



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIA DE MATERIALES
INSTITUTO DE FÍSICA**

**GUÍAS DE ONDA FONÓNICAS EN MESOFASES QUIRALES
LOCALMENTE HEXAGONALES**

TESIS:

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES**

PRESENTA:

OSWALDO ADAPTA GARCÍA

Director de tesis:

**DR. JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES
INSTITUTO DE FÍSICA**

COMITÉ TUTOR:

**DRA. ANGÉLICA ESTRELLA RAMOS PEÑA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES**

**DR. GERARDO JORGE VÁZQUEZ FONSECA
INSTITUTO DE FÍSICA**

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

Abril 2021



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Mientras escribo estas líneas, una pandemia lo ha detenido todo y, durante este largo periodo de confinamiento, se ha escrito la mayoría de este trabajo de investigación; bien como parte de mi formación, bien como un refugio para olvidarse, un poco, de toda la convulsión social y mediática a causa de un virus. Esta situación me permite hacer ciertas reflexiones de valor: la imprescindible cooperación científica y la finalidad real de todas nuestras investigaciones: el bienestar humano, como lo hicieron Jonas Salk y Albert Sabin con sus aportes a la humanidad: una vacuna libre de propiedad intelectual, que ayudó determinadamente a la erradicación de poliomielitis en cada rincón del planeta; y la importancia del desarrollo de ciencia básica, tecnología e industria en los países latinoamericanos; lo más castigados en esta pandemia.

Si bien el trabajo que presento no apunta directamente a la solución de ese grave problema, si pretende aportar a la investigación de materiales y en un futuro no muy lejano su aplicación a la solución de problemas de nuestra sociedad, pues como la historia lo ha demostrado, la ciencia básica es la base de todo desarrollo tecnológico.

Cada página que se va a leer a continuación tiene la certeza, en los límites de lo humanamente posible, de ser una investigación seria pues estuvo bajo la revisión de mi asesor, el Dr. Juan Adrián Reyes Cervantes, a quien agradezco su apoyo y compromiso con este proyecto; en honor a la verdad, sin su paciencia (más allá de lo humanamente posible) y aportaciones intelectuales en las innumerables discusiones que tuvimos a la sana distancia, este trabajo no hubiera visto la luz. Agradezco a mis padres, María Elena y Félix por su apoyo incondicional en este largo camino; a mis hermanos Lizett y Ariel por su apoyo durante todos estos años. A mis abuelos, Belén y Elías; a mi abuela Concepción, quien partió a causa de esta pandemia, a ellos les dedico cada página.

A mi fraternidad, por enseñarme los pasos que había que dar y su dualismo equilibrador, sin eso seguiría en la lona: (por orden de aparición) Omar, Raúl, Ricardo, Enrique, Jesús, Óscar, Juan José, Verónica, Eladio, Ismael y a los que están por llegar.

A Samanta quien inicio este camino de la maestría conmigo y se volvió mi amiga; y a todos mis compañeros, amigos y profesores de la facultad de Ciencias, del Instituto de Física y del Instituto Politécnico Nacional, a los que espero no olvidar en este párrafo y me disculpen si lo hago: Alejandro, Erik, Laura, Fernanda, Jaquelin, Guillermo, Andrés, Javier, Marco Antonio, Karen Rubio, Alfredo, Jairo, Selene, Adriano, Juan Pablo, Oliver y Juan Carlos.

Quiero agradecer especialmente a mi comité tutor que estuvo atento a mis estudios

de posgrado: Dr. Gerardo Jorge Vázquez Fonseca y en especial a la Dra. Estrella Ramos, quién siempre me brindó su apoyo y calidez humana, ¡gracias!

Agradezco a mis sinodales, quienes hicieron posible la revisión de este trabajo; sus correcciones y sugerencia han sido invaluable: Dr. Carlos Ignacio Mendoza Ruiz, Dr. Pablo Luis Rendón Garrido, Dr. Héctor Domínguez Castro y Dr. Roberto Velasco Segura. Su confianza y ayuda fue clave.

Agradezco profundamente al CONACyT por el apoyo durante mis estudios de maestría a través de la beca nacional, sin su apoyo no hubiera sido posible la realización de este proyecto.

Al terminar de escribir estos párrafos, la pandemia sigue su curso, pero una luz se asoma al final del túnel. Las vacunas han llegado y ese dejo de esperanza durante varios meses, se ha desvanecido.

Índice general

Resumen	III
Abstract	IV
Introducción	1
Antecedentes Históricos	1
Representaciones fundamentales de ondas elásticas	1
Guías de onda	3
Objetivos generales	5
Estructura de la investigación	5
1. Estado del Arte	1
1.1. Trabajos fundamentales: Ecuaciones de dispersión	2
1.2. Estado del arte en guías de onda	8
1.3. Ensayos no destructivos en guías de onda elásticas.	9
2. Materiales helicoidales.	12
2.1. Cristales líquidos una breve introducción	12
2.2. Descripción básica de los Cristales Líquidos	14
2.3. Densidad de Energía Libre	15
2.4. Construcción de una guía de onda con núcleo de doble hélice	18
2.4.1. Medios Quirales artificiales	19
2.4.2. Modelo de capas para un material con geometría local	20
3. Elastodinámica lineal	24
3.1. Equivalencia entre las descripciones Lagrangiana y Euleriana	25
3.2. El tensor de deformaciones.	26
3.3. Ecuaciones de Balance General.	29
3.4. El tensor de esfuerzos.	31
3.5. Ley de balance general de masa.	32
3.6. Ley de balance general de momento lineal.	33
3.7. Ley de balance general de momento angular.	35
3.8. Ley de conservación de Energía.	36

3.9. Ecuaciones Constitutivas: Ley de Hooke	38
3.10. Energía elástica	39
4. Guías de onda para medios Isotrópicos	41
4.1. Ecuaciones de Navier-Cauchy para medios Isotrópicos.	42
4.2. Ondas planas tridimensionales.	43
4.3. Potenciales elastodinámicos.	44
4.4. Ondas torsionales axialmente simétricas.	47
4.4.1. Frecuencias de Corte.	49
4.5. Las soluciones de Pochhammer y Chree.	49
4.6. Flujo de energía de un medio elástico.	50
5. Guías de onda en medios anisotrópicos.	55
5.1. Modelo de guía de onda para un material <i>quiral</i>	59
5.2. Modelo de guía de onda para un material <i>quiral</i> , localmente hexagonal.	65
5.2.1. Constantes elásticas anisotrópicas estructuralmente invariantes.	65
5.2.2. Divergencias tipo $1/r$ cuando $r \rightarrow 0$	67
5.2.3. Aproximación al límite Isotrópico del modelo localmente hexagonal	70
5.2.4. Ecuación de dispersión de una guía isotrópica	71
5.2.5. Frecuencias de corte para el medio Isotrópico.	72
5.2.6. Existencia de una solución no trivial con geometría hexagonal.	73
5.3. Método de validación <i>Isotrópico</i> $\rightarrow H_{6r}$	75
5.4. Soluciones numéricas	76
5.4.1. Soluciones en serie de potencias	77
5.4.2. Método de disparo para el rastreo de parámetros.	79
6. Resultados y Discusión.	81
6.1. Validación numérica	81
6.2. Resultados	87
6.2.1. Estructura de Bandas para la fibra isotrópico.	87
6.2.2. Distribución de esfuerzos y el campo de desplazamientos del esquema isotrópico.	88
6.2.3. Estructura de bandas de la fibra helicoidal.	89
6.2.4. Distribución de esfuerzos y el campo de desplazamientos del medio helicoidal.	95
6.3. Conclusiones.	96
Apéndice A	102
Apéndice B	106
Bibliografía	108

Resumen

En este trabajo de investigación, desarrollamos un método para el análisis de propagación de modos elásticos en medios helicoidales, localmente hexagonales, a través de una guía de onda de sección transversal circular. Por medio de las ecuaciones que gobiernan los fenómenos elastodinámicos, como lo son las ecuaciones de movimiento de Cauchy, y junto con las ecuaciones constitutivas para materiales quirales, construimos un modelo para la descripción de la propagación de los modos dentro de la guía, asumiendo ondas propagantes cuasi-planas; como en el método espectral de Bloch para cristales fotónicos. De esta manera, es posible obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, cuyas soluciones dan lugar a la estructura de bandas para este sistema en particular, al establecer condiciones de frontera adecuadas entre la superficie de la guía y el medio que la rodea, en nuestro análisis consideramos al vacío fuera de la guía, así los esfuerzos se deben anular en la frontera. Las soluciones del sistema junto con las condiciones a la frontera correspondientes, se resuelven numéricamente por medio del método de disparo (shooting) que permite satisfacer las condiciones de frontera correspondientes rastreando los parámetros de propagación. Para verificar la consistencia tanto del algoritmo como del modelo se pide que su comportamiento se reduzca al de una guía de ondas cuyo núcleo es un sólido isotrópico e inhomogéneo; siempre que la birrefringencia del material se haga tender a cero, cuya estructura de bandas ha sido previamente reportada. Demostramos que nuestro modelo, a través de un parámetro que control, reproduce correctamente el esquema isotrópico; también es posible separa los modos en puramente axiales o radiales cerca de las frecuencias de corte para este esquema.

Por otro lado, encontramos la estructura de bandas para el sistema helicoidal, a través de las soluciones numéricas, utilizando el método de continuación paramétrica, que permite construir las ramas del espectro de frecuencias del sistema, cuyo análisis permite conocer las características de los modos de propagación dentro de la guía y encontramos band gaps en el espectro de frecuencias quiral. También hemos calculado las correspondientes distribuciones de esfuerzo y deformaciones dentro de la guía. Discutimos nuestros resultados y abordamos nuestras conclusiones.

Abstract

In this work, we investigate the propagation of elastic modes in a helical medium, locally hexagonal, through a cylindrical waveguide with constant circular cross section. By solving the Cauchy equations of motion, along with the constitutive equations for a helical medium, we build a model to describe the propagation of elastic waves within the guide, by assuming harmonic wave propagation; similar to Bloch's method for photonic crystals. As a result, it is possible to obtain a system of coupled ordinary differential equations (CODEs), whose solutions particularly for this system, establish its band structure by imposing the corresponding boundary conditions for vacuum outside the waveguide, then we solve numerically the CODEs, with the shooting method, which allows us to satisfy boundary conditions and adjust the propagation parameters, at the same time. We verify our model, comparing it with the isotropic and homogeneous scheme, which we refer to as the isotropic scheme and whose band structure has already been reported. We show that our model correctly converges to the reference model; it is also possible to separate the radial and axial modes at the cut-off frequencies, and we performed a simple algebraic procedure to verify it.

On the other hand, we present the band structure for helical media, through the numerical solutions, by using the parametric continuum method, which allows us to elaborate the band structure of the system, which analyzes the propagation modes within waveguide and we find band gaps in the spectrum of frequencies. We also calculate the corresponding strain and stress distributions within the waveguide. We discuss our result and address our conclusions

Introducción

Antecedentes Históricos

El estudio de la propagación de ondas elásticas tiene su origen en los estudios sobre la naturaleza de la luz. A mediados del siglo XIX, se pensaba que la propagación de la luz se llevaba a cabo en un medio elástico llamado éter, que de hecho llenaba a todo el universo y a través del cual las ondas electromagnéticas se propagaban. Las investigaciones de Fresnel (1816) y Thomas Young (1817) mostraron que dos haces de luz, polarizados en planos perpendiculares entre sí, no interfieren entre ellos [1]. Fresnel concluyó que las ondas tienen desplazamientos en dirección normal a la dirección de propagación, es decir, ondas transversales. Las conclusiones de Fresnel dieron al estudio de la elasticidad un poderoso impulso que llamó la atención de grandes matemáticos como Cauchy y Poisson al estudio de la elastodinámica y su desarrollo tal como lo conocemos hasta el día de hoy.

Representaciones fundamentales de ondas elásticas

A finales del año 1822, Cauchy [24] había descubierto la mayoría de los elementos de la teoría clásica de elasticidad, que incluía el concepto de esfuerzo y desplazamiento de las ecuaciones de movimiento¹. En 1828 Poisson presentó sus memorias [52, 53] (publicadas en 1829), en las que muestra numerosas aplicaciones de la teoría general a problemas especiales sobre la vibración de ciertos materiales. Poisson fue el primero en reconocer que una perturbación elástica en general estaba compuesta por dos tipos fundamentales de desplazamientos de onda: de dilatación (longitudinal) y equivoluminal (transversal). En sus investigaciones Poisson muestra que, para cada solución suficientemente regular de las ecuaciones de movimiento, se pueden representar por la suma de los componentes del desplazamiento; el primero por el gradiente de una función potencial; y el segundo por un campo solenoide, donde la función potencial y el campo solenoide satisfacen una ecuación de onda, cada una de ellas con velocidades de onda longitudinal y transversal respectivamente. Sin embargo, la solución general de Poisson no involucra el potencial vectorial para el componente de desplazamiento del campo solenoide; aparentemente fue Lamé por primera vez en 1852 quien dio una solución completa [55]. De esta manera, a través de los esfuerzos de Poisson y Lamé mostraron que el campo de desplazamiento elastodinámico general se representa como la suma del gradiente de un potencial escalar y el rotacional de un potencial

¹De acuerdo a Love [24], Navier (1821) fue el primero en derivar las ecuaciones generales de equilibrio y vibración para sólidos elásticos.

vectorial, cada uno de los cuales satisface una ecuación de onda. Desde sus inicios, esta representación del campo de desplazamientos ha sido el núcleo de la mayoría de los avances realizados a través de la solución de problemas de valores en la frontera en elastodinámica lineal, siendo el atractivo obvio la riqueza de conocimientos que existe sobre las soluciones de la ecuación de onda.

La cuestión de completas de las soluciones de Lamé fue resuelta por Clebsch (1863) [59], pero su prueba no fue concluyente. Una prueba rigurosa de completitud fue dada por Somigliana en 1892 [56] y posteriormente por Tedone (1897) [60] y Duhem (1898) [61]. Es interesante observar los trabajos de Neumann (1885) [62], en los que ofrece una prueba de la unicidad de las soluciones de los tres problemas fundamentales de problemas de valores en la frontera e iniciales para el medio elástico finito, un trabajo fundamental para el estudio de problemas de sólidos elásticos.

Las primeras investigaciones importantes sobre la propagación de ondas elásticas en medios han sido aportadas por Poisson (1831), Ostrogradsky (1831) y Stokes (1849) en el medio infinito isotrópico [24]. Veamos por ejemplo que Poisson y Ostrogradsky resolvieron el problema de valores iniciales al suponer soluciones armónicas y de esta manera obtuvo los desplazamientos en cualquier punto y en cualquier tiempo en términos de las distribuciones de los desplazamientos y la velocidad. Stokes señaló que los resultados de Poisson implicaban la existencia de dos ondas: de dilatación y rotacional. Por otro lado, Cauchy (1830) y Green (1839) investigaron la propagación de una onda plana a través de un medio cristalino, obteniendo ecuaciones para la velocidad de propagación en términos de las direcciones de la normal al frente de onda [24]. En general, se muestra que la superficie de onda (una superficie que delimita la parte perturbada del medio) tiene tres cortes que corresponden a los tres valores de la velocidad de onda. En el caso de un medio isotrópico dos de los cortes coinciden, y todos estos cortes son esferas concéntricas. Los cortes que coinciden, corresponden a ondas planas transversales (en la nomenclatura moderna SV y SH, ondas de corte polarizadas vertical y horizontal, respectivamente), y la tercera a la onda de dilatación (onda P).

Stokes (1849) [63] y más tarde Love [64] llevaron a cabo las primeras investigaciones de ondas elásticas debido a las fuerzas de cuerpo como la gravedad. Love realizó un estudio exhaustivo e independiente, resolviendo el problema de la carga puntual con ayuda de potenciales retardados, mostró que la fórmula integral de Poisson produce resultados correctos para una cantidad, solo cuando es continua en su frente de onda, invalidando así los resultados de Stokes para la dilatación y rotación con frentes de onda singulares (admisibles). Love confirmó la solución de Stokes, y dio expresiones corregidas para la dilatación y la rotación cuando son singulares, además aportó considerablemente a la interpretación de la solución. El trabajo de Love contenía otra parte importante, la extensión de la bien conocida representación integral de Kirchhoff (1882) [64], para el potencial gobernado por la ecuación de onda no homogénea para el desplazamiento en elastodinámica. A mediados del siglo XXI, esta representación encontró una utilidad particular en los problemas de difracción de ondas. Como puede observarse, hubo un intenso trabajo una vez definidas las bases sobre la teoría. A continuación, presentamos algunos comentarios generales sobre las guías de onda elásticas.

Guías de onda

El estudio de guías de onda elásticas tuvo su inicio con teorías aproximadas desarrolladas por Euler (1744) y Daniel Bernoulli (1751), sobre cuerpos sólidos elásticos, de estas teorías se derivaron las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) gobernantes para las vibraciones flexurales (laterales) de barras mediante la variación de la función de energía-esfuerzo elástica, lo que hizo posible la determinación de los modos normales de vibración y las ecuaciones de dispersión para diferentes tipos de condiciones de frontera. Navier (1824) derivó la ecuación aproximada básica para vibraciones extensionales (longitudinales). Cladni (1802) por su parte, realizó investigaciones sobre los diferentes modos de vibración de manera experimental, tanto para vibraciones extensionales como torsionales. En 1821 Germain publicó las EDP para vibraciones flexurales entre placas paralelas por primera vez, pero no presentó soluciones explícitas, sino un análisis cualitativo del espectro de frecuencias.

En 1829 Poisson [52, 53], mostró que la teoría de vibraciones de barras delgadas tenía, mediante una serie de aproximaciones al considerar barras delgadas, ecuaciones de movimiento exactas en el régimen de elasticidad lineal (pequeñas deformaciones). ¿Cómo fue posible que Poisson llegara este resultado? Poisson asumió que las barras eran cilindros circulares de sección transversal pequeña, y desarrolló todas las cantidades en series de potencia de la coordenada radial en la sección transversal, tomando hasta cuarto orden las ecuaciones exactas conducían a las vibraciones flexurales aproximadas, las cuales eran idénticas a las que Euler ya había publicado en trabajos anteriores. De manera similar, la ecuación para las vibraciones extensionales (longitudinales) fue la que encontró Navier anteriormente. Poisson obtuvo primero la ecuación análoga para las vibraciones torsionales, cuyo estudio se encuentra también en sus memorias.

En 1876 el trabajo teórico de Pochhammer, sobre las vibraciones generales de un cilindro circular infinitamente largo (básicamente una guía de onda) con una superficie lateral libre de esfuerzos, fue un avance mayor, pues gran parte de la investigación moderna sobre ondas estacionarias y transitorias que se propagaban en barras elásticas, hacen referencia a este importante trabajo. Pochhammer resolvió las EDP en un sistema de coordenadas que hiciera posible reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, bajo estas circunstancias, mediante la separación de las variables en el sistema de coordenadas polares cilíndricas: r , θ , z (por la geometría del sistema que estaba analizando), Pochhammer resolvió las ecuaciones de movimiento de desplazamiento resultantes de manera exacta. Representó los desplazamientos por un tren de ondas armónicas infinitas (en z y t) con la amplitud como producto de funciones armónicas (en θ) y de Bessel (en r) de diferentes órdenes. Tanto el tren de onda como su amplitud dependían paramétricamente de la frecuencia y el número de onda, posteriormente usó las condiciones de frontera de una superficie libre de esfuerzos, así obtuvo las ecuaciones de frecuencia (frecuencia en función del número de onda) para trenes de onda extensionales, torsionales y de flexión. (La superposición de dos trenes de onda que viajan en direcciones opuestas a lo largo del cilindro de las vibraciones libres constantes del cilindro infinito).

Las investigaciones de Pochhammer, han sido un referente durante años para la construcción y uso de teorías de onda aproximadas para barras elásticas. Pochhammer también derivó las primeras y segundas aproximación para la ramas más bajas de la ecuación de frecuencias para ondas de flexurales (flexión). Rayleigh [27] y Lamb[66] por su parte, llevaron a cabo un trabajo

análogo para la placa infinita libre de esfuerzos, para ondas armónicas dependientes del tiempo. Desde su aparición las ecuaciones de frecuencia de Pochhammer y Rayleigh-Lamb con su número infinito de ramas (raíces) han sido el objeto de muchos estudios, además han provisto de un entendimiento casi completo de los espectros; y ha sido alcanzado gracias a trabajos recientes.

En 1917, Lamb [67] fue el primero en analizar los modos simétricos y antisimétricos más bajos de la propagación a través de placas planas, en cuyas investigaciones señala que para altas frecuencias y ondas cortas, éstas se convierten en ondas superficiales de Rayleigh. Para mejorar la teoría elemental sobre vibraciones extensionales en una barra, en 1894 Rayleigh obtuvo una corrección para la ecuación de frecuencias, estas correcciones contemplaban la inercia radial del elemento de barra. Love (1927) derivó la ecuación de movimiento y las condiciones de frontera para esta teoría. La importancia de la teoría proviene del hecho que su relación de dispersión modela exactamente la segunda aproximación de Pochhammer para las ramas más bajas de la ecuación de frecuencia para las ondas extensionales mencionadas anteriormente.

Otro avance significativo en guías de onda, de importancia primordial para la sismología, la encontró Love[24] en 1911. Sus investigaciones condujeron a las ondas que hoy llevan su nombre, *ondas de Love*, las cuales son ondas superficiales polarizadas, y que se aplican en la investigación de los movimientos sísmicos de las capas terrestres.

La propagación de pulsos en una guía de onda elástica que involucran dispersión tienen su inicio en el análisis de grupos de onda. Russell (1844) parece haber visto por primera vez el fenómeno de grupo de ondas en el agua, ondas individuales que se movían más rápidamente que el grupo como un todo. A Stokes (1876) se le da el crédito por haber establecido la primera expresión analítica para velocidad de grupo y a Rayleigh por el subsecuente desarrollo. El grupo de Kelvin, desarrolló el método de aproximación por representaciones integrales de ondas dispersivas, que apareció en su trabajo sobre ondas en el agua (1887) [1]. Este fue un avance importante, el cual se conoce ahora como el método de fase estacionaria. Más tarde Lamb (1900, 1912) presentó métodos gráficos esclarecedores del concepto de grupos de onda.

Es interesante observar en la historia, que las contribuciones a este tema tuvieron un período relativamente inactivo que se extiende entre el trabajo sobre elasticidad clásica del siglo XX y principios del siglo XXI, hasta los trabajos modernos que se ha expandido a un ritmo creciente desde la segunda guerra mundial hasta nuestros días. Aparte del hecho de que el tema ofrece intriga y desafío, hay varias razones prácticas para esta expansión moderna. Una de las más fuertes ha sido la necesidad, al menos desde el punto de vista de la mecánica y la ingeniería, de información sobre el comportamiento de las estructuras sometidas a altas tasas de esfuerzo. En geofísica, la creciente actividad de investigación en ondas elásticas también ha tenido fuertes razones prácticas subyacentes; como la necesidad de información más precisa sobre los fenómenos sísmicos y mejores técnicas de prospección. Por otro lado, los avances en los campos relacionados con la acústica y las ondas electromagnéticas, y en las matemáticas aplicadas en general, también han influido en el interés y en los avances realizados en el estudio de las ondas elásticas. Por último, los avances en el cómputo científico, y el desarrollo del análisis numérico han proporcionado métodos para resolver problemas que habían sido intratables de manera analítica. Esto último es relevante para la investigación que desarrollamos a lo largo de este trabajo.

La enorme cantidad de contribuciones (actuales y no) al tema de las ondas en un medio elástico lineal, homogéneo e isotrópico impide presentar aquí un informe detallado sobre ellas. La mayor parte de estos estudios se enfocan en problemas relacionados con la dispersión de ondas elásticas en medio materiales. Con respecto a las guías de onda, existe información amplia sobre las ecuaciones de frecuencia que gobiernan las ondas elásticas en una guía de onda cilíndrica infinitamente larga, placas paralelas e incluso cavidades cilíndricas. Esfuerzos recientes han establecido el carácter de las ramas reales más altas del espectro de frecuencias para estas guías de onda. La evaluación de la solución mediante métodos asintóticos e integración numérica han producido una cantidad significativa de información sobre la respuesta de estas guías de onda elásticas. En el siguiente capítulo se presenta el estado del arte de las guías de onda, los avances más relevantes en el tema, los cuales están enfocados al interés de nuestra investigación.

Objetivos generales

El objetivo de nuestra investigación es estudiar los modos elastodinámicos que se generan al propagar una onda elástica en un medio quiral, cuyo eje helicoidal es perpendicular a las fronteras de una guía de onda elástica de sección transversal cuya dirección de fibra esta a lo largo del eje z . Mediante las ecuaciones de movimiento de Cauchy, construimos un modelo general, bajo la hipótesis del continuo la cual nos permite utilizar las ecuaciones que gobiernan los fenómenos elastodinámicos: las ecuaciones de balance general, más las ecuaciones constitutivas que nos permiten introducir las características específicas de los materiales que se pretenden investigar. Por otro lado, la propagación de ondas cuasi-planas en la dirección de la fibra generan distorsiones en la configuración del materiales lo cuales a su vez permiten reducir a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, que junto con las condiciones de frontera libres de esfuerzos, es posible la construcción de su estructura de bandas, y conocer la distribución de los esfuerzos y desplazamientos dentro de la guía de onda.

Estructura de la investigación

Nuestras investigaciones muestran la construcción de nuestro modelo desde las ecuaciones fundamentales, cuyo objeto es estudiar la propagación de los modos elásticos en un medio material, el cual debe ser consistente con el comportamiento de una guía de ondas cuyo núcleo es un medio isotrópico y homogéneo, que a partir de este momento llamaremos simplemente sistema isotrópico, además se deben satisfacer condiciones adecuadas de frontera sobre la guía. En la literatura se reporta la estructura de bandas para el sistema isotrópico, de manera parcial o mediante teorías aproximadas que permiten la representación cualitativa de la estructura de bandas [3, 4, 5, 6, 7], esto se debe a que si bien se encuentran soluciones analíticas para los esfuerzos y desplazamientos, la ecuación de dispersión no tiene solución analítica. En otras palabras, incluso para el medio material más simple, isótropo y homogéneo, no hay solución analítica.

Desarrollamos un modelo general, que considera las 21 constantes elásticas independientes entre sí; sin embargo nos enfocamos finalmente en la simetría hexagonal para realizar nuestro

estudio de tal forma que el eje de simetría hexagonal del material H_6 coincida con el eje r del sistema de coordenadas. En nuestra investigación mostramos que a pesar de la ruptura de simetría haciendo coincidir el eje radial r con el eje de simetría del material hexagonal, el cual se presenta como H_6 , que a partir de aquí denotamos conjuntamente como H_{6r} , con propagación en dirección z , *hay consistencia con el sistema isotrópico*. También demostramos que el sistema H_{6r} , tiene al menos una solución no trivial mediante el método de Frobenius. A continuación, construimos un algoritmo mediante el uso del método de disparo (shooting), que satisface las condiciones en la frontera mediante la búsqueda de los parámetros de propagación, típicamente la velocidad angular y el número de onda.

La rutina numérica que implementamos es capaz de partir del sistema isotrópico hacia el sistema H_{6r} y viceversa, modificando sus constantes elásticas, mediante un parámetro de control δ (que cuando $\delta = 0$ obtenemos el sistema isotrópico y cuando $\delta = 1$ el sistema H_{6r}) y observamos que el modelo es convergente, es decir, isotrópico $\longleftrightarrow H_{6r}$. Finalmente, se presenta el modelo para un sistema para materiales helicoidales localmente hexagonal, mediante el método de continuación paramétrica, se presentan por primera vez los diagramas de dispersión (DDs) o su estructura de bandas, para este tipo de materiales que presentan estructura colestérica de hélice doble artificial, conocidos en la literatura como *fase azul (blue phase)*, para el caso de mesógenos orgánicos. Además presentamos los perfiles de los esfuerzos y los desplazamientos versus el eje radial r . Finalmente discutimos los resultado y abordamos las conclusiones del trabajo de investigación.

Capítulo 1

Estado del Arte

Presentamos los avances recientes sobre guías de ondas, poniendo como base los trabajos fundamentales sobre guías de ondas elásticas. En este capítulo presentamos los estudios sobre guías de onda con secciones transversales circular y rectangular y las propiedades de los modos normales con constantes de propagación complejas que son inherentes solo a las guías de ondas elásticas. El descubrimiento de la existencia de tales modos sorprendió a los científicos que trabajan en el campo a mediados del siglo XX, estimamos las características de los modos normales desde el punto de vista del dilema tradicional: *soluciones aproximadas de ecuaciones exactas o soluciones exactas de ecuaciones aproximadas*.

En abril de 1877, Lord Rayleigh escribió en su tratado sobre acústica [68]: *En la actualidad, muchas de las contribuciones más valiosas a la ciencia, se encuentran sólo en publicaciones periódicas dispersas en varias partes del mundo y en varios idiomas, y a menudo son prácticamente inaccesibles para quienes no viven cerca de las grandes bibliotecas públicas. En esta situación, los impedimentos mecánicos para estudiar implican una cantidad de trabajo no remunerado y el consiguiente obstáculo para el avance de la ciencia que sería difícil sobrestimar*. Es posible que esta reflexión sea producto del viaje en balsa por el Nilo en Egipto, durante el cual Rayleigh escribió la mayor parte de su libro sin acceso a bibliotecas. Las posibilidades actuales de telecomunicaciones y la globalización de la información [69] han modificado drásticamente esta estimación. Primero, prácticamente todas las bibliotecas más importantes del mundo, de universidades e institutos, tienen catálogos electrónicos de libre acceso, lo que permite establecer la presencia de una amplia fuente científica. Muchas de las bibliotecas contienen acceso electrónico gratuito a libros antiguos, cuyo plazo de copyright ya ha expirado. En segundo lugar, las principales editoriales científicas del mundo crearon archivos digitales de prácticamente todas sus revistas, que están disponibles a partir del primer volumen, independientemente del año de emisión de la revista. En tercer lugar, los sistemas de búsqueda actuales en Internet permiten buscar libremente artículos por nombre del autor, nombre de una revista, año de publicación, etc. En este caso se puede leer el resumen de un artículo y obtener las referencias de los artículos relacionados por palabras claves. Por lo tanto ahora es posible crear revisiones de alta calidad, incluso desde la computadora. En la siguiente sección, presentamos algunas referencias a publicaciones clásicas en el campo de la propagación de guías de ondas elásticas obtenidas de las fuentes arriba enumeradas.

1.1. Trabajos fundamentales: Ecuaciones de dispersión

Los problemas de propagación de ondas armónicas guiadas en cuerpos elásticos extendidos infinitamente han sido objeto de investigación durante más de 160 años, en particular por los estudios clásicos de Pochhammer [23], Chree [25, 26] Rayleigh [27, 28] y Lamb [29, 30, 31], cuyos nombres son citados en muchos artículos referentes al análisis de guías de onda, incluso en la actualidad. En el artículo [29], Lamb presenta la ecuación de dispersión para ondas flexurales, entre placas delgadas aunque su artículo es más citado por la aclaración de los detalles sobre el debate entre Rayleigh y Love sobre los problemas fundamentales de las ecuaciones de dispersión para diferentes secciones transversales.

Aunque en los trabajos de Pochhammer sobre guías de onda de sección transversal circular presentan una técnica para la deducción de la ecuación de frecuencias, se considera que el trabajo realizado por Rayleigh [27], el cual presentó en un congreso de la London Mathematical Society el 12 de noviembre de 1885, contiene un significado más fundamental sobre las ecuaciones de dispersión. Es difícil, según [32, 33] mencionar otro artículo (de apenas siete páginas) de esta importancia, el cual propició una nueva tendencia científica y el desarrollo de la técnica conocida como SAW, por sus siglas en inglés (*Surface Acoustic Waves*) y en consecuencia una considerable cantidad de investigación sobre el tema. Actualmente las ondas de Rayleigh son analizadas en todos los textos introductorios sobre teoría de elasticidad, mostrando que sus investigaciones son básicas para la comprensión del fenómeno ondulatorio a través de un medio elástico no dispersivo.

Las ecuaciones de dispersión se deducen tanto de la representación analítica de las soluciones de las ecuaciones de movimiento deducidas para medios isotrópicos por Lammé [55] en un dominio, como del cumplimiento de las condiciones de frontera, las cuales se consideran condiciones de esfuerzo nulo, como deduciremos en capítulos posteriores. Es posible observar que para guías de onda elásticas de la forma cilíndrica o de placas paralelas, su frontera está formada por uno o dos planos de coordenadas, esto permite construir las representaciones analíticas para componentes del vector de desplazamiento que permitan comparativamente satisfacer todas las condiciones de frontera y obtener las relaciones de dispersión correspondientes.

Iniciaremos esta breve revisión, utilizando algunos conceptos de la teoría de elasticidad clásica, que se establecerán formalmente en un capítulo posterior, indicaremos cada que sea necesario la naturaleza de cada término o expresión, esto con el objetivo de hacer más transparente el desarrollo del estudio en guías de onda en la literatura.

La determinación de los modos de propagación en una guía de ondas de sección transversal cuadrada, de la que se aprovecha su geometría para establecer condiciones de fronteras de esfuerzo nulo en la región: $|x| \leq \infty$, $|y| \leq b$, $|z| \leq \infty$, es posible establecerse en un sistema de referencia cartesiano, cuyo campo de desplazamiento (que establece la distancia de un punto material sin deformar a otro después de una deformación) se puede escribir como $\mathbf{u} = (0, V(y), W(y)) \exp(i(\gamma z - \omega t))$, que se reduce a la búsqueda de las soluciones de Lamé con las fronteras libres de esfuerzo (esfuerzo nulo). En virtud de la simetría del plano y de la guía, es conveniente separar todos los modos longitudinales y flexurales. Del problema de Lamé se obtienen las relaciones de dispersión de Rayleigh-Lamb, de esta guía:

$$(\gamma^2 - \beta^2)^2 \cos \alpha b \sin \beta b + 4\gamma^2 \alpha \beta \sin \alpha b \cos \beta b = 0 \quad (1.1.1)$$

$$(\gamma^2 - \beta^2)^2 \sin \alpha b \cos \beta b + 4\gamma^2 \alpha \beta \cos \alpha b \sin \beta b = 0, \quad (1.1.2)$$

para modos longitudinales y flexurales, respectivamente conectan la frecuencias ω y la constante de propagación γ de las ondas normales en la guía, donde α y β tienen la siguiente relación

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \gamma^2 &= \frac{\omega^2}{c_1^2} \\ \beta^2 + \gamma^2 &= \frac{\omega^2}{c_2^2}, \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

donde c_1 y c_2 son las velocidades de las ondas longitudinales y de corte en el material elástico. Análogamente, la ecuación de Pochhammer-Chree

$$\frac{2\alpha}{a}(\beta^2 + \gamma^2)J_1(\alpha a)J_1(\beta a) - (\beta^2 - \gamma^2)^2 J_0(\alpha a)J_1(\beta a) - 4\gamma^2 \alpha \beta J_1(\alpha a)J_0(\beta a) = 0, \quad (1.1.4)$$

para ondas normales longitudinales axialmente simétricas en un cilindro $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z| \leq \infty$ con $\mathbf{u} = (U(r), 0, W(r)) \exp(i(\gamma z - \omega t))$, conectan la frecuencia ω y la constante de propagación γ de los modos normales en una guía de onda elástica isotrópica circular con fronteras libres de esfuerzo. Para modos no axiales se tiene el campo de desplazamientos con ninguna componente nula se pueden propagar como

$$\begin{aligned} u_r &= U_n(r) \cos(n\theta) \exp[i(\gamma z - \omega t)] \\ u_\phi &= V_n(r) \sin(n\theta) \exp[i(\gamma z - \omega t)] \\ u_z &= W_n(r) \cos(n\theta) \exp[i(\gamma z - \omega t)], \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Pochhammer [23] indicó que en el caso $n = 1$ tiene una analogía cercana con el de las ondas flexurales de una barra delgada, cuya ecuación de movimiento se obtuvo simultáneamente e independiente por Bernoulli y Euler en 1735. La ecuación de dispersión para la n -ésima familia tiene la forma de un determinante de tercer orden igualado a cero, donde los elementos del determinante son expresados en términos de los parámetros de propagación n , ω , γ , α y β . Tal expresión se puede encontrar en el artículo [72], en la revisión [71] y en el libro [70].

Además de las ondas básicas presentada, existen las llamadas ondas axialmente simétricas de corte (SH) y de torsión (T). Las relaciones de dispersión para tales movimientos en la guía de onda de sección transversal cuadrada, con las condiciones de frontera conducen a la expresión para le campo de desplazamientos $\mathbf{u} = (\cos \beta y, 0, 0) \exp(i(\gamma z - \omega t))$, de donde se encuentra que la expresión

$$\sin \beta b = 0, \quad (1.1.6)$$

ahora, si las componentes son $\mathbf{u} = (\sin \beta y, 0, 0) \exp(i(\gamma z - \omega t))$ obtenemos

$$\cos \beta b = 0, \quad (1.1.7)$$

para las ondas de corte y torsión, respectivamente.

Por otro lado, en el caso de la guía de onda cilíndrica, la relación de dispersión se reduce a la expresión

$$\beta a J_0(\beta a) - 2J_1(\beta a) = 0, \quad (1.1.8)$$

con las componentes $u_r = u_z = 0$ y $u_\theta = J_1(\beta r) \exp(i(\gamma z - \omega t))$, que representan ondas torsionales.

Las relaciones de dispersión para estos movimientos solo tienen raíces reales β , de esta manera, para un valor fijo de la frecuencia ω existe un número finito de ondas que se propagan (viajeras) con valores reales para γ . Es importante notar que la distribución de los desplazamientos sobre la sección transversal para cada modo normal no dependen de la frecuencia. La totalidad de los modos normales forman un sistema completo para estos sistemas con geometría semi-infinita, que pueden representarse unívocamente como una serie infinita de estos modos. Esta situación es completamente similar al caso de guías de onda electromagnéticas. Notamos también que tales soluciones no fueron consideradas en los estudios pioneros de los que ya hemos hablado con anterioridad [25, 31, 23, 28].

El interés constante en el análisis de las ecuaciones de dispersión (1.1.1) y (1.1.2) y la ecuación de Pochhammer-Chree (1.1.4) llegó a su cumbre a inicios de 1930 en una conexión cercana al desarrollo de varios métodos de excitación y recepción de vibraciones ultrasónicas en cuerpos elásticos. En este caso, una gran cantidad de datos analíticos numéricos y experimentales de las propiedades de la propagación de las ondas se empezaron a acumular. Los trabajos de autores alemanes [73, 74, 75], estadounidenses [76, 77, 78] canadienses [79, 80, 81, 82] y británicos [83] presentados en el periodo 1939-1940 relacionaron el análisis de las velocidades de fase $c_p = \omega/\gamma$ y grupo $c_g = d\omega/d\gamma$ de la propagación de onda. Por ejemplo, en el trabajo de Giebe y Blechschmidt [73] establecen ciertas peculiaridades de los modos de propagación en una guía cilíndrica y cuadrada: en el límite de onda de baja frecuencia, la primera onda longitudinal no tiene dispersión, y las velocidades de grupo y fase tienen valores idénticos, en el caso de la guía cilíndrica $c_p = c_g = c_0 = \sqrt{E/\rho}$; para la cuadrada $c_p = c_g = c_L = \sqrt{E/\rho(1 - \varrho^2)}$, donde ρ , E , y ϱ son la densidad, el módulo de Young y la razón de Poisson, respectivamente. En la segunda edición (1894) del clásico tratado de Rayleigh [68], hace notar que este resultado fue obtenido por Pochhammer [23] sobre la base de una expansión de la ecuación de dispersión (1.1.4) en una serie alrededor de γa ; de esta aproximación se obtiene que en el límite de onda larga de baja frecuencia, la primera onda normal flexural está representada por el modo flexural de dispersión en una guía ya sea de sección cuadrada o circular. Además se encuentra la notable relación $c_g = 2c_p$.

A mediados de 1950, el fenómeno de onda *backward*, es decir, la velocidad de fase y de grupo del tercer modo de propagación tienen diferente signo en algún intervalo de frecuencia, el cual fue predicho en [84]. A pesar de que Lamb [30] mencionó la posibilidad de que tal fenómeno existía en algunos sistemas de guías de onda hipotéticas, se midió experimentalmente en guías de ondas reales publicado por Meitzler en [85] hasta mediados de la década de 1960.

En Ucrania, investigadores de la universidad de Kiev redescubrieron, de forma independiente, ondas backward en una guía de sección cuadrada [86]. En [87] se ofrece una revisión detallada del estudio de este fenómeno en guías de onda de diversas configuraciones. Aproximadamente al mismo tiempo, se estableció numéricamente en [88] que la relación Rayleigh-Lamb (1.1.1) tiene raíces puramente imaginarias, este descubrimiento fue profundamente discutido y desarrollado en trabajos realizados por Mindlin [89]. Por otro lado, basado en el método propuesto en [90] con la ayuda de la *red de Mindlin*, se construyó un patrón bastante completo de raíces reales y puramente imaginarias de las ecuaciones de dispersión de Rayleigh-Lamb, con de variables adimensionales $Re(\gamma b)$ e $Im(\gamma b)$ para el número de onda y $\Omega = 2\omega b/\pi c_2$ para la frecuencia, con valores constantes de la razón de Poisson. Estas curvas se han reproducido muchas veces en diferentes publicaciones, por ejemplo en [91, 71, 92]. En la figura (1.1.1), mostramos una de estos espectros de frecuencia, lo interesante de las raíces en el espectro, es que no están basadas en cálculos por computadora, sino en la comprensión profunda de la estructura de las ecuaciones y en una serie de cálculos auxiliares mediante fórmulas analíticas simples.

En [93] se establece que para $\omega = 0$, las relaciones de dispersión (1.1.1) y (1.1.2) se reducen a las siguientes ecuaciones trascendentales, independientes de la razón de Poisson

$$\begin{aligned} \sinh(2\gamma b) + 2\gamma b &= 0 \\ \sinh(2\gamma b) - 2\gamma b &= 0. \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

Aparentemente Mindlin no sabía que las relaciones (1.1.9) fueron analizadas y deducidas en las memorias clásicas de Dougall [46].

El conocimiento acumulado de las propiedades de los modos de propagación en una guía de onda facilita de forma natural el estudio completo de la ecuación general de Pochhammer-Chree (1.1.4) para ondas armónicas en un cilindro elástico isotrópico. El carácter (casi) tridimensional del problema no implica dificultades adicionales, aunque la geometría de la región admite la separación de modos axisimétricos (longitudinal, denotado por $L(q)$ y torsionales denotado por $T(q)$) y modos no axialmente simétricos (denotados por $F(n,q)$) dentro de la guía circular. En [95, 71, 8, 9] se puede encontrar un estudio de un gran número de publicaciones en los años de 1950 a 1960, donde finalmente se aclara la estructura del espectro de frecuencias de los modos normales en una guía cilíndrica. Entre las obras originales con una contribución crucial a la solución de este problema se encuentran, Onoe [96] y Pao [4, 7] y la obra de Zemanek [72].

El patrón que representa el comportamiento de las curvas de dispersión $L(q)$ de los modos simétricos del eje longitudinal o axial enumerados en orden creciente del número q (la barra encima de un número significa el reflejo especular de una parte compleja de la curva con respecto al plano $Re(\gamma a) = 0$) se reproduce en la figura (1.1.2). Se puede observar que para una frecuencia fija, la relación de dispersión (1.1.4) tiene un número finito de raíces reales (modos de propagación) e imaginarias puras, así como un número infinito de raíces de valores complejos correspondientes a modos estacionarios. Para un cilindro, esta característica se reporta por primera vez en la obra de Adem [97]. A lo largo de estos trabajos se observa que la obtención de datos experimentales especialmente para la velocidad de grupo, no es una tarea fácil lo que significó que los experimentos tardaran en ser reportados. Para onda simétricas, en el trabajo de Pao[7] se da un patrón tridimensional de curva de dispersión del espectro. También notamos que el segundo modo flexural de propagación fue descubierto experimentalmente por Curtis

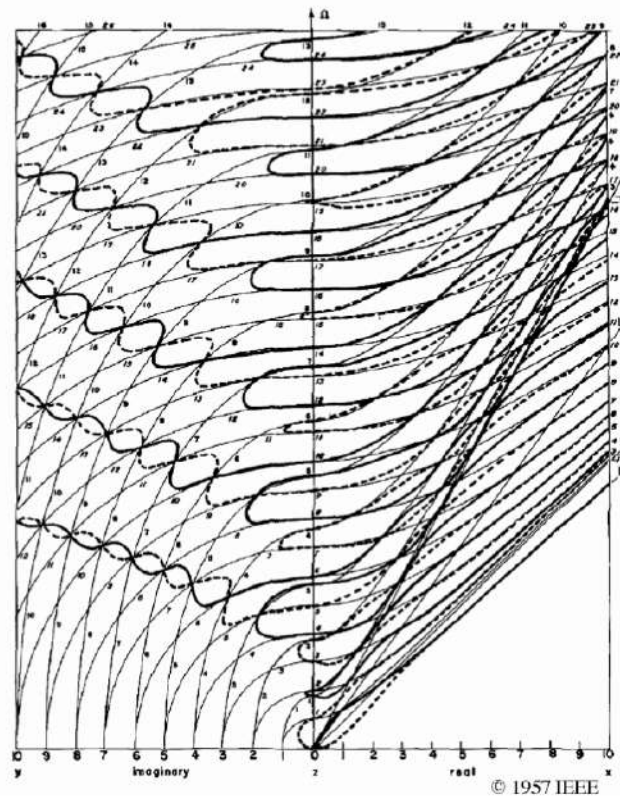


Figura 1.1.1: Red de Mindlin [93]: patrón esquemático del comportamiento de las ramas reales y puramente imaginarias de las curvas de dispersión para los modos normales longitudinales (curvas continuas) y flexurales (curvas discontinuas) de Rayleigh-Lamb, para un radio de Poisson $\nu = 0.31$.

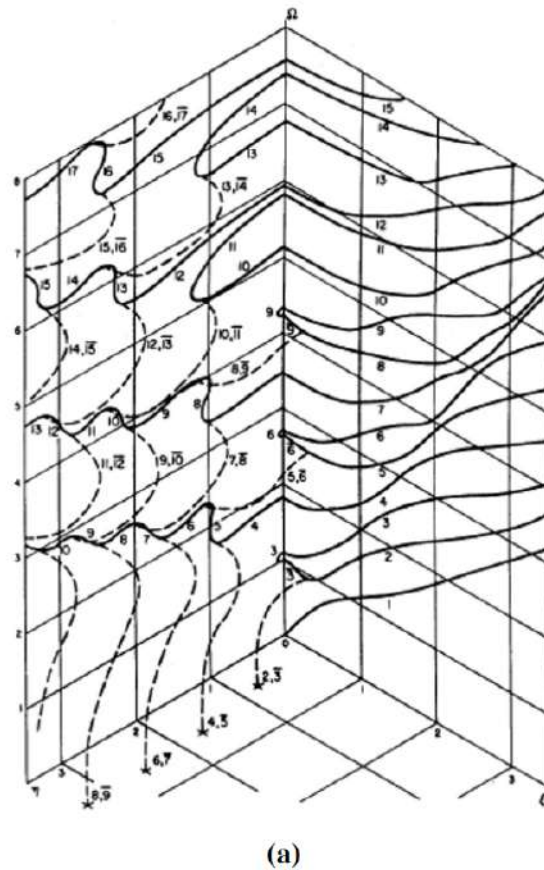


Figura 1.1.2: Curvas de dispersión de modos normales axialmente simétricos en una guía de ondas cilíndrica; las líneas continuas corresponden a raíces imaginarias y reales puras, y las líneas discontinuas corresponden a raíces de valores complejos: (a) para la razón de Poisson $\nu = 0.31$ [96].

[98], y se encontró numéricamente en [99] solo uno años después. Antes de la publicación de estos trabajos, se consideró sobre la base de cálculos detallados de Hudson [77] (aunque estos eran incompletos, como se vio más tarde) que la relación de dispersión (1.1.4) para los modos flexurales en un cilindro tienen solo una raíz.

Zemanek en [72] dio una discusión detallada del comportamiento de las raíces con valores complejos que se colocan en el plano $Re(\gamma a) + Im(\gamma a)$ por cuadruplos simétricos en virtud de la estructura de las ecuaciones de dispersión e indicó su importante papel en la solución de problemas sobre la reflexión y excitación de modos normales de un cilindro semi-infinito y en la formación de un modo final particular (resonancia final) en un cilindro largo finito. Este modo fue descubierto experimentalmente por primera vez en el trabajo de Olive [101], para una placa delgada rectangular, Onoe [100] encontró un modo análogo.

La posición de las raíces de los valores complejos de la ecuación de Pochhammer-Chree en

el plano $\omega = 0$ es determinado por la ecuación trascendental

$$(a\gamma)^2 J_0^2(i\gamma a) + J_1^2(i\gamma a) + 2(1 - \varrho) J_1^2(i\gamma a) = 0, \quad (1.1.10)$$

esta ecuación corresponde, naturalmente, a la ecuación para soluciones estáticas homogéneas para un cilindro elástico, que fue obtenida por primera vez por el profesor Schiff [105], luego considerado por Dougall [103] en detalle. Observamos que la relación (1.1.10) no tiene raíces imaginarias puras, y sus raíces de valores complejos dependen, a diferencia de (1.1.9), de la razón de Poisson ϱ .

El papel de las raíces imaginarias puras y de valor complejo de la ecuación de dispersión en los problemas de propagación de ondas en guías de ondas elásticas infinitas está limitado por el requisito de la completitud de la solución en cualquier frecuencia. Sin embargo, este papel se vuelve crucial para la consideración de vibraciones forzadas de cuerpos finitos o semi-infinitos y, en particular, para la interpretación de fenómenos tan inusuales como la resonancia final en modos estacionarios en guías de onda de sección transversal cuadrada [106, 107] y un cilindro semi-infinito [104, 105]; donde se establecen sus modos de propagación que transfieren energía.

En resumen, es posible afirmar que las características de las guías de onda isotrópicas elásticas circulares (cilíndricas) y planas (cuadradas) ya se han obtenido y sistematizado con bastante detalle aunque no exhaustivamente incluso para el sistema isotrópico. Estos resultados se describen detalladamente en varias revisiones generales así como en libros de texto y monografías [1, 108, 109, 110, 42, 113].

1.2. Estado del arte en guías de onda

Las investigaciones sobre cómo se propagan ondas elásticas en guías de onda elásticas, han sido reportadas extensamente, aunque no exhaustivamente, como se discutió en la sección anterior. Para el caso de *materiales isotrópicos y homogéneos* se tiene un amplio espectro sobre el comportamiento de las relaciones de dispersión, incluso existen teorías de aproximación bastante desarrolladas para la investigación y el análisis de sus ramas mediante métodos asintóticos, lo cuales están fuera del alcance de esta revisión. Algunos otros trabajos reportan los modos de vibración para materiales con simetría *isotrópica transversal*, siempre que ésta sea cualitativamente equivalente al sistema isotrópico, es decir, cuando la geometría material (eje de simetría) coincide con el eje de simetría del sistema de coordenadas [13]. Algunos trabajos han tratado de resolver el caso de simetría ortorómbica, aunque las soluciones reportadas se presentan en series de potencias y sus resultados no son concluyentes respecto a su espectro de frecuencias, por la falta de un método capaz de resolver satisfactoriamente el sistema de ecuaciones que se presentan. Por otro lado, el auge de los métodos de malla adaptativa (elemento finito) y su aplicación a problemas de propagación de ondas en medios, devino en una avalancha de publicaciones sobre simetrías materiales altamente anisotrópicas [14], como en el triclinico que presenta la máxima anisotropía en un material sólido, con todas sus constantes materiales independientes entre sí [15], incluso bajo el uso de elemento finito, se han presentado modelos de materiales quirales, mediante el aparato de Frenet-Serret [16], entre otros intentos de modelar la quiralidad de algunos materiales artificiales. También se ha reportado investigaciones sobre guías de onda con sección

transversal arbitraria mediante un enfoque topológico, estudio que esta fuera de los alcances de este trabajo, el cual es importante mencionar pues para verificar que es correcto su modelo topológico, hacen converger a una guía de sección transversal circular constante obteniendo los ya clásicos resultados de Pochhammer [17]. Sin embargo, no hay un modelo matemático que considere el problema completo, es decir, para un material completamente anisotrópico, como lo son los cristales triclinicos, esto por la complejidad, pues como vimos en la sección anterior, incluso para materiales isotrópicos la dificultad de encontrar las raíces y establecer su diagrama de dispersión.

1.3. Ensayos no destructivos en guías de onda elásticas.

La importancia del diseño de un modelo de guías de onda elásticas, también tiene su alcance en la industria. Los Ensayos No Destructivos (END) hoy en día son una técnica de uso común, tanto en el campo científico como en la industria, esta herramienta es indispensable en tareas de mantenimiento, pruebas de integridad estructural, control de calidad tanto en producción en inspección de la vida útil de estructuras [18, 19, 20, 21]. La aplicación de esta técnica reduce los costos globales a la industria mediante la prevención de fallos mecánicos que suponen grandes pérdidas materiales. Mediante el dictamen de END, de un elemento se puede evaluar la seguridad frente a un posible fallo, realizar predicciones de la vida útil restante y establecer programas de mantenimiento y reparación.

Dentro del campo de los ensayos no destructivos, las ondas guiadas ultrasónicas constituyen un área de gran interés para la comunidad científica. Estas ondas se propagan en elementos como placas, tuberías y barras, y su geometría define la frontera física que constriñe la propagación de ondas elásticas y por consecuencia confina el flujo de energía de su sección transversal, como consecuencia la radiación se atenúa o incluso desaparece. Los únicos mecanismos de atenuación restantes son la difracción por obstáculos y la disipación de energía debido a la naturaleza dispersiva del medio, en consecuencias estas ondas tienen la capacidad de recorrer grandes distancias. Lo anterior permite realizar inspección de estructuras desde una posición fija, sin la necesidad de desplazar los aparatos de medición como en las técnicas ultrasónicas clásicas, las cuales dificultan el mantenimiento de las estructuras sujetas a controles de calidad. Además se puede inspeccionar zonas de difícil acceso, como estructuras parcial o totalmente enterradas.

Las ondas guiadas posibilitan la evaluación de defectos presentes en la sección transversal completa de la estructura ya que la propagación induce la deformación de todos sus puntos. La existencia de modos para cada frecuencia aporta flexibilidad cuando se quiere seleccionar un punto de trabajo que proporcione una mayor sensibilidad, pero para llevar a cabo esta selección se necesita conocer como interaccionan las ondas guiadas con los defectos.

Experimentalmente las guías de onda elásticas están bien establecidas por ensayos no destructivos para diferentes materiales, que tienen su aplicación inmediata a la industria [22]. Es importante confiar en la precisión en que los modos se propagan a lo largo de una guía de onda, por lo tanto es importante desarrollar modelos matemáticos confiables y predictivos sobre la resistencia de materiales sometidos a estas perturbaciones elásticas.

La propagación de ondas elásticas en medios dispersivos se caracteriza porque la velocidad

de fase (al igual que la velocidad de grupo y el número de onda) depende de la frecuencia¹. La representación gráfica de esta variación se denomina curva de dispersión y se verá con más detalle en los capítulos siguientes. La representación más habitual de este diagrama de dispersión, consiste en un plano bidimensional de la velocidad de fase frente a la frecuencia, o la velocidad de grupo frente a la frecuencia, o al número onda. Las curvas de dispersión de los diferentes modos para una gran variedad de materiales proporcionan información esencial para la fabricación de transductores de mucha utilidad en la industria ya que tiene la capacidad de medir frecuencias de operación y la interpretación de señales. Sin embargo la investigación de la propagación de ondas elásticas en diferentes medios se ha restringido a considerar medios isotrópicos.

Una de las principales razones de la falta de investigación en guías de ondas elásticas, como los materiales helicoidales, es la falta de un modelo matemático que permita conocer regiones de interés de sus diferentes propiedades físicas, además de la gran cantidad de cálculos que se necesitan, pues los modelos tienen como base fundamental expresiones tensoriales, que representan la invarianza de algunas cantidades físicas importantes, éstas normalmente conducen a ecuaciones diferenciales parciales lineales acopladas, por ello para obtener un esquema se realizan aproximaciones que permitan desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, se suponen cierto tipo de ondas para poder reducir a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y mediante las condiciones de frontera se espera encontrar su ecuación de dispersión correspondiente.

Cuando consideramos materiales anisotrópicos, las funciones analíticas de las componentes del campo de desplazamientos quedan fuera del conjunto de soluciones del problema y es necesario recurrir a otros métodos para obtener, o bien una solución aproximada, lo que implica una acotación a un problema particular; o bien a soluciones numéricas, lo que implica obtener soluciones en una región física restringida, dejando fuera a muchas de ellas. Por décadas el estudio de estructuras más complicadas se había dejado de lado, pues en aquella época lo importante era resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y publicar los resultados antes que alguien más lo hiciera. Esto llevó a un estudio exhaustivo para encontrar métodos que pudieran resolver las EDOs. De esta manera, lo importante era que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) se pudiera reducir a un sistema de EDOs, pues ya existían un gran número de métodos analíticos para resolver estos sistemas.

La física se convirtió en el arte de aproximar. Cuando las cosas se ponían complicadas un argumento loable y sólido bastaba para realizar una aproximación en series de potencias convergente (serie de Taylor, para variables reales) alrededor de cierto punto de equilibrio (generalmente invariante), por ejemplo: “consideramos oscilaciones pequeñas”, se suele leer en estos trabajos importantes. Lo anterior permitía que el sistema de ecuaciones se pudiera desacoplar y entonces se le atacaba con todo método disponible para integrar el sistema de forma analítica.

Pero el ingenio humano dio un paso adelante en los intrincados problemas de hallar soluciones analíticas. Cuando fue imposible resolver los sistemas de EDOs por algún método o mediante alguna aproximación en serie de potencias (convergentes), las “funciones especiales” hicieron su

¹Por citar un ejemplo, los materiales amorfos como el vidrio constituyen un medio dispersivo cuando se desea hacer incidir un a onda electromagnética (EM), ya que la velocidad de la luz es inversamente proporcional a la frecuencia del rango del espectro EM, en este caso la luz visible.

aparición en la historia; Bessel, Legendre, Hermite y Laguerre (entre otros) entraron al rescate de los métodos.

Sin embargo, a lo largo de las últimas décadas parece ser que cualquier clase de intento por resolver problemas más específicos y de importancia práctica, ha fracasado. La predicción del clima, por ejemplo, develó un serio problema en el esquema determinista con el que se estudiaban los sistemas dinámicos, surgió el caos. Con las bases del análisis numérico y la evolución tecnológica del poder de cómputo científico, ha sido posible atacar muchos de los problemas que antes se habían evitado por su complejidad matemática. Aunque las soluciones numéricas dejan de lado mucha información de un sistema, una región bien determinada que se pretende estudiar, se logrará comprender, interpretar y aplicar casi de manera inmediata [23].

Bajo este enfoque, en los siguientes capítulos desarrollamos las ideas fundamentales para la construcción de un modelo en el que consideraremos un material anisotrópico quiral, en que se transmite ondas elásticas en un medio semi-infinito con las consideraciones de guía de onda, arriba discutidas ampliamente; además de utilizar métodos numéricos para obtener a soluciones, que de otra manera sería muy difícil o imposible de obtener.

Capítulo 2

Materiales helicoidales.

Los materiales helicoidales forman parte de la naturaleza, de una manera tan importante que muchas de las estructuras naturales que se han encontrado recientemente, no podrían ser posibles sin que sus moléculas sean quirales. Poco se conoce, que la quiralidad es una de las características fundamentales en las que la naturaleza se organiza, además de que en virtud de principios biológicos bien establecidos, permiten el empaquetamiento óptimo de su material genético; y en estructuras a base de calcio, permite una rigidez que solo es posible cuando se presenta esta característica intrínseca en tales estructuras. Una revisión bastante completa publicada por Mitov [2], muestra que principalmente las estructuras colestéricas, están presentes en la variación de una gama de colores extraordinarios, que ciertos insectos usan para ahuyentar a sus depredadores, o en la busca de reproducirse, lo que muestra además una de las características más importantes de los Cristales Líquidos (CL): sus propiedades ópticas, comúnmente asociadas a las pantallas de cristal líquido (LCD). En dicha revisión, se presentan experimentos recientes donde se puede observar claramente la estructura quiral de muchas de ellas. Sin embargo, a pesar del conocimiento de que estas estructuras naturales no son un sistema isotrópico, hasta donde sabemos, no hay un modelo matemático que las describa, ya sea simplemente con el objeto puramente académico o de investigación experimental. Con el objeto de estudiar la respuesta de estas estructuras a diferentes perturbaciones mecánicas o eléctricas etc., y conocer las diferentes características de esos materiales, es posible diseñar estructuras artificiales capaces de simular el comportamiento natural de músculos o estructuras óseas artificiales, cuyos estudios no han sido abordados y que tienen un gran potencial de estudio en diferentes áreas como la medicina y la biotecnología. Aunque los cristales líquidos que se han encontrado en la naturaleza son en su mayoría sustancias orgánicas, es posible construir materiales con quiralidad de manera artificial, como veremos más adelante, con la finalidad de investigar su comportamiento y replicar las estructuras que se encuentran en la naturaleza. A continuación haremos una breve descripción de los CL como sustancias orgánicas, es decir, aquellas que encontramos en la naturaleza.

2.1. Cristales líquidos una breve introducción

Cuando observamos la naturaleza identificamos tres estados de agregación de la materia o fases: sólido, líquido y gaseoso, algunos compuestos como el agua presentan todos estos estados

a diferentes temperaturas. Una sustancia se llama isotrópica cuando sus propiedades físicas no dependen de la dirección en la que son estudiadas, por ejemplo el agua a temperatura ambiente es un ejemplo de un líquido isotrópico, sin embargo algunas sustancias orgánicas como los Cristales Líquidos (CL) presentan anisotropía pues sus propiedades físicas son diferentes para diferentes direcciones, estas sustancias son en realidad de otra clase; a esta clase de fases se les conoce como mesofases o fases mesomórficas, o simplemente como fases intermedias. Estos materiales, a la vez líquido puede fluir como fluido o fluido viscoso, y al mismo tiempo posee características de un cristal sólido, es decir, propiedades ópticas muy particulares de los CL. Por lo tanto al exhibir ambas características tanto de líquido como de sólido el nombre Cristal Líquido representa claramente su naturaleza, no obstante las controversias generadas por este nombre.

El descubrimiento de los CL se atribuye principalmente al botánico Austriaco F. Reinitzer [73] quien en 1888 reportó las propiedades insólitas de ciertas sustancias que hoy conocemos como cristales líquidos. Reinitzer [71], quien trabajaba con ésteres de colesterol (5-colester-3-il benzoato) o también conocido como Benzoato de Colesteril, el cual es sólido a temperatura ambiente, observó que existían dos puntos de fusión para dicha sustancia, el primero aparecía a una temperatura de $145.5^{\circ}C$ el material llegado a esta temperatura, pasaba de ser un sólido a un líquido opaco, y el segundo punto de fusión a una temperatura de $178.5^{\circ}C$, en este caso el líquido antes opaco se convertía en un líquido claro. Lo que Reinitzer encontró en el primer punto de fusión, el líquido opaco, es lo que ahora conocemos como CL Colestérico, en ocasiones también llamado CL Nemático quiral (N^*). También observó un comportamiento inusual en el cambio de colores que se iban presentando en la sustancia conforme se variaba la temperatura; el color azul apareció llegando al primer punto de fusión, a continuación a un color azul-violeta brillante cuando la temperatura hizo que el líquido opaco se cristalizara. Reinitzer envió muestras de su trabajo al Físico alemán F. Lehmann, quien observó propiedades ópticas semejantes a las de los cristales, a su vez estas sustancias tenían la propiedad de fluir a la que acuñó el término “flowing crystals”, es decir cristales que fluyen, posteriormente en 1900 Lehmann establece el término general Cristal Líquido, término utilizado actualmente.

Sin percatarse por completo estos científicos estaban frente a un nuevo descubrimiento, un nuevo estado de sustancia, las cuales poseían fluidez, como cualquier líquido ordinario, y a su vez propiedades de un sólido cristalino. Los resultados publicados por Reinitzer y Lehmann interesaron a otros científicos quienes se sumaron a este nuevo descubrimiento. A principios del siglo XX, científicos como Vorländer de Halle (Alemania), preparó una centena de nuevos cristales líquidos; J. Friedel (Francia), propuso una primera clasificación de los CL; S. Ossen junto con J. Zocher, holandés y checo respectivamente, fundaron una teoría de elasticidad; y por parte de la antigua URSS en los años 30's V. K. Frederiks y V. N. Tsvetkov por primera vez realizaron investigaciones sobre las propiedades ópticas y eléctricas de los CL [[73]].

2.2. Descripción básica de los Cristales Líquidos

La mayor parte de los CL son sustancias orgánicas, estas sustancias pueden, de cierta manera, forzarse a exhibir fases de cristal líquido o bien variando la temperatura o bien variando la concentración en un solvente, a los primeros se les conoce como CL **termotrópicos**; a los segundos, CL **liotrópicos**. Los materiales que bajo condiciones apropiadas dan lugar a esta clase de mesofases se le conoce como **materiales mesogénicos** [71]. Por otra parte los compuestos de CL que pasan por una o varias mesofases antes de convertirse en un líquido isotrópico ordinario depende también de factores como la estructura molecular, densidad o campos electromagnéticos aplicados externamente [71].

En un cristal líquido por regla general las moléculas son altamente anisotrópicas en su forma geométrica, esta condición junto con la rigidez de sus enlaces permite que la sustancia exhiba estas fases intermedias, además de presentarse como moléculas rígidas de forma alargada (moléculas calamíticas) o como un disco (moléculas discóticas) [73].

La mayoría de los CL termotrópicos están constituidos por moléculas alargadas en forma de barra con sus enlaces químicos rígidos. La justificación a este modelo molecular proviene de la interacción entre los átomos neutros de las moléculas lo que provoca desplazamientos de las nubes electrónicas, en consecuencia aparecen campos eléctricos que forman dipolos eléctricos inducidos resultado del desplazamiento de las nubes de electrones de los átomos, esta formación de dipolos conduce a que las partes del átomos con cargas opuestas se atraigan mutuamente y por lo tanto la totalidad del átomo también se atrae con otros átomos [73].

Por otro lado, es necesaria una clasificación de los CL, ya que a pesar de que existen sustancias que comparten un estado, o una mesofase, existen características que distinguen entre sí a los diferentes CL que se presentan en la naturaleza. Los CL que presentan sus moléculas de forma alargada, de acuerdo a la clasificación realizada por Friedel, se pueden clasificar en tres grupos o mesofases: **Nemáticos y Colestéricos** [[74]], A continuación haremos una breve descripción de estos tres grupos.

Fase Nemática: Los ejes individuales de las moléculas que constituyen la sustancia, tienden a alinearse, espontáneamente, paralelas unas con otras a lo largo de una dirección preferencial (salvo fluctuaciones térmicas) como se ve en la figura (2.2.1), en la mayoría de los nemáticos esta dirección se conoce como *eje óptico*. La fase nemática posee un alto grado de orden orientacional aunque no de orden traslacional, además de no existir una correlación de largo alcance entre los centro de masa de las moléculas, que le permite trasladarse libremente mientras permanezcan alineadas en promedio, paralelas una con otra, esta característica le da la posibilidad al nemático de fluir como un líquido. También existe una simetría rotacional alrededor del eje anisotrópico o director, entonces la fase nemática es *uniaxial*. Este eje uniaxial usualmente no tiene polaridad, aunque podría tenerla.

Es conveniente introducir un vector unitario \mathbf{n} , llamado el director, para describir la dirección local del alineamiento promedio de las moléculas, al no existir polaridad en el eje anisotrópico en dichas moléculas implica que \mathbf{n} y $-\mathbf{n}$ son indistinguibles, es decir no tiene relevancia física el cambio de signo.

Fase Colestérica: La fase colestérica se conoce también como fase nemática quiral, (esto significa que su imagen especular no puede hacerse coincidir con la imagen real) aunque al igual

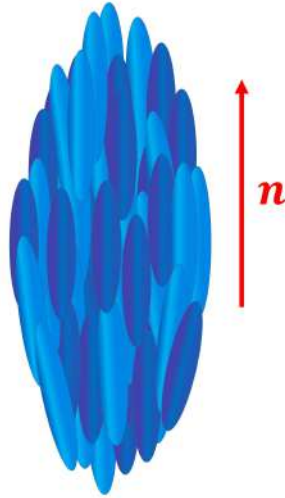


Figura 2.2.1: Arreglo molecular de la fase nemática, las moléculas se alinean en promedio con el vector director \mathbf{n} .

que las moléculas en el nemático, para la fase colestérica se consideran modelos de moléculas en forma de barra o disco. La fase colestérica puede describirse como una fase formada por una gran cantidad de capas nemáticas apiladas, sin embargo en la fase colestérica el director \mathbf{n} de estas capas realizan un giro a cierto ángulo de una capa a la otra alrededor del eje χ normal al director. La quiralidad de la molécula nos indica si la fase es de lateralidad izquierda o derecha, esta energía de giro es pequeña comparada con la energía total de alineamiento paralelo de las moléculas [37]. Este arreglo helicoidal exhibe propiedades ópticas como reflexión selectiva de luz polarizada circularmente y un alto poder rotativo. Las primeras investigaciones sobre CL se realizaron con ésteres de la colesterina que presentaban las características arriba descritas, de allí el nombre de *fase colestérica*. Una representación esquemática de esta fase puede verse en la figura (2.2.2)

Fase Azul : Son consideradas mesofases tridimensionales. Están constituidas de moléculas quirales que se organizan en un forma inhomogénea. Sea \mathbf{n} algún vector director, digamos a lo largo del eje z , como se puede ver en la figura (2.2.3). En el estado local de mas baja energía, las moléculas quirales en la vecindad de \mathbf{n} tiene la tendencia de rotar helicoidalmente a lo largo de todas las direcciones perpendiculares a \mathbf{n} . Esta geometría la cual se conoce doble-twist, es energéticamente preferible al giro en 1D, al menos para algunos materiales quirales. Sin embargo, como la distancia del director $\mathbf{n} \parallel z$ incrementa [36].

2.3. Densidad de Energía Libre

La anisotropía presente en los cristales líquidos dota a estos de propiedades elásticas, eléctricas, magnéticas y ópticas tensoriales. Las aplicaciones de estos materiales principalmente se basan en dichas propiedades y en como reaccionan a perturbaciones externas. Las propiedades

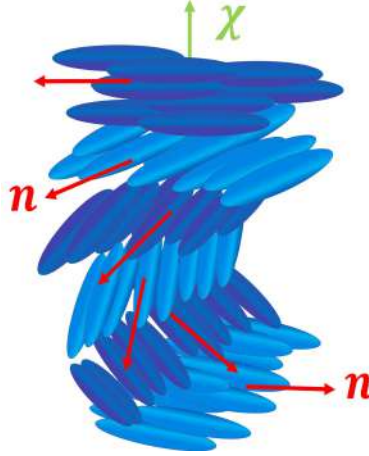


Figura 2.2.2: Arreglo molecular para la fase colestérica, el director \mathbf{n} realiza un giro de una capa a la otra alrededor del eje χ .

pueden clasificarse en escalares: como los parámetros de transición termodinámicos (es decir, a las posibles transiciones de fase), y tensoriales como los coeficientes dieléctricos, diamagnéticos, viscosos, ópticos y elásticos. En esta sección nos centraremos en las propiedades elásticas, mientras que en capítulos posteriores a propiedades no escalares, como dieléctricas etc.

Cuando intentamos deformar la configuración descrita por \mathbf{n} , generamos una reacción, una fuerza restitutiva de naturaleza elástica, las constantes de proporcionalidad de los esfuerzos de deformación y restitución se conocen como constantes elásticas [35]. En el siguiente desarrollo vamos a considerar un medio débilmente deformado, deformaciones fácilmente observadas ópticamente que tiene una energía libre asociada como veremos a continuación.

Podemos describir el estado de deformación de la fase nemática o colestérica, a una temperatura fija T mediante el director \mathbf{n} . Es natural asociarle a la energía libre¹ una dependencia de deformación involucrando explícitamente el gradiente del director es decir, $\nabla\mathbf{n}$, que en componentes se escribe como $\partial n_i/\partial x_j$ o $n_{i,j}$ [[35]]. Será necesario también suponer una distorsión pequeña, es decir:

$$|n_{i,j}| \ll \frac{1}{a}, \quad (2.3.1)$$

donde a es el tamaño típico de la molécula, esta condición presenta varias ventajas, podemos definir una orientación $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ tangente a cada punto \mathbf{r} , de tal manera que sea posible hacer una descripción continua del medio mesofásico [35]. En cualquier punto \mathbf{r} las simetrías que presenta la orientación del director \mathbf{n} , deberán hacerse presentes en la densidad de energía libre, que denotaremos por $f(\mathbf{r})$, la cual también debe depender explícitamente de sus derivadas $\nabla\mathbf{n}$, esta energía libre es invariante bajo cualquier cambio de orientación tanto de \mathbf{n} como de $\nabla\mathbf{n}$. Así la densidad de energía libre ya sea de la fase nemática o colestérica tiene que ser invariante bajo

¹La energía libre que asociamos a las deformaciones es la energía libre de Helmholtz (F), pues estamos considerando sistemas isotérmicos a volumen constante. Esta energía cumple $dF = -SdT + PdV$ [[47]]

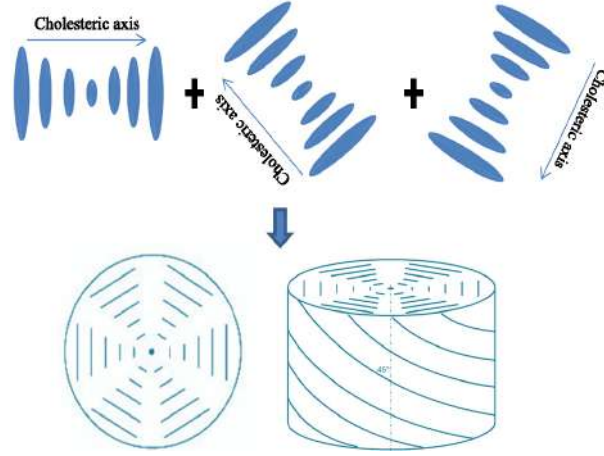


Figura 2.2.3: Arreglo molecular para: Fase azul (double-twist)

cualquier operación que preserve la orientación local de \mathbf{n} . Dicha condición también revela una invarianza bajo la operación $\mathbf{n} \rightarrow -\mathbf{n}$, operación común tanto en nemáticos como en colestéricos, cabe hacer la observación de que esta operación de simetría no es una transformación espacial que transporte materia, tampoco es una inversión central, sino una operación en el parámetro de orden espacial que no afecta las moléculas físicas, la ausencia de inversión central impide que tal operación transforme un colestérico de giro derecho en uno de giro izquierdo. Por otro lado la invarianza bajo rotaciones de π alrededor del director \mathbf{n} , del eje de la hélice que denotamos por χ y del eje transversal $\tau = \chi \times \mathbf{n}$, preservan la orientación local de \mathbf{n} .

Tanto en la fase nemática y colestérica es necesario restringir el desarrollo de la densidad de energía libre a términos cuadráticos pues la restricción de la ecuación (2.3.1), indica que $\nabla \mathbf{n}$ es muy pequeño.

El único invariante escalar lineal es $\nabla \cdot \mathbf{n} = n_{i,i}$, mientras que el único invariante bajo cualquier rotación es $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n} = \epsilon_{ijk} n_{k,j} n_i$, donde ϵ_{ijk} es el tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita. Podemos observar que $\nabla \cdot \mathbf{n}$ es impar en \mathbf{n} por lo tanto debe ser excluido del desarrollo de la densidad de energía libre; sin embargo el término $(\nabla \cdot \mathbf{n})^2$ está permitido para nemáticos y colestéricos. El término $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}$ cambia de signo bajo de inversión de coordenadas, por lo que sólo aparece en la densidad de energía libre para la fase colestérica, finalmente el invariante escalar $(\nabla \times \mathbf{n})^2$ aparece en ambas fases.

Utilizando la identidad $(\nabla \times \mathbf{n})^2 = (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2$, donde ambos términos del lado derecho son invariantes simétricos, la densidad de energía libre restringida a derivadas de primer orden, para el caso del nemático se escribe como:

$$f_{FO} = \frac{1}{2} K_1 (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} K_2 (\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2 + \frac{1}{2} K_3 (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2. \quad (2.3.2)$$

A la expresión (2.3.2) se le conoce como densidad de energía de Frank-Ossen donde K_1 , K_2 y K_3 son las constantes elásticas de Frank todas positivas y del orden $\sim 10^{-12}$ N. Para la fase colestérica en presencia del término $\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n})$ nos conduce a la expresión:

$$f_{FO} = \frac{1}{2}K_1(\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}K_2(\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}) + q_0)^2 + \frac{1}{2}K_3(\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2, \quad (2.3.3)$$

donde $q_0 = 2\pi/p$, con p el periodo espacial o paso (pitch) de la fase. Para q_0 positivo en la fase colestérica tomaremos la convención de giro derecho, mientras que para q_0 negativo cuando la fase sea de giro izquierdo. Hemos presentado una breve introducción a los CL, con el objeto de mostrar que, si bien existe una forma de analizar la estructura elástica de estos materiales, tomaremos ciertas características para trabajar con nuestro modelo. Como hemos descrito arriba, la densidad de Frank describe el estado de deformación del material, aunque solo lo haga en el bulto sin considerar las condiciones de frontera y hasta que el material haya alcanzado un estado de equilibrio termodinámico es como se puede realizar el análisis de dichas configuraciones en equilibrio, de esta manera es necesario señalar que el modelo debe considerar estos efectos en las fronteras y la propagación de ondas elásticas en su interior, o núcleo para el caso de guías de onda, lo cual haremos en capítulos posteriores. Sin embargo, por completes hemos presentado que existe un modelo para el análisis de CL sin considerar su evolución en el tiempo, cuyo estudio de la dinámica esta bien establecido para configuraciones fuera del equilibrio, y del cual no haremos uso, pues nuestro enfoque estará en los materiales artificiales ya que a estos se les puede aplicar la teoría clásica de elasticidad considerando deformaciones pequeñas relativas.

A continuación presentamos la construcción del objeto de nuestra investigación, una guía de onda elástica con núcleo de doble hélice, el que se construirá de forma artificial para nuestra investigación, motivada por los CL en la naturaleza y su aplicación a la ciencia de materiales.

2.4. Construcción de una guía de onda con núcleo de doble hélice

Como ya vimos, los Cristales Líquidos Colestéricos (CLC) exhiben estructuras helicoidales, que poseen un eje de giro perpendicular en una dirección que yacen localmente en un plano, esta estructura proviene de la quiralidad de sus moléculas como se ve en la figura(2.4.1). Los CLC se representan esquemáticamente como capas apiladas con un orden orientacional en cada plano que rota un ángulo constante de capa a capa. Sin embargo, en los CL, esta representación de capas no tiene realidad física ya que los CLC no son sistemas de capas, En el caso de los CLC las *capas* están formadas por moléculas en forma de barras rígidas, que localmente se les conoce como CL nemáticos; moléculas orgánicas orientadas que se pueden mover libremente el plano pero de capa a capa es poco probable debido al gasto de energía que tendrían que hacer, de allí que posean las propiedades de un líquido y un sólido dependiendo de la dirección de estudio. Los CLC se caracterizan por el paso helicoidal p y la dirección de torsión. El paso o pitch, es la distancia a lo largo del eje helicoidal en la cual el director efectúa una rotación de 360° ; mientras que el sentido de giro, determina si son de hélice derecha o izquierda. Hasta la fecha no existe un método para predecir cual será el sentido de la hélice. La helicidad de los CLC los hace únicos, ya que polarizan la luz circularmente cuando se incide luz natural en ellos. Por otro lado cuando se confinan en placas paralelas y se aplican diferencias de potencial, las

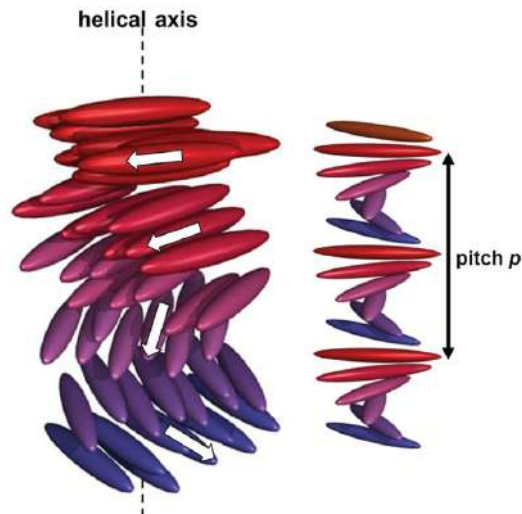


Figura 2.4.1: Estructura helicoidal de un Cristal Líquido Colestérico (CLC) [2]

moléculas se orientan en dirección del campo aplicado [34], lo que modifica la frecuencias de la onda EM, y permiten seleccionar algún color del espectro EM visible, variando la diferencia de potencial. Estas propiedades ópticas se aprovechan para la fabricación de sensores basados en cambios de color, por ejemplo.

Existen otros CL, que son de interés para nuestra investigación, que presentan dos hélices en sus estructuras, que se conocen como *CLC de doble hélice o simplemente, fase azul*. Básicamente están formados por el entrecruzamientos de dos estructuras colestéricas como se puede ver en la figura (2.2.3). Con esta idea de que los CL localmente se pueden ver como un montón de capas apiladas, es posible construir materiales artificiales dotados de esta propiedad, y justamente con esa idea en mente construiremos nuestro modelo de guía de onda, como veremos a continuación.

2.4.1. Medios Quirales artificiales

Como hemos mencionado el modelo de capas para representar un CLC es un modelo que no corresponde a la realidad física [2]. La teoría clásica de medios continuos no describe cristales líquidos. Sin embargo, es posible desarrollar una teoría que contemple a estos materiales, la teoría elástica de mesofases o materia suave (*soft matter*) se encarga del estudio de esta descripción fenomenológica [35, 36]. Como mencionan S. Pikin y L. Blinov en [37], los CL son sustancias que constan de moléculas orgánicas, y entre los compuestos inorgánicos no se ha encontrado, por ahora ningún cristal líquido aunque, en principio esto no excluye su existencia.

Por lo anterior, el material de estudio puede ser construido de forma artificial que presente una estructura helicoidal o de doble hélice. Por tanto la teoría clásica de medios continuos es aplicable sí y solo sí el material es un sólido ligeramente deformado, en el caso de la teoría elástica lineal.

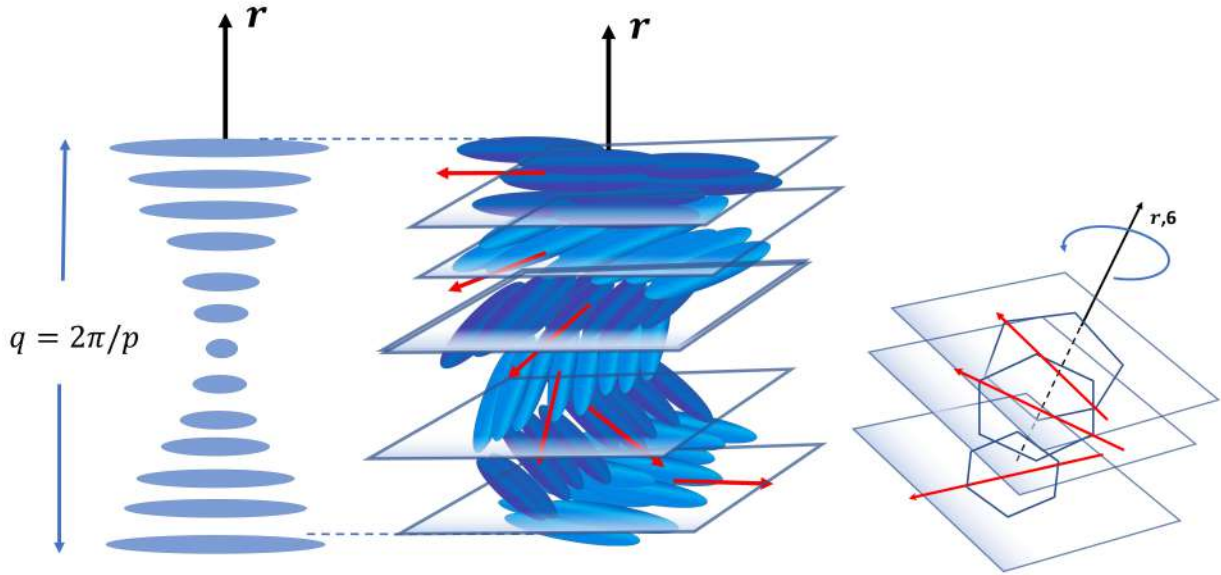


Figura 2.4.2: (Izq.) Representación por capas de un material quiral con eje de giro en \mathbf{r} . (Der.) Estructura de las películas delgadas localmente hexagonales, depositadas para formar el material de estudio. El eje de simetría del material hexagonal 6 y el eje r del sistema de coordenadas cilíndricas coinciden, cada película apilada presenta un giro de ángulo constante, dotando al material de quiralidad.

2.4.2. Modelo de capas para un material con geometría local

Comenzaremos con la idea de capas o películas delgadas, las cuales pueden ser depositadas mediante diferentes técnicas como lo son la deposición química y física de vapor, por ejemplo. Observemos la figura (2.4.2), de cada en capa se puede dar un giro alrededor del eje que hemos etiquetado como $r,6$ hasta formar la estructura deseada, el material depositado posee una simetría material, que en este caso particular es hexagonal, cuya simetría tiene la nomenclatura H_6 . También observemos que hemos alineado el eje de simetría del material con el eje r del sistema de coordenadas polares cilíndricas. Aquí ya no estamos haciendo referencia a un cristal líquido, únicamente nos ha servido como diseño de nuestra estructura artificial, es importante mencionarlo ya que el análisis de esta estructura artificial, es posible llevarlo a cabo con la teoría clásica de elasticidad, pues el material es un sólido cristalino el cual se le puede deformar solo hasta cierto régimen que la teoría establece, es decir, deformaciones pequeñas.

A continuación, presentamos el dispositivo de investigación, como señalamos un guía de onda se representa en un espacio semi-infinito, lo que es técnicamente imposible construir. Sin embargo, si consideramos que la construcción del dispositivo es lo suficientemente grande comparado con su sección transversal es posible representar adecuadamente una guía de onda que no considera los efectos de los bordes y que únicamente las superficies laterales están sometidas a esfuerzos. Presentamos el esquema del material en la figura (2.4.3). Observemos que el eje (1) coincide con el eje z , y mientras se lleva a cabo una rotación de 2π vueltas (de acuerdo a como

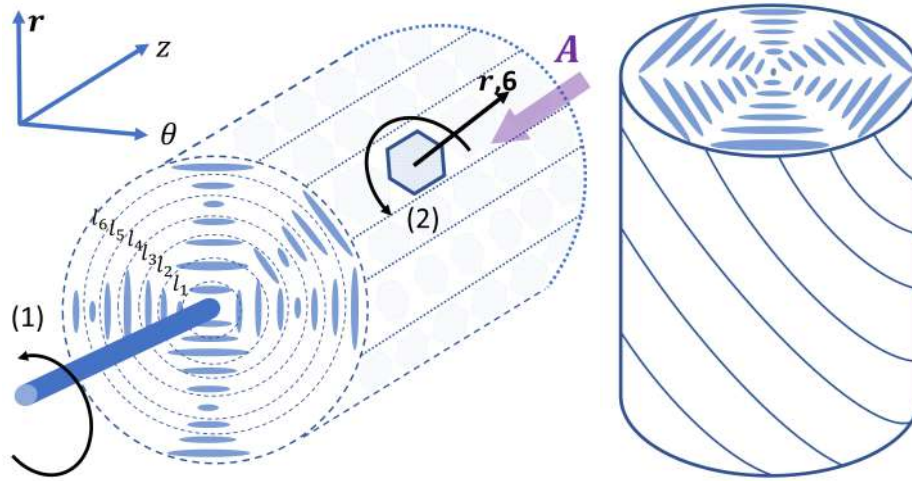


Figura 2.4.3: (Izq.) Construcción artificial de un material de doble hélice por medio de las técnicas, deposición química (ó física) de vapor, con geometría cilíndrica y de sección transversal circular. El eje (1) se alinea con la fibra en z , posteriormente se deposita el material evaporado en dirección A paralela al eje r , a continuación se efectúa un giro de 2π alrededor del eje (1), una vez realizada la vuelta completa, se da la quiralidad colestérica haciendo un giro en (2) ángulo constante alrededor del eje $r, 6$, y nuevamente se deposita el material en A girando en (1) un ángulo de $\pi/2$. Este proceso genera una película delgada enrollada en la fibra la que llamamos l_1 , siguiendo la misma técnica obtenemos l_2, l_3, l_4, l_5, l_6 , etc. (Der.) Se presenta el material artificial en forma cilíndrica.

queramos el sentido de la hélice) sobre este eje se aplica una película del material en la dirección A , la cual es paralela con el eje r , esto con la finalidad de ir construyendo el eje de las hélices del material quiral, que deberán coincidir con el eje de simetría del material hexagonal local, por construcción. Efectuada una vuelta completa dotamos al material de quiralidad girando sobre (2) un ángulo constante y pequeño alrededor del eje $r, 6$. Una vez realizado este giro se aplica nuevamente el material evaporado siguiendo el procedimiento anterior sobre el eje (1) y repitiéndose cada vuelta y cada giro en (2), este proceso termina una vez obtenido un material con la característica deseada de doble hélice como se puede observar esquemáticamente en la figura derecha de (2.4.3)

Para finalizar este capítulo, es importante hacer las siguientes observaciones: primero, estamos suponiendo que el material se puede construir, no como un dispositivo teórico sino porque realmente existe todo un estudio sobre la construcción de estos materiales, como se puede ver en el amplio trabajo de A. Lakhtakia, *Sculptured thin Films* [114], en el que menciona: *Todo es escultura, cualquier material, cualquier idea sin obstáculos en el espacio, yo lo considero escultura*. En el trabajo de Lakhtakia se proporciona el conocimiento básico de la morfología y las características de respuesta óptica de las películas delgadas esculpidas (STFs), que se han diseñado mediante nanoingeniería con la técnica deposición física direccional de vapor (PDV por sus siglas en inglés, *Physical Vapor Deposition*) sobre sustratos en ángulos oblicuos. Segundo, las películas

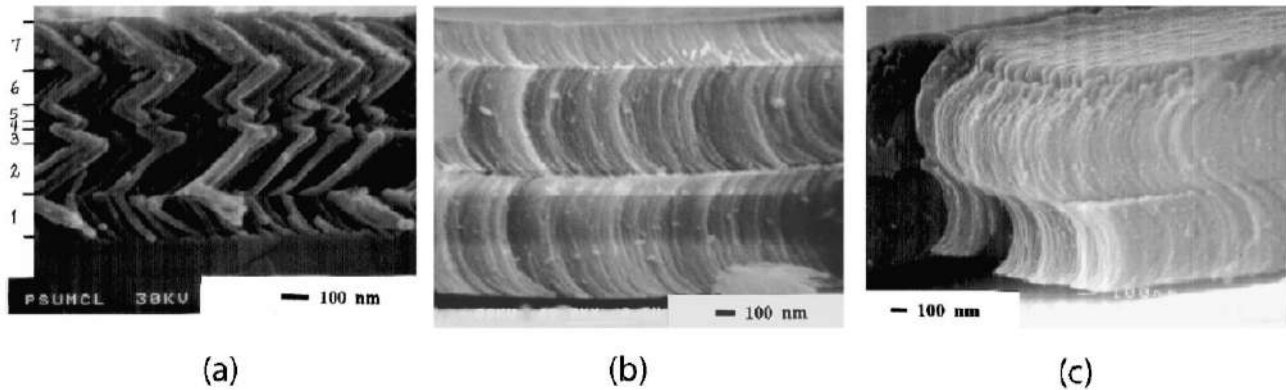


Figura 2.4.4: Micrografías SEM de STFs hechos de óxidos de Titanio (TiO_2) con morfología bidimensional: (a) zigzag de 7-sección; (b) Forma- C ; (c) Forma- $S[114]$

delgadas isotrópicas no son STFs debido a la ausencia de anisotropía y tampoco los materiales orgánicos se consideran. Finalmente, en la exploración de las tendencias de investigación en las ciencias de los materiales [115], un tema que surgió, es el de las morfologías y arquitecturas de los materiales, entre ello se encuentran los STF y CVD (*Chemical Vapor Deposition*), estos materiales inorgánicos noestructurados con propiedades anisotrópicas y que varían unidireccionalmente se puede diseñar y fabricar de manera controlada [116, 117, 118, 119], además de que en el caso del PDV, la capacidad de controlar virtual e instantáneamente la dirección de crecimiento de su morfología columnar, a través de simples variaciones en la dirección del flujo de vapor incidente, conduce a un amplio espectro de formas columnares. Estas formas pueden ser:

(i) bidimensional, que van desde simples columnas inclinadas hasta las morfologías más complejas en formas de C y S [120].

(ii) tridimensional, incluidas las hélices simples y las superhélices [121].

En las figuras (2.4.4) y (2.4.5), se presentan algunos ejemplos de SFTs para diferentes materiales construidos como SFTs, los cuales pueden ser óxidos: óxido de aluminio, de silicio, tantalio, titanio y circonio; metales: aluminio, cobre, tungsteno; semiconductores; carbono, germanio; polímeros: parileno, teflón etc.

En los siguientes capítulos desarrollaremos el modelo partiendo desde la base de las ecuaciones fundamentales que gobiernan la propagación de ondas elásticas, con todas las consideraciones realizadas a lo largo de este capítulo.

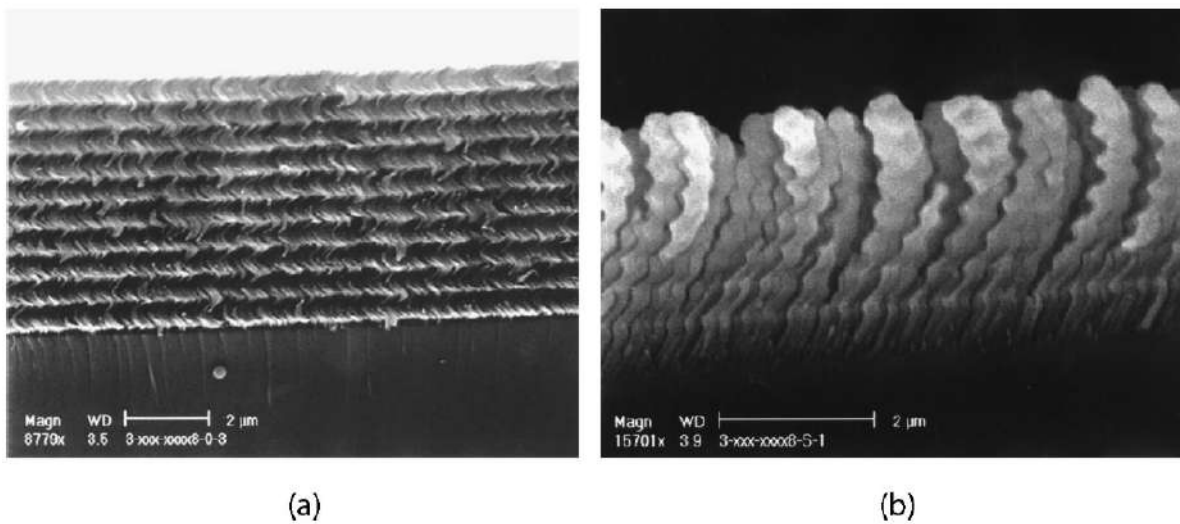


Figura 2.4.5: Micrografía SEM de STFs con morfología en tres dimensiones: (a) helicoidal, hecho de óxido de silicio (SiO); (b) superhélice, hecho de MgF_2 . [114]

Capítulo 3

Elastodinámica lineal

En este capítulo desarrollamos las ecuaciones fundamentales de la elastodinámica lineal, la cual ha sido construida a partir de la mecánica clásica y de la termodinámica, imponiendo la hipótesis del continuo, la cual establece que la descripción fenomenológica no se ocupa de las moléculas del medio ni de la deducción de las ecuaciones a partir de conceptos microscópicos¹. En su lugar se considera que un elemento de volumen debe ser lo suficientemente grande para que nos afecten las interacciones microscópicas (o efectos cuánticos), pero lo suficientemente pequeño para que se aplique las reglas del análisis vectorial. La hipótesis del continuo es válida si podemos encontrar volúmenes característicos $V = a^3$, tales que $l \ll a \ll L$, (donde L es una longitud característica de dimensiones macroscópicas [38, 39, 40]), de manera que mientras las dimensiones macroscópicas sean mucho mayores que l (donde l se toma como la longitud libre media), podemos encontrar un volumen adecuado a^3 .

La teoría de guías de onda elásticas tiene como fundamento la teoría clásica de elasticidad, dentro de ella existen dos enfoques para describir las deformaciones que sufre un material, cuando es sometido a esfuerzos mecánicos: Lagrangiana o material y Euleriana o espacial. En general las ecuaciones que gobiernan los fenómenos ondulatorios en medios elásticos no son lineales, sin embargo los experimentos en guías de onda indican que los aspectos importantes de la propagación de ondas pueden describirse adecuadamente mediante ecuaciones lineales, que simplifican de manera importante las formulaciones matemáticas, este proceso se llama linealización (cuya validez bajo ciertas hipótesis parece que satisfacen muchos estudios de propagación de ondas como se puede ver en [41]), donde las descripciones materiales y espaciales son equivalentes entre sí. Un análisis completo sobre las cantidades físicas en las descripciones, Euleriana y Lagrangiana, se puede encontrar [42], págs. 11 – 21 y 46 – 47, [43] págs. 497 – 565 y [44] págs. 9 – 10 y 226 – 246.

Para iniciar nuestro estudio de la teoría elástica lineal, identificamos al vector posición \mathbf{X} al tiempo t_0 , que a su vez identifica un punto material de un continuo (el cual es el objeto de estudio), para un tiempo posterior t el vector posición del punto material \mathbf{X} esta dado por \mathbf{x} , entonces podemos asignar una función como $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, que da la posición \mathbf{x} del punto material \mathbf{X} en el tiempo t , esta es una descripción material, donde \mathbf{X} identifica un el punto material.

¹De este enfoque microscópico se ocupa la teoría cinética de gases o la mecánica estadística de sistemas fuera del equilibrio[38]

Dado que asumimos que la transición del punto material desde la posición inicial al actual ocurre de manera suave, el vector \mathbf{x} es una función continua al igual que su función inversa, la cual podemos expresar como una función de la forma $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, la cual fija nuestra atención en una región dada en el espacio y toma la posición \mathbf{x} y el tiempo t como variables independientes, esta es la descripción espacial. De estas descripciones tenemos que la deformación puede medirse desde dos perspectivas diferentes, mediante el vector de desplazamiento. Se puede mostrar que ambas son equivalentes como mostraremos en seguida.

3.1. Equivalencia entre las descripciones Lagrangiana y Euleriana

Usando la descripción material podemos escribir el vector de desplazamiento como $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$, mientras que en la descripción espacial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, notemos que en el tiempo inicial $\mathbf{x} = \mathbf{X}$. Ya que

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (3.1.1)$$

es la misma cantidad, donde las representaciones material y espacial están relacionadas por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Podemos desarrollar cada componente de $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ en un serie de Taylor alrededor de \mathbf{x} y así obtener

$$U_i(\mathbf{X}, t) = U_i(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}} + \nabla U(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{x}) + \dots, \quad (3.1.2)$$

con $i = 1, 2, 3$. Si asumimos que el gradiente del desplazamiento es muy pequeño, podemos considerar solo el primer término de la serie, en consecuencia

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \approx \mathbf{U}(\mathbf{x}, t), \quad (3.1.3)$$

por lo tanto podemos escribir la expresión $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$, ahora usando $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, el desplazamiento como función de \mathbf{x} se reescribe como

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t), \quad (3.1.4)$$

por lo tanto

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (3.1.5)$$

y finalmente del primer término de la serie de Taylor podemos concluir que

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (3.1.6)$$

el significado de este resultado es que, si examinamos (3.1.1) y (3.1.6), la primera establece que $\mathbf{U} = \mathbf{u}$, con \mathbf{x} relacionado con \mathbf{X} mediante la función $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, la ecuación (3.1.6) establece que $\mathbf{U} \approx \mathbf{u}$, donde simplemente podemos reemplazar \mathbf{x} por \mathbf{X} sin involucrar el mapeo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$. Ahora, podemos considerar la velocidad usando ambas descripciones mediante el mismo procedimiento de linealización, así es posible mostrar que la derivada material, la cual se deduce mediante la regla de la cadena, tiene la forma

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (3.1.7)$$

se puede aproximar si ambos gradientes de \mathbf{u} y \mathbf{v} son infinitesimales, y por lo tanto se puede aproximar como

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (3.1.8)$$

por otro lado si consideramos la aceleración de ambas descripciones derivando en el tiempo (3.1.7) obtendremos

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (3.1.9)$$

y de manera similar si ambos gradientes de $\partial \mathbf{u} / \partial t$ y \mathbf{v} son infinitesimales, se puede ignorar el segundo término y por lo tanto

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2} \approx \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.1.10)$$

Podemos concluir que bajo las hipótesis de los desplazamientos infinitesimales de un elemento del medio continuo, no es necesario distinguir entre ambas descripciones, por lo tanto $\mathbf{X} \approx \mathbf{x}$ y $\mathbf{U} \approx \mathbf{u}$, y considerando que las velocidades de los desplazamientos, y los gradientes de esos desplazamientos son infinitesimales y además que los gradientes de esa velocidades también son infinitesimales entonces $d\mathbf{U}/dt \approx \partial \mathbf{u} / \partial t$ y $d^2\mathbf{U}/dt^2 \approx \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$, cuyas aproximaciones son independientes entre sí, y son el resultado del contexto físico. Por ejemplo en el contexto de la sismología aplicada, se asume que la amplitud de los desplazamientos de un punto material son pequeños en comparación con la longitud de onda y la velocidad de fase de éstos es pequeña en comparación con la propagación de la onda.

3.2. El tensor de deformaciones.

Las guías de onda consisten en la propagación de las deformaciones a través de un medio material, por ello es deseable el estudio de las deformaciones asociadas a un medio continuo en el contexto de desplazamientos infinitesimales, estas deformaciones del medio son un cambio de posición de puntos dentro del medio en relación con los demás, si tal cambio sucede se dice que el continuo se deforma, esta deformación va acompañada por un esfuerzo, el esfuerzo producido resiste a la deformación e intenta restaurar al medio a su estado sin deformación, esta competencia entre deformación y restitución vía el esfuerzo, explica la propagación de las ondas en una guía de onda o de las ondas sísmica. La relación entre esfuerzo y deformación es un concepto intrínseco de la teoría de elasticidad, en esta teoría las fuerzas aplicadas sobre una superficie están formuladas en términos del *tensor esfuerzos*, mientras que las deformaciones son asociadas al *tensor de deformaciones*.

En la literatura, existe un gran número de deducciones del tensor de deformaciones, unas más generales que otras, por ejemplo en [45] éste tensor se deduce mediante bases de sistemas de

coordenadas covariantes y contravariantes, una deducción más amena puede encontrarse en [46]; en [41] utiliza el sistema cartesiano para realizar su deducción y generaliza del sistema cartesiano a cualquier sistema de coordenadas ortogonales, de manera similar en [38]. Sin embargo, para propósitos de nuestra investigación y por simplicidad usaremos el enfoque presentado por [47], aunque no es la expresión más general, no por ello carece de rigor.

A continuación, vamos a indicar un cambio de notación, en el que usamos variables primadas minúsculas para la referirnos a al deformación en lugar de mayúsculas como lo hemos hecho arriba. Como mencionamos anteriormente, las deformaciones en un medio continuo se pueden describir matemáticamente sí tomamos la posición de un punto del cuerpo y se define por un vector de posición, que de acuerdo al análisis anterior, identificamos como $\mathbf{x} = \mathbf{r}$, (a menos que se indique lo contrario) este vector de posición (y por lo tanto geométrico) tiene componentes x_1 x_2 x_3 , en algún sistema de coordenadas ortogonales, cuando el cuerpo es sometido a un esfuerzo, éste sufre una deformación y por ello todo punto dentro del medio es desplazado. Sin pérdida de generalidad, tomamos un punto material arbitrario el cual identificamos como \mathbf{r} , (la identificación del punto material juega un papel doble, el etiquetar al punto mediante el vector posición y a su vez identificar su existencia como punto material, véase [46]) después de la deformación su vector posición se identifica como \mathbf{r}' , de esta forma podemos identificar el desplazamiento de este punto debido a la deformación por el vector de desplazamiento $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, podemos observar de manera esquemática este vector en la figura (3.2.1), el cual como ya vimos se puede expresar en su forma indicial por

$$u_i = x'_i - x_i. \quad (3.2.1)$$

Notemos que si el vector \mathbf{u} es una función de x_i , entonces la deformación del cuerpo queda determinada por completo (observemos que x'_i es función función de x_i).

A continuación, vamos a consoderar que el cambio entre los puntos debido a una deformación se encuentran infinitesimalmente cerca, si el radio vector que los une antes de la deformación es dx_i^2 , el radio vector que une los puntos (cuando nos referiremos a puntos hablamos de puntos materiales) después de la deformación es dx'_i , la distancia entre estos puntos se expresa como $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ y $dl'^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2$, antes y después de la deformación respectivamente, en notación de Einstein es posible simplificar las expresiones anteriores como $dl^2 = dx_i^2$ y $dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2$, mediante la regla de la cadena la variación espacial del vector de desplazamientos se expresa como $du_i = (\partial u_i / \partial x_k) dx_k$, entonces desarrollando adecuadamente obtenemos

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l, \quad (3.2.2)$$

observemos que

$$2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k, \quad (3.2.3)$$

²A partir de aquí, se usa la convención de suma de Einstein para índices repetidos, además se da por hecho el uso de la notación indicial, para una explicación de esta representación véase [45].

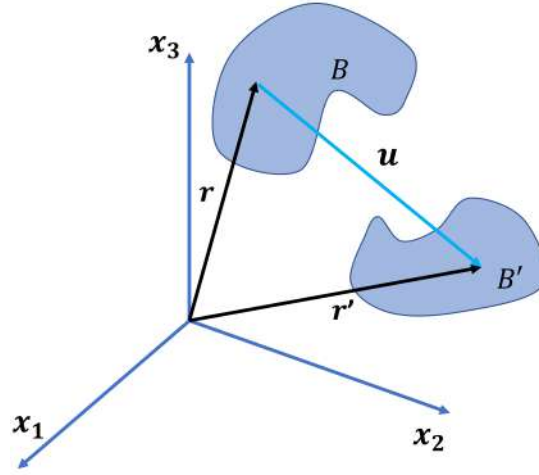


Figura 3.2.1: Representación esquemática para un sistema de coordenadas ortogonales x_i . Se presenta el vector de desplazamientos $\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, de un punto material en \mathbf{r} para un cuerpo sin deformar B a un punto material en \mathbf{r}' para un cuerpo deformado B' .

es una representación explícita de un tensor simétrico, el tercer término del lado derecho de (3.2.2) se puede intercambiar los índices i y k , podemos expresar (3.2.2) en una forma compacta como

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik}dx_i dx_k, \quad (3.2.4)$$

donde

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right), \quad (3.2.5)$$

esta expresión provee el cambio de un elemento de longitud infinitesimal cuando el cuerpo se deforma, el tensor u_{ik} se conoce como tensor de deformación. Observemos que $u_{ik} = u_{ki}$, que al ser simétrico y real, puede ser diagonalizado en cualquier punto, es decir podemos elegir un eje coordenado donde los únicos elementos del tensor no nulos sean u_{11} , u_{22} , u_{33} ; este nuevo sistema de referencia recibe el nombre de ejes principales del tensor. Las componentes, es decir, los valores principales del tensor de deformaciones las denotaremos como $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$.

Supongamos que hemos encontrado tal sistema de ejes principales, entonces

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik} + 2u_{ik})dx_i dx_k \\ &= (1 + 2u^{(1)})dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)})dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)})dx_3^2, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

veamos la independencia de cada término, es decir la deformación en cualquier elemento de volumen se considera independiente para cada dirección mutuamente perpendicular del sistema principal. Cada una de ellas o bien es una extensión o compresión, dependiendo de su dirección en

cada eje, que se puede expresar como $dx'_i = \sqrt{1 + 2u^{(i)}}$, por ello podemos definir que la extensión relativa como $\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1$, que es consistente con la extensión relativa $(dx'_i - dx_i)/dx_i$ a lo largo de los ejes principales. Como ya hemos discutido, consideramos que los gradientes de \mathbf{u} son infinitesimales, por lo tanto también el producto y se puede despreciar, así obtenemos que el tensor de deformaciones linealizado toma la forma

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (3.2.7)$$

Otra observación importante es que si aproximamos la extensión relativa, considerando la discusión sobre los gradientes de \mathbf{u} , entonces $\sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)}$, y ya que $dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 = dV(1 + u^{(1)})(1 + u^{(2)})(1 + u^{(3)})$, nuevamente a primer orden de $u^{(i)}$, tenemos $dV' = dV(1 + u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)})$, la suma $u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$ de los valores principales de un tensor sabemos que es invariante y es igual a la suma de las componentes de la diagonal u_{ii} . Así finalmente el volumen relativo lo escribimos como

$$\frac{dV' - dV}{dV} = u_{ii}. \quad (3.2.8)$$

3.3. Ecuaciones de Balance General.

Los conceptos de inercia, fuerza, momento lineal y angular, y cómo se relacionan entre sí, son fundamentales para entender la dinámica de una partícula puntual. Estos conceptos se establecen en las leyes de movimiento de Newton. Aunque algunos afirman (erróneamente) que la primera ley de Newton es un caso particular de la segunda, ésta ley establece los sistemas de referencia, en donde son válidas las leyes, los cuales se conocen como sistemas inerciales. En esta sección se presentan los desarrollos clásicos de estos conceptos generalizados para un medio continuo, el cual considera la hipótesis del continuo y los aspectos termodinámicos asociados a éste; es este sentido los puntos (materiales) que se identifican poseen masa y por lo tanto densidad.

Consideremos un cuerpo deformable B e identifiquemos su volumen como V , la región ocupada por el cuerpo material, el cual tiene una superficie como frontera, que denotaremos por S . Supongamos que el cuerpo se encuentra en equilibrio mecánico (también termodinámico) y realizamos un corte con un plano π_0 , a causa del corte las fuerzas internas quedan desbalanceadas. Para recuperar el equilibrio, se aplica una fuerza externa e igual a la suma de la suma de las fuerzas desbalanceadas, que denotamos por el vector $\Delta \mathbf{f}$ aplicado en un punto P del plano π_0 , y a su elemento de área por ΔA . Si consideramos la componente $\Delta \mathbf{f}_i$ de la fuerza total que actúa en ΔA cuya normal exterior se puede representar como \mathbf{n} un vector unitario al plano, como podemos ver en la Fig.(3.3.1)

El esfuerzo promedio de la componente i se puede escribir como $\Delta \mathbf{f}_i / \Delta A$. Según el principio

3.4. El tensor de esfuerzos.

Notemos que si proyectamos \mathbf{t}_k en la base del sistema de coordenadas ortogonales, que denotamos como \mathbf{e}_i (con $i = 1, 2, 3$), obtenemos la siguiente cantidad

$$\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{e}_l = \sigma_{kl}, \quad (3.4.1)$$

observemos que $\mathbf{e}_l(\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{e}_l) = \mathbf{e}_l(\sigma_{kl})$ y que $\mathbf{e}_l(\mathbf{t}_k \cdot \mathbf{e}_l) = \mathbf{e}_l t_l = \mathbf{t}_l$, por lo tanto

$$\mathbf{t}_k = \sigma_{kl} \mathbf{e}_l, \quad (3.4.2)$$

como \mathbf{t}_k es independiente de \mathbf{n}

$$\mathbf{t}_{(-n)} = -\mathbf{t}_{(n)}. \quad (3.4.3)$$

a la expresión σ_{kl} , (con $k, l = 1, 2, 3$) se le conoce como *tensor de esfuerzos*. Podemos ver la distribución del esfuerzo en la Fig.(3.4.1). El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden y se puede representar en su forma matricial como

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.4.4)$$

a los esfuerzos tales que σ_{ij} $i = j$ se les conoce como las *componentes normales de esfuerzo*. Para las componentes tales que σ_{ij} $i \neq j$ los cuales son tangenciales a la superficie donde actúan se conocen como *componentes cortantes de esfuerzo*. Es posible relacionar el vector $\mathbf{t}_{(n)}$ con el tensor de esfuerzos como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{(n)} &= (\sigma_{kl} \mathbf{e}_l) n_k \\ &= \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Podemos concluir que el estado del esfuerzo del cuerpo deformado queda completamente determinado en términos del tensor de esfuerzos en \mathbf{r} como lo muestra (3.4.5), además se observa una dependencia lineal con el vector unitario a la superficie S . Recordemos que esta configuración es fundamental en la aplicación del principio de esfuerzos de Cauchy, que asegura la existencia de $\mathbf{t}_{(n)}$ en un punto P asociado intrínsecamente a una superficie. Esta asociación entre planos y vectores muestra la necesidad del uso de tensores, pues no sería posible la descripción fenomenológica de un continuo, únicamente usando vectores.

La búsqueda de invariantes asociadas a cantidades físicas, desencadenó la búsqueda de herramientas matemáticas capaces de describir correctamente los fenómenos físicos y sus invarianzas observadas. El nacimiento del análisis tensorial, cuya base nace de los notables matemáticos, B. Riemann y K. F. Gauss, quienes investigaban cantidades invariantes en superficies más generales (llamadas variedades), permitió la construcción de una teoría más general para la gravedad, gracias a los desarrollos de Levi y Civita, por ejemplo, presentados en el libro *Cálculo Diferencial Absoluto* [48]. El análisis tensorial tiene como objeto principal encontrar cantidades que se mantienen invariantes cuando se efectúa una transformación de coordenadas, lo que significa que ciertas cantidades deben ser las mismas sin importar desde que sistema de coordenadas se

midan. Estas transformaciones, se aplican a cantidades como el tensor de deformaciones y el tensor de esfuerzos⁴, veamos como se transforman y si en realidad son tensores.

Supongamos que queremos transformar el tensor de esfuerzos de un sistema de coordenadas x_i a un sistema primado x'_i es decir $x_i \leftrightarrow x'_i$, donde $x'_i = \psi_i(x_1, x_2, x_3)$, con ψ_i funciones univalueadas, continuas e independientes entre sí. La transformación debe tener inversa, más aún debe existir un conjunto difeomorfo (con inversa diferenciable), si se cumplen estas condiciones entonces el Jacobiano es no nulo y es posible escribir $x_i = \phi_i(x'_1, x'_2, x'_3)$. Podemos expresar la transformación de coordenadas mediante su bases, suponiendo que existan las funciones ψ_i, ϕ_i , entonces la base del sistema transformado se escribe como

$$\mathbf{e}'_i = A_{ij}\mathbf{e}_j, \quad (3.4.6)$$

como se ha supuesto al inicio del capítulo los sistemas son ortogonales, por ello $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, usando esta propiedad en (3.4.6) se tiene que

$$A_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad (3.4.7)$$

observemos que en el sistema primado $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = A_{ij}A_{ji}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = A_{ij}A_{ji}\delta_{ij} = \delta'_{ij}$, pero $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$.

El vector de esfuerzos en (3.4.5), se se puede expresar en ambos sistemas de coordenadas como

$$\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} = (\sigma_{kl}\mathbf{e}_l)n_k = (\sigma'_{kl}\mathbf{e}'_l)n'_k, \quad (3.4.8)$$

por (3.4.6) y siguiendo la regla de transformación para el vector unitario $n'_k = A_{km}n_m$ y simplificando adecuadamente obtenemos

$$(\sigma_{sr} - A_{js}A_{ir}\sigma'_{ji})n_s\mathbf{e}_r = 0, \quad (3.4.9)$$

sin embargo el valor de n_s se puede escoger arbitrariamente y por lo tanto

$$\sigma_{sr} = A_{js}A_{ir}\sigma'_{ji}, \quad (3.4.10)$$

que es la forma en la que se transforma el tensor de esfuerzos, con argumentos similares se puede mostrar que el tensor de deformaciones también se transforma como un tensor.

En la siguiente sección deduciremos las leyes de balance general, que nos permitirán posteriormente desarrollar nuestro modelo de guía de onda elástica.

3.5. Ley de balance general de masa.

Establece la continuidad de masa de un medio continuo, pues durante la deformación la masa total permanece constante, matemáticamente

⁴Aquí se ha abusado del término tensor ya que no se ha probado que en realidad estas cantidades cuenten con esa propiedad. Hemos usado el término tensor como una etiqueta para identifica a estas cantidades físicas *a priori* de conocer su naturaleza matemática.

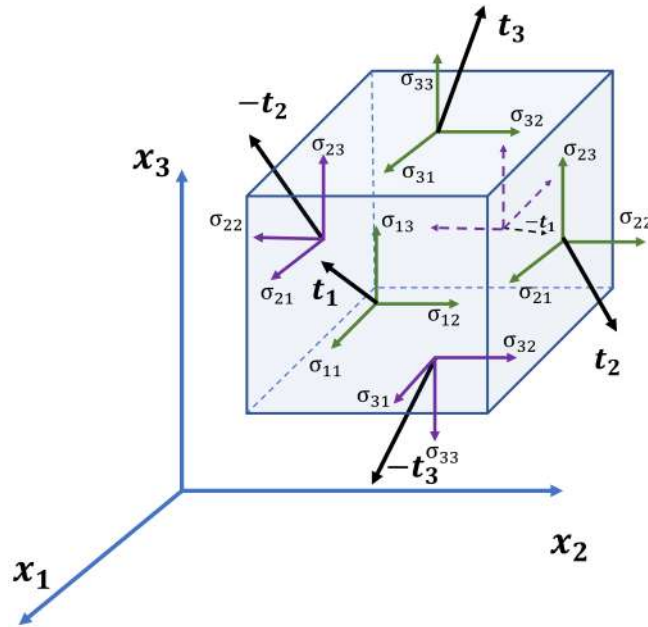


Figura 3.4.1: Representación de la distribución de esfuerzos en un paralelepípedo rectangular elemental.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho dv = 0, \quad (3.5.1)$$

donde D/Dt es la derivada material y ρ es la densidad. Usando el teorema de transporte de Reynolds⁵. Por otro lado, recordando la equivalencia entre las descripciones y tomando un volumen V arbitrario, obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.5.2)$$

donde $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

3.6. Ley de balance general de momento lineal.

La generalización de la segunda ley de Newton para medios continuos puede expresarse así: «La tasa de cambio de tiempo de momento lineal total de un cuerpo sometido a una deformación

⁵El teorema establece que para una función escalar $\phi(t)$ que depende del tiempo t :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \phi(t) dV = \int_{V(t)} \left[\frac{D\phi}{Dt} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] dV.$$

o flujo, está en balance con la suma total de las fuerzas de superficie de frontera del cuerpo y las fuerzas de cuerpo totales que actúan en el cuerpo entero⁶».

Sean \mathbf{f} las fuerzas de cuerpo por unidad de masa, $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ el vector de esfuerzos, las fuerzas resultantes que actúan en el cuerpo están dadas por

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dv = \oint_S \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da + \int_V \rho \mathbf{f} dv. \quad (3.6.1)$$

La integral que involucra a $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$, puede expresarse como

$$\oint_S \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da = \oint_S \sigma_{km} n_k \mathbf{e}_m da = \oint_S \mathbf{n} \cdot \underline{\sigma} da, \quad (3.6.2)$$

en término de diadas el tensor de esfuerzo se expresa como $\underline{\sigma} = \sigma_{km} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m$, si aplicamos el teorema de la divergencias de Green-Gauss [49], obtenemos que

$$\oint_S \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} da = \int_V \nabla \cdot \underline{\sigma} dv, \quad (3.6.3)$$

ahora, del lado izquierdo, podemos simplificar como⁷

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dv = \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} dv. \quad (3.6.4)$$

Sustituyendo (3.6.3), (3.6.4) en (3.6.1),

$$\int_V (\rho \dot{\mathbf{v}} - \nabla \cdot \underline{\sigma} - \rho \mathbf{f}) dv = 0, \quad (3.6.5)$$

el cual corresponde a la ley general de balance de momento lineal, válida para cada elemento de volumen, y además ya que dv es arbitrario tenemos finalmente que

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}} = 0. \quad (3.6.6)$$

La expresión (3.6.6) también se le conoce como la ecuación de equilibrio.

⁶Tomado textualmente de [45] pág. 320.

⁷Esta simplificación corresponde a la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dv = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dv = \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} dv$$

3.7. Ley de balance general de momento angular.

El principio de momento angular, establece que la tasa de cambio en el tiempo de las cambio de momento angular de un cuerpo con respecto a un punto dado es igual al momento que actúan en la superficie S de B , con respecto \mathbf{r} y a los momentos angulares a causa de las fuerzas de cuerpo con respecto a \mathbf{r} . De forma similar para el momentos angular respectivos $\mathbf{r} \times \mathbf{t}_{(n)}$, $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$, que actúan en B son

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dv = \oint_S \mathbf{r} \times \mathbf{t}_{(n)} da + \int_V \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dv. \quad (3.7.1)$$

Usaremos la notación indicial para facilitar la manipulación algebraica:

$$\frac{d}{dt} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho v_k dv = \oint_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^n da + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_k dv \quad (3.7.2)$$

donde ε_{ijk} es el tensor de Levi-Civita, el cual es totalmente asimétrico[38]. Notemos que a la primera integral del lado derecho, se puede aplicar el teorema de la divergencia y ya que $\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{t}_k n_k$ así:

$$\begin{aligned} \oint_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k^n da &= \oint_S \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{qk} n_q da \\ &= \int_V \varepsilon_{ijk} (x_j \sigma_{qk,q} - \sigma_{jk}) dv, \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

donde $\sigma_{qk,q}$ representa la divergencia del tensor de esfuerzos.⁸ Por otro lado, del lado izquierdo podemos hacer la siguiente simplificación ⁹

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dv = \int_V \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} dv = \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k dv, \quad (3.7.4)$$

Por lo tanto la ley general de balance momento angular se puede reescribir como

$$\int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_j \dot{v}_k dv = \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{qk,q} dv + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_k dv, \quad (3.7.5)$$

Las integrales son de la misma forma por lo tanto

⁸Nótese que hemos utilizado en su forma vectorial la identidad $\nabla(\sigma \times \mathbf{r}) = -\mathbf{r} \times (\nabla \cdot \sigma) + \overleftarrow{\varepsilon} : \sigma$, siempre que $\sigma = \sigma^T$, donde $\overleftarrow{\varepsilon}$ en su forma indicial ε_{ijk} es el tensor de Levi-Civita [45].

⁹Esta simplificación corresponde a la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dv = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{r} \times \mathbf{v}) dv = \int_V (\rho \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) dv = \int_V (\rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) dv$$

$$\int_V \varepsilon_{ijk}(x_j(\rho \dot{v}_k - \sigma_{qk,q} - \rho f_k) - \sigma_{jk}) dv = 0, \quad (3.7.6)$$

utilizando la ecuación (3.6.6) y que la elección de dv es arbitrario tenemos finalmente que $\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0$, si expandimos las sumas para los índices j y k se observa que la condición anterior implica que

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}, \quad (3.7.7)$$

es decir, el tensor de esfuerzos es simétrico (y real por lo tanto diagonalizable) para la teoría clásica de medios continuos. Con la propiedad anterior se puede reescribir el tensor de esfuerzos en su forma matricial como

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.7.8)$$

el que este tensor sea simétrico permite encontrar un sistema de coordenadas x'_i en donde solo los esfuerzos normales actúan en un cuerpo deformable, por lo tanto en el sistema diagonalizable el tensor se puede escribir como

$$\underline{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{pmatrix}, \quad (3.7.9)$$

donde σ'_i son los valores principales, o eigenvalores. Supongamos por motivos esquemáticos que hacemos un corte con el plano $x_3 = 0$, entonces podremos ver como cambian los valores del tensor de esfuerzos al pasar a un sistema principal, véase la figura (3.7.1)

3.8. Ley de conservación de Energía.

Cuando un medio es sometido a fuerzas superficiales y de cuerpo, estas fuerzas realizan trabajo, como consecuencia el cuerpo sufre una deformación, y mediante este trabajo se genera una diferencia de energía. El análisis está enfocado únicamente a la energía mecánica y la térmica. La energía total es formada por el trabajo realizado por las fuerzas sobre el cuerpo y la energía térmica, y una parte de esta energía es consumida por la deformación en forma de energía cinética, lo restante es energía interna del cuerpo B , que se expresa en cambio de energía térmica y energía de deformación. La tasa de cambio en el tiempo de la suma de la densidad de energía total interna $E = \int_V \rho e dv$ y cinética $K = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv$, de un medio continuo son iguales a la suma de las tasas de trabajo hechas por las fuerzas de cuerpo y superficiales W que producen la deformación, más la energía térmica Q que entra o sale del cuerpo con cierta tasa, es decir

$$\frac{d}{dt}(K + E) = W + Q \quad (3.8.1)$$

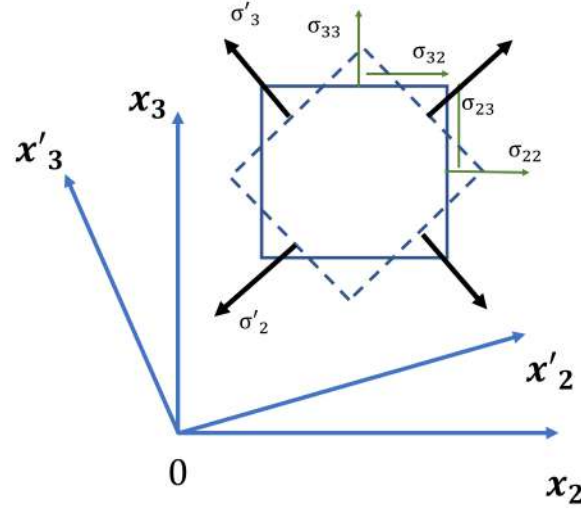


Figura 3.7.1: En el sistema principal x'_i el cuerpo es sometido solo a esfuerzos principales (normales) $\sigma'_2 \sigma'_3$.

La tasa de trabajo W considera la tasa de trabajo realizada en el área unitaria en una superficie de tracción (superficie donde $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})}$ en P está definido) que produce la velocidad de las partículas materiales se expresa como $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{v} dv$, y la tasa de trabajo hecho por unidad de masa en las fuerzas de cuerpo por $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv$, es decir,

$$W = \oint_S \mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{v} da + \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv. \quad (3.8.2)$$

Por otro lado la tasa de energía térmica que entra o deja el cuerpo se expresa como un vector de intercambio¹⁰ térmico \mathbf{q} por unidad de área de la superficie del cuerpo con vector unitario \mathbf{n} y una fuente de calor de densidad h (el cual es modelo fenomenológico), es decir

$$Q = \oint_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \rho h dv. \quad (3.8.3)$$

En consecuencia la ley de conservación de energía total se expresa como

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dv = \oint_S (\mathbf{t}_{(\mathbf{n})} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) da + \int_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho h) dv. \quad (3.8.4)$$

Utilizando el teorema de divergencia escribir la ecuación anterior como

¹⁰ Algunos autores lo definen como vector de flujo térmico, lo cual consideramos erróneo pues el calor no es un flujo sino un intercambio energético. El error es común al ser un término acuñado cuando se creía en la existencia del *calórico*, considerado como un fluido.

$$\int_V (\rho \dot{\epsilon} - \underline{\sigma} : \mathbf{D} - \rho h + \nabla \cdot \mathbf{q}) dv = 0, \quad (3.8.5)$$

donde $\underline{\sigma}$ y $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)/2$, realizan la operación de doble producto escalar definido en [45] y ya que dv es arbitrario, en consecuencia, la ecuación de balance para la energía total es

$$\rho \dot{\epsilon} - \underline{\sigma} : \mathbf{D} - \rho h + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (3.8.6)$$

veremos a continuación la importancia de esta última expresión aplicada a la teoría elastodinámica.

3.9. Ecuaciones Constitutivas: Ley de Hooke

Las ecuaciones constitutivas son aquellas relaciones que permiten cerrar, en el sentido de determinación matemática, el sistema de ecuaciones de balance general, pues como se han presentado estas parten de principios generales, sin considerar la naturaleza del material en donde actúan, este material hipotético puede ser natural o sintético y para conocer su respuesta a perturbaciones de cualquier clase se deben formular experimentos que muestren su comportamiento para distintas condiciones termomecánicas. Veamos el caso de la ley de Hooke para describir un resorte, esta ecuación indica la relación entre la fuerza que restituye el resorte, el cual es un material, con el desplazamiento a causa de la fuerza restituyente, esta relación, como se sabe, es lineal, como explica el propio Hooke, *tensio sic vis*¹¹, pero esta *ecuación constitutiva*, pos sí sola no explica la dinámica del fenómeno, para ello es necesario recurrir a las leyes de Newton, las cuales por sí solas no resuelven ningún problema. Esta simbiosis es fundamental para la investigación de materiales, pues basta dar la ecuación constitutiva de un material específico de estudio y junto con las ecuaciones dinámicas tenemos todo el espectro del comportamiento del material. En este sentido, para un medio continuo se tienen sus ecuaciones fundamentales por medio de las ecuaciones de balance general, para un material que presenta elasticidad lineal, (los comportamientos no lineales e inelásticos van más allá de los propósitos de esta investigación), no debemos confundir, la respuesta material con comportamiento lineal de las ecuaciones de balance. Mediante ensayos experimentales con probetas es posible establecer una dependencia del tensor de esfuerzos con el tensor de deformaciones para la región elástica lineal del material [51], es decir

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\epsilon}). \quad (3.9.1)$$

La ley de Hooke es una ecuación constitutiva que sirve en la fase elástica lineal de un sólido isotérmico, una generalización muy útil para sólidos elásticos lineales podría ser

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \underline{\sigma} = \mathbf{C} \underline{\epsilon}, \quad (3.9.2)$$

¹¹ «como la tensión así la fuerza » . Antología de la física [50].

con $i, j, k, l = 1, 2, 3$, notemos que podría ser otra configuración que sea consistente con los índices de los tensores correspondiente. A lo largo de la investigación usaremos (3.9.2) para formular nuestro trabajo.

3.10. Energía elástica

Deduciremos la densidad de energía para un medio elástico sometido a esfuerzos y deformaciones infinitesimales, como lo hemos señalado en las aproximaciones lineales de la teoría. Sí no tomamos efectos térmicos y sin fuentes de calor, además en notación indicial se sabe que $D_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$, y la densidad constante ρ_0 , la ecuación anterior se reduce

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\rho_0} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (3.10.1)$$

si la densidad permanece constante, además bajo las suposiciones anteriores podemos decir que $\epsilon = \epsilon(\epsilon_{ij})$ por lo tanto $\dot{\epsilon} = (\partial\epsilon/\partial\epsilon_{ij})\dot{\epsilon}_{ij}$ por lo tanto $\sigma_{ij}/\rho_0 = \partial\epsilon/\partial\epsilon_{ij}$. Definimos la densidad de energía de deformación como $\Sigma = \rho_0\epsilon$, entonces

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad (3.10.2)$$

podemos desarrollar la función Σ alrededor del origen, como

$$\Sigma(\epsilon_{ij}) = \Sigma(0) + \frac{\partial \Sigma(0)}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_{ij} + \frac{\partial^2 \Sigma(0)}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{km}} \epsilon_{ij} \epsilon_{km} + \dots, \quad (3.10.3)$$

si derivamos esta última, entonces

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Sigma}{\partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial \Sigma(0)}{\partial \epsilon_{ij}} + \frac{\partial^2 \Sigma(0)}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{mn}} \epsilon_{ij} \epsilon_{km} + \dots. \quad (3.10.4)$$

Considerando que no hay esfuerzos residuales (la memoria del material), entonces cuando hacemos $\sigma_{ij} = 0$ implica que $\epsilon_{ij} = 0$, si consideremos la parte lineal de la expresión anterior entonces

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 \Sigma(0)}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{mn}} \epsilon_{km} = C_{ijkl} \epsilon_{km}. \quad (3.10.5)$$

Sustituyendo (3.10.5) en (3.10.4) y tomando el primer orden y considerando la aproximación sobre los gradientes de los desplazamientos, así finalmente

$$\Sigma = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{km}. \quad (3.10.6)$$

Es fácil probar que Σ es una forma definida positiva, aunque asumiremos que así es sin una prueba [45]. Las formulaciones anteriores, como ya mencionamos están sujetas a la condición de

linealidad, debe quedar claro que son limitadas a materiales sólidos vía las ecuaciones constitutivas, sin embargo las ecuaciones de balance general son universales dentro del enfoque clásico. Existen formulaciones relativamente nuevas sobre elasticidad de materiales mesofásicos, aquí nos hemos enfocado en materiales sólidos. En el siguiente capítulo aplicaremos esta teoría a las guías de onda elásticas y presentaremos los resultados fundamentales realizados por Poisson, Lamé, Pochhammer, entre otros, además describiremos una forma de calcular la energía de propagación en una analogía del vector de Poynting para ondas electromagnéticas.

Capítulo 4

Guías de onda para medios Isotrópicos

«Approximate solution of exact equation or exact solution of approximate equation».

Las ecuaciones fundamentales que gobiernan las deformaciones lineales, isotérmicas, no homogéneas para sólidos elásticos, dadas para un sistema de referencia espacial están dadas por ecuaciones de balance general, las cuales no toman en cuenta las propiedades de los materiales, por ello se introduce una ecuación constitutiva. Estas son, la ley de conservación de masa (4.0.1), las leyes del movimiento de Cauchy (4.0.2), las ecuaciones constitutivas que relacionan los esfuerzos con los gradientes de deformación (4.0.3), las relaciones de los gradientes de desplazamiento-deformación (4.0.4) y las expresiones para la energía de deformación (4.0.5).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} u_i = 0, \quad (4.0.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (4.0.2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (4.0.3)$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (4.0.4)$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} \sigma_{mn} \varepsilon_{mn} \geq 0. \quad (4.0.5)$$

Para medios isotrópicos es posible escribir (4.0.3) de una forma más útil, como

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \mu (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) \quad (4.0.6)$$

Los coeficientes (de Lammé) que se expresan en las ecuaciones anteriores $\lambda = \lambda(T, \mathbf{r})$ y $\mu = \mu(T, \mathbf{r})$, en general dependen de la posición \mathbf{r} y de la temperatura T . Sin embargo, como se ha considerado en el capítulo anterior para deducir la función Σ , los coeficientes de Lammé no dependen de la posición y tampoco de la temperatura T , por otro lado $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ el cual es el vector de desplazamientos. I_e es uno de los invariantes del tensor de deformación ε , de tal forma que lo podemos relacionar con el vector de desplazamiento, de la siguiente manera

$$I_e = Tr(\varepsilon) = \varepsilon_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (4.0.7)$$

insertando (4.0.7) en (4.0.3), la relación constitutiva se reescribe como

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}. \quad (4.0.8)$$

Estas expresiones nos ayudarán a encontrar las ecuaciones de campo de movimiento, para lograrlo sustituimos (4.0.8) en la primera ley de movimiento de Cauchy (4.0.2), así

$$\nabla \cdot [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}] + \rho\mathbf{f} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (4.0.9)$$

de las siguiente identidades vectoriales $\nabla\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} = \lambda\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ y de la divergencia de tensor de deformaciones $\nabla \cdot \mathbf{e} = [\nabla^2\mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})]/2$, por tanto

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{f} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (4.0.10)$$

Esta última se puede escribir también de forma diferente, si usamos la identidad $\nabla^2\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$,

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho\mathbf{f} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (4.0.11)$$

Las ecuaciones (4.0.10) y (4.0.11) se conocen como ecuaciones de Navier-Cauchy de la elasticidad [45].

Una observación importante es que las ecuaciones de movimiento de Navier-Cauchy están fuertemente ligadas a medios isotrópicos mediante las ecuaciones constitutivas, para resolver problemas más generales es necesario resolver

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (4.0.12)$$

como veremos más adelante.

4.1. Ecuaciones de Navier-Cauchy para medios Isotrópicos.

En la ausencia de fuerzas de cuerpo las ecuaciones de Navier-Cauchy para un sistema isotérmico e isotrópico, tienen la forma

$$\mu u_{i,ij} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} = \rho \ddot{u}_i, \quad (4.1.1)$$

donde se ha implementado la notación indicial, además vamos a considerar que los coeficientes de Lammé no dependen de la temperatura. Este sistema de ecuaciones posee una desventaja, en el sentido operacional, ya que acopla las tres componentes de los desplazamientos (u_i $i = \{1, 2, 3\}$). Sin embargo, este sistema de ecuaciones se puede desacoplar mediante la eliminación de dos de las tres componentes de los desplazamientos a través de dos de las tres ecuaciones,

dando como resultado ecuaciones diferenciales de sexto orden. Un enfoque de mayor utilidad es expresar las componentes del vector de desplazamientos en términos de derivadas de potenciales (conocidos como potenciales elastodinámicos). Estos potenciales deben satisfacer ecuaciones de onda desacopladas.

En notación vectorial las ecuaciones de movimiento (de Navier-Cauchy NC), como ya hemos visto, se pueden escribir como

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (4.1.2)$$

Consideremos una descomposición del vector de desplazamiento, con ayuda de la descomposición de Helmholtz, de la forma

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}, \quad (4.1.3)$$

posteriormente realizaremos un breve análisis de las consecuencias y el origen de esta descomposición. Sustituyendo esta última en NC conduce a

$$\mu \nabla^2 (\nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot (\nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}), \quad (4.1.4)$$

de las identidades vectoriales $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$, y de la condición $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\Psi} = 0$, después de agrupar los términos adecuadamente obtenemos

$$\nabla [(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi - \rho \ddot{\varphi}] + \nabla \times [\mu \nabla^2 \boldsymbol{\Psi} - \rho \ddot{\boldsymbol{\Psi}}] \equiv 0, \quad (4.1.5)$$

donde claramente, la representación de (4.1.3) satisface las ecuaciones dinámicas (4.1.2) así

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \ddot{\varphi} / c_l^2 \\ \nabla^2 \boldsymbol{\Psi} &= \ddot{\boldsymbol{\Psi}} / c_t^2, \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

donde, $c_l^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$ y $c_t^2 = \mu / \rho$. Las ecuaciones (4.1.6) son ecuaciones de onda desacopladas, nótese que las velocidades son diferentes. La descomposición nos ha permitido encontrar dos diferentes representaciones de la función de onda, lo que significa que físicamente el vector de desplazamientos se descompone en dos movimientos: longitudinales y transversales, para ganar perspectiva miremos la siguiente deducción.

4.2. Ondas planas tridimensionales.

Las funciones de onda tienen una estructura específica en su dominio, que dota a esas funciones (de onda) con características especiales que las diferencian de otras. Este subconjunto del espacio de funciones se escribe como

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} \pm ct) \mathbf{d}, \quad (4.2.1)$$

donde \mathbf{k} es el vector de número de onda, y \mathbf{d} la dirección de propagación de la onda, su característica especial es que la variable es $\mathbf{r} \cdot \mathbf{k} \pm ct$, nótese que un desplazamiento en el tiempo $t + \Delta t$

y en el espacio $|\mathbf{r}| \pm ct$ no altera esta estructura. Insertemos (4.2.1) en (4.1.2) y sin pérdida de generalidad la dirección de la onda es positiva obtenemos que

$$(\mu - \rho c)\mathbf{d} + (\lambda + \mu)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{d})\mathbf{k} \equiv 0, \quad (4.2.2)$$

como se puede observar esta ecuación es idénticamente cero, ya que debe satisfacer las ecuaciones de NC, de esta forma las únicas soluciones posibles son, o bien $\mathbf{d} = \pm\mathbf{k}$ ó $\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0$, tomando la primera y posteriormente la segunda obtenemos dos diferentes velocidades $c_l^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ y $c_t^2 = \mu/\rho$, donde los subíndices l y t representan la velocidad longitudinal y transversal, respectivamente. Con las ecuaciones de onda (4.1.6) y las condiciones $\mathbf{d} = \pm\mathbf{k}$ ó $\mathbf{k} \cdot \mathbf{d} = 0$, es posible explicar que la descomposición de Helmholtz, tomando $\mathbf{d} = \pm\mathbf{k}$ significa que tanto los desplazamientos de onda como la propagación de onda tienen la misma dirección, es decir la onda es longitudinal, por otro lado sí $\mathbf{k} \cdot \mathbf{d} = 0$, el vector de desplazamiento y propagación son ortogonales, es decir es una onda transversal, en conclusión resolver estas ecuaciones de onda por separado resuelven el problema general, para un medio isotrópico. Se puede generalizar (4.2.1) si tomamos $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$, es decir los desplazamientos complejos. Además nótese que la función de onda se ha escrito de manera general, esto significa que la amplitud no es necesariamente constante como en el caso de ondas planas.

Se puede construir una solución de onda plana tridimensional con la que es posible mostrar tres diferentes polarizaciones, una corresponde a la parte longitudinal (P), las otras dos correspondientes a polarizaciones de corte vertical (SV) y horizontal (SH), que conservan el volumen.

4.3. Potenciales elastodinámicos.

El cálculo de campos vectoriales, los cuales no pueden ser calculados en términos de gradientes de un escalar, es una ardua tarea comparada con el cálculo de un campo escalar, ya que se requiere el cálculo de tres números en cada punto del espacio (acotado o no por las condiciones de frontera, es decir un número infinito de puntos en cada dirección). Estos tres números se pueden expresar en muchas maneras, dependiendo de la manera particular en la que se escoja la expresión del vector. La forma más obvia de hacerlo, por supuesto, sería especificar las componentes del vector en cada punto, en este caso, en efecto, tendríamos tres campos escalares para calcular, de manera que las condiciones de frontera se cumplan. Otra forma es especificar las componentes del campo vectorial a lo largo de las tres direcciones de estas coordenadas curvilíneas que resultan ser apropiadas para el problema en cuestión; esto nuevamente reduce el problema de calcular tres campos escalares, la magnitud de esas tres componentes.

La forma en que usualmente se trata este problema de acuerdo con la parte física, es obtener el campo vectorial de tres campos escalares por una operación vectorial más general, como

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi + \nabla \times \mathbf{A},$$

con $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, es decir, cualquier campo vectorial se puede expresar como la suma del gradiente de un potencial escalar y el rotacional de un potencial vectorial. Uno de los escalares que especifican el campo puede, ser el potencial escalar; los otros dos servirán para especificar

únicamente el potencial vectorial. Únicamente dos valores en cada punto son necesarios para especificar el potencial vector en lugar de tres, pues la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, reduce las cantidades independientes necesarias para una representación completa del campo de dos a tres.

Existen campos vectoriales que se pueden expresar como gradientes de un potencial escalar como en el caso del campo eléctrico para el caso electrostático, sin embargo existen otros que no poseen esta propiedad (el campo electromagnético, la velocidad de un fluido viscoso o el desplazamiento de un sólido elástico, por ejemplo). La separación de un campo en sus componentes longitudinal y transversal $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t$ tiene varias ventajas. En el primer caso, la componente longitudinal, como ya lo mencionamos, es el gradiente de un potencial y consecuentemente todas las técnicas conocidas son aplicables para obtener una solución (funciones armónicas para el caso de la ecuación de Laplace en dos dimensiones o separación de variables el caso de tres dimensiones). Para la parte transversal, es decir un campo transversal, este campo siempre se puede derivar de un par de funciones escalares, como ya se ha mencionado, aunque cualquier campo vectorial requiere tres escalares para quedar definido, el requerimiento de que el campo sea transversal (es decir que sea un rotacional, lo que implica que su divergencia deberá ser cero) impone una relacional lineal entre tres escalares, los cuales se reducen a dos.

Para el caso elastodinámico consideramos el vector de desplazamientos como $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$, aplicando esta descomposición observamos que los potenciales son: $\mathbf{u}_l = \nabla \varphi$, $\mathbf{u}_t = \nabla \times \Psi$. Por las propiedades vectoriales se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0$ y $\nabla \times \mathbf{u}_l = 0$. La propiedad $\nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0$, relaciona dos de tres componentes, esto conduce a construir un campo transversal que dependa solo de dos componentes independientes , como a continuación se explicará.

Aquí cabe hacer una breve discusión sobre la descomposición mencionada arriba. Poisson en sus memorias (1829 [52, 53]) fue el primero en reconocer que una perturbación estaba compuesta por dos movimientos (longitudinal y transversal). Posteriormente Sternberg [54] revisando el trabajo de Poisson, logró integrar las ecuaciones del movimiento para estos desplazamientos (4.1.3). Como Poisson señala en sus memorias, el sólo obtuvo una solución particular ($\mathbf{f} = 0$ en NC) basada únicamente en el potencial escalar $\mathbf{u}_l = \nabla \varphi$, él muestra que toda solución suficientemente regular de las ecuaciones de NC con $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, se puede representar como $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}''(\mathbf{x}, t)$, con $\mathbf{u}' = \nabla \varphi$ donde \mathbf{x} es un vector en \mathbb{R}^3 . La solución de Poisson no toma en cuenta la componente transversal de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, la solución completa fue dada por Lamé [55] en 1852, donde muestra finalmente la forma general $\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \Psi$, además muestra que ambos movimientos se propagan con velocidades diferentes, aunque sus soluciones carecían de una prueba matemática rigurosa.

Siguiendo la discusión sobre la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, es importante hacer notar que aunque no se cumpla esta condición se siguen satisfaciendo las ecuaciones (4.1.6), veamos la razón. La descomposición $\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \Psi$, esta formada de cuatro escalares, sin embargo con la condición $\nabla \cdot \Psi = 0$, se reduce a tres, $\nabla \cdot \Psi$ es una norma de gauge. Nótese que si escribimos $\Psi' = \Psi + \nabla g$, con g una función escalar, al tomar el rotacional se obtiene que $\nabla \times \Psi = \nabla \times \Psi'$, por otro lado $\nabla \cdot \Psi' = \nabla \cdot \Psi + \nabla \cdot \nabla g$, de aquí $\nabla \cdot \nabla g = \nabla^2 g = h \neq 0$, de manera que Ψ' satisface (4.1.6), lo que resulta en la invarianza de \mathbf{u} , por lo tanto, $\nabla \cdot \Psi = 0$, ó $\nabla \cdot \Psi = h$, implican el mismo fenómeno físico.

Considerando una geometría cilíndrica, obtenemos que el potencial vectorial se puede expresar como [57],

$$\Psi = \chi \mathbf{k} + \nabla \times (\eta \mathbf{k}), \quad (4.3.1)$$

donde \mathbf{k} , es el vector unitario a lo largo de la coordenada cilíndrica z y χ y η , funciones escalares. Observemos que (4.3.1) en (4.1.6) satisface

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = 0. \quad (4.3.2)$$

Tomando el rotacional de (4.3.1)

$$\nabla \times \Psi = \nabla \times (\chi \mathbf{k}) + \nabla \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right) - (\ddot{\eta}/c_t^2) \mathbf{k},$$

a continuación tomamos el rotacional nuevamente y aplicamos la identidad vectorial, $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, lo que resulta en

$$\nabla(\nabla \cdot \Psi) - \nabla^2 \Psi = \nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial z} \right) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\chi \mathbf{k} + \nabla \times (\eta \mathbf{k})].$$

Ahora, ya que $\nabla \cdot \Psi = \partial \chi / \partial z$, tenemos finalmente que

$$\nabla^2 \Psi = \ddot{\Psi} / c_s^2,$$

lo que demuestra que la forma de Ψ en (4.3.1) es consistente con las ecuaciones de onda que provienen de la descomposición de Helmholtz.

Podemos utilizar el potencial Ψ para derivar nuestras relaciones de potencial para el desplazamiento. La figura (4.3.1) muestra las coordenadas r , θ z y sus correspondientes vectores unitarios, para una guía de onda de longitud infinitamente larga de sección circular transversal. Para una guía de onda cilíndrica de radio a , y utilizando el potencial Ψ , podemos encontrar las relaciones generales de desplazamiento-potencial para este problema,

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial r} \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial \theta} \right) \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \eta}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right), \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

donde u_r , u_θ y u_z son los desplazamientos en las direcciones, r , θ y z respectivamente. Las relaciones desplazamiento-deformación para este sistema son,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right), & \varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, & \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

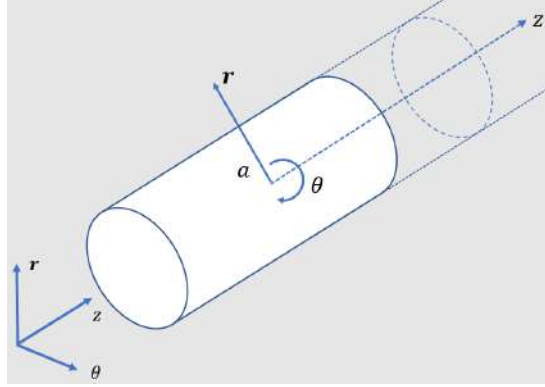


Figura 4.3.1: Guía de onda elástica de sección transversal circular en un sistema de coordenadas cilíndricas polares.

Las relaciones constitutivas (relaciones esfuerzo-deformación), las cuales se obtienen de la ley de Hooke generalizada son

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{rr}, & \sigma_{\theta\theta} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta}, & \sigma_{zz} &= \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{r\theta} &= \mu\varepsilon_{r\theta}, & \sigma_{z\theta} &= \mu\varepsilon_{z\theta}, & \sigma_{rz} &= \mu\varepsilon_{rz}, \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

en donde

$$\Delta = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad (4.3.6)$$

lo que nos proporciona las relaciones de esfuerzo-potencial. Las componentes del tensor de esfuerzos σ_{rj} ($j = r, \theta, z$), deberán anularse en la frontera cuando $r = a$ para el caso de que la guía de onda este en el vacío (traction free surface), como veremos en las secciones siguientes.

4.4. Ondas torsionales axialmente simétricas.

A continuación, resolveremos el problema de elastodinámica para caso particulares, además de suponer que el sistema es isotérmico, isotrópico y homogéneo. Iniciaremos esta revisión con el caso más simple de ondas con una geometría cilíndrica de sección transversal circular infinitamente larga, éstas corresponden a la torsión axialmente simétrica, para este problema particular tenemos,

$$u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = u_\theta(r, z, t), \quad \partial/\partial\theta = 0, \quad (4.4.1)$$

por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi &= \eta = 0 \\ u_\theta &= -\frac{\partial\chi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Por lo que las relaciones potencial-deformación se reducen como

$$\varepsilon_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r} \right) \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \quad (4.4.2)$$

y para los esfuerzos

$$\sigma_{r\theta} = -\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \quad \sigma_{z\theta} = -\mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}. \quad (4.4.3)$$

Sabemos que χ satisface la ecuación de onda por lo tanto toma la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = \ddot{\chi}/c_s^2,$$

si asumimos una solución tipo onda cuasi-plana, $\chi = Af(r) \exp[ik(z - ct)]$, sustituirla $f(r)$ deberá satisfacer la ecuación de Bessel

$$\frac{d}{dr^2} f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) + \eta_s^2 f(r) = 0. \quad (4.4.4)$$

Se sigue que

$$\chi = AJ_0(\eta_s r) \exp[ik(z - ct)], \quad (4.4.5)$$

donde J_0 es la función de Bessel del primer tipo o orden cero, denotamos además a z como la dirección de propagación, k y c son el número de onda y la velocidad de fase, respectivamente a lo largo de esa dirección, $\eta_s^2 = [(\omega/c_s)^2 + k^2]$, $\omega = kc$. Nótese que la ecuación de Bessel tiene dos soluciones linealmente independiente, sin embargo se ha descartado la segunda solución ya que diverge en el origen, pues en el desplazamiento u_θ debe ser finito en todo punto.

Para las condiciones de frontera que toman en cuenta que fuera del sólido únicamente hay vacío (superficie libre de esfuerzos normales y tracción) se requiere que los esfuerzos se anulen en $r = a$, es decir, que se cumpla

$$\sigma_{r\theta}|_{r=a} = -\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \right]_{r=a} = 0. \quad (4.4.6)$$

Sustituyendo la expresión (9) obtenemos,

$$-\mu \left\{ \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} J_0(\eta_s r) \right] \right\}_{r=a} = 0, \quad (4.4.7)$$

las cuales tiene como raíces $\eta_s = 0$, $J_2(\eta_s a) = 0$. Si usamos la primer raíz en la ecuación diferencial para $f(r)$ tiene soluciones degeneradas que implican una solución $f(r) = 0$, que a su vez implica una solución trivial para el desplazamiento, $u_\theta = 0$, por otro lado la segunda solución tiene la forma $f(r) = \ln(r)$, la cual implica un desplazamiento infinito, y por ello físicamente inadmisibles. Sin embargo si derivamos (4.4.4) nuevamente, obtenemos

$$\frac{d^3}{dr^3} f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr^2} f(r) - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} f(r) = 0,$$

la cual tiene una solución físicamente admisible de la forma $f(r) = Br^2$, si escogemos convenientemente a $B = -1/2$,

$$\chi = -\frac{Ar^2}{2} \exp[ik(z - ct)], \quad (4.4.8)$$

podemos escribir el desplazamiento u_θ como

$$u_\theta = Ar \exp[ik(z - ct)]. \quad (4.4.9)$$

Este es el cálculo explícito del espectro de dispersión que presentamos en la figura (1.1.2) y representa unos de los problemas que se han estudiado, tanto por su interés teórico como por el enorme esfuerzo por encontrar el espectro de ramas con diferentes métodos desde teorías aproximadas hasta intentos de resolver el problema por diferentes métodos numéricos convergentes. Sin embargo, este no es el problema completo, antes de hacer una breve revisión del problema completo, vamos a explicar las frecuencias de corte, como veremos a continuación.

4.4.1. Frecuencias de Corte.

Las frecuencias de corte, las cuales denotamos como ω_c , reciben su nombre de la caracterización de los filtros diseñados para circuitos eléctricos, lo cuales permiten el paso de la señal eléctrica para ciertas frecuencias de interés específico. Esta forma selectiva de las frecuencias devino en un gran número de aplicaciones en la industria electrónica. En el contexto de las guías de onda elásticas, las frecuencias de corte se definen como aquellas para las cuales la ecuación de frecuencias admite, como solución real un número de onda nulo, $k = 0$. Para frecuencias $\omega < \omega_c$ la guía de onda no puede transferir energía a lo largo de la fibra. Las guías de onda solo transportan o propagan señales por encima de la frecuencia de corte. Para soluciones analíticas, la constante de propagación de una onda elástica en una guía de onda es un número real (particularmente, pues k puede ser imaginaria) lo que significa una atenuación en la amplitud de la onda conforme avanza, es decir, hay un decaimiento exponencial a lo largo de la guía. ¿A dónde va la energía de una onda para una frecuencia por debajo de la ω_c ? Esta debe reflejarse para cumplir con la conservación de la energía. Señalamos esto porque es importante tener en cuenta que para simuladores de propagación de ondas en guías, no se considera adecuadamente este fenómeno de reflexión, es decir, que no modelan correctamente el fenómeno de propagación cerca de las frecuencias ω_c .

4.5. Las soluciones de Pochhammer y Chree.

Pochhammer y Chree, fueron los primeros en aportar resultados hacia la resolución del problema de la propagación en un cilindro isotrópico infinitamente largo, para el problema general [23].

Por la geometría del problema, es natural elegir coordenadas cilíndricas con la dirección z que coincide con el eje del cilindro. Una solución para la ecuación de onda de un sólido elástico isotrópico se puede obtener en términos de la descomponen del teorema de Helmholtz, el cual

permite separar los movimientos en dos: movimiento longitudinal y transversal, por lo tanto las ecuaciones se pueden obtener en términos de un potencial escalar y otro vectorial, los cuales conducen a una forma particular de los desplazamientos $u_i(r)$. Las soluciones tipo onda plana de la forma:

$$\begin{aligned} u_r &= U(r) \cos(n\phi) \exp[i(kz - \omega t)], \\ u_\phi &= V(r) \sin(n\phi) \exp[i(kz - \omega t)], \\ u_z &= W(r) \cos(n\phi) \exp[i(kz - \omega t)], \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

donde t es el tiempo, ω es 2π veces la frecuencia y k es la constante de propagación o número de onda ($k = \omega/v = 2\pi/\lambda$, v es la velocidad de fase, λ es la longitud de onda) y n es igual a cero o a un entero. La forma funcional de las componentes radiales del campo de desplazamientos fueron uno de los logran más destacables de Pochhammer y Chree, como podemos ver a continuación en:

$$\begin{aligned} U(r) &= A \frac{dJ_n(\eta_s r)}{dr} + B \frac{J_n(\eta_s r)}{r} + iCk \frac{dJ_n(\eta_s r)}{dr} \\ V(r) &= - \left[A \frac{J_n(\eta_s r)}{r} + B \frac{dJ_n(\eta_s r)}{dr} + iCk \frac{J_n(\eta_s r)}{r} \right] \\ W(r) &= ikA J_n(\eta_s r) + C\eta_s^2 J_n(\eta_s r), \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

de donde es posible deducir la ecuación de dispersión bastante complicada para $n = 1$, al considerar las condiciones de frontera libres de esfuerzos, Pochhammer encontro la relación de dispersión

$$J_1(\alpha)J_1^2(\beta)(f_1O_\beta^2 + f_2O_\alpha O_\beta + f_3O_\beta + f_4O_\alpha + f_5), \quad (4.5.3)$$

donde $O_x = O_1(x) = xJ_0(x)/J_1(x)$, son las funciones de Onoe de primer tipo [96], y

$$\begin{aligned} f_1 &= 2(\beta^2 - \zeta^2), \\ f_2 &= 2\beta^2(5\zeta^2 + \beta^2), \\ f_3 &= \beta^6 - 10\beta^4 - 2\beta^4\zeta^4 + 2\beta^2\zeta^2 + \beta^2\zeta^4 - 4\zeta^4, \\ f_4 &= 2\beta^2(2\beta^2\zeta^2 - \beta^2 - 9\zeta^2) \\ f_5 &= \beta^2(-\beta^4 + 8\beta^2 - 2\beta^2\zeta^2 + 8\zeta - \zeta^4), \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

y $\alpha = \eta_s a$, $\beta = \eta_s a$, $\zeta = ka = \gamma + i\delta$ y $\omega_s = c_s/a$. Estas últimas expresiones han sido analizadas exhaustivamente a lo largo de los años como mencionamos en el capítulo sobre el estado del arte, en particular los trabajos de Pao [3, 4, 5, 6, 7], donde realiza los primeros estudios sobre teorías límite para analizar las ramas del espectro de frecuencias para medios isotrópicos, como podemos observar en la figura (4.5.1).

4.6. Flujo de energía de un medio elástico.

A continuación vamos a calcular la cantidad de energía que por unidad de tiempo fluye a través de una superficie de control, este cálculo sera importante para conocer el flujo de energía

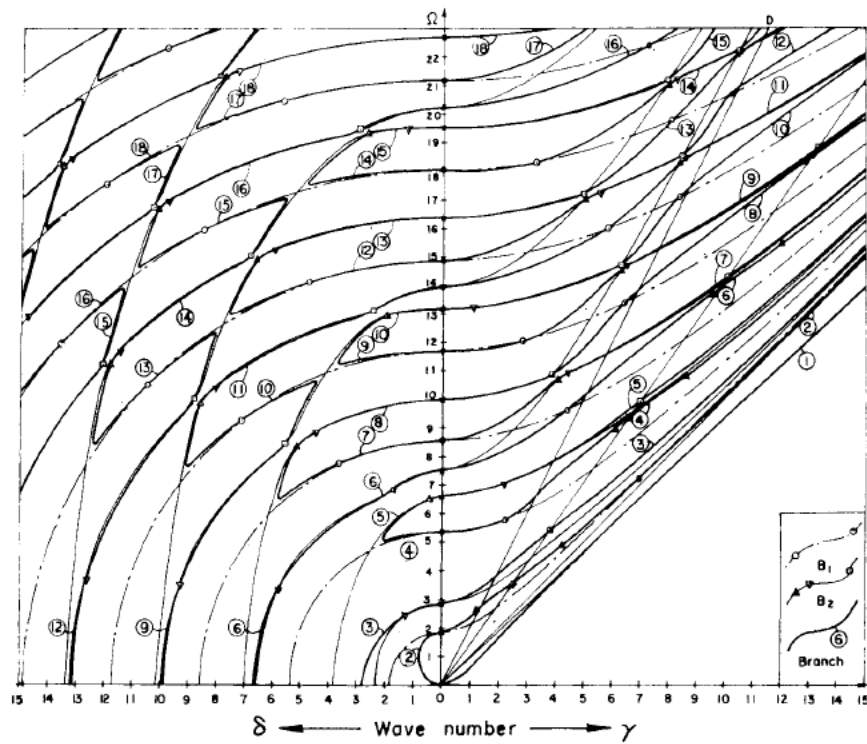


Figura 4.5.1: Segmentos reales e imaginarios del espectro de frecuencias de Pochhammer para modos simétricos no axiales (con radio de Poisson $\nu = 1/3$) [7].

debido a la propagación de ondas elásticas en un medio material además de su utilidad para las secciones posteriores. Primero es necesario calcular la potencia transferida para deformar el medio elástico. Se conoce que la potencia instantánea que ejerce una partícula a una cierta velocidad por una fuerza externa está dada por $P = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$; sin embargo para llevar a cabo una generalización al medio continuo la fuerza superficial local en un medio elástico está dado por la expresión $\mathbf{F}_s = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, la cual relaciona al tensor de esfuerzos y al vector normal a S donde se aplica la fuerza correspondiente a dicha superficie. Ahora si proyectamos esta cantidad sobre la derivada temporal del vector de desplazamientos y sumando todas las contribuciones en la superficie que encierra al cuerpo obtenemos la potencia total

$$P = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.6.1)$$

De esta manera el vector

$$\mathbf{J} = - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (4.6.2)$$

proporciona la corriente de flujo de potencia elástica. Este vector es un análogo al vector de Poynting para el campo electromagnético. Es posible encontrar la ecuación que gobierna a este vector, si utilizamos las ecuaciones de Navier-Cauchy (4.0.2), la cual multiplicamos por $\partial \mathbf{u} / \partial t$, se tiene

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad (4.6.3)$$

mediante manipulaciones algebraicas adecuadas y considerando que la densidad no depende del tiempo y realizando un intercambio de las segundas derivadas es posible reescribir la expresión anterior como

$$\sigma_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = \sigma_{ik} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) = \sigma_{ik} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ik}, \quad (4.6.4)$$

donde ε_{ik} es el tensor de deformaciones definido en (3.2.7), el cual por construcción es simétrico. La segunda igualdad se cumple pues el tensor de esfuerzos también es simétrico y ya que la contracción de un tensor simétrico con uno antisimétrico siempre es nula. Ahora vamos a sustituir la ecuación constitutiva (3.9.2). Ahora si consideramos el medio lineal general, es decir $\sigma_{ik} = C_{ijkl} \varepsilon_{jl}$, en (4.6.3) obtenemos

$$\rho f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + C_{ikjm} \varepsilon_{jm} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ik}, \quad (4.6.5)$$

la cual se puede expresar de forma compacta como

$$\rho f_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial J_k}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} E_{el}, \quad (4.6.6)$$

donde E_{el} es la densidad volumétrica de energía elástica definida por

$$E_{el} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}. \quad (4.6.7)$$

Notemos que la expresión es la densidad volumétrica total, y no parcial de la que ya habíamos obtenido un resultado en el capítulo anterior, a saber, $\Sigma = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} / 2$, que solo corresponde a la energía elástica almacenada debido a la deformación, la cual es precisamente la densidad de energía libre de Helmholtz. Sin embargo, la expresión (4.6.7) contempla la contribución cinética asociada a la propagación de la deformación en el medio expresado en la variación del campo de desplazamientos u_i , observemos también que hemos supuesto el tensor de rigidez invariante en el tiempo e isotérmico.

Siguiendo con la analogía del campo electromagnético, J_k para el vector de flujo de energía elástica juega el papel en elasticidad del teorema de Poynting, podemos integrar dicha ecuación dentro de un volumen de control V_c y después de aplicar el teorema de Gauss encontrar

$$\oint_{S_c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} E_{el} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dV, \quad (4.6.8)$$

esta expresión nos dice que la integral del flujo de energía elástica por unidad de tiempo en una superficie cerrada, es igual a menos el cambio de la energía total elástica dentro del volumen de control más la potencia inyectada por las fuerzas volumétricas. La expresión (4.6.2) nos proporciona mediante P , la potencia instantánea transportada por las ondas elásticas. Si tenemos en especial desplazamientos armónicos de frecuencia ω entonces la potencia también oscilará pero con el doble de frecuencia ya que de la expresión (4.6.2) se puede inferir que el vector de flujo de energía es proporcional al cuadrado de los desplazamientos, además cuando las oscilaciones son muy rápidas o la frecuencia es muy grande la cantidad relevante a calcular es la potencia promedio en un intervalo temporal que es el periodo $T = 2\pi/\omega$ de las oscilaciones. Si la onda es armónica, es decir, $\mathbf{u} = Re[\mathbf{u}_0 \exp(-i\omega t)]$, donde Re , denota la parte real, de esta manera utilizando la ecuación constitutiva de Hooke (3.9.2) es posible mostrar que el tensor de esfuerzos esta dado por $\sigma = Re[\sigma_0(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]$ y por lo tanto la corriente promedio de energía $\bar{\mathbf{J}}$ correspondiente a un periodo esta dada por

$$\bar{\mathbf{J}} = -\frac{i\omega}{2} Im[\mathbf{u}_0^* \cdot \sigma_0(\mathbf{r})], \quad (4.6.9)$$

aquí Im corresponde a la parte imaginaria y $*$ hace referencia al complejo conjugado. Finalmente la potencia promedio del campo de desplazamientos armónicos en términos de las amplitudes completas del desplazamiento y el tensor de esfuerzos tiene la siguiente forma

$$\bar{P} = -\frac{i\omega}{2} \int_S Im[\mathbf{u}_0^* \cdot \sigma_0(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.6.10)$$

donde S es una superficie cerrada que envuelve la fuente y se halla muy lejos, generalmente para facilitar los cálculos se suele considerar un esfera. Esta formulación es de gran utilidad para normalizar las amplitudes de las componentes del tensor de esfuerzos para ondas cuasi-planas armónicas.

En la siguiente investigación, hemos abordado el problema con diferentes enfoques, tomando como esquema el modelo isotrópico, ya que todo intento por resolver sistemas de elastodinámica deber converger al problema isotrópico, del cual se conocen de forma amplia las soluciones y el diagrama de dispersión, y es el primer test que debe pasar todo intento de modelar las estructuras que deseamos investigar.

Veamos cuales han sido las complicaciones que se encuentran en sistemas con propiedades anisotrópicas. Dentro de los sistemas cristalinos, se presentan diferentes y variadas anisotropías, el que corresponde a la mayor anisotropía es el sistema triclinico, este es que se considera en este trabajo, ya que difiere en todos sus parámetros de red, y es de interés para la investigación. Podemos observar que en la notación de Voigt se forma una matriz de 36 elementos de los cuales 21 son independientes, en decir la matriz es simétrica, y ello es consecuencia de dos importantes proposiciones, una es el teorema de Cauchy y la otra proviene del calculo de la energía elástica del sistema, que implica simetrías de C_{ijkl} . Sin embargo, un estudio razonablemente completo de las ecuaciones trascendentales que relacionan la frecuencias ω , el numero de onda k y el numero n , requiere en lugar de un intento de solución analítica, un esfuerzo de computación numérica. En la literatura es posible encontrar esfuerzos variados para encontrar estos parámetros de propagación, los cuales se ha encontrado que tiene problemas de computo para encontrar las raíces de ecuaciones trascendentes que permiten trazar un diagrama de dispersión para diferentes materiales.

En el siguiente capítulo, presentamos el desarrollo del modelo para un sistema triclinico del cual vamos a reducirlo a un sistema hexagonal con las consideraciones de que el material posee quiralidad.

Capítulo 5

Guías de onda en medios anisotrópicos.

En este capítulo construimos un modelo para un medio anisotrópico, vamos a considerar un medio con simetría hexagonal. A lo largo de esta investigación se consideró construir un modelo de guía de onda más general, el cual consta de 21 constantes elásticas independientes (véase apéndice A); sin embargo, la investigación nos fue conduciendo a preguntarnos sobre la ruptura de la simetría en el caso de un medio hexagonal. Es bien conocido que las ecuaciones de movimiento resultantes para un medio hexagonal se deducen después de haber hecho coincidir el eje de simetría del material (en el caso del ZnO presenta esta simetría) con el eje de simetría de las coordenadas cilíndricas polares (para el caso de una guía de onda de sección transversal circular e infinitamente larga en z), es decir, con el eje z que a su vez es la dirección hacia donde se propagan las ondas. Veremos lo que sucede para un material artificial anisotrópico, ahora hacemos coincidir el eje del material con el eje radial r , en notación nos referiremos a esta configuración como H_{6r} y la configuración usual como H_{6z} .

El estudio de la propagación de ondas elásticas en un medio definido por sus fronteras físicas, permite el estudio de cualquier material que se pueda modelar mediante las ecuaciones de balance general. A continuación, desarrollaremos el modelo para simetría H_{6r} para una guía de onda elástica con sección transversal circular. En el caso más general se contemplan materiales de poca simetría en cuyo caso tenemos $81 = 3^4$ constantes elásticas independientes, puesto que como veremos a continuación, el tensor de rigidez es un tensor de cuarto orden, las cuales definen la respuesta del material.

La ecuación dinámica gobernante entre el tensor de esfuerzos σ_{ij} y el vector de desplazamientos u_i , están dados por

$$\sigma_{ij,j} - f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (5.0.1)$$

estas cantidades físicas deben estar relacionadas para un medio específico, $\sigma_{ij,j}$ es la divergencia del tensor de esfuerzos, \ddot{u}_i es la aceleración en un medio material con densidad de masa ρ . La expresión (5.0.1) es la forma más general de la segunda ley de Newton, con ρ como la densidad en lugar de la masa puntual m en el caso de la mecánica clásica de Newton, por otra parte f_i son las fuerzas de cuerpo que pueden estar presentes, como por ejemplo la gravedad (se toma $f_i = 0$) [46], es importante recordar que esta última variable tiene como origen el balance de las fuerzas superficiales que se consideran para medios deformables. Por otro lado, la ecuación

constitutiva general para un material elástico lineal se puede escribirse como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{kl}, \quad (5.0.2)$$

donde C_{ijkl} en la ecuación (5.0.2) es el tensor de rigidez (de dureza o de constantes elásticas), muchas veces se conoce a esta ecuación como la generalización de la ley de Hooke, que relaciona la fuerza por unidad volumétrica con la deformación del medio (desarrollo de Lamé). La expresión C_{ijkl} contiene toda la información elástica del medio, a cada elemento de este tensor de cuarto orden se les conoce como constante de rigidez, el cual tiene 81 elementos, veremos a continuación como es posible reducir esta cantidad, mediante las simetrías que presenta el tensor bajo ciertas condiciones.

Como sabemos la ley de Hooke generalizada para un material está dada por (5.0.2) con $i, j, k, l = \{1, 2, 3, 4\}$, donde σ_{ij} es un tensor de segundo orden conocido como tensor de esfuerzos. ε_{ij} es otro tensor de segundo orden conocido como tensor de deformación, C_{ijkl} es un tensor de cuarto orden conocido como tensor de rigidez. Cabe aquí hacer la mención, que se conoce como elasticidad lineal justo porque se aproxima a la parte lineal del tensor de deformación, otros materiales como los elastómeros no obedecen tal aproximación, sin embargo para materiales cuyas deformaciones son pequeñas, la teoría lineal ajusta bien a las predicciones.

Los elementos individuales de este tensor son los coeficientes de rigidez para esta relación lineal. Los elementos son referidos por varios nombres como, constantes elásticas, módulos o coeficientes de rigidez. Es posible la reducción en el número de estas constantes elásticas mediante simetrías presentes en los materiales, en particular estamos interesados en la forma más general, que también se conoce como simetría triclínica, como a continuación se muestra.

De una de las ecuaciones de Cauchy (4.0.2) encontramos una simetría importante, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Por lo tanto, hay seis componentes independientes de (5.0.2) escribimos

$$\sigma_{ji} = C_{jikl}\varepsilon_{kl}, \quad (5.0.3)$$

ahora, si restamos (5.0.2) de (5.0.3) nos conduce a la siguiente ecuación: $0 = (C_{ijkl} - C_{jikl})\varepsilon_{kl} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl}$. Hay seis formas independientes para expresar i y j juntas y aún nueve formas independientes de expresar k y l en conjunto. Así con esta simetría el número de constantes independientes se reduce a 54.

Por otro lado el tensor de deformación proporciona otras simetrías importantes, pues $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, y por lo tanto

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{lk}, \quad (5.0.4)$$

lo que conduce a $0 = (C_{ijkl} - C_{jilk})\varepsilon_{kl} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jilk}$, lo que reduce a 36 constantes independientes. Utilizando la notación de Voigt (5.0.2) se puede reescribir tanto el tensor de esfuerzos como el de deformaciones en términos de hexavectores, de la siguiente forma

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j, \quad (5.0.5)$$

con $i, j = \{1, 2, \dots, 6\}$. Finalmente la función de densidad de energía de deformación

$$\Sigma = \frac{1}{2}C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j, \quad (5.0.6)$$

con la propiedad

$$\sigma_i = \frac{\partial \Sigma}{\partial \varepsilon_i}, \quad (5.0.7)$$

se puede ver que Σ es una función cuadrática de la deformación. Un material con energía Σ y con la propiedad (5.0.7) se conoce como material hiperelástico. W también se puede escribir como

$$\Sigma = \frac{1}{2} C_{ji} \varepsilon_j \varepsilon_i, \quad (5.0.8)$$

de manera similar obtenemos que $0 = (C_{ij} - C_{ji}) \varepsilon_i \varepsilon_j$ lo que conduce a $C_{ij} = C_{ji}$. Por lo tanto la matriz de rigidez es simétrica. Esta matriz tiene 21 constantes elásticas, que se pueden escribir como

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (5.0.9)$$

La existencia de la función Σ se basa en la primera y segunda ley de la termodinámica [1]. Además, debemos tener en cuenta que esta función es positiva definida y que Σ es un invariante. El material con 21 constantes elásticas independientes se denomina anisotrópico o material aelotrópico.

Se puede obtener una mayor reducción en el número de constantes elásticas independientes con el uso de los planos de simetría del material como veremos más adelante, por ahora continuaremos con la construcción del modelo general.

Las simetrías de los materiales en general obedecen a transformaciones de los tensores que están involucrados en la teoría de elasticidad lineal: tensor de esfuerzos, de deformación y de rigidez, que se transforman de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= R_{ki} R_{lj} \sigma_{ij} \\ \varepsilon'_{ij} &= R_{ki} R_{lj} \varepsilon_{ij} \\ C'_{ijkl} &= R_{mi} R_{nj} R_{rk} R_{sl} C_{mnrsl}, \end{aligned} \quad (5.0.10)$$

en donde R_{ij} , puede ser por ejemplo una rotación sobre un plano ortogonal al eje r , en un sistema de coordenadas cilíndricas. En su forma matricial se puede escribir como

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (5.0.11)$$

Vamos a desarrollar la relación constitutiva para un material con esta simetría en el plano $\theta - z$ en el sistema de coordenadas cilíndricas polares, más adelante veremos la razón por la que estamos tomando (5.0.11). Es decir que el eje de simetría yace en el eje r .

Existen diferentes enfoques para reducir el número de constantes elásticas mediante el uso de las simetrías de los diferentes materiales, excepto para el caso de un material triclinico en el cual las 21 constantes son independientes entre sí, y el caso extremo de un material que tiene todas las simetrías que es un material isotrópico en el que solo 2 de las 21 componentes son independientes. Estos enfoques van desde usar directamente las transformaciones de coordenadas en los tensores y resolver los sistemas comparando el transformado con el inicial; agregar una hipótesis extra a las constantes elásticas, esta es que los valores de las constantes elásticas son racionales, etc. Vamos a proceder de la siguiente manera. Podemos aplicar directamente esta transformación al tensor C_{ijkl} , para el caso de simetría hexagonal $\phi = \pi/3$, sin embargo se ha visto que la notación simplificada de hexavectores introducida arriba, la primera de ellas es que podemos visualizar las constantes mediante un arreglo matricial como en (5.0.9), y a diferencia de la forma en que C_{ijkl} se transforma en (5.0.10) C_{ij} lo hace como $C'_{ij} = R_{ik}R_{jl}C_{kl}$; sin embargo, R_{ij} ya no es una matriz de 3×3 sino de 6×6 , la cual debemos construir para que sea consistente con la notación de Voigt, esto lo haremos a continuación.

Nos ayudaremos de la transformación $\sigma'_{ij} = r_{ik}r_{lj}\sigma_{kl}$, con

$$r_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5.0.12)$$

así

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma'_{rr} & \sigma'_{r\theta} & \sigma'_{rz} \\ \sigma'_{r\theta} & \sigma'_{\theta\theta} & \sigma'_{\theta z} \\ \sigma'_{rz} & \sigma'_{\theta z} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5.0.13)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= \sigma_{rr} \\ \sigma'_{\theta\theta} &= \sin 2\theta \sigma_{\phi z} + \cos^2 \theta \sigma_{\phi\phi} + \sin^2 \theta \sigma_{zz} \\ \sigma'_{zz} &= \sin \theta (\sin \theta \sigma_{\phi\phi} - 2 \cos \theta \sigma_{\phi z}) + \cos^2 \theta \sigma_{zz} \\ \sigma'_{r\theta} &= \sin \theta \sigma_{rz} + \cos \theta \sigma_{r\phi} \\ \sigma'_{rz} &= \cos \theta \sigma_{rz} - \sin \theta \sigma_{r\phi} \\ \sigma'_{\theta z} &= \cos 2\theta \sigma_{\phi z} + \sin \theta \cos \theta (\sigma_{zz} - \sigma_{\phi\phi}) \end{aligned} \quad (5.0.14)$$

si usamos la convención de Voigt el tensor σ_{ij} se puede escribir como un hexavector de la siguiente manera $\sigma = (\sigma_{rr}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{zz}, \sigma_{\phi z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\phi})$, por lo tanto R_{ij} se reescribe en términos de una matricial de 6×6

$$\mathbf{R}^\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5.0.15)$$

de esta manera representamos la transformación (5.0.13) ahora en forma hexavectorial

$$\sigma'_i = R_{ij}^\theta \sigma_j. \quad (5.0.16)$$

Esta representación hexavectorial nos permitirá ahora utilizar R_{ij} para transformar el tensor C_{ij} de la siguiente manera

$$C'_{ij} = R_{ik}^\theta R_{jl}^\theta C_{kl}. \quad (5.0.17)$$

Por otro lado la transformación del tensor de deformación tiene la forma

$$\varepsilon'_{ij} = r_{ki} r_{lj} \varepsilon_{kl}. \quad (5.0.18)$$

Análogamente, podemos representar el tensor de deformación en forma hexavectorial $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\phi\phi}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{\phi z}, 2\varepsilon_{rz}, 2\varepsilon_{r\phi})^T$, ahora la transformación toma la forma matricial con hexavectores, tomando en cuenta los factores 2 en el hexavector como

$$\underline{\varepsilon}' = \mathbf{FR}^\theta \mathbf{F}^{-1} \underline{\varepsilon}, \quad (5.0.19)$$

donde

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (5.0.20)$$

por simplicidad definimos $\mathbf{M} = \mathbf{FR}^\theta \mathbf{F}^{-1}$. Con el desarrollo anterior ya podemos encontrar la forma en la que el C_{ij} se transforma y más aun podremos afirmar que $C_{ij} = M_{ki} M_{lj} C_{kl}$.

En su forma hexavectorial en el sistema transformado tenemos $\underline{\sigma}' = \mathbf{C}' \underline{\varepsilon}'$, donde \mathbf{C} es la matriz C_{ij} 6×6 , usando las transformaciones (5.0.16) y (5.0.19) tenemos $\mathbf{R}^\theta \sigma = \mathbf{C}' \mathbf{M} \varepsilon$, multiplicando ambos lados por $(\mathbf{R}^\theta)^{-1}$, obtenemos $\underline{\sigma} = (\mathbf{R}^\theta)^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{M} \underline{\varepsilon}$, es fácil probar que $(\mathbf{R}^\theta)^{-1} = \mathbf{M}^T$, así obtenemos $\underline{\sigma} = \mathbf{M}^T \mathbf{C}' \mathbf{M} \underline{\varepsilon}$, por lo tanto concluimos que $\mathbf{C} = \mathbf{M}^T \mathbf{C}' \mathbf{M}$, que es la relación entre \mathbf{C} y \mathbf{C}' . Por definición las propiedades elásticas de un medio continuo son invariantes bajo una transformación ortogonal si $\mathbf{C} = \mathbf{C}'$, en otras palabras, la matriz de elasticidad transformada es idéntica a la matriz de elasticidad original, así finalmente

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^T \mathbf{C}' \mathbf{M}. \quad (5.0.21)$$

5.1. Modelo de guía de onda para un material *quiral*.

Consideremos ahora un material quiral artificial construido al girar de manera uniforme un medio anisotrópico con respecto a cierto eje que hemos escogido como el eje r . Esto implica que cada una de las propiedades tensoriales deben ser transformados de manera correcta y la expresión resultante para estas cantidades está dada por

$$\begin{aligned} C'(r)_{ijkl} &= R_{iu}R_{jp}R_{k\mu}R_{l\lambda}C_{\nu\rho\mu\lambda}, \\ C'(r)_{kl} &= R_{ki}^\theta R_{lj}^\theta C_{ij} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

en donde

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(qr) & -\sin(qr) \\ 0 & \sin(qr) & \cos(qr) \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

una rotación alrededor del eje r en coordenadas cilíndricas polares y con paso de la hélice $q = 2\pi/p$ siendo p el periodo espacial de la estructura helicoidal.

De esta forma la ecuación constitutiva para este medio helicoidal puede expresarse como

$$\sigma_{ij} = C'(r)_{ijkl}u_{kl}, \quad (5.1.3)$$

Como consecuencia los coeficientes de esta ecuación son funciones periódicas de la coordenada r . Por tanto, esta ecuación junto con las ecuaciones (5.0.1) gobiernan la dinámica elástica de un sólido helicoidal. Antes de resolver este sistema de ecuaciones expresaremos la ecuación constitutiva dada por ecuación (5.1.4) de una manera más simple. Con este propósito utilizaremos la notación de Voigt en donde se toma ventaja de la simetría tanto del tensor de esfuerzos como del tensor de elongaciones con respecto a sus índices para representar en términos de vectores hexavectores dichas cantidades físicas, es decir $S = (\sigma_{rr}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{zz}, \sigma_{\phi z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\phi})$ y $U = (u_{rr}, u_{\phi\phi}, u_{zz}, 2u_{\phi z}, 2u_{rz}, 2u_{r\phi})$. De esta manera la ecuación (5.1.4) toma la forma explícita

$$S_i = C'(r)_{ij}U_j \quad (5.1.4)$$

en donde $C'(r)_{ij}$ es un tensor simétrico de 6×6 cuyos elementos están relacionados con los elementos del tensor original de cuatro índices $C(r)_{ijkl}$. Esto es, el tensor de dureza es una función de la posición y está dado por sus 21 valores materiales [3]

$$C'(r) = \begin{pmatrix} C_{11}(r) & C_{12}(r) & C_{13}(r) & C_{14}(r) & C_{15}(r) & C_{16}(r) \\ C_{12}(r) & C_{22}(r) & C_{23}(r) & C_{24}(r) & C_{25}(r) & C_{26}(r) \\ C_{13}(r) & C_{23}(r) & C_{33}(r) & C_{34}(r) & C_{35}(r) & C_{36}(r) \\ C_{14}(r) & C_{24}(r) & C_{34}(r) & C_{44}(r) & C_{45}(r) & C_{46}(r) \\ C_{15}(r) & C_{25}(r) & C_{35}(r) & C_{45}(r) & C_{55}(r) & C_{56}(r) \\ C_{16}(r) & C_{26}(r) & C_{36}(r) & C_{46}(r) & C_{56}(r) & C_{66}(r) \end{pmatrix}. \quad (5.1.5)$$

Escogemos el hexavector de esfuerzos y el vector de desplazamientos como funciones de onda casi-planas, siguiendo la construcción de Pochhammer:

$$S(r, \phi, z, t) = \exp(i(kz + n\phi - t\omega))(\sigma_{rr}(r), \sigma_{\phi\phi}(r), \sigma_{zz}(r), \sigma_{\phi z}(r), \sigma_{rz}(r), \sigma_{r\phi}(r)), \quad (5.1.6)$$

$$\mathbf{u}(r, \phi, z, t) = (u_r(r), u_\phi(r), u_z(r)) \exp(i(kz + n\phi - t\omega)), \quad (5.1.7)$$

en donde con k , ω , y n son el parámetro de propagación, la frecuencia y el orden angular del modo. De manera similar el tensor de elongaciones bajo la misma convención asume la forma

$$U(r, \phi, z, t) = \text{Re} \left[\left(\frac{\partial u_r(r)}{\partial r}, \frac{1}{r} \left(u_r(r) + i n u_\phi(r) \right), i k u_z(r), \frac{1}{r} \left(i k r u_\phi(r) + i n u_z(r) \right), \frac{\partial u_z(r)}{\partial r} + i k u_r(r), \frac{\partial u_\phi(r)}{\partial r} - \frac{u_\phi(r)}{r} \right) \right] \exp(i(kz + n\phi - t\omega)),$$

en donde Re representa la parte real de la función compleja, la cual tiene el sentido físico. Es decir asumimos el mismo tipo de funciones que se obtiene como solución en el caso de un medio isotrópico en todas las variables excepto en r ya que los coeficientes del tensor de dureza dependen explícitamente de esta variable.

La dinámica de los fenómenos elásticos está gobernada por la segunda ley de Newton para medios continuos, ecuación (5.0.1) cuya forma explícita en término del hexavector de esfuerzos se puede escribir como

$$\left(\frac{S_1 - S_2}{r} + \frac{\partial S_1}{\partial r} + \frac{\partial S_5}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_6}{\partial \phi}, \frac{2S_6}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_2}{\partial \phi} + \frac{\partial S_4}{\partial z} + \frac{\partial S_6}{\partial r}, \frac{S_5}{r} + \frac{\partial S_3}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_4}{\partial \phi} + \frac{\partial S_5}{\partial r} \right) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}(r, \phi, z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (5.1.8)$$

De las ecuaciones dinámicas (5.1.8) y las ecuaciones constitutivas para medios helicoidales (5.1.4), junto con las expresiones para ondas cuasi-planas (5.1.6) y (5.1.7), obtenemos el siguiente sistema, de (5.1.8):

$$\begin{aligned} i k \sigma_{rz} + i n \frac{\sigma_{r\phi}}{r} + \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr}}{r} - \frac{\sigma_{\phi\phi}}{r} + \rho \omega^2 u_r &= 0, \\ i k \sigma_{\phi z} + i n \frac{\sigma_{\phi\phi}}{r} + \frac{d\sigma_{r\phi}}{dr} + \frac{2\sigma_{r\phi}}{r} + \rho \omega^2 u_\phi &= 0, \\ i k \sigma_{zz} + i n \frac{\sigma_{\phi z}}{r} + \frac{d\sigma_{rz}}{dr} + \sigma_{rz} + \rho \omega^2 u_z &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Por otro lado, de las ecuaciones constitutivas (5.1.4):

$$\begin{aligned}
 C_{11}r \frac{du_r}{dx} + C_{15}r \frac{du_z}{dx} + C_{16}r \frac{du_\phi}{dx} + (C_{12} + iC_{15}kr + iC_{16}n)u_r + \\
 i(C_{13}kr + C_{14}n)u_z + (iC_{12}n + iC_{14}kr - C_{16})u_\phi = r\sigma_{rr}, \\
 C_{12}r \frac{du_r}{dx} + C_{25}r \frac{du_z}{dx} + C_{26}r \frac{du_\phi}{dx} + (C_{22} + iC_{25}kr + iC_{26}n)u_r + \\
 i(C_{23}kr + C_{24}n)u_z + (iC_{22}n + iC_{24}kr - C_{26})u_\phi = r\sigma_{\phi\phi}, \\
 C_{13}r \frac{du_r}{dx} + C_{35}r \frac{du_z}{dx} + C_{36}r \frac{du_\phi}{dx} + (C_{23} + iC_{35}kr + iC_{36}n)u_r + \\
 i(C_{33}kr + C_{34}n)u_z + (iC_{23}n + iC_{34}kr - C_{36})u_\phi = r\sigma_{zz}, \\
 C_{14}r \frac{du_r}{dx} + C_{45}r \frac{du_z}{dx} + C_{46}r \frac{du_\phi}{dx} + (C_{24} + iC_{45}kr + iC_{46}n)u_r + \\
 i(C_{34}kr + C_{44}n)u_z + (iC_{24}n + iC_{44}kr - C_{46})u_\phi = r\sigma_{\phi z}, \\
 C_{15}r \frac{du_r}{dx} + C_{55}r \frac{du_z}{dx} + C_{56}r \frac{du_\phi}{dx} + (C_{25} + iC_{55}kr + iC_{56}n)u_r + \\
 i(C_{35}kr + C_{45}n)u_z + (iC_{25}n + iC_{45}kr - C_{56})u_\phi = r\sigma_{rz}, \\
 C_{16}r \frac{du_r}{dx} + C_{56}r \frac{du_z}{dx} + C_{66}r \frac{du_\phi}{dx} + (C_{26} + iC_{56}kr + iC_{66}n)u_r + \\
 i(C_{36}kr + C_{46}n)u_z + (iC_{26}n + iC_{46}kr - C_{66})u_\phi = r\sigma_{r\phi}.
 \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Por simplicidad hemos usado $C_{ij} = C_{ij}(r)$, pero no debe olvidarse que las constantes elásticas dependen de r . Despejando los elementos $\sigma_{\phi\phi}(r), \sigma_{zz}(r), \sigma_{\phi z}(r)$ de las ecuaciones (5.1.10) y sustituyéndolos en las ecuaciones dinámicas (5.1.9) podemos expresar las ecuaciones resultantes de la siguiente forma matricial, (para nuestra investigación nos limitaremos a los modos isotrópicos con $n = 0$).

$$\frac{d\Psi}{dr} = M(r) \cdot \Psi, \tag{5.1.11}$$

con $M(r)$

$$-M(r) = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_0}{r} & ik\Omega_1 & ik\Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 & \Omega_5 \\ \frac{\Omega_6}{r} & ik\Omega_8 - \frac{1}{r} & ik\Omega_9 & \Omega_4 & \Omega_{10} & \Omega_{11} \\ ik + \frac{\Omega_{12}}{r} & ik\Omega_{13} & ik\Omega_{14} & \Omega_5 & \Omega_{11} & \Omega_{15} \\ \rho\omega^2 + \frac{\Omega_{16}}{r^2} & \frac{ik\Omega_{17}}{r} & \frac{ik\Omega_{18}}{r} & \frac{\Omega_0 - 1}{r} & -\frac{\Omega_6}{r} & ik - \frac{\Omega_{12}}{r} \\ -\frac{ik\Omega_{17}}{r} & \rho\omega^2 + k^2\Omega_{19} & k^2\Omega_{20} & \frac{ik\Omega_1}{r} & ik\Omega_8 + \frac{2}{r} & ik\Omega_{13} \\ -\frac{ik\Omega_{18}}{r} & k^2\Omega_{20} & \rho\omega^2 + k^2\Omega_{21} & ik\Omega_2 & ik\Omega_9 & ik\Omega_{14} + \frac{1}{r} \end{pmatrix} \tag{5.1.12}$$

en donde $M(r)$ es una matriz cuyos elementos son una función de la coordenada radial a través del ángulos de rotación y $\Psi = (u_r(r), u_\phi(r), u_z(r), \sigma_{rr}(r), \sigma_{r\phi}(r), \sigma_{rz}(r))$ (los valores explícitos de Ω_i se encuentran en el apéndice A). La dependencia radial de la matriz M no es posible

evitarla. Sin embargo, podemos simplificar considerablemente aplicando la rotación inversa. Esto es, nuestro vector de estado en un nuevo sistema de referencia (transformación de Oseen) está dado por $\psi = R_6\phi$ de tal forma que la ecuación dinámica para ϕ toma la forma

$$\frac{d\Phi}{dr} = M'\Phi = \left(R_6^{-1} \cdot M(r) \cdot R_6 - R_6^{-1} \cdot \frac{dR_6}{dr} \right) \Phi, \quad (5.1.13)$$

en donde R_6^{-1} es la rotación inversa, que para el subespacios en donde el vector Ψ está definido adopta la forma

$$R_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5.1.14)$$

con $\theta = qr$. De esta manera la matriz M' contiene las constantes elásticas r , en donde los elementos del tensor de dureza C_{ij} son efectivamente los valores constantes materiales del sistema homogéneo original como muestra la expresión $R_6^{-1} \cdot M \cdot R_6$.

$$-M' = \begin{pmatrix} \frac{\Omega_0}{r} & ik\Omega_1 & ik\Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 & \Omega_5 \\ \frac{\Omega_6}{r} & ik\Omega_8 - \frac{1}{r} & q + ik\Omega_9 & \Omega_4 & \Omega_{10} & \Omega_{11} \\ ik + \frac{\Omega_{12}}{r} & ik\Omega_{13} - q & ik\Omega_{14} & \Omega_5 & \Omega_{11} & \Omega_{15} \\ \rho\omega^2 + \frac{\Omega_{16}}{r^2} & \frac{ik\Omega_{17}}{r} & \frac{ik\Omega_{18}}{r} & \frac{\Omega_0 - 1}{r} & -\frac{\Omega_6}{r} & ik - \frac{\Omega_{12}}{r} \\ -\frac{ik\Omega_{17}}{r} & \rho\omega^2 + k^2\Omega_{19} & k^2\Omega_{20} & ik\Omega_1 & ik\Omega_8 + \frac{2}{r} & q + ik\Omega_{13} \\ -\frac{ik\Omega_{18}}{r} & k^2\Omega_{20} & \rho\omega^2 + k^2\Omega_{21} & ik\Omega_2 & ik\Omega_9 - q & ik\Omega_{14} + \frac{1}{r} \end{pmatrix} \quad (5.1.15)$$

Observemos que las constantes elásticas Ω_i mediante la transformación de Oseen ya no tienen dependencia de r . El sistema general de forma compacta queda como

$$\frac{d\Phi}{dr} = M'\Phi, \quad (5.1.16)$$

en donde las únicas dependencias en r proviene de los factores de escala provenientes del sistema de coordenadas cilíndricas.

De esta manera hemos construido, además de un modelo general con máxima anisotropía, un modelo quiral mediante la transformación de Oseen, desde las ecuaciones fundamentales de la elastodinámica. En las siguientes secciones, investigamos un caso particular para verificar el modelo que resolveremos de manera numérica.

Aproximación Isotrópica del modelo general

Antes de resolver la ecuación (5.1.13) consideremos ahora el caso límite para el cual el sólido es isotrópico y homogéneo, por lo que las constantes de rigidez toman los valores, $C_{11} = C_{22} =$

$C_{33}, C_{13} = C_{12} = C_{23}, C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{34} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0, C_{66} = C_{44} = C_{55}$, además si adimensionalizamos las variables como $\beta = ka$, $f^2 = \omega a^2 / C_{11}$ $\gamma = qa$, $x = r/a$ y $S_{ri} = \sigma_{ri} / C_{11}$, $u_i = v_i/a$, la matriz M' se reduce de la siguiente manera

$$M_{iso} = \begin{pmatrix} -\frac{\Pi_0}{x} & 0 & -i\Pi_0\beta & \frac{C_{66}}{C_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -f^2 + \frac{\Pi_1}{x^2} & 0 & -i\frac{\Pi_2\beta}{x} & -\frac{\Pi_0-1}{x} & 0 & -i\beta \\ 0 & \beta^2 - f^2 & 0 & 0 & -\frac{2}{x} & 0 \\ i\frac{\Pi_2\beta}{x} & 0 & -f^2 + \Pi_1\beta^2 & -i\Pi_0\beta & 0 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}. \quad (5.1.17)$$

donde $\Pi_0 = C_{13}/C_{11}$, $\Pi_1 = -(C_{13}^2 - C_{11}^2)/C_{11}C_{66}$, $\Pi_2 = (C_{13}(C_{13} - C_{11}))/C_{11}C_{66}$. Aquí además nos hemos limitado al caso de perfiles isotrópicos axiales $n = 0$ y hélices muy grandes $\gamma \rightarrow 0$, Esta matriz da lugar al sistema de ecuaciones diferenciales $\Psi = (v_r(r), v_\phi(r), v_z(r), S_{rr}(r), S_{r\phi}(r), S_{rz}(r))$. Podemos reescribir este sistema de forma separada como el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{dx} &= -\Pi_0 \frac{v_r}{x} + \frac{C_{66}}{C_{11}} S_{rr} - i\beta \Pi_0 v_z, \\ x \frac{d}{dx} (v_\phi/x) &= S_{r\phi}, \\ \frac{dv_z}{dx} &= S_{rz} - i\beta v_r, \\ \frac{dS_{rr}}{dx} &= \left(\frac{\Pi_1}{x^2} - f^2 \right) v_r - i\beta \Pi_2 \frac{v_z}{x} \\ &\quad - \frac{1}{x} (\Pi_0 - 1) S_{rr} - i\beta s_{rz}, \\ \frac{dS_{r\phi}}{dx} &= (\beta^2 - f^2) v_\phi - \frac{2}{x} S_{r\phi}, \\ \frac{dS_{rz}}{dx} &= (\Pi_1 \beta^2 - f^2) v_z + i\beta \Pi_2 \frac{v_r}{x} \\ &\quad - \frac{1}{x} s_{rz} + i\beta \Pi_0 S_{rr}. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

lo cual da origen a la ecuación para $v_\phi(x)$

$$\frac{d}{dx} x^3 \frac{d}{dx} \left(\frac{v_\phi}{x} \right) = x^2 \frac{d^2 v_\phi}{dx^2} + x \frac{dv_\phi}{dx} - v_\phi = x^2 (\beta^2 - f^2) v_\phi \quad (5.1.19)$$

cuya solución general está dada por

$$v_\phi = AJ_1(x\sqrt{f^2 - \beta^2}) + BY_1(x\sqrt{f^2 - \beta^2}). \quad (5.1.20)$$

en donde $J_1(x)$ y $Y_1(x)$ son las funciones de Bessel y Neumann de orden uno. Sin embargo dado que los desplazamientos debe permanecer finitos en todas partes del cilindro, en particular en el origen $r = 0$ por lo que $B = 0$. Sustituyendo en las ecuaciones (5.1.18), se obtiene

$$S_{r\phi} = x \frac{d}{dx} \left(\frac{v_\phi}{x} \right) = -A \sqrt{f^2 - \beta^2} J_2(x \sqrt{f^2 - \beta^2}), \quad (5.1.21)$$

que son las soluciones para el medio isotrópico, lo que valida el modelo presentado, pues estas soluciones son las que se encuentran en la literatura [23, 1, 55].

5.2. Modelo de guía de onda para un material *quiral*, localmente hexagonal.

5.2.1. Constantes elásticas anisotrópicas estructuralmente invariantes.

Para verificar nuestro modelo, recurrimos a un importante resultado reportado en [124]. En algunas simetrías materiales, las constantes elásticas son anisotrópicas y estructuralmente invariantes ante transformaciones ortogonales, como lo son las rotaciones. Esto significa que los ceros de la matriz de rigidez se conservan aunque apliquemos una rotación arbitraria alrededor del eje de simetría del material. En este resultado la simetría hexagonal está dentro de los materiales con invarianza estructural anisotrópica, lo que nos será de utilidad para nuestro análisis. De esta manera, no es necesario aplicar la transformación de Oseen, es decir, la quiralidad está presente y es equivalente si alineamos el eje r con el eje de simetría hexagonal del material. Este resultado, parece incoherente y debemos mostrar que no lo es.

Supongamos, en el caso más general que las 21 constantes elásticas son independientes entre sí, y además que la transformación de Oseen no es útil, entonces no es necesario usar que

$$M' = \left(R_6^{-1} \cdot M(r) \cdot R_6 - R_6^{-1} \cdot \frac{dR_6}{dr} \right) \quad (5.2.1)$$

que es la transformación de Oseen y de donde se obtiene una matriz cuyos elementos no nulos son q . Sin embargo, ahora las constantes elásticas dependen de la variable r , $C_{ij} = C_{ij}(r)$, podemos ver los valores explícitamente en el apéndice A. De hecho la transformación de Oseen nos proporciona la facilidad de eliminar esta dependencia al agregar una matriz de elementos q , que acopla más fuertemente el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Ahora, veamos que la expresión $R_6^{-1} \cdot M(r) \cdot R_6$, de la transformación de Oseen, ya no tiene sentido y únicamente se tienen los valores de $M(r)$ que depende de términos como $1/r$ y las constantes $\Omega_i = \Omega_j(r)$ tiene dependencia en r (apéndice A). Veamos como se modifica la matriz elástica de 21 elementos cuando consideramos la simetría hexagonal.

Sabemos que se cumple la relación de invarianza $\mathbf{C} = \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M}$, discutida arriba. Considerando el material de 21 elementos independientes y que para un sistema hexagonal $\theta = \pi/3$, alrededor del eje r la matriz \mathbf{M} toma la forma

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

entonces tenemos el siguiente sistema de ecuaciones $\mathbf{C} - \mathbf{M}^T \mathbf{C} \mathbf{M} \equiv 0$, el cual solo tiene solución si $C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0$, $C_{13} = C_{12}$, $C_{33} = C_{22}$, $C_{66} = C_{55}$ y $C_{44} = (C_{22} - C_{23})/2$. Por lo tanto la matriz de constantes elásticas se reduce como

$$\mathbf{C}_r^{Hexa} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{pmatrix}. \quad (5.2.3)$$

¿Qué pasa si ahora aplicamos la transformación ortogonal alrededor del eje r para obtener la dependencia de r en $C_{ij} = C_{ij}(r)$? Resulta que la invarianza estructural mantiene la forma \mathbf{C}_r^{Hexa} independientemente de cualquier rotación alrededor de r , finalmente para observar más claro este resultado, sustituimos los valores $C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0$, $C_{13} = C_{12}$, $C_{33} = C_{22}$, $C_{66} = C_{55}$ y $C_{44} = (C_{22} - C_{23})/2$ en $C_{ij}(r)$ del apéndice A y así se obtiene la invarianza que estamos discutiendo, además Ω_i ya no dependen de r . Por lo tanto la matriz M_{hexa} se reduce como

$$-M_{hexa} = \begin{pmatrix} \frac{s_1}{r} & 0 & iks_1 & -\frac{1}{C_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{55}} & 0 \\ ik & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{55}} \\ \rho\omega^2 + \frac{s_0}{r^2} & 0 & \frac{iks_2}{r} & \frac{1-s_1}{r} & 0 & ik \\ 0 & \rho\omega^2 - k^2 C_{44} & 0 & 0 & \frac{2}{r} & 0 \\ -\frac{iks_2}{r} & 0 & \rho\omega^2 + s_0 k^2 & iks_1 & 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}. \quad (5.2.4)$$

con $C_{44} = (C_{22} - C_{23})/2$. Así el sistema hexagonal en forma matricial se expresa como

$$\frac{d\Phi}{dr} = M_{hexa} \Phi, \quad (5.2.5)$$

con $s_0 = C_{12}^2/C_{11} - C_{22}$, $s_1 = C_{12}^2/C_{11}$, $s_2 = C_{12}^2/C_{11} - C_{23}$, $s_3 = C_{12}^2/C_{11} - (C_{23} + C_{44})$.

El modelo de guía de onda para un material con simetría hexagonal de estudio se puede ver esquemáticamente en la figura (5.2.1). Hemos demostrado que la quiralidad en esta simetría es un invariante, pero no significa que se presenta en otras simetrías (debe probarse), también debe quedar claro la complejidad de resolver el sistema con las constantes $\Omega_i(r)$, con las constantes constantes $C_{ij} = C_{ij}(r)$ que depende de r y que son funciones de senos y cosenos en diferentes

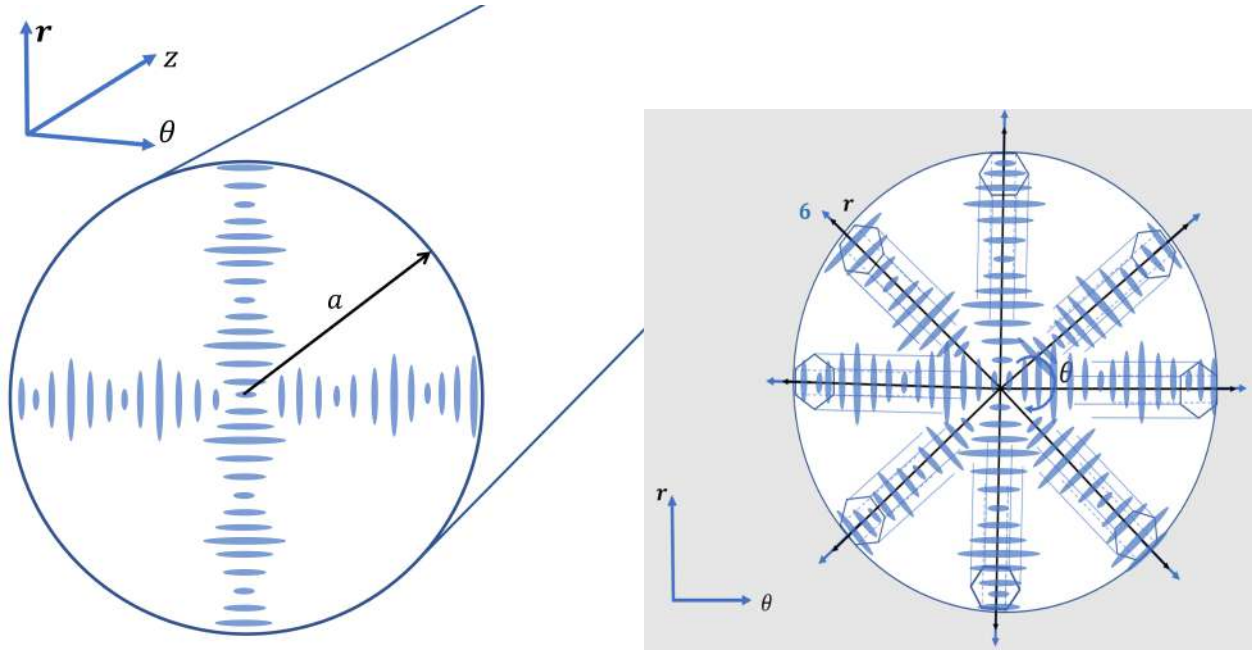


Figura 5.2.1: Representación esquemática de un guía de onda de sección transversal circular de radio a , infinitamente larga con dirección de la fibra en \mathbf{z} , la cual está construida por material de doble hélice (blue phase). La dirección perpendicular del material colestérico coincide con el eje \mathbf{r} del sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) .

potencias y que su fase depende de r , lo que algebraica y computacional es difícil de manipular. Finalmente, es importante hacer notar que aunque el resultado ha sido mostrado con rigor, era de esperarse pues la simetría hexagonal tiene esta característica de ser invariante en un plano, pues normalmente esta simetría se presenta como si fuera un sistema de cilindros alargados, aunque esto es cierto matemáticamente, la construcción artificial sí presenta la quiralidad por construcción, como se ha discutido anteriormente.

5.2.2. Divergencias tipo $1/r$ cuando $r \rightarrow 0$

Como observamos M_{hexa} tiene expresiones de la forma $1/r$. Queremos saber como son los los valores de $\Phi|_{r \rightarrow 0}$ lo cuales deben ser finitos. Podemos observar que en (5.2.5) bajo las suposiciones anteriores, dos de las seis ecuaciones diferenciales se pueden desacoplar como

$$\begin{aligned} u'_\phi(r) &= \frac{\sigma_{r\phi}(r)}{C_{55}} + \frac{u_\phi(r)}{r} \\ \sigma'_{r\phi}(r) &= u_\phi(r) (C_{44}k^2 - \rho\omega^2) - \frac{2\sigma_{r\phi}(r)}{r}, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

además es posible obtener una ecuación diferencial desacoplada para $u_\phi(r)$ y para $\sigma_{r\phi}$

$$\left(l^2 r - \frac{1}{r}\right) u_\phi(r) + u'_\phi(r) + r u''_\phi(r) = 0, \quad (5.2.7)$$

con $l^2 = (\rho\omega^2 - k^2 (C_{22} - C_{23})/2)/C_{55}$, la cual tiene solución analítica en funciones de Bessel

$$u_\phi(r) = A_0 J_1(lr) + B_0 Y_1(lr) \quad (5.2.8)$$

con A_0 y B_0 constantes arbitrarias. Por lo tanto, nuestro sistema acoplado se reduce a cuatro ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} u'_r(r) &= -s_1 \frac{u_r(r)}{r} - ik s_1 u_z(r) + \frac{\sigma_{rr}(r)}{C_{11}} \\ u'_z(r) &= -ik u_r(r) + \frac{\sigma_{rz}(r)}{C_{55}} \\ \sigma'_{rr}(r) &= -\left(\frac{s_0}{r^2} + \rho\omega^2\right) u_r(r) - s_2 ik \frac{u_z(r)}{r} + (s_1 - 1) \frac{\sigma_{rr}(r)}{r} - ik \sigma_{rz}(r) \\ \sigma'_{rz}(r) &= s_2 k \frac{u_r(r)}{r} - (s_0 k^2 + \rho\omega^2) u_z(r) - i s_1 k \sigma_{rr}(r) - \frac{\sigma_{rz}(r)}{r}. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Queremos saber si este sistema tiene solución analítica, para ello vamos a despejar los esfuerzos $\sigma_{rr}(r)$ y $\sigma_{rz}(r)$ del sistema (5.2.9), y además tomamos sus derivadas

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= \frac{iC_{12} k r u_z(r) + C_{11} r u'_r(r) + C_{12} u_r(r)}{r} \\ \sigma_{rz}(r) &= C_{55} u'_z(r) + iC_{55} k u_r(r) \\ \sigma'_{rr}(r) &= C_{11} u''_r(r) + \frac{C_{12} (-u_r(r) + r (u'_r(r) + ik r u'_z(r)))}{r^2} \\ \sigma'_{rz}(r) &= C_{55} (u''_z(r) + ik u'_r(r)), \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

y posteriormente se insertan en las dos últimas, así obtenemos únicamente dos ecuaciones diferenciales solo en términos de los esfuerzos $u_i(r)$

$$\begin{aligned} \left(\alpha^2 - \frac{\gamma}{r^2}\right) u_r(r) + i\beta_1 k u'_z(r) + \frac{i\beta_0 k u_z(r)}{r} + \frac{u'_r(r)}{r} + u''_r(r) &= 0 \\ \zeta^2 u_z(r) + i\beta_3 u'_r(r) + \frac{i\beta_2 u_r(r)}{r} + \frac{u'_z(r)}{r} + u''_z(r) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

donde por comodidad definimos las siguientes constantes $\alpha^2 = (\rho\omega^2 - C_{55} k^2)/C_{11}$, $\zeta^2 = (\rho\omega^2 - C_{22} k^2)/C_{55}$, $\gamma = C_{22}/C_{11}$, $\beta_0 = (C_{12} - C_{23})/C_{11}$, $\beta_1 = (C_{12} + C_{55})/C_{11}$, $\beta_2 = (C_{23} + C_{55})/C_{55}$, y $\beta_3 = (C_{12} + C_{55})/C_{55}$.

Nuestro primer intento para resolver (5.2.11) será el usual, es decir, usar la descomposición de Helmholtz para tratar de desacoplar las ecuaciones diferenciales si suponemos que es posible separar tanto el movimiento transversal como el longitudinal, esto es posible mediante los potenciales como en [1], en donde se da una discusión sobre los potenciales necesarios para construir el campo de desplazamientos. Además debido a cómo se han establecido los esfuerzos

y los desplazamientos en forma cuasi-plana, los potenciales a su vez pueden expresarse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 u_r(r) &= \varphi'(r) + \frac{1}{r}in\chi(r) + ik\eta'(r) \\
 u_\phi(r) &= \frac{1}{r}in\varphi(r) - \chi'(r) + \frac{1}{r}ikn\eta(r) \\
 u_z(r) &= ik\varphi(r) - \frac{1}{r}(r\eta(r))' - \frac{1}{r^2}in^2\eta(r).
 \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Los cuales se reducen para modos axialmente simétricos $n = 0$, como

$$\begin{aligned}
 u_r(r) &= \varphi'(r) + ik\eta'(r) \\
 u_\phi(r) &= -\chi'(r) \\
 u_z(r) &= ik\varphi(r) - \frac{1}{r}(r\eta'(r))',
 \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

Con base en la descomposición de Helmholtz y la linealidad de las ecuaciones diferenciales presentadas es posible usar los potenciales por separado, es decir, $u_r(r) = ik\eta'(r)$ y $u_z(r) = -\frac{1}{r}(r\eta(r))'$, por lo que insertando en la primera ecuación diferencial de (10) se obtiene

$$\left(\frac{\beta_1 - \beta_0 - \gamma}{r^2} + \alpha^2 \right) ik\eta'(r) + (1 - (\beta_1 + \beta_0)) \frac{ik\eta''(r)}{r} + (1 - \beta_1) ik\eta'(r) = 0, \tag{5.2.14}$$

$$\left(\frac{f^2 + \beta_2k^2}{r} + \frac{1}{r^3} \right) ik\eta'(r) + \left(f^2 + \beta_3k^2 - \frac{1}{r^2} \right) ik\eta''(r) + 2\frac{ik\eta'''(r)}{r} + ik\eta^{(IV)}(r) = 0 \tag{5.2.15}$$

las soluciones para resolvemos para $\eta(r)$ son inconvenientes para el análisis por ello usamos $u_r(r) = ik\eta'(r)$, así

$$\left(\frac{\Omega_1}{r^2} + \Omega_2^2 \right) u_r(r) + \Omega_3 \frac{u_r'(r)}{r} + u_r''(r) = 0, \tag{5.2.16}$$

$$\left(\frac{f^2 + \beta_2k^2}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) u_r(r) + \left(f^2 + \beta_3k^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_r'(r) + 2\frac{u_r''(r)}{r} + u_r'''(r) = 0 \tag{5.2.17}$$

con $\Omega_1 = (\beta_1 - \beta_0 - \gamma) / (1 - \beta_1)$, $\Omega_2^2 = \alpha^2 / (1 - \beta_1)$ y $\Omega_3 = (1 - \beta_0 - \beta_1) / (1 - \beta_1)$ (no confundir con las constantes definidas en el apéndice A). Cuyas soluciones para la primera ecuación son

$$u_r(r) = Ar^\Theta J_\nu(\Omega_2 r) + Br^\Theta Y_\nu(\Omega_2 r), \tag{5.2.18}$$

con $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_3^2 - 2\Omega_3 - 4\Omega_1 + 1}$ y $\Theta = (1 - \Omega_3) / 2$. Para la segunda ecuación con un procedimiento similar obtenemos

$$u'_r(r) \left(\zeta^2 r^2 + \beta_3 k r^2 - 1 \right) + u_r(r) \left(\zeta^2 r + \beta_2 k r + \frac{1}{r} \right) + r^2 u_r^{(3)}(r) + 2r u_r''(r) = 0, \quad (5.2.19)$$

cuyas soluciones están dadas en términos de las funciones hipergeométricas y funciones de G de Meijer

$$u_r(r) = \frac{1}{2} D r \sqrt{\Upsilon} {}_1F_2 \left(\Upsilon_1 + \frac{1}{2}; 1, 2; -\frac{1}{4} r^2 \Upsilon \right) - EG_{1,3}^{2,1} \left(-\frac{1}{4} r^2 \Upsilon \middle| \frac{1 - \Upsilon_1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + FG_{1,3}^{3,1} \left(\frac{1}{4} r^2 \Upsilon \middle| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad (5.2.20)$$

con $\Upsilon = (f^2 + k\beta_3)$, $\Upsilon_1 = (f^2 + k\beta_2)/2\Upsilon$, sin embargo a pesar de obtener soluciones analíticas de $u_r(r)$ por medio del potencial $\eta(r)$ son diferentes lo cual implica una inconsistencia, pues por una lado tenemos soluciones del tipo $r^\Theta J_\nu(\Omega_2 r)$ y por otro tanto hipergeométrica ${}_1F_2$ como G de Meijer $G_{1,3}^{2,1}$ y $G_{1,3}^{3,1}$. De manera análoga para $u_z(r)$ se obtiene la misma inconsistencia.

Podemos considerar en su lugar, una guía isotrópica para averiguar si la inconsistencia se sostiene en el límite de isotropía lo que implicaría una inconsistencia en las ecuaciones constitutiva o dinámicas, lo cual es poco probable. Sin embargo, se podría concluir que no es posible realizar la descomposición de Helmholtz para este tipo de geometría.

5.2.3. Aproximación al límite Isotrópico del modelo localmente hexagonal

Para efectuar la aproximación bajo la cual la guía de onda se comporta como un medio isotrópico, tomamos $C_{22} \rightarrow C_{11}$, $C_{23} \rightarrow C_{12}$, $C_{55} \rightarrow \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$, de esta manera la matriz de coeficientes elásticos se reduce como

$$C_{Iso} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}}{2} - \frac{C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}}{2} - \frac{C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}}{2} - \frac{C_{12}}{2} \end{pmatrix}, \quad (5.2.21)$$

y las ecuaciones diferenciales 5.2.11 con $u_r(r) = ik\eta'(r)$ y $u_z(r) = -\frac{1}{r}(r\eta(r))'$, se reducen a

$$\left(\frac{1}{r} - l_0^2 r \right) \eta'(r) - r\eta^{(3)}(r) - \eta''(r) = 0 \quad (5.2.22)$$

$$\left(-l_0^2 - \frac{1}{r^2} \right) \eta'(r) + \left(\frac{1}{r} - l_0^2 r \right) \eta''(r) - 2\eta^{(3)}(r) - r\eta^{(4)}(r) = 0. \quad (5.2.23)$$

donde $l_0^2 \equiv (2\rho\omega^2/(C_{11} - C_{12})) - k^2$, observemos que (5.2.23) es la derivada de (5.2.22) por ello tienen la misma solución

$$\eta(r) = \frac{A_1}{l_0} J_0(l_0 r) - \frac{B_1}{l_0} Y_0(l_0 r) + C_1, \quad (5.2.24)$$

con A_1 , B_1 , C_1 . Por otro lado para $u_r(r) = \varphi'(r)$ y $u_z(r) = ik\varphi(r)$, de (5.2.11) se reducen a

$$\Delta^2 r \varphi(r) + r \varphi''(r) + \varphi'(r) = 0 \quad (5.2.25)$$

$$(1 - \Delta^2 r^2) \varphi'(r) - r \varphi''(r) - r^2 \varphi'''(r) = 0, \quad (5.2.26)$$

donde $\Delta^2 \equiv \rho \omega^2 / C_{11} - k^2$. Veamos que una es la derivada de la otra, la solución de este sistema es,

$$\varphi(r) = A_2 J_0(r \Delta) + B_2 Y_0(r \Delta), \quad (5.2.27)$$

Podemos concluir que la hipótesis sobre la separación de los modos es inconsistente vía los potenciales elásticos cuando se rompe la geometría natural del sistema de referencia. Las soluciones para los desplazamientos para el límite isotrópico son

$$\begin{aligned} u_r(r) &= A_2 \frac{d}{dr} J_0(\Delta r) + \frac{A_1 ik}{l_0} \frac{d}{dr} J_0(l_0 r) \\ u_\phi(r) &= A_0 J_1(l_0 r) \\ u_z(r) &= A_2 ik J_0(\Delta r) - \frac{A_1}{l_0 r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} J_0(l_0 r) \right), \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

nótese que $l^2 \rightarrow l_0^2$ en el límite isotrópico, además $B_0 = B_1 = B_2 = 0$ pues las funciones $Y_n(r)$ divergen cuando $r \rightarrow 0$, para todo n , por lo tanto son soluciones inadmisibles.

5.2.4. Ecuación de dispersión de una guía isotrópica

Debido a que las soluciones anteriores se puede encontrar la ecuación trascendente mediante la imposición de las condiciones de frontera sobre la guía de onda cuando $r = a$, donde a es el radio de la sección transversal de la guía.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= C_{11} u_r'(r) + \frac{C_{12}(u_r(r) + ikru_z(r))}{r} \\ \sigma_{rz}(r) &= \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})(u_z'(r) + iku_r(r)), \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

cuyas condiciones en la frontera se definen para un medio en el vacío, esta situación física se puede representar matemáticamente como

$$\begin{aligned} Re \left(\sigma_{rr}(r) \Big|_{r=a} \right) &= 0 \\ Re \left(\sigma_{rz}(r) \Big|_{r=a} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

estas condiciones sobre la frontera de la guía conducen a las expresiones

$$\begin{aligned} A_1 l_0 (l_0 - k)(k + l_0) J_1(al_0) + 2i\Delta A_2 k J_1(a\Delta) &= 0 \\ A_2 (\Delta(C_{12} - C_{11}) J_1(a\Delta) + a J_0(a\Delta) (\Delta^2 C_{11} + C_{12} k^2)) & \\ + i A_1 k l_0 (C_{11} - C_{12})(al_0 J_0(al_0) - J_1(al_0)) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

las cuales se pueden reescribir en su forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(k - l_0)l_0(k + l_0)J_1(lr) & -ik\Delta J_1(r\Delta) \\ -\frac{1}{2}ikl_0^2(J_0(l_0r) - J_2(l_0r)) & \frac{\Delta J_1(r\Delta)}{r} - (\Lambda_2 k^2 + \Lambda_1 \Delta^2) J_0(r\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2.32)$$

La solución no trivial ocurre cuando las constantes son diferentes de cero lo que inmediatamente implica que el determinante tiene que ser cero, ello nos proporciona la ecuación trascendente o también conocida como ecuación de dispersión,

$$\begin{aligned} 2a\Delta k^2 l_0 J_0(l_0 a) J_1(a\Delta) - (k^2 + l_0^2) \Delta J_1(l_0 a) J_1(a\Delta) & \\ - a(k - l_0)(k + l_0) (\Delta^2 \Lambda_1 + k^2 \Lambda_2) J_0(a\Delta) J_1(l_0 a) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

nótese que $\Delta^2 \Lambda_1 + k^2 \Lambda_2 = -(\Delta^2 + k^2) \Lambda_1 + k^2 = (l_0^2 - k^2)/2$ la cual se puede ordenar como

$$\varpi(\omega) = (l_0^2 - k^2)^2 \left(a\Delta \frac{J_0(a\Delta)}{J_1(a\Delta)} \right) + 4\Delta^2 k^2 \left(al_0 \frac{J_0(l_0 a)}{J_1(l_0 a)} \right) - 2\Delta^2 (k^2 + l_0^2) \quad , \quad (5.2.34)$$

que coincide con la expresión que encontramos en el Capítulo 3 para las guías de onda isotrópicas. Las soluciones de la ecuación de dispersión ocurren cuando $\varpi(\omega, ak) \equiv 0$, cuyos valores permiten la construcción de su espectro de frecuencias.

5.2.5. Frecuencias de corte para el medio Isotrópico.

Cuando $ak \rightarrow 0$ obtenemos las frecuencias de corte, de esta manera la ecuación de frecuencias se reduce como

$$J_0(a\Delta_c)/J_1(a\Delta_c) - \frac{2\Delta_c}{al_c^2} = 0, \quad (5.2.35)$$

donde $\Delta_c^2 = \rho\omega_c^2/C_{11}$, ω_c es la frecuencia de corte. Se puede definir la función $\varpi_c(\omega_c) = J_0(a\Delta_c)/J_1(a\Delta_c) - 2\Delta_c/al_c^2$, de tal manera que cuando se cumpla $\varpi_c(\omega_c) \equiv 0$, lo que estamos encontrando son las frecuencias de corte.

Sin embargo es de interés, como se verá más adelante, que la ecuación de frecuencias o trascendente se reescriba con sus variables adimensionales,

$$\begin{aligned} 4(ak)^2(a\Delta)(al_0)J_0(l_0 a)J_1(a\Delta) - 2(f/\varrho)^2(a\Delta)J_1(l_0 a)J_1(a\Delta) & \\ + ((f/\varrho)^2 - 2(ak)^2)^2 J_0(a\Delta)J_1(l_0 a) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

con $f^2 = a^2\omega^2\rho/C_{11}$ y $\varrho^2 = (C_{11} - C_{12})/2C_{11}$, la que se resuelve para un par ordenado ak y f . Así, es posible definir la función

$$\begin{aligned} \varpi(ak, f) = & 4(ak)^2(a\Delta)(al_0) \frac{J_0(l_0a)}{J_1(l_0a)} - 2(f/\varrho)^2(a\Delta) \\ & + ((f/\varrho)^2 - 2(ak)^2)^2 \frac{J_0(a\Delta)}{J_1(a\Delta)}, \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

cuyas soluciones están dadas si $\varpi(ak, f) = 0$, para un número de onda $ak \approx 0$, obtenemos una función $\varpi_c(f_c) \equiv 0$, es decir las frecuencias $f = f_c$ que satisfacen esta expresión se conocen como *frecuencias de corte*, como ya habíamos mencionado con anterioridad. Podemos ver el comportamiento de esta función, para diferentes materiales con simetría hexagonal en la fig.(5.2.2), los valores para la razón de Poisson ϱ para cada material se consultaron en [58].

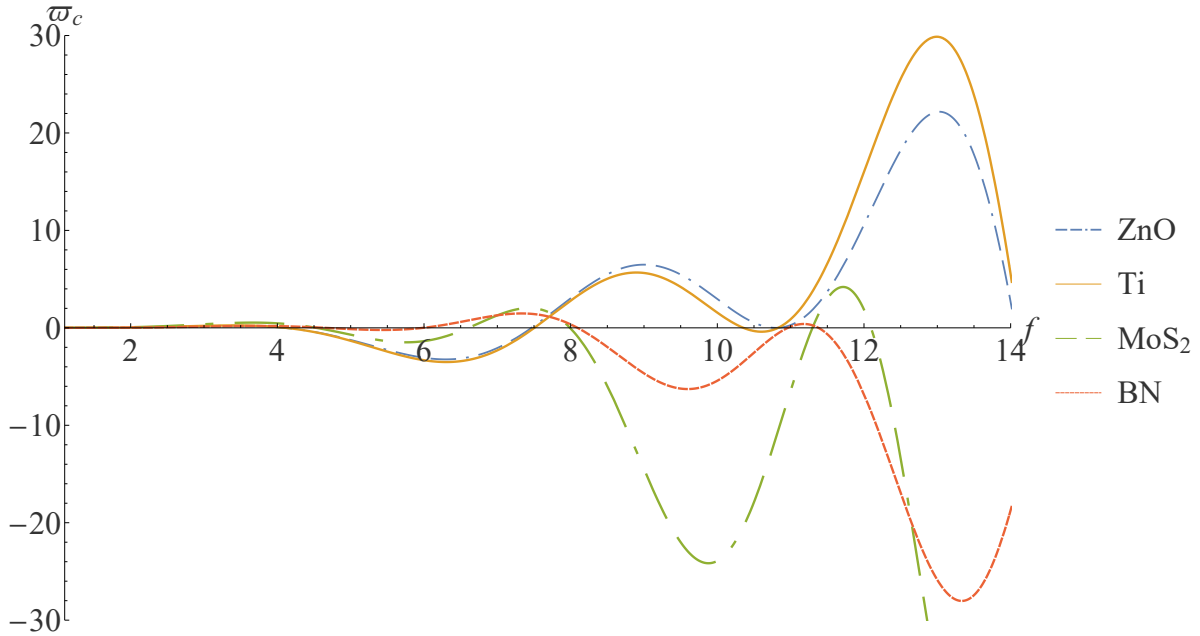


Figura 5.2.2: Ecuación adimensional de frecuencias de corte $\beta \approx 0$, $\varpi_c = \varpi_c(f)$ para diferentes materiales con simetría hexagonal. Las frecuencias de corte f_c están dadas para valores tales que $\varpi_c(f_c) \equiv 0$.

5.2.6. Existencia de una solución no trivial con geometría hexagonal.

Las inconsistencias presentada anteriormente, para soluciones de los desplazamientos, cuyos materiales presentan simetría hexagonal, con su eje de simetría alineado con el eje r , H_{6r} ; se presentan por la ruptura de la simetría, extensos trabajos sobre el uso de materiales H_{6z} presentan soluciones analíticas de los desplazamientos para modos simétricos ($n = 0$, lo que desacopla la componente u_ϕ), esto sucede porque las ecuaciones isotrópicas son cualitativamente equivalentes a las ecuaciones con simetría H_{6z} (véase por ejemplo [13]). Sin embargo, la ruptura de simetría implica que de descomposición de Helmholtz, para este caso en particular $n = 0$,

no arroja resultados consistentes. En esta sección mostraremos que el sistema (5.2.38) para H_{6r} tienen al menos una solución no trivial.

Las ecuaciones resultantes para los desplazamientos para H_{6r} son las siguientes

$$\begin{aligned} \left(\alpha^2 - \frac{\gamma}{r^2}\right) u_r(r) + i\beta_1 k u'_z(r) + \frac{i\beta_0 k u_z(r)}{r} + \frac{u'_r(r)}{r} + u''_r(r) &= 0 \\ \zeta^2 u_z(r) + i\beta_3 u'_r(r) + \frac{i\beta_2 u_r(r)}{r} + \frac{u'_z(r)}{r} + u''_z(r) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

Éstas gobiernan las ecuaciones del campo de desplazamiento (5.2.38), por resolver. Cada una de ellas, es una ecuación diferencial lineal de la forma

$$\frac{d^n \Phi}{dr^n} + r^{-1} f_1(r) \frac{d^{n-1} \Phi}{dr^{n-1}} + \dots + r^{-(n-1)} f_{n-1}(r) \frac{d\Phi}{dr} + r^{-n} f_n(r) \Phi = 0, \quad (5.2.39)$$

donde $f_i(r)$ son funciones analíticas alrededor de una vecindad $r = 0$, es decir, los coeficientes de la ecuación diferencial satisfacen la condición necesaria y suficiente de que el punto $\eta = 0$ es un punto singular regular, y por lo tanto se pueden representar por una serie de potencias en r , cuyas soluciones son regulares en el origen $r = 0$ como lo indica el método de Frobenius [57], por lo tanto

$$\Phi(r, \lambda) = r^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n. \quad (5.2.40)$$

Para encontrar λ , primero reduciremos el sistema (5.2.38), de segundo a primer orden, mediante los siguientes cambios de variable $\omega_1 = U$, $\omega_2 = iW$, $\omega_3 = rU'$ y $\omega_4 = irW'$, donde $U = u_r(r)$ y $W = u_z(r)$. Por lo tanto el sistema (5.2.38) es equivalente a

$$\begin{aligned} r\omega'_1 &= \omega_3, & r\omega'_2 &= \omega_4 \\ r\omega'_3 &= -(\alpha^2 r^2 - \gamma)\omega_1 - \beta_0 k r \omega_2 - \beta_1 k r \omega_4 \\ r\omega'_4 &= \beta_2 r \omega_1 - \zeta^2 r^2 \omega_2 + \beta_3 r \omega_3, \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

podemos representar el sistema es su forma matricial como

$$r\omega'_i = A_{ij} \omega_j \quad i, j = 1 \dots 4, \quad (5.2.42)$$

los coeficientes A_{ij} en general son funciones de r , en nuestro caso analíticas en torno a $r = 0$. Se sabe que tal sistema posee un conjunto de soluciones de la forma

$$\omega_i = r^\lambda F_i(r), \quad (5.2.43)$$

con λ una constante por determinar, también $F_i(r)$ son funciones analíticas en $r = 0$, pero al menos uno de ellos, $F_i(0) \neq 0$. Sea $A_{ij}(0)$ en $r = 0$, mediante el sistema (5.2.38), obtenemos la siguiente ecuación

$$(A_{ij}(0) - \lambda \delta_{ij}) F_i(0) = 0, \quad (5.2.44)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, cuya solución no trivial se obtiene siempre que

$$\det(A_{ij}(0) - \lambda\delta_{ij}) = 0, \quad (5.2.45)$$

que es su equivalente a la ecuación indicial. Los valores obtenidos para esta ecuación son $\lambda = 0, 0, \pm\gamma$, donde $\gamma = C_{22}/C_{11}$. El método anterior permite construir una solución en serie de potencial con coeficientes analíticos en $r = 0$. Esto demuestra que existen valores λ tales que existe un valor que hace posible que el desarrollo en serie. En conclusión el problema tiene al menos una solución no trivial. Este procedimiento ahora descrito, nos permite elaborar un método para resolver este problema como veremos a continuación.

5.3. Método de validación *Isotrópico* $\rightarrow H_{6r}$

La solución de problemas en elastodinámica es un problema que no está resuelto por completo. Por un lado, las ecuaciones de dispersión para el medio más simple, que es el isotrópico, requieren de cómputo eficiente ya que la ecuación de frecuencias (5.2.37) es una ecuación trascendente, es decir no existe algún método algebraico que pueda emplearse para encontrar una solución analítica, así que se resuelven con métodos numéricos de búsqueda de raíces, como el método de Newton-Raphson entre otros.

El modelo para la fibra isotrópica, nos permite ver explícitamente las diferentes velocidades para cada tipo de movimiento: transversal o longitudinal, pero conforme se pierde isotropía y simetría se gana acoplamiento entre las ecuaciones dinámicas y las relaciones constitutivas, veamos por ejemplo el caso de la máxima anisotropía representado por la matriz, $M(r)$ de la expresión (5.1.12), que presenta el máximo acoplamiento, en el que también comprobamos inconsistencias en la descomposición de Helmholtz, eso da indicios de que el problema no es trivial, veamos las dificultades que se presentan.

Podríamos pensar en resolver directamente el sistema (5.3.1). Sin embargo, es necesario conocer sus valores en $r = 0$, en el caso isotrópico basta hacer un desarrollo en serie de Taylor de las soluciones analíticas del vector de desplazamiento para ver que son finitas cerca de ese punto; en el caso de la simetría H_{6r} no tenemos esas funciones, de tenerlas el problema ya estaría resuelto salvo las complicaciones de encontrar los valores para una ecuación trascendente (si existiera), esta es la complicación fundamental de este problema, necesitamos que el valor en las componentes en la fibra sea finito, es decir: $u_i, \sigma_{ri}|_{r=0} < \infty$ para iniciar nuestro algoritmo.

A continuación implementamos el método de aproximación *Isotrópico* $\rightarrow H_{6r}$, el cual consiste en aproximar el modelo isotrópico al modelo con simetría H_{6r} mediante un parámetro de control $\delta \in [0, 1]$; para $\delta = 0$ tenemos el sistema isotrópico, y en $\delta = 1$ el medio con H_{6r} . Esta metodología tiene como fundamento que existe una solución no trivial del problema H_{6r} . Conocemos los valores en $r = 0$ de $u_i(r)|_{r=0}$ y $\sigma_{ri}(r)|_{r=0}$, con $i = r, z$ del sistema isotrópico, que son finitos y que las ecuaciones de movimiento para H_{6r} tienden al sistema isotrópico, es decir, $H_{6r} \rightarrow \text{Isotrópico}$. Bajo estas hipótesis, al menos sobre la fibra ($r = 0$) no se distingue la anisotropía del material, como mostramos en la sección anterior. Además en $\delta = 0$ son bien conocidos los valores que satisfacen la ecuación trascendente (5.2.37), es decir, tenemos un esquema numérico ya desarrollado para verificar que nuestro modelo resuelve correctamente.

El sistema adimensional por resolver es

$$\begin{aligned}
 \left(\alpha^2(\delta) - \frac{\gamma}{x^2}\right) v_r(x) + i\beta_1(\delta)\beta v'_z(x) + \frac{i\beta_0(\delta)\beta v_z(x)}{x} + \frac{v'_r(x)}{x} + v''_x(x) &= 0 \\
 \zeta^2(\delta)v_z(x) + i\beta_3(\delta)v'_r(x) + \frac{i\beta_2(\delta)v_r(x)}{x} + \frac{v'_z(x)}{x} + v''_z(x) &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

con variables adimensionales $x \equiv r/a$, $v_i \equiv u_i/a$, $\beta \equiv ka$, $f^2 \equiv a^2\omega^2\rho/C_{11}$, $c_{ij} \equiv C_{ij}/C_{11}$. En la sección anterior ya hemos comprobado que cuando $C_{22} \rightarrow C_{11}$, $C_{23} \rightarrow C_{12}$, $C \rightarrow \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$, el sistema tiene solución analítica vía los potenciales elásticos. Podemos introducir el parámetro de control δ , y usamos las variables $\bar{c}_{22} = \delta c_{22} + (1 - \delta)$, $\bar{c}_{23} = \delta c_{23} + (1 - \delta)c_{12}$, $\bar{c}_{55} = \delta c_{55} + (1 - \delta)(1 - c_{12})/2$, además definimos las constantes de (5.3.1) como

$$\begin{aligned}
 \alpha^2(\delta) &= (f^2 - \bar{c}_{55}\beta^2), \\
 \zeta^2(\delta) &= (f^2 - \bar{c}_{22}\beta^2)/c_{55}, \\
 \gamma &= \bar{c}_{22}, \\
 \beta_0(\delta) &= (\bar{c}_{12} - \bar{c}_{23}), \\
 \beta_1(\delta) &= (\bar{c}_{12} + \bar{c}_{55}), \\
 \beta_2(\delta) &= \bar{c}_{23}/\bar{c}_{55} + 1, \\
 \beta_3(\delta) &= \bar{c}_{12}/\bar{c}_{55} + 1.
 \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Sin embargo para para construir la ecuación trascendente del medio H_{6r} , tenemos que resolver los esfuerzos,

$$\begin{aligned}
 s_{rr}(x) &= \frac{i\bar{c}_{12}\beta x v_z(x) + x v'_r(x) + \bar{c}_{12} v_r(x)}{x} \Big|_{x=1} = 0 \\
 s_{rz}(x) &= \bar{c}_{55} (v'_z(x) + i\beta v_r(x)) \Big|_{x=1} = 0,
 \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

donde $s_{ri} \equiv \sigma_{ri}/C_{11}$, son los esfuerzos adimensionales. Como se mostró anteriormente, la ecuación de frecuencias para el medio isotrópico se puede encontrar de forma analítica (5.2.37). De forma numérica es posible encontrar valores para (5.3.3), resolviendo simultáneamente (5.3.1), como veremos más adelante. De esta manera, tenemos una forma de verificar que nuestros sistemas son convergentes. A continuación, mostraremos el diseño del algoritmo, que permite realizar la validación numérica, y también resolver el sistema H_{6r} .

5.4. Soluciones numéricas

Hasta el momento, hemos logrado reducir un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, adimensionales,

$$\frac{d\Phi}{dx} = M_{hexa}\Phi. \tag{5.4.1}$$

las cuales tienen como formas explícitas:

$$\begin{aligned}
 v'_r(x) &= -\bar{c}_{12} \frac{v_r(x)}{x} - i\beta \bar{c}_{12} v_z(x) + s_{rr}(x) \\
 v'_z(x) &= -i\beta v_r(x) + \frac{s_{rz}(x)}{\bar{c}_{55}(\delta)} \\
 s'_{rr}(x) &= \left((\bar{c}_{22}(\delta) - \bar{c}_{12}^2) \frac{1}{x^2} + f^2 \right) v_r(x) + (\bar{c}_{23}(\delta) - \bar{c}_{12}^2) i\beta \frac{v_z(x)}{x} \\
 &\quad + (\bar{c}_{12} - 1) \frac{s_{rr}(r)}{x} - i\beta s_{rz}(x) \\
 s'_{rz}(x) &= i(\bar{c}_{12}^2 - \bar{c}_{23}(\delta)) \beta \frac{v_r(x)}{x} - ((\bar{c}_{22}(\delta) - \bar{c}_{12}^2) \beta^2 + f^2) v_z(x) \\
 &\quad - i\bar{c}_{12} \beta s_{rr}(x) - \frac{s_{rz}(x)}{x}.
 \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

donde $\Phi = (v_r, v_z, s_{rr}, s_{rz})$, es el vector de estados que contiene los esfuerzos y las componentes del vector de desplazamientos adimensionales. Para solucionar estos sistemas de EDOs acopladas, a saber (5.3.1) y (5.4.2), es necesario imponer condiciones en la frontera de la guía de onda, para estudiar la propagación de ondas elásticas en este medio anisotrópico.

Dado que supondremos que la guía de onda elástica está rodeada de vacío se tiene que cumplir que todos los elementos de los esfuerzos elásticos sobre su superficie debe de ser nulos, esto decir

$$Re(s_{rr}(x=1)) = 0, Re(s_{rz}(x=1)) = 0, \tag{5.4.3}$$

mientras que los desplazamientos $v_i(x)$, son libres para que la superficie siempre esté suelta la superficie de la guía. Se ha tomado la parte real consistentemente con la definición de nuestro vector de estado Φ , además de que la linealidad de los sistemas (5.3.1) y (5.4.2), permiten tomar la parte real sin contradicciones, no sería correcto lo anterior, si los sistemas presentaran no linealidad. De esta manera nuestro problema con condiciones de frontera, bajo las condiciones señaladas, está completo. A continuación, discutiremos sobre la finitud de las componentes del campo de desplazamientos y del tensor de esfuerzos cuando estamos cerca de la fibra de la guía, es decir, cuando $x \rightarrow 0$.

5.4.1. Soluciones en serie de potencias

Para iniciar nuestra rutina numérica, tenemos que asegurarnos que no existan valores que tiendan a infinito, aunque numéricamente no es posible obtener valores infinitos, si suficientemente grandes que induzcan errores de interpretación. Analíticamente podemos averiguar si nuestro sistema de EDOs diverge en algún conjunto de puntos (el conjunto deberá ser finito al menos en una región del dominio, pues un conjunto de divergencias infinitas no puede expresarse en series de potencias [57]).

Es el caso del sistema (5.4.2), notemos que cuando $x \rightarrow 0$ entonces $1/x \rightarrow \infty$, sin embargo por el teorema del cambio de variable [44], el Jacobiano en coordenadas cilíndricas J sabemos que es igual a x . La consecuencia fundamental de este teorema es que cuando $x = 0$ el cambio de variable, por medio del teorema de la función implícita, no está bien definido (normalmente

presentado en el teorema de variable real como $J \neq 0$), luego estas divergencias no tienen influencia en la finitud de las componentes del campo de desplazamientos y del tensor de esfuerzos, pues en $x = 0$ no existe una transformación de los tensores de esfuerzos y deformación, algo inadmisibles. Otro argumento que apoya esta conclusión es que hemos probado que el sistema tiene al menos una solución no trivial.

A lo largo de nuestra investigación, observamos que una de las dificultades fundamentales se debe a como definimos el valor de las componentes tanto del tensor de esfuerzos, como del campo de desplazamiento en $x \approx 0$, una forma de encontrar estos valores (finitos) es tomar sus partes radiales $u_i(x)$ y $\sigma_{ri}(x)$ y desarrollar cada componente $i = r, z$, en serie de Taylor alrededor de $x = 0$, aunque esto implica conocer las funciones *a priori*, y como observamos las soluciones del sistema H_{6r} , no son consistentes con la descomposición de Helmholtz, en consecuencia las soluciones las debemos obtener de manera numérica.

Existen dos formas de obtener las condiciones de las componentes cerca del origen, una es desarrollar en serie de las soluciones del sistema (5.3.1), y obtener las relaciones de recurrencia correspondientes, veamos las dificultades que se presentan al optar por ese método.

Sean $v_r(x) = (Cx)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} a_m (Cx)^m$, con $a_0 \neq 0$, y $v_z(x) = (Cx)^\rho \sum_{m=0}^{\infty} b_m (Cx)^m$ con $b_0 \neq 0$, con λ y ρ son constantes definidas (reales o complejas) las cuales deberán definirse pues provienen del método de Frobenius. C es una constante real indeterminada que se puede fijar posteriormente. Insertando estos desarrollos en serie en (5.3.1) con $\delta = 1$, después de una adecuada manipulación algebraica para desacoplar las relaciones de recurrencia, que se reducen a ecuaciones algebraicas lineales de los coeficientes a_m y b_m , para las ecuaciones iniciales cuando $m = 0$, respectivamente del sistema (5.3.1)

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda - 1)a_0(Cx)^\lambda + \lambda a_0 - i\frac{\beta_1}{C}a_0(Cx)^{\lambda+1} + \\ \frac{\zeta^2}{C^2}a_0(Cx)^{\lambda+2} - i\frac{\beta_0}{C}a_0(Cx)^{\lambda+1} = 0, \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

$$(\rho(\rho - 1) + \rho)b_0(Cx)^\rho - \gamma^2 b_0(Cx)^\rho = 0 \quad , \quad (5.4.5)$$

de (5.4.4) y (5.4.5), obtenemos de las potencias menores posibles, y ya que $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned} (\lambda(\lambda - 1) + \lambda)a_0(Cx)^\lambda = 0 \\ (\rho^2 - \gamma^2)b_0(Cx)^\rho = 0, \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

por lo tanto, para cumplir las condiciones anteriores, es necesario que $\lambda = \pm 0$ y $\rho = \pm \gamma$, este resultado, no es nuevo, pues hemos llegado a las mismas conclusiones en la sección (5.2.6), lo que además verifica que nuestro resultado es consistente. Para evitar las divergencias en x el único valor permitido para (5.4.5) es $\rho = \gamma = c_{22}$ un número racional, por hipótesis. En consecuencia

$$v_r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (Cx)^m, \quad (5.4.7)$$

$$v_z(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (Cx)^{m+\gamma}. \quad (5.4.8)$$

El siguiente paso es encontrar las relaciones de recurrencia, para a_m y b_m , sin embargo para valores de $m > 0$ las relaciones de recurrencia están acopladas, el ejercicio de ir encontrando los coeficientes, parece ser una opción, pero estos coeficientes van ganando términos por la interacción conforme la serie avanza, así aunque se tiene una solución numérica, si cortamos la serie para algún $m > 0$ los coeficientes se vuelven algebraica y computacionalmente poco eficientes. Por completes, mostramos las relaciones de recurrencia que obtuvimos sumando las ecuaciones del sistema (5.3.1) y así poder separar los coeficientes a_m y b_m , como consecuencia obtenemos una sola ecuación acoplada:

$$\begin{aligned} m^2 a_m - \frac{i}{C}(\beta_1(m-1) + \beta_0)a_{m-1} + \frac{\zeta^2}{C^2}a_{m-2} = \\ (m^2 + 2m\gamma)b_m - \frac{i}{C}(\beta_3(m+\gamma-1) + \beta_2)b_{m-1} - \frac{\alpha^2}{C^2}b_{m-2}, \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

para $m > 0$. Finalmente, hacemos la siguiente observación: el método en series de potencias no carece, en ningún sentido, de rigor matemático ya que está bien definido por las hipótesis del método de Frobenius, bien se puede tomar este camino para encontrar la solución del sistema. Sin embargo, buscamos un método que nos permita construir es espectro de frecuencias de forma más eficiente, vía la ecuación de dispersión.

El método descrito, tiene la desventaja de que para mayor exactitud de las soluciones, necesitamos más términos de la serie, además de que al imponer condiciones de frontera $s_{rr}(x)|_{x=1} = s_{rz}(x)|_{x=1} = 0$, que dependen de $v_r(x)$ y $v_z(x)$ y de sus derivadas, aumentan el número de términos por evaluar como vemos en (5.3.3). En consecuencia el tiempo de cómputo aumenta y agregamos un parámetro más que ajustar, m .

5.4.2. Método de disparo para el rastreo de parámetros.

El segundo método, esta enfocado en el método de disparo (shooting), el cual consiste en rastrear los parámetros de propagación, sujetos a las condiciones de frontera (CFs),

$$\begin{aligned} Re(s_{rr}(x=1)) &= 0 \\ Re(s_{rz}(x=1)) &= 0 \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Los parámetros que ajustamos son convenientemente, β y f y para ello necesitamos dos ecuaciones, es decir, basta el sistema (5.3.1), pues cuenta justamente con dos ecuaciones. Además el sistema (5.4.2), también es posible resolverlo con solo 2 parámetros, pues si pedimos únicamente que el algoritmo regrese los esfuerzos como en (5.4.10), el sistema está determinado.

El método requiere, como hemos discutido, que las componentes cerca del origen sean finitas, el método en series de potencias, parece ser una buena opción para iniciar la rutina, aunque solo en el origen. Aquí surge otro problema, pues necesitamos validar nuestro sistema H_{6r} con el isotrópico, y como mostramos en la sección (5.3), ambos convergen. Sin embargo, además de validar esta convergencia, si queremos construir el espectro necesitamos que la rutina sea capaz ajustar estos dos parámetros para los sistemas de EDOs, (5.3.1) y (5.4.2). Es importante mencionar que los valores iniciales en $x \simeq 0$ de las componentes del campo de desplazamientos, como del tensor de esfuerzos, se pueden aproximar localmente a un isotrópico o utilizar

los primeros términos de los desarrollos en serie para el sistema H_{6r} . Cerca del eje de la fibra, el sistema es aproximadamente isotrópico, esto se explica fácilmente si recordamos que esquemáticamente, un material colestérico esta formado por capas nemáticas planas en cuyo caso no se distingue la quiralidad del material, además que la construcción artificial del material es localmente hexagonal, cuya simetría es transversal isotrópica en la dirección $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a$.

Bajo las condiciones anteriores el valor de los desplazamientos cerca del origen para el esquema isotrópico son:

$$\begin{aligned} v_r(x) &= \frac{1}{2}v_{r1}x + \frac{1}{24}v_{r3}x^3 + O(x^5), \\ v_z(x) &= v_{z0} + \frac{1}{22}v_{z2}x^2 + O(x^4) \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

donde los coeficientes del desarrollo de Taylor alrededor de $x = 0$ son v_{r1} , v_{r3} y v_{z0} , v_{z2} , explícitamente (6.3), los cuales dependen de dos constantes arbitrarias A_1 y A_2 , además ϱ^2 es la razón de Poisson. De manera similar se pueden construir las componentes de los esfuerzos $s_{ri}(r)$, tomando la fibra isotrópico, podemos ver estas expresiones explícitamente en (6.3). Es posible reducir el número de constantes arbitrarias A_1, A_2 . También observamos que de las ecuaciones (5.2.32), las cuales son consecuencias de las CFs sobre la guía, es decir las expresiones están evaluadas en $r = a$ o $x = 1$,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(ak - al_0)al_0(ak + al_0)J_1(la) & -iak\beta J_1(a\beta) \\ -\frac{1}{2}iak(al_0)^2(J_0(l_0a) - J_2(l_0a)) & \frac{a\beta J_1(a\beta)}{a} - (\Lambda_2(ak)^2 + \Lambda_1(a\beta)^2) J_0(a\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.4.12)$$

es posible expresar una constante en términos de la otra, es decir $A_1 = \text{const.}A_2$, como se observa en (5.4.12), además notemos que no dependen de x , sin embargo obtenemos dos diferentes maneras de expresar estas constantes, ya que tenemos la elección de usar una u otra, esto se discutirá posteriormente. Recordemos que buscamos el valor de los esfuerzos cerca del origen $x \approx 0$, después del desarrollo en serie alrededor del origen, obtenemos el valor de los esfuerzos únicamente en términos de una constante A_1 (6.3).

Una vez establecido, de forma analítica, el comportamiento de las componentes del campo de desplazamientos y de los esfuerzos cerca del origen $x \approx 0$, es importante observar que estos *disparos*, como se les conoce a estas funciones s_{ri} v_i cerca del origen, dependen de β y f , es decir que las variaciones de estos parámetros se ajustan conforme se construyen los DDs, este método numérico se conoce como *continuación paramétrica*. Notemos también que en los disparos, las constantes elásticas se consideran isotrópicas, es decir $\delta = 0$, pues estamos usando la hipótesis de que cerca de la fibra el método no distingue de la simetría hexagonal por la discusión sobre el material en capas, discutido anteriormente. En el siguiente capítulo vamos a verificar que se la rutina, cuando $\delta = 0$, reproduce el esquema isotrópico correctamente. Esto último nos permitirá ir hacia adelante en la investigación del sistema quiral, localmente hexagonal del cual estamos interesados en conocer el comportamiento de sus diagramas de dispersión, el cual nos proporcionará información relevante, que discutiremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Resultados y Discusión.

En este capítulo mostramos los resultados de nuestra investigación. Primero, hemos verificado que la rutina numérica que implementamos, efectivamente valida los valores de la guía isotrópica; segundo, una vez realizada la validación es posible la construcción de la estructura de bandas del medio helicoidal variando el parámetro de control δ que nos permite ir del sistema isotrópico al H_{6r} , a través de las ramas de un espectro de frecuencias a otro, mediante el método de continuación paramétrica y el método de disparo para el rastreo de los parámetros de propagación, que satisfacen los sistemas de ecuaciones y las condiciones de frontera, simultáneamente. Finalmente, presentamos ambas estructuras de bandas y sus correspondientes distribuciones de esfuerzos y desplazamientos para algunas soluciones de cada rama de espectro de frecuencias.

6.1. Validación numérica

A continuación, discutimos los resultados que validan las rutinas implementadas y explicamos porque es necesario usar ambas rutinas. Para mayor claridad definimos a la primer rutina como Φ_{rj} , la cual resuelve el sistema de EDOs, $d\Phi/dr = M_{hexa}\Phi$, (5.4.2); la segunda rutina la etiquetamos como s_{rj} , que resuelve el sistema (5.3.1) y (5.3.3). Para ambas rutinas, pedimos que se evalúen las condiciones de frontera (CFs) $Re(s_{rj}(x)|_{x=1}) = 0$, y que regresen el valor de los esfuerzos en el intervalo de la variable adimensional $x \in [0, 1]$. Los parámetros que necesitan las rutinas para resolver los sistemas de ecuaciones son; el número de onda β y la frecuencia f ; sin embargo, es posible dar un parámetro y buscar el otro mediante algún algoritmo de búsqueda de raíces, como el método de Newton-Raphson, por ejemplo. Los índices r, j significa que ambas rutinas regresan los esfuerzos s_{rr} y s_{rz} , con las condiciones arriba mencionadas. Para llevar a cabo la validación (o convergencia), vamos a partir de la expresión analítica, que hemos llamado con anterioridad, ecuación de dispersión (o de frecuencias o ecuación trascendente): $\varpi = \varpi(f)$.

Graficamos la ecuación de dispersión $\varpi = \varpi(f)$ y las rutinas $\Phi_{rj} = \Phi_{rj}(f)$ y $s_{rj} = s_{rj}(f)$ en función de la frecuencia f , y no olvidemos que las rutinas representan el sistema isotrópico cuando $\delta = 0$. Buscamos los valores de las frecuencias de corte (cuando $\beta \approx 0$), pues son frecuencias de interés como veremos después. Observemos que en la fig.(6.1.1), las rutinas numéricas individualmente no reproducen todos los ceros analíticos de $\varpi(f_c) \equiv 0$. Por ejemplo, los ceros

de la rutina Φ_{rj} coinciden solo con algunos de los ceros analíticos, mientras que la rutina s_{rj} reproduce los ceros restantes. Sin embargo, mediante las dos rutinas aseguramos que se tienen todos los ceros, es decir se obtienen todas las frecuencias de corte f_c cuando $\beta = 0$ en el espectro.

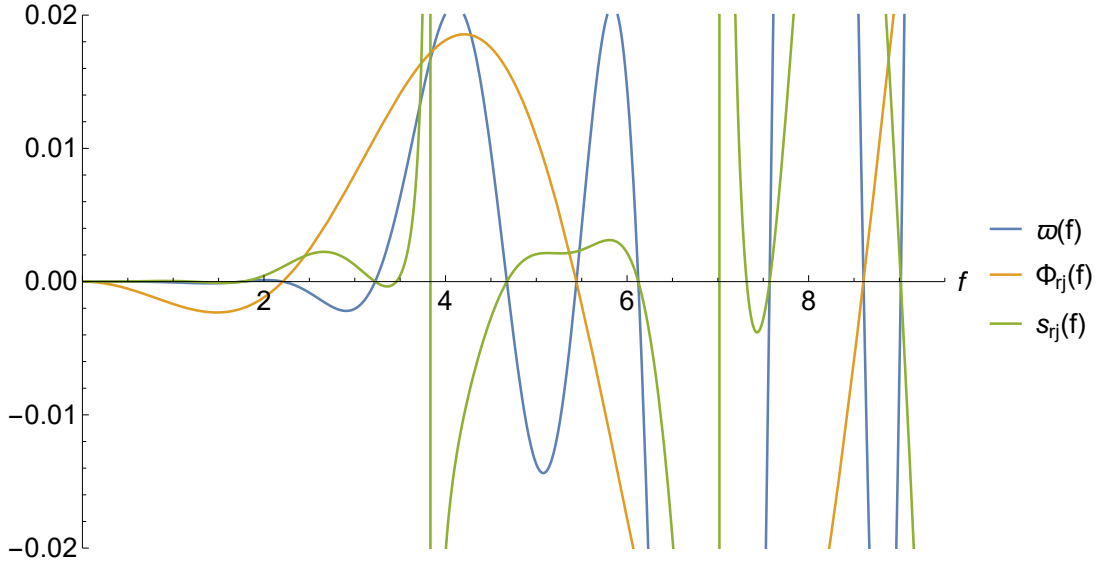


Figura 6.1.1: La gráfica muestra los valores ceros de la trascendente cuando $k = 0$, las raíces son los valores de la frecuencias f

Recordemos que para iniciar nuestras rutinas, tuvimos que usar valores aproximados cerca del origen, además para tener solo una constante, usamos una de las ecuaciones $A_1 = cte.A_2$ o $A_2 = cte.A_1$ y obtuvimos dos expresiones para la constante A_1 o dos para A_2 . La rutina s_{ij} no puede reproducir todos los ceros, porque si bien el sistema H_{6r} tiene al menos una solución no trivial, cuando usamos el parámetro $\delta = 0$ el sistema (5.3.1), el cual consta de dos ecuaciones diferenciales en términos de los componentes del campo de desplazamientos $v_i = v_i(x)$, reproduce los resultados de la guía isotrópica y en consecuencia una ecuación es la derivada de la otra (como se mostró en la sección 5.2.3), en ese sentido, el sistema (5.3.1) no puede reproducir todos los ceros por construcción, por lo tanto el sistema (5.3.1) no es completo. Por otro lado, la rutina Φ_{rj} es el conjunto de ecuaciones que, de manera similar, necesita los disparos iniciales cerca del origen, si usamos una de las expresiones A_1 obtenemos los ceros restantes, juntos reproducen el sistema isotrópico, pero es necesario entender porque los ceros se separan de esa manera, necesitamos saber si se debe a que hemos separado la ecuación de frecuencias usando $A_1 = cte.A_2$ (ó $A_2 = cte.A_1$), ó tiene un significado físico más profundo.

Escribiremos la ecuación analítica $\varpi(ak, f)$ de una manera útil para lo que queremos mostrar, recordemos que $\varpi(ak, f) \equiv 0$, es la ecuación de dispersión, explícitamente

$$4a\beta k^2 l_0 J_0(l_0 a) J_1(a\Delta) - 2(k^2 + l_0^2) \Delta J_1(l_0 a) J_1(a\Delta) + a(l_0^2 - k^2)^2 J_0(a\Delta) J_1(l_0 a) = 0, \quad (6.1.1)$$

Notemos que $l_c^2 a^2 = 2a^2 \Delta_c^2 \Lambda_1 = 2a^2 \rho \omega_c^2 / (C_{11} - C_{12})$, ahora cuando $k \rightarrow 0$ de la expresión

(6.1.1), y convenientemente la reescribimos como:

$$J_1(al_c) \left((al_c)^2 J_0(a\Delta_c) - 2a\beta J_1(a\Delta_c) \right) = 0, \quad (6.1.2)$$

Si adimensionalizamos Δ y l_0 con el diámetro de la fibra a , y además sabemos que $v_t^2 = (C_{11} - C_{12})/2\rho$ y $v_l^2 = C_{11}/\rho$, son la velocidad transversal y longitudinal respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} a^2 \Delta^2 &= \frac{a^2 \omega^2}{v_l^2} - a^2 k^2, \\ a^2 l_0^2 &= \frac{a^2 \omega^2}{v_t^2} - a^2 k^2, \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

que son parámetros adimensionales. Si definimos $\Omega_a = \omega a/v_t$ y $\varrho^2 = v_t^2/v_l^2$ la razón de Poisson, de esta manera

$$\begin{aligned} a^2 \Delta^2 &= \Omega_a^2 \varrho^2 - a^2 k^2 \\ a^2 l_0^2 &= \Omega_a^2 - a^2 k^2, \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Particularmente para las frecuencias de corte ω_c , cuando $k \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} a^2 \Delta_c^2 &= \Omega_c^2 \varrho^2 \\ a^2 l_c^2 &= \Omega_c^2, \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

donde $\Omega_c \equiv \omega_c a/v_t$, observamos que $\Omega_c^2 = f^2/\varrho^2$. Por lo tanto

$$J_1(\Omega_c) \left(\Omega_c J_0(\Omega_c \varrho) - 2\varrho J_1(\Omega_c \varrho) \right) = 0, \quad (6.1.6)$$

La condición que Ω_a permanece finito mientras $ka \rightarrow 0$ implica que para una frecuencia dada la longitud de onda tiende a infinito. Por lo tanto las soluciones de la ecuación anterior son las frecuencias de corte de los modos axialmente simétricos, como se supuso en el inicio del análisis. Nótese que $\varrho = cte.$, pues solo depende de las velocidades longitudinal y trasversal las cuales también son constantes. Veamos ahora la razón por la que hemos decidido llevar hasta este punto el análisis. El factor $J_1(\Omega_c)$ es independiente de ϱ , podemos concluir que

las frecuencias que satisfacen la condición $J_1(\Omega_c) \equiv 0$ son puramente axiales, por ello los modos de propagación asociados con estas frecuencias de corte, es decir son modos de corte axial. De forma similar, es posible mostrar que a frecuencias que satisfacen

$$\Omega_c J_0(\Omega_c \varrho) - 2\varrho J_1(\Omega_c \varrho) \equiv 0, \quad (6.1.7)$$

el desplazamiento es puramente radial. Veamos el comportamiento de estas expresiones, en función de la frecuencia f . En el caso de las frecuencias puramente axiales, $Re(s_{rz})$ ya que $Re(s_{rr}) = 0$, están dadas por la rutina s_{rj} , fig.(6.1.2); mientras que para la rutina Φ_{rj} las frecuencias de corte son puramente radiales $Re(s_{rr})$, ya que $Re(s_{rz}) = 0$ fig.(6.1.3). Ahora si comparamos ambas gráficas, observamos que se obtienen todos los ceros de la función $\varpi = \varpi(f)$, solo si consideramos ambas rutinas. Es decir, ambas rutinas son necesarias y suficientes para la

construcción del espectro de frecuencias, finalmente introducir la variable Ω_c , fue de suma importancia para lograr la distinción entre los dos tipos de frecuencias. Observemos que en (6.1.2) aparecen algunos ceros que no corresponden con los ceros de $J_1(\Omega_c)$, debemos tener cuidado ya que éstos, no tienen sentido físico pues mediante pruebas numéricas observamos que estos corresponden a comportamientos asintóticos, es decir que son puntos inestables numéricamente, por cómo se construyó elegimos las constante A_i ; notemos que eso no ocurre en (6.1.3), ya que la rutina correspondiente no tiene estos comportamientos asintóticos por como se escogen las constantes, para verificar lo anterior, intercambiamos las constantes y el resultado fue el contrario el que tenía las inestabilidades numéricas, después del cambio ya no las presentaba.

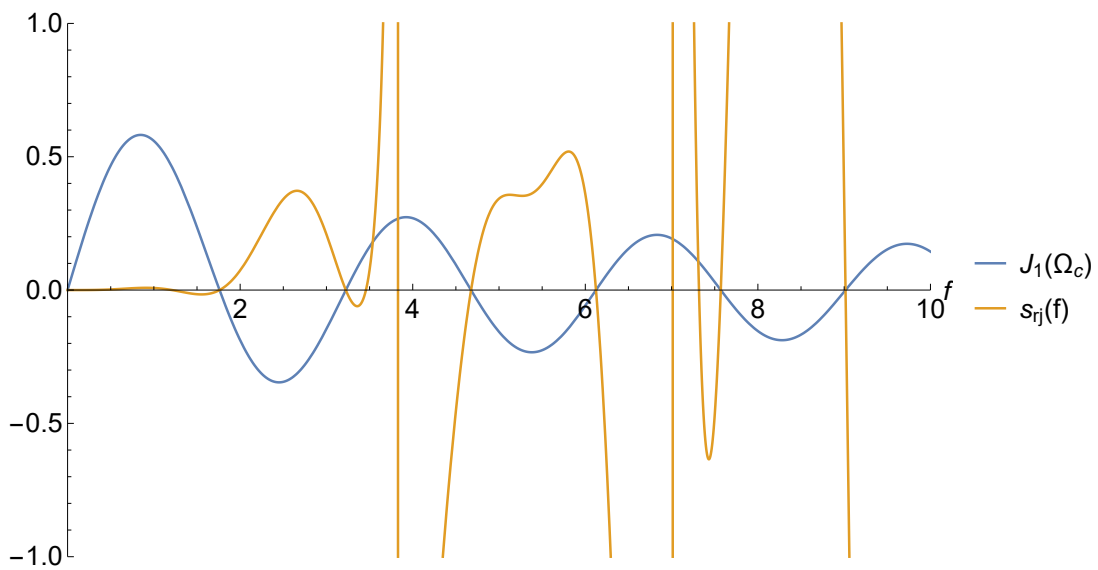


Figura 6.1.2: La gráfica muestra los valores ceros de la trascendente cuando $k = 0$, tanto del medio isotrópico como del modelo hexagonal cuando $\delta = 0$, para frecuencias puramente axiales.

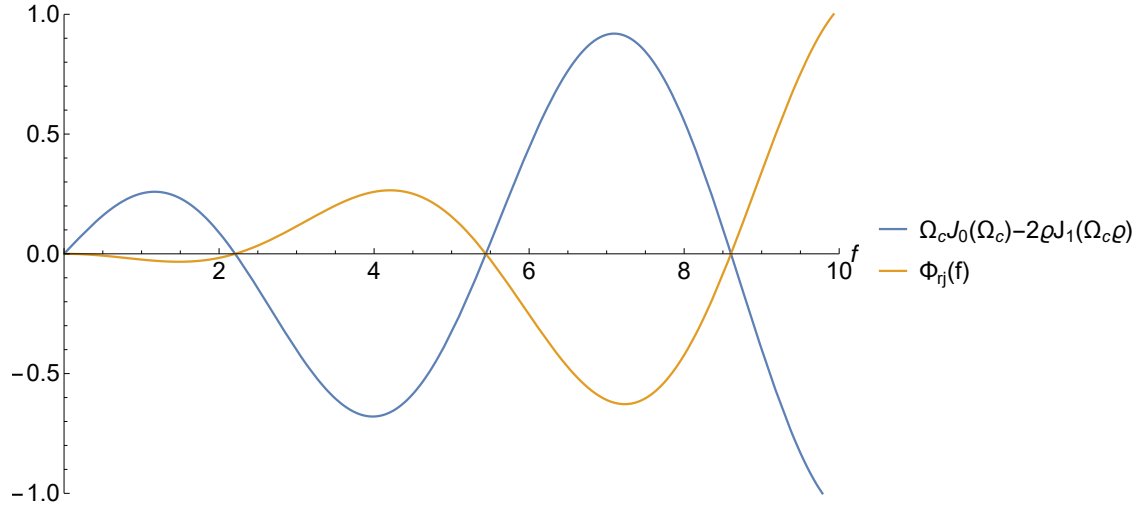


Figura 6.1.3: La gráfica muestra los valores ceros de la trascendente cuando $k = 0$, tanto del medio isotrópico como del modelo hexagonal cuando $\delta = 0$, para frecuencias puramente radiales.

Es muy importante enfatizar que de ambas rutinas se puede obtener los esfuerzos s_{rr} y s_{rx} , sin embargo para que el sistema tenga solución, por como vamos a construir el espectro, es decir, ya que vamos a dar un parámetro, en este caso f para obtener β , solo es posible obtener un esfuerzo por cada rutina, pues se reduce a tener un parámetro y una ecuación.

Veamos las siguientes gráficas (6.1.4) y (6.1.5), que representan los esfuerzos s_{rr} y s_{rz} . En (6.1.4), el esfuerzo s_{rr} se obtuvo de la rutina $\Phi_{rj} = \Phi_{rj}(f)$ y el esfuerzo s_{rz} de la rutina $s_{rj} = s_{rj}(f)$; por otro lado en la gráfica (6.1.5), para este gráfico el esfuerzo s_{rz} se obtuvo de la rutina $\Phi_{rj} = \Phi_{rj}(f)$ y el esfuerzo s_{rr} de la rutina $s_{rj} = s_{rj}(f)$. Inmediatamente notamos que los esfuerzos que no se anulan están dados por los esfuerzos de la figura (6.1.4), mientras que los esfuerzos de (6.1.5) no corresponden con los ceros de la ecuación de frecuencias $\varpi = \varpi(f)$, pues ambos esfuerzos son idénticamente cero como se espera, pues es consistente con la existencia de frecuencias de corte puramente axiales y radiales. Por esta razón, vamos a considerar los esfuerzos de fig.(6.1.4) y fig.(6.1.5) pues ambas deben satisfacer las condiciones de frontera, la razón de esta discrepancia se encuentra en la elección de las constantes A_i . Sin embargo, el análisis anterior sobre la distinción de las frecuencias radiales o axiales se mantiene, ya que éste proviene de la ecuación analítica y la discrepancia entre rutinas que se discute, es puramente numérica.

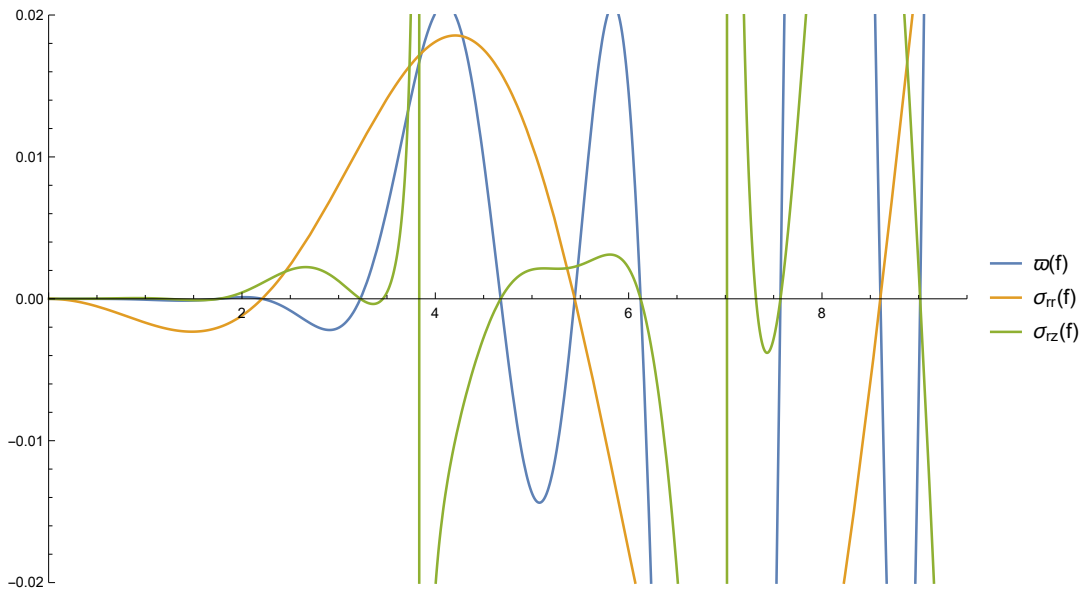


Figura 6.1.4: La gráfica muestra los valores de la ecuación de dispersión cuando $\beta \approx 0$, para del medio isotrópico de las rutinas numéricas implementadas cuando $\delta = 0$, para frecuencias puramente axiales y radiales.

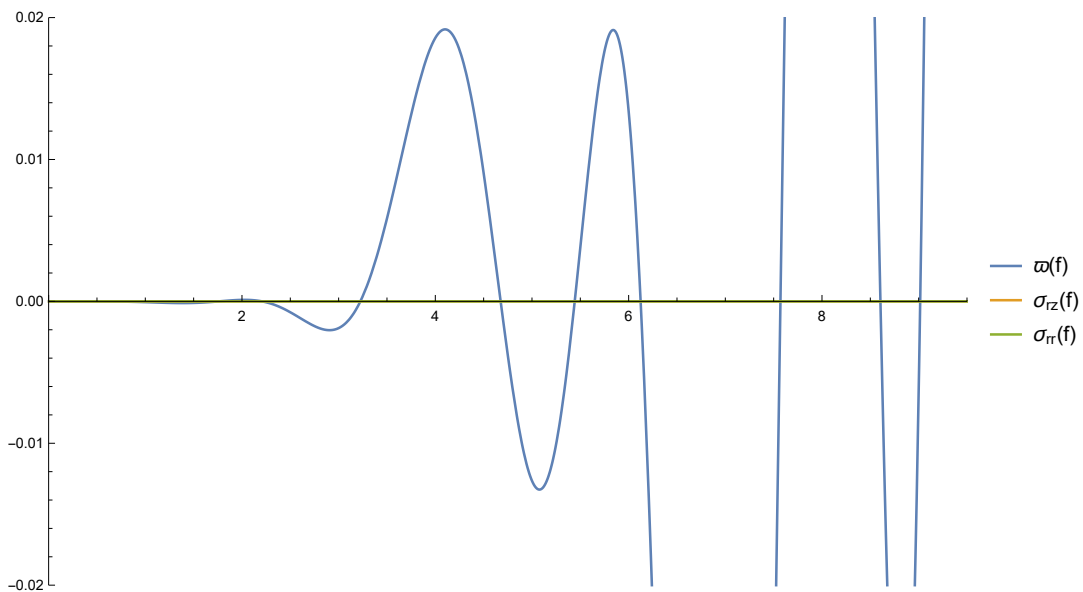


Figura 6.1.5: . La gráfica muestra los valores de la ecuación de dispersión cuando $\beta \approx 0$, para del medio isotrópico de las rutinas numéricas implementadas cuando $\delta = 0$, para los esfuerzos que se anulan, en correspondencia con las frecuencias puramente radiales y axiales.

Para asegurarse si esta separación, de frecuencias puramente radiales y axiales, continúa

conforme avanzamos en la dirección de la fibra o cambia, es necesario la construcción del espectro, del sistema isotrópico. Hemos establecido que, por la construcción de las rutinas s_{rj} y Φ_{rj} nos permiten hacer la distinción entre frecuencias de diferente naturaleza, lo cual no se puede observar directamente de la ecuación analítica, o ecuación de frecuencias $\varpi \equiv 0$, cuyo resultado no ha sido reportado. Es importante aquí hacer la observación de que la elección de la forma algebraica de las constantes A_i , $i = 1, 2$, en (5.4.12), es decir, si ponemos A_1 en términos de A_2 o viceversa, no influye en el comportamiento radial o axial de lo antes discutido (solo numéricamente, y no en su sentido físico); es interesante observar que la elección de las constantes no tiene ninguna influencia en el comportamiento de las componentes cerca del origen, a pesar de depender de los parámetros de rastreo. Lo anterior, y el desarrollo de la expresión (6.1.6), permite finalmente concluir que esta separación es de carácter puramente físico y no numérico. Finalmente, debemos mencionar que fue de gran ventaja implementar ambas rutinas, pues de ello logramos observar esta separación de las frecuencias y que el sistema se puede separar en una ecuación con un parámetro para cada esfuerzo.

Con el análisis y la discusión anterior, hemos demostrado categóricamente que las rutinas implementadas, validan numéricamente los resultados de una guía isotrópica; además encontramos que los ceros de esta ecuación de dispersión están separados por su naturaleza radial y axial. En la siguiente sección, mostraremos la construcción del espectro de dispersión, tanto del sistema isotrópico como del helicoidal, localmente hexagonal.

6.2. Resultados

6.2.1. Estructura de Bandas para la fibra isotrópico.

A continuación, presentamos la estructura de bandas de una guía de onda isotrópica, como se observa en la figura (6.2.1). El espectro de frecuencias del sistema isotrópico se construyó con la técnica de continuación paramétrica, que posteriormente implementamos para la construcción de la estructura de bandas del material helicoidal, y que a continuación abordamos los detalles de este proceso.

La dependencia entre el número de onda y la frecuencia de una propagación, se conoce como relación de dispersión: $f = f(\beta)$, en el caso de un medio no dispersivo, esta se representa en un espacio bidimensional β *vs* f , como una línea recta con ordenada en el origen, cuya pendiente es constante en toda la rama; sin embargo cuando se presenta el fenómeno de dispersión, se observa una dependencia entre estos parámetros de propagación. Cuando consideramos la velocidad de la fase v_p de la onda propagante, hacemos referencia al cambio en el tiempo de la fase de la onda; mientras que la velocidad de grupo v_g hace referencia a la velocidad instantánea en un punto de la rama, $df(\beta)/d\beta$. Si la rama es exactamente una recta para un intervalo de frecuencias, entonces $v_g = v_p$; si $v_g < v_p$, se presenta el fenómeno de dispersión normal; finalmente, cuando $v_g > v_p$ el fenómeno se conoce como dispersión anómala. Estructura de bandas, espectro de frecuencias, relación de dispersión, hacen referencia a la misma representación que se encuentran en la literatura.

El procedimiento para encontrar una rama de la estructura de bandas, es comenzar por las frecuencias de corte, que ya hemos discutido exhaustivamente y que numéricamente se conoce

su valor cuando el parámetro de propagación se anula $\beta \approx 0$, a partir de ese valor, encontramos su correspondiente frecuencia de corte $f(0) = f_c$ mediante el método de rastreo que satisface las condiciones de frontera correspondientes, y de esta manera encontramos un par ordenado β_o y f_c . Recordemos que estamos rastreando la estructura de bandas por medio del parámetro δ , en este caso $\delta = 0$, de las rutinas numéricas (no de la ecuación de dispersión), que además comprobamos reproduce los resultados analíticos.

La estructura de bandas de una fibra isotrópica está formada por varias ramas las cuales asumimos como curvas continuas, por ello una pequeña variación ϵ_0 que modifica el número de onda inicial como $\beta_1 = \beta_0 + \epsilon_0$ y por lo tanto implica un nuevo cálculo en la rutina numérica que regresa una frecuencia $f_1 = f_c + \epsilon_1$ que se ajusta a las CFs ($\epsilon_{0,1}$ valores del orden de 10^{-2}), en otras palabras, el disparo apunta hasta obtener la dependencia entre las variables f_1, β_1 . Este procedimiento se continua de forma reiterativa hasta formar cada una de las ramas, que además comprobamos directamente al sustituir estos valores en la ecuación de dispersión (analítica), lo que vuelve a validar nuestro modelo. ¿Por qué la insistencia de validar cada paso? La insistencia radica en el hecho de que al variar el parámetro $\delta = 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0$, (que establece un puente entre la guía isotrópica y la guía hexagonal, para aproximarnos a la búsqueda de nuestra estructura de bandas en $\delta = 1.0$), las ramas cambian drásticamente. Pongámos como ejemplo el caso de la rama $R1$, figura (6.2.1), se confirma un resultado ya reportado en [73], la rama que presenta dispersión en las frecuencias más bajas, sin embargo, a frecuencias posteriores es no dispersiva, una recta; sin embargo, cuando el parámetro toma su valor límite $\delta = 1$ no existe una rama análoga (no hay soluciones en el sistema hexagonal con esta característica), por esta razón es importante que las variaciones ϵ_0 no sean valores fijos, estos se modifican conforme la rama se desarrolla hasta asegurarse que cada solución cumpla las CFs, mediante la continuación paramétrica y verificar si hay o no, continuidad en la rama. Por lo anterior, no es posible automatizar completamente el procedimiento, pues al hacerlo observamos que frecuentemente se pasa de una rama a otra. La experiencia que obtenemos al aplicar este procedimiento a la guía isotrópica y solucionar los problemas técnicos que se presentan, permiten la construcción de la estructura de bandas con la seguridad de que nuestro método es el adecuado y por lo tanto las soluciones son las correctas. Finalmente, ya que la soluciones que se obtienen son numéricas, los valores de los esfuerzos en la frontera no son un *cero analítico*. Es importante establecer un criterio para definir un *cero numérico*, de tal forma que una vez que se cumpla el criterio, se considere que encontramos una solución del sistema. El criterio es el siguiente: puesto que hemos adimensionalizado nuestro sistema (ambas rutinas), estamos comparando nuestras soluciones contra la unidad, así que para valores del orden 1×10^{-12} consideramos que el sistema tiene una solución admisible.

6.2.2. Distribución de esfuerzos y el campo de desplazamientos del esquema isotrópico.

A continuación, mostramos los perfiles tanto de la distribución de esfuerzos como del campo de desplazamientos, obtenida mediante las componentes del vector de estados Φ versus la parte radial adimensional x ; presentamos dos perfiles para cada rama, comenzando con los parámetros de propagación para las frecuencias de corte. Es importante notar que éstas corresponden a lo

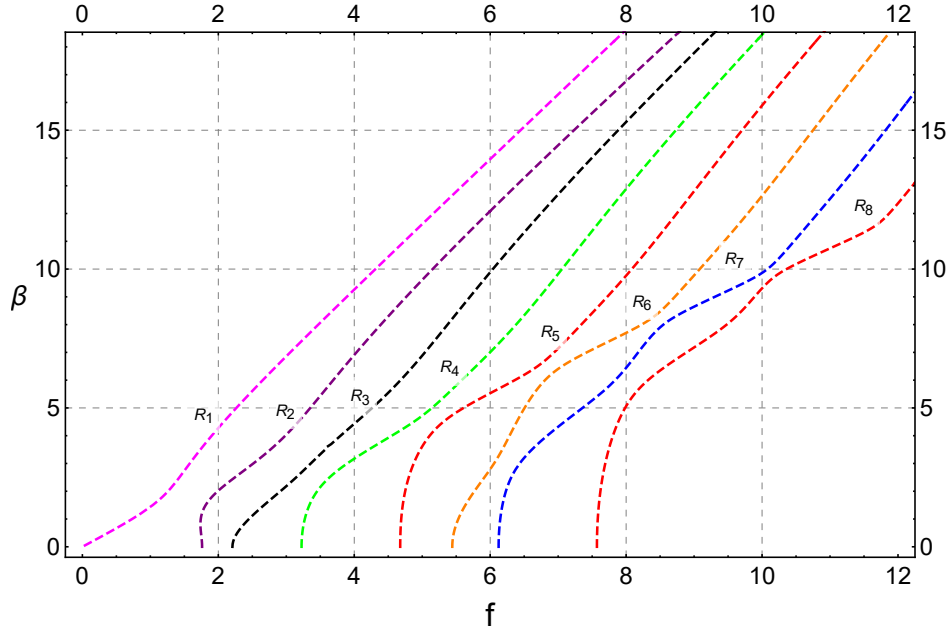


Figura 6.2.1: Estructura de Bandas para el medio isotrópico.

valores analíticos, es decir a la separación de los modos puramente radiales y axiales cerca de las frecuencias de corte f_c , pues como se puede observar en la figura (6.2.3a), uno de los esfuerzos se anula y este fenómeno se repite para las siguientes ramas en la frecuencia de corte f_c , como lo predice el cálculo que realizamos. Además notemos que los esfuerzos para cada rama y perfil satisfacen las condiciones de frontera $Re(s_{ri}|_{x=1}) = 0$, con $i = r, z$. Es importante observar que el número de nodos en las ramas aumentan conforme nos alejamos de las frecuencias bajas, esto es consistente con la energía que se propaga dentro de la guía, debido a que la energía promedio en la sección transversal de la guía depende directamente de la frecuencia. Los perfiles que mostramos para cada rama son de utilidad para verificar si se están cumpliendo las CFs y observar como, efectivamente, los desplazamientos correspondientes se encuentran libres en la frontera. Observemos también que los valores del vector de estados cerca de cero tienen la dependencia lineal o constante impuestas por las aproximaciones en el desarrollo de Taylor.

6.2.3. Estructura de bandas de la fibra helicoidal.

Presentamos la estructura de bandas del sistema helicoidal localmente hexagonal en la figura (6.2.10). Primero, partimos del sistema isotrópico ($\delta = 0$) y variamos el parámetro de control δ hasta alcanzar la configuración del medio helicoidal hexagonal, cuando $\delta = 1$. Como mencionamos arriba, el procedimiento para encontrar el espectro de frecuencias del sistema isotrópico es el que usamos para la guía quiral; segundo, el método de continuación paramétrica y el método de disparo han sido implementados para la construcción del espectro de frecuencias helicoidal. Finalmente, además de validar el modelo mediante la guía de onda isotrópica, su espectro de frecuencias es de utilidad para compararlo con el espectro de frecuencias del modelo quiral.

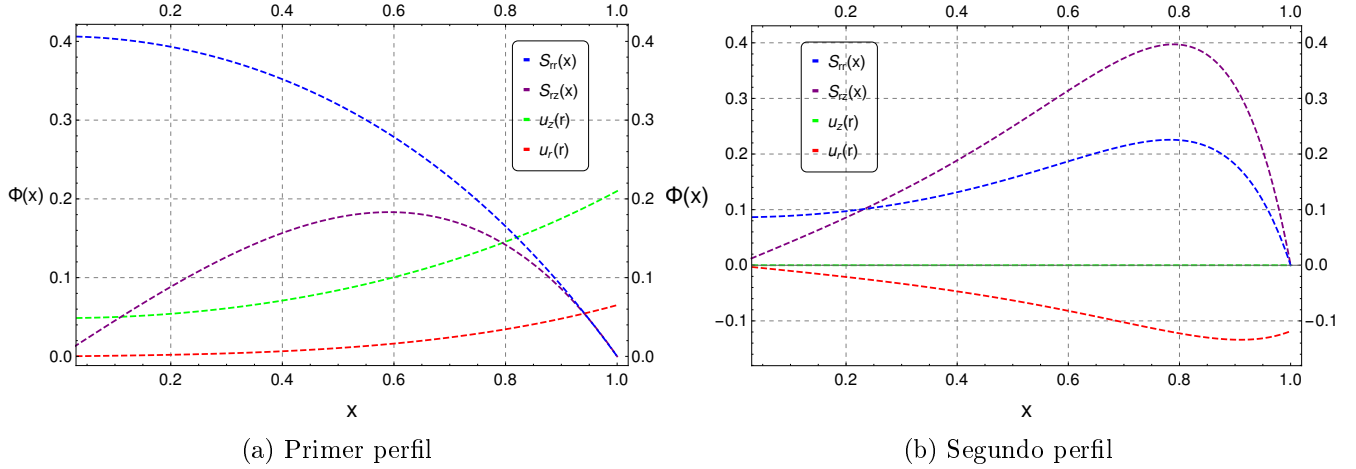


Figura 6.2.2: Perfiles para el sistema isotrópico de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama R_1 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 1.9000$, $f = 0.8732$, (b) $\beta = 8.8000$, $f = 3.8056$.

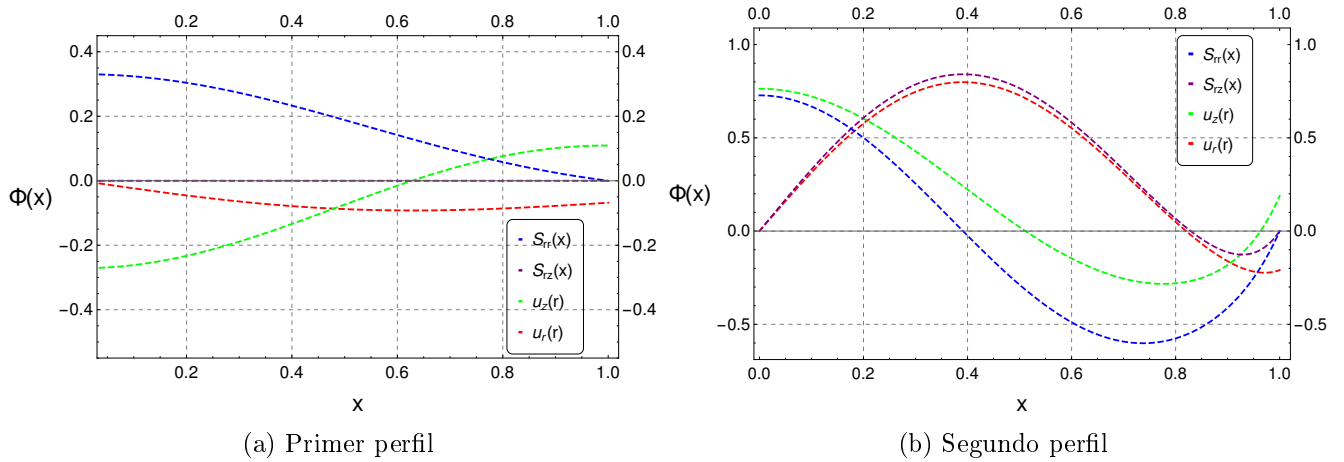


Figura 6.2.3: Perfiles para el sistema isotrópico de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama R_2 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 1 \times 10^{-10}$, $f = 1.7611$, (b) $\beta = 5.6000$, $f = 3.5555$.

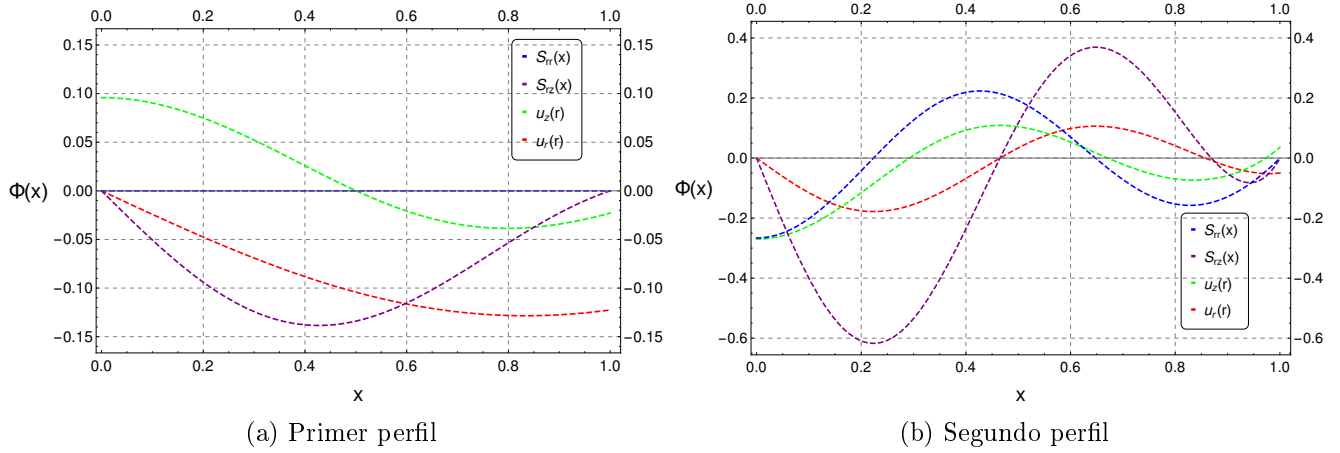


Figura 6.2.4: Perfiles para el sistema isotrópico de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama R_3 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 1 \times 10^{-10}$, $f = 2.2074$, (b) $\beta = 16.8000$, $f = 8.6000$.

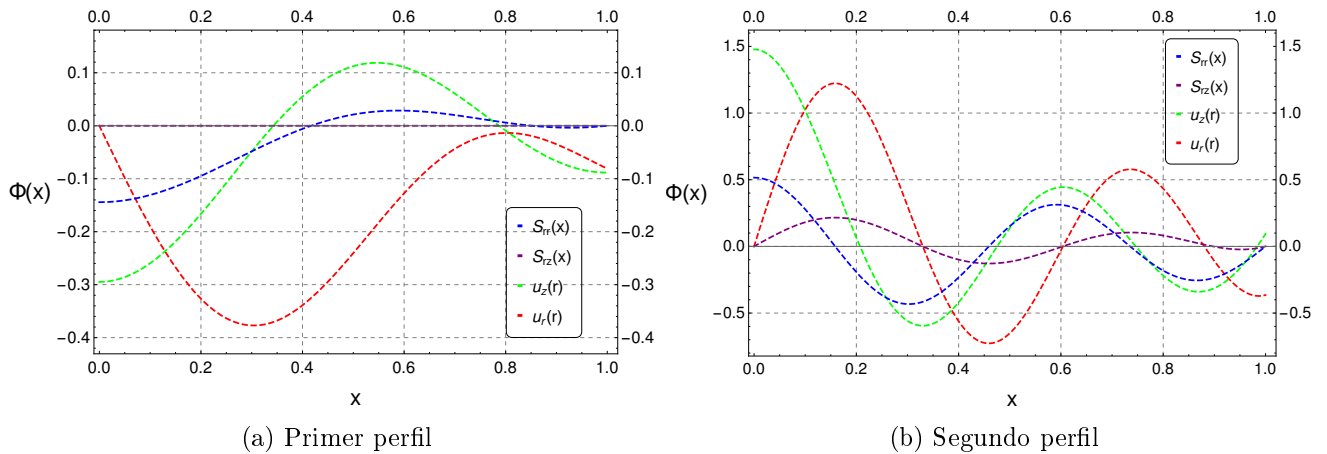


Figura 6.2.5: Perfiles para el sistema isotrópico de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama R_4 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 1 \times 10^{-10}$, $f = 3.2245$, (b) $\beta = 16.5200$, $f = 9.2814$.

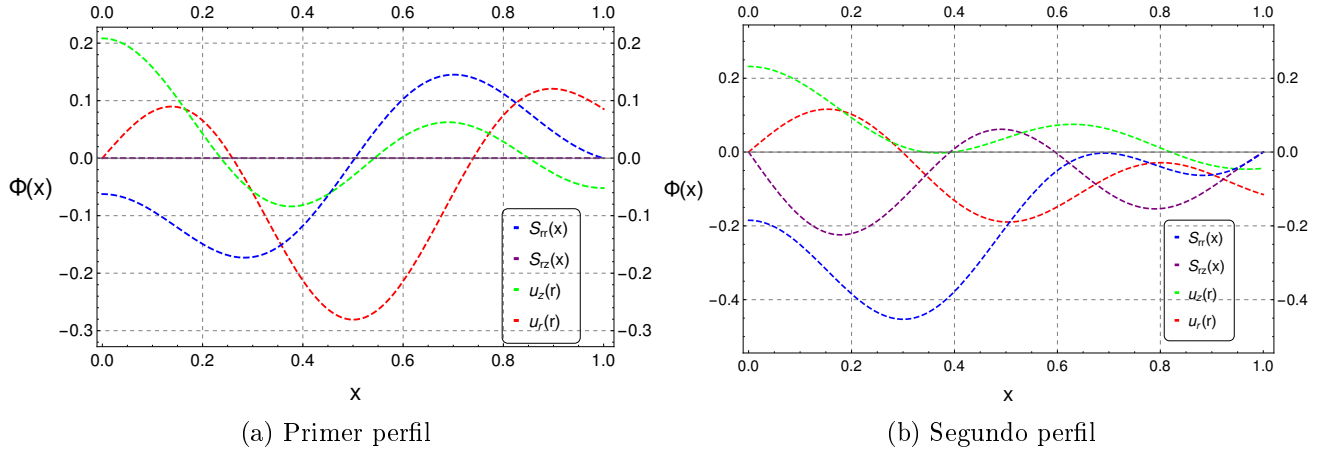


Figura 6.2.6: Perfiles para el sistema isotrópico de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama R_5 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 1 \times 10^{-10}$, $f = 4.6759$, (b) $\beta = 4.6500$, $f = 5.3898$.

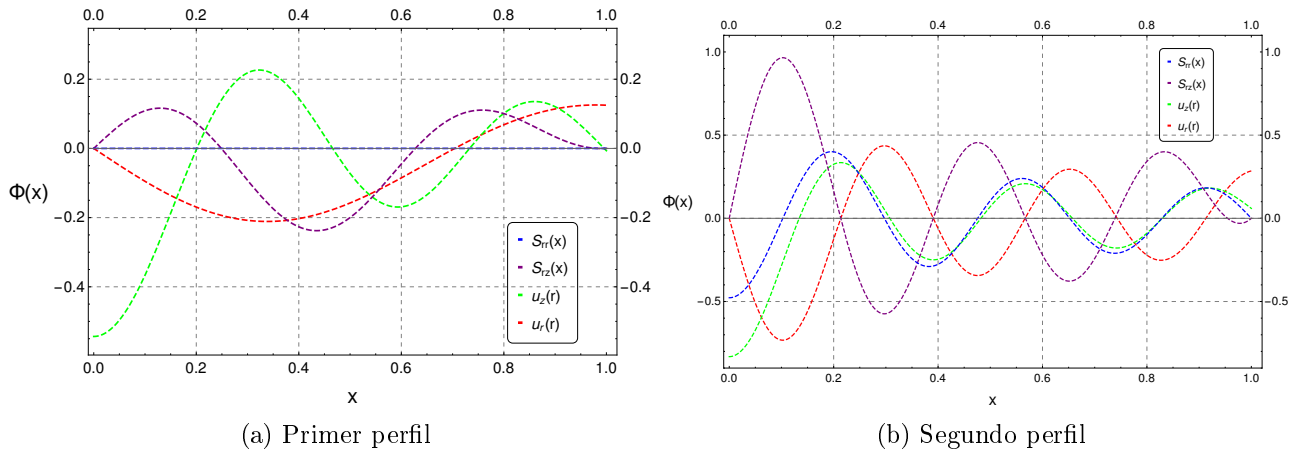


Figura 6.2.7: Perfiles para el sistema isotrópico de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama R_6 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 1 \times 10^{-10}$, $f = 5.4420$, (b) $\beta = 15.1000$, $f = 10.7812$.

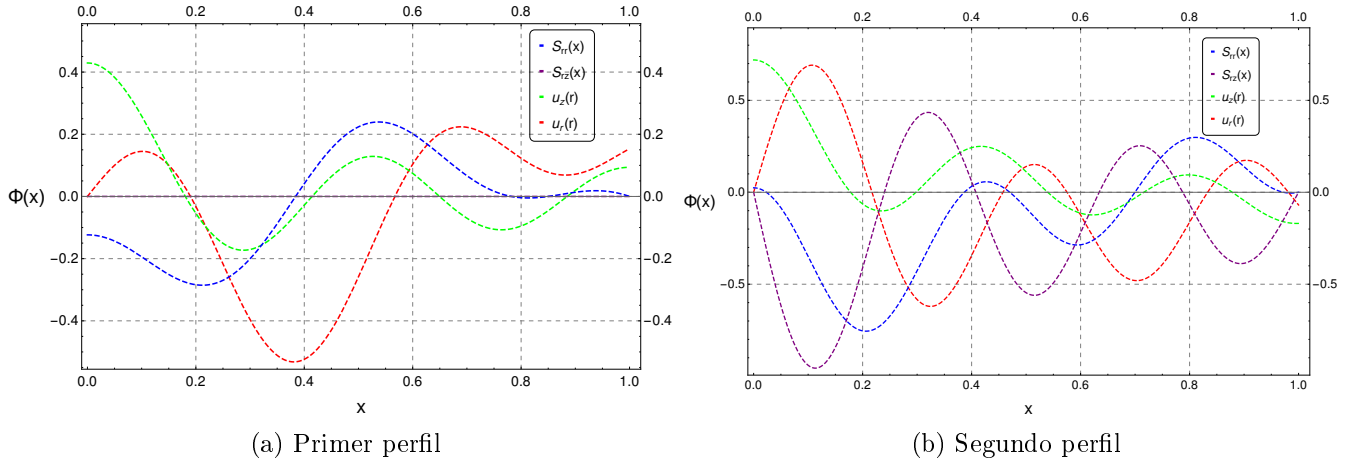


Figura 6.2.8: Perfiles para el sistema isotrópico de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama R_7 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 1 \times 10^{-10}$, $f = 6.12388$, (b) $\beta = 7.6000$, $f = 8.3767$.

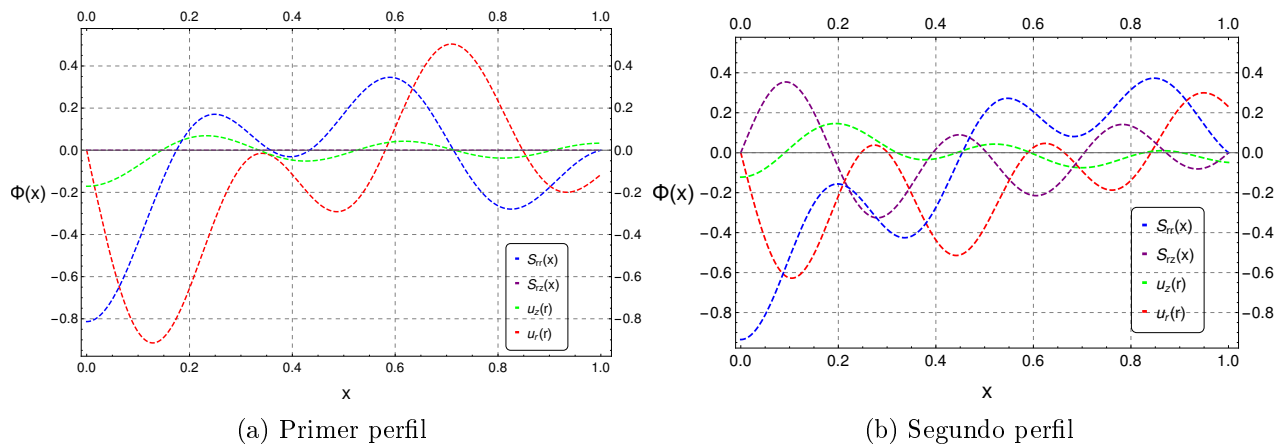


Figura 6.2.9: Perfiles para el sistema isotrópico de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama R_8 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 1 \times 10^{-10}$, $f = 7.5702$, (b) $\beta = 8.2000$, $f = 9.5758$.

Es una característica genérica que las ramas presenten diferentes velocidades; en el caso del espectro isotrópico se observa un comportamiento asintótico a frecuencias altas, ya que cada rama adquiere un valor constante como se observa en la figura (6.2.1), lo que significa que la velocidad de grupo v_g , es exactamente la velocidad de fase, $v_p = v_g$. En la frecuencia f_c de corte, $v_p \rightarrow \infty$ mientras que $v_g \rightarrow 0$, esto significa que la propagación de energía se detiene a medida que el modo se acerca a f_c . A medida que aumenta la frecuencia, las velocidades de fase y de grupo se acercan asintóticamente a un frente de onda plano del medio, como se observa en ambos espectros de frecuencias.

En el espectro isotrópico a frecuencias altas, se distinguen dos valores constantes en las pendientes de cada rama, que corresponden a la velocidad transversal y longitudinal. Las ramas de los espectros se pueden extender infinitamente, aunque se observa esta tendencia a un valor constante, pues para frecuencias muy altas las ondas propagantes no perciben si el medio es dispersivo y por lo tanto es posible representar una región significativa del espectro. Para frecuencias bajas, observamos en la rama R_1 que la velocidad instantánea adquiere diferentes valores antes de ser constante, lo mismo para las otras ramas del espectro, sin embargo, conforme avanzan a frecuencias y números de onda más altos se observa que se define una única velocidad, esto significa en la rama pueden estar presentes ambas velocidades, en el caso electromagnético. Para una guía de onda fotónica isotrópica, también se observa este fenómeno, sin embargo, su espectro de frecuencias, a diferencia de una guía elástica isotrópica, las ramas son hipérbolas, cuyo valor asintótico tiende a la velocidad de la luz c en el vacío [122]; en el caso fonónico, existen diferentes valores asintóticos, al menos dos en el caso isotrópico y sus ramas no tienen una representación geométrica analítica, pues el problema electromagnético se puede reducir a un problema de eigenvalores, cuya ecuación de dispersión es analítica, contrario al caso de la guía elástica. Observemos también que las ramas del espectro isotrópico que presentamos son continuas y no se cruzan ¹.

Por otro lado, para el espectro de frecuencias quiral, figura (6.2.10), se observan diferencias significativas. En algunas ramas se producen rupturas: $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ y Q_9 , no son ramas continuas; las ramas Q_1, Q_2, Q_3, Q_5 y Q_9 , no se pueden extender infinitamente, como en el caso isotrópico; las frecuencias de corte del espectro quiral, no se corresponden con las del isotrópico; no se encontró una rama similar a R_1 del sistema isotrópico, la cual representa la rama con menor dispersión del espectro; las ramas $Q_0, Q_4, Q_6, Q_7, Q_{10}$, se pueden extender, tanto como se desee.

Observemos uno de los fenómenos que se presentan cuando se analizan nanoestructuras: las ramas Q_2 y Q_4 presentan un band gap; la rama Q_2 presenta dos rupturas, la primera ocurre a bajas frecuencias y la segunda se identifica con la rama Q_0 . La primera band gap, antes de la ruptura se observa que la pendiente se hace cero y posteriormente a su punto de inflexión continua con diferentes pendientes hasta romperse, este fenómeno ocurre cuando el número de onda se hace imaginario, y en ese intervalo de frecuencias la onda tiene un comportamiento estacionario (como se discute en [1] pág 199) y funciona como filtro para ese rango de frecuencias; la segunda band gap de Q_2 a Q_0 se presenta en las nanoestructuras artificiales estratificadas como lo muestra Ruize Hu en su trabajo [123] (págs 111-115).

Un comportamiento similar ocurre para la rama Q_4 , a diferencia de Q_2 , ésta si se extiende tanto

¹En el trabajo [23] el espectro para frecuencias muy altas sí muestra entrecruzamientos en sus ramas.

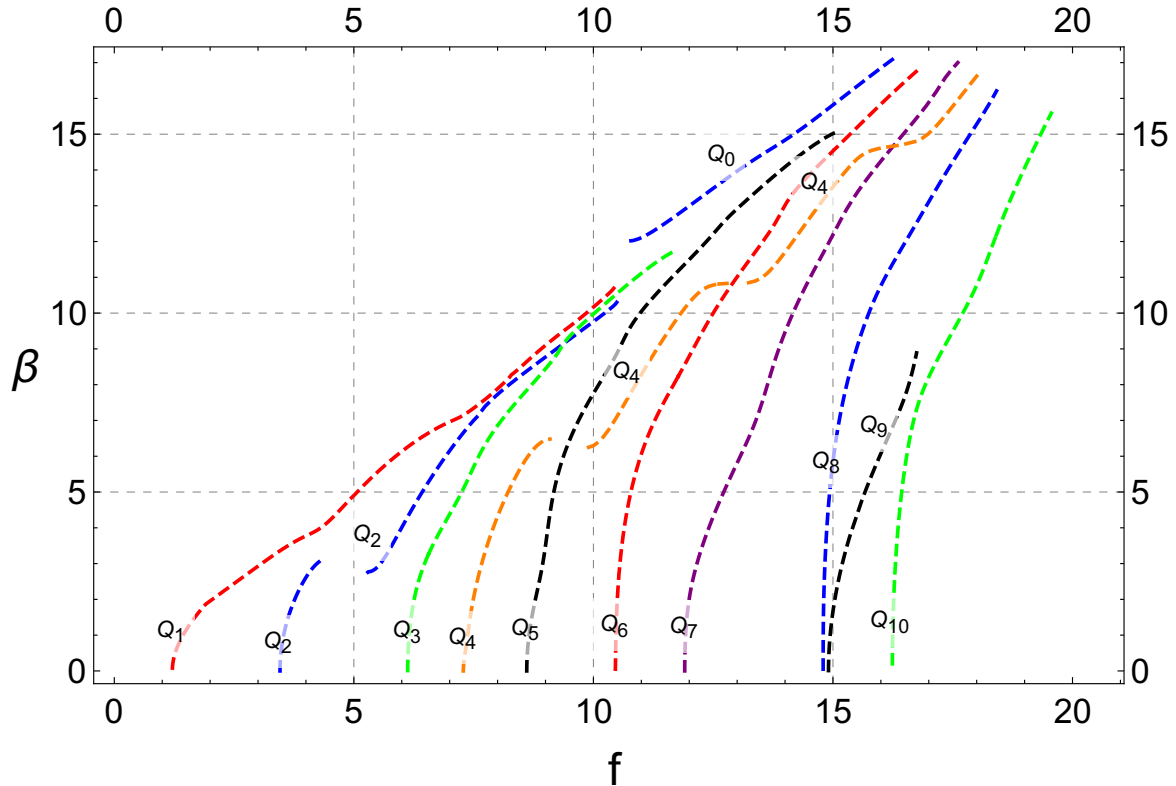


Figura 6.2.10: Estructura de Bandas para el medio helicoidal.

como se desee, además de sus dos band gap a bajas frecuencias, se presenta otro comportamiento, en el que la pendiente se anula, sin embargo no existe band gap pues los valores que se presentan del número de onda son reales, es decir, a altas frecuencias las ondas se propagan que pasan por su punto de inflexión, la velocidad de grupo se anula para posteriormente dar pasa a frecuencias más alta, a diferencia del caso de número de onda complejos donde no propaga. Finalmente, la rama Q_8 y Q_9 presentan degeneración; sin embargo Q_9 ya no se propaga como lo hace Q_8 . La pendiente de la rama Q_9 toma diferentes valores antes de cortarse; sin embargo notemos que la pendiente comienza hacerse infinita como en el caso de la frecuencias de corte en donde la energía ya no se propaga.

6.2.4. Distribución de esfuerzos y el campo de desplazamientos del medio helicoidal.

Presentamos las distribuciones de esfuerzos y del campo de desplazamientos, correspondientes para el medio quiral, de cada una de las ramas mostramos dos de sus perfiles con sus parámetros de propagación. En cada perfil se puede observar que los desplazamientos no tienen ninguna restricción sobre la frontera, mientras que para la distribución de los esfuerzos se satisfacen las condiciones de frontera y de forma análoga se puede observar que los esfuerzos

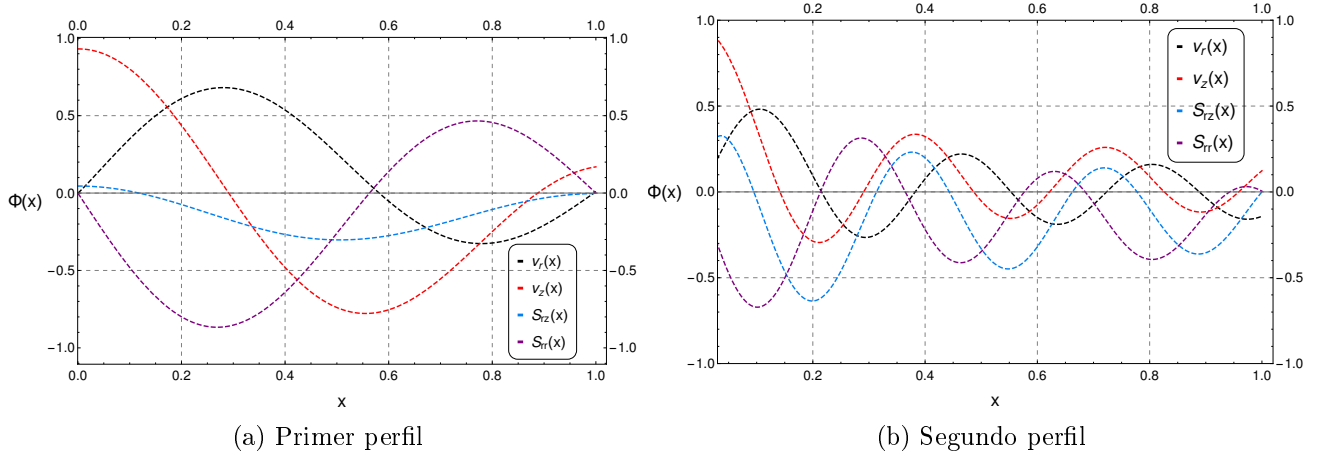


Figura 6.2.11: Perfiles para el sistema H_{6r} de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama q_1 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 3.4300$, $f = 3.5416$, (b) $\beta = 9.4100$, $f = 9.5456$.

satisfacen las CFs. La cantidad de nodos en los perfiles de distribución muestran que conforme nos alejamos de las frecuencias bajas aumentan, como en el caso de las distribuciones isotrópicas, sin embargo, el espectro de frecuencias es completamente diferente al isotrópico, como se discutió arriba.

6.3. Conclusiones.

A lo largo de nuestra investigación hemos estudiado una guía de onda de sección transversal circular para medios helicoidales artificiales, localmente hexagonales, partiendo de las ecuaciones fundamentales de la elastodinámica y las ecuaciones constitutivas que permiten introducir las propiedades particulares del material de estudio. Con las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones constitutivas logramos desarrollar un modelo general para modos propagantes dentro de la guía de onda y mediante la transformación de Oseen fue posible eliminar la dependencia radial de las constantes elásticas. Para verificar nuestro modelo nos estudiamos la simetría hexagonal de los materiales, mediante el uso de ondas monocromáticas con dirección de propagación axial, fue posible desacoplar nuestro sistema resultante y además como primera aproximación al problema, estudiamos los modos simétricos que permiten desacoplar la parte angular de las ecuaciones de movimiento en un sistema de coordenadas cilíndricas polares. Por otro lado, impusimos condiciones de frontera libres de esfuerzo (esfuerzo nulo) sobre la superficie lateral de la guía de onda.

Para verificar nuestro modelo y procedimiento numérico fue necesario utilizar la fibra isotrópica, cuya estructura de bandas ya ha sido reportada previamente. Observamos que en la figura (6.2.1) se presenta el espectro de frecuencias para la fibra isotrópica, es decir, la dependencia del número de onda β con la frecuencias angular f , ambas variables adimensionales. Es impor-

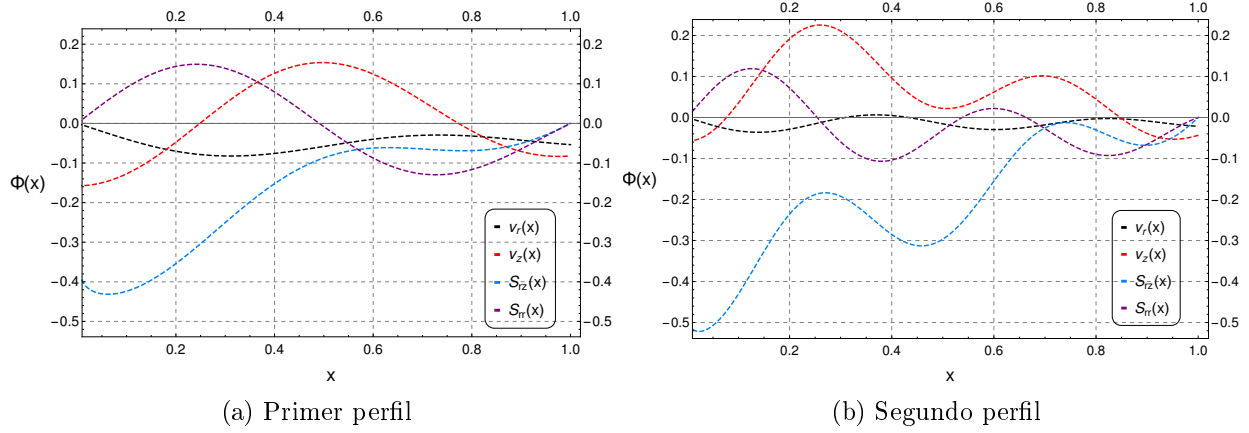


Figura 6.2.12: Perfiles para el sistema H_{6r} de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama q_2 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 12.4500$, $f = 3.5505$, (b) $\beta = 6.8000$, $f = 7.2296$.

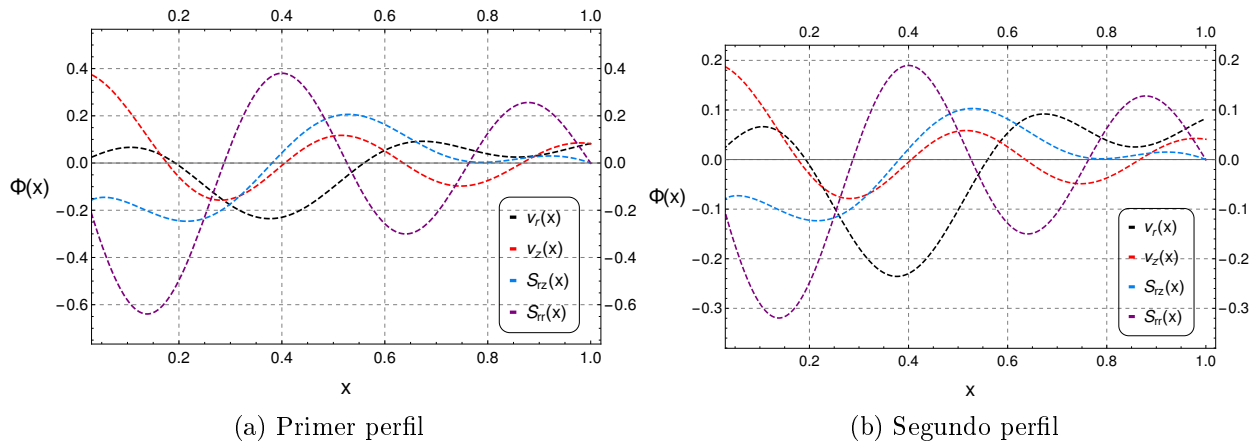


Figura 6.2.13: Perfiles para el sistema H_{6r} de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama q_3 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 0.01000$, $f = 6.1238$, (b) $\beta = 9.30926$, $f = 9.0000$.

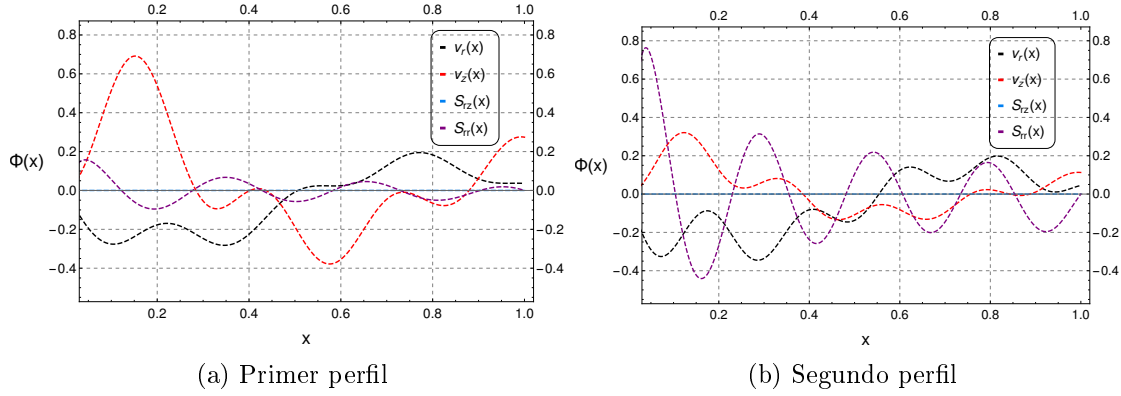


Figura 6.2.14: Perfiles para el sistema H_{6r} de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama q_4 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 19.2000$, $f = 11.4216$, (b) $\beta = 16.5200$, $f = 9.2814$.

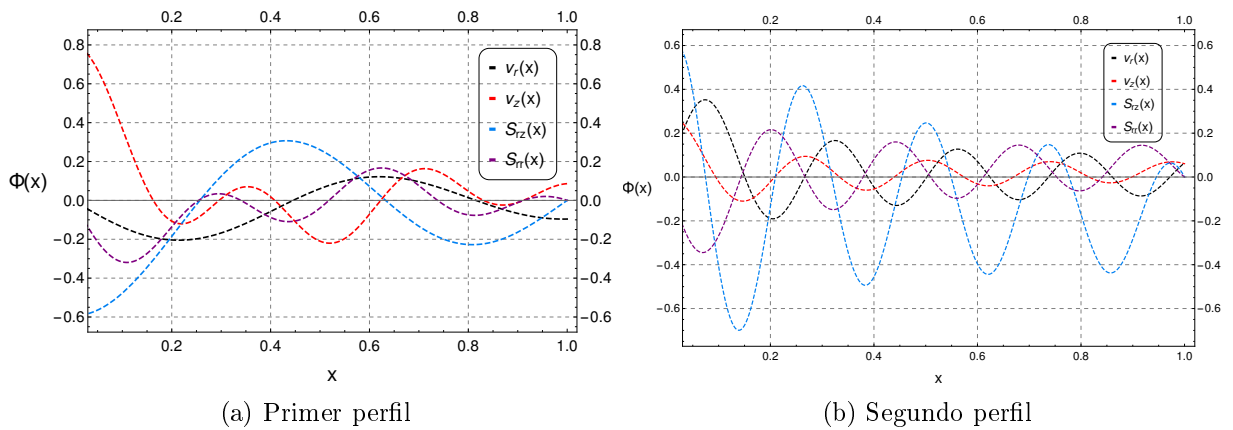


Figura 6.2.15: Perfiles para el sistema H_{6r} de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama q_5 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 9.2000$, $f = 11.4216$, (b) $\beta = 13.1500$, $f = 14.7860$.

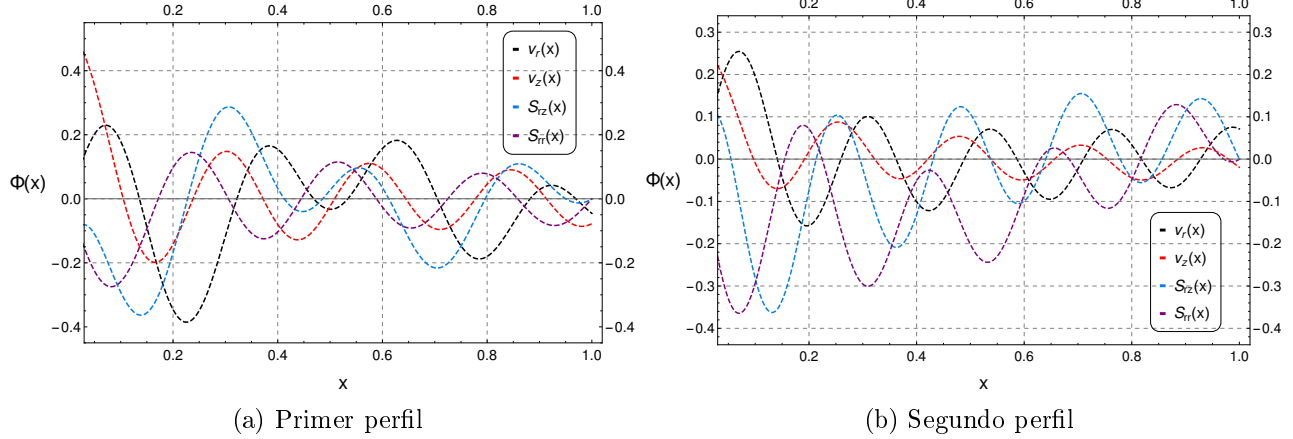


Figura 6.2.16: Perfiles para el sistema H_{6r} de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama q_6 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 2.9000$, $f = 10.5468$, (b) $\beta = 13.3000$, $f = 14.1402$.

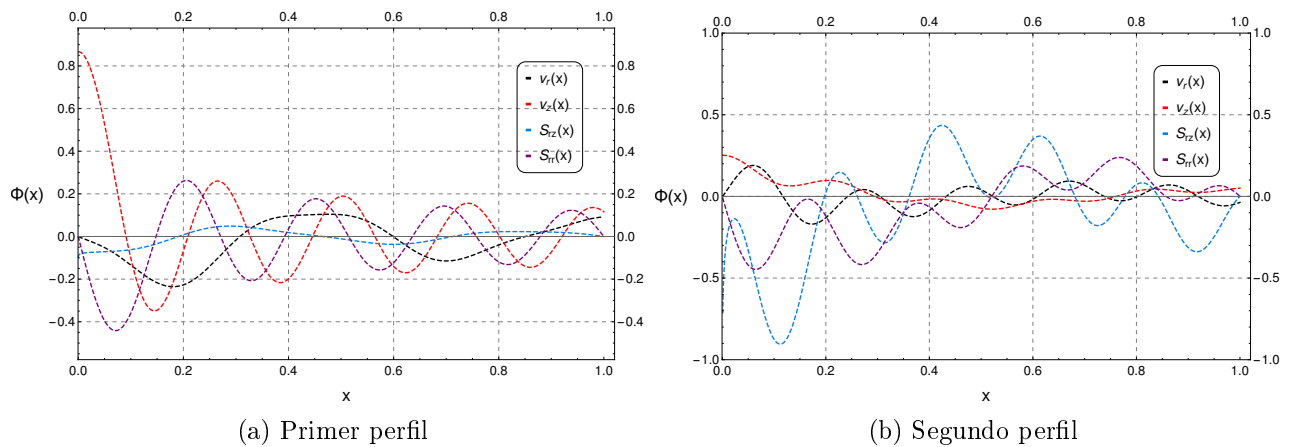


Figura 6.2.17: Perfiles para el sistema H_{6r} de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama q_7 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 0.0010$, $f = 11.9059$, (b) $\beta = 14.0000$, $f = 15.8534$.

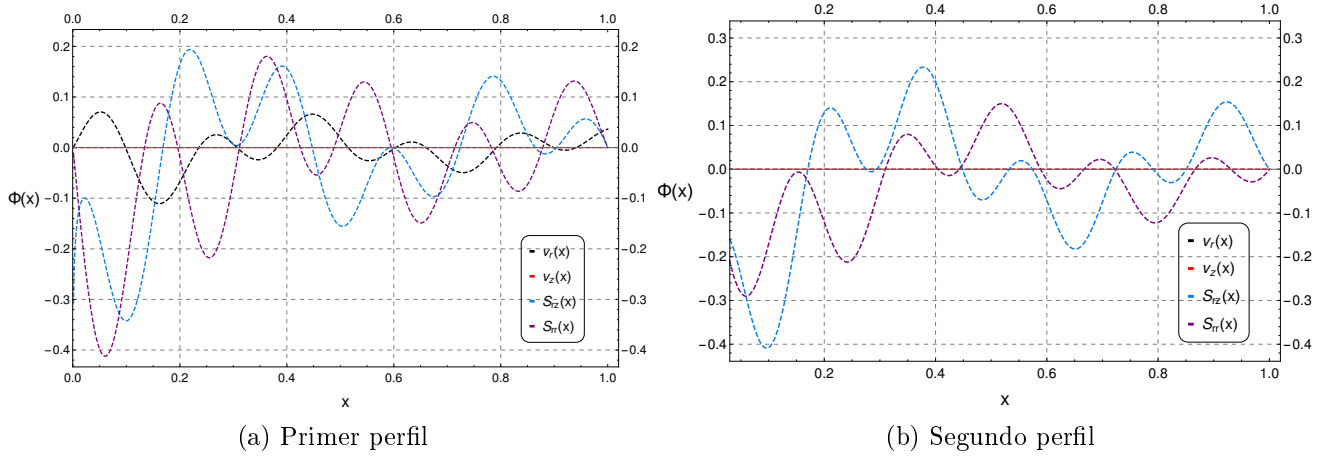


Figura 6.2.18: Perfiles para el sistema H_{6r} de la distribución de los esfuerzos $s_{ri}(x)$, y el campo de desplazamientos $v_i(x)$, ($i = r, z$) versus la parte radial x para la rama q_8 , con parámetros de propagación: (a) $\beta = 9.8000$, $f = 15.6915$, (b) $\beta = 13.0100$, $f = 16.9562$.

tante señalar que, un estudio detallado de los espectro de frecuencias debe considerar valores puramente imaginarios de β , como se ha realizado en trabajos fundamentales sobre la dispersión de ondas elásticas en medios materiales. Sin embargo, en nuestro primer acercamiento, hacia la solución de este tipo de sistemas con quiralidad, fue validar que en el sistema isotrópico las rutinas numéricas estaban reproduciendo los resultados reportados y de esa manera poder avanzar hacia materiales anisotrópicos, por esta razón hemos estudiado los valores reales para el número de onda. Una vez validado el modelo, comenzamos a variar el parámetro de control δ tomando como referencia las ramas isotrópicas, hemos rastreado como se van transformando hasta alcanzar las ramas helicoidales, durante ese rastreo notamos que ya no era posible encontrar soluciones, es decir, para algunos valores de propagación las ramas se cortan y aparecen en otras regiones del espectro como se puede observar en algunas de las ramas, además de un cambio de la pendiente de estas ramas, que justo en el salto de banda la velocidad donde se presentan valores complejos del número de onda, este fenómeno es característico de los materiales nanoestructurados artificiales que presentan quiralidad.

Por otro lado, los perfiles que presentamos para cada rama, representan la distribución de los esfuerzos y los desplazamientos contra la componente radial que va del eje de la fibra hasta la frontera de la guía. En el caso de los perfiles isotrópicos podemos observar que se satisface lo predicho por nuestras observaciones sobre las frecuencias de corte, notamos que para estos valores nos encontramos con valores puramente axiales y radiales, en ese sentido concluimos que los ceros de la ecuación de dispersión están separados naturalmente en axiales y radiales, es interesante este resultado, incluso del medio isotrópico. Por otro lado notemos que conforme la frecuencia aumenta el número de nodos en los perfil aumentan y además son más energéticos, pues el flujo de energía es directamente proporcional a la frecuencia angular. Para los perfiles quirales observamos que se satisfacen las CFs, lo que nos asegura que los valores del espectro de

frecuencias quirales es correcto, pues también se satisfacen como se observa en cada uno de los perfiles. Con esta validación, es posible rastrear las ramas y observar el cambio de su velocidad de grupo dentro de la guía. Los resultados clásicos sobre la estructura de bandas del medio isotrópico muestran que existe una rama no dispersiva, como vemos en la figura (6.2.1) R_1 , sin embargo, para el caso quiral esta rama no existe, de hecho en el ejercicio de ir rastreando como se transformaba específicamente esta rama hacia la quiral mediante el parámetro δ , notamos que solo existe un número finito de valores no dispersivos. Observemos que solo algunas ramas quirales que se pueden extender tanto como se desee, a diferencia de las ramas isotrópicas que todas se pueden extender infinitamente, como lo muestran los trabajos fundamentales. El espectro quiral, presenta zonas prohibidas que pueden aplicarse como filtros para los estudios no destructivos.

Finalmente, la investigación que presentamos intenta modelar la propagación de ondas elásticas en estos medios artificiales, si bien los espectros de frecuencias se pueden extender todo lo que se desee, nuestro principal objetivo fue crear el modelo desde sus ecuaciones fundamentales, validarlo y aplicarlo a una simetría material particular, en este caso la simetría localmente hexagonal. Sin embargo, en el desarrollo del capítulo 5 y en el apéndice A, hemos desarrollado un modelo para cualquier tipo de material sólido cristalino con quiralidad a lo largo de su eje helicoidal. Aquí es importante señalar que las limitaciones que encontramos al realizar nuestras investigaciones son puramente computacionales, en el caso del material triclinico, las 21 constantes elásticas son independientes lo que no desacopla ninguna ecuación, incluso utilizando ondas cuasi-planas, las que permiten reducir de un sistema en ecuaciones diferenciales parciales a ordinarias, lo que puede presentar problemas al estudiar otras simetrías.

El análisis cualitativo de los espectros presentados en esta investigación, permite reconocer las principales diferencias entre los diferentes materiales; el espectro isotrópico aunque no está estudiado por completo, permite validar cualquier intento de modelo general, fue posible hacer una aportación sobre la naturaleza de los modos en las frecuencias de corte, lo cual indica que el sistema isotrópico necesita ser investigado, aún en la actualidad. Los problemas de guías de onda requieren de un trabajo laborioso tanto analítico como de cómputo para obtener resultados significativos, como se vio a lo largo de este trabajo.

Para futuras perspectivas, es importante encontrar espectros de frecuencias de materiales más complejos en guías de onda; metamateriales, grafeno, cristales líquidos, elastómeros y biomateriales; por ejemplo, con otras teorías elásticas, neoclásicas, no lineales, etc., que todavía no han sido abordadas, para la creación y aplicación de estas estructuras en la industria de la biotecnología y la medicina entre otras ramas que utilizan materiales para transmitir información en guías de onda.

Apéndice A

Presentamos los valores de las constantes de rigidez de forma explícita, para el modelo general mesofásico con 21 constantes elásticas independientes, correspondiente a un material con simetría triclinica. Notemos que $\Delta \neq 0$, incluso en el límite isotrópico o esquema isotrópico. Por simplicidad presentamos los elementos del tensor de rigidez sin su dependencia en r , pero debe tenerse en cuenta que estas son funciones de r , es decir, $C_{ij} = C_{ij}(r)$, de los que se presentan su forma explícita también.

$$\begin{aligned}
\Delta &= C_{66}C_{15}^2 - 2C_{16}C_{56}C_{15} + C_{16}^2C_{55} + C_{11}(C_{56}^2 - C_{55}C_{66}) \\
\Omega_0 &= (C_{12}C_{56}^2 - C_{16}C_{25}C_{56} - C_{15}C_{26}C_{56} + C_{16}C_{26}C_{55} + C_{15}C_{25}C_{66} \\
&\quad - C_{12}C_{55}C_{66})/\Delta \\
\Omega_1 &= (C_{12}C_{56}^2 - C_{16}C_{25}C_{56} - C_{15}C_{26}C_{56} + C_{16}C_{26}C_{55} + C_{15}C_{25}C_{66} \\
&\quad - C_{12}C_{55}C_{66})/\Delta \\
\Omega_2 &= (C_{13}C_{56}^2 - C_{16}C_{35}C_{56} - C_{15}C_{36}C_{56} + C_{16}C_{36}C_{55} + C_{15}C_{35}C_{66} \\
&\quad - C_{13}C_{55}C_{66})/\Delta \\
\Omega_3 &= (C_{55}C_{66} - C_{56}^2)/\Delta \\
\Omega_4 &= (C_{15}C_{56} - C_{16}C_{55})/\Delta \\
\Omega_5 &= (C_{16}C_{56} - C_{15}C_{66})/\Delta \\
\Omega_6 &= (C_{26}C_{15}^2 - C_{12}C_{56}C_{15} - C_{15}C_{16}C_{25} + C_{12}C_{16}C_{55} - C_{11}C_{26}C_{55} \\
&\quad + C_{11}C_{25}C_{56})/\Delta \\
\Omega_7 &= 1 \\
\Omega_8 &= (C_{46}C_{15}^2 - C_{14}C_{56}C_{15} - C_{15}C_{16}C_{45} + C_{14}C_{16}C_{55} - C_{11}C_{46}C_{55} \\
&\quad + C_{11}C_{45}C_{56})/\Delta \\
\Omega_9 &= (C_{36}C_{15}^2 - C_{13}C_{56}C_{15} - C_{15}C_{16}C_{35} + C_{13}C_{16}C_{55} - C_{11}C_{36}C_{55} \\
&\quad + C_{11}C_{35}C_{56})/\Delta \\
\Omega_{10} &= (C_{11}C_{55} - C_{15}^2)/\Delta \\
\Omega_{11} &= (C_{15}C_{16} - C_{11}C_{56})/\Delta \\
\Omega_{12} &= (C_{25}C_{16}^2 - C_{15}C_{26}C_{16} - C_{12}C_{56}C_{16} + C_{11}C_{26}C_{56} + C_{12}C_{15}C_{66} \\
&\quad - C_{11}C_{25}C_{66})/\Delta
\end{aligned} \tag{6.3.1}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{13} &= (C_{45}C_{16}^2 - C_{15}C_{46}C_{16} - C_{14}C_{56}C_{16} + C_{11}C_{46}C_{56} + C_{14}C_{15}C_{66} \\ &\quad - C_{11}C_{45}C_{66})/\Delta \\ \Omega_{14} &= (C_{35}C_{16}^2 - C_{15}C_{36}C_{16} - C_{13}C_{56}C_{16} + C_{11}C_{36}C_{56} + C_{13}C_{15}C_{66} \\ &\quad - C_{11}C_{35}C_{66})/\Delta \\ \Omega_{15} &= (C_{11}C_{66} - C_{16}^2)/\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{16} &= (C_{56}^2C_{12}^2 - C_{55}C_{66}C_{12}^2 + 2C_{16}C_{26}C_{55}C_{12} - 2C_{16}C_{25}C_{56}C_{12} - 2C_{15}C_{26}C_{56}C_{12} \\ &\quad + 2C_{15}C_{25}C_{66}C_{12} + C_{16}^2C_{25}^2 + C_{15}^2C_{26}^2 - C_{11}C_{22}C_{56}^2 - 2C_{15}C_{16}C_{25}C_{26} - C_{11}C_{26}^2C_{55} \\ &\quad - C_{16}^2C_{22}C_{55} + 2C_{15}C_{16}C_{22}C_{56} + 2C_{11}C_{25}C_{26}C_{56} - C_{11}C_{25}^2C_{66} - C_{15}^2C_{22}C_{66} \\ &\quad + C_{11}C_{22}C_{55}C_{66})/\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{17} &= (C_{26}C_{46}C_{15}^2 - C_{24}C_{66}C_{15}^2 - C_{16}C_{26}C_{45}C_{15} - C_{16}C_{25}C_{46}C_{15} + 2C_{16}C_{24}C_{56}C_{15} \\ &\quad - C_{14}C_{26}C_{56}C_{15} - C_{12}C_{46}C_{56}C_{15} + C_{14}C_{25}C_{66}C_{15} + C_{12}C_{45}C_{66}C_{15} + C_{12}C_{14}C_{56}^2 \\ &\quad - C_{11}C_{24}C_{56}^2 + C_{16}^2C_{25}C_{45} - C_{16}^2C_{24}C_{55} + C_{14}C_{16}C_{26}C_{55} + C_{12}C_{16}C_{46}C_{55} - C_{11}C_{26}C_{46}C_{55} \\ &\quad - C_{14}C_{16}C_{25}C_{56} - C_{12}C_{16}C_{45}C_{56} + C_{11}C_{26}C_{45}C_{56} + C_{11}C_{25}C_{46}C_{56} - C_{11}C_{25}C_{45}C_{66} \\ &\quad - C_{12}C_{14}C_{55}C_{66} + C_{11}C_{24}C_{55}C_{66})/\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{18} &= (C_{26}C_{36}C_{15}^2 - C_{23}C_{66}C_{15}^2 - C_{16}C_{26}C_{35}C_{15} - C_{16}C_{25}C_{36}C_{15} + 2C_{16}C_{23}C_{56}C_{15} \\ &\quad - C_{13}C_{26}C_{56}C_{15} - C_{12}C_{36}C_{56}C_{15} + C_{13}C_{25}C_{66}C_{15} + C_{12}C_{35}C_{66}C_{15} + C_{12}C_{13}C_{56}^2 \\ &\quad - C_{11}C_{23}C_{56}^2 + C_{16}^2C_{25}C_{35} - C_{16}^2C_{23}C_{55} + C_{13}C_{16}C_{26}C_{55} + C_{12}C_{16}C_{36}C_{55} \\ &\quad - C_{11}C_{26}C_{36}C_{55} - C_{13}C_{16}C_{25}C_{56} - C_{12}C_{16}C_{35}C_{56} + C_{11}C_{26}C_{35}C_{56} + C_{11}C_{25}C_{36}C_{56} \\ &\quad - C_{11}C_{25}C_{35}C_{66} - C_{12}C_{13}C_{55}C_{66} + C_{11}C_{23}C_{55}C_{66})/\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{19} &= (C_{56}^2C_{14}^2 - C_{55}C_{66}C_{14}^2 + 2C_{16}C_{46}C_{55}C_{14} - 2C_{16}C_{45}C_{56}C_{14} - 2C_{15}C_{46}C_{56}C_{14} \\ &\quad + 2C_{15}C_{45}C_{66}C_{14} + C_{16}^2C_{45}^2 + C_{15}^2C_{46}^2 - C_{11}C_{44}C_{56}^2 - 2C_{15}C_{16}C_{45}C_{46} - C_{11}C_{46}^2C_{55} \\ &\quad - C_{16}^2C_{44}C_{55} + 2C_{15}C_{16}C_{44}C_{56} + 2C_{11}C_{45}C_{46}C_{56} - C_{11}C_{45}^2C_{66} - C_{15}^2C_{44}C_{66} \\ &\quad + C_{11}C_{44}C_{55}C_{66})/\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_{20} &= (C_{36}C_{46}C_{15}^2 - C_{34}C_{66}C_{15}^2 - C_{16}C_{36}C_{45}C_{15} - C_{16}C_{35}C_{46}C_{15} + 2C_{16}C_{34}C_{56}C_{15} \\ &\quad - C_{14}C_{36}C_{56}C_{15} - C_{13}C_{46}C_{56}C_{15} + C_{14}C_{35}C_{66}C_{15} + C_{13}C_{45}C_{66}C_{15} + C_{13}C_{14}C_{56}^2 \\ &\quad - C_{11}C_{34}C_{56}^2 + C_{16}^2C_{35}C_{45} - C_{16}^2C_{34}C_{55} + C_{14}C_{16}C_{36}C_{55} + C_{13}C_{16}C_{46}C_{55} \\ &\quad - C_{11}C_{36}C_{46}C_{55} - C_{14}C_{16}C_{35}C_{56} - C_{13}C_{16}C_{45}C_{56} + C_{11}C_{36}C_{45}C_{56} + C_{11}C_{35}C_{46}C_{56} \\ &\quad - C_{11}C_{35}C_{45}C_{66} - C_{13}C_{14}C_{55}C_{66} + C_{11}C_{34}C_{55}C_{66})/\Delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_{21} = & (C_{56}^2 C_{13}^2 - C_{55} C_{66} C_{13}^2 + 2C_{16} C_{36} C_{55} C_{13} - 2C_{16} C_{35} C_{56} C_{13} - 2C_{15} C_{36} C_{56} C_{13} \\
 & + 2C_{15} C_{35} C_{66} C_{13} + C_{16}^2 C_{35}^2 + C_{15}^2 C_{36}^2 - C_{11} C_{33} C_{56}^2 - 2C_{15} C_{16} C_{35} C_{36} - C_{11} C_{36}^2 C_{55} \\
 & - C_{16}^2 C_{33} C_{55} + 2C_{15} C_{16} C_{33} C_{56} + 2C_{11} C_{35} C_{36} C_{56} - C_{11} C_{35}^2 C_{66} - C_{15}^2 C_{33} C_{66} \\
 & + C_{11} C_{33} C_{55} C_{66}) / \Delta.
 \end{aligned}$$

Dependencia radial de las constantes elásticas de $\Omega_j = \Omega_j(r)$:

$$\begin{aligned}
 C_{11}(r) = & C_{11} \cos^4(qr) + 2C_{12} \sin^2(qr) \cos^2(qr) - 4C_{16} \sin(qr) \cos^3(qr) + \\
 & C_{22} \sin^4(qr) - 4C_{26} \sin^3(qr) \cos(qr) + C_{66} \sin^2(2qr),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{12}(r) = & -\frac{1}{8}(\cos(4qr)(C_{11} - 2C_{12} + C_{22} - 4C_{66}) + C_{11} + 6C_{12} + \\
 & + 4(C_{16} - C_{26}) \sin(4qr) + C_{22} - 4C_{66})
 \end{aligned}$$

$$C_{13}(r) = C_{13} \cos^2(qr) + C_{23} \sin^2(qr) - 2C_{36} \sin(qr) \cos(qr),$$

$$\begin{aligned}
 C_{14}(r) = & (C_{15} - 2C_{46}) \sin(qr) \cos^2(qr) + (C_{24} - 2C_{56}) \sin^2(qr) \cos(qr) + \\
 & C_{14} \cos^3(qr) + C_{14} \cos^3(qr),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{15}(r) = & -(C_{14} + 2C_{56}) \sin(qr) \cos^2(qr) + C_{15} \cos^3(qr) - C_{24} \sin^3(qr) + \\
 & (C_{25} + 2C_{46}) \sin^2(qr) \cos(qr),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{16}(r) = & \frac{1}{4}(\sin(2qr)(\cos(2qr)(C_{11} - 2C_{12} + C_{22} - 4C_{66}) + C_{11} - C_{22}) + \\
 & 2(C_{16} + C_{26}) \cos(2qr) + 2(C_{16} - C_{26}) \cos(4qr)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{22}(r) = & C_{11} \sin^4(qr) + 2C_{12} \sin^2(qr) \cos^2(qr) + 4C_{16} \sin^3(qr) \cos(qr) + \\
 & C_{22} \cos^4(qr) + 4C_{26} \sin(qr) \cos^3(qr) + C_{66} \sin^2(2qr),
 \end{aligned}$$

$$C_{23}(r) = C_{13} \sin^2(qr) + C_{23} \cos^2(qr) + C_{36} \sin(2qr),$$

$$\begin{aligned}
 C_{24}(r) = & (C_{14} + 2C_{56}) \sin^2(qr) \cos(qr) + C_{15} \sin^3(qr) + C_{24} \cos^3(qr) + \\
 & (C_{25} + 2C_{46}) \sin(qr) \cos^2(qr),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{25}(r) = & \cos(qr) (C_{15} \sin^2(qr) + C_{25} \cos^2(qr) + C_{56} \sin(2qr)) - \\
 & \sin(qr) (C_{14} \sin^2(qr) + C_{24} \cos^2(qr) + C_{46} \sin(2qr)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{26}(r) = & -\frac{1}{8}(2 \sin(2qr)(\cos(2qr)(C_{11} - 2C_{12} + C_{22} - 4C_{66}) - C_{11} + C_{22}) + \\
 & 4(C_{16} + C_{26}) \cos(2qr) - 4(C_{16} - C_{26}) \cos(4qr)),
 \end{aligned}$$

$$C_{33}(r) = C_{33},$$

$$C_{34}(r) = C_{34} \cos(qr) + C_{35} \sin(qr),$$

$$C_{35}(r) = C_{35} \cos(qr) - C_{34} \sin(qr),$$

$$C_{36}(r) = (C_{13} - C_{23}) \sin(qr) \cos(qr) + C_{36} \cos(2qr),$$

$$C_{44}(r) = C_{44} \cos^2(qr) + C_{45} \sin(2qr) + C_{55} \sin^2(qr),$$

$$C_{45}(r) = (C_{55} - C_{44}) \sin(qr) \cos(qr) + C_{45} \cos(2qr),$$

$$C_{46}(r) = \cos(qr) \left((C_{15} - C_{25}) \sin^2(qr) + C_{46} \cos(2qr) \right) + \\ (C_{14} - C_{24}) \sin(qr) \cos^2(qr) + C_{56} \sin(qr) \cos(2qr),$$

$$C_{55}(r) = C_{44} \sin^2(qr) - 2C_{45} \sin(qr) \cos(qr) + C_{55} \cos^2(qr),$$

$$C_{56}(r) = \cos(qr) \left((C_{24} - C_{14}) \sin^2(qr) + C_{56} \cos(2qr) \right) + \\ (C_{15} - C_{25}) \sin(qr) \cos^2(qr) - C_{46} \sin(qr) \cos(2qr),$$

$$C_{66}(r) = -\frac{1}{8}(\cos(4qr)(C_{11} - 2C_{12} + C_{22} - 4C_{66}) + C_{11} - \\ 2C_{12} + 4(C_{16} - C_{26}) \sin(4qr) + C_{22} + 4C_{66}).$$

Apéndice B

Valores explícitos de los coeficientes del desarrollo de Taylor alrededor de $x \approx 0$ para las componentes del campo de desplazamientos,

$$\begin{aligned}
 v_{r1} &= i\beta(\beta^2 - (f/\varrho)^2)A_1 + (\beta^2 - f^2)A_2, \\
 v_{r3} &= \beta(\beta^2 - (f/\varrho)^2)^2 A_1 + (\beta^2 - f^2)^2 A_2, \\
 v_{z0} &= ((f/\varrho)^2 - \beta^2)A_1 + i\beta A_2, \\
 v_{z2} &= ((f/\varrho)^2 - \beta^2)^2 A_1 - i\beta(\beta^2 - (f/\varrho)^2)A_2,
 \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Esfuerzos adimensionales explícitos del esquema isotrópico, expresadas en funciones de Bessel,

$$\begin{aligned}
 s_{rr}(x) &= \frac{1}{2x} \left(A_1 i\beta(1 - c_{12})x (\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_0 \left(x\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right) + \right. \\
 &\quad A_1 i\beta(1 - c_{12})x (\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_2 \left(x\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right) - \\
 &\quad A_2 x (\beta^2(2c_{12} - 1) + f^2) J_0 \left(x\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) - \\
 &\quad 2A_2 c_{12} \sqrt{f^2 - \beta^2} J_1 \left(x\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) - \\
 &\quad \left. A_2 x (\beta^2 - f^2) J_2 \left(x\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

$$\begin{aligned}
 s_{rz}(x) &= \frac{1}{x^2} \left[\left(A_1 x (\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_0 \left(x\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right) \right) + \right. \\
 &\quad \frac{1}{x} \left(A_1 \left((f/\varrho)^2 - \beta^2 \right) \left(J_0 \left(x\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. x\sqrt{\left((f/\varrho)^2 - \beta^2 \right)} J_1 \left(x\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right) \right) - \right. \\
 &\quad \left. A_2 i\beta \sqrt{f^2 - \beta^2} J_1 \left(x\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. A_1 i\beta \left(-i\beta \sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} J_1 \left(x\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. A_2 i\beta \sqrt{f^2 - \beta^2} J_1 \left(x\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) \right) \right] (1 - c_{12}).
 \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Valores de las componentes del tensor de esfuerzos cerca del origen, mediante el desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x \approx 0$, con $A_1/A_2 = \text{const.}$ de la expresión (5.4.12),

$$s_{rr}(x) \approx \frac{A_1}{2} (\beta^2 - f^2) (1 + c_{12}) - A_1 \frac{(1 + c_{12})\beta^2 \sqrt{f^2 - \beta^2} J_1 \left(\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) (\beta^2 - (f/\varrho)^2)}{\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} (2\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_1 \left(\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right)} -$$

$$A_1 \beta^2 - \frac{A_1 (2\beta^2 (f/\varrho)^2 + 2\beta^4) \sqrt{f^2 - \beta^2} J_1 \left(\sqrt{f^2 - \beta^2} \right)}{\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} (2\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_1 \left(\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right)}.$$
(6.3.5)

$$s_{rz}(x) \approx \frac{A_1(1 - c_{12})}{4} \left(i(\beta^3 - \beta f^2) - \frac{J_1 \left(\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) \left(2i\beta \sqrt{f^2 - \beta^2} ((f/\varrho)^2 - \beta^2)^{3/2} \right)}{(2\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_1 \left(\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right)} \right) x +$$

$$\frac{A_1(1 - c_{12})}{4} i\beta \left(\beta^2 + \frac{2\beta^2 \sqrt{f^2 - \beta^2} J_1 \left(\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) \sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2}}{(2\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_1 \left(\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right)} - f^2 \right) x.$$
(6.3.6)

Valores de los campos de desplazamientos cerca del origen, mediante el desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x \approx 0$, también para las componentes del campo de desplazamientos con $A_1/A_2 = \text{const.}$ de la expresión (5.4.12),

$$v_r(x) \approx A_1 \left(\frac{1}{2} (\beta^2 - f^2) - \frac{\beta^2 \sqrt{f^2 - \beta^2} J_1 \left(\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) (\beta^2 - (f/\varrho)^2)}{\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} (2\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_1 \left(\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right)} \right) x$$
(6.3.7)

$$v_z(x) \approx i\beta A_1 + \frac{A_1 (2i\beta (f/\varrho)^2 - 2i\beta^3) \sqrt{f^2 - \beta^2} J_1 \left(\sqrt{f^2 - \beta^2} \right)}{\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} (2\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_1 \left(\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right)}.$$
(6.3.8)

$$v'_r(x) \approx \frac{A_1}{2} (\beta^2 - f^2) - A_1 \frac{\beta^2 \sqrt{f^2 - \beta^2} J_1 \left(\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) (\beta^2 - (f/\varrho)^2)}{\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} (2\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_1 \left(\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right)}.$$
(6.3.9)

$$v'_z(x) \approx \frac{A_1}{2} \left(i(\beta^3 - \beta f^2) - \frac{J_1 \left(\sqrt{f^2 - \beta^2} \right) \left(2i\beta \sqrt{f^2 - \beta^2} ((f/\varrho)^2 - \beta^2)^{3/2} \right)}{(2\beta^2 - (f/\varrho)^2) J_1 \left(\sqrt{(f/\varrho)^2 - \beta^2} \right)} \right) x.$$
(6.3.10)

Bibliografía

- [1] J. Miklowitz, *The Theory of Elastic Waves and Waveguides*, North-Holland, Amsterdam (1978).
- [2] Michel Mitov. *Cholesteric liquid crystal in living matter*. J. Soft Matter, **13**,4177,(2017).
- [3] M. A. Medick and Y.-H. Pao, *Extensional vibrations of thin rectangular plate*, J. Acoust. Soc. Am., **37**, 59–65 (1965).
- [4] Y.-H. Pao, *The dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder*, Trans. ASME. J. Appl. Mech., **29**, 61–64 (1962).
- [5] Y.-H. Pao, *Elastic waves in solids*, Trans. ASME. J. Appl. Mech., **50**, 1152–1164 (1983).
- [6] Y.-H. Pao and R. K. Kaul, “*Waves and vibration in isotropic and anisotropic plates*,” in: R. D. Mindlin and Applied Mechanics, Pergamon, New York (1974), pp. 149–195.
- [7] Y.-H. Pao and R. D. Mindlin, “*Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinder*,” Trans. ASME. J. Appl. Mech., **27**, 513–520 (1960).
- [8] R. N. Thurston, “*Elastic waves in rods and clad rods*,” J. Acoust. Soc. Am., **64**, 1–37 (1978).
- [9] R. N. Thurston, “*Elastic waves in rods and optical fibers*,” J. Sound Vibr., **159**, 441–467 (1992).
- [10] L. O. Palomares and J. A. Reyes, *Cholesteric cored photonic fibre as a narrow optical filter*, J. Liquid Crystals, **46**, 340-348, (2019).
- [11] G. Reyes, J. A. Reyes. *Reflection band gap for a transversely stretched composite cholesteric elastomer*. J. of Optics **21**, 12 (2019).
- [12] G. Reyes, J. A Reyes. *Omnidirectional optical spectra for a nanocomposite cholesteric elastomer*. J. Condensed Matter (2019), **31** (32) , 325701.
- [13] R. W. Morse, *Compressional Waves along an Anisotropic Circular Cylinder Having Hexagonal Symmetry*, J. Acoust. Soc. Am. **26**, 1018 (1954).
- [14] Quintanilla, F. et al, *Modeling guided elastic waves in generally anisotropic media using a spectral collocation method*, J. Acoust. Soc. Am. **137**, 1180 (2015).

-
- [15] J. F. Nye, *Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices*, Oxford Science Publications, 2006.
- [16] F. Treyssède, *Numerical investigation of elastic modes of propagation in helical waveguides*, J. Acoust. Soc. Am. **121**, 3398 (2007)
- [17] I. Bartoli, A. Marzani, et al, *Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section*, J. of Sound and Vibration, **295**, 685-707, (2006)
- [18] B. W. Drinkwater, Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review, NDT&E International **39** (2006) 525–541.
- [19] Yen JT, Smith SW. Real-time rectilinear 3D ultrasound using receive mode multiplexing. IEEE Trans Ultrason Ferr Freq Cont, **2**, 51,(2004) 216–26.
- [20] Song SJ, Shin HJ, Jang YH. Development of an ultrasonic phased array system for non-destructive tests of nuclear power plant components. Nucl Eng Design 2002;214:151–61.
- [21] Chatillon S, Cattiaux G, Serre M, Roy O. Ultrasonic non-destructive testing of pieces of complex geometry with a flexible array transducer. Ultrasonics **38**, 131, (2000).
- [22] Mahaut S, Roy O, Beroni C, Rotter B. Development of phased array techniques to improve characterisation of defect located in a component of complex geometry. Ultrasonics **40**, 165 ,(2002).
- [23] L. Pochhammer, “Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder,” J. Reine Angew. Math., **81**, 324–336 (1876).
- [24] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1934).
- [25] C. Chree, *Longitudinal vibrations of a circular bar*, Quart. J. Pure Appl. Math., **21**, 287–298 (1886).
- [26] C. Chree, *The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications*, Trans. Cambridge Philos. Soc., **14**, 250–309 (1889).
- [27] Lord Rayleigh, *On waves propagated along the plane surfaces of an elastic solid*, Proc. London Math. Soc., **17**, 4–11 (1885).
- [28] Lord Rayleigh, *On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter*, Proc. London Math. Soc., **20**, 225–234 (1889).
- [29] H. Lamb, *On the flexure of an elastic plate*, Proc. London Math. Soc., **21**, 70–90 (1889).
- [30] H. Lamb, *On group velocity*, Proc. London Math. Soc. (Ser. 2), **1**, 473–479 (1904).
- [31] H. Lamb, *On waves in an elastic plate*, Proc. Roy. Soc. London, **A93**, 114–128 (1917).

-
- [32] V. V. Meleshko, *Elastic waveguides: History and the state of the art. I*, J. of Mathematical Sciences, **162**, 99-120, (2009).
- [33] V. V. Meleshko, *Elastic waveguides: History and the state of the art. II*, J. of Mathematical Sciences **67**, 197-216 , (2010).
- [34] O. Adapta, *Texturas colestéricas confinadas entre placas paralelas sometidas a anclaje débil bajo un campo eléctrico*, Tesis de Licenciatura. Facultad de Ciencias, UNAM, (2018).
- [35] M. Kleman and O. D. Lavrentovich. *Soft matter physics*. Springer (2003).
- [36] T. C. Lubensky and P. M. Chaikin. *Principles of condensed matter physics*. Combridge University Press (1995).
- [37] S. Pikin y L. Blinov. *Cristales Líquidos*, MIR Moscú, (1985).
- [38] R. M. Velasco, *Introducción a la elasticidad*, Colección CBI, UAM, primera edición, (2009).
- [39] R. M. Velasco, *Introducción a la hidrodinámica clásica*, Fondo de Cultura Económica, Sección de Obras de Ciencias y Tecnología, (2005).
- [40] G. M. Homsy, K. S. Breuer, et al., *Multimedia Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, New York, (2004).
- [41] Michael A. Slawinski, *Waves and rays in elastic continua*, Segunda edición. World Scientific Publishing Company, (2010).
- [42] Achenbach, J. D., *Wave propagation in elastic solid*, North Holland, (1973).
- [43] Malvern, L.E, *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, (1969).
- [44] Marsden, J.E, Hughes, T. J. R., *Mathematical Foundation of elasticity*. Dover (1983/1994).
- [45] M. N. L. Narashimhan, *Principles of Continuum Mechanics*. John Wiley & Sons, Inc., (1993).
- [46] G. T. Mase, R. E. Smelser, G.E. Mase, *Continuum Mechanics for Engineers*. CRC Press, tercera edición, (2009).
- [47] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Theory of elasticity. Course of Theoretical Physics*, Vol. 7 tercera edición. Pergamon Press (1986).
- [48] T. Levi-Civita, E. Persico, *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors)*. Dover Publications, (1977).
- [49] Jerrold E. Marsden, *Cálculo Vectorial*. Pearson Addison Wesley, quinta edición, (2004).

-
- [50] A. N. Isgleas, *Antología de física*, UNAM, CCH, Lecturas universitarias, primera edición (1971).
- [51] F. Viniegra Heberlein, *Mecánica de los Cuerpos Deformables*. Las Prensas de Ciencias (temas de física), primera edición, (2011).
- [52] S. D. Poisson, *Mémoires Académie Science Paris* **8** (1829), 356.
- [53] S. D. Poisson, *Mémoires Académie Science Paris* **8** (1829), 623.
- [54] E. Sternberg, *Archive Rational Mechanics and Analysis* **6** (1960).
- [55] G. Lamé *Leçons sur la Theorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solides*. Bachelier, Paris (1852).
- [56] C. Somigliana, *Atti Real Accad. Linc. Roma*, Ser. 5,**1** (1892), 111.
- [57] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Partes I y II, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1953).
- [58] A. D. Zoe, R. L. Walton, et al. *Elastic anisotropy and extreme Poisson's ratio in single crystal*, *Acta Materialia*, **58**(19), 6444-6451, (2010).
- [59] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd Edition. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York (1956).
- [60] W. Nowacki, *Dynamics of Elastic Systems*. John Wiley and Sons, Inc., New York (1963).
- [61] O. D. Kellogg, *Foundations of Potential Theory*. Frederick Unger Publishing Company, New York (1929), Chapter IV.
- [62] F. Neumann, *Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers*. B. G. Teubner, Leipzig (1885).
- [63] G. G. Stokes, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **9** (1849), 1-62.
- [64] A. E. H. Love, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Second Series **1** (1904), 291-344.
- [65] D. S. Jones, *The Theory of Electromagnetism*. The Macmillan Company, New York (1964), 34-45.
- [66] H. Lamb, *Proceedings of the London Mathematical Society* **21** (1889-1890), 85
- [67] H. Lamb, *Proceedings of the Royal Society of London A* **93** (1917), 114-128.
- [68] Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, Vol. 1, Macmillan, London (1877).
- [69] S. O. Dovgiy and I. K. Lifanov, *Method of Singular Integral Equations. Theory and Application*, Naukova Dumka, Kiev (1981).

-
- [70] V. T. Grinchenko and V. V. Meleshko, *Harmonic Vibrations and Waves in Elastic Bodies* [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (1981).
- [71] T. R. Meeker and A. H. Meitzler, “Guided wave propagation in elongated cylinders and plates,” in: *Physical Acoustics. Principles and Methods*, Vol. 1A, Academic Press., New York (1964), pp. 111–167.
- [72] J. Zemanek, “An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 51, 265–283 (1972).
- [73] E. Giebe and E. Blechschmidt, “Experimentelle und theoretische Untersuchungen über Dehnungseigenschwingungen von Stäben und Röhren. I,” *Ann. Phys. (5. Folge)*, 18, 417–456 (1933).
- [74] K. Röhrich, “Ausbrietungsgeschwindigkeit ultraakustischer Schwingungen in zylindrischen Stäben,” *Z. Phys.*, 73, 813–832 (1932).
- [75] H. Schoeneck, “Experimentelle Untersuchungen der Schwingungen zylindrischer Einzelkristalle bei hohen elastischen Frequenzen,” *Z. Phys.*, 92, 390–406 (1934).
- [76] D. Bancroft, “The velocity of longitudinal waves in cylindrical bars,” *Phys. Rev.*, 59, 588–593 (1941).
- [77] G. E. Hudson, “Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders,” *Phys. Rev.*, 63, 46–51 (1943).
- [78] S. K. Shear and A. B. Focke, “The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel, and magnesium,” *Phys. Rev.*, 57, 532–537 (1940).
- [79] G. S. Field, “Velocity of sound in cylindrical rods,” *Can. J. Res.*, 5, 619–624 (1931).
- [80] G. S. Field, “Vibrations in solid rods,” *Nature*, 130, 130–131 (1932).
- [81] G. S. Field, “Vibrations in solid rods and disks,” *Can. J. Res.*, 8, 563–574 (1933).
- [82] G. S. Field, “Longitudinal waves in cylinders of liquid, in hollow tubes and in solid rods,” *Can. J. Res.*, 11, 254–263 (1934).
- [83] R. M. Davies, “A critical study of the Hopkinson pressure bar,” *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, A240, 375–457 (1948).
- [84] I. Tolstoy and E. Usdin, “Wave propagation in elastic plates: Low and high mode dispersion,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 29, 37–42 (1957).
- [85] A. H. Meitzler, “Backward-wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 38, Issue 5, 835–842 (1965).
- [86] P. V. Burlii and I. Ya. Kucherov, “Backward elastic waves in plates,” *J. Exp. Theor. Phys.*, 26, 490–493 (1977).

-
- [87] V. M. Byrdin, “On the century of the pioneering study on backward waves: The beginnings and development of backward-wave mechanics and electromagnetics,” *J. Comm. Techn. Electron.*, 50, 1307–1332 (2005).
- [88] R. R. Agarwal and E. A. G. Shaw, “Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk. IV,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 26, 341–342 (1954).
- [89] R. D. Mindlin, *An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates*, World Scientific, Singapore (2006).
- [90] A. H. Holden, “Longitudinal modes of elastic waves in isotropic cylinders and slabs,” *Bell Syst. Tech. J.*, 30, 956–969 (1951).
- [91] V. T. Grinchenko and V. V. Meleshko, *Harmonic Vibrations and Waves in Elastic Bodies [in Russian]*, Naukova Dumka, Kiev (1981).
- [92] R. D. Mindlin, “Waves and vibrations in isotropic elastic plates,” in: *Proc. 1st Symp. on Naval Structural Mechanics (Stanford Univ., 16–20 July 1958)*, Pergamon, New York (1960), pp. 199–232.
- [93] R. D. Mindlin, M. Onoe, and M. A. Medick, “Mathematical theory of vibrations of elastic plates,” in: *Proc. 11th Annual Symp. on Frequency Control (Fort Monmouth, N.J., May 7–9, 1957)*, U.S. Army Signal Engineering Laboratories, Fort Monmouth, N.J. (1957), pp. 1–40.
- [94] J. Dougall, “An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate,” *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, 41, 129–228 (1904).
- [95] H. D. McNiven and J. J. McCoy, “Vibration and wave propagation in rods,” in: *R. D. Mindlin and Applied Mechanics*, Pergamon, New York (1974), pp. 197–225.
- [96] M. Onoe, H. D. McNiven, and R. D. Mindlin, “Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods,” *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 29, 729–734 (1962).
- [97] J. Adem, “On the axially-symmetric steady wave propagation in elastic circular rods,” *Quart. Appl. Math.*, 12, 261–275 (1954).
- [98] C. W. Curtis, “Second mode vibrations of the Pochhammer–Chree frequency equation,” *J. Appl. Phys.*, 25, 928 (1954).
- [99] H. N. Abramson, “Flexural waves in elastic beams of circular cross section,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 29, 1284–1286 (1957).
- [100] M. Onoe, “Contour vibrations of thin rectangular plates,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 30, 1159–1162 (1958).
- [101] J. Oliver, “Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 29, 189–194 (1957).

-
- [102] P. A. Schiff, “Sur l’équilibre d’un cylindre élastique,” *J. Math. Pures Appl. (Ser. 3)*, 9, 407–421 (1883).
- [103] J. Dougall, “An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section,” *Trans. Roy. Soc. Edinburgh*, 49, 895–978 (1914).
- [104] V. T. Grinchenko and V. V. Meleshko, “Properties of a wave field in a semiinfinite elastic cylinder (boundary resonance),” *Mech. Solids*, 17, 73–89 (1982).
- [105] A. Holst and D. Vassiliev, “Edge resonance in an elastic semi-infinite cylinder,” *Appl. Anal.*, 74, 479–495 (2000).
- [106] V. Pagneux, “Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 120, 649–656 (2006).
- [107] I. Roitberg, D. Vassiliev, and T. Weidl, “Edge resonance in an elastic semi-strip,” *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 51, 1–13 (1998).
- [108] J. F. Bell, *The Experimental Foundations of Solid Mechanics*, Springer, Berlin (1973).
- [109] I. A. Viktorov, *Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Applications*, Plenum, New York (1967).
- [110] H. Kolsky, *Stress Waves in Solids*, Clarendon, Oxford (1953).
- [111] B. A. Auld, *Acoustic Fields and Waves in Solids*, Wiley, New York (1973).
- [112] K. F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover, New York (1991).
- [113] M. Redwood, *Mechanical Waveguides*, Pergamon, London (1960).
- [114] A. Lakhtakia, R. Messier, *Sculptured Thin Films: Nanoengineered Morphology and Optics*. SPIE Press Monograph Vol. PM143, SPIE Publications, (2005)
- [115] National Research Council, *Condensed-matter and materials physics: Basic research for tomorrow’s technology*, National Academy Press, Washington, DC, USA, 1999.
- [116] A. Lakhtakia and R. Messier, The key to a thin film HBM: the MotohiroTaga interface, *Proceedings of Chiral ’94: 3rd International workshop on chiral, bi-isotropic and bi-anisotropic media* (F. Mariotte and J.-P. Parneix, eds), Périgueux, France, 1994, 125–130.
- [117] A. Lakhtakia, R. Messier, M.J. Brett, and K. Robbie, Sculptured thin films (STFs) for optical, chemical and biological applications, *Innovat Mater Res* 1 (1996), 165–176.
- [118] A. Lakhtakia and R. Messier, Sculptured thin films—I. Concepts, *Mater Res Innovat* 1 (1997), 145–148.

-
- [119] R. Messier and A. Lakhtakia, Sculptured thin films—II. Experiments and applications, *Mater Res Innovat* 2 (1999), 217–222.
 - [120] R. Messier, T. Gehrke, C. Frankel, V.C. Venugopal, W. Otaño, and A. Lakhtakia, Engineered sculptured nematic thin films, *J Vac Sci Technol A* 15 (1997), 2148–2152.
 - [121] R. Messier, P. Sunal, and V.C. Venugopal, Evolution of sculptured thin films, *Engineered nanostructural films and materials* (A. Lakhtakia and R.F. Messier, eds), *Proc SPIE* 3790, SPIE, Bellingham, WA, USA, 1999, 133–141.
 - [122] Jackson, John David, 1925-2016. *Classical Electrodynamics*. New York :Wiley, 1999.
 - [123] Ruize Hu, *Multiscale computational method for wave propagation in 2D phononic and acoustic metamaterials* (2019).
 - [124] T. C. T. TING, Anisotropic Elastic Constants That are Structurally Invariant , *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 53, 4, (2000), 511–523,