UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estratificies simplemente conexas.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO
P R E S E N T A:
SAMUEL AGUILAR RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ

México CDMX. 2021

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Autor:
SAMUEL AGUILAR RAMÍREZ

Director de tesis:
DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ

Aprobado por:
DRA. FABIOLA MANJARREZ GUTIÉRREZ
DR. JOSÉ CARLOS GÓMEZ LARRAÑAGA
DR.JESÚS RODRÍGUEZ VIORATO
DR. VINICIO ANTONIO GÓMEZ GUTIÉRREZ
DR.MARIO EUDAVE MUÑOZ

AGRADECIMIENTOS

RESUMEN

Los espacios topológicos estratificados son objetos de la topología general y tienen sus inicios dentro de otras áreas como la geometría algebraica, la geometría diferencial y la teoría de singularidades. Desde Hassler Whitney hasta Matthias Kreck pasando por René Thom, este concepto se fue desarrollando y en términos recientes podemos decir que representan una generalización de las variedades topológicas, ya que de manera intuitiva son variedades que permiten subconjuntos que no son localmente homeomorfos a un espacio euclidiano.

Básicamente un $n-$espacio topológico estratificado (X, Σ) es un espacio topológico X que contiene una familia Σ de subconjuntos cerrados X_i ordenados por la contención, los cuales cumplen que para cada punto $x \in X_i$ existe una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^i \times CL$ donde CL es el cono sobre L y L otro $k-$espacio topológico estratificado con $k = n - i - 1$. Dado el amplio espectro de espacios topológicos estratificados, la investigación de frontera se ha centrado en clasificar homotopicamente estos espacios, justo como en el estudio de la clasificación de las variedades topológicas empezando por la clasificación de superfices.

Las superficies multiramificadas son los 2-espacios topológicos estratificados y representan la generalización de las superficies topológicas pues se permiten puntos y curvas singulares. Aún bajo estas restricciones el problema sigue siendo muy general y aquí solo estudiamos los casos en los que las superficies multiramificadas solo contienen curvas singulares ajenas, este tipo de superficies multiramificadas se conocen como estratifices y se pueden pensar como un espacio topológico Hausdorff con un conjunto finito de curvas simples cerradas tal que al remover vecindades ajenas de estas curvas obtenemos una 2-variedad topológica y para cada punto en esas curvas las vecindades son homeomorfas a $\mathbb{R} \times CL$ donde $CL = [0, 1) \times \{1, 2, ..d\}/(0, m) \sim (0, n)$.

La presente tesis pretende dar descripción detallada de las estratificies, una presentación para su grupo fundamental y algunos resultados acerca del tipo de homotopía de estos espacios, con la intención acercarnos un poco más a su clasificación.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

Suponemos que el lector esta familiarizado con los conceptos básicos de la topología y teoría de grupos. En este breve cápitulo hay resultados conocidos que se usan recurrentemente en esta tesis y tambien para hacer la convención en cuanto a notación. Empezando con que vamos a escribir I para denotar el intervalo unitario cerrado $[0, 1]$. Todo el contenido de este cápitulo se basa en los libros [6],[7],[9] y[10].

1.1 Variedades Topológicas

La idea básica es muy simple: deseamos un espacio topológico que se parezca localmente a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sean (M, τ) un espacio topológico y U $\subseteq$ M un subconjunto abierto. Un homeomorfismo x: U $\rightarrow$ x(U) $\subseteq \mathbb{R}^n$ en un subconjunto abierto x(U) $\subseteq \mathbb{R}$ se llama una carta local n-dimensional para (M, τ).

Los números x(p) = (x_1(p),...,x_n(p)) $\in \mathbb{R}^n$ para p $\in$ U se llaman coordenadas locales de $p \in M$ con respecto a la carta local (U, x). Si podemos encontrar tal carta local alrededor de cada punto en M, entonces obtenemos una variedad topológica. Por varias razones es útil requerir dos propiedades adicionales de (M, τ). Queremos la topología sea segundo numerable y Hausdorff.

Definición 1.1. (variedad topológica): Sea (M, τ) un espacio topológico. Entonces (M, τ) se llama una variedad topológica de dimensión n, si se cumplen las siguientes tres propiedades:

(i) Para cada p $\in$ M existe una carta local n-dimensional (U, x) de (M, τ) con p $\in$ U.

(ii) La topología es segundo numerable.

(iii) La topología es Hausdorff.

1.2 Complejos de celdas, CW-complejos y complejos simpliciales.

En esta sección damos una breve introducción a los complejos de celdas, CW-complejos y a los complejos simpliciales. Los complejos de celdas son unos espacios muy elementales, son espacios construidos comenzando con un conjunto discreto de puntos y uniendo sucesivamente celdas (espacios homeomórficos a bolas euclidianas) de dimensiones crecientes. Resulta que muchos espacios interesantes se pueden construir de esta manera, y tal construcción produce información importante sobre el espacio.
Los complejos de celda que nos interesan principalmente se llaman CW-complejos, que son complejos de celdas con dos requisitos técnicos adicionales para garantizar que sus propiedades topológicas estén estrechamente relacionadas con las estructuras de sus celdas. Los CW-complejos sirven para acelerar los cálculos de los invariantes topológicos. Su poder proviene del hecho de que la mayoría de sus propiedades topológicas interesantes están codificadas en información simple sobre como se unen las celdas entre sí.
Usando la teoría de los CW-complejos, podemos ver el primer teorema de clasificación para variedades: Toda 1-variedad, no vacía, conexa y sin frontera es homeomorfa a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^1$, y toda 1-variedad, no vacía, conexa y con frontera, es homeomorfo a [0,1] o [0,∞].
Para terminar, incluyo la definición de un tipo más complejo de complejos llamados complejos simpliciales, que se construyen a partir de puntos, segmentos de línea, triángulos rellenos, tetraedros sólidos y sus análogos de dimensiones superiores. La gran ventaja de los complejos simpliciales es que su topología está codificada de forma puramente combinatoria y se puede utilizar para reducir muchos problemas topológicos a los combinatorios.

Definición 1.2. Una n-celda abierta es cualquier espacio topológico que es homeomorfo a la bola de unitaria abierta $\mathbb{B}^n$, y una n- celda cerrada es cualquier espacio homeomorfo a $\bar{\mathbb{B}}^n$.

1.2.1 Descomposición en celdas.

Deseamos pensar en un complejo celular como un espacio topológico construido inductivamente al unir céldas de dimensiones crecientes a lo largo de sus fronteras. Supongamos que X es un espacio topológico no vacío, $\{D_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una colección indexada de n-celdas cerradas para algún $n \in \mathbb{N}$ fijo, y para cada α, se nos da un mapeo continuo $\phi_\alpha : \partial D \to X$. Sea $\phi : \coprod_\alpha \partial D_\alpha \to X$, el mapeo cuya restricción para cada ∂D_α sea ϕ_α podemos formar el espacio de pegado $X \cup_\phi (\coprod_\alpha D_\alpha)$.

Definición 1.3. Cualquier espacio homeomorfo a dicho espacio de pegado, $X \cup_\phi (\coprod_\alpha D_\alpha)$, se dice que se obtiene de X pegando las n-celdas a X.

Es posible definir un complejo de celdas como un espacio formado inductivamente comenzando con un espacio discreto no vacío X_0, uniendo algunas 1-celdas para formar un espacio X_1, uniendo algunas 2-célula para formar un nuevo espacio X_2, y etc. De hecho, muchos autores definen los complejos de celdas de esta manera. Esta forma de pensar en los complejos de celdas es importante por que para los espacios que queremos estudiar también es posible definirlos así. Sin embargo, la teoría funciona más suavemente si comenzamos describiendo lo que es una descomposición en celdas de un espacio topológico dado; en su forma más básica, una descomposición en celdas de un espacio X, es una partición de X en celdas abiertas (es decir, una colección de subespacios disjuntos no vacíos de X cuya unión es X, cada uno de los cuales es homeomorfo a $\mathbb{B}^n$ para algún n). Pero sin alguna restricción sobre cómo se unen las celdas, dicha descomposición no nos dice nada sobre la topología de X.

Definición 1.4. Si X es un espacio topológico no vacío, una descomposición en celdas de X es una partición ξ de X en subespacios que son celdas abiertas de varias dimensiones, de modo que se cumple la siguiente condición: para cada celda $e \in \xi$ de dimensión n$\geqslant$1, existe un mapeo continuo ϕ desde alguna n-celda cerrada D hacia X (llamada mapeo característico para e) que restringe a un homeomomorfismo desde IntD hacia e y asigna ∂D hacia la unión de todas las celdas de ξ de dimensiones estrictamente menores que n.

1.2.2 Complejo de celdas.

Definición 1.5. Un complejo de celdas es un espacio X de Hausdorff junto con una descomposición en celdas específica de X. (La condición de Hausdorff se incluye porque, la construcción inductiva de los complejos de celdas produce automáticamente espacios de

Hausdorff).

Dado un complejo de celdas (X, ξ), las celdas abiertas en ξ generalmente se llaman simplemente "celdas de X". Aunque cada $e \in \xi$ es una celda abierta, lo que significa que es homeomorfo a $\mathbb{B}_n$ para alguna n, no es necesariamente un subconjunto abierto de X. Un complejo de celdas finito es aquel cuya descomposición en celdas tiene solo un número finito de celdas.

Es perfectamente posible que un espacio dado tenga muchas descomposiciones en celdas diferentes. Técnicamente, el término complejo de celdas se refiere a un espacio junto con una descomposición en celdas específica del mismo (aunque no necesariamente con elecciones específicas de mapeos característicos).

1.2.3 CW-Complejos.

Para complejos finitos (que son adecuados para nuestros propósitos), las definiciones que hemos dado hasta ahora sirven bien. Pero los complejos infinitos también son útiles en muchas circunstancias, y para que los complejos infinitos se comporten bien, se deben agregar dos restricciones más.

Primero necesitamos la siguiente definición. Supongamos que X es un espacio topológico, y B es cualquier familia de subespacios de X cuya unión es X. Decir que la topología de X es coherente con B significa que un subconjunto $U \subset X$ es abierto en X si y solo si su intersección con cada $V \in B$ es abierto en V (equivalentemente $U \subset X$ es cerrado en X si y solo si su intersección con cada $V \in B$ es cerrado en V).

Definición 1.6. Un complejo CW o CW-complejo, es un complejo de celdas (X, ξ) que satisface las siguientes condiciones adicionales:

(C) La cerradura de cada celda está contenida en una unión finitas de celdas.

(W) La topología de X es coherente con la familia de subespacios cerrados $\left\{ \bar{e} : e \in \xi \right\}$.

Una descomposición en celdas de un espacio X que satisface (C) y (W) se denomina CW-descomposición de X. Las letras C y W provienen de los nombres originalmente dados a estas dos condiciones por el inventor de los complejos CW, JHC Whitehead: condición (C) se denominó cerradura finita, y la topología coherente se describió en condición (W) se denominó topología débil asociada con los subespacios $\left\{ \bar{e} : e \in \xi \right\}$, es decir, topología débil de clausura finita.

Definición 1.7. Supongamos que X es un complejo CW. Si hay un número entero n tal que todas las celdas de X tienen dimensión como máximo n, entonces decimos que X es de dimensión finita; de lo contrario, es de dimensión infinita.

Definición 1.8. Si es de dimensión finita, la dimensión de X es la n más grande, de modo que X contiene al menos una celda n.

Aquí un criterio para obtener CW-Descomposiciones.

Proposición 1.9. *Sea X un espacio de Hausdorff, y sea ξ una descomposición celular de X. Si ξ es localmente finito, entonces es una CW-descomposición.*

Proposición 1.10. *Supongamos que X es un CW-complejo n-dimensional. Entonces cada n-celda de X es un subconjunto abierto de X.*

Un subcomplejo de X es un subespacio $Y \subset X$ que es una unión de celdas de X, de modo que si Y contiene una celda, también contiene su cerradura. Se sigue inmediatamente de la definición que la unión y la intersección de cualquier colección de subcomplejos son en sí mismos subcomplejos.

Definición 1.11. Para cada entero no negativo n, definimos el n-esqueletoide X como el subcomplejo n-dimensional $X_n \subset X$ que consiste en la unión de todas las celdas de dimensiones menores o iguales a n.

Algunos hechos acerca de estos espacios que nos serán utiles:

Teorema 1.12. *Para un CW-complejo X, los siguientes son equivalentes.*

(a) X es conexo por trayectorias.

(b) X es conexo.

(c) El 1-esqueleto de X es conexo.

Teorema 1.13. *Sea X un CW-complejo. Un subconjunto de X es compacto si y solo si es cerrado en X y contenido en un subcomplejo finito.*

Corolario 1.14. *Un CW-complejo es compacto si y solo si es un complejo finito.*

Proposición 1.15. *Un CW-complejo es localmente compacto si y solo si es localmente finito.*

Proposición 1.16. *Sea X un CW-complejo. Cada esqueleto X_n se obtiene de X_{n-1} pegando una colección de n-celdas.*

Aquí un importante teorema pues haremos una construcción análoga para los espacios multiramificados.

Teorema 1.17. *(Teorema de construcción CW). Suponga que $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-1} \subset X_n$ es una sucesión de espacios topológicos que satisfacen las siguientes condiciones:*
(i) X_0 es un espacio discreto no vacío.
(ii) Para cada $n \geqslant 1$, X_n se obtiene de X_{n-1} pegando una colección (posiblemente vacía) de n celdas.
Entonces $X = \cup_n X_n$ tiene una topología única coherente con la familia $\{X_i\}$, y una descomposición en celdas única que lo convierte en un CW-complejo cuyo i-esqueleto es X_i para cada i.

1.2.4 CW-Complejos como variedades.

Teorema 1.18. *Todo CW-complejo es paracompacto.*

Teorema 1.19. *Una variedad es un CW-complejo.*

Teorema 1.20. *Supongamos que X es un CW-complejo con un número contable de celdas. Si X es localmente euclidiano, entonces es variedad.*

Teorema 1.21. *Si M es una n-variedad no vacía y un CW-complejo, entonces la dimensión de M como CW-complejo también es n.*

1.3 Espacios contractibles y Tipo de Homotopía

La noción de un espacio contráctil es muy importante y la definición en sí tiene cierto atractivo geométrico. Recordemos que un mapeo $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se dice que es un mapeo constante siempre que cada punto de $\mathcal{X}$ esté mapeado por f a algún punto fijo $y_0 \in \mathcal{Y}$. Si este es el caso, entonces es conveniente denotar tal mapeo constante por el símbolo $\mathcal{C}_{y_0}$, es decir, $\mathcal{C}_{y_0}(\mathrm{x}) = y_0$, para cada $x \in \mathcal{X}$.
Además, dos funciones $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ y $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ de dicen homotópicas, si existe una función $F\colon \mathcal{X} \times I \to \mathcal{Y}$ continua tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = g(x)$.

Definición 1.22. Se dice que un espacio topológico $\mathcal{X}$ es un espacio contraíble si el mapeo identidad $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ es homotópico a algún mapeo constante $\mathcal{C}_x\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$,
donde, por supuesto, $x \in \mathcal{X}$.
Cualquier homotopía de $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ a $\mathcal{C}_x$ se llama contracción del espacio $\mathcal{X}$ al punto x.

Existen numerosos ejemplos de espacios contractibles. Por ejemplo, notamos que cualquier subconjunto convexo de un espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es contraíble. En particular, el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, el disco $\mathbb{D}^n$ son espacios contractibles.
Más generalmente, se dice que un subespacio $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}^n$ tiene forma de estrella si existe un punto $x_0 \in \mathcal{X}$ tal que el segmento de línea que une cualquier punto de $\mathcal{X}$ a x_0 se encuentra completamente en $\mathcal{X}$. Si X tiene forma de estrella entonces es contractible.

Definición 1.23. Sea $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un mapeo continuo. Decimos que f es una equivalencia de homotopía si existe un mapeo continuo $g\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tal que $g \circ f$ es homotópico al mapeo identidad $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ en $\mathcal{X}$ y $f \circ g$ es homotópico al mapeo de identidad $\mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$ en $\mathcal{Y}$. Se dice que dos espacios $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son homotópicamente equivalentes o del mismo tipo de homotopía si existe una equivalencia de homotopía de uno a otro.

Debemos observar que dos espacios homeomórficos son del mismo tipo de homotopía.

Se puede verificar fácilmente que la relación de "equivalencia de homotopía" en la clase de todos los espacios topológicos es una relación de equivalencia. Además, la relación de equivalencia de homotopía es estrictamente más débil que la relación de "homeomorfismo". También queda claro que si un espacio $\mathcal{X}$ es compacto, entonces un espacio $\mathcal{Y}$, que es homotópicamente equivalente a $\mathcal{X}$, no necesita ser compacto, es decir, la compacidad no es invariante bajo homotopía. De manera similar, la dimensión topológica no es invariante bajo homotopía porque la dimensión del plano $\mathbb{R}^2$ es 2, mientras que un punto tiene dimensión cero. Estos y varios otros ejemplos muestran que los invariantes topológicos no son, en general, invariantes de "homotopía", por lo que la clasificación de espacios por homotopía es bastante débil. Sin embargo, sigue siendo muy importante porque más adelante definiremos algunos invariantes de homotopía que evidentemente serán invariantes topológicos.
En el momento en que notamos que alguno de estos invariantes no es el "mismo" para cualquiera de los dos espacios dados, $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, podemos afirmar de inmediato que $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ no son del mismo tipo de homotopía y, por lo tanto, no pueden ser homeomórficos. Esta es una buena estrategia de topología algebraica para demostrar que dos espacios dados no son homeomórficos.

Teorema 1.24. *Un espacio topológico $\mathcal{X}$ es contraíble si y solo si X es del mismo tipo de homotopía que un espacio de un punto $P = \{p\}$.*

Concluimos que los espacios contractibles son precisamente aquellos espacios que son homotópicamente equivalentes a un espacio de un punto. La imagen intuitiva de un espacio contractible X es bastante interesante. Una homotopía debe considerarse como una deformación continua del espacio que finalmente encoge todo $\mathcal{X}$ en un punto. En otras palabras, si imaginamos el intervalo unitario $\mathcal{I}$ como un intervalo de tiempo, entonces en el tiempo t=0, cada punto $x \in \mathcal{X}$ está en su lugar original; como t varía de 0 a 1 continuamente, x se mueve continuamente y se acerca al punto x_0. Además, todos estos puntos se mueven simultáneamente de tal manera que sus posiciones relativas no cambian abruptamente. Por lo tanto, si seguimos el movimiento de un punto arbitrario x $\in$ X, notamos que describe una trayectoria en $\mathcal{X}$ a partir de x que termina en x_0.

Definición 1.25. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ un subconjunto arbitrario y f, g: $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ sean dos mapeos continuos. Diremos que f es homotópica a g "relativo a $\mathcal{A}$" si existe un mapeo continuo $F : \mathcal{X} \times I \to \mathcal{Y}$ tal que:

$F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in \mathcal{X}$, y

$F(a, t) = f(a) = g(a)$, para todo a $\in \mathcal{A}$.

Notemos que si consideramos que $\mathcal{A}$ es un conjunto vacío $\emptyset$, entonces el concepto de homotopía relativa se reduce al de homotopía. El mapeo f cambiará al mapeo g por una familia de mapeos continuos h_t:$\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $t \in I$, pero los puntos de A permanecerán sin cambios. Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ subconjunto fijo y $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ denota el conjunto de todos los mapeos continuos de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, se puede demostrar que la relación de ser homotópico con respecto a A es un relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{C}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Definición 1.26. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. Decimos que $\mathcal{A}$ es una retracción de $\mathcal{X}$ si existe un mapeo continuo r: $\mathcal{X} \to \mathcal{A}$ tal que r(a) = a, para todo a $\in \mathcal{A}$. El mapeo r se llama retracción o retracto.

Es decir, $\mathcal{A}$ es una retracción de $\mathcal{X}$ si y solo si la inclusión i tiene inverso izquierdo.

1.4 Grupo fundamental.

Para distinguir dos espacios topológicos arbitrarios podemos asignar invariantes algebraicos "fáciles" de calcular y que a espacios homeomorfos les asigne el mismo objeto algebraico.

Dado un espacio topológico X, $a \in X$ y una trayectoria $\alpha : I \to X$. Decimos que α es un lazo con base en a si $\alpha(0) = \alpha(1) = a$. El lazo $i(\alpha)$ es obtenido al recorrer α al revés, $i(\alpha) := \alpha(1 - t)$

Definición 1.27. $\Omega(X, a) = \{\alpha : I \to X |\ \alpha \text{ es un lazo en } a\ \}$.

Podemos definir una operación en $\Omega(X, a)$ y dadas $\alpha, \beta \in \Omega(X, a)$, $\alpha * \beta$ es el lazo obtenido de recorrer a β y luego a α.

Definición 1.28. Dos lazos $\alpha, \beta \in \Omega(X,a)$ son homotópicos si existe una función continua $F : I \times I \to X$ tal que:

1.$F(t,0) = \alpha(t)$, $F(t,1) = \beta(t)$ $\forall t \in I$.

2.$F(0,s) = a = F(1,s)$ $\forall s \in I$.

Tal F es llamada una homotopía por trayectorias entre α y β.

Es fácil ver que esta relación es de equivalencia en $\Omega(X,a)$.

Definición 1.29. Uno define el grupo fundamental de X, $\pi_1(X,a)$ como el cociente $\pi_1(X,a)$ de $\Omega(X,a)$ por la equivalencia homotópica. Para cualquier lazo $\alpha \in \Omega(X,a)$, escribimos $[\alpha] \in \pi_1(X,a)$ para la correspondiente clase de equivalencia de α.

Denotemos como 1_a el lazo basado en $a \in X$ tal que $1_a(t) = a$ $\forall t \in I$.

De la operación $*$ en $\Omega(X,a)$ podemos definir una operación $\cdot$ en $\pi_1(X,a)$ como $[\alpha]\cdot[\beta]=[\alpha*\beta]$

Teorema 1.30. *El conjunto* $\pi_1(X,a)$ *tiene estructura de grupo con elemento neutral* $[1_a]$, *la operación* $\cdot$ *y* $[\alpha]^{-1} = [i(\alpha)]$.

Ejemplo 1.30.1. *Sea* X *un conjunto convexo de* $\mathbb{R}^n$. *Para cualquier* $a \in X$ *se tiene que* $\pi_1(X,a) = 1$:

Si $\alpha \in \Omega(X,a)$ *de hecho:*

$F : I \times I \to X$, $F(t,s) = as - (1-s)\alpha(t)$.

Es una homotopía de α *al* 1_a.

Teorema 1.31. *Cada mapeo continuo* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *de espacios donde* $f(x)=y$, *induce un homomorfismo* $f_\#$: $\pi_1(X,\ x) \to \pi_1(Y,\ y)$.

Las propiedades básicas del homomorfismo inducido $f_{\#}$, en el lenguaje de categorías y functores, se expresan al declarar que el grupo fundamental π_1 es un functor covariante de la categoría de todos los espacios topológicos con puntos y los mapeos continuos que preservan el punto base a la categoría de todos los grupos y homomorfismos de grupo.

Teorema 1.32. *Si $f\colon X \to X$ es el mapeo identidad, entonces $f_{\#}\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, x)$ es también el homomorfismo identidad para todo $x \in X$.*

El grupo fundamental de un espacio topológico conexo por trayectorias es un invariante topológico. En otras palabras, las propiedades anteriores producen el hecho de que si X e Y son espacios topológicos conexos por trayectorias que son homeomorfos, entonces sus grupos fundamentales deben ser isomorfos.

Teorema 1.33. *Si X e Y son espacios topológicos conexos por trayectorias que son homeomorfos, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.*

El functor de grupo fundamental convierte parcialmente un problema de homeomorfismo en un problema de isomorfismo en el sentido de que si podemos afirmar que π_1(X) no es isomorfo a π_1(Y), entonces se deduce de la propiedad de invariancia topológica de grupos fundamentales que X e Y no pueden ser homeomórficos, pero si los grupos fundamentales de X e Y son isomorfos, no podemos decir que X e Y son homeomórficos.

Teorema 1.34. *Sean X, Y dos espacios conexos por trayectorias que tienen el mismo tipo de homotopia. Entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.*

Teorema 1.35. *Si $f\colon(X, x_0)\to(Y, y_0)$ es una equivalencia de homotopía, entonces $f_{\#}\colon\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ es un isomorfismo de grupos.*

Corolario 1.36. *Sea $\mathcal{A}$ un retracto fuerte por deformación de un espacio $\mathcal{X}$. Luego, para cada punto $a \in \mathcal{A}$, $\pi_1(\mathcal{A}, a)$ es isomorfo a $\pi_1(\mathcal{X}, a)$.*

1.4.1 Espacios Simplemente conexos.

Los espacios cuyos grupos fundamentales son triviales, juegan papel muy importante en el análisis complejo, así como en la topología algebraica.

Definición 1.37. Se dice que un espacio X es simplemente conexo (o 1-conexo) si es conexo por trayectorias y $\pi_1(\mathrm{X}) = 0$.

Observemos que si $\mathcal{X}$ es conexo por trayectorias, el grupo fundamental de $\mathcal{X}$ es independiente del punto base. En consecuencia, $\mathcal{X}$ es simplemente conexo si y solo si es conexo por trayectorias y su grupo fundamental es trivial en algún punto de X.

Proposición 1.38. *Un espacio conexo por trayectorias X, es simplemente conexo si y solo si hay dos trayectorias en X que tienen los mismos puntos iniciales y finales que son homotópicas.*

1.5 Un poco de teoría de grupos.

Hay una forma familiar de crear un grupo como producto de dos o más grupos: el producto directo de los grupos G_1,...,G_n es el producto cartesiano $G_1\times \cdots \times G_n$ con la estructura de grupo obtenida multiplicando las entradas en dos n-tuplas componente por componente. Para el estudio de grupos fundamentales, necesitamos construir otro tipo de producto, llamado producto libre.

Sea $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de grupos indexada. El conjunto de índices A puede ser finito o infinito; para nuestras aplicaciones solo necesitamos el caso finito, por lo que puede pensar en familias finitas a lo largo de esta tesis. Por lo general, omitimos la mención de A y denotamos a la familia simplemente por (G_α) con α implícitamente comprendido en algún conjunto de índices.

Una palabra en (G_α) es una secuencia finita de cualquier longitud $m \geqslant 0$ de elementos de la unión disjunta $\coprod_\alpha G_\alpha$.

En otras palabras, una palabra es una tupla ordenada de la forma $(g_1,..,g_m)$,

donde cada g_i es un elemento de algún G_α. La secuencia de longitud cero, llamada palabra vacía, se denota por e.

Con $\mathcal{W}$ vamos a denotar el conjunto de todas las palabras en (G_α). Notamos el elemento de identidad de G_α, por 1_α.

Definimos una operación de multiplicación en $\mathcal{W}$ por concatenación:

$(g_1,...,g_m)$ $(h_1,..., h_k)$=$(g_1,...,g_m,h_1,..., h_k)$.

Sin embargo, hay dos problemas con esta estructura tal como está:

Primero, $\mathcal{W}$ no es un grupo bajo esta operación porque no hay inversos; y segundo, las estructuras de grupo de los diversos grupos G_α no han jugado ningún papel en la definición hasta ahora.

Para resolver ambos problemas, definimos una relación de equivalencia en el conjunto de palabras de la siguiente manera.

Definición 1.39. Una reducción elemental es una operación de una de las siguientes formas:

$\cdot$) $(g_1,.., g_i, g_{i+1},..,g_m) \mid\rightarrow (g_1,.., g_i g_{i+1},..,g_m)$, si $g_i,g_{i+1}\in G_\alpha$ para algún α.

$\cdot\cdot$) $(g_1,.., g_{i-1},1_\alpha,g_{i+1},..,g_m) \mid\rightarrow (g_1,.., g_{i-1},g_{i+1},..,g_m)$.

La primera operación simplemente reemplaza dos entradas consecutivas con su producto, siempre que sean elementos del mismo grupo, y la segunda elimina cualquier elemento de identidad que aparezca en una palabra. Vamos a denotar con $\sim$ la relación de equivalencia en palabras generadas por reducciones elementales: esto significa que $w \sim w$' si y solo si hay una secuencia finita de palabras $w = w_0$, w_1,..., $w_n = w$' , tal que para cada i=1,...,n donde w_i se obtiene de w_{i+1} mediante una reducción elemental, o viceversa.

Definición 1.40. El conjunto de clases de equivalencia se denomina producto libre de los grupos (G_α) y se denota por $*_{\alpha\in A}G_\alpha$. En el caso de una familia finita de grupos, simplemente escribimos $G_1*\cdots*G_n$.

Proposición 1.41. *Dada una familia indexada de grupos $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$, su producto libre es un grupo bajo la operación de multiplicación inducida por la multiplicación de palabras.*

En adelante, denotamos por 1 el elemento de identidad del producto libre (la clase de equivalencia de la palabra vacía).

Para muchos propósitos, es importante tener un representante único de cada clase de equivalencia en el producto libre. Decimos que una palabra $(g_1,...,g_m)$ es reducida si no se puede

acortar con una reducción elemental. Específicamente, esto significa que ningún elemento g_i es la identidad de su grupo, y no hay dos elementos consecutivos g_i, g_{i+1} que provienen del mismo grupo. Es fácil ver que cualquier palabra es equivalente a una palabra reducida: Simplemente realice reducciones elementales hasta que sea imposible realizar más.
Lo que no es tan fácil de ver es que la palabra reducida que representa cualquier clase de equivalencia dada es única.

Proposición 1.42. *Cada elemento de* $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ *está representado por una reducción única palabra.*

1.5.1 Grupos libres

Usamos la construcción de productos libres para crear una nueva clase de grupos llamados grupos libres, que consta de todos los productos posibles de un conjunto de generadores, sin ninguna relación impuesta.

Definición 1.43. Sea G un grupo. Si S es un subconjunto de G tal que el subgrupo generado $\langle S \rangle$ es todo G, entonces se dice que S genera G, y los elementos de S se llaman generadores de G. Cada elemento de G puede expresarse como un producto finito de las potencias de los elementos de S.

Por supuesto, cada grupo tiene un conjunto de generadores, porque podemos considerar que S es todo el grupo G. Pero es más interesante encontrar al más pequeño de estos conjuntos de generadores. Por ejemplo, un grupo cíclico es un grupo generado por un solo elemento.
Comenzamos definiendo un grupo libre generado por un solo elemento. Dado cualquier objeto σ, podemos formar un grupo cíclico infinito generado por σ, llamado el grupo libre generado por σ y denotado por $F(\sigma)$.

Definición 1.44. Ahora supongamos que se nos da un conjunto arbitrario S. Definimos el grupo libre en S, denotado por $F(S)$, como el producto libre de todos los grupos cíclicos infinitos generados por elementos de S:

$$F(S) = *_{\sigma \in S} F(\sigma).$$

Proposición 1.45. *Un grupo G es libre si y solo si tiene un subgrupo generador $S \subset G$ de modo que cada elemento $g \in G$ que no sea la identidad tenga una expresión única como producto de la forma $g = \sigma_1^{n_1} \cdots \sigma_k^{n_k}$, donde $\sigma_i \in S$, n_i son enteros distintos de cero, $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$ para cada i=1,...,$k-1$.*

1.5.2 Presentaciones de grupos.

A menudo es conveniente describir un grupo dando un conjunto de generadores para él y enumerando algunas reglas, o "ecuaciones", que describen cómo multiplicar los generadores.

Definición 1.46. Una presentación de grupo es un par ordenado, denotado por $\langle S|R \rangle$, donde S es un conjunto arbitrario y R es un conjunto de elementos del grupo libre $F(S)$. Los elementos de S y R se denominan generadores y ecuaciones, respectivamente, de la presentación. Una presentación de grupo define un grupo, también denotado por $\langle S|R \rangle$, como el siguiente grupo de cociente:

$\langle S|R \rangle = F(S)/\bar{R}$, donde $\bar{R}$ es la cerradura normal de R en $F(S)$, que es la intersección de todos los subgrupos normales de $F(S)$ que contienen R; así $\bar{R}$ es el subgrupo normal "más pequeño" que contiene R.

Dado que el cociente de un grupo por un subgrupo normal es nuevamente un grupo, $\langle S|R \rangle$ es de hecho un grupo. Cada una de las relaciones $r \in R$ representa un producto particular de potencias de los generadores que es igual a 1.

Por lo tanto, en cierto sentido, $\langle S|R\rangle$ es el grupo "más grande" generado por S en el que todos los productos representados por elementos de R son iguales a 1.

Definición 1.47. Ahora suponga que G es un grupo arbitrario. Una presentación de G es una presentación de grupo $\langle S|R\rangle$ junto con un isomorfismo $\langle S|R\rangle \cong G$. Si existe tal isomorfismo, se determina de forma única especificando qué elemento de G corresponde a cada generador en S. A menudo, si el isomorfismo se entiende o es irrelevante, simplemente decimos "$\langle S|R\rangle$ es una presentación de G."

Definición 1.48. Si G admite una presentación $\langle S|R\rangle$ en la que tanto S como R son conjuntos finitos, decimos que G es finitamente presentado. En este caso, generalmente escribimos la presentación como $\langle\, s_1, \ . \ . \ . \ , s_n |\ r_1, \ . \ . \ . \ , r_m\rangle$.

Dado que los r_i en realidad todos se vuelve igual a la identidad en el grupo definido por la presentación, a menudo también es conveniente reemplazar las ecuaciones obtenidas estableciéndolas iguales a la identidad, llamadas relaciones de la presentación, como en $\langle s_1, ..., s_n|\ r_1 = 1, ..., r_m = 1\rangle$.

Aquí hay algunos ejemplos importantes de presentaciones de grupo:

a) El grupo libre con generadores $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tiene presentación
$F(\alpha_1, ..., \alpha_n) \cong \langle\ \alpha_1, ..., \alpha_n|\ \emptyset\rangle$.
En particular $\mathbb{Z} \cong \langle\alpha|\emptyset\rangle$.

b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \langle\alpha,\beta|\alpha\beta=\beta\alpha\rangle$

c) $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/\mathrm{n}\mathbb{Z} \cong \langle\alpha\,|\alpha^n = 1\rangle$.

d) $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \langle \alpha, \beta \,|\alpha^n = 1\,,\, \beta^m = 1, \alpha\beta = \beta\alpha\rangle$.

De alguna manera, una presentación ofrece una forma muy simple y concreta de comprender las propiedades de un grupo, describir los grupos fundamentales de superficies es importante en su clasificación. Sin embargo, hay que tener en cuenta que incluso con una presentación finita, algunas preguntas muy básicas sobre un grupo pueden ser difíciles o imposibles de responder. Por ejemplo, dos de los problemas más básicos relacionados con las presentaciones de grupo fueron planteados por primera vez alrededor de 1910 por los topólogos Heinrich Tietze y Max Dehn, poco después de la invención del grupo fundamental:

1) El problema del isomorfismo para los grupos, es decidir, dadas dos presentaciones finitas, si los grupos resultantes son isomorfos.

2) El problema de la palabra, es decidir, dada una presentación finita ⟨S|R⟩ y dos palabras formadas a partir de elementos de S, si esas palabras son iguales en el grupo ⟨S|R⟩(o de manera equivalente, dada una palabra, decidir si es igual a la identidad).

En la presente tesis abordamos este ultimo problema para los grupos de estratificies.

Para finalizar esta sección vamos a definir el producto libre amalgamado.

1.5.3 Producto libre amalgamado.

Definición 1.49. Supongamos que H, G_1 y G_2 son grupos, $f_1 : H \to G_1$ y $f_2 : H \to G_2$ dos homomorfismos. Definimos el producto libre amalgamado de G_1 y G_2 a lo largo H, denotado por $G_1 *_H G_2$, como el grupo cociente $G_1 * G_2 / \bar{C}$, donde C={ $f_1(g)\ f_2(g)^{-1}$: g∈H}, considerado como subconjunto de $G_1 * G_2$.

El producto libre amalgamado tiene una reformulación útil en términos de generadores y relaciones, esto cuando tengamos presentaciones finitas para los grupos en cuestión.

Teorema 1.50. *Supongamos que H, G_1 y G_2 son grupos, $f_1 : H \to G_1$ y $f_2 : H \to G_2$ dos homomorfismos.Si H, G_1 y G_2 tienen representaciones finitas:*

$G_1 \cong \langle \alpha_1, ..., \alpha_m |\ \rho_1, ..., \rho_r \rangle$;

$G_2 \cong \langle \beta_1, ..., \beta_n |\ \sigma_1, ..., \sigma_s \rangle$;

$H \cong \langle \gamma_1, ..., \gamma_p |\ \tau_1, ..., \tau_t \rangle$.

Entonces el producto amalgado tiene presentación:

$G_1 *_H G_2 \cong \langle \alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n |\ \rho_1, ..., \rho_r, \sigma_1, ..., \sigma_s, u_1 = v_1, ..., u_p = v_p \rangle$,

donde u_k es una expresión para $f_1(\alpha_k) \in G_1$, es decir esta en términos de los generadores $\{\alpha_i\}$, similarmente v_k es una expresión para $f_2(\alpha_k) \in G_2$, en términos de los generadores $\{\beta_j\}$.

1.6 Teorema de Seifert-Van Kampen.

El problema general es determinar los grupos fundamentales de todas las superficies compactas. Sin embargo, para responder estas preguntas, primero necesitamos determinar los grupos fundamentales de gráficas conexas (poliedros simpliciales unidimensionales). La solución es proporcionada, entre otras cosas, por el siguiente resultado poderoso (ver W.Massey [10] para una prueba y otros detalles), que proporciona el grupo fundamental de la unión de dos subespacios si conocemos los grupos fundamentales de subespacios individuales.

En esta sección desarrollamos las técnicas necesarias para calcular los grupos fundamentales de CW complejos finitos, superficies compactas y muchos otros espacios también. La herramienta básica es el teorema de Seifert-Van Kampen, que proporciona una fórmula para el grupo fundamental de un espacio que puede descomponerse como la unión de dos subconjuntos abiertos, conexos por trayectorias cuya intersección también es conexa por trayectorias.

El primer caso especial es aquel en el que la intersección de los dos subconjuntos es simplemente conexa:

Entonces el teorema dice que el grupo fundamental del espacio total es isomorfo al producto libre de los grupos fundamentales de sus subespacios.

El segundo caso especial es aquel en el que uno de los dos subconjuntos es simplemente conexo:
Entonces el grupo fundamental del espacio total es el cociente del grupo fundamental de la pieza que no es simplemente conexa por el grupo fundamental de la intersección.
Este gran teorema lo aplicamos para calcular los grupos fundamentales de sumas de cuña, gráficas y complejos finitos de CW. Utilizando estos resultados, calculamos los grupos fundamentales de todas las superficies compactas y, por lo tanto, completamos el teorema de clasificación para superficies.

Supongamos que se nos da un espacio X que es la unión de dos subconjuntos abiertos $U, V \subset X$, y además que podemos calcular los grupos fundamentales de U, V y $U \cap V$, cada uno de los cuales es conexo por trayectorias. Cada lazo en X es homotópico por trayectorias a un producto de lazos, cada uno de los cuales se encuentra en U o V; se puede pensar que dicho lazo representa un elemento del producto libre $\pi_1(U) * \pi_1(V)$. Pero cada lazo en $U \cap V$ representa solo un único elemento de $\pi_1(X)$, aunque representa dos elementos distintos del producto libre (uno en $\pi_1(U)$ y uno en $\pi_1(V)$). Así, el grupo fundamental de X puede considerarse como el cociente de este producto libre módulo algunas relaciones que provienen de $\pi_1(U \cap V)$ que expresan esta redundancia.

Teorema 1.51 (Seifert-Van Kampen)**.** *Sea X un espacio topológico conexo por trayectorias, sean $U, V \subset X$ subconjuntos abiertos cuya unión sea X, $U \cap V \neq \emptyset$ y con $U \cap V, U, V$ conexos por trayectorias.*
Si $i : U \cap V \to U, j : U \cap V \to V$ son las inclusiones de $U \cap V$ en U y V respectivamente, y $p \in U \cap V$ un punto base, entonces el grupo fundamental de X basado en p es el producto libre $\pi_1(U) * \pi_1(V)$, con relaciones $i_\#(x) = j_\#(x)$, $\forall x \in \pi_1(U \cap V, p)$.

Utilizando la definición de producto amalgamado, el teorema se puede reescribir.

Corolario 1.52. *Bajo las hipótesis del teorema de Seifert-Van Kampen,*

$\pi_1(U) *_{\pi_1(U\cap V)} \pi_1(V) \cong \pi_1(X)$.

En general los grupos que mejor podemos conocer son los finitamente presentados y podemos simplificar aun más el teorema. Además afortunadamente en esta tesis, los grupos fundamentales de los espacios en cuestión son finitamente presentados.

Tenemos diferentes situaciones en las que es conveniente calcular la presentación directamente del teorema.

Corolario 1.53. *(Primer Caso Especial: Intersección Simplemente Conexa) Bajo las hipótesis del teorema de Seifert-Van Kampen, además suponemos que $U \cap V$ es simplemente conexa. Si los grupos fundamentales de U y V tienen representaciones finitas:*

$\pi_1(U,p) \cong \langle \alpha_1, ..., \alpha_m \mid \rho_1, ..., \rho_r \rangle$,
$\pi_1(V,p) \cong \langle \beta_1, ..., \beta_n \mid \sigma_1, ..., \sigma_s \rangle$,

entonces el grupo fundamental de X tiene presentación:

$\pi_1(X,p) \cong \langle \alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_n \mid \rho_1, ..., \rho_r, \sigma_1, ..., \sigma_s \rangle$,

donde los generadores α_i, β_j están representados por los mismos lazos que en las presentaciones originales, pero ahora se consideran lazo en X en lugar de U o V.

Corolario 1.54. *(Segundo Caso Especial: Una pieza Simplemente Conexa) Bajo las hipótesis del teorema de Seifert-Van Kampen, además suponemos que U es simplemente conexa. Si los grupos fundamentales de $U \cap V$ y V tienen representaciones finitas:*

$\pi_1(V,p) \cong \langle \beta_1, ..., \beta_n \mid \sigma_1, ..., \sigma_s \rangle$,

$\pi_1(U \cap V, p) \cong \langle \gamma_1, ..., \gamma_p \mid \tau_1, ..., \tau_t \rangle,$

entonces el grupo fundamental de X tiene presentación:

$\pi_1(X, p) \cong \langle \beta_1, ..., \beta_n \mid \sigma_1, ..., \sigma_s, v_1, ..., v_p \rangle,$

donde los generadores β_j están representados por los mismos lazos que en las presentaciones originales, pero ahora se consideran lazo en X en lugar de V; cada v_k es una expresión para $j_{\#}(\ \gamma_k) \in \pi_1(V, p)$, obviamente en términos de $\{\beta_1, ..., \beta_n\}$.

Tiempo de usar este poderoso teorema.

1.7 Teoría de Gráficas.

Este es un breve desglose de definiciones y resultados, requeridos para desarrollar el estudio de las estratificies.

Definición 1.55. Una gráfica (ó grafo) G es una pareja $(V(G), E(G))$ de conjuntos tal que, $V(G)$ es finito y $E(G) \subset V(G) \times V(G)$.
En el cual las parejas en E se consideran no-ordenadas, es decir, $(u, v) \in E$ es equivalente a $(v, u) \in E$.
También, $\forall v \in V, (v, v) \notin E$, con esto evitamos los auto-lazos en G.

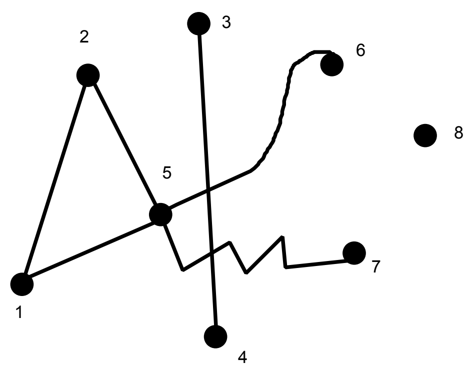
$V(G)$ se denomina el conjunto de vértices de una gráfica G, su conjunto de aristas como $E(G)$. Estas convenciones son independientes de los nombres reales de estos dos conjuntos: el conjunto de vértices W de una gráfica $H = (W, F)$ también se le conoce como $V(H)$, no como $W(H)$. No siempre distinguiremos estrictamente entre una gráfica y sus vértices o conjunto de aristas. Por ejemplo, podemos hablar de un vértice $v \in G$ (en lugar de $v \in V(G)$) o una arista $e \in G$.

Definición 1.56. Definimos:

|V|=|G|, como el orden de la gráfica.

|E|=||G||, como el tamaño de la gráfica.

Los elementos de V son los vértices (o nodos, o puntos) de la gráfica G, los elementos de E son sus aristas (o líneas). La forma habitual de representar una gráfica es dibujar un punto para cada vértice y unir dos de estos puntos con una línea si los dos vértices correspondientes forman una arista. La forma en que se dibujan estos puntos y líneas se considera irrelevante: todo lo que importa es la información de qué pares de vértices determinan una arista y cuáles no.

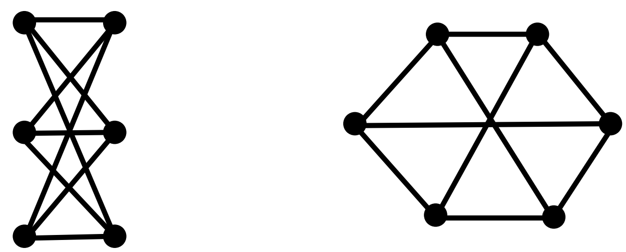


La gráfica en $V = \{1, \ldots, 8\}$ y
$E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 4), (5, 7), (6, 5)\}$

Un vértice v es incidente con una arista e si $v \in e$; así que e es una arista en v. Los dos vértices incidentes en una arista son sus extremos, y una arista une sus extremos. Una arista (x, y) también se escribe como xy (o yx).

El conjunto de todas las aristas de E en un vértice v se denota por $E(v)$.

Definición 1.57. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos gráficas. Un mapeo $\phi : V \to V'$ es un homomorfismo de G a G' si conserva la adyacencia de vértices, es decir, si $(\phi(x), \phi(y)) \in E'$ siempre que $(x, y) \in E$. Entonces, en particular, para cada vértice x' en la imagen de ϕ su imagen inversa $\phi^{-1}(x')$ es un conjunto independiente de vértices en G. Si ϕ es biyectiva y su inversa ϕ^{-1} también es un homomorfismo (de modo que $xy \in E \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E$ para todo $x, y \in V$), llamamos ϕ un isomorfismo, decimos que G y G' son isomorfas y escribimos $G = G'$. Un isomorfismo de G a sí mismo es un automorfismo de G.



Dos gráficas isomorfas.

Definición 1.58. $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ y $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$.
Si $G \cap G' = \emptyset$, entonces G y G' son disjuntos. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, entonces G' es una subgráfica de G (y G una supergrafica de G'), denotado como $G' \subseteq G$.

Definición 1.59. Si $G' \subseteq G$ y G' contiene todas las aristas $xy \in E$ con $x, y \in V'$, entonces G' es una sugráfica inducida de G; decimos que V' induce o genera G' en G, y escribimos $G' := G[V']$. Por lo tanto, si $U \subseteq V$ es cualquier conjunto de vértices, entonces $G[U]$ denota la gráfica en U cuyas aristas son precisamente las aristas de G con ambos extremos en U. Si H es una subgráfica de G, no necesariamente inducida, abreviamos $G[V(H)]$ como $G[H]$. Finalmente, $G' \subseteq G$ es una gráfica generadora de G si V abarca todo G, es decir, si $V' = V$.

Definición 1.60. Si U es cualquier conjunto de vértices (generalmente de G), escribimos $G \backslash U$ para denotar a $G[V \backslash U]$. En otras palabras, $G \backslash U$ se obtiene a partir de G eliminando todos los vértices en $U \cap V$ y sus aristas incidentes. Si $U = \{v\}$ es un único vértice, escribimos $G \backslash v$ en lugar de $G \backslash \{v\}$. También, $G \backslash V(G')$ simplemente lo escribimos como $G \backslash G'$. Para un subconjunto F de $V \times V$ escribimos $G \backslash F := (V, E \backslash F)$ y $G + F := (V, E \cup F)$; como antes, $G \backslash \{e\}$ y $G + \{e\}$ se abrevian como $G \backslash e$ y $G + e$.

Definición 1.61. El complemento G^c de G es la gráfica en V con el conjunto de aristas $(V \times V)\backslash E$.

Gráfica nula: Si $E = \emptyset$, en una gráfica $G = (V, E)$, entonces dicha gráfica sin aristas se denomina gráfica nula.

Descomposición: Se dice que una gráfica G se descompone en dos subgráficas G_1 y G_2, si $G_1 \cup G_2 = G$ y $G_1 \cap G_2$ es una gráfica nula.

Supresión: La eliminación de un vértice siempre implica la eliminación de todas las aristas incidentes en ese vértice. La eliminación de una arista no implica la eliminación de sus vértices finales.

Fusión: Se dice que un par de vértices a, b en una gráfica G se fusionan si los dos vértices se reemplazan por un único vértice nuevo de modo que cada arista, que incidió en a o b o en ambos, incide en el nuevo vértice. Por tanto, la fusión de dos vértices no altera el número de aristas, pero reduce el número de vértices en uno.

Definición 1.62. Sea $G = (V, E)$ una gráfica (no vacía). El conjunto de vecinos de un vértice v en G se denota por $N_G(v)$, o abreviado por $N(v)$. De manera más general, para $U \subseteq V$, los vecinos en $V\backslash U$ de los vértices en U se llaman vecinos de U; su conjunto se denota por $N(U)$.

Un poco de terminología.

El grado (o valencia) $d_G(v) = d(v)$ de un vértice v es el número $|E(v)|$ de aristas en v; según nuestra definición de gráfica, esto es igual al número de vecinos de v. Un vértice de grado 0 está aislado. El número
$\delta(G) := min\{d(v)|v \in V\}$ es el grado mínimo de G, el número
$\Delta(G) := max\{d(v)|v \in V\}$ su grado máximo.
Si todos los vértices de G tienen el mismo grado k, entonces G es k-regular, o simplemente regular.

La gráfica completa de n vértices se denota por K_n, y contiene todas las aristas posibles entre sus vértices.

Corolario 1.63. *El número máximo de aristas en una gráfica simple con n vértices es $n(n-1)/2$.*

Definición 1.64. Sea G una gráfica. Si el conjunto de vértices V de G se puede dividir en dos subconjuntos no vacíos X e Y (es decir,$X \cup Y = V$ y $X \cap Y = \emptyset$) de tal manera que, cada arista de G tiene un extremo en X y otro extremo en Y, entonces G se llama bipartita.

La partición $V = X \cup Y$ se denomina bipartición de G.

Un gráfica bipartita completa tiene una bipartición $V = X \cup Y$ en el que cada vértice de X es adyacente a cada vértice de Y. Si X tiene m vértices e Y tiene n vértices, dicho gráfico se denota por $K_{n,m}$.

1.7.1 Trayectorias y ciclos

Camino: Un paseo o caminata en una gráfica G es una secuencia finita

$W \equiv v_0e_1v_1e_2 \cdots v_{k-1}e_kv_k$

cuyos términos son alternativamente vértices y aristas tales que para $1\leqslant i \leqslant k$; la arista e_i tiene extremos v_{i-1} y v_i.

Sin pérdida de generalidad, solamente escribimos $W \equiv v_0v_1 \cdots v_{k-1}v_k$, haciendo obvio que v_{i-1} y v_i son los extremos de e_i.

Dados dos vértices u y v de un gráfico G, un paseo $u-v$ se llama cerrado o abierto, dependiendo de si $u = v$ o $u \neq v$.

Trayectoria: Si los vértices $v_0, ..., v_k$ del paseo $W \equiv v_0e_1v_1e_2 \cdots v_{k-1}e_kv_k$ son distintos, entonces W se llama trayectoria o ruta. Claramente, dos trayectorias cualesquiera con el mismo número de vértices son isomorfos.

Una trayectoria con n vértices a veces se denota por P_n.

Obviamente P_n tiene una longitud $n-1$.

En otras palabras, una trayectoria es un paseo en el que no se repite ningún vértice. Por lo tanto, en una trayectoria tampoco se puede repetir ninguna arista.

Vértices conectados: Se dice que un vértice u está conectado a un vértice v en un gráfico G si hay una trayectoria en G de u a v.

Gráfica conexa: una gráfica G se llama conexa si cada dos de sus vértices están conectados.

Ciclo: una trayectoria cerrada no trivial en una gráfica G se llama ciclo si su origen y los vértices internos son distintos.

En detalle, la trayectoria cerrada $C \equiv v_1 \cdots v_n v_1.$, es un ciclo si:

1. C tiene al menos una arista y
2. $v_1, ..., v_n$ son n vértices distintos.

Un n-ciclo, es decir, un ciclo con n vértices, a veces se denota por C_n.

Teorema 1.65. *Una gráfica G es bipartita si y solo si no tiene ciclos impares.*

Gráfica acíclica: Un gráfica que no contiene ciclos.

Árbol: Un árbol es un gráfico acíclico conexo, se desconecta cuando se quita una arista.

Un árbol T se denomina árbol generador de una gráfica conexa G, si T es una subgráfica de G y si T contiene todos los vértices de G. En otras palabras, un árbol generador de una gráfica G es un subgráfica generadora de G que es un árbol.

Teorema 1.66. *Una gráfica G tiene un árbol generador si y solo si G es conexa.*

1.8 Clasificación de superficies compactas.

Hay que definir una noción adecuada de equivalencia en las 2-variedades o superficies, de modo que se produzca una lista completa de representantes, una superficie en cada clase de equivalencia y cada representante con una descripción explícita simple llamada forma normal. Por una noción adecuada de equivalencia, queremos decir que dos superficies S_1 y S_2 son equivalentes si hay un homeomorfismo entre ellas.

El teorema de clasificación para superficies compactas dice que, a pesar de que las superficies aparecen en muchas formas diversas, las superficies se pueden clasificar, lo que significa que cada superficie compacta es equivalente a exactamente una superficie representativa, también llamada superficie en forma normal. Además, esas formas normales son muy concretas, por ejemplo, poliedros que se obtienen pegando los lados de ciertos tipos de polígonos planos regulares. Para este tipo de forma normal, también existe un conjunto finito de transformaciones con la propiedad de que cada superficie se puede transformar en una forma normal en un número finito de pasos.

Cada prueba del teorema de clasificación para superficies compactas comprende dos pasos:

1. Un paso topológico. Este paso consiste en demostrar que toda superficie compacta se puede triangular.

2. Un paso combinatorio. Este paso consiste en mostrar que toda superficie triangulada se puede convertir a una forma normal en un número finito de pasos, utilizando algún conjunto (finito) de transformaciones.

En el paso 1, tenemos que explicar qué es una superficie triangulada. Intuitivamente, una superficie se puede triangular si es homeomórfica a un CW-complejo bidimensional.

Radó demostró por primera vez que todas las superficies se pueden triangular en 1925.

Esta prueba también está en Ahlfors y Sario [1] (ver Cap. I, Sec. 8).

Otras pruebas más simples y breves y en Carsten-Thomassen [15] la más fácilmente accesible (si no la más corta).

Hay varias formas de implementar el paso combinatorio. Una vez que uno se da cuenta de que una superficie triangulada se puede cortar para abrirla y colocarla plana en el plano, es bastante intuitivo que una superficie tan aplanada se puede llevar a su forma normal.

Afortunadamente las distintas formas normales de superficies se pueden distinguir por invariantes simples:

(a) Su orientabilidad (orientable o no orientable).

(b) Su característica de Euler, un número entero que codifica el número de "agujeros" en la superficie.

El teorema de clasificación de superficies fue probado rigurosamente por primera vez por Brahana [2] en 1921, pero había sido estudiado en 1861 por Möbius [12], Jordan [8] en 1866, por von Dyck [4] en 1888 y por Dehn y Heegaard [3] en 1907.

El hecho crucial que hace posible la clasificación de superficies compactas es que cada superficie compacta triangulada se puede abrir y colocar sobre el plano haciendo un número finito de cortes a lo largo de curvas cerradas simples bien elegidas en la superficie.Entonces, podemos suponer que la superficie aplanada consiste en piezas poligonales convexas, se denominan complejos de celdas. De hecho, incluso es posible elegir las curvas para que todas pasen por un solo punto común y así, cada superficie compacta se obtenga de un solo polígono con un número par de aristas y cuyos vértices todos correspondan a un solo punto en el superficie. Este proceso está descrito en Hilbert y Cohn-Vossen [7](págs. 300-301) y en Fréchet y Fan [5] (págs. 38-39).

Podemos asignar un invariante numérico a cada superficie, su característica de Euler. Para una superficie triangulada K, si n_0 es el número de vértices, n_1 es el número de aristas y n_2 es el número de caras, entonces la característica de Euler de K está definida por:

$\chi(K) = n_0 - n_1 + n_2$.

Así que las superficies homeomorfas tienen la misma característica de Euler y que distintas formas normales con el mismo tipo de orientabilidad tienen diferentes características de Euler. De ello se deduce que dos formas normales distintas cualesquiera corresponden a superficies no equivalentes. Obtenemos la siguiente versión del teorema de clasificación para superficies compactas:

Teorema 1.67. *Dos superficies compactas son homeomorfas si coinciden en la orientabilidad y la característica de Euler.*

Teorema 1.68. *Dos superficies compactas o superficies compactas con frontera son homeomorfas si concuerdan en la orientabilidad, número de fronteras conexas y característica de Euler.*

Definición 1.69. Dadas dos superficies, S_1 y S_2, su suma conexa, $S_1 \# S_2$ es la superficie obtenida al elegir dos regiones pequeñas, D_1 y D_2, en S_1 y S_2, ambos homeomorfos a algún disco en el plano, y sea h un homeomorfismo entre los círculos limítes C_1 y C_2 de D_1 y D_2, formando el espacio cociente $\left(S_1/\overset{\circ}{D}_1\right) \cup \left(S_2/\overset{\circ}{D}_2\right)$, por la relación de equivalencia definida por la relación $\rho = \{(a, h(a))\,|a \in C_1\}$.

Intuitivamente, $S_1\#\mathrm{S}_2$ se forma cortando un pequeño orificio circular en cada superficie y pegando las dos superficies a lo largo de estos orificios. Claramente $S_1\#\mathrm{S}_2$ es una superficie y algo menos obvio, no depende de la elección de D_1, D_2 y h. Además, si S_2 es una esfera, entonces $S_1\#\mathrm{S}_2$ es homeomorfo a S_1. También se puede demostrar que la característica de Euler de $S_1\#\mathrm{S}_2$ es :
$\chi(S_1\#\mathrm{S}_2)=\chi(S_1)+\chi(S_2)$-2.

Una superficie resulta ser la suma conexa de algunas superficies elementales.

Teorema 1.70. *Toda superficie compacta orientable es homeomórfica a una esfera o una suma conexa de 2-Toros. Toda superficie compacta no orientable es homeomorfa ya sea a un plano proyectivo, o una botella de Klein, o la suma conexa de unos planos proyectivos o unas botellas de Klein con algunos 2-Toros.*

Por Saifert-VanKampen.

Teorema 1.71. *Toda superficie compacta sin frontera tiene grupo fundamental el producto libre de algunos* $\mathbb{Z}$ *con* $\mathbb{Z}_2$*, o ninguno.*

CAPÍTULO 2: ESPACIOS TOPOLÓGICOS ESTRATIFICADOS, SUPERFICIES MULTIRAMIFICADAS Y ESTRATIFICIES

En este capítulo se encuentra un panorama general de los espacios topológicos estratificados, sin entrar en detalles acerca de sus propiedades, simplemente una definición concreta de estos objetos abstractos y algunos ejemplos simples. Hay también algunos de los resultados fundamentales en la teoría desarrollada para la variedades topológicas que no se cumplen en los espacios topológicos estratificados, por ejemplo la dualidad de Poincare. Se muestra que también son estudiados desde el punto de vista geométrico, asociando una estructura diferenciable a cada estrato. Todos estas definiciones y resultados, así como todo este escrito ese basa en los resultados de los investigadores: Jose Carlos Gómez Larrañaga,Francisco Gonzaález Acuña y Wolfgang Heil. Cuyos artículos [1],[2],[3],[4] y [5] son la fuente de información, motivación y razón de esta tesis, junto con el artículo [8] de Shosaku Matsuzaki y Makoto Ozawa.

2.1 Espacios Topológicos Estratificados

La palabra estratificado significa literalmente que un todo se nos presenta en capas o en estratos superpuestos, así dado un espacio topológico arbitrario, buscamos la manera de concebirlo como un conjunto de piezas que forman parte de una entidad más compleja y que al conocer los estratos podemos conocer la estructura entera. Los espacios topólogicos estratificados es un concepto muy elemental en matemáticas y por tanto es muy general, algunas restricciones son necesarias para poder desarrollar la teoría buscando no perder generalidad y ser razonablemente abstracto.

Una manera sencilla de empezar es pensando a un espacio topológico estratificado $(\mathcal{X},\Sigma)$ como un espacio topológico $\mathcal{X}$, Hausdorff, localmente compacto junto con una "*buena*" filtración Σ, digamos que Σ es una colección finita de subespacios de $\mathcal{X}$, indexada por un conjunto finito $I = \{0, ..., 1\}$, i.e. $\Sigma = \{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ y es tal que:

·) Condición de frontera. cl$\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{X}_j \subset$cl$\mathcal{X}_i$

··) Los indices están parcialmente ordenados por la contención. j⩽i $\Leftrightarrow \mathcal{X}_j \subset$cl$\mathcal{X}_i$

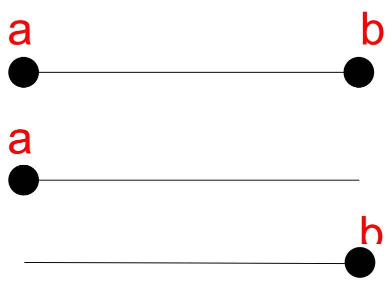
···) $\forall\ i, j \in \{1, ..., n\}$, $\mathcal{X}_i \setminus \mathcal{X}_{i-1}$ es una i-variedad topológica, además $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}$ y $\mathcal{X}_{-1} = \emptyset$.

Ejemplo 2.0.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leqslant b$.*

i) $([a, b], \{[a, b], \{a, b\}\})$.

ii) $([a, b), \{[a, b), \{a\}\})$.

iii) $((a, b], \{(a, b], \{b\}\})$.



Definición 2.1. Dado un espacio topológico estratificado $(\mathcal{X}, \Sigma)$ y un punto $x \in \mathcal{X}$ definimos la profundidad de x:

$d_p(x) = sup\{k \in \mathbb{N} \mid \mathcal{X}_k \in \Sigma\ , x \in \mathcal{X}_k \setminus \mathcal{X}_{k-1}\}$

Definición 2.2. El cono abierto $\mathcal{C}\mathcal{X}$ sobre un espacio topológico $\mathcal{X}$ se define como:

$\mathcal{C}\mathcal{X} = [0, 1) \times \mathcal{X}/\rho$. Donde $(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2)$ si y solo si $x_1 = x_2 = 0$ y en este espacio el punto $\{0\} \times \mathcal{X} := x_c$ es conocido como cúspide del cono o punto cono.

Ejemplo 2.2.1. *Sea $\mathcal{M}$ una k-variedad topológica.*

i) Variedades con frontera. ($\mathcal{M}$,$\{\mathcal{M}$,$\partial\mathcal{M}\}$)

ii) Cono abierto. $(\mathcal{C}\mathcal{X}, \{\mathcal{C}\mathcal{X}, x_c\})$

Aunque las condiciones aplicadas hasta ahora son necesarias no resultan suficientes.

Ejemplo 2.2.2. *Sean* $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{X}=\{0\} \times [-1,1]$ *y* $\mathcal{Y}= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x, y = sen(1/x)\big\}$.
Si $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ *entonces* $(\mathcal{Z},\{\mathcal{Z},\mathcal{Y},\mathcal{X}\})$ *sería un espacio topológico estratificado.*
pues $cl\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}=\mathcal{X}$ *pero* $dim\ \mathcal{Y} = dim\ \mathcal{X} = 1$.

Este tipo de espacios por ahora los queremos evitar y la siguiente definición es lo suficientemente estricta.

Definición 2.3. Definición inductiva.
Un espacio topológico estratificado de dimensión 0, es un conjunto finito con la topología discreta.

Un espacio topológico estratificado de dimensión k o k-espacio topológico estratificado, es un espacio topológico $\mathcal{X}$, Hausdorff, paracompacto junto con una filtración Σ por subespacios cerrados $\mathcal{X} = \mathcal{X}_k \supset \mathcal{X}_{k-1} \supset \cdots \supset \mathcal{X}_1 \supset \mathcal{X}_0 \supset \mathcal{X}_{-1}=\emptyset$ tal que:
$i)\forall i \in \{0,...,k\}$, $\mathcal{X}_i / \mathcal{X}_{i-1}$ es una i-variedad topológica.
$ii)\forall i \in \{0,...,k-1\}$, para cualquier $x \in \mathcal{X}_i$, existe vecindad $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{X}_k$ de x y un homeomorfismo $\phi : \mathcal{U}_x \to \mathbb{R}^i \times \mathcal{CL}$ donde $\mathcal{CL}$ es el cono abierto sobre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ es un $(k-i-1)-$espacio topológico estratificado.

Definición 2.4. Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico y $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$, decimos que $(x_0, y_0) \sim (x_1, y_1)$ en X× I, si $y_0=y_1=0$ o $y_0=y_1=1$. Definimos la suspensión $\mathcal{SX}$ de $\mathcal{X}$ como:
$\mathcal{SX}=\mathcal{X}\times \mathrm{I}/\sim$.
Los puntos $x_-=[(x_0,0)]_\sim$ y $x_+=[(x_0,1)]_\sim$ son conocidos como los puntos negativo y positivo respectivamente.

Ejemplo 2.4.1. *Sea* T^2 *el 2-Toro y* $\mathcal{X} = \mathcal{S}T^2$.
$\Sigma=\{\mathcal{X},\{x_-,x_+\}$, *así* $\mathcal{X}_3=\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{X}_2=\mathcal{X}_1= \mathcal{X}_0=\{x_-,x_+\}$

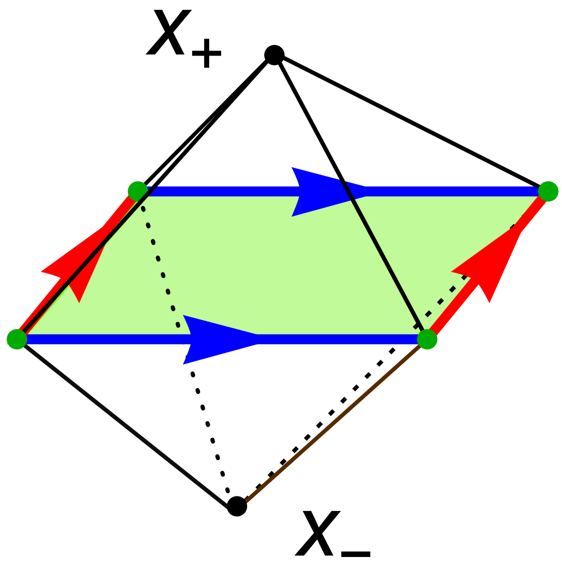
Claramente:

$\mathcal{X}_3 \setminus \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3 \setminus \mathcal{X}_0 = T^2 \times (-1,1)$ *es una 3-variedad*

$\mathcal{X}_2 \setminus \mathcal{X}_1 = \emptyset$ *es una 2- variedad*

$\mathcal{X}_1 \setminus \mathcal{X}_0 = \emptyset$ *es una 1-variedad.*

Vemos que una vecindad de x_+ *en* $\mathcal{X}_3$ *es homeomorfa a* $\mathcal{C}T^2$ *y por tanto* $\forall x \in \mathcal{X}_0 \exists \mathcal{U}_x \equiv \mathbb{R}^0 \times \mathcal{C}\mathcal{L}$ *donde* $dim(\mathcal{L})$ = *3-0-1=2.* ($\mathcal{L}$=T^2)



La definición 2.3 nos permite identificar a los espacios estratificados dada la filtración por conjuntos cerrados pero para el desarrollo de algunos resultados nos conviene conocer una definición equivalentes de estos espacios.

Consideremos la siguiente construcción para los n-espacios topológicos estratificados:

Sea $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geqslant 0\}$ el medio espacio superior euclidiano. El cociente obtenido de i copias de $\mathbb{R}^n_+$ identificando sus fronteras $\partial\, \mathbb{R}^n_+$ es denotado por $\mathcal{V}^n_i$.

Así un n-espacio topológico estratificado es un CW-complejo $\mathcal{X}$, n dimensional tal que para cualquier $x \in \mathcal{X}$ existe i un entero positivo, una vecindad $\mathcal{U}$ de x y $\mathcal{U}$ es homeomorfa a $\mathcal{V}^n_i$.

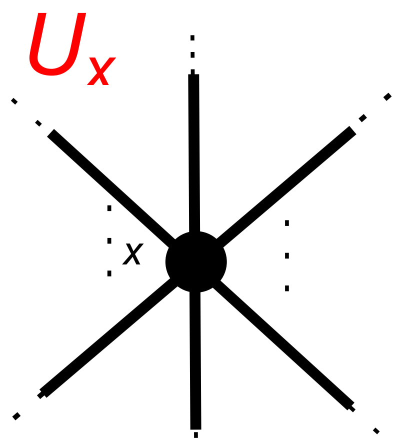
2.1.1 Superficies Multiramificadas.

Las superficies multiramificadas, caso particular de los espacios topológicos estratificados son básicamente un CW-complejo 2-dimensional tal que al remover los puntos con vecindades localmente homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ obtenemos un complejo 1-dimensional (gráfica).

Notemos que tomando k=1 obtenemos la definición topológica de una gráfica, ya que $\mathcal{G}$, un 1-espacio topológico estratificado es un espacio topológico Hausdorff, paracompacto junto con una filtración $\mathcal{G}=\mathcal{X}_1\supset\mathcal{X}_0\supset\mathcal{X}_{-1}=\emptyset$, tal que:

i) $\mathcal{X}_1/\ \mathcal{X}_0$ es una 1-variedad topológica abierta.

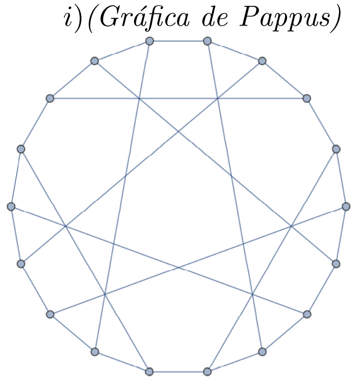
ii) $\forall x\in\mathcal{X}_0$, $\exists\mathcal{U}_x\subset\mathcal{X}_1$ vecindad de x homeomorfa a $\mathbb{R}^0\times\mathcal{C}\mathcal{L}$ donde $\mathcal{L}$ es un 0-espacio topológico estratificado, es decir $\mathcal{U}_x\equiv$ {1,..n}×[0,1)/(i,0)∼(j,0).



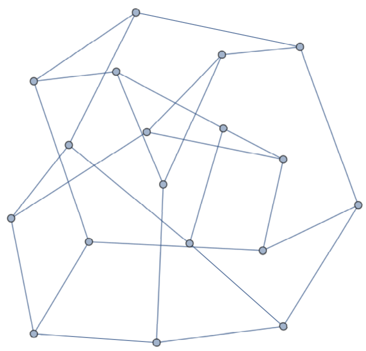
Las cuales están completamente clasificadas salvo homotopía.

Ejemplo 2.4.2. *Algunas gráficas*

i)*(Gráfica de Pappus)*



ii)



El siguiente caso a considerar es cuando k=2.

Definición 2.5. Un 2-espacio topológico estratificado o simplemente una superficie multi-ramificada es un espacio topológico compacto $\mathcal{X}$, conexo y Hausdorff junto con una filtración $\emptyset = \mathcal{X}_{-1} \subset \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}$ por subespacios cerrados tal que:

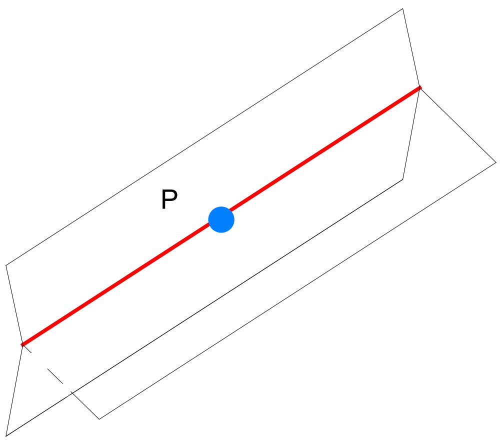
i) *a*) $\mathcal{X}_0$ es una 0-variedad.

b) $\mathcal{X}_1/\mathcal{X}_0$ es una 1-variedad, i.e. trayectorias o curvas simples.

c) $\mathcal{X}_2/\mathcal{X}_1$ es una 2-variedad, superficies (posiblemente con frontera).

ii) *a*) Cada punto $x \in \mathcal{X}_0$ tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^0 \times \mathcal{C}\mathcal{L}$,donde $\mathcal{L}$ es una gráfica.

b) Cada punto $p \in \mathcal{X}_1/\mathcal{X}_0$ tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathcal{C}\mathcal{L}$, donde $\mathcal{L}$ es un conjunto finito con más de dos puntos.



Estudiar todos los objetos que cumplen esta definición bastante general escapa a los fines de esta tesis y solo consideramos el caso cuando $\emptyset = \mathcal{X}_0$.

Definición 2.6. Una estratificie es una superficie multiramificada con $X_0 = \emptyset$

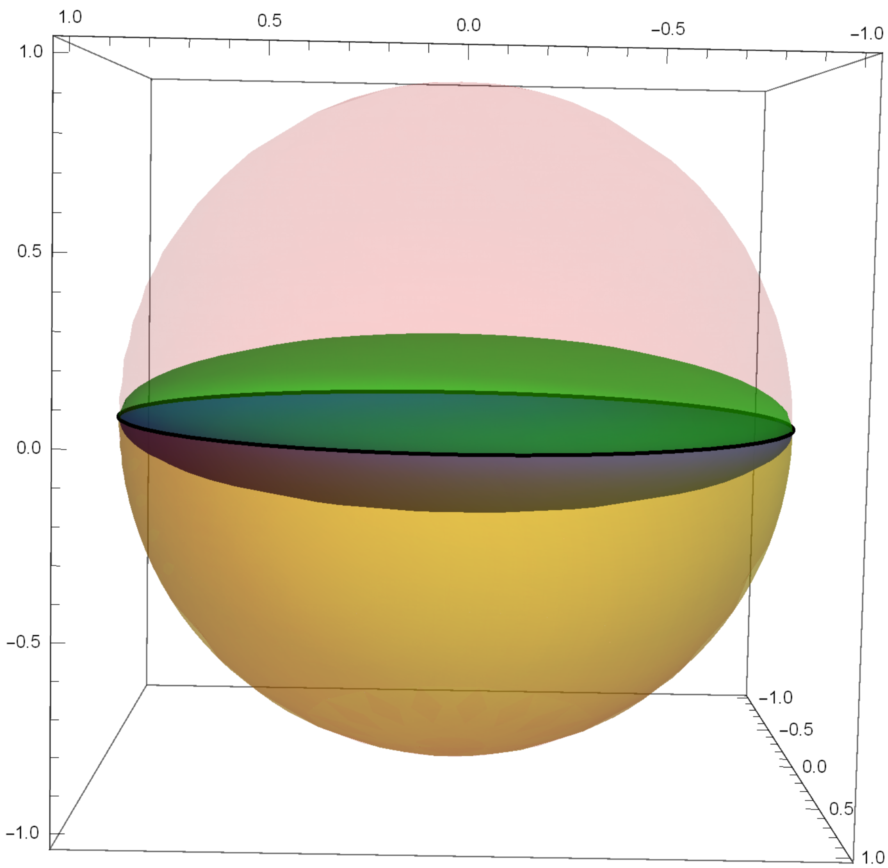
Es claro que la filtración queda como $\emptyset = \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}$ por un subconjunto cerrado X_1 tal que:

1) $\mathcal{X}_1$ es una colección finita de curvas ajenas homeomorfas a $\mathcal{S}^1$.

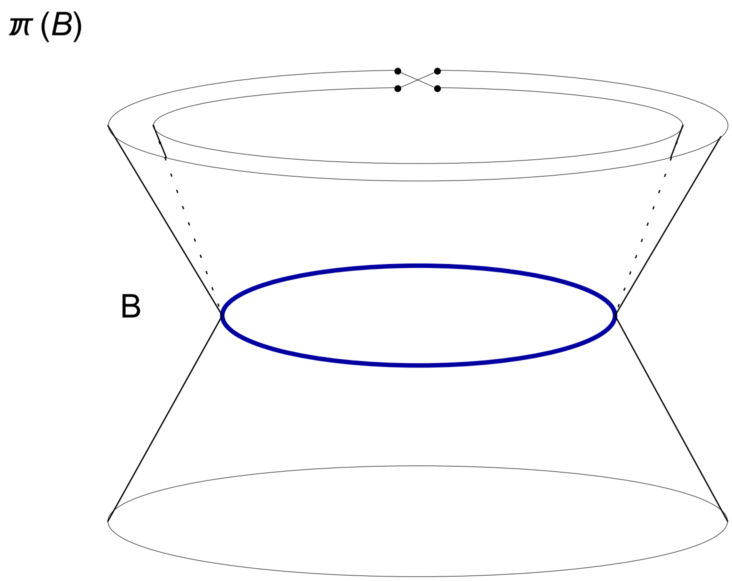
2) $\mathcal{X}_2/\mathcal{X}_1$ es una familia finita de superficies topológicas abiertas, tal que para cada elemento $\mathcal{M} \in \mathcal{X}_2/\mathcal{X}_1$ la cerradura $\bar{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ tiene un número finito de círculos como frontera.

Análogamente al caso general está definición es buena desde el punto de vista formal pero no es tan practica para desarrollar más teoría, además considerando la definición alternativa, una estratificie es un CW-complejo 2-dimensional donde los puntos tienen vecindades homeomorfas a $\mathcal{V}_2^2$ ($\mathbb{R}^2$) o homeomorfas a $\mathcal{V}_i^2$ con $i \geqslant 3$. Aquí es fácil notar que $\mathcal{V}_i^2 \cong \mathcal{CL}$ donde $\mathcal{L}$ tiene i elementos y por ende las definiciones son equivalentes.

Ejemplo 2.6.1. *Un conjunto arbitrario de discos pegados por sus fronteras mediante mapeos cubrientes a un S^1*



Para cada curva singular b_k existe un conjunto finito $\mathcal{L}_k$ tal que para cualquier punto $x \in b_k$ hay una vecindad $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{X}_2$ homeomorfa $\mathcal{C}\mathcal{L}_k$. Denotemos $|\mathcal{L}_k| = d_k$, es fácil notar que en los casos d_k=1 y d_k=2 obtenemos superficies con frontera y superficies cerradas respectivamente. Para construir una vecindad alrededor de b_k consideremos $\mathcal{Y}$ el cono cerrado sobre $\mathcal{L}_k$ y $h{:}\mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ un homeomorfismo tal que $h_{|_{\mathcal{L}_k}}$ es una permutación $\pi : \mathcal{L}_k \to \mathcal{L}_k$, como b_k es homeomorfo a $\mathcal{S}^1$ tiene una vecindad regular, tomando la cerradura de esta obtenemos $\mathcal{N}(b_k) = \mathcal{N}_\pi(b_k) := (\mathcal{Y} \times [0,1])/(0,\mathrm{y}) \sim (1, h(\mathrm{y}))$. Además si π' es conjugado de π entonces $\mathcal{N}_{\pi'}(b_k) = \mathcal{N}_\pi(b_k)$ y dados $b_k \neq b_{k'}$, como $\mathcal{X}$ es Hausdorff podemos construir dichas vecindades disjuntas, i.e. $\mathcal{N}_\pi(b_{k'}) \cap \mathcal{N}_\pi(b_k) = \emptyset$.



Una estratificie X la podemos descomponer en una colección de superficies compactas con frontera $\mathcal{W}$ junto con una *1*-variedad topológica (link) $\mathcal{B}$ y una manera de pegar las fronteras de estas superficies a este link, para ser mas formales con la manera de pegar una componente conexa $w_i \in \mathcal{W}$ a una componente $b_k \in \mathcal{B}$, debe existir un mapeo cubriente ϕ_{ijk} de una componente conexa $\mathcal{C}_{\mathrm{ij}}$ de la frontera de w_i ($\mathcal{C}_{\mathrm{ij}} \subset \partial w_i$) a b_k. Así $X = (W \sqcup B)/\phi$

2.1.2 La gráfica de una estratificie.

Dada una estratificie podemos asociarle una gráfica bipartita etiquetada, donde podamos codificar toda la información necesaria para conocer la estructura de tal estratificie.

Definición 2.7. Sea $\mathcal{X}$ una estratificie. Definimos la gráfica $\mathcal{G}_x$ como sigue:
El conjunto de vértices está definido como $\mathcal{V}(\mathcal{G}_x) = \mathcal{W} \sqcup \mathcal{B}$ donde los vértices en $\mathcal{W}$ son llamados vértices blancos los cuales corresponden a las superficies con frontera y los vértices en $\mathcal{B}$ son llamados vértices negros los cuales corresponden a las curvas singulares. Los vértices blancos están etiquetados con el género de la superficie que representan.
Las aristas $\mathcal{E}(\mathcal{G}_x)$ son precisamente los cubrientes ϕ_{ijk}, *i.e.* el vértice blanco w_i esta conectado con el vértice negro b_k si y solo si existe un cubriente ϕ_{ijk}: $\mathcal{C}_{\mathrm{ij}} \rightarrow b_k$ donde $\mathcal{C}_{\mathrm{ij}}$ es una componente de ∂w_i. Las aristas están etiquetadas con $\left|\phi^{-1}(\mathrm{b})\right|$ el orden del cubriente.

Elegimos un punto y_k en la componente b_k, un punto x_i en el interior de w_i y para cada componente de $\mathcal{C}_{\mathrm{ij}} \subset \mathcal{N}(b_k) \cap w_i$ escogemos un punto z_j. Como todo es arcoconexo podemos elegir dos trayectorias, una que denotamos α_{ij} que va de x_i a z_j contenida en w_i y otra que denotaos β_{jk} de z_j a y_k contenida en la hoja de $\mathcal{N}(b_k)$ que contiene a z_j. La unin de estás trayectorias es la arista que une x_i con y_k. Como $\mathcal{X}$ es Hausdorff podemos elegir que para una i fija las α_{ij} solo se intersectan en x_i, análogamente fijando k las β_{jk} solo se intersectan en en y_k . Esta construcción nos da una realización geométrica de $\mathcal{G}_x$ en $\mathcal{X}$.

Dada una estratificie $\mathcal{X}$ así es como determinamos su gráfica bipartita etiquetada $\mathcal{G}_x$. Ahora tomando una gráfica bipartita etiquetada $\mathcal{G}$ entonces la estratificie $\mathcal{X}_G$ obtenida a partir de $\mathcal{G}$ no esta únivocamente determinada, a menos que sea un árbol o agreguemos signos a las aristas y vértices no terminales. Como veremos a continuación para que $\mathcal{X}$ sea simplemente conexa $\mathcal{G}_x$ debe ser un árbol.

Para el siguiente resultado hace falta tener presente los siguientes resultados.

Definición 2.8. Sean Y y X espacios topológicos y A$\subset$ X un subespacio cerrado. Decimos que una función f : A $\rightarrow$ Y tiene una extensión continua a todo X si existe una función F : X $\rightarrow$ Y tal que:

1. $F|_A \equiv$ f
2. F es continua.

Definición 2.9. Un espacio topológico Y tiene la propiedad de extensión universal si: Para cualquier espacio topológico X y cualquier cerrado A de X, toda función continua f : A $\rightarrow$Y tiene una extensión continua a todo X.

Para abreviar solo diremos que Y tiene la propiedad UEP.

Proposición 2.10. *Cualquier retracto Y de un espacio Z con la propiedad UEP tiene la propiedad UEP.*

Lema 2.11. *Hay un retracto* $r : \mathcal{X} \to \mathcal{G}_x$.

Dem:

Para cualquier w_i, el subespacio $\alpha_i = \cup_{j \in J_i} \alpha_{\mathrm{ij}}$ es un cono cerrado en ω_i con x_i como punto cono, análogamente podemos concluir que $\beta_k = \cup_j \beta_{\mathrm{ij}}$ es un cono cerrado con punto cono y_k en $\mathcal{N}(b_k)$.
Como $[0,1] \times [0,1]$ tiene la propiedad de extensión universal y que el cono cerrado $\alpha_i$es un retracto de $[0,1] \times [0,1]$ y de la proposición anterior podemos concluir que α_i tiene la propiedad de extensión universal.

Consideremos que $\alpha_i \cup \partial w_i$ $(\partial w_i = \{\mathcal{C}_{\mathrm{ij}}\}_{j \in J_i})$ es un subconjunto cerrado de w_i y dado que la función $\bar{r}_i : \alpha_i \cup \{\mathcal{C}_{\mathrm{ij}}\}_{j \in J_i} \to \alpha_i$ que deja fijo a α_i y manda $\mathcal{C}_{\mathrm{ij}}$ al punto z_j, es un retracto de $\alpha_i \cup \{\mathcal{C}_{\mathrm{ij}}\}_{j \in J_i}$ a α_i . Dado que α_i tiene la propiedad de extensión universal, podemos extender $\bar{r}_i$ a un retracto $r_i : w_i \to \alpha_i$ tal que r_i contrae C_{ij} a z_j.
Análogamente β_k tiene la propiedad de extensión universal y podemos dar a un retracto R_k: $\mathcal{N}(b_k) \to \beta_k$ tal que contrae cada $\mathcal{C}_{\mathrm{ij}}$ a z_k.
Combinando estos resultados se concluye que existe un retracto $r : \mathcal{X} \to \mathcal{G}_x$.

Corolario 2.12. *Existe un epimorfismo de* $\pi_1(\mathcal{X})$ *en* $\pi_1(\mathcal{G}_x)$.

Corolario 2.13. *Si* $\mathcal{X}$ *es simplemente conexa entonces* $\mathcal{G}_x$ *es un árbol.*

CAPÍTULO 3: PRESENTACIÓN DEL GRUPO FUNDAMENTAL DE UNA ESTRATIFICIE.

Para calcular el grupo fundamental de una estratificie, vamos a fijarnos en los grupos fundamentales de las "piezas" que constituyen a la estratificie y después usando el conocido teorema de Seifert-van Kampen determinamos el grupo fundamental del espacio completo. Formalmente el grupo fundamental se calcula de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{X} = \mathcal{W} \sqcup_{\phi} \mathcal{B}$ una estratificie con $\mathcal{G}_x$ gráfica asociada, consideremos $w_i \in \mathcal{W}$ una superficie compacta de genero g_i y con ω_i componentes en su frontera, para calcular el grupo fundamental de w_i solo nos falta conocer si la superficie es orientable o es no-orientable.

Si w_i es orientable es conocido que,

$\pi_1(w_i)=\langle\, \mathcal{S}_i|\mathcal{R}_i\rangle$ con $\mathcal{S}_i=\{x_{i,1},y_{i,1},...,x_{i,g_i},y_{i,g_i},c_{i,1},...,\ c_{i,\omega_i}\}$ generadores y con una sola relación $\mathcal{R}_i=\{c_{i,1}\cdots c_{i,\omega_i}\cdot p_i\}$ donde $p_i=\prod_{r=1}^{g_i}\ [\ x_{i,r},\ y_{i,r}]$.

Por otro lado si w_i es no-orientable se tiene que,

$\pi_1(w_i)=\langle\ \mathcal{S}_i|\mathcal{R}_i\rangle$ con $\mathcal{S}_i=\{x_{i,1},...,x_{i,g_i},c_{i,1},...,c_{i,\omega_i}\}$ generadores y con una sola relación $\mathcal{R}_i=\{c_{i,1}\cdots c_{i,\omega_i}\cdot p_i\}$ donde $p_i=\prod_{r=1}^{g_i}\ x_{i,r}^2$. Denotemos como $\mathcal{S}_W=\cup_{i\in I}\ \mathcal{S}_i$ y

$\mathcal{R}_W=\cup_{i\in I}\ \mathcal{R}_i$.

Ahora consideremos $b_k\in\mathcal{B}$, claramente $\pi_1(\ b_k)$ es el grupo libre en un elemento y por comodidad diremos que $\pi_1(\ b_k)=\langle b_k\rangle$. Denotamos $\mathcal{S}_B=\cup_{k\in K}\ \{b_k\}$.

Elegimos un árbol generador $\tau\subset\mathcal{G}_x$. Como a las aristas $E\,(\mathcal{G}_x)=\{\ \phi_{\mathrm{ijk}}{:}\mathcal{C}_{\mathrm{ij}}\to b_k|\ \phi_{\mathrm{ijk}}$ es cubriente$\}$ tenemos que para cada una de estas debemos agregar la relación $b_k^{n_{\mathrm{ij}}}=\mathcal{C}_{\mathrm{ij}}$ a la presentación de $\pi_1(\mathcal{X})$. Sea $\mathcal{R}_\tau=\cup_{\phi_{\mathrm{ijk}\in\tau}}\ \left\{b_k^{n_{\mathrm{ij}}}\ \mathcal{C}_{\mathrm{ij}}^{-1}\right\}$.

Para cada $\phi_{\mathrm{ijk}}\notin\tau$ debemos agregar otro generador a_{ijk} y la relación $b_k^{n_{\mathrm{ij}}}a_{\mathrm{ijk}}c_{\mathrm{ij}}a_{\mathrm{ijk}}^{-1}$ a la presentación de $\pi_1(\mathcal{X})$. Sea $\mathcal{R}_{\neg\tau}=\cup_{\phi_{\mathrm{ijk}}\notin\tau}\ \{\ b_k^{n_{\mathrm{ij}}}a_{\mathrm{ijk}}c_{\mathrm{ij}}a_{\mathrm{ijk}}^{-1}\ \}$ y $\mathcal{S}_{\neg\tau}=\cup_{\phi_{\mathrm{ijk}}\notin\tau}\ \{a_{\mathrm{ijk}}\}$.

Con esta notación podemos concluir que $\pi_1(\mathcal{X})=\langle\mathcal{S}|\mathcal{R}\rangle$ donde

$\mathcal{S}{:=}\mathcal{S}_w\cup\mathcal{S}_B\cup\mathcal{S}_{\neg\tau}$ y $\mathcal{R}{:=}\mathcal{R}_W\cup\mathcal{R}_\tau\cup\mathcal{R}_{\neg\tau}$.

Teorema 3.1. *Una presentación para el grupo fundamental de una estratificie*

Sea $\mathcal{X}$ una estratificie. τ un árbol generador de $\mathcal{G}_x$.

Generadores:

$\cdot$)$\{b\}_{b\in\mathcal{B}}$.

$\cdot\cdot$) *Para cada $w \in \mathcal{W}$ de genero g y ω componentes en su frontera,*

$\{x_{i,1},y_{i,1},\ldots,x_{i,g},y_{i,g},c_{i,1},\ldots,\ c_{i,\omega}\}$ *si w es orientable,*

$\{x_{i,1},\ldots,x_{i,g},c_{i,1},\ldots,c_{i,\omega}\}$ *para w no-orientable.*

$\cdots$) $\{a_{ijk}\}_{\phi_{ijk}\notin\tau}$.

Relaciones:

$\cdot$) $c_{i,1}\cdots c_{i,\omega_i}\cdot\prod_{r=1}^{g}\ [\,x_{i,r},\ y_{i,r}]$ *para w orientable,*

$c_{i,1}\cdots c_{i,\omega_i}\cdot\prod_{r=1}^{g}\ x_{i,r}^2$ *en caso contrario.*

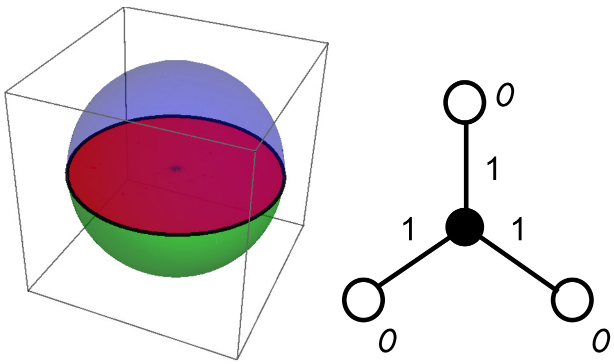
$\cdot\cdot$) $b_k^{n_{ij}}= c_{ij}$ *cuando* $\phi_{ijk}\in\tau$,

$a_{ijk}^{-1}c_{ij}a_{ijk}=b_k^{n_{ij}}$ *en otro caso.*

Es una presentación para $\pi_1(\mathcal{X})$.

3.0.1 Ejemplos y algunos resultados.

Ejemplo 3.1.1. *Consideremos tres discos pegados a una circunferencia con el homoemorfismo natural entre sus fronteras. Sean $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ discos con $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ fronteras respectivamente y sea b_1 homeomorfo a $\mathcal{S}^1$, así existen h_i:$\mathcal{S}_i\rightarrow b_1$ homeomorfismos para $i \in \{1,2,3\}$. Definimos la estratificie $\mathcal{X}_3^D$=($\{\mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2,\ \mathcal{D}_3\}\sqcup\{b_1\}$)/h.*



La gráfica $\mathcal{G}$ asociada a $\mathcal{X}_3^D$ es un árbol con tres vértices terminales blancos de genero cero, un único vértice negro y tres aristas etiquetadas con 1.

Para obtener la presentación para el grupo fundamental seguimos Teorema 2.1.

Como $\mathcal{G}$ ya es un árbol podemos pasar a calcular la presentación:

1) Generadores.

·) Solo hay un vértice negro $\{b_1\}$

··) Como las tres superficies a pegar son de genero cero solo consideramos sus fronteras $\{\mathcal{C}_{11}, \mathcal{C}_{21}, \mathcal{C}_{31}\}$

···) $\mathcal{G}$ es un árbol, no hay generados por agregar.

2) Relaciones.

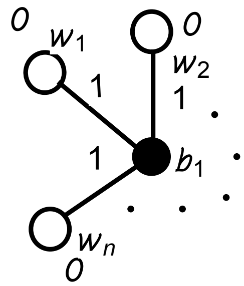
·)Todas las superficies son orientables y de genero cero por tanto.

$\mathcal{C}_{11}=1$, $\mathcal{C}_{21}=1$, $\mathcal{C}_{31}=1$

··) $b^1=\mathcal{C}_{11}$, $b^1=\mathcal{C}_{21}$, $b^1=\mathcal{C}_{31}$

De hecho $\pi_1(\mathcal{X}_3^D)=\langle b_1,\mathcal{C}_{11},\mathcal{C}_{21},\mathcal{C}_{31} \mid \mathcal{C}_{11}=1, \mathcal{C}_{21}=1, \mathcal{C}_{31}=1, b=\mathcal{C}_{11}, b=\mathcal{C}_{21}, b=\mathcal{C}_{31}\rangle$, *es claro que podemos simplificar* $\pi_1(\mathcal{X}_3^D)=\langle b_1 \mid b_1=1\rangle=1$. *Como se esperaba el grupo fundamental de $\mathcal{X}_3^D$ es trivial.*

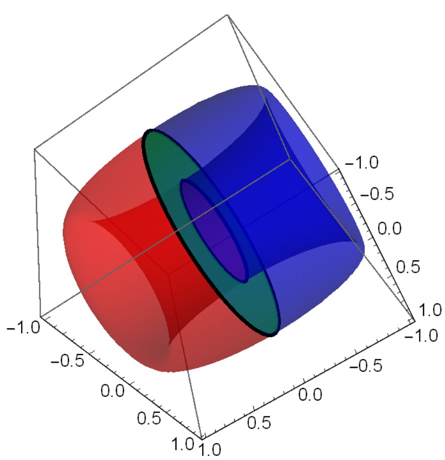
Ejemplo 3.1.2. *Generalizando el ejemplo anterior tomamos $\{\mathcal{D}_i\}_{i\in\{1,..,n\}}$ n copias de $\mathbb{D}^2$, $\{b_1\}$ una copia de $\mathbb{S}^1$ y $h_i:\mathbb{S}_i\to b_1$ homeomorfismos donde $\mathbb{S}_i$ es la frontera de $\mathcal{D}_i$. Definimos* $\mathcal{X}_n^D=(\{\mathcal{D}_i\}_{i\in\{1,..,n\}}\sqcup\{b_1\})/h$

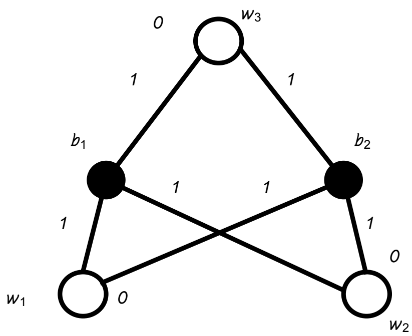


La gráfica asociada a $\mathcal{X}_n^D$

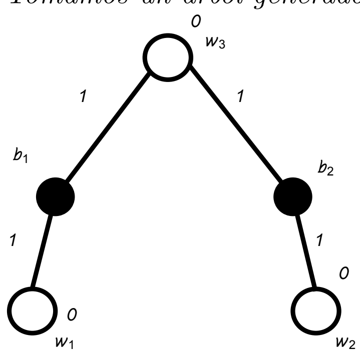
Por tanto $\pi_1(\mathcal{X}_n^D)=\langle\ b_1,\ \mathcal{C}_{11},\ldots,\ \mathcal{C}_{n1}\ |\ \ \mathcal{C}_{11}=1,\cdots,\mathcal{C}_{n1}=1,\ \mathcal{C}_{11}=\ b_1^1,\cdots,\mathcal{C}_{n1}=\ b_1^1\rangle=1.$

Ejemplo 3.1.3. *Sean* $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ *anillos,* $\partial\mathcal{A}_i$=$\{\ c_{i1},\ c_{i2}\}$ *y* b_1, b_2 *homeomorfomos a* $\mathbb{S}^1$. *Para cada* $i \in \{1,2,3\}$ *pegamos* c_{i1} *a* b_1 *mediante el homeomorfismo* h_{i1} *natural y también* c_{i2} *a* b_2 *mediante* h_{i2}. *Sea* $\mathcal{X}_3^A = (\{\mathcal{A}_1\ ,\ \mathcal{A}_2,\ \mathcal{A}_3\ \} \sqcup \{b_1,\ b_2\})/h$. *Calculamos su gráfica asociada.*





Tomamos un árbol generador.



Calculando una presentación para $\pi_1(\mathfrak{X}_3^A)$.

Generadores:

·) $\{b_1, b_2\}$ *Vértices negros.*

··) $\{c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32}\}$ *Las correspondientes a las fronteras de los anillos.*

···) $\{a_1, a_2\}$ *Dado que quitamos una arista de* w_1 *y una de* w_2 *para hallar el árbol generador agregamos dos generadores.*

Relaciones:

·) $c_{11}c_{12} = 1,\ c_{21}c_{22} = 1,\ c_{31}c_{32} = 1$. *Dadas por anillos.*

··) $c_{11} = b_1,\ c_{22} = b_2,\ c_{31} = b_1,\ c_{32} = b_2$. *Aristas en el árbol generador.*

···) $a_1^{-1}c_{12}a_1 = b_2,\ a_2^{-1}c_{21}a_2 = b_1$.

Las relaciones en el tercer punto las podemos cambiar por

$a_1 b_2 a_1^{-1} = c_{12}$ *y* $a_2 b_1 a_2^{-1} = c_{21}$, *y así poder reducir aun más el número de generadores.*

Por tanto $\pi_1(\mathfrak{X}_3^A) = \langle a_1, a_2, b_1, b_2 \mid b_1 a_1 b_2 a_1^{-1} = 1,\ \ a_2 b_1 a_2^{-1} b_2 = 1,\ b_1 b_2 = 1\rangle$

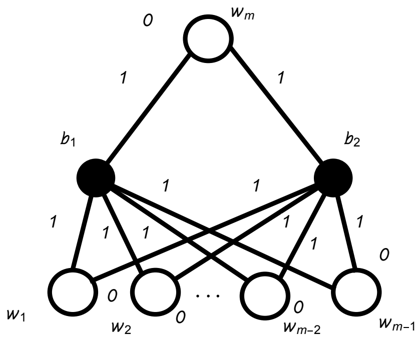
$$= \langle a_1, a_2, b_1 \mid b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} = 1,\ \ a_2 b_1 a_2^{-1} b_1^{-1} = 1\rangle$$

$$= \langle a_1, a_2, b_1 \mid [a_1, b_1] = 1,\ [a_2, b_1] = 1\rangle$$

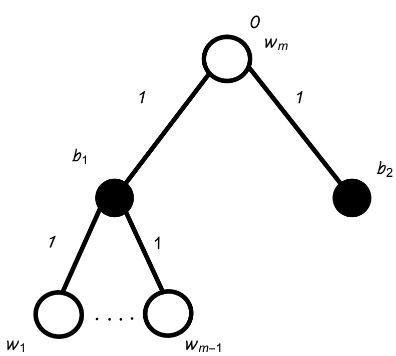
Ejemplo 3.1.4. *Generalizando el ejercicio anterior.*

Sean $\{\mathcal{A}_1,\ ...,\ \mathcal{A}_m\}$ *anillos,* $\partial\mathcal{A}_i$=$\{\ c_{i1},\ c_{i2}\}$ *y* $b_1,\ b_2$ *homeomorfomos a* $\mathbb{S}^1$.

Para cada $i \in \{1,...,m\}$ *y cada* $j \in \{1,2\}$ *pegamos* c_{ij} *a* b_j *mediante el homeomorfismo identidad* h_{ij}. *Sea* $\mathcal{X}_m^A = (\{\mathcal{A}_1\ ,\ ...,\ \mathcal{A}_3\ \} \sqcup \{b_1,\ b_2\})/h$.



Tomamos un árbol generador.



Calculando una presentación para $\pi_1(\mathcal{X}_3^A)$.

Generadores:

·) $\{b_1, b_2\}$ *Vértices negros.*

··) $\{c_{11}, c_{12}, ..., c_{m1}, c_{m2}\}$ *Las correspondientes a las fronteras de los anillos.*

···) $\{a_{1,...}, a_{m-1}\}$ *Dado que quitamos una arista de cada* w_i *para el árbol generador, agregamos m-1 generadores.*

Relaciones:

·) $c_{11}c_{12} = 1,\ c_{21}c_{22} = 1, ...,\ c_{m1}c_{m2} = 1$. *Dadas por anillos.*

··) $c_{11} = b_1$, $c_{21} = b_1$,..., $c_{m1} = b_1$, $c_{m2} = b_2$. *Aristas en el árbol generador.*

· · ·) $a_i^{-1} c_{i2} a_i = b_2$ $\forall i \in \{1,...,(m\text{-}1)\}$

Las relaciones en el tercer punto las podemos cambiar por

$a_i b_2 a_i^{-1} = c_{i2}$.

Por tanto $\pi_1(\mathcal{X}_3^A) = \langle a_1,...,a_{m-1}, b_1, b_2 \mid b_1 a_i b_2 a_i^{-1} = 1,\ b_1 b_2 = 1\rangle$ *con* $i \in \{1,...,(m\text{-}1)\}$

$= \langle a_1,...,a_{m-1}, b_1 \mid b_1 a_i b_1^{-1} a_i^{-1} = 1\rangle$

$= \langle a_1,..., a_{m-1}, b \mid [a_i, b] = 1\rangle$

CAPÍTULO 4: ESTRATIFICIES SIMPLEMENTE CONEXAS.

En este capítulo se busca encontrar condiciones necesarias y suficientes para la gráfica de una estratificie simplemente conexa. Así como describir algunas familias de estratificies con grupo fundamental trivial y un breve comentario acerca de donde podemos encajar estos espacios.

Dado que haremos operaciones sobre la gráfica $\mathcal{G}_x$ de $\mathcal{X}$ recordemos algunas de sus definiciones.

En lo siguiente $\mathcal{G}$ es una gráfica, $\mathcal{V}(\mathcal{G})$ es el conjunto de vértices de $\mathcal{G}$, $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ es el conjunto de aristas de $\mathcal{G}$, para la arista e=(a,b) $\in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ donde a,b$\in \mathcal{V}(\mathcal{G})$, F($e$)={a,b} son los vértices finales de $e \in \mathcal{E}(\mathcal{G})$ y decimos que a es adyacente a b por e. Para cada vértice $v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$ denotamos como $\mathcal{A}_v$ los vértices adyacentes a v.

Definición 4.1. Una subgráfica $\Gamma \subset \mathcal{G}$, es otra gráfica formada por un subconjunto de vértices y aristas de $\mathcal{G}$. El conjunto de vértices debe incluir los vértices finales de cada arista en $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Definición 4.2. Sea A$\subset \mathcal{V}(\mathcal{G})$. Decimos que Γ_A es la subgráfica inducida por A en $\mathcal{G}$ si $\mathcal{V}(\Gamma_A)$=A y $\mathcal{E}(\Gamma_A)=\{e \in \mathcal{E}(\mathcal{G}) | \mathrm{F}(e) \subset \mathrm{A}\}$.

Definición 4.3. Dado un vértice v, definimos $st(v)$ la estrella en v como la subgráfica inducida por $\mathcal{A}_v$, i.e.

$st(v)=\Gamma_{\mathcal{A}_v}$.

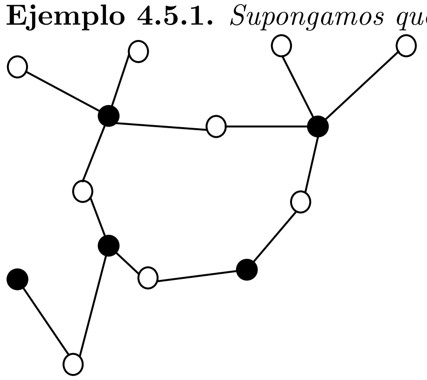
Estás definiciones son para cualquier gráfica, la siguiente definición es solo para las gráficas que aparecen como gráficas asociadas de estratificies. Como en toda esta tesis $\mathcal{X}$ es una estratificie con gráfica asociada $\mathcal{G}_x$, la cual tiene conjunto de vértices negros $\mathcal{B}$ y de vértices blancos $\mathcal{W}$, $r : \mathcal{X} \to \mathcal{G}_x$ es un retracto. Y dada una gráfica $\mathcal{G}$ tiene estratificie asociada $\mathcal{X}_{G.}$

Definición 4.4. Dada Γ subgráfica de $\mathcal{G}_x$ decimos que $\mathcal{R} = r^{-1}(\Gamma)$ es un subcomplejo de $\mathcal{X}$.

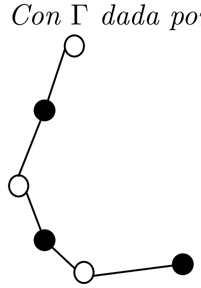
En general $\mathcal{R}$ no siempre es una estratificie por lo que podemos considerar $\bar{\Gamma}$=$\Gamma \cup \mathcal{ST}$ donde $\mathcal{ST} = \cup_{v \in \mathcal{B}}\ st(\mathrm{v})$. Es decir a Γ le pegamos las estrellas sobre sus vértices negros. Así $r^{-1}(\ \bar{\Gamma})$ es una estratificie.

Definición 4.5. Decimos que $\mathcal{G}^*$ es una subgráfica podada de $\mathcal{G}$ si $\mathcal{G}^*$=$\bar{\Gamma}$ para alguna Γ.

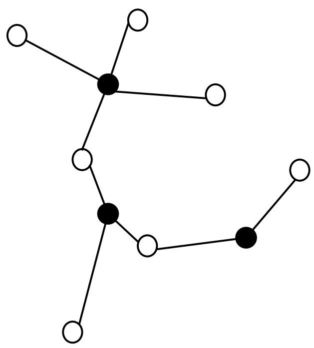
Ejemplo 4.5.1. *Supongamos que la gráfica resulto ser:*



Con Γ *dada por:*



Así $\bar{\Gamma}$*:*



Obs. Los vértices son subgráficas podadas.

La estratificie obtenida $\bar{\mathcal{X}}$ puede ser obtenida de $\mathcal{X}$ si cada componente conexa de $r^{-1}(\mathcal{G}\big/\bar{\Gamma})$ a un punto y para un vértice blanco $w \in \bar{\Gamma} \cap \mathrm{cl}(\mathcal{G}\big/\bar{\Gamma})$ tapamos las curvas fronteras de $r^{-1}(\mathrm{w}) \cap r^{-1}(\mathrm{cl}(\mathcal{G}\big/\bar{\Gamma}))$ con discos.

Por tanto para cada subgráfica conexa $\mathcal{H}$ podada de $\mathcal{G}$ hay un mapeo cociente $\mathcal{P} : \mathcal{X}_{\mathcal{G}} \to \mathcal{X}_{\mathcal{H}}$ e induce epimorfismos de $\pi_1(\mathcal{X}_G)$ en $\pi_1(\mathcal{X}_{\mathcal{H}})$ y de $H_1(\mathcal{X}_G)$ en $H_1(\mathcal{X}_{\mathcal{H}})$. Claramente si $\mathcal{X}_G$ es simplemente conexa entonces $\mathcal{X}_{\mathcal{H}}$ es simplemente conexa.

Teorema 4.6. *Si $\mathcal{X}$ es una estratificie simplemente conexa entonces $\mathcal{G}_x$ es un árbol, con vértices blancos de genero cero y sin vértices negros terminales.*

Dem:

Claramente todas estratificies obtenidas de las subgráficas podadas de $\mathcal{G}_x$ deben ser simplemente conexas.

Del Corolario 1.13 Sabemos que $\mathcal{G}_x$ debe ser un árbol.

Sea w un vértice blanco y visto como gráfica podada la estratificie $\mathcal{X}_w$ inducida por w es simplemente la superficie que representa w tapando sus fronteras con discos. Dado que $\pi_1(\mathcal{X}_w)$=1 concluimos que $\mathcal{X}_w$ es de genero cero y w debe tener la etiqueta cero.

Como $\mathcal{B}(\mathcal{G}) \neq \emptyset$ podemos asegurar que existe $b \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, consideremos que $st(b)$ es una subgráfica podada de $\mathcal{G}$ y denotemos $\mathcal{X}_b$ la estratificie obtenida de $st(b)$.

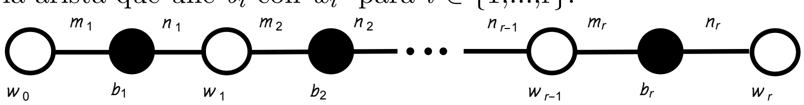
Supongamos que b es un vértice terminal, así $st(b)$ solo contiene un vértice blanco y una arista, por lo anterior el vértice blanco debe estar etiquetado con el genero cero y digamos que la arista esta etiquetada con n.

Por tanto $\pi_1(\mathcal{X}_b)$=$\langle b$,$c|$ b^n=c, c=1$\rangle$=$\langle b|$ b^n=1$\rangle$=$\mathbb{Z}_n$. Lo cual es una contradicción y por tanto estos vértices no existen.

4.0.1 Estratificies lineales

Definición 4.7. Estratificies lineales

Una estratificie $\mathcal{X}_L^r$ se dice lineal si su gráfica asociada es una gráfica lineal con vértices sucesivos w_0, b_1,..., b_r, w_r que están unidos por aristas etiquetadas con m_1, n_1,..., m_r, n_r respectivamente, o sea m_i es la etiqueta que tiene la arista que une w_{i-1} con b_i y n_i la de la arista que une b_i con w_i para $i \in$ {1,...,r}.



Del Teorema 2.1 tenemos la siguiente prestación para el grupo fundamental:

$$\pi_1(\mathcal{X}_L^r)=\langle b_1,...,b_r|\ b_1^{m_1}=1,\ b_1^{n_1}b_2^{m_2}=1,\ b_2^{n_2}b_3^{m_3}=1,...,b_{r-1}^{n_{r-1}}b_r^{m_r}=1,\ b_r^{n_r}=1\rangle$$
$$=\langle b_1,...,b_r|\ b_1^{m_1}=1,\ b_r^{n_r}=1,\ b_j^{n_j}b_{j+1}^{m_{j+1}}=1\rangle \text{ con } j \in \{1,..,r\text{-}1\}.$$

obs. mcd(a,b) denota el máximo común divisor de los enteros a y b.

obs2 $\langle x|\ x^a=1,\ x^b=1\rangle = \langle x|\ x^{\mathrm{mcd}(a,b)}=1\rangle$

Lema 4.8. *Si mcd(m_i,n_j)=1 para $i \leqslant j \leqslant r$ entonces $\pi_1(\mathcal{X}_L^r)$ es trivial.*

Dem:

De la presentación $\pi_1(\mathcal{X}_L^r)=\langle b_1,...,b_r|\ b_1^{m_1}=1,\ b_1^{n_1}b_2^{m_2}=1,\ b_2^{n_2}b_3^{m_3}=1,...,b_{r-1}^{n_{r-1}}b_r^{m_r}=1,\ b_r^{n_r}=1\rangle$, sabemos que $b_1^{n_1}b_2^{m_2}$=1 equivalentemente $b_1^{n_1}=b_2^{-m_2}$, así $b_1^{n_1}\in \langle b_2\rangle$ pues es una potencia de b_2 y como mcd(m_1, n_1)=1, existen α_1, $\beta_1 \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = \alpha_1 m_1 + \beta_1 n_1$ por tanto

$b_1= b_1^{\alpha_1 m_1+\beta_1 n_1}= (b_1^{m_1})^{\alpha_1}\ (b_1^{n_1})^{\beta_1}= (b_1^{n_1})^{\beta_1}$, así que $b_1\in \langle b_2\rangle$. (*)

También de $b_1^{n_1}b_2^{m_2}$=1 se tiene que $b_1^{-n_1}=b_2^{m_2}$ y elevando a la m_1 obtenemos que

$b_2^{m_2 m_1}= b_1^{-n_1 m_1}=(b_1^{m_1})^{-n_1}=1$. (**)

De (*) y (**) concluimos que $\pi_1(\mathfrak{X}_L^r)=\langle b_2,...,b_r|\ b_2^{m_2 m_1}=1,\ b_2^{n_2} b_3^{m_3}=1,...,b_{r-1}^{n_{r-1}} b_r^{m_r}=1,\ b_r^{n_r}=1\rangle$.

Podemos repetir el proceso.

Sabemos que $b_2^{n_2}=b_3^{-m_3}$ luego $b_2^{n_2}\in \langle b_3\rangle$ y como mcd $(m_1 m_2,n_2)=1$ hay $\alpha_2,\beta_2\in \mathbb{Z}$ tales que $1=\alpha_2(m_1 m_2)+\beta_2 n_2$, así que $b_2= b_2^{\alpha_2(m_1 m_2)+\beta_2 n_2} = b_2^{\alpha_2(m_1 m_2)} b_2^{\beta_2 n_2} = (b_2^{n_2})^{\beta_2}$ y por tanto $b_2\in b_3\rangle$. $(^\circ)$

Ya que $b_2^{-n_2}=b_3^{m_3}$ y elevando a la $m_2 m_1$ obtenemos que $b_3^{m_3 m_2 m_1}=b_2^{-n_2 m_2 m_1} = (b_2^{m_2 m_1})^{-n_2}=1.(^{\circ\circ})$

De $(^\circ)$ y $(^{\circ\circ})$ concluimos que $\pi_1(\mathfrak{X}_L^r)=\langle b_3,...,b_r|b_3^{m_3 m_2 m_1}=1,b_3^{n_3} b_4^{m_4}=1,...,b_{r-1}^{n_{r-1}} b_r^{m_r}=1,\ b_r^{n_r}=1\rangle$.

Siguiendo con este proceso llegamos finalmente a que $\pi_1(\mathfrak{X}_L^r)=\langle b_r|b_r^{m_r m_{r-1}\cdots m_1}=1,\ b_r^{n_r}=1\rangle$

pero mcd $(n_r,m_r m_{r-1}\cdots m_1)=1$ y por tanto $\pi_1(\mathfrak{X}_L^r)$ es trivial.

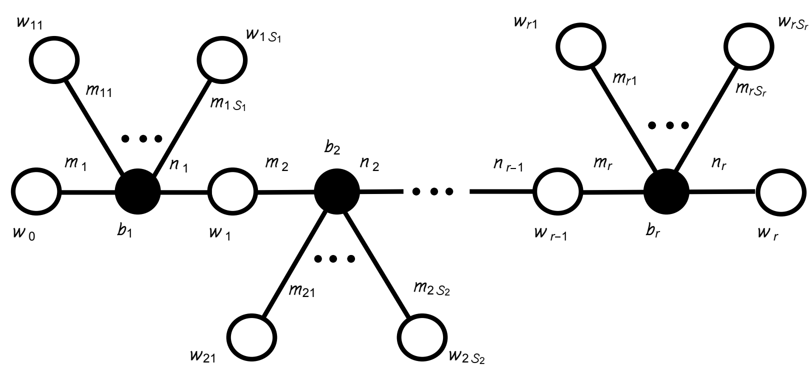
Las estratificies lineales son muy restrictivas y podemos empezar a generalizar de varias maneras. Por ejemplo para cada vértice negro agregar un número arbitrario de vértices blancos, es decir a cada curva singular permitimos pegar discos a lo largo de su frontera mediante cubrientes.

4.0.2 Estratificies 1-lineales

Definición 4.9. Estratificies 1-lineales.

Una estratificie $\mathfrak{X}_{L_1}^r$ se dice 1-lineal si su gráfica asociada contiene una gráfica lineal con vértices sucesivos $w_0,\ b_1,...,\ b_r,\ w_r$ que están unidos por aristas etiquetadas con m_1, $n_1,...,\ m_r,\ n_r$ respectivamente , a la cual a cada vértice negro b_j se le han agregado un número arbitrario $\mathcal{S}_j\in \mathbb{N}\cup\{0\}$ de vértices blancos $\{w_{j1},...,\ w_{j\mathcal{S}_j}\}$ y conectados por aristas etiquetadas por $m_{j1},...,m_{j\mathcal{S}_j}$ respectivamente.

Gráfica de una estratificie 1−lienal, denotada $\mathcal{X}^r_{L_1}$



De la gráfica podemos obtener esta presentación del grupo fundamental de una estratificie 1-lineal $\mathcal{X}^r_{L_1}$.

A partir de aquí dada una presentación $\langle x_1,..., x_n | \mathcal{R}_1=1,..., \mathcal{R}_k=1\rangle$ es conveniente denotar $\mathcal{R}=1$ solo como $\mathcal{R}$, es decir $\langle x_1,..., x_n | \mathcal{R}_1,..., \mathcal{R}_k\rangle:=\langle x_1,..., x_n | \mathcal{R}_1=1,..., \mathcal{R}_k=1\rangle$.

Así podemos escribir.

$\pi_1(\mathcal{X}^r_{L_1})=\langle b_1,...,b_r | b_1^{m_1}, b_1^{m_{11}},...,b_1^{m_{1\mathcal{S}_1}}, b_1^{n_1} b_2^{m_2}, b_2^{m_{21}},...,b_2^{m_{2\mathcal{S}_2}}, b_2^{n_2} b_3^{m_3},...,b_{r-1}^{n_{r-1}} b_r^{m_r}, b_r^{m_{r1}},..., b_r^{m_{r\mathcal{S}_r}}, b_r^{n_r}\rangle$

Denotemos como k_1=mcd($m_{11},..., m_{1\mathcal{S}_1}, m_1$), k_r=mcd($m_{r1},..., m_{r\mathcal{S}_r}, n_r$) y k_i=mcd($m_{i1},..., m_{i\mathcal{S}_i}$) cuando $j \in \{2,..,r\text{-}1\}$.

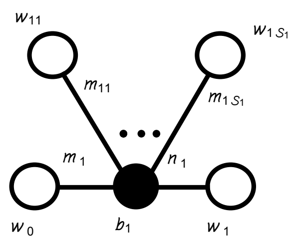
Por tanto $\pi_1(\mathcal{X}^r_{L_1})=\langle b_1,...,b_r | b_1^{k_1}, b_1^{n_1} b_2^{m_2}, b_2^{k_2}, b_2^{n_2} b_3^{m_3},...,b_{r-1}^{n_{r-1}} b_r^{m_r}, b_r^{k_r}\rangle$

$=\langle b_1,...,b_r | b_1^{k_1},..., b_r^{k_r}, b_1^{n_1} b_2^{m_2}, b_2^{n_2} b_3^{m_3},...,b_{r-1}^{n_{r-1}} b_r^{m_r}\rangle$

$=\langle b_1,...,b_r | b_i^{k_i}, b_j^{n_j} b_{j+1}^{m_{j+1}}\rangle$ con $i \in \{1,...,r\}$ y $j \in \{1,...,r\text{-}1\}$.

Para identificar cuales de estas estratificies son simplemente conexas empezamos por estudiar el caso trivial, cuando r=1.

Gráfica de una estratificie 1-lienal, denotada $\mathcal{X}^1_{L_1}$. Dada una elección de los $\mathcal{S}_1$ y los m_{1i}.



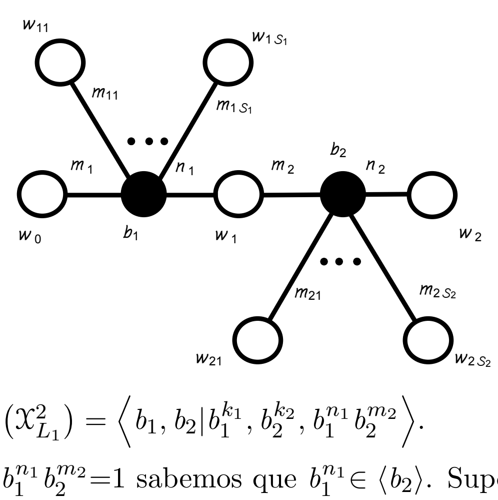
Recordemos que k_1=mcd(m_{11},..., $m_{1\mathcal{S}_1}$,m_1) y por tanto:

$\pi_1(\mathcal{X}^1_{L_1})$=$\langle b_1|\ b_1^{k_1},\ b_1^{n_1}\rangle$=$\langle b_1|\ b_1^{\ell_1}\rangle$, donde ℓ_1= mcd (k_1, n_1).

Como l_1=mcd (k_1, n_1)=mcd(mcd(m_{11},..., $m_{1\mathcal{S}_1}$,m_1),n_1)=mcd(m_{11},..., $m_{1\mathcal{S}_1}$,m_1,n_1) podemos concluir que $\pi_1(\mathcal{X}^1_{L_1})$=1 sii m_{11},..., $m_{1\mathcal{S}_1}$,m_1,n_1 son primos relativos dos a dos.

Este caso no permite ver que pasa en general así que probamos con r=2, recordemos que hemos definido k_1=mcd(m_{11},..., $m_{1\mathcal{S}_1}$,m_1) y dado que r=2 entonces k_2=mcd(m_{21},...,$m_{2\mathcal{S}_2}$,n_2).

Gráfica de una estratificie 1-lienal, denotada $\mathcal{X}^2_{L_1}$.



Por tanto $\pi_1\left(\mathcal{X}^2_{L_1}\right) = \left\langle b_1, b_2 | b_1^{k_1}, b_2^{k_2}, b_1^{n_1} b_2^{m_2}\right\rangle$.

De la relación $b_1^{n_1} b_2^{m_2}$=1 sabemos que $b_1^{n_1}\in \langle b_2\rangle$. Supongamos que ℓ_1 = mcd (k_1, n_1)=1, es decir que existen α_1,$\beta_1\in \mathbb{Z}$ tales que $1 = \alpha_1 k_1 + \beta_1 n_1$ y por tanto b_1=$b_1^{\alpha_1 k_1+\beta_1 n_1}$=$b_1^{\alpha_1 k_1} b_1^{\beta_1 n_1}$=$b_1^{\beta_1 n_1}$.

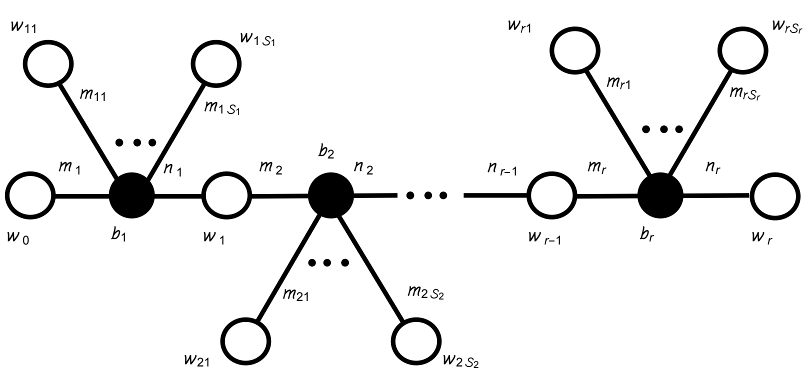
Así $b_1\in \langle b_2\rangle$ entonces $\pi_1\left(\mathcal{X}^2_{L_1}\right) = \left\langle b_2 | b_2^{k_2}, b_2^{k_1 m_2}\right\rangle$.

Denotemos como ℓ_2= mcd $(k_2, k_1 m_2)$. Concluimos que $\pi_1\left(\mathcal{X}^2_{L_1}\right) = \left\langle b_2 | b_2^{\ell_2}\right\rangle$, por tanto si mcd$\,(k_1\,,n_1)$=1 y ℓ_2=1 entonces $\pi_1\left(\mathcal{X}^2_{L_1}\right) = 1$.

Si en vez de suponer que mcd$\,(k_1\,,n_1)$=1 hubieramos supuesto que mcd$\,(k_2\,,m_2)$=1 se llega a un resultado idéntico salvo los indices esto se debe a que podemos empezar a eliminar generadores del principio al final o del final al principio. Así que sin perdida de generalidad tratamos de eliminar los primero generadores.

Para el siguiente lema asumimos lo anterior y definimos los siguientes números ℓ_i=mcd$\,(k_i\,,\ell_{i-1}m_i)$ con i$\in$ $\{2,...,r\}$, como antes ℓ_2= mcd$\,(k_2\,,k_1m_2)$ y ℓ_1= mcd$\,(k_1\,,n_1)$.

Lema 4.10. *Dada una estratificie $\mathcal{X}^r_{L_1}$ 1-lineal con gráfica asociada:*



Si ℓ_r=1, ℓ_1=1 y mcd$\,(\ell_i\,,n_i)$=1 para cada i$\in$ $\{2,...,r\}$ entonces $\pi_1(\mathcal{X}^r_{L_1})$=1.

Dem:

Sabemos que $\pi_1(\mathcal{X}^r_{L_1})=\langle b_1,...,b_r|\,b_1^{k_1},...,\ b_r^{k_r},\ b_1^{n_1}b_2^{m_2},\ b_2^{n_2}b_3^{m_3},...,b_{r-1}^{n_{r-1}}b_r^{m_r}\rangle$.

Como 1=ℓ_1= mcd$\,(k_1\,,n_1)$ entonces existen α_1,$\beta_1$$\in$ $\mathbb{Z}$ tales que $1 = \alpha_1k_1$+β_1n_1 por tanto b_1=$b_1^{\alpha_1k_1+\beta_1n_1}$=$b_1^{\alpha_1k_1}b_1^{\beta_1n_1}$=$b_1^{\beta_1n_1}$, así que $b_1$$\in$ $\langle b_2\rangle$ pues $b_1^{n_1}$= $b_2^{-m_2}$. Además $b_2^{k_1m_2}$=1.

Concluimos que:

$\pi_1(\mathcal{X}^r_{L_1})=\langle b_2,...,b_r | b_2^{k_2},..., \ b_r^{k_r}, \ b_2^{k_1 m_2}, \ b_2^{n_2} b_3^{m_3},...,b_{r-1}^{n_{r-1}} b_r^{m_r}\rangle$

$=\langle b_2,...,b_r | b_2^{\ell_2},..., \ b_r^{k_r}, \ b_2^{n_2} b_3^{m_3},...,b_{r-1}^{n_{r-1}} b_r^{m_r}\rangle.$

Análogamente, como $\mathrm{mcd}\,(\ell_2, n_2)=1$ entonces existen únicos $\alpha_2,\beta_2\in \mathbb{Z}$ tales que $1 = \alpha_2\ell_2+\beta_2 n_2$ por tanto $b_2=b_1^{\alpha_2\ell_2+\beta_2 n_2}=b_1^{\alpha_1\ell_1} b_1^{\beta_2 n_2}=b_1^{\beta_2 n_2}$, así que $b_1\in \langle b_2\rangle$ pues $b_2^{n_2}= b_3^{-m_3}$. También $b_3^{\ell_2 m_3}=1$.

Concluimos que:

$\pi_1(\mathcal{X}^r_{L_1})=\langle b_3,...,b_r | b_3^{k_3},..., \ b_r^{k_r}, \ b_3^{\ell_2 m_3}, \ b_2^{n_2} b_3^{m_3},...,b_{r-1}^{n_{r-1}} b_r^{m_r}\rangle$

$=\langle b_3,...,b_r | b_3^{\ell_3},..., \ b_r^{k_r}, \ b_2^{n_2} b_3^{m_3},...,b_{r-1}^{n_{r-1}} b_r^{m_r}\rangle$ ya que $\ell_3=\mathrm{mcd}\,(k_3, \ell_2 m_3)$.

Podemos repetir el proceso hasta llegar a que:

$\pi_1(\mathcal{X}^r_{L_1})=\langle \ b_{r-1}, \ b_r | b_{r-1}^{\ell_{r-1}}, \ b_r^{k_r}, \ b_{r-1}^{n_{r-1}} b_r^{m_r}\rangle.$

Supusimos que $\mathrm{mcd}\,(\ell_{r-1}, n_{r-1})=1$ por tanto se tiene que $b_{r-1}\in \langle b_r\rangle$ y la relación $b_r^{\ell_{r-1} m_r}=1$.

De modo que $\pi_1(\mathcal{X}^r_{L_1})=\langle b_r | b_r^{k_r}, \ b_r^{\ell_{r-1} m_r}\rangle$, por definición $\ell_r=\mathrm{mcd}\,(k_r, \ell_{r-1} m_r)$ entonces $\pi_1(\mathcal{X}^r_{L_1})=\langle b_r | b_r^{\ell_r}\rangle=1$. De las hipótesis $\ell_r=1$ y finalmente $\pi_1(\mathcal{X}^r_{L_1})=1$.

Teorema 4.11. *$\mathcal{X}$ es simplemente conexa $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}_x$ es un árbol, sin vértices terminales negros, con todos su vértices blancos de genero cero y para cualquier vértice negro b, $\pi_1\left(\mathcal{X}_{st(b)}\right)$=1.*

Dem:

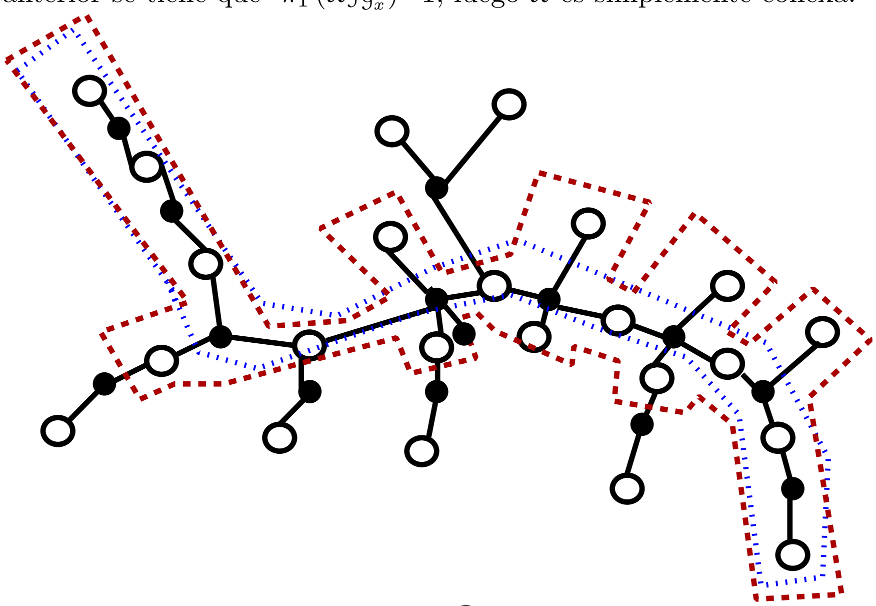
Supongamos que $\mathcal{X}$ es simplemente conexa, por el teorema 3.6 $\mathcal{G}_x$ es un árbol, sin vértices terminales negros, con todos su vértices blancos de genero cero.

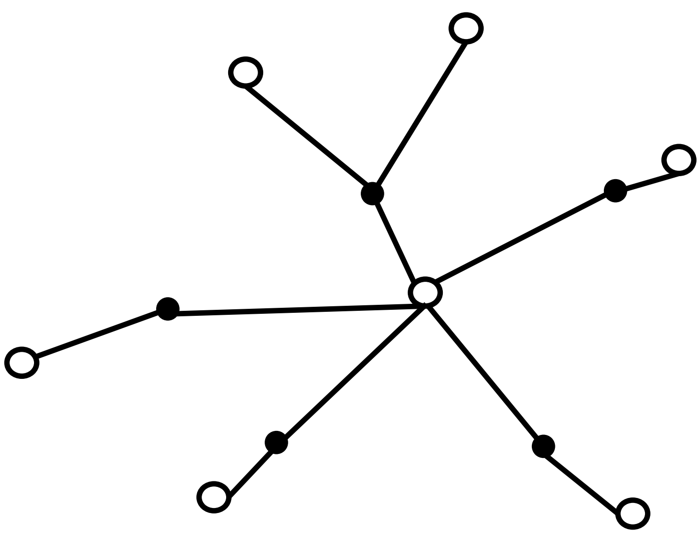
Como para cada vertice negro b, $\mathrm{st}(b)$ es una gráfica podada de $\mathcal{G}_x$ se tiene el epimorfismo $e_b : \pi_1(X) \to \pi_1\left(\mathcal{X}_{\mathrm{st}(b)}\right)$, luego $\pi_1\left(\mathcal{X}_{\mathrm{st}(b)}\right)=1$.

Supongamos que $\mathcal{G}_x$ es un árbol, sin vértices terminales negros, con todos su vértices blancos de genero cero y para cualquier vértice negro b, $\pi_1\left(\mathcal{X}_{\mathrm{st}(b)}\right)=1$.

Luego tomamos una trayectoria de longitud máxima $\mathcal{P}_1$ (se puede hacer sin que sea de longitud máxima), sean $\mathcal{ST}(\mathcal{P}) = \cup_{v\in\mathcal{V}(\mathcal{P}_1)\cap\mathcal{B}} \ \mathrm{st}(b)$, $\bar{\mathcal{P}}_1= \mathcal{P}_1\cup\mathcal{ST}(\mathcal{P}_1)$ y $\mathcal{L}$ la longitud de $\mathcal{P}_1$.

Es decir, a la trayectoria le pegamos las estrellas sobre sus vértices negros y con lo cual conseguimos que $\bar{\mathcal{P}}_1$ sea una estratificie 1-Lineal, ya que $\pi_1\left(\mathcal{X}_{\mathrm{st}(b)}\right)=1$ para cada $b \in \mathcal{B}$ y por el lema anterior se tiene que $\mathcal{X}_{\bar{\mathcal{P}}_1}$ es simplemente conexa, o sea una 2-esfera entonces podemos reemplazar $\bar{\mathcal{P}}_1$ con un vértice blanco en $\mathcal{G}_x$ y hemos reducido el número de vértices. Continuando con este proceso obtendremos una última gráfica $\mathcal{F}\mathcal{G}_x$ que representa a una estratificie uno lineal con la propiedad de $\pi_1\left(\mathcal{X}_{\mathcal{F}\mathcal{G}_x}\right) \approx \pi_1(\mathcal{X})$ y nuevamente por el lema anterior se tiene que $\pi_1\left(\mathcal{X}_{\mathcal{F}\mathcal{G}_x}\right)=1$, luego $\mathcal{X}$ es simplemente conexa.





CAPÍTULO 5: BIBLIOGRAFÍA

[1] J. C. Gómez-Larrañaga, F. González-Acuña, and Wolfgang Heil, 2-dimensional stratifolds in A Mathematical Tribute to Professor José María Montesinos Amilibia. Ed. Marco Castrillón López, Elena Martín-Peinador, José M. Rodríguez-Sanjurjo, and Jesús M. Ruiz. Madrid: Departamento de Geometría y Topología, Facultad de Ciencias Matemáticas, UCM, 2016. 395−−405.

[2] J. C. Gómez-Larrañaga, F. González-Acuña, and Wolfgang Heil, 2-dimensional stratifolds homotopy equivalent to S2. Topol. Appl. 209, 56 [Dash]62 (2016)

[3] J. C. Gómez-Larrañaga, F. González-Acuña, and Wolfgang Heil, Classification of simply-connected Trivalent 2-dimensional Stratifolds. Top. Proc. 52, 329 [Dash]340 (2018)

[4] J. C. Gómez-Larrañaga, F. González-Acuña, and Wolfgang Heil, 2-stratifold groups have solvable Word Problem, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas. Fisicas y Naturales.

[5] J. C. Gómez-Larrañaga, F. González-Acuña, and Wolfgang Heil,2-stratifold spines of closed 3-manifolds. Osaka J. Math. 57 (in print, 2020). arXiv:1707.05663

[6] John M. Lee, Introduction toTopological Manifolds, Second Edition, (Springer, New York).

[7] Reinhard Diestel, Graph Theory,Fifth Edition, (Springer, New York).

[8] Shosaku Matsuzaki and Makoto Ozawa, Genera and minors of multibranched surfaces. Preprint. Available at arXiv:1603.09041v1 .

[9] Thomassen, The Jordan-Schonflies Theorem and the classification of surfaces. Am. Math. (1992)

[10] W.S.Massey, A Basic Course in Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics, (Springer, New York, 1991)