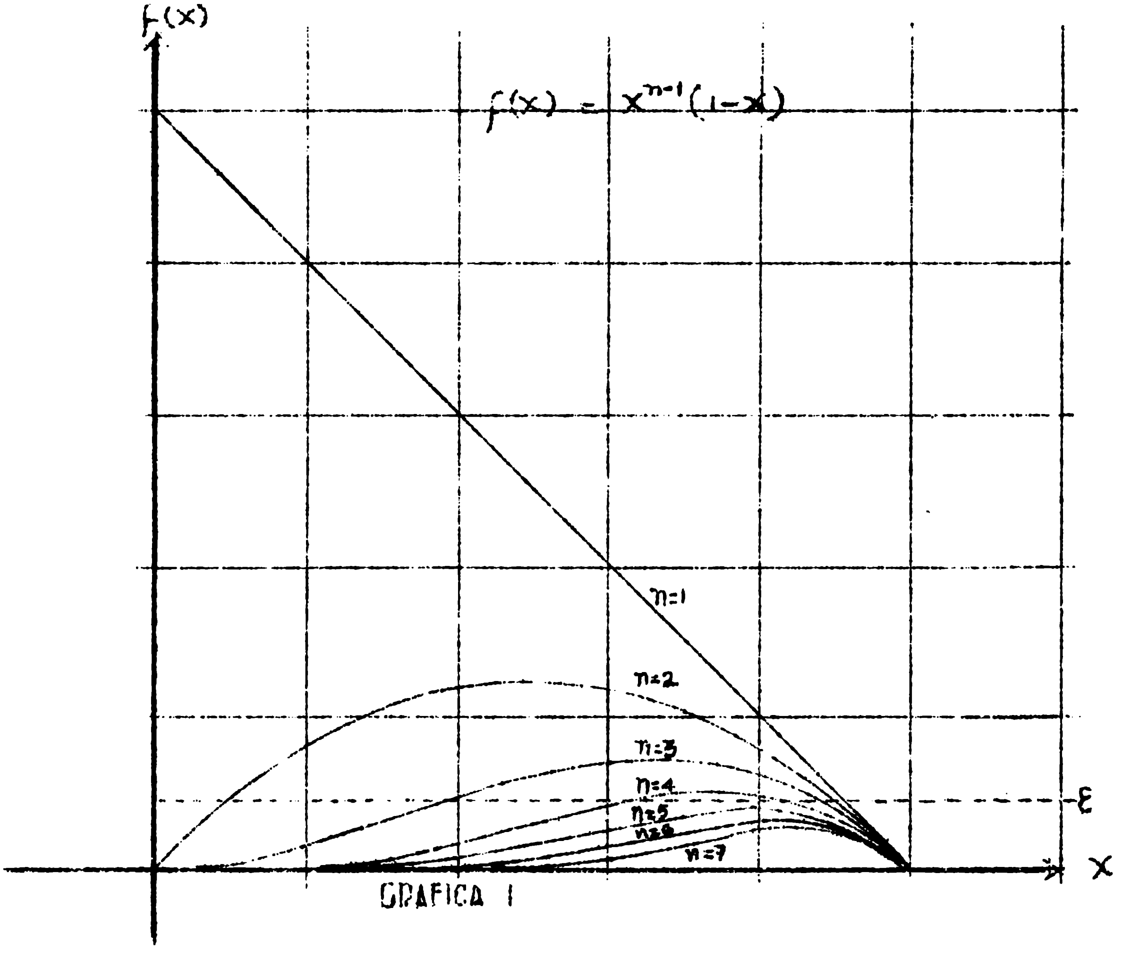
d) La función $f(x) = x^{n-1}(1 - x)$ considerada en el intervalo (o, 1), tiene por límite F(x) = 0 cuando $n \longrightarrow \infty$, por tanto $\delta_n(x) = x^{n-1}(1 - x)$ siempre será posible hacerla menor que ε eligiendo convenientemente una cierta N. La función es pues uniformemente convergente en el intervalo (0, 1).

Osgood ha empleado un método gráfico que permite ver más claramente el concepto de convergencia uniforme y con tal objeto presentamos las gráficas 1 y 2, que corresponden a las funciones: $f(x) = x^{n-1}(1 - x)$ y $f(x) = x^n$.

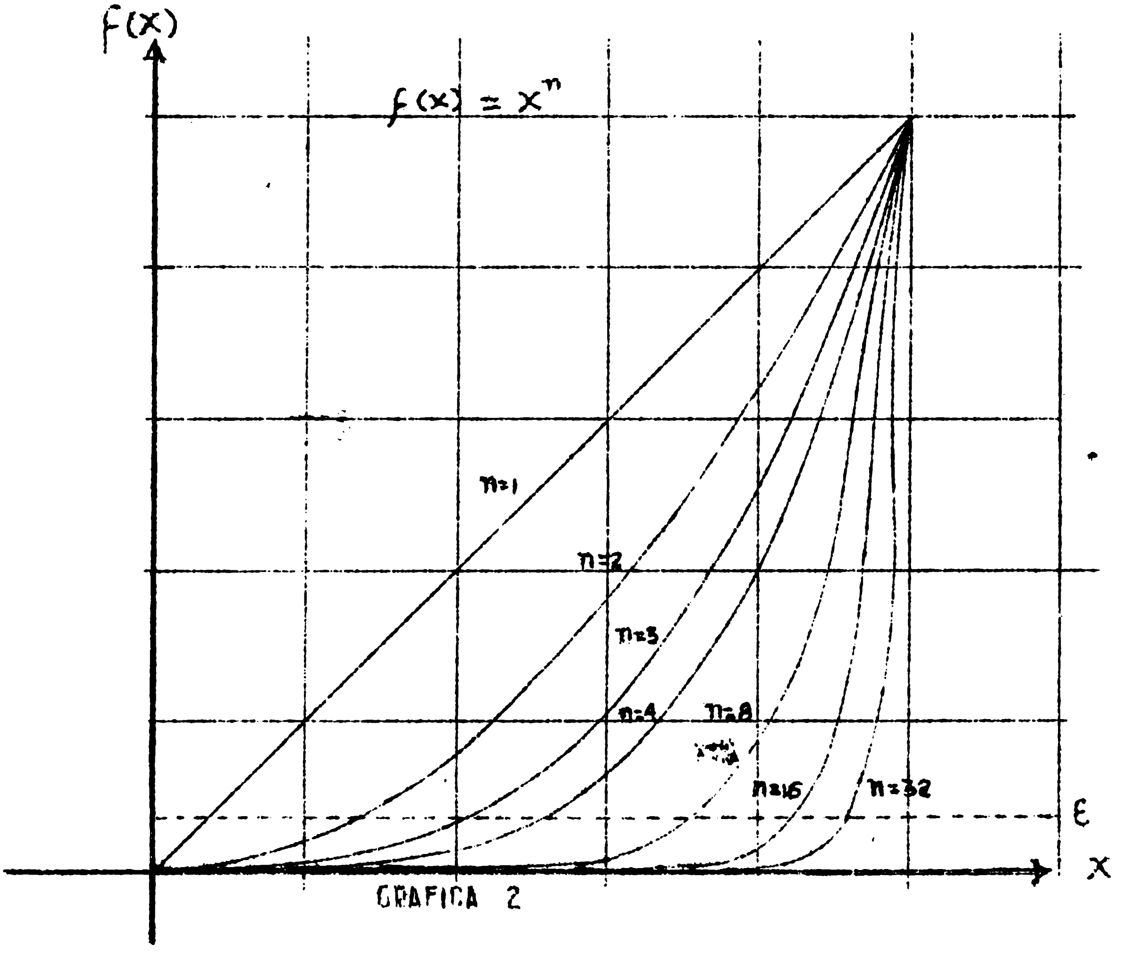
En la gráfica 1, como f(x) tiende uniformemente hacia cero, en el intervalo (0, 1), el conjunto de curvas para las cuales $n \geq N$, cae dentro de una faja limitada por $f(x) = \varepsilon$.

En cambio, en la gráfica 2, como $f(x) = x^n$, no tiende uniformemente en el intervalo (0, 1), siempre f(x) sobrepasa al valor ε por grande que se tome n, para valores de x próximos de 1.

2. La importancia de la convergencia uniforme radica en las tres propiedades siguientes:



GRAFICA 1



GRAFICA 2

1a. Si una función continua $f_n(x)$ <u>tiende uniformemente</u> hacia un límite $F(x)$ en un intervalo de x (a, b), esta función $F(x)$ es también continua en ese intervalo.

DEMOSTRACION:

Hipótesis: $f_n(x)$ es continua y

$\lim f_n(x) = F(x)$ en (a, b) conv. uniform.

Conclusión: $F(x)$ también es continua en (a, b).

Como la función $f_n(x)$ tiende uniformemente hacia $F(x)$ se tiene:

$$F(x) - f_n(x) = \delta_n(x) \tag{1}$$

$$F(x + h) - f_n(x + h) = \delta_n(x + h) \tag{2}$$

Restando (1) de (2)

$$F(x + h) - F(x) = f_n(x + h) - f_n(x) + \delta_n(x + h) - \delta_n(x) \tag{3}$$

Como $f_n(x)$ es continua, es posible encontrar un número N y un valor positivo η, tales que para toda $|h| < \eta$, y toda - $n \geq N$ se tenga:

$$\left| f_n(x + h) - f_n(x) \right| < \varepsilon$$

Además por ser $f_n(x)$ uniformemente convergente siempre será posible encontrar una N' a partir de la cual $\delta_n(x)$ sea menor que ε para todo valor de x en (a, b).

Entonces por (3) se deduce que:

$$\left| F(x + h) - F(x) \right| < 3\varepsilon \tag{4}$$

bajo las condiciones siguientes: $|h| < \eta$, n mayor que N y N' y siendo $\varepsilon > 0$ un número arbitrario.

La desigualdad (4) nos expresa que $F(x)$ es continua en el intervalo (a, b).

2a. Si en un intervalo (a, b), la función $f_n(x)$ es continua y tiende uniformemente hacia $F(x)$, entonces la integral definida de $f_n(x)$ en (a, b), tiene por límite a la integral de $F(x)$ en el mismo intervalo.

DEMOSTRACION:

Hipótesis: $f_n(x)$ es continua en (a, b)

$f_n(x)$ converge uniformemente a $F(x)$ en (a,b)

Conclusión: $\lim \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b F(x)\, dx$

Por la primera propiedad $F(x)$ es continua y por consiguiente integrable en (a, b).

Como por hipótesis $f_n(x)$ converge uniformemente hacia $F(x)$, dada una ε tan pequeña como se quiera, existirá una N, tal que cuando $n \geqq N$ se tenga:

$$\left|\delta_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad \text{para toda x de (a, b)}$$

$$\therefore \quad \left|\int_a^b F(x)\, dx - \int_a^b f_n(x)\, dx\right| = \left|\int_a^b \delta_n(x)\, dx\right| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b - a}\, dx = \varepsilon$$

$$\therefore \qquad \lim \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b F(x)\, dx$$

3a. Si en un intervalo (a, b) la función $f_n(x)$ es continua y tiene por límite $F(x)$, y si su derivada $f_n'(x)$ tiende uniformemente hacia una función $\varphi(x)$, esta función $\varphi(x)$ es la derivada de $F(x)$.

DEMOSTRACION:

Hipótesis: $\lim f_n(x) = F(x)$ en (a, b), cuando $n \longrightarrow \infty$

$\lim f_n'(x) = \varphi(x)$ en (a, b) conv. uniforme.

Conclusión: $\varphi(x) = F'(x)$

Aplicando la 2a. propiedad se tiene:

$$\int_a^x \varphi(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(x)\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[f_n(x) - f_n(a)\right] = F(x) - F(a)$$

Como $\int_a^x F'(x)\, dx = F(x) - F(a)$

resulta: $F'(x) = \varphi(x)$

CAPITULO II.

INTEGRALES GENERALIZADAS.

Cuando se tiene una integral con uno o ambos extremos infinitos, o bien con el integrando infinito para alguno o algunos de los valores del intervalo, se la llama integral infinita o o también integral generalizada. Vamos a analizar estos dos casos por separado.

1.1 EXTREMO SUPERIOR INFINITO. Si se tiene una función f(x) acotada e integrable en el intervalo (a, b), para toda b>a por definición se dice que:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

Si este límite existe, es decir es finito y bien determinado, la integral es convergente; si el límite es infinito, la integral es divergente y si no hay límite la integral no tiene sentido.

Para saber si la integral es convergente y calcular su valor basta efectuar la integración indefinida de f(x), así se obtiene una función primitiva F(x) la cual se examina cuando $x \to \infty$ y si F(x) tiene límite finito, el valor de la integral será $F(\infty) - F(a)$.

Como ejemplos citaremos:

1o. $\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx$ es convergente porque:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx = \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + 1) = 1$$

2o. $\int_0^{\infty} \frac{x}{1 + x^2}\, dx$ es divergente porque:

$$\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{1 + x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x\, dx}{1 + x^2} = \lim_{b\to\infty} \tfrac{1}{2} \operatorname{Log}(1 + b^2) = \infty$$

3o. $$\int_0^{\infty} \cos x \, dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \cos x \, dx = \lim_{b \to \infty} (\operatorname{sen} b)$$

que no es convergente puesto que sen b oscila de +1 a -1.

<u>La condición necesaria y suficiente para que una integral con extremo infinito converja, es que:</u>

$$\int_b^{\infty} f(x)\, dx \longrightarrow 0 \qquad \text{cuando } b \longrightarrow \infty$$

a) Es condición necesaria:

Hipótesis: $\int_a^b f(x)\, dx \longrightarrow \int_a^{\infty} f(x)\, dx = A$ (const) cuando $b \longrightarrow \infty$

Conclusión: $\int_b^{\infty} f(x)\, dx \longrightarrow 0$, cuando $b \longrightarrow \infty$

Se tiene: $$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^{\infty} f(x)\, dx$$

o bien: $$\int_b^{\infty} f(x)\, dx = \int_a^{\infty} f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx$$

Tomando límites:

$$\lim_{b \to \infty} \int_b^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[\int_a^{\infty} f(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right]$$

$$\therefore \int_b^{\infty} f(x)\, dx \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } b \longrightarrow \infty$$

b) Es condición suficiente:

Hipótesis: $\int_b^{b+q} f(x)\, dx \longrightarrow 0$ cuando $b \longrightarrow \infty$

Conclusión: $\int_a^b f(x)\, dx \longrightarrow A$ (constante) cuando $b \longrightarrow \infty$

Por la hipótesis podemos elegir una N suficientemente gran de para que el valor de la integral $\int_{b}^{b+q} f(x)\, dx$ quede comprendido, cualquiera que sea $q > 0$, y para $b > N$, entre $-\varepsilon$ y $+\varepsilon$ o sea:

$$-\varepsilon < \int_{b}^{b+q} f(x)\, dx = \int_{a}^{b+q} f(x)\, dx - \int_{a}^{b} f(x)\, dx < \varepsilon$$

$$\therefore \quad \int_{a}^{b} f(x)\, dx - \varepsilon < \int_{a}^{b+q} f(x)\, dx < \int_{a}^{b} f(x)\, dx + \varepsilon$$

Ahora bien, si q crece indefinidamente, la $\int_{a}^{b+q} f(x)\, dx$ quedará siempre comprendida entre las cantidades

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx - \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_{a}^{b} f(x)\, dx + \varepsilon$$

de manera que su diferencia es tan pequeña como queramos, y por tanto es evidente que:

$\int_{a}^{b+q} f(x)\, dx$ tiende a un límite determinado A cuando b y b+q aumentan indefinidamente.

Hemos considerado sólo el extremo superior de la integral como infinito, pues los otros casos que se presentan pueden hacerse caer fácilmente en el anterior.

1.2 EXTREMO INFERIOR INFINITO.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Las consideraciones del 1.1 son válidas para este caso.

1.3 AMBOS EXTREMOS SON INFINITOS.

Entonces la integral se separa en dos integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx =$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\, dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)\, dx$$

las cuales caen en los casos anteriores.

Ejemplo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= - \text{ang tan}(-\infty) + \text{ang tan}\,\infty = \pi$$

1.4 LA INTEGRAL $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$. Vamos a estudiar esta integral que va a servirnos para fundamentar un criterio de convergencia; si en ella consideramos p = constante y $a > 0$, para que el integrando no se haga infinito y además que la función conserve un mismo signo cuando $x \longrightarrow \infty$; la integral auxiliar será:

$$\int_a^b\frac{dx}{x^p} = \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \qquad \text{si } p \neq 1$$

$$\int_a^b\frac{dx}{x^p} = \text{Log } b - \text{Log } a \qquad \text{si } p = 1$$

Entonces si $p > 1$ y $b \longrightarrow \infty$ la integral vale:

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1} \qquad \text{es decir, converge.}$$

Si $p < 1$ y $b \longrightarrow \infty$ la integral diverge; y si $p = 1$ y - $b \longrightarrow \infty$ la integral también diverge.

Por consiguiente podemos afirmar <u>que la integral propuesta $\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$ y diverge cuando $p \leq 1$.</u>

1.5 CRITERIO DE CONVERGENCIA. <u>Si f(x) es una función</u> --

cualquiera que al multiplicarla por x^p, con $p = \text{const.} > 1$, define una función $\varphi(x)$, acotada en el intervalo (a, b), cuando $b \to \infty$, entonces la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es absolutamente -- convergente.

Esto se justifica fácilmente puesto que $x^p f(x) = \varphi(x) < L$ siendo L el extremo superior de $\varphi(x)$.

$$\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^\infty \frac{\varphi(x)}{x^p}\,dx\right| < \int_a^\infty \left|\frac{L}{x^p}\right| dx = L\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$$

y como L es constante y la integral es del tipo ya visto y $p > 1$ la integral propuesta converge.

Por ejemplo: $$\left|\int_c^\infty \frac{\cos ax}{1 + x^2}\,dx\right| \leq \int_c^\infty \left|\frac{1}{x^2}\right| dx \qquad c > 0$$

converge puesto que $\varphi(x) = \dfrac{\cos ax}{1/x^2 + 1}$ es acotada en el intervalo (c, ∞) y $p > 1$.

Por otra parte, si existen un número $p \leq 1$ y una constante positiva A, tales que el producto $\varphi(x) = x^p f(x) > A$ para toda $x > a > 0$, entonces la integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \quad \text{es divergente.}$$

Porque:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x^p}\,dx > \int_a^b \frac{A}{x^p}\,dx = A\int_a^b \frac{dx}{x^p}$$

y como A es una constante positiva, y la última integral tiende a infinito, por 1.4, la integral de f(x) también tenderá a infinito.

Ejemplo:

$$\int_{a>0}^\infty \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx = \int_a^\infty \frac{x}{\sqrt{1/x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{x^{-1}}\,dx > \int_a^\infty \frac{A}{x^{-1}}\,dx$$

como $\frac{x}{\sqrt{1+1/x^{\varepsilon}}} \to \infty$ cuando $x \to \infty$, A puede hacerse tan -- grande como se quiera y además $p < 1$, la integral es divergente.

2. INTEGRANDO INFINITO. Son también consideradas como integrales infinitas aquellas con extremos finitos pero cuyo integrando se hace infinito para algún valor del intervalo (a, b),

Consideraremos los casos siguientes:

2.1 EL INTEGRANDO SE HACE INFINITO PARA EL EXTREMO SUPERIOR. Si f(x) es acotada e integrable en todo intervalo $(a, b-\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, pero $f(x) \to \infty$, cuando $x \to b$, se dice que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Esta integral puede también presentar cualquiera de los -- tres aspectos siguientes: ser convergente, divergente u oscilante.

Ejemplos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-2\sqrt{1-x} \right]_0^{1-\varepsilon} = 2$$

es convergente.

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$$

es divergente.

2.2 EL INTEGRANDO SE HACE INFINITO PARA EL EXTREMO INFERIOR. En este caso la integral queda definida por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

en el supuesto de que la f(x) sea acotada e integrable en todo intervalo $(a+\varepsilon, b)$, con $\varepsilon > 0$.

Ejemplo:

Supondremos $0<b<1$

$$\int_b^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - b^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{b+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - b^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{b} \left[\text{ang sec } \frac{1}{b} - \text{ang sec } \frac{b+\varepsilon}{b} \right] =$$

$$= \frac{1}{b} \text{ ang sec } \frac{1}{b}$$

2.3 Si el integrando se hace infinito en los dos extremos se separa en dos integrales de los tipos ya vistos. Es decir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^c f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_c^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx$$

con ε y ε' tendiendo a cero, pero independientes.

Ejemplo:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\text{ang sen } (1-\varepsilon) \right] + \lim_{\varepsilon' \to 0} \left[-\text{ang sen } (-1+\varepsilon') \right] =$$

$$= \pi$$

2.4 INTEGRANDO INFINITO EN UNO O VARIOS PUNTOS DENTRO DEL INTERVALO. Vamos a considerar el caso más sencillo, es decir, cuando el integrande se hace infinito para un solo punto del intervalo.

Supongamos que se trata de integrar la función $f(x)$ en el intervalo (a, b), pero que $f(x) \longrightarrow \infty$ cuando $x \longrightarrow c$, siendo $a < c < b$. Entonces dicha función sólo podrá integrarse en intervalos que no contengan al punto c.

Por definición se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$$

con $\varepsilon > 0$ y. $\varepsilon' > 0$ infinitamente pequeños e independientes.

Ejemplo:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^{2/3}} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^{2/3}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[3x^{1/3}\right]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left[3x^{1/3}\right]_{\varepsilon_2}^{1} = 6$$

2.5 <u>LA INTEGRAL $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$</u>. Vamos a ver bajo que condiciones esta integral (cuyo integrando se hace infinito para el extremo superior) es convergente, en el supuesto de que p es constante; para ello integremos la integral auxiliar:

$$\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^p} = \frac{1}{1-p}\left[(b-a)^{1-p} - \varepsilon^{1-p}\right] \qquad \text{si } p \neq 1$$

$$\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^p} = \text{Log}\,(b-a) - \text{Log}\,\varepsilon \qquad \text{si } p = 1$$

Si $p<1$ y $\varepsilon \to 0$, la integral converge al valor:

$$\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$$

Si $p>1$ y $\varepsilon \to 0$ entonces la integral diverge ya que $\varepsilon^{1-p} \to \infty$

Y si $p = 1$ también diverge la integral puesto que Log ε tiende a $-\infty$ cuando $\varepsilon \to 0$.

De lo anteriormente expuesto se concluye que <u>la integral $\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$ converge sólo cuando $p<1$ y diverge cuando $p \geqq 1$.</u>

Vamos a utilizar este resultado para obtener un criterio análogo al de las integrales con extremo infinito.

2.6 CRITERIO DE CONVERGENCIA. Si en una integral $\int_a^b f(x)\,dx$, el integrando se hace infinito cuando $x = b$, pero éste puede ser multiplicado por una potencia $p = \text{const.} < 1$, del binomio $(b - x)$, obteniéndose así una nueva función $\varphi(x)$ que resulta acotada en el intervalo (a, b), cuando $x \longrightarrow b$, entonces la integral propuesta converge.

Porque si $(b - x)^p f(x) = \varphi(x) < L$, siendo L el extremo superior de $\varphi(x)$ y $p < 1$ se tiene:

$$\left|\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{b-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{(b - x)^p}\,dx\right| < \int_a^{b-\varepsilon}\left|\frac{L}{(b - x)^p}\right| dx =$$

$$= L\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b - x)^p}$$

y como L es un número finito y la última integral converge, puesto que $p < 1$, nuestra integral también converge.

Ejemplo:

Consideremos la integral: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}}$, en la cual el integrando se hace infinito para el extremo superior. Se puede escribir como:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}\,\sqrt{1+x+x^2}}\text{, de manera que}\quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x + x^2}}$$

y como $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(1) = 1/\sqrt{3}$ y además $p = \frac{1}{2} < 1$, la integral converge.

Si en la integral $\int_a^b f(x)\,dx$, el integrando se hace infinito para $x = b$, y existen un número $p \geq 1$ y una constante positiva A, tales que el producto $G(x) = (b - x)^p f(x) > A$, cuando $x \longrightarrow b$, entonces dicha integral es divergente.

Puesto que: $(b - x)^p f(x) = \varphi(x) > A > 0$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{(b-x)^p}\,dx > \int_a^b \frac{A\,dx}{(b-x)^p} = A\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$$

y como A es const. > 0 y la última integral tiende a ∞, pues $p \geq 1$, la integral de $f(x)$ también tenderá a ∞.

Ejemplo:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^3}$$ El integrando tiende a infinito cuando $x \longrightarrow 1$

Podemos definir a $\varphi(x)$ como:

$$\varphi(x) = (1 - x)\, f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$$ cuyo menor valor es $\frac{1}{3}$, además $p = 1$, por lo tanto la integral diverge.

En el caso que el integrando se haga infinito para el extremo inferior entonces $\varphi(x)$ se definirá como $f(x)/(x - a)^p$.

Por último si el punto singular de $f(x)$ es c, siendo $a<c<b$, entonces se separará en las dos integrales siguientes:

$$\int_a^c \frac{\varphi(x)}{(c-x)^p}\,dx + \int_c^b \frac{\varphi(x)}{(x-c)^p}\,dx$$

con $\varphi(x)$ finita cuando $x \longrightarrow c$.

3. INTEGRALES DOBLEMENTE GENERALIZADAS. Algunas veces una misma integral puede presentar los dos aspectos estudiados, es decir, tener algún extremo infinito y llegar a ser el integrando infinito para algún punto del intervalo considerado.

Supongamos que en el intervalo (a, b) la función $f(x)$ tiene un punto singular para $x = c$. Entonces se tiene:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

La primera integral del segundo miembro es del tipo estudiado en el número 2, mientras que la segunda es del tipo estudiado en 1.

Ejemplo:

$$\int_0^{\infty} x^{a-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^{1} x^{a-1}\, e^{-x}\, dx + \int_1^{\infty} x^{a-1}\, e^{-x}\, dx$$

con $0 < a$.

Si $f(x)$ presenta n puntos de discontinuidad y uno o ambos extremos de integración son ∞, entonces la integral se descompone en $n + 1$ integrales.

4.1 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES GENERALIZADAS. Las integrales generalizadas convergentes tienen muchas de las propiedades de las integrales ordinarias, ya que las primera pueden ser consideradas como límite de estas últimas.

Vamos a considerar algunas de dichas propiedades.

1a. La integral de una función multiplicada por una constante, es igual al producto de la constante por la integral de la función.

Esto deriva de la propia definición puesto que:

$$\int_a^{\infty} k\, f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} k\, f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} k \int_a^{b} f(x)\, dx =$$

$$= k \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\, dx = k \int_a^{\infty} f(x)\, dx .$$

2a. La integral de una función $f(x)$ en (a, b), cuando el intervalo ha sido dividido en varias partes, (pero en número finito), es igual a la suma de las integrales en cada parte.

Esto es:

$$\int_a^{b} f(x)\, dx = \int_a^{c} f(x)\, dx + \int_c^{d} f(x)\, dx + \dots + \int_k^{b} f(x)\, dx$$

siendo c, d, ... k, números comprendidos en el intervalo (a,b).

Si suponemos que el extremo superior tiende al infinito, - entonces las primera integrales del segundo miembro no presentan dificultad alguna y sólo la última se transforma en: - -

$\int_k^{\infty} f(x)\,dx$ la cual es igual a lim $\int_k^b f(x)\,dx$, cuando $b \to \infty$

y por tanto la integral propuesta seguirá existiendo.

En forma análoga resulta que si f(x) se hace infinita para el valor b (por ejemplo), la integral vale:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \ldots. + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_k^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

3a. La suma de las integrales de dos o más funciones, tomadas entre los mismo extremos, es igual a la integral de la suma de las funciones.

Se tienen las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tales que $f_1(b)$ igual a ∞ y también $f_2(b) = \infty$; entonces

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f_1(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f_2(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{b-\varepsilon} f_1(x)\,dx + \int_a^{b-\varepsilon} f_2(x)\,dx \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx \quad .$$

Lo que no se puede afirmar es que la integral de una suma sea igual a la suma de las integrales, es decir que:

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx$$

cuando alguno de los extremos es infinito o el integrando se - hace infinito para algún valor del intervalo, ya que puede la - integral de la izquierda convergir sin que cada una de las de -

la derecha lo hagan; pero si se sabe que una de las integrales de la derecha converge, así como la integral de la izquierda, - entonces la otra convergerá.

4.2 CALCULO DE LAS INTEGRALES GENERALIZADAS. Veamos ahora como se calculan las integrales generalizadas.

a) Para calcular una integral definida ordinaria se tiene la fórmula:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

siendo $f(x)$ continua en (a, b) y $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Esta fórmula puede generalizarse para las integrales infinitas.

Supondremos que el integrando $f(x)$ se hace ∞ para $x = b$; entonces por la definición de integral generalizada se tiene:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[F(b - \varepsilon) - F(a) \right]$$

Este límite es igual a $F(b) - F(a)$ en el supuesto de que $F(x)$ sea continua para $x = b$.

Si se trata de una integral con extremo superior infinito y en la que tanto la función $f(x)$ como su antiderivada $F(x)$ -- sean continuas para todos los valores de x, por grande que sea x y además que $F(\infty)$ tenga un valor bien definido, la integral valdrá:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[F(b) - F(a) \right] = F(\infty) - F(a)$$

b) La integración por descomposición también se utiliza en las integrales generalizadas, porque si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ se tendrá:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$$

y si se trata de una integral infinita, sea con extremos infinitos o con integrando infinito, para cierto valor del intervalo de integración, si al tomar los límites dos de las integrales anteriores resultan convergentes, la tercera necesariamente lo será.

c) La integración por partes es también aplicable a las integrales generalizadas bajo las siguientes condiciones. Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos funciones continuas en (a, b) y sus derivadas $f_1'(x)$ y $f_2'(x)$ sólo contienen puntos singulares aislados, entonces:

$$\int_a^b f_1(x)\, f_2'(x)\, dx = \Big[f_1(x)\, f_2(x)\Big]_a^b - \int_a^b f_2(x)\, f_1'(x)\, dx$$

siempre que al tomar los límites, según lo indica la definición de la integral infinita, dos de los términos de la ecuación anterior se aproximen a un límite, pues entonces la tercera también se aproximará y por tanto la integral propuesta tendrá sentido.

d) El cálculo de las integrales ordinarias puede efectuarse mediante un cambio de variable, esto es:

$$\int_{x=\varphi(u_1)}^{x=\varphi(u_2)} f(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f\big[\varphi(u)\big]\, \varphi'(u)\, du$$

siempre que $f(x) = f\big[\varphi(u)\big]$ sea continua en (a, b) y su derivada $\varphi'(u)$ también sea continua y diferente de cero dentro del intervalo (u_1, u_2).

Si consideramos ahora que la función f(x) va a integrarse en el intervalo (a, b) de x o en el (u_1, u_2) de u, y que alguno de estos cuatro extremos es infinito o el integrando se hace infinito para alguno de ellos, se tiene:

$$\int_{a=\varphi(u_1)}^{b=\varphi(u_2)} f(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f\big[\varphi(u)\big]\, \varphi'(u)\, du$$

y si al tomar los límites la primera integral converge, la segunda también tendrá que converger al mismo límite.

5. INTEGRALES UNIFORMEMENTE CONVERGENTES. Cuando se tiene una función de x y de un parámetro ω, que designaremos por - $f(x, \omega)$, su integral definida de a a b puede ser integrada y diferenciada bajo el signo de integral, con respecto al parámetro ω, siempre que $f(x, \omega)$ sea una función continua de x y de ω en los intervalos respectivos (a, b) y (ω_0, ω_1) y además que la - derivada parcial de $f(x, \omega)$ con respecto a ω exista y sea continua.

De manera que las reglas de la integración y derivación de las integrales se aplican cuando la función satisface los requisitos ya indicados y además que esté acotada en el intervalo de integración y con extremos finitos.

Estas reglas pueden aplicarse a las integrales generalizadas siempre que ellas sean uniformemente convergentes.

En seguida diremos que se entiende por integral generalizada uniformemente convergente.

5.1 a) Con extremo superior infinito.

Una integral converge uniformemente cuando ω varía en el - intervalo (ω_0, ω_1), si a todo número positivo ε, por pequeño - que sea, se le puede hacer corresponder un número M, independiente de ω, tal que cuando $m > M$ y para todos los valores de ω, se tenga:

$$\left| \int_m^{\infty} f(x, \omega)\, dx \right| < \varepsilon$$

b) Con integrando infinito, por ejemplo para el extremo - superior.

La integral converge uniformemente cuando ω varía dentro del intervalo (ω_0, ω_1) si a todo número positivo ε, por pequeño que sea, se le puede hacer corresponder otro número positivo η' independiente de ω, tal que cuando $0 < \eta < \eta'$ se tenga:

$$\left| \int_{b-\eta}^{b} f(x, \omega)\, dx \right| < \varepsilon$$

5.2 Para saber cuando una integral es uniformemente convergente se aplica un criterio debido a Weierstrass, y que es - de gran utilidad. A saber:

La integral con extremo superior infinito de $f(x, \omega)$ converge uniformemente si es posible encontrar una función $\varphi(x)$, que no contenga al parámetro ω y cuyo valor absoluto sea mayor que $|f(x, \omega)|$ para valores de $x > a$ y tal que:

$$\int_a^{\infty} |\varphi(x)|\, dx \quad \text{sea convergente.}$$

Para demostrarlo consideremos las dos integrales:

$$\int_a^{\infty} |f(x, \omega)|\, dx \quad \text{y} \quad \int_a^{\infty} |\varphi(x)|\, dx$$

Puesto que para cualquier valor de ω en el intervalo $(\omega_0 \omega_1)$ y para $x > a$, $|f(x, \omega)| < |\varphi(x)|$, si la segunda integral converge, la primera indudablemente que convergerá, ya que:

$$\left| \int_a^{\infty} f(x, \omega)\, dx \right| \leq \int_a^{\infty} |\varphi(x)|\, dx$$

De manera análoga,

Si la función $f(x, \omega)$ es infinita cuando $x = b$, su integral convergerá uniformemente siempre que exista una función $\varphi(x)$ que no contenga al parámetro ω y sobrepase, en valor absoluto a $|f(x, \omega)|$ para todos los valores de ω en el intervalo (ω_0, ω_1) y para los valores de x de $(a \leq x < b)$, y tal que:

$$\int_a^{b} |\varphi(x)|\, dx \quad \text{converja cuando } x \longrightarrow b$$

5.3 PROPIEDADES. Vamos a citar algunas propiedades de las integrales generalizadas uniformemente convergentes.

Para ello consideremos

$$\phi(\omega) = \int_a^{\infty} f(x, \omega)\, dx$$

y supongamos que $f(x, \omega)$ es función continua de x y de ω para todos los valores de ω en el intervalo (ω_0, ω_1) y de x en (a, ∞)

1a. Una integral generalizada que contiene a un parámetro

ω, es función continua del parámetro en todo intervalo donde - la convergencia es uniforme.

Demostración:

$$\phi(\omega) = \int_a^\infty f(x, \omega)\, dx = \int_a^b f(x, \omega)\, dx + \int_b^\infty f(x, \omega)\, dx$$

$$\phi(\omega + \Delta\omega) = \int_a^b f(x, \omega+\Delta\omega)\, dx + \int_b^\infty f(x, \omega+\Delta\omega)\, dx$$

$$\Delta\phi \leqq \left|\int_a^b \left[f(x, \omega+\Delta\omega) - f(x, \omega)\right] dx\right| + \left|\int_b^\infty f(x, \omega+\Delta\omega)\, dx\right| + \left|\int_b^\infty f(x, \omega)\, dx\right|$$

Si b es suficientemente grande entonces $\left|\int_b^\infty f(x,\omega)\, dx\right| < \varepsilon$

para todos los valores de ω dentro del intervalo (ω_0, ω_1), por - ser uniformemente convergente. Como la integral finita - - $\int_a^b f(x, \omega)\, dx$ es función continua de ω, tomando $\Delta\omega$ suficientemente pequeña, se puede hacer

$$\left|\int_a^b \left[f(x, \omega+\Delta\omega) - f(x, \omega)\right] dx\right| < \varepsilon$$

y por tanto $|\Delta\phi| \leqq 3\varepsilon$, luego ϕ es una función continua.

Como ejemplo consideremos:

$$\int_1^\infty \frac{\cos \omega x}{x^p}\, dx$$ con $p > 1$. Esta integral es uniformemente convergente en cualquier intervalo (ω_0, ω_1) de ω ya que aplicando el criterio de Weierstrass tenemos:

$$\left|\int_1^\infty \frac{\cos \omega x}{x^p}\, dx\right| \leqq \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} ;$$

siendo la segunda integral convergente cuando $p > 1$. Luego la integral propuesta es función continua de ω en cualquier intervalo.

Como un segundo ejemplo podemos dar la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega x}{1 + x^2}\, dx.$$ Esta integral también es uniformemente convergente en cualquier intervalo de variación de ω ya que:

$$\left| \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \omega x}{1 + x^2}\, dx \right| \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

Como la segunda integral es convergente, la primera resulta uniformemente convergente, y por tanto define una función continua de ω en cualquier intervalo de variación.

2a. <u>Si una integral infinita converge uniformemente en un intervalo finito (ω_0, ω_1), puede ser integrada en dicho intervalo, con respecto a ω, bajo el signo de integración.</u>

Sólo lo demostraremos para el caso en que el integrando se haga infinito para el extremo superior b.

Sea la integral $\int_a^b f(x, \omega)\, dx$.

Integrando con respecto a ω entre los extremos ω_0 y ω_1 y siendo c un número cualquiera comprendido entre a y b, se tiene:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_a^b f(x,\omega)\, dx = \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_a^c f(x,\omega)\, dx + \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_c^b f(x,\omega) dx$$

$$= \int_a^c dx \int_{\omega_0}^{\omega_1} f(x,\omega)\, d\omega + \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_c^b f(x,\omega)\, dx$$

La última integral cuando $c \longrightarrow b$, tiende a cero, pues por hipótesis converge uniformemente, luego

$$\left| \int_c^b f(x, \omega)\, dx \right| < \eta$$

$$\therefore \qquad \left| \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_c^b f(x,\ \omega)\ dx \right| < \eta(\omega_1 - \omega_0)$$

así que cuando $c \longrightarrow b$, resulta

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega \int_a^b f(x,\ \omega)\ dx = \int_a^b dx \int_{\omega_0}^{\omega_1} f(x,\ \omega)\ d\omega$$

3a. Una integral generalizada, función de un parámetro ω puede ser diferenciada, bajo el signo de integración, respecto a dicho parámetro, si tanto el integrando como la derivada de éste respecto a ω, son funciones continuas de x y ω, para todos los valores considerados en los intervalos respectivos, y además que la integral obtenida por la diferenciación sea uniformemente convergente.

Antes de demostrarlo diremos que una integral generalizada uniformemente convergente, siempre puede expresarse como una serie uniformemente convergente de integrales propiamente dichas. Por ejemplo, si se trata de una integral con extremos finitos, pero cuyo integrando se haga infinito para el extremo superior b, entonces se toman los puntos b_1, b_2, ... b_n, que forman una serie creciente de números que tienden a b y se tendrá:

$$G(\omega) = \int_a^b f(x,\ \omega)\ dx = \int_a^{b_1} f(x,\omega)\ dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x,\omega)\ dx + \dots$$

$$\dots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x,\omega)\ dx + \dots\dots$$

Si la integral del primer miembro converge uniformemente, lo mismo acontecerá con la serie del segundo miembro y recíprocamente.

Si suponemos en seguida que $\dfrac{\partial f(x,\ \omega)}{\partial \omega}$ es función continua de x y de ω para todos los valores de x y de ω, en los intervalos respectivos $(a,\ b)$ y $(\omega_0,\ \omega_1)$ y que la integral de -

esta derivada parcial converge uniformemente, entonces la serie anterior puede derivarse término a término dentro de cada integral, ya que son integrales ordinarias y resulta:

$$\frac{d\,\varphi(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\int_a^b f(x,\omega)\,dx = \int_a^{b_1}\frac{\partial f(x,\omega)}{\partial\omega}\,dx + \int_{b_1}^{b_2}\frac{\partial f(x,\omega)}{\partial\omega}\,dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{b_{n-1}}^{b_n}\frac{\partial f(x,\omega)}{\partial\omega}\,dx + \ldots = \int_a^b \frac{\partial f(x,\omega)}{\partial\omega}\,dx$$

y esta última integral es uniformemente convergente como la serie.

Así que: $$\frac{d}{d\omega}\varphi(\omega) = \int_a^b \frac{\partial f(x,\omega)}{\partial\omega}\,dx$$

Si la integral generalizada tiene su extremo superior infinito, las demostraciones de las dos propiedades anteriores son análogas a las que se hicieron para el caso del integrando infinito.

Ejemplos:

1) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+x^2}\,dx.$ Esta integral converge uniformemente

pues aplicándole el criterio de Weierstrass vemos que:

$$\left|\int_0^\infty \frac{\cos\omega x}{1+x^2}\,dx\right| \leqq \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

para cualquier valor de ω; como la segunda integral converge, la primera que es función de ω convergerá uniformemente en cualquier intervalo de variación de ω, por tanto es función continua de dicho parámetro. Por otra parte,

$$\frac{\cos \omega x}{1 + x^2} \qquad y \qquad \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\cos \omega x}{1 + x^2}\right) = -\frac{x \operatorname{sen} \omega x}{1 + x^2}$$

son funciones continuas de x en el intervalo $(0, \infty)$ y de ω para cualquier intervalo.

Por todo lo anterior la ecuación:

$$\frac{d}{d\omega}\int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{1 + x^2}\, dx = -\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} \omega x}{1 + x^2}\, dx \qquad \text{es válida.}$$

2) $\int_0^\infty e^{-ax}\, dx$ suponiendo $a > 1$. Para cerciorarse de si esta integral converge la compararemos con $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$.

Asi que como $e^{-ax} < e^{-x}$ siempre que $a > 1$ y como la segunda integral es convergente, la primera que depende de a, converge uniformemente para cualquier valor de $a > 1$, luego es función - continua y puede ser diferenciada con respecto a a.

Ejecutando esta operación n-1 veces se obtiene:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, x^{n-1}\, dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots(n-1)}{a^n}$$

y haciendo $a = 1$ y n entero, se obtiene:

$$\int_0^\infty e^{-x}\, x^{n-1}\, dx = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdots(n-1) = (n-1)!$$

la cual tiene una gran importancia como lo veremos en el siguiente capítulo.

CAPITULO III.

INTEGRALES EULERIANAS.

Euler estudió por primera vez cierto tipo de integrales generalizadas, con motivo del problema de la interpolación de la función factorial. Por tal motivo Legendre las denominó FUNCIONES EULERIANAS de primera y segunda especie, designándolas respectivamente con las letras B y Γ.

1. LA FUNCION BETA. La función Beta o integral de primera especie, es una integral definida que depende de dos parámetros, a saber:

$$B(a, b) = \int_{o}^{1} x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\, dx \tag{1}$$

Esta función cuyo integrando se hace infinito tanto para $x = 1$, cuando $b < 1$, como para $x = o$, cuando $a < 1$, va a ser analizada a fin de ver bajo que condiciones es convergente.

$$B(a, b) = \int_{o}^{c} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx + \int_{c}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx$$

siendo $o < c < 1$.

A la primera integral del segundo miembro le aplicamos el criterio 2.6 (pág. 14)

$$\int_{o}^{c} x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\, dx = \int_{o}^{c} \frac{(1 - x)^{b-1}}{x^{1-a}}\, dx$$

y vemos que converge siempre que $1-a < 1 \therefore a > o$ y ya que $\varphi(x) = (1 - x)^{b-1}$ es acotada en (o, c).

Aplicándole el mismo criterio a la segunda integral se tiene:

$$\int_{c}^{1} x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\, dx = \int_{c}^{1} \frac{x^{a-1}}{(1 - x)^{1-b}}\, dx$$

Esta también converge si $-b+1 < 1$ $\therefore$ $b > o$, pues la $\varphi(x) = x^{a-1}$ es acotada en el intervalo $(c, 1)$.

En resumen, la función (1) tiene sentido con tal que $a > o$ y $b > o$. En el caso que $a \leqq o$ o $b \leqq o$, la integral es divergente.

1.2 CONVERGENCIA UNIFORME DE LA FUNCION BETA. Supongamos ahora que <u>a</u> y <u>b</u> van a variar en un intervalo positivo (ε, a) y (η, b) respectivamente.

Entonces

$$B(a, b) = \int_o^c x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx + \int_c^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

Estas dos integrales <u>convergen uniformemente</u> pues en virtud del criterio 5.2 (pág. 21) se tiene:

$$\int_o^c x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx < \int_o^c x^{\varepsilon-1} (1-x)^{b-1} dx \qquad \text{con } o < \varepsilon < a$$

e

$$\int_c^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx < \int_c^1 x^{a-1} (1-x)^{\eta-1} dx \qquad \text{con } o < \eta < b$$

Como los segundos miembros de las desigualdades anteriores, son integrales convergentes, los primeros corresponden a integrales uniformemente convergentes.

Por tanto la función Beta es una integral <u>uniformemente convergente</u> y posee las propiedades que de ello derivan.

1a. Es función continua de <u>a</u> y <u>b</u> cuando $a > o$ y $b > o$.

2a. Puede ser integrada, bajo el signo de integración con respecto a <u>a</u> o <u>b</u>, en cualquier intervalo positivo de dichos parámetros.

3a. También es diferenciable, bajo el signo de integración con respecto a los parámetros <u>a</u> o <u>b</u> en cualquier punto de intervalos positivos, pues la integral que se obtiene al hacer esa diferenciación es uniformemente convergente.

1.3 PROPIEDADES DE LA FUNCION BETA.

1a. Si en la expresión (1) hacemos $x = 1 - y$, $dx = -dy$

$$B(a,\ b) = \int_0^1 (1 - y)^{a-1}\, y^{b-1}\, dy = B(a,\ b)$$

o sea
$$B(a,\ b) = B(b,\ a) \tag{2}$$

lo que nos demuestra que la función B(a, b) es simétrica respecto a los parámetros.

2a. Supongamos que uno de los parámetros, por ej., el b - sea entero y mayor que 1. Entonces integrando por partes la -- expresión (1) da:

$$B(a,\ b) = \left[\frac{x^a\,(1 - x)^{b-1}}{a}\right]_0^1 + \frac{b - 1}{a}\int_0^1 x^a\,(1 - x)^{b-2}\, dx$$

$$B(a,\ b) = \frac{b - 1}{a}\, B(a+1,\ b-1) \tag{3}$$

3a. Pero si a también es entero y seguimos la integra-- ción en la misma forma se obtiene:

$$B(a,\ b) = \frac{(b - 1)(b - 2)\cdots\cdots 2\cdot 1}{a(a + 1)(a + 2)\cdots\cdots(a+b-1)} \tag{4}$$

o bien:
$$B(a,\ b) = \frac{(a-1)!\ (b-1)!}{(a+b-1)!}$$

1.4 ALGUNAS OTRAS FORMAS DE LA FUNCION BETA.

a) Si en la expresión (1) hacemos $x = \frac{y}{c}$, $dx = \frac{1}{c}\, dy$, y para $x = o$, $y = o$; para $x = 1$, $y = c$, substituyendo:

$$B(a,\ b) = \frac{1}{c^{a+b-1}} \int_0^c y^{a-1}\,(c - y)^{b-1}\, dy \tag{5}$$

b) Haciendo en (1) $x = \frac{y}{1 + y}$, $1 - x = \frac{1}{1 + y}$, - - - $dx = \frac{dy}{(1 + y)^2}$, cuando $x = o$ $y = o$, y cuando $x = 1$, $y = \infty$. -

Por tanto queda:

$$B(a,\ b) = \int_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy \qquad (6)$$

c) De (6)

$$B(a,\ b) = \int_0^{1} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy + \int_1^{\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy$$

Si en la última integral del segundo miembro, substituimos a y por 1/y, los nuevos extremos serán 1 y o y se obtiene:

$$B(a,\ b) = \int_0^{1} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy - \int_1^{o} \frac{y^{b-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy$$

$$B(a,\ b) = \int_0^{1} \frac{y^{a-1} + y^{b-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy \qquad (7)$$

lo que viene a ratificar la simetría de Beta.

d) Si en la expresión (1) suponemos $a = b$, queda:

$$B(a,\ a) = \int_0^{1} \left[\frac{1}{4} - \left(\tfrac{1}{2} - x\right)^2 \right]^{a-1} dx$$

y como el integrando es simétrico a partir de $\frac{1}{2}$, y haciendo - - $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$ se obtiene:

$$B(a,\ a) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\tfrac{1}{4} - \left(\tfrac{1}{2} - x\right)^2 \right]^{a-1} dx =$$

$$= \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^{1} y^{-\frac{1}{2}} (1-y)^{a-1}\, dy$$

$$\therefore \quad B(a,\ a) = \frac{1}{2^{2a-1}} B(\tfrac{1}{2},\ a) \tag{8}$$

e) Un nuevo cambio de variable en (1), haciendo $x = \operatorname{sen}^2\theta$ nos conduce a :

$$B(a,\ b) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2a-1}\theta \cos^{2b-1}\theta \, d\theta \tag{9}$$

Si $2a - 1 = m$ y $2b - 1 = n$ la (9) da:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m\theta \cos^n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} B(\frac{m+1}{2},\ \frac{n+1}{2}) \tag{10}$$

fórmula de una gran aplicación, especialmente cuando se expresa en función de la función Gamma, como veremos más adelante.

2. LA FUNCION GAMMA. La función Gamma o función euleriana de segunda especie está definida en la forma siguiente:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx \tag{11}$$

Es una integral doblemente generalizada, es decir presenta los dos aspectos: el extremo superior es infinito y además el integrando se hace infinito para el extremo inferior, cuando $a<1$

Para analizar su convergencia la descomponemos en la siguiente forma:

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx = \int_0^{1} x^{a-1} e^{-x} \, dx + \int_1^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx$$

Vamos a estudiar la primera integral del segundo miembro, considerando los tres casos posibles:

1o. Si $a = o$

$$\int_0^1 x^{a-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{e^x}\frac{dx}{x} > \frac{1}{e}\int_0^1 \frac{dx}{x}$$

diverge por 2.6 (pág. 14).

2o. Si $a < o$ entonces $a - 1 < -1$ $\therefore$ $1 - a > 1$

$$\int_0^1 x^{a-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{e^x}\frac{dx}{x^{1-a}} > \frac{1}{e}\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$$

diverge por 2.6

3o. Si $a > o$ entonces $a - 1 > -1$ $\therefore$ $1 - a < 1$

$$\int_0^1 x^{a-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{e^x}\frac{dx}{x^{1-a}} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$$

converge por el 2.6 (pág. 14)

Si la segunda integral del segundo miembro converge también cuando $a > o$, la integral del primer miembro convergerá también.

$$\int_1^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx = \int_1^\infty \frac{x^{a+1}}{e^x}\frac{dx}{x^2} = \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx$$

Como $\varphi(x) = \dfrac{x^{a+1}}{e^x}$ es acotada cuando $x \longrightarrow \infty$ y además $p = 2 > 1$, la integral converge por el 1.5 (pág. 9)

En resumen: la función Gamma, definida en (11) converge para cualquier valor positivo de $\underline{a}$.

2.2 CONVERGENCIA UNIFORME DE LA FUNCION GAMMA. Consideremos:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{a-1}\, e^{-x}\, dx + \int_1^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx$$

Pero

$$\int_0^1 x^{a-1}\, e^{-x}\, dx < \int_0^1 x^{\varepsilon-1}\, dx \qquad \text{siendo} \quad 0 < \varepsilon < a$$

Como esta última integral que no depende del parámetro converge, la primera convergerá uniformemente (por 5.2 pág. 20).

Por otra parte:

$$\int_1^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx < \int_1^\infty e^{-x}\, x^{A-1}\, dx \qquad \text{siendo} \quad A > a$$

Como la integral del segundo miembro converge, la del primero - convergerá uniformemente. (por 5.2 pág. 20).

Siendo la función Gamma una integral uniformemente convergente gozará de las propiedades inherentes, a saber:

1a. Es función continua de a para toda $a > 0$.

2a. Se puede integrar, bajo el signo de integral, respecto al parámetro a en cualquier intervalo de extremo inferior - positivo.

3a. Puede ser diferenciada bajo el signo de integral, respecto a a para cualquier valor positivo de ella, ya que tanto - el integrando como su derivada son funciones continuas de a y además la integral que se obtiene por la diferenciación converge uniformemente.

2.3 PROPIEDADES ELEMENTALES DE LA FUNCION GAMMA. Vamos a integrar por partes la siguiente expresión:

$$\int_0^\infty x^a\, e^{-x}\, dx = \Big[- x^a\, e^{-x} \Big]_0^\infty + a \int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx =$$

$$= a \int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx$$

$$\therefore \quad \Gamma(a+1) = a\, \Gamma(a) \tag{12}$$

Si suponemos que a es un número mayor que la unidad, aplicando sucesivamente la integración por partes se tiene:

$$\Gamma(a+1) = a(a-1)(a-2)\cdots\cdots(a-n)\Gamma(a-n) \qquad (13)$$

Si a es un número fraccionario y n es el mayor entero contenido en a, entonces el cálculo de $\Gamma(a+1)$ se reduce a una multiplicación y al cálculo de $\Gamma(a-n)$, estando $a-n$ comprendido entre o y 1. Por tanto bastará calcular una tabla de funciones Gamma, para $0 < a < 1$, y con ella podremos obtener el valor de $\Gamma(a)$, para cualquier valor del parámetro.

Si a es entero positivo y $n = a-1$, entonces (13) se transforma en:

$$\Gamma(a+1) = a(a-1)(a-2)\cdots\cdots\cdots\cdots 2\cdot 1$$

o sea $$\Gamma(a+1) = a! \qquad (14)$$

De manera que es muy sencillo deducir el valor de la función cuando a es un número entero pues se reduce a calcular un factorial.

Así que:

$$\Gamma(1) = 0! \quad , \quad \Gamma(2) = 1! = 1 \quad , \quad \Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Si a es un número negativo o fraccionario, entonces la función Gamma puede considerarse como una generalización del factorial.

Si tomamos (12) como definición, da significado a la función $\Gamma(a)$ para valores negativos, (pero fraccionarios) del parámetro.

De (12) $$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \qquad (12')$$

Si $-1 < a < o$ entonces $o < a+1 < 1$, por tanto $\Gamma(a+1)$ tiene un cierto valor y podemos así calcular los valores de $\Gamma(a)$ para valores de a en el intervalo abierto $(-1, o)$. Volviendo a aplicar (12'), si suponemos $-2 < a < -1$, $\therefore$ $-1 < a+1 < o$, en el segundo miembro tendremos que utilizar los valores de Gamma del intervalo (-1, o) que se consideran ya conocidos, obteniéndose así los valores de $\Gamma(a)$ cuando a varía en el intervalo abierto (-2, -1). Y así sucesivamente.

Pero si a es entero negativo y ya que $\Gamma(o) = \infty$ (pág. 31, caso 1o.), por la aplicación sucesiva de la fórmula (13) siempre se llegará al valor cero, y por consiguiente para cualquier valor entero negativo de a, la función Gamma se hace infinita.

2.4 REPRESENTACION GRAFICA DE LA FUNCION GAMMA. A continuación se da la tabla que nos sirvió para hacer la representación gráfica de la función Gamma.

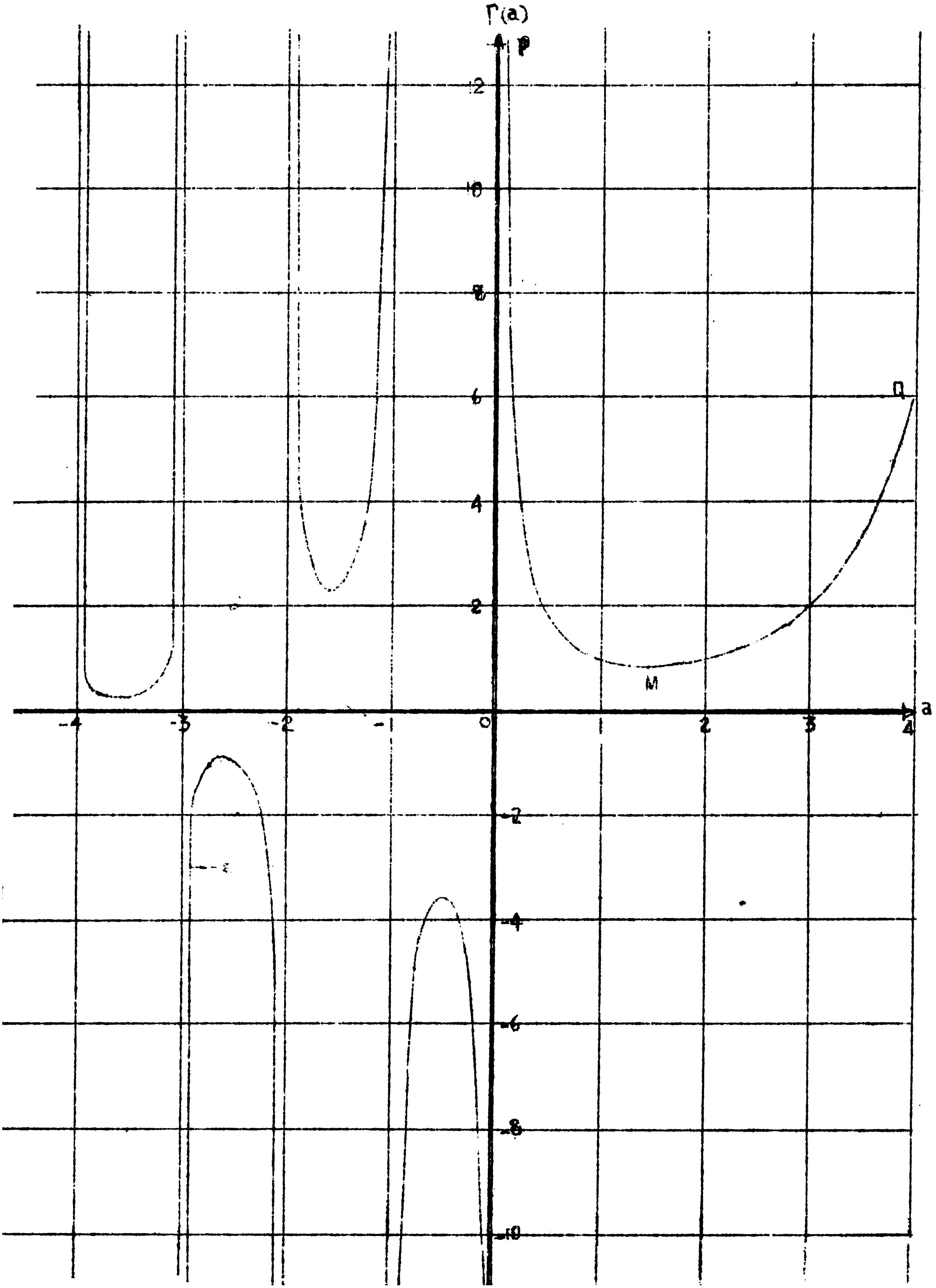
En la primera parte se consideran los valores de a, desde o hasta 3, con intervalos de un décimo.

a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$
0.0	∞	1.0	1.0000	2.0	1.0000
0.1	9.514	1.1	0.9514	2.1	1.0465
0.2	4.591	1.2	0.9182	2.2	1.1018
0.3	2.992	1.3	0.8975	2.3	1.1667
0.4	2.218	1.4	0.8873	2.4	1.2422
0.5	1.772	1.5	0.8862	2.5	1.3293
0.6	1.489	1.6	0.8935	2.6	1.4296
0.7	1.298	1.7	0.9086	2.7	1.5447
0.8	1.164	1.8	0.9314	2.8	1.6765
0.9	1.068	1.9	0.9618	2.9	1.8274
				3.0	2.0000

La segunda parte de la tabla comprende los valores de a - de -0.1 a -4, también con intervalos de un décimo.

a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$
-0.1	-10.686	-1.1	9.714	-2.1	-4.626	-3.1	1.492
-0.2	-5.821	-1.2	4.851	-2.2	-2.205	-3.2	0.689
-0.3	-4.327	-1.3	3.328	-2.3	-1.447	-3.3	0.438
-0.4	-3.723	-1.4	2.659	-2.4	-1.108	-3.4	0.326
-0.5	-3.545	-1.5	2.363	-2.5	-0.945	-3.5	0.270
-0.6	-3.697	-1.6	2.311	-2.6	-0.889	-3.6	0.247

GRAFICA DE LA FUNCION Γ(a).



a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$	a	$\Gamma(a)$
-0.7	-4.274	-1.7	2.514	-2.7	-0.931	-3.7	0.252
-0.8	-5.738	-1.8	3.188	-2.8	-1.139	-3.8	0.299
-0.9	-10.570	-1.9	5.563	-2.9	-1.918	-3.9	0.492
-1.0	$\pm\infty$	-2.0	$\pm\infty$	-3.0	$\pm\infty$	-4.0	$\pm\infty$

Por la simple inspección de la curva, se puede ver que si a varía de 0 a $+\infty$, $\Gamma(a)$ varía de $+\infty$ a $+\infty$, pero sin llegar a anularse, quedando así localizada la curva en el primer cuadrante. El mínimo de $\Gamma(a)$ está entre los valores 1 y 2 de a, siendo exactamente $a = 1.4616....$ al cual corresponde un valor de la función igual a 0.8556. Este punto que llamamos M, divide a la curva en dos ramas infinitas: la PM cuya asíntota es el eje de las ordenadas y la otra, MQ, que también crece indefinidamente.

Cuando a varía de 0 a $-\infty$, considerando los intervalos abiertos: o a -1, -1 a -2, -2 a -3, ... etc., la función $\Gamma(a)$ es alternadamente negativa y positiva, siendo infinita en los extremos de dichos intervalos.

Nótese que a medida que $a \longrightarrow -\infty$, los puntos de la curva que corresponden a los máximos y mínimos, se acercan más y más al eje de las abscisas,

Con una tabla que tenga los valores de $\Gamma(a)$, en un intervalo de a que abarque una unidad, es suficiente para valuar dicha función, cualquiera que sea el valor del argumento, con ayuda de las fórmulas (12), (13) y algunas otras.

Por ejemplo, se trata de calcular $\Gamma(2.5)$ y $\Gamma(-3.7)$ suponiendo que sólo se conocen los valores de la función en el intervalo (o, 1).

Entonces aplicando la fórmula (13) queda:

$$\Gamma(2.5) = (1.5)(.5)\Gamma(.5) =$$
$$= (1.5)(.5)(1.772) = 1.329$$

Por la aplicación sucesiva de la fórmula (12') se tiene:

$$\Gamma(-3.7) = \frac{\Gamma(0.3)}{(-3.7)(-2.7)(-1.7)(-.7)} = .25$$

2.5 ALGUNAS OTRAS FORMAS DE LA FUNCION GAMMA.

a) Si en la expresión (11) se hace $x = yx$, $dx = y\,dx$, los extremos serán los mismos, quedando entonces:

$$\Gamma(a) = y^a \int_0^\infty x^{a-1} e^{-yx}\,dx \tag{15}$$

b) Haciendo en (11) $e^{-x} = y$, entonces $x = \operatorname{Log}\frac{1}{y}$, $dx = -\frac{dy}{y}$ y los nuevos extremos son 1 y o.

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left[\operatorname{Log}\frac{1}{y}\right]^{a-1} dy \tag{16}$$

c) Si en (11) substituimos a x por y^2, quedará:

$$\Gamma(a) = 2 \int_0^\infty y^{2a-1} e^{-y^2}\,dy \tag{17}$$

y si en esta fórmula hacemos $a = \frac{1}{2}$ se tiene:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy$$

$$\therefore \qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

d) Finalmente si hacemos $x = \sqrt[a]{y}$ entonces

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-\sqrt[a]{y}}\,dy \tag{18}$$

3. FORMULAS IMPORTANTES.

3.1 RELACION ENTRE LAS INTEGRALES DE PRIMERA Y SEGUNDA ESPECIE. De la fórmula (15) introduciendo y^a bajo el signo de integración queda:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-yx}\, y^a\, x^{a-1}\, dx \tag{15'}$$

Si multiplicamos esta expresión por $e^{-y}\, y^{b-1}\, dy$ e integramos entre los extremos o e ∞, se tiene:

$$\Gamma(a) \int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{b-1}\, dy = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-y(1+x)}\, y^{a+b-1} dy \right] x^{a-1}\, dx$$

y haciendo en la integral del paréntesis $y(1+x) = z$ queda:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} \int_0^{\infty} e^{-z}\, z^{a+b-1}\, dz =$$

$$= \Gamma(a+b) \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{(1+x)^{a+b}} =$$

$$= \Gamma(a+b)\, B(a, b) \qquad \text{(por 6)}$$

o sea:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{19}$$

Gracias a esta fórmula no es necesario calcular la función Beta mediante una tabla de doble entrada, ya que contiene dos parámetros, sino que basta tener una tabla de la función Gamma que será de entrada simple, por contener un solo parámetro, siendo la valuación muy sencilla puesto que es calculable por logaritmos y existen tablas de log $\Gamma(a)$.

Una infinidad de integrales definidas, que antes no podían ser resueltas, han encontrado su solución gracias a esta importante relación, pues mediante cambios sencillos de variable se hacen caer en las integrales eulerianas. Citaremos algunos ejemplos:

a) $$\int_0^1 x^{a-1}\, (1 - x^k)^{b-1}\, dx = I$$

Si hacemos $x^k = y$ se llega a:

$$I = \frac{1}{k} \int_0^1 y^{a/k - 1} (1 - y)^{b-1} \, dy = \frac{1}{k} B(\tfrac{a}{k}, b)$$

y por (19)

$$\int_0^1 x^{a-1} (1 - x^k)^{b-1} \, dx = \frac{\Gamma(a/k)\ \Gamma(b)}{k\ \Gamma(a/k + b)}$$

Ejemplos numéricos.

1) $$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^4}} \, dx = \int_0^1 x^2 (1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 y^{-\frac{1}{4}} (1 - y)^{-\frac{1}{2}} \, dy = \frac{1}{4} B(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{4})\ \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4} + \frac{1}{2})} .$$

Por otra parte

2) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \int_0^1 (1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} \, dx = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\ \Gamma(\frac{1}{2})}{4\ \Gamma(\frac{3}{4})}$$

Si multiplicamos estas dos expresiones se obtiene una relación encontrada por Euler.

$$\int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1 - x^4}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\ \Gamma^2(\frac{1}{2})}{16\ \Gamma(5/4)} = \frac{\pi}{4}$$

b) De la fórmula (10), sabemos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m \theta \cos^n \theta \, d\theta = \frac{1}{2} B(\tfrac{m+1}{2}, \tfrac{n+1}{2})$$

y por (19) dará:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m\theta \cos^n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \, \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2}+1)} \qquad (20)$$

c) Si en (20) hacemos $m = n$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta \cos\theta)^m \, d\theta = \frac{1}{2^m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m 2\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^m x \, dx =$$

$$= \frac{\Gamma^2(\frac{m+1}{2})}{2\,\Gamma(m+1)}$$

pero como $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$, después de cambiar extremos y despejar a la integral queda:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \, dx = \frac{2^{m-1} \, \Gamma^2(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(m+1)} \qquad (21)$$

d) Partiendo otra vez de (20), si $n = 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \, \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)} \qquad (22)$$

Igualando (21) y (22) y substituyendo el valor de $\Gamma(\frac{1}{2})$ queda:

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1) = 2^m \, \Gamma(\tfrac{m+1}{2}) \, \Gamma(\tfrac{m}{2}+1) \qquad (23)$$

e) Podemos obtener una fórmula análoga a la (22) para el coseno, haciendo $m = 0$ en la expresión (20).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \, \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(n/2+1)} = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(n/2+1)} \qquad (24)$$

3.2 RELACION DE LOS COMPLEMENTOS.

Consideremos la integral:

$$\int_0^\infty e^{-(1+u)x}\,dx = \frac{1}{1+u}$$

Si multiplicamos ambos miembros por $u^{a-1}\,du$ e integramos entre los extremos o e ∞, se tiene:

$$\int_0^\infty u^{a-1}\,du \int_0^\infty e^{-(1+u)x}\,dx = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u}\,du$$

Vamos a valuar cada miembro independientemente.

Si en el primer miembro cambiamos el orden de integración queda:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx \int_0^\infty u^{a-1}\,e^{-ux}\,du = \Gamma(a) \int_0^\infty x^{-a}\,e^{-x}\,dx$$

$$= \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) \qquad \text{(a)}$$

El segundo miembro corresponde a una integral muy conocida en Análisis cuyo valor es:

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u}\,du = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi} \qquad \text{(b)}$$

Igualando (a) y (b)

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi} \qquad (25)$$

Esta fórmula que es fundamental en la teoría de la integrales eulerianas, tiene gran importancia pues permite reducir el intervalo, en el cual hay que calcular a $\Gamma(a)$, a $(0, \frac{1}{2})$.

Si en ella hacemos $a = \frac{1}{2}$ queda:

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \pi \qquad \therefore \qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

3.3 FORMULA DE LEGENDRE. Si en la fórmula (8), substituimos a las funciones B(a, a) y B(a, $\frac{1}{2}$) por sus equivalentes en Gamma, según la fórmula (19), se obtiene:

$$\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{1}{2^{2a-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}$$

$$\therefore \qquad \Gamma(a)\,\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a) \tag{26}$$

Si en esta expresión hacemos $a = \frac{m+1}{2}$, quedará:

$$\Gamma(\tfrac{m+1}{2})\,\Gamma(\tfrac{m}{2}+1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^m}\,\Gamma(m+1)$$

la cual viene a ser la fórmula (23).

3.4 PRODUCTO DE EULER. Consideremos la fórmula (25) y calculemos su valor para los distintos valores de a según se indica:

$$a = \frac{1}{n} \qquad \Gamma(\tfrac{1}{n})\,\Gamma(\tfrac{n-1}{n}) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}$$

$$a = \frac{2}{n} \qquad \Gamma(\tfrac{2}{n})\,\Gamma(\tfrac{n-2}{n}) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}$$

$$\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a = \frac{n-1}{n} \qquad \Gamma(\tfrac{n-1}{n})\,\Gamma(\tfrac{1}{n}) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Multiplicando entre si estos resultados se tiene:

$$\left[\Gamma(\tfrac{1}{n})\,\Gamma(\tfrac{2}{n})\cdots\cdots\Gamma(\tfrac{n-1}{n})\right]^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\cdots\cdot\frac{(n-1)\pi}{n}} \tag{a}$$

Para calcular el valor del denominador recordemos, de la teoría de ecuaciones, la siguiente identidad:

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = (1 - 2x\cos\frac{2\pi}{2n} + x^2)(1 - 2x\cos\frac{4\pi}{2n} + x^2)\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots (1 - 2x\cos\frac{(2n-2)\pi}{2n} + x^2) \qquad (b)$$

Si en (b) hacemos que $x \longrightarrow 1$, el primer miembro tiende a <u>n</u> y el segundo al valor que se obtiene substituyendo a <u>x</u> por <u>1</u>.

$$\therefore \quad n = 2^{2(n-1)} \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2n} \operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{2n} \ldots\ldots \operatorname{sen}^2\frac{(n-1)\pi}{2n} \qquad (c)$$

Análogamente se encuentra cuando $x \longrightarrow -1$ en (b)

$$n = 2^{2(n-1)} \cos^2\frac{\pi}{2n} \cos^2\frac{2\pi}{2n} \ldots\ldots \cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n} \qquad (d)$$

Si multiplicamos (c) por (d), empleamos la fórmula del ángulo doble y extraemos raíz cuadrada, queda:

$$n = 2^{n-1} \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n}$$

o sea:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \ldots\ldots \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Substituyendo este valor en (a) y extrayendo raíz cuadrada se obtiene:

$$\Gamma(\tfrac{1}{n})\ \Gamma(\tfrac{2}{n})\ \ldots\ldots\Gamma(\tfrac{n-1}{n}) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\ n^{-\frac{1}{2}} \qquad (27)$$

expresión que fue encontrada por Euler y por tal motivo lleva su nombre.

4. LA FUNCION $\psi(a)$.

Se tiene:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx \qquad (11)$$

Si derivamos respecto a <u>a</u>

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \operatorname{Log} x\, dx \qquad (a)$$

Pero vamos a valuar Log x, para lo cual consideraremos la siguiente integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x}$$

Si multiplicamos por dx e integramos entre los extremos $\underline{1}$ y $\underline{x}$ puesto que la integral converge uniformemente, queda:

$$\int_1^x dx \int_0^{\infty} e^{-xy}\, dy = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y}\, dy = \text{Log } x$$

Substituyendo este valor en (a) se tiene:

$$\Gamma'(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y}\, dy$$

e invirtiendo el orden de integración:

$$\Gamma'(a) = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} \left[e^{-y} \int_0^{\infty} e^{-x}\, x^{a-1}\, dx - \int_0^{\infty} e^{-(1+y)x}\, x^{a-1}\, dx \right]$$

que por las fórmulas (11) y (15) da:

$$\Gamma'(a) = \Gamma(a) \int_0^{\infty} \left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a} \right] \frac{dy}{y}$$

o sea:

$$D \text{ Log } \Gamma(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{\infty} \left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a} \right] \frac{dy}{y} \qquad (28)$$

fórmula debida a Cauchy.

Esta función es llamada por algunos autores la función $\psi(a)$ Si derivamos (28) respecto a a se obtiene:

$$D^2 \text{Log}\, \Gamma(a) = \int_0^\infty (1+y)^{-a} \text{Log}\,(1+y) \frac{dy}{y}$$

Si $\text{Log}\,(1+y) = x$, $e^x = 1 + y$, $dy = e^x\, dx$, los nuevos extremos son también o e ∞ y queda:

$$D^2 \text{Log}\, \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\, x\, \frac{e^x\, dx}{e^x - 1} \qquad (29)$$

El factor $\dfrac{e^x}{e^x - 1}$ lo substituimos por su valor, obteniendo así:

$$D^2 \text{Log}\, \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\, x\, dx + \int_0^\infty e^{-(a+1)x}\, x\, dx + \cdots\cdots$$

$$+ \int_0^\infty e^{-(a+2)x}\, x\, dx + \cdots\cdots$$

Integrando el segundo miembro según la fórmula (15),

$$\therefore \quad D^2 \text{Log}\, \Gamma(a) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \cdots\cdots \qquad (30)$$

expresión que nos da la segunda derivada de Log $\Gamma(a)$ en forma de serie convergente, para cualquier valor de a.

C A P I T U L O I V .

LA FUNCION GAMMA EXPRESADA COMO PRODUCTO INFINITO

1. **FORMA DE EULER.** Si multiplicamos (30) del capítulo anterior, por da e integramos término a término entre los extremos 1 y a, queda:

$$D \operatorname{Log} \Gamma(a) = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \cdots \qquad (a)$$

γ es la constante de integración y se ve claramente que su valor es el que corresponde a $D \operatorname{Log} \Gamma(a)$ cuando $a = 1$

$-\gamma$ se conoce con el nombre de constante de Euler y para calcular su valor integremos (a) entre los extremos 1 y a

$$\operatorname{Log} \Gamma(a) = -\gamma(a-1) + \left(\frac{a-1}{1} - \operatorname{Log} \frac{a}{1}\right) + \left(\frac{a-1}{2} - \operatorname{Log} \frac{a+1}{2}\right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots + \left(\frac{a-1}{n} - \operatorname{Log} \frac{a+n-1}{n}\right) + \cdots \qquad (b)$$

Para despejar a γ hacemos $a = 2$ en (b)

$$0 = -\gamma + \left(\frac{1}{1} - \operatorname{Log} \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \operatorname{Log} \frac{3}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \operatorname{Log} \frac{n+1}{n}\right) + \cdots \qquad (c)$$

o bien

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left[\left(\frac{1}{1} - \operatorname{Log} \frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \operatorname{Log} \frac{3}{2}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \operatorname{Log} \frac{n+1}{n}\right)\right]$$

$$\therefore \quad \gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n\right) \qquad (31)$$

Para eliminar a γ multipliquemos (c) por a-1 y restémosla de (b) queda:

$$\operatorname{Log} \Gamma(a) = \left[(a-1) \operatorname{Log} \frac{2}{1} - \operatorname{Log} \frac{a}{1}\right] + \left[(a-1) \operatorname{Log} \frac{3}{2} - \operatorname{Log} \frac{a+1}{2}\right] + \cdots$$

$$\cdots\cdots + \left[(a-1) \operatorname{Log} \frac{n+1}{n} - \operatorname{Log} \frac{a+n-1}{n}\right] + \cdots$$

Siendo esta serie convergente podemos afirmar que:

$$\operatorname{Log} \Gamma(a) = \lim_{n \to \infty} \left\{ \left[(a-1) \operatorname{Log} \frac{2}{1} - \operatorname{Log} \frac{a}{1}\right] + \left[(a-1)\operatorname{Log}\frac{3}{2} - \operatorname{Log}\frac{a+1}{2}\right] + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots\cdots + \left[(a-1) \operatorname{Log} \frac{n+1}{n} - \operatorname{Log} \frac{a+n-1}{n}\right] \right\}$$

Y tomando los números en vez de los logaritmos queda:

$$\Gamma(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{1.2.3. \ldots\ldots n}{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n-1)}\, n^{a-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a-1}$$

$$\Gamma(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{a(a+1) \cdots\cdots (a+n-1)}\, n^{a-1}$$

o bien,

$$\Gamma(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots\cdots(a+n)}\, n^{a} \qquad (31)$$

Esta nueva definición dada por (31) para $\Gamma(a)$, considerándola como el límite de un producto infinito, se debe a Euler; sin embargo, en sus trabajos la maneja sólo como integral definida. Legendre, Cauchy y la mayoría de los analistas, la tratan en igual forma.

Fueron Gauss, Liouville, Weierstrass y algunos otros, (pero en menor número), quienes la estudiaron como productos infinitos, siendo esto mucho más ventajoso, tanto desde el punto de vista de mayor generalidad, (ya que la variable no tiene más restricción que la de no ser nula o un entero negativo), como por la facilidad de establecer las propiedades de ella.

Según la notación de Gauss la fórmula (31) se expresaría de la manera siguiente:

$$\Pi(a-1) = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{a(a+1)\cdots\cdots\cdots(a+n)}\, n^{a}$$

así que $$\Pi(a-1) = \Gamma(a)$$

Podemos darle a (31) otra forma y para ello consideremos la siguiente identidad:

$$n = \frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdots (n-1)}$$

y elevándola a la potencia $\underline{a}$

$$n^a = (1 + \tfrac{1}{1})^a (1 + \tfrac{1}{2})^a (1 + \tfrac{1}{3})^a \cdots\cdots (1 + \frac{1}{n-1})^a$$

Substituyendo este valor en (31) da:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a} \lim_{n \to \infty} \frac{(1 + \frac{1}{1})^a (1 + \frac{1}{2})^a \cdots\cdots (1 + \frac{1}{n-1})^a}{(1 + \frac{a}{1})(1 + \frac{a}{2}) \cdots\cdots\cdots (1 + \frac{a}{n})}$$

o bien:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^a}{1 + \frac{a}{n}} \qquad (32)$$

Este producto no tiene sentido cuando $\underline{a}$ es nula o bien -- igual a algún entero negativo, pues en ese caso el denominador de uno de los factores se anula, siendo el producto infinito.

2. FORMA DE WEIERSTRASS. Si en la expresión (b) del párrafo anterior substituimos $\underline{a}$ por $\underline{a+1}$ a fin de expresarla - con más sencillez se obtiene:

$$\operatorname{Log} \Gamma(a + 1) = -\gamma a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n} - \operatorname{Log} \frac{a + n}{n}\right)$$

y despejando a $\Gamma(a + 1)$ queda:

$$\Gamma(a + 1) = e^{-\gamma a} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{\frac{a}{n}} (1 + \tfrac{a}{n})^{-1} \right\}$$

o bien:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a} e^{-\gamma a} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{\frac{a}{n}} (1 + \tfrac{a}{n})^{-1} \right\}$$

Pero Weierstrass en realidad definió $\Gamma(a)$ por medio de la función recíproca o sea:

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = a\, e^{\gamma a} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ (1 + \tfrac{a}{n})\, e^{-\frac{a}{n}} \right\} \qquad (33)$$

3. OBTENCION DE ALGUNAS PROPIEDADES DE LA FUNCION GAMMA - MEDIANTE PRODUCTOS INFINITOS.

3.1 RELACION FUNCIONAL. A continuación obtendremos la propiedad dada por la fórmula (12), del 2.3, que algunos autores - llaman relación funcional.

Partiendo de la definición dada por (31) se tiene:

$$\Gamma(a+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n+1)}\, n^{a+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{an}{a+n+1} \cdot \frac{n!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\, n^{a}$$

o sea:

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$$

3.2 RELACION DE LOS COMPLEMENTOS. Esta relación ya ha sido encontrada en 3.2, (pág 41) pero ahora vamos a partir del producto - infinito (32).

Se tiene:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^{a}}{1+\frac{a}{n}}$$

$$\Gamma(-a) = -\frac{1}{a} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{a})^{-a}}{1-\frac{a}{n}}$$

Multiplicando miembro a miembro estas dos ecuaciones:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(-a) = -\frac{1}{a^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{a^2}{n^2}}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que: $-a\,\Gamma(-a) = \Gamma(1-a)$ y que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right) = \frac{\operatorname{sen} a\pi}{a\pi}$$

la expresión anterior nos da :

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$$

3.3 FORMULA DE LEGENDRE. Como una última aplicación de los productos infinitos, deduciremos la fórmula de Legendre, empleando la definición dada por (31), para $\Gamma(a)$, es decir:

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots n}{a(a+1)\cdots\cdots\cdots(a+n)}\, n^{a} \qquad (a)$$

Si en ella substituimos a $\underline{a}$ por $a+\frac{1}{2}$ queda:

$$\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots n}{(a+\frac{1}{2})(a+\frac{3}{2})\cdots\cdots\cdots(a+\frac{2n+1}{2})}\, n^{a+\frac{1}{2}}$$

o bien

$$\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots\cdots\cdots 2n}{(2a+1)(2a+3)\cdots(2a+2n-1)}\,\frac{2n}{2a+2n+1}\, n^{a-\frac{1}{2}} \qquad (b)$$

Multiplicando (a) por (b) se tiene:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\cdot4\cdot6\cdots\cdots 2n)^2\, 2}{2a(2a+1)(2a+2)\cdots(2a+2n)}\,\frac{2n}{2a+2n+1}\, n^{2a-\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2\cdot4\cdot6\cdots2n)^2}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdot 2n}\,\frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots 2n}{2a(2a+1)\cdots(2a+2n)}\,(2n)^{2a}\cdot\frac{2^{-2a}\,2n}{2a+2n+1} \qquad (c)$$

Vamos a obtener el límite de los tres factores indicados en (c), cuando $n \to \infty$.

Pero antes consideraremos la fórmula de Wallis:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdots\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n-1)(2n-1)} = \frac{\pi}{2}$$

Multiplicando por $\underline{2n}$ ambos miembros y extrayendo raíz cuadrada se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots\cdots 2n}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n-1)} = \sqrt{\pi n}$$

El primer factor de (c) puede ponerse en la siguiente forma:

$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n\cdot2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots\cdots\cdots(2n-1)2n}\cdot\frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}$$

Tomando el límite, en virtud de la fórmula de Wallis queda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot4\cdot6\cdots\cdots\cdots2n)^2}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots2n}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\pi}$$

En cuanto a los factores segundo y tercero, en el límite, cuando $n \longrightarrow \infty$, valen respectivamente $\Gamma(2a)$ y 2^{-2a}.

Substituyendo estos valores en (c) queda:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = 2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2a)\cdot2^{-2a}$$

o sea:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(a+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Gamma(2a)$$

fórmula que ya se había obtenido mediante integrales en el 3.3 (pág. 42).

/// ///

E/G/B.

B I B L I O G R A F I A.

P. Appell. Elements d'Analyse Mathématique. Gauthier-Villars.

Bertrand. Traité de Calcul Différentiel et Calcul Int. Gauthier-Villars.

De la Vallée Poussin. Cours d'Analyse Infinitesimale. Gauthier-Villars.

M. Godefroy. La Fonction Gamma. Gauthier-Villars.

E. Goursat. Cours d'Analyse Mathematique. Gauthier-Villars.

Jahnke-Emde. Funktionentafeln. B. G. Teubner.

C. Jordan. Cours d'Analyse. Gauthier-Villars.

J. A. Serret. Cours de Calcul Différentiel et Intégral. Gauthier-Villars.

E.T. Whittaker and Watson. A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press.

E. B. Wilson. Advanced Calculus. Ginn And Company.