Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Teorema de preparación de Weierstrass y aplicaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

Daniela Hernández Alcántar

TUTORA

Dra. Jessie Diana Pontigo Herrera

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno
   Nombre: Daniela
   Apellido Paterno: Hernández
   Apellido Materno: Alcántar
   Teléfono: 5526942365
   Universidad: Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad: Facultad de Ciencias
   Carrera: Matemáticas
   Número de cuenta: 312042651
2. Datos del tutor
   Grado: Dra.
   Nombre: Jessie Diana
   Apellido paterno: Pontigo
   Apellido materno: Herrera
3. Datos del sinodal 1
   Grado: Dra.
   Nombre: Adriana
   Apellido paterno: Ortiz
   Apellido materno: Rodríguez
4. Datos del sinodal 2
   Grado: Dr.
   Nombre: Alberto León
   Apellido paterno: Kushner
   Apellido materno:Schnur
5. Datos del sinodal 3
   Grado: Dra.
   Nombre: Laura
   Apellido paterno: Ortiz
   Apellido materno: Bobadilla
6. Datos del sinodal 4
   Grado: Dr.
   Nombre: Javier
   Apellido paterno: Páez
   Apellido materno: Cárdenas
7. Datos del trabajo escrito
   Título: Teorema de preparación de Weierstrass y aplicaciones
   Número de páginas: 87
   Año: 2021

A mi familia y amigos
por su apoyo
en cada momento de mi vida.

Agradecimientos

Le agradezco a mis padres por haberme impulsado a dar lo mejor de mí a lo largo de mi vida académica, a mi papá por motivarme en el estudio, a mi madre por brindarme su cariño y apoyo emocional, a mi hermana por soportarme y ayudarme cuando es necesario, a mi tía Susana por haberme enseñado varias cosas, a Caro por haber sido mi compañera de juegos y locuras en la infancia, a mi Chencha por siempre haberme apoyado y darme tanto cariño y momentos divertidos que siempre recordaré. A Gigi por enseñarme desde pequeña lo divertidas que podían ser las matemáticas y fomentar mi curiosidad y desarrollo mediante rompecabezas y lecturas, a Clarita por su gran cariño. A mi Zafira y Camila por todas las monerías y ocurrencias que hacen, a mi Larry, por estar a mi lado durante toda mi vida académica, por jugar y discutir conmigo, soportar todos los desvelos y pláticas de estudio que tenía con él (aunque probablemente no me entendiera) pero que no pudo ver el final de esta tesis.

A mis amigos, sin ustedes no sería quien soy actualmente, a mis mejores amigas, Diana por apoyarme incondicionalmente durante varios años, Marianita y Yutsil por acompañarme en toda la carrera e impulsarme hacia delante cuando mas lo necesitaba y no dejarme morir en el intento, también les agradezco por todos los momentos de risas y alegrías que pasé, así como todos los desvelos, triunfos y derrotas que existieron en su momento. A Abner, que me ha acompañado a lo largo de todo este proceso brindándome su apoyo y ayudándome a mantener la calma.

A mi Universidad y mi Facultad, que se convirtió en mi segundo hogar, donde conocí a personas invaluables y adquirí bellas memorias.

Me gustaría agradecer a mi familia académica. A Jessie, por haber aceptado dirigir esta tesis y todo su apoyo a lo largo de ésta, a Laura por haberme mostrado la belleza de las explosiones de singularidades y sus maravillosos cursos que me ayudaron a definir hacia qué rama de las matemáticas ir. A Iván, por ser mi hermano de tesis y discutir conmigo dudas y opiniones. A Jessica, Jesús, Oziel, Gil, por escucharme y sugerirme sus opiniones. Gracias a todos ustedes por permitirme ser parte de esta familia.

Les agradezco también a mis sinodales: la Dra. Adriana Ortiz, el Dr. León Kushner, la Dra. Laura Ortiz y el Dr. Javier Páez, por sus correcciones y comentarios, los cuales fueron fundamentales para la culminación de esta tesis.

Por último, agradezco el apoyo a PAPIIT IN106217 por el apoyo recibido para la elaboración de esta tesis.

Con cariño, Daniela.

Índice general

Introducción

Varias áreas de la matemática tienen dentro de sus objetos de estudio a las curvas algebraicas o analíticas, i.e, conjuntos definidos por ceros de polinomios o funciones analíticas, respectivamente. Tal es el caso de la geometría algebraica, o el estudio de foliaciones y la teoría de singularidades, por mencionar algunas. Uno de los aspectos fundamentales a entender en curvas algebraicas (o analíticas) es su comportamiento en vecindades de puntos singulares. Para este propósito han habido numerosos esfuerzos por parte de la comunidad matemática, que van desde trabajos de Newton hasta nuestros días. Durante ese tiempo se han desarrollado varios métodos que permiten mirar con lupa, y escudriñar lo que ocurre, cerca de los puntos singulares de una curva. Entre ellos están el polígono de Newton, las series de Puiseux, la resolución de singularidades, etc. Muchos de estos métodos inicialmente estaban dirigidos sólo a polinomios, y eventualemente se fueron extendiendo para incluir series formales y funciones holomorfas. Sin embargo, estas extensiones necesitaban de un puente que permitiese traducir varios de los resultados de polinomios a series de potencias. Este puente se logra con el teorema de preparación de Weierstrass, el cual reduce muchos argumentos para series de potencias a resultados acerca de polinomios.

Nuestro objetivo en esta tesis es, primeramente, desarrollar la teoría necesaria para llegar al teorema de preparación. El teorema de preparación permite escribir funciones analíticas como polinomios en una variable, donde los coeficientes son series formales analíticas en las demás variables (salvo por un factor llamado unidad) en vecindades de puntos. Con esto, varias de las propiedades que se cumplen en curvas algebraicas se pueden adaptar para el caso analítico local. De este modo, este teorema es uno de los resultados base para el estudio de curvas analíticas.

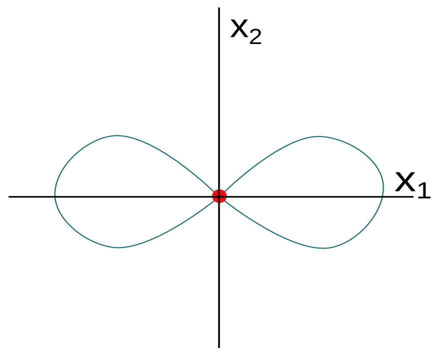
La motivación geométrica para incluir el estudio de conjuntos analíticos[1], se encuentra en que en muchos casos el comportamiento global de una curva (analítica o algebraica) difiere sustancialmente de su comportamiento local, principalmente en vecindades de puntos singulares. Dos ejemplos de esta distinción entre lo local y lo global los podemos observar en la siguientes curvas[2]: en

[1] Ceros de funciones analíticas.

[2] Por claridad haremos los dibujos en el plano real pero a lo largo del texto estaremos siempre considerando polinomios en el contexto complejo.

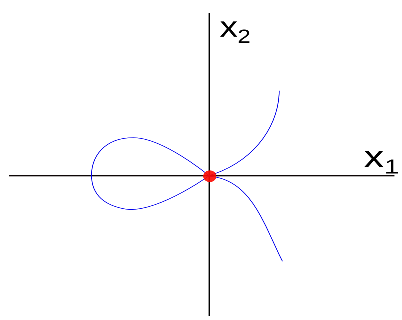
la lemniscata cuyo polinomio es

$$P_1(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2 + x_1^4$$



y en la cúbica de Tschirnhausen (o cúbica nodal), la cual es descrita por el siguiente polinomio irreducible[3]:

$$P_2(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2(x_1 + 1).$$



En ambos casos la curva, como conjunto, es irreducible (ver definición 2.3.5), pero cuando la consideramos únicamente en una pequeña vecindad del origen, podemos observar que se descompone en 2 "*ramas locales*". Si nos mantenemos en el mundo algebraico, es decir, si sólo trabajamos con funciones polinomiales, resultará imposible poder llegar a una expresión que describa a estas dos ramas locales. Es necesario entonces, extender el mundo de funciones a un conjunto que incluya a este tipo de curvas. Para esto incluiremos a las funciones analíticas (es decir, aquellas definidas por series de potencias convergentes en la vecindad

[3]Estos polinomios son irreducibles tanto en los reales como en los complejos. Sin embargo, a lo largo del texto, la noción de irreducibilidad con la que nosotros trabajaremos es sobre los complejos.

de un punto). De este modo, podemos descomponer a los polinomios P_1 y P_2 como:

$$P_1(x_1, x_2) = (x_2 - x_1\sqrt{1 - x_1^2})(x_2 + x_1\sqrt{1 - x_1^2}),$$
$$P_2(x_1, x_2) = (x_2 + x_1\sqrt{x_1 + 1})(x_2 - x_1\sqrt{x_1 + 1}),$$

cada uno de los nuevos factores define una función analítica en una vecindad del origen donde $|x_1| < 1$.

Así, las funciones a elegir dependen del punto de vista de lo que queremos estudiar, en particular nos interesa distinguir entre lo local y lo global. En este texto nos enfocaremos más en el mundo de funciones analítico complejas (o funciones holomorfas, es decir, $\mathbb{C}$-diferenciables en abiertos). El teorema de Weierstrass sirve para identificar al conjunto de ceros de este tipo de funciones de una manera más visual, reduciendo su análisis local al estudio de polinomios.

En este texto, comenzaremos por definir brevemente los elementos algebraicos básicos generales que necesitaremos. Inmediatamente pasaremos a definir los objetos principales de estudio, esto es, los anillos de series formales y series convergentes, y mostraremos varios resultados preliminares que describen algunos aspectos fundamentales de estos espacios. En el capítulo 2 nos enfocaremos en mostrar el teorema de preparación, para ello mostraremos primero el teorema de división de Weierstrass, el cual es igualmente importante en la teoría, ya que proporciona un algoritmo de la división para series de potencias. Entre las aplicaciones del teorema de preparación, también mostraremos en este capítulo el teorema de la función implícita (y su generalización en sistemas de funciones) y el teorema de la función inversa, entre otros resultados útiles como el teorema de continuidad de las raíces. En la última sección de este capítulo, aplicaremos estos resultados para el estudio de ramas locales en vecindades de puntos singulares en curvas analíticas. Dentro de esta sección mostremos el lema de Study y la descomposición en componentes irreducibles locales. Finalmente, en el capítulo 3, como complemento a la teoría, expondremos el método de explosión (o resolución) de singularidades, el cual nos servirá para separar ramas locales en curvas algebraicas, y que ilustraremos en varios ejemplos.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo explicaremos los conceptos fundamentales que se necesitan para abordar el *teorema de preparación de Weierstrass*, que estudiaremos en el siguiente capítulo. Esta teoría se desarrolla dentro del contexto de la geometría algebraica y la geometría analítica local, es decir, el estudio de conjuntos en $\mathbb{C}^n$, definidos por ceros de polinomios o funciones analíticas locales, respectivamente. Con la finalidad de dar más claridad en los conceptos, nosotros nos enfocaremos principalmente en el caso $n = 2$, es decir, curvas en el plano complejo.

Para estudiar curvas planas, solamente se necesitan series de potencias en 2 variables. Por ello, nos restringiremos al caso de dos variables, sin embargo varios de los resultados que aquí se enuncian son de hecho válidos para más variables.

1.1. Nociones de álgebra

En esta sección daremos brevemente algunas definiciones de álgebra elemental, que nos servirán para definir con claridad los conjuntos con los que trabajaremos.

Definición 1.1.1. Sea A un conjunto no vacío, $+$ y $\cdot$ dos operaciones binarias internas en A.

Decimos que una terna $(A, +, \cdot)$ es un *anillo*, si para cada $x, y, z \in A$:

1. $x + y \in A$ ($+$ es cerrada).
2. $x(+y + z) = (x + y) + z$ ($+$ es asociativa).
3. $x + y = y + x$ ($+$ es conmutativa).
4. Existe $v \in A$ tal que $x + v = v + x = x$ (existencia de neutro aditivo para $+$).
5. Existe $w \in A$ tal que $x + w = 0$ (existencia del inverso aditivo para $+$).

6. $x \cdot y \in A$ ($\cdot$ es cerrada).

7. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ($\cdot$ es asociativa).

8. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ y $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (distributividad).

Si además $x \cdot y = y \cdot x$, es decir, el producto $\cdot$ es conmutativo, decimos entonces que el anillo es un *anillo conmutativo*.

Si existiera $b \in A$ tal que $x \cdot b = b \cdot x = x$, es decir, que $\cdot$ tenga elemento neutro multiplicativo, entonces decimos que el anillo es un *anillo con unidad*.

Definición 1.1.2. En un anillo A con identidad multiplicativa 1_A, decimos que un elemento $u \in A$ es *unidad* o *invertible*, si existe $v \in A$ tal que $u \cdot v = v \cdot u = 1_A$.

Más adelante usaremos frecuentemente el término *unidad*, por lo que enfatizamos en que no hay que confundir este término con el de la identidad multiplicativa 1_A, la cual por definición también es una unidad.

Definición 1.1.3. Un anillo conmutativo A es *dominio entero* si no tiene divisores de cero con excepción del 0, esto es, para cada $x \in A$ con $x \neq 0$ no existe $y \neq 0$ tal que $x \cdot y = 0$.

Definición 1.1.4. Sea A un anillo. Un subconjunto I de A es llamado un ideal si:

(i) I es un subgrupo del grupo abeliano $(A, +)$, esto es, I es cerrado bajo la sustracción, es decir, si $a, b \in I$ entonces $a - b \in I$.

(ii) I es cerrado bajo la multiplicación por cualquier elemento del anillo, es decir, si $a \in I, r \in A$ entonces $ar \in I$ y $ra \in I$.

Nótese que si un ideal I contiene una unidad u, entonces $I = A$.

1.2. Anillo de series de potencias

Ahora definiremos los conjuntos específicos sobre los cuales se desarrollará la teoría. El primer conjunto base está dado por series de potencias formales, esto es series de potencias donde no pedimos ninguna condición de convergencia. Éstas por sí mismas permiten desarrollar varios aspectos de la teoría de curvas (aunque ciertamente no tengan un efecto geométrico directo debido a la falta de convergencia). En la siguiente sección agregaremos la noción de convergencia, con la cual recuperamos los objetos geométricos (el conjunto de ceros) definidos por estas funciones. Sea

$$\mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!] := \left\{ f = \sum_{(\nu_1,\nu_2)\in\mathbb{N}^2} a_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} : a_{\nu_1\nu_2} \in \mathbb{C} \right\}, \tag{1.1}$$

éste es el conjunto de series de potencias formales con coeficientes complejos. No es difícil ver que, con las operaciones de suma y producto que a continuación definiremos, este conjunto adquiere una estructura de anillo conmutativo (ver apéndice A).

Usaremos la siguiente notación,

$$\nu := (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{N}^2 \text{ y } x := (x_1, x_2), \text{ sean } |\nu| := \nu_1 + \nu_2 \text{ y } x^\nu := x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2},$$

de este modo $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[\![x]\!]$.

Para $d \in \mathbb{N}$ *la parte homogénea de grado d de f* es

$$f_{(d)}(x) := \sum_{|\nu|=d} a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[x] \tag{1.2}$$

y *la parte polinomial de grado $\leq k$* es

$$f^{(k)} := \sum_{d=0}^{k} f_{(d)} \in \mathbb{C}[x]. \tag{1.3}$$

Con esto, definiremos las operaciones suma y producto de series formales de la siguiente manera:

$$f + g := \sum_{d=0}^{\infty} (f_{(d)} + g_{(d)}), f \cdot g := \sum_{d=0}^{\infty} (\sum_{k+l=d} (f_{(k)} g_{(l)})). \tag{1.4}$$

Nótese que esto define una extensión del anillo de polinomios al anillo de series formales (ver el apéndice A).

Para las series de potencias formales, en contraste con los polinomios, no se puede definir adecuadamente un grado global, pues los grados de los términos pueden tender a infinito. Sin embargo, éstas admiten una medida local, que es dada por el grado más bajo de todos los términos, a esto se le conoce como el *orden de la serie*.

Definición 1.2.1. Para $f \in \mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!]$

$$ord\ f := \begin{cases} min\{d : f_{(d)} \neq 0\} & \text{si } f \neq 0, \\ \infty & \text{si } f = 0. \end{cases}$$

Lema 1.2.2. *Si $f, g \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ entonces:*

(i) ord (f+g) $\geq$ min{ord f, ord g}.

(ii) ord ($f \cdot g$) = ord f + ord g.

Demostración.

Sean $f, g \in \mathbb{C}[\![x]\!]$.

(i) *ord (f+g)* $\geq$ *min*$\{$*ord f, ord g*$\}$.

Si f ó g son cero, entonces se cumple trivialmente.

Supongamos que $f, g \not\equiv 0$ entonces, notemos que para cualquier grado d, en la suma $f_{(d)} + g_{(d)}$ podría haber cancelaciones, eso haría que su orden pueda ser mayor que el de $f_{(d)}$ o $g_{(d)}$, de donde

$$min\{d : f_{(d)} + g_{(d)} \not\equiv 0\} \geq min\{d : f_{(d)} \not\equiv 0\}$$

y

$$min\{d : f_{(d)} + g_{(d)} \not\equiv 0\} \geq min\{d : g_{(d)} \not\equiv 0\}.$$

De este modo

$$\begin{aligned} ord\ (f{+}g) &= min\{d : f_{(d)} + g_{(d)} \not\equiv 0\} \\ &\geq min\{min\{d : f_{(d)} \not\equiv 0\}, min\{d : g_{(d)} \not\equiv 0\}\} \\ &= min\{ord\ f, ord\ g\}. \end{aligned}$$

(ii) *ord (f$\cdot$ g) = ord f+ ord g.*

Si f o g son cero, la igualdad es cierta por definición. Supongamos que $f, g \neq 0$ entonces

$ord\ f\cdot g = ord\left(\sum_{d=0}^{\infty}\left(\sum_{k+l=d}(f_{(k)}g_{(l)})\right)\right) = min\{d : \sum_{k+l=d} f_{(k)}g_{(l)} \not\equiv 0\}$

Observación 1.2.3. *Recordemos que:*

$$f_{(k)}g_{(l)} = \sum_{|\nu|=k} a_\nu x^\nu \sum_{|\eta|=l} b_\eta x^\eta = \sum_{|\nu|=k, |\eta|=l} a_\nu b_\eta x^{\nu+\eta}.$$

Entonces $f \cdot g = \sum_{d=0}^{\infty}(\sum_{k+l=d}(f_{(k)}g_{(l)})) = \sum_{d=0}^{\infty}(\sum_{|\nu|+|\eta|=d} a_\nu b_\eta x^{\nu+\eta})$

Así

$$\begin{aligned} ord\ (f\cdot g) &= min\{d : \sum_{k+l=d} f_{(k)}g_{(l)} \not\equiv 0\} \\ &= min\{|\nu| + |\eta| = d : \sum_{|\nu|+|\eta|=d} a_\nu b_\eta x^{\nu+\eta} \not\equiv 0\} \\ &= min\{|\nu| : f_{(|\nu|)} \not\equiv 0\} + min\{|\eta| : g_{(|\eta|)} \not\equiv 0\}, \text{ con } |\nu| + |\eta| = d \\ &= ord\ f + ord\ g. \end{aligned}$$

□

Como consecuencia de lo anterior, en particular tenemos que $\mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!]$ es un dominio entero (ver el apéndice A).

Con esta noción de orden se definen los siguientes conjuntos, los cuales son esenciales en el estudio de ceros locales,

$$m = \{f \in \mathbb{C}[\![x]\!] : ord\ f \geq 1\}$$

y

$$m^k = \{f \in \mathbb{C}[\![x]\!] : ord\, f \geq k\}.$$

En el siguiente lema se describe una de las características fundamentales del anillo $\mathbb{C}[\![x]\!]$, esto es que sea un *anillo local* (ver [4, 10, 2]).

Lema 1.2.4. *El conjunto m es un ideal ,y es el único ideal maximal en $\mathbb{C}[\![x]\!]$.*

Demostración.

Primero mostraremos que m es un ideal del anillo $\mathbb{C}[\![x]\!]$ para posteriormende demostrar que es maximal.

Sean $f, g \in m$. En particular, se tiene que $ord\, f \geq 1$, $ord\ g \geq 1$. Por el lema 1.2.2,

$$ord\ (f+g) \geq min\{ord\ f,\ ord\ g\} \geq 1.$$

Por tanto $f + g \in m$.

Sean $f \in m, g \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ es decir, $ord\, f \geq 1$.

Luego $f \cdot g \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ ya que $\mathbb{C}[\![x]\!]$ es anillo y por el lema 1.2.2,

$$ord\ (f \cdot g) = ord\ f + ord\ g.$$

Pero, ya que $f \geq 1$ y $ord\ g \geq 0$, entonces

$$ord\ f+ord\ g \geq 1 + ord\ g \geq 1.$$

Por tanto $f \cdot g \in m$.

Nótese que $0 \in m$, ya que $0 \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ y por definición de orden $ord(0) = \infty$.

Sea u unidad, es decir, existe $v \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ tal que $u \cdot v = 1$. Así, $ord\ (u{\cdot}v) = ord\ u + ord\ v = 0$, por lo que $ord(u) = 0$ esto es, $u \notin m$. Por tanto m es un ideal propio.

Ahora probaremos que m es maximal.

Supongamos que existe un ideal I tal que $I \neq m$ y $m \subseteq I$, entonces existe $g \in I$ con $ord\ g < 1$, es decir, $ord\ g = 0$. Pero esto significa que g tiene un término constante distinto de cero, existe $\frac{1}{g} \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ (no es difícil demostrar esto, veáse la proposición 1.2.7), así $\frac{1}{g} \cdot g = 1 \in I$. Por lo tanto $I = \mathbb{C}[\![x]\!]$. De este modo hemos probado que m es maximal. □

A continuación definiremos una noción de convergencia formal para sucesiones de series en $\mathbb{C}[\![x]\!]$ dada en términos del orden de las sucesiones. Ésta describe una cercanía entre las series de acuerdo al orden, conocida como *topología de Krull*, y a la cual también nos referiremos como topología del orden.

Definición 1.2.5. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}[\![x]\!]$, decimos que ésta converge a $f \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ si para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f - f_n \in m^k$ para toda $n \geq N$, y es una sucesión de Cauchy si para cada k existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_m - f_n \in m^k$ para toda $m, n \geq N$.

Lema 1.2.6. $\mathbb{C}[\![x]\!]$ *tiene las siguientes propiedades*

1. $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} m^k = \{0\}$

2. *Toda sucesión de Cauchy en* $\mathbb{C}[\![x]\!]$ *es convergente.*

Demostración.

1. Sea $f \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} m^k$. Si $f \not\equiv 0$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $ord\, f = n$.

   Pero ya que $f \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} m^k$, en particular, $f \in m^{n+1}$, así $n = ord\, f \geq n+1$ lo cual es una contradicción.

   Por lo tanto $f = 0$.

   Por otro lado, nótese que $ord\ 0 = \infty > 1$, por lo cual $0 \in m^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

2. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que $f_n - f_m \in m^k$ para toda $n, m \geq N_k$. A continuación observamos qué implicación tiene esto:

   Sean $f_n = a_0^n + a_1^n x + a_2^n x^2 + \cdots$ y $f_m = a_0^m + a_1^m x + a_2^m x^2 + \cdots$.

   Entonces $f_n - f_m = (a_0^n - a_0^m) + (a_1^n - a_1^m)x + (a_2^n - a_2^m)x^2 + \cdots$.

   Obsérvese que si $k = 1$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f_n - f_m \in m^1$ para toda $n, m \geq N_1$, es decir, $ord(f_n - f_m) \geq 1$ pero

   $$f_n - f_m = (a_0^n - a_0^m) + (a_1^n - a_1^m)x + (a_2^n - a_2^m)x^2 + \cdots ,$$

   con lo cual $(a_0^n - a_0^m) = 0$ y así $a_0^n = a_0^m$ para toda $n, m \geq N_1$.

   Por otro lado, si $k = 2$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, $f_n - f_m \in m^2$ para toda $n, m \geq N_2$, es decir, $ord(f_n - f_m) \geq 2$ como

   $$f_n - f_m = (a_0^n - a_0^m) + (a_1^n - a_1^m)x + (a_2^n - a_2^m)x^2 + \cdots ,$$

   esto significa que $a_0^n - a_0^m = 0$ y $a_1^n - a_1^m = 0$, es decir, $a_0^n = a_0^m$ y $a_1^n = a_1^m$ para cada $n, m \geq N_2$. Nótese que $N_1 < N_2$.

   Siguiendo la idea anterior, para k arbitraria existe $N_k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq N_k$, $f_n - f_m \in m^k$, es decir, $ord(f_n - f_m) \geq k$, donde

   $$f_n - f_m = (a_0^n - a_0^m) + (a_1^n - a_1^m)x + \cdots + (a_k^n - a_k^m)x^m + \cdots ,$$

   por lo cual

   $$\begin{aligned} a_0^n - a_0^m &= 0 \\ a_1^n - a_1^m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k-1}^n - a_{k-1}^m &= 0, \text{ para cada } n, m \geq N_k. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} a_0^n &= a_0^m \\ a_1^n &= a_1^m \\ &\vdots \\ a_{k-1}^n &= a_{k-1}^m, \text{ para cada } n, m \geq N_k, \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde $N_k > N_{k-1} > \cdots > N_2 > N_1$.

Ahora, definiremos coeficientes para una función $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, que mostraremos que es el límite de la sucesión de Cauchy (f_n). Definimos los coeficientes a_j de f de la siguiente manera: para cada k, definimos los coeficientes a_j hasta orden k, como $a_j := a_j^n$, donde a_j^n son los coeficientes de f_n para $n \geq N_k$ (con N_k como arriba). Esto lo podemos hacer para cualquier orden k, por lo que podemos definir todos los términos de f de esa manera. Además por construcción, para cada k

$$f - f_n \in m^k,$$

para toda $n \geq N_k$, lo cual muestra que f es el límite de la sucesión (f_n) en la topología del orden.

□

Proposición 1.2.7. *Para $f \in \mathbb{C}[\![x]\!]$, las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) f es una unidad.

b) ord $f = 0$.

c) $f \notin m$.

Demostración.

a)⇒b)

Si f es unidad, entonces por definición existe $\widetilde{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ tal que $f \cdot \widetilde{f} = 1$.

Entonces, $ord(f \cdot \widetilde{f}) = ord(1) = 0$, y por el lema 1.2.2 tenemos que $ord(f) + ord(\widetilde{f}) = 0$, por lo que, en particular, $ord(f) = 0$, i.e, f tiene término constante distinto de cero.

b)⇒ a)

Sea $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$con $a_0 \neq 0$, ya que $ord\, f = 0$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $a_0 = 1$. Definimos $g(x) := 1 - f(x) = 1 - (1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} -a_\nu x^\nu$. Nótese que $g(0) = 0$.

Consideramos la serie $h := 1 + g + g^2 + \cdots \in \mathbb{C}[\![x]\!]$. Obsérvese que h se define como el límite de las sucesiones $h_n = 1 + g + \cdots + g^n$ cuando n tiende a infinito, donde g por sí misma es una serie formal. En principio podría ocurrir que una sucesión de series formales no converja (en el sentido de la topología de Krull) a una serie formal. En este caso, como *ord* $g \geq 1$, entonces la suceríón $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}[\![x]\!]$ y por el lema 1.2.6 converge. De este modo tenemos que f es una unidad ya que

$$\begin{aligned} f \cdot h =&(1-g)(1+g+g^2+\cdots) \\ =&1+g+g^2+g^3+\cdots \\ &-g-g^2-g^3-\cdots=1. \end{aligned} \tag{1.7}$$

b)⇒c)
Como $m = \{f \in \mathbb{C}[\![x]\!] : \mathit{ord}\, f \geq 1\}$, claramente si *ord* $f = 0$, entonces $f \notin m$.
c)⇒b)
Si $f \notin m$ entonces *ord* $f = k < 1$, y como *ord* $f \in \mathbb{N}$, entonces *ord* f=0.

□

1.3. Anillo de funciones analíticas

A continuación añadiremos la noción de convergencia en las series de potencias. Esto quiere decir, a groso modo, determinar el conjunto de valores (x_1, x_2) en $\mathbb{C}^2$, que pueden tomar las variables x_1 y x_2 en la serie, de modo que se obtenga un número complejo. Veamos esto primero en un ejemplo:

Ejemplo 1.3.1. La serie geométrica $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$ es absolutamente convergente (es decir, también converge la serie de valores absolutos) para $|x_1x_2| < 1$, y $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} = \frac{1}{(1-x_1)(1-x_2)}$.

Demostración.
Sabemos que:
$\sum_{\nu_1=0}^{\infty} |x_1^{\nu_1}| = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} |x_1|^{\nu_1} = \frac{1}{(1-|x_1|)}$ converge si y sólo si $|x_1| < 1$ y
$\sum_{\nu_2=0}^{\infty} |x_2^{\nu_2}| = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} |x_2|^{\nu_2} = \frac{1}{(1-|x_2|)}$ converge si y sólo si $|x_2| < 1$.
De este modo usando la definición de producto de series de potencias tenemos que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |x_1|^{\nu_1} |x_2|^{\nu_2} = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} |x_1|^{\nu_1} \cdot \sum_{\nu_2=0}^{\infty} |x_2|^{\nu_2} = \frac{1}{(1-|x_1|)(1-|x_2|)},$$

por lo cual, esta serie converge si y sólo si $|x_1| < 1$ y $|x_2| < 1$, es decir $|x_1x_2| < 1$. Así, tanto $\sum_{\nu_i=0}^{\infty} x_i^{\nu_i}$ como $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$ convergen absolutamente en el conjunto de valores $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ tales que $|x_1x_2| < 1$.

□

Este ejemplo tiene de fondo una propiedad más general que se expresa en el siguiente lema.

Lema 1.3.2 (Lema de Abel)**.**

Sea $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$*, con* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$*, donde* $x_j \neq 0$ *para cada* $j = 1, 2$*. Sea* $M \in \mathbb{R}$ *una constante positiva tal que* $|a_\nu x^\nu| \leq M$*, para cada* $\nu = (\nu_1, \nu_2)$*. Si* $0 < \rho_j < |x_j|$*, para* $j = 1, 2$*, entonces* f *converge uniforme y absolutamente en el polidisco* $D = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_j| \leq \rho_j,\ \text{para } j = 1, 2\}$*.*

En particular, el límite de la suma es independiente del orden de los sumandos.

Demostración.

Consideremos f, M y ρ_j como en el enunciado del lema.

Sea $z \in D = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_j| \leq \rho_j\}$. Como $\rho_j < |x_j|$ entonces, $|z_j| \leq \rho_j < |x_j|$, en particular $|z_j| < |x_j|$ y $|z| < |x|$.

Definimos $\mu_j := \frac{\rho_j}{|x_j|}$. Como $0 < \rho_j < |x_j|$, entonces $0 < \mu_j < 1$, para $j = 1, 2$.

De esta manera $|z_j| \leq \rho_j = \mu_j |x_j|$.

Por lo cual $|z^\nu| \leq \mu^\nu |x^\nu|$, ya que

$$\begin{aligned}
|z^\nu|^2 = |z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}|^2 &= z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \cdot \overline{z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}} \\
&= |z_1^{\nu_1}|^2 |z_2^{\nu_2}|^2 = |z_1|^{2\nu_1} |z_2|^{2\nu_2} \\
&\leq (\mu_1 |x_1|)^{2\nu_1} (\mu_2 |x_2|)^{2\nu_2} = \mu^{2\nu} |x|^{2\nu}.
\end{aligned}$$

En consecuencia $|a_\nu z^\nu| = |a_\nu||z^\nu| \leq |a_\nu||x^\nu|\mu^\nu = |a_\nu x^\nu|\mu^\nu \leq M\mu^\nu$, por hipótesis. De este modo

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu z^\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x^\nu| \mu^\nu \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} M\mu^\nu = M \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu_1^{\nu_1} \mu_2^{\nu_2} = \frac{M}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)}.$$

Por lo tanto f converge absoluta y uniformemente.

□

Corolario 1.3.3. *Para* $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Existe $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$*, con* $x_j \neq 0$*, para* $j = 1, 2$*, tal que* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ *converge.*

(ii) Existe $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^2$*, con* $\rho_j > 0$*, para* $j = 1, 2$*, tal que* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \rho^\nu$ *converge.*

(iii) Existe $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$*, con* $\sigma_j > 0$*, para* $j = 1, 2$*, tal que* $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \sigma^\nu$ *converge.*

Demostración.

Sea $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[\![x]\!]$.

Primero probaremos que (i) implica (ii):

Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ tal que $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ converge y expresemos a x como $x = (\tilde{\rho}_1 e^{i\theta_1}, \tilde{\rho}_2 e^{i\theta_2})$.

Como f converge, existe $M \in \mathbb{R}_+$ tal que, $|a_\nu x^\nu| \leq M$ para cada ν.

Obsérvese que

$$\begin{aligned} |x^\nu| &= |x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}| \\ &= |(\tilde{\rho_1} e^{i\theta_1})^{\nu_1} (\tilde{\rho_2} e^{i\theta_2})^{\nu_2}| \\ &= |\tilde{\rho_1}^{\nu_1} \tilde{\rho_2}^{\nu_2} e^{i(\theta_1\nu_1+\theta_2\nu_2)}| \\ &= |\tilde{\rho_1}^{\nu_1} \tilde{\rho_2}^{\nu_2}| = |\tilde{\rho}^\nu|. \end{aligned}$$

De esta manera $|a_\nu \tilde{\rho}^\nu| = |a_\nu x^\nu| \leq M$, para cada ν. Usando el lema de Abel, $f(x)$ converge uniforme y absolutamente en el polidisco,

$$D = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_j| \leq \rho_j\}, \text{ con } 0 < \rho_j < |x_j|,$$

de donde tenemos el inciso (ii).
Ahora mostraremos que (ii) implica (iii):

Supongamos que existe $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^2$, con $\rho_j > 0$, tal que $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \rho^\nu$ converge. Como la serie converge, nuevamente existe $M \in \mathbb{R}_+$, tal que $|a_\nu \rho^\nu| \leq M$ para cada ν. Entonces, al igual que en el inciso anterior, por el lema de Abel, la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \rho^\nu$ converge uniforme y absolutamente en el polidisco, $D = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_j| \leq \sigma_j\}$, con $0 < \sigma_j < |\rho_j|$.

Nótese que al tomar $z \in D$, tal que $|z| = \sigma$, tenemos que $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \sigma^\nu$ converge.
Finalmente, mostraremos que también (iii) implica (i):

Supongamos que existe $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$, con $\sigma_j > 0$, tal que $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \sigma^\nu$ converge.

Tomemos entonces $x = \sigma$, así la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| x^\nu$ converge, y por consiguiente $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ también. □

Observación 1.3.4. *Dentro de su dominio de convergencia una serie de potencias representa una función holomorfa ($\mathbb{C}$-diferenciable) e inversamente cualquier función holomorfa puede expandirse localmente en serie de potencias.*

Lo anterior es enunciado en el siguiente lema, pero primero veremos una definición.

Definición 1.3.5. Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un dominio (es decir, un subconjunto abierto y conexo), $f : U \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es *analítica* si para cada $p_0 \in U$, existe una vecindad $V = V(p_0)$ de p_0 en U, y una serie de potencias $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - p_0)^\nu$ que converge a f en V.

Lema 1.3.6 (Lema de Osgood [2])**.**

Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{C}^2$, y $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *f es analítica.*
2. *f es holomorfa.*
3. *f es holomorfa en cada variable.*

Además las series de potencias convergentes forman un anillo (ver apéndice A)

Definición 1.3.7. Una serie de potencias formal es llamada convergente si satisface alguna de las condiciones del corolario 1.3.3.

Denotaremos al conjunto de series de potencias convergentes por $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle \subset \mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!]$.

Nótese que las series en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ no tienen un dominio de convergencia común, por lo que introduciremos una norma que permita agrupar a todas las series con un radio de convergencia común.

Sea $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^2; \rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ y consideremos la transformación

$$\mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!] \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \mapsto ||f(x)||_\rho := \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|\rho^\nu.$$

En la siguiente proposición se muestra que esta transformación define una norma en el anillo de series de potencias formales, a la cual se le conoce como *la ρ-norma mayorante.*

Proposición 1.3.8. *Sean $f, g \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ y $\lambda \in \mathbb{C}$*

a) $||f||_\rho = 0 \iff f = 0.$

b) $||\lambda f||_\rho = |\lambda| ||f||_\rho.$

c) $||f + g||_\rho \leq ||f||_\rho + ||g||_\rho.$

d) Si $f = \sum_{d=0}^{\infty} f_{(d)}$ es la descomposición en partes homogéneas, entonces $||f||_\rho = \sum_{d=0}^{\infty} ||f_{(d)}||_\rho$.

e) Si f y g son polinomios en dos variables, entonces $||f \cdot g||_\rho \leq ||f||_\rho \cdot ||g||_\rho$.

f) Si $||g||_\rho < \infty$, entonces $||f \circ g||_\rho \leq ||f||_\sigma$, donde $\sigma = ||g||_\rho$.

Demostración. Sean $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[\![x]\!]$.

a) Claramente, si $f \equiv 0$ entonces $||f|| \equiv 0$ pues todos sus coeficientes son cero.

   Por otro lado si $||f(x)||_\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|\rho^\nu = 0$, como estamos sumandos términos todos positivos, entonces la única manera de que éstos sumen cero es que cada uno sea cero, por lo que $f(x) = 0$.

b) Esto se prueba por un cálculo directo. Consideremos $\lambda f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda a_\nu x^\nu$ entonces

$$||\lambda f(x)||_\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\lambda a_\nu|\rho^\nu = |\lambda| \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|\rho^\nu = |\lambda| ||f(x)||_\rho.$$

c) Consideremos la suma de f y g, entonces por propiedades de la norma en complejos, y monotonía de la suma tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}||f(x)+g(x)||_\rho &= \sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu+b_\nu|\rho^\nu \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty}(|a_\nu|+|b_\nu|)\rho^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\rho^\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_\nu|\rho^\nu \\ &= ||f(x)||_\rho+||g(x)||_\rho.\end{aligned}$$

d) Escribamos f como la suma de sus partes homogéneas, esto es $f(x) = f_{(0)}(x)+f_{(1)}(x)+\cdots$, donde $f_{(d)}(x)=\sum_{|\nu|=d}a_\nu x^\nu$. Notemos que para cada parte homogénea se tiene que

$$||f_{(d)}(x)||_\rho = \sum_{|\nu|=d}|a_\nu|\rho^\nu.$$

Notemos que al sumar $||f_{(d)}||_\rho$ con $||f_{(j)}||_\rho$, donde $d\neq j$, no puede haber cancelaciones de términos en la suma pues los exponentes en ρ son distintos. De esto se sigue directamente lo siguiente,

$$||f(x)||_\rho = ||\sum_{d=0}^{\infty}f_{(d)}(x)||_\rho = ||\sum_{d=0}^{\infty}(\sum_{|\nu|=d}a_\nu x^\nu)||_\rho = \sum_{d=0}^{\infty}(\sum_{|\nu|=d}|a_\nu|)\rho^\nu = \sum_{d=0}^{\infty}||f_{(d)}(x)||_\rho.$$

e) Sean

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

y

$$g(x)=\sum_{\nu=0}^{m}b_\nu x^\nu = b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m.$$

Entonces $f(x)\cdot g(x)=\sum_{\nu=0}^{n+m}(\sum_{i+j=\nu}a_ib_j)x^\nu$

Con lo cual

$$||f(x)\cdot g(x)||_\rho = \sum_{\nu=0}^{n+m}|\sum_{i+j=\nu}a_ib_j|\rho^\nu \leq \sum_{\nu=0}^{n+m}\sum_{i+j=\nu}|a_ib_j|\rho^\nu = ||f(x)||_\rho\cdot||g(x)||_\rho.$$

f) Sean

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

y

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu X^\nu = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m + \cdots .$$

Entonces, $(f(g))(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu)^\nu$.
Además $f(x) \circ ||g(x)||_\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu| \rho^\nu)^\nu$.
Así,

$$\begin{aligned} ||(f \circ g)(x)||_\rho &= || \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu)^\nu ||_\rho \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| || \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu ||_\rho^\nu \text{ (desigualdad del triángulo usada sobre los coeficientes } a_\nu) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| (\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu| \rho^\nu)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \sigma^\nu \\ &= ||f(x)||_\sigma \text{ , donde } \sigma = ||g(x)||_\rho. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.3.9. *Para* $f \in \mathbb{C}\langle x \rangle, \operatorname{lím}_{\rho \to 0} ||f(x)||_\rho = |f(0)|$.

Demostración.
Sea $f \in \mathbb{C}\langle x \rangle$, es decir, $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ converge.
Calculamos el límite,

$$\lim_{\rho \to 0} ||f(x)||_\rho = \lim_{\rho \to 0} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \rho^\nu = |a_0| + \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| 0^\nu = |a_0|, \tag{1.8}$$

lo cual es igual a $|f(0)|$.

□

Definición 1.3.10. Definimos a $B_\rho := \{f \in \mathbb{C}[\![x]\!] : ||f||_\rho < \infty\}$.

Es decir, B_ρ es el conjunto de series que convergen con la ρ-norma, en particular $B_\rho \subset \mathbb{C}\langle x \rangle$.

Notemos que para $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \in B_\rho$, se tiene que

$$|a_\nu| \rho^\nu \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \rho^\nu = ||f(x)||_\rho,$$

por lo cual tenemos que

$$|a_\nu| \leq \frac{||f(x)||_\rho}{\rho^\nu}. \tag{1.9}$$

A esta expresión se le conoce como el *estimador de Cauchy*. Este estimador, junto con las propiedades anteriores, nos servirá para probar el siguiente teorema que muestra la estructura algebraica que tiene B_ρ.

Teorema 1.3.11. *B_ρ es un álgebra de Banach.*

Recordatorio. B es un álgebra de Banach (compleja) si:

1. Existen operaciones $+ : B \times B \to B$, $\cdot : \mathbb{C} \times B \to B$ y $\circ : B \times B \to B$ tales que:

   a) $(B, +, \cdot)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

   b) $(B, +, \circ)$ es un anillo conmutativo con unidad.

   c) Para toda $f, g \in B$ y para toda $c \in \mathbb{C}, c \cdot (f \circ g) = (c \cdot f) \circ g = f \circ (c \cdot g)$.

2. Para cada $f \in B$ un número $||f|| \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ es asignado con las propiedades de una norma.

   - $||c \cdot f|| = |c| \cdot ||f||$ para $c \in \mathbb{C}, f \in B$.
   - $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ para $f, g \in B$.
   - $||f|| = 0 \iff f = 0$.

3. $||f \circ g|| \leq ||f|| \cdot ||g||$, para $f, g \in B$.

4. Como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial normado, B es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de elementos de B converge a un elemento f de B.

Demostraremos el teorema viendo que las condiciones del recordatorio se satisfacen con $B = B_\rho$.

Demostración.
Las pruebas de 1 a) y 1 b) se encuentran en el apéndice A.
Demostremos el inciso 1 c).
Sean $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu \in B_\rho$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\begin{aligned} c(f(x) \cdot g(x)) &= c(\sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu} a_i b_j)x^\nu) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu} c a_i b_j)x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu} a_i c b_j)x^\nu \\ &= (\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu) \cdot (\sum_{\nu=0}^{\infty} c b_\nu x^\nu) \\ &= f(x) \cdot (c\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu) = f(x) \cdot (cg(x)). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} c(f(x)\cdot g(x)) &= c(\sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu} a_i b_j)x^{\nu}) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu} c a_i b_j)x^{\nu} \\ &= (\sum_{\nu=0}^{\infty} c a_\nu x^{\nu})\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^{\nu}) \\ &= (c\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{\nu})\cdot g(x) = (cf(x))\cdot g(x). \end{aligned} \tag{1.11}$$

El inciso 2 y 3 están demostrados en la proposición 1.3.8.

A continuación probaremos el inciso 4, es decir, que B_ρ es espacio métrico completo:

Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en B_ρ, donde $f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(n)} x^\nu$. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) > 0$ tal que,

$$||f_m(x) - f_n(x)||_\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu^{(m)} - a_\nu^{(n)}|\rho^\nu < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para toda } n, m \geq N.$$

Usando el estimador de Cauchy (ver ecuación (1.9)), para cada ν fija se tiene que

$$|a_\nu^{(m)} - a_\nu^{(n)}| \leq \frac{||f_m - f_n||_\rho}{\rho^\nu} < \frac{\epsilon}{2\rho^\nu} = \epsilon_\nu, \text{ para toda } m, n \geq N.$$

Así, $(a_\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y por completez de los complejos existe el límite $\lim_{n\to\infty} a_\nu^{(n)} = a_\nu$. Definamos $f(x)$ como $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$.

Ahora, como a_ν es el límite de $(a_\nu^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que para cada $s \in \mathbb{N}$ y cada $\epsilon > 0$, existe $N' = N'(s)$ tal que $|\nu| \leq s$,

$$\sum_{|\nu|=0}^{s} |a_\nu - a_\nu^{(m_s)}|\rho^\nu < \frac{\epsilon}{2}, \text{ para cada } m_s \geq N'.$$

Por otro lado, $\sum_{|\nu|=0}^{s} |a_\nu^{(m)} - a_\nu^{(n)}|\rho^\nu < \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu^{(m)} - a_\nu^{(n)}|\rho^\nu < \frac{\epsilon}{2}$.

Así, $\sum_{|\nu|=0}^{s} |a_\nu^{(m)} - a_\nu^{(n)}|\rho^\nu < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $m, n \geq N$.

Con esto tenemos ahora la siguiente desigualdad,

$$\sum_{|\nu|=0}^{s} |a_\nu - a_\nu^{(n)}|\rho^\nu \leq \sum_{|\nu|=0}^{s} |a_\nu - a_\nu^{(m_s)}|\rho^\nu + \sum_{|\nu|=0}^{s} |a_\nu^{(m_s)} - a_\nu^{(n)}|\rho^\nu < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para toda $n \geq N$, y para $m_s \geq N'$. Nótese que la cota para n no depende de s, por lo cual la desigualdad anterior es válida para toda s, y con esto se tiene que

$$||f(x) - f_n(x)||_\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu - a_\nu^{(n)}|\rho^\nu < \epsilon$$

para toda $n \geq N$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

También nótese que $||f(x)||_\rho \leq ||f(x)-f_n(x)||_\rho + ||f_n(x)||_\rho < \epsilon + ||f_n(x)||_\rho < \infty$.

De este modo $f \in B_\rho$, por lo que B_ρ es completo, finalizando la prueba de que B_ρ es álgebra de Banach.

□

Proposición 1.3.12. *Para los conjuntos B_ρ se cumple lo siguiente:*

a) Si $\rho \leq \rho'$[1]*, entonces $B_{\rho'} \subset B_\rho$.*

b) $\cup_\rho B_\rho = \mathbb{C}\langle x\rangle$.

Demostración.

a) Evidentemente, si ρ es menor que ρ', entonces las funciones que tengan radio de convergencia ρ' también convergen en el polidisco de radio ρ.

b) Mostraremos primero que $\cup_\rho B_\rho \subseteq \mathbb{C}\langle x\rangle$. Sea $f \in \cup_\rho B_\rho$ entonces $f \in B_\rho$ para alguna ρ. Por definición esto significa que $||f||_\rho < \infty$, por lo que $f \in \mathbb{C}\langle x\rangle$.

   Para mostrar que $\mathbb{C}\langle x\rangle \subseteq \cup_\rho B_\rho$, consideremos $f \in \mathbb{C}\langle x\rangle$, entonces por ser f convergente, por el corolario 1.3.3 existe $\rho \in \mathbb{R}^2$ tal que $||f||_\rho < \infty$. Así, $f \in B_\rho \subset \cup_\rho B_\rho$.

□

Corolario 1.3.13. $\mathbb{C}\langle x\rangle \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$ *es un subanillo.*

Demostración.

Para demostrar esto basta probar que $\mathbb{C}\langle x\rangle$ es cerrado bajo la suma y el producto. Sean $f, g \in \mathbb{C}\langle x\rangle$. Por el corolario 1.3.3 para ambas existe un $\rho \in \mathbb{R}^2$ (dado por el mínimo de los radios de convergencia) tal que éstas convergen en la ρ-norma. Esto quiere decir que $f, g \in B_\rho$. Pero B_ρ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, por lo tanto $f + g \in B_\rho \subset \mathbb{C}\langle x\rangle$, lo que concluye la demostración.

□

Corolario 1.3.14. *Sea $f \in \mathbb{C}\langle x\rangle$. Si f es una unidad en $\mathbb{C}[\![x]\!]$ entonces f también es una unidad en $\mathbb{C}\langle x\rangle$.*

En particular, f es unidad en $\mathbb{C}\langle x\rangle$, si y solamente si, $f(\bar{0}) \neq 0$.

Demostración.

Sea $f \in \mathbb{C}\langle x\rangle$, tal que $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ es unidad en $\mathbb{C}[\![x]\!]$, es decir, el término constante de $f(x)$, a_0, es distinto de cero. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a_0 = 1$. Por la proposición 1.2.7 esto significa que *ord* $f = 0$, así tenemos que $f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$. Definamos $g(x) := 1 - f(x)$. Entonces $g(\bar{0}) = 1 - f(\bar{0}) = 0$.

[1] El orden aquí es el del producto, es decir entrada a entrada.

De esta manera,

$$||g(x)||_\rho = ||1 - f(x)||_\rho = ||1 - (1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu)||_\rho = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \rho^\nu < 1,$$

para alguna $\rho > 0$ suficientemente cercana a 0.

Renombremos $\beta := ||g(x)||_\rho < 1$. Sea $h(x) = 1 + g(x) + g(x)^2 + \cdots \in \mathbb{C}[\![x]\!]$.

De este modo

$$\begin{aligned} ||h(x)||_\rho &= ||1 + g(x) + g(x)^2 + \cdots ||_\rho \\ &\leq ||1||_\rho + ||g(x)||_\rho + ||g(x)^2||_\rho + \cdots \\ &= \beta^0 + \beta + \beta^2 + \cdots \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta^\nu \\ &= \frac{1}{1-\beta}, \text{ ya que } \beta < 1. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Así, $h(x) \in B_\rho$.

Además observemos que, como $g(x) = 1 - f(x)$, entonces $f(x) = 1 - g(x)$, y ya que

$$f(x) \cdot h(x) = (1 - g(x)) \cdot (1 + g(x) + g(x)^2 + \cdots) = 1$$

se tiene que $h(x) = \frac{1}{f(x)} = f^{-1}(x) \in B_\rho \subset \mathbb{C}\langle x\rangle$. Por lo tanto $f(x)$ es unidad en $\mathbb{C}\langle x\rangle$.

Ahora mostraremos que $f(x)$ es unidad en $\mathbb{C}\langle x\rangle$, si y sólo si, $f(\bar{0}) \neq 0$.

La implicación directa se sigue de la definición de unidad.

Para la reciproca, como hemos mostrado que $h(x) = f(x)^{-1}$ es unidad en $\mathbb{C}\langle x\rangle$, entonces si $f(\bar{0}) = 0$, $f^{-1}(0)$ no estaría bien definido. Por lo tanto $f(\bar{0}) \neq 0$. □

El siguiente morfismo que definiremos permite relacionar polinomios en ciertas variables con polinomios con otras variables. Para esto, simplemente notemos que en un polinomio podemos sustituir sus variables por polinomios como se realiza a continuación:

Si $g_1, g_2, ..., g_n \in \mathbb{C}[y_1, y_2, ..., y_m]$, entonces

$$\begin{aligned} \phi_g : \mathbb{C}[x_1, x_2, ..., x_n] &\to \mathbb{C}[y_1, y_2, ..., y_m], \\ x_j &\mapsto g_j, \end{aligned} \tag{1.13}$$

es decir, a cada variable x_j la cambiamos por el polinomio g_j.

Así,

$$f \mapsto \phi_g(f) = f(g_1(y), g_2(y), ..., g_n(y)) =: f(g), \tag{1.14}$$

define un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras.

Sin embargo, sobre el anillo de series de potencias este morfismo no siempre está bien definido, por ejemplo, si definimos

$$\mathbb{C}[\![x]\!] \to \mathbb{C}[\![y]\!], x \mapsto 1,$$

entonces, en particular, la serie geométrica $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, se transforma en una suma infinita de unos, lo cual no es un elemento de $\mathbb{C}[\![x]\!]$. En el siguiente teorema se muestra bajo qué restricciones sí se tiene un homomorfismo en series formales.

Teorema 1.3.15. *Para $g_1, g_2, ..., g_n \in \mathbb{C}[\![y_1, y_2, ..., y_m]\!]$, donde ord $g_j \geq 1$, hay un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras,*

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_g : \mathbb{C}[\![x_1, x_2, ..., x_n]\!] &\to \mathbb{C}[\![y_1, y_2, ..., y_m]\!], \\ f &\mapsto f(g). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Este homomorfismo es conocido como el homomorfismo de sustitución, el cual cuenta con las siguientes propiedades:

(i) Si $g_1, g_2, ..., g_n$ son polinomios, entonces $\hat{\phi}_g$ es una extensión de ϕ_g.

(ii) Si $g_1, g_2, ..., g_n$ son convergentes, entonces

$$\hat{\phi}_g(\mathbb{C}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle) \subset \mathbb{C}\langle y_1, y_2, ..., y_m\rangle.$$

Demostración.
Sea g como en el enunciado del teorema, y sea $f \in \mathbb{C}[\![x]\!]$. Para definir a $f(g) = \hat{\phi}_g(f)$, consideremos la parte polinomial de f de grado k, $f^{(k)} \in \mathbb{C}[x]$. De este modo, $f^{(k)}(g) := f^{(k)}(g_1, g_2, ..., g_n) \in \mathbb{C}[\![y]\!]$.

Si $0 \leq k < l$, claramente *ord* $(f^{(l)} - f^{(k)}) \geq k + 1$, pues

$$f_l = f_0 + f_1 + \cdots + f_k + f_{k+1} + \cdots + f_{(l)} \text{ y } f^{(k)} = f_0 + f_1 + \cdots + f_k.$$

Así,

$$f^{(l)} - f^{(k)} = f_{k+1} + f_{k+2} + \cdots + f_l. \tag{1.16}$$

Como *ord* $g_j \geq 1$, esta desigualdad se mantiene para la composición, *ord* $(f^{(l)}(g) - f^{(k)}(g) \geq k + 1$.

Ahora, notemos que $(f^{(k)}(g))$ es una sucesión de Cauchy en la topología de Krull en $\mathbb{C}[\![y]\!]$, entonces por el lema 1.2.6 podemos definir que $f(g) = \lim_{k\to\infty} f^{(k)}(g)$.

Ahora obsérvese que si $g_1, g_2, ..., g_n$ son polinomios, entonces

$$\hat{\phi}_g(f)|_{g\in\mathbb{C}[x]\subset\mathbb{C}[\![x]\!]} = \phi_g(f),$$

por lo cual es una extensión de ϕ_g.

Para el inciso (ii) hay que demostrar que la imagen bajo $\hat{\phi}_g$ de las convergentes en x también es convergente en y, es decir, para $\rho = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n) \in \mathbb{R}^n_+$ existe $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m) \in \mathbb{R}^m_+$, tal que $\hat{\phi}_g(B_\rho) \subset B_\sigma \subset \mathbb{C}[\![y]\!]$.

Como *ord* $g_j \geq 1$, entonces $g_j(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, por lo que $g_j(\bar{0}) = 0$, para toda $j = 1, 2, ..., n$.

Por otro lado, como cada g_j es convergente y $g_j(0) = 0$, para cada $\rho_j > 0$, existe $\sigma_j = (\sigma_{j1}, \sigma_{j2}, ..., \sigma_{jm}) \in \mathbb{R}_+^m$ tal que

$$||g_j||_{(\sigma_{j1},\sigma_{j2},...,\sigma_{jm})} \leq \rho_j, \text{ para cada } j = 1, 2, ..., n.$$

Definamos σ como, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m) \in \mathbb{R}_+^m$, con

$$\sigma_i = min\{\sigma_{ji} : 1 \leq j \leq n\}, \text{ para cada } 1 \leq i \leq m.$$

Así

$$||g_j||_\sigma \leq \rho_j, \text{ para toda } j = 1, 2, ..., n. \tag{1.17}$$

Luego, usando las propiedades de la ρ-norma de la proposición 1.3.8, para $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ tenemos que

$$\begin{aligned}
||f^{(k)}(g)||_\sigma &= ||\sum_{d=0}^{k} f_{(d)}(g)||_\sigma = \sum_{d=0}^{k} ||f_{(d)}(g)||_\sigma \\
&= ||f_{(0)}(g)||_\sigma + ||f_{(1)}(g)||_\sigma + \cdots + ||f_{(k)}(g)||_\sigma \\
&\leq \sum_{|\nu|=0} |a_\nu| ||g||_\sigma^\nu + \sum_{|\nu|=1} |a_\nu| ||g||_\sigma^\nu + \cdots + \sum_{|\nu|=k} |a_\nu| ||g||_\sigma^\nu \\
&\leq \sum_{|\nu|=0} |a_\nu| ||g_1||_\sigma^{\nu_1} \cdots ||g_n||_\sigma^{\nu_n} + \cdots + \sum_{|\nu|=k} |a_\nu| ||g_1||_\sigma^{\nu_1} \cdots ||g_n||_\sigma^{\nu_n} \\
&\leq \sum_{|\nu|=0} |a_\nu| \rho_1^{\nu_1} \rho_2^{\nu_2} \cdots \rho_n^{\nu_n} + \cdots + \sum_{|\nu|=k} |a_\nu| \rho_1^{\nu_1} \rho_2^{\nu_2} \cdots \rho_n^{\nu_n} \\
&= \sum_{|\nu|=0} |a_\nu| \rho^\nu + \sum_{|\nu|=1} |a_\nu| \rho^\nu + \cdots + \sum_{|\nu|=k} |a_\nu| \rho^\nu \\
&= ||f_{(0)}||_\rho + ||f_{(1)}||_\rho + \cdots + ||f_{(k)}||_\rho \\
&= ||f^{(k)}||_\rho.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Recopilando tenemos que $||f^{(k)}(g)||_\sigma \leq ||f^{(k)}||_\rho$.

Además $||f(g)||_\sigma = \text{lím}_{k\to\infty} ||f^{(k)}(g)||_\sigma \leq \text{lím}_{k\to\infty} ||f^{(k)}||_\rho = ||f||_\rho$.

Así $||f(g)||_\sigma \leq ||f||_\rho$, y ya que $\sigma \leq \rho$, usando la proposición 1.3.12 (a) tenemos que $\hat{\phi}_g(B_\rho) \subset B_\sigma$. De este modo $\hat{\phi}_g(B_\rho) \subset B_\sigma \subset \mathbb{C}[\![y]\!]$. Por lo tanto $\hat{\phi}_g(\mathbb{C}\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle) \subset \mathbb{C}\langle y_1, y_2, ..., y_m\rangle$.

□

Cuando $m = n$, $\hat{\phi}_g$ se vuelve un isomorfismo (bajo ciertas condiciones) como veremos más adelante en el teorema de la función implícita.

Ahora nos interesaremos en una manera distinta de expresar a una serie de potencias en dos variables (o más variables), permitiendo que los coeficientes estén dados por series de potencias. Para esto notemos que una serie de potencias $f \in \mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!]$ puede expandirse en términos de x_2 como:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_1) x_2^j, \text{ donde } f_j \in \mathbb{C}[\![x_1]\!]. \tag{1.19}$$

Si $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces $||f||_\rho = \sum_{j=0}^{\infty} ||f_j||_{\rho_1} \rho_2^j$.

Por lo tanto, si f converge, también lo hacen todos los $f_j, j = 1, 2, ...$

Empecemos considerando qué es lo que ocurre si fijamos $x_1 = 0$.

Definición 1.3.16. Sea $f \in \mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!]$ y $\overline{f}(x_2) := f(0, x_2) \in \mathbb{C}[\![x_2]\!]$. Decimos que f es *general en x_2* si $\overline{f}(x_2) \not\equiv 0$, y es *general en x_2 de orden k* si *ord* $\overline{f}$=k, es decir, $\overline{f}(x_2) = b_k x_2^k + b_{k+1} x_2^{k+1} \cdots ; b_k \neq 0$.

Nótese que si $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_1) x_2^j$, con f_j como en la ecuación (1.19), entonces *ord* $f \leq$ *ord* $\overline{f} = min\{j : f_j(0) \neq 0\}$.

El siguiente lema muestra que la condición de ser general de algún orden en una variable no es una condición muy restrictiva[2].

Lema 1.3.17. *Si $0 \not\equiv f \in \mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!]$, donde $k :=$ ord f, entonces hay un cambio lineal de coordenadas*[3]*:*

$$x_1 = y_1 + C_1 y_2,$$
$$x_2 = y_2,$$

tal que $g(y) = f(x(y)) \in \mathbb{C}[\![y_1, y_2]\!]$ es general en y_2 de orden k. La serie g es convergente si, y sólo si, f es convergente.

Demostración.

Sea $f_{(d)}(x) = \sum_{|\nu|=d} a_{\nu_1\nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$. Ya que el cambio de coordenadas es lineal, $g_{(d)}(y) = f_{(d)}(x(y))$. En particular, para $d = k$,

$$g_{(k)}(y) = \sum_{|\nu|=k} a_{\nu_1\nu_2} (y_1 + C_1 y_2)^{\nu_1} y_2^{\nu_2} = \sum_{|\nu|=k} a_{\nu_1\nu_2} C_1^{\nu_1} y_2^k + h(y_1, y_2),$$

donde $h(0, y_2) = 0$.

El coeficiente de y_2^k es un polinomio en C_1, el cual no es idénticamente cero pues $f_{(k)} \neq 0$.

Por lo tanto podemos elegir C_1 que no sea raíz del polinomio que define al coeficiente de y_2^k. Así obtenemos que g es general de orden k en y_2.

En el caso en que f sea convergente, g también lo es, ya que g resulta del homomorfismo de sustitución de f con series convergentes (de hecho lineales), y por el teorema 1.3.15 esto pertenece al anillo de series convergentes. Recíprocamente, si f no es convergente, entonces g tampoco podría serlo, pues resulta de componer f con un cambio de coordenadas lineal.

$\square$

Lo que acabamos de discutir arriba nos conduce al estudio de series que puedan ser polinomiales en una de sus variables. A saber, series polinomiales en x_2 se denotan como $\mathbb{C}\langle x_1 \rangle [x_2]$. Esta notación significa que estamos considerando

[2]De hecho es invariante bajo cambios lineales.

[3]Con $C_1 \neq 0$, si f no es desde un inicio general de orden k en y_2.

polinomios en x_2, pero que los coeficientes son series en x_1. Es decir, para $f \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle[x_2]$, $f = f_0 + f_1 x_2 + \cdots f_k x_2^k$ con $k \in \mathbb{N}$.

En este caso, como tenemos un número finito de coeficientes f_j, podemos determinar un radio de convergencia común ρ_1, y así un dominio de convergencia común dado por $D' = \{x_1 \in \mathbb{C} : |x_1| < \rho_1\}$. De modo que f es holomorfa en $D' \times \mathbb{C}$.

Notemos en particular que para cada valor de x_1 fijo en f, obtenemos un polinomio en x_2 de grado menor o igual que k. Para ciertas funciones se puede obtener justo un polinomio de grado k, esto es a lo que llamaremos polinomios de Weierstrass más adelante.

Enfatizamos en que no toda función analítica en dos variables, se puede expresar como polinomial en una de sus variables, es decir, $\mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle \neq \mathbb{C}\langle x_1 \rangle[x_2]$. De hecho la mayoría de las funciones en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$, no son polinomiales en ninguna de sus variables. Sin embargo, el teorema de preparación de Weierstrass nos dice que salvo el producto por una unidad, localmente, cada gérmen de función analítica se puede representar por una función polinomial en una de sus variables. En el siguiente capítulo daremos la prueba de este resultado, y expondremos las ventajas que conlleva para el estudio de curvas definidas por ceros de funciones analíticas.

Capítulo 2

Teoremas de Weierstrass

En este capítulo daremos la demostración del teorema principal de esta tesis, que es el *teorema de preparación de Weierstrass*. Éste a su vez, está basado en otros teoremas igualmente importantes, como lo es el *teorema de la división*, el cual tambíen se le debe a Weierstrass. Como se describió al final del capítulo anterior, la propiedad de que una función analítica en dos variables sea polinomial en una de ellas, es muy remota. Por otro lado, ser polinomial en una de las variables, facilita mucho el estudio de los ceros de una función, pues se pueden utilizar varios resultados para polinomios. La peculiaridad del teorema de Weierstrass que describiremos, es que nos dice que a pesar de que en un sentido global no toda función analítica tiene una dependencia polinomial respecto a alguna de sus variables, localmente sí, salvo por multiplicar por una unidad. Esto es suficiente para poder describir al conjunto de ceros de dicha función via un elemento de $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$, ya que las unidades no aportan ceros localmente. Comenzaremos el capítulo definiendo con precisión lo que es un *polinomio de Weierstrass*, y seguidamente, probaremos el teorema de la división de Weierstrass, pues éste permite llegar de manera más sencilla al *teorema de preparación*. Los resultados presentados en este capítulo se demuestran en dos variables, sin embargo, también son válidos en más variables.

2.1. Polinomios de Weierstrass y teorema de la división

Definición 2.1.1. Sea $f \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$, donde $f(x_1,x_2) = \sum_{j=0}^{k} f_j(x_1)x_2^j$, con $f_j \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle$ y $f_k \not\equiv 0$. La serie de potencias de f es llamada *polinomio de Weierstrass* si

$$f_0(0) = f_1(0) = \cdots = f_{k-1}(0) = 0, f_k = 1.$$

Así, para $x_1 = 0$, $f(0,x_2) = x_2^k$, es decir, los ceros de un polinomio de Weierstrass están concentrados en $x_2 = 0$ con multiplicidad k. Ya que f tiene grado k en x_2, para toda x_1 fija, entonces f tiene a lo más k ceros como polinomio en x_2, para cada x_1 fija.

Teorema 2.1.2 (Teorema de la División de Weierstrass)**.**
Sean $f, g \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, con g general de orden k en x_2. Entonces existen únicos $q \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ y $r \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ tales que

$$f = qg + r, \ \ \textit{con} \ \deg_{x_2} r \leq k - 1.$$

Demostración.
Empecemos por separar los términos de las series de potencias de acuerdo al orden k en x_2, de la siguiente manera: para $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_1)x_2^j$, con $f_j \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle$, definimos

$$\hat{f}(x) := \sum_{j=0}^{k-1} f_j(x_1)x_2^j, \quad \tilde{f}(x) := \sum_{j=k}^{\infty} f_j(x_1)x_2^{j-k}. \tag{2.1}$$

De este modo $f(x) = \hat{f}(x) + \tilde{f}(x)x_2^k$, al haber definido $\hat{f}$ y $\tilde{f}$ de la manera anterior, se nos permite tener lo siguiente, siendo $\rho = (\rho_1, \rho_2)$:

$$\begin{aligned} ||f(x)||_\rho &= \sum_{j=1}^{\infty} ||f_j(x_1)||_{\rho_1}\rho_2^j \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} ||f_j(x_1)||_{\rho_1}\rho_2^j + \rho_2^k \sum_{j=k}^{\infty} ||f_j(x_1)||_{\rho_1}\rho_2^{j-k} \\ &= ||\hat{f}(x)||_\rho + \rho_2^k||\tilde{f}(x)||_\rho, \end{aligned} \tag{2.2}$$

es decir, los exponentes de x_2 se ordenan de tal modo que no hay cancelaciones entre ellos al sacar la norma ρ. Obsérvese que, en particular, tenemos que

$$||\tilde{f}||_\rho \leq \rho_2^{-k}||f||_\rho. \tag{2.3}$$

Usando la misma partición para g, es decir, si $g = \hat{g} + \tilde{g}x_2^k$, obtenemos que $\tilde{g} \in \mathbb{C}\langle x\rangle$ es unidad, ya que si no lo fuera, entonces g no podría ser general de orden k en x_2, debido a la distribución de órdenes en x_2 de $\hat{g}$ y $\tilde{g}$.
Ahora, escogemos ρ tal que $f, \tilde{g}, \tilde{g}^{-1} \in B_\rho$.
Obsérvese también que:

$$g = \hat{g} + \tilde{g}x_2^k.$$

Multiplicando por $\tilde{g}^{-1}$ se tiene,

$$\begin{aligned} g \cdot \tilde{g}^{-1} &= \hat{g} \cdot \tilde{g}^{-1} + x_2^k \\ g \cdot \tilde{g}^{-1} - x_2^k &= \hat{g} \cdot \tilde{g}^{-1} \\ x_2^k - g \cdot \tilde{g}^{-1} &= -\hat{g} \cdot \tilde{g}^{-1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Con esto definimos

$$h := x_2^k - g \cdot \tilde{g}^{-1} = -\hat{g} \cdot \tilde{g}^{-1} \in B_\rho. \tag{2.5}$$

Nótese que, como g es general de orden k en x_2 y $g(0, x_2) = \hat{g}(0, x_2) + \tilde{g}(0, x_2)x_2^k$, entonces $\hat{g}(0, x_2) \equiv 0$, ya que los grados en x_2 de $\hat{g}$ son estrictamente menores que k.

Así $h(0, x_2) = -\hat{g}(0, x_2) \cdot \tilde{g}^{-1}(0, x_2) = -0 \cdot \tilde{g}^{-1} \equiv 0$, pero también

$$h = \hat{h} + \tilde{h}x_2^k = h_0 + h_1x_2 + \cdots + h_{k-1}x_2^{k-1} + \tilde{h}x_2^k, \tag{2.6}$$

donde h_j son los coeficientes del desarrollo en series de potencias de x_2.

Igualamos las expresiones de $h(0, x_2)$, es decir, las ecuaciones (2.5) y (2.6) evaluadas en $(0, x_2)$. Así,

$$\begin{aligned} h(0, x_2) &= -\hat{g}(0, x_2) \cdot \tilde{g}^{-1}(0, x_2) \\ &= \hat{h}(0, x_2) + \tilde{h}x_2^k(0, x_2) \\ &= (h_0 + h_1x_2 + \cdots + h_{k-1}x_2^{k-1} + \tilde{h}x_2^k)(0, x_2) \equiv 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

de este modo $h_0(0) = h_1(0) = \cdots = h_{k-1}(0) = \tilde{h}(0, x_2) \equiv 0$.

Ahora mostraremos que, para ν tal que $0 < \nu < 1$, podemos escoger un radio de convergencia $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, de modo que $||h||_\rho \leq \nu\rho_2^k$.

Ya que $\tilde{h}(0, x_2) \equiv 0$, por continuidad podemos considerar ρ tal que $||\tilde{h}||_\rho \leq \frac{\nu}{2}$. Luego, multiplicando $\tilde{h}$ por x_2^k, tenemos que

$$||\tilde{h}x_2^k||_\rho \leq \frac{\nu}{2}\rho_2^k. \tag{2.8}$$

Más aún, notemos que $||\hat{h}||_\rho \leq ||h_0||_{\rho_1} + ||h_1||_{\rho_1}\rho_2 + \cdots + ||h_{k-1}||_{\rho_1}\rho_2^{k-1}$.

Ya que $h_0(0) = h_1(0) = \cdots = h_{k-1}(0) = 0$, entonces, mientras mantenemos a ρ_2 fija podemos disminuir ρ_1 para obtener la siguiente desigualdad

$$||h_j||_{\rho_1} \leq \frac{\nu}{2k}\rho_2^{k-j} \text{ para } j = 0, 1, 2, \cdots, k-1. \tag{2.9}$$

Con lo anterior se obtiene que

$$\begin{aligned} ||\hat{h}(x)||_\rho &\leq \sum_{j=0}^{k-1} ||h_j(x_1)||_{\rho_1}\rho_2^j \\ &\leq \frac{\nu}{2k}(\rho_2^k + \rho_2^{k-1}\rho_2 + \cdots + \rho_2\rho_2^{k-1}) \\ &= \frac{\nu}{2k}k\rho_2^k \\ &= \frac{\nu}{2}\rho_2^k \end{aligned} \tag{2.10}$$

Por las desigualdades (2.8) y (2.10), concluimos que

$$||h||_\rho = ||\hat{h}||_\rho + ||\tilde{h}||_\rho\rho_2^k \leq \frac{\nu}{2}\rho_2^k + \frac{\nu}{2}\rho_2^k = \nu\rho_2^k. \tag{2.11}$$

Ahora usamos la función h de la siguiente manera:

Para $\varphi \in \mathbb{C}\langle x\rangle$, descomponiendo a φ de la misma manera que a f en la ecuación (2.1), definimos $h(\varphi) := h \cdot \tilde{\varphi} \in \mathbb{C}\langle x\rangle$.[1]

Nótese que de las ecuaciones (2.3) y (2.11), se obtiene

$$||h(\varphi)||_\rho = ||h \cdot \tilde{\varphi}||_\rho \leq ||h||_\rho \cdot ||\tilde{\varphi}||_\rho \leq \nu \rho_2^k \rho_2^{-k} ||\varphi||_\rho = \nu ||\varphi||_\rho. \tag{2.12}$$

Lo anterior nos permite hacer una iteración de la siguiente manera: definimos

$$\varphi_0 := f, \varphi_{i+1} := h(\varphi_i) = h \cdot \tilde{\varphi}_i. \tag{2.13}$$

Obsérvese que $||\varphi_i||_\rho \leq ||h||_\rho^i \cdot ||\tilde{\varphi}_0|| \leq \nu^i \cdot ||\varphi_0||_\rho,$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Demostraremos esta afirmación por inducción sobre i.

Para $i = 1$, se tiene que $h(\varphi_1) = h \cdot \tilde{\varphi}_0$, con lo cual

$$||h(\varphi_1)||_\rho \leq ||h||_\rho \cdot ||\tilde{\varphi}_0||_\rho \leq \nu \cdot ||\varphi_0||_\rho.$$

Supongamos que es válido para $i = n$, es decir,

$$||\varphi_n|| \leq ||h||_\rho^n \cdot ||\tilde{\varphi}_0|| \leq \nu^n \cdot ||\varphi_0||_\rho.$$

Veamos que se cumple para $i = n + 1$, $\varphi_{n+1} = h \cdot \tilde{\varphi}_n$.

Luego, $||\varphi_{n+1}||_\rho \leq ||h||_\rho \cdot ||\tilde{\varphi}_n||_\rho \leq \nu \cdot ||\varphi_n||_\rho = \nu^{n+1} \cdot ||\varphi_0||_\rho$.

Por lo tanto se cumple que $||\varphi_i|| \leq \nu^i \cdot ||\varphi_0||_\rho$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Observemos que la serie $\varphi := \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i$ converge ya que:

$$\begin{aligned}
||\varphi||_\rho &\leq \sum_{i=0}^{\infty} ||\varphi_i||_\rho \\
&= ||\varphi_0||_\rho + ||\varphi_1||_\rho + \cdots \\
&\leq ||\varphi_0||_\rho + \nu \cdot ||\varphi_0||_\rho + \nu^2 \cdot ||\varphi_0||_\rho + \cdots \\
&= ||\varphi_0||_\rho \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} \nu^j) \\
&= ||\varphi_0||_\rho \cdot \frac{1}{1-\nu}, \text{ si } 0 < \nu < 1 \\
&= ||f||_\rho \cdot \frac{1}{1-\nu} < \infty, \text{ pues } \varphi_0 = f \in B_\rho.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Y definimos

$$q := \tilde{\varphi} \cdot \tilde{g}^{-1} \in B_\rho \ , \ r := \hat{\varphi} \in \ B_{\rho_1}[x_2]. \tag{2.15}$$

[1] Nótese que esto no es componer h con φ, lo cual no tiene sentido, sino que estamos definiendo lo que entenderemos por h evaluado en φ.

Ahora, si $\hat{\varphi} = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\varphi}_i$ y $\tilde{\varphi} = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_i$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\varphi_i - \varphi_{i+1} &= \varphi_i - h(\varphi_i) \\
&= \varphi_i - h \cdot \tilde{\varphi}_i \\
&= \hat{\varphi}_i + \tilde{\varphi}_i x_2^k - (-\hat{g} \cdot \tilde{g}^{-1}) \cdot \tilde{\varphi}_i \\
&= \hat{\varphi}_i + (x_2^k + \hat{g} \cdot \tilde{g}^{-1}) \cdot \tilde{\varphi}_i \\
&= \hat{\varphi}_i + \tilde{\varphi}_i (x_2^k - x_2^k + g \cdot \tilde{g}^{-1}) \\
&= \hat{\varphi}_i + \tilde{\varphi}_i \cdot g \cdot \tilde{g}^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Por lo que al sumar todos los elementos obtenemos que

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} (\varphi_i - \varphi_{i+1}) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\varphi}_i + g \cdot \tilde{g}^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_i = \hat{\varphi} + g \cdot \tilde{g}^{-1} \cdot \tilde{\varphi} = r + g \cdot q$$

lo cual muestra la existencia de q y r.

Para probar la unicidad, primero demostraremos el siguiente lema.

Lema 2.1.3. *Sean $g, q \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle, r \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle [x_2]$, con g general de orden k en x_2. Si $0 = q \cdot g + r$ entonces $q = r = 0$.*

Demostración.

Sabemos que existe ρ tal que $q, g, r, \tilde{g}^{-1} \in B_\rho$. Para $h := x_2^k - g \cdot \tilde{g}^{-1}$, tenemos que

$$q \cdot \tilde{g} \cdot h = q \cdot \tilde{g} \cdot x_2^k - q \cdot g = q \cdot \tilde{g} \cdot x_2^k - (-r) = q \cdot \tilde{g} \cdot x_2^k + r, \tag{2.17}$$

ya que por hipótesis $0 = q \cdot g + r$, despejando a r de la expresión anterior se tiene que $q \cdot g = -r$.

Nuevamente, sea ρ tal que la ecuación (2.11) se mantiene. Usando la ecuación (2.17) y el hecho de que el $\deg_{x_2} r < k$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
M := ||q \cdot \tilde{g}||_\rho \rho_2^k &= ||q \cdot \tilde{g} \cdot x_2^k||_\rho \\
&\leq ||q \cdot \tilde{g} \cdot x_2^k + r||_\rho \\
&= ||q \cdot \tilde{g} \cdot h||_\rho \\
&\leq ||q \cdot \tilde{g}||_\rho \cdot ||h||_\rho \\
&\leq ||q \cdot \tilde{g}||_\rho \cdot \nu \cdot \rho_2^k \\
&= \nu \cdot M.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

De lo anterior se tiene que $M = \nu \cdot M$, así $M = 0$, ya que $0 < \nu < 1$. Por consiguiente $||q \cdot \tilde{g}||_\rho = 0$, ya que $\rho_2 \neq 0$.

Por lo tanto $q \cdot g = 0$, pero $\tilde{g} \neq 0$, así que $q = 0$ y por lo que $r = 0$. $\square$

Ahora probemos la unicidad del teorema de división de Weierstrass.

Supongamos que existen dos representaciones de f, es decir, existen

$$q, \tilde{q} \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle \text{ y } r, \tilde{r} \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle [x_2] \text{ tales que } f = q \cdot g + r, f = \tilde{q} \cdot g + \tilde{r}.$$

Entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} q \cdot g + r = f = \tilde{q} \cdot g + \tilde{r}, \\ (q - \tilde{q}) \cdot g + (r - \tilde{r}) = 0. \end{aligned}$$

Por el lema anterior, concluimos que $q - \tilde{q} = 0$ y $r - \tilde{r} = 0$. Por lo tanto $q = \tilde{q}, r = \tilde{r}$. Así, q y r son únicas. $\square$

En particular, si $f, g \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle[x_2]$ y $g = g_0 + g_1 x_2 + \cdots + g_k x_2^k$, con $g_k(0) \neq 0$, entonces g_k es una unidad en el anillo $\mathbb{C}\langle x_1 \rangle$, y el algoritmo de la división en anillos de polinomios nos da $q \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle[x_2]$.

Ejemplo 2.1.4. Sean $f, g \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$ con $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^3 + 2x_1^2 x_2 + x_1 x_2^4$ y $g(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^3$, general en x_2 de orden 3. Por el teorema de división de Weierstrass existen únicos $q \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$ y $r \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle[x_2]$ tales que $f = qg + r$ y $\deg_{x_2} r \leq 2$. Se puede verificar directamente que $q(x_1, x_2) = 1 + x_1 x_2$ y $r(x_1, x_2) = 1 + x_2$ satisfacen la igualdad.

2.2. Teorema de preparación

Usando el *teorema de la división* (ver teorema 2.1.2), mostraremos ahora el teorema principal de este texto:

Teorema 2.2.1 (Teorema de Preparación de Weierstrass)**.**
Sea $g \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$ general en x_2 de orden k. Entonces existe una única representación

$$g = \alpha \cdot p = \alpha(x_1, x_2) \cdot (x_2^k + a_{k-1}(x_1) x_2^{k-1} + \cdots + a_0(x_1)),$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$ es una unidad y $p \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle[x_2]$ es un polinomio de Weierstrass de grado k, es decir, $a_i(0) = 0$ para cada $i = 0, 1, \cdots, k-1$.

Demostración.
Apliquemos el teorema de división de Weierstrass a g y a $f = x_2^k$. Con esto obtenemos $q \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$ y $r \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle[x_2]$ de grado menor a k en x_2, tales que

$$x_2^k = f = qg + r. \tag{2.19}$$

Como g es general de orden k en x_2 entonces q tiene que ser unidad, pues de no ser así no se podría obtener la igualdad $x_2^k = qg + r$. De este modo $q(0,0) \neq 0$.
Ahora, definamos $\alpha := q^{-1} = \frac{1}{q}$ y $p := x_2^k - r$, con esto tenemos

$$g = \alpha \cdot p = q^{-1}(x_2^k - r).$$

Nótese que α es unidad por definición. Falta ver que p es polinomio de Weierstrass de orden k.
Para esto, evaluemos la expresión (2.19) en $(0, x_2)$. Como $\deg_{x_2} r$ es menor que $k-1$, y qg es general de orden k en x_2, igualando coeficiente a coeficiente

llegamos a que $r(0, x_2)$ debe anularse. Así, $p(0, x_2) = x_2^k$. Por lo tanto $p \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ es polinomio de Weierstrass. Ahora mostraremos la unicidad.

Supongamos que tenemos dos representaciones de g, es decir, existen $\alpha, \tilde{\alpha}$ unidades en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ y $p, \tilde{p} \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ polinomios de Weierstrass de grado k tales que $g = \alpha \cdot p = \tilde{\alpha} \cdot \tilde{p}$, con $p = x_2^k - r$ y $\tilde{p} = x_2^k - \tilde{r}$. Despejando a x_2^k observamos lo siguiente: $x_2^k = p + r = \alpha^{-1} \cdot g + r$, pero también que $x_2^k = \tilde{p} + \tilde{r} = \tilde{a}^{-1} \cdot g + \tilde{r}$, gracias a la unicidad en el teorema de división de Weierstrass, concluimos que $\alpha = \tilde{\alpha}$ y $r = \tilde{r}$, por consiguiente $p = \tilde{p}$. □

Corolario 2.2.2. *Si g está en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$, α también está en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$.*

Demostración.

Sea $g \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$, donde $g = \alpha \cdot p$ es la factorización dada por el teorema de preparación de Weierstrass con $\alpha \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ y $p \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$.

Ya que p es general de orden k en x_2, podemos aplicar teorema de división de Weierstrass a g y p, por lo que tenemos $g = q \cdot p + r$, con $q, r \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ y $\deg_{x_2} r < k$.

Por otro lado, por teorema de preparación de Weierstrass tenemos que $g = \alpha p$. Entonces por unicidad del teorema de la división se tiene que $r = 0$ y $q = \alpha$. De donde $\alpha \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$.

□

Con esto hemos mostrado que si g es cualquier serie convergente, su conjunto de ceros, en una vecindad del origen, está descrito por un polinomio de Weierstrass. Así en una vecindad adecuada del origen, los ceros de g son los mismos ceros del polinomio de Weierstrass p. El tamaño de dicha vecindad no puede ser predicho, ya que no es claro qué tan lejos del cero converge la serie de potencias o qué tan cerca del cero la función α tiene ceros (solamente tenemos la certeza de que $\alpha(0) \neq 0$ pues α es unidad).

Obsérvese que al ser g general en x_2 de orden k, se tiene que *ord* $g(0, x_2) = k$, donde *ord* $g \leq k$, pero la igualdad siempre se puede conseguir bajo un cambio de coordenadas lineal si es necesario (ver lema 1.3.17).

Por otro lado, si g es un polinomio, entonces $k \leq \deg_{x_2} g$ y en general el grado de g es mayor.

Incluso para $g \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$, el teorema de preparación de Weierstrass hace una importante declaración acerca del comportamiento de la distribución de los ceros en el origen.

Más adelante aplicaremos esto para el estudio de ramas locales en curvas algebraicas.

Ejemplo 2.2.3. Sea $g \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, con $g(x_1, x_2) = x_2^3 - x_1 x_2^2 - x_1^2 - x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 + x_1^3$, general en x_2 de orden 3. Por el teorema de preparación de Weierstrass existen únicos $\alpha \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ unidad y $p \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ polinomio de Weierstrass de grado 3, tales que $g = \alpha \cdot p$. Por un cálculo directo se puede mostrar que $\alpha(x_1, x_2) = 1 - x_1$ y $p(x_1, x_2) = x_2^3 - x_1 x_2^2 - x_1^2$ verifican la igualdad, además estos elementos satisfacen ser una unidad y un polinomio de Weierstrass, respectivamente.

Teorema 2.2.4 (Teorema de continuidad de las raíces).
Sean $D' := \{x \in \mathbb{C} : |x| < \rho_1\}, E := \{y \in \mathbb{C} : |y| < \rho\}$ *y* f *una función holomorfa en el polidisco* $D' \times E$.

Suponga que existe $0 < r < \rho$ *tal que las funciones holomorfas*[2]

$$\begin{aligned} f_x : E &\to \mathbb{C} \\ y &\mapsto f(x,y) \end{aligned} \tag{2.20}$$

no tienen ceros el el anillo $r \leq |y| < \rho$. *Entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que para cada* $x \in D'$ *la función* f_x *tiene exactamente* k *ceros en* E *(contados con multiplicidades).*

Demostración.
Ya que f es holomorfa en $D' \times E$ también es analítica en $D' \times E$, con lo cual podemos ver a f como $f(x,y) = ((x,y)-a_1)((x,y)-a_2)\cdots((x,y)-a_m)g(x,y)$, donde $a_1, a_2, ..., a_m$ son los ceros de f y g es analítica en $D' \times E$ con $g \neq 0$.

Obsérvese que

$$\frac{f_x'(y)}{f_x(y)} = \frac{1}{y-a_1} + \frac{1}{y-a_2} + \cdots + \frac{1}{y-a_m} + \frac{g_x'(y)}{g_x(y)}$$

para $y \neq a_1, a_2, ..., a_m$ donde $f_x'(y) = \frac{df_x}{dy}$.

Consideremos $r < R < \rho$. Por el principio del argumento la integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{|y|=R} \frac{f_x'(y)}{f_x(y)}dy$ nos da el número de ceros de la función f_x dentro del disco $D' \times E$.

Renombramos
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|y|=R} \frac{f_x'(y)}{f_x(y)}dy =: k(x) \in \mathbb{N}.$$

Nótese que $k(x)$ depende continuamente de x, pues f es holomorfa. Entonces, como $k(x)$ toma valores enteros, concluimos que $k(x)$ debe ser una función constante k. De este modo, el número de ceros de f_x está dado por la función constante k para cada $x \in D'$. □

Nota 2.2.5. A continuación, usando el teorema de continuidad de las raíces daremos una manera alternativa de probar la unicidad en la expresión que surge del teorema de preparación de Weierestrass.

Demostración.
Sea $g \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ general en x_2 de orden k. Por el teorema de preparación de Weierstrass supongamos que existen dos representaciones de g, es decir $g = \alpha \cdot p, g = \beta \cdot \tilde{p}$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ son unidades y $p, \tilde{p} \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ son polinomios de Weierstrass de grado k.

Puesto que $p, \tilde{p}$ son polinomios en x_2, con coeficientes en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle$, podemos factorizar sus ceros como:

$$p(x_1, x_2) = (x_2 - a_1) \cdot (x_2 - a_2) \cdots (x_2 - a_k)$$

[2]Funciones definidas por fijar el valor de x en la primera entrada.

y

$$\tilde{p}(x_1, x_2) = (x_2 - b_1) \cdot (x_2 - b_2) \cdots (x_2 - b_k),$$

con $a_i, b_j \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle, 1 \leq i, j \leq k$. Así $\alpha \cdot p = g = \beta \cdot \tilde{p}$, con lo cual $p = \frac{\beta}{\alpha}\tilde{p}$.

Por otro lado, como $p, \tilde{p}$ son polinomios de Weierstrass,

$$p(0, x_2) = \tilde{p}(0, x_2) = x_2^k,$$

por lo que

$$x_2^k = p(0, x_2) = \frac{\beta(0, x_2)}{\alpha(0, x_2)}\tilde{p}(0, x_2) = \frac{\beta}{\alpha}(0, x_2)x_2^k,$$

de donde $u := \frac{\beta}{\alpha}(0, x_2) = 1$.

Notemos que para cada x_1 suficientemente pequeño fijo, se tiene que,

$$0 = p(x_1, a_i(x_1)) = \frac{\beta}{\alpha}(x_1, a_i(x_1)) \cdot \tilde{p}(x_1, a_i(x_1)) = u \cdot \tilde{p}(x_1, a_i(x_1)).$$

Así, también tenemos que $\tilde{p}(x_1, a_i(x_1)) = 0$, por lo que puntualmente $a_i(x_1) = b_j(x_1)$ para alguna $j \in \{1, 2, ..., k\}$.

Usando el *teorema de continuidad de las raíces* (ver 2.2.4) en p y $\tilde{p}$, sabemos que existe una vecindad adecuada del origen donde para cada x_1 fijo, $p(x_1, x_2)$ y $\tilde{p}(x_1, x_2)$, tienen k raíces como funciones en x_2, las cuales están dadas por las funciones $a_i(x_1)$ y $b_j(x_1)$. Como puntualmente cada $a_i(x_1)$ es también raíz de $\tilde{p}$, y viceversa cada $b_j(x_1)$ es raíz de p, esto significa que estas funciones deben coincidir en una vecindad del origen.

Por otro lado, como $\frac{\beta}{\alpha}(0, x_2) = 1$, entonces

$$\alpha(0, x_2) = \beta(0, x_2). \tag{2.21}$$

De esta manera, por la ecuación (2.21) concluimos que $p(0, x_2) = \tilde{p}(0, x_2)$ y puesto que $a_i(x_1) = b_j(x_1)$ obtenemos que $p = \tilde{p}$ y $\alpha = \beta$.

Por lo tanto existen únicas $\alpha \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle, p \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle[x_2]$ tal que $g = \alpha \cdot p$.

□

El *teorema de preparación de Weierstrass* tiene un caso importante, el cual se presenta cuando la serie f dada tiene orden $k = 1$ en la variable distinguida. Para dar una descripción más completa de esto vamos a agregar más variables. Consideremos

$$f(x_1, x_2, y) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_1, x_2)y^j \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2, y \rangle$$

con $f_j \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$, $f(\bar{0}) = 0$ y $f_1(\bar{0}) \neq 0$.

Entonces f es general en y de orden 1, y aplicando el teorema 2.2.1 (de preparación de Weierstrass, pero en varias variables), sabemos que existen únicas $\alpha \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2, y \rangle$ y $\varphi \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$ tales que $\varphi(\bar{0}) = 0$ y $f = \alpha \cdot (y - \varphi)$, con α unidad.

De este modo

$$f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) = \alpha(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \cdot (\varphi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2)) = 0.$$

Ahora, si $\psi \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$ es una serie arbitraria con $\psi(\bar{0}) = 0$, y tal que

$$f(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) = 0,$$

entonces $0 = f(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) = \alpha(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) \cdot (\psi(x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2))$.

Ya que $\psi(\bar{0}) = 0$ y $\alpha(\bar{0}, 0) \neq 0$ se tiene que $\alpha(0, \psi(\bar{0})) \neq 0$.

Puesto que ψ y α son continuas tenemos que $\alpha(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)) \neq 0$ y así en una vecindad suficientemente pequeña alrededor del origen de $\mathbb{C}^2$, $\psi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)$.

Usando esto y el teorema de la identidad [2] para series de potencias se siguen los siguientes teoremas.

Teorema 2.2.6 (Teorema de la función implícita)**.**
Sea $f \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2, y \rangle$, *con* $f(\bar{0}) = 0$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) \neq 0$.

Entonces, localmente, existe una única serie $\varphi \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$, *con* $\varphi(0, 0) = 0$, *tal que*

$$f(x_1, x_2, y) = 0, \text{ si y sólo si, } y = \varphi(x_1, x_2).$$

Demostración.
El hecho de que $f(\bar{0}) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) \neq 0$, significa que f es general de orden 1 en y, es decir $f(0, 0, y) = cy + \cdots$, donde $c \neq 0$.

Usando el teorema de preparación de Weierstrass (en varias variables) sobre f, obtenemos una unidad $u \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2, y \rangle$ y $g \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle[y]$ un polinomio de Weierstrass de grado 1 en y, tales que $f(x_1, x_2, y) = u \cdot g$.

Como g es polinomio de Weierstrass de grado uno en y, se puede escribir como $g := y - \varphi(x_1, x_2)$, con $\varphi \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$, tal que $\varphi(0, 0) = 0$.

Además, observemos que si

$$0 = f(x_1, x_2, y) = u(x_1, x_2, y) \cdot g(x_1, x_2, y) = u(x_1, x_2, y) \cdot (y - \varphi(x_1, x_2)).$$

Al ser u unidad, esta es distinta de cero en una vecindad suficientemente pequeña del origen, por lo que $y - \varphi(x_1, x_2) = 0$, de este modo $y = \varphi(x_1, x_2)$.

De manera recíproca, si $y = \varphi(x_1, x_2)$, entonces $y - \varphi(x_1, x_2) = 0$ y por consiguiente $f(x_1, x_2, y) = u(x_1, x_2, y) \cdot (y - \varphi(x_1, x_2)) = 0$.

Además, como g es única, entonces $\varphi(x_1, x_2)$ también lo es.

□

A su vez, el resultado anterior se puede generalizar para un sistema de funciones, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.7 (Teorema de la Función Implícita en Sistemas.)**.**
Sean $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2, y_1, y_2, ..., y_m \rangle$ *tales que* $f_i(\bar{0}) = 0$ *y* $det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{0})) \neq 0$.

Entonces existen únicas $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$, *tales que* $\varphi(\bar{0}) = 0$ *y* $f_i(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), ..., \varphi_m(x_1, x_2)) = 0$ *localmente.*

Demostración.

La demostración será por inducción sobre m. El caso $m = 1$, es el teorema de la función implícita (2.2.6) y como hipótesis de inducción tomemos el caso $m - 1$. A continuación veremos el caso de m.

Sean $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2, y_1, ..., y_m\rangle$. Supongamos que $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{0})\right) = Id$. Obsérvese que, en particular, $\frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\bar{0}) \neq 0$. Entonces, por el teorema de la función implícita, existe $\psi \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2, y_1, ..., y_{m-1}\rangle$, tal que $f_m(x_1, x_2, y_1, ..., y_{m-1}, y_m) = 0$, si y sólo si, $y_m = \psi(x_1, x_2, y_1, ..., y_{m-1})$.

Definimos $\tilde{f}_i(x_1, x_2, y_1, ..., y_{m-1}) := f_i(x_1, x_2, y_1, ..., y_{m-1}, \psi(x_1, x_2, y_1, ..., y_{m-1}))$, para $i = 1, 2, ..., m - 1$.

Nótese que por el teorema 1.3.15, $\tilde{f}_i \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2, y_1, ..., y_{m-1}\rangle$, ya que las $\tilde{f}_i$ están definidas por las f_i en el homomorfismo de sustitución con ψ, donde cada función es holomorfa.

Ahora, notemos que $\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial y_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial y_m}\frac{\partial \psi}{\partial y_j}$, para $i, j = 1, 2, ..., m - 1$. Así,

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial y_j}\right)_{|\bar{0}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial \psi}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial \psi}{\partial y_{m-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_1} + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_m}\frac{\partial \psi}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y_m}\frac{\partial \psi}{\partial y_{m-1}} \end{pmatrix}_{|\bar{0}} = Id, \tag{2.22}$$

pues

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{0}) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases} \tag{2.23}$$

Por lo que las funciones $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ..., \tilde{f}_{m-1} \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2, y_1, ..., y_{m-1}\rangle$ satisfacen la hipótesis de inducción. De este modo, existen $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1} \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, tales que $y_i = \varphi_i$ y $\tilde{f}_i(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}) = 0$, para $i = 1, 2, ..., m - 1$.
Es decir, $f_i(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}, \psi(x_1, x_2, \varphi_1, ..., \varphi_{m-1})) = 0$.

Definimos $\varphi_m(x_1, x_2) := \psi(x_1, x_2, \varphi_1, ..., \varphi_{m-1})$. Nuevamente, por el teorema 1.3.15, $\varphi_m \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$.

Así, recopilando todo el sistema, tenemos que:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, &\varphi_1, ..., \varphi_m) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, &\varphi_1, ..., \varphi_m) = 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, x_2, &\varphi_1, ..., \varphi_m) = 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

A continuación, para el caso general, es decir, cuando no necesariamente $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{0})\right) = Id$, consideremos $A := \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{0})\right)^{-1}$.

Ahora, definimos a las $\tilde{f}_i$ como las combinaciones lineales de los f_i que resultan de multiplicar por A, es decir,

$$A\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f_m} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Entonces $\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial y_j}(\bar{0})\right) = A\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{0})\right) = Id$, por como está definida A, y por el caso anterior, existen $\varphi_1, ..., \varphi_m \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, tales que $\tilde{f}_i(x_1, x_2, \varphi_1, ..., \varphi_m) = 0$, para $i = 1, ..., m$.

Por otro lado, ya que A es invertible, de la ecuación (2.25) tenemos que $\tilde{f}_i = 0$, si y sólo si, $f_i = 0$, para cada $i = 1, ..., m$. Por lo tanto, también tenemos que $f_i(x_1, x_2, \varphi_1, ..., \varphi_m) = 0$, para cada $i = 1, 2, ..., m$.

□

Teorema 2.2.8 (Teorema de la Función Inversa.)**.**
Sean $g_1, g_2 \in \mathbb{C}\langle y_1, y_2\rangle$ tales que $g_1(\bar{0}) = g_2(\bar{0}) = 0$.
Entonces det$(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(0,0)) \neq 0$, si y sólo si, el homomorfismo de sustitución

$$\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle \to \mathbb{C}\langle y_1, y_2\rangle, f(x_1, x_2) \mapsto f(g_1, g_2)$$

(del teorema 1.3.15) es un isomorfismo.

Por claridad, antes de hacer la prueba en dos variables (la cual sirve también para varias variables), mostraremos el caso de una variable. La prueba general estará basada en la demostración del caso de una variable, la cual a su vez se sigue del teorema de la función implícita.

Lema 2.2.9. *Sea $g \in \mathbb{C}\langle y\rangle$ tal que $g(0) = 0$. Entonces $\frac{\partial g}{\partial y}(0) \neq 0$, si y sólo si, el homomorfismo de sustitución*

$$\hat{\phi}_g : \mathbb{C}\langle x\rangle \to \mathbb{C}\langle y\rangle, x \mapsto g(y)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Asumamos que $g \in \mathbb{C}\langle y\rangle$, tal que $g(0) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$. Mostraremos que el homomorfismo de sustitución $\hat{\phi}_g$ es invertible.

Empecemos definiendo $f(x, y) := g(y) - x, g \in \mathbb{C}\langle y\rangle$.

Como $f(0, 0) = g(0) - 0 = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0) \neq 0$, por el teorema de la función implícita, existe $\varphi \in \mathbb{C}\langle x\rangle$, tal que $f(x, y) = g(y) - x = 0$, si y sólo si, $y = \varphi(x)$, localmente. Esto significa que $g(\varphi(x)) = x$, y a su vez $y = \varphi(g(y))$, es decir, φ es inverso de g.

Con esto se tiene que el homomorfismo de sustitución $\hat{\phi}_\varphi$, definido por φ, es inverso de $\hat{\phi}_g$.

Ahora probaremos la recíproca. Supongamos que $\hat{\phi}_g$, con $g \in \mathbb{C}\langle y\rangle$ y $g(0) = 0$, es un isomorfismo. Esto significa que existe un homomorfismo $\hat{\phi}_g^{-1} : \mathbb{C}\langle y\rangle \to \mathbb{C}\langle x\rangle$, $y \mapsto \varphi(x)$ que es inverso de $\hat{\phi}_g$, de modo que

$$y = \hat{\phi}_g \circ \hat{\phi}_g^{-1}(y) = \hat{\phi}_g(\varphi(x)) = \varphi(g(y))$$

y

$$x = \hat{\phi}_g^{-1} \circ \hat{\phi}_g(x) = \hat{\phi}_g^{-1}(g(y)) = g(\varphi(x)).$$

En particular, al derivar la igualdad $y = \varphi(g(x))$ con respecto a y, en $y = 0$, obtenemos lo siguiente:

$$1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(g(y)) \cdot \frac{\partial g(y)}{\partial y}\right)_{|0}$$
$$1 = (\frac{\partial \varphi}{\partial y}(g(0)) \cdot \frac{\partial g(0)}{\partial y}).$$

Por lo tanto $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(g(0)) \neq 0$ y $\frac{\partial g(0)}{\partial y} \neq 0$.

□

Demostración. (Teorema de la Función Inversa, 2.2.8)

Probaremos primero la implicación directa. Sean $g_1, g_2 \in \mathbb{C}\langle y_1, y_2\rangle$ tales que $g_1(\bar{0}) = g_2(\bar{0}) = 0$, $det(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(0,0)) \neq 0$ y $\hat{\phi}_g : \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle \to \mathbb{C}\langle y_1, y_2\rangle, x_i \mapsto g_i(y_1, y_2), i = 1, 2$.

Para ver que $\hat{\phi}_g$ es isomorfismo nos interesa encontrar algún morfismo que sea su inverso.

Para ello, definamos $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\langle y_1, y_2\rangle$, como $f_1 := g_1(y_1, y_2) - x_1$ y $f_2 := g_2(y_1, y_2) - x_2$. Nótese que $f_i(\bar{0}) = 0$ y $det(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\bar{0})) = det(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(\bar{0})) \neq 0$.

Entonces, aplicando el *Teorema de la Función Implícita en Sistemas* (ver teorema 2.2.7) a las f_i, existen únicas $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ tales que $f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$, si y sólo si,

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x_1, x_2) \\ y_2 &= \varphi_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Por lo tanto,

$$g_1(y_1, y_2) = x_1 \text{ y } g_2(y_1, y_2) = x_2, \tag{2.27}$$

si y sólo si, $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$, y $y_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$. Ahora mostraremos que el homomorfismo de sustitución definido por $\hat{\phi}_\varphi : \mathbb{C}\langle y_1, y_2\rangle \to \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle, y_i \mapsto \varphi_i(x_1, x_2)$ es el inverso de $\hat{\phi}_g$.

Observe que

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\varphi \circ \hat{\phi}_g(x_i) &= \hat{\phi}_\varphi(g_i(y_1, y_2)) \\ &= g_i(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)), \end{aligned} \tag{2.28}$$

para $i = 1, 2$. Ahora, usando la igualdad (2.26), esto último es igual a

$$g_i(y_1, y_2),$$

y por (2.27) esto es x_i. Es decir, tenemos que $\hat{\phi}_\varphi \circ \hat{\phi}_g(x_i) = x_i$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_g \circ \hat{\phi}_\varphi(y_i) &= \hat{\phi}_g(\varphi_i(x_1, x_2)) \\ &= \varphi_i(g_1(y_1, y_2), g_2(y_1, y_2)), \end{aligned} \tag{2.29}$$

para $i = 1, 2$.

Haciendo uso de la igualdad (2.27), lo anterior es igual a

$$\varphi_i(x_1, x_2),$$

y aplicando (2.26) esto es y_i. Es decir, $\hat{\phi}_g \circ \hat{\phi}_\varphi(y_i) = y_i$. Por lo tanto $\hat{\phi}_g$ es invertible y es isomorfismo.

Para probar la recíproca, supongamos que $\hat{\phi}_g$ es un isomorfismo, es decir existe

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}\langle y_1, y_2\rangle &\to \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle, \\ y_i &\mapsto h_i(x_1, x_2), i = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.30}$$

morfismo inverso de $\hat{\phi}_g$, es decir,

$$\begin{aligned} \psi \circ \hat{\phi}_g(x_i) &= \psi(g_i(y_1, y_2)) \\ &= g_i(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)) \\ &= x_i, i = 1, 2, \end{aligned} \tag{2.31}$$

con lo cual $g_1(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)) = x_1$ y $g_2(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2)) = x_2$.

A continuación calculemos sus derivadas con respecto a las x_i,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\bar{0}) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\bar{0}) + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\bar{0}) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\bar{0}) = 1 \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\bar{0}) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\bar{0}) + \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\bar{0}) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\bar{0}) = 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\bar{0}) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\bar{0}) + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\bar{0}) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\bar{0}) = 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\bar{0}) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\bar{0}) + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\bar{0}) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\bar{0}) = 1. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Observemos que la expresión anterior se puede escribir como el siguiente producto de matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\bar{0}) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\bar{0}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\bar{0}) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\bar{0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\bar{0}) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\bar{0}) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\bar{0}) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\bar{0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con lo cual

$$det\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\bar{0}) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\bar{0}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\bar{0}) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\bar{0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\bar{0}) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(\bar{0}) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(\bar{0}) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(\bar{0}) \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Por lo tanto $det\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\bar{0}) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(\bar{0}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(\bar{0}) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(\bar{0}) \end{pmatrix} \neq 0.$

□

Lema 2.2.10 (Lema de Hensel).

Sea $f \in \mathbb{C}\langle x\rangle[y]$ normalizada, es decir,

$$f(x,y) = y^k + a_{k-1}y^{k-1} + \cdots + a_1 y + a_0,$$

con $a_i \in \mathbb{C}\langle x\rangle$, y sea

$$\overline{f}(y) := f(0,y) = (y - C_1)^{k_1}(y - C_2)^{k_2} \cdots (y - C_r)^{k_r},$$

con $C_i \in \mathbb{C}$, $C_i \neq C_j$ para cada $i \neq j$.

Entonces existen polinomios normalizados $f_1, f_2, \cdots, f_r \in \mathbb{C}\langle x\rangle[y]$ tal que $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_r$, $\deg f_i = k_i$ y $\overline{f_i}(y) = f_i(0,y) = (y - C_i)^{k_i}$, para $i = 1, 2, ..., r$.

Además, las f_i están determinadas de manera única y son primas relativas por pares.

Demostración.

Demostraremos este lema recursivamente sobre r, haciendo uso del teorema de preparación (ver teorema 2.2.1). Si $r = 1$ hacemos $f = f_1$.

Si $r > 1$, hacemos un cambio de coordenadas para mandar la C_r al cero. Definamos $g_r(x,y) := f(x, y + C_r) \in \mathbb{C}\langle x\rangle[y]$. Nótese que:

$$\begin{aligned}
\overline{g}_r(y) &= g_r(0,y) = f(0, y + C_r) = \overline{f}(y + C_r)\\
&= (y + C_r - C_1)^{k_1}(y + C_r - C_2)^{k_2} \cdots (y + C_r - C_r)^{k_r}\\
&= (y + C_r - C_1)^{k_1}(y + C_r - C_2)^{k_2} \cdots (y + C_r - C_{r-1})^{k_{r-1}} y^{k_r}\\
&= \tilde{C}_r y^{k_r} + \cdots .
\end{aligned}$$

De este modo, g_r es un polinomio general en y de orden k_r.

Ahora, usando el teorema de preparación de Weierstrass y su corolario (2.2.2) obtenemos $\alpha_r, p_r \in \mathbb{C}\langle x\rangle[y]$ únicas, tales que $g_r = \alpha_r \cdot p_r$, con α_r unidad y p_r polinomio de Weierstrass con p_r polinomio de Weierstrass de grado k_r.

Ahora definimos

$$f_r^*(x,y) := \alpha_r(x, y - C_r) \text{ y } f_r(x,y) := p_r(x, y - C_r). \tag{2.33}$$

Por el Teorema de preparación tenemos la unicidad de f_r. Obsérvese que f_r está normalizada pues $f_r = p_r$ es un polinomio de Weierstrass, además $\deg f_r = k_r$.

Así,

$$f(x,y) = g_r(x, y - C_r) = \alpha_r(x, y - C_r) \cdot p_r(x, y - C_r) = f_r^*(x,y) \cdot f_r(x,y),$$

donde $f_r^*(0,y) = (y - C_1)^{k_1}(y - C_2)^{k_2} \cdots (y - C_{r-1})^{k_{r-1}}$.

Ahora encontremos a f_{r-1} aplicando el teorema de preparación de Weierstrass a f_r^*:

$$f_r^*(x,y) = \alpha_r(y - C_r) \in \mathbb{C}\langle x\rangle[y],$$

f_r^* está normalizada (esto ocurre pues $f = f_r^* \cdot f_r$, y tanto f como f_r están normalizadas) y

$$\overline{f_r^*}(y) = (y - C_1)^{k_1}(y - C_2)^{k_2} \cdots (y - C_{r-1})^{k_{r-1}}.$$

Sea $g_{r-1}(x,y) := f_r^*(x, y + C_{r-1}) \in \mathbb{C}\langle x\rangle[y]$. Nótese que

$$\begin{aligned}\overline{g}_{r-1}(y) &= g_{r-1}(0,y) = g_r(0, y + C_r) = \overline{f_r^*}(y + C_{r-1})\\ &= (y + C_{r-1} - C_1)^{k_1}(y + C_{r-1} - C_2)^{k_2} \cdots (y + C_{r-1} - C_r)^{k_{r-1}}\\ &= y^{k_{r-1}}(y + C_{r-1} - C_1)^{k_1}(y + C_{r-1} - C_2)^{k_2} \cdots (y + C_{r-1} - C_{r-1})^{k_{r-1}}\\ &= \tilde{C}_{r-1} y^{k_{r-1}} + \cdots .\end{aligned}$$

De este modo, g_{r-1} es un polinomio general en y de orden k_{r-1}.

Usando nuevamente el teorema de preparación de Weierstrass y su corolario, existen $\alpha_{r-1}, p_{r-1} \in \mathbb{C}\langle x\rangle[y]$ únicos, tales que $g_{r-1} = \alpha_{r-1} \cdot p_{r-1}$, donde α_{r-1} es una unidad y p_{r-1} es un polinomio de Weierstrass de grado k_{r-1}.

Definamos

$$f_{r-1}^*(x,y) := \alpha_{r-1}(x, y - C_{r-1}) \text{ y } f_{r-1}(x,y) := p_{r-1}(y - C_{r-1}). \tag{2.34}$$

por el teorema de preparación de Weierstrass tenemos la unicidad de f_{r-1}, además f_{r-1} está normalizada por ser polinomio de Weierstrass.

De este modo $f_r^*(x,y) = g_{r-1}(x, y - C_{r-1}) = f_{r-1}^*(x,y) \cdot f_{r-1}(x,y)$, donde $f_{r-1}^*(0,y) = (y - C_1)^{k_1}(y - C_2)^{k_2} \cdots (y - C_{r-2})^{k_{r-2}}$.

De este modo $f = f_{r-1}^* \cdot f_{r-1} \cdot f_r$.

Repitiendo el proceso (r-1)-veces más, obtenemos que

$$f = f_2^* \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_{r-1} \cdot f_r,$$

siendo f_2 polinomio de Weierstrass con $\deg f_2 = k_2$. Nótese que ahora $\overline{f_2^*} = (y - C_1)^{k_1}$, con lo cual renombramos a $f_1 := f_2^*$ y así $\deg f_1 = k_1$.

Así

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_{r-1} \cdot f_r,$$

con $f_1, f_2, \cdots f_r \in \mathbb{C}\langle x\rangle[y]$ únicas tales que, $\deg f_i = k_i$ y $\overline{f_i}(y) = f_i(0,y) = (y - C_i)^{k_i}$, para $i = 1, 2, ..., r$.

Ahora veamos que los polinomios f_i son primos relativos entre sí.

Supongamos que existen f_i y f_j, con $i \neq j$ tales que no son primos relativos. Entonces existen $a, b, q \in \mathbb{C}\langle x\rangle[y]$ tales que $f_i = q \cdot a$ y $f_j = q \cdot b$.

Luego, si $f_i(0, C_i) = q(0, C_i) \cdot a(0, C_i) = 0$, entonces C_i es un cero de q, ya que $f_i(0,y) = (y - C_i)^{k_i}$, de este modo al evaluar $f_j(0, C_i) = q(0, C_i) \cdot b(0, C_i) = 0 \cdot b(0, C_i) = 0$, que es una contradicción pues C_i no es un cero de f_j ya que $i \neq j$, $C_i \neq C_j$, es decir, no pueden compartir ceros entre sí.

Por lo tanto f_i y f_j son primos relativos entre sí.

$\square$

Ahora, haciendo uso del teorema de preparación, estudiaremos cuestiones de divisibilidad en series de potencias, usando los resultados que se conocen al respecto para polinomios.

Para esto, consideremos el anillo intermedio $\mathbb{C}\langle x_1\rangle \subset \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2] \subset \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ para establecer los argumentos que utilizaremos. Sin embargo, tenemos que ser muy cuidadosos en los argumentos de divisibilidad porque las unidades en estos anillos son diferentes. Por ejemplo, $1 - x_2$ es una unidad en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ (en las series geométricas) pero no lo es en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$.

Empecemos observando que los polinomios de Weierstrass $p \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$, es decir, polinomios de la forma

$$p = x_2^k + a_{k-1}x_2^{k-1} + \cdots + a_0, k \in \mathbb{N}, a_i \in m \subset \mathbb{C}\langle x_1\rangle,$$

se comportan especialmente bien bajo la extensión de anillos $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2] \subset \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$.

Proposición 2.2.11. *Para un polinomio de Weierstrass $p \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $k = 0$, es decir, $p = 1$.

b) p es una unidad en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$.

c) p es una unidad en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$.

Demostración.

Sea $p \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ un polinomio de Weierstrass de grado k, es decir, p es de la forma $p = a_k x_2^k + a_{k-1}x_2^{k-1} + \cdots + a_1 x_2 + a_0$, con $a_k = 1$ y $p(0, x_2) = x_2^k$.

a) $\Rightarrow$ b) Ya que $k = 0$, es decir, $p = 1$, entonces p evidentemente es unidad en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$.

b)$\Rightarrow$ c) p es unidad en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ entonces por definición existe $\tilde{p} \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ tal que $p \cdot \tilde{p} = 1$, pero recordemos que $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2] \subset \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, por lo cual $p, \tilde{p} \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ y se sigue cumpliendo que $p \cdot \tilde{p} = 1$, de esta manera p también es unidad en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$.

c)$\Rightarrow$ a) $p \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ es unidad, entonces existe $\tilde{p} \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ tal que $p{\cdot}\tilde{p} = 1$, y en particular, $p(0, 0) \neq 0$.

Por otro lado, como p es polinomio de Weierstrass de grado k, entonces $p = a_k x_2^k + a_{k-1}x_2^{k-1} + \cdots + a_1 x_2 + a_0$, con $a_k = 1$ y $p(0, x_2) = x_2^k$. Por lo que $p(0, 0) = (x_2^k + a_{k-1}x_2^{k-1} + \cdots a_1 x_2 + a_0)(0, 0) = 0$, si $k \geq 1$.

Entonces $p(0, 0) \neq 0$ sólo si $k = 0$, es decir, $p = 1$. $\square$

Proposición 2.2.12. *Sea $f = g \cdot h$ en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$. Entonces:*

a) Si g y h son polinomios de Weierstrass, f también lo es.

b) Si f es un polinomio de Weierstrass, existen unidades $\lambda, \mu \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle$ tal que $\lambda \cdot g$ y $\mu \cdot h$ son polinomios de Weierstrass.

Demostración.

a) Sean $f, g, h \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ tales que $f = g \cdot h$, con g y h polinomios de Weierstrass, es decir, g y h son de la forma :

$$h(x) = \sum_{j=0}^{k} h_j(x_1)x_2^j, \text{ con } h_k = 1, h_0(0) = h_1(0) = \cdots = h_{k-1}(0) = 0,$$

y

$$g(x) = \sum_{j=0}^{l} g_j(x_1)x_2^j \text{ con } g_l = 1, g_0(0) = g_1(0) = \cdots = g_{l-1}(0) = 0,$$

de este modo

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot h(x) \\ &= h_0(x_1)g_0(x_1) + h_0(x_1)g_1(x_1)x_2 + h_0(x_1)g_2(x_1)x_2^2 + \cdots \\ &+ h_1(x_1)g_0(x_1)x_2 + h_1(x_1)g_1(x_1)x_2^2 + \cdots \\ &\vdots \\ &+ h_k(x_1)g_0(x_1)x_2^k + h_k(x_1)g_1(x_1)x_2^{k+1} + \cdots + h_k(x_1)g_l(x_1)x_2^{k+l}. \end{aligned}$$

Luego $f(x) = \sum_{j=0}^{k+l} f_j(x_1)x_2^j$, donde $f_{k+l} = h_k g_l = 1$, y $f_j(0) = 0$, para $j = 1, ..., k+l-1$. Por lo tanto f es polinomio de Weierstrass.

b) Sean $g, h \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle[x_2]$, dados por

$$g(x) = b_l(x_1)x_2^l + b_{l-1}(x_1)x_2^{l-1} + \cdots + b_0(x_1)$$

y

$$h(x) = c_m(x_1)x_2^m + c_{m-1}(x_1)x_2^{m-1} + \cdots + c_0(x_1),$$

donde $b_i, c_j \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle$, y con c_m, b_l distintos de cero. Supongamos que $f = g \cdot h$ es polinomio de Weierstrass, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot h(x) \\ &= b_l(x_1)c_m(x_1)x_2^{m+l} + b_l(x_1)c_{m-1}(x_1)x_2^{l+m-1} + \cdots \\ &+ b_{l-1}(x_1)c_m(x_1)x_2^{m+l-1} + b_{l-1}(x_1)c_{m-1}(x_1)x_2^{m+l-2} + \cdots \\ &\vdots \\ &+ b_0(x_1)c_m(x_1)x_2^m + b_0(x_1)c_{m-1}(x_1)x_2^{m-1} + \cdots + b_0(x_1)c_0(x_1), \end{aligned}$$

con $b_l c_m = 1$, por ser f polinomio de Weierstrass.

Más aún, $b_i c_j(0) = 0$, para $0 \leq i + j \leq m + l - 1$, y como $b_l c_m = 1$, entonces $b_i(0) = 0$ y $c_j(0) = 0$, para i entre 0 y $l-1$, y para j entre 0 y $m-1$. Por lo cual, g y h son generales en x_2 de orden l y m, respectivamente.

Entonces, por el teorema de preparación de Weierstrass, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle$ unidades, y $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{C}\langle x_1 \rangle[x_2]$ polinomios de Weierstrass tales que $g = \alpha \cdot \tilde{g}$ y $h = \beta \cdot \tilde{h}$.

Ya que α y β son unidades, entonces son invertibles, es decir, existen α^{-1}, β^{-1} y así $\alpha^{-1} \cdot g = \tilde{g}, \beta^{-1} \cdot h = \tilde{h}$

Definiendo $\alpha^{-1} := \lambda$ y $\beta^{-1} := \mu$ se cumple que $\lambda \cdot g$ y $\mu \cdot h$ sean polinomios de Weierstrass.

□

Lema 2.2.13. *Para un polinomio de Weierstrass $p \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ son equivalentes:*

a) p es irreducible en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$.

b) p es irreducible en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$.

Demostración.

a)$\Rightarrow$ b)

Supongamos que p es reducible en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ entonces $p = p_1 \cdot p_2$ con $p_1, p_2 \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, ambos no unidades.

Obsérvese que al ser p polinomio de Weierstrass, entonces p es general en x_2. Luego como $p(0, x_2) \not\equiv 0$, entonces tanto p_1 como p_2, tampoco son idénticamente cero al evaluarse en $x_1 = 0$, por lo que ambos son generales en x_2.

Ya que p_1 y p_2 son generales en x_2, usamos el teorema de preparación de Weierstrass y así obtenemos que $p_1 = \alpha \cdot q_1, p_2 = \beta \cdot q_2$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ unidades y $q_1, q_2 \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ polinomios de Weierstrass, así $p = p_1 \cdot p_2 = \alpha \cdot \beta \cdot q_1 \cdot q_2 = u \cdot q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$, con $u = \alpha \cdot \beta$. Usando el teorema de preparación en p, concluimos que $u = 1$ y $p = q_1 \cdot q_2$. Nótese que $q_1 \cdot q_2$ es polinomio de Weierstrass por la proposición anterior.

Por lo tanto p es reducible en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$.

b)$\Rightarrow$ a)

Sea $p \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ reducible, entonces $p = p_1 \cdot p_2$, con $p_1, p_2 \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ y donde ambos no son unidades. Ya que $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2] \subset \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, entonces $p_1, p_2 \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ y $p = p_1 \cdot p_2$ también está en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$. Por lo tanto p es reducible también en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$.

$\square$

Definición 2.2.14. Un dominio entero R es un *dominio de factorización única* si:

- Cualquier $r \in R$, no unidad, puede ser escrito como un producto de un número finito de elementos irreducibles $r = p_1 \cdots p_n$, donde p_i es irreducible para cada $i = 1, ..., n$.
- Esta factorización en elementos irreducibles es única, en el sentido de que si $r = p_1 \cdots p_n = q_1 \cdots q_n$, son dos factorizaciones en elementos irreducibles, entonces $m = n$ y después de un reindexamiento adecuado de los factores, p_i y q_i están asociados.

Lema 2.2.15 (Lema de Gauss [2])**.** *Si R es un dominio de factorización única, entonces $R[x]$ es un dominio de factorización única.*

Teorema 2.2.16. *El anillo $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ de series de potencias convergentes es un dominio de factorización única.*

Demostración.

Haremos uso del anillo intermedio $\mathbb{C}\langle x_1\rangle \subset \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2] \subset \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$. Desarrollaremos la demostración en tres pasos principales: primero mostraremos que

$\mathbb{C}\langle x_1\rangle$ es dominio de factorización única. Luego usando el lema de Gauss (lema 2.2.15) tendremos que $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ también lo es. Finalmente, dado un elemento arbitrario en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, mostraremos que éste admite una factorización única por elementos irreducibles.

1. Para mostrar que $\mathbb{C}\langle x_1\rangle$ es dominio de factorización única notemos que todo elemento f allí, que no es unidad, i.e, $f(0) = 0$, se puede factorizar como $f = u \cdot x_1^k$, donde $k = ord\ f$, con u unidad en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle$, i.e, $u(0) \neq (0)$. Supongamos que $f = f_1 \cdots f_n$ es otra factorización de f, con f_i irreducibles. Entonces cada f_i se puede escribir como $f_i = u_i \cdot x_1^{k_i}$, por lo que $f = \nu \cdot x_1^{\mu}$, donde $\nu = u_1 \cdots u_n$ y $\mu = k_1 + \cdots + k_n$. Igualando esta expresión con $u \cdot x_1^k$, tenemos que $\nu \cdot u^{-1} \cdot x_1^{\mu - k} = 1$, por lo tanto $\nu \cdot u^{-1} = 1$ y $k = \mu$, por lo que, la factorización $f_1 \cdots f_n$ es sólo un reordenamiento de la factorización $u \cdot x_1^k$.

2. Como $\mathbb{C}\langle x_1\rangle$ es dominio de factorización única, entonces por el lema de Gauss se sigue que $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ también lo es.

3. Sea $f \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, mostraremos que f admite una factorización en elementos irreducibles, única salvo unidades, y el orden de los factores.

Supongamos que f es general en x_2 de orden k, pues si no lo fuese entonces $f(0, x_2) = 0$, por lo que se puede factorizar alguna potencia n de x_1 de f, dejando $f = x_1^n \tilde{f}$, donde $\tilde{f}(x_1, 0) \not\equiv 0$, y entonces procederíamos a factorizar a $\tilde{f}$.

Ahora bien, como f es general, aplicamos el teorema de preparación de Weierstrass a f y tenemos que $f = \alpha \cdot p$, siendo $\alpha \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ una unidad y $p \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ un polinomio de Weierstrass de orden k.

Puesto que $p \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ es dominio de factorización única, existe una factorización en elementos irreducibles de p, es decir,

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r, \quad p_i \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$$

y esta factorización es única salvo el orden en el que aparecen los factores, una vez que han sido normalizados para ser polinomios de Weierstrass por la proposición 2.2.12.

Así tenemos que

$$f = \alpha \cdot p = \alpha \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_r,$$

con $p_i \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$, para $i = 1, 2, \cdots r$, irreducibles. Por el lema 2.2.13, tenemos que las p_i, también son irreducibles en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, y ya que $\alpha \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ es unidad también lo será en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$.

Así $f = \alpha \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$, con $\alpha \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ unidad, y $p_i \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ irreducibles.

Ahora veamos que la factorización es única. Supongamos que existe otra factorización de f en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_s$.

Entonces por el lema 1.3.17, $f_1, f_2, \cdots, f_s$ pueden ser representadas en coordenadas apropiadas, y usando el teorema de preparación de Weierstrass quedan como :

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_1 \cdot q_1 \\ f_2 &= \alpha_2 \cdot q_2 \\ &\vdots \\ f_s &= \alpha_s \cdot q_s, \end{aligned}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ son unidades y $q_1, q_2, \cdots, q_s$ son polinomios de Weierstrass.

Recopilando tenemos que

$$\alpha \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_r = f = (\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_s) q_1 \cdot q_2 \cdots q_s = \tilde{\alpha} \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_s,$$

con $\tilde{\alpha} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_s$.

Luego, por la unicidad del teorema de preparación de Weierstrass obtenemos que $p_1 \cdot p_2 \cdots p_r = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$.

Ya que $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$ es dominio de factorización única, concluimos que $r = s$ y $p_i = q_i$ salvo el orden de ocurrencia.

De este modo $f_i = \alpha_i \cdot p_i$ como queríamos.

Por lo tanto $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ es dominio de factorización única.

□

2.3. Estudio de ramas locales

En esta sección aplicaremos los resultados que hemos descrito en la sección anterior, al estudio de curvas analíticas locales (definidas por ceros de funciones analíticas). En particular, nos interesa estudiar el comportamiento de éstas vecindades de puntos singulares, para conocer el número de componentes que pueden tener localmente, i.e., ramas locales.

Definición 2.3.1. Sea $D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : 0 \leq |x_i| < \rho_i, i = 1, 2\}$ un polidisco, y sea $M \subset D$. El conjunto M es llamado *conjunto analítico principal (curva analítica)* si existe $f \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ que converge en todo D y satisface que

$$M = \{x \in D : f(x) = 0\} := V_D(f).$$

Si f es un polinomio, la definición anterior es la de una *curva algebraica*.
Si el polinomio f es unidad en $\mathbb{C}[x_1, x_2]$ entonces $V_D(f) = \emptyset$.

Con esta definición podríamos empezar a aplicar lo que sabemos de las variedades en la teoría de la divisibilidad de polinomios, sin embargo, con las series de potencias hay que tener un poco de cuidado. Sabemos que una serie $f \in \mathbb{C}[\![x_1, x_2]\!]$ es unidad, si $f(0,0) \neq 0$, es decir, $0 \notin V_D(f)$, pero lo que no sabemos es, el cómo se comporta la curva algebraica lejos del origen, por lo que fijamos nuestra atención en una vecindad suficientemente pequeña alrededor de éste, donde $V_D(f)$ coincide con el conjunto vacío.

Definición 2.3.2. Sean $M_1 \subset D_1, M_2 \subset D_2$ curvas analíticas.

Se dice que M_1 y M_2 son equivalentes si existe $D \subset D_1 \cap D_2$ polidisco tal que $M_1 \cap D = M_2 \cap D$.

A una clase de equivalencia de curvas analíticas se le conoce como un *gérmen de una curva.*

Para no saturarnos de notación y confundirnos con ella, la mantendremos de manera sencilla escribiendo $V(f)$ para el germen definido por $V_D(f) \subset D$.

Del mismo modo, siguiendo la noción de gérmen de curva, decimos que $V(f_1) \subset V(f_2)$, si y sólo si, existen representantes $V_{D_i}(f_i)$ y $D \subset D_1 \cap D_2$, tales que $V_{D_1}(f_1) \cap D \subset V_{D_2}(f_2) \cap D$. Similarmente para $V(f_1) \cup V(f_2)$ y $V(f_1) \cap V(f_2)$.

En particular, $V(f) = \emptyset$, si y sólo si, $0 \notin V_D(f)$ para cualquier representante. Nótese que esto significa que $V(f)$ es vacío, si y sólo si, f es una unidad en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$.

Lema 2.3.3. *Sean $f, g, f_i \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, para $i = 1, \cdots r$:*

a) Si f es un divisor de g entonces $V(f) \subset V(g)$.

b) Si $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_r$ entonces $V(f) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \cdots \cup V(f_r)$.

Demostración.

a) Sean $f, g \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ tal que $f|g$, es decir, existe $r \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ tal que $g = f \cdot r$.

Ahora $V(g) = \{x \in D : g(x) = 0\} = \{x \in D : (f \cdot r)(x) = 0\}$, para D polidisco centrado en el origen suficientemente pequeño, entonces $(f \cdot r)(x) \equiv 0$ si $f(x) \equiv 0$ o $r(x) \equiv 0$. Así

$$V(g) = \{x \in D : f(x) = 0\} \cup \{x \in D : r(x) = 0\}.$$

Por lo tanto $V(f) \subset V(g)$.

b) Sean $f, f_i \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle, i = 1, 2, \cdots, r$, tales que $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_r$.

Sea $\tilde{x} \in V(f) = V(f_1 \cdot f_2 \cdots f_r)$, entonces $\tilde{x} \in D$ y $f(\tilde{x}) = (f_1 \cdot f_2 \cdots f_r)(\tilde{x}) = 0$. Esto significa que $f_i(\tilde{x}) \equiv 0$ para alguna $i = 1, 2, ..., r$, entonces

$$\tilde{x} \in V(f_i) \subset V(f_1) \cup V(f_2) \cup \cdots \cup V(f_r),$$

así $V(f) \subset V(f_1) \cup V(f_2) \cup \cdots \cup V(f_r)$.

Por otro lado, sea $\tilde{x} \in V(f_1) \cup V(f_2) \cup \cdots \cup V(f_r)$, entonces $\tilde{x} \in V(f_i)$ para alguna $i = 1, 2, ..., r$.

Ya que f_i es un divisor de f para cualquier i, por el inciso (a) de este lema se tiene que $V(f_i) \subset V(f)$ para cada $i = 1, 2, ..., r$. De este modo $\tilde{x} \in V(f)$.

□

Lema 2.3.4 (Lema de Study)**.** *Sean $f, g \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$. Si f es irreducible y los gérmenes satisfacen que $V(f) \subset V(g)$, entonces f es un divisor de g en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$.*

Demostración.

Nótese que el caso en que f y g son números complejos es evidente, pues el conjunto de ceros de un escalar es o bien vacío o el total. Como f es irreducible en $\mathbb{C}$, entonces $f \neq 0$, y así $V(f) = \emptyset$, el cual está contenido en $V(g)$ para cualquier g.
Claramente $f \neq 0$ siempre divide a cualquier $g \in \mathbb{C}$, ya que $\mathbb{C}$ es un campo. Ahora veamos el caso de las series de potencias.

Por el teorema de preparación de Weierstrass podemos asumir que f, g son polinomios de Weierstrass en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$, ya que tanto f como g se pueden escribir como el producto de un polinomio de Weierstrass y una unidad, pero la unidad no aporta ceros localmente. Por ello, podemos asumir que f y g son de la forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_2^k + a_{k-1}(x_1)x_2^{k-1} + \cdots + a_0(x_1), \\ g(x) &= x_2^l + b_{l-1}(x_1)x_2^{l-1} + \cdots + b_0(x_1) \end{aligned}$$

donde $k, l \geq 1$ con $a_i, b_j \in \mathbb{C}\langle x_1\rangle$ y $a_i(0) = b_j(0) = 0$ para $0 \leq i \leq k-1, 0 \leq j \leq l-1$.

Ya que $\mathbb{C}\langle x_1\rangle$ es dominio de factorización única podemos aplicar el teorema del resultante, el cual dice que f y g tienen factores en común, si y sólo si, su resultante se anula. (Véase el apéndice B.0.1).

Como f es irreducible en $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, por el lema 2.2.13 también es irreducible en $\mathbb{C}\langle x_1\rangle[x_2]$, solo falta mostrar que $R_{f,g} = 0$ como elemento de $\mathbb{C}\langle x_1\rangle$.

Sean f y g convergentes en el polidisco

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 : 0 \leq |x_i| < \rho_i, i = 1, 2.\}.$$

Sea $D' = \{x_1 \in \mathbb{C} : |x_1| < \rho_1\}$.

Sustituyamos un $\tilde{x_1} \in D'$ "fija" en f y g para así tener

$$\begin{aligned} f_{\tilde{x}_1} &= x_2^k + a_{k-1}(\tilde{x_1})x_2^{k-1} + \cdots + a_0(\tilde{x_1}), \\ g_{\tilde{x_1}} &= x_2^l + b_{l-1}(\tilde{x_1})x_2^{l-1} + \cdots + b_0(\tilde{x_1}), \end{aligned}$$

en $\mathbb{C}[x_2]$. Obsérvese que al evaluar en $\tilde{x}_1 = 0$, $f_0 = x_2^k$ y $g_0 = x_2^l$, es decir, sólo se anulan en $x_2 = 0$ y así $V(f_0) = V(g_0) = \{0\}$.

Usando el teorema de continuidad de las raíces (ver 2.2.4), podemos escoger a D de tal manera que para $\tilde{x}_1 \in D'$, todas las raíces de $f_{\tilde{x}_1}$ y $g_{\tilde{x}_1}$ estén en $\{x_2 \in \mathbb{C} : |x_2| < \rho_2\}$, y usando $V(f) \subset V(g)$, tenemos que $V(f_{\tilde{x}_1}) \subset V(g_{\tilde{x}_1})$. Como $f_{\tilde{x}_1}$ y $g_{\tilde{x}_1}$ son polinomios de una variable, esto significa que tienen un factor común.

De este modo $R_{f,g}(\tilde{x}_1) = R_{f_{\tilde{x}_1}, g_{\tilde{x}_1}} = 0$.

Ya que $\tilde{x_1}$ fue arbitraria, esto se mantiene para toda $x_1 \in D'$, entonces por el teorema de la identidad [2] aplicado a la función dada por el resultante, $R_{f,g} = 0$ en D'. Por lo tanto, f y g tienen factores en común, pero como f es irreducible, esto significa que f divide a g.

$\square$

Ahora veamos como obtener la descomposición de un gérmen de una curva en sus componentes.

Definición 2.3.5. Decimos que un gérmen de curva $V(f)$ es *reducible*, si existen $V(f_1)$ y $V(f_2)$ tales que $V(f_i) \neq \emptyset$, $V(f_1) \neq V(f_2)$ y

$$V(f) = V(f_1) \cup V(f_2).$$

En caso de que no existan dichas $V(f_i), i = 1, 2$, diremos que el gérmen es *irreducible*.

Lema 2.3.6. *Sea $V(f)$ un gérmen de curva. $V(f)$ es irreducible, si y sólo si, existen $g \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ irreducible y $k \in \mathbb{N} \diagdown \{0\}$ tales que $f = g^k$.*

Demostración.

Supongamos que $V(f)$ es irreducible, mostraremos que $f = g^k$.

Si f es irreducible no hay nada que probar pues con $g = f$ y $k = 1$ tenemos la conclusión.

Si f es reducible entonces podemos ver a f como $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_k$, con $f_i \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ irreducibles.

Por el lema 2.3.3,

$$V(f) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \cdots \cup V(f_k)$$

y al ser $V(f)$ irreducible, $V(f) = V(f_i)$ para toda i.

Entonces para cualesquiera i, j, tenemos que $V(f_i) = V(f_j)$. En particular, como $V(f_i) \subset V(f_j)$, y f_i es irreducible, por el lema de Study (2.3.4) $f_i | f_j$, del mismo modo $V(f_j) \subset V(f_i)$ y $f_j | f_i$.

Como $f_j | f_i$ entonces $f_j \cdot h_j = f_i$ y ya que las f_i son irreducibles entonces las h_j son unidades.

Sin pérdida de generalidad sea $i = 1$. Así

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 \cdot h_2 &= f_1 \\ f_3 \cdot h_3 &= f_1 \\ &\vdots \\ f_k \cdot h_k &= f_1 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Ya que las h_j son unidades, también son invertibles con lo cual de la ecuación (2.35) se tiene que :

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1 \\ f_2 &= f_1 \cdot h_2^{-1} \\ f_3 &= f_1 \cdot h_3^{-1} \\ &\vdots \\ f_k &= f_1 \cdot h_k^{-1} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Así

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_k = f_1^k (h_2^{-1} \cdot h_3^{-1} \cdots h_k^{-1}) = f_1^k \cdot \tilde{u} \text{ con } \tilde{u} = h_2^{-1} \cdot h_3^{-1} \cdots h_k^{-1}. \quad (2.37)$$

Luego existe u tal que $u^k = \tilde{u}$ y así $f = f_1^k \cdot u^k = (f_1 \cdot u)^k = g^k$, haciendo $g = f_1 \cdot u$ tenemos el resultado.

Para la recíproca, veamos que $V(g)$ es irreducible. Supongamos que existen $g \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ irreducible y $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tal que $f = g^k$, y supongamos que $V(g)$ es reducible. Entonces existen $g_1, g_2 \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, tales que $V(g) = V(g_1) \cup V(g_2)$, con $V(g_1)$ y $V(g_2)$ no vacíos y distintos. Vamos a mostrar que g tiene dos factores irreducibles distintos.

Como $V(g_1) \neq V(g_2)$, entonces $g_1 \neq g_2$, por lo que existen factores irreducibles h_1 y h_2, de g_1 y g_2 respectivamente, con $h_1 \neq h_2$. Por otro lado, notemos que $V(h_i) \subset V(g)$, para $i = 1, 2$. Entonces, por el lema de Study (2.3.4), h_1 y h_2 son dos factores irreducibles distintos de g, lo cual es una contradicción al supuesto de que g era irreducible.

Por lo tanto $V(g)$ es irreducible. Recordemos que, ya que $f = g^k$, $V(f) = V(g^k) = V(g)$. Por lo tanto $V(f)$ es irreducible.

□

Teorema 2.3.7. *Sea $V(f)$ el gérmen de una curva. Entonces $V(f)$ admite una descomposición $V(f) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \cdots \cup V(f_r)$, donde las $V(f_i), i = 1, 2, ..., r$ son irreducibles.*

Dicha descomposición es única salvo el orden en el que las componentes ocurren.

Demostración.

Como $\mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ es dominio de factorización única, entonces dado $f \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$, éste se puede expresar a f como $f = f_1^{k_1} \cdot f_2^{k_2} \cdots f_r^{k_r}$, donde f_i son factores irreducibles, para $i = 1, 2, ..., r$.

Además, ya que las f_i son irreducibles, si $F_i = f_i^{k_i}$ por el lema anterior tenemos que las $V(F_i)$ también son irreducibles.

Luego, por el lema 2.3.3 se tiene que

$$\begin{aligned} V(f) &= V(F_1) \cup V(F_2) \cup \cdots \cup V(F_r) \\ &= V(f_1) \cup V(f_2) \cup \cdots \cup V(f_r). \end{aligned}$$

pues $V(f_i^{k_i}) = V(f_i)$.

Por lo tanto $V(f)$ se descompone y las $V(f_i)$ son irreducibles.

Solo queda probar que la factorización es única. Demostraremos esto por contradicción.

Supongamos que existe $V(f')$ una componente irreducible de $V(f)$ distinta de las $V(f_i)$. Por el lema anterior existen $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ y $h \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ irreducible tal que $f' = h^k$ entonces $V(f') = V(h^k) = V(h)$.

De esta manera $V(h) \subset V(f) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \cdots \cup V(f_r)$ y así $V(h) \subset V(f_i)$ para alguna $i = 1, 2, ..., r$.

Usando el lema de Study tenemos que $h|f_i$ para alguna $i = 1, 2, ..., r$, es decir, h es un factor primo de f_i para alguna $i = 1, 2, ..., r$ pero h y f_i son irreducibles, así $h = f_i$ para alguna $i = 1, 2, ..., r$.

De este modo $V(f') = V(h) = V(f_i)$ para alguna $i = 1, 2, ..., r$.

Por lo tanto la descomposición es única. □

Observación 2.3.8. *Las* $V(f_i), i = 1, 2, ..., r$. *son conocidas como componentes irreducibles.*

Una serie $f \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ se conoce como *minimal* si cada factor primo f_i de f ocurre una sola vez, es decir, $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_r$.

Si f es minimal, definimos el orden del gérmen como

$$ord(V(f)) := ord\ f.$$

Si $f \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ es minimal y p es un punto en la curva algebraica $C = V(f)$, podemos definir las ramas locales de C en p.

Simplemente hacemos un cambio de coordenadas adecuado para que $p = 0$, luego factorizamos $f \in \mathbb{C}\langle x_1, x_2\rangle$ en factores primos $f_1, f_2, \cdots, f_r$ y consideramos los gérmenes de curvas $V(f_1), V(f_2), \cdots, V(f_r)$.

Capítulo 3

Explosión de singularidades

En este capítulo expondremos brevemente una técnica complementaria a lo que se expuso en la sección 2.3, que nos servirá para conocer de manera geométrica el número de ramas locales de una curva, sin tener que dar la factorización explícita. Ésta es llamada *explosión de singularidades* (resolución de singularidades), e intuitivamente consiste en torcer el espacio en una vecindad de una punto singular de una curva, (por ejemplo un punto por donde pasan varias ramas de la curva), con la finalidad de destorcer la curva. Esto nos permitirá separar a cada una de las ramas de la curva que pasan por el punto singular, y así darnos una idea de como es la curva en una vencindad del punto singular.

Después de describir formalmente el proceso de explosión, lo ilustraremos con algunos ejemplos.

La idea principal de este método es trasladar los puntos singulares que queremos explotar al origen, y de ahí construir una variedad holomorfa M de dimensión 2 y una transformación holomorfa $\pi : M \to \mathbb{C}^2$ tales que :

1. La preimagen del origen es la curva proyectiva $\mathbb{E} = \mathbb{C}P^1$.
2. La restricción de π a $M \setminus \mathbb{E}, \pi|_{M\setminus\mathbb{E}} : M \setminus \mathbb{E} \to \mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ sea inyectiva.

A la transformación $\pi : M \to (\mathbb{C}^2, \bar{0})$ se le llama la primera explosión del punto p.

Empecemos describiendo este método en $(\mathbb{R}^2, \bar{0})$ para aprovechar que las dimensiones nos permiten ver de qué variedad M se trata.

Consideramos la transformación

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} &\to \mathbb{R}P^1 \\ (x, y) &\mapsto (x : y) = k(x, y), k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Donde a cada punto $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ le asociamos la recta que contiene al origen y al punto p.

Ahora consideremos la gráfica de π^{-1},

$$Gr(\pi^{-1}) := \{((x,y),(x:y))\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \times \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1.$$

Observemos que la $Gr(\pi^{-1})$ tiene dimensión 2 real y que al considerar su cerradura, es decir, al agregar el punto con el origen de $\mathbb{R}^2$ en su primera coordenada, y la segunda coordenada, que es la que corresponde a su imagen bajo π^{-1} (la cual es $\mathbb{R}P^1$ ya que todas las rectas $(x:y)$ pasan por el origen), se obtiene

$$M := \overline{Gr(\pi^{-1})} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \times \mathbb{R}P^1) \cup \{(0,0)\} \times \mathbb{R}P^1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}P^1.$$

Llamemos $\mathbb{E} := \{(0,0)\} \times \mathbb{R}P^1 = \mathbb{R}P1 \simeq S^1$.

De este modo consideramos la proyección $\pi : M \to \mathbb{R}^2, \pi((x,y),(x:y)) = (x,y)$. Nótese que $\pi^{-1}(\bar{0}) = \mathbb{E} = \mathbb{R}P^1$ y que $\pi|_{\pi\setminus\mathbb{E}} : M \setminus \mathbb{E} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ es un difeomorfismo. Al conjunto $\mathbb{E}$ se le conoce como *el divisor excepcional.*

Ahora sólo nos queda probar que la variedad M es 2-dimensional para así terminar la construcción del método.

Para esto, obtendremos cartas de M y con ellas observaremos como es M.

A cada recta que pase por el origen, la asociaremos con su pendiente o la inversa de su pendiente, es decir,

$$\begin{aligned} (x:y) &\mapsto u = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ (x:y) &\mapsto v = \frac{x}{y} \text{ si } y \neq 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Así obtenemos el siguiente sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} U_1 &: ((x,y),(x:y)) \mapsto (x,u) \text{ si } x \neq 0 \\ U_2 &: ((x,y),(x:y)) \mapsto (v,y) \text{ si } y \neq 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

de esta manera los cambios de coordenadas son

$$y = xu \text{ y } v = \frac{1}{u} \tag{3.4}$$

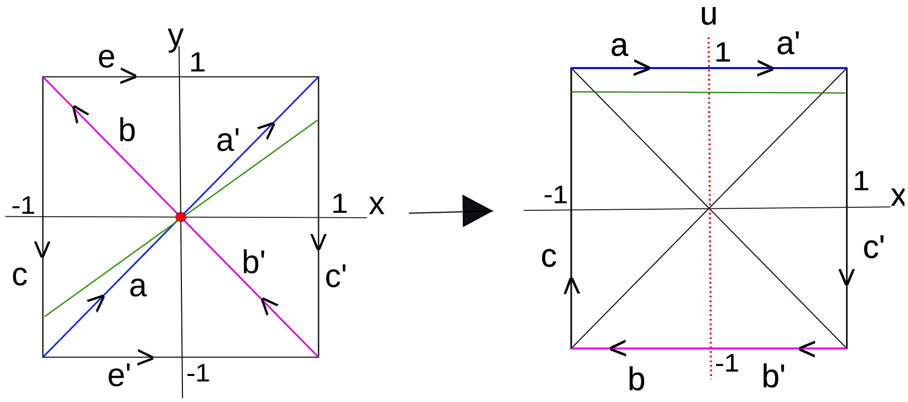
ó

$$x = yv \text{ y } u = \frac{1}{v}. \tag{3.5}$$

Obsérvese que como todas las rectas pasan por el origen, todas las pendientes de las cartas anteriores están asociadas a $\mathbb{E}$, con lo cual la unión de los ejes u y v se corresponden con $\mathbb{E}$.

A continuación para ver como se transforma una vecindad alrededor del origen $\bar{0} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, consideraremos una vecindad alrededor de éste y expresaremos los siguientes conjuntos de M en coordenadas (x,u) y (v,y) como sigue:

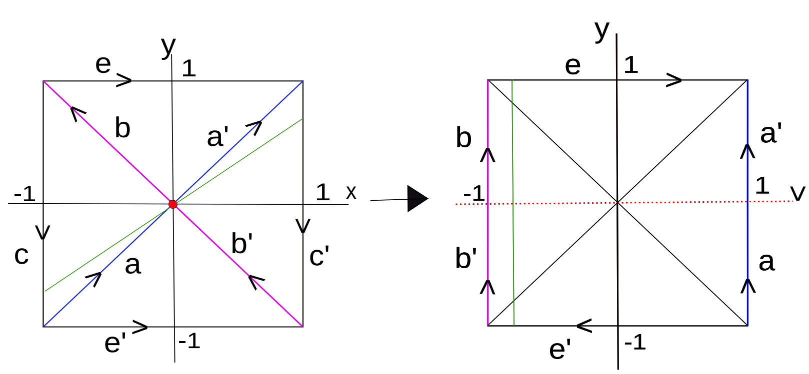
Las coordenadas (x,u):



$$
\begin{aligned}
(x,y) &\mapsto (x,u), u=\frac{y}{x}, (x\neq 0)\\
(x,x) &\mapsto (x,1)\\
(x,-x) &\mapsto (x,-1)\\
(x,\alpha x) &\mapsto (x,\alpha),
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

siendo α la pendiente, α arbitraria.

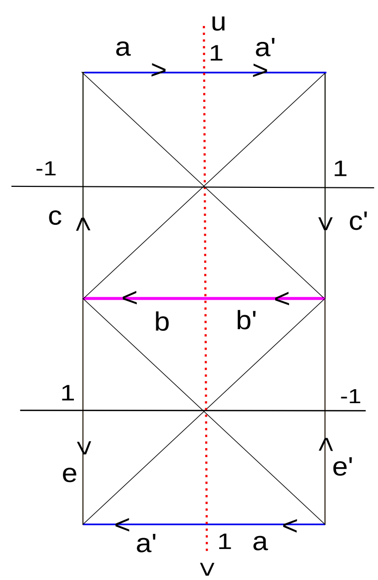
Y en las coordenadas (v, y):



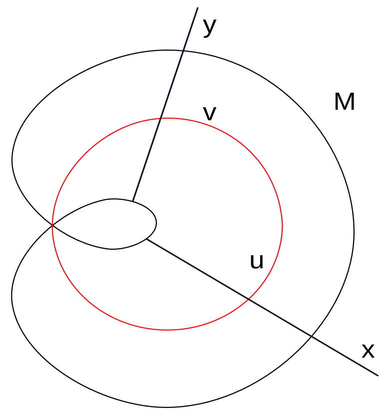
$$
\begin{aligned}
(x, y) = \mapsto (v, y), v = \frac{x}{y}, (y \neq 0) \\
(y, y) \mapsto (1, y) \\
(-y, y) \mapsto (-1, y) \\
(\frac{y}{\beta}, y) \mapsto (\frac{1}{\beta}, y),
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

con $y = \beta x$.

A continuación, al hacer coincidir los puntos en los segmentos aa' de la carta (x, u) con los de la carta (v, y) tenemos que:



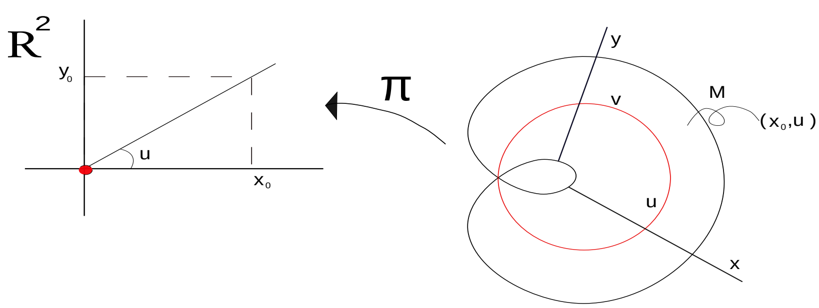
Obsérvese que para corresponder los puntos aa' de ambas cartas hay que torcer una vez la banda anterior, de esta manera obtenemos una banda de Möbius.



El alma de la banda de Möbius está formado por la unión de los ejes u y v, es decir, el alma de M es el divisor excepcional $\mathbb{E} \simeq S^1$ (la línea de color rojo).

Ahora para un punto (x_0, u) de M, $\pi(x_0, u) = (x_0, ux_0) \in \mathbb{R}^2$, es decir, lo manda sobre la recta con pendiente u y para (v, y_0) de M, $\pi(v, y_0) = (vy_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, lo manda sobre la recta con pendiente $\frac{1}{v}$.

Así se conserva el hecho de que $\pi^{-1}(\bar{0}) = \mathbb{E}$.



Lo anterior es para el caso real, para el caso complejo el procedimiento es exactamente igual, la única "diferencia" es que la variedad resultante será

$M = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 \cup \mathbb{E}$, siendo $\mathbb{E} = \{\bar{0}\} \times \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ el divisor excepcional y a la variedad resultante M de una primera explosión la llamaremos *Banda de Möbius compleja*, para hacer analogía con la banda de Möbius real, pero diferencial en el campo en el que se encuentra.

Esta variedad M tiene el siguiente sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned} ((z,w),(z:w)) &\mapsto (z,u) \text{ si } z \neq 0 \\ ((z,w),(z:w)) &\mapsto (v,w) \text{ si } w \neq 0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

con $z, w \in \mathbb{C}$ y cambios de coordenadas $w = uz$ y $v = \frac{1}{u}$ ó $z = wv$ y $u = \frac{1}{v}$.

Nótese que con el sistema de coordenadas anterior, identificamos a $\mathbb{E}$ con la unión de los ejes u y v, la cual forma una esfera S^2.

Considerando la transformación $\pi : M \to \mathbb{C}^2$ tal que $\pi(z,u) = (z, uz)$ y $\pi(v,w) = (vw, w)$ tenemos que $\pi^{-1}(\bar{0}) = \mathbb{E}$ y π es un biholomorfismo entre $M \setminus \mathbb{E}$ y $\mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{0}\}$.

Aunque el método de explosión de singularidades es descrito de manera puntual y se basa en reemplazar con una línea proyectiva $\mathbb{C}P^1$ a un punto, también le diremos explosión al resultado de aplicar varias veces el método de explosión a puntos diferentes en los diferentes niveles de las variedades que sean resultado de estos procesos; por ejemplo, supongamos que explotamos el origen de $\mathbb{C}^2$ y obtenemos una variedad M_1.

Puesto que $M_1 \setminus \mathbb{E}$ es biholomorfo a $\mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{0}\}$, se pueden explotar puntos de M_1 de la misma manera que hacemos con los puntos de $\mathbb{C}^2$.

Así, al explotar a M_1, la estamos cambiando en otra variedad M_2. De esta manera podemos explotar los puntos de M_2 y obtenemos otra variedad M_3 y si explotamos a M_3 tenemos otra variedad M_4. Así sucesivamente podemos seguir explotando, y obteniendo nuevas variedades M_i, de modo que en cada paso tenemos una transformación holomorfa $\pi_i : M_{i-1} \to M_i$, con $M_{i-1} \setminus \mathbb{E}_i$ biholomorfo a $\mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{0}\}$, donde $\mathbb{E}_i = \pi_i^{-1}(\bar{0})$. El que nos detengamos en este proceso depende del objeto que se quiera desingularizar, en nuestro caso aplicaremos esto para curvas en $(\mathbb{C}^2, \bar{0})$.

Nos referiremos a las explosiones $\pi_i : M_{i-1} \to M_i, i = 1, 2, ..., n$, y $M_0 = \mathbb{C}^2$, como "explosiones intermedias" y a todo el proceso anterior hasta la obtención de M_n, le diremos sencillamente *explosión*, al cual lo denotaremos como $\pi : M_n \to (\mathbb{C}^2, \bar{0})$, siendo M_n la última variedad resultante de las explosiones intermedias y π la composición de las proyecciones intermedias π_i.

Recordemos que cada explosión intermedia $\pi_i : M_i \to M_{i-1}$ tiene asociado un divisor excepcional E_i, con lo cual $\pi^{-1}(\bar{0}) = \sqcup_i E_i$. A $\pi^{-1}(\bar{0})$ se le conoce como el divisor excepcional de la explosión $\pi : M \to (\mathbb{C}^2, \bar{0})$.

A continuación mostraremos un ejemplo de una explosión en el caso real, para después mostrar tres ejemplos en el caso complejo, pero antes de eso enunciaremos un teorema de gran utilidad para este proceso.

Definición 3.0.1. Una colección de curvas en una superficie suave, se dice que tiene *cruzamientos normales*, si cada curva es suave, no pasan tres curvas por un punto, y cualquier intersección de dos de ellas es transversal.

Definición 3.0.2. Dado un punto singular p de una curva C en una superficie suave S, se dice que una *buena explosión* es una función $\pi : T \to S$ tal que si $\mathbb{E} = \pi^{-1}(p)$, entonces π es un isomorfismo de $(T - \mathbb{E}) \to (S - p)$; y la colección de curvas π^{-1} tiene cruzamientos normales

Teorema 3.0.3 (3.3.4[10])**.** *Cualquier curva plana singular tiene una buena explosión de singularidades.*

Para campos vectoriales, una singularidad es elemental, si la matriz asociada a la parte lineal del campo vectorial tiene al menos un valor propio no cero. Y para curvas el teorema anterior nos dice que después de un número finito de explosiones, la curva final ya no tendrá tangencias con el divisor excepcional.

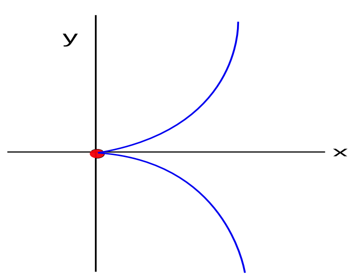
3.1. Ejemplos

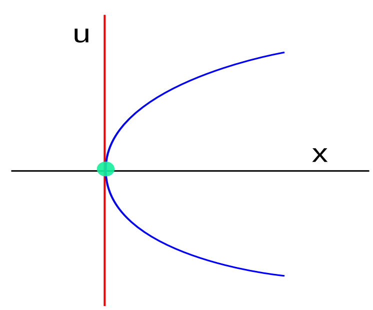
A continuación consideraremos la curva cúspide $y^2 - x^3 = 0$, y aplicaremos el método de explosión de singularidades para conocer el número de ramas por el origen en esta curva

En la carta (x, u) el cambio de coordenadas es $u = \frac{y}{x}, x \neq 0$, es decir $y = ux$. Así $0 = y^2 - x^3 = u^2x^2 - x^3 = x^2(u^2 - x)$. Como $x \neq 0$ podemos multiplicar por $\frac{1}{x^2}$ la ecuación anterior, quedándonos como transformado estricto en esta carta la curva $u^2 - x = 0$. De esta expresión se observa que en el origen se tiene una tangencia de multiplicidad 2 con el divisor.

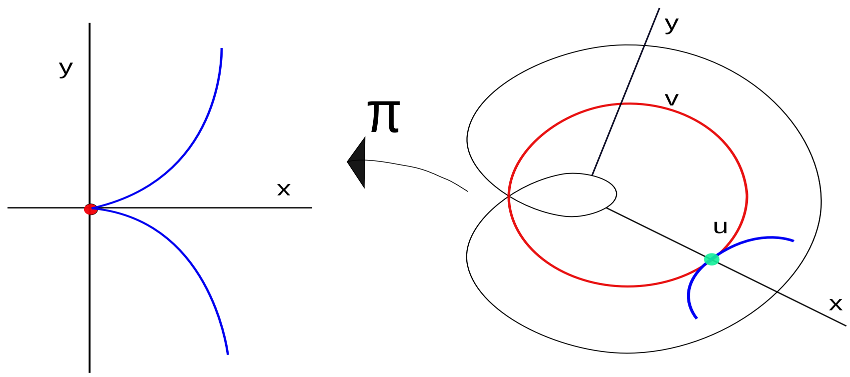
Es sabido que la parábola $u^2 - x = 0$ sólo tiene una rama por el origen. Sin embargo, nótese que al hacer otra explosión de ésta se obtendría una recta, obteniéndose una intersección transversal entre la curva y el divisor.

Por otro lado, en la carta (v, y) el cambio de coordenadas es $v = \frac{x}{y}, y \neq 0$, es decir $x = vy$. En estas cartas la curva corresponde a lo siguiente $0 = y^2 - x^3 = y^2 - v^3y^3 = y^2(1 - v^3y)$. Ya que $y \neq 0$, multiplicamos por $\frac{1}{y^2}$ la ecuación anterior y nos queda que $1 - v^3y = 0$, que resulta ser una unidad en el origen de (v, y), y por lo tanto no aporta ramas localmente. Veamos gráficamente como se ve la carta (x, u).





Al unir ambas cartas en la banda de Möbius (lo representaremos en la banda de Möbius real para poder visualizarla) la curva se transforma en lo siguiente:



Por lo que la cúspide $y^2 - x^3 = 0$ sólo tiene una rama por el origen.

Ahora determinaremos el número de ramas de la cúbica de Tschirnhausen, del trébol de tres y cuatro hojas.

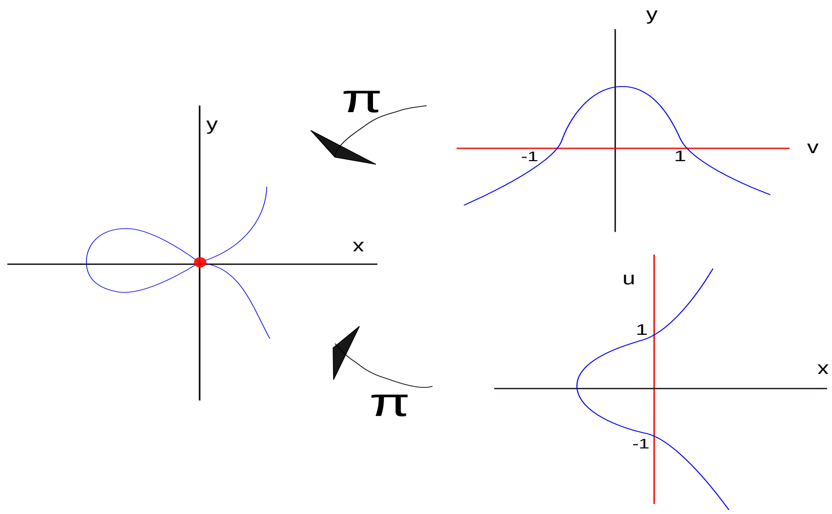
La cúbica de Tschirnhausen tiene como ecuación $y^2 - x^2(x+1)$. En la carta (x, u) hacemos el cambio de coordenadas $u = \frac{y}{x}, x \neq 0$, es decir $y = ux$.

Así $0 = y^2 - x^2(x+1) = u^2x^2 - x^2(x+1)$. Ya que $x \neq 0$ dividimos por x^2 y así la ecuación anterior queda como $0 = u^2 - x - 1$. Al restringirnos en $x = 0$ tenemos que $u^2 - 1 = 0$, si $u = 1$ o $u = -1$. Con lo cual los puntos de intersección con el divisor excepcional son $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

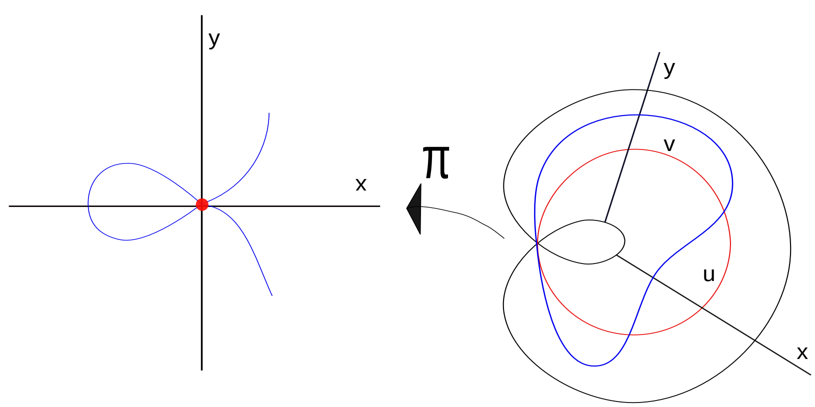
Para darnos una idea de como es la curva basándonos en la orientación de sus pendientes, derivamos con respecto a u, y evaluamos en $x = 0$, para posteriormente sustituir los valores de u.

$$\frac{d}{du}(u^2 - x - 1)|_{x=0} = 2u = \begin{cases} 2 > 0 \text{ si } u = 1, \\ -2 < 0 \text{ si } u = -1. \end{cases} \tag{3.9}$$

A continuación veamos la carta (v, y) con coordenadas $v = \frac{x}{y}, y \neq 0$, es decir $x = vy$. En esta carta la curva corresponde a $0 = y^2 - x^3 = y^2 - v^2y^2(vy+1)$. Para obtener el transformado estricto, dividimos con y^2, quedando $1 - v^2(vy+1) = 0$. Sobre el divisor $\{y = 0\}$ tenemos la ecuación $1 - v^2 = 0$, es decir, $v = 1$ o $v = -1$. De este modo, los puntos de intersección con el divisor excepcional son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Pero recordando que $v = \frac{1}{u}$, los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ de (v, y) se corresponden con los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ de (x, u), respectivamente.



Por lo tanto al explotar la cúbica de Tschirnhausen sólo se tienen dos puntos de intersección con el divisor excepcional, y las ramas que buscamos corresponden a los tramos de la explosión que pasan por esos puntos. A continuación mostramos el dibujo real por visualizarlo mejor, sin embargo, el cálculo anterior de hecho nos muestra el total de ramas de la curva compleja.



Continuemos con el trébol de tres hojas que está descrito por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$.

$$0 = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = x^4 + 2x2y^2 + y^4 + 3x^2y - y^3. \tag{3.10}$$

En la carta (x, u) el cambio de coordenadas es $u = \frac{y}{x}, x \neq 0$, es decir $y = ux$. Así $0 = x^4 + 2u^2x^4 + u^4x^4 + 3ux^3 - u^3x^3 = x^4(1 + 2u^2 + u^4) + x^3(3u - u^3)$. Como $x \neq 0$ podemos multiplicar por $\frac{1}{x^3}$ a la ecuación anterior, obteniendo como transformado estricto en esta carta la curva

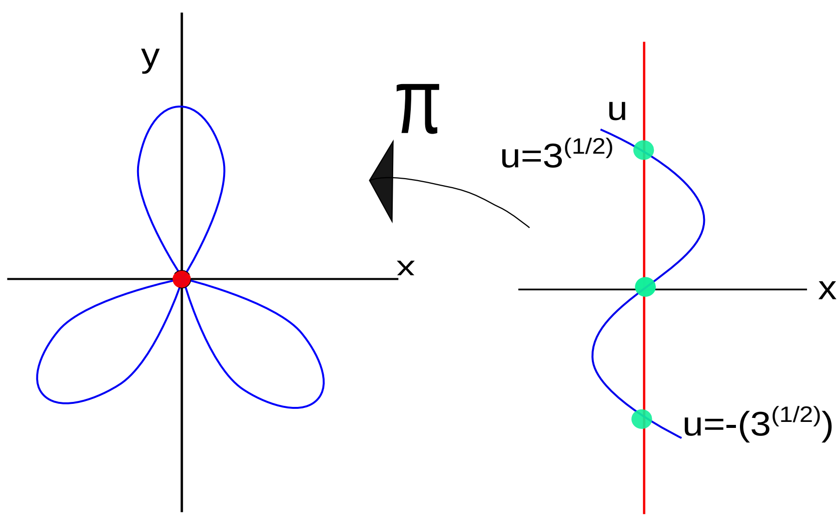
$$0 = x(1 + 2u^2 + u^4) + 3u - u^3 = x(1 + 2u^2 + u^4) + u(3 - u^2).$$

Al fijarnos en $x = 0$ tenemos que $0 = u(3 - u^2)$, si $u = 0$ o $u = \sqrt{3}$ o $u = \sqrt{-3}$. De esta manera, los puntos de intersección con el divisor excepcional son $(0, 0), (0, \sqrt{3})$ y $(0, -\sqrt{3})$.

Derivando con respecto a u y evaluando en $x = 0$, obtenemos las pendientes en esos puntos. Así, nos damos una idea de cómo es la curva (en el dibujo real) por la orientación de las pendientes.

$$\frac{d}{du}(x(1 + 2u^2 + u^4) + 3u - u^3)|_{x=0} = 3 - 3u^2 = \begin{cases} 3 > 0 \text{ si } u = 0, \\ -6 < 0 \text{ si } u = \sqrt{3}, u = \sqrt{-3}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Con esto también se verifica que en estos puntos la curva no es tangente al divisor excepcional, de hecho es transversal y por consiguiente ya no es necesario volverlos a explotar.



Observemos ahora lo que ocurre en la otra carta. En la carta (v, y) las coordenadas son $v = \frac{x}{y}, y \neq 0$, es decir $x = vy$.

En esta carta la ecuación (3.10) corresponde a

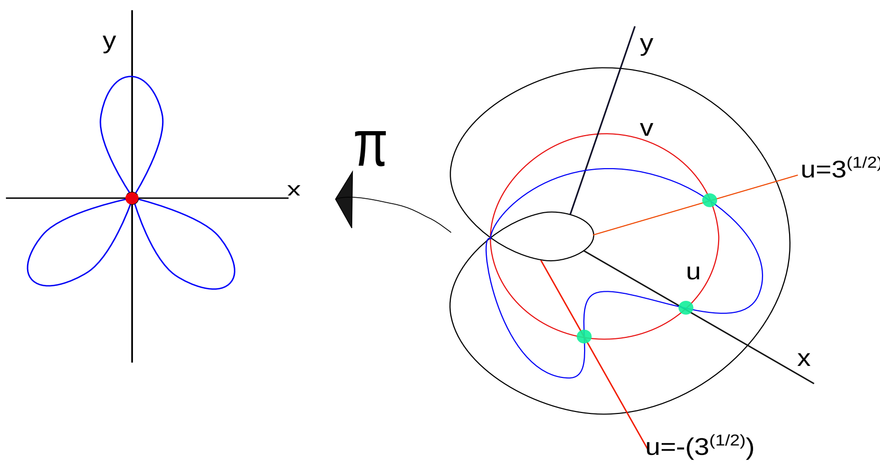
$$0 = v^4y^4 + 2v^2y^4 + y^4 + 3v^2y^3 - y^3 = y^4(v^4 + 2v^2 + 1) + y^3(3v^2 - 1).$$

Puesto que $y \neq 0$, multiplicamos por $\frac{1}{y^3}$, y así obtenemos como transformado estricto a

$$0 = y(v^4 + 2v^2 + 1) + (3v^2 - 1).$$

Sobre el divisor $\{y = 0\}$ tenemos la ecuación $0 = 3v^2 - 1$, es decir, $v = \frac{1}{\sqrt{3}}$ o $v = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. De esta forma, los puntos de intersección con el divisor excepcional son $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ y $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$. Pero recordemos que $v = \frac{1}{u}$, con lo cual, los puntos $(\sqrt{3}, 0)$ y $(0, -\sqrt{3})$ en (x, u) se corresponden con los puntos $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ y $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ de (v, y), respectivamente.

Por lo tanto al explotar el trébol de 3 hojas solamente se obtienen 3 puntos de intersección con el divisor excepcional, y las ramas que buscábamos corresponden a los tramos de la explosión que pasan por esos puntos. Para visualizarlo mejor, presentamos el dibujo real, sin embargo, el cálculo anterior también nos muestra el total de ramas de la curva compleja.



Ahora veamos al trébol de 4 hojas que tiene como ecuación $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$.

$$0 = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = x^6 + y^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - 4x^2y^2. \tag{3.12}$$

En la carta $(x, u), u = \frac{y}{x}$, para $x \neq 0$.

Así la ecuación (3.12) corresponde a $x^6 + u^6x^6 + 3x^6u^2 + 3u^4x^6 - 4u^2x^4 = 0$. Como $x \neq 0$ multiplicamos por $\frac{1}{x^4}$ y obtenemos como transformado estricto a la ecuación

$$0 = x^2(1 + u^6 + 3u^2 + 3u^4) - 4u^2, \tag{3.13}$$

Sobre el divisor $\{x = 0\}$ tenemos la ecuación $-4u^2 = 0$, es decir $u = 0$, y $(0, 0)$ es punto singular de multiplicidad 2.

Ahora observaremos lo que ocurre en la carta (v, y). Hacemos el cambio de coordenadas $v = \frac{x}{y}$ para $y \neq 0$.

De este modo (3.12) es representada por la ecuación $v^6y^6 + y^6 + 3v^4y^6 + 3v^22y^6 - 4v^2y^4 = 0$. Como $y \neq 0$ multiplicamos por $\frac{1}{y^4}$, de esta manera la ecuación anterior queda como

$$0 = y^2(v^6 + 1 + 3v^4 + 3v^2) - 4v^2 \tag{3.14}$$

Al restringirnos en $y = 0$ tenemos que $-4v^2 = 0$, es decir $v = 0$ y $(0, 0)$ es punto singular de multiplicidad 2.

Notemos que en una primera explosión no hemos conseguido separar las ramas, pues tenemos tangencias con el divisor excepcional de las cuales no podemos concluir el número de ramas que puede haber. Por ello, procederemos ahora a realizar una segunda explosión en ambas cartas.

Primero hagamos la explosión de la carta (x, u). Obtendremos dos nuevas cartas, que denotaremos (x, α) y (β, u).

Para la carta (x, α) hacemos el cambio de coordenadas $\alpha = \frac{u}{x}$ para $x \neq 0$, es decir $u = \alpha x$.

Así sustituyendo $u = \alpha x$ en (3.13) queda que

$$0 = x^2(1 + \alpha^6x^6 + 3\alpha^2x^2 + 3\alpha^4x^4) - 4\alpha^2x^2.$$

Como $x \neq 0$ dividimos por x^2 y así

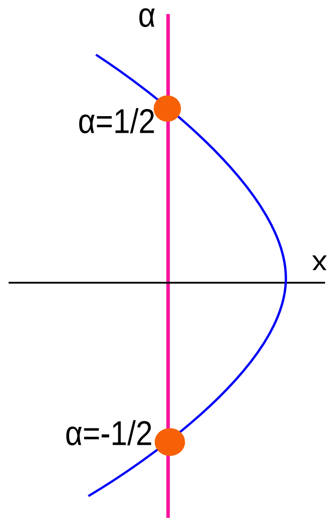
$$0 = 1 + \alpha^6x^6 + 3\alpha^2x^2 + 3\alpha^4x^4 - 4\alpha^2 \tag{3.15}$$

Si $x = 0$ entonces $0 = 1 - 4\alpha^2$, si $\alpha = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ o $\alpha = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$. Entonces los puntos de intersección con el divisor excepcional son $(0, \frac{1}{2})$ y $(0, -\frac{1}{2})$.

Obtengamos las pendientes de (3.15) en los puntos singulares para verificar que la curva es transversal al divisor excepcional en esos puntos, además nos será de gran utilidad en el dibujo real para darnos una idea de cómo es la curva.

$$\frac{d}{d\alpha}(1+\alpha^6x^6+3\alpha^2x^2+3\alpha^4x^4-4\alpha^2)|_{x=0} = -8\alpha = \begin{cases} -4 < 0 \text{ si } \alpha = \dfrac{1}{2}, \\ 4 > 0 \text{ si } \alpha = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Entonces el dibujo sería algo similar a lo siguiente:



Ahora veamos qué ocurre en la carta (β, u) con el cambio de coordenadas $\beta = \frac{x}{u}, u \neq 0$, es decir $x = \beta u$.

Sustituyendo $x = \beta u$ en (3.13), obtenemos que $0 = \beta^2 u^2(1 + u^6 + 3u^2 + 3u^4) - 4u^2$.

Como $u \neq 0$, dividimos por u^2 y así $0 = \beta^2(1 + u^6 + 3u^2 + 3u^4) - 4$.

Si $u = 0$ entonces $\beta^2 - 4 = 0$, si $\beta = 2$ o $\beta = -2$ con lo cual, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$ son los puntos que intersectan al divisor excepcional. Notemos que α y β se relacionan de la misma manera que lo hacen u y v, es decir $\alpha = \frac{1}{\beta}$. Por consiguiente $(2, 0)$ y $(-2, 0)$, en coordenadas (β, u), se corresponden con $(0, \frac{1}{2})$ y $(0, -\frac{1}{2})$ en coordenadas (x, α), respectivamente. Por lo tanto, al explotar explotar el origen de (x, u) obtenemos solamente dos puntos de intersección con el divisor excepcional.

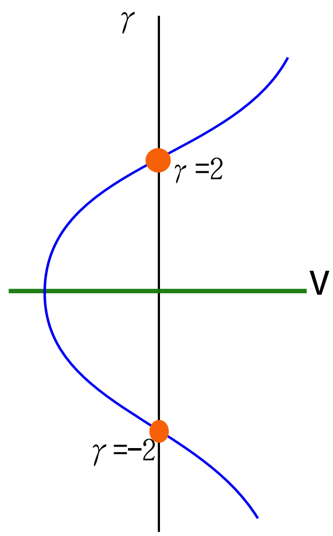
A continuación hagamos la explosión de la carta (v, y) y obtengamos dos cartas nuevas, que denotaremos (v, γ) y (δ, y), donde $\gamma = \frac{y}{v}, v \neq 0$ y $\delta = \frac{v}{y}, y \neq 0$.

Empecemos con la carta (v, γ), sustituyendo $y = v\gamma$ en la ecuación (3.14) se obtiene $0 = v^2\gamma^2(v^6 + 1 + 3v^4 + 3v^2) - 4v^2$. Como $v \neq 0$ dividimos por v^2, quedando como transformado estricto en esta carta la curva $0 = \gamma^2(v^6 + 1 + 3v^4 + 3v^2) - 4$.

Restringiendonos al divisor $\{v = 0\}$, tenemos que $\gamma^2 - 4 = 0$, si $\gamma = 2$ o $\gamma = -2$. Con lo cual $(0, 2)$ y $(0, -2)$ son los puntos de intersección con el divisor excepcional. Además

$$\frac{d}{d\gamma}(\gamma^2(v^6 + 1 + 3v^4 + 3v^2) - 4)|_{v=0} = 2\gamma = \begin{cases} 4 > 0 \text{ si } \gamma = 2, \\ -4 < 0 \text{ si } \gamma = -2. \end{cases} \tag{3.17}$$

Por lo que se tiene una intersección transversal en estos puntos, y la dirección de las pendientes nos permiten observar el comportamiento de la curva real como se representa en la siguiente gráfica:



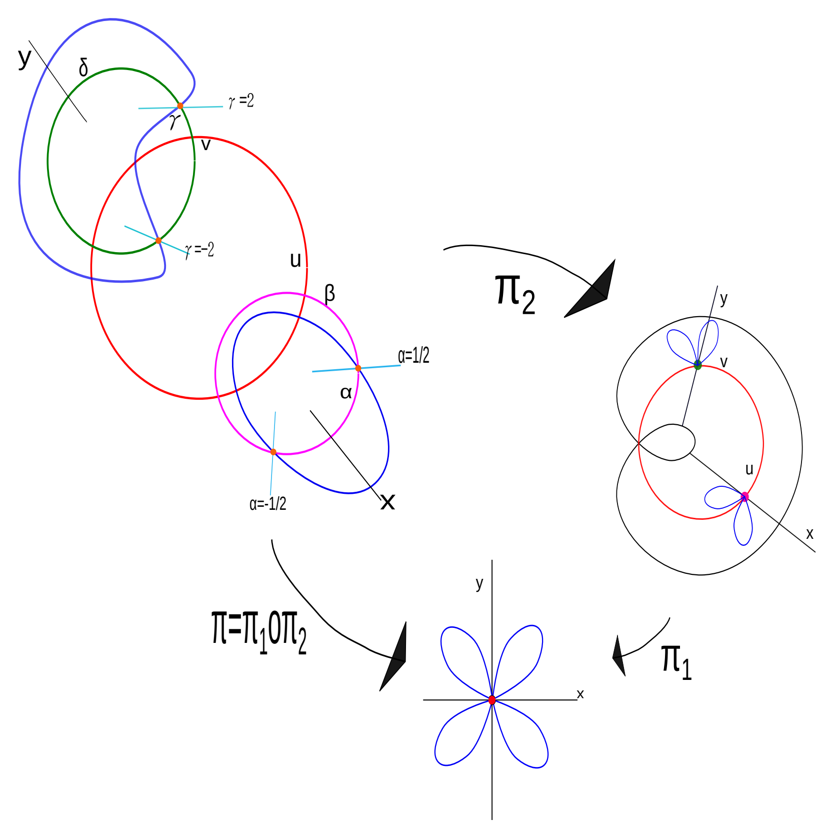
Analizamos ahora lo que ocurre en la carta (δ, y). Sustituyendo $v = \delta y$ en la ecuación (3.14) tenemos que $0 = y^2(\delta^6 y^6 + 1 + 3\delta^4 y^4 + 3\delta^2 y^2) - 4\delta^2 y^2$.

Ya que $y \neq 0$ dividimos por y^2 obteniendo como transformado estricto a $0 = \delta^6 y^6 + 1 + 3\delta^4 y^4 + 3\delta^2 y^2 - 4\delta^2$.

Sobre el divisor $\{y = 0\}$ tenemos la ecuación $0 = 1 - 4\delta^2$, es decir, $\delta = \frac{1}{2}$ o $\delta = -\frac{1}{2}$. De esta manera, los puntos de intersección con el divisor excepcional son $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(-\frac{1}{2}, 0)$, pero ya que $\gamma = \frac{1}{\delta}$, los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$ de la carta (v, γ) se corresponden con los puntos $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(-\frac{1}{2}, 0)$ de la carta (δ, y) respectivamente.

Por lo tanto, al explotar el origen de (v, y) solamente obtenemos dos puntos de intersección con el divisor excepcional.

Con lo anterior obtenemos cuatro ramas locales por el origen, que corresponden a los tramos de las explosiones de las curvas que pasan por los puntos $(0, \frac{1}{2}), (0, -\frac{1}{2})$ en (x, α) (o su equivalente en (β, u)) y $(0, 2), (0, -2)$ en (v, γ)(o su equivalente en (δ, y). Nuevamente presentamos la gráfica real para poder visualizarla.


y
δ
γ =2
γ
v
γ =-2
u
β
α=1/2
α
α=-1/2
x
π2
y
v
u
x
π=π1oπ2
y
x
π1

Apéndice A

Propiedades algebraicas

En este apéndice mostraremos algunos resultados complementarios que se utilizaron en el capítulo 1, pero que para permitir mayor fluidez en lo expuesto anteriormente, hemos decidido colocar sus demostraciones en este sitio. Éstos consisten en ciertas propiedades algebraicas de los espacios $\mathbb{C}[\![x]\!]$, $\mathbb{C}\langle x\rangle$, $\mathbb{C}[x]$ y B_ρ que nos ayudan a definir sus estructuras algebraicas y las implicaciones que se tienen al pasar de un espacio a otro.

$\mathbb{C}[\![x]\!]$ es anillo conmutativo.

Sean $+,\cdot : \mathbb{C}[\![x]\!] \to \mathbb{C}[\![x]\!]$ y $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu$, definimos la suma y el producto como :

$$f(x) + g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_\nu) x^\nu \tag{A.1}$$

y

$$f(x) \cdot g(x) = (\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu) \cdot (\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\sum_{i+j=\nu} a_i b_j) x^\nu. \tag{A.2}$$

Sean $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu, h(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ en $\mathbb{C}[\![x]\!]$.

- $+$ es cerrada.

  $f(x) + g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_\nu) x^\nu$, ya que $\mathbb{C}$ es campo $a_\nu + b_\nu \in \mathbb{C}$ y así $f + g \in \mathbb{C}[\![x]\!]$.

- $+$ es asociativa.

$$\begin{aligned}(f(x)+g(x))+h(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu+b_\nu)x^\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}((a_\nu+b_\nu)+c_\nu)x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu+(b_\nu+c_\nu))x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}(b_\nu+c_\nu)x^\nu = f(x)+(g(x)+h(x)).\end{aligned} \tag{A.3}$$

- $+$ es conmutativa.

$$\begin{aligned}f(x)+g(x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu+b_\nu)x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}(b_\nu+a_\nu)x^\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu x^\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu = g(x)+f(x).\end{aligned} \tag{A.4}$$

- $+$ tiene neutro.

  Consideremos la serie definida como la constante 0, claramente $0 \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ y satisface que $f(x)+0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu + 0 = \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu+0)x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = f(x)$.

- $+$ tiene inverso.

  Existe $-f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} -a_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ tal que

$$f(x)+(-f(x)) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu+(-a_\nu))x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}0x^\nu = \hat{0}.$$

- $\cdot$ es cerrada.

  $f(x)\cdot g(x) = (\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu)\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu} a_i b_j)x^\nu$, ya que $\mathbb{C}$ es campo $a_i b_j \in \mathbb{C}$ y $f\cdot g \in \mathbb{C}[\![x]\!]$.

- $\cdot$ es conmutativa.

$$\begin{aligned}
f(x)\cdot g(x) &= (\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu)\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu} a_i b_j)x^\nu\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu} b_j a_i)x^\nu\\
&= (\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu)\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu) = g(x)\cdot f(x).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

- $\cdot$ es asociativa.

$$\begin{aligned}
(f(x)\cdot g(x))\cdot h(x) &= ((\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu)\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu))\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu\\
&= (\sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu} a_i b_j)x^\nu)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j+k=\nu} a_i b_j c_k)x^\nu\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{j+k=\nu} b_j c_k)x^\nu)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu\cdot((\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu)\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu)) = f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x)).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

- $\cdot$ es distributiva.

$$\begin{aligned}
(f(x)+g(x))\cdot h(x) &= (\sum_{\nu=0}^{\infty}(a_\nu+b_\nu)x^\nu)\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu}(a_i+b_i)c_j)x^\nu\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu}a_ic_j+b_ic_j)x^\nu\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu}a_ic_j)x^\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu}b_ic_j)x^\nu\\
&= ((\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu)\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu))+((\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu x^\nu)\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu))\\
&= (f(x)\cdot h(x))+(g(x)\cdot h(x)).
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Y

$$\begin{aligned}
f(x)\cdot(g(x)+h(x)) &= \sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu x^\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty}(b_\nu+c_\nu)x^\nu)\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu}a_i(b_j+c_j))x^\nu\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu}a_ib_j+a_ic_j)x^\nu\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu}a_ib_j)x^\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu}a_ic_j)x^\nu\\
&= ((\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu)\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty}b_\nu x^\nu))+((\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu)\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu))\\
&= (f(x)\cdot g(x))+(f(x)\cdot h(x)).
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Por lo tanto $\mathbb{C}[\![x]\!]$ es anillo conmutativo.

$\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$ es anillo conmutativo.

Sean $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu, g(x) = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[x]$ y observe que

$$f(x) + g(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu + \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{m+n} (a_\nu + b_\nu) x^\nu \in \mathbb{C}[x]$$

y

$$f(x) \cdot g(x) = (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) \cdot (\sum_{j=0}^{m} b_j x^j) = \sum_{\nu=0}^{m+n} (\sum_{i+j=\nu} a_i b_j) x^\nu \in \mathbb{C}[x],$$

es decir, la suma y el producto de polinomios también es un polinomio, con lo cual las operaciones son cerradas. Y ya que $\mathbb{C}[x] \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$ y $\mathbb{C}[\![x]\!]$ es anillo conmutativo, entonces $\mathbb{C}[x]$ también es anillo conmutativo.

$\mathbb{C}[\![x]\!]$ es dominio entero.

Definición A.0.1. Un anillo conmutativo R se llama *dominio entero* en el caso en que para cualesquiera $x, y \in R$, si $x \cdot y = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.

A continuación demostraremos por contrapositiva que $\mathbb{C}[\![x]\!]$ no tiene divisores del cero.

Sean $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ con $f, g \neq 0$.

Sean a_n, b_m los menores coeficientes no cero de f y g, es decir, f y g son de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots$$

y

$$g(x) = b_m x^m + b_{m+1} x^{m+1} + \cdots,$$

con a_n y b_m distintos de cero.

Ya que

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\sum_{i+j=\nu} a_i b_j) x^\nu = a_n b_m x^{n+m} + \sum_{\nu=n+m+1}^{\infty} (\sum_{\nu=0} a_i b_j) x^\nu.$$

Entonces como $a_n b_m \neq 0$, pues $\mathbb{C}$ es dominio entero, $a_n b_m x^{n+m} \neq 0$ también y por consiguiente $f \cdot g \neq 0$.

Por lo tanto $\mathbb{C}[\![x]\!]$ no tiene divisores del cero y es dominio entero.

$\mathbb{C}\langle x\rangle$ es anillo conmutativo.

Sean $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu \in \mathbb{C}\langle x\rangle$, entonces existe $\sigma \in \mathbb{R}^2$ tal que $\sum |a_\nu|\sigma^\nu$ y $\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|\sigma^\nu$ convergen.

Ahora, observemos que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu + b_\nu|\sigma^\nu \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|\sigma^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|\sigma^\nu < \infty \tag{A.9}$$

y que

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\infty}|\sum_{i+j=\nu} a_i b_j|\sigma^{\nu} &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i+j=\nu}|a_i b_j|\sigma^{\nu}\\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i+j=\nu}|a_i||b_j|\sigma^{\nu} \\ &= (\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\sigma^{\nu})\cdot(\sum_{\nu=0}^{\infty}|b_\nu|\sigma^{\nu}) < \infty.\end{aligned} \tag{A.10}$$

Con lo cual $f+g$ y $f\cdot g$ están en $\mathbb{C}\langle X\rangle$. Ya que $\mathbb{C}\langle x\rangle \subset \mathbb{C}[\![x]\!]$ y $\mathbb{C}[\![x]\!]$ es anillo conmutativo, entonces $\mathbb{C}\langle x\rangle$ también es anillo conmutativo.

B_ρ es $\mathbb{C}$- espacio vectorial.

Demostraremos que B_ρ, con las operaciones de suma de series y producto escalar sobre los complejos, es un $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

Sean $+ : B_\rho \to B_\rho$, $f, g \in B_\rho$.

Entonces $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu \in \mathbb{C}\langle x\rangle$ y $||f||_\rho, ||g||_\rho < \infty$.

Obsérvese que

$$\begin{aligned}||f(x)+g(x)||_\rho &= \sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu + b_\nu|\rho^\nu \\ &\leq \sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\rho^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty}|b_\nu|\rho^\nu = ||f(x)||_\rho + ||g(x)||_\rho < \infty.\end{aligned} \tag{A.11}$$

De esta manera $f+g$ converge y $f+g \in B_\rho$.

Por otro lado, sabemos que la suma de series convergentes es asociativa, conmutativa, tiene neutro e inverso aditivo, por lo cual estas propiedades también se tienen en B_ρ.

Ahora veamos que el producto escalar, el cual va de $\mathbb{C}\times B_\rho$ a B_ρ, es cerrado, conmutativo, asociativo, distributivo y tiene neutro multiplicativo.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in B_\rho$.

Observemos que

$$\begin{aligned}||\alpha f(x)||_\rho &= ||\alpha(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu)||_\rho = ||\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha a_\nu x^\nu||_\rho \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}|\alpha a_\nu|\rho^\nu = |\alpha|\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_\nu|\rho^\nu = |\alpha|||f(x)||_\rho < \infty.\end{aligned} \tag{A.12}$$

Por lo tanto αf converge y está en B_ρ.

Además

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)f(x) &= (\alpha\beta)\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha\beta a_\nu x^\nu \\ &= \alpha(\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta a_\nu x^\nu) = \alpha(\beta\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu) = \alpha(\beta f(x)),\end{aligned} \tag{A.13}$$

es decir, el producto escalar asocia.

Al considerar al 1 como el neutro multiplicativo, tenemos que $1f = f$.

Finalmente veamos que el producto escalar es distributivo con respecto a la suma.

$$\begin{aligned}
\alpha(f(x)+g(x)) &= \alpha(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu) \\
&= \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_\nu) x^\nu \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha(a_\nu + b_\nu) x^\nu \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha a_\nu + \alpha b_\nu) x^\nu) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha a_\nu x^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha b_\nu x^\nu \\
&= \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu + \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu = (\alpha f(x)) + (\alpha g(x)).
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Y

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta) f(x) &= (\alpha+\beta) \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha+\beta) a_\nu x^\nu \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha a_\nu + \beta a_\nu) x^\nu \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha a_\nu x^\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta a_\nu x^\nu \\
&= \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu + \beta \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = (\alpha f(x)) + (\beta f(x)).
\end{aligned} \tag{A.15}$$

Por lo tanto, B_ρ con la suma y el producto escalar es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

$(B_\rho, +, \cdot)$ es anillo conmutativo con unidad.

Para esto consideraremos a la suma y el producto de series las cuales van de $B_\rho \times B_\rho$ a B_ρ.

Sean $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu, g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^\nu \in B_\rho$ entonces $f, g \in \mathbb{C}\langle x \rangle$ y $||f||_\rho, ||g||_\rho < \infty$.

Ya sabemos que que $f + g \in B_\rho$ y que la suma en B_ρ es conmutativa, asociativa, tiene neutro aditivo e inverso.

Ahora veamos que el producto de series es cerrado.
Obsérvese que

$$\begin{aligned}
||f(x) \cdot g(x)||_\rho &= ||(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu) \cdot (\sum b_\nu x^\nu)||_\rho \\
&= ||\sum_{\nu=0}^{\infty}(\sum_{i+j=\nu} a_i b_j) x^\nu||_\rho \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty} |\sum_{i+j=\nu} a_i b_j| \rho^\nu \\
&\leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{i+j=\nu} |a_i b_j| \rho^\nu \\
&= ||f(x)||_\rho \cdot ||g(x)||_\rho < \infty
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Puesto que el producto de series convergentes es asociativo, conmutativo y distributivo con respecto a la suma, el producto también lo hace con las series de B_ρ.

Ahora veamos que tiene unidad. Consideremos la serie definida por la constante 1, claramente $1 \in B_\rho$ y satisface que $f \cdot 1 = f = 1 \cdot f$.

Con lo anterior, obtenemos el hecho de que $(B_\rho, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Apéndice B

El Resultante

A menudo cuando queremos saber si dos polinomios tienen factores en común, lo primero que hacemos es factorizar el polinomio para determinar sus ceros, sin embargo, hay una herramienta que nos puede ayudar a encontrarlos sin tener que encontrar los ceros. La herramienta que mencionamos es conocida como, el *resultante*, el cual nos ayudará a buscar los factores desde los coeficientes de los polinomios.

Si A es un anillo (conmutativo con unidad), y

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in A[x],$$

son polinomios de grado a lo más m y n respectivamente, entonces definimos al *resultante* de f y g como:

$$R_{f,g} = det \begin{pmatrix} a_0 & \cdots & \cdots & a_m & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & a_0 & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & \cdots & \cdots & b_n & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & b_0 & \cdots & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} n \text{ filas} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} m \text{ filas} \end{array}$$

Por definición $R_{f,g} \in A$.

Teorema B.0.1. *[3] Sea A un dominio de factorización única. Sean $f, g \in A[x]$ como antes, con $a_m \neq 0$ y $b_n \neq 0$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) f y g tienen factores en común de grado ≥ 1en $A[x]$.

ii) $R_{f,g} = 0$ en A.

El grado se considera en términos de x, incluso si el A mismo es un anillos de polinomios.

Bibliografía

[1] Brieskorn, E., & Knörrer, H. (2012). *Plane Algebraic Curves: Translated by John Stillwell.* Springer Science & Business Media.

[2] De Jong, T., & Pfister, G. (2013). *Local analytic geometry: Basic theory and applications.* Springer Science & Business Media.

[3] Fischer, G. (2001). *Plane algebraic curves (Vol. 15).* American Mathematical Soc..

[4] Fulton, W. (2008). *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry.* 2008. Author's version, 258, 50.

[5] Grauert, H., & Fritzsche, K. (2012). *Several complex variables (Vol. 38).* Springer Science & Business Media.

[6] Ilyashenko, Y., & Yakovenko, S. (2008).*Lectures on analytic differential equations (Vol. 86).* American Mathematical Soc..

[7] Laveaga, C. G. (2014). *Álgebra superior: curso completo.* Universidad Nacional Autónoma de México.

[8] Pontigo Herrera, J. D. (2009). *Elementos geométricos en foliaciones holomorfas.*

[9] Roman, S., Axler, S., & Gehring, F. W. (2005). *Advanced linear algebra (Vol. 3).* New York: Springer.

[10] Wall, C. T. C. (2004). *Singular points of plane curves (Vol. 63).* Cambridge University Press.

20