



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Límite clásico para los niveles de Landau

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Jovany Dávila Quinto

TUTOR:

Dr. Fernando Matías Moreno Yntriago

Ciudad Universitaria, CD.MX., 2021





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

In science one tries to tell people, in such a way as to be understood by everyone, something that no one ever knew before. But in poetry, it's the exact opposite

P. A. M. Dirac.

Quiero exponer mi agradecimiento hacia la *Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)* en general, quien ha sido mi Alma Máter durante mi trayectoria y, en particular, a la *Facultad de Ciencias* a la cual nunca podré retribuirle todo lo que me ha dado.

Agradezco al Dr. *Fernando Matías Moreno Yntriago* por todo lo que me ha enseñado estos años, comenzando por sus enseñanzas en mecánica cuántica y terminando por la dirección de este trabajo. También quiero mostrar mi gratitud para con los investigadores que forman parte de mi jurado, comenzando con el Dr. *Eugenio Ley Koo* quien además de juez en mi trabajo ha sido un guía a lo largo de mi carrera como científico; sus clases me han enseñado más que física. A la Dra. *Susana Orozco Segovia* también agradezco sus enseñanzas en termodinámica. Al Dr. *Genero Toledo Sánchez* por tomarse un poco de su valioso tiempo para revisar, corregir y autorizar mi trabajo. Por último pero no menos importante, al Dr. *Ángel Prieto Ruiz* con quien he tenido la fortuna de trabajar en la Facultad de Ciencias estos últimos semestres y de quien he aprendido bastante sobre electromagnetismo.

La familia siempre es un pilar importante en la formación de toda persona; en mi caso necesitaría escribir otra tesis para poder agradecer todo lo que mi madre ha hecho por mí y gracias a la cual pude redactar este trabajo, ***Beatriz Quinto Medina***, ha sido más que una figura de autoridad, ha sido una consejera, una amiga y alguien en quien sin duda puedo confiar siempre.

Agradezco a mi padre, *Alfredo Dávila Martínez* y mi hermano *Iván Dávila Quinto* por su apoyo y consejos.

A ***Adriana Josefina Bautista López*** por ir conmigo de la mano prácticamente desde que nos conocimos y quien siempre he creído en mi incluso cuando yo mismo lo dudaba, por último a mi primo *José Luis Dávila Serrano* quien más que un primo ha sido como un hermano mayor.

En algún momento de mi vida alguien me comentó que los amigos son aquella familia que podemos escoger, por lo tanto, es importante escoger bien. A lo largo de nuestras vidas algunos amigos llegan y otros se van, pero, sin lugar a dudas, todos dejan algo en nuestras vidas. No tengo palabras para agradecer a mis amigos de la facultad con quienes compartí muchas experiencias y con los cuales caminé este difícil pero satisfactorio sendero, sin embargo, trataré de hacerlo. Rodrigo Guzmán Castro; muchas gracias por todas esas pláticas de física, de la vida y otras más banales. Eduardo López Luis otro gran colega con quien tuve la dicha de compartir clases, laboratorios, juegos, risas etc. José Francisco Malagón García, compañero con quien siempre es grato discutir sobre cualquier tema. Aurora Otero González gracias por todas las palabras de ánimo y tus diferentes perspectivas que siempre has tenido sobre la ciencias. Me es imposible mencionarlos a todos pero si no llego a hacerlo es por mi corta memoria de papel que lodré escribir; Memo, Cuau, Miros, Roy y todos aquellos que no recuerdo en este momento, gracias por todo.

A mis amigos Francisco Tapia, Morris Nieves, Japo, Jhoana, Roberto Mireles, Miguel Marmolejo entre otros, gracias por todo su apoyo y buenas intenciones.

Por último quiero dar un agradecimiento especial a mi profesor de bachillerato *Gonzalo Leonardo García León* ya que él fue quien me inició en este mundo de la física y gracias a ello, esto ha podido ser posible.

Índice general

Resumen	5
Introducción	9
1. Partícula en un campo electromagnético	11
1.1. Teoría electrodinámica clásica	11
1.2. Electrón en un campo electromagnético estático	17
1.3. Límite clásico	25
1.4. Niveles de Landau	30
1.5. Ecuación de Schrödinger-Pauli	40
2. Transformaciones de norma	45
2.1. Ecuaciones de movimiento	49
2.1.1. Formalismo de Lagrange	49
2.1.2. Formalismo de Hamilton	51
2.1.3. Transformaciones de norma para el formalismo cuántico	53
3. Esquema de Heisenberg	57
3.1. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético constante y uniforme	58
3.2. Norma simétrica	67
3.3. Norma de Landau	70
4. Efecto Aharonov-Bohm	75
4.1. Potencial vectorial fuera y dentro de un solenoide	75
4.2. Partícula alrededor de una solenoide	78
4.3. Partícula en una región libre de campo magnético	81
4.4. Experimento de interferencia Aharonov-Bohm	83

5. Norma generalizada	87
Conclusión	91
A. Funciones especiales	95
A.1. Ecuación de Laguerre	95
A.1.1. Formula de Rodrigues	97
A.1.2. Función generatriz	97
A.1.3. Ortogonalidad	98
A.2. Polinomios asociados de Laguerre	100
A.2.1. Formula de Rodrigues	101
A.2.2. Función generatriz	102
A.2.3. Ortogonalidad	102
A.3. Relación entre los polinomios de Laguerre y los polinomios generalizados de Laguerre	103
B. Oscilador armónico cuántico	107
B.1. Método analítico	107
B.2. Método algebraico	111

Resumen

Éste trabajo se divide en cinco capítulos principales. En el primer capítulo se hace un repaso de la teoría electrodinámica clásica introduciendo los potenciales vectorial y escalar además de la forma explícita de los campos en términos de una norma arbitraria, posteriormente, se aborda el problema del electrón en un campo electromagnético estático mediante la sustitución mínima, obteniendo de esta forma el hamiltoniano para un potencial vectorial cualquiera. Dado que el campo es homogéneo y uniforme, el potencial se puede escribir en su forma simétrica escogiendo una dirección en particular para el campo magnético (la dirección del eje z). Aprovechando la simetría que el problema nos ofrece, se usan coordenadas cilíndricas para resolverlo, obteniendo así las eigenfunciones y los eigenvalores. Dentro del mismo capítulo se hace un ejemplo del límite clásico para esta partícula consiguiendo una analogía clásica. Para continuar, se muestra que el hamiltoniano en la norma simétrica toma la forma de dos osciladores armónicos desacoplados, además de un término de partícula libre paralela al campo magnético y otro de la componente z del momento angular. Los niveles de Landau se deducen con una de las normas que llevan su nombre (se dice que es UNA de ellas porque en la literatura aparecen dos normas que se le atribuyen y las cuales son completamente equivalentes, sólo cambian de dirección el problema) además de encontrar la forma explícita de la transformación que nos lleva de una norma a la otra. A continuación, se escribe el hamiltoniano en la norma de Landau que se escogió y se exhibe uno de los primeros resultados importantes; el problema en la norma de Landau es análogo a resolver el oscilador armónico cuántico con centro fuera del origen. La degeneración se pone de manifiesto. Para terminar con el primer capítulo se hace una deducción a la ecuación de Schrödinger-Pauli como una generalización a la ecuación de Schrödinger y no como el límite no-relativista a la ecuación de Dirac (que es como casi siempre se encuentra en la literatura); el método de sustitución mínima es de

nuevo la herramienta que nos ayuda junto con la identidad de Pauli, usando este hecho como un principio y metiendo este término como algo “ad-hoc” es decir, como algo sin justificación aparente hasta este momento, ya que el espín se ve como una manifestación de efectos relativistas lo cual debe abordarse mediante la ecuación de Dirac, por ello es que sólo se le da importancia como una generalización y no como una forma de límite no-relativista.

Para el segundo capítulo se hace un estudio más detallado de las transformaciones de norma además de cómo afecta a nivel de la lagrangiana y la hamiltoniana mostrando que la lagrangiana se ve afectado por una derivada temporal total de la función generadora de norma mientras que a nivel de la hamiltoniana, se agrega una derivada parcial con respecto al tiempo de la misma función. Otra cantidad que se ve afectada por la transformación de norma es el ímpetu canónico conjugado, sin embargo, todas las cantidades afectadas por la norma, se cancelan mutuamente, dejando las hamiltonianas invariantes en forma. Al final de esta sección se muestra que las ecuaciones de movimiento permanecen invariantes de acuerdo al principio de Hamilton, el término que se agrega es cero ya que es una derivada temporal. Para continuar se resuelven las ecuaciones de movimiento en el formalismo de Lagrange y posteriormente en el formalismo de Hamilton obteniendo las mismas soluciones, lo cual es de esperarse ya que a pesar de las modificaciones a nivel de la lagrangiana y hamiltoniana, las cantidades que de verdad son físicamente medibles son las relacionadas a nivel de ecuaciones de movimiento. Para concluir la parte clásica del capítulo, se hace el análisis de las ecuaciones de movimiento en el formalismo hamiltoniano pero sólo con una de las ecuaciones de Hamilton, omitiendo la otra parte; exhibiendo de esta forma, que la ecuación de movimiento es la misma que un oscilador armónico fuera del origen, esta parte ya debe darnos una idea de por donde ir. Para el formalismo cuántico se hace la transformación de norma y además se agrega el factor de fase que surge al realizar dicha transformación. El resultado más importante que se obtiene en este capítulo es el último, el cual nos garantiza que el valor esperado del momento canónico conjugado queda invariante, como esperábamos ya que esta es la cantidad que se mide en un laboratorio.

El tercer capítulo se enfoca en hacer un desarrollo en el esquema de Heisenberg comenzando por un repaso de los aspectos fundamentales en relación con el esquema de Schrödinger (operadores y eigenfunciones) para proseguir con el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético constante y uniforme obteniendo las eigenfunciones y los eigenvalores ya que este esquema nos da una visión de la dinámica que se es bastante similar a la

que nos ofrece la formulación de Hamilton de la mecánica clásica por ello, se hace el tratamiento totalmente independiente de la norma y después se particulariza en la norma simétrica y la de Landau. Concluimos el capítulo tomando la densidad de probabilidad radial para mostrar que coincide con el resultado del capítulo 1 y exhibiendo que las órbitas clásicas están descritas por una elección apropiada de un paquete de ondas.

En el siguiente capítulo llamado Efecto Aharonov-Bohm, se estudia con un poco de detalle la importancia de considerar el potencial vectorial dentro de la teoría cuántica, porque es en ésta donde deja de tener un carácter meramente matemático para pasar a ser considerado como una formulación que podría ser “más” fundamental que el hecho por el campo magnético, analizando primero el problema de una partícula alrededor de un solenoide, posteriormente una partícula en una región libre de campo magnético y concluyendo con el famoso experimento de interferencia de Aharonov-Bohm el cual nos muestra que los máximos y mínimos de interferencia para el experimento de la doble rendija se ve influenciado por el flujo magnético aunque para la partícula es una región inaccesible, por lo tanto, se termina con la importancia que el potencial vectorial puede llegar a tener ya que el flujo está relacionado directamente con el potencial vectorial. Para terminar el trabajo, se construye una norma generalizada, es decir, una norma que contenga a la norma simétrica y a las normas de Landau como casos particulares al variar un único parámetro que se encuentra dentro de los números reales.

Introducción

Clásicamente la primer imagen que se nos viene a la mente cuando nos hablan de la interacción de una partícula cargada con un campo electromagnético externo es la de una partícula puntual que se mueve en dirección paralela al campo eléctrico (si la partícula tiene una carga positiva) y en el plano perpendicular a la dirección del campo magnético. Además de ésta imagen mental, algo que debe señalarse es que únicamente el campo electromagnético actúa sobre la partícula, si embargo, la teoría electromagnética clásica deja de lado el hecho que la partícula también afecta al campo en cuestión (algo como un análogo a la tercer ley de Newton). Estudios más avanzados tienen en cuenta ambas interacciones, no obstante, la alteración de la partícula hacia el campo es muy pequeña y para fines prácticos, insignificante. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, los campos electromagnéticos no pueden ni deben ser considerados de una forma continua sino como un campo que está cuantizado. Para detalles más complejos y detallados los campos no se consideran estáticos e inamovibles, al contrario, se consideran como un sistema dinámico que es susceptible de ser descrito mediante coordenadas e ímpetus de acuerdo al formalismo cuántico, ésta área de la física se conoce como Teoría Cuántica de Campos (Quantum Field Theory) donde dicho formalismo nos lleva a una de las teorías más precisas de todos los tiempos, la Electrodinámica Cuántica (Quantum Electrodynamics). Las alteraciones que la partícula ejerce sobre el campo se pueden despreciar si el campo es muy intenso.

En esta tesis se hace un estudio para una partícula cargada sometida a un campo magnético constante y uniforme externo; haciendo uso de la norma simétrica y de la norma de Landau se resuelve este problema tanto clásica como cuánticamente, observando que para el caso clásico no importa la norma pero, para el caso cuántico si se obtienen eigenfunciones diferentes e incluso espectros de energía que también difieren, sin embargo, bajo consideraciones

clásicas, las energías también coinciden. El objetivo principal de este trabajo consiste en encontrar una formulación cuántica que mediante un límite (por ejemplo números cuánticos grandes, energías grandes, órbitas macroscópicas, etc.) se reproduzcan casos clásicos. A través del formalismo en el esquema de Heisenberg, se aborda el problema de una partícula cargada en un campo magnético constante y uniforme considerando como única condición (sin pérdida de generalidad alguna) la dirección del campo magnético a lo largo del eje z sin particularizar en una norma en específico, posteriormente se usan las normas simétrica y de Landau como casos particulares, conectándolas vía una transformación unitaria y al final se propone una norma generalizada que tiene como casos específicos a las dos normas anteriores.

Capítulo 1

Partícula en un campo electromagnético

1.1. Teoría electrodinámica clásica

La forma de generalizar la teoría del átomo de hidrógeno en interacción con un campo del tipo Coulomb para una partícula puntual es analizar la dinámica con un campo electromagnético externo; comenzamos haciendo una pequeña recapitulación de la teoría clásica del electromagnetismo.

Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial están dadas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \quad \text{Ley de Gauss,} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{Inexistencia de cargas magnéticas,} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{Ley de Faraday-Lenz,} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad \text{Ley de Ampere-Maxwell.} \quad (1.4)$$

Las ecuaciones anteriores están escritas en unidades gaussianas. Una forma conveniente para trabajar con las ecuaciones de Maxwell es definir los

potenciales electromagnéticos. Haciendo uso de la ecuación (1.2) y la identidad del cálculo vectorial la cual garantiza que dado un campo vectorial, la divergencia de su rotacional siempre es cero [13, pág. 298], es decir, el campo magnético debe provenir del rotacional de algún potencial vectorial \mathbf{A} , por lo tanto

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (1.5)$$

para lo cual también se debe introducir el potencial escalar y ver su relación con el campo eléctrico. Con ayuda de la ecuación (1.3) y la ecuación (1.5)

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \left(\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right) \\ &= \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

que de acuerdo a otra de las identidades vectoriales, las cuales pueden ser consultadas con mayor detalle en [13, pág.298], el rotacional del gradiente de una función escalar, siempre es cero, entonces, el término entre paréntesis debe ser igual al gradiente de alguna función escalar; la cual vamos a llamar ϕ , por lo tanto, tenemos que

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi,$$

entonces

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (1.6)$$

La ecuación (1.5), junto con la ecuación (1.6) proporcionan las relaciones entre los campos electromagnéticos y los potenciales. Se puede notar que las ecuaciones homogéneas (1.2) y (1.3) se satisfacen de manera directa, sin embargo, debe verificarse que también satisfacen las ecuaciones con fuentes (1.1) y (1.4) y una ecuación de onda, por lo cual, los potenciales están obligados a cumplir ciertas condiciones. La idea bajo la cual fue concebida el potencial vectorial nos permite agregar el gradiente de una función escalar cualquiera y transformar al potencial vectorial pero mantener el mismo resultado al aplicar el rotacional, es decir, producir el mismo campo magnético, esto es debido, a la identidad vectorial que hemos utilizado para deducir al potencial

escalar en (1.6); este tipo de transformación se conoce como transformación de norma¹.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t), \quad (1.7)$$

se puede notar de manera directa que el potencial \mathbf{A} y el potencial \mathbf{A}' producen el mismo campo magnético, sin embargo, debemos de encontrar las condiciones que debe de cumplir la función escalar $\chi(\mathbf{r}, t)$ que en principio puede depender de la posición y del tiempo, por lo que debemos exigir que las ecuaciones sean invariantes bajo estas transformaciones, entonces, al sustituir en las ecuaciones con fuentes las ecuaciones de los campos deben de preservar la forma; al sustituir simplemente \mathbf{A}' se puede notar que no es así para lo cual el potencial escalar debe ser modificado también; reemplazamos la ecuación (1.7) en (1.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \\ &= -\nabla\phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla\chi) \\ &= -\nabla\phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\ &= -\nabla \left(\phi' + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \end{aligned}$$

si comparamos con la ecuación (1.6) podemos notar que la única manera de preservar la forma es que ϕ sea igual al término que está entre paréntesis, en efecto, la transformación que se debe hacer para el potencial escalar es

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (1.8)$$

cabe señalar que dada la arbitrariedad de $\chi(\mathbf{r}, t)$ en las transformaciones (1.7) y (1.8) dicha función nos da cierta libertad de escogerla a nuestra conveniencia para poder preservar la invarianza; esta invarianza se conoce como *invarianza bajo transformaciones de norma*, las cuales estudiaremos un poco más a detalle en el capítulo [2]; las normas más usadas son:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{Norma de Coulomb,}$$

¹Se les llama transformaciones de norma a aquellas que pueden expresarse dentro de los potenciales electrodinámicos y aún así permanecen invariantes, como es de esperarse y más importante aún, dejar invariantes a los campo electromagnéticos.

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{Norma de Lorentz.}$$

Al sustituir las transformaciones en cada una de las normas, vemos que para la norma de Coulomb, la función χ debe cumplir

$$\nabla^2 \chi = 0,$$

mientras que en la norma de Lorentz, debe satisfacer la ecuación

$$\nabla^2 \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0.$$

Para poder hacer una transición hacia la mecánica cuántica es necesario la formulación Hamiltoniana de las ecuaciones de movimiento. Considerando en primera instancia el caso donde no hay interacción con un campo electromagnético, es muy fácil ver que las ecuaciones de Hamilton (para más detalles consultar [9]) están dadas por

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.9)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (1.10)$$

al considerar el hamiltoniano donde no hay interacción con un campo electromagnético

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}),$$

y de acuerdo a las ecuaciones de Hamilton, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{dx_i}{dt} = \frac{p_i}{m} \\ \frac{\partial H}{\partial x_i} &= -\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

ahora, si consideramos el caso donde tenemos una partícula de masa μ y carga $q = -e$ (donde la carga del electrón es $e_0 = -e$ y e la carga elemental) en interacción con un campo electromagnético, el hamiltoniano debe cambiar

CAPÍTULO 1. PARTÍCULA EN UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO 5

y este cambio se va a ver reflejado en el ímpetu mediante el principio de sustitución mínima, es decir, se agrega el término de interacción $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ al ímpetu y el potencial $\phi(\mathbf{r}, t)$ no será otro que el potencial $V(\mathbf{r})$ para tener concordancia con las ecuaciones de hamilton; siendo este el caso tenemos

$$H = \frac{1}{2\mu} \left[\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right]^2 - e\phi(\mathbf{r}, t), \quad (1.11)$$

de acuerdo a las ecuaciones (1.9) y (1.10)

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{\mu} \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right) \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{1}{\mu} \left(p_k + \frac{e}{c} A_k \right) \left(\frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) + e \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{e}{c} \left(\frac{dx_k}{dt} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) + e \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (1.12)$$

además

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{dp_i}{dt} + \frac{e}{c} \frac{dA_i}{dt} \\ &= \frac{dp_i}{dt} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \frac{dt}{dt} \right) \\ &= \frac{dp_i}{dt} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

al sustituir $\frac{dp_i}{dt}$ y reorganizando un poco, tenemos

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -\frac{e}{c} \frac{dx_k}{dt} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} + e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \right) \\ &= -\frac{e}{c} \frac{dx_k}{dt} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) + e \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

de acuerdo a la ecuación (1.6)

$$-E_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t},$$

entonces

$$\mu \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{e}{c} v_k \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) - e E_i,$$

finalmente

$$\mu \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -e \left[E_i + \left(\frac{v}{c} \times B \right)_i \right], \quad (1.13)$$

de esta manera podemos ver que esta es la fuerza de Lorentz para una partícula de carga $-e$ y masa μ , en otras palabras, el hamiltoniano dado en (1.11) describe el movimiento en la mecánica clásica. Si el campo eléctrico es cero se tiene

$$m a_i = -\frac{e}{c} (v \times B)_i,$$

por definición del producto vectorial, la aceleración es perpendicular a la velocidad de la partícula y al campo magnético, además de que el campo y la velocidad también son ortogonales, por lo tanto

$$\begin{aligned} (v \times a)_i &= -\frac{e}{c} (v \times (v \times B))_i \\ &= -\frac{e}{c} (v_i (v_j B_j) - v^2 B_i), \end{aligned}$$

dada la ortogonalidad mutua de los vectores involucrados se tiene $va = \frac{eB}{mc} v^2$, de esta manera

$$a = \frac{eB}{mc} v, \quad (1.14)$$

tomando en cuenta que se están usando unidades gaussianas, puede comprobarse que el término del cociente tiene unidades de $\frac{1}{s}$, dicha constante se conoce con el nombre de frecuencia ciclotrón. De acuerdo a la teoría del movimiento circular uniforme, la velocidad tangencial se relaciona con el radio de la forma

$$v = \omega_c \rho, \quad (1.15)$$

donde $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ y ρ es la magnitud de la componente radial en coordenadas polares, por lo que la aceleración puede escribirse como

$$a_c = \frac{v^2}{\rho}, \quad (1.16)$$

el subíndice se coloca porque esta aceleración coincide con la aceleración centrípeta del movimiento circular uniforme, demostrando de esta forma que si se tiene una partícula cargada, positiva o negativa (esto no es importante

porque sólo va a cambiar la dirección de giro de la órbita), dentro de un campo magnético que es constante y uniforme, el movimiento siempre será el de una órbita circular uniforme. También debe notarse que la dirección del campo se tomó con toda arbitrariedad, por lo que el escoger una dirección en particular no debe de afectar en nada al movimiento; si bien la elección de una dirección en específico se hace en un futuro, esto es únicamente con el fin de simplificar los cálculos y no la física del problema.

1.2. Electrón en un campo electromagnético estático

Considerando el caso en el cual se tiene un potencial estático, la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}, t) = E\psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.17)$$

para un electrón

$$\left[\frac{1}{2\mu} \left(\hat{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 - e\phi(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t) = E\psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.18)$$

sustituyendo al operador de ímpetu y agrupar un poco, obtenemos

$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi = (E + e\phi) \psi, \quad (1.19)$$

se debe tener presente que los operadores \hat{p} y \mathbf{A} , en general, no conmutan; esto es debido que el operador $\hat{\mathbf{A}}$ es un operador vectorial que es función del operador de posición, por lo tanto al aplicándolo a una función que dependa de la posición se tiene

$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = \frac{1}{2\mu} \left(-\hbar^2 \nabla^2 \psi + \frac{\hbar e}{ic} \nabla \cdot (\mathbf{A}\psi) + \frac{\hbar e}{ic} \mathbf{A} \cdot (\nabla \psi) + \left(\frac{e}{c} \right)^2 A^2 \psi \right)$$

como

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\psi) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \psi + \mathbf{A} \cdot (\nabla \psi)$$

dado que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, entonces

$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi = \frac{1}{2\mu} \left(-\hbar^2 \nabla^2 + \frac{2\hbar e}{ic} \mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{e^2}{c^2} A^2 \right) \psi,$$

al sustituir en la ecuación (1.19) llegamos a

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi - \frac{i\hbar e}{\mu c}\mathbf{A}\cdot\nabla\psi + \frac{e^2}{2\mu c^2}A^2\psi = (E + e\phi)\psi. \quad (1.20)$$

Analizaremos el sencillo, pero muy importante, caso cuando se tiene un campo magnético uniforme, el cual se puede escribir en términos del potencial vectorial como

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r}\times\mathbf{B}, \quad (1.21)$$

es necesario comprobar que \mathbf{A} en efecto, cumple la condición bajo el cual fue definido, es decir, $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Para esto haremos uso del tensor completamente antisimétrico de Levi-Civita, definido como

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación par} \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación impar} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

entonces, usando la notación de índices

$$A_k = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{ijk}r_iB_j)_k,$$

por lo cual

$$\begin{aligned} (\nabla\times\mathbf{A})_m &= -\frac{1}{2}(\varepsilon_{lkm}\partial_l(\varepsilon_{ijk}r_iB_j)_k)_m \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{ijk}\partial_l r_i B_j \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi})\partial_l r_i B_j \\ &= \frac{1}{2}(\partial_i r_i B_m - \partial_j r_m B_j)_m \\ &= \frac{1}{2}(B_m\partial_i r_i + r_i\partial_i B_m - B_j\partial_j r_m - r_m\partial_j B_j)_m \\ &= \frac{1}{2}(3B_m - B_m) \\ &= B_m, \end{aligned}$$

de esta manera, puede verse que el potencial (1.21) produce un campo magnético. Sustituyendo el potencial en la ecuación (1.20)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi + \frac{i\hbar e}{2\mu c}(\mathbf{r}\times\mathbf{B})\cdot\nabla\psi + \frac{e^2}{8\mu c^2}(\mathbf{r}\times\mathbf{B})^2\psi = (E + e\phi)\psi, \quad (1.22)$$

CAPÍTULO 1. PARTÍCULA EN UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO 9

al analizar el segundo término

$$\begin{aligned}
 \frac{i\hbar e}{2\mu c} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla &= \frac{i\hbar e}{2\mu c} (\varepsilon_{ijk} r_i B_j) \partial_k \\
 &= -\frac{i\hbar e}{2\mu c} (\varepsilon_{ikj} r_i \partial_k)_j B_j \\
 &= \frac{e}{2\mu c} (\varepsilon_{ikj} r_i p_k)_j B_j \\
 &= \frac{e}{2\mu c} (\mathbf{r} \times \hat{p}) \cdot \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

utilizando la definición del momento angular, podemos reescribirlo como

$$\frac{i\hbar e}{2\mu c} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla = \frac{e}{2\mu c} \hat{L} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.23)$$

es muy importante señalar que el hecho de conmutar al operador de ímpetu con el campo magnético sólo es posible bajo la condición que el campo sea constante, de lo contrario no podemos hacer tal aseveración; para el tercer término.

$$\begin{aligned}
 \frac{e^2}{8\mu c^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) &= \frac{e^2}{8\mu c^2} (\varepsilon_{ijk} r_i B_j)_k (\varepsilon_{lmk} r_l B_m)_k \\
 &= \frac{e^2}{8\mu c^2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (r_i B_j r_l B_m) \\
 &= \frac{e^2}{8\mu c^2} (r_l r_l B_m B_m - r_m B_m B_l r_l),
 \end{aligned}$$

para el caso del operador posición no es necesaria la condición de que el campo sea constante, ya que este puede depender a lo más en las posiciones y el tiempo, por lo tanto

$$\frac{e^2}{8\mu c^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \frac{e^2}{8\mu c^2} (r^2 B^2 - (r \cdot B)^2), \quad (1.24)$$

de esta forma, al sustituir los términos de (1.23) y (1.24) en la ecuación (1.22) llegamos a

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + \frac{e}{2\mu c} (\hat{L} \cdot \mathbf{B}) \psi + \frac{e^2}{8\mu c^2} (r^2 B^2 - (r \cdot B)^2) \psi = (E + e\phi) \psi; \quad (1.25)$$

202. ELECTRÓN EN UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO ESTÁTICO

sin pérdida de generalidad, se puede escoger una dirección en particular para la dirección del campo magnético, donde, escogeremos la dirección del eje z , en tal caso, la forma explícita de los términos vectoriales es $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, $\hat{L} = (L_1, L_2, L_3)$ y $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, sólo resta ver cómo se transforman las ecuaciones (1.23) y (1.24),

$$\frac{e}{2\mu c} \mathbf{B} \cdot \hat{L} = \frac{e}{2\mu c} B L_3,$$

además

$$\frac{e^2}{8\mu c^2} (r^2 B^2 - (r \cdot B)^2) = \frac{e^2}{8\mu c^2} [(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) B^2 - (x_3 B)^2] = \frac{e^2}{8\mu c^2} B^2 (x_1^2 + x_2^2),$$

así que sustituyendo dichos valores en (1.25)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + \frac{e}{2\mu c} B L_3 \psi + \frac{e^2}{8\mu c^2} B^2 (x_1^2 + x_2^2) \psi = (E + e\phi) \psi. \quad (1.26)$$

Podemos observar que nuestra ecuación cuenta con un término lineal y otro cuadrático, es de esperarse que uno sea más significativo que el otro, de esta manera, sería conveniente comparar los ordenes de magnitud entre ellos. Considerando que el término L_3 tiene unidades de acción, el orden de magnitud debe estar en términos de \hbar y el término $(x_1^2 + x_2^2)$ del orden del radio de Bohr

$$\frac{\left(\frac{e^2 B^2 a_0^2}{8\mu c^2}\right)}{\left(\frac{e\hbar B}{2\mu c}\right)} \approx \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{137}\right) \left(\frac{B}{e/a_0^2}\right),$$

donde $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ es el valor de la constante de estructura fina, la carga del electrón en unidades cgs es de 4.8×10^{-10} esu y el radio de Bohr es de 0.5×10^{-8} cm entonces

$$\left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{137}\right) \left(\frac{B}{e/a_0^2}\right) \approx \frac{B}{9 \times 10^9 \text{gauss}}.$$

Comparando el término lineal con la energía del potencial de Coulomb $\frac{Ze^2}{r}$ donde, de igual manera, r es del orden del radio de Bohr

$$\frac{\left(\frac{e\hbar B}{2\mu c}\right)}{\left(\frac{e^2}{a_0}\right)} \approx \left(\frac{1}{274}\right) \left(\frac{B}{\frac{e}{a_0^2}}\right) \approx \frac{B}{5 \times 10^9 \text{gauss}}.$$

Hay que hacer un pequeño paréntesis en esta parte y enfatizar lo que sea importante. En sistemas atómicos; el tipo de campos disponibles en el laboratorio cuyo orden de magnitud es de $B \lesssim 10^4$ Gauss, el término cuadrático es despreciable pero el término lineal puede perturbar de manera ligera en energías a niveles atómicos. El término cuadrático puede ser importante bajo dos condiciones; si el campo magnético es muy intenso, por ejemplo, en la superficie de una estrella de neutrones se estima que los campos magnéticos pueden ser del orden de 10^{12} Gauss y esto alteraría radicalmente la estructura de los átomos. El otro caso sería considerar movimientos macroscópicos de un electrón en un campo magnético externo y, he aquí nuestra área de interés ya que este tipo de movimiento puede ser proporcionado por un acelerador de partículas circular, por ejemplo, un sincrotrón.

Como nuestro interés principal radica cuando se considera el término cuadrático, vamos a buscar las soluciones de la ecuación (1.26). Si observamos la simetría que presenta el potencial $(x_1^2 + x_2^2)$ lo mejor es usar coordenadas cilíndricas

$$x_1 = \rho \cos \phi \quad x_2 = \rho \sin \phi \quad x_3 = z,$$

dado que tenemos un laplaciano, es necesario el ver cómo se transforma bajo estas coordenadas, para más detalle de este procedimiento consultar las referencias [1] y [13]

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

haciendo un procedimiento similar al problema del átomo de hidrógeno, se propone una solución en variables separables de la forma

$$\psi(\mathbf{r}) = u(\rho) e^{im\phi} e^{ikz},$$

ya que por el momento sólo nos interesa el caso cuando tenemos campo magnético, el término del potencial escalar no aparece en nuestra ecuación, por lo que la ecuación (1.26) queda de la siguiente forma

$$\nabla^2 \psi - \frac{eB}{\hbar^2 c} L_3 \psi - \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2} \rho \psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \psi = 0,$$

al sustituir nuestra solución, desarrollar el laplaciano y dividir entre ψ obtenemos la ecuación diferencial que obedece $u(\rho)$

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} u - k^2 u - \frac{eB}{\hbar^2 c} L_3 u - \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2} \rho^2 u + \frac{2\mu E}{\hbar^2} u = 0,$$

222. ELECTRÓN EN UN CAMPO ELECTROMAGNÉTICO ESTÁTICO

reemplazamos L_3 por sus eigenvalores

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2}u - \frac{e^2B^2}{4\hbar^2c^2}\rho^2u + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{eB\hbar m}{\hbar^2c} - k^2 \right) u = 0 \quad (1.27)$$

introducimos la variable adimensional

$$x = \sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}} \rho \quad (1.28)$$

el operador diferencial de acuerdo a la nueva variable es

$$\frac{du}{d\rho} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{d\rho} \Rightarrow \frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho} \frac{d}{dx}$$

de acuerdo a la ecuación (1.28)

$$\frac{dx}{d\rho} = \sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}} \quad \text{además} \quad \frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}} \frac{1}{x}$$

nos permite reescribir la ecuación diferencial en términos de la variable x sustituyendo todos estos valores en la ecuación (1.27), agrupando y haciendo un poco de álgebra, la nueva ecuación diferencial resulta ser

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{m^2}{x^2}u - x^2u + \left[\frac{4\mu c}{eB\hbar} \left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right) - 2m \right] u = 0.$$

Puede notarse que los valores dentro del corchete son todos constante y además reales, por ello es más conveniente renombrarlo como

$$\lambda = \frac{4\mu c}{eB\hbar} \left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right) - 2m, \quad (1.29)$$

finalmente, la ecuación (1.27), ahora en términos de x toma la forma

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{m^2}{x^2}u - x^2u + \lambda u = 0. \quad (1.30)$$

El comportamiento asintótico siempre es un aspecto importante a considerar ya que la conducta para límites en particular nos garantiza la validez o inconsistencia de ciertas ecuaciones; los límites en el infinito y en cero serán nuestro enfoque primordial. Para el caso cuando $x \rightarrow \infty$ (el caso cuando

$x \rightarrow -\infty$ es análogo pero no es relevante físicamente hablando ya que x es proporcional a una variable radial) el segundo y tercer término de la ecuación (1.30) se van a cero y la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2u}{dx^2} - x^2u \approx 0, \quad (1.31)$$

es fácil ver que una solución a esta ecuación diferencial es:

$$u(x) \sim e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (1.32)$$

de igual manera, si vemos el comportamiento cerca del origen, el cuarto término se va a cero

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{m^2}{x^2}u \approx 0, \quad (1.33)$$

la ecuación (1.33) tiene la forma de una ecuación diferencial de Euler, siendo la solución de la forma

$$u(x) \sim x^{|m|}, \quad (1.34)$$

con las soluciones (1.32) y (1.34) proponemos una solución general a nuestra ecuación en variables separables de la forma

$$u(x) = x^{|m|}e^{-\frac{x^2}{2}}G(x), \quad (1.35)$$

sustituyendo nuestra función $u(x)$ en la ecuación (1.30), se aprecian cada uno del comportamiento de los términos

$$\frac{1}{x} \frac{du}{dx} = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(|m|x^{|m|-2}G(x) + x^{|m|-1} \frac{dG}{dx} - x^{|m|}G(x) \right)$$

$$\frac{m^2}{x^2}u = e^{-\frac{x^2}{2}} (m^2x^{|m|-2}G(x))$$

$$x^2u = e^{-\frac{x^2}{2}} (x^{|m|+2}G(x))$$

$$\lambda u = e^{-\frac{x^2}{2}} (\lambda x^{|m|}G(x))$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} = e^{-\frac{x^2}{2}} & \left(-2|m|x^{|m|}G(x) - 2x^{|m|+1} \frac{dG}{dx} + x^{|m|+2}G(x) + m^2x^{|m|-2}G(x) \right. \\ & \left. - |m|x^{|m|-2}G(x) + 2|m|x^{|m|-1} \frac{dG}{dx} + x^{|m|} \frac{d^2G}{dx^2} - x^{|m|}G(x) \right), \end{aligned}$$

después de introducir estos términos en la ecuación (1.30), haciendo un poco de álgebra y acomodar, obtenemos la ecuación diferencial que satisface $G(x)$

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \left(\frac{2|m|+1}{x} - 2x \right) \frac{dG}{dx} + (\lambda - 2 - 2|m|) G(x) = 0, \quad (1.36)$$

de nuevo introducimos otro cambio de variable

$$y = x^2,$$

con un procedimiento similar al del primer cambio de variable, obtenemos

$$y \frac{d^2G(y)}{dy^2} + (|m| + 1 - y) \frac{dG(y)}{dy} + \left(\frac{\lambda - 2 - 2|m|}{4} \right) G(y) = 0, \quad (1.37)$$

resolvemos por el método en serie de potencias para ecuaciones de segundo grado homogéneas, suponemos

$$G(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k,$$

entonces

$$\frac{dG}{dy} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k y^{k-1},$$

$$\frac{d^2G}{dy^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k y^{k-2},$$

al sustituir estos términos en la ecuación diferencial (1.37) llegamos a la relación de recurrencia

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k - n_r}{(k+1)(k+|m|+1)}$$

donde

$$n_r = \frac{\lambda - 2 - 2|m|}{4}, \quad (1.38)$$

si consideramos que $k = n$, el número cuántico principal, entonces

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{n - n_r}{(k+1)(k+|m|+1)}$$

por lo que $n_r = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ entonces, de acuerdo a las ecuaciones (1.29) y (1.38)

$$4n_r + 2 + 2|m| = \frac{4\mu c}{eB\hbar} \left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right) - 2m$$

por lo tanto

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu c} = \left(\frac{eB\hbar}{2\mu c} \right) (2n_r + 1 + |m| + m) \quad (1.39)$$

y además podemos notar que la función $G(y)$ corresponde a los polinomios asociados de Laguerre, un tratamiento más a detalle se hace en el apéndice [A]

$$G(y) = L_{n_r}^{|m|}(y). \quad (1.40)$$

1.3. Límite clásico

Ya que nuestro interés está centrado en el límite clásico, nos limitaremos a este caso; para ello, hay que recordar que de acuerdo a la sustitución mínima

$$\mathbf{p} = \mu\mathbf{v} \quad \rightarrow \quad \mu\mathbf{v} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A},$$

como el campo magnético es constante

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B},$$

entonces

$$\mu\mathbf{v} = \mathbf{p} - \frac{e}{2c}\mathbf{r} \times \mathbf{B},$$

además

$$\mu(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} - \frac{e}{2c}\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}),$$

dado que por definición $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ y por una de las identidades del cálculo vectorial² entonces $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - r^2\mathbf{B}$, por lo tanto

$$\mu(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{L} - \frac{e}{2c} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - r^2\mathbf{B}]. \quad (1.41)$$

En vista que el campo magnético es uniforme, podemos alinear nuestro sistema con el campo magnético en dirección del eje z y restringir nuestro

² $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

movimiento al plano ortogonal al campo, por lo tanto, $x_3 = v_3 = 0$, para lo cual, la ecuación (1.41) adquiere la forma

$$\mu (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_3 = L_3 + \frac{e}{2c} B (x_1^2 + x_2^2);$$

en nuestro sistema de coordenadas cilíndricas $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$, entonces,

$$\mu (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_3 = L_3 + \frac{e}{2c} B \rho^2$$

por lo cual

$$\mu \rho v_{\perp} = L_3 + \frac{e}{2c} B \rho^2. \quad (1.42)$$

Como se vio al final de la sección (1.1), podemos combinar las ecuaciones (1.14) y (1.16), obteniendo de esta forma

$$\frac{\mu v^2}{\rho} = \frac{eB}{c} v \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\mu c v}{eB},$$

sustituyendo en (1.42)

$$\begin{aligned} \mu v \left(\frac{\mu v c}{eB} \right) &= L_3 + \frac{eB}{2c} \left(\frac{\mu v c}{eB} \right)^2 \\ \frac{\mu^2 v^2 c}{eB} &= L_3 + \frac{\mu^2 v^2 c}{2eB} \\ \frac{\mu^2 v^2 c}{2eB} &= L_3 \\ \therefore \frac{1}{2} \mu v^2 &= \frac{eB}{\mu c} L_3, \end{aligned} \quad (1.43)$$

usando las mismas ecuaciones, y haciendo un procedimiento similar, se puede mostrar que

$$\rho = \left(\frac{2c}{eB} L_3 \right)^{1/2}. \quad (1.44)$$

Ahora, regresando a nuestra expresión que encontramos para la energía (1.39), podemos ver que el término $\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu c}$ es cero ya que los eigenvalores k corresponden a la coordenada x_3 . Si buscamos tener una energía que sea grande, esto va a ser posible en dos casos; el primero sería tener un campo magnético muy intenso y el segundo cuando $\gamma = (2n_r + 1 + |m| + m)$ es muy grande.

Para esta última situación, debido a que está involucrado el término $|m|$, podremos encontrarnos con dos posibilidades.

Para el primer caso si $m \leq 0$ entonces $\gamma = 2n_r + 1$ y la única manera de que esto sea un término grande es que n_r lo sea, no obstante, esta solución más que ayudar nos genera un problema, ya que de acuerdo a los polinomios asociados de Leguerre (1.40), n_r determina el grado del polinomio, y por lo tanto, el número de ceros del mismo; si el número de ceros es muy grande implica que la función oscila de una forma muy abrupta como puede verse en la figura (1.1), lo cual no es clásicamente posible ya que siempre se deben tener funciones que sean diferenciables y por ende, que tengan un comportamiento suave. Para el segundo caso, si $m > 0$ entonces $\gamma = (2n_r + 1 + 2m)$ por lo que γ puede ser grande aunque n_r sea pequeño, el polinomio de Laguerre se comporta de acuerdo a la figura (1.2); como queremos que m sea muy grande y además positiva, la energía nos queda de la siguiente forma.

$$E = \left(\frac{eB}{\mu c} \right) \hbar m \quad (1.45)$$

de esta manera, puede verse la similitud de la energía (1.43) con la energía

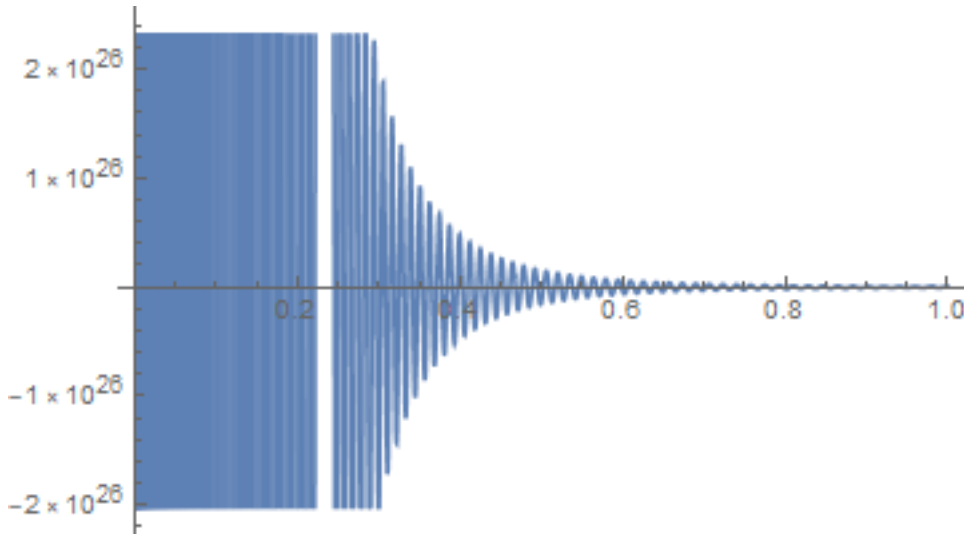


Figura 1.1: Polinomio de Laguerre con $n_r = 100000$ y $m = 10$

de la ecuación (1.45), recordando que los eigenvalores para el operador \hat{L}_3 son $m\hbar$. Este resultado coincide con dos aspectos importante, el valor de m

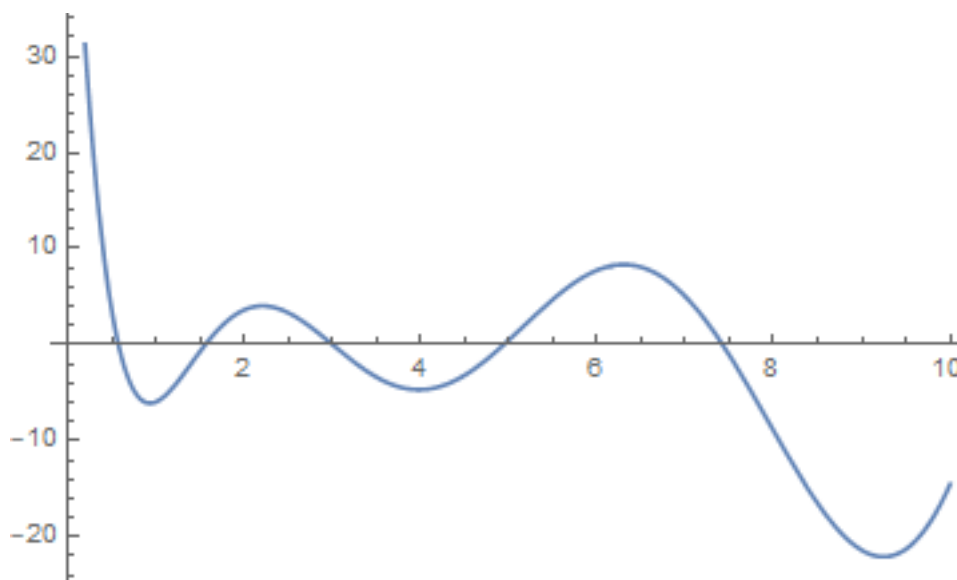


Figura 1.2: Polinomio de Laguerre con $n_r = 10$ y $m = 2$

es positivo por lo que la energía también lo es, además, recuperamos uno de los postulados de Bohr; *Para todo sistema físico, las predicciones de la teoría cuántica deben corresponder a las predicciones clásicas para valores grandes de los números cuánticos que especifican al sistema.*

Otro resultado importante es ver que el pico de la distribución de probabilidad radial también coincide con el valor del radio clásico (1.44), para ello tomamos el valor de $n_r = 0$, siendo así el polinomio asociado de Laguerre una constante (de hecho es exactamente 1 aunque m sea cualquier valor, como puede consultarse en el apéndice A), de esta forma la probabilidad radial está dada como

$$P(x) = u^*(x)u(x) \approx x^{2|m|}e^{-x^2},$$

entonces

$$\frac{dP(x)}{dx} = (2|m|x^{2|m|-1} - 2x^{2|m|+1})e^{-x^2} = 0,$$

al despejar x se obtiene

$$x = \sqrt{|m|},$$

por lo tanto, al sustituir en (1.28) y despejar ρ de esta manera llegamos a

$$\rho = \left(\frac{2c}{eB} m \hbar \right)^{\frac{1}{2}},$$

que al sustituir L_3 por los eigenvalores $m\hbar$ se observa que coincide exactamente con (1.44). La función de onda fue escrita de la forma

$$\psi(\mathbf{r}) = u(\rho)e^{im\phi}e^{ikz}$$

por lo tanto, la densidad de probabilidad está dada por

$$P(x)dx = xu^*(x)u(x)dx,$$

considerando de nuevo $n_r = 0$ tenemos que si

$$\frac{d}{dx} (x|u(x)|^2) = 0,$$

entonces

$$2x^2 = 2|m| + 1,$$

usando la definición (1.28) llegamos a que el máximo está en

$$\rho = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}} \sqrt{2|m| + 1}, \quad (1.46)$$

esta expresión para ρ nos será de utilidad más adelante al momento de comparar este resultado con el obtenido en el capítulo (3).

Sustituyendo la forma de la ecuación radial tenemos

$$\psi_{\perp}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_r!}{\pi(n_r + m)!}} x^{|m|} e^{-\frac{x^2}{2}} L_{n_r}^{|m|}(x^2) e^{im\phi}, \quad (1.47)$$

donde el término de la raíz cuadrada es la constante de normalización (para más detalles de este resultado consultar el apéndice (A) en la sección (A.2.3)). En la figura (1.3) se ilustra la forma de las funciones de densidad de probabilidad

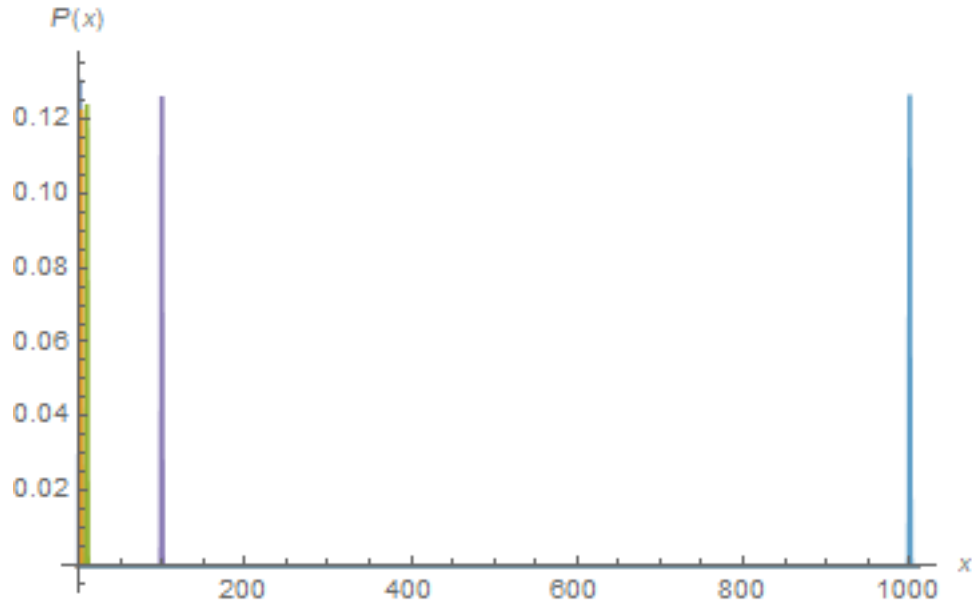


Figura 1.3: En el gráfico se puede ver los valores para la densidad de probabilidad $P(x)$ cuando el polinomio asociado de Laguerre $L_n^{(m)}(x^2)$ toma siempre el valor $n = 0$ y m toma los valores 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 y 1000000.

para ver un poco más clara la forma que tienen estas funciones, en la figura (1.4) se tienen menos ejemplos y se nota mejor su comportamiento, mientras que las eigenfunciones radiales se pueden ver en el gráfico (1.5)

1.4. Niveles de Landau

Como vimos en la ecuación (1.7), el potencial vectorial \mathbf{A} no está definido de manera única, esta diferencia entre potenciales se relaciona vía una transformación de norma; para generar los niveles de Landau³ se usó la norma simétrica y de acuerdo a la geometría del problema se usaron las coordenadas que nos parecieran más apropiadas, ahora se va a ver qué forma tiene el problema si se usan coordenadas rectangulares. La norma simétrica la pode-

³Lev Davidovich Landau fue un físico teórico soviético del siglo XX que nació el 22 de enero de 1908 en Moscú y falleció el 1 de abril de 1968. Landau fue galardonado con el premio nobel de física en 1962 por sus contribuciones como pionero en la teoría de materia condensada, además de grandes contribuciones en el área de superfluidez y superconductividad.

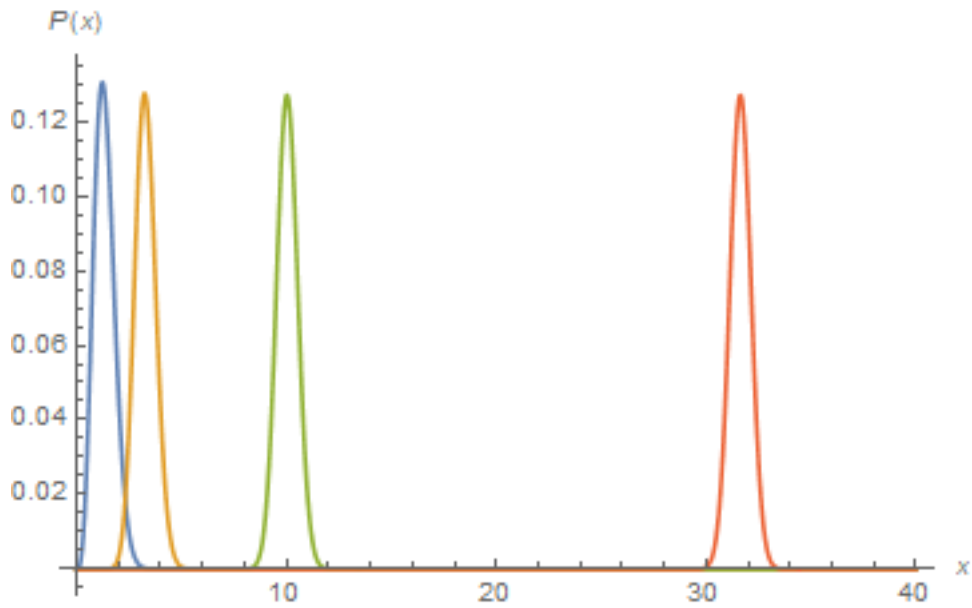


Figura 1.4: En el gráfico se puede ver los valores para $P(x)$ con $n = 0$ y $m = 1, 10, 100$ y 1000 .

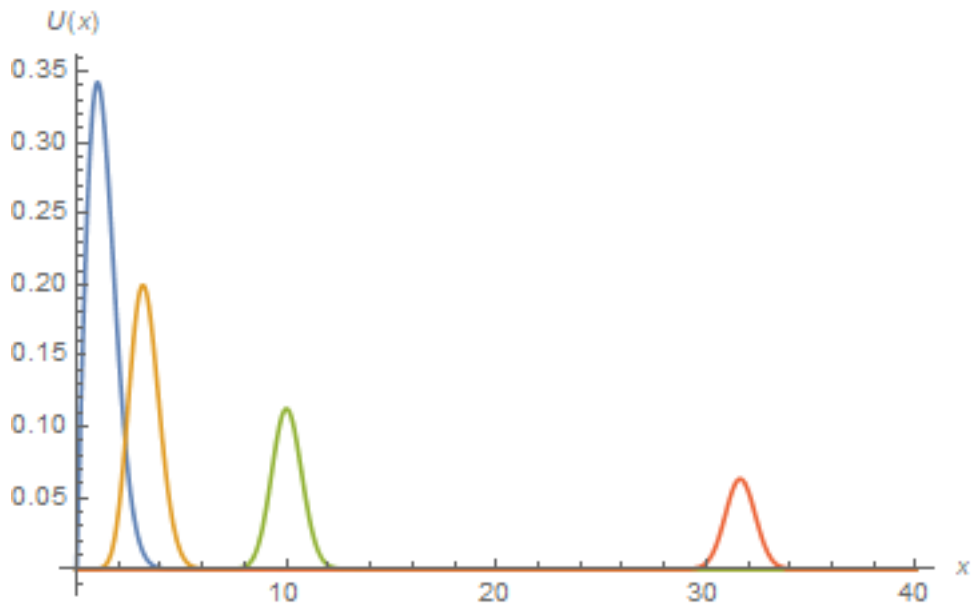


Figura 1.5: En el gráfico se puede ver los valores para $u(x)$ con $n = 0$ y $m = 1, 10, 100$ y 1000 .

mos obtener con ayuda de la ecuación (1.21) y la condición que $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, la cual resulta de la forma

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2} (-x_2, x_1, 0), \quad (1.48)$$

donde B es la magnitud del campo magnético. El hamiltoniano correspondiente resulta ser (1.26) con potencial escalar nulo ya que no se está considerando un campo eléctrico

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \left[\hat{p}^2 + \frac{eB}{c} L_3 + \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 (x_1^2 + x_2^2) \right], \quad (1.49)$$

buscamos una manera diferente de escribir el hamiltoniano

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2\mu} \left[\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 x_1^2 + \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 x_2^2 + \frac{eB}{c} L_z \right] \\ &= \frac{1}{2\mu} \left\{ \left[\hat{p}_1^2 + \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 x_1^2 \right] + \left[\hat{p}_2^2 + \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 x_2^2 \right] + \hat{p}_3^2 + \frac{eB}{c} L_z \right\}, \end{aligned}$$

si definimos $\omega_L = \frac{eB}{2\mu c}$

$$\hat{H} = \underbrace{\left(\frac{\hat{p}_1^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \mu \omega_L^2 x_1^2 \right)}_{H_{x_1}} + \underbrace{\left(\frac{\hat{p}_2^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \mu \omega_L^2 x_2^2 \right)}_{H_{x_2}} + \frac{\hat{p}_3^2}{2\mu} + \omega_L L_3 \quad (1.50)$$

donde ω_L se conoce como la frecuencia de Larmor. Se puede ver que el nuevo hamiltoniano tiene la forma de dos osciladores armónicos desacoplados, otro de una partícula libre a lo largo del eje z y la componente L_3 del momento angular multiplicada por la frecuencias de Larmor, por lo que el espectro de energías no será otra que la suma de los espectros de estos problemas por separado. Dada la naturaleza del hamiltoniano, tratar el problema con el operador de momento angular en coordenadas cartesianas complica las cosas ya que es este el que no permite usar una solución en variables separables, sin embargo, se quiso ver esta situación para observar que se tienen dos osciladores ortogonales ya que un cambio de coordenadas no altera la física

detrás del problema, además, se tiene misma frecuencia de oscilación lo que nos da una imagen de una partícula “moviéndose” en una órbita circular⁴.

Ahora vamos a considerar el caso con la norma de Landau⁵, la cual está definida como

$$\mathbf{A}' = B(0, x_1, 0), \quad (1.51)$$

de acuerdo a la ecuación (1.7), las dos normas están relacionados mediante el gradiente de una función escalar, por lo tanto

$$\begin{aligned} (0, x_1 B, 0) &= \left(-\frac{x_2 B}{2}, \frac{x_1 B}{2}, 0 \right) + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \right) \\ &= \left(-\frac{x_2 B}{2} + \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \frac{x_1 B}{2} + \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \right), \end{aligned}$$

de donde se obtiene un sistema de ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x_1} &= \frac{x_2 B}{2} &\Rightarrow & \chi = \frac{x_1 x_2 B}{2} + g(x_2) \\ \frac{\partial \chi}{\partial x_2} &= \frac{x_1 B}{2} &\Rightarrow & \chi = \frac{x_1 x_2 B}{2} + h(x_1), \end{aligned}$$

puede notarse que la función $g(x_2)$ tiene que ser igual a la otra función $h(x_1)$ y la única forma que esto sea cierto es si ambas funciones son iguales a una constante, por lo tanto, se requiere considerar esa constante igual a cero.

Las transformaciones de norma nos garantizan que, si bien las ecuaciones cambian, físicamente hablando no se tiene alteración alguna, entonces es de esperarse que el hamiltoniano (1.11), modifique su forma para cada uno de los potenciales, entonces, ya que estamos trabajando en la norma de Coulomb, el hamiltoniano para la norma de Landau toma la forma

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2\mu} \left(\hat{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2\mu} \left(\hat{p} + \frac{e}{c} (0, x_1 B, 0) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2\mu} \left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + \left(\frac{2eB}{c} \right) \hat{x}_1 \hat{p}_2 + \left(\frac{eB}{c} \right)^2 \hat{x}_1^2 \right), \end{aligned}$$

⁴cabe destacar que la órbita sería circular por la frecuencia que coincide en ambos osciladores, de no ser así, deberían considerarse figuras de Lissajous

⁵También puede usarse otra norma de Landau la cual es de la forma $\mathbf{A} = B(-x_2, 0, 0)$ donde puede verificarse que produce el mismo campo magnético que las otras dos normas, además el problema se vuelve completamente análogo sólo que el oscilador resultante en lugar de estar a lo largo del eje x_1 se encuentra a lo largo del eje x_2 .

viendo que los operadores \hat{x}_2 y \hat{x}_3 no aparecen en el hamiltoniano sería bueno ver las reglas conmutación con los operadores \hat{p}_2 y \hat{p}_3 , en efecto

$$2\mu [H, \hat{p}_2] = [p_1^2, p_2] + [p_2^2, p_2] + [p_3^2, p_2] + \left(\frac{2eB}{c}\right) [x_1 p_2, p_2] + \left(\frac{eB}{c}\right)^2 [x_1^2, p_2]$$

de acuerdo a una identidad de conmutadores⁶ se tiene

$$2\mu [H, \hat{p}_2] = p_1 [p_1, p_2] + [p_1, p_2] p_1 + p_2 [p_2, p_2] + [p_2, p_2] p_2 + p_3 [p_3, p_2] + [p_3, p_2] p_3 \\ + \left(\frac{2eB}{c}\right) (x_1 [p_2, p_2] + [x_1, p_2] p_2) + \left(\frac{eB}{c}\right)^2 (x_1 [x_1, p_2] + [x_1, p_2] x_1),$$

usando las relaciones de conmutación canónicas⁷ se puede ver que todos los conmutadores son cero, entonces

$$[\hat{H}, \hat{p}_2] = 0. \quad (1.52)$$

De forma análoga, se calcula el conmutador de H con \hat{p}_3 , obteniendo de esta forma

$$2\mu [H, \hat{p}_3] = p_1 [p_1, p_3] + [p_1, p_3] p_1 + p_2 [p_2, p_3] + [p_2, p_3] p_2 + p_3 [p_3, p_3] + [p_3, p_3] p_3 \\ + \left(\frac{2eB}{c}\right) (x_1 [p_2, p_3] + [x_1, p_3] p_2) + \left(\frac{eB}{c}\right)^2 (x_1 [x_1, p_3] + [x_1, p_3] x_1),$$

donde también puede verse que todos los conmutadores son cero, por lo tanto

$$[\hat{H}, \hat{p}_3] = 0. \quad (1.53)$$

Como los operadores \hat{p}_2 y \hat{p}_3 conmutan con este hamiltoniano, se puede construir un conjunto de eigenfunciones simultaneas tanto para el hamiltoniano como para \hat{p}_2 y \hat{p}_3 ; al igual que se consideró en el caso de la norma simétrica, sin pérdida de generalidad, el movimiento puede restringirse al plano x_1 - x_2 , para lo cual, los eigenvalores de \hat{p}_3 son cero. La función de onda ahora sólo

⁶Sean \hat{A} , \hat{B} y \hat{C} operadores cualesquiera, se puede mostrar por sustitución directa que $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$

⁷Las relaciones de conmutación canónicas están dadas por $[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$ y $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$

depende de x_1 y x_2 , siendo este el caso, podemos escribirla como una solución en variables separables de la forma

$$\psi(x_1, x_2) = e^{ik_2 x_2} v(x_1), \quad (1.54)$$

la ecuación de eigenvalores nos queda

$$\hat{H}\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2),$$

aplicando el hamiltoniano tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 v(x_1)}{\partial x_1^2} + \hbar^2 k_2^2 v(x_1) + \frac{2eBk_2\hbar}{c} x_1 v(x_1) + \left(\frac{eB}{c} \right)^2 x_1^2 v(x_1) \right) e^{ik_2 x_2} \\ = E e^{ik_2 x_2} v(x_1), \\ \frac{1}{2\mu} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{eB}{c} \right)^2 x_1^2 + \frac{2eBk_2\hbar}{c} x_1 + \hbar^2 k_2^2 \right) v(x_1) = E v(x_1), \\ \frac{1}{2\mu} \left[-\hbar^2 \frac{d^2}{dx_1^2} + \left(\frac{eB}{c} \right)^2 \left(x_1^2 + \frac{2k_2\hbar c}{eB} x_1 + \left(\frac{k_2\hbar c}{eB} \right)^2 \right) \right] v(x_1) = E v(x_1), \end{aligned} \quad (1.55)$$

llegando a la ecuación diferencial que obedece la función $v(x_1)$

$$\frac{1}{2\mu} \left[-\hbar^2 \frac{d^2}{dx_1^2} + \left(\frac{eB}{c} \right)^2 \left(x_1 + \frac{k_2\hbar c}{eB} \right)^2 \right] v(x_1) = E v(x_1), \quad (1.56)$$

al definir

$$\omega_c \equiv \frac{eB}{\mu c} = 2\omega_L, \quad (1.57)$$

se reescribe la ecuación (1.56) de la siguiente manera

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{1}{2} \mu \omega_c^2 \left(x_1 + \frac{k_2\hbar c}{eB} \right)^2 \right] v(x_1) = E v(x_1),$$

sea

$$x_0 \equiv -\frac{k_2\hbar c}{eB},$$

entonces

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{1}{2} \mu \omega_c^2 (x_1 - x_0)^2 \right] v(x_1) = E v(x_1), \quad (1.58)$$

en efecto, podemos ver que la ecuación (1.58) posee la forma de un oscilador armónico unidimensional el cual tiene un desplazamiento del origen igual a x_0 . Vamos a resolver nuestra ecuación diferencial y ver si el hecho de estar desplazado del origen repercute de alguna forma en la energía de un oscilador armónico unidimensional centrado en el origen.

La ecuación (1.58) puede tomar la forma

$$\frac{\hbar}{\mu\omega_c} \frac{d^2v(x_1)}{dx^2} - \frac{\mu\omega_c}{\hbar} (x_1 - x_0)^2 v(x_1) + \frac{2E}{\hbar\omega_c} v(x_1) = 0,$$

definimos las cantidades

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu\omega_c}{\hbar}} (x_1 - x_0), \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_c}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2 v(\xi) + \lambda v(\xi) &= 0 \\ \frac{d^2v(\xi)}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2) v(\xi) &= 0, \end{aligned} \quad (1.59)$$

de tal manera, puede notarse que la ecuación (1.58) toma la misma forma que un oscilador armónico unidimensional y la ecuación (1.59) es igual en forma a la ecuación (B.4) del apéndice (B), siendo así, es de esperarse que el espectro de energía sea el mismo y difiera únicamente por la frecuencia⁸. De acuerdo al análisis que se hizo, podemos concluir que el espectro de energía para los niveles de Landau en la norma de Landau es de la forma

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.60)$$

las eigenfunciones están dadas por

$$\psi_n(x_1, x_2) = \left(\frac{m\omega_c}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\frac{m\omega_c}{\hbar} (x_1 - x_0) \right) e^{-\frac{m\omega_c}{2\hbar} x_1^2} e^{ik_2 x_2}. \quad (1.61)$$

Como el oscilador armónico unidimensional no presenta degeneración en sus niveles de energía, sería lógico pensar que para el oscilador armónico unidimensional con un desplazamiento fuera del origen, tampoco debería de

⁸En el oscilador armónico unidimensional, la frecuencia se define como $\omega_u = \sqrt{\frac{k}{m}}$ mientras que en nuestro problema, definimos la frecuencia como $\omega_c = \frac{eB}{\mu c}$ la cual se conoce como frecuencia ciclotrón.

presentar degeneración alguna pues se trata del mismo sistema cuántico sólo que se encuentra en otro sitio, entonces siguiendo dicha idea sería intuitivo pensar que pasa lo mismo para los niveles de Landau, sin embargo, algo que se debe tener en cuenta es que aunque se use una norma diferente, el problema es el mismo y una observable física que medimos en el laboratorio es la energía, por lo que no debería haber cambio alguno en ésta a la hora de medir, es decir, las energías (1.39) y (1.60) que se obtienen usando \mathbf{A} y \mathbf{A}' , respectivamente, deben coincidir. A primera vista dichas energías no parecen iguales pero lo son, basta con afinar un par de detalles. En la energía (1.39) se tuvo consideración de la componente del ímpetu paralela al campo, por lo tanto aparece un término proporcional a k , entonces, haciendo este valor cero (como se hizo para la norma de Landau) la energía obtiene la forma

$$E_{n_r m} = \frac{1}{2} \hbar \omega_c (2n_r + |m| + m + 1),$$

haciendo uso también de la definición (1.57). Considerando los dos casos posibles para los valores de m , obtenemos que si $m < 0$ entonces la energía toma la forma

$$E'_{n_r m} = \hbar \omega_c \left(n_r + \frac{1}{2} \right), \quad (1.62)$$

de esta manera, la energía (1.62) es infinitamente degenerada, pues para un valor fijo de n_r , se tiene la misma energía sin importar el valor de m , el cual va desde 0 hasta $-\infty$ de manera discreta. Ahora, si $m > 0$, entonces la energía es

$$E''_{n_r m} = \hbar \omega_c \left(n_r + m + \frac{1}{2} \right),$$

como n_r y m son dos números enteros positivos, podemos definir $n \equiv n_r + m$, llegando así a una energía que es idéntica, en forma, al de un oscilador unidimensional

$$E''_{n_r m} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (1.63)$$

En efecto, las tres “energías” (1.60), (1.62) y (1.63) son la misma, la única diferencia que ahora queda es su degeneración. La forma como está escrita la energía (1.60) pareciera no presentar degeneración alguna, pero no es así. La energía depende únicamente del número cuántico n el cuál está asociado a los eigenvalores correspondiente de la componente a lo largo del eje x_1 , puede verse, que es aquí donde se presenta el movimiento oscilatorio, mientras que a

lo largo del eje x_2 lo que se tiene es una onda plana, no obstante, el eigenvalor k_2 no nos dice mucho, físicamente, a lo largo del eje x_2 pero si nos dice mucho de lo que sucede en el eje x_1 ; el valor k_2 nos localiza el centro del oscilador armónico. De acuerdo a la definición de x_0 tenemos

$$x_0 = -k_2 \frac{\hbar c}{eB} = -k_2 r_0^2, \quad (1.64)$$

de esta manera se nota que el oscilador va a tener su centro en k_2 , es decir, para un valor fijo de k_2 todos los niveles posibles van a caer en ese lugar separados discretamente como lo hace un oscilador unidimensional, para un ejemplo esquemático, ver la figura (1.6). La degeneración ahora es evidente, debido a que k_2 es un valor continuo y esto proviene del hecho que k_2 es el eigenvalor de la función $e^{ik_2 x_2}$ la cual no está condicionada de forma alguna a los eigenvalores de $v(x_1)$, es más, dada la naturaleza de la función de onda, la densidad de probabilidad no depende en lo absoluto del eje coordenada x_2 , todo repercute en el eje x_1 .

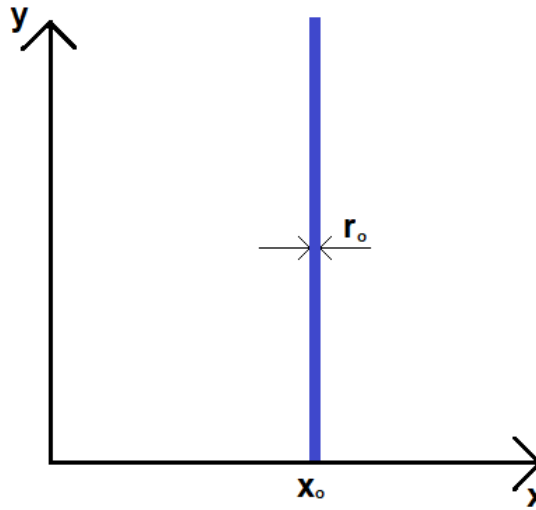


Figura 1.6: Nivel de Landau considerando un valor $k_2 < 0$ (k_2 , en principio, puede ser cualquier valor continuo pero en esta imagen se toma como negativo para que x_0 sea positivo).

Hasta este momento hemos visto que las energías coinciden con la de un oscilador armónico bidimensional y otro unidimensional, para la norma

simétrica y para la de Landau respectivamente, además, dichas energías coinciden haciendo ciertas aseveraciones simples, no obstante, las eigenfunciones no. Sin embargo, falta considerar un pequeño caso. Si restringimos el área donde el electrón puede moverse (esta restricción en cualquier momento puede hacerse ya que físicamente siempre podemos acotar el espacio donde la partícula se está moviendo), siendo así, k_2 obtiene ciertas restricciones. La eigenfunción $u(x_2) = e^{ik_2x_2}$ es una onda plana que debe cumplir una condición de periodicidad a lo largo de x_2 , que es el espacio donde se está propagando, por lo tanto, si el electrón está confinado a moverse a lo largo del eje x_1 una longitud L_1 y a lo largo del eje x_2 una longitud L_2 , entonces

$$u(x_2) = u(x_2 + L_2), \quad (1.65)$$

es decir

$$e^{ik_2x_2} = e^{ik_2(x_2+L_2)},$$

entonces

$$e^{ik_2L_2} = 1,$$

esto es posible si y sólo si, k_2L_2 es un múltiplo entero de 2π , por lo tanto

$$n_0 = \frac{k_2L_2}{2\pi},$$

como $0 \leq x_0 \leq L_1$, entonces definiendo la longitud característica

$$r_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega_c}, \quad (1.66)$$

tenemos

$$0 \leq n_0 \leq \frac{L_1L_2}{2\pi r_0^2}, \quad (1.67)$$

de esta manera $n_0 = 0, 1, 2, 3, \dots$ y lo más importante es que la degeneración en los niveles de Landau deja de ser infinita, es grande pero finita. Por el momento dejamos la discusión así ya que nos faltan definir algunos operadores para poder dar un estudio más detallado, los cuales serán definidos en el capítulo (3), por mientras, veremos un ejemplo para notar la importancia de considerar al momento cinético (hasta ahora sólo como una introducción ad hoc de la sustitución mínima) como la variable canónica en lugar del ímpetu.

1.5. Ecuación de Schrödinger-Pauli

En esta sección analizamos la ecuación de Pauli como una generalización a la ecuación de Schrödinger y no como el límite no-relativista de la ecuación de Dirac. Una partícula cargada al desplazarse dentro de un campo eléctrico puede ser descrito mediante el formalismo de Lagrange, para lo cual, podemos escribir la lagrangiana de la siguiente forma

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi,$$

al interactuar con un campo magnético \mathbf{B} , la lagrangiana debe ser modificada y que dicha modificación sea la expresión más sencilla posible; al tratarse de una función escalar la lagrangiana se transforma

$$L = \frac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \frac{q}{c}\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\phi, \quad (1.68)$$

donde m , q y \mathbf{v} es la masa, la carga eléctrica (en nuestra notación, la carga q del electrón es definida negativa) y la velocidad de la partícula respectivamente, además \mathbf{A} es el potencial vectorial, tal que, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ y c es la velocidad de la luz en el vacío. Por definición, el momento conjugado está dado por $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ donde las \dot{q}_i son las velocidades generalizadas, para nuestro caso, por lo tanto.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + \frac{q}{c}A_i,$$

en el formalismo lagrangiano, las variables independientes son las coordenadas generalizadas q_i y las velocidades generalizadas \dot{q}_i ; en el formalismo hamiltoniano, las variables independientes serán las mismas coordenadas generalizadas y los momentos canónicos conjugados p_i y la manera de hacer la conexión entre ambos formalismos está dada por una transformación de Legendre, para dicho propósito, se puede considerar la transición entre ambos formalismos como un cambio de variables que disminuye en un grado las ecuaciones pero aumenta su número al doble; este es el precio que se tiene que pagar para trabajar con ecuaciones de primer grado $(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow (q_i, p_i, t)$.

Después de aplicar la transformación de Legendre a la función lagrangiana obtenemos lo que definiremos como nuestra hamiltoniana

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N (p_i \dot{q}_i) - L(q_i, \dot{q}_i), \quad (1.69)$$

al sustituir los momentos generalizados y las velocidades generalizadas, obtenemos

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^3 \left[\left(mv_i + \frac{q}{c} A_i \right) v_i - \frac{1}{2} mv_i^2 - \frac{q}{c} v_i A_i \right] + q\phi,$$

es decir,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} mv_i^2 + q\phi = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{q}{c} A \right)^2 + q\phi. \quad (1.70)$$

Si la partícula (en nuestro caso un electrón) es sometida a un campo magnético externo, es necesario agregar la interacción mínima la cual es resultado de la acción del campo magnético sobre la partícula, en otras palabras, el ímpetu canónico \hat{p} debe ser sustituido por el ímpetu generalizado, de esta forma

$$\hat{p} \rightarrow \hat{P} = \hat{p} - \frac{q}{c} \hat{A},$$

además, \hat{p}^2 puede ser escrito como $\hat{p}^2 = (\hat{\sigma} \cdot \hat{p})^2 = (\hat{\sigma} \cdot \hat{p})(\hat{\sigma} \cdot \hat{p})^9$. Esto es posible ya que las componentes del operador del ímpetu conmutan todas entre ellas, esto es importante señalarlo ya que no siempre el producto vectorial de un operador consigo mismo es cero; un ejemplo claro de esto sería el operador del momento angular.

Con la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi,$$

al sustituir las relaciones anteriores,

$$\left[\frac{1}{2m} (\hat{\sigma} \cdot \hat{p})^2 + q\phi \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi; \quad (1.71)$$

por lo tanto, al considerar la interacción con el campo magnético como un postulado

$$\left[\frac{1}{2m} (\hat{\sigma} \cdot \hat{P})^2 + q\phi \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi, \quad (1.72)$$

que de acuerdo con la identidad de Pauli

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\hat{P}^2 + i\sigma \cdot (\hat{P} \times \hat{P}) \right) + q\phi \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

⁹Identidad de Pauli $(\hat{\sigma} \cdot \hat{A})(\hat{\sigma} \cdot \hat{B}) = \hat{A} \cdot \hat{B} + i\hat{\sigma} \cdot (\hat{A} \times \hat{B})$

sustituyendo \hat{P}

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{q}{c} \hat{A} \right)^2 + \frac{i\hat{\sigma}}{2m} \cdot \left[\left(\hat{p} - \frac{q}{c} \hat{A} \right) \times \left(\hat{p} - \frac{q}{c} \hat{A} \right) \right] + q\phi \right\} \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

las componentes de \hat{p} y \hat{A} si conmutan entre sí mismos, entonces $\hat{p} \times \hat{p} = 0 = \hat{A} \times \hat{A}$,

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{q}{c} \hat{A} \right)^2 - \frac{i\hat{\sigma}}{2m} \cdot \left[\frac{q}{c} \left(\hat{p} \times \hat{A} + \hat{A} \times \hat{p} \right) \right] + q\phi \right\} \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi; \quad (1.73)$$

sin embargo, para los operadores \hat{p} y \hat{A} , no se puede asegurar lo mismo por lo que se debe prestar atención particular al término $\left(\hat{p} \times \hat{A} + \hat{A} \times \hat{p} \right)$ ya que en primera instancia se pensaría en hacer uso de la propiedad de antisimetría del producto vectorial, es decir, que dados dos vectores \mathbf{X} y \mathbf{Y} cualesquiera, $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = -\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$, si bien, el operador \hat{A} corresponde al potencial \mathbf{A} el cual es un vector¹⁰, no se debe olvidar que \hat{p} es un operador, por lo cual, hay que calcular $\hat{p} \times \mathbf{A}$, sustituyendo al operador \hat{p} en su representación de coordenadas

$$p_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\hbar}{i} \nabla_i,$$

$\hat{p} \times \mathbf{A}$ lo podemos escribir como

$$\frac{\hbar}{i} (\nabla \times \mathbf{A});$$

la componente k de un producto vectorial queda escrito

$$(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})_k = \epsilon_{ijk} X_i Y_j. \quad (1.74)$$

Haciendo uso de la ecuación (1.74) y aplicándolo a una función $f(\mathbf{x})$ cualquiera

$$(\hat{p} \times \mathbf{A})_k f(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{i} \epsilon_{ijk} \partial_i A_j f(\mathbf{x}), \quad (1.75)$$

donde $\partial_i = \nabla_i$ y $f(\mathbf{x})$ es una función cualquiera que depende sólo de las coordenadas espaciales; haciendo un poco de álgebra, tenemos

$$(\hat{p} \times \mathbf{A}) f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \hat{p} \right) f(\mathbf{x}), \quad (1.76)$$

¹⁰Esta afirmación no pasa en general, pero si en nuestro caso particular. El hecho de que coincidan radica en la transición que se hace al cambiar nuestras variables por operadores, el potencial vectorial depende de las coordenadas \mathbf{x} y del tiempo, sin embargo, $\mathbf{x} \rightarrow \hat{x} = \mathbf{x}$.

al sustituir este resultado en la ecuación (1.73) obtenemos

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{i\hat{\sigma}}{2m} \cdot \left[\frac{q}{c} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \hat{p} + \mathbf{A} \times \hat{p} \right) \right] + q\phi \right\} \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi, \quad (1.77)$$

ya que el potencial \mathbf{A} se definió de manera tal que cumpliera con $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ y además \mathbf{B} conmuta con $\hat{\sigma}$, entonces, la ecuación (1.77) se reduce a

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{q\hbar}{2mc} \mathbf{B} \cdot \hat{\sigma} + q\phi \right\} \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi. \quad (1.78)$$

La ecuación (1.78) se conoce como la ecuación de Schrödinger-Pauli, donde

$$-\frac{q\hbar}{2mc} \mathbf{B} \cdot \hat{\sigma},$$

lleva el nombre de término Stern-Gerlach, siendo este el responsable del spin. Otra cosa que es también muy importante señalar es cómo \hat{p} solo ya no es suficiente para describir la cantidad de momento de la partícula en cuestión sino que ahora el operador responsable de esto es $\hat{P} = \hat{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A}$.

Capítulo 2

Transformaciones de norma

De acuerdo al capítulo (1), las ecuación de Maxwell en su forma diferencial y unidades gaussianas están dadas por (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4) y además con las ecuaciones (1.7) y (1.8) vimos que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} quedan invariantes. Por medio de un tratamiento variacional y el principio de mínima acción de Hamilton (para ver este tipo de desarrollo consultar [9] y [16]) se pueden deducir las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son de la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2.1)$$

de tal manera que la fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = e (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$ para una partícula de masa m y carga e se puede derivar mediante las ecuaciones (2.1) y la lagrangiana

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - e \phi(q, t) + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}(q, t). \quad (2.2)$$

Por medio de una transformación de norma a través de los potenciales (1.7) y (1.8) la lagrangiana no queda inalterada en forma sino que se agrega un término mediante la función escalar de la transformación

$$L'(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - e \phi'(q, t) + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A}'(q, t)$$

$$\begin{aligned} L'(q, \dot{q}, t) &= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - e \left(\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) + \frac{e}{c} (\dot{\mathbf{q}} \cdot (\mathbf{A} + \nabla \chi)) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - e \phi + \frac{e}{c} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A} + \frac{e}{c} \left(\dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla \chi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt}. \quad (2.3)$$

Para obtener la relación entre la lagrangiana y la hamiltoniana, basta con hacer una transformación de Legendre a la ecuación (2.3); por definición $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$

$$\begin{aligned} \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial L'}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L'}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L'}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial L'}{\partial t} \\ 0 &= \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L' \right)}_{H'}, \end{aligned}$$

si consideramos que L' no depende explícitamente del tiempo, $\frac{\partial L'}{\partial t} = 0$, por lo que el término entre paréntesis se conserva y eso es lo que llamamos, la función hamiltoniana, por lo tanto

$$H'(q, p') = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L', \quad (2.4)$$

como

$$L' = L + \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt}$$

entonces

$$p'_i \equiv \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial \dot{q}_i} = p_i + \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.5)$$

la relación entre H y H' esta dada por

$$\begin{aligned} H'(q, p') &= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - L - \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt} \\ &= \underbrace{p_i \dot{q}_i - L}_H + \underbrace{\frac{e}{c} \dot{q}_i \frac{\partial \chi}{\partial \dot{q}_i} - \frac{e}{c} \dot{q}_i \frac{\partial \chi}{\partial \dot{q}_i} - \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt}}_0 \\ &= H - \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt} \end{aligned}$$

$$H'(q_i, p'_i, t) = H(q_i, p_i, t) - \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Con ayuda de la ecuación (2.2) y la definición de p'_i , podemos escribir la hamiltoniana $H(q, p)$ de manera explícita en términos de $\mathbf{A}(q, t)$ y $\phi(q, t)$, además, por medio de las ecuaciones (2.4) y (2.5) se puede hacer lo mismo con $H'(q, p')$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} H(q_i, p_i) &= p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j) \\ &= \left(m \dot{q}_i + \frac{e}{c} A_i \right) \dot{q}_i - \frac{1}{2} m \dot{q}_i \dot{q}_i + e \phi - \frac{e}{c} \dot{q}_i A_i \\ &= m \dot{q}_i \dot{q}_i + \frac{e}{c} \dot{q}_i A_i - \frac{1}{2} m \dot{q}_i \dot{q}_i + e \phi - \frac{e}{c} \dot{q}_i A_i \end{aligned}$$

como

$$p_i = m \dot{q}_i + \frac{e}{c} A_i \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m \dot{q}_i \dot{q}_i = \frac{1}{2m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2,$$

entonces

$$H(q_i, p_i) = \frac{\left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2}{2m} + e \phi. \quad (2.7)$$

Podemos usar la ecuación (2.6) y escribir de manera inmediata $H'(q, p')$, sin embargo, también se puede usar la definición de $\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i}$ y mostrar que se llega al mismo resultado, lo único que se debe hacer es probar que $\frac{\left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2}{2m} = \frac{\left(p'_i - \frac{e}{c} A'_i \right)^2}{2m}$; no obstante, es fácil ver mediante la ecuación (2.5) que el término extra que surge de p'_i se cancela con el término extra que resulta de A'_i , por lo que la igualdad se satisface, por lo tanto

$$H'(q, p') = \frac{\left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right)^2}{2m} + e \phi - \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

usando la ecuación (1.8), tenemos

$$H'(q, p') = \frac{\left(p'_i - \frac{e}{c} A'_i \right)^2}{2m} + e \phi', \quad (2.8)$$

de esta manera, queda demostrado que la hamiltoniana es invariante bajo transformaciones de norma. Por último, así como se puede probar de manera relativamente sencilla que dada una hamiltoniana $H(q_i, p_i, t)$, tiene por

ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (2.11)$$

también es igualmente sencillo, probar que dada la hamiltoniano $H'(q_i, p'_i, t)$ ahora esta tiene por ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial H'}{\partial q_i} = -\dot{p}'_i \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial H'}{\partial p'_i} = \dot{q}_i \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial H'}{\partial t} = -\frac{\partial L'}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Se demostrará como deducir las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11); para las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) se hace un tratamiento completamente análogo. Considerando una hamiltoniana $H(q, p, t)$ su diferencial está dada

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (2.15)$$

como $H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L(q_j, \dot{q}_j, t)$, entonces

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

de acuerdo a las ecuaciones de Euler-Lagrange y a la definición de p_i

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i,$$

la ecuación (2.15) queda de la siguiente manera

$$dH = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (2.16)$$

en efecto, al comparar las ecuaciones (2.15) y (2.16) se pueden ver de manera inmediata las ecuaciones de Hamilton. El caso de las ecuaciones para H' se obtiene de manera análoga haciendo uso de la hamiltoniana (2.8) y la definición (2.5).

2.1. Ecuaciones de movimiento

2.1.1. Formalismo de Lagrange

En esta sección se analizarán las ecuaciones de movimiento que se obtienen al usar la norma simétrica y la norma de Landau para posteriormente compararlas; las normas, de acuerdo al capítulo (1) son las correspondientes a las ecuaciones (1.48) y (1.51) que son la norma simétrica y de Landau, respectivamente, además

$$\chi(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2 B}{2}, \quad (2.17)$$

de acuerdo a las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1) y la función lagrangiana (2.2), las ecuaciones de movimiento nos quedan de la forma

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = e \left(\underbrace{-\frac{\partial \phi}{\partial q_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}}_{E_i} + \frac{1}{c} \dot{q}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right) \right),$$

en el problema que estamos tratando, sólo está actuando un campo magnético constante, por lo tanto, el campo eléctrico es idénticamente cero; de esta manera, obtenemos por ecuaciones de movimiento

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{e}{c} \dot{q}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right),$$

con apoyo del símbolo de Levi-Civita, el lado derecho de la ecuación anterior queda escrito de la siguiente forma

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{e}{c} \epsilon_{jki} \dot{q}_j (\epsilon_{lmk} \partial_l A_m). \quad (2.18)$$

De acuerdo al potencial vectorial (1.48) podemos conseguir de forma explícita las tres ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de nuestra partícula

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{eB}{c} \frac{dx_2}{dt} = 0 \quad (2.19)$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{eB}{c} \frac{dx_1}{dt} = 0 \quad (2.20)$$

$$m \frac{d^2 x_3}{dt^2} = 0, \quad (2.21)$$

las primeras dos ecuaciones de movimiento corresponden a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas, de la ecuación (2.19) obtenemos

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega_c x_2 - \omega_c C_1 \quad (2.22)$$

donde $\omega_c \equiv \frac{eB}{mc}$ y $-\omega_c C_1$ una constante de integración, al sustituir la ecuación (2.22) en (2.20) el problema se reduce a resolver una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_c^2 x_2 = \omega_c^2 C_1,$$

para resolver esta ecuación buscamos dos soluciones linealmente independientes a la ecuación homogénea y le agregamos una solución particular de la no homogénea (para más detalles consultar [2, pág 178]), una solución particular es

$$x_{20}(t) = C_1$$

y dos soluciones linealmente independientes a la homogénea son

$$x_{21}(t) = C_2 \sin(\omega_c t) \quad , \quad x_{22}(t) = C_3 \cos(\omega_c t)$$

de esta forma

$$x_2(t) = C_2 \sin(\omega_c t) + C_3 \cos(\omega_c t) + C_1;$$

regresando a la ecuación (2.22)

$$x_1(t) = \int (\omega_c x_2(t) - \omega_c C_1) dt + C_4$$

la cual, resolviendo la integral nos da como resultado final

$$x_1(t) = -C_2 \cos(\omega_c t) + C_3 \sin(\omega_c t) + C_4,$$

es importante señalar que una combinación lineal de una onda sinusoidal con la misma frecuencia (o periodo) pero de diferentes fases es también una onda sinusoidal con la misma frecuencia (o periodo) pero con una fase diferente, es decir

$$a \sin x + b \cos x = c \cos(x + \theta)$$

donde

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right),$$

por lo tanto

$$x_1(t) - C_4 = R \cos(\omega_c t + \theta), \quad (2.23)$$

$$x_2(t) - C_1 = -R \sin(\omega_c t + \theta), \quad (2.24)$$

donde

$$R = \sqrt{C_2^2 + C_3^2} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(\frac{C_3}{C_2}\right).$$

La ecuación (2.18) es la fuerza de Lorentz para una partícula en un campo magnético, por lo que el término que está entre paréntesis corresponde a la componente k -ésima del rotacional del potencial vectorial \mathbf{A} y ya que

$$\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B},$$

por lo tanto, las ecuaciones de movimiento con la norma de Landau son las mismas que las ecuaciones con la norma simétrica y por ende, las mismas soluciones (2.23) y (2.24).

Las forma geométrica que describen las ecuaciones de movimiento ahora es evidente, las soluciones (2.23) y (2.24) describen una órbita circular con centro en (C_4, C_1) y radio $\sqrt{C_2^2 + C_3^2}$. Como es de esperarse, el centro y el tamaño de la órbita van a depender únicamente de las condiciones iniciales.

2.1.2. Formalismo de Hamilton

De acuerdo a la hamiltoniana (2.7) y las ecuaciones de hamilton (2.9) y (2.10)

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right) \\ \dot{p}_i &= \frac{1}{m} \left(p_j - \frac{e}{c} A_j \right) \left(\frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial q_i} \right) - e \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \\ &= \frac{e}{c} \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - e \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \\ m \frac{d\dot{q}_i}{dt} &= \dot{p}_i - \frac{e}{c} \frac{dA_i}{dt} \\ &= \frac{e}{c} \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - e \frac{\partial \phi}{\partial q_i} - \frac{e}{c} \dot{q}_j \frac{\partial A_i}{\partial q_j} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \\ &= e \left[\left(-\frac{\partial \phi}{\partial q_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \frac{1}{c} \dot{q}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right) \right], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$m \frac{d^2 q_i}{dt^2} = e \left[E_i + \frac{1}{c} \dot{q}_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \right) \right],$$

como sólo tenemos campo magnético, entonces

$$m \frac{d^2 q_i}{dt^2} = \frac{e}{c} \varepsilon_{jki} \dot{q}_j (\varepsilon_{lmk} \partial_l A_m). \quad (2.25)$$

de esta manera se puede observar que la ecuación (2.18) es igual a la ecuación (2.25); si consideramos los mismos potenciales vectoriales, es de esperarse que se tengan las mismas ecuaciones diferenciales de movimiento y, en efecto, las mismas soluciones. Algo que se debe notar es que para estas ecuaciones de segundo grado la norma es irrelevante, es decir, las ecuaciones de Hamilton que surjan de (2.25) son invariantes de norma.

Para el caso donde el campo eléctrico es nulo y el potencial vectorial no depende de manera explícita del tiempo no es necesario considerar el potencial escalar ya que este a lo más será constante. Para encontrar las ecuaciones de movimiento anteriores se tuvieron que utilizar las ecuaciones de Hamilton (2.9) y (2.10) mezclando ambas ecuaciones para obtener el resultado deseado, sin embargo, de acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza se define como la razón de cambio del ímpetu, es decir

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i,$$

lo cual se traduce como $F_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, por lo tanto, de acuerdo a la hamiltoniana (2.8) y la ecuación (2.12)

$$\dot{p}'_i = \frac{e}{mc} \left(p'_j - \frac{e}{c} A'_j \right) \left(\frac{\partial A'_j}{\partial q_i} \right), \quad (2.26)$$

con al potencial (1.51) llegamos a que las ecuaciones de movimiento de cada componente son

$$\begin{aligned} \dot{p}'_1 &= \frac{eB}{mc} p'_2 - m \left(\frac{eB}{mc} \right)^2 q_1 \\ \dot{p}'_2 &= 0 \\ \dot{p}'_3 &= 0, \end{aligned}$$

ya que $\dot{p}'_2 = 0$ entonces $p'_2 = \alpha$ con α una constante de integración. De acuerdo a la definición de ω_c y el valor de p'_2

$$\dot{p}'_1 + m\omega_c^2 (q'_1 - q'_0) = 0, \quad (2.27)$$

donde $q'_0 = \frac{\alpha}{m\omega_c}$. La ecuación (2.27) tiene la misma forma de un oscilador armónico unidimensional con centro en q'_0 .

De forma análoga, para la hamiltoniana (2.7) y la ecuación de Hamilton (2.9) tenemos

$$\dot{p}_i = \frac{e}{mc} \left(p_j - \frac{e}{c} A_j \right) \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_i} \right), \quad (2.28)$$

de acuerdo al potencial vectorial (1.48) las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{p}_1 - \frac{1}{2}\omega_c \left(p_2 - \frac{1}{2}m\omega_c q_1 \right) = 0 \quad (2.29)$$

$$\dot{p}_2 + \frac{1}{2}\omega_c \left(p_2 + \frac{1}{2}m\omega_c q_1 \right) = 0 \quad (2.30)$$

$$\dot{p}_3 = 0. \quad (2.31)$$

Las ecuaciones (2.19) y (2.20) tienen la forma de un oscilador armónico amortiguado, si definimos la frecuencia ciclotrón igual a

$$\omega_c = \frac{eB}{mc},$$

y la frecuencia de Larmor

$$\omega_L = \frac{eB}{2mc},$$

las ecuaciones de movimiento se pueden escribir en términos de estas frecuencias.

2.1.3. Transformaciones de norma para el formalismo cuántico

La ecuación de Schrödinger no se mantiene invariante si sólo se hacen las transformaciones de los potenciales, es necesario meter de manera “ad-hoc” la transformación de la función de onda

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi(\mathbf{r}, t)}\psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.32)$$

es imperativo que la ecuación de Schrödinger mantenga su forma bajo dichas transformaciones, es decir

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A}' \right)^2 + e\phi' \right] \psi' = i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t}, \quad (2.33)$$

la forma de ver que esto se cumple se puede realizar en dos secciones; la parte que sale del potencial (1.8) se compensa con la derivada temporal

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right),$$

por lo que sólo basta con demostrar la otra parte

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A}' \right) \psi' &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \psi \right) - \frac{e}{c} (\mathbf{A} + \nabla \chi) e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \psi \right) \\ &= \frac{1}{2m} \left[\frac{\hbar}{i} \left(\frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \psi + e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) - \frac{e}{c} \mathbf{A} e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \psi - \frac{e}{c} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \psi \right] \\ &= \frac{1}{2m} e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi, \end{aligned}$$

en efecto, la ecuación (2.33) difiere de la ecuación de Schrödinger únicamente por un factor de fase, el cual, de forma física, no tiene sentido alguno. Si las transformaciones de norma no tienen sentido físico es de suponerse que el valor esperado de las observables permanezca invariante, en otras palabras, mostramos cuál de las siguientes cantidades permanece invariante

$$\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \langle \psi' | \hat{p} | \psi' \rangle \quad \text{o} \quad \langle \psi | \hat{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} | \psi \rangle = \langle \psi' | \hat{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}' | \psi' \rangle$$

para \hat{p}

$$\begin{aligned} \langle \psi' | \hat{p} | \psi' \rangle &= \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'^* \frac{\partial}{\partial x_i} \left(e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \psi \right) d^3x \\ &= \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'^* e^{-\frac{ie}{\hbar c} \chi} e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \left(\frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) d^3x \\ &= \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \psi'^* \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \psi d^3x + \int_{-\infty}^{\infty} \psi'^* \hat{p} \psi d^3x \\ &= \frac{e}{c} \langle \psi | \nabla \chi | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle, \end{aligned}$$

evidentemente

$$\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle \neq \langle \psi' | \hat{p} | \psi' \rangle,$$

es conveniente señalar el hecho inmediato que cualquier operador el cual sea función del operador posición \hat{x} cumple con la propiedad

$$\langle \psi' | \hat{C}(\hat{x}) | \psi' \rangle = \langle \psi | \hat{C}(\hat{x}) | \psi \rangle, \quad (2.34)$$

dada la definición de $\psi'(x, t)$. Con dichos antecedentes podemos mostrar que el otro valor esperado si es invariante

$$\begin{aligned} \langle \psi' | \hat{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}' | \psi' \rangle &= \langle \psi' | \hat{p} | \psi' \rangle - \frac{e}{c} (\langle \psi' | \mathbf{A} | \psi' \rangle + \langle \psi' | \nabla \chi | \psi' \rangle) \\ &= \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle + \frac{e}{c} \langle \psi | \nabla \chi | \psi \rangle - \frac{e}{c} \langle \psi | \mathbf{A} | \psi \rangle - \frac{e}{c} \langle \psi | \nabla \chi | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \hat{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} | \psi \rangle, \end{aligned}$$

este resultado es muy importante, pues se puede notar que el operador \hat{p} no es la observable en este problema sino que el momento cinético conjugado es la observable; algo que ya se había señalado en el primer capítulo y se tomó como algo cierto pero hasta aquí se demuestra de manera fehaciente. Además, algo más que se debe resaltar es que en la función de onda aparece un nuevo término de fase, y este término es el que nos ayuda a nivelar las cosas y así permanecer invariantes. En la parte clásica vimos que no pasa algo así, sino que el término que ayudaba a mantener la invarianza surgía del momento cinético conjugado y la forma se mantenía a nivel de la hamiltoniana. En otras palabras, de manera cuántica \hat{p} y \hat{p}' son iguales pero a nivel clásico no, a nivel clásico p_i y p'_i se relacionan mediante la ecuación (2.5).

Algunos resultados (por ejemplo el oscilador armónico) tienen un análogo cuántico bastante evidente cuando se hace bajo el formalismo de Heisenberg, de hecho, quizá esta similitud en varios resultados cuántico y clásico se ve reflejada por la forma parecida que presentan el paréntesis de Poisson y el conmutador, por esta razón es que en el siguiente capítulo se presenta un análisis en el esquema de Heisenberg y veremos cómo se vincula con su contraparte clásica.

Capítulo 3

Esquema de Heisenberg

En el esquema de Schrödinger, la evolución temporal de un vector estado $|\psi, t\rangle$ está determinado por

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = \hat{H} |\psi, t\rangle$$

si \hat{H} no depende explícitamente del tiempo se puede verificar que tiene por solución

$$|\psi, t\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}t} |\psi, 0\rangle$$

de esta manera puede notarse que los estados evolucionan en el tiempo mientras que los operadores permanecen constantes. En el esquema de Heisenberg, los estados permanecen constantes mientras que los operadores obedecen una ecuación de movimiento (para más detalles de este tema consultar [8], [15]). Dado un operador \hat{B}_S (operador en el esquema de Schrödinger) podemos definir

$$\hat{B}_H(t) \equiv e^{\frac{i\hat{H}}{\hbar}t} \hat{B}_S e^{-\frac{i\hat{H}}{\hbar}t}, \quad (3.1)$$

donde $\hat{B}_H(t)$ es un operador cualquiera en el esquema de Heisenberg. Para $t = 0$ los operadores en ambas representaciones coinciden

$$\hat{B}_H(0) = \hat{B}_S. \quad (3.2)$$

Como \hat{H} no depende de t , al tomar la derivada temporal de (3.1) puede demostrarse que

$$\frac{d}{dt} \hat{B}_H = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_H, \hat{B}_H] + \left(\frac{\partial \hat{B}_S}{\partial t} \right)_H, \quad (3.3)$$

la cual se conoce como la ecuación de Heisenberg; en la sección (3.1) se mostrará que $\hat{H}_H = \hat{H}_S$, para nuestros fines, los operadores en el esquema de Schrödinger no dependerán explícitamente del tiempo, por lo que $\frac{\partial \hat{H}_S}{\partial t} = 0$. Los vectores estado en el esquema de Heisenberg quedan definidos como

$$|\psi\rangle_H \equiv |\psi, 0\rangle_S = e^{\frac{iH}{\hbar}t} |\psi, t\rangle_S. \quad (3.4)$$

Dadas las definiciones anteriores y algunas propiedades que se irán demostrando conforme haga falta, haremos el caso que estamos tratando, ya que como puede verse estas dos representaciones están relacionadas por una transformación unitaria, por lo tanto, el valor esperado en ambas debe ser el mismo; usando (3.1) y (3.4) se puede ver de forma inmediata

$$\langle \psi, t | \hat{B}_S | \psi, t \rangle = \langle \psi | e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \hat{B}_S e^{\frac{iH}{\hbar}t} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{B}_H | \psi \rangle, \quad (3.5)$$

donde, ambas representaciones guardan el mismo significado físico. Usando la ecuación de Heisenberg para el caso del oscilador armónico unidimensional, tanto las ecuaciones de movimiento como sus soluciones tienen la misma forma que el problema clásico (ver referencia [8] y [15]), por esta razón veremos que para el caso de una partícula de carga e y masa m sometida a un campo magnético constante, pasa lo mismo.

3.1. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético constante y uniforme

Conforme a la ecuación (3.1)

$$\hat{H}_H = e^{\frac{iH}{\hbar}t} \hat{H}_S e^{-\frac{iH}{\hbar}t},$$

usando la identidad de Baker-Hausdorff¹, se tiene que el hamiltoniano en el esquema de Schrödinger es el mismo al del esquema de Heisenberg²

$$\hat{H}_H = \hat{H}_S.$$

¹ $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots,$

²Esto es válido sólo para hamiltonianos que no dependen explícitamente del tiempo, es decir, $\frac{\partial H_S}{\partial t} = 0$

Usando la definición (3.1) y el hecho de que los hamiltonianos en el esquema de Heisenberg y el esquema de Schrödinger coinciden, es fácil ver (usando la identidad de Baker-Hausdorff) que los operadores \hat{p}_H y \hat{p}_S no son iguales ya que \hat{p}_S no conmuta con el hamiltoniano; con base en el mismo argumento, se puede ver que $\hat{A}_H \neq \hat{A}_S$. Una identidad que nos será de utilidad es la siguiente; dados tres operadores hermitianos \hat{B}_S , \hat{C}_S y \hat{D}_S tal que cumplen

$$\left[\hat{B}_S, \hat{C}_S \right] = i\hat{D}_S, \quad (3.6)$$

entonces

$$\left[\hat{B}_H, \hat{C}_H \right] = i\hat{D}_H. \quad (3.7)$$

Este resultado se demuestra de manera inmediata usando la definición de los operadores de Heisenberg (3.1)

$$\begin{aligned} \left[\hat{B}_S, \hat{C}_S \right] &= i\hat{D}_S \\ \left[e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \hat{B}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t}, e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \hat{C}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} \right] &= e^{-\frac{iH}{\hbar}t} i\hat{D}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} \\ e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \hat{B}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \hat{C}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} - e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \hat{C}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \hat{B}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} &= e^{-\frac{iH}{\hbar}t} i\hat{D}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} \\ e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \hat{B}_H \hat{C}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} - e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \hat{C}_H \hat{B}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} &= e^{-\frac{iH}{\hbar}t} i\hat{D}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} \\ e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \left[\hat{B}_H, \hat{C}_H \right] e^{\frac{iH}{\hbar}t} &= e^{-\frac{iH}{\hbar}t} i\hat{D}_H e^{\frac{iH}{\hbar}t} \end{aligned}$$

multiplicando por $e^{\frac{iH}{\hbar}t}$ por la izquierda y por $e^{-\frac{iH}{\hbar}t}$ por la derecha tenemos

$$\left[\hat{B}_H, \hat{C}_H \right] = i\hat{D}_H.$$

Este resultado nos será de utilidad ya que de esta manera podemos usar las reglas de conmutación que conocemos en el esquema de Schrödinger y meter la transformación unitaria que nos conecta los operadores en ambas representaciones, siendo así, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i &= \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} \left[\left(p_j - \frac{e}{c} A_j \right)^2, x_i \right], \\ &= \frac{i}{2m\hbar} \left[\left(p_j - \frac{e}{c} A_j \right) \left[p_j - \frac{e}{c} A_j, x_i \right] + \left[p_j - \frac{e}{c} A_j, x_i \right] \left(p_j - \frac{e}{c} A_j \right) \right], \end{aligned}$$

como A_j depende sólo de las coordenadas espaciales, entonces, conmuta con x_i

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_i &= \frac{i}{2m\hbar} \left[\left(p_j - \frac{e}{c}A_j \right) [p_j, x_i] + [p_j, x_i] \left(p_j - \frac{e}{c}A_j \right) \right], \\ &= \frac{i}{2m\hbar} \left[2\frac{\hbar}{i}\delta_{ij} \left(p_j - \frac{e}{c}A_j \right) \right],\end{aligned}$$

por lo tanto

$$m\dot{x}_i(t) = \left(p_i - \frac{e}{c}A_i(\mathbf{x}) \right)_H. \quad (3.8)$$

Usando la ecuación de Heisenberg (3.3) sobre (3.8) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\dot{x}_i &= \frac{i}{2m\hbar} \left[\left(p_j - \frac{e}{c}A_j \right)^2, \left(p_i - \frac{e}{c}A_i \right) \right] \\ &= \frac{i}{2m\hbar} \left[\left(p_j - \frac{e}{c}A_j \right) \left[p_j - \frac{e}{c}A_j, p_i - \frac{e}{c}A_i \right] + \left[p_j - \frac{e}{c}A_j, p_i - \frac{e}{c}A_i \right] \left(p_j - \frac{e}{c}A_j \right) \right] \\ &= -\frac{ie}{2m\hbar c} \left[\left(p_j - \frac{e}{c}A_j \right) ([p_j, A_i] + [A_j, p_j]) + ([p_j, A_i] + [A_j, p_j]) \left(p_j - \frac{e}{c}A_j \right) \right]\end{aligned}$$

como $[p_j, A_i] = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\hbar}{i} \varepsilon_{jik} B_k$, entonces

$$m\frac{d}{dt}\dot{x}_i = -\frac{ie}{2m\hbar c} \left[\left(p_j - \frac{e}{c}A_j \right) \left(\frac{\hbar}{i} \varepsilon_{jik} B_k \right) + \left(\frac{\hbar}{i} \varepsilon_{jik} B_k \right) \left(p_j - \frac{e}{c}A_j \right) \right],$$

esta expresión es válida para un campo magnético arbitrario que dependa sólo de las posiciones, por lo tanto, en general B_k conmuta con el operador A_j pero no conmuta con el operador p_j , no obstante, para nuestro caso, el campo magnético es constante y uniforme, es decir, conmuta con cualquier operador y en particular con el operador p_j . Ya que el operador $m\dot{x}_j = p_j - \frac{e}{c}A_j$, entonces

$$m\frac{d}{dt}\dot{x}_i = -\frac{ie}{2m\hbar c} \left[\frac{2m\hbar}{i} \varepsilon_{jik} \dot{x}_j B_k \right],$$

por lo tanto

$$m\ddot{x}_i(t) = \left[\frac{e}{c} (\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})_i \right]_H. \quad (3.9)$$

Considerando un campo magnético uniforme en la dirección z , tenemos $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, entonces de acuerdo a las componentes de (3.9) obtenemos la forma

para las ecuaciones de Heisenberg

$$\ddot{x}_1(t) = \omega_c \dot{x}_2(t) \quad (3.10)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -\omega_c \dot{x}_1(t), \quad (3.11)$$

donde ω_c es la frecuencia de ciclotrón definida en la sección (2.1.2). Como puede notarse, las ecuaciones (3.10) y (3.11) están acopladas. Integrando ambas ecuaciones se tiene

$$\dot{x}_1(t) = \omega_c x_2(t) - \omega_c X_1 \quad (3.12)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega_c x_1(t) + \omega_c X_2, \quad (3.13)$$

donde $\omega_c X_1$ y $\omega_c X_2$ son constantes de integración. Sustituyendo (3.13) en (3.10) y (3.12) en (3.11), llegamos a

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_c^2 x_1(t) = \omega_c^2 X_2 \quad (3.14)$$

$$\ddot{x}_2(t) + \omega_c^2 x_2(t) = \omega_c^2 X_1, \quad (3.15)$$

por lo que este sistema de ecuaciones diferenciales ya está desacoplado. Como se trata de una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea, resolvemos la homogénea y se le suma una solución particular, para obtener la solución general. Por lo tanto

$$\ddot{x}_1(t) + \omega_c^2 x_1(t) = 0$$

y

$$\ddot{x}_2(t) + \omega_c^2 x_2(t) = 0$$

de donde puede notarse que dichas ecuaciones tienen la misma forma que un oscilador armónico de frecuencia ω_c , por ello es que proponemos soluciones de la forma

$$x_1(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) \quad (3.16)$$

$$x_2(t) = C \cos(\omega_c t) + D \sin(\omega_c t), \quad (3.17)$$

es fácil ver que las funciones (3.16) y (3.17) satisfacen las ecuaciones homogéneas. Para la solución particular, proponemos soluciones de la forma $x_{01}(t) = X_2$ y $x_{02}(t) = X_1$ donde puede comprobarse de manera inmediata

que éstas soluciones satisfacen las ecuaciones (3.14) y (3.15); las soluciones generales toman la forma

$$x_1(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) + X_2 \quad (3.18)$$

$$x_2(t) = C \cos(\omega_c t) + D \sin(\omega_c t) + X_1. \quad (3.19)$$

De acuerdo a la ecuación (3.2) los operadores al tiempo $t = 0$ deben de coincidir con los operadores de Schrödinger, entonces

$$x_1(0) = A + X_2 = x_{1S}$$

y

$$x_2(0) = C + X_1 = x_{2S},$$

donde x_{iS} corresponde a un operador en el esquema de Schrödinger, además, de acuerdo a las ecuaciones (3.12) y (3.13)

$$\dot{x}_1(0) = \omega_c x_2(0) - \omega_c X_1 = \omega_c (x_{2S} - X_1)$$

y

$$\dot{x}_2(0) = -\omega_c x_1(0) + \omega_c X_2 = -\omega_c (x_{1S} + X_2),$$

como $\dot{x}_1(0) = \omega_c B$ y $\dot{x}_2(0) = \omega_c D$, entonces, se tienen las condiciones

$$B = C, \quad D = -A.$$

Con ayuda de las ecuaciones homogéneas podemos determinar los valores para A y C , de modo que nos queda

$$A = x_{1S} \quad C = x_{2S},$$

de esta manera, las soluciones con las condiciones iniciales, son

$$x_1(t) = x_{1S} \cos(\omega_c t) + x_{2S} \sin(\omega_c t) + X_2 \quad (3.20)$$

$$x_2(t) = x_{2S} \cos(\omega_c t) - x_{1S} \sin(\omega_c t) + X_1. \quad (3.21)$$

Puede verificarse de manera directa que (3.20) y (3.21) satisfacen (3.12) y (3.13). Despejando X_1 y X_2 de (3.12) y (3.13) respectivamente tenemos

$$X_1 = x_2(t) - \frac{1}{\omega_c} \dot{x}_1(t) \quad (3.22)$$

$$X_2 = x_1(t) + \frac{1}{\omega_c} \dot{x}_2(t). \quad (3.23)$$

Como pudimos notar hasta este punto todo se hizo de manera independiente de la norma, la única consideración que se tomó en cuenta fue la dirección del campo magnético. Antes de continuar, señalaremos algunas relaciones de conmutación que nos serán de utilidad. De acuerdo a la ecuación (3.8) tenemos

$$[m\dot{x}_i, m\dot{x}_j] = i\hbar \frac{e}{c} \varepsilon_{ijk} B_k \quad (3.24)$$

para el caso donde la dirección del campo magnético es a lo largo del eje z tenemos

$$[m\dot{x}_1, m\dot{x}_2] = i\hbar \frac{eB}{c}, \quad (3.25)$$

otra relación importante es

$$[x_i, m\dot{x}_j] = i\hbar \delta_{ij}. \quad (3.26)$$

De acuerdo a las ecuaciones (3.22) y (3.23) se puede mostrar por cálculo directo

$$[X_1, X_2] = \frac{i\hbar}{m\omega_c}, \quad (3.27)$$

por último, mediante las definiciones de X_i y \dot{x}_j se obtiene

$$[X_i, \dot{x}_j] = 0. \quad (3.28)$$

Como la expresión para el momento cinético (3.8) incluye al potencial, entonces, depende de la norma, por lo que definimos a los operadores

$$a \equiv \frac{m(\dot{x}_1 + i\dot{x}_2)}{\sqrt{2\hbar m\omega_c}}, \quad (3.29)$$

$$a^\dagger \equiv \frac{m(\dot{x}_1 - i\dot{x}_2)}{\sqrt{2\hbar m\omega_c}}, \quad (3.30)$$

$$A_\pm \equiv \frac{\sqrt{2}(A_2 \mp iA_1)}{B}, \quad (3.31)$$

$$p_\pm \equiv \frac{p_1 \mp ip_2}{\sqrt{2}}, \quad (3.32)$$

$$x_\pm \equiv \frac{x_1 \pm ix_2}{\sqrt{2}}, \quad (3.33)$$

done A_1 y A_2 son las componentes del potencial vectorial. Es fácil ver que

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (3.34)$$

es decir, a y a^\dagger cumplen la función de operadores de descenso y ascenso, respectivamente. Los operadores x_\pm y p_\pm satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[x_\pm, p_\pm] = i\hbar, \quad (3.35)$$

$$[x_\pm, p_\mp] = 0, \quad (3.36)$$

y dichas relaciones de conmutación son las canónicas, lo cual no debe de sorprendernos, no obstante, también se puede calcular la relación de A_\pm y p_\pm obteniendo

$$[A_\pm, p_\pm] = \frac{i\hbar}{B} \left(\varepsilon_{123} \partial_1 A_2 + \varepsilon_{213} \partial_2 A_1 \mp i \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right) \right),$$

en el capítulo (2) se vio que el campo magnético está definido mediante

$$\varepsilon_{ijk} \partial_i A_j = B_k,$$

y ya que el el campo magnético está en dirección del eje z se concluye que

$$[A_\pm, p_\pm] = i\hbar \quad (3.37)$$

más adelante vamos a ver que para la norma simétrica (1.48) los operadores x_\pm y A_\pm coinciden. Lo que debemos señalar es que el operador A_\pm se está definiendo como un término de corrección pues bien, las normas que siempre suelen usarse son la simétrica (1.48) y la de Landau (1.51) pero, nada nos restringe a no usar una norma de la forma

$$\mathbf{A} = B \left(-\frac{1}{3}x_2, \frac{2}{3}x_1, 0 \right),$$

la cual cumple perfectamente la definición con la que fue construido el potencial vectorial y además, la condición de un campo magnético constante y homogéneo a lo largo del eje z , por lo tanto, los operadores x_\pm y A_\pm ya no van a coincidir; esta es la idea principal del por qué introducir estos nuevos operadores. La intención de esta parte es crear una formulación generalizada para después particularizar con las normas simétricas y las de Landau.

Conforme a las relaciones de (3.25) y (3.27), en lugar de las variables canónicas x_1, p_1 y x_2, p_2 pueden usarse las variables \hat{x}_2, \hat{x}_1 y X_2, X_1 . Usando (3.29) y (3.30) expresamos el hamiltoniano como

$$H = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (3.38)$$

además, escribimos a los operadores (3.29) y (3.30) en términos de (3.31) y (3.32) obteniendo

$$a = \frac{1}{2ir_0} \left(A_+ + 2r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_-} \right), \quad (3.39)$$

$$a^\dagger = \frac{i}{2r_0} \left(A_- - 2r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_+} \right), \quad (3.40)$$

donde

$$p_\pm \equiv \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\pm}, \quad (3.41)$$

además

$$r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}},$$

se conoce como la longitud característica (la cual usando la definición de ω_c puede verse que coincide con (1.62)). Para el estado base

$$a |\psi_0\rangle = 0,$$

es decir

$$\left(A_+ + 2r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_-} \right) |\psi_0\rangle = 0,$$

llegando a la función de onda

$$|\psi_0\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2r_0^2} \int A_+ dx_- + f(x_+) \right\}. \quad (3.42)$$

Como X_1 y X_2 no conmutan entonces no podemos tomar eigenfunciones en común pero si podemos tomar eigenfunciones de

$$X_1^2 + X_2^2,$$

para ello definimos los operadores

$$X_+ = \frac{X_2 + iX_1}{\sqrt{2}}, \quad (3.43)$$

$$X_- = \frac{X_2 - iX_1}{\sqrt{2}}, \quad (3.44)$$

donde

$$[X_-, X_+] = r_0^2, \quad (3.45)$$

por lo tanto

$$X_1^2 + X_2^2 = 2X_+X_- + r_0^2. \quad (3.46)$$

La analogía de los operadores (3.43) y (3.44) con los operadores de ascenso y descenso del apéndice (B) se puede notar en la ecuación (B.17), los cuales ascienden (o desciende) los eigenvalores de $X_1^2 + X_2^2$ en $2r_0^2$. De manera análoga podemos determinar la forma explícita de los operadores (3.43) y (3.44) llegando a

$$X_+ = \left(x_+ - \frac{1}{2}A_+ - r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_-} \right) \quad (3.47)$$

$$X_- = \left(x_- - \frac{1}{2}A_- + r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_+} \right), \quad (3.48)$$

las eigenfunciones que corresponden al eigenvalor más pequeño para (3.46) es

$$X_- |n\rangle = 0, \quad (3.49)$$

dado que X_i y \dot{x}_j conmutan entonces X_i conmuta con los operadores (3.39) y (3.40) por ello $X_- |\psi_0\rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \left(r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_+} + x_- - \frac{1}{2}A_- \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2r_0^2} \int A_+ dx_- + f(x_+) \right\} &= 0 \\ \left(x_- - \frac{1}{2}A_- - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_+} \int A_+ dx_- + r_0^2 \frac{\partial f(x_+)}{\partial x_+} \right) \exp \left\{ -\frac{A_+ x_-}{2r_0^2} + f(x_+) \right\} &= 0 \\ \left(x_- - \frac{1}{2}A_- - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_+} \int A_+ dx_- + r_0^2 \frac{\partial f(x_+)}{\partial x_+} \right) &= 0, \end{aligned}$$

ya que la función $f(x_+)$ depende únicamente de x_+ , su derivada deja de ser parcial y pasa a ser una derivada total

$$\therefore \frac{df(x_+)}{dx_+} = \frac{1}{2r_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_+} \int A_+ dx_- + A_- - 2x_- \right), \quad (3.50)$$

siendo (3.50) la ecuación diferencial que obedece la función $f(x_+)$ y dada su relación con la eigenfunción del estado base (3.42), puede notarse que esta función es muy importante para obtener la forma explícita que llega a tener dicho estado. La ecuación (3.50) está relacionada directamente con los términos (3.31) los cuales a su vez están definidos de acuerdo a la norma, por ello es de esperarse que las eigenfunciones (no sólo la del estado base)

dependan de la forma que tenga la norma. En las dos siguientes secciones se hace el ejemplo para la norma simétrica y una norma de Landau (para la otra norma el procedimiento es completamente análogo) para después conectarlas mediante (2.32).

3.2. Norma simétrica

Hasta este punto la norma se ha tratado con toda arbitrariedad, por lo que consideraremos el caso de la norma simétrica para poder expresar tanto los operadores como las eigenfunciones que se definieron y encontraron en esta norma en específico, como

$$\mathbf{A} = \frac{B}{2} (-x_2, x_1, 0), \quad (3.51)$$

de acuerdo a las definiciones (3.31) y (3.33)

$$A_{\pm} = x_{\pm},$$

por medio de (3.50) tenemos

$$f(x_+) = cte$$

y la eigenfunción del estado base toma la forma

$$|\psi_0\rangle = N \exp\left\{-\frac{x_+x_-}{2r_0^2}\right\}, \quad (3.52)$$

donde N es una constante de normalización cuyo valor es $\frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}}$. El apéndice (B) nos dice que

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |\psi_0\rangle = |\psi_n\rangle,$$

por lo tanto, las primeras eigenfunciones son

$$\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{0!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^0 \left[x_-^0 \exp\left(-\frac{x_+ x_-}{2r_0^2}\right) \right] \\
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{1!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^1 \left[x_-^1 \exp\left(-\frac{x_+ x_-}{2r_0^2}\right) \right] \\
|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{2!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^2 \left[x_-^2 \exp\left(-\frac{x_+ x_-}{2r_0^2}\right) \right] \\
|\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{3!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^3 \left[x_-^3 \exp\left(-\frac{x_+ x_-}{2r_0^2}\right) \right] \\
|\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{4!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^4 \left[x_-^4 \exp\left(-\frac{x_+ x_-}{2r_0^2}\right) \right] \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

para el estado n-ésimo tenemos

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^n \left[x_-^n \exp\left(-\frac{x_+ x_-}{2r_0^2}\right) \right]. \quad (3.53)$$

Usando coordenadas cilíndricas, los operadores (3.33) quedan

$$x_{\pm} = \pm \frac{i\rho e^{\mp i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (3.54)$$

además

$$x_+ x_- = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{\rho^2}{2} \quad (3.55)$$

en efecto, las eigenfunciones (3.53) se pueden reescribir como

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{-1}{\sqrt{2r_0^2}}\right)^n \rho^n e^{in\phi} e^{-\frac{\rho^2}{4r_0^2}}. \quad (3.56)$$

El resto de las eigenfunciones se obtiene aplicando el operador de ascenso X_+ , es decir

$$X_+^m |\psi_n\rangle \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.57)$$

el cual, en la norma simétrica es

$$X_+ = \left(\frac{1}{2}x_+ - r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_-} \right). \quad (3.58)$$

Como puede notarse, los niveles están degenerados y estos en la literatura se conocen como los niveles de Landau, los cuales tienen por energía

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.59)$$

La densidad de probabilidad está dada por

$$P(\rho) = \rho |\psi_n\rangle \langle \psi_n|,$$

entonces,

$$|\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \frac{1}{(2r_0^2)^{n+1}} \frac{1}{\pi n!} \rho^{2n+1} e^{-\frac{\rho^2}{2r_0^2}}$$

el valor máximo debe satisfacer

$$\frac{d}{d\rho} P(\rho) = \frac{d}{d\rho} (\rho |\psi_n\rangle \langle \psi_n|) = 0$$

así

$$\frac{d}{d\rho} \rho |\psi_n\rangle \langle \psi_n| = \frac{1}{(2r_0^2)^{(2n+1)}} \frac{1}{\pi n!} \left[(2n+1)\rho^{2n} - \frac{\rho^{2n+2}}{r_0^2} \right] e^{-\frac{\rho^2}{2r_0^2}} = 0,$$

por lo tanto

$$\rho = r_0 \sqrt{2n+1}, \quad (3.60)$$

el valor de ρ para la ecuación (3.60) coincide en forma con el valor para ρ de la ecuación (1.52) si se usa la definición de la longitud característica en esta última expresión, lo cual es algo de esperarse porque ya vimos que el esquema de Heisenberg guarda exactamente la misma información física que el esquema de Schrödinger.

Las órbitas circulares que vimos en el capítulo (2) están descritas por un apropiado paquete de ondas de la forma

$$\int dn \exp[-in(\omega_c t - \phi)] g(n) \rho^n \exp\left[-\frac{\rho^2}{4r_0^2}\right], \quad (3.61)$$

donde se debe cumplir la condición clásica

$$v = \omega_c \rho, \quad (3.62)$$

tal que v es la velocidad tangencial (1.15).

3.3. Norma de Landau

Ahora vamos a hacer uso de la norma de Landau para hacer un procedimiento análogo a los anteriores. Conforme a la ecuación (3.8) y a la norma (1.51) las componentes del momento cinético tiene la forma

$$m\dot{x}_1 = p_1 \quad (3.63)$$

$$m\dot{x}_2 = p_2 - \frac{eB}{c}x_1, \quad (3.64)$$

mientras que los operadores X_1 y X_2 son

$$X_1 = x_2 - \frac{1}{m\omega_c}p_1 \quad (3.65)$$

$$X_2 = \frac{1}{m\omega_c}p_2 \quad (3.66)$$

siendo este el caso y usando las definiciones de los operadores (3.29) y (3.30) obtenemos

$$a = \frac{1}{2ir_0} \left[(x_+ + x_-) + 2r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_-} \right] \quad (3.67)$$

$$a^\dagger = \frac{i}{2r_0} \left[(x_+ + x_-) - 2r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_+} \right], \quad (3.68)$$

para el estado base

$$a |\psi_0\rangle = 0,$$

entonces

$$\frac{1}{2ir_0} \left[(x_+ + x_-) + 2r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_-} \right] |\psi_0\rangle = 0 \quad (3.69)$$

llegamos a

$$|\psi'_0\rangle = N \exp \left\{ -\frac{2x_+x_- + x_-^2}{4r_0^2} + f(x_+) \right\} \quad (3.70)$$

donde N es una constante de normalización que debemos determinar. Para el estado de menos energía tenemos

$$X_- |n\rangle = 0,$$

donde los operadores (3.43) y (3.44) en la norma de Landau son

$$X_\pm = \left[\left(\frac{x_\pm - x_\mp}{2} \right) \mp r_0^2 \frac{\partial}{\partial x_\mp} \right], \quad (3.71)$$

aplicando X_- a la eigenfunción (3.70) encontramos la ecuación diferencial que obedece la función $f(x_+)$, que es de la forma

$$\frac{df(x_+)}{dx_+} - \frac{x_+}{2r_0^2} = 0,$$

resolviendo esta ecuación diferencial llegamos a

$$f(x_+) = \frac{x_+^2}{4r_0^2}, \quad (3.72)$$

de esta manera podemos escribir la forma completa de la eigenfunción del estado base como

$$|\psi'_0\rangle = N \exp\left\{\frac{x_+^2 - x_-^2 - 2x_+x_-}{4r_0^2}\right\}. \quad (3.73)$$

Para comparar las eigenfunciones de ambas normas es conveniente reescribir a (3.73) en la forma

$$|\psi'_0\rangle = N \exp\left\{\frac{x_+^2 - x_-^2}{4r_0^2}\right\} \exp\left\{-\frac{x_+x_-}{2r_0^2}\right\},$$

de acuerdo a las definiciones (3.33) y (1.66) se puede mostrar que

$$\frac{x_+^2 - x_-^2}{4r_0^2} = \frac{ie}{\hbar c} \left(\frac{x_1x_2B}{2} \right)$$

donde puede notarse que el término entre paréntesis coincide con la función generadora de norma (2.17), por lo tanto

$$|\psi'_0\rangle = \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\chi(x_1, x_2)\right\} N \exp\left\{-\frac{x_+x_-}{2r_0^2}\right\}. \quad (3.74)$$

La eigenfunción (3.73) se reescribe con ayuda de la (3.52) para obtener la forma

$$|\psi'_0\rangle = \exp\left\{\frac{ie}{\hbar c}\chi(x_1, x_2)\right\} |\psi_0\rangle, \quad (3.75)$$

la forma que tiene la eigenfunción (3.75) coincide con la misma forma que tiene la función de onda (1.35), en otras palabras, las normas simétrica y de Landau se relacionan vía una transformación unitaria y por ende, la constante

de normalización de la norma simétrica es igual a la constante de la norma de Landau, mostrando que la eigenfunción del estado base en su forma explícita es

$$|\psi'_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \exp\left\{\frac{x_+^2 - x_-^2 - 2x_+x_-}{4r_0^2}\right\}. \quad (3.76)$$

Para obtener las demás eigenfunciones basta con aplicar el operador de ascenso las veces que sea necesario (al igual que en los estados de la norma simétrica). A continuación se muestran las primeras 5 eigenfunciones

$$\begin{aligned} |\psi'_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{0!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^0 \left[x_-^0 \exp\left\{\frac{x_+^2 - x_-^2 - 2x_+x_-}{4r_0^2}\right\} \right] \\ |\psi'_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{1!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^1 \left[x_-^1 \exp\left\{\frac{x_+^2 - x_-^2 - 2x_+x_-}{4r_0^2}\right\} \right] \\ |\psi'_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{2!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^2 \left[x_-^2 \exp\left\{\frac{x_+^2 - x_-^2 - 2x_+x_-}{4r_0^2}\right\} \right] \\ |\psi'_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{3!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^3 \left[x_-^3 \exp\left\{\frac{x_+^2 - x_-^2 - 2x_+x_-}{4r_0^2}\right\} \right] \\ |\psi'_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{4!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^4 \left[x_-^4 \exp\left\{\frac{x_+^2 - x_-^2 - 2x_+x_-}{4r_0^2}\right\} \right] \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

por lo que el estado n-ésimo es de la forma

$$|\psi'_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{i}{r_0}\right)^n \left[x_-^n \exp\left\{\frac{x_+^2 - x_-^2 - 2x_+x_-}{4r_0^2}\right\} \right]. \quad (3.77)$$

Los estados restantes se pueden obtener al aplicar

$$X_+^m |\psi_n\rangle \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.78)$$

de donde puede notarse la degeneración. La energía también está dada por

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (3.79)$$

Lo más importante a señalar en esta sección es que las normas simétrica y de Landau³ se relacionan de la forma que esperábamos, con una transformación unitaria que contiene a la función generadora de norma, por lo que la física que hay en una norma debe ser exactamente la misma a la de la otra pues dicha transformación puede interpretarse como un factor de fase.

Las analogías que hay en el esquema de Heisenberg con el caso clásico es muy evidente, desde la forma de las ecuaciones de movimiento clásicas con las ecuaciones de Heisenberg y las soluciones de las mismas hasta las coordenadas del centro de la órbita con los operadores que podrían considerarse como el “centro” en el caso cuántico, sin embargo, hay que tener cierto cuidado en esta parte pues de acuerdo a la relación de conmutación (3.28) estas cantidades no pueden determinarse mutuamente, por lo que no podemos hablar de un “centro” en el caso cuántico sino de forma más apropiada, de un centro guía.

³Para la otra norma de Landau ($\mathbf{A} = B(-x_2, 0, 0)$) se va a obtener un resultado análogo, salvo que la transformación unitaria será $\exp\left\{-\frac{ie\chi(x_1, x_2)}{\hbar c}\right\}$.

Capítulo 4

Efecto Aharonov-Bohm

4.1. Potencial vectorial fuera y dentro de un solenoide

Es bien sabido dentro de la electrodinámica clásica que los potenciales vectorial y escalar ($\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\phi(r)$) no son cantidades directamente medibles, las que se miden en el laboratorio son los campos eléctrico y magnético (\mathbf{E} y \mathbf{B}), es decir, los potenciales son herramientas matemáticas que nos sirven a la hora de manipular las ecuaciones y de esta forma ayudar con los cálculos, por lo que dichos potenciales carecen de significado físico; los campos pueden expresarse en términos de estos potenciales de acuerdo a las ecuaciones (1.5) y (1.6). Este hecho puede notarse claramente en las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz (ecuaciones fundamentales de la electrodinámica clásica), ya que no se hace referencia a los potenciales, los cuales son una construcción teórica. Con cierta impunidad los potenciales pueden ser cambiados y no afectar los campos en lo absoluto; este cambio ya vimos que se puede realizar mediante la transformación que llamamos de norma tomando la forma (1.7) y (1.8) donde $\chi(r, t)$ es una función escalar cualquiera que puede depender de la posición y el tiempo.

En la mecánica cuántica los potenciales juegan un rol mucho más significativo, el hamiltoniano queda expresado de acuerdo a la ecuación (1.11), no obstante, esta teoría es invariante de norma como ya vimos en el capítulo (2). Durante mucho tiempo se tuvo por sentado que NO podía haber influencias electromagnéticas en regiones donde los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son cero, más allá de lo predicho por la teoría clásica. En 1959 Aharonov y Bohm publicaron un

trabajo donde se muestra que el potencial vectorial puede afectar el entorno cuántico de una partícula cargada que se esté moviendo a lo largo de una región donde el campo magnético es por si mismo cero. Para dicha explicación primero vamos a analizar el caso clásico y después abordaremos el caso cuántico.

Si tenemos un solenoide como el que se muestra en la figura (4.1) el cual es lo suficientemente largo para tener un campo magnético uniforme en el centro y poder despreciar los efectos de borde, la ley de Ampere nos dice que

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}. \quad (4.1)$$

De acuerdo la figura (4.1), la integral cerrada se puede descomponer en

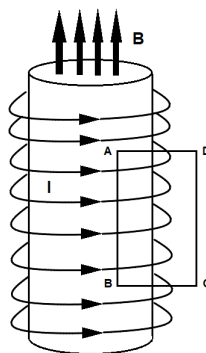


Figura 4.1: Solenoide por el cual circula una corriente I

cuatro integrales de línea en la siguiente manera

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_C^D \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_D^A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc}, \quad (4.2)$$

de esta forma, como el campo y la trayectoria de B a C y la trayectoria de D a A son perpendiculares, el integrando es cero, además, como afuera del solenoide el campo \mathbf{B} es cero, la única integral que sobrevive es la primera, en efecto

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc},$$

suponiendo que la trayectoria de A a B tiene una longitud l y que el solenoide tiene n vueltas por unidad de longitud, entonces, la corriente total encerrada

es $I_{enc} = nI$ y dado que el campo es uniforme llegamos a

$$\begin{aligned} Bl &= \mu_0 nI, \\ \therefore \quad \mathbf{B} &= \mu_0 nI \hat{z}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

suponiendo, sin pérdida de generalidad, que la dirección del campo está orientada a lo largo del eje z .

El flujo magnético está definido como

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \equiv \Phi, \quad (4.4)$$

por lo que de acuerdo a la ecuación (1.5) $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}$, usando el teorema de Stokes llegamos a $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, entonces

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \Phi. \quad (4.5)$$

Es evidente la analogía que existe entre las ecuaciones (4.1) y (4.5), donde

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mu_0 I_{enc} \rightarrow \Phi.$$

Es de esperarse que el potencial dentro del solenioide no sea cero, pero, aunque lo lógico sería pensar que afuera (donde no hay campo) se desvanezca, se mostrará que no es así. Lo primero a encontrar es la dirección del potencial; ya que este es uniforme y lo podemos escribir de acuerdo a la ecuación (1.21) $\mathbf{B} = \hat{z}B$, entonces

$$\mathbf{A} \propto -(\hat{e}_\rho \times \hat{e}_z) \quad \therefore \quad \mathbf{A} \propto \hat{e}_\phi,$$

la dirección de \mathbf{A} es paralela a la componente polar, es decir, a lo largo de la corriente. La magnitud del potencial está dada conforme a las ecuaciones (4.4) y (4.5). Si el solenoide tiene un radio a , vamos a tomar un circuito amperiano de radio r que esté dentro y sea concéntrico al solenoide

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (4.6)$$

de manera tal que el campo es uniforme y constante, además, el potencial es paralelo al circuito amperiano, entonces $B(\pi r^2) = A(2\pi r)$, considerando la

magnitud del campo dentro del solenoide (4.3) y que la dirección de \mathbf{A} está en la parte polar, obtenemos

$$\mathbf{A}_d = \frac{\mu_0 n I}{2} r \hat{\phi} \quad \text{para } r < a, \quad (4.7)$$

para el caso fuera del solenoide, se tiene un procedimiento análogo, sólo considerando que ahora el flujo está a lo largo de todo el solenoide, por lo tanto, $B(\pi a^2) = A(2\pi r)$, en efecto

$$\mathbf{A}_f = \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \frac{\hat{\phi}}{r} \quad \text{para } r > a, \quad (4.8)$$

claramente el potencial no es cero en el exterior, decae como $\frac{1}{r}$ pero no es cero a pesar de que el campo si lo es. Es importante señalar bajo qué condiciones fue definido el potencial vectorial; para las dos situaciones, el rotacional del potencial debe de reproducir el campo magnético de acuerdo a su localización, para lo cual es fácil verificar

$$\nabla \times \mathbf{A}_d = (0, 0, B), \quad (4.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{A}_f = (0, 0, 0). \quad (4.10)$$

4.2. Partícula alrededor de una solenoide

A continuación, vamos a considerar el caso de una partícula de carga e confinada a moverse en una órbita circular alrededor de un solenoide; el solenoide tiene un radio de longitud a y la órbita uno de longitud b como se muestra en la figura (4.2), como la partícula se encuentra fuera del solenoide, el potencial vectorial que debemos considerar es conforme al de la ecuación (4.8) el cual reescribiremos como

$$\mathbf{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad (4.11)$$

donde

$$\Phi = \pi a^2 B,$$

el solenoide no está cargado por si mismo, por lo tanto, el potencial escalar es cero; con estas circunstancias el hamiltoniano (1.11) toma la forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \hat{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}^2 - \frac{2e}{c} \hat{A} \cdot \hat{p} + \left(\frac{e}{c} \right)^2 \hat{A}^2 \right) \quad (4.12)$$

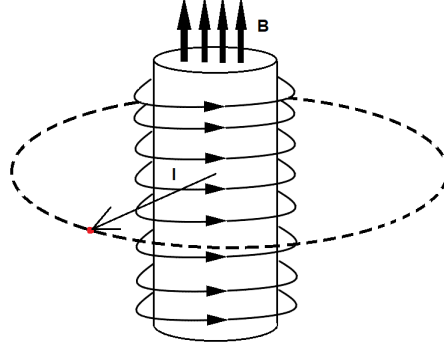


Figura 4.2: Partícula moviéndose alrededor de un solenoide

entonces

$$H = \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \nabla^2 - \frac{2e\hbar}{ic} \mathbf{A} \cdot \nabla + \left(\frac{e}{c} \right)^2 A^2 \right),$$

debido a la naturaleza del problema usaremos coordenadas cilíndricas. Como puede notarse, la partícula se encuentra en una órbita en particular ($z = 0$ y $r = b$) de esta manera la función de onda sólo dependerá de ϕ , en efecto, el laplaciano sólo puede tener a la parte polar

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\phi^2}$$

además

$$\nabla = \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

así

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = \frac{\Phi}{2\pi r^2} \frac{d}{d\phi},$$

dada la ecuación (4.12)

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\phi^2} - \frac{ie\hbar\Phi}{\pi cb^2} \frac{d}{d\phi} - \left(\frac{e\Phi}{2\pi cb} \right)^2 + 2mE \right) \psi(\phi) = 0, \quad (4.13)$$

definiendo las siguientes constantes

$$\beta \equiv \frac{e\Phi}{2\pi\hbar c}, \quad (4.14)$$

$$\epsilon \equiv \frac{2mEb^2}{\hbar^2} - \beta^2, \quad (4.15)$$

es claro que las constantes (4.14) y (4.15) son reales, en efecto, la ecuación de Schrödinger (4.13) es

$$\left(\frac{d^2}{d\phi^2} - 2i\beta \frac{d}{d\phi} + \epsilon \right) \psi(\phi) = 0, \quad (4.16)$$

esta última ecuación diferencial es una ecuación de segundo orden con coeficientes constantes, de esta manera lo conveniente es proponer una solución que sea

$$\psi(\phi) = e^{i\lambda\phi}, \quad (4.17)$$

la cual nos lleva a la ecuación característica

$$\lambda^2 - 2\beta\lambda - \epsilon = 0, \quad (4.18)$$

que tiene por soluciones

$$\lambda = \beta \pm \sqrt{\beta^2 + \epsilon},$$

y de acuerdo a la ecuación (4.15) llegamos

$$\lambda = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE}. \quad (4.19)$$

La función de onda (4.17) depende únicamente del ángulo polar, entonces, dada la condición de periodicidad de esta solución, se debe cumplir

$$\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi),$$

siendo este el caso, λ sólo puede ser un número entero, por lo tanto, dada la condición (4.19)

$$n = \beta \pm \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad n \in \mathbb{Z},$$

que de acuerdo a la definición (4.14) la energía queda cuantizada en la forma

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \left(n - \frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} \right)^2. \quad (4.20)$$

Los eigenvalores de la energía presentan una degeneración doble que se puede notar en la naturaleza de n y que el término entre paréntesis es positivo. La

interpretación que puede darse a este fenómeno es que para n positiva, la partícula viaja a favor del sentido de la corriente I , suponiendo que la carga q es positiva, y para n negativa el sentido de la trayectoria es de manera opuesta a la corriente. La trayectoria es independiente de la carga; el signo de la carga sólo va a afectar la magnitud de dicha energía ya que para q positiva la energía en sentido de la corriente es mayor que el opuesto y viceversa para q negativa. Lo más importante de esta interpretación radica en la dependencia de los valores permitidos de la energía, es decir, la energía claramente va a depender del campo dentro del solenoide (flujo magnético), a pesar de que el campo es cero donde se encuentra ubicada la partícula en cuestión.

4.3. Partícula en una región libre de campo magnético

Para generalizar el caso anterior, suponga una partícula que se está moviendo a través de una región donde $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$, pero como ya vimos, \mathbf{A} por sí mismo no lo es. También podemos asumir que el potencial vectorial es estático, entonces, la ecuación de Schrödinger es

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + V \right] \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (4.21)$$

de forma tal que la energía potencial V puede ser incluida en la contribución de la parte eléctrica, por lo tanto, podemos escribir la función de onda como

$$\psi = e^{ig} \psi', \quad (4.22)$$

donde

$$g(\mathbf{r}) \equiv \frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbb{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}' \quad (4.23)$$

con \mathbb{O} un punto de referencia arbitrario de nuestra elección. Hay que resaltar el hecho de que esta definición sólo es posible cuando $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ a lo largo de la región en cuestión, ya que al ser el potencial irrotacional, éste no depende de la trayectoria sino únicamente de los puntos inicial y final. Por medio de (4.22)

$$\nabla \psi = i(\nabla g) e^{ig} \psi' + e^{ig} (\nabla \psi'),$$

§23. PARTÍCULA EN UNA REGIÓN LIBRE DE CAMPO MAGNÉTICO

como

$$\nabla g = \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}$$

entonces

$$\frac{\hbar}{i} \nabla \psi - \frac{e}{c} \mathbf{A} \psi = \frac{\hbar}{i} e^{ig} (\nabla \psi'),$$

por lo tanto

$$\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi = \frac{\hbar}{i} e^{ig} (\nabla \psi') \quad (4.24)$$

lo cual, nos lleva a

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi &= \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \\ &= \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \frac{\hbar}{i} e^{ig} (\nabla \psi') \\ &= \frac{\hbar}{i} \left[p (e^{ig} (\nabla \psi')) - \frac{e}{c} \mathbf{A} (e^{ig} (\nabla \psi')) \right] \\ &= \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\hbar}{i} (i (\nabla g) e^{ig} (\nabla \psi') + e^{ig} (\nabla^2 \psi')) - \frac{e}{c} \mathbf{A} (e^{ig} (\nabla \psi')) \right] \\ &= \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\hbar}{i} \left(\frac{ie}{\hbar c} \mathbf{A} e^{ig} (\nabla \psi') + e^{ig} (\nabla^2 \psi') \right) - \frac{e}{c} \mathbf{A} (e^{ig} (\nabla \psi')) \right] \\ \therefore \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi &= -\hbar^2 e^{ig} \nabla^2 \psi' \end{aligned} \quad (4.25)$$

de manera inmediata, multiplicando a (4.25) por $\frac{1}{2m}$, usando la relación inversa de (4.22) y sustituyendo en (4.21) llegamos a

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi' = i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t}. \quad (4.26)$$

La ecuación (4.26) satisface la ecuación de Schrödinger cuando el potencial \mathbf{A} es cero, por lo tanto, si se resuelve (4.26) entonces la corrección cuando tenemos el potencial vectorial es trivial ya que sólo basta con agregar el factor de fase e^{ig} .

Lo que es importante para nuestro caso es que si sustituimos a $g(\mathbf{r})$ por $-\chi(\mathbf{r})$ recuperamos las eigenfunciones (2.32). Esto se ve de manera justificada por medio de la ecuación (1.7) ya que $\mathbf{A}' = 0$ por lo tanto, $\mathbf{A} = \nabla(-\chi)$ y así es que se tiene la conexión entre las funciones cuya forma es

$$\psi = e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'} \psi'. \quad (4.27)$$

4.4. Experimento de interferencia Aharonov-Bohm

Para concluir este capítulo, vamos a investigar si una partícula que se mueve en lugares donde $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ no es cero pero $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ si, tiene algún efecto por esta región que es inaccesible para ella. Para dicho suceso vamos a considerar un experimento de interferencia de la doble rendija con un solenioide que se encuentra detrás de la barrera y el cuál es impenetrable para la partícula como se muestra en la figura (4.3). Para construir la función de onda que

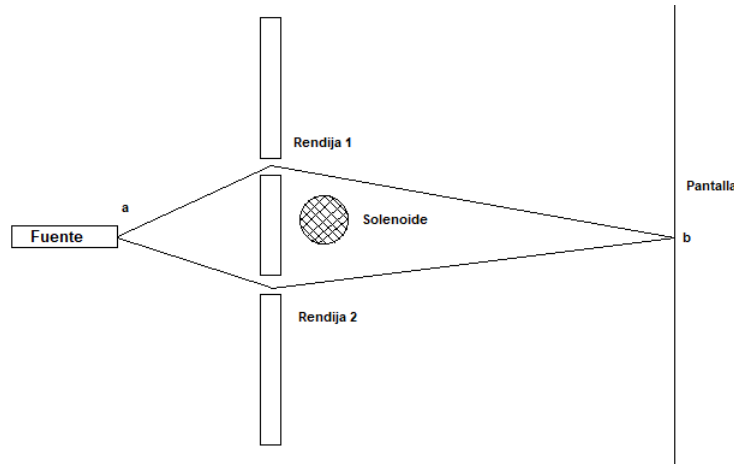


Figura 4.3: Interferencia del efecto Aharonov-Bohm. La partícula no puede entrar a la región del campo magnético.

describe a la partícula en el punto b primero encontramos la función con la rendija 1 abierta y la 2 cerrada, análogamente se hace lo mismo con la rendija 2 abierta y la 1 cerrada para posteriormente tomar una combinación lineal de ambas y así obtener la función en general. Sea $\psi_{1B}(\mathbf{r})$ la función de onda cuando sólo está abierta la rendija 1 y $\psi_{2B}(\mathbf{r})$ la función de onda cuando sólo está abierta la rendija 2, que de acuerdo con la ecuación (4.22) puede escribirse como la función de onda donde el campo es cero con el factor de fase correspondiente a su trayectoria, por lo tanto

$$\psi_{1B}(\mathbf{r}) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_1 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'} \psi_{10}(\mathbf{r}) \quad (4.28)$$

$$\psi_{2B}(\mathbf{r}) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'} \psi_{20}(\mathbf{r}) \quad (4.29)$$

donde $\psi_{10}(\mathbf{r})$ y $\psi_{20}(\mathbf{r})$ son las soluciones en ausencia del potencial vectorial para cada una de la rendija que se encuentra abierta. Al tomar la superposición de (4.28) y (4.29) obtenemos

$$\psi_B(\mathbf{r}) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_1 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'} \psi_{10}(\mathbf{r}) + e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'} \psi_{20}(\mathbf{r}), \quad (4.30)$$

entonces, al factorizar de la ecuación (4.30) el término $e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'}$ se obtiene

$$\psi_B(\mathbf{r}) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'} \left[e^{\frac{ie}{\hbar c} (\int_1 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' - \int_2 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}')} \psi_{10} + \psi_{20}(\mathbf{r}) \right],$$

de acuerdo la ecuación (4.5)

$$\int_1 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' - \int_2 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \oint \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \Phi,$$

por lo tanto

$$\psi_B(\mathbf{r}) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'} \left[e^{\frac{ie}{\hbar c} \Phi} \psi_{10}(\mathbf{r}) + \psi_{20}(\mathbf{r}) \right]. \quad (4.31)$$

Las funciones de onda donde no hay potencial vectorial obedecen la ecuación (4.26) por lo que es fácil mostrar su forma explícita

$$\psi_{10}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{r_1}} e^{ikr_1} \quad (4.32)$$

$$\psi_{20}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{r_2}} e^{ikr_2}, \quad (4.33)$$

donde r_1 y r_2 son las distancias de la rendija 1 a la pantalla y la rendija 2 a la pantalla, respectivamente. El factor $\frac{1}{\sqrt{r_i}}$ con $i = 1, 2$ son las constantes de normalización. Sustituyendo (4.32) y (4.33) en (4.31) y factorizando (4.33) obtenemos

$$\psi_B(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{r_2}} e^{\frac{ie}{\hbar c} \int_2 \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + ikr_2} \left[\sqrt{\frac{r_2}{r_1}} e^{i\left(\frac{e}{\hbar c} \Phi + kr_1 - kr_2\right)} + 1 \right], \quad (4.34)$$

entonces, la única forma de que haya interferencia constructiva es si

$$kr_1 + \frac{e}{\hbar c} \Phi - kr_2 = 2\pi n, \quad (4.35)$$

si sustituimos el número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ llegamos a

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \left(2\pi n - \frac{e\Phi}{\hbar c} \right) \quad (4.36)$$

de esta forma se puede notar que la posición para los máximos de interferencia se verán desplazados de acuerdo a la variación del flujo magnético (Φ), y esto sucede a pesar de que la partícula no pueda entrar en la región del campo magnético.

Capítulo 5

Norma generalizada

Como se ha visto en los capítulos anteriores, la norma simétrica es un caso particular de considerar al potencial vectorial en la forma de la ecuación (1.21) y las normas de Landau pueden obtenerse mediante una transformación de norma, sin embargo, la arbitrariedad de la función escalar nos garantiza una infinidad de normas, por ello es que buscamos una norma que tenga como caso particular a la simétrica y las de Landau. Proponemos una norma de la forma

$$\mathbf{A}_g = B \left(-\frac{1}{b}x_2, \frac{1}{a}x_1, 0 \right) \quad (5.1)$$

donde a y b son dos constantes reales. \mathbf{A}_g debe cumplir $\nabla \times \mathbf{A}_g = B\hat{z}$ por lo tanto

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \quad (5.2)$$

de acuerdo a la condición (5.2) ambos valores pueden ser positivos o uno de ellos positivo y el otro negativo pero no ambos negativos. Si los dos valores son positivos quiere decir que deben estar en el intervalo $[0, 1]$ por ello es que podemos escogerlos de la forma

$$\frac{1}{a} = \cos^2 \theta, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{b} = \sin^2 \theta, \quad (5.4)$$

sustituyendo (5.3) y (5.4) en (5.1)

$$\mathbf{A}_g = B \left(-x_2 \sin^2 \theta, x_1 \cos^2 \theta, 0 \right), \quad (5.5)$$

usando las identidades para el ángulo doble y haciendo un poco de álgebra llegamos a

$$\mathbf{A}_g = \frac{B}{2}(-x_2, x_1, 0) + \frac{B}{2} \cos 2\theta(x_2, x_1, 0), \quad (5.6)$$

el primer término es la norma simétrica (1.48) y el segundo lo podemos reescribir como

$$\frac{B}{2} \cos 2\theta(x_2, x_1, 0) = \cos 2\theta \nabla \left(\frac{x_1 x_2 B}{2} \right)$$

donde el término entre paréntesis es igual a la función escalar (2.17), por lo tanto, la norma generalizada toma la forma

$$\mathbf{A}_g = \mathbf{A}_s + \cos 2\theta \nabla \chi, \quad (5.7)$$

cuando $\frac{1}{a} > 0$ y $\frac{1}{b} > 0$.

Para el caso cuando uno de los dos términos es negativo, vamos a considerar sólo uno ya que el otro es completamente análogo. Si $\frac{1}{b} < 0$ entonces la condición a cumplir será

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 1 \quad (5.8)$$

por lo que dada la naturaleza de (5.8) es natural pensar en definir

$$\frac{1}{a} = \cosh^2 \theta \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{b} = \sinh^2 \theta, \quad (5.10)$$

en efecto, (5.1) toma la forma

$$\mathbf{A}_g = B (x_2 \sinh^2 \theta, x_1 \cosh^2 \theta, 0), \quad (5.11)$$

usando las identidades del ángulo doble para las funciones hiperbólicas llegamos al resultado

$$\mathbf{A}_g = \frac{B}{2}(-x_2, x_1, 0) + \frac{B}{2} \cosh 2\theta(x_2, x_1, 0),$$

de acuerdo a la ecuación (1.7)

$$\mathbf{A}_g = \mathbf{A}_s - \nabla \chi, \quad (5.12)$$

lo cual nos lleva a

$$B \left(-\frac{1}{b}x_2, \frac{1}{a}x_1, 0 \right) = \frac{B}{2} (-x_2, x_1, 0) - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \frac{\partial \chi}{\partial x_3} \right),$$

lo cual nos lleva a las ecuaciones

$$\chi(x_1, x_2) = \frac{B}{b}x_1x_2 - \frac{B}{2}x_1x_2 + f(x_2) = \chi(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2} \right) Bx_1x_2 + f(x_2), \quad (5.13)$$

$$\chi(x_1, x_2) = \frac{B}{2}x_1x_2 - \frac{B}{a}x_1x_2 + g(x_1) = \chi(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a} \right) Bx_1x_2 + g(x_1), \quad (5.14)$$

donde $f(x_2)$ y $g(x_1)$ son funciones por determinar. Como $f(x_2)$ sólo depende de la variable x_2 y la función $g(x_1)$ sólo de x_1 , las ecuaciones (5.14) y (5.15) sólo pueden ser iguales si $f(x_2)$ y $g(x_1)$ son constantes y

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a} \right);$$

sin pérdida de generalidad, podemos considerar que la función constante es cero y además, la última igualdad no es otra que la condición (5.2). Para las normas de Landau

$$\mathbf{A}_{L1} = B(0, x_1, 0), \quad (5.15)$$

$$\mathbf{A}_{L2} = B(-x_2, 0, 0), \quad (5.16)$$

haciendo un procedimiento análogo

$$\mathbf{A}_{L1} = \mathbf{A}_s - \nabla \chi, \quad (5.17)$$

tomando de nuevo las funciones de integración igual a cero llegamos a

$$\chi(x_1, x_2) = \frac{1}{b}Bx_1x_2, \quad (5.18)$$

$$\chi(x_1, x_2) = \left(1 - \frac{1}{a} \right) Bx_1x_2, \quad (5.19)$$

de igual forma, para que (5.18) y (5.19) sean iguales, entonces

$$\frac{1}{b} = \left(1 - \frac{1}{a} \right),$$

y esta también es igual a la condición (5.2).

Conclusión

A lo largo de este trabajo se fueron obteniendo resultados clásicos y cuánticos de forma paralela, el objetivo de ello siempre fue ir comparando lo obtenido y que esto fuera más digerible para el lector. Uno de los primeros resultados que se obtuvieron fue la resolución del problema de un electrón dentro de un campo magnético de manera cuántica para posteriormente compararlo con el resultado clásico, obteniendo de esta forma el mismo resultado entre ellos cuando se tienen números cuánticos muy grandes, esta límite dentro de la literatura se conoce con el nombre de *principio de correspondencia*, además, se puede ver que las energías coinciden tanto en la norma simétrica como en la norma para ambos esquemas lo cual es muy importante y de esperarse ya que la energía es una observable, sin embargo, las eigenfunciones difieren en cada una de las normas y esquemas, no obstante, esto no debe de extrañarnos ni alarmarnos ya que la función de onda por si misma, no tiene un carácter físico, sino la densidad de probabilidad y esta si permanece invariante porque la transformación que nos vincula ambas normas es una transformación unitaria que puede (y de hecho se hace) ser tratada como un factor de fase. Uno de los resultados más importantes obtenido está en la sección (2.1.3) el cual nos garantiza que el valor esperado es el mismo para el operador de momento cinético vía una transformación de norma general, por lo tanto, en particular la transformación de la forma (2.17).

Para el caso clásico se puede observar que las transformaciones de norma también son completamente consistentes con la teoría, ya que a nivel de la Lagrangiana, el término adicional que aparece no afecta en nada; quizá este resultado es un poco oscuro, porque no se dio una demostración formal, sin embargo, es fácil de verlo y por ello es que sólo se enfatiza en esta sección. Supondremos que el sistema es conservativo, de modo que la función lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, por lo tanto, la acción se define

como

$$S = \int dt L(q, \dot{q}).$$

El principio de mínima acción establece que la trayectoria del sistema entre un estado inicial $q(t_i)$ y al otro final $q(t_f)$ fijos es un extremo de la acción, es decir

$$\delta S = 0,$$

si la transformación de norma no tiene repercusión a nivel físico, entonces

$$\delta S = \delta S'$$

donde

$$S' = \int dt L'(q, \dot{q}).$$

De acuerdo a (2.3) tenemos que

$$\delta S' = \delta \int dt \left(L(q_i, \dot{q}_i) + \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt} \right),$$

en efecto

$$\delta S' = \delta S + \delta \int \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt} dt,$$

donde, el segundo término del lado derecho es cero por el principio de mínima acción, por lo tanto.

$$\delta S = \delta S'.$$

Para el caso del formalismo hamiltoniano, se mostró que los términos que se agregan para el momento conjugado y el potencial, se aniquilan mutuamente, conservando las ecuaciones de movimiento intactas. También se obtuvo el resultado esperado para el caso de una partícula cargada en un campo magnético. Quizá uno de los detalles más importantes que se deban señalar es que, de manera cuántica (abusando un poco del lenguaje) la partícula podría tener dos direcciones de giro, esto es porque el número cuántico m puede tomar valores positivos o negativos pero, entonces ¿por qué en el caso clásico la partícula siempre gira en una sólo dirección? Esto puede responderse con la discusión que se hizo al final del primer capítulo ya que al mandar nuestras soluciones de la energía a niveles grandes suceden dos cosas interesantes, una es que si queremos tener un análogo macroscópico, entonces m no puede ser negativo, es decir, sólo puede haber una dirección de giro y si m es

negativo entonces no puede haber un análogo clásico. En el caso del esquema de Heisenberg la analogía clásica es bastante más evidente ya que ahí pueden verse la mayoría de las propiedades clásicas en la misma forma, por ejemplo, las ecuaciones de movimiento, el centro de la órbita, el radio, entre otros. El aporte que se hace al final puede notarse en la formulación generalizada que se hizo con el esquema de Heisenberg y la norma generalizada que se propuso al final de este trabajo, consideramos que hacer una fusión de ambos puede llevarnos a algún resultado interesante, quizá encontrar otro tipo de normas con propiedades curiosas. En términos generales, se considera que el trabajo es satisfactorio, pues los efectos cuánticos que vimos reproducen muchos de los casos clásicos que conocemos.

Apéndice A

Funciones especiales

A.1. Ecuación de Laguerre

El objetivo principal al estudiar ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n con condiciones iniciales consiste en encontrar una función solución tal que ésta satisfaga ciertas restricciones sobre el valor que dicha solución y sus $n - 1$ primeras derivadas han de tomar para un mismo valor de la variable independiente. Para el caso donde no se tiene un sólo valor (condición inicial) sino una región se dice que tenemos condiciones de contorno donde nuestra función está definida; para el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias el contorno lo constituyen los puntos extremos del intervalo sobre el cual se pretende resolver la ecuación diferencial. Para la situación que analizaremos en este apéndice consideraremos un caso particular del problema de Sturm-Liouville en el cual se tiene la ecuación diferencial

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1 - x) \frac{dy}{dx} + ny = 0, \quad (\text{A.1})$$

de manera tal que aplicando el método de Frobenius¹ proponemos una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots, \quad (\text{A.2})$$

¹El método de Frobenius (también conocido como método en serie de potencias) funcionará siempre y cuando el punto sobre el cual se expande la serie no sea peor que un punto singular regular

siendo que tenemos para la primera y segunda derivada, respectivamente

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}, \quad (\text{A.4})$$

al sustituir en la ecuación (A.1) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} [k(k+1)a_{k+1} + (k+1)a_{k+1} - ka_k + na_k] x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [a_{k+1}(k+1)^2 + a_k(n-k)] x^k \end{aligned}$$

sin embargo, sólo puede ser cero el término entre corchetes de la suma

$$\sum_{k=0}^{\infty} [a_{k+1}(k+1)^2 + a_k(n-k)] = 0$$

de esta forma, los coeficientes a_k y a_{k+1} quedan ligados por medio de la relación de recurrencia

$$a_{k+1} = -\frac{n-k}{(k+1)^2} a_k, \quad (\text{A.5})$$

para los primeros coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{n}{1^2} a_0, & a_2 &= \frac{n(n-1)}{1^2 2^2} a_0, & a_3 &= -\frac{n(n-1)(n-2)}{1^2 2^2 3^2} a_0, \\ a_4 &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2 2^2 3^2 4^2} a_0, & a_5 &= -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1^2 2^2 3^2 4^2 5^2} a_0 \dots \end{aligned}$$

por lo que podemos escribir cada coeficiente de manera proporcional a a_0

$$a_k = \frac{(-1)^k n!}{(n-k)! (k!)^2} a_0 \quad (\text{A.6})$$

sin pérdida de generalidad, se puede tomar $a_0 = 1$, siendo este el caso, nuestra solución a la ecuación diferencial queda de la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)! (k!)^2} x^k. \quad (\text{A.7})$$

Puede notarse que la relación de recurrencia (A.5) se anulará para $k = n$, de esta manera, el coeficiente a_{n+1} será idénticamente cero y el polinomio será de grado n ; en efecto, podemos definir nuestra solución de la forma

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)! (k!)^2} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k x^k}{k!}, \quad (\text{A.8})$$

los cuales son conocidos como los polinomios de Laguerre.

A.1.1. Formula de Rodrigues

Consideremos dos fórmulas que nos serán de utilidad

$$\frac{d^p}{dx^p} x^s = \frac{s!}{(s-p)!} x^{s-p} \quad \text{derivada p-ésima de } x^s,$$

$$\frac{d^m}{dx^m} (f \cdot g)(x) = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} \left(\frac{d^l}{dx^l} f(x) \right) \left(\frac{d^{m-l}}{dx^{m-l}} g(x) \right) \quad \text{Regla para la derivada m-ésima.}$$

La ecuación (A.8) puede reescribirse de la forma

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{k!} x^k = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{d^k}{dx^k} e^{-x} \right) \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^n \right),$$

donde se hizo uso de la derivada $(n-k)$ -ésima y usando la regla de Leibniz para la derivada n -ésima se obtiene por resultado

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (\text{A.9})$$

la cual es conocida en la literatura como formula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre; usando a conveniencia la forma (A.8) o (A.9)

A.1.2. Función generatriz

Dada una familia de polinomios ortogonales $P_n(x)$ definidos en un intervalo $[a, b]$ se dice que tiene una función generatriz

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad (\text{A.10})$$

de manera tal que al desarrollar la serie en potencias de t , los coeficientes del desarrollo son los polinomios $P_n(x)$.

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k x^k}{k!} t^n$$

puede notarse que la segunda suma depende de la primera, es decir, la segunda suma va tomar valores hasta donde la primera lo indique, por ello es que se puede recorrer los índices, quedando la función generatriz de la siguiente forma

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k x^k}{k!} t^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} t^n \end{aligned}$$

el teorema generalizado del binomio nos garantiza que

$$\frac{1}{(1-t)^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+a-1}{n} t^n,$$

entonces

$$\begin{aligned} G(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1-t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-xt}{1-t}\right)^k}{k!} \end{aligned}$$

por lo tanto, la función generatriz de los polinomios de Laguerre toma la forma

$$G(x, t) = \frac{1}{1-t} e^{\frac{-xt}{1-t}}. \quad (\text{A.11})$$

A.1.3. Ortogonalidad

Usar a los polinomios de Laguerre en su forma de función generatriz nos es útil para ciertos cálculos (como lo puede ser a veces usar la fórmula de Rodrigues); los dos caso más importantes son calcular su norma y su ortogonalidad, para lo cual, el siguiente teorema es muy importante

Teorema 1 *La familia de polinomios $\{P_n(x)\}$ son ortogonales en el intervalo $[a, b]$, relativo a la función peso $r(x)$ si y sólo si la integral*

$$I(t, t') = \int_a^b dx r(x) G(x, t) G(x, t') \equiv \langle G(x, t) | G(x, t') \rangle$$

sólo dependa de las variables t y t' a través del producto tt' .

Demostración:

De acuerdo a la ecuación (A.10)

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \quad G(x, t') = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x) t'^m,$$

de este modo

$$I(t, t') = \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n t'^m \int_0^{\infty} dx r(x) P_n(x) P_m(x)$$

como los polinomios son ortogonales con respecto a la función peso $r(x)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle P_n(x) | P_m(x) \rangle &= \delta_{nm} \\ \therefore I(t, t') &= \sum_{n,m=0}^{\infty} t^n t'^m \delta_{nm} = \sum_n (tt')^n = f(tt') \quad \blacksquare. \end{aligned}$$

La demostración del regreso es completamente análogo, por lo que ya no se realizará pero se tomará como válida. Para el caso de los polinomios de Laguerre la función peso corresponde es e^{-x} , en efecto

$$I(t, t') = \frac{1}{(1-t)(1-t')} \int_0^{\infty} dx e^{\frac{-xt}{1-t}} e^{\frac{-xt'}{1-t'}} e^{-x} = \frac{1}{(1-t)(1-t')} \int_0^{\infty} dx e^{-x \left(\frac{t}{1-t} + \frac{t'}{1-t'} + 1 \right)}, \quad (\text{A.12})$$

como

$$\left(\frac{t}{1-t} + \frac{t'}{1-t'} + 1 \right) = \frac{1-tt'}{(1-t)(1-t')}$$

se tiene

$$I(t, t') = \frac{1}{(1-t)(1-t')} \int_0^{\infty} dx e^{-x \left(\frac{1-tt'}{(1-t)(1-t')} \right)} = \left[\frac{1}{1-tt'} e^{-x \left(\frac{1-tt'}{(1-t)(1-t')} \right)} \right]_0^{\infty}$$

$$I(t, t') = \frac{1}{1 - tt'}.$$

por el teorema generalizado del binomio, tenemos que

$$\frac{1}{(1 - tt')} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{n} (tt')^n$$

entonces

$$I(t, t') = \sum_{n=0}^{\infty} (tt')^n,$$

de esta manera puede notarse que $I(t, t')$ depende sólo de potencias del producto tt' . La condición de ortogonalidad que cumplen los polinomios de Laguerre respecto a la función peso $r(x) = e^{-x}$ es

$$\langle L_n(x) | L_m(x) \rangle = \delta_{nm} \quad (\text{A.13})$$

A.2. Polinomios asociados de Laguerre

Los polinomios de Laguerre tienen una generalización llamada polinomios asociados de Laguerre los cuales son solución a la ecuación diferencial

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{dy}{dx} + ny = 0, \quad (\text{A.14})$$

de esta manera, haciendo un procedimiento completamente análogo al hecho para la ecuación (A.1), se obtiene un relación de recurrencia de la forma

$$a_{k+1} = -\frac{(n - k)}{(k + 1)(k + 1 + \alpha)} a_k \quad (\text{A.15})$$

por lo tanto, para $k = n$ el coeficiente a_{k+1} y por ende todos los siguientes; los valores de los primeros cuatro coeficientes en términos de a_0 son

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{n}{1!(1 + \alpha)} a_0, & a_2 &= \frac{n(n - 1)}{2!(1 + \alpha)(2 + \alpha)} a_0, \\ a_3 &= -\frac{n(n - 1)(n - 2)}{3!(1 + \alpha)(2 + \alpha)(3 + \alpha)} a_0, & a_4 &= \frac{n(n - 1)(n - 2)(n - 3)}{4!(1 + \alpha)(2 + \alpha)(3 + \alpha)(4 + \alpha)} a_0, \end{aligned}$$

sustituyendo estos coeficientes para la solución que propusimos, podemos reescribir nuestra solución (A.2) para obtener la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_0 \frac{n! \alpha!}{(n-k)!(k+\alpha)!k!} x^k$$

el coeficiente a_0 es una condición inicial que nosotros podemos imponer, por lo que debido a cuestiones de normalización, las cuales se justifican más adelante, su valor será $a_0 = \frac{(n+\alpha)!}{n! \alpha!}$. Considerando todos los aspectos necesario, nuestro polinomio queda expresado como

$$y(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+\alpha)!}{(n-k)!(k+\alpha)!k!} x^k,$$

de esta manera, queda definidos los polinomios generalizados de Laguerre de la forma

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \quad (\text{A.16})$$

A.2.1. Formula de Rodrigues

La fórmula de Rodrigues nos permite escribir el polinomio en términos de sus derivadas, por lo que de acuerdo a la ecuación (A.16) podemos meter algunos términos y arreglarlo para tener esta forma

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+\alpha)!}{(n-k)!(k+\alpha)!k!} x^k \\ &= \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (-1)^k e^{-x} \frac{(n+\alpha)!}{(k+\alpha)!} x^{k+\alpha} \\ &= \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{d^k}{dx^k} e^{-x} \right) \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} x^{n+\alpha} \right) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}) \quad \text{para } \alpha > -1 \quad (\text{A.17})$$

la ecuación (A.17) se conoce en la literatura como la fórmula de Rodrigues para los polinomios asociados de Laguerre.

A.2.2. Función generatriz

Para poder encontrar la función generatriz haremos uso de la ecuación (A.10) teniendo en cuenta que para los polinomios generalizados existe una función generatriz para cada valor de α . Teniendo en cuenta esto, el procedimiento es completamente análogo al anterior

$$\begin{aligned}
G_\alpha(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k t^n}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n-k} t^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} t^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+\alpha}{n} t^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} t^k \frac{1}{(1-t)^{k+\alpha+1}} \\
&= \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{xt}{1-t}\right)^k}{k!},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$G_\alpha(x, t) = \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}}, \quad (\text{A.18})$$

los cuales son conocidos como las funciones generatrices de los polinomios de asociados de Laguerre.

A.2.3. Ortogonalidad

Los polinomios asociados de Laguerre tampoco son ortogonales por si mismos; por lo que haciendo uso del teorema 1 mostraremos que son ortogonales en el intervalo $0 < x < \infty$ bajo la función peso $r(x) = x^\alpha e^{-x}$, en efecto, haciendo uso de las ecuación (A.18)

$$\langle G_\alpha(x, t) | G_\alpha(x, t') \rangle = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \frac{1}{(1-t')^{\alpha+1}} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} e^{-\frac{xt}{1-t}} e^{-\frac{xt'}{1-t'}} dx \quad (\text{A.19})$$

$$I_\alpha(t, t') = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \frac{1}{(1-t')^{\alpha+1}} \int_0^\infty x^\alpha e^{-x \left(\frac{1-tt'}{(1-t)(1-t')} \right)} dx$$

sea $y = x \left(\frac{1-tt'}{(1-t)(1-t')} \right)$ entonces

$$I_\alpha(t, t') = \frac{1}{(1-tt')^{\alpha+1}} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy$$

la integral coincide con la definición de la función gamma en su forma de integral de Euler² por lo que el resultado final que tenemos es

$$I_\alpha(t, t') = \alpha! \frac{1}{(1-tt')^{\alpha+1}}$$

usando el teorema generalizado del binomio

$$\frac{1}{(1-tt')^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} (tt')^n$$

por lo tanto

$$I_\alpha(t, t') = \alpha! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha)!}{n! \alpha!} (tt')^n.$$

Con este resultado queda demostrado el por qué se debe escoger la constante $a_0 = \frac{(n+\alpha)!}{n! \alpha!}$, es decir, con esta elección los polinomios son ortonormales, además, con esta forma se nota como $I_\alpha(t, t')$ depende sólo en potencias del producto tt' . La condición de ortogonalidad que cumplen los polinomios asociados de Laguerre es

$$\langle L_n^\alpha(x) | L_m^\alpha(x) \rangle = \frac{(n+\alpha)!}{n!} \delta_{nm} \quad (\text{A.20})$$

A.3. Relación entre los polinomios de Laguerre y los polinomios generalizados de Laguerre

Como se mencionó al principio de la sección anterior, los polinomios de Laguerre asociados son una generalización a los polinomios “normales” de

²La definición de la función gamma en forma integral está definida mediante $\Gamma(n+1) \equiv \int_0^\infty dx e^{-x} x^n = n!$

Laguerre; puede notarse que en cada resultado que se obtuvo de los polinomios de Laguerre corresponden al caso particular cuando el valor de α de los generalizados es igual a cero, es decir

$$L_n(x) = L_n^0(x), \quad (\text{A.21})$$

siendo este el caso, es de esperar que los polinomios generalizados se puedan definir en términos de estos polinomios, para ello vamos a mostrar varias formas en las que se pueden escribir los polinomios generalizados y usarlos cuando sean de mayor utilidad. La definición más usual que se encuentran en los libros de texto es

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} L_{n+\alpha}(x) \quad (\text{A.22})$$

para demostrar que la forma de presentar la ecuación (A.21) es equivalente a la expresión (A.16), basta con sustituir los polinomios $L_{n+k}(x)$ en la forma de (A.9) en la ecuación (A.21), entonces

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left[\frac{e^x}{(n+\alpha)!} \frac{d^{n+\alpha}}{dx^{n+\alpha}} (x^{n+\alpha} e^{-x}) \right] \\ &= (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left[\sum_{m=0}^{n+\alpha} \binom{n+\alpha}{m} (-1)^m \frac{x^m}{m!} \right] \\ &= (-1)^\alpha \sum_{m=0}^{n+\alpha} \binom{n+\alpha}{m} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^m \end{aligned}$$

ya que

$$\frac{d^\alpha x^m}{dx^\alpha} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-\alpha)!} & \text{si } m \geq \alpha \\ 0 & \text{si } m < \alpha \end{cases},$$

entonces

$$\begin{aligned} L_n^\alpha(x) &= (-1)^\alpha \sum_{m=\alpha}^{n+\alpha} \binom{n+\alpha}{m} \frac{(-1)^m}{(m-\alpha)!} x^{m-\alpha} \\ &= \sum_{m=0}^n \binom{n+\alpha}{n-m} \frac{(-1)^m}{m!} x^m \\ \therefore L_n^\alpha(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-1)^k x^k}{k!}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

En la ecuación (A.7) puede notarse que existe una restricción para α , la cual nos dice que α tiene que ser un entero mayor o igual que cero, sin embargo, esta restricción nunca se aclara del por qué; se quiso hacer hasta ahora la justificación ya que en la sección antes mencionada la única “justificación” sería la no existencia del factorial negativo, la cual no es del todo cierto ya que hay una generalización que extiende este concepto a los enteros negativo. En esta definición de los polinomios asociados puede notarse que α corresponde al orden de la derivada del polinomio de Laguerre y es más claro el por qué no puede ser un número negativo ya que no tiene sentido, por ejemplo, una derivada de orden -2 . Haciendo el procedimiento para llegar a la formula de Rodrigues se tiene la igualdad

$$(-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} L_{n+\alpha}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}). \quad (\text{A.24})$$

A.3. RELACIÓN ENTRE LOS POLINOMIOS DE LAGUERRE Y LOS
106 POLINOMIOS GENERALIZADOS DE LAGUERRE

Apéndice B

Oscilador armónico cuántico

El oscilador armónico es un problema de gran importancia tanto en el caso de la teoría clásica como en la teoría cuántica ya que es uno de los pocos problemas que se pueden resolver de manera exacta. Para esta sección se resolverá el problema para un potencial unidimensional de la ecuación de Schrödinger característico a un potencial de un oscilador armónico; el problema será resuelto por dos métodos distintos, el primero se conoce como el método analítico y el segundo como método algebraico. La función hamiltoniana para un oscilador cuántico clásico de masa m y frecuencia ω está dado

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad (\text{B.1})$$

por lo que al hacer la transición a la mecánica cuántica de los operadores \hat{p} y \hat{x} , la ecuación de Schrödinger toma la forma

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \right) \psi(x) = E\psi(x). \quad (\text{B.2})$$

B.1. Método analítico

La ecuación (B.2) la escribimos como

$$\frac{\hbar}{m\omega} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{m\omega}{\hbar} x^2\psi(x) - \frac{2E}{\hbar\omega}\psi(x) = 0, \quad (\text{B.3})$$

se definen las cantidades

$$y \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \quad \text{y} \quad \epsilon \equiv \frac{2E}{\hbar\omega},$$

de esta manera

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2\psi(y)}{dy^2}$$

además

$$y^2 = \frac{m\omega}{\hbar} x^2,$$

en efecto, la ecuación (B.3) se convierte en

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + (\epsilon - y^2) \psi(y) = 0. \quad (\text{B.4})$$

De esta manera, el problema se resume a resolver la ecuación diferencial no homogénea de segundo orden (B.4). Para el caso asintótico (cuando x es muy grande y por lo tanto y también lo es) puede verse que el término ϵ es despreciable frente a y^2 , siendo esta la situación

$$\frac{d^2}{dy^2} \psi(y) \approx y^2 \psi(y),$$

por lo que, nos resta resolver la ecuación

$$\frac{d^2}{dy^2} \psi_0(y) = y^2 \psi_0(y), \quad (\text{B.5})$$

proponemos una solución de la forma (la cual puede verificarse de manera inmediata que satisface la ecuación diferencial deseada)

$$\psi_0(y) = Ae^{\frac{y^2}{2}} + Be^{-\frac{y^2}{2}},$$

dado que se tiene un comportamiento asintótico, es decir, $|y| \rightarrow \infty$ y nuestra función debe anularse en $+\infty$ y $-\infty$, bajo estas condiciones de frontera puede notarse que B debe ser igual a cero; sin pérdida de generalidad A puede considerarse igual a 1. Teniendo en cuenta estas suposiciones, la solución final que obtenemos para la ecuación (B.5) es

$$\psi_0(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}. \quad (\text{B.6})$$

Esta solución solo nos proporciona el comportamiento asintótico, es decir, es una solución parcial al problema original por lo que es necesario sugerir una nueva función que complete la solución, entonces

$$\psi(y) = h(y)\psi_0(y) = h(y)e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad (\text{B.7})$$

al diferencial $\psi(y)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi(y)}{dy} &= \left(\frac{dh(y)}{dy} - yh(y) \right) e^{-\frac{y^2}{2}} \\
 \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} &= \left(\frac{d^2h(y)}{dy^2} - 2y\frac{dh(y)}{dy} + y^2h(y) - h(y) \right) e^{-\frac{y^2}{2}} \\
 \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + (\epsilon - y^2)\psi(y) &= \left(\frac{d^2h(y)}{dy^2} - 2y\frac{dh(y)}{dy} + y^2h(y) - h(y) \right) e^{-\frac{y^2}{2}} + (\epsilon - y^2)h(y)e^{-\frac{y^2}{2}} \\
 0 &= \left(\frac{d^2h(y)}{dy^2} - 2y\frac{dh(y)}{dy} - h(y) + \epsilon h(y) \right) e^{-\frac{y^2}{2}} \\
 \therefore \quad &\frac{d^2h(y)}{dy^2} - 2y\frac{dh(y)}{dy} + (\epsilon - 1)h(y) = 0. \quad (\text{B.8})
 \end{aligned}$$

Ahora sólo resta resolver la ecuación (B.8) que corresponde a una ecuación diferencial homogénea de segundo orden; usamos el método en serie de potencia, para lo cual proponemos una solución de la forma

$$h(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \quad (\text{B.9})$$

diferenciando (B.9)

$$\begin{aligned}
 \frac{dh(y)}{dy} &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n y^{n-1}, \\
 \frac{d^2h(y)}{dy^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n y^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n y^n,
 \end{aligned}$$

en efecto

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2}y^n - 2yna_n y^{n-1} + (\epsilon - 1)a_n y^n] \\
 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\epsilon - 1 - 2n)a_n] y^n,
 \end{aligned}$$

la única forma de que esta ecuación sea igual a cero es que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (\epsilon - 1 - 2n)a_n = 0,$$

de esta manera

$$a_{n+2} = \frac{(2n+1-\epsilon)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad (\text{B.10})$$

esta función se conoce como relación de recurrencia y puede notarse que cada término se va generando con base al valor anterior, además, n sólo puede tomar valores enteros positivos. Calculando un par de términos se puede notar que la relación de recurrencia va generando los coeficientes en dos conjuntos, uno par y el otro impar

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1-\epsilon}{2}a_0, & a_4 &= \frac{5-\epsilon}{12}a_2, & a_6 &= \frac{9-\epsilon}{30}a_4, & a_8 &= \frac{13-\epsilon}{56}a_6\dots \\ a_3 &= \frac{3-\epsilon}{6}a_1, & a_5 &= \frac{7-\epsilon}{20}a_3, & a_7 &= \frac{11-\epsilon}{42}a_5, & a_9 &= \frac{15-\epsilon}{72}a_7\dots \end{aligned}$$

de acuerdo a la (B.9)

$$h(y) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 + a_5y^5 + a_6y^6 + a_7y^7 + a_8y^8 + a_9y^9 + \dots$$

de esta manera podemos escribir a $h(y)$ como una suma de dos funciones para de esta manera poder verla como una combinación lineal de dos soluciones linealmente independientes

$$h(y) = h(y)_{par} + h(y)_{impar}$$

$$h(y)_{par} = a_0 + a_2y^2 + a_4y^4 + a_6y^6 + a_8y^8 + \dots$$

$$h(y)_{impar} = a_1y + a_3y^3 + a_5y^5 + a_7y^7 + a_9y^9 + \dots$$

de acuerdo a la relación de recurrencia, la función $h(y)_{par}$ queda determinada por el valor de la constante a_0 y $h(y)_{impar}$ queda definida por la constante a_1 lo cual es de esperarse ya que (B.3) es una ecuación diferencial de segundo orden, es decir, es necesario contar con dos condiciones iniciales. La función $h(y)$ difiere con los polinomios de Hermite a lo más por una constante de normalización¹; sin embargo, una solución que también es aceptable es cuando la relación de recurrencia se anula, para de esta forma garantizar que $h(y)$ no pueda divergir a infinito y esta condición se cumple cuando

$$2n+1-\epsilon=0 \quad \therefore \quad \epsilon=2n+1$$

¹Para más detalles de los polinomios de Hermite y su normalización consulte [1]

como $\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$,

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{Z}^+, \quad (\text{B.11})$$

de esta manera la solución completa queda de la forma

$$\psi_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(y) e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (\text{B.12})$$

donde H_n es el n-ésimo polinomio de Hermite.

B.2. Método algebraico

De acuerdo a la hamiltoniana clásica (B.1), podríamos reescribirla como

$$H = \frac{1}{2m} [p^2 + (m\omega x)^2]$$

la cual podría ser factorizada con dos funciones u y v de la forma

$$(u + iv)(u - iv) = u^2 + i(vu - uv) + v^2$$

el cual tendía la misma forma si el término entre paréntesis fuera idénticamente cero, es decir, el conmutador de u y v se anulara. En el caso cuántico como \hat{u} y \hat{v} son operadores y no simples funciones, nada garantiza que conmuten y más aún para el caso del hamiltoniano del oscilador armónico que involucra a \hat{x} y \hat{p} , \hat{u} y \hat{v} no conmutan; por lo que se debe tener especial cuidado al escoger nuestros nuevos operadores. Para fines prácticos de cálculos, definiremos

$$x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

y definimos los operadores no hermitianos

$$\hat{a} = \frac{\omega m \hat{x} + i \hat{p}}{\sqrt{2\omega m \hbar}} \quad (\text{B.13})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{\omega m \hat{x} - i \hat{p}}{\sqrt{2\omega m \hbar}}, \quad (\text{B.14})$$

por lo tanto

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (\text{B.15})$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (\text{B.16})$$

una vez quedando definidos los operadores que queremos, es importante saber sus reglas de conmutación, para ello calculamos el conmutador de \hat{a} y \hat{a}^\dagger teniendo en cuenta que $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} \\ &= \left(\frac{\omega m\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2\omega m\hbar}}\right) \left(\frac{\omega m\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2\omega m\hbar}}\right) - \left(\frac{\omega m\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2\omega m\hbar}}\right) \left(\frac{\omega m\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2\omega m\hbar}}\right) \\ &= \frac{1}{2\omega m\hbar} [(\omega m\hat{x})^2 - i\omega m\hat{x}\hat{p} + i\omega m\hat{p}\hat{x} + \hat{p}^2 - (\omega m\hat{x})^2 - i\omega m\hat{x}\hat{p} + i\omega m\hat{p}\hat{x} - \hat{p}^2] \\ &= \frac{1}{2\omega m\hbar} (2i\omega m [\hat{p}, \hat{x}]) \end{aligned}$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (\text{B.17})$$

Usando la definición del operador de momentum, los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger toman la forma

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + x_0 \frac{d}{dx} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} - x_0 \frac{d}{dx} \right). \quad (\text{B.19})$$

Ahora que ya tenemos los operadores bien definidos en términos de \hat{x} y \hat{p} y las reglas de conmutación de los mismos, es necesario escribir el hamiltoniano en términos de \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Usando las ecuaciones (B.15) y (B.16)

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar\omega}{4} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2, \quad \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \frac{\hbar\omega}{4} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2$$

por lo tanto

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \frac{\hbar\omega}{4} [(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2]$$

usando la regla de conmutación (B.17)

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{B.20})$$

es importante señalar que el hamiltoniano

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2} \right)$$

es igual de válido que (B.20); para nuestro caso usaremos el primero. Definimos el operador de número

$$\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (\text{B.21})$$

puede notarse que \hat{N} si es un operador hermitiano y por ende será nuestra observable, de esta manera, el hamiltoniano (B.20) puede escribirse como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.22})$$

Si \hat{N} cumple con la ecuación de eigenvalores $\hat{N} |\psi_\nu\rangle = n |\psi_\nu\rangle$ entonces

$$\langle \psi_\nu | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi_\nu \rangle = n \langle \psi_\nu | \psi_\nu \rangle \geq 0$$

lo cual implica que $n \geq 0$. En efecto, $\langle \psi_\nu | \hat{a}^\dagger = (\hat{a} |\psi_\nu\rangle)^\dagger$, por lo tanto, $\langle \psi_\nu | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi_\nu \rangle = |\hat{a} |\psi_\nu\rangle|^2$, por lo cual, debe existir alguna eigenfunción que cumpla

$$\hat{a} |\psi_0\rangle = 0 \quad (\text{B.23})$$

usando la ecuación (B.18), se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + x_0 \frac{d}{dx} \right) |\psi_0\rangle = 0$$

la cual se puede resolver por el método de separación de variables obteniendo como solución

$$|\psi_0\rangle = A e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \quad (\text{B.24})$$

donde A es una constante de integración. La constante de integración la podemos usar para cumplir la condición de normalización, por lo tanto

$$\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^* \psi_0 dx = 1 \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} A^* e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} A e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} dx \\ &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{x_0^2}} dx \\ &= |A|^2 (\sqrt{\pi} x_0)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

en efecto

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi x_0}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

usando la definición de x_0

$$\therefore A = \left(\frac{\omega m}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}}$$

sustituyendo en (B.24)

$$|\psi_0\rangle = \left(\frac{\omega m}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}, \quad (\text{B.26})$$

el eigenvalor correspondiente a la eigenfunción ψ_0 de acuerdo al hamiltoniano (B.20)

$$\begin{aligned} \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |\psi_0\rangle &= E_0 |\psi_0\rangle \\ \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} |\psi_0\rangle + \frac{\hbar\omega}{2} \psi_0 &= E_0 |\psi_0\rangle \end{aligned}$$

de acuerdo a la ecuación (B.23) el primer término es igual a cero, lo cual nos lleva a

$$\frac{\hbar\omega}{2} |\psi_0\rangle = E_0 |\psi_0\rangle.$$

Las eigenfunciones restantes pueden ser calculadas a partir del estado base. Hay que calcular las reglas de conmutación entre \hat{N} , \hat{a}^\dagger y \hat{a} , entonces, con ayuda de la ecuación (B.17) y (B.21) y la propiedad para los operadores $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A} [\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}] \hat{B}$,

$$\begin{aligned} [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] \hat{a} \\ &= \hat{a}^\dagger \\ [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] &= \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] \hat{a} \\ &= -\hat{a}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (\text{B.27})$$

$$\left[\hat{N}, \hat{a} \right] = -\hat{a}, \quad (\text{B.28})$$

con ayuda de estas relaciones de conmutación podemos demostrar dos resultados importantes.

Sea $\hat{N} |\psi_\nu\rangle = \nu |\psi_\nu\rangle$ entonces $a^\dagger \psi_\nu$ es una eigenfunción con eigenvalor $\nu + 1$,

$$\hat{N} a^\dagger \psi_\nu = \left(a^\dagger \hat{N} + a^\dagger \right) \psi_\nu = (\nu + 1) a^\dagger \psi_\nu.$$

La norma de estos vectores es

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger \psi_\nu | a^\dagger \psi_\nu \rangle &= \langle \psi_\nu | a a^\dagger \psi_\nu \rangle = \langle \psi_\nu | (a^\dagger a + 1) \psi_\nu \rangle \\ &= (\nu + 1) \langle \psi_\nu | \psi_\nu \rangle > 0. \end{aligned}$$

Para eigenfunciones ψ_ν y $\psi_{\nu+1}$ normalizadas, tenemos

$$a^\dagger \psi_\nu = \sqrt{\nu + 1} \psi_{\nu+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\nu + 1}} a^\dagger |\psi_\nu\rangle = |\psi_{\nu+1}\rangle,$$

por lo que al considerar el estado $\nu = n - 1$ tenemos

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |\psi_{n-1}\rangle,$$

comenzando desde el estado base, y aplicando el operador de ascenso n-veces, tenemos

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |\psi_0\rangle. \quad (\text{B.29})$$

Usando las ecuaciones (B.26) y (B.29) tenemos

$$|\psi_n\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n!} x_0} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}},$$

que al aplicar el operador de ascenso como está definido en (B.19) obtenemos

$$|\psi_n\rangle = \left(\frac{1}{2^n \sqrt{\pi n!} x_0} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} H_n \left(\frac{x}{x_0} \right), \quad (\text{B.30})$$

cuyo eigenvalor de la energía está dado por

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.31})$$

donde n puede tomar los valores $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ y $H_n \left(\frac{x}{x_0} \right)$ es el n-ésimo polinomio de Hermite.

Bibliografía

- [1] Arfken, George B., Weber, Hans J., (2005) *Mathematical Method For Physicists*, Boston, Elsevier, 6th edition.
- [2] Boyce, William E., DiPrima, Richard C., (2000) *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, (Traducción: Hugo Villagómez Velázquez.), México, D.F., Limusa-Wiley, 4ta edición.
- [3] Bravo Yuste, Santos, (2006), *Métodos Matemáticos para Científicos e Ingenieros*, Cáceres, Universidad de Extremadura, 1ra edición.
- [4] Calkin, M. G., (1998), *Lagrangian And Hamiltonian Mechanics*, Singapore, Scientific Publishing, 2nd edition.
- [5] Corben, H. C., Stehle, Philip, (1950), *Classical Mechanics*, New York, John Wiley & Sons, 2nd edition.
- [6] Dirac, P. A. M., (1947), *The principles of quantum mechanics*, London, Oxford University Press, 3rd edition.
- [7] Dirac, P. A. M., (1928), *The quantum theory of electron*, Pro. Roy. Soc A 117, 610.
- [8] Gasiorowicz, Stephen, (2003), *Quantum Physics*, Minnesota, Wiley, 3rd edition.
- [9] Goldstein, Herber, Poole, Charles, Safko, John, (2002), *Classical Mechanics*, California, Addison, 3rd edition.
- [10] Griffiths, J. David, (2013), *Introduction to Electrodynamics*, New Jersey, Pearson Prentice Hall, 4th edition.

-
- [11] Griffiths, J. David, (2005), *Introduction to Quantum Mechanics*, New Jersey, Pearson Prentice Hall, 2nd edition.
- [12] Landau, L. D., and Lifshitz E. M., (1977), *Quantum Mechanics, Non-relativistic Theory*, Oxford, Pergamon, 3rd edition.
- [13] Marsden, E. Jerrold, Tromba J. Anthony, (2005), *Cálculo Vectorial*, (Traducción: Patricio Cifuentes Muñiz, Jesús García Azorero, José Pedro Moreno Díaz, Fernando Quirós Gracián.), Madrid, Pearson Addison Wesley, 5ta edición.
- [14] Sakurai, J. J., Napolitano, J., (1994) *Modern quantum mechanics*, San Francisco, Addison-Wesley, 2nd edition.
- [15] Schwabl, Frank, (2007), *Quantum Mechanics*, Berlin, Springer, 4th edition.
- [16] Taylor, R. John, (2005), *Classical Mechanics*, USA, Edwards Brothers.