UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

ECUACIONES INTEGRALES FUNCIONALES CAUSALES Y ORDINARIAS

T E S I S

Que para obtener el grado de :

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

P r e s e n t a :

CARLOS HERNANDEZ GARCIADIEGO

México, D.F. Agosto 1978

I N D I C E

INTRODUCCION

El problema que se ataca en esta tesis es el de transformar una ecuación integral funcional de tipo Volterra en un espacio de Banach, en una ecuación integral ordinaria de tipo Volterra definida en otro espacio de Banach, de manera que conociendo la solución de la segunda, se pueda encontrar la solución de la primera.

En [2] se resolvió el problema para ecuaciones diferenciales funcionales en $\mathbb{R}^n$, posteriormente, en [1] se resolvió para una ecuación integral funcional en $\mathbb{R}^n$, en esta tesis se resuelve nuevamente al problema para ecuaciones integrales funcionales en un espacio de Banach, utilizando una técnica más general, esta se desarrolla en las secciones I y II, y son de particular interés los resultados generales que se obtienen sobre la integral de Bochner de una función definida en un producto de espacios medibles, mismos que espero que tengan aplicación para resolver otros problemas de la teoría de ecuaciones integrales o de la teoría de la medida.

Quiero agradecer al Dr. Zdenek Vorel el habér venido a México en varias ocas;ones a trabajar con un grupo de nosotros y por haberme dirigido esta tesis, también quiero agradecer a Arturo Ramírez, Carlos Bosch y Manuel Falconi sus consejos durante la elaboración de mi tesis, así como a la Sra. Sonia E. de Chacón por su trabajo mecanográfico.

Carlos Hernández G.

I DENSIDAD DE LOS CONJUNTOS ELEMENTALES

El principal resultado de esta sección es que si **X** y **Y** son espacios con medida σ-finita entonces todo subconjunto de **X x Y** de medida finita se puede aproximar en medida por conjuntos elementales.

1.1 DEFINICIONES

A lo largo de esta sección (X, M, μ) y (Y, N, η) serán espacios con medida σ-finita.

Denotaremos por $M \times N$ la σ-algebra de los conjuntos del producto $X \times Y$ y por $m = \mu \times \eta$ a la medida producto.

Consideremos las siguientes colecciones de conjuntos medibles en $X \times Y$:

$$\mathcal{E} = \{B \in M \times N \mid B = R_1 \cup \ldots \cup R_n,\ R_i = P_i \times Q_i,$$

$$P_i \in M,\ Q_i \in N\}.$$

A los elementos de $\mathcal{E}$ les llamaremos *conjuntos elementales*.

Si $\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{R}_2 = \mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_2$ son rectángulos entonces $\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{R}_2 = (\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2) \times (\mathbf{Q}_1 \cap \mathbf{Q}_2)$ es un rectángulo y $\mathbf{R}_1 \cup \mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_1 \setminus \mathbf{R}_2 = ((\mathbf{P}_1 \setminus \mathbf{P}_2) \times \mathbf{Q}_1) \cup (\mathbf{P}_1 \times (\mathbf{Q}_1 \setminus \mathbf{Q}_2)$, $\mathbf{R}_1 \Delta \mathbf{R}_2 = (\mathbf{R}_1 \setminus \mathbf{R}_2) \cup (\mathbf{R}_2 \setminus \mathbf{R}_1)$ son conjuntos elementales, entonces es claro que $\mathcal{E}$ es cerrado bajo intersecciones y uniones finitas, diferencias y diferencias simétricas.

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{A} \in \mathbf{M} \times \mathbf{N} \mid \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \mathbf{B} \in \mathcal{E} \text{ tal que } \mathbf{m}(\mathbf{A} \,\Delta\, \mathbf{B}) < \varepsilon\}$$

Claramente $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, y nuestro objetivo ahora es ver que si $\mathbf{A} \in \mathbf{M} \times \mathbf{N}$ y $\mathbf{m}(\mathbf{A}) < \infty$ entonces $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$.

1.2 TEOREMA

El sistema $\mathcal{A}$ es un anillo, esto es, es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas, diferencias y diferencias simétricas.

DEMOSTRACION.

Veremos que si $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \setminus \mathbf{A}_2$ con $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{A}$ entonces $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{A}$, existen $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2 \in \mathcal{E}$ tales que $\mathbf{m}(\mathbf{A}_1 \,\Delta\, \mathbf{B}_1) < \varepsilon/2$, $\mathbf{m}(\mathbf{A}_2 \,\Delta\, \mathbf{B}_2) < \varepsilon/2$, tomo $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \setminus \mathbf{B}_2 \in \mathcal{E}$ y obtengo

$$(\mathbf{A}_1 \setminus \mathbf{A}_2) \,\Delta\, (\mathbf{B}_1 \setminus \mathbf{B}_2) \subset (\mathbf{A}_1 \,\Delta\, \mathbf{B}_1) \cup (\mathbf{A}_2 \,\Delta\, \mathbf{B}_2)$$

por lo tanto

$$m((A_1 \setminus A_2) \,\Delta\, B) < \varepsilon .$$

De la relación:

$$(A_1 \cup A_2) \,\Delta\, (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \,\Delta\, B_1) \cup (A_2 \,\Delta\, B_2)$$

obtenemos que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Como

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2) \;, \quad A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}.$$

Finalmente

$$A_1 \,\Delta\, A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \in \mathcal{A}.$$

1.3 TEOREMA

i) Si $m(A) < \infty$ y si $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,

$A_i \in \mathcal{A}$ entonces $A \in \mathcal{A}$.

ii) Si $m(B_1) < \infty$ y si $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_1$,

$B_i \in \mathcal{A}$ entonces $B \in \mathcal{A}$.

DEMOSTRACION

Sean $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, es claro que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n$ y que los $\{A'_n\}$ son ajenos dos a dos.

Por el Teorema 1.2, los $A'_n \in \mathcal{A}$.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} m(A'_k)$ converge, ya que

$$\sum_{k=1}^{n} m(A'_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A'_k\right) \leq m(A) ,$$

entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} m(A'_n) < \varepsilon/2 .$$

Como $C = \bigcup_{n=1}^{N-1} A'_n \in \mathcal{A}$, existe $B \in \mathcal{E}$ tal que

$$m(C \Delta B) < \varepsilon/2.$$

Como $A \Delta B \subset (C \Delta B) \cup (\bigcup_{n=N}^{\infty} A')$ obtenemos que $m(A \Delta B) < \varepsilon$ y por lo tanto $A \in \mathcal{A}$.

La parte (ii) se obtiene de la relación

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (B_1 \setminus B_n).$$

1.4 COROLARIO.

Si $X \times Y$ tiene medida finita, entonces $\mathcal{A} = M \times N$, esto es, para todo conjunto medible A, y para toda $\varepsilon > 0$, existe $B \in \mathcal{E}$ tal que $m(A \Delta B) < \varepsilon$.

DEMOSTRACION.

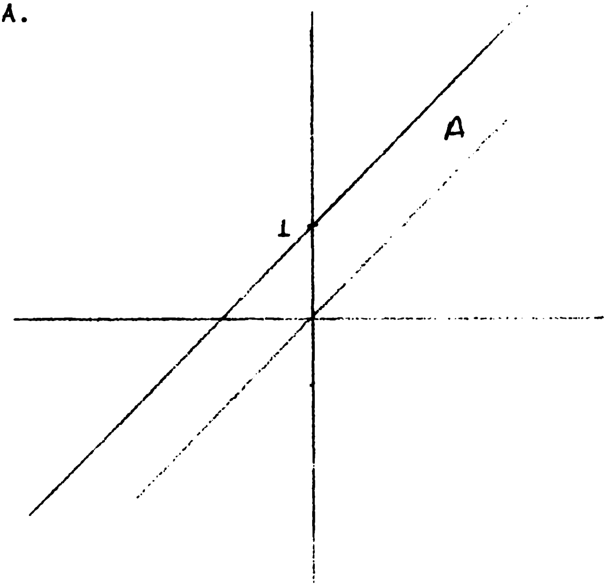
Como la medida de $X \times Y$ es finita, entonces por el Teorema 1.3, si $A_i \subset A_{i+1} \ldots,\ B_i \supset B_{i+1} \ldots,\ i = 1,2,\ldots,$ y $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$, con A_i y $B_i \in \mathcal{A}$, entonces A y B están en $\mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es una clase monótona en $\mathbf{M} \times \mathbf{N}$, como $\mathbf{M} \times \mathbf{N}$ es la mínima clase monótona que contiene a $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{A} = \mathbf{M} \times \mathbf{N}$. [Rudin P. 146]

NOTA

Si $X \times Y$ no tiene medida finita, el resultado no es cierto.

EJEMPLO

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq x + 1\}$ es medible pero no está en $\mathcal{A}$.



Sin embargo:

1.5 TEOREMA.

Si $m(A) < \infty$, entonces $A \in \mathcal{A}$.

DEMOSTRACION.

Como X y Y tienen medida σ-finita, existen conjuntos medibles

$$\{K_n\}_{i=1}^{\infty} \; , \quad \{L_m\}_{m=1}^{\infty}$$

en X y Y respectivamente ajenos dos a dos tales que

$$\mu(K_n) < \infty \; , \; \eta(L_m) < \infty$$

y

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \; , \quad Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} L_m \; , \text{ entonces } \; X \times Y = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$$

con

$$M_j = K_n \times L_m \quad \text{y} \quad \{M_j\} \text{ son ajenos dos a dos.}$$

Como $m(A) = \sum_{j=1}^{\infty} (A \cap M_j) < \infty$, existe $N \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=N}^{\infty} (A \cap M_j) < \varepsilon/2 \; .$$

En cada M_j vale el corolario 1.4, entonces, dado $\varepsilon > 0$, para cada j, existe $B_j \in \mathcal{E}$ tal que

$$m((A \cap M_j) \,\Delta\, B_j) < \varepsilon/2(N-1).$$

Sea $B = \bigcup_{i=1}^{N-1} B_j \in \mathcal{E}$, entonces,

$$(A \,\Delta\, B) = (\bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap M_j) \,\Delta\, B) = \bigcup_{j=1}^{N-1}((A \cap M_j) \,\Delta\, B_j) \cup \bigcup_{j=N}^{\infty} (A \cap M_j)$$

entonces $m\,(A \,\Delta\, B) < \varepsilon$.

II EVALUACION DE LA INTEGRAL DE BOCHNER

Usando los resultados de la sección anterior demostraremos ahora que las funciones elementales son densas en L^P y veremos unos teoremas relativos a la evaluación de la integral de Bochner en un espacio L^P.

2.1 ANTECEDENTES

Recordemos que si (S, Ω, m) es un espacio con medida y **B** es un espacio de Banach:

- Una función $f:S \to B$ decimos que es fuertemente medible si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples que convergen a f puntualmente casi donde quiera.

- Una función $f:S \to B$ es Bochner-integrable si existe una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples que convergen a f puntualmente casi donde quiera de tal manera que

$$\lim_{n \to \infty} \int_S ||f(s) - f_n(s)|| dm = 0$$

  en este caso, si $A \in \Omega$ definimos:

$$\int_A f(s)\, dm = \lim_{n \to \infty} \int_S \chi_A(s)\, f\, (s) dm.$$

— Una condición necesaria y suficiente para que una función f fuertemente medible sea Bochner integrable - es que $||f||$ sea Lebesgue-Integrable.

— Decimos que una función fuertemente medible $f:S \to B$ está en $L^P(S,B)$ si $\int_S ||f(s)||^P ds < \infty$ con $1 \leq P < \infty$, como siempre en $L^P(S,B)$ los elementos son clases de funciones que difieren en conjuntos de medida cero. [Yosida P. 132, Hille-Phillips P.88].

2.2. DEFINICION.

Sean X, Y, espacios con medida σ-finita, B un espacio de Banach.

Una función $f:X \times Y \to B$ es elemental si existen $B_1,\ldots,B_n$ conjuntos elementales de medida finita ajenos dos a dos tales que f es constante en cada B_i y $f = 0$ en $X \times Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

2.3 TEOREMA.

Sean X, Y, B como antes, entonces las funciones elementales son densas en $L^P(X \times Y,B)$ para $1 \leq p < \infty$.

DEMOSTRACION.

Como las funciones simples son densas en $L^P(X \times Y,B)$, basta demostrar que si ψ es una función simple en $X \times Y$, existe una sucesión de funciones elementales $\{f_n\}$ que converge a ψ en $L^P(X \times Y, B)$.

Sea ψ una función simple en $X \times Y$, entonces existen $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos de medida finita en $X \times Y$ ajenos dos a dos tales que ψ es constante en cada A_i

$$(\varphi(x,y) = c_i \text{ para } (x,y) \in A_i) \text{ y } \varphi \equiv 0 \text{ en}$$

$X \times Y \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ sea $c = (2 \max \|c_i\|)^P$.

Como las A_i son de medida finita, por el Teorema 1.5 para toda $\varepsilon > 0$ existen conjuntos B_i elementales tales - que $m(A_i \Delta B_i) < \frac{\varepsilon}{nc}$. Defino $f: X \times Y \to B$ como:

$$f(x,y) \begin{cases} \psi(x,y) = c_i & \text{si } (x,Y) \text{ está en un solo } B_i \\ 0 & \text{si } (x,y) \text{ está en mas de un } B_i \\ 0 & \text{si } (x,y) \text{ no está en ningún } B_i \end{cases}$$

f es una función elemental ya que $B_i \setminus \bigcup_{j \neq i} B_j$ es un conjunto elemental.

$$\|f-\psi\|^P = \int_{X \times Y} \|f(x,y)-\psi(x,y)\|_B^P \, dm \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i \Delta B_i} \|f(x,y)-\psi(x,y)\|_B^P \, dm.$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} c\, m(A_i \Delta B_i) < \varepsilon$$

y $\psi(x,y) \neq f(x,y)$ en un conjunto de medida $< \varepsilon$, tomando $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ puedo construir una sucesión $\{f_n\}$ que converje a ψ puntualmente para casi toda (x,y) y que con verja a ψ en L^P.

Los siguientes son los dos teoremas fundamentales de esta sección, son los que relacionan la integral de una función definida en un producto de espacios medibles con valores en un espacio de Banach y la integral de una función definida en un espacio medible con valores en un espacio L_P.

Recordemos que si X x Y son espacios con medida σ-finita y B un espacio de Banach; entonces una función $f : X \times Y \to B$ define, para cada x fija una función

$$f^x(y) = f(x,y)$$

y el teorema de Fubini dice que si

$$f \in L' (X \times Y, B)$$

entonces para casi toda x, $f^x \in L' (Y,B)$ y que si

$$g(x) = \int_Y f^x(y)d\eta \quad \text{a.e. entonces}$$

$$\int_{X \times Y} f(x,y)d(\mu \times \eta) = \int_X g(x)d\mu .$$

2.4 TEOREMA.

Sean X,Y,B como antes, $F: X \times Y \to B$ integrable entonces la función $\psi : X \to L^1(Y,B)$ definida por

(1)
$$\varphi(x)(y) = \begin{cases} f^x(y) = f(x,y) & \text{si } f^x \in L^1(Y,B) \\ 0 & \text{si } f^x \notin L^1(Y,B) \end{cases}$$

está en $L^1(X, L^1(Y,B))$ y

(2)
$$\left(\int_X \varphi(x)dx \right)(y) = \int_X f(x,y)dx \quad \overset{c}{\forall}\, y \in Y$$

(3) además si $f \in L^p(X \times Y, B)$ entonces

$\varphi \in L^p(X, L^p(Y,B))$.

DEMOSTRACION.

<u>Caso 1</u>.

Si f es elemental, existen $B_1, \ldots, B_n$ conjuntos elementales de medida finita de $X \times Y$ tales que $f \equiv c_i$ en cada B_i y $f \equiv 0$ en $X \times Y - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, cada B_i es de la forma $B_i = P_i \times Q_i$ con P_i y Q_i medibles en X y Y - respectivamente.

Con los conjuntos $\{P_i\}$ construyo una partición de X en conjuntos ajenos $\{A_k\}_1^m$ de la manera siguiente:

$$A_k = \bigcap_{i \in I_k} P_i \setminus \bigcup_{i \notin I_k} P_i \qquad k = 1, 2, \ldots$$

donde I_k son todos los subconjuntos no vacios de

$$\{1, \ldots, n\} .$$

$$A_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P_i$$

La función φ definida en (1) es constante en cada A_k, o sea:

$$\varphi(x)(y) = f(x,y) = \begin{cases} g_k(y) & \text{si} \quad x \in A_k \quad k \neq 0 \\ \\ g_0(y) = 0 & \text{si} \quad x \in A_0 \end{cases}$$

por lo tanto φ es simple (como función de x) y está en

$$L^P(X, L^P(Y,B)) \text{ para } 1 \leq p < \infty .$$

Como

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{m} \chi_{A_k}(x)\, g_k .$$

$$\left(\int_X \varphi(x)dx \right)(y) = \sum_{1}^{m} g_k(y)\, \mu\,(A_k)$$

Por otro lado

$$\int_X f(x,y)dx = \sum_{1}^{m} \int_{A_k} f(x,y)dx = \sum_{1}^{m} \int_{A_k} g_k(y)dx = \sum_{1}^{m} g_k(y)\mu(A_k),$$

Por lo tanto, si f es elemental, vale la fórmula (2)

<u>Caso 2</u>.

Si f no es elemental, por el Teorema 2.3 existe una su_
cesión de funciones elementales tales que

$$(4) \quad \lim_{n\to\infty} \| f_n(x,y) - f(x,y) \|_B = 0 \qquad \overset{c}{\forall}\ (x,y) \in X \times Y$$

$$(5) \quad \lim_{n\to\infty} \int_{X \times Y} \| f_n(x,y) - f(x,y) \|_B^p \; dm = 0$$

Como las funciones f_n son elementales, como en el caso 1, las funciones $\varphi_n : X \to L^p(Y,B)$ definidas por

$$\varphi_n(x)(y) = f_n(x,y)$$

son funciones simples.

(5) es igual, por el Teorema de Fubini a

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X \int_Y \| f_n(x,y) - f(x,y) \|_B^P \; dy \, dx = 0$$

entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que llamamos nuevamente $\{f_n\}$ tal que

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_Y \| f_n(x,y) - f(x,y) \|_B^P \; dy = 0 \qquad \overset{c}{\forall} \; x \in X$$

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_Y \| \varphi_n(x)(y) - \varphi(x)(y) \|_B^P \; dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \| \varphi_n(x) - \varphi(x) \|^P = 0 \qquad \overset{c}{\forall} \; x \in X$$

Por lo tanto $\{\varphi_n\}$ converge a φ para casi toda x en X.

Finalmente, para ver que $\varphi \in L^P(X, L^P(Y,B))$ basta ver que

$$(9) \qquad \lim_{n\to\infty} \| \varphi_n - \varphi \|_{L^P} = 0$$ ya que entonces tendremos

$$\|\varphi\|_{L_P} \leq \|\varphi - \varphi_n\|_{L_P} + \|\varphi_n\|_{L_P} < \infty$$

Para demostrar (9) utilizamos (5), (8), (7) y el Teorema de Fubini:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \|\varphi_n(x) - \varphi(x)\|^P_{L^P(Y,B)} dx =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \int_Y \|f_n(x,y) - f(x,y)\|^P_B \; dy \; dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} \|f_n(x,y) - f(x,y)\|^P_B \; dm = 0$$

Hemos demostrado (3).

Para demostrar la fórmula (2) observemos que como

$f \in L^1(X \times Y, B)$ entonces $\varphi \in L^1(X, L^1(Y,B))$

por la fórmula (3) que acabamos de demostrar y además, por la definición de la integral de Bochner.

(10) $$\int_X \varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)dx,$$ esto es,

(11) $$\left(\int_X \varphi(x)dx\right)(y) = \left(\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)dx\right)(y) \quad \forall\, y \in Y$$

Usando la fórmula (11) , la definición de φ_n y la fórmula (2) para funciones elementales tenemos:

$$(12) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X \varphi_n(x)\,dx\right)(y) =$$

$$= \left(\int_X \varphi(x)\,dx\right)(y) \qquad \overset{c}{\forall}\, y \in Y$$

Falta ver ahora que:

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x,y)\,dx = \int_X f(x,y)\,dx, \text{ para alguna -}$$

subsucesión de $\{f_n\}$.

Usando (5) (con P = 1) y el Teorema de Fubini, existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que la llamamos igual tal - que

$$(14) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X \| f_n(x,y) - f(x,y) \|_B \,dx = 0 \qquad \overset{c}{\forall}\, y \in Y$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_X f_n(x,y)\,dx - \int_X f(x,y)\,dx \right\|_B$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int_X \| f_n(x,y) - f(x,y) \|_B \,dx = 0$$

y obtengo (13), que junto con (12) demuestra (2)

2.5 TEOREMA

Sean X, Y, B como antes, si $\varphi : X \to L^P(Y,B)$ es integrable, entonces existe $f : X \times Y \to B$ integrable tal que

(1) $f(x,y) = \varphi(x)(y)$

(2) $\int_X f(x,y)\,dx = \left(\int_X \varphi(x)\,dx\right)(y)$.

(3) si $\varphi \in L^P(X,L^P(Y,B))$ entonces

$f \in L^P(X \times Y,B)$.

DEMOSTRACION

Para cada $x \in X$, elijo un representante de $\varphi(x)$ en $L_p(Y,B)$ y lo llamo igual y defino $f : X \times Y \to B$ por

$$f(x,y) = \varphi(x)(y).$$

Si $\varphi \in L^P$, existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones simples tales que

(4) $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ para casi toda x y

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_X \| \varphi_n(x) - \varphi(x) \|^p_{L^p(Y,B)} dx = 0 .$$

De cada φ_n , elegimos un representante, que lo llamamos igual, para definir las funciones

$$f_n : X \times Y \to B \text{ por } f_n(x,y) = \varphi_n(x)(y).$$

Veamos que estas funciones son fuertemente medibles y que están en $L^p(X \times Y,B)$.

Para cada n fija, existen $A_1,\ldots,A_n$ conjuntos de medida finita en X tales que φ_n es constante en cada A_i, esto es

$$(6) \qquad \begin{aligned} \varphi_n(x)(y) &= f_n(x,y) = g_i(y) \quad \text{si} \quad x \in A_i \\ \varphi_n(x)(Y) &= f_n(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin \bigcup_{i=1}^m A_i \end{aligned}$$

Para cada x en X, $\varphi_n(x) \in L^p(Y,B)$, entonces

$$g_i \in L_p(Y,B) \quad i = 1,\ldots,m,$$

entonces, por cada i, existe una sucesión $\{h_{i,k}\}$ de funciones simples de Y en B tales que

(7) $$\lim_{k\to\infty} h_{i,k}(y) = g_i(y) \quad \overset{c}{\forall}\ y \in Y \quad \text{y además}$$

(8) $$\lim_{k\to\infty} \int_Y \| h_{i,k}(y) - g_i(y) \|_B^p \, dy = 0 \ .$$

Definimos ahora

(9) $$G_k(x,y) = \begin{cases} h_{i,k}(y) & \text{si} \quad x \in A_i \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \bigcup_{i=1}^{m} A_i \end{cases}$$

Las funciones G_k son elementales ya que para cada i, k fijas existen $D_{i_1},\dots,D_{i_s}$ conjuntos de medida finita en Y y $c_{i_1},\dots,c_{i_s}$ en B tales que $h_{i,k}(y) = c_{i_s}$ si $y \in D_s$ y

$$h_{i,k}(y) = 0 = c_{i_0} \qquad \text{si} \quad y \in Y \setminus \bigcup_{j=i_1}^{i_s} D_j = D_0 \quad .$$

entonces

$$G_k(x,y) = \begin{cases} c_{i_j} & \text{si} \quad (x,y) \in A_i \times D_{i_j} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \cup A_i \end{cases}$$

Para demostrar que las f_n son fuertemente medibles y que están en $L^P(X \times Y, B)$ debemos ver que

(10) $$\lim_{k\to\infty} G_k(x,y) = f_n(x,y) \quad \overset{c}{\forall}\ (x,y) \in X \times Y \quad y$$

(11) $$\lim_{k\to\infty} \iint_{X\times Y} \| G_k(x,y) - f_n(x,y) \|^P \, dm = 0$$

demostración de (10):

si $x \notin \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ $\quad f_n(x,y) = 0 = G_k(x,y)$

si $x \in A_i$ $\quad f_n(x,y) = g_i(y), \quad G_k(x,y) = h_{i,k}(y)$

$$\| G_k(x,y) - f_n(x,y) \| = \| h_{i,k}(y) - g_i(y) \|$$

que tiene a cero si $k \to \infty$ para casi toda y por (7)

demostración de (11).

$$\iint \| G_k(x,y) - f_n(x,y) \|^P \, dm = \sum_{i=1}^{m} \int_{A_i \times Y} \| G_k(x,y) - f_n(x,y) \|^P dm =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \int_{A_i \times Y} \| h_{i,k}(y) - g_i(y) \|^P dm = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \int_Y \| h_{i,k}(y) - g_i(y) \|^P dy.$$

La última igualdad es por el Teorema de Fubini y todos los sumandos tienden a cero por (8).

La sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy ya que:

$$\| f_n(x,y) - f_m(x,y) \|^P = \int_{X\,xY} \| f_n(x,y) - f_m(x,y) \|^P \, dm =$$

$$= \int_X \int_Y \| f_n(x,y) - f_m(x,y) \|^P \, dy \, dx =$$

$$= \int_X \int_Y \| \varphi_n(x)(y) - \varphi_m(x)(y) \|^P \, dy \, dx =$$

$$= \int_X \| \varphi_n(x) - \varphi_m(x) \| \, dx$$

que tiende a cero por (5).

Por lo tanto $\{f_n\}$ converge en L^P a alguna función.

Como $\| f_n(x,y) - f(x,y) \| = \| \varphi_n(x)(y) - \varphi(x)(y) \|$ y esto último tiende a cero para alguna subsucesión de φ_n que - la llamamos igual, para casi toda $x \in X$ por (4) tenemos - que f_n converge puntualmente a f casi en todas partes y por tanto f es el límite en L^P de $\{f_n\}$, por lo tanto - $f \in L^P(X \times Y, B)$ y (2) es la conclusión del Teorema 2.4.

III APLICACION A LA SOLUCION DE UNA ECUACION INTEGRAL FUNCIONAL

En esta sección veremos como pueden utilizarse los últimos teoremas de la sección anterior para encontrar la solución de una ecuación integral funcional causal del tipo Volterra, construyendo una ecuación integral ordinaria equivalente a ésta.

3.1 LEMA

Sea $D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant a, \ a > 0\}$

B un espacio de Banach, $h > 0$

i) Si $g : D \to B$ está en $L^1(D,B)$

ii) Si para cada $t \in [0,a]$ la función $g^t : [0,t] \to B$ definida por $g^t(s) = g(s,t)$ está en $L^1([0,t],B)$.

Entonces la función $\varphi : [0,t] \to L^1([-h,a],B)$ definida - por

$$\varphi(s)(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -h < \tau < s \\ g(s,\tau) & \text{si} \quad s \leqslant \tau \leqslant t \quad \text{y} \quad g^s \in L^1([s,a],B) \\ 0 & \text{si} \quad s \leqslant \tau \leqslant t \quad \text{y} \quad g^s \notin L^1([s,a],B) \\ g(s,t) & \qquad t \leqslant \tau \leqslant a \quad \text{y} \quad g^s \in L^1([s,a],B) \end{cases}$$

está en $L^1([0,t], L^1([-h,a],B))$ y además

$$\left(\int_0^t \varphi(s)ds\right)(\tau) = \int_0^t \varphi(s)(\tau)ds \qquad \forall\ \tau \in [-h,a].$$

DEMOSTRACION:

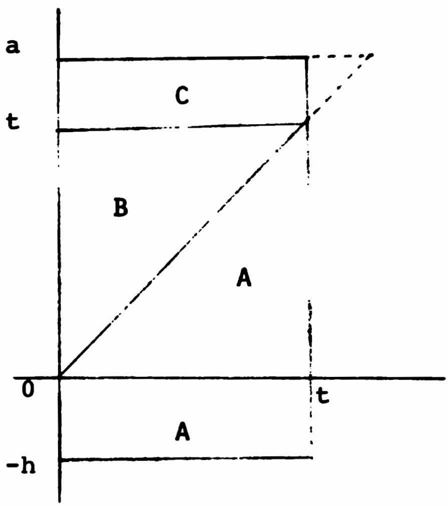
Definimos $H : [0,t] \times [-h,a] \rightarrow B$ por

$$H(s,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \tau < s \\ g(s,\tau) & \text{si} \quad s \leq \tau \leq t \\ g(s,t) & \text{si} \quad t \leq \tau \leq a \end{cases}$$

Si $A = \{(s,t) \in [0,t] \times [-h,a] \mid \tau < s\}$

$B = \{(s,t) \in [0,t] \times [-h,a] \mid s \leq \tau \leq t\}$

$C = \{(s,t) \in [0,t] \times [-h,a] \mid t < \tau\}$



entonces

$$H(s,\tau) = 0\ \chi_A + g(s,\tau)\ \chi_B + g(s,t)\ \chi_C$$

Debido a (i) y (ii) H es suma de funciones en

$$L'([0,t] \times [-h,a],\ B)$$

y por lo tanto está en

$$L'([0,t] \times [-h,a], B).$$

finalmente como

$$\varphi(s)(\tau) = \begin{cases} H^s(\tau) = H(s,\tau) & \text{si} \quad H^s \in L'([-h,a],B) \\ 0 & \text{si} \quad H^s \in L'([-h,a],B) \end{cases}$$

obtenemos por el Teorema 3.4 que

$$\varphi = L'([0,t],\ L'([-h,a],B))$$

y

$$\left(\int_0^t \varphi(s)ds\right)(\tau) = \int_0^t H(s,\tau)ds = \int_0^t \varphi(s)(\tau)ds$$

<u>NOTA</u>

Si no pido la hipótesis (ii) el teorema de Fubini garantiza que $g^t : [0,t] \to B$ está en $L'([0,t],B)$ para casi toda t, y por tanto la conclusión será también cierta para casi toda t.

3.2 LEMA.

Sea $D = \{(s,t) \mid 0 \leq s \leq t \leq a,\ a > 0\}$, B un espacio de Banach.

Si $g : D \to B$ es tal que

i) la función $s \to g(s,t)$ está en $L^P([0,t],B)$

ii) la función $t \to g(s,t)$ es continua por la izquierda

iii) $\| g(s,t) \| \leq M(s)$ con $M \in L^P([0,a],B)$

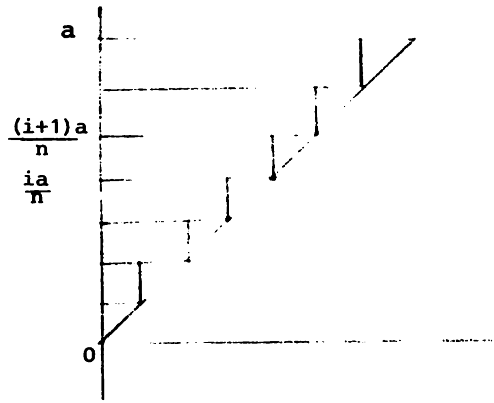
entonces $g \in L^P(D,B)$.

DEMOSTRACION.

Defino la sucesión $\{g_n\}$ por

$$g_n(s,t) = \begin{cases} g(s, \frac{ia}{n}) & 0 \leq s \leq \frac{ia}{n}\ ,\ \frac{ia}{n} \leq t < \frac{(i+1)a}{n} \\ 0 & \frac{ia}{n} < s \leq t < \frac{(i+1)a}{n} \\ g(s,a) & t = a \end{cases}$$

Cada g_n está en $L^P(D,B)$ y por (ii) $g_n(s,t) \to g(s,t)$ a.e. además $\| g_n(s,t) \| \leq M(s)$, usando el teorema de convergencia dominada, obtenemos que



$$\lim_{n\to\infty} \int_D \| g(s,t) - g_n(s,t) \|^P dm = 0$$

por lo tanto $g \in L_p(D,B)$.

En lo que sigue consideraremos las siguientes hipótesis generales:

Sean $D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq t \leq a\}$, $h > 0$ y G el subconjunto de $L^P([-h,a],B)$ tal que

i) si $x \in G$ entonces x tiene un representante continuo (ó continuo por la izquierda) que lo denotaremos nuevamente por x.

ii) si $x \in G$ entonces $x_t \in G$ $\forall\ t \in [0,a]$ donde $x_t(\tau) = x(t \wedge \tau)$.

Sea $f : G \times D \to B$ tal que

iii) f es causal, esto es, si $x, y \in G$ y si $x_s = y_s$ para alguna $s \in [0,a]$ entonces

$$f(x,s,t) = f(y,s,t) \quad \forall\ t \in [s,a].$$

iv) Para cada $x \in G$, $s \in [0,a]$ la función.

$t \to f(x,s,t)$ es continua (continua por la izquierda.

v) Para cada $x \in G$, $t \in [0,a]$ la función.

$s \to f(x,s,t)$ está en $L^P([0,t],B)$

vi) Para cada $x \in G$ existe una función M_x en

$L^P([0,a], B)$ tal que $\| f(x,s,t) \| \leq M_x(s)$.

3.3. LEMA

Bajo las hipótesis anteriores si $F : G \times D \to L^P([-h,a],B)$ está definida por

$$(1) \quad F(x,s,t)(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -h \leq \tau < s \leq t \\ f(x,s,\tau) & \text{si} \quad s \leq \tau \leq t \\ f(x,s,t) & \text{si} \quad t \leq \tau \leq a \end{cases}$$

entonces $\int_0^t F(x,s,t)\,ds$ existe para cada $x \in \dot{G}$ fija y

$$\left(\int_0^t F(x,s,t)ds\right)(\tau) = \alpha(\tau) \qquad \overset{c}{\forall}\ \tau \in [-h,a]$$

donde α es la función continua (ó continua por la izquierda) definida por

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \tau \in [-h,0] \\ \int_0^m f(x,s,m)\,ds & \text{si} \quad \tau \in [0,a] \quad m = \tau \wedge t \end{cases}$$

DEMOSTRACION

Para $x \in G$ fija defino $g(s,\tau) = f(x,s,\tau)$ por (iv), (v), (vi) anteriores, g cumple las hipótesis del lema 3.2 y por lo tanto $g \in L^P(D,B)$, además, como D es un espacio de medida finita, entonces $g \in L'(D,B)$.

Para cada $x \in D$, $t \in [0,a]$. $F(x,s,t) = \varphi(s)$ del lema 3.1, entonces

$$\int_0^t F(x,s,t)\,ds$$

existe y

$$\left(\int_0^t F(x,s,t)\,ds\right)(\tau) = \int_0^t F(x,s,t)(\tau)\,ds = \alpha(\tau) \quad \forall\, \tau \in [-h,a]$$

por la definición de F y α.

Falta únicamente probar que si $t \to f(x,s,t)$ es continua (ó continua por la izquierda) entonces α también lo es.

Como α es constante en $[-h,0) \cup (t,a]$, entonces es continua en este conjunto.

Si $\tau_0 \in (0,t]$ y $t \to f(x,s,t)$ es continua por la -

izquierda sea $\tau \in (0,\tau_0)$

$$\|\alpha(\tau_0)-\alpha(\tau)\| = \left\| \int_0^{\tau_0} f(x,s,\tau_0)ds - \int_0^{\tau} f(x,s,\tau)ds \right\| =$$

$$\leq \int_0^{\tau} \| f(x,s,\tau_0) - f(x,s,\tau)\| \, ds + \int_{\tau}^{\tau_0} \| f(x,s,\tau_0)\| ds$$

debido a (iv), (vi) y al Teorema de convergencia dominada de Lebesgue, el primer sumando tiende a cero, el segundo sumando tiende a cero por (vi) y la continuidad absoluta de la integral, $\therefore$ α es continua por la izquierda.

Si $\tau_0 \in [0,t)$ y $t \to f(x,s,t)$ es continua, sea $\tau \in (\tau_0,t)$

$$\|\alpha(\tau) - \alpha(\tau_0)\| \leq \int_0^{\tau_0} \| f(x,s,\tau) - f(x,s,\tau_0)\| \, ds + \int_{\tau_0}^{\tau} \| f(x,s,\tau)\| ds$$

que nuevamente tiende a cero, por lo tanto α es continua.

El objeto de los siguientes teoremas es ver que bajo las hipótesis generales anteriores la ecuación integral funcional causal de tipo Volterra en **B**.

$$\text{(I)} \qquad x(t) = z(t) \qquad -h < t < 0$$

$$x(t) = z(t) + \int_0^t f(x,s,t)ds. \qquad t \in [0,a],$$

es un caso especial de una ecuación integral ordinaria de tipo Volterra en $L^{p}([-h,a], B)$

3.4 TEOREMA

Si $x \in G$ es solución de (I), entonces la función $y : [0,a] \to G$ definida por $y(t) = x_t$ para $t \in [0,a]$ es - solución de la ecuación ordinaria

$$\text{(II)} \qquad y(t) = \omega(t) + \int_0^t F(y(s),s,t)\,ds \qquad \text{en} \quad [0,a]$$

donde $\omega(t) = z_t$ en $[0,a]$ y F es la función definida en el lema 3.3.

3.5 TEOREMA

Recíprocamente, si $y : [0,a] \to G$ es solución de (II), entonces la función $x = y(a)$ es solución de I.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3.4

Sea $x \in G$ solución de I en $[-h,a]$.

Sean $t \in [0,a]$ y $\tau \in [-h,a]$.

Si $y(s) = x_s$ tenemos, por la causalidad de f (hipótesis ii) y por lo tanto de F, y por el lema 3.3.

$$\left(\int_0^t F(y(s),s,t)\,ds\right)(\tau) = \left(\int_0^t F(x_s,s,t)\,ds\right)(\tau) =$$

$$= \left(\int_0^t F(x,s,t)\,ds\right)(\tau) = \alpha(\tau).$$

si $-h \leqslant \tau < 0$ entonces $\alpha(\tau) = 0$ y

$$y(t)(\tau) = x_t(\tau) = x(\tau) = z_t(\tau) = \omega(t)(\tau) =$$

$$= \omega(t)(\tau) + \alpha(\tau) = \omega(t)(\tau) + \left(\int_0^t F(y(s),s,t)\,ds\right)(\tau)$$

si $0 \leqslant \tau < a$, sea $m = \tau \wedge t$

$$y(t)(\tau) = x_t(\tau) = x(m) = z(m) + \int_0^m f(x,s,m)\,ds.$$

$$= z_t(\tau) + \alpha(\tau) = \omega(t)(\tau) + \left(\int_0^t F(y(s),s,t)\,ds\right)(\tau).$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 3.5

Notemos primero que como la función

$\varphi : [0,t] \to L^P([-h,a],B)$ definida por

$\varphi(s) = F(y(s),s,t)$ es integrable, por el teorema 2.5.

$$\left(\int_0^t F(y(s),s,t)ds\right)(\tau) = \left(\int_0^t \varphi(s)ds\right)(\tau) = \int_0^t \varphi\ (s)(\tau)ds$$

$$= \int_0^t F(y(s),s,t)(\tau)ds.$$

Veamos ahora que si $b \in [0,a]$ entonces

$$y(a)\Big|_{[0,b]} = y(b)\Big|_{[0,b]}$$

sea $\tau \in [0,b]$.

$$y(a)(\tau) = \omega(a)(\tau) + \left(\int_0^a F(y(s),s,a)ds\right)(\tau) =$$

$$= z(\tau) + \int_0^a F(y(s),s,a)(\tau)ds =$$

$$= z(\tau) + \int_0^\tau f(y(s),s,\tau)ds = y(b)(\tau)\ .$$

Además, como f es causal $f(y(s),s,t) = f(y(a),s,t)$

finalmente

si $\tau > 0$.

$$x(\tau) = y(a)(\tau) = z(\tau) + \int_0^\tau f(y(s),s,\tau)ds =$$

$$= z(\tau) + \int_0^\tau f(y(a),s,\tau)ds =$$

$$= z(\tau) + \int_0^\tau f(x,s,\tau)ds$$

si $\tau < 0$

$$x(\tau) = y(a)(\tau) = z(\tau)$$

por lo tanto $x = y(a)$ es solución de I.

BIBLIOGRAFIA

(1) Bosch, Falconi, Hernández, Vorel, *Functional Integral Equations of Volterra type*. Por aparecer.

(2) J. González, C. Imaz, Z.Vorel, *Functional and Ordinary Differential Equations*, Boletín de la Sociedad Matemática Mexica na, Número 18, 1973, p. 64-69.

(3) Hille-Phillips. *Functional Analysis and Semigroups*, A.M.S.

(4) Kolmogorov-Fomin, *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*, Editorial Mir Moscú, 1972.

(5) W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 2a. Edición. McGraw-Hill, 1974.

(6) K.Yosida. *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1966.