UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO.

FACULTAD DE CIENCIAS.

T I E M P O D E R E L A J A M I E N T O D E U N S I S T E M A E S T E L A R.

-oOo-

TESIS que presenta

FERNANDO ALBA ANDRADE.

para obtener el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS FISICAS.

MEXICO. D. F.

1943.

AGRADECIMIENTOS.

Quiero expresar mi más profundo y sincero agradecimiento al Dr. Manuel Sandoval Vallarta por sus valiosas sugestiones, y su entusiasta estímulo; al Sr. Luis Enrique Erro por su generosa ayuda, y por haber permitido que esta tesis se desarrollara en el Observatorio Astrofísico de Tonanzintla, a su digno cargo; al Dr. Joaquín Gallo por haber tenido la amabilidad de discutir en detalle este trabajo, y de hacer importantes observaciones; y al Dr. Carlos Graef por su constante y entusiasta ayuda.

-oOo-

B I B L I O G R A F I A.

1.- Astronomy and Cosmogony. Autor J. Jeans. Cambridge 1929.

2.- Principles of Stellar Dynamics. Autor S. Chandrasekhar. The University of Chicago Press. 1942.

3.- Stellar Statistik. E. V. D. Pahlen. 1937.

4.- Stellar Dynemics. W. M. Smart. Cambridge. 1938.

5.- The Astrophysical Journal.

Marzo de 1941. (Vol. 93, No. 2)

Nov. de 1941. (Vol. 94. No. 3)

Marzo de 1943. (Vol. 97. No. 2)

Los Artículos anteriores són de S. Chandrasekhar.

INTRODUCCION.

El presente trabajo, pertenece a la rama de la astronomía moderna llamada "Dinámica Estelar".

Esta disciplina científica se ocupa de la distribución de materia y movimientos de un sistema estelar. Entenderemos por sistema estelar, a una agrupación importante de estrellas, esta materia se ocupa entonces del estudio de los movimientos de nuestra Galaxia, de las galaxias exteriores, y de los cúmulos estelares.

Por galaxia entenderemos una agrupación muy importante de estrellas del tipo de Andrómeda, El Triángulo, etc. La galaxia en que nosotros nos encontramos, es la llamada Vía Lactea.

En general estos objetos son simétricos, de forma elipsoidal o espiral, pero un 3% son de forma irregular.

La Vía Lactea es de forma discoidal, con fuerte concentración central. El diámetro del disco es de unos 100 000 años luz. Este disco se encuentra sumergido dentro de una esfera del mismo diámetro, en la que se encuentran distribuidos los cúmulos globulares.

Los cúmulos estelares son de dos tipos: cúmulos globulares y cúmulos abiertos.

Cúmulos Globulares.- Son estos aglomeraciones de un número considerable de estrellas, de distribución mas o menos esférica y de gran concentración central. En los cúmulos mas brillantes como ω Centauri, 47 Tucanae, etc. el número de estrellas pasa de 50 000.

Cúmulos Abiertos.- Constan estos de unos cuantos centenares de estrellas, y se encuentran dentro de la galaxia.

La Dinámica Estelar, es de reciente creación; fue desarrollada principalmente por J. C. Kapteyn, K. Schwarzschild, J. H. Jeans, A. S. Eddington y, recientemente ha sido desarrollada -- sistematicamente por S. Chandrasekhar.

Sistema Fundamental de Referencia.

Para un sistema estelar establecido, llamaremos "Sistema - Fundamental de Referencia" a un sistema fijo, que coincida con - el centroide de movimientos de todas las estrellas del sistema.

Si U, V, W, representan las componentes de la velocidad de una estrella en el Sistema Fundamental de Referencia, tendremos que:

$$\sum U = \sum V = \sum W = 0$$

Cuando la suma se extiende a todas las estrellas del sistema.

Sistema Local de Referencia.- Consideremos una región S al - rededor de un punto dado. Las estrellas de esa región definiran un sistema de referencia. Puede suceder que al tender S a 0, obtengamos en el límite un sistema de referencia que sea independiente de la forma en que S tienda a 0. En este caso, este sistema que esta perfectamente definido en ese punto, recibirá el nombre de Sistema Local de Referencia.

Si $U_0(S)$, $V_0(S)$, $W_0(S)$, representan las velocidades del - centroide de movimientos de la región S, respecto al Sistema -- Fundamental de Referencia, necesitamos que:

$$\sum \left[U - U_0(S)\right] = \sum \left[V - V_0(S)\right] = \sum \left[W - W_0(S)\right] = 0$$

cuando la suma debe extenderse a todas las estrellas de la región S.

Se requiere además que $U_0(S)$, $V_0(S)$, $W_0(S)$, tiendan a un límite único cuando S tienda a 0 en cualquier forma

$$\underset{S \to 0}{\text{limite}} \left[U_o(S),\ V_o(S),\ W_o(S) \right] = (U_o,\ V_o,\ W_o)$$

Es evidente que por la discontinuidad del medio, no es posible llevar el límite, sino hasta un volumen relativamente pequño (comparado con las dimensiones del sistema) pero no hasta el grado de que el número de estrellas en el sistema sea insignificante.

En el caso en que U_o, V_o, W_o existan en una región, se dice que estas cantidades definen un campo de movimientos diferenciales.

Las velocidades de una estrella respecto al Sistema Loca de Referencia, las designaremos con las letras u, v, w, y reciben el nombre de velocidades residuales.

$$u = U - U_o, \quad v = V - V_o, \quad w = W - W_o$$

Ley de Schwarzschild.- En la vecindad del sol, con ayuda de los paralajes, movimientos propios y velocidades radiales de las estrellas, podemos tener la distribución de velocidades residuales (u, v, w,), esta distribución está caracterizada por:

a).- En una dirección dada, las componentes de las velocidades están distribuidas al azar.

b).- La velocidad residual media en una dirección dada depende de la dirección de que se trate.

Esto último implica que habrá una dirección en la que la velocidad residual será máxima, a esta se le llama "Dirección de la Corriente Estelar".

Se encuentra además que la distribución de las componentes de la velocidad en una dirección dada, tiene una distribución Gaussiana del tipo

$$\frac{j}{\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-j^2 p^2}$$

En donde "j" es una constante y ρ es la velocidad.

La velocidad residual media, estará dada por:

$$\bar{\rho} = \frac{2j}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-j^2 \rho^2} \rho \, d\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, j}$$

La velocidad residual media es función de la dirección, por lo que "j" tambien lo será.

Habrá una dirección en la que la velocidad residual media sera mínima, y en la realidad esta dirección, está a ángulo recto con la dirección de la Corriente Estelar.

Sean "u" las componentes de las velocidades en la dirección del máximo, "w" las componentes en la dirección del mínimo, y usemos una "v" para indicar las componentes en una dirección normal a las anteriores.

Una función general de distribución que predice una distribución Gaussiana de velocidades en cualquier dirección, es la ley de la Distribución Elipsoidal de las velocidades, debida a Schuarzschild. Nos dice que el número de estrellas cuyas componentes de la velocidad están comprendidas entre u y u+du, v y v+dv, w y w+dw, está dada por:

$$dN = N \frac{j_1 j_2 j_3}{\sqrt{\pi^3}} e^{-j_1^2 u^2 - j_2^2 v^2 - j_3^2 w^2} \, du \, dv \, dw$$

en donde N es el número de estrellas considerado.

Se puede demostrar que la distribución en una dirección dada, definida por los cosenos directores (l,m,n) está dada por:

$$dN(u_1) = N \frac{j_1 j_2 j_3}{\sqrt{\pi}\, a_0} e^{-j_1^2 j_2^2 j_3^2 u_1^2 / a_0} \, du.$$

en donde $a_0 = l^2 j_2^2 j_3^2 + m^2 j_3^2 j_1^2 + n^2 j_1^2 j_2^2$

y $\bar{u}_1^2 = l^2 \bar{u}^2 + m^2 \bar{v}^2 + n^2 \bar{w}^2$

TIEMPO DE RELAJAMIENTO DE UN SISTEMA ESTELAR.

Este concepto fue introducido en la Astronomía por J. H. Jeans, con el objeto de poner una cota superior a la vida de nuestra Galaxia.

J. C. Kapteyn demostró en 1904, que en la vecindad del sol, las velocidades residuales delas estrellas, tenian un marcado favoritismo en una dirección dada.

Después de un tiempo suficientemente grande de interacción entre las estrellas, es fácil ver que las velocidades residuales, deben estar distribuidas de acuerdo con la ley de Maxwell, sin tener direcciones privilegiadas. Jeans concluye de esto, que las estrellas no han estado influenciándose unas a otras, durante un tiempo muy grande.

J. H. Jeans calcula este tiempo haciendo hipótesis que simplifican esencialmente los cálculos. Posteriormente S. Chandrasekhar desarrollo un método con hipótesis que se acercan mas a la realidad para calcular este tiempo de relajamiento.

A continuación veremos el método de S. Chandrasekhar.

Consideremos una pequña región de un sistema estelar dado en la que esta definido un sistema local de referencia.

Pensemos en una estrella de esta región. Debido al campo gravitacional, esta describirá una órbita respecto al sistema local de referencia, que estará dado por $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\text{grad}W$ en donde $\bar{r}$ es el vector de posición, respecto al sistema local de referencia, y W es el potencial gravitacional.

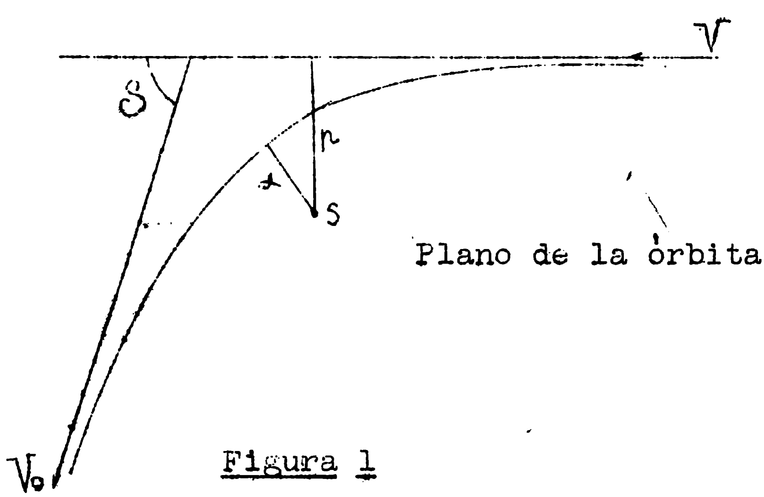
Esta órbita se obtiene suponiendo que no existe influencia entre estrella y estrella, es decir suponiendo a la masa de las demas estrellas dispersada y con su misma distribución de densidades.

El efecto de encuentros entre estrella y estrella, con el tiempo produce cambios notables en la órbita teorica.

El Tiempo de Relajamiento lo definiremos como el tiempo necesario, para que una estrella por efecto de los encuentros tenga la misma probabilidad de desviarse mas o menos de 90° de la òrbita teorica.

Este problema se resuelve usando como aproximación, el problema de los dos cuerpos que veremos a continuación.

<u>Problema de los Dos Cuerpos</u>.- La solución de este problema, nos da en función de <u>p</u> , parametro de impacto, V, velocidad relativa antes del encuentro, y las masas de las estrellas, la desviación de la velocidad relativa en el plano de la órbita



<u>Figura 1</u>

Designemos con $\bar{r}_1$ y $\bar{r}_2$, los vectores de posición de las dos estrellas respecto a un sistema de coordenadas conveniente.

Las ecuaciones Newtonianas del movimiento serán:

$$\frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} = - Gm_2 \frac{\bar{r}_1-\bar{r}_2}{|\bar{r}_1-\bar{r}_2|^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = - G\, m_1 \frac{\bar{r}_2-\bar{r}_1}{|\bar{r}_2-\bar{r}_1|^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Multiplicando (1) por m_1 y (2) por m_2, y sumando obtendremos:

$$m_1 \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Restando (2) de (1), obtendremos

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = -G(m_1 + m_2)\frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^3} \quad \ldots(4)$$

De la ecuación (3), obtenemos imnediatamente:

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = \bar{V}_g(m_1 + m_2) = \text{constante} \ \ldots\ldots\ldots(5)$$

Esto nos dice que el centro de gravedad de los dos cuerpos se mueve con velocidad constante.

Si llamamos $\bar{r}$ y λ a:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_1 - \bar{r}_2 \\ \lambda &= G(m_1 + m_2) \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

La ecuación (4), se transformará en:

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -\lambda\frac{\bar{r}}{r^3} = \lambda\nabla\frac{1}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Multiplicando vectorialmente (7) por $\bar{r}$ encontramos:

$$\bar{r} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

pero

$$\bar{r} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

De la ecuación (9), deducimos que:

$$\bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{h} = \text{constante} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

$\bar{r}$ y $\frac{d\bar{r}}{dt}$ definen el plano de la órbita relativa, y el plano es fijo, puesto que su normal $\bar{h}$ es constante.

La órbita estará dada por la función de Lagrange, en donde

$$\left.\begin{aligned} L &= T + \frac{\lambda}{r} \\ W &= -\frac{\lambda}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11)$$

T es la energía cinética por unidad de masa.

Expresando L en coordenadas polares, obtendremos:

$$L = 1/2\ (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\lambda}{r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Como tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0$$

Aplicándola a la ecuación (12), obtendremos:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r\dot{\theta}^2 - \frac{\lambda}{r^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

La segunda ecuación (13), es equivalente a la ecuación -(10), y de ella obtenemos:

$$r^2\dot{\theta} = h = \text{constante}$$

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Usando esta ecuación (14) con la primera ecuación (13), obtenemos:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\lambda}{r^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

La solución de esta ecuación diferencial, se obtiene --haciendo el cambio de variable $r = \frac{1}{u}$, y la solución obtenida es:

$$\frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{\lambda}{h^2}$$

Si se empieza a contar θ en la dirección en que r es --mínimo, la ecuación se reducirá a:

$$\frac{1}{r} = A\cos\theta + \frac{\lambda}{h^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Como vemos, la ecuación (16), es de una cónica en coordenadas polares.

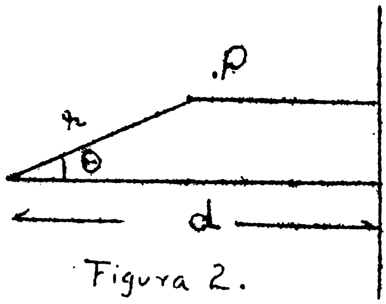


Figura 2.

Por definición de cónica

$$e = \frac{r}{d - r\cos\theta} \quad \text{o bien}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{ed} + \frac{1}{d}\cos\theta \quad \text{..(17)}$$

Comparando las ecuaciones (16) y (17), obtenemos:

$$\frac{1}{ed} = \frac{h^2}{\lambda} \quad ; \quad A = \frac{1}{d} = \frac{eh^2}{\lambda}$$

Por lo que:

$$r = \frac{h^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + e\cos\theta} \quad \text{.................(18)}$$

Ahora bien, es necesario expresar la exentricidad (e), en función de los parámetros que definen el encuentro.

Tenemos las siguientes relaciones:

$$1/2\ V^2 = T - \frac{\lambda}{r} \quad \text{....................(19)}$$

$$h = p\,V \quad \text{......................... ....(20)}$$

En donde "V" es la velocidad relativa al infinito, y "p" es el parámetro de impacto.

Tenemos que:

$$r_o = \frac{h^2}{\lambda}\ \frac{1}{1+e} \quad \text{....................(21)}$$

La ecuación (19), para $r = r_o$, $\dot{r} = 0$, se transforma en coordenadas polares a:

$$1/2\ \frac{1}{r_o^2}\ (r_o^2\ \dot{\theta})^2 - \frac{\lambda}{r_o} = 1/2\ V^2 \quad \text{......(22)}$$

Substituyendo en la ecuación (22), las ecuaciones (14) y (21), obtendremos despues de algunas operaciones:

$$e^2 = 1 + \frac{V^2h^2}{\lambda^2} \quad \text{..........................(23)}$$

Substituyendo h y λ por sus valores, obtenemos:

$$e^2 = 1 + \frac{p^2\ V^4}{G^2(m_1+m_2)^2} \quad \text{.......................(24)}$$

Ahora bien, de la ecuación (18), obtendremos si $r \longrightarrow \infty$

$$1 + e \cos \theta = 0 \quad \text{o bien} \quad \cos \theta = -\frac{1}{e}$$

Si hacemos $\theta = \pi - \psi$ obtendremos:

$$\frac{1}{e} = \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2 V^4}{G^2 (m_1 + m_2)^2}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

La deflexión en el "plano de la órbita" está dada por - $\delta' = \pi - 2\psi$, esta no es la deflexión verdadera, pues esta no se encuentra en general en el plano de la órbita, pero -- nos servirá para calcular la deflexión verdadera que esta dada por la expresión:

$$\frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2'}{v_2 \, v_2'} = \cos \delta \qquad 7$$

La deflexión verdadera sufrida por una estrella, como - resultado de un encuentro.- El problema que se nos presenta es encontrar la deflexión verdadera $\delta = \pi - 2\Psi$ en función de ψ (minuscula), de la δ', y de los otros parametros que intervienen en el encuentro.

Consideremos una estrella S_2 de masa m_2, y de velocidad residual $\bar{v}_2$, que entra en un campo de estrellas.

Los parámetros que definen un encuentro entre la estrella S_2 y la estrella S_1 son:

a) La velocidad residual de S_1 ($\bar{v}_1$).

b) El ángulo θ entre $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$

c) El ángulo azimutal φ de $\bar{v}_1$ referido a un sistema de coordenadas cuyo eje z coincida con $\bar{v}_2$.

d) El parámetro de impacto (p).

e) El ángulo Θ (mayúscula) entre el plano de la órbita y el plano que contenga a $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$.

f) La masa m_1 de la estrella S_1 .

El siguiente diagrama hecho por "Chandrasekhar y ------ Williamson", nos relaciona algunas de estas cantidades.

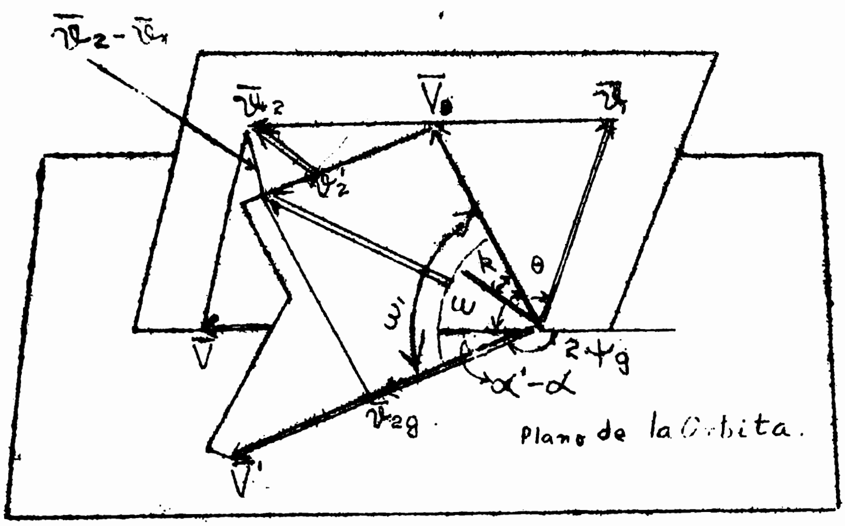


Fig 3.

Algunas relaciones importantes que se obtienen, son:

$$\bar{V}_g = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1+m_2} \quad , \quad \bar{V} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

$$\bar{v}_1 = \frac{m_2\bar{v}_2 - m_2\bar{v}_2 + m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_1}{m_1+m_2} = \frac{m_1\bar{v}_1+m_2\bar{v}_2}{m_1+m_2} - \frac{m_2(\bar{v}_2-\bar{v}_1)}{m_1+m_2}.$$

$$\bar{v}_1 = \bar{V}_g - \frac{m_2}{m_1+m_2}\bar{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

$$\bar{V}_g^2 = \frac{1}{(m_1+m_2)^2}(m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2\cos\theta) \quad \ldots\ldots\ldots (28)$$

$$\bar{V}^2 = \bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

$$\bar{v}_1^2 = V_g^2 - 2\frac{m_2}{m_1+m_2} V V_g \cos\omega + \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 V^2 \quad \ldots.(30)$$

$$2\cos\omega = \frac{m_1+m_2}{V V_g m_2}\left\{ V_g^2 - v_1^2 + \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 V^2 \right\} \ldots(31)$$

Substituyendo V y V_g por sus valores, en la ecuación -(31), obtendremos:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\omega &= \frac{v_1v_2(m_1+m_2)\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{(m_1^2v_1^2+m_2^2+2m_1m_2v_1v_2\cos\theta)(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta)}} \\ \cos\omega &= \frac{m_2v_2^2-m_1v_1^2+v_1v_2(m_1-m_2)\cos\theta}{\sqrt{(m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2+2m_1m_2v_1v_2\cos\theta)(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta)}} \end{aligned}\right\} \ldots.(32)$$

Como hemos visto, la verdadera deflexión de la estrella S_2, está dada por el ángulo que forman los vectores $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_2'$, o sean las velocidades residuales de la estrella antes y después del encuentro:

$$\cos \delta = \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2'}{v_2\ v_2'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(33)$$

De esta expresión, $\bar{v}_2$ es dato, y nos falta encontrar $\bar{v}_2'$. Tenemos que:

$$\bar{v}_{2g} = \bar{v}_2 - \bar{V}_g ; \qquad \bar{v}_{2g}' = \bar{v}_2' - \bar{V}_g$$

Por definición:

$$\bar{V}_g = \frac{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\bar{v}_1' + m_2\bar{v}_2'}{m_1+m_2}$$

Substituyendo en la ecuaciones anteriores el resultado anterior, obtenemos:

$$\bar{v}_{2g} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\ \bar{V} \quad ; \quad \bar{v}_{2g}' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\ \bar{V}' \ldots\ldots(34)$$

$|\bar{V}|$ y $|\bar{V}'|$, son iguales por ser velocidades relativas al infinito, por lo que $|\bar{v}_{2g}| = |\bar{v}_{2g}'|$ por ser $\bar{v}_{2g}$ y $\bar{v}_{2g}'$ amplificaciones iguales de $\bar{V}$ y $\bar{V}'$.

Necesitamos ahora, valuar el producto $\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2'$, de la ecuación (33).

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_2' = \bar{v}_2 \cdot (\bar{v}_{2g}' + \bar{V}_g) = \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_{2g}' + \bar{v}_2\ \bar{V}_g \ldots\ldots\ldots\ldots(35)$$

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{V}_g = v_2 V_g \cos k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(36)$$

Nos falta valuar $\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_{2g}'$ y para eso, necesitamos encontar el ángulo que forman. Usaremos un sistema de coordenadas cartesianas, cuyo eje de las <u>x</u> coincida con $\bar{v}_1$; cuyo eje de las "y", se encuentre en el plano de la órbita, y en el que el eje "z", forme un sistema derecho de coordenadas.

Los cosenos directores de $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_{2g}'$, serán:

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{v}_2 & [\cos(\omega-k);\ -\mathrm{sen}(\omega-k)\cos\Theta\ ;\ \mathrm{sen}(\omega-k)\,\mathrm{sen}\,\Theta] \\ \bar{v}_{2g}' & [\cos(\alpha-\alpha');\ -\mathrm{sen}(\alpha-\alpha')\ ;\ 0] \end{array}\right\} (37$$

pero: $(\alpha' - \alpha) = \pi - 2\Psi$

Por lo que: $\bar{v}'_{2g}\,(\,-\cos 2\Psi\;;\;\operatorname{sen} 2\Psi\;;\;0\,)$ .....(38)

Por lo que:

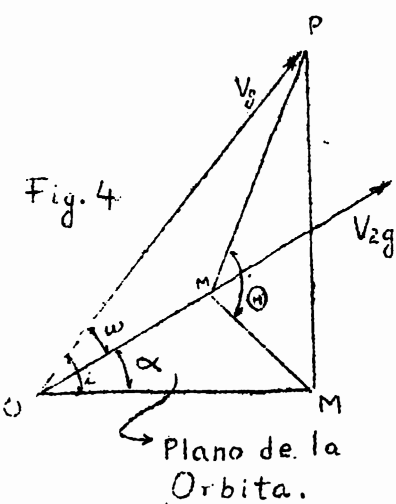
$$-\bar{v}_2\cdot\bar{v}'_{2g} = v_2 v'_{2g}\,(\cos 2\Psi \cos(\omega-k)+\operatorname{sen}2\Psi\,\operatorname{sen}(\omega-k)\cos\Theta\,) \quad \ldots(39)$$

Substituyendo las ecuaciones (39) y (36), en (35), y -- esta a su vez en (33), obtendremos:

$$-\cos\delta = \frac{v_{2g}}{v'_2}\left[\cos 2\Psi\cos(\omega-k)+\operatorname{sen}2\Psi\,\operatorname{sen}(\omega-k)\cos\Theta\right] - \frac{V_g}{v'_2}\cos k \quad (40)$$

Lo único que nos falta, es encontrar el valor de v'_2 y - substituirlo en la fórmula, sustituyendo también , por sus - valores las cantidades V_g, v'_{2g} en función de los parámetros - que definen el encuentro.

Fig. 4



Esta figura nos muestra algunas relaciones que necesitamos - para el cálculo de v'_2.

De una figura semejante a la Fig.(4), y de la Fig.(3), obtenemos:

$$\cos\omega' = \cos\alpha'\cos i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(41)$$

Pero: $\alpha' = \alpha + \pi - 2\Psi$

Por lo que:

$$\cos\omega' = -\cos i\left[\cos\alpha\cos 2\Psi + \operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}2\Psi\right] \ldots\ldots(42)$$

En la Fig. (3), vemos que:

$$\bar{v}'_2 = \bar{v}'_{2g} + \bar{V}_g \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(43)$$

Elevando al cuadrado, encontramos:

$$v_2'^2 = v_{2g}'^2 + V_g^2 + 2v_{2g}V_g \cos\omega' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

De la Fig. (4), podemos obtener estas relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha\cos i &= \operatorname{sen}\omega\cos\Theta \\ \cos\alpha\cos i &= \cos\omega \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

Substituyendo en la ecuación (44), el valor encontrado para ω', o sea la ecuación (42), obtendremos:

$$v_2'^2 = v_{2g}^2 + V_g^2 - 2v_{2g}V_g(\cos 2\psi\cos\alpha\cos i + \operatorname{sen}2\psi\operatorname{sen}\alpha\cos i) \quad \ldots\ldots (46)$$

y por las ecuaciones (45), se transforma en:

$$v_2'^2 = v_{2g}^2 + V_g^2 - 2v_{2g}V_g(\cos 2\psi\cos\omega + \operatorname{sen}2\psi\operatorname{sen}\omega\cos\Theta) \quad \ldots\ldots\ldots (47)$$

Sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} V_g^2 &= \frac{1}{(m_1+m_2)^2}(m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2\cos\theta) \\ \text{de (34),}\quad v_{2g}^2 &= \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Al substituir V_g, v_{2g}, $\operatorname{sen}\omega$, $\cos\omega$, en la ecuación (47 obtendremos:

$$v_2'^2 = \frac{1}{(m_1+m_2)^2}\left\{ \begin{aligned} &(m_1+m_2)^2 v_2^2 - 4m_1\Big[(m_2v_2^2 - m_1v_1^2) + \\ &\qquad + (m_1-m_2)v_1v_2\cos\theta\Big]\cos^2\psi \\ &\qquad -4m_1(m_1+m_2)v_1v_2\operatorname{sen}\theta\cos\Theta\operatorname{sen}\psi\cos\psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots (49)$$

Este era el valor que buscábamos para substituirlo en - la ecuación(40), y obtener:

$$-\cos\delta = \frac{\left[v_{2g}L - V_g\cos k\right](m_1+m_2)}{\sqrt{(m_1+m_2)^2 - M - N}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

en donde:

$$L = \cos 2\psi\cos(\omega-k) + \operatorname{sen}2\psi\operatorname{sen}(\omega-k)\cos\Theta$$

$$M = 4m_1\left[(m_2v_2^2 - m_1v_1^2) + (m_1-m_2)v_1v_2\cos\theta\right]\cos^2\psi$$

$$N = 4m_1(m_1+m_2)\,v_1v_2\operatorname{sen}\theta\cos\Theta\operatorname{sen}\psi\cos\psi$$

De la Fig. (3), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} V\cos(\omega-k) &= v_2 - v_1\cos\theta \\ V\operatorname{sen}(\omega-k) &= v_1\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (51$$

Multiplicando $\bar{V}_g \cdot \bar{v}_2$, obtenemos:

$$V_g \cos k = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1 v_1 \cos \theta + m_2 v_2 \cos \theta) \quad \ldots\ldots(52)$$

Substituyendo v_{2g} por su valor, y usando las ecuaciones (51) y (52), y recordando que $\mathrm{sen}^2\delta = 1 - \cos^2\delta$ obtenemos:

$$\mathrm{sen}^2\delta = 4m_1^2\cos^2\psi \, \frac{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2 \cos \theta - R^2}{(m_1+m_2)^2 v_2^2 - M - N} \quad \ldots\ldots(53)$$

en donde:

$$R = (v_2 - v_1\cos\theta)\cos\psi + v_1 \mathrm{sen}\theta \cos\Theta \, \mathrm{sen}\,\psi$$

Puesto que las deflexiones en el plano de la órbita, -- van a ser muy pequeñas, $(\pi - 2\psi \doteq 0 \;;\; \psi \doteq \frac{\pi}{2})$ podemos encon-- trar una fórmula mas sencilla, y bastante aproximada para -- $\mathrm{sen}^2\delta$.

$$\mathrm{sen}^2\delta = \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2 v_2^2}\,(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta - v_1^2\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\Theta)\cos^2\psi \,.(54$$

o bien:

$$\mathrm{sen}^2\delta = \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2 v_2^2}\left[(v_2-v_1\cos\theta)^2 + v_1^2 \mathrm{sen}\,\theta\cos\Theta\right]\cos^2\psi \quad \ldots(55)$$

<u>Número de Encuentros</u>.- Necesitamos conocer el número de encuentros caracterizados por $(v_1, \theta, \varphi, p, \Theta)$, que se efectuan en el intervalo de tiempo dt.

Sean $N(v_1, \theta, \varphi)\, dv_1\, d\theta\, d\varphi$, el número de estrellas por unidad de volumen, con velocidades entre $(v_1,\ v_1+dv_1)$ y en la dirección comprendida en el elemento de ángulo solido -- $\mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi$.

El número de encuentros buscado, estará dado por la siguiente expresión:

$$N(v_1, \theta, \varphi)\, dv_1\, d\theta\, d\varphi \frac{d\Theta}{2\pi}\, 2\pi\, p\, dp\, V\, dt \quad \ldots\ldots\ldots(56)$$

Ahora bien, definimos el* <u>tiempo de relajamiento</u>, como - el tiempo que debe transcurrir para que la estrella S_2 se -- desvie de su órbita teórica, en promedio, un ángulo de $\pi/2$.

ción (55), obtendremos:

$$\left.\begin{aligned} \text{Cont.}\sum \operatorname{sen}^2 \delta\,(v_1,\theta,\varphi,\Theta) &= 8\pi N(v_1,\theta,\varphi)G^2m_1^2\,\frac{1}{V^3v_2^2} \\ &\times\left[(v_2-v_1\cos\theta)^2+v_1^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\Theta\right] \\ &\times\int\frac{\operatorname{sen}\psi\,d\psi}{\cos\psi}\,\frac{d\Theta}{2\pi}\,dv_1d\theta d\varphi\,dt \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Es evidente que esta integral diverge logarítmicamente cuando $\psi\to\pi/2$, esto se debe naturalmente, a lo inapropiado que es el uso del problema de los dos cuerpos en este caso, pues al comenzar un encuentro, este ya se encuentra perturbado por otros encuentros.

Lo que se hace en este caso, es considerar como decisivos, los que se producen por encuentros cercanos, y así los llamaremos cuado p sea menor que la distancia media entre las estrellas, a esta cantidad la designaremos con "p_o"; para encuentros mas lejanos, no es posible usar el problema de los dos cuerpos, ni como una burda aproximación, y es mas razonable considerar, que estos encuentros lejanos, se nulifican unos con otros.

Integremos desde $\psi=0$, hasta $\psi=\psi_0$, definido este último por el valor $p = p_o$.

$$\begin{aligned} \text{Cont.}\sum \operatorname{sen}^2 \delta\,(v_1,\theta,\varphi,\Theta) &= 4\pi N(v_1,\theta,\varphi)G^2m_1^2\,\frac{1}{v_2^2V^3} \\ &\times\left[(v_2-v_1\cos\theta)^2+v_1^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\Theta\right] \qquad (63) \\ &\times\log\left[1+\frac{p_o^2V^4}{G^2(m_1+m_2)^2}\right]\frac{d\Theta}{2\pi}\,dv_1d\theta d\varphi\,dt \end{aligned}$$

b) <u>Integración sobre</u> Θ.

Esta integración es inmediata, y obtendremos:

$$\left.\begin{aligned}\text{Cont.}\sum \operatorname{sen}^2\delta_{(v_1,\theta,\varphi)} &= 4\pi N(v_1,\theta,\varphi)G^2m_1^2\,\frac{1}{V^3v_2^2}\\ &\times\left[(v_2-v_1\cos\theta)^2+(1/2)v_1^2\operatorname{sen}^2\theta\right]\\ &\times\log\left[1+\frac{p_o^2V^4}{G^2(m_1+m_2)^2}\right]dv_1d\theta d\varphi dt\end{aligned}\right\}\quad(64)$$

Las integraciones posteriores, no pueden efectuarse antes de conocer la forma de la función $N(v_1,\theta,\varphi)$. Esta función, es en realidad elipsoidal y es también función del --- tiempo, debido a los encuentros entre estrella y estrella.

A este respecto, J. Jeans supone una distribución tubular por simplificacion, y S. Chandrasekhar la supone esférica.

En este caso por no haber direcciónes privilegiadas, y por definición de lo que es $N(v_1,\theta,\varphi)$, tendremos:

$$N(v_1,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\,N(v_1)\operatorname{sen}\theta \;..............(65)$$

y $$N(v_1) = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\,N\,e^{-h^2v_1^2}\;v_1^2 \;...............(66)$$

recordando que: $$V^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta \;...........(67)$$

Substituyendo estas ecuaciones (65),(66) y (67), en -- la ecuación (64), podemos efectuar las integraciones posteriores.

<u>Integración respecto a φ</u>.- Esta integral es inmediata y se obtiene:

$$\begin{aligned}\text{Cont.}\sum \operatorname{sen}^2\delta_{(v_1,\theta)} &= 2\pi N(v_1)G^2m_1^2\,\frac{1}{V^3v_2^2}\operatorname{sen}\theta\\ &\times\left[(v_2-v_1\cos\theta)^2+(1/2)v_1^2\operatorname{sen}^2\theta\right]\\ &\times\log\left[1+\frac{p_o^2V^4}{G^2(m_1+m_2)^2}\right]dv_1d\theta dt\end{aligned}\qquad(68)$$

<u>Integración respecto a θ</u>.- Esta integración se puede -- efectuar directamente. Conservando únicamente los terminos mas importantes, se llega a la ecuación siguiente:

$$\text{Cont.}\sum \operatorname{sen}^2\delta_{(v_1)} = \frac{8\pi G^2 m_1^2 N(v_1)}{3v_2^3}\, dv_1\, dt \times \left\{ \begin{array}{ll} (3-v_1^2/v_2^2)\log \dfrac{p_0 v_2^2}{G(m_1+m_2)} & (v_2 \gg v_1) \\ (2v_2/v_1)\log \dfrac{p_0 v_2^2}{G(m_1+m_2)} & (v_2 \ll v_1) \end{array} \right\} \quad (6$$

<u>Integración respecto a v_1</u>.- Para efectuar esta integración, necesitamos substituir $N(v_1)$ por su valor, y descomponer la integral en dos; una de 0 a v_2, y la otra de v_2 a ∞.--

Si hacemos $hv_2 = x_0$, obtendremos:

$$\sum \operatorname{sen}^2\delta = \frac{8\pi NG^2 m_1^2}{3v_2^3} \left\{ \frac{4x_0^3}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{v_2} \left(3-\frac{v_1^2}{v_2^2}\right) \frac{v_1^2}{v_2^2} e^{-\left(\frac{x_0 v_1}{v_2}\right)^2} dv_1 + 2\int_{v_2}^{\infty} \frac{v_1}{v_2} e^{-\left(\frac{x_0 v_1}{v_2}\right)^2} dv_1 \right] \log q v_2^2 \; dt \right\} \quad (70)$$

Que llega a ser:

$$\sum \operatorname{sen}^2\delta = \frac{8\pi NG^2 m_1^2}{v_2^3} H(x_0) \log \frac{p_0 v_2^2}{G(m_1+m_2)} \; dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (71$$

en donde: $$H(x_0) = \frac{1}{2x_0}\left[x_0 \Phi'(x_0) + (2x_0^2-1)\Phi(x_0) \right] \quad \ldots\ldots (72)$$

$\Phi(x_0)$ y $\Phi'(x_0)$, son la función de error y su derivada.

El tiempo de relajamiento de un sistema estelar, viene - dado por la expresión:

$$\int_0^{T_0} \sum \operatorname{sen}^2\delta = \pi^2/4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (73)$$

por lo que:

$$\frac{8\pi NG^2 m_1^2}{v_2^3} H(x_0)\, T_D \log \frac{p_0 v_2^2}{G(m_1+m_2)} = \pi^2/4 \quad \ldots\ldots (74)$$

por lo que: $$T_D = \frac{\pi v_2^3}{32 NG^2 m_1^2 H(x_0) \log\left[p_0 v_2^2/G(m_1+m_2)\right]} \quad \ldots\ldots (75)$$

Podemos aplicar esta fórmula al caso de nuestra Galaxia, en la que usaremos los datos que tenemos para el sistema local, y por ejemplo como velocidad residual de la estrella S_2, la que tiene el sol, que es de 20 km./s., y que es una velocidad media.

Los valores que usaremos serán: $N = .1$ parsec^{-3}.
$p_o = 2.5$ parsecs; $m_1 = .5$ masas solares; $v_2 = 20$ km./s. -----
$j = .032$ seg/km.

El tiempo de relajamiento encontrado con estos datos es:

$$T_D = 2.96\text{x}10^{14} \text{ años} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

<u>Tiempo de Relajamiento de un Sistema Estelar</u>.- Una cota superior, absolutamente segura para la vida de la galaxia, - se obtiene suponiendo un estado inicial, lo mas altamente organizado posible y calculando su tiempo de relajamiento. En este estado inicial, supondremos que todas las estrellas, -- tienen sus velocidades residuales en una misma dirección, -- unas en un sentido, y otras en el contrario y, supondremos - que tienen una distribución Maxwelliana.

Debido a los encuentros, esta distribución pronto se -- transformará en una distribución elipsoidal, siendo el elipsoide muy alargado y teniendo los ejes menores iguales; es - decir habrá simetría circular. La distribución inicial puede considerarse tambien como elipsoidal, pero con dos ejes - nulos. Con el tiempo, el eje principal del elipsoide irá - disminuyendo, y los menores irán aumentando hasta tender --- asintóticamente a una distribución esférica.

Si pensamos en una estrella S_2, esta tendrá inicialmente una velocidad residual que coincide con el eje principal del elipsoide, y esta velocidad se apartará de esa dirección en un tiempo T_D en promedio un ángulo de 90°.

Plantearemos el problema con hipótesis que probablemente se acerque mas a la realidad física.

Nuevas Hipótesis.	Hipótesis de S. Chandrasekhar.
a) Es válida la aproximación del problema de los 2 cuerpos.	a) Es válida la aproximación del problema de los 2 cuerpos.
b) La distribución de velocidades es elipsoidal.	b) La distribución de velocidades es esférica.
c) Esta distribución cambia con el tiempo.	c) Esta distribución es constante.
d) La velocidad residual de la estrella S_2, gira con velocidad angular constante, un ángulo de $\pi/2$ en un tiempo T .	

La distribución de velocidades será en el eje principal del elipsoide:

$$\frac{j_2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-j_2^2 w^2} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

y en los dos ejes iguales con los que formamos un sistema de referencia tendremos:

$$\frac{j_1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-j_1^2 u^2} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{j_1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-j_1^2 v^2} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

en donde j_1 y j_2 serán funciones del tiempo y deben satisfacer las condiciones iniciales y finales del problema.

La ley de Schwarzschild nos dá en un momento dado el número de estrellas con velocidades entre (u y u+du), ----- (v y v+dv), (w y w+dw).

$$dN = N\,\frac{j_1^2 j_2}{\sqrt{\pi^3}}\, e^{-j_1^2(u^2+v^2)-j_2^2 w^2}\; dudvdw \quad\ldots\ldots\ldots(4)$$

El elipsoide se obtiene haciendo el exponente de "e", - constante.

Supongamos que $1/j_1$ y $1/j_2$ son funciones lineales del tiempo.

Necesitamos conocer los valores iniciales y finales de j_1 y j_2. Como estamos tratando que nuestro problema se acerque lo mas posible a las condiciones que existen en nuestra Galaxia, en la vecindad del sol, debemos terminar con una distribución esférica que tenga $(1/j_1)_f = 30$km./s, y también $(1/j_2)_f = 30$km./s., pues la distribución elipsoidal del sistema local, terminará en una distribución esférica que aproximadamente tendrá esa constante.

Por las condiciones iniciales del problema, se requiere que:

$$(1/j_1)_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Nos falta determinar el valor de $(1/j_2)_i$, que será de lo que nos ocuparemos a continuación.

Inicialmente, tenemos que el número de estrellas con velocidades entre (w y w+dw), está dado por la siguiente expresión:

$$dN = N \frac{(j_2)_i}{\sqrt{\pi}} e^{-(j_2)_i^2 w^2} dw \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

La energía cinética inicial será:

$$E = \frac{N(j_2)_i}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(j_2)_i^2 w^2} w^2 \, dw \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Como la distancia media entre las estrellas del sistema local, se conserva constante, misma hipótesis que hacen J. Jeans y S. Chandrasekhar; la energía cinética inicial del sistema será igual a la energía cinética final.

Después de haber transcurrido el tiempo de relajamiento, la distribución de velocidades estará dada por la función:

$$N \frac{(j_2)_f^3}{\sqrt{\pi^3}} 4\pi \, e^{-(j_2)_f^2 V^2} V^2 \, dV \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

La energía cinética del sistema será:

$$E = \frac{N(j_2)_f^2}{\sqrt{\pi^3}} 4\pi \int_0^{\infty} e^{-(j_2)_f^2 V^2} \cdot V^4 dV \text{ ....(9)}$$

Si hacemos $(j_2)_f\, V = y$, e integramos por partes, obtenemos:

$$E = \frac{6N}{\sqrt{\pi}\,(j_2)_f^2} \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^2\, dy \text{ ....(10)}$$

Si en la ecuación (7) hacemos, $(j_2)_i V = y$, obtenemos:

$$L = \frac{N}{\sqrt{\pi}\,(j_2)_i^2} \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^2\, dy \text{ ....(11)}$$

De las ecuaciones (10) y (11), deducimos inmediatamente que:

$$(j_2)_f = 2.45\,(j_2)_i \text{....................(12)}$$

Substituyendo el valor de $(j_2)_f$, encontramos que ---- $1/(j_2)_i = 73.5$ km./s.

Con los valores obtenidos para $(1/j_1)_i$, $(1/j_1)_f$, $(1/j_2)_i$ y $(1/j_2)_f$, y con la suposición de que son estos funciones - lineales del tiempo, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} 1/j_1 &= 30t/T_D \text{ ....} \\ 1/j_2 &= 73.5\,(1-.59t/T_D) \text{ ....} \end{aligned}\right\} (13)$$

Los desarrollos que tenemos que hacer, son exactamente iguales a los de S. Chandrasekhar, hasta el momento que tengamos que elegir una función de distribución. En vez de usar a la función $N(v_1, \theta, \varphi)$ debemos usar otra del tipo $N(v_1, \theta, \varphi, t)$ pues por las nuevas hipótesis, la distribución elipsoidal - es función del tiempo.

El número de encuentros caracterizados por $(v_1, \theta, \varphi, p, \Theta, t)$ que se efectuan en el intervalo de tiempo dt, y cuyas velocidades estén comprendidas en el ángulo sólido $\operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi$, será:

$$N(v_1, \theta, \varphi, t,)\, dv_1\, d\theta\, d\varphi\, \frac{d\Theta}{2\pi}\, 2\pi\, p\, dp\, V\, dt \text{ ....(14)}$$

La contribución de el número de encuentros a la suma ---

$\sum \operatorname{sen}^2\delta$, será:

$$\left.\begin{aligned}\text{Cont.}\sum \operatorname{sen}^2\delta_{(v_1,\theta,\varphi,p,\Theta,t)} &= 2\pi N(v_1,\theta,\varphi,t)\operatorname{sen}^2\delta\ V\\ &\quad x p\ dp\ \frac{d\Theta}{2\pi}\ dv_1 d\theta d\varphi\, dt\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

en la que:

$$\operatorname{sen}^2\delta = \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2 v_2^2}\left[(v_2-v_1\cos\theta)^2+v_1^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\Theta\right]\cos^2\psi$$

La integración sobre los parámetros "p" y "Θ", es inmediata e idéntica a la hecha en el capítulo anterior, y obtenemos:

$$\begin{aligned}\text{Cont}\sum \operatorname{sen}^2\delta_{(v_1,\theta,\varphi,t)} &= 4\pi N(v_1,\theta,\varphi,t)G^2 m_1^2\ \frac{1}{V^3 v_2^2}\\ &\quad x\left[(v_2-v_1\cos\theta)^2+\frac{1}{2}\ v_1^2\operatorname{sen}^2\theta\right] \qquad (16)\\ &\quad x\log\left[1+\frac{p_0^2V^4}{G^2(m_1+m_2)^2}\right]dv_1 d\theta d\varphi\, dt\end{aligned}$$

La función de distribución $N(v_1,\theta,\varphi,t)$ depende del --- tiempo por dos cosas, una de ellas es debido a que el elipsoi de irá tendiendo hacia una configuración esférica, con el -- tiempo; la otra es porque el eje principal del elipsoide, -- irá girando respecto a la velocidad $\bar{v}_2$, un ángulo $\pi/2$, en - promedio, en un tiempo T_p.

Es evidente que nos conviene cambiar de sistema de coor denadas, eligiendo uno que tenga como eje z, la dirección - del eje principal del elipsoide; en vez de θ y φ que teníamos en el sistema anterior, tendremos ahora "c" y "λ".

Supongamos que $\bar{v}_2$ gira sobre el plano (z,x), con una velocidad angular constante, de manera que:

$$\xi = \frac{\pi}{2T_p}\ t \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

ξ es el ángulo que la velocidad $\bar{v}_2$, forma con el eje -- principal del elipsoide.

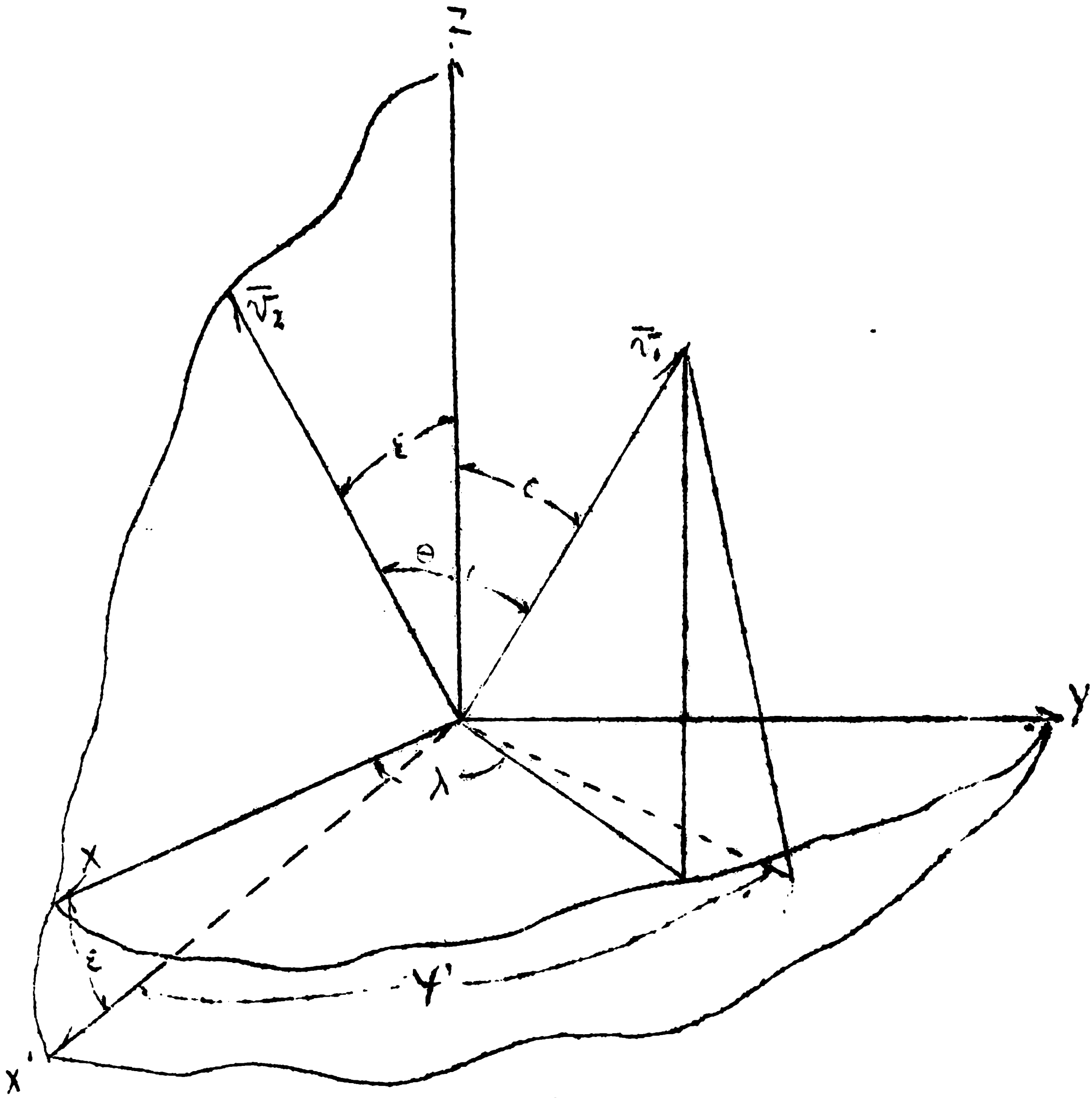


Fig. 5

De la figura (5) podemos obtener las relaciones entre ---
θ, ψ' y c, λ, ε.

Sean los cosenos directores de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, los siguientes:

$\bar{v}_1$ (cos a, cos b, cos c)

$\bar{v}_2$ (sen ε, 0, cos ε)

por lo que: $\cos\theta = \operatorname{sen}\varepsilon \cos a + \cos\varepsilon \cos c$ ....(17)

pero:

$$\left.\begin{array}{l}\cos a = \operatorname{sen} c \cos\lambda \\ \cos b = \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\lambda\end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

por lo que:

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\mathcal{E} \operatorname{sen} c \cos\lambda + \cos\mathcal{E}\cos c \qquad \ldots\ldots\ldots(19)$$

Ya tenemos $\cos\theta$, expresado en función de las nuevas variables $(c, \lambda, \mathcal{E})$; nos falta encontrar φ en función de las mismas variables.

En la figura, φ es el ángulo que forman los planos (x,z) y el formado por los vectores ($\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$).

$$\left.\begin{array}{l}\text{El vector unitario, normal a el plano } (x,z) \text{, es } \quad "j" \\ \text{El vector unitario, normal al plano } (\bar{v}_1, \bar{v}_2) \text{ es } \dfrac{\bar{v}_1 x \bar{v}_2}{v_1 v_2 \operatorname{sen}\theta}\end{array}\right\} \qquad (20)$$

en donde:

$$\left.\frac{\bar{v}_1 x \bar{v}_2}{v_1 v_2 \operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left[i\cos b \cos\mathcal{E} + j(\cos c \cos\mathcal{E} - \cos a \cos\mathcal{E}) - k\cos b \operatorname{sen}\mathcal{E}\right]\right\} \ldots\ldots(21)$$

El ángulo φ lo encontramos multiplicando escalarmente, j por la ecuación (21).

$$\cos\varphi = \frac{\cos c \cos\mathcal{E} - \cos a \cos\mathcal{E}}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

Que por la ecuación (18), se transforma en:

$$\cos\varphi = \frac{\cos c \cos\mathcal{E} - \operatorname{sen} c \cos\lambda \cos\mathcal{E}}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23)$$

También podemos calcular φ, multiplicando vectorialmente los vectores unitarios.

$$\operatorname{sen}\varphi = \left| i\frac{\operatorname{sen}\mathcal{E}\cos b}{\operatorname{sen}\theta} + k\frac{\cos b \cos\mathcal{E}}{\operatorname{sen}\theta}\right|$$

de donde:

$$\operatorname{sen}^2\varphi \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2 b$$

por la ecuación (18)

Ya en posesión de estas fórmulas podemos claoular el Jacobiano, para expresar ($d\theta d\varphi dt$) en función de (c, λ, t)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial c} & \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} & \frac{\partial\theta}{\partial t} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial c} & \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dc\, d\lambda\, dt = d\theta\, d\varphi\, dt$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial c}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) dc\, d\lambda\, dt = d\theta\, d\varphi\, dt \ldots (25)$$

De las expresiones encontradas anteriormente; ecuaciones (23) y (24); derivandolas primero respecto a "c" y despues respecto a "λ", obtendremos:

$$A = \operatorname{sen}\varepsilon\, \operatorname{sen}c + \cos c \cos\lambda \cos\varepsilon = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \frac{\partial\varphi}{\partial c} + \cos\varphi \cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial c}$$

$$B = \cos c \operatorname{sen}\lambda = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \frac{\partial\varphi}{\partial c} + \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial c}$$

$$C = -\operatorname{sen} c \operatorname{sen}\lambda \cos\varepsilon = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \cos\varphi \cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}$$

$$D = \operatorname{sen} c \cos\lambda = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}$$

Resolviendo las ecuaciones(26), obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial c} &= \frac{B\cos\varphi - A\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta} \\ \frac{\partial\theta}{\partial c} &= \frac{A\cos\varphi + B\operatorname{sen}\varphi}{\cos\theta} \\ \frac{\partial\theta}{\partial\lambda} &= \frac{C\cos\varphi + D\operatorname{sen}\varphi}{\cos\theta} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} &= \frac{D\cos\varphi - C\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

De lo anterior, encontramos después de hacer algunas simplificaciones:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial c}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) = \frac{A\times D - B\times C}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}$$

Por lo que:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial c}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}-\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right)=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon\,\operatorname{sen}^2 c\,\cos\lambda+\operatorname{sen}c\,\cos c\cos\varepsilon}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

Substituyendo cosΘ por su valor, encontramos:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial c}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}-\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right)=\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen}\theta}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(28)$$

Esto es:

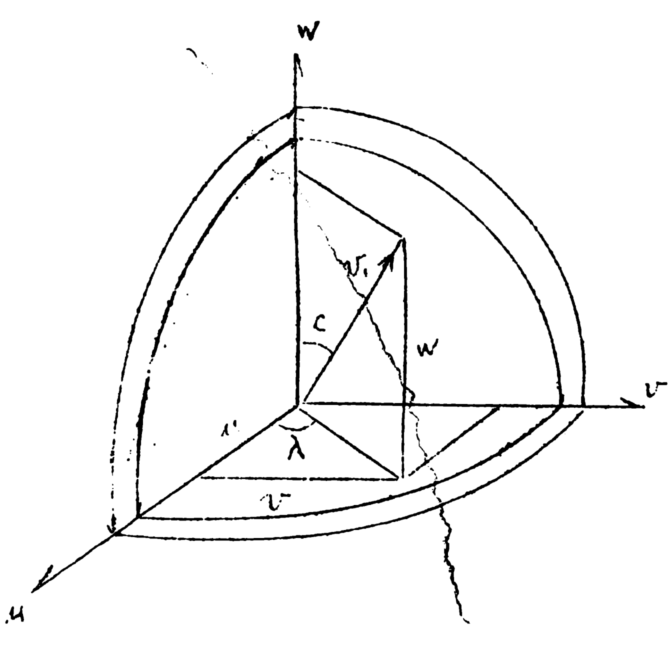
$$dc\,d\lambda\,dt\,\operatorname{sen} c = d\theta\,d\varphi\,dt\,\operatorname{sen}\theta\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(29)$$

Ahora necesitamos saber el número de estrellas, con velocidades entre (v_1, y v_1+dv_1), comprendidas en el ángulo sólido senθ dθ dφ.

El número de estrellas con velocidades entre (u y u+du), - (v y v+dv), (w y w+dw), está dado por la ley de Schwarzschild.

$$dN = N\frac{j_1^2\,j_2}{\sqrt{\pi^3}}\,e^{-j_1^2(u^2+v^2)-j_2^2w^2}\,du\,dv\,dw\ \ldots(30)$$

Considerando el espacio fase, con ejes "u, v, w," podemos encontrar el número de estrellas con velocidades entre ----- (v_1 y v_1 + dv_1), en el ángulo sólido sen c dλ dc=senθ dθ dφ.



$$\left.\begin{aligned} u &= v_1 \operatorname{sen} c \cos\lambda\\ v &= v_1 \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\lambda\\ w &= v_1 \cos c\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

Tenemos que el elmento de volumen, está dado por:

$$du\,dv\,dw = v_1^2\,dv_1\,\mathrm{sen}\,c\,dc\,d\lambda \qquad (32)$$

Por lo que el número de estrellas con velocidades entre - (v_1 y v_1+dv_1), en la dirección del ángulo sólido sen c dc $d\lambda$, estará dado por:

$$N\,\frac{j_1^2\,j_2}{\sqrt{\pi^3}}\,e^{-j_1^2\,\mathrm{sen}^2c\,v_1^{2}-j_2^2\cos^2c\,v_1^{2}}\,v_1 dv_1 \mathrm{sen}\,c\,dc\,d\lambda \qquad (33)$$

Considerando esta función de distribución, la ecuación -- que nos suministrará el tiempo de relajamiento, será:

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Cont}\sum \mathrm{sen}^2\delta(v_1,c,\lambda,t) &= 4\pi N\,\frac{j_1^2 j_2}{\sqrt{\pi^3}}\,e^{-j_1^2 v_1^2\mathrm{sen}^2c-j_2^2 v_1^2\cos^2c}\\ &\times G^2m_1^2\,\frac{1}{V^3v_2^2}\left[(v_2-v_1\cos\theta)^2+\frac{v_1^2\mathrm{sen}^2\theta}{2}\right]\\ &\times\log\left[1+\frac{p_0^2V^4}{G^2(m_1+m_2)^2}\right]v_1^2dv_1dc\,\mathrm{sen}\,c\,d\lambda\,dt\end{aligned}\right\}(34)$$

Recordando que después de haber efectuado las integraciones $\sum\mathrm{sen}^2\delta=\pi^2/4$; y pasando al mienbro izquierdo lo que permanece constante, al integrar obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}\frac{v_2^2\sqrt{\pi^5}}{.4343\times128NG^2m_1^2} &= \int_{t=0}^{T_0}\int_{\lambda=0}^{\pi/2}\int_{c=0}^{\pi/2}\int_{v_1=0}^{\infty} j_1^2 j_2\,e^{-j_1^2v_1^2\mathrm{sen}^2c-j_2^2v_1^2\cos^2c}\\ &\times\frac{1}{V^3}\left[(v_2-v_1\cos\theta)^2+\frac{v_1^2\mathrm{sen}^2\theta}{2}\right]\\ &\times\log_{10}(1+qV^4)\,v_1^2dv_1\,\mathrm{sen}\,c\,dc\,d\lambda\,dt\end{aligned}\right\}(35)$$

o bién:

$$\left.\begin{aligned}\frac{v_2^2\sqrt{\pi^5}}{.4343\times128NG^2m_1^2} &= \int_{t=0}^{T_0}\int_{\lambda=0}^{\pi/2}\int_{c=0}^{\pi/2}\int_{v_1=0}^{\infty} j_1^2 j_2\,e^{-j_1^2v_1^2\mathrm{sen}^2c-j_2^2v_1^2\cos^2c}\\ &\times\frac{1}{V^3}\left(V^2-\frac{v_1^2\,\mathrm{sen}^2\theta}{2}\right)\\ &\times\log_{10}(1+qV^4)\,v_1^2dv_1\,\mathrm{sen}\,c\,dc\,d\lambda\,dt\end{aligned}\right\}(36)$$

En esta ecuación todos los datos són conocidos, excepto el último límite T_D, que es lo que tratamos de encontrar.

En la ecuación (36), (θ, V, q), están definidos por las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} V^2 &= v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos\theta \\ q &= \frac{p_0^2}{G^2(m_1+m_2)^2} \\ \cos\theta &= \operatorname{sen}\xi \operatorname{sen} c \cos\lambda + \cos\xi \cos c \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

La solución de la ecuación (36), se efectua por integración numérica, dibujando las curvas correspondientes y encontrando - las areas, con planímetro.

Las 12 primeras gráficas, corresponden a la integración - respecto a "v_1". Las gráficas (13a, 13b, 14a, 14b), corres--- ponden a la integración respecto a "c", Las gráficas (15a, 15b) corresponden a la integración respecto a "λ". La grafica (16) nos representa la integracion respecto al tiempo.

Las tablas, (1a, 1b, 1c, 1d), són los resultados obtenidos al integrar respecto a "v_1", la tabla (2), nos representa el resultado de la integración respecto a "c", la tabla (3), nos representa la integracion respecto a "λ".

El area de la figura (16), tiene un valor de 1225 $T_D \times 10^{-10}$, este valor, es el resultado de todas las integraciones, y podemos substituirlo en la ecuación (36), obteniendo el siguiente - resultado, para los mismos datos usados por S. Chandrasekhar.

$$T_D = .95 \times 10^{14} \text{ años.}$$

Este resultado es menor que el obtenido por S. Chandrasekhar (2.96×10^{14} años), y está de acuerdo con la Escala Corta del Universo.

-oOo-

Resultado de la integración respecto a "v_1".

$I \times 10^{10}$

$c \backslash \lambda$	0°	30°	60°	90°
0°	0	0	0	0
30°	155	163	236	384
60°	171	228	269	342
90°	196	212	228	285

Tabla 1a.

$t/T_D = .25$

$I \times 10^{10}$

$c \backslash \lambda$	0°	30°	60°	90°
0°	0	0	0	0
30°	856	832	905	983
60°	147	220	334	669
90°	343	375	620	603

Tabla 1b.

$t/T_D = .50$

$c \backslash \lambda$	0°	30°	60°	90°
0°	0	0	0	0
30°	889	938	938	1044
60°	667	620	710	1093
90°	383	514	742	881

Tabla 1c.

$t/T_D = .75$

$I \times 10^{10}$

$I_z 10^{10}$

$c \backslash \lambda$	0°	30°	60°	90°
0°	0	0	0	0
30°	636	587	677	759
60°	889	898	1077	1314
90°	1255	1077	1191	1517

Tabla 1d.

$t/T_D = 1$

Resultado de la integración respecto a "c".

$I \times 10^{10}$

t/T_0 \ c	0°	30°	60°	90°
0	0	0	0	0
.25	231	267	333	467
.50	659	730	908	1104
.75	1086	1033	1158	1514
1	1175	1086	1300	1567

Tabla 2.

Resultado de la integracion respecto a "λ".

$\lambda = 0°$	499
$\lambda = 30°$	1336
$\lambda = 60°$	1817
$\lambda = 90°$	1941

Tabla 3.

$I \times 10^{10}$

Resultado de la integración respecto a "t".

$$\boxed{I = 1225\ T_0 \times 10^{-10}}$$