ALGEBRA
TEORIA DE
GRUPOS FINITOS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ALGUNAS CLASES DE GRUPOS FINITOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO

DE MATEMATICO

PRESENTA

ERIC JOSE AVILA VALES

MEXICO, D.F. 1984

A MIS PADRES
CARLOS Y MARY

A MI ESPOSA Y HERMANOS

Mi agradecimiento a mi director de tesis
M.C. Juan Morales Rodríguez

Mi agradecimiento a los:
Ings. Alejandro y Clemente Gutiérrez Sánchez
por su cooperación para la elaboración de
éste trabajo.

CONTENIDO

INTRODUCCION

En este trabajo se presentan los resultados básicos acerca de las clases de fitting, las cuales fueron introducidas en los últimos años de la decada de los sesentas por el matemático alemán W. Gaschütz.

El año pasado el profesor Guido Zappa estuvo de visita en nuestro pais e impartió un seminario, en el cual expuso los resultados principales acerca de las clases de fitting, las clases de fitting normales y de las clases normales.

Este trabajo contiene escencialmente las notas que dictó el profesor Zappa durante el seminario, agregando algunas demostraciones y algunos resultados recientes sobre clases normales.

I. CLASES DE FITTING

Una clase F de grupos finitos, se dice que es una clase de fitting si cumple con las siguientes condiciones:

1) Si G pertenece a F y $\bar{G}$ es isomorfo a G, se tiene que $\bar{G}$ pertenece a F.
2) Si G pertenece a F y N es un subgrupo normal de G, N también pertenece a F.
3) Si N_1 y N_2 son subgrupos normales de G y $G = N_1 N_2$ dónde N_1 y N_2 pertenecen a F, entonces G pertenece a F.

Ejemplos de clases de fitting:

a) $F = \{\{1\}\}$
b) La clase de los grupos finitos.
c) La clase de los grupos solubles.
d) La clase de los p-grupos.
e) La clase de los grupos nilpotentes.
f) La clase de los π-grupos, donde π es un conjunto de primos.

La clase de los grupos abelianos no es de fitting, un contraejemplo serían los cuaternos, los cuales no cumplen la condición 3 de la definición.

Proposición I.1. Sea F una clase de grupos que satisfacen la condición 2; si G está en F y si N es un subgrupo subnormal de G entonces N pertenece a F.

Demostración.– N es subnormal de G si existe una cadena de subgrupos $G = H_0 \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq \ldots \ldots \trianglerighteq H_r = N$, tal que H_i es normal en H_{i-1} para $i = 1, 2, \ldots\ldots, r$. La proposición se demuestra facilmente por inducción sobre r.

Proposición I.2. Sea G un grupo, F una clase de fitting y S un subgrupo subnormal de G que pertenece a F entonces existe un subgrupo normal M de G tal que $S \subset M \in F$.

Demostración.– Consideremos el conjunto de los subgrupos subnormales de G que contienen a S y pertenecen a F.

Este conjunto es distinto del vacío ya que contiene a S.

Sea M un elemento maximal de este conjunto, si M es normal en G, la proposición está probada, supongamos pués que M no es normal en G.

Fijemonos en el conjunto de los subgrupos subnormales de G que contienen a M y están contenidos en $N_G(M)$, es claro que M pertenece a éste conjunto entonces sea T un elemento maximal del mismo.

Si T es igual a G entonces $N_G(M)=G$, pero M no es normal en G por tanto $T \neq G$.

Puesto que T es subnormal, existe un subgrupo subnormal V de G tal que T es normal propio en V.

Si $V \subset N_G(M)$ entonces T no sería maximal por lo tanto $V \not\subset N_G(M)$, es decir existe $x \in V$ tal que $x^{-1}Mx$ es distinto de M. M es normal en T ya que $T \subset N_G(M)$, y ya que $M \subset T$ entonces $x^{-1}Mx \subset x^{-1}Tx = T$ pues T es normal en V y $x \in V$ entonces también $x^{-1}Mx$ es normal en T.

Como $M \in F$ entonces $x^{-1}Mx$ también está en F por lo tanto, por la condición 3 de clases de fitting se tiene que $M \cdot x^{-1}Mx$ pertenece a F y es subnormal en G ya que M lo es, pero M es maximal entonces $M \cdot x^{-1}Mx = M$ entonces $x^{-1}Mx = M$ lo cual es un absurdo pués son distintos.

Por lo tanto no puede darse el caso en que M no es normal.

Observación.- Si en lugar de una clase de fitting tuvieramos una clase de grupos que satisfagan las condiciones 1 y 3, también se tiene el resultado.

Proposición I. 3. Sea F una clase de fitting y G un grupo. Sean H_1, H_2 dos subgrupos subnormales de G pertenecientes a F entonces $M = \langle H_1, H_2 \rangle$ pertenece a F.

Demostración.- Por la proposición anterior existen M_1 y M_2 subgrupos normales de G pertenecientes a F tales que $H_1 \subset M_1$ y $H_2 \subset M_2$.

Por la condición 3 de clases de fitting tenemos que $M_1M_2 \in F$ pero $\langle H_1, H_2 \rangle$ es normal en M_1M_2 entonces $\langle H_1, H_2 \rangle \in F$ por la condición 2 de clases de fitting.

Observación.- Esta proposición también es válida si la clase cumple solamente las condiciones 1 y 3.

Sea F una clase de grupos. Un grupo finito G se dice que es regular con respecto a F si los subgrupos normales de G que pertenecen a F son justamente aquellos subgrupos normales de G contenidos en un subgrupo normal dado de G.

Proposición I.4. Una clase F de grupos, cerrada bajo isomorfismos es una clase de fitting si y sólo si todo grupo es regular con respecto a F.

Demostración.- Sea F una clase de fitting y G un grupo.

Sea G_F el producto de los subgrupos normales de G que pertenecen a F. Por la condición 3, G_F pertenece a F y es normal en G. Claramente los subgrupos normales de G que pertenecen a F están contenidos en G_F.

Si X es un subgrupo normal de G contenido en G_F, entonces X también es normal en G_F y ya que G_F está en F, la condición 2 de clases de fitting nos dice que X pertenece a F. Por lo tanto G es regular con respecto a F.

Supongamos que F es una clase de grupos cerrada bajo isomorfismos y que para todo grupo es regular con respecto a F.

Por hipótesis tenemos que para todo grupo G existe un subgrupo normal G_F tal que todo subgrupo normal de G pertenece a F si y sólo si está contenido en G_F.

Si G pertenece a F entonces $G = G_F$, por lo tanto todo subgrupo normal de G está contenido en G_F entonces también pertenece a F.

Si G es un grupo y H_1, H_2 son subgrupos normales de G pertenecientes a F entonces H_1 y H_2 están contenidos en G_F, por lo tanto $H_1 H_2 \subset G_F$ pero ya que H_1 y H_2

son normales entonces H_1H_2 es normal por lo tanto H_1H_2 pertenece a F entonces F es una clase de fitting.

Sea G un grupo y F una clase de fitting, consideremos los subgrupos normales de G que pertenecen a F, efectuemos el producto de estos subgrupos; él será un subgrupo G_F de G el cual pertenece a F y lo llamaremos el F- radical de G.

Lo primero que observamos de G_F es que es un subgrupo normal de G ya que es producto de subgrupos normales. Otra observación importante es que G_F pertenece a F en virtud de la condición 3 de la definición de clase de fitting.

Proposición I.5. Sea F una clase de fitting, G un grupo y H un subgrupo subnormal de G. Entonces H pertenece a F si y sólo si $H \subset G_F$.

Demostración.- Supongamos que H pertenece a F entonces por la proposición I.2. existe un subgrupo normal N de G que pertenece a F tal que $H \subset N$ entonces $N \subset G_F$ por lo tanto $H \subset G_F$.

Si H está contenido en G_F entonces H pertenece a F ya que $G_F \in F$.

Proposición I.6. Si G es un grupo, N un subgrupo subnormal de G y F una clase de fitting entonces $N_F = N \cap G_F$.

Demostración.- Sabemos que G_F es normal en G entonces es subnormal de G y como N lo es, $G_F \cap N$ es subnormal de G además $G_F \cap N \subset G_F$, entonces por la proposición anterior se tiene que $G_F \cap N$ pertenece a F. Ahora bien, puesto que $G_F \cap N$ es subnormal de N se tiene que $G_F \cap N \subset N_F$ en virtud de la proposición I.5.

Por otra parte sabemos que N_F es normal en N y éste es subnormal en G entonces N_F es subnormal de G entonces por la proposición I.5 se tiene que $N_F \subset G_F$ y como $N_F \subset N$ entonces $N_F \subset G_F \cap N$ por lo tanto $N_F = G_F \cap N$.

Dadas dos clases de fitting A y B, definamos el producto de A y B, de la manera siguiente:

$$G \in AB \Longleftrightarrow G/G_A \in B$$

Proposición I.7. El producto AB de dos clases de fitting A, B es una clase de fitting.

Demostración.- Mostraremos que todo grupo es regular con respecto a AB.

Sea G un grupo y $\overline{G} = G/G_A$ y $\overline{M} = \overline{G}_B$, de la definición de B-radical se tiene que $\overline{M}$ es normal en $\overline{G}$.

Fijémonos en la proyección canónica $\pi : G \to \overline{G}$, sea $M = \pi^{-1}(\overline{M})$ entonces por el teorema de la correspondencia $\overline{M} = M/G_A$. M es normal en G ya que es la imágen inversa de un normal en $\overline{G}$.

Por el teorema anterior se tiene que $M_A = M \cap G_A = G_A$ entonces $\overline{M} = M/M_A$, ahora bien sabemos que $\overline{G}_B = \overline{M}$ pertenece a B entonces $M \in AB$, por la definición de producto de clases de fitting.

Sea N un subgrupo normal de G tal que $N \subset M$ entonces por la proposición anterior $N_A = N \cap G_A = N \cap M \cap G_A = N \cap M_A$ entonces $N/N_A = N/N \cap M_A \approx NM_A/M_A$ por uno de los teoremas de isomorfismo pero NM_A/M_A es normal en $\bar{M} = M/M_A$ ya que N y M_A son normales en M.

Puesto que $\bar{M} \in B$ entonces NM_A/M_A pertenece a B entonces $N \in AB$.

Hemos probado que todo subgrupo normal de G incluido en M pertenece a AB.

Ahora bién sea N normal en G tal que $N \in AB$ entonces $N/N_A \in B$ pero por I.6. se tiene que $N_A = N \cap G_A$ entonces $N/N \cap G_A$ pertenece a B entonces NG_A/G_A pertenece a B pues $N/N \cap G_A \approx NG_A/G_A$.

Como $NG_A/G_A \in B$ la proposición I.5 implica que $NG_A/G_A \subset \bar{G}_B = \bar{M} = M/G_B$ entonces $NG_A \subset M$ por lo tanto $N \subset M$. Hemos probado que cualquier subgrupo normal N de G, pertenece a AB si y sólo si $N \subset M$.

Por lo tanto todo grupo es regular con respecto a AB y claramente AB es cerrada bajo isomorfismos entonces por la proposición I.4 se tiene que AB es una clase de fitting.

Sea G un grupo y F una clase de fitting. Un subgrupo H de G es F-maximal si H pertenece a F y no existe un subgrupo K de G tal que $H \subsetneq K$ y K pertenece a F.

Un subgrupo H de G es un F-inyector si para todo subgrupo subnormal S de G, $S \cap H$ es F-maximal en S.

Ejemplo de F- inyectores.

Si F es la clase de fitting de los p-grupos, G un grupo tal que P es un p-subgrupo de Sylow de el entonces P es un F- inyector de G; la demostración es consecuencia directa de que si H es un subgrupo subnormal de G y P es un p- subgrupo de Sylow de G entonces $H \cap P$ es un p- subgrupo de Sylow de H.

Proposición I.8. Sea G un grupo, F una clase de fitting y H un subgrupo F-maximal de G. Si C es un subgrupo de G tal que $H \subset C \subset N_G(H)$ entonces $N_G(C) \subset N_G(H)$.

Demostración.- Ya que $C \subset N_G(H)$ entonces H es normal en C, ahora bién si $x \in N_G(C)$ entonces $x^{-1}Hx \subset x^{-1}Cx = C$ entonces $x^{-1}Hx$ también es normal en C.

Puesto que H pertenece a F y $H \approx x^{-1}Hx$ entonces $x^{-1}Hx \in F$ por lo tanto $H \cdot x^{-1}Hx$ pertenece a F pero H es F- maximal por hipótesis, entonces $H \cdot x^{-1}Hx = H$ ésto es $x^{-1}Hx = H$ o sea que $x \in N_G(H)$ por lo tanto $N_G(C) \subset N_G(H)$.

Definición.- Sea G un grupo. Un subgrupo H de G se dice que es un subgrupo de Carter de G si:

a) H es nilpotente

b) $N_G(H) = H$.

Teorema de Carter.- Todo grupo soluble G tiene un subgrupo de Carter y además estos son conjugados. [1]

Proposición I.9. Sea F una clase de fitting, G un grupo soluble y K un subgrupo de G tal que $K \supset G'$. Sean S_1 y S_2 dos subgrupos F-maximales de G tales que $S_1 \cap K = S_2 \cap K$ entonces S_1 y S_2 son conjugados en G.

Demostración.- Supongamos que $G \neq H = \langle S_1, S_2 \rangle$. Sea $K_0 = K \cap H$, puesto que K es normal en G tenemos que K_0 es normal en H. Por los teoremas de isomorfismos sabemos que $H / K \cap H \approx HK/K$ y éste es un subgrupo de G/K el cual es abeliano ya que $K \supset G'$ entonces $H/K\cap H$ es abeliano entonces $H' \subset K \cap H = K_0$.

Por otra parte $S_1 \cap K_0 = S_1 \cap K \cap H$ y $S_2 \cap K_0 = S_2 \cap K \cap H$ pero por hipótesis $S_1 \cap K = S_2 \cap K$ por lo tanto $S_1 \cap K_0 = S_2 \cap K_0$, como S_1 y S_2 son F-maximales de G entonces lo son en H. Por lo tanto no perdemos generalidad si suponemos que $G = \langle S_1, S_2 \rangle$.

Sea $I = S_1 \cap K = S_2 \cap K$, por la hipótesis tenemos que $K \supset G'$ entonces K es normal en G lo cual implica que I es normal en S_1 y S_2 por lo tanto I es normal en $G = \langle S_1, S_2 \rangle$.

Sean $x \in S_i$, $y \in N_G(S_i)$ con $i = 1,2$ puesto que $y \in N_G(S_i)$ se tiene que $y^{-1}xy \in S_i$ en consecuencia $x^{-1}y^{-1}xy \in S_i$ y obviamente en K ya que por hipótesis $G' \subset K$ entonces $x^{-1}y^{-1}xy \in I$, o sea que $xIyI = yIxI$ ésto es, que S_i/I está contenido en el centro de $N_G(S_i)/I$.

Sea C_i/I un subgrupo de Carter de $N_G(S_i)/I$ con $i = 1,2$, sabemos que existe tal subgrupo por el teorema de Carter, entonces C_i/I coincide con su normalizador en $N_G(S_i)/I$ y es nilpotente.

Sea $a \in N_G(S_i)/I$ entonces a conmuta con C_i/I lo cual implica que a está en el centralizador de C_i/I en consecuencia a está en el normalizador de C_i/I entonces $a \in C_i/I$ por lo tanto C_i/I contiene al centro de $N_G(S_i)/I$ y ya que teníamos que S_i/I está contenido en el centro de $N_G(S_i)/I$ entonces $S_i \subset C_i \subset N_G(S_i)$ para $i = 1, 2$.

La proposición I.3. nos dice que $N_G(C_i) \subset N_G(S_i)$ ahora bien denotemos a $N_G(S_i)$ por N_i entonces $N_G(C_i) = N_{N_i}(C_i)$, puesto que $N_{N_i}(C_i/I) = C_i/I$ el teorema de la correspondencia implica que $N_{N_i}(C_i) = C_i$ en consecuencia $N_G(C_i) = C_i$, aplicando el mismo teorema de la correspondencia se tiene que $N_{G/I}(C_i/I) = C_i/I$, y como C_i/I es nilpotente entonces C_i/I es un subgrupo de Carter de G/I para $i = 1, 2$. Entonces por el teorema de Carter existe $x \in G$ tal que $(xI)^{-1}(C_2/I)(xI) = C_1/I$ por lo tanto $x^{-1}C_2x = C_1$. Ahora bien ya que S_2/I es normal en C_2/I entonces S_2 es normal en C_2, analogamente se tiene que S_1 es normal en C_1 y así $x^{-1}S_2x$ es normal en $x^{-1}C_2x = C_1$

Puesto que S_1 y S_2 son F-maximales entonces S_1 y S_2 pertenecen a F entonces $x^{-1}S_2x$ y S_1 pertenecen a F y como son normales en C_1 se tiene que $\langle x^{-1}S_2x, S_1 \rangle$ pertenece a F, pero S_1 es F-maximal, por lo tanto $x^{-1} S_2 x = S_1$.

Proposición I.10. Sea F una clase de fitting, G un grupo soluble, M y N dos subgrupos normales maximales de G. Sea S un subgrupo F-maximal de G tal que $S \cap M$ es F-maximal en M y $S \cap M \cap N$ es F-maximal en $M \cap N$ entonces $S \cap N$ es F-maximal en N.

Demostración.- Ya que G es soluble y M, N son normales maximales se tiene que G/M y G/N son abelianos de orden primo, por lo tanto $M \supset G'$ y $N \supset G'$ entonces $M \cap N \supset G'$. Ésta proposición la demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que $S \cap N$ no es F-maximal en N.

Ya que N es normal en G entonces $S \cap N$ es normal en S el cuál al ser F-maximal está en F por lo tanto $S \cap N$ pertenece a F, por lo tanto existe un subgrupo T, F-maximal en N tal que $S \cap N \subsetneq T$ y un subgrupo V, F-maximal en G tal que $T \subset V$. Ahora bién $V \cap (M \cap N) = (V \cap N) \cap \cap M \supset T \cap M \supset S \cap N \cap M$, ya que $M \cap N$ es normal en G entonces $V \cap (M \cap N)$ es normal en V, además V está en F pues es F-maximal de G entonces $V \cap (M \cap N) \in F$, pero por hipótesis tenemos que $S \cap M \cap N$ es F-maximal en $M \cap N$ entonces $V \cap (M \cap N) = T \cap M = S \cap N \cap M$ entonces por la proposición anterior V y S son conjugados, ahora bién ya que N es normal en G entonces $V \cap N$ y $T \cap N$ son conjugados, por lo tanto

$|V\cap N| = |S\cap N|$ pero $V\cap N \supset T$ entonces $|T| \leq |S\cap N|$ contradicción al hecho que $S\cap N \supsetneq T$ por lo tanto $S\cap N$ es F- maximal en N.

Proposición I.11. Sea F una clase de fitting, G un grupo soluble, Σ una serie de composición de G, S un subgrupo de G tal que para toda $H \in \Sigma$, $H\cap S$ es F- maximal en H entonces S es un F-inyector de G.

Demostración.- Sea Σ la serie de composición de G formada por los subgrupos $H_0 = G \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = \{1\}$. Hay que probar que para todo subgrupo subnormal K de G, $K\cap S$ es F- maximal en K, hagamoslo por inducción sobre el orden de G.

La cadena $H_1 \supset \ldots \supset H_n = \{1\}$ es una serie de composición de H_1, el cuál es soluble por ser subgrupo de G. Ahora bién ya que $H_1 \cap S \cap H_i = H_i \cap S$ el cual sabemos que es F- maximal en H_i para $i = 1, 2, \ldots n$. Por hipótesis de inducción se tiene que $H_1 \cap S$ es un F- inyector de H_1 lo cual implica que para cada subgrupo subnormal K de G tal que $K \subset H_1$, $K\cap S = K\cap H_1 \cap S$ es F- maximal en K.

Sea K un subgrupo subnormal de G tal que $K \not\subset H_1$ y sea N un subgrupo normal maximal de G tal que $N \supset K$, ahora bién ya que $S\cap H_1$ es F- maximal en H_1 y $H_1 \cap N$ es un subgrupo subnormal de G contenido en H_1, tenemos que, $S\cap (H_1\cap N)$ es F- maximal en $H_1 \cap N$ entonces por el teorema anterior $S\cap N$ es F- maximal en N.

Sea Σ_1 una serie de composición de G cuyos primeros términos sean $G, N, H_1 \cap N$ entonces para cada subgrupo $L \in \Sigma_1$, se tiene que $L \cap S$ es F-maximal en L por lo tanto podemos reemplazar a Σ por Σ_1. Aplicando la hipótesis de inducción a ésta cadena se tiene que para todo subgrupo subnormal R de G con $R \subset N$ se tiene que $R \cap S$ es F-maximal en R.

Ahora bién puesto que $K \subset N$ y K es subnormal en G entonces $K \cap S$ es F-maximal en K por lo tanto S es un F-inyector de G.

Proposición I.12. Sea F una clase de fitting y G un grupo soluble entonces G tiene F-inyectores y éstos son conjugados.

Demostración.— Sea $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = \{1\}$ una serie de composición de G.

Construyamos los siguientes subgrupos, sea S_{n-1} un subgrupo F-maximal de H_{n-1}, S_{n-2} un subgrupo F-maximal de H_{n-2} que contenga a S_{n-1} y así sucesivamente hasta S_0 un subgrupo F-maximal de $H_0 = G$ que contenga a S_1 por la construcción de los subgrupos se tiene que $S_0 \cap H_i \supset S_i$ para $i = 1, \ldots n$.

Pero S_i es F-maximal en H_i y $S_0 \cap H_i$ pertenece a F pues $S_0 \cap H_i$ es subnormal de S_0 el cuál sabemos que pertenece a F, por lo tanto $S_0 \cap H_i = S_i$ entonces $S_0 \cap H_i$ es F-maximal en H_i para $i = 1, \ldots n$. Entonces por el teorema anterior S_0 es un F-inyector de G. Ahora probaremos que los F-inyectores de G son conjugados, por inducción sobre el orden de G.

Sean S, T dos F-inyectores de G y N un subgrupo normal maximal de G entonces $N \cap S$ y $N \cap T$ son F-inyectores de N ya que todo subgrupo subnormal de N es un subgrupo subnormal de G.

Por hipótesis de inducción tenemos que existe $x \in N$ tal que $x^{-1}(N \cap T)x = N \cap S$ pero $x^{-1}(N \cap T)x = N \cap (x^{-1}Tx)$ entonces tenemos que $N \cap (x^{-1}Tx) = N \cap S$. Ahora bién ya que G es soluble y N es normal maximal entonces $N \supset G'$ y como también tenemos que $x^{-1}Tx$ y S son F-maximales en G, la proposición I.3. implica que existe $y \in G$ tal que $y^{-1}(x^{-1}Tx)y = S$ entonces $(xy)^{-1}Txy = S$ por lo tanto T y S son conjugados.

A continuación daremos otro ejemplo de inyectores.

Si F es la clase de los π-grupos solubles, donde π es un conjunto de primos y sea G un grupo soluble, cada π-subgrupo de Hall de G es un F-inyector de G.

Ésta proposición es consecuencia directa del hecho de que si P es un π-subgrupo de Hall de G y S es un subgrupo subnormal de G entonces $S \cap P$ es un π-subgrupo de Hall de S.

Ahora bién si F es la clase de los π-grupos solubles, como ya hemos visto, los F-inyectores de G, con G un grupo soluble, son los π-subgrupos de Hall entonces la proposición I.12. da como resultado el teorema de Hall.

TEOREMA DE HALL.— Sea G un grupo soluble de orden $g = mn$ con $(m,n) = 1$ entonces:

1) G tiene subgrupos de orden m.
2) Si M y K son subgrupos de G tal que $|M| = m$ y $|K|$ divide a m entonces existe $x \in G$ tal que $x^{-1} M x = K$.

Si F es la clase de fitting de los grupos nilpotentes entonces se tiene el siguiente teorema el cual se debe a FISCHER:

Sea G un grupo soluble y S un subgrupo de G entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

a) S es un F- inyector.
b) S es F-maximal en G y S contiene al subgrupo de fitting $F(G)$ de G. La demostración de éste teorema no la daremos ver[ ]

Proposición I.13. Sea H un grupo que contiene un subgrupo normal N de índice primo p, P un grupo cíclico de orden p entonces $H \times P$ tiene un subgrupo normal $\bar{H} \neq H$ pero isomorfos.

Demostración.— Sea $a \in H$ tal que $a \notin N$ y $\{1, \ldots a^{p-1}\}$ un sistema de representantes de las clases laterales derechas de N en H.

Lo cuál implica que todo elemento de H puede ser escrito de manera única como na^r con $n \in N$ y $0 \leq r \leq p-1$.

Sea c un generador de P y definamos $f: H \rightarrow H \times P$ de la manera siguiente

$f(na^r) = (na^r, c^r)$. Observamos que:
$n_1a^{r_1}n_2a^{r_2} = n_1a^{r_1}n_2a^{-r_1}a^{r_1}a^{r_2} = n_1a^{r_1}n_2a^{-r_1}a^{r_1+r_2}$
Ahora bién sabemos que $a^{r_1}n_2a^{-r_1} \in N$ pues N es normal en H por lo tanto $n_1a^{r_1}n_2a^{-r_1} \in N$.

$f(n_1a^{r_1}n_2a^{r_2}) = f(n_1a^{r_1}n_2a^{-r_1}a^{r_1+r_2}) =$
$= (n_1a^{r_1}n_2a^{-r_1}a^{r_1+r_2}, c^{\bar{r}})$ $\bar{r} = r_1+r_2$ si $r_1+r_2 < p$ ó $\bar{r} = r_1+r_2-p$ si $r_1+r_2 \geq p$ pero en ambos casos $c^{\bar{r}} = c^{r_1+r_2}$. Entonces $f(n_1a^{r_1}n_2a^{r_2}) =$
$= n_1a^{r_1}n_2a^{-r_1}a^{r_1+r_2}c^{r_1+r_2} = n_1a^{r_1}n_2a^{r_2}c^{r_1+r_2} = n_1a^{r_1}c^{r_1}n_2a^{r_2}c^{r_2} = f(n_1a^{r_1})f(n_2a^{r_2})$ entonces f es un homomorfismo.

Veamos que f es inyectiva, si $f(n_1a^{r_1}) = f(n_2a^{r_2})$ entonces $(n_1a^{r_1}, c^{r_1}) = (n_2a^{r_2}, c^{r_2})$ entonces $r_1 = r_2 = r$ entonces $n_1a^r = n_2a^r$ por lo tanto $n_1 = n_2$ lo cual implica que f es inyectiva.

El primer teorema de isomorfismos implica que $H \approx f(H)$. mostraremos ahora que $N_{H \times P}(f(H)) = H \times P$.

$(f(1), 1), (f(a), c), \ldots, (f(a^{p-1}), c^{p-1})$
son los representantes de las clases de $f(H)$ en $H \times P$ o sea que $f(H)$ tiene índice p en $H \times P$. Ahora bién puesto que $P \subset Z(H \times P)$ entonces $P \subset N_{H \times P}(f(H))$ y ya que $f(H) \subset N_{H \times P}(f(H))$ se tiene que $N_{H \times P}(f(H)) = H \times P$ por lo tanto $f(H)$ es normal en $H \times P$ y $f(H) \approx H$

Proposición I.14. Sea F una clase de fitting que contiene un grupo soluble G tal que el orden de G es divisible por el primo p, entonces F contiene a los grupos cíclicos de orden p.

Demostración.- Ya que G es soluble

y $p \mid |G|$ existen dos subgrupos subnormales H y N de G tales que N es normal en H y tiene indice p en H entonces $H \in F$ ya que es subnormal de G y G pertenece a F.

Sea P un grupo cíclico de orden p entonces por el teorema anterior $H \times P$ contiene un subgrupo $\bar{H} \neq H$ pero $\bar{H} \approx H$ por lo tanto $\bar{H} \in F$ entonces $H\bar{H} \in F$ pues ambos son normales en $H \times P$. Ahora bién como $H \times P = H\bar{H}$ entonces $H \times P \in F$ y como $(1, P)$ es normal en $H \times P$ entonces $(1,P) \in F$ entonces $P \in F$ pues $P \approx (1,P)$

Proposición I.15. Sea F una clase de fitting que contiene un grupo soluble G tal que $p \mid |G|$ entonces F contiene a todos los grupos cuyo orden es una potencia de p.

Demostración.- Por la proposición anterior, F contiene a los grupos cíclicos de orden p. Probaremos que F contiene a todos los grupos cíclicos de órden p^n con $n \in \mathbb{N}$ por inducción sobre n.

Supongamos que F contiene a todos los grupos cíclicos de órden p^r con $r \leq n-1$.

Sea $B = A_1 \times \ldots \times A_p$ con A_i grupo cíclico de órden p^{n-1} y $A_i = \langle a_i \rangle$.

Consideremos la siguiente función δ de B en B definida de la manera siguiente $\delta(a_1, \ldots a_p) = (a_2, \ldots, a_p, a_1)$ δ es un automorfismo de B y $\delta^p = I$.

Si C es un grupo cíclico de orden p y $C = \langle c \rangle$ podemos formar el producto semidirecto de B y C, el cual tiene la siguiente forma $M = \langle a_1, \ldots, a_p, c \rangle$ donde $a_i^{p^{n-1}} = 1$ para $i = 1, \ldots, p$. $c^p = 1$, $a_i a_j = a_j a_i$ con $i, j = 1, \ldots, p$. y $c a_i c^{-1} = a_{i+1}$ para $i = 1, \ldots, p-1$. $c a_p c^{-1} = a_1$.

Sabemos que en un p-grupo cualquier subgrupo propio es tal que está contenido propiamente en su normalizador por lo tanto cualquier subgrupo debe ser subnormal.

Ahora bién ya que el orden de M es $p^{n-1} \cdots p^{n-1} \cdot p = p^{p(n-1)+p}$ entonces cualquer subgrupo de M es subnormal.

Por hipótesis de inducción $A_1, \ldots A_p \in F$ y $C \in F$ por el teorema anterior, por lo tanto $M \in F$ ya que es generado por $A_1, \ldots, A_p$ y C. Por ótro lado tenemos que:

$(a_1 c)^p = (a_1 c)(a_1 c) \cdots (a_1 c) = a_1 (c a_1 c^{-1})(c^2 a_1 c^{-2}) \cdots$
$\cdots (c^{p-1} a_1 c^{1-p}) = a_1 a_2 \cdots a_p$ pues $c^i a_1 c^{-i} = a_{i+1}$.

Ahora bién el orden de $a_1 a_2 \cdots a_p$ es p^{n-1} entonces el orden de $a_1 c$ es p^n entonces $\langle a_1 c \rangle$ es un grupo cíclico de orden p^n entonces $\langle a_1 c \rangle$ es un subgrupo subnormal de M por lo tanto pertenece a F lo cuál implica que F contiene a todos los grupos cíclicos de orden p^n para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea H un grupo cuyo órden es una potencia de p, sabémos qué H es generado por sus subgrupos cíclicos, los cuales son p-grupos y además subnormáles en H y ya que éstos subgrupos cíclicos pertenecen a F, la proposición I.3 implica que H pertenece a F.

II. CLASES DE FITTING NORMALES.

Una clase F de grupos se dice que es una clase de fitting normal si es una clase de fitting incluida en la clase $\mathcal{S}$ de todos los grupos solubles y para todo $G \in \mathcal{S}$, el radical G_F es F-maximal en G.

Proposición II.1. Sea F una clase de fitting incluida en $\mathcal{S}$ entonces F es una clase de fitting normal si y sólo si para todo $G \in \mathcal{S}$, G_F es el único F-inyector de G.

Demostración.- Supongamos que F es una clase de fitting normal, sea $G \in \mathcal{S}$ y S un F-inyector de G, el cuál sabemos que existe en virtud de la proposición I.12.

Ahora bién como G_F es normal en G y por consiguiente, subnormal en G, tenemos que $S \cap G_F$ es F-maximal en G_F pero sabemos que $G_F \in F$ entonces $S \cap G_F = G_F$ o sea que $S \supset G_F$. Por hipótesis de clase de fitting normal tenemos que G_F es F-maximal y $S \in F$ puesto que es un F-inyector de G entonces $S = G_F$ por lo tanto G_F es el único F-inyector de G.

Supongamos que para todo $G \in \mathcal{S}$, G_F es el único F-inyector de G. G es un subgrupo subnormal de G, por la definición de F-inyector tenemos que $G_F \cap G$ es F-maximal en G, o sea que G_F es F-maximal en G ésto es F es normal.

D. BLESSENOHL y W. GASCHÜTZ [9] han dado un método para construir clases de fitting normales por medio dela siguiente proposición:

Proposición II.2. Sea A un grupo abeliano finito o infinito. Supongamos que para todo grupo soluble G existe un homomorfismo f_G de G en A tal que:

1) Si ϕ es un isomorfismo entre los grupos solubles G_1, G_2 se tiene que $f_{G_1} = f_{G_2} \cdot \phi$

2) Si N es un subgrupo normal de G, entonces f_N es la restricción de f_G a N. entonces la clase H de los grupos solubles G tales que $f_G(G) = \langle 1 \rangle$ es una clase de fitting normal.

H. LAUSCH [3] demostró posteriormente que cada clase de fitting normal no trivial puede obtenerse por éste método.

Demostración proposición II.2. mostraremos primero que H es una clase de fitting.

Sea $G \in H$ y N normal en G, ya que $G \in H$, sabemos que $f_G(G) = \langle 1 \rangle$ Ahora bién por la condición 2) se tiene que $f_N(N) = f_G(N) \subset f_G(G) = \langle 1 \rangle$ entonces $f_N(N) = \langle 1 \rangle$ por lo tanto N está en H.

Sea G un grupo tal que $G = N_1 N_2$ con N_1, N_2 normales en G y pertenecientes a la clase H. Para toda $g \in G$ se tiene que $g = n_1 n_2$ por la condición 2) $f_G(g) = f_G(n_1 n_2) = f_G(n_1) f_G(n_2) = f_{N_1}(n_1) f_{N_2}(n_2) = 1 \cdot 1 = 1$ por lo tanto $f_G(G) = \langle 1 \rangle$ entonces $N_1 N_2 \in H$.

Hemos demostrado que H es una clase de fitting; ahora mostraremos que para todo $G \in \mathcal{S}$, G_H es H-maximal en G.

Sea G un grupo soluble y $N = \operatorname{Ker} f_G$, lo cuál significa que $f_G(N) = \langle 1 \rangle$ entonces $f_N(N) = \langle 1 \rangle$ ya que N es normal en G por lo tanto N pertenece a H entonces $N \subset G_H$ ahora bién ya que G_H pertenece a H entonces $f_{G_H}(G_H) = \langle 1 \rangle$ por la condición 2) se tiene que $f_G(G_H) = \langle 1 \rangle$ por consiguiente $G_H \subset N$.

En consecuencia se tiene que $N = G_H$. Por el primer teorema de isomorfismos $G/N \approx$ $\approx f_G(G) \subset A$ entonces G/N es abeliano por serlo A. Si M es un subgrupo de G tal que $M \supsetneq N$, entonces $f_G(M) \neq \langle 1 \rangle$. Ahora bién tenemos que $G/M \subset G/N$ entonces G/M es abeliano entonces M es normal en G, por lo tanto $f_G(M) = f_M(M)$ entonces $f_M(M) \neq \langle 1 \rangle$ ésto es $M \notin H$. Por lo tanto $N = G_H$ es H-maximal y por consiguiente H es normal.

Proposición II. 3. Sea U un grupo de orden impar, V un subgrupo de U y α un automorfismo de U tal que $\alpha(V) = V$ y $\alpha(Vh) =$ $= Vh$ con $h \in U$. Entonces la permutación inducida por α en los elementos de U es par si y sólo si la permutación inducida por α en los elementos de V es par.

Demostración.— Sea R un sistema de representantes de las clases laterales de V en U. Sean α_1, α_2 permutaciones definidas de la siguiente manera, si $vr \in U$ con $v \in V$ y $r \in R$ $\alpha_1(vr) = \alpha(v)r$ y $\alpha_2(vr) =$ $= v\alpha(r) = (vr)(r^{-1}\alpha(r))$.

$\alpha_2\alpha_1(vr) = \alpha_2(\alpha(v)r) = \alpha(v)\alpha(r) = \alpha(vr)$ pués α es automorfismo, por lo tanto $\alpha_2\alpha_1 = \alpha$

Por la definición de α_2 ésta permutación mapea todo elemento de Vr en el producto del elemento mismo por $r^{-1}\alpha(r)$ ahora bién ya que U es de órden impar entonces el órden de $r^{-1}\alpha(r)$ es impar, lo cual implica que el órden de α_2 es impar por lo tanto α_2 es una permutación par. Entonces α induce en Vr una permutación par si y sólo si α_1 lo es.

α_1 es par si y sólo si α induce sobre V una permutación par. Si α induce a una permutación par en V entonces α_1 lo es y como α_2 es par y $\alpha = \alpha_2\alpha_1$ entonces α es una permutación par en U.

Si α induce en V una permutación impar ésta induce una permutación impar en cada clase lateral de V en U y ya que el número de clases laterales es impar α induce en U el producto de un número impar de permutaciones de orden impar y por lo tanto α es una permutación impar.

Proposición II.4. Para todo grupo soluble G, sea $O(G)$ el subgrupo normal de G más grande de órden impar, f_G de G en A, el cual es el grupo multiplicativo de los enteros 1 y -1, definida de la siguiente manera $f_G(x) = 1$ si x induce en los elementos de $O(G)$ una permutación par y $f_G(x) = -1$ en el otro caso.

Entonces la clase de los grupos solubles G tales que $f_G(G) = \langle 1 \rangle$ es una clase de fitting normal.

Demostración.— Sabemos que xy induce una permutación par en $O(G)$ si y sólo si x, y inducen una permutación par o una permutación impar por lo tanto $f_a(xy) = f_a(x) f_a(y)$ entonces f_a es un homomorfismo de G en A.-

Sea N un subgrupo normal de G y $T : N \to N$ un automorfismo, ya que $o(N)$ es normal en N entonces $T(o(N))$ es normal en N y el orden de $T(o(N))$ es impar entonces $T(o(N)) \subset o(N)$ pues $o(N)$ es normal maximal impar.

Entonces $o(N)$ es un subgrupo característico de N y como N es normal en G entonces $o(N)$ es normal en G, entonces $o(N) \subset o(G)$ por lo tanto $o(N) \subset o(G) \cap N$. Ahora bien $o(G) \cap N$ es normal en N ya que $o(G)$ es normal en G, y por ser subgrupo de $o(G)$, $o(G) \cap N$ tiene orden impar entonces $o(G) \cap N \subset o(N)$ por lo tanto $o(N) = o(G) \cap N$. Si $x \in N$, x induce un automorfismo α_x de $o(G)$ y un automorfismo β_x de $o(N)$.

Si $g \in G$, $g^{-1}x^{-1}gx \in o(G)$ pués $o(G)$ es normal en G pero también está en N pues $x \in N$ y éste es normal en G. Por lo tanto $x^{-1}gx = gn$ con $n \in o(G) \cap N = o(N)$, ésto es $x^{-1}go(N)x = go(N)$ por lo tanto α_x induce en $o(G)/o(N)$ la función identidad.

Ya que $o(G)$ tiene orden impar y $o(N)$ es normal en $o(G)$ por la proposición anterior tenemos que la permutación inducida por x en los elementos de $o(G)$ es par si y sólo si la permutación inducida en los elementos de $O(N)$ es par.

Entonces $f_G(x) = f_N(x)$ por lo tanto f_N es la restricción de f_G a N, en virtud de la proposición II.2. la clase de los grupos G tales que $f_G(G) = \langle 1 \rangle$ es una clase de fitting normal.

Proposición II.5. Sea p un primo, A el grupo multiplicativo de los elementos no nulos de $GF(p)$, y $\mathfrak{X}$ una clase de fitting.

Para todo grupo finito soluble G sea $G_{\mathfrak{X}} = R$ el $\mathfrak{X}$-radical de G. Sea S una serie principal de G que contiene a $G_{\mathfrak{X}}$ y T la sección de S entre $G_{\mathfrak{X}}$ y $\langle 1 \rangle$. Sean $M_1, \ldots, M_r$ los factores principales que pertenecen a T y cuyo orden es una potencia de p. Para toda $g \in G$ sea $d^p_{G,R}(g) = \prod_{i=1}^{r} d_i(g)$ entonces $d^p_{G,R}$ es un homomorfismo de G en A. La clase de los grupos finitos solubles tales que $d^p_{G,R}(G) = \langle 1 \rangle$ es una clase de fitting normal

Para ver la demostración de ésta proposición, consultar en [1].

Proposición II.6. Sea F una clase de fitting no trivial incluida en $\mathfrak{S}$ entonces F es una clase normal si y solo si para todo $G \in \mathfrak{S}$, $G' \subset G_F$.

Demostración.- Hay que probar, que para todo grupo soluble G, G_F es F-maximal. Sea H un subgrupo de G tal que $H \supset G_F$ y $H \in F$, por hipótesis tenemos que $G_F \supset G'$ o sea que G/G_F es abeliano por lo tanto H/G_F es normal en G/G_F entonces H es normal en G y como suposimos que estaba en F, se tiene que $H \subset G_F$ entonces $H = G_F$ por lo tanto G_F es F-maximal ésto es F es una clase de fitting normal.

La otra implicación no la demostraremos, consultar en [2].

Proposición II.7. Sea M la colección de las clases de fitting normales no triviales entonces $\mathcal{X}_0 = \bigcap_{\mathcal{X} \in M} \mathcal{X}$ es normal.

Demostración.— Sea G un grupo, sabemos que $G_{\mathcal{X}_0} \in \mathcal{X}_0$ entonces $G_{\mathcal{X}_0} \in \mathcal{X}$ para toda $\mathcal{X} \in M$. Ahora bién ya que $G_{\mathcal{X}_0}$ es normal en G y $G_{\mathcal{X}_0} \subset G_{\mathcal{X}}$ para toda $\mathcal{X} \in M$ entonces $G_{\mathcal{X}_0} \subset \bigcap_{\mathcal{X} \in M} G_{\mathcal{X}}$.

Por otra parte, ya que $\bigcap_{\mathcal{X} \in M} G_{\mathcal{X}}$ es un subgrupo normal de G entonces también es normal en $G_{\mathcal{X}}$ para toda $\mathcal{X} \in M$ entonces $\bigcap_{\mathcal{X} \in M} G_{\mathcal{X}}$ pertenece a $\mathcal{X}$ para toda $\mathcal{X} \in M$ entonces pertenece a $\mathcal{X}_0$, por tanto $\bigcap_{\mathcal{X} \in M} G_{\mathcal{X}} \subset G_{\mathcal{X}_0}$, hemos demostrado que $G_{\mathcal{X}_0} = \bigcap_{\mathcal{X} \in M} G_{\mathcal{X}}$.

Sea G un grupo soluble entonces $G' \subset G_{\mathcal{X}}$ para toda $\mathcal{X} \in M$, entonces $G' \subseteq G_{\mathcal{X}_0}$ en consecuencia $\mathcal{X}_0$ es una clase de fitting normal.

Recientemente (en 1981) P.N. Berger[4] caracterizó la clase de fitting normal minimal o sea la intersección de clases de fitting normales no triviales.

Proposición II.8. Toda clase de fitting normal no trivial contiene la clase de los grupos nilpotentes.

Demostración.- Es suficiente mostrar que si p es un primo toda clase de fitting normal no trivial contiene un grupo de orden p. Si $p > 2$ y P es un grupo de orden p entonces el grupo de los automorfismos de P tiene orden $p-1 > 1$.

Si q es un primo que divide a $p-1$, se puede construir un grupo de orden pq tal que P es su conmutador. Entonces por II.6 P está contenido en toda clase de fitting normal no trivial. Si $p = 2$ se puede demostrar analogamente que existe un grupo de orden 12 tal que su conmutador es un grupo abeliano elemental A de orden 4. Entonces A, y un subgrupo normal de orden 2 de A, pertenecen a toda clase de fitting normal no trivial.

CLASES NORMALES

Muchas definiciones de clases de grupos tienen carácter constructivo, es decir, afirman que si ciertos grupos están en la clase, también otros grupos construidos a partir de ellos, pertenecen a la clase. En estas condiciones las clases se dice que son cerradas bajo ciertas operaciones.

Algunos ejemplos de estos tipos de clases son:

1). Las variedades de grupos que son clases cerradas por las operaciones siguientes: Pasaje a los subgrupos, pasaje a los grupos cocientes, construcción de productos directos.

2). Formaciones de grupos que son clases de grupos que satisfacen las siguientes condiciones:

a) Si $G \in F$ y N es un subgrupo normal de G entonces $G/N \in F$.

b) Si N_1 y N_2 son subgrupos normales de G tales que G/N_1 y G/N_2 pertenecen a F entonces $G/N_1 \cap N_2$ también está en la familia.

3) Las clases de fitting.

Sin embargo, la definición usual de clase de fitting normal no tiene carácter constructivo. Para obtener un conocimiento más profundo de estas clases, es conveniente buscar una condición equivalente que sí tenga este carácter constructivo.

En esta dirección, el profesor Zappa introdujo la siguiente condición.

Una clase de grupos solubles F se dice que verifica la propiedad α, si:

Para todo grupo soluble G que verifica las siguientes condiciones,

a) $G = HM$ con H subgrupo F-maximal, M un subgrupo normal maximal de G y $M \cap H$ normal en G.

b) $H/M \cap H$ no centraliza a $M/M \cap H$.

Para todo subgrupo normal N de G con $M \cap H \subset N \subsetneq M$, $H/M \cap H$ centraliza a $N/M \cap H$.

Entonces M pertenece a F.

Proposición III.1 Una clase de fitting de grupos solubles es normal si y sólo si la clase verifica la propiedad α.

Demostración.- Sea F una clase de fitting normal y G un grupo soluble que satisface las condiciones a), b), c), de la propiedad α.

Sabemos que H pertenece a F, por ser H un subgrupo F-maximal de G y $H \cap M$ normal en H pués lo era en G entonces $H \cap M \in F$, lo cuál implica que $H \cap M \subset G_F$. Supongamos que $H \cap M = G_F$, entonces $H \cap M$ es F-maximal en G por definición de clase de fitting normal, ahora bién ya que $H \in F$ entonces se tiene que $H = H \cap M$ és decir que $H \subset M$ y por tanto $G = HM = M$ lo cuál es una contradicción al hecho que M es normal maximal de G entónces $H \cap M \subsetneq G_F$.

Si $G_F \supset M$ entonces $M \in F$ pues M es normal en G.

Supongamos pues que $G_F \not\supset M$ entonces $G_F \cap M \subsetneq M$ ya que si $G_F \cap M = M$ entonces

$M \subset G_F$. Ahora bién puesto que $H \cap M \subset G_F$ se tiene que $H \cap M \subset G_F \cap M \subsetneq M$ y como $G_F \cap M$ es normal en G la condición c) de la propiedad α implica que $H/H \cap M$ centraliza a $G_F \cap M / H \cap M$ entonces $(H \cap Mh)(H \cap Mm)(H \cap Mh^{-1}) = H \cap Mm$ por consiguiente $hm = mh$ o sea que $(H \cap M)m\,(H \cap Mh)(H \cap Mm^{-1}) = H \cap Mh$ entonces $G_F \cap M / H \cap M$ centraliza a $H/H \cap M$ lo cuál implica que $G_F \cap M$ normaliza a H entonces H y $G_F \cap M$ son normales en $H(G_F \cap M)$.

Ahora bién ya que H y $G_F \cap M$ pertenecen a F entonces el producto $H(G_F \cap M) \in F$, pero H es F-maximal entonces $H(G_F \cap M) = H$ ésto es $G_F \cap M \subset H$ en consecuencia $G_F \cap M \subset H \cap M$. Puesto que $G_F \supset H \cap M$ entonces $G_F \cap M \subset H \cap M$ por lo tanto $G_F \cap M = H \cap M$.

Por otra parte tenemos que M es normal maximal de G el cuál es soluble entonces el indice de M en G es un numero primo p.

Si $G_F \subset M$ entonces $G_F = G_F \cap M = H \cap M$ y ésto es absurdo puesto que la clase F es normal o sea que G_F es F-maximal y como habíamos visto $H \cap M \subsetneq H \in F$ por lo tanto $G_F \not\subset M$ en consecuencia $M \subsetneq G_F M$.

Puesto que G_F y M son normales en G entonces $G_F M$ es normal en G pero M es normal maximal entonces $G_F M = G$ por lo tanto el índice de $H \cap M = G_F \cap M$ en G_F es igual al indice de M en G es decir p.

Si H es normal en G entonces $H/H \cap M$ es normal en $G/H \cap M$ contradición a la condición b) de la propiedad α entonces H no es normal en G por lo tanto $H \neq G_F$ ya que G_F es normal en G.

Ahora bien puesto que H y G_F son F-maximales se tiene que $H \not\subset G_F$ y $G_F \not\subset H$ lo cual implica que $H \subsetneq G_F H$ y $G_F \subsetneq G_F H$ además $G_F \cap H \subsetneq G_F$ y $G_F \cap H \subsetneq H$.

Puesto que $G_F / H \cap M$ y $H / H \cap M$ tiene orden p y $G_F \cap M \supset H \cap M$ entonces $G_F \cap M = H \cap M$ por lo tanto $G_F / G_F \cap H$ y $H / G_F \cap H$ tienen orden p, en consecuencia $G_F H / G_F \cap M$ y $G_F H / M \cap H$ tienen orden p^2 por lo tanto $H / H \cap M$ es normal en $G_F H / M \cap H$ entonces H es normal en $G_F H$ pero ya que G_F es normal en $G_F H / M \cap H$ y tanto G_F como H pertenecen a F entonces $G_F H$ también pertenece a F, lo cual es una contradicción al hecho que H sea F-maximal y $H \not\supset G_F$.

Por lo tanto $M \in F$.

Inversamente, sea F una clase de Fitting que satisface la condición α. Supongamos que F no es normal, demostraremos que existe un grupo soluble $G = HM$ para el cual se verifican las condiciones a), b), c), pero no se verifica la conclusión de la propiedad α, contradiciendo el hecho de que F cumple la propiedad α.

Ya que F no es una clase de fitting normal existe un grupo soluble G para el cual G_F no es F-maximal, sea G de orden mínimo con ésta propiedad (ésto es G es soluble y G_F no es F-maximal).

Sea H un F-inyector de G (el cual

sabemos que existe pues G es un grupo soluble). Por lo tanto $H \cap M$ es un F-inyector de M, por la hipótesis de minimalidad de G se tiene que M_F es F-maximal entonces por la proposición II.1. M_F es el único F-inyector de M entonces $H \cap M = M_F$.

Si T es un automorfismo de M entonces $T(M_F)$ es normal en M y pertenece a F entonces $T(M_F) \subset M_F$ por tanto M_F es característico en M el cual es normal en G, entonces M_F es normal en G y puesto que $M_F \in F$ entonces $M_F \subset G_F$ y como H es un F-inyector entonces $H \supset G_F$. Puesto que H es F-maximal y G_F no lo es entonces $H \supsetneq G_F \supset M_F$.

Por otra parte sabemos que G_F y M son normales en G por tanto $G_F M$ es normal en G, pero M es normal maximal en G entonces $G_F M = G$ o $G_F M = M$. Mostraremos que $G_F M \neq G$.

Si H está contenido en M entonces $H \cap M = H$ entonces $H = M_F$ contradicción al hecho que $H \supsetneq G_F \supset M_F$ por tanto $H \not\subset M$ entonces $H \cap M \supsetneq M$, por tanto $HM = G$ ya que M es maximal normal de G.

Ahora bien si suponemos que $G_F M = G$ entonces $|H| = |G||H \cap M|/|M| = |G||G_F \cap M|/|M| = |G_F|$ y ya que $H \supset G_F$ entonces $H = G_F$ o sea que H es un F-inyector lo cual es una contradicción al hecho que G_F no es F-maximal de G. Entonces $G_F M = M$ es decir $G_F \subset M$ y como $G_F \subset H$ se tiene que $G_F \subset H \cap M = M_F$ entonces $G_F = M_F = H \cap M$.

Resumiendo tenemos que $G = HM$ con H subgrupo F-maximal de G, es más H es un F-inyector de G, M un subgrupo normal maximal de G y $M \cap H$ es normal en G pués es igual a G_F, por tanto G verifica la condición a) de la propiedad α.

Mostraremos ahora que G verifica la propiedad b) por reducción al absurdo. Si $H / M \cap H$ centraliza a $M / M \cap H$ entonces $M / M \cap H$ centraliza a $H / M \cap H$ entonces M normaliza a H por tanto H sería normal en $HM = G$ y puesto que $H \in F$ entonces $H \subset G_F$, pero $H \not\supseteq G_F$ entonces G verifica la propiedad b).

Probaremos que G verifica la propiedad c). Sea N un subgrupo normal de G tal que $M \cap H$ está contenido en N y éste está contenido pero es distinto de M.

Hay que mostrar que $H / M \cap H$ centraliza a $N / M \cap H$. Ahora bién como $N \subset M$ entonces $N \cap H \subset M \cap H$. por otro lado $M \cap H \subset N$ y $M \cap H \subset H$ entonces $M \cap H \subset N \cap H$ entonces $N \cap H = M \cap H$. Si hacemos $K = HN$ supongamos que $K = G$ entonces $|N| = |G||N \cap H| / |H| = |G||M \cap H| / |H| = |M|$ contradicción al supuesto que $N \subsetneq M$ entonces $K \neq G$. ahora bién como $H \subset K$ y H es un F-inyector de G entonces H es un F-inyector de K entonces por la minimalidad de G se tiene que $H = K_F$ o sea que H es normal en K y como N es normal en K, pues lo era en G; entonces $K / N \cap H = (H / N \cap H) \times N / N \cap H$ y como

$N \cap H = M \cap H$ entonces $K / M \cap H = (H / M \cap H) \times$ $\times (N / M \cap H)$ por lo tanto $H / M \cap H$ centraliza a $N / M \cap H$. Entonces G verifica la propiedad c).

Supongamos que $M \in F$ entonces $M = M_F = G_F$ y como $H \supset M$ entonces $G = HM = H$ contradicción. Por lo tanto G no cumple la conclusión de la propiedad α.

Este teorema no responde completamente al objetivo de encontrar una condición equivalente con carácter constructivo ya que del hecho que H pertenezca a F se obtiene que M también pertenezca a F, pero sólo en el caso que H sea F-maximal.

Como consecuencia de este teorema probaremos la siguiente proposición debida a Cassey [5].

Proposición III.2. Toda clase de fitting normal no trivial contiene la clase de los grupos nilpotentes.

Demostración.- Sea F una clase de fitting normal no trivial entonces F contiene un grupo soluble $G \neq \langle 1 \rangle$. Si q es un divisor primo del orden de G, el teorema I.15 nos dice que, F contiene a todos los grupos cuyo orden es una potencia de q.

Sea p un primo distinto de q y n el entero mínimo tal que $p^n \equiv 1 \pmod{q}$ y sea P un grupo abeliano elemental de orden p^n. Entonces el grupo de automorfismos de P tiene orden $(p^n-1)(p^n-p) \cdots\cdots (p^n-p^{n-1})$ ahora bien ya que $q \mid p^n-1$, P tiene un automorfismo α de órden q. Sea Q un grupo de orden q y t un generador de Q ahora bién ya que existe el automorfismo α podemos definir $G' = PQ$ el producto semidirecto de P y Q en el cual $t^{-1}ht = \alpha(h)$ para todo $h \in P$ y P normal en G'. Sabemos que $Q \in F$ pues es de órden q. Ahora bién si Q no es F-maximal en G' entonces cualquier subgrupo de G' que contenga a Q tal que sea F-maximal tiene órden una potencia de p, por tanto por el teorema I.15 F contiene a todos los grupos cuyo orden es una potencia de p.

Por tanto supongamos que Q es F-maximal de G' lo cual aúnado a que P es normal maximal de G y que $P \cap Q = \langle 1 \rangle$ entonces la condición a) se cumple. claramente Q no centraliza a P, entonces la condición b) también se cumple.

Sea N un subgrupo normal de G tal que $N \not\subseteq P$ entonces $|N| = p^m$ con $m<n$ entonces el órden del grupo de automorfismos A de N es $(p^m-1)(p^m-p)\cdots(p^m-p^{m-1})$ ahora bién ya que q no divide a ningún número de la forma p^r-1 con $r<n$ entonces $q \nmid |A|$ por tanto Q centraliza a N entonces la condición c) se cumple.

El teorema anterior implica que $P \in F$ y como P es un p-grupo entonces el teorema I.15. implica que F contiene a todos los grupos cuyo órden es una potencia de p.

En resumen hemos probado que F

contiene a todos los grupos cuyo orden es una potencia de cualquier número primo. Ya que un grupo es nilpotente si y sólo si es el producto directo de sus subgrupos de Sylow, siendo éstos normales en el grupo nilpotente y pertenecientes a F entonces los grupos nilpotentes pertenecen a F.

Para examinar más profundamente la función de la propiedad α se introduce el concepto de clase normal que generaliza el concepto de clase de fitting normal.

Una clase F de grupos solubles es normal si:

1) Para todo G que pertenezca a F y para todo subgrupo normal N de G se tiene que N pertenece a F.
2) Para todos A, B pertenecientes a F se tiene que $A \times B$ pertenece a F.
3) La clase F cumple la propiedad α.

Proposición III.3. Toda clase de fitting normal es una clase de fitting normal.

Demostración.- Basta demostrar la condición 2). Sean A y B pertenecientes a F, $(A,1)$ y $(1,B)$ pertenecen a F pués son isomorfos a A y B respectivamente, ahora bien puesto que $(A,1)$ y $(B,1)$ son normales en $A \times B$ entonces $(A,1)(1,B) \in F$ por tanto $A \times B$ pertenecen a F.

Problema.- ¿El inverso es cierto? ésto es ¿existe una clase normal que no sea de fitting?

Problema.- ¿La intersección de las

clases normales no triviales, es una clase normal?

Para poder dar una respuesta a ésta pregunta es útil conocer que contiene dicha intersección, en éste sentido se demuestran los siguientes resultados.

Proposición III.4. Toda clase normal no trivial contiene a todos los grupos abelianos elementales.

Demostración.— Puesto que F es no trivial entonces contiene un grupo soluble no trivial. La proposición I.1 nos dice que F contiene todos los subgrupos subnormales de éste grupo soluble. El grupo soluble tiene una cadena en la cual el penúltimo subgrupo tiene orden p con p primo y además es subnormal por tanto F contiene un grupo de orden p. Sea q un primo distinto de p, utilizando el mismo argumento que se dió en la proposición III.2; F contiene un grupo Q de orden q^n con n el menor entero positivo tal que $p | q^n - 1$. Por ser Q un q-grupo su centro es distinto del trivial entonces Q tiene un subgrupo normal de orden q el cual por la condición 1) de la definición de clase normal pertenece a F.

En resumen hemos probado que F contiene a todos los grupos cuyo orden es un primo cualquiera. Puesto que los grupos abelianos elementales son productos de Z_p con p primo entonces la condición 2) de la definición de clase normal nos dice que los grupos abelianos elementales pertenecen a la clase F.

Proposición III. 5. Toda clase normal no trivial contiene al grupo de los cuaternos.

Demostración.— Sea F una clase normal no trivial y Q el grupo de los cuaternios el cual sabemos que es de la forma $Q = \langle a,b \mid a^4=1,\ b^2=a^2,\ ab=ba^3 \rangle$.

Fijemonos en el automorfismo φ de Q cuya regla es $\varphi(a)=b$ y $\varphi(b)=ab^{-1}$ observemos que $\varphi^3(a)=a$ y $\varphi^3(b)=\varphi^2(ab^{-1}) = \varphi(\varphi(a)\varphi(b)^{-1}) = \varphi(bba^{-1}) = \varphi(b^2a^{-1}) = \varphi(a) = b$ entonces $\varphi^3 = I$. Sea $S=\langle\varphi\rangle$ podemos definir un homomorfismo $\psi: S \longrightarrow \operatorname{aut}(Q)$ el cual sería la inclusión. Entonces podemos construir el producto semidirecto de Q por S, llamemoslo G, por las propiedades de éste producto se tiene que Q es normal en G y $Q\cap S = \{1\}$ además si $q\in Q$ y $\varphi\in S$ se tiene que $\varphi^{-1}q\varphi = \varphi^2 q\varphi = \psi(\varphi)(q)$. El centro Z de Q sabemos que es generado por a^2 o sea $Z = \{1,a^2\}$ observemos que $\varphi(a^2)=b^2=a^2$ entonces φ fija a los elementos de Z.

Por otra parte S y Z son subgrupos de G tales que $\varphi^{-1}a^2\varphi = \varphi(a^2) = a^2$ entonces $a^2\varphi = \varphi a^2$ por tanto S y Z conmutan entre si lo cual implica que $H = ZS$ es un subgrupo de G cíclico pués lo genera el elemento $a^2\varphi$ y además $o(H) = o(Z)o(S)/o(Z\cap S) = 3\cdot 2 = 6$, el teorema anterior nos dice que $H\in F$.

Ahora bién si H está contenido en K

donde K es un subgrupo de G entonces $K = K'S$ con K' un subgrupo de orden 4 de Q pero ya que φ no fija al elemento a ni al elemento b, los cuales son los generadores de los dos subgrupos de orden 4 de Q se tiene que K' y S no conmutan por lo tanto K no es subgrupo de G en consecuencia H es un subgrupo maximal de G.

Si $G \in F$ entonces $Q \in F$ pues Q es normal en G por tanto supongamos que $G \notin F$ entonces ya que $H \in F$ y es maximal en G se tiene que H es F-maximal en G; Ahora bién ya que $G/Q \approx S$ y S es simple entonces Q es maximal normal en G y además $Q \cap H = Z$ el cual es normal en G.

Por otra parte tenemos que $H/Q \cap H = H/Z$ no centraliza a $Q/Q \cap H = Q/Z$ ya que φ manda Za en Zb, además no existe algún subgrupo N normal en G tal que $Q \cap H \subsetneq N \subsetneq Q$. Ahora bién F cumple la condición α por ser clase normal entonces $Q \in F$.

Corolario 1.- Toda clase normal no trivial contiene al grupo cíclico de orden 4.

Demostración.- Ya que el grupo de los cuaternios tiene como subgrupos normales a los cíclicos de orden 4 entonces éstos pertenecen a F.

Proposición III.6. Toda clase normal no trivial F contiene al grupo dihedrico de orden 2^n para todo $n > 1$.

Demostración.- La haremos por inducción sobre n.

Para $n=2$ el grupo dihédrico de orden 4 es abeliano elemental entonces por la proposición III.4 se tiene que pertenece a F.

Supongamos pues que los grupos dihédricos de orden 2^{n-1} pertenecen a F. Hay que probar que contiene al grupo dihedrico de orden 2^n.

Fijemonos en el grupo dihédrico de orden 2^{n+1} el cual es $G=\langle a,b \mid a^{2^n}=b^2=1, b^{-1}ab=a^{-1}\rangle$ entonces $M=\langle a^2,b\rangle$ es un grupo dihédrico de órden 2^n ya que $(a^2)^{2^{n-1}}=a^{2^n}=1$ y $b^2=1$, $H=\langle a^4,ab\rangle$ es un grupo dihédrico de órden 2^{n-1}, pués $(a^4)^{2^{n-2}}=a^{2^n}=1$ y $(ab)^2=1$ por hipótesis de inducción se tiene que $H\in F$. Los elementos de H son de la forma $(a^4)^t(ab)^s$ con $0\leq s\leq 1$ y $0\leq t\leq 2^{n-2}$, si conjugamos al elemento ab^{-1} por b obtenemos que $b^{-1}abb=a^{-1}b$ pero $a^{-1}b\notin H$ pués para que pertenezca a H se necesita que la $t=2^n$ lo cual es imposible entonces H no es normal en G.

Es claro que el subgrupo $L=\langle a^2,ab\rangle$ de G cuyo orden es 2^n contiene a H.

Si existiera $N\neq L$ subgrupo de G de órden 2^n que contenga a H, entonces H sería normal en L y en N entonces sería normal en $LN=G$ lo cual es una contradicción, por lo tanto el único subgrupo de G de orden 2^n que contiene a H es L, el cual sabemos que es dihédrico.

Si H no es F-maximal entonces ya que L es el único subgrupo de G que contiene a H, entonces L es F-maximal y en consecuencia $L \in F$ entonces el teorema está probado. Supongamos pues que H es F-maximal. El subgrupo $M \cap H = \langle a^4 \rangle$ es normal en G.

$[H, M]$ contiene a $[a, ab] = [a, b] = a^{-2} \notin H \cap M$, por lo tanto $H / H \cap M$ no centraliza a $M / H \cap M$; el único subgrupo normal N de G tal que $H \cap M \subsetneq N \subsetneq M$ es $N = \langle a^2 \rangle$ y $[H, N] = \langle [a^2, ab] \rangle = \langle [a^2, b] \rangle = \langle a^{-4} \rangle \subset H \cap M$, entonces $H / H \cap M$ centraliza a $N / H \cap M$. Entonces por la definición de clase normal se tiene que $M \in F$ con M un grupo dihédrico de orden 2^n.

Corolario 2.- Toda clase normal no trivial contiene los grupos cíclicos de orden 2^m con $m \geq 1$.

Demostración.- Todo grupo cíclico de órden 2^m es un subgrupo normal del grupo dihédrico de órden 2^{m+1} pués su índice es 2, entonces los cíclicos de órden 2^m pertenecen a toda clase normal no trivial.

Proposición III.7. Toda clase normal no trivial contiene al grupo de los cuaternios generalizados de órden 2^n dónde n es ≥ 3.

Demostración.- Para $n = 3$, la proposición es válida en virtud de la proposición III.5.

La demostración la haremos por inducción y supongamos que $n \geq 4$.

Sea $G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^2 = a^{2^{n-1}}, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ el grupo de los cuaternios generalizados de orden

2^{n+1}. Entonces $M=\langle a^2, b\rangle$ y $H=\langle a^4, ab\rangle$ son los grupos de cuaternios generalizados de órden 2^n y 2^{n-1} respectivamente, por hipótesis de inducción H pertenece a F.

La demostración es análoga a la que se dió en la proposición III.6.

Proposición III.8. Toda clase normal no trivial contiene al grupo alternante A_4.

Demostración.- Sea S_4 el grupo simétrico de grado 4 y D_8 el grupo dihédrico de orden 8. Entonces $S_4 = A_4 D_8$ y $A_4 \cap D_8$ es el grupo abeliano elemental de órden 4 y por el teorema III.5 D_8 pertenece a F.

Si D_8 no es F-maximal, entonces S_4 pertenece a F en consecuencia A_4 pertenece a F pués A_4 es normal en S_4.

Supongamos que D_8 es F-maximal. A_4 es maximal normal en S_4 y $A_4 \cap D_8$ es normal en S_4 entonces la condición a) de la propiedad α, se verifica.

$D_8 / A_4 \cap D_8$ no centraliza a $A_4 / A_4 \cap D_8$ entonces se verifica la condición b) de la propiedad α.

Ahora bién el único subgrupo normal N de S_4 tal que $A_4 \cap D_8 \subset N \subsetneq A_4$ es $A_4 \cap D_8$ y obviamente se tiene que $D_8 / A_4 \cap D_8$ centraliza a $A_4 \cap D_8 / A_4 \cap D_8$ por tanto la condición c) de la propiedad α se verifica, entonces A_4 pertenece a F.

Recientemente A. Scarselli [8] Demostró los siguientes hechos.

Proposición III.9. Sea p un número

primo, n un número natural, C_n el grupo cíclico de orden p^n y F una clase normal no trivial entonces C_n pertenece a F.

Proposición III.10. Toda clase normal no trivial F contiene el grupo no abeliano de órden p^n y exponente p^{n-1}, dónde p es un primo impar y n un número natural mayor o igual que 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ZAPPA Topics in theory groups, (1982) istituto nazionale di alta matemat

[2] W. GASCHUTZ Classi di fitting nei gruppi fini, istituto matematico U. Dini 197

[3] H. LAUSCH On normal fitting clases, math Z. 130, 67-72 (1973).

[4] P.N. BERGER The smallest normal fitting class revealed proc. London M.S. 42 (1981), 59-86.

[5] COSSEY J.A. BRYCE R.M. A problem in the theory of normal fitting classes M.Z. 14 (1975), 99-110.

[6] G. ZAPPA On the normal classes of finite soluble groups S.S. Math. Hungarica 16 (1981), 175-179.

[7] G. ZAPPA Un'osservazione sulle classi di fitting normali Rend. Acc. Na Lincei, (1981), 70, 1-5.

[8] A. SCARSELLI Sulla intersezione delle classi normali. R.S.F. math. serie VIII, vol LXXIV, fasch 4-19

[9] D. BLESSENOHL W. GASCHÜTZ Ueber normale schonk- und fittingklassen, math Z. 118 1-8 (1970).

[10] B. FISCHER W. GASCHÜTZ HARTLEY Injectoren endlicher auflösbarer gruppen, math. Z. 102, 337, 339 (1967).

[11] G. ZAPPA Su certe classi di fitting normali, Boll. Un. Math. Ital (4) 11, 525-530 (1974).

[12] G. ZAPPA Sulla costruzione di classi di fitting, Rend. Acc. Naz. Dei Lincei, (8), 52, 725, 727 (1977).