UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LOS SISTEMAS FORMALES DE SMULLYAN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

RICARDO CORTES REBOLLEDO

MEXICO, D. F. 1972

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LOS SISTEMAS FORMALES DE SMULLYAN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

ACTUARIO

P R E S E N T A

RICARDO CORTES REBOLLEDO

MEXICO, D. F.

1972

Con Amor:

A mis Padres y Hermanos.

Con Aprecio:

A mis Parientes y Amigos

Con Agradecimiento:

Al Dr. Enrique Calderón, gracias a cuya dirección y valiosos consejos, fue posible este trabajo.

Esta tesis fue realizada siendo becario del Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas, Sistemas y Servicios. (C.I.M.A.S.S.). U.N.A.M.

CONTENIDO

Páginas

Páginas

PROLOGO.

El objetivo fundamental del presente estudio, es el de proporcionar, de la manera más clara posible, las definiciones y los resultados más importantes sobre los cuales descansa la teoría de los sistemas formales, queriendo hacer ver, a la vez, que muchos de los conceptos manipulados en las más diversas ramas de la ciencia especialmente en la ciencia de la computación, son ciertamente casos particulares de sistemas formales y que, por lo tanto, como tales pueden ser tratados. No pretendemos que todos estos conceptos deban ser siempre manipulados desde el punto de - vista de los Sistemas Formales, pero creemos, sin embargo, que en - ciertos casos particulares puede ser de gran utilidad la aplicación de los importantes resultados que han sido obtenidos como producto de valiosos estudios realizados sobre la Teoría de Sistemas Formales.

Los primeros tres capítulos servirán para sentar las bases fundamentales de la Toería de Sistemas Formales, mientras que en el capítulo IV se propondrá una formalización para algunos importantes conceptos de la Ciencia de la Computación, tales como la Lógica de Primer Orden y las Teorías Axiomáticas, los Lenguajes Artificiales, los Autómatas con un Número Finito de Estados y, finalmente, los llamados Sistemas de Información. En las mencionadas formalizaciones sólo se intenta ejemplificar la manera en que muchos otros conceptos pueden ser enfocados desde el punto de vista de los sistemas formales, y consideramos que en otras aplicaciones concretas, cada lector deberá escoger sus propios métodos de formalización, que en cada caso se ajusten a sus necesidades, de la mejor manera.

CAPITULO I.

SISTEMAS MATEMATICOS FORMALES.

SECCION 0:

Definibilidad por recursión.

En la literatura matemática existen diferentes maneras de definir - conjuntos; una de ellas, la más simple quizá, es enumerando todos - los elementos que componen al conjunto, aunque en conjuntos dema-- siado grandes ó con un número infinito de elementos, ésto es imposi- ble de hacerse. Otra forma de hacerlo, que es normalmente, más - fácil y rápida, consiste en establecer las propiedades comunes a to-- dos los elementos del conjunto. Un tipo de definición, que sigue es- os lineamientos, y en la que estaremos interesados a lo largo de este es tudio, es la llamada "definición por recursión". En este tipo de defi- nición, se establece primero un conjunto de axiomas para los miem-- bros del conjunto W que se quiere definir; luego se dan ciertos axio-- mas de la forma: "Si tales y tales elementos pertenecen a W, entonces tales y tales combinaciones de ellos, están también en W"; luego el -- axioma final, que podría ser llamado "cláusula de recursión": "Más - aún, sólo los elementos definidos por los axiomas anteriores, pertene cen a W".

La "definición por recursión" será más clara con un ejemplo: Sea K el alfabeto consistente de los dos signos a y b. Supóngase que deseamos -

definir el conjunto S, consistente de todas las cuerdas de los dos - símbolos a y b, pero estos símbolos deberán ser alternados (es decir, que no contienen dos ocurrencias consecutivas de a ó de b). Podemos definir implícitamente al conjunto S, estipulando los siguientes axiomas para los miembros de S:

Axioma 1. - a es un elemento de S.

Axioma 2. - b es un elemento de S.

Axioma 3. - ab es un elemento de S.

Axioma 4. - ba es un elemento de S.

Axioma 5. - Si xa es un elemento de S (en donde x es cualquier cuerda), entonces xab es un elemento de S.

Axioma 6. - Si xb es un elemento de S, entonces xba es un elemento de S.

Axioma 7. - Ningún elemento está en S, a menos que "se siga" de los axiomas 1 a 6.

Ahora convertimos el sistema informal anterior, en un sistema formal preciso. Primero abreviamos las frases de la forma "x es un elemento de S", por "x ϵ S" ó equivalentemente "Sx" (léase: S contiene a x). También abreviamos las frases de la forma "Si (———) entonces (-----)" por la abreviación simbólica usual "(———) $\rightarrow$(-----)", lo cual debe leerse como " (———) implica (-----)".

Ahora podemos reescribir los axiomas anteriores en forma simbó-
lica:

1.- Sa

2.- Sb

3.- Sab

4.- Sba

5.- Sxa $\rightarrow$ Sxab

6.- Sxb $\rightarrow$ Sxba

Daremos también una definición más precisa del concepto "seguirse de": Diremos que una cuerda X, "se sigue" de los axiomas 1 a 6, si y sólo si, X puede ser obtenida de estos seis axiomas por un número finito de aplicaciones de las siguientes dos reglas:

R1.- Substituir cualquier cuerda de los signos a y b, por la variable x.

R2.- De las dos cuerdas "X_1" y "$X_1 \rightarrow X_2$" se puede derivar "X_2".

Ahora podemos definir al conjunto S, como el conjunto de todas las cuerdas en a y b, tales que SX puede ser derivada de los axiomas 1 a 6, usando las reglas R1 y R2. En este sistema, el conjunto "S" representa al conjunto de todas las cuerdas en a y b, alternadas.

El anterior es un ejemplo simple de un sistema formal elemental. - Los símbolos a y b son llamados los signos iniciales; "x" es llamada una variable (por la que sustituímos cuerdas en los signos iniciales); el símbolo " $\rightarrow$ " es llamado el signo de implicación y finalmente, "S" es un ejemplo de un predicado (los predicados son usados para representar conjuntos y relaciones).

Ahora daremos una definición precisa de Sistemas Formales Elementales.

SECCION 1:

Sistemas Formales Elementales.

Nociones Preliminares. Por un alfabeto K, queremos decir un conjunto finito y ordenado de elementos llamados símbolos, signos ó letras de K. Cualquier secuencia lineal y ordenada de símbolos de K (eneada ordenada de símbolos de K), es llamada una expresión, una - palabra o una cuerda en K. Denotaremos por $\underline{K}$ al conjunto de todas - las cuerdas en K. Para cualesquiera n símbolos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de K, - sea $X = x_1 x_2 \ldots x_n$, la cuerda de $\underline{K}$ cuyo i-ésimo símbolo (para $i \leq n$), es x_i. Llamamos a n, la longitud de esta cuerda. Si Y es - - también una cuerda $y_1 y_2 \ldots y_m$ en K, definimos XY - -

como la cuerda en $\underline{K}$, tal que $XY = x_1x_2\ldots x_n\, y_1y_2y_m$, es decir, la cuerda de longitud $n + m$, cuyo i-ésimo símbolo es x_i, para $i \leq n$, y su j-ésimo símbolo es y_{j-n}, para $j > n$. Llamaremos a XY el producto o concatenación de X y Y. La operación de concatenación de cuerdas de $\underline{K}$, es obviamente asociativa (es decir $(XY)Z=X(YZ)$), sin embargo no es conmutativa (ó sea $XY \neq YX$), a menos que el alfabeto K contenga sólo un elemento. Si K y L son alfabetos y si todo símbolo de K es también un símbolo de L, entonces decimos que K es un subalfabeto de L; equivalentemente, L es una extensión de K. Con el símbolo $K \subseteq L$ denotaremos que K es un subalfabeto de L.

Definición de un Sistema Formal Elemental.-

Por un Sistema Formal Elemental (E), sobre un alfabeto K, queremos decir una colección de los siguientes objetos:

(1) El Alfabeto K.

(2) Otro alfabeto de símbolos, llamados variables.

(3) Otro alfabeto de símbolos, llamados predicados, cada uno de los cuales tiene asignado un número entero positivo, llamado su grado.

(4) Dos símbolos más, llamados el signo de implicación y el signo de puntuación.

(5) Una secuencia finita $A_1, A_2, \ldots, A_z$, de cuerdas de $\underline{K}$, -

que son fórmulas bien formadas, de acuerdo a la definición que daremos más adelante. Estas cuerdas son llamadas los <u>axiomas</u> del sistema (E).

Es requerido, en la definición anterior, que los alfabetos (1) a (4), sean mutuamente ajenos.

Los elementos de K serán usualmente denotados por "a", "b", etc., con o sin subíndices; las variables serán denotadas por "x", "y", "z", "w", "v", etc., con o sin subíndices. Los predicados serán denotados por "P", con o sin subíndices. El signo " $\rightarrow$ " será el signo de implicación del sistema y, finalmente, el signo de puntuación será una coma ", ".

Sea K el alfabeto formado por los símbolos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Se define un <u>término</u> t de (E), como cualquier cuerda formada por elementos de K o por variables o por ambas cosas. Así, por ejemplo, $a_1xya_2ya_1$ es un término de (E).

Definimos una <u>Fórmula Atómica</u> de (E), como una expresión de la forma $Pt_1, \ldots, t_m$, en donde P es un predicado de grado m (es decir, un predicado con m argumentos) y $t_1, \ldots, t_m$ son términos. Una <u>Fórmula Bien Formada</u> F de (E), será una fórmula atómica F_1 ó una expresión de la forma $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow \ldots \rightarrow F_n$, en la cual, cada F_i es una -

fórmula atómica. Las fórmulas $F_1, F_2, \ldots, F_n$, son llamadas las - componentes atómicas de la fórmula compuesta $F_1 \to F_2 \to \ldots \to F_n$. De la misma forma, cualquier fórmula atómica F será llamada una - componente atómica de sí misma.

En una fórmula compuesta $F_1 \to F_2 \to F_3$, el signo de implicación de̲be ser tomado con asociación a la derecha (es decir, como "F_1 implica que F_2 implica F_3", o equivalentemente: "F_1 implica (F_2 implica F_3)). Debemos notar que la fórmula $F_1 \to F_2 \to F_3$ es equivalente a la proposición: "Si F_1 y F_2 son ambas verdaderas, entonces también F_3 lo es". Más generalmente, $F_1 \to F_2 \to \ldots \to F_n$ significa que - "La conjunción de las premisas $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$, implica F_n"; en esta fórmula, diremos que $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ son las premisas y F_n la -- conclusión. A lo largo de este estudio, daremos a la fórmula "$X_1 \to X_2$" el significado "X_1 implica X_2", solamente en caso de que X_1 sea una - <u>fórmula atómica</u>; en caso contrario, el significado de dicha fórmula -- puede ser distinto.

Dada una fórmula bien formada X, designamos una <u>instancia</u> de X, a - cualquier cuerda obtenida a partir de X, substituyendo todas las variables que aparecen en ella, por cuerdas de elementos de K. Una fórmula bien formada que no contiene símbolos de variables, es llamada una

una oración.

Un teorema o cuerda demostrable de (E), es un axioma de (E) ó cual quier cuerda que se puede derivar de los axiomas de (E), por un nú-- mero finito de aplicaciones de las siguientes dos reglas, llamadas -- "reglas de inferencia":

Regla I. - Substitución de variables por cuerdas de elementos de K.

Regla II. - (Modus Ponens) Derivar la fórmula X_2 a partir de las fórmulas "X_1" y "$X_1 \rightarrow X_2$", siempre y cuando X_1 sea fórmula atómica.

Existen formas alternativas para definir sistemas formales, que son - equivalentes a la definición anterior; la definición que hemos dado ante riormente, será asumida a lo largo del presente estudio.

SECCION 2:

Representabilidad en Sistemas Formales Elementales.

Si "P" es un predicado de grado 1 en un sistema formal elemental (E) so bre el alfabeto K y "W" es un conjunto de cuerdas de elementos de K, en tonces decimos que "P" representa a "W" en el sistema (E), si y sólo - si, para cualquier cuerda X en K, se cumple la siguiente condición:

$X \in W \longleftrightarrow PX$ es demostrable en (E).

Análogamente, si "P" es un predicado de (E) de grado n, entonces - decimos que "P" <u>representa</u> al conjunto de eneadas de cuerdas - - $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, tales que $PX_1X_2 \ldots X_n$ es demostrable en (E).

De aquí en adelante, el término "atributo" será usado como un término colectivo para conjuntos y relaciones; en forma más precisa, - para cualquier conjunto S, un atributo en S designará un subconjunto de S ó un conjunto de eneadas de elementos de S (aunque este significado del término "atributo" no es universal en la literatura matemática, en el presente trabajo no dará lugar a ambigüedades, ya que -- siempre será usado en este sentido).

Se dice que un atributo "W" de cuerdas en K є <u>formalmente representable sobre K</u> (abreviaremos f. r.), si y sólo si "W" es <u>representable</u> en algún sistema formal elemental sobre el alfabeto K. El atributo W es <u>soluble sobre K</u>, si y sólo si W y $\tilde{W}$ son f. r. sobre K. (Para cualquier relación W, de grado n, designaremos con $\tilde{W}$, al complemento - de W, con respecto al conjunto de todas las eneadas de cuerdas de elementos de K).

Ejemplos:

a) Sea K el alfabeto formado por los 3 signos "a", "b", "c". Sea W el conjunto de todas las cuerdas que contienen solamente a los signos "a" y "b". Deseamos demostrar que W es f. r. (formalmente representable) sobre K. Es decir, deberemos mostrar un sistema formal elemental sobre K, en el cual W sea representado:

Consideremos el sistema formal elemental (E) cuyos axiomas son los siguientes:

$$Wa$$

$$Wb$$

$$Wx \rightarrow Wy \rightarrow Wxy$$

En el sistema (E), el predicado "W" representa al conjunto W.

En el ejemplo anterior, se ha usado el símbolo W, para denotar el predicado que representa al conjunto W en el sistema (E). Esto será hecho con frecuencia, ya que no hay razón por la cual, el nombre metalingüístico de un conjunto o relación no deba ser usado para representarlo en un sistema formal elemental.

b) De manera más general, sea K el alfabeto de los símbolos $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_n$ y sea J el subalfabeto de K, $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Deseamos demostrar que el conjunto $\underline{J}$ de todas las cuerdas de elementos de J, es f. r. sobre K.

El predicado P representará a este conjunto, en el sistema formal elemental, que tiene los siguientes axiomas:

Pa_1

Pa_2

.
.
.

Pa_m

$Px \rightarrow Py \rightarrow Pxy.$

c) Supóngase que deseamos demostrar que el conjunto J, del ejemplo anterior, es soluble sobre K. Será necesario demostrar que el conjunto K - J es f.r. sobre K. Este conjunto, que designaremos por $\tilde{(J)}$, consta de todas las cuerdas de K que contienen al menos un símbolo de K - J. El conjunto $\tilde{(J)}$ será representado por el predicado P - en el sistema formal elemental sobre K, cuyos axiomas son:

Pa_{m+1}

Pa_{m+2}

.
.
.

Pa_n

$Px \rightarrow Pxy$

$Px \rightarrow Pyx.$

Funciones. - Una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que va del conjunto de - eneadas de cuerdas en K, al conjunto de cuerdas en K (es decir, f: $(\underline{K})^n \rightarrow \underline{K}$), es llamada formalmente representable sobre K, si y -- sólo si la relación $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$ es formalmente representable sobre K; f es soluble sobre K, si y sólo si la relación anterior es soluble sobre K.

SECCION 3:

Sistemas Matemáticos.

Un sistema matemático (M), es definido como un conjunto que contiene, al menos, los siguientes componentes:

(1) Un alfabeto K.

(2) Un conjunto A, de cuerdas de K, llamadas <u>Axiomas.</u>

(3) Un conjunto finito de relaciones $R_1, R_2, \ldots, R_m$, de $\underline{K}$, llamadas <u>Reglas de Inferencia.</u>

Una <u>demostración</u> en M, significa cualquier secuencia $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de cuerdas en K, tal que, para cada $i \leq n$, X_i es un axioma o existen - números $i_1, i_2, \ldots, i_r$, todos menores que i y tales que $(Xi_1, Xi_2, \ldots, Xi_r, Xi)$ cumple alguna de las relaciones $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Una <u>prueba</u> o <u>demostración</u> $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, también es llamada una prueba del último término X_n.

Una cuerda X es llamada probable ó demostrable en (M), o es un - teorema de (M), si y sólo si, existe una demostración de ella en (M). El conjunto de todos los teoremas de (M), será denotado por "T".

Ahora definimos un sistema matemático formal, como un sistema matemático, cuyo conjunto de teoremas "T", es formalmente representable sobre K (en dondè K es el alfabeto de (M)). Si el conjunto "T" es soluble sobre K, se dice que (M) es soluble o decidible o que admite un procedimiento de decisión. Un teorema muy importante (El teorema de Church), el cual será planteado más adelante, demuestra que - existen sistemas formales para los cuales no existe procedimiento de decisión.

Observaciones.- Un conocimiento completo de Sistemas Formales Elementales, significaría un conocimiento completo de todos los - sistemas formales, ya que, si (M) es un sistema formal que está representado por P en algún sistema formal elemental (E) (es decir, el conjunto de teoremas de (M) está representado en (E)), entonces, el decir si una cuerda X es un teorema de (M) o no lo es, es equivalente a - decir que PX es o no un teorema de (E).

La equivalencia es clara, por la definición de representabilidad. Por -

lo tanto, cualquier pregunta con respecto a la demostrabilidad en sistemas formales, puede ser reducida a una pregunta con respecto a -- sistemas formales elementales.

SECCION 4:

.Atributos recursivamente enumerables de enteros - positivos.

Sea "D" el alfabeto que consta de los símbolos "1" y "2". Cualquier - sistema formal elemental sobre D, será llamado una Aritmética Diádica Elemental. Una cuerda de números $d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0$, en la que - cada d_i es "1" o "2", es llamado un número diádico y representa al - número $d_0 + 2d_1 + 4d_2 + \ldots + 2^n d_n$. Esta representación de números, que llamaremos diádica, es única, al igual que la representación binaria, que utiliza los símbolos "0" y "1"; sin embargo, la representación diádica tiene, para los propósitos de este estudio, ciertas ventajas técnicas. Podemos notar que, si ordenamos los números diádicos lexicográficamente (es decir, de acuerdo a la longitud y dentro de cada grupo de la misma longitud, alfabéticamente), la posición que todo número tiene dentro de esta secuencia, coincide con el número al cual designa.

Se define un atributo de enteros positivos recursivamente enumerable, como aquel que es representable en alguna aritmética diádica elemental.

Un atributo recursivamente enumerable, cuyo complemento es también recursivamente enumerable, es llamado un atributo <u>recursivo</u>.

Nota.- En la anterior definición de enumerabilidad recursiva, la elección de la base 2, ha sido arbitraria, pero será técnicamente muy conveniente. En el siguiente capítulo, se demostrará que para cualquiera base n que escojamos, la definición de "recursivamente enumerable" es equivalente. Los atributos que consideraremos, serán sólo aquellos que se refieran a números enteros positivos.

SECCION 5:

Numeración de Gödel.

Como una introducción informal a la motivación para "numeración de Gödel," supóngase que conocemos una teoría sobre números enteros positivos. Si nosotros estamos interesados en aplicar ciertos resultados de dicha teoría, a las oraciones de la teoría misma, no podremos hacerlo directamente, ya que la teoría se refiere a <u>números</u> y no a oraciones. Sin embargo, podemos lograr el mismo resultado indirectamente, por medio de asignar un número a cada oración (el llamado "número de Gödel" de la oración) y traduciendo entonces, toda proposición con respecto a las oraciones, a la correspondiente proposición con respecto a sus números de Gödel.

Consideremos un alfabeto K. Por una "numeración de Gödel" de K, entenderemos cualquier función 1 a 1 (inyectiva), g de K en el conjunto N de los números naturales (enteros positivos). g no necesariamente es suprayectiva (sobre). La función g es una función inyectiva, que asigna a cada cuerda X en K, un único entero positivo g(X). Con frecuencia escribiremos Xo para denotar a g(X) y para cualquier atributo W en K, Wo denotará al correspondiente atributo de números de Gödel (es decir, Wo = g(W) es el conjunto de eneadas $(g(X_1), g(X_2), \ldots, g(X_n))$ tales que $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \varepsilon W$).

Hay dos tipos de correspondencias de Gödel, que serán empleadas frecuentemente en este estudio.

Sea K un alfabeto ordenado $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Deseamos asignar números de Gödel a todas las cuerdas en K. El primer tipo de numeración de Gödel, la cual será llamada "numeración de Gödel lexicográfica", consiste en ordenar todas las cuerdas en K, en orden lexicográfico y entonces asignar a cada cuerda, su posición en esa secuencia. Debemos notar que todos los enteros positivos son usados en esta correspondencia (g es suprayectiva).

El segundo tipo de correspondencia de Gödel, llamada la "numeración de Gödel Diádica", consiste en asignar a cada cuerda X, el número --

diádico que resulta de X, reemplazando cada ocurrencia de a_1, por 12, a_2 por 122, ..., a_n por $\underbrace{122\ldots2}_{n}$; por ejemplo, el número diádico de Gödel de la cuerda $a_3a_4a_1a_2$, es 12221222212122. Para simplificar la notación, los números 12, 122, ..., etc., serán respectivamente abreviados como $g_1, g_2, \ldots$, etc. Entonces el número diádico de Gödel de $a_3a_4a_1a_2$ será $g_3g_4g_1g_2$.

Es importante notar que la correspondencia de Gödel diádica, tiene la conveniencia técnica de ser un isomorfismo con respecto a concatenación, es decir, si x es el número de Gödel diádico de X y y el de Y, entonces xy (x seguido de y) es el número de Gödel de XY. Dicho de otra manera, la numeración de Gödel diádica, tiene la propiedad de que $(XY)_0 = X_0 \; Y_0$.

Una numeración de Gödel será llamada <u>admisible</u>, si satisface la condición de que para todo atributo W en $\underline{K}$, W es f.r. sobre K, si y sólo si Wo es r.e. (recursivamente enumerable), y W es soluble sobre K, si y sólo si Wo es recursivo.

Posteriormente demostraremos que las numeraciones de Gödel lexicográfica y diádica, son ambas admisibles.

Sea g la función que asigna a cada cuerda X, su número de Gödel diádico Xo. Si los símbolos "1" y "2" están en K, entonces todo número --

tiene su propio número de Gödel n_o; sea g_o la función que asigna a cada n, el número n_o. Será conveniente ordenar a K, de tal modo que - los símbolos "1" y "2" sean los dos primeros en K. De modo que $g_o(1) = 12$ y $g_o(2) = 122$ y para cualquier número xy, $g_o(xy) = g_o(x)g_o(y)$. La relación $g(x) = y$ es f. r. sobre K, ya que está representada por "P" en el sistema formal elemental sobre K, cuyos axiomas son:

P1, 12

P2, 122

Pa_3, 1222

.

.

.

$Pa_n, \underbrace{122\ldots2}_{n}$

Px, y → Pz, w → Pxz, yw.

También la relación $g_o(x) = y$ es r. e. (f. r. sobre D), ya que está representada por "P" en la aritmética diádica elemental (sistema formal elemental sobre D), cuyos axiomas son:

P1, 12

P2, 122

Px, y → Pz, w → Pxz, yw.

CAPITULO II.

REPRESENTABILIDAD FORMAL Y ENUMERABILIDAD RECURSIVA.

SECCION 0:

Algunos Principios Preliminares.

(a) **Representabilidad Común.** - Sean (E_1) y (E_2) dos sistemas formales elementales sobre un mismo alfabeto K. Los sistemas (E_1) y (E_2) son llamados <u>independientes</u>, si y sólo si no contienen predicados en común. Se define la unión de (E_1) y (E_2) $((E_1) \cup (E_2))$, como el sistema formal elemental sobre K, cuyos axiomas son los de (E_1) y los de (E_2). Claramente, todo teorema de (E_1) y de (E_2), es, otra vez, un teorema de $(E_1) \cup (E_2)$. Es fácil comprobar que si (E_1) y (E_2) son independientes, entonces todo teorema de $(E_1) \cup (E_2)$ es demostrable en (E_1) o en (E_2). Por lo tanto, si (E_1) y (E_2) son independientes, entonces los atributos representables de $(E_1) \cup (E_2)$ son los mismos de (E_1) y (E_2). Análogamente, si $(E_1), (E_2), \ldots, (E_n)$ son mutuamente independientes, entonces los atributos representables de $(E_1) \cup (E_2) \cup \ldots \cup (E_n)$, son los de toda (E_i) (para $i = 1, 2, \ldots, n$).

Proposición 1. - Si $W_1, W_2, \ldots, W_n$ son atributos en <u>K</u> que son f.r. sobre K, entonces pueden ser representados, todos ellos, en un mismo sistema formal elemental sobre K.

Demostración. - Supongamos que $W_1, W_2, \ldots, W_n$ son respectivamente representados en los sistemas formales elementales $(E_1), \ldots, (E_n)$ sobre K. Podemos suponer que tenemos a nuestra disposición un número ilimitado de símbolos que podemos usar para representar predicados; por lo tanto, podemos construir $(E_1), (E_2), \ldots, (E_n)$ de tal modo que no contengan predicados en común, es decir, que sean mutuamente independientes. Entonces $W_1, W_2, \ldots, W_n$ están todos representados en $(E_1) \cup (E_2) \cup \ldots \cup (E_n)$.

(b) Variables Impropias. En adición a las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (que llamaremos variables propias), tomamos un número finito de símbolos $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \alpha_2,$ etc., a los que llamaremos variables impropias; el rango para las variables impropias es, al igual que el de las - variables propias, el conjunto de todas las cuerdas en K, sólo que ahora será posible sustituir aún la cuerda nula.

En ciertas ocasiones, el uso de variables impropias nos permitirá reducir el número de axiomas necesitados para la representación formal de atributos.

Como un ejemplo, supóngase que deseamos representar la relación: "La cuerda X es parte de la cuerda Y". Esta relación es representada por "P" en el siguiente sistema (cuyas variables son todas propias):

Px, x

Px, xy

Px, yx

Px, zxy

Sin embargo, el sistema puede ser reducido a un sólo axioma en que se utilizan las variables impropias α y β y la variable propia x:

$Px, \alpha x \beta$.

Proposición 2. - Cualquier atributo que es representable en un sistema (E_1) sobre K, el cual contiene variables impropias (además, tal vez, de variables propias), es representable en un sistema (E_2) sobre K, que contenga sólo variables propias.

Demostración. - Construímos el sistema (E_2) como sigue: Reemplazamos cada axioma A de (E_1) que contenga r variables impropias, por los 2^r axiomas que se obtienen reemplazando en A algunas o todas -- (o ninguna) de las variables impropias, por variables propias y eliminando las restantes.

Las cuerdas demostrables de (E_2), son precisamente las mismas que las de (E_1). Por lo tanto, los atributos representables de (E_2) son los mismos que los de (E_1).

Parte I. - Propiedades de Cerradura.

En el capítulo III, nuestros resultados sobre indecidibilidad serán deducidos de ciertas propiedades simples de cerradura para la colección de todos los atributos recursivamente enumerables. Estas propiedades de cerradura serán establecidas en esta sección. Además demostraremos que dichas propiedades de cerradura, se cumplen para el conjunto de todos los atributos en $\underline{K}$ que son f.r. sobre K (en donde K es cualquier alfabeto fijo).

SECCION 1.

Cerradura bajo Definibilidad Existencial.

En esta sección se definirá lo que significa que un atributo W sea <u>existencialmente definible</u> a partir de n atributos $W_1, W_2, \ldots, W_n$. Informalmente hablando, ésto significa que W puede ser obtenido de los atributos $W_1, \ldots, W_n$, por un número finito de operaciones de unión, intersección, cuantificación existencial y transformaciones explícitas (es decir, permutando o identificando variables, sustituyendo constantes por variables o añadiendo nuevas variables). Para hacer precisa esta definición, haremos uso de las siguientes definiciones preliminares:

(a) Unión e Intersección.- Sean W_1 y W_2 dos atributos del mismo grado n, en un conjunto S. Por $W_1 \cup W_2$, entenderemos la relación $W_1(x_1, \ldots, x_n) \vee W_2(x_1, \ldots, x_n)$; es decir, el conjunto de todas las eneadas $(x_1, \ldots, x_n)$, que pertenecen a W_1 ó a W_2 (o a ambos). Por $W_1 \cap W_2$, denotaremos la relación $W_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge W_2(x_1, \ldots, x_n)$; es decir, el -

conjunto de todas las eneadas que pertenecen a la vez a W_1 y a W_2. Nos referiremos a $W_1 \cup W_2$, como la <u>unión</u> de W_1 y W_2 y a $W_1 \cap W_2$, como la <u>intersección</u> de W_1 y W_2. Los símbolos "$\vee$" y "$\wedge$" son usados, en la definición anterior, de una manera informal, queriendo decir, respectivamente "o" e "y".

(b) Cuantificación Existencial. - Si R es una relación $R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ de grado n+1 ($n > o$), definimos E(R), como el atributo - $(\exists y)\ R(x_1, \ldots, x_n, y)$; es decir, el conjunto de todas las eneadas $(x_1, \ldots, x_n)$ tales que para algún elemento y, $(x_1, \ldots, x_n, y) \in R$. E(R) es llamado la <u>cuantificación existencial</u> de R.

(c) Transformación Explícita. - Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, símbolos que llamaremos <u>variables</u>, que tienen como rango a un cierto conjunto S (pueden tomar sólo valores de S); sean $\xi_1, \ldots, \xi_k$, símbolos que representan (cada ξ_i) una de las variables $x_1, \ldots, x_n$ ó un elemento de S; sea W un atributo de S de grado k. Definimos el atributo $\lambda x_1 \ldots x_n W(\xi_1, \ldots, \xi_k)$, como el conjunto de todas las eneadas $(a_1, \ldots, a_n)$ de elementos de S, tales que $(b_1, \ldots, b_k) \in W$ y en donde b_i está definida como sigue:

i) Si ξ_i es una variable x_j, entonces $b_i = a_j$

ii) Si ξ_i es un elemento de S, entonces $b_i = \xi_i$

Como un ejemplo, consideremos que S es el conjunto de los números -

enteros positivos; entonces la relación $\lambda x_1, x_2, x_3 W(x_2, 5, x_3, x_3, 7)$ es el conjunto de todas las ternas (a_1, a_2, a_3) que tienen la propiedad de que el quintuplete $(a_2, 5, a_3, a_3, 7)$, es un elemento de W.

Diremos que $\lambda x_1, \ldots, x_n W(\xi_1, \ldots, \xi_k]$ es <u>explícitamente definible</u> a partir de W. Sea $\phi(W, x_1, \ldots, x_n \xi_1, \ldots, \xi_k]$ la operación que asigna a cada W (de grado k), el atributo $\lambda x_1, \ldots, x_n W(\xi_1, \ldots, \xi_k)$; llamaremos a dicha operación, una <u>transformación explícita.</u>

Debemos notar que el grado de un atributo que es explícitamente definible de W, puede ser mayor que el grado de W. Por ejemplo, sea W un conjunto (es decir, un atributo de grado 1), y consideremos el conjunto de todas las parejas ordenadas (x, y) tales que $x \in W$; este es el atributo $\lambda x_1, x_2 W(x_1)$, de grado 2 y que es explícitamente definible a partir de W (este atributo corresponde al producto cartesiano $W \times S$).

Sea Σ una colección de atributos de un conjunto S, de grados variables. Diremos que Σ es <u>cerrado bajo definibilidad existencial,</u> si y sólo si Σ es cerrado bajo las operaciones de unión, intersección, cuantificación existencial y todas las transformaciones explícitas. Para cualesquiera atributos $W_1, W_2, \ldots, W_n$ de S, podemos hablar de la <u>mínima</u> colección Σ_0 que contiene a $W_1, W_2, \ldots, W_n$ y que, a la vez, es cerrada bajo definibilidad existencial; Σ_0 es simplemente la intersección de todas las colecciones Σ que contienen a $W_1, W_2, \ldots, W_n$ y que son ce--

rradas bajo definibilidad existencial. Diremos que cualquier elemento W de Σo , es existencialmente definible a partir de $W_1, W_2, \ldots, W_n$. Alternativamente diremos que W es existencialmente definible de $W_1, W_2, \ldots, W_n$, si y sólo si existe una secuencia finita $V_1, V_2, \ldots, V_k = W$, tal que cada atributo de la secuencia es alguna de las W_i, ó se puede obtener de los términos anteriores en la secuencia, por una de las operaciones de unión, intersección, cuantificación existencial ó alguna transformación explícita.

Observamos que cualquier condición que pueda ser escrita usando solamente los nombres de $W_1, W_2, \ldots, W_n$, nombres de elementos de S, variables cuyo rango es S, los conectivos lógicos " $\vee$ " y " $\wedge$ " ("o" e "y") y el símbolo " $\exists$" (para denotar cuantificación existencial), determina un atributo que es existencialmente definible a partir de $W_1, \ldots, W_n$. Como un ejemplo, considérese que W consiste de todas las ternas de cuerdas (x, y, z) que obedecen a la condición: $[W_1(x, 13, x) \vee W_2(z)] \wedge \exists v\, W_3(x, v)$.

Podemos demostrar que W es existencialmente definible a partir de W_1, W_2 y W_3, exhibiendo la secuencia siguiente:

W_1

W_2

W_3

$W_4 = \lambda x, y, z W_1(x, 13, x)$

$W_5 = \lambda x, y, z W_2(z)$

$W_6 = W_4 \cup W_5$

$W_7 = \lambda x (\exists v) W_3(x, v)$

$W_8 = \lambda x, y, z W_7(x)$

$W_9 = W_6 \cap W_8 = W$

De aquí en adelante, cuando digamos que un cierto atributo W es existencialmente definible de los atributos $W_1, W_2, \ldots, W_n$, escribiremos solamente las condiciones para los miembros de W, en lugar de desplegar explícitamente el esquema, como se hizo arriba.

Teorema 1. - La colección Σ de todos los atributos en $\underline{K}$ que son f. r. sobre K, es cerrada bajo definibilidad existencial.

Demostración. - Debemos demostrar que Σ es cerrada bajo unión, intersección, cuantificación existencial y transformaciones explícitas:

(i) Unión. - Sea $W = W_1 \cup W_2$, en donde W_1 y W_2 son atributos (de grado n), que son f. r. sobre K. Como demostramos en la Sección 0, podemos obtener un sistema formal elemental (E) sobre K, en el que W_1 y W_2 son ambos representados por predicados, digamos P_1 y P_2. Tomamos un nuevo predicado P y añadimos a (E) los axiomas siguientes:

$$P_1 X_1, \ldots, X_n \rightarrow P X_1, \ldots, X_n$$

$$P_2X_1,\ldots,X_n \rightarrow PX_1,\ldots,X_n.$$

En el sistema obtenido añadiendo los anteriores axiomas al sistema - (E) (el cual será también un sistema sobre K), P representa a $W_1 \cup W_2$.

(ii) Intersección. - Si añadimos, en lugar de los axiomas del punto (i), el siguiente axioma:

$$P_1X_1,\ldots,X_n \rightarrow P_2X_1,\ldots,X_n \rightarrow PX_1,\ldots,X_n,$$

en el sistema obtenido, P representará a $W_1 \cap W_2$.

(iii) Cuantificación Existencial. - Supongamos que en un sistema (E), P representa a la relación $R(x_1,\ldots,x_n, y)$.

Tomamos un nuevo predicado Q (de grado n) y añadimos a (E) el siguiente axioma:

$$Px_1,\ldots,x_n, y \rightarrow Qx_1,\ldots,x_n.$$

En el sistema así obtenido, Q representa a la relación $(\exists y)R(x_1,\ldots, x_n, y)$.

(iv) Transformaciones Explícitas. - Sea $V = \lambda x_1,\ldots,x_n W(\xi_1,\ldots,\xi_k)$; si P representa a W en (E), tomamos un nuevo predicado Q y añadimos a (E) el axioma:

$P\xi_1,\ldots,\xi_k \rightarrow Qx_1,\ldots,x_n$. Entonces Q representa a V. Esto completa la demostración del teorema 1.

Observamos que para $K = \{1, 2\}$ el alfabeto cuyos elementos son - "1" y "2", el teorema 1 dice que la colección de todos los atributos recursivamente enumerables, es cerrada bajo definibilidad existencial.

Aplicaciones.

(a) Imágenes e Imágènes Inversas de Atributos bajo Funciones.

Sea W una relación de grado n en un conjunto S y sea $f:S \to S$ una - función de S en S.- Por f(W) entenderemos el conjunto de todas las — eneadas $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$, tales que $(x_1, \ldots, x_n) \in W$. Por $f^{-1}(W)$ en-- tenderemos el conjunto de todas las eneadas $(x_1, \ldots, x_n)$, tales que - $(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in W$. Al igual que en el caso en que W es un conjunto, nos referiremos a f(W) y $f^{-1}(W)$, como la imágen y la imágen inversa de W bajo f.

Los atributos f(W) y $f^{-1}(W)$ son, cada uno, existencialmente definibles a partir de W y f (es decir, a partir de W y la relación $f(x) = y$), ya que si $V_1 = f(W)$ y $V_2 = f^{-1}(W)$, entonces:

(i) $V_1(x_1, \ldots, x_n)$ es determinado por la condición:

$$(\exists y_1, \ldots, y_n) \, [f(y_1) = x_1 \wedge \ldots \wedge f(y_n) = x_n \wedge W(y_1, \ldots, y_n)].$$

(ii) $V_2(x_1, \ldots, x_n)$ es determinado por la condición:

$$(\exists y_1, \ldots, y_n) [f(x_1) = y_1 \wedge \ldots \wedge f(x_n) = y_n \wedge W(y_1, \ldots, y_n)].$$

(b) D i a g o n a l i z a c i ó n, S u b s t i t u c i ó n, C o m p o s i c i ó n. - Para cualquier función $f(x, y)$, definimos la función $\vec{f}$ de un argumento, -- por la condición $\vec{f}(x) = f(x, x)$. Es obvio que $\vec{f}$ es explícitamente de finible de f (que se puede obtener de f, por la aplicación de una transformación explícita), y por lo tanto, es existencialmente definible a -- partir de f.

Para cualquier relación $R(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n)$, definimos la relación $R_{i_1, \ldots, i_m}$, como el conjunto de todas las eneadas $(x_1, \ldots, x_n)$ - tales que $R(i_1, \ldots, i_m, x_1, \ldots, x_n)$; es decir $R_{i_1, \ldots, i_m}(x_1, \ldots, x_n)$ $\longleftrightarrow R(i_1, \ldots, i_m, x_1, \ldots, x_n)$. Diremos que $R_{i_1, \ldots, i_m}$ se obtiene - de R por sustitución. Es otra vez obvio, que $R_{i_1, \ldots, i_m}$ es explícitamente definible a partir de R y por lo tanto, existencialmente definible a partir de R.

Para cualquier función $f(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n)$, definimos $f_{i_1, \ldots, i_m}$, como la función de n argumentos cuya regla de correspondencia es:

$$f_{i_1, \ldots, i_m}(x_1, \ldots, x_n) = f(i_1, \ldots, i_m, x_1, \ldots, x_n).$$

También la función $f_{i_1, \ldots, i_m}$ es explícitamente definible de f; es decir, la relación $f_{i_1, \ldots, i_m}(x_1, \ldots, x_n) = y$ es explícitamente definible de la relación $f(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n) = y$.

Un uso particular que se presentará con frecuencia, es cuando m = n = 1: $f_i(x) = f(i, x)$.

Sean $g_1, \ldots, g_m$, m funciones de n argumentos cada una. Definimos - la función $f\circ(g_1, \ldots, g_m)$, como la función h que satisface la condición:

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Se dice que h se origina de f, $g_1, \ldots, g_m$ por composición. Aunque h no es explícitamente definible a partir de f, $g_1, \ldots, g_m$, si es existencialmente definible a partir de ellas, ya que la relación $h(x_1, \ldots, x_n) = y$, está determinada por la condición:

$$(\exists y_1, \ldots, y_m) \left[g_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1 \wedge \ldots \wedge g_m(x_1, \ldots, x_n) = y_m \wedge f(y_1, \ldots, y_m) = y\right] .$$

(c) Productos Cartesianos, Productos Relativos, Inversos. -

Para cualesquiera n conjuntos $S_1, \ldots, S_n$, el producto cartesiano - - $S_1 \times \ldots \times S_n$ (el conjunto de todas las eneadas $(x_1, \ldots, x_n)$ tales que -- $x_1 \in S_1$ y...y$x_n \in S_n$) es existencialmente definible de $S_1, \ldots, S_n$; en -- efecto, es definible de $S_1, \ldots, S_n$ por medio de transformaciones explícitas e intersección. Para demostrar ésto, consideremos los conjuntos $W_i = \lambda x_1, \ldots, x_n(x_i \in S_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$; entonces $S_1 \times \ldots \times S_n = W_1 \cap \ldots \cap W_n$.

El producto relativo $R_1 | R_2$, de dos relaciones R_1 y R_2, que se define como el conjunto de las parejas ordenadas (x, y) tales que para alguna z se cumple que $xR_1z \wedge zR_2y$, es obviamente existencialmente definible de R_1 y R_2. Finalmente, la inversa (o conversa) $\breve{R}$ de una relación R(x, y) (es decir, el conjunto de las parejas ordenadas (x, y) tales que R(y, x)), es explícitamente definible de R y por lo tanto, es existencialmente definible a partir de R.

De las consideraciones (a), (b) y (c) anteriores, el siguiente corolario del teorema 1, es inmediato:

Corolario 1.- (a) Si W y f son f. r. sobre K, entonces f(W) y $f^{-1}(W)$ también son f. r. sobre K.

(b) Si f(x, y) es f. r. sobre K, también lo es su diagonal $\vec{f}$. Si $R(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n)$ es f. r. sobre K, entonces para cualesquiera elementos $i_1, \ldots, i_m$, la relación $R_{i_1, \ldots, i_m}(x_1, \ldots, x_n)$ es f. r. sobre K. Si $f(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n)$ es f. r. sobre K, entonces también lo es $f_{i_1, \ldots, i_m}(x_1, \ldots, x_n)$. El conjunto de todas las funciones que son f. r. sobre K, es cerrado bajo composición.

(c) El producto cartesiano $S_1 \times \ldots \times S_n$ de n conjuntos f. r. sobre K, es f. r. sobre K. El conjunto de todas las relaciones diádicas que son f. r. sobre K, es cerrado bajo las operaciones de tomar inverso y de - tomar productos relativos.

El resultado del siguiente corolario, será también usado posterior-- mente:

Corolario 2. - Si f es una función 1 a 1 (inyectiva) que es f. r. sobre K y W es cualquier atributo en K, entonces W es f. r. sobre K$\longleftrightarrow$f(W) - es f. r. sobre K.

Demostración. - Si W es f. r. sobre K, f(W) también lo es, como lo demuestra el corolario 1; supongamos que f(W) es formalmente representable sobre K; en ese caso, $f^{-1}(f(W))$ también es f. r. sobre K, por el - mismo corolario. Pero como f es 1 a 1, se tiene que $f^{-1}(f(W)) = W$. -- Por lo tanto, W es f. r. sobre K.

SECCION 2.

Solubilidad sobre K.

Teorema 2. - El conjunto de todos los atributos que son <u>solubles</u> sobre K, es cerrado bajo complementación, unión, intersección y toda transformación explícita.

Demostración. - De manera más general, demostraremos que para cualquier colección Σ de atributos de un conjunto S, la cual es cerrada bajo definibilidad existencial, la colección Σ' de todos los atributos W, tales que W y su complemento $\tilde{W}$ están en Σ, es cerrada bajo complementación, unión, intersección y transformaciones explícitas. Entonces el teorema 2 será una consecuencia directa del teorema 1.

La complementación es trivial. Para la unión, consideremos dos elementos de Σ', digamos W y V, que sean del mismo grado. Sea $M = W \cup V$; por hipótesis, $M \in \Sigma$; es fácil ver que $\tilde{M} = \tilde{W} \cap \tilde{V}$, y como $\tilde{W}$ y $\tilde{V}$ están también en Σ, se sigue que $\tilde{M} \in \Sigma$, por lo que $M \in \Sigma'$; ésto demuestra que Σ' es cerrado bajo unión. La demostración para intersección es obviamente dual. En cuanto a las transformaciones explícitas, consideremos un atributo $W \in \Sigma'$ y sea $M = \lambda x_1, \ldots, x_n W(\xi_1, \ldots, \xi_k)$. Entonces $\tilde{M} = \lambda x_1, \ldots, x_n \tilde{W}(\xi_1, \ldots, \xi_k)$; por lo tanto M, $\tilde{M} \in \Sigma'$. Esto concluye la demostración.

Corolario . - La inversa de cualquier relación que es soluble sobre K, es también soluble sobre K. Para cualquier relación $R(z_1, \ldots, z_m, x_1, \ldots, x_n)$ que sea soluble sobre K, y para cualquiera elementos $i_1, \ldots, i_m$ de $\underline{K}$, la relación $R_{i_1, \ldots, i_m}$ es soluble sobre K. Similarmente con funciones. El producto cartesiano de conjuntos que son solubles sobre K, también es soluble sobre K.

Teorema 2.1.- La imágen inversa de cualquier atributo W que es soluble sobre K, bajo una función que es f.r. sobre K, también es soluble sobre K.

Demostración.- Supongamos que W es soluble y f es f.r. (ambos sobre K). Por el teorema 1, sabemos que $f^{-1}(W)$ y $f^{-1}(\tilde{W})$ son ambos f. r. sobre K; pero es fácil ver que $f^{-1}(\tilde{W})$ es el complemento de $f^{-1}(W)$; por consiguiente, $f^{-1}(W)$ y su complemento, son ambos f.r. sobre K, es decir, $f^{-1}(W)$ es soluble sobre K.

Teorema 2.2.- Sea $W_1 \subseteq W_2$, en donde W_1 y W_2 son atributos en $\underline{K}$; sea W_2, soluble sobre K. Entonces W_1 es soluble sobre K, si y sólo si W_1 y $W_2 - W_1$ son f.r. sobre K.

Demostración.- (a) Supongamos que W_1 y $W_2 - W_1$ son f.r. sobre K. Por hipótesis, $\tilde{W}_2$ también es f.r. sobre K, por lo tanto la unión - - $(W_2 - W_1) \cup \tilde{W}_2$ es f.r. sobre K. Pero esta unión es $\tilde{W}_1$ (ya que $W_1 \subseteq W_2$). Entonces $\tilde{W}_1$ es f.r. sobre K, al igual que W_1; por consiguiente, W_1 es soluble sobre K.

(b) Supongamos ahora, que W_1 es soluble sobre K; también W_2 es f.r. sobre K. Entonces $W_2 - W_1$ (es decir, la intersección $W_2 \cap \tilde{W}_1$) es f.r. sobre K. Por lo tanto, $W_2 - W_1$ y W_1 son f.r. sobre K.

Discusión.- Consideremos, ahora, todos los resultados de la Parte I, para el caso en que K es el alfabeto $\{1, 2\}$ de los números diádicos. El teorema 1 dice que la colección de todos los atributos r. e. (recursivamente enumerables), es cerrada bajo definibilidad existencial, es decir, cerrada bajo uniones, intersecciones, cuantificación existencial y todas las transformaciones explícitas. El teorema 2 dice que la colección de todos los atributos recursivos es cerrada bajo las operaciones buleanas (unión, intersección y complementación) y también bajo todas las transformaciones explícitas. El teorema 2.1. dice que la imágen inversa de un atributo recursivo bajo una función r. e., es recursiva. Finalmente, el teorema 2.2. dice que si $A \subseteq B$ y B es recursivo, entonces A es recursivo, si y sólo si A y B-A son ambas r. e.

En la siguiente sección, consideraremos más propiedades de cerradura de la colección de todos los atributos r. e.; estas propiedades, a diferencia de las de la presente sección, envolverán el significado aritmético de los números diádicos.

Parte II. - Enumerabilidad Recursiva.

SECCION 3.

Enumerabilidad Recursiva de Algunos Atributos Aritmáticos Básicos.

Teorema 3. - Las relaciones "x es el sucesor de y" (es decir, $x = y+1$), $x < y$, $x \leqslant y$, $x > y$, $x \geqslant y$, $x = y$, $x \neq y$, $x + y = z$ y $x \times y = z$, son recursivamente enumerables.

Demostración. - (a) La relación "x es el sucesor de y", está representada por "S" (el significado de Sx, y es "x es el sucesor de y") en la aritmética diádica elemental cuyos axiomas son:

S2, 1

S11, 2

Sx2, x1

Sy, x $\rightarrow$ Sy1, x2.

(b) Si añadimos a los axiomas anteriores, los axiomas:

Sx, y $\rightarrow$ Ly, x

Lx, y $\rightarrow$ Ly, z $\rightarrow$ Lx, z,

entonces "L" representa a la relación "$x < y$".

(c) Añadimos a los axiomas de (a) y (b), los axiomas:

Lx, y $\rightarrow$ L'x, y

L'x, x

El predicado L' representa, en esta aritmética, a la relación $x \leq y$. Puesto que las relaciones $x < y$ y $x \leq y$ son r. e., también lo son sus inversas $x \geq y$ y $x > y$ (por el corolario 1 (c)).

(d) Añadimos a los axiomas de (a), (b) y (c), los axiomas:

Lx, y $\rightarrow$ Dx, y

Ly, x $\rightarrow$ Dx, y.

Entonces "D" representa a la relación $x \neq y$.

(e) La relación $x = y$ es representada por "I", con el axioma

$Ix, x.$

(f) Si además de los axiomas de (a), tenemos los axiomas:

$Sy, x \rightarrow Ax, 1, y$

$Sy, w \rightarrow Ax, w, v \rightarrow Sz, v \rightarrow Ax, y, z$

el predicado "A" representará a la relación $x + y = z$.

(g) Finalmente, el predicado "M" representa a la relación $x \times y = z$, si añadimos a los axiomas de (a) y (f), los siguientes axiomas:

$Mx, 1, x$

$Mx, w, v, \rightarrow Av, x, z \rightarrow Sy, w \rightarrow Mx, y, z.$

SECCION 4:

Funciones Recursivas y Recursivas Parciales.

Teorema 4. - Si la relación $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ es r. e., entonces f es una función recursiva (es decir, $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ es una relación recursiva).

Demostración. - Sea $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ la relación $f(x_1, \ldots, x_n) = y$. Por hipótesis, R es r. e.; debemos demostrar que $\tilde{R}$ es r. e. Consideremos el sistema formal elemental (E), en el cual "R" representa a la relación R y "D" representa a la relación $x \neq y$.

Tomamos un nuevo predicado "P" y añadimos el axioma:

$$Rx_1, \ldots, x_n, z \rightarrow Dz, y \rightarrow \quad Px_1, \ldots, x_n, y.$$

Entonces "P" representa a $\tilde{R}$.

Observamos que, por los teoremas 3 y 4, las funciones $x + y$ y $x \times y$, son recursivas.

F u n c i o n e s R e c u r s i v a s P a r c i a l e s . - Sea $f(x_1, \ldots, x_n)$ una - función definida en algunas eneadas de números, pero no necesariamente en todas; sea Sf el conjunto de las eneadas en las cuales f está definida. Llamaremos a f, una <u>función recursiva parcial,</u> si y sólo si la relación $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ es <u>recursivamente enumerable.</u>

El teorema 4 no es, sino un caso particular del siguiente teorema:

Teorema 4. 1. - Si f es una función recursiva parcial y si su dominio Sf es recursivo, entonces la relación $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ es recursiva.

Demostración. - Consideremos otra vez el sistema formal elemental (E) sobre $\{1, 2\}$, en el cual $R(x_1, \ldots, x_n, y)$ es la relación $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ y en donde "R" representa a la relación R, "D" representa a la relación $x \neq y$ y "Q" representa al complemento de Sf (puesto que estamos suponiendo que Sf es recursivo); tomamos un nuevo predicado - "P" y añadimos a los axiomas de (E), los siguientes axiomas:

$$Rx_1,\ldots,x_n,z \rightarrow Dz,y \rightarrow Px_1,\ldots,x_n,y$$

$$Qx_1,\ldots,x_n \rightarrow Px_1,\ldots,x_n,z.$$

El predicado "P" representa, en este sistema; a la relación $\tilde{R}$.

SECCION 5.

Cuantificación Finita; Definibilidad Constructiva.

Para cualquier relación $R(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$, definimos $E_F(R)$, como - el conjunto de todas las eneadas $(x_1,\ldots,x_{n-1},z)$, tales que existe un número $y < z$, tal que $R(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$. La relación $E_F(R)$ también puede ser expresada como:

$\lambda x_1,\ldots,x_{n-1},z\ (\exists y)_{<z}\ R(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$; más brevemente, escribiremos: $(\exists y)_{<z}\ R(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$. Definiremos a $A_F(R)$, como el conjunto de todas las eneadas $(x_1,\ldots,x_{n-1},z)$, tales que para todo número $y < z$, se cumple $R(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$. $A_F(R)$ se puede expresar como

$\lambda x_1,\ldots,x_{n-1},z\ (\forall y)_{<z}\ R(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$, o más brevemente: $(\forall y)_{<z}\ R(x_1,\ldots,x_{n-1},y)$. Diremos que $E_F(R)$ se obtiene de R por <u>cuantificación existencial finita</u> y que $A_F(R)$ se obtiene de R por <u>cuantificación universal finita</u>.

Teorema 5 - (a) Si R es una relación r.e., entonces $E_F(R)$ y $A_F(R)$ también son recursivamente enumerables; (b) si R es recursiva, también $E_F(R)$ y $A_F(R)$ lo son.

Demostración. - Sean R_1 y R_2 dos símbolos de relaciones que representan, respectivamente, a $E_F(R)$ y $A_F(R)$.

(a) La relación R_1 es existencialmente definible de R y la relación -- $x < y$, ya que:

$$R_1(x_1,\ldots,x_{n-1},y) \longleftrightarrow (\exists z)\ [z < y \wedge R(x_1,\ldots,x_{n-1},z)]$$

Como por hipótesis R es asumida r.e. y la relación $x < y$ es r.e., R_1 es r.e. Análogamente para R_2; sea (E) un sistema formal elemental sobre$\{1, 2\}$ en el cual "R" representa a la relación R y "S" representa a la relación "x es el sucesor de y" (la cua.. es r.e.); añadiendo los axiomas:

$$R_2(x_1,\ldots,x_{n-1},1) \text{ y}$$
$$R_2(x_1,\ldots,x_{n-1},z) \to Sw,z \to R(x_1,\ldots,x_{n-1},z) \to$$
$$R_2(x_1,\ldots,x_{n-1},w)$$

a los axiomas de (E), "R_2" representa a R_2 (representa a $A_F(R)$). El axioma $R_2(x_1,\ldots,x_{n-1},1)$ se cumple por vacuidad, ya que no hay ningún entero positivo que sea menor que 1.

(b) La demostración de que $E_F(R)$ y $A_F(R)$ son recursivas siempre que R sea recursiva, se sigue de (a), ya que $\tilde{E}_F(R)$ es el complemento de

$A_F(R)$ y $\tilde{A}_F(R)$ es el complemento de $E_F(R)$.

Definibilidad Constructiva. - Diremos que un atributo numé rico A es constructivamente definible de $A_1, \ldots, A_n$(n atributos), si y sólo si A se puede obtener de $A_1, \ldots, A_n$, por un número finito de -- aplicaciones de las siguientes operaciones:

(i) Unión.

(ii) Intersección.

(iii) Transformaciones Explícitas.

iv) Cuantificación Finita (tanto existencial como universal)

v) Complementación.

Observamos que si hubiéramos empezado con los atributos $A_1, \ldots, A_n$ y sus complementos $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$, entonces no sería necesaria la operación del punto (v).

Si en lugar de (iv) permitiéramos cuantificadores no acotados, entonces los atributos así obtenidos, serían llamados "definibles de primer orden de $A_1, \ldots, A_n$".

Un atributo A es llamado "aritmético" (según Gödel), si y sólo si es definible de primer orden a partir de las relaciones $x + y = z$ y $x \times y = z$, - Si A es constructivamente definible de $x + y = z$ y $x \times y = z$, diremos que A es aritmético constructivo. Por los teoremas 2 y 5, es inmediato de verificar que todos los atributos aritméticos constructivos, son recursivos.

Una colección Σ de atributos r.e. es llamada una <u>base</u> (para los atributos r.e.), si y sólo si todo atributo r.e. es una cuantificación existencial de algún elemento de Σ . También llamaremos a una colección Σ_o de atributos r.e. una <u>sub-base</u> (para los atributos r.e.), si y sólo si la colección Σ de todos los atributos que son constructivamente definibles a partir de Σ_o, forman una base para los atributos r.e. De los resultados de Gödel, se infiere fácilmente, que los atributos aritméticos constructivos forman una base para los atributos r.e.; dicho de otra forma, las relaciones $x + y = z$ y $x \times y = z$ forman una sub-base.

Parte III.- Transformaciones en Alfabetos; Numeración de Gödel.

SECCION 6.

Extensión de Alfabetos.

Para cualquier sistema formal elemental sobre K y para cualquier extensión L del alfabeto K, definimos $(E)_L$, como el sistema formal elemental sobre L, cuyos axiomas son los mismos axiomas de (E) (en particular, $(E)_K = (E)$). Un predicado P de (E), no necesariamente representa el mismo atributo en $(E)_L$ que en $(E)_K$, sin embargo, dado cualquier sistema formal elemental (E) sobre K, con los predicados P_1, $P_2, \ldots, P_m$, siempre es posible construir un sistema formal elemental $(\bar{E})$ sobre K. tal que para toda extensión L de K, cada Pi representa el mismo atributo en $(\bar{E})_L$ que en (E); construímos el sistema $(\bar{E})$ como sigue:

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los símbolos de K; sean $X_1, X_2, \ldots, X_r$ los axiomas de (E). Tomamos un nuevo predicado Q (que representará al conjunto $\underline{K}$) y para cada axioma X de (E), construímos la cuerda $\bar{X} = Qx_1 \to \ldots \to Qx_s \to X$, en donde $x_1, \ldots, x_s$ son las variables que aparecen en X. Entonces definimos $(\bar{E})$, como el sistema cuyos axiomas son:

$$Qa_1$$

$$\vdots$$

$$Qa_n$$

$$Qx \to Qy \to Qxy$$

$$\bar{X}_1$$

$$\vdots$$

$$\bar{X}_r$$

Sea L cualquier extensión de K. Será fácil verificar que Q representa a $\underline{K}$ en $(\bar{E})_L$ y que cada predicado Pi de (E) representa al mismo atributo Wi en $(\bar{E})_L$ que en (E).

Proposición 3. - Sea K un sub-alfabeto de L y sea W un atributo en K que es f. r. sobre K. Entonces W es f. r. sobre L.

SECCION 7.

Numeración de Gödel Diadica.

Sea K el alfabeto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ que contiene al menos dos símbolos (podemos asumir que al menos contiene a los símbolos "1" y "2", sin pérdida de generalidad). Sea D el alfabeto $\{1, 2\}$ de los números diádicos (el cual, por asunción, es un subalfabeto de K) y consideremos la numeración de Gödel diádica g de K, explicada en el capítulo I, sección 5. Sea G = g(K), es decir, el conjunto de todos los números de -- Gödel de las expresiones de K; G es el conjunto de todos los números - que pueden ser expresados como una concatenación de los números 12, 122, ..., $1\underbrace{2\ldots2}_{n}$. El conjunto G es r.e. (f.r. sobre D), ya que el predicado Q lo representa en el sistema formal elemental sobre D; cuyos axiomas son:

Q12

Q122

.
.
.

$$Q1\underbrace{2\ldots2}_{n}$$

$$Qx \rightarrow Qy \rightarrow Qxy.$$

Para cualquier sistema formal elemental (E) sobre K, definimos $(E)_o$, como el sistema formal elemental sobre D, cuyos axiomas se obtienen de los axiomas de (E), reemplazando cada símbolo de K, por su correspondiente número de Gödel diádico. Si P representa a W en (E), no necesariamente P representa a Wo en $(E)_o$; sin embargo, si consideramos primero el sistema $(\bar{E})$ como se definió en la sección anterior y tomamos el sistema $(\bar{E})_o$, entonces Q representará al conjunto G y P representará a Wo en $(\bar{E})_o$. Por lo tanto, si W es f.r. sobre K, entonces W_o es r.e.

Inversamente, si Wo es r.e., es decir Wo es f.r. sobre D, entonces Wo es f.r. sobre K, por la Proposición 3 y debido a que D es un subalfabeto de K. Ahora bien, $W = g^{-1}(Wo)$ y como g es f.r. sobre K (como se demostró en el capítulo I), se tiene que W es f.r. sobre K (por el teorema 1, corolario 1(a)). Hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 6. - Bajo la numeración de Gödel diádica g de K, un atributo W de K es f.r. sobre K, si y sólo si Wo es r.e.

Ahora podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 7. - Sea K un alfabeto que contiene, al menos, dos símbolos; sea $K \subseteq L$ y sea W un atributo en $\underline{K}$. Entonces W es f.r. sobre - - $K \Longleftrightarrow W$ es f.r. sobre L.

Demostración. - Podemos asumir que D es un sub-alfabeto de K, sin - pérdida de generalidad. Ordenamos a L de tal modo, que los símbolos de K aparecen al principio; sea g_1 la numeración de Gödel diádica de $\underline{K}$ y sea g_2 la numeración de Gödel diádica de $\underline{L}$. Entonces g_2 es una <u>extensión</u> de la función g_1, es decir, para toda cuerda X en K, $g_1(X) = g_2(X)$. Consideremos ahora, cualquier atributo W de $\underline{K}$. Tenemos que:

(1) W es f.r. sobre $K \Longleftrightarrow g_1(W)$ es r.e. (Teorema 6).

(2) W es f.r. sobre $L \Longleftrightarrow g_2(W)$ es r.e. (Teorema 6).

Pero como $g_1(W) = g_2(W)$ (ya que $W \subseteq \underline{K}$), tenemos por (1) y (2): W es f.r. sobre $K \Longleftrightarrow W$ es f.r. sobre L.

Corolario. - Cualquier atributo numérico A que es f.r. (en notación -- diádica) sobre alguna extensión del alfabeto D, es r.e. (f.r. sobre -- $\{1,2\}$).

SECCION 8.

Solubilidad.

Con el símbolo $\underline{K}^{(n)}$ representaremos el producto cartesiano de $\underline{K}$, n -

veces $\underbrace{(K\times\ldots\times K)}_{n}$. Para cualquier extensión L de K, el conjunto $\underline{K}$ es soluble sobre L (ver capítulo I, sección 2, ejemplo c); por lo tanto, $\underline{K}^{(n)}$ es soluble sobre L, por el teorema 2, corolario 1 (3a. parte).

Teorema 8. - Sean $K \subsetneq L$ y W un atributo de $\underline{K}$ de grado n.

(a) si W es soluble sobre K, entonces W es soluble sobre L.

(b) si W es soluble sobre L, entonces W es soluble sobre K, siempre que K contenga al menos 2 símbolos.

Demostración. - Acabamos de ver que $\underline{K}^{(n)}$ es soluble sobre L. Por el teorema 2.2, W es soluble sobre L, si y sólo si W y $\underline{K}^{(n)}$ - W son f.r. sobre L.

(a) Supóngase que W es soluble sobre K; entonces W y $\underline{K}^{(n)}$ - W son f.r. sobre K, por lo tanto, por la proposición 1, corolario 1, W y $\underline{K}^{(n)}$- W son f.r. sobre L; entonces, también por el teorema 2.2, W es soluble sobre L.

(b) Supongamos ahora, que W y $\underline{K}^{(n)}$ - W son f. r. sobre L, y K contiene, al menos, dos símbolos; entonces W y $\underline{K}^{(n)}$ - W son f.r. sobre K (por el teorema 7); por lo tanto, W es soluble sobre K (por el teorema 2.2).

SECCION 9.

Ordenación Lexicográfica; Representación n-ádica de números.

Sea K un alfabeto de n símbolos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \geqslant 2$) y sea $X_1, X_2, \ldots, X_i \ldots$ la secuencia de todas las cuerdas en K, arregladas lexicográficamente, es decir, de acuerdo a su longitud y alfabeticamente -- dentro de cada grupo de la misma longitud. Definimos la función S: $\underline{K} \to \underline{K}$ de $\underline{K}$ en $\underline{K}$, por la condición: $S(X_i) = X_{i+1}$; entonces $S(X_i)$ es - la cuerda que sucede a X_i en la secuencia lexicográfica.

Sea $\underline{K_1}$ el conjunto de todas las cuerdas en el símbolo a_1 (1er. símbolo de K). Para cualquier entero positivo i, sea $\underline{i}$ la cuerda en K_1, con longitud i. Definimos la función h, por la condición h $(X_i) = \underline{i}$; h es -- una función de $\underline{K}$ en $\underline{K_1}$ ($h: \underline{K} \to \underline{K_1}$), suprayectiva.

Lema.- (a) La función S es f.r. sobre K.

(b) La función h es f.r. sobre K.

Demostración.- (a) La relación $S(x) = y$ es representada por "S" en el sistema formal elemental sobre K, cuyos axiomas son:

$$S\,\alpha a_1,\ \alpha a_2$$

$$S\,\alpha a_2,\ \alpha a_3$$

$$\vdots$$

$S\alpha a_{n-1}, \alpha a_n$

$Sa_n, a_1 a_1$

$Sx, x' \rightarrow Sxa_n, x' a_1.$

En los axiomas anteriores, α es una variable impropia.

(b) Añadimos al sistema anterior, los siguientes axiomas:

Ha_1, a_1

$Hx, y \rightarrow Sx, x' \rightarrow Hx', ya_1;$

H representa a la relación $h(x) = y$.

Proposición 4. - W es f. r. sobre K $\Longleftrightarrow$ h(W) es f. r. sobre K.

Demostración. - Como la función h es uno a uno y f. r. sobre K, el resultado se sigue del teorema 1, corolario 2.

Representación n-ádica de enteros positivos. - La representación n-ádica de enteros positivos, consiste en lo siguiente: Tomamos n símbolos $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (llamados <u>dígitos n-ádicos</u>) como los nombres de los números enteros $1, 2, \ldots, n$ respectivamente; tomamos ahora cualquier cuerda $S_{i_r} S_{i_{r-1}} \ldots S_{i_0}$, como el nombre del número $i_0 + ni_1 + n^2 i_2 + \ldots + n^r i_r$ (esto fue hecho en el capítulo I, para el caso especial en que $n = 2$). Cualquier cuerda c en los símbolos $S_1, \ldots, S_n$, es llamada un número n-ádico ("eneádico", excepto para n = 1, en cuyo caso lo llamaremos número "unario" en lugar de llamarlo "unádico"). Observamos que si arregláramos los números n-ádicos en forma lexicográfica, entonces la posición ocupada por un número c, es la misma que el número que c designa en notación n-ádica; dicho de otra forma, si consideramos la numeración de Gödel lexicográfica de todas las cuerdas en un alfabeto K con n símbolos (ver capítulo I, sección 5), entonces el número de Gödel lexicográfico de cualquier cuerda X, puede ser obtenido sustituyendo (en X) S_1 por a_1, S_2 por $a_2, \ldots,$ S_n por a_n y considerando el número n-ádico obtenido en esta forma.

Para cada número natural n, sea D_n el alfabeto de los dígitos n-ádicos; será conveniente escoger todos los símbolos S_i, de tal modo que, para toda n, $D_n \subseteq D_{n+1}$; esto puede ser hecho tomando una secuencia numerable pero infinita de símbolos: $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$ y definiendo D_n como el alfabeto que consta de los primeros n símbolos de la secuencia. Para $n \leq 9$ podemos tomar $S_1, S_2, \ldots, S_9$ como los símbolos "1", "2",...,"9". Para n > 9, cada lector puede usar su propio simbolismo.

Dado cualquier atributo numérico A (atributo de números enteros positivos), definimos $A_{(n)}$, como el correspondiente atributo de números n-ádicos.

Teorema 9. - Para n, m $\geqslant$ 2:

(a) $A_{(n)}$ es f. r. sobre $D_n \Longleftrightarrow A_{(m)}$ es f. r. sobre D_m.

(b) $A_{(n)}$ es soluble sobre $D_n \Longleftrightarrow A_{(m)}$ es soluble sobre D_m.

Demostración. - (a) Hagamos a K igual al alfabeto D_n en la proposición 4; observemos que $A_{(1)} = h(A_{(n)})$; entonces, por la proposición 4, $A_{(n)}$ es f. r. sobre D_n, si y sólo si $A_{(1)}$ es f. r. sobre $D_{(n)}$; análogamente, $A_{(m)}$ es f. r sobre D_m, si y sólo si $A_{(1)}$ es f. r. sobre D_m, pero como D_n y D_m contienen ambos al menos dos símbolos, es inmediato, del teorema 7, que $A_{(1)}$ es f. r. sobre D_n, si y sólo si $A_{(1)}$ es f. r. sobre D_m. Por lo tanto, $A_{(n)}$ es f. r. sobre D_n, si y sólo si $A_{(m)}$ es f. r. sobre D_m.

(b) Es una consecuencia trivial del punto (a).

Corolario. - Para cualquier n $\geqslant$ 2, $A_{(n)}$ es f. r. sobre D_n, si y sólo si A es r. e. ($A_{(n)}$ es soluble sobre D_n, si y sólo si A es recursivo).

Demostración. - Por el teorema 9, haciendo m = 2.

Podríamos llamar a un atributo A "r. e. en notación n-ádica", si y sólo si $A_{(n)}$ es f. r. sobre D_n. Entonces el teorema 9 dice que para n, m $\geqslant$ 2, A es r. e. en notación n-ádica, si y sólo si A es r. e. en notación m-ádica. Así, como se dijo en el capítulo I, nuestra definición de enumerabilidad recursiva, no es dependiente de la base n que se escoja.

SECCION 10.

Correspondencias de Gödel Admisibles.

En el capítulo I se definió que una numeración de Gödel g de K̲ es admisible, si y sólo si para todo atributo W en K̲, se cumplen las siguientes condiciones:

(i) W es f.r. sobre K $\longleftrightarrow$ Wo es r.e.

(ii) W es soluble sobre K $\longleftrightarrow$ Wo es recursivo.

Sea g la numeración de Gödel lexicográfica de K̲; sea W un atributo en K̲ y sea A = Wo. Si reemplazamos los símbolos $a_1, \ldots, a_n$ por los respectivos dígitos n-ádicos "1", "2",..., etc., entonces claramente W es el atributo $A_{(n)}$; por lo tanto, es fácil ver que W es f.r. sobre K $\longleftrightarrow$ $A_{(n)}$ es f.r. sobre D_n; también W es soluble sobre K, si y sólo si $A_{(n)}$ es soluble sobre D_n. Como A = Wo, también tenemos, por el Teorema 9, corolario 1, que W es f.r. sobre K, si y sólo si Wo es r.e. y que W es soluble sobre K, si y sólo si Wo es recursivo. Así, la numeración de Gödel lexicográfica de K, es admisible y tenemos el siguiente teorema:

Teorema 10. - Existe una correspondencia de Gödel que va de $\underline{K}$ al conjunto N de los números naturales la cual es admisible y suprayectiva: La numeración de Gödel lexicográfica, es dicha correspondencia.

SECCION 11.

Sumario.

Resumiremos los resultados de este capítulo que serán usados con mayor frecuencia:

(i) La colección de todos los atributos r.e., es cerrada bajo definibilidad existencial y bajo cuantificación finita.

(ii) La colección de todos los atributos recursivos, es cerrada bajo unión, intersección, complementación, todas las transformaciones explícitas y cuantificación finita y contiene a las relaciones $x + y = z$ y $x \times y = z$.

(iii) Para cada alfabeto K, existe una numeración de Gödel admisible suprayectiva en N; es decir, una numeración tal que para cualquier atributo W en $\underline{K}$, W es f.r. sobre K, si y sólo si Wo es r.e.; y W es soluble sobre K si y sólo si Wo es recursivo. La numeración de Gödel lexicográfica es dicha correspondencia.

CAPITULO III.

INCOMPLETEZ E INDECIDIBILIDAD.

Este capítulo está dedicado a la reconstrucción, generalización y extensión de ciertos argumentos relacionados con los teoremas sobre incompletez de Gödel y Rosser, los resultados de Tarski concernientes a la definibilidad del "conjunto de verdad" de un sistema dentro del sistema mismo y los resultados de Church, Rosser y Kleene concernientes a indecidibilidad. Los resultados de este capítulo son presentados de una manera puramente abstracta, que no emplea el aparato de la lógica matemática; aplicaciones más concretas, serán desarrolladas posteriormente.

La idea principal de este capítulo, es la de <u>sistemas de representación</u>, que nos permitirá estudiar representabilidad en sistemas de estructuras sintácticas altamente diversas. Todos los sistemas en los que estaremos interesados, poseen, al menos, las siguientes características: Primero, tenemos un conjunto E, de las llamadas "expresiones" del sistema; para nuestros propósitos, E puede ser cualquier conjunto enumerable, completamente arbitrario, aunque en sistemas logísticos, E debe consistir de genuinas expresiones formales (eneadas de elementos llamados "símbolos"); tenemos también un subconjunto de E, de las llamadas "oraciones" del sistema, y que denotaremos por S; un subconjunto T de S, de las llamadas "oraciones válidas" (en aplicaciones a sistemas semánticos, T será el conjunto de verdad y en sistemas sintácticos, T es el conjunto de teoremas);

se tiene, después, la importante noción de "representación de un conjunto" dentro del sistema; la manera de hacer esto, varía con - las peculiaridades formales del sistema, pero, en general, tienen en común las siguientes características:

Unas ciertas expresiones (elementos de E), llamadas "fórmulas predicativas" ó "predicados", y a cada predicado H y cada número n, asignamos, bajo cierta función Φ , una oración, la cual denotaremos por "H(n)". Consideremos ahora la totalidad de los números n, tales que H(n) ε T, y de este conjunto. diremos que es representado por H.

La función Φ varía considerablemente de un sistema a otro, pero el propósito, en este capítulo, es el de estudiar representabilidad relativa a una función Φ completamente arbitraria, sin tomar en cuenta las peculiaridades formales de sistemas particulares. Los conceptos generales de la Teoría de sistemas de representación que desarrollaremos a continuación, nos permitirá tratar aspectos matemáticamente significativos de incompletez e indecidibilidad, sin necesidad de involucrar las peculiaridades formales de ningún tipo de sistema de representación.

Parte I.- Incompletez.

SECCION 1.

Sistemas de Representación.

Definimos un <u>sistema de representación</u> Z, como una colección de los siguientes objetos:

(1) Un conjunto numerable E de elementos, llamados expresiones, - junto con una numeración de Gödel g de E en N, supravectiva; por el momento, no necesitaremos ninguna condición de "efectividad" de g.

(2) Un subconjunto S de E, cuyos elementos son llamados "oraciones" de Z.

(3) Un subconjunto T de S, cuyos elementos son llamados oraciones "verdaderas", "válidas" o "demostrables" o "teoremas" de Z.

(4) Un segundo subconjunto R de S, cuyos elementos son las oraciones "refutables" o "contra-válidas" de Z; en aplicaciones a sistemas en - lógica matemática que contienen negación, R será el conjunto de todas las oraciones cuyas negaciones son demostrables en Z.

(5) Un conjunto P de elementos de E, llamados predicados ("unarios").

(6) Una función ϕ de E $\times$ N en E, es decir, una función que asigna a cada expresión X y cada entero positivo a una única expresión $\phi(X, n)$, que abreviaremos con X(n) ó Xn. Esta función, que llamaremos "función de representación" de Z, debe tener la propiedad de que para todo predicado H y cualquier número n, la expresión Hn (es decir, ϕ (H, n)), debe ser una oración (ser un elemento de S).

Nos referiremos a Z como un sextuplete ordenado (E, S, T, R, P, Φ), en donde el orden de T y R es importante, ya que también considera remos sistemas de representación en los que los papeles de T y R son intercambiados. En ciertos contextos, la letra "Q" será usada en lugar de "Z" para denotar sistemas de representación. El hecho es que en algunas de nuestras definiciones y teoremas, el conjunto R no juega ningún papel; será en estos casos en los que utilizaremos "Q" en lugar de "Z", para enfatizar el hecho. Ciertamente, si pensa mos que "Q" denota la estructura más simple (E, S, T, P, Φ), todos los resultados permanecerán válidos.

Representabilidad. - Sean H un predicado de un sistema de representación Q (ya sea con el conjunto R o sin él) y W un conjunto de expresiones de Q. Definimos a H_W como el conjunto de todos los números n, tales que $Hn \in W$. En particular H_T es el conjunto de todas las n tales que $Hn \in T$ (Hn es válida en Q). Se dice que H representa al conjunto H_T en Q. Así, para cualquier conjunto de números A, H representa a A en Q, si y sólo si para todo número n, se cumple:

$$n \in A \longleftrightarrow Hn \in T \qquad \text{(es decir, } A = H_T\text{)}.$$

SECCION 2.

Primer Lema de Diagonalización; Teorema de Tarski.

Para cualquier expresión X, sea Xo su número de Gödel bajo g, y sea -

$Wo = g(W)$ el conjunto de los números de Gödel del conjunto W de expresiones de Q. Para cualquier número i, sea E_i (también usaremos X_i), la expresión de Q cuyo número de Gödel es i; la expresión $X_i(i)$, es decir $\phi(X_i, i)$, será llamada la <u>norma</u> o <u>diagonalización</u> de X_i; si X_i es un predicado (unario), entonces su diagonalización es ciertamente una oración. Siempre usaremos la letra "H" para representar un predicado (unario), y usaremos "h" para representar su correspondiente número de Gödel. Así, Hh es la diagonalización de H y es una oración. A todas las oraciones de esta forma, las llamaremos <u>oraciones diagonales.</u>

Para cualquier conjunto W de expresiones, definimos el conjunto de números W^*, por la condición: $i \in W^* \longleftrightarrow X_i(i) \in W$; es decir, W^* es el conjunto de los números de Gödel de todas aquellas expresiones cuya diagonalización está en W.

Complementación.- Para cualquier conjunto W de expresiones, denotaremos por $\tilde{W}$, al complemento de W con respecto a E; para cualquier conjunto A de números, $\tilde{A}$ denotará al complemento de A, con respecto al conjunto N de los números naturales.

Los siguientes resultados son fáciles de demostrar:

(a) $(\tilde{Wo}) = (\tilde{W})o$

(b) $(\tilde{W^*}) = (\tilde{W})^*$

(c) $H_{\tilde{W}} = \tilde{H}_W$.

El punto (a) es una consecuencia inmediata del hecho de que g es una función inyectiva de E sobre todo N; para el punto (b), tomemos cualquier número n; tenemos que $n \in (\tilde{W^*}) \longleftrightarrow n \notin W^*$

$$\longleftrightarrow Xn(n) \notin W \longleftrightarrow Xn(n) \in \tilde{W}$$
$$\longleftrightarrow n \in (\tilde{W})^*.$$

Por lo tanto, $n \in (\tilde{W^*}) \longleftrightarrow n \in (\tilde{W})^*$; entonces $(\tilde{W^*}) = (\tilde{W})^*$. Para demostrar (c), tomemos cualquier número n:

$$n \in H_{\tilde{W}} \longleftrightarrow Hn \in \tilde{W} \longleftrightarrow Hn \notin W \longleftrightarrow n \notin H_W \longleftrightarrow$$
$$n \in \tilde{H}_W;$$

por lo tanto, como $n \in H_{\tilde{W}} \longleftrightarrow n \in \tilde{H}_W$, tenemos que $H_{\tilde{W}} = \tilde{H}_W$.

La condición de que g sea una función suprayectiva de E en N, es conveniente, pero queremos hacer notar, que todos nuestros resultados permanecerían siendo válidos, aún sin dicha condición; por lo tanto, seguiremos asumiendo que g es suprayectiva, y para los casos en que esto no suceda, solo será necesario hacer modificaciones triviales a los resultados obtenidos.

Oraciones de Gödel. - W representará, a lo largo del presente capítulo, un conjunto de elementos de E.

Definimos una oración de Gödel para un conjunto A de números, como una oración X, tal que X ϵ T $\longleftrightarrow$ Xo ϵ A. También llamaremos a X una oración de Gödel para un conjunto W de expresiones, si y sólo si X es tal que: X ϵ T $\longleftrightarrow$ X ϵ W. Decir que X es una oración de Gödel para un conjunto W de expresiones, es equivalente a decir que X es una oración de Gödel para el conjunto de números Wo.

El siguiente lema es una reconstrucción y generalización altamente abstracta de varios argumentos de "diagonalización" usados por Gödel, Church, Tarski y otros, para establecer resultados sobre incompletez, indecidibilidad y la imposibilidad de representar ciertos conjuntos en ciertos sistemas. Nos referimos a él, como el "primer lema de diagonalización".

Lema I (Primer Lema de Diagonalización). - Una condición suficiente para la existencia de una oración de Gödel para W, es que W* sea representable en Q; más específicamente, si H es un predicado que representa a W* en Q, entonces su diagonzalización Hh, es una oración de Gödel para W.

Demostración. - Supongamos que H representa a W* en Q; entonces, para cualquier número n, $Hn \; \varepsilon \; T \longleftrightarrow n \; \varepsilon \; W^*$ (por definición de representabilidad). Tomando a $n = h$, en donde h es el número de Gödel de H, tenemos que:

$$Hh \; \varepsilon \; T \longleftrightarrow h \; \varepsilon \; W^* \longleftrightarrow Hh \; \varepsilon \; W.$$

Esto demuestra que Hh es una oración de Gödel para W.

Teorema 1.- El conjunto $\tilde{T}^*$ (o $\widetilde{T^*}$, que es igual a él) no es representable en Q.

Demostración.- Es obvio que no existe una oración X con la propiedad de que: $X \; \varepsilon \; T \longleftrightarrow X \; \varepsilon \; \tilde{T}$; por lo tanto, el conjunto $\tilde{T}$ no puede tener una oración de Gödel. El resultado se sigue del Primer Lema de Diagonalización.

N o r m a l i d a d .- Llamaremos a Q un sistema <u>normal</u>, si y sólo si tiene la propiedad de que para todo conjunto W, si W_o es representable en Q, W^* también lo es. Intuitivamente, la normalidad de un sistema significa que el argumento de diagonalización de Gödel, puede ser formalizado dentro del sistema.

Como una consecuencia inmediata del Teorema 1 y la definición de normalidad, notamos que en un sistema normal Q, el conjunto $\tilde{T}_o$ no es representable (si lo fuera, entonces por normalidad, $\tilde{T}^*$ sería representable, lo cual es contrario al Teorema 1).

Llamaremos a Q un sistema complementado, si y sólo si el complemento de todo conjunto representable en Q, es, también, representable en Q. Entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.1.- En un sistema Q, normal y complementado, el conjunto To de los números de Gödel de las oraciones válidas de Q, no puede ser representado en Q.

SECCION 3.

Consistencia y Completez; Teorema de Gödel.

Un sistema de representación Z es consistente, si y sólo si $T \cap R$ es vacío; es decir, ninguna oración de Z es demostrable y refutable a la vez. Llamamos a un sistema Z, completo, si y sólo si $T \cup R = S$; es decir, toda oración de Z es demostrable o refutable en Z. Un sistema Z que es consistente y completo, es llamado saturado; en otro caso, Z es insaturado. Es obvio que para todo predicado H de Z, se cumple lo siguiente:

(1) Si Z es consistente, $H_T \cap H_R$ es vacío.

(2) Si Z es completo, $H_T \cup H_R = N$

(3) Si Z es saturado, H_T es el complemento de H_R.

Una oración X es llamada decidible en Z, si y sólo si X es demostrable o refutable en Z; si no es este el caso, X es indecidible. Según lo anterior, $T \cup R$ es la clase de las oraciones decidibles y la proposición de que Z es completo, es equivalente a decir que toda oración es decidible en Z. Deberemos tener cuidado de no confundir el significado de la palabra "decidible" cuando ésta es aplicada a una oración particular, con el significado de decidibilidad de un sistema, en el sentido de que T es un conjunto soluble de expresiones.

Queremos hacer notar que en un sistema Z consistente, una oración indecidible de Z, es una oración de Gödel para el conjunto R. En efecto, la proposición "Z es insaturado", es equivalente a la proposición "existe una oración de Gödel para R".

Teorema 2. (Teorema de incompletez de Gödel en Miniatura).

Si R^* es representable en Z, entonces Z es inconsistente ó incompleto. Dicho de una forma más constructiva, si Z es consistente y si H es un predicado que representa a R^* en Z, entonces la diagonalización Hh de H, es un ejemplo de una oración indecidible de Z.

Demostración.- Es inmediato del primer lema de diagonalización, cambiando "R" por "W" y "Z" por "Q".

SECCION 4.
Representabilidad Completa y Definibilidad en Z.

Como se definió anteriormente, "H representa a A en Z", significa que para todo número n, $n \in A \longleftrightarrow Hn \in T$; es decir, $A = H_T$. Definiremos ahora las nociones de "representabilidad completa" y de -- "definibilidad":

Diremos que H representa <u>completamente</u> (o fuertemente) a un conjunto A de números, si y sólo si para todo número n, se cumple que:

(i) $n \in A \longleftrightarrow Hn \in T$ (es decir, $A = H_T$).

(ii) $n \in \tilde{A} \longleftrightarrow Hn \in R$ (es decir, $\tilde{A} = H_R$).

Diremos que H <u>define</u> a A en Z, si para todo número n, se cumple que:

(i) $n \in A \longrightarrow Hn \in T$ (es decir $A \subseteq H_T$).

(ii) $n \notin A \longrightarrow Hn \in R$ (es decir $\tilde{A} \subseteq H_R$).

Diremos que un predicado H es <u>numéricamente decidible en Z</u>, si y sólo si para todo número n, Hn es decidible en Z. Obviamente, si H es un predicado que define a algún conjunto en Z, entonces H es numéricamente decidible en Z. También es claro que, si A es completamente representable en Z, entonces A es representable y definible en Z.

Proposición 1. - (a) Si Z es consistente, entonces todo conjunto definible en Z es completamente representable en Z (a-fortiori representable en Z).

(b) Si Z es saturado, entonces todo conjunto representable en Z es completamente representable en Z.

(c) Por lo tanto, para un sistema Z saturado, la representabilidad, representabilidad completa y la definibilidad, son equivalentes.

Demostración. - (a) Supóngase que H es tal que para toda n:

(i') $n \in A \longrightarrow Hn \in T$ y

(ii') $n \notin A \longrightarrow Hn \in R$; debemos demostrar las implicaciones inversas. Supongamos que $Hn \in T$; entonces $Hn \notin R$ (por consistencia de Z); por la condición (ii'), es falso que $n \notin A$. Así, $n \in A$. Entonces tenemos que $Hn \in T \longrightarrow n \in A$. Por un razonamiento análogo, $Hn \in R \longrightarrow n \notin A$.

(b) Sea $A = H_T$; entonces $\tilde{A} = \tilde{H}_T$. Si Z es saturado, entonces $\tilde{H}_T = H_R$ y por lo tanto $A = H_T$ y $\tilde{A} = H_R$, lo que significa que H representa completamente a A.

De la parte (c), notamos que una condición suficiente para que un sistema Z sea insaturado, es la existencia de un conjunto que es representable en Z, pero no es definible en Z.

Teorema 3. - Si Z es consistente, entonces R^* no es definible en Z.

Demostración. - El lema I dice que para todo predicado H, se cumple que $H_T \neq \tilde{T}^*$; en realidad se cumple una condición más general (por el mismo razonamiento): para cualquier conjunto W, $H_W \neq \tilde{W}^*$. En particular, $H_R \neq \tilde{R}^*$. Por lo tanto, ningún predicado H puede representar completamente a R*, (y siendo Z consistente, ningún predicado H puede definir a R*) (por la proposición 1 (a)).

SECCION 5.

Separabilidad en Z; Teoremas de Rosser.

El teorema de incompletez de Gödel (cuya forma abstracta se presenta en el teorema 2), fue basado en el primer lema de diagonalización. Ahora consideraremos un lema más poderoso, que nos permitirá establecer teoremas más fuertes sobre incompletez (y subsecuentes teoremas sobre indecidibilidad) debidos a Rosser.

Supongamos que W es un conjunto de expresiones de Q, ajeno a T. Por el lema I, sabemos que una condición suficiente para que exista una - oración que esté fuera de W y fuera de T, es que W* sea representable en Q. Probaremos ahora un hecho más fuerte:

Lema II (Segundo Lema de Diagonalización). - Si H representa a algún superconjunto A de W* que es ajeno de T*, entonces su diagonalización Hh está fuera de W y de T.

Demostración. - Supongamos que H representa a A; $W^* \subsetneq A$ y $A \cap T^*$ es vacío. Como H representa a A, para todo número n, se cumple que $n \in A \longleftrightarrow Hn \in T$; en particular, para $n = h$, tenemos: $h \in A \longleftrightarrow Hh \in T \longleftrightarrow h \in T^*$. Así, $h \in A \longleftrightarrow h \in T^*$, pero A es ajeno de T^*, por lo tanto, $h \notin A$ y $h \notin T^*$. Como $h \notin A$ y $W^* \subsetneq A$, se tiene que $h \notin W^*$. Así, $h \notin W^*$ y $h \notin T^*$, es decir, $Hh \notin W$ y $Hh \notin T$. Entonces, Hh está fuera de W y de T.

Separabilidad débil dentro de Z. Sean A y B dos conjuntos ajenos de números. Diremos que A es débilmente separable de B en Q. si y sólo si existe un predicado H que representa a algún superconjunto de A que sea ajeno de B; diremos que tal predicado H separa débilmente a A de B en el sistema Q. El lema II dice que si H separa débilmente a W^* de T^* en Q, entonces Hh está fuera de W y de T. Tomando a W como el conjunto R, tenemos inmediatamente el siguiente teorema:

Teorema 4. - (Una forma rudimentaria del teorema de Rosser). - Una condición suficiente para que Z sea incompleto, es que R^* sea débilmente separable de T^* en Z. Si H efectúa esta separación, entonces Hh es una oración indecidible de Z.

Observaciones. - Si A es un conjunto ajeno de B, y si A es representable en Q, entonces A es débilmente separable de B en Q (ya que A es un superconjunto de sí mismo). Por lo tanto, el teorema 4 es una generalización del teorema 2).

S e p a r a b i l i d a d F u e r t e. - Sean A y B dos conjuntos ajenos de números. Decimos que H separa fuertemente a A de B en Z, si y sólo si para todo número n, se cumplen:

n ε A $\longrightarrow$ Hn ε T y n ε B $\longrightarrow$ Hn ε R; de manera más consisa, -- $A \subseteq H_T$ y $B \subseteq H_R$. En este caso, diremos que A es fuertemente separable de B en Z.

Observamos que la proposición "A es definible en Z", es equivalente a la proposición "A es fuertemente separable de $\tilde{A}$ en Z". En efecto, H define a A en Z, si y sólo si H separa fuertemente a A de $\tilde{A}$ en Z.

Proposición 2. - (a) Si Z es consistente y H separa fuertemente a A de B, entonces H separa débilmente a A de B.

(b) Sean $A_1 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$. Si A es débilmente (fuertemente) separable de B en Z, entonces A_1 es débilmente (fuertemente) separable de B_1 en Z.

Demostración. - (a) Supongamos que H separa fuertemente a A de B; entonces $A \subseteq H_T$ y $B \subseteq H_R$; Si Z es consistente, entonces H_T es ajeno de H_R, y como $B \subseteq H_R$, H_T es ajeno de B. Como H_T es el conjunto representado por H y es un superconjunto de A, ajeno de B, entonces H separa débilmente a A de B.

(b) Inmediato de la definición de separabilidad débil (fuerte).

Del teorema 4 y la proposición 2 (a), el siguiente teorema es inmediato:

Teorema 5. - Supongamos que H separa fuertemente a R^* de T^* en Z, en donde Z es consistente. Entonces la oración Hh es indecidible en Z.

Otra aplicación del Lema II. - Usando el segundo lema de diagonalización, en lugar del primero, obtenemos la siguiente extensión del teorema 3; esta extensión será importante para nuestro subsecuente estudio de inseparabilidad recursiva (ver teorema 27).

Teorema 6. - Si Z es consistente, entonces ningún superconjunto de R^*, ajeno de T^*, es definible en Z.

Demostración. - Supongamos que se cumple que:

(i) Z es consistente.

(ii) H define a A en Z.

(iii) $R^* \subseteq A$.

(iv) A es ajeno de T^*; derivaremos una contradicción:

Por (i) y (ii), H representa completamente a A en Z. Así, $A = H_T$ y $\tilde{A} = H_R$; entonces por (iii), $R^* \subseteq H_T$; y por (iv), $T^* \subseteq \tilde{A}$, es decir, $T^* \subseteq H_R$. Por lo tanto, $T^* \subseteq H_R$ y $R^* \subseteq H_T$, significa que H separa fuertemente a R^* de T^* en Z. Ahora bien, por el teorema 5, Hh es indecidible en Z, por lo que $Hh \notin T$ y $Hh \notin R$; es decir, $h \notin H_T$ y $h \notin H_R$. De lo anterior deducimos que H_R no es el complemento de H_T; pero $H_T = A$ y $H_R = \tilde{A}$. Esto es una contradicción.

SECCION 6.

Sistemas Simétricos.

Sea Z un sistema de representación (E, S, T, R, P, Φ) y sea $\check{Z}$ el sistema de representación (E, S, R, T, P, Φ). $\check{Z}$ se obtiene de Z, intercambiando el orden de T y R. Dicho de otra manera, las oraciones demostrables de Z, son llamadas "refutables" en $\check{Z}$ y las oraciones refutables de Z, son las oraciones "demostrables" de $\check{Z}$; llamaremos a $\check{Z}$, el sistema dual de Z (El propósito al considerar $\check{Z}$. es el de evitar repeticiones de algunos argumentos precedentes). Como $\check{Z}$ es un sistema de representación, podemos hablar de representabilidad, representabilidad completa, definibilidad y separabilidad (fuerte y débil) en $\check{Z}$, al igual que lo hacemos con Z. Así por ejemplo, H representa en $\check{Z}$ al conjunto H_R; H define a A en $\check{Z}$, si y sólo si $A \subseteq H_R$ y $\tilde{A} \subseteq H_T$, etc.

Los sistemas Z en que estaremos interesados (los cuales se originan de teorías cuya base lógica incluye el cálculo de predicados de primer orden), tienen la propiedad de que para todo predicado H, existe otro predicado H' (a saber, la negación de H), tal que $H_T = H'_R$ y $H_R = H'_T$; esto significa que para todo número n, Hn es demostrable en Z, si y sólo si $H\bar{n}$ es refutable en Z y Hn es refutable en $\check{Z}$, si y sólo si $H\bar{n}$ es demostrable en Z. Los sistemas que tienen esta propiedad, son llamados sistemas simétricos. Es inmediato que si Z es simétrico, entonces la representabilidad en Z es equivalente a la representabilidad en $\check{Z}$; análogamente con representabilidad completa. De aquí, si Z es simétrico y consistente, entonces un conjunto es definible en Z, si y sólo si es definible en $\check{Z}$. También si Z es simétrico, entonces la separabilidad fuerte dentro de Z, es equivalente a la separabilidad fuerte en $\check{Z}$ (Deberíamos también notar que si Z es simétrico, A es fuertemente separable de B en Z, si y sólo si B es fuertemente separable de A en Z).

Consideremos un sistema Z simétrico y consistente. Por el teorema 1 (aplicado a $\check{Z}$) $\tilde{R}^*$ no es representable en Z; así, por simetría de Z, $\tilde{R}^*$ no es representable en Z. Por el teorema 2 (otra vez aplicado a $\check{Z}$), si T^* es representable en $\check{Z}$, entonces $\check{Z}$ es incompleto (o lo que es lo mismo, Z es incompleto). Entonces, por la simetría de Z, si T^* es representable en Z, Z es incompleto. Análogamente, aplicando los teoremas 3, 5 y 6 a $\check{Z}$, y usando la simetría y la consistencia de Z, podemos asegurar que:

(i) T^* no es definible en Z;

(ii) Si T^* es fuertemente separable de R^* en Z, entonces Z es incompleto.

(iii) Ningún superconjunto de T^*, ajeno de R^*, es definible en Z.

Por lo anterior, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 7.- Sea Z un sistema simétrico y consistente, entonces tenemos que:

(i) Ninguno de los conjuntos $\tilde{T}^*$ y $\tilde{R}^*$ es representable en Z.

(ii) Ninguno de los conjuntos T^* y R^* es definible en Z, ni lo es ningún superconjunto de uno de ellos ajeno del otro.

(iii) Si T^* o R^* es representable en Z, o si cualquiera de ellos es fuertemente (o aún débilmente) separable del otro en Z, entonces Z es incompleto.

SECCION 7.

Extensiones.

Enfatizamos, una vez más, que el método de Gödel para probar incompletez, se centra en la representación del conjunto R^* (o T^*, si Z es simétrico); el método de Rosser consiste en representar a algún superconjunto de R^*, ajeno de T^*. Existe un método más, debido a Tarski, cuya abstracción consideraremos a continuación:

Sea Z un sistema de representación (E, S, T, R, P, Φ), y sean S', T' y R', correspondientes superconjuntos de S, T y R y subconjuntos de E; sea Z' el sistema de representación (E, S', T', R', P, Φ). Llamaremos a Z', una extensión de Z, o a Z un subsistema de Z'.

Teorema 8 (Tarski). - Si R* es representable en alguna extensión consistente Z' de Z, en la cual S = S', entonces Z es incompleto.

Demostración. - Supongamos que H representa a R* en Z'. Entonces, por el lema I (aplicado a Z'), Hh ε R<——>Hh ε T'. Como R' es ajeno de T' (por la consistencia de Z'), y R ⊆ R', entonces R es ajeno de T'. Entonces Hh está fuera de R y de T'. Ahora, como T ⊆ T', entonces Hh está fuera de T. Por consiguiente, Hh es indecidible en Z.

Observaciones. - (1) Es igualmente demostrable que si $\tilde{T}$* es representable en alguna extensión consistente Z' de Z entonces Z es incompleto.

(2) El teorema 2 puede ser visto como un caso especial del Teorema 8, en que Z' = Z.

Parte II - Indecidibilidad.

SECCION 8.

Sistemas con una Función de Representación "Efectiva".

Asociada a la función de representación ϕ de un sistema Q y la numeración de Gödel g, consideraremos ahora la función numérica ϕ (i, j), definida por la condición: ϕ (i, j) = k <——> $\phi(E_i, j) = E_k$; es decir, ϕ (i, j) es el número de Gödel de $E_i(j)$. La función ϕ debe estar relacionada con g, de tal modo que ϕ sea una función recursiva.

Definimos a la función ϕ_i, como una función de un argumento que cumple la condición: $\phi_i(x) = \phi(i, x)$. Puesto que Σ_0 es una colección cerrada bajo definibilidad existencial, para todo número i, se cumple que la función ϕ_i es una función recursiva de un argumento. Definimos también la función D(x), como la diagonal $\vec{\phi}$ de ϕ; es decir, $D(i) = \phi_i(i)$. Observamos que D es una función recursiva. También anotaremos que D(i) es el número de Gödel de la diagonalización de E_i ($D(i) = g(E_i(i))$).

Recordamos (del Capítulo II), que la imágen inversa de un conjunto r.e., bajo una función recursiva, es r.e., y que la imagen inversa de un conjunto recursivo, bajo una función recursiva, es también recursiva.

Proposiciones.-

P_1 - (a) $W^* = D^{-1}(Wo)$

(b) $H_W = \phi_h^{-1}(Wo)$ (en donde $h = g(H)$).

P_2 - (a) Wo es r.e. $\rightarrow$ W^* es r.e.

(b) Wo es recursivo $\rightarrow$ W^* es recursivo.

P_3 - (a) Wo es r.e. $\rightarrow$ H_W es r.e.

(b) Wo es recursivo $\rightarrow$ H_W es recursivo

Demostraciones.-

P_1 - (a) Para cualquier i, se tiene que:

$i \in W^* \longleftrightarrow E_i(i) \in W$

$\longleftrightarrow g(E_i(i)) \in Wo$

$\longleftrightarrow D(i) \in Wo \longleftrightarrow i \in D^{-1}(Wo)$.

Por lo tanto, $W^* = D^{-1}(Wo)$.

(b) Para toda i, tenemos:

$i \in H_W \longleftrightarrow \phi(H, i) \in W$

$\longleftrightarrow \phi(h, i) \in Wo$

$\longleftrightarrow \phi_h(i) \in Wo \longleftrightarrow i \in \phi_h^{-1}(Wo)$.

Por lo tanto, $H_W = \phi_h^{-1}(Wo)$.

P_2 - (a) Si Wo es r.e. $\rightarrow$ $D^{-1}(Wo)$ es r.e. (ya que D es recursiva) $\rightarrow$ W^* es r.e. (por P_1 - (a)).

(b) Si Wo es recursivo $\rightarrow$ $D^{-1}(Wo)$ es recursivo $\rightarrow$ W^* es recursivo.

P_3 - (a) Wo es r.e. $\rightarrow \phi_h^{-1}(Wo)$ es r.e. (por ser ϕ_h recursiva) $\rightarrow$ H_W es r.e. (por P_1(b)).

(b) Wo es recursivo $\rightarrow \phi_h^{-1}(Wo)$ es recursivo $\rightarrow$ H_W es recursivo.

De aquí en adelante diremos que un conjunto W de expresiones de Q (ó Z) es "r. e. ", si Wo es un conjunto r. e. de números; lo mismo -- con el concepto de recursividad. Observamos que cuando E es el -- conjunto de todas las cuerdas en el alfabeto K, y g es una numeración de Gödel <u>admisible</u>, entonces W es "r. e. ", si y sólo si W es f. r. sobre K; y W es "recursivo", si y sólo si W es soluble sobre K. Llamaremos a Z un sistema de representación <u>formal</u>, si y sólo si S es recursivo y T y R son r. e. Z será un sistema de representación <u>decidible</u>, si y sólo si T y R son ambos recursivos.

SECCION 9.

Indecidibilidad.

Antes de establecer los siguientes teoremas queremos hacer notar que la proposición "$\tilde{T}$ no es r. e. " es equivalente a decir que para todo W, sub-conjunto r. e. de T, existe un elemento fuera de W, pero dentro de T; es decir, que si W es r. e., entonces W $\neq$ T. Igualmente, la proposición "T no es r. e. " es equivalente a decir que para todo conjunto W ajeno de T y r. e., existe un elemento fuera de W y fuera de T; es - decir, que ningún subconjunto de $\tilde{T}$ que sea r. e., puede ser igual a $\tilde{T}$.

Teorema 9. - Si todo conjunto de números r. e. es representable en Q, entonces $\tilde{T}$ no es r. e.

Demostración. - Supongamos que $\tilde{T}$ es r. e.; entonces $\tilde{T}^*$ sería r. e., por la proposición P_2. En ese caso, $\tilde{T}^*$ sería representable en Q (por hipótesis), lo cual es contrario al Teorema 1. Por lo tanto $\tilde{T}$ no puede ser r.e.

Observación. - La demostración anterior es indirecta. Una manera — más constructiva (y más cercana al argumento original de Gödel), es como sigue:

La hipótesis implica (por P_2) que para todo conjunto W que sea r.e., W^* es representable en Q. Sea W cualquier conjunto r.e., ajeno de T. Entonces W^* es representable en Q. Sea H el predicado que representa a W^* y sea h su número de Gödel. Por el primer lema de diagonalización, Hh es un ejemplo de una oración que está fuera de W y de T — (una prueba de que $W \subset \tilde{T}$, pero $W \neq \tilde{T}$). Por lo tanto, $\tilde{T}$ no es r.e.

Teorema 9*. - Si el complemento de todo conjunto r.e., es representable en Q, entonces T no es r.e.

Demostración. - Sea W cualquier subconjunto r.e. de T. Entonces W^* es r.e., y así $(\tilde{W}^*)$ es representable en Q. Supongamos que H representa a W^* en Q. Entonces, por el Lema I, Hh es una oración de Gödel para $\tilde{W}$; ésto es, $Hh \in \tilde{W} \longleftrightarrow Hh \in T$. Pero como $W \subseteq T$, se tiene - que $Hh \notin W$ y $Hh \in T$. Entonces $W \neq T$ y por lo tanto, T no es r.e.

Nota. - Debe ser claro que el teorema 9 es válido, aún bajo la hipótesis más débil de que todo conjunto r. e., ajeno de T^* es representable en Q; análogamente, el teorema 9' es válido con la más débil condición de que el complemento de todo subconjunto r. e. de T^*, es representable en Q.

Notamos que el teorema 9 dice que si Q es lo suficientemente fuerte para que todos los conjuntos r. e. sean representables en él, entonces Q, aunque posiblemente sea un sistema formal, no puede tener un procedimiento de decisión. El teorema 9', por otro lado, dice que si los complementos de todos los conjuntos r. e., son representables en Q, entonces Q no puede tener un procedimiento de decisión; más aún, Q no puede ser un sistema formal. El siguiente teorema dá una condición aún más débil para que un sistema sea indecidible:

Teorema 10. - Si todo conjunto de números recursivo, es representable en Q, entonces Q no es decidible (más especificamente, T no es recursivo).

Demostración. - Supongamos que T fuera recursivo. Entonces $\tilde{T}$ sería también recursivo; entonces $\tilde{T}^*$ sería recursivo por P_2. Así, $\tilde{T}^*$ sería representable en Q (por hipótesis), lo que es contrario al teorema 1. - Por lo tanto T no es recursivo y Q es indecidible.

SECCION 10.

Normalidad.

En la Parte I definimos que Q es un sistema formal, si y sólo si tiene la propiedad de que para todo conjunto W, si Wo es representable, entonces W* es representable.

Teorema 11. - Si los conjuntos que son representables en Q, son precisamente aquellos que son r. e., entonces Q es normal.

Demostración. - Supongamos que Wo es representable en Q. Wo debe ser r. e (por hipótesis); así, W es r.e. y por P_2, W* es r. e. Por lo tanto, como Wo es un conjunto representable arbitrario, Q es un sistema normal.

SECCION 11

Teoremas Adicionales.

Teorema 12. - Si T es r. e., entonces todo conjunto A representable en Q, es r.e.

Demostración. - Supongamos que A es representado por H en Q. Entonces A = H_T, y como por hipótesis, To es r. e., también H_T es r. e. (por P_3). Entonces, A es r.e.

Teorema 13.- Si T es r.e. y si todo conjunto r.e. es representable en Q, entonces Q es normal.

Demostración.- Por el teorema 12, todo conjunto representable en Q es r.e., y por hipótesis, todo conjunto r.e. es representable en Q; por lo tanto por el teorema 11, Q es normal, ya que los conjuntos representables en Q, son precisamente los conjuntos r.e.

Teorema 14.- Si $\tilde{T}$ es r.e., entonces el complemento de todo conjunto representable en Q es r.e.

Demostración.- Supongamos que H representa a A en Q ($A = H_T$). Entonces $\tilde{A} = \tilde{H}_T = H_{\tilde{T}}$; así, como $\tilde{T}$ es r.e. (por hipótesis), $H_{\tilde{T}}$ es r.e. (por P_3). Por lo tanto, $\tilde{A}$ es r.e.

Teorema 15.- Si Q es decidible, entonces todo conjunto representable en Q, es recursivo.

Demostración.- Supongamos que Q es decidible. Entonces T es recursivo; es decir, T y $\tilde{T}$ son ambos r.e. El teorema se sigue de los teoremas 12 y 14.

Los teoremas 12, 14 y 15 pueden ser reformulados como sigue:

Teorema 16.- (a) Si algún conjunto que no es r.e., es representable en Q, entonces T no es r.e.

(b) Si el complemento de algún conjunto que no es r.e., es representable en Q, entonces T no es r.e.

(c) Si algún conjunto que no es recursivo, es representable en Q, entonces Q es indecidible.

SECCION 12.

Sistemas Universales.

Diremos que Q es un sistema <u>universal</u>, si y sólo si Q es un sistema formal y todo conjunto r.e. es representable en Q. El siguiente teorema, es el reestructuración, más general, de resultados anteriores:

Teorema 17: Sea Q <u>cualquier</u> sistema universal; entonces:

(1) Q es indecidible.

(2) Q es normal.

(3) Dado cualquier conjunto W de expresiones, r.e., existe una oración de Gödel para W.

(4) El conjunto To es r.e., pero no es recursivo.

SECCION 13.

Indecidibilidad y Completez

El siguiente teorema establece la gran relación existente entre los resultados de Church sobre indecidibilidad y los resultados de Gödel sobre incompletez.

Teorema 18.- Si Z es formal, pero indecidible, entonces Z es inconsis tente o incompleto.

Demostración. - Supongamos que Z es formal y saturado; demostraremos que Z debe ser decidible.

Por hipótesis, S es recursivo, T y R son r.e., $S = R \cup T$ y $R \cap T$ es - vacío. Como S es recursivo, (E-S) es r.e.; así, $R \cup (E - S)$ es r.e.; pero $R \cup (E - S) = \tilde{T}$. Así, $\tilde{T}$ (al igual que T), es r.e., por lo tanto, T es recursivo.

Observaciones.- Para un sistema Z, formal y consistente, la proposición de que T no es recursivo, es equivalente a la proposición de que para todo conjunto W, r.e. y ajeno de T, hay una oración de Gödel. Por otro lado, la incompletez de Z, sólo asegura la existencia de una - oración de Gödel para el particular conjunto r.e., R. Así, la indecidibilidad de un sistema formal y consistente, es más fuerte que la incompletez del mismo.

De los teoremas 10 y 18, el siguiente teorema es inmediato:

Teorema 19.- Si un sistema formal es lo suficientemente fuerte para que todo conjunto <u>recursivo</u> sea representable en él, entonces debe ser inconsistente o incompleto.

Observaciones.- El teorema 19 extiende el teorema de Gödel: "Un sistema formal en el que todo conjunto r.e., es representable, es inconsistente o incompleto". Este resultado, aunque más débil que el teorema 19, puede ser demostrado de una manera que es más constructiva: Supongase que Z es formal y consistente y que todo conjunto r.e. es representable en él. Como Z es formal, entonces R* es r.e.; así, R* es representable en Z; sea H el predicado que representa a R* en Z. Entonces la oración Hh es indecidible en Z (por el teorema 2). También debemos observar que esta demostración no apela al hecho de que el conjunto S de las oraciones de Z, es recursivo, lo cual fue necesitado en el teorema 19 para pasar de indecidibilidad a completez.

El teorema 19 significa que un sistema formal consistente debe ser inadecuado en uno de los dos sentidos siguientes: o es incompleto (y también indecidible), o es inadecuado, aún en un sentido peor, a saber, que es tan débil, que aún los conjuntos recursivos no pueden todos ser representados en él. Tal sistema no sería adecuado, aún para teoría elemental de números. El decir en cual de éstos dos sentidos es inadecuado un sistema particular, es un hecho práctico que involucra técnicas peculiares para el sistema en consideración.

Parte III. - Indecidibilidad e Inseparabilidad Recursiva.

SECCION 14.

Definibilidad en Sistemas Formales.

Teorema 20. - Todo conjunto definible en un sistema formal consistente, es recursivo.

Demostración. - Supongamos que A es definido por H en Z, en donde Z es un sistema formal consistente. Como Z es consistente, H representa completamente a A en Z. Así, $A = H_T$ y $\tilde{A} = H_R$. Como T y R son ambos r.e., por hipótesis, entonces H_T y H_R son r.e. (por P_3). Así, A y $\tilde{A}$ son r.e.; es decir, A es recursivo.

SECCION 15.

Extensiones.

Proposición 3. - Sea Z' una extensión de Z. Entonces:

(a) Si H define a A en Z, entonces H define a A en Z'.

(b) Si H separa fuertemente a A de B en Z, entonces H separa fuertemente a A de B en Z'.

Demostración. - La proposición (a) es un caso especial de (b), en donde $\tilde{A} = B$; por lo tanto demostramos (b): Por hipótesis $T \subseteq T'$ y $R \subseteq R'$; así, es obvio que $H_T \subseteq H_{T'}$ y $H_R \subseteq H_{R'}$. También por hipótesis, --

$A \subsetneq H_T$ y $B \subsetneq H_R$; por lo tanto $A \subsetneq H_{T'}$ y $B \subsetneq H_{R'}$ (es decir, H separa fuertemente a A de B en Z').

Teorema 21. - Si todo conjunto de números recursivo, es definible en Z, entonces toda extensión consistente de Z, es indecidible.

Demostración. - Supongamos que todo conjunto recursivo es definible en Z y sea Z' cualquier extensión consistente de Z. Por la proposición 3, todo conjunto recursivo es definible en Z'. Así, todo conjunto recursivo es representable en Z' (ya que Z' es consistente). Por lo tanto, usando el teorema 10, concluímos que Z' es indecidible.

Corolario. - Si todo conjunto recursivo es definible en Z, entonces toda extensión formal y consistente de Z, es incompleta.

Demostración. - Por los teoremas 21 y 18.

SECCION 16:

Inseparabilidad Recursiva.

Dados dos conjuntos A y B de números ajenos, serán llamados recursivamente separables, si y sólo si existe un superconjunto A' de A, recursivo, que es ajeno de B (ésto implica que existe un superconjunto de B, recursivo, que es ajeno de A y que es $\tilde{A}'$; por lo tanto, la condición es simétrica).

A y B serán llamados recursivamente inseparables (abreviaremos R. I.), si y sólo si ellos no son recursivamente separables. Equivalentemente, A y B son recursivamente inseparables, si y sólo si para toda pareja (A', B') de respectivos superconjuntos r. e. y ajenos, de A y B, existe un número fuera de A' y de B'.

Notamos que un conjunto A es recursivo, si y sólo si $(A, \tilde{A})$ es recursivamente separable (ya que la única pareja posible de respectivos superconjuntos ajenos de A y $\tilde{A}$ es $(A, \tilde{A})$). También es obvio que si A es recursivamente inseparable de B, entonces se cumple lo mismo para cualquier pareja ajena de superconjuntos (ya que cualquier separación recursiva de la pareja más grande, es ciertamente una separación recursiva de la pareja más pequeña). Así, si deseamos demostrar que una pareja (A, B) es R. I., obtenemos un resultado más fuerte si demostramos que algún subconjunto propio de A es R. I. de algún subconjunto propio de B.

Consideremos ahora un sistema de representación Z. Nos referiremos a los conjuntos To y Ro, como los <u>núcleos</u> de Z. En ocasiones diremos que la pareja (T, R) es recursivamente separable o inseparable, queriendo decir, más precisamente, que la pareja (To, Ro) es respectivamente separable o inseparable. Es inmediato que (T, R) no es R. I., si y sólo si existe un super conjunto recursivo T' de T que es ajeno de R; tal superconjunto T' dá orígen a una extensión Z' consistente y decidible de Z, en donde $S' = E$ y $R' = (S' - T')$. A la inversa, cualquier extensión Z', consistente y decidible de Z, induce una separación recursiva de (T, R), ya que T' es un superconjunto recursivo de T, que es ajeno a R. Por consiguiente, la proposición de que toda extensión consistente de Z es indecidible, es equivalente a la proposición de que (To, Ro) es R.I. Así, podemos reestablecer el teorema 21, como:

Teorema 22. - Si todo conjunto recursivo es definible en Z, entonces los núcleos To y Ro de Z, son R.I.

SECCION 17.

Separación de Conjuntos R.I. en Sistemas.

Teorema 23. - Sea (A, B) una pareja de conjuntos R.I.; entonces:

(a) Si A es débilmente separable de B en Q, Q es indecidible.

(b) Si A es fuertemente separable de B en Z y Z es consistente, entonces sus núcleos To y Ro son recursivamente inseparables.

Demostración. - (a) Supongamos que H separa débilmente a A de B en Q. Entonces $A \subseteq H_T$ y H_T es ajeno de B. Como A y B son R.I., entonces H_T no puede ser recursivo, por lo tanto, Q no puede ser decidible (ya que todo conjunto representable en una teoría decidible, es recursivo; ver teorema 15).

(b) Supongamos que A es fuertemente separable de B en Z. Entonces A es fuertemente separable de B en toda extensión de Z (Proposición 3(b)). Así, A es débilmente separable de B en toda extensión consistente de Z (por proposición 2(a), Parte I). Entonces, por el punto anterior, toda extensión consistente de Z, es indecidible. Así, (Fo, Ro) es R.I. (ya que Z es consistente).

SECCION 18.

Sistemas de Rosser.

Usando el segundo lema de diagonalización en lugar del primero, obtenemos las siguientes extensiones de los teoremas 9 y 10:

Teorema 24. - Si todo conjunto r. e., ajeno de T^* es débilmente separable de T^* en Q, entonces $\tilde{T}$ no es r. e.

Demostración. - Sea W cualquier subconjunto r. e. de $\tilde{T}$. Entonces W^* es r. e.; también W^* es ajeno de T^*, ya que W es ajeno de T. Por hipótesis, W^* es débilmente separable de T^* en Q; supongamos que H efectúa esta separación. Entonces, por el segundo lema de diagonalización, Hh está fuera de W y de T. Así, si W es r. e. y ajeno de T, entonces $W \neq \tilde{T}$; es decir, $\tilde{T}$ no es r. e.

Corolario 1. - Si para toda pareja de conjuntos A y B, r. e., A es débilmente separable de B en Q, entonces Q es indecidible.

Demostración. - Supongamos que T es r.e.; entonces T^* es r.e. Así, para todo conjunto A, r.e., y ajeno de T^*, A es débilmente separable de T^* en Q (por hipótesis, tomando $B = T^*$). Entonces, por el teorema 21, $\tilde{T}$ no es r.e. y por consiguiente, T no es recursivo.

Teorema 25 (extiende el teorema 10). - Si para todo conjunto A recursivo, ajeno de T^*, A es débilmente separable de T^* en Q, entonces Q es indecidible.

Demostración. (Por reducción al absurdo). - Supongamos que T es recursivo; entonces $\tilde{T}$ sería recursivo y $\tilde{T}^*$ también sería recursivo; así, por hipótesis, $\tilde{T}^*$ sería débilmente separable de T^*. Entonces (por el segundo lema de diagonalización), habría una oración de Gödel para $\tilde{T}^*$, lo cual es una contradicción.

Corolario. - Si para toda pareja de conjuntos recursivos A y B, ajenos, A es débilmente separable de B en Q, entonces Q es indecidible.

Sistemas de Rosser. - Muchos de los sistemas que se presentan en la literatura, poseen la importante propiedad de que para conjuntos arbitrarios A y B, r.e, y ajenos, A es fuertemente separable de B en el sistema. Nos referiremos a tales sistemas, como sistemas de Rosser. Notamos, por la proposición 3-(b), que toda extensión de un sistema de Rosser, es también un sistema de Rosser.

Teorema 26. - Todo sistema Z de Rosser, consistente, tiene núcleos To y Ro, recursivamente inseparables.

Demostraciones. - (1) Toda extensión formal y consistente de un sistema Z de Rosser, satisface la hipótesis del teorema 24 y por consiguiente, es indecidible. Así, Z tiene núcleos R. I.

(2) Recordamos que un conjunto A es definible en Z, si y sólo si la pareja $(A, \tilde{A})$ es fuertemente separable en Z; así, todo conjunto recursivo, es definible en un sistema de Rosser. El resultado se sigue por el teorema 22.

Observaciones. - Una manera de construir una pareja R. I. de conjuntos r. e., es tomando los núcleos de cualquier sistema de Rosser, formal y consistente. Existe otro método, debido a Kleene, el cual no será considerado aquí. Queremos hacer notar que si ya tenemos una pareja R. I. de conjuntos r. e., a nuestra disposición, entonces sería posible una tercera demostración del teorema 26: Supongamos que toda pareja ajena de conjuntos r. e., es fuertemente separable en Z y que Z es consistente. Entonces tomemos cualquier par (α, β) de conjuntos r. e., que sea R. I. Entonces, (α, β) es fuertemente separable en Z. Así, (To, Ro) es R. I., por el teorema 23-(b).

SECCION 19.

Inseparabilidad Recursiva de los Conjuntos Diagonales T^*, R^*.

En la Sección 2 definimos las oraciones diagonales, como aquellas de la forma Hh, en donde H es un predicado y h su número de Gödel. Para cualquier conjunto W de expresiones, definiremos ahora $\vec{W}$, como el conjunto de todas las expresiones diagonales $X_i(i)$, que están en W. Consideremos los conjuntos $\vec{T}$ y $\vec{R}$ y sus correspondientes conjuntos $(\vec{T})o$ y $(\vec{R})o$ de números de Gödel. Claramente $(\vec{T})o \subseteq To$ y $(\vec{R})o \subseteq Ro$; así, si podemos demostrar que $(\vec{T})o$ y $(\vec{R})o$ son R.I., obtendremos un resultado más fuerte que si demostramos que To y Ro son R.I. (en general, para $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2$, la inseparabilidad recursiva de la pareja (A_1, B_1), implica la inseparabilidad recursiva de la pareja más grande (A_2, B_2), pero no sucede lo mismo a la inversa). Pronto veremos que la inseparabilidad recursiva de $(\vec{T})o$ y $(\vec{R})o$, es implicada por la inseparabilidad recursiva de T^* y R^*. Enfocaremos, por lo tanto, nuestra atención en estos últimos conjuntos, a los cuales nombraremos los conjuntos diagonales del sistema Z. Ahora deseamos demostrar que si todo conjunto recursivo es definible en Z y Z es consistente, entonces no solamente los conjuntos To y Ro son recursivamente inseparables, sino también los menores conjuntos $(\vec{T})o$ y $(\vec{R})o$, lo son; en efecto, los conjuntos diagonales T^* y R^* son R.I. Para este fin, introduciremos --

algunas nuevas nociones y estableceremos algunas proposiciones.

Sean (A_1, A_2) y (B_1, B_2) dos parejas ordenadas de conjuntos de números; sea $f(x)$ una función. Representaremos con $(A_1, A_2) \xrightarrow{f} (B_1, B_2)$, la condición de que f mapea a A_1 en B_1 y a A_2 en B_2; es decir, que -- $f(A_1) \subseteq B_1$ y $f(A_2) \subseteq B_2$. Diremos que f <u>mapea</u> a la pareja ordenada (A_1, A_2), en la pareja ordenada (B_1, B_2). Si $(A_1, A_2) \xrightarrow{f} (B_1, B_2)$, para alguna función f, recursiva, entonces decimos que (A_1, A_2) puede ser recursivamente mapeada en (B_1, B_2) y esta condición la escribiremos como: $(A_1, A_2) \xrightarrow{rc} (B_1, B_2)$. Es obvio que si $(A_1, A_2) \xrightarrow{f} (B_1, B_2)$ y si B_1 es ajeno de B_2, entonces A_1 es ajeno de A_2.

Proposición 4. - Supongamos que $(A_1, A_2) \xrightarrow{rc} (B_1, B_2)$ y que (B_1, B_2) son ajenos. Entonces, si (A_1, A_2) son R.I. también lo son (B_1, B_2).

Demostración. - Demostraremos la proposición equivalente: si (B_1, B_2) son recursivamente separables, también lo son (A_1, A_2):

Por hipótesis, $(A_1, A_2) \xrightarrow{f} (B_1, B_2)$ para alguna f recursiva y suponemos que (B_1, B_2) son recursivamente separables. Entonces existe un superconjunto S recursivo, de B_1, que es ajeno de B_2. Así, $f^{-1}(S)$ debe ser un superconjunto de A_1, ajeno de A_2, y como f y S son ambos recursivos, $f^{-1}(S)$ es recursivo. Por lo tanto, A_1 es recursivamente separable de A_2.

Corolario. - Sea f una función recursiva; sean A y B dos conjuntos de números, ajenos; entonces si (A, B) son recursivamente separables, también lo son $(f^{-1}(A), f^{-1}(B))$. Dicho de otra manera, si $f^{-1}(A)$ es R.I. de $f^{-1}(B)$, entonces A es R.I. de B.

Demostración. - Es inmediato de la proposición 4, ya que $(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) \xrightarrow{f} (A, B)$.

Proposición 5. - Para cualesquiera conjuntos W y V de expresiones de Q:

(a) $(W^*, V^*) \xrightarrow{rc} (\vec{Wo}, \vec{Vo}) \xrightarrow{rc} (Wo, Vo)$

(b) $(H_W, H_V) \xrightarrow{rc} (Wo, Vo)$ (para cualquier predicado H).

Demostración:

(a) Por la proposición P_1-(a), sección 8, $W^* = D^{-1}(Wo)$, en donde D es la función diagonal. Ciertamente W^* no solo es la imagen inversa de Wo bajo D, sino que es la imagen inversa del menor conjunto $\vec{Wo}$, bajo D. Así, $W^* = D^{-1}(\vec{Wo})$ y $V^* = D^{-1}(\vec{Vo})$. Por lo tanto, $(W^*, V^*) \xrightarrow{D} (\vec{Wo}, \vec{Vo})$. Como D es recursiva, se tiene que $(W^*, V^*) \xrightarrow{rc} (\vec{Wo}, \vec{Vo})$. También $(\vec{Wo}, \vec{Vo}) \xrightarrow{rc} (Wo, Vo)$ (ya que $\vec{Wo} \subseteq Wo$ y $\vec{Vo} \subseteq Vo$).

(b) En la proposición P_2-(b) de la sección 8, vimos que $H_W = \phi_h^{-1}(Wo)$; así, $(H_W, H_V) \xrightarrow{\phi_h} (Wo, Vo)$ y ϕ_h es recursivo. Esto demuestra (b).

Proposición 6. - Sean W y V dos conjuntos de expresiones de Q, ajenos.

Entonces:

(a) Si (W^*, V^*) son R. I., también lo son $(\vec{W}o, \vec{V}o)$.

(b) Para cualquier predicado H de Q:

(H_W, H_V) son R. I. $\longrightarrow$ (Wo, Vo) son R. I.

Demostración. - Es inmediato de las proposiciones 4 y 5.

Teorema 27.- Sea Z un sistema consistente en el cual todo conjunto recursivo, es definible. Entonces:

(1) (T^*, R^*) son R. I.

(2) $(\vec{T}o, \vec{R}o)$ son R. I.

Demostración. - Supongamos que T^* y R^* son recursivamente separables; entonces habría un superconjunto recursivo A de R^*, ajeno de T^*. Por hipótesis, este conjunto recursivo A sería definible en Z. Esto sería contrario al teorema 6; por lo tanto, T^* y R^* no pueden ser recursivamente separables. Este demuestra (1); el punto (2) se sigue de la proposición 6-(a).

Corolario 1. - Si Z es un sistema de Rosser consistente, entonces (T^*, R^*) son R. I. (al igual que $(\vec{T}o, \vec{R}o)$).

Una demostración constructiva del corolario anterior, es como sigue: Supongamos que Z es un sistema de Rosser, consistente; sean A y B respectivos superconjuntos r. e. de R^* y T^*. Deseamos exhibir un número fuera de A y de B. Por hipótesis, hay un predicado H que separa fuertemente a A de B en Z; este predicado separa también a la menor pareja (R^*, T^*) en Z. Entonces por el teorema 5, la oración Hh es indecidible en Z; esto significa que h está fuera de H_T y de H_R. -- Así, h está fuera de A y de B.

CAPITULO IV

ALGUNOS SISTEMAS FORMALES

Introducción.- El estudio de los sistemas formales ha sido de extrema importancia para las ciencias de la computación, ya que, por un lado, la naturaleza misma de las máquinas nos impele a formalizar los problemas a los que deseamos dar solución y las actividades que queremos realizar mediante las computadoras, mientras que por otro lado, la formalización representa un método muy efectivo para entender clases enteras de problemas, reduciéndolos a casos particulares de esquemas abstractos de tipo general.

Dedicaremos este capítulo final a hacer ver como muchos de los conceptos que las ciencias computacionales manejan, son efectivamente casos particulares de los sistemas formales y como los problemas esenciales de los sistemas formales, se repiten en todos esos casos. Entre los sistemas particulares a los que dirigiremos nuestra atención, están: (1) La lógica de primer orden y las teórias axiomáticas, incluyendo a la aritmética; (2) Los lenguajes (artificiales); (3) Los autómatas y los sistemas de thue y, finalmente (4) Los llamados" sistemas de información".

SECCION 1.

Teorías.

Por una teoría (T), designaremos una colección de los siguientes componentes, obedeciendo las condiciones que a la vez estableceremos:

(1) Un alfabeto finito K, junto con una numeración de Gödel g, admisible, de K sobre N.

(2) Un subconjunto recursivo de K, cuyos elementos son llamados -- fórmulas (bien formadas).

(3) Una función 1 a 1 que asigna a cada fórmula F, una fórmula $\sim F$, llamada la negación de F. El conjunto de parejas ordenadas $(F, \sim F)$, debe ser recursivo.

(4) Una función 1 a 1 que asigna a cada pareja ordenada (F,G) de fórmulas, una fórmula $F \wedge G$, llamada la conjunción de F y G. El conjunto de todas las ternas $(F, G, F \wedge G)$, debe ser recursivo. Denotaremos con $F \vee G$ a la fórmula $\sim(\sim F \wedge \sim G)$; con $F \supset G$, a la fórmula -- $\sim(F \wedge \sim G)$ y con $F \equiv G$, a la fórmula $(F \supset G) \wedge (G \supset F)$.

(5) Una secuencia numerable $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ de cuerdas (en K) -- llamadas variables (individuales libres). Ninguna variable será una fórmula. La función $f(n) = g(x_n)$ debe ser recursiva. El conjunto de todas las variables, debe ser recursivo. Para cualquier variable x y cualesquiera fórmulas F y G, las siguientes condiciones deben cumplirse:

(i) x es parte de $\sim F$, si y sólo si x es parte de F.

(ii) x es parte de $F \wedge G$, si y sólo si x es parte de F ó x es parte de G.

Para cualquier variable x y cualesquiera cuerdas X y Y, denotaremos con X_Y^x al resultado de substituir con Y, a todas las ocurrencias de x en la cuerda X. Las siguientes condiciones deben cumplirse:

(iii) $(\sim F)_Y^x = \sim(F_Y^x)$

(iv) $(F \wedge G)_Y^x = F_Y^x \wedge G_Y^x$.

(6) Una función 1 a 1, que asigna a cada fórmula F y cada variable x, una fórmula $(\exists x)F$, llamada la <u>cuantificación existencial de F con respecto a</u> x. El conjunto de todas las ternas $(F, x, (\exists x)F)$ debe ser recursivo. La variable x <u>no</u> es parte de la fórmula $(\exists x)F$ (estamos pensando en aquellas formulaciones de la lógica de primer orden en las que las variables acotadas son distintas de las variables libres). Para cualquier variable $y \neq x$, y es parte de $(\exists x)F$ si y sólo si y es parte de F. Se deberá cumplir que:

(i) $((\exists x)F)_Y^x = (\exists x)F$;

(ii) Si $y \neq x$ entonces $((\exists x)F)_Y^y = (\exists x)(F_Y^y)$. Escribiremos $(\forall x)F$, para denotar a $\sim((\exists x)(\sim F))$. La fórmula $(\forall x)F$ es llamada la <u>cuantificación universal de F con respecto a</u> x. Diremos que una fórmula u oración es <u>cerrada</u>, si ninguna variable (libre) aparece como parte de ella.

(7) Una función 1 a 1 que asigna a cada número entero positivo n, una

palabra $\bar{n}$, llamada la expresión numérica asociada a n. La función $f(n) = g(\bar{n})$, debe ser recursiva. Ninguna expresión numérica es una variable o una fórmula. Si x es parte de F, entonces $F\frac{x}{\bar{n}}$ es una fórmula.

(8) Un conjunto A de oraciones, llamadas axiomas de (T).

Sea W cualquier conjunto de oraciones de (T). Diremos que W es un conjunto perfecto, si y sólo si tiene las siguientes tres propiedades:

(1) Para cualquier oración X, la oración $\sim X$ está en W, si y sólo si X no está en W (consistencia y completez).
(2) Una oración $X \wedge Y$ está en W, si y sólo si X y Y están en W.
(3) Una oración $(\exists x)F$ está en W, si y sólo si existe al menos un número n, tal que $F\frac{x}{\bar{n}}$ está en W.

Se dice que una oración X es una consecuencia lógica de un conjunto W de oraciones, si y sólo si X está en todo superconjunto perfecto de W. Diremos que X es lógicamente válida (en el dominio numerable de los enteros positivos), si y sólo si X es un elemento de todo conjunto perfecto; equivalentemente, si y sólo si X es una consecuencia lógica del conjunto vacío de oraciones. Ahora definimos al conjunto T de los teoremas de (T), como el conjunto de todas las oraciones que son consecuencias lógicas del conjunto de axiomas A.

SECCION 2:

Teorías de Primer Orden.

Los símbolos de una teoría (T) de primer orden, son básicamente los siguientes: los conectivos proposicionales $\sim$, $\supset$; los símbolos de puntuación (,), ; (la coma no es estrictamente necesaria, pero es conveniente para mayor facilidad en la lectura de fórmulas); un conjunto numerable de variables $x_1, x_2, \ldots$; un conjunto finito o numerable (no vacío) de símbolos de predicados $P_1, P_2, \ldots$; un conjunto finito o numerable, posiblemente vacío, de símbolos de funciones, $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$; y finalmente, un conjunto finito o numerable, posiblemente vacío, de constantes $a_i (i \geq 1)$. Así, en una teoría (T), algunos o todos los símbolos de funciones y de constantes individuales, pueden faltar y algunos (pero no todos) los símbolos de predicados, pueden faltar. Diferentes teorías, pueden diferir en aquellos de dichos símbolos que ellas poseen.

Las definiciones dadas anteriormente para términos y fórmulas bien formadas y para los conectivos proposicionales $\wedge$, $\vee$, $\equiv$, son adoptadas para cualquier teoría de primer orden. Es obvio que para una teoría T particular. sólo aquellos símbolos que aparecen en K, son usados para la construcción de términos y fórmulas bien formadas.

Los axiomas de una teoría (T) son divididos en dos clases: los axiomas lógicos y los axiomas propios o no-lógicos. Los axiomas lógicos son -

aquellos que se asumen para cualquier teoría, a diferencia de los axiomas propios, los cuales son particulares para la teoría a la que pertenecen (un ejemplo de axiomas propios. son los axiomas de la teoría de grupos: existencia de un neutro aditivo, la existencia del inverso aditivo y la asociatividad de la operación de suma).

Axiomas lógicos: Sean A, B y C fórmulas bien formadas de (T); entonces los siguientes son axiomas lógicos:

(1) $A \supset (B \supset A)$.

(2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(3) $(\sim B \supset \sim A) \supset ((\sim B \supset A) \supset B)$

(4) $(\forall x_i)A(x_i) \supset A(t)$, en donde $A(x_i)$ es una fórmula bien formada de (T) y t es un término de (T), libre para x_i en $A(x_i)$. Nótese que aquí t puede ser idéntico a x_i, proporcionando así el axioma $(\forall x_i)A(x_i) \supset A(x_i)$.

(5) $(\forall x_i)(A \supset B) \supset (A \supset (\forall x_i)B)$, en donde A es una fórmula bien formada de (T) que no contiene ninguna ocurrencia libre de x_i.

Axiomas Propios: Estos no pueden ser especificados, ya que varían de teoría a teoría. Una teoría de primer orden en la cual no hay axiomas propios, es llamada un cálculo proposicional de primer orden.

Las reglas de inferencia de cualquier teoría de primer orden, son:

(i) Modus Ponens: B se sigue de A y $A \supset B$.

(ii) Generalización: $(\forall x_i)A$ se sigue de A.

Un modelo de una teoría (T) de primer orden, será una interpretación en la que todos los axiomas de (T) son válidos.

Es claro que si las reglas de inferencia (i) y (ii) son aplicadas a fórmulas bien formadas, verdaderas, en una interpretación dada, entonces los resultados de dichas aplicaciones, son también verdaderos; por lo tanto, todo teorema de (T) es verdadero en cualquier modelo de (T).

Ejemplos de Teorías de Primer Orden.

(i) Orden Parcial. - La teoría (T) contendrá un solo predicado P y ningún símbolo de función ni de constantes individuales. Escribiremos $x_i < x_j$ en lugar de $P(x_i, x_j)$ y $x_i \not< x_j$, en lugar de $\sim(x_i < x_j)$. (T) tiene dos axiomas propios:

(a) $(\forall x_1)(x_1 \not< x_1)$ (Irreflexividad)

(b) $(\forall x_1, x_2, x_3)(x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \supset x_1 < x_3)$ (Transitividad)

Un modelo de esta teoría, es llamado una estructura parcialmente ordenada.

(ii) Teoría de Grupos. - La teoría (T) contendrá un predicado $P(x, y)$, una función $f(x, y)$ y una constante individual a_1. Escribiremos $x = y$ en lugar de $P(x, y)$, $x + y$ en lugar de $f(x, y)$ y 0 en lugar de a_1, para -- ser congruentes con la notación convencional. Como axiomas propios de (T), tenemos:

(a) $(\forall x_1, x_2, x_3)(x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$	(Asociatividad)
(b) $(\forall x_1)\ (0+x_1=x_1)$	(Identidad)
(c) $(\forall x_1)\ (\exists x_2)\ (x_2+x_1 = 0)$	(Inverso)
(d) $(\forall x_1)\ (x_1 = x_1)$	(Reflexividad de =)
(e) $(\forall x_1, x_2)\ (x_1 = x_2 \supset x_2 = x_1)$	(Simetría de =)
(f) $(\forall x_1, x_2, x_3)\ (x_1 = x_2 \supset (x_2 = x_3 \supset x_1 = x_3))$	(Transitividad de =)
(g) $(\forall x_1, x_2, x_3)\ (x_2 = x_3 \supset (x_1 + x_2 = x_1 + x_3$	
$x_2 + x_1 = x_3 + x_1))$	(Sustitución de =)

Un modelo para esta teoría, es llamado un grupo. Si, en adición, la fórmula bien formada $(\forall x_1, x_2)\ (x_1 + x_2 = x_2 + x_1)$ es verdadera en un grupo, éste es llamado abeliano (o conmutativo).

Las teorías de orden parcial y de grupos son axiomáticas. En general, cualquier teoría con un número finito de axiomas propios, es axiomática (es decir, que dada cualquier fórmula bien formada, se puede decidir si es o no un axioma), ya que obviamente se puede decidir si cualquier fórmula bien formada es un axioma lógico.

SECCION 3:

Los Lenguajes Formales.

Los lenguajes formales son conjuntos de cuerdas sobre un alfabeto K arbitrario. En su estudio puede interesarnos, bien el decidir que --

cuerdas son parte del lenguaje (sintaxis) o cual es el significado de tales cuerdas (semántica). Aunque ambos aspectos pueden estudiarse desde el punto de vista de los sistemas formales, solo discutiremos aquí el referente a la sintaxis.

Una gramática es un cuadruplete $G_1 = (K, V_T, \phi, \alpha)$ en donde:

(a) K es el alfabeto o conjunto de símbolos necesarios para el estudio de la gramática.

(b) V_T es un subconjunto de K, llamado el alfabeto terminal, al cual pertenecen los elementos que forman las cuerdas del lenguaje.

(c) ϕ es un conjunto de reglas de la forma "$X \to Y$" en donde $X \in K-V_T$ y $Y \in K$, que indica que la cuerda Y puede reducirse en el elemento X (o equivalentemente, que X puede generar a la cuerda Y).

(d) $\alpha \in K - V_T$, es el tipo sintáctico fundamental, a partir del cual es posible generar todas las diferentes cuerdas que componen el lenguaje, por medio del siguiente proceso:

Se dice que "y se sigue inmediatamente de x" (escribiremos $x \overset{\cdot}{\to} y$) para $x, y \in \underline{K}$, si y sólo si existen $X \in K - V_T$ y cuerdas u, v, w, tales que $x \equiv uXw$, $y \equiv uvw$ y existe una regla en ϕ, de la forma $X \to v$. Diremos que "y se sigue de x" ($x \overset{*}{\to} y$) para $x, y \in \underline{K}$, si existen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que: $x = x_1$, $x_n = y$ y $x_i \overset{\cdot}{\to} x_{i+1}$ $(1 \leq i < n)$. Finalmente, se dice que la cuerda $x \in \underline{V_T}$ es aceptada por la gramática G (o equivalente, x es una frase del lenguaje) si $\alpha \xrightarrow{*} x$; se define un lenguaje $\mathcal{L}_G$ sobre la gramática G , como el conjunto

$$\mathcal{L}_G = \{ x \mid x \in \underline{V_T} \wedge \alpha \xrightarrow{*} x \}.$$

Esta noción de lenguaje formal, coincide ciertamente con uno de los casos particulares de los lenguajes de Chomsky (los llamados "Libres de Contexto").

La reducción de gramáticas a sistemas formales es un proceso directo; en efecto, podemos pensar en α (el tipo sintáctico fundamental), como el único axioma del sistema; K corresponde al alfabeto del sistema formal y ϕ es el correspondiente conjunto de reglas de inferencia del sistema.

En este caso particular de sistema formal, las pruebas o demostraciones tienen la característica de que se inician siempre a partir de un solo axioma y que cada nueva expresión de la prueba se obtiene a partir del paso anterior, por la aplicación de una de las reglas de inferencia de ϕ. Finalmente, los lenguajes tienen la particularidad adicional de que una prueba solo concluye cuando la última expresión de ésta, está formada sólo por elementos de K que pertenecen al subalfabeto V_T, de manera que. a diferencia de otros sistemas formales, en que a partir de un cierto "teorema" pueden deducirse otros teoremas, en los lenguajes ésto no es posible ya que todos sus teoremas son "terminales" --

(es decir, que de dichos teoremas no se pueden deducir otros), los cuales constituyen las frases del lenguaje.

Queremos hacer notar que las reglas de una gramática, conservan - una "propiedad gramatical", mientras que el tipo sintáctico fundamental posee todas las posibles propiedades gramaticales; así, por ejemplo, la gramática.

$G = (\{S, a, b\}, \{a, b\}, \phi, S)$ en donde $\phi = \{S \rightarrow ab, S \rightarrow aSb\}$, define un lenguaje formado por expresiones de la forma $\{ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$; en este caso, podemos decir que S (el tipo sintáctico fundamental) tiene - la propiedad de contener el mismo número de a's (cero), que de b's (cero), y que las reglas de ϕ conservan dicha propiedad.

En los casos de gramáticas más complejas, probablemente es muy difícil describir las propiedades que las reglas de inferencia preservan, -- siendo tal vez más fácil la descripción de la gramática misma.

En los lenguajes formales, los problemas de decidibilidad son mínimos, ya que las gramáticas para dichos lenguajes son frecuentemente construídas de tal manera que existan algoritmos para reconocer las frases del lenguaje (traductores, compiladores, analizadores sintácticos, etc.), - por otra parte, el concepto de representabilidad de atributos, es de extrema importancia en el diseño de lenguajes.

SECCION 4:

Autómatas.

Existen varios caminos para reducir el concepto de autómata al de los sistemas formales, uno de los cuales (para el caso de autómatas secuenciales con un número finito de estados), consiste en tomar el estado inicial del autómata como axioma único; las transiciones son las reglas de inferencia del sistema y los alfabetos de entrada y salida, unidos al conjunto de símbolos usados para representar los estados del autómata, corresponden al alfabeto K del sistema, de donde se sigue que cualquier computación realizada por el autómata, coincide -- con el concepto de prueba y las configuraciones finales del autómata -- pueden considerarse como los teoremas del sistema. Este tipo de formalización del concepto de autómata, es frecuentemente usado en la literatura, bajo el nombre de "semi-sistemas de Thue", sistemas que abarcan, además de las máquinas secuenciales, los diversos tipos de autómatas que se conocen, así como las gramáticas discutidas en la - sección anterior.

Un semi-sistema de Thue es una tétrada $T = (K, B, A, \phi)$, en donde K es un alfabeto finito no vacío; B es un conjunto de cuerdas (palabras) en $\underline{K}$; A es un axioma único (o un esquema de axiomas) formado a partir de elementos de B; ϕ es un conjunto de reglas de inferencia de la forma: -- $X g Y \rightarrow X g' Y$, en donde g, $g' \in B$ y X y Y son variables sintácticas usadas para representar cuerdas de B.

La interpretación de estas reglas consiste en pensar que una ocurrencia del elemento (cuerda) g, en la cuerda X g Y, pueden ser substituídas por la subcuerda g', para obtener X g' Y. La reducción de las gramáticas, discutidas en la sección anterior, a semi-sistemas de Thue, es inmediata; para el caso de autómatas, basta estudiar el ejemplo siguiente:

Sea $K = \{ \#, a, b, q_0, q_1, q_2, q_3 \}$; el axioma A es "$q_0x\#$", en donde x es cualquier cuerda en "a" y "b" y las reglas de inferencia son las descritas a continuación; en todas estas reglas, R tiene la forma $x\#$, en donde x es una cuerda en los símbolos "a" y "b":

1.- $q_0aR \rightarrow q_1R$

2.- $q_1bR \rightarrow q_2R$

3.- $q_1aR \rightarrow q_3R$

4.- $q_2aR \rightarrow q_1R$

5.- $q_2bR \rightarrow q_3R$

6.- $q_1\# \rightarrow q_1$

7.- $q_2\# \rightarrow q_2$

8.- $q_3\# \rightarrow q_3$

9.- $q_3aR \rightarrow q_3R$

10.- $q_3bR \rightarrow q_3R$

Este sistema corresponde a un autómata capaz de reconocer todas las cuerdas de la forma ab, abab, ababab,... etc.

En el caso de los autómatas, podemos decir que todos los problemas de los sistemas formales, son relevantes, ya que un tipo de autómata, conocido como la máquina de Turing, es capaz de computar cualquier función recursiva y por lo tanto, coincide con el concepto más general de sistema formal.

SECCION 5:

Los Sistemas de Información.

Estos sistemas están esencialmente constituídos por un banco de datos (información almacenada en disco, cinta magnética, etc.) y una serie de mecanismos (programas de computadora) capaces de actualizar el banco de datos y efectuar consultas sobre la información contenida en éste.

Usualmente, el banco de datos se refiere a un cierto sistema real, cuyo comportamiento trata de imitar el sistema de información. El banco de datos está formado por "registros", cada uno de los cuales representa a uno de los elementos que componen el sistema del mundo real. Los registros, a su vez, están formados por "campos", en los cuales se almacenan algunos de los atributos que poseen los elementos del sis tema real.

El sistema de información puede entonces ser estudiado como un intento de formalizar la evaluación del sistema real, implementando procedimientos formales (reglas de inferencia) que sirvan como la descripción de los mecanismos del mundo real mediante los cuales los elementos del sistema son capaces de variar sus diversos atributos.

En este sistema formal, el alfabeto está compuesto por un gran número de palabras y letras del propio idioma Español, junto con los 10 dígitos y símbolos especiales, siendo posible formar con este alfabeto, una jerarquía de categorías gramaticales, como son el "campo", para representar el valor de un atributo, el "registro", para describir un elemento del universo y el propio "banco de datos". Las reglas de inferencia, como ya hemos dicho, son los mecanismos para modificar la información contenida en el banco de datos y el conjunto de axiomas está formado por uno solo, que es el estado del sistema de información en un instante dado (como por ejemplo, el momento de su creación).

Siguiendo este razonamiento, cada nuevo estado del sistema, en el proceso de su evolución, es un nuevo teorema, de tal modo que el conjunto de teoremas es infinito.

En los sistemas de información se presentan muchos de los problemas esenciales de los sistemas formales; en particular todos aquellos relacionados con aspectos semánticos, como los de consistencia y completez; de esta manera, el sistema de información no debe contener contradicciones en sus mecanismos y, por otra parte, debe ser capaz de representar y mantener absolutamente todos los aspectos importantes y relevantes del sistema real.

En cuanto a los problemas de decisión, éstos no son de mayor importancia para el desarrollo de un sistema de información, excepto en aquellos casos en que se intente dotar al sistema de mecanismos adaptivos que hacen necesario considerar al sistema de información como parte de la realidad (cambiante), cuyo proceso se trata de representar por medio del sistema de información.

Finalmente, como en los otros casos, el sistema de información debe ser dotado de un conjunto de propiedades que deberán ser conservadas por las reglas de inferencia del sistema; tales propiedades se reducen, en este caso, a una sola, la de que el sistema conserve la concordancia de la información en el banco con la información relevante del sistema real.

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS.

1. - Theory of Formal Systems.

Por Raymond M. Smullyan

Princeton University Press, 1961.

2. - Introduction to Mathematical Logic.

Por Elliott Mendelson

D. Van Nostrand Company, Inc.

Princeton, New Jersey.

3. - Introduction to Automata.

Por Raymond J. Nelson.

John Wiley and Sons, Inc. 1967.